|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. **Определители 1ого, 2ого и 3его порядка (Свойства, вычисление). Решение систем линейных алгебраических уравнений 2-го и 3-го порядка методом Крамера.**   Определителем n-ого порядка матрицы А:  n=1; A=(a1); detA=a1;  n=2; A=; detA=a11+a22-a21-a12;  n=3; A; detA=a11\*a22\*a33+a21\*a32\*a13+a12\*a23\*a31-a13\*a22\*a31-a32\*a21\*a13-a21\*a12\*a33; Свойства. 1.Определитель матрицы А равен определителю транспонированной матрицы. 2.Если одна из строк матрицы нулевая, то определитель равен 0. 3. Общий множитель какой либо строки определ. можно вынести за знак определ. 4.Если помен. строки местами изменится знак определителя на противоп.5.если есть две одинаковые строки, то 0. 6.Если есть две пропорц -> 0. 7….8.Если Эл. Некот. Строки. Лин комб др. строки то 0. 9.Определитель не изменится если к нему добавить Эл. Другой строки.  **Крамер**. Δ≠0; ; ; где Δ — определитель матрицы, а — определитель матрицы, который получается из основной матрицы путем замены i-ого столбца столбцом свободных членов. | 1. **Векторы, линейные операции над ними, их свойства. (если выделено жирным — это вектор).**   *Геометрическим вектором* (или просто *вектором) называется направленный отрезок.* ***AB*** *— вектор, у которого точки A и B обозначают соответственно начало и конец данного направленного отрезка (вектора).* *Свободные векторы — это векторы, которые можно переносить параллельно самим себе.* *Длиной или нормой вектора* ***АВ*** *называется длина отрезка АВ. Длину вектора АВ обозначают |АВ|.* Вектор длина которого равна 1 называется *единичным* или *ортом*. Свободный вектор однозначно определяется своей длиной и направлением. *Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают.* Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. *Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.* *Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.* *Суммой* ***a+b*** *двух векторов* ***a*** *и* ***b*** *называется вектор, идущий из начала вектора a в конец вектора b при условии, что вектор b приложен к концу вектора a (правило треугольника)*. *Свойства правила сложения векторов: 1)* **a**+**b**=**b**+**a** (переместительное свойство); *2)* (**a**+**b**)+**c**=**a**+(**b**+**c**) (сочетательное свойство); *3)* **a**+**0**=**a**; *4)* для каждого вектора **a** существует противоположный ему вектор **(-1)\*a** такой, что **a**+**(-1)\*a**=**0**. *Правило параллелограмма*: *если векторы* ***a*** *и* ***b*** *приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма* ***a*** *+****b*** *(или* ***b****+****a****) этих векторов представляет собой диагональ параллелограмма, идущую из общего начала векторов* ***a*** *и* ***b.*** *Разностью* ***a****-****b*** *вектора* ***a*** *и вектора* ***b*** *называется такой вектор* ***c****, который в сумме с вектором* ***b*** *дает вектор* ***a****. Произведением αa (или aα) вектора a на вещественное число α называется вектор* ***b****, коллинеарный вектору a, имеющий длину,равную · , и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора* ***a*** *в случае α > 0 и противоположное направлению вектора* ***a*** *в случае α < 0.Свойства операции умножения векторов: 1)* α (a +b) = αa + αb (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов); *2)* (α + β)a = αa+ βa (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел); *3)* α (β a)= (αβ)a (сочетательное свойство числовых сомножителей). | 1. **Базис на прямой, на плоскости, в пространстве. Разложение вектора по базису. Линейные операции над векторами, заданными координатами. Декартова система координат. Деление отрезка в данном отношении.**   *Базисом на прямой* называется любой не нулевой вектор этой прямой. *Базисом на плоскости* называется 2 неколлинеарные вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке. *Базисом в пространстве* называются любые 3 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.  *Свойства:* 1) Каждый вектор коллинеарный какой-либо прямой может быть разложен по базису на этой прямой. 2) Каждый вектор || плоскости может быть разложен по базису этой плоскости. 3) Каждый вектор может быть разложен по базису в R. Компоненты и координаты в каждом случае определяются однозначно.  *Декартовой системой координат* (ДСК) в пространстве называется совокупность точки и базиса. ДСК, базис которой ортонормирован, называется декартовой прямоугольной системой координат. Векторы будут образовывать правую тройку, если из конца вектора *с* кратчайший поворот от вектора *а*к *b* виден против часовой стрелки.  *Деление отрезка в заданном отношении*. Разделить отрезок в отношении λ (λ≠1) — это значит, на прямой, проходящей через т. *А* и *В,* найти т.*С*, что *АС* = λ*СВ.*  *Разложение вектора по базису.* Если дана упорядоченная тройка векторов (**a**,**b**,**c**) некомпланарных векторов, то для любого вектора **p** существует единственная упорядоченная тройка чисел (x,y,z), удовлетворяющая равенству **p**=x**a**+y**b**+z**c**. |
| 1. **Скалярное произведение векторов.**   *Скалярным произведением вект*. А и В называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними  *Свойства.* 1) (**a**,**b**)**=**(**b**,**a**) (коммутативность). 2) (λ**a**,**b**) =(**a**, λ**b**) = λ (**a**,**b**) (ассоциативность). 3) дистрибутивно относительно сумсуммы (**а**+**b**,**с**)=(**а**,**b**)+(**а**,**с**) 4) Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда когда хотя бы один из вект. нулевой либо они перпендикулярны (a • b = 0, если a ┴ b).  *Скалярным квадратом* называется скалярное произведение вектора на себя => равен квадрату длины вектора.  (a,b)=\*|**b**|\*Cos(a^b); прab=(**a**,**b**)/ (проекция **a** на **b**). Длина  *Скалярное произведение в коорд форме.*Коорд орты i,j,k имеют длины, равные единицы i2=j2=k2=1, их взаимное произведение равно 0 . (a,b) =ax\*bx+ay\*by+az\*bz. Cos и ПР находятся с помощью координат.   1. **Векторное произведение векторов.** Векторным произведением вектора а на вектор b называется вектор с, который: 1) Перпендикулярен векторам **a** и **b**, т. е. **с**^**а** и **с**^**b**; 2) Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах **а** и **b** как на сторонах, т. е. . 3.Векторы **a**, **b** и **с** образуют правую тройку.   **Свойства:** 1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. [**а**,**b**] =[**b**,**a**]; 2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. [**а**,**b**] = [**а**,**b**] = [**b,a**]; 3. Два ненулевых вектора **а** и **b** коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. **а**||**b** <=>[**а**,**b**] =0. 4.распределительное свойство:**[a+b,с]= [а,с]+[b,с].** | 1. **Смешанное произведение, свойства, применение.**   ***Смешанным произведением трех векторов*** **a**,**b** ,**c**  называется число, равное скалярному произведению вектора [**a**,**b**] на **c** вектор : (**a**,**b**,**c**)= ([**a**,**b**],**c**). *Геометрический смысл* смешанного произведения: если тройка векторов {**a**,**b**,**c**}  правая, то их смешанное произведение равно *объему параллелепипеда* построенного на этих векторах: (**a**,**b**,**c**)=V. В случае левой тройки {**a**,**b**,**c**} смешанное произведение указанных векторов равно *объему параллелепипеда со знаком минус*: (**a**,**b**,**c**)=-V. Если **a**, **b**  и **c** компланарны, то их смешанное произведение *равно нулю*. Смешанным произведением трёх векторов называется число (**a**,**b**,**c**)=([**a**,**b**],**c**).