Kód studenta 11

2

1 Limity funkcí (3 body)

1. Definujte limitu funkce v bodě.
2. Nechť f je funkce definovaná na $\mathbb{R}$.

   Uvažujme následující dvě tvrzení P a Q:
   P: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
   Q: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná jako $a_n = f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ má limitu nula.
   Rozhodněte, zda P implikuje Q a zda Q implikuje P, pokud:

   (a) f je libovolná funkce,

   (b) f je monotónní fukce,

   (c) f je spojitá funkce.

   Svá tvrzení nemusíte zdůvodňovat.
3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}\,.$$

1) ~~$\forall \varepsilon > 0 \in R\ \exists \delta_0 > 0 \in R : |f(a+\delta) - A| < \varepsilon$~~
~~$\forall \delta < \delta_0 \in R,\ \delta > 0\ |f(a-\delta) - A| < \varepsilon$~~
~~$\lim_{x\to a} f(x) = A$~~

Buď $f : R \to R$ ~~...~~ pak ~~...~~ má f limitu v bodě a pokud platí:

$\forall \varepsilon > 0 \in R : \exists \delta_0 > 0 \in R :$ ~~...~~ $\forall \delta > 0 \wedge$ ~~...~~ $\delta < \delta_0$:

$|f(a+\delta) - A| < 0$ -- z prava

$|f(a-\delta) - A| < 0$ -- z leva

má být ε

značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$

2) c) pokud f je spojitá, pak $\underline{P \Rightarrow Q}$

— " — , ale $\underline{Q \not\Rightarrow P}$

pro $f(x) = \sin(\pi x)$

a) pokud je f libovolná, pak $\underline{Q \not\Rightarrow P}$

pro $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

— " — a ~~$P \Rightarrow Q$~~

$\underline{P \Rightarrow Q}$

b) pokud je f monotonní, pak $\underline{P \Leftrightarrow Q}$

o.k.

3)

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\underbrace{1 + \cos 2x}_{\to 0}}$$

l'hopital

$$\lim \frac{f(x)}{g x} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} \sim \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos x}{-2 \sin x} \sim \lim_{x \to \pi/2} \frac{\overset{\nearrow 1}{\sin x}}{\underbrace{-4 \cos 2x}_{-4}} = -\frac{1}{4}$$

2

$\boxed{\cos \pi = -1}$ celkem $\frac{1}{4}$

2 body

Kód studenta 11

2 Určitý integrál (3 body)

1. Formulujte větu o substituci pro určitý integrál.
2. Spočtěte určitý integrál
$$\int_1^2 \frac{3^x+2}{3^{2x}+3^x}\,dx$$
3. Rozhodněte, ve kterém z intervalů leží výsledek: $(-\infty,0]$, $(0,1/2]$, $(1/2,1]$, $(1,3]$, $(3,\infty]$. (Správné řešení lze nalézt i bez počítání integrálu – numerické chyby při výpočtu neomlouvají chybné určení intervalu.)

1) buď $f: R \to R$, $g: R \to R$, g' derivace funkce g a F ~~funkce~~ funkcí primitivní k f. pak:

$g: [a,b] \to [c,d]$

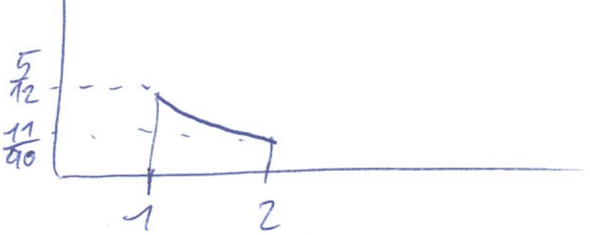
$f: [c,d] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

kde $[F(x)]_a^b$ značí: $F(b) - F(a)$ $\quad \int_c^d f\,dy$

3) výsledek mi vyšel leží v $(0, 1/2\rangle$

Proč?



