2

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 49 \\ \hline 63 \\ 28 \\ \hline 343 \end{array}$$

Kód studenta 28

1 LA1 – Vlastní čísla (3 body)

$4 \times 49 = 36 + 160 = 196$

1. Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Rozhodněte, zda $\lambda = 7$ je vlastním číslem matice A. Dále rozhodněte, zda $x = (1,2,1)^T$ je vlastním vektorem matice A.

2. Buď V množina všech reálných matic 3×3, pro které je 0 vlastní číslo a přísluší mu vlastní vektor $y = (1,2,3)^T$. Ukažte, že V je vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

Charakteristický polynom A je $\det(A - \lambda I)$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 1\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot(2-\lambda)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(1-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 0\cdot 3 =$$

$$= 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 0 + 9 - (6-3\lambda) - (1-\lambda) - 0 =$$

$$= 2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 9 - 6 + 3\lambda - 1 + \lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda + 4$$

Dosadíme-li $\lambda = 7$

$$-7^3 + 4\cdot 7^2 - 7 + 4 = -343 + 196 - 7 + 4 \neq 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ 7 není kořen char. polynomu a tudíž není vlastním číslem $\checkmark$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1,2,1)^T$ je vlastním vektorem A a to pro $\lambda = 4$ $\checkmark$

V je uzavřené na násobení skalárem $(\alpha A)x = \alpha(Ax) \rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \alpha Ax = 0$

V je uzavřené na sčítání $(A+B)x = Ax + Bx \rightarrow Ax = 0 \quad Bx = 0 \Rightarrow (A+B)x = 0$

V je podmnožina vektorového prostoru všech matic z $\mathbb{R}^{3\times3}$

takže už víme, že platí distributivita, linearita, ...

Stačí ukázat, že V je uzavřené (a tedy skutečný podprostor)

neutrální prvek?

$18 \cdot 8 \cdot 17 + 396 - 334$ 136 412 100

3 body

Kód studenta 28

2 LA2 – Pozitivní definitnost (3 body)

Definujte pojem pozitivní definitnosti matice a formulujte alespoň jedno ekvivalentní kritérium pro testování pozitivní definitnosti. Pomocí tohoto kritéria rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Čtvercová matice A z $\mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy když pro každý vektor v z $\mathbb{R}^n$ $v \neq 0$ je $v^T A v > 0$.

To je ekvivalentní s tím, že matice A má všechna vlastní čísla > 0.

Charakteristický polynom $B = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \end{pmatrix} =$

$= (4-\lambda)(-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 51\lambda + 39) + 2(-\lambda^2 + 20\lambda - 50) - 2(\lambda^2 - 18\lambda + 10)$

$= -4\lambda^3 + 52\lambda^2 - 204\lambda + 156 + \lambda^4 - 13\lambda^3 + 51\lambda^2 - 39\lambda - 2\lambda^2 + 40\lambda - 100 - 2\lambda^2 + 36\lambda - 20 =$

$= \lambda^4 - 17\lambda^3 + 99\lambda^2 - 167\lambda + 36$

Pozorování: alespoň jedno vlastní číslo leží v $[0,1]$ a jedno v $[1,3]$

Pro $\lambda = 0$ je char. pol. $= 36$

Pro $\lambda < 0$ jsou všechny členy > 0 a tudíž jejich Σ je > 0

$\Rightarrow$ char. pol. nemá kořen ≤ 0 $\Rightarrow$ B je poz. definit.

mezivýpočty

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) + 2\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\cdot(-2)$$

$$-(-1)(5-\lambda)(-1) - 2\cdot 2(6-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 2(-2) =$$

$$= \underline{60} - \underline{52\lambda} + \underline{13\lambda^2} - \underline{\lambda^3} \cancel{-4} \cancel{+4} \underline{-5+\lambda} \underline{-24} \cancel{+4\lambda} \underline{+8} \cancel{-4\lambda} =$$

$$= -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 51\lambda + 39$$

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (-2)(5-\lambda)(6-\lambda) + 2^3 - (-1)(5-\lambda)2 - (-2)2(-2) =$$

$$= (-2)(30 - 11\lambda + \lambda^2) + 8 + 10 - 2\lambda - 8 =$$

$$= -\lambda^2 + 20\lambda - 50$$

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \end{pmatrix} = (-2)2(-2) + (2-\lambda)(5-\lambda)\cdot 2 - 2^3 - (-2)(5-\lambda)(-1) =$$

$$= \cancel{8} + 2(10 - 10\lambda + \lambda^2) \cancel{-8} - (10 - 2\lambda) =$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 10$$

