Cinemática

- Movimento retilíneo
- Movimento retilíneo com aceleração constante
- Movimento em duas ou três dimensões
- Movimento de projéteis

Movimento Retilíneo

- A **mecânica** é o estudo das relações entre as forças, a matéria e o movimento. Esse estudo divide-se habitualmente em três partes:
  - **Cinemática**, que estuda o movimento independentemente do que o origina
  - **Estática**, que estuda o equilíbrio dos corpos
  - **Dinâmica**, que estuda a relação entre o movimento e as forças
- Vamos iniciar o estudo da mecânica pela cinemática, começando pelo caso mais simples, o **movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta.**

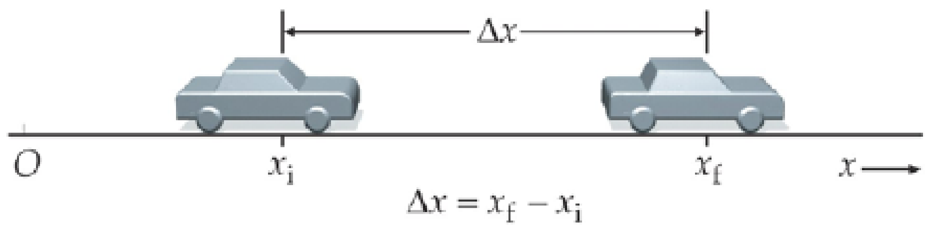
  O movimento de um automóvel ao longo de uma estrada plana, estreita e reta, por exemplo.

Uma **partícula** é um objeto cuja posição pode ser descrita por um único ponto. Qualquer coisa pode ser considerada uma partícula, desde que se possa, dentro de certas hipóteses, ignorar a sua estrutura interna: uma molécula, uma pessoa, uma galáxia...

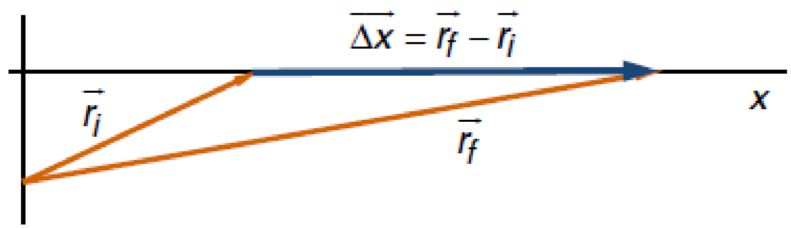
Movimento Retilíneo

- A variação de posição de uma partícula é o **deslocamento** (grandeza vetorial)
- A uma dimensão o deslocamento pode ser expresso por um escalar, que pode ser positivo, negativo ou nulo:

$$\Delta x = x_f - x_i$$



- Mas mesmo a uma dimensão podemos descrever a posição e o deslocamento por intermédio de vetores:



- A unidade SI para a posição e o deslocamento é o **metro** (m)

Movimento Retilíneo

- A **velocidade média** de uma partícula é definida como a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo em que o mesmo ocorre:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

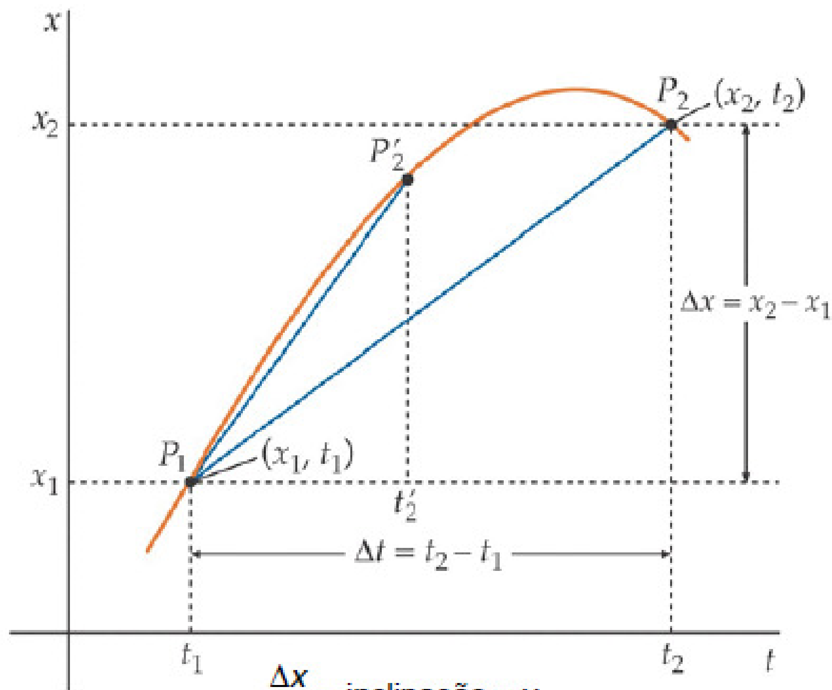
- A velocidade média é uma grandeza vetorial que a uma dimensão pode ser expressa por um escalar, que poderá ser positivo, negativo ou nulo.
- A unidade SI para a velocidade média é o **metro por segundo** (m/s).

