2

Kód studenta 47

1 LA1 – Vlastní čísla (3 body)

1. Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Rozhodněte, zda $\lambda = 7$ je vlastním číslem matice A. Dále rozhodněte, zda $x = (1,2,1)^T$ je vlastním vektorem matice A.

2. Buď V množina všech reálných matic 3×3, pro které je 0 vlastní číslo a přísluší mu vlastní vektor $y = (1,2,3)^T$. Ukažte, že V je vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

1. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 9 - 3\cdot(2-\lambda) - 0 - (1-\lambda)$

$= (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(1-\lambda) + 8 + \lambda + 3\lambda - 6$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 8 + \lambda + 3\lambda - 6$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 \cancel{\ldots} - \cancel{\ldots}\lambda + 4$ charakteristický polynom

$= \lambda^2(-\lambda + 4) + 1\cdot(-\lambda + 4)$

$= (4-\lambda)(\lambda^2 + 1)$ kořeny ... $4, -i, +i$

7 není vlastním číslem. ✓

$\lambda = 4 \ldots \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$

$-3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \to -3x_1 + 2x_1 + x_1 = 0$ vždy.

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad x_2 = 2x_1 = 2x_3$

$3x_1 \quad - 3x_3 = 0 \quad \to x_1 = x_3$

$\to$ vl. vektory pro $\lambda = 4$ ... $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Tedy $(1,2,1)^T$ je vl. vektorem matice A. ✓

2. $V = \{ v \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid 0$ vl. číslo a $y = (1,2,3)^T$ vl. vektor$\}$

Pokud je 0 vlastní číslo, pak $(A - I_3 \cdot \lambda)x = 0$ nám dává $Ax = 0$. Aby 0 byla vlastním číslem, musí pro ni existovat vlastní vektor. To ale znamená, že ~~dim Ker A~~ $\dim(\operatorname{Ker} A) > 0$. Tedy A musí být singulární. A tedy $\det(A) = 0$. ~~Potom tedy~~

Jelikož $A \in V$ je singulární, má lineárně závislý sloupec nebo řádek. ~~Tedy $\dim(V) \leq 2 \times 2$~~

BÚNO závislý poslední sloupec. Pak je závislý i poslední řádek

$A = \begin{pmatrix} x & v & a \\ w & y & b \\ e & d & c \end{pmatrix}$ takové, že platí: $x + 3a = 1 \to a = \frac{1-x}{3}$

$2y + 3b = 2 \to b = \frac{2-2y}{3}$

$e + 2d + 3c = 3$

Aby byla 0 vlastním číslem, musí být $\det(A) = 0$

$\to c - bd = 0 \to c = \frac{2-2y}{3} d$

Z poslední rovnice tedy dostaneme $e = 3 - 2d - (2-2y)d = 3 - d(4-2y)$

$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 3-2d & d & 0 \end{pmatrix} \in V$. Aby byl V vektorový prostor, musí být uzavřený na sčítání

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{matrix} x & 0 \\ 0 & y \end{matrix}$

$A = \begin{pmatrix} x & y & a \\ v & w & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$:
$x + 2y + 3a = 0 \to a = \frac{1-x-2y}{3}$
$v + 2w + 3b = 0 \to b = \frac{2-v-2w}{3}$
$c + 2d + 3e = 0 \to c = 3 - 2d - 3e$

$\wedge \det(A) = 0 \to xwe + vda + cyb - awc - bdx - eyv = 0$

$\to xwe + v \cdot d \cdot \frac{1-x-2y}{3} + c \cdot y \cdot \frac{2-v-2w}{3} - \frac{1-x-2y}{3} wc - \frac{2-v-2w}{3} dx - eyv = 0$

$\to e(xw - yv) = \frac{2-v-2w}{3} dx + \frac{1-x-2y}{3} w(3-2d-3e) - vd \frac{1-x-2y}{3} - \frac{2-v-2w}{3} y (3-2d-3e)$

$\to e(xw - yv) + e(1-x-2y) - e(2-v-2w) = \frac{2-v-2w}{3} dx + \frac{1-x-2y}{3} w(3-2d) - \frac{1-x-2y}{3} vd - \frac{2-v-2w}{3} y(3-2d)$

$\to e(xw - yv - x - 2y + v + 2w - 1) = \frac{2-v-2w}{3}(dx - 3y + 2dy) + \frac{1-x-2y}{3}(3w - 2dw - dv)$

