Leis de Newton

- Noção de força
- As forças fundamentais da natureza
- Forças de contacto entre sólidos
- Leis de Newton
- Diagrama de corpo livre
- Aplicações das leis de Newton
    - Força elástica
    - Oscilações, M.H.S.

Dinâmica

- A dinâmica é basicamente a análise da relação entre as variações do movimento de um corpo e as forças que as produzem.
- Apresentaremos neste capítulo as três leis de Newton, que serão utilizadas na resolução de problemas envolvendo corpos em repouso e em movimento.

Um avião acelera para descolar antes de chegar ao final da pista. As leis de Newton relacionam a aceleração de um corpo, com a sua massa e as forças que sobre ele atuam.

Noção de Força

- A experiência mostra-nos que só é possível alterar a velocidade de um corpo se ele interatuar com outros corpos na sua vizinhança.

  Esta interação de um corpo com outros, que pode alterar a velocidade do corpo, traduz-se pelo conceito de **força**.

- A experiência do dia-a-dia também nos diz que a alteração de velocidade num corpo devido à ação de uma força não depende apenas da intensidade da força, mas também da sua direção e sentido.

  Por outras palavras, a força é uma **grandeza vetorial**.

- Para que um corpo exerça uma força sobre outro não é necessário que entre os dois se verifique contacto ao nível macroscópico.

  Existem forças que determinados corpos exercem sobre outros, mesmo que os corpos estejam separados uns dos outros por uma dada distância. Neste caso fala-se de **interação à distância**.

Noção de Força

- As forças que observamos entre corpos macroscópicos no dia-a-dia são devidas às interações gravitacionais ou às interações eletromagnéticas.

- A força gravitacional e a força eletromagnética atuam entre partículas separadas no espaço, sendo portanto **interações à distância**.

- O problema da interação à distância é atualmente contornado pela introdução do conceito de **campo**, que atua como um agente intermediário:

  - O Sol produz um campo gravitacional no espaço que o rodeia, campo esse que exerce uma força sobre a Terra. Do mesmo modo a Terra cria um campo gravitacional que exerce uma força sobre o Sol.

  - O peso de uma pessoa na Terra é a força exercida pelo campo gravitacional da Terra sobre ela.

  - No estudo da eletricidade e do magnetismo serão analisados os campos elétricos, que são produzido pelas cargas elétricas, e os campos magnéticos, que são produzidos pelas cargas elétricas em movimento.

As Forças Fundamentais da Natureza

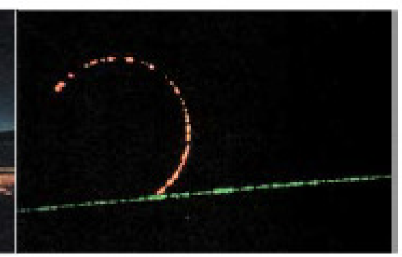
- Todas as forças observadas na natureza podem ser explicadas em função das **quatro interações fundamentais** que ocorrem entre partículas elementares:

  - Força gravitacional → Força de atração mútua entre os corpos
  - Força eletromagnética → Força entre cargas elétricas
  - Força nuclear forte → Força entre partículas subatómicas, responsável pela estabilidade nuclear
  - Força nuclear fraca → Força entre partículas subatómicas, responsável pelo decaimento beta

Força gravitacional
Marés

Força eletromagnética
Raios

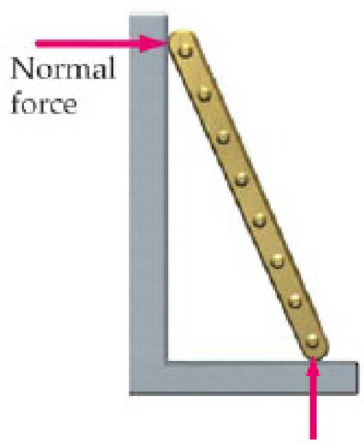
Força nuclear forte
Fusão nuclear

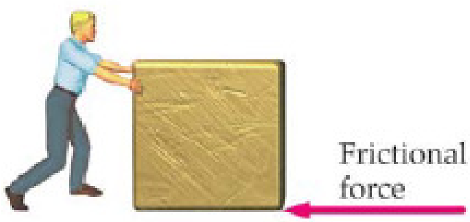


Força nuclear fraca
Interação muão-eletrão

Forças de Contacto entre Sólidos

- As **forças de contacto entre sólidos** são de natureza eletromagnética, sendo exercidas entre as moléculas das superfícies dos corpos em contacto.
- A componente da força de contacto **perpendicular** às superfícies em contacto é a **força normal**, cujo sentido se opõe à interpenetração das duas superfícies.
- A força de contacto também pode ter uma componente **paralelas** às superfícies em contacto: a **força de atrito**. Esta força opõe-se sempre ao deslizamento ou à tendência de deslizamento entre as superfícies em contacto.
- As forças de contacto são sempre **forças distribuídas** ao longo de toda a região de contacto, embora por vezes sejam representadas como sendo forças pontuais.





Primeira Lei de Newton

- Os princípios da dinâmica podem ser resumidos num conjunto de três afirmações conhecidas como **leis de Newton** do movimento. As leis de Newton apenas são válidas em referenciais de inércia.
- **Primeira lei de Newton ou lei da inércia.** Se não atua nenhuma força sobre um corpo, ele ou está em repouso ou move-se com movimento retilíneo e uniforme.

- Os sistemas de referência onde é válida a 1ª Lei de Newton designam-se referenciais de inércia. Nestes referenciais, os movimentos acelerados têm causas diretas identificáveis (forças reais).

1ª Lei de Newton (ou lei da inércia): Nos sistemas de referência inerciais, os objetos que se movimentam a velocidade constante (ou nula), manterão esse tipo de movimento (ou de repouso) até que alguma força exterior atue sobre eles.

- O planeta Terra é um sistema de referência não-inercial.
- Será este facto problemático para se fazer medidas e observar a validade da 1ª lei de Newton?

- Resposta: depende.
  - Para uma experiência que dure poucos minutos ou que esteja confinada a um pequeno espaço, a aceleração local pode ser ignorada. No geral, nas experiências comuns de laboratório bem como no movimento de corpo à superfície da terra é válido.
  - Mas, por exemplo, se nos interessa o estudo do movimento de grandes massas de ar atmosférico durante horas em volta do planeta, então a aceleração da Terra já tem que ser tida em conta.

Segunda Lei de Newton

- A aceleração de um corpo é provocada pela interação com outros corpos (um empurrão ou um puxão, por exemplo). Esta interação designa-se por força e tem as seguintes características:

  - intensidade

  - direção

  - sentido positivo ou negativo, nessa direção.

- As forças são grandezas vetoriais, sendo representadas por vetores ($\vec{F}$).
- Uma força (causa) atua sobre um corpo e, como consequência, o corpo ganha aceleração (efeito), ou seja, altera o seu estado de movimento.

2ª Lei de Newton: Num sistema de referência inercial, a resultante das forças ($\vec{F}$, soma vetorial de todas as forças) que atuam sobre um corpo é dada por:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

sendo m a massa do corpo e $\vec{a}$ a aceleração produzida pela ação daquelas forças.

- A unidade de força no SI é o newton (N): $1\ N = 1\ kg\ \times\ 1\ m/s^2$
- A aceleração é provocada por forças exteriores ao corpo. Um corpo não se acelera a si próprio.

Segunda Lei de Newton

- Diferença entre massa e peso de um corpo:
  - A massa é uma propriedade intrínseca do corpo
  - Peso é a intensidade da força com que a Terra o atrai
- Para um corpo em queda livre: $a = g_T$

$$a = \frac{F_g}{m} \qquad g_T = G\,\frac{M}{r^2}$$

- Assim, g_T é a aceleração da gravidade e, perto da superfície da Terra, corresponde a $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.
- Massa inercial e massa gravítica têm o mesmo valor e são a mesma identidade pelo que unicamente se fala de massa.
- Se mais do que uma força atuar sobre o corpo, as forças somam-se (soma de vetores)

Princípio da Sobreposição

- A Terra interage com corpos próximos atraindo-os através de uma força conhecida por força da gravidade, também designada o peso desse corpo.
- A força da gravidade existe mesmo que a Terra e o corpo não estejam em contacto. A Terra exerceria a força da gravidade mesmo que houvesse vácuo à superfície da Terra, em vez do ar atmosférico.
- A região do espaço (vazio ou não) onde existem forças é designado por campo de forças. A Terra cria um campo gravitacional de forças à sua volta. Todos os corpos (com massa) que entram no seu campo, sentem a ação da força gravitacional.

