Vytvořující funkce

Úloha: V krabici jsou 3 červené, 4 modré a 5 bílých míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Vytvořující funkce

Úloha: V krabici jsou 3 červené, 4 modré a 5 bílých míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Řešení rozborem případů:

3 červené, x modrých a $4 - x$ bílé $x \in \{0, \dots, 4\}$ ...... 5 možností
2 červené, x modrých a $5 - x$ bílé $x \in \{0, \dots, 4\}$ ...... 5 možností
1 červený, x modrých a $6 - x$ bílé $x \in \{1, \dots, 4\}$ ...... 4 možnosti
0 červený, x modrých a $7 - x$ bílé $x \in \{2, \dots, 4\}$ ...... 3 možnosti

Celkem 17 možností.

Vytvořující funkce

Úloha: V krabici jsou 3 červené, 4 modré a 5 bílých míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 7 míčků?

Jiný postup:

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) =$$

$$x^{12}+3x^{11}+6x^{10}+10x^9+14x^8+\mathbf{17x^7}+18x^6+17x^5+14x^4+10x^3+6x^2+3x+1$$

Celkem je 17 možností jak vybrat 7 míčků,
ale také např. 6 způsobů jak vybrat 10 míčků
nebo 14 způsobů jak vybrat 4 míčky.

Vytvořující funkce

Úloha: V krabici je **30** červených, **40** modrých a **50** bílých míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat **70** míčků?

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+\cdots+x^{40})(1+x+\cdots+x^{50}) = \cdots + \;???\mathbf{x^{70}} + \ldots$$

Vytvořující funkce

Úloha: V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, jinak než barvou nerozeznatelných. Kolika způsoby lze vybrat 70 míčků?

$$(1+x+x^2+\dots+x^{30})(1+x+\dots+x^{40})(1+x+\dots+x^{50}) =$$

$$\frac{1-x^{31}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{41}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{51}}{1-x} =$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}\cdot(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}) =$$

$$\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\right)(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}) =$$

$$1+\dots+\underbrace{\left[\binom{72}{2}-\binom{72-31}{2}-\binom{72-41}{2}-\binom{72-51}{2}\right]}_{1061}x^{70}+\dots$$

Odpověď: 70 míčků lze vybrat 1061 způsoby.

Jak může vyjít součin nekonečné řady s mnohočlenem opět konečný mnohočlen?

Jednoduše:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 - x^{31}) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x}$$

podobně pro zbylé dva faktory $1 - x^{41}$ a $1 - x^{51}$

Ve skutečnosti $\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots$ není nic jiného než $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$.

Pro zajímavost:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+\cdots+x^{40})(1+x+\cdots+x^{50}) =$$
$$x^{120}+3x^{119}+6x^{118}+10x^{117}+15x^{116}+21x^{115}+28x^{114}+36x^{113}+45x^{112}+$$
$$55x^{111}+66x^{110}+78x^{109}+91x^{108}+105x^{107}+120x^{106}+136x^{105}+153x^{104}+$$
$$171x^{103}+190x^{102}+210x^{101}+231x^{100}+253x^{99}+276x^{98}+300x^{97}+325x^{96}+$$
$$351x^{95}+378x^{94}+406x^{93}+435x^{92}+465x^{91}+496x^{90}+527x^{89}+558x^{88}+589x^{87}+$$
$$620x^{86}+651x^{85}+682x^{84}+713x^{83}+744x^{82}+775x^{81}+806x^{80}+836x^{79}+865x^{78}+$$
$$893x^{77}+920x^{76}+946x^{75}+971x^{74}+995x^{73}+1018x^{72}+1040x^{71}+1061x^{70}+$$
$$1080x^{69}+1097x^{68}+1112x^{67}+1125x^{66}+1136x^{65}+1145x^{64}+1152x^{63}+1157x^{62}+$$
$$1160x^{61}+1161x^{60}+1160x^{59}+1157x^{58}+1152x^{57}+1145x^{56}+1136x^{55}+1125x^{54}+$$
$$1112x^{53}+1097x^{52}+1080x^{51}+1061x^{50}+1040x^{49}+1018x^{48}+995x^{47}+971x^{46}+$$
$$946x^{45}+920x^{44}+893x^{43}+865x^{42}+836x^{41}+806x^{40}+775x^{39}+744x^{38}+713x^{37}+$$
$$682x^{36}+651x^{35}+620x^{34}+589x^{33}+558x^{32}+527x^{31}+496x^{30}+465x^{29}+435x^{28}+$$
$$406x^{27}+378x^{26}+351x^{25}+325x^{24}+300x^{23}+276x^{22}+253x^{21}+231x^{20}+210x^{19}+$$
$$190x^{18}+171x^{17}+153x^{16}+136x^{15}+120x^{14}+105x^{13}+91x^{12}+78x^{11}+66x^{10}+$$
$$55x^9+45x^8+36x^7+28x^6+21x^5+15x^4+10x^3+6x^2+3x+1$$