HIDROSTÁTICA E HIDRODINÂMICA

1. **Fluidos ideais**

   Hidrostática

   Hidrodinâmica

2. **Fluidos viscosos**

   Hidrodinâmica

   Tensão superficial

   Capilaridade

Fluidos ideais

Pressão

- **Fluido:** gás ou líquido que assume a forma do recipiente em que é colocado, em oposição aos sólidos cuja forma é fixa.
- **Fluido ideal:** fluido incompressível e onde a ação de forças viscosas (atrito) é desprezável.
- **Fluido em repouso:** fluido em equilíbrio hidrostático, ou seja, a resultante das forças aplicadas a qualquer porção de fluido é nula.

  (Sabe-se, contudo, que os átomos e moléculas estão em permanente agitação: em movimento térmico ou difusão)
- **Pressão num fluido:** é a intensidade da força normal a uma superfície por unidade de área:

$$P = \frac{F}{A}$$

A unidade de pressão no SI é N/m^2 ou pascal (Pa).

Um tudo cilíndrico cheio de sangue ($\rho = 1{,}06\ \mathrm{g/cm^3}$), com 1 cm de raio e 10 cm de comprimento, é mantido na vertical. Calcule a pressão na parte de baixo do tubo desprezando a pressão atmosférica.

A força exercida na base do tubo é o peso do fluido:

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \rho g \frac{AL}{A} = \rho g L$$

$$P = \frac{1{,}06 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{10^{-6}\ \mathrm{m^3}} \times 9{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \times 0{,}1\mathrm{m} = 1040\ \mathrm{Pa}$$

Calcule a pressão exercida no chão por um homem de massa 100 kg que se mantém de pé, se cada sapato ocupar uma área de $200\ \mathrm{cm^2}$.

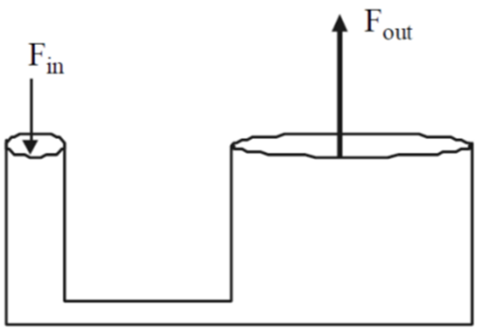
Área total coberta pelos sapatos: $A = 2 \times 200\ \mathrm{cm^2}$

$$A = 400 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$$

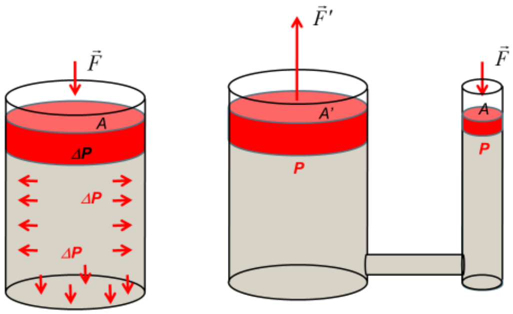
$$P = \frac{mg}{A} = \frac{100 \times 9{,}8}{400 \times 10^{-4}} = 2{,}45 \times 10^{4}\ \mathrm{Pa}$$

Princípio de Pascal: Se um fluido está confinado a um determinado recipiente e uma força externa é aplicada numa superfície do fluido, será exercida uma pressão sobre o fluido. Essa pressão aplicada não fica circunscrita à superfície em que a força foi aplicada. Todo o fluido fica sujeito à mesma pressão.

- Um exemplo de aplicação deste princípio é o elevador hidráulico



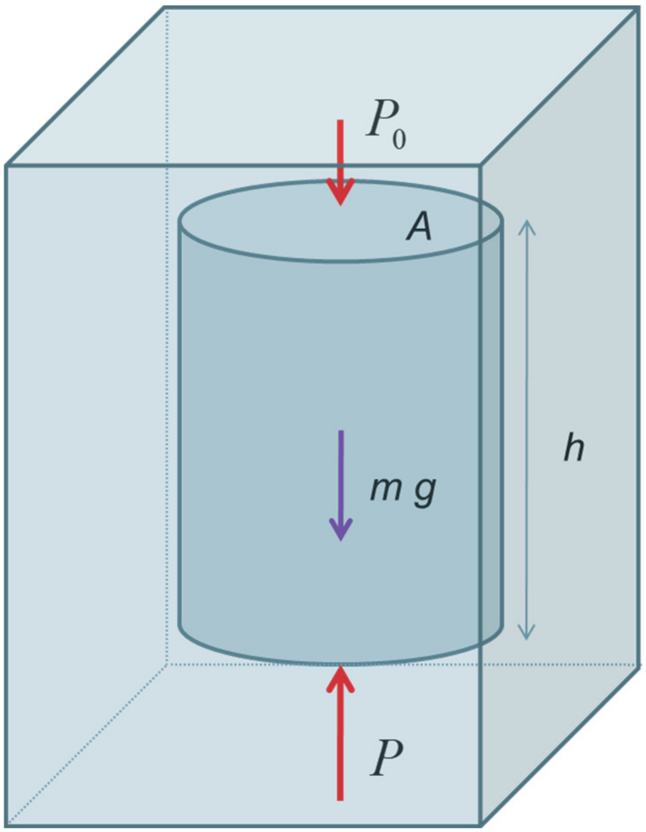
$$P = \frac{F_{in}}{A_{in}} = \frac{F_{out}}{A_{out}}$$



ΔP é o mesmo em todos os pontos do volume do fluido

- O nosso corpo está cheio de fluidos pressurizados e quando há um aumento de pressão em certos fluidos isso é manifestação de que algo não está bem (exemplo: obstrução à passagem do fluido).

Hidrostática



Pressão

$$P_0 A + mg = PA$$

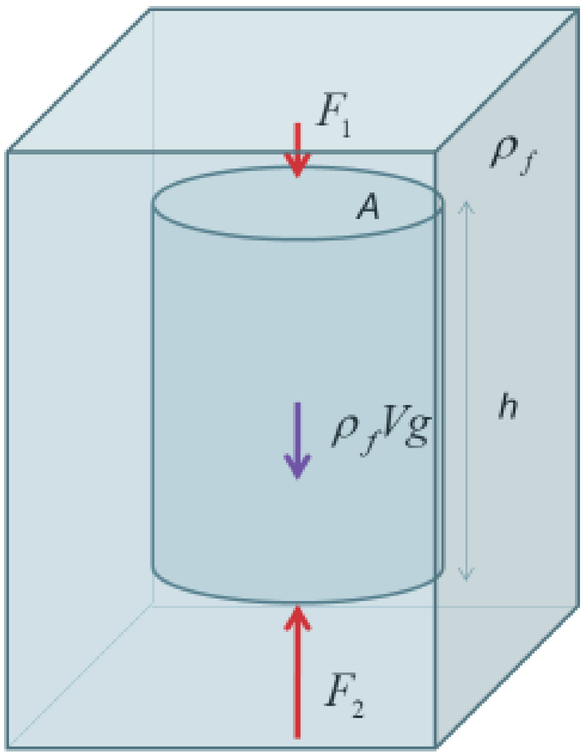
$$P_0 A + \rho A h\, g = PA$$

$$P_0 + \rho\, h\, g = P$$

$$P - P_0 = \rho\, g\, h$$

ρ : densidade do fluido

Impulsão

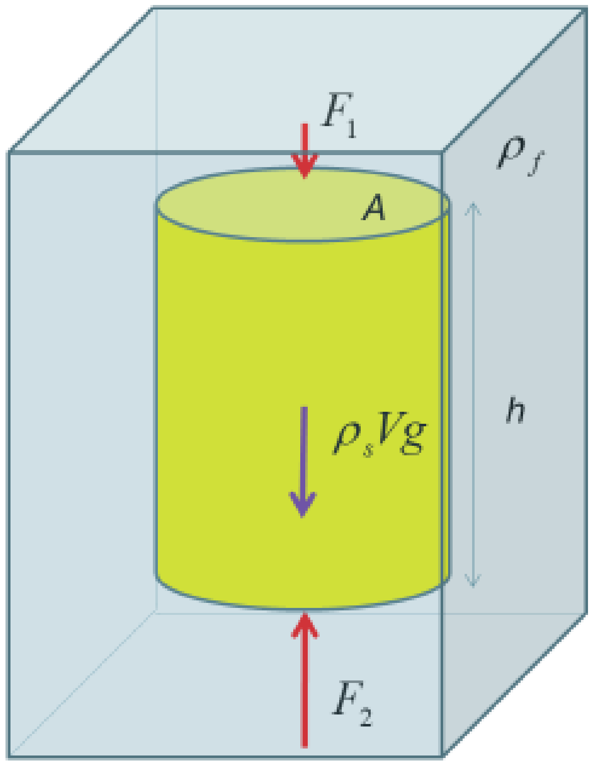


Volume cilíndrico de fluido dentro do próprio fluido

Equilíbrio dentro do volume do fluido:

$$F_2 - F_1 = \rho_f V g$$

Impulsão



Volume cilíndrico de um **SÓLIDO** dentro do mesmo fluido

$$F_2 - F_1 \neq \rho_s V g$$

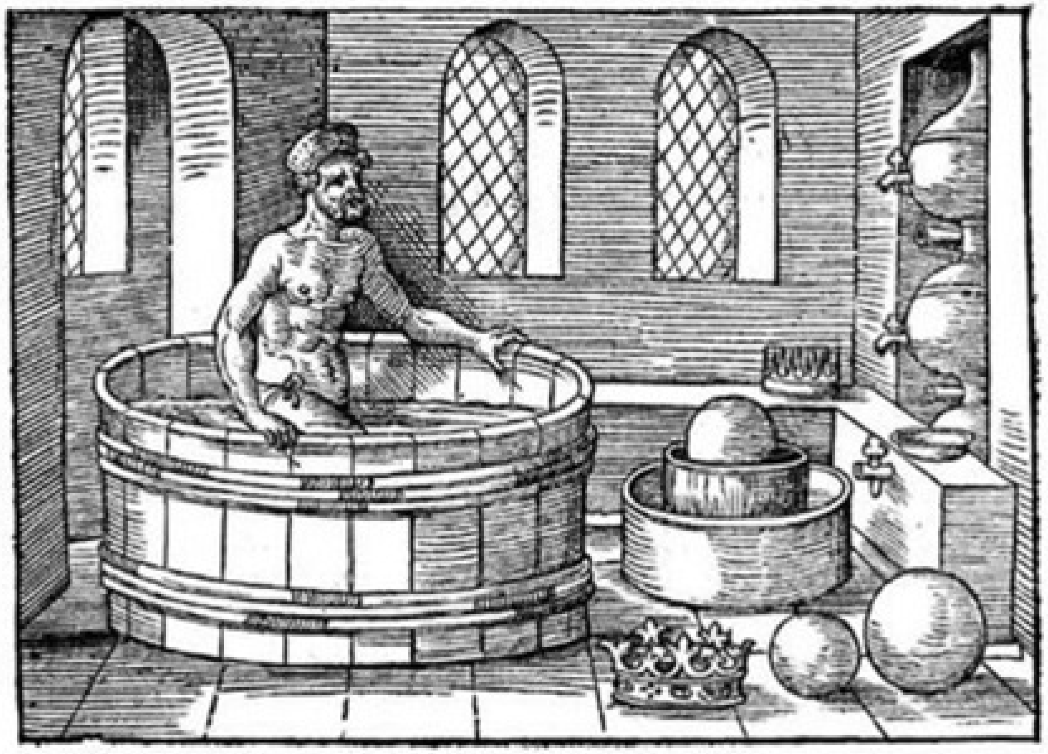
$$F_2 - F_1 = \rho_f V g = I$$

Impulsão

Força Resultante:

$$P - I = (\rho_s - \rho_f) V g$$

Arquimedes



$$I = \rho_f V g$$

Princípio de Arquimedes: Quando um objeto de volume V mergulha num fluido fica sujeito a uma força vertical para cima, designada força da impulsão ($\vec{I}$) igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto (o volume de fluido deslocado é V).

Se todo o objeto está mergulhado no fluido, em equilíbrio, o somatório das forças é nula:

$$\vec{P} + \vec{I} = 0$$

$$m_o g - m_f g = 0$$

$$\rho_o V_o g - \rho_f V_o g = 0$$

$$\rho_o = \rho_f$$

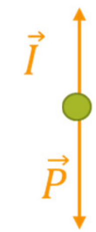
- Se $\rho_o > \rho_f$, o objeto desloca-se para o fundo do fluido.

- Se $\rho_o < \rho_f$, o objeto flutua à superfície do fluido.

Exemplo 1: Um homem com 800 N de peso desloca um volume de 0,076 m^3 ao submergir numa piscina.
(a) Calcule o seu peso efetivo nessa situação.
(b) E se o homem mergulhar no oceano?

(a) O peso efetivo do homem é a força resultante que atua sobre ele: $\vec{P}_{ef} = \vec{P} + \vec{I}$

$$P_{ef} = P - I = P - \rho_a V g$$



Sendo $\rho_a = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, resulta:

$$P_{ef} = 800 - 1000 \times 0{,}076 \times 9{,}8 = 55\ \mathrm{N}$$

Corresponde a uma massa efetiva de cerca de 5,5 kg!

(b) No oceano, a densidade da água é superior:

$$\rho_a = 1025\ \mathrm{kg/m^3}$$

Consequentemente, o peso efetivo será ainda menor:

$$P_{ef} = 800 - 1025 \times 0{,}076 \times 9{,}8 = 37\ \mathrm{N}$$

Exemplo 2: Muitos animais conseguem flutuar se tiverem os pulmões cheios de ar, mas afundam-se caso contrário. Usando os dados anteriores, calcule a percentagem de aumento do volume do corpo quando os pulmões estão cheios assumindo que o corpo consegue flutuar em água doce nesta situação.

O acréscimo do volume do corpo (V_c) é igual ao volume dos pulmões (V_p): $\Delta V = V_p/(V_p + V_c)$

$$\vec{P} + \vec{I} = 0 \Rightarrow P - \rho_a(V_c + V_p)g = 0$$

$$800 - 1000(0{,}076 + V_p) \times 9{,}8 = 0$$

$$800 - 76 \times 9{,}8 - 9800\, V_p = 0$$

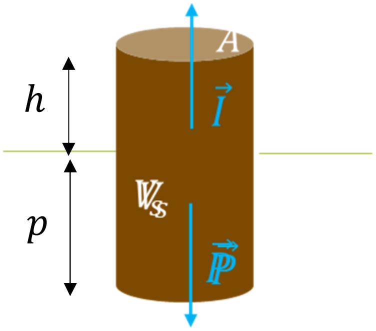
$$V_p = 0{,}0056 \text{ m}^3 = 5{,}6 \text{ dm}^3 = 5{,}6\ l$$

O acréscimo de volume do corpo será então:

$$\Delta V = \frac{V_p}{V_p + V_c} = \frac{0{,}0056}{0{,}0056 + 0{,}076} = 0{,}068 = 6{,}8\%$$

Exemplo 3: O maior iceberg alguma vez visto tinha uma altura de 168 m acima do nível do mar. Admitindo que tinha uma forma aproximadamente cilíndrica, determine a sua profundidade abaixo da superfície. Despreze a variação da densidade da água e do gelo com a profundidade e com a temperatura.

Seja $h = 168\ \mathrm{m}$ a altura do iceberg acima do nível do mar e p a profundidade, V o volume total e $V_s = Ap$ o volume submerso.



$$\vec{P} + \vec{I} = 0 \Rightarrow mg - m_a g = 0$$

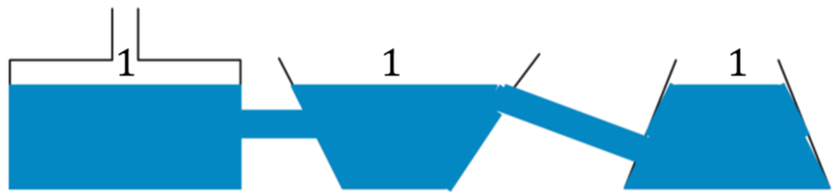
Sendo a densidade do gelo $\rho_g = 917\ \mathrm{kg/m^3}$ e a densidade da agua do mar $\rho_a = 1025\ \mathrm{kg/m^3}$, resulta:

$$\rho_g V g - \rho_a V_s g = 0 \Rightarrow \rho_g A(h+p)g = \rho_a A p g$$

$$\rho_g (h+p) = \rho_a p \Rightarrow 917(168+p) = 1025p$$

Resulta então: $p = 1426\ \mathrm{m}$

- O ar da atmosfera também gera pressão: consideremos agora que o nível 1, com pressão P_1, está à superfície do fluido e que essa superfície está em contacto com o ar.



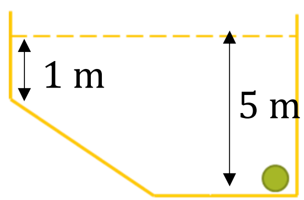
- Neste caso, P_1 designa-se por pressão atmosférica (P_{atm}), sendo definida como a pressão do peso da coluna de ar que fica sobre $1\ \mathrm{m}^2$ da superfície da Terra, ao nível do mar.
- O valor médio da pressão atmosférica ao nível do mar, representada pela unidade atm (atmosfera), que corresponde a $1{,}01 \times 10^5$ Pa em unidades do SI.

- Se a pressão é medida relativamente à pressão atmosférica designa-se por pressão manométrica:

$$P = P_{atm} + \rho g h \Rightarrow \Delta P = P - P_{atm} = \rho g h$$

Exemplo 1: Uma piscina tem o chão inclinado, começando com uma profundidade de 1 m num dos lados, atingindo 5 m a meio e mantendo essa profundidade até ao outro lado. Determine a pressão exercida num balão com 2 cm de diâmetro mantido no fundo da piscina, em cada um dos seus extremos.

$P_{atm} = 10^5$ Pa



Temos que: $P = P_{atm} + \rho g h$

A densidade da agua é

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

A pressão exercida sobre o balão vai depender da profundidade:

$$P(1\text{ m}) = 10^5 + 10^3 \times 9{,}8 \times 1 = 1{,}1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P(5\text{ m}) = 10^5 + 10^3 \times 9{,}8 \times 5 = 1{,}5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Exemplo 2: A pressão do sangue varia periodicamente no tempo, com o batimento cardíaco, e varia espacialmente em função da altura a que os vasos se encontram. Esta variação de pressão deve-se às diferenças na altura efetiva da coluna de sangue nos vasos sanguíneos. Considerando que a pressão média do sangue no coração é de 13,2 kPa (corresponde às pressões máxima e mínima típicas de 120/80 mmHg), determine a pressão do sangue ao nível do pé (situado 1,3 m abaixo do coração) e ao nível da cabeça (localizada 0,5 m acima do coração).

$P_{pe} = P_{cor} + \rho g h$ onde $\rho = 1060\ \mathrm{kg/m^3}$

$P_{pe} = 13{,}2 \times 10^3 + 1060 \times 9{,}8 \times 1{,}3 = 26{,}7$ kPa

Em relação à cabeça, esta está situada acima do coração, pelo que $P_{cor} = P_{cab} + \rho g h$.

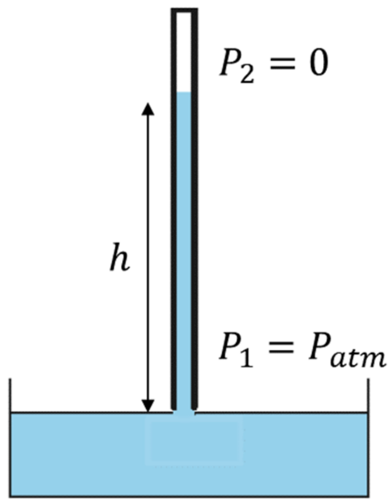
$P_{cab} = 13{,}2 \times 10^3 - 1060 \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 8$ kPa

A pressão é medida ao nível (altura) do coração!

Projetar um medidor simples de pressão atmosférica

De que necessitamos?

- um tubo comprido
- um líquido
- uma tina larga e aberta



Como proceder?