*Свойства.*1.Смешанное произведение (a,b,c) равно объёму ориентированного параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу некомпланарных векторах a,b и с. 2.Смешанное произведение равно нулю, если векторы **a**,**b**,**c** компланарны(угол θ =π/2, тогда **a**,**b**,**c** лежат в одной плоскости) (**a**,**b**,**c**)=0 является условие копланарности трёх векторов **a**,**b** и **c**. 3.([**a**,**b**],**c**)=(**a**,[**b**,**c**]) Справедливость условия следует из равенства (**a**,[**b**,**c**])=([**b**,**c**],**a**) , так как тройки **a**,**b**,**c** и **b**,**c**,**a** одинаково ориентированы, и из свойства 1. В силу коммутативности скалярного произведения и антикоммутативности векторного из свойства 3 получаем цепочку равенств. (**a**,**b**,**c**)=(**c**,**b**,**a**)=(**b**,**c**,**a**)=-(**b**,**a**,**c**)=-=(**c**,**b**,**a**)=-(**a**,**c**,**b**). 4. Линейность смешанного произведения : (α**a1**+β**a2**,**b**,**c**)=α(**a1**,**b**,**c**)+β(**a2**,**b**,**c**) Справедливость этого свойства следует из равенства и линейности скалярного произведения.*Координатная форма.* По определению [i,i]=[j,j]=[k,k]=0 [i,j]=k,[j,k]=i,[k,i]=j [j,i]=-k,[k,j]=-i,[i,k]=-j[a,b]=(y1z2-y2z1)i+(z1x2-z2x1)j+(x1y2-x2y1)k=опред. 3 порядка. Смешанное произведение (a,b,c)=([a,b],c)=|x1x2x3 y1y2y3 z1z2z3|. | 1. **Прямая на плоскости: различные виды уравнений. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Углы между прямыми на плоскости.** *Каноническое уравнение прямой*. Прямая *l* в пространстве определяется однозначно, если известны точка, через которую она проходит, и ненулевой вектор, параллельный прямой, называемый *направляющий вектором* этой прямой, или если известны две точки. Канонические уравнения прямой = = , если даны M0(x0,y0,z0) – точка. a(m,n,p) - ненулевой вектор. M(x,y,z) - произвольная точка на прямой. *Уравнение прямой через две точки* M0=(x0,y0,z0) M1=(x1,y1,z1) a=M0M1=(x1-x0,y1-y0,z1-z0)(x-x0)/(x1-x0)=(y-y0)/(y1-y0)=(z-z0)/(z1-z0)*Параметрические векторные уравнения прямой* В координатной форме , t€R   *Расстояние от точки до прямой* — равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Если задано уравнение прямой Ax + By + C = 0, то расстояние от точки M(Mx, My) до прямой можно найти, используя следующую формулу:  *Угол между прямыми на плоскости*. *Определение*. Если заданы две прямые y = k1x + b1, y = k2x + b2, то острый угол между этими прямыми будет определяться как tg(α)=(k2-k1)/(1+k1k2). Две прямые параллельны, если k1 = k2. Две прямые перпендикулярны, если k1 = -1/k2. *Теорема*. Прямые Ах + Ву + С = 0 и А1х + В1у + С1 = 0 параллельны, когда пропорциональны коэффициенты А1 = lА, В1 = lВ. Если еще и С1 = lС, то прямые совпадают. Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых. |
| 1. **Плоскость в пространстве: различные виды уравнений. Расстояние от точки до плоскости. Углы между плоскостями.** *Общее уравнение плоскости.* Ax+By+Cz+D=0, где A, B, C — некоторые действитнльные числа.   *Уравнение плоскости в отрезках.* , где a, b и c – отличные от нуля действительные числа.  *Нормальное уравнение плоскости.* Общее уравнение плоскости вида Ax+By+Cz+D=0 называют *нормальным уравнением плоскости*, если длина вектора **n**=(A,B,C) равна единице, то есть, и D≤0. Часто можно видеть, что нормальное уравнение плоскости записывают в виде *cosα\*x+cosβ\*y+cosγ\*z-p=0.* Здесь (*cosα, cosβ, cosγ)* - направляющие косинусы нормального вектора данной плоскости единичной длины, то есть **n**=( *cosα, cosβ, cosγ*), , а *p* – неотрицательное число, равное расстоянию от начала координат до плоскости.  *Расстояние от точки до плоскости.* Расстояние от точки М до плоскости заданной векторным уравнением.  М0(x0,y0,z0) .  *Угол между плоскостями.* Угол *φ* между нормальными векторами **n1** и **n2** двух плоскостей является углом между плоскостями. | **9. Прямая в пространстве: различные виды уравнений. Угол между прямой и плоскостью.**  *Уравнение прямой, которая является пересечением двух плоскостей.*  *Кононическое уравнение прямой.*  *Уравнение плоскости, проходящей через 2 точки. .*  *Параметрическое уравнение прямой.*  *Угол межлу прямой и плоскостью.**Углом между прямой и плоскостью* называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. , где (А;В;С;) коордтнаты нормального вектора плоскости (m;n;p) коордтнаты напрвляющего вектора прямой. | **10. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.**  *Взаимное расположение двух прямых и пространстве:* *1)* Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — *параллельные прямые*. *2)* Прямые лежат и одной плоскости и имеют одну общую точку — *прямые пересекаются*. *3)* В пространстве две прямые могут быть расположены еще так, что не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются *скрещивающимися* (не пересекаются и не параллельны).  *Расстояние от точки до прямой в пространстве.* Если **s** = {m; n; p} - направляющий вектор прямой *l*, M1(x1, y1, z1) - точка лежащей на прямой, тогда расстояние от точки M0(x0, y0, z0) до прямой *l* можно найти, используя формулу .  *Расстояние между двумя прямыми в пространстве.* Чтобы найти расстояние между прямыми в пространстве, необходимо взять точку M(x; y; z) ∈ одной прямой и найти расстояние то точки M(x; y; z) до другой прямой. А для этого есть формула используя формулу . |
| **11. Линии второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Классификация кривых второго порядка.**  *Кривые второго порядка.**Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0*— общее уравнение линий (кривых) второго порядка.  *Эллипс* — множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждого из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть велечина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами. *Кононическое уравнение эллипса*: , где *b2=a2-c2*, где 2a — сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов, 2c — расстояние между фокусами*. Если r — расстояние от произвольной точки до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: .*  *Гипербола* — множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояния между фокусами. *Кононическое уравнение гиперболы: ,* где *b2=a2-c2*, где 2a — модуль разнсти расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов, 2c — расстояние между фокусами*.*  *Парабола* — множетво всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точк, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса *F* до директрисы называется параметром параболы и обозначается через *p* (*p*>0). *Кононическое уравнение параболы: y2=2px.* | **12. Поверхности второго порядка. Исследование формы методом сечений.**  Канонический вид – Множество всех точек M(x,y,z) координаты которых удовлетворяют уравнению вида - *Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0* , где коэфициенты являются действительными числами – называется поверхностью второго порядка. *1)эллипсоид x2/a2 + y2/b2 + z2/c2 = 1 a>0, b>0, c>0.* симметричная поверхность отн. своих осей. Если a=b=c x2+y2+z2=a2 (сфера) a,b,c – полуоси эллипсоида.