SLD-derivace

Petr Štěpánek

S využitím materiálu Krysztofa R. Apta

2006

Při systematickém studiu SLD-derivací je užitečné využít rezultanty a přiřadit je k SLD-derivačním krokům a posloupnostem takových kroků v SLD-derivacích.

Uvažujme SLD-derivační krok $Q =\theta\Rightarrow Q_1$ a položme si otázku, co vlastně bylo dokázáno provedením tohoto kroku. Odpověď je možné vyjádřit ve tvaru rezultanty $Q\theta \leftarrow Q_1$. Toto tvrzení je motivací ke studiu vztahu rezultant a SLD-derivací. Dokážeme ho později až budeme mít definovanou sémantiku logických programů a větu o korektnosti SLD-rezoluce.

Definice. (SLD-rezultantní kroky)

(i) Je-li dán SLD-derivační krok $Q =\theta\Rightarrow Q_1$, říkáme, že rezultanta $Q\theta \leftarrow Q_1$ je přiřazena k tomuto derivačnímu kroku.

(ii) Uvažujme rezultantu

$$Q \leftarrow \mathbf{A}, B, \mathbf{C} \qquad (1)$$

a klauzulí c .

Nechť $H \leftarrow \mathbf{B}$ je varianta klauzule c , která je disjunktní v proměnných s rezultantnou (1) a nechť θ je mgu B a H . Potom rezultantu

$$(Q \leftarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta \qquad (2)$$

nazveme SLD-rezolventou rezultanty (1) a c vzhledem k B a mgu θ . Atom B nazýváme vybraným atomem rezultanty (1).

Píšeme $(Q \leftarrow \mathbf{A}, B, \mathbf{C}) = \theta/c \Rightarrow (Q \leftarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$ (3)

a nazýváme (3) SLD-rezultantním krokem. $H \leftarrow \mathbf{B}$ je pro tento krok vstupní klauzulí . Pokud klauzule c není v tomto kontextu důležitá, nemusíme ji ve výrazu (3) uvádět.

Definice. (Rezultanty přiřazené k SLD-derivacím)

Mějme SLD-derivaci

$$Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ \ldots\ Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \ \ldots \qquad (1)$$

Nechť pro $i \geq 0$

$R_i \equiv Q_0 = \theta_1\theta_2 \ldots \theta_i \leftarrow Q_i$ Říkáme, že R_i je *rezultanta stupně* i SLD-derivace (1) .

Příklad. (SLD-derivace programu *SUMA*)

Úspěšná SLD-derivace programu *SUMA* a dotazu $suma(s^2(0), s^2(0), z))$ má tyto čtyři rezultantny:

stupeň 0: $suma(s^2(0), s^2(0), z)) \leftarrow suma(s^2(0), s^2(0), z))$
stupeň 1: $suma(s^2(0), s^2(0), s(z_1)) \leftarrow suma(s^2(0), s(0), z_1))$
stupeň 2: $suma(s^2(0), s^2(0), s^2(z_2)) \leftarrow suma(s^2(0), 0, z_2)$
stupeň 3: $suma(s^2(0), s^2(0), s^4(0)) \leftarrow \square$

V obecném případě derivace (1) je $R_0 \equiv Q_0 \leftarrow Q_0$, R_1 je rezultanta přiřazená k derivačnímu kroku $Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1$ a je-li $Q_n = \square$, potom $R_n = Q_0\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n \leftarrow \square$.

Intuitivně řečeno, rezultanta R_i popisuje, co je dokázáno po provedení i SLD-derivačních kroků při zachování počátečního dotazu Q_0 a efektů použitých mgu.

Na začátku dostáváme tautologii $Q_0 \leftarrow Q_0$ a je-li $Q_n = \square$, potom je dokázána instance $Q_0\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$.

Při důkazech formálních vlastností SLD-derivací je často výhodnější pracovat s rezultantami přiřazenými těmto derivacím.

Potom je výhodné následující lemma, které také dává nahlédnout na roli standardizace proměnných.

Lemma. (Disjunktnost)

Mějme program P a dotaz Q a SLD-derivaci $P \cup \{Q\}$ s posloupností $d_1, \ldots, d_{n+1}, \ldots$ použitých vstupních klauzulí a s odpovídající posloupností rezultant $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$

Potom pro $i \geq 0$ platí $Var(R_i) \cap Var(d_{i+1}) = 0$.

