

# COMMANDE OPTIMALE

Hasnaa Zidani<sup>1</sup>

1. ENSTA ParisTech, UMA. Email :Hasnaa.zidani@ensta.fr



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Quelques exemples de problèmes de commande optimale . . . . .	7
1.2	Forme générale d'un problème de commande optimale . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Conditions d'optimalité du premier ordre.</b>	<b>13</b>
2.1	Equation d'état. Existence de solution optimale . . . . .	13
2.2	Cas de temps final $t_f$ fixe . . . . .	15
2.2.1	Conditions d'optimalité : Paramétrisation par le contrôle . . . .	16
2.2.2	Principe de Pontryagin . . . . .	20
2.2.3	Problème de Mayer-Lagrange . . . . .	22
2.2.4	Système Hamiltonien . . . . .	24
2.3	Cas de temps final libre . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Commande des systèmes linéaires</b>	<b>33</b>
3.1	Commandabilité . . . . .	33
3.2	Critère linéaire sur l'état final . . . . .	35
3.3	Problème de transfert en temps minimal . . . . .	36
3.3.1	Exemples et classes particulières . . . . .	37
3.3.1.1	Contraintes de bornes sur la commande . . . . .	38
3.4	Commande des systèmes linéaires à coût quadratique . . . . .	42
3.4.1	Définition du problème . . . . .	42
3.4.2	Conditions d'optimalité . . . . .	42
3.4.3	Equation de Riccati. Loi de feedback . . . . .	43
3.5	Annexe . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman</b>	<b>47</b>
4.1	Quelques résultats sur la fonction valeur. . . . .	48
4.1.1	Principe de la Programmation Dynamique (DPP) . . . . .	48
4.1.2	Continuité uniforme de la valeur . . . . .	49

4.2	Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) . . . . .	51
4.2.1	Point de vue formel . . . . .	51
4.2.2	Solutions de viscosité . . . . .	53
4.3	Extension à d'autres types de problèmes . . . . .	58
4.3.1	Problèmes dépendant du temps . . . . .	58
4.3.2	Problèmes avec horizon fini . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Approximation de l'équation HJB : cas horizon infini</b>	<b>61</b>
5.1	Première Approximation . . . . .	61
5.2	Discrétisation totale : Chaîne de Markov . . . . .	65
5.3	Résolution numérique . . . . .	69

Les technologies actuelles cherchent de plus en plus à traiter des systèmes complexes, constitués par un grand nombre de paramètres liés les uns aux autres par une structure bien déterminée. Un autre aspect de l'évolution générale est aussi la recherche de *performances évoluées* (notion de productivité, de coût, de qualité des produits, ...) et des *performances optimales* (aller sur la lune en consommant le minimum de carburant, planifier une économie de façon optimale, etc).

La théorie de la commande optimale propose des méthodes mathématiques permettant d'étudier ces systèmes complexes. Cette théorie s'applique dans des domaines variés : conquête de l'espace, trafic urbain, contrôle de l'environnement, et bien d'autres domaines comme nous le verrons dans de nombreux exemples.



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Quelques exemples de problèmes de commande optimale

Les exemples présentés ci-dessous ont pour but de faire saisir le type de questions qui sont du ressort de la *commande optimale*.

**Exemple 1.** *On considère un véhicule de masse  $m$ , on note  $y(t)$  sa position et  $u(t)$  une force appliquée au véhicule permettant de contrôler son mouvement à l'instant  $t > 0$ . La position  $y$  et la force  $u$  sont liées par l'équation différentielle :*

$$m\ddot{y}(t) = u(t), \quad t > 0.$$

*On suppose la position et la vitesse du véhicule connues à l'instant 0 :*

$$y(0) = x^0, \quad \dot{y}(0) = x^1.$$

*On souhaite choisir  $u$  de sorte que le véhicule rejoigne l'origine (et reste ensuite à l'origine) en un temps minimum. La force  $u$  doit satisfaire une contrainte du type  $|u(t)| \leq M$ . Posons  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  ( $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  représentent la position et la vitesse du véhicule à l'instant  $t$ ). L'équation du mouvement s'écrit alors :*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

*Le problème de commande optimale consiste à trouver une fonction  $u$  de manière à ce que la solution de (1.1) associée à  $u$  atteigne  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  en un temps  $T$  minimal.*

**Exemple 2.** *[Contrôle de la déviation d'un avion]*

*Trajectoire de l'avion*

)  $\theta$

*Position désirée*

On note  $\theta$  la déviation d'un avion par rapport à la position désirée. On peut contrôler cette déviation par un terme force  $u$ . La déviation  $\theta$  et la force  $u$  sont alors liées par l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = u(t), \quad t > 0.$$

La position  $\theta(0) = \theta_0$  étant connue ainsi que la vitesse de déviation  $\dot{\theta}(0) = \theta_1$ , on souhaite retourner à l'état  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  (déviaton nulle, vitesse de déviation nulle) en un temps minimum. On suppose  $|u| \leq 1$ . Ici, encore, en posant  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , on a :

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix},$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le problème de temps optimal consiste à choisir  $u$  et  $T$  de sorte que

$$J(u, T) = \int_0^T dt$$

soit minimal. La commande (ou le contrôle)  $u$  et le temps  $T$  doivent être tels que :

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ sur } (0, T) \quad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \quad x(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Exemple 3.** On note  $x(t)$  la quantité d'acier produite, au temps  $t$ , par une unité de production. La quantité d'acier produite est répartie entre la consommation et l'investissement. La quantité d'acier allouée à l'investissement est utilisée pour accroître la capacité de production. Soit  $0 \leq u(t) \leq 1$  la fraction d'acier produite à l'instant  $t$  et allouée à l'investissement.

L'hypothèse selon laquelle l'acier réinvesti est utilisé pour accroître la capacité de production peut être décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = ku(t)x(t),$$

où  $x(0) = c$  est la production initiale, et  $k$  le coefficient d'accroissement de la production.



Le problème de commande optimale consiste ici à choisir  $u$  de façon à maximiser la production allouée à la consommation durant une période de temps fixé. On doit ainsi maximiser

$$J(u, x) = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt,$$

où  $x$  et  $u$  sont liés par  $\dot{x} = kux$ ,  $x(0) = c$ .

**Exemple 4.** [Problème de l'alunissage en douceur.]

Un engin spatial doit alunir en douceur en utilisant le minimum de carburant. Pour un modèle simplifié,  $m$  désigne la masse,  $h$  la hauteur,  $v$  la vitesse verticale et  $u$  la poussée de l'engin spatial.  $M$  désigne la masse de l'engin sans fuel,  $h_0$  la hauteur initiale,  $v_0$  la vitesse initiale,  $F$  la quantité initiale de fuel,  $\alpha$  la poussée maximum de l'engin,  $k$  une constante reliant la poussée et la perte de masse,  $g$  est l'accélération de la gravité sur la lune.

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= -g + [m(t)]^{-1}u(t), \\ \dot{m}(t) &= -ku(t),\end{aligned}$$

les contraintes sont  $0 \leq u(t) \leq \alpha$  (la poussée est de sens opposé à la gravité, ce qui est suffisant pour freiner le véhicule étant donné que l'on recherche une consommation de fuel minimum).

Les conditions initiales et finales sont :

$$\begin{aligned}h(0) &= h_0, & v(0) &= v_0, & m(0) &= M + F, \\ h(t_1) &= 0, & v(t_1) &= 0,\end{aligned}$$

$t_1$  étant l'instant de l'alunissage.

On pose  $x_1 = h$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = m$ , et  $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ . Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g + x_3^{-1}u \\ -ku \end{bmatrix} = f(x, u), \quad 0 \leq u(t) \leq \alpha,$$

ici  $f$  est une fonction non linéaire, et on a les contraintes :

$$\begin{aligned}x(0) &= [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^t = [h_0, v_0, M + F]^t, \\ x(t_1) &= [0, 0, x_3(t_1)]^t.\end{aligned}$$

Le problème consiste à déterminer  $u$  et  $t_1$  de sorte que  $m(t_1)$  soit maximale, ou encore que :

$$J(u, t_1) = -M - F - k \int_0^{t_1} u(\tau) d\tau \quad (= -m(t_1))$$

soit minimum, et  $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$  avec  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ ,  $x(0) = [h_0, v_0, M + F]^t$ , et  $0 \leq u(t) \leq \alpha$ .

## 1.2 Forme générale d'un problème de commande optimale des systèmes dynamiques

Un système dynamique (modélisant un système physique, économique, ...) est caractérisé à chaque instant  $t$  (avec  $t \in \mathbb{R}$ ) par un ensemble de paramètres (ou de variables) noté  $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t)$  et appelé *état du système* (ou *variables d'état*). Il est possible de faire évoluer l'état du système en agissant sur des variables :

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$$

appelées *variables de commande* (ou *de contrôle*). Il est naturel de considérer des commandes éventuellement discontinues en temps et de restreindre leurs valeurs à un ensemble  $U$  fermé non vide de  $\mathbb{R}^m$ , ce qui conduit à introduire la classe des *commandes admissibles* :

$$\mathcal{U} := \{u \in V \mid u(t) \in U \text{ p.p.}\}, \quad (1.2)$$

où  $V$  est un espace fonctionnel convenablement choisi (par exemple  $V = L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ).

Les variables d'état et de commande sont liées par une équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (t_0, t_f). \quad (1.3)$$

La *commandabilité* du système (1.3) consiste à trouver une variable de commande qui permet à la trajectoire d'aller d'un point  $x^0$  en  $t = 0$  à un point  $x^d$  en  $t = t_f$ , les états  $x^0$  et  $x^d$  étant fixés par avance.

Lorsque le système est commandable, on dispose, en général, d'une infinité de trajectoires et donc de commandes pour réaliser cette transition. Se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires : c'est en autre l'objet de la commande optimale qui sélectionne la trajectoire qui minimise un certain *critère*.

Ce critère peut être, par exemple, le temps  $t_f$  qui permet d'atteindre la *cible*  $x^d$  (le problème est alors d'atteindre un objectif en un temps minimum), ou une fonction représentant la puissance consommée.

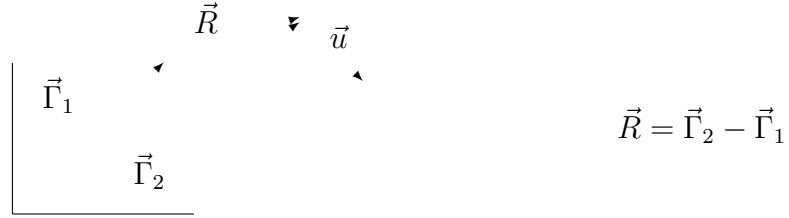
Lorsque le système n'est pas commandable, la commande optimale permet de déterminer la commande qui permet à la trajectoire de s'approcher le plus possible de la cible  $x^d$  : Il s'agirait encore de trouver une commande qui minimise (le *critère*)  $|x(t_f) - x^d|$ , ou  $\int_0^{t_f} |x(t) - z^d(t)| dt$  si l'on souhaite que la trajectoire reste la plus proche d'une trajectoire de référence  $z^d$  durant tout l'intervalle  $(0, t_f)$ .

Dans les problèmes que nous étudierons, le critère à minimiser, noté  $J$ , sera de la forme :

$$J(x, u, t_f) = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt.$$

Nous allons illustrer divers choix possibles du critère  $J$  sur un nouvel exemple.

**Exemple 5** (Rendez-vous spatial.). *On considère deux véhicules spatiaux en orbite autour de la terre. On note  $\vec{\Gamma}_1$  la position du véhicule 1,  $\vec{\Gamma}_2$  la position du véhicule 2 (dans un repère inertiel d'origine le centre de la terre), et  $\vec{u}$  la poussée des moteurs du véhicule 2. On note  $\vec{R} = \vec{\Gamma}_2 - \vec{\Gamma}_1$*



Si  $\|\vec{R}\| \ll \|\vec{\Gamma}_1\|$ , les équations linéarisées de la mécanique s'écrivent :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

avec  $y = (y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, y_3, \dot{y}_3)^t$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)^t$  et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où  $(y_1, y_2, y_3)$  sont les coordonnées du véhicule 2 dans un repère mobile du véhicule 1 (l'axe  $y_1$  a pour direction  $\Gamma_1$  ; l'axe  $y_2$  est tangent à la trajectoire du véhicule 1 ; l'axe  $y_3$

est orthogonal à la trajectoire du véhicule 1),  $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ ,  $T_1$  est la période de révolution du véhicule 1.

En général la commande doit satisfaire certaines contraintes (comme celles de tenir compte de la limite de la puissance du moteur). Ici on supposera que  $|u| \leq 1$ . Nous voulons effectuer un rendez-vous spatial, c'est à dire en une durée finie  $T$ , annuler le vecteur  $(\vec{R}, \vec{R}')$ , ou de manière équivalente annuler l'état  $y$  solution du système (1.4). Plusieurs approches sont possibles :

- Le problème en temps minimum : Il consiste à déterminer  $u$  et  $T = t_f$  tel que  $y(T) = 0$  et tel que  $T$  soit minimum. Ici on aura  $J(T) = \int_0^T 1 dt$ .
- Le problème de consommation minimum à temps final  $t_f$  fixe : Il consiste à fixer  $t_f > T$  solution du problème de temps minimum de sorte que la consommation totale

$$J(u) = \int_0^{t_f} \{|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|\} dt$$

soit minimale (la consommation est proportionnelle à la valeur absolue de la poussée).

- On peut choisir un critère qui fait le compromis entre plusieurs points de vue et plusieurs objectifs. Par exemple avec le critère

$$J(u, y) = \int_0^{t_f} \|u\|^2 dt + |y(t_f)|^2,$$

le terme  $\|u\|^2$  est proportionnel à l'énergie (ou la puissance), et le terme  $|y(t_f)|^2$  indique que l'on souhaite être proche de l'état final  $y(t_f) = 0$ .

# Chapitre 2

## Conditions d'optimalité du premier ordre.

Dans tout ce chapitre, nous désignerons par  $(\mathcal{P})$  le problème de commande optimale suivant :

$$\text{Minimiser } J(x, u) = \Phi(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt \quad (2.1)$$

Sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, t_f), \quad x(0) = x^o, \quad (\text{équation d'état})$$

$$u \in \mathcal{U} := \{u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0, T)\},$$

$$\Psi(x(t_f)) = 0.$$

Le temps final  $t_f$  peut être fixe ou libre.

Dans toute la suite, on notera par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$  le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^r$  (pour  $r \geq 1$ ) et par  $|\cdot|_r$  sa norme induite.

Nous supposerons aussi toujours que l'ensemble  $U$  est un convexe non vide de  $\mathbb{R}^m$ .

### 2.1 Equation d'état. Existence de solution optimale

Pour donner un sens à l'équation d'état et assurer l'existence d'une solution sur  $[0, +\infty[$ , nous supposerons que la fonction  $f$  vérifie l'hypothèse suivante :

(A1) On suppose que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue, que  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à la première variable, et que

$$|f(y, v)| \leq C(1 + |y|_n) \quad \forall (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

$$|f'_y(y, v)| \leq C_M \quad \forall |y|_n \leq M, \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

( $f'_y$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à la première variable).

**Définition 1.** Soit  $u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m)$ . On appelle solution de l'équation d'état, la fonction continue  $x(\cdot)$  vérifiant :

$$x(t) = x^o + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \text{p.p } t \in (0, t_f).$$

**Théorème 1.** Si l'hypothèse (A1) est vérifiée, alors pour chaque variable de commande  $u \in \mathcal{U}$ , il existe une unique solution de l'équation d'état, notée  $x_u(\cdot)$ , fonction continue sur  $[0, t_f]$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . De plus  $x_u$  appartient à  $H^1(0, t_f; \mathbb{R}^n)$ , et l'application  $u \mapsto x_u$  est continue de  $L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m)$  dans  $H^1(0, t_f; \mathbb{R}^n)$ .

**Démonstration.** La preuve utilise les mêmes arguments que ceux de la preuve du théorème de Cauchy. D'abord, on fixe  $u \in \mathcal{U}$ .

On considère  $\bar{s} > 0$  un réel qui sera choisi plus tard, et on introduit l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &: H^1(0, \bar{s}; \mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(0, \bar{s}; \mathbb{R}^n) \\ z &\mapsto y \equiv x^o + \int_0^{\cdot} f(z(\tau), u(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (A1), l'opérateur  $\mathcal{M}$  est bien défini. En effet, pour tout  $z \in H^1(0, \bar{s}; \mathbb{R}^n)$ , la fonction  $y$  définie par

$$y(t) = x^o + \int_0^t f(z(\tau), u(\tau)) d\tau \quad \forall t \in [0, \bar{s}]$$

est bien dans  $H^1(0, \bar{s}; \mathbb{R}^n)$ . En choisissant  $\bar{s}$  de manière convenable, on montre que l'opérateur  $\mathcal{M}$  est contractant et donc il admet un point fixe qui vérifie :

$$x(t) = x^o + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \text{p.p } t \in (0, \bar{s}).$$

En répétant l'argument un nombre fini de fois sur les intervalles  $[\bar{s}, 2\bar{s}]$ ,  $[2\bar{s}, 3\bar{s}]$ , ...etc, on conclut alors à l'existence d'une solution  $x(\cdot)$  sur  $(0, t_f)$  vérifiant :

$$x(t) = x^o + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \text{p.p } t \in (0, t_f).$$

■

Nous supposons aussi vérifiées les hypothèses suivantes sur  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $L$  :

**(A2)** La fonction  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$|\Phi(y)| \leq C(1 + |y|_n^2).$$

(A3) La fonction  $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  est de classe  $C^1$ , et il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$|\Psi(y)| \leq C(1 + |y|_n^2).$$

(A4) La fonction  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue, et  $L$  est de classe  $C^1$  par rapport à sa première variable. Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} |L(y, v)| &\leq C(1 + |y|_n^2), \\ |L'_y(y, v)| &\leq C(1 + |y|_n). \end{aligned}$$

Notons que si  $f, L, f'_y$  et  $L'_y$  sont Lipschitziennes et bornées, alors  $f$  et  $L$  satisfont les estimations des hypothèses (A1), (A4). Notons aussi que (A1)-(A4) sont satisfaites si  $f$  et  $\Psi$  sont linéaires et  $L, \Phi$  sont quadratiques.

♠ Afin de simplifier l'analyse, nous avons supposé que les fonctions  $f, L$ , et  $\Phi$  ne dépendent pas explicitement du temps. Le cas général peut être traité avec les mêmes idées que celles développées dans ce chapitre.

Dans tout le chapitre, nous supposons qu'il existe une commande optimale  $\bar{u} \in \mathcal{U}$ , solution du problème  $(\mathcal{P})$ . Nous désirons caractériser cette commande  $\bar{u}$ .

## 2.2 Cas de temps final $t_f$ fixe

Dans cette section, nous traiterons d'abord le cas de temps final fixé  $t_f = T > 0$ .

