Equilíbrio Estático

1. **Momento de uma força (torque)**
2. **Condições de equilíbrio estático de um corpo rígido**

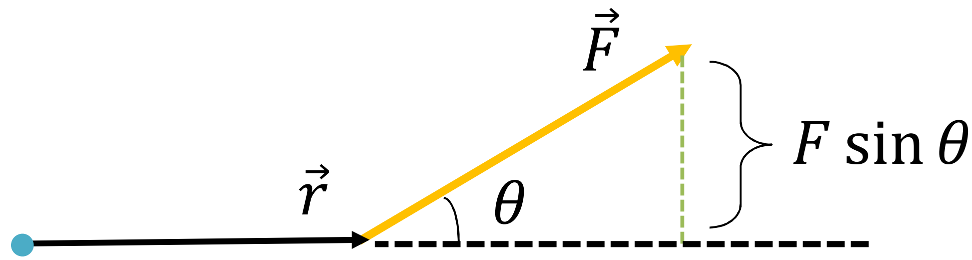
- O momento de uma força (ou torque), é definido como o produto vetorial entre o vetor posição $\vec{r}$ da força e a própria força $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Para obter o vetor posição da força, é necessário definir um ponto relativamente ao qual se calcula o momento da força. O momento da força varia de acordo com o ponto de referência escolhido.

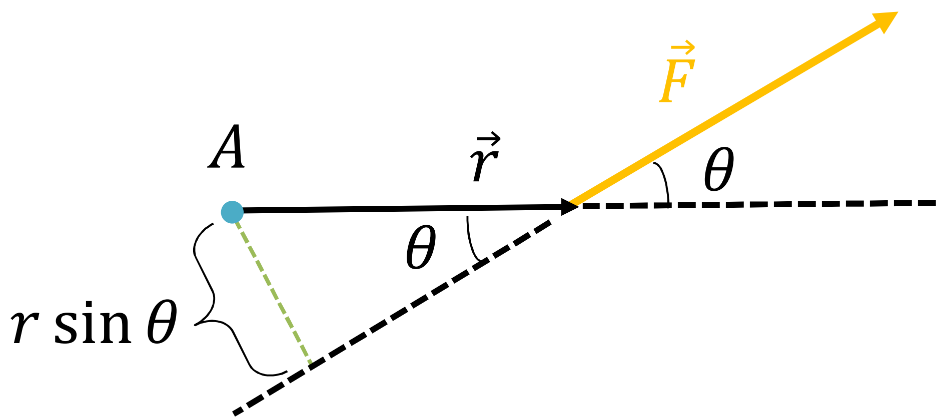
- Caraterísticas do vetor momento ($\vec{M}$):
  - Módulo $\left|\vec{M}\right| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\theta$, sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$.
  - Direção perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$.
  - Sentido obtido pela regra da mão direita. A convenção mais frequente considera o sentido positivo se $\vec{r}$ roda para $\vec{F}$ no sentido contrário aos ponteiros do relógio e negativo se $\vec{r}$ roda para $\vec{F}$ no sentido dos ponteiros do relógio.

Momento de uma força relativamente a um ponto A:



$$M_A = rF\sin\theta = rF_{\perp}$$

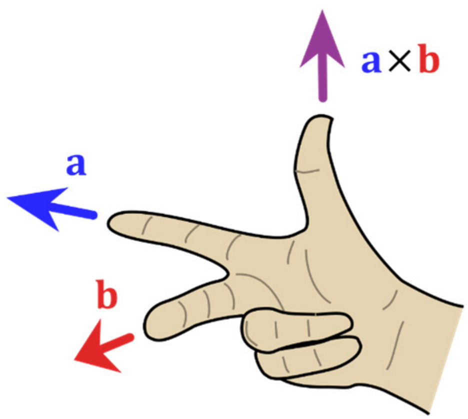
$F_{\perp} = F\sin\theta$ é a componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$



Também podemos escrever: $M_A = rF\sin\theta = r_{\perp}F$

$r_{\perp} = r\sin\theta$ é a componente de $\vec{r}$ perpendicular à linha de ação da força $\vec{F}$, designado braço da força

