

# Algorítmica

## Práctica 1. Análisis de Eficiencia de Algoritmos

### Presentación

Autores: Ana Buendía Ruiz Azuaga, Andrés Millán Muñoz, Paula Villanueva Núñez, Juan Antonio Villegas Recio.

2º doble grado ingeniería informática y matemáticas (2018-19).

### Introducción

En este documento recogeremos los datos de nuestras partes individuales y los compararemos. Asimismo, haremos un análisis completo de los algoritmos de búsqueda binaria, ordenación por **heapsort** y ordenación por **mergesort**, estudiando los diferentes efectos que producen en una máquina específica.

### Especificaciones

La información sobre el ordenador de cada integrante del grupo se recoge en la siguiente tabla.

Persona	CPU	OS
Ana	i5-6200U 2.30GHz	Ubuntu 16.04 LTS
Andrés	i5-8250U 3.4GHz	Antergos 4-19.29 LTS
Paula	i7-5600U 2.60GHz	Ubuntu 18.04 LTS
Juan Antonio	i7-4500U 3.00GHz	Ubuntu 18.04 LTS

### Algoritmo 4 - BuscarBinario

Consiste en encontrar la posición de un elemento en un vector ordenado. Compara el valor con el elemento en el medio del array, si no son iguales, la mitad en la cual el valor no puede estar es eliminada y la búsqueda continúa en la mitad restante hasta que el valor se encuentre.

Código del programa

```
int BuscarBinario (int *v, const int ini, const int fin, const double x){
    int centro;

    if (ini > fin)
        return -1;

    centro = (ini + fin)/2;

    if (v[centro] == x)
        return centro;
    if (v[centro] > x)
        return BuscarBinario(v, ini, centro-1, x);

    return BuscarBinario (v, centro+1, fin, x);
}
```

## Eficiencia teórica

Observamos que llamamos recursivamente a la función. Nuestro problema decrece en  $\frac{n}{2}$  por cada llamada que hacemos a la función:

```

-----|      |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
            ^               ^               ^
Iter 1 | inicio             centro         final
-----|      ^       ^       ^
Iter 2 | inicio   c     fin
-----|
```

Definimos  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + a$ , donde  $a$  es la constante asociada a las operaciones elementales. Hacemos un cambio de variable  $n = 2^k$ . Se tiene entonces

$$T(2^k) = a + T(2^{k-1})T(2^{k-1}) = a + T(2^{k-2})...T(2^k) = a \cdot k + 1$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos

$$T(n) = a \cdot \log_2(n) + 1$$

Por tanto, concluimos que la eficiencia teórica de `BuscarBinario` es  $O(\log_2(n))$ .

## Eficiencia empírica

Para calcular la eficiencia empírica, cada miembro del grupo ha ejecutado el siguiente script en su ordenador:

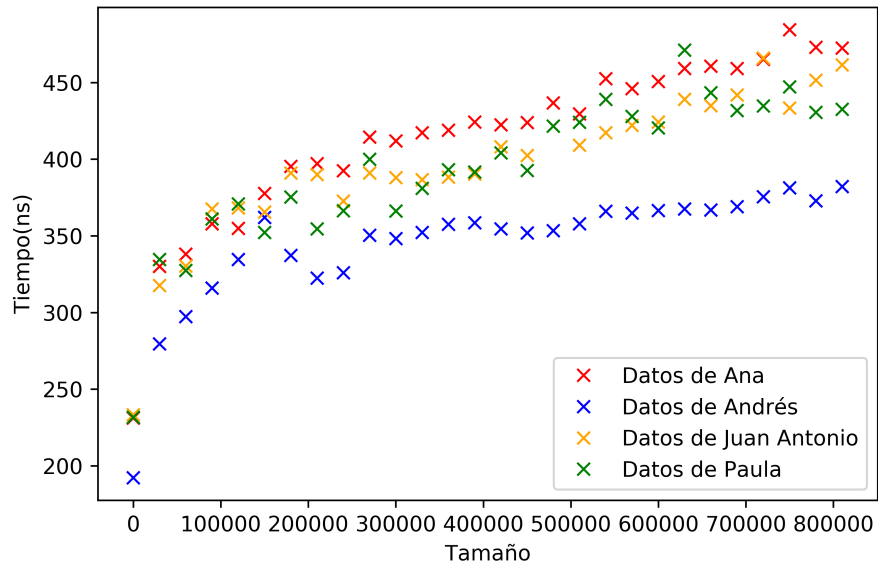
```
#!/bin/bash
N=100
for j in {1..28}; do
  for i in {1..1000}; do
    ./BuscarBinario $N >> resultados_buscarBinario.dat
  done

  N=$((N+30000))
done
```

