

Elasticidade

Forças que atuam nos sólidos

Resposta elástica dos sólidos

Experiência 1

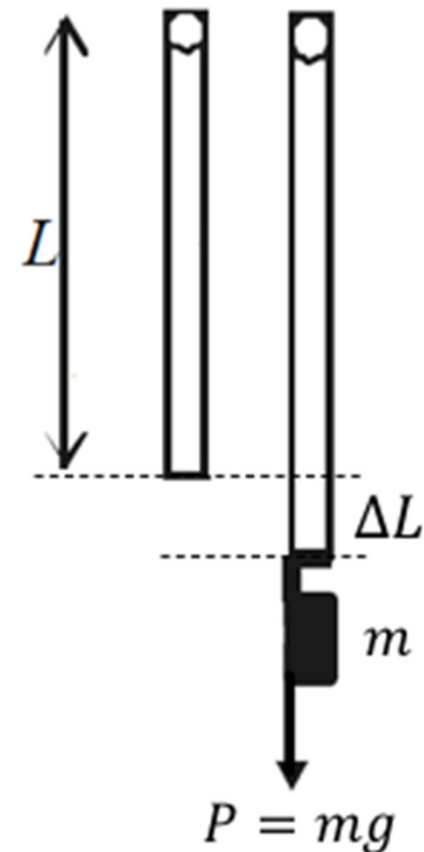
- (i) Considere-se um fio de cobre de comprimento L .
- (ii) Aplica-se uma força \vec{P} na direção do seu comprimento e mede-se a variação (ΔL) do comprimento do fio.

- Designa-se por deformação a quantidade

$$\frac{\Delta L}{L}$$

(grandeza adimensional)

- Se um segundo fio, com comprimento diferente, for sujeito à mesma força, a respetiva deformação será igual? Ou será proporcional ao comprimento do fio?

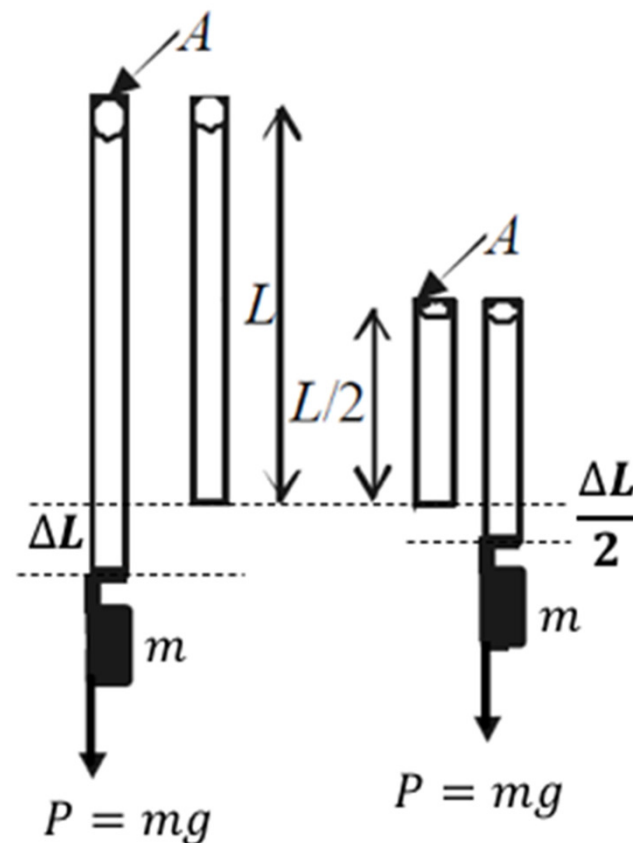


Experiência 2

- (i) Considere-se dois fios de cobre, um deles com comprimento L e o outro com metade ($L/2$).
- (ii) Aplica-se a ambos os fios a mesma força \vec{P} na direção do seu comprimento.

- No fio de comprimento L , o comprimento vai aumentar para $L + \Delta L$.
- No fio de comprimento $\frac{L}{2}$, o comprimento vai aumentar para $\frac{L}{2} + \frac{\Delta L}{2}$.
- O alongamento do fio é proporcional ao seu comprimento.
- A deformação relativa dos fios é igual:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L/2}{L/2}$$



Experiência 3

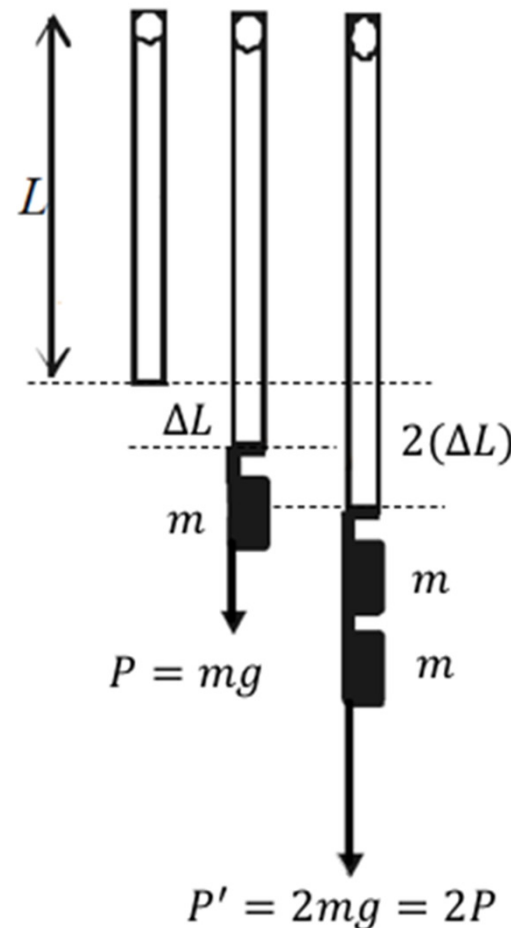
- (i) Considere-se o fio de cobre de comprimento L .
- (ii) Aplicando uma força \vec{P} na direção do seu comprimento, obtém-se uma deformação $\Delta L/L$.
- (iii) Duplicando a força aplicada ($2\vec{P}$), mede-se a variação do comprimento. Verifica-se que a deformação duplicou:

$$\text{deformação} = 2 \frac{\Delta L}{L}$$

Conclusão: a deformação é proporcional à força aplicada.

