



Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Curso 2021/2022
Trabajo de Fin de Grado

Fractales y Geometría Fractal

Fractales, geometría fractal y aplicaciones en la ciencia. Visualización de fractales con Ray-Tracing

Autor: Juan Antonio Villegas Recio

Autor:	Juan Antonio Villegas Recio
Tutor de Matemáticas:	Manuel Ruiz Galán, Catedrático de Universidad Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada
Tutor de Informática:	Carlos Ureña Almagro, Profesor Titular de Universidad Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos, Universidad de Granada

Autoría

I hereby affirm that this Master thesis was composed by myself, that the work contained herein is my own except where explicitly stated otherwise in the text. This work has not been submitted for any other degree or professional qualification except as specified; nor has it been published.

City, date



Juan Antonio Villegas Recio

Abstract

(no more than 250-300 words)

Background

Describe background shortly

Aim

Describe the aim of your study

Method

Describe your methods

Results

Describe the main results of your study

Conclusion

State your conclusion

Keywords:

No more than six keywords, preferably MeSH terms

Índice general

Lista de Abreviaturas	II
Lista de Imágenes	III
Lista de Tablas	IV
1. El concepto de <i>fractal</i>	2
1.1. Ejemplos clásicos	3
1.1.1. El conjunto de Cantor	3
1.1.2. La curva de Koch	4
1.1.3. El copo de nieve de Koch	5
1.1.4. El triángulo de Sierpinski	5
1.1.5. La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger	6
1.2. Conceptos de dimensión fractal	7
1.2.1. Dimension fractal autosimilar	7
1.2.2. Dimensión por cajas	9
1.2.3. Medida y dimensión de Hausdorff	10
1.2.4. Dimensión topológica	11
1.2.5. Relación entre los distintos tipos de dimensión fractal	12
2. Iteración	14
2.1. Iteración en \mathbb{R}	14
2.1.1. Tipos de convergencia	15
2.1.2. Velocidad de convergencia	15
2.2. Iteración en \mathbb{C}	16
2.3. El método de Newton y cuencas de atracción	17
2.3.1. Caso $z^2 - 1$	17
2.3.2. Caso $z^3 - 1$	18
3. Conjuntos de Julia y Mandelbrot	21
Appendices	23
A. Appendix title	23
B. Another Appendix	24

Lista de Abreviaturas

- SDF: Signed Distance Function
- SFI: Sistema de Funciones Iteradas

Lista de Imágenes

1.1. Objetos cotidianos con estructura fractal	2
1.2. Iteraciones del proceso de generación del conjunto de Cantor	3
1.3. Iteraciones del proceso de generación de la curva de Koch	4
1.4. Generación del copo de nieve de Koch	5
1.5. Curvas de Koch que componen el copo de Koch	5
1.6. Generación del triángulo de Sierpinski	6
1.7. Generación de la alfombra de Sierpinski	6
1.8. Esponja de Menger	7
1.9. Segmento, cuadrado y cubo divididos en 4	8
1.10. Una forma de calcular la dimensión por cajas de la curva de Koch .	10
1.11. Figuras representativas de los ejemplos	12
2.1. Representación de dos órbitas en \mathbb{C}	16
2.2. Cuencas de atracción de $f(z) = z^2 - 1$	18
2.3. Cuencas de atracción de $f(z) = z^3 - 1$	19
2.4. Evaluación de la velocidad de convergencia a las raíces.	20
2.5. Diferentes regiones ampliadas de la figura 2.4	20

Índice de tablas

Introducción

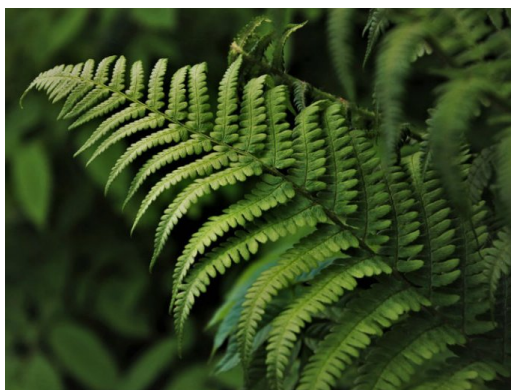
TODO

1 El concepto de *fractal*

Las primeras preguntas que se pueden plantear son ¿qué es un fractal? ¿Qué tienen de especial estas figuras? ¿Qué las diferencia de un objeto no fractal? ¿Por qué es necesaria una geometría fractal? Trataremos de responder a cada una de estas preguntas a lo largo de este capítulo, comenzando por la primera de ellas. En realidad, hay distintas definiciones de *fractal*, pero todas utilizan dos conceptos como base: la **autosimilaridad** y la **dimensión**. La primera de ellas es más cercana para nosotros de lo que en un principio podemos pensar, fijémonos en los ejemplos de la imagen 1.1.



(a) Romanesco



(b) Hoja de un helecho

Imagen 1.1: Objetos cotidianos con estructura fractal

Observemos que el romanescu, que es un tipo de coliflor, pareciera que está formado de pequeños trozos que recuerdan el objeto original, mientras que estos pequeños trozos a su vez también están formados de pequeños trozos que recuerdan al original, y así sucesivamente. Por su parte, la hoja de un helecho también pareciera estar formada por muchas hojas más pequeñas similares a la original, y estas pequeñas hojas a su vez también están formadas por otras hojas aún más pequeñas.

Esta idea de objetos prácticamente iguales al original salvo cambios de escala es la subyacente al concepto de autosimilaridad.

Definición 1.0.1 (Autosimilaridad). Una figura o subconjunto A de \mathbb{R}^n es **autosimilar** si está compuesto por copias de sí mismo reducidas mediante un factor de escala. Es decir,

$$A = \bigcup_{i=1}^n h_i(A),$$

donde cada $h_i, i = 1, \dots, n$ es una homotecia de razón menor que 1.

En futuras ocasiones se utilizarán indistintamente los términos de «reducción por un factor de escala» e «imagen vía una homotecia», queriendo en ambos casos referirnos a este concepto.

Para afianzar y formalizar conceptos y con el objetivo de introducir un concepto de dimensión, estudiaremos algunos ejemplos clásicos de objetos fractales.

1.1. Ejemplos clásicos

1.1.1. El conjunto de Cantor

Creado por el célebre matemático *George Cantor*, este fractal se construye a partir de un segmento de línea recta aplicando el siguiente proceso iterativo:

1. Partimos del segmento de recta compuesto por el intervalo cerrado $[0, 1]$, aunque realmente es indiferente qué intervalo se escoja, pues el resultado final será el mismo salvo homotecia. Dividimos dicho segmento en tres segmentos iguales y extraemos el intervalo central, manteniendo los extremos. Es decir, extraemos el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y mantenemos el segmento $[0, \frac{1}{3}]$ y el $[\frac{2}{3}, 1]$.. Nótese que obtenemos $2 = 2^1$ segmentos, cada uno a escala $\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$ del original.
2. Aplicamos el mismo proceso a los segmentos $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Esto es, se dividen ambos en tres partes iguales y se extrae el intervalo abierto central de cada uno de ellos, manteniendo los extremos. En este caso obtendríamos $4 = 2^2$ segmentos iguales, cada uno de ellos a escala $\frac{1}{3}$ de los dos obtenidos en el primer paso y a escala $\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$ del original.
3. Repetimos este proceso de manera indefinida, de manera que en el n -ésimo paso se obtendrían 2^n segmentos de recta a escala $(\frac{1}{3})^n$. Denotemos como C_n al conjunto unión de los 2^n segmentos de recta que se generan en el paso n del proceso.

