3^+

Kód studenta 15

2 Taylorův polynom (3 body)

1. Nechť $f(x)$ je funkce, která má v bodě $b \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Napište vzorec pro Taylorův polynom řádu $n \geq 1$ funkce $f(x)$ se středem v bodě b. Označíme-li tento polynom $T(x)$, co lze říci o hodnotě limity
$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T(x)}{x^n} \ ?$$
2. Nechť k je přirozené číslo. čemu se rovná Taylorův polynom řádu 2 funkce $f(x) = \cos(kx)$ se středem v nule?
3. S využitím předchozích odpovědí, nebo i jakkoliv jinak, spočítejte hodnotu
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)}{x^2}\ .$$

1. $$T_n^{f,b}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k$$ $f^{(k)}$ značí derivaci k-tého řádu, $f^{(0)} = f$

Z věty o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem jde tato limita k 0.

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T(x)}{x^n} = \lim_{x \to b} \underbrace{\frac{f(x) - T(x)}{(x-b)^n}}_{\to 0} \cdot \frac{(x-b)^n}{x^n}$$ ✓

2. $f(x) = \cos(kx)$ $\qquad f(0) = \cos(k \cdot 0) = 1$

$f^{(1)}(x) = -\sin(kx) \cdot k \qquad f^{(1)}(0) = -\sin(k \cdot 0) \cdot k = 0$

$f^{(2)}(x) = -\cos(kx) \cdot k^2 \qquad f^{(2)}(0) = -\cos(k \cdot 0) \cdot k^2 = -k^2$

$$T_2^{f,0}(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 = 1 + 0x + \frac{-k^2}{2}x^2 = -\frac{k^2}{2}x^2 + 1$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)\cos(2x)\cos(3x) + \cos(2x)\cos(3x) - \cos(2x)\cos(3x)}{x^2} =$$

známá limita $\to \frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)\cos(3x)(1 - \cos x)}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)\cos(3x)}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)\cos(3x) + \cos(3x) - \cos(}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \cos(3x)\frac{(1 - \cos(2x))}{(2x)^2} \cdot 4 + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{(3x)^2} \cdot 9 = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9 = 7$$ ✓

Díky spojitosti cos můžeme využít větu o limitě složené funkce pro 2x a 3x.

Velmi elegantní!

3

Kód studenta 15

4 Diagonalizace (3 body)

Uvažujme reálnou matici s parametrem p

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte (alespoň jednu) hodnotu $p \in \mathbb{R}$ takovou, aby matice A byla diagonalizovatelná (v teorii vlastních čísel). $p = 0$
2. Najděte hodnotu $p \in \mathbb{R}$ takovou, aby matice A nebyla diagonalizovatelná (v teorii vlastních čísel). $p = 1$

Hledáme vlastní čísla jako kořeny charakteristického polynomu

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & p \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)\cdot p = \lambda^2 - \lambda + \lambda - 1 + p = \lambda^2 + p - 1$$

1. $\lambda^2 + p - 1 = 0$ Když bude mít tato rovnice dva různé kořeny, bude mít dvě různá vlastní čísla a proto bude diagonalizovatelná (vlastní vektory různých vl. čísel jsou LN)

volme např. $\underline{p=0} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$

2. Jak již bylo zmíněno výše, pokud bude mít matice dvě různá vlastní čísla, určitě bude diagonalizovatelná. Aby nebyla diagonalizovatelná, musí mít pouze jedno vlastní číslo s algebraickou násobností 2 a geometrickou 1. Proto $\lambda^2 + p - 1$ musí mít dvojnásobný kořen $\Leftrightarrow p - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{p = 1} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Zkusíme najít vlastní vektory, tedy množinu řešení soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Zjistíme rank $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$, a proto $\dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$, tedy vlastnímu číslu 0 přísluší pouze 1 LN vlastní vektor, což je přesně to, co jsme požadovali, aby matice nebyla diagonalizovatelná.