Точки(±a,0,0),(0,±b,0),(0,0,±c) – вершины эллипсоида. *2)однополосный гиперболоид x2/a2 + y2/b2 - z2/c2 =1 a>0,b>0,c>0;* Пересек. координатные осиплоскостями x=0,y=0,z=0 по гиперболам y2/b2 – z2/c2 = 1 x2/a2 – z2/c2=1 и эллипсоид x2/a2 + y2/b2 =1 соответственно. В сечениях однополосного гиперболоида плоскостями z=h всегда получаются эллипсы x2/a2 + y2/b2 = 1 + h2/c2 с полуосями и .  *3)двуполостный гиперболоид x2/a2 - y2/b2 - z2/c2 =1 a>0,b>0,c>0;* x=h получается эллипс x2/a2 + z2/b2 = -1 + h2/c2 с полуосями b\*Корень(h2/a2-1) и с\*Корень(h2/a2-1). При h=a получим в сечении точки (±а,0,0) – вершины двуполостного. В сечениях координ пл. z=0 и y=0 получим гиперболы x2/a2 – y2/b2 =1 и x2/a2 – z2 /c2 =1 соответсвенно. *4)конус второго порядка x2/a2 - y2/b2 - z2/c2 =0 a>0,b>0,c>0;* Пересекая пл. z=h -> x2/a2 + y2/b2 =1. В сечении плоскостями x=0 y=0 имеем пары пересек прямых y2/b2 - z2/c2 =0; x2/a2 - z2/c2 =0 соотв. *5)эллиптический параболоид x2/a2 + y2/b2=2pz a>0,b>0; 6)гиперболический параболоид x2/a2 - y2/b2=2pz a>0,b>0; 7)точка x2+y2+z2=0; 8)цилиндры второго порядка: эллиптический цилиндр x2/a2 + y2/b2 = 1 a>0, b>0; гиперболический цилиндр x2/a2 - y2/b2 = 1 a>0, b>0; параболический цилиндр y2=2px; пара пересекающихся плоскостей a2x2-b2y2=0 a>0 b>0 пара параллельных или совпадающих плоскостей x-a=0 a>=0; прямая x2+y2=0* |  |

Большое спасибо Кастюку А., Вечорко А. и Ермолаеву М.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **13.**Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами и их св-ва. Умножение матриц. Транспонирование матрицы.  *Матрицей называется совокупность m n чисел, расположенных в виде таблицы из строк m и столбцов n.*  **Виды:**  квадратная матрица(n=m).  Векторная матрица(есть либо столбец(вектор столбец), либо строка(вектор строка))  Прямоугольная матрица(m не равно n)  Диагональная(когда эл.диаг. не равны 0,остальные 0)  Единичная(диагональ 1,ост. 0)  Нулевая(все нули)  Верхняя(нижняя) треугольная матрица(под(над) диагональю все элементы 0).  Трапециевидная матрица(под(над) диагональю все элменты 0 и две последние стр. 0)  ***Операции.***  Внесение и вынос знака минуса в/из матрицы.  Умножение матрицы на число.( αА=[αaij]).  Сложение матриц. Вычитание.(Складываем соответствующие элементы)  Умножение матриц(умножение происходит только,если кол-во столбцов 1-ой матрицы равно числу строк 2-ой матрицы.)  ***Свойства операций над матрицами***  **A+B=B+A!(A+B)+C=A+(B+C)!λ(A+B)=λA+λB!A(B+C)=AB+AC!(A+B)C=AC+BC!λ(AB)=(λA)B=A(λB)!A(BC)=(AB)C!(A')'=A!(λA)'=λ(A)'!(A+B)'=A'+B'!(AB)'=B'A'**  Матрица АT**,** получаемая из данной матриц А путём замены строк на столбцы, называемая **транспонированной.** Свойства. 1. (АT )T =А (αА)T = αАT (А+В)T =АT +ВT (АВ)T = ВTАT Если А=АT – матрица симметричная. | **14.Определители и их св-ва. Разложение определителя по элементам строки.**  *Определитель-многочлен от элементов квадратной матрицы.*  **Определителем** n-ого порядка матрицу А называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знак каждого слагаемого определяется числом инверсий в перестановках, , составленных из первых и вторых индексов сомножителей: если сумма числа инверсий чётная, то слагаемое берётся со знаком +, если она нечётная, то слагаемое берётся с"-“.  *Определитель n-ного порядка обладает теми же св-вами ,что и опр. 3-го порядка.* ***Свойства.*** **1**.Определитель матрицы А равен определителю транспонированной матрицы. **2**.Если одна из строк матрицы нулевая, то определитель равен 0. **3**. Общий множитель какой либо строки можно вынести за знак определ. **4**.Если поменять Строки(столбцы) местами изменится знак определителя на противоп.**5**.если есть две одинаковые строки, то 0. 6.Если есть две пропорциональные, то определит. 0. **7**.Если элементы некоторой строки лин. комбинация др. строки то опред.=0. **8.**Формула Лапласа. Сумма всех произведений Эл. Любой строки определителя на соответствующее алгебраическое дополнение равна этому определителю.  ***Найти определитель можно по правилу треугольника либо по разложению строки с помощью алгебраического дополнения.*** | **15.Обратная матрица: определения, свойства, вычисление.**  **Обратная матрица** — такая [матрица](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) A−1, при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате [единичную матрицу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0) *E*: \! AA^{-1} = A^{-1}A = E. [Квадратная матрица](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)#.D0.9A.D0.B2.D0.B0.D0.B4.D1.80.D0.B0.D1.82.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.BC.D0.B0.D1.82.D1.80.D0.B8.D1.86.D0.B0_.D0.B8_.D1.81.D0.BC.D0.B5.D0.B6.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D0.BE.D0.BF.D1.80.D0.B5.D0.B4.D0.B5.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D1.8F) обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её [определитель](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8B) не равен нулю.  A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot C^{T}  C^{T} — транспонированная [матрица алгебраических дополнений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5);  ***Св-ва обратной матрицы:***   * \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, где \ \det обозначает [определитель](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C). * \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} для любых двух обратимых матриц A и B. * \ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T где *^T обозначает транспонированную матрицу. * \ (kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} для любого коэффициента k\not=0 . |
| **16.Система линейных алгебраических уравнений: основные понятия. Решение невырожденных систем линейных уравнений: матричный способ, формула Крамера.**  Линейной системой m уравнений с n неизвестных называется система вида:  ***a11x1+a12x2+…+a1nxn=b1  a21x1+a22x2+…+a2nxn=b2  ……………………………..  am1x1+am2x2+…+amnxn=bm***  где a11,a12,…,amn коэффициенты системы. Если все свободные члены равны 0,то система называется однородной, если же хотя бы одно не равно 0, то неоднородная. Если система имеет решения она называется совместной, если нет несовместная. Совместная система, имеющая единственное решение, называется определённой, система, имеющая более одного решения – неопределённая. Решить систему это узнать совместна она или нет, и в случае совместимости найти множество всех решений.  **Метод Крамера (правило Крамера)** — способ решения квадратных [систем линейных алгебраических уравнений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9) с ненулевым [определителем](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) [основной матрицы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Если определитель равен 0,то система имеет бесконечное мн-во решений или не имеет вообще.Если определитель не равен 0,то делаем так:  ***Система линейных уравнений:***  **Определители:**  \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \end{vmatrix},\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \\ \end{vmatrix},\ \  \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \\ \end{vmatrix},\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \\ \end{vmatrix}  x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}**Матричный способ(**метод решения через [обратную матрицу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0)).Определитель должен быть ненулевым.  