Um pouco sobre força gravítica

- A Terra não é o único corpo a criar a força da gravidade. Todos os corpos com massa criam uma força de atração sobre qualquer outro corpo com massa. O nosso corpo também exerce uma força de atração da Terra para nós. A força de atração atua nos dois sentidos.
- Seja g_M o campo gravitacional criado pela massa M. A força que a massa M exerce sobre um corpo de massa m presente nesse campo gravitacional é:

$$F_{M/m} = m\, g_M$$

- Se o peso de um corpo equivale à força com que a Terra o atrai, então o peso do corpo de massa m, P_m, é dado por:

$$P_m = F_{T/m} = m\, g_T$$

- A unidade de campo gravitacional é N/kg. O campo gravitacional da Terra é

$$g_T = 9{,}8\ \mathrm{N/kg} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

- Foi provado em laboratório que se tivermos duas massas esféricas e uniformes, m e M, a força mútua de atração entre elas é dada por:

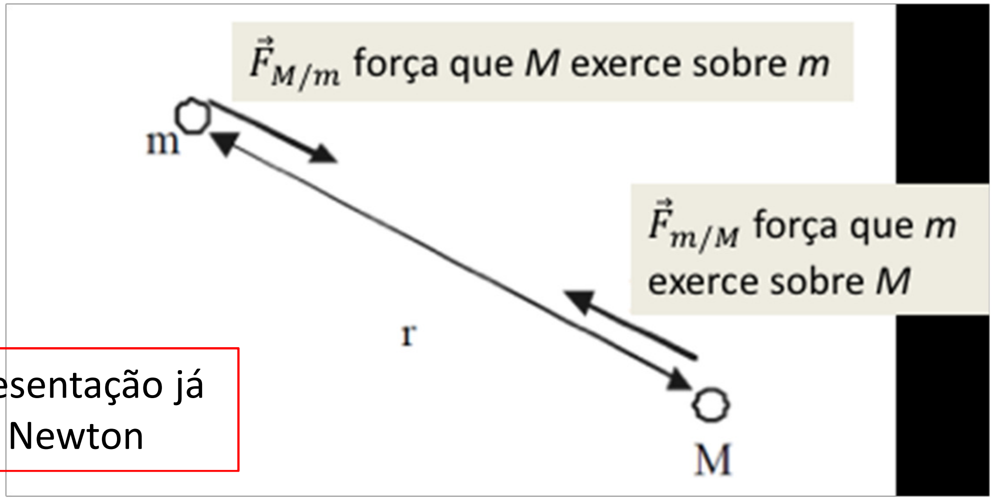
$$\boxed{F_{M/m} = G\frac{Mm}{r^2}}$$

Lei da Gravitação "Universal"

- G é uma constante "universal", independente de M e m e designa-se contante gravitacional, sendo:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$$

Um pouco sobre força gravítica



E, esta representação já é a 3ª lei de Newton

$\boldsymbol{F}_{M,m} = \boldsymbol{F}_{m,M}$ (mesma direção e sentido contrário)

- Sendo $F_{T/m} = m\, g_T$ a força que a Terra exerce sobre uma massa m, se a massa da Terra for M, da lei da gravitação universal $F_{T/m} = G\frac{Mm}{r^2}$. Logo

$$g_T = G\frac{M}{r^2}$$

> Exercício 1: Admitindo que a Terra é uma esfera com um raio aproximado $r_T = 6{,}38 \times 10^6$ m, determine a massa aproximada da Terra.

$$r_T = 6{,}38 \times 10^6 \text{ m}$$

$$g_T = 9{,}8 \text{ N/kg}$$

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$$M_T = \frac{g_T\, r^2}{G} = \frac{9{,}8\frac{N}{kg}(6{,}38 \times 10^6)^2 m^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}}$$

$$M_T = 5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Exercício 2: Qual é o valor do campo gravitacional de uma pessoa de 100 kg a 1 m de distância? Trate a pessoa como se fosse um ponto material.

$$g_p = G\,\frac{M}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{100}{1^2} = 6{,}67 \times 10^{-9}\ \mathrm{N/kg}$$

- $g_p \ll g_T$ (9 ordens de grandeza)
- A influência do nosso campo gravitacional sobre os objetos à nossa volta é desprezável em comparação com o campo gravítico terrestre.

Exercício 3: Qual o valor do campo gravitacional terrestre a uma altitude de 300 km (a que se encontra o Space Shuttle quando orbita em volta da Terra)?

$$d = r_T + h = (6{,}38 + 0{,}3) \times 10^6 m = 6{,}68 \times 10^6\ m$$

$$g_T = G\,\frac{M_T}{d^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{(6{,}68 \times 10^6)^2} = 8{,}9\ \mathrm{N/kg}$$

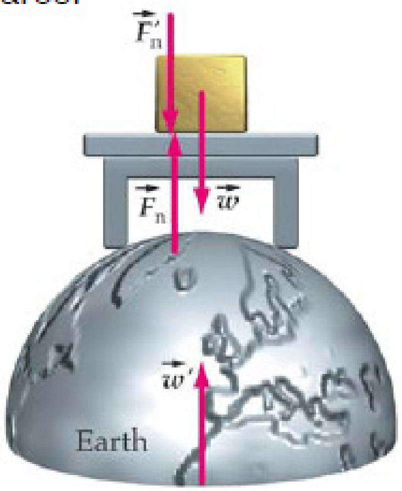
Terceira Lei de Newton

- **Terceira lei de Newton ou lei da ação-reação.** Quando um corpo $\boldsymbol{A}$ exerce uma força (ação) sobre um corpo $\boldsymbol{B}$, o corpo $\boldsymbol{B}$ responde exercendo uma força (reação) sobre o corpo $\boldsymbol{A}$. Estas duas forças têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos opostos (são simétricas):

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Evidentemente que estas duas forças atuam em corpos diferentes.
Esta lei aplica-se tanto na interação à distância como nas forças de contacto.

É importante perceber que as forças (ação e reação) ocorrem em simultâneo, ou seja, não há nenhuma relação de causa e efeito. Qualquer uma delas pode ser considerada a ação ou a reação. É impossível existir uma única força isolada. As forças atuam sempre aos pares.



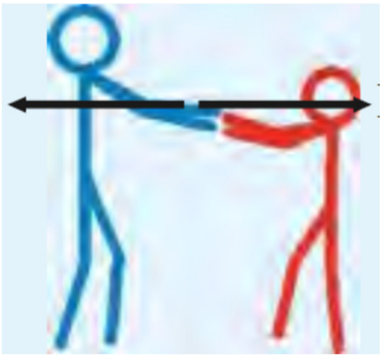
- Porque razão conseguimos mover? Porque conseguimos criar uma força exterior que provoca alteração de movimento. Essa força, normalmente, é o atrito. O atrito é uma força de contato entre dois corpos.
- Se estivermos a andar sobre cimento, ou sobre uma calçada típica portuguesa, e decidirmos começar a correr (a acelerar, portanto), isso parece contradizer a 2ª lei de Newton segundo a qual são as forças externas ao corpo que produzem essa aceleração ao interagirem com o corpo. Parece-nos que a força é interna, dos nossos músculos, e não externa. Mas não é bem assim... Pois movemo-nos devido ao atrito!
- Se fizermos o mesmo esforço muscular mas, em vez do chão empedrado, estivermos a correr numa praia de areia fina e seca, o mesmo esforço não vai resultar na mesma aceleração.
- Mover as pernas não é suficiente para causar aceleração. É preciso ter em conta o espaço/superfície. Este facto está relacionado com a 3ª lei de Newton...
- Os pés de um corredor não o aceleram. Os pés exercem força sobre o solo e é a força de reação do solo nos pés do corredor que o aceleram.

Exercício 1: Dois patinadores, o pai com 90 kg e a filha com 40 kg, estão de pé no gelo (corresponde a considerar ausência de atrito entre os corpos em contato), frente a frente, e com as mãos em contacto, cada um exercendo uma força de 20 N no outro. Determine as suas acelerações durante o tempo em que estão em contacto.

