幾何学的情報の変換

幾何学的変換

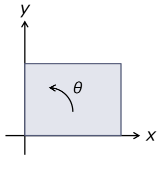
- 一般に，画像中の物体などの位置や形状を変えるような処理のことを，幾何学的変換という．
- 2次元画像における幾何学的変換には，
  - 拡大・縮小
  - 回転
  - 反転（鏡映）
  - せん断（スキュー）
  - 平行移動

  などや，それらを組み合わせた
  - 線形変換
  - アフィン変換

  などがある．

本講義で用いる座標系

- 本講義では，
  - 以下に示すような座標系を用いる．
  - 回転角は，反時計回りを正とする．

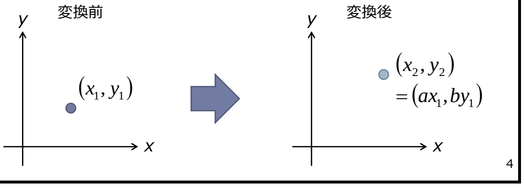


拡大・縮小

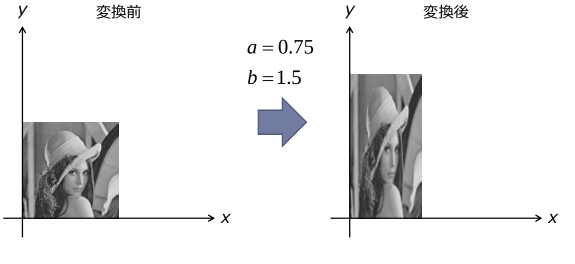
- 拡大・縮小は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，aは，x方向の拡大・縮小率であり，bは，y方向の拡大・縮小率である．



拡大・縮小（例）

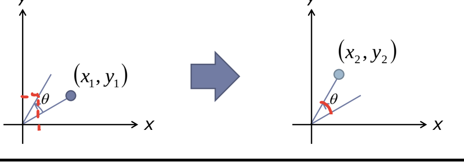


回転

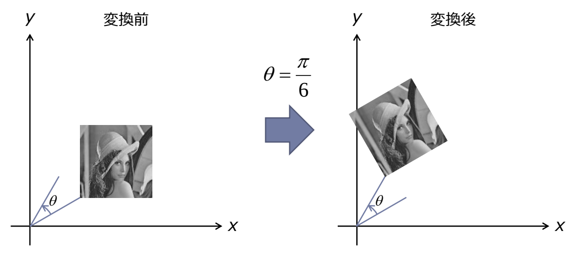
- 回転は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，θは，回転角である．



回転（例）



反転

- x軸（y=0）に関する反転は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

y軸（x=0）に関する反転は，

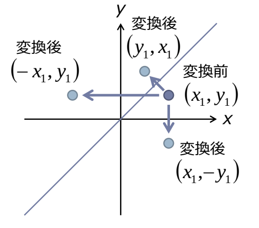
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

y=xに関する反転は，

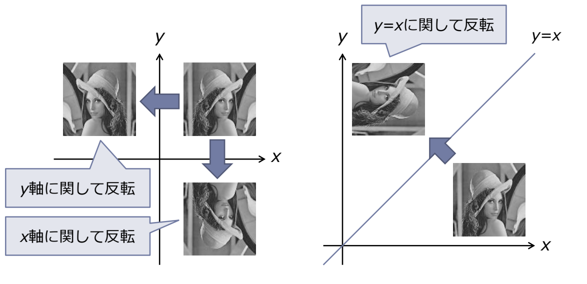
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表される．

反転は，鏡映とも呼ばれる．



反転（例）



演習問題

- 問題1
  - 以下に示す変換により，座標(10,20)はどの座標に変換されるか，変換後の座標を示せ．
    - 拡大・縮小 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1.8x_1 \\ 0.8y_1 \end{bmatrix}$$

