Dinâmica de um Sistema de Partículas

- Momento linear ou quantidade de movimento
- Conservação do momento linear
- Impulso e força média
- Centro de massa
- Movimento do centro de massa
- Energia cinética de um sistema de partículas
- Energia potencial gravítica de um sistema de partículas
- Conservação da energia de um sistema de partículas
- Colisões

Dinâmica de um Sistema de Partículas

- Quando um jogador de golfe atinge a bola com o taco, a força exercida sobre a bola aumenta até um valor máximo e volta a zero quando a bola abandona o taco. Esta força pode ser cerca de 10 000 vezes o peso da bola, sujeitando-a a uma aceleração média de 10 000 g durante cerca de metade de um milissegundo.
- Para descrever este tipo de situações iremos introduzir neste capítulo dois novos conceitos, a **quantidade de movimento** ou **momento linear** de um corpo e o **impulso de uma força**. Quando o jogador de golfe atinge a bola com o taco, uma parte da quantidade de movimento do taco é **transferida** para a bola.

Momento Linear ou Quantidade de Movimento

- Quando Newton concebeu a sua segunda lei, ele considerou o produto da massa pela velocidade como uma medida da "quantidade de movimento" de um objeto.

- O **momento linear** ou **quantidade de movimento** de uma partícula é uma grandeza vetorial, definida como o produto da sua massa pela sua velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

  A unidade SI do momento linear é o kg·m/s, que corresponde ao produto da unidade de massa pela unidade de velocidade.

  A quantidade de movimento pode ser interpretada como uma medida do esforço necessário para parar um objeto em movimento. Um camião carregado tem maior quantidade de movimento que um pequeno automóvel com a mesma velocidade, sendo necessário exercer mais força para parar o camião no mesmo tempo.

- A **segunda lei de Newton** para uma partícula pode ser expressa em termos do momento linear (foi nesta forma que Newton definiu a sua segunda lei):

$$\vec{F}_{res} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

  que para um corpo de massa constante se reduz à expressão da segunda lei de Newton usada anteriormente.

Momento Linear ou Quantidade de Movimento

- O **momento linear de um sistema de N partículas** é dado pela soma vetorial do momento linear individual das partículas o constituem:

$$\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

- Para um sistema de partículas, de acordo com a terceira lei de Newton a soma de todas as forças internas (forças entre partículas do sistema) é nula, pois as forças internas anulam-se duas a duas, logo:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{int,i} + \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{ext,res}$$

Obtemos assim a expressão da **segunda lei de Newton para um sistema de partículas**, na sua forma mais geral, expressa em termos do momento linear:

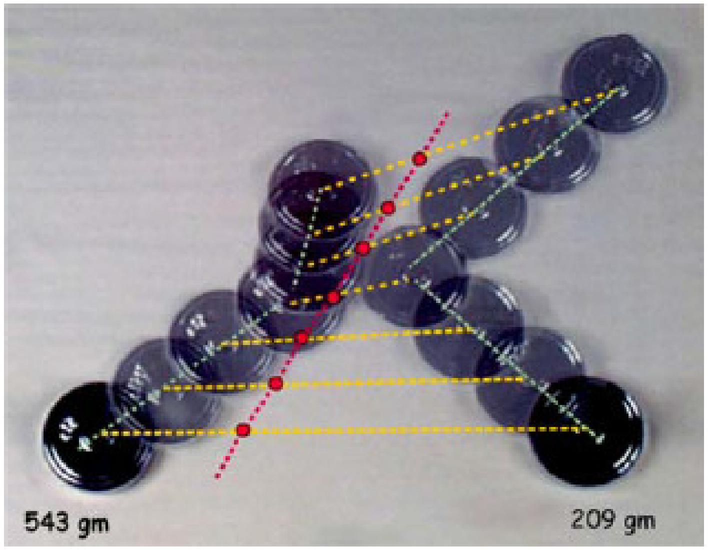
$$\vec{F}_{ext,res} = \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum F_{ext,x} = \dfrac{dP_{sis,x}}{dt} \\ \sum F_{ext,y} = \dfrac{dP_{sis,y}}{dt} \\ \sum F_{ext,z} = \dfrac{dP_{sis,z}}{dt} \end{cases}$$

Conservação do Momento Linear

- **Lei da conservação do momento linear** para um sistema de partículas:

  "Quando a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema de partículas é nula, o momento linear total do sistema permanece constante"

$$\vec{F}_{ext,res} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{sis} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{cm} = constante$$



- O momento linear é um conceito útil quando dois corpos estão em contacto durante um certo intervalo de tempo, Δt, exercendo forças de ação-reação um sobre o outro ($\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$) tais que:

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} \text{ e } \vec{F}_{1/2} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$$

Na colisão de dois discos que se movem sem atrito sobre uma almofada de ar, a velocidade de cada disco varia em módulo e em direção, mas a velocidade do centro de massa do sistema permanece constante.

Conservação do Momento Linear

- A **lei da conservação do momento linear** é uma das mais importante da física, tendo uma aplicação mais abrangente do que a lei da conservação da energia mecânica, porque as forças internas exercidas entre as partículas constituintes de um sistema são, com frequência, não conservativas.

  As forças internas não conservativas podem fazer variar a energia mecânica total do sistema, mas **não podem alterar o momento linear total do sistema** (apenas podem modificar o momento linear individual das partículas do sistema).

  Se o momento linear total de um sistema de partículas permanece constante, então a velocidade do seu centro de massa também permanece constante.

- A lei da conservação do momento linear é uma equação vetorial e portanto pode ser **aplicada separadamente a cada componente**:

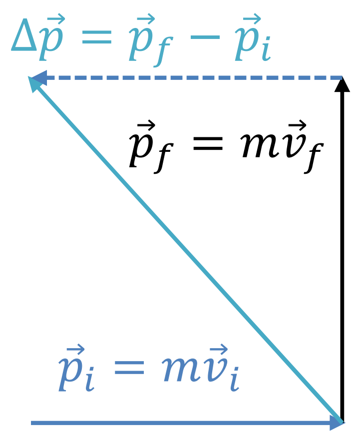
$$\begin{cases} \sum F_{ext,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{sis,x} = \sum_i m_i v_{i,x} = M v_{cm,x} = \text{constante} \\ \sum F_{ext,y} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{sis,y} = \sum_i m_i v_{i,y} = M v_{cm,y} = \text{constante} \\ \sum F_{ext,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{sis,z} = \sum_i m_i v_{i,z} = M v_{cm,z} = \text{constante} \end{cases}$$

- Este princípio aplica-se em muitos processos, como explosões e colisões entre corpos.

Exemplo: Uma bactéria de massa $m = 6 \times 10^{-16}$ kg nada inicialmente a uma velocidade de $8\ \mu\mathrm{m/s}$ para este e $1\ \mathrm{ms}$ depois desloca-se para norte a uma velocidade de $10\ \mu\mathrm{m/s}$.

(a) Determinar a variação de momento da bactéria.

(b) Qual a força externa média que atuou na bactéria durante o intervalo de tempo de $1\ \mathrm{ms}$?