- Não confundir a velocidade média com **rapidez média** ou **celeridade média**, definida como a razão entre o espaço total percorrido e o intervalo de tempo em que o mesmo ocorre, e que é sempre positiva:

$$\text{rapidez média} = \frac{\text{distância total percorrida}}{\text{tempo total}}$$

Movimento Retilíneo

- A **velocidade média** é igual ao declive da linha reta que, no gráfico da posição em função do tempo, liga os pontos correspondentes às posições inicial e final:



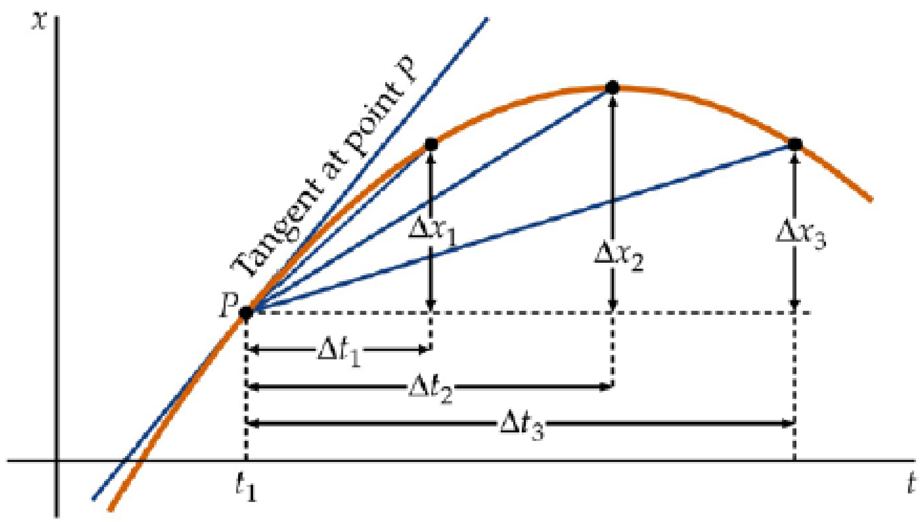
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{inclinação} = v_m$$

- A velocidade média pode depender do intervalo de tempo no qual é calculada.
- O que acontece quanto o intervalo de tempo diminui?

- A **velocidade instantânea** é o limite da velocidade média, quando *Δt → 0*, correspondendo portanto à derivada da posição em ordem ao tempo:

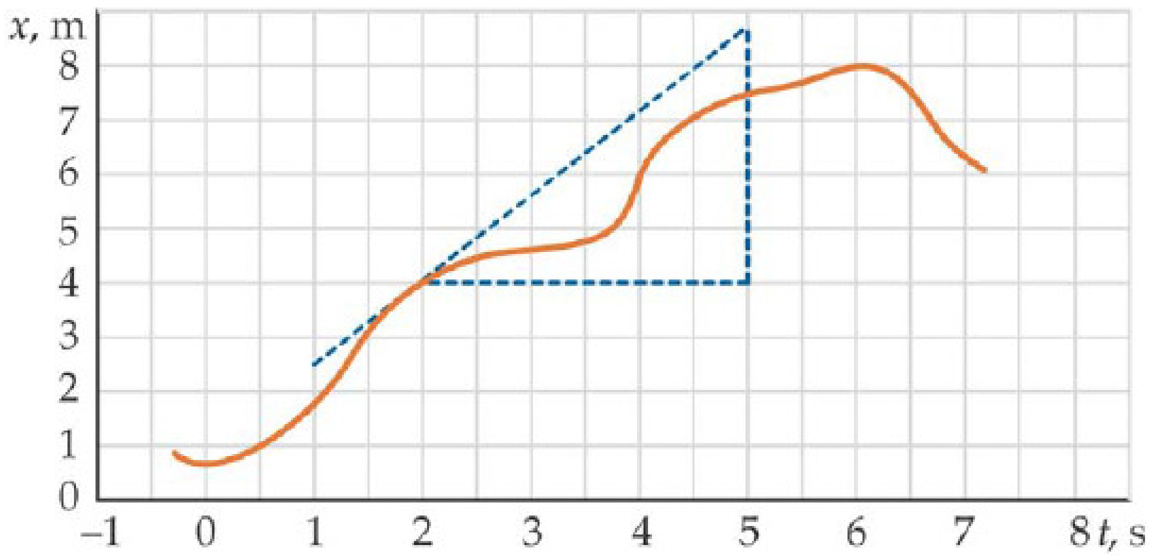
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

e traduzindo-se geometricamente pelo declive da linha tangente ao gráfico ***x(t)***

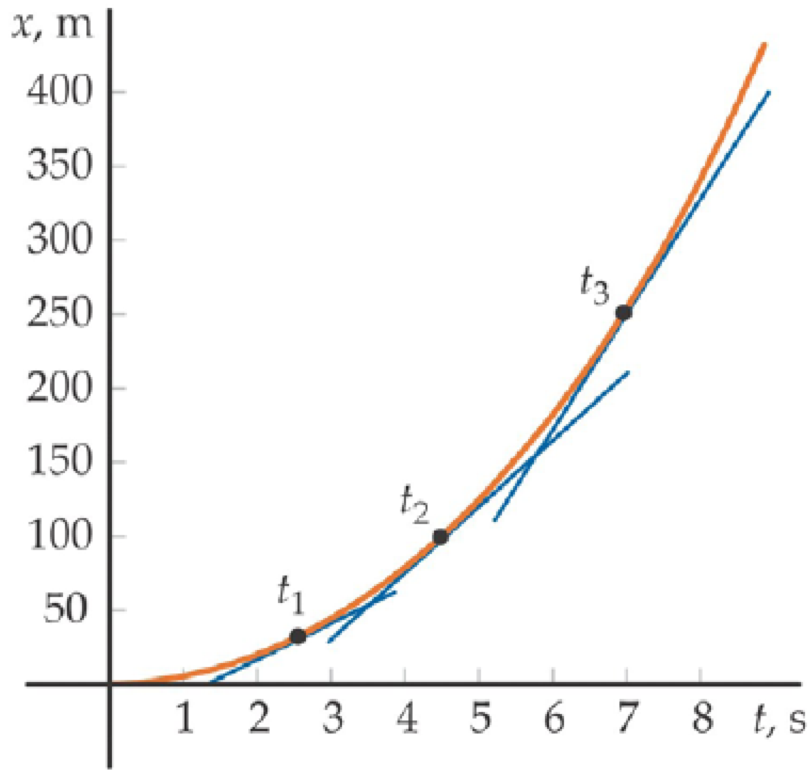


- A velocidade instantânea é uma grandeza vetorial, que a uma dimensão pode ser expressa por um escalar, que poderá ser positivo, negativo ou nulo.