- Admitindo que não há <u>outras</u> forças horizontais a atuar no sistema:

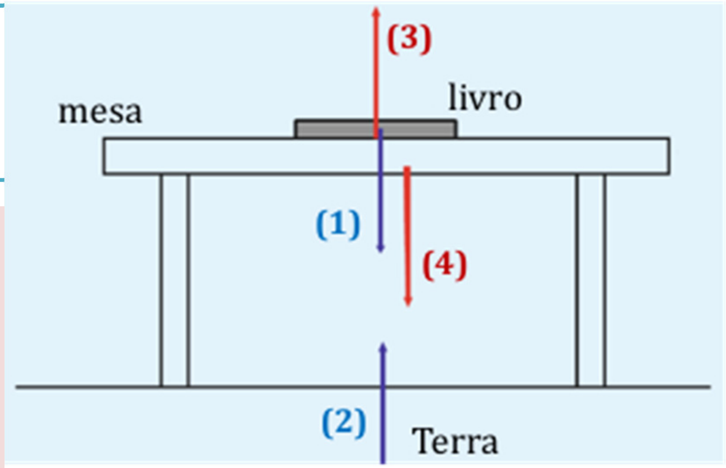
$$\vec{F}_{P/F} = m_F\,\vec{a}_F \Rightarrow a_F = \frac{20}{40} = 0{,}5\,ms^{-2}$$

$$\vec{F}_{F/P} = m_P\,\vec{a}_P \Rightarrow a_P = \frac{20}{90} = 0{,}22\,m/s^2$$



- As acelerações (e as forças) só ocorrem enquanto os patinadores estão em contacto (não há atrito).

Exercício 2: Um livro está em repouso em cima de uma mesa. Identifique todas as forças que atuam no livro e, para cada uma delas, identifique a força de reação.



Forças aplicadas ao livro:

(1) Peso do livro (devido ao campo gravitacional da Terra)

(3) Força que a mesa exerce sobre o livro (devido ao contacto entre ambos)

pares ação-reação

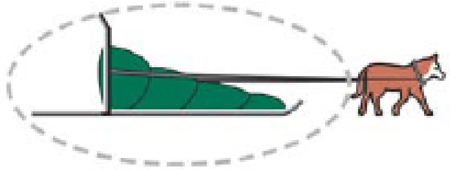
Forças de reação:

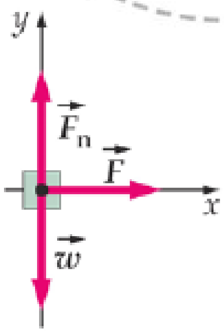
(2) Força com que o livro atrai a Terra

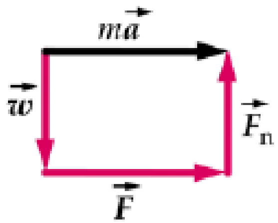
(4) Força que o livro exerce sobre a mesa

Diagrama de Corpo Livre

- Um **diagrama de corpo livre** apresenta esquematicamente todas as forças que atuam no sistema em estudo, que se representa livre de toda a sua vizinhança. A vizinhança é considerada pelas forças que exerce sobre o sistema em estudo.
    1. Identificar o sistema que se pretende estudar (fonte comum de erros)
    2. Identificar todas as forças que atuam no sistema (influência da sua vizinhança)
    3. Escolher um referencial conveniente que simplifique os passos seguintes
    4. Representar o diagrama de corpo livre, com o referencial, as forças e a aceleração
    5. Aplicar a segunda lei de Newton a cada componente da força e da aceleração
    6. Tirar conclusões
- Consideremos o seguinte exemplo, no qual se despreza o atrito:







$$\vec{F}+\vec{w}+\vec{F}_n=m\vec{a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}F_x+w_x+F_{n,x}=F+0+0=ma_x=ma\\ F_y+w_y+F_{n,y}=0-w+F_n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=F/m\\ F_n=w\end{cases}$$

Terceira Lei de Newton

- Um homem puxa horizontalmente um bloco assente numa superfície horizontal sem atrito, por intermédio de uma corda. Quais as forças horizontais aplicadas?

- Como neste caso as forças e a aceleração têm a mesma direção, podemos abandonar a notação vetorial e escrever a relação entre os módulos das forças aplicadas à corda de massa m_c:

$$F_{HC} - F_{BC} = m_c a$$

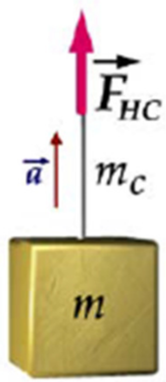
Estas duas forças atuam no mesmo corpo e em geral não têm o mesmo módulo, não constituindo portanto um par ação-reação.

- Apenas se a aceleração for nula é que aquelas forças terão o mesmo módulo. O módulo daquelas duas forças também seria igual se fosse nula a massa da corda. Na prática não existe uma corda sem massa, mas com frequência ela pode ser desprezada, caso em que se supõe que ela transmite a força sem alteração.

- A força exercida em qualquer secção transversal da corda denomina-se **tensão**. Nesta situação a tensão será a mesma em todas as secções da corda, se a corda não estiver acelerada ou se pudermos admitir que a massa da corda é nula.

Terceira Lei de Newton

- E se o homem puxar o bloco para cima, por intermédio de uma corda vertical? A relação entre os módulos das forças verticais aplicadas ao sistema será agora:



$$\begin{aligned} &\text{para o bloco} \quad \Rightarrow \quad F_{CB} - mg = ma \\ &\text{para a corda} \quad \Rightarrow \quad F_{HC} - F_{BC} - m_c g = m_c a \end{aligned}$$

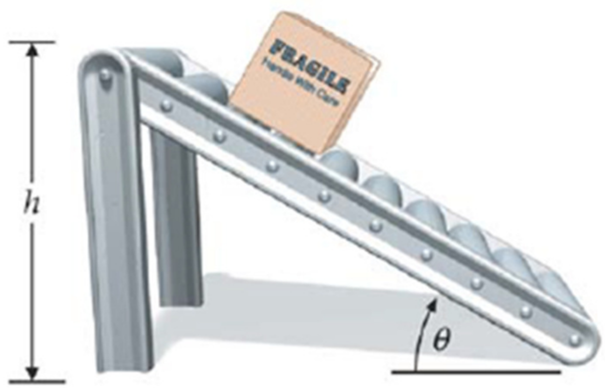
A tensão apenas será constante ao longo da corda se pudermos admitir que a massa da corda é nula, caso em que ela transmite a força sem alteração.

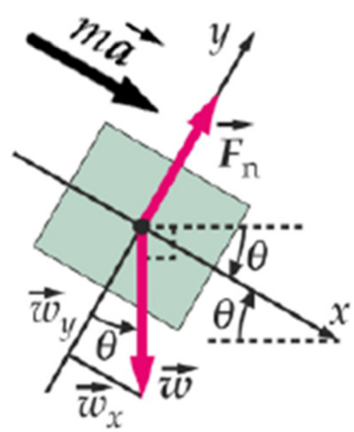
Se a massa da corda não for nula, a tensão irá variar ao longo da corda, mesmo se a aceleração do sistema for nula:

$$\left.\begin{array}{c} a = 0 \\ m_c \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{tensão no topo da corda} = m_{bloco}\, g + m_c g \\ \text{tensão no meio da corda} = m_{bloco}\, g + \frac{1}{2} m_c g \\ \text{tensão na base da corda} = m_{bloco}\, g \end{array}\right.$$

Aplicações das Leis de Newton

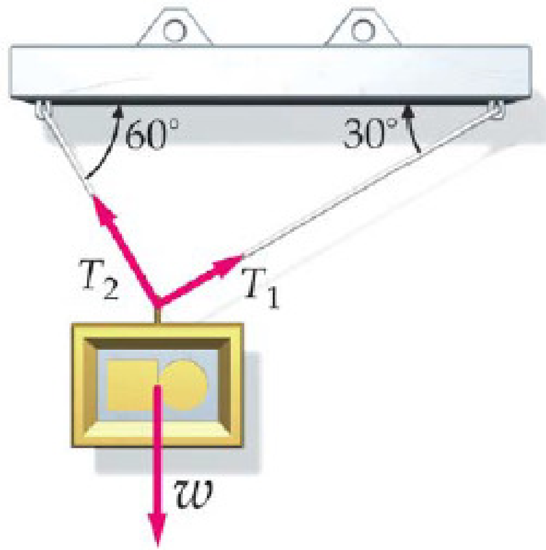
- Um exemplo para mostrar como é importante a escolha de um referencial adequado para a resolução do problema. Considerando desprezável o atrito:

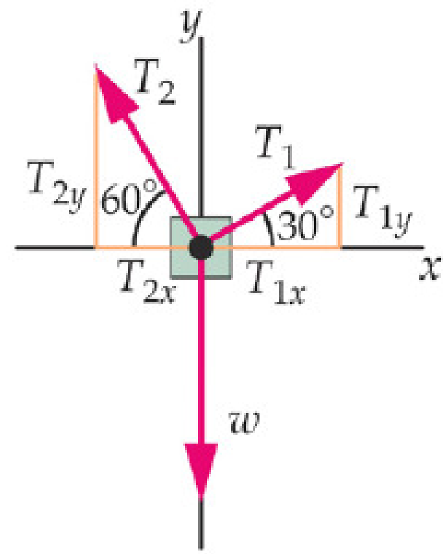




$$\sum \vec{F} = \vec{w} + \vec{F}_n = m\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = w_x + F_{n,x} = w \operatorname{sen}\theta + 0 + 0 = ma_x = ma \\ \sum F_y = w_y + F_{n,y} = -w\cos\theta + F_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{w \operatorname{sen}\theta}{m} = g \operatorname{sen}\theta \\ F_n = w\cos\theta = mg\cos\theta \end{cases}$$

- Determinar as forças de tração nos dois arames, articulados nas extremidades, que suspendem o corpo:





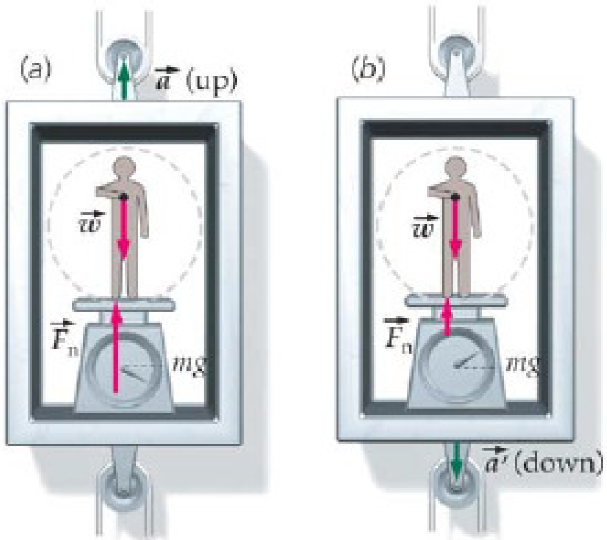
Como as três forças se equilibram: $\sum \vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{w} = 0$

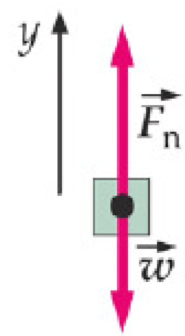
Os arames estão articulados nas extremidades, logo as forças têm a direção dos arames:

$$\begin{cases} \sum F_x = T_{1,x} + T_{2,x} + w_x = T_1 \cos 30° - T_2 \cos 60° + 0 = 0 \\ \sum F_y = T_{1,y} + T_{2,y} + w_y = T_1 \,\mathrm{sen}\, 30° + T_2 \,\mathrm{sen}\, 60° - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_2 = \dfrac{\cos 30°}{\cos 60°} T_1 = \sqrt{3}\, T_1 \\ T_1 = \frac{1}{2} mg \;\; ; \;\; T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \end{cases}$$

Aplicações das Leis de Newton

- A leitura da balança (peso aparente do homem) é igual ao módulo da força normal que se exerce sobre o prato da balança, que, neste caso, pela terceira lei de Newton, é igual à força normal que a balança exerce sobre os pés do homem:





$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \sum F_y = m\,a_y$$

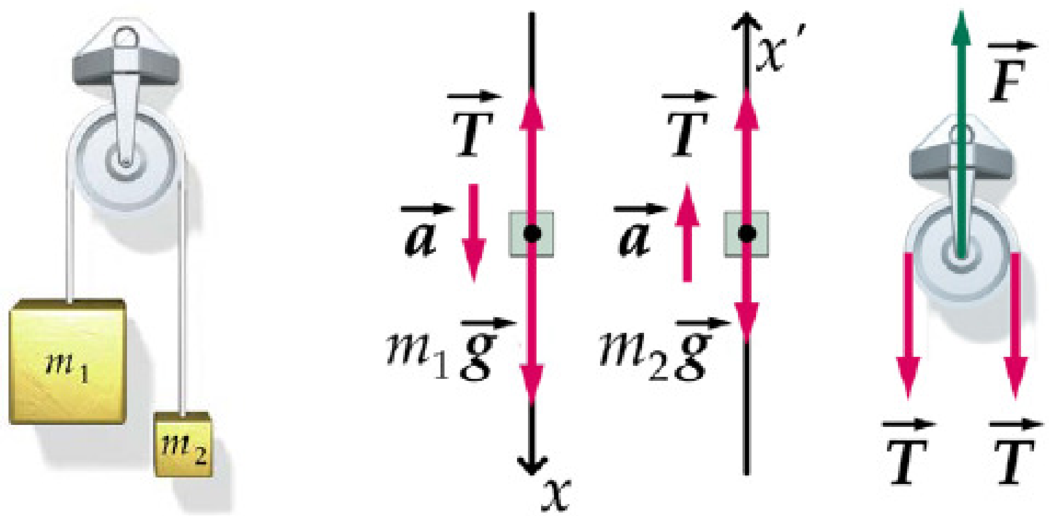
Elevador acelerado para cima: $F_n - w = F_n - mg = ma \quad \Leftrightarrow \quad F_n = m(g+a)$

Elevador acelerado para baixo: $F_n - w = F_n - mg = m(-a) \quad \Leftrightarrow \quad F_n = m(g-a)$

E se o elevador cair em queda livre? $\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \quad F_n = 0$

- Consideremos dois corpos com massas diferentes, $m_1 > m_2$, ligados por uma corda de massa desprezável, que passa por uma roldana de massa desprezável, que roda livremente e sem atrito no seu eixo.

Neste caso a tensão será constante ao longo de toda a corda, obtendo-se:



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \\ F - T - T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad , \quad F = 2T$$

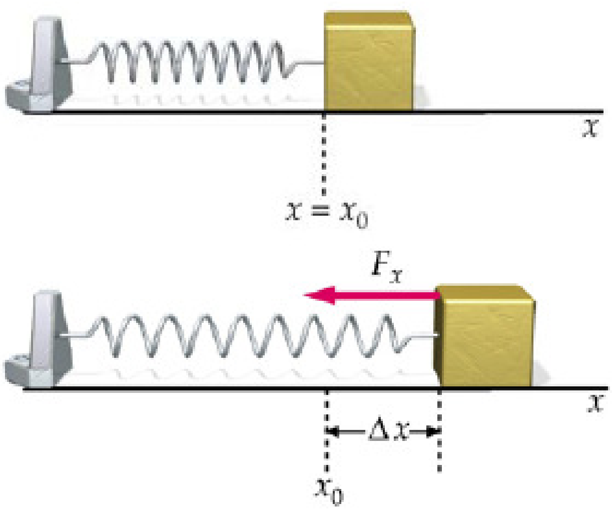
Forças Elásticas

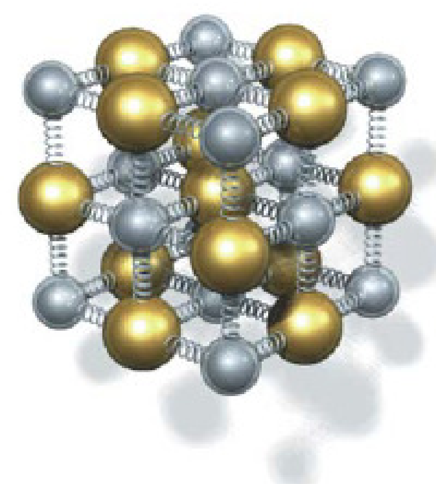
- As **forças elásticas** são aquelas que ocorrem quando esticamos uma mola ou quando deformamos um sólido elástico, sendo dadas pela **lei de Hooke**:

$$\vec{F} = -k\,\Delta\vec{x}$$

onde k é a constante elástica e Δx a variação de comprimento (da mola ou do sólido) que originou a força. O sinal negativo indica que a força é restauradora e que se opõe sempre à deformação.