Los puntos del intervalo inicial $[0, 1]$ que restan tras las infinitas iteraciones son los que conforman el *conjunto de Cantor*, que denotamos con \mathbf{C} , de forma que $\mathbf{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

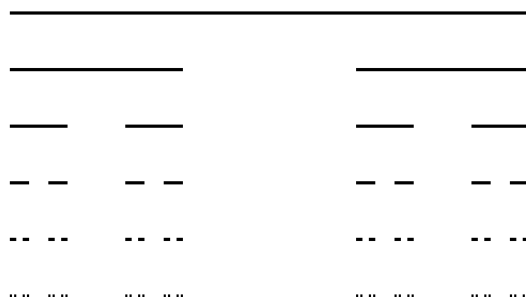


Imagen 1.2: Iteraciones del proceso de generación del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es además un conjunto compacto, pues cada C_n es una unión finita de intervalos cerrados y acotados, y por tanto compactos. Sabiendo

que la intersección numerable de conjuntos compactos es compacta, tenemos pues que \mathbf{C} es un conjunto compacto.

Observemos ahora que en la primera iteración eliminamos 1 segmento de longitud $\frac{1}{3}$, en la segunda iteración se eliminan 2 segmentos de longitud $(\frac{1}{3})^2$ y en la n -ésima iteración extraemos 2^{n-1} segmentos de longitud $(\frac{1}{3})^n$. Si sumamos todas las longitudes de todos los segmentos que son eliminados en cada paso se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1,$$

donde hemos usado que la suma de una serie geométrica de razón $|q| < 1$ es $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Esto nos lleva a concluir que la longitud eliminada es igual a la longitud original y aún así tenemos puntos, por ejemplo los extremos de los intervalos que se van generando. Es decir, los puntos de \mathbf{C} no están agrupados, sino que forman una especie de *polvareda*.

1.1.2. La curva de Koch

Esta figura, creada por el sueco *N. F. Helge von Koch* sigue un proceso de construcción iterativo al igual que el conjunto de Cantor, pero en lugar de eliminar segmentos, se añaden de la siguiente manera (ver imagen 1.3)

1. Partiendo de un segmento de recta de longitud 1 (al igual que en el conjunto de Cantor, la longitud del segmento inicial es irrelevante, pues la figura final es la misma salvo homotecia), se divide en tres partes iguales de longitud $\frac{1}{3}$ y la parte central se sustituye por un triángulo equilátero al que se le elimina la base. Esto da lugar a $4 = 4^1$ segmentos de recta de longitud $\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$.
2. Repetimos este proceso en cada uno de los segmentos de recta obtenidos, colocando el triángulo siempre por encima de la recta, obteniendo así $16 = 4^2$ segmentos de recta de longitud $\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$.
3. Aplicamos este proceso indefinidamente, obteniendo en el paso n -ésimo 4^n segmentos de longitud $(\frac{1}{3})^n$.

El resultado final del proceso es lo que llamamos la *curva de Koch*, que denotamos como \mathbf{K} .

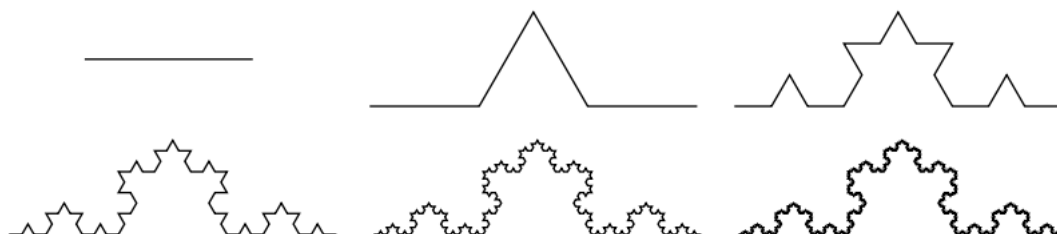


Imagen 1.3: Iteraciones del proceso de generación de la curva de Koch

1.1.3. El copo de nieve de Koch

A partir de la curva de Koch podemos generar un objeto matemático muy particular: el copo de nieve de Koch. Para crearlo, basta aplicar el proceso iterativo descrito para generar la curva de Koch a cada uno de los segmentos que componen un triángulo equilátero, de forma que los triángulos que se generan apunten hacia el exterior.

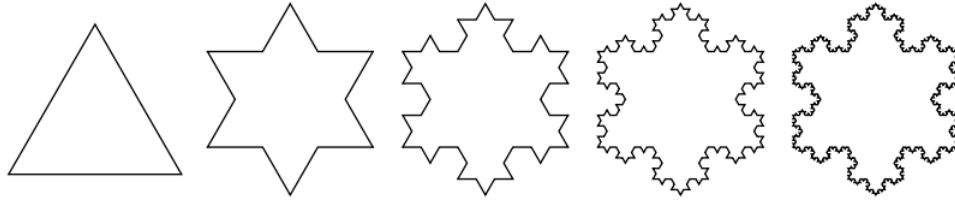


Imagen 1.4: Generación del copo de nieve de Koch

Esta curva posee la particularidad de tener longitud infinita y a su vez encerrar un área finita. Realmente el copo de Koch no es exactamente un fractal, pues no es totalmente autosimilar, aunque se compone de tres partes idénticas las cuales sí son autosimilares, como podemos ver en la imagen 1.5.

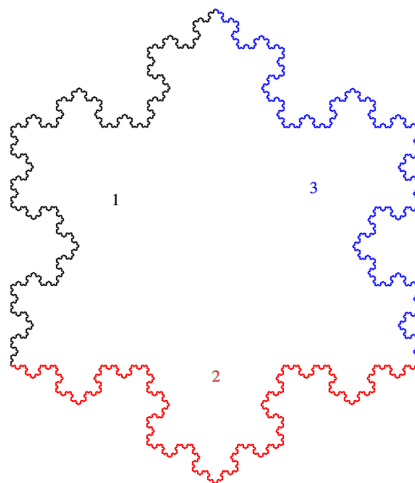


Imagen 1.5: Curvas de Koch que componen el copo de Koch

1.1.4. El triángulo de Sierpinski

Esta figura, original del polaco *Waclaw Sierpinski*, es creada de una manera que evoca al conjunto de Cantor, pero en dos dimensiones. Veamos detalladamente el proceso (ver imagen 1.6):

1. Se parte de un triángulo equilátero de lado 1 (de nuevo la longitud inicial es irrelevante). Uniendo los puntos medios de cada lado obtenemos una partición del triángulo inicial en 4 triángulos equiláteros, del cual extraemos el interior del triángulo central. Tenemos por tanto $3 = 3^1$ triángulos a escala $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ del original.

2. En cada uno de estos tres triángulos equiláteros se repite la operación anterior, obteniendo por tanto $9 = 3^2$ triángulos, cada uno a escala $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ del original.
3. Repetimos este proceso indefinidamente, de forma que en el paso n -ésimo se tienen 3^n triángulos, cada uno de ellos a escala $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ del original.

La figura a la que converge este proceso infinito se conoce como triángulo **S** de Sierpinski.