X=A^{-1}\cdot B;  \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\\ \end{cases}  A =  \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots  \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},  B =  \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},  X =  \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | 17. **Метод Гаусса** — классический метод решения [системы линейных алгебраических уравнений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9). Это метод последовательного исключения [переменных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0), когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.  -Приводим, в результате алгебраических действий к треугольному виду(под главной диагональю нули).  -Пишем уравнения(начиная с конечного). | 18.Векторным пространством называется множество объектов, называемых векторами, для которых определена операция сложения и умножения на число(вещественное или комплексное; в зависимости от этого различают вещественные или комплексные векторные пространства),обладающими свойствами:  C:\Users\Artur\Desktop\Снимок.JPG  Примеры   * Нулевое пространство, единственным элементом которого является ноль. * Пространство всех функций X\to F с конечным носителем образует векторное пространство размерности равной [мощности](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D1%89%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0) X. * [Поле](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) действительных чисел может быть рассмотрено как континуально-мерное векторное пространство над полем рациональных чисел. * Любое поле является одномерным пространством над собой. |
| 18(2). Подпространство **Линейное подпространство** или **векторное подпространство** ― непустое подмножество K линейного пространства V такое, что K само является линейным пространством по отношению к определенным в V действиям сложения и умножения на скаляр. Множество всех подпространств обычно обозначают как Lat(V). Чтобы подмножество было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы   1. \theta\in K; 2. для всякого вектора \mathbf{x}\in K, вектор \alpha\mathbf{x} также принадлежал K, при любом \alpha\in F; 3. для всяких векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, вектор \mathbf{x}+\mathbf{y} также принадлежал K.   В частности, пространство, состоящее из одного элемента \{\theta\}, является подпространством любого пространства; любое пространство является само себе подпространством. Подпространства, не совпадающие с этими двумя, называют *собственными* или *нетривиальными*. Свойства подпространств  * Пересечение любого семейства подпространств — снова подпространство; * Сумма конечного семейства подпространств — снова подпространство. Сумма подпространств \{K_i\quad|\quad i \in 1\ldots N\} определяется как множество, содержащее всевозможные суммы элементов K_i:   \sum_{i=1}^N {K_i}:= \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_N\quad|\quad \mathbf{x}_i \in K_i\quad (i\in 1\ldots N)\}. | **19.Линейная зависимость и независимость векторов.**  **Определение.** Если любой вектор системы [Graphics:33.gif] векторов линейного пространства [Graphics:34.gif] линейно выражается через остальные векторы системы, то система векторов называется ***линейно зависимой*.**  Система векторов, которая  не является линейно зависимой, называется  ***линейно независимой***.   * Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима. * Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов. * Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны. * Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны. * Любые 4 вектора линейно зависимы. | **20. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в заданном базисе.**  Если в линейном пространстве [Graphics:39.gif] существует линейно независимая система из [Graphics:40.gif] векторов, а любая система из [Graphics:41.gif]-го вектора линейно зависима, то число [Graphics:42.gif] называется ***размерностью пространства***[Graphics:43.gif] и обозначается [Graphics:44.gif]. В этом случае пространство [Graphics:45.gif] называют ***[Graphics:46.gif]-мерным линейным пространством* или *[Graphics:47.gif]-мерным векторным пространством*.**  Любая упорядоченная линейно независимая система [Graphics:48.gif] векторов [Graphics:49.gif] линейного пространства [Graphics:50.gif] образует ***базис пространства*** и любой вектор [Graphics:51.gif] единственным образом выражается через векторы базиса: [Graphics:52.gif].  Числа [Graphics:53.gif] называют ***координатами вектора*[Graphics:54.gif]** в базисе [Graphics:55.gif] и обозначают [Graphics:56.gif]. При этом для любых двух произвольных векторов [Graphics:57.gif]-мерного линейного пространства [Graphics:58.gif], [Graphics:59.gif]и произвольного числа [Graphics:60.gif] справедливо: [Graphics:61.gif]  и  [Graphics:62.gif].  Это означает, что все  [Graphics:63.gif]-мерные линейные пространства “устроены” одинаково -- как пространство [Graphics:64.gif] векторов-столбцов из [Graphics:65.gif] действительных чисел, т.е. что все они изоморфны пространству [Graphics:66.gif].  Линейные пространства [Graphics:67.gif] и [Graphics:68.gif] называются  ***изоморфными*,** если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если векторам [Graphics:69.gif] и [Graphics:70.gif] из [Graphics:71.gif]соответствуют векторы [Graphics:72.gif] и [Graphics:73.gif] из [Graphics:74.gif], то вектору [Graphics:75.gif] соответствует вектор [Graphics:76.gif] и при любом [Graphics:77.gif] вектору [Graphics:78.gif] соответствует вектор [Graphics:79.gif].  Изоморфизм [Graphics:80.gif]-мерных линейных пространств пространству [Graphics:81.gif] означает, что соотношения между элементами [Graphics:82.gif]-мерного линейного пространства и операции с ними можно изучать как соотношения между векторами из [Graphics:83.gif] и операции с ними и что всякое утверждение относительно векторов из [Graphics:84.gif] справедливо для соответствующих элементов любого [Graphics:85.gif]-мерного линейного пространства. |
| **21.Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы.**  **Рангом** системы строк (столбцов) [матрицы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) A с m строк и n  столбцов называется максимальное число [линейно независимых](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BD%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) строк (столбцов). Несколько строк (столбцов) называются линейно независимыми, если ни одна из них не выражается линейно через другие. Ранг системы строк всегда равен рангу системы столбцов, и это число называется рангом матрицы. Обычно ранг матрицы A обозначается \operatorname{rang}A (\operatorname{rg}A) или \operatorname{rank}A.  **Ранг матрицы** — наивысший из порядков [миноров](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D1%80_(%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) этой матрицы, отличных от нуля.  Существует несколько ***методов нахождения ранга матрицы:***   * **Метод элементарных преобразований**   Ранг матрицы равен числу ненулевых строк в матрице после приведения её к ступенчатой форме при помощи элементарных преобразований над строками матрицы.   * **Метод окаймляющих миноров**   Пусть в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M. Рассмотрим все миноры (k+1)-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, и вся процедура повторяется. | **22. Теорема Кронекера — Капелли** — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений:  [Система линейных алгебраических уравнений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9) [совместна](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D0%B2%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) тогда и только тогда, когда [ранг](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%BD%D0%B3_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D1%8B) её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.  Если ранг [совместной](http://www.znannya.org/?view=concept:1356) системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если ранг [совместной](http://www.znannya.org/?view=concept:1356) системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.  **Правило решения произвольной системы линейных уравнений**  **1.**  Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Еслиr(A)≠r(A), то система несовместна.  **2.**  Если r(A)=r(A)=r, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют главными и оставляют слева, а остальныеn-r неизвестных называют свободными и переносят в правые части уравнений.  **3.** Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено[общее решение](http://www.znannya.org/?view=concept:1361) системы.  **4.** Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений. | **23.Однородные системы линейных уравнений: фундаментальная система решений, структура общего решения.** Однородные системы Однородной системой линейных уравнений называется система вида: \left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n &=& 0 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n &=& 0 \end{array}\right.\iff A_{m\times n}\vec{x}=\vec{0},\quad A_{m\times n}=\left(\begin{array}{ccc}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{array}\right)\qquad (1)  Нулевое решение \vec{x}=(0,\ldots,0)\! системы называется *тривиальным решением*.  Однородные системы всегда совместны, т.к. всегда существует тривиальное решение.  Если существует любое ненулевое решение системы, то оно называется *нетривиальным*.  Чтобы найти фундаментальную систему и общее решение однородной системы, нужно найти базис ядра соответствующего линейного оператора.  **Фундаментальной системой решений** однородной системы из *p* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными переменными называют совокупность *(n – r)* линейно независимых решений этой системы, где *r* – порядок базисного минора основной матрицы системы. |

Большое спасибо Кастюку А., Вечорко А. и Ермолаеву М.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **24.Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.**  Линейный оператор ***A***действует из *n*-мерного линейного пространства ***X***в *m*-мерное линейное пространство ***Y***.  В этих пространствах определены базисы ***e*** = **{**e1, ..., e*n***}** и *f*= {f1, ..., f*m*}.  Пусть *A*(ei ) = a1i·f1 + a2i·f2 + ...+ ami·fm — разложение образа *i*-го базисного вектора базиса *e* пространства *X* по базису *f* пространства *Y*,*i*= 1, 2, ..., *n*.  *Матрицей линейного оператора*в базисах *e, f* называется матрица ***A***, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов базиса ***e*** в базисе ***f*** , **A** =**{**aij**}**= {*A*(ej )i**}**:  Координаты образа **y** = ***A***(**x**) и прообраза **x С**вязаны соотношеннием:y = A· x  http://twt.mpei.ac.ru/math/LARB/Linoper/LA_04030000_clip_image004.gifhttp://twt.mpei.ac.ru/math/LARB/Linoper/LA_04030000_clip_image002_0000.gif | **25. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.**  Рассмотрим [линейный оператор](http://twt.mpei.ac.ru/math/LARB/Linoper/LA_04010000.html) ***A***, действующий в линейном пространстве ***X***: **y** = ***A***(**x**), ∀**x** ∈ X, **y** ∈ X.  Число λ называется *собственным значением* оператора ***A***, если существует такой ненулевой вектор **x**, что справедливо равенство ***A***(**x**) = λ·**x**. Любой ненулевой вектор **x** ≠**0**, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором оператора* ***A***, отвечающим собственному значению λ.  ***A***(**x**) = λ·**x**, **x** ≠**0**, **x** ∈ X. | **26.Евклидовы пространства. Неравенство Коши- Буняковского. Норма вектора. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис.**   * Если каждой паре векторов **x**, **y** линейного пространства ***L*** поставлено в соответствие действительное число **(x**, **y)**, так, что для любых **x**, **y** и **z** из ***L*** и любого действительного числа ***α*** справедливы следующие аксиомы:   **(x**, **y)** = **(y, x)**,  **(*α*·x**, **y)** = ***α*·(x**, **y)**,  **(x** + **y**, **z)** =**(x**, **z)** + **(y**, **z)**,  **(x**, **x)**> 0 при **x** ≠ 0, **(0**, **0)** = 0,  то в пространстве ***L***определено *скалярное произведение* **(x**, **y)**.  Если в линейном пространстве определено скалярное произведение, то такое пространство называется ***евклидовым пространством*.**   * Для любых векторов **x** и **y** евклидова пространства ***E*** со скалярным призведением**(x**, **y)**  справедливо неравенство:   **|(x**, **y)|**2 ≤ **(x, x)·(y**, **y)**.  Это неравенство называется *неравенство* ***Коши-Буняковского.***  Иногда это неравенство называют *неравенством Шварца*. Норма вектора Норма в [векторном пространстве](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) V\  над [полем](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_(%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0)) [вещественных](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) или [комплексных чисел](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) — это [функционал](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB) p\colon V \to \mathbb{R}, обладающий следующими свойствами:   1. p(x)=0 \Rightarrow x=0_V; 2. \forall x,y \in V, p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) (*неравенство треугольника*); 3. \forall \alpha \in \C, \forall x \in V, p(\alpha\, x)=|\alpha|p(x).   Чаще всего норму обозначают в виде: \| \cdot  \|. В частности, \| x\|  — это норма элемента x векторного пространства \R..Вектор с единичной нормой (\| x\|=1 ) называется *нормальным* или ***нормированным*.**  Если все векторы системы векторов нормированы, то система векторов называется ***нормированной***системой.  Если векторы системы векторов e1, e2, ..., en попарно ортогональны и нормированы, то система векторов называется ***ортонормированной***системой: **(e**i**, e**j**) =**0, если *i* ≠ *j*,(ei, ei) =1.   * Ортонормированная система, состоящая из *n* векторов *n*-мерного евклидова пространства, образует базис этого пространства. Такой базис называется ***ортонормированным*базисом**.   Если e1, e2, ..., en—***ортонормированный*базис** *n*-мерного евклидова пространства и  **x** = *x*1**e1** + *x*2**e2** + ... + *x*n**e**n— разложение вектора **x** по этому базису, то координаты*x*i вектора **x**в ортонормированном базисе вычисляются по формулам *x*i=(x, ei),*i*= 1, 2, ..., *n*.   * **Угол между векторами** — угол между направлениями этих векторов (наименьший угол).   По определению, *угол между двумя векторами находится в промежутке* **[0°; 180°]**. |