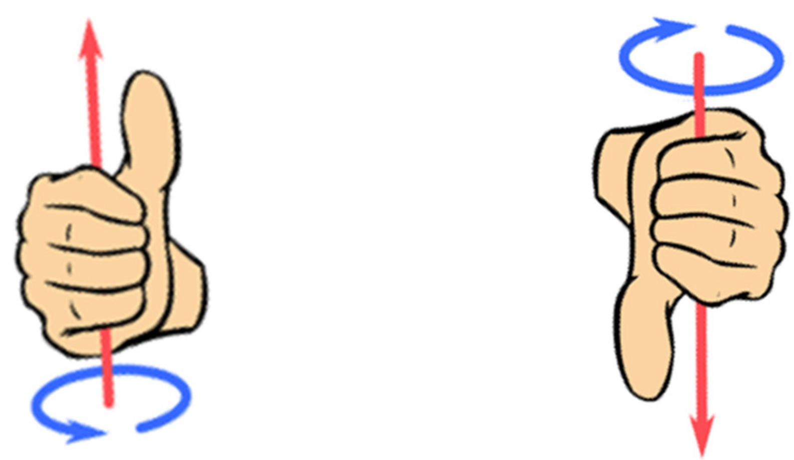
[Regra da mão direita] para determinação do sentido do produto vetorial entre dois vetores, $\vec{a} \times \vec{b}$



A ordem dos vetores é importante! O produto vetorial (externo) não goza da propriedade comutativa:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Sentido anti-horário (positivo) e horário (negativo)



Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido

- Um corpo rígido é um sistema de partículas onde a posição relativa das partículas é fixa. Se a velocidade do corpo rígido for nula, o corpo está em equilíbrio estático.
- As condições necessárias para um objeto estar em equilíbrio estático são as seguintes:

  (i) Não haver movimento de translação, ou seja, a resultante das forças aplicadas ao corpo é nula:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$$

  (ii) Não haver movimento de rotação, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças aplicadas ao objeto é nula:

$$\vec{M}_{res} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0$$

- Quando o corpo está em equilíbrio estático, a resultante dos momento é nula relativamente a qualquer ponto do espaço.

- Para que os vetores força resultante e momento resultante sejam nulos, todas as suas componentes têm de ser nulas.
- Para sistemas a 3D, as duas equações de equilíbrio transformam-se em 6 equações das componentes, permitindo determinar 6 incógnitas.
- Para sistemas de forças complanares (no plano *XY*, por exemplo), resultam 3 equações, sendo possível determinar até 3 incógnitas:

(i) duas equações para a resultante das forças:

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$$

(ii) uma equação para o momento resultante:

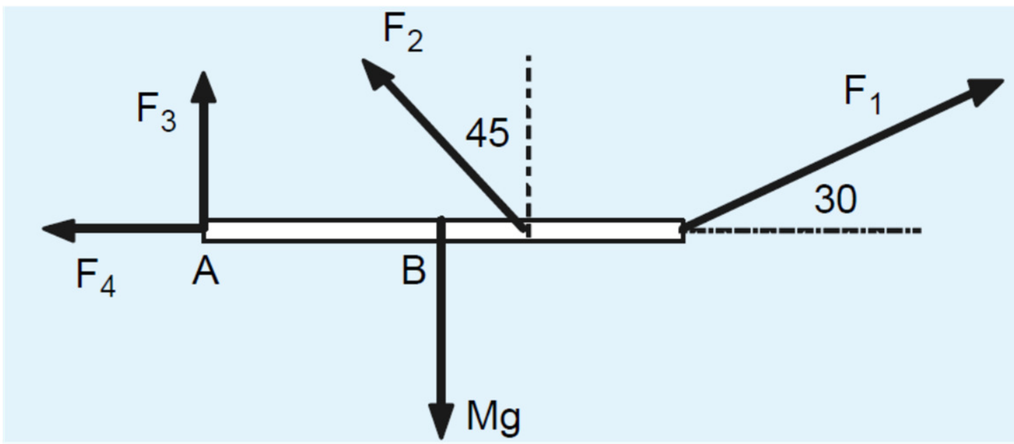
$$\vec{M}_{res} = \vec{0} \Rightarrow M_z = 0$$