(a) Trata-se de um problema a 2D:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i)$$

$$\Delta\vec{p} = 6 \times 10^{-16}(10\hat{\jmath} - 8\hat{\imath}) \times 10^{-6}$$

$$\Delta\vec{p} = 6 \times 10^{-22}(10\hat{\jmath} - 8\hat{\imath})\ [\mathrm{kg\ m/s}]$$

Módulo: $|\Delta\vec{p}| = 6 \times 10^{-22}\sqrt{10^2 + 8^2}$

$|\Delta\vec{p}| = 7{,}7 \times 10^{-21}\ \mathrm{kg\ m/s}$

(b) A força média que atuou sobre a bactéria no intervalo de tempo $\Delta t = 1\ \mathrm{ms}$ é dada por:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{6 \times 10^{-22}}{10^{-3}}(10\hat{\jmath} - 8\hat{\imath}) = 6 \times 10^{-19}(10\hat{\jmath} - 8\hat{\imath})\ \mathrm{N}$$

O módulo da força média é $F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 7{,}7 \times 10^{-18}\ \mathrm{N}$

Conservação do Momento Linear

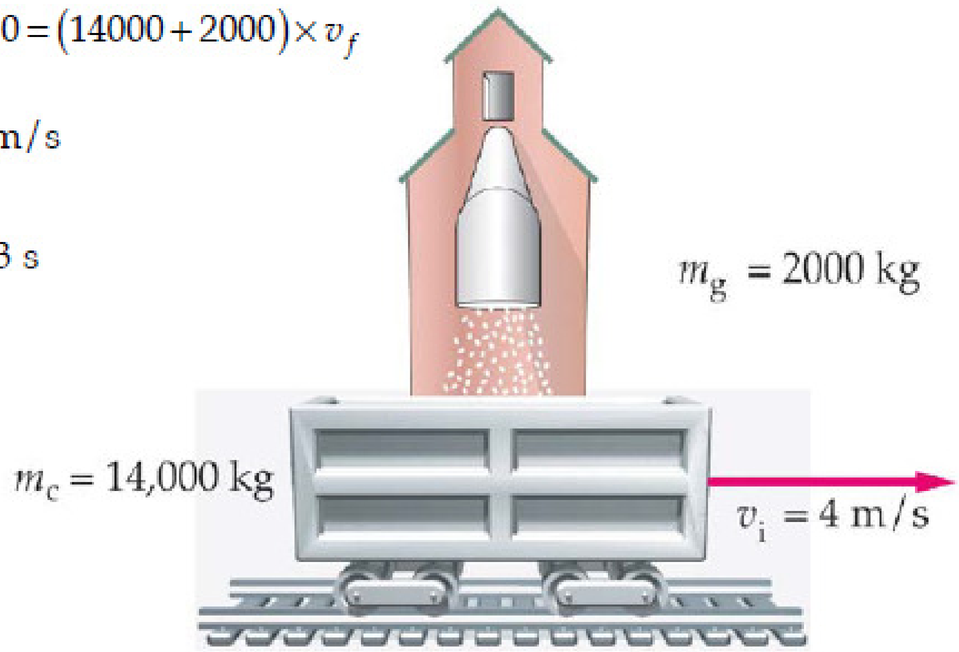
- Um vagão com 14000 kg move-se horizontalmente com velocidade de 4 m/s. Ao passar por um silo, 2000 kg de cereais caem verticalmente no interior do vagão. Quando tempo vai demorar o vagão a percorrer uma distância de 500 m? Desprezar o atrito e a resistência do ar.

R: A componente vertical do momento linear do sistema (vagão + cereais) não se conserva. Mas conserva-se a componente horizontal do momento linear do sistema. **Porquê?**

$$14000\times 4+2000\times 0=(14000+2000)\times v_f$$

$$v_f=\frac{56000}{16000}=3,5\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v_f}=\frac{500}{3,5}\approx 143\ \mathrm{s}$$



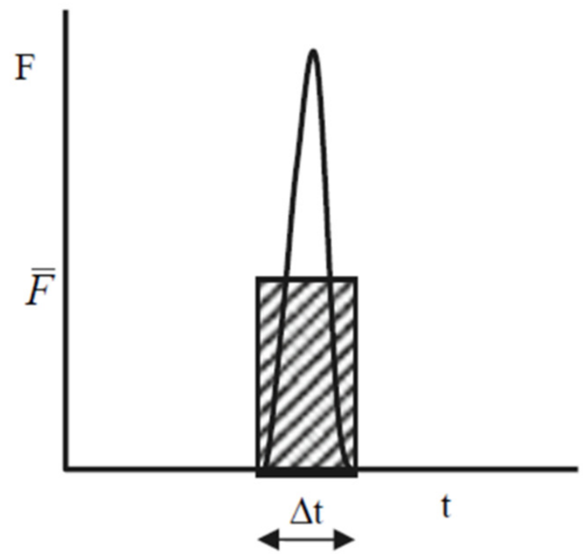
- Quando dois corpos estão em contacto durante um certo intervalo de tempo Δt, eles exercem forças iguais e opostas um sobre o outro durante esse intervalo de tempo.
- Chama-se impulso ao produto da força que os corpos exercem um sobre o outro pelo intervalo de tempo durante o qual ocorre:

$$I = F\Delta t \text{ [unidades no SI: N s]}$$

- Em geral a força varia, considerando-se o seu valor médio ($\bar{F}$):

$$I = \bar{F}\Delta t$$

- A força média é a altura do retângulo com largura Δt que tem área igual à área entre $F(t)$ e a horizontal.

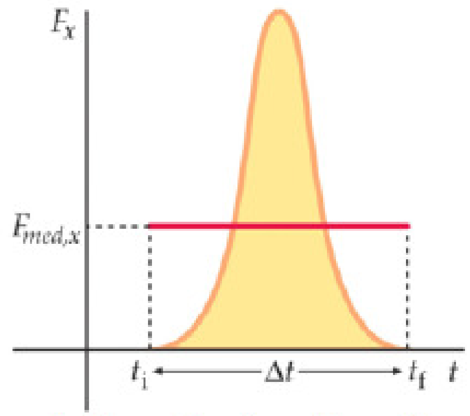


Impulso e Força Média

- Por mais "instantânea" que uma força possa parecer, ela atua sempre durante um intervalo de tempo. Quando dois corpos colidem, exercem geralmente forças muito intensas, um sobre o outro, durante um intervalo de tempo muito curto.
- O **impulso de uma força** é o produto da força pelo tempo em que esta atua:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

O impulso de uma força é uma grandeza vetorial, que pode ser entendida como uma **medida da ação ou do efeito da força**: uma força muito intensa atuando durante um tempo muito curto pode produzir o mesmo efeito que uma força menos intensa atuando durante mais tempo. A unidade SI do impulso é o N·s.



A componente x do impulso da força é a área do gráfico de F_x em função do tempo

Impulso e Força Média

- Podemos usar a segunda lei de Newton para relacionar o impulso da **resultante das forças** que atuam sobre uma **partícula** com a variação do momento linear da partícula:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}_{res}\, dt$$

Integrando esta equação obtemos o **teorema do impulso para uma partícula**:

$$\vec{I}_{res} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{res}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

- De acordo com o **teorema do impulso para um sistema de partículas**, o impulso resultante das forças externas que atuam sobre o sistema de partículas é igual à variação do momento linear total do sistema:

$$\vec{I}_{ext,res} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext,res}\, dt = \Delta\vec{P}_{sis}$$

Impulso e Força Média

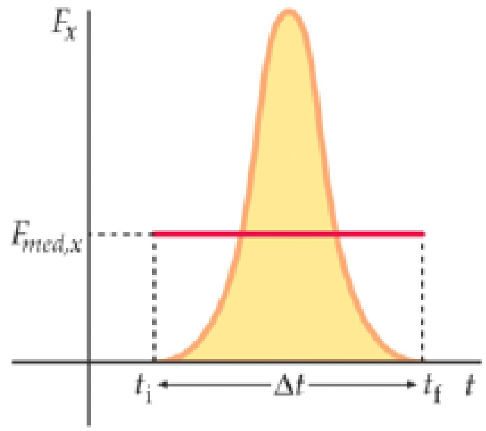
- A **força média** num determinado intervalo de tempo pode ser calculada como:

$$\vec{F}_{méd} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \frac{1}{\Delta t}\vec{I} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{I} = \vec{F}_{méd}\Delta t$$

  Ou seja, a força média é a força constante que origina o mesmo impulso que a força real, no mesmo intervalo de tempo.