Pour simplifier l'exposé des idées essentielles, nous supposons que le *coût distribué* est nul, i.e  $L \equiv 0$ . Le problème  $(\mathcal{P})$  s'écrit alors :

$$\text{Minimiser } J(x, u) = \Phi(x(t_f)) \tag{2.2}$$

Sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, t_f), \quad x(0) = x^o, \quad (\text{équation d'état})$$

$$u \in \mathcal{U} := \{u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0, T)\},$$

$$\Psi(x(t_f)) = 0.$$

Ce problème (sans coût distribué) est dit de *Mayer*. Nous reviendrons au problème avec coût distribué à la section 2.2.3.

### 2.2.1 Conditions d'optimalité : Paramétrisation par le contrôle

Dans le théorème 1, nous avons vu que sous l'hypothèse (A1), l'application  $\mathcal{T} : u \mapsto x_u$  est bien définie de manière univoque. Nous pouvons donc réécrire le problème de contrôle optimal  $(\mathcal{P})$  sous la forme suivante :

$$\underset{\substack{u \in \mathcal{U} \\ [\Psi \circ \mathcal{T}](u)(T)=0}}{\text{Min}} J(\mathcal{T}(u), u) \quad \text{ou encore} \quad \underset{\substack{u \in \mathcal{U} \\ [\Psi \circ \mathcal{T}](u)(T)=0}}{\text{Min}} \mathcal{F}(u),$$

où  $\mathcal{F}(u) := J(\mathcal{T}(u), u) = J(x_u, u)$  pour tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . Dans la première écriture du problème  $(\mathcal{P})$  on minimise par rapport au couple  $(x, u) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  et on considère l'équation d'état comme une contrainte dans l'espace  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \times L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . Ici on ne minimise que par rapport à la variable de commande  $u$ , la variable d'état étant déterminée de manière (implicite et) unique en fonction de  $u$ .

D'après les résultats classiques de l'optimisation, si le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  et si les fonction  $\mathcal{F}, \Psi$  sont dérivables alors les conditions d'optimalité s'écrivent simplement :

(i)  $\exists \lambda_o \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$  et tels que :

$$\left[ \lambda_o \mathcal{F}'(\bar{u}) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(\bar{u})(T) \right] \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{for all } u \in \mathcal{U}. \quad (2.3)$$

(ii) De plus, dans le cas où  $\Psi \equiv 0$ , on a  $\lambda_o = 1$  et  $\lambda = 0$ .

Il nous reste maintenant à vérifier si  $\mathcal{F}$  est dérivable et à déterminer sa dérivée. Pour cela nous avons besoin d'introduire l'hypothèse suivante :

**(A1')** La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à sa deuxième variable, et pour tout  $M > 0$  il existe une constante  $C_M > 0$  telle que :

$$|f'_u(y, u)| \leq C_M, \quad \forall |y| + |u| \leq M.$$

**Théorème 2.** Si les hypothèses (A1) et (A1') sont satisfaites, alors l'application  $\mathcal{T}$  est dérivable en tout  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . De plus on a :

$$\mathcal{T}'(u) \cdot v = z_v^u \quad \text{pour tout } u, v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m);$$

où  $z_v^u$  est l'état linéarisé solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f'_x(x_u, u)z + f'_u(x_u, u)v & \text{sur } (0, T), \\ z(0) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec  $x_u := \mathcal{T}(u)$  désigne l'état associé à  $u$ .



**Démonstration.**

Il suffit de vérifier que

$$\|\mathcal{T}(u+v) - \mathcal{T}(u) - z_v^u\|_{H^1(0,T)} = \|x_{u+v} - x_v - z_v^u\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0, \text{ lorsque } v \rightarrow 0.$$

Pour cela, il suffirait de considérer l'équation différentielle vérifiée par  $x_{u+v} - x_v - z_v^u$  et d'utiliser les estimations qui en découlent.  $\blacksquare$

On introduit la définition suivante :

**Définition 2.** Soit  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ . Soit  $u \in \mathcal{U}$  et  $x_u$  l'état associé à  $u$ . On appelle état adjoint associé à  $(u, x_u, \lambda_o, \lambda)$ , la solution  $p$  du problème de Cauchy pour le système différentiel rétrograde

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) &= [f'_x(x_u(t), u(t))]^t p(t) & p.p. t \in (0, T) \\ p(T) &= \lambda_o \Phi'(x_u(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T)). \end{cases} \quad (2.5)$$

**Remarque 1.** Notons que si les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sur  $f$ ,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont satisfaites alors pour tout  $(\lambda_o, \lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathcal{U}$ , l'état adjoint  $p$ , solution de (2.5), appartient à  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  et par conséquent  $p$  est une fonction continue sur  $(0, T)$ .

**Théorème 3.** Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sont vérifiées. Alors l'application  $\mathcal{F}$  est dérivable sur  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} [\lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T)] \cdot v &= \int_0^T \langle p_u(t), f'_u(x_u(t), u(t))v(t) \rangle_n dt, \\ &= \int_0^T \langle [f'_u(x_u(t), u(t))]^t p_u(t), v(t) \rangle_m dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

pour tout  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  et pour tout  $u, v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  avec  $x_u$  désigne l'état associé à  $u$  et  $p_u$  désigne l'état adjoint associé à  $(u, x_u, \lambda_o, \lambda)$ .

**Démonstration.**

Rappelons d'abord que la fonction  $\mathcal{F}$  est définie par :

$$\mathcal{F}(u) = J(\mathcal{T}(u), u) = J(x_u, u), \quad \text{pour tout } u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

En utilisant la formule de dérivabilité de fonctions composées, et tenant compte du théorème 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(u) \cdot v &= \frac{\partial J}{\partial u}(\mathcal{T}(u), u) \cdot v + \frac{\partial J}{\partial x}(\mathcal{T}(u), u) \cdot \mathcal{T}'(u) \cdot v \\ &= \frac{\partial J}{\partial u}(\mathcal{T}(u), u) \cdot v + \frac{\partial J}{\partial x}(\mathcal{T}(u), u) \cdot z_v^u, \\ [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T) \cdot v &= \Psi'(\mathcal{T}(u)(T)) \cdot z_v^u(T), \end{aligned}$$

où  $z_v^u$  est l'état linéarisé solution de

$$\dot{z}(t) = f'_x(x_u(t), u(t)) \cdot z(t) + f'_u(x_u(t), u(t)) \cdot v(t), \quad z(0) = 0. \quad (2.7)$$

Par conséquent, on a :

$$\left[ \lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T) \right] \cdot v = [\lambda_o \Phi'(x_u(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T))] \cdot z_v^u(T). \quad (2.8)$$

On utilise maintenant l'équation de l'état adjoint pour exprimer le terme  $\lambda_o \Phi'(x_u(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T))$  par :

$$\lambda_o \Phi'(x_u(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T)) = p_u(T).$$

En substituant ce terme dans (2.8), on arrive à :

$$\left[ \lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T) \right] \cdot v = \langle p_u(T), z_v^u(T) \rangle_n, \quad (2.9)$$

On utilise maintenant la formule d'intégration par parties :

$$- \int_0^T \langle \dot{p}_u(t), z_v^u(t) \rangle_n dt = \int_0^T \langle p_u(t), \dot{z}_v^u(t) \rangle_n dt - \langle p_u(T), z_v^u(T) \rangle_n + \langle p_u(0), z_v^u(0) \rangle_n.$$

En remplaçant dans (2.9) et utilisant le fait que  $z_v^u$  vérifie (2.7), il vient que :

$$\left[ \lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T) \right] \cdot v = \int_0^T \left[ f'_u(x_u(t), u(t)) \right]^t p_u(t) \cdot v(t) dt.$$

pour tout  $u, v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ . ■

On introduit l'hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$H(y, v, p) = \langle p, f(y, v) \rangle_n. \quad (2.10)$$

**Théorème 4.** *Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sont satisfaites. Soit  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  une solution optimale du problème de Mayer (2.2), et soit  $\bar{x}$  la trajectoire associée à  $\bar{u}$ .*

*Alors  $\exists \lambda_o \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ , et il existe  $\bar{p}$  l'état adjoint associé à  $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$  tels que :*

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad \bar{x}(0) = x^o, \quad (2.11a)$$

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \left[ f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right]^t \bar{p}(t), \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T)), \quad (2.11b)$$

$$\partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in U, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (2.11c)$$

$$\Psi(\bar{x}(T)) = 0. \quad (2.11d)$$

De plus, si  $\Psi \equiv 0$  alors  $\lambda_o = 1$  et  $\lambda = 0$ .

♠ Remarquons que le multiplicateur  $\lambda$  est dans  $\mathbb{R}^p$ , cela vient du fait qu'il y a  $p$  contraintes sur l'état final. En effet, la fonction  $\Psi$  est supposée prendre ses valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  (voir (A3)).

**Démonstration.** Les équations (2.11a) et (2.11b) ne sont autres que les équations d'état et d'état adjoint. Il reste juste à justifier l'assertion (2.11c).

Etape 1 : Nous avons déjà vu que  $\bar{u}$  satisfait la condition d'optimalité (2.3). D'après le théorème 3, et tenant compte de la définition de  $H$ , on a :

$$0 \leq \left[ \lambda_o \mathcal{F}'(\bar{u}) + \lambda [\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T) \right] \cdot (u - \bar{u}) = \int_0^T \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u(t) - \bar{u}(t)) dt \quad (2.12)$$

pour tout  $u \in \mathcal{U}$ .

Etape 2 : On pose  $u = u_k$  où  $u_k$  est une perturbation “en aiguille” de  $\bar{u}$  autour d'un instant donné  $t_o$  :

$$u_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } t \in (0, t_o - \frac{1}{k}) \cup (t_o + \frac{1}{k}, T) \\ v & \text{si } t \in (t_o - \frac{1}{k}, t_o + \frac{1}{k}) \end{cases} \quad k \geq 1$$

avec  $v$  une constante quelconque dans  $U$ . D'après l'Etape 1, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u(t) - \bar{u}(t)) dt, \\ 0 &\leq \frac{k}{2} \int_{t_o - \frac{1}{k}}^{t_o + \frac{1}{k}} \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si  $t_o$  est un point de Lebesgue (voir Annexe, page 46) de la fonction :

$$t \longmapsto \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)); \quad t > 0,$$

par passage à la limite dans (2.13), il résulte :

$$0 \leq \partial_u H(\bar{x}(t_o), \bar{u}(t_o), \bar{p}(t_o)) \cdot (v - \bar{u}(t_o))$$

et ceci pour tout  $v \in U$ .

Pour conclure, il suffit de remarquer (voir Annexe, page 46) que presque tous les points  $t$  de  $[0, T]$  sont des points de Lebesgue de la fonction :

$$t \longmapsto \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)).$$

■

**Définition 3.** Nous appelons une extrémale du problème de contrôle optimal, un quadruplet  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \lambda_o)$  vérifiant le système (2.11). Cette extrémale est dite normale si  $\lambda_o \neq 0$ , et anormale si  $\lambda_o = 0$ .

**Remarque 2.** Le théorème précédent donne une condition nécessaire d'optimalité. Cette condition devient nécessaire et suffisante dans le cas où les fonctions  $\Phi, f$  et  $\Psi$  sont convexes.

### 2.2.2 Principe de Pontryagin

Les conditions d'optimalité établies dans le paragraphe précédent ont conduit à introduire un *état adjoint*. Elles suggèrent aussi un résultat plus fort que la condition (2.11) de la stationnarité de l'hamiltonien par rapport à la commande :

”à chaque instant  $t \in (0, T)$  la commande optimale  $\bar{u}(t)$  réalise le minimum sur  $U \subset \mathbb{R}^m$  de l'Hamiltonien instantané  $H(\bar{x}(t), \cdot, \bar{p}(t))$ .”

Ce résultat s'énonce rigoureusement ainsi :

**Théorème 5** (Principe de Pontryagin).

Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) sont vérifiées. Soit  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  une commande optimale (locale) du problème  $(\mathcal{P})$ , soit  $\bar{x}$  l'état correspondant, i.e. la solution de :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad \bar{x}(0) = x^o.$$

Alors,  $\Psi(\bar{x}(T)) = 0$ , et il existe  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ , un état adjoint  $\bar{p}$  associé à  $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$ , tels que :

$$-\dot{\bar{p}}(t) = [f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))]^t \bar{p}(t), \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)),$$

et pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)). \quad (2.14)$$

De plus si  $\Psi \equiv 0$ , alors  $\lambda_o = 1$  et  $\lambda = 0$ .

**Démonstration.** Nous allons prouver le principe de Pontryagin dans le cas où  $\Psi \equiv 0$ . La preuve de ce principe dans le cas général sera admise.

Etape 1 : Exprimer la variation du critère en fonction de celle de l'hamiltonien. Soit  $u$  et  $v$  deux commandes admissibles. On a :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) &= [\Phi(x_u(T)) - \Phi(x_v(T))] \\ &= \int_0^1 \langle \Phi'(x_u(T) + \theta(x_v(T) - x_u(T))), x_u(T) - x_v(T) \rangle_n d\theta \end{aligned}$$

On introduit maintenant *l'état adjoint intermédiaire*, associé à  $(x_u, x_v, u)$ , solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\dot{p}_{uv}(t) &= [\tilde{f}_x(x_u(t), x_v(t), u(t))]^t p_{uv}(t) \\ p_{uv}(T) &= \tilde{\Phi}(x_u(T), x_v(T)) \end{cases}$$

$$\text{où } \tilde{f}_x(x_1, x_2, u) = \int_0^1 f'_x(x_1 + \theta(x_2 - x_1), u) d\theta,$$

$$\tilde{\Phi}(x_1, x_2) = \int_0^1 \Phi'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) d\theta.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) &= \langle p_{uv}(T), x_u(T) - x_v(T) \rangle_n \\ &\quad + \int_0^T \langle -\dot{p}_{uv} - [\tilde{f}_x(x_u(t), x_v(t), u(t))]^t p_{uv}(t), x_u(t) - x_v(t) \rangle_n dt. \end{aligned}$$

Par une intégration par partie, il vient que :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) &= \int_0^T \langle \dot{x}_u(t) - \dot{x}_v(t), p_{uv}(t) \rangle_n \\ &\quad - \int_0^T [f(x_u(t), u(t)) - f(x_v(t), u(t))] dt \\ &= \int_0^T [H(x_u(t), u(t), p_{uv}(t)) - H(x_v(t), u(t), p_{uv}(t))] dt. \end{aligned}$$

Etape 2 : Perturbations de la commande. On pose  $u = \bar{u}$  et  $v = u_k$  où  $u_k$  est une perturbation “en aiguille” de  $\bar{u}$  autour d'un instant donné  $t_o$  :

$$u_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } t \in (0, t_o - \frac{1}{k}) \cup (t_o + \frac{1}{k}, T) \\ u_o & \text{si } t \in (t_o - \frac{1}{k}, t_o + \frac{1}{k}) \end{cases} \quad k \geq 1$$

avec  $u_o$  une constante quelconque dans  $U$ . D'après l'Etape 1, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{J(\bar{x}, \bar{u}) - J(x_k, u_k)}{\frac{1}{k}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{1}{k}} \int_{t_o - \frac{1}{k}}^{t_o + \frac{1}{k}} [H(x_k(t), \bar{u}(t), p_k(t)) - H(x_k(t), u_o, p_k(t))] dt, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $x_k$  est l'état associé à  $u_k$ , et  $p_k$  est l'état adjoint intermédiaire associé à  $(\bar{x}, x_k, \bar{u})$ . Il est clair que lorsque  $k$  tend vers l'infini,  $u_k$  converge vers  $\bar{u}$ , et tenant compte de la continuité de l'état par rapport à la variable de commande, on a  $x_k$  converge vers  $\bar{x}$ . Vu la continuité de  $f$  et  $\Phi$ , on établit aussi que  $p_k$  converge vers  $\bar{p}$ .

Si  $t_o$  est un point de Lebesgue (voir Annexe, page 46) de la fonction :

$$t \longmapsto H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) - H(\bar{x}(t), u_o, \bar{p}(t)); \quad t > 0,$$

par passage à la limite dans (2.15), il résulte :

$$H(\bar{x}(t_o), \bar{u}(t_o), \bar{p}(t_o)) \leq H(\bar{x}(t_o), u_o, \bar{p}(t_o)),$$

et ceci pour tout  $u_o \in U$ .

Pour conclure, il suffit de remarquer (voir Annexe, page 46) que presque tous les points  $t$  de  $[0, T]$  sont des points de Lebesgue de la fonction :

$$t \longmapsto H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) - H(\bar{x}(t), u_o, \bar{p}(t)).$$

■

**Remarque.** Le principe de Pontryagin permet de se ramener, à partir d'un problème en dimension infinie, à un ensemble de problèmes en dimension finie :

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \quad t \in (0, T).$$

Pour presque tout instant  $t \in (0, T)$ , la valeur  $\bar{u}(t)$  minimise la fonction  $H(\bar{x}(t), \cdot, \bar{p}(t))$  sur  $U$ . D'après les résultats sur les problèmes d'optimisation en dimension finie, on conclut que si  $f$  (et par suite  $H$ ) est différentiable par rapport à la variable de commande, alors la commande optimale vérifie aussi :

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.16)$$

Ce qui montre que le principe de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité plus forte (puisqu'elle l'implique) que celle donnée au théorème 4. De plus notons que le principe de Pontryagin ne nécessite que les hypothèses (A1)-(A3), tandis que les assertions du théorème 4 ne sont vraies que si on a en plus (A1') vérifiée.

### 2.2.3 Problème de Mayer-Lagrange

Revenons maintenant au cas du problème de contrôle optimal avec un coût distribué  $L$  non nécessairement nul, i.e problème  $(\mathcal{P})$  de la forme précisée en page 13. Pour ce problème, on introduit le Hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$H(y, v, p, \lambda_o) = \lambda_o L(y, v) + \langle p, f(y, v) \rangle_n. \quad (2.17)$$

♠ Cette définition généralise celle donnée, dans le cas où  $L \equiv 0$ , en (2.10).

