Neuronové sítě

Doc. RNDr. Iveta Mrázová, CSc.

Katedra teoretické informatiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy v Praze

Neuronové sítě

– Asociativní paměti –

Doc. RNDr. Iveta Mrázová, CSc.

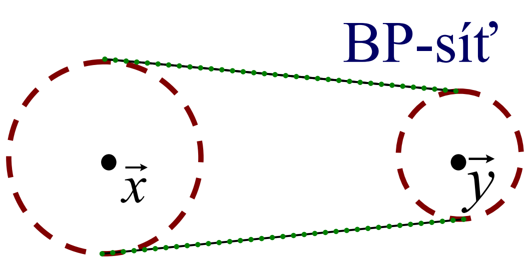
Katedra teoretické informatiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy v Praze

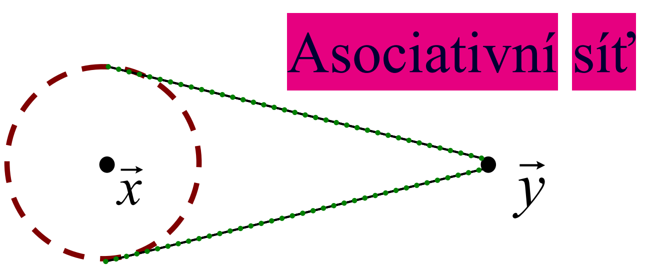
Asociativní sítě a asociativní paměti (1)

Cíl učení: asociace známého vstupního vzoru s daným výstupním vzorem

- Okolí známého vstupního vzoru $\vec{x}$ by se mělo také zobrazit na výstup $\vec{y}$ odpovídající $\vec{x}$

→ správný výstup pak lze přiřadit i „zašuměným" vzorům





Asociativní sítě a asociativní paměti (2)

- Asociativní paměti lze implementovat pomocí sítí se zpětnou vazbou (ale i bez ní)

  → nejjednodušší zpětná vazba:
  - výstup sítě se používá opakovaně jako její nový vstup, dokud síť nezkonverguje do stabilního stavu

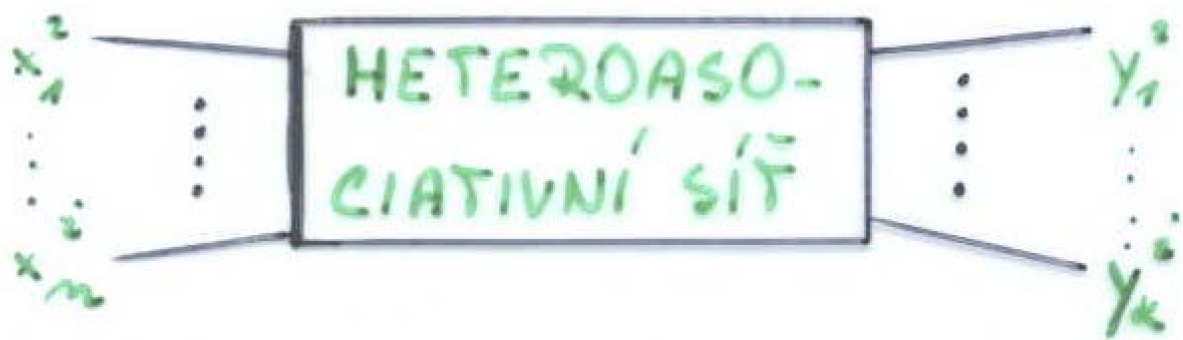
  × **ne všechny sítě zkonvergují po předložení nového vzoru do stabilního stavu**

  → **nutná dodatečná omezení na architekturu sítě**

Funkce asociativní paměti

- Rozpoznat předem naučené vstupní vzory i v případě, že jsou „mírně zašuměné“
- Odezva každého neuronu je dána výhradně informacemi procházejícími jeho vahami (Hebbovské učení)
- Tři typy asociativních sítí:
  - heteroasociativní, autoasociativní a sítě pro rozpoznávání vzorů