Důkaz. Podle definice standardizace proměnných stačí indukcí podle i dokázat

$$Var(R_i) \subseteq Var(Q) \cup \bigcup_{j=1}^{i} (Var(\theta_j) \cup Var(d_j)) \qquad (2)$$

kde $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots$ jsou použité substituce.

Pro $i = 0$ je $Var(R_0) = Var(Q)$ a není co dokazovat.

Předpokládejme, že (2) platí pro nějaké $i \geq 0$.

Je-li $R_i = Q' \leftarrow \mathbf{A}, B, \mathbf{C}$

kde B je vybraný atom a $d_{i+1} = H \leftarrow \mathbf{B}$,

potom $R_{i+1} = (Q' \leftarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta_{i+1}$

Odtud

$$
\begin{aligned}
& Var(R_{i+1}) \\
\subseteq\ & Var(R_i) \cup Var(\theta_{i+1}) \cup Var(d_{i+1}) \\
\subseteq\ & \{\text{indukční hypotéza } (2)\} \\
\subseteq\ & Var(Q) \cup \bigcup_{j=1}^{i+1} (Var(\theta_j) \cup Var(d_j))
\end{aligned}
$$

Poznámka. Důkaz lemmatu o disjunktnosti naznačuje, že pro analýzu SLD-derivací stačí tvrzení tohoto lemmatu místo podmínky standardizace proměnných. Tím bychom získali silnější verze odvozených důsledků, ale za cenu komplikovanějších důkazů. Takovým způsobem nebudeme lemma o disjunktnosti používat.

Lemma o disjunktnosti však dovoluje ke každé SLD-derivaci (1) přiřadit derivaci rezultant

$$R_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow R_1 \ \ldots\ R_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow R_{n+1} \ \ldots$$

tak, že každá rezultanta R_{i+1} vznikne ze své předchůdkyně R_i provedením jednoho rezultantního kroku

$$R_i = \theta_{i+1}/c_{i+1} \Rightarrow R_{i+1}$$

který se provádí stejným způsobem jako odpovídající SLD-derivační krok

$$Q_i = \theta_{i+1}/c_{i+1} \Rightarrow Q_{i+1} \qquad (3)$$

v derivaci (1). To znamená, že v dotazu Q_i na pravé straně rezultanty R_i vybereme stejný atom jako v dotazu Q_i v SLD-rezolučním kroku (3) a použijeme stejnou vstupní klauzuli a stejnou mgu.

Nakonec dokážeme důležitou vlastnost rezultant a rezolvent (dotazů), která ukazuje, že za určitých předpokladů se vlastnost "být instancí" přenáší - propaguje - odvozováním rezultant.

Lemma. (Propagace)

Předpokládejme, že $R = \theta/c \Rightarrow R_1$ a $R' = \theta'/c \Rightarrow R_1'$ jsou dva rezultantní kroky takové, že

- R je instancí R',
- v obou rezultantách R a R' jsou vybrány atomy na stejných pozicích.

Potom také R_1 je instancí R_1'.

Důkaz. Nechť c_1 a c_1' jsou odpovídající klauzule použité ke konstrukci rezultant R_1 a R_1'. Podle předpokladu je c_1 variantou c_1' a

$$Var(R) \cap Var(c_1) = 0 \qquad (1)$$

Přijmeme ještě dva pomocné předpoklady

$$Var(R') \cap Var(c_1) = Var(R) \cap Var(c_1') = 0 \qquad (2)$$

Pro nějakou substituci η, $Var(\eta) \subseteq Var(R_1, R_1')$ platí $R = R'\eta$ a pro nějaké přejmenování γ, $Var(\gamma) \subseteq Var(c_1, c_1')$ platí $c_1 = c_1'\gamma$.

Nechť

$R \;=\; Q \leftarrow \mathbf{A}, B, \mathbf{C}$

$R' = Q' \leftarrow \mathbf{A}', B', \mathbf{C}'$

$c_1 = H \leftarrow \mathbf{B}$

$c_1' = H' \leftarrow \mathbf{B}'$

Potom

$R_1 = (Q \leftarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$

$R_1' = (Q' \leftarrow \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')\theta'$

kde θ je mgu B a H a θ' je mgu B' a H'.

