2

Kód studenta 26

1 LA1 – Vlastní čísla (3 body)

1. Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Rozhodněte, zda $\lambda = 7$ je vlastním číslem matice A. Dále rozhodněte, zda $x = (1,2,1)^T$ je vlastním vektorem matice A.

2. Buď V množina všech reálných matic 3×3, pro které je 0 vlastní číslo a přísluší mu vlastní vektor $y = (1,2,3)^T$. Ukažte, že V je vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

1.) spočítame vlastné čísla pomocou charakteristického polynómu

$p_A(x) = \det(A - \lambda I_n) =$

$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 9 - (2-\lambda)3 - (1-\lambda) =$

$1-\lambda \quad 1 \quad 1$

$1 \quad -2-\lambda \quad 3$

$= (2+\lambda^2-3\lambda)(1-\lambda) + 9 - 6 + 3\lambda - 1 + \lambda =$

$= 2 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda + 3\lambda^2 + 9 - 6 + 3\lambda - 1 + \lambda =$

$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda + \cancel{10}\,4 \neq$ ✓

$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda + \cancel{10}\,4 = 0$

$\lambda = 7$

$-7^3 + 4.49 - 7 + \cancel{10}\,4 = 0$

$-7.7^2 + 4.49 - 7 + \cancel{10}\,4 = 0$

$-150 = -3.49 \cancel{+} 3 \neq 0$ ... nie, 7 nie je vlastným číslom A ✓

$4^3 = 16.4$

~~264~~

~~Ax = Ax~~

$Ax = \lambda x$

$x = (1,2,1)^T$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$1+2+1$

$1+4+3 = 8$

$3+1 = 4$

$\Rightarrow$ je vlastným vektorom, s vlastným číslom $\underline{4}$ ✓

2.) VP musí splňať

+ 1.) asociativita na sčítanie
2.) komutativita na sčítanie
3.) existuje neutrálny prvok na sčítanie
4.) -||- inverz -||-

splňa pre $\forall \mathbb{R}^{3\times3}$

$\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -x & -y & -z \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

· 1.) existuje neutrálny prvok na násobenie
2.) $\forall$ prvky okrem nuly majú inverziu na násobenie $\mathbb{R}$

distr. 1.) $\alpha \in T$ ~~$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$~~ $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$
2.) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

násobenie skalárom z telesa

uzavretosť pre súčet vektorov a násobení skalárom?

$\mathbb{R}^{3\times3}$

$\lambda = 0$

vl. vektor = $(1,2,3)^T$

ukážte, že je VP a jeho dim

$Ax = 0 \cdot x$

$Ax = 0$

$\Rightarrow$ má nenulové riešenie na $Ax = 0 \Rightarrow$ sú singulárne

Kedže máme klasické násobenie matíc, teda distributativita, ostatné prvky platia ako normálne.

Sing. matice sú uzavreté na sčítanie

Dimenzia $\mathbb{R}^{3\times3}$ je 9. Koľko z toho sú regulárne matíc?

$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \dots$

Kernel má dimenziu ≥ 1 teda dimenzia tohto ≤ 8

2 body

Kód studenta 26

2 LA2 – Pozitivní definitnost (3 body)

Definujte pojem pozitivní definitnosti matice a formulujte alespoň jedno ekvivalentní kritérium pro testování pozitivní definitnosti. Pomocí tohoto kritéria rozhodněte, zda je následující matice pozitivně definitní

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

je symetrická!! ⇒ je diagonalizovateľná

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitívne definitná $\Leftrightarrow$ $x^T A x > 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ~~(4x4)(4x1)(1x4)~~

$x \neq 0$

ekvivalentne, $\forall$ vlastné čísla sú kladné ✓

vlastné čísla nájdeme pomocou charakteristického polynómu

Laplaceov rozvoj

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) =$$

$i=4$

$$= 2\cdot(-1)^{4+1} \det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\cancel{(-1)^{4+2}} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \end{pmatrix} +$$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$2-\lambda \quad 2 \quad -1$

$4-\lambda \quad 0 \quad 2$

$-2 \quad 2 \quad -1$

$$+ (-2)\cdot(-1)^{4+3}\cdot \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + (6-\lambda)\cdot\cancel{(-1)^{4+4}} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$4-\lambda \quad -2 \quad 2$