- Determinar a velocidade instantânea no instante t = 2 s.
- Qual o instante correspondente ao maior valor da velocidade?
- Quando é que a velocidade é nula? E negativa?



- A posição de uma pedra que cai é descrita aproximadamente por $x = 5t^2$, em unidades SI. Determinar a sua velocidade em função do tempo.



Movimento Retilíneo

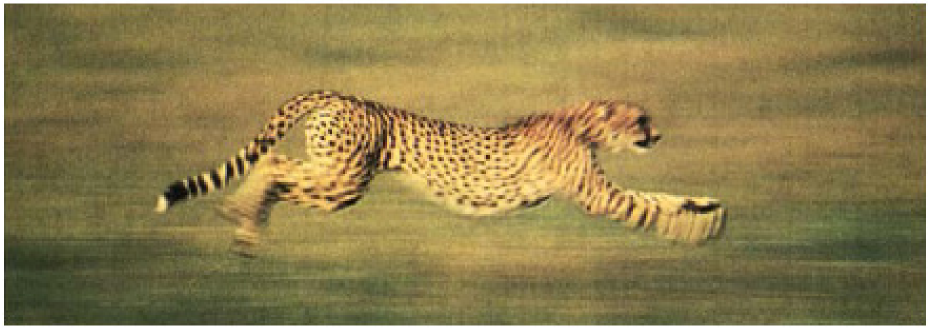
- A **aceleração** é a taxa de variação da velocidade instantânea. É uma grandeza vetorial que a uma dimensão pode ser expressa por um escalar.
- A **aceleração média** é definida como a razão entre a variação de velocidade e o intervalo de tempo decorrido:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- A **aceleração instantânea** é o limite da aceleração média, quando $\Delta t \to 0$, sendo igual ao declive da linha tangente ao gráfico $v(t)$:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- A unidade SI para a aceleração é o **metro por segundo ao quadrado** (m/s^2)



Movimento Retilíneo

- Se conhecermos a aceleração em função do tempo podemos obter a velocidade por **integração**. A uma dimensão:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{logo} \qquad dv = a\,dt$$

obtendo-se para a **velocidade**:

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

- Conhecida a velocidade em função do tempo podemos obter de modo análogo a **lei do movimento**:

$$dx = v\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

- A **aceleração média** e a **velocidade média** no intervalo $[t_o, t]$ serão dadas por:

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \qquad v_m = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Movimento Retilíneo com Aceleração Constante

- O movimento com **aceleração constante** é bastante comum na natureza
  Exemplo: queda dos graves nas proximidades da superfície terrestre
- Partindo do valor constante da aceleração podemos obter a velocidade e a posição por integração (para simplificar consideramos nulo o instante inicial t_o):

"It goes from zero to 60 in about 3 seconds."
© Sydney Harris

$$v(t) = v_\circ + \int_0^t a\, dt = v_\circ + a\, t$$

$$x(t) = x_\circ + \int_0^t v(t)\, dt = x_\circ + \int_0^t (v_\circ + a\, t)\, dt = x_\circ + v_\circ\, t + \tfrac{1}{2} a\, t^2$$

eliminando o tempo entre as duas equações anteriores, obtemos uma equação muito útil, quando se pretende relacionar a posição com a velocidade e não há interesse em conhecer o tempo decorrido:

$$v^2 = v_\circ^2 + 2\, a\, (x - x_\circ)$$

onde as grandezas x_o e v_o representam respectivamente a posição e a velocidade no instante inicial (t=0) do movimento.

Movimento Retilíneo com Aceleração Constante

- Se o **instante inicial** do movimento **não for nulo**, as equações para o movimento retilíneo com aceleração constante tomam a forma seguinte:

$$a = constante \quad \text{e} \quad t_0 \neq 0$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a \cdot dt = \cdots = v_0 + a\,(t - t_0)$$

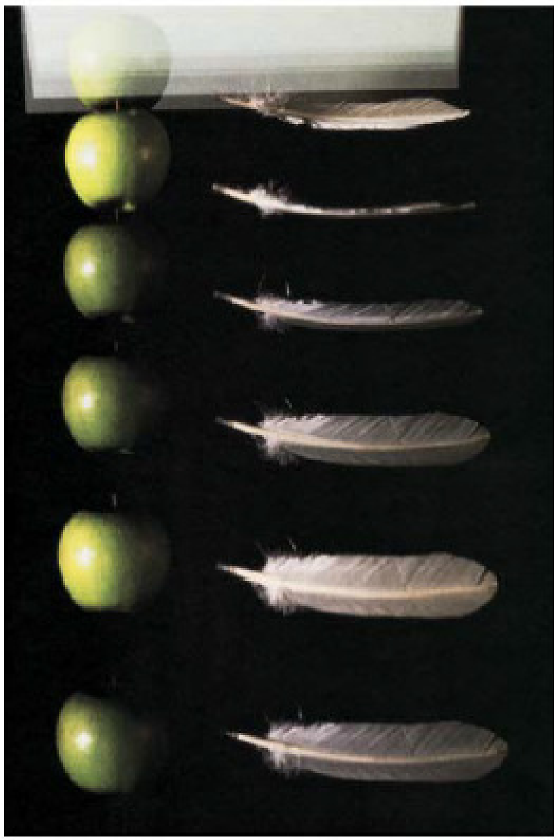
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \cdot dt = \cdots = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2} a\,(t - t_0)^2$$

onde as grandezas x_0 e v_0 representam respetivamente a posição e a velocidade no instante inicial t_0. Mesmo neste caso continua a ser válida a equação:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(x - x_\circ)$$

que se pode obter eliminando o tempo entre as duas equações anteriores.