Il est facile de voir que le problème (2.1) peut encore se mettre sous la forme d'un problème de Mayer en introduisant un état supplémentaire  $z$  vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z}(t) = L(x(t), u(t)) \quad t > 0, \quad \text{et } z(0) = 0.$$

Ainsi le problème  $(\mathcal{P})$  est équivalent à :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & J(x, u) = \Phi(x(T)) + z(T) \\ \text{avec} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, T), \quad x(0) = x^o \\ & \dot{z}(t) = L(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, T), \quad z(0) = 0 \\ & u \in \mathcal{U} = \{u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0, T)\}, \\ & \Psi(x(T)) = 0. \end{aligned}$$

En écrivant les conditions d'optimalité pour ce problème équivalent, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 6** (Principe de Pontryagin). *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont vérifiées.*

*Soit  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  une commande optimale (locale) du problème  $(\mathcal{P})$ , soit  $\bar{x}$  la trajectoire correspondante :*

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad \bar{x}(0) = x^o.$$

*Alors, il existe  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$  et il existe un état adjoint  $\bar{p}$  associé à  $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$ , tels que :*

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad \bar{x}(0) = x^o, \\ \Psi(\bar{x}(T)) &= 0, \\ -\dot{\bar{p}}(t) &= [f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))]^t \bar{p}(t) + \lambda_o L'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)), \end{aligned}$$

*et pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t), \lambda_o). \quad (2.18)$$

*De plus si  $\Psi \equiv 0$ , alors  $\lambda_o = 1$  et  $\lambda = 0$ .*

**Exemple 6.** On cherche à déterminer la commande optimale  $\bar{u}$  solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } & -x_u(T) + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt \\ \text{avec } & \dot{x}_u = -x_u + u, \quad x_u(0) = x^o \\ & u(t) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le hamiltonien de ce problème est défini par :

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2}u^2 + p(-x + u).$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\dot{\bar{p}} &= -\bar{p}, \quad \bar{p}(T) = -1, \\ 0 &= \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \bar{p} + \bar{u}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\bar{p}(t) = -e^{(t-T)}, \quad \bar{u}(t) = e^{(t-T)}.$$

**Remarque 3.**

♠ Avec la définition du Hamiltonien, le système état-état adjoint peut aussi se réécrire :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) \quad \bar{x}(0) = x^o, \quad (2.19a)$$

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)). \quad (2.19b)$$

### 2.2.4 Système Hamiltonien

Par analogie avec la mécanique, on définit l'Hamiltonien minimisé  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par :

$$\mathcal{H}(y, p) = \inf_{u \in U} H(y, u, p).$$

D'après le principe de Pontryagin, si  $\bar{u}$  est solution optimale de  $(\mathcal{P})$  et si  $\bar{x}$  et  $\bar{p}$  sont respectivement l'état et l'état adjoint associés à  $\bar{u}$ , alors l'Hamiltonien minimisé vérifie :

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)).$$

**Théorème 7.** L'Hamiltonien minimisé  $\mathcal{H}$  reste constant le long de la trajectoire optimale :

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = cste \quad p.p. \ t \in (0, T)$$



**Démonstration.** L'argument est basé sur la notion de *dérivée directionnelle* :

$$h'(t, d) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{h(t + \epsilon d) - h(t)}{\epsilon}. \quad (2.20)$$

On appelle  $h'(t, 1)$  (resp.  $h'(t, -1)$ ) la dérivée à droite (resp. gauche) de  $h$  en  $t$ .

Notons

$$h : t \mapsto h(t) := \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) \quad \text{et} \quad U_H(t) := \arg \min_v \{H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t))\}. \quad (2.21)$$

D'après le lemme de Danskin (Annexe, page 46), la fonction  $h(\cdot)$  a des dérivées directionnelles données par la formule

$$h'(t, d) = \inf_{v \in U_H(t)} (\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) d + \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) d), \quad (2.22)$$

et donc des dérivées directionnelles à droite sur  $[0, T[$  et à gauche sur  $]0, T]$ , d'expression

$$h'(t, 1) = \inf_{v \in U_H(t)} [\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) + \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t)], \quad (2.23a)$$

$$h'(t, -1) = \inf_{v \in U_H(t)} [-\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) - \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t)]. \quad (2.23b)$$

Or  $\bar{u}(t) \in U_H(t)$ , et

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)); \\ -\dot{\bar{p}}(t) &= \partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)). \end{cases}$$

Donc,

$$\partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) + \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) = -\dot{\bar{p}}(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{p}}(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) \quad (2.24)$$

est nul ; et par conséquent :

$$h'(t, 1) \leq 0, \quad t \in [0, \bar{T}[; \quad h'(t, -1) \leq 0, \quad t \in ]0, \bar{T}]. \quad (2.25)$$

On en déduit par un résultat classique d'analyse que  $h$  est constante. ■

Dans beaucoup de cas les conditions d'optimalité permettent de donner des renseignements sur le problème de commande optimale qu'on se pose et sur son éventuelle solution. Cependant dans le cas général, ces conditions d'optimalité ne sont pas simples à exploiter et leur résolution fait appel à des méthodes numériques [2, 3].

Enfin, notons que les conditions d'optimalité, présentées dans cette section ne présentent qu'une condition *nécessaire* qui doit être satisfaite par la commande optimale *quand elle existe*.

## 2.3 Cas de temps final libre

On considère maintenant le cas où le temps final  $t_f$  est une variable du problème  $(\mathcal{P})$ . Pour étudier les conditions d'optimalité de  $(\mathcal{P})$ , nous commençons d'abord par remarquer que  $(\mathcal{P})$  est équivalent à un problème de commande optimale à temps final fixe. En effet, considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} t(s) &= t_f \cdot s & s \in [0, 1], \\ y(s) &= x(t_f \cdot s) & (= x(t)), \\ v(s) &= u(t_f \cdot s) & (= u(t)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si  $u \in \mathcal{U}$  et si  $x = x_u$  est l'état associé à  $u$  sur l'intervalle  $(0, t_f)$ , alors  $v \in \mathcal{V} = \{v \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^m) \mid v(s) \in U\}$ , et  $(v, y, t_f)$  sont liés par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{y}(s) &= t_f f(y(s), v(s)) & s \in (0, 1) \\ y(0) &= x^o \end{cases} \quad (2.27)$$

Cette équation peut être interprétée comme une nouvelle équation d'état sur un intervalle fixe  $(0, 1)$ , la variable  $y$  étant une nouvelle variable d'état, et  $v, t_f$  étant des nouvelles variables de commande.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} J(x, u, t_f) &= \Phi(y(1)) + \int_0^1 t_f L(y(s), v(s)) ds \\ &=: \tilde{J}(y, v, t_f). \end{aligned}$$

Ceci nous amène à considérer le problème  $(\tilde{\mathcal{P}})$  défini par :

$$\inf \left\{ \tilde{J}(y, v, t_f) \mid (v, t_f) \in \mathcal{V} \times \mathbb{R}_+^*, (y, v, t_f) \text{ vérifie (2.27)} \right\}. \quad (\tilde{\mathcal{P}})$$

**Remarque 4.** Dans le problème  $(\mathcal{P})$ , le temps final  $t_f$  est considéré comme une variable de contrôle.

Il est clair que le problème  $(\mathcal{P})$  est équivalent au problème  $(\tilde{\mathcal{P}})$  dans le sens qu'à chaque triplet  $(x, u, t_f)$  admissible pour  $(\mathcal{P})$  on peut associer un triplet  $(y, v, t_f)$  admissible pour  $(\tilde{\mathcal{P}})$  et vice-versa. Le problème de commande optimale  $(\tilde{\mathcal{P}})$  a l'avantage d'être à temps final fixe, mais il a l'inconvénient d'avoir un ensemble de commandes admissibles qui n'est ni fermé ni borné, et donc les résultats de la section 3.1 ne peuvent pas être appliqués sur  $(\mathcal{P})$ . Pour contourner cette difficulté, nous allons restreindre l'ensemble des commandes admissibles à  $\mathcal{V} \times [\frac{M}{2}, 2M]$  pour  $M > 0$  ( $M$  est pour le moment une constante quelconque, on précisera ultérieurement sa valeur). On considère alors le problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_M)$  :

$$\inf \left\{ \tilde{J}(y, v, t_f) \mid (v, t_f) \in \mathcal{V} \times [\frac{M}{2}, 2M], (y, v, t_f) \text{ vérifie (2.27)} \right\}. \quad (\tilde{\mathcal{P}}_M)$$

Nous commencerons par établir les conditions d'optimalité de  $(\tilde{\mathcal{P}}_M)$  en utilisant le théorème 6. Notons que, pour tout  $M > 0$ , l'hamiltonien du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_M)$  est défini sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  par :

$$\tilde{H}(y, (v, t_f), q, \lambda_o) = \lambda_o t_f L(y, v) + t_f \langle q, f(y, v) \rangle_n.$$

**Proposition 1.** *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont satisfaites. Soit  $M$  un réel de  $\mathbb{R}_+^*$  quelconque et  $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$  une solution optimale de  $(\tilde{\mathcal{P}}_M)$ . Il existe  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ ,  $\bar{q} \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$  tels que :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(s) &= \bar{t}_f f(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) & s \in (0, 1) \\ \bar{y}(0) &= x^o \end{cases} \quad (\text{équation d'état})$$

$$\begin{cases} -\dot{\bar{q}}(s) &= \bar{t}_f [f'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s))]^t \bar{q}(s) + \lambda_o \bar{t}_f L'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \\ \bar{q}(1) &= \lambda_o \Phi'(\bar{y}(1)) + [\Psi'(\bar{y}(1))]^t \lambda \end{cases} \quad (\text{équation adjointe})$$

$$\tilde{H}(\bar{y}(s), (\bar{v}(s), \bar{t}_f), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{\substack{v \in U \\ t_f \in [M/2, 2M]}} \tilde{H}(\bar{y}(s), (v, t_f), \bar{q}(s), \lambda_o) \quad (\text{Principe Pontryagin})$$

$$\Psi(\bar{y}(1)) = 0 \quad (\text{Contrainte sur l'état final})$$

On énonce maintenant les conditions d'optimalité du problème de départ  $(\mathcal{P})$ .

**Théorème 8.** *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont satisfaites. Soit  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_f)$  une solution optimale du problème de temps optimal  $(\mathcal{P})$ . Il existe  $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  avec  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ , et  $\bar{p} \in H^1(0, \bar{t}_f; \mathbb{R}^n)$  tels que :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) & t \in (0, \bar{t}_f), \\ \bar{x}(0) &= x^o, \end{cases} \quad (\text{équation d'état})$$

$$\begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) &= [f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))]^t \bar{p}(t) + \lambda_o L'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ \bar{p}(\bar{t}_f) &= \lambda_o \Phi'(\bar{x}(\bar{t}_f)) + [\Psi'(\bar{y}(\bar{t}_f))]^t \lambda, \end{cases} \quad (\text{équation adjointe})$$

$$\Psi(\bar{x}(\bar{t}_f)) = 0 \quad (\text{contrainte sur l'état})$$

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \min_{u \in U} H(\bar{x}(t), u, \bar{p}(t), \lambda_o) \quad p.p. \text{ sur } (0, \bar{t}_f),$$

(Principe de Pontryagin)

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = 0 \quad p.p. \text{ sur } (0, \bar{t}_f). \quad (\text{condition d'optimalité sur } \bar{t}_f)$$

**Démonstration.** L'idée de la preuve consiste simplement à se ramener à un problème à temps final fixe et à travailler avec des temps  $t_f \in [\bar{t}_f/2, 2\bar{t}_f]$  (puisque  $t_f = \bar{t}_f$  est bien dans cet intervalle).

Considérons à nouveau le changement de variable :

$$\begin{aligned} t(s) &= \bar{t}_f \cdot s & s \in [0, 1], \\ \bar{y}(s) &= \bar{x}(\bar{t}_f \cdot s) & (= \bar{x}(t)), \\ \bar{v}(s) &= \bar{u}(\bar{t}_f \cdot s) & (= \bar{u}(t)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Par les arguments cités au début de ce paragraphe, on montre aisément que le triplet  $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$  est solution du problème à temps final fixe  $(\tilde{\mathcal{P}})$ . Notons que  $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$  est aussi solution de  $(\tilde{\mathcal{P}}_{\bar{t}_f})$ , où  $(\tilde{\mathcal{P}}_{\bar{t}_f})$  est le problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_M)$  pour  $M = \bar{t}_f$ . La Proposition 1 implique alors qu'il existe  $\bar{q} \in H^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$  tel que :

$$\begin{cases} -\dot{\bar{q}}(s) &= \bar{t}_f [f'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s))]^t \bar{q}(s) + \lambda_o \bar{t}_f L'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \\ \bar{q}(1) &= \lambda_o \Phi'(\bar{y}(1)) + [\Psi'(\bar{y}(1))]^t \lambda \end{cases} \quad (2.29)$$

et

$$\tilde{H}(\bar{y}(s), (\bar{v}(s), \bar{t}_f), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{\substack{v \in U \\ t_f \in [\bar{t}_f/2, 2\bar{t}_f]}} \tilde{H}(\bar{y}(s), (v, t_f), \bar{q}(s), \lambda_o) \quad \text{p.p. sur } (0, 1). \quad (2.30)$$

On introduit la fonction  $\bar{p}$  définie par :

$$\bar{q}(s) = \bar{p}(t) \quad (= \bar{p}(\bar{t}_f \cdot s)), \quad \text{pour } s \in [0, 1].$$

La fonction  $\bar{p}$  vérifie l'équation adjointe donnée dans le théorème. D'autre part, remarquons que  $\tilde{H}(y, (v, t_f), q, \lambda_o) = t_f H(y, v, q, \lambda_o)$ , où  $H(y, v, q) = \lambda_o L(y, v) + \langle p, f(y, v) \rangle_n$  est l'hamiltonien associé au problème  $(\mathcal{P})$ . De ce fait, le principe (2.30) implique que :

$$H(\bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{v \in U} H(\bar{y}(s), v, \bar{q}(s), \lambda_o), \quad (2.31a)$$

$$\bar{t}_f H(\bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{t_f \in [\bar{t}_f/2, 2\bar{t}_f]} t_f H(\bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{q}(s), \lambda_o), \quad (2.31b)$$

pour presque tout  $s \in [0, 1]$ . Puisque  $\bar{t}_f$  est strictement positif, on conclut alors que :

$$\begin{cases} H(\bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{q}(s), \lambda_o) &= \min_{v \in U} H(\bar{y}(s), v, \bar{q}(s), \lambda_o) & \text{p.p. sur } (0, 1) \\ H(\bar{y}(s), \bar{v}(s), \bar{q}(s), \lambda_o) &= 0 & \text{p.p. sur } (0, 1). \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{cases} H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) &= \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t), \lambda_o) & \text{p.p. sur } (0, \bar{t}_f) \\ H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) &= 0 & \text{p.p. sur } (0, \bar{t}_f). \end{cases}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

♠ Le théorème ci-dessus nous donne donc les conditions d'optimalité, d'un problème de temps optimal sans contraintes finales sur l'état. Et une fois de plus, rappelons que lorsque  $f$  et  $L$  vérifient aussi les hypothèses (A1') et (A2'), alors le principe de Pontryagin implique que :

$$\partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) \cdot (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in U, \text{ p.p } t \in (0, \bar{t}_f).$$

Nous allons voir sur un exemple de conduite de bateau, comment utiliser ces conditions d'optimalité pour déterminer la commande optimale.

**Exemple 7** (Conduite d'un bateau). *Dans la conduite d'un bateau les équations du mouvement sont*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -qx_2(t) + u(t) & t \in (0, t_f), \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

où  $u$  désigne une accélération angulaire et  $q, x_{10} > 0$  sont des paramètres connus ( $x_1$  désigne la position du bateau et  $x_2$  désigne sa vitesse). Le problème consiste à passer de la position  $(x_{10}, 0)$  à  $(0, 0)$  en temps minimum. Nous supposons que les contraintes sur la commande  $u$  sont :  $-1 \leq u(t) \leq 1$ . Le problème de commande optimale s'écrit alors :

$$\inf \left\{ \int_0^{t_f} 1 \, dt \mid (x, u, t_f) \text{ vérifie (2.32), } x(t_f) = (0, 0) \right\}.$$

Pour ce problème, l'hamiltonien est :

$$H(x, u, p, \lambda_o) = \lambda_o + p_1 x_2 + p_2 (-q x_2 + u).$$

Si on note  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_f)$  la solution de ce problème, alors ils existent  $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , avec  $(\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ , tels qu'on a :

— Les équations adjointes :

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}_1(t) = 0, \quad \dot{\bar{p}}_2(t) = q\bar{p}_2(t) - \bar{p}_1(t) & t \in (0, \bar{t}_f) \\ \bar{p}_1(\bar{t}_f) = \lambda_1, \quad \bar{p}_2(\bar{t}_f) = \lambda_2. \end{cases}$$

— Le principe de Pontryagin :

$$\partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in [-1, 1], \text{ p.p. } t \in (0, \bar{t}_f).$$

— La condition d'optimalité sur  $\bar{t}_f$  :

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = 0 \quad t \in (0, \bar{t}_f).$$

Une résolution directe des équations adjointes conduit à :

$$\bar{p}_1(t) = c_1, \quad \bar{p}_2(t) = ce^{qt} + \frac{c_1}{q},$$

avec  $c_1 = \lambda_1$  et  $c = \frac{q\lambda_2 - \lambda_1}{q}e^{-q\bar{t}_f}$ . Montrons que  $c \neq 0$ . Raisonnons par l'absurde : Si  $c = 0$ , alors  $\bar{p}_2 \equiv \frac{c_1}{q}$  et

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \lambda_o + c_1\bar{x}_2 + \frac{c_1}{q}(-q\bar{x}_2 + \bar{u}) = \lambda_o + \frac{c_1}{q}\bar{u}(t) = 0. \quad (2.33)$$

Remarquons que  $c_1$  ne peut pas être nul, car sinon du fait que  $c$  est supposé égal à 0 et tenant compte de (2.33), on obtiendrait :  $\lambda_o = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , ce qui est impossible (non trivialité du multiplicateur). De même,  $\lambda_o$  ne peut être nul. Ceci implique que  $\bar{u} \equiv -\frac{q\lambda_o}{c_1}$ . Or cette commande ne permet pas de réaliser la condition finale  $\bar{x}(\bar{t}_f) = (0, 0)$ . En effet, en résolvant l'équation d'état associée à cette commande, il vient :

$$\bar{x}_2(t) = \frac{\lambda_o}{c_1}[e^{-qt} - 1],$$

et puisque  $q > 0$ , alors  $\bar{x}_2(t) \neq 0$  pour tout  $t > 0$ . On conclut alors que  $c \neq 0$ , et donc la fonction  $\bar{p}_2$  est strictement monotone.

D'autre part, le principe de Pontryagin implique que

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = -1 & \text{si } \bar{p}_2(t) > 0 \\ \bar{u}(t) = 1 & \text{si } \bar{p}_2(t) < 0 \end{cases}$$

Tenant compte des conditions limites, nous pouvons montrer que  $\bar{u}$  ne peut pas être constant. De plus, puisque  $\bar{p}_2$  est monotone alors  $\bar{p}_2$  change de signe au plus une fois. Par suite, nous n'avons que deux cas possibles pour la commande optimale :

— Cas 1 : Il existe  $t_1 > 0$ , tel que  $\bar{u} \equiv -1$  sur  $(0, t_1)$  et  $\bar{u} \equiv 1$  sur  $(t_1, \bar{t}_f)$ .

— Cas 2 : Il existe  $t_1 > 0$ , tel que  $\bar{u} \equiv 1$  sur  $(0, t_1)$  et  $\bar{u} \equiv -1$  sur  $(t_1, \bar{t}_f)$ .

