# Logické programy
## Deklarativní interpretace

**Petr Štěpánek**

**S využitím materialu Krysztofa R. Apta**

**2006**



## **Algebry.** (Interpretace termů)

*Algebra* $J$ pro jazyk termů $L$ obsahuje

- Neprázdnou množinu $D$, která se nazývá *doména.* ,
- Pro každý n-ární funkční symbol $f$ jazyka $L$ zobrazení $f_J : D^n \to D$ .

*Ohodnocení proměnných* $\sigma$ je zobrazení, které každé proměnné $x$ přiřazuje hodnotu $\sigma(x)$ z domény $D$.

*Interpretaci* (*hodnoty*) *termů* při ohodnocení proměnných $\sigma$ definujeme obvyklým způsobem..

Říkáme, že term $t$ je *základní* (*ground*) , jestliže neobsahuje proměnné.

- je-li term $t$ proměnná $x$, jeho hodnota je $\sigma(x)\ \varepsilon\ D$,
- je-li $t$ složený term $f(t_1, \dots, t_n)$ jeho hodnota $\sigma(t)$ je . $f_J(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))\ \varepsilon\ D$ .

Pro každou konstantu $c$ platí $\sigma(c) = c_J$ . Hodnoty konstant nezáleží na ohodnocení proměnných.

To také platí pro každý základní term $t$ jeho hodnota $\sigma(t)$ není závislá na ohodnocení proměnných $\sigma$ .

**Příklad.** (Zamýšlené a bizarní algebry)

a) standardní model $N$ (interpretace) přirozených čísel je algebra (struktura) $N = \langle \mathrm{N}, 0_N, +_N, \cdot_N \rangle$ s množinou přirozených čísel N jako doménou a obvyklou interpretací nuly, sčítání a násobení.



b) bizární, ale vyhovující definici algebry, je interpretace jazyka přirozených čísel

$\boldsymbol{C} = \langle \mathbf{C}, 0_c, +_c, \cdot_c \rangle$, kde doménou je množina komplexních čísel, nula je interpretována jako nula v komplexních číslech, sčítání definuje rovnost $c +_c d = c \cdot \pi\, d$ a násobení $c \cdot_c d = c + i\, d$ .

**Definice.** (Interpretace jazyka)

*Interpretace jazyka programů* $L$ obsahuje algebru $J$ s doménou $D$, rozšířenou o interpretaci predikátových symbolů:

ke každému $n$-árnímu predikátovému symbolu $p$ je přiřazena relace $p_I$, která je podmnožinou $D^n$ .

Říkáme, že $I$ je definována nad $J$, $D$ je doménou $I$ a z praktických důvodů pak označujeme zobrazení $f_J$ jako $f_I$.

Sémantika jazyka programů se definuje obvyklým způsobem, jenom formulí je v definici méně.

Nechť $L$ je jazyk programů. Souhrnným názvem *výraz* budeme označovat atomy, dotazy, rezultanty a klauzule definované v jazyce $L$ .

Budeme definovat vztah *pravdivosti* (*splňování*) $I \models_\sigma E$ mezi interpretací $I$ jazyka $L$ , ohodnocením proměnných $\sigma$ v doméně interpretace $I$ a výrazem $E$ . Je-li $I \models_\sigma E$ říkáme, že výraz $E$ je pravdivý v interpretaci $I$ při ohodnocení $\sigma$.

- je-li $p(t_1, \ldots, t_n)$ atom, potom

  $I \models_\sigma p(t_1, \ldots, t_n)$ jestliže $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in p_I$

- je-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dotaz

  $I \models_\sigma A_1, A_2, \ldots, A_n$ jestliže $I \models_\sigma A_i$ , pro všechna $i$ , $1 \leq i \leq n$



- je-li $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ rezultanta, potom

  $I \models_\sigma \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ jestliže $I \models_\sigma \mathbf{A}$ za předpokladu $I \models_\sigma \mathbf{B}$

speciálně, je-li $H \leftarrow \mathbf{B}$ klauzule, potom

$I \models_\sigma H \leftarrow \mathbf{B}$ jestliže $I \models_\sigma H$ za předpokladu $I \models_\sigma \mathbf{B}$

a pro jednotkovou klauzuli $H \leftarrow$

$I \models_\sigma H \leftarrow$ jestliže $I \models_\sigma H$

Říkáme, že výraz $E$ je pravdivý v interpretaci $I$ , je-li pravdivý při všech ohodnoceních proměnných. Přitom prázdný dotaz □ je pravdivý ve všech interpretacích.

