3

Kód studenta 22

1 LA1 – Vlastní čísla (3 body)

1. Buď

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $\lambda = 7$ je vlastním číslem matice A. Dále rozhodněte, zda $x = (1,2,1)^T$ je vlastním vektorem matice A.

2. Buď V množina všech reálných matic 3×3, pro které je 0 vlastní číslo a přísluší mu vlastní vektor $y = (1,2,3)^T$. Ukažte, že V je vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

(1) ~~A~~ ~~Ax~~ x je vl. vektor $\iff$ $Ax = \lambda' x$ pro nějaké λ'

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} = 4x \Rightarrow x \text{ je vl. vektor.}$$ V

Vlastní čísla = kořeny char. polynomu, ~~ty nemění elem. úpravy.~~ čísla, viz oprava na druhé straně

~~Tj. následující matice mají stejná vl. čísla, pokud neudělám chybu ve výpočtu:~~

$$\cancel{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}}.$$ ~~Poslední matice je horní trojúhelníková, tj. má vl. čísla na diagonále a 7 tam není.~~

(2) (Každá matice jednoznačně odpovídá lin. zobrazení) Tj. ~~Každé~~ víme $A \in V$, ~~tak platí, že $Ay = 0$.~~ Máme $A \in V \iff Ay = 0$.

$A \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha A)y = \alpha(Ay) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha A \in V$

$A, B \in V \rightarrow (A+B)y = Ay + By = 0 \Rightarrow A + B \in V$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ V je vekt. prostor.

Každé lin. zobrazení je ~~A~~ jednoznačně určené obrazy libovolné báze, tj. například $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (1,2,3)^T$.

→

obsahuje neutrální prvek?

(1) opravená: Vl. čísla jsou kořeny char. polynomu $\det(A - \lambda I_n)$. Tedy 7 je vl. číslo A právě když $\det(A - 7I_n) = 0$, neboli ~~když~~ právě když matice $B := A - 7I_n$ je singulární.

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$ ~~Up~~ Gaußova eliminace zachovává singularitu:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & -29 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & 19-29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix},$$

což je matice plného ranku 3, tedy nesingulární, a tedy 7 není vl. číslo A. ✓

---

(2) pokrač. Bez újmy na obecnosti (respektive bez změny dimenze V) můžeme změnit souřadný systém tak, aby původní bázové vektory ~~(1,0,0)~~, ~~(1,0)~~ $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(1,2,3)^T$ přešly na $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$ a $e_3 = (0,0,1)^T$. Dimenze je rovna velikosti libovolné báze.

~~Ukážeme, že lineární zobrazení $f_{i,j}$: $f(x_1, x_2, x_3) = x_i e_j$; $i \in \{1,2\}$; $j \in \{1,2,3\}$ tvoří takovou bázi (připomínám, že po změně souř. chceme, aby obraz e_3 byl nulový).~~

Pokud chci $Ae_3 = 0$, tak to říká, že třetí sloupec A je nulový. Naopak ~~Aen~~ pokud je třetí sloupec A nulový, tak jistě $Ae_3 = 0$. V je tedy po transformaci souřadnic tvořena maticemi s nulovým třetím sloupcem a následující množina velikosti **6** ~~M~~ zřejmě tvoří bázi V (ortogonální):

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}$$

Tedy $\dim(V) = 6$

3 body

Kód studenta 22

2 LA2 – Pozitivní definitnost (3 body)

Definujte pojem pozitivní definitnosti matice a formulujte alespoň jedno ekvivalentní kritérium pro testování pozitivní definitnosti. Pomocí tohoto kritéria rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

není-li sym., rezneme $\frac{1}{2}(A+A^T)$, která se chová „stejně" čtvercová

Všechny matice budou tedy reálné, ať máme uspořádání.