Imagen 1.6: Generación del triángulo de Sierpinski

Si llamamos A al área del triángulo inicial, sabemos que en la primera iteración eliminamos un área de $\frac{1}{4}A$, en el segundo eliminamos $3\left(\frac{1}{4}\right)^2 A$ y en el n -ésimo $3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n A$, de forma que si sumamos todo el área que eliminamos en cada paso obtenemos:

$$A \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) = A,$$

En este caso ocurre algo parecido a lo que vimos que sucedía con el conjunto de Cantor en la sección 1.1.1. El área eliminada es igual al área total y aún así tenemos puntos (por ejemplo los vértices de los triángulos que se van generando). Es decir, los puntos que forman **S** no están agrupados formando un área.

1.1.5. La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger

El propio Sierpinski se dio cuenta que con el mismo patrón utilizado para generar **S** se pueden obtener otras formas. Por ejemplo, pensemos que en lugar de comenzar con un triángulo equilátero partimos de un cuadrado, lo subdividimos en 9 cuadrados de lado $\frac{1}{3}$ y extraemos el cuadrado central. Repitiendo este proceso indefinidamente con cada uno de los cuadrados que se generan finalmente se obtiene la llamada alfombra de Sierpinski (ver imagen 1.7).

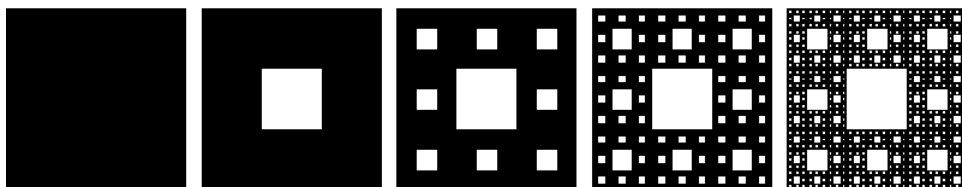


Imagen 1.7: Generación de la alfombra de Sierpinski

Este proceso también se puede modelar en 3D, obteniendo así la conocida como esponja de Menger o cubo de Magritte, que es una generalización en tres dimensiones de la alfombra de Sierpinski, la cual podemos ver en la imagen 1.8.

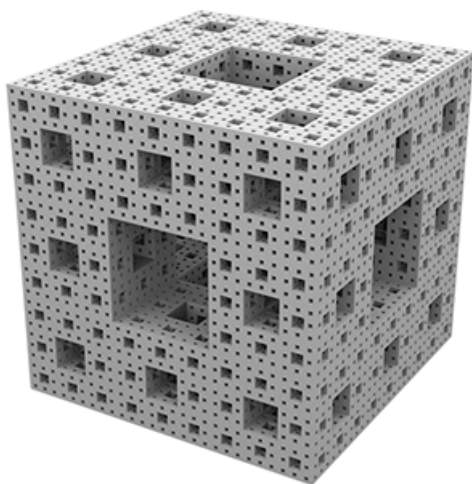


Imagen 1.8: Esponja de Menger

1.2. Conceptos de dimensión fractal

Al iniciar este capítulo mencionamos que las distintas definiciones de fractal utilizaban los conceptos de autosimilaridad y dimensión. Con los distintos ejemplos hemos entendido el primero de ellos, por lo que es momento de abordar el concepto de dimensión.

Intuitivamente, sabemos que una recta o un segmento de recta es de dimensión 1, pues sólo nos podemos mover en una dirección: de derecha a izquierda (el movimiento se describe con un único parámetro). Según este razonamiento y de acuerdo con la intuición un conjunto de puntos aislados es un conjunto de dimensión 0, pues no existe movilidad. Un cuadrado es de dimensión 2, ya que nos podemos mover de izquierda a derecha o de arriba a abajo (el movimiento se describe con dos parámetros: largo y ancho). Un cubo es de dimensión 3 porque en él nos podemos mover de derecha a izquierda, de arriba a abajo o de más a menos profundidad (el movimiento se describe con tres parámetros: altura, anchura y profundidad).

Pensemos ahora en el triángulo de Sierpinski y en su dimensión. Comprobamos en la sección 1.1.4 que su área 2-dimensional es nula, pero en el objeto final pareciera que un punto se pudiera mover en varias direcciones. No se puede afirmar que **S** tenga dimensión 1 por la movilidad, pero tampoco dimensión 2 porque tiene área 0, pero sería un valor situado entre estos dos enteros.

1.2.1. Dimension fractal autosimilar

Volvamos a pensar en un segmento de recta, un cuadrado y un cubo, objetos de 1, 2 y 3 dimensiones respectivamente. Ahora dividamos los lados de cada objeto en 4 tal y como indica la imagen 1.9. Entonces en el segmento aparecen $N(4) := 4 = 4^1$ segmentos que son imagen de una homotecia de razón $r = \frac{1}{4}$ del original, en el cuadrado se obtienen $N(4) := 16 = 4^2$ cuadrados, cada uno imagen de una homotecia de razón $\frac{1}{4}$ del cuadrado inicial y en el cubo $N(4) := 64 = 4^3$ cubos, de nuevo cada uno de ellos imagen de una homotecia de razón $\frac{1}{4}$ del cubo original.

Si en lugar de 4 tomamos cualquier número natural $k \geq 1$, la razón de la homotecia sería $r = \frac{1}{k}$ y en ese caso se obtendrían $N(k) = k^1$ segmentos de recta, $N(k) = k^2$ cuadrados y $N(k) = k^3$ cubos, en todos los casos a escala $r = \frac{1}{k}$ de los

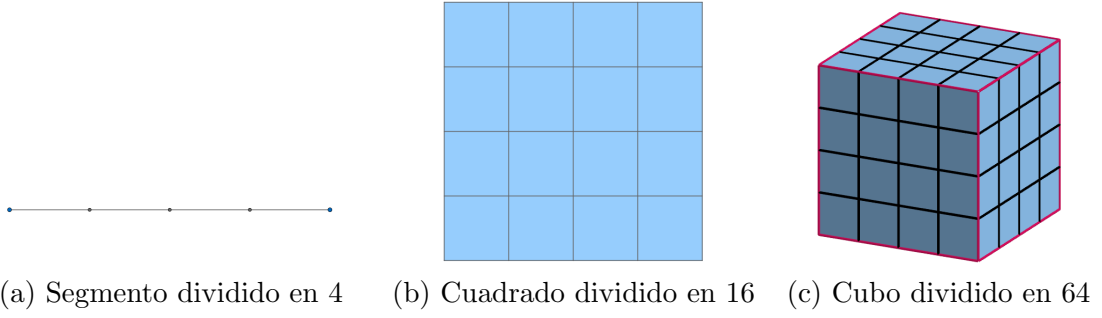


Imagen 1.9: Segmento, cuadrado y cubo divididos en 4

objetos originales. Estas igualdades se pueden reescribir como:

$$\frac{N(k)}{k^1} = 1 \qquad \frac{N(k)}{k^2} = 1 \qquad \frac{N(k)}{k^3} = 1 \qquad (1.1)$$

En este sentido, vemos que la dimensión de cada objeto es el *exponente* al que habría que elevar la razón de la homotecia k para obtener la relación (1.1). Para abreviar en el lenguaje introducimos la siguiente definición.

Definición 1.2.1 (Congruencia). Dos subconjuntos A, B de \mathbb{R}^n son **congruentes** si existe un movimiento rígido f tal que $B = f(A)$.