$$\frac{\Delta L}{L} \propto F$$

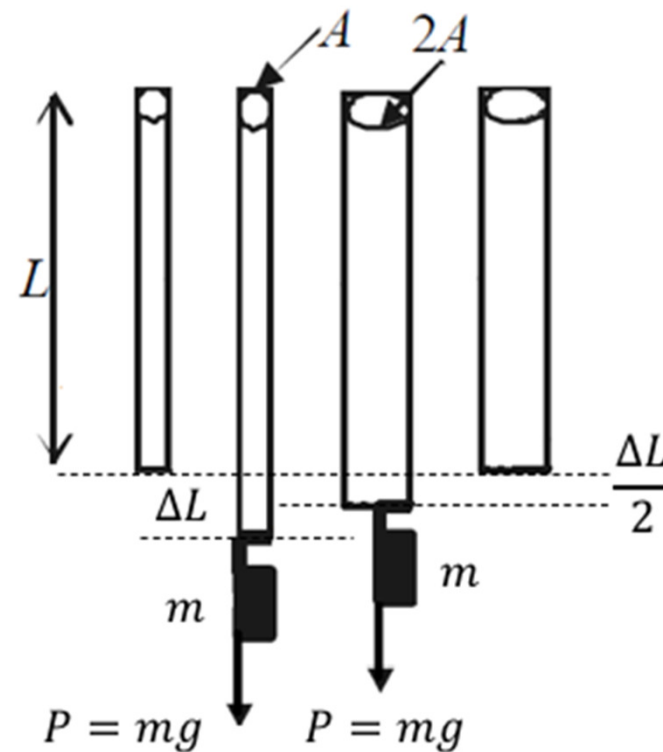
Atenção: até agora os fios têm todos a mesma secção!



Experiência 4

- (i) Consideremos dois fios de cobre de comprimento igual L , mas com secções diferentes (A e $2A$).
 - (ii) Aplica-se a ambos os fios a mesma força \vec{P} na direção do seu comprimento.
 - (iii) O fio de secção A sofre uma deformação de $\frac{\Delta L}{L}$.
 - (iv) No fio de secção $2A$, a deformação obtida foi de $\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$.
- A deformação é inversamente proporcional à área da secção (perpendicular à deformação)

$$\frac{\Delta L}{L} \propto \frac{1}{A}$$



Elasticidade

- Se removermos a força aplicada sobre os fios e eles voltarem ao comprimento original, diz-se que se trata de uma **deformação elástica**.
- Se a força for demasiado grande, a deformação passa a ser permanente, e nesse caso trata-se de uma **deformação plástica**.
- Se a força for excessiva, o sólido quebra-se.
- Atendendo aos resultados das **experiências 1 a 4**, a **deformação elástica** pode definir-se por:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

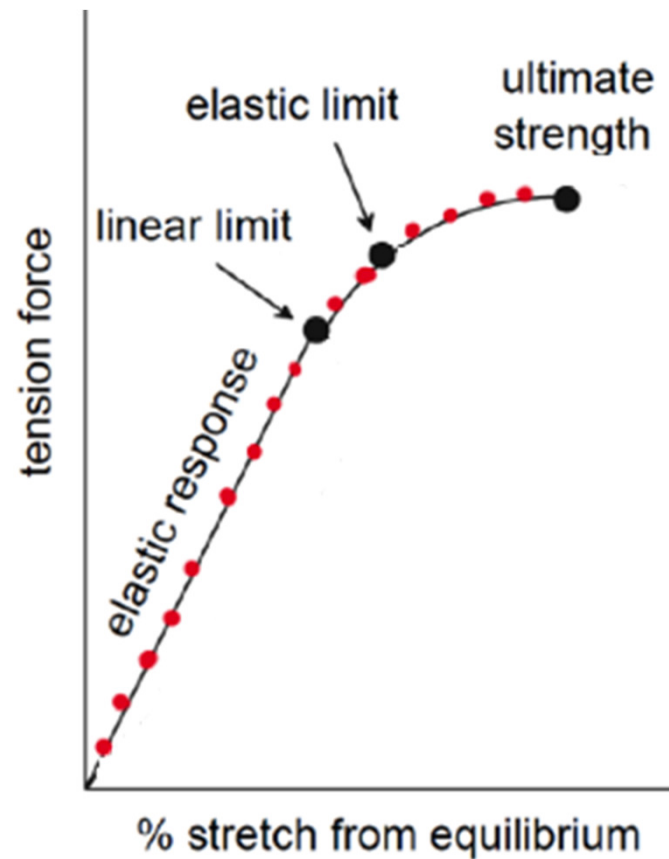
sendo F a intensidade da força aplicada, A a área da secção transversal e Y o **módulo de Young**, também conhecido por módulo de elasticidade.

- O **módulo de Young** tem unidades de N/m^2 e é uma medida da resistência do material a este tipo de força exercida sobre ele. Os materiais com Y grande são mais difíceis de quebrar.

- A razão $\frac{F}{A}$ (medida em N/m² ou pascal, Pa) é designada por **tensão** (*stress*, em inglês).
- A razão $\frac{\Delta L}{L}$ (adimensional) é a **deformação** (*strain*).
- Esta propriedade da elasticidade dos sólidos explica-se pela **constituição atómica dos materiais**.
 - ❑ Os átomos e as moléculas que constituem o sólido estão ligados por **forças eletromagnéticas**, as quais podem ser **modelizadas por rígidas molas elásticas**.
 - ❑ Para pequenas deformações este modelo é muito bom e podemos considerar que as alterações da forma num sólido são devidas a compressões e distensões das molas, mantendo o sólido intacto.
 - ❑ Se os sólidos fossem perfeitamente rígidos, não haveria deformação à ação de tensões. **Todos os sólidos reais, contudo, são deformáveis**.
- Em biologia há vários sólidos cujas propriedades são fundamentais para a vida de um organismo (ossos, tecidos moles como cartilagens, pele, vasos sanguíneos... e todos os implantes médicos!)