| **27.Ортогональный оператор, его матрица. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду.**  C:\Users\Администратор\Desktop\ScreenShot00018.jpg  Нормальную (в частности симметричную) матрицу **A** можно привести к диагональному виду преобразованием подобия —  **A** = **TΛT**−1  Здесь **Λ** = diag(λ1,..., λ*N*) — это диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения матрицы **A**, а **T** — это матрица, составленная из соответствующих собственных векторов матрицы **A**, т.е. **T** = (**v**1,...,**v***N*). |  | **28. Квадратичные формы и их приведение к каноническому виду. Упрощение уравнений линий второго порядка.**  Пусть e1, ..., e*n* — базис в ***L***. И пусть для вектора **x** из***L***задано разложение x =*x*1·e1+*x*2·e2+ ...+ *xn*· e*n*.  Тогда для квадратичной формы *k*(**x**) справедливо представление  http://twt.mpei.ac.ru/math/LARB/Quadrf/LA_06020200_clip_image002.gif  Здесь φ(**ei**, **ej**) — значение полярной для *k*(**x**) билинейной формы φ(**x**, **y**).  Матрица **A** = {*a*ij} называется *матрицей квадратичной формы*. Определённая таким образом матрица квадратичной формы является симметричной матрицей.  *Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.*  Для приведения квадратичной формы n переменных  q(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots+a_{nn}x_n^2  к каноническому виду нужно выполнить следующие действия. **1.** Выбрать такую переменную (***ведущую***), которая входит в квадратичную форму во второй и в первой степени одновременно (если в квадратичной форме есть член с квадратом переменной и с произведением этой переменной на другую переменную), и перейти к пункту 2.  Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к п.3.  Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.  ***2.*** По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить сумму этих членов до полного квадрата (разумеется, добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма). Получим сумму полного квадрата некоторой линейной формы (в которую входит ведущая переменная) и квадратичной формы, в которую ведущая переменная не входит. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять за одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования с пункта 1.  **3.** Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется к разности квадратов двух новых переменных, т.е. в новой квадратичной форме q(y) будут квадраты переменных с отличными от нуля коэффициентами. Продолжить преобразования новой квадратичной формы с пункта 1. |

Большое спасибо Кастюку А., Вечорко А. и Ермолаеву М.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. **Множества и операции над ними.**   *Множество*(А)-совокупность некоторых объектов(элементы множества(а)), объединенных по какому-либо признаку. Ø- пустое мн-во. Мн-во А – подмн-во мн-ва В, если каждый элемент А – элемент мн-ва В.(«А включно в В»).Равенство А и В. Операции: пересечение(только элементы принадлеж. А и В) A\cap B:=\{x\mid x\in A\land x\in B\}.Объединение(элементы, каждый из которых хотя бы в одном множестве) A\cup B:=\{x\mid x\in A\lor x\in B\}.Разность: A\setminus B:=A\cap\overline B=\{x\mid x\in A\land x\notin B\}.Декартово произведениеA\times B=\{(a,\;b)\mid a\in A,\;b\in B\}. | 1. **Числовая последовательность, ее основныехар-ки. Предел числовой послед. Св-ва сходящихся последовательностей**   *Числоваяпоследовательность*(x1,…,xn)-функция xn**=**f(n) заданная на множестве N. Последовательность ограниченная, если существует M>0, что для любого nϵNвыполняется неравенство |xn|≤M. В противном случае – неограниченная. Возрастающая, если для любого nвыполняется неравенство an+1≥an.Аналогично опр. убыв.послед. Если знак не меняется – последовательность монотонная. Если все элементы равны одному и тому же числу, то последовательность – постоянная. Рекуррентный способ задания последовательности: задается x1 и правило определения n-го элемента по (n-1)-му: xn=f(xn-1).*Число а называется пределом последовательности* {xn},если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N что при всех n>Nвыполняется неравенство |xn-a|<ε. В этом случае пишут =limxn=aили xn→a. .  Последовательность {xn}называется сходящейся, если существует такое вещественное число а, что последовательность {xn}−a является бесконечно малой. *Св-ва сходящихся последовательностей*:1)имеет только один предел. Послед.не имеющая предела – расходящаяся. Постоянная последовательность имеет предел равный самому числу.2)Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.3)Не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.4)Сумма сходящихся последовательностей{xn} и {yn} представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей {xn}и {yn}(аналогично и для -,\*,/(отличны от нуля)). | 1. **Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их св-ва**   Определение. Последовательность {xn} называется бесконечные малой, если для любого положительного числа ε можно указать номер N такой, что при n≥N все элементы xn этой последовательности удовлетворяют неравенству xn<ε.Любая бесконечно малая последовательность является ограниченной.Последовательность{xn} называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A можно указать номер N такой, что при n≥N все элементы xn этой последовательности удовлетворяют неравенству | xn|>A.Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Но не каждая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность 1, 2, 1, 3, ... 1, n, ... не является бесконечно большой, так как при A > 1 неравенство | xn|>A не выполняется дляxn с нечетными номерами.*Св-ва бесконечно малых*: Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая. Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.Если an — бесконечно малая последовательность, сохраняющая знак, то — бесконечно большая последовательность(и наоборот для бесконечно большой не содержащей нули последовательности).Если вся бесконечно малая последовательность состоит из одинаковых элементов, то эти элементы — нули.Любая бесконечно малая последовательность ограничена.Если стационарная последовательность является бесконечно малой, то все её элементы, начиная с некоторого, равны нулю. |
| 1. **Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Переход к пределу в неравенствах.**   Если =а, =b и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство хn≤yn, то а ≤ b. Если =а, =b и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство хn≤zn≤yn, то=a.Сумма сходящихся последовательностей xn и yn представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей xn и yn(аналогично и для -,\*,/(отличны от нуля)). | 1. **Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число е.**   *Теорема Вейерштрасса* – всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.  *Число е* – непрерывное число=2.72.. Число е принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию е называется натуральным логарифмом и обозначается lnx. Если знак не меняется – последовательность монотонная. | 1. **Предел функции при** *x→∞, x→+∞,x→−∞.***Бесконечные пределы функции**   Пусть функция у = f(x) определена в промежутке (-;). ЧислоА называется пределом функции f(x) при х*→*, если длялюбого положительного числа ε существует такое число М = М (ε) >0,что при всех х , удовлетворяющих неравенству |x| > М выполняется неравенство |f(x) – А| <ε. Коротко это определение можно записать так : .Последовательность называется *бесконечно малой*, если=0. Например, последовательность чиселan= — бесконечно малая.Функция называется бесконечно малой в окрестности точки x0, если =0. Функция называется бесконечно малой на бесконечности, если =0 либо=0.Последовательность называется *бесконечно большой*, если=∞.Функция называется бесконечно большой в окрестности точки x0, если =∞. Функция называется бесконечно большой на бесконечности, если =∞ либо=∞.*Св-ва бесконечно малых*: Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную — бесконечно малая. Как следствие, произведение бесконечно малой на константу — бесконечно малая.Если an — бесконечно малая последовательность, сохраняющая знак, то — бесконечно большая последовательность(и наоборот для бесконечно большой не содержащей нули последовательности).Если вся бесконечно малая последовательность состоит из одинаковых элементов, то эти элементы — нули.Любая бесконечно малая последовательность ограничена.Если стационарная последовательность является бесконечно малой, то все её элементы, начиная с некоторого, равны нулю. |