$-2 \quad 2-\lambda \quad -1$

$4-\lambda \quad -2 \quad 0$

$-2 \quad 2-\lambda \quad 2$

10 $\quad \cancel{16} + 2\lambda^2 - 14\lambda$ $\quad \cancel{-10}$ $\quad \cancel{-10} + 2\lambda$ $\quad -16 + 4\lambda \; \cancel{-20} + 4\lambda \; \cancel{+20} + \lambda^2 - 9\lambda$

$$= -2\cdot\left(8 + (2-\lambda)(5-\lambda)\cdot 2 - \cancel{8} + (5-\lambda)(-2)\right) - \left((4-\lambda)\cdot(-4) + (-4)(5-\lambda) + (5-\lambda)(4-\lambda)\right)$$

$-2(10 + 2\lambda^2 - 12\lambda)$ $\quad (\lambda^2 - \lambda - 16)$

$$+ 2\left((4-\lambda)(2-\lambda)(-2) - 8 + 2(4-\lambda) - 8\right) + (6-\lambda)\left((4-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(5-\lambda)\right)$$

$(8 + \lambda^2 - 6\lambda)\cdot(-2)$ ~~$-8+8-$~~ $2\lambda - 8$

ak by $\forall$ vlastné čísla boli > 0, tak je pozitívne definitná

inak nie je

$-24 - \lambda^2 + 10\lambda$ ~~-2λ~~

nedopočteno

Kód studenta 26

3 MA1 – Limita posloupnosti (3 body)

(3)

Definujte vlastní limitu posloupnosti.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Rozhodněte zda platí, že pokud $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

1.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnú limitu v $A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0, \ \forall n > n_0: \ |a_n - A| < \varepsilon$

2.) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Nie, pretože protipríklad $a_0 = 1, \ b_0 = 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $\quad a_n = \frac{1}{2^n}$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ $\quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

$1, -1, 1, -1, \dots$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \text{párne } n & \frac{0}{2^n} = 0 \\ \text{nepárne } n & \frac{2}{2^n} = 0 \end{cases}$$

Ale $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{(-1)^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(-1)^n} \right)$ nemá limitu,

keďže vyzerá ako $1, -1, 1, \dots$

Limita podpostupnosti $1, 1, 1, \dots = 1$

-//- $-1, -1, -1 \dots = -1$

čo je spor

Kód studenta 26 3 body

4 MA2 – Metrický prostor (3 body)

Dokažte, že (M, d) je metrický prostor pokud M je neprázdná množina, f je funkce z M do kladných reálných čísel a d je definována jako

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max(f(x), f(y)) & x \neq y. \end{cases}$$

$x, y, z \in M$

Musíme overiť metriku:

1.) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

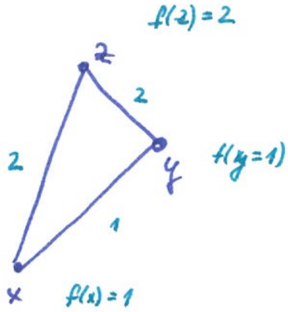
2.) $d(x,y) = d(y,x)$

3.) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ~~=> z toho~~

z toho vyplýva $d(x,y) \geq 0$ lebo $d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x)$

$0 \leq 2d(x,y)$

$d(x,y) \geq 0$



$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \max(f(x), f(y)) & \end{cases}$$

1.) áno, „$\Rightarrow$" keďže $0 \notin H(f)$ (obor hodnôt) (takže max sa nikdy $\neq 0$ pre $x \neq y$)

a ak „$\Leftarrow$" $x = x \Rightarrow d(x,x) = 0$

2.) áno, pre $d(x,x) = 0$ triviálne

$d(x,y) = \max(f(x), f(y)) = \max(f(y), f(x)) = d(y,x)$

3.) $\cancel{d(x,z) = \max(f(x), f(z)) \geq f(x)}$ $\cancel{\geq f(z)}$

Platí, viď $\rightarrow$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\max(f(x), f(z)) \leq \max(f(x), f(y)) + \max(f(y), f(z))$

Predpokladajme, že

$f(x) \geq f(z)$

t.z.