Procedimento a adotar para resolver um problema de estática do corpo rígido:

- Desenhar o diagrama de corpo livre para o objeto em estudo. Na representação das forças externas aplicadas ao corpo, devemos indicar corretamente os pontos de aplicação das forças.
- Escolher e representar um sistema de eixos apropriado, que facilite a resolução do problema.
- Escrever as forças na forma analítica, relativamente ao sistema de eixos escolhido.
- Calcular os momentos de todas as forças em relação a um ponto arbitrário do espaço. O ponto deve ser escolhido de modo a facilitar a resolução do problema e dar resposta ao enunciado.
- Resolver as equações de equilíbrio estático, de modo a determinar os parâmetros desconhecidos:

$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = \vec{0} \\ \vec{M}_{res} = \vec{0} \end{cases}$$

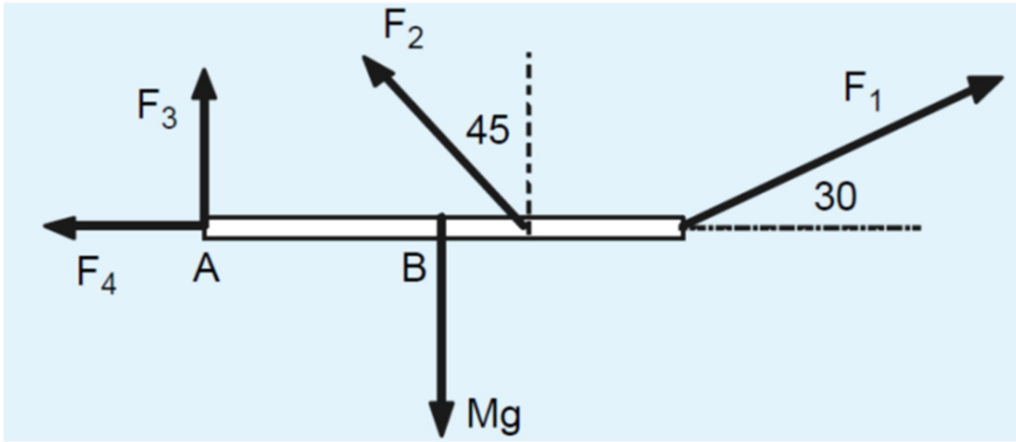
Exemplo 1: Considere a barra uniforme representada na figura, com comprimento $L = 40$ cm. As forças aplicadas têm os seguintes módulos: $F_1 = 30$ N, $F_2 = 20$ N (força aplicada a $L/3$ da extremidade à direita), $Mg = 20$ N, $F_3 = 10$ N e $F_4 = 15$ N.
(a) Verifique se a barra está em equilíbrio translacional.
(b) Calcule o momento total das forças no ponto A e também no ponto B.



(a) A barra estará em equilíbrio translacional se $\vec{R} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} R_x = F_1 \cos 30° - F_2 \cos 45° - F_4 = -3{,}16 \text{ N} \\ R_y = F_1 \operatorname{sen} 30° + F_2 \operatorname{sen} 45° + F_3 - Mg = 19{,}1 \text{ N} \end{cases}$$

A barra não está em equilíbrio translacional pois $\vec{R} \neq \vec{0}$.