| 1. **Замечательные пределы и их следствия.**   При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел называемый *первым замечательным пределом.*=eи =e называются вторым замечательным пределом.– экспоненциальная. Следствия для 1: , , , . Следствия для 2: , =1, =1, =1(a>0,a≠1), | 1. **Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Символы Ландау.**   Пусть α = α(х) и β= β(х) есть б.м.ф. при х →x0, т.еи  Если =A≠0, то α и β называются б.м одного порядка. Если =0, то α – бесконечно малая более высокого порядка ,чем β. Если =∞ то α называется бесконечно малой более низкого порядка. Если не существует, то α и β называются несравнимыми б.м. | 1. **Эквивалентность функции, их применение к вычислению пределов функций. Метод выделения главной части степенного вида.**   Если =1, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми.(α~β). Предел отношения двух бесконечно малых функцийне изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентнойей бесконечно малой .Разность двух эквивалентных бесконечно малых функцийесть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая изних .Сумма конечного числа бесконечно малых функцийразных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется главнойчастью этой суммы.Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием  бесконечно малых высшего порядка. Для раскрытия неопределённостей вида 0/0 часто бывают полезнымприменять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и  другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно,sinx~xпри x→0, tgx~xпри x→0.При приближенных значениях можно отбрасывать бесконечно малую более высокого порядка. |
| 1. **Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность.**   Функция у = f(x) называется непрерывной вточке x0, если существует предел функции в этой точке и он равензначению функции в этой точке, т. е.. 1) функцияf(x) определена в точке х0 и в ее окрестности;2) функция f(x) имеет предел при х → х0;  З) предел функции в точке х0 равен значению функции в этойточке, т. е. выполняется равенство.при нахождении предела непрерывнойфункции f(x) можно перейтик пределу под знакомфункции то есть в функцию f(x) вместо аргумента х подставить его предельное значение х0.Y=f(x) – непрерывная в точке x0, если она определена в точке x0 и ее окрестности и выполняется равенство | 1. **Св-ва функций, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций. Степенно-показательные выражения.**   Сумма, произведение и частное двух непрерывныхфункций есть функция непрерывная (для частного за исключениемтех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).Пусть функции u = φ(х) непрерывна в точке х0, афункция у = f(u) непрерывна в точке u0=φ(х0).Тогда сложнаяфункция f(φ(х)), состоящая из непрерывных функций, непрерывна вточке х0.Если функция у = f(x) непрерывна и строго монотоннана [а; b] осиОx, то обратная функция у = φ(х) также непрерывна имонотонна на соответствующем отрезке [с; d] оси Оy. Arc- функции непрерывны при всех значениях x, при которых эти функции определены. Как известно, элементарной называется такая функция, которуюможно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметическихдействий и суперпозиций (операции взятия функции отфункции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенныхвыше теорем вытекает: всякая элементарная функция непрерывнав каждой точке, в которой она определена. | 1. **Классификация точек разрыва функции.**   Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.(не выполняется хотя бы одно из условий определения непрерывности функции). Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первогои второго рода. Точка разрыва х0 называется точкой разрыва первого рода функции у = f(x), если в этой точке существуют конечныепределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е.и . При этом: а) если A1 = А2 , то точка х0 называется точкой устранимого разрыва;б) если A1≠А2 , то точка х0 называется точкойконечного разрыва. Величину |A1 - А2| называют скачком функции в точке разрывапервого рода.  Точка разрыва хо называется точкой разрыва второго родафункции у = f(x), если по крайней мере один из одностороннихпределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности. |

Большое спасибо Кастюку А., Вечорко А. и Ермолаеву М.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **42. Производная функции. Односторонние производные. Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.**  *Производной*функции *y* = *f*(*x*) в точке *x0*называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует и конечен, т.е.  *Односторонние производные* . Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке х = х0 называется правое (левое) значение предела отношения  при условии, что это отношение существует.    *Геометрический смысл производной.* Производная в точке x0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  y=f(x) в этой точке.  *Физический смысл производной.*Если точка движется вдоль оси х и ее координата изменяется по закону  x(t), то мгновенная скорость точки: .  *Уравнение касательной и нормали к кривой.**1 )y - y0 = f '(x0)(x - x0)* — уравнение касательной к прямой. *2)* — уравнение нормали. | **43. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции.**  *Основные правила дифференцирования.* Если *с* - постоянное число, и u = u(x), v = v(x) - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования: **1)** (с) ' = 0, (cu) ' = cu'; **2)** (u±v)' = u'±v';  **3)** (uv)' = u'v+v'u; **4)** (u/v)' = (u'v-v'u)/v2; **5)** y'x=y'u·u'x, если *y=f(u)*, ; **6)** y'x= , если *y=f(x)*,  *Производная сложной функции.*Если функция  имеет производную u'x  в точке *x*, а функция *y=f(u)* имеет производную *y'(u)* в точке , то сложная функция *y=f()*  в точке *x* имеет производную *y'x*, которая находмтся по фомуле *y'x=y'u****.****u'x* | **44. Производная обратной функции. Логарифмическая производная. Гиперболические функции и их производные.**  *Производная обратной функции.*Пусть функция f(x) имеет в точке x0 производную f'(x0)≠0. Тогда обратная функция   имеет в соответствующей точке y0 производную , которую можно отыскать по формуле: . Написать производные для *arcsin, arccos, arctg, arcctg*.  *Логарифмическая производная ( ,a>0, a≠0). ( )'=*  *Гиперболические функции и их производные.* sh *x* = — синус гиперболический; ch *x* = — косинус гиперболический; th *x* = = — тангенс гиперболический; сth *x* = = — кастангенс гиперболический. Зависимости гиперболических функций: 1)sh x + ch x = ex; 2) ch2 x – sh2 x = 1;  3) ch2x=ch2x+sh2 x; 4) sh2x = 2shx ch x; 5) sh(x+y) = shx·chy + chx·shy; 6) ch(x+y) = chx·chy + shx·sh y;  7); производные из таблицы производных взять. |