Es decir, hemos ejecutado el algoritmo para 28 tamaños diferentes, ejecutando el algoritmo 1000 veces para cada tamaño. El script producía un fichero de datos con el cual para cada tamaño se calculaba la media de los tiempos de ejecución, obteniendo así un tiempo medio de ejecución para cada tamaño.

Los vectores estaban compuestos por números aleatorios positivos y en todos los casos se buscaba un número negativo, por lo que siempre se ejecutaba el peor de los casos.

Tras los diferentes tests en nuestras respectivas máquinas, hemos obtenido los siguientes resultados:



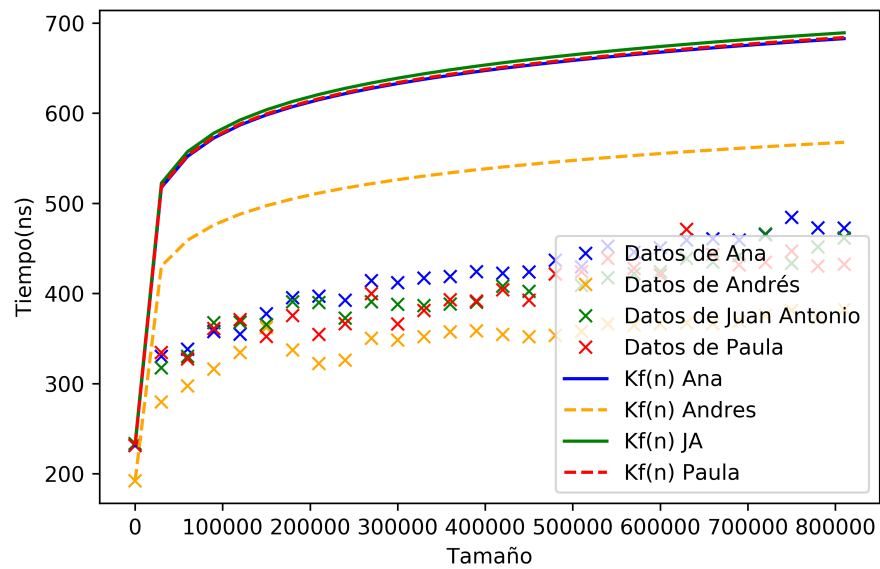
Cabe destacar que en este caso las medidas están en nanosegundos (*ns*).

Comprobamos que la nube de puntos de cada uno se asemeja a una curva logarítmica y que el PC más rápido con este algoritmo es el de Andrés, tardando unos 380ns como máximo.

### Eficiencia híbrida

Hemos calculado la constante  $K$  para todos los conjuntos de datos empíricos de cada componente del grupo, obteniendo así los siguientes resultados:

Persona	$K$
Ana	34.785220119
Andrés	28.9263485708
Juan Antonio	35.1166541442
Paula	34.8506188855



## Algoritmo 5 - Heapsort

Este algoritmo consiste en almacenar todos los elementos del vector a ordenar en un montículo (*heap*), y luego extraer el nodo que queda como nodo raíz del montículo (cima) en sucesivas iteraciones obteniendo el conjunto ordenado. Además, basa su funcionamiento en una propiedad de los montículos, por la cual, la cima contiene siempre el menor elemento (o el mayor, según se haya definido el montículo) de todos los almacenados en él.