Elasticidade

- Fez-se com o osso uma experiência semelhante à do fio de cobre, aplicando uma **força de tensão** aos dois extremos.
- Mediu-se a variação do comprimento do osso ($\Delta L/L$) em função da força de tensão aplicada, obtendo-se o gráfico da figura.



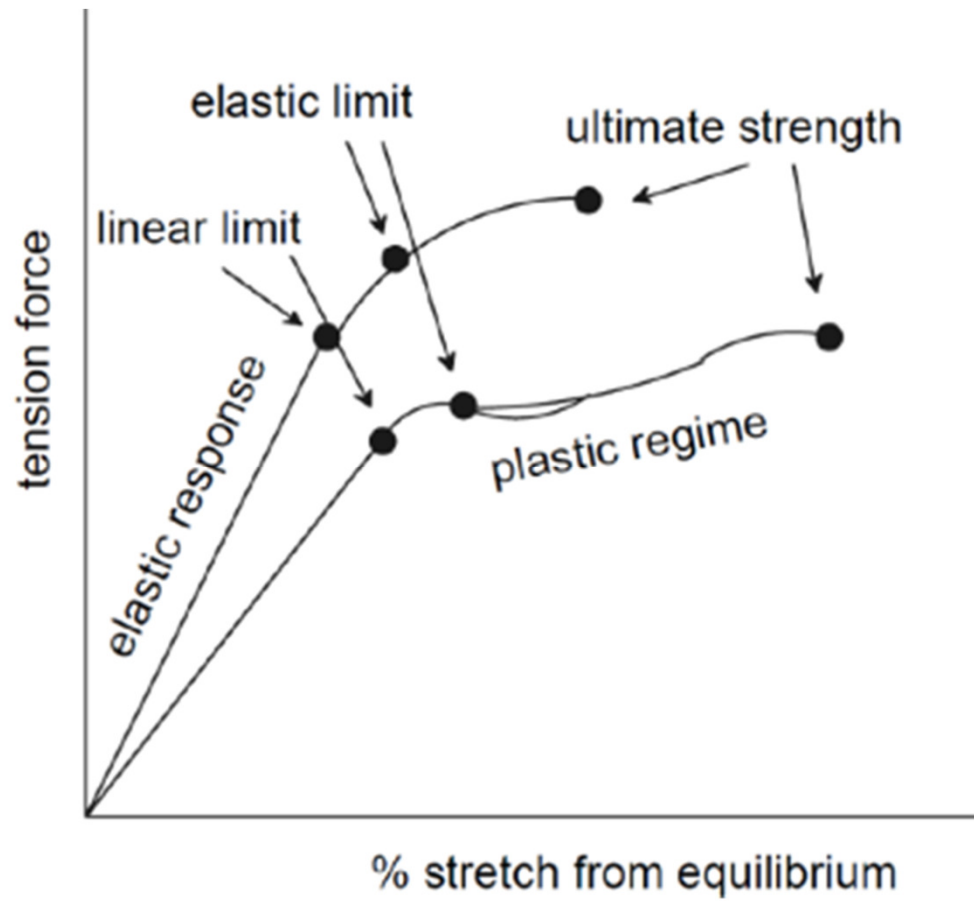
Interpretação do gráfico

- Para forças de tensão relativamente pequenas, a deformação do osso é pequena e proporcional à tensão exercida, representada pela parte linear do gráfico, designada por **resposta elástica**.
 - ❑ Nesta zona, quando a ação da força termina, o fémur retorna ao comprimento original dado o seu comportamento elástico, tal como uma mola.
- Se as forças aplicadas continuam a aumentar, a partir de certo valor (**limite linear**) a resposta do fémur deixa de ser linear (a deformação não é proporcional à força). Contudo, o osso ainda se pode considerar no **regime elástico**. Entre o limite linear e o **limite elástico**, quando a força deixa de atuar, o osso volta ao seu comprimento original.
- Acima do limite elástico, a deformação será irreversível. A fratura do osso acontece quando se atinge o **ponto de rutura**.

- Em resumo, no **regime elástico**, quando cessa a força, o osso volta ao comprimento original.
 - ❑ **resposta linear** do fémur: a deformação é proporcional à força aplicada.
 - ❑ **resposta não linear** do fémur: a deformação já não é proporcional à força aplicada.
- No fémur de um humano adulto a **ruptura** acontece para deformações de cerca de 3%.
- Para outros materiais (como metais, vidros e alguns polímeros), acima do regime elástico, o material entra no **regime plástico**, em que o material fica permanentemente deformado, mesmo quando a força deixa de atuar.
- Alguns materiais, por exemplo os ossos, não têm regime plástico.

Elasticidade

Todos os materiais têm regime elástico (linear e não linear), com um limite elástico, e todos têm ponto de rutura. Mas nem todos têm regime plástico.