Podle (1) a (2) platí $Var(\eta) \cap Var(\gamma) = 0$, takže sjednocení $\eta \cup \gamma$ je také substituce. Tedy

$(Q' \leftarrow \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')(\eta \cup \gamma) = Q'\eta \leftarrow \mathbf{A}'\eta, \mathbf{B}'\gamma, \mathbf{C}'\eta = Q \leftarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$

odkud

$$R_1 = (Q' \leftarrow \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')(\eta \cup \gamma)\theta \qquad (3)$$

Použijeme-li (1) a dodatečný předpoklad (2) dostáváme

$B'(\eta \cup \gamma) = B'\eta = B$

$H'(\eta \cup \gamma) = H'\gamma = H$

To znamená, že $(\eta \cup \gamma)\theta$ unifikuje B' a H'. Protože θ' je mgu těchto atomů, pro nějakou substituci δ platí $(\eta \cup \gamma)\theta = \theta'\delta$ a podle (3) platí $R_1 = R_1'\delta$ a R_1 je instancí R_1'.

K dokončení důkazu je třeba ukázat, že dodatečný předpoklad (2) je možné vynechat.

K tomu vezměme variantu R'' rezultanty R takovou, že

$$Var(R'') \cap Var(c_1, c_1') = 0$$

a variantu c_1'' klauzule c takovou, že

$$Var(c_1'') \cap Var(R, R', R'') = 0$$

Potom s použitím c_1'' jako vstupní klauzule při výběru atomu v R'' na stejné pozici jako v R můžeme sestrojit rezolventu R_1'' takovou, že při dvojím opakování předchozího důkazu (bez potřeby využití (2)) ukážeme, že R_1 je instance R_1'' a R_1'' je instance R_1'.

Lemma o propagaci má základní význam, budeme ho používat v důkazech všech následujících vět o SLD-derivacích. Technika využívající rezultanty je ve většině případů výhodnější.

Bezprostředním důsledkem lemmatu o propagaci je následující lemma o SLD-derivacich.

Důsledek. (Propagace v SLD-derivacích)

Mějme dva SLD-derivační kroky

.

$$Q = \theta/c \Rightarrow Q_1 \quad \text{a} \quad Q' = \theta'/c = Q_1'$$

takové, že

- Q je instancí Q_1
- atomy na stejných pozicích byly vybrány v Q a Q'.

Potom Q_1 je instancí Q_1'.

Jaké máme stupně volnosti při výpočtech logických programů ?

Podle definice SLD-derivace máme v každém SLD-derivačním kroku čtyři volby:

(A) volbu vybraného atomu z daného dotazu
(B) volbu programové klauzule použitelné k vybranému atomu
(C) volbu přejmenování programové klauzule
(D) volbu nejobecnější unifikace

Probereme důsledky těchto voleb. Nejprve (C) a (D) .

Nejdříve si povšimneme vztahů mezi SLD-derivacemi. Následující definice dovoluje porovnání dvou SLD-derivací z nichž dotazy jedné jsou instancemi dotazů druhé.

Definice. (Lift derivace)

Mějme SLD-derivaci

$\xi := Q_0 = \theta_1/c_1 \Rightarrow Q_1 \ldots Q_n = \theta_{n+1}/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \ldots$

Říkáme, že SLD-derivace

$\xi' := Q_0' = \theta_1'/c_1 \Rightarrow Q_1' \ldots Q_n' = \theta_{n+1}'/c_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1}' \ldots$

je *lift* (*pozvednutí*) derivace ξ jestliže platí

- ξ je stejné délky jako ξ'
- Q_0 je instancí Q_0'
- pro $i \geq 0$ je v Q_i a Q_i' vybrán atom na stejné pozici

Poznámka. Uvedená definice má smysl, protože v každém kroku je v obou derivacích použita stejná klauzule, takže odpovídající rezolventy mají stejný počet atomů.

Příklad.

