جزوه درس مدار منطقی
علیرضا سلطانی نشان
دانشجوی نرم افزار
ترم سوم

# فهرست مطالب

# ۱ اعداد ـ مبناها ـ مکمل ها ـ کدها

کلا اگه ما بخوایم هر عددی را نمایش بدهیم یا آنرا بنویسیم، این اعداد میتواند مبنا های مختلفی داشته باشد. در حالت کلی عددی مثل a را میتوانیم اینگونه نمایش دهیم:

- $a = a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-m}$

در حقیقت هر کدام از این اعداد دارای ارزش مکانی هستند، که در زیر به درستی نشان داده شده است :

- $a = \overset{r^{n-1}}{a_{n-1}}, \overset{r^{n-2}}{a_{n-2}}, ...\overset{r^{2}}{a_2}, \overset{r^{1}}{a_1}, \overset{r^{0}}{a_0}, .\overset{r^{-1}}{a_{-1}}, \overset{r^{-2}}{a_{-2}}, \overset{r^{-m}}{a_{-m}}$

که بعد از اعشار (۰) دارای n رقم عدد صحیح و قبل آن n رقم عدد اعشاری داریم.
نکته مهمی که در اینجا بایستی یادآوری شود آنست که هر عدد به توان منفی برابر است با:

- $r^{-m} = \frac{1}{r^m}$

معرفی انواع مبنا ها:

۱. $0...1$ = مبنای دو Binary

۲. $0...9$ = مبنای ۱۰ Decimal

۳. $0...7$ = مبنای هشت Octal

۴. $0...9, A, B, C, D, E, F$ = مبنای ۱۶ Decimal Hexa

نکته: زمانی که در مبناها، به مبنا های بزرگی میرسیم، ما از ۰ تا ۹ را به رسمیت میدانیم و برای نمایش اعداد بعد از آن از حروف انگلیسی استفاده میکنیم.

اگر عددی در مبنای r باشد و بخواهیم آنرا به مبنای ۱۰ تبدیل کنیم کافیست هر رقم را در ارزش مکانی خودش ضرب کرده و حاصل را باهم جمع کنیم.

## ۱.۱ تصاعد هندسی

$$(r-1)_{r^1}\,(r-1)_{r^0}.(r-1)_{r^{-1}}\,(r-1)_{r^{-m}} = (r-1)\frac{r^n-1}{r-1} = r^n-1$$

بطوری که r مبنا و n تعداد ارقام است، بطور مثال، در مبنای دسیمال که سیستم دهدهی است، برای بدست آوردن بزرگ ترین عدد مجموعه از $r-1$ که میشود ۹، یعنی ۹ بزرگ ترین عدد مجموعه مبنای دسیمال است، و اگر به تعداد دو رقم آنرا در نظر بگیریم، یعنی ۹۹، در جایگاه مربوطه بررسی خواهیم کرد، یعنی $99 = (9*10^1) + (9*10^0)$ ودر مقابل تصاعد هندسی داریم، $10^2 - 1 = 99$ .

**تمرین: تبدیل مبناهای زیر را انجام دهید:**

در هنگام انجام تبدیل مبنا های زیر، قصد یادآوری مطالب گذشته است، اما در بین آنها مطابی هم ذکر شده است که نکاتی را در بر دارند و بایستی به عنوان مطلب جدید آنرا در نظر داشت:

**نکات**

برای تبدیل مبنا از ۱۰ به هر مبنای دیگری باید ۱۰ را در آن مبنا پی در پی تقسیم کنیم که در نهایت به با استفاده از باقی مانده ها و مقسوم علیه آخر تقیسم از راست به چپ نتایج تقسیم را کنار هم بگذاریم.

در هنگام تبدیل مبنا، جلوترین و اخرین ارزش مکانی عدد را MSB یا $MostSignificantBit$ و کمترین و اخرین ارزش مکانی در عدد را LSB یا $LeastSignificantBit$ گفته میشود.

مانند: $(327.2)_{10}$ که عدد ۳ $MSB$ و ۷ $LSB$ .

## ۲.۱ تبدیل مبنا از ۲ به ۱۰ یا بلعکس

در تبدیل مبنا از ۲ به ۱۰ میبایست به صورت عادی با استفاده از ارزش مکانی هر عدد $2^0$ و $2^1$ و... یا به صورت خودمان ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴،... و در نهایت هر قسمتی که بیت روشن یا ۱ داشت را نتیجه را با هم جمع میکنیم.

## ۳.۱ تبدیل مبنا از ۲ به ۱۰

تمرین:

- $(11001)_{2\to10} = (1*1) + (1*8) + (1*16) = 1 + 8 + 16 = 25$
- $(1111001)_{2\to10} = (1*1) + (1*8) + (1*16) + (1*32) + (1*64) =$
$1 + 8 + 16 + 32 + 64 = (121)_{10}$
- $(100011111)_{2\to10} = (1*1)+(1*2)+(1*4)+(1*8)+1*16)+(1*256) = (281)_{10}$

## ۴.۱ تبدیل مبنا از ۱۰ به دو

همانطور که در بالاتر گفته شد در تبدیل مبنا از ۱۰ به ۲ یا به هر مبنای دیگر میتوانیم هب راحتی از تقسیم پی در پی ۱۰ در مبانی مورد نظر با استفاده از باقی مانده ها به جواب نهایی برسیم.
تمرین:

- $(34)_{10\to2} = 100010$ $(34)_{10\to2} =$

## ۵.۱ تبدیل مبنا از ۱۰ به هشت و برعکس

- $(972)_{10\to8} =$
$(972)_{10\to8} = (1714)_8$
- $(1637)_{8\to10} = (7*8^0) + (3*8^1) + (6*8^2) + (1*8^3) = (927)_{10}$

| Calculate | مانده باقی |
| --- | --- |
| ۳۴ / ۲ = ۱۷ | ۰ |
| ۱۷ / ۲ = ۸ | ۱ |
| ۸ / ۲ = ۴ | ۰ |
| ۴ / ۲ = ۲ | ۰ |
| ۲ / ۲ = ۱ | ۰ |
| ۱ / ۲ = | ۱ |

| Calculate | مانده باقی |
| --- | --- |
| ۹۷۲ / ۸ = ۱۱۵ | ۷ |
| ۱۱۵ / ۸ = ۱۴ | ۳ |
| ۱۴ / ۸ = ۱ | ۶ |
| ۱ / ۸ = ۰ | ۱ |

## ۶.۱ تبدیل اعداد صحیح از مبنای ۱۰ به ۱۶ و برعکس

برای تبدیل مبنا از ۱۰ به ۱۶ درست مثل قبل از تقسیم پیا پی ۱۰ در ۱۶ استفاده خواهیم کرد:

- $(954)_{10_{\rightarrow 16}}$ $(954)_{10_{\rightarrow 16}} = (3BA)_{16}$

| Calculate | مانده باقی |
| --- | --- |
| ۹۵۴ / ۱۶ = ۵۹ | ۱۰→ A |
| ۵۹ / ۱۶ = ۳ | ۱۱→ B |
| ۳ / ۱۶ = ۰ | ۳ |

- $(3BA)_{16_{\rightarrow 10}} = (10 * 16^0) + (11 * 16^1) + (3 * 16^2) = 954$

## ۷.۱ تبدیل اعشاری دهدهی به دودویی و برعکس

مهم ترین بخش تبدیل مبناها زمانیست که شما با مبنایی اعشاری رو به رو میشوید، در حالت تبدیل مبنا از دودویی به سیستم دهدهی، قسمتی که به صورت صحیح است را طبق معمول محاسبه می کنیم، و آن قسمتی که بعد از اعشار قرار دارد، به صورت ...$2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}$ محاسبه خوهیم کرد و در نهایت نتیجه قسمت صحیح را به نتیجه قسمت اعشاری قرار خواهیم داد:

۱. $(1110.01)_{2\to 10} =$

$(1110)_{2\to 10} = 14$

$(.01)_{2\to 10} = (0 * 2^{-1}) + (1 * 2^{-2}) = \frac{1}{4}$

$\to 14 + \frac{1}{4} = \frac{56}{4} + \frac{1}{4} = \frac{57}{4} = 14.25$

۲. $(10111001.0101)_{2\to 10} =$

$(10111001)_{2\to 10} = 185$

$(0.0101)_{2\to 10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$

$\to 185 + 0.3125 = 185.3125$

حلا نوبت به انجام تبدیل مبنا ۱۰ به ۲ میرسد، در این بخش، طبق معمول آن قسمتی که سمت صحیح عدد قرار دارد را به صورت عادی از ۱۰ به ۲ تبدیل میکنیم، اما آن بخشی که به صورت اعشاری است را باید کمی توجه کنیم، قسمت اعشاری را ضرب ۲ میکنیم، و حاصل آن را بررسی میکنیم و قسمت صحیح حاصل را به عنوان نتیجه تقسیم اول در نظر میگیرم، و آن بخش اعشاری را (فقط اعشاری) دو باره ضرب در دو میکنیم، انقدر این ضرب را انجام میدهیم که قسمت اعشاری به صفر برسد، ممکن است در طی این عملیات تعداد ضرب کردن به ۲ زیاد شود، در این مواقع تا هشت مرحله ضرب کردن کافی است (قاعده پرشدن حافظه ۸ بیت). لازم به ذکر است که در تمامی تبدیل های سیستم دهدهی به هر مبنای دیگیری، مانند باینری یا اکتال یا سه سه ای، چهارچهاری و غیره دقیقا همان عملیاتی که گفته شد صورت میگیرد، هم بخش تقسیم پیاپی در قسمت صحیح، هم ضرب متناوب در قسمت اعشاری.

تمرین:

۱. $(12.25)_{10\to 2} =$

$(12)_{10\to 2} = (1100)_2$

$(0.25)_{10\to 2} =$

| | |
|---|---|
| ۲۵.۰ * ۲ = ۵.۰ | ۰ |
| ۵.۰ * ۲ = ۰.۱ | ۱ |

بعد از اینکه عدد اعشار حاصل دومین ضرب برابر با صفر شد دیگر نیازی به ضرب کردن نیست و از همان دو عدد نتیجه ۰ و ۱ استفاده میکنیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$\to (1100.01)$

۲. $(15.361)_{10\to 2} =$

$(15)_{10\to 2} = (1111)_2$

$(0.361)_{10\to 2} =$

| | |
|---|---|
| ۳۶۱.۰ * ۲ = ۷۲۲.۰ | ۰ |
| ۷۲۲.۰ * ۲ = ۴۴۴.۱ | ۱ |
| ۴۴۴.۰ * ۲ = ۸۸۸.۰ | ۰ |
| ۸۸۸.۰ * ۲ = ۷۷۶.۱ | ۱ |
| ۷۷۶.۰ * ۲ = ۵۵۲.۱ | ۱ |
| ۵۵۲.۰ * ۲ = ۱۰۴.۱ | ۱ |
| ۱۰۴.۰ * ۲ = ۲۰۸.۰ | ۰ |
| ۲۰۸.۰ * ۲ = ۴۱۶.۰ | ۰ |

$\to (1111.01011100)$

## ۸.۱ تبدیل اعداد مبنای دو به مبنای هشت و برعکس

برای تبدیل مبنای دو به هشت فقط کافی است از سمت راست به چپ سه بیت سه بیت جدا کنیم و براساس ریتم ۱، ۲، ۴ آنها را باهم جمع کنیم، نکته ای که در این میان باید توجه کنیم ان است که اگر تعداد ارقام مضربی از سه نباشد، بایستی از سمت چپ، عدد صفر اضافه کنیم.

مثال/تمرین:

۱. $(11001)_{2\to 8} =$
$(011'001)_{2\to 8} = (31)_8$

۲. $(1110001)_{2\to 8} =$
$(001'110'001)_{2\to 8} = (161)_8$

۳. $(100111)_{2\to 8} =$
$(100'111)_{2\to 8} = (47)_8$

تبدیل مبنا اعشاری از دو به هشت:
این نوع تبدیل مبناهم بایستی در نظر داشته باشیم که بهتر به دوقسمت صحیح و اعشاری تقسیم می شود، در قسمت اعشاری اگه تعداد ارقام مضربی از ۳ بود میتوان به صورت سه تا سه از راست به چپ ازجدایی را انجام داد، در غیر این صورت باید از سمت چپ به تعداد لازم ۰ اضافه کنیم. در قسمت اعشاری هم همین قاعده صادق است، با این تفاوت که اگه تعداد ارقام سمت اعشار مضربی از ۳ نبود این بار بایسیتی از سمت راست به تعداد لازم صفر وارد

کنیم.

۱. $(10011.1101)_{2\to8} =$
$(010'011)_{2\to8} = (23)_8$
$(0.110'100)_{2\to8} = (64)_8$
$\to (23.64)_8$

تبدیل برعکس ۸ به ۲ هم دقیقا به همین صورت است.

۱. $(10101.0111)_{2\to8} =$
$(010'101)_{2\to8} = (25)_8$
$(011'100)_{2\to8} = (34)_8$
$\to (25.34)_8$

۲. $(25.34)_{2\to8} =$
$(010'101)_{2\to8} = (25)_8$
$(011'100)_{2\to8} = (34)_8$
$\to (10101.0111)_2$

۳. $(55.67)_{2\to8} =$
$(101'101)_{2\to8} = (55)_8$
$(110'111)_{2\to8} = (67)_8$
$\to (101101.110111)_2$

## ۹.۱ تبدیل مبنا ۲ به ۱۶ و برعکس

در تبدیل مبنا از ۲ به ۱۶ هم دقیقا مانند مبنای ۸ است که، بطوری که باید تعداد ارقام ضریبی از ۴ باشند و در هنگام اعشاری شدن هم باید برای جبران کسری صفر در سمت چپ برای عدد صحیح و در سمت راست برای عدد اعشاری.

۱. $(1111101)_{2\to16} =$
$(0111'1101)_{2\to16} = (7D)_{16}$

۲. $(1011101100)_{2\to16} =$
$(0010'1110'1100)_{2\to16} = (2EC)_{16}$

۳. Decimal ۲ to ۱۶ $= (1111101.0110)_{2\to16}$

$(0111'1101)_{2\to16} = (7D)_{16}$

$(.0110)_{2\to16} = 6$

$\to (7D.6)_{16}$

۴. ۱۶ to ۲ $= (F25.03)_{16\to2}$

$(F25)_{16\to2} = (1111'0010'0101)_2$

$(.03)_{16\to2} = (0000'0011)_2$

$\to (111100100101.00000011)_2$

## ۱۰.۱ تبدیل اعداد مبنای ۸ به ۱۶ و برعکس

۱. $(A36)_{16\to8} =$

$(1010'0011'0110)_{16\to2} = (101000110110)_2$

$(101'000'110'110)_{2\to8} = (5066)_8$

۲. $(753)_{8\to16} =$

$(111'101'011)_{8\to2} = (111101011)_2$

$(0001'1110'1011)_{2\to16} = (1EB)_{16}$

**Extra**

ممکن است بخواهیم از عددی که به صورت دسیمال است متوجه بشویم که این عدد در مبنای دو چند بیتی است، برای این کار، چون که در مبنای دو هستیم، پس بر پایه توانی از ۲ پیش میرویم، به همین خاطر عددی که بدست خواهید آورد بایستی از عدد دسیمال گفته شده بزرگ تر مساوری باشد. مانند:

$(768)_{10\to2}$

$2^8 = 256 - 1 >= 768$

$2^9 = 512 - 1 >= 768$

$2^{10} = 1024 - 1 >= 768$

پس متوجه خواهید شد که عدد ۷۶۸ وقتی به بانیتری تبدیل میشود ۱۰ بیتی خواهد بود.

## ۱۱.۱ متمم ها یا (Complements)

متمم ها در کامپیوتر های دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار میروند. ساده سازی عملیات منجر به پیاده سازی مدارات ساده تر میگردد. در هر مبنایی مانند r، دو نوع متتم وجود دارد: یکی متمم مبنا و دیگری متمم کاهش یافته. فرم اول به نام متتم r و دومی به متمم $r-1$ مرسوم است. وقتی که مقدار مبنا(یا پایه) را جایگذین کنیم، برای اعداد دودویی، متمم ها ی۲ و ۱ و برای دهدهی، متمم های ۱۰ و ۹ را خواهیم داشت.

**دو نوع متتم برای هر عدد در مبنای r وجود دارد:**

- متمم مبنا یا مکمل r
- متمم مبنای کاهش یافته یا مکمل $r-1$

اگر عدد N در مبنای r شامل n رقم باشد:

- متمم مبنا $r^n - N$
- متمم مبنای کاهش یافته $(r^n - 1) - N$

**نکته بسیار مهم:** $r^n$ در هر مبنایی برابر است با $1 + n(0)$

برای مثال در $16^3$ درست است که برابر با ۴۰۹۶ میشود اما این عدد بدست آمده در واقع در مبنای ۱۰ است نه در مبنای ۱۶، بهمین خاطر بایستی عدد حاصله را در مبنای ۱۶ تبدیل کنیم، که با توجه به قاعده بالا ما خواهیم داشت یک عدد ۱ به همراه تعداد ارقام صفر یعنی ۱۰۰۰

$$2^3 = 1000\ 10^3 = 1000_{10}\ 8^3 = 1000_8\ 16^3 = (1000)_{16}$$

اما، باید توجه داشته باشیم که هر کدام از اعداد بدست آمده بالا در حقیقت آنچیزی که نشان میدهد، نیست، فقط عدد ۱۰۰۰ در مبنای ۱۰ است، که حقیقتا برابر این مقدار است، بقیه حالت ها در حالت ماکسیموم خود قرار دارند، یعنی ۱۰۰۰ در مبنای ۸ برابر با ۷۷۷ است.

و به یاد داشته باشید که در بدست اوردن مبنایی مانند ۸ و هر مبنایی به غیر از ۲ و ۱۰ (برای مثال در اینجا هشت آورده شده)، مقدار ۷۷۷ درواقع مقدار متمم کاهش یافته را به شما بر میگرداند.