Heteroasociativní sítě

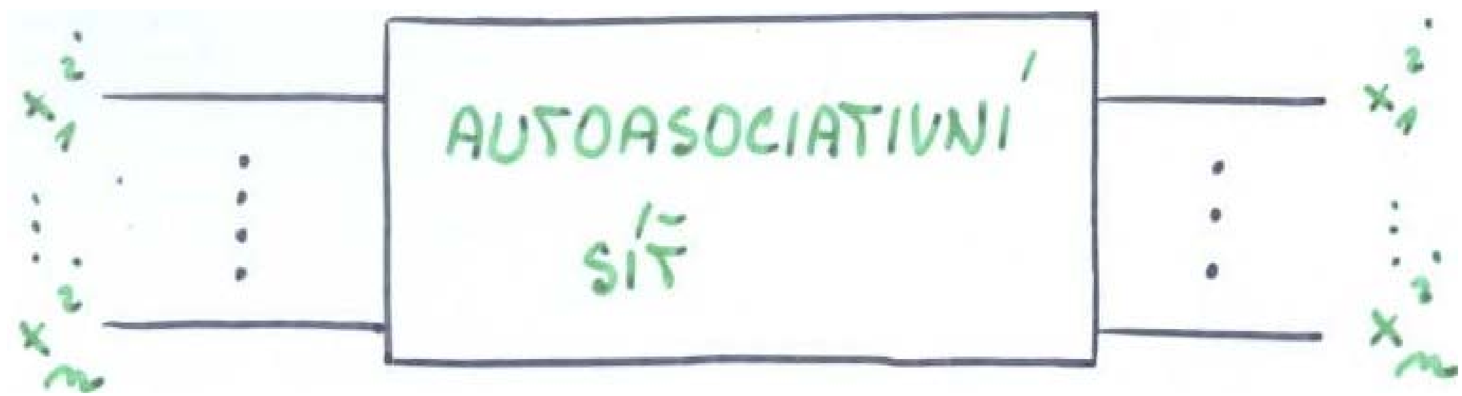


Zobrazují ***m*** vstupních vzorů $\vec{x}^{\,1}, \ldots, \vec{x}^{\,m}$ z ***n***-rozměrného prostoru na ***m*** výstupních vektorů $\vec{y}^{\,1}, \ldots, \vec{y}^{\,m}$ v ***k*** – rozměrném prostoru tak, že

$$\vec{x}^{\,i} \mapsto \vec{y}^{\,i}$$

Jestliže $\left\| \tilde{\vec{x}} - \vec{x}^{\,i} \right\|^2 < \varepsilon$, potom $\tilde{\vec{x}} \mapsto \vec{y}^{\,i}$ $(\varepsilon > 0)$.

Autoasociativní sítě



Podmnožina heteroasociativních sítí (každý vektor je zobrazen sám na sebe: $\vec{y}^{\,i} = \vec{x}^{\,i}$ pro $\boldsymbol{i = 1, \ldots, m}$)

funkcí autoasociativních sítí je „oprava zašuměných vzorů“

Sítě pro rozpoznávání vzorů

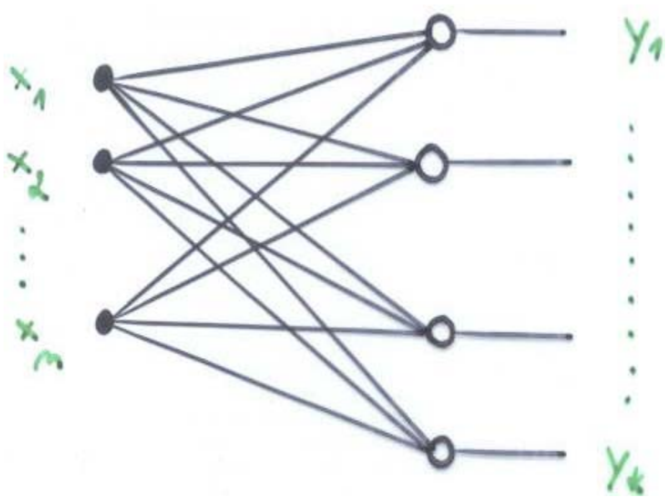
Speciální typ heteroasociativních sítí (každému vektoru $\vec{x}^{\,i}$ je přiřazena skalární hodnota $\boldsymbol{i}$)

Cílem je identifikace třídy vstupního vzoru

Struktura asociativní paměti

Asociativní paměť lze implementovat pomocí jedné vrstvy neuronů

Heteroasociativní síť bez zpětné vazby



Nechť: w_{ij} … váha mezi vstupem i a neuronem j

W …. $n \times k$ matice vah

→ vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dává excitační vektor $\vec{e} = \vec{x} \cdot W$

→ Potom se pro každý neuron spočítá hodnota přenosové funkce

- Pro identitu dostáváme lineární asociátor a výstupem $\vec{y}$ bude právě $\vec{x} \cdot W$

Struktura asociativní paměti (2)

Obecně: je třeba přiřadit $\boldsymbol{m}$ různým $\boldsymbol{n}$ – rozměrným vektorům $\vec{x}^{\,1}, \vec{x}^{\,2}, \ldots, \vec{x}^{\,m}$ $\boldsymbol{m}$ $\boldsymbol{k}$ – rozměrných vektorů $\vec{y}^{\,1}, \ldots, \vec{y}^{\,m}$

→ $\boldsymbol{X}$ …. matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ (řádky odpovídají jednotlivým vstupním vektorům)

$\boldsymbol{Y}$ …. matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$ (řádky odpovídají příslušným výstupním vektorům)

Struktura asociativní paměti (3)

→ **hledáme takovou matici vah** $\boldsymbol{W}$ **, aby** $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{W} = \boldsymbol{Y}$

(a v případě autoasociativní paměti $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}$)

Poznámka: pro $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$ je $\boldsymbol{X}$ čtvercová matice

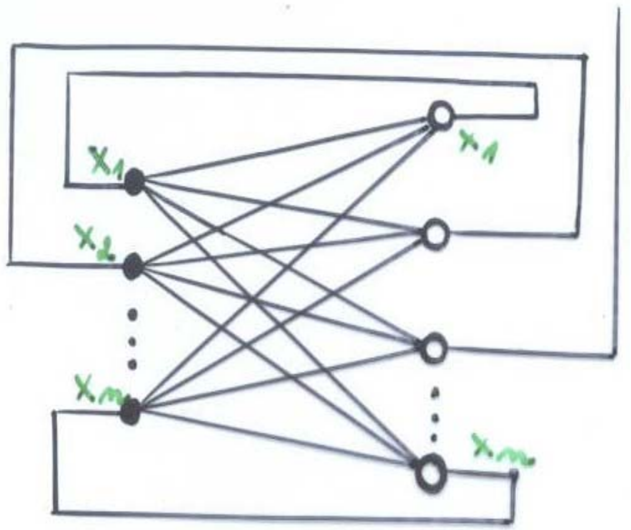
pokud existuje k ní inverzní matice, bude

