مباحثی از نظریه گراف

مقدمه: نظریه گراف یکی از موضوعهای مهم در ریاضیات گسسته است. یک گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته به دست می‌دهد که اعضای آن به طریقی بهم مرتبط هستند. اعضای این مجموعه می‌توانند انسان باشند و ارتباط آنها با هم دست دادن، با هم دوست بودن، با هم خویشاوند بودن و ... . اعضا می‌توانند محل اتصالهای سیمهای یک شبکه برق و ارتباط بین آنها سیمهای وصل شده به دو نقطه باشد. اعضا می‌توانند اتمها در یک مولکول باشند و ارتباط آنها اتصالهای شیمیایی باشد یا اعضا می‌توانند قسمتهای مختلف زمین و ارتباط بین آنها پلهایی باشد که آنها را بهم مرتبط می‌کند (همانند مسأله کونیگسبرگ). نظریه گراف ریشه در معماها و بازیها دارد اما، امروز از این نظریه به عنوان وسیله‌ای توانا در مطالعهٔ ساختار روابط بین اعضای مجموعه‌ها استفاده می‌شود. این نظریه در اقتصاد، روانشناسی، جامعه شناسی، ژنتیک، باستانشناسی ، تحقیق در عملیات و ... کاربرد دارد.

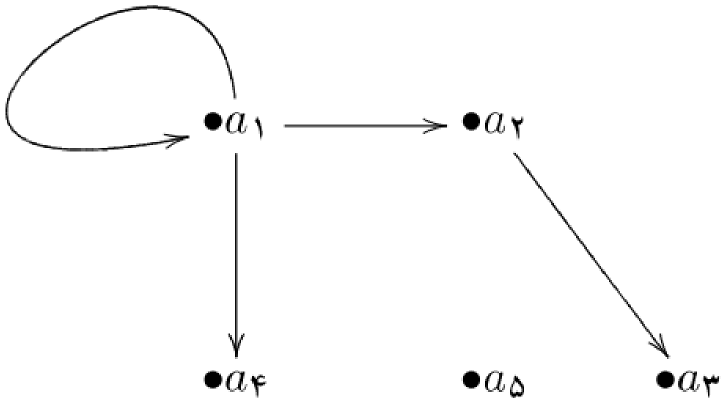
در این فصل، ضمن تعریف گراف و بررسی چند نوع گراف ساده، مدلبندی مسائل به وسیله گراف و شمارش بعضی گرافها را ، به کمک اصولی که در فصول قبل بیان شد، شرح می‌دهیم.

تعریف گراف

فرض کنید V یک مجموعه ناتهی و $E \subseteq V \times V$ هستند؛ زوج $G = (V, E)$ را یک **گراف** می‌نامند. V را مجموعه راس‌ها و هر عضو آن را یک **راس**، و مجموعه E را مجموعه یال‌ها و هر عضو آن را یک **یال** می‌گویند. اگر ترتیب قرار گرفتن راس‌ها مهم باشد، گراف را **گراف جهت‌دار** می‌نامند و یال از راس v_1 به راس v_2 را با $e = (v_1, v_2)$ نشان می‌دهند. در غیر این صورت، گراف را بدون جهت می‌نامند و یال از راس v_1 به راس v_2 را با $e = \{v_1, v_2\}$ نمایش می‌دهند.

هر گراف را می‌توان به شکل هندسی نمایش داد. برای این کار، به هر راس نقطه‌ای از صفحه را متناظر می‌کنیم و اگر یالی بین دو راس موجود باشد، دو راس متناظر را با خطی به هم وصل می‌کنیم. در صورتی که گراف جهت‌دار باشد، این جهت را با فلش مشخص می‌کنیم.

مثال ۴.۱ فرض کنید

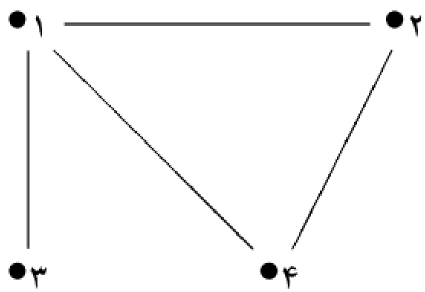


$$V = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\},$$

$$E = \{(a_۱, a_۱), (a_۱, a_۲), (a_۱, a_۴), (a_۱, a_۳)\}.$$

در این صورت، زوج $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار است.

مثال ۴.۲ فرض کنید

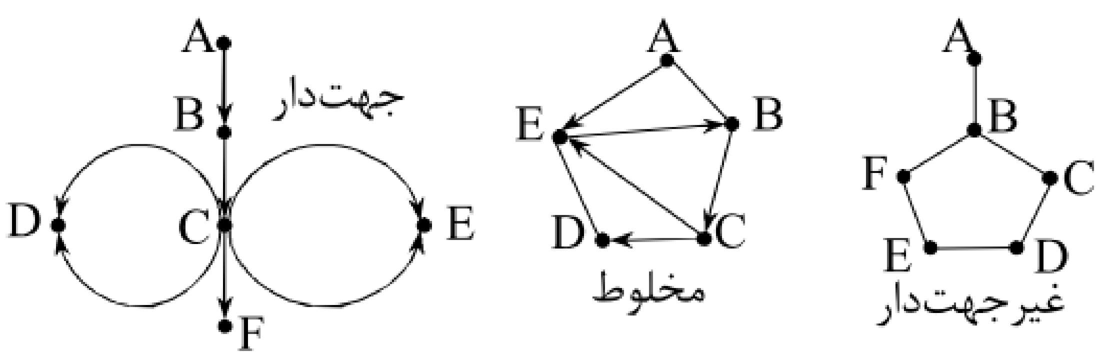


$$V = \{۱, ۲, ۳, ۴\},$$

$$E = \{\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۴\}, \{۲, ۴\}\}.$$

در این صورت، زوج $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت است.

شکل مقابل نمونه‌ای از این سه گراف را نشان می‌دهد.



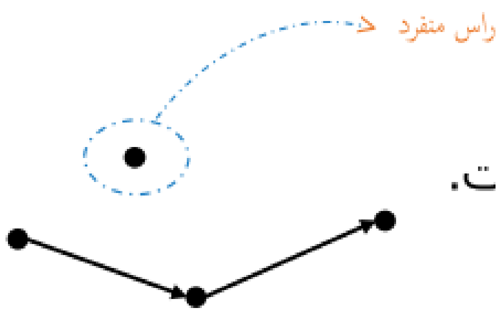
تعداد راس‌های یک گراف را **مرتبه** و تعداد یال‌های آن را **اندازه** گراف می‌نامند. یک گراف از مرتبه p و اندازه q را (اگر مرتبه و اندازه آن مهم باشد) (p,q)-گراف می‌نامند.

گره‌های مجاور: اگر بین دو گره، یالی (جهت‌دار یا بدون جهت) باشد، آن دو گره مجاورند.

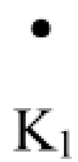
گره منفرد یا Isolated Node: گره‌ای که با هیچ گره دیگری مجاور نباشد.

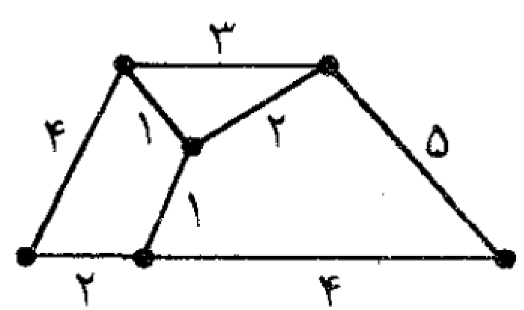
گراف پوچ یا Null Graph: گرافی که فقط شامل گره‌های منفرد است.

گراف وزن‌دار یا Weighted Graph: گرافی که هر یال در آن وزنی دارد.



ت.

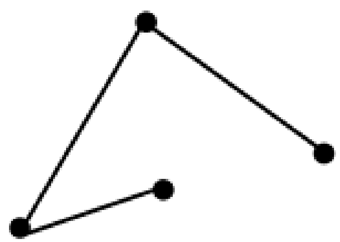
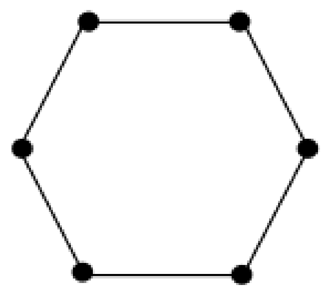


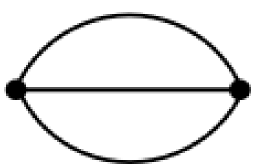


حلقه یا طوقه (loop) : یالی است که رأس ابتدای و انتهای آن یکی است.

یال های چندگانه یا موازی: اگر بین دو رأس چند یال داشته باشیم آن را یال های چندگانه گویند.

گراف ساده: گرافی بدون جهت، بدون حلقه، و بدون یال های چندگانه را گویند.



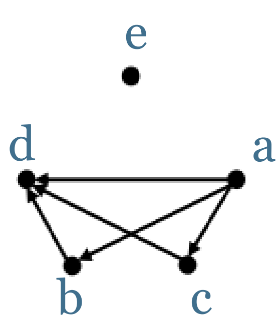
لبه چندگانه (اضلاع چندگانه) : وقتی از راس a به b چند یال وجود داشته باشد.

برای اعضای هیئت مدیره یک شرکت یک گراف تاثیر گزاری رسم کنید که در آن :

a b c d

رئیس جمهور بتواند مدیر تحقیقات و توسعه ، مدیر بازاریابی و مدیر عملیات را تحت تأثیر قرار دهد. مدیر پژوهش و توسعه می تواند مدیر عملیات را تحت تاثیر قرار دهد. مدیر بازاریابی می تواند مدیر عملیات را تحت تاثیر قرار دهد. و هیچ کس نمی تواند رئیس امور مالی را تحت تأثیر قرار دهد یا تحت تأثیر آن باشد.

e



ما یک گراف از نمودار مورد نظر را ترسیم می کنیم، که یک گراف جهت دار است. اگر به ما گفته شود x می تواند y را تحت تأثیر قرار دهد، از x به y یالی رسم میکنیم. به عنوان مثال رئیس ارشد مالی یک راس جدا شده است زیرا او تحت تأثیر هیچ کس نیست و هیچ کس را تحت تأثیر قرار نمی دهد.

درجه راس

* درجه‌ی گره در یک گراف بدون جهت، تعداد یال‌هایی است که از آن گره می‌گذرد، در حالی که در یک گراف جهت دار؛ درجه‌ی ورودی یک رأس تعداد یال‌هایی است که به آن وارد می شوند و آنرا به شکل $\deg^-(V)$ نشان می دهند. و درجه‌ی خروجی یک رأس تعداد یال‌هایی است که از خارج می‌شوند و به شکل $\deg^+(V)$ نشان می‌هند.

* مجموع درجات رؤس یک گراف بدون جهت دو برابر تعداد یال‌ها در آن گراف است؛

$$\frac{\sum \deg(V)}{2} = E$$ تعداد یال‌ها

* تعداد رؤس درجه فرد یک گراف همواره زوج است.

