Relations رابطه‌ها

دو مجموعه $\{$ترکیه، آذربایجان، ایران$\} = A$ و $\{$استانبول، باکو، تهران$\} = B$ را درنظر بگیرید.

می‌خواهیم توصیف کنیم که کدام شهر از مجموعه B پایتخت کدام کشور از مجموعه A است. برای این منظور مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های (a, b) می‌سازیم که در آن a یک کشور از A و b یک شهر از مجموعه B است و b پایتخت a است. پس رابطه «پایتخت کشور بودن» را می‌توان بصورت زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ درنظر گرفت.

تعریف ضرب دکارتی: دو مجموعه دلخواه A و B را درنظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی A و B را با نماد $A \times B$ «A ضرب در B» نشان داده بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

بنابراین برای مثال بالا ضرب دکارتی $A \times B$ بصورت زیر خواهد بود:

$A = \{$ ترکیه $= T$ ؛ آذربایجان $= A$ ، ایران $= I \}$ ، $B = \{$ تهران $= te$ ، باکو $= b$ ، استانبول $= is \}$

$$A \times B = \{(T, te), (T, b), (T, is), (A, te), (A, b), (A, is), (I, te), (I, b), (I, is)\}$$

تعریف رابطه: رابطه R از مجموعه A به مجموعه B زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ است (یعنی $R \subset A \times B$).

- اگر $a \in A$ با $b \in B$ رابطه داشته باشد بجای $(a,b) \in R$ می‌نویسیم aRb

و اگر رابطه نداشته باشند: $a \not R b$

در مثال بالا اگر R رابطه پایتخت و کشور باشد داریم:

$$IRte \,,\, I \not R is \,,\, T \not R b \,,\, TRis$$

تعریف: دامنه رابطه عبارت است از مجموعه تمامی عنصرهای اول زوج مرتب مربوط به R و -

برد R عبارت است مجموعه عنصرهای دوم

نکته: اگر رابطه R فقط در یک مجموعه باشند A باشد $(A=B)$ گوییم R رابطه ای در A

است (رابطه دودویی)، برای مثال اگر $A=\{1,2,3,4\}$، عملگر دودویی

«کوچکتر از» در A بصورت زیر است

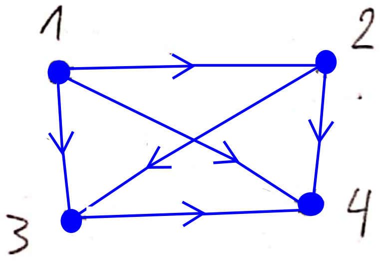
$$R:(A,<)=\{(x,y)\in A\times A \mid x<y\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

روش های نمایش رابطه ها:

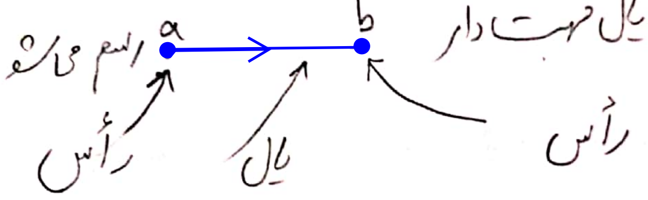
۱- قانون: $aRb \iff$ a کوچکتر از b باشد

2- لیست کردن اعضا: مانند مثال قبلی

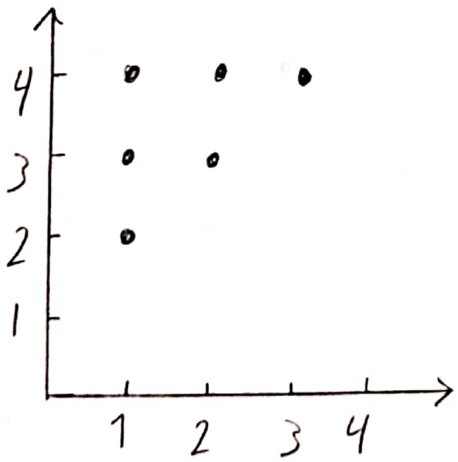
۳- گراف: گراف مثال بالا بصورت زیر خواهد بود: $R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$