| **45. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала.**  Функция *y*=*f*(*x*) называется ***дифференцируемой***в точке *x*0, если ее приращение Δ*y* в точке *x*0 может быть представлено в виде: Δ*y*=*f '(x)·*Δ*x*+α·Δ*x*, где 1ое слогаемое — функция одного порядка с Δ*x, а второе слогаемое* — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δ*x*. *Теорема.*  Для того, чтобы функция *y*=*f*(*x*)  была ***дифференцируема***в точке *x*0, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную.  [*Дифференциал*](http://function-x.ru/differential.html) функции y = f(x) равен произведению её производной на приращение независимой переменной (из формулы является дифференциалом(*dy=)*).  [*Дифференциал*](http://function-x.ru/differential.html) функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной. (*dy=f '(x) dx)*  *Геометрический смысл дефферециала.*  [Дифференциал](http://function-x.ru/differential.html) функции y = f(x) равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику этой функции в точке (x; y), при изменении x на величину *Δx=dx*.  *Применение* [*дифференциал*](http://function-x.ru/differential.html)*а в приближенных вычислениях.* Приращение Δy функции y = f(x) в точке x можно представить в виде Δ*y*=*f '(x)·*Δ*x*+α·Δ*x,* где *а→0* при →0, или Δ*y*=*dy*+α·Δ*x.* Отбрасывая бесконечно малую α·Δ*x* более высокого порядка, чем получаем равенство Δ*y ≈ dy.*  *Инвариантность формы дифференциала.* Дифференциал функции *y=g(x)* в точке y0 имеет вид: *dz=,* где *dy* — дифференциал тождественного отображения *y→y0*: *dy(h)=h, при hϵR*. Пусть теперь *y=f(x), xϵU(x0), fϵD(x0)*. Тогда *dy = f '(x0)dx*, и согласно цепному правилу *dz = g ' (f(x0))· f '(x0)dx= g'(y0)dy*. Таким образом, форма первого дифференциала остаётся одной и той же вне зависимости от того, является ли переменная функцией или нет. | **46. Производные высших порядков. Бином Ньютона. Формула Лейбница.**  *Производные высших порядков*. Пусть функция y=f(x) дифференцируема на множестве Х. Производная f'(x) этой функции является функцией от х на Х. Следовательно, можно говорить о производной полученной функции, т.е. о производной от первой производной. Если она существует, то её называют производной второго порядка функции у= f(x) или , короче, второй производной и обозначают f''(x) или у''. Значит по определению f''(x)=( f' (x))'. Аналогично если существует производная от второй производной, то её называют третьей производной и обозначают f'''(x)=( f''(x))' и т.д. Вообще производной n-го порядка называют производную от производной (n-1)- го порядка   и обозначают y(n), f(n)(x),  *Бином Ньютона. Бином Ньютона* **—**это формула, представляющая выражение ( a + b ) n  при положительном целом  n  в виде многочлена:  (a + b)n = an + an-1 b + an-2 b2 + an-3 b3 +...+ a bn-1 + bn ; или | 1. **Дифференциалы высших порядков.**   Пусть у = f(х) дифференцируемая функция, а ее аргумент х –независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал dy = f’(х) dxесть также функция х; можно найти дифференциал этой функции.Дифференциал от дифференциала функции у = f(x) называетсяее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) иобозначается d2y или d2f(x).т.е. производную функции можно рассматривать как отношение еедифференциала соответствующего порядка к соответствующей степенидифференциала независимой переменной.(только если x–независимая переменная) |
| 1. **Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции заданныхпараметрически.**   Под неявним заданием функции понимают задание функции в виде уравнения F(x; у) = 0, не разрешенного относительно у.Всякую явно заданную функцию у = f (х) можно записать как  неявно заданную уравнением f(x) - у = 0, но не наоборот.Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительноу. Если неявная функция задана уравнением F(x; у) = 0, то для нахождения производной от y по х нет необходимости разрешать уравнение  относительно у : достаточно продифференцировать этоуравнение по х, рассматривая при этом у как функцию х,и полученное затем уравнение разрешить относительно у'.Производная неявной функции выражается через аргумент х ифункцию у.Найдем производную y’x, считая, что функции x=x(t) и y=y(t) имеют производныеи что функция х = x(t) имеет обратную t = φ(x). По правилудифференцирования обратной функции: | 1. **Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Ла-гранжа, Коши.**   Дифференциал суммы, произведения и частного двухдифференцируемых функций определяются следующими формулами:d(u+v)=du+dv, d(uv)=v\*du+u\*dv, d(u/v)=(v\*du-u\*dv)/v2. Дифференциал сложной функции равен произведениюпроизводной этой функции по промежуточному аргументу надифференциал этого промежуточного аргумента.Теорема Ферма. Если функция у = f (х), определенная в интервале (а ;b), достигает в некоторой точке с этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения и существует производная f ′(с), то f ′(с) = 0. Теорема Ролля. Если функция у = f (х), непрерывная на отрезке [а ; b] и дифференцируемая в интервале (а ; b), принимает на концах этого отрезка равные значения f (a) = f (b), то в интервале (а ; b) существует такая точка с, что f ′(с) = 0. Теорема Лагранжа. Если функция у = f (х) непрерывна на отрезке [а ; b] и дифференцируема в интервале (а ; b), то в этом интервале найдется такая точка с, что. Следствие. Если f ′(x) = 0 в интервале (а ; b), то в этом интервале функция f (х) постоянна. Теорема Коши. Если функции f (х) и g (х): 1) непрерывны на отрезке [а ; b]; 2) дифференцируемы в интервале (а ; b); 3) g'(x) ≠ 0 в этом интервале, то в интервале (а ; b) существует такая точка с, что имеет место равенство | **50. Раскрытие неопределенностей(первое и второе правила Лопиталя).**  (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей 0/0) Пусть функции f(x) и φ(х) непрерывны и дифференцируемыв окрестности точки х0 и обращаются в нуль в этой точке: f(x0) = φ(х0) = 0. Пусть φ(х) ≠0 в окрестности точки х0. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида ) Если существует предел , то . Пусть функции f(x) и непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки х0 (кроме, может быть, точки х0), в этой окрестности Если существует предел . Раскрытие неопределенностей различных видов. Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида 0/0 и ∞/∞ которые называют основными. Неопределенности  вида 0\*∞, ∞-∞, 1∞, ∞0, 00 сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований. |
| **51. Формула Тейлора с остаточным членов в форме Пеано и в форме Ла-гранжа.**  C:\Users\Ogre\Desktop\Снимок.JPG  C:\Users\Ogre\Desktop\Снимок.JPG | **52. Формула Маклорена. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций.**  **Формулой Маклорена**называется формула Тейлора при а = 0:http://predmat.ru/duf/ris/image095.gif |  |

|  |
| --- |
|  |

Большое спасибо Кастюку А., Вечорко А. и Ермолаеву М.