De manera análoga al segmento, el cuadrado y el cubo podemos tomar cualquier figura o subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que pueda ser subdividido en un número finito $N(k)$ de subconjuntos congruentes entre sí y cada uno de ellos imagen por una homotecia de razón $r = \frac{1}{k}$ de X . Esto es, en lenguaje formal, un conjunto autosimilar.

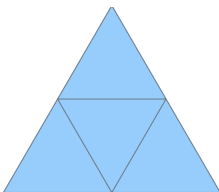
Definición 1.2.2 (Dimensión autosimilar). Dado un subconjunto X de \mathbb{R}^n que se puede dividir en $N(k)$ subconjuntos congruentes entre sí y cada uno de ellos imagen por una homotecia de razón $r = \frac{1}{k}$ de X , definimos su **dimensión autosimilar** como el único valor de d que satisface la identidad $\frac{N(k)}{k^d} = 1$, es decir:

$$d = \frac{\log N(k)}{\log(k)}$$

También se puede ver definida como *dimensión de homotecia*. Sin embargo, antes de utilizar este concepto debemos comprobar que la definición es coherente con cualquier partición y cualquier factor de escala. Es decir, que independientemente de la división del objeto que se tome la dimensión va a ser la misma.

Proposición 1.2.1. En un subconjunto X de \mathbb{R}^n autosimilar el valor de la dimension fractal autosimilar es el mismo independientemente de la partición que se le aplique.

Demostración. TODO □



Un ejemplo distinto pero clarificador podría ser el de un triángulo equilátero, el cual podemos dividir en 4 copias congruentes entre sí, cada una a escala $r = \frac{1}{2}$ del triángulo original, de forma que tendríamos $k = 2$ y $N(2) = 4$.

Con estos valores, tenemos que $N(k) = 4 = k^d = 2^d$, por lo que necesariamente $d = 2$ y por tanto un triángulo equilátero es un objeto 2-dimensional, lo cual tampoco nos sorprende.

Observación 1.2.1. La dimensión d ya no tiene por qué ser necesariamente un número entero. A esta posibilidad de tener dimensiones no enteras es a lo que llamamos **dimensión fractal autosimilar**, y lo denotamos con \dim_A .

Retomando ahora el triángulo de Sierpinski, sabemos que este está compuesto por 3 copias de sí mismo a escala $\frac{1}{2}$ (véase sección 1.1.4), por lo que entonces su dimensión fractal autosimilar es $\dim_A(\mathbf{S}) = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496$. Efectivamente y tal y como discutimos en el inicio de esta sección, es un valor situado entre 1 y 2.

En cuanto al conjunto de Cantor, este está formado por 2 copias de sí mismo a escala $\frac{1}{3}$ (sección 1.1.1), por lo que su dimensión fractal autosimilar sería $\dim_A(\mathbf{C}) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63093$, que es un valor situado entre 0 y 1.

Por su parte, la curva de Koch se compone de 4 copias de sí misma, cada una a escala $\frac{1}{3}$ de la curva original (sección 1.1.2). Por tanto, su dimensión fractal autosimilar es $\dim_A(\mathbf{K}) = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26186$.

1.2.2. Dimensión por cajas

El concepto de dimensión fractal autosimilar tiene el defecto de que está limitado únicamente a objetos totalmente autosimilares, pero la mayoría de objetos no cumple esta propiedad. Para solucionar este problema, introduciremos un nuevo concepto de dimensión. Previamente definimos un término necesario en las futuras definiciones.

Definición 1.2.3. Dado un subconjunto U de \mathbb{R}^n , definimos su **diámetro** como:

$$\text{diam}(U) = \sup \{d(x, y) : x, y \in U\}$$

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y acotado, sea $N_\delta(A)$ el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo sumo δ necesario para recubrir A . La *dimensión por cajas superior* y la *dimensión por cajas inferior* se definen, respectivamente como

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(A) &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}, \\ \overline{\dim}_B(A) &:= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}.^1 \end{aligned}$$

En caso de coincidir, se denomina *dimensión por cajas* de A al valor

$$\dim_B(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}. \quad (1.2)$$

También es conocida en literatura como *dimensión por conteo de cajas* o *dimensión de Minkowski-Bouligand*.

Hay varias definiciones equivalentes, generalmente más sencillas de utilizar. Por ejemplo, si tomamos en \mathbb{R}^n una cuadrícula de lado δ , i.e., de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

donde m_1, \dots, m_n son enteros, tendríamos \mathbb{R}^n dividido en ‘cajas’, de diámetro $\delta\sqrt{n}$ y contando el número de cajas que recubren a A , obtenemos el mismo resultado, puede comprobarse en [3, sección 3.1].

¹Nótese la analogía con la notación de los límites superior e inferior como $\underline{\lim}$ y $\overline{\lim}$.

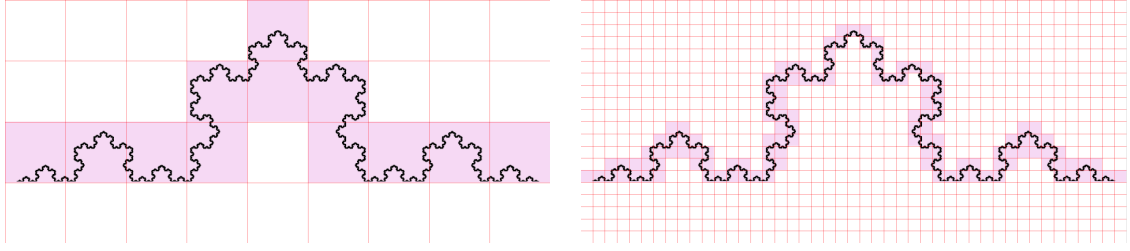


Imagen 1.10: Una forma de calcular la dimensión por cajas de la curva de Koch

1.2.3. Medida y dimensión de Hausdorff

La dimensión por cajas tiene el inconveniente de que no tenemos garantizada la existencia de límite en la ecuación (1.2) o hipotéticos problemas con conjuntos más generales, por ejemplo conjuntos densos. Así, $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto en el que cada punto por separado tiene obviamente dimensión por cajas igual a 0, pero al ser \mathbb{Q} un conjunto denso en \mathbb{R} la dimensión por cajas de F es 1. Por tanto, no se cumple en general que para una familia $\{F_i\}$ de conjuntos $\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_B F_i$. Para solucionar estos problemas *Felix Hausdorff* publicó en 1919 un artículo que cambiaría la teoría de la medida tal y como la conocíamos [4].

Si ahora tomamos un conjunto A de \mathbb{R}^n , un valor $\varepsilon > 0$ y una familia numerable de conjuntos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \quad 0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

se dice que la familia $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un ε -recubrimiento de A . Si ahora consideramos un valor $s > 0$, definimos

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ es un } \varepsilon\text{-recubrimiento de } A \right\}$$

Si reducimos el valor de ε el número de posibles recubrimientos disminuye, por lo que $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$ aumenta. Por esto nos planteamos cuál será el límite cuando ε tienda a cero, aceptando posiblemente el infinito como posible valor del límite. Definimos así

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

En [3, Secciones 5.2 y 5.4] se comprueba que $\mathcal{H}^s(A)$ es una medida definida en la σ -álgebra de Borel que llamamos *medida s -dimensional de Hausdorff* del conjunto A .