- colocar líquido na tina
- encher todo o tubo com o mesmo líquido
- inverter o tubo rapidamente na tina
- medir a altura da coluna

A pressão na base do tubo será $P_1 = P_{atm}$

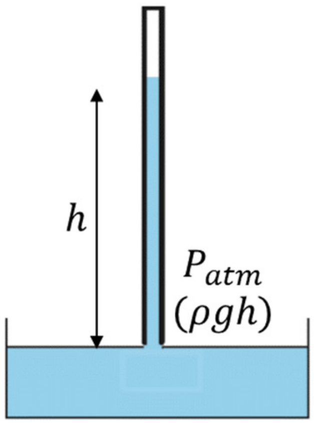
A pressão no espaço do tubo que fica vazio é $P_2 = 0$

$$P_1 = P_2 + \rho g h \Rightarrow P_{atm} = \rho g h$$

Porque é que um *barómetro* usa mercúrio e não água?

Calculemos a altura de uma coluna de água ou de mercúrio inseridos num tubo comprido fechado numa das extremidades e que é depois invertido numa tina com o mesmo líquido.

O nível de água no tubo vai descer até que a pressão atmosférica na tina seja suficiente para suportar a coluna de água no tubo. Sendo este fechado, não há pressão adicional no topo da coluna de água, sendo a pressão atmosférica na tina aberta igual à pressão na base do tubo (princípio de Pascal).



Para a água: $h_a = \frac{P_{atm}}{\rho_a g} = \frac{1{,}01 \times 10^5}{1000 \times 9{,}8} = 10{,}3 \text{ m!!!}$

Para o mercúrio: $h_m = \frac{P_{atm}}{\rho_m g} = \frac{1{,}01 \times 10^5}{13600 \times 9{,}8} = 0{,}76 \text{ m}$

Outras unidades de pressão: $1\ torr = 1\ mmHg$

$1\ atm = 760\ torr = 760\ mmHg = 76\ cmHg$

Manómetros que medem a pressão relativamente à pressão atmosférica: de membrana / de fluido

Esfignomanómetro:

Juntamente com um estetoscópio, um tubo e uma bomba manual, é usado para medir a pressão sanguínea.

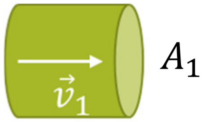
Dinâmica de fluidos ideais

Leis de conservação na dinâmica de fluidos ideais (não-viscosos e incompressíveis): massa e energia

- Conservação da massa: consideremos um tubo por onde passa um fluido cuja área da secção transversal (perpendicular à direção do fluxo) varia de A_1 para A_2.

- Num dado intervalo de tempo, Δt, a massa de fluido que atravessa a área A_1 com velocidade v_1 forma um pequenino cilindro de volume ΔV:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A_1 v_1 \Delta t$$



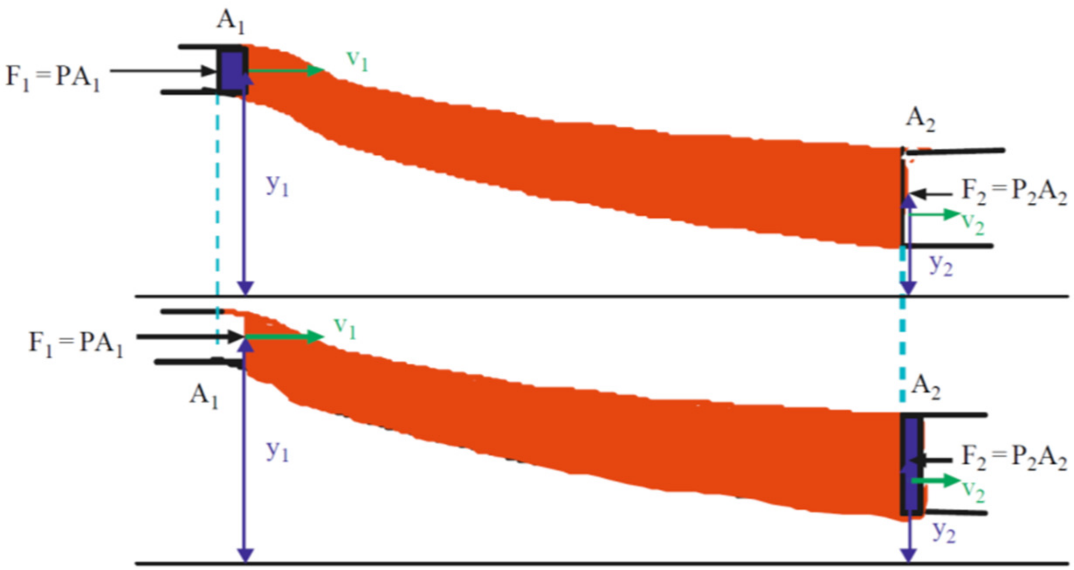
- Como a massa se conserva e o fluido é incompressível, a mesma quantidade de massa tem de passar na parte mais estreita do tubo durante o mesmo intervalo tempo. Ou seja:

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \boldsymbol{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

- A equação $A_1 v_1 = A_2 v_2$ é designada equação da continuidade do fluxo: $Q = Av = \text{constante}$
- Q também se designa caudal (ou fluxo volumétrico).

  A unidade do caudal no SI é o m^3/s.

- Conservação da energia: consideremos o vaso sanguíneo representado na figura, onde o sangue (<u>aqui considerado um fluido ideal</u>, na realidade não é), se desloca da esquerda para a direta. Consideremos um sistema constituído pela parcela de fluido inicialmente situada entre as duas linhas tracejadas.



- Entre a figura de cima e a de baixo decorreu um intervalo de tempo Δt. O nosso sistema moveu-se para a direita na figura de baixo. Tudo se passa como se apenas o retângulo escuro (à esquerda) se tivesse movido para o outro extremo (à direita).

- O que sabemos sobre o nosso sistema ?

(1) O volume de fluido que se afastou da linha tracejada à esquerda, durante Δt, é o mesmo que passou para além da linha tracejada à direita (fluido incompressível).

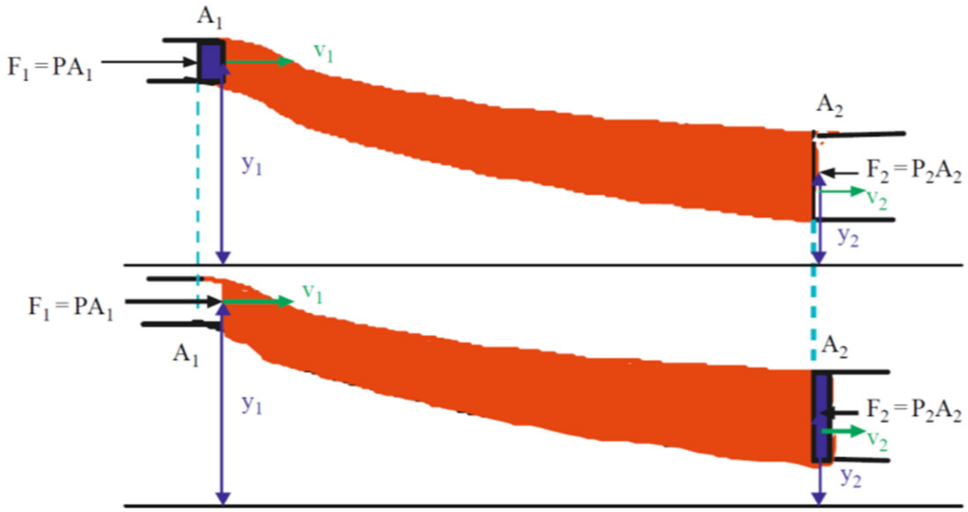
(2) A área da secção do tubo aumenta à direita. Pela equação da continuidade ($Q = Av$), a velocidade da quantidade de fluido à direita vai diminuir. Assim, a energia cinética do sistema vai variar.

(3) Como a altura do fluido (e do vaso que o contém) também varia da esquerda para a direita, a energia potencial gravítica do sistema também varia.

(4) Por outro lado, o resto do fluido (à esquerda e à direita) realiza trabalho sobre o nosso sistema pois exerce pressão sobre ele: empurra à esquerda e resiste à direita.

- Vamos usar o teorema do trabalho-energia para avaliar a variação da energia do sistema durante Δt.

$$W_{ext} = \Delta E_c$$



- Comecemos pela energia cinética:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\rho A_1(v_1\Delta t)(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)Q\Delta t$$

Usamos a definição de caudal $Q = A_1 v_1$.

- O trabalho realizado sobre o fluido deve-se a duas forças externas: a força gravítica (há variação de altura) e as forças de pressão sobre o fluido:

$$W_{ext} = W_{fg} + W_{pressão}$$

- O trabalho realizado pela força da gravidade é igual ao simétrico da variação da energia potencial:

$$W_{fg} = -\Delta E_{pg} = -mg(y_2 - y_1) = -\rho \Delta V g(y_2 - y_1)$$

$$W_{fg} = -\rho A_1 (v_1 \Delta t) g(y_2 - y_1) = -\rho g Q \Delta t(y_2 - y_1)$$

- Apenas os dois volumes nos extremos alteraram a altura e, portanto, a energia potencial gravítica.

- Vejamos agora o trabalho realizado pelas forças de pressão. As forças que as paredes dos vasos sanguíneos exercem sobre o fluido ideal são perpendiculares à superfície, ou seja, à direção do movimento do fluido. Assim, o trabalho realizado pela pressão das paredes dos vasos é nulo:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos 90° = 0$$

- O trabalho realizado pelas forças de pressão sobre o sistema deve-se então às forças exercidas pelo fluido à esquerda e à direita do nosso sistema:

  (1) O fluido situado à esquerda do sistema exerce sobre ele uma força $F_1 = P_1 A_1$ dirigida para a direita.

  (2) O fluido situado à direita do sistema exerce sobre ele uma força $F_2 = P_2 A_2$ dirigida para a esquerda, sendo que $F_2 < F_1$ visto que o sistema flui para a direita.