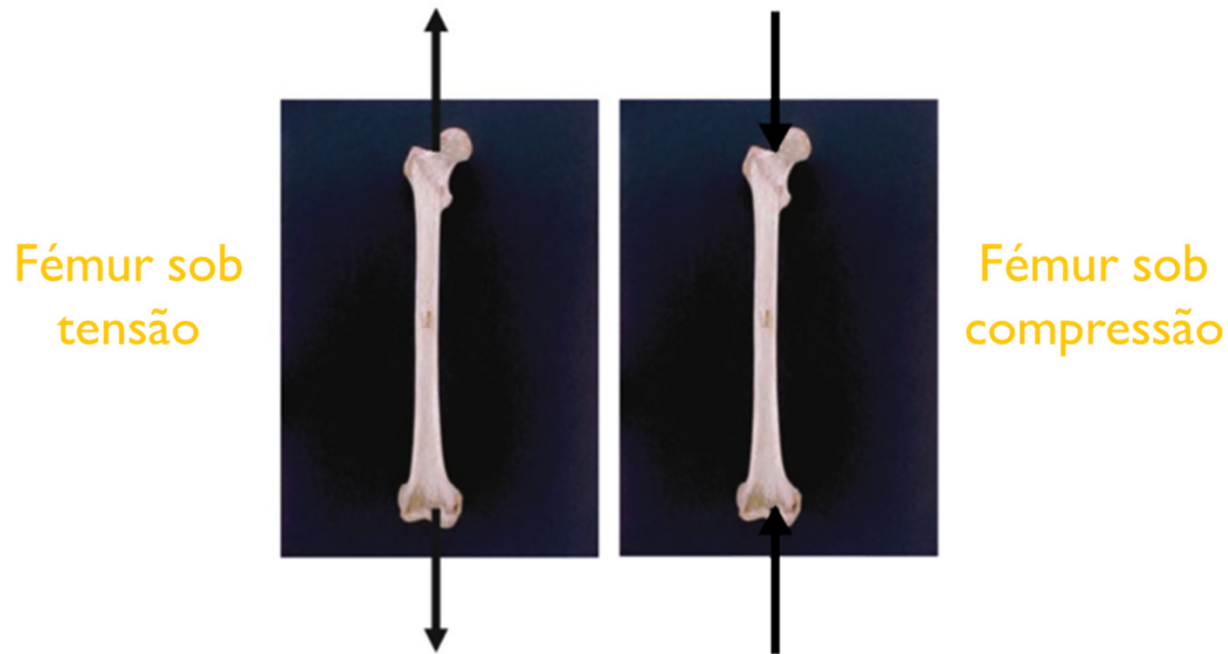


Elasticidade

- Uma força de **tensão** ou uma força **compressão**, em regime linear, segue sempre a relação:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

- O valor do módulo de Young para a compressão é cerca de **1/3** do seu valor para a tensão.
- A diferença deve-se à natureza anisotrópica do osso. Para a mesma força, a deformação é muito maior em compressão do que em tensão.



- A força restauradora (de um osso por exemplo, ao voltar ao seu comprimento quando a força de tensão ou compressão deixa de atuar) é

$$F_{res} = -F = -\frac{YA}{L}\Delta L$$

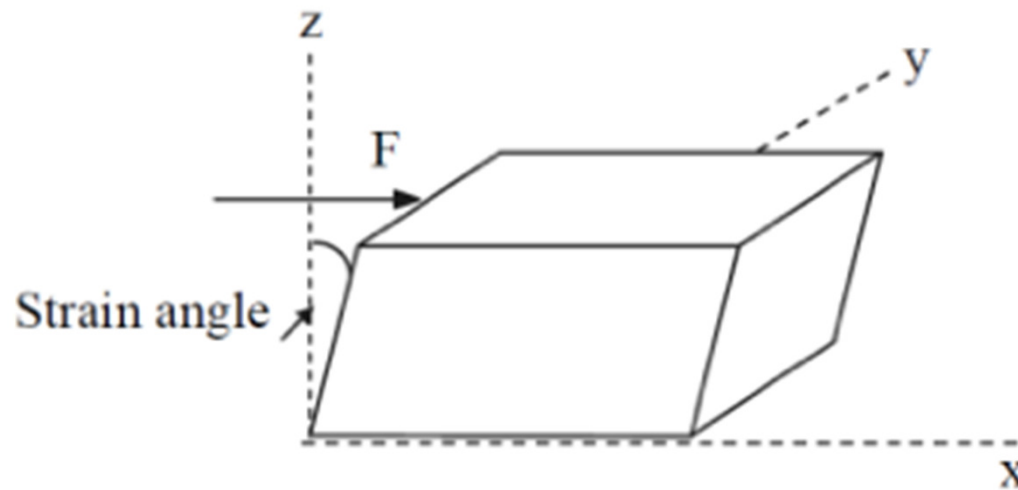
- Então os sólidos também obedecem à lei de Hooke com uma constante de mola efetiva:

$$k = \frac{YA}{L}$$

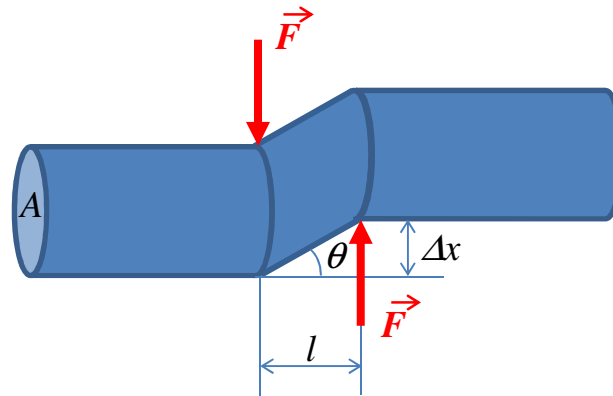
- Se o sólido é homogêneo e isotrópico, as propriedades são iguais em todas as direções. Contudo, se tal não acontecer, temos que considerar módulos de Young diferentes para as diferentes direções.
- Se a força aplicada não for normal à superfície de contacto, mas paralela, o tipo de tensão aplicada é designado por **tensão de cisalhamento**. Quando o sólido tiver **resposta linear**, a distorção consiste num **ângulo de deformação** constante.

Elasticidade

- A figura mostra a resposta de um sólido a uma **força paralela à superfície**, cuja a distorção é um ângulo de deformação constante.
- Nesse caso, a tensão e a deformação são proporcionais. A constante de proporcionalidade é designada **módulo de cisalhamento**.



- Um efeito tensão-deformação relacionado com o cisalhamento é a **torção** (rotação em torno de um eixo).
- A maior parte das fraturas ósseas são devidas a torções, uma vez que a resistência dos ossos às torções é baixa.