- Já a **força resultante média** que atua numa partícula pode ser calculada a partir da variação do momento linear da partícula:

$$\vec{I}_{res} = \vec{F}_{res,méd}\,\Delta t = \Delta\vec{p}$$



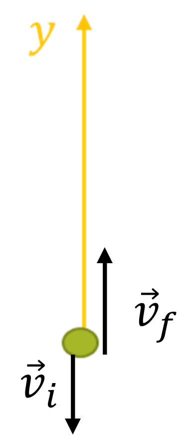
Exemplo: Uma bola de borracha com massa de 150 g cai na vertical e imediatamente antes de atingir o chão tem uma velocidade de 28 m/s. Passados alguns instantes começa a subir com velocidade de 46 m/s.
(a) Qual a variação do momento linear da bola? Há conservação do momento linear? O que significa?
(b) Qual o impulso da força que terá atuado sobre a bola durante a colisão com o chão?
(c) Se o impacto com o chão demorou 1,2 ms, qual a força média que o chão exerceu sobre a bola?

(a) Momento linear antes e após o impacto:

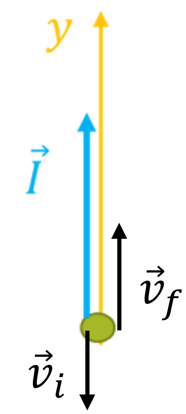
$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = 0{,}15 \times (-28\hat{\jmath}) = -4{,}2\hat{\jmath}$ (kg m/s)

$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = 0{,}15 \times (46\hat{\jmath}) = 6{,}9\hat{\jmath}$ (kg m/s)

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 6{,}9\hat{\jmath} - (-4{,}2\hat{\jmath}) = 11{,}1\hat{\jmath}$$



- O momento linear varia no impacto com o solo, logo não há conservação do momento.
- Se $\Delta\vec{p} \neq 0$ então a resultante das forças externas aplicadas na bola não é nula.



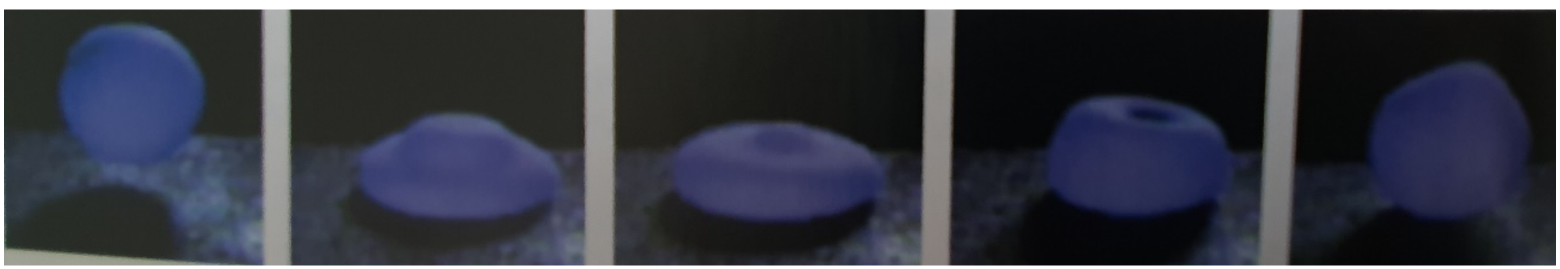
(b) O impulso da força que atuou sobre a bola de borracha durante a colisão com o solo é igual à variação do momento linear da bola: $\vec{I} = \Delta\vec{p} = 11{,}1\hat{\jmath}$ (kg m/s).

O impulso aponta para cima, ou seja, tem o sentido da força exercida pelo solo na bola.

(c) O impacto da bola com o chão demorou 1,2 ms. A força média exercida pelo chão sobre a bola será obtida a partir do impulso:

$$\vec{I} = \vec{F}_m\,\Delta t \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{11{,}1\hat{\jmath}}{1{,}2 \times 10^{-3}} = 9250\hat{\jmath}\ \text{(N)}$$

O solo exerceu sobre uma bola uma força média de módulo 9250 N, vertical, dirigida para cima.



Centro de Massa

- O **centro de massa** de um sistema de partículas é um ponto geométrico onde se supõe estar concentrada toda a massa, e onde se considera aplicada a resultante das forças gravíticas (num campo gravítico uniforme) que atuam nesse sistema, sendo definido por:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad \text{onde} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

As coordenadas do centro de massa de um sistema de partículas serão portanto:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \quad , \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \quad , \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Note-se que o centro de massa não é necessariamente um dos pontos físicos do sistema, como se percebe facilmente considerando um anel ou um cilindro oco.

O movimento de qualquer corpo ou sistema de partículas pode ser descrito em termos do **movimento do centro de massa**, sobreposto ao movimento das partículas **relativamente** ao centro de massa.

Centro de Massa

- O **centro de massa de duas partículas** situa-se sempre num ponto da linha que une as duas partículas.

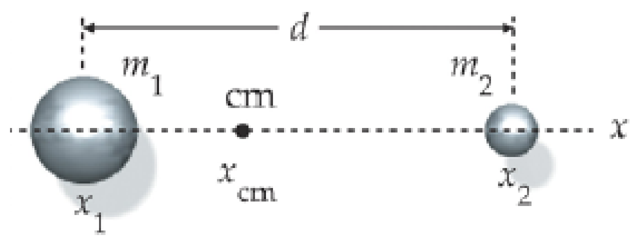
  Se as massas das duas partículas forem iguais o centro de massa estará exatamente no centro da linha que une as partículas. Se as massas forem diferentes ele estará mais próximo da partícula com maior massa.

- Se uma partícula com massa m_1 estiver na origem e uma partícula de massa m_2 estiver a uma distância d da primeira, qual será a posição do centro de massa?

  R: $x_{cm} = d \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$

- Uma partícula com massa de 4 kg é posicionada na origem e uma partícula com massa de 2 kg em x = 6 cm. Qual a coordenada do centro de massa?