- O trabalho realizado pela força da esquerda é:

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \, v_1 \Delta t$$

- E o trabalho realizado pela força da direita é:

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \, v_2 \Delta t$$

- Sendo $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$, o trabalho total será:

$$W_{pressão} = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2) Q \Delta t$$

- Agora podemos substituir todos os resultados no teorema da energia cinética:

$$W_{fg} + W_{pressão} = \Delta E_c \Leftrightarrow W_{pressão} = \Delta E_c + \Delta E_{pg}$$

- Da equação anterior resulta então:

$$(P_1 - P_2)Q\Delta t = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)Q\Delta t + \rho g(y_2 - y_1)Q\Delta t$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

- Rearranjando os termos da equação anterior, obtemos a expressão do princípio de conservação de energia para os fluidos ideais, também conhecida por Equação de Bernoulli:

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2}$$

- Como as posições 1 e 2 foram arbitrariamente escolhidas, podemos dizer que em qualquer ponto do fluido temos:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

Exemplo: Insere-se um cateter na aorta, a maior artéria do corpo humano, para medir a pressão local e a velocidade do sangue, e observar o interior da aorta. No local usado, mede-se uma pressão de $1{,}4 \times 10^4$ Pa e uma velocidade de $0{,}4$ m/s. Mede-se o diâmetro interno da aorta, 2 cm, e deteta-se uma zona onde existe um depósito devido a arteriosclerose, onde o diâmetro está 30% reduzido. Considerando o sangue como um fluido ideal de densidade 1060 kg/m³, determine a velocidade do sangue e a alteração da pressão na região estrangulada.

Pela equação da continuidade, $A_1 v_1 = A_2 v_2$

Área de secção da artéria: $A_1 = \pi {r_1}^2 = \frac{1}{4}\pi {d_1}^2$

Zona estrangulada: $A_2 = \frac{1}{4}\pi {d_2}^2 = \frac{1}{4}\pi (0{,}7 d_1)^2 = 0{,}49\ A_1$

Logo, $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{A_1}{0{,}49 A_1} \times 0{,}4 = 0{,}82\ \mathrm{m/s}$

Da equação de Bernoulli, sendo $y_1 = y_2$, resulta:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 530(0{,}82^2 - 0{,}4^2) = 270\ \mathrm{Pa}$$

Na zona estrangulada, a pressão baixa 270 Pa.

Aplicação da equação de Bernoulli: cálculo da velocidade de um fluido numa torneira ou orifício de um grande depósito aberto como mostra a figura. Assume-se que o volume do tanque é muito grande, de modo que a diferença de altura entre a superfície superior do fluido e o orifício $(y_2 - y_1)$ não muda de modo significativo e a velocidade do fluido na superfície superior é insignificante. A pressão no topo do tanque e na abertura inferior são iguais à pressão atmosférica.

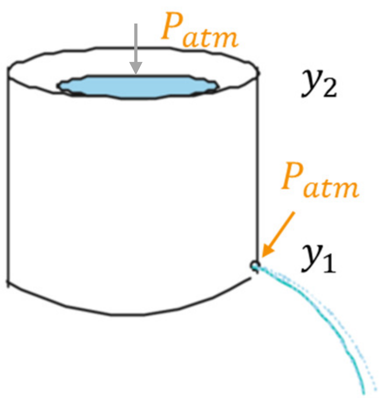
Da equação de Bernoulli ($P_2 = P_1$):

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$v_2 \approx 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + g y_1 = g y_2$$

$$v^2 = 2g(y_2 - y_1)$$

(comparar com $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$)



A velocidade do fluido no orifício será então:

$$\boxed{v = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}}$$

Teorema de Torricelli

Exemplo: Um frasco de solução salina ligado a um tubo capilar fino, com 1 mm de diâmetro, é usado num gotejar intravenoso. Se o frasco for colocado 1 metro acima da extremidade aberta do tubo capilar, qual será o fluxo volumétrico à saída do tubo (antes de ele ser ligado a uma agulha hipodérmica e inserido na veia de uma pessoa)? Considere que a solução salina é um fluido ideal.

Usando o teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1} = 4{,}4 \text{ m/s}$$

O fluxo volumétrico, ou caudal, será então:

$$Q = Av = \pi r^2 v = \pi (0{,}5 \times 10^{-3})^2 \times 4{,}4$$

$$Q = 3{,}5 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 3{,}5 \text{ cm}^3/\text{s}$$

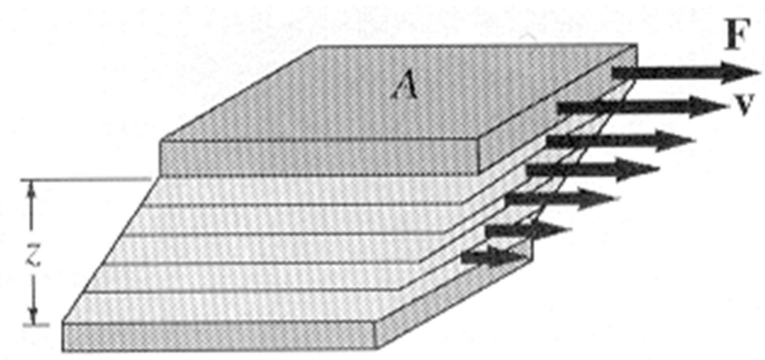
Fluidos viscosos

- Os fluidos reais são viscosos. Há forças internas atrativas entre as moléculas, sendo o movimento relativo entre elas equivalente a forças de atrito.
- O trabalho realizado por essas forças de arrasto faz com que a energia mecânica não se conserve, perdendo-se sob a forma de calor.
- A viscosidade é uma medida da resistência do fluido ao movimento.
- A viscosidade varia com a temperatura. A unidade no SI é o $Pa \cdot s$.

Fluido	Temperatura	Viscosidade (10^{-3} Pa s)
Água	$0\ °C$	1,8
Água	$20\ °C$	1,0
Água	$37\ °C$	0,7
Sangue (*)	$37\ °C$	4,0
Plasma sanguíneo	$37\ °C$	1,5

* A viscosidade do sangue varia com a quantidade de células vermelhas

Viscosidade



v constante
Força de resistência contraria ***F***

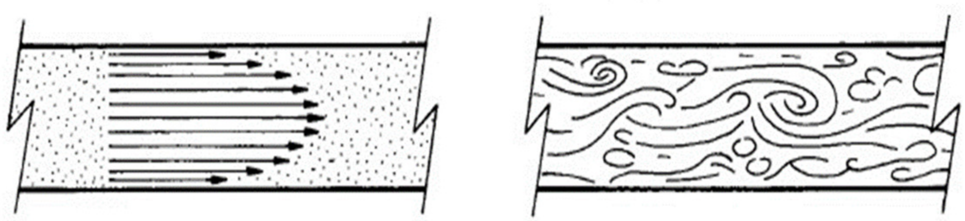
$$\frac{F}{A}$$ Tensão de deslizamento

$$\frac{v}{z}$$ Taxa de deslizamento

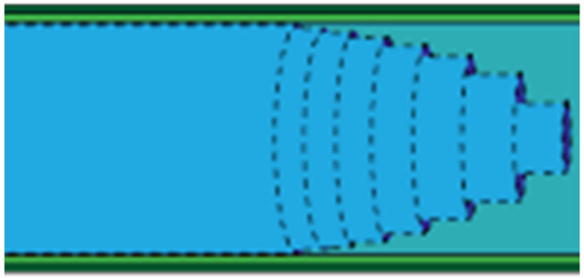
$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{z}$$

η - Coeficiente de viscosidade
(aumenta c/ conc. solutos)

- O fluxo pode ser laminar ou turbulento.

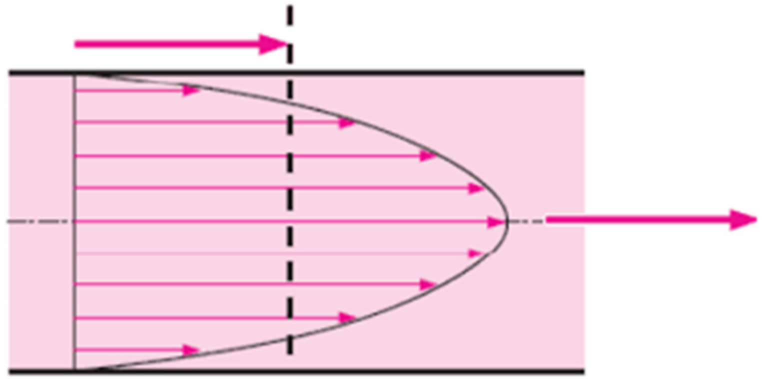


- Quando um líquido flui através de um tubo sem obstáculos, o fluxo a baixas velocidades é laminar.
- O fluxo laminar pode ser descrito por um modelo em que o fluido é dividido em camadas cilíndricas concêntricas com diferentes velocidades.

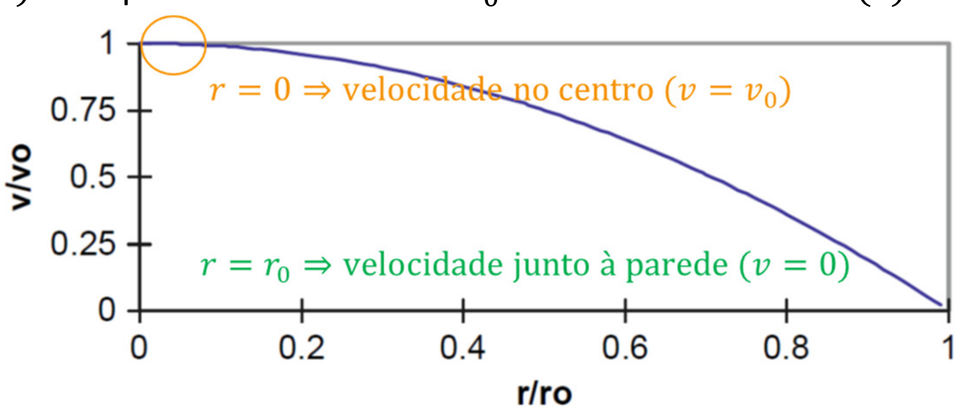


A camada cilíndrica mais externa (a camada fronteira em contacto com o tubo) permanece praticamente em repouso.

- No modelo do fluxo laminar, a camada que se desloca mais rapidamente é a camada central.