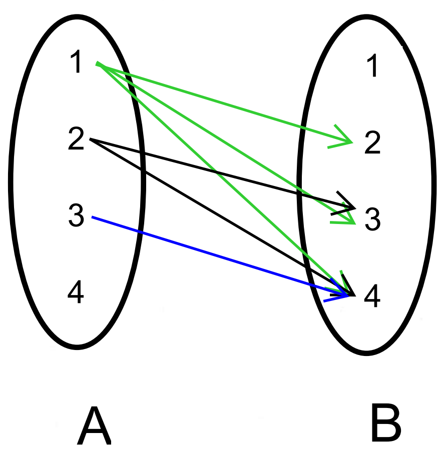
- دقت شود که به ازای هر زوج مرتب (a,b) یک یال جهت دار رسم می شه



4- مختصات: عناصر A را بصورت نقاط روی محور افقی و عناصر B را بصورت نقاط روی محور قائم نشان می دهیم



5- نمودار ون:



۶- روش ماتریس بولی - ماتریس باینری

روش دیگر برای نمایش رابطه R از مجموعه A به B استفاده از ماتریس است و سطرهای این ماتریس را با اعضای A و ستون های آن را با عناصر B متناظر می‌کنیم. برای $a \in A$ و $b \in B$ اگر aRb آنگاه در تلاقی سطر a و ستون b عدد 1 می‌نویسیم و در غیر اینصورت صفر می‌نویسیم (حالت $a \not R b$) در مثال رابطه

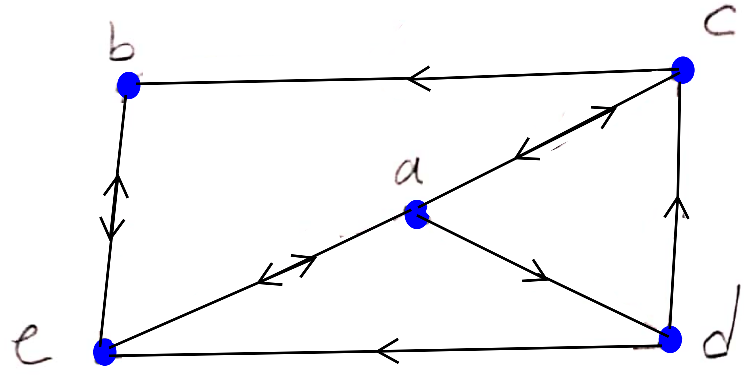
$R: \{(a,1),(b,1),(c,2),(c,3)\}$ از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به $B=\{1,2,3,4\}$

نمایش ماتریسی:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

نکته: به ماتریسی که فقط مقادیر صفر و یک دارد ماتریس بولی گویند.

مثال: رابطه R روی مجموعه A بصورت گراف زیر نشان داده شده است



$A=\{a,b,c,d,e\}$

ماتریس بولی (باینری) R را بنویسید:

$R=\{(a,c),(c,a),(a,e),(e,a),(a,d),(d,c),(d,e),(c,b),(b,e),(e,b)\}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

رابطه معکوس: رابطه R از A به B را در نظر بگیرید، معکوس R را با نماد R^{-1} نشان می‌دهیم

و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$bR^{-1}a \Longleftrightarrow aRb$$

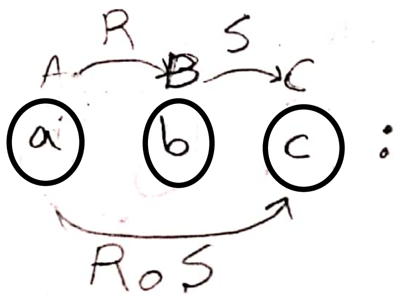
مثال: اگر R رابطه «فرزند بودن» باشد آنگاه R^{-1} رابطه «والد بودن» است

نکته: اگر ماتریس M_R ماتریس رابطه R و ماتریس $M_{R^{-1}}$ ماتریس R^{-1} باشد داریم:

$$M_{R^{-1}} = M_R^T$$ (ترانهاده)

ترکیب رابطه ها

سه مجموعه A، B و C را در نظر بگیرید رابطه R از A به B و رابطه S از B به C داده شده است ترکیب RoS رابطه‌ای از A به C است که به صورت زیر تعریف می‌شود:



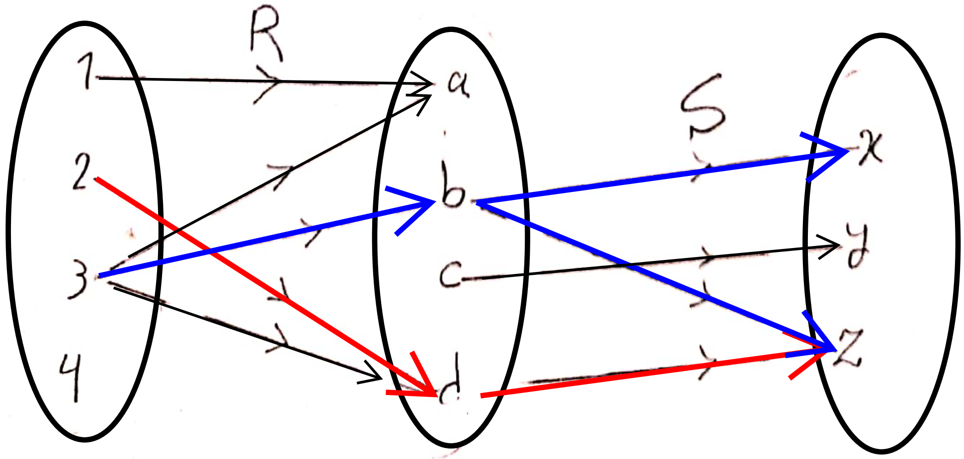
$$a(RoS)c \iff \exists b\in B; aRb, bSc$$

نکته: $RoR=R^2$

توجه: در برخی منابع ترکیب روابط برعکس آنچه گفته شد تعریف می‌شود یعنی تعریف بالا به عنوان تعریف SoR معرفی می‌شود.

مثال: فرض کنید $C=\{x,y,z\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$ و $A=\{1,2,3,4\}$ و قرار دهید:

$R=\{(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)\}$ و $S=\{(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)\}$ اعضای ترکیب RoS را بیابید:

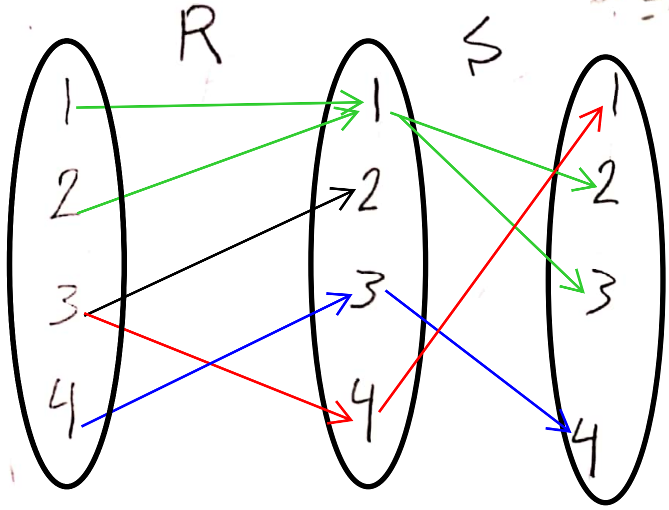


$$RoS=\{(2,z),(3,x),(3,z)\}$$

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$ ، $R, S\subseteq A^2$ به شکل زیر باشند:

$R=\{(1,1),(2,1),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ و $S=\{(1,2),(1,3),(3,4),(4,1)\}$

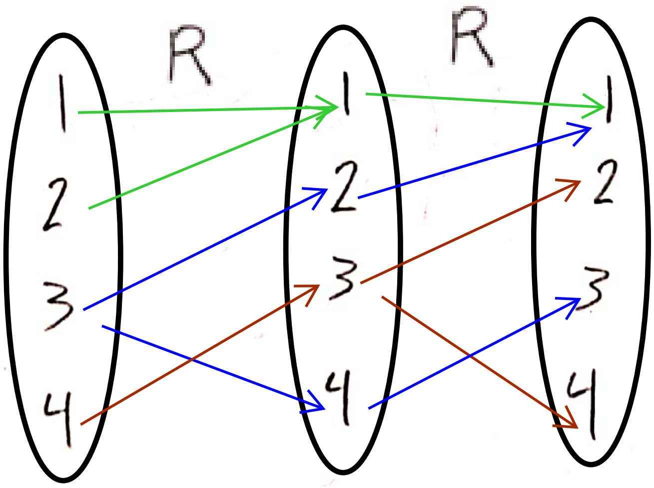
اعضای ترکیب های SoR ، RoS و R^2 را بیابید:



$\Rightarrow RoS=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(4,4)\}$

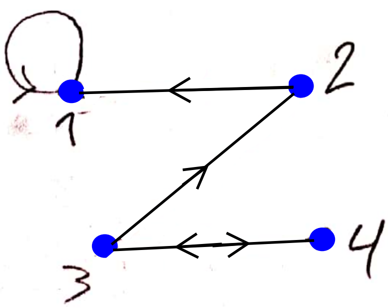
به طریق مشابه می توان نتیجه گرفت: $SoR=\{(1,1),(1,2),(1,4),(3,3),(4,1)\}$

برای $RoR=R^2$ داریم:



$\Rightarrow R^2=\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

نکته ۱) اگر بخواهیم R^2 را از روی گراف بنویسیم کافیست اگر از a به b مسیر بطول 2 وجود داشت آنگاه (a,b) را در R^2 بنویسیم. در مثال بالا:



(طول مسیر تعداد یال های مسیر است)

دقت کنید که طوقه را می توان به هر تعداد بار که مایل بود طی کرد.

نکته 2) به همین ترتیب R^3 شامل زوج های مثل $(R \circ R^2 = R^2 \circ R)$

(a,b) است که از a به b مسیری به طول 3 وجود دارد $\longleftarrow R^n$ ؟؟؟

نکته 3) رابطه R^∞ (R^+) رابطه وجود مسیر نامیده می شود و $(a,b) \in R^\infty$

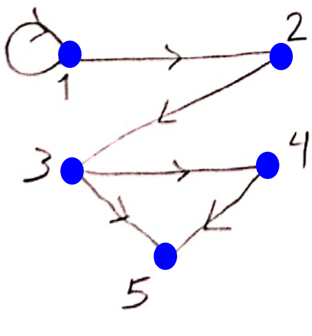
اگر و فقط اگر از a به b حداقل یک مسیر با هر طولی غیر صفر باشد پس:

$R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$ که n تعداد عضوهای A است.

نکته 4) رابطه R^* رابطه دسترس پذیری نامیده می شود و $(a,b) \in R^*$ اگر $(a,b) \in R^\infty$ یا

$b = a$ باشد.

مثال: اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,5),(3,4),(4,5)\}$



اعضا R^2 ، R^3 ، R^∞ ، R^* را بیابید:

$R^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(3,5)\}$

$R^3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,5)\}$

$R^4 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\} = R^5 \Rightarrow R^\infty = R \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5$

$R^\infty = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)(4,5)\}$

$R^* = R^\infty \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

اعمال روی روابط

از آنجایی که رابطه مجموعه‌ای است از زوج‌های مرتب ، بنابراین می‌توان عملیات روی مجموعه‌ها را روی روابط نیز اعمال کرد. اگر R و S روابطی روی A باشند آنگاه:

$$(x,y)\in R\cup S = x(R\cup S)y \Leftrightarrow xRy \text{ or } xSy$$

$$(x,y)\in R\cap S = x(R\cap S)y \Leftrightarrow xRy \text{ and } xSy$$

$$(x,y)\in R-S = x(R-S)y \Leftrightarrow xRy \text{ and } x\not{S}y$$

$$(x,y)\in R' = xR'y \Leftrightarrow x\not{R}y$$

$$(x,y)\in R^{-1} = xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$$

خواص روابط دودویی:

اگر R یک رابطه بر مجموعه A باشد، گوییم رابطه R:

1) **بازتابی** است اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم aRa

2) **متقارن** است اگر aRb ایجاب کند که bRa

3) **پادمتقارن** است اگر aRb و bRa نشان $a=b$ را ایجاب کند

4) **متعدی (ترایایی)** است اگر aRb و bRc ایجاب کند که aRc

توجه شود که این خواص فقط برای روابط بر یک مجموعه تعریف شده‌اند.

مثال: فرض کنید R روی مجموعه اعداد صحیح بصورت: $x R y \iff x \leq y$

تعریف شده باشد. خواص چهارگانه را بررسی کنید.