### Código del programa:

```
void reajustar (int T[], int num_elem, int k) {
    int j, v;
    bool esAPO = false;
    v = T[k];

    while ( (k < num_elem/2) && !esAPO ) {
        j = k + k + 1;

        if ( j < (num_elem - 1) && T[j] < T[j+1] )
            j++;

        if (v >= T[j])
            esAPO = true;

        T[k] = T[j];
        k = j;
    }

    T[k] = v;
}

void heapsort (int T[], int num_elem) {
    int i;

    for (i = num_elem/2; i >= 0; i--)
        reajustar(T, num_elem, i);

    for (i = num_elem - 1; i >= 1; i--) {
        int aux = T[0];
        T[0] = T[i];
        T[i] = aux;
        reajustar(T, i, 0);
    }
}
```

## Eficiencia teórica

Nuestra variable `n` será `num_elem`. Primero calcularemos la eficiencia de la función `reajustar`, para ello tenemos que estudiar el bucle `while`. Este bucle se ejecuta como máximo,  $\log_2(\frac{n}{2}) = \log_2 n - 1$ , ya que en cada iteración, la variable `k` se multiplica por 2. El resto de operaciones del bucle `while` es insignificante, es decir, podemos tomar esas operaciones como una constante  $a$ . Por lo que la eficiencia de esta función `reajustar` es  $a \log_2 n - a$ . Como la función `heapsort` en el primer bucle llama a la función `reajustar`  $\frac{n}{2}$  veces, entonces la eficiencia de este primer bucle es de

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right)(a \log_2 n - a)$$

En el segundo bucle de la función `heapsort` tenemos otra llamada a la función `reajustar` y operaciones elementales que podemos considerarlas como constantes ( $b$ ). Este segundo bucle se ejecuta  $n-1$  veces y como llama a la función `reajustar`, estamos en el mismo caso que en el bucle anterior. Luego este bucle tiene una eficiencia de

$$a(n-1)(\log_2 n - 1) + b(n-1)$$

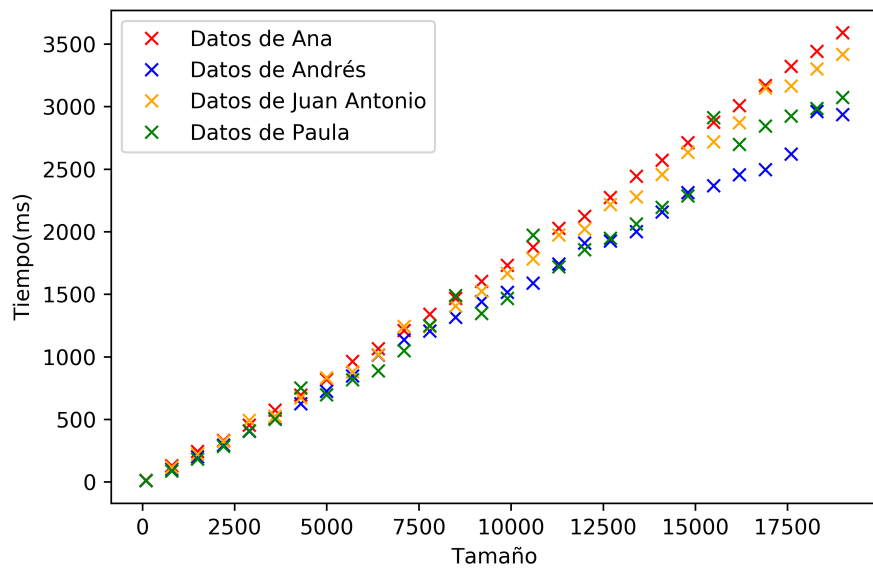
Como la eficiencia de la función `heapsort` es la máxima eficiencia de los bucles, tenemos que es  $O(n \log n)$ .