  R: $x_{cm} = 2\ cm$

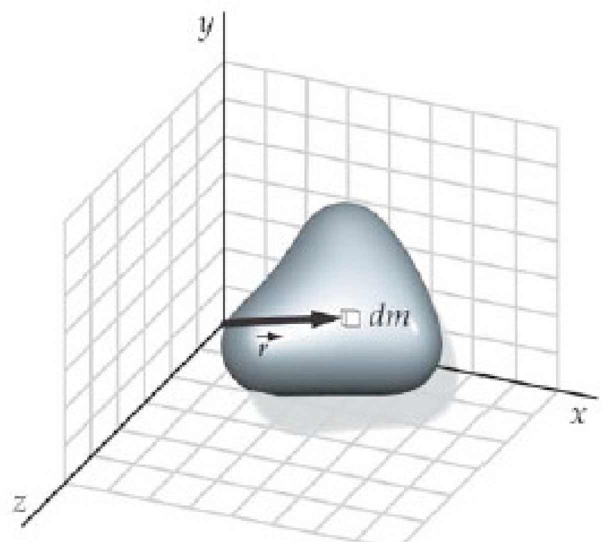


Centro de Massa

- Para um **corpo contínuo** substitui-se o somatório por um integral, onde ***dm*** representa um elemento infinitesimal de massa e ***dV*** um elemento de volume, sendo ***ρ*** a densidade do corpo:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\substack{massa\\corpo}} \vec{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_{\substack{volume\\corpo}} \rho\, \vec{r}\, dV$$

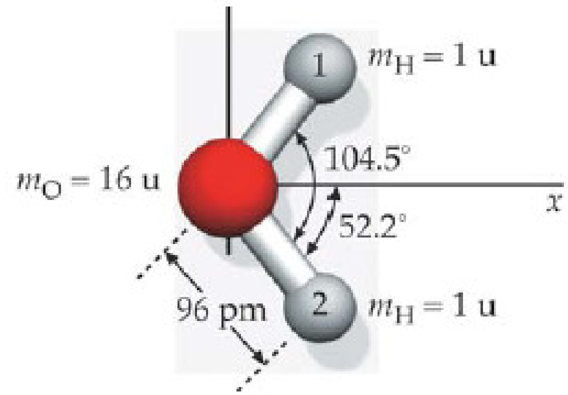
Para **corpos simétricos e homogéneos** (com densidade constante em todo o seu volume) o centro de massa estará sobre os **eixos de simetria**.



- Determinar a posição do centro de massa da molécula de água:

R:

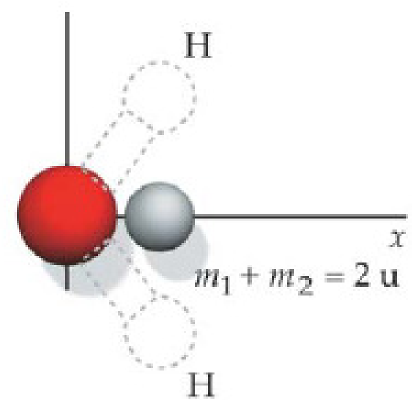
$$x_{cm} = \frac{0\times16+2\times96\cos52,2°\times1}{16+2\times1} \approx 6,5 \text{ pm}$$
$$y_{cm} = 0 \text{ por simetria}$$



- Pode-se também resolver o problema determinando primeiro o centro de massa dos dois átomos de hidrogénio e depois o de toda a molécula:

R:

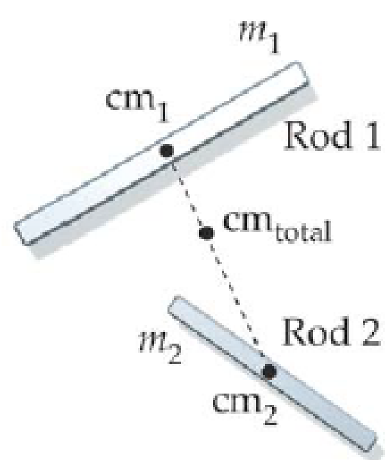
$$x_{2H,cm} = \frac{2\times96\cos52,2°\times1}{2\times1} \approx 58,8 \text{ pm}$$
$$x_{cm} = \frac{0\times16+58,8\times2}{16+2} \approx 6,5 \text{ pm}$$
$$y_{cm} = 0 \text{ por simetria}$$



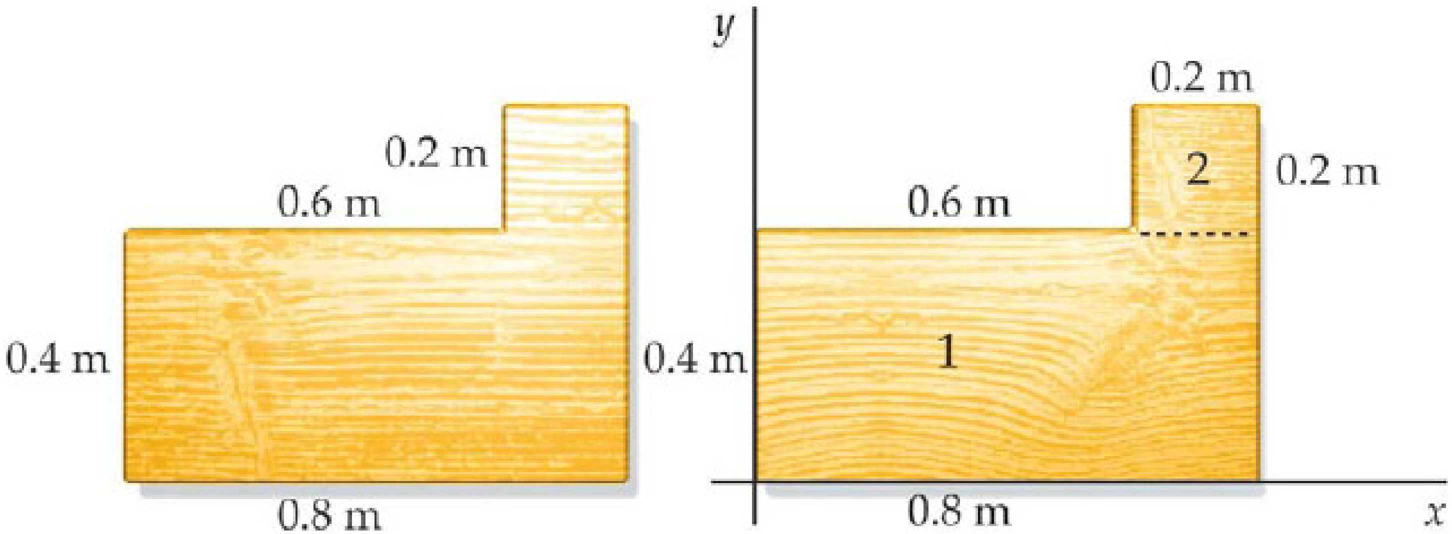
Centro de Massa

- A mesma técnica usada no cálculo da posição do centro de massa da molécula de água pode ser também usada em sistemas mais complexos, como o sistema de duas barras representado na figura.

  Podemos determinar a posição do centro de massa do sistema, tratando cada uma das barras como uma partícula posicionada no seu centro de massa.



- Determinar a posição do centro de massa da peça de madeira, considerada homogénea, que se representa na figura:

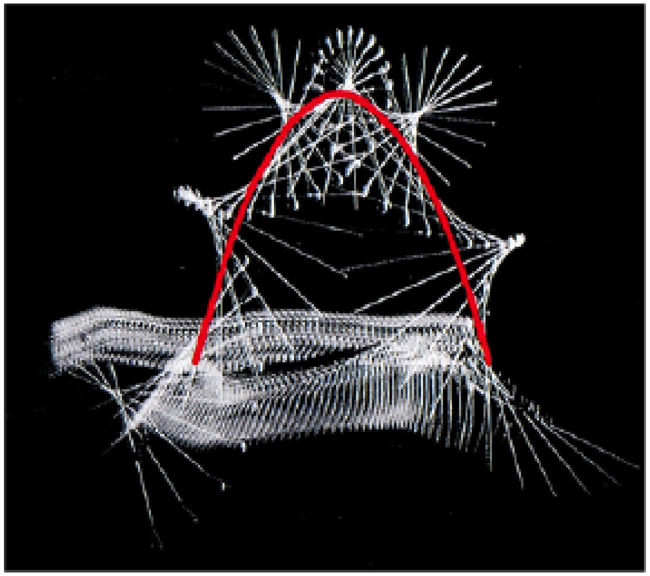


Dividindo a peça de madeira em duas partes, como representado na figura da direita, a massa da parte 1 será oito vezes maior que a massa da parte 2, logo:

$$x_{cm} = \frac{0,4 \times 8 + 0,7 \times 1}{8+1} \approx 0,43 \text{ m} \quad \text{e} \quad y_{cm} = \frac{0,2 \times 8 + 0,5 \times 1}{8+1} \approx 0,23 \text{ m}$$

