



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Los fundamentos de Ray Tracing

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

[asmilex.github.io/Raytracing](https://asmilex.github.io/Raytracing)

**Presentado por:** Andrés Millán Muñoz,

**Tutorizado por:** Carlos Ureña Almagro, María del Carmen Segovia García

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de  
Telecomunicación  
Facultad de Ciencias

May 11, 2022



# Contents

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>A brief overview</b>	<b>2</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Nota histórica . . . . .	5
1.2. ¿Qué es ray tracing? . . . . .	6
1.3. Objetivos del trabajo . . . . .	8
1.4. Técnicas empleadas para la resolución . . . . .	8
1.5. Principales fuentes consultadas . . . . .	9
<b>2. Las bases</b>	<b>11</b>
2.1. Eligiendo direcciones . . . . .	13
2.2. Intersecciones rayo - objeto . . . . .	14
2.2.1. Superficies implícitas . . . . .	15
2.2.2. Superficies paramétricas . . . . .	16
2.2.3. Intersecciones con esferas . . . . .	17
2.2.4. Intersecciones con triángulos . . . . .	20
2.2.4.1. Coordenadas baricéntricas . . . . .	20
2.2.4.2. Calculando la intersección . . . . .	21
<b>3. Transporte de luz</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción a la radiometría . . . . .	23
3.1.1. Potencia . . . . .	24

3.1.2.	Irradiancia . . . . .	24
3.1.3.	Ángulos sólidos . . . . .	26
3.1.4.	Intensidad radiante . . . . .	30
3.1.5.	Radiancia . . . . .	31
3.1.6.	Integrales radiométricas . . . . .	34
3.1.6.1.	Una nueva expresión de la irradiancia y el flujo . . . .	34
3.1.6.2.	Integrando sobre área . . . . .	35
3.1.7.	Fotometría y radiometría . . . . .	36
3.2.	Dispersión de luz . . . . .	36
3.2.1.	La función de distribución de reflectancia bidireccional (BRDF) .	37
3.2.2.	La función de distribución de transmitancia bidireccional (BTDF)	38
3.2.3.	La función de distribución de dispersión bidireccional (BSDF) . .	39
3.2.4.	Reflectancia hemisférica . . . . .	40
3.3.	Modelos ópticos de materiales . . . . .	41
3.3.1.	Tipos de dispersión . . . . .	41
3.3.2.	Reflexión . . . . .	43
3.3.2.1.	Reflexión especular perfecta . . . . .	43
3.3.2.2.	Reflexión difusa o lambertiana . . . . .	44
3.3.2.3.	Reflexión especular no perfecta . . . . .	44
3.3.2.3.1.	Phong . . . . .	44
3.3.2.3.2.	Blinn - Phong . . . . .	45
3.3.3.	Refracción . . . . .	46
3.3.3.1.	Ley de Snell . . . . .	46
3.3.3.2.	Ecuaciones de Fresnel . . . . .	48
3.3.3.3.	La aproximación de Schlick . . . . .	49
3.3.4.	Materiales híbridos . . . . .	50
3.3.5.	Otros modelos . . . . .	50
3.3.5.1.	Oren - Nayar . . . . .	50
3.3.5.2.	GGX . . . . .	50
3.4.	La rendering equation . . . . .	51

<b>4. Métodos de Monte Carlo</b>	<b>54</b>
4.1. Repaso de probabilidad . . . . .	54
4.1.1. Variables aleatorias discretas . . . . .	55
4.1.2. Variables aleatorias continuas . . . . .	57
4.1.3. Esperanza y varianza de una variable aleatoria . . . . .	59
4.1.4. Teoremas importantes . . . . .	61
4.1.5. Estimadores . . . . .	62
4.2. El estimador de Monte Carlo . . . . .	62
4.2.1. Monte Carlo básico . . . . .	63
4.2.2. Integración de Monte Carlo . . . . .	64
4.3. Técnicas de reducción de varianza . . . . .	67
4.3.1. Muestreo por importancia . . . . .	67
4.3.1.1. Muestreo por importancia en transporte de luz . . . . .	69
4.3.2. Muestreo por importancia múltiple . . . . .	71
4.3.2.1. Muestreo por importancia múltiple en transporte de luz . . . . .	72
4.3.3. Otras técnicas de reducción de varianza en transporte de luz . . . . .	73
4.3.3.1. Ruleta rusa . . . . .	73
4.3.3.2. Next event estimation, o muestreo directo de fuentes de luz . . . . .	73
4.3.3.3. Quasi-Monte Carlo . . . . .	75
4.4. Escogiendo puntos aleatorios . . . . .	76
4.4.1. Método de la transformada inversa . . . . .	76
4.4.2. Método del rechazo . . . . .	78
<b>5. ¡Construyamos un path tracer!</b>	<b>79</b>
5.1. Requisitos de ray tracing en tiempo real . . . . .	79
5.1.1. Arquitecturas de gráficas . . . . .	80
5.1.2. Frameworks y API de ray tracing en tiempo real . . . . .	81
5.2. Setup del proyecto . . . . .	82
5.2.1. Vistazo general a la estructura . . . . .	82
5.3. Compilación . . . . .	83

5.4.	Estructuras de aceleración . . . . .	84
5.4.1.	Botom-Level Acceleration Structure (BLAS) . . . . .	85
5.4.2.	Top-Level Acceleration Structure (TLAS) . . . . .	86
5.5.	La ray tracing pipeline . . . . .	88
5.5.1.	Descriptores y conceptos básicos . . . . .	88
5.5.2.	La Shader binding table . . . . .	88
5.5.2.1.	Cálculo de la entrada de la SBT . . . . .	90
5.5.3.	Tipos de shaders . . . . .	91
5.5.4.	Traspaso de información entre shaders . . . . .	92
5.5.5.	Creación de la ray tracing pipeline . . . . .	92
5.6.	Transporte de luz en la práctica . . . . .	93
5.6.1.	Estimando la rendering equation con Monte Carlo . . . . .	93
5.6.2.	Pseudocódigo de un path tracer . . . . .	94
5.6.3.	Evitando la recursividad . . . . .	95
5.6.4.	Antialiasing mediante jittering y acumulación temporal . . . . .	98
5.6.5.	Materiales y objetos . . . . .	99
5.7.	Fuentes de luz . . . . .	101
5.7.1.	Point lights + spotlights . . . . .	101
5.7.2.	Fuentes de área . . . . .	102
<b>6.</b>	<b>Análisis de rendimiento</b>	<b>104</b>
<b>7.</b>	<b>El presente y futuro de RT</b>	<b>105</b>
7.1.	Denoising . . . . .	105
7.2.	Filtering . . . . .	105
7.3.	Offline renderers . . . . .	105
7.4.	La industria del videojuego . . . . .	105
7.4.1.	Ray tracing híbrido . . . . .	105
7.4.2.	Productos comerciales . . . . .	105
7.4.3.	Unreal Engine 5 . . . . .	106
7.4.4.	La última generación de consolas . . . . .	106
7.5.	Posibles mejoras del trabajo . . . . .	106
7.5.0.1.	Blue noise . . . . .	107

7.5.0.2.	Forced random sampling . . . . .	107
7.5.0.3.	Sampling importance resampling . . . . .	107
7.5.0.4.	Low discrepancy sampling . . . . .	107
<b>A.</b>	<b>Metodología de trabajo</b>	<b>108</b>
A.1.	Influencias . . . . .	108
A.2.	Ciclos de desarrollo . . . . .	109
A.3.	Presupuesto . . . . .	109
A.4.	Arquitectura del software . . . . .	110
A.5.	Diseño . . . . .	110
A.5.1.	Bases del diseño . . . . .	110
A.5.2.	Tipografías . . . . .	110
A.5.3.	Paleta de colores . . . . .	111
A.6.	Flujo de trabajo y herramientas . . . . .	113
A.6.1.	Pandoc . . . . .	113
A.6.2.	Figma . . . . .	114
A.6.3.	Otros programas . . . . .	115
A.7.	Github . . . . .	115
A.7.1.	Integración continua con Github Actions y Github Pages . . . . .	116
A.7.2.	Issues y Github Projects . . . . .	118
A.7.3.	Estilo de commits . . . . .	121
<b>B.</b>	<b>Glosario de términos</b>	<b>122</b>
B.1.	Notación . . . . .	122
B.2.	Radiometría . . . . .	123
	<b>Bibliografía</b>	<b>125</b>

# Abstract

Este trabajo explorará las técnicas modernas de informática gráfica físicamente fieles basadas en *ray tracing* en tiempo real. Para ello, se usarán métodos de integración de Monte Carlo dado que disminuyen el tiempo necesario de cómputo.

Para conseguirlo, se ha diseñado un software basado en la interfaz de programación de aplicaciones gráficas Vulkan, usando como base un entorno de desarrollo de Nvidia conocido como nvpro-samples. El software implementa un motor gráfico basado en *path tracing*. Este motor será capaz de muestrear fuentes de iluminación de forma directa, lo que se conoce como *next-event estimation*. Para disminuir el tiempo de cómputo y hacerlo viable en tiempo real, se usarán técnicas de Monte Carlo para integrar radiancia. Se explorarán cómo afectan los diferentes métodos al ruido final de la imagen.

Este motor se comparará con una implementación puramente en CPU basada en el software desarrollado en los libros de (Shirley 2020a) “Ray Tracing in One Weekend series”. Se han estudiado las diferencias de tiempo entre una implementación y otra, sus ventajas y desventajas y el ruido de las imágenes producidas.

*Palabras clave: raytracing, ray tracing, Monte Carlo, Monte Carlo integration, radiometry, path tracing, Vulkan.*

# A brief overview

TODO

*Keywords: raytracing, ray tracing, Monte Carlo, Monte Carlo integration, radiometry, path tracing, Vulkan.*





# Dedicatoria

¡Parece que has llegado un poco pronto! Si lo has hecho voluntariamente, ¡muchas gracias! Este proyecto debería estar finalizado en verano de 2022. Mientras tanto, actualizaré poco a poco el contenido. Si quieres ir comprobando los progresos, puedes visitar [Asmilex/Ray-tracing](#) en Github para ver el estado del desarrollo.

Aun así, hay mucha gente que me ha ayudado a sacar este proyecto hacia delante.

Gracias, en primer lugar, a mi familia por permitirme acabar la carrera. A Blanca, Cristina, Jorge, Jose OC, Lucas, Mari, Marina y Paula, Sergio por ayudarme con el contenido, feedback del desarrollo y guía de diseño.

# 1. Introducción

Este trabajo puede visualizarse en la web [asmilex.github.io/Raytracing](https://asmilex.github.io/Raytracing) o en el PDF disponible en el repositorio del trabajo [Asmilex/Raytracing](#).

La página web contiene la versión más actualizada, además de recursos adicionales como vídeos.

## 1.1. Nota histórica

Ser capaces de capturar un momento.

Desde siempre, este ha sido uno de los sueños de la humanidad. La capacidad de retener lo que ven nuestros ojos comenzó con simples pinturas ruprestres. Con el tiempo, el arte evolucionó, así como la capacidad de retratar nuestra percepción con mayor fidelidad.

A inicios del siglo XVIII, se captaron las primeras imágenes con una cámara gracias a Nicéphore Niépce. Sería una imagen primitiva, claro; pero era funcional. Gracias a la compañía Kodak, la fotografía se extendió al consumidor rápidamente sobre 1890. Más tarde llegaría la fotografía digital, la cual simplificaría muchos de los problemas de las cámaras tradicionales.

Hablando de digital. Los ordenadores personales modernos nacieron unos años más tarde. Los usuarios eran capaces de mostrar imágenes en pantalla, que cambiaban bajo demanda. Y, entonces, nos hicimos una pregunta...

¿Podríamos **simular la vida real** para mostrarla en pantalla?

Como era de esperar, esto es complicado de lograr. Para conseguirlo, hemos necesitado crear abstracciones de conceptos que nos resultan naturales, como objetos, luces y seres

vivos. “Cosas” que un ordenador no entiende, y sin embargo, para nosotros *funcionan*.

Así, nació la geometría, los puntos de luces, texturas, sombreados, y otros elementos de un escenario digital. Pero, por muchas abstracciones elegantes que tengamos, no nos basta. Necesitamos visualizarlas. Y como podemos imaginarnos, esto es un proceso costoso.

La **rasterización** es el proceso mediante el cual estos objetos tridimensionales se transforman en bidimensionales. Proyectando acordemente el entorno a una cámara, conseguimos colorear un pixel, de forma que represente lo que se ve en ese mundo.

TODO insertar imagen rasterización.

NOTE ¿quizás debería extender un poco más esta parte? Parece que se queda algo coja la explicación.

Aunque esta técnica es bastante eficiente en términos de computación y ha evolucionado mucho, rápidamente saturamos sus posibilidades. Conceptos como *shadow maps*, *baked lightning*, o *reflection cubemaps* intentan solventar lo que no es posible con rasterización: preguntarnos *qué es lo que se encuentra alrededor nuestra*.

En parte, nos olvidamos de la intuitiva realidad, para centrarnos en aquello computacionalmente viable.

Y, entonces, en 1960 el trazado de rayos con una simple idea intuitiva.

## 1.2. ¿Qué es ray tracing?

En resumidas cuentas, *ray tracing* (o trazado de rayos en español), se basa en disparar fotones en forma de rayo desde nuestra cámara digital y hacerlos rebotar en la escena.

De esta forma, simulamos cómo se comporta la luz. Al impactar en un objeto, sufre un cambio en su trayectoria. Este cambio origina nuevos rayos, que vuelven a dispersarse por la escena. Estos nuevos rayos dependerán de las propiedades del objeto con el que hayan impactado. Con el tiempo necesario, lo que veremos desde nuestra cámara será una representación fotorealista de lo que habita en ese universo.

Esta técnica, tan estúpidamente intuitiva, se ha hecho famosa por su simpleza y su elegancia. *Pues claro* que la respuesta a “¿Cómo simulamos fielmente una imagen en un ordenador?” es “Representando la luz de forma realista”.

Aunque, quizás intuitiva no sea la palabra. Podemos llamarla *natural*, eso sí. A fin de cuentas, fue a partir del siglo XVIII cuando empezamos a entender que podíamos capturar la luz. Nuestros antepasados tenían teorías, pero no podían explicar por qué *veíamos* el mundo.

Ahora sí que sabemos cómo funciona. Entendiendo el por qué lo hace nos permitirá programarlo. Y, resulta que funciona impresionantemente bien.

Atrás se quedan los *hacks* necesarios para rasterización. Los cubemaps no son esenciales para los reflejos, y no necesitamos cámaras virtuales para calcular sombras. Ray tracing permite simular fácilmente efectos como reflejos, refracción, desenfoque de movimiento, aberración cromática... Incluso fenómenos físicos propios de las partículas y las ondas.

Espera. Si tan bueno es, ¿por qué no lo usamos en todos lados?

Por desgracia, el elefante en la sala es el rendimiento. Como era de esperar, disparar rayos a diestro y siniestro es costoso. **Muy costoso.**

A diferencia del universo, nosotros no nos podemos permitir el lujo de usar fotones de tamaño infinitesimal y dispersiones casi infinitas. Nos pasaríamos una eternidad esperando. Y para ver una imagen en nuestra pantalla necesitaremos estar vivos, claro.

Debemos evitar la fuerza bruta. Dado que la idea es tan elegante, la respuesta no está en el “*qué*”, sino en el “*cómo*”. Si **disparamos y dispersamos rayos con cabeza** seremos capaces de obtener lo que buscamos en un tiempo razonable.

Hace unos años, al hablar de tiempo razonable, nos referiríamos a horas. Quizás días. Producir un *frame* podría suponer una cantidad de tiempo impensable para un ordenador de consumidor. Hoy en día también ocurre esto, claro está. Pero la tecnología evoluciona.

Podemos bajarlo a milisegundos.

Hemos entrado en la era del **real time ray tracing**.

## 1.3. Objetivos del trabajo

Los objetivos del trabajo iniciales son los siguientes:

- Análisis de los algoritmos modernos de visualización en 3D basados en métodos de Monte Carlo.
- Revisión de las técnicas de Monte Carlo, examinando puntos fuertes y débiles de cada una. Se busca minimizar el error en la reconstrucción de la imagen y minimizar el tiempo de ejecución.
- Implementación de dichos algoritmos en hardware gráfico moderno (GPUs) específicamente diseñado para aceleración de ray tracing.
- Diseño e implementación de un software de síntesis de imágenes realistas por path tracing y muestreo directo de fuentes de luz por GPU.
- Análisis del rendimiento del motor con respecto al tiempo de ejecución y calidad de imagen.
- Comparación del motor desarrollado con una implementación por CPU.
- Investigación de las técnicas modernas y sobre el futuro del área.

TODO: determinar si lo siguiente es cierto.

Afortunadamente, **se ha conseguido realizar exitosamente cada uno de los objetivos**. Esta memoria cubrirá todo el trabajo que ha sido necesario realizar para lograrlo.

## 1.4. Técnicas empleadas para la resolución

TODO: echarle un ojo a esto cuando termine el trabajo.

Además del antedicho algoritmo ray tracing y su versión más pura path tracing, se han empleado técnicas de Monte Carlo para calcular la luz resultante de un punto.

En particular, con respecto a la **matemática** empleada, estudiaremos diferentes formas de generar números aleatorios mediante distribuciones particulares, (*multiple*) *importance sampling*, next event estimation, ...

En un área híbrida se encuentra la **radiometría**. Dado que estamos tratando con transporte de luz, será esencial introducir los conceptos más importantes de la radiometría. Trataremos con algunos términos como irradiancia, ángulos sólidos, radiancia, funciones de distribuciones de reflectancia y transmitancia bidireccionales, etc.

Finalmente, la parte **informática** usará en la API gráfica Vulkan junto a un framework de Nvidia para acelerar la adopción de ray tracing en KHR. Veremos qué se necesita para implementar ray tracing en tiempo real, lo que nos llevará aprender sobre programación en Vulkan, las estructuras de aceleración de nivel alto y bajo (TLAS y BLAS), la Shader Binding Table, comunicación con CPU y GPU, etc.

Todo este programa estará alojado en Github. En el **apéndice**, aprenderemos cómo se ha usado la plataforma para integrar la documentación, el código fuente y los ciclos de desarrollo.

Como podemos ver, esta área relaciona íntimamente la matemática y la informática, con un poco de física de por medio.

## 1.5. Principales fuentes consultadas

Esencialmente, este trabajo ha sido posible gracias a los siguientes recursos:

- La serie de libros de *Ray Tracing* de Peter Shirley, conocidos como “Ray tracing In One Weekend Series” (Shirley 2020a), (Shirley 2020b), (Shirley 2020c). El motor desarrollado en estos libros es el que se utilizará para la comparación.
- Physically Based Rendering: From Theory to Implementation (3rd ed.) (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016), considerado como el santo grial de la informática gráfica moderna.
- Ray Tracing Gems I y II (Haines and Akenine-Möller 2019), (Adam Marrs and Wald 2021), una colección de papers esenciales sobre ray tracing publicada por Nvidia.
- El autor Károly Zsolnai, de Two Minute Papers. No solo ha inspirado parte del trabajo, sino que su curso sobre transporte de luz de la universidad de Austria ha sido una gran fuente de información para el trabajo.

TODO: tengo que ver exactamente cómo cito esa fuente anterior.

## Referencias

(Wikipedia: history of photography n.d.), (Wikipedia: Kodak n.d.), (Wikipedia: Computer n.d.), (Wikipedia: rendering (computer graphics) n.d.), (Caulfield n.d.), (tracing n.d.), (“Rendering” n.d.), (Haines and Akenine-Möller 2019)

- <https://www.cg.tuwien.ac.at/courses/Rendering/VU.SS2019.html>

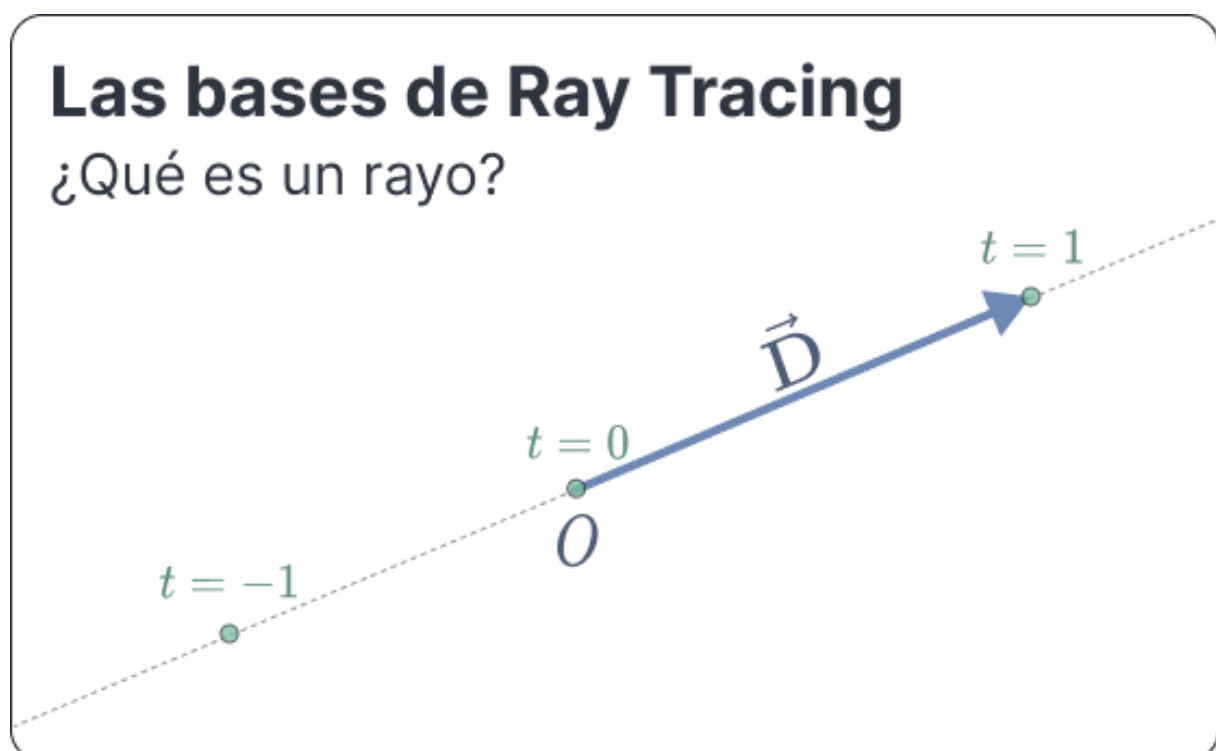


## 2. Las bases

Empecemos por definir lo que es un rayo.

Un rayo (Shirley 2020a) es una función  $P(t) = O + tD$ , donde  $O$  es el origen,  $D$  la dirección, y  $t \in \mathbb{R}$ . Podemos considerarlo una interpolación entre dos puntos en el espacio, donde  $t$  controla la posición en la que nos encontramos.

Por ejemplo, si  $t = 0$ , obtendremos el origen. Si  $t = 1$ , obtendremos el punto correspondiente a la dirección. Usando valores negativos vamos *hacia atrás*.

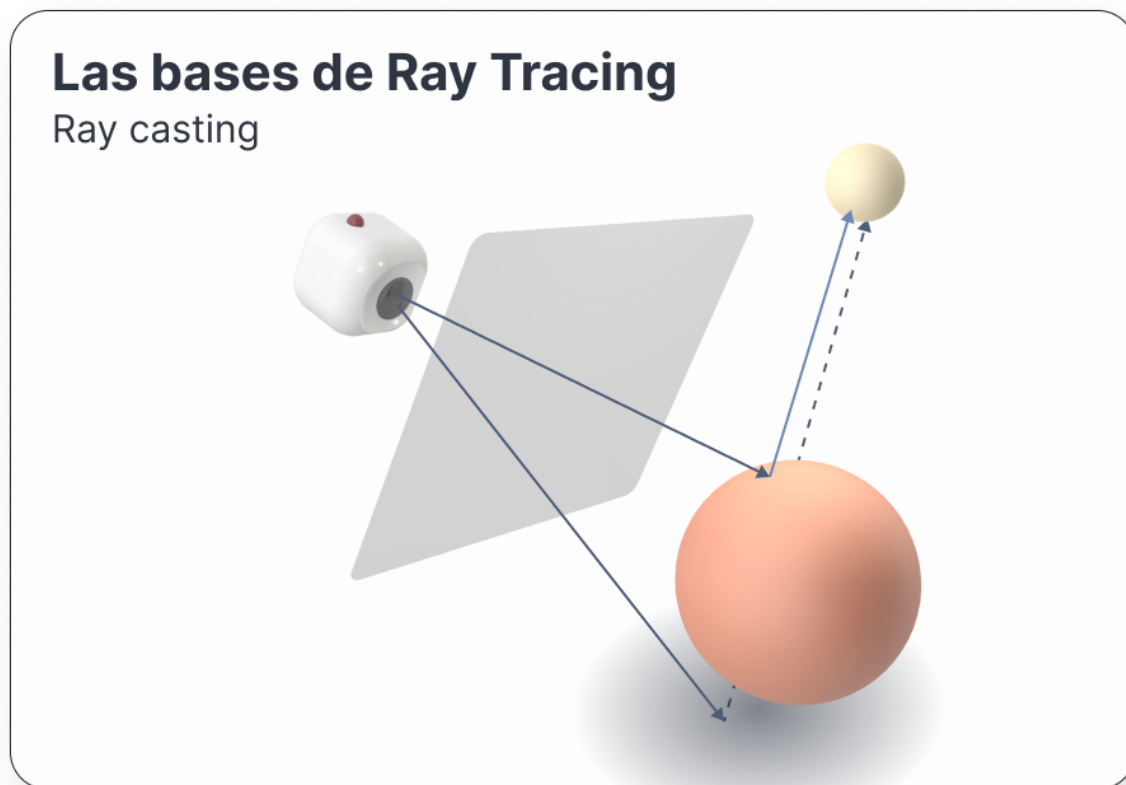


**Figure 2.1.:** El parámetro  $t$  nos permite controlar los puntos del rayo

Dado que estos puntos estarán generalmente en  $\mathbb{R}^3$ , podemos escribirlo como

$$P(t) = (O_x, O_y, O_z) + t(D_x, D_y, D_z)$$

Estos rayos los *dispararemos* a través de una cámara virtual, que estará enfocando a la escena. De esta forma, los haremos rebotar con los objetos que se encuentren en el camino del rayo. A este proceso lo llamaremos **ray casting**.



**Figure 2.2.:** Diagrama de ray casting

Generalmente, nos quedaremos con el primer objeto que nos encontremos en su camino. Aunque, a veces, nos interesará saber todos con los que se encuentre.

Cuando un rayo impacta con un objeto, adquirirá parte de las propiedades lumínicas del punto de impacto. Por ejemplo, cuánta luz proporciona la lámpara que tiene encima la esfera de la figura anterior.

Una vez recojamos la información que nos interese, aplicaremos otro raycast desde el nuevo punto de impacto, escogiendo una nueva dirección determinada. Esta dirección dependerá del tipo de material del objeto. Y, de hecho, algunos serán capaces de invocar varios rayos.

Por ejemplo, los espejos reflejan la luz casi de forma perfecta; mientras que otros elementos como el agua o el cristal reflejan y refractan luz, así que necesitaremos generar dos nuevos raycast.

Usando suficientes rayos obtendremos la imagen de la escena. A este proceso de **ray casting recursivo** es lo que se conoce como ray tracing.

Como este proceso puede continuar indefinidamente, tendremos que controlar la profundidad de la recursión. A mayor profundidad, mayor calidad de imagen; pero también, mayor tiempo de ejecución.

## 2.1. Eligiendo direcciones

Una de las partes más importantes de ray tracing, y a la que quizás dedicaremos más tiempo, es a la elección de la dirección.

Hay varios factores que entran en juego a la hora de decidir qué hacemos cuando impactamos con un nuevo objeto:

1. **¿Cómo es la superficie del material?** A mayor rugosidad, mayor aleatoriedad en la dirección. Por ejemplo, no es lo mismo el asfalto de una carretera que una lámina de aluminio impecable.
2. **¿Cómo de fiel es nuestra geometría?**
3. **¿Dónde se encuentran las luces en la escena?** Dependiendo de la posición, nos interesará muestrear la luz con mayor influencia.

Estas cuestiones las exploraremos a fondo en las siguientes secciones.

## 2.2. Intersecciones rayo - objeto

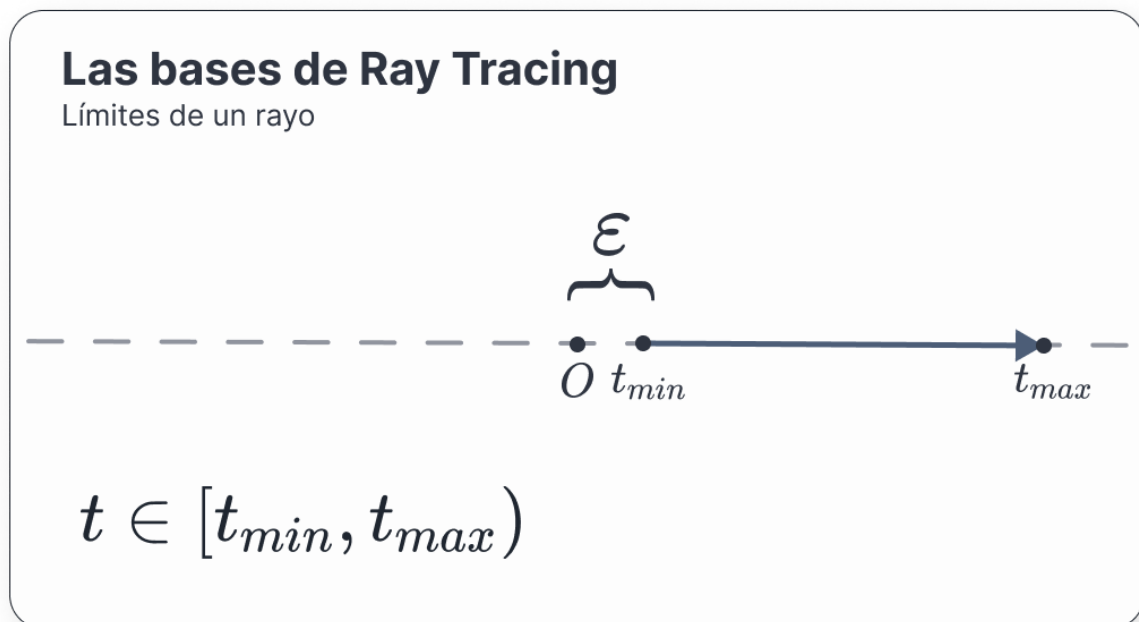
Como dijimos al principio del capítulo, representaremos un rayo como

$$\begin{aligned} P(t) &= (O_x, O_y, O_z) + t(D_x, D_y, D_z) = \\ &= (O_x + tD_x, O_y + tD_y, O_z + tD_z) \end{aligned}$$

Por ejemplo, tomando  $O = (1, 3, 2)$ ,  $D = (1, 2, 1)$ :

- Para  $t = 0$ ,  $P(t) = (1, 3, 2)$ .
- Para  $t = 1$ ,  $P(t) = (1, 3, 2) + (1, 2, 1) = (2, 5, 3)$ .