- ~~MAT~~ (Symetrická) matice A je pozitivně definitní, pokud pro všechny nenulové vektory v platí $v^T A v > 0$

- Ekvivalentní je symetrická čtvercová matice A p.d., ~~pokud~~ právě když má všechna (reálná) vlastní čísla kladná (reálná). ~~Jako v úloze 1 si všimneme, že elem. úpravy zachovávají vl. čísla:~~

LŽÚ

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

~~Tak~~ Výsledná matice je trojúhelníková, tj.

- Ještě jinak ekvivalentní je symetrická čtvercová matice A p.d. pokud determinanty všech hlavních podmatic* (hlavních) jsou kladné.

- Škrtnutá eliminace se nakonec hodí, používal jsem jen přičtení násobku řádku k jinému, tj. determinant ~~B~~ B i všech jejich hl. podmatic je stejný jako pro

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta je Δ, determinanty jsou tedy součiny příslušných diag. prvků, které jsou skutečně kladné.

$\Leftarrow$ $\boxed{B \text{ je p.d.}}$

*) Hlavní podmatice je matice tvořená průnikem prvních k řádků a sloupců. To skutečně stačí: Determinant je součin vl. čísel. Symetrické matice mají spektrální dek.

$A = Q \Lambda Q^T$. $\det(Q \Lambda Q^T) = \det(Q)\det(\Lambda)\det(Q^{-1}) = \det(\Lambda)$.

~~Λ ... To se dá navíc z A dostat úpravami,~~

Tedy $\det(A) = \det(\Lambda)$. To navíc platí i pro hlavní podmatice A a Λ, jelikož spektrální dekompozice ~~neprohazuje řádky~~ nepermutuje.

No ale Λ je diagonální s vlastními čísly na diagonále. Kdyby některé z nich bylo nekladné, tak determinant hlavní podmatice končící na tomto místě by byl nekladný.

(jestli je tohle špatně (ale i dobré), nemusíte to hodnotit. :) Jen jsem si nebyl jistý, tak jsem si to radši zdůvodnil.

Kód studenta 22

3 MA1 – Limita posloupnosti (3 body)

3

Definujte vlastní limitu posloupnosti.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Rozhodněte zda platí, že pokud $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- ~~Plati~~ Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má ~~vlastn~~ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\ |a_n - L| < \varepsilon$.
- Tvrzení neplatí, vezměme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = -\frac{1}{n}$. Potom $a_n - b_n = \frac{2}{n}$ ~~→~~ $\to 0$, jak je vyžadováno. Přitom ale $\forall n$ platí $\frac{a_n}{b_n} = -1$, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$.

Kód studenta 22

3 body

4 MA2 – Metrický prostor (3 body)

Dokažte, že (M, d) je metrický prostor pokud M je neprázdná množina, f je funkce z M do kladných reálných čísel a d je definována jako

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max(f(x), f(y)) & x \neq y. \end{cases}$$

Potřebujeme ověřit: (jistě $d: M^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$)

(1) $d(x,y) \geq 0$ s rovností právě pro $x = y$

– to platí, jelikož $f(x)$ je vždy > 0

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

– jistě platí pro $x = y$, pro $x \neq y$ plyne ze symetrie funkce $\max(x,y)$

(3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

– pokud $x = y$, $x = z$ nebo $y = z$, tak triviálně platí

– jinak dosadíme

$$d(x,y) + d(y,z) = \underbrace{\max(f(x), f(y))}_{\geq f(x)} + \underbrace{\max(f(y), f(z))}_{\geq f(z)} \geq f(x) + f(z) \geq$$

$$\geq \underbrace{\max(f(x), f(z))}_{= d(x,z)}, \text{ jelikož } f \text{ je kladná.}$$

√

3 body

Kód studenta 22

5 MA3 – Tečná rovina (3 body)

Najděte bod, kde je tečná rovina funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$ vodorovná. Jaka je rovnice této tečné roviny ?

