Kód studenta 30

3

2 Determinanty a podobnost (3 body)

1. Definujte determinant matice a rozhodněte, zda obecně platí $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. (Dokažte nebo vyvraťte.)
2. Spočtěte determinant matice

$$
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\det(A)$

druhá strana (snad dobře přepíšu zadání ?!)

3. Definujte podobnost matic a dokažte, že podobné matice mají stejný determinant.

1\. $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ celé dolní index (souřadnice v matici)

(„body z každého řádku a sloupce vyberu jeden prvek a sčítám to se znaménkem permutace, podle které jsem to vybrala" $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$)

$\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$. Protipříklad: (v Hladíkových skriptech je to dokázáno určitě)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\det = 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\det = 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det = 0}$$

zkusím na 2. straně

2\. Myslím si, že je moc velká na to, abyste to po nás chtěli fakt počítat (rozvoj Laplace. by byl tak na 2 A4, protože až 3x3 umím rozumně spočítat).
Hádám nějaký trik – myslím, že je převeditelná na diagonální nebo horní ∇, a pak by byl det součin na diagonále (s nějakými změnami znaménka, ale asi tam bude 0 a určo to jeho)

3\. Matice A a B $n \times n$ jsou si podobné, pokud $\exists$ matice regulární $n \times n$ S: $A = S^{-1} B S$.

Platí $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(S^{-1} B S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(S) =$$

komutativita násobení $\mathbb{C}$

$$= \det(S) \cdot \det(S^{-1}) \cdot \det(B) =$$

$$= \underbrace{\det(SS^{-1})}_{= \det(I) = 1} \cdot \det(B) = \det(B)$$

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

srovnám si je, přehazením dvou řádků se mi mění ~ znaménko té „nové“

$$\begin{array}{c} \ominus \\ \\ \ominus \\ \\ \ominus \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \ominus \\ \ominus \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \cancel{A} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

HEHE

$$\det(A) = 0$$

(~~jak~~ j jen jsem prohazovala řádky a odčítala řádky jeden od druhého, takže se max. měnilo znaménko, což je vzhledem k výsledku jedno)

2

Kód studenta 30

1 Ortonormální báze (3 body)

1. Definujte pojem ortonormální báze.
2. Buď z_1, z_2, z_3, z_4 ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^4$ a nechť vektor $u = z_1 - z_2 + 2z_3 - 2z_4$.
   - Určete $\|u\|$,
   - rozhodněte, zda je vektor $v = z_1 - z_2 + 3z_3 + 4z_4$ kolmý na u,
   - sestrojte projekci vektoru u do ortogonálního doplňku množiny $\{z_1, z_2\}$.

1. Ortonormální báze vektor. prostoru V je množina vektorů $x_1, \dots, x_n$, pro které platí

   i) $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$ (jsou na sebe kolmé) ✓

   ii) $\|x_i\| = 1$ $\forall i = 1, \dots, n$ (mají jednotkovou normu) ✓

   iii) jsou lin. nezávislé (žádný se nedá vyjádřit pomocí ostatních) ✓

   iv) $\mathrm{span}(x_1, \dots, x_n) = V$ (generují prostor). ✓

2. $\|u\|$ … předpokládám, že myslíte normu danou skalárním součinem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$ je-li $x = (x_1, \dots, x_n)$

$z_1, \dots, z_4$ nejsou dané! mohou být i jiné

$\boxed{z_1 = (1,0,0,0),\ z_2 = (0,1,0,0),\ z_3 = (0,0,1,0),\ z_4 = (0,0,0,1)}$

$u = (1,0,0,0) - (0,1,0,0) + (0,0,2,0) - (0,0,0,2) =$
$= (1,-1,2,-2)$

- $\|u\| = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 1+1+4+4 = 10$

$v = (1,-1,3,4)$; kolmé by byly kdyby $\langle u, v\rangle = 0$

$\langle u, v\rangle = (1,-1,2,-2)^T \cdot (1,-1,3,4) =$

~~$= 1 + (-1)^2 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot 4 = 1+1+6-16 = -8$~~ ~~KOLMÉ NEJSOU~~