Tedy e a c se dá vyjádřit pomocí $x, y, v, w, d \in \mathbb{R}$ a dimenze je $\mathbb{R}^5$. Dále v příloze A. $\Rightarrow \dim(V) = 6$

Kód studenta 47

Příloha A

1 LA 1 - Vlastní čísla

~~V~~ tedy obsahuje matice tvaru $A = \begin{pmatrix} x & y & a(x,y) \\ v & w & b(v,w) \\ c(x,y,v,w,d) & d & e(x,y,v,w,d) \end{pmatrix}$

kde a, b, c, e jsou lineární zobrazení.

Proto mohu psát, že $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ mi definuje matice z prostoru V na základě vstupního vektoru (x, y, v, w, d).

$\to$ $f(\alpha) + f(\beta) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & a(\alpha) \\ v_1 & w_1 & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d_1 & e(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & a(\beta) \\ v_2 & w_2 & b(\beta) \\ c(\beta) & d_2 & e(\beta) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & a(\alpha)+a(\beta) \\ v_1+v_2 & w_1+w_2 & b(\alpha)+b(\beta) \\ c(\alpha)+c(\beta) & d_1+d_2 & e(\alpha)+e(\beta) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{protože } a,b,c,e \text{ lin. zobrazení}} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & a(\alpha+\beta) \\ v_1+v_2 & w_1+w_2 & b(\alpha+\beta) \\ c(\alpha+\beta) & d_1+d_2 & e(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = f(\alpha+\beta),$$

kde $\alpha = (x_1, y_1, v_1, w_1, d_1)$ a $\beta = (x_2, y_2, v_2, w_2, d_2)$.

Tedy V je uzavřená na součty. ✓

$\det\left(\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}\right) = 0$ a $\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$. Tedy $\mathbf{0} \in V$ je neutrální prvek ✓

$\alpha f(x) = f(\alpha x)$ platí také, protože se prvky matice znásobí a díky linearitě zobrazení a, b, c, e se proporcionálně změní i hodnoty zobrazení.

$\dim(V) = 5$.

$$\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & a(x) \\ v_1 & w_1 & b(x) \\ c(x) & d_1 & e(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 & \alpha a(x) \\ \alpha v_1 & \alpha w_1 & \alpha b(x) \\ \alpha c(x) & \alpha d_1 & \alpha e(x) \end{pmatrix} =$$

linearita zobrazení

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha y_1 & a(\alpha x) \\ \alpha v_1 & \alpha w_1 & b(\alpha x) \\ c(\alpha x) & \alpha d_1 & e(\alpha x) \end{pmatrix} = f(\alpha x).$$

3 body

Kód studenta 47

2 LA2 – Pozitivní definitnost (3 body)

Definujte pojem pozitivní definitnosti matice a formulujte alespoň jedno ekvivalentní kritérium pro testování pozitivní definitnosti. Pomocí tohoto kritéria rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x > 0$.

$x \neq 0$

Hlavní subdeterminanty musí být větší, než 0.

Na hlavní diagonále.

Co to je přesně

$D_B^{1,1} = 4 > 0 \quad D_B^{2,2} = 4 \cdot 2 - (-2)\cdot(-2) = 4 > 0 \quad D_B^{3,3} = 4 \cdot 2 \cdot 5 + 0 + 0 - 0 - 5 \cdot (-2)(-2) - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 40 - 20 - 16 = 4 > 0.$

$$D_B^{4,4} = 2 \cdot \Big(\overbrace{2\cdot(-2)\cdot(-2)}^{8} + \overbrace{2\cdot 2\cdot 5}^{20} + 0 - \overbrace{2\cdot 2\cdot 2}^{-8} - \overbrace{5\cdot(-1)\cdot(-2)}^{-10} - 0\Big) +$$

$$0 \cdot (--) +$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 10 + 0 + (-2)\cdot\overbrace{(-60 - 8 + 0 + 10 + 8 + 0)}^{-50} + 4 \cdot \overbrace{(60 + 4 + 4 - 5 - 8 - 24)}^{31}$$

$$= 20 + 100 + 124 > 0$$

Ano, je.