2) $$\int_1^2 \frac{3^x+2}{3^{2x}+3^x}\,dx \sim \int_1^2 \frac{1}{3^x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{3^x+1}\,dx$$

$$3^x = e^{x\ln 3}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{e^{x\ln 3}}\cdot\frac{-\ln 3}{-\ln 3} = -\frac{1}{\ln 3}\cdot\int_1^2 \frac{1}{e^{x\ln 3}}\cdot -\ln 3 = -\frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{e^{x\ln 3}}\right]_1^2$$

perpartes:

$$\int_1^2 \frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{3^x+1} = \left[\frac{1}{3^x+1}\cdot\frac{1}{\ln 3\, e^{x\ln 3}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\ln 3\, e^{x\ln 3}}\cdot\left(\frac{1}{3^x+1}\right)' dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\cancel{\ln 3\, e^{x\ln 3}}}\cdot\frac{\cancel{\ln 3\, e^{x\ln 3}}}{(3^x+1)^2}\,dx$$

. . .

$$-\int_1^2 \frac{1}{3^{2x}+2\cdot 3^x+1}\,dx$$

~~Řešení~~ Druhý integrál spíše, po substituci, rozkladem na parc. zlomky. $\frac{1}{3^x+1}\cdot\frac{1}{3^x+1}$

Výsledek = ?. Nedopočítáno.

z...

$$\left(\frac{1}{3^x+1}\right)' \sim \left(\frac{1}{e^{x\ln 3}+1}\right)' = -\frac{1}{(e^{x\ln 3}+1)^2}\cdot e^{x\ln 3}\cdot\ln 3$$

2-

Kód studenta 11

3 Metrické prostory (3 body)

Nechť (X, d) je metrický prostor, $|X| \geq 2$.

1. Rozhodněte, zda je (X, d') metrický prostor pro d' definovanou jako

$$d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$$

   pro všechna $x, y \in X$. Zdůvodněte své rozhodnutí.

2. Vzdálenost mezi dvěma neprázdnými podmnožinami A a B metrického prostoru (X, d) definujeme jako

$$D(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

   Ukažte, že D **není** metrika na $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ (kde $\mathcal{P}(X)$ označuje potenční množinu X).

1) je (X, d') metr. prostor ?

d je metrika $\Rightarrow$ $d(x,x) = 0 \wedge d(x,y) \geq 0$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(\cancel{x}\, y,z)$

$d'(x,x) = \min\{\overbrace{d(x,x)}^{\to 0}, 1\} = 0$ ✓

$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\} = \min\{d(y,x), 1\} = d'(y,x)$ ✓

$d'(x,z)$ — ≥ 1 $= 1 \Rightarrow d(x,z) \geq 1$

nelze

~~[illegible]~~ if $d'(x,z) > d'(x,y) + d'(y,z)$

then $d'(x,y) + d'(y,z)$ $1 >$

$\Rightarrow 1 > d(x,y) + d(y,z)$

spor

? $d'(x,z) = d(x,z)$

$< 1 \Rightarrow \cancel{d' = d}$

?

$d' < 1 \Rightarrow d'(x,y) = d(x,y)$

$d'(y,z) = d(y,z)$ protože $d'(x,y)$ i $d'(y,z) < 1$, jinak platí

$\Rightarrow d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$ $\square$

2) aby D byla metrika, musí splňovat axiomy

1: $d(x,y) \geq 0$ a „=" nastane pouze $x = y$

zde je rozpor s rovností pokud $x \subseteq y \wedge x \neq y$

2: symetrie by platila triviálně

3: delta nerovnost by taky neplatila pro

$x = \{x_1\}$ $\quad x_1 \neq x_2 \wedge x_1, x_2 \in X$

$z = \{x_2\}$

$y = X$ $\quad D(x,z) > 0$

$D(x,y) = 0$ protože $x_1 \in X$

$D(y,z) = 0$ — " x_2 —

$$\Rightarrow \overset{>0}{D(x,z)} \not\leq \overset{0}{D(x,y)} + \overset{0}{D(y,z)}$$

2

Kód studenta 11

4 Lineární zobrazení (3 body)

Buďte $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí:

1. $Ker(f) \cap Ker(g) \subseteq Ker(f+g)$,
2. $f(U) + g(U) = (f+g)(U)$.