Uvažujme program *SUMA* a tuto úspěšnou SLD-derivaci

$suma(x,y,z) = \theta_1/2 \Rightarrow suma(x_1,y_!,z_!) = \theta_2/2 \Rightarrow suma(x_2,y_2,z_2) = \theta_3/1 \Rightarrow \square$

kde $\theta_3 = \{x_2/x\ ,y_2/0\ ,\ z_2/x\}$. (1)

Derivace (1) je liftem derivace

$suma(s(s(0)),\ s(s(0)),\ z) = \theta_1/2 \Rightarrow suma(s(s(0)),\ s(0),\ z_1) = \theta_2/2 \Rightarrow$
$suma(s(s(0)),\ 0,\ z_2) = \theta_3\ /1 \Rightarrow \square$ (2)

protože

- derivace (1) a (2) mají stejnou délku
- $suma(s(s(0)),\ s(s(0)),\ z)$ je instancí atomu $suma(x,y,z)$
- v obou derivacích je na každém kroku vybrán atom na stejné pozici

Přitom derivace (1) není liftem derivace

$suma(x,y,z) = \theta_1/2 \Rightarrow suma(x_1,y_!,z_!) = \theta_2/2 \Rightarrow suma(x_2,y_2,z_2) = \theta_3/2 \Rightarrow\ ...$

protože obě derivace mají různou délku a ve třetím kroku jsou použity různé klauzule.

Věta. (Propagace instancí)

Uvažujme SLD-derivaci ξ a její lift ξ' . Potom pro $i \geq 0$, pokud existuje rezultanta R_i stupně i v ξ pak existuje rezultanta R_i' stupně i v ξ' a R_i je instancí R_i' .

Důkaz. Stačí uvažovat odpovídající si derivační kroky rezultant a tvrzení dokážeme indukcí podle i s využitím definice liftu a lemmatu o propagaci.

Větu o propagaci instancí využijeme k analýze párů SLD-derivací, jejichž odpovídající dotazy jsou navzájem svými variantami.

Definice. (Podobné SLD-derivace)

Mějme dvě SLD-derivace

$\xi :=\ Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=>} Q_1 \dots\ Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=>} Q_{n+1} \dots$

$\xi' :=\ Q_0' \overset{\theta_1'/c_1}{=>} Q_1' \dots\ Q_n' \overset{\theta_{n+1}'/c_{n+1}}{=>} Q_{n+1}' \dots$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

- ξ je stejné délky jako ξ'
- Q_0 a Q_0' jsou navzájem svými variantami
- pro $i \geq 0$ je v Q_i a Q_i' vybrán atom na stejné pozici

Poznámka. Stejně jako v případě definice liftu má tato definice smysl, protože v každém kroku je v obou derivacích použita stejná klauzule, takže odpovídající rezolventy mají stejný počet atomů.

Poznámka. Dvě SLD-derivace jsou podobné, jestliže

- jejich počáteční dotazy jsou navzájem svými variantami
- obě derivace mají stejnou délku
- pro každý SLD-derivační krok platí
  - vstupní klauzule jsou navzájem svými variantami
  - vybrány jsou atomy na stejných pozicích

Věta. (Varianty)

Dvě podobné SLD-derivace mají v každém stupni i rezultanty, které jsou navzájem svými variantami.

Důkaz. Podobné SLD-derivace jsou liftem jedna druhé a naopak. Stačí tedy dvakrát použít Větu o propagaci instancí a připomenout si Lemma o variantách termů.

Důsledek. (Varianty vypočtených instancí)

Mějme dvě úspěšné podobné SLD-derivace dotazu Q s vypočtenými odpovědními substitucemi θ a η. Potom odpovědní instance $Q\theta$ a $Q\eta$ jsou navzájem svými variantami.

Důkaz. Důsledek plyne použitím Věty o variantách na poslední rezultany v obou derivacích.

Poznámka. Tento důsledek ukazuje, že volby přejmenování klauzulí z programu a volby nejobecnějších unifikací podle (C) a (D), nemají - až na přejmenování proměnných - žádný vliv na tvrzení dokázané úspěšnou SLD-derivací daného dotazu Q.

Lifting aneb jak sestrojit lifty úspěšných SLD-derivací.

Zatím jsme mluvili o liftech derivací spíš obecně, měli jsme k dispozici jen jeden příklad.

Ale ten ukazuje, že uspěšná derivace instance obecného dotazu má jako lift úspěšnou derivaci tohoto obecného dotazu, kde místo termů z instance jsou jen proměnné.