A velocidade (v) do líquido no tubo de raio r_0 varia com a distância (r) ao centro do tubo (v_0 é a velocidade máxima):



- Se a velocidade varia, devemos usar valor médio das velocidades das diferentes camadas do fluido que atravessam uma secção do tubo para obter o caudal

$$Q = A\bar{v}$$

- Verifica-se que a velocidade máxima é cerca do dobro da velocidade média:

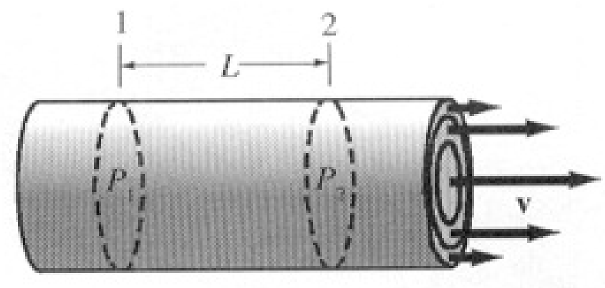
$$v_{max} = 2\bar{v}$$

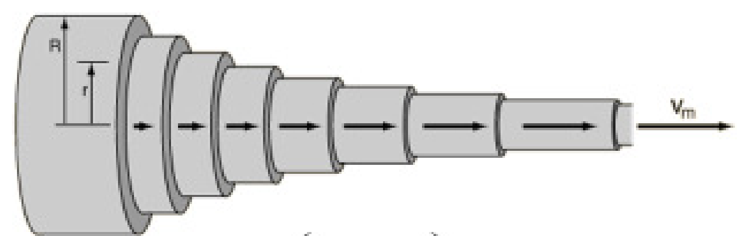
- A lei de Poiseuille (físico francês que estudou o fluxo sanguíneo) descreve a variação da pressão entre duas posições de um tubo:

$$\Delta P = \left(\frac{8\eta L}{\pi r^4}\right) Q$$

  - ΔP é a variação de pressão entre duas posições
  - L é a distância entre as duas posições
  - r é o raio do tubo
  - η é a viscosidade do líquido

Lei de Poiseuille





$$P_1 > P_2$$

$$v(r) = v_{max}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad \bar{v} = \tfrac{1}{2} v_{max}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, h_1 + P_1 \neq \tfrac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, h_2 + P_2$$

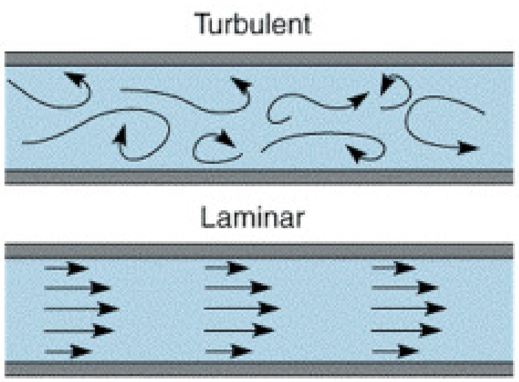
$$\Delta P = P_1 - P_2 = K\ I_V \qquad I_V = \bar{v}\ A$$

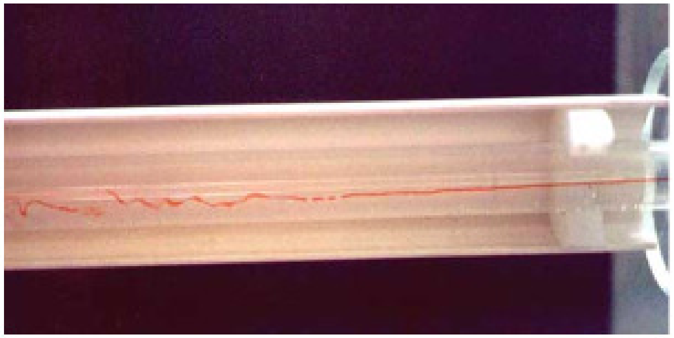
K - Resistência

$$K\ (cilindro) = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

$$\boxed{\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\, I_V}$$

Lei de Poiseuille





Número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{2R\rho\,\bar{v}}{\eta}$$

R – raio do tubo cilíndrico
ρ – densidade do fluido
$\bar{v}$ – velocidade média
η – coeficiente de viscosidade

Laminar: $\mathrm{Re} < 2000$

Turbulento: $\mathrm{Re} > 3000$

Exemplo: Ao administrar uma transfusão, o sangue sai de um saco selado à pressão de $1\ \mathrm{atm}$, sendo colocado $1\ \mathrm{m}$ acima do ponto de inserção. O fluido percorre um tubo capilar com $2\ \mathrm{mm}$ de diâmetro interno, passando através de uma agulha hipodérmica com $4\ \mathrm{cm}$ de comprimento e $0{,}5\ \mathrm{mm}$ de diâmetro interno.
(a) Se a veia para a qual o sangue está a ser transferido está a uma pressão manométrica de $18\ torr$, quanto tempo vai demorar uma transfusão de $1\ l$ de sangue? (b) Quanto tempo demoraria se o diâmetro interno da agulha fosse de $0{,}4\ \mathrm{mm}$? Considere $\rho_s = 1060\ \mathrm{kg/m^3}$, $\eta_s = 4 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\ s}$ e $P_{atm} = 1{,}01 \times 10^5\ \mathrm{Pa} = 760\ \mathrm{torr}$.

- O caudal ($Q = Av$) depende muito do raio do capilar. A maior resistência ao fluxo do sangue ocorre na agulha e não no tubo, visto que a sua secção é muito menor. Assim, podemos aplicar a lei de Poiseuille para determinar Q usando apenas as dimensões da agulha e ignorando as do tubo.
- O tempo depende da distância e da velocidade.

(a) Se a veia para a qual o sangue está a ser transferido está a uma pressão manométrica de 18 $torr$, quanto tempo vai demorar uma transfusão de 1 l de sangue?

Na saída do saco e entrada do tubo, temos uma pressão:

$$P_1 = P_{atm}$$

Na saída do tubo e entrada da agulha, temos uma pressão:

$$P_2 = P_{atm} + \rho g h$$

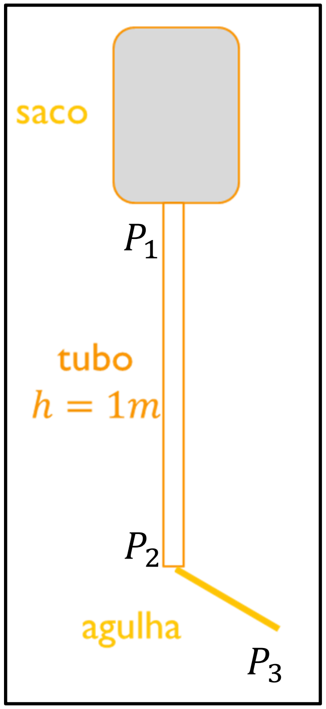
A pressão na veia (manométrica) é

$$P_v = P_{atm} + 18\ torr$$

Para o sangue entrar na veia, deve ter uma pressão ligeiramente superior à pressão da veia.

Podemos considerar a pressão à saída da agulha:

$$P_3 \approx P_v = P_{atm} + 18\ torr$$



Vamos usar a lei de Poiseuille para obter o caudal a partir da diferença de pressão nos extremos da agulha:

$$\Delta P = \left(\frac{8\eta L}{\pi r^4}\right) Q \Rightarrow Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P$$

A pressão à saída da agulha é menor que a pressão à sua entrada ($P_3 < P_2$). Temos então:

$$\Delta P = P_2 - P_3 = (P_{atm} + \rho g h) - (P_{atm} + 18 \text{ torr})$$

$$18 \text{ torr} = 18 \frac{1{,}01 \times 10^5}{760} \text{ Pa} = 2392 \text{ Pa}$$

$$\Delta P = \rho g h - 18 \text{ torr} = 1060 \times 9{,}8 \times 1 - 2392$$

$$\Delta P = 7996 \text{ Pa}$$

A altura do tubo só é usada para obter P_2. O caudal é determinado pelas dimensões da agulha:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P = \frac{\pi (0{,}25 \times 10^{-3})^4}{8 \times 4 \times 10^{-3} \times 0{,}04} 7996 = 7{,}7 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = Av = \frac{V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{Q} = \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{7{,}7 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}} = 1{,}3 \times 10^4 \text{ s}$$

(a) Se a veia para a qual o sangue está a ser transferido está a uma pressão manométrica de $18\ torr$, quanto tempo vai demorar uma transfusão de $1\ l$ de sangue?

O tempo necessário para uma transfusão de $1\ l$ de sangue será $\Delta t = 1{,}3 \times 10^4\ \mathrm{s} = 3{,}6\ \mathrm{h}$.

(b) Quanto tempo demoraria se o diâmetro interno da agulha fosse de $0{,}4\ \mathrm{mm}$?

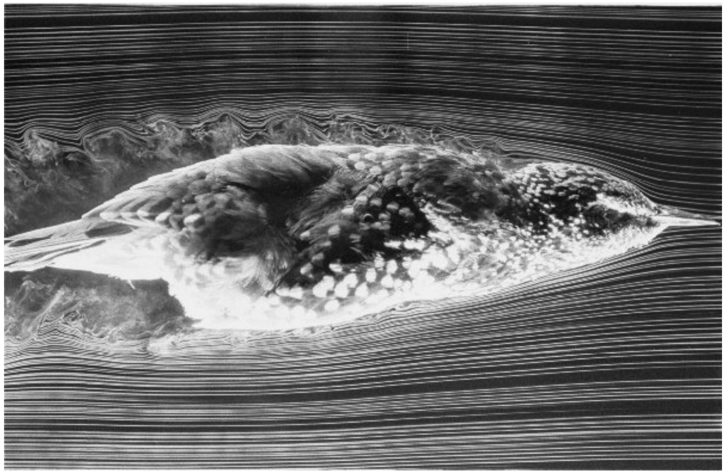
O raio interno da agulha agora é $r' = 0{,}2 \times 10^{-3}$m. Na equação de Poiseuille, só r varia de (a) para (b), pelo que o fluxo nesta situação será:

$$Q\left(\frac{r'}{r}\right)^4 = 7{,}7 \times 10^{-8}\left(\frac{0{,}2}{0{,}25}\right)^4 = 3{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{m^3/s}$$