و همچنین در این مبنا یعنی مبنای۸، همانطور که گفته شد با ۷۷۷ شما مکمل کاهش یافته را بدست خواهید آورد، برای بدست آوردن مکمل یا متمم ۸ بایستی در نظر داشته باشید

اگر عدد مبنای هشت شما در انتها دارای صفر بود، مانند ۱۲۰، ۴۰۳۰۰، یا هر عددی که به تعداد صفر ختم شده باشد، در جواب این مسئله با تعداد عدد ۷ در اخر عدد مواجه میشوید، برای داشتن متمم مبنای ۸ همین تعداد ۷ پایانی را کافیست برابر با صفر قرار دهیم و یک عدد به عدد بعد از آن اضافه کنیم

لازم به ذکر است که در هر مبنایی به غیر از ۱۰ و دو در بدست آوردن متمم ها، شما همیشه متمم کاهش یافته را بدست می آورید!

مثال های مهم برای این نکته:

$(123)_8 = 8^3 - 123 = 777 - 123 = 654 reduce.654 + 1 = 655 radix$

$(1230)_8 = 8^3 - 1230 = 7777 - 1230 = 6547 reduce.6547.6540 + (4 + 1) \rightarrow 6550$

این مورد تنها در مبنای ۸ نیست بلکه در مبناهای طبیعی دیگر، مانند ۳، ۴، ۵، ... نیز وجود دارد.

**نتیجه گیری نهایی** اگر، مبنای ۱۰ دادن برای مکمل و مکمل کاهش، از قاعده بومی $r^n - n$ و $(r^n - 1) - n$ استفاده میکنیم که مبنا به توان تعداد ارقام برابر با همان ۱ با تعدادی صفر در جلوش است. در مبنای دو هم که طبق تعریف نیازی به دوباره کاری نیست، و فقط به قاعده ای که در چند خط بالا گفته شد دقت کنید.

**متمم اعداد**

متمم ۱۰ عدد ۵۴۶۷۰۰ برابر است با

$10^6 - 546700 = 453300$

متمم ۹ عدد ۵۴۶۷۰۰ برابر است با

$(10^6 - 1) - 546700 = 453299$

روش سریع دیگر آن است که اگر به ما مبنا را دادند میتوانیم با یکی کم کردن از آن به مبنای کاهش یافته آن برسیم، و برعکس، اگر متمم مبنای کاهش یافته را به ما دهند میتوانیم با یکی اضافه کردن به آن به متمم مبنا برسیم!

متمم ۲ عدد ۱۱۰۱۱۰۰ برابر است با:

۱۰۸ = ۱۱۰۱۱۰۰

$2^7 - 108 = (20)_{10} = (10100)_2$

متمم ۱ عدد ۱۱۰۱۱۰۰ برابر است با:

$(2^7 - 1) - 108 = (19)_{10 \rightarrow 2} = (0010011)_2$

**متمم اعداد در مبنای ۲ به سریع ترین روش**

**نکات**

متمم۱: تمام ارقال NOT میشود. متمم ۲: تمام صفر های سمت راست تا زمانی که به اولین یک از سمت راست برسیم همان طور به شکل اول خود باقی می ماند، اما از آن به بعد بیت های بعدی NOT میشود.

متمم ۱ عدد ۰۰۱۱۰۱۱ برابر است با: ۱۱۰۰۱۰۰
متمم ۲ عدد ۱۱۰۱۱۰۰ برابر است با: ۰۰۱۰۱۰۰

**این همه گفتیم، پس در سیستم ۱۶ تایی چطوره؟**

برای بدست آوردن مکمل ۱۶ و مکمل کاهشی آن (۱۵) بایستی بدانیم که ماکسیموم برای n رقم مثل $16^3 = (1000)_{16}$ اخرین درجه برای مقدار ۱۰۰۰، ۱۵ ۱۵ ۱۵ است که میبایستی این عدد را از مبنای ۱۶ کم کنیم تا آنگاه مبنای کاهش یافته را بدست بیاوریم.

مثال

$$(A86)_{16} = 16^3 = 1000_{16} - A86 = 151515 - 1086 = 579 Reduce ... 579(9+1 = 10 = A) = 5710 or 57A$$

**تمرین**

۱. مبنا ۱۰ و مکمل ۹ عدد $(256.73)_{10}$ را بنویسید.

۲. مبنا ۱۰ و مکمل ۹ عدد $(325.12)_{10}$ را بنویسید.

۳. هر دو مقدار ۹ و ۱۰ $(256.73)_{10}$

۴. هر دو مقدار ۹ و ۱۰ $(325.12)_{10}$

۵. هر دو مقدار ۷ و ۸ $(276.35)_8$

۶. هر دو مقدار ۹ و ۱۰ $(9300)_{10}$

۷. $(304000)_8$

۸. $(11110100)_2 = 00001100$

## ۱۲.۱ اعداد علامت دار

اعداد را میتوان به ۴ روش نمایش داد:

- روش بدون علامت:
  عدد را به صورت عادی ارزش گذاری میکنیم و در نهایت نتیجه را مینویسیم
- روش مقدار علامت:
  سمت چپ ترین بیت نشان دهنده علامت عدد است.
- نمایش عدد به صورت مکمل یک
- نمایش عدد بصورت مکمل ۲

**نکته**

- در روش مقدار علامت، بیت صفر نشان دهنده مثبت بودن و بیت یک نشان دهنده منفی بودن است.
- در مکمل یک عدد را به صورت مکمل یک نمایش میدهیم.
- در مکمل ۲ عدد را بصورت مکمل دو نمایش میدهیم.

**مثال**

عدد ۸ بیتی $(10010100)_2$ راب به مبنای دهدهی تبدیل کنید با فرض اینکه:

۱. این عدد در سیستم بی علامت باشد. $(10010100)_2 = 4 + 16 + 128 = 148$

۲. این عدد در سیستم علامت مقدار باشد. $(10010100)_2 = -(4 + 16) = -20$

۳. این عدد در سیستم مکمل ۱ باشد.
$(10010100)_2 = -(01101011) = -(1 + 2 + 8 + 32 + 64) = -107$

۴. این عدد در سیستم مکمل ۲ باشد.
$(10010100)_2 = -(01101100) = -(4 + 8 + 32 + 64) = -108$

**مثال**

عدد ۸ بیتی $(01000101)_2$ راب به مبنای دهدهی تبدیل کنید با فرض اینکه:

۱. این عدد در سیستم بی علامت باشد. $(01000101)_2 = 69$

۲. این عدد در سیستم علامت مقدار باشد. $(01000101)_2 = +69$

۳. این عدد در سیستم مکمل ۱ باشد.
$(01000101)_2 = +(10111010) = 2 + 8 + 16 + 32 + 128 = +186$

۴. این عدد در سیستم مکمل ۲ باشد. $(01000101)_2 = +(10111011) = +187$

**نکته مهم**

گاهی ممکن است بخواهیم عددی را منفی اش را به صورت دودویی بنویسیم اما باید یک نکته مهمی را مورد نظر داشته باشیم، برای مثال اگر از ما بخواهند که عدد ۹ را نمایش دهیم آن را به صورت $(1001)_2$ نشان میدهیم، اما اگر از ما بخواهند که منفی این عدد را نمایش بدهیم نمی توان آنرا به این صورت $(11001)_2$ نشان داد، در حقیقت بازهم به جواب ۹ـ خواهیم رسید اما در ۵ بیت معنایی ندارد، چرا که کامپیوتر همه اعداد در در تعدادی از توان های دو نمایش میدهد مانند ۴ بیت، ۸ بیت، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸ و غیره. پس برای نشان دادن عدد ـ ۹ باید به این صورت بنویسیم: $(-9)_{10} = (1000,1001)_2$

## ۱۳.۱ عملیات روی اعداد بدون علامت در مبناهای مختلف

انسان برای شمارش و انجام عملیات ریاضی (جمع و تفریق و ضرب و تقسیم) از مبنای ۱۰ استفاده میکند، دلیل این انتخاب توسط انسان، تعداد انگشت های دست او بود. جدول ضرب هم بر اساس مبنای ۱۰ نوشته شده است. اما اگر ما ۸ انگشت داشتیم مجبور بودیم از مبنای ۸ استفاه کنیم. در این صورت دیگر جمع و تفریق ما بر اساس مبنای ۸ است که جواب هایی که از مبنای ۱۰ در محاسبات ریاضی بدست می آوریم در مبنای ۸ بسیار متفاوت است. یعنی ۷ x ۶ != ۴۲، ۱۲ ـ ۵ != ۷، ۷ + ۱ != ۸. پس میفهمیم که محاسبات در مبناهای غیر ۱۰ برای ما بسیار سخت و دشوار است. زیرا ما وقتی عملیات ساده مبناهای غیر از ۱۰ را حفظ نیستیم پس میتوانیم مسائل را به زبان خودمان یعنی مبنای ۱۰ ترجمه کنیم و در همین مبنا محاسبات را انجام دهیم و سپس به مبنای خواسته شده توسط مسئله تبدیل میکنیم. در مورد عملیات جمع و تفریق، میتوانیم از مبنای ۱۰ استفاده نکنیم و از جدول کمک بگیریم.

**جمع اعداد در مبناهای غیر ۱۰**

تمرین:

- $(101101)_2 + (010111)_2 =$
- $(276)_8 + (357)_8 =$
- $(276)_{10} + (357)_{10} =$
- $(2A58)_{16} + (71D0)_{16} =$
- $(2F2C)_{16} + (2FAA)_{16} =$

**جمع دو عدد در مبنای ۲**

$(111101)_2 + (10111)_2 = (1010100)_2$

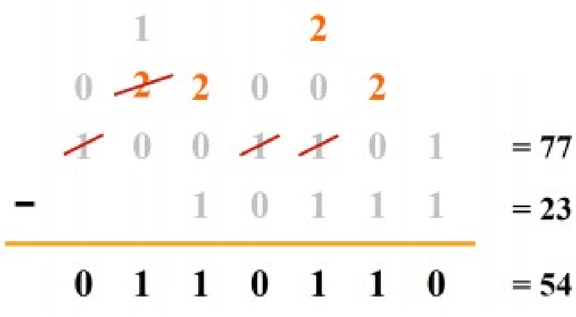
در هنگام جمع دو عدد باینری باید توجه داشت که اگر جمع اول با دومی بیشتر از ۱ شد، در حقیقت عدد بدست آمده در مبنای ۱۰ است، به همین خاطر این عدد را بایستی به مبنای دو سریعا تبدیل کنیم، و با بخش بعدی به جمع بپردازیم. بعد از اینکه حاصل خود را به صورت عدد دودویی بدست اوردیم، برای بررسی آن میتوانیم، صورت اول جمع را به سیستم دهدهی و صورت دوم هم همینطور تبدیل کرده و سپس باهم جمع کنیم، و در نهایت حاصل را به مبنای ده برده و در آخر بررسی برابر خود را انجام میدهیم، این بررسی نشان دهنده آن است که حاصل بدست آمده در مبنای دو چقدر امکان خطا دارد، در ادامه صحبت خواهیم کرد.

## ۱۴.۱ تفریق دو عدد بی علامت در مبنای ۲ به روش مستقیم (قرض گرفتن)

در این نوع محاسبه تفریق همانند تفریق سیستم دهدهی عمل میکنیم، همان طور که در سیستم دهدهی هرگاه به عدد ۰ میرسیم که بر روی عددی غیر ۰ تفریق کنیم به صفر، ده عدد قرض میدادیم و از خانه بعدی صورت یکی کم میکردیم، در تفریق مبنای دو هم، دقیقا همچنین اتفاقی رخ می دهد، شما زمانی که در صورت به عدد صفر میرسید که در عدد پایینی عددی غیر صفر قرار دارد، تا سقف دو، به عدد صفر قرض میدهید و یکی از خانه بعدی عدد کم میکنید و عمل تفریق در مبنای دو هم به آسانی صورت خواهد گرفت

**مثال**

$$(1001101)_2 - (10111)_2 = (0110110)_2$$




شکل ۱: مثالی از تفریق در مبنای دو

## ۱۵.۱ جمع و تفریق اعداد علامت دار

به روش های متداول قبلی قابل انجام است.

معمولا در کامپیوتر در سیستم مکمل ۲ انجام می شود.

بایستی همه عملوند ها را به سیستم مکمل ۲ ببریم

جواب نهایی در سیستم مکمل ۲ بدست خواهد آمد، باید برای خواندن آن دقت کنیم.

### ۱.۱۵.۱ جمع دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

جمع در سیستم مکمل ۲، بدون توجه به مثبت یا منفی بودن اعداد، آنها را زیر هم نوشته و جمع میکنیم، از رقم نقلی خروجی صرف نظر میکنیم یعنی آنرا حذف می کنیم.
**مثال: حاصل عملیات جمع را در ۴ بیت در سیستم مکمل دو حساب کنید:**
نکته ای که در این مسئله باید به آن توجه داشته باشید، آن است که در هنگام جمع به صورت بی علامت پیش میرویم، برای بررسی هر کدام از صورت جمع ها، آن عددی که بیت علامتش ۰ است که به صورت دهدهی عادی تبدیل میشود، در غیر این صورت بایستی اول به صورت مکمل ۲ نوشته شده و بعد به مبنای ۱۰ تبدیل شود.

۱. $(0001)_{2_{(+1)}} + (1001)_{2_{(-7)}} = (1010)_{2_{-(6)}}$

۲. $(0010)_{2_{(+2)}} + (0111)_{2_{(7)_{2+7=9}}} = (1001)_{2_{-(0111 \to -7)}}$
در مثال بالا در حقیقت Overflow رخ داده که جواب اشتبا بدست آمده است. و فلگ کری ۱ خواهد شد چرا که یک بیت اضافی دارد.

۳. $(0011)_{2_{(+3)}} + (0100)_{2_{(+4)_{+3+4=7}}} = (0111)_{2_{+(7)}}$

۴. $(1001)_{2_{(-7)}} + (0111)_{2_{(+7)_{7-7=0}}} = ([1]0000)_{2_{(0)}}$
در مثال بالا، [۱] به این خاطر حذف شده چرا که حاصل بدست آمده بیشتر از ۴ بیت میشد.

**نکته:**
در هنگام جمع دو عدد در مبنای دو، اگر برای مثال صورت اول و صورت دوم هر دو مثبت باشند و در نهایت در نتیجه عددی منفی را داشته باشیم، اورفلو رخ خواهد داد، برای تصحیح این مشکل فقط کافیه است که از روش Sign Extended استفاده کنیم، که اگر ۴ بیتی باشد می شود، هشت بیت، اگر هشت بیتی باشد میشود ۱۶ بیت الی آخر. این طور می توان به جواب درست دست پیدا کرد(تکرار عدد اخر).
برای مثال، در تمرین دوم بالا، ما اورفلو داریم چرا که نتیجه بدست آمده با جمع کلی درست نیست، یا اینطور جمع دو عدد مثبت باید مثبت شود اما نتیجه منفی شده است، برای بدست آوردن نتیجه درست از Sign Extended استفاده کنیم:
$(0000,0010)_2 + (0000,0111)_2 = (0000,1001)_2$

در بالا بیت علامت صفر، اورو فلو صفر، فلگ صفر، صفر و کری هم صفر خواهد بود، و نتیجه بدست امده هم مثبت.

## ۱۶.۱ Overflow سرریز

اعداد در کامپیوتر با طول محدود و تعداد بیت های مشخص به کاربرده می شوند.اگر نیتجه محاسبات خارج از این محدوده شود و بیت های بیشتر در دسترس نبایشد، این بیت های اضافی حذف خواهند شد و نتیجه بدست آمده صحیح نخواهد بود. در این حالت می گوییم در انجام محاسبه سرریز اتفاق افتاده است.
فلگ v یا of $(Overflowflag)$ : این فلگ وقتی ۱ میشود که از نتیجه محاسبات در بازه مجاز تعداد بیت نباشد، در این حالت میگوییم اورفلو یا سرریز رخ داده است.
در ادامه مطالب حتما مثال هایی در این خصوص زده خواهد شد.

## ۱۷.۱ بازه مختلف ساخت اعداد در سیستم های مختلف با کمک n بیت

در سیستم بی علامت:

$0-(111...1)_2=2^n-1$

در سیستم علامت و مقدار:

$(111...1)_2=-(2^{n-1}-1)-(111...1)_2=(2^{n-1}-1)$

سیستم مکمل یک:

$(111...1)_2=-(2^{n-1}-1)-(111...1)_2=(2^{n-1}-1)$

سیستم مکمل دو:

$(111...1)_2=-(2^{n-1})-(111...1)_2=(2^{n-1}-1)$

## ۱۸.۱ تشخیص سرریز دو عدد بدون علامت

در جمع اعداد در سیستم بدون علامت، اگر پس از جمع دو علامت رقم، رقم اخر (نقلی و نهایی) یک شود، سرریز اتفاق خواهد افتاد.

$(1101)_2+(1100)_2=([1](1001))_2$

## ۱۹.۱ تشخیص سرریز در اعداد علامت دار مکمل ۲

**نکته:**

اگه جمع دو عدد منفی، مثبت شود یا جمع دو عدد مثبت منفی شود، سرریز رخ میدهد. دقت

داشته باشید، جمع دو عدد مثبت و منفی باهم، سرریز ندارد.

اگر دو عدد A و B در سیستم مکمل ۱ و ۲ باشند، آنگاه A+B در صورتی سرریز خواهد بود که:

۱. اگر A و B هر دو مثبت باشند و نتیجه منفی را بدهند.
۲. اگر A و B منفی باشند و نتیجه مثبت را بدهند.