Kód studenta 15

3b

8 Střední hodnota (3 body)

1. Definujte pojem "střední hodnota reálné náhodné veličiny na (konečném) pravděpodobnostním prostoru".
2. Určete střední hodnotu počtu dvojic po sobě následujících stejných výsledků v posloupnosti n hodů spravedlivou mincí. (Např. v posloupnosti RRLLL jsou takové dvojice 3.)

1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $X : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodná veličina.
Střední hodnota X je $\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$.

2. Využijeme „metodu indikátorů". Označme Y_i indikátor jevu „i-tý a $(i+1)$-ní hod měly stejný výsledek" pro $i = 1, \dots, n-1$. Označme X náhodnou veličinu ze zadání (počet po sobě jdoucích dvojic stejných výsledků). Vidíme, že $X = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.
Z linearity střední hodnoty platí $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}Y_i$.

Y_i je indikátor, tedy $\mathbb{E}Y_i = P(Y_i)$ $\forall i = 1, \dots, n-1$.
Pravděpodobnost Y_i je zřejmě pro všechna i stejná a rovná $\frac{1}{2}$ (z možných (stejně pravděpodobných) výsledků dvojic hodů RR, RL, LR, LL právě 2 odpovídají dvojici stejných výsledků).

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}Y_i = (n-1)\cdot \mathbb{E}Y_1 = (n-1)\cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

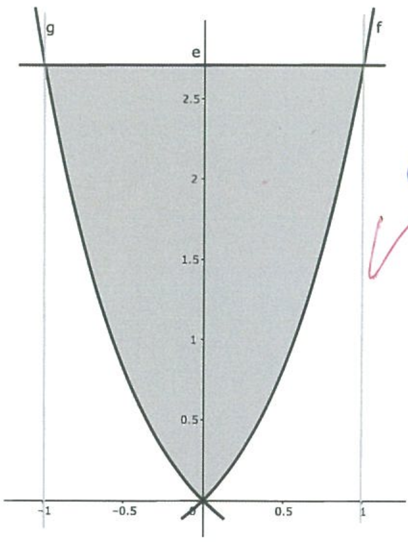
3

Kód studenta 15

1 Plocha (3 body)

Nechť $f(x) = xe^x$ a $g(x) = -xe^{-x}$. Spočtěte obsah rovinného útvaru

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x), y \geq g(x), y \leq e\}.$$



obrazec rozdělíme přímkou $x=0$ na dvě části U_1, U_2

$$S_U = S_{U_1} + S_{U_2}$$

Obsah každé části spočítáme jako integrál z rozdílu funkcí, které ji ohraničují. Vzhledem k symetrii útvaru dokonce stačí spočítat jen jeden z integrálů $(S_{U_1} = S_{U_2})$

$$S_{U_2} = \int_0^1 e - f(x)\,dx = \int_0^1 e - xe^x\,dx = \int_0^1 e\,dx - \int_0^1 xe^x\,dx = e - 1$$

pomocné výpočty

$$\int_0^1 \underset{uv'}{xe^x}\,dx = \underset{uv}{\left[xe^x\right]_0^1} - \int_0^1 \underset{u'v}{e^x}\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1\cdot e - 0\cdot e^0 - (e - e^0) = e - e + 1 = 1$$

(per partes, vše spojité)

$$\int_0^1 e\,dx = [e\cdot x]_0^1 = e$$

(což je vidět i bez integrace...)

$$\boxed{S_U = 2\cdot S_{U_2} = 2(e-1) = 2e - 2}$$

Pěkné!

3

Kód studenta 15

5 Projekce (3 body)

1. Definujete (ortogonální) projekci vektoru na podprostor.
2. Nechť U, V jsou navzájem ortogonální podprostory nějakého vektorového prostoru (tj. $\forall u \in U, \forall v \in V : u \perp v$). Buď A matice projekce na prostor U a B matice projekce na prostor V. Ukažte, že $A+B$ je maticí projekce a zjistěte, na jaký prostor projektuje.