Pokud výraz $E$ není pravdivý v $I$ , píšeme $I \not\models E$ .

jestliže

Poznámka. Je-li výraz $E$ základní (bez proměnných), pak pro každou interpretaci $I$ a libovolná dvě ohodnocení $\sigma, \tau$ platí

$$I \models_\sigma E \quad \text{právě když} \quad I \models_\tau E$$

odtud plyne, že základní výraz $E$ je pravdivý v interpretaci $I$, je-li pravdivý při alespoň jednom ohodnocení.

**Definice.** (Univerzální a existenční uzávěr)

Je-li $E$ výraz, zavedeme pojem univerzálního uzávěru $\forall E$ a existenčního uzávěru $\exists E$, které budeme používat jen při sémantické analýze programů .

Jejich sémantiku definujeme takto

$I \models \forall E$ jestliže platí $I \models_\sigma E$ pro všechna ohodnocení $\sigma$ ,

$I \models \exists E$ jestliže platí $I \models_\sigma E$ pro alespoň jedno $\sigma$ .

Pro každý výraz $E$ platí $I \models \forall E$ právě když $I \models E$

používat



**Definice.** (Modely)

Je-li $S$ množina výrazů (nebo jejich uzávěrů), říkáme, že interpretace $I$ je model $S$, jestliže všechny výrazy z $S$ jsou pravdivé v $I$ .

Speciálně, $I$ je model programu $P$ jestliže všechny klauzule programu $P$ jsou pravdivé v $I$ .

**Definice.** (Sémantický důsledek, sémantická ekvivalence)

Jsou-li dány dvě množiny výrazů (nebo jejich uzávěrů) $S$ a $T$ stejného, jazyka

(i) říkáme, že $T$ je *sémantický důsledek* $S$ nebo, že $S$ *sémanticky implikuje* $T$ a píšeme $S \models T$ , jestliže každý model $S$ je také modelem $T$ . Pokud některá množina sestává z jediného prvku, vynecháváme závorky { } a zmíněnou množinu nahradíme tímto prvkem .

(ii) říkáme, že $S$ a $T$ jsou *sémanticky ekvivalentní*, jestliže současně platí $S \models T$ a $T \models S$. Jinými slovy $S$ a $T$ jsou sémanticky ekvivalentní, právě když mají stejné modely.

**Lemma.**

Jsou-li $E$, $F$ výrazy, $S$, $T$, $U$ množiny výrazů a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ dotazy, potom platí

(i) $E \models E\theta$ pro všechny substituce $\theta$

(ii) $E\theta \models \exists E$ pro všechny substituce $\theta$

(iii) jsou-li $E$ a $F$ variantami, potom $E \models F$ a $F \models E$

(iv) $S \cup \{E\} \models E$

(v) $S \models T$ a $T \models U$ implikuje $S \models U$

(vi) je-li $E \models F$, potom $S \models E$ implikuje $S \models F$



(vii) je-li $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$, potom
$S \models \mathbf{A}, \mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $S \models \mathbf{C}, \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{C}, \mathbf{B}$ platí pro každé $\mathbf{C}$,

(viii) je-li $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$ a $S \models \mathbf{B} \leftarrow \mathbf{C}$, potom $S \models \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{C}$.

Označení.

Je-li dán jazyk $L$, výraz $E$ a množina výrazů $S$ jazyka $L$,

(i) množinu všech instancí výrazu $E$ označujeme *inst*($E$), podobně množinu instancí všech výrazů z množiny $S$ označíme *inst*($S$),

(ii) množinu všech základních (ground) instancí výrazu $E$ (tedy instancí, které neobsahují proměnné) označujeme *ground*($E$) a množinu všech základních instancí všech výrazů z množiny $S$ označíme *ground*($S$).