Předpokládám, že vodorovná znamená tvaru $\{(x, y, c) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ pro pevné c. Z vlastností totálního diferenciálu a toho, že t.d. je vlastně skalární součin s gradientem máme, že tečná rovina v bodě x_0, y_0 je tvaru

$$\{(x, y, f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Tedy hledáme bod, kde $\nabla f = 0$ ✓ Ano, to je správná úvaha

$$\nabla f = (2x + 2y - 6,\ 2x + 4y - 8) = 0,$$

↑ to je definovaný na celém $\mathbb{R}^2$

čili
$$2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 - y$$
$$2x + 4y - 8 = 0$$

dosadí

$$\Downarrow$$

$$6 - 2y + 4y - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1 \Rightarrow x = 2}$$

Je to tedy bod $(2, 1)$, param. rovnici jsem napsal, obyč. rovnice je

$$z = f(2, 1) + \langle (0, 0); (x, y) \rangle = 4 + 4 + 2 - 12 - 8 = -10$$

Vaše řešení je jedno z mála, které je správné nejen numericky, ale i logicky. Zasloužil(a) byste si body navíc!

3 BODY

Kód studenta 22

6 Nezávislé jevy (3 body)

1. Co znamená, že dva náhodné jevy jsou nezávislé ? Definujte.
2. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Zkonstruujme náhodný graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že pro každou dvojici vrcholů i a j takových, že $1 \leq i < j \leq n$, si hodíme férovou mincí (na níž padne hlava s pravděpodobností přesně $1/2$) a padne-li na ní hlava, přidáme do G hranu ij. Nechť J_i je jev, že vrchol i má stupeň přesně 1. Rozhodněte, pro která n jsou jevy J_1 a J_2 nezávislé a odpověď zdůvodněte.

1) ~~Jevy~~ Pro prav. prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jsou jevy $A, B \in \mathcal{F}$ nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ✓

(Alternativně $P(A|B) = P(A)$ a $P(B|A) = P(B)$.)

POKUD OVŠEM $P(B) \neq 0$ RESP. $P(A) \neq 0$

2) Spočítáme pravděpodobnost. ~~$P[J_1]$~~

$$P[J_i] = (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{2^{n-1}}$$ ✓ ← pro i-tý vrchol házíme (nezávisle) $(n-1)$-krát a chceme, aby v právě jednom hodu padla hlava.

~~$P[J_1 \cap J_2]$~~

$$P[J_1 \cap J_2] = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{1}{2}\left((n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$ ✓

nezávislé ~~jevy~~ hody

$\boxed{1 \sim 2 \text{ je hrana}}$ $(\forall i \geq 3:$ $1 \sim i$ není hrana & $\forall i$ $2 \sim i$ není hrana$)$

$1 \nsim 2$

vrcholy 1 i 2 mají právě jednoho souseda v $\{3, \ldots, n\}$.

Upravíme $P[J_1 \cap J_2] = 2^{-(2n-3)} + (n-2)^2 \cdot 2^{-(2n-3)} =$

$$= \frac{n^2 - 4n + 5}{2^{2n-3}}$$ ✓

Chceme $P[J_1] \cdot P[J_2] = P[J_1 \cap J_2]$, tedy $\frac{(n-1)^2}{2^{2n-2}} = \frac{(n-2)^2 + 1}{2^{2n-3}}$, tedy

~~$2(n-1)^2 = (n-2)^2 + 1 \iff 2n^2 - 4n + 2 = n^2 - 4n + 5 \iff n^2 = 3 \Rightarrow$~~ pro žádné n, nebo jsem udělal početní chybu

Oprava: $(n-1)^2 = 2((n-2)^2 + 1) \iff n^2 - 2n + 1 = 2n^2 - 8n + 10$

$\iff n^2 - 6n + 9 = 0 \iff (n-3)^2 = 0 \iff \boxed{n = 3}$ Jsou nez. právě pro $n = 3$ ✓