1. Buď V vektorový prostor a $\|\cdot\|$ norma na něm. Buď $W \subseteq V$. Ortogonální projekce vektoru $x \in V$ do podprostoru W je vektor $x_W \in W$, pro který platí

$$\|x - x_W\| = \min_{y \in W} \|x - y\| .$$ ✓

2. Označme W společný nadprostor U a V.

A je matice projekce na U: $\forall x \in W : Ax \in U, \quad x - Ax \in U^\perp$

B je matice projekce na V: $\forall x \in W : Bx \in V, \quad x - Bx \in V^\perp$

Zřejmě platí $(A+B)x = Ax + Bx \in U+V$ (spojení podprostorů)

$U \perp V \Rightarrow V \subseteq U^\perp, \; U \subseteq V^\perp$

$(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ ... vektory kolmé na U a V současně

Pokud $x - (A+B)x \in (U+V)^\perp$, pak $A+B$ je matice projekce do $U+V$. ✓

$$x - (A+B)x = \underbrace{\underbrace{x - Ax}_{\in U^\perp} - \underbrace{Bx}_{\in V \subseteq U^\perp}}_{\in U^\perp} = \underbrace{\underbrace{x - Bx}_{\in V^\perp} - \underbrace{Ax}_{\in U \subseteq V^\perp}}_{\in V^\perp}$$

dohromady $x - (A+B)x \in U^\perp \cap V^\perp = (U+V)^\perp$

Matice $A+B$ je tedy maticí projekce do $U+V$. ✓

2-

Kód studenta 15

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, kdy je teorie T jazyka L *kompletní* (pro výrokovou logiku).
2. Nalezněte CNF reprezentaci 3-bitové parity. Přesněji, nalezněte formuli φ v konjunktivně normálním tvaru, která je ekvivalentní formuli
$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$$
kde $\oplus$ je (asociativní) spojka XOR (výlučné nebo).
3. Určete, nad jakými jazyky je teorie $\{\varphi\}$ kompletní. Uveďte zdůvodnění.

1. Teorie T je kompletní, pokud je v ní každá výroková formule jazyka L pravdivá nebo lživá. + není sporná!!

Ekvivalentně lze říct, že teorie je kompletní, právě když má právě jeden model (v jazyce L).

2. $x \oplus y \equiv (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) \equiv (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$\cancel{(x \oplus y) \oplus z \equiv ((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \oplus z \equiv (((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee z) \wedge (\neg((x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)) \vee \neg z)}$

x	y	z	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \oplus z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

$$\varphi \equiv (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge$$
$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

3. Teorie není kompletní nad žádným jazykem, ~~protože je otevřená~~. Tedy každá podstruktura libovolného modelu je také model (a může mít jiný počet prvků, tedy není elementárně ekvivalentní).

Podstruktury ohodnocení jsou tytéž ohodnocení – ohodnocení prvovýroků je unární relace, na univerzu nezáleží! (pokud se chceme na ohodnocení dívat jako na struktury predikátové logiky)

Kód studenta 15 3

7 2-souvislé grafy (3 body)

Zformulujte „ušaté lemma“ o struktuře vrcholově 2-souvislých grafů.

Ukažte, že hrany každého vrcholově 2-souvislého grafu lze obarvit dvěmi barvami, červenou a modrou tak, že mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta s alespoň jednou modrou hranou a také jiná cesta s alespoň jednou červenou hranou.

Graf G je ~~[illegible]~~ 2-souvislý právě tehdy, když jde vyrobit z kružnice posloupností přidávání uší. Přidáním ucha rozumíme vybrání dvou různých vrcholů grafu a jejich spojení cestou vytvořenou z nových vrcholů a hran (přidání jedné hrany je také přidání ucha, pokud tím nevzniknou paralelní hrany).