## Eficiencia empírica

Al igual que el caso anterior, hemos ejecutado un script que nos generaba un fichero de datos que procesar. El script ejecutado es el siguiente:

```
#!/bin/bash
N=100
for j in {1..28}; do
    for i in {1..15}; do
        ./heapsort $N >> resultados_heapsort.dat
    done
    N=$((N+700))
done
```

Es decir, hemos ejecutado 15 veces el programa para cada tamaño distinto. Los vectores estaban también formados por números aleatorios. Ejecutamos los scripts, procesamos los ficheros y obtenemos los siguientes valores:

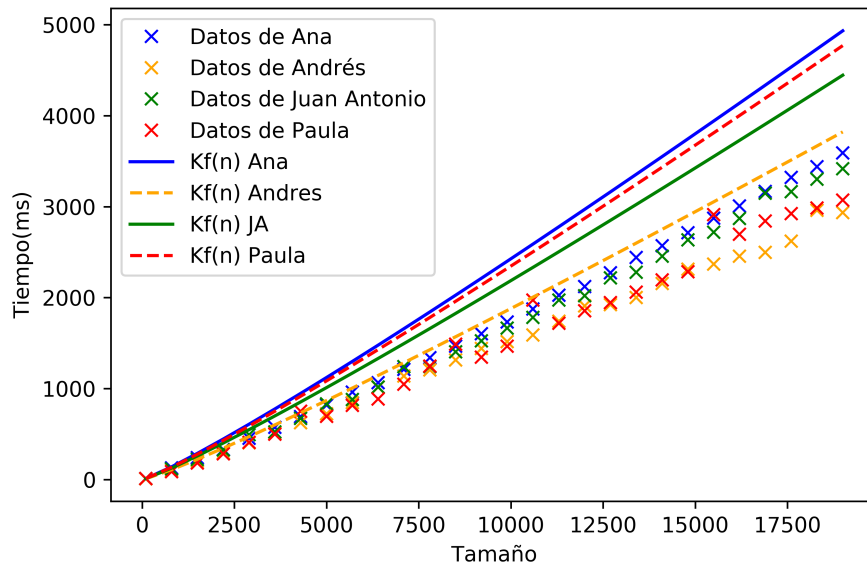


Heapsort es de orden  $O(n \log_2(n))$ , y las gráficas se asemejan mucho a dicha curva. De nuevo, el PC más rápido en general ha sido el de Andrés.

### Eficiencia híbrida

Hemos calculado la constante  $K$  para todos los conjuntos de datos empíricos de cada componente del grupo, obteniendo así los siguientes resultados:

Persona	$K$
Ana	0.0182624864036
Andrés	0.0141484097962
Juan Antonio	0.0164563064296
Paula	0.0176604264123



## Hanoi

Consiste en tres postes verticales y siete discos. Los discos se apilan sobre uno de los postes en tamaño decreciente de abajo a arriba, luego hay que pasar todos los discos desde el poste ocupado a uno de los otros postes vacíos.

### Código del programa:

```
void hanoi (int M, int i, int j) {
    if (M > 0) {
        hanoi(M-1, i, 6-i-j);
        //cout << i << " -> " << j << endl;
        hanoi (M-1, 6-i-j, j);
    }
}
```