(b) Momento total relativamente ao ponto B

O peso não tem momento em B pois o seu vetor posição é nulo. O momento resultante será:

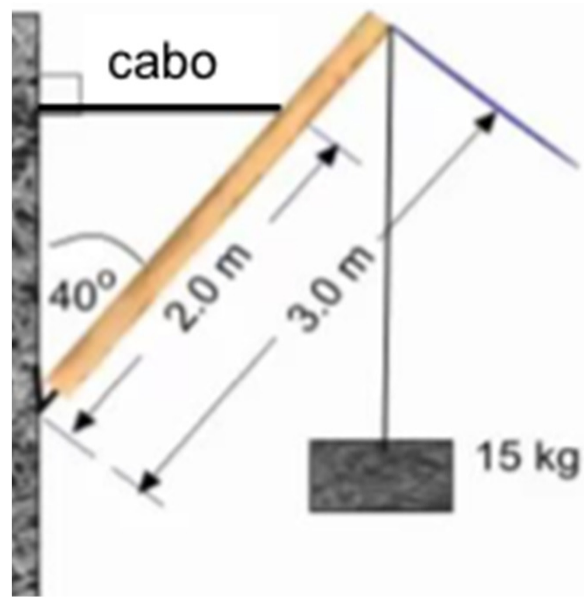
$$M_B = -\frac{L}{2}F_3 + \frac{L}{2}F_4 \operatorname{sen} 0° + \frac{L}{6}F_2 \operatorname{sen} 135° + \frac{L}{2}F_1 \operatorname{sen} 30°$$

$$M_B = -0{,}2 \times 10 + 0 + \frac{0{,}4}{6} \times 20\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}2 \times 30\frac{1}{2}$$

$$M_B = 1{,}95 \text{ N m} \Rightarrow \vec{M}_B = 1{,}95\,\hat{k}\ (\text{N m})$$

O momento resultante no ponto B não é nulo. A barra também roda em torno de B. A barra não está em equilíbrio estático (nem translacional nem rotacional).

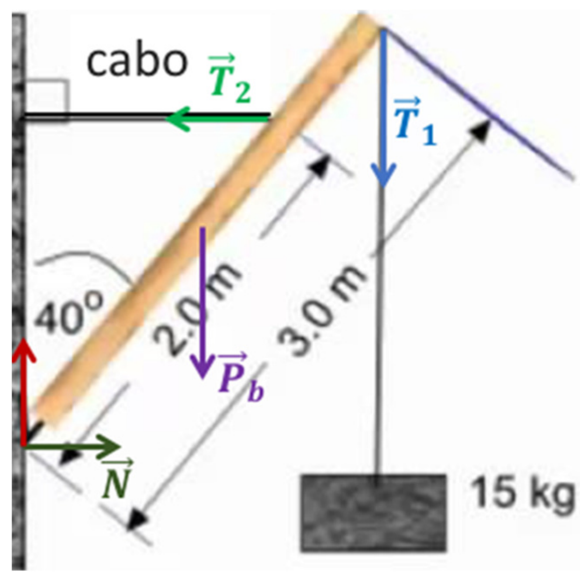
Exemplo 2: A barra da figura é homogénea e tem uma massa de 10 kg, sendo mantida em equilíbrio por um cabo horizontal. Uma das suas extremidades está encostada a uma parede e a outra tem um bloco de 15 kg suspenso na vertical.



Determine o valor da força que a parede exerce sobre a barra e a tensão no cabo.

Forças que atuam na barra:

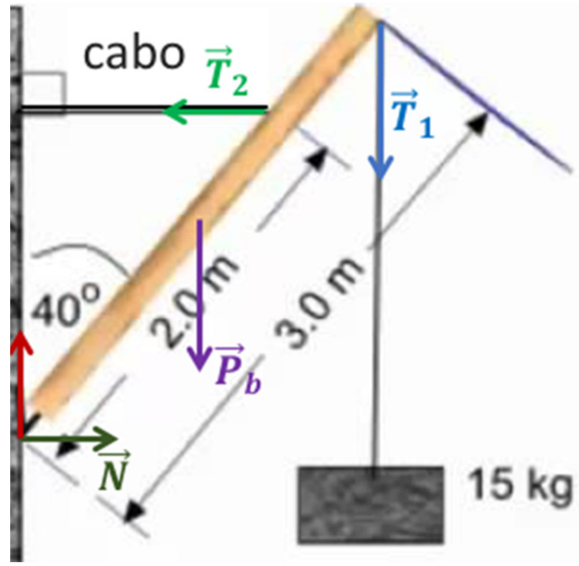
- Peso, $\vec{P}_b$
- Tensão do fio vertical, $\vec{T}_1$ (igual ao peso do bloco)
- Tensão do cabo, $\vec{T}_2$
- Força exercida pela parede: $\vec{F}_p = \vec{F}_a + \vec{N}$ (força de atrito e normal)