$= 1\cdot 1 + (-1)(-1) + 2\cdot 3 + (-2)\cdot 4 = 1+1+6-8 = 0$

KOLMÉ JSOU

ortogonální doplněk $\{z_1, z_2\}$ →

pro když je $V \subset U$, tak

$V^{\perp} = \{y \mid \langle y, x\rangle = 0 \ \forall x \in V\}$ span $\{z_3, z_4\}$

a navíc $\dim V^{\perp} + \dim V = \dim U$

~~„jak vypadají vektory ve V, které jsou kolmé na z_1 nebo z_2?" ← ortogonální doplněk množiny~~

$z_1 = (1, 0, 0, 0)$ „$z_1^{\perp}$" $= (-1,$ cokoliv, cokoliv, cokoliv$)$

$z_2 = (0, 1, 0, 0)$ „$z_2^{\perp}$" $= ($cokoliv$, -1,$ cokoliv, cokoliv$)$

~~→ „u se zobrazí sám na sebe, protože je kolmý na z_2.~~

→ projekce $u = (0, 0, -2, 2)$

✓

2-

Kód studenta 30

3 Regulární matice (3 body)

1. Definujte pojem regulární matice a dokažte, že reálné regulární matice řádu n spolu s operací maticového součinu tvoří grupu. ok 3/4 .. neúplné.
2. Spočítejte kolik existuje regulárních matic v $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$. / (ze i nad obecným tělesem

DEF:
1. Regulární matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je taková, pro kterou je jediné řešení rovnice $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ (jen triviální)
("pro rovnici $Ax=0$ je jediné řešení $x=0$") — asi lepší slovosled

DEF: Grupa je dvojice $(G, \circ)$, G je množina, $\circ$ bin. operace a platí: AN.I.

① asociativita součinu: $\forall a,b,c \in G: (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$ ok
② $\exists$ neutrální prvek pro $\circ$: $\exists e \in G: \forall a \in G: a\circ e = e\circ a = a$ ok
③ $\exists$ existuje inverzní prvek ~~$\forall$~~ prvky: ~~$\exists \forall a$~~ $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G: aa^{-1} = a^{-1}a = e$ ok.
pro všechny

$\Rightarrow$ splňuje zadání ①, ② a ③?

① maticový součin: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ $\Rightarrow$ určitě asociativní díky asociativitě součinu v $\mathbb{C}$
pro $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\in \mathbb{C}$, $\in \mathbb{C}$

~~$(AB)_{ij}$~~ $(AB(C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} AB_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} A_{il}B_{lk}\right)C_{kj} =$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{il}(B_{lk}C_{kj}) = (A(BC))_{ij}$

② neutr. prvek je jednoduše $I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n$

③ každá regulární matice má inverzní matici ✓ a ty jsou taky regulární ok ✓

B

(~~to je tvrzení~~ na to je věta)

Chybí uzavřenost součinu na regulárních maticích

② Kolik je regulárních matic v $Z^3_{2\times 2}$?

– regulární nejsou ty, které mají být 2 řádky stejné, ty by se daly elementárními úpravami převést na matice s nulovými řádky → tedy s menší hodností než 3
(všeobecně všechny s lin. závislými řádky (že by se jeden dal vyjádřit pomocí jiných))
∈ to mi zmenšuje výběr

→ rozhodně budou v odstupňovaném tvaru vypadat

$?=0$ nebo 1

$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, takže jich bude tolik, co je takových matic krát $3!$

• mám $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností, jak doplnit ?, a $8 \cdot 3! = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$

Špatný výpočet, existují i jiné regulární matice.

např.: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

0

Kód studenta 30

4 Taylorův rozvoj (3 body)

Spočtěte Taylorův rozvoj funkce $\log(1+x)$ v bodě $x = 0$.

Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2(\log(x+1)-\log x)-x\right) .$$

$\log_{10} 100 = 2$

$c = a^b \Rightarrow \log_a c = b$

Taylorův rozvoj ~~[illegible]~~ v bodě a je

... n-tá derivace

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n .$$

0

$(\log x)' = \frac{1}{x}$ (?)