Kód studenta 28

3 MA1 – Limita posloupnosti (3 body)

3

Definujte vlastní limitu posloupnosti.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Rozhodněte zda platí, že pokud $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

L je vlastní limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ |a_n - L| \leq \varepsilon$$

Tvrzení neplatí. $a_n = \frac{2}{2^n}$ $b_n = \frac{1}{2^n}$

(Protipříkladem)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

$$\forall n \ \frac{a_n}{b_n} = 2 \quad \left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 2\right)$$

Kód studenta 28

2 body

4 MA2 – Metrický prostor (3 body)

Dokažte, že (M,d) je metrický prostor pokud M je neprázdná množina, f je funkce z M do kladných reálných čísel a d je definována jako

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max(f(x), f(y)) & x \neq y. \end{cases}$$

Potřebujeme tedy dokázat, že d je metrika

d je vždy nezáporná (protože f je do $\mathbb{R}^+$)

$d(x,x) = 0$ (z definice) $d(x,y) > 0^+$ pro $x \neq y$ ($d(x,y) = 0 \iff x = y$)

$\forall$ $d(x,y) = d(y,x)$

$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ protože

$$\left.\begin{aligned} d(a,b) &\geq f(a) \\ d(b,c) &\geq f(c) \\ d(a,c) &\leq f(a) + f(c) \end{aligned}\right\} \text{pokud } b \notin \{a,c\} \text{ (jinak triviální)}$$

(3 body)

Kód studenta 28

5 MA3 – Tečná rovina (3 body)

Najděte bod, kde je tečná rovina funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$ vodorovná. Jaka je rovnice této tečné roviny ?

$$\frac{f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y - 6 \qquad \frac{f(x,y)}{\partial y} = 2x + 4y - 8$$

najdeme bod, kde obě parciální derivace jsou nulové (proč?)

Gauss. Elim.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 2y &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

V bodě $(2,1)$ dosahuje f hodnoty $2^2 + 2\cdot2\cdot1 + 2\cdot1^2 - 6\cdot2 - 8 =$

$= 4 + 4 + 2 - 12 - 8 =$

$= -10$

Rovina $z = -10$ je tečná k $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$ ke grafu funkce

v bodě $(2,1)$

(3 BODY)

Kód studenta 28

6 Nezávislé jevy (3 body)

1. Co znamená, že dva náhodné jevy jsou nezávislé ? Definujte.
2. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Zkonstruujme náhodný graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že pro každou dvojici vrcholů i a j takových, že $1 \leq i < j \leq n$, si hodíme férovou mincí (na níž padne hlava s pravděpodobností přesně 1/2) a padne-li na ní hlava, přidáme do G hranu ij. Nechť J_i je jev, že vrchol i má stupeň přesně 1. Rozhodněte, pro která n jsou jevy J_1 a J_2 nezávislé a odpověď zdůvodněte.

1 A a B jsou nezávislé náhodné jevy pokud

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

JEVY SE OBVYKLE POVAŽUJÍ ZA MNOŽINY, MÍSTO „$\wedge$" SE PAK PÍŠE PRŮNIK „$\cap$"

Ekvivalentně: výskyt jednoho jevu neovlivňuje pravděpodobnost výskytu druhého

$$P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B)$$

POKUD OVŠEM $P(B) > 0$, RESP. $P(A) > 0$

Pro $n=2$ $P(A \wedge B) = 2\, P(A) \cdot P(B)$ (nejsou nezávislé)

Pro $n=3$ jsou nezávislé $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ (Rozborem všech 8mi případů)

Pro $n>3$: koukejme odděleně na případy, kdy $(1,2) \in E(G)$ a kdy není.