Vamos decompor a equação $\vec{F}_{res} = 0$ no sistema xy:

$$\begin{cases} N - T_2 = 0 \\ F_a - P_b - T_1 = 0 \end{cases}$$

Se escolhermos o ponto O para cálculo do momento, as forças $\vec{F}_a$ e $\vec{N}$ não geram momento nesse ponto.



$$\vec{M}_{res} = 0 \Leftrightarrow \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_b + \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 = 0$$

Todos os momentos têm a direção z, por isso basta obter o sentido e o módulo:

$$-\,r_{CM}\,P_b \,\text{sen}\, 40° - r_1\,T_1 \,\text{sen}\, 40° + r_2\,T_2 \,\text{sen}\, 50° = 0$$

Temos portanto 3 equações. Uma vez que P_b e T_1 são conhecidos, também temos 3 incógnitas (N, F_a, T_2).

$$P_b = 10 \times 9{,}8 = 98\ N$$
$$T_1 = P_c = 15 \times 9{,}8 = 147\ N$$

As distâncias ao ponto O também são conhecidas: $r_1 = 3$ m; $r_2 = 2$ m; $r_{CM} = 1{,}5$ m

Substituindo os valores conhecidos nas equações:

$$\begin{cases} N = T_2 \\ F_a - 98 - 147 = 0 \\ -147 \operatorname{sen} 40° - 441 \operatorname{sen} 40° + 2T_2 \operatorname{sen} 50° = 0 \end{cases}$$

Resultam as soluções: $\begin{cases} N = 246{,}7 \text{ N} \\ F_a = 245 \text{ N} \\ T_2 = 246{,}7 \text{ N} \end{cases}$

A força exercida pela parede sobre a barra será:

$$\vec{F}_p = \vec{F}_a + \vec{N} = 246{,}7\, \hat{\imath} + 245\, \hat{\jmath} \text{ (N)}$$

O módulo da força é $\left|\vec{F}_p\right| = 347{,}7$ N.

Ângulo que a força faz com a parede:

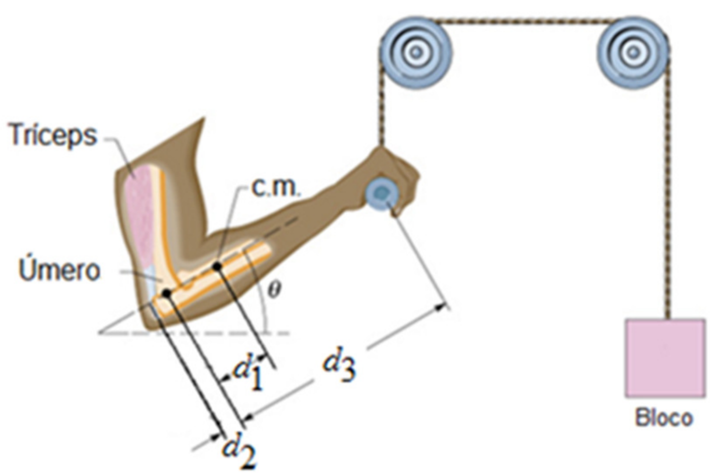
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{F_a} = \frac{246{,}7}{245} \Rightarrow \alpha = 45{,}2°$$

A tensão no cabo é $T_2 = 246{,}7$ N.

Exemplo 3: Um estivador mantém um bloco de 15 kg a uma dada altura por meio de um sistema de roldanas. O braço do trabalhador está na vertical e o seu antebraço faz um ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal, como mostra a figura. O conjunto antebraço e mão tem massa igual a 2 kg e o seu centro de massa está a uma distância $d_1 = 15\ \mathrm{cm}$ do ponto de contacto entre o antebraço e o braço (no úmero). O músculo tríceps puxa o antebraço, estando o seu ponto de apoio à distância $d_2 = 2{,}5\ \mathrm{cm}$ do ponto de contacto entre o braço e o antebraço. A distância d_3 é de 35 cm.