**نتیجه:**
اگر دو عدد با علامت های مختلفی داشته باشیم هیچگاه اورفلو رخ نخواهد داد.

اگر دو عدد A و B در سیستم مکمل ۱ یا ۲ باشند، آنگاه A-B در صورتی سرریز خواهد بود که:

۱. A مثبت باشد و B منفی باشد، و حاصل آنها منفی شود.
درستش:
$(A_+) - (B_-) = (+)$
۲. A منفی باشد و B عددی مثبت، حاصل آن مثبت شود
درستش:
$(A_-) - (B_+) = (-)$

دیگر نکته بر روی دیگر فلگ های سادست که مختصرا بیان میکنیم:
فلگ zero زمانی ۱ میشود که حاصل بدست آمده برابر با صفر باشد در غیر این صورت ۰ خواهد بود.
فلگ carry زمانی ۱ میشود که بیت اضافی وجود داشته باشد.
فلگ sign زمانی یک میشود که بیت علامت ما منفی باشد.
فلگ اورفلو زمانی یک میشود که حاصل بدست آمده با جمع منطقی ما (اگر عدد صورت اول منفی بود به مکمل ۲ میبریم در غیر این صورت بصورت ساده جمع را انجام میدهیم) برابر نباشد.(با توجه به قوانینی که در بالاتر توضیح داده شد)

**حل چند تمرین:**

۱. $(1001)_{2_{2c(-7)}} + (0111)_{2_7} = ([1]0000)_{2_{(0)}}$
carry = ۱، Zero = ۱، Of = ۰، sign = ۰

۲. $(1101)_{2_{2c=(-3)}} + (1110)_{2_{2c=(-2)}} = ([1]1011)_{2_{2c=(-5)}}$
carry = ۱، Zero = ۰، Of = ۰، sign = ۱

۳. $(0101)_{2_{(5)}} + (0100)_{2_4} = (1001)_{2_{2c=(0111=>-7)}}$
carry = ۰، Zero = ۰، Of = ۱، sign = ۱

۴. $(1001)_{2_{2c=(-7)}} + (1010)_{2_{2c=-6}} = ([1]0011)_{2_{(3)}}$
carry = ۱، Zero = ۰، Of = ۱، sign = ۰

| | | | |
|---|---|---|---|
| + 6 | 00000110 | − 6 | 11111010 |
| +13 | 00001101 | +13 | 00001101 |
| +19 | 00010011 | + 7 | 00000111 |
| + 6 | 00000110 | −6 | 11111010 |
| −13 | 11110011 | −13 | 11110011 |
| − 7 | 11111001 | −19 | 11101101 |

شکل ۲: تمرین از جمع اعداد در سیستم مکمل ۲

## ۱.۲۰ تفریق دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

در هنگام تفریق دو عدد در مکمل ۲، میتوانیم عدد A را با مکمل عدد B جمع کنیم. و این جمع مانند جمعی است که در بالاتر توضیح داده شد. **حل چند تمرین:**

۱. $(1101)_2 - (1001)_2 \rightarrow (1101)_{2_{2c=(-3)}} + (0111)_7 = ([1]0100)_2$
carry = ۱، Zero = ۰، Of = ۰، sign = ۰

۲. $(1100)_2 - (1010)_2 \rightarrow (1100)_{2_{2c=(-4)}} + (0110)_6 = ([1]0010)_2$
carry = ۱، Zero = ۰، Of = ۰، sign = ۰

۳. $(1001)_2 - (0100)_2 \rightarrow (1001)_{2_{2c=(-7)}} + (1100)_{2c(-4)} = ([1]0101)_2$
carry = ۱، Zero = ۰، Of = ۱، sign = ۰

**مثال:**
با فرض دو عدد دودویی x = ۱۰۱۰۱۰۰ و Y = ۱۰۰۰۰۱۱ تفریق های زیر را انجام دهید.

۱. $X - Y$
حل:
$(1010100)_2 - (1000011)_2 \rightarrow (1010100)_{2_{2c(-44)}} + (0111101)_{2_{61}} =$
$([1]0010001)_{2_{17}}$
۰= sign ،۰ = Of ،۰ = Zero ،۱ = carry

۲. $Y - X$ حل:
$(1000011)_2 - (1010100)_2 \rightarrow (1000011)_{2_{2c(-61)}} + (0101100)_{2_{44}} =$
$(1101111)_{2_{-17}}$
۱= sign ،۰ = Of ،۰ = Zero ،۰ = carry

پس در هنگام تفریق دو عدد $A - B$ خواهیم داشت:
اگر $A > B$ پس عددی مثبت خواهیم داشت، و فلگ سر ریز با فلگ علامت صفر خواهد بود.
اگر $A < B$، پس عددی منفی خواهیم داشت که هم فلگ علامت و هم فلگ اورفلو ۱ خوهد بود.
اگر $A = B$، در این صورت هر دو یکسان هستند پس جواب صفر را خواهیم داشت که فلگ Zero روشن خواهد شد.

## ۲۱.۱ سیستم D۲B

این نوع اعداد به زبان خودمانی، فقط در نقش مبنای دو ظاهر می شوند وگرنه از نظر ماهیتی همان اعداد Decimal هستند، این اعداد زمانی مورد استفاده قرار میگیرند که برای تبدیل اعداد Decimal به آنها جایگاه اعداد برایمان مهم نیست، بلکه معنا و مفهوم آن عدد برایمان مهم است، مثلا شما شماره دانشجویی یا یک شماره تلفن یک منطقه را در نظر بگیرید، که هر کدام از اعداد نشان دهنده و به معنای خاصی هست، این اعداد هیچ لزومی ندارد که صرفا دودویی باشند، برای تبدیل اعداد Decimal به اعداد شبه باینری به چهار بیت به ازای هر عدد نیاز است، مانند تبدیل اعداد سیستم $Hex$. این اعداد قابل درک هستند، نسبت به اعداد باینری فضای بیشتری را میگیرند و اصلا برای محاسبات جمع و تفریق مناسب نیستند!

### ۱.۲۱.۱ کد کردن اعداد دهدهی

- کدهای باید به صورت دودویی باشند، زیرا در کامپیوتر همه چیز صفر و یک است.

- کدها فقط نماد یا سمبل نمایش اطلاعات را عوض میکنند و نه مفهوم آن ها را.
- یک کد دودویی n بیت، $2^n$ ترکیب ممکن از یک ها و صفرها را داراست.

کد ها به دو دسته تقسیم می شوند:
کدهای وزن دار: به هر مکان یک وزن اختصاص داده می شود مثل کد BCD، که دارای وزن $8421$ است.
کد های بدون وزن: مثل کد افزودنی ۳، که میتوانیم با اضافه کردن ۳ عدد به کد BCD به کد Excess-۳ رسید.

| Decimal Digit | BCD 8421 | Excess-3 | 84-2-1 | 2*421 | Biquinary 5043210 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 0011 | 0000 | 0000 | 0100001 |
| 1 | 0001 | 0100 | 0111 | 0001 | 0100010 |
| 2 | 0010 | 0101 | 0110 | 0010 | 0100100 |
| 3 | 0011 | 0110 | 0101 | 0011 | 0101000 |
| 4 | 0100 | 0111 | 0100 | 0100 | 0110000 |
| 5 | 0101 | 1000 | 1011 | 1011 | 1000001 |
| 6 | 0110 | 1001 | 1010 | 1100 | 1000010 |
| 7 | 0111 | 1010 | 1001 | 1101 | 1000100 |
| 8 | 1000 | 1011 | 1000 | 1110 | 1001000 |
| 9 | 1001 | 1100 | 1111 | 1111 | 1010000 |

شکل ۳: سایر کد های Decimal

در سیستم کد، $8، 4\,\bar{2}\,\bar{1}$ شما می توانید طبق وزن ها از کد BCD به کد مورد نظر خود برسید.

در سیستم کد، ۲۴۲۱ از صفر تا ۴، وزنمان را از سمت راست تعیین میکنیم، اما از خود پنج به بعد از سمت چپ به عنوان تعیین وزن استفاده خواهیم کرد.

**مثال**

عدد $(82)_{10}$ را به صورت، مبنای ۲، BCD، Excess-۳، $8\,4\,\bar{2}\,\bar{1}$، ۲۴۲۱، کد کنید.

۱. $(82)_{10\to 2} = (1010010)_2$

۲. $(82)_{10} = (1000,0010)_{BCD}$

۳. $(82)_{10} = (1000,0010)_{BCD\to(excess-3)+3} = (1011,0101)_{Excess-3}$

۴. $(82)_{10} = (1000,0010)_{BCD\to 84\overline{2}\overline{1}} = (1000,0110)_{84\overline{2}\overline{1}}$

۵. $(82)_{10} = (1000,0010)_{BCD \to 2421} = (1110,0010)_{2421}$

عدد $(10111001)_2$ را به صورت، مبنای ۱۰، BCD، Excess-۳، $8\ 4\ \bar{2}\ \bar{1}$ ، ۲۴۲۱، کد کنید.

۱. $(10111001)_{2 \to 10} = (185)_{10}$

۲. $(185)_{10} = (0001,1000,0101)_{BCD}$

۳. $(185)_{10} = (0001,1000,0101)_{BCD \to (excess-3)+3} =$
$(0100,1011,1000)_{Excess-3}$

۴. $(185)_{10} = (0111,1000,1011)_{84\overline{21}}$

۵. $(185)_{10} = (0001,1110,1011)_{2421}$

عدد دودویی $(10111001)_2$ را به صورت BCD بازنویسی کنید.
$(10111001)_2 = (185)_{10} = (0001,1000,0101)_{BCD}$

### ۲.۲۱.۱ جمع دوعدد BCD

برای جمع اعداد BCD فقط کافیه است که معادل Decimal آنها را با هم جمع کنیم و بعد از آن حاصل را به BCD تبدیل خواهیم کرد.

## ۲۲.۱ کد گری یا کد انعکاسی

زمانی پیش می آید که عدد ورودی ما مثلا 0111 که در مبنای ۱۰ برابر با هفت است به عنوان ورودی وارد شده و مثلا میخواد بشود ۸ یا 1000 در طی این تبدیل ممکن است تاخیر ها و Delay های پیش آمده باعث شود به این تبدیل چندین بیت با هم تفاوت و فاصله ایجاد شود، این باعث میشود که CPU زحمت زیادی بکشد در فرایند های تبدیل، به همین خاطر سیستم عددی به نام Gray به وجود آمد که در اثر بوجود آمدن این Delay ها فاصله بین هر عدد تنها یک بیت باشد، کد گری میتواند یک ست ۲ بیتی، ۳ بیتی ۴ بیتی، ۵بیتی و غیره باشد، که همه این ها با هم تنها یک بیت فاصله دارند، منظور از یک بیت فاصله یعنی بعد از تبدیل عدد اصلی از حالت بومی خودش به کد گری فقط و فقط یک بیت تفاوت است.

برای تبدیل کد باینری به کد گری خیلی راحت میتوانیم از طریق شباهت و تفاوت پیش برویم، عددی که بیشترین ارزش را دارد (اولین عدد از سمت چپ) یا عدد MSB را بدون

هیچ دستکاری می نویسیم، بعد از آن خود آن عدد را با عدد کناری خودش بررسی میکنیم، اگر بایکدیگر مشابه بودند، عدد صفر را مینویسیم، اگر باهم تفاوت داشتند عدد یک را مینویسیم. همین فرایند را تا انتها پیش میرویم. برای مثال:

$Same = 0$

$Difference = 1$

$(110111)_{2\to Gray} = (101100)_{Gray}$

$(111)_{2\to Gray} = (100)_{Gray}$

$(10101101)_{2\to Gray} = (11111011)_{Gray}$

### ۱.۲۲.۱ تبدیل باینری ۴ بیتی به گری ۴ بیت

| Binary | Gray |
|---|---|
| ۰۰۰۰ | ۰۰۰۰ |
| ۰۰۰۱ | ۰۰۰۱ |
| ۰۰۱۰ | ۰۰۱۱ |
| ۰۰۱۱ | ۰۰۱۰ |
| ۰۱۰۰ | ۰۱۱۰ |
| ۰۱۰۱ | ۰۱۱۱ |
| ۰۱۱۰ | ۰۱۰۱ |
| ۰۱۱۱ | ۰۱۰۰ |
| ۱۰۰۰ | ۱۱۰۰ |
| ۱۰۰۱ | ۱۱۰۱ |
| ۱۰۱۰ | ۱۱۱۱ |
| ۱۰۱۱ | ۱۱۱۰ |
| ۱۱۰۰ | ۱۰۱۰ |
| ۱۱۰۱ | ۱۰۱۱ |
| ۱۱۱۰ | ۱۰۰۱ |
| ۱۱۱۱ | ۱۰۰۰ |

### ۲.۲۲.۱ تبدیل کد گری به کد باینری

برای تبدیل کد گری به باینری میباست عدد MSB را نوشته (همانطوری) و بعد از همان به بعد با اعداد بعدی مقایسه میشود

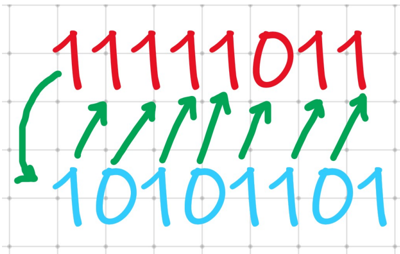
$Same = 0$

$Difference = 1$

$(101100)_{Gragy\to 2} = (110111)_2$

$(100)_{Gragy\to 2} = (111)_2$

$(11111011)_{Gragy\to 2} = (10101101)_2$




شکل ۴: Gray ۲ Binary

## ۲۳.۱ ASCII Codes

از کدهای اسکلی زمانی استفاده میشود که ما بخواهیم نماد ها، کارکتر های مختلف، اعداد، نماد های زبان های مختلف و غیره را در سیستم خود نمایش بدهیم. این سیستم کدینگ در حالت کلی ۸ بیتی میباشد. در ۵۰ سال گذشته این سیستم ۶ بیتی بوده و توانایی نمایش حروف فقط بزرگ انگلیسی را داشت، اما بعد از آنکه این سیستم ۸ بیتی شد توانایی هایی که در بالاتر توضیح داده شد را دارا میباشند، در این سیستم کدینگ ۳ بیت به عنوان ستون ها و ۴ بیت به عنوان سطر ها مورد استفاده قرار گرفته، و بیت اخر که بیت مشخص کنند ماهیت کارکتر میباشد، اگر وضعیت این بیت ۰ باشد توانایی نمایش اعداد، کارکتر های کنترلی و یکسری علائم و نماد های مختلف مانند $(`BackText)$، :، ؛، ”، را دارای میباشد که به این دسته ها Standard ASCKII گفته میشود، که **تعداد کرکتر های آن ۱۲۸ تا** می باشد. اما اگر این بیت هشتم ۱ باشد علاوه بر نمایش حروف انگلیسی میتواند حروف اضافه بر زبان انگلیسی را نمایش دهد مانند در زبان ترکی و آلمانی (اوملات) و غیره. که این دسته در حقیقت ASCKII Extended نامیده میشود، که این دسته هم **دارای ۱۲۸ تا کرکتر** میباشد.

دسته بندی های کدهای الفبایی یا بطور کلی $Textual$:

Alphabet: a...z and Z ... A

Digits: ۹..۱

Special: Symbols ‘ ،” ،؛ ،: ،.

non–printable: NULL DEL،

مهم ترین بخش جدول کدهای اسکی مربوط به ستون اول و دوم و ابتدای ستون سوم، مربوط به کارکتر های کنترلی میشود، حالا این کاراکتر های کترلی چیست این مهم است:

| نوع | ستون اعداد | | | سطر اعداد | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

شکل ۵: بیت های کد اسکی

| | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0000** | NUL | DLE | SP | 0 | @ | P | ` | p |
| **0001** | SOH | $DC_1$ | ! | 1 | A | Q | a | q |
| **0010** | STX | $DC_2$ | " | 2 | B | R | b | r |
| **0011** | ETX | $DC_3$ | # | 3 | C | S | c | s |
| **0100** | EOT | $DC_4$ | $ | 4 | D | T | d | t |
| **0101** | ENQ | NAK | % | 5 | E | U | e | u |
| **0110** | ACK | SYN | & | 6 | F | V | f | v |
| **0111** | BEL | ETB | ' | 7 | G | W | g | w |
| **1000** | BS | CAN | ( | 8 | H | X | h | x |
| **1001** | HT | EM | ) | 9 | I | Y | i | y |
| **1010** | LF | SUB | * | : | J | Z | j | z |
| **1011** | VT | ESC | + | ; | K | [ | k | { |
| **1100** | FF | FS | , | < | L | \ | l | \| |
| **1101** | CR | GS | - | = | M | ] | m | } |
| **1110** | O | RS | . | > | N | ^ | n | ~ |
| **1111** | SI | US | / | ? | O | _ | o | DEL |

شکل ۶: ASCII Codes Table

در گذشته ماشین های تله تایپی وجود داشتند که نهایت سرعت آنها ۱۰ بیت در ثانیه بود و کلا یکسری دستگاه های مکانیکالی بودند. این دستگاه های برای ارتبط با سیستم های دیگر از یکسری کرکتر ها استفاده میکردند تا بعضی از جریان ها مورد بررسی قرار بگیرد، برای مثال وقتی به این سیستم ها قرار بود یکسری کلمات و جلملات را بنویسند ارتباط آنها مانند ارتباط ما با کامپیوتر های امروزی نبود و با تاخیری کلمات چاپ میشدند، این سیستم ها برای اینکه ببینند آیا سیستم مکانیکی توانسته کراکتر های قبلی را بنویسد که کارکتر های بعدی را ارسال کند، یا اینکه دست نگهدارد که آن سیستم مکانیکی کار قبلی اش را تمام و سپس بروی کار جدید برود، در این میان از مجموعه ای از کارکتر های کنترلی استفاده میکردند که کنترل جریان را هدایت می نمودند. بطور کلی حفظ کردن نام برخی از آنها دشوار میباشد به همین دلیل در سیستم های امروزی از کنترل ترکیبی بجای استفاده از آن کرکتر ها استفاده کردند، برای مثال کرکتر ESC معادل $ctrl + [$ است.