Kód studenta 47

3 MA1 – Limita posloupnosti (3 body)

2-

1. Definujte vlastní limitu posloupnosti.
2. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Rozhodněte zda platí, že pokud $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, pak $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

1. Mějme posloupnost $\{a_n\}$: $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vlastní Limitou posloupnosti $\{a_n\}$ myslíme $A \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$ ~~$\exists\delta>0$~~ : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$ $a_n \in B(A, \varepsilon)$, kde B značí kruhové okolí bodu A s poloměrem ε.

~~Pro vlastní limitu navíc platí~~

Pokud $A \notin \mathbb{R}$, tedy $A \in \{-\infty; \infty\}$, mluvíme o limitě nevlastní.

musí ty limity být definované

2. Z aritmetiky limit víme, že, pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$. Tedy $\lim_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) = A + (-B) = A - B$.

Víme tedy, že $A - B = 0 \to A = B$. Potom $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 \iff A, B \neq 0$ u $\frac{A}{B}$

Pokud by B bylo 0, není podíl limit definován.

Tedy obecně neplatí. Avšak pro $B \neq 0$ ano, díky aritmetice limit.

Ale limita podílu pořád může být definována, třeba $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, i když $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

"a_n" "b_n"

Kód studenta 47

3

4 MA2 – Metrický prostor (3 body)

Dokažte, že (M, d) je metrický prostor pokud M je neprázdná množina, f je funkce z M do kladných reálných čísel a d je definována jako

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max(f(x), f(y)) & x \neq y. \end{cases}$$

Aby $d: M \times M \to \mathbb{R}$ byla metrický prostor, musí splňovat:

1. $d(x,x) = 0 \quad \forall x \in M$, $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$ (symetrie)
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$ (Δ nerovnost)

1. splňuje z definice.
2. je také splněn, protože $d(x,y) = \max(f(x), f(y)) = \max(f(y), f(x)) = d(y,x)$.
3. má 6 případů:

$$\quad\quad\quad\quad d(x,z) \quad d(x,y) \quad d(y,z)$$

$f(x) > f(y) > f(z) \to f(x) \leq f(x) + f(y)$ ✓ protože $f: M \to \mathbb{R}^+$ tedy pravá strana jen roste
$f(x) > f(z) > f(y) \to f(x) \leq f(x) + f(z)$ ✓
$f(y) > f(x) > f(z) \to f(x) \leq f(y) + f(y)$ ✓
$f(y) > f(z) > f(x) \to f(z) \leq f(y) + f(y)$ ✓
$f(z) > f(x) > f(y) \to f(z) \leq f(x) + f(z)$ ✓
$f(z) > f(y) > f(x) \to f(z) \leq f(y) + f(z)$ ✓

Všechny splňují Δ-nerovnost.

A tedy je d metrikou M.

A (M, d) je metrický prostor.

Kód studenta 47

3 body

5 MA3 – Tečná rovina (3 body)

Najděte bod, kde je tečná rovina funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$ vodorovná. Jaka je rovnice této tečné roviny ?

$\cancel{f'(x,y) = 2x}$ $\quad \frac{\delta f}{\delta x} = 2x + 2y - 6$ ✓ $\quad D_f = (2x + 2y - 6,\ 4y + 2x - 8)$ ✓

$\frac{\delta f}{\delta y} = 4y + 2x - 8$ ✓ gradient

~~$T_f\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = D_f(a).(x - a_1) + D_f(a)(y - a_2),\ a \in \mathbb{R}^2\}$ tečna f v bodě~~ a.

~~$T_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_i D_f(a)_i \cdot (x_i - a_i) = f(a)\}$~~

~~Aby byla vodorovná, musí být $y = 0$, směrnice v $y = 0$ a v $x = 0$~~

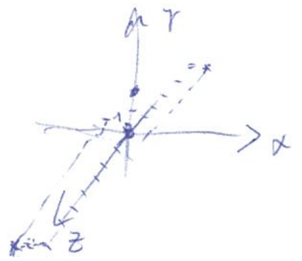
~~Tedy $4y + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4 - 2y$~~

~~Pro bod $a = [0; 2]$ dostávám $D_f(a) = (-2, 0)$.~~

~~Poté rovnice tečny... $-2(x) + 0(y - 2) = 0$~~

~~$-2x = 0$~~

~~$x = 0$~~



~~$2x + 2y - 6 = 0$~~

~~$4y + 2x - 8 = 0$~~

~~Aby byla vodorovná,~~

rce roviny : $ax + by + cz + d = 0$

$\hookrightarrow z = -\frac{ax + by + d}{c}$

vodorovná rovina : $z = c$ pro nějaké c.