- $d(G)$.کوچکترین درجه در گراف G را $d(G)$ تعریف می کنیم (بخوانید دلتای کوچک G)
- $\Delta(G)$. بزرگترین درجه در گراف G را $\Delta(G)$ تعریف می کنیم (بخوانید دلتای بزرگ G)

قضیهٔ ۵ . ۱ . مجموع درجات رئوس یک گراف مساوی دو برابر تعداد اضلاع است.

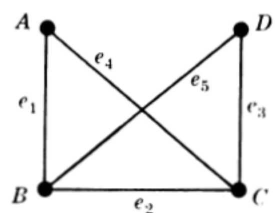
مثلاً، در شکل ۵ . ۱ (آ) داریم

$$\deg(A) = 2, \quad \deg(B) = 3, \quad \deg(C) = 3, \quad \deg(D) = 2$$

مجموع درجات مساوی ده است که، طبق انتظار، دو برابر تعداد اضلاع می باشد .

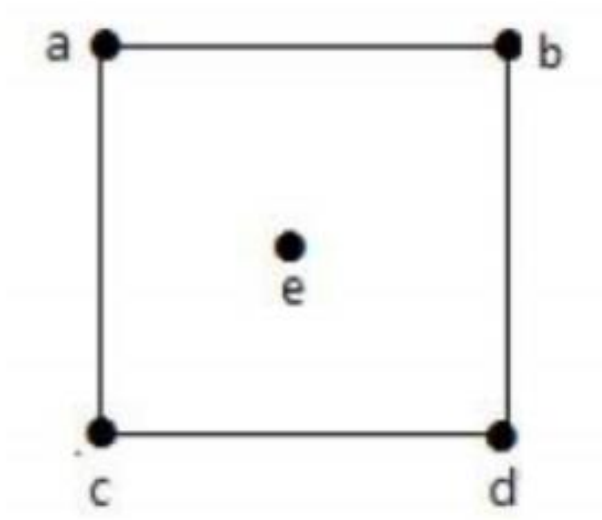
گوییم یک رأس زوج یا فرد است اگر درجه اش زوج یا فرد باشد .

مثلاً، A و D رئوسی زوجند در حالی که B و C فرد می باشند .



(آ) گراف

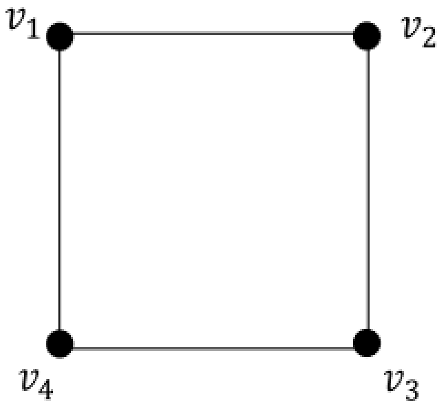
گراف شکل زیر را در نظر بگیرید.



در گراف بالا، داریم:

deg(a) = ۲, deg(b) = ۲, deg(c) = ۲, deg(d) = ۲, deg(e) = ۰

گرافی مثال بزنید که به ازای هر $v \in V$ داشته باشیم : $d(G) = d(v) = \Delta(G)$



$\forall v_i \in V : d(G) = d(v_i) = D(G) = 2$

رابطه بین درجه رئوس و تعداد یال ها

برای یک گراف بدون جهت داریم :

(مجموع درجات همه رئوس برابر با دوبرابر تعداد یال هاست – واضحه، وقتی هر یال به دو راس وصل میشه، پس به ازای هر یال به درجه هر راس آن یک واحد اضافه میشود. یعنی به ازای هر یال به مجوع کل درجه های رئوس دو واحد اضافه میشود.)

$$\sum_{V_i} d_{V_i} = 2 \times |E|$$

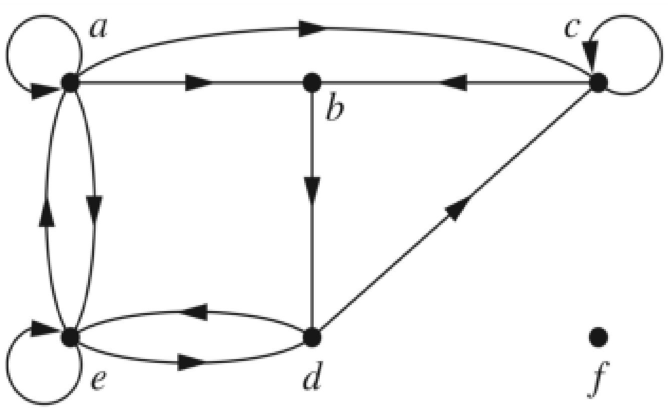
برای یک گراف جهت دار داریم :

(مجموع درجات ورودی برابر با مجموع درجات خروجی برابر با تعداد یالهاست – خب اینم همونقدر واضحه، در گراف جهتدار هر یال یک راس ابتدا و یک راس انتها داره. به ازای یک یال جهت دار یک درجه ورودی به راس انتهایی و یک درجه خروجی برای راس ابتدایی آن حساب میشود. نهایتا میتوان گفت که به ازای هر یال جهت دار یک واحد به مجموع کل درجات ورودی و یک واحد به مجموع کل درجات خروجی رئوس اضافه میشود.)

$$\sum_{V_i} d_{V_{in}} = \sum_{V_i} d_{V_{out}} = |E|$$

اگر گرافی طوقه داشته باشد، راس واقع روی هر طوقه را از درجه دو در نظر می‌گیریم.

درجه ورودی و خروجی تمام رئوس و سپس تعداد کل یال های گراف جهت دار زیر را مشخص کنید.



درجه ورودی

- $deg^{-}(a) = 2$
- $deg^{-}(b) = 2$
- $deg^{-}(c) = 3$
- $deg^{-}(d) = 2$
- $deg^{-}(e) = 3$
- $deg^{-}(f) = 0$

درجه خروجی

- $deg^{+}(a) = 4$
- $deg^{+}(b) = 1$
- $deg^{+}(c) = 2$
- $deg^{+}(d) = 2$
- $deg^{+}(e) = 3$
- $deg^{+}(f) = 0$

$$|E| = \sum_{v_i \in V} deg^{-}(v_i) = \sum_{v_i \in V} deg^{+}(v_i) = 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12$$

مثال ۱۸: اگر یک گراف، ۹ یال داشته باشد و درجه همه گره‌ها ۳ باشد؛ تعداد گره‌ها را محاسبه نمایید.

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E(G)| \Rightarrow \sum_{v\in V} 3 = 2\times 9 \Rightarrow 3|V|=18 \Rightarrow |V|=6$$

مثال ۱۹: اگر در یک گراف، تعداد یال‌ها برابر ۱۰ و دو گره از درجه ۴ داشته باشد و درجه سایر گره‌ها ۳ باشد؛ تعداد گره‌ها را محاسبه نمایید.

$$\sum_{v\in V} \deg(v)=2|E(G)| \Rightarrow 2\times 4+(|V|-2)\times 3=2\times 10 \Rightarrow 8+3|V|-6=20 \Rightarrow 3|V|=18 \Rightarrow |V|=6$$

(۱) **ماتریس مجاور.** فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times m$ با تعریف زیر باشد:

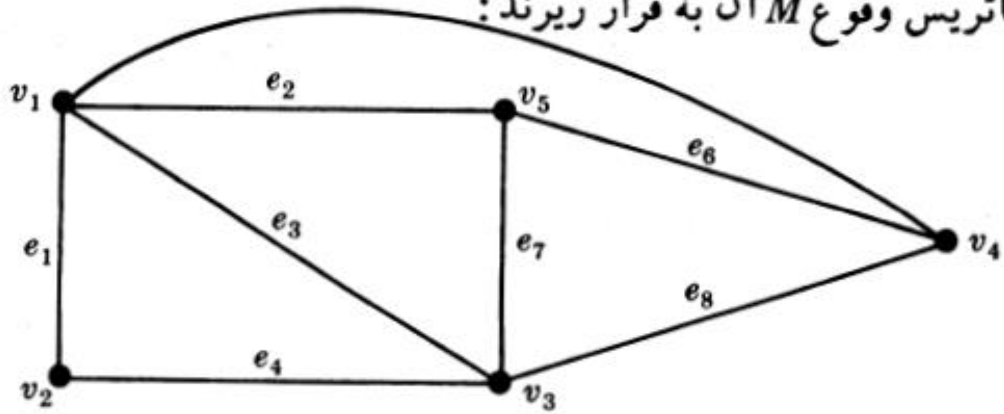
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \{v_i, v_j\} \text{ یک ضلع باشد؛ یعنی، اگر } v_i \text{ مجاور } v_j \text{ باشد،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

در این صورت، A ماتریس مجاور G نام دارد. ملاحظه می کنیم که $a_{ij} = a_{ji}$ ؛ پس A یک ماتریس متقارن می باشد. (ماتریس مجاور یک چند گراف را می توان با فرض a_{ij} مساوی تعداد اضلاع $\{v_i, v_j\}$ تعریف کرد.)

(۲) **ماتریس وقوع.** فرض کنیم $M = (m_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v_i \text{ بر ضلع } e_j \text{ واقع باشد،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

مثلاً، گـراف شکل ۵. ۱۲ را در نظر می گیریم. ماتریس اضلاع B ، ماتریس مجاور A، وماتریس وقوع M آن به قرار زیرند:



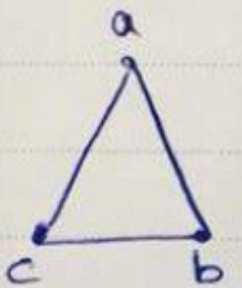
$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
\qquad
A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

ماتریسِ مجاورت :

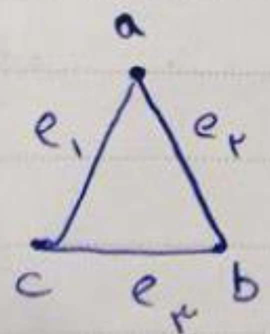
رأس‌ها

رأس‌ها $\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ M



$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ماتریسِ تلاقی :



$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ \hline & ۲ & ۲ & ۲ \end{array}$$

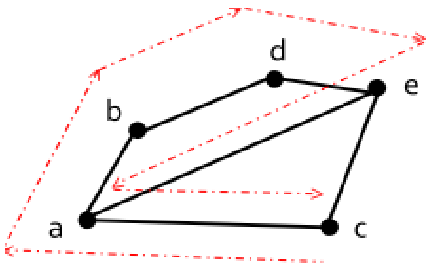
نکته: ماتریس تلاقی فقط برای گراف بدون جهت است.

نکته: برای گراف بدون جهت درجه هر رأس برابر مجموع عناصر سطری آن است.

نکته: برای گراف جهت دار مجموع سطری درجه خروجی و مجموع ستونی درجه ورودی است.

نکته: در گراف بدون جهت تعداد یک ها در ماتریس مجاورت دو برابر تعداد یال ها و در گراف جهت دار برابر تعداد یال ها می باشد.

گردش (walk)

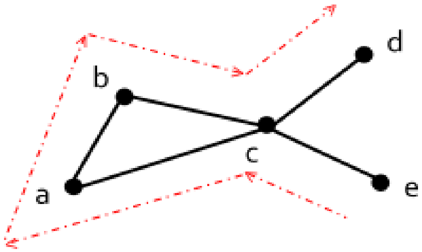


c – a – b – d – e – a - c

دنباله ای از رئوس که هرکدام به راس بعدی متصل است.