Veamos el comportamiento de $\mathcal{H}^s(A)$ como función de s . Es claro que siempre que $\varepsilon < 1$, $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$ decrece conforme s aumenta, por tanto $\mathcal{H}^s(A)$ también es decreciente. Podemos de hecho probar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $t > s$, $0 < \varepsilon < 1$ y $\{U_i\}$ un ε -recubrimiento de A . Entonces

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

Demostración. Sabemos que $\text{diam}(U_i)^{t-s} \leq \varepsilon^{t-s} \forall i \in \mathbb{N}$ y del hecho de que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^{t-s} \text{diam}(U_i)^s$ deducimos que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s.$$

Tomando el ínfimo en la anterior desigualdad tenemos que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s,$$

por lo que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

□

Esta desigualdad nos será muy útil para probar el siguiente teorema que nos da la definición definitiva de lo que llamaremos dimensión de Hausdorff.

Teorema 1.2.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe un único valor de s para el cual $\mathcal{H}^s(A)$ no es ni 0 ni ∞ . Este valor $s = \dim_H(A)$ satisface que:*

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_H(A) \\ 0 & \text{si } s > D_H(A) \end{cases} \quad (1.3)$$

Demostración. Si tomamos $0 < \varepsilon < 1$ y $t > s$ dos valores reales, por la proposición 1.2.2 tenemos que $\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$. Por tanto, al hacer a ε tender a 0, siempre que $\mathcal{H}^s(A)$ sea finito necesariamente $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Si aplicamos el contrarrecíproco ocurre que si $\mathcal{H}^t(A) > 0$ entonces $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Por lo que necesariamente debe de existir un valor $s_0 \in [0, \infty]$ tal que $\mathcal{H}^s(A) = 0 \forall s < s_0$ y $\mathcal{H}^s(A) = \infty \forall s > s_0$. □

Definición 1.2.4 (Dimensión de Hausdorff). Llamamos **dimensión de Hausdorff** de un conjunto A al único valor $\dim_H(A)$ que satisface las condiciones del teorema 1.2.1.

1.2.4. Dimensión topológica

Por último estudiaremos un concepto de dimensión aplicable a espacios topológicos. La **dimensión topológica** se define inductivamente de la siguiente forma:

1. La dimensión del conjunto vacío es $\dim_T(\emptyset) := -1$.
2. Un espacio topológico X tiene dimensión 0 ($\dim_T(X) = 0$) si para cualquier $x \in V$ con V abierto en X existe un abierto U cuya frontera $\partial(U)$ es vacía y se verifica que $x \in U \subseteq V$.
3. Un espacio topológico X tiene dimensión menor o igual que n ($\dim_T(X) \leq n$) si para cualquier $x \in X$ y cualquier V abierto que contiene a x existe un abierto U tal que $\dim_T(\partial(U)) \leq n - 1$ y se verifica que $x \in U \subseteq V$.
4. X tiene dimensión n ($\dim_T(X) = n$) si se verifica que $\dim_T(X) \leq n$ pero es falso que $\dim_T(X) \leq n - 1$.

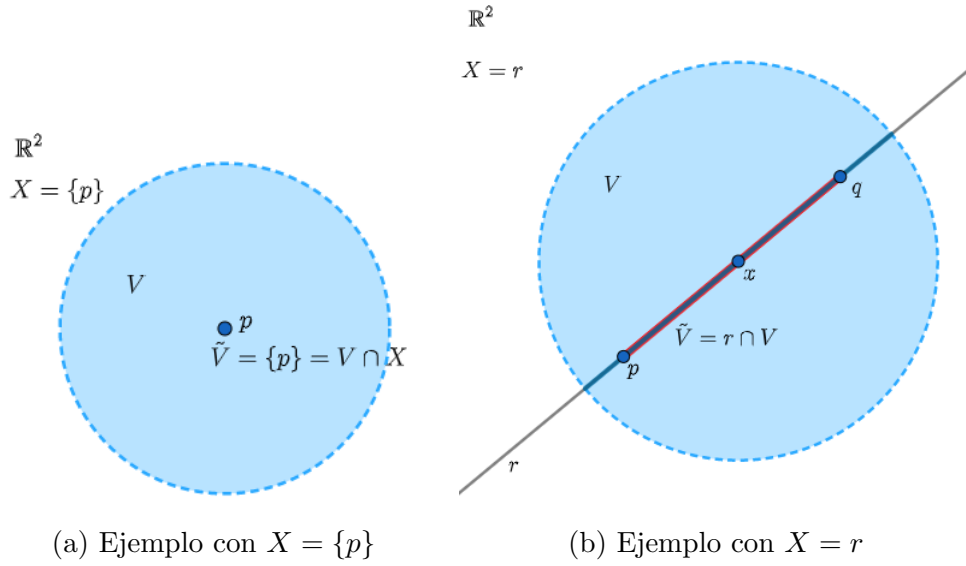


Imagen 1.11: Figuras representativas de los ejemplos

Ejemplo 1.2.1. (Véase imagen 1.11 (a)) En \mathbb{R}^2 dotado de la topología usual consideramos un punto p cualquiera y el espacio topológico $X = \{p\}$. Por tanto la topología inducida por la topología usual τ en X es $\tau_X = \{X, \emptyset\}$. Sea V un abierto de \mathbb{R}^2 que contenga a p , por tanto $\tilde{V} = V \cap X = \{p\}$ es un abierto en X que contiene a p . Podemos encontrar entonces un abierto $U = \{p\}$ de X tal que su frontera $\partial(U) = \emptyset$ y además $p \in U \subseteq V$. Por tanto concluimos que X tiene dimensión 0.

Ejemplo 1.2.2. (Véase imagen 1.11 (b)) En \mathbb{R}^2 dotado de la topología usual, consideramos una recta cualquiera, llamémosla r , y el espacio topológico $X = \{r\}$. Sea $x \in X$ y V un abierto de \mathbb{R}^2 que contenga a x , de forma que $\tilde{V} = r \cap V$ es un abierto de X . Podemos entonces tomar un abierto U dentro de \tilde{V} (un segmento abierto de recta), de forma que $x \in U \subseteq \tilde{V}$. Por otro lado, $\partial(U) = \{p, q\}$, y podemos comprobar fácilmente (con ayuda del ejemplo 1.2.1) que $\dim_T(\partial(U)) = 0$. Por todo esto podemos concluir que $X = r$ es un espacio topológico de dimensión 1.

1.2.5. Relación entre los distintos tipos de dimensión fractal

La dimensión por cajas, aunque útil en la práctica, al comienzo de la sección 1.2.3 hemos comprobado que tiene algunos problemas. No obstante, para muchos fractales, y en particular para los que cumplen la *condición de conjunto abierto*², resulta más sencillo computacionalmente calcular su dimensión por cajas frente a su dimensión de Hausdorff.

En general, y como se puede comprobar en [3, Sección 3.1], ocurre que la dimensión por cajas acota superiormente a la dimensión de Hausdorff, esto es, dado $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A),$$

donde, insistimos, es posible que se dé la igualdad.

²Wagon, S. (2010). *Mathematica in Action*. Springer Publishing. p. 124

Sobre la dimensión topológica, se tiene que si X es un espacio topológico separable³, entonces

$$\dim_T(X) \leq \dim_H(X).$$

Este resultado fue originalmente probado por *Edward Szpilrajn*, véase [5, Capítulo VII].