برای بدست اوردن نام و کلا تایپ این نوع کرکتر ها باید دقت داشته باشیم که از سمت چپ اعداد خود را قرار بدهیم، **اولین دسته عدد که سه بیتی** است ستون را منظور دارد، **دومین دسته که چهار بیتی** است بعد از سه بیت ستون نوشته شده و قرار میگیرد و در انتها برای اینکه بررسی کنیم آیا این عدد یک Extended است یا Standard از سمت چپ بیت MSB را یکی اکستند میکنیم که تا نوع آن مشخص و ۸ بیتی شود. و بعد در انتها میتوانیم کد بانری بدست آمده را به دسیمال تبدیل کرده و معادل آن عدد را در کد اسکی بررسی کنیم. مانند:

$1100111 \rightarrow (110, 111)_{(2)\rightarrow 10} = 103\ g$

| | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | NUL | DLE | SP | 0 | @ | P | ` | p |
| 0001 | SOH | $DC_1$ | ! | 1 | A | Q | a | q |
| 0010 | STX | $DC_2$ | “ | 2 | B | R | b | r |
| 0011 | ETX | $DC_3$ | # | 3 | C | S | c | s |
| 0100 | EOT | $DC_4$ | $ | 4 | D | T | d | t |
| 0101 | ENQ | NAK | % | 5 | E | U | e | u |
| 0110 | ACK | SYN | & | 6 | F | V | f | v |
| 0111 | BEL | ETB | ‘ | 7 | G | W | g | w |
| 1000 | BS | CAN | ( | 8 | H | X | h | x |
| 1001 | HT | EM | ) | 9 | I | Y | i | y |
| 1010 | LF | SUB | * | : | J | Z | j | z |
| 1011 | VT | ESC | + | ; | K | [ | k | { |
| 1100 | FF | FS | , | < | L | \ | l | \| |
| 1101 | CR | GS | - | = | M | ] | m | } |
| 1110 | O | RS | . | > | N | ^ | n | ~ |
| 1111 | SI | US | / | ? | O | _ | o | DEL |

شکل ۷: ASCII Codes Sample

یا اینکه میتوانیم بطور کلی اینگونه پیش برویم که ۳ بیت اول از ستون و ۴ بیت دوم از سطر جدول را نقطه یابی کنیم که معادل چه حرفی میشود. تصویر بالا

## ۲۴.۱ کد های تشخیص و تصحیح خطا

هنگام انتقال داده ها ممکن است در آنها خطایی به علت تداخل های الکترومغناطیسی، حرارت زیاد و غیره به وجود آید. میتوان کد هایی طراحی کرد که خطا را تشخیص و تحصیح کنند.
یکی از ساده ترین روش های تشخیص خطا استفاده از بیت توازن یا **Parity** است. میتوان به هر کلمه یک بیت اضافه کرد به طوری که تعداد بیت های یک آن مثلا فرد شود

### ۱.۲۴.۱ کدهای تشخیص خطا

سیستم توازن، يكي از ساده ترین روش ها برای تشخیص خطاست، که یک بیت توازن به اطلاعات اضافه می شود.
در حالت کلی دو نوع توازن وجود دارد، توازن زوج و توازن فرد.
**توازن زوج Even Parity**
یک بیت به اطلاعات اضافه میشود تا تعداد کل ۱ ها کد زوج جود.

$0110010 = [1]0110010$

$0100100 = [0]0100100$

**توازن فرد Odd Parity**

$0110011 = [1]0110011$

$0100101 = [0]0100101$

یک بیت به اطلاعات اضافه میشود تا تعداد کل ۱ های کد فرد شود. تا تعداد صفر ها و یک ها به تعادل و برابری برسد.
نوع دیگری از هاParity وجود دارد که به تعداد یک ها توجه می شود، یعنی اگر سیستم

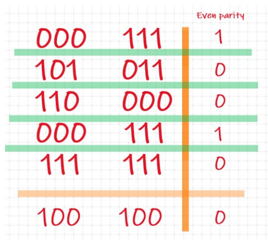
پریتی زوج بودیم تعداد یک ها بایستی زوج باشند، اما اگر در سیستم پریتی فرد بودیم باید تعداد یک ها یک دسته فرد باشند، برای اینکار در سیستم پریتی زوج تعداد یک ها اگر فرد بود یک، ۱ را اضافه خواهیم کرد اما اگر زوج بود ۰ را وارد میکنیم. در فرد هم همینگونست اگر سیستم فرد تا ۱ داشت ۰ اگر سیستم زوج تا ۱ داشت یک، ۱ اضافه میکنیم تا نظم زوجی یک ها را بهم بزنیم و آنها را فرد کنیم!

$EvenParity : 100011 = 1 \rightarrow 1000111$

$OddParity : 100011 = 0 \rightarrow 1000110$

## ۲۵.۱ Overlapping Parity or Block Parity

یک مجموعه ای از دیتا ها که بایستی به دو صورت افقی و عمودی از آنها پریتی گرفته شود.




شکل ۸: Block Parity

در صورتی که در یکی از بیت های مجموعه داده های بالا خطایی ایجاد شود میتوان براحتی دریافت که در آن قسمت، هم به صورت افقی و هم به صورت عمودی نتیجه پریتی با نتیجه قبلی برابر نخواهد بود. و برای نشان داده اشتباه در آن متقطه باید به صورت یک آرایه دو بعدی طور عمل کنیم که بعد اول در مورد سطر و بعد دوم در مورد ستون میباشد، مانند اشکال در $M_{[5][3]}$ .

## ۲۶.۱ Parity Checksum

در این نوع پریتی ما سه نوع داریم:

### Single-precision checksum ۱.۲۶.۱

در این نوع از checksum دیتا های دریافتی را با هم جمع میکنیم، و حاصل بدست آمده اگر همراه با Carry بود از آن صرف نظر خواهیم کرد.

### Double-precision checksum ۲.۲۶.۱

در این نوع، علاوه بر اینکه کری را به همراه حاصل مینویسیم بایستی بررسی کنیم که وجود کری آیا دسته بیت ها را در توانی از دو قرار داده است یا خیر، اگر نبود خودمان دستی این کار را انجام میدهیم

### Residue checksum ۳.۲۶.۱

در این نوع از ،checksum مانند Single-precision عمل میکنیم با این تفاوت که کری بدست آمده را در حاصل جمع میکنیم

### HoneyWell checksum ۴.۲۶.۱

در این در صورتی که ۴ عدد دیتا را داشته باشیم دو به دو دسته ها را بهم می چسبانیم.

| Single-Precision | Double-Precision | Residue | Honeywell |
|---|---|---|---|
| 0000 | 0000 | 0000 | |
| 0101 | 0101 | 0101 | |
| 1111 | 1111 | 1111 | 00000101 |
| 0010 | 0010 | 0010 | 11110010 |
| 0110 | 00010110 | 0111 | 11110111 |

شکل ۹: Parity checksum

## ۲۷.۱ کد همینگ یا Hamming Code

بطور کلی، کد همینگ، کد تشخیص و تصحیح خطا می باشد. که در مخابرات مورد استفاده قرار میگیرد. منظور از مخابرات یعنی ارسال و دریافت اطلاعات بین دو قسمت مبدا و مقصد است. که برای اولین بار به افتخار ریچارد همینگ معرفی شد. در مفهوم، در کد همینگ برای

شناسایی و تصحیح خطا دسته ای از کد ها در اطلاعات ارسال میشود، که به این کدها کد همینگ می گویند.

### ۱.۲۷.۱ فاصله همینگ

زمانی که ما کد تصحیح شده را در کنار کدی با بیت های غلط قرار می دهیم به اختلاف بین این دو عدد، فاصله همینگ گفته می شود.

$A = 111001 \rightarrow Correct$

$A_{uncorrect} = 010110 \rightarrow uncorrect \rightarrow distance = 5$

**نکته:**

- کدی که فاصله d دارد میتواند $d-1$ خطا را تشخیص دهد.
- کدی که فاصله d دارد میتواند $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ را تحصیح کند.

### ۲.۲۷.۱ نحوه بدست همینگ کد و تشخیص و تصحیح خطا

برای بدست آوردن کد همینگ یک عدد میبایستی به شکل زیر عمل کنیم:

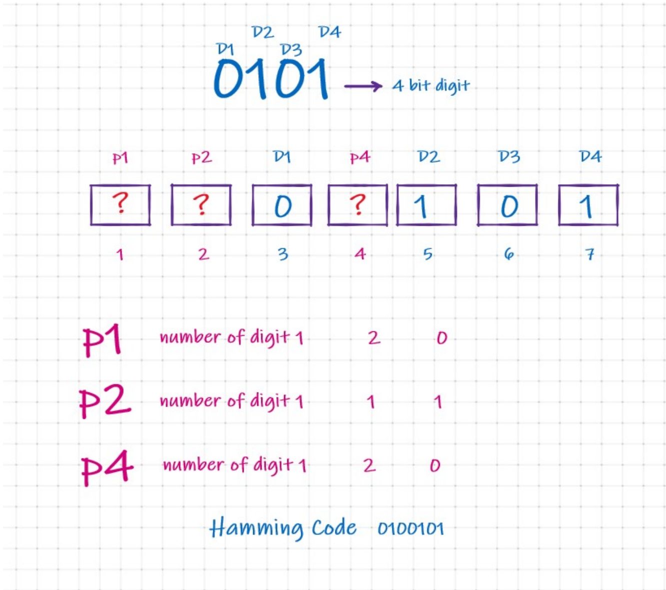
- اول باید بررسی کنیم که اعداد دریافت شده چند بیتی است، (تشخیص از تعداد ارقام عدد ارسالی)
- بعد از بدست آوردن تعداد ارقام عدد ارسالی، از سمت چپ باید کد هایی تحت عنوان Code Parity را در نظر داشته باشیم، هر کدام از این کدهای Parity توانی از دو خواهند بود. یعنی
  $2^0, 2^1, 2^2 Or 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc$
- باتوجه به قاعده بالا، از سمت چپ جایگاه های مثلا ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و غیره را برای کد های Parity نگه میداریم، و اعداد داده اصلی را لا به لای این اعداد Parity خواهیم نوشت!

**با یک مثال نحوه بدست آوردن کد همینگ را متوجه خواهید شد:**

کد همینگ برای عدد ۰۱۰۱ به چه شکل خواهد بود؟

توضیح حل مثال بالا:

در این مثال ما چهار بیت داریم، و کدهای parity ۱ و ۲ و۴ خواهیم داشت، با توجه به هر




شکل ۱۰: مثال بدست آوردن کد همینگ

عدد بلاک های خالی برای قسمت های ۱ و ۲ و ۴ خواهیم گذاشت تا با روشی مناسب اعداد مناسب آنها را بدست بیاوریم و در قسمت های خالی یا بین این پریتی ها دیتای اصلی خود را خواهیم گذاشت، بعد از تنظیم تمام جایگاه ها و قرار دادن اعداد اصلی در جایگاه مناسب خودشان، با روشی ساده میتوان اعداد پریتی را بدست آورد، اینکه شما میتوانید از جایگاه اول که ۱ است یک در میان اعداد ۱ و ۰ را در نظر بگیرید، صفرها مهم نیستند بلکه باید تعداد یک ها را داشته باشیم، **اگر** تعداد یک ها **زوج** بود آن پرتی ۰ خواهد بود اگر **فرد** بود ۱ می باشد، بعد از جایگاه اول به جایگاه دوم یعنی ۲ میریم، که میبایست همان کار اول را از دو، با تفاوت ۲ در میان انجام دهیم تا مقدار صفر یا یک آن را بدست بیاوریم. بعد به جایگاه چهارم میرویم و بایستی از عدد جایگاه ۴، ۴ در میان تعداد یک ها را مورد بررسی قرار دهیم.

**نکته:** گاهی ممکن است به ۸ در میان یا بیشتر از آن، هم برخورد کنید، اگر در انتها به اندازه مناسب n در میان، عددی وجود نداشته باشد، همان تعدادی که وجود دارند را میتوان به عنوان دسته آخر مورد بررسی قرار داد.

**مثال:**

کد همینگ برای عدد ۱۰۰۱۱۰۱۰ به چه شکل خواهد بود؟


شکل ۱۱: مثال بدست آوردن کد همینگ

### ۳.۲۷.۱ پیدا کردن عدد غلط و تصحیح آن

**نکته دیگری هم هست!**

ممکن است عددی را به شما دهند که یا اشتباه است یا درست، که شما بایستی با عمل همینگ درستی یا نادرستی آن عدد ارسالی را بررسی کنید.

**مثال:**

در عدد ۰۱۱۰۱۰۱ مشخص کنید که کجا خطا رخ داده است؟

در این مثال دیگر کاری به اضافه کردن جایگاه نداشته باشید با این فرض پیش بروید که تمام جایگاه ها همانی است که میدانید:

$0_{p1}1_{p2}10_{4}101$

$p1 : number of 1 : 3 \to 1$

$p2 : number of 1 : 2 \to 0$

$p4 : number of 1 : 2 \to 0$

با توجه فرایندی که در بالا صورت گرفت میتوان نیتجه گرفت که پریتی های بدست آمده با عدد نوشته شده مسئله در جایگاه های مناسب، یا درست است یا غلط، که مشخص کردیم که جایگاه اول و دوم غلط نوشته شده، این موضوع غلط بودن این عدد را نشان نمیدهد، برای بدست اوردن اشکال در عدد بایستی جایگاه اعداد غلط مانند جایگاه یک و دو را باهم جمع کنیم که می شود ۳، آنگاه از این نتیجه میتوان دریافت که در جایگاه سوم عدد درستی درج نشده، اگر صفر است آنرا یک میکنیم، اگر یک است آنرا صفر میکنیم. نکته ای که لازم است در انتها به آن اشاره کنم آن است که در هنگام شمارش تعداد یک های، اگر جایگاهی از خودش یک داشت آنرا حساب نخواهیم کرد.

عدد درست، ۰۱۰۰۱۰۱

**مثال:**

عدد ۰۱۱۱۰۰۱۰۱۱۱۰ درست دریافت شده یا غلط؟ در صورت تشخیص بیت اشتباه آنرا مشخص کنید:

$0_{p1}1_{p2}11_{p4}0010_{p8}1110$

$p1 : numberof1 : 4 \rightarrow 0Correct$

$p2 : numberof1 : 4 \rightarrow 0Uncorrect$

$p4 : numberof1 : 1 \rightarrow 1Correct$

$p8 : numberof1 : 3 \rightarrow 1Uncorrect$

جایگاه های غلط را باهم جمع میکنیم تا جایگاهی که واقعا بیت اشتباهی دارد را تشخیص دهیم، جایگاه ۲ با ۸ که میشود ۱۰:

$0111001011_{uncorrectbit}10$

عدد درست ۰۱۱۱۰۰۱۰۱۰۱۰

### ۴.۲۷.۱ نحوه محاسبه تعداد پرتی های همینگ

یک فرمول ساده در این رابطه وجود دارد $2^r - 1 >= (n)bitnumber + r$ که در آن رقم توان، تعداد پرتی ها و در مقابل تعداد ارقام عدد دریافتی + آن تعداد پرتی

برای مثال عدد دودویی داریم که ۱۱ بیت است برای پیدا کردن این که این رقم چند تا جایگاه پرتی خواهد داشت به صورت زیر خواهد بود:

$2^3 - 1 >= 11 + 3false$

$2^4 - 1 >= 11 + 4true$

پس در ۱۱ بیت ۴ بیت پرتی خواهیم داشت.

# ۲ جبر بول ـ ساده سازی ـ EPI PI،

اساس کار مدار منطقی، جبر بول یا جبر مجموعه ها یا جبر سویچ است. جبر بول به خاطر آقای George Boole نام گذاری شده است، که برای بیان منطق انسان از آن استفاده نمود. بعد از مدتی Shannonn جبر کلیدی یا Switching Algebra را برای نمایش مدارهای کلیدی دو حالتی معرفی کرد یعنی جبر دو ارزشی.

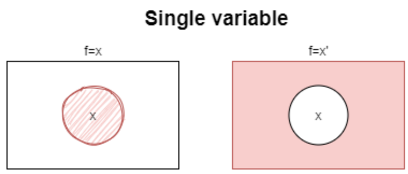
## ۱.۲ Not Or And truth table

| A | B | A . B | A + B | !A |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

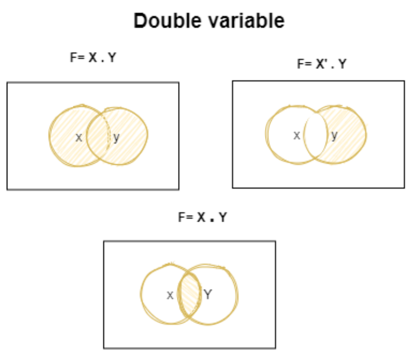
## ۲.۲ استفاده از نمودار وِن برای نمایش منطقی

ما میتوانیم از نمودار وِن برای نمایش وضعیت های true و false یا ۰ و ۱ استفاده کنیم.

### ۱.۲.۲ Single Variable

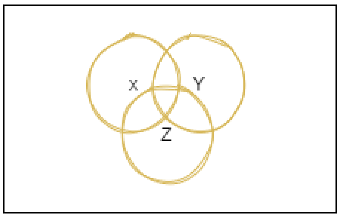



### ۲.۲.۲ Double Variable



### ۳.۲.۲ Three Variable

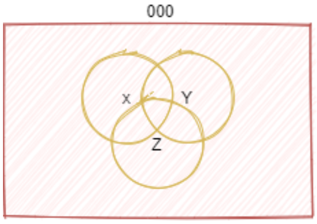
Three variable



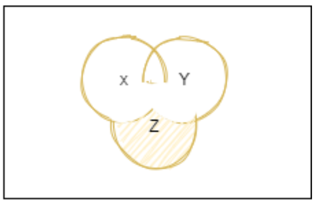

جدول زیر نشان دهنده وضعیت سه متغیر، $(X, Y, Z)$ است، هر کدام از وضعیت ها را در وِن نمایش دهید.

| X | Y | Z |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ |

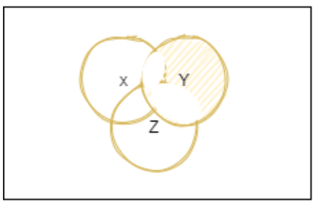
000



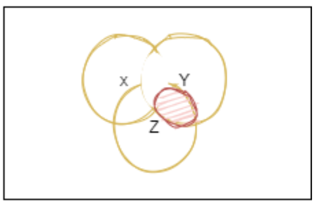

001



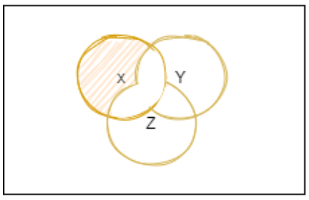

010



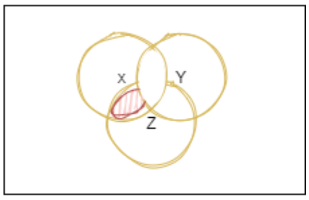

011



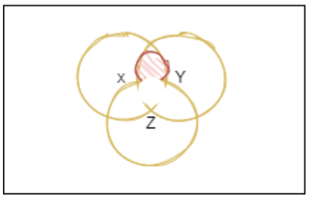
100



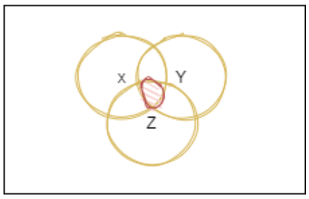

101




110




111



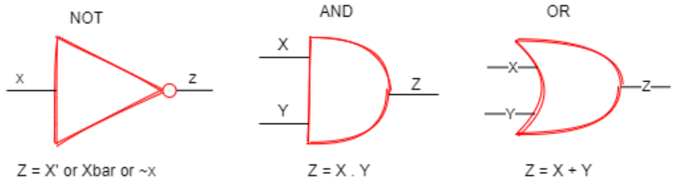

## ۳.۲ on-set and off-set

به جدول زیر توجه کنید:

| Bit Pattern | X | Y | Z | Prime no. | status |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | off-set |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | off-set |
| ۲ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | on-set |
| ۳ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | on-set |
| ۴ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | off-set |
| ۵ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | on-set |
| ۶ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | off-set |
| ۷ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | on-set |

جدول بالا در قسمت نتیجه، مشخص میکند عدد در هر سطر اول است یا نه، به هر سطری که مقدر عدد اول بودن آن، برابر با صفر شده است off-set و به هر سطری که اول بودن آن یک شده است on-set گفته میشود.