- Para deslocamentos suficientemente pequenos, praticamente todas as forças restauradoras obedecem **à lei de** Hooke.



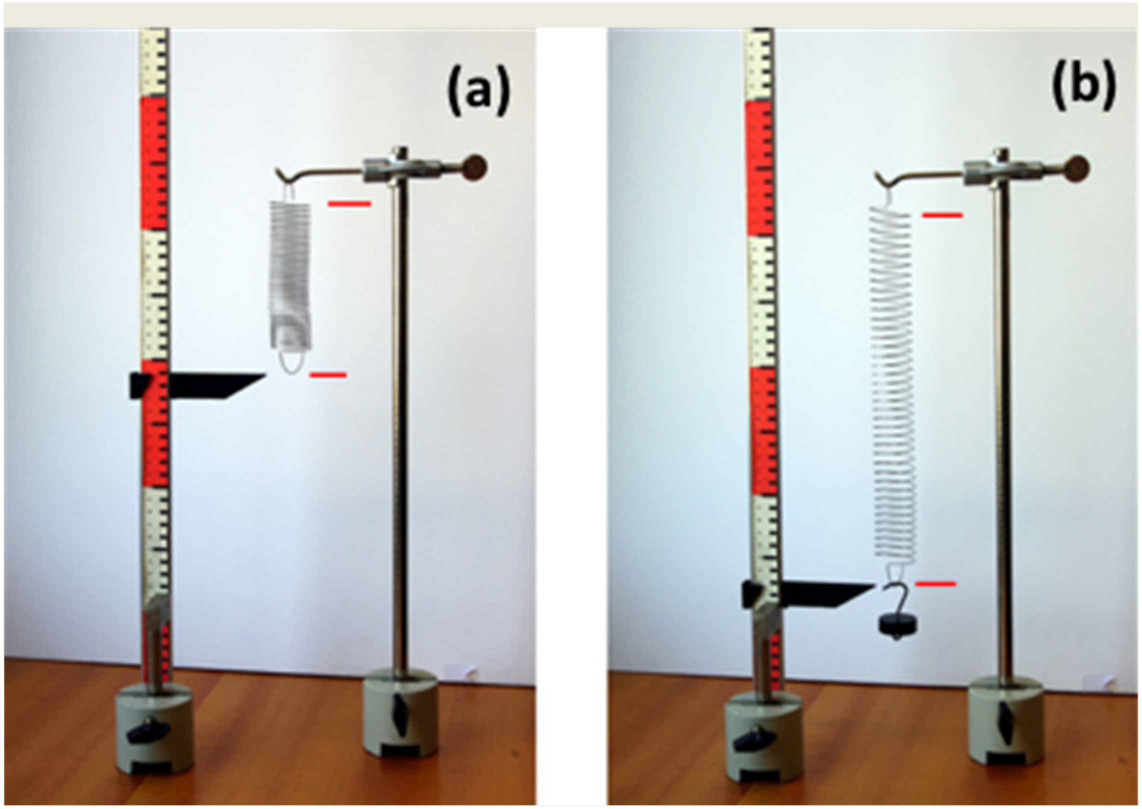


- Lei de Hooke descreve o movimento oscilatório de uma massa ligada a uma mola.
- A força $(\vec{F})$ que a mola exerce sobre uma massa a ligada é proporcional à distensão ou elongação $(\Delta\vec{x})$ da mola relativamente à sua posição de equilíbrio:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

- No caso de uma massa suspensa na mola, a distensão da mola é provocada pelo peso da massa.
- Interesse: Quando as molas funcionam em regime linear podem ser usadas como modelo das interações entre átomos e moléculas quando estes estão perto das suas posições de equilíbrio. Em determinadas condições, as complexas forças eletromagnéticas entre os átomos e as moléculas podem ser modeladas como se as ligações fossem como se as ligações fossem realizadas através de molas.

- Experiência: uma mola é suspensa num suporte, medindo-se com uma régua a posição de equilíbrio do extremo da mola quando não há nenhuma massa suspensa (a). De seguida, objetos de massas diferentes e conhecidas são pendurados no extremo da mola. Para cada massa, mede-se a nova posição de equilíbrio da extremidade da mola (b).



- As massas usadas e as posições correspondentes são registadas numa tabela. Cada deslocamento é obtido pela diferença entre as posições de equilíbrio da mola com massa e sem massa.

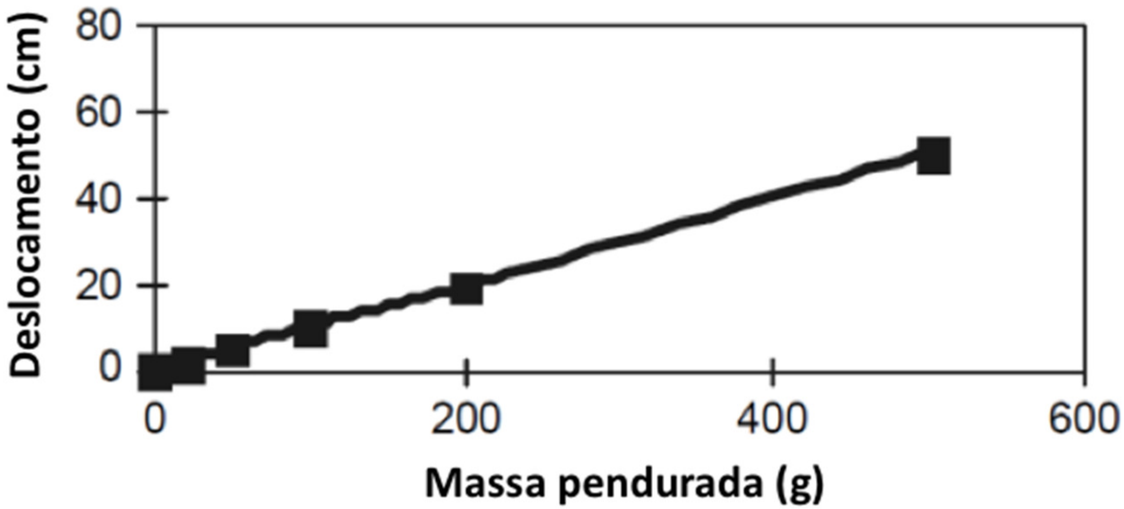
Massa pendurada (g)	Posição (cm)	Deslocamento (cm)
0	22.5	0
20	24.6	2.1
50	27.9	5.4
100	33.2	10.7
200	42.4	19.9
500	73.6	51.1

- Representando o deslocamento em função da massa (ou da força $F = mg$), verifica-se um comportamento linear.

$$\boxed{\boldsymbol{F = -k\,\Delta x}}$$

- A constante de proporcionalidade é a constante elástica da mola (k), que depende do material e da forma da mola. A unidade de k no SI é N/m.

- O sinal negativo na lei de Hooke ($F = -k\ \Delta x$) indica-nos que a força $\vec{F}$ (força elástica) e o deslocamento $\Delta\vec{x}$ têm sentidos contrários.
- Diz-se que a força elástica é uma força restauradora pois tende a levar a mola de novo para a sua posição de equilíbrio. Se a mola está comprimida, tende a esticar. Se está distendida, tende a comprimir.