~~$(1,2) \in E(G)$~~

~~$P(J_1|(1,2)) = P\left(\left(\bigcup_{i=3}^{n}(1,i)\right) \cap E(G) = \emptyset\right)$~~

~~$= \frac{1}{2^{n-2}}$~~

~~stejně tak $P(J_2) = \frac{1}{2^{n-2}}$~~

~~a J_1 a J_2 jsou nezávislé!~~

Pozorování: $P((1,2) \in E(G)) = \frac{1}{2}$

jev $(1,2) \in E(G)$ budeme značit $(1,2)$

Pozorování

$P(J_1) = P(J_2) = (n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ ✓

$(1,2) \in E(G)$	$(1,2) \notin E(G)$
nechť $P(J_1 \mid (1,2)) = P(J_1)$ když víme, že $(1,2) \in E(G)$	nechť $P(J_1 \mid \neg(1,2)) = P(J_1)$ když víme, že $(1,2) \notin E(G)$
(obdobně pro J_2)	(obdobně pro J_2)
$P(J_1 \mid (1,2)) = P\left(\left(\bigcup_{i=3}^{n}(1,i)\right) \cap E(G) = \emptyset\right) = \frac{1}{2^{n-2}}$	$P(J_1 \mid \neg(1,2)) = P\left(\left\lvert\left(\bigcup_{i=3}^{n}(1,i)\right) \cap E(G)\right\rvert = 1\right) = (n-2)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}$
$P(J_2 \mid (1,2))$ se taky rovná $\frac{1}{2^{n-2}}$	$P(J_2 \mid \neg(1,2))$ se taky rovná $(n-2)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}$
$J_1 \mid (1,2)$ a $J_2 \mid (1,2)$ jsou nezávislé (koukají na disjunktní množiny hran) ✓	$J_1 \mid \neg(1,2)$ a $J_2 \mid \neg(1,2)$ jsou nezávislé (koukají na disjunktní množiny hran) ✓

$$P((1,2) \mid J_1) = \frac{P(J_1 \mid (1,2))\, P((1,2))}{P(J_1)}$$

$$P((1,2) \mid J_1) = \frac{\frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2}}{(n-1)\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{(n-1)\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{n-1}$$

Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)\, P(B \mid A)}{P(B)}$$

Podobně $P(\neg(1,2) \mid J_1) = \frac{n-2}{n-1}$

$$\cancel{P(J_2 \mid J_1) = P(J_2 \mid (1,2)) \cdot P((1,2) \mid J_1) + P(J_2 \mid \neg(1,2)) \cdot P(\neg(1,2) \mid J_1)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{n-1} + (P(J_2) - P(J_2 \mid (1,2))) \cdot (1 - P((1,2) \mid J_1)) =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{n-1}}$$

Pokračování na dalším listu!

Student č. 28 Otázka 6 – Pokračování

$$P(J_2 \mid J_1) = P(J_2 \mid (1,2)) \cdot P((1,2) \mid J_1) + P(J_2 \mid \neg(1,2)) \cdot P(\neg(1,2) \mid J_1)$$

(platí díky dříve zjištěným nezávislostem)

PROČ TU PLATÍ? CHTĚLO BY TO ASI PODROBNĚJŠÍ ODŮVODNĚNÍ; VÝPOČET VYPADÁ ZBYTEČNĚ SLOŽITĚ. STAČILO POČÍTAT NAPŘ.

$P(J_1 \cap J_2)$

$= P(J_1 \cap J_2 \cap (1,2)) + P(J_1 \cap J_2 \cap \neg(1,2$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{n-1} + (n-2) \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{n-2}{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)\,2^{n-2}} \cdot \left(1 + (n-2)^2\right) = \frac{n^2 - 4n + 5}{(n-1)\,2^{n-2}}$$

– ALE VÝSLEDEK VYCHÁZÍ SPRÁVNĚ

Hledáme n takové, že:

$$\frac{n^2 - 4n + 5}{(n-1)\,2^{n-2}} = \frac{(n-1)}{2^{n-1}}$$

$$\frac{n^2 - 4n + 5}{2^{n-2}} = \frac{n^2 - 2n + 1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{2n^2 - 8n + 10}{2^{n-1}} = \frac{n^2 - 2n + 1}{2^{n-1}}$$

$$n^2 - 6n + 9 = 0$$

Víme, že jeden kořen je $n = 3$.