1) $x \leq x$ $\Leftarrow$ بازتابی ✓ 2) متقارن: $2R4$ ولی $4 \cancel{R} 2$ ✗

3) پادمتقارن: $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$ ✓

4) متعدی: $x \leq y$ و $y \leq z$ $\Longleftarrow$ $x \leq z$ ✓

تعریف: اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$ گوییم a عادی کند b را و می‌نویسیم $a|b$

درصورتیکه b بر a بخش پذیر باشد: $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ; b = ka$

– تقسیم b بر a یک عدد صحیح باشد و باقیمانده نداشته باشد.

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ و رابطه R به A بصورت

$(xRy \Leftrightarrow x|y)$ تعریف شده باشد (x، y را عاد می‌کند)

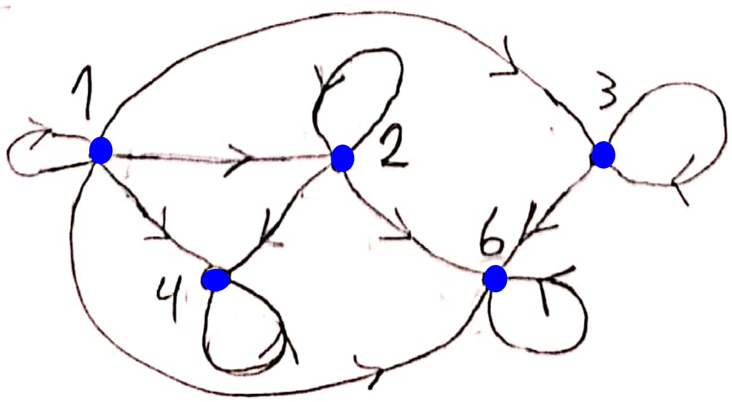
الف) گراف جهت دار R را رسم کنید.

ب) رابطه R^{-1} را بدست آورید ج) خواص چهارگانه را زمانیکه R روی $\mathbb{Z}$ تعریف شده باشد بررسی کنید.

$1|4 \; (4 = \overset{\overset{k \in \mathbb{Z}}{\uparrow}}{4} \times 1) \Rightarrow 1R4 \; ; \; 2|4 \; (4 = \overset{\overset{k \in \mathbb{Z}}{\uparrow}}{2} \times 2) \Rightarrow 2R4$

$3|6 \; (6 = \overset{\overset{k \in \mathbb{Z}}{\uparrow}}{2} \times 3) \; , \; \ldots$ نکته: $6 \nmid 3 \; (3 = \frac{1}{2} \times 6 \; ; \; \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\}$



$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (6,1), (2,2), (4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4), (6,6)\}$

ج) خواص چهارگانه در $\mathbb{Z}$:

1) بازتابی : $\forall x \in \mathbb{Z}\ ;\ x = 1 \times x \Rightarrow x|x \Rightarrow xRx$ ✓

2) متقارن : $\forall x,y \in \mathbb{Z}\ ;\ xRy \Rightarrow x|y \Rightarrow y \nmid x \quad (3|6 \Rightarrow 6 \nmid 3)$ ✗

3) پادمتقارن : $\forall x,y \in \mathbb{Z}\ ;\ xRy\ ,\ yRx \Rightarrow \begin{cases} y|x \to y = k_1 x \\ x|y \to x = k_2 y \end{cases} \Rightarrow x = \pm y$ ✗

$(4|-4\ ;\ -4|4)$

4) متعدی : $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}\ ;\ \begin{cases} xRy \to x|y \to y = k_1 x \\ yRz \to y|z \to z = k_2 y \end{cases} \Rightarrow z = k_2(k_1 x) = z = kx$ ✓

$x|z$

ماتریس در روابط

ماتریس مجاورت: اگر R یک رابطه از A به B باشد می‌توان ماتریس $n \times m$ مثل $M_R=[m_{ij}]$ را نمایش داد:

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } a_i R b_j\\ 0 & \text{if } a_i \not R b_j\end{cases}$$

عملیات منطقی روی ماتریس های بولی

تعریف: $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس بولی $n \times m$ باشند آنگاه $A \vee B$

و $A \wedge B$ بصورت زیر است:

$$A \vee B=\begin{cases}1 & \text{if}(a_{ij}=1 \text{ or } b_{ij}=1)\\ 0 & \text{if.not}\end{cases} \qquad A \wedge B=\begin{cases}1 & \text{if}(a_{ij}=1 \text{ and } b_{ij}=1)\\ 0 & \text{if.not}\end{cases}$$