## ۴.۲ شمایل گیت های تاکنون گفته شده



## ۵.۲ XNOR Xor NOR NAND truth table

| A | B | NAND $\uparrow$ | NOR $\downarrow$ | XOR $\oplus$ | XNOR $\odot$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |

راهی دیگر برای اثبات **Xor** یا **Xnor** وجود دارد:

$$XOR = (\overline{A}.B) + (\overline{B}.A) \equiv (\sim A \land B) \lor (A \land \sim B)$$
$$XNOR = (A.B) + (\overline{A}.\overline{B}) \equiv (A \land B) \lor (\sim A \land \sim B)$$

## ۶.۲ چند مورد از اصطلاحات

### ۱.۶.۲ Term

به هر یک از Variable ها، Term گفته میشود.

### ۲.۶.۲ Product Term

به هر کدام از ضرب بین عملوند ها یا and بین عملوند ها **Products Term** گفته میشود. مانند:

X'Y or XY

Uncorrect:

$(XY)'$

$(XY) + Z$

### ۳.۶.۲ Sum Term

به هر کدام از جمع بین عملوند ها یا or بین آنها **Sum Term** گفته میشود.

$(X + Y)$

Uncorrect:

$(X + Y)'$

$Z'W + Y$

### ۴.۶.۲ Min Term

به هر **Product Term** گفته میشود که حداقل یکی از آنها True یا ۱ باشند.

### ۵.۶.۲ Max Term

به **Sum Term** هایی گفته میشود که حداقل در یک جا تابع خروجی صفر را داشته باشد، و هر جایی که ورودی در آن برابر یک بود باید به صورت not نشان داده شود و آن ورودی که صفر است را بایسیتی به صورت عادی در بولین فرم نمایش دهیم.

### ۶.۶.۲ SoP Sum of Product

به **Product Term** هایی که بین آنها عمل جمع یا or اتفاق افتاده است، **Sum of Product** یا **SoP** گفته می شود.

$$\overbrace{\underbrace{(\overline{A}.B)_{ProductsTerm}} +(\overline{B}.A)}^{Sum of Products} \qquad (۱)$$

Correct Form of SoP

$$[\bar{X}.\bar{Y}.Z + W + \bar{a}.b.c] \qquad (۲)$$

$$[W + \bar{X}.Z.Y + \bar{y}.z] \qquad (۳)$$

Uncorrect Form of SoP

$$[\bar{X}.Y.Z + W.(A + B)] \qquad (۴)$$

$$[X.Y + \bar{Y}\bar{.}Z] \qquad (۵)$$

### ۷.۶.۲ PoS Product of Sum

به هر **Sum Term** که بین آنها عمل ضرب یا And صورت گرفته بر عکس SoP در حقیت PoS یا **Products of Sum** گفته می شود

$$\overbrace{\underbrace{(\overline{A} + B)_{SumTerm}} .(\overline{B} + A)}^{Products of Sum} \qquad (۶)$$

Correct Form PoS

$$[(X + \bar{Y} + Z).(\bar{W} + Z).(A)] \qquad (۷)$$

$$[\bar{Z}.(X+Y).(\bar{W}+Y)] \quad (۸)$$

Uncorrect Form PoS

$$[(\bar{X}+Y.(X+W))] \quad (۹)$$

$$[(X+Y).(X\bar{+}Z)] \quad (۱۰)$$

نکته:

Term ها در این حالت آنها به صورت Literal هستند که هر دوی Sum Term و Term Product را شامل می شوند.

### ۸.۶.۲ ۱ خودت را امتحان کن

| Expression | Sum Term / Product Term / Both / Neither |
|---|---|
| $W*X*(Y*Z)'$ | Neither |
| $W*X*(Y*Z)$ | Product Term |
| $W+XY+Z$ | Neither |
| $W+Y$ | Sum Term |
| $(W+Y+Z)'$ | Neither |
| $W$ | Both |

### ۹.۶.۲ ۲ خودت را امتحان کن

| Expression | SoP / PoS / Both / Neither |
|---|---|
| $W.X.(\bar{Y.Z})+X\bar{Y}Z+W$ | Neither |
| $XY+XZ+(\bar{W}YZ)$ | SoP |
| $(X+\bar{Y}+Z)(W+X)$ | PoS |
| $(W+Y)X(\bar{W}+Z)$ | PoS |
| $\bar{W}Y+\bar{W}Y+X\bar{Y}$ | SoP |
| $[W+X+Y]$ | Both |

## ۷.۲ Dual Low

در قانون دوئال در Product Term ها چند چیز تغییر خواهد کرد:

$A.B \leftrightarrow A+B$

$0 \leftrightarrow 1$

**برای مثال:**

$f(a.b) \rightarrow f^* = a+b$

$f = a.1 + \bar{b}.c \rightarrow f^* = (a+0).(\bar{b}+c)$

$f() = A \oplus B = (\overline{A}.B) + (A.\overline{B}) \rightarrow f^*() = (\overline{A}+B).(A+\overline{B})$

### ۱.۷.۲ Self Dual

در قانون Self Dual به چیزی اشاره میکند که صحت دوئال آن با حالت عادی آن برابر است برای بررسی تعداد دفعاتی که بایستی true و false یا ۰ و ۱ بگذاریم، میتوانیم به تعداد عملوندها توجه کنیم و به عنوان توانی از پایه دو استفاده کنیم که ببین چند حالت میتواند این تابع داشته باشد

$$2^{numberofOperand} \tag{۱۱}$$

**مثال:**
ثابت کنید که تابع $f = a.b + a.c + b.c$ با هم خود دگان یا سلف دوئال است:

$f^*() = (a+b).(a+c).(b+c)$

| a | b | c | $f()$ | $f^*()$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

### ۲.۷.۲ اصل Duality

اگر دو تابع با هم سلف دوئال باشند، اگر خاصیتی برای حالت عادی تابع صدق کند برای حالت دوئال آن هم صادق میباشد.

## ۸.۲ خاصیت های گزاره ها

- خاصیت خودتوانی:

$$A.A = A$$
$$A + A = A$$

- خاصیت جذبی:

$$A.(A + B) = A$$
$$A + (A.B) = A$$

- خاصیت جذبی:

$$A.(A + B) = A$$
$$A + (A.B) = A$$

- خاصیت جابجایی:

$$A.B = B.A$$
$$A + B = B + A$$

- خاصیت شرکت پذیری:

$$A.(B.C) = (A.B).C$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- خاصیت توزیع پذیری:

$$A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$$
$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

- خاصیت نقیض نقیض:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- خاصیت متمم:

$$\overline{A}.A = 0$$
$$\overline{A} + A = 1$$

- خاصیت همانی:

$$A.1 = A | A + 1 = 1$$
$$A.0 = 0 | A + 0 = A$$

- خاصیت دمورگان:

$$\overline{(A.B)} = (\overline{A} + \overline{B})$$
$$\overline{(A+B)} = (\overline{A}.\overline{B})$$

## ۹.۲ توابع با خروجی چندتایی

برخی توابع در این رابطه ممکن است که بیشتراز یک خروجی داشته باشند، که به دو صورت مورد بررسی قرار میگیرند:

- بر اساس تعداد یک ها
- بر اساس ایدی اولین ۱ که آمده است

در مورد دوم بیشتر روی قسمت عدد MSB توجه میکنیم، به محض اینکه این عدد یک شد ایدی مکان آنرا به صورت عادی در نظر گرفته و در قسمت باینری آنرا مینویسیم.

| X | Y | Z | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

Counter of ۱s

| X | Y | Z | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

Max on input id ۱ (MSB)

**سوال:**

خروجی تابع زیر را بر اساس ایدی MSB ها بررسی کنید

| W | X | Y | Z | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |

## ۱۰.۲ Gates

گیت ها میتوانند بیشتر از دو ورودی داشته باشند اما توابع در همه آنها مشابه است.
در عملگر ،And خروجی ها همه یک هستند در صورتی که ورودی ها ۱ باشند.
در عملگر ،OR خروجی ۱ است در صورتی که یکی از ورودی ها ۱ باشد.

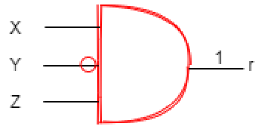
| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

AND

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

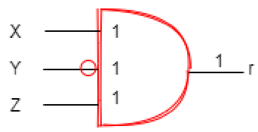
OR

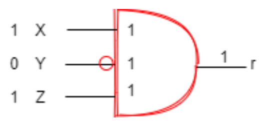
ممکن است در مسئله ای از شما بخواهند که گیتی را با رسم جدول درستی، بررسی یا Decode / Checkers کنید، به همین خاطر مانند زیر عمل میکنیم.



گیت بالا در ورودی دوم، هر مقداری وارد شود نقیض خواهد شد، و از آنجایی که میدانیم، گیت بالا فقط در زمانی جواب ۱ را میدهد که تمام ورودی ها یک شوند. به همین خاطر در درون گیت AND هر سه ورودی را یک میکنیم، اما در ورودی های خارج از گیت را باتوجه به نقاط یا حباب هایی که بر روی ورودی گیت کشیده شده، مقادیر مورد نظر را خواهیم نوشت.

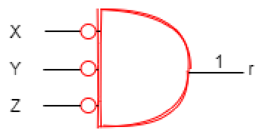
| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |



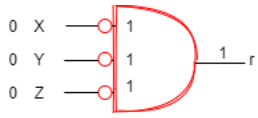




پس بخاطر نقیض بودن ابتدا ورودی اول، برای رسیدن به عدد ۱، عدد ۰ را قرار دادیم که نقیض صفر یک خواهد شد و گیت AND ما در نقطه ۱۰۱ برابر با یک خواهد بود.

مثال دوم:




جواب:




| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

سه راه برای نمایش یک تابع وجود دارد:

- Equation
- Schematic
- Truth table → unique

که حالت جدول درستی معیار است چرا که تنها یک معنا دارد و از آن میتوان به روش های دیگر رسید و آنها را پیاده سازی نمود.

**مسئله:**

ماشینی داریم که خودکار است، اگر در ورودی آن و چراغ های جلو روشن باشد، بوق میزند یا اگر در ورودی آن باز باشد و سویچ (کلید) روی حالت on باشد بازم بوق میزند، تابع این مسئله را بنویسید. [۱]

[۱] ساده سازی بین هر کدام از Term ها مانند فاکتورگیری در ریاضیات در این قسمت Adjacency گفته میشود

| H | D | K | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

| H | D | K | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |

$$H.D + D.K or H(D + K) \qquad (۱۲)$$

بیلی دوست داره که فقط پیزایی با قیمت ۵ دلار بخورد! یک پیزای ۵ دلاری میتواند فقط یکی از موارد (سوسیس، قارچ، پپرونی) را داشته باشد، اما امروز یه تخفیفی فروشگاه گذاشته که بیلی میتونه پیزای سوسیس و قارچ رو باهم در قیمت ۵ دلار داشته باشه، تابع و نمودار درستی این مسئله را بنویسید.

| S | M | P | Results |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

از آنجایی که معلوم است:

| S | M | P | Results |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |

| S | M | P | Boolean Form | Results |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $\bar{S}\bar{M}\bar{P}$ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | $\bar{S}\bar{M}P$ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{S}M\bar{P}$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $S\bar{M}\bar{P}$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $SM\bar{P}$ | ۱ |

$$W = (\bar{S}\bar{M}\bar{P}) + (\bar{S}\bar{M}P) + (\bar{S}M\bar{P}) + (S\bar{M}\bar{P}) + (SM\bar{P}) \quad (۱۳)$$

تابع ساده شده

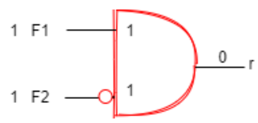
$$W = P + M + S + (SM) \quad (۱۴)$$

## ۱۱.۲ Intermediate Functions

گاهی اوقات برای بدست اوردن یک نتیجه میتوانیم از یکسری تابع تحت عنوان توابع واسط [۲] استفاده کنیم، برای مثال، در مسئله زیر دو تابع واسط بین تابع نهایی G آمده است که ما میتوانیم به کمک آن به نتیجه G برسیم:

| X | Y | Z | F۱ | F۲ | G |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

بطورکلی تابع اول، OR بین تمام عملوند ها میباشد، و تابع دوم AND بین آنها، در تابع G در ابتدا شباهت ۰ را در دو تابع داریم اما زمانی که دو تابع به عدد ۱ رسیده اند، نتیجه G برابر با ۰ شده است، برای بدست اوردن تابع G میتوانیم به این صورت عمل کنیم:




[۲] intermediate

## ۱۲.۲ تمارین مین ترم ها

با توجه به نتایج تابع G با استفاده از توابع Min Term تابع جدول را بدست آورید. [۳]

| X | Y | Z | G |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

[۳] در حقیقت Min Term هایی که در نظر داریم بایستی **Boolean Form** آن ورودی ها را اول بنویسیم و در قسمت هایی که تابع داده شده حداقل یک بار یک بوده است Mid Term ها بدست خواهد آمد.

جواب:

| X | Y | Z | Min Terms[۴] | G |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | $\bar{X}\bar{Y}Z$ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{X}Y\bar{Z}$ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | $\bar{X}YZ$ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $X\bar{Y}\bar{Z}$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | $X\bar{Y}Z$ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $XY\bar{Z}$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | $XYZ$ | ۰ |

| X | Y | Z | Min Terms | G |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | $\bar{X}\bar{Y}Z$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $\bar{X}YZ$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $XY\bar{Z}$ | ۱ |

$$W = (\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}) + (\bar{X}\bar{Y}Z) + (X\bar{Y}\bar{Z}) + (XY\bar{Z}) \qquad (۱۵)$$

مثال دوم:

| X | Y | Z | G |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

جواب:

| X | Y | Z | Min Terms | G |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | $\bar{X}\bar{Y}Z$ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{X}Y\bar{Z}$ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | $\bar{X}YZ$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $\bar{X}YZ$ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | $X\bar{Y}Z$ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $XY\bar{Z}$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | $XYZ$ | ۰ |

جا هایی که تابع G ، یک شده است: [5]

| X | Y | Z | Min Terms | G |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{X}Y\bar{Z}$ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | $\bar{X}YZ$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $XY\bar{Z}$ | ۱ |

$$W = (\bar{X}Y\bar{Z}) + (\bar{X}YZ) + (XY\bar{Z}) \qquad (۱۶)$$

[5] جاهایی که تابع داده شده یک شده است در حقیقت مشخص کننده Mid Term هامون هستند که Form Boolean آنها Product Term بین آنهاست

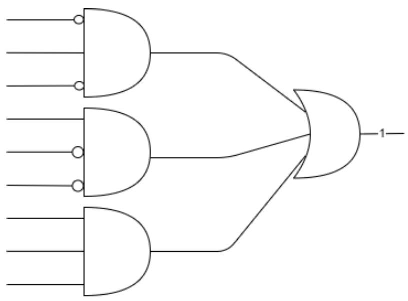
مثال سوم:

| X | Y | Z | G |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

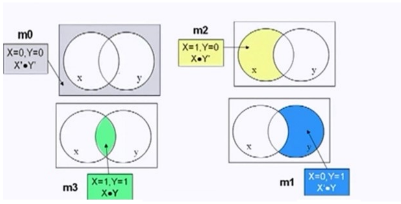
| X | Y | Z | Min Terms | G |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{X}Y\bar{Z}$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $X\bar{Y}\bar{Z}$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | $XYZ$ | ۱ |

$$G = (\bar{X} Y \bar{Z}) + (X \bar{Y} \bar{Z}) + (XYZ) \quad (۱۷)$$

حالا با استفاده از گیت رسم شده بالا میتوانیم هر ورودی جدول درستی را در این گیت بگذاریم و به نتیجه تابع داده شده برسیم.



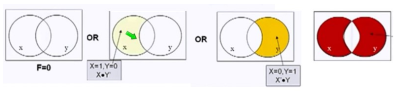
## ۱۳.۲ Min term diagram




برای جدول زیر نمودار وِن و تابع را بنویسید

| X | Y | F |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ |

$$F = (\bar{X}Y) + (X\bar{Y}) \qquad (۱۸)$$

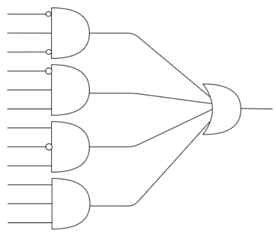


مثال پنجم:

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

| X | Y | Z | Min Terms | F |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۱ | ۰ | $\bar{X}Y\bar{Z}$ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | $\bar{X}YZ$ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | $X\bar{Y}Z$ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | $XYZ$ | ۱ |

$$F = (\bar{X}Y\bar{Z}) + (\bar{X}YZ) + (X\bar{Y}Z) + (XYZ) \qquad (۱۹)$$



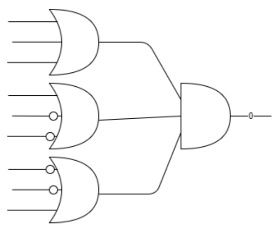
## ۱۴.۲ تمارین ماکس ترم ها

در ماکسترم ها همانطور که در صفحات قبلی توضیح داده شد، اگر مسئله به ما تابعی داده بود، توسط آن تابع به دنبال خروجی هایی میگردیم که برابر با صفر شده باشد، به طور کلی ماکس ترم به سام ترم هایی گفته می شود که حداقل در یک حالت برابر با صفر میباشند.