(در گردش ممکن است راس یا یال تکراری پیموده شود.)

گذر (trail)

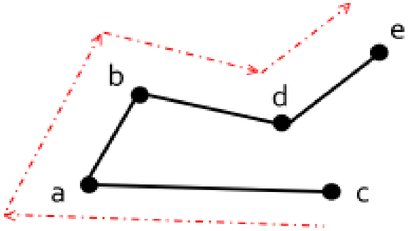


e – c – a – b – c - d

گردشی که در آن اجازه نداریم از یال تکراری عبور کنیم.

(در گذر ممکن است از راس تکراری عبور کنیم.)

مسیر (path)



c – a – b – d - e

گردشی که در آن اجازه عبور از راس تکراری نداریم.

(پس امکان عبور از یال تکراری هم نیست.)

مدار (circuit) : به گذر بسته یا گذری که راس ابتدایی و انتهایی آن برابر باشد میگوییم.

دور (cycle) : به مسیر بسته یا مسیری که راس ابتدایی و انتهایی آن برابر باشد میگوییم.

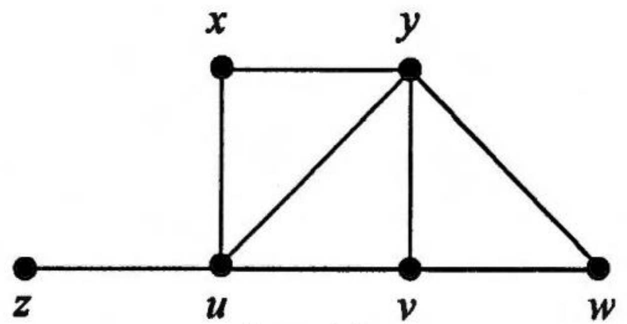
مثال ۴.۳

در گراف شکل ۵.۳،

$u \to v \to y \to u \to z$ یک گذر است ولی یک مسیر نیست؛

$v \to w \to y \to u$ یک مسیر به‌طول ۳ است؛

$u \to v \to w \to y \to u$ یک دور به‌طول ۴ است.

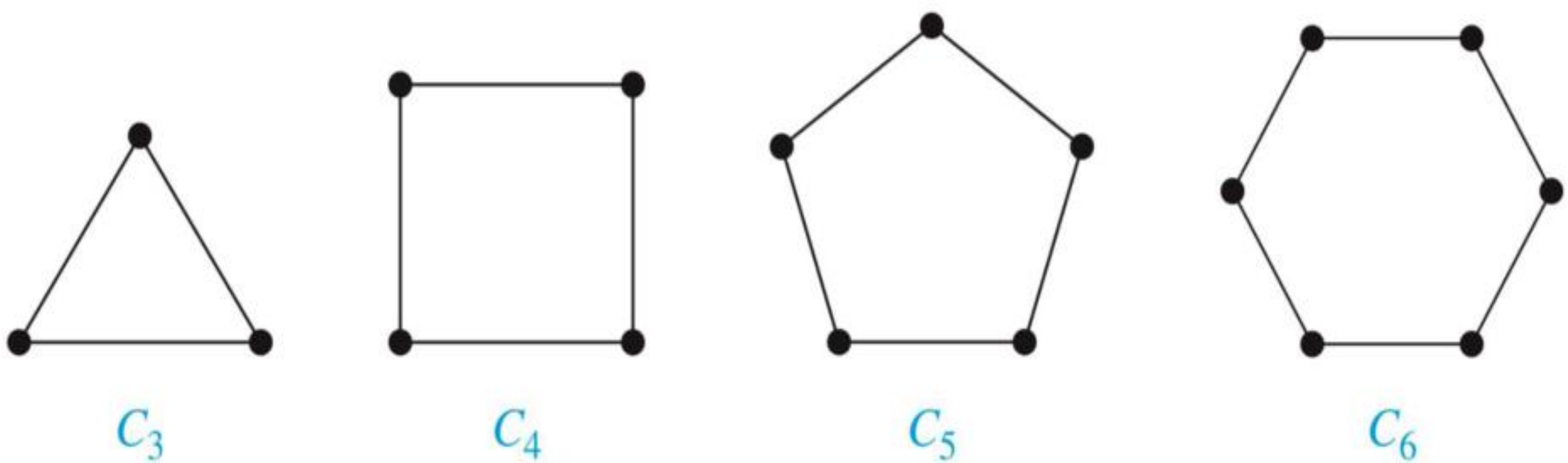


شکل ۵.۳

طبیعی به‌نظر می‌رسد که دورهای $u \to v \to y \to u$ و $y \to u \to v \to y$ را یکسان درنظر بگیریم؛ از این‌رو یک دور را اغلب با اضلاع آن مشخص می‌کنیم. برای $n > 1$ دو نماد زیر

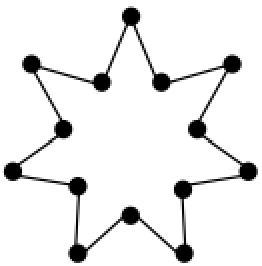
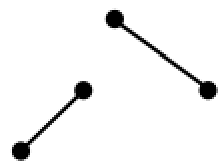
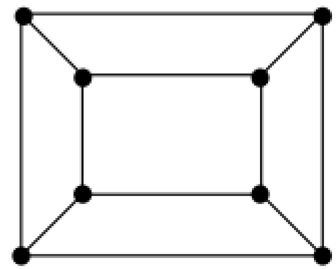
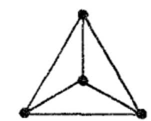
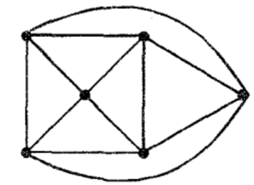
دور (cycle)

یک دور C_n از n راس $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و یال های $\{v_1, v_2\}$ و $\{v_2, v_3\}$ و ... و $\{v_{n-1}, v_n\}$ و $\{v_n, v_1\}$ تشکیل شده است.



گراف منتظم

به گراف بدون جهتی که درجه تمام رئوس آن برابر باشد منتظم میگوییم. یگ گراف را n-منتظم میگوییم وقتی درجه هر راس آن برابر با n باشد.

۷.۱.۴ تعریف گراف منتظم: اگر در گراف G با n رأس $a_۱$، ...، a_n داشته باشیم

$$deg\ a_i = r \quad , i = ۱ , \dots , n$$

آنگاه G را یک گراف منتظم درجهٔ r یا یک گراف rـمنتظم نامیم. بنابر قضیه ۶.۱.۴، اگر m تعداد یالهای این گراف باشد.

$$m = \frac{۱}{۲} nr$$

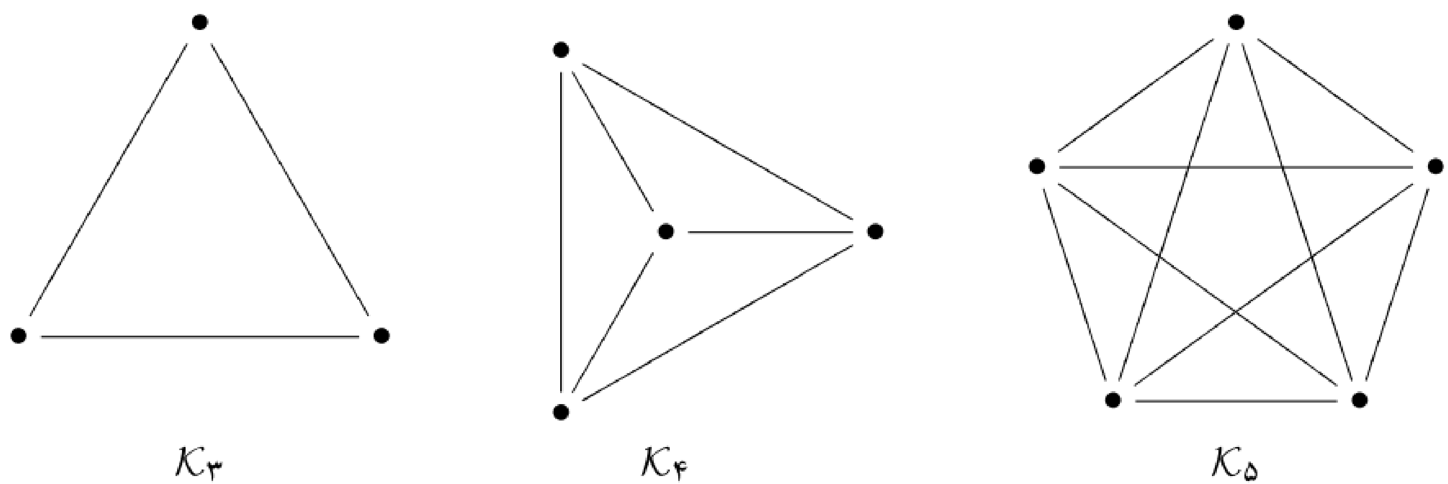
قضیه دست دادن

گراف G از مرتبه p و اندازه q را در نظر بگیرید. اگر $V = \{v_۱, v_۲ \dots, v_p\}$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q.$$

یک گراف از مرتبه n را **کامل** گویند هرگاه هر دو راس دلخواه آن مجاور باشند. گراف کامل از مرتبه n را با $\mathcal{K}_n$ نشان می‌دهند. در این صورت درجه هر راس $n - ۱$ بوده و این گراف، یک گراف $(n - ۱)$-منظم است. تعداد یال‌های گراف کامل با n راس، $m = \frac{n(n-۱)}{۲}$ است. در شکل ۳.۴ گراف‌های کامل $\mathcal{K}_{۳}$، $\mathcal{K}_{۴}$ و $\mathcal{K}_{۵}$ رسم شده‌اند.