- A força que a mola exerce na massa tem o mesmo módulo mas sentido contrário à força que a massa exerce sobre a mola (3ª lei de Newton), sendo igual ao peso da massa suspensa, $F = mg$

- No gráfico do deslocamento em função da massa suspensa, a que corresponde o declive da reta?
- Sendo B o declive da reta, temos:

$$\Delta x = B\ m \Rightarrow g\ \Delta x = B\ mg$$

- Sendo mg o peso da massa suspensa, igual à força exercida pela mola, temos:

$$g\ \Delta x = B\ |F| \Rightarrow |F| = \frac{g}{B}|\Delta x|$$

- Comparando com a lei de Hooke ($F = -k\ \Delta x$):

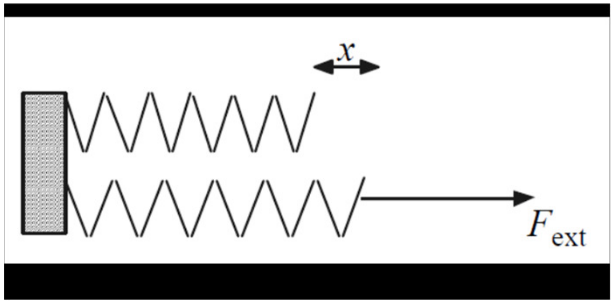
$$k = \frac{g}{B}$$

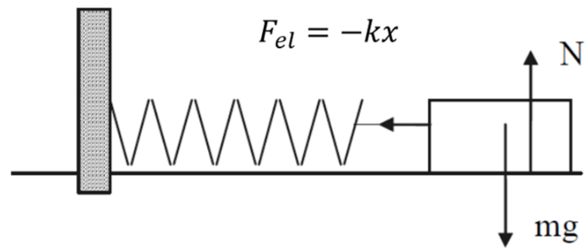
- No exemplo representado no gráfico, convertendo para unidades SI os valores de Δx e de m, obtemos o declive da reta e a constante elástica da mola:

$$B = \frac{0{,}511 - 0{,}021}{0{,}500 - 0{,}020} = 1{,}02\ \mathrm{m/kg}$$

$$k = \frac{g}{B} = \frac{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}02\ \mathrm{m/kg}} = 9{,}6\ \mathrm{kg/s^2} = 9{,}6\ \mathrm{N/m}$$

- Movimento horizontal da massa sem atrito





- Se prendermos um objeto de massa m a uma mola na horizontal, quando o sistema mola/corpo está em equilíbrio, só atuam no objeto o seu peso e a reação do plano horizontal. A força resultante é nula!

- E se afastarmos o sistema da posição de equilíbrio, distendendo a mola através de uma força externa ($\vec{F}_{ext}$)? Ao largarmos o objeto, a mola exerce sobre o objeto uma força elástica restauradora:

$$F_{el} = -kx$$

- Se não houver atrito entre o objeto e o plano, a força elástica é a força resultante sobre o objeto (o peso e a reação do plano continuam a anular-se).

- A força elástica puxa o sistema mola/corpo em direção ao equilíbrio. Como o sistema adquire velocidade, não para na posição de equilíbrio, continuando o movimento para além dessa posição, e comprimindo a mola…
- A força restauradora começa a agir em sentido contrário, provocando uma aceleração com sentido oposto ao da velocidade (movimento retardado)…
- O sistema para momentaneamente numa posição de compressão máxima, começando a mover-se no sentido inverso (a mola tende a voltar ao equilíbrio). Chegando a essa posição, como o sistema tem velocidade, não para e começa de novo a distender a mola. A força restauradora começa a agir em sentido contrário… e o movimento repete-se indefinidamente (oscilações).

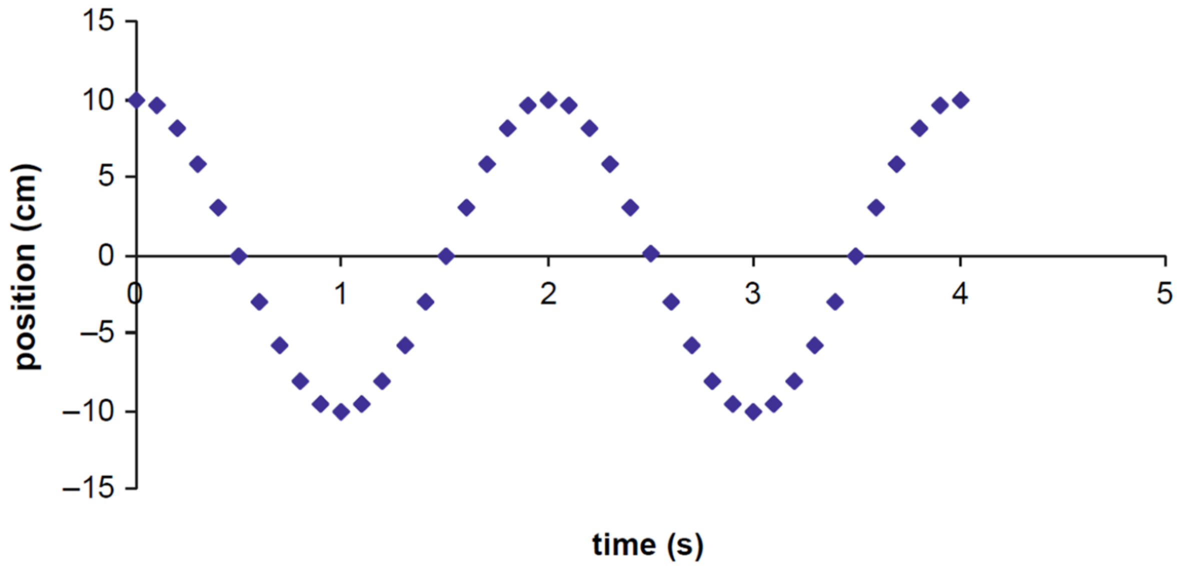
- Exemplo: Uma mola de constante elástica $9{,}6\ \mathrm{N/m}$, ligada a um objeto de massa 1 kg, é esticada de $10\ \mathrm{cm}$, largando-se o corpo nessa posição.
- Na posição inicial $x = 10\ \mathrm{cm}$, a aceleração do corpo é:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\frac{9{,}6\ \mathrm{N/m}}{1\ \mathrm{kg}} \times 0{,}1\mathrm{m} = -0{,}96\ \mathrm{m/s^2}$$

- A massa começa a ganhar velocidade em direção à posição de equilíbrio ($x = 0$). À medida que se aproxima, a força restauradora (e a aceleração) vai decrescendo.
- Na posição $x = 0$, a aceleração é momentaneamente nula mas a velocidade naquele ponto não é nula, tem vindo a aumentar desde a posição inicial $x = 10\ \mathrm{cm}$, onde a velocidade era zero. Portanto, o movimento continua e a mola começa a ser comprimida.
- Para $x < 0$, a força elástica muda de sentido e a aceleração passa a ser positiva. Como a velocidade é negativa, o movimento é retardado: o módulo da velocidade diminui.
- Na posição $x = -10\ \mathrm{cm}$, a velocidade anula-se e a aceleração atinge o seu valor máximo, $a = 0{,}96\ \mathrm{m/s^2}$.
- De $x = -10\ \mathrm{cm}$ até $x = 10\ \mathrm{cm}$, o movimento é simétrico do que aconteceu até agora (de $x = A$ até $x = -A$).

- O movimento completo repete-se, sem cessar, visto que não existe nenhuma outra força externa ao sistema para o fazer parar (como forças de atrito, por exemplo).

- **Variação da posição em função do tempo**



- Um movimento periódico no espaço dá origem a uma onda sinusoidal quando é registado em função do tempo.

- No exemplo, a massa ligada à mola vai oscilar entre duas posições extremas (-10 e $+10$ cm), onde o afastamento da posição de equilíbrio é máximo. O deslocamento máximo é designado por amplitude da oscilação.

Exercício: Uma mola na horizontal, funcionando em regime linear, tem uma constante elástica de 10 N/m. A mola é alongada 10 cm, sendo presa ao seu extremo uma massa de 2 kg que pode deslizar sem atrito na superfície em que está apoiada.

(a) Quando o bloco é libertado, qual é a aceleração do seu movimento?
(b) E depois de ele se mover 10 cm?
(c) E depois de se mover 20 cm no mesmo sentido?

A única força horizontal que atua sobre o bloco é a força elástica da mola $F = -k\ x$ (lei de Hooke).

(a) Para $x = 10$ cm, $F = -10 \times 0{,}1 = -1$ N. Por outro lado, $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$ m/s².