Movimento Retilíneo com Aceleração Constante



No vazio, a maçã e a pena caem com a mesma velocidade, se partirem do repouso no mesmo instante

- Todos os objetos em queda livre com a mesma velocidade inicial se movem de forma idêntica nas **proximidades da superfície terrestre**, porque estão **sujeitos à mesma aceleração**

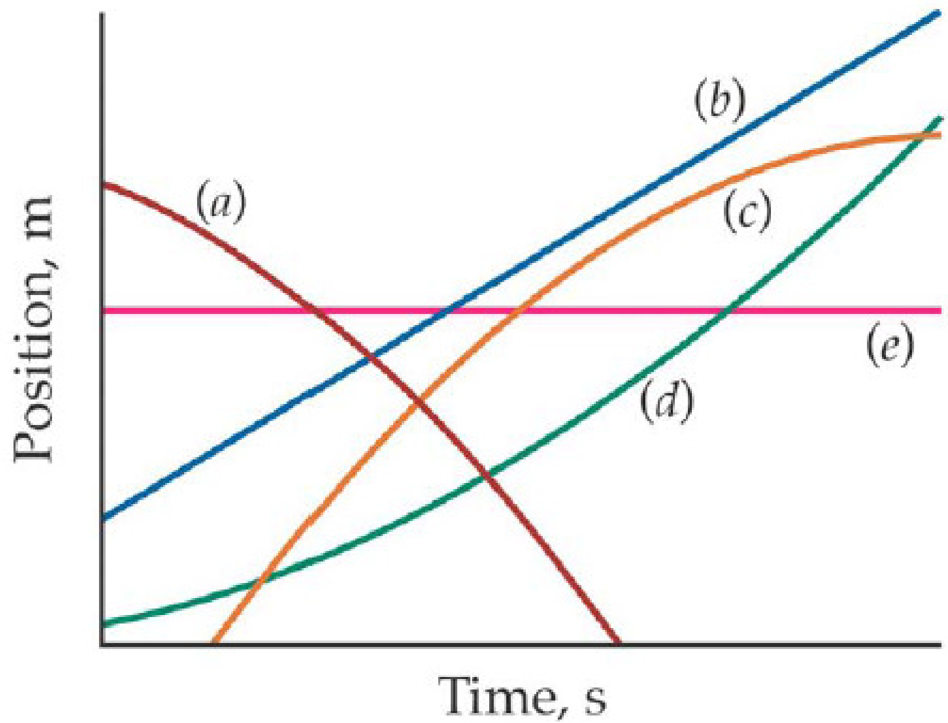
- A intensidade dessa aceleração, cuja intensidade se representa por ***g***, é de aproximadamente:

  $$g \approx 9{,}8\ m/s^2$$

  nas proximidades da superfície terrestre, com direção vertical e sentido de cima para baixo

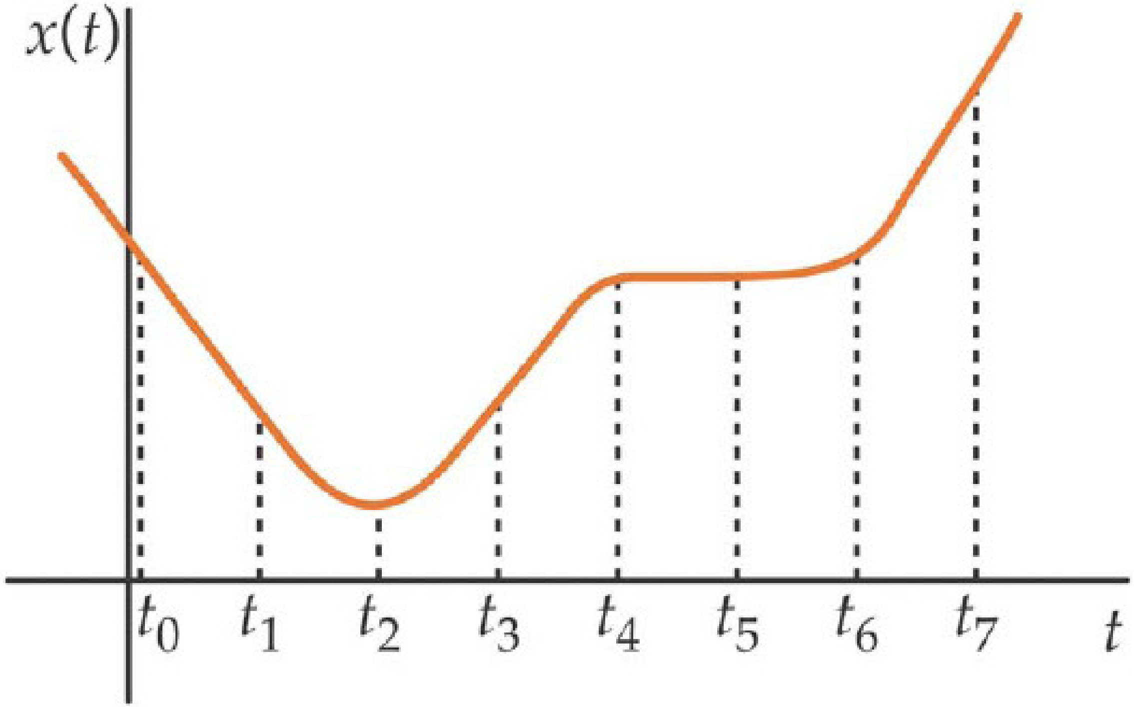
- Na nossa experiência do dia-a-dia verificamos que os corpos nem sempre caem com a mesma aceleração. Porquê?

- Considerar que as linhas curvas representadas na figura são parábolas.
- Qual das linhas representadas na figura representa o movimento de um corpo com aceleração constante e positiva?
- Que tipo de movimento representam as outras linhas?