$(x^{-1}) = -x^{-2} = \frac{1}{-x^2}$

Takže rozvoj zadané funkce je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{(n)}(1)}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \Big\} ?$$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

limita A nějaké funkce f v bodě a je číslo t.ž. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}: x \in P(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(A,\varepsilon)$

L'Hospitala můžu použít, když mám $\frac{\infty}{\infty}$

3

Kód studenta 30

5 Primitivní funkce (3 body)

Uveďte vzorec pro integraci (tj. nalezení primitivní funkce) metodou per partes.

Nalezněte jím $\int e^x \sin x$.

Pozn. jsem člověk s extrémně špatnou pamětí. Předpokládám (možná špatně) následující:

$(\sin x)' = \cos x$

$(e^x)' = e^x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$-(\cos x)' = \sin x$

$\int \sin x = -\cos x$

$\int \cos x = \sin x$

Věta o integraci per partes (po částech)

Máme-li dvě funkce f a g, které na nějakém intervalu I mají primitivní funkce F a G, pak na I platí

$$\int fG = FG - \int Fg$$

(alternativně se to někdy píše $\int u'v = uv - \int uv'$)

$$\cancel{\int e^x \cdot \sin x = \int \sin x \cdot e^x = \cos x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x = \cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x + C}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f & G & = & F & G & - & \int F g \end{array}$$

$$\int e^x \cdot \sin x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x =$$

použiju znova per partes

$$\boxed{\begin{array}{l} f = e^x = F \\ G = \sin x \\ g = \cos x \end{array}}$$

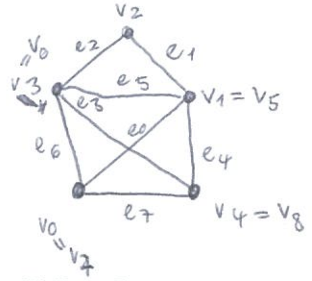
$$\cancel{= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot (\cos x) - \int e^x \cdot\right.}$$

$$= e^x \cdot \sin x - \left(e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot (-\sin x)}_{+\int e^x \sin x}\right) = \underbrace{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x}_{(*)}$$

Ze vztahu $\int e^x \sin x = (*)$ mám:

$$2\int e^x \cdot \sin x = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C \Rightarrow \int e^x \cdot \sin x = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C.$$

✓



Kód studenta 30

6 Grafy (3 body)

2b

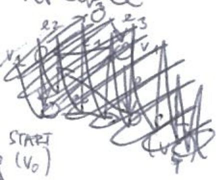
1. Zadefinujte pojmy tah a uzavřený tah v grafu.
2. Zformulujte nutnou a postačující podmínku pro to, aby v grafu existoval uzavřený tah obsahující všechny jeho vrcholy a hrany.
3. Ukažte, že každý graf má orientaci, v níž se vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu liší nejvýše o jedna.

Graf G $\overset{DEF}{=}$ dvojice (V, E), kde V jsou vrcholy (vertices) a E hrany (edges) / přičemž hrana je dvojice grafu

POZN. $n \leq |V|$

(1) Tah v grafu (V, E) je posloupnost vrcholů a hran grafu $(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$ (začnu v nějakém bodě, „kreslím po hranách" a skončím v jiném bodě), kde může být $v_i = v_j$ pro nějaká $i, j = 0, \dots, n$; ale ne může být $e_i = e_j$ pro ~~žádná~~ nějaká $i, j = 0, \dots, n-1$

(do vrcholů vstoupit znova můžu, ale po každé hraně můžu „jet" jen jednou). VIZ OBRÁZEK



→ odtud klasické „jednotahové" hlavolamy :-)

(2) Uzavřený tah je takový tah, kde $V_0 = V_n$ (začnu a skončím ve stejném bodě).

(2) Takovému grafu říkáme eulerovský.
A graf je eulerovský (věta praví), právě když je souvislý a každý jeho vrchol je sudého stupně ~~(vede z/do něj sudým počtem hran)~~ (=s ostatními vrcholy s ostatními je spojen sudým počtem hran).

(3)

③ Ukažte, že každý graf má orientaci, v níž se vstupní a výstupní stupeň vrcholu liší nejvýše o jedna.

orientovaný graf (= graf s orientací) ..... takový graf, kde jsou hrany dvojice uspořádané (takže hrana (x,y) je něco jako ).