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

| X | Y | Z | Max Term BF |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $X+Y+Z$ |
| ۰ | ۱ | ۱ | $X+\bar{Y}+\bar{Z}$ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $\bar{X}+\bar{Y}+Z$ |

$$F=(X+Y+Z)(X+\bar{Y}+\bar{Z})(\bar{X}+\bar{Y}+Z) \qquad (۲۰)$$



در تعریف ماکسترم باید توجه کنیم که زمانی یک ماکسترم، ماکسترم است که، بین متغیر ها جمع یا OR باشد، فرقي ندارد که به صورت not یا حالت عادي باشد، اما بایستی بررسی ها به تعداد ورودی ها صورت گیرد نه اینکه نقصی در آنها باشد.

$$F(XYZ) =>: \tag{۲۱}$$

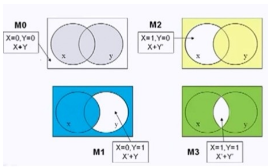
۱. $F(X+Y+Z)$

۲. $F(X+\bar{Y}+\bar{Z})$

۳. Is not max term $F(X+\bar{Y})$

۴. $F(\bar{X}Y\bar{Z})$

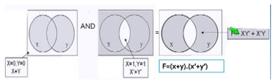
## ۱۵.۲ Max term diagram



| X | Y | F |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ |

| X | Y | Max term BF | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | $X+Y$ | ۰ |
| ۱ | ۱ | $\bar{X}+\bar{Y}$ | ۰ |

$$F=(X+Y)(\bar{X}+\bar{Y}) \quad (۲۲)$$

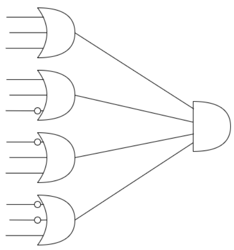


**مثال سوم:**

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

| X | Y | Z | Max Terms BF | F |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | $X+Y+Z$ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | $X+Y+\bar{Z}$ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | $\bar{X}+Y+Z$ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | $\bar{X}+\bar{Y}+Z$ | ۰ |

$$F=(X+Y+Z).(X+Y+\bar{Z}).(\bar{X}+Y+Z).(\bar{X}+\bar{Y}+Z) \qquad (۲۳)$$



یک فرم استاندارد برای نمایش این Max term ها و min term ها وجود دارد، که چون در مین ترم ها به صورت جمع ضرب ها عمل میکنیم میتوانیم از علامت $\sigma$ استفاده کنیم و در ماکسترم ها چون از ضرب جمع ها استفاده خواهیم کرد با علامت $\Pi$ پیش میرویم، یعنی اگر بخواهیم مین ترم ها و مکسترم های مثال بالا را به صورت استاندارد نشان دهیم به صورت زیر خواهیم نوشت.

$\sum_{XYZ}(2,3,5,7) \mid \prod_{XYZ}(0,1,4,6)$

## ۱۶.۲ گسترش و ترکیب مسئله

در برخی از مسائل به ازای ورودی ها، یک تابعی قرار میدهند، که باید براساس آن عبارات را باهم ترکیب کنیم.

$$F = \bar{W}X + W\bar{X}Y \tag{۲۴}$$

این عبارت دو قسمت اصلی دارد، یک قسمت اول سمت چپ جمع، یک قسمت سمت راست جمع. برای هر کدام از قسمت ها بررسی میکنیم که اگر متغیری نات شده بود یعنی false یا ۰ است، و آن متغیری که حالت عادی دارد ۱ است.

$$F = \bar{W}X \tag{۲۵}$$

$$F = W\bar{X}Y \tag{۲۶}$$

در قسمت اول هر جایی که W برابر ۰ و X برابر ۱ باشد یعنی برابر با ۰۱ باشد را در نظر میگیریم، (مطابق جدول) و بولین فرم آن را خواهیم نوشت

| W | X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| **۰** | **۱** | ۰ | ۰ | ۱ |
| **۰** | **۱** | ۰ | ۱ | ۱ |
| **۰** | **۱** | ۱ | ۰ | ۱ |
| **۰** | **۱** | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| **۱** | **۰** | **۱** | ۰ | ۱ |
| **۱** | **۰** | **۱** | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |

بعد از این که حالات را در جدول مشخص کردیم حالا نوبت به نوشتن فرم بولین آن است:

قسمت اول:

$$F_1 = (\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}) + (\bar{W}X\bar{Y}Z) + (\bar{W}XY\bar{Z}) + (\bar{W}XYZ) \tag{۲۷}$$

قسمت دوم:

$$F_2 = (W\bar{X}Y\bar{Z}) + (W\bar{X}YZ) \tag{۲۸}$$

در نهایت:

$$F = (\bar{W}X\bar{Y}\bar{Z}) + (\bar{W}X\bar{Y}Z) + (\bar{W}XY\bar{Z}) + (\bar{W}XYZ) + (W\bar{X}Y\bar{Z}) + (W\bar{X}YZ) \tag{۲۹}$$

مسئله:

اگر میخواهی در درس هایت موفق باشی، باید سر موقع در کلاس هایت حاضر باشی و تکالیفت را کامل و درست انجام بدی:

$$G = C.H \tag{۳۰}$$

حالا به نظر شما دوست داشتن دانشجو نسبت به پیزا میتواند بستگی داشته باشد یا نه؟
پاسخ، خیر است چون واقعا ربطی به موفقیت دانشجو از نظر کلی ندارد و بررسی آن در مسئله بود و نبودش فرقی نمیکند! اما با این حال خواهیم داشت:

$$G = C.H.P + C.H.\bar{P} \tag{۳۱}$$

## ۱۷.۲ بررسی گسترش مسئله در جمع ها و ضرب ها

اگر براساس ورودی های مسئله ما چند ورودی کم داشته باشیم، به ازای ورودی های گم شده یا نانوشته **۲ به توان آن تعداد حالت داریم** که آن ورودی هایی که حضور دارند در آن حالات ثابت اند و باقی حالات نشان دهنده حالت های ورودی های نانوشته است.
برای مثال:

$$-\bar{X}.Z \tag{۳۲}$$

$$(\bar{X}.Z) * (4) form \tag{۳۳}$$

SoP

$$(W.\bar{X}.Y.Z) + (\bar{W}.\bar{X}.Y.Z) + (W.\bar{X}.\bar{Y}.Z) + (\bar{W}.\bar{X}.\bar{Y}.Z) \tag{۳۴}$$

PoS

$$\bar{X} + Z \tag{۳۵}$$

$$(W + \bar{X} + Y + Z)(\bar{W}.\bar{X} + Y + Z)(W + \bar{X} + \bar{Y} + Z)(\bar{W} + \bar{X} + \bar{Y} + Z) \tag{۳۶}$$

$$F = \bar{Z} + \bar{W}XY \tag{۳۷}$$

| W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

$$F = \bar{Z} \rightarrow \Sigma(0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13) \tag{۳۸}$$

$$F = \bar{W}XY \rightarrow \Sigma(6, 7) \tag{۳۹}$$

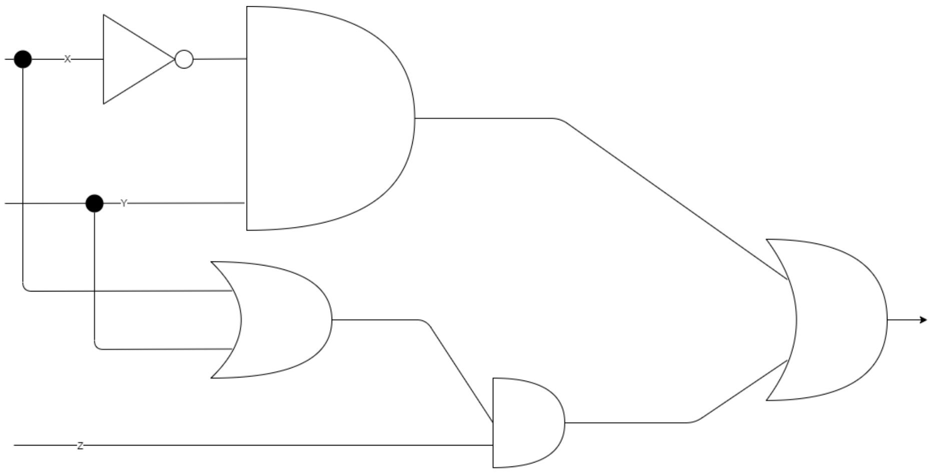
$$F = \Sigma(0, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13) + \Sigma(6, 7) \tag{۴۰}$$

## ۱۸.۲ تبدیل به جمع استاندارد Converting to Canonical Sum

## ۱۹.۲ بررسی و آنالیز مدار

### ۱.۱۹.۲ مسئله ۱

مدار زیر را بررسی کنید.

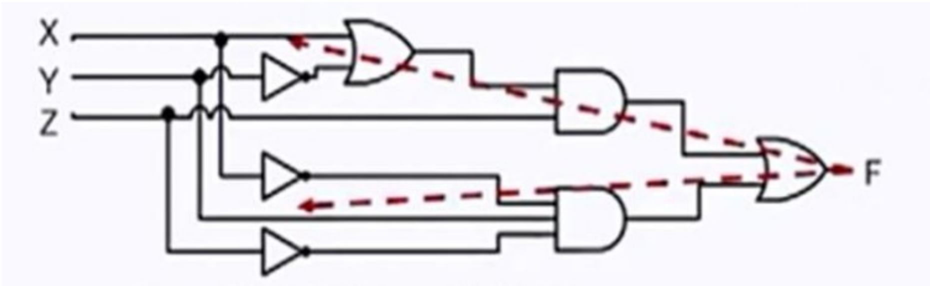



$$F = (\bar{X}Y) + Z(XY) \tag{۴۱}$$

$$SoP = (\bar{X}Y) + (ZX) + (ZY) \tag{۴۲}$$

$$PoS = (\bar{X} + Z)(Y + Z)(X + Y) \tag{۴۳}$$

### ۲.۱۹.۲ مسئله ۲




$$F = (X + \bar{Y})Z + (\bar{X}Y\bar{Z}) \tag{۴۴}$$

$$SoP = XZ + \bar{Y}Z + (\bar{X}Y\bar{Z}) \tag{۴۵}$$

$$PoS = (Z + X)(Z + \bar{Y})(\bar{X} + Y + \bar{Z}) \tag{۴۶}$$

## ۲۰.۲ سناریو اول

تام با سه دوستش، آلیس، باب و چارلی به یک پارتی دعوت شده اند، اما تام زمانی میتواند به پارتی برود که فقط یکی از آنها با تام به پارتی بیایند. کدام یک از فرمول های زیر بیانگر این مسئلست؟

- $T = A + B + C$
- $T = A.B.C$
- $T = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
- $T = \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}$

پاسخ درست گزینه سوم است چرا که مسئله فقط یکی از دوستان تام را گفته که اجبار به آمدن دارند.

## ۲۱.۲ سناریو دوم

جیل هم مانند تام به مهمانی دعوت شده که حداقل سه تا آن دوستان باید به مهمانی بیایند، کدام حالت زیر صحیح است؟

- $T = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
- $T = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$
- $T = A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$
- $T = BC + AC + AB$

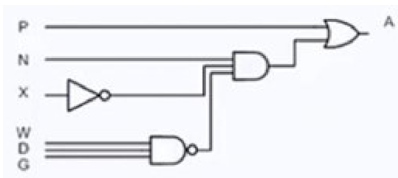
حالت ۴ صحیح است چرا که فقط دو نفر موجودند که با جیل به پارتی بیایند.

## ۲۲.۲ سطوح مدار

مدار هشدار را با ورودی وحشت اضافی در نظر بگیرید:
آلارم زمانی به صدا در میاید که دکمه وحشت روشن باشد یا اگر سیستم روشن باشد و شما هیجان زده نبودید و خانه امن نبود. در نظر داشته باشید که زمانی خانه امن نیست که درها و پجره ها و پارکینگ قفل نباشند.

$$A = P + N\bar{X}(WDG) \quad (۴۷)$$

$$A_{gettingDemorgan} = P + N\bar{X}(\bar{W} + \bar{\bar{D}} + \bar{G}) \quad (۴۸)$$

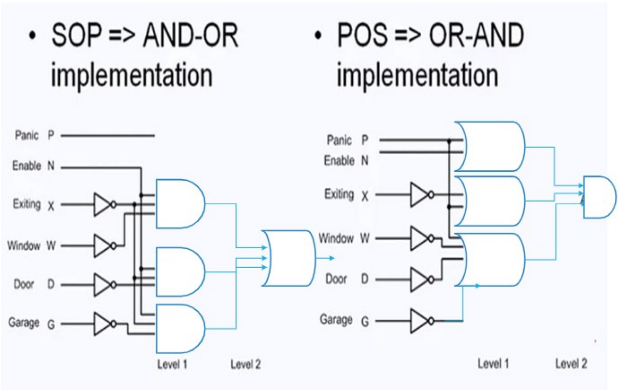



این مدار دارای ۳ سطح میباشد اما در نظر داشته باشیم که هر چقدر تعداد سطوح (براساس تعداد گیت ها) بیشتر باشد سرعت انجام فرایند ها در آن نیز کم میشود. مدار بالا دارای سه سطح است که اگر بتوانیم آن را به دو سطح برسانیم سرعت آن را نیز افزایش داده ایم. پس مدار بالا را به PoS و SoP تبدیل می کنیم:

$$SoP = P + (N\bar{X}\bar{W}) + (N\bar{X}\bar{D}) + (N\bar{X}\bar{G}) \tag{۴۹}$$

$$PoS = (P+N)(P+\bar{X})(P+\bar{W}+\bar{D}+\bar{G}) \tag{۵۰}$$

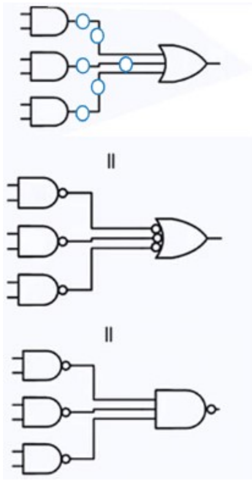
کدام یک از مدارات زیر سریع تر است؟



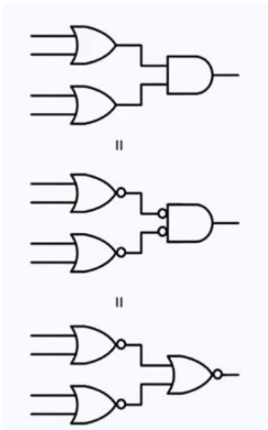

مدار سمت راستی زیرا از پیچیدگی کم تر و ورودی های کمتر و بهینه تر بهره میبرد.

## ۲۳.۲ بهینه کردن مدار ها با تغییر جزئی در آنها

### ۱.۲۳.۲ AND-OR/NAND-NAND in Sum of Product



### ۲.۲۳.۲ OR-AND/NOR-NOR in Product of Sum



## ۲۴.۲ Karnough Map

کارنو یک ابزار مناسب برای ساده سازی مدار مورد استفاده قرار میگیرد. خروجی کارنو به صورت SoP و PoS میباشد. یکی از مهمترین مزیت های جدول کارنو این است که مدار را در دوسطح پیاده سازی میکند که این باعث میشود تا با ورودی ها و سخت افزار های کم به پرفورمنس بهینه دست یابیم.

### ۱.۲۴.۲ سنتز مدار

در این جا تا حدودی با تعریف سنتز مدار آشنا میشویم فقط که یعنی تبدیل فرم منطقی مدار به شکلی که بشود آنرا پیاده سازی کرد

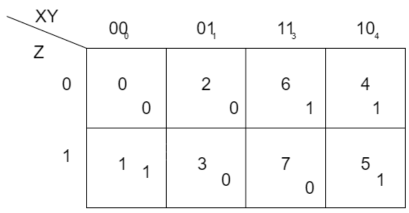
جدول کارنو شکل خاصی ندارند و میتوان آنرا به شکل های مختلفی کشید (چه بصورت عمودی چه به صورت افقی)

تعداد اعضای خانه های کارنو به تعداد ورودی ها بستگی دارد که حتما توانی از دو است، یعنی اگر ۳ ورودی داشته باشیم ۸ عضو در خانه ها کارنو مپ خواهیم گذاشت. اعضای کارنو به صورت صفر ها و یک ها میباشند که مشخص کننده MinTerm و MaxTerm هستند.

شماره گذاری کارنو مپ از سیستم کد گری تبعیت میکند چرا که در کد گری قصد ما فاصله یک بیت بین هر عدد بود و در اینجا هم این فاصله یک بیت حائز اهمیت است چرا که به ما کمک می کند تا ساده سازی بهتری داشته باشیم و راحت تر بتوانیم عمل Adjacent را انجام دهیم.

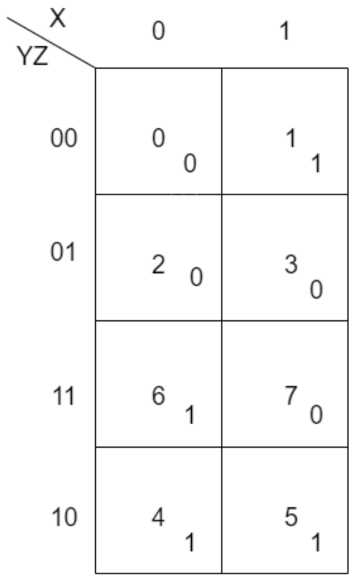
برای مثال:

$$\Sigma_{XYZ}(1,4,5,6) \tag{۵۱}$$



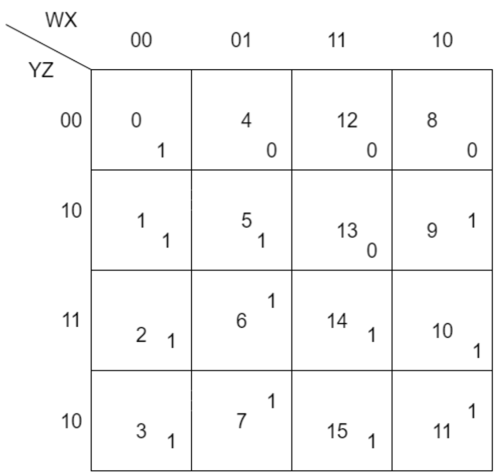

یا میتوان به فرم دیگر نمایش داد:

$$\Sigma_{XYZ}(1,4,5,6) \tag{۵۲}$$




همجنین نمایش موارد زیر در کارنومپ

$$\Sigma_{WXYZ}(1,2,3,5,6,7,9,10,11,14,15) \tag{۵۳}$$



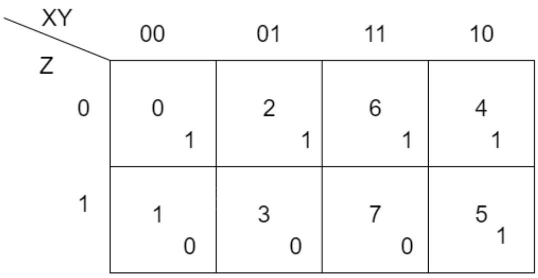
## ۲۵.۲ نحوه ساده سازی به کمک کارنو مپ

برای ساده سازی چند نکته حائز اهمیت هستند:

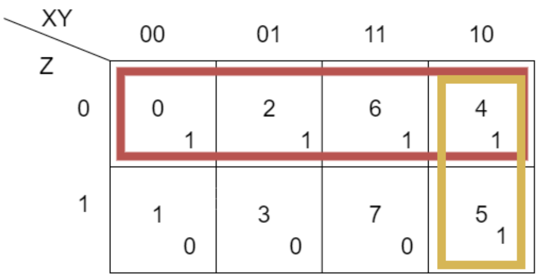
- فقط خانه های مجاور هم میتوانند باهم ساده شوند.
- تعداد اعضایی که برای ساده سازی انتخاب میکنیم باید توانی از ۲ باشد.