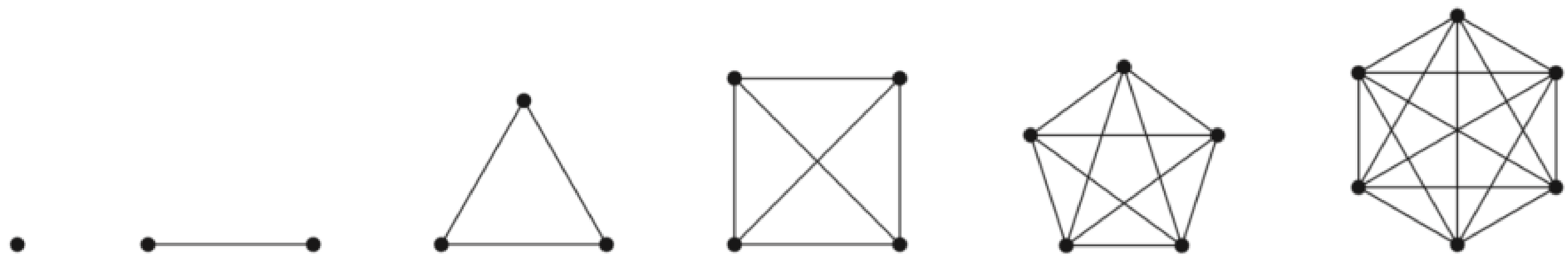
n= تعداد رئوس



شکل ۳.۴: گراف‌های کامل $\mathcal{K}_{۳}$، $\mathcal{K}_{۴}$ و $\mathcal{K}_{۵}$

گراف کامل

+ رابطه تعداد رئوس و تعداد یال های یک گراف کامل : $|E| = (\frac{n(n-1)}{2})$ ، n = تعداد رئوس



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

$|E| = 0$ $\quad |E| = \frac{2(2-1)}{2} = 1$ $\quad |E| = \frac{3(3-1)}{2} = 3$ $\quad |E| = \frac{4(4-1)}{2} = 6$ $\quad |E| = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ $\quad |E| = \frac{6(6-1)}{2} = 15$

در یک گراف کامل، تعداد یالها ۶ برابر تعداد رئوس است. گراف را شناسایی کنید.

n= تعداد رئوس
m= تعداد یال

$$m = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$m = 6n \Rightarrow 6n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 6 = \frac{(n-1)}{2} \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13 \Rightarrow \kappa_{13}$$

یک گراف ۳-منتظم با افزایش ۶ یال به گراف کامل تبدیل می‌شود. تعداد یال‌ها و رئوس گراف را تعیین کنید

n= تعداد رئوس
m= تعداد یال

گراف rمنتظم:

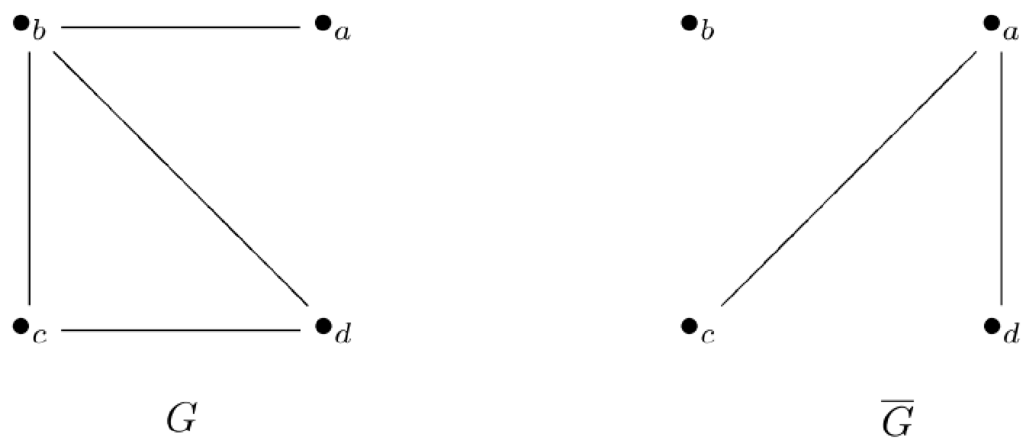
$$2m_G = n_G r \xrightarrow{r=3} 2m_G = 3n_G \Rightarrow m_G = \frac{3}{2} n_G$$

m_G ۳-منتظم است و m_κ کامل است. داریم $m_G + 6 = m_\kappa$ و چون تعداد رئوس تغییر نمی کند داریم: $n_G = n_\kappa$

$$m_\kappa = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{m_\kappa = m_G + 6} m_G + 6 = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{m_G = \frac{3}{2}n} \Rightarrow \frac{3}{2}n + 6 = \frac{n(n-1)}{2}$$

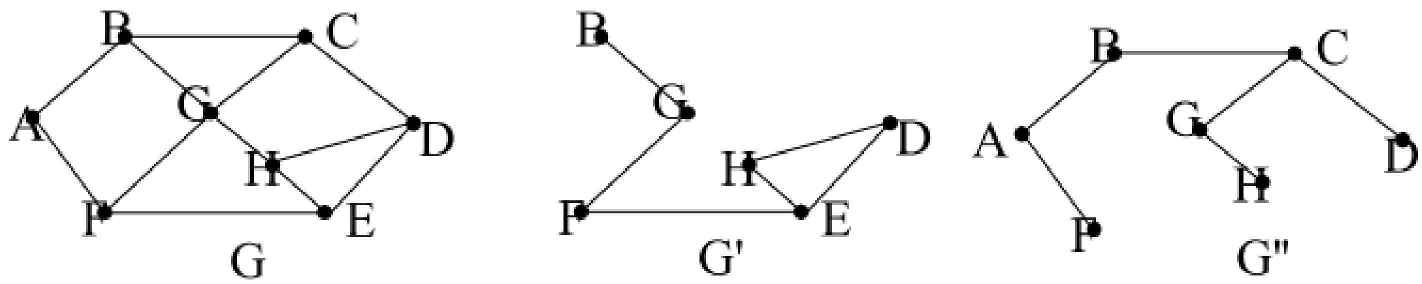
$$3n + 12 = n(n-1) \Rightarrow n = 6 \Rightarrow n = 9$$

متمم گراف $G(V,E)$ که آن را با $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ نشان می‌دهند؛ گرافی است که در آن $V = \overline{V}$ و یال (u,v) در $\overline{E}$ قرار دارد اگر و فقط اگر $(u,v) \notin E$. در شکل ۴.۴ نمونه‌ای از گراف G و متمم آن $\overline{G}$ آورده شده است.



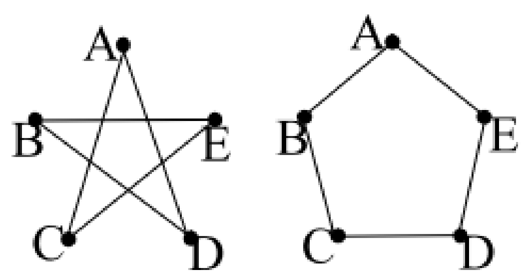
شکل ۴.۴: گراف‌های G و متمم آن $\overline{G}$

مثال ۱۲: در شکل زیر، G گراف اصلی و G' زیرگرافی از G و G'' مکمل گراف G' است.



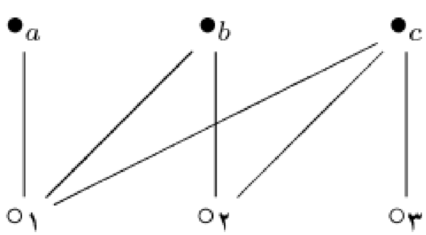
مثال ۱۳: در شکل مقابل، دو گراف، مکمل یکدیگرند.

زیرا اگر دو گراف یکریخت باشند، آنگاه مکمل آنها نیـز یکریخت است و بالعکس.

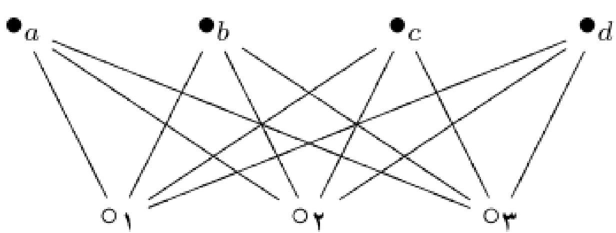


گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بتوان مجموعه راس‌های گراف را به دو مجموعه جدا از هم $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد به طوری که هر یال از G یک راس از مجموعه $V_۱$ را به یک راس از مجموعه $V_۲$ وصل کند. به عبارت دیگر بین راس‌های $V_۱$ و همچنین بین راس‌های $V_۲$ یالی موجود نباشد. چنین گرافی را **گراف دوبخشی** نامیده و با $G(V_۱, V_۲)$ نشان می‌دهند.

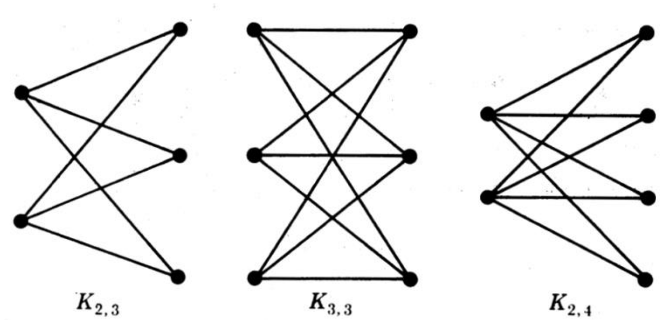
تاکید می‌کنیم که در یک گراف دوبخشی لزوماً از هر راس در $V_۱$ به هر راس در $V_۲$ یالی وجود ندارد. اگر چنین حالتی اتفاق افتد، گراف حاصل را **گراف دوبخشی کامل** نامیده و با $\mathcal{K}_{m,n}$ نشان می‌دهند که در آن m تعداد اعضای $V_۱$ و n تعداد اعضای $V_۲$ است. در شکل **۵.۴** دو نمونه از گراف‌های دوبخشی ارائه شده‌اند. یک گراف دوبخشی از نوع $\mathcal{K}_{۱,m-۱} = \mathcal{S}_m$ را **گراف ستاره‌ای** می‌نامند (شکل ۶.۴ را نگاه کنید).



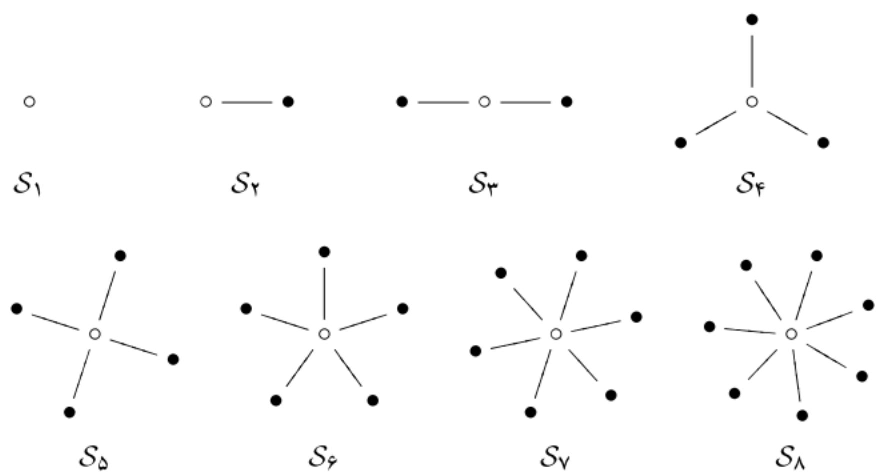
گراف دوبخشی ناکامل



گراف دوبخشی کامل $\mathcal{K}_{۳,۴} = \mathcal{K}_{۴,۳}$

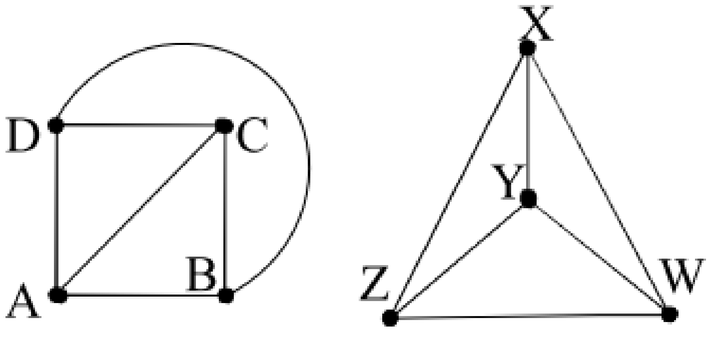


یک گراف دوبخشی از نوع $\mathcal{S}_m = \mathcal{K}_{۱,m-۱}$ را **گراف ستاره‌ای** می‌نامند (شکل ۶.۴ را نگاه کنید).