Nous allons analyser chacun de ces deux cas. Dans le premier cas, la résolution de l'équation d'état sur  $[0, t_1]$  avec la condition initiale  $\bar{x}(0) = (x_{10}, 0)$  donne

$$\bar{x}_2(t) = \frac{e^{-qt} - 1}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = x_{10} + \frac{1 - e^{-qt}}{q^2} - \frac{t}{q} \quad \text{sur } [0, t_1].$$

Et la résolution de l'équation d'état sur  $[t_1, \bar{t}_f]$  avec la condition finale  $\bar{x}(\bar{t}_f) = (0, 0)$  donne

$$\bar{x}_2(t) = \frac{1 - e^{-q(t - \bar{t}_f)}}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = \frac{e^{-q(t - \bar{t}_f)} - 1 - q(\bar{t}_f - t)}{q^2} \quad \text{sur } [t_1, \bar{t}_f].$$

Rappelons que l'état  $\bar{x}$  est une fonction continue. Donc les conditions de raccordement suivantes, en  $t_1$ , doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} \frac{e^{-qt_1} - 1}{q} = \frac{1 - e^{-q(t_1 - \bar{t}_f)}}{q} \\ x_{10} + \frac{1 - e^{-qt_1}}{q^2} - \frac{t_1}{q} = \frac{e^{-q(t_1 - \bar{t}_f)} - 1 - q(\bar{t}_f - t_1)}{q^2}. \end{cases}$$

La résolution de ce système implique finalement que :  $t_1 = \frac{qx_{10} + \bar{t}_f}{2}$  et  $\bar{t}_f$  vérifie l'équation :

$$q^2 x_{10} = 2 \ln\left(\frac{e^{q\bar{t}_f} + 1}{2}\right) - \bar{t}_f.$$

Reste maintenant à prouver que le Cas 2 ne peut pas se produire. En effet, si  $\bar{u} \equiv 1$  sur  $(0, t_1)$  et  $\bar{u} \equiv -1$  sur  $(t_1, \bar{t}_f)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(t) &= \frac{1 - e^{-qt}}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = x_{10} + \frac{-1 + e^{-qt}}{q^2} + \frac{t}{q} \quad \text{sur } [0, t_1] \\ \bar{x}_2(t) &= \frac{e^{-q(t - \bar{t}_f)} - 1}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = \frac{-e^{-q(t - \bar{t}_f)} + 1 - q(t - \bar{t}_f)}{q^2} \quad \text{sur } [t_1, \bar{t}_f]. \end{aligned}$$

Les conditions de raccordement conduisent à des équations sans solution.





# Chapitre 3

## Commande des systèmes linéaires

### 3.1 Commandabilité

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o, \quad (3.1)$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times m$ . On suppose que  $A$  et  $B$  sont à coefficients constants.

**Définition 4.** On dit que le système (3.1) est commandable si

$$\forall x^o, x^d \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(0, T) \text{ tel que la solution } x_u \text{ de (3.1) satisfait } x_u(T) = x^d.$$

Notons que pour  $u \in L^2(0, T)$ , la solution  $x_u$  de (3.1) satisfait :

$$x_u(T) = e^{AT} x^o + \int_0^T e^{A(T-t)} Bu(t) dt.$$

On conclut alors que le système (3.1) est commandable si et seulement si l'opérateur

$$\mathcal{L} : v \longmapsto \int_0^T e^{A(T-t)} Bv(t) dt$$

est surjectif de  $L^2(0, T)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Revoyons d'abord un petit **rappel sur les espaces de Hilbert**. Soient  $X$  et  $H$  deux espaces de Hilbert et  $\mathcal{L}$  un opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $H$ . Alors  $\mathcal{L}$  est surjectif si et seulement si  $\mathcal{L}^*$  (l'adjoint de  $\mathcal{L}$ ) est injectif, en effet  $\text{Ker} \mathcal{L}^* = (\text{Im} \mathcal{L})^\perp$ .

Appliquons ce résultat à notre problème. Soit  $v \in L^2(0, T)$  et soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$$\left\langle \int_0^T e^{A(T-t)} Bv(t) dt, x \right\rangle_n = \int_0^T \langle e^{A(T-t)} Bv(t), x \rangle_n dt = \int_0^T \langle v(t), B^* e^{A^*(T-t)} x \rangle_n dt.$$

On en déduit que  $\mathcal{L}^*$  est l'opérateur de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $L^2(0, T)$  défini par :

$$\mathcal{L}^*x = B^*e^{A^*(T-\cdot)}x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où  $B^*e^{A^*(T-\cdot)}x$  désigne la fonction  $t \mapsto B^*e^{A^*(T-t)}x$ .

**Lemme 1.** *Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a :*

$$\mathcal{L}^*x = 0 \iff [B^*x = B^*A^*x = \dots = B^*A^{*n-1}x = 0].$$

**Démonstration.** Si  $\mathcal{L}^*x = 0$  alors  $B^*e^{A^*(T-t)}x = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . En dérivant  $(n-1)$  fois par rapport à  $t$  et en posant  $t = T$ , on obtient

$$B^*x = 0, \dots, B^*A^{*n-1}x = 0.$$

Réciproquement, si  $B^*x = 0, \dots, B^*A^{*n-1}x = 0$ , à l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton, on peut écrire

$$e^{A^*(T-t)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i(T-t)^i A^{*i}$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , on aura donc  $B^*e^{A^*(T-t)}x = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i(T-t)^i B^*A^{*i}x = 0$ . ■

Tenant compte du Lemme précédent, il vient que  $\mathcal{L}^*$  est injective si et seulement si

$$[B^*x = 0, \dots, B^*A^{*n-1}x = 0] \iff x = 0,$$

ou encore,

$$\text{Ker}[B^*|B^*A^*| \dots |B^*A^{*n-1}] = \{0\}.$$

D'après les résultats de l'analyse matricielle, on conclut alors que  $\mathcal{L}^*$  est injectif (et donc  $\mathcal{L}$  est surjectif) si et seulement si la matrice  $[B|AB| \dots |A^{n-1}B]$  est de rang  $n$ . D'où le théorème suivant.

**Théorème 9.** *Le système (3.1) est commandable si et seulement si*

$$\text{rg}[B|AB| \dots |A^{n-1}B] = n.$$

## 3.2 Critère linéaire sur l'état final

Analysons de plus près les propriétés de la solution d'un problème de contrôle optimal ( $\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$ ) avec un horizon  $T$ , optimal ou non :

$$\begin{aligned} & \text{Inf } q \cdot x(T); \\ & \text{avec } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$u(t) \in U \quad \text{p.p } t \geq 0. \quad (3.2b)$$

On supposera dans toute cette section que l'ensemble  $U$  est convexe. Dans ce cas, le problème ( $\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$ ) est convexe : il possède un critère linéaire et des contraintes convexes (ponctuelles) sur la commande. Donc les conditions nécessaires d'optimalité sont aussi des conditions suffisantes. D'après le théorème 4, on peut caractériser les solutions de ( $\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$ ) par le système d'optimalité suivant, faisant intervenir l'état adjoint  $p \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$ , solution de

$$-\dot{p}(t) = A^t p(t), \quad t \in [0, T], \quad p(T) = q, \quad (3.3)$$

et l'hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$H(x, u, p) := p \cdot (Ax + Bu). \quad (3.4)$$

**Théorème 10.** *La commande  $u$ , fonction mesurable de  $[0, T]$  vers  $U$ , est solution de ( $\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$ ) ssi elle vérifie*

$$B^t p(t)(v - u(t)) \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in U, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (3.5a)$$

$$\inf_{v \in U} H(x(t), v, p(t)) = \text{cste} \quad (3.5b)$$

Soit  $p(t)$  solution de (3.3). Alors  $B^t p(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , donc soit est identiquement nulle, soit a un nombre fini de zéros sur  $[0, T]$ . Dans ce dernier cas on déduit de (3.5) nombre de renseignements sur la commande optimale.

**Définition 5.** *On dit que  $U$  est strictement convexe si, étant donné deux points distincts  $u_1$  et  $u_2$  de  $U$ , le segment<sup>1</sup>  $]u_1, u_2[$  appartient à l'intérieur de  $U$ .*

**Exemple 8.** *Dans  $\mathbb{R}^n$ , la boule unité fermée pour la norme  $\ell^p$  est strictement convexe si  $1 < p < \infty$ , mais pas si  $p = 1$  ou  $p = \infty$ .*

---

1. Ce segment est par définition  $\{\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2; \alpha \in ]0, 1[ \}$ .

**Théorème 11.** *Soit  $p$  solution de (3.3), avec  $q \neq 0$ . Alors*

- (i) *Si le système est commandable, alors l'application  $t \rightarrow B^t p(t)$  n'est pas identiquement nulle.*
- (ii) *Si  $B^t p(t)$  n'est pas identiquement nulle, toute solution  $u$  du problème à coût linéaire  $(\mathcal{P}_{\text{linéaire}})$  est telle que  $u(t) \in \partial U$  pour tout  $t \in [0, T]$ , sauf au plus en un nombre fini de points.*
- (iii) *Si de plus l'ensemble  $U$  est strictement convexe, alors  $(\mathcal{P}_{\text{linéaire}})$  a une solution unique, continue en tout instant  $t$ , sauf peut-être ceux (en nombre fini) où  $B^t p(t)$  est nul.*

**Démonstration.** (i) Supposons au contraire  $B^t p(t)$  identiquement nulle. Alors en dérivant  $n - 1$  fois l'application  $B^t p(\cdot)$  en  $T$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= B^t p(T) = B^t \dot{p}(T) = \dots \\ &= B^t q = B^t A^t q = \dots = B^t A^{t^{n-1}} q, \end{aligned}$$

autrement dit,  $q$  appartient au noyau de la matrice de commandabilité

$$[B^t | B^t A^t | B^t A^{t^2} | \dots | B^t A^{t^{n-1}}].$$

Si le système est commandable, ceci implique  $q = 0$ , ce qui est impossible.

(ii) D'après (3.5a),  $u(t)$  doit minimiser la forme linéaire  $v \rightarrow p(t) \cdot Bv$  sur  $U$  à tout instant. Sauf en un nombre fini de points, cette forme linéaire est non nulle, ce qui implique que  $u(t)$  est point frontière de  $U$ .

(iii) Le minimum d'une forme linéaire sur un ensemble strictement convexe est unique. Il est facile de vérifier qu'il dépend continûment de la forme linéaire si cette dernière n'est pas nulle, ce qui assure le point (iii). ■

### 3.3 Problème de transfert en temps minimal

Considérons maintenant un problème  $(\mathcal{P}_{\text{transfert}})$  de transfert en temps minimal :

$$\text{Inf } T;$$

$$\text{avec } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o, \tag{3.6a}$$

$$x(T) = x^d, \tag{3.6b}$$

$$u(t) \in U \quad \text{p.p } t \geq 0. \tag{3.6c}$$

Des résultats de la section 2.3, on déduit que, sous l'hypothèse de commandabilité du système (3.6a), si  $(u, T)$  est solution de  $(\mathcal{P}_{\text{transfert}})$ , alors il existe  $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tel

que  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$  et :

$$-\dot{p}(t) = A^t p(t), \quad p(T) = \lambda \quad (3.7a)$$

$$B^t p(t) \cdot (v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in U, \text{ p.p } t \in (0, T) \quad (3.7b)$$

$$\lambda_o + \langle p(t), Ax_u(t) + Bu(t) \rangle_n = 0 \quad \text{p.p } t \in (0, T) \quad (3.7c)$$

Remarquons que  $\lambda \neq 0$ . En effet, si  $\lambda = 0$ , alors  $p$  serait nul sur tout l'intervalle  $(0, T)$  et l'équation (3.7c) s'écrirait  $\lambda_o = 0$ , ce qui contredirait le fait que  $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ .

On peut donc utiliser le théorème 11 (avec  $q = \lambda$ ), et établir ainsi le *résultat principal de cette section* :

**Théorème 12.** *Soit  $u$  solution du problème de temps minimal  $(\mathcal{P}_{\text{transfert}})$ . Alors*

- (i) *Si le système est commandable, alors  $u(t) \in \partial U$  pour tout  $t \in [0, T]$ , sauf au plus en un nombre fini de points.*
- (iii) *Si de plus l'ensemble  $U$  est strictement convexe, alors le problème  $(\mathcal{P}_{\text{transfert}})$  a une solution unique, continue en tout instant  $t$ , sauf peut-être ceux (en nombre fini) où  $B^t p(t)$  est nul.*

**Exemple 9.** *Etudions le cas où  $U$  est la boule unité euclidienne fermée, qui est strictement convexe. Le minimum de  $v \rightarrow r \cdot v$  sur  $U$ , pour  $r \neq 0$ , est atteint en  $-r/\|r\|$ . Donc si  $B^t p(t)$  n'est pas identiquement nulle, la commande en temps minimal vaut  $u(t) = -B^t p(t)/\|B^t p(t)\|$ .*

Dans certains cas on peut montrer que le principe du minimum est une condition suffisante (donc une CNS) d'optimalité. En voici un exemple.

**Théorème 13.** *On suppose  $U$  strictement convexe, le système commandable, et  $x^d = 0$ . Alors une commande transfère le système de  $x^o$  à 0 en temps minimal  $T$  si et seulement si les conditions (3.7) sont satisfaites, pour un certain  $\lambda \neq 0$ .*

**Démonstration.** Les conditions (3.7) sont nécessaires et ont une solution unique pour  $\lambda$  fixé (d'après le théorème 11), qui est aussi d'après le théorème 10 la solution unique du problème de minimisation de  $\lambda \cdot x(T)$  sur l'horizon fixé  $T$ .

S'il existe une autre commande  $u^*$  transférant  $x^o$  à  $x^d = 0$  en un temps  $T^* < T$ , prolongeant cette commande par 0 sur  $[T^*, T]$ , on obtient une solution différente du problème de minimisation de  $\lambda \cdot x(T)$ , ce qui est impossible. ■

### 3.3.1 Exemples et classes particulières

Nous allons voir que les résultats précédents permettent de résoudre complètement le problème de commande en temps optimal dans quelques cas particuliers importants.

### 3.3.1.1 Contraintes de bornes sur la commande

Nous reprenons dans cette section le problème de temps minimal, dans le cas où l'ensemble  $U$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^m$  muni de la norme infinie :

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m; |u_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}. \quad (3.8)$$

Cet ensemble est convexe et compact, d'intérieur contenant 0. Il n'est en revanche pas strictement convexe si  $m > 1$ . Le principe du minimum implique

$$u_i(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } (B^t p(t))_i > 0, \\ ? & \text{si } (B^t p(t))_i = 0, \\ 1 & \text{si } (B^t p(t))_i < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Si  $(B^t p(t))_i = 0$ , le principe du minimum ne donne pas d'informations sur  $u_i(t)$ .

Puisque  $p$  est solution de l'équation linéaire homogène (sans second membre) (3.7a) de dimension  $n$ , il est de la forme

$$\pi_1(t)e^{\alpha_1 t} + \dots + \pi_r(t)e^{\alpha_r t}, \quad (3.10)$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont les valeurs propres *distinctes* de  $A$  (donc  $r \leq n$ ) de multiplicité  $\mu_i$ , et  $\pi_i(t)$  est un polynôme de degré  $d_i$ , avec  $d_i \leq \mu_i - 1$ . Les fonctions  $(B^t p(t))_i$  sont également de la forme (3.10). Elles sont donc, sur  $[0, T]$ , soit identiquement nulles, soit nulles en un nombre fini de points, et dans ce dernier cas le principe du minimum détermine  $u_i$  (sauf en ces points).

**Lemme 2.** *Soit  $u$  une commande amenant  $x^o$  à  $x^d$  en un temps minimal  $T$ , et  $p$  un état adjoint associé. Soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors, soit  $(B^t p(t))_i$  est identiquement nul, soit  $u_i$  change de signe un nombre fini de fois. Dans ce dernier cas, toutes les commandes transférant l'état de  $x^o$  à  $x^d$  en temps minimal ont même composante  $i$ , sauf peut-être aux instants de changement de signe.*

Si les valeurs propres de  $A$  sont réelles, on peut donner une estimation du nombre des points de changement de signe :

**Lemme 3.** *Toute fonction  $\psi(t)$  non nulle, de la forme (3.10), avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  réels distincts et  $\pi_i(t)$  polynôme réels de degré  $d_i$ , a au plus  $d_1 + \dots + d_r + r - 1$  zéros.*

**Démonstration.** Procédons par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$ ,  $\psi(t) = \pi_1(t)e^{\alpha_1 t}$  a les mêmes zéros que  $\pi_1$  ; ce dernier étant un polynôme de degré  $d_1$ , a au plus  $d_1 = d_1 + r - 1$

racines sur  $[0, T]$ . Supposons maintenant le résultat vrai pour  $r - 1$ . Alors  $\psi(t)$  a les mêmes zéros que la fonction

$$e^{-\alpha_1 t} \psi(t) = \pi_1(t) + \pi_2(t)e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \dots + \pi_r(t)e^{(\alpha_r - \alpha_1)t}. \quad (3.11)$$

La dérivée d'ordre  $d_1 + 1$  de cette fonction est de la forme

$$\frac{d^{(d_1+1)} [e^{-\alpha_1 t} \psi(t)]}{dt^{(d_1+1)}} = \bar{\pi}_2(t)e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \dots + \bar{\pi}_r(t)e^{(\alpha_r - \alpha_1)t}, \quad (3.12)$$

avec  $\bar{\pi}_2(t), \dots, \bar{\pi}_r(t)$  polynômes de degré  $d_i$ . D'après notre construction par récurrence, elle a au plus  $d_2 + \dots + d_r + r - 2$  zéros. Or, entre deux zéros d'une fonction se trouve au moins un zéro de sa dérivée. Si la fonction  $\psi$  avait plus de  $d_1 + \dots + d_r + r - 1$  zéros, sa dérivée d'ordre  $d_1 + 1$  aurait donc plus de  $d_2 + \dots + d_r + r - 2$  zéros, d'où une contradiction. ■

**Proposition 2.** *Supposons les valeurs propres de  $A$  réelles. Soit  $u$  une commande amenant  $x^o$  à  $x^d$  en un temps minimal  $T$ , et  $p$  un état adjoint associé. Soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors, soit  $(B^t p(t))_i$  est identiquement nul, soit  $u_i$  change de signe au plus  $n - 1$  fois.*

**Démonstration.** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  les valeurs propres *distinctes* de  $A$  de multiplicité  $\mu_i$ . Alors  $(B^t p(t))_i$  est de la forme (3.10), avec  $d_i \leq \mu_i - 1$ , et a donc au plus  $d_1 + \dots + d_r + r - 1$  zéros. Mais

$$d_1 + \dots + d_r + r - 1 \leq \mu_1 + \dots + \mu_r - 1 = n - 1. \quad (3.13)$$

■

Discutons quelques exemples qui éclairciront les résultats ci-dessus.