برای مثال:

$$\Sigma_{WXYZ}(0,2,4,5,6) \tag{۵۴}$$




ساده سازی:




$$(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}) + (\bar{X}Y\bar{Z}) + (XY\bar{Z}) + (X\bar{Y}\bar{Z}) \tag{۵۵}$$

$$(X\bar{Y}\bar{Z}) + (X\bar{Y}Z) \tag{۵۶}$$

ساده سازی اول:

$$(\bar{Z}(\bar{X}\bar{Y} + \bar{X}Y + XY + X\bar{Y})) \tag{۵۷}$$

$$(\bar{Z}(\bar{X}(\bar{Y}+Y)+X(Y+\bar{Y}))) \tag{۵۸}$$

$$(\bar{Z}(\bar{X}+X)) \tag{۵۹}$$

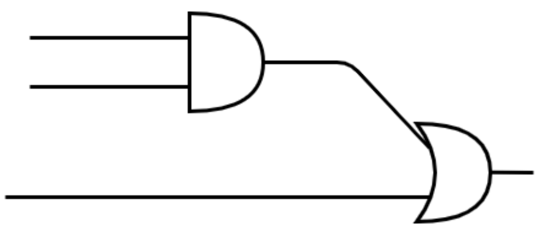
$$(\bar{Z}) \tag{۶۰}$$

ساده سازی دوم:

$$(X\bar{Y}\bar{Z})+(X\bar{Y}Z) \tag{۶۱}$$

$$(X\bar{Y}(\bar{Z}+Z)) \tag{۶۲}$$

$$\bar{Z}+(X\bar{Y}) \tag{۶۳}$$



## ۲۶.۲ گروه بندی اعضا در جدول کارنو

برخی از نکات گروه بندی در کارنو مپ:

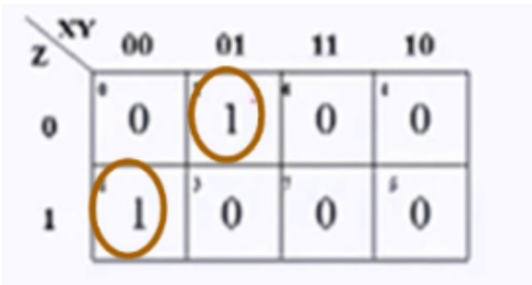
- برای گروه بندی حتما اعضا باید مجاور باشند
- برای گروه بندی باید تعداد اعضا توانی از دو باشند
- در گروه بندی تعداد دسته بندی ها و گروه ها مشکلی ندارد که کم باشد اما میتواند اعضای بیشتر را داشته باشد

- هم پوشانی بین اعضا در جدول کارنو مهم نیست و میتواند به عنوان گروهی دیگر در نظر گرفته شود.
- اگر کل جدول یک باشد تمام اعضا در نهایت یک یا true خواهد بود.
- هنگام گروه بندی کردن امکان گروه بندی به صورت مورب وجود ندارد
- هنگام گروه بندی اعضا با یکدیگر اگر اعضا در پایین ترین قسمت کارنو بودند میتوانند با قسمت بالایی کارنو گروه بندی شوند.

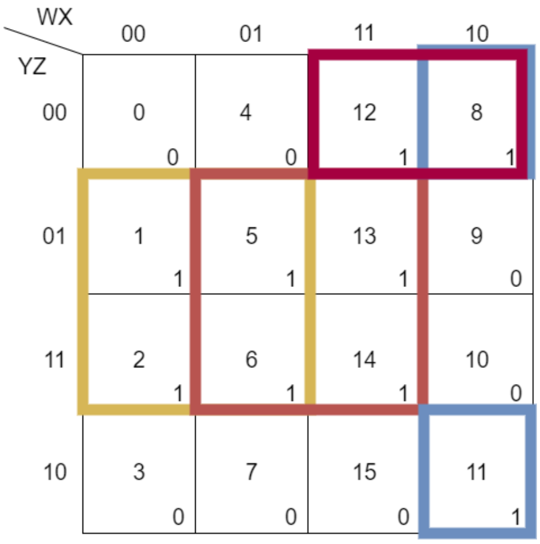
نکته: برای اینکه بدانیم در هر دسته چند متغیر ساده خواهند شد از فرمول زیر استفاده میکنیم:

$$\log_2^{varqty} \quad (۶۴)$$

برای مثلا اگر در دسته ۴ تایی بودیم باتوجه به فرمول فقط دو متغیر ساده میشد، یا مثلا اگر در یک دسته ۱۶ تایی قرار بگیریم در صورتی که این دسته کوچکتر از مقدار کل باشد ۴ متغیر ساده خواهد شد.
نکته، اگر در دسته ای مانند شکل زیر قرار گرفتید بدانید نمیتوان به صورت ضربدری یا مورب ساده سازی را انجام داد، شرط مجاورت با یکدیگر به جا است.



به گروه بندی کارنوی زیر دقت کنید، همان طور که معلوم است در دو قسمت یک بسته ۴ تایی وجود دارد که در با یکدیگر این دوبسته هم پوشانی دارند، و همچنین در خانه ۱۱ با خانه ۸ میتواند در یک گروه قرار گیرد. همچنین خانه ۱۲ با ۸ هم میتواند در یک گروه قرار گیرد.




با توجه به دو گروه چهار تایی و با توجه به فرمول گفته شده میتوان دریافت که این دو گروه فقط ۲ متغیر را ساده میکنند. حل این قسمت:

$$(\bar{W}\bar{X}\bar{Y}Z)+(\bar{W}\bar{X}YZ)+(\bar{W}X\bar{Y}Z)+(\bar{W}XYZ) \tag{۶۵}$$

$$((\bar{W}\bar{X}(\bar{Y}Z+YZ)) \rightarrow (\bar{W}\bar{X})Z(\bar{Y}+Y)) = (\bar{W}\bar{X}Z) \tag{۶۶}$$

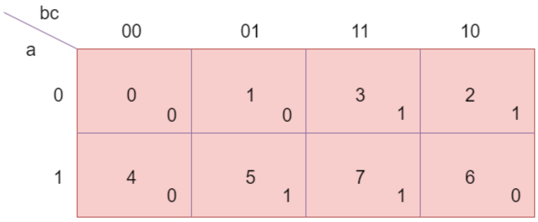
$$(XZ(\bar{W}\bar{Y}+\bar{W}Y)) \rightarrow (XZ(\bar{W}(\bar{Y}+Y))) = (XZ\bar{W}) \tag{۶۷}$$

$$(\bar{W}\bar{X}Z)+(\bar{W}XZ) \rightarrow (Z(\bar{W}\bar{X}+X\bar{W})) = (Z(\bar{W}(Z+\bar{Z}))) = \bar{W}Z \tag{۶۸}$$

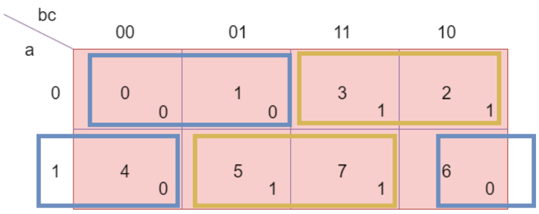
## ۲۷.۲ بدست آوردن PoS با SoP

وقتی با کارنو مپی رو به رو میشویم که درون آن صفر ها و یک هایی وجود دارد، ما معمولا برای بدست آوردن Sum of Product از یک ها استفاده میکنیم که در واقع MinTerm مورد نظر بدست بیاید. در ادامه همین جریان میتوان مین ترم را روی صفر ها هم در نظر بگیریم یعنی اینکه صفر ها را از روش مین ترم بدست بیاوریم یا به طور کلی از روش Sum of Product مانند کانوی زیر:

$$F = \Sigma(2,3,5,7) \tag{۶۹}$$




گروه بندی کردن صفر ها و یک ها:




بدست آوردن مین ترم های یک:

$$F_{1's} = (\bar{a}bc) + (\bar{a}b\bar{c}) = (\bar{a}b(\bar{c}+c)) = \bar{a}b \tag{۷۰}$$

$$F_{1's} = (a\bar{b}c) + (abc) = ac(\bar{b}+b) = ac \tag{۷۱}$$

$$F_{1'sfinal} = \bar{a}b + ac \tag{۷۲}$$

بدست آوردن مین ترم های صفر:

$$F'_{0's} = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}) + (\bar{a}\bar{b}c) = \bar{a}\bar{b}(\bar{c}+c) = \bar{a}\bar{b} \tag{۷۳}$$

$$F'_{0's} = (a\bar{b}\bar{c}) + (ab\bar{c}) = a\bar{c}(\bar{b} + b) = a\bar{c} \quad (۷۴)$$

$$F'_{0'sfinal} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{c} \quad (۷۵)$$

### ۱.۲۷.۲ نکته بسیار مهم

اگر بخواهیم هم PoS و SoP صفر ها و یک را بدست بیاوریم، یا PoS و SoP از هر دو صفر ها و یک ها میگیریم که در نتیجه آنها را ساده میکنیم و به نتیجه خواهیم رسید یا از میانبر زیر استفاده میکنیم.

بدست آوردن PoS از طریق SoP:

یک میانبر راحت در این بین وجود دارد و آن هم این است که برای بدست آوردن PoS یک ها از تابع مین ترم صفرها استفاده میکنیم و آن را به صورت نقیض شده در نظر خواهیم گرفت.

برای بدست آوردن PoS صفر ها از تابع مین ترم یک ها استفاده میکنیم و به صورت نقیض شده آنرا حل میکنیم.

$$F_{SoP} = \bar{a}b + ac \quad (۷۶)$$

$$F'_{SoP} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{c} \quad (۷۷)$$

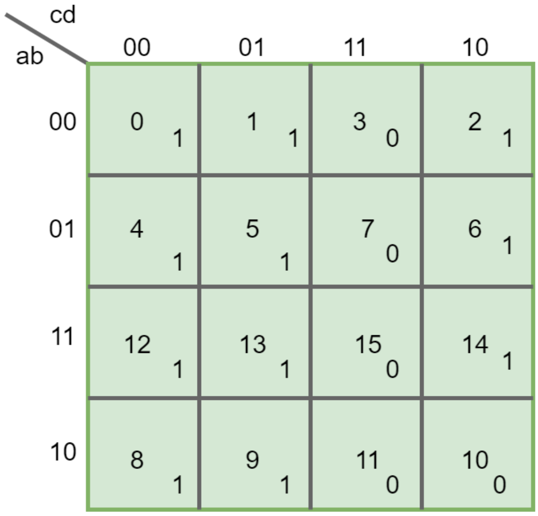
$$F_{PoS} = (a + b)(\bar{a} + c) \quad (۷۸)$$

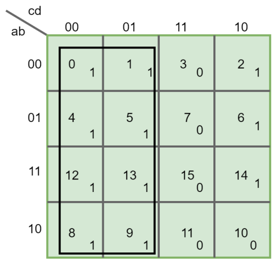
$$F'_{PoS} = (a + \bar{b})(\bar{a}\bar{c}) \quad (۷۹)$$

مسئله:

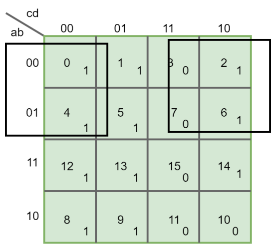
حالات مختلف چهار ورودی را در نظر بگیرید و SoP و PoS آنها را بنویسید.

$$\prod(3,7,10,11,15) \tag{۸۰}$$

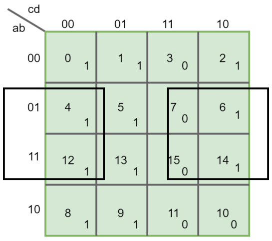



$$\bar{c} \rightarrow 1(n) = 8with1sharedbetween \tag{۸۱}$$

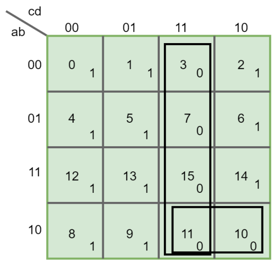


$$1:[(\bar{a}\bar{b}c\bar{d})+(\bar{a}bc\bar{d})]+[(\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})+(\bar{a}b\bar{c}\bar{d})] \qquad (۸۲)$$




$$2:[(\bar{a}b\bar{c}\bar{d})+(ab\bar{c}\bar{d})]+[(\bar{a}bc\bar{d})+(abc\bar{d})] \qquad (۸۳)$$

$$F_{(SoP)}=[\bar{c}+(\bar{a}\bar{d})+(b\bar{d})] \qquad (۸۴)$$




$F'_{(SoP)}$

$$[(\bar{a}\bar{b}cd)+(\bar{a}bcd)]+[(abcd)+(a\bar{b}cd)]+[(a\bar{b}cd)+(a\bar{b}c\bar{d})] = (\bar{a}cd+acd)+(a\bar{b}c) \quad (۸۵)$$

که در نهایت :

$$F_{(SoP)} = \bar{c} + (\bar{a}\bar{d}) + (b\bar{d}) \quad (۸۶)$$

$$F'_{(SoP)} = cd + (a\bar{b}c) \quad (۸۷)$$

$$F_{(PoS)} = (\bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c}) \quad (۸۸)$$

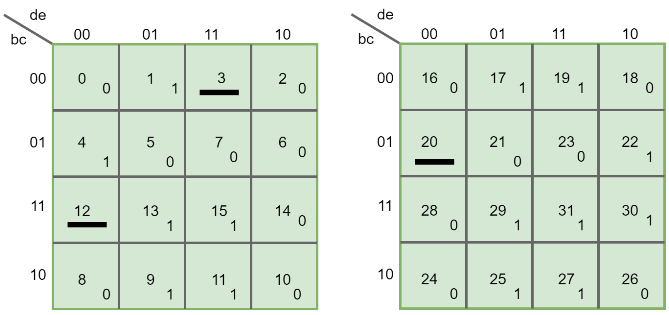
$$F'_{(PoS)} = (c)(a + d)(\bar{b} + d) \quad (۸۹)$$

## ۲۸.۲ کارنو با ورودی های زیاد

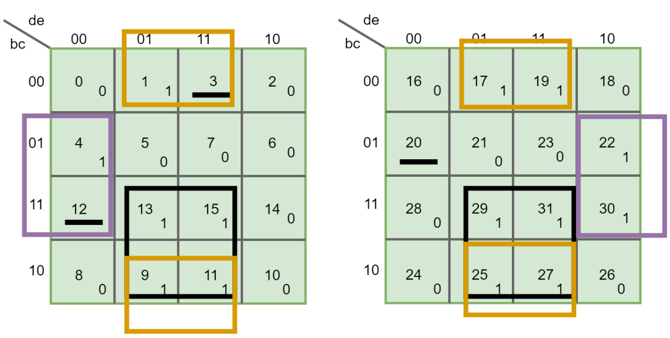
استفاده راحت از کارنو مپ تا زمانی است که تعداد ورودی های ما در حد و اندازه ۳ تا ۴ متغیر باشد اما اگر ۵ متغیر داشته باشیم تعداد خانه های کارنو ما زیاد و فرم و شکل آن متفاوت خواهد بود. چرا که برای مثال در ۵ ورودی که ۳۲ خانه داریم بایستی از دو کانوی ۱۶ تایی استفاده کنیم، لازم به ذکر است که این دو کارنو با یکدیگر همپوشانی دارند، یعنی اینکه ممکن است در وسط کارنو اول دارای چهار مقدار ۱ باشیم و دقیقا در همان منطقه در کارنوی دوم آن وضعیت را داشته باشیم به همین خاطر میتوانند با یکدیگر مورد بررسی قرار گیرند، منتها در بررسی همچین کارنو هایی باید بسیار دقت داشت که به مشکل بر نخوریم چرا که تعداد محاسبه و نوع شکل و قرارگیری کمی پیچیده و پر پیچ و خم است.