Por otro lado, si nos restringimos a conjuntos totalmente autosimilares, existe un resultado que relaciona la dimensión de Hausdorff y la dimensión por cajas para conjuntos totalmente autosimilares: el teorema de Moran [6]. Este resultado nos asegura que en estos casos la dimensión por cajas y la dimensión de Hausdorff coinciden siempre que el conjunto sea autosimilar.

En conclusión, para un conjunto no vacío y acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$\dim_T(A) \leq \dim_H(A) \leq \dim_B(A) \leq n \quad (1.4)$$

A partir de esta cadena de desigualdades, en la que notamos que la dimensión fractal, entendiendo por esta la dimensión de Hausdorff que es la más general, y que siempre excede o iguala a la dimensión topológica, podemos enunciar nuestra primera definición de fractal, que fue formulada por *Benoit Mandelbrot* en [2].

Definición 1.2.5 (Fractal). Un **fractal** es un subconjunto de \mathbb{R}^n que es autosimilar y cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica.

³Recordamos que un espacio topológico es *separable* si contiene un conjunto denso numerable

2 Iteración

Como hemos podido comprobar en el capítulo anterior, muchos de los fractales clásicos son generados repitiendo indefinidamente un proceso. Iteración es el proceso de repetir una y otra vez un método, ocasionalmente sobre el resultado de la aplicación anterior. La evolución de este procedimiento es a lo que llamamos un **sistema dinámico**, y aplicar esta metodología sobre ciertos lugares del plano y sobre ciertas funciones complejas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es lo que nos proporcionará bellas imágenes fractales.

2.1. Iteración en \mathbb{R}

Definición 2.1.1. Consideramos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x \in \mathbb{R}$. La aplicación sucesiva de f a x — i.e. $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$ — produce las *iteradas* de la función f en el punto x . Al conjunto de dichas iteradas se le denomina *órbita* $O_f(x)$ de f en x .

$$O_f(x) := \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}.$$

donde f^n denota a $f \circ f^{n-1}$.

Lo siguiente es plantearse la posible convergencia de la sucesión $\{f^n(x)\}$. Para ello, y a partir de este momento nos ayudaremos del software [Mathematica®](#) en su versión 12 (concretamente la versión 12.1). El comando `NestList[f, x, n]` itera una función `f`, comenzando en el punto `x` `n` veces y devuelve una lista con los `n` valores.

```
In[]:= NestList[f, a, 5]
```

```
Out[]= {a, f[a], f[f[a]], f[f[f[a]]], f[f[f[f[a]]]],  
        f[f[f[f[f[a]]]]]}
```

Para saber qué ocurre a largo plazo podemos iterar un número grande de veces, fijémonos lo que ocurre si utilizamos $f(x) := \sqrt{x}$ comenzando por $x_0 = 0,175$.

```
In[]:= f[x_] = Sqrt[x];  
        NestList[f, 0.175, 20]
```

```
Out[]= {0.175, 0.41833, 0.646784, 0.804229, 0.896788, 0.946989,  
        0.973134, 0.986475, 0.993215, 0.996602, 0.998299, 0.999149,  
        0.999575, 0.999787, 0.999894, 0.999947, 0.999973, 0.999987,  
        0.999993, 0.999997, 0.999998}
```

Como se puede observar, en cada iteración se acerca cada vez más a 1, lo cual denotamos con $O_f(0,175) \rightarrow 1$. Nuestro objetivo ahora es poder conocer el comportamiento de la órbita de una función y un punto dados.

2.1.1. Tipos de convergencia

Para ilustrar de forma sencilla las distintas posibilidades nos ayudaremos de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $f(x) = x^2$. Es claro que si $|x| > 1$ entonces $O_f(x) \rightarrow \infty$, es decir, diverge. Si $|x| < 1$ se tiene que $O_f(x) \rightarrow 0$, por lo tanto converge a 0. Por último, en caso de que $x = -1$ ó $x = 1$ tenemos $O_f(x) = \{1\}$ en ambos casos, por lo que lógicamente convergen a 1.

En este caso, y debido a la simplicidad de la función, hemos podido clasificar la órbita de todos los puntos de \mathbb{R} , pudiendo decir que todas las órbitas son *predecibles*. Pensemos ahora en la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = -x^3$. De nuevo, si $|x| < 1$ la órbita converge a 0 y si $|x| > 1$ la órbita diverge, aunque este caso lo hagan cambiando ocasionalmente el signo. Sin embargo, en $x = -1$ y en $x = 1$ ocurre un suceso distinto.

$$O_g(1) = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

$$O_g(-1) = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

Los valores 1 y -1 se van alternando. Esto es, la órbita no es convergente, ni divergente, sino cíclica, concretamente de período 2. A este caso se le denomina **órbita periódica**. Aunque este caso sea distinto, aún es predecible, podemos saber cómo se comportará la órbita en el infinito. Pero veamos ahora un último ejemplo distinto, con la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x) = 4x(1 - x)$ en el punto $x = 0,3$:

```
In[] := h[x_] = 4 x (1 - x);  
NestList[h, 0.3, 20]
```

```
Out[] = {0.3, 0.84, 0.5376, 0.994345, 0.0224922, 0.0879454,  
0.320844, 0.871612, 0.447617, 0.989024, 0.0434219,  
0.166146, 0.554165, 0.988265, 0.0463905, 0.176954,  
0.582565, 0.972732, 0.106097, 0.379361, 0.941785}
```

Esta vez la órbita no sigue ningún patrón predecible, y además se puede comprobar que es muy sensible a las condiciones iniciales. A esto le llamamos un comportamiento **caótico**.

2.1.2. Velocidad de convergencia

En estos casos, han sido suficientes 20 iteraciones para conocer el comportamiento de la órbita a largo plazo, pero interesa saber cuántas iteraciones son necesarias en cada punto para saber si hemos alcanzado el valor al que converge la sucesión. En general, este alcance se toma como aproximado, pues generalmente nunca se llega a alcanzar el punto fijo, tan solo podemos reducir la diferencia tanto como queramos. En este sentido, *Mathematica* tiene dos comandos útiles:

- `FixedPointList[f,expr]` genera una lista de valores resultantes de aplicar `f` a `expr` repetidamente hasta que los dos últimos valores no cambian. Para parametrizar la precisión en la proximidad de los valores podemos utilizar el argumento opcional `SameTest`¹.

¹Más información en la documentación oficial <https://reference.wolfram.com/language/ref/FixedPointList.html>

- `FixedPoint[f,expr]` hace lo mismo pero produce como salida únicamente el valor último producido.