$$f(x) \leq \underbrace{\underbrace{\max(f(x), f(y))}_{\geq f(x) \geq 0} + \underbrace{\max(f(y), f(z))}_{\text{určite } \geq 0}}_{\geq f(x)}$$ ... takže to platí

inak

$f(z) \geq f(x)$

$$f(z) \leq \underbrace{\underbrace{\max(f(x), f(y))}_{> 0} + \underbrace{\max(f(y), f(z))}_{\geq f(z) \geq 0}}_{\geq f(z)}$$ ... platí

$\Rightarrow$ d je metrika

a keďže M je neprázdna,

tak (M, d) je metrický priestor

3 body

Kód studenta 26

5 MA3 – Tečná rovina (3 body)

Najděte bod, kde je tečná rovina funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$ vodorovná. Jaka je rovnice této tečné roviny ?

Zrátame si parciálne derivácie. Vieme, že tečná nadrovina je vodorovná v extrémoch. Teda najdeme stacionárne body

$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 8y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 6$ ✓ $2x+2y-6 = 0$ $2x = 6 - 2y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{2y}x + \cancel{2}4y - 8$ ✓ $2x + 4y - 8 = 0$

2. $6 - 2y + 4y - 8 = 0$

$2y = 2$

$\boxed{y = 1 \quad x = \cancel{4}2}$

Teraz zistíme, či v danom bode je extrém

Toto je zbytečné, stačí použít to, že tečná rovina v bodě (a,b) má rovnici $r(x,y) = f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b)$, takže zřejmě r je vodorovná $\Leftrightarrow$ r je konst. $\Leftrightarrow$ $f_x = f_y = 0$.

Zrátajme teda maticu druhých parciálnych derivácií:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Spočítajme jej vlastné čísla

$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 =$

$\Rightarrow D = 36 - 16 = 20$ $\sqrt{20} < 5$

$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$

$\Rightarrow$ všetky vlastné čísla sú kladné, je teda pozitívne definitní a teda v bode $[2,1]$ má lokálne minimum $\Rightarrow$ je tam vodorovná tečná nadrovina. Jej rovnica $f(x,y) = -10$ ✓

ZLE SITUÁCIA...

Rovina má vyjadrenie

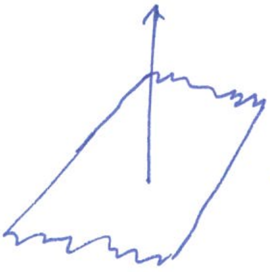
$L(x,y) = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(y)$

$L(x,y) = \cancel{4+4} + 2 - 12 - \cancel{8} + \ldots = -10 + 2x + 2y - 6 + 2x + 4y - 8 = \cancel{-10}\ 4x + \cancel{6y - 24}$

$= -10$

$ax+by+c=0$ ... premica

$ax+by+cz+d=0$ ... ravnina



$\vec{n}=(0,0,1)$

$[2,1]$ -10

$2a+b-10c+d=0$

$-10c+d=0$

$d=10c$

$d=10$

$z+10=0$

(2 BODY)

Kód studenta 26

6 Nezávislé jevy (3 body)

1. Co znamená, že dva náhodné jevy jsou nezávislé ? Definujte.
2. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Zkonstruujme náhodný graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že pro každou dvojici vrcholů i a j takových, že $1 \leq i < j \leq n$, si hodíme férovou mincí (na níž padne hlava s pravděpodobností přesně $1/2$) a padne-li na ní hlava, přidáme do G hranu ij. Nechť J_i je jev, že vrchol i má stupeň přesně 1. Rozhodněte, pro která n jsou jevy J_1 a J_2 nezávislé a odpověď zdůvodněte.

1.) Náhodné jevy A, B sú nezávislé, ak platí ~~$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$~~ PŘEŠKRTNUTÁ VERZE BYLA TA SPRÁVNÁ

$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$ že sa stali súčasne

VE VÝPOČTECH SE PAK TAKÉ POČÍTÁ PRŮNIK

napr. že na červenej kocke je 3 a modrej 5

$P(A \cup B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

2.) každá hrana má pravdepodobnosť $1/2$, že tam bude

J_i … i má stupeň k_i

Pre ktoré n sú J_1 a J_2 nezávislé?