مثال:

$$\Sigma(1,4,9,11,13,15,17,19,22,25,27,29,30,31) + d(3,12,20) \qquad (۹۰)$$




خطوط سیاهی که در کارنو ها میبینید به نام Don't Care هستند که ماهیت خاصی ندارند و تاثیرشان به تنهایی فایده ای نداره، اما اگر در کنار گروهی باشند که وجود یک یا صفر در بین آنها مهم است میتواند در شرایطی هم به صورت یک مورد استفاده قرار گیرند یا به صورت صفر!



$$1(n) = 4 : [(bc\bar{d}e) + (bcde)] + [(b\bar{c}\bar{d}e) + (b\bar{c}de)] = (dce) + (d\bar{c}e) = be \tag{۹۱}$$

$$1(n) = 4 : topDown \rightarrow [(b\bar{c}\bar{d}e) + (b\bar{c}de)] + [(\bar{b}\bar{c}\bar{d}e) + (\bar{b}\bar{c}de)] = (b\bar{c}e) + (\bar{b}\bar{c}e) = \bar{c}e \tag{۹۲}$$

$$1(n) = 4 : SideBar \rightarrow [(bcd\bar{e}) + (\bar{b}cd\bar{e})] + [(bc\bar{d}\bar{e}) + (\bar{b}c\bar{d}\bar{e})] = (cd\bar{e}) + (c\bar{d}\bar{e}) = c\bar{d} \tag{۹۳}$$

$$F_{(SoP)} = (be) + (\bar{c}e) + (c\bar{d}) \tag{۹۴}$$

# ۳ مدارات ترکیبی

## ۱.۳ مدار سکویی مجوریتی یا Majority Circuit

مدار مجوریتی فقط دارای سه ورودی می باشد که خروجی آن براساس تعداد اکثریت میباشد، مثلا اگر در این سه ورودی دو ورودی صفر بود نتیجه این مدار صفر خواهد بود.

| X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

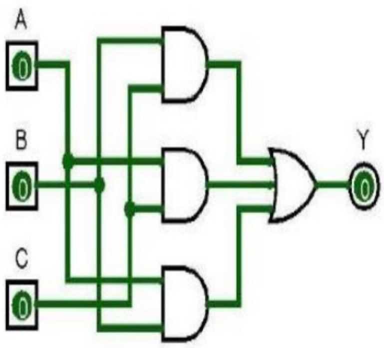
بدست آوردن تابع مجورتی سادست، اما از طریق جدول کارنو میتوان به این نتیجه رسید:

| x \ yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$F = [(x\bar{y}z) + (xyz)] + [(xyz) + (xy\bar{z})] + [(\bar{x}yz) + (xyz)] \tag{۹۵}$$

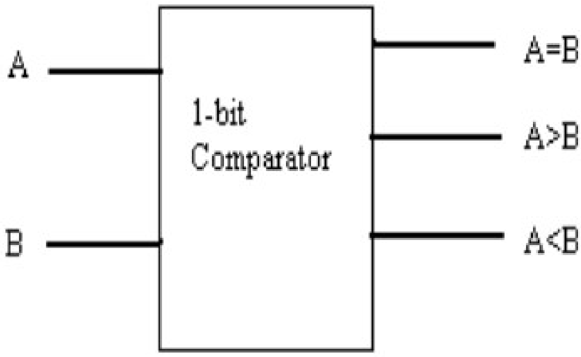
$$F = xy + xz + yz \tag{۹۶}$$

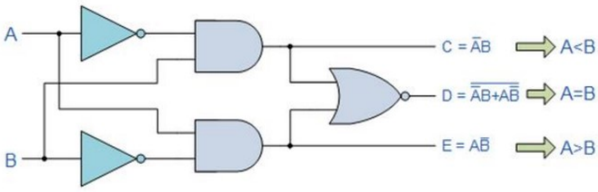
به همین خاطر از طریق تابع بالا میتوان به مدار زیر رسید:



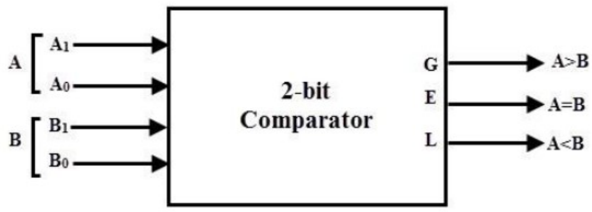
## ۲.۳ مقایسه کننده ها Comparator

### ۱.۲.۳ مقایسه کننده تک بیتی



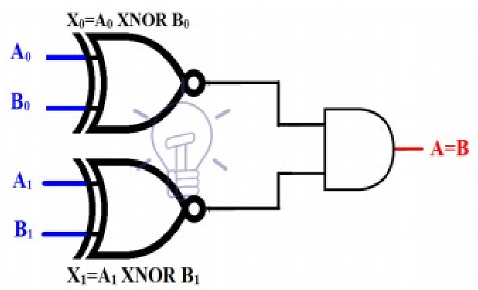



### ۲.۲.۳ مقایسه کننده دوبیتی

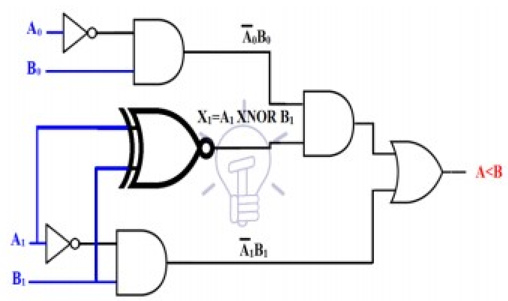



شرط برابری را معمولا با اکس نور بررسی خواهیم کرد.

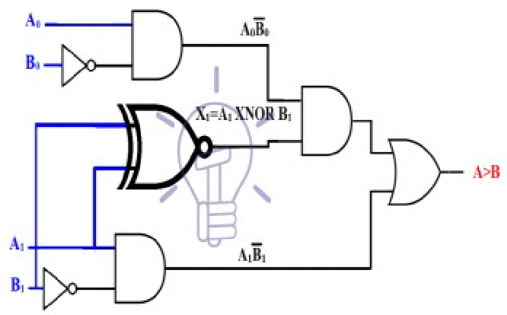
$$(ab).(\bar{a}\bar{b}) \quad (۹۷)$$




$$A0 < B0 + A1 < B1 \rightarrow F = (\bar{A}0.B0) + (\bar{A}1.B1).(A1.B1) \quad (۹۸)$$



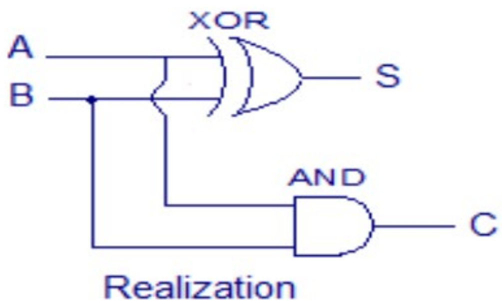

$$A0 > B0 + A1 > B1 \rightarrow (A0.\bar{B}0) + (A1.\bar{B}1).(A1.B1) \quad (۹۹)$$




## Half Adder ۳.۳

| X | Y | Sum | Carry |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |

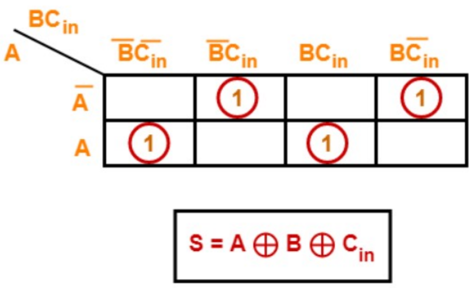
بدین معنا که در جمع دو ورودی از الگوی اکس اور استفاده شده و در کری از الگوی And بکار گرفته شده است.

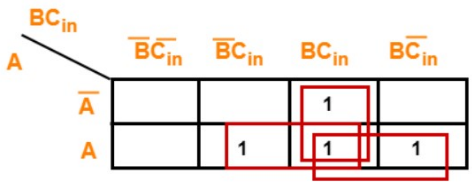


## ۴.۳ Full Adder

| X | Y | Cin | Sum | Cout |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

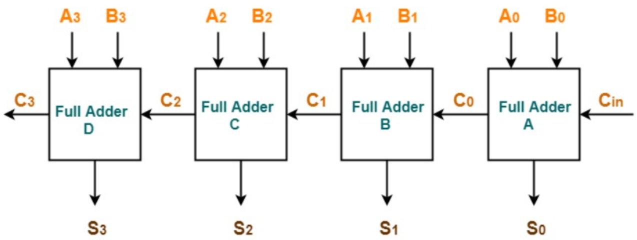
در جمع Full Adder از الگوی اکس اور و در کری آن از الگوی مجورتی استفاده شده است.



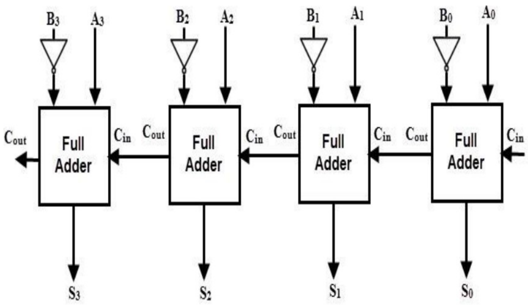
## ۵.۳ 4 Bit Ripple Carry Adder

جمع کننده ۴ بیتی کری ها به صورت موج مانند دیاگرام زیر است:




### ۱.۵.۳ تفریق ۴ بیتی به صورت موج گونه

نکته: آن است که در هنگام تفریق ما به روش جمع عمل کنیم بطوری که عملوند اول را با حالت عادی و عملوند دوم را به صورت نات شده + ۱ در این تفریق به روش جمع حل میکنیم.

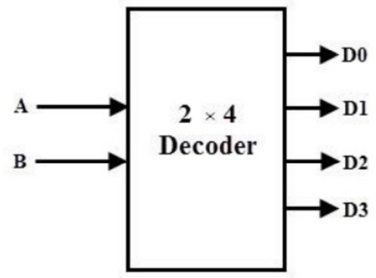


## ۶.۳ Decodersدیکودر ها

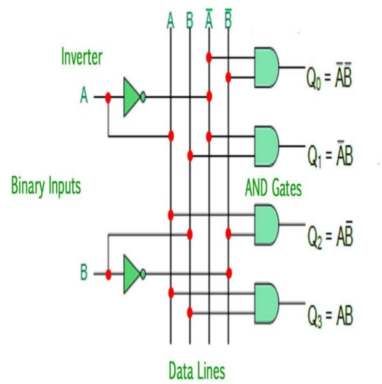
دیکودر ها انواع مختلفی دارند، بطوری که با توجه به تعداد ورودی آنها در خروجی تعداد آنها توانی از دو خواهد بود، .مثلا اگر ۳ ورودی داشت، ۸ خروجی خواهد داشت

در برخی دیکودر ها از ورودی یا پایه ای به نام Enable استفاده میشود و همانطور که از نامش معلوم است به عنوان فعال کننده مدار یا دیکودر بکار گرفته میشود و میتواند دو حالت ۰ یا ۱ را داشته باشد.

در زیر یک دیکودر دو به چهار آمده است:




منطق دیکودر بالا به این صورت است که هر موقع ورودی ها ۰ باشد دیکودر صفر روشن خواهد شد، در اصل چینش ورودی ها به صورت ۰ تا ۳ هست که به صورت باینری با ترتیب در ورود ها وارد میشوند، وقتی ورود ها به ترتیب ۱ و ۰ میشوند دیکودر یک، اگر ۰ و ۱ شود دیکودر دو و در نهایت اگر هر دو ورودی ۱ باشد با توجه به عدد حقیقی که ۳ میشود دیکودر ۳ روشن خواهد شد.

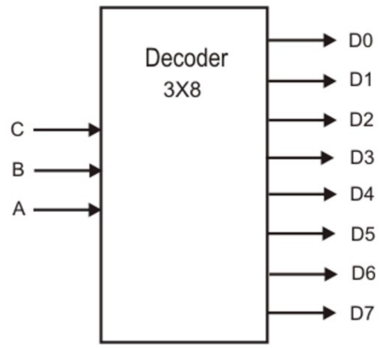



همان طور که در بالا توضیح دادیم را میتوانیم روی مدار به صورت بولین تبدیل کنیم و به همان نتیجه برسیم. لازم به ذکر است که هر حالت به صورت مین ترم نمایش داده میشود.

| A | B | Decoder |
|---|---|---|
| $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | D۰ |
| A | $\bar{B}$ | D۱ |
| $\bar{A}$ | B | D۲ |
| A | B | D۳ |

پس پایه Enable اگر صفر باشد کل مدار هر حالتی که داشته باشد بازم به خروجی صفر میرسیم، مانند ورودی برق انگار ورودی برقی وجود ندارد. اما اگر ۱ باشد حالات مختلف ورودی ها مورد بررسی قرار میگیرد، به همین خاطر Enable میتواند به صورت پلی برای تبدیل یا اشاره دو مدار، از آن استفاده کرد.

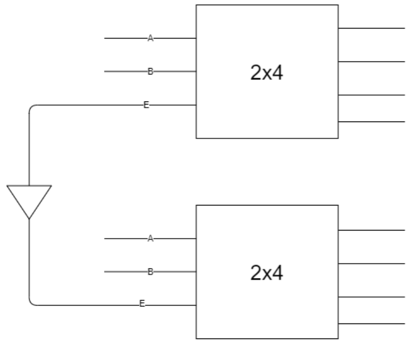
دیکودر سه به هشت زیر را در نظر بگیرید. به ازای هر ورودی دیکودر مربوط به آن روشن




خواد شد، برای مثال، با ورودی ۱۰۱، یا به صورت بولی یعنی $A\bar{B}C$ دیکودر پنجم روشن خواهد شد و نتیجه $\mathrm{D5}$ را خواهیم داشت. به همین ترتیب به ازای هر ورودی از ۰ تا ۷ که ۸ حالت دارد، میتواند And گیت های مربوط به هر ورودی را به صورت جداگانه نمایش داد.

### ۱.۶.۳ تبدیل

با استفاده دیکودر ۲ به ۴ یک دیکودر سه به هشت ایجاد کنید




| X | Y | Z |
|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ |

باتوجه به جدول بالا با سه ورودی خواهیم دید که در چهار مرتبه ورودی اکس که مثلا به عنوان بیت فعال کننده ماست صفر است و ۴ حالت بعدی یک است، این بدین معناست که هر موقع صفر باشد با توجه ناتی که در مدار استفاده کردیم مدار یک میشود و فقط یک مدار در ۴ حالت اول خواهیم داشت و بقیه حالت بعدی را با یک که در مدار بعدی داریم در مدار اول دیگر فعال نیست و مدار دوم روشن خواهد بود. این طور میتوان به راحتی به دیکودر ۳ به ۸ دست یافت.

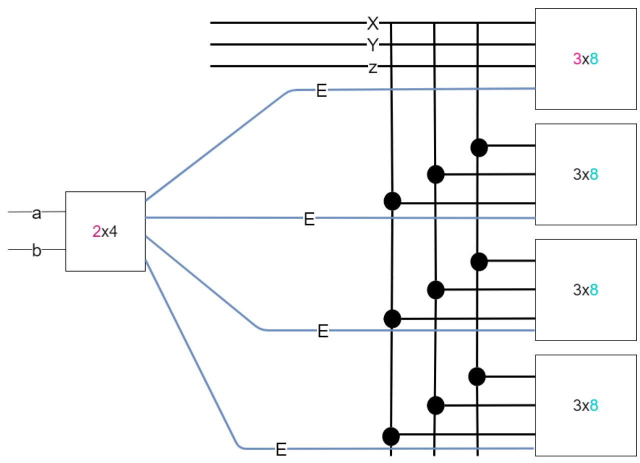
مطلوب است طراحی مدار دیکدر ۵ به ۳۲ تحت هر یک از شرایط زیر :

۱ـ با استفاده از یک دیکدر ۲:۴ و ۴ دیکدر ۳:۸

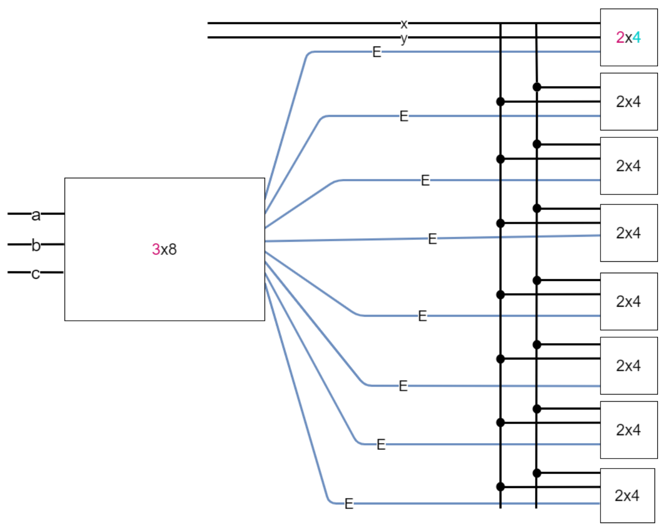
۲ـ با استفاده از یک دیکدر ۳:۸ و ۸ دیکدر ۲:۴

۳ـ با استفاده از گیت not و ۲ دیکدر ۴:۱۶

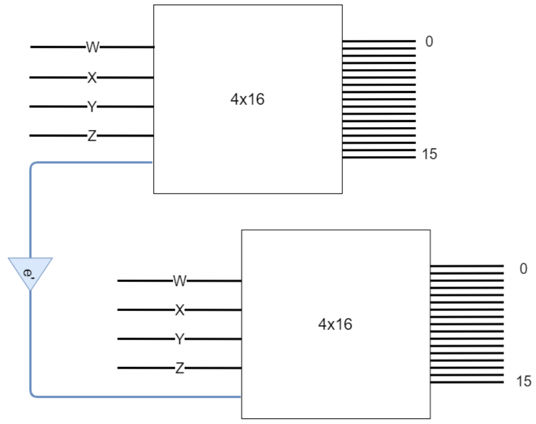
۴ ـ با استفاده از گیت not و ۱۰ دیکدر ۲:۴



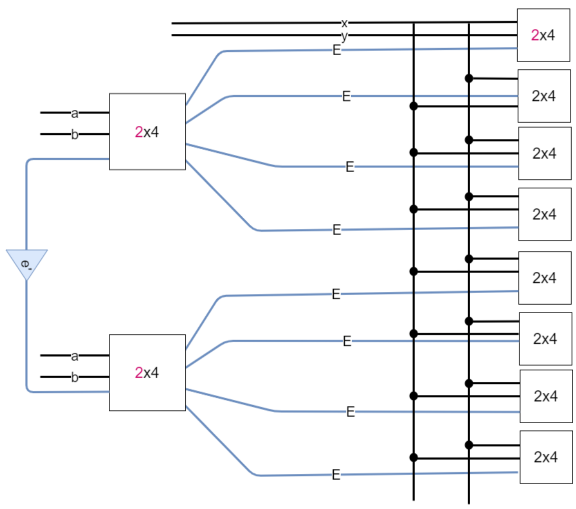

Decoder 1. Create 5 to 32 with 3 to 8




Decoder 2. Create 5 to 32 with 2 to 4




Decoder 1. Create 5 to 32 with 4 to 16 with not




Decoder 1. Create 5 to 32 with 10 qty 2x4

## ۷.۳ Encoder