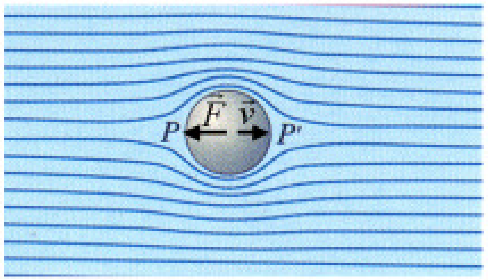
O tempo necessário para uma transfusão de $1\ l$ de sangue nestas condições ($d' = 0{,}4\ \mathrm{mm}$) será:

$$\Delta t' = \frac{V}{Q'} = \frac{10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{3{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{m^3/s}} = 3{,}1 \times 10^4\ \mathrm{s} = 8{,}7\ \mathrm{h}$$

Movimento de Sólidos em Fluidos



Lei de Stokes



Para velocidades baixas:

$$\vec{F} = -f\,\vec{v}$$

f - coeficiente de resistência viscosa

Para objectos esféricos:

$$\vec{F} = -6\pi R\,\eta\,\vec{v}$$

(Lei de Stokes)

Número de Reynolds

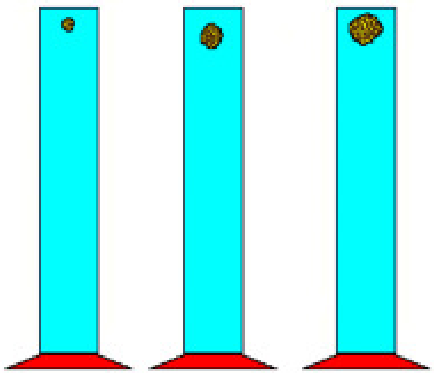
$$\mathrm{Re} = \frac{2R\rho_f\,v}{\eta}$$

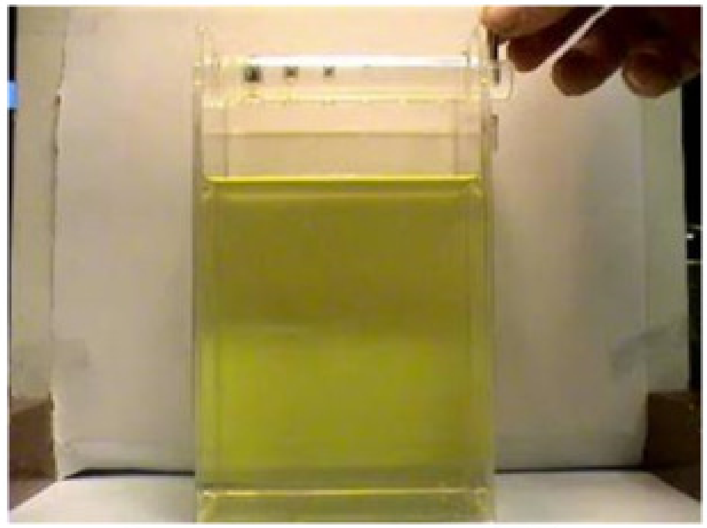
Laminar: $\mathrm{Re} < 0{,}1$

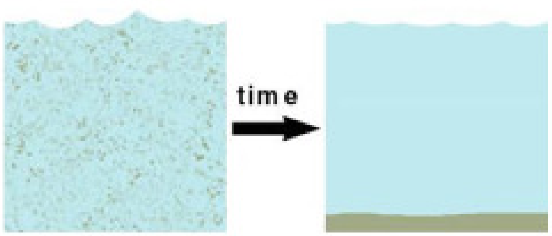
Turbulência crescente:

$$\mathrm{Re} > 0{,}1$$

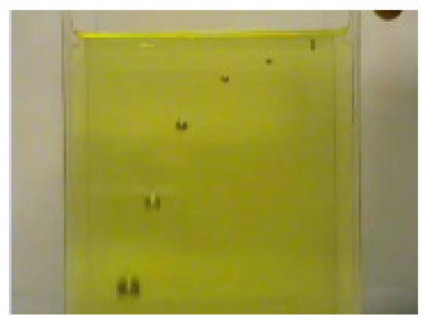
Sedimentação e Velocidade Terminal



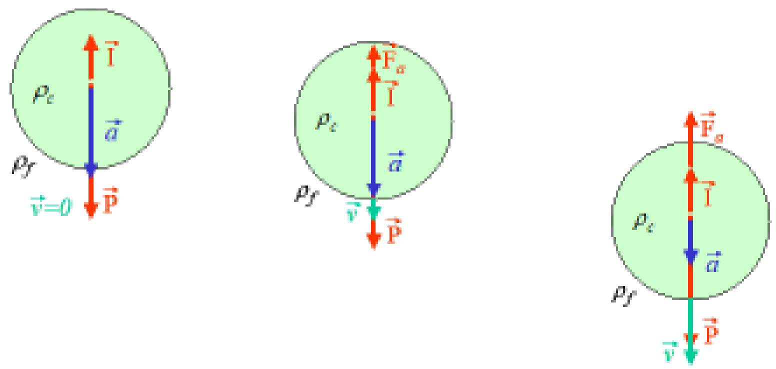


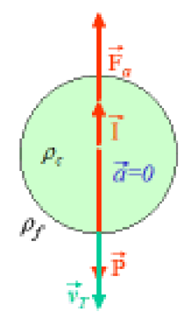


Partículas caem num fluido



Velocidade Terminal





$$\vec{P}+\vec{I}+\vec{F}_a=0$$

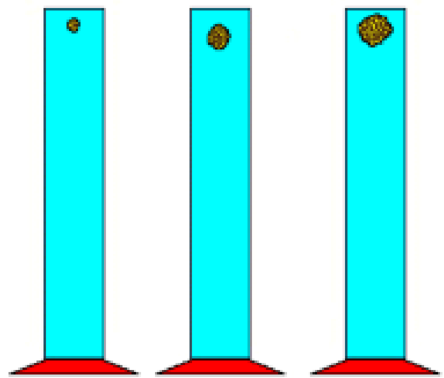
$$-\rho_c V g+\rho_f V g+6\pi R\eta\, v_T=0$$

$$v_T=\frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}g\left(\rho_c-\rho_f\right)$$

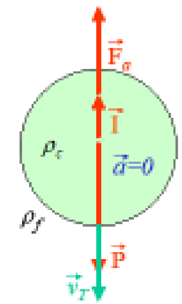
$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3$$

Partículas esféricas

Velocidade Terminal



Partículas não esféricas:



$$\vec{P}+\vec{I}+\vec{F}_a=0$$

$$-\rho_c V\,g+\rho_f V\,g+f\,v_T=0$$

$$-\rho_c\frac{m}{\rho_c}g+\rho_f\frac{m}{\rho_c}g+f\,v_T=0$$

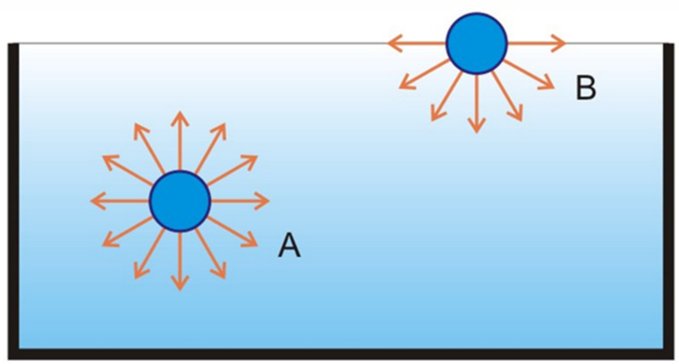
$$v_T=\frac{m}{f}\,g\left(\frac{\rho_c-\rho_f}{\rho_c}\right)$$

$$v_T=\frac{2}{9}\frac{R^2}{\eta}\,g\left(\rho_c-\rho_f\right)$$

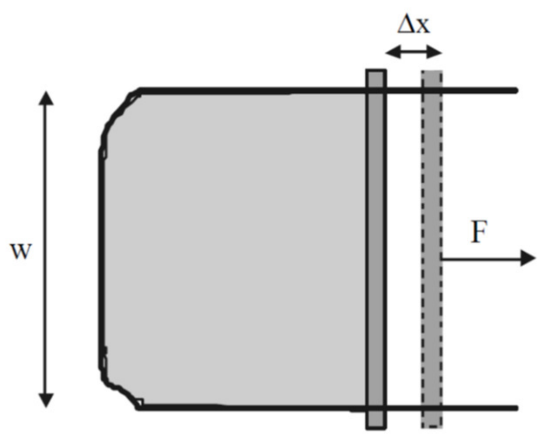
Método de medida de:
- Viscosidade
- Tamanho ou forma de partículas

Tensão superficial

- A superfície de um líquido tem propriedades importantes devido ao facto de estar em contacto com moléculas de ar de um lado e com moléculas do líquido do outro lado.
- As moléculas de líquido na camada superficial têm uma energia maior do que as que estão no volume. Estas últimas estão rodeadas por moléculas semelhantes a toda a volta enquanto que as da superfície não, estão parcialmente rodeadas por moléculas de ar. A tendência das moléculas da camada superficial é, portanto, passar para dentro do fluido, para baixarem a sua energia de ligação.



- A energia extra que as moléculas possuem por estar à superfície do líquido é a energia superficial por unidade de área, geralmente representada pela letra γ (dada em $\mathrm{J/m^2}$), que depende dos fluidos envolvidos na fronteira. A energia superficial entre água pura e o ar é elevada: $\gamma = 0{,}0073\ \mathrm{J/m^2}$.
- Há uma tensão superficial associada ao aumento de energia na camada superficial do fluido.
- A figura mostra a formação de um filme de um líquido (água com sabão, por exemplo) na presença de ar por deslocamento de uma barra.



De forma a aumentar a área da superfície do líquido (sendo $A = wx$ inicialmente), aplica-se uma força perpendicular à barra e desloca-se cuidadosamente a barra (deslocamento Δx).

- O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ é igual à energia superficial extra que surgiu devido ao aumento da área da superfície:

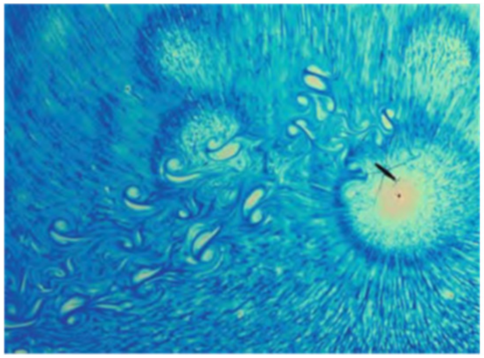
$$W = F\Delta x = 2\gamma(w\Delta x)$$

onde γ é a energia superficial por unidade de área e o fator 2 se deve ao facto de existirem duas superfícies do líquido em contacto com o ar.