تعریف: ضرب بولی: اگر A و B دو ماتریس بولی باشند حاصلضرب بولی آن ها را

با نماد $A \odot B$ نشان می دهیم و برای اعمال آن مانند ضرب معمولی ماتریس عمل کرده

با این تفاوت که از عملیات ضرب و جمع بولی بصورت زیر استفاده می کنیم:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

تعریف: اگر A و B دو ماتریس بولی هم مرتبه باشند گوییم A ضعیف تر از B است و

می نویسیم $A \leqslant B$ ($A \ll B$) هرگاه: $\forall i,j \;;\; a_{ij} \leqslant b_{ij}$

ماتریس روابط و خواص رابطه ها

اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه روی A با ماتریس مجاورت M_R باشد. رابطه R:

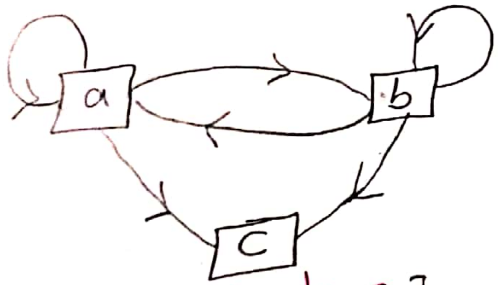
1- بازتابی است درصورتیکه درایه های قطر اصلی M_R همگی یک باشند

2- تقارنی است درصورتیکه $M_R = M_R^T$ (ماتریس M_R با ترانهاده آن برابر باشد)

3- پادتقارنی است درصورتیکه $M_R \wedge M_R^T \leq I$

4- تعدی است درصورتیکه $M_R^2 = M_R \odot M_R \leq M_R$

مثال: گراف جهت دار رابطه R روی مجموعه $A=\{a,b,c\}$ بصورت زیر است.



خواص 4گانه را از روی ماتریس مجاورت بررسی کنید:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_R^T \wedge M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1\oplus1}^{1\oplus0=1}\oplus0 & 1\oplus1\oplus0 & 1\oplus1\oplus0 \\ 1\oplus1\oplus0 & 1\oplus1\oplus0 & 1\oplus1\oplus0 \\ 0\oplus0\oplus0 & 0\oplus0\oplus0 & 0\oplus0\oplus0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$ ✗ بازتابی و ✗ تقارنی

پادتقارنی: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✗

تعدی: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

روابط هم‌ارزی رابطه R بر مجموعه A یک رابطه هم‌ارزی است در صورتیکه R دارای هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد. ایده اصلی برای رابطه هم‌ارزی آن است که این رابطه یک رده‌بندی از اشیائی است که به نوعی «شبیه» می‌باشند.

مثال: رابطه R روی $A \subseteq \mathbb{Z}$ بصورت $(m = 2^k n \Leftrightarrow mRn)$ تعریف شده است که در آن $k \in \mathbb{Z}$ هم‌ارزی بودن R را بررسی کنید.

بازتابی: $mRm? \Rightarrow m \overset{?}{=} 2^k m \rightarrow \text{if } k=0 : m = 2^0 m$ ✓

متقارن: اگر $mRn \rightarrow m = 2^k n$

$$m = 2^k n \rightarrow \frac{m}{2^k} = n \rightarrow n = 2^{-k} m \rightarrow nRm \checkmark$$

تعدی: mRn و nRp

$$\begin{cases} mRn \\ nRp \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 2^k n \rightarrow n = \frac{m}{2^k} = 2^{-k} m \\ n = 2^l p \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 2^{-k} m = 2^l p \rightarrow m = \frac{2^l}{2^{-k}} p \rightarrow$$

$$\rightarrow m = 2^l 2^k p \rightarrow m = 2^{l+k} p \rightarrow mRp \checkmark$$

بازتابی ✓ تقارن ✓ تعدی ✓ ← هم‌ارزی است.