    - 回転 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

演習問題　解答（未公開）

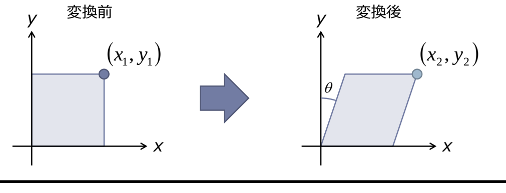
せん断（１）

- x軸方向へのせん断は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，θは，スキュー角である．

せん断は，長方形を傾けて
平行四辺形にするような変換である．
スキューとも呼ばれる．



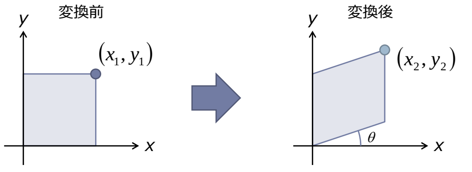
せん断（２）

- y軸方向へのせん断は，

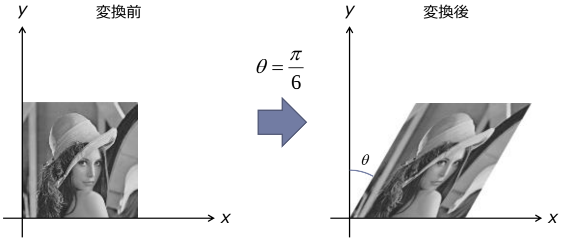
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，θは，スキュー角である．

せん断は，長方形を傾けて
平行四辺形にするような変換である．
スキューとも呼ばれる．



せん断（例）



演習問題

- 問題2
  - 以下に示す変換により，座標(10,10)と座標(10,20)はどの座標に変換されるか，変換後の座標をそれぞれ示せ．
    - せん断 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

演習問題　解答（未公開）

線形変換

- 線形変換は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，a，b，c，d は，任意の実数である．

- 拡大・縮小，回転，反転，せん断は，いずれも線形変換である．たとえば，b=c=0 ならば，拡大・縮小である．
- 複数の線形変換を組み合わせた変換も，線形変換である．

線形変換の組み合わせ

- ２つの線形変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を，

$$\boldsymbol{x}_2 = A_1 \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}_3 = A_2 \boldsymbol{x}_2$$

と表すことにする．

- いま，行列A_1による変換の後，行列A_2による変換を行ったものとすると，

$$\boldsymbol{x}_3 = A_2 \boldsymbol{x}_2 = A_2(A_1 \boldsymbol{x}_1) = (A_2 A_1)\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_1$$

となる．ここで，Aは，

結合法則より

$$A = A_2 A_1$$

と表される2×2行列であり，これも１つの線形変換である．

線形変換の組み合わせ（例）

- 拡大・縮小変換し，その後，回転変換した場合，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となり，これは，

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\theta & -b\sin\theta \\ a\sin\theta & b\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

という線形変換に等しい．

演習問題

- 問題3
  - 拡大・縮小変換（a=2，b=1）し，その後，回転変換（θ=π/2）することにより，座標(10,20)はどの座標に変換されるか，変換後の座標を示せ．

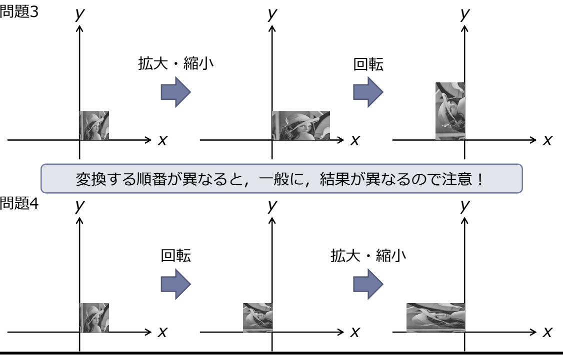
演習問題　解答（未公開）

演習問題

- 問題4
  - 回転変換（θ=π/2）し，その後，拡大・縮小変換（a=2，b=1）することにより，座標(10,20)はどの座標に変換されるか，変換後の座標を示せ．