Aby byla tečna vodorovná, musí být v daném bodě lokální maximum nebo minimum.

Hessova matice

Extrém je v bodě $\left.\begin{matrix} 2x + 2y - 6 = 0 \\ 4y + 2x - 8 = 0 \end{matrix}\right\}$ $y = 1 \wedge x = 2$ $\quad f(2,1) = -10$. $\quad a = [2; 1]$

$H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det(H_f^{11}(a)) = 2$ $\quad \det(H_f^{22}(a)) = 4$.

H je v bodě $[2; 1]$ pozitivně definitní a tedy je bod $a = [2; 1]$ lokálním minimem.

Protože funkce f má definiční obor $= \mathbb{R}^2$, vidíme, že její hodnoty v limitách pro $x \to \infty$ a $y \to \infty$ jsou všechny rovny $+\infty$. (na krajích definičního oboru)

Gradient žádné další podezřelé body neodhalil a tedy je $[2;1]$ globálním minimem a jediným extrémem funkce f (vlastním).

Funkce f má proto pouze 1 vodorovnou tečnou rovinu a to právě v bodě $[2;1]$.

Tečna má předpis $f'(\vec{x}) - f(a) = \sum_i D_f(a)_i (x_i - a_i)$

Tedy: $z + 10 = 0 \cdot (x-2) + 0 \cdot (y-1)$

$z = -10$

$f'(\vec{x}) = -10 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$T_f(2;1) = \{ (x, y, -10)^T \mid x, y \in \mathbb{R} \}$.

Ano, ale je to nadbytek. Napíšu Vám správné řešení: tečná rovina $z(x,y)$ v bodě (a,b) ke grafu funkce $f(x,y)$ je $z(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Je vodorovná $\Longleftrightarrow$ $z(x,y)$ je konstantní funkce $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, atd.

1 BOD

Kód studenta 47

6 Nezávislé jevy (3 body)

1. Co znamená, že dva náhodné jevy jsou nezávislé ? Definujte.
2. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Zkonstruujme náhodný graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že pro každou dvojici vrcholů i a j takových, že $1 \leq i < j \leq n$, si hodíme férovou mincí (na níž padne hlava s pravděpodobností přesně $1/2$) a padne-li na ní hlava, přidáme do G hranu ij. Nechť J_i je jev, že vrchol i má stupeň přesně 1. Rozhodněte, pro která n jsou jevy J_1 a J_2 nezávislé a odpověď zdůvodněte.

1. Jevy X a Y jsou nezávislé, pokud $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$ (nezávislost po dvou). ✓

2. $P(\text{hrana mezi } i \text{ a } j) = 1/2$ ~~$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ protože ...~~

$P(J_1) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ✓ ... 1 hrana na lib. místě

$P(J_2) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ✓

$P(\text{hrana mezi } v_1 \text{ a } v_2) = \frac{1}{2}$.

~~$P(J_1 \cap J_2) = P(J_2 | J_1) \cdot P(J_1) = \frac{1}{n} \cdot \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \binom{n-2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)$~~

~~Chceme, aby $P(J_1 \cap J_2) = P(J_1) P(J_2)$.~~

~~$\frac{1}{n}(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left((n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2$~~ $n > 1$

~~$\frac{1}{n} = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$~~

~~$\frac{n \cdot (n-1)}{2^{n-1}} - 1 = 0$~~

~~$n^2 - n - 2^{n-1} = 0$~~

~~$n = 1 \to -1 = 0$ ↯~~
~~$n = 2 \to 0 = 0$ ✓~~
~~$n = 3 \to 9 - 3 - 4 \neq 0$ x~~
~~$n = 4 \to 12 - 8 \neq 0$ x~~
~~$n = 5 \to 20 - 16 \neq 0$ x~~
~~$n = 6 \to 30 - 32 \neq 0$ x~~

~~zlom $\to$, $2^{n-1} > n^2 - n$.~~

~~Tedy už nikdy rovnost nenastane.~~

~~J_1 a J_2 jsou nezávislé jen pro $n = 2$.~~

$$P(J_1 \cap J_2) = P(J_2 | J_1) \cdot P(J_1) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n} + \binom{n-2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$