3 není čtverec

Fakt udělal

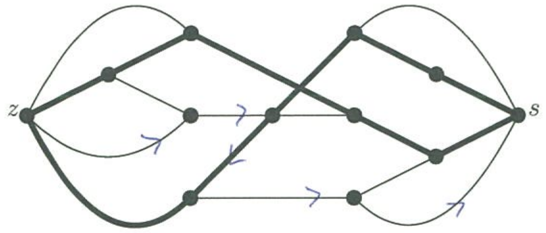
3

Kód studenta 22

7 Grafy (3 body)

Z grafu G na obrázku vytvoříme síť tak, že všechny hrany orientujeme zleva doprava a přidělíme jim kapacitu 1.

Tok mezi z a s je vyznačen silnými hranami a využívá plnou kapacitu vyznačených hran. Kapacity ostatních hran nejsou využity vůbec.

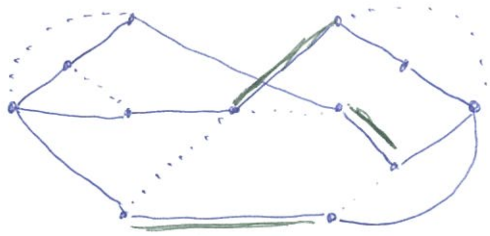


OK Rozhodněte, zdali jde o maximální tok. Pokud vyznačený tok není maximální, nějaký maximální tok nalezněte a zdůvodněte jeho maximalitu.

OK Jaké jsou důsledky hodnoty maximálního toku pro hranovou souvislost grafu ?

|Maximální tok mezi z a s| == |minimální (hranový) řez mezi z a s|

Tento tok maximální není, v obrázku jsem šipkami vyznačil zlepšující cestu. Po jejím vyxorování dostaneme.



To už maximální tok je, zeleně zvýrazním hranový řez velikosti 3.

|Max. tok $s \to t$| = # hranově disjunktních cest mezi z a s ~~d~~ $s \to t$

Z Mengerovy věty je ~~hranově souvis~~ graf ~~k~~ hranově k-souvislý $\iff$ mezi každými dvěma vrcholy existuje k hranově disjunktních cest.

Tedy hranová ~~sou~~ souvislost $G = \min_{u \neq v \in V(G)}$ max-flow$(u \to v)$

OK

3

Kód studenta 22

8 Kombinatorika (3 body)

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí $f(n)$ počet 15-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, a nechť $g(n)$ značí počet zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové.

Vyjádřete $f(n)$ a $g(n)$.

Rozhodněte, která z následujících možností platí:

- $\exists n_0 : \forall n > n_o : f(n) > g(n)$
- $\exists n_0 : \forall n > n_o : g(n) > f(n)$
- žádné n_0 vyhovující předchozím dvěma podmínkám neexistuje.

$f(n) = \binom{n}{15} = \frac{n!}{15!(n-15)!}$ ← pro $n \geq 15$, jinak $= 0$

(nevím, co znamená vyjádřit, já kombin. číslo jako #podmn. n-prvkové množiny velikosti k definuji)

$g(n) = 3^n$: Pro každý z n ~~prvků~~ prvků můžeme jeho obraz vybrat nezávisle 3 způsoby.

Platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ ~~z~~ (třeba z bin. věty).

Tedy ~~pro $n \geq 15$~~ máme speciálně $\binom{n}{15} \leq 2^n$ (to platí i pro $n < 15$). A jistě $2^n < 3^n$ $\forall n > 0$, ~~třeba~~ ~~protože log je rostoucí fce, ... a tedy ...~~ ~~to dostávám dokazovat ...~~ (protože $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 1$ $\forall n > 0$)

$\boxed{\text{Tedy } g(n) > f(n) \text{ dokonce } \forall n \geq 0.}$ (pro $n=0$ je jedno zobrazení a 0 podmn.)