řešením $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}^{-1} \cdot \boldsymbol{Y}$

Rekurentní asociativní síť

- Výstup sítě představuje její nový vstup

Autoasociativní síť se zpětnou vazbou



- **Předpoklad:** všechny neurony počítají svůj výstup současně

→ síť dostává v každém kroku na vstup vektor $\vec{x}(i)$ a dává nový výstup $\vec{x}(i+1)$

Rekurentní asociativní síť (2)

Otázka: **existuje pevný bod $\vec{\xi}$ takový, že**

$$\vec{\xi} \cdot W = \vec{\xi}$$

→ vektor $\vec{\xi}$ je vlastním vektorem matice $\boldsymbol{W}$ s vlastním číslem $\boldsymbol{1}$

→ síť se chová jako dynamický systém prvního řádu, protože každý nový stav $\vec{x}(i+1)$ je plně určen nejbližším předchůdcem

Vlastní automaty
(eigenvector automata)

Nechť: ***W*** … váhová matice autoasociativní sítě

jednotlivé neurony jsou lineární asociátory

→ hledáme pevné body dynamického systému

Poznámka: ne všechny matice vah vedou ke stabilnímu stavu

Příklad: rotace o 90° v rovině:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ cykly délky 4

Vlastní automaty (2)

→ Pro paměti jsou vhodnější čtvercové matice s úplnou množinou vlastních vektorů

$n \times n$ matice **W** může mít až **n** lineárně nezávislých vlastních vektorů a **n** vlastních čísel

→ vlastní vektory $\vec{x}^{\,1}, \ldots , \vec{x}^{\,n}$ pak splňují

$$\vec{x}^{\,i} \cdot W = \lambda_i \vec{x}^{\,i}$$

pro $i = 1, \ldots, n$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla W

Vlastní automaty (3)

- Každá váhová matice s plnou množinou vlastních vektorů definuje jistý typ „vlastního automatu“

→ Po předložení vstupního vektoru bude nalezen vlastní vektor s největším vlastním číslem (pokud takový existuje)

- Předpokládejme búno, že $\boldsymbol{\lambda_1}$ je vlastní číslo $\boldsymbol{W}$ takové, že $|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \forall \boldsymbol{i = 2, \ldots, n}$

Vlastní automaty (4)

- Nechť $\lambda_1 > 0$ a $\vec{a}_0$ je náhodně zvolený nenulový n-rozměrný vektor

→ $\vec{a}_0$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci n vlastních vektorů matice W:

$$\vec{a}_0 = \alpha_1 \vec{x}^1 + \alpha_2 \vec{x}^2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}^n$$

- **Předpoklad:** všechny konstanty α jsou nenulové

→ Po první iteraci s W dostáváme:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_0 \cdot W = \left(\alpha_1 \vec{x}^1 + \ldots + \alpha_n \vec{x}^n\right) \cdot W = \\ = \alpha_1 \lambda_1 \vec{x}^1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}^2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n \vec{x}^n$$

Vlastní automaty (5)

→ Po t iteracích dostaneme:

$$\vec{a}_t = \alpha_1 \lambda_1^t \vec{x}^1 + \alpha_2 \lambda_2^t \vec{x}^2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^t \vec{x}^n$$

→ Po dostatečně velkém počtu iterací bude dominovat největší vlastní číslo - λ_1

- → vektor $\vec{a}_t$ se pak může přiblížit libovolně blízko vlastnímu vektoru $\vec{x}^1$ (týká se směru, ne nutně délky)
- → v každé iteraci tak vektor $\vec{x}^1$ přitahuje libovolný jiný vektor $\vec{a}_0$ s nenulovým členem pro α_1

→ $\vec{x}^1$ je **atraktor**

Vlastní automaty (6)

Příklad:

Matice $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má ***2*** vlastní vektory ***(1 , 0)***

a ***(0 , 1)*** s vlastními čísly ***2*** a ***1***

Po t iteracích počátečního vzoru (x_1, x_2) ; $x_1 \neq 0$ dostaneme $(2^t x_1, x_2)$

→ Pro dostatečně velké t se přibliží libovolně blízko ***(1 , 0)*** => vektor ***(1 , 0)*** je atraktor

Asociativní učení

Cíl: použití asociativních sítí jako dynamických systémů, jejichž atraktory by odpovídaly těm vektorům, které chceme do paměti uložit

- **Při návrhu sítě chceme rozmístit ve vstupním prostoru co možná nejvíce atraktorů**
  - Každý z nich by měl mít přesně danou a omezenou oblast vlivu

× v případě vlastních automatů zahrnovala oblast vlivu jediného vektoru téměř celý vstupní prostor

Asociativní učení (2)

→ nelineární dynamické systémy

- Nelineární aktivace neuronů

  Skoková přenosová funkce:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- Bipolární kódování je vhodnější než binární

  (u bipolárních vektorů je větší pravděpodobnost vzájemné ortogonality)

Hebbovské učení

Předpoklad:

- 1-vrstvá síť s ***k*** neurony a skokovou přenosovou funkcí ***sgn***

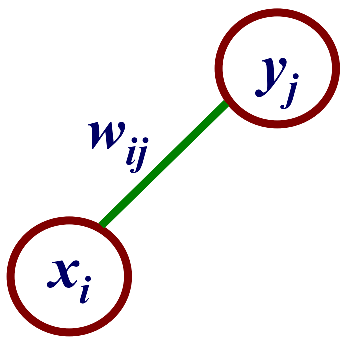
Cíl:

- nalézt odpovídající váhy pro zobrazení ***n*** – rozměrného vstupního vektoru $\vec{x}$ na ***k*** – rozměrný výstupní vektor $\vec{y}$

Idea: (Donald Hebb – 1949)

- Dva neurony, které jsou současně aktivní, by měly mít „vyšší stupeň vzájemné interakce" než neurony, jejichž aktivita je nekorelovaná – v takovém případě by měla být vzájemná interakce hodně malá nebo nulová

Hebbovské učení (2)



$$\Delta w_{ij} = \gamma\, x_i\, y_j$$

γ … parametr učení

W … váhová matice (na začátku učení nulová)

- Adaptační pravidlo se použije pro všechny váhy
- na vstupu je n – rozměrný vektor $\vec{x}^1$, na výstupu k – rozměrný vektor $\vec{y}^1$

  → **adaptovaná váhová matice W je korelační maticí pro tyto dva vektory**

$$W = [\, w_{ij} \,]_{n \times k} = [\, x_i^1\, y_j^1 \,]_{n \times k}$$

Hebbovské učení (3)

- Matice $\boldsymbol{W}$ zobrazí nenulový vektor $\vec{x}^1$ právě na vektor $\vec{y}^1$

$$\vec{x}^1 \cdot W = \left(y_1^1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 x_i^1 , y_2^1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 x_i^1 , \ldots , y_k^1 \sum_{i=1}^{n} x_i^1 x_i^1 \right) =$$

$$= \vec{y}^1 \left(\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^1 \right)$$

- Pro $\vec{x}^1 \neq 0$ platí, že $\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^1 > 0$ a výstup sítě je:

$$\operatorname{sgn} \left(\vec{x}^1 \cdot W \right) = \left(y_1^1 , \ldots , y_k^1 \right) = \vec{y}^1$$

- pro $-\vec{x}^1$ je výstup sítě:

$$\operatorname{sgn} \left(- \vec{x}^1 \cdot W \right) = - \operatorname{sgn} \left(\vec{x}^1 \cdot W \right) = - \vec{y}^1$$

$\vec{y}^1$

Hebbovské učení (4)

Obecně:

- Chceme-li přiřadit ***m n*** – rozměrným nenulovým vektorům $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m$ ***m k*** – rozměrných vektorů $\vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^m$, použijeme Hebbovské učení pro každou dvojici VSTUP/VÝSTUP
- Výsledná matice vah ***W*** bude mít tvar:

$$\boldsymbol{W = W^1 + W^2 + \ldots + W^m} \quad ,$$

kde každá matice $\boldsymbol{W^l}$ je $\boldsymbol{n \times k}$ korelační matice vektorů $\vec{x}^l$ a $\vec{y}^l$: $\boldsymbol{W^l = [\, x_i^l \, y_j^l \,]_{n \times k}}$

Hebbovské učení (5)

- Jestliže pak bude na vstupu sítě vektor $\vec{x}^p$, bude excitační vektor sítě roven:

$$\vec{x}^p \cdot W = \vec{x}^p \cdot \left(W^1 + W^2 + \ldots + W^m\right) = \vec{x}^p \cdot W^p + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{x}^p \cdot W^l =$$

$$= \vec{y}^p \cdot \left(\vec{x}^p \cdot \vec{x}^p\right) + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^l \cdot \left(\vec{x}^l \cdot \vec{x}^p\right)$$

- Excitační vektor tedy odpovídá $\vec{y}^p$ (vynásobenému kladnou konstantou) s perturbačním členem

$$\sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right) \quad ,$$

který se označuje jako **CROSSTALK**

Hebbovské učení (6)

- Síť dává na výstupu požadovaný vektor $\vec{y}^{\,p}$ v případě, že je crosstalk nulový

→ Pokud jsou vstupní vzory $\vec{x}^{\,1}, \vec{x}^{\,2}, \ldots, \vec{x}^{\,m}$ navzájem ortogonální

- Síť může dávat poměrně dobré výsledky i pro nenulový crosstalk
  - × crosstalk by měl být menší než $\vec{y}^{\,p} \cdot \left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)$

→ **Výstup sítě bude roven:**

$$\operatorname{sgn}\left(\vec{x}^{\,p} \cdot W\right) = \operatorname{sgn}\left(\vec{y}^{\,p} \cdot \left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right) + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)\right)$$

Hebbovské učení (7)

- Protože $\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}$ je kladná konstanta:

$$\operatorname{sgn}\left(\vec{x}^{\,p} \cdot W\right) = \operatorname{sgn}\left(\vec{y}^{\,p} + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \frac{\left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}{\left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}\right)$$

- Aby byl výstup sítě roven $\vec{y}^{\,p}$, musí platit

$$\vec{y}^{\,p} = \operatorname{sgn}\left(\vec{y}^{\,p} + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \frac{\left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}{\left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}\right)$$