(?) Orientování grafu je, když ~~uspořádá~~ o každé hraně $\{x,y\}$ rozhodnu, jaký má směr – tedy jestli z ní udělám (x,y) nebo (y,x).

Úloha mi zní jako něco, kde by mohla pomoci indukce ..... (... zkusím ~~podle~~ počtu vrcholů.)

~~Každopádně~~, pro $|V| = 2$ to platí, mám jen ~~dvě~~ tři ~~máš~~ možnosti

1) 

$deg_{out}(x)=1$
$deg_{in}(x)=0$

$deg_{out}(y)=0$
$deg_{in}(y)=1$

(a)

2) 

$deg_{in, out}$ ....obrácené...

~~hran~~

3) 

(a)

$deg_{in}(x) = deg_{out}(x) =$
$= deg_{in}(y) = deg_{out}(y) = 0.$

možná je to přece jen dobrý začátek :(

Takže předpokládám, že to platí pro $|V| = n-1$. Platí to i pro n?
Nechť mám graf G s n vrcholy a v něm bod v. ~~Vím~~ Nechť mám orientaci, pro kterou tvrzení platí, v grafu $G-v$ (to dle ind. předpokladu umím vyrobit). Zbývá ukázat, že hrany, kterými je v G vrchol v spojen s (pod)grafem $G-v$, umím zorientovat tak, abych podmínku „nevzala" v sousedních vrcholech v a zároveň ji splnila pro vrchol v samotný.

Nešikovný (nevím jestli správný ani) postup, na papíře II.

EDIT: je důkaz ~~dle~~ na základě indukce dle počtu hran.

EDIT II: (tam jsem se zasekla, ..

DĚKUJI ZA HEZKOU ÚLOHU, TA SE MI LÍBILA, DISKRÉTKA FTW ♥ I KDYŽ MI TŘEBA TAK NEŠLA...

6.3
II

~~Pb~~

Úloha 6. 3

Kód studenta $\boxed{30}$ TŘICET

~~[illegible]~~

~~Pb~~

Dk.:
Indukcí dle počtu hran.

Pro $|E| = 1$ tvrzení zjevně platí, protože (pojmenování vrcholů x a y je BÚNO...)

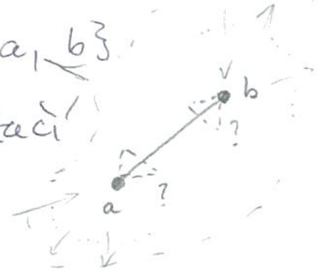
$deg_{out}(x) = 1$
$deg_{in}(x) = 0$

$deg_{out}(y) = 0$
$deg_{in}(y) = 1$

(v takovém grafu může být klidně více vrcholů, pro ně pak prostě platí $deg_{in}(v) = deg_{out}(v) = 0$).

Takže dle indukčního předpokladu takovou orientaci umím najít pro graf s $n-1$ hranami.

Nechť máme nějakou hranu e v grafu s n hranami a již „zorientovaný" graf $G-e$. („rozhoduji se o poslední hraně".) Nechť jsou $\{a, b\}$ krajní body hrany e, zjevně $a, b \in V_{G-e}$ a jejich in- a out-stupni se liší max o 1. Stačí rozlišit několik případů:



i) $deg_{in}(a) \overset{v\ G-e}{=} deg_{out}(a)$, $deg_{in}(b) = deg_{out}(b)$ → pak mohu zvolit (a,b) nebo (b,a) libovolně a ~~tvrze~~ podmínka bude stále platit (bude se jednomu zvedne deg in a druhému deg out nebo obráceně)

ii) $deg_{in}(a) = deg_{out}(a) + 1$, $deg_{in}(b) = deg_{out}(b)$ → musím hranu směrovat **DO** vrcholu a, pak se podmínka „nerozbije"

iii) $deg_{in}(a) = deg_{out}(a) + 1$, $deg_{in}(b) = deg_{out}(b) + 1$ → trochu problém, možná to zase zkusím dle počtu vrcholů. .TROCHU ZÁSEK...