## Korektnost SLD-rezoluce.

**Lemma.** (Rezultanty)

(i) Nechť $Q = \theta/c \Rightarrow Q_1$ je SLD-derivační krok a $r$ je odpovídající rezultanta. Potom

$$c \models r$$

(ii) Mějme SLD-derivaci $P \cup \{Q\}$ s posloupností $R_0, \ldots, R_n, \ldots$ odpovídajících rezultant. Potom pro každé $i \geq 0$ platí

$$P \models R_i$$

Důkaz. Předpokládejme, že $Q := \mathbf{A}, B, \mathbf{C}$, kde $B$ je vybraný atom z $Q$. Předpokládejme, že $H \leftarrow \mathbf{B}$ je použitá vstupní klauzule. Potom

$$Q_1 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta \quad \text{a} \quad r = (\mathbf{A}, B, \mathbf{C})\theta \leftarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$$



Nyní $c \models H\theta \leftarrow \mathbf{B}\theta$ a také $c \models B\theta \leftarrow \mathbf{B}\theta$, protože $\theta$ unifikuje $H$ a $B$.

K oběma stranám druhé klauzule můžeme přidat konjunkce $\mathbf{A}\theta$ a $\mathbf{C}\theta$.

Dostáváme

$$c \models (\mathbf{A}, B, \mathbf{C})\theta \leftarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\theta$$

tedy $c \models r$.

(ii) Předpokládejme, že

$$Q \equiv Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1 \ldots \; Q_n = \theta_{n+1} \Rightarrow Q_{n+1} \ldots$$

je uvažovaná SLD-derivace. Tvrzení dokazujeme indukcí.

Pro $i = 0$ je rezolventa $R_0$ tautologií, je pravdivá i bez předpokladu $c$. Případ $i = 1$ byl dokázán v (i) protože $R_1$ je rezultanta odpovídající rezolučnímu kroku $Q_0 = \theta_1 \Rightarrow Q_1$.

Indukční krok. Předpokládáme, že platí $P \models R_i$ pro rezultantu stupně $i$, (a rezultanty nižších stupňů). K rezultantě $R_{i+1}$ vede $i+1$ rezoluční krok $Q_i \overset{\theta_{n+1}}{\Longrightarrow} Q_{i+1}$.

Tomuto rezolučnímu kroku je přiřazena (malá) rezultanta

$$r_i = Q_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \qquad (1)$$

Přitom podle definice rezultanty stupně $i$ platí

$$R_i = Q_0\,\theta_1 \ldots \theta_i \leftarrow Q_i$$

odkud

$$R_i\,\theta_{i+1} = Q_0\,\theta_1 \ldots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_i\theta_{i+1} \qquad (2)$$

a podle definice rezultanty stupně $i+1$ je

$$R_{i+1} = Q_0\theta_1 \ldots \theta_i\theta_{i+1} \leftarrow Q_{i+1} \qquad (3)$$

protože $P \models r_i$ podle (i) a z indukčního předpokladu také $P \models R_i$, je i implikace (2) sémantickým důsledkem programu $P$. Složením implikací (1) a (2) dostaneme rezultantu (3), pro kterou nakonec platí $P \models R_{i+1}$.



**Věta.** (Korektnost SLD-rezoluce)

Předpokládejme, že exisuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$ s vypočtenou odpovědní substitucí $\theta$. Potom $P \models Q\theta$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\theta_1, \ldots, \theta_n$ je posloupnost použitých mgu. Podle lemmatu o rezultantách, pro poslední rezultantu dané SLD-derivace platí $P \models Q\theta_1 \ldots \theta_n \leftarrow \square$. A vypočtená odpovědní substituce $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_n \mid Var(Q)$, to znamená, že jsme dokázali $P \models Q\theta$.

**Důsledek.**

Předpokládejme, že existuje úspěšná SLD-derivace $P \cup \{Q\}$. Potom platí $P \models \exists Q$.

# Úplnost SLD-rezoluce.

**Definice.** (Korektní instance)

Předpokládejme, že $P \models Q\theta$ . Potom $\theta \mid Var(Q)$ nazýváme *korektní odpovědní substituce* pro dotaz $Q$ a $Q\theta$ nazýváme *korektní instance*.