Movimento Retilíneo

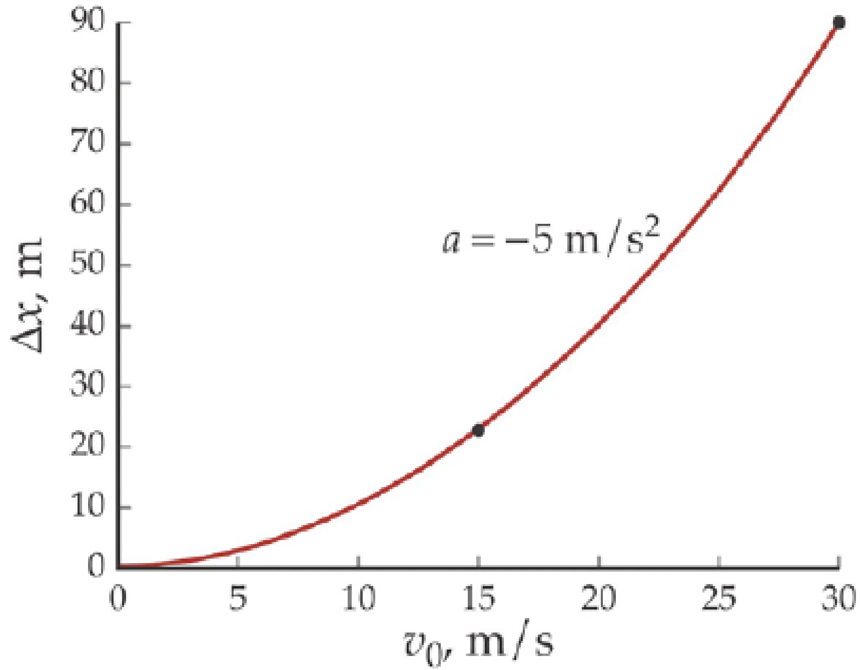
- Quando é que a velocidade é negativa, positiva ou nula, entre os instantes t_0 e t_7?
- Quando é que a aceleração é negativa, positiva ou nula?



Movimento Retilíneo

- Um carro trava com aceleração constante de 5 m/s^2 até parar. Determinar a distância percorrida pelo carro durante a travagem se a sua velocidade inicial for de 15 m/s ou de 30 m/s.

  R: 22,5 m e 90 m



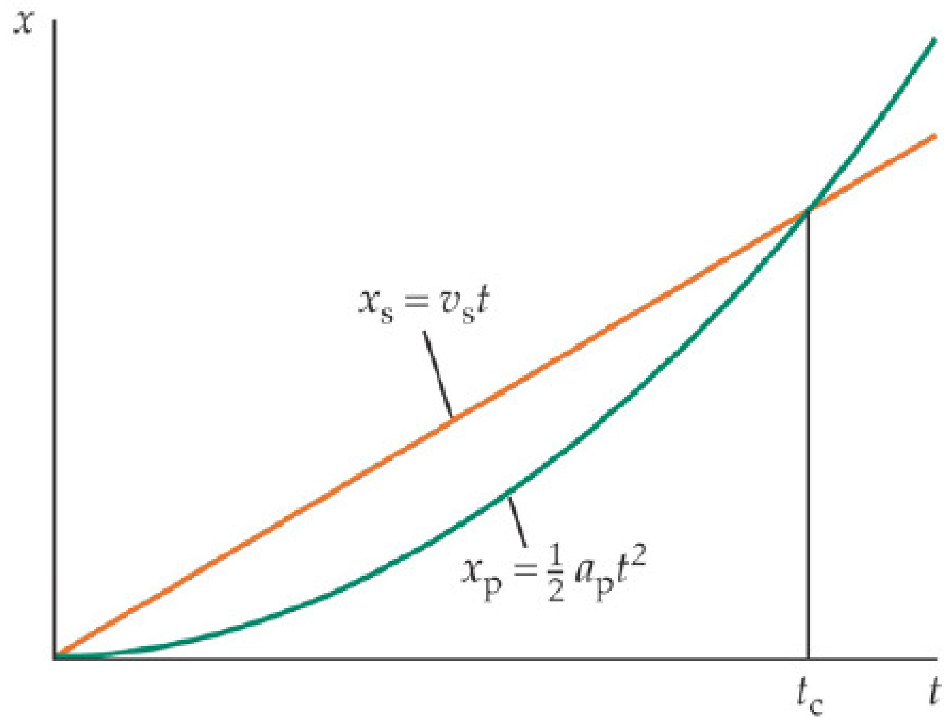
Movimento Retilíneo

- Durante um teste de impacto um automóvel colide com uma parede de betão, quando se desloca à velocidade de 100 km/h. Determinar o valor da aceleração.

R: Neste problema não podemos tratar o automóvel como uma partícula, pois diferentes pontos do automóvel terão diferentes acelerações enquanto o automóvel se deforma. Além disso o valor da aceleração não será constante durante todo o impacto. Mas podemos calcular a aceleração média de um ponto do automóvel fora da zona deformada pelo impacto, bastando para tal conhecer a distância de paragem ou a duração do impacto. Neste caso não temos essa informação, mas podemos usar o bom senso para estimar a distância de paragem. Se adoptarmos 75 cm como um valor razoável, por exemplo, obtemos cerca de -500 m/s^2.

- Um automóvel desloca-se a 90 km/h em frente a uma escola. No mesmo instante em que o veículo infrator passa por ele, um automóvel da polícia parte do repouso, mantendo uma aceleração constante de 5 m/s^2. Determinar o instante em que a polícia apanha o infrator e o espaço percorrido.

R: 10 s e 250 m



Movimento em duas ou três dimensões

- Vamos agora generalizar os conceitos apresentados no movimento retilíneo ao movimento em duas ou três dimensões, começando por analisar o movimento num sistema de coordenadas retangulares fixo, não ligado ao movimento.
- A posição, a velocidade e a aceleração são agora representadas por vetores.