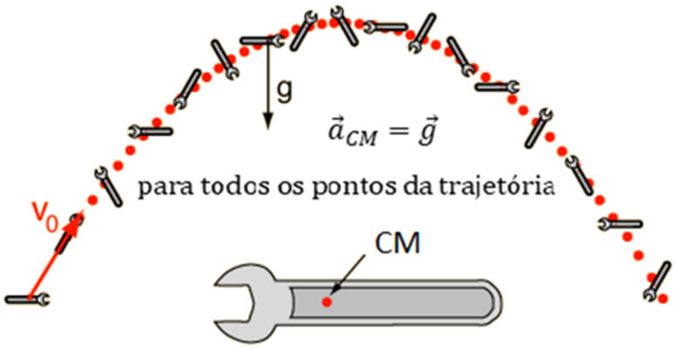
Movimento do Centro de Massa

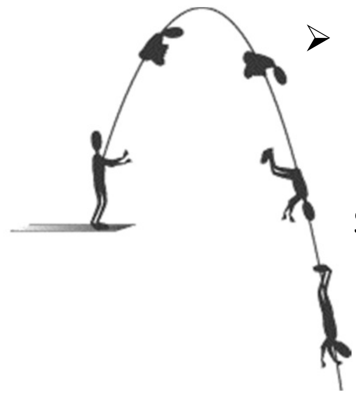
- No estudo do movimento do centro de massa de um sistema de partículas colocam-se várias questões:
  - Quando um corpo descreve um movimento mais ou menos complexo, qual será a trajectória do seu centro de massa?
  - Quais as forças com influência sobre a trajectória do centro de massa: as forças internas, as forças externas ou ambas?



Embora o movimento de um bastão atirado ao ar possa ser bastante complexo, o movimento do seu centro de massa é bastante simples

Movimento do Centro de Massa





- As forças internas de um sistema não fazem variar o momento linear total pois anulam-se aos pares (3ª lei de Newton).

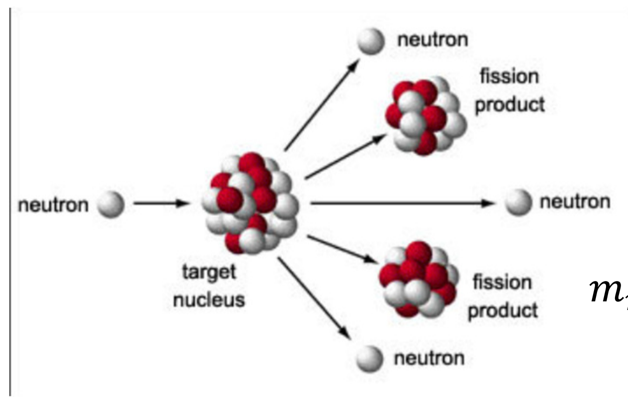
Só as forças externas ao sistema são responsáveis pela variação do momento linear.

$$M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,ext}$$

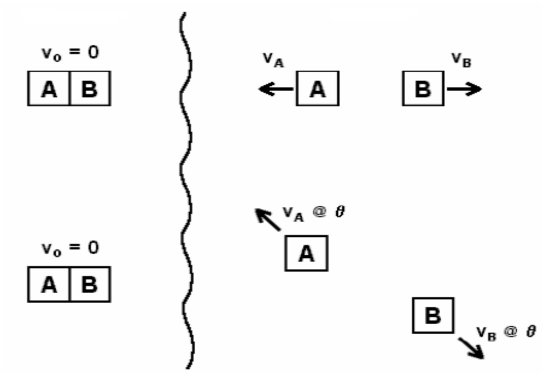
- Mesmo que $\vec{F}_{ext} \neq 0$, em processos que ocorrem em intervalos de tempo muito curtos, há conservação do momento linear:

$$dt \cong 0 \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}_{ext}\,dt \cong 0$$

- São exemplos processos nucleares como a fissão e as explosões.



$$m_n\,\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{5} m_k\,\vec{v}_k$$



Se o momento linear antes de uma explosão é nulo, as velocidades das 2 partículas resultantes têm a mesma direção e sentidos opostos pois:

$$\vec{v}_{CM}(f) = \vec{v}_{CM}(i) = 0$$

Movimento do Centro de Massa

- Derivando em ordem ao tempo a equação que define a posição do centro de massa, obtemos a **velocidade do centro de massa**:

$$\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_N \frac{d\vec{r}_N}{dt} \right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_N \vec{v}_N \right) = \frac{1}{M}\sum_{i} m_i \vec{v}_i$$

Atendendo à definição de quantidade de movimento de um sistema de partículas, a equação anterior também se pode escrever:

$$M\vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_N \vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{cm}$$

Ou seja, a quantidade de movimento de um sistema de partículas é igual à quantidade de movimento de um ponto material com massa igual à do sistema, que se move com a velocidade do centro de massa.

Movimento do Centro de Massa

- Derivando em ordem ao tempo a equação que define a velocidade do centro de massa, obtemos a **aceleração do centro de massa**:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad \text{ou} \quad M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

onde pela segunda lei de Newton $\vec{F}_i$ é a resultante de todas as forças que atuam na partícula *i*. Logo $M\vec{a}_{cm}$ será igual à soma de todas as forças que atuam sobre todas as partículas do sistema.

- Mas de acordo com a terceira lei de Newton a soma de todas as forças internas (entre partículas do sistema) é nula, pois elas anulam-se duas a duas, logo:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{int,i} + \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{ext,res}$$

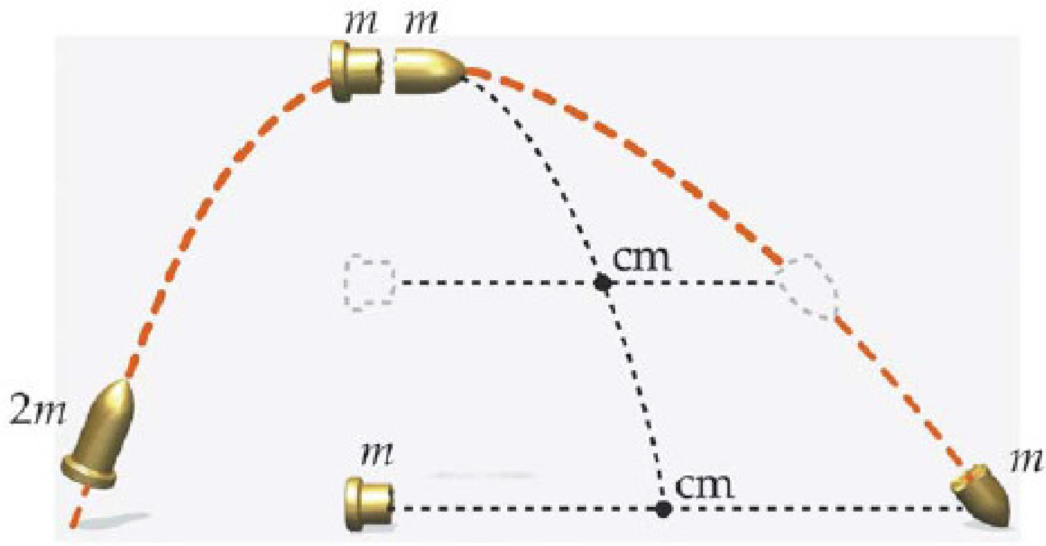
- Ou seja, o centro de massa move-se como uma única partícula com a massa total do sistema sob a ação da **resultante das forças externas** que atuam no sistema (das forças que partículas exteriores ao sistema exercem sobre o sistema):

$$\vec{F}_{ext,res} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = M\,\vec{a}_{cm} \quad ou \quad \vec{F}_{ext,res} = \sum_i \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt}$$

Movimento do Centro de Massa

- Lança-se um projétil de modo que o seu alcance seja de 55 m. Se ele explodir no ponto mais alto da trajetória, dividindo-se em dois fragmentos com massas iguais, e se imediatamente após a explosão um dos fragmentos tiver velocidade nula, onde irão cair os dois fragmentos? Desprezar a resistência do ar.