**Exemple 10.** *Considérons le problème de transfert en temps minimal de  $x^o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  à  $x^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , avec la dynamique*

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = 2u_2, \quad (3.14)$$

*et les contraintes  $|u_i(t)| \leq 1$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $i = 1, 2$ . Il est clair que le temps minimal de transfert est  $T = 1$ ; toute commande optimale  $u$  est telle que  $u_1(t) = -1$  sur  $[0, T]$ ; par contre on n'a pas d'unicité de  $u_2(t)$ . Comment cela se traduit-il sur le système d'optimalité ?*

D'abord notons que le système est bien commandable. Les conditions d'optimalité disent qu'il existe  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^t \neq (0, 0)^t$  tel que

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \lambda_1, & p_2(t) &= \lambda_2, & p.p \ t &\in (0, T) \\ u_1(t) &= \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ ? & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda_1 < 0, \end{cases} & \text{et} & \quad u_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \lambda_2 > 0, \\ ? & \text{si } \lambda_2 = 0, \\ 1 & \text{si } \lambda_2 < 0, \end{cases} \\ 1 + \lambda_1 u_1 + 2\lambda_2 u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que  $\lambda_2 \neq 0$  donc soit qu'on a  $\lambda_2 > 0$  et  $u_2 = -1$  ou qu'on a  $\lambda_2 < 0$  et  $u_2 = 1$  et dans les deux cas (en intégrant l'équation de  $x_2$ ) on s'aperçoit qu'on ne pourra pas atteindre la cible  $x_2 = 0$ . Par conséquent  $\lambda_2 = 0$  et  $\lambda_1 \neq 0$ . Le principe du minimum impose donc  $u_1(t) = -1$  sur  $[0, 1]$ , mais n'impose rien sur  $u_2$ , sinon d'être à valeurs dans  $[-1, 1]$ , et tel que  $x_2(T) = 0$ .

**Exemple 11.** Soit le système dynamique

$$\ddot{z}(t) = u(t), \quad t \in [0, T]; \quad z(0) = h, \quad \dot{z}(0) = v. \quad (3.15)$$

Considérons le problème de transfert en temps minimal vers la position de repos  $((z(t_f), \dot{z}(t_f)) = (0, 0))$ , sous la contrainte  $|u(t)| \leq 1$ . En posant  $V(t) := \dot{z}(t)$ , l'équation (3.15) se réécrit :

$$\dot{z}(t) = V(t), \quad \dot{V}(t) = u(t).$$

La dynamique de l'état adjoint est

$$-\dot{p}_1(t) = 0, \quad -\dot{p}_2(t) = p_1(t), \quad t \in [0, t_f]. \quad (3.16)$$

Le système est commandable, et  $U$  est strictement convexe, donc (théorème 11)  $B^t p(t) = p_2(t)$  n'est pas identiquement nulle et la commande optimale est unique. La dynamique a pour seule valeur propre 0. La proposition 2 implique que cette commande optimale change de signe au plus 1 fois.

Réciproquement, toute commande amenant  $x^o$  à 0 (en un temps  $T$  a priori quelconque) et changeant de signe au plus 1 fois est optimale (théorème 13). Lorsque  $u$  est constant, on a  $z(t) = vt + u\frac{t^2}{2} + h$ . Atteindre la cible au temps  $t_f$  signifie que

$$z(t_f) = 0, \quad \text{et} \quad \dot{z}(t_f) = 0.$$

Ou encore,

$$v + ut_f = 0, \quad vt_f + u\frac{t_f^2}{2} + h = 0. \quad (3.17)$$



Ce qui conduit à

$$h = \frac{v^2}{2u}, \quad \text{et } \frac{v}{u} \leq 0.$$

Ainsi l'ensemble des points  $(h, v)$  pouvant atteindre la cible avec un contrôle constant valant  $\pm 1$ , est la réunion des courbes  $C_1 := \{(h, v) \mid h = v^2/2, v \leq 0\}$  et  $C_2 := \{(h, v) \mid h = -v^2/2, v \geq 0\}$ .

Maintenant d'un point quelconque  $(h_o, v_o) \in \mathbb{R}^2 \setminus (C_1 \cup C_2)$ , la trajectoire commençant avec un contrôle  $u = -1$  (resp.  $u = 1$ ) ne peut atteindre la cible que si elle rencontre la courbe  $C_1$  (resp.  $C_2$ ). Or cette trajectoire est décallée par rapport à  $C_2$  de  $h_o + \frac{v_o^2}{2}$ , elle ne pourra rencontrer  $C_1$  que si

$$h_o + \frac{v_o^2}{2} \geq 0.$$

Il est facile alors de vérifier que le moment de transition (l'instant où on passe de  $u = -1$  à  $u = 1$ ) est donné par :

$$t_{trans} = v_o + \sqrt{\frac{v_o^2}{2} + h_o}.$$

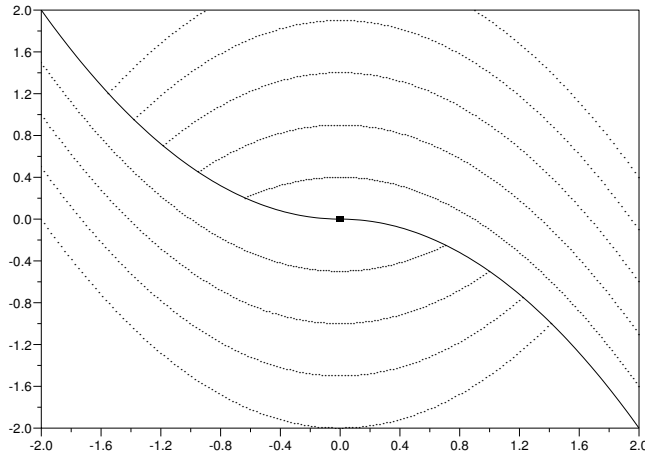


FIGURE 3.1 – Synthèse des trajectoires en temps minimal : exemple 11

Dans fig. 3.1, on se place dans le repère  $(h, v)$ . On représente en trait plein la courbe  $C_1 \cup C_2$ , et en pointillé les trajectoires en temps minimal avec un changement de signe pour le contrôle.

## 3.4 Commande des systèmes linéaires à coût quadratique

### 3.4.1 Définition du problème

Considérons le *système* linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x^o. \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$  dont les coefficients dépendent éventuellement de  $t$ ,  $B$  est une matrice  $n \times m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Nous cherchons à déterminer la commande  $u$  qui permet de :

1. stabiliser le système au voisinage d'une trajectoire de référence  $(\tilde{x}(\cdot))$  connue,
2. stabiliser plus particulièrement l'instant terminal  $x(T)$  au voisinage de  $\tilde{x}(T)$ ,
3. réaliser 1. et 2. avec un coût énergétique raisonnable.

Ceci s'interprète comme un problème de commande optimale ( $\mathcal{P}_{quad}$ ) où on cherche à minimiser le critère suivant :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) &= \frac{1}{2}(x_u(T) - \tilde{x}(T))^t F(x_u(T) - \tilde{x}(T)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T u^t G u dt + \frac{1}{2} \int_0^T (x_u - \tilde{x})^t Q (x_u - \tilde{x}) dt, \end{aligned}$$

où  $x_u$  est la solution de (3.18) associée à  $u$ . Les matrices  $F, G, Q$  sont symétriques définies positives, l'application  $u \mapsto J(x_u, u)$  est donc une forme quadratique continue sur  $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ ; l'hypothèse sur  $G$  implique de plus que cette application est coercive sur  $V$  :

$$J(x_u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

où  $\alpha > 0$  est la plus petite valeur propre de  $G$ . On en déduit donc l'existence et l'unicité de la commande optimale  $\bar{u}$ . Notons  $\bar{x}$  son état associé.

### 3.4.2 Conditions d'optimalité

En appliquant le principe de Pontryagin, nous obtenons la caractérisation suivante de  $\bar{u}$ . Il existe un état adjoint  $\bar{p}$  solution de l'équation différentielle rétrograde :

$$\begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) &= A^t \bar{p}(t) + Q(\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)) \text{ sur } ]0, T[, \\ \bar{p}(T) &= F(\bar{x}(T) - \tilde{x}(T)), \end{cases}$$

tel que

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{u \in \mathbb{R}} H(\bar{x}(t), u, \bar{p}(t))$$

où  $H(x, u, p) = \frac{1}{2} \langle x - \tilde{x}, Q(x - \tilde{x}) \rangle_n + \frac{1}{2} \langle u, Gu \rangle_m + \langle p, Bu \rangle_n$ . On en déduit que la commande optimale du problème est définie par :

$$\bar{u}(t) = -G^{-1}B^t\bar{p}(t) \quad t \in (0, T). \quad (3.19)$$

Pour déterminer la commande optimale il faut donc intégrer le système couplé *équation d'état-équation adjointe* :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} - BG^{-1}B^t\bar{p} & \bar{x}(0) = x^o \\ -\dot{\bar{p}} &= A^t\bar{p} + Q(\bar{x} - \tilde{x}) & \bar{p}(T) = F(\bar{x}(T) - \tilde{x}(T)). \end{cases} \quad (3.20)$$

C'est un système de  $2n$  équations différentielles avec des conditions aux deux extrémités de l'intervalle  $[0, T]$ . Ce type de problèmes est appelé “*problème aux deux bouts*.”

**Remarque 5.** La loi (3.19) donnant la commande optimale montre que  $\bar{u}$  hérite de la régularité de l'état adjoint  $\bar{p}$  dont on sait déjà que, comme l'état  $\bar{x}$ , il appartient à  $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  et donc est continu sur  $[0, T]$ . Par récurrence sur le système (3.20) on établit que  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$  sont infiniment dérivables sur  $[0, T]$  et donc aussi la commande optimale :  $\bar{u} \in C^\infty(0, T)$ .

### 3.4.3 Equation de Riccati. Loi de feedback

La loi (3.19) montre que la commande optimale est une fonction de l'état adjoint. En fait, nous pouvons aussi démontrer que la commande optimale permettant de stabiliser le système (3.18) est une fonction qui dépend à chaque instant  $t$  de l'état  $\bar{x}(t)$  dans lequel se trouve le système à cet instant. Plus précisément, nous avons le théorème ci-dessous. (Pour simplifier l'analyse, nous supposons dans toute la suite de cette section que  $\tilde{x} \equiv 0$ )

**Théorème 14.** *Le problème de commande optimale linéaire-quadratique ( $\mathcal{P}_{quad}$ ) admet une solution unique donnée par*

$$\bar{u}(t) = -G^{-1}B^tS(t)\bar{x}(t), \quad (3.21)$$

où la matrice  $S(t)$  est l'unique solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\dot{S} = SA + A^tS + Q - SBG^{-1}B^tS & \text{sur } (0, T) \\ S(T) = F \end{cases} \quad (3.22)$$

De plus, pour tout  $t \in [0, T]$ , la matrice  $S(t)$  est symétrique semi-définie positive, et même définie positive si  $F$  l'est.

**Remarque 6.** L'équation (3.22) est appelée *équation de Riccati*. La commande  $\bar{u}$  est une fonction de l'état  $\bar{x}$ . Ce type de commande est appelé “*commande feedback*” ou “*contrôle feedback*”.

Pour prouver le théorème, on observe d'abord que les équations différentielles décrivant l'évolution de l'état et de l'état adjoint étant linéaires, la solution  $(x(t), p(t))$  dépend linéairement de la condition initiale  $x^o$ ; il existe donc deux applications linéaires  $X$  et  $\Pi$  de classe  $C^\infty$  à valeurs dans l'ensemble des matrices  $n \times n$  telles que :

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t)x^o, \quad \text{avec } X(0) = I_n \text{ (matrice identité d'ordre } n) \\ p(t) &= \Pi(t)x^o. \end{aligned}$$

Montrons que  $X(t)$  est inversible pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 4.** Supposons qu'il existe un instant  $t_0 \in [0, T]$  tel que la solution du système (3.20) vérifie  $\bar{x}(t_0) = 0$ ; alors

$$\bar{x}(t) \equiv \bar{p}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$$

**Démonstration.** On établit l'identité

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t), \bar{p}(t) \rangle_n = \langle \dot{\bar{x}}(t), \bar{p}(t) \rangle_n + \langle \bar{x}(t), \dot{\bar{p}}(t) \rangle_n = -\langle BG^{-1}B^t \bar{p}(t), \bar{p}(t) \rangle_n - \langle \bar{x}(t), Q\bar{x}(t) \rangle_n$$

d'où, en intégrant entre  $t_0$  et  $T$ , on déduit

$$\langle \bar{x}(t_0), \bar{p}(t_0) \rangle_n = \langle \bar{x}(T), F\bar{x}(T) \rangle_n + \int_0^T [\langle G^{-1}B^t \bar{p}(t), B^t \bar{p}(t) \rangle_n + \langle \bar{x}(t), Q\bar{x}(t) \rangle_n] dt. \quad (3.23)$$

Puisque tous les termes du second membre sont positifs ou nuls d'après les hypothèses faites sur les matrices  $F, G$  et  $Q$ , il est clair que, si  $\bar{x}(t_0) = 0$ ,

$$\bar{p}(T) = F\bar{x}(T) = 0 \quad \text{et} \quad B^t \bar{p}(t) = Q\bar{x}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Le système d'optimalité se réduit alors à

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x}, & \bar{x}(t_0) &= 0 \\ \dot{\bar{p}} &= -A^t \bar{p}, & \bar{p}(T) &= 0 \end{cases}$$

Ce qui implique que  $\bar{x} \equiv \bar{p} \equiv 0$  sur  $[t_0, T]$ . ■

On vient de montrer que s'il existe  $t_0 \in [0, T]$  tel que la solution de (3.20) vérifie  $\bar{x}(t_0) = X(t_0)x^o = 0$  alors  $\bar{x}(T) = 0$  et  $\bar{p}(T) = 0$ . D'après l'unicité de la solution du système différentiel linéaire gouvernant  $(\bar{x}, \bar{p})$  avec cette condition finale homogène (il s'agit cette fois-ci d'un problème de Cauchy rétrograde), cela entraîne que  $\bar{x} \equiv \bar{p} \equiv 0$  sur tout l'intervalle  $[0, T]$  et en particulier que  $x^o = 0$ , ce qui établit la non singularité de  $X(t)$  sur  $[0, T]$ . Par conséquent, on a

$$\bar{p}(t) = S(t)\bar{x}(t), \quad \text{où } S(t) = \Pi(t)X(t)^{-1}.$$

$S$  est une matrice  $n \times n$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T]$ , avec  $S(T) = F$ . On peut écrire :

$$\dot{\bar{p}} = \dot{S}\bar{x} + S\dot{\bar{x}} = (\dot{S} + SA - SBG^{-1}B^tS)\bar{x} = -A^tS\bar{x} - Q\bar{x}$$

d'où

$$(\dot{S}(t) + S(t)A + A^tS(t) + Q - S(t)BG^{-1}B^tS(t))\bar{x}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Cette relation est vérifiée quelque soit la condition initiale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ . Comme  $X(t)$  est inversible, pour tout  $t$  fixé,  $\bar{x}(t)$  décrit tout  $\mathbb{R}^n$  lorsque  $x^o$  décrit  $\mathbb{R}^n$ . On en déduit que  $S$  satisfait l'équation différentielle matricielle rétrograde :

$$-\dot{S} = SA + A^tS + Q - SBG^{-1}B^tS \quad \text{sur } (0, T)$$

avec la condition finale  $S(T) = F$ . ■

**Théorème 15.** Soit  $S(t)$  la solution symétrique de l'équation de Riccati et  $(\bar{u}, \bar{x})$  la solution optimale du problème  $(\mathcal{P})$ . On a :

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{1}{2} \langle x^o, S(0)x^o \rangle_n,$$

où  $x^o$  est la condition initiale de l'état.

**Démonstration.** Tenant compte de la définition de  $J$ , de (3.21) et de (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned} J(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \bar{x}, Q\bar{x} \rangle_n + \langle G^{-1}B^tS\bar{x}, B^tS\bar{x} \rangle_n] dt \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \bar{x}, (SBG^{-1}B^tS + Q)\bar{x} \rangle_n dt \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T \langle \bar{x}, (\dot{S} + SA + A^tS + 2Q)\bar{x} \rangle_n dt \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x} \rangle_n + 2\langle A^tS\bar{x} + Q\bar{x}, \bar{x} \rangle_n] dt. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\bar{p} \equiv S\bar{x}$  et  $-\dot{\bar{p}} = A^t\bar{p} + Q\bar{x} = A^tS\bar{x} + Q\bar{x}$ . Donc, on a :

$$\begin{aligned} J(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T [\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x} \rangle_n - 2\langle \bar{x}, \dot{\bar{S}}\bar{x} \rangle] dt \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n + \frac{1}{2} \int_0^T [-\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x} \rangle_n - \langle \bar{x}, S\dot{\bar{x}} \rangle_n - \langle \dot{\bar{x}}, S\bar{x} \rangle_n] dt \\ &= \frac{1}{2} \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \langle \bar{x}, S\bar{x} \rangle_n \end{aligned}$$

On conclut alors, en remarquant que

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \langle \bar{x}, S\bar{x} \rangle_n = \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T) \rangle_n - \langle \bar{x}(0), S(0)\bar{x}(0) \rangle_n,$$

et que  $\bar{x}(0) = x^o$ . ■

### 3.5 Annexe

#### Rappel sur les points de Lebesgue.

Soit  $L$  une fonction dans  $L^1(0, T)$  (fonction intégrable sur  $(0, T)$ ). On appelle point de Lebesgue de  $L$ , tout point  $t_o \in (0, T)$  vérifiant :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_o-\varepsilon}^{t_o+\varepsilon} L(t) dt = L(t_o).$$

Cette relation traduit une sorte de *continuité moyenne* des fonctions intégrables. Signalons que tous les points de  $(0, T)$  ne sont pas forcément des points de Lebesgue de la fonction  $L$ , par contre on a :

**Théorème 16.** *Supposons  $L \in L^1(0, T)$ , alors presque tous les points de  $(0, T)$  sont des points de Lebesgue pour la fonction  $L$ .*

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [4, p. 151]

**Lemme de Danskin** *Soit  $F : (x, u) \mapsto F(x, u)$  continue de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$ , et ayant une dérivée partielle  $F'_u$  continue sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Soit un compact  $C$  de  $\mathbb{R}^m$ . Posons*

$$v(x) = \min_{u \in C} F(x, u).$$

*Notons l'ensemble où le minimum est atteint par*

$$X(x) := \{u \in C; F(x, u) = v(x)\}.$$

*Alors  $v$  a des dérivées directionnelles d'expression*

$$v'(x, d) := \min_{u \in X(x)} F'_u(x, u) \cdot d.$$

# Chapitre 4

## Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Une approche intéressante pour la résolution des problèmes de commande optimale des systèmes dynamiques, consiste à remarquer d’abord que la fonction valeur (c’est à dire, la fonction qui à l’état initial associe la valeur minimale du problème de contrôle optimal) est solution, au sens de *viscosité*, d’une équation aux dérivées partielles dite *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB). Le grand avantage de cette approche est le fait qu’elle fournit un optimum global, ce qui est important pour les problèmes non convexes.