Korektní instance nemusí být nutně vypočtená, intuitivně spíš odpovídá “uhodnutému” řešení.

**Věta.** (Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce)

Nechť $P \models Q\theta$ . Potom pro každé výběrové pravidlo **R** existuje úspěšná SLD-derivace pro $P \cup \{Q\}$ podle **R** s vypočtenou odpovědní substitucí $\eta$ taková, že $Q\eta$ je obecnější než $Q\theta$ .

Bez důkazu.



Silná forma věty o úplnosti SLD-rezoluce ukazuje, že nelze ztotožnit korektní a vypočtené odpovědní instance.

**Příklad.**

Mějme jazyk, který obsahuje (unární) predkát $p$ a alespoň jednu konstantu $a$ .

Je-li $P = \{p(y)\}$ program a $Q = p(x)$ dotaz , potom $\{y/a\}$ je korektní odpovědní substituce, ale $\{y/x\}$ je vypočtená odpovědní substituce.

Silná forma věty o úplnosti je důležitá, protože spolu s větou o korektnosti SLD-rezoluce ukazuje, že mezi deklarativní a procedurální interpretací logických programů existuje úzký vztah nezávisle na volbě výběrového pravidla.

Tato korespondence však není zcela dokonalá, protože vypočtené a korektní odpovědní substituce nemusí být totožné.

## Něco o modelech

V deklarativních interpretacích hrají důležitou roli dva typy modelů (interpretací) termové a Herbrandovy modely.

Mějme jazyk $L$, množinu všech termů jazyka $L$ nazveme *termovým univerzem* jazyka $L$ a označíme $TU_L$. Protože jsme předpokládali, že $L$ má nekonečně mnoho proměnných, je i $TU_L$ nekonečná množina.

Množinu všech atomických formulí (atomů) jazyka $L$ nazveme *termovou bází* jazyka $L$ a označíme $TB_L$.

**Definice.** (Termová algebra)

Termová algebra pro jazyk $L$ obsahuje

- doménu $TU_L$,
- pro každý n-ární funkční symbol $f$ jeho kanonickou interpretaci



tedy zobrazení $(TU_L)^n$ do $TU_L$ takové, že n-tici termů $t_1, \dots, t_n$ přiřazuje term $f(t_1, \dots, t_n)$.

*Termovou interpretací* $I$ jazyka $L$ je každá interpretace $L$ nad termovou algebrou $L$. Tedy každému n-árnímu predikátovému symbolu $p$ je přiřazena relace $p_I \subseteq (TU_L)^n$.

*Termovým modelem* množiny výrazů $S$ je termová interpretace, která je modelem $S$.

Poznámka. Protože interpretace funkčních symbolů je jednoznačně určena, každému jazyku $L$ je přiřazena jediná termová algebra.

Termová interpretace jazyka $L$ je tedy jadnoznačně určena interpretací predikátových symbolů.

To znamená, že je zde přirozený vzájemně jednozačný vztah mezi termovými interpretacemi a podmnožinami termové báze $TB_L$, který lze vyjádřit zobrazením, které každé termové interpretaci $I$ přiřazuje množinu atomů

$$\{p(t_1, \ldots, t_n) \mid p \text{ je n-árnı́ predikát a } (t_1, \ldots, t_n) \,\varepsilon\, p_I\}$$

Můžeme tedy termové interpretace pro $L$ ztotožnit s (případně prázdnými) podmožinami termové báze $TB_L$. Ohodnocení proměnných $\sigma$ v termovém univerzu $TU_L$ přiřazuje každé proměnné $x$ term z $TU_L$.

Je-li $X$ konečná množina proměnných, restrikcí $\sigma \mid X$ dostáváme sub stituci.

**Lemma.** (Termové interpretace)

Je-li $I$ termová interpretace, potom pro každý atom A a klauzuli $c$

(i) $I \models_\sigma A$ právě když $A(\sigma \mid Var(A)) \,\varepsilon\, I$



(ii) $I \models A$ právě když $inst(A) \subseteq I$

(iii) $I \models c$ právě když pro všechny instance $A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \,\varepsilon\, inst(c)$ $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq I$ implikuje $A \,\varepsilon\, I$.