تعریف رابطه هم نهشتی: فرض کنید m عدد صحیح مثبت باشد. دو عدد صحیح a و b را

هم نهشت به پیمانه m گوییم و می نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ هرگاه $m \mid a-b$

(m تفاضل $a-b$ را عاد کند) $\leftrightarrow$ $a-b$ بخش پذیر بر m است: وجود دارد $k \in \mathbb{Z}$

$a-b=km$ مثال:

$$11 \overset{4}{\equiv} 3 \quad (4 \mid 11-3=8 \to 8=\underset{k\in\mathbb{Z}}{2} \times 4$$

$$22 \overset{4}{\equiv} 6 \quad (4 \mid 22-6=16 \to 16=\underset{k\in\mathbb{Z}}{4} \times 4$$

$7 \overset{2}{\not\equiv} 4$ $(2 \mid 7-4=3 \to$ زوج نیست و حاصل تقسیم آن بر 2 باقیمانده دارد)

نکته: $a \overset{m}{\equiv} b$ بصورت $a \equiv b \pmod m$ نیز نوشته می شود.

مثال: آیا رابطه هم نهشتی هم ارزی است؟

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m / a-b \to a-b=\underset{k\in\mathbb{Z}}{k}\, m$$

بازتاب: $aRa \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} a \to m \mid a-a=0 \to 0=km \to k=0$ ✓

تقارن: $aRb \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b \to m \mid a-b \to a-b=\underset{\in\mathbb{Z}}{k}\, m \xrightarrow{\times(-1)}$

$$b-a=(-k)m \longrightarrow b \overset{m}{\equiv} a \checkmark$$

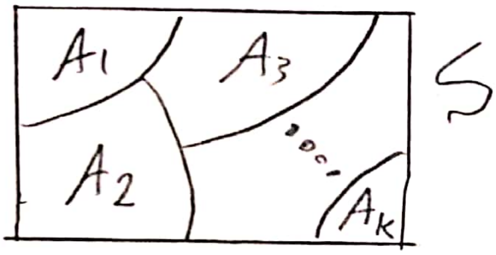
تعدی: $\begin{cases} aRb \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b \to a-b=km \\ bRc \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} c \to b-c=\ell m \end{cases}$

$$a-c=\underbrace{(k+\ell)}_{\in\mathbb{Z}}m \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c \checkmark$$

افرازها

گوییم مجموعه S توسط زیرمجموعه های غیرتهی $A_1, A_2, \dots, A_k$ افراز شده است

هرگاه: 1) $\forall i,j: A_i \cap A_j = \phi$; 2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$



کلاس هم‌ارزی فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه A باشد. به ازای هر $x \in A$

مجموعه تمامی اعضا A که با a رابطه دارند کلاس هم‌ارزی a نامیده می‌شود و با نماد $[a]$ نشان

می‌دهیم: $[a] = \{x \mid xRa\}$

به طور کلی هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه افرازهای منحصربفرد از آن مجموعه را بوجود می‌آورد.

مثال: اگر R رابطه‌ای در $\mathbb{Z}$ باشد که بصورت $(xRy \Leftrightarrow x \overset{4}{\equiv} y)$ تعریف شود

ثابت کنید R هم‌ارزی است. ب) همه کلاس‌های هم‌ارزی R را بنویسید.

الف) قبلاً ثابت شد ب)

$$A_0 = [0] = \{x \mid xR0\} = \{x \mid x \overset{4}{\equiv} 0\} = \{x \mid x - 0 = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$A_1 = [1] = \{x \mid xR1\} = \{x \mid \underbrace{x \overset{4}{\equiv} 1}_{x-1=4k}\} = \{x \mid x = 4k+1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$A_2 = [2] = \{x \mid xR2\} = \{x \mid x \overset{4}{\equiv} 2\} = \{x \mid x = 4k+2\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$A_3 = [3] = \{x \mid xR3\} = \{x \mid x \overset{4}{\equiv} 3\} = \{x \mid x = 4k+3\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

$$A_4 = [4] = \{x \mid xR4\} = \{x \mid x \overset{4}{\equiv} 4\} = \{x \mid x-4 = 4k\} = \{x \mid x = 4\underbrace{(k+1)}_{l \in \mathbb{Z}}\} = [0] = A_0$$

توجه کنید که رده‌های هم‌ارزی 2به دو مجزا بوده و

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

پس مجموعه $\mathbb{Z}$ به 4 کلاس هم‌ارزی افراز می‌شود که آن را به‌صورت $\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3]\}$ نشان می‌دهیم

Scanned by CamScanner

بستارها Closures

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است برخی از خصوصیات هم‌ارزی را نداشته باشد.