R: 27,5 m e 82,5 m, porque o movimento do centro de massa não é alterado pela explosão



Energia Cinética de um Sistema de Partículas

- A **energia cinética de um sistema de N partículas**, em relação a determinado referencial, é dada pela soma da energia cinética das partículas que o constituem, calculadas em relação ao mesmo referencial:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

- De um modo geral, a **energia cinética de um sistema de partículas** pode ser expressa pela soma de dois termos: (1) a energia cinética associada ao movimento do centro de massa, e (2) a energia cinética associada ao movimento das partículas do sistema relativamente ao centro de massa do sistema:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \bullet \vec{v}_i\right)$$

mas $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{u}_i$ sendo $\vec{u}_i$ a velocidade relativamente ao centro de massa

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i\right) \bullet \left(\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i\right) = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \bullet \sum_i m_i \vec{u}_i + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i u_i^2$$

mas o momento linear relativamente ao centro de massa é nulo
($\vec{u}_{cm}$ é a velocidade do centro de massa relativamente a si próprio) $\rightarrow \sum_i m_i \vec{u}_i = M \vec{u}_{cm} = 0$

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i u_i^2 = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + K_{rel}$$

Energia Potencial Gravítica de um Sistema

- A **energia potencial gravítica de um sistema de N partículas**, num campo gravítico **uniforme**, coincide com a energia potencial gravítica que o sistema teria se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro de massa:

$$U = \sum_i m_i\, g\, h_i = g \sum_i m_i\, h_i$$

mas, por definição, a altura do centro de massa é dada por:

$$M\, h_{cm} = \sum_i m_i\, h_i$$

obtendo-se então para a energia potencial gravítica de um sistema de partículas:

$$\boxed{U = M\, g\, h_{cm}}$$

Colisões

- Numa colisão dois corpos aproximam-se e interagem fortemente durante um curto intervalo de tempo. Podemos classificar uma colisão como:
  - **Perfeitamente elástica**: a energia cinética total dos corpos é a mesma, antes e depois da colisão. Uma bola "saltitona" salta praticamente até à altura de que foi largada.
  - **Inelástica**: quando a energia cinética total dos corpos não é a mesma, antes e depois da colisão. Após bater no solo uma bola "normal" não atinge a altura de que foi largada.
  - **Perfeitamente inelástica**: caso extremo da colisão inelástica em que os corpos ficam juntos após a colisão e no qual toda a energia cinética relativa ao centro de massa é convertida em energia térmica ou em energia interna. Ao cair de uma certa altura uma bola de plasticina fica agarrada ao solo, deformando-se permanentemente.

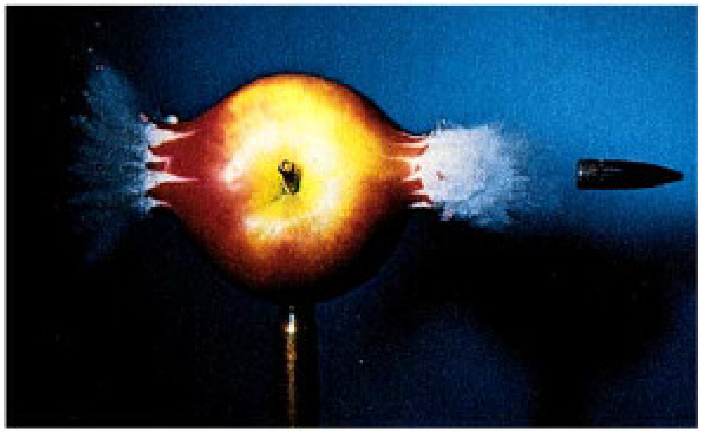
Colisões a uma dimensão

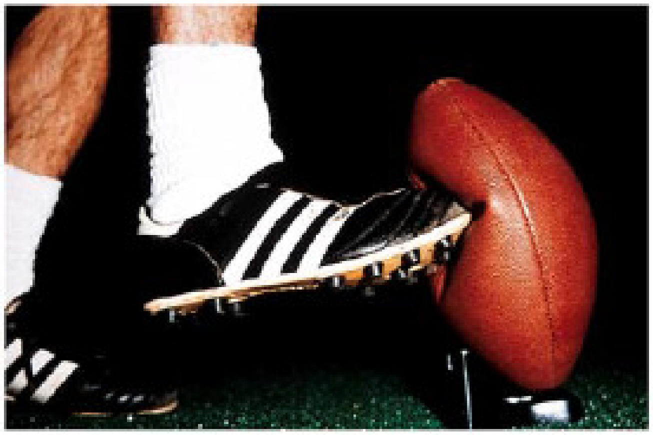
- Consideremos a **colisão de dois corpos a uma dimensão** (**choque frontal**). Sendo nula a resultante das forças externas há conservação do momento linear:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

As forças externas que possam atuar sobre o sistema são frequentemente muito menos intensas que as forças de interação durante a breve duração da colisão, podendo-se neste caso considerar que o momento linear total do sistema é o mesmo **imediatamente antes e imediatamente após** a colisão.

Para determinar as velocidades dos corpos após a colisão precisamos de uma **segunda relação**, que depende do tipo de colisão.





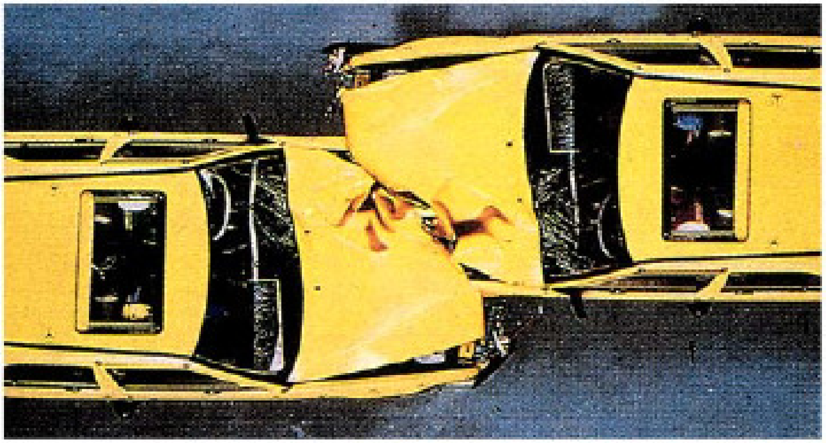
Colisões a uma dimensão

- Numa **colisão perfeitamente inelástica** as partículas permanecem unidas após a colisão. A segunda relação é a igualdade entre as velocidades após a colisão:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{CM}$$

que combinada com a conservação do momento linear do sistema permite obter:

$$(m_1 + m_2)\,v_{CM} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$



Um automóvel é projetado para colisões inelásticas, de modo que a sua estrutura absorva a maior parte possível da energia da colisão, protegendo desse modo os ocupantes. A energia absorvida é usada para produzir a deformação permanente do automóvel e não pode ser recuperada.