$(n^2 - 6n + 9) : (n-3) = n + 3$

$-n^2 + 3n$

$3n + 9$

$-3n + 9$

0

$n^2 - 6n + 9 = (n-3)(n-3)$ → Existuje jediný kořen $n = 3$

→ J_1 a J_2 jsou nezávislé právě pokud $n = 3$ ✓

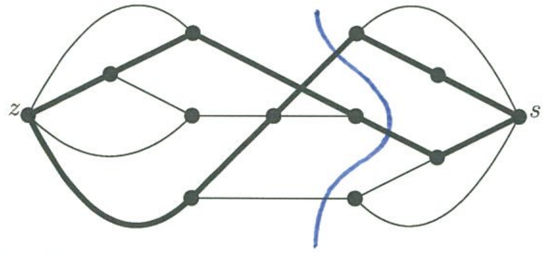
3

Kód studenta 28

7 Grafy (3 body)

Z grafu G na obrázku vytvoříme síť tak, že všechny hrany orientujeme zleva doprava a přidělíme jim kapacitu 1.

Tok mezi z a s je vyznačen silnými hranami a využívá plnou kapacitu vyznačených hran. Kapacity ostatních hran nejsou využity vůbec.

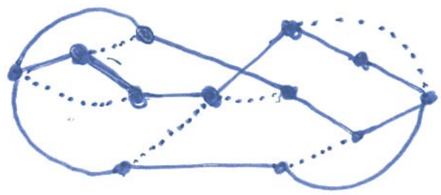


OK Rozhodněte, zdali jde o maximální tok. Pokud vyznačený tok není maximální, nějaký maximální tok nalezněte a zdůvodněte jeho maximalitu.

OK Jaké jsou důsledky hodnoty maximálního toku pro hranovou souvislost grafu ?

Jedná se o tok velikosti 2. Není maximální.

Tok velikosti 3: (nevyužité hrany tečkovaně)



V grafu existuje z,s-oddělující řez velikosti 3 (viz obrázek v zadání)

tudíž tok velikosti 3 je maximální.

Díky výše využité dualitě max toku a min řezu se používá hledání max toku na určení hranové souvislosti grafu.

$(s,t \in V(G), s \neq t)$

G je hranově k-souvislý $\Leftrightarrow \neg\exists$ řez velikosti $< k \Leftrightarrow \forall s,t\ \exists\ s,t$-tok velikosti $\geq k$

Velikost libovolného max toku je tudíž horní mez na míru hranové souvislosti

3

Kód studenta 28

8 Kombinatorika (3 body)

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí $f(n)$ počet 15-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, a nechť $g(n)$ značí počet zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové.

Vyjádřete $f(n)$ a $g(n)$.

Rozhodněte, která z následujících možností platí:

- $\exists n_0 : \forall n > n_o : f(n) > g(n)$
- $\exists n_0 : \forall n > n_o : g(n) > f(n)$
- žádné n_0 vyhovující předchozím dvěma podmínkám neexistuje.

$f(n) = \binom{n}{15}$ – vybíráme 15 z n

$g(n) = (3^n)$ – pro každý z n prvků máme 3 možnosti

velmi volná mez na kombinační čísla (podmnožin dané velikosti není víc než podmnožin celkem)

Pro $n \geq 15$ $\binom{n}{15} \leq 2^n < 3^n$

platí pro $n > 0$

n_0 může tedy být třeba $1\cancel{4}$

$\forall n > 14 : g(n) > f(n)$

Kód studenta 28

1b

9 Logika (3 body)

Mějme následující formule φ_1, φ_2 jazyka $L = \langle 0, |\ |, f, -, < \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\ |, f$ jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol

$$\varphi_1 : \quad (\forall \varepsilon)(\forall u)(0 < \varepsilon \rightarrow (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x - u| < \delta \rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon))),$$
$$\varphi_2 : \quad (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \rightarrow (\exists x)(|x - u| < \delta \wedge \neg(|f(x) - f(u)| < \varepsilon)))).$$

1. Uveďte definice pro predikátovou logiku, kdy formule φ *platí ve struktuře* $\mathcal{A}$, kdy φ *(logicky) platí*, a kdy je φ *nezávislá.*
2. Platí formule φ_1, φ_2 ve struktuře $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, |\ |, f, -, < \rangle$ jazyka L, kde $0, |\ |, -, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$ a $f(0) = 0$, $f(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$? Uveďte zdůvodnění.
3. Je formule $\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$ nezávislá ? Uveďte zdůvodnění.

2. ✓

φ_1 neplatí $\quad \varepsilon = \frac{1}{2}$, $u = 0$ $\quad$ (v tomto bodě je $\frac{|r|}{r}$ nespojitá)

φ_2 platí