Obarvení grafu: postupujeme indukcí dle přidávání uší. Přesněji: víme, že graf je 2-souvislý, tedy dá se vyrobit z kružnice posloupností přidávání uší. Jednu takovou posloupnost fixujeme. Ukážeme, že tvrzení platí pro kružnice, a také, že pokud platí pro nějaký graf G, tak platí i pro „G + ucho“.

I. pro graf C_n: obarvíme hrany střídavě modře a červeně (pro sudé ~~grafy~~ kružnice), pro liché kružnice budou u jednoho z vrcholů dvě stejně barevné hrany.

Pro ~~[illegible]~~ každé dva vrcholy máme právě dvě cesty mezi nimi. Pokud mají obě cesty délku aspoň 2 (počet hran), tak alespoň jedna z nich určitě obsahuje hrany obou barev a ~~[illegible]~~ tedy i kdyby druhá cesta měla jen hrany jedné barvy, je tvrzení splněno. Pro $n \geq 4$ pokud má jedna cesta délku 1, tak druhá má délku aspoň 3, a tedy obsahuje obě barvy (speciálně tedy obsahuje hranu jiné barvy než cesta délky 1). Zbývá C_3, pro který tvrzení zjevně platí.

Pro všechny kružnice tedy tvrzení platí.

II. Mějme graf G, pro který tvrzení platí, a přidejme mezi jeho vrcholy x a y ucho. Chceme ukázat, že ~~[illegible]~~ obarvení hran lze rozšířit na hrany ucha tak, aby tvrzení stále platilo. Obarvíme hrany ucha opět střídavě, nezáleží na tom, kterou barvou začneme. (Ucho je cesta, tedy určitě jde střídat dvě barvy)

Nyní mějme dva vrcholy a, b grafu G+ucho a ukážeme, že pro ně lze nalézt požadované cesty. Rozeberme případy: (DRUHÁ STRANA PAPÍRU)

a) pokud $a, b \in G$, pak lze cesty nalézt v grafu G z indukčního předpokladu.

b) pokud $a, b \in$ ucho: ucho má alespoň 2 vrcholy, tedy musí mít alespoň 3 hrany. Dvě hrany ucha sousedící s vrcholem a mají různé barvy. Jedna z hledaných cest vede z a do b po hranách ucha, druhá vede přes graf G (přes vrcholy x a y a libovolnou cestu mezi nimi). Každá z těchto cest určitě využívá jinou z hran u a, protože ucho je cesta.

c) zbývá $a \in G$, $b \in$ ucho: postupujeme podobně jako v předchozím případě. Ucho má vrchol, tedy má alespoň dvě hrany a hrany u b mají různé barvy. Jedna cesta tedy vede z b do a jednou hranou z b (a libovolně skrz G) a druhá druhou hranou z b. Hrany u b mají různé barvy, a proto jedna z cest určitě obsahuje modrou hranu a druhá červenou.

To jsou všechny možné případy, tedy libovolné dva vrcholy lze spojit dvěma cestami dle zadání.

(Pokud je přidávané ucho pouze jedna hrana, nastává pouze možnost a))

(3) 1M

Kód studenta 15

6 Relace (3 body)

Určete, zda je následující relace $(X, *)$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní. Jde-li o ekvivalenci, určete počet tříd ekvivalence; jde-li o částečné uspořádání, určete velikost největšího antiřetězce.

$$X = \{1, \ldots, 10\}^2, (a, b) * (c, d) \Leftrightarrow (3 \backslash (a - c) \wedge bd \geq \max\{b, d\})$$

→ splněno vždy, protože $b \geq 1$, $d \geq 1$

reflexivita: $(a,b) * (a,b) \Leftrightarrow 3 \mid (a-a) \wedge bb \geq \max\{b,b\} \Leftrightarrow 3 \mid 0 \wedge b \cdot b \geq b$

platí ✓

symetrie: předpokládáme $(a,b) * (c,d)$, zjišťujeme $(c,d) \overset{?}{*} (a,b)$

$(c,d) * (a,b) \Leftrightarrow 3 \mid (c-a) \wedge db \geq \max\{d,b\} \Leftrightarrow 3 \mid (a-c) \wedge bd \geq \max\{b,$

platí ✓

antisymetrie: vezmu $(1,1)$ a $(4,1)$

vidíme $(1,1) * (4,1)$, protože $3 \mid (1-4) \Leftrightarrow 3 \mid (-3)$ a $1 \cdot 1 \geq \max\{1,1\} = 1$

díky symetrii také $(4,1) * (1,1)$

ale neplatí $(1,1) = (4,4)$, tedy relace není antisymetrická ✓

tranzitivita: předpokládáme $(a,b) * (c,d)$ a $(c,d) * (e,f)$, zjišťujeme $(a,b) \overset{?}{*} (e,f)$

$(a,b) * (c,d) \Leftrightarrow 3 \mid (a-c) \wedge bd \geq \max\{b,d\}$

$(c,d) * (e,f) \Leftrightarrow 3 \mid (c-e) \wedge df \geq \max\{d,f\}$

$(a,b) * (e,f) \Leftrightarrow 3 \mid (a-e) \Leftrightarrow 3 \mid (a-c+c-e) \Leftrightarrow 3 \mid (a-c)+(c-e) \Leftarrow 3 \mid (a-c) \wedge 3 \mid (c$

$\wedge\ bf \geq \max\{b,f\}$

platí

Jedná se o ekvivalenci, druhá podmínka je splněna vždy, první podmínka odpovídá ✓ $a \equiv c \pmod 3$. Proto jsou právě 3 třídy této ekvivalence odpovídající zbytkovým třídám mod 3: $[(1,1)]_*$, $[(2,1)]_*$, $[(3,1)]_*$

ANO

3 +

Kód studenta 15

3 Maticové prostory (3 body)

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte všechny vektory $x \in \mathbb{R}^3$ takové, které náleží do řádkového prostoru matice A a zároveň řeší soustavu $Ax = 0$.
2. Ukažte, že každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ se dá vyjádřit jako součet vektoru z $\mathrm{Ker}(A)$ (jádro matice) a vektoru z $\mathcal{R}(A)$ (řádkový prostor matice).

1. vektory x, které řeší soustavu $Ax=0$, jsou právě ty, které patří do $Ker(A)$. Víme, že $R(A)^{\perp} = Ker(A)$, tedy jediný vektor, který může patřit do obou podprostorů současně je 0 (nulový vektor). ✓

2. Z ortogonality prostorů víme, že $\dim R(A) + \dim Ker(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Protože $\dim(R(A) \cap Ker(A)) = 0$ (první část příkladu), tak z věty o dimenzi spojení a průniku platí $\dim(R(A) + Ker(A)) = 3$ a tedy nutně $R(A) + Ker(A) = \mathbb{R}^3$ ✓

$$R(A) + Ker(A) = \{u + v \mid u \in R(A), v \in Ker(A)\}$$

(Jiný důkaz můžeme vést takto: najdeme ortonormální bázi $R(A)$ a doplníme ji na ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$. Nově přidané vektory tvoří bázi $Ker(A)$, protože jsou kolmé na všechny vektory báze $R(A)$ a je jich $\dim \mathbb{R}^3 - \dim R(A) = \dim Ker(A)$. Každý vektor $\in \mathbb{R}^3$ má souřadnice vzhledem k naší bázi $\mathbb{R}^3$, která je ~~[illegible]~~ sjednocením bází $R(A)$ a $Ker(A)$, tedy souřadnice ~~[illegible] součty vektorů~~ vůči bázi $R(A)$ a $Ker(A)$ dávají vektory z $R(A)$ a $Ker(A)$, jejichž součet je původní vektor. ∎) ✓