- Um astronauta em repouso e em situação de imponderabilidade agarra um livro que se desloca para ele à velocidade de 4 m/s. Determinar a velocidade após a colisão, a energia cinética inicial e final do sistema livro+astronauta e o impulso exercido pelo livro sobre o astronauta.

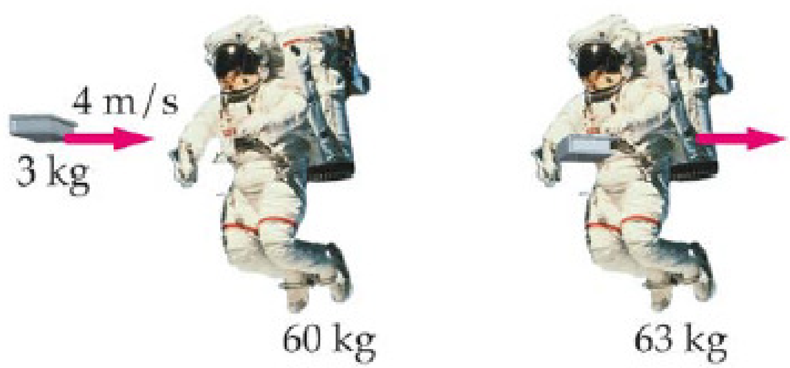
$$v_{cm} = \frac{m_l v_l + m_a v_a}{m_l + m_a} = 0{,}19 \text{ m/s}$$

$$K_i = \tfrac{1}{2} m_l v_l^2 = 24 \text{ J}$$

$$K_f = \tfrac{1}{2}(m_l + m_a) v_{cm}^2 = 1{,}14 \text{ J}$$

$$I_{l \to a} = \Delta p_a = m_a \Delta v_a = 11,4 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Nota: boa parte da energia cinética inicial é perdida por conversão em energia térmica.



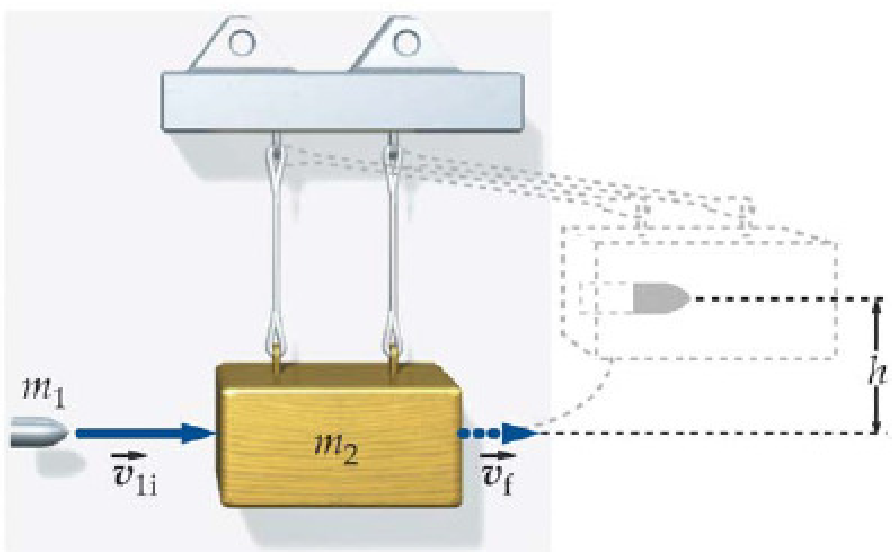
Colisões a uma dimensão

- Para medir a velocidade de uma bala usa-se habitualmente um pêndulo balístico. Determinar a velocidade inicial da bala em função da altura máxima atingida h.

$$\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2=(m_1+m_2)gh \quad \Rightarrow \quad v_f=\sqrt{2gh}$$

$$m_1 v_{1i}=(m_1+m_2)v_f$$

$$v_{1i}=\frac{m_1+m_2}{m_1}v_f=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$



Colisões a uma dimensão

- Numa **colisão elástica** a energia cinética total inicial é igual à energia cinética total final, o que corresponde à segunda relação de que necessitamos:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2$$

que combinada com a conservação do momento linear permite obter as velocidades finais das partículas. No entanto, a natureza quadrática da equação anterior complica geralmente a solução dos problemas com colisões elásticas.

O caso da **colisão elástica a uma dimensão entre dois corpos** pode ser tratado mais facilmente em função das velocidade relativas entre os dois corpos, antes e depois da colisão. Da equação anterior:

$$m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right) = -m_1\left(v_{1f}^2 - v_{1i}^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2f} + v_{2i}\right) = -m_1\left(v_{1f} - v_{1i}\right)\left(v_{1f} + v_{1i}\right)$$

e da conservação do momento linear :

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad \Leftrightarrow \quad m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right) = -m_1\left(v_{1f} - v_{1i}\right)$$

Dividindo as duas equações anteriores e reorganizando o resultado obtemos:

$$v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right)$$

A **velocidade de aproximação é igual à velocidade de afastamento**. Esta **não é uma equação geral**, sendo válida apenas no choque elástico a uma dimensão.

Colisões a uma dimensão

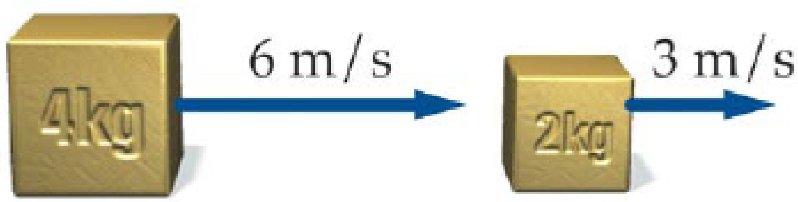
- Um bloco com 4 kg move-se com 6 m/s quando colide elasticamente com um bloco com 2 kg, que se move com 3 m/s na mesma direção e no mesmo sentido. Determinar as velocidades dos dois blocos após a colisão.

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad \Leftrightarrow \quad 2v_{1f} + v_{2f} = 15\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right) = 3\ \mathrm{m/s}$$

$$\left(2v_{1f} + v_{2f}\right) - \left(v_{2f} - v_{1f}\right) = 3v_{1f} = 12\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{1f} = 4\ \mathrm{m/s} \quad \mathrm{e} \quad v_{2f} = 7\ \mathrm{m/s}$$



Nota: Neste caso, após a colisão o primeiro bloco continua a mover-se no mesmo sentido em que se movia inicialmente. Pode este bloco ficar parado ou inverter o sentido do seu movimento? De que depende cada uma destas situações?

Colisões a uma dimensão

- A maioria das colisões fica, na realidade, entre os casos extremos da colisão perfeitamente elástica e da colisão perfeitamente inelástica.
- O **coeficiente de restituição** é uma medida da “elasticidade” de uma colisão, sendo definido pela razão entre as velocidades de afastamento e de aproximação:

$$e = \frac{v_{afastamento}}{v_{aproximação}} = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \iff \left(v_{2f} - v_{1f}\right) = -e\left(v_{2i} - v_{1i}\right)$$

Numa **colisão elástica** aquelas velocidades são iguais e portanto:

$$e_{elástica} = 1$$

Numa **colisão perfeitamente inelástica** a velocidade de afastamento é nula e:

$$e_{perfeitamente\ inelástica} = 0$$

Numa **colisão inelástica** o coeficiente de restituição terá um valor entre os dois valores extremos anteriores:

$$0 < e_{inelástica} < 1$$

Resumindo: Há vários tipos de colisões. Tendo em conta a variação da energia cinética do sistema podemos ter:

- Colisões elásticas, se a energia cinética do sistema de partículas se conservar: $E_{ci} = E_{cf}$.
- Colisões inelásticas, se houver dissipação de energia (a energia cinética não se conserva: $E_{ci} > E_{cf}$.