Důkaz. (i) pro libovolný term $t$ a konečnou množinu proměnných $X$ takovou, že $\mathrm{Var}(t) \subseteq X$, se indukcí podle složitosti termu $t$ dokáže $\sigma(t) = t\,(\sigma \mid X)$. To znamená, že hodnota, kterou termu $t$ přiřadí ohodnocení $\sigma$ je rovna instanci, která vznikne použitím substituce $(\sigma \mid X)$ na term $t$.

Pro atom $A = p(t_1, \ldots, t_n)$ dostáváme

$$\begin{aligned} I \models_\sigma p(t_1, \ldots, t_n) \quad & \text{právě když} \\ (t_1\theta, \ldots, t_n\theta) \,\varepsilon\, p_I \quad & \text{právě když} \\ p(t_1, \ldots, t_n)\theta \,\varepsilon\, I & \end{aligned}$$

kde $\theta = (\sigma \mid Var(A))$.

(ii) bezprostředně vyplývá z (i).

(iii) Podle (i)

$I \models_\sigma A \leftarrow B_1, \dots, B_n$

právě když $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\} \subseteq I$ implikuje $A\theta \in I$

kde $\theta = (\sigma \mid Var(A \leftarrow B_1, \dots, B_n))$ . Tvrzení (iii) plyne z definice pravdivosti klauzule.

Poznámka. Tvrzení (ii) z předchozího lemmatu ukazuje, že v obecném případě nemůžeme ztotožnit termovou interpretaci s množinou atomů, které jsou v ní pravdivé. K tomu je zapotřebí ještě další podmínka.

**Definice.** (Termové interpretace uzavřené na substituce)

Termová interpretace je *uzavřená na substituce* jestliže $A \in I$ implikuje $inst(A) \subseteq I$ .

Nyní platí: je-li $I$ termová interpretace uzavřená na substituce, potom

$$I = \{ A \mid A \text{ je atom a } I \models A \}$$



Popíšeme specifickou konstrukci termových modelů programů.

**Definice.** (Implikační stromy)

(i) *Implikační strom* vzhledem k programu $P$ , je konečný strom, jehož uzly jsou atomy. Pro každý uzel $A$ a jeho bezprostřední následníky $B_1, \dots, B_n$ patří klauzule $A \leftarrow B_1, \dots, B_n$ do $inst(P)$.

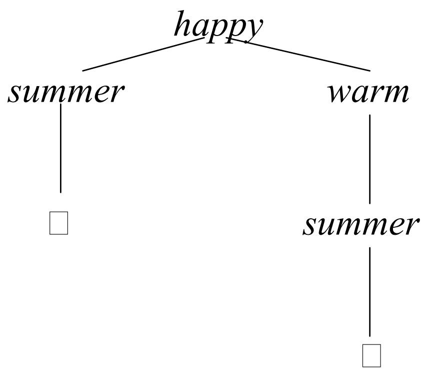
Speciálně , je-li $A$ list implikačního stromu, jednotková klauzule $A \leftarrow$ je prvkem $inst(P)$ .

(ii) Říkáme, že atom $A$ *má implikační strom* vzhledem k $P$ , je-li $A$ kořenem nějakého implikačního stromu vzhledem k $P$. Říkáme, že *implikační strom je základní*, jestliže všechny jeho uzly jsou základní atomy.

Poznámka. Stejný atom může být kořenem několika implikačních stromů vzhledem k programu $P$ . Je-li jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $inst(P)$, pak atom $A$ je kořenem jednoprvkového implikačního stromu.

**Příklad.**

Atom *happy* má tento základní implikační strom vzhledem k programu *SUMMER* .






**Lemma.** (Termový model $C(P)$ )

Termová interpretace

$$C(P) = \{ A \mid A \text{ má implikační strom vzhledem k } P \}$$

je modelem programu $P$ .