- Tato podmínka bude splněna, pokud bude absolutní hodnota všech složek perturbačního členu $\sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \frac{\left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}{\left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)}$ menší než 1

Hebbovské učení (8)

→ Pro bipolární vektory to znamená, že skalární součin $\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}$ musí být menší než druhá mocnina délky $\vec{x}^{\,p}$

→ Pokud jsou náhodně zvoleným bipolárním vektorům přiřazeny (jiné) náhodně zvolené bipolární vektory, je pravděpodobnost, že budou navzájem ortogonální, poměrně vysoká (pokud jich ovšem nebylo zvoleno příliš mnoho)

  → V takovém případě bude crosstalk malý a Hebbovské učení povede k volbě vhodných vah pro asociativní síť

Geometrická interpretace Hebbovského učení

- Pro matice $\boldsymbol{W^i}$ ze vztahu $\boldsymbol{W = W^1 + W^2 + \ldots + W^m}$ v případě autoasociativních sítí platí: $W^i = \left(\vec{x}^i\right)^T \vec{x}^i$

$\rightarrow$ tedy pro $W^1 = \left(\vec{x}^1\right)^T \vec{x}^1$ bude vstupní vektor $\vec{z}$ zobrazen do lineárního podprostoru $\boldsymbol{L_1}$ určeného vektorem $\vec{x}^1$, protože

$$\vec{z} \cdot W^1 = \vec{z}\left(\vec{x}^1\right)^T \vec{x}^1 = \left(\vec{z}\left(\vec{x}^1\right)^T\right)\vec{x}^1 = c_1 \, \vec{x}^1$$

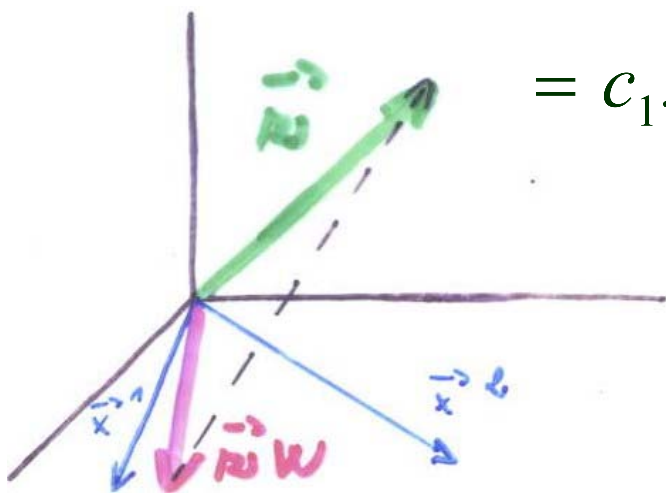
Obecně neortogonální projekce vektoru $\vec{z}$ do $\boldsymbol{L_1}$ ($\boldsymbol{c_1}$ je konstanta)

$\rightarrow$ podobně i pro další matice vah $\boldsymbol{W^2, \ldots, W^m}$

Geometrická interpretace Hebbovského učení (2)

- Matice $W = \sum_{i=0}^{m} W^{i}$ zobrazí vektor $\vec{z}$ do lineárního podprostoru určeného vektory $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m$, protože $\vec{z} \cdot W = \vec{z} \cdot W^1 + \vec{z} \cdot W^2 + \ldots + \vec{z} \cdot W^m =$

$$= c_1 \vec{x}^1 + c_2 \vec{x}^2 + \ldots + c_m \vec{x}^m$$



(obecně neortogonální projekce)

Analýza chování asociativních sítí

- Identifikace atraktorů (pevných bodů systému)
- Míra vlivu jednotlivých atraktorů
  - **Hammingovská vzdálenost**

    ~ počet různých složek dvou bipolárních vektorů
  - Příklad:

    $$\begin{array}{cccc} 1 & \underline{-1} & \underline{1} & 1 \\ 1 & \underline{1} & \underline{-1} & 1 \end{array} \rightarrow \mathbf{2}$$
  - S rostoucím počtem ukládaných vzorů se „sféry vlivu“ jednotlivých atraktorů zmenšují → **nepravé stabilní stavy**
    - Velký crosstalk
    - Inverzní vzory k uloženým:

$$\operatorname{sgn}\left(-\vec{x}\cdot W\right) = -\operatorname{sgn}\left(\vec{x}\cdot W\right) = -\vec{x}$$

Analýza chování asociativních sítí (2)

- Rekurentní síť (se zpětnou vazbou)
  - Lepší konvergence oproti asociativní paměti bez zpětné vazby
  - Větší „sféry vlivu“ jednotlivých atraktorů
    - × nesmí být uloženo příliš mnoho vzorů

    → PROBLÉM: **Kapacita matice vah**
  - Porovnání velikosti sfér vlivu pomocí indexu

$$I = \sum_{h=0}^{n/2} h \; p_h$$

$\boldsymbol{p_h}$ … procento vektorů s Hammingovskou vzdáleností $\boldsymbol{h}$ od uloženého vzoru, které k němu zkonvergovaly

Problém kapacity sítě

- „Sféry vlivu“ uložených vzorů se zmenšují s každým novým ukládaným vzorem
- Pokud bude crosstalk příliš velký, může být dříve uložený vzor i „zapomenut“

× pravděpodobnost výskytu takových problémů by měla být co možná nejmenší

Problém kapacity sítě (2)