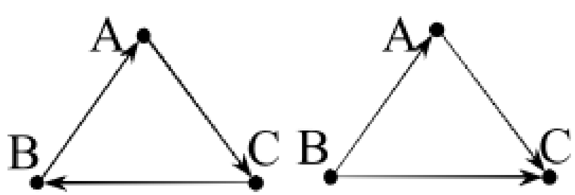


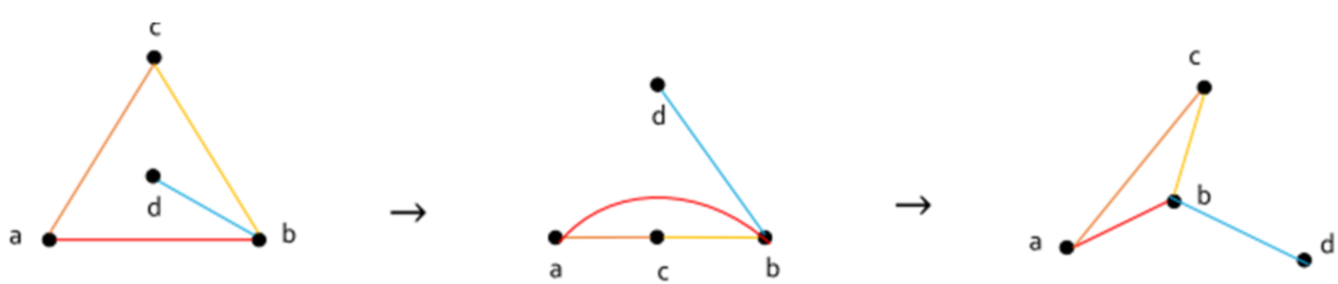
شکل ۶.۴: گراف ستاره‌ای

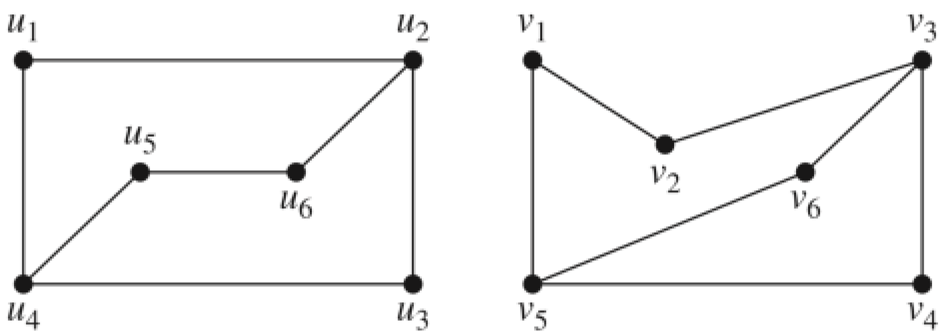
گراف‌های یکریخت: اگر تناظر یک‌به‌یک بین گره‌ها و یال‌های دو گراف وجود داشته باشد، به‌طوری که مجاورت گره‌ها و همچنین جهت یال‌ها درصورت وجود حفظ شوند؛ آنگاه آن دو گراف یکریخت هستند. شکل مقابل نمونه‌ای از دو گراف یکریخت است.



مثال ۵: شکل مقابل، تمام گراف‌های جهت‌دار غیریکریخت به سه گره را نشان می‌دهد.



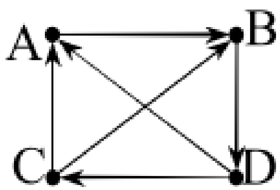




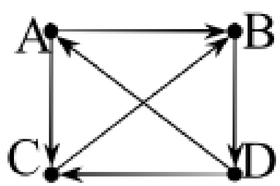
هردوی این گراف ها شامل شش راس و شش یال هستند. هر دو دارای دو راس از درجه 2 و دو راس از درجه 3 هستند.

همینطور واضح است زیر گراف های شامل همه رئوس درجه 2 هر دو گراف و یال های متصل کننده آن رئوس هم ریخت هستند.

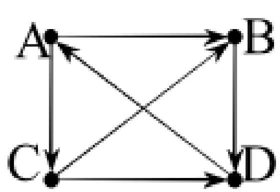
مثال ۷: شکل زیر، تمام گراف‌های جهت‌دار غیریکریخت با ۴ گره را به‌همراه درجات ورودی و خروجی آنها نشان می‌دهد.



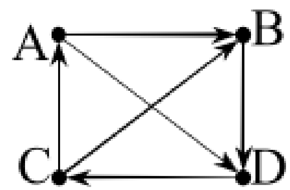
$deg^-(A)=deg^-(B)=2$
$deg^+(C)=deg^+(D)=2$
$deg^+(A)=deg^+(B)=1$
$deg^-(C)=deg^-(D)=1$



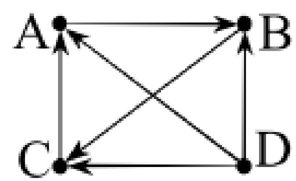
$deg^-(A)=deg^+(B)=1$
$deg^+(C)=deg^-(D)=1$
$deg^+(A)=deg^-(B)=2$
$deg^-(C)=deg^+(D)=2$



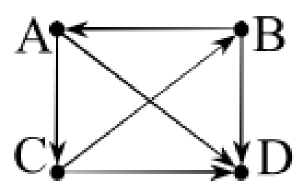
$deg^-(A)=deg^+(B)=$
$deg^-(C)=deg^+(D)=1$
$deg^+(A)=deg^-(B)=$
$deg^+(C)=deg^-(D)=2$



$deg^-(C)=deg^+(D)=0$
$deg^-(A)=deg^+(B)=1$
$deg^+(A)=deg^-(B)=2$
$deg^+(C)=deg^-(D)=3$

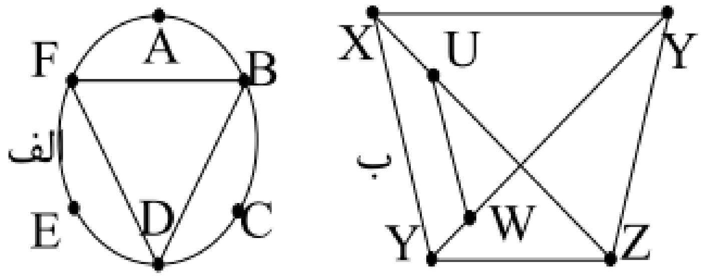


$deg^-(A)=deg^-(B)$
$=deg^-(C)=1$
$deg^+(A)=deg^+(B)$
$=deg^+(C)=2$
$deg^+(D)=0$, $deg^-(D)=3$



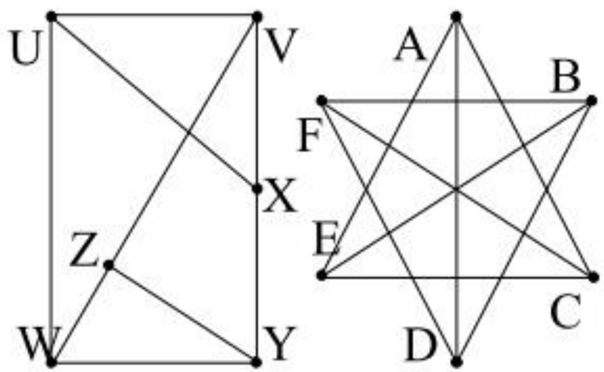
$deg^-(A)=deg^-(B)$
$=deg^-(C)=2$
$deg^+(A)=deg^+(B)$
$=deg^+(C)=1$
$deg^+(D)=3$, $deg^-(D)=0$

مثال ۸: دو گراف مقابل، یکریخت نیستند؛ زیرا درجه تمام گره‌های گراف (ب) سه است درحالی‌که در گراف (الف) چنین نیست.

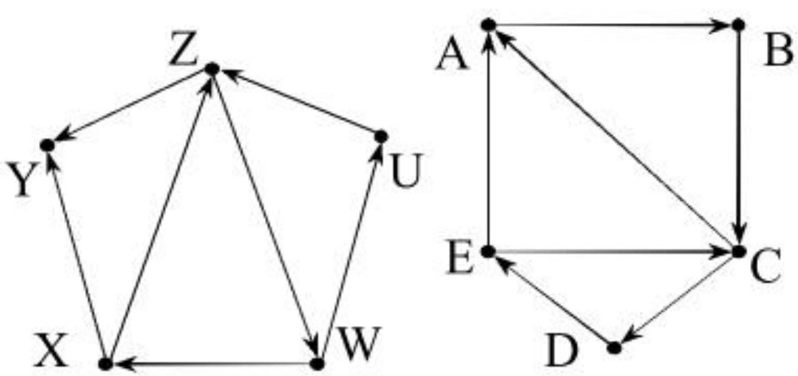


مثال ۱۰: دو گراف مقابل، یکریخت هستند؛ زیرا تمام گره‌ها و یال‌های آنها متناظرند. همچنین درجه گره‌های متناظر نیز یکسان است.

A=U , B=Z , C=X ,
D=W , E=V , F=Y

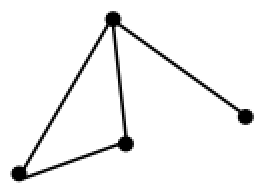


مثال ۱۱: دو گراف مقابل، یکریخت نیستند؛ زیرا در هر دو گراف فقط درجه گره‌های C و Z چهار است. بنابراین گره C با گره Z متناظر است.

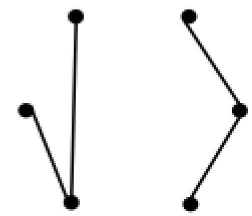


گراف همبند و غیر همبند

در گراف همبند بین هر دو راس حتما یک مسیر (با هر طولی) وجود دارد و به گرافی که همبند نباشد غیر همبند میگوییم.

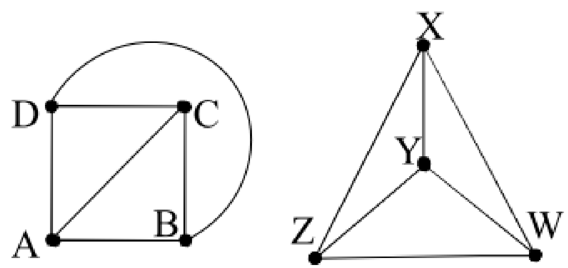


گراف
همبند

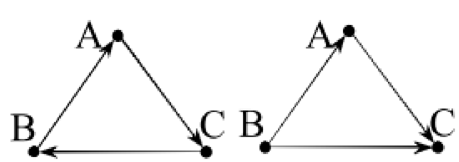


گراف غیر
همبند

گراف‌های یکریخت: اگر تناظر یک‌به‌یک بین گره‌ها و یال‌های دو گراف وجود داشته باشد، به‌طوری که مجاورت گره‌ها و همچنین جهت یال‌ها درصورت وجود حفظ شوند؛ آنگاه آن دو گراف یکریخت هستند. شکل مقابل نمونه‌ای از دو گراف یکریخت است.

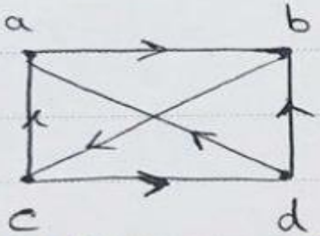


مثال ۵: شکل مقابل، تمام گراف‌های جهت‌دار غیریکریخت به سه گره را نشان می‌دهد.