Důkaz. Podle tvrzení (iii) lemmatu o termových interpretacích stačí pro každou klauzuli

$$A \leftarrow B_1, \dots , B_n \quad \text{z} \quad inst(P)$$

ukázat, že

$$\{B_1, \dots , B_n\} \subseteq C(P) \quad \text{implikuje} \quad A \in C(P) .$$

To však znamená, že $A$ má implikační strom vzhledem k $P$ . $C(P)$ je tedy modelem $P$ .

**Věta.** (Nejmenší termový model)

$C(P)$ je nejmenší termový model programu $P$.

Důkaz. Nechť $I$ je termový model $P$. Potom $I$ je také model $inst(P)$. Ukážeme, že

$$A \in C(P) \text{ implikuje } I \models A .$$

Tvrzení věty potom plyne z (ii) v lemmatu o termových interpretacích.

Postupujeme indukcí podle počtu uzlů $i$ v implikačním stromu atomu $A$ vzhledem k programu $P$.

Pro $i = 1$ je jednotková klauzule $A \leftarrow$ prvkem $inst(P)$, tedy $I \models A$.

Indukční krok. Předpokládejme, že $A$ je kořenem implikačního stromu vzhledem k $P$, který má $i > 1$ uzlů. Potom pro nějaké $n \geq 1$ atomy $B_1, \dots, B_n$ je klauzule $A \leftarrow B_1, \dots, B_n$, prvkem $inst(P)$ a



každé $B_j$, $1 \leq j \leq n$ má implikační strom vzhledem k $P$ s $k_j < i$.

Z indukční hypotézy potom $I \models B_j$, pro každé $1 \leq j \leq n$. Ovšem podle $I \models A \leftarrow B_1, \dots, B_n$, tedy $I \models A$ .

**Věta.** (Sémantická ekvivalence)

Pro libovolný atom $A$ platí

$$P \models A \text{ právě když } C(P) \models A .$$

Poznámka. Tento výsledek ukazuje ukazuje, že model C($P$) je sémanticky ekvivalentní deklarativní interpretaci programu $P$. Nejprve dokažeme následující lemma.

**Lemma.**

Je-li atom A pravdivý ve všech termových modelech programu $P$, potom $P \models A$ .

Důkaz. Nechť $I$ je model $P$. Potom pro každou kaluzuli

$$H \leftarrow B_1, \dots, B_n \quad \text{z} \quad inst(P) \ \text{platí}$$

$$I \models B_1, \dots, I \models B_n, \ \text{implikuje} \quad I \models H \qquad (1)$$

To proto, že $I$ je také model inst($P$), takže pro všechna ohodnocení proměnných $\sigma$ platí, že $I \models_\sigma B_1, \dots, B_n$ implikuje $I \models_\sigma H$.

Nyní nechť $I_T = \{ A \mid A$ je atom takový, že $I \models A \}$ označuje termovou interpretaci odpovídající $I$. Z (iii) Lemmatu o termových interpretacích a (1) dostáváme, že $I_T$ také model ($P$).

Navíc, podle (ii) z Lemmatu o termových interpretacích plyne, že v obou interpretacích $I$ a $I_T$ jsou pravdivé stejné atomy. Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Důkaz Věty. Zvolme pevně jeden atom $A$. Ukázali jsme, že $C(P)$ je model $P$, tedy z $P \models A$ plyne $C(P) \models A$. Opačná implikace bezprostředně



tvrzení (ii) Lemmatu o termových interpretacích, předchozího lemmatu a faktu, že $C(P)$ je nejmenší termový model $P$.

Mějme dvě SLD-derivace

$\xi :=\ Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=\!\!>} Q_1 \dots\ Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1} \dots$

$\xi' :=\ Q_0' \overset{\theta_1'/c_1}{=\!\!>} Q_1' \dots\ Q_n' \overset{\theta_{n+1}'/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1}' \dots$

Říkáme, že tyto SLD-derivace jsou *podobné* jestliže platí

$\xi :=\ Q_0 \overset{\theta_1/c_1}{=\!\!>} Q_1 \dots\ Q_n \overset{\theta_{n+1}/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1} \dots$

$\xi' :=\ Q_0' \overset{\theta_1'/c_1}{=\!\!>} Q_1' \dots\ Q_n' \overset{\theta_{n+1}'/c_{n+1}}{=\!\!>} Q_{n+1}' \dots$