Odhad počtu vzorů $\boldsymbol{m}$, které lze bezpečně uložit do autoasociativní paměti s váhovou maticí $\boldsymbol{W}\ (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n})$

Maximální kapacita sítě: $\boldsymbol{m \sim 0.18\, n}$

- Počet uložených vzorů by měl být menší než $0.18\, n$, kde $\boldsymbol{n}$ je dimenze vstupního vektoru
- Pokud jsou ale vzory korelované, může dojít k problémům i pro $\boldsymbol{m < 0.18\, n}$

Odvození kapacity sítě – idea (1)

- Pro $W^i = \frac{1}{n}\left(\vec{x}^{\,i}\right)^T \vec{x}^{\,i}$
- Crosstalk pro ***n*** – rozměrné bipolární vektory a ***m*** vzorů autoasociativní sítě:

$$\frac{1}{n}\sum_{l \neq p}^{m} \vec{x}^{\,l}\left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)$$

Pokud je tento člen větší než ***1*** a má opačné znaménko u příslušné složky, může „překlopit" odpovídající bit již uloženého vzoru

Odvození kapacity sítě – idea (2)

- Předpokládejme, že uložené vzory byly zvoleny náhodně:
  - Crosstalk pro bit ***i*** vstupního vektoru je určen jako

$$\frac{1}{n} \sum_{l \neq p}^{m} x_i^l \left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p} \right) \qquad (*)$$

  - Protože byly složky všech vzorů zvoleny náhodně, dostáváme řádově $\boldsymbol{m \cdot n}$ náhodných hodnot

    očekávaná hodnota tohoto součtu je $\boldsymbol{0}$

Odvození kapacity sítě – idea (3)

- Součet ***(*)*** má binomické rozdělení a pro velké hodnoty $\boldsymbol{m \cdot n}$ ho lze aproximovat normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou $\sigma = \sqrt{m/n}$
- Pravděpodobnost chyby P , že součet ***(*)*** bude větší než ***1*** (anebo menší než ***-1***), je dána dle

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{1}^{\infty} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx$$

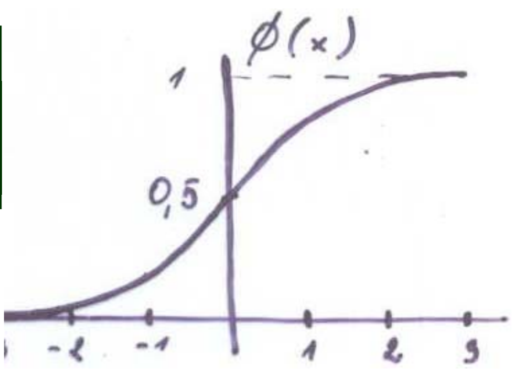
Odvození kapacity sítě – idea (4)

- Tedy: $P\left\{\left|(*)\right| > 1\right\} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{m/n}}\right)\right]$

kde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

→ pro horní mez chyby na ***1*** bitu ***0.01*** dostaneme:

$$0.01 = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{m/n}}\right)\right]$$



→ ***m ~ 0.18 n***

Asociativní paměti – pseudoinverzní matice (1)

Hebbovské učení dává dobré výsledky, pokud jsou uložené vzory téměř ortogonální

- ~ pokud bylo $\boldsymbol{m}$ bipolárních vektorů zvoleno náhodně z $\boldsymbol{n}$ – rozměrného prostoru, $\boldsymbol{n}$ je „dostatečně velké“ a $\boldsymbol{m}$ je „dostatečně menší“ než $\boldsymbol{n}$

× v reálných aplikacích jsou vzory téměř vždy korelované a perturbační člen ve výrazu

$$\vec{x}^{\,p} \cdot W = \vec{y}^{\,p} \cdot \left(\vec{x}^{\,p} \cdot \vec{x}^{\,p}\right) + \sum_{l \neq p}^{m} \vec{y}^{\,l} \cdot \left(\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}\right)$$

může ovlivnit kvalitu rozpoznávání, protože skalární součiny $\vec{x}^{\,l} \cdot \vec{x}^{\,p}$ nejsou pro $\boldsymbol{l \neq p}$ dostatečně malé

Asociativní paměti – pseudoinverzní matice (2)

→ vzájemná korelace ukládaných vzorů vede ke snížení kapacity asociativní paměti

~ počet vzorů, které lze uložit a rozpoznat

ukládané vzory pak nepokrývají rovnoměrně celý příznakový prostor, ale soustředí se do menší oblasti

→ je třeba hledat alternativní metody učení schopné minimalizovat perturbaci mezi ukládanými vzory

→ použití pseudoinverzní matice namísto korelační

Asociativní paměti – pseudoinverzní matice (3)

Definice:

Pseudoinverzní maticí k matici $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ reálných čísel je matice reálných čísel $\widetilde{X}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $X \widetilde{X} X = X$,
2. $\widetilde{X} X \widetilde{X} = \widetilde{X}$,
3. $\widetilde{X} X$ a $X \widetilde{X}$ jsou symetrické

Pseudoinverzní matice vždy existuje a je jednoznačně určena.