- Da equação acima resulta

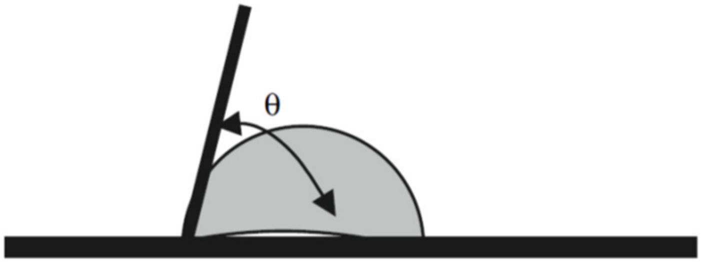
$$\gamma = \frac{F}{2w}$$

- Então γ é também uma força por unidade de comprimento (com unidades de N/m), sendo conhecida por tensão superficial.



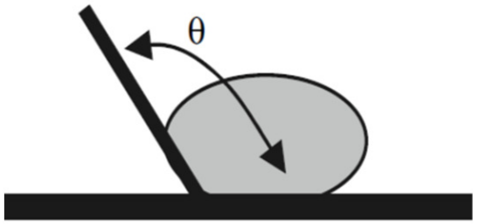

- Quando uma gota de líquido se forma no ar, as interações intermoleculares tendem a minimizar a energia superficial, que significa menor área possível.
- A esfera é a forma geométrica cuja superfície tem área mínima para um dado volume. Assim, na ausência de outras forças, as gotas líquidas são esféricas. Para pequenas gotas a tensão superficial é muito maior do que as forças gravíticas e a forma é realmente esférica. Na presença de gravidade, gotas maiores tendem a alongar-se verticalmente.

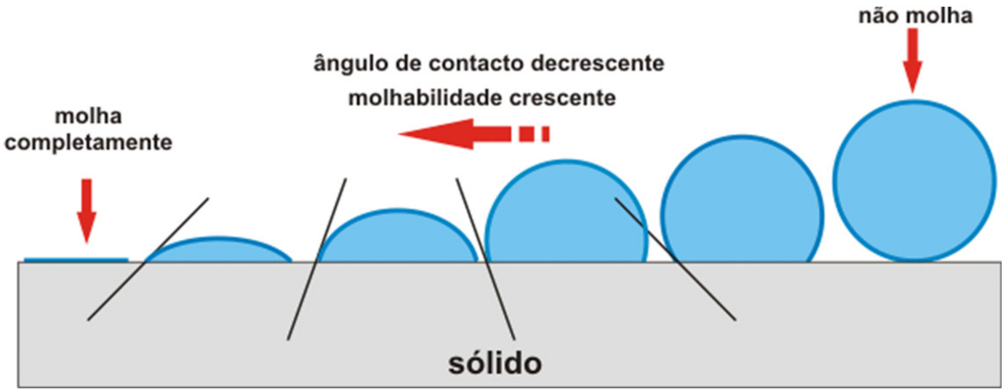
- Consideremos que uma gota de um líquido é colocada numa superfície plana. As moléculas à superfície da gota estão sujeitas a duas forças concorrentes, as forças de coesão, que tendem a manter a forma esférica, e as forças de adesão, que tendem a espalhar o líquido pelo plano.
- A natureza dos dois materiais envolvidos, do líquido e do plano, determina o ângulo de contacto (θ).



- Diz-se que líquidos com ângulos de contacto entre 0 e 90° molham a superfície plana.
- A água pura molha vidro ultra-limpo para $\theta \approx 0°$ e assim a gota espalha-se livremente no vidro. Para um vidro normal, $\theta \approx 30°$.

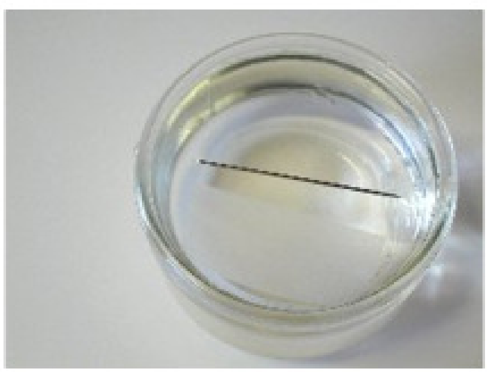
- Para ângulos de contacto maiores que $90°$, como é o caso do mercúrio em vidro, o líquido não molha a superfície.





- As características de molhabilidade são importantes no nosso dia a dia. Usamos repelentes de água em gabardines e superfícies que não queremos que se molhem ou acumulem água. E adicionamos agentes de humedecimento para promover um melhor contato entre um líquido e uma superfície sólida.

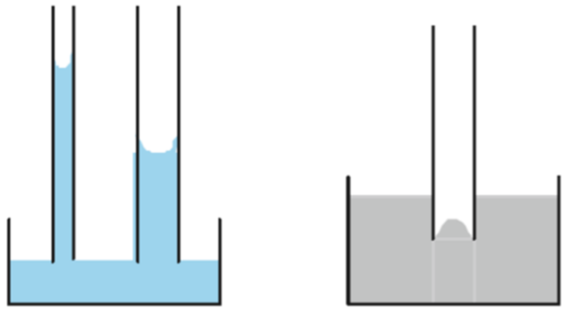
Efeitos da Tensão Superficial



Capilaridade

- Em biologia, uma consequência importante da molhabilidade é na ação capilar, ou seja, na subida de líquidos que molham a superfície de um capilar.

água



mercúrio

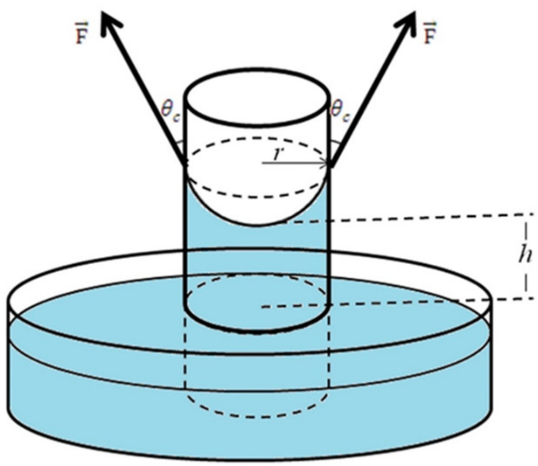
- Exemplo à esquerda: tubo de vidro imerso num recipiente de água, onde a água sobe no tubo e este apresenta o seu menisco côncavo característico.
- Exemplo à direita: tubo de vidro imerso num recipiente de mercúrio, em que o líquido não molha as paredes do capilar e o menisco é convexo.
- Repare-se na altura relativa do líquido nos tubos e nos vasos: à esquerda sobe, à direita desce.

- Podemos calcular a altura (h) de água que sobe num tubo capilar (de raio r), considerando a tensão superficial que suporta o peso da coluna de água.
- Como a água molha o vidro segundo um ângulo de contacto θ_c (ver figura), a componente vertical da tensão superficial é $F = 2\pi r\gamma\cos\theta$.

$2\pi r$ é o perímetro de contacto

$\cos\theta_c$ seleciona a componente vertical

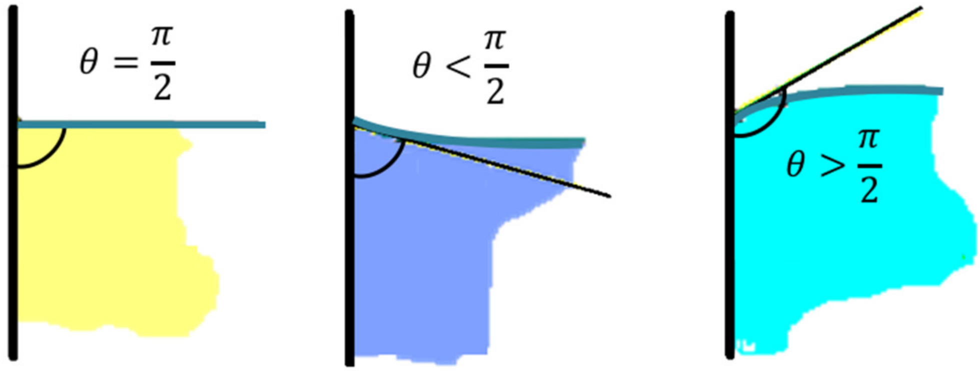
A componente horizontal anula-se.



- Por outro lado, o peso da coluna de água é dado por $\rho(\pi r^2 h)g$. A soma das duas forças é nula:

$$2\pi r\gamma\cos\theta - \rho(\pi r^2 h)g = 0 \Rightarrow h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

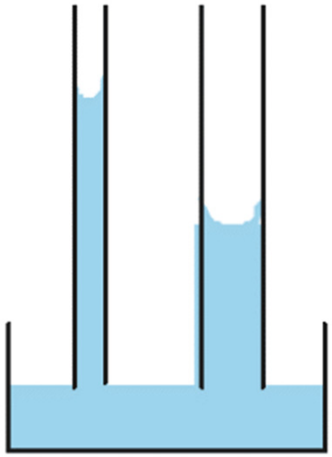
Ângulo de contacto



A partir da fórmula da altura que a coluna de líquido atinge:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

conclui-se que a altura é tanto maior quanto menor for o raio do tubo apenas devido à capilaridade.



Nota: A fórmula também prevê o comportamento do mercúrio. Neste caso, $\cos \theta < 0$ e a coluna de mercúrio desce abaixo do seu nível na tina ($h < 0$).

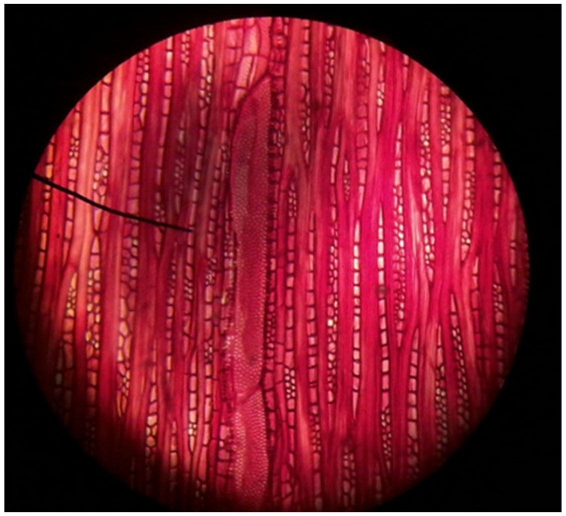
O transporte da seiva (essencialmente água) nas plantas e árvores é uma importante aplicação da capilaridade, embora neste caso a extremidade superior não esteja aberta para a atmosfera.