Tensão de corte (ou deslizamento): F/A

Deformação de corte: $\Delta x / l$

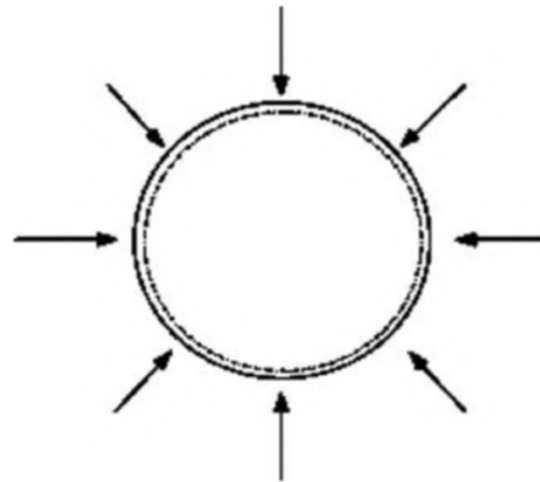
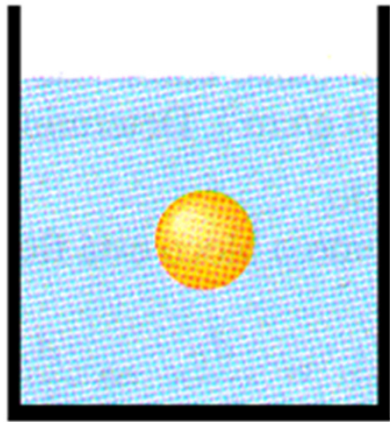
Lei de Hooke

$$F/A = M_s \Delta x/l = M_s \operatorname{tg} \theta \approx M_s \theta$$

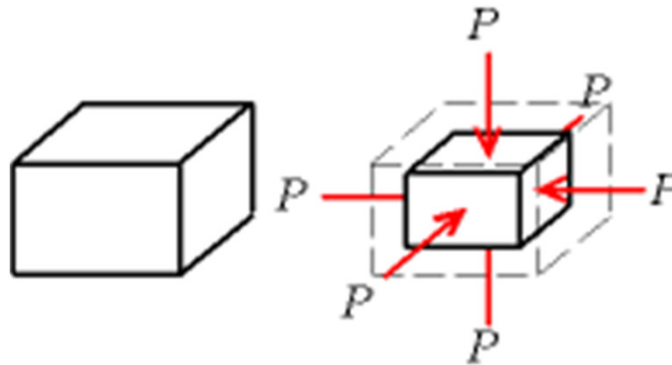
M_s (Pa) – módulo de corte (ou cisalhamento, ou de deslizamento, ou de rigidez)

Elasticidade

- Quando um objeto está **imerso num fluido**, o fluido exerce uma força normal à superfície do objeto em todos os pontos dessa superfície.



- A força por unidade de área é designada **pressão**.
- A resposta do material a esta ação (pressão) é uma variação de volume ($\Delta V/V$).
- A constante de proporcionalidade entre a pressão e a variação de volume é designada por **módulo de compressibilidade** (B).



Tensão de compressão isostática: Acréscimo de pressão ΔP

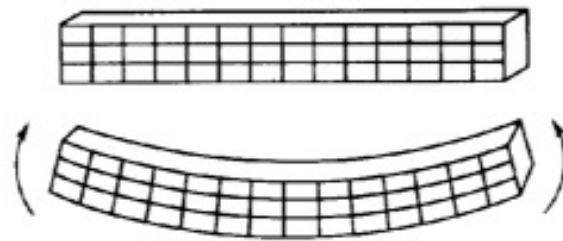
Deformação volumétrica: $\Delta V / V_0$

Lei de Hooke

$$\Delta P = B (-\Delta V / V_0)$$

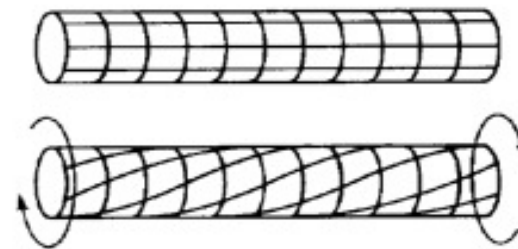
B (Pa) – módulo de compressibilidade

Outras Tensões

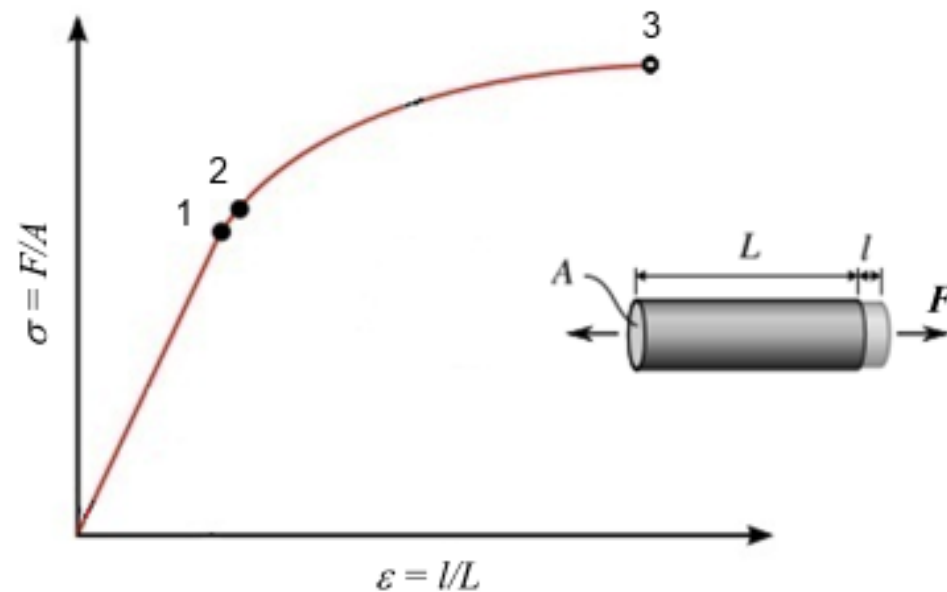


Flexão

Torção



Plasticidade e Ruptura



1 – Tensão (ou limite) de proporcionalidade - σ_p

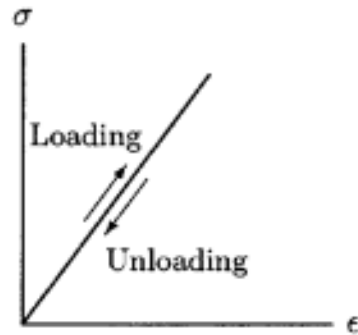
2 – Tensão de cedência, ou limite elástico - σ_c