Začneme skromněji, nejprve budeme konstruovat lift jednoho SLD-derivačního kroku.

Definice. (Lifting v jednom kroku)

Mějme jeden SLD-derivační krok

$$Q = \theta/c\!\Rightarrow Q_1 \qquad (1)$$

Říkáme, že SLD-derivační krok

$$Q' = \theta'/c\!\Rightarrow Q_1' \qquad (2)$$

je lift kroku (1), jestliže platí

- Q je instancí Q'
- v Q a Q' byly vybrány atomy na stejných pozicích
- Q_1 je instancí Q_1'

Situaci zobrazuje následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
Q' \arrow[r, "\theta'/c", Rightarrow] \arrow[d] & Q_1' \arrow[d] \\
Q \arrow[r, "\theta/c", Rightarrow] & Q_1
\end{tikzcd}$$

Šipky vedou od obecnějšího k méně obecnému atomu. V obou derivačních krocích je použita stejná klauzule.

Lemma. (Lifting v jednom kroku)

Mějme SLD-derivační krok $Q\eta = \theta/c\!\Rightarrow Q_1$ a variantu c' klauzule c disjunktní v proměnných s dotazem Q. Potom pro nějakou substituci θ' a atom Q_1' platí

- $Q = \theta'/c'\!\Rightarrow Q_1'$ kde c' je použitá vstupní klauzule
- $Q = \theta'/c'\!\Rightarrow Q_1'$ je lift $Q\eta = \theta/c\!\Rightarrow Q_1$

Důkaz. Nejprve dokážeme následující

Pozorování: Předpokládejme, že A a H jsou dva atomy disjunktní v proměnných, které se unifikují. Potom A se unifikuje s každou variantou H' atomu H, která je disjunktní v proměnných s A.

Důkaz pozorování. Nechť H' splňuje podmínky pozorování. Pro nějaké přejmenování γ, $Dom(\gamma) \subseteq Var(H')$ tedy platí $H = H'\gamma$.

Nechť θ je unifikace A a H. Potom

$$A\gamma\theta = A\theta = H\theta = H'\gamma\theta$$

a A se unifikuje s H'. [konec důkazu pozorování]

Dále, nechť c_1 je variantou c, která je disjunktní v proměnných s Q, $Q\eta$ a $Dom(\eta)$. Podle pozorování

$$Q\eta = \theta_1/c \Rightarrow Q_2 \qquad (3)$$

pro nějakou unifikaci θ_1 a atom Q_2, při použití c_1 jako vstupní klauzule. Předpokládáme také, že atom $A\eta$ byl vybrán v původním kroku a ve (3).

Nechť H je hlava c_1.

Atomy A a H se unifikují, protože podle volby c_1 platí

$$A\eta\theta_1 = H\theta_1 \quad \text{a} \quad H = H\eta$$

tedy opět podle pozorování

$$Q = \theta'/c \Rightarrow Q_1' \qquad (4)$$

pro nějakou unifikaci θ' a dotaz (rezolventu) Q_1', kde ve (4) je c' použitá vstupní klauzule a A je vybraný atom.

Nakonec podle Důsledku pro propagaci instancí v rezolventách dostáváme, že (4) je lift $Q\eta = \theta/c \Rightarrow Q_1$.

Věta. (Lifting)

Ke každé SLD-derivaci ξ pro $P \cup \{Q\eta\}$, existuje SLD-derivace, která je liftem ξ.

Důkaz. SLD-derivaci, která je liftem derivace ξ lze setrojit opakovaným použitím Lemmatu o liftingu v jednom kroku.

Důsledek. (Lifting)

Ke každé úspěšné SLD-derivaci ξ pro $P \cup \{Q\eta\}$ s vypočtenou odpovědní substitucí θ, existuje úspěšná SLD-derivace ξ' pro $P \cup \{Q\}$ s vypočtenou odpovědní substitucí θ', taková, že platí:

- ξ' je liftem ξ a má stejnou délku
- $Q\theta'$ je obecnější než $Q\eta\theta$

Důkaz. Podle Věty o liftingu lze sestrojit lift ξ' derivace ξ. Výsledek potom plyne z Věty o instancích rezultant ξ a ξ', kterou použijeme na poslední rezultantu ξ.