O raio típico dos poros do xilema das árvores é da ordem de 20 μm. Se considerarmos um ângulo de contacto de 0°, a altura estimada da seiva nesses capilares, devido ao fenómeno da capilaridade, atinja cerca de 75 cm.

Contudo, há árvores com mais de 100 m de altura. Como é que a seiva chega às suas folhas? Nas folhas das árvores, as vias intersticiais para o fluxo de água têm diâmetros da ordem de 5 nm. Se a seiva conseguir alcançar as folhas, a ação da capilaridade para este diâmetro permite que a seiva suba quase 3 km.
Mas como fazer a água chegar às folhas altas? Desde que a coluna de água não seja interrompida, à medida que a árvore cresce, a ação desenvolvida nas próprias folhas é suficiente para fazer subir a água acima dos limites da capilaridade.

O fluxo de água é regulado principalmente por evaporação da água através das folhas, fenómeno conhecido por transpiração, produzindo uma pressão negativa que puxa a água do solo.

Sabemos que mesmo numa situação de vácuo (pressão nula), não se consegue fazer subir água a uma altura superior a 30 m. Por isso usa-se o termo pressão negativa, que permite puxar a água para alturas maiores.



Corte longitudinal mostrando o xilema (microscopia ótica)

Se uma árvore tiver uma porção do seu xilema danificado, de forma a que a coluna de água fique interrompida, não há mecanismo capaz de restaurar o fluxo de água acima dos 75 cm.

Exemplos de aplicação

Exercício 1: Um mosquito como o da figura consegue manter-se acima da superfície da água. Considerando que a parte da pata em contacto com a água pode ser modelada como sendo um paralelepípedo com dimensões $1\ \mathrm{mm}\ \times\ 0{,}2\ \mathrm{mm}\ \times\ 0{,}2\ \mathrm{mm}$, determine a massa máxima do mosquito que não se molha na água, cuja tensão superficial é $\gamma = 0{,}0728$ N/m.

O mosquito tem 6 patas. Para flutuar à superfície da agua, a tensão superficial tem de igualar o peso do mosquito.

A superfície de contacto entre cada pata e a água é um retângulo de lados $1\ \mathrm{mm}$ e $0{,}2\ \mathrm{mm}$.
A tensão superficial é exercida ao longo do perímetro do retângulo em contacto com a agua.

$$L = 2 \times 1 + 2 \times 0{,}2 = 2{,}4\ \mathrm{mm}$$

A tensão superficial tem em geral componentes horizontais e verticais. Mas só a componente vertical equilibra o peso.

A força exercida em cada pata devido à tensão superficial é dada por:

$$F = \gamma L = 0{,}0728 \times 2{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}175 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

O peso máximo do mosquito que equilibra as forças devidas à tensão superficial corresponde ao caso em que a tensão superficial tem apenas componente vertical, ou seja, o ângulo de contacto é $0°$.

A força total sobre as 6 patas será

$$F_t = 6F = 1{,}05 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

Em equilíbrio, temos então: $F_t - mg = 0.$ Logo

$$m = \frac{F_t}{g} = \frac{1{,}05 \times 10^{-3}}{9{,}8} = 0{,}107 \times 10^{-3}\ \text{kg} = 107\ \text{mg}$$

Exercício 2: Um tubo de raio 1 mm é mergulhado numa tina de água. Determine a que altura sobe a água no tubo ($\gamma = 0{,}0728 \text{ N/m}$; $\rho = 998{,}23 \text{ kg/m}^3$) se o tubo for feito de:
(a) Vidro (ângulo de contacto nulo).
(b) Parafina (ângulo de contacto $107°$).

O peso da coluna de água tem de equilibrar as forças devidas à tensão superficial, como vimos antes. A altura atingida pela água no tubo é dada por:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

(a) Se o ângulo de contacto é nulo, $\cos\theta = 1$. Logo

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{2 \times 0{,}0728}{998{,}23 \times 9{,}8 \times 10^{-3}} = 14{,}9 \text{ mm}$$

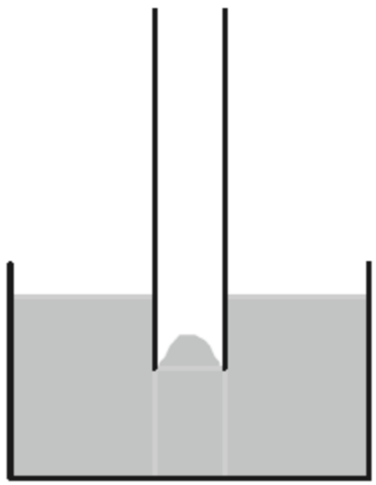
(b) Para um tubo de parafina, em que o ângulo de contacto é $107°$, temos

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}\cos\theta = 14{,}9 \cos 107° = -4{,}4 \text{ mm}$$

Exercício 3: Determine a altura do menisco de mercúrio ($\gamma = 0{,}48\ \mathrm{N/m}$; $\rho = 13{,}55\ \mathrm{kg/dm^3}$) num tubo de vidro com um raio de $100\ \mu\mathrm{m}$, sendo o ângulo de contacto de $140°$ em relação à superfície do vaso onde o tubo está parcialmente mergulhado.

Vimos atrás que a altura atingida pelo mercúrio num tubo de vidro baixa relativamente ao nível do liquido no vaso. Vamos confirmar aplicando a equação:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$



O raio do tubo é $r = 100\ \mu\mathrm{m} = 0{,}1\ \mathrm{mm} = 10^{-4}\ \mathrm{m}$

A densidade do mercúrio (em unidades SI) é:

$$\rho = 13{,}55 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$$

Sendo o ângulo de contacto $\theta = 140°$, temos:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r} = \frac{2 \times 0{,}48 \cos 140°}{13{,}55 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 10^{-4}} = -5{,}5\ \mathrm{cm}$$

Exercício 4: Os vasos por onde os nutrientes das plantas são transportados, de baixo para cima, têm um raio de $10\ \mu\text{m}$. Assumindo que o ângulo de contacto é nulo, a que altura sobe a água ($\gamma = 0{,}073\ \text{N/m}$; $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$) através desses vasos apenas pela ação capilar?

Uma vez mais, a altura atingida pela água nos vasos das plantas é dada pela equação:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

O raio dos vasos é $r = 10\ \mu\text{m} = 10^{-5}\ \text{m}$.

O ângulo de contacto é nulo, sendo $\cos\theta = 1$.

Resulta então para a altura atingida pela água:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{2 \times 0{,}073}{10^3 \times 9{,}8 \times 10^{-5}} = 1{,}49\ \text{m}$$

Exercício 5: Num tubo com 2 cm de raio e 80 cm de comprimento circula glicerina a uma temperatura de 60°C ($\eta = 0{,}081$ Pa s; $\rho = 1260\ \mathrm{kg/m^3}$) com um fluxo de $2{,}42\ l/s$.

(a) Qual a velocidade média da glicerina?

(b) Verifique que o fluxo é laminar.

(c) Qual a diferença de pressão entre as extremidades do tubo?

(d) Para uma temperatura de 20°C ($\eta = 1{,}41\ \mathrm{Pa \cdot s}$), qual o fluxo para a mesma diferença de pressão?

(e) Qual a diferença de pressão necessária para o fluxo se tornar turbulento a 20°C?

(a) Qual a velocidade média da glicerina?

$$Q = A\bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \frac{Q}{A}$$

O fluxo é $Q = 2{,}42\ l/s = 2{,}42 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$.

A área do tubo será $A = \pi r^2 = \pi(0{,}02)^2\ \mathrm{m^2}$

$$\bar{v} = \frac{2{,}42 \times 10^{-3}}{\pi(0{,}02)^2 A} = 1{,}93\ \mathrm{m/s}$$

(b) Verifique que o fluxo é laminar.

Vamos relembrar que o fluxo é laminar quando o número de Reynolds $R_e < 1000$.

$$R_e = \frac{r\rho\bar{v}}{\eta} = \frac{0{,}02 \times 1260 \times 1{,}93}{0{,}081} = 600$$

Como $R_e < 1000$, o fluxo é laminar.

(c) Qual a diferença de pressão entre as extremidades do tubo?

Aplicamos a lei de Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q = \frac{8 \times 0{,}081 \times 0{,}8}{\pi (0{,}02)^4} 2{,}42 \times 10^{-3}$$

$$\Delta P = 2496\ Pa$$

(d) Para uma temperatura de 20°C ($\eta = 1{,}41\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$), qual o fluxo para a mesma diferença de pressão?

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P = \frac{\pi (0{,}02)^4}{8 \times 1{,}41 \times 0{,}8} = 1{,}4 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$$

$$Q = 0{,}14 \times 10^{-3} \mathrm{dm^3/s} = 0{,}14\ l/s$$

(e) Qual a diferença de pressão necessária para o fluxo se tornar turbulento a 20°C?

O fluxo torna-se turbulento para $R_e > 1500$.

$$R_e = \frac{r\rho\bar{v}}{\eta} \Rightarrow \bar{v} = \frac{R_e\eta}{r\rho}$$

Para 20ºC temos então:

$$\bar{v} = \frac{1500 \times 1{,}41}{0{,}02 \times 1260} = 83{,}9 \text{ m/s}$$

Como $Q = A\bar{v} = \pi r^2\bar{v}$, podemos obter a diferença de pressão pela lei de Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}Q = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\pi r^2\bar{v} = \frac{8\eta L}{r^2}\bar{v}$$

$$\Delta P = \frac{8 \times 1{,}41 \times 0{,}8}{(0{,}02)^2}83{,}9 = 1{,}89 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Para o fluxo se tornar turbulento a 20ºC é necessária uma diferença de pressão mínima de $1{,}89 \times 10^6$ Pa.