Nos resultará especialmente útil limitar los valores que puede tomar  $t$ . Restringiremos los posibles puntos del dominio de forma que  $t \in [t_{min}, t_{max})$ , con  $t_{min} < t_{max}$ . En general, nos interesará separarnos de las superficies un pequeño pero no despreciable  $\varepsilon$  para evitar errores de redondeo.



**Figure 2.3.:** Separarnos un poquito del origen evitará errores de coma flotante

Una de las principales cuestiones que debemos hacernos es saber cuándo un rayo impacta con una superficie. Lo definiremos analíticamente.

### 2.2.1. Superficies implícitas

Generalmente, cuando hablemos de superficies, nos referiremos superficies diferenciables ([Wikipedia: Differential geometry of surfaces n.d.](#)), pues nos interesará conocer el vector normal en cada punto.

Una superficie implícita es una superficie en un espacio euclidiano definida como

$$F(x, y, z) = 0$$

Esta ecuación implícita define una serie de puntos del espacio  $\mathbb{R}^3$  que se encuentran en la superficie.

Por ejemplo, la esfera se define como  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ .

Consideremos una superficie  $S$  y un punto regular de ella  $P$ ; es decir, un punto tal que el gradiente de  $F$  en  $P$  no es 0. Se define el vector normal  $\mathbf{n}$  a la superficie en ese punto como

$$\mathbf{n} = \nabla F(P) = \left( \frac{\partial F(P)}{\partial x}, \frac{\partial F(P)}{\partial y}, \frac{\partial F(P)}{\partial z} \right)$$

TODO: dibujo de la normal a una superficie.

Dado un punto  $Q \in \mathbb{R}^3$ , queremos saber dónde interseca un rayo  $P(t)$ . Es decir, para qué  $t$  se cumple que  $F(P(t)) = 0 \iff F(O + tD) = 0$ .

Consideremos ahora un plano. Para ello, nos tomamos un punto  $Q_0$  del plano y un vector normal a la superficie  $\mathbf{n}$ . La ecuación implícita del plano será ([Shirley and Morley 2003](#))

$$F(Q) = (Q - Q_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Si pinchamos nuestro rayo en la ecuación,

$$\begin{aligned} F(P(t)) &= (P(t) - Q_0) \cdot \mathbf{n} \\ &= (O + tD - Q_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $t$ , esto se da si

$$\begin{aligned} O \cdot \mathbf{n} + tD \cdot \mathbf{n} - Q_0 \cdot \mathbf{n} &= 0 && \Leftrightarrow \\ tD \cdot \mathbf{n} &= Q_0 \cdot \mathbf{n} - O \cdot \mathbf{n} && \Leftrightarrow \\ t &= \frac{Q_0 \cdot \mathbf{n} - O \cdot \mathbf{n}}{D \cdot \mathbf{n}} \end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido el único valor de  $t$  para el cual el rayo toca la superficie.

Debemos tener en cuenta el caso para el cual  $D \cdot \mathbf{n} = 0$ . Esto solo se da si la dirección y el vector normal a la superficie son paralelos.

TODO: dibujo de dos rayos con un plano: uno corta a la superficie, mientras que el otro es paralelo.

## 2.2.2. Superficies paramétricas

Otra forma de definir una superficie en el espacio es mediante un subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  y una serie de funciones,  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que

$$(x, y, z) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

En informática gráfica, hacemos algo similar cuando mapeamos una textura a una superficie. Se conoce como **UV mapping**.

Demos un par de ejemplos de superficies paramétricas: - El grafo de una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

define una superficie diferenciable siempre que  $f$  también lo sea. - Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , podemos parametrizar la esfera como  $(x, y, z) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$

TODO añadir imagen de coordenadas esféricas. U otro capítulo con coordenadas.

NOTE: estoy usando (radial, polar, azimuthal).  $\theta$  corresponde con la apertura con respecto a la vertical

El vector normal  $n$  a la superficie en un punto  $(u, v)$  del dominio viene dado por

$$\mathbf{n}(u, v) = \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} \right) \times \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} \right)$$

Encontrar el punto de intersección de una superficie paramétrica con un rayo es sencillo. Basta con encontrar aquellos puntos  $(u, v)$  y  $t$  para los que

$$O_x + tD_x = f(u, v)$$

$$O_y + tD_y = g(u, v)$$

$$O_z + tD_z = h(u, v)$$

Es posible que el rayo no impacte en ningún punto. En ese caso, el sistema de ecuaciones no tendría solución. Otra posibilidad es que intersequen en varios puntos.

### 2.2.3. Intersecciones con esferas

Estudiemos ahora cómo intersecan una esfera con nuestro rayo. Una esfera de centro  $C$  y radio  $r$  viene dada por aquellos puntos  $P = (x, y, z)$  que cumplen

$$(P - C) \cdot (P - C) = r^2$$

Podemos reescribir esta ecuación en términos de sus coordenadas para obtener

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = r^2$$

Veamos para qué valores de  $t$  de nuestro rayo se cumple esa ecuación:

$$\begin{aligned}(P(t) - C) \cdot (P(t) - C) &= r^2 \iff \\ (O + tD - C) \cdot (O + tD - C) &= r^2 \iff\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades del producto escalar de la conmutatividad ( $a \cdot b = b \cdot a$ ) y la distributiva ( $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ), podemos escribir

$$\begin{aligned}((O - C) + tD) \cdot ((O - C) + tD) &= r^2 \iff \\ (O - C)^2 + 2 \cdot (O - C) \cdot tD + (tD)^2 &= r^2 \iff \\ D^2 t^2 + 2D \cdot (O - C)t + (O - C)^2 - r^2 &= 0 \iff\end{aligned}$$

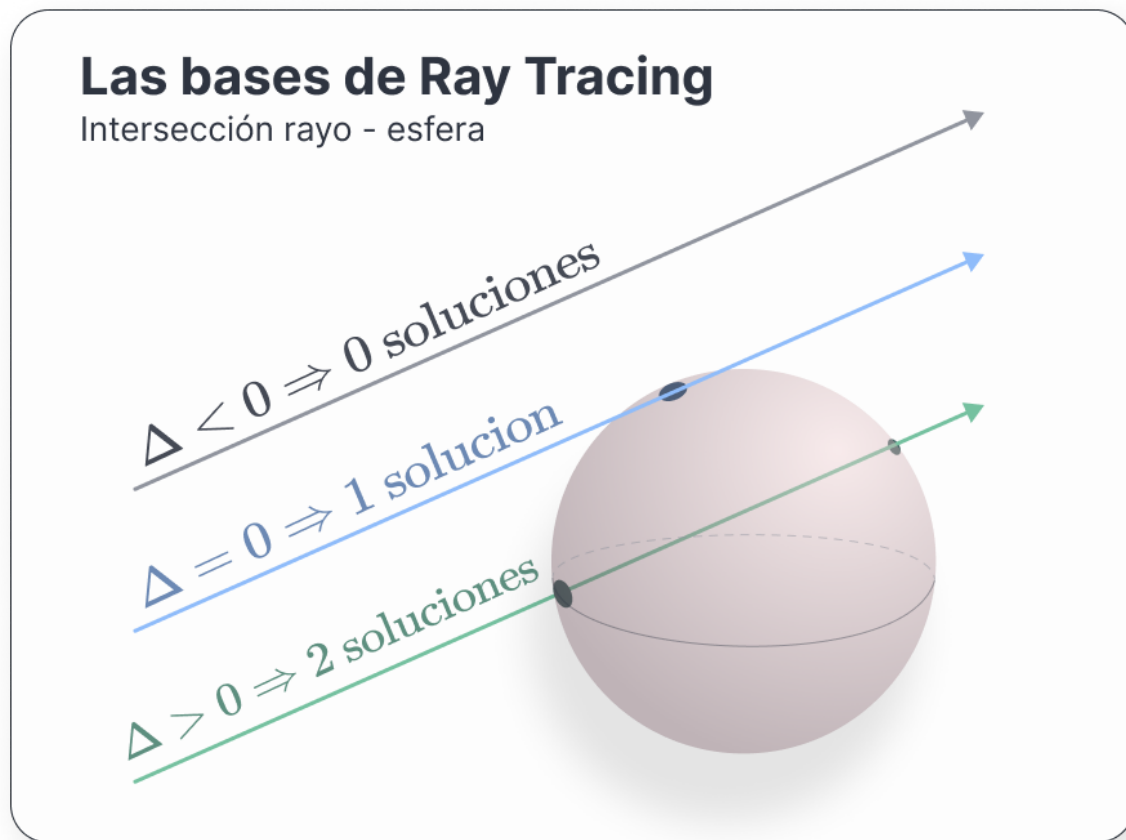
Así que tenemos una ecuación de segundo grado. Resolviéndola, nos salen nuestros puntos de intersección:

$$t = \frac{-D \cdot (O - C) \pm \sqrt{(D \cdot (O - C))^2 - 4(D^2)((O - C)^2 - r^2)}}{2D^2}$$

Debemos distinguir tres casos, atendiendo al valor que toma el discriminante  $\Delta = (D \cdot (O - C))^2 - 4(D^2)((O - C)^2 - r^2)$ :

1. Si  $\Delta < 0$ ,  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ , y el rayo no impacta con la esfera
2. Si  $\Delta = 0$ , el rayo impacta en un punto, que toma el valor  $t = \frac{-D \cdot (O - C)}{2D \cdot D}$ . Digamos que *pegaría* justo en el borde.
3. Si  $\Delta > 0$ , existen dos soluciones. En ese caso, el rayo atraviesa la esfera.





**Figure 2.4.:** Puntos de intersección con una esfera.

Para estos dos últimos, si consideramos  $t_0$  cualquier solución válida, el vector normal resultante viene dado por

$$\mathbf{n} = 2(P(t_0) - C)$$

o, normalizando,

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(P(t_0) - C)}{r}$$

## 2.2.4. Intersecciones con triángulos

Este tipo de intersecciones serán las más útiles en nuestro path tracer. Generalmente, nuestras geometrías estarán compuestas por mallas de triángulos, así que conocer dónde impacta nuestro rayo será clave. Empecemos por la base:

Un triángulo viene dado por tres puntos,  $A$ ,  $B$ , y  $C$ ; correspondientes a sus vértices. Para evitar casos absurdos, supongamos que estos puntos son afinmente independientes; es decir, que no están alineados.

### 2.2.4.1. Coordenadas baricéntricas

Podemos describir los puntos contenidos en el plano que forman estos vertices mediante **coordenadas baricéntricas**. Este sistema de coordenadas expresa cada punto del plano como una combinación convexa de los vértices ([Wikipedia: Barycentric coordinate system n.d.](#)). Es decir, que para cada punto  $P$  del triángulo existen  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tales que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  y

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

TODO: triángulo con coordenadas baricéntricas.

Debemos destacar que existen dos grados de libertad debido a la restricción de que las coordenadas sumen 1.

Una propiedad de estas coordenadas que nos puede resultar útil es que un punto  $P$  está contenido en el triángulo si y solo si  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ .

Esta propiedad y la restricción de que sumen 1 nos da una cierta intuición de cómo funcionan. Podemos ver las coordenadas baricéntricas como la contribución de los vértices a un punto  $P$ . Por ejemplo, si  $\alpha = 0$ , eso significa que el punto viene dado por  $\beta B + \gamma C$ ; es decir, una combinación lineal de  $B$  y  $C$ . Se encuentra en la recta que generan.

Por proponer otro ejemplo, si alguna de las coordenadas fuera mayor que 1, eso significaría que el punto estaría más allá del triángulo.

TODO: dibujo con explicación de cómo funciona (libreta Shinrin - Yoku)

### 2.2.4.2. Calculando la intersección

Podemos eliminar una de las variables escribiendo  $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ , lo que nos dice

$$\begin{aligned} P &= (1 - \beta - \gamma)A + \beta B + \gamma C \\ &= A + (B - A)\beta + (C - A)\gamma \end{aligned}$$

bajo la restricción

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &< 1 \\ 0 &< \beta \\ 0 &< \gamma \end{aligned} \tag{2.1}$$

Un rayo  $P(t) = O + tD$  impactará en un punto del triángulo si se cumple

$$P(t) = O + tD = A + (B - A)\beta + (C - A)\gamma$$

cumpliendo [2.1]. Podemos expandir la ecuación anterior en sus coordenadas para obtener

$$\begin{aligned} O_x + tD_x &= A_x + (B_x - A_x)\beta + (C_x - A_x)\gamma \\ O_y + tD_y &= A_y + (B_y - A_y)\beta + (C_y - A_y)\gamma \\ O_z + tD_z &= A_z + (B_z - A_z)\beta + (C_z - A_z)\gamma \end{aligned}$$

Reordenamos:

$$\begin{aligned} (A_x - B_x)\beta + (A_x - C_x)\gamma + tD_x &= A_x - O_x \\ (A_y - B_y)\beta + (A_y - C_y)\gamma + tD_y &= A_y - O_y \\ (A_z - B_z)\beta + (A_z - C_z)\gamma + tD_z &= A_z - O_z \end{aligned}$$

Lo que nos permite escribir el sistema en forma de ecuación:

$$\begin{pmatrix} A_x - B_x & A_x - C_x & D_x \\ A_y - B_y & A_y - C_y & D_y \\ A_z - B_z & A_z - C_z & D_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x - O_x \\ A_y - O_y \\ A_z - O_z \end{pmatrix}$$

Calcular rápidamente la solución a un sistema de ecuaciones lineales es un problema habitual. En (Shirley and Morley 2003) se utiliza la regla de Cramer para hacerlo, esperando que el compilador optimice las variables intermedias creadas. Nosotros no nos tendremos que preocupar de esto en particular, ya que el punto de impacto lo calculará la GPU gracias a las herramientas aportadas por KHR (The Khronos® Vulkan Working Group n.d.).

Para obtener el vector normal, podemos hacer el producto vectorial de dos vectores que se encuentren en el plano del triángulo. Como, por convención, los vértices se guardan en sentido antihorario visto desde fuera del objeto, entonces

$$\mathbf{n} = (B - A) \times (C - A)$$

## 3. Transporte de luz

En este capítulo estudiaremos las bases de la radiometría. Esta área de la óptica nos proporcionará una serie de herramientas con las cuales podremos responder a la pregunta *cuánta luz existe en un punto*.

### 3.1. Introducción a la radiometría

**Nota:** cuando usemos un paréntesis tras una ecuación, dentro denotaremos sus unidades de medida.

Antes de comenzar a trabajar, necesitamos conocer *qué entendemos* por luz. Aunque hay muchas formas de trabajar con ella (a fin de cuentas, todavía seguimos discutiendo sobre *qué es exactamente la luz*<sup>1</sup>), nosotros nos quedaremos con algunas pinceladas de la cuántica. Nos será suficiente quedarnos con la concepción de fotón. Una fuente de iluminación emite una serie de fotones. Estos fotones tienen una posición, una dirección de propagación y una longitud de onda  $\lambda$  (Shirley and Morley 2003). Un fotón también tiene asociado una velocidad  $c$  que depende del índice de refracción del medio,  $n$ .

La unidad de medida de  $\lambda$  es el nanómetro (nm). También nos vendrá bien definir una frecuencia,  $f$ . Su utilidad viene del hecho de que, cuando la luz cambia de medio al propagarse, la frecuencia se mantiene constante.

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

---

<sup>1</sup>No entraremos en detalle sobre la naturaleza de la luz. Sin embargo, si te pica la curiosidad, hay muchos divulgadores como (José Luis Crespo n.d.) que han tratado el tema con suficiente profundidad.

Un fotón tiene asociada una carga de energía, denotada por  $Q$ :

$$Q = hf = \frac{hc}{\lambda} (\text{J})$$

donde  $h = 6.62607004 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$  es la constante de Plank y  $c = 299792458 \text{m/s}$  la velocidad de la luz.

En realidad, **todas estas cantidades deberían tener un subíndice  $\lambda$** , puesto que dependen de la longitud de onda. La energía de un fotón  $Q$ , por ejemplo, debería denotarse  $Q_\lambda$ . Sin embargo, en la literatura de informática gráfica, **se ha optado por omitirla**. ¡Tenlo en cuenta a partir de aquí!

### 3.1.1. Potencia

A partir de la energía anterior, podemos estimar *la tasa de producción de energía*. A esta tasa la llamaremos **potencia**, o **flujo radiante**  $\Phi$  (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016, Radiometry). Esta medida nos resultará más útil que la energía total, puesto que nos permite estimar la energía en un instante:

$$\Phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} (\text{J/s})$$

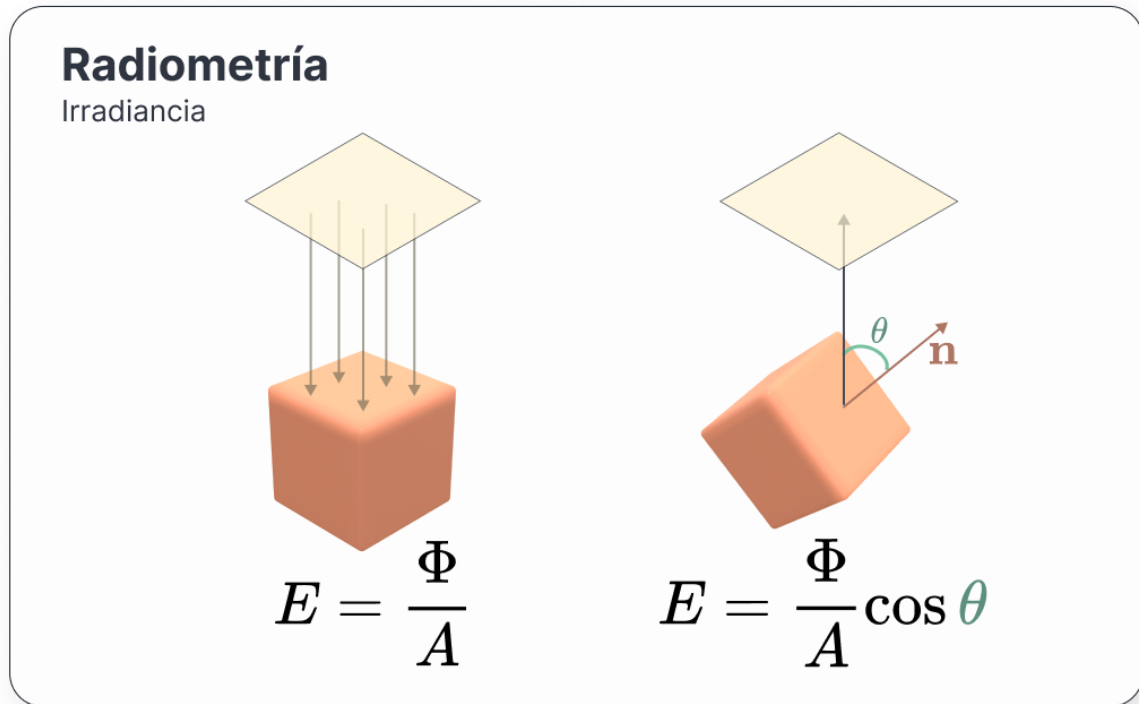
Su unidad es julios por segundo, comúnmente denotado vatio (*watts*, W). También se utiliza el lumen. Podemos encontrar la energía total en un periodo de tiempo  $[t_0, t_1]$  integrando el flujo radiante:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) dt$$

### 3.1.2. Irradiancia

La **irradiancia** o **radiancia emitida** es el flujo radiante que recibe una superficie. Dada un área  $A$ , se define como

$$E = \frac{\Phi}{A} (\text{W/m}^2)$$



**Figure 3.1.:** La irradiancia es la potencia por metro cuadrado incidente en una superficie. Es proporcional al coseno del ángulo entre la dirección de la luz y la normal a la superficie.

Ahora que tenemos la potencia emitida en una cierta área, nos surge una pregunta: ¿y en un cierto punto  $p$ ? Tomando límites en la expresión anterior, encontramos la respuesta:

$$E(p) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta A} = \frac{d\Phi}{dA} (\text{W/m}^2)$$

De la misma manera que con la potencia, integrando  $E(p)$  podemos obtener el flujo radi-

ante:

$$\Phi = \int_A E(p) dp$$

El principal problema de la irradiancia es que *no nos dice nada sobre las direcciones* desde las que ha llegado la luz.

### 3.1.3. Ángulos sólidos

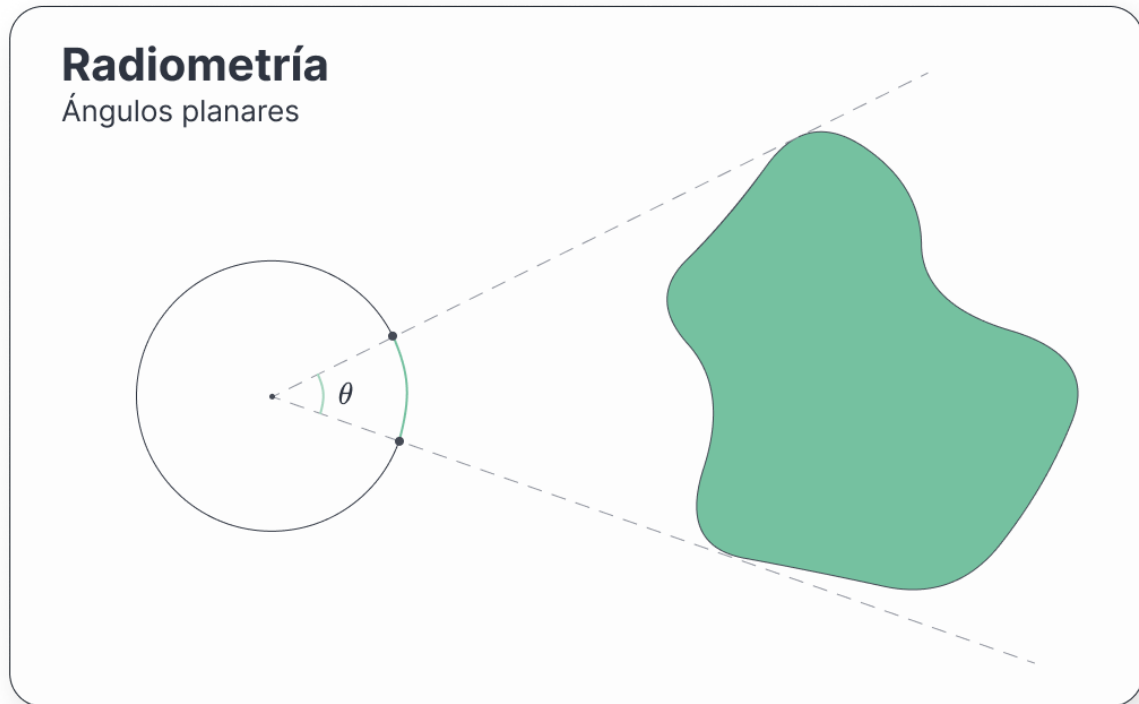
Con estas tres unidades básicas, nos surge una pregunta muy natural: *¿cómo mido cuánta luz llega a una superficie?*

Para responder a esta pregunta, necesitaremos los **ángulos sólidos**. Son la extensión de los **ángulos planares**, en dos dimensiones.

Ilustremos el sentido de estos ángulos: imaginemos que tenemos un cierto objeto en dos dimensiones delante de nosotros, a una distancia desconocida. ¿Sabríamos cuál es su tamaño, solo con esta información? Es más, si entrara otro objeto en la escena, ¿podríamos distinguir cuál de ellos es más grande?

Parece difícil responder a estas preguntas. Sin embargo, sí que podemos determinar *cómo de grandes nos parecen* desde nuestro punto de vista. Para ello, describimos una circunferencia de radio  $r$  alrededor nuestra. Si trazamos un par de líneas desde nuestra posición a las partes más alejadas de este objeto, y las cortamos con nuestra circunferencia, obtendremos un par de puntos inscritos en ella. Pues bien, al arco que encapsulan dichos puntos le vamos a hacer corresponder un cierto ángulo: el ángulo planar.

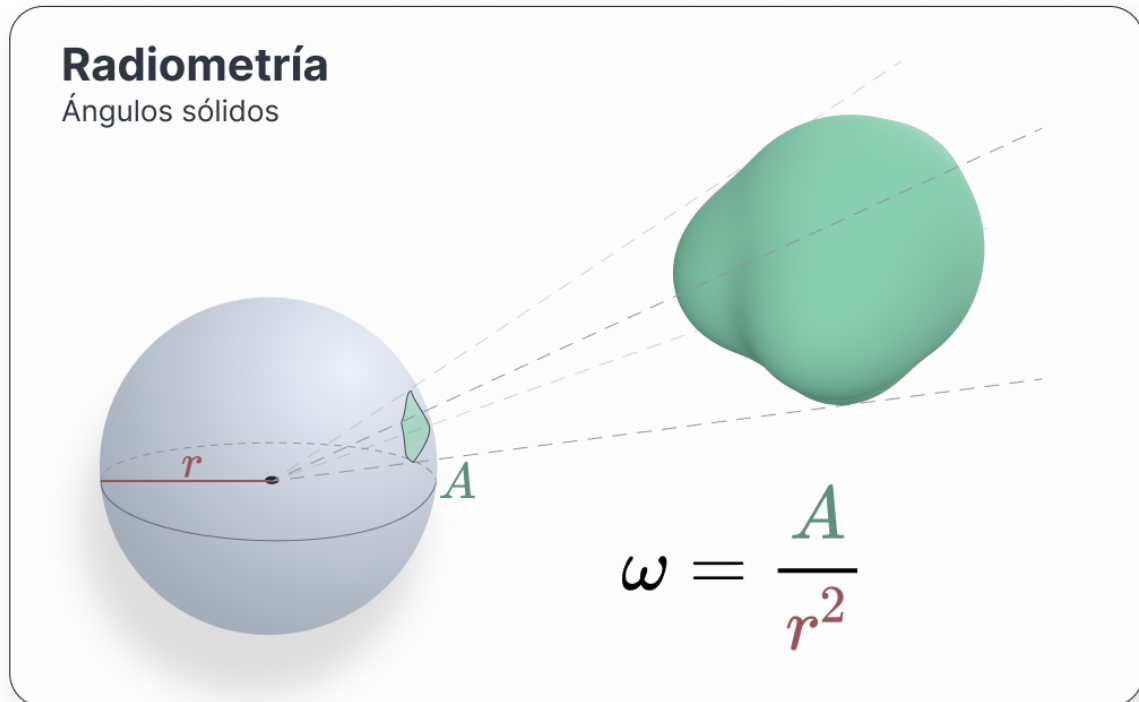




**Figure 3.2.:** La idea intuitiva de un ángulo planar

Llevando esta idea a las tres dimensiones es como conseguimos el concepto de **ángulo sólido**. Si en dos dimensiones teníamos una circunferencia, aquí tendremos una esfera. Cuando generemos las rectas proyectantes hacia el volumen, a diferencia de los ángulos planares, se inscribirá un área en la esfera. La razón entre dicha área  $A$  y el cuadrado del radio  $r$  nos dará un ángulo sólido:

$$\omega = \frac{A}{r^2}(\text{sr})$$

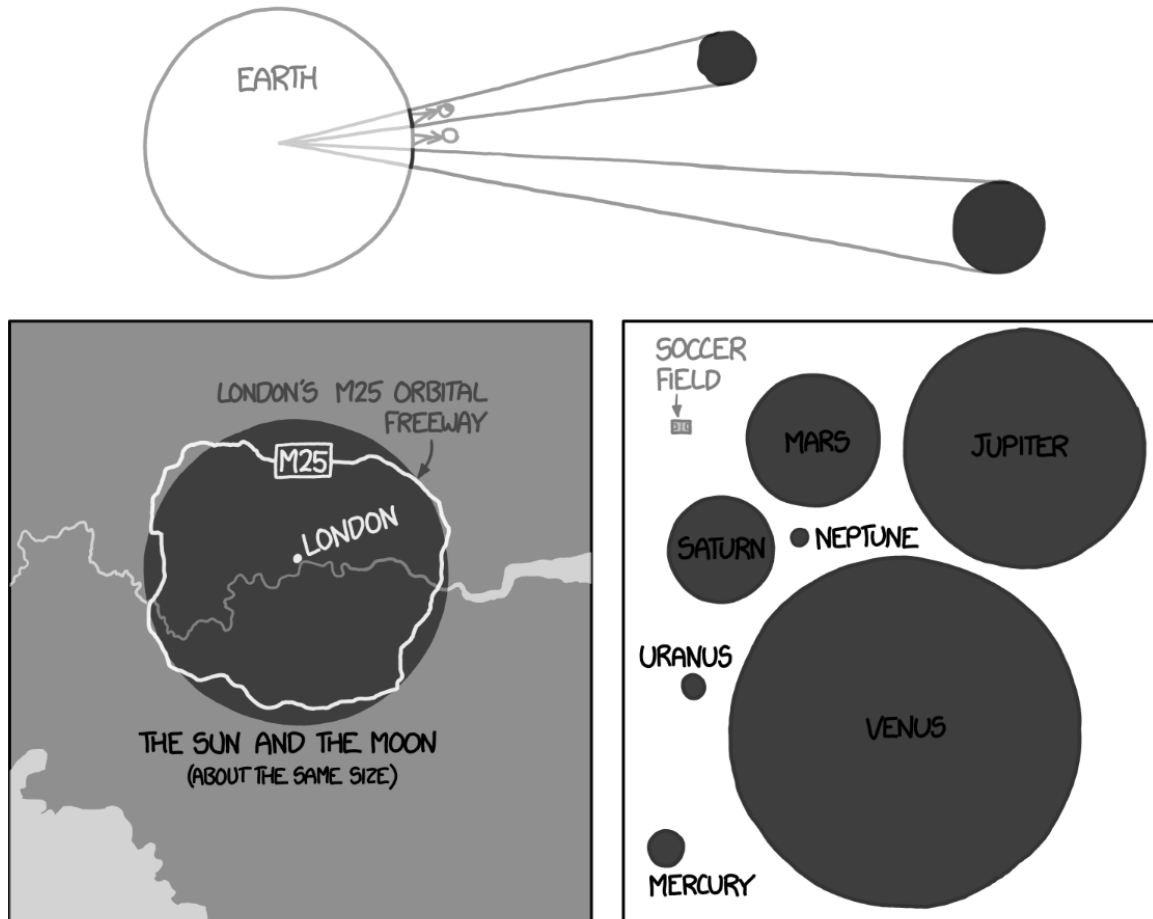


**Figure 3.3.:** Un ángulo sólido es la razón entre el área proyectada y el cuadrado del radio

Los denotaremos por  $\omega$ . En física se suele usar  $\Omega$ , pero aquí optaremos por la minúscula. Su unidad de medida es el estereorradián (sr). Se tiene que  $\omega \in [0, 4\pi]$ . Si  $2\pi$  radianes corresponden a la circunferencia completa, para la esfera se tiene que  $4\pi$  estereorradianes cubren toda la superficie de esta. Se tiene también que  $2\pi$  sr cubren un hemisferio. Además, un estereorradián corresponde a una superficie con área  $r^2$ :  $1\text{sr} = \frac{r^2}{r^2}$ .