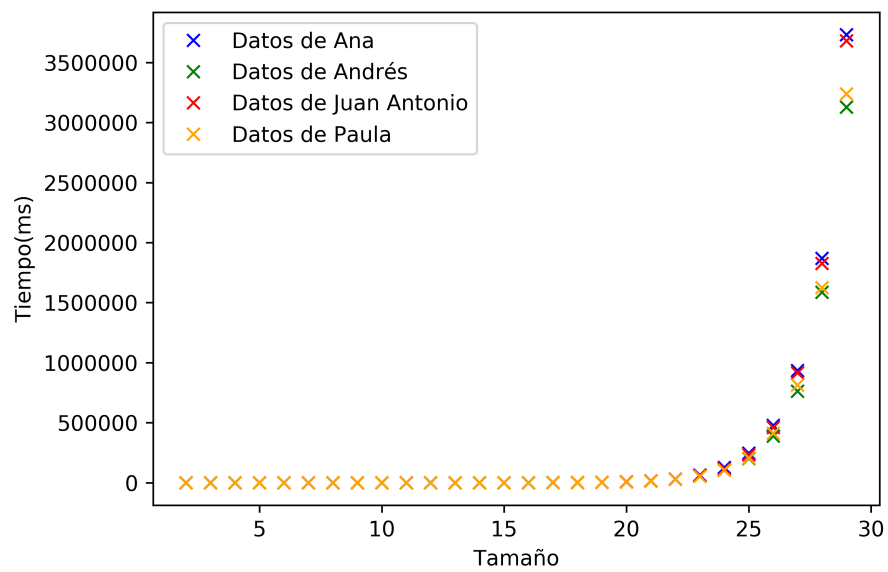
### Eficiencia empírica

En este caso, como el algoritmo de las torres de `hanoi` tiene una eficiencia que crece mucho más rápido, porque es de orden  $O(2^n)$ , necesita unos valores considerablemente menores que los demás algoritmos. El script ejecutado en esta ocasión es el siguiente:



```
#!/bin/bash
N=2
for j in {1..28}; do
  for i in {1..25}; do
    ./hanoi $N >> resultados_hanoi.dat
  done
  N=$((N+1))
done
```

Ejecutamos los scripts, procesamos los ficheros y obtenemos los siguientes valores:



Esta gráfica se corresponde con una función del tipo  $2^n$ , luego se corresponde con la eficiencia teórica.

## Burbuja

Compara cada elemento del vector con el siguiente y los intercambia de posición si no están en el orden correcto.

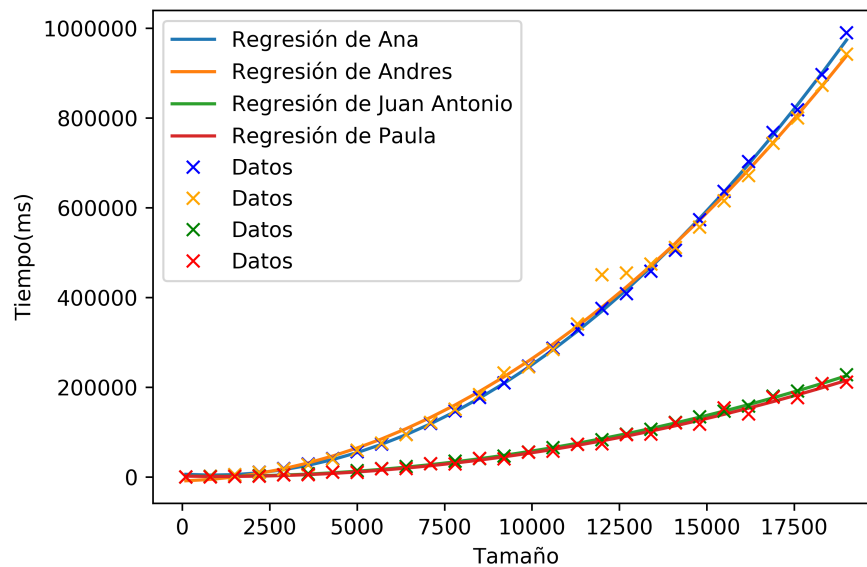
**Código del programa:**

```
void burbuja (int T[], int inicial, int final) {
    int i, j, aux;

    for (i = inicial; i < final - 1; i++) {
        for (j = final - 1; j > i; j--) {
            if (T[j] < T[j-1]) {
                aux = T[j];
                T[j] = T[j-1];
                T[j-1] = aux;
            }
        }
    }
}
```