Pseudoinverzní matice - vlastnosti

Nechť $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m$ jsou $\boldsymbol{n}$ – rozměrné vektory, kterým má být přiřazeno $\boldsymbol{m}$ $\boldsymbol{k}$ – rozměrných vektorů $\vec{y}^{\,1}, \ldots , \vec{y}^{\,m}$

→ maticový zápis:

$\boldsymbol{X}$ …. Matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$

řádky matice tvoří vektory $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m$,

$\boldsymbol{Y}$ …. Matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$

řádky matice tvoří vektory $\vec{y}^{\,1}, \ldots , \vec{y}^{\,m}$

→ **Hledáme matici vah $\boldsymbol{W}$;** $\boldsymbol{XW = Y}$

Pseudoinverzní matice – vlastnosti (2)

Protože obecně $\boldsymbol{m \neq n}$ a vektory $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^m$ nemusí být navzájem lineárně nezávislé, nemusí existovat k matici $\boldsymbol{X}$ matice inverzní

→ hledáme matici, která by minimalizovala $\|XW - Y\|^2$

(~ součet druhých mocnin jednotlivých prvků)

minimalizace pomocí $W = \widetilde{X}Y$

$\widetilde{X}$… Pseudoinverzní matice k $\boldsymbol{X}$

(~ nejlepší aproximace inverzní matice k $\boldsymbol{X}$

pokud $\boldsymbol{X^{-1}}$ existuje, bude navíc $\|X\widetilde{X} - I\|^2$)

Pseudoinverzní matice – vlastnosti (3)

Věta:

Nechť $\boldsymbol{X}$ je matice reálných čísel $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{Y}$ je matice reálných čísel $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$.

Matice $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}$ $W = \tilde{X} Y$ minimalizuje $\left\| XW - Y \right\|^2$.

(Zároveň $\tilde{X}$ minimalizuje $\left\| X\tilde{X} - I \right\|^2$.)

Důkaz:

Nechť $\boldsymbol{E} = \left\| XW - Y \right\|^2$

stopa matice

$\rightarrow$ $\boldsymbol{E}$ lze vyjádřit jako $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{tr\,(\,S\,)}$, kde

$$\boldsymbol{S = (\,XW - Y\,)^T\,(XW - Y\,)}$$

($\boldsymbol{E}$ ~ součet prvků na diagonále $\boldsymbol{S}$)

Pseudoinverzní matice – vlastnosti (4)

Důkaz (pokračování):

→ ***S*** lze vyjádřit jako

$$S = \left(\tilde{X}Y - W\right)^T X^T X \left(\tilde{X}Y - W\right) + Y^T\left(I - X\tilde{X}\right)Y$$

(Protože:

$$S = \left(\tilde{X}Y - W\right)^T \left(X^T X\tilde{X}Y - X^T XW\right) + Y^T\left(I - X\tilde{X}\right)Y$$

Matice $X\tilde{X}$ je symetrická (def.), a tedy:

$$S = \left(\tilde{X}Y - W\right)^T \left(\left(\underbrace{X\tilde{X}X}_{= X \text{ (def.)}}\right)^T Y - X^T XW\right) + Y^T\left(I - X\tilde{X}\right)Y$$

Pseudoinverzní matice – vlastnosti (5)

<u>Důkaz (pokračování):</u>

(Proto: $S = \left(\widetilde{X}Y - W\right)^T \left(X^T Y - X^T X W\right) + Y^T \left(I - X\widetilde{X}\right) Y =$

$= \left(\widetilde{X}Y - W\right)^T X^T \left(Y - XW\right) + Y^T \left(I - X\widetilde{X}\right) Y =$

$= \left(X\widetilde{X}Y - XW\right)^T \left(Y - XW\right) + Y^T \left(I - X\widetilde{X}\right) Y =$

$= \left(-XW\right)^T \left(Y - XW\right) + Y^T X\widetilde{X}\left(Y - XW\right) + Y^T \left(I - X\widetilde{X}\right) Y =$

$= \left(-XW\right)^T \left(Y - XW\right) + Y^T \left(-XW\right) + Y^T Y =$

$= \left(Y - XW\right)^T \left(Y - XW\right)$)

→ E lze tedy vyjádřit jako

$$E = tr\left(\left(\widetilde{X}Y - W\right)^T X^T X \left(\widetilde{X}Y - W\right)\right) + \underbrace{tr\left(Y^T \left(I - X\widetilde{X}\right) Y\right)}_{= konst.}$$

→ ***min E*** pro $W = \widetilde{X}Y$ ***QED***

Pseudoinverzní matice - použití

Motivace a použití:

- Ne ke všem maticím existuje matice inverzní
- Alternativou je použití pseudoinverzní matice
  - Minimalizace střední kvadratické odchylky (např. vrstevnaté neuronové sítě)
  - Trénovací množina: $\left\{\left(\vec{x}_p, \vec{d}_p\right);\ p = 1, \ldots, P\right\}$
    - $\vec{x}_p$.... Vstupní vzor (***n*** – rozměrný)
    - $\vec{d}_p$.... Požadovaný výstup (***m*** – rozměrný)
    - $\vec{y}_p$.... Skutečný výstup (***m*** – rozměrný)

Pseudoinverzní matice – použití (2)

- Odchylka: $E = \sum_{p=1}^{P} E_p = \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{m} \left(d_{j,p} - y_{j,p}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \vec{y}_p : \qquad y_{j,p} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_{i,p}$

- Minimalizace odchylky ***E*** vzhledem k vahám $\rightarrow$ parciální derivace ***E*** podle vah by měly být nulové:

$$\partial E \big/ \partial w_{ij} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left(\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{m} \left(d_{j,p} - \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_{i,p} \right)^2 \right) =$$

$$= -\,2 \sum_{p=1}^{P} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{j,p} - w_{ij} x_{i,p} \right) x_{i,p} = 0$$