De vez en cuando, usaremos  $\omega$  **un vector dirección unitario en la esfera**.

## THE SIZE OF THE PART OF EARTH'S SURFACE DIRECTLY UNDER VARIOUS SPACE OBJECTS



**Figure 3.4.:** Como de costumbre, hay un XKCD relevante ([Randall Munroe n.d.](#))

Usualmente emplearemos coordenadas esféricas cuando trabajemos con ellos, dado que resulta más cómodo.

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

A  $\theta$  se le denomina ángulo polar, mientras que a  $\phi$  se le llama acimut. Imaginémonos un punto en la esfera de radio  $r$  ubicado en una posición  $(r, \theta, \phi)$ . Queremos calcular un área chiquitita  $dA_h$ , de forma que el ángulo sólido asociado a dicha área debe ser  $d\omega$ . Así,  $d\omega = \frac{dA_h}{r^2}$ . Si proyectamos el área, obtenemos  $d\theta$  y  $d\phi$ : pequeños cambios en los ángulos que nos generan nuestra pequeña área (Berkeley cs184 2022, Radiometry & Photometry).

$dA_h$  debe tener dos lados  $lado_1$  y  $lado_2$ . Podemos hallar  $lado_1$  si lo trasladamos al eje  $z$  de nuevo. Así,  $lado_1 = r \sin \theta$ . De la misma manera,  $lado_2 = r d\theta$ .

TODO: foto que explique todo esto, porque si no, no hay quien se entere. Quizás me sirva la de <https://cs184.eecs.berkeley.edu/public/sp22/lectures/lec-11-radiometry-and-photometry/lec-11-radiometry-and-photometry.pdf>, p.16 siempre que adapte  $\phi$ .

Poniendo estos valores en  $d\omega$ :

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{dA_h}{r^2} = \frac{lado_1 lado_2}{r^2} = \\ &= \frac{r \sin \theta d\phi r d\theta}{r^2} = \\ &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \tag{3.1}$$

¡Genial! Acabamos de añadir un recurso muy potente a nuestro inventario. Esta expresión nos permitirá convertir integrales sobre ángulos sólidos en integrales sobre ángulos esféricos.

### 3.1.4. Intensidad radiante

Los ángulos sólidos nos proporcionan una variedad de herramientas nuevas considerable. Gracias a ellos, podemos desarrollar algunos conceptos nuevos. Uno de ellos es la **intensidad radiante**.

Imaginémonos un pequeñito punto de luz encerrado en una esfera, el cual emite fotones en todas direcciones. Nos gustaría medir cuánta energía pasa por la esfera. Podríamos entonces definir

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} (\text{W/sr})$$

Otra unidad de medida es el lumen por esterorradián, (lm/sr). La anterior definición mide cuántos fotones pasan por toda la esfera. ¿Qué ocurre si *cerramos* el ángulo, restringiéndonos así a un área muy pequeña de la esfera?

$$I = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\omega} = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

De la misma manera que con los conceptos anteriores, podemos volver a la potencia integrando sobre un conjunto de direcciones:

$$\Phi = \int_{\Omega} I(\omega) d\omega$$

### 3.1.5. Radiancia

Finalmente, llegamos al concepto más importante. La **radiancia espectral** (o radiancia a secas<sup>2</sup>) (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016, Radiometry) es una extensión de la radiancia emitida teniendo en cuenta la dirección:

$$L(p, \omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{\omega}(p)}{\Delta\omega} = \frac{dE_{\omega}(p)}{d\omega}$$

siendo  $E_{\omega}(p)$  la radiancia emitida a la superficie perpendicular a  $\omega$ .

TODO: foto como la de <https://cs184.eecs.berkeley.edu/public/sp22/lectures/lec-11-radiometry-and-photometry/lec-11-radiometry-and-photometry.pdf>, página 10.

Podemos dar otra expresión de la radiancia en términos del flujo:

$$L(p, \omega) = \frac{d^2\Phi(p, \omega)}{d\omega dA^{\perp}} = \frac{d^2\Phi(p, \omega)}{d\omega dA \cos \theta} \quad (3.2)$$

donde  $dA^{\perp}$  es el área proyectada por  $dA$  en una hipotética superficie perpendicular a  $\omega$ :

<sup>2</sup>Recuerda que estamos omitiendo la longitud de onda  $\lambda$ .

TODO: figura similar a pbr figura 5.10 [https://www.pbr-book.org/3ed-2018/Color\\_and\\_Radiometry/](https://www.pbr-book.org/3ed-2018/Color_and_Radiometry/)

Cuando un rayo impacta en una superficie,  $L$  puede tomar valores muy diferentes en un lado y otro de dicha superficie. Por ejemplo, si nos imaginamos un espejo, el valor un poco por encima y un poco por debajo de un punto del espejo es muy diferente. Para solucionarlo, podemos tomar límites para distinguir a ambos lados:

$$\begin{aligned} L^+(p, \omega) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega) \\ L^-(p, \omega) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{n}_p$  es la normal en el punto  $p$ .

Otra forma de solucionarlo (y preferible, puesto que simplifica entender lo que ocurre) es distinguir entre la radiancia que llega a un punto –la incidente–, y la saliente.

La primera se llamará  $L_i(p, \omega)$ , mientras que la segunda será  $L_o(p, \omega)$ . Es importante destacar que  $\omega$  apunta *hacia fuera* de la superficie. Quizás es contraintuitivo en  $L_i$ , puesto que  $-\omega$  apunta *hacia* la superficie. Depende del autor se utiliza una concepción u otra.

**Nota(ción):** a  $L_o$  también se le conoce como la radiancia reflejada. Por eso, algunas veces aparece como  $L_r$  en algunas fuentes.

Utilizando esta notación y usando [3.3], podemos escribir  $L_i$  y  $L_o$  como

$$\begin{aligned} L_i(p, \omega) &= \begin{cases} L^+(p, -\omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p > 0 \\ L^-(p, -\omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p < 0 \end{cases} \\ L_o(p, \omega) &= \begin{cases} L^+(p, \omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p > 0 \\ L^-(p, \omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hacemos esta distinción porque, a fin de cuentas, necesitamos distinguir entre los fotones que llegan a la superficie y los que salen.

TODO: <https://cs184.eecs.berkeley.edu/public/sp22/lectures/lec-11-radiometry-and-photometry/lec-11-radiometry-and-photometry.pdf>, p.36

Una propiedad a tener en cuenta es que, si cogemos un punto  $p$  del espacio donde no existe ninguna superficie,  $L_o(p, \omega) = L_i(p, -\omega) = L(p, \omega)$

La importancia de la radiancia se debe a un par de propiedades:

La primera de ellas es que, dado  $L$ , podemos calcular cualquier otra unidad básica mediante integración. Además, **su valor se mantiene constante en rayos que viajan en el vacío en línea recta** (Fabio Pellacini 2022). Esto último hace que resulte muy natural usarla en un ray tracer.

Veamos por qué ocurre esto:

TODO: [https://pellacini.di.uniroma1.it/teaching/graphics17b/lectures/12\\_pathtracing.pdf](https://pellacini.di.uniroma1.it/teaching/graphics17b/lectures/12_pathtracing.pdf), página 18.

Consideremos dos superficies ortogonales entre sí,  $S_1$  y  $S_2$  separadas una distancia  $r$ . Debido a la conservación de la energía, cualquier fotón que salga de una superficie y se encuentre bajo el ángulo sólido de la otra debe llegar impactar en dicha superficie opuesta.

Por tanto:

$$d^2\Phi_1 = d^2\Phi_2$$

Sustituyendo en la expresión de la radiancia [3.2], y teniendo en cuenta que son ortogonales (lo que nos dice que  $\cos \theta = 1$ ):

$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

Por construcción, podemos cambiar los ángulos sólidos:

$$L_1 \frac{dA_2}{r^2} dA_1 = L_2 \frac{dA_1}{r^2} dA_2$$

Lo que finalmente nos dice que  $L_1 = L_2$ , como queríamos ver.

### 3.1.6. Integrales radiométricas

En esta sección, vamos a explorar las nuevas herramientas que nos proporciona la radiancia. Veremos también cómo integrar ángulos sólidos, y cómo simplificar dichas integrales.

#### 3.1.6.1. Una nueva expresión de la irradiancia y el flujo

Como dijimos al final de [la sección de la irradiancia](#), esta medida no tiene en cuenta las direcciones desde las que llegaba la luz. A diferencia de esta, la radiancia sí que las utiliza. Dado que una de las ventajas de la radiancia es que nos permite obtener el resto de medidas radiométricas, ¿por qué no desarrollamos una nueva expresión de la irradiancia?

Para obtener cuánta luz llega a un punto, debemos acumular la radiancia incidente que nos llega desde cualquier dirección.

TODO: dibujo como el de la libreta roja. Me lo mandé por Telegram, por si no lo encuentro

Dado un punto  $p$  que se encuentra en una superficie con normal  $n$  en dicho punto, la irradiancia se puede expresar como ([Pharr, Jakob, and Humphreys 2016](#), Working with Radiometric Integrals)

$$E(p, n) = \int_{\Omega} L_i(p, \omega) |\cos \theta| d\omega \quad (3.4)$$

El término  $\cos \theta$  aparece en la integral debido a la derivada del área proyectada,  $dA^\perp$ .  $\theta$  es el ángulo entre la dirección  $\omega$  y la normal  $n$ .

Generalmente, la irradiancia se calcula únicamente en el hemisferio de direcciones asociado a la normal en el punto,  $H^2(n)$ .

Podemos eliminar el  $\cos \theta$  de la integral mediante una pequeña transformación: proyectando el ángulo sólido sobre el disco alrededor del punto  $p$  con normal  $n$ , obtenemos una expresión más sencilla: como  $d\omega^\perp = |\cos \theta| d\omega$ , entonces



$$E(p, \mathbf{n}) = \int_{H^2(\mathbf{n})} L_i(p, \omega) d\omega^\perp$$

Usando lo que aprendimos sobre la derivada de los ángulos sólidos [3.1], se puede reescribir la ecuación anterior como

$$E(p, \mathbf{n}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_i(p, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

Haciendo el mismo juego con el flujo emitido de un cierto objeto al hemisferio que encapsula la normal, conseguimos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_A \int_{H^2(\mathbf{n})} L_o(p, \omega) \cos \theta d\omega dA = \\ &= \int_A \int_{H^2(\mathbf{n})} L_o(p, \omega) d\omega^\perp dA \end{aligned}$$

TODO: a lo mejor merece la pena hacer un ejemplo sobre los diferentes tipos de luz, como en <https://cs184.eecs.berkeley.edu/public/sp22/lectures/lec-11-radiometry-and-photometry/lec-11-radiometry-and-photometry.pdf> p.41? O a lo mejor un capítulo para hablar de luces en general.

### 3.1.6.2. Integrando sobre área

Una herramienta más que nos vendrá bien será la capacidad de convertir integrales sobre direcciones en integrales sobre área. Hemos hecho algo similar en las secciones anteriores, así que no perdemos nada por generalizarlo.

Considera un punto  $p$  sobre una superficie con normal en dicho punto  $\mathbf{n}$ . Supongamos que tenemos una pequeña área  $dA$  con normal  $\mathbf{n}_{dA}$ . Sea  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}_{dA}$ , y  $r$  la distancia entre  $p$  y  $dA$ .

Entonces, la relación entre la diferencial de un ángulo sólido y la de un área es

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

TODO: figura como la de pbr book 5.16.

Esto nos permite, por ejemplo, expandir algunas expresiones como la de la irradiancia [3.4] si partimos de un cuadrilátero  $dA$ :

$$\begin{aligned} E(p, \mathbf{n}) &= \int_{\Omega} L_i(p, \omega) |\cos \theta| d\omega = \\ &= \int_A L \cos \theta \frac{\cos \theta_o}{r^2} dA \end{aligned}$$

siendo  $\theta_o$  el ángulo de la radiancia de salida de la superficie del cuadrilátero.

### 3.1.7. Fotometría y radiometría

TODO: hablar sobre las diferencias. Hay información útil en 01\_lights.pdf, p.43

## 3.2. Dispersión de luz

Cuando una luz impacta en una superficie, ocurren un par de sucesos: parte de los fotones se reflejan saliendo disparados hacia alguna dirección, mientras que otros se absorben.

La forma en la que se comportan depende de cómo sea la superficie. Específicamente, del material del que esté hecha.

En informática gráfica se consideran tres tipos principales de dispersión de luz: **dispersión en superficie** (*surface scattering*), **dispersión volumétrica** (*volumetric scattering*) y **dispersión bajo superficie** (*subsurface scattering*)

En este capítulo vamos a modelar la primera. Estudiaremos qué es lo que ocurre cuando los fotones alcanzan una superficie, en qué dirección se reflejan, y cómo cambia el comportamiento dependiendo de las propiedades del material.

### 3.2.1. La función de distribución de reflectancia bidireccional (BRDF)

La **función de distribución de reflectancia bidireccional** (en inglés, *bidirectional reflectance distribution function*, BRDF) (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016, Surface Reflection) describe cómo la luz se refleja en una superficie opaca. Se encarga de informarnos sobre cuánta radiancia sale en dirección  $\omega_o$  debido a la radiancia incidente desde la dirección  $\omega_i$ , partiendo de un punto  $p$  en una superficie con normal  $n$ . Depende de la longitud de onda  $\lambda$ , pero, como de costumbre, la omitiremos.

**Intuición:** ¿cuál es la probabilidad de que, habiéndome llegado un fotón desde  $\omega_i$ , me salga disparado hacia  $\omega_o$ ?

TODO: esquema como el de pbr fig. 5.18, o como <https://pellacini.di.uniroma1.it/teaching/graphics17/> p.20

Si consideramos  $\omega_i$  como un cono diferencial de direcciones, la irradiancia diferencial en  $p$  viene dada por

$$dE(p, \omega_i) = L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Debido a esta irradiancia, una pequeña parte de radiancia saldrá en dirección  $\omega_o$ , proporcional a la irradiancia:

$$dL_o(p, \omega_o) \propto dE(p, \omega_i)$$

Si lo ponemos en forma de cociente, sabremos exactamente cuál es la proporción de luz. A este cociente lo llamaremos  $f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$ ; la función de distribución de reflectancia bidireccional:

$$f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{dE(p, \omega_i)} = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i} (1/\text{sr})$$

**Nota(ción):** dependiendo de la fuente que estés leyendo, es posible que te encuentres una integral algo diferente. Por ejemplo, en tanto en Wikipedia como en (Shirley and Morley 2003) se integra con respecto a los ángulos de salida  $\omega_o$ , en vez de los incidentes.

Aquí, usaremos la notación de integrar con respecto a los incidentes, como se hace en (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016).

Las BRDF físicamente realistas tienen un par de propiedades importantes:

1. **Reciprocidad:** para cualquier par de direcciones  $\omega_i, \omega_o$ , se tiene que  $f_r(p, \omega_i, \omega_o) = f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$ .
2. **Conservación de la energía:** La energía reflejada tiene que ser menor o igual que la incidente:

$$\int_{H^2(n)} f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \leq 1$$

### 3.2.2. La función de distribución de transmitancia bidireccional (BTDF)

Si la BRDF describe cómo se refleja la luz, la *bidirectional transmittance distribution function* (abreviada BTDF) nos informará sobre la transmitancia; es decir, cómo se comporta la luz cuando *entra* en un medio. Generalmente serán dos caras de la misma moneda: cuando la luz impacta en una superficie, parte de ella, se reflejará, y otra parte se transmitirá.

Puedes imaginarte la BTDF como una función de reflectancia del hemisferio opuesto a donde se encuentra la normal de la superficie.

Denotaremos a la BTDF por

$$f_t(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$$

Al contrario que en la BRDF,  $\omega_o$  y  $\omega_i$  se encuentran en hemisferios diferentes.

### 3.2.3. La función de distribución de dispersión bidireccional (BSDF)

Convenientemente, podemos unir la BRDF y la BTDF en una sola expresión, llamada **la función de distribución de dispersión bidireccional** (*bidirectional scattering distribution function*, BSDF). A la BSDF la denotaremos por

$$f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$$

**Nota(ción):** también se suele utilizar BxDF en vez de BSDF.

Usando esta definición, podemos obtener

$$dL_o(p, \omega_o) = f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i$$

Esto nos deja a punto de caramelo una nueva expresión de la radiancia en términos de la radiancia incidente en un punto  $p$ . Integrando la expresión anterior, obtenemos

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{\mathbb{S}^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i \quad (3.5)$$

siendo  $\mathbb{S}^2$  la esfera.

**Intuición:** la BSDF son todas las posibles direcciones en las que puede salir disparada la luz.

Esta forma de expresar la radiancia es muy importante. Generalmente se le suele llamar la *ecuación de dispersión* (*scattering equation*, en inglés). Dado que es una integral muy importante, seguramente tengamos que evaluarla repetidamente. ¡Los métodos de Monte Carlo nos vendrán de perlas! Más adelante hablaremos de ella.

Las BSDFs tienen unas propiedades interesantes:

- **Positividad:** como los fotones no se pueden reflejar “negativamente”,  $f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) \geq 0$ .

- **Reciprocidad de Helmholtz:** se puede invertir la dirección de un rayo:  $f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = f(p, \omega_i \leftarrow \omega_o)$ .
- **White furnace test:** Toda la luz incidente debe ser reflejada cuando la reflectividad de la superficie es 1.
- **Conservación de la energía:** todos los fotones que llegan a la superficie deben ser reflejados o absorbidos. Es decir, no se emite ningún fotón nuevo:

$$\int_{H^2(n)} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \leq 1 \quad \forall \omega_o$$

### 3.2.4. Reflectancia hemisférica

Puede ser útil tomar el comportamiento agregado de las BRDFs y las BTDFs y reducirlo a un cierto valor que describa su comportamiento general de dispersión. Sería algo así como un resumen de su distribución. Para conseguirlo, vamos a introducir dos nuevas funciones:

El albedo ([Szirmay-Kalos 2000](#)), o también conocido como la **reflectancia hemisférica-direccional** (*hemispherical-directional reflectance*) ([Pharr, Jakob, and Humphreys 2016](#), Reflection Models, Basic Interface) describe la reflexión total sobre un hemisferio debida a una fuente de luz que proviene desde la dirección  $\omega_o$ :

$$\rho_{hd}(\omega_o) = \int_{H^2(n)} f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) |\cos \theta_i| d\omega_i$$

Por otra parte, la **reflectancia hemisférica-hemisférica** (*hemispherical-hemispherical reflectance*) es un valor espectral que nos proporciona el ratio de luz incidente reflejada por una superficie, suponiendo que llega la misma luz desde todas direcciones:

$$\rho_{hh} = \frac{1}{\pi} \int_{H^2(n)} \int_{H^2(n)} f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) |\cos \theta_o \cos \theta_i| d\omega_o d\omega_i$$

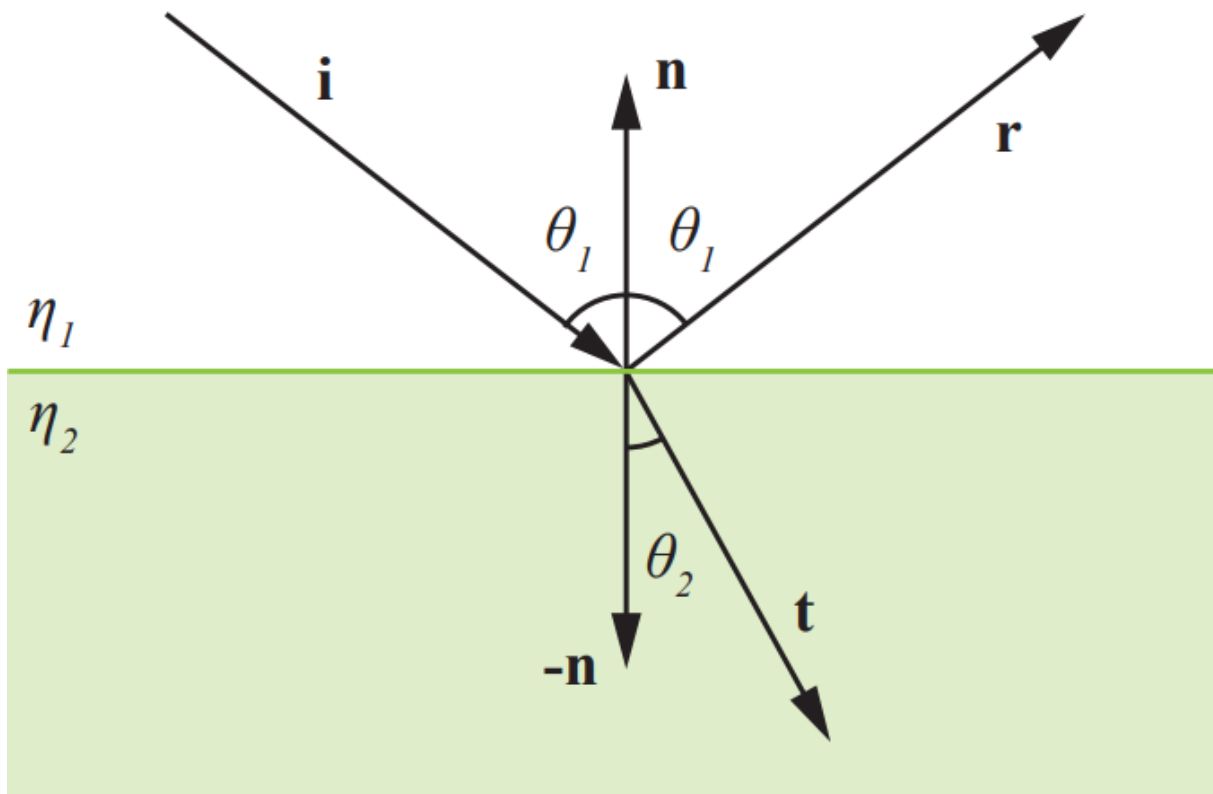
### 3.3. Modelos ópticos de materiales

En la práctica, cada superficie tendrá una BSDF característica. Esto hace que la luz adquiera una dirección particular al incidir en cada punto de esta. En esta sección, vamos a tratar algunas BSDFs particulares e introduciremos las fórmulas fundamentales que se usan en los modelos de materiales (también conocidos como modelos de *shading*).

Los tipos de materiales que vamos a tratar son los básicos. Entre ellos, se encuentran la difusa lambertiana, materiales dieléctricos, espejos y algunas BSDFs compuestas. Un repertorio de implementaciones se encuentra en el repositorio de BRDFs de ([Walt Disney Animation Studios 2019](#)).

#### 3.3.1. Tipos de dispersión

Prácticamente toda superficie, en mayor o menor medida, refleja parte de la luz incidente. Otros tipos de materiales reflejan y refractan a la vez, como puede ser un espejo o el agua.



**Figure 3.5.:** Reflexión y refracción de luz (Adam Marrs and Wald 2021, 106).

TODO: cambiar por foto propia

En esencia, los reflejos se pueden clasificar en cuatro grandes tipos (McGuire 2021, Materials):

- **Difusos** (*Diffuse*): esparcen la luz en todas direcciones casi equiprobablemente. Por ejemplo, la tela y el papel son materiales difusos.
- **Especulares brillantes** (*Glossy specular*): la distribución de luz se asemeja a un cono. La chapa de un coche es un material especular brillante.
- **Especulares perfectos** (*Perfect specular*): en esencia, son espejos. El ángulo de salida de la luz es muy pequeño, por lo que reflejan casi a la perfección lo que les llega.
- **Retroreflectores** (*Retro reflective*): la luz se refleja en dirección contraria a la de llegada. Esto es lo que sucede a la luna.



Ten en cuenta que es muy difícil encontrar objetos físicos que imiten a la perfección un cierto modelo. Suelen recaer en un híbrido entre dos o más modelos.

Fijado un cierto modelo, la función de distribución de reflectancia, BRDF, puede ser **isotrópica** o **anisotrópica**. Los materiales isotrópicos mantienen las propiedades de reflectancia invariantes ante rotaciones; es decir, la distribución de luz es la misma en todas direcciones. Por el contrario, los anisotrópicos reflejan diferentes cantidades de luz dependiendo desde dónde los miremos. Los ejemplos más habituales de materiales anisotrópicos son las rocas y la madera.

### 3.3.2. Reflexión

Primero, tratemos con materiales que únicamente reflejan luz; es decir, su BSDF es una BRDF.

#### 3.3.2.1. Reflexión especular perfecta

Para un material especular perfecto (es decir, espejos), la dirección reflejada  $r$  dado un rayo incidente  $i$  es (Adam Marrs and Wald 2021, Reflection and refraction formulas, p. 105):

$$r = i - 2(i \cdot n)n$$

siendo  $n$  la normal en el punto incidente. Con esta expresión, se necesita que  $n$  esté normalizado. Para los otros dos vectores no es necesario; la dirección de salida tendrá la misma norma que la de entrada.

Su BRDF se define mediante una delta de Dirac (Szirmay-Kalos 2000, 3.2), (McGuire 2021, Materials):

$$f_r(r \leftarrow i) = \frac{\delta(i, r)k_r(|i \cdot n|)}{|i \cdot n|}$$

siendo  $\rho_{hd} = k_r(|i \cdot n|)$  el albedo, con  $k_r$  el coeficiente de reflectividad, cuyo valor se encuentra entre 0 y 1, dependiendo de la energía que se pierda.

### 3.3.2.2. Reflexión difusa o lamberiana

Este es uno de los modelos más sencillos. Es conocido también como el modelo lambertiano. Se asume que la superficie es completamente difusa, lo cual implica que la luz se refleja en todas direcciones equiprobablemente, independientemente del punto de vista del observador. Esto significa que

$$f_r(\omega_o \leftarrow \omega_i) = k_d$$

con  $k_d$  el coeficiente de difusión.

El albedo viene dado por

$$\begin{aligned} \rho_{hd}(\omega_o) &= \int_{H^2(n)} k_d \cos \theta_i d\omega_i = \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} k_d \cos \theta d\theta d\phi = \\ &= k_d \pi \end{aligned}$$

Para que se cumpla la condición de conservación de energía, necesariamente  $k_d \leq 1/\pi$ .

En la práctica no se utiliza mucho, pues está muy limitado.

### 3.3.2.3. Reflexión especular no perfecta

**3.3.2.3.1. Phong** El modelo de Phong se basa en la observación de que, cuando el punto de vista se alinea con la dirección del vector de luz reflejado  $r = 1 - 2(n \cdot l)n$ , aparecen puntos muy iluminados, lo que se conoce como resaltado especular.

Esta idea se *refleja* considerando la componente especular como

$$L_o^s(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = k_\alpha + k_d L_o^d(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) + k_s \max\{0, \omega \cdot r\}^\alpha$$

donde  $k_\alpha$  es el coeficiente de luz ambiental (con  $\alpha$  el índice de brillo)  $k_s$  es la constante de reflectancia especular (*specular-reflection*) que define el ratio de luz reflejada,  $k_d$  el de

radiancia difusa  $L_o^d$ . Usualmente,  $k_s |k_d| < 1$ .