2) $f(u) + g(u) = (f+g)(u) \quad \forall u$

platit nebude pro zrcadlové affiní zobrazení

$(f+g) \to id$

zadána pro lin. zobrazení ale myšlenka OK

$f + g \to$ sjednocení 2 affinních podprostorů

1) $ker(f)$ je $\{u \mid u \in U \wedge f(u) \to 0\}$

$ker(f) \wedge ker(g) = \{u \mid u \in U \wedge f(u) \to 0 \wedge g(u) \to 0\}$

$ker(f+g) = \{u \mid u \in U \wedge f(u) + g(u) = 0\}$

$f(u) = 0 \wedge g(u) = 0 \Rightarrow f(u) + g(u) = 0$

$\Rightarrow ker f \cap ker g \subseteq ker(f+g)$ ✓

1

Kód studenta 11

5 Cauchyho–Schwarzova nerovnost (3 body)

1. Definujte pojem "norma indukovaná skalárním součinem".
2. Zformulujte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
3. Dokažte, že pro lineárně závislé vektory se obě strany Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti rovnají.

1) Norma indukovaná skalárním součinem je norma $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro nějaký skalární součin.

2) $||x+y||^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y \rangle$ není C-S ner.

kde $x, y \in T^n$ a ~~...~~ $||\cdot||$ je norma ind sk. součinem

3) buď $k \in T$

pak

$$||x + kx|| = (1+k)^2 ||x||^2 = \underline{(k^2 + 2k + 1)||x||^2}$$

$$||x||^2 + ||kx||^2 + 2\langle x, kx \rangle = ||x||^2 + k^2||x||^2 + 2k||x||^2 =$$

$$= \underline{(k^2 + 2k + 1)||x||^2}$$

3

Kód studenta 11

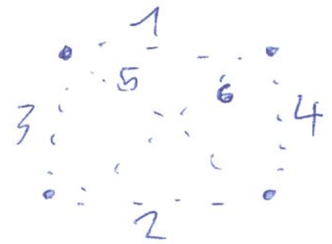
6 Náhodný graf (3 body)

Mějme náhodný graf na vrcholech $\{1, 2, \ldots, 100\}$ kde pravděpodobnost výběru hrany je 1/3 nezávisle pro každou hranu.

1. Jaká je pravděpodobnost, že podgraf indukovaný náhodně vybranými čtyřmi vrcholy bude izomorfní C_4?
2. Jaká je pravděpodobnost, že podgraf indukovaný vrcholy $\{10, 20, 30, 40\}$ bude izomorfní C_4, za předpokladu, že dvojice vrcholů $\{10, 30\}$ a $\{20, 40\}$ netvoří hranu?
3. Určete střední hodnotu počtu indukovaných podgrafů izomorfních C_4.

Výsledky není třeba důsledně vyčíslovat, komb. čísla, faktoriály, mocniny atd. lze ponechat.

1)



nasl komb. vytvoří graf izomorfní k C_4

1 2 3 4
1 2 5 6
3 4 5 6

každá z kombinací vznikne s pravděpodob.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

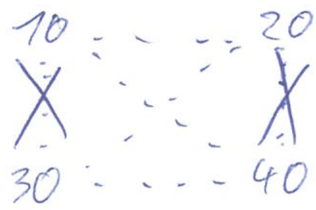
↓ požadované hrany

→ nechtěné hrany

tedy finální P bude

$$\underline{P = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

2)



$P = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

jelikož neexistenci překážejících hran máme v předpokladu a tvorba všech 4 hran je nezávislá a potřebujeme je všechny 4.

3)

$\binom{100}{4}$ počet podgrafu velikosti 4

$\binom{100}{2}$ počet hran

$$E(X) = \binom{100}{4} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

3

Kód studenta 11

7 Binární relace (3 body)

1. Definujte, co znamená, že binární relace $f \subseteq X \times X$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
2. Rozhodněte, zda má tyto vlastnosti (určete které) relace $f_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná

$$(a, b) \in f_1 \Leftrightarrow a, b \text{ jsou soudělná.}$$

3. Rozhodněte, zda má tyto vlastnosti (určete které) relace $f_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná

$$(a, b) \in f_2 \Leftrightarrow a \text{ dělí } b.$$

1) jedná se o ekvivalenci

$f(x,y)$ značí, že $(x,y) \in f$

refl. $\forall x \; f(x,x)$

sym $\forall xy \; f(x,y) \Rightarrow f(y,x)$

trans $\forall xyz \; f(x,y) \wedge f(y,z) \Rightarrow f(x,z)$ ✓

2) soudelná $\Leftrightarrow$ dělitelná beze zbytku číslem jiným než 1

refl. neplatí pro $(1,1)$, jinak ano ✓

symetrie platí triviálně: pokud a/c a b/c, $c \neq 1 \in \mathbb{N}$

pak (a,b) i $(b,a) \in f_1$ ✓

transitivita neplatí pro

$(3,15) \wedge (15,5) \not\Rightarrow (3,5)$ ✓

3) $(a, b) \in \rho_2 \iff \cancel{a}\,\exists k \in N \; b = a \cdot k$

reflexivita je triviální pro $k = 1$

symetrie neplatí $(2,4) \in \rho_2$ ale $(4,2) \notin \rho_2$

transitivita platí, protože

$$(a, b) \in \rho_2 \wedge (b, c) \in \rho_2$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{a} \; b = a \cdot k_1 \qquad c = b \cdot k_2$$

$$\Rightarrow \quad c = a \cdot \underbrace{k_1 \cdot k_2}_{k}$$

$$\Rightarrow \quad (a, c) \in \rho_2$$

2-

Kód studenta 11

8 Kostry grafů (3 body)

Mějme graf G na vrcholech $\{u_1, \dots, u_{100}, v_1, \dots, v_5\}$, přičemž vrcholy $u_1, \dots, u_{100}$ indukují úplný graf, vrcholy $v_1, \dots, v_5$ indukují cyklus (v tomto pořadí), graf obsahuje hranu u_1, v_1 a žádné další hrany v grafu G nejsou.

Váha libovolné hrany $u_i u_j$ pro $1 \le i < j \le 100$ je 5, váha hrany $v_i v_j$ pro $j = (i \bmod 5) + 1$ je $\max\{i, j\}$ a váha hrany $u_1 v_1$ je 10.

1. Definujte pojem "kostra grafu" a "minimální kostra grafu" (včetně předpokladů úlohy hledání minimální kostry).
2. Určete váhu minimální kostry grafu G.
3. Určete počet všech koster grafu G a počet minimálních koster grafu G.

souvislého

1) kostra grafu ~~G~~ $G(V,E)$ je podgraf

~~K~~ $K(V, E' \subseteq E)$

taková, že K je strom, neboli K nemá žádnou kružnici

pro hodnocení $w: \cancel{V}\ E \to R$ je minimální kostra grafu $G(V,E)$, ~~...~~ její součet hodnocení hran je ~~...~~ minimální.

$\{K(V,E') \mid K$ je kostra a $\sum_{e \in E'} w(e) = \min$

nemusí být určena jednoznačně

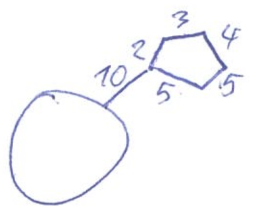
$\{\sum_{e \in E} w(e) \mid K(V,E)$; kde K je kostra G ~~...~~ $\}$

1/2

2) 10 za hranu u_1 v_1

$99 \cdot 5$ za hrany spojující $u_1 \dots u_{100}$

$2+3+4+5$ jako nejlehčí hrany spojující v_1 až v_5



$= 10 + 495 + 2 + 3 + 4 + 5 = 519$ ok 15

3) ~~všechny~~ všechny kostry

$1 \cdot 5 \cdot \frac{3 \cdot \cancel{99!}}{\cancel{2}}$ 100^{98}

za $v_1 u_1$ za C_5 za K_{100}

minimální kostry

$1 \cdot \frac{3 \cdot \cancel{99!}}{\cancel{2}} \cdot \underline{\underline{2}}$ 100^{98}

protože lze odebrat pouze hrany $v_5 v_1$ nebo $v_4 v_5$

/ 0,5

2

Kód studenta 11

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, co je *bezesporná teorie* (v predikátové logice).
2. Vyjádřete následující tvrzení jako výroky φ_1, φ_2, φ_3 nad $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$, kde prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že "Radka / Sára / Tom je ve škole".
   (a) *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
   (b) *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
   (c) *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*
3. Zjistěte, zda je teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ bezesporná pomocí tablo metody, implikačního grafu, či rezolučního uzávěru. Tedy nestačí pouze vyzkoušet pravdivostní ohodnocení.

1) bezesporna teorie je teorie, která nedokazuje spor $\neg(T \vdash \bot)$, neboli teorie mající alespoň jeden model.