$P(J_1)$ trefil mě $\frac{1}{n-1}$? $\frac{n-2}{n-1}$ trefím jen 1 jiného

Chci $P(J_1) \cdot P(J_2) = P(J_1 \cap J_2)$ $n \geq 2$

$$\left((n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{n} + (n-2)$$

$$\frac{n\cdot(n-1) - (n-2)\,2^{n-1}}{2^{n-1}} = 0$$

kdyby

kdyby $n=2$, $2-0 \neq 0$

$$\cancel{n^2 - n - n\left(2^{n-1}\right) + 2^n = 0}$$

$$2^{n-1} = \frac{n\cdot(n-1)}{n-2}$$

$$(n-1)(\log_2 2) = \log_2\left(\frac{n\cdot(n-1)}{n-2}\right)$$

$$n-1 = \log_2 n + \log_2(n-1) - \log_2(n-2)$$

n tedy nemůže 2. $n \geq 3$

$n=3$ ... $2 = \log_2 3 + 1 - 0$ × $<$

$n=4$ ... $3 = 2 + \log_2 3 - 1$ × $>$

Tedy hledané n je mezi 3 a $4 \notin \mathbb{N}$.

Viz příloha B.

Kód studenta 47

Příloha B

6 Nezávislé jevy

Chci tedy

$$\left((n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \frac{(n-1)}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} \qquad n \geq 2$$

$$(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{n} + (n-2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\frac{(n-1)}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} - \frac{(n-2)}{2^{n-2}} = 0$$

$$(n-1) - \frac{2^{n-1}}{n} - 2.(n-2) = 0$$

$$n(n-1) - 2^{n-1} - 2(n-2) = 0$$

$$n^2 - 3n + 4 = 2^{n-1}$$

$n^2 \geq 2^{n-1}$

$2\log_2 n \geq n-1$

pro $n < 8 \Rightarrow$ stačí ověřit $n \in \{2; \dots; 8\}$

$n=2 \dots 4-6+4=2$ ✓ rozdíl 0

$n=3 \dots 9-9+4=4$ X rozdíl 1

$n=4 \dots 16-12+4=8$ ✓ rozdíl 0

$n=5 \dots 25-15+4=16$ X rozdíl 2

$n=6 \dots 36-18+4=32$ X rozdíl 10

⋮

další už nemá smysl počítat. Exponenciála roste rychleji a funkce se již neprotnou.

J_1 a J_2 jsou nezávislé pro $n \in \{2; 4\}$.

ALE OVĚŘENÍ PRO $n=2$ NEMŮŽE MÍT, PROTOŽE $J_1 = J_2 = J_1 \cap J_2$ A $P(J_1) = \frac{1}{2}$

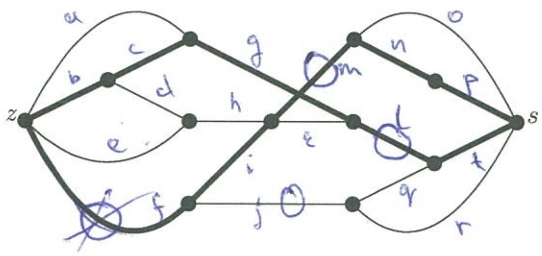
2

Kód studenta 47

7 Grafy (3 body)

Z grafu G na obrázku vytvoříme síť tak, že všechny hrany orientujeme zleva doprava a přidělíme jim kapacitu 1.

Tok mezi z a s je vyznačen silnými hranami a využívá plnou kapacitu vyznačených hran. Kapacity ostatních hran nejsou využity vůbec.



ok 1. Rozhodněte, zdali jde o maximální tok. Pokud vyznačený tok není maximální, nějaký maximální tok nalezněte a zdůvodněte jeho maximalitu.

/ 2. Jaké jsou důsledky hodnoty maximálního toku pro hranovou souvislost grafu ?

~~Jedná se o maximální tok, protože tok velikosti 2 odpovídá velikosti minimálního řezu (zvýrazněn)~~

1. Minimální řez (zvýrazněn) má velikost 3. Tedy se ~~max~~ tok dá zlepšit. Pro přehlednost jsem pojmenoval hrany.

Maximální tok má 3 nasycené cesty: - b - c - g - l - t
- e - h - m - n - p
- f - j - r

} jen příklad, max. toků je více.