3 – Tensão de ruptura (ou de fractura) - σ_r

Comportamento elástico – até ao ponto 2

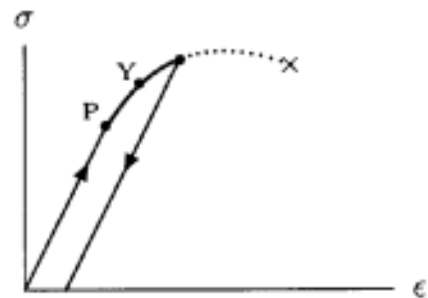
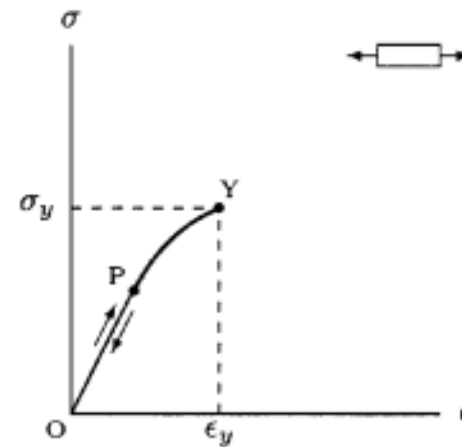
Comportamento plástico – do ponto 2 ao ponto 3

Carga e Descarga



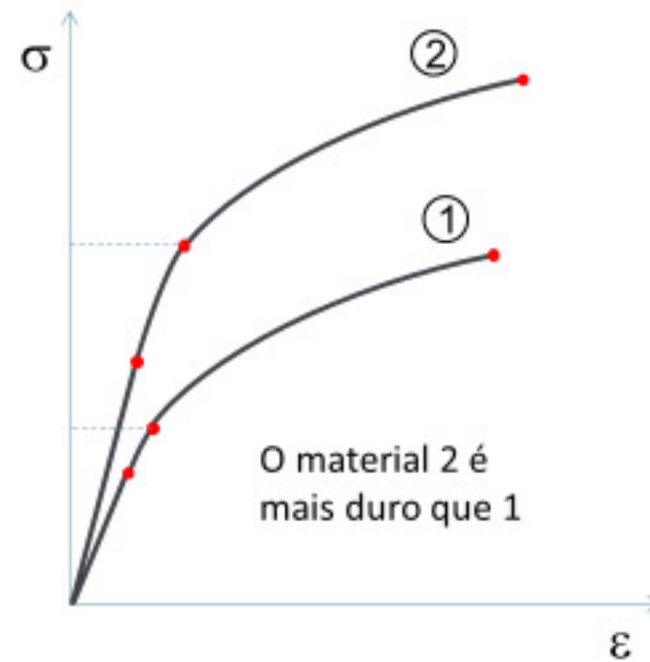
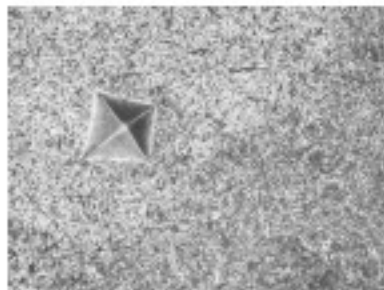
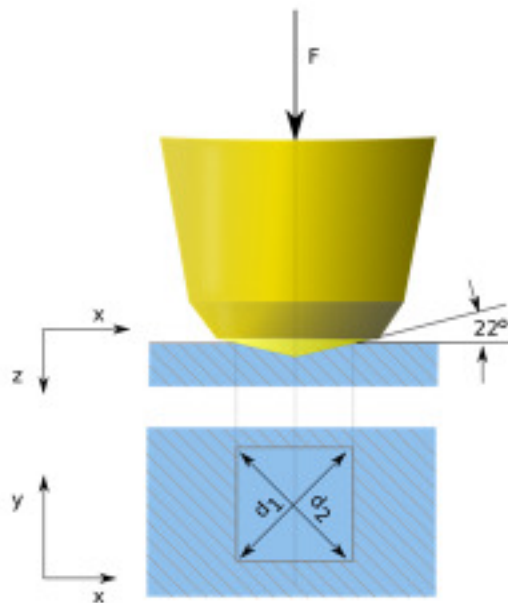
Carga e descarga na gama de proporcionalidade

Carga e descarga na gama de elasticidade



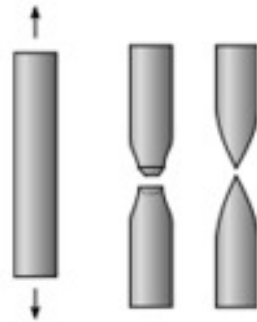
Carga e descarga acima da tensão de cedência

Dureza

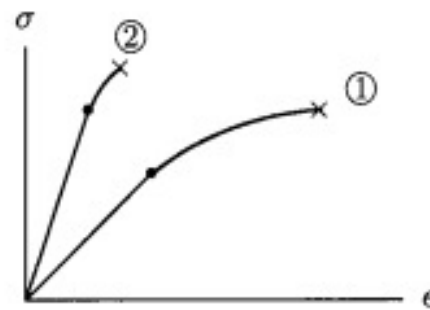


Resistência à deformação plástica
(hardness, em Inglês)
 σ_c elevado

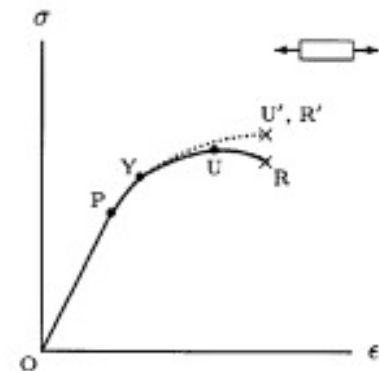
Ductibilidade



Ruptura de materiais dúcteis



1 é mais dúctil que 2

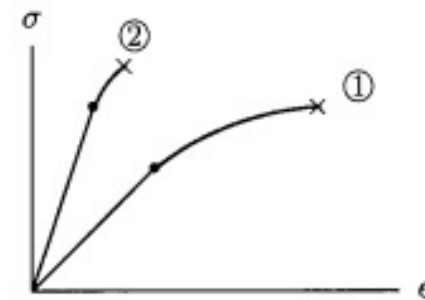
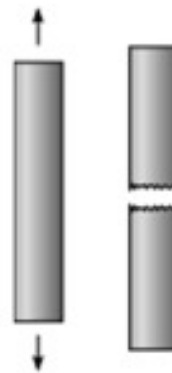