Evidentemente, este modelo no es más que una aproximación físicamente poco realista de la realidad; pero funciona lo suficientemente bien como para usarlo en ciertas partes.

```

1 float Phong_specular(vec3 normal, vec3 light_dir, vec3 view_dir, float
  shininess) {
2     return pow(
3         max(
4             0.0,
5             dot(
6                 reflejar(normal, light_dir),
7                 view_dir
8             )
9         ),
10    shininess
11 );
12 }
```

**3.3.2.3.2. Blinn - Phong** Este es una pequeña modificación al de Phong. En vez de usar el vector reflejado de luz, se define un vector unitario entre el observador y la luz,  $\mathbf{h} = \frac{\omega + 1}{\|\omega + 1\|}$ . Resulta más fácil calcularlo. Además, este modelo es más realista.

$$L_o^s(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = k_\alpha + k_d L_o^d(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) + k_s \max\{0, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}\}^\alpha$$

```

1 float BlinnPhong_specular(vec3 normal, vec3 light_dir, vec3 view_dir, float
  shininess) {
2     vec3 h = normalize(view_dir + light_dir);
3     return pow(
4         max(
5             0.0,
6             dot(h, normal)
7         ),
8     shininess
9 );
10 }
```

### 3.3.3. Refracción

Algunos materiales permiten que la luz los atraviese –conocido como transmisión–. En estos casos, decimos que se produce un cambio en el medio. Para conocer cómo de rápido viajan los fotones a través de ellos, se utiliza un valor denominado **índice de refracción**, usualmente denotado por  $\eta$ :

$$\eta = \frac{c}{\nu}$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $\nu$  la velocidad de fase del medio, la cual depende de la longitud de onda. Sin embargo, como hemos comentado varias veces, no tendremos en cuenta la longitud de onda en nuestro ray tracer, por lo que no nos tenemos que preocupar de esto.

Algunos materiales como el aire tienen un índice de refracción  $\eta_{\text{aire}} = 1.0003$ , mientras que el del agua vale  $\eta_{\text{agua}} = 1.333$ , y el del cristal vale  $\eta_{\text{cristal}} = 1.52$ .

#### 3.3.3.1. Ley de Snell

La **ley de Snell** nos proporciona una ecuación muy sencilla que relaciona el cambio de un medio con índice de refracción  $\eta_1$  a otro con índice de refracción  $\eta_2$ :

$$\eta_1 \sin \theta_1 = \eta_2 \sin \theta_2 \quad (3.6)$$

siendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos de entrada y salida respectivamente.

Usualmente, los índices de refracción son conocidos, así como el ángulo de incidencia  $\theta_1$ , por lo que podremos calcular el ángulo del vector refractado con facilidad:

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1 \right)$$

Cuando cambiamos de un medio con índice de refracción  $\eta_1$  a otro con  $\eta_2 < \eta_1$ , podemos encontrarnos ante un caso de **reflexión interna total**. Analíticamente, lo que ocurre es que

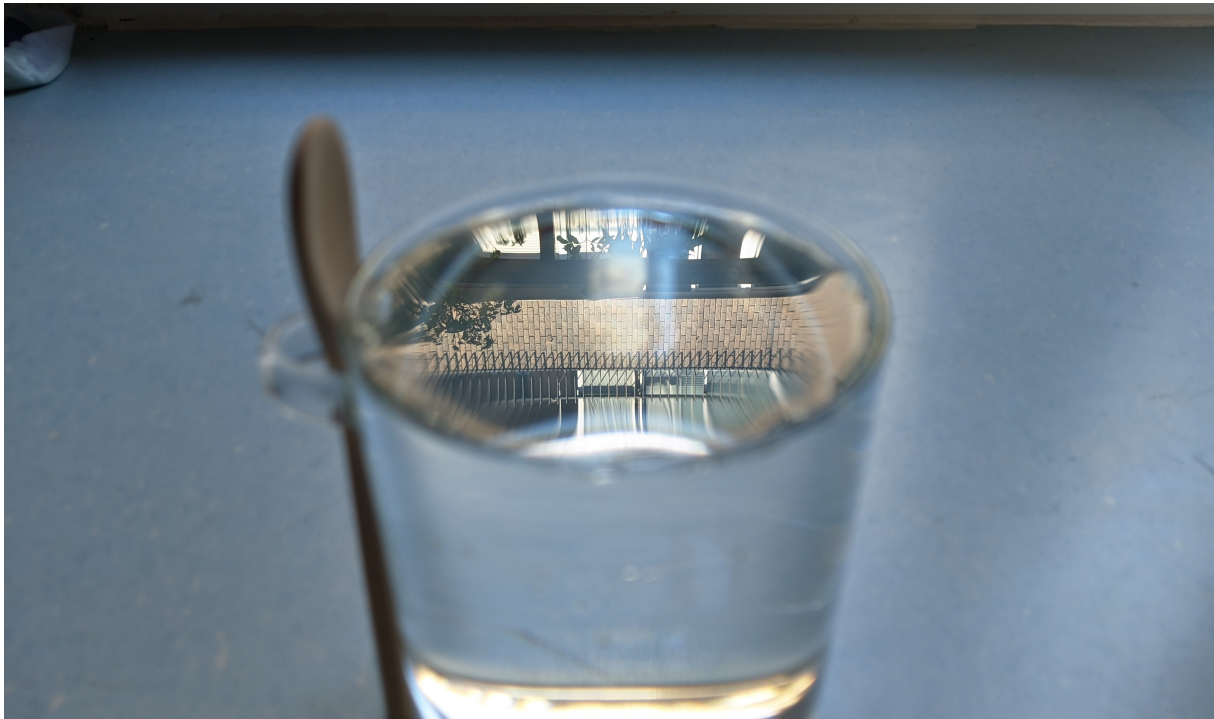
$$\sin \theta_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1 > 1$$

lo cual no puede ocurrir. Se denomina el ángulo crítico a aquel  $\theta_1$  para la cual  $\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1 > 1$ :

$$\theta_1 = \arcsin \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)$$

Por ejemplo, si un haz de luz viaja desde un cristal hacia un cuerpo de agua, entonces  $\theta_1 = \arcsin (1.333/1.52) \approx 1.06$  radianes  $= 61.04^\circ$ .

Lo que ocurre en estos casos es que, en vez de pasar al segundo medio, los fotones vuelven al primero; creando un reflejo como si de un espejo se tratara.



**Figure 3.6.:** Como el ángulo de incidencia es considerablemente alto, por la parte de arriba la luz no puede atravesar el agua. Esto hace que podamos ver el edificio de enfrente. En el centro vemos refractado el suelo. Y, sin embargo, en la parte inferior, ¡observamos luz solar y el edificio de nuevo!

### 3.3.3.2. Ecuaciones de Fresnel

Aquellos materiales que refractan y reflejan luz (como el agua de la foto anterior) no pueden generar energía de la nada; por lo que la combinación de ambos efectos debe ser proporcional a la luz incidente. Es decir, una fracción de luz es reflejada, y otra es refractada. Las **ecuaciones de Fresnel** nos permiten conocer esta cantidad.

La proporción de luz reflejada desde un rayo que viaja por un medio con índice de refracción  $\eta_1$  y ángulo de incidencia  $\theta_1$  a otro medio con índice de refracción  $\eta_2$  es (Adam Marrs and Wald 2021, The Schlick Fresnel approximation, p. 109):

$$\begin{aligned}
R_s &= \left| \frac{\eta_1 \cos \theta_1 - \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1\right)^2}}{\eta_1 \cos \theta_1 + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1\right)^2}} \right|^2 \\
R_p &= \left| \frac{\eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1\right)^2} - \eta_2 \cos \theta_1}{\eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \theta_1\right)^2} + \eta_2 \cos \theta_1} \right|^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde los subíndices  $s$  y  $p$  denotan la polarización de la luz:  $s$  es perpendicular a la dirección de propagación, mientras que  $p$  es paralela.

Generalmente en los ray tracers la polarización se ignora, promediando ambas expresiones, resultando en una ecuación más simple:

$$R = \frac{R_s + R_p}{2} \tag{3.8}$$

### 3.3.3.3. La aproximación de Schlick

Como podemos imaginarnos, calcular las expresiones de Fresnel [3.7] no es precisamente barato. En la práctica, todo el mundo utiliza una aproximación creada por Schlick, la cual funciona sorprendentemente bien. Viene dada por

$$R(\theta_1) = R_0 + (1 - R_0)(1 - \cos \theta_1)^5 \tag{3.9}$$

siendo  $R_0 = R(0)$ ; es decir, el valor que toma  $R$  cuando el rayo incidente es paralelo al medio. Su valor es

$$R_0 = \left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^2$$

Esta aproximación es 32 veces más rápida de calcular que las ecuaciones de Fresnel, generando un error medio inferior al 1% (Schlick 1994)

### 3.3.4. Materiales híbridos

### 3.3.5. Otros modelos

#### 3.3.5.1. Oren - Nayar

Este modelo intenta aproximar superficies difusas utilizando un ratio de lambertiano, lo cual mejora el rendimiento el *white furnace test*:

```
1 float OrenNayar_diffuse(vec3 normal, vec3 light_dir, vec3 view_dir,
    material m) {
2     float L_dot_V = dot(light_dir, view_dir);
3     float N_dot_L = dot(light_dir, normal);
4     float N_dot_V = dot(normal, view_dir);
5
6     float s = L_dot_V - N_dot_L * N_dot_V;
7     float t = mix(
8         1.0,
9         ma(N_dot_L, N_dot_V),
10        step(0.0, s)
11    );
12
13    float sigma2 = m.roughness * m.roughness;
14    float A = 1.0 + sigma2 * (m.albedo / (sigma2 + 0.13) + 0.5 / (sigma2 +
        0.33));
15    float B = 0.45 * sigma2 / (sigma2 + 0.09);
16
17    return m.albedo * max(0.0, N_dot_L) * (A + B * s / t) / PI;
18 }
```

#### 3.3.5.2. GGX

El modelo Ground Glass Unknown es una BSDF analítica que se basa en la distribución de microfacetas del material subyacente. Es una de las técnicas más avanzadas y exploradas recientemente. Los motores modernos como Unreal Engine 4 y Unity lo utilizan en sus pipelines físicamente realistas.

A diferencia de los otros modelos, no entraremos en detalles de la implementación.



### 3.4. La rendering equation

Y, finalmente, tras esta introducción de los principales conceptos radiométricos, llegamos a la ecuación más importante de todo este trabajo: la **rendering equation**; también llamada la **ecuación del transporte de luz**.

**Nota(ción):** esta vez no traduciré el concepto. Es cierto que afea un poco la escritura teniendo en cuenta que esto es un texto en castellano. Sin embargo, la otra opción es inventarme una traducción que nadie usa.

Antes de comenzar, volvamos a plantear de nuevo la situación: nos encontramos observando desde nuestra pantalla una escena virtual mediante la cámara. Queremos saber qué color tomará un pixel específico. Para conseguirlo, dispararemos rayos desde nuestro punto de vista hacia el entorno, haciendo que reboten en los objetos. Cuando un rayo impacte en una superficie, adquirirá parte de las propiedades del material del objeto. Además, de este rayo surgirán otros nuevos (un rayo dispersado y otro refractado), que a su vez repetirán el proceso. La información que se obtiene a partir de estos caminos de rayos nos permitirá darle color al píxel. Con dicha ecuación, describiremos analíticamente cómo ocurre esto.

Un último concepto más: denotemos por  $L_e(p, \omega_o)$  a la **radiancia producida por los materiales emisivos**. En esencia, estos materiales son fuentes de luz, pues emiten radiancia por sí mismos.

La *rendering equation* viene dada por la siguiente expresión:

$$L_o(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{H^2(n)} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \quad (3.10)$$

Para hacerla operativa en términos computacionales podemos transformarla un poco. Bien, partamos de la ecuación de para la radiancia reflejada:

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{H^2(n)} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Vamos a buscar expresar la radiancia incidente en términos de la radiancia reflejada. Para ello, usamos la propiedad de que la radiancia a lo largo de un rayo no cambia.

Si a una superficie le llega un fotón desde alguna parte, debe ser porque “*alguien*” ha tenido que emitirlo. El fotón necesariamente ha llegado a partir de un rayo. La propiedad nos dice que la radiancia no ha podido cambiar en el camino.

Pues bien, consideremos una función  $r : \mathbb{R}^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, dado un punto  $p$  y una dirección  $\omega$ , devuelve el siguiente punto de impacto en una superficie. En esencia, es una función de *ray casting* (Fabio Pellacini 2022, Path Tracing).

Esta función nos permite expresar el punto anterior de la siguiente forma:

$$L_i(p, \omega) = L_o(r(p, \omega), -\omega)$$

Esto nos permite cambiar la expresión de  $L_i$  en la integral anterior:

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{H^2(\mathbf{n})} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_o(r(p, \omega_i), -\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Finalmente, la radiancia total vendrá dada por la suma de la radiancia emitida y la reflejada:

$$L(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \int_{H^2(\mathbf{n})} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_o(r(p, \omega_i), -\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Y con esto, ¡hemos obtenido la *rendering equation*!

Si quieres ver gráficamente cómo funciona, te recomiendo pasarte por (Arnebäck n.d.). Es un vídeo muy intuitivo.

Si nos paramos a pensar, la ecuación de reflexión es muy similar a la de renderizado. Sin embargo, hay un par de matices que las hacen muy diferentes:

- La ecuación de reflexión describe cómo se comporta la luz reflejada en un cierto punto. Es decir, tiene un ámbito local. Además, para calcular la radiancia reflejada, se necesita conocer la radiancia incidente.

- La *rendering equation* calcula las condiciones globales de la luz. Además, no se conocen las radiancias de salida.

Este último matiz es importante. Para renderizar una imagen, se necesita calcular la radiancia de salida para aquellos puntos visibles desde nuestra cámara.

## 4. Métodos de Monte Carlo

Como vimos en el capítulo anterior, la clave para conseguir una imagen en nuestro ray tracer es calcular la cantidad de luz en un punto de la escena. Para ello, necesitamos hallar la radiancia en dicha posición mediante la *rendering equation*. Sin embargo, es *muy* difícil resolverla; tanto computacional como analíticamente. Por ello, debemos atacar el problema desde otro punto de vista.

Las técnicas de Monte Carlo nos permitirán aproximar el valor que toman las integrales mediante una estimación. Utilizando muestreo aleatorio para evaluar puntos de una función, seremos capaces de obtener un resultado suficientemente bueno.

Una de las propiedades que hacen interesantes a este tipo de métodos es la **independencia del ratio de convergencia y la dimensionalidad del integrando**. Sin embargo, conseguir un mejor rendimiento tiene un precio a pagar. Dadas  $n$  muestras, la convergencia a la solución correcta tiene un orden de  $\mathcal{O}(n^{-1/2}) = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ . Es decir, para reducir el error a la mitad, necesitaríamos 4 veces más muestras.

En este capítulo veremos los fundamentos de la integración de Monte Carlo, cómo muestrear distribuciones específicas y métodos para afinar el resultado final.

### 4.1. Repaso de probabilidad

Antes de comenzar a fondo, necesitaremos unas nociones de variable aleatoria para poder entender la integración de Monte Carlo, por lo que vamos a hacer un breve repaso.

Una **variable aleatoria**  $X$  (v.a.) es, esencialmente, una regla que asigna un valor numérico a cada posibilidad de un proceso de azar. Formalmente, es una función definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  asociado a un experimento aleatorio:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

A  $\Omega$  lo conocemos como espacio muestral (conjunto de todas las posibilidades),  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  que refleja todas las posibilidades de eventos aleatorios, y  $P$  es una función probabilidad, que asigna a cada evento una probabilidad.

Una variable aleatoria  $X$  puede clasificarse atendiendo a cómo sea su rango  $R_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ tal que } X(\omega) = x\}$ : en discreta o continua.

### 4.1.1. Variables aleatorias discretas

Las v.a. discretas son aquellas cuyo rango es un conjunto discreto.

Para comprender mejor cómo funcionan, pongamos un ejemplo: Consideremos un experimento en el que lanzamos dos dados, anotando lo que sale en cada uno. Los posibles valores que toman serán (Galvin n.d.):

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \} \end{aligned}$$

Cada resultado tiene la misma probabilidad de ocurrir (claro está, si el dado no está truco). Como hay 36 posibilidades, la probabilidad de obtener un cierto valor es de  $\frac{1}{36}$ .

La v.a.  $X$  denotará la suma de los valores obtenidos en cada uno. Así, por ejemplo, si al lanzar los dados hemos obtenido  $(1, 3)$ ,  $X$  tomará el valor 4. En total,  $X$  puede tomar todos los valores comprendidos entre 2 y 12. Cada pareja no está asociada a un único valor de  $X$ . Por ejemplo,  $(1, 2)$  suma lo mismo que  $(2, 1)$ . Esto nos lleva a preguntarnos... ¿Cuál es la probabilidad de que  $X$  adquiera un cierto valor?

La **función masa de probabilidad** nos permite conocer la probabilidad de que  $X$  tome un cierto valor  $x$ . Se denota por  $P(X = x)$ .

También se suele usar  $p_X(x)$  o, directamente  $p(x)$ , cuando no haya lugar a dudas. Sin embargo, en este trabajo reservaremos este nombre a otro tipo de funciones.

**Nota(ción):** Cuando  $X$  tenga una cierta función masa de probabilidad, escribiremos  $X \sim p_X$

En este ejemplo, la probabilidad de que  $X$  tome el valor 4 es

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \sum \text{nº parejas que suman 4} \cdot \text{probabilidad de que salga la pareja} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Las parejas serían  $(1, 3)$ ,  $(2, 2)$  y  $(3, 1)$ .

Por definición, si el conjunto de valores que puede tomar  $X$  es  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , la función masa de probabilidad debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Muchas veces nos interesará conocer la probabilidad de que  $X$  se quede por debajo de un cierto valor  $x$  (de hecho, podemos caracterizar distribuciones aleatorias gracias a esto). Para ello, usamos la **función de distribución**:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{R} \\ k \leq x}} P(X = k)$$

Es una función continua por la derecha y monótona no decreciente. Además, se cumple que  $0 \leq F_X \leq 1(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X = 1$ .

En nuestro ejemplo, si consideramos  $x = 3$ :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{i=1}^3 P(X = i) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
&= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

### 4.1.2. Variables aleatorias continuas

Este tipo de variables aleatorias tienen un rango no numerable; es decir, el conjunto de valores que puede tomar abarca un intervalo de números.

Un ejemplo podría ser la altura de una persona.

Si en las variables aleatorias discretas teníamos funciones masa de probabilidad, aquí definiremos las **funciones de densidad de probabilidad** (o simplemente, funciones de densidad). La idea es la misma: nos permite conocer la probabilidad de que nuestra variable aleatoria tome un cierto valor del espacio muestral.

Es importante mencionar que, aunque *la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor específico* es 0, ya que nos encontramos en un conjunto no numerable, sí que podemos calcular la probabilidad de que se encuentre entre dos valores. Por tanto, si la función de densidad es  $f_X$ , entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

La función de densidad tiene dos características importantes:

1.  $f_X$  es no negativa; esto es,  $f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $f_X$  integra uno en todo  $\mathbb{R}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Estas dos propiedades caracterizan a una función de densidad; es decir, toda función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa e integrable tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  es la función de densidad de alguna variable continua.

Intuitivamente, podemos ver esta última propiedad como *si acumulamos todos los valores que puede tomar la variable aleatoria, la probabilidad de que te encuentres en el conjunto debe ser 1*. Si tratamos con un conjunto de números reales, podemos escribir la integral como  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$ .

Una de las variables aleatorias que más juego nos darán en el futuro será la **v.a. con distribución uniforme en  $[0, 1)$** . La denotaremos  $\Xi \sim U([0, 1))$ . La probabilidad de que  $\xi$  tome un valor es constante, por lo que podemos definir su función de densidad como

$$f_{\Xi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [0, 1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La probabilidad de  $\Xi$  tome un valor entre dos elementos  $a, b \in [0, 1)$  es

$$P(\Xi \in [a, b]) = \int_a^b 1 dx = b - a$$

Como veremos más adelante, definiendo correctamente una función de densidad conseguiremos mejorar el rendimiento del path tracer.

La función de distribución  $F_X(x)$  podemos definirla como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Es decir, dado un  $x$ , ¿cuál sería la probabilidad de que  $X$  se quede por debajo de  $x$ ?

El Teorema Fundamental del Cálculo nos permite relacionar función de distribución y función de densidad directamente:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$



### 4.1.3. Esperanza y varianza de una variable aleatoria

La **esperanza de una variable aleatoria**, denotada  $E[X]$ , es una generalización de la media ponderada. Nos informa del *valor esperado* de dicha variable aleatoria.

En el caso de las variables discretas, se define como

$$E[X] = \sum_i x_i p_i$$

donde  $x_i$  son los posibles valores que puede tomar la v.a., y  $p_i$  la probabilidad asociada a cada uno de ellos; es decir,  $p_i = P[X = x_i]$

Para una variable aleatoria continua real, la esperanza viene dada por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Pongamos un par de ejemplos del cálculo de la esperanza. En el **ejemplo de las variables discretas**, la esperanza venía dada por

$$E[X] = \sum_{i=2}^{12} i P[X = i] = 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{2}{36} + \dots + 12 \frac{1}{36} = 7$$

Para variables aleatorias uniformes en  $(a, b)$  (es decir,  $X \sim U(a, b)$ ), la esperanza es

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

La esperanza tiene unas cuantas propiedades que nos resultarán muy útiles. Estas son:

- **Linealidad:**

- Si  $X, Y$  son dos v.a.,  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- Si  $a$  es una constante,  $X$  una v.a., entonces  $E[aX] = aE[X]$
- Análogamente, para ciertas  $X_1, \dots, X_k$ ,  $E\left[\sum_{i=1}^k X_i\right] = \sum_{i=1}^k E[X_i]$

- Estas propiedades no necesitan que las variables aleatorias sean independientes. Este hecho será clave para las técnicas de Monte Carlo.

Será habitual encontrarnos con el problema de que no conocemos la distribución de una variable aleatoria  $Y$ . Sin embargo, si encontramos una transformación medible de una variable aleatoria  $X$  de forma que obtengamos  $Y$  (esto es,  $\exists g$  función medible tal que  $g(X) = Y$ ), entonces podemos calcular la esperanza de  $Y$  fácilmente. Esta propiedad hará que las variables aleatorias con distribución uniforme adquieran muchísima importancia. Generar números aleatorios en  $[0, 1)$  es muy fácil, así **que obtendremos otras vv.aa a partir de  $\xi$ .**

Otra medida muy útil de una variable aleatoria es **la varianza**. Nos permitirá medir cómo de dispersa es la distribución con respecto a su media. La denotaremos como  $Var[X]$ , y se define como

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Si desarrollamos esta definición, podemos conseguir una expresión algo más agradable:

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] = \\ &= E[X^2 + E[X]^2 - 2XE[X]] = \\ &= E[X^2] + E[X]^2 - 2E[X]E[X] = \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Hemos usado que  $E[E[X]] = E[X]$  y la linealidad de la esperanza.

Enunciemos un par de propiedades que tiene, similares a la de la esperanza:

- La varianza saca constantes al cuadrado:  $Var[aX] = a^2Var[X]$
- $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y]$ , donde  $Cov[X, Y]$  es la covarianza de  $X$  y  $Y$ .
  - En el caso en el que  $X$  e  $Y$  sean incorreladas (es decir, la covarianza es 0),  $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$ .

La varianza nos será útil a la hora de medir el error cometido por una estimación de Monte Carlo.

#### 4.1.4. Teoremas importantes

Además de las anteriores propiedades, existen una serie de teoremas esenciales que necesitaremos más adelante:

**Ley del estadístico inconsciente** (*Law of the unconscious statistician*, o LOTUS): dada una variable aleatoria  $X$  y una función medible  $g$ , la esperanza de  $g(X)$  se puede calcular como

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (4.1)$$

**Ley (fuerte) de los grandes números:** dada una muestra de  $N$  valores  $X_1, \dots, X_N$  de una variable aleatoria  $X$  con esperanza  $E[X] = \mu$ ,

$$P \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \mu \right] = 1$$

Usando que  $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ , esta ley se suele escribir como

$$P \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = \mu \right] = 1 \quad (4.2)$$

Este teorema es especialmente importante. En esencia, nos dice que cuando repetimos muchas veces un experimento, al promediar los resultados obtendremos una esperanza muy cercana a la esperanza real.

**Teorema Central del Límite (CLT) para variables idénticamente distribuidas** (Owen 2013, capítulo 2): Sean  $X_1, \dots, X_N$  muestras aleatorias simples de una variable aleatoria  $X$  con esperanza  $E[X] = \mu$  y varianza  $Var[X] = \sigma^2$ . Sea

$$Z_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sigma\sqrt{N}}$$

Entonces, la variable aleatoria  $Z_N$  converge hacia una función de distribución normal estándar cuando  $N$  es suficientemente grande:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[Z_N \leq z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.3)$$

### 4.1.5. Estimadores

A veces, no podremos conocer de antemano el valor que toma un cierto parámetro de una distribución. Sin embargo, conocemos el tipo de distribución que nuestra variable aleatoria  $X$  sigue. Los estimadores nos proporcionarán una forma de calcular el posible valor de esos parámetros a partir de una muestra de  $X$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución perteneciente a una familia de distribuciones paramétricas  $X \sim F \in \{F(\theta) \mid \theta \in \Theta\}$ .  $\Theta$  es el conjunto de valores que puede tomar el parámetro. Buscamos una forma de determinar el valor de  $\theta$ .

Diremos que  $T(X_1, \dots, X_N)$  es **un estimador de  $\theta$**  si  $T$  toma valores en  $\Theta$ .

A los estimadores de un parámetro los solemos denotar con  $\hat{\theta}$ .

Como vemos, la definición no es muy restrictiva. Únicamente le estamos pidiendo a la función de la muestra que pueda tomar valores viables para la distribución.

Se dice que un estimador  $T(X_1, \dots, X_N)$  es **insesgado** (o centrado en el parámetro  $\theta$ ) si

$$E[T(X_1, \dots, X_n)] = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$$

Naturalmente, decimos que un estimador  $T(X_1, \dots, X_N)$  está **sesgado** si  $E[T(X_1, \dots, X_N)] \neq \theta$ .

## 4.2. El estimador de Monte Carlo

Tras este breve repaso de probabilidad, estamos en condiciones de definir el estimador de Monte Carlo. Primero, vamos con su versión más sencilla.

### 4.2.1. Monte Carlo básico

Los estimadores de Monte Carlo nos permiten hallar la esperanza de una variable aleatoria, digamos,  $Y$ , sin necesidad de calcular explícitamente su valor. Para ello, tomamos  $N$  muestras  $Y_1, \dots, Y_N$  de  $Y$ , cuya media vale  $\mu$ . Entonces, el estimador de  $\mu$  (Owen 2013, capítulo 2) es:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (4.4)$$

La intuición del estimador es, esencialmente, la misma que la del teorema central del límite. Lo que buscamos es una forma de calcular el valor promedio de un cierto suceso aleatorio, pero lo único que podemos usar son muestras de su variable aleatoria. Promediando esas muestras, sacamos información de la distribución. En este caso, la media.

En cualquier caso, la existencia de este estimador viene dada por la ley de los grandes números (tanto débil como fuerte [4.2]). Si  $\mu = E[Y]$ , se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{\mu}_N - \mu| \leq \varepsilon] = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

o utilizando la ley de los números grandes,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\hat{\mu}_N - \mu| = 0] = 1$$

Haciendo la esperanza de este estimador, vemos que

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}_N] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^N Y_i\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[Y_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu = \\ &= \mu \end{aligned}$$

Por lo que el estimador es insesgado. Además, se tiene que la varianza es

$$E[(\hat{\mu}_N - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{N}$$

Un ejemplo clásico de estimador de Monte Carlo es calcular el valor de  $\pi$ . Se puede hallar integrando una función que valga 1 en el interior de la circunferencia de radio unidad y 0 en el exterior:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \implies \pi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy$$

Para usar el estimador de [4.5], necesitamos saber la probabilidad de obtener un punto dentro de la circunferencia.

Bien, consideremos que una circunferencia de radio  $r$  se encuentra inscrita en un cuadrado. El área de la circunferencia es  $\pi r^2$ , mientras que la del cuadrado es  $(2r)^2 = 4r^2$ . Por tanto, la probabilidad de obtener un punto dentro de la circunferencia es  $\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$ . Podemos tomar  $p(x, y) = \frac{1}{4}$ , de forma que

$$\pi \approx \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i), \text{ con } (x_i, y_i) \sim U([-1, 1] \times [-1, 1])$$

### 4.2.2. Integración de Monte Carlo

Generalmente nos encontraremos en la situación en la que  $Y = f(X)$ , donde  $X \in S \subset \mathbb{R}^d$  sigue una distribución con función de densidad  $p_X(x)$  con media  $\mu = E[X]$ , y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

Consideremos el promedio de  $N$  muestras de  $f(X)$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i), \quad X_i \text{ idénticamente distribuidas}$$

En ese caso, la esperanza es

$$\begin{aligned}
E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) \right] &= E \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X) \right] = \\
&= \frac{1}{N} N E[f(X)] = \\
&= E[f(X)] = \\
&= \int_S f(x) p_X(x) dx
\end{aligned}$$

¡Genial! Esto nos da una forma de **calcular la integral de una función** usando las imágenes de  $N$  muestras  $f(X_1), \dots, f(X_N)$  de una variable aleatoria  $X \sim p_X$ . A este estimador de Monte Carlo lo llamaremos  $\hat{I}_N$ :

$$\begin{aligned}
\hat{I}_N &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) \\
\Rightarrow E[\hat{I}_N] &= \int_S f(x) p_X(x) dx
\end{aligned} \tag{4.5}$$

**Nota(ción):** si te preguntas por qué lo llamamos  $\hat{I}_N$ , piensa que queremos calcular la integral  $I = \int_S f(x) p_X(x) dx$ . Para ello, usamos el estimador  $\hat{I}$ , y marcamos explícitamente que usamos  $N$  muestras.