Každá cesta má kapacitu 1. Celkový tok je tedy 3, což odpovídá minimálnímu řezu a tok je tedy ~~maximální~~.

2. - stejná hodnota pro minimální řez a tedy i hranovou souvislost grafu.

Není pravda hodnota max. toku je horní mez na k-souvislost.

3

Kód studenta 47

8 Kombinatorika (3 body)

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí $f(n)$ počet 15-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, a nechť $g(n)$ značí počet zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové.

1. Vyjádřete $f(n)$ a $g(n)$.

2. Rozhodněte, která z následujících možností platí:

a – $\exists n_0 : \forall n > n_o : f(n) > g(n)$

b – $\exists n_0 : \forall n > n_o : g(n) > f(n)$

c – žádné n_0 vyhovující předchozím dvěma podmínkám neexistuje.

1. $f(n) = \binom{n}{15} = \frac{n!}{15!(n-15!)} = \frac{n.(n-1).\ldots(n-15+1)}{15!}$

$g(n) = 3^n$ (pro každý prvek máme 3 možnosti)

2. a) Ne. ~~f(n)~~ $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \rightarrow \binom{n}{15} < 2^n < 3^n$

b) Ano. Stejný důvod. ~~[illegible]~~

c) Ne. Stejný důvod.

Kód studenta 47

0b

9 Logika (3 body)

Mějme následující formule φ_1, φ_2 jazyka $L = \langle 0, |\ |, f, -, < \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\ |, f$ jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol

$$\varphi_1: \quad (\forall\varepsilon)(\forall u)(0 < \varepsilon \rightarrow (\exists\delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x-u| < \delta \rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon))),$$
$$\varphi_2: \quad (\exists u)(\exists\varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall\delta)(0 < \delta \rightarrow (\exists x)(|x-u| < \delta \wedge \neg(|f(x) - f(u)| < \varepsilon)))).$$

1. Uveďte definice pro predikátovou logiku, kdy formule φ *platí ve struktuře* $\mathcal{A}$, kdy φ *(logicky) platí*, a kdy je φ *nezávislá*.
2. Platí formule φ_1, φ_2 ve struktuře $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, |\ |, f, -, < \rangle$ jazyka L, kde $0, |\ |, -, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$ a $f(0) = 0$, $f(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$? Uveďte zdůvodnění.
3. Je formule $\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$ nezávislá ? Uveďte zdůvodnění.

1. φ platí ve struktuře A, pokud ~~existuje model~~ struktury, ~~pro který formule platí~~,

φ (logicky) platí, pokud je dokazatelná. (to není definice, ale věta o úplnosti.)

φ je nezávislá, ~~pokud platí ve všech modelech~~.

2. $f(x) = \pm 1 \ \forall x$. První formule má platit $\forall \varepsilon$ a $\forall u$.

~~zvolme tedy $u = 1$ a $\varepsilon = 0.5$. Pak chci, aby $\exists \delta > 0$:~~

~~$|x-u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon$.~~

$(f(x) = 1 \Leftrightarrow x > 0) \wedge (f(x) = 1 \Leftrightarrow x < 0)$

Pak ale, pokud zvolím $\delta = \frac{|u-0|}{2}$, tak má x budou vždy stejného znaménka jako u a tedy

$$|f(x) - f(u)| = \begin{cases} u>0: & |1-1| = 0 \\ u<0: & |-1-(-1)| = 0 \end{cases}$$

A protože $\varepsilon > 0$, ~~φ_1 platí v A~~.

φ_2 ~~je~~ negací φ_1 a tedy v A ~~neplatí~~.

↳ není, pouze je logicky ekvivalentní!

3. $\psi = \varphi_1 \Leftrightarrow \neg\varphi_2$ → logicky ekvivalentní, což je třeba zdůvodnit.

φ_2 ~~je~~ negace φ_1. Negace má přednost před $\Leftrightarrow$.

$\psi: \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1$ $\qquad A \Leftrightarrow B = A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

$\psi: \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1$

$\psi: (\neg\varphi_1 \vee \varphi_1) \wedge (\neg\varphi_1 \vee \varphi_1)$

φ_1 může nabýt T (pravda) nebo F (nepravda).

φ_1	T	F
ψ	$T \wedge T$ = T	$T \wedge T$ = T

ψ je tedy vždy pravdivá, ať je model jakýkoliv a ~~je tedy nezávislá~~.