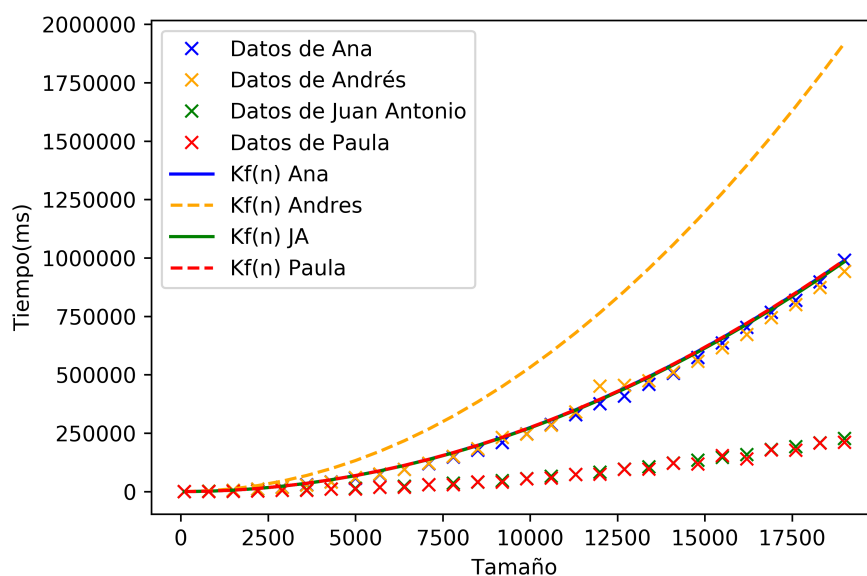
## Eficiencia empírica

La siguiente gráfica muestra los valores obtenidos para cada persona del grupo.



## Eficiencia híbrida

La siguiente gráfica muestra la regresión de la nube de puntos obtenida con la eficiencia empírica.



Hemos calculado la constante  $k$  para todos los conjuntos de datos empíricos de cada componente del grupo, obteniendo así los siguientes resultados:

Persona	$K$
Ana	0.00274223536473
Andrés	0.00533
Juan Antonio	0.00272666666667
Paula	0.00274666666667

## Mergesort

Este algoritmo divide el vector en dos partes iguales y se vuelve a aplicar de forma recurrente a cada una de ellas. Luego une ambos vectores sobre el vector original, por lo que esta parte ya queda ordenada.

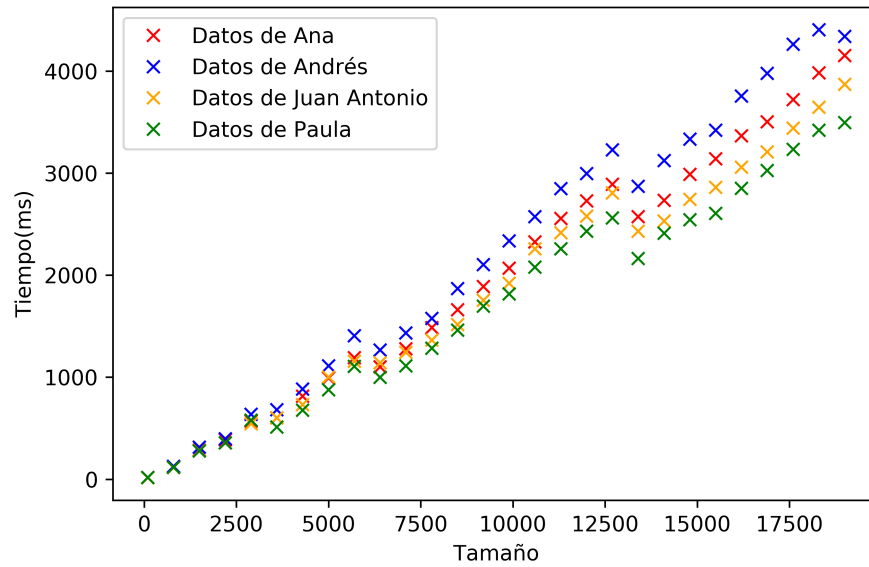
## Eficiencia teórica

En el guión de prácticas se ha llegado a la conclusión de que la eficiencia teórica de mergesort es  $O(n \log_2(n))$ .

### Eficiencia empírica

Hemos realizado para 28 valores distintos 15 iteraciones de las que obtendremos la media para obtener los resultados en media de las distintas ejecuciones. Además el vector está formado por números generados aleatoriamente.