Um veleiro não pode navegar em linha reta até ao seu destino, sendo necessárias duas coordenadas para indicar a sua posição no oceano

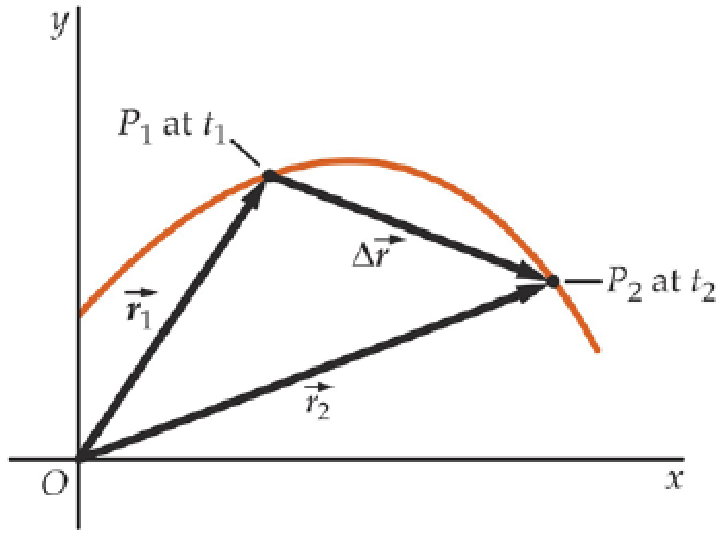
Movimento em duas ou três dimensões

- Vamos começar por descrever o movimento em duas ou três dimensões, considerando um **sistema de referência fixo**, não ligado ao movimento.
- O vetor posição é um vetor que aponta da origem do sistema de referência para a posição do ponto material, cujo movimento estamos a analisar:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- A variação da posição num intervalo de tempo (t_1, t_2) é o vetor deslocamento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



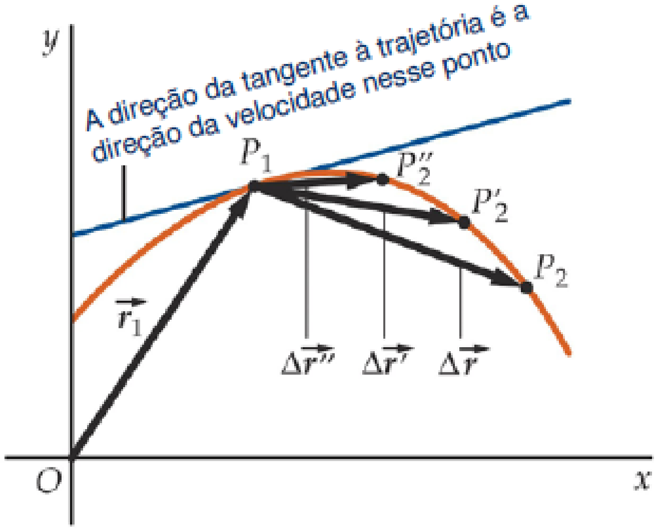
Movimento em duas ou três dimensões

- O quociente entre o deslocamento e o correspondente intervalo de tempo é o vetor velocidade média, que possui a mesma direção do deslocamento:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- A velocidade instantânea define-se como o limite da velocidade média quando $\Delta t \to 0$, sendo portanto a derivada da posição em ordem ao tempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$



- Como o sistema de referência é fixo a derivada dos versores dos eixos é nula
- No movimento em duas ou três dimensões a velocidade pode variar tanto em módulo como em direção
- O módulo da velocidade média é sempre menor ou igual do que a rapidez média (espaço percorrido / intervalo de tempo)
- O módulo do vetor velocidade instantânea é a rapidez (celeridade) instantânea

Movimento em duas ou três dimensões

- O quociente entre a variação do vetor velocidade e o correspondente intervalo de tempo é a aceleração média:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- A aceleração instantânea define-se como o limite da aceleração média quando $\Delta t \rightarrow 0$, sendo portanto a derivada da velocidade em ordem ao tempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

ou seja:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

ou ainda:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

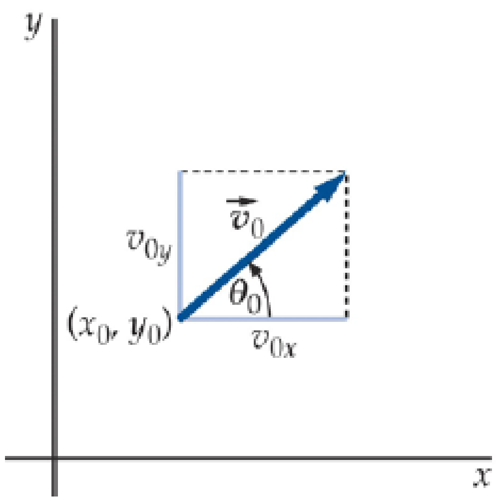
Aplicação ao movimento de projéteis

- Vamos aplicar as leis da cinemática ao movimento de projéteis, na proximidade da superfície da Terra, onde a aceleração da gravidade é constante.

- Se desprezarmos a resistência do ar o projétil fica apenas sujeito à aceleração da gravidade.

  O movimento dá-se num plano vertical, obtendo-se dois conjuntos independentes de leis, para o movimento vertical e para o movimento horizontal.