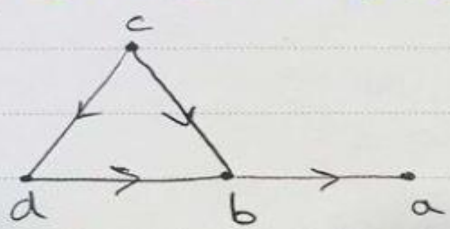


انواع همبندی در گراف جهت دار:

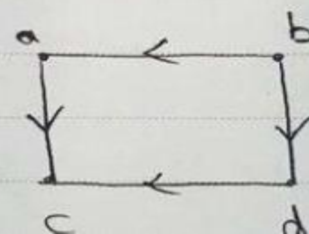
① همبندی قوی: گراف جهت داری است که هر دو راس دلخواه آن از هم دیگر دسترس پذیر باشند.

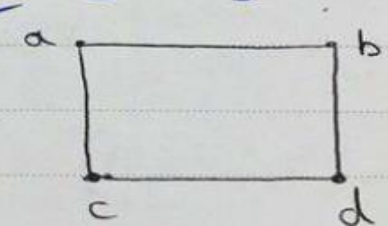


② همبند یک طرفه: گراف جهت داری است که برای هر دو راس دلخواه آن حداقل یکی از دیگری قابل دسترسی باشد.



③ همبند ضعیف: اگر از جهت یال ها صرف نظر کنیم و یک گراف غیر جهت دار همبند بدست آوریم به آن گراف همبند یا متصل ضعیف گویند.

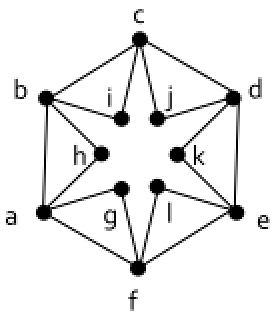




تعریف زیرگراف

وقتی فقط یک قسمت از یک گراف را که خود یک گراف است در نظر میگیریم به آن یک زیر گراف از گراف اصلی میگوییم.

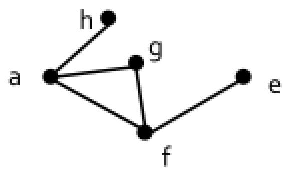
در واقع یک زیر گراف تعدادی از رئوی گراف اولیه به همراه تعدادی ار یال های آن رئوس است.



گراف G

زیرگراف القایی

وقتی همه ی یال های رئوس انتخاب شده (راس هایی از گراف اصلی که در زیر گراف هستند) در گراف اصلی، در زیر گراف هم باشد.

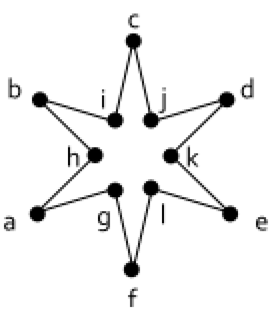


یک زیرگراف القایی از G

زیرگراف پوشا

وقتی در زیر گراف همه رئوس گراف اصلی را داشته باشیم.

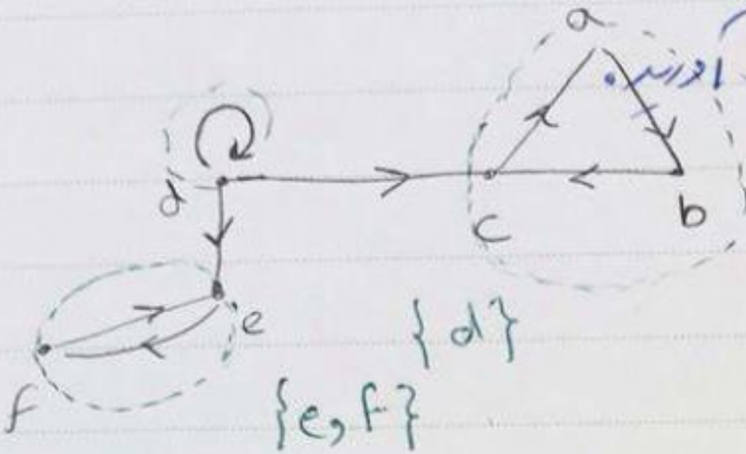
(البته که در اینجا الزامی به وجود همه یال ها نیست)



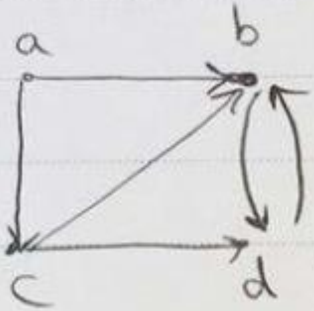
یک زیرگراف پوشا از G

مؤلفه همبندقوی: بزرگترین زیر گراف همبندقوی

مثال: مؤلفه ی قوی در گراف زیر را بدست آورید.



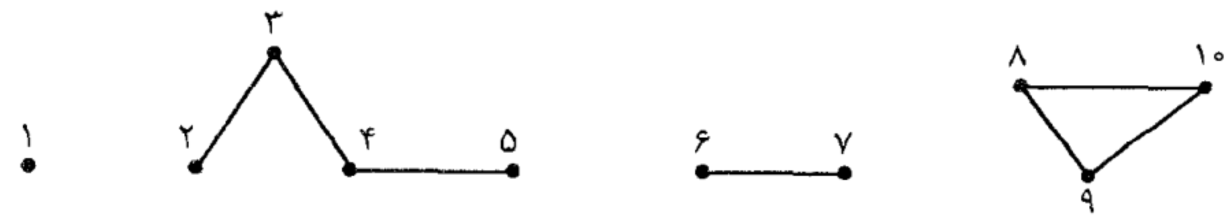
مثال: شکل زیر دارای کدام همبند است؟



دارای همبندقوی نیست و صرفاً دارای همبند یکطرفه

می باشد و مؤلفه ی همبندقوی آن نیز فقط bd  می باشد

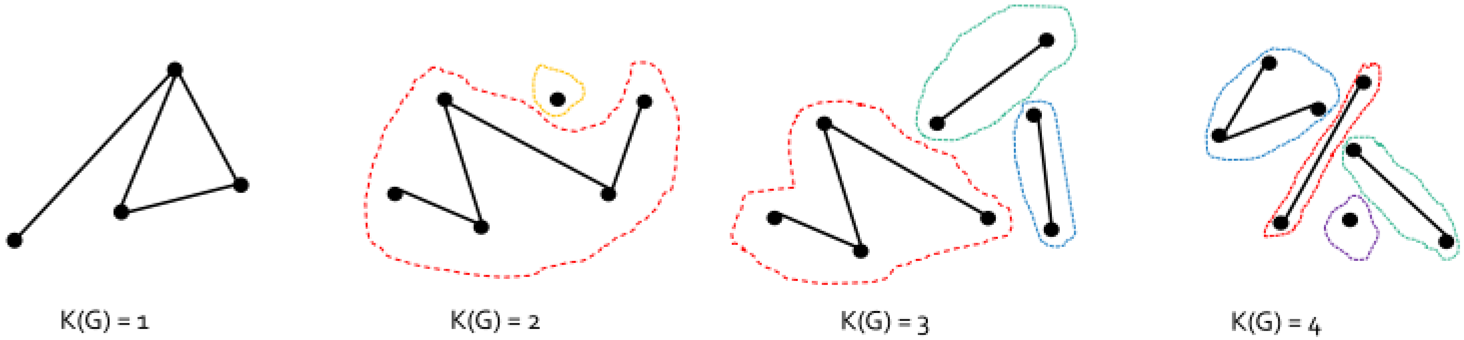
۴.۱.۴ **تعریف**: اگر $G = (V, E)$، $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$ آنگاه $G' = (V', E')$ را یک ***زیرگراف*** G نامیم. ***یک مؤلفه از یک گراف بزرگترین زیرگراف همبند آن گراف است.*** (منظور از بزرگترین زیرگراف یک زیرگراف با بیشترین یال است.)



گراف بالا، که شامل ۱۰ رأس و ۷ یال است، گرافی ***ناهمبند با چهار مؤلفه است.*** این گراف دارای یک دور نیز هست. رأس شماره ۱ که به هیچ رأس دیگری متصل نیست یک ***رأس تنها***

مؤلفه در گراف : تعداد مولفه های یک گراف را با K(G) نمایش میدهند.

بیاین با مثال تعریف کنیم ...

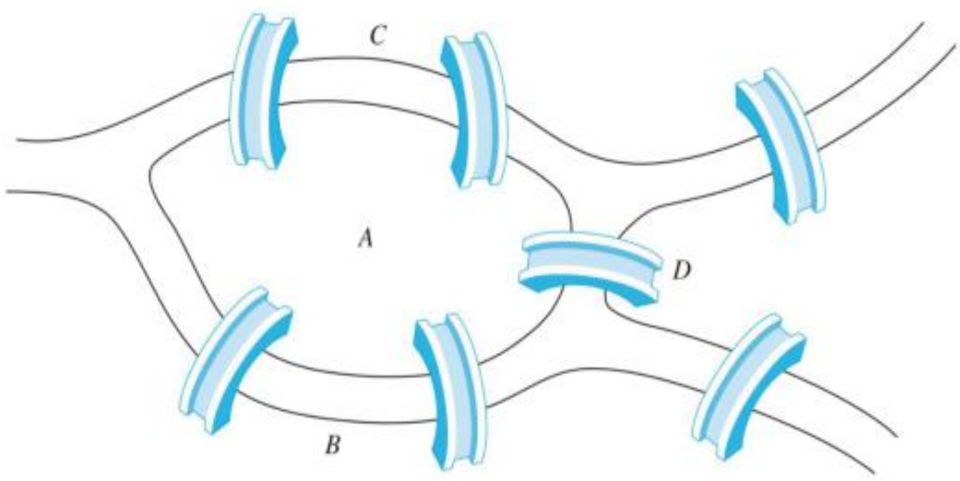


به طور کلی داریم : $1 \leq K(G) \leq |V|$

مسئله هفت پل کونیگزبرگ

خب درواقع یک شهر هست که توسط رودی که ازش عبور کرده به چهار قسمت تقسیم شده. این نواحی با هفت تا پل بهم متصل شدن.

مسئله این هست که آیا ممکنه از یک قسمت از شهر شروع کرد و از تمام پل ها فقط و فقط یک مرتبه عبور کرد و نهایتا به نقطه اول برگشت؟



گذر (trail)
گردشی که در آن اجازه نداریم از یال تکراری عبور کنیم.
(در گذر ممکن است از راس تکراری عبور کنیم.)

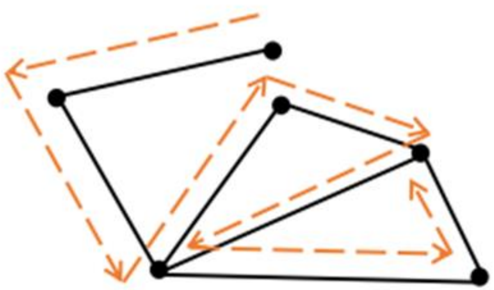
مدار (circuit) : به گذر بسته یا گذری که راس ابتدایی و انتهایی آن برابر باشد میگوییم.

مسیر (path)
گردشی که در آن اجازه عبور از راس تکراری نداریم.
(پس امکان عبور از یال تکراری هم نیست.)