PÁR POSTŘEHŮ ☺

Každopádně jsem se snažila dokázat, že neexistuje situace, kdy bych hranu e neuměla zorientovat tak, abych podmínku v jejích krajních bodech nerozbila.

~~ještě dle vrcholů lexikograficky~~ pokračovat

👁 $\forall v: \quad |deg_{in}(v) - deg_{out}(v)| \leq 1$

$$\sum_{v \in V} |deg_{in}(v) - deg_{out}(v)| \leq |V|$$

👁 orientovaná kružnice ~~je v~~ v každém vrcholě přispěje 1 v deg_{in} i deg_{out}

👁 ve stromě je „zorientování" snadné — zorientuju ~~nějakou cestu z listu do listu~~ nejdelší možnou

— tam by fungoval můj důkaz přes hrany, protože v místě „zášeku" (na předchozí straně) by stačilo přeorientovat všechny šipky v podgrafu s „kořenem" v ~~a~~ vrcholu (nebo ~~b~~ vrcholu b, to je jedno) — v mostu je každá hrana mostem

→ každý graf má kostru, kterou umím tedy zorientovat,

Kód studenta 30

Myslím, že nebyly v požadavcích, ale možná se pletu – a uznávám, že si pamatuji z KG, že je to celkem snadné... ale ty triky jsem si nepřipomněla.

0

7 Vytvořující funkce (3 body)

Nechť $a_0, a_1, a_2 \dots$ je posloupnost čísel definovaná pomocí následující soustavy rekurencí:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_1 &= -1 \\
a_n &= 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Najděte vytvořující funkci této posloupnosti. Výsledek vyjádřete vzorečkem v uzavřeném tvaru, tj. bez použití nekonečných součtů. Není třeba hledat vzorec pro n-tý člen posloupnosti.

→ mám vyjádřit a_n jen pomocí n

první členy posloupnosti:

$3x$, $-2x$

$\underset{a_0}{2}, \underset{a_1}{-1}, \underset{a_2}{-7}, \underset{a_3}{-19}, \dots$

Vytvořující fce je definována jako $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

Součet prvních n členů?

$a_{n+1} + a_n = 3a_n - 5a_{n-1} - 2a_{n-2}$

Σ

$a_2 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$

$a_5 = 3 \cdot$

$a_3 = 3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) = -19$

$a_4 = 3 \cdot (-19) - 2 \cdot (-7)$

pro $n = 2$ je a_n (a_2:)

~~$3(n-3) - 2 \cdot n$~~

~~platí to i pro $n = 3$?~~

~~$3 \cdot$~~

součet prvních n členů

n 0 1 2

$2 + (-1) + (3(n-3) - 2 \cdot n$

$a_n = \cancel{4}\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

$a_{n-1} = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

$\cancel{a_{n-1}} + a_n + a_{n+1} = 3a_n + \cancel{a_{n-1}} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$

$\cancel{a_n} \; a_{n+1} = 2a_n +$

část. součty

$S_0 = 2$
$S_1 = 1$
$S_2 = -6$
$S_3 = -25$

$n=2 \quad n=3$

$2, -1, -7, -19$

$\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}}$

$a_n = 3(3a_{n-2} - 2a_{n-3}) - 2(a_{n-2})$ ~~2an~~

$a_n = 9a_{n-2} - 6a_{n-3} - 2a_{n-2}$

$a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$

Poslední pokus: ~~[illegible]~~

vím, že pro $n=2$ je $a_n = -7$ a pro $n=3$ $a_{n+1} = -19$

~~potřebuji funkci f, že f~~

1 bod

Kód studenta 30

8 Normální podgrupy (3 body)

Definujte pojem normální podgrupy v grupě.

Pro pevné $n \in \mathbb{N}$ uvažte množinu všech permutací n-prvkové množiny, které mají kladné znaménko, tedy $A_n = \{\pi \in S_n : sgn(\pi) = 1\}$. Ukažte, že tvoří podgrupu symetrické gupy S_n všech permutací a rozhodněte, zda se jedná o normální podgrupu.

tedy uzavřenost

Podgrupa $(H, \circ)$ grupy $(G, \circ)$, je grupa, pro kterou platí
viz i) až iv)

i) $H \subseteq G$
ii) platí asociativita $\forall a,b,c \in H: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
iii) neutrální prvek grupy G je i v H $(e \in H)$
iv) všechny prvky H mají v H i své inverzy $(\forall a \in H \, \exists a^{-1} \in H: aa^{-1} = a^{-1}a = e)$.