  O movimento fica completamente definido se for conhecida a velocidade inicial e a posição inicial:



Movimento horizontal		Movimento vertical
$a_x = 0$	aceleração	$a_y = -g$
$v_{ox} = v_o \cos\theta_o$	velocidade inicial	$v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta_o$
x_o	posição inicial	y_o
$v_x = v_{ox} = \text{constante}$		$v_y(t) = v_{oy} - g\,t$
$x(t) = x_o + v_{ox}\,t$		$y(t) = y_o + v_{oy}\,t - \frac{1}{2} g t^2$
		$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$

Aplicação ao movimento de projéteis

- A equação da trajetória pode ser obtida eliminando a variável tempo entre as leis do movimento horizontal e do movimento vertical. Considerando nulas as coordenadas da posição inicial ($x_o = y_o = 0$), para simplificar:

$$x = v_{ox} t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_{ox}}$$

$$y = v_{oy} t - \tfrac{1}{2} g t^2 = v_{oy}\left(\frac{x}{v_{ox}}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{ox}}\right)^2 = \left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}}\right) x - \left(\frac{g}{2 v_{ox}^2}\right) x^2$$

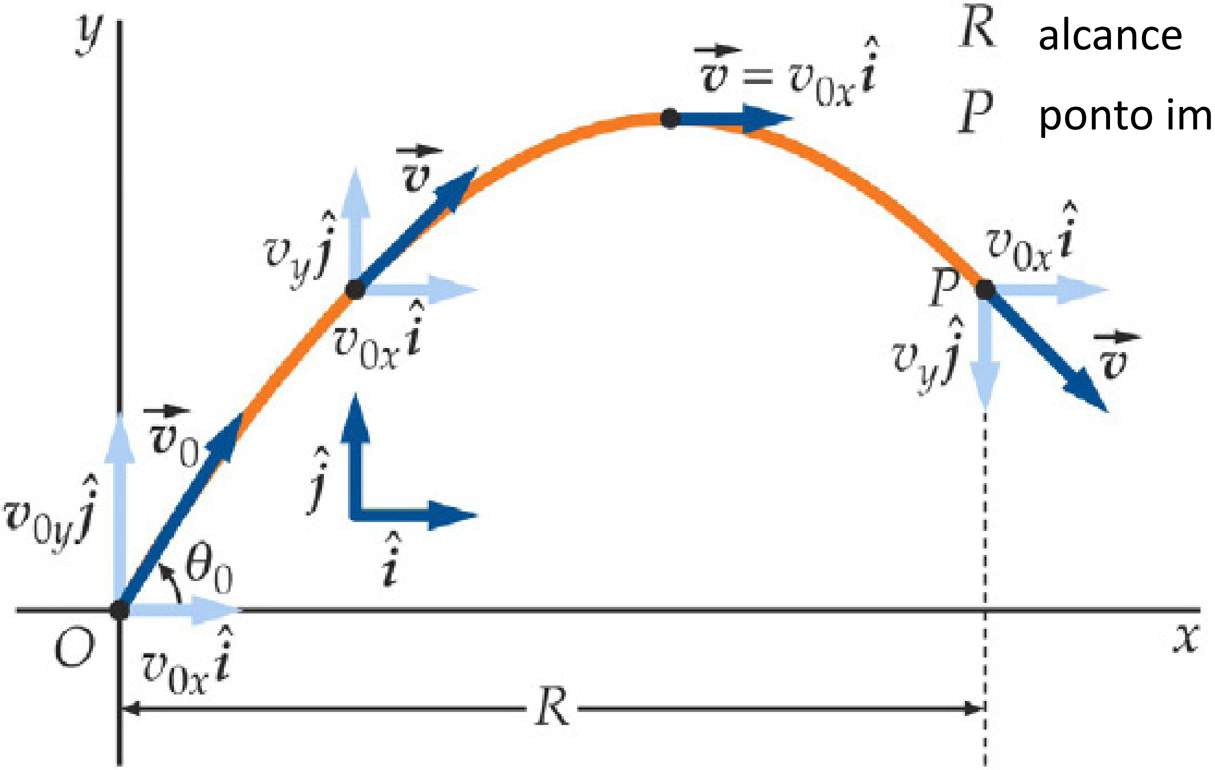
$$y(x) = (\mathrm{tg}\,\theta_o) \cdot x - \left(\frac{g}{2 v_o^2 \cos^2 \theta_o}\right) x^2$$

- A trajetória é parabólica. Note que este resultado é apenas válido para um projétil que se movimenta na proximidade da superfície terrestre, onde a aceleração da gravidade é constante, e desde que se possa desprezar a resistência do ar.

  A trajetória de um projétil de longo alcance não será uma parábola, mas um arco de elipse, pois teremos de considerar a variação da intensidade e da direção da aceleração da gravidade ao longo da trajetória.

Aplicação ao movimento de projéteis

- A figura representa a trajetória de um projétil, com o vetor velocidade e as suas componentes representados em diversos pontos ao longo da trajetória:



R alcance

P ponto impacto

Como determinar a altura máxima atingida pelo projétil, o alcance e o tempo de voo?

Aplicação ao movimento de projéteis

- A distância total percorrida pelo projétil na horizontal é designada por alcance.

- Vamos obter o alcance, em função da velocidade inicial e do ângulo de lançamento, no caso em que a altura inicial e final são iguais.

Começamos por calcular o tempo total de voo do projétil. Considerando que ele partiu da origem do sistema de referência, quando atingir o solo teremos $y = 0$:

$$y(t_{voo}) = v_{oy}\, t_{voo} - \tfrac{1}{2} g t_{voo}^2 = 0 \quad \wedge \quad t_{voo} > 0 \quad \Rightarrow \quad t_{voo} = \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta_o}{g}$$