Ce chapitre a pour but de présenter un cadre théorique permettant de donner un sens précis à l’équation HJB. Ce cadre permet aussi l’analyse des schémas numériques associés au principe de programmation dynamique. Il couvre enfin de nombreuses extensions du problème standard de commande optimale, dont certaines sont présentées ici, comme la commande en horizon infini ou la commande impulsioonelle, mais aussi les problèmes de temps de sortie, ou encore les problèmes de commande stochastique, très importants dans un contexte de décision économique.

Dans toute la suite, et pour simplifier l’exposé des idées essentielles de la théorie Hamilton-Jacobi-Bellman, nous allons considérer un problème de commande en horizon infini. A la section 4.3, nous indiquerons comment adapter, à d’autres problèmes de commande, les résultats les plus importants.

Soit le problème de commande optimale en horizon infini

$$(\mathcal{P}_x) \quad \begin{cases} \text{Min } W(x, u) := \int_0^\infty \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt; \\ \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)), \quad t \in [0, +\infty[, \quad y_x(0) = x; \\ u(t) \in U \text{ p.p. } t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

L'état  $y_x(t)$  appartient à  $\mathbb{R}^n$  et la commande, ou contrôle,  $u(t)$  appartient à  $\mathbb{R}^m$ . Les données sont les fonctions coût distribué  $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et la dynamique  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , supposées dans la suite *lipschitziennes* et *bornées*, ainsi que l'ensemble des commandes  $U \subset \mathbb{R}^m$ , supposé compact, et le coefficient d'actualisation  $\lambda > 0$ . On convient de noter  $L_f$  la constante de Lipschitz de  $f$ , et de même pour les autres fonctions. La dépendance de  $y_x(t)$  par rapport à la commande est sous entendue, et doit donc être claire d'après le contexte.

Comme dans le chapitre précédent, nous noterons par  $\mathcal{U}$  l'ensemble des commandes admissibles :

$$\mathcal{U} = \{u \in L_\infty(0, \infty); u(t) \in U, \text{ p.p. } t\}.$$

Le problème  $(\mathcal{P}_x)$  est paramétré par l'état initial  $x \in \mathbb{R}^n$ , sa valeur (infimum du critère parmi les couples  $(y, u)$  vérifiant les contraintes) sera notée

$$V(x) := \text{val}(\mathcal{P}_x) = \text{Min}_{u \in \mathcal{U}} W(x, u).$$

Nous allons vérifier que  $V(\cdot)$  est solution d'une certaine équation aux dérivées partielles. Ceci fournira un moyen de calcul de cette fonction et, indirectement, de la commande optimale.

## 4.1 Quelques résultats sur la fonction valeur.

### 4.1.1 Principe de la Programmation Dynamique (DPP)

Le résultat suivant est une première étape dans la théorie HJB. Il exprime le fait que le choix d'une stratégie pour  $t \in ]\tau, \infty[$  ne dépend que de la position de l'état à l'instant  $t = \tau$ .

**Théorème 17.** *La fonction valeur  $V(\cdot)$  du problème  $(\mathcal{P}_x)$  satisfait, pour tout  $\tau \in ]0, \infty[$  :*

$$V(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} \right\}. \quad (4.1)$$



**Démonstration.** Notons  $v^*(x)$  le membre de droite de l'égalité ci-dessus. Le coût  $W(x, u)$ , associé à l'état initial  $x$  et à une commande  $u \in \mathcal{U}$ , satisfait

$$\begin{aligned} W(x, u) &= \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + \int_\tau^\infty \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt, \\ &\geq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau} \int_0^\infty \ell(y_x(t + \tau), u(t + \tau)) e^{-\lambda t} dt, \\ &\geq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau}. \end{aligned}$$

Minimisant chaque membre par rapport à  $u$ , il vient  $V(x) \geq v^*(x)$ . Pour montrer l'inégalité inverse, fixons  $\epsilon > 0$  et soit  $u_\epsilon$  une solution  $\epsilon$ -optimale du problème de minimisation dans (4.1). On a donc

$$v^*(x) \geq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u_\epsilon(t)) e^{-\lambda t} dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} - \epsilon.$$

On peut prolonger  $u_\epsilon$  sur  $] \tau, +\infty[$  par une fonction  $\epsilon$ -optimale, encore notée  $u_\epsilon$ , pour le problème  $(\mathcal{P}_{y_x(\tau)})$ ; alors

$$v^*(x) \geq \int_0^\infty \ell(y_x(t), u_\epsilon(t)) e^{-\lambda t} dt - 2\epsilon = W(x, u_\epsilon) - 2\epsilon \geq V(x) - 2\epsilon.$$

Puisque  $\epsilon$  peut être pris arbitrairement petit, ceci entraîne  $v^*(x) \geq V(x)$ , d'où le théorème. ■

**Remarque.** Le principe de programmation dynamique peut se formuler ainsi : la valeur optimale est égale à l'infimum de la somme du coût de transition entre les états aux instants 0 et  $\tau$  et de la valeur actualisée en l'état à l'instant  $\tau$ .

### 4.1.2 Continuité uniforme de la valeur

Dans la suite, nous utiliserons plusieurs fois le type d'inégalité qui suit, facile à démontrer :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} V(x', u) - \inf_{u \in \mathcal{U}} V(x, u) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}} \{V(x', u) - V(x, u)\}. \quad (4.2)$$

**Lemme 5.** *La fonction valeur  $V(\cdot)$  est uniformément continue.*

**Démonstration.** Puisque  $f$  est lipschitzienne, la quantité

$$\lambda_0 := \sup_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ x \neq x'}} \frac{(f(x', u) - f(x, u)) \cdot (x' - x)}{|x' - x|^2} \quad (4.3)$$

est finie. Montrons que deux trajectoires associées à la même commande  $u$  satisfont la relation

$$|y_{x'}(t) - y_x(t)| \leq |x' - x|e^{\lambda_0 t}. \quad (4.4)$$

En effet, posant  $z(t) := y_{x'}(t) - y_x(t)$ , il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 = z(t) \cdot \dot{z}(t) \leq \lambda_0 |z(t)|^2,$$

et donc  $|z(t)|^2 \leq e^{2\lambda_0 t} |x' - x|^2$ , d'où (4.4). Par ailleurs, (4.2) s'écrit

$$V(x') - V(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\infty [\ell(y_{x'}(t), u(t)) - \ell(y_x(t), u(t))] e^{-\lambda t} dt \right\}.$$

Soit  $T > 0$ . Notons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^T [\ell(y_{x'}(t), u(t)) - \ell(y_x(t), u(t))] e^{-\lambda t} dt, \\ \Delta_2 &:= \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_T^\infty [\ell(y_{x'}(t), u(t)) - \ell(y_x(t), u(t))] e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Alors  $V(x') - V(x) \leq \Delta_1 + \Delta_2$ . Supposant sans perte de généralité  $\lambda_0 > \lambda$  (il suffit que  $\lambda_0$  majore le membre de droite de (4.3)), nous obtenons avec (4.4)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq L_\ell \int_0^T |x' - x| e^{(\lambda_0 - \lambda)t} dt = L_\ell \frac{e^{(\lambda_0 - \lambda)T} - 1}{\lambda_0 - \lambda} |x' - x|, \\ \Delta_2 &\leq 2 \int_T^\infty \|\ell\|_\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda T} \|\ell\|_\infty. \end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que,  $\epsilon > 0$  étant donné, on peut fixer  $T$  de manière que  $\Delta_2 < \frac{1}{2}\epsilon$ , puis  $\alpha > 0$  tel que  $\Delta_1 < \frac{1}{2}\epsilon$  dès que  $|x' - x| < \alpha$ . Ainsi  $V(x') \leq V(x) + \epsilon$  quand  $|x' - x| < \alpha$ . Par symétrie de  $x$  et  $x'$ , on a donc  $|V(x') - V(x)| < \epsilon$  quand  $|x' - x| < \alpha$ , ce qui prouve la continuité uniforme de  $x$ . ■

**Remarque 7.** Un calcul plus précis permet de vérifier que  $V$  est höldérienne. En effet, si  $x'$  est tel que  $|x' - x| < 1$ , choisissons  $T$  tel que  $e^{-T} = |x' - x|^{\frac{1}{\lambda_0}}$ . Alors les quantités  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de la démonstration se majorent ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{L_\ell}{\lambda_0 - \lambda} |x' - x| \left( |x' - x|^{\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1} - 1 \right) \leq \frac{L_\ell}{\lambda_0 - \lambda} |x' - x|^{\frac{\lambda}{\lambda_0}}, \\ \Delta_2 &\leq \frac{2}{\lambda} \|\ell\|_\infty |x' - x|^{\frac{\lambda}{\lambda_0}}, \end{aligned}$$

et donc

$$|V(x') - V(x)| \leq \left( \frac{L_\ell}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{2}{\lambda} \|\ell\|_\infty \right) |x' - x|^{\frac{\lambda}{\lambda_0}},$$

d'où le résultat cherché.

Soit  $BUC(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions bornées et uniformément continues sur  $\mathbb{R}^n$ . Le principe de programmation dynamique a la forme d'une relation de point fixe  $V = TV$ , où  $T$  est l'opérateur de  $BUC(\mathbb{R}^n)$  défini par

$$Tv(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + v(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} \right\}. \quad (4.5)$$

**Proposition 3.** *L'opérateur  $T$  est une contraction de  $BUC(\mathbb{R}^n)$  dans lui même, de rapport  $e^{-\lambda \tau}$ .*

**Démonstration.** Soient  $v$  et  $v'$  dans  $BUC(\mathbb{R}^n)$ . Par une majoration similaire à (4.2), il vient

$$(Tv')(x) - (Tv)(x) \leq \sup_{u \in \mathcal{U}} e^{-\lambda \tau} \left[ v'(y_x(\tau)) - v(y_x(\tau)) \right] \leq e^{-\lambda \tau} \|v - v'\|_\infty,$$

d'où le résultat. ■

Puisqu'une contraction a, d'après le théorème de Banach Picard, un unique point fixe, cette proposition a deux conséquences importantes : d'une part, le principe de programmation dynamique caractérise la fonction valeur  $V$  ; d'autre part, on peut calculer  $V$  par l'algorithme de point fixe : former la suite  $V_{k+1} = TV_k$ , en partant de  $V_0$  quelconque. Naturellement, un tel algorithme n'est implémentable qu'après discrétisation de l'espace.

## 4.2 Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

### 4.2.1 Point de vue formel

Introduisons l'Hamiltonien  $H$  et le Hamiltonien minimisé  $\mathcal{H}$

$$H(x, u, p) := \ell(x, u) + p \cdot f(x, u), \quad (4.6)$$

$$\mathcal{H}(x, p) := \min_{u \in U} H(x, u, p). \quad (4.7)$$

**Lemme 6.** *La fonction  $\mathcal{H}$  est continue, convexe par rapport à  $p$ , et de plus*

$$|\mathcal{H}(x, p') - \mathcal{H}(x, p)| \leq \left( \max_{u \in U} \|f(x, u)\| \right) \|p' - p\|. \quad (4.8)$$

**Démonstration.** Etant un supremum de fonctions affines de  $p$  sur un compact,  $\mathcal{H}$  est convexe par rapport à  $p$ . De plus

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p') - \mathcal{H}(x, p) &= \min_{u \in U} H(x, u, p') - \min_{u \in U} H(x, u, p), \\ &\leq \max_{u \in U} (H(x, u, p') - H(x, u, p)), \\ &= \max_{u \in U} [(p - p') \cdot f(x, u)] \leq \left( \max_{u \in U} \|f(x, u)\| \right) \|p' - p\|. \end{aligned}$$

Par symétrie de  $p$  et  $p'$ , on déduit (4.8). Nous laissons le lecteur vérifier la continuité de  $\mathcal{H}$ . ■

Supposons  $V$  différentiable en un point  $x$ . Soit  $u_0 \in U$ . Fixons  $u(t) = u_0$ , pour tout  $t \geq 0$ ; alors l'état associé vérifie

$$y_x(t) = x + tf(x, u_0) + o(t),$$

d'où

$$V(y_x(t)) = V(x) + tDV(x) \cdot f(x, u_0) + o(t),$$

et donc, d'après le DPP, pour tout  $\tau > 0$  :

$$\begin{aligned} V(x) &\leq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u_0) e^{-\lambda t} dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau}, \\ &= \tau \ell(x, u_0) + [V(x)(1 - \lambda \tau) + tDV(x) \cdot f(x, u_0)] + o(t), \\ &= V(x) + \tau [H(x, u_0, DV(x)) - \lambda V(x)] + o(\tau). \end{aligned}$$

Faisant tendre  $\tau$  vers 0, il vient

$$\lambda V(x) - H(x, u_0, DV) \leq 0. \quad (4.9)$$

Ceci étant vrai pour tout  $u_0 \in U$ , minimisant par rapport à  $u$ , il vient

$$\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, DV(x)) \leq 0. \quad (4.10)$$

Si de plus il existe une trajectoire optimale  $\bar{u}(t)$  continue en 0, notant  $y_x(t)$  l'état associé, alors :

$$V(x) = \int_0^s \ell(y_x(t), \bar{u}(t)) dt + V(y_x(s)) e^{-\lambda s},$$

d'où par des calculs similaires

$$\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, DV(x)) = 0. \quad (4.11)$$

Combinant à (4.10) nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 18.** *Si  $V$  est différentiable en  $x$ , et s'il existe une trajectoire optimale continue en  $x$ , alors*

$$\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, DV(x)) = 0.$$

**Définition 6.** *On appellera équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) l'équation*

$$\lambda v(x) - \mathcal{H}(x, Dv(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.12)$$

*dans laquelle l'inconnue est la fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Remarque 8.** Dans la preuve du théorème 18, nous avons utilisé une hypothèse forte sur la régularité de la fonction  $V$  : elle a été supposée de classe  $C^1$ . En général, cette hypothèse n'est pas satisfaite. Nous allons cependant montrer dans les sections suivantes que  $V(\cdot)$  est solution de l'équation (HJB) en un sens généralisé.

Supposons encore que  $V$  est régulière et montrons comment, à partir de la connaissance de  $V$ , on peut obtenir la commande optimale solution du problème  $(\mathcal{P}_x)$ .

**Théorème 19.** *Supposons que  $V$  est de classe  $C^1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . S'il existe  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  un contrôle admissible vérifiant : pour presque tout  $t \in (0, +\infty)$*

$$H(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t), D_x V(\bar{y}_x(t))) = \min_{v \in U} H(\bar{y}_x(t), v, D_x V(\bar{y}_x(t))), \quad (4.13)$$

*où  $\bar{y}_x$  est la trajectoire associée à  $\bar{u}$  et vérifiant :  $\bar{y}(0) = x$ . Alors  $\bar{u}$  est un contrôle optimal pour le problème  $(\mathcal{P}_x)$ .*

**Démonstration.** Puisque la fonction valeur est solutions de l'équation HJB, et tenant compte de (4.13), il vient que pour presque tout  $t \in (0, +\infty)$ , on a :

$$\lambda V(\bar{y}_x(t)) - H(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t), D_x V(\bar{y}_x(t))) = \lambda V(\bar{y}_x(t)) - \min_{v \in U} H(\bar{y}_x(t), v, D_x V(\bar{y}_x(t))) = 0,$$

ou encore

$$\ell(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t)) = \lambda V(\bar{y}_x(t)) - f(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t)) \cdot D_x V(\bar{y}_x(t)).$$

Comme  $\lambda > 0$ , on obtient

$$-\frac{d[e^{-\lambda t} V(\bar{y}_x(t))]}{dt} = e^{-\lambda t} \ell(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t)) \quad \text{p.p } t \in (0, +\infty).$$

Et en intégrant sur  $(0, +\infty)$ , on conclut que

$$\min(\mathcal{P}_x) =: V(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \ell(\bar{y}_x(t), \bar{u}(t)) dt = J(\bar{y}_x, \bar{u}).$$

Ce qui prouve que  $\bar{u}$  est un contrôle optimal (global) du problème  $(\mathcal{P}_x)$ . ■

### 4.2.2 Solutions de viscosité

Nous donnons maintenant un sens rigoureux à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) abstraite définie (de manière générale) par :

$$\mathcal{F}(x, v(x), D_x v(x)) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.14)$$

où  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  est continue. Pour cela, introduisons les dérivées au sens généralisé en un point  $x_o \in \mathbb{R}^n$ . Pour toute fonction  $v : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  Lipschitzienne, on définit les ensembles :

$$D^-v(x_o) := \left\{ q \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{y \rightarrow x_o} \frac{v(y) - v(x_o) - \langle q, y - x_o \rangle}{|y - x_o|} \geq 0 \right\}$$

$$D^+v(x_o) := \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{y \rightarrow x_o} \frac{v(y) - v(x_o) - \langle p, y - x_o \rangle}{|y - x_o|} \leq 0 \right\},$$

appelés respectivement, le sous-différentiel et le sur-différentiel.

**Définition 7.** (i) La fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  est sous-solution de viscosité de (4.14) si

$$\mathcal{F}(x_o, v(x_o), p) \leq 0 \quad \forall x_o \in \mathbb{R}^n, \forall p \in D^+v(x_o).$$

(ii)  $v$  est sur-solution de viscosité de (4.14) si,

$$\mathcal{F}(x_o, v(x_o), q) \geq 0 \quad \forall x_o \in \mathbb{R}^n, \forall q \in D^-v(x_o)$$

Cette définition suggère simplement de prendre les dérivées dans un sens plus général que les dérivées au sens de fréchet. La notion de viscosité peut être aussi formulée en termes "de fonctions tests" de la manière suivante :

**Définition 8.** (i) La fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  est sous-solution de viscosité de (4.14) si, pour tout  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , si  $x_0$  est un point de maximum local de  $v - \Phi$ , alors

$$\mathcal{F}(x_0, v(x_0), D\Phi(x_0)) \leq 0. \quad (4.15)$$

(ii)  $v$  est sur-solution de viscosité de (4.14) si, pour tout  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , si  $x_0$  est un point de minimum local de  $v - \Phi$ , alors

$$\mathcal{F}(x, v(x_0), D\Phi(x_0)) \geq 0. \quad (4.16)$$

L'équivalence des deux définition est une conséquence rapide du lemme suivant :

**Lemme 1.** Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue :

i)  $p \in D^+v(x_o)$  ssi il existe une fonction  $\Phi \in C^1(\Omega)$  tel que  $D\Phi(x_o) = p$  et  $v - \Phi$  admet un maximum local en  $x_o$ .

ii)  $q \in D^-v(x_o)$  ssi il existe une fonction  $\Phi \in C^1(\Omega)$  tel que  $D\Phi(x_o) = q$  et  $v - \Phi$  admet un minimum local en  $x_o$ .