Correcção com a variação da área da secção transversal

Tendência para grande deformação plástica antes da ruptura
(ductility, em Inglês)

$$\sigma_c \ll \sigma_r$$

Fragilidade

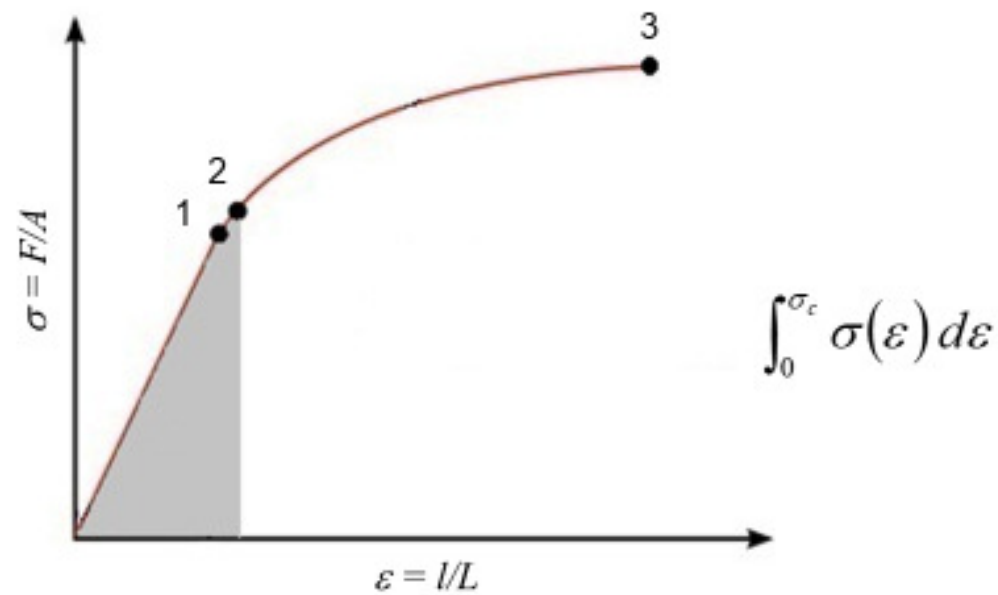


2 é mais frágil que 1

Tendência para a fractura por aplicação de tensões
Pouca tendência para deformação plástica antes da ruptura
(brittleness, em Inglês)

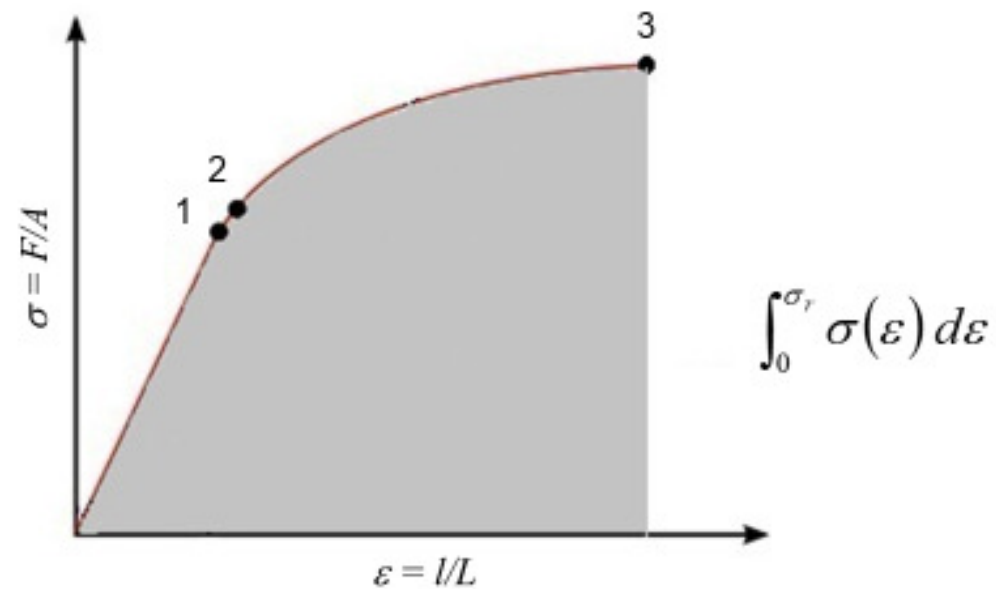
$$\sigma_r \approx \sigma_c$$

Resiliência



Energia por unidade de volume máxima absorvida sem deformações permanentes (resilience, em Inglês)

Tenacidade



Energia por unidade de volume máxima absorvida sem ruptura ou fractura
(toughness, em Inglês)

Rigidez

$$\frac{F}{A} = Y \frac{l}{L} \Leftrightarrow F = \frac{AY}{L} l \Leftrightarrow F = k l$$

Rigidez, k – resistência à deformação
(Stiffness, em Inglês)