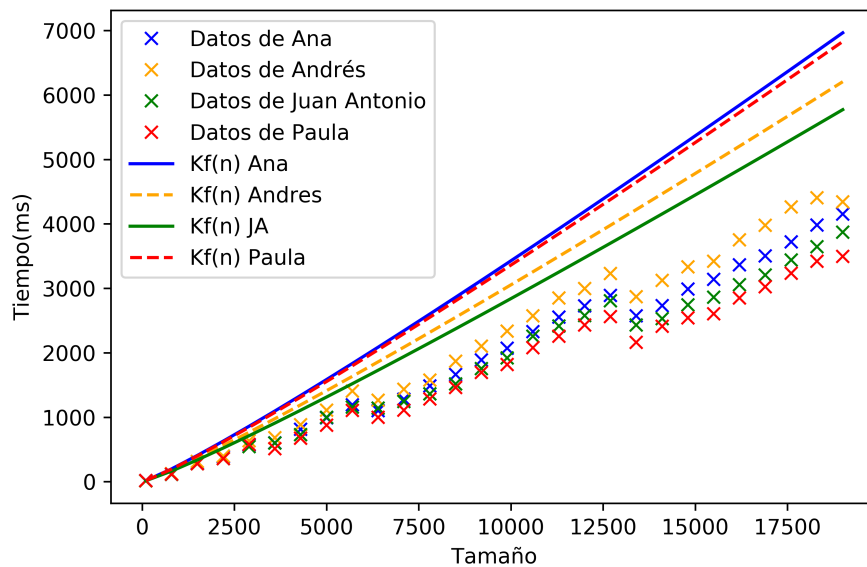
Así, hemos obtenido la siguiente gráfica:



### Eficiencia híbrida

De nuevo, hemos obtenido la  $K$  para cada integrante del grupo:

Persona	K
Ana	0.0257882362952
Andrés	0.0229786230024
Juan Antonio	0.0213731296921
Paula	0.0252865196358



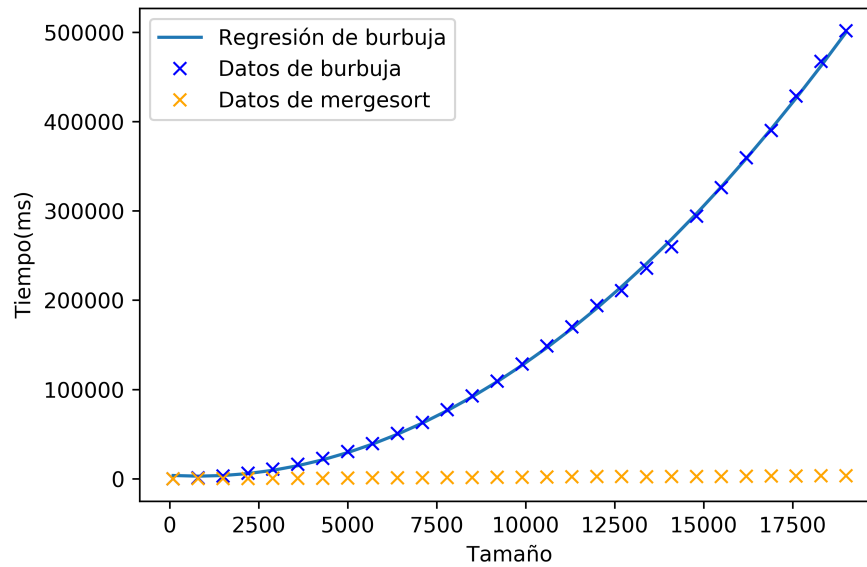
## Comparación burbuja y mergesort

### Eficiencia teórica

Tras los respectivos análisis hechos, podemos ver que la función `mergesort` es de tipo  $O(n \log_2(n))$ . En comparación con `burbuja`, claramente vemos que tiene que ser más eficiente `mergesort`, dado que  $O(n \log_2(n)) \leq O(n^2)$ .

### Eficiencia empírica

Representando en una misma gráfica los resultados de las ejecuciones más rápidas tanto en burbuja como en `mergesort` se aprecia claramente que el algoritmo más eficiente es `mergesort`.



## Conclusiones

Hemos podido comprobar que la eficiencia empírica obtenida al ejecutar los diversos algoritmos se ajusta adecuadamente a lo esperado según el modelo teórico. Además, es notable que el orden de los algoritmos no depende del ordenador como se ha puesto de manifiesto en las gráficas conjuntas presentadas anteriormente, por ejemplo, los algoritmos de **burbuja** o **Hanoi**.

Con respecto a los algoritmos de ordenación, a saber, **mergesort** y **burbuja**, se aprecia claramente la superioridad de **mergesort** respecto a **burbuja**.

También se aprecia la cota que establece la constante  $K$  en los algoritmos, como se esperaba según la teoría.