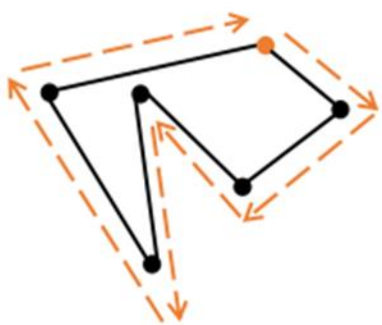
دور (cycle) : به مسیر بسته یا مسیری که راس ابتدایی و انتهایی آن برابر باشد میگوییم.

گذر و مدار اویلری

گذر اویلری : گذری هست که از همه یال های گراف فقط یکبار عبور کند.



مدار اویلری : مداری ساده ای که از تمام رئوس گراف عبور کرده باشد.



گذر و مدار اویلری در گراف بدون جهت

نکته : گرافی که دارای راس منفرد است نمیتواند دارای مدار اویلری باشد.
همه گراف ها دارای مدار اویلری نیستند.

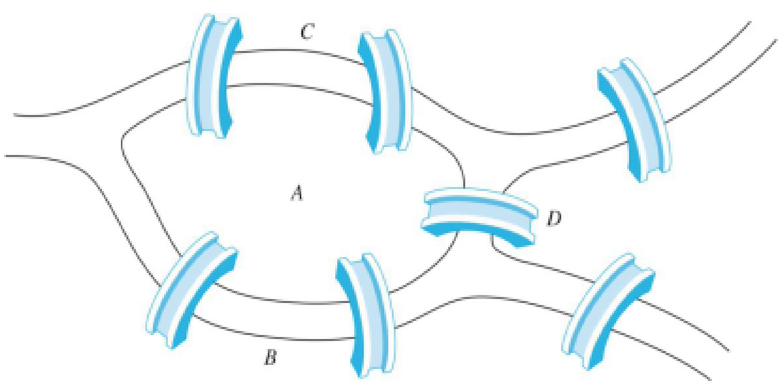
گرافی دارای مدار اویلری است که : (همبند باشد) && (درجه همه رئوس آن زوج باشد)
>> پس برای اینکه بفهمیم دارای مدار اویلری هست یا نه باید این دو شرط رو چک کنیم.

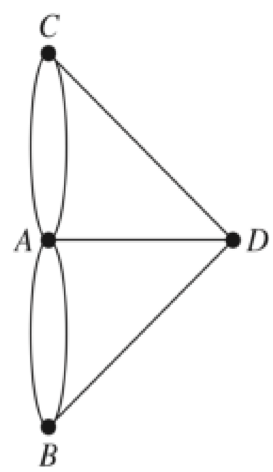
گرافی دارای گذر اویلری است که : (همبند باشد) && (فقط دو راس با درجه فرد داشته باشد)
>> پس برای اینکه بفهمیم گراف دارای گذر اویلری هست یا نه باید این دو شرط رو چک کنیم.

مسئله هفت پل کونیگزبرگ

خب برای پیدا کردن مسیر مطلوب در مسئله کوینگزنبرگ، درواقع میایم گراف مسئله رو میکشیم و سپس در آن دنبال مدار اویلری میگردیم.

(گراف دارای چهار راس به ازای چهار ناحیه شهر و هفت یال به ازای هفت پلی که این نواحی رو بهم متصل میکنند)



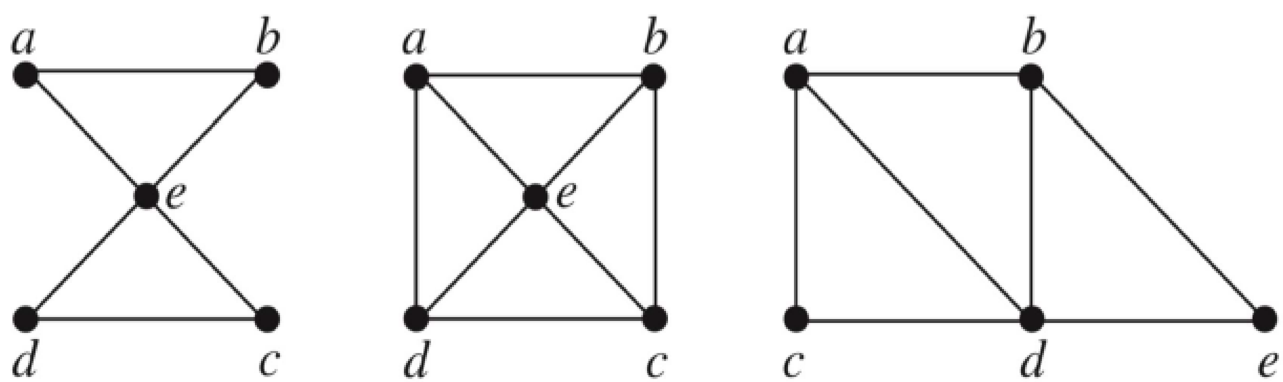


این گراف همبند هست پس درجه رئوس رو چک میکنیم :

- A : 4
- B : 3
- C : 3
- D : 3

نتیجه : مسیر مطلوب وجود ندارد.

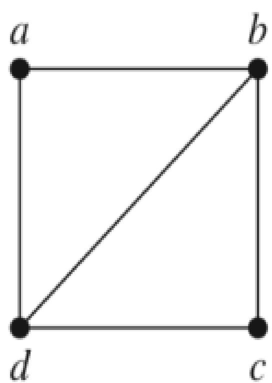
گراف G_1 دارای یک مدار اویلری هست، مثل aecdeba . دو گراف G_2 و G_3 دارای مدار اویلری نیستند.
گراف G_3 دارای یک گذر اویلری (acdebdab) هست. اما گراف G_2 دارای مسیر اویلری نیز نیست.



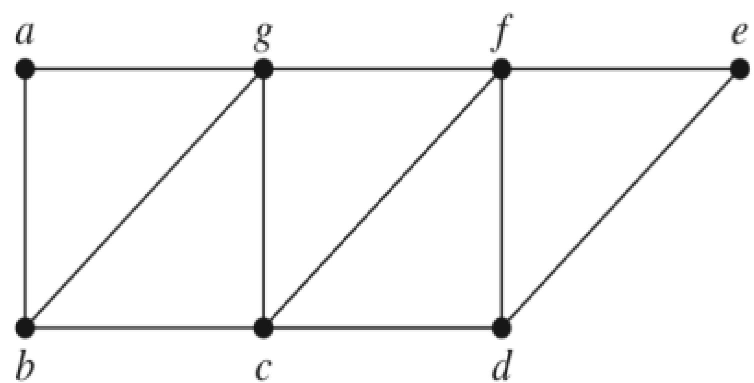
G_1 G_2 G_3

گراف G_1 دقیقا دارای دو راس (dوb) از درجه فرد است. فرض کنید این گراف دارای یک گذر اویلری باشد در این صورت b و d باید دو راس انتهایی این گذر باشند. مثل گذر اویلری dabcdb. همینطور G_2 نیز دقیقا دارای دو راس از درجه فرد است. پس b و d باید دو راس انتهایی گذر باشند. مثل گذر اویلری bagfedcgbcfd.

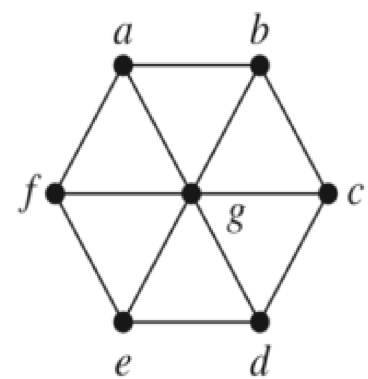
گراف G_3 دارای گذر اویلری نمی باشد، چرا که دارای شش راس از درجه فرد است.



G_1



G_2



G_3

گذر و مدار اویلری در گراف جهت دار

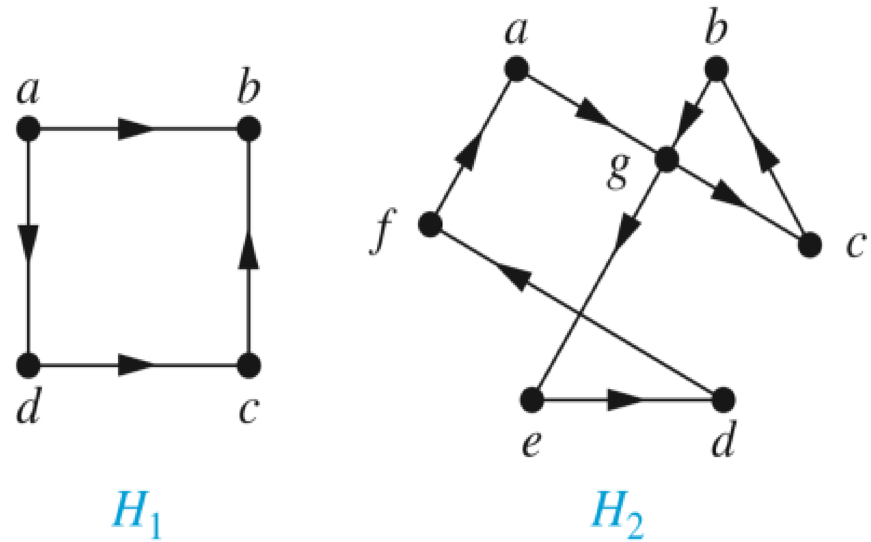
گرافی دارای مدار اویلری است که : (همبند باشد) && (برای $v_i \in V$ داشته باشیم $(deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

>> پس برای اینکه بفهمیم دارای مدار اویلری هست یا نه باید این دو شرط رو چک کنیم.

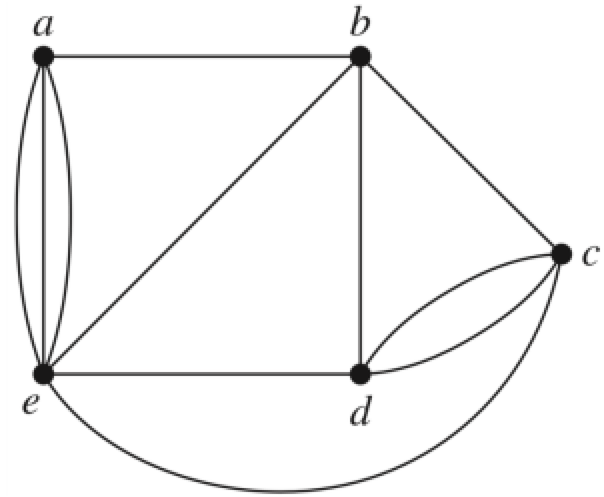
گرافی دارای گذر اویلری است که : (همبند باشد) && (درجه ورودی و خروجی همه رئوس باهم برابر باشد بجز دو راس که رئوس ابتدایی و انتهایی گذر هستند، در یکی درجه ورودی و در دیگری درجه خروجی یک واحد بیشتر است)

>> پس برای اینکه بفهمیم گراف دارای گذر اویلری هست یا نه باید این دو شرط رو چک کنیم.

گراف H_2 دارای مدار اویلری مثل agcbgedfa هست. دو گراف H_1 و H_3 دارای مدار اویلری نیستند. گراف H_3 دارای یک گذر اویلری (cabcdb) هست. اما گراف H_1 دارای گذر اویلری نیز نمی باشد.