Materiais Biológicos Reais

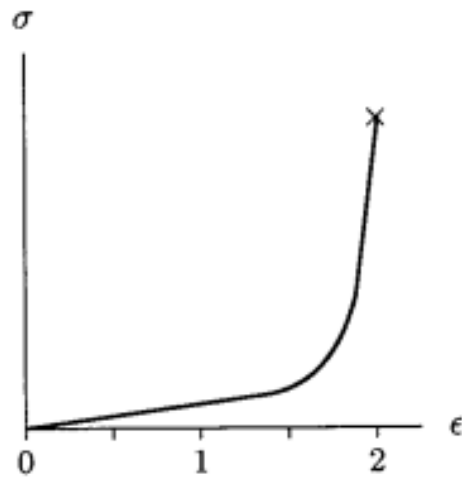
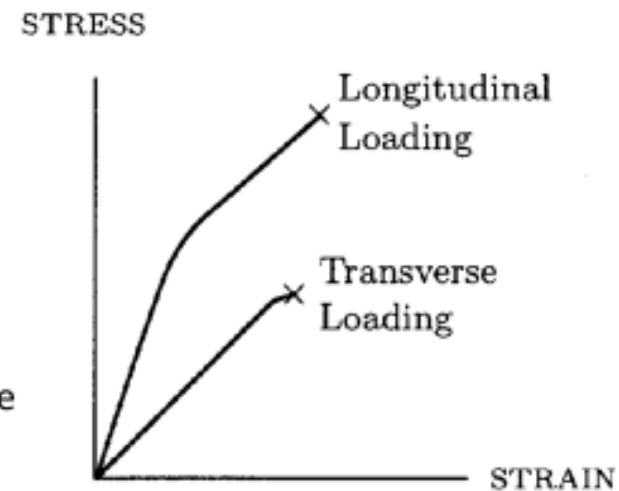


Diagrama tensão/deformação
(Elastina)

Diagrama tensão/deformação dependente
da direcção da tensão (tecido ósseo)



Materiais Biológicos Reais

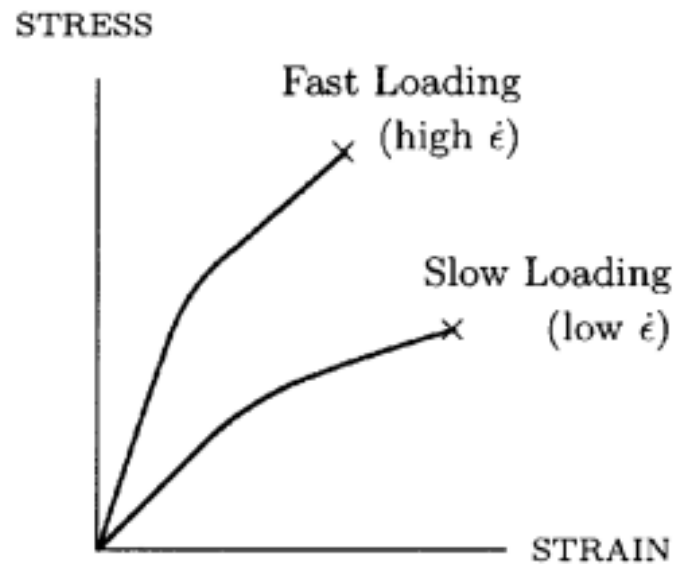
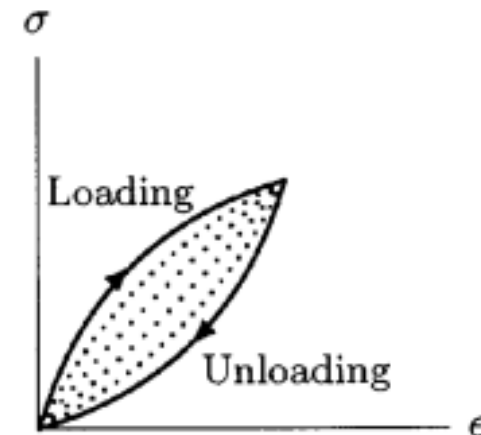
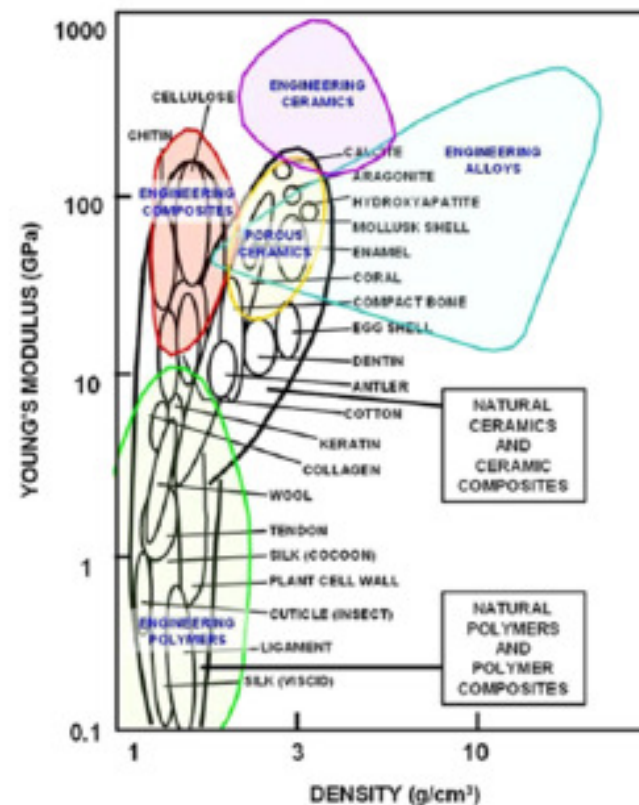


Diagrama tensão/deformação dependente da taxa de variação temporal da deformação $\dot{\epsilon}$ (tecido ósseo compacto) - **viscoelasticidade**

Carga/descarga para material viscoelástico – dissipação de energia



Exemplos de Aplicação na Biologia



P.Y. Chena, A.Y.M. Lina, Y.S. Linb, Y. Sekia, A.G. Stokesb, J. Peyrasa, E.A. Olevskeyc, M.A. Meyersa,b, J. McKittricka
Structure and mechanical properties of selected biological materials
 Review Article – Journal of the Mechanical Behaviour of Biomedical Materials, Vol.I (2008) 208-226