**Remarque 9.** (i) Si  $v$  est dérivable en  $x_0$ , on a nécessairement  $D\Phi(x_0) = Dv(x_0)$ . En particulier si  $v$ , sous solution au sens de viscosité, est partout dérivable, alors c'est une sous solution de (4.14) au sens classique, c.a.d.

$$\mathcal{F}(x, v(x), Dv(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.17)$$

(ii) On peut toujours supposer que  $v(x_0) = \Phi(x_0)$ , et donc localement,  $v \leq \Phi$ .  
 (iii) Si  $v$  une fonction continue  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction du type  $\Phi(x) = \varepsilon^{-1} \|x - x_0\|^2$  a, pour  $\varepsilon > 0$  petit, un maximum local en  $x_\varepsilon$  tel que  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$ . L'ensemble des points concernés par la définition est donc dense.

En posant  $\mathcal{F}(x, u, p) = \lambda u - \mathcal{H}(x, p)$ , on voit bien que l'équation (4.12) est bien de la forme :  $\mathcal{F}(x, v(x), D_x v(x)) = 0$ . De plus, du lemme 6, on a que  $\mathcal{F}$  est continue. Nous pouvons donc utiliser la notion de viscosité pour donner un sens rigoureux à une solution (non dérivable) de (4.12).

**Théorème 20.** *La fonction valeur  $V$  du problème  $(\mathcal{P}_x)$  est solution de viscosité de (4.12).*

**Démonstration.** Le principe de la démonstration est de montrer que  $V(\cdot)$  est sous solution en majorant  $V(\cdot)$  grâce au principe de programmation dynamique, avec une commande constante sur un petit intervalle de temps, puis de montrer que  $V(\cdot)$  est sur solution en utilisant encore le principe de programmation dynamique.

a) Montrons que  $V(\cdot)$  est sous solution. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , telle que  $x$  est point de maximum local de  $V - \Phi$ . On peut supposer que  $V(x) = \Phi(x)$ . D'après le principe de la programmation dynamique avec la commande constante  $u(t) = u_0 \in U$ , on a pour tout  $\tau > 0$  :

$$V(x) \leq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u_0) e^{-\lambda t} dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau}.$$

Si  $\tau$  est assez petit, alors  $y_x(\tau)$  est proche de  $x$ , donc  $V(y_x(\tau)) \leq \Phi(y_x(\tau))$ , ce qui implique

$$\Phi(x) \leq \int_0^\tau \ell(y_x(t), u_0) e^{-\lambda t} dt + \Phi(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau}. \quad (4.18)$$

Or  $y_x(\tau) = x + \tau f(x, u_0) + o(\tau)$ , donc

$$\begin{aligned} \Phi(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} &= \Phi(x) + \tau [D\Phi(x) f(x, u) - \lambda \Phi(x)] + o(\tau), \\ \int_0^\tau \ell(y_x(t), u_0) e^{-\lambda t} dt &= \tau \ell(x, u_0) + o(\tau), \end{aligned}$$

d'où avec (4.18) quand  $\tau \downarrow 0$ , et puisque  $\Phi(x) = V(x)$  :

$$\lambda V(x) - H(x, u_0, D\Phi(x)) \leq 0.$$

Minimisant par rapport à  $u_0 \in U$ , nous obtenons  $\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, D\Phi(x)) \leq 0$ , comme il fallait le montrer.

b) Montrons maintenant que  $V(\cdot)$  est sur-solution. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , telle que  $x$  est point de minimum local de  $V - \Phi$ . On peut supposer que  $V(x) = \Phi(x)$ . Soit  $\tau > 0$  assez petit pour que, quel que soit la commande  $u$ ,  $y_x(\tau)$  soit assez proche de  $x$  pour que  $V(y) \geq \Phi(y)$  (ceci est possible car  $U$  est compact et  $f$  est continue). Avec le principe de programmation dynamique, il vient

$$\Phi(x) \geq \inf_{u \in \mathcal{U}} \left[ \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + \Phi(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} &= \Phi(x) + \int_0^\tau \left[ \frac{d}{dt} \Phi(y_x(t)) e^{-\lambda t} \right] dt, \\ &= \Phi(x) + \int_0^\tau [D\Phi(y_x(t)) \cdot f(y_x(t)) - \lambda \Phi(y_x(t))] e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'inégalité précédente comme

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left[ \int_0^\tau [\lambda \Phi(y_x(t)) - H(y_x(t), u(t), D\Phi(y_x(t)))] e^{-\lambda t} dt \right] \geq 0.$$

Cette inégalité implique

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \left[ \int_0^\tau \left[ \lambda \Phi(y_x(t)) + \sup_{\hat{u} \in U} [-H(y_x(t), \hat{u}, D\Phi(y_x(t)))] \right] e^{-\lambda t} dt \right] \geq 0.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, il faut bien distinguer la commande  $u(t)$  à laquelle est associée la trajectoire  $y_x(t)$ , et la maximisation à chaque instant par rapport à  $\hat{u} \in U$ . On peut réécrire cette inégalité comme

$$\sup_u \left[ \int_0^\tau [\lambda \Phi(y_x(t)) - \mathcal{H}(y_x(t), D\Phi(y_x(t)))] e^{-\lambda t} dt \right] \geq 0.$$

Quand  $\tau \downarrow 0$ , on a  $y_x(t) \rightarrow x$  uniformément par rapport à  $u$ , et donc (puisque  $\mathcal{H}$  est lipschitzien)  $\mathcal{H}(y_x(t), D\Phi(y_x(t))) \rightarrow \mathcal{H}(x, D\Phi(x))$  uniformément, d'où  $\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, D\Phi(x)) \geq 0$ , qui est l'inégalité cherchée.  $\blacksquare$

Bien que  $V$  soit continue, il est utile d'introduire la notion de fonction semi continue, qui interviendra d'une manière essentielle dans l'analyse de convergence des schémas



discrets. (On verra qu'on ne sait pas toujours montrer d'une manière directe que les fonctions valeur du problème discrétisé en temps convergent vers une fonction continue. Par contre on peut toujours prendre des limites supérieures et inférieures, et celles-ci sont semi continues supérieurement et inférieurement).

**Définition 9.** On dit que la fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est semi continue supérieurement (s.c.s.) (resp. semi continu inférieurement (s.c.i.)) si pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a

$$v(x) \geq \limsup_{x' \rightarrow x} v(x'), \quad \left( \text{resp. } v(x) \leq \liminf_{x' \rightarrow x} v(x') \right).$$

**Remarque 10.** On peut exprimer les propriétés précédentes à l'aide de suites convergentes vers  $x$ . Ainsi, la fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est s.c.s. ssi, pour toute suite  $x_k$  convergent vers  $x$ , on a  $v(x) \geq \limsup_k v(x_k)$ ; ou encore, si pour tout point d'adhérence  $v^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  de  $v(x^k)$ , on a  $v(x) \geq v^*$ . De même pour la semi continuité inférieure.

**Définition 10.** On dit que l'équation (4.12) vérifie un principe d'unicité fort si, pour toute sous solution  $u_1$  s.c.s. au sens de viscosité de (4.12), et pour toute sur solution  $u_2$  s.c.i. au sens de viscosité de (4.12), on a  $u_1 \leq u_2$ .

On verra dans l'étude de convergence des schémas numériques qu'il est nécessaire de considérer des sous-solutions s.c.s. et des sur-solutions s.c.i.

**Théorème 21.** L'équation (4.12) vérifie un principe d'unicité fort.

**Démonstration.** La démonstration dépassant le cadre de cet ouvrage, nous renvoyons à Bardi et Capuzzo-Dolcetta [1, Chapitre 2, section 2] pour ce point. ■

**Corollaire 1.** La fonction valeur  $V(\cdot)$  du problème  $(\mathcal{P}_x)$  est l'unique solution de viscosité continue de (4.12).

**Démonstration.** D'après le théorème 20,  $V(\cdot)$  est solution de viscosité continue dans  $\mathbb{R}^n$  de (4.12). Soit  $v$  une autre solution de viscosité continue. Le théorème 21 implique  $v \leq V$  et  $V \leq v$ , d'où  $v = V$ , de sorte que la solution au sens de viscosité est unique dans l'ensemble des fonctions continues. ■

## 4.3 Extension à d'autres types de problèmes

### 4.3.1 Problèmes dépendant du temps

Soit le problème de commande optimale en horizon infini, dont les données dépendent explicitement du temps :

$$(\mathcal{P}_x) \quad \begin{cases} \text{Min} \int_0^\infty \ell(y_x(t), u(t), t) e^{-\lambda t} dt; \\ \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t), t), \quad t \geq 0, \quad y_x(0) = x, \\ u(t) \in U \text{ p.p.} \end{cases}$$

On peut se ramener au cas de données autonomes (indépendantes du temps) en introduisant une variable d'état supplémentaire, de dérivée 1, qui sera égale au temps. En effet, notons  $\tilde{y} := (y, \tau)$ , avec  $\tau \in \mathbb{R}$ , et

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{y}, u) &:= (f(y, u), 1), \\ \tilde{\ell}(\tilde{y}, u) &:= \ell(y, u). \end{aligned}$$

Alors le problème suivant, où  $s \in \mathbb{R}$  :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{(x,s)}) \quad \begin{cases} \text{Min} \int_0^\infty \tilde{\ell}(\tilde{y}_{(x,s)}(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt; \\ \dot{\tilde{y}}_{(x,s)}(t) = \tilde{f}(\tilde{y}_{(x,s)}(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad \tilde{y}_{(x,s)}(0) = (x, s), \\ u(t) \in U \text{ p.p.} \end{cases}$$

est tel que  $(\tilde{\mathcal{P}}_{(x,0)})$  et  $(\mathcal{P}_x)$  ont même valeur associée  $V(x)$  et  $\tilde{V}(x, 0)$ , et de plus les ensembles des commandes  $\epsilon$ -optimales sont identiques pour tout  $\epsilon > 0$ . Quand  $f$  et  $\ell$  sont suffisamment régulières par rapport au temps, il suffit donc d'adapter les résultats de la section précédente pour obtenir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème  $(\mathcal{P}_{(x,s)})$ . On pose

$$\mathcal{H}(x, p, t) := \min_{u \in U} \{ \ell(x, u, t) + p \cdot f(x, u, t) \}.$$

**Théorème 22.** *Supposons les fonctions  $f$  et  $\ell$  bornées et lipschitziennes. Alors la fonction valeur  $\tilde{V}(x, s)$  du problème  $(\tilde{\mathcal{P}}_{x,s})$  est bornée et uniformément continue, et elle est solution au sens de viscosité de l'équation*

$$\lambda v(x, s) - D_s v(x, s) - \mathcal{H}(x, D_x v(x, s), s) = 0. \quad (4.19)$$

**Démonstration.** Les hypothèses sur  $f$  et  $\ell$  impliquent que les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{\ell}$  sont bornées et lipschitziennes. D'après le théorème 17,  $\tilde{V}$  est donc solution au sens de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante. Notons  $\tilde{p} := (p, q)$  avec  $q \in \mathbb{R}$ . Le hamiltonien du problème  $(\tilde{P}_{\tilde{x}})$  étant

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{x}, \tilde{p}) &:= \min_{u \in U} \{ \tilde{\ell}(\tilde{x}, u) + \tilde{p} \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, u) \}, \\ &= q + \mathcal{H}(x, p, s),\end{aligned}$$

l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman a pour expression (4.5). ■

Il est possible d'affaiblir les hypothèses de régularité par rapport au temps, mais il faut alors reprendre les démonstrations des théorèmes de la section précédente.

### 4.3.2 Problèmes avec horizon fini

Nous considérons le problème de commande optimale en horizon fini

$$(\mathcal{P}_{x,s}) \quad \begin{cases} \text{Min} \int_s^T \ell(y_x(t), u(t)) dt + \varphi(y_x(T)); \\ \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)), \quad t \in [s, T], \quad y_x(s) = x, \\ u(t) \in U \text{ p.p.} \end{cases}$$

Les données sont les fonctions coût distribué  $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , le coût final  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et la dynamique  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , supposées dans la suite *lipschitziennes* et *bornées*, ainsi que  $T > 0$ , et l'ensemble compact  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Le problème est paramétré par l'état initial  $x \in \mathbb{R}^n$  et l'instant initial  $s \in [0, T]$ , et sa valeur (infimum du critère parmi les couples  $(y, u)$  vérifiant les contraintes) est notée

$$V(x, s) := \text{val}(\mathcal{P}_{x,s}).$$

Il est clair que  $V(\cdot, T) = \varphi(\cdot)$ . La fonction  $V$  est donc solution d'une équation dynamique avec condition finale. Le problème  $(\mathcal{P}_{x,s})$  se traite par des méthodes analogues à celles du cas avec horizon infini. Nous résumons donc sans démonstration les résultats dans l'énoncé suivant :

**Théorème 23.** (i) *La fonction valeur  $V(x, s)$  du problème  $(\mathcal{P}_{x,s})$  est bornée et uniformément continue,*

(ii) *Elle satisfait, pour tout  $\tau \in ]s, T]$ , le principe de programmation dynamique*

$$V(x, s) = \inf_{u(\cdot)} \left\{ \int_s^\tau \ell(y_x(t), u(t)) dt + V(y_x(\tau), \tau) \right\}, \quad (4.20)$$

(iii) *La fonction  $V$  est l'unique solution de viscosité continue bornée de l'équation suivante :*

$$-\partial_t V(x, t) - \mathcal{H}(x, D_x V(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times ]0, T[, \quad (4.21a)$$

*et vérifiant :*

$$V(x, T) = \varphi(x). \quad (4.21b)$$

# Chapitre 5

## Approximation de l'équation HJB : cas horizon infini

Dans ce chapitre, on considère le problème à horizon infini :

$$(\mathcal{P}_x) \quad \begin{cases} \text{Min } W(x, u) := \int_0^\infty \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt; \\ \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)), \quad t \in [0, +\infty[, \quad y_x(0) = x; \\ u(t) \in U \text{ p.p. } t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

avec les mêmes hypothèses sur  $f$  et  $\ell$  que dans le chapitre 4.

Nous savons que la fonction valeur définie par :  $V(x) = \inf(\mathcal{P}_x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , vérifie un principe de programmation dynamique :

$$V(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^\tau \ell(y_x(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt + V(y_x(\tau)) e^{-\lambda \tau} \right\}. \quad (5.1)$$

De plus  $V$  est solution de viscosité de l'équation HJB suivante :

$$\lambda V(x) - \mathcal{H}(x, DV(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.2)$$

$$\text{où } \mathcal{H}(x, p) = \min_{u \in U} \left( \ell(x, u) + p \cdot f(x, u) \right).$$

### 5.1 Première Approximation

Soit  $\tau > 0$  un 'temps fictif'. On considère une approximation de l'équation (5.1) de la forme :

$$V^\tau(x) = \inf_{u \in U} \{ \ell(x, u) \tau + V^\tau(y_x(\tau)) (1 - \lambda \tau) \}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3)$$

♠ Ici  $y_x$  désigne la trajectoire qui évolue suivant la dynamique :

$$\dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u) \quad t \in (0, \tau); \quad y_x(0) = x, \quad (5.4)$$

où le contrôle est constant sur tout l'intervalle  $(0, \tau)$ .

♠ D'autres discrétisations sont possibles, comme par exemple :

$$V^\tau(x) = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x, u)\tau + V^\tau(y_x(\tau))e^{-\lambda\tau} \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3')$$

Ici on choisit de travailler avec (5.3) pour simplifier l'exposé.

La première chose que l'on doit vérifier est : L'équation (5.3) admet-elle une solution ? La réponse est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 24.** *L'équation (5.3) admet une solution unique  $V^\tau$ . De plus,  $V^\tau$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^n$  et on a :*

$$\|V^\tau\|_\infty \leq \lambda^{-1} \|\ell\|_\infty. \quad (5.5)$$

(Pour toute fonction  $g$  continue bornée sur  $\mathbb{R}^n$ , la notation  $\|g\|_\infty$  désigne la norme de  $g$  dans  $C_b(\mathbb{R}^n)$  définie par :  $\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|$ .)

Démonstration. La preuve se fait en 3 étapes :

*Etape 1 :* On peut vérifier facilement que la fonction valeur  $\tilde{V}^\tau$  du problème discret :

$$(P_x^\tau) \quad \begin{cases} \text{Min } J^\tau(x, (u^k)) := \tau \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda\tau)^k \ell(y_x(k\tau), u^k); \\ \dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u^k) \quad t \in ]k\tau, (k+1)\tau[, \quad y_x(0) = x, \\ u^k \in U \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

vérifie le principe (5.3).

*Etape 2 :* On vérifie ensuite que  $\tilde{V}^\tau$  est continue et bornée. Soient  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{V}^\tau(x) - \tilde{V}^\tau(x')| &\leq \sup_{u^k \in U, k=1, \dots} \tau \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - \lambda\tau)^k (\ell(y_x(k\tau), u^k) - \ell(y_{x'}(k\tau), u^k))] \\ &\leq \sup_{u^k \in U, k=1, \dots, M} \tau \sum_{k=0}^M [(1 - \lambda\tau)^k (\ell(y_x(k\tau), u^k) - \ell(y_{x'}(k\tau), u^k))] \\ &\quad + \sup_{u^k \in U, k=M+1, \dots} \tau \sum_{k=M+1}^{\infty} [(1 - \lambda\tau)^k (\ell(y_x(k\tau), u^k) - \ell(y_{x'}(k\tau), u^k))] \\ &:= \Delta_1 + \Delta_2 \quad (\text{pour } M \geq 1). \end{aligned}$$

Puisque  $\ell$  est bornée et du fait que  $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda\tau)^k < \infty$ , on a :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=M}^{\infty} (1 - \lambda\tau)^k (\ell(y_x(k\tau), u^k) - \ell(y_{x'}(k\tau), u^k)) \rightarrow 0.$$

On conclut que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M \geq 1$  tel que  $\Delta_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Pour ce  $M > 0$  fixé, vu que  $f$  est Lipschitzienne, en refaisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 5, on obtient l'existence de  $\eta > 0$  tel que :  $\Delta_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$  dès que  $|x - x'| < \eta$ . On a donc :

$$|\tilde{V}^\tau(x) - \tilde{V}^\tau(x')| < \varepsilon, \quad \text{si } |x - x'| < \eta.$$

L'uniforme continuité est alors prouvée. De plus, prenons  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$|\tilde{V}^\tau(x)| \leq \|\ell\|_\infty \sum_k \tau (1 - \lambda\tau)^k \leq \lambda^{-1} \|\ell\|_\infty.$$

Ce qui prouve bien que  $\tilde{V}^\tau$  est bien bornée.