2) φ_1 $\neg t \Rightarrow \neg s$

φ_2 $\neg s \Rightarrow \neg r$

φ_3 $\neg r \Rightarrow t$

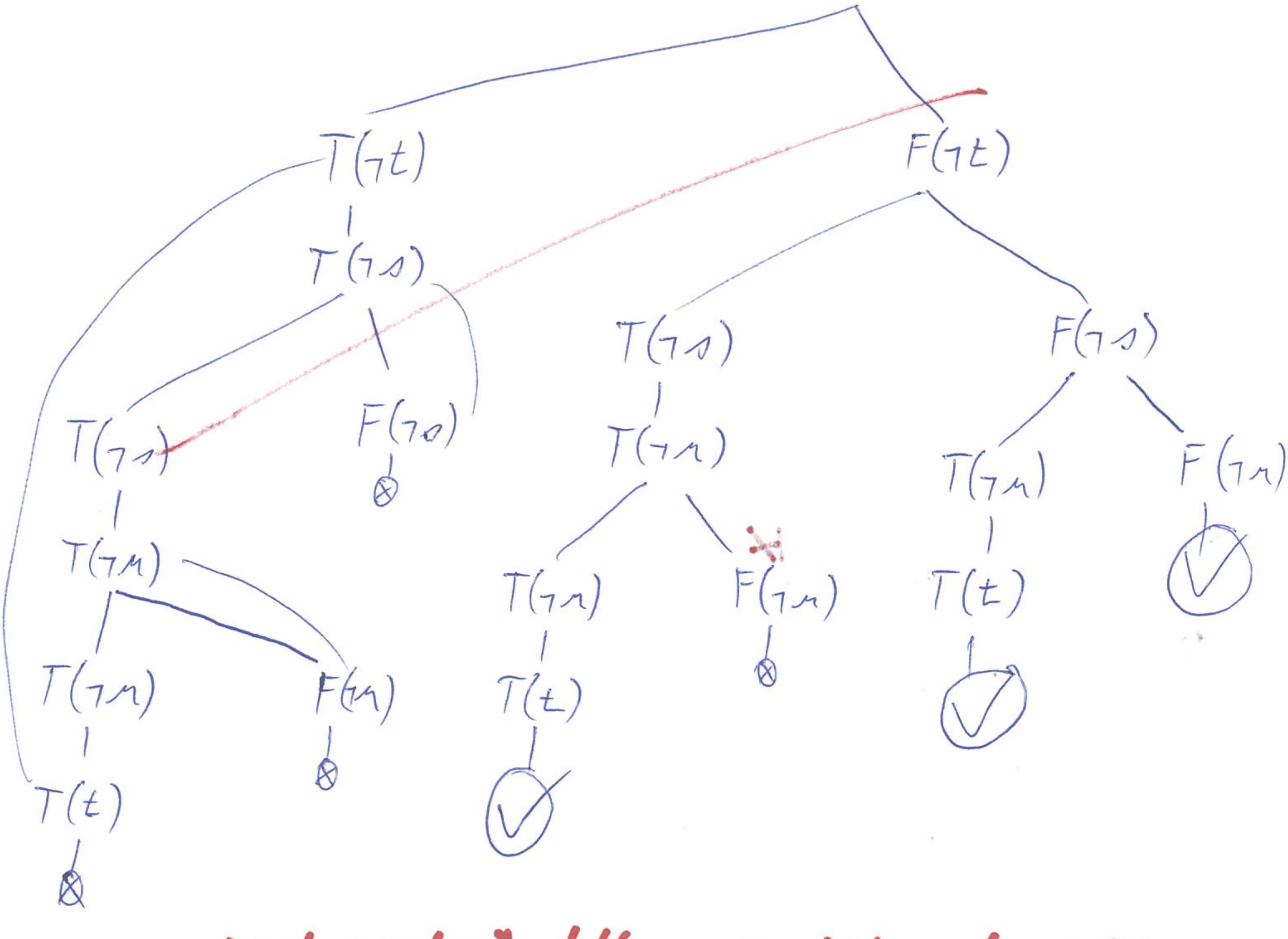
3) tablo metoda

musí mít bezespornou větev (dokončenou)

$T(\neg t \Rightarrow \neg s)$

$T(\neg s \Rightarrow \neg u)$

$T(\neg u \Rightarrow t)$



není správné tablo, je třeba atomické rozvinuté tablo $T\varphi \to \psi$

$F\varphi \quad T\psi$