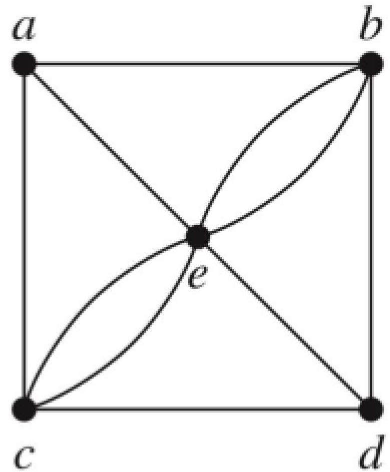


واهیم وجود مدار اویلری در گراف های زیر را بررسی کنیم.



تمام رئوس از درجه زوج هستند در نتیجه یک مدار اویلری وجود دارد.

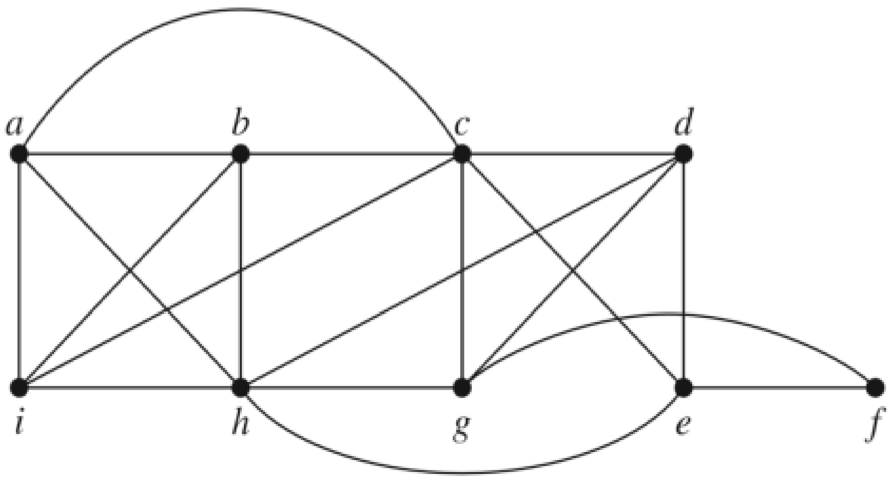
مدار : abcdcedbeaea



چونکه دو راس از درجه فرد وجود دارد، این گراف دارای مدار اویلری نیست. اما دارای گذر اویلری از a به d است.

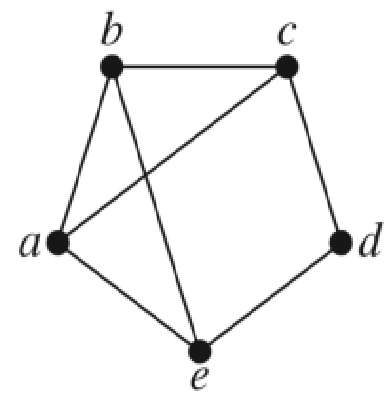
گذر : aecebedbacd

میخواهیم وجود مدار اویلری در گراف های زیر را بررسی کنیم.



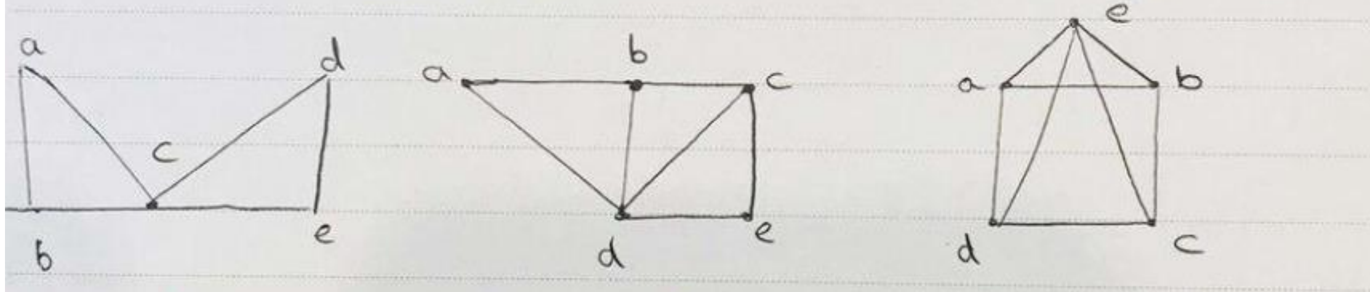
تمام رئوس از درجه زوج هستند پس یک مدار اویلری وجود دارد.

مدار : abcdefghiahbicehdgca

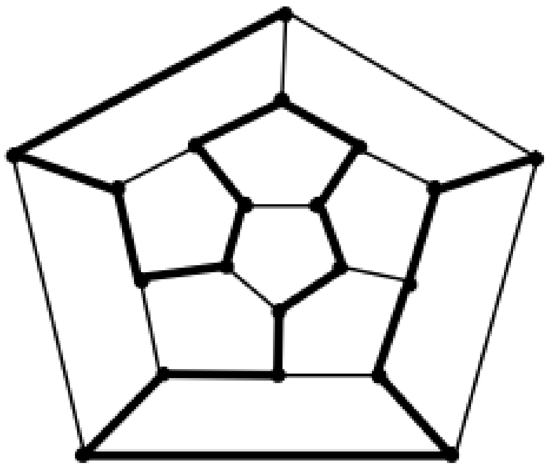


چونکه چهار راس از درجه فرد وجود دارد، این گراف نه دارای مدار اویلری و نه دارای گذر اویلری نیست.

مثال: مسیر اویلری و مدار اویلری در گراف های زیر را بیابید.



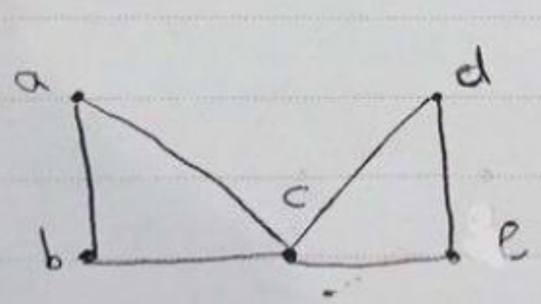
G_1 G_2 G_3



مسیرها و مدارهای همیلتونی: هـدف یـافتن مسـیری است که از هر گره شکل مقابل، فقطوفقط یک بـار عبـور نماید. یال‌های پررنگ در این گراف، یک مسیر همیلتـونی را نشان می‌دهند. ایـن مسـاله تاحـدی بـا مسـاله تعیـین مسیر اولری شباهت دارد، اما تاکنون، هیچ قضیه‌ای به‌صورت شرط لازم و کافی، برای این مساله وجود ندارد.

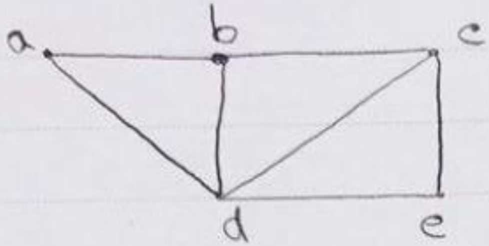
مسیر همیلتونی: مسیری است که از همه گره‌های گراف، فقط و فقط یکبار عبور کند.

مدار همیلتونی: مداری است که از همه گره‌های گراف، فقط و فقط یکبار عبور کند.



مدار همیلتونی ندارد چون از c دوبار عبور می‌کنیم

مسیر همیلتونی : a b c e d



مدار همیلتونی: a d e c b

مسیر همیلتونی: b c e d a

قضیه ۷: اگر در یک گراف ساده و بدون حلقه، برای دو گره غیرمجاور، V_1 و V_2 رابطه $deg(V_1)+deg(V_2)\geq n-1$ برقرار باشد، مسیر همیلتونی خواهد داشت.

قضیه ۸: اگر در یک گراف ساده غیرجهت‌دار و بدون حلقه، برای هر دو گره غیرمجاور، V_1 و V_2 رابطه $deg(V_1)+deg(V_2)\geq n$ برقرار باشد؛ مدار همیلتونی خواهد داشت.

قضیه ۹: گراف‌های کامل، K_{2n+1} ، دارای مسیر اولری و مدار اولری و مسیر همیلتونی و دور همیلتونی هستند.

قضیه ۱۰: یک گراف ساده و بدون حلقه با n گره، مدار همیلتونی دارد؛ اگر حداقل $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ یال داشته باشد.

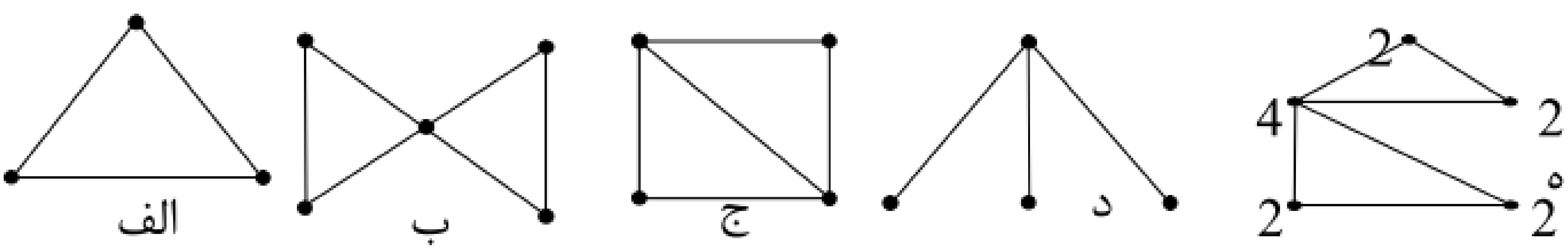
مثال ۳۱: در شکل زیر، گراف (الف)، همبند و دارای مدار اولری و دور همیلتونی است.

گراف (ب)، همبند و دارای مدار اولری است اما دور همیلتونی ندارد.

گراف (ج)، همبند و دور همیلتونی دارد اما مدار اولری ندارد اما مسیر اولری دارد.

گراف (د)، همبند است و دور همیلتونی و مدار اولری ندارد.

در گراف (ه) چون درجه هر گره زوج است، لذا مسیر و مدار اولری دارد و چون بـرای هـر دو گـره غیرمجاور V_1 و V_2 رابطه $\deg(V_1)+\deg(V_2)\geq 5-1$ برقرار است؛ لذا مسیر همیلتونی نیـز دارد؛ امـا چون برای هر دو گره غیرمجاور، رابطه $\deg(V_1)+\deg(V_2)\geq 5$ برقرار نیست؛ مدار همیلتونی ندارد.



مثال ۳۳: اگر G یک گراف ۶منتظم بدون جهت و بدون حلقه باشد؛ نشان دهید که اگر $|V|=11$ باشد، آنگاه گراف G یک دور همیلتونی دارد.

پاسخ: چون در گراف ۶منتظم، درجه هر گره برابر ۶ است و $|V|=11$ است، بنابراین برای هر دو گره دلخواه نظیر w و v، رابطه $deg(v)+deg(w)=6+6>11$ برقرار است، لذا، این گراف یک دور همیلتونی دارد.

مثال ۳۴: در گراف‌های K_{30} و K_4، درجه تمام گره‌ها به‌ترتیب ۲۹ و ۳ است؛ لذا مدار اولری ندارند اما دور همیلتونی دارند.