El siguiente código muestra un ejemplo de uso:

```
In[] := f[x_] = x/2 + 1/x;
      FixedPointList[f, 1.0, SameTest -> (Abs[#1 - #2] < 10^-4 &)]
      FixedPoint[f, 1.0]

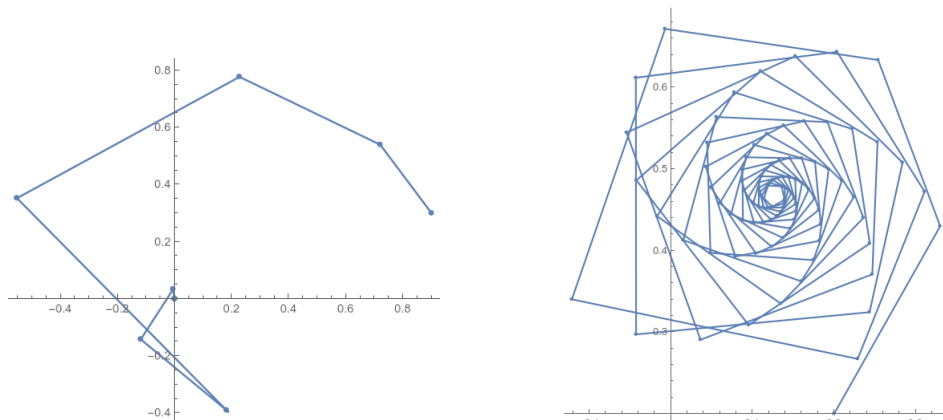
Out[] = {1., 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421}
Out[] = 1.41421
```

Y a partir de la longitud de la lista que nos devuelve `FixedPointList`, es decir, con el sencillo comando `Length[FixedPointList[f,x]]` podemos medir la velocidad de convergencia de cada punto.

2.2. Iteración en \mathbb{C}

De manera natural, todos los conceptos explicados anteriormente sobre iteración en \mathbb{R} se pueden extender al plano complejo. Esto es, dada una función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y un número complejo $z \in \mathbb{C}$, podemos preguntarnos por el comportamiento a largo plazo de la órbita $O_f(z)$. En este caso, y utilizando la correspondencia entre un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y un número complejo $z = x + i \cdot y$, podemos representar cada punto de una órbita como un punto del plano, pudiendo así fácilmente graficar las órbitas y observar su comportamiento. Observamos en la imagen 2.1 dos ejemplos de esto, ambos han sido generados por el código siguiente, cambiando necesariamente los parámetros para generar la figura (b), de aspecto más armónico.

```
In[] := f[z_] := z^2;
      x0 = 0.9 + 0.3 I;
      ComplexListPlot[N[FixedPointList[f, x0, 10]]];
      ComplexListPlot[N[FixedPointList[f, x0, 10]], Joined -> True];
      Show[%, %]
```



(a) $f(z) = z^2$ en $z = 0,9 + 0,3i$ (b) $f(z) = z^2 + 0,33 + 0,35i$ en $z = 0,2 + 0,2i$

Imagen 2.1: Representación de dos órbitas en \mathbb{C}

De hecho, para la función $f(z) = z^2$ se tiene que la órbita de todo z con módulo $|z| < 1$ tiende a 0, mientras que si $|z| > 1$ diverge y si $|z| = 1$ su órbita permanece siempre en la esfera unidad S^1 . Por tanto, S^1 se convierte en la frontera entre los puntos *de escape* – cuyas órbitas escapan – y los puntos *prisioneros* – cuyas órbitas convergen. Por tanto los puntos del plano complejo presentan una dicotomía para la función f : escapar o no. S^1 , al ser la frontera entre estos dos conjuntos, es conocido como el *conjunto de Julia* de la función $f(z) = z^2$. Esta idea será tratada detenidamente en el capítulo 3.

2.3. El método de Newton y cuencas de atracción

La iteración es la base de muchos métodos numéricos, entre los que en este caso destacamos el ‘método de Newton’, el cual fue inicialmente descrito por *Isaac Newton* en su libro *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Este es un procedimiento muy útil y utilizado en la resolución de ecuaciones, tomando una ecuación como el punto en el que se anula una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, aunque gracias al trabajo de *Arthur Cayley* sabemos que es posible generalizarlo a los números complejos.

Recordemos que dada una ecuación $f(z) = 0$ para cierta función compleja y derivable $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, el método de Newton itera la función

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (2.1)$$

comenzando por un punto z_0 cercano a la raíz. Es decir, calcula la sucesión $\{z_n\}$ definida como $z_{n+1} = N_f(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$, la cual converge a un punto $a \in \mathbb{C}$ que verifica $f(a) = 0$.

Sin embargo, en muchas ecuaciones, comenzando por las polinómicas de grado mayor que 1, existen varias soluciones distintas, pero el método de Newton converge sólo a una de ellas. Nuestro objetivo ahora se sitúa en discernir, para cada punto z_0 del plano, a qué solución de la ecuación $f(z) = 0$ converge la sucesión $\{z_n\}$ dada por el método de Newton utilizando a z_0 como semilla. En las siguientes secciones veremos algunos ejemplos de esta distinción y su utilidad, llegando a las primeras imágenes fractales generadas por iteración.

2.3.1. Caso $z^2 - 1$

Consideramos la función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2 - 1$, la cual tiene dos raíces: 1 y -1 , las dos raíces cuadradas de 1. Una forma sencilla de comprobar a qué raíz converge cada sucesión utilizando como semilla cada $z_0 \in \mathbb{C}$ es asociando un color a cada punto del plano dependiendo de la raíz a la que converja y pidiendo a *Mathematica* que coloree el plano complejo siguiendo este criterio.

```
In[]:= iteracionN = #2 - #1[#2]/Derivative[1][#1][#2] &;
newtonArgumento =
  Compile[{{z, _Complex}},
    Arg[FixedPoint[iteracionNR[f, #] &, z, 50]]];

In[]:= DensityPlot[newtonArgumento[x + I*y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  PlotPoints -> 100, Mesh -> False, ColorFunction -> "Rainbow"]
```

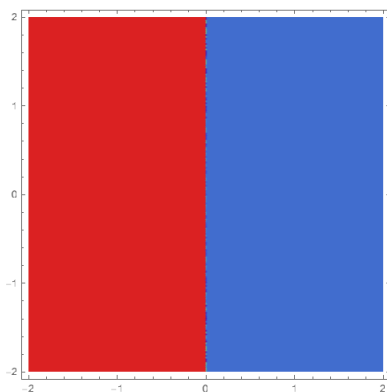



Imagen 2.2: Cuencas de atracción de $f(z) = z^2 - 1$.

Produciendo como resultado la imagen 2.2. La forma de deducir a qué raíz converge cada sucesión consiste en evaluar los argumentos de los valores a los que se acerca la sucesión. Como podemos ver, y teniendo en cuenta que la imagen solo grafica el intervalo $[-2, 2] \times [-2, 2]$ y un número finito de puntos² la sucesión cuya semilla es un punto perteneciente al semiplano abierto de la derecha converge a la raíz 1. Por otro lado, si la sucesión comienza con un complejo del semiplano abierto de la izquierda, entonces esta converge a la raíz -1 . Apoyándonos en este ejemplo, definimos el siguiente concepto.

Definición 2.3.1 (Cuenca de atracción). Definimos como *cuenca de atracción* de una raíz $a \in \mathbb{C}$ de una función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (i.e. $f(a) = 0$), y denotamos como $A(a)$ al conjunto de puntos $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que la sucesión $\{z_n\}$ dada por $z_{n+1} = N_f(z_n)$ converge a a utilizando a z_0 como primer valor de la sucesión.

Es decir, tenemos en este caso que

$$A(-1) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\},$$

$$A(1) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

y sin embargo los puntos del eje Y no convergen a ninguna de las raíces, siendo esta por tanto la frontera entre las dos cuencas de atracción y el conjunto invariante para N_f .

2.3.2. Caso $z^3 - 1$

Consideremos ahora la función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^3 - 1$, cuyas raíces son las raíces cúbicas de 1, es decir: 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. De nuevo seguimos la estrategia que hemos tomado en la sección 2.3.1, dividir en píxeles una región del plano complejo y colorear dichos píxeles según distintos colores dependiendo de cuál sea su cuenca de atracción. De esta forma, cada cuenca de atracción será caracterizada por un único color. *Mathematica* permite personalizar la función de color que se utiliza en estos gráficos, de forma que no solo es posible asociar un color, sino una tonalidad de gris mediante el uso del argumento `ColorFunction`, asociándole el valor “Rainbow”, “Graylevel”, o personalizando nosotros mismos la función de coloreado, como veremos más adelante.

²El número de puntos que se grafica se puede parametrizar con el argumento opcional “PlotPoints” de las funciones “Plot”. A mayor valor mayor calidad de imagen y resolución, pero mayor tiempo de ejecución.

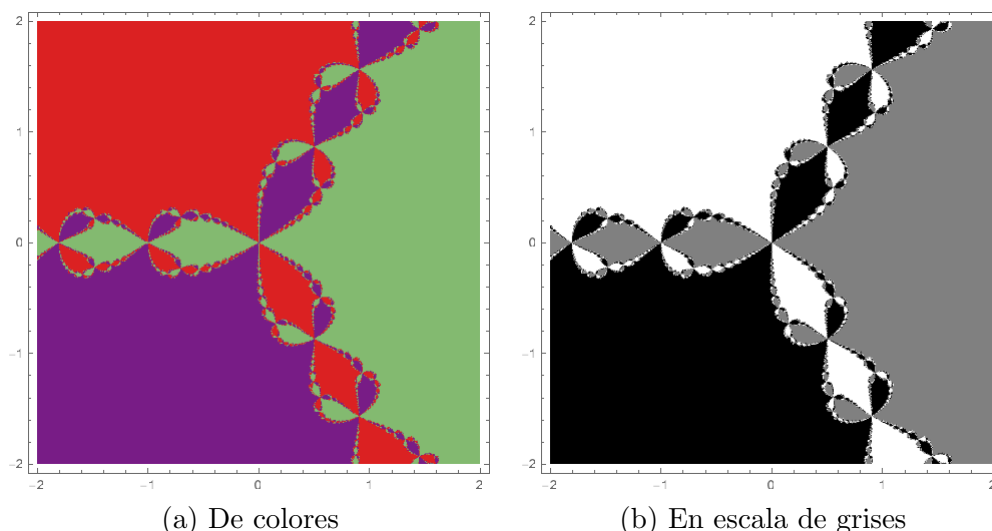


Imagen 2.3: Cuencas de atracción de $f(z) = z^3 - 1$

El resultado de este cálculo es el que se representa en la imagen 2.3, que es realmente el mismo con coloreado distinto. En estas imágenes podemos ahora sí ver el primer ejemplo de estructura fractal producido por la iteración. Observemos que las sucesiones de dos puntos muy próximos pueden converger a raíces distintas, por lo que este es un ejemplo de *caos matemático*: pequeñas variaciones en las condiciones iniciales conducen a comportamientos muy diferentes.

Otra posibilidad para representar estas imágenes es, en lugar de asociar un color a cada número complejo según la cuenca de atracción a la que pertenece, evaluar la velocidad de convergencia, es decir, las iteraciones necesarias hasta alcanzar la raíz en cuestión. A partir de esa velocidad de convergencia asignamos un color más o menos intenso. El código necesario se muestra a continuación y el resultado en la imagen 2.4.

```
newtonVelocidad =
  Compile[{{z, _Complex}},
    Length[FixedPointList[iteracionN[f, #] &, z, 50]];

DensityPlot[newtonVelocidad[x + I*y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  PlotPoints -> 200, Mesh -> False, ColorFunction -> GrayLevel]
```

Fijémonos además que si hacemos *zoom* en ciertas partes de la imagen, es decir, representamos una región más pequeña, encontramos estructuras que son iguales independientemente del zoom que se aplique. En la figura 2.5 podemos ver distintos detalles de la figura 2.4, cada una es una ampliación de la anterior, y podemos ver como esa estructura se repite en todas las escalas.

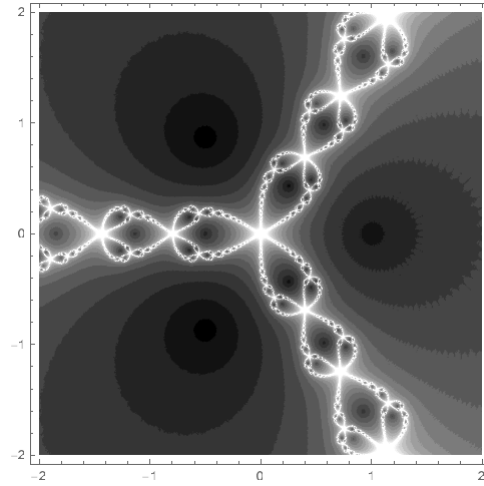


Imagen 2.4: Evaluación de la velocidad de convergencia a las raíces.

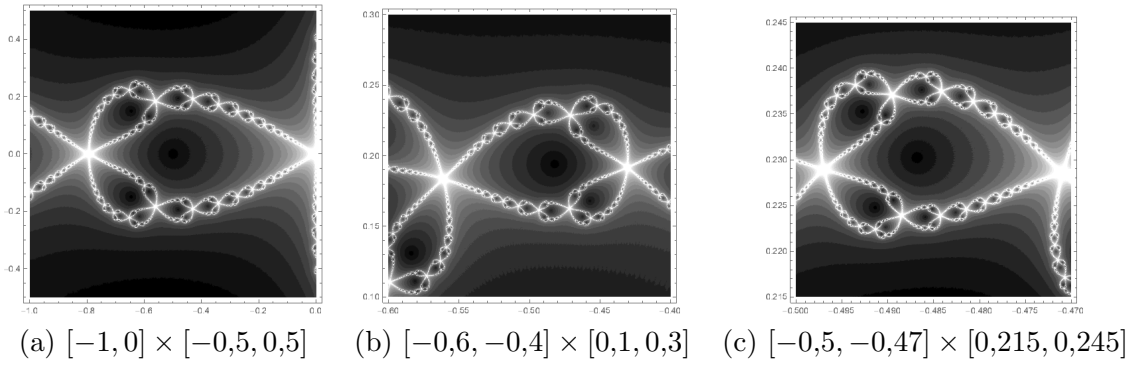


Imagen 2.5: Diferentes regiones ampliadas de la figura 2.4

De manera natural, podemos aplicar esta misma teoría a cualquier otro tipo de funciones, como por ejemplo $z^n - 1$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$), o incluso no polinómicas como $z^3 - 3^z$ o $z^2 - 2^z - 1$.

3 Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Bibliografía

- [1] Edgar, G.A. (2008). *Measure, Topology, and Fractal Geometry* (2nd ed. 2008.). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74749-1>
- [2] Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal geometry of nature*. Freeman.
- [3] Falconer, K. (1990). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley.
- [4] Hausdorff, F. *Dimension und ausseres Mass*. Mathematische Annalen 79 (1919): 157-179. <http://eudml.org/doc/158784>.
- [5] Hurewicz, W.; Wallman, H. (1948). *Dimension Theory*. Princeton University Press.
- [6] Moran, P.A. (1946). *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 42, No. 1, pp. 15-23). Cambridge University Press.

A Appendix title

B Another Appendix