*Etape 3 :* Maintenant on construit l'opérateur  $\mathcal{T} : C_b(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$ , défini par :

$$\mathcal{T}W(x) := \inf_{u \in U} \{ \tau \ell(x, u) + (1 - \lambda\tau)W(y_x(\tau)) \}, \quad y_x \text{ vérifie (5.4)}.$$

Supposons que  $0 < 1 - \lambda\tau < 1$  et considérons  $W_1, W_2 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}W_1(x) - \mathcal{T}W_2(x)| &\leq \sup_{u \in U} (1 - \lambda\tau) |W_1(y_x(\tau)) - W_2(y_x(\tau))| \\ &\leq \sup_{u \in U} (1 - \lambda\tau) \|W_1 - W_2\|_\infty \\ &\leq (1 - \lambda\tau) \|W_1 - W_2\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\|\mathcal{T}W_1 - \mathcal{T}W_2\|_\infty \leq (1 - \lambda\tau) \|W_1 - W_2\|_\infty.$$

D'où  $\mathcal{T}$  est  $(1 - \lambda\tau)$ -contractant, ce qui implique que  $\mathcal{T}$  admet un unique point fixe  $V^\tau$  dans  $C_b(\mathbb{R}^n)$ . On déduit des étapes 1 et 2 que  $V^\tau = \tilde{V}^\tau$ . ■

Nous nous intéressons maintenant au lien qu'il y a entre la résolution de (5.3) et celle du problème de contrôle optimal discret  $(\mathcal{P}_x^\tau)$ . Plus précisément, supposons que l'on sache résoudre (5.3), comment peut-on déduire, à partir de  $V^\tau$ , la trajectoire optimale qui part du point  $x$  et le contrôle optimal associé ?

1. on considère la valeur optimale<sup>1</sup>

$$\left\| u_x^{*,0} = \operatorname{argmin}_{u \in U} \{ \tau \ell(x, u) + (1 - \lambda \tau) V^\tau(y_x(\tau)) \} \right.$$

où  $y_x$  est l'état associée au contrôle constant  $u$ , solution de :

$$\dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u), \quad \text{pour } t \in (0, \tau), \quad y_x(0) = x.$$

On note aussi  $\boxed{y^{*,0} = x}$  et  $\boxed{y^{*,1} = y_x^*(\tau)}$  où  $y_x^*$  est l'état associé au contrôle constant  $u^{*,0}$ .

2. Pour  $k = 1, 2, \dots$ , on construit

$$\left\| u_x^{*,k} = \operatorname{argmin}_{u \in U} \{ \tau \ell(x, u) + (1 - \lambda \tau) V^\tau(y_{y^{*,k}}(\tau)) \}, \right.$$

où  $y_{y^{*,k}}$  est l'état associé au contrôle constant  $u$ , solution de :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u), \quad \text{pour } t \in (0, \tau), \quad y_x(0) = y^{*,k}.$$

On note  $\boxed{y^{*,k+1} = y_{y^{*,k}}^*(\tau)}$  où  $y_{y^{*,k}}^*$  est l'état associé au contrôle constant  $u = u_x^{*,k}$ , et qui part de  $y^{*,k}$ .

Avec la suite  $(u^{*,k})_k$  on construit un contrôle constant par morceaux :

$$u_x^*(t) := u_x^{*,k}, \quad \text{pour tout } t \in ]k\tau, (k+1)\tau[ \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

**Théorème 25.** *Supposons que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le problème*

$$\min_{u \in U} \{ \tau \ell(x, u) + (1 - \lambda \tau) V^\tau(y_x(\tau)) \}$$

*admet une solution. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a :*

$$V^\tau(x) = J^\tau(x, u_x^*) = \inf(\mathcal{P}_x^\tau).$$

*De plus  $V^\tau$  converge uniformément vers  $V$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ .*

---

1. On suppose ici que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le problème  $\min_{u \in U} \{ \tau \ell(x, u) + (1 - \lambda \tau) V^\tau(y_x(\tau)) \}$  admet une solution.



## 5.2 Discrétisation totale : Chaîne de Markov

Pour résoudre l'équation (5.3), on considère une grille régulière  $\mathcal{G}$  de pas constant  $h > 0$ . On note dans la suite  $x_j$  les nœuds de  $\mathcal{G}$ . On considère alors une discrétisation de (5.3) de la forme suivante :

$$V_j^{\tau,h} = \min_{u \in U} \left( \tau \ell(x_j, u) + (1 - \lambda \tau) [V_h^\tau](\tilde{y}_{x_j}(\tau)) \right); \quad (5.7)$$

où  $[V_h^\tau]$  est une fonction d'interpolation qui prend les valeurs  $V_j^{\tau,h}$  en  $x_j$ , et  $\tilde{y}_{x_j}(\tau)$  est une approximation, à l'instant  $\tau$ , de l'état  $y_{x_j}$  associé au contrôle constant  $u$ . Par exemple,  $\tilde{y}_{x_j}(\tau)$  pourrait prendre les valeurs,

$$\tilde{y}_{x_j}(\tau) = x_j + \tau f(x_j, u) \quad (\text{Euler Explicite})$$

$$\tilde{y}_{x_j}(\tau) = x_j + \tau f(\tilde{y}_{x_j}, u) \quad (\text{Euler Implicite})$$

Dans l'équation (5.7), on cherche à calculer les valeurs  $V_j^{\tau,h}$  qui constituent une approximation de  $V(x_j)$ .

♠ Partant du nœud  $x_j$  de  $\mathcal{G}$ , le point de trajectoire  $\tilde{y}_{x_j}(\tau)$  n'est pas (forcément) un point de la grille. C'est pour cette raison que l'on calcule  $[V_h^\tau](\tilde{y}_{x_j}(\tau))$  par interpolation.

♠ On sait qu'ils existent des coefficients barycentriques  $\mu_k^j(u)$  tels que :

$$0 \leq \mu_k^j(u) \leq 1, \quad \sum_k \mu_k^j(u) = 1,$$

$$\sum_k \mu_k^j(u) x_k = \tilde{y}_{x_j}(\tau).$$

Une interpolation possible de  $[V_h^\tau](\tilde{y}_{x_j}(\tau))$  est alors donnée par :

$$[V_h^\tau](\tilde{y}_{x_j}(\tau)) = \sum_k \mu_k^j(u) V_k^{\tau,h}.$$

Cette formule correspond à une interpolation affine par morceaux (voir TP1). Dans ce cas, l'approximation (5.7) se réécrit :

$$V_j^{\tau,h} = \min_{u \in U} \left( \tau \ell(x_j, u) + (1 - \lambda \tau) \sum_k \mu_k^j(u) V_k^{\tau,h} \right). \quad (5.8)$$

Il est parfois commode d'écrire la discrétisation (5.3) dans un formalisme plus général :

$$V_j^{\tau,h} = \min_{u \in U} \left( \tau \ell(x_j, u) + (1 - \lambda \tau) \sum_k p^u(x_k | x_j) V_k^{\tau,h} \right); \quad (5.9)$$

où  $p^u(x_k|x_j)$  s'interprète comme probabilité de transition (durant la période  $(0, \tau)$ ) de  $x_j$  à  $x_k$  sous l'action du contrôle (constant)  $u$ . On supposera que pour chaque  $x_j \in \mathcal{G}$  :

$$0 \leq p^u(x_k|x_j) \leq 1 \quad \forall k, \quad (5.10a)$$

$$\sum_k p^u(x_k|x_j) = 1, \quad (5.10b)$$

$$\sum_k p^u(x_k|x_j)(x_k - x_j) = f(x_j, u)\tau + o(\tau), \quad (5.10c)$$

$$\sum_k p^u(x_k|x_j)(x_k - x_j - \tau f(x_j, u))^2 = Ch^2, \quad C > 0. \quad (5.10d)$$

En introduisant la matrice  $M^{\tau,h}(u) = (M_{jk}(u))$ , où  $M_{jk}(u) = p^u(x_k|x_j)$ , et le vecteur  $C(u) = (C_j(u))$ , où  $C_j(u) = \tau \ell(x_j, u)$ , l'équation (5.9) se réécrit, sous une forme vectorielle :

$$V_{\bullet}^{\tau,h} = \min_{u \in U} \left( C(u) + (1 - \lambda\tau) M^{\tau,h}(u) \cdot V_{\bullet}^{\tau,h} \right). \quad (5.11)$$

L'écriture ci-dessus est très utile en dimension élevée. On parle de schémas de type chaînes de Markov, la matrice  $M^{\tau,h}$  est dite matrice de transition, et le vecteur  $C(u)$  est dit "coût" de transition.

**Exemple.** Clairement le schéma (5.8) s'écrit bien sous la forme (5.9) avec :  $p^u(x_k|x_j) = \mu_k^j(u)$  pour tout  $k, j \geq 1$  et tout  $u \in U$ . On vérifie aisément que dans ce cas les hypothèses (5.10) sont bien satisfaites.

♠ Entendons nous bien, la formule (5.8) fournit UN schéma de type chaîne de Markov. Il existe bien évidemment d'autres choix possibles pour les probabilités de transition.

**Théorème 26.** *Considérons un schéma de type chaîne de Markov. Sous les hypothèses (5.10), il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\tau > 0$  avec  $1 - \lambda\tau > 0$ , et pour tout  $h > 0$ , on a :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|[V_h^\tau](x) - V(x)\| \leq C \left( \frac{h^2}{\tau^{3/2}} + \tau^{1/2} \right). \quad (5.12)$$

où  $V$  est la fonction valeur solution de (4.12), et  $[V_h^\tau]$  est l'interpolation affine par morceaux des valeurs  $V_j^{\tau,h}$  (calculées par le schéma (5.11)) en les points  $x_j$  de la grille  $\mathcal{G}$  de pas constant  $h$ .

*Démonstration.* . On considère la fonction test :

$$\Psi_\varepsilon(x, y) = V^{\tau,h}(x) - V(y) - \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{pour } (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n.$$

On peut supposer<sup>2</sup> que  $\Psi_\varepsilon$  atteint son maximum en  $(x_o, y_o) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n$  :

$$\Psi_\varepsilon(x_o, y_o) \geq \Psi_\varepsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n.$$

En particulier :

$$y \mapsto -\Psi_\varepsilon(x_o, y) = V(y) - \left[ V^{h,\tau}(x_o) + \frac{|x_o - y|^2}{\varepsilon^2} \right]$$

atteint son minimum dans  $\mathbb{R}^n$  en  $y_o$ .

**Etape 1.** Pour  $x_o \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\Psi_\varepsilon(x_o, x_o) \leq \Psi_\varepsilon(x_o, y_o).$$

On en déduit que :

$$V^{\tau,h}(x_o) - V(x_o) \leq V^{\tau,h}(x_o) - V(y_o) - \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon^2},$$

ce qui, avec la propriété Lipschitz de  $V$ , implique :

$$\exists C > 0, \quad \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon^2} \leq V(x_o) - V(y_o) \leq C|x_o - y_o|.$$

Il vient alors que :

$$\boxed{|x_o - y_o| \leq C\varepsilon^2.} \tag{5.13}$$

**Etape 2.** La fonction  $y \mapsto -\Psi_\varepsilon(x_o, y) = V(y) - \underbrace{\left[ V^{h,\tau}(x_o) + \frac{|x_o - y|^2}{\varepsilon^2} \right]}_{:=\phi(y)}$  atteint son

minimum dans  $\mathbb{R}^n$  en  $y_o$ ,  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , et  $V$  est solution au sens de viscosité de (4.12), on a donc :

$$\begin{aligned} \lambda V(y_o) - \min_{u \in U} (\ell(y_o, u) + f(y_o, u) \cdot D\phi(y_o)) &\geq 0, \\ \lambda V(y_o) &\geq \min_{u \in U} (\ell(y_o, u) + f(y_o, u) \cdot \frac{2(x_o - y_o)}{\varepsilon^2}). \end{aligned}$$

---

2. La fonction  $\Psi_\varepsilon$  est bornée supérieurement. Donc quitte à rajouter une fonction  $\xi \in C^1(\mathcal{G} \times \mathbb{R}^n)$ , à support compact  $\mathcal{B} \subset \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n$ , et vérifiant :

$$\xi \geq 0, \quad \|\xi\|_\infty \leq 1, \quad \|D\xi\|_\infty \leq 1,$$

la fonction  $\Psi_\varepsilon + \xi$  prend sa valeur maximale dans le compact  $\mathcal{B}$ .  $\Psi_\varepsilon + \xi$  atteint donc son maximum en un point  $(x_o, y_o) \in \mathcal{B}$ . Pour ne pas alourdir la preuve, on suppose que  $\Psi_\varepsilon$  atteint le maximum en  $(x_o, y_o)$ , sachant que si ce n'est pas le cas, la preuve refaite avec  $\Psi_\varepsilon + \xi$  aboutirait au même résultat.

On en déduit qu'il existe  $\tilde{u} \in U$  tel qu'on a :

$$\boxed{\lambda V(y_o) \geq (\ell(y_o, \tilde{u}) + f(y_o, \tilde{u}) \cdot \frac{2(x_o - y_o)}{\varepsilon^2}).} \quad (5.14)$$

D'autre part, on a :  $\Psi_\varepsilon(x_k, y_o) \leq \Psi_\varepsilon(x_o, y_o)$  pour tout  $x_k \in \mathcal{G}$ . Il en découle :

$$\sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) V^{\tau,h}(x_k) - \sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) \frac{|x_k - y_o|^2}{\varepsilon^2} \leq \Psi_\varepsilon(x_o, y_o) + V(y_o),$$

où  $(p^{\tilde{u}}(x_k|x_o))_k$  désignent les probabilités de transition de  $x_o$  à  $x_k$  sous l'action du contrôle constant  $\tilde{u}$ . Ce qui, tenant compte de (5.10), conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) V^{\tau,h}(x_k) - V^{\tau,h}(x_o) &\leq \sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) \frac{|x_k - y_o|^2}{\varepsilon^2} - \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon^2} \\ &\leq \sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) \frac{|x_k - x_o - \tau f(x_o, \tilde{u})|^2}{\varepsilon^2} + \frac{|x_o - \tau f(x_o, \tilde{u}) - y_o|^2}{\varepsilon^2} \\ &\quad + 2 \underbrace{\sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) \frac{(x_k - x_o - \tau f(x_o, \tilde{u}), x_o - \tau f(x_o, \tilde{u}) - y_o)}{\varepsilon^2}}_{=0} \\ &\quad - \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon^2} \\ &\leq C \frac{h^2}{\varepsilon^2} + \tau^2 \frac{|f(x_o, \tilde{u})|^2}{\varepsilon^2} + 2\tau \frac{(x_o - y_o, f(x_o, \tilde{u}))}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

On a aussi : (rappelons que  $x_o \in \mathcal{G}$ )

$$V^{\tau,h}(x_o) \leq \tau \ell(x_o, \tilde{u}) + (1 - \lambda\tau) \sum_k p^{\tilde{u}}(x_k|x_o) V^{\tau,h}(x_k).$$

Des deux inégalités précédentes et (5.14), il vient alors :

$$\begin{aligned} \lambda V^{\tau,h}(x_o) - \lambda V(y_o) &\leq \ell(x_o, \tilde{u}) - \ell(y_o, \tilde{u}) \\ &\quad + (1 - \lambda\tau) \left[ C \frac{h^2}{\varepsilon^2 \tau} + \tau \frac{|f(x_o, \tilde{u})|^2}{\varepsilon^2} \right] \\ &\quad + 2 \frac{(x_o - y_o, f(y_o, \tilde{u}) - f(x_o, \tilde{u}))}{\varepsilon^2} + 2\lambda\tau \frac{(x_o - y_o, f(x_o, \tilde{u}))}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Ceci avec le fait que  $f$  est Lipschitzienne et (5.13), on arrive à :

$$\boxed{\lambda V^{\tau,h}(x_o) - \lambda V(y_o) \leq C(\varepsilon^2 + \frac{h^2}{\varepsilon^2 \tau} + \frac{\tau}{\varepsilon^2}), \quad \text{pour } \varepsilon > 0.}$$

**Etape 3.** Pour  $x \in \mathcal{G}$ , on a  $\Psi_\varepsilon(x, x) \leq \Psi_\varepsilon(x_o, y_o)$ . Par conséquent :

$$V^{\tau, h}(x) - V(x) \leq C(\varepsilon^2 + \frac{h^2}{\varepsilon^2 \tau} + \frac{\tau}{\varepsilon^2}), \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

En prenant  $\varepsilon = \tau^{1/4}$ , on a alors

$$V^{\tau, h}(x) - V(x) \leq C(\tau^{1/2} + \frac{h^2}{\tau^{3/2}}).$$

**Etape 4.** En considérant la fonction test définie sur  $\mathcal{G} \times \mathbb{R}^n$  par :  $\Psi^\varepsilon(x, y) = V(x) - V(y) + \frac{|x-y|^2}{\varepsilon}$  et en suivant les mêmes arguments que dans les étapes 1, 2 et 3, on arrive à

$$V(x) - V^{\tau, h}(x) \leq C(\tau^{1/2} + \frac{h^2}{\tau^{3/2}}).$$

Ce qui implique que :

$$|V^{\tau, h}(x) - V(x)| \leq C(\tau^{1/2} + \frac{h^2}{\tau^{3/2}}) \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

**Etape 5.** La dernière étape consiste à prouver l'estimation d'erreur pour n'importe quel  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour cela, on réécrit  $x$  comme combinaison convexe des nœuds de  $\mathcal{G}$ . A l'aide des estimation obtenues (en étape 4) sur chaque nœud, on déduit l'estimation d'erreur en  $x$ . ■

**Corollaire.** En prenant  $\tau = h$  (dans le théorème 18), on obtient :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |[V^{\tau, h}](x) - V(x)| \leq Ch^{1/2}.$$

## 5.3 Résolution numérique

Pour la résolution de (5.11) deux stratégies existent :

### Itérations sur les valeurs

1. Pour  $n = 0$ , on part de  $V^0$  quelconque. On calcule  $V^1$  par :

$$V^1 = \min_{u \in U} \left( C(u) + (1 - \lambda\tau)M^{\tau, h}(u) \cdot V^0 \right).$$

2. Pour  $n \geq 0$  : Tant que  $V^n \neq V^{n-1}$ , on calcule

$$V^{n+1} = \min_{u \in U} \left( C(u) + (1 - \lambda\tau)M^{\tau, h}(u) \cdot V^n \right).$$

Itérations sur les politiques

1. Pour  $n = 0$ , on choisit une stratégie initiale  $u_0 = (u_0^j) \subset U$  où  $u_0^j$  est une valeur du contrôle en  $x_j$  (correspond au contrôle constant qu'on applique durant un intervalle de temps de longueur  $\tau$ , lorsque la trajectoire part de  $x_j$ ).
2. Etant donné une stratégie  $u_n \subset U$ , calculer  $V^n$  solution de

$$V_j^n = \left( C_j(u) + (1 - \lambda\tau) \sum_k M_{jk}^{\tau,h}(u_n^j) \cdot V_k^n \right).$$

3. calculer  $u_{n+1}$  solution de

$$u_j^{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \in U} \left( C_j(u) + (1 - \lambda\tau) \sum_{kj} M_{jk}^{\tau,h}(u) \cdot V_k^n \right).$$

# Bibliographie

- [1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [2] R. Bulirsch and J. Stoer. *Introduction to numerical analysis*. Springer, New York, 1980.
- [3] S.P. Park and S.R. Vadali. Touch points in optimal ascent trajectories with first-order state inequality constraints. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21 :603–610, 1998.
- [4] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1987.