Pseudoinverzní matice – použití (3)

- Maticový zápis: $\boldsymbol{W X X^T} = \boldsymbol{D X^T}$
  - $\boldsymbol{W}$ …. Matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ se složkami $\boldsymbol{w_{ij}}$
  - $\boldsymbol{X}$ …. Matice $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{P}$ se složkami $\boldsymbol{x_{i,p}}$
  - $\boldsymbol{D}$ …. Matice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{P}$ se složkami $\boldsymbol{d_{j,p}}$

× k matici $\boldsymbol{XX^T}$ obecně nemusí existovat inverzní matice

→ nemusí být možné vyřešit rovnici přímo (a najít matici vah $\boldsymbol{W}$ v případě, že $\boldsymbol{XX^T}$ nemá $\boldsymbol{m}$ lineárně nezávislých řádků)

Pseudoinverzní matice – použití (4)

- Řešení může být víc $\rightarrow$ dodatečná podmínka na omezení velikosti vah:

$$E = \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2 \quad ; \quad \lambda > 0, \lambda = konst \ .$$

- Minimalizace pomocí parciálních derivací

$$\boldsymbol{W}\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T + \lambda \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T$$

($\lambda > 0$ k matici $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T + \lambda \boldsymbol{I}$ existuje matice inverzní)

$$\boldsymbol{W}\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T + \lambda \boldsymbol{I})\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T + \lambda \boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T (\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T + \lambda \boldsymbol{I})^{-1}$$

Pseudoinverzní matice – použití (5)

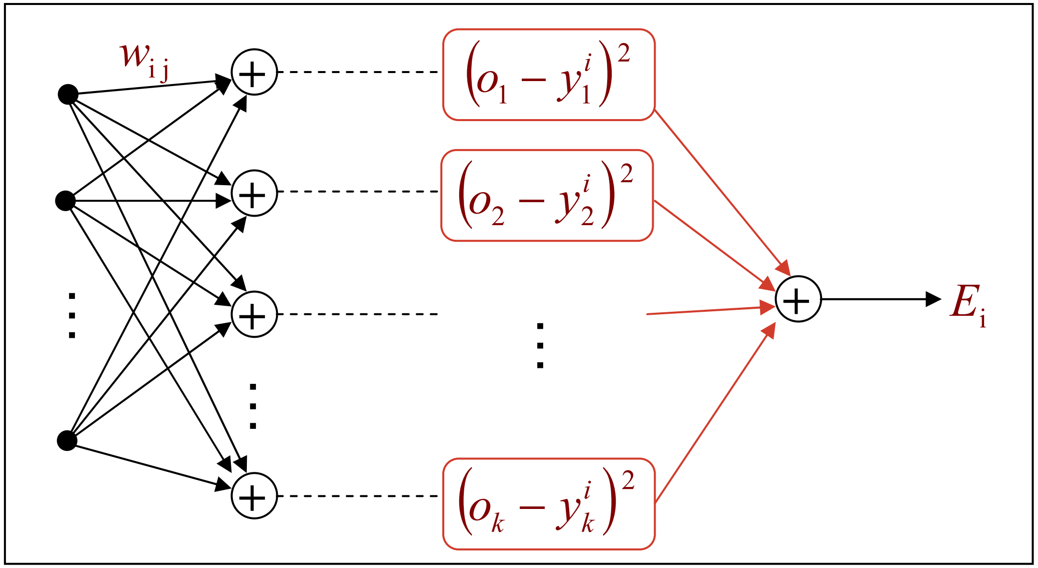
- Limitně pro $\lambda \to 0$:

$$W = \underbrace{\lim}_{\lambda \to 0} \left\lfloor DX^{T}\left(XX^{T} + \lambda I\right)^{-1} \right\rfloor = D\tilde{X}$$

  - $\tilde{X}$…. Pseudoinverzní matice k matici $\boldsymbol{X}$
  - Pokud existuje řešení více, bude mít $\tilde{X}$ nejmenší hodnoty $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^{2}$
  - Pokud existuje k X inverzní matice, bude $\tilde{X} = X^{-1}$

Výpočet pseudoinverzní matice

- Aproximace pomocí vrstevnatých neuronových sítí typu zpětného šíření
- Vrstevnatá neuronová síť k nalezení vah asociativní sítě



o – výstup sítě

y – požadovaná asociace

Výpočet pseudoinverzní matice (2)

- Cíl učení: Nalézt takovou matici vah **W** se složkami $\mathbf{w}_{ij}$, která by nejlépe zobrazila vektory $\vec{\mathbf{x}}^{\,1}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{\,m}$ na vektory $\vec{\mathbf{y}}^{\,1}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{\,m}$
- Pro *i*-tý vstupní vektor se porovná výstup síte s vektorem $\vec{\mathbf{y}}^{\,i}$ a vypočítá se E_i
- Celková kvadratická odchylka $E = \sum_{i=1}^{m} E_i$ pak odpovídá $\left\| \mathbf{XW} - \mathbf{Y} \right\|^2$
- Algoritmus zpětného šíření pak najde matici **W**, která by měla minimalizovat $\left\| \mathbf{XW} - \mathbf{Y} \right\|^2$