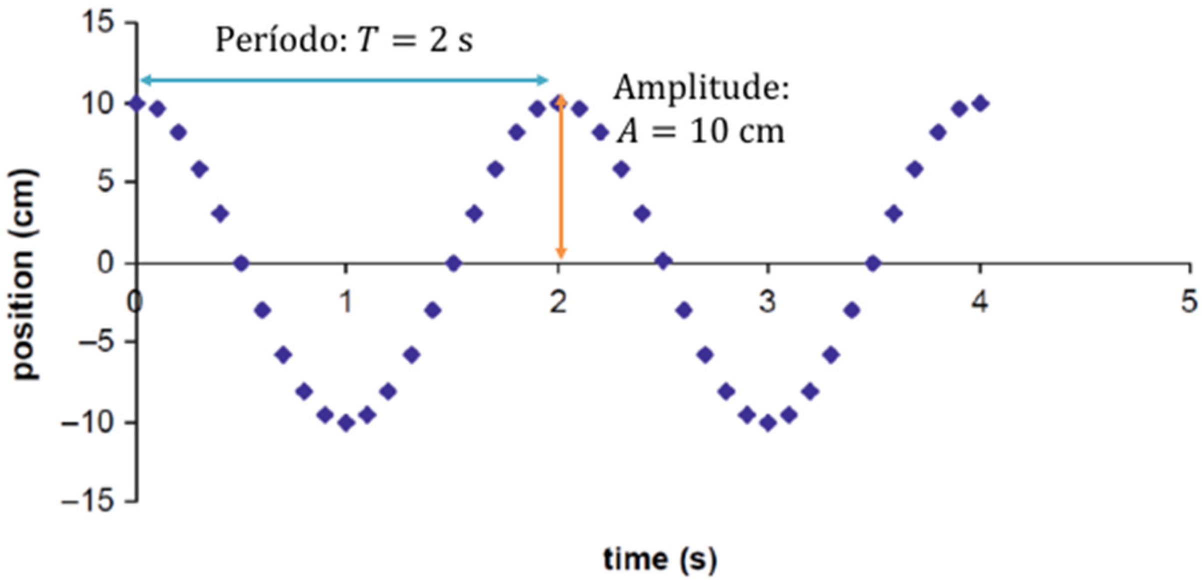
(b) Depois do bloco se mover 10 cm, o sistema volta à posição de equilíbrio ($x = 0$), onde a força é nula, sendo a aceleração também nula.

(c) Depois de se mover 20 cm, o sistema estará no ponto de máxima compressão ($x = -10$ cm). Nesta posição, a aceleração será de $0{,}5$ m/s².

- Uma oscilação pode ser descrita matematicamente por uma função seno ou cosseno:

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

- Qual das funções descreve a oscilação do gráfico?



Para $t = 0$: $\begin{cases} sen(\pi t) = sen(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \\ cos(\pi t) = cos(0) = 1 \Rightarrow x(0) = A \end{cases}$

A oscilação é bem descrita por $\boxed{x(t) = A\cos(\pi t)}$

- O movimento da massa ligada à mola é um exemplo de movimento cíclico ou periódico, que se repete em intervalos regulares de tempo.
- No caso da mola ou de um pêndulo, o movimento também é conhecido por movimento oscilatório (movimento de vai e vem).
- A Terra, por exemplo, realiza um movimento cíclico, periódico em volta do Sol (com período de 1 ano) mas o movimento não é oscilatório.
- O movimento oscilatório de uma massa numa mola, representado por exemplo pela equação:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

é conhecido por movimento harmónico simples (MHS). O termo harmónico vem da definição matemática de seno e cosseno como funções harmónicas. É um movimento ideal, que persiste com a mesma amplitude na ausência de atrito.

- A variação da posição com o tempo é descrita por uma função seno ou cosseno, tal como:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

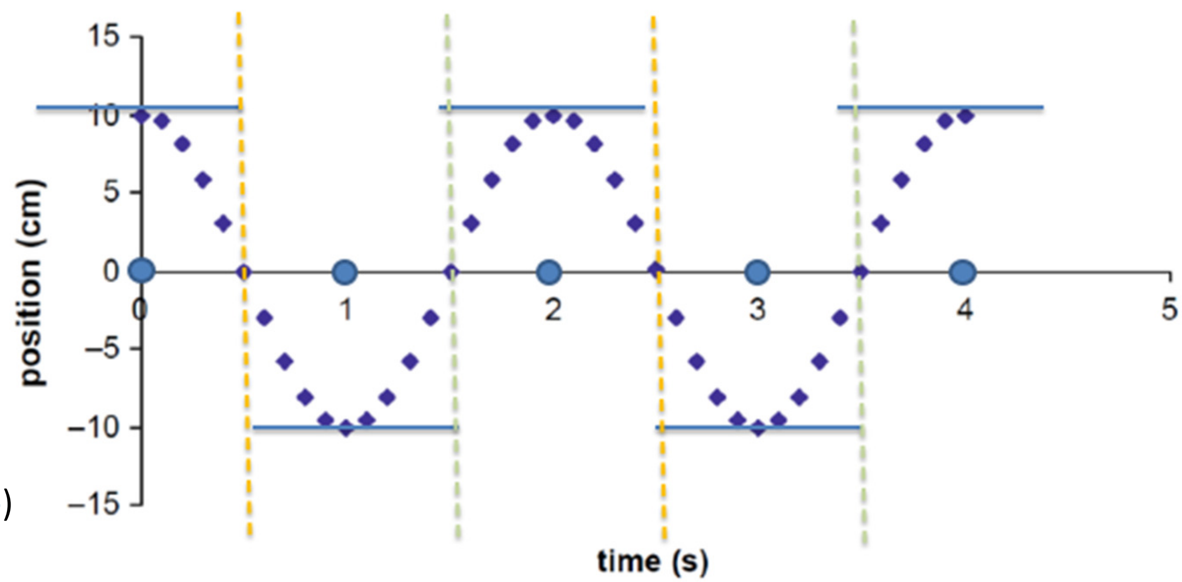
- Como varia a velocidade e a aceleração?

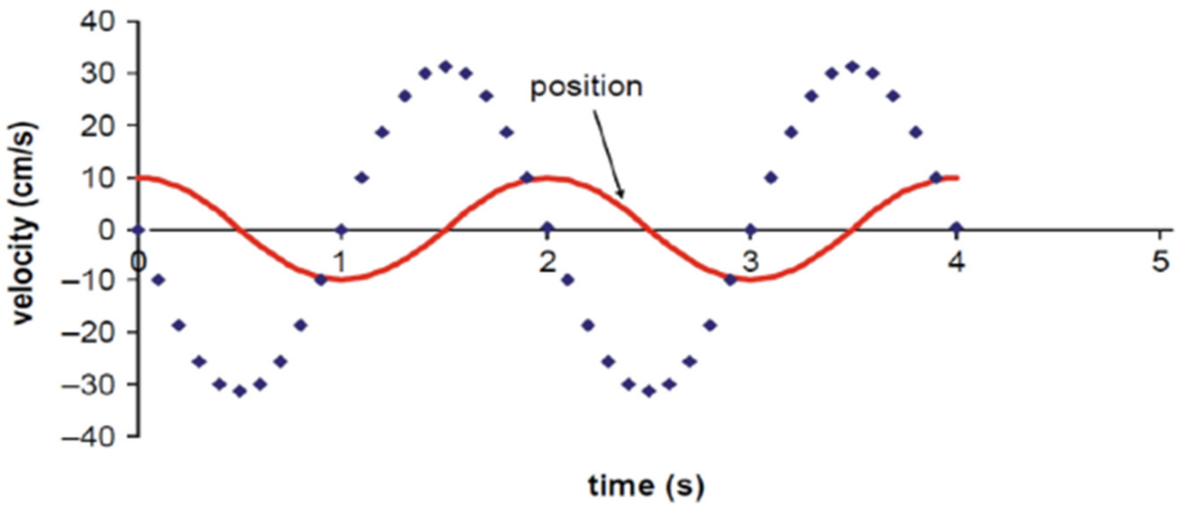
- A velocidade é obtida a partir da curva de $x(t)$, calculando o declive da tangente em cada ponto. Pois, $v = \frac{dx}{dt}$.