Normální podgrupa je ~~(chápala jsem, že to v pořadu~~
podgrupa, pro kterou navíc platí (zachovám značení vztahů)
(norm) $\forall h \in H \; \forall g \in G: \; \cancel{hgh^{-1}} \; ghg^{-1} \in H$.

znaménko permutace $= (-1)^{\#\text{cyklů} - 1}$

není ověřeno

Ověření, že je to (normální) podgrupa — ověřím podmínky. (norm.)
i) je zjevně splněná
ii) — " —
iii) identita tam je $sgn(id) = 1$
iv) inverz. permutace zachovává znaménko — jsou tam

není ověřena uzavřenost
$(sgn(a) = sgn(b) = 1 \Rightarrow sgn(a \circ b) = 1)$

atomická tabla $F(\varphi \to \varphi)$

$T\varphi$ | $F\varphi$; $F\varphi$ | $T\varphi$

Ob

Kód studenta 30

9 Logika (3 body)

Vyjádřete následující dvě tvrzení formulemi predikátové logiky nad vhodně zvoleným jazykem (s unárními predikáty pro "*chce*", "*hledá způsoby*", "*hledá důvody*"). (pozn. (~~dokonce~~ ~~možná~~ měla by to být malá písmenka, omlouvám se)

Ch Z D

1. *Kdo chce, hledá způsoby, kdo nechce, hledá důvody.*
2. *Kdo nehledá způsoby, hledá důvody.*

V nějakém formálním dokazovacím systému (tablo metoda, rezoluční metoda, Hilbertovský kalkul) dokažte, že z prvního tvrzení vyplývá to druhé.

1. $(Ch \to Z) \land (\neg Ch \to D)$

2. $(\neg Z \to D)$

Mám dokázat, že $((Ch \to Z) \land (\neg Ch \to D)) \to (\neg Z \to D)$

Tablo metoda – dám do kořene „negaci" tvrzení s příznakem F a snažit se nalézt spornou větev nějakou, kde bude pro nějakou formuli φ zároveň $F\varphi$ a $T\varphi$

$F(((Ch \to Z) \land (\neg Ch \to D)) \to (\neg Z \to D))$

$T((Ch \to Z) \land (\neg Ch \to D))$

$F(\neg Z \to D)$

$T(Ch \to Z)$

$T(\neg Ch \to D)$

$F(\neg Z \to D)$

$T\neg Z$

FD

předělám na ta malá písmenka, abych se v tom sama vyznala

ATOM. TABLA

$F(\varphi \to \psi)$: $T\varphi$, $F\psi$ | $F\varphi$, $T\psi$

$T(\varphi \to \psi)$: $T\varphi$, $T\psi$ | $F\varphi$, $F\psi$

Není v PL!

chce ... c

hledá způsoby ... z

—||— důvody ... d

1. $(c \to z) \land (\neg c \to d)$

2. ~~$\neg z \to d$~~

Mám dokázat 1. → 2.

Dk: Tablem: („Kdyby to neplatilo dokážu spor, takže to platí.") (odvodím)

$F(((c \to z) \land (\neg c \to d)) \to (\neg z \to d))$

- $T((c \to z) \land (\neg c \to d))$
  - $F(\neg z \to d)$
  - $T(c \to z)$
  - $T(\neg c \to z)$
  - $F(\neg z \to d)$
    - $T\neg z$, Fd, Fz
      - × $T(c \to z)$
        - Tc, Tz, ⊗
        - Fc, Fz
    - $F\neg z$, Td
- ~~$F((c \to z) \land (\neg c \to d))$~~
  - ~~$T(\neg z \to d)$~~

není, eliminace!

kde se tu vzala? tato větev!

~~zbytek rozvíjet nemusím, spornou větev už mám.~~

Musí být všechny sporné!