Jiná možnost je uvědomit si $f(n) \in \Theta(n^{15})$, což je $o(3^n)$. [ALE TA DRUHÁ MOŽNOST DÁ MALINKO PRÁCE SI ROZMYSLET.]

Kód studenta 22

3b

9 Logika (3 body)

Mějme následující formule φ_1, φ_2 jazyka $L = \langle 0, |\,|, f, -, < \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\,|$, f jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol

$$\varphi_1: \quad (\forall\varepsilon)(\forall u)(0<\varepsilon \to (\exists\delta)(0<\delta \wedge (\forall x)(|x-u|<\delta \to |f(x)-f(u)|<\varepsilon))),$$
$$\varphi_2: \quad (\exists u)(\exists\varepsilon)(0<\varepsilon \wedge (\forall\delta)(0<\delta \to (\exists x)(|x-u|<\delta \wedge \neg(|f(x)-f(u)|<\varepsilon)))).$$

1. Uveďte definice pro predikátovou logiku, kdy formule φ *platí ve struktuře* $\mathcal{A}$, kdy φ *(logicky) platí*, a kdy je φ *nezávislá*.
2. Platí formule φ_1, φ_2 ve struktuře $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, |\,|, f, -, < \rangle$ jazyka L, kde $0, |\,|, -, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$ a $f(0) = 0$, $f(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$? Uveďte zdůvodnění.
3. Je formule $\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$ nezávislá ? Uveďte zdůvodnění.

1. φ platí v A ($A \models \varphi$), pokud ~~je v A pravdivá~~ v A platí její generální uzávěr (tj. univ. kvantifikace přes volné proměnné), což se definuje induktivně podle struktury formule:
   - relace platí ~~pokud~~ o daných prvcích $\bar{a} \in A$, pokud taková ~~n-tice~~ je v interpretaci dané relace v A. → vyhodnocením termů
   - kvantifikátory i logickými spojkami platnost probublá přirozeně (např. $(\exists x)\varphi(x)$ platí v A, pokud $\exists t \in A$ taková, že $\varphi(x/t)$ platí v A; $\neg\varphi$ platí v A, pokud φ neplatí v A)

φ logicky platí, pokud platí v každé L-struktuře.
φ je nezávislá, pokud existují L-struktury A, B t. ž. $A \models \varphi$ a $B \not\models \varphi$.

jen ekvivalentní → (jen mechanické znegování a prohození $(\exists\varepsilon)(\exists u)$)

3. Není nezávislá. Všimneme si, že φ_2 ~~je~~ negace φ_1. Z definice platnosti ve struktuře plyne, že vždy ~~platí~~ ve struktuře A platí buď formule, nebo její negace, a to právě jedna z nich. Tedy v každé struktuře buď φ_1 platí (a tedy i $\neg\varphi_2$) nebo φ_1 neplatí (a tedy ani $\neg\varphi_2$). Z definice potom $\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$ vždy platí, tedy není nezávislá. →

② Ve ③ jsme si všimli, že $\varphi_1 \sim \neg\varphi_2$, takže

✓ bude platit právě jedna z φ_1, φ_2. Ukážu, že platí φ_2.

Všimněme si, že $f(x) = \begin{cases} -1 ; & x < 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ 1 ; & x > 0 \end{cases}$.

Zvolíme-li ve $\wedge$ φ_2 (podformuli) $a = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $x = \frac{\delta}{2}$ (závislé na univ. kvantif. δ)

Potom formule říká, že

$$\text{"}(\forall \delta > 0)\text{"} \left(\left|\tfrac{\delta}{2} - 0\right| < \delta \wedge \neg\left(\left|f\left(\tfrac{\delta}{2}\right) - f(0)\right| < \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Jistě $\left|\frac{\delta}{2} - 0\right| < \delta$, a protože $\frac{\delta}{2} > 0$, tak $f\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1$, zatímco $f(0) = 0$, a jistě $|1-0| \nless$