- A velocidade é nula quando a tangente à curva $x(t)$ é horizontal ($t = 0, 1, 2, 3, 4$s ...)
- Os mínimos e máximos da velocidade ocorrem em $x = 0$ (declive máximo, negativo ou positivo)

A = 10 cm

$w = \frac{2\pi}{T} = \pi$ (rad/s)





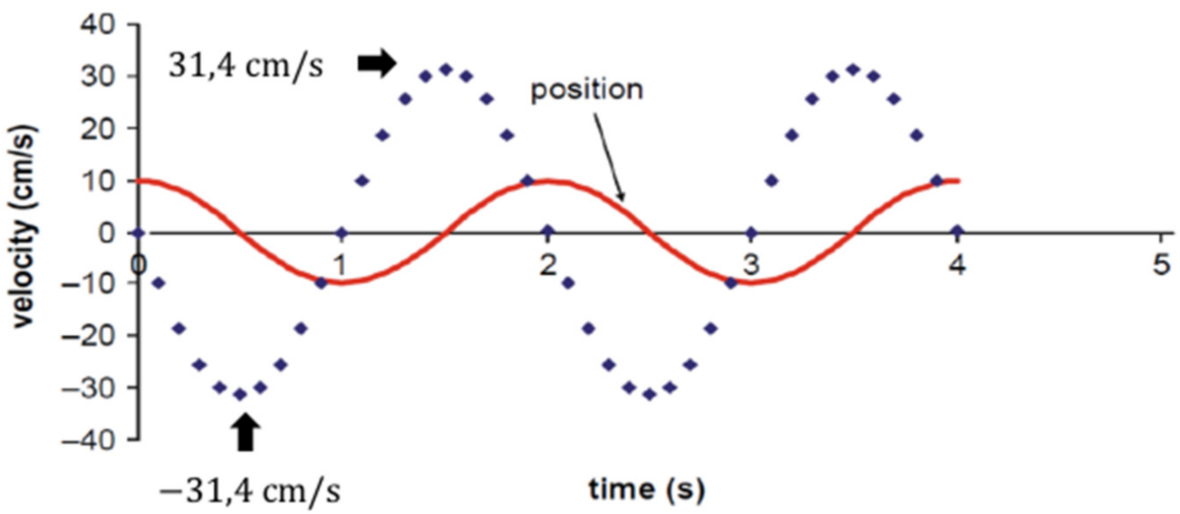
- A velocidade será também representada por uma função seno ou cosseno, com o mesmo período de $x(t)$ mas diferente amplitude:

$$\boxed{v(t) = A' \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{v(t) = A' \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

- Qual das funções descreve a oscilação acima?

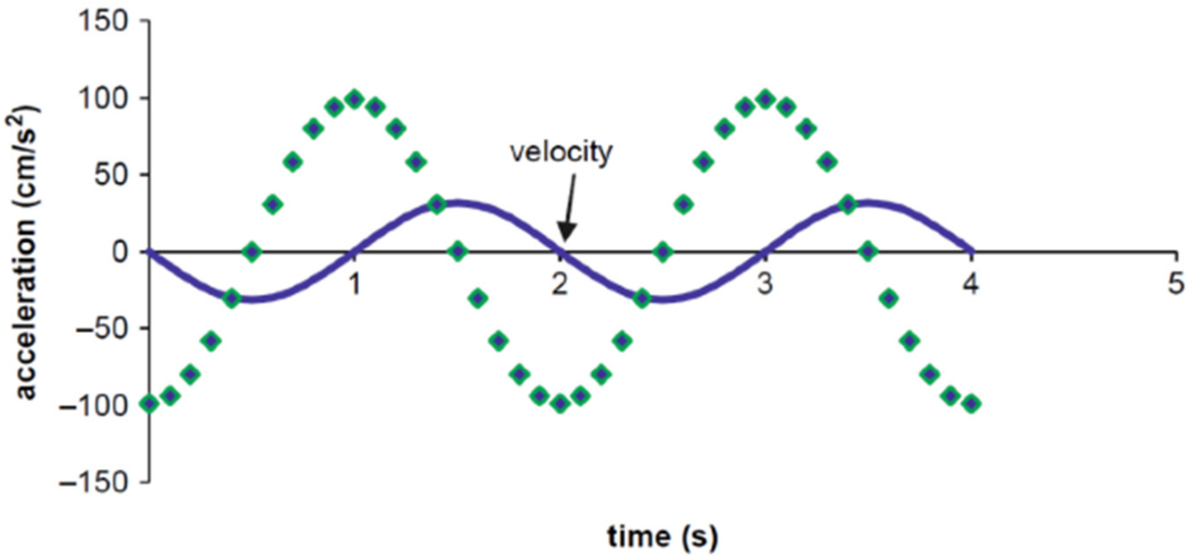
$$t = 0: \begin{cases} \cos(\pi t) = \cos 0 = 1 \Rightarrow v(0) = A' \\ \operatorname{sen}(\pi t) = \operatorname{sen} 0 = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \end{cases}$$

De facto, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(A\cos(\frac{2\pi}{T}t)\right) = -\frac{2\pi}{T}A\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t)$



De forma idêntica, se obtém a expressão da aceleração:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{2\pi}{T}A\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t)\right] = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$$



- Verificamos que $a(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t)$

- Por outro lado, se a força elástica for a força resultante sobre o corpo, da 2ª lei de Newton:

$$F = -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

- Comparando as duas equações acima, resulta que

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{k}{m} \Leftrightarrow T^2 = (2\pi)^2\frac{m}{k}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

- O período do movimento oscilatório depende apenas da massa do corpo ligado à mola (m) e da constante elástica da mola (k)

Do ponto de vista físico e matemático poder-se-ia ter chegado à equação que descreve o MHS diretamente a partir de:

$$F = -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

E, $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Logo, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Fazendo, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Cuja solução é $$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

com A e δ parâmetro que dependem das condições iniciais.
A corresponde à amplitude da oscilação e δ a fase inicial (está relacionado com o inicio da contagem do tempo)

Exercício 1: Uma massa está pendurada numa mola linear vertical, sendo colocada a oscilar. Se 0,25 s for o tempo mais curto que a massa demora a ir do ponto mais alto para o mais baixo da trajetória, determine o período, a frequência e a frequência angular do movimento harmónico simples.

- A trajetória do ponto mais alto para o mais baixo do movimento oscilatório corresponde a metade de um ciclo completo. Assim:

$$T = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5\ \text{s}.$$

- A frequência é igual ao inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \text{Hz}.$$

- Isto significa que em cada segundo ocorrem duas oscilações completas.
- A frequência (ou velocidade) angular é dada por:

$$\omega = 2\pi f = 4\pi\ \text{rad/s} = 12{,}6\ \text{rad/s}.$$

Exercício 2: Um bloco de massa 0,5 kg é pendurado numa mola, distendendo-a 10 cm. Se o bloco distender a mola mais 5 cm e for libertado, determine:
(a) o período das oscilações;
(b) a altura máxima a que o bloco chega desde o ponto em que é libertado;
(c) a aceleração máxima do bloco;
(d) a velocidade máxima do bloco.

(a) O período do movimento pode ser calculado a partir de $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, sendo k determinado através das condições iniciais.

A mola distende 0,1 m com uma massa de 0,5 kg, ou seja, com uma força aplicada igual ao peso da massa:

$$F = -ky \Longrightarrow k = -\frac{mg}{y} = -\frac{0{,}5 \times 9{,}8}{-0{,}1} = 49 \text{ N/m}$$

Então $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{49}} = 0{,}63 \text{ s}$

(b) A massa oscila com uma amplitude de 5 cm em volta da posição de equilíbrio (com o bloco parado). Portanto, o bloco sobe até à posição de equilíbrio da mola (5 cm acima), percorrendo mais 5 cm até parar, comprimindo a mola (o movimento é simétrico em torno da posição de equilíbrio). Então a altura máxima está a 10 cm da posição inicial.

(c) A aceleração máxima é dada por

$$|a_{max}| = A\omega^2 = A\frac{k}{m} = (0{,}05)\frac{49}{0{,}5} = 4{,}9\ \text{m/s}^2.$$

A massa tem aceleração máxima nos extremos da trajetória (distensão e compressão máxima da mola).

(d) A velocidade máxima é dada por

$$|v_{max}| = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}05)\sqrt{\frac{49}{0{,}5}} = 0{,}49\ \text{m/s}$$

A massa tem velocidade máxima quando passa na posição de equilíbrio.

Exercício 3: Os dois átomos de hidrogénio de uma molécula de H_2 oscilam em torno do centro de massa da molécula com uma frequência de vibração natural de $1{,}25 \times 10^{14}$ Hz. Qual é a constante elástica da mola efetiva equivalente às forças de ligação na molécula? A massa efetiva de H_2 para o movimento em torno do seu centro de massa é metade da massa do átomo de hidrogénio.

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow \frac{k}{m} = (2\pi f)^2 \Leftrightarrow k = (2\pi f)^2 m$$

$$k = (2\pi \times 1{,}25 \times 10^{14})^2 \times \frac{1}{2}(1{,}66 \times 10^{-27})$$

$$k = 520 \text{ N/m}$$

Nota: Trata-se de um valor típico para a constante elástica de uma mola equivalente a uma ligação covalente simples. As ligações iónicas, como em NaCl, têm constantes mais baixas (cerca de 100 N/m) e as ligações covalentes duplas e triplas têm constantes maiores, podem atingir vários milhares de N/m.