J_1 … práve 1 padla 1, inak 0

pre # možností

$P[J_1] = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (n-1) \checkmark = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{že je vybraná}} \cdot \overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{nie je další vybraná}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots}^{n-2}$

$n-1$ vrcholov

~~$P[J_2] =$~~

$P[J_2] =$ ~~…~~

kedže je to férová minca, tak # možností majú rovnakú pravdepodobnosť

$$\frac{\bigcirc \rightarrow \text{2× ÁNO, inak NIE}}{2^{n-1} \text{ všetky možnosti}} = \frac{\binom{n-1}{2}}{2^{n-1}} = P[J_2]$$

…PROČ TUTO KOMB. ČÍSLO?

~~Pre ktoré n platí~~:

$P[J_1 \vee J_2] = \frac{n-1}{2^{n-1}}$ ✓.

$P[J_1 \vee J_2] = P[J_1] + P[J_2] - P[J_1 \wedge J_2]$

…. rátala som tu blbosť….

J_i … pravdepodobnosť, že i-ty vrchol má stupeň 1

$P(J_1 \wedge J_2) = P(J_1) \cdot P(J_2)$

$n=2$

$P(J_1 \wedge J_2) = \frac{1}{2}$.

$P(J_1) = 1/2$

$P(J_2) = 1/2$

NIE

	J_1	J_2
A	✓	✓
¬A	×	×

$J_1 = \frac{1}{2}$ $\quad J_2 = 1/2$

$J_1 \cdot J_2 = \frac{1}{2}$

✓

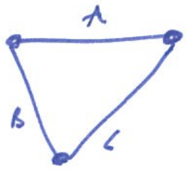
sú v rovnako pravdepodobné…

$n=3$

$P(J_1 \wedge J_2) = \frac{2}{8}$

$P(J_1) = 1/2$ $\quad P(J_2) = 1/2$

~~$P(A \wedge \neg B \wedge \neg C) + P(B \wedge C \wedge \neg A)$~~



A	B	C	
A	B	¬C	
A	¬B	¬C	✓
¬A	B	C	✓
¬A	¬B	C	
¬A	B	¬C	✓
A	¬B	¬C	✓
¬A	¬B	¬C	

$P(J_1 \wedge J_2) = \frac{1}{4} = P[J_1] \cdot P[J_2]$

$\Rightarrow$ ÁNO

✓

$n =$ lib.

$P[J_1] = \frac{n-1}{2^{n-1}} = P[J_2]$ ✓

$P[J_1 \wedge J_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2(n-1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}}$

(1,2 je ÁNO; 1,2 mieje; iná je; ostatné nie sú)

JAKÝ JE POSTUP VÝPOČTU?

$= \frac{1}{2^n \cdot 2^{n-1}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-1}}$ — TO NEVYCHÁZÍ PO DOSAZENÍ $n=2, n=3$

$\frac{3^5}{3^2}$ $\quad 3^3$

$P[J_1 \wedge J_2] = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{2}{2^{2n-1}} = 2^{2-2n}$

$\frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n-1}{2^{n-1}} = 2^{2-2n}$

$\frac{(n-1)^2}{2^{2n-2}} = \frac{4}{2^{2n}}$

$\frac{(n-1)^2}{2^{n-2}} = \frac{2}{2^{n-1}} \quad / \cdot 2^{n-2}$

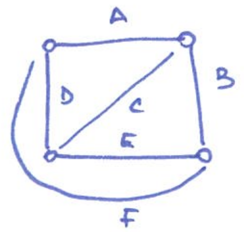
$(n-1)^2 = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$

$(n-1)^2 = 1$

$(n-1)^2 = 0 \iff n = 1$

takže nikdy …

$n=4$



... už to je veľa na slušanie :

$$\boxed{P[J_i] = \frac{n-1}{2^{n-1}}}$$

$n=2 \quad \frac{1}{2}$

$n=3 \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$P[J_1 \wedge J_2] = \underline{\underline{\cancel{1}\, 2^{2-2n}}}$$

zlý vzorec

$\Rightarrow$ $n=2 \quad 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$n=3 \quad 2^{2-6} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