演習問題　解答（未公開）

演習問題　補足

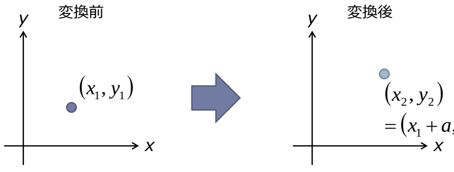


平行移動

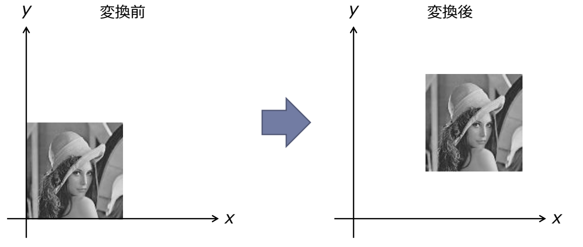
- 平行移動は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，aは，x方向の移動量であり，bは，y方向の移動量である．



平行移動（例）



アフィン変換

- アフィン変換は，線形変換と平行移動を組み合わせた変換であり，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

と表わされる．ここで，a，b，c，d，e，f は，任意の実数である．
- 拡大・縮小，回転，せん断，平行移動は，いずれもアフィン変換である．たとえば，$b=c=e=f=0$ ならば，拡大・縮小であり，$a=d=1$，$b=c=0$ ならば，平行移動である．
- 複数のアフィン変換を組み合わせた変換も，アフィン変換である．

アフィン変換の組み合わせ

- ２つのアフィン変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

を，

$$\boldsymbol{x}_2 = A_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{x}_3 = A_2 \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_2$$

と表すことにする．
- いま，２つのアフィン変換を連続して行ったものとすると，

$$\boldsymbol{x}_3 = A_2 \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_2 = A_2(A_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_1) + \boldsymbol{a}_2 = A_2 A_1 \boldsymbol{x}_1 + A_2 \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = A \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}$$

分配法則より

となる．ここで，Aと$\boldsymbol{a}$は，

$$A = A_2 A_1, \quad \boldsymbol{a} = A_2 \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

と表される2×2行列と2行の列ベクトルであり，２つのアフィン変換による処理は１つのアフィン変換による処理として表されることになる．

演習問題

- 問題5
  - 回転変換（θ=π/2）し，その後，平行移動（a=20，b=10）することにより，座標(10,20)はどの座標に変換されるか，変換後の座標を示せ．

演習問題　解答（未公開）

アフィン変換（同次座標による表現）

- アフィン変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

- アフィン変換（同次座標による表現）

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同次座標による表現を用いることにより，アフィン変換を，行列の掛け算という統一的な形式によって表すことができる．

アフィン変換（例）

- ２つの異なるアフィン変換を実施した場合

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + e_1 \\ c_1x_1 + d_1y_1 + f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_2c_1)x_1 + (a_2b_1 + b_2d_1)y_1 + a_2e_1 + b_2f_1 + e_2 \\ (a_1c_2 + c_1d_2)x_1 + (b_1c_2 + d_1d_2)y_1 + c_2e_1 + d_2f_1 + f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同次座標表現を用いたアフィン変換（例）

- ２つの異なるアフィン変換を実施した場合

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 & a_2e_1 + b_2f_1 + e_2 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 & c_2e_1 + d_2f_1 + f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_2c_1)x_1 + (a_2b_1 + b_2d_1)y_1 + a_2e_1 + b_2f_1 + e_2 \\ (a_1c_2 + c_1d_2)x_1 + (b_1c_2 + d_1d_2)y_1 + c_2e_1 + d_2f_1 + f_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

拡大・縮小，回転，せん断，反転，平行移動の同次座標表現

【拡大・縮小】

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【回転】

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【せん断（x軸方向）】

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【せん断（y軸方向）】

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【反転】（x軸に関する反転）

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【平行移動】

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

演習問題

- 問題6
  - 同次座標による表現を用いて，問題5に解答せよ．

演習問題　解答（未公開）