می‌خواهیم با افزودن زوج‌هایی به R، رابطه‌ای بدست آوریم که ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد.

الف) بستار بازتابی: اگر R رابطه‌ای در A باشد که بازتابی نباشد برخی از زوج‌های رابطه Δ در

R را اضافه می‌کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود. (Δ رابطه تساوی است)

به بیان دیگر کوچکترین رابطه شامل رابطه R که خاصیت بازتابی داشته باشد بستار بازتابی گویند.

$$\text{بستار بازتابی} : R \cup \Delta \quad ; \quad \Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$$

ب) بستار متقارن: اگر R رابطه‌ای در A باشد که متقارن نباشد ($\exists x,y$ ز xRy و $y \not R x$)

بدیهی است اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R^{-1}$. بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید

زوج‌های رابطه R^{-1} را به R اضافه کنیم.

$R \cup R^{-1}$ بستار تقارنی R و کوچکترین رابطه متقارن است.

نکته: بستار متقارن R را می‌توان به روش مستقیم رسم کرد. به این ترتیب که همه یال‌ها در گراف جهت‌دار

R به یال‌های دو طرفه در $R \cup R^{-1}$ تبدیل می‌شوند.

ج) بستار تعدی: کوچکترین رابطه شامل R که خاصیت تعدی داشته باشد.

قضیه: اگر R رابطه‌ای روی مجموعه متناهی A باشد بستار تعدی رابطه R همان R^∞ است.

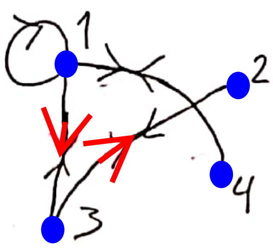
یادآوری: R^∞ رابطه وجود مسیر نامیده می‌شود و $(a,b)\in R^\infty$ اگر و فقط اگر از a به b حداقل یک مسیر – با طول غیرصفر – باشد.

$R^\infty = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \longrightarrow$ n تعداد عضوهای A است.

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ بستارهای R را بنویسید:

بستار بازتاب: $R\cup\Delta=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$

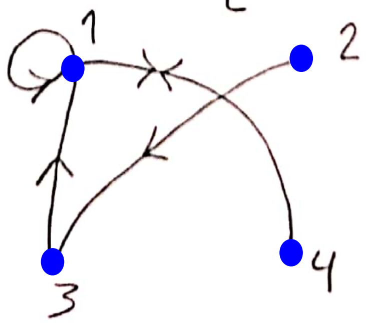
بستار تقارن:



جهت‌ها دوطرفه شوند

بستار تقارن $=\{(3,2),(1,3)\}\cup R=\{(3,2),(1,3),(1,1),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$

بستار تعدی $=R^\infty$

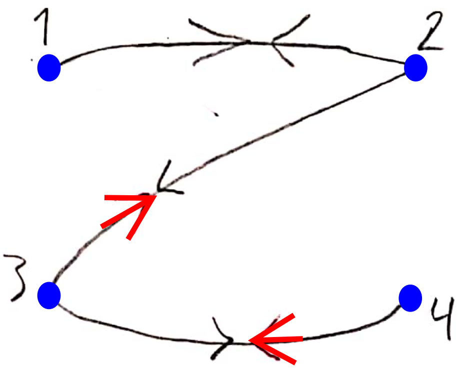


$R^\infty=\{(1,1),(1,4),(2,3),\underline{(2,1)},\underline{(2,4)},(3,1),\underline{(3,4)},(4,1),\underline{(4,4)}\}$

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)\}$ بستارهای R را بدست آورید:

بستار بازتابی: $R \cup \Delta = R \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} = ?$

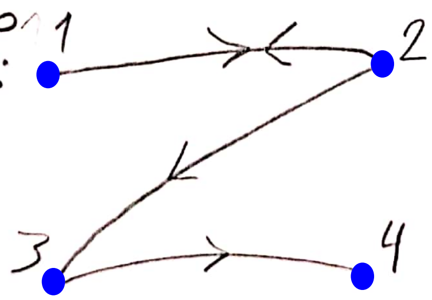
بستار تقارن:



جهت ها دوطرفه شوند

بستار تقارن: $\{(3,2),(4,3)\} \cup R = ?$

بستار تعدی $= R^{\infty}$:



$$R^{\infty} = \{(1,2),(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$