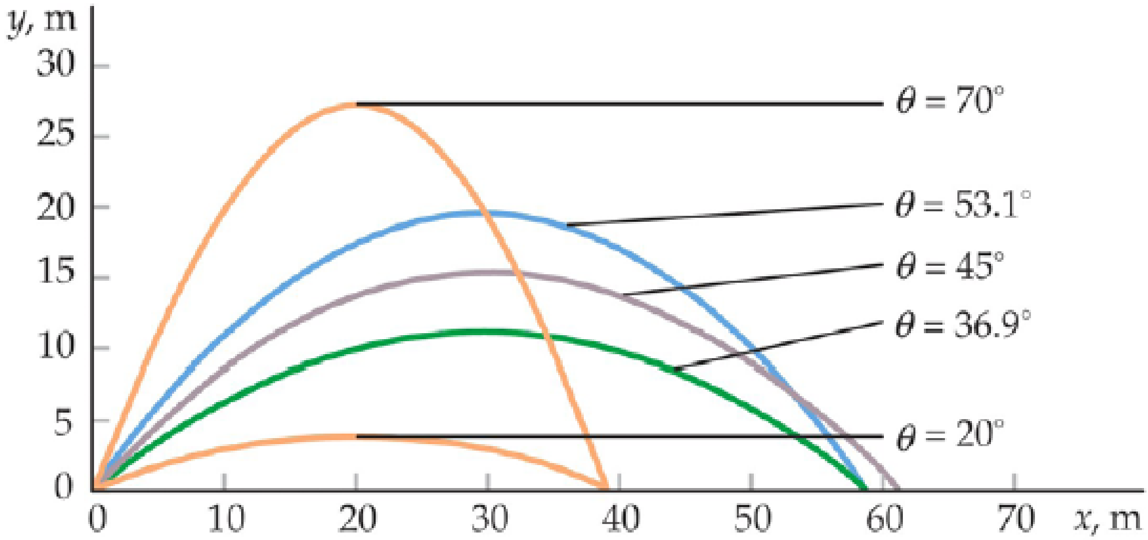
O alcance será neste caso (altura inicial igual à altura final):

$$x(t_{voo}) = v_{ox}\, t_{voo} = (v_o \cos\theta_o)\cdot\left(\frac{2v_o}{g}\operatorname{sen}\theta_o\right) = \frac{2v_o^2}{g}\operatorname{sen}\theta_o \cos\theta_o = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}(2\theta_o)}{g}$$

A equação anterior é válida apenas no caso da altura inicial ser igual à altura final e indica que, nesta situação: o alcance é igual para ângulos de lançamento complementares e que o alcance máximo é atingido para um ângulo de 45°

Aplicação ao movimento de projéteis

- A figura representa a trajetória de diferentes projéteis lançados com a mesma velocidade inicial (24,5 m/s), para diferentes ângulos de lançamento.



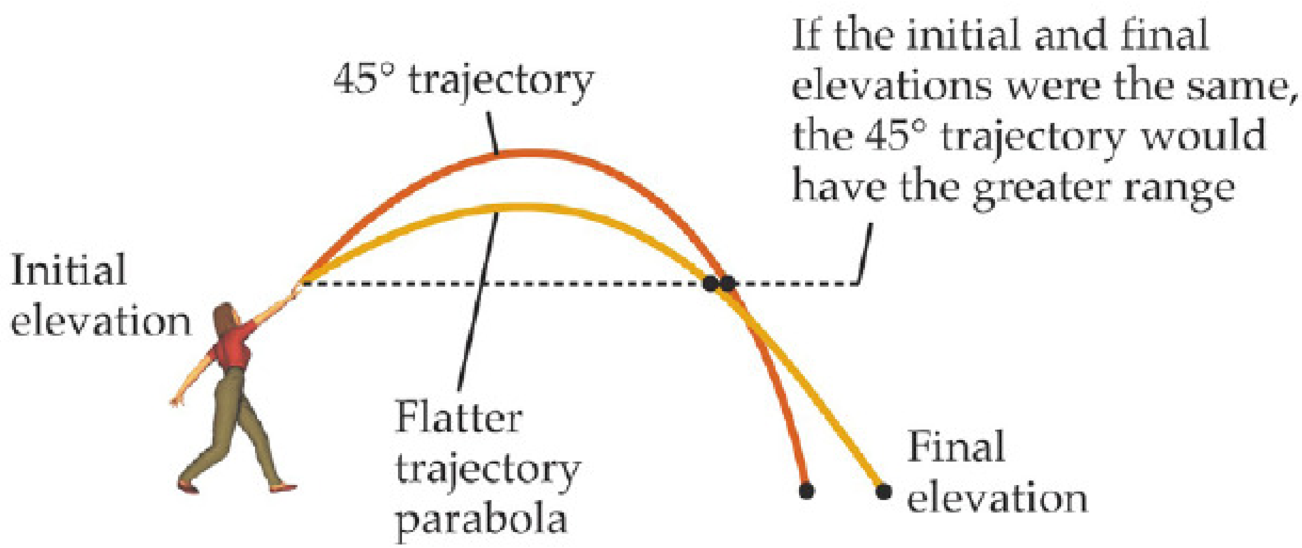
- Quando o projétil atinge a altura máxima a componente vertical da sua velocidade é nula. Assim a altura máxima atingida pelo projétil será:

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = v_{oy}^2 - 2\,g\,h_{max} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_{max} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_o^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_o}{2g}$$

Aplicação ao movimento de projéteis

- Mas nem sempre as elevações inicial e final são iguais, caso em que o alcance máximo não é atingido para um ângulo de lançamento de 45°

- No lançamento do dardo, por exemplo, ele é lançado pelo braço do atleta de uma altura inicial de cerca de 2 m acima do nível do solo. O alcance máximo é neste caso atingido para um ângulo de lançamento um pouco inferior a 45°



Aplicação ao movimento de projéteis

- Um helicóptero larga um pacote quando se encontra 100 m acima do nível do solo, voando com uma velocidade de 25 m/s segundo uma trajetória ascendente, fazendo um ângulo de 36,9° com a horizontal. Determinar o tempo que o pacote permanece no ar e a distância, medida na horizontal, entre o ponto de lançamento e o ponto de impacto no solo.

R: 6,3 s e 126 m