(a) Considerando que todas as forças são verticais, represente as forças aplicadas no conjunto antebraço e mão.

(b) Determine a grandeza e o sentido da tensão do tríceps e da força exercida pelo úmero no antebraço.



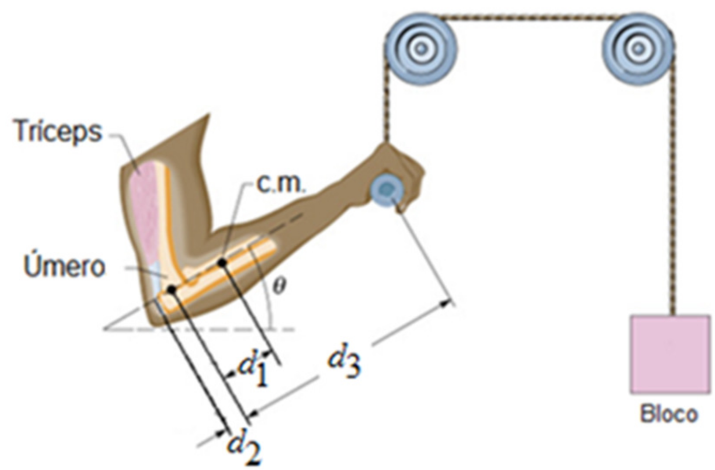
$$P_{am} = 2 \times 9{,}8 = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

$$P_b = 15 \times 9{,}8 = 147\ \mathrm{N}$$

$$T = P_b = 147\ \mathrm{N}$$

Seja C o ponto de contacto entre o braço e o antebraço.

(a) Forças que atuam no sistema antebraço/mão:



$\vec{F}_t$: força do tríceps

$\vec{F}_C$: força no ponto de contacto

$\vec{P}_{am}$: peso do antebraço e mão

$\vec{T}$: tensão do fio

(b) Todas as forças são verticais. Da força resultante:

$$\vec{F}_{res} = 0 \Rightarrow F_t + T - P_{am} - F_C = 0$$

$$F_t - F_C = P_{am} - T = 19{,}6 - 147 = -127{,}4\ \mathrm{N}$$

Vamos determinar os momentos relativamente ao ponto C (as distâncias estão definidas relativamente a este ponto). Assim, $\vec{F}_C$ não gera momento. O ângulo entre os vetores posição e as forças é de 60°. Da equação $\overrightarrow{M}_C = 0$ resulta:

$$-d_2 F_t \sin 60° - d_1 P_{am} \sin 60° + d_3 T \sin 60° = 0$$

Da equação anterior, vem:

$$-0{,}025F_t - 0{,}15P_{am} + 0{,}35T = 0$$

$$0{,}025F_t = 0{,}35 \times 147 - 0{,}15 \times 19{,}6 = 48{,}51$$

A força exercida pelo tríceps é então:

$$F_t = 1940{,}4\ \mathrm{N}$$

Como o valor obtido é positivo, confirma-se que o sentido da força estava bem indicado (para cima).

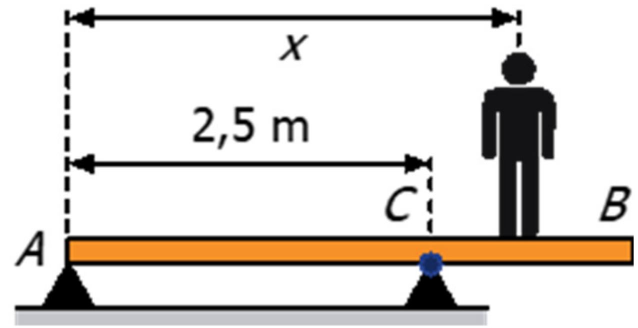
A força exercida pelo úmero no antebraço é a força no contacto C, que pode ser obtida pela equação que resultou da força resultante:

$$F_t - F_C = -127{,}4\ \mathrm{N}$$

$$F_C = F_t + 127{,}4 = 2067{,}8\ \mathrm{N}$$

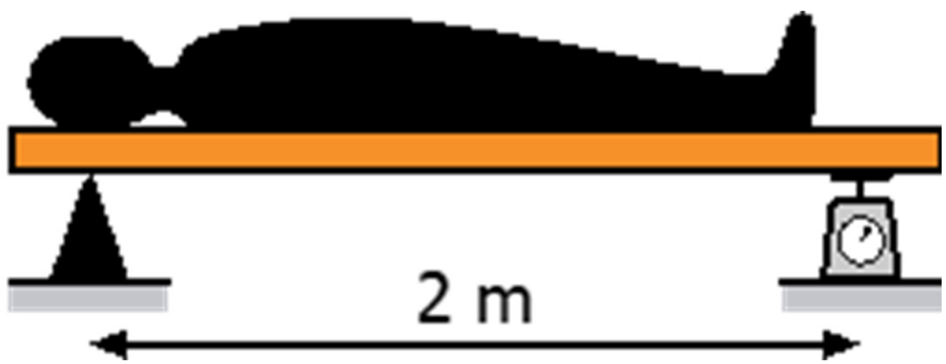
Uma vez mais, o sentido arbitrado para esta força está correto (para baixo).

Exemplo 4: A barra uniforme AB representada na figura tem massa $M = 100$ kg e comprimento $L = 4$ m. A barra pode girar livremente em torno do ponto fixo C e está apoiada no ponto A. Um homem com massa $m = 75$ kg parte do ponto A e caminha sobre a barra. Calcular a distância máxima que ele se pode afastar do ponto A, mantendo o equilíbrio. Representar graficamente a reação no ponto A em função da distância do homem a este ponto.



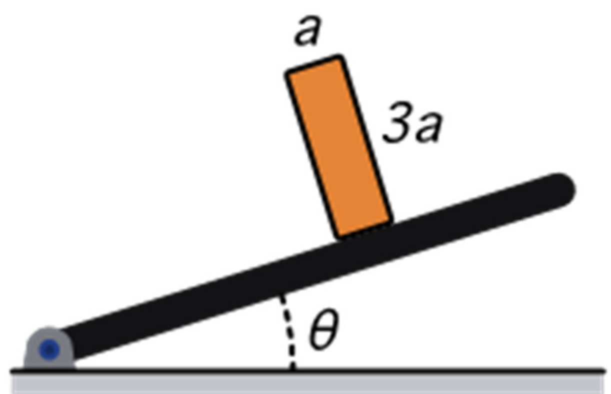
Resposta: $x_{max} \approx 3{,}17$ m ; $R_A = 931 - 294x$, em unidades SI, para $0 \leq x \leq 3{,}17$ m

Exemplo 5: A posição do centro de gravidade de uma pessoa pode ser determinada pelo dispositivo representado na figura, constituído por uma prancha horizontal com uma extremidade apoiada num suporte fixo e a outra extremidade apoiada sobre a plataforma de uma balança. Determinar a localização do centro de gravidade de uma pessoa com massa $m = 70$ kg, sabendo que quando ela se deita sobre a prancha, com a cabeça sobre o suporte fixo, a leitura da balança aumenta $\Delta F = 250$ N. A distância entre o apoio fixo e a balança é $L = 2$ m e a massa da prancha $M = 5$ kg.



Resposta: $x_{CM} = (\Delta F L)/(mg) \approx 0{,}73$ m, distância do centro de massa da pessoa ao apoio fixo

Exemplo 6 (desafiante): O corpo representado na figura, cuja altura é igual ao triplo do comprimento da base, encontra-se inicialmente em repouso. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano inclinado é de 40%. Se o ângulo θ aumentar lentamente, a partir da horizontal, o bloco irá tombar ou deslizar?



Resposta :Vai tombar ; para não tombar $\operatorname{tg}\theta < 1/3 \Rightarrow \theta < 18{,}4°$; para não deslizar $\operatorname{tg}\theta < \mu_e \Rightarrow \theta < 21{,}8°$