Numa colisão inelástica, a energia interna do sistema aumenta por aquecimento e/ou deformação.

Se, após a colisão, as partículas se moverem juntas, a colisão diz-se perfeitamente inelástica. Neste caso, a energia dissipada é máxima.

Colisão	Sistema	Energia cinética	
Elástica	conservativo	Conserva-se	$E_{ci} = E_{cf}$
Inelástica	dissipativo	Dissipação parcial	$E_{ci} > E_{cf}$
Perfeitamente inelástica	dissipativo	Dissipação máxima	$v_{1f} = v_{2f}$

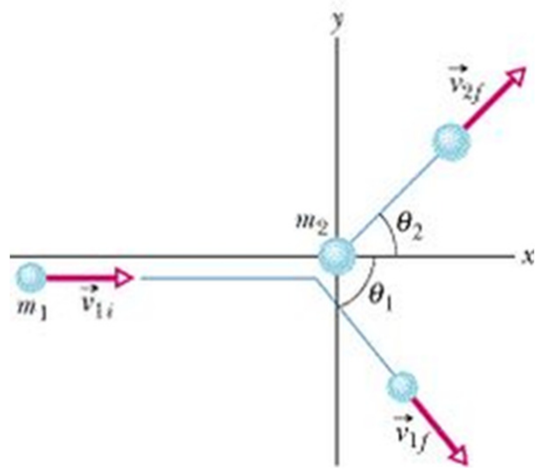
Tendo em conta a direção dos vetores velocidade das partículas, as colisões podem ser centrais ou oblíquas.

- Choque central: ocorre ao longo da linha que une os centros de massa dos corpos. A direção dos vetores velocidade não varia durante a colisão, mas o sentido pode mudar. Neste caso, trata-se de um problemas a $1D$.

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i} = -m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Choque oblíquo: ocorre quando a linha que une os centros dos corpos faz um ângulo $\boldsymbol{\alpha} < 90°$ com a direção da velocidade relativa dos corpos. Trata-se de um problema a $2D$.

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 \end{cases}$$

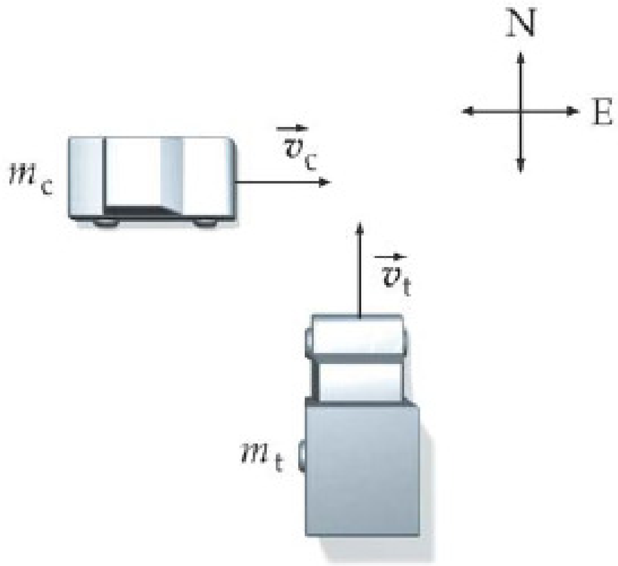


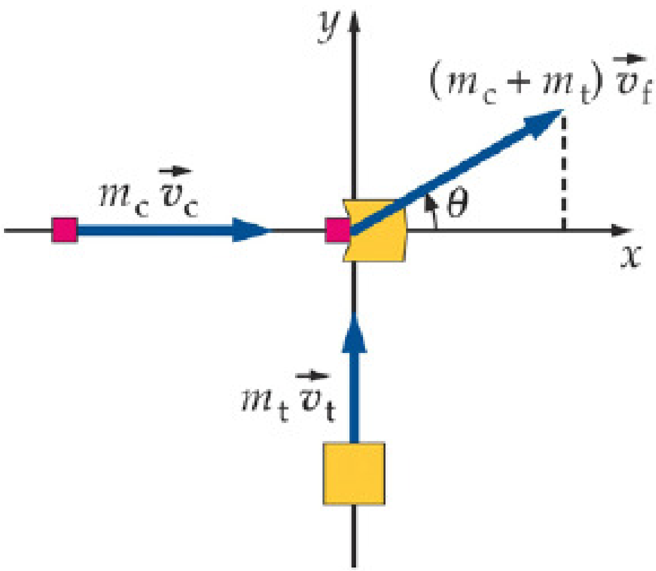
Colisões em duas ou três dimensões

- Um automóvel com 1200 kg e um veículo de transporte com 3000 kg movem-se em direções perpendiculares quando chocam num cruzamento, seguindo juntos após a colisão, numa direção $\theta = 59°$. Determinar a velocidade inicial do automóvel, sabendo que o camião seguia a 50 km/h no momento da colisão.

$$m_c\vec{v}_c + m_t\vec{v}_t = (m_c + m_t)\vec{v}_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ox: \quad m_c v_c + 0 = (m_c + m_t) v_f \cos\theta \\ oy: \quad 0 + m_t v_t = (m_c + m_t) v_f \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\frac{m_t v_t}{m_c v_c} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{m_t v_t}{m_c\,\text{tg}\,\theta} = 75{,}1\ \text{km/h}$$





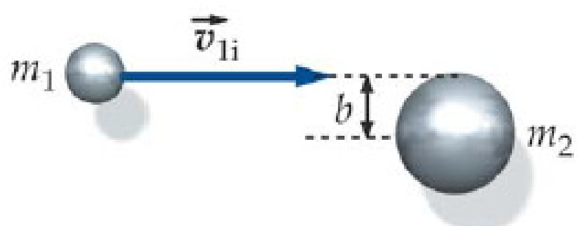
Colisões em duas ou três dimensões

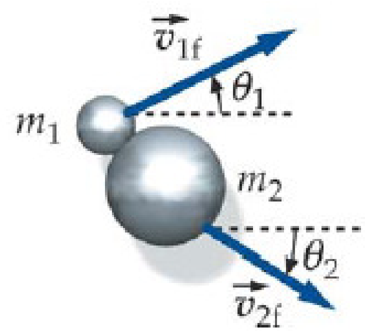
- As **colisões elásticas em duas ou três dimensões** são mais complexas que as analisadas anteriormente. Para simplificar a análise vamos apenas considerar o **choque oblíquo de duas partículas estando uma inicialmente em repouso**.
- A distância ***b*** entre os centros, medida na perpendicular à direção inicial do movimento, é designada por **parâmetro de impacto**. A conservação do momento linear total fornece a seguinte equação:

$$m_1\vec{v}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

As três velocidades estão num mesmo plano. Conhecendo a velocidade inicial é necessário determinar quatro incógnitas (as componentes das velocidades):

  - Da equação da conservação do momento linear obtemos duas equações escalares..
  - A conservação da energia cinética total fornece a terceira equação.
  - A quarta relação depende do parâmetro de impacto e do tipo de interação entre os corpos. Na prática ela é em geral obtida experimentalmente medindo um dos ângulos.





Colisões em duas ou três dimensões