La varianza del estimador se puede calcular fácilmente utilizando las propiedades que vimos en la [sección de la varianza](#):

$$\begin{aligned}
Var[\hat{I}_N] &= Var \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) \right] = \\
&= \frac{1}{N^2} Var \left[ \sum_{i=1}^N f(X_i) \right] = \\
&= \frac{1}{N^2} N Var[f(X)] = \\
&= \frac{1}{N} Var[f(X)]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Como es natural, el número de muestras que usemos será clave para la proximidad de la

estimación. ¿Cómo *de lejos* se queda del valor real de la integral  $E[f(X)]$ ? Es decir; ¿cómo modifica  $N$  la varianza del estimador  $Var[\hat{I}_N]$ ?

Para comprobarlo, debemos introducir dos nuevos teoremas: la desigualdad de Markov y la desigualdad de Chebyshev (Illana 2013, Introducción).

**Desigualdad de Markov:** Sea  $X$  una variable aleatoria que toma valores no negativos, y sea  $p_X$  su función de densidad. Entonces,  $\forall x > 0$ ,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^x tp_X(t)dt + \int_x^\infty tp_X(t)dt \geq \int_x^\infty tp_X(t)dt \\ &\geq \int_x^\infty xp_X(t)dt = xP[X \geq x] \\ &\Rightarrow P[X \geq x] \leq \frac{E[X]}{x} \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Desigualdad de Chebyshev:** Sea  $X$  una variable aleatoria con esperanza  $\mu = E[X]$  y varianza  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ . Entonces, aplicando la desigualdad de Markov [4.7] a  $D^2 = (X - \mu)^2$  se tiene que

$$\begin{aligned} P[D^2 \geq x^2] &\leq \frac{\sigma^2}{x^2} \\ \Leftrightarrow P[|X - \mu| \geq x] &\leq \frac{\sigma^2}{x^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ahora que tenemos estas dos desigualdades, apliquemos la de Chebyshev a [4.5] con  $\sigma^2 = Var[\hat{I}_N]$ ,  $x^2 = \sigma^2/\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ :

$$P\left[|\hat{I}_N - E[\hat{I}_N]| \geq \left(\frac{Var[\hat{I}_N]}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right] \leq \varepsilon$$

Esto nos dice que, usando un número de muestras relativamente grande ( $N \gg \frac{1}{\varepsilon}$ ), es prácticamente imposible que el estimador se aleje de  $E[f(X)]$ .

La desviación estándar puede calcularse fácilmente a partir de la varianza:



$$\sqrt{\text{Var}[\hat{I}_N]} = \frac{\sqrt{\text{Var}[f(X)]}}{\sqrt{N}} \quad (4.9)$$

así que, como adelantamos al inicio del capítulo, la estimación tiene un error del orden  $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ . Esto nos dice que, para reducir el error a la mitad, debemos tomar 4 veces más muestras.

Es importante destacar la **ausencia del parámetro de la dimensión**. Sabemos que  $X \in S \subset \mathbb{R}^d$ , pero en ningún momento aparece  $d$  en la expresión de la desviación estándar [4.9]. Este hecho es una de las ventajas de la integración de Monte Carlo.

## 4.3. Técnicas de reducción de varianza

### 4.3.1. Muestreo por importancia

Como hemos visto,  $\text{Var}[\hat{I}_N]$  depende del número de muestras  $N$  y de  $\text{Var}[f(X)]$ . Aumentar el tamaño de  $N$  es una forma fácil de reducir la varianza, pero rápidamente llegaríamos a una situación de retornos reducidos (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016, The Monte Carlo Estimator). ¿Podemos hacer algo con el término  $\text{Var}[f(X)]$ ?

Vamos a jugar con él.

La integral que estamos evaluando ahora mismo es  $\int_S f(x)p_X(x)dx$ , con  $p_X$  una función de densidad sobre  $S \subset \mathbb{R}^d \Rightarrow p_X = 0 \forall x \notin S$ . Ahora bien, si  $q_X$  es otra función de densidad en  $\mathbb{R}^d$ , entonces (Owen 2013, Importance Sampling):

$$I = \int_S f(x)p_X(x)dx = \int_S \frac{f(x)p_X(x)}{q_X(x)}q_X(x)dx = E\left[\frac{f(X)p_X(X)}{q_X(X)}\right]$$

Esta última esperanza depende de  $q_X$ . Nuestro objetivo era encontrar  $E[f(X)]$ , pero podemos hacerlo tomando un término nuevo para muestrear desde  $q_X$  en vez de  $p_X$ . Al factor  $\frac{p_X}{q_X}$  lo llamamos **cociente de probabilidad**, con  $q_X$  la **distribución de importancia** y  $p_X$  la **distribución nominal**.

No es necesario que  $q_X$  sea positiva en todo punto. Con que se cumpla que  $q_X(x) > 0$  cuando  $f(x)p_X(x) \neq 0$  es suficiente. Es decir, para  $Q = \{x \mid q_X(x) > 0\}$ , tenemos que  $x \in Q$  cuando  $f(x)p_X(x) \neq 0$ . Así, si  $x \in S \cap Q^c \Rightarrow f(X) = 0$ , mientras que si  $x \in S^c \cap Q \Rightarrow p_X(X) \neq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{f(X)p_X(X)}{q_X(X)} \right] &= \int_Q \frac{f(x)p_X(x)}{q_X(x)} q_X(x) dx = \int_Q f(x)p_X(x) dx = \\ &= \int_Q f(x)p_X(x) dx + \int_{S^c \cap Q} f(x)p_X(x) dx - \int_{S \cap Q^c} f(x)p_X(x) dx = \\ &= \int_S f(x)p_X(x) dx = \\ &= E[f(X)] \end{aligned}$$

De esta forma, hemos llegado al **estimador de Monte Carlo por importancia**:

$$\tilde{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)p_X(X_i)}{q_X(X_i)}, \quad X_i \sim q_X \quad (4.10)$$

**Nota(ción):** ¡fíjate en el gusanito!  $\hat{I}_N$  [4.5] y  $\tilde{I}_N$  tienen la misma esperanza, pero son estimadores diferentes.

Vamos a calcular ahora la varianza de este estimador. Sea  $\mu = E[f(X)]$

$$\begin{aligned} Var[\tilde{I}_N] &= \frac{1}{N} \left( \int_Q \left( \frac{f(x)p_X(x)}{q_X(x)} \right)^2 q_X(x) dx - \mu^2 \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left( \int_Q \frac{(f(x)p_X(x))^2}{q_X(x)} dx - \mu^2 \right) = \\ &= \frac{\sigma_q^2}{N} \end{aligned}$$

La clave de este método reside en escoger una buena distribución de importancia. Puede probarse que la función de densidad que minimiza  $\sigma_q^2$  es proporcional a  $|f(x)|p_X(x)$

(Owen 2013, 6).

#### 4.3.1.1. Muestreo por importancia en transporte de luz

Esta técnica es especialmente importante en nuestra área de estudio. En transporte de luz, buscamos calcular el valor de la rendering equation [3.10]. Específicamente, de la integral

$$\int_{H^2(n)} BSDF(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

que se suele representar como una simple integral sobre un cierto conjunto  $\int_S f(x)dx$ . En la literatura se usa una versión modificada de muestreo por importancia:

$$\tilde{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p_X(X_i)} \quad (4.11)$$

para que, utilizando muestras  $X_i \sim p_X$ ,  $E \left[ \frac{f}{p_X} \right] = \int_S \frac{f}{p_X} p_X$  y así se evalúe directamente la integral de  $f$ . En cualquiera de los casos, el fundamento teórico es el mismo (Eric C. Anderson 1999).

Esta forma de escribir el estimador nos permite amenizar algunos casos particulares. Por ejemplo, si usamos muestras  $X_i$  que sigan una distribución uniforme en  $[a, b]$ , entonces, su función de densidad es  $p_X(x) = \frac{1}{b-a}$ . Esto da lugar a

$$\tilde{I}_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i)$$

**En lo que resta de capítulo, se utilizará indistintamente  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)p_X(X_i)}{q_X(X_i)}$  o  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p_X(X_i)}$  según convenga. ¡Tenlo en cuenta!**

Usando esta expresión, la distribución de importancia  $p_X$  que hace decrecer la varianza es aquella proporcional a  $f$ . Es decir, supongamos que  $f \propto p_X$ . Esto es, existe un  $s$  tal que  $f(x) = sp_X(x)$ . Como  $p_X$  debe integrar uno, podemos calcular el valor de  $s$ :

$$\int_S p_X(x)dx = \int_S s f(x)dx = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$s = \frac{1}{\int_S f(x)dx}$$

Y entonces, se tendría que

$$\begin{aligned} Var \left[ \frac{f(X)}{p_X(X)} \right] &= Var \left[ \frac{f(X)}{s f(X)} \right] = \\ &= Var \left[ \frac{1}{s} \right] = \\ &= 0 \end{aligned}$$

En la práctica, esto es inviable. El problema que queremos resolver es calcular la integral de  $f$ . Y para sacar  $s$ , necesitaríamos el valor de la integral de  $f$ . ¡Estamos dando vueltas!

Por fortuna, hay algoritmos que son capaces de proporcionar la constante  $s$  sin necesidad de calcular la integral. Uno de los más conocidos es **Metropolis-Hastings**, el cual se basa en cadenas de Markov de Monte Carlo.

En este trabajo nos centraremos en buscar funciones de densidad  $p_X$  que se aproximen a  $f$  lo más fielmente posible, dentro del contexto del transporte de luz.

Pongamos un ejemplo de estimador de Monte Carlo para una caja de dimensiones  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$ . Si queremos estimar la integral de la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dx dy dz$$

mediante una variable aleatoria  $X \sim U([x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1])$  con función de densidad  $p(x, y, z) = \frac{1}{x_1 - x_0} \frac{1}{y_1 - y_0} \frac{1}{z_1 - z_0}$ , tomamos el estimador

$$\tilde{I}_N = \frac{1}{(x_1 - x_0) \cdot (y_1 - y_0) \cdot (z_1 - z_0)} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

### 4.3.2. Muestreo por importancia múltiple

Las técnicas de **muestreo por importancia** nos proporcionan estimadores para una integral de la forma  $\int f(x)g(x)dx$ . Sin embargo, es frecuente encontrarse un producto de dos funciones,  $\int f(x)g(x)dx$ . Si tuviéramos una forma de coger muestras para  $f$ , y otra para  $g$ , ¿cuál deberíamos usar?

Se puede utilizar un nuevo estimador de Monte Carlo, que viene dado por (**Pharr, Jakob, and Humphreys 2016**)

$$\frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \frac{f(X_i)g(X_i)w_f(X_i)}{p_f(X_i)} + \frac{1}{N_g} \sum_{j=1}^{N_g} \frac{f(Y_j)g(Y_j)w_g(Y_j)}{p_g(Y_j)}$$

donde  $N_f$  y  $N_g$  son el número de muestras tomadas para  $f$  y  $g$  respectivamente,  $p_f, p_g$  las funciones de densidad respectivas y  $w_f, w_g$  funciones de peso escogidas tales que la esperanza del estimador sea  $\int f(x)g(x)dx$ .

Estas funciones peso suelen tener en cuenta todas las formas diferentes que hay de generar muestras para  $X_i$  e  $Y_j$ . Por ejemplo, una de las que podemos usar es la heurística de balanceo:

$$w_s(x) = \frac{N_s p_s(x)}{\sum_i N_i p_i(x)}$$

Una modificación de esta es la heurística potencial (*power heuristic*):

$$w_s(x, \beta) = \frac{(N_s p_s(x))^\beta}{\sum_i (N_i p_i(x))^\beta}$$

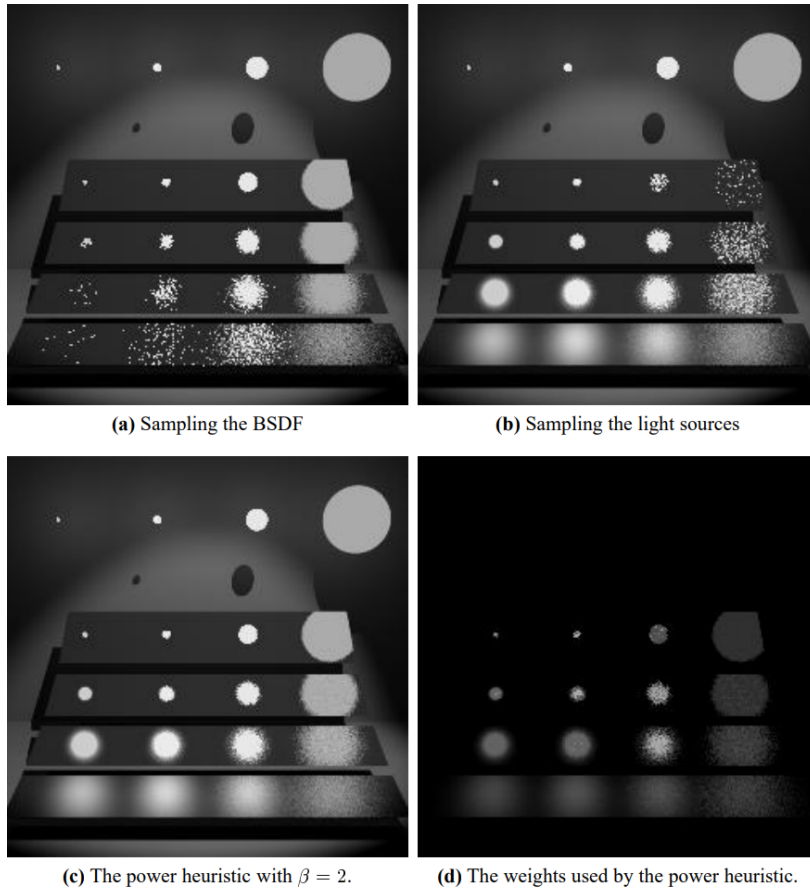
la cual reduce la varianza con respecto a la heurística de balanceo. Un valor para  $\beta$  habitual es  $\beta = 2$ .

#### 4.3.2.1. Muestreo por importancia múltiple en transporte de luz

Si queremos evaluar la contribución de luz en un punto teniendo en cuenta la luz directa, la expresión utilizada es

$$L_o(p, \omega_o) = \int_{S^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_{directa}(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Si utilizáramos muestreo por importancia basándonos en las distribuciones de  $L_{directa}$  o  $f$  por separado, algunas de las dos no rendiría especialmente bien. Combinando ambas mediante muestreo por importancia múltiple se conseguiría un mejor resultado.



**Figure 4.1.:** Muestreo por importancia múltiple en transporte de luz ilustrado. Fuente: (Eric Veach December 1997, Multiple Importance Sampling)

### 4.3.3. Otras técnicas de reducción de varianza en transporte de luz

Hasta ahora, la principal técnica estudiada ha sido muestreo por importancia (sea o no múltiple). Esto no quiere decir que sea la única. Al contrario; esas dos son de las más sencillas que se pueden usar.

En esta sección vamos a ver de forma breve otras formas de reducir la varianza de un estimador, centrándonos específicamente en el contexto de transporte de luz.

#### 4.3.3.1. Ruleta rusa

Un problema habitual en la práctica es saber cuándo terminar la propagación de un rayo. Una solución simple es utilizar un parámetro de profundidad –lo cual hemos implementado en el motor–. Otra opción más eficiente es utilizar el método de **ruleta rusa**.

En esencia, la idea es que se genere un número aleatorio  $\xi \in [0, 1)$ . Si  $\xi < p_i$ , el camino del rayo se continúa, pero multiplicando la radiancia acumulada por  $L_i(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)/p_i$ . En otro caso (i.e., si  $\xi \geq p_i$ ), el rayo se descarta. Esto hace que se acepten caminos más fuertes, rechazando aquellas rutas con excesivo ruido.

Más información puede encontrarse en (Pharr, Jakob, and Humphreys 2016, Russian Roulette and Splitting).

#### 4.3.3.2. Next event estimation, o muestreo directo de fuentes de luz

**Idea:** Tracing shadow rays to the light source on each bounce to see if you can terminate the current path. This involves shooting a shadow ray towards light sources, if it's occluded, terminate the ray.

Esta técnica recibe dos nombres. Tradicionalmente, se la conocía como muestreo directo de fuentes de luz, pero en los últimos años ha adoptado el nombre de next event estimation. Esencialmente, se trata de utilizar las luces de la escena para calcular la radiancia de un punto.

Podemos dividir la rendering equation [3.10] en dos sumandos (Carlos Ureña 2021):

$$L(p, \omega_o) = L_e(p, \omega_o) + \underbrace{L_{directa}(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) + L_{indirecta}(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)}_{\text{La parte integral de la rendering equation}}$$

siendo  $L_e$  la radiancia emitida por la superficie,  $L_{directa}$  la radiancia proporcionada por las fuentes de luz y  $L_{indirecta}$  la radiancia indirecta.

$$L_{directa} = \int_{S^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_e(y, -\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

$$L_{indirecta} = \int_{S^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(y, \omega_o \leftarrow \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

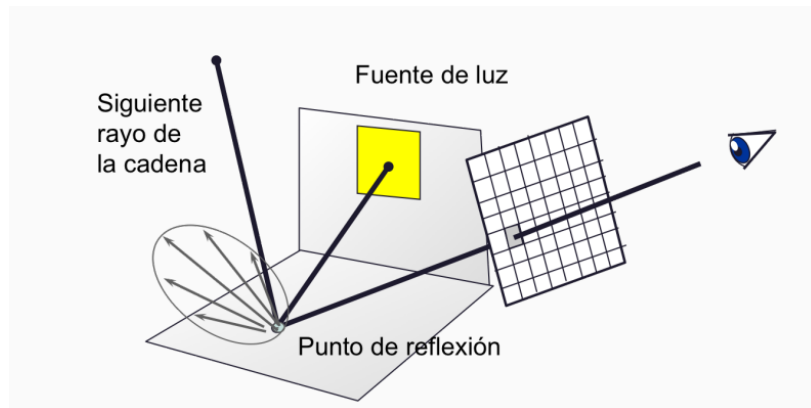
siendo  $y$  el primer punto visible desde  $p$  en la dirección  $\omega_i$  situado en una fuente de luz.

En cada punto de intersección  $p$ , escogeremos aleatoriamente un punto  $y$  en la fuente de luz, y calcularemos  $L_{directa}$ . Esta integral es fácil de conseguir con las técnicas que ya conocemos. Sin embargo,  $L_{indirecta}$  cuesta más trabajo. Al aparecer la radiancia incidente en el punto  $p$ ,  $L_i(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$ , necesitaremos evaluarla de forma recursiva trazando rayos en la escena.

Aunque estamos haciendo más cálculos en cada punto de la cadena de ray trace, al evaluar por separado  $L_{directa}$  y  $L_{indirecta}$  conseguimos reducir considerablemente la varianza. Por tanto, suponiendo fija la varianza, el coste computacional de un camino es mayor, pero el coste total es más bajo.

Esta técnica requiere conocer si desde el punto  $p$  se puede ver  $y$  en la fuente de luz. Es decir, ¿hay algún objeto en medio de  $p$  e  $y$ ? Para ello, se suele utilizar lo que se conocen como *shadow rays*. Dispara uno de estos rayos para conocer si está ocluido.





**Figure 4.2.:** El muestreo directo de fuentes de luz cambia la forma de calcular la radiancia en un punto, pero mejora considerablemente el ruido de una imagen. Fuente: (Carlos Ureña 2021)

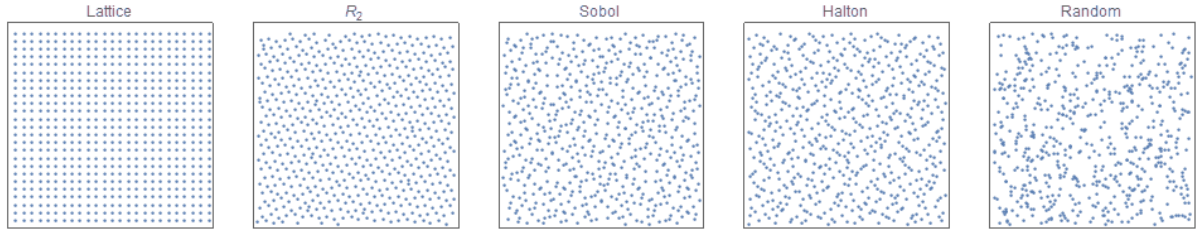
Si quieres informarte más sobre esta técnica, puedes leer (Adam Marrs and Wald 2021, Importance Sampling of Many Lights on the GPU).

#### 4.3.3.3. Quasi-Monte Carlo

Generalmente, en los estimadores de Monte Carlo se utilizan variables aleatorias distribuidas uniformemente a las que se le aplican transformaciones, pues resulta más sencillo generar un número aleatorio de la primera manera que de la segunda. La idea de los quasi-Monte Carlo es muestrear puntos que, de la manera posible, se extiendan uniformemente en  $[0, 1]^d$ ; evitando así clústeres y zonas vacías (Owen 2013, Quasi-Monte Carlo).

Existen varias formas de conseguir esto. Algunas de las más famosas son las secuencias de Sobol, que son computacionalmente caras pero presentan menores discrepancias; o las series de Halton, que son más fáciles de conseguir.

Se puede estudiar el tema en profundidad en (Martin Roberts 2018)



**Figure 4.3.:** Comparativa entre diferentes métodos de quasi-aleatoriedad. Fuente: (Martin Roberts 2018)

## 4.4. Escogiendo puntos aleatorios

Una de las partes clave del estimador de Monte Carlo [4.5] es saber escoger la función de densidad  $p_X$  correctamente. En esta sección, veremos algunos métodos para conseguir distribuciones específicas partiendo de funciones de densidad sencillas, así como formas de elegir funciones de densidad próximas a  $f$ .

### 4.4.1. Método de la transformada inversa

**En resumen:** Para conseguir una muestra de una distribución específica  $F_X$ :

1. Generar un número aleatorio  $\xi \sim U(0, 1)$ .
2. Hallar la inversa de la función de distribución deseada  $F_X$ , denotada  $F_X^{-1}(x)$ .
3. Calcular  $F_X^{-1}(\xi) = X$ .

Este método nos permite conseguir muestras de cualquier distribución continua a partir de variables aleatorias uniformes, siempre que se conozca la inversa de la función de distribución.

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución  $F_X$ <sup>1</sup>. Queremos buscar una transformación  $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $T(\xi) \stackrel{d}{=} X$ , siendo  $\xi$  una v.a. uniformemente distribuida. Para que esto se cumpla, se debe dar

<sup>1</sup>En su defecto, si tenemos una función de densidad  $f_X$ , podemos hallar la función de distribución haciendo  $F_X(x) = P[X < x] = \int_{x_{min}}^x f_X(t)dt$ .

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P[X < x] = \\
&= P[T(\xi) < x] = \\
&= P(\xi < T^{-1}(x)) = \\
&= T^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Este último paso se debe a que, como  $\xi$  es uniforme en  $(0, 1)$ ,  $P[\xi < x] = x$ . Es decir, hemos obtenido que  $F_X$  es la inversa de  $T$ .

TODO: dibujo similar a [este: p.52](#)

Como ejemplo, vamos a muestrear la función  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$  ([Berkeley cs184 2022](#), Monte Carlo Integration).

Primero, normalizamos esta función para obtener una función de densidad  $p_X(x)$ . Es decir, buscamos  $p_X(x) = cf(x)$  tal que

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^2 p_X(x)dx = \int_0^2 cf(x)dx = c \int_0^2 f(x)dx = \\
&= \frac{cx^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8c}{3} \\
\Rightarrow c &= \frac{3}{8} \\
\Rightarrow p_X(x) &= \frac{3x^2}{8}
\end{aligned}$$

A continuación, integramos la función de densidad para obtener la de distribución  $F_X$ :

$$F_X(x) = \int_0^x p_X(x)dx = \int_0^x \frac{3x^2}{8} = \frac{x^3}{8}$$

Solo nos queda conseguir la muestra. Para ello,

$$\begin{aligned}
\xi &= F_X(x) = \frac{x^3}{8} \quad \Leftrightarrow \\
x &= \sqrt[3]{8\xi}
\end{aligned}$$

Sacando un número aleatorio  $\xi$ , y pasándolo por la función obtenida, conseguimos un elemento con distribución  $F(x)$ .

#### 4.4.2. Método del rechazo

**En resumen:** Para conseguir una muestra de una variable aleatoria  $X$  con función de densidad  $p_X$ :

1. Obtener una muestra  $y$  de  $Y$ , y otra  $\xi$  de  $U(0, 1)$ .
2. Comprobar si  $\xi < \frac{p_X(y)}{Mp_Y(y)}$ . Si es así, aceptarla. Si no, sacar otra muestra.

El método anterior presenta principalmente dos problemas:

1. No siempre es posible integrar una función para hallar su función de densidad.
2. La inversa de la función de distribución,  $F_X^{-1}$  no tiene por qué existir.

Como alternativa, podemos usar este método (en inglés, *rejection method*). Para ello, necesitamos una variable aleatoria  $Y$  con función de densidad  $p_Y(y)$ . El objetivo es conseguir una muestra de  $X$  con función de densidad  $p_X(x)$ .

La idea principal es aceptar una muestra de  $Y$  con probabilidad  $p_X/Mp_Y$ , con  $1 < M < \infty$ . En esencia, estamos jugando a los dardos: si la muestra de  $y$  que hemos obtenido se queda por debajo de la gráfica de la función  $Mp_Y < p_X$ , estaremos obteniendo una de  $p_X$ .

TODO dibujo de la gráfica  $\frac{p_X(y)}{Mp_Y(y)}$ .

¿Quizás haga falta una demostración también? No estoy satisfecho con este apartado ahora mismo. Necesita trabajo.

El algoritmo consiste en:

1. Obtener una muestra de  $Y$ , denotada  $y$ , y otra de  $U(0, 1)$ , llamada  $\xi$ .
2. Comprobar si  $\xi < \frac{p_X(y)}{Mp_Y(y)}$ .
  1. Si se cumple, se acepta  $y$  como muestra de  $p_X$
  2. En caso contrario, se rechaza  $y$  y se vuelve al paso 1.

## 5. ¡Construyamos un path tracer!

Ahora que hemos introducido toda la teoría necesaria, es hora de ponernos manos a la obra. En este capítulo, vamos a escoger una serie de herramientas y haremos una pequeña implementación de un motor de path tracing en tiempo real.

La implementación estará basada en Vulkan, junto al pequeño framework de `nvpro-samples`. El motor mantendrá el mismo espíritu que la serie de (Shirley 2020a), *Ray Tracing In One Weekend*.

Le pondremos especial atención a los conceptos claves. Vulkan tiende a crear código muy verboso, por lo que se documentarán únicamente las partes más importantes.

### 5.1. Requisitos de ray tracing en tiempo real

Como es natural, el tiempo es una limitación enorme para cualquier programa en tiempo real. Mientras que en un *offline renderer* disponemos de un tiempo muy considerable por frame (hablamos de varios segundos), en un programa en tiempo real necesitamos que un frame salga en 16 milisegundos o menos. Este concepto se suele denominar *frame budget*: la cantidad de tiempo que disponemos para un frame.

**Nota:** cuando hablamos del tiempo disponible para un frame, solemos hablar en milisegundos (ms) o frames por segundo (FPS). Para que un motor vaya suficientemente fluido, necesitaremos que el motor corra a un mínimo de 30 FPS (que equivalen a 33 ms por frame). Hoy en día, debido al avance del área en campos como los videojuegos, el estándar se está convirtiendo en 60 FPS (16 ms/frame).

Las nociones anteriores no distinguen entre un motor en tiempo real y *offline*. Como es natural, necesitaremos introducir unos pocos conceptos más para llevarlo a tiempo real.

Además, existe una serie de requisitos hardware que debemos cumplir para que un motor en tiempo real con ray tracing funcione.

### 5.1.1. Arquitecturas de gráficas

NOTE: sería interesante enlazarlo con la sección de rendimiento.

TODO: Esta [página](#) es maravillosa *chef kiss*

El requisito más importante de todos es la gráfica. Para ser capaces de realizar cálculos de ray tracing en tiempo real, necesitaremos una arquitectura moderna con núcleos dedicados a este tipo de cálculos<sup>1</sup>.

A día 17 de abril de 2022, para correr ray tracing en tiempo real, se necesita alguna de las siguientes tarjetas gráficas:

Arquitectura	Fabricante	Modelos de gráficas
<b>Turing</b>	Nvidia	RTX 2060, RTX 2060 Super, RTX 2070, RTX 2070 Super, RTX 2080, RTX 2080 Super, RTX 2080 Ti, RTX Titan
<b>Ampere</b>	Nvidia	RTX 3050, RTX 3060, RTX 3060 Ti, RTX 3070, RTX 3070 Ti, RTX 3080, RTX 3080 Ti, RTX 3090, RTX 3090 Ti
<b>RDNA2</b> (Navi 2X, Big Navi)	AMD	RX 6400, RX 6500 XT, RX 6600, RX 6600 XT, RX 6700 XT, RX 6800, RX 6800 XT, RX 6900 XT
<b>Arc Alchemist</b>	Intel	<i>No revelado aún</i>

Solo se han incluido las gráficas de escritorio de consumidor.

Para este trabajo se ha utilizado una **RTX 2070 Super**. En el capítulo de análisis del rendimiento se hablará con mayor profundidad de este apartado.

<sup>1</sup>Esto no es del todo cierto. Aunque generalmente suelen ser excepciones debido al coste computacional de RT en tiempo real, existen algunas implementaciones que son capaces de correrlo por software. Notablemente, el motor de Crytek, CryEngine, es capaz de mover ray tracing basado en hardware y en software ([Crytek n.d.](#))

### 5.1.2. Frameworks y API de ray tracing en tiempo real

Una vez hemos cumplido los requisitos de hardware, es hora de escoger los frameworks de trabajo.