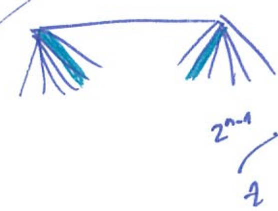
$$P[J_1 \wedge J_2] = \frac{1}{2} \cdot \cancel{P[\ ]} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}} \cdot \frac{n-2}{2^{n-2}}$$

POČET ZBYLÝCH HRAN VEDOUCÍCH Z 1 A 2 JE $2\cdot(n-2)$, PROTO PAK ASI VÝSLEDEK NEVYCHÁZÍ

medzi 1,2 je hrana

nikam ďalej nejde hrana

medzi 1,2 nie je hrana



$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\, 2^{-1} \cdot 2^{-2n+2} + \frac{2^{-1}(n-2)^2}{2^{2n-4}}$$

$$= 2^{-2n+1} + 2^{-2n+3} \cdot (n-2)^2$$

$n = \cancel{1}\ 2 \quad 2^{-3} + 2^{-1}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \cancel{\frac{5}{8}}$

$n=3$

Má byť

$P[J_1 \wedge J_2]$ $\quad n=2 \quad 1/2$

$n=3 \quad 1/4$

$= \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\frac{1}{\cancel{2^{n-1}}} = \frac{n-1}{\cancel{2^{n-1}}} \cdot \frac{n-1}{2^{n-1}} \quad / \cdot 2^{n-1}$$

$$\boxed{2^{n-1} = n^2 - 2n + 1}$$

$3 \quad 4 = 9-6+1$ ✓

$2 \neq 4-4+1$ ✗

$8 = 16-8+1$ ✗

$625 = 25-10+1$

Z rácického pohľadu vyzerajú zaujímavo, výnimka je $n=3$

Myslím si, že to je jediné n kedy to platí, lebo 2^{n-1} rastie výrazne rýchlejšie

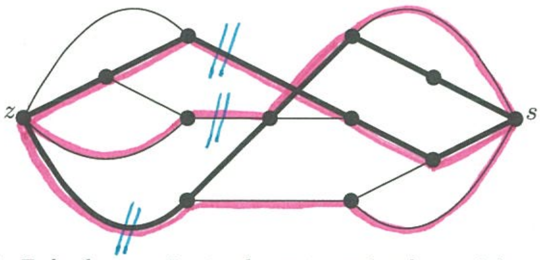
2

Kód studenta 26

7 Grafy (3 body)

Z grafu G na obrázku vytvoříme síť tak, že všechny hrany orientujeme zleva doprava a přidělíme jim kapacitu 1.

Tok mezi z a s je vyznačen silnými hranami a využívá plnou kapacitu vyznačených hran. Kapacity ostatních hran nejsou využity vůbec.



OK Rozhodněte, zdali jde o maximální tok. Pokud vyznačený tok není maximální, nějaký maximální tok nalezněte a zdůvodněte jeho maximalitu.

/ Jaké jsou důsledky hodnoty maximálního toku pro hranovou souvislost grafu ?

Vieme, že veľkosť maximálneho toku sa rovná veľkosti minimálneho hranového rezu.

Stačí nám teda nájsť rez danej veľkosti:

Daný tok má veľkosť 2. → teda pôvodný nie je maximálny

Tok veľkosti 3 vyzerá ružovo :). Rez rovnakej veľkosti je azúrový.

Tým, že sme našli rez danej veľkosti, ukázali sme, že tok je maximálny.

$|\text{Maximálny tok}| = |\underbrace{\text{minimálny rez}}_{=k}| \not\Rightarrow$ je hranovo k-súvislý z definície,

že je to minimálny rez a teda najmenšie také k, že po odobraní ľub. k hrán sa ~~počet komponent súvislosti~~ už nebude súvislý

Není pravda, hodnota max. toku je jen horní mez na hodnotu hranové souvislosti.

3

Kód studenta 26

8 Kombinatorika (3 body)

Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí $f(n)$ počet 15-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, a nechť $g(n)$ značí počet zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové.

Vyjádřete $f(n)$ a $g(n)$.

Rozhodněte, která z následujících možností platí:

- $\exists n_0 : \forall n > n_o : f(n) > g(n)$
- $\exists n_0 : \forall n > n_o : g(n) > f(n)$
- žádné n_0 vyhovující předchozím dvěma podmínkám neexistuje.

$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$f(n) = \binom{n}{15} = \frac{n!}{15!\,(n-15)!} = \frac{n.(n-1).(n-2)\dots(n-14)}{15!} \approx n^{15}$

(Vieme, že $\leq n^{15}$)

~~g(3)~~

$g(n) = 3^n$ ... každý prvok sa môže zobraziť do troch

Platí, že $\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad g(n) > f(n)$

~~Pretože~~ Exponenciálna funkcia $g(n)$ rastie rýchlejšie než $f(n)$.

Hľadáme n_0, kde $\forall n > n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) platí

$3^n > n^{15}$

$3^n \geq n_0^{15} \quad / \log$

$n \log 3 \geq 15 \log n$

$n \log 3 - 15 \log n \geq 0$, kde $\log 3 = c$

$3 \quad 9 \quad 27$

81

$81.1 - 15.4 \geq 0$

$\log 3 \cdot n > 15 \log n$

$n \log 3 > 15 \log n$

$n > \frac{15}{\log 3} \log n$

$n - \frac{15}{\log 3} \log n > 0$

Platí to, už napríklad od $n_0 = 81$

Kód studenta 26

1b

9 Logika (3 body)

Mějme následující formule φ_1, φ_2 jazyka $L = \langle 0, |\,|, f, -, < \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\,|, f$ jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol

$$\varphi_1: \quad (\forall \varepsilon)(\forall u)(0 < \varepsilon \to (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x-u| < \delta \to |f(x) - f(u)| < \varepsilon))),$$
$$\varphi_2: \quad (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \to (\exists x)(|x-u| < \delta \wedge \neg(|f(x) - f(u)| < \varepsilon)))).$$

1. Uveďte definice pro predikátovou logiku, kdy formule φ *platí ve struktuře* $\mathcal{A}$, kdy φ *(logicky) platí*, a kdy je φ *nezávislá*.
2. Platí formule φ_1, φ_2 ve struktuře $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, |\,|, f, -, < \rangle$ jazyka L, kde $0, |\,|, -, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$ a $f(0) = 0$, $f(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$? Uveďte zdůvodnění.
3. Je formule $\varphi_1 \leftrightarrow \neg\varphi_2$ nezávislá ? Uveďte zdůvodnění.

1.) φ je nezávislá, ak $\exists$ model pre ktorý platí a zároveň $\exists$ model pre ktorý neplatí

platí v struktúre A ak ~~platí vo $\forall$ jej modeloch~~

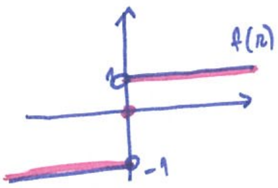
~~φ platí, ak existuje splňujúce ohodnotenie~~

φ platí, ak ~~po pridaní do báze negácie~~ ~~...~~ ~~$\neg\varphi$ vznikne spor~~

(pouze pokud φ je sentence!)

2.) $f(0) = 0$

✓ $f(r) = \frac{|r|}{r}$ $\quad r \neq 0$



φ_1 neplatí

vezmime $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $u = 0$

tvrdíme, že $\exists\, \delta > 0$, že $\forall x$ kde $|x-u| < \delta$

je $f(x)$ dostatočne blízko $f(u)$

to ale nie je pravda, lebo pre $\delta > 0$

je $|f(x) - f(u)| = 1$ čo je spor s ε

~~alebo $= -1$~~

φ_2 platí

vezmime $u = 0$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{2}$

$\delta > 0 \quad |x-u| < \delta$

$|f(x) - f(u)| =$

$1 - 0 \quad = 1$

$-1 - 0 \quad = -1$

Pre toto rozostavenie práve body okolo nuly spĺňajú, že sú ľubovoľne blízko $(<\delta)$ a zároveň neplatí že $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$

3.) Už máme štruktúru v ktorej platí φ_2 a neplatí φ_1

Hľadáme, štruktúru v ktorej neplatí $\varphi_1 \Leftrightarrow \neg\varphi_2$

↳ lze nalézt?? Není zodpovězeno.