Las API de gráficos están empezando a adaptarse a los requisitos del tiempo real, por lo que cambian frecuentemente. La mayoría adquirieron las directivas necesarias muy recientemente. Aun así, son lo suficientemente sólidas para que se pueda usar en aplicaciones empresariales de gran envergadura.

Esta es una lista de las API disponibles con capacidades de Ray Tracing disponibles para, al menos, la arquitectura Turing:

- Vulkan (los bindings de ray tracing se denominan KHR).
- Microsoft DirectX Ray Tracing (DXR), una extensión de DirectX 12.
- Nvidia OptiX.

De momento, no hay mucho donde elegir.

OptiX es la API más vieja de todas. Su primera versión salió en 2009, mientras que la última estable es de 2021. Tradicionalmente se ha usado para offline renderers, y no tiene un especial interés para este trabajo estando las otras dos disponibles.

Tanto DXR como Vulkan son los candidatos más sólidos. DXR salió en 2018, con la llegada de Turing. Es un par de años más reciente que Vulkan KHR. Cualquiera de las dos cumpliría su cometido de forma exitosa. Sin embargo, para este trabajo, **hemos escogido Vulkan** por los siguientes motivos:

- DirectX 12 está destinado principalmente a plataformas de Microsoft. Es decir, está pensado para sistemas operativos Windows 10 o mayor <sup>2</sup>.
- Vulkan está apoyado principalmente por AMD. Esto sigue las líneas de la su política de empresa de apoyar el código abierto. Además, resulta más sencillo exportarlo a otros sistemas operativos.

---

<sup>2</sup>Afortunadamente, esto tampoco es completamente cierto. La compañía desarrolladora y distribuidora de videojuegos Valve Corporation ha creado una pieza de software fascinante: [Proton](#). Proton utiliza Wine para emular software en Linux que solo puede correr en plataformas Windows. La versión 2.5 añadió soporte para traducción de bindings de DXR a KHR, lo que permite utilizar DirectX12 ray tracing en sistemas basados en Linux. El motivo de este software es expandir el mercado de videojuegos disponibles en su consola, la Steam Deck.

Ambas API se comportan de manera muy similar, y no existe una gran diferencia entre ellas; tanto en rendimiento como en complejidad de desarrollo. Actualmente el proyecto solo compila en Windows 10 o mayor, por lo que estos dos puntos no resultan especialmente relevantes para el trabajo.

## 5.2. Setup del proyecto

Un proyecto de Vulkan necesita una cantidad de código inicial considerable. Para acelerar este trámite y partir de una base más sólida, se ha decidido usar un pequeño framework de trabajo de Nvidia llamado [nvpro-samples](#).

Esta serie de repositorios contienen proyectos de ray tracing de Nvidia con fines didácticos. Nosotros usaremos [vk\\_raytracing\\_tutorial\\_KHR](#), pues ejemplifica cómo añadir ray tracing en tiempo real a un proyecto de Vulkan.

Estos frameworks contienen asimismo otras utilidades menores. Destacan GLFW (gestión de ventanas en C++), imgui (interfaz de usuario) y tinyobjloader (carga de [.obj](#) y [.mtl](#)).

Nuestro repositorio utiliza las herramientas citadas anteriormente para compilar su proyecto. El Makefile es una modificación del que se usa para ejecutar los ejemplos de Nvidia. Por defecto, ejecuta una aplicación muy simple que muestra un cubo mediante rasterización, la cual modificaremos hasta añadir ray tracing en tiempo real.

### 5.2.1. Vistazo general a la estructura

La estructura final del proyecto (es decir, la carpeta [application](#)) es la siguiente:

- La carpeta **./build** contiene todo lo relacionado con CMake y el ejecutable final.
- En **./media** se encuentran todos los archivos [.obj](#), [.mtl](#) y las texturas.
- La subcarpeta **./src** contiene el código fuente de la propia aplicación.
  - Toda la implementación relacionada con el motor (y por tanto, Vulkan), se halla en [engine.h/cpp](#). Una de las desventajas de seguir un framework “de



- juguete” es que el acoplamiento es considerablemente alto. Más adelante comentaremos los motivos.
- Los parámetros de la aplicación (como tamaño de pantalla y otras estructuras comunes) se encuentran en `globals.hpp`.
  - La carga de escenas y los objetos se gestionan en `scene.hpp`.
  - En `main.cpp` se gestiona tanto el punto de entrada de la aplicación como la actualización de la interfaz gráfica.
  - La carpeta `./src/shaders` contiene todos los shaders; tanto de rasterización, como de ray tracing.
    - \* Para ray tracing, se utilizan los `raytrace.*`, `pathtrace.glsl` (que contiene el grueso del path tracer).
    - \* En rasterización se usan principalmente `frag_shader.frag`, `passthrough.vert`, `post.frag`, `vert_shader.vert`.
    - \* El resto de shaders son archivos comunes a ambos o utilidades varias.
  - Finalmente, la carpeta `./src/spv` contiene los shaders compilados a SPIR-V.

## 5.3. Compilación

Las dependencias necesarias para compilarlo son:

1. CMake.
2. Un driver de Nvidia compatible con la extensión `VK_KHR_ray_tracing_pipeline`.
3. El SDK de Vulkan, versión 1.2.161 o mayor.

La parte inicial del desarrollo consiste en adaptar Vulkan para usar la extensión de ray tracing, extrayendo la información de la gráfica y cargando correspondientemente el dispositivo.

Para compilarlo, ejecuta los siguientes comandos:

```
1 git clone --recursive --shallow-submodules https://github.com/Asmilex/  
   Raytracing.git  
2 cd .\Raytracing\application\vulkan_ray_tracing\  
3 mkdir build  
4 cd build
```

```
5 cmake ..  
6 cmake --build .
```

Si todo funciona correctamente, debería generarse un binario en `./application/bin_x64/Debug` llamado `asmiray.exe`. Desde la carpeta en la que estás, puedes ejecutarlo con `..\..\bin_x64\Debug\asmiray.exe`.

## 5.4. Estructuras de aceleración

El principal coste de ray tracing es el cálculo de las intersecciones con objetos; hasta un 95% del tiempo de ejecución total ([Scratchapixel n.d.](#)). Reducir el número de test de intersección es clave.

Las **estructuras de aceleración** son una forma de representar la geometría de la escena. Aunque hay varios tipos diferentes, en esencia, engloban a un objeto o varios en una estructura con la que resulta más eficiente hacer test de intersección. Son similares a los grafos de escena de un rasterizador.

Uno de los tipos más comunes es la **Bounding Volume Hierarchy (BVH)**. Fue una técnica desarrollada por Kay y Kajilla en 1986. En esencia, este método encierra un objeto en una caja (lo que se denomina una **bounding box**), de forma que el test de intersección principal se hace con la caja y no con la geometría. Si un rayo impacta en la *bounding box*, entonces se pasa a testear la geometría.

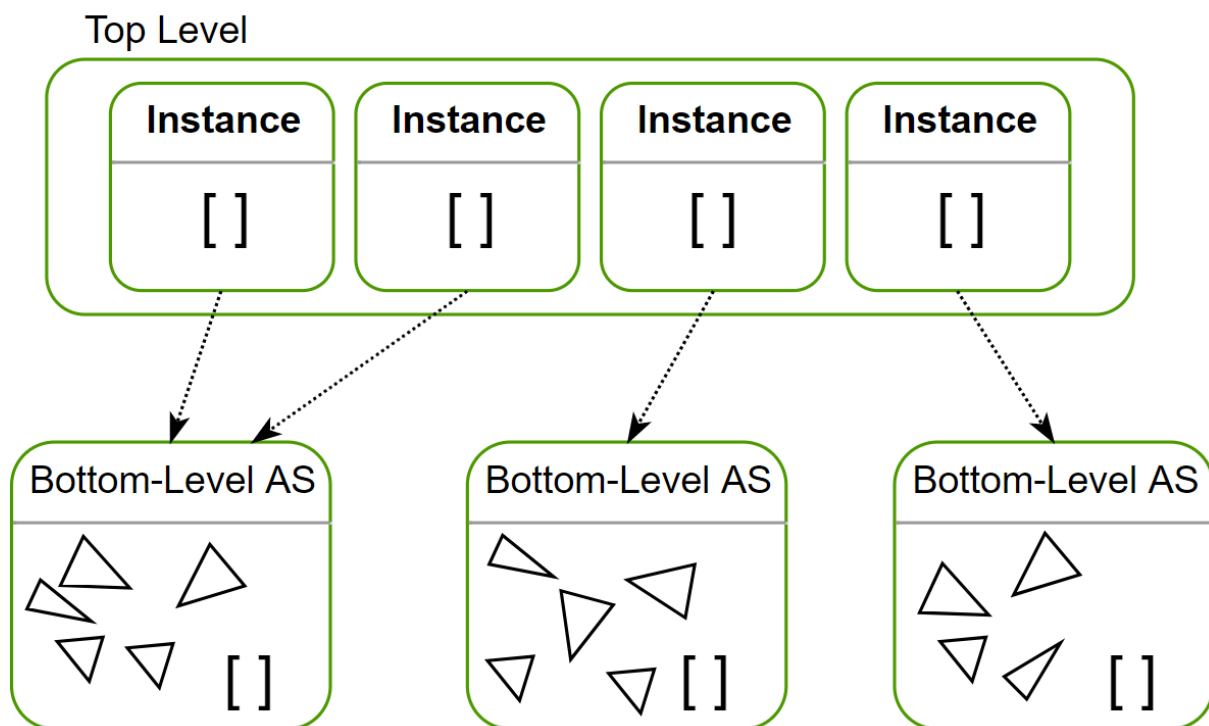
Se puede repetir esta idea repetidamente, de forma que agrupemos varias *bounding boxes*. Así, creamos una jerarquía de objetos —como si nodos de un árbol se trataran—. A esta jerarquía es a la que llamamos BVH.

Es importante crear buenas divisiones de los objetos en la BVH. Cuanto más compacta sea una BVH, más eficiente será el test de intersección.

Una forma habitual de crear la BVH es mediante la división del espacio en una rejilla. Esta técnica se llama **Axis-Aligned Bounding Box (AABB)**. Usualmente se usa el método del *slab* (también introducido por Kay y Kajilla). Se divide el espacio en una caja n-dimensional alineada con los ejes, de forma que podemos verla como  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1] \times \dots$ . De esta forma, comprobar si un rayo impacta en una *bounding box*

es tan sencillo como comprobar que está dentro del intervalo. Este es el método que se ha usado en Ray Tracing in One Weekend.

Vulkan gestiona las estructuras de aceleración dividiéndolas en dos partes: **Top-Level Acceleration Structure** (TLAS) y **Bottom-Level Acceleration Structure** (BLAS).



**Figure 5.1.:** La TLAS guarda información de las instancias de un objeto, así como una referencia a BLAS que contiene la geometría correspondiente. Fuente: Nvidia

TODO: Deberíamos cambiar esa foto por otra propia.

### 5.4.1. Bottom-Level Acceleration Structure (BLAS)

Las Bottom-Level Acceleration Structure almacenan la geometría de un objeto individual; esto es, los vértices y los índices de los triángulos, además de una AABB que la encapsula.

sula.

Pueden almacenar varios modelos, puesto que alojan uno o más buffers de vértices junto a sus matrices de transformación. Si un modelo se instancia varias veces *dentro de la misma BLAS*, la geometría se duplica. Esto se hace para mejorar el rendimiento.

Como regla general, cuantas menos BLAS, mejor.

El código correspondiente a la creación de la BLAS en el programa es el siguiente:

```
1 void Engine::createBottomLevelAS() {
2     // BLAS - guardar cada primitiva en una geometría
3
4     std::vector<nvvk::RaytracingBuilderKHR::BlasInput> allBlas;
5     allBlas.reserve(m_objModel.size());
6
7     for (const auto& obj: m_objModel) {
8         auto blas = objectToVkGeometryKHR(obj);
9
10        // Podríamos añadir más geometrías en cada BLAS.
11        // De momento, solo una.
12        allBlas.emplace_back(blas);
13    }
14
15    m_rtBuilder.buildBlas(
16        allBlas,
17        VK_BUILD_ACCELERATION_STRUCTURE_PREFER_FAST_TRACE_BIT_KHR
18    );
19 }
```

### 5.4.2. Top-Level Acceleration Structure (TLAS)

Las Top-Level Acceleration Structures almacenan las instancias de los objetos, cada una con su matriz de transformación y referencia a la BLAS correspondiente.

Además, guardan información sobre el *shading*. Así, los shaders pueden relacionar la geometría intersecada y el material de dicho objeto. En esta última parte jugará un papel fundamental la **Shader Binding Table**.

En el programa hacemos lo siguiente para construir la TLAS:

```
1 void Engine::createTopLevelAS() {
2     std::vector<VkAccelerationStructureInstanceKHR> tlas;
3     tlas.reserve(m_instances.size());
4
5     for (const HelloVulkan::ObjInstance& inst: m_instances) {
6         VkAccelerationStructureInstanceKHR rayInst{};
7
8         // Posición de la instancia
9         rayInst.transform = nvvk::toTransformMatrixKHR(inst.transform);
10
11         rayInst.instanceCustomIndex = inst.objIndex;
12
13         // returns the acceleration structure device address of the blasId.
14         // The id correspond to the created BLAS in buildBlas.
15         rayInst.accelerationStructureReference = m_rtBuilder.
16             getBlasDeviceAddress(inst.objIndex);
17
18         rayInst.flags =
19             VK_GEOMETRY_INSTANCE_TRIANGLE_FACING_CULL_DISABLE_BIT_KHR;
20         rayInst.mask = 0xFF; // Solo registramos hit si rayMask & instance
21             .mask != 0
22         rayInst.instanceShaderBindingTableRecordOffset = 0; // Usaremos el
23             mismo hit group para todos los objetos
24
25         tlas.emplace_back(rayInst);
26     }
27
28     m_rtBuilder.buildTlas(
29         tlas,
30         VK_BUILD_ACCELERATION_STRUCTURE_PREFER_FAST_TRACE_BIT_KHR
31     );
32 }
```

## 5.5. La ray tracing pipeline

### 5.5.1. Descriptores y conceptos básicos

Primero, debemos introducir unas nociones básicas de Vulkan sobre cómo gestiona la información que se pasa a los shaders.

Un *resource descriptor* (usualmente lo abreviaremos como descriptor) es una forma de cargar recursos como buffers o imágenes para que la tarjeta gráfica los pueda utilizar; concretamente, los shaders. El *descriptor layout* especifica el tipo de recurso que va a ser accedido. Finalmente, el *descriptor set* determina el buffer o imagen que se va a asociar al descriptor. Este set es el que se utiliza en los **drawing commands**. Un **pipeline** es una secuencia de operaciones que reciben una geometría y sus texturas, y la transforma en unos pixels.

Si necesitas más información, todos estos conceptos aparecen desarrollados extensamente en ([Overvoorde n.d.](#))

Tradicionalmente, en rasterización se utiliza un descriptor set por tipo de material, y consecuentemente, un pipeline por cada tipo. En ray tracing esto no es posible, puesto que no se sabe qué material se va a usar: un rayo puede impactar *cualquier* material presente en la escena, lo cual invocaría un shader específico. Debido a esto, empaquetaremos todos los recursos en un único set de descriptores.

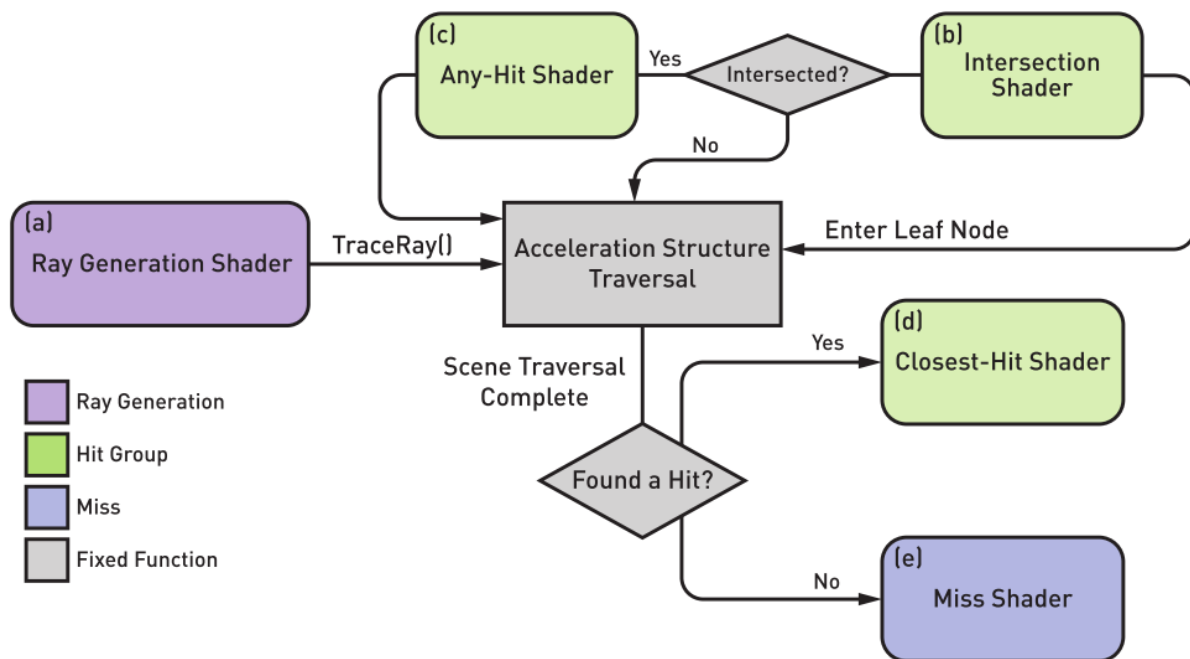
### 5.5.2. La Shader binding table

Para solucionar esto, vamos a crear la **Shader Binding Table** (SBT). Esta estructura permitirá cargar el shader correspondiente dependiendo de dónde impacte un rayo.

Para cargar esta estructura, se debe hacer lo siguiente:

1. Cargar y compilar cada shader en un `VkShaderModule`.
2. Juntar los cada `VkShaderModule` en un array `VkPipelineShaderStageCreateInfo`.
3. Crear un array de `VkRayTracingShaderGroupCreateInfoKHR`. Cada elemento se convertirá al final en una entrada de la Shader Binding Table.
4. Compilar los dos arrays anteriores más un pipeline layout para generar un `vkCreateRayTracingPipelineKHR`.

5. Conseguir los *handlers* de los shaders usando `vkGetRayTracingShaderGroupHandlesKHR`.
6. Alojarse un buffer con el bit `VK_BUFFER_USAGE_SHADER_BINDING_TABLE_BIT_KHR` y copiar los *handlers*.



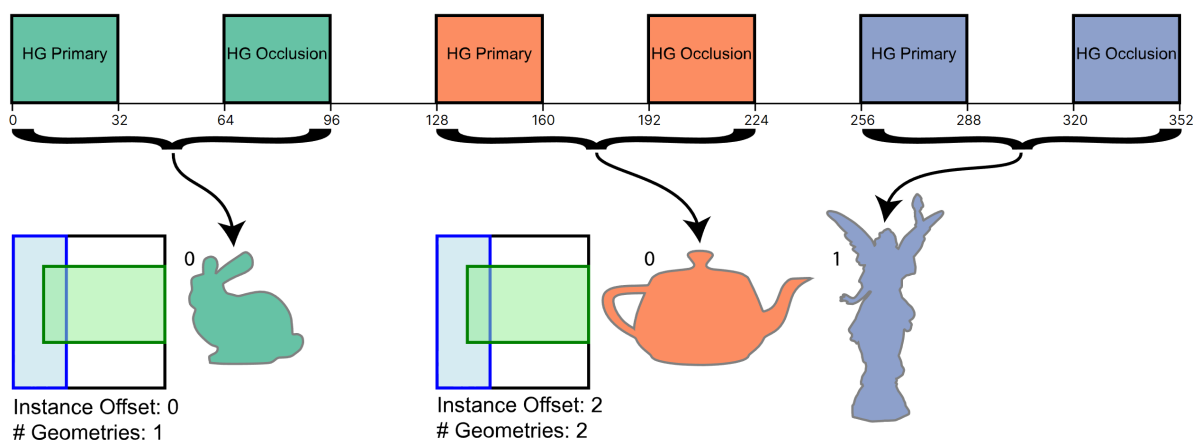
**Figure 5.2.:** La Shader Binding Table permite seleccionar un tipo de shader dependiendo del objeto en el que se impacte. Para ello, se genera un rayo desde el shader `raygen`, el cual viaja a través de la Acceleration Structure. Dependiendo de dónde impacte, se utiliza un `closest hit`, `any hit`, o `miss` shaders. Fuente: Nvidia

Cada entrada de la SBT contiene un handler y una serie de parámetros embebidos. A esto se le conoce como **Shader Record**. Estos records se clasifican en:

- **Ray generation record:** contiene el handler del ray generation shader.
- **Hit group record:** se encargan de los handlers del closest hit, anyhit (opcional), e intersection (opcional).

- **Miss group record:** se encarga del miss shader.
- **Callable group record.**

Una de las partes más difíciles de la SBT es saber cómo se relacionan record y geometría. Es decir, cuando un rayo impacta en una geometría, ¿a qué record de la SBT llamamos? Esto se determina mediante los parámetros de la instancia, la llamada a *trace rays*, y el orden de la geometría en la BLAS.



**Figure 5.3.:** Fuente: <https://www.willusher.io/>

### 5.5.2.1. Cálculo de la entrada de la SBT

El principal problema es el cálculo del índice en los hit groups.

Llamemos al índice de cada instancia de una geometría en la BLAS  $\mathbb{G}_{ID}$ . A cada instancia se le puede asignar un desplazamiento con respecto a la SBT ( $\mathbb{I}_{offset}$ ) desde donde empieza la subtabla de hit groups.

TODO: esto se deja temporal de momento. No sé hasta qué punto me conviene poner todo esto. Lo veo importante, pero no sé si *tan* importante. El recurso que es-



toy usando es <https://www.willusher.io/graphics/2019/11/20/the-sbt-three-ways>, por si al final decidimos escribirlo.

### 5.5.3. Tipos de shaders

El pipeline soporta varios tipos de shaders diferentes que cubren la funcionalidad esencial de un ray tracer:

- **Ray generation shader:** es el punto de inicio del viaje de un rayo. Calcula punto de inicio y procesa el resultado final. Idealmente, solo se invocan rayos desde aquí. Se suele invocar
- **Closest hit shader:** este shader se ejecuta cuando un rayo impacta en una geometría por primera vez. Se pueden trazar rayos recursivamente desde aquí (por ejemplo, para calcular oclusión ambiental).
- **Any-hit shader:** similar al closest hit, pero invocado en cada intersección del camino del rayo que cumpla  $t \in [t_{min}, t_{max}]$ . Es comúnmente utilizado en los cálculos de transparencias (*alpha-testing*).
- **Miss shader:** si el rayo no choca con ninguna geometría –pega con el infinito–, se ejecuta este shader. Normalmente, añade una pequeña contribución ambiental al rayo.
- **Intersection shader:** este shader es algo diferente al resto. Su función es calcular el punto de impacto de un rayo con una geometría. Por defecto se utiliza un test triángulo - rayo. En nuestro path tracer lo dejaremos por defecto, pero podríamos definir algún método como los que vimos en la sección [intersecciones rayo - objeto](#).

Este es el código de los shaders del path tracer: [Raygen](#), [Closest hit](#), [Miss](#), [Any-hit](#).

Existe otro tipo de shader adicional denominado **callable shader**. Este es un shader que se invoca desde otro shader. Por ejemplo, un shader de intersección puede invocar a un shader de oclusión. Otro ejemplo sería un closest hit que reemplaza un bloque if-else por un shader para hacer cálculos de iluminación. Este tipo de shaders no se han implementado en el path tracer, pero se podrían añadir con un poco de trabajo.

### 5.5.4. Traspaso de información entre shaders

En ray tracing, los shaders por sí solos no pueden realizar todos los cálculos necesarios. Por ello, necesitaremos enviar información de uno a otro. Tenemos diferentes mecanismos para conseguirlo:

El primero de ellos son las **push constants**. Estas son variables que se pueden enviar a los shaders (es decir, de CPU a GPU), pero que no se pueden modificar. Únicamente podemos mandar un pequeño número de variables, el cual se puede consultar mediante `VkPhysicalDeviceLimits.maxPushConstantSize`.

Nuestro path tracer tiene implementado actualmente (19 de abril de 2022) las siguientes constantes:

```
1 struct PushConstantRay {
2     vec4  clearColor;    // Color ambiental
3     vec3  lightPosition;
4     float lightIntensity;
5     int   lightType;
6     int   maxDepth;      // Cuántos rebotes máximos permitimos
7     int   nb_samples;    // Para antialiasing
8     int   frame;         // Para acumulación temporal
9 };
```

Las push constants son, como dice su nombre, constantes. ¿Y si queremos pasar información mutable entre shaders?

Para eso están los **payloads**. Específicamente, cada rayo puede llevar información adicional. Como una pequeña mochila. Esto resulta *muy* útil, por ejemplo, a la hora de calcular la radiancia de un camino. Se crean mediante la estructura `rayPayloadEXT`, y se reciben en otro shader mediante `rayPayloadInEXT`. Es importante controlar que el tamaño de la carga no sea excesivamente grande.

### 5.5.5. Creación de la ray tracing pipeline

El código de la creación de la pipeline lo encapsula la función `createRtPipeline()`, que se puede consultar [aquí](#)

## 5.6. Transporte de luz en la práctica

### 5.6.1. Estimando la rendering equation con Monte Carlo

Hemos llegado a una de las partes más importantes de este trabajo. Es el momento de poner en concordancia todo lo que hemos visto a lo largo de los capítulos anteriores.

Empecemos por la dispersión. ¿Recuerdas la ecuación de dispersión [3.5]?

$$L_o(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = \int_{\mathbb{S}^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Añadamos el término de radiancia emitida:

$$L_o(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = L_e(p, \omega_o) + \int_{\mathbb{S}^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

Podemos aproximar el valor de la integral utilizando Monte Carlo:

$$\begin{aligned} L_o(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) &= \int_{\mathbb{S}^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{f(p, \omega_o \leftarrow \omega_j) L_i(p, \omega_j) \cos \theta_j}{p(\omega_j)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fijémonos en el denominador. Lo que estamos haciendo es tomar una muestra de un vector en la esfera. Si trabajamos con una BRDF en vez de una BSDF, usaríamos un hemisferio en vez de la esfera.

En el caso de la componente difusa, sabemos que la BRDF es  $f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = \frac{\rho}{\pi}$ , así que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(\rho/\pi) L_i(p, \omega_j) \cos \theta_j}{p(\omega_j)}$$

¿Recuerdas la sección de **importance sampling**? La idea es buscar una función proporcional a  $f$  para reducir el error. Podemos usar  $p(\omega) = \frac{\cos \theta}{\pi}$ , de forma que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(\rho/\pi) L_i(p, \omega_j) \cos \theta_j}{(\cos \theta_j / \pi)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_i(p, \omega_j) \rho \quad (5.2)$$

Lo cual nos proporciona una expresión muy agradable para los materiales difusos. Solo es cuestión de calcular la radiancia del punto.

### 5.6.2. Pseudocódigo de un path tracer

Con lo que conocemos hasta ahora, podemos empezar a programar los shaders. Una primera implementación basada en [5.1] sería similar a lo siguiente:

```
1  vec3 pathtrace(Rayo r, profundidad) {
2      if (profundidad == profundidad_maxima) {
3          return contribucion_ambiental;
4      }
5
6      r.trazar_rayo()
7
8      if (!r.ha_impactado()) {
9          return contribucion_ambiental;
10     }
11
12     hit_info = r.hit_info
13     material = hit_info.material
14     emission = material.emision
15
16     nuevo_rayo = Rayo(
17         origen = hit_info.punto_impacto,
18         direccion = random_direction(hit_info.normal)
19     )
20
21     cos_theta = dot(nuevo_rayo.direccion, hit_info.normal)
22     BRDF = ... // BRDF específica del material
23     pdf = ... // función de densidad que nos informa de la probabilidad de
                la nueva dirección.
24
25     return emission + (BRDF * pathtrace(nuevo_rayo, profundidad + 1) *
                cos_theta) / pdf;
26 }
```

El término `emission` corresponde a  $L_e(p, \omega_o)$ . Siempre lo añadimos, pues en caso de que el objeto no emita luz, la contribución de este término sería 0.

La principal desventaja de esta implementación es que utiliza recursividad. Como bien es conocido, abusar de recursividad provoca que el tiempo de ejecución aumente significativamente. Además, con la implementación anterior, necesariamente se generan rayos desde el closest hit shader, lo cual no es ideal.

### 5.6.3. Evitando la recursividad

Podemos evitar los problemas de la implementación anterior con una pequeña modificación. En vez de calcular la radiancia desde el closest hit, nos traemos la información necesaria al raygen shader, y calculamos la radiancia total desde allí.

Para conseguirlo, debemos hacer que el `HitPayload` almacene dos nuevos parámetros: `weight` y `hit_value`, así como el nuevo origen y la dirección del rayo.

El pseudocódigo sería el siguiente:

```
1 // Raygen shader
2 vec3 pathtrace() {
3     HitPayload prd;
4
5     // Inicializar parámetros del primer rayo
6     prd.hit_value = vec3(0);
7     prd.weight    = vec3(0);
8     prd.ray_origin = r.origin;
9     prd.ray_dir    = r.dir;
10
11     vec3 current_weight = vec3(1);
12     vec3 hit_value      = vec3(0);
13
14     for (profundidad in [0, profundidad_maxima]) {
15         closest_hit(prd.ray_origin, prd.ray_dir);
16         // La llamada del rayo almacena nueva información en el HitPayload
17         // prd, que podremos usar ahora
18
19         hit_value = hit_value + prd.hit_value * current_weight;
```

```
19     current_weight = current_weight * prd.weight;
20 }
21
22     return hit_value;
23 }
24
25 // Closest hit shader
26 vec3 closest_hit() {
27     // Sacar información sobre el punto de impacto: material, normal...
28     vec3 normal = ... // normal en punto
29     Material m = ... // Material de la superficie impactada.
30
31     // Preparar información para el raygen
32     prd.ray_origin = ... // Punto de impacto.
33     prd.ray_dir = direccion_aleatoria() // ¡Dependiente del material!
34
35     float cos_theta = dot(prd.ray_dir, normal);
36     vec3 BRDF = ... // BRDF del material
37     vec3 pdf = ... // Probabilidad de que se escoja la dirección prd.
38                     ray_dir
39
40     prd.hit_value = m.emision // Radiancia generada por el propio material;
41                     e.g. luces. Es el término L_e
42     prd.weight = (BRDF * cos_theta) / pdf
43 }
```

Esta versión no es tan intuitiva, así que ejemplifiquemos lo está ocurriendo.

Sea  $h$  el `hit_value`,  $w$  el peso,  $f_i$  la BRDF  $i$ ,  $e_i$  la emisión,  $\cos \theta_i$  el coseno del ángulo que forman la nueva dirección del rayo y la normal, y  $p_i$  la función de densidad que, dada una dirección, proporciona la probabilidad de que se escoja. El subíndice denota el  $i$ -ésimo punto de impacto.

En esencia, estamos descomponiendo lo que recogemos en `weight`, que es  $f_i \cos \theta_i / p_i$

Inicialmente, para el primer envío del rayo,  $h = (0, 0, 0)$ ,  $w = (1, 1, 1)$ . Tras trazar el primer rayo, se tiene que

$$h = 0 + e_1 w = e_1$$

$$w = 1 \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1}$$

Tras el segundo rayo, obtenemos

$$h = e_1 + e_2 w =$$

$$= e_1 + e_2 \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1}$$

$$w = \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} \frac{f_2 \cos \theta_2}{p_2}$$

Y para el tercero

$$h = e_1 + e_2 \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} + e_3 w =$$

$$= e_1 + e_2 \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} + e_3 \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} \frac{f_2 \cos \theta_2}{p_2} =$$

$$= e_1 + \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} \left( e_2 + e_3 \frac{f_2 \cos \theta_2}{p_2} \right)$$

$$w = \frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1} \frac{f_2 \cos \theta_2}{p_2} \frac{f_3 \cos \theta_3}{p_3}$$

El término que acompaña a  $\frac{f_1 \cos \theta_1}{p_1}$  es la radiancia del tercer punto de impacto. Por tanto, a la larga, se tendrá que  $h$  estima correctamente la radiancia de un punto. Con esto, podemos afirmar que

$$h \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{f(p, \omega_o \leftarrow \omega_j) L_i(p, \omega_j) \cos \theta_j}{p(\omega_j)}$$

Este algoritmo supone una mejora de hasta 3 veces mayor rendimiento que el recursivo.

### 5.6.4. Antialiasing mediante jittering y acumulación temporal

Normalmente, mandamos los rayos desde el centro de un pixel. Podemos conseguir una mejora sustancial de la calidad con un pequeño truco: en vez de generarlos siempre desde el mismo sitio, le aplicamos una pequeña perturbación (*jittering*). Así, tendremos diferentes colores para un mismo pixel, por lo que podemos hacer una ponderación del color que se obtiene (a lo que llamamos *acumulación temporal*).

Es importante destacar que el efecto de esta técnica solo es válido cuando la **cámara se queda estática**.

La implementación es muy sencilla. Debemos modificar tanto el motor como los shaders para llevar una cuenta de ciertos frames, definiendo un máximo de frames que se pueden acumular:

```
1 // engine.h
2 class Engine {
3     //...
4     int m_maxAcumFrames {20};
5 }
```

Las push constant deberán llevar un registro del frame en el que se encuentran, así como un número máximo de muestras a acumular para un pixel:

```
1 // host_device.h
2 struct PushConstantRay {
3     //...
4     int    frame;
5     int    nb_samples
6 }
```

El número de frame se reseteará cuando la cámara se mueva, la ventana se reescale, o se produzca algún efecto similar en la aplicación.

Finalmente, en los shaders podemos implementar lo siguiente:

```
1 // raytrace.rgen
2 vec3 pixel_color = vec3(0);
3
4 for (int smpl = 0; smpl < pcRay.nb_samples; smpl++) {
```



```
5     pixel_color += sample_pixel(image_coords, image_res);
6 }
7
8 pixel_color = pixel_color / pcRay.nb_samples;
9
10 if (!primer_frame) {
11     guardar una mezcla de las anteriores imágenes junto con la actual
12 }
13 else {
14     guardar la imagen directamente
15 }
```

```
1 // pathtrace.glsl
2 vec3 sample_pixel() {
3     float r1 = rnd(prd.seed);
4     float r2 = rnd(prd.seed);
5
6     // Subpixel jitter: mandar el rayo desde una pequeña perturbación del
7     // pixel para aplicar antialiasing
8     vec2 subpixel_jitter = pcRay.frame == 0
9         ? vec2(0.5f, 0.5f)
10         : vec2(r1, r2);
11
12     const vec2 pixelCenter = vec2(image_coords.xy) + subpixel_jitter;
13
14     // ...
15
16     vec3 radiance = pathtrace(rayo);
17 }
```

### 5.6.5. Materiales y objetos

El sistema de materiales y objetos usados es el **Wavefront** (`.obj`). Aunque es un sistema relativamente antiguo y sencillo, se han usado definiciones específicas en los materiales para adaptarlo a Physically Based Rendering. Entre los parámetros del archivo de materiales `.mtl`, destacan:

- $K_a \in [0, 1]^3$ : representa el color ambiental. Dado que esto es un path tracer físicamente realista, no se usará.

- $K_d \in [0, 1]^3$ : componente difusa.
- $K_s \in [0, 1]^3$ : componente especular. Viene acompañada del exponente especular  $N_s \in [0, 1000]$ . Usualmente,  $N_s = 10$ . Controla los brillos en los modelos de Blinn-Phong.
- $d \in [0, 1]$  (*dissolve*): representa la transparencia. Alternativamente, se usa  $T_r = 1 - d$ .
- $T_f \in [0, 1]^3$ : filtro de transmisión.
- $N_i \in [0.001, 10]$ : índice de refracción. Usualmente  $N_i = 1$ .
- $K_e \in [0, 1]^3$ : componente emisiva (PBR).
- Todos los valores con tres componentes pueden presentar un *texture map*.

Existe un parámetro adicional llamado `illum`. Controla el modelo de iluminación usado. Nosotros lo usaremos para distinguir tipos diferentes de materiales. Los códigos representan lo siguiente:

Modelo	Color	Reflejos	Transparencias
0	Difusa	No	No
1	Difusa, ambiental	No	No
2	Difusa, especular, ambiental	No	No
3	Difusa, especular, ambiental	Ray traced	No
4	Difusa, especular, ambiental	Ray traced	Cristal
5	Difusa, especular, ambiental	Ray traced (Fresnel)	No
6	Difusa, especular, ambiental	Ray traced	Refracción
7	Difusa, especular, ambiental	Ray traced (Fresnel)	Refracción
8	Difusa, especular, ambiental	Sí	No
9	Difusa, especular, ambiental	Sí	Cristal
10	Sombras arrojadas		

```
1 // host_device.h
```

```
2 struct WaveFrontMaterial
3 {
4     vec3 ambient;
5     vec3 diffuse;
6     vec3 specular;
7     vec3 transmittance;
8     vec3 emission;
9     float shininess;
10    float ior;        // index of refraction
11    float dissolve;   // 1 == opaque; 0 == fully transparent
12    int illum;        // illumination model (see http://www.fileformat.info/
                       format/material/)
13    int textureId;
14 };
```

## 5.7. Fuentes de luz

TODO: point lights, area lights, ambient lights...

TODO: estas son notas muy puntuales (*como las luces, jeje*). Ya las revisaré más adelante.

TODO: 01\_lights.pdf tiene información útil sobre muestreo directo de fuentes de luces.

La interfaz se encuentra en `host_device.h`. Describe cómo comunicarse con la GPU.

Ahora mismo, tenemos 3 constantes: tipo de luz:

```
1 vec3 lightPosition;    // (x, y, z)
2 float lightIntensity;  // (Intensidad)
3 int lightType;         // (0 => point light, 1 => area light)
```

Sería interesante añadir algunas constantes para controlar el tamaño (radio, posición, normal para las de área...)

### 5.7.1. Point lights + spotlights

pbr-book, point lights: *“Strictly speaking, it is incorrect to describe the light arriving at a point due to a point light source using units of radiance. Radiant intensity is instead the proper unit for describing emission from a point light source, as explained in Section 5.4. In the light source interfaces here, however, we will abuse terminology and use Sample\_Li() methods to report the illumination arriving at a point for all types of light sources, dividing radiant intensity by the squared distance to the point  $p$  to convert units. Section 14.2 revisits the details of this issue in its discussion of how delta distributions affect evaluation of the integral in the scattering equation. In the end, the correctness of the computation does not suffer from this fudge, and it makes the implementation of light transport algorithms more straightforward by not requiring them to use different interfaces for different types of lights.”*

```
1 // https://github.com/mmp/pbrt-v3/blob/master/src/lights/point.h
2 // https://github.com/mmp/pbrt-v3/blob/master/src/lights/point.cpp
3
4 Spectrum sample_light(interaccion, vec2 u, vec3 wi, float pdf,
5     visibility_tester) {
6     wi = normalize(posicion_luz - interaccion.p);
7     pdf = 1.f;
8     // testeo de visibilidad. Opcional, I guess.
9     return intensidad / distancia_al_cuadrado(posicion_luz, interaccion.p)
10     ;
11 }
```

La potencia total emitida por la luz puede calcularse integrando la intensidad desprendida en toda su superficie. Asumiendo la intensidad constante:

$$\Phi = \int_{\mathbb{S}^2} I d\omega = I \int_{\mathbb{S}^2} d\omega = 4\pi I$$

Las spotlights son variaciones de las point lights iluminando en un cono.

### 5.7.2. Fuentes de área

Para simplificar la implementación, podemos asumir que son rectangulares.

Nos van a hacer falta técnicas de Monte Carlo para solucionar el problema de calcular integrales a lo largo de su superficie.

Primero, lo mejor es asumir un cuadrado, y después, extender la interfaz para meter otras formas (es decir, rectángulos. Porque lo otro sería mucha parafernalia innecesaria).

[Código fuente](#)

## Referencias

- <https://github.com/dannyfritz/awesome-ray-tracing>
- <https://www.wikiwand.com/en/Radeon>
- [https://www.wikiwand.com/en/List\\_of\\_Nvidia\\_graphics\\_processing\\_units#/GeForce\\_30\\_series](https://www.wikiwand.com/en/List_of_Nvidia_graphics_processing_units#/GeForce_30_series)
- <https://www.eurogamer.net/digitalfoundry-2021-the-big-intel-interview-how-intel-alchemist-gpus-and-xess-upscaling-will-change-the-market>
- <https://www.intel.com/content/www/us/en/products/docs/arc-discrete-graphics/overview.html>
- <https://www.khronos.org/registry/vulkan/specs/1.2-khr-extensions/html/chap1.html>
- <https://www.wikiwand.com/en/OptiX>
- [https://www.wikiwand.com/en/DirectX\\_Raytracing](https://www.wikiwand.com/en/DirectX_Raytracing)
- [https://www.wikiwand.com/es/Valve\\_Corporation](https://www.wikiwand.com/es/Valve_Corporation)
- [https://www.phoronix.com/scan.php?page=news\\_item&px=VKD3D-Proton-2.5](https://www.phoronix.com/scan.php?page=news_item&px=VKD3D-Proton-2.5)
- <https://github.com/ValveSoftware/Proton>
- [https://nvpro-samples.github.io/vk\\_raytracing\\_tutorial\\_KHR/](https://nvpro-samples.github.io/vk_raytracing_tutorial_KHR/)
- <https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/introduction-acceleration-structure>
- <https://www.khronos.org/blog/vulkan-ray-tracing-best-practices-for-hybrid-rendering>
- <https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheNextWeek.html#boundingvolumehierarchies>
- [https://vulkan-tutorial.com/en/Uniform\\_buffers/Descriptor\\_layout\\_and\\_buffer](https://vulkan-tutorial.com/en/Uniform_buffers/Descriptor_layout_and_buffer)
- Ray tracing gems II, p.241.
- <https://www.willusher.io/graphics/2019/11/20/the-sbt-three-ways>

## 6. Análisis de rendimiento

TODO: para completar esta parte, necesitamos ambas implementaciones (en CPU y GPU) listas. Hasta entonces, esto se queda vacío. NOTE: Podría preguntarle a Kako que tire benchmark en su 2060, y a Manu con su 3060 (¿ti?)

### Referencias

## 7. El presente y futuro de RT

TODO: de momento, se queda como está. Es un capítulo bastante fácil de escribir, así que en unos tres días como muchísimo podría estar todo listo.

### 7.1. Denoising

<https://alain.xyz/blog/ray-tracing-denoising>

### 7.2. Filtering

<https://alain.xyz/blog/ray-tracing-filtering>

### 7.3. Offline renderers

### 7.4. La industria del videojuego

#### 7.4.1. Ray tracing híbrido

<https://www.khronos.org/blog/vulkan-ray-tracing-best-practices-for-hybrid-rendering>

#### 7.4.2. Productos comerciales

- Control

- Híbrido
  - <https://alain.xyz/blog/frame-analysis-control>
  - <https://www.youtube.com/watch?v=blbu0g9DAGA>
- Minecraft RTX
  - Path tracing
  - <https://alain.xyz/blog/frame-analysis-minecraftrtx>
  - [https://www.youtube.com/watch?v=s\\_eeWr622Ss](https://www.youtube.com/watch?v=s_eeWr622Ss)
  - [https://www.youtube.com/watch?v=TVtSsJf86\\_Y](https://www.youtube.com/watch?v=TVtSsJf86_Y)
- Cyberpunk 2077
  - Híbrido
- Quake II RTX
  - Path tracing
- Doom RTX
  - Path tracing
- Metro Exodus

### 7.4.3. Unreal Engine 5

<https://twitter.com/Yurukuyaru/status/1523643949826588674>

### 7.4.4. La última generación de consolas

## 7.5. Posibles mejoras del trabajo

- Test Driven Development
  - *White furnace test* (01\_lights.pdf, p.61)
- Debugging <https://alain.xyz/blog/graphics-debugging>



- Materiales
  - Physically based materials
  - Diferentes tipos de materiales
  - Subsurface scattering
- HDR
- Cámara
  - Diferentes tipos de cámaras
  - Focal lenght, depth of field, motion blur

#### 7.5.0.1. Blue noise

- <https://blog.demofox.org/2020/05/16/using-blue-noise-for-raytraced-soft-shadows/>
- <https://alain.xyz/blog/ray-tracing-filtering>

#### 7.5.0.2. Forced random sampling

<http://drivenbynostalgia.com/> (ctrl + f -> forced random sampling)

#### 7.5.0.3. Sampling importance resampling

- <https://blog.demofox.org/2022/03/02/sampling-importance-resampling/>
- [https://research.nvidia.com/sites/default/files/pubs/2020-07\\_Spatiotemporal-reservoir-resampling/ReSTIR.pdf](https://research.nvidia.com/sites/default/files/pubs/2020-07_Spatiotemporal-reservoir-resampling/ReSTIR.pdf)

#### 7.5.0.4. Low discrepancy sampling

## Referencias

# A. Metodología de trabajo

Cualquier proyecto de una envergadura considerable necesita ser planificado con antelación. En este capítulo vamos a hablar de cómo se ha realizado este trabajo: mostraremos las herramientas usadas, los ciclos de desarrollo, integración entre documentación y path tracer, y otras influencias que han afectado al producto final.

## A.1. Influencias

Antes de comenzar con la labor, primero uno se debe hacer una simple pregunta:

“Y esto, ¿por qué me importa?”

Dar una respuesta contundente a este tipo de cuestiones nunca es fácil. Sin embargo, sí que puedo proporcionar motivos por los que he querido escribir sobre ray tracing.

Una de las principales influencias ha sido ([Digital Foundry 2022](#)). Este grupo de divulgación se dedica al estudio de las técnicas utilizadas en el mundo de los videojuegos. El inicio de la era del ray tracing en tiempo real les llevó a dedicar una serie de vídeos y artículos a esta tecnología, y a las diferentes maneras en las que se ha implementado. Se puede ver un ejemplo en ([Digital Foundry 2020](#)).

Dado que esta área combina tanto informática, matemáticas y una visión artística, ¿por qué no explorarlo a fondo

Ahora que se ha decidido el tema, es hora de ver cómo atacarlo.

Soy un fiel creyente del aprendizaje mediante el juego. Páginas como *Explorable Explanations* ([Ncase 2022](#)), el blog de ([Bartosz Ciechanowski 2022](#)), el proyecto *The napkin* ([Evan](#)

[Chen 2022](#)) o el divulgador 3Blue1Brown ([Grant Sanderson 2022](#)) repercuten inevitablemente en la manera en la que te planteas cómo comunicar textos científicos. Por ello, aunque esto a fin de cuentas es un trabajo de fin de grado de una carrera, quería ver hasta dónde era capaz de llevarlo.

Otro punto importante es la *manera* de escribir. No me gusta especialmente la escritura formal. Prefiero ser distendido. Por suerte, parece que el mundo científico se está volviendo más informal ([Nature 2016](#)), así que no soy el único que aprueba esta tendencia. Además, la estructura clásica de un escrito matemático de “teorema, lema, demostración, corolario” no me agrada especialmente. He intentado preservar su estructura, pero sin ser tan explícito. Estos dos puntos, en conjunto, suponen un balance entre formalidad y distensión difícil de mantener.

## A.2. Ciclos de desarrollo

Este proyecto está compuesto por 2 grandes pilares: documentación—lo que estás leyendo, ya sea en PDF o en la web—y software.

La metodología que se ha seguido es, en esencia, una versión de Agile muy laxa ([Beck et al. 2001](#)).

Para empezar, se implementaron los tres libros de Shirley de la “serie In One Weekend”: In One Weekend ([Shirley 2020a](#)), The Next Week ([Shirley 2020b](#)), y The Rest of your Life ([Shirley 2020c](#)).

Tras esto, comenzó a [desarrollarse](#) el motor por GPU. Cuando se consiguió una base sólida (que se puede ver en el issue del repositorio número 25), se empezó a alternar entre escritura de documentación y desarrollo del software. A fin de cuentas, no tiene sentido implementar algo que no se conoce.

Para apoyar el desarrollo, se ha utilizado [Github](#). Más adelante hablaremos de cómo esta plataforma ha facilitado el trabajo.

## A.3. Presupuesto

TODO: ahora mismo, no tengo ni idea de cómo empezar esto.

## A.4. Arquitectura del software

TODO: especificaciones de los requerimientos y metodología de desarrollo, así como los planos del proyecto que contendrán las historias de usuario o casos de uso, diagrama conceptual, de iteración, de diseño, esquema arquitectónico y bocetos de las interfaces de usuario. Se describirán las estructuras de datos no fundamentales y algoritmos no triviales

(Odio los diagramas de clases. Me gustaría evitar como sea incluirlos.)

## A.5. Diseño

El diseño juega un papel fundamental en este proyecto. Todos los elementos visuales han sido escogidos con cuidado, de forma que se preserve la estética.

Se ha creado **un diseño que preserve el equilibrio entre la profesionalidad y la distensión**.

### A.5.1. Bases del diseño

Para la documentación en versión PDF, usamos como base la *template* (Pascal Wagler 2022). Esta es una elegante plantilla fácil de usar para LaTeX. Uno de sus puntos fuertes es la personalización, la cual aprovecharemos para darle un toque diferente.

La web utiliza como base el estilo generado por Pandoc, el microframework de CSS (Tran Ngoc Tuan Anh 2022) y unas modificaciones personales.

### A.5.2. Tipografías

Un apartado al que se le debe prestar especial énfasis es a la combinación de tipografías. A fin de cuentas, esto es un libro; así que escoger un tipo de letra correcto facilitará al lector

comprender los conceptos. Puede parecer trivial a priori, pero es importante.

Para este trabajo, se han escogido las siguientes tipografías:

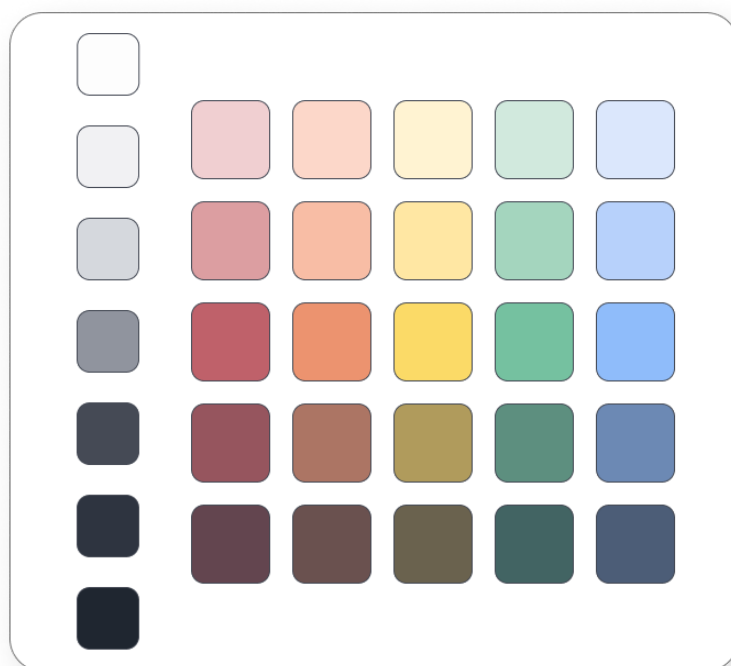
- **Crimson Pro**, por (Jacques Le Bailly 2022): una tipografía serif clara, legible y contemporánea. Funciona muy bien en densidades más bajas, como 11pt. Es ideal para la versión en PDF. Además, liga estupendamente con Source Sans Pro, utilizada para los títulos en la plantilla Eisevogel.
- **Fraunces**, por (Undercase Type 2022): de lejos, la fuente más interesante de todo este proyecto. Es una soft-serif *old style*, pensada para títulos y similares (lo que se conoce como *display*). Es usada en los títulos de la web. Una de sus propiedades más curiosas es que modifica activamente los glifos dependiendo del valor del *optical size axis*, el peso y similares. Recomendando echarle un ojo a su repositorio de Github, pues incluyen detalles sobre la implementación.
- **Rubik**, por (Hubert and Fischer 2022): La elección de Rubik es peculiar. Por sí sola, no casa con el proyecto. Sin embargo, combinada con Fraunces, proporcionan un punto de elegancia y familiaridad a la web. Su principal fuerte es la facilidad para la comprensión lectora en pantallas, algo que buscamos para la página web.
- **Julia Mono**, por (Cormullion 2022): monoespaciada, pensada para computación científica. Llevo usándola bastante tiempo, y combia bien con Crimson Pro.
- **Jetbrains Mono**, por (Philipp Nurullin 2022): otra tipografía monoespaciada open source muy sólida, producida por la compañía JetBrains. Se utiliza en la web para los bloques de código.

Todas estas fuentes permiten un uso no comercial gratuito.

TODO: Añadir imagen comparativa con las fuentes

### A.5.3. Paleta de colores

A fin de mantener consistencia, se ha creado una paleta de colores específica.



**Figure A.1.:** La paleta de colores del proyecto

El principal objetivo es **transmitir tranquilidad**, pero a la misma vez, **profesionalidad**. De nuevo, buscamos la idea de profesionalidad distendida que ya hemos repetido un par de veces.

Partiendo del rojo que traía Eisvogel (lo que para nosotros sería el rojo primario), se han creado el resto. En principio, con 5 tonalidades diferentes nos basta. Todas ellas vienen acompañadas de sus respectivas variaciones oscuras, muy oscuras, claras y muy claras. Corresponderían a los `color-100`, `color-300`, `color-500`, `color-700`, `color-900` que estamos acostumbrados en diseño web. Para la escala de grises, se han escogido 7 colores en vez de 9. Son más que suficientes para lo que necesitamos. Puedes encontrar las definiciones en el fichero de estilos, ubicado en `./docs/headers/style.css`.

Todos los colores que puedes ver en este documento se han extraído de la paleta. ¡La consistencia es clave!

## A.6. Flujo de trabajo y herramientas

Encontrar una herramienta que se adapte a un *workflow* es complicado. Aunque hay muchos programas maravillosos, debemos hacerlos funcionar en conjunto. En este apartado, vamos a describir cuáles son las que hemos usado.

Principalmente destacan tres de ellas: **Github**, **Pandoc** y **Figma**. La primera tendrá **su propia sección**, así que hablaremos de las otras.

TODO: foto del workflow.

### A.6.1. Pandoc

**Pandoc** (John MacFarlane 2021) es una estupendísima de conversión de documentos. Se puede usar para convertir un tipo de archivo a otro. En este caso, se usa para convertir una serie de ficheros Markdown (los capítulos) a un fichero HTML (la web) y a PDF. Su punto más fuerte es que permite escribir LaTeX de forma simplificada, como si se tratara de *sugar syntax*. Combina la simplicidad de Markdown y la correctitud de LaTeX.

Su funcionamiento en este proyecto es el siguiente: Primero, recoge los capítulos que se encuentra en `docs/chapters`, usando una serie de cabeceras en YAML que especifican ciertos parámetros (como autor, fecha, título, etc.), así como scripts de Lua. Estas cabeceras se encuentran en `docs/headers`. En particular:

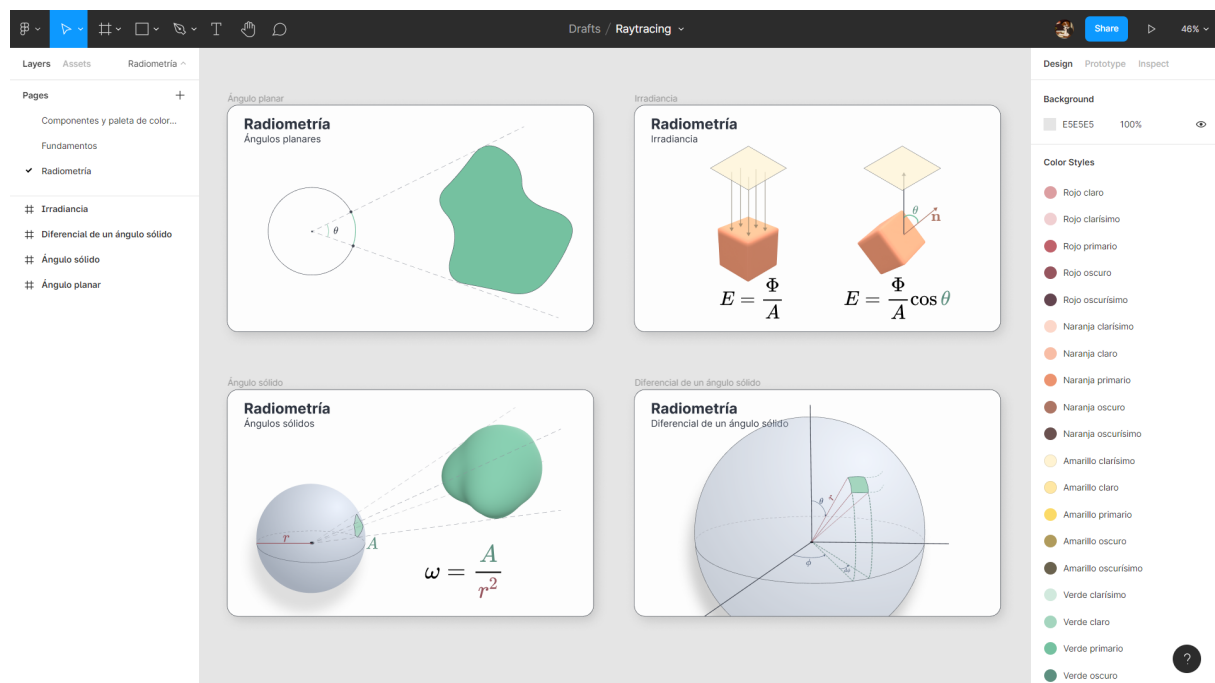
1. `meta.md` recoge los parámetros base del trabajo.
2. `pdf.md` y `web.md` contienen algunas definiciones específicas de sus respectivos formatos. Por ejemplo, el YAML del PDF asigna las variables disponibles de la plantilla Eisvogel; mientras que para la web se incluyen las referencias a algunas bibliotecas de Javascript necesarias o los estilos (`docs/headers/style.css`, usando como base Bamboo).
3. `math.md` contiene las definiciones de LaTeX.
4. Se utilizan algunos filtros específicos de Lua para simplificar la escritura. En específico, `standard-code.lua` formatea correctamente los bloques de código para la web.

Un fichero Makefile (`docs/Makefile`) contiene varias órdenes para generar ambos formatos. Tienen varios parámetros adicionales de por sí, como puede ser la bibliografía

(docs/chapters/bibliography.bib).

## A.6.2. Figma

**Figma** (Figma 2022) es otro de esos programas que te hace preguntarte por qué es gratis. Es una aplicación en la web usada para diseño gráfico. Es muy potente, intuitiva, y genera unos resultados muy buenos en poco tiempo. Todos los diseños de este trabajo se han hecho con esta herramienta.



**Figure A.2.:** Tablón principal del proyecto de Figma, a día 15 de abril de 2022

Una de las características más útiles es poder exportar rápidamente la imagen. Esto permite hacer cambios rápidos y registrarlos en el repositorio fácilmente. Además, permite instalar plugins. Uno de ellos ha resultado especialmente útil: Latex Complete (Max Krieger 2022). Esto nos permite incrustar código LaTeX en el documento en forma de SVG.



### A.6.3. Otros programas

Como es normal, hay muchos otros programas que han intervenido en el desarrollo. Estos son algunos de ellos:

- El editor por excelencia VSCode ([Microsoft 2022](#)). Ha facilitado en gran medida el desarrollo de la aplicación y la documentación. En particular, se ha usado una extensión denominada *Trigger Task on Save* ([Gruntfuggly 2022](#)) que compila la documentación HTML automáticamente al guardar un fichero. ¡Muy útil y rápido!
- **Vectary** ([Vectary 2022](#)) para hacer los diseños en 3D fácilmente. Permite exportar una escena rápidamente a png para editarla en Figma.
- Como veremos más adelante, la documentación se compila en el repositorio usando un contenedor de **Docker** ([Docker 2022](#))
- Cualquier proyecto informático debería usar [git](#). Este no es una excepción.

## A.7. Github

La página **Github** ([Github 2022](#)) ha alojado prácticamente todo el contenido del trabajo; desde el programa, hasta la documentación online. El repositorio se puede consultar en [github.com/Asmilex/Raytracing](https://github.com/Asmilex/Raytracing) ([Andrés Millán 2022b](#)).

Se ha escogido Github en vez de sus competidores por los siguientes motivos:

1. Llevo usándola toda la carrera. Es mi página de hosting de repositorios favorita.
2. Los repositorios de Nvidia se encontraban en Github, por lo que resulta más fácil sincronizarlos.
3. La documentación se puede desplegar usando Github Pages.
4. Las Github Actions son particularmente cómodas y sencillas de usar.

Entremos en detalle en algunos de los puntos anteriores:

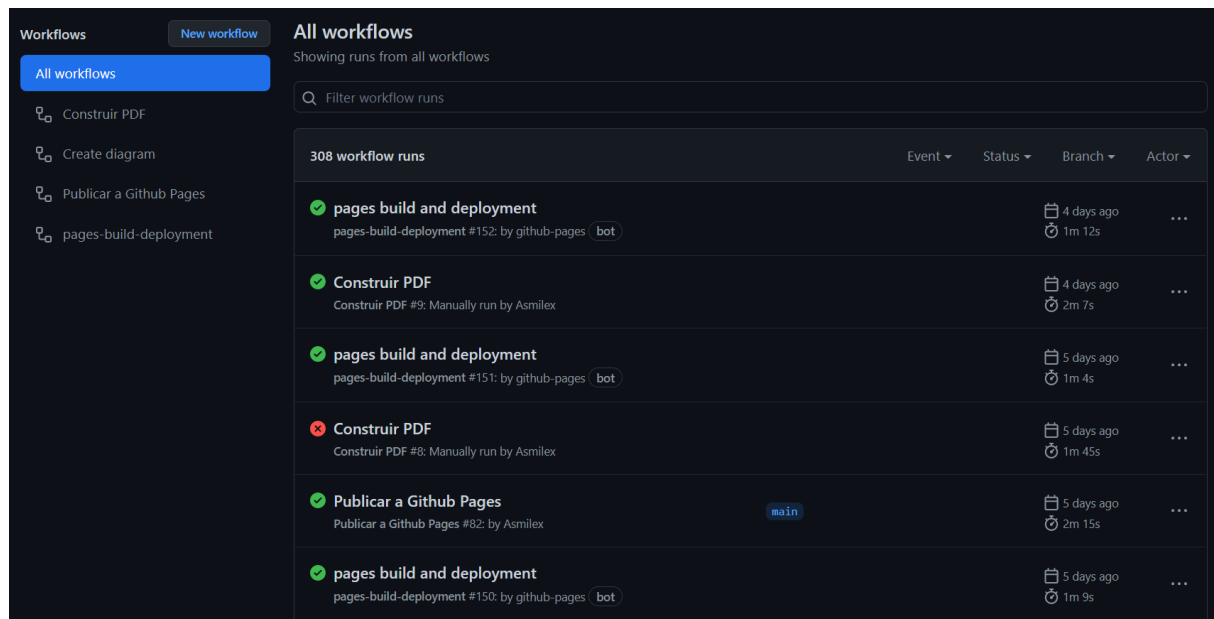
### A.7.1. Integración continua con Github Actions y Github Pages

Cuando hablamos de **integración continua**, nos referimos a ciertos programas que corren en un repositorio y se encargan de hacer ciertas transformaciones al código, de forma que este se prepare para su presentación final. En esencia, automatizan algunas tareas habituales de un desarrollo de software. (Merelo 2021)

En este trabajo lo usaremos para compilar la documentación. De esta forma, no necesitamos lidiar con “proyecto final”, “proyecto final definitivo”, “proyecto final final v2”, etc. Simplemente, cuando registremos un cambio en los ficheros Markdown (lo que se conoce en git como un `commit`), y lo subamos a Github (acción de `push`), se ejecutará un denominado `Action` que operará sobre nuestros archivos.

Tendremos dos tipos de `Actions`: uno que se encarga de compilar la web, y otro el PDF. En esencia, operan de la siguiente manera:

1. Comprueba si se ha modificado algún fichero `.md` en el último commit subido. Si no es el caso, para.
2. Si sí se ha modificado, accede a la carpeta del repositorio y compila la documentación mediante `pandoc`.
  1. La web se genera en `docs/index.html`. Publica la web a Github Pages.
  2. El PDF se crea en `docs/TFG.pdf`
3. Commitea los archivos y termina.



**Figure A.3.:** La pestaña de Github Actions permite controlar con facilidad el resultado de un workflow y cuánto tarda en ejecutarse

El workflow de la web corre automáticamente, mientras que para generar el PDF hace falta activación manual. Aunque no es *del todo* correcto almacenar ficheros binarios en un repositorio de git, no me resulta molesto personalmente. Así que, cuando considero que es el momento oportuno, lo hago manualmente. Además, también se activa por cada *release* que se crea.

Volviendo a la web, Github permite alojar páginas web para un repositorio. Activando el parámetro correcto en las opciones del repositorio, y configurándolo debidamente, conseguimos que lea el archivo `index.html` generado por el Action y lo despliegue. Esto es potentísimo: con solo editar una línea de código y subir los cambios, conseguimos que la web se actualice al instante.

Para generar los archivos nos hace falta una distribución de LaTeX, Pandoc, y todas las dependencias (como filtros). Como no encontré ningún contenedor que sirviera mi propósito, decidí crear uno. Se encuentra en el repositorio de Dockerhub ([Andrés Millán 2022a](#)). Esta imagen está basada en `dockershelf/latex:full` ([dockershelf 2022](#)). Por

desgracia, es *muy* pesada para ser un contenedor. Desafortunadamente, una instalación de LaTeX ocupa una cantidad de espacio considerable; y para compilar el PDF necesitamos una muy completa, por lo que debemos lidiar con este *overhead*. Puedes encontrar el Dockerfile en `./Dockerfile`.

## A.7.2. Issues y Github Projects

Las tareas pendientes se gestionan mediante issues. Cada vez que se tenga un objetivo particular para el desarrollo, se anota un issue. Cuando se genere un commit que avance dicha tarea, se etiqueta con el número correspondiente al issue. De esta forma, todas las confirmaciones relacionadas con la tarea quedan recogidas en la página web.

Esto permite una gestión muy eficiente de los principales problemas y objetivos pendientes de la aplicación.

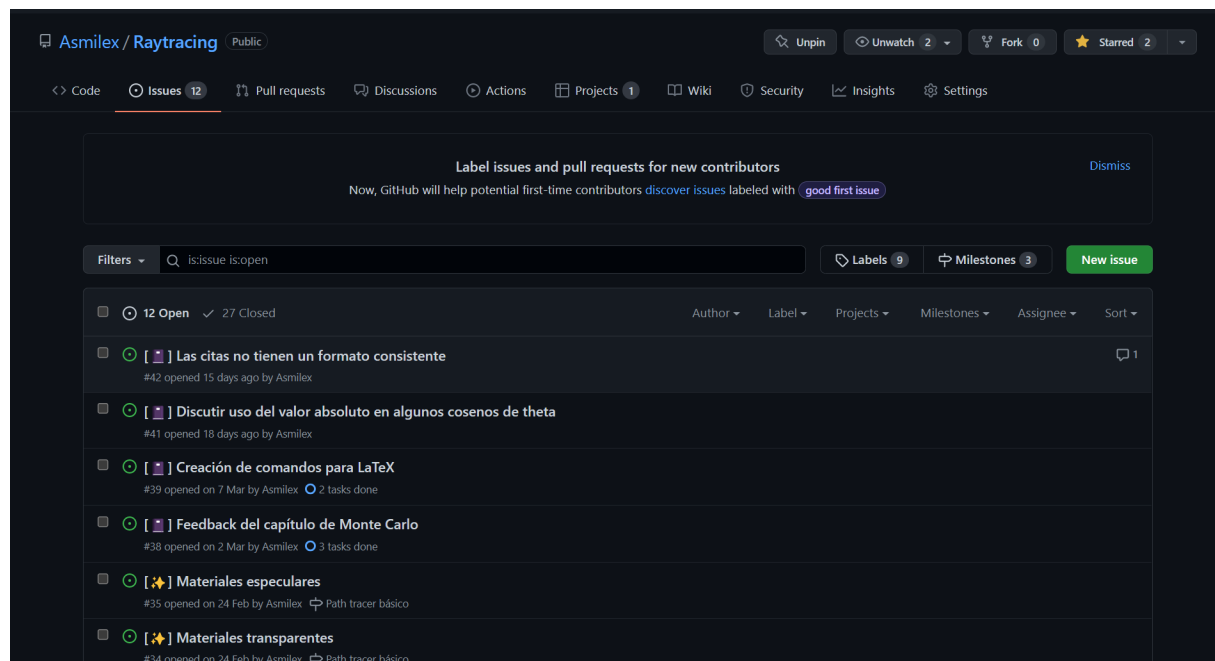
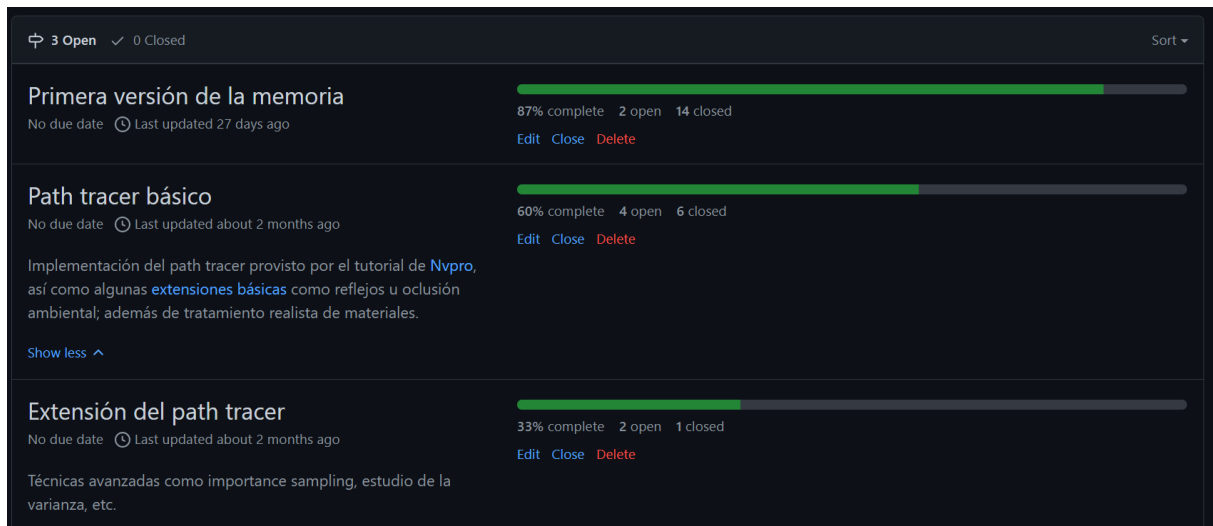


Figure A.4.: Pestaña de issues, día 16 de abril de 2022

Los issues se agrupan en *milestones*, o productos mínimamente viables. Estos issues suelen estar relacionados con algún apartado importante del desarrollo.



**Figure A.5.:** Los *milestones* agrupan una serie de issues relacionados con un punto clave del desarrollo

De esta forma, podemos ver todo lo que queda pendiente para la fecha de entrega.

Para añadir mayor granularidad a la gestión de tareas y proporcionar una vista informativa, se utiliza Github Projects. En esencia, esta aplicación es un acompañante del repositorio estilo Asana.

Organización del TFG				
Vista por prioridad		Tablón	+ New view	
Title	Status	Priority	Due	
<b>High</b>				
1 [🔥] Fuentes de luz puntuales y direccionales	Todo	High		
2 [🔥] Fuentes de luz de área	Todo	High		
3 [🔥] Numerar las ecuaciones podría suponer un problema	Done	High		
4 [🔥] Implementación de un path tracer básico	Done	High		
5 [🔥] Definir productos mínimamente viables	Done	High		
6 [🔥] Ray traced reflections	Done	High		
7 [🔥] Path tracer básico	Done	High		
8 [🔥] Antialiasing	Done	High		
9 [🔥] Falta Python en Dockerfile	Done	High		
<b>Medium</b>				
10 [🔥] Ray traced indirect lightning	Todo	Medium		
11 [🔥] Ray traced ambient occlusion	Todo	Medium		
12 [🔥] Materiales especulares	Todo	Medium		

**Figure A.6.:** Projects agrupa los issues y les asigna prioridades

Una de las alternativas que se planteó al inicio fue **Linear** (Linear 2022), una aplicación de gestión de issues similar a Projects. Sin embargo, la conveniencia de tener Projects integrado en Github supuso un punto a favor para este gestor. De todas formas, el equipo de desarrollo se compone de una persona, así que no hace falta complicar excesivamente el workflow.








El desarrollo general de la documentación no ha seguido este sistema de issues, pues está sujeta a cambios constantes y cada commit está marcado con [ :notebook: ]. No obstante, ciertos problemas relacionados con ella, como puede ser el formato de entrega, sí que quedan recogidos como un issue.

Finalmente, cuando se produce un cambio significativo en la aplicación (como puede ser una refactorización, una implementación considerablemente más compleja...) se genera una nueva rama. Cuando se ha cumplido el objetivo, se *mergea* la rama con la principal *main* mediante un *pull request*. Esto proporciona un mecanismo de robustez ante cambios complejos.

### A.7.3. Estilo de commits

Una de los detalles que has podido apreciar si has entrado al repositorio es un estilo de commit un tanto inusual. Aunque parece un detalle de lo más insustancial, añadir emojis a los mensajes de commits añade un toque particular al repositorio, y permite identificar rápidamente el tipo de cambio.

Cada uno tiene un significado particular. En esta tabla se recogen sus significados:

Tipo de commit	Emoji	Cómo se escribe rápidamente
Documentación		<code>:notebook:</code>
Archivo de configuración		<code>:wrench:</code>
Integración continua		<code>:construction_worker:</code>
Commit de Actions		<code>:robot:</code>
Quitar archivos		<code>:fire:</code>
Nuevas características		<code>:sparkles:</code>
Test		<code>:alembic:</code>
Refactorización		<code>:recycle:</code>
Bugfix		<code>:bug:</code>

**Figure A.7.:** Los emojis permiten reconocer el objetivo de cada commit. Esta tabla recoge el significado de cada uno

## B. Glosario de términos

*It's dangerous to go alone, take this.*

Tener en mente *todos* los conceptos y sus expresiones que aparecen en un libro como este es prácticamente imposible. Tampoco hay necesidad de ello, realmente. ¡Vaya desperdicio de cabeza! Por eso, aquí tienes recopilada una lista con todos los elementos importantes y un enlace a sus secciones correspondientes.

### B.1. Notación

Concepto	Notación
<b>Puntos</b>	Letras mayúsculas: $P, Q, \dots$
<b>Escalares</b>	Letras minúsculas: $a, b, c, k, \dots$
<b>Vectores</b>	Letras minúsculas en negrita: $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{n}, \dots$ . Si están normalizados, se les pone gorrito (por ejemplo, $\hat{\mathbf{n}}$ )
<b>Matrices</b>	Letras mayúsculas en negrita: $\mathbf{M}$ . Por columnas.
<b>Producto escalar</b>	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ . Si es el producto escalar de un vector consigo mismo, a veces pondremos $\mathbf{v}^2$
<b>Producto vectorial</b>	$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$
<b>Variables aleatorias</b>	$X, Y$ . $\xi$ representa una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0, 1)$ .



## B.2. Radiometría

Concepto	Expresiones
<b>Ángulo sólido,</b> derivada [3.1]	$\omega = \frac{A}{r^2}$ $d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$
<b>Hemisferio de direcciones alrededor de un vector</b>	$H^2(\mathbf{n})$
<b>Carga de energía</b>	$Q = hf = \frac{hc}{\lambda}$
<b>Flujo radiante, potencia</b>	$\Phi = \frac{dQ}{dt}$ $\Phi = \int_A \int_{H^2(\mathbf{n})} L_o(p, \omega) d\omega^\perp dA$
<b>Irradiancia, radiancia emitida</b>	$E = \frac{\Phi}{A}$ $E(p) = \frac{d\Phi}{dA}$ $E(p, \mathbf{n}) = \int_{\Omega} L_i(p, \omega)  \cos \theta  \, d\omega$ $E(p, \mathbf{n}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L_i(p, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ $E(p, \mathbf{n}) = \int_A L \cos \theta \frac{\cos \theta_o}{r^2} dA$
<b>Intensidad radiante</b>	$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$

Concepto	Expresiones
<b>Radiancia</b>	$L(p, \omega) = \frac{dE_\omega(p)}{d\omega}$ $L(p, \omega) = \frac{d^2\Phi(p, \omega)}{d\omega dA^\perp} = \frac{d^2\Phi(p, \omega)}{d\omega dA \cos \theta}$ $L^+(p, \omega) = \lim_{t \rightarrow 0^+} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega)$ $L^-(p, \omega) = \lim_{t \rightarrow 0^-} L(p + t\mathbf{n}_p, \omega)$
<b>Radiancia incidente</b>	$L_i(p, \omega) = \begin{cases} L^+(p, -\omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p > 0 \\ L^-(p, -\omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p < 0 \end{cases}$
<b>Radiancia reflejada, radiancia de salida</b>	$L_o(p, \omega) = \begin{cases} L^+(p, \omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p > 0 \\ L^-(p, \omega) & \text{si } \omega \cdot \mathbf{n}_p < 0 \end{cases}$
<b>Ecuación de dispersión</b>	$L_o(p, \omega_o) = \int_{\mathbb{S}^2} f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) L_i(p, \omega_i)  \cos \theta_i  d\omega_i$
<b>BRDF</b>	$f_r(p, \omega_o \leftarrow \omega_i) = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{dE(p, \omega_i)} = \frac{dL_o(p, \omega_o)}{L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$
<b>BTDF</b>	$f_t(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$
<b>BSDF</b>	$f(p, \omega_o \leftarrow \omega_i)$

# Bibliografía

- Adam Marrs, Peter Shirley, and Ingo Wald, eds. 2021. “Ray Tracing Gems II.” Apress. 2021. <http://raytracinggems.com/rtg2>.
- Andrés Millán. 2022a. “Docker Del TFG.” 2022. <https://hub.docker.com/r/asmilex/raytracing>.
- . 2022b. “Repositorio Del TFG.” 2022. <https://github.com/Asmilex/Raytracing>.
- Arnebäck. n.d. “An Explanation of the Rendering Equation.” Accessed April 9, 2022. [https://www.youtube.com/watch?v=eo\\_MTI-d28s](https://www.youtube.com/watch?v=eo_MTI-d28s).
- Bartosz Ciechanowski. 2022. “Lights and Shadows.” 2022. <https://ciechanow.ski/lights-and-shadows/>.
- Beck, Kent, Mike Beedle, Arie van Bennekum, Alistair Cockburn, Ward Cunningham, Martin Fowler, James Grenning, et al. 2001. “Manifesto for Agile Software Development.” <http://www.agilemanifesto.org/>.
- Berkeley cs184. 2022. “Computer Graphics and Imaging.” 2022. <https://cs184.eecs.berkeley.edu/sp22>.
- Carlos Ureña. 2021. “Realismo e Iluminación Global.” 2021. <https://lsi2.ugr.es/curena/>.
- Caulfield, Brian. n.d. “What’s the Difference Between Ray Tracing, Rasterization?” Accessed April 22, 2022. <https://blogs.nvidia.com/blog/2018/03/19/whats-difference-between-ray-tracing-rasterization/>.
- Cormullion. 2022. “JuliaMono - a Monospaced Font for Scientific and Technical Computing.” 2022. <https://juliamono.netlify.app>.

- Crytek. n.d. “Crysis Remastered Brings Ray Tracing to Current-Gen Consoles.” Accessed April 17, 2022. <https://www.cryengine.com/news/view/crysis-remastered-brings-ray-tracing-to-current-gen-consoles>.
- Digital Foundry. 2020. “Cyberpunk 2077 PC: What Does Ray Tracing Deliver... And Is It Worth It?” December 19, 2020. <https://www.youtube.com/watch?v=6bqA8F6B6NQ>.
- . 2022. “Canal de Youtube de Digital Foundry.” 2022. <https://www.youtube.com/user/DigitalFoundry>.
- Docker. 2022. “Docker - the World’s Most Popular Container Platform.” 2022. <https://www.docker.com/>.
- dockershelf. 2022. “Repository for Docker Images of LaTeX. Test Driven, Lightweight and Reliable. Rebuilt Daily.” 2022. <https://hub.docker.com/r/dockershelf/latex>.
- Eric C. Anderson. 1999. “Monte Carlo Methods and Importance Sampling.” 1999. [https://ib.berkeley.edu/labs/slatkin/eriq/classes/guest\\_lect/mc\\_lecture\\_notes.pdf](https://ib.berkeley.edu/labs/slatkin/eriq/classes/guest_lect/mc_lecture_notes.pdf).
- Eric Veach. December 1997. “Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation.” December 1997. [https://graphics.stanford.edu/papers/veach\\_thesis/](https://graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/).
- Evan Chen. 2022. “The Napkin Project.” 2022. <https://web.evanchen.cc/napkin.html>.
- Fabio Pellacini, Steve Marschner. 2022. “Fundamentals of Computer Graphics.” 2022. <https://pellacini.di.uniroma1.it/teaching/graphics17b/>.
- Figma. 2022. “Figma - a Design Tool for Digital Art.” 2022. <https://www.figma.com/>.
- Galvin. n.d. “Random Variables.” Accessed March 20, 2022. [https://www3.nd.edu/~dgalvin1/10120/10120\\_S16/Topic17\\_8p4\\_Galvin\\_class.pdf](https://www3.nd.edu/~dgalvin1/10120/10120_S16/Topic17_8p4_Galvin_class.pdf).
- Github. 2022. “Github - Where the World Builds Software.” 2022. <https://github.com>.
- Grant Sanderson. 2022. “3Blue1Brown.” 2022. <https://www.3blue1brown.com/>.
- Gruntfuggly. 2022. “Trigger Task on Save.” 2022. <https://marketplace.visualstudio.com/items?itemName=Gruntfuggly.triggertaskonsave>.
- Haines, Eric, and Tomas Akenine-Möller, eds. 2019. “Ray Tracing Gems.” Apress. 2019. <http://raytracinggems.com>.

- Hubert and Fischer, Cyreal, Meir Sadan. 2022. “Rubik Typography.” 2022. <https://fonts.google.com/specimen/Rubik>.
- Illana, José Ignacio. 2013. “Métodos de Monte Carlo.” 2013. <https://www.ugr.es/~jillana/Docencia/FM/mc.pdf>.
- Jacques Le Bailly. 2022. “Crimson Pro Typography.” 2022. <https://fonts.google.com/specimen/Crimson+Pro>.
- John MacFarlane. 2021. “Pandoc, a Universal Document Converter.” 2021. <https://pandoc.org>.
- José Luis Crespo. n.d. “Ya, En Serio, ¿Qué Es La Luz?” Accessed April 22, 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=DkcEAz09Buo>.
- Linear. 2022. “Linear - the Issue Tracking Tool You’ll Enjoy Using.” 2022. <https://linear.app/>.
- Martin Roberts. 2018. “The Unreasonable Effectiveness of Quasirandom Sequences.” 2018. <http://extremelearning.com.au/unreasonable-effectiveness-of-quasirandom-sequences/>.
- Max Krieger. 2022. “Latex Complete - Typeset Math in Your Designs.” 2022. <https://www.figma.com/community/plugin/793023817364007801/LaTeX-Complete>.
- McGuire, Morgan. 2021. *The Graphics Codex*. 2.17 ed. Casual Effects. <https://graphicscodex.com>.
- Merelo. 2021. “Infraestructura Virtual.” 2021. [http://jj.github.io/IV/documentos/temas/Integracion\\_continua](http://jj.github.io/IV/documentos/temas/Integracion_continua).
- Microsoft. 2022. “VSCode - Code Editing. Redefined.” 2022. <https://code.visualstudio.com/>.
- Nature. 2016. “Scientific Language Is Becoming More Informal.” 2016. <https://doi.org/10.1038/539140a>.
- Ncase. 2022. “Explorable Explanations.” 2022. <https://explorabl.es/>.
- Overvoorde, Alexander. n.d. “Introduction - Vulkan Tutorial.” Accessed April 18, 2022. <https://vulkan-tutorial.com/>.

- Owen, Art B. 2013. *Monte Carlo Theory, Methods and Examples*. <https://artowen.su.domains/mc/>.
- Pascal Wagler. 2022. “Eisvogel Pandoc Template.” 2022. <https://github.com/Wandmalfarbe/pandoc-latex-template>.
- Pharr, Matt, Wenzel Jakob, and Greg Humphreys. 2016. “Physically Based Rendering: From Theory to Implementation (3rd Ed.).” San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc. November 2016. <https://www.pbr-book.org/3ed-2018/contents>.
- Philipp Nurullin. 2022. “JetBrains Mono, a Typeface for Developers.” 2022. <https://www.jetbrains.com/es-es/lp/mono/>.
- Randall Munroe. n.d. “XKCD - Angular Size.” Accessed May 7, 2022. <https://xkcd.com/1276/>.
- “Rendering.” n.d. Accessed March 20, 2022. <https://sciencebehindpixar.org/pipeline/rendering#:~:text=They%20said%20it%20takes%20at,to%20render%20that%20many%20frames>.
- Schlick, Christophe. 1994. “An Inexpensive BRDF Model for Physically-Based Rendering.” *Computer Graphics Forum* 13 (3): 233–46. <https://doi.org/10.1111/1467-8659.1330233>.
- Scratchapixel. n.d. “Learn Computer Graphics from Scratch!” Accessed April 17, 2022. <https://www.scratchapixel.com/index.php?redirect>.
- Shirley, Peter. 2020a. “Ray Tracing in One Weekend.” 2020. <https://raytracing.github.io/books/RayTracingInOneWeekend.html>.
- . 2020b. “Ray Tracing: The Next Week.” 2020. <https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheNextWeek.html>.
- . 2020c. “Ray Tracing: The Rest of Your Life.” 2020. <https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheRestOfYourLife.html>.
- Shirley, Peter, and R. Keith Morley. 2003. *Realistic Ray Tracing*. 2nd ed. USA: A. K. Peters, Ltd. <https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780429294891/realistic-ray-tracing-peter-shirley-keith-morley>.

- Szirmay-Kalos, László. 2000. "Monte-Carlo Methods in Global Illumination." <https://doi.org/10.1.1.36.361>.
- The Khronos® Vulkan Working Group. n.d. "Vulkan® 1.2.210 - KHR Extensions: 33. Ray Intersection." Accessed April 1, 2022. <https://www.khronos.org/registry/vulkan/specs/1.2-khr-extensions/html/chap33.html#ray-intersection-candidate-determination>.
- tracing, Wikipedia: Ray. n.d. "Ray Tracing (Graphics)." Accessed April 22, 2022. [https://en.wikipedia.org/wiki/Ray\\_tracing\\_\(graphics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Ray_tracing_(graphics)).
- Tran Ngoc Tuan Anh. 2022. "Bamboo CSS." 2022. <https://github.com/rilwis/bamboo>.
- Undercase Type, Flavia Zimbardi, Phaedra Charles. 2022. "Fraunces Typography." 2022. <https://fonts.google.com/specimen/Fraunces>.
- Vectary. 2022. "Vectary - Bringing Unlimited Creativity to 3d Design." 2022. <https://www.vectary.com/>.
- Walt Disney Animation Studios. 2019. "BRDF Explorer." 2019. <https://github.com/wdas/brdf>.
- Wikipedia: Barycentric coordinate system. n.d. "Barycentric Coordinate System." Accessed April 22, 2022. [https://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric\\_coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system).
- Wikipedia: Computer. n.d. "Computer." Accessed April 22, 2022. <https://en.wikipedia.org/wiki/Computer>.
- Wikipedia: Differential geometry of surfaces. n.d. "Differential Geometry of Surfaces." Accessed April 22, 2022. [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_geometry\\_of\\_surfaces](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_surfaces).
- Wikipedia: history of photography. n.d. "History of Photography." Accessed April 22, 2022. [https://en.wikipedia.org/wiki/History\\_of\\_photography](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_photography).
- Wikipedia: Kodak. n.d. "Kodak." Accessed April 22, 2022. <https://es.wikipedia.org/wiki/Kodak>.
- Wikipedia: rendering (computer graphics). n.d. "Rendering (Computer Graphics)." Accessed April 22, 2022. [https://en.wikipedia.org/wiki/Rendering\\_\(computer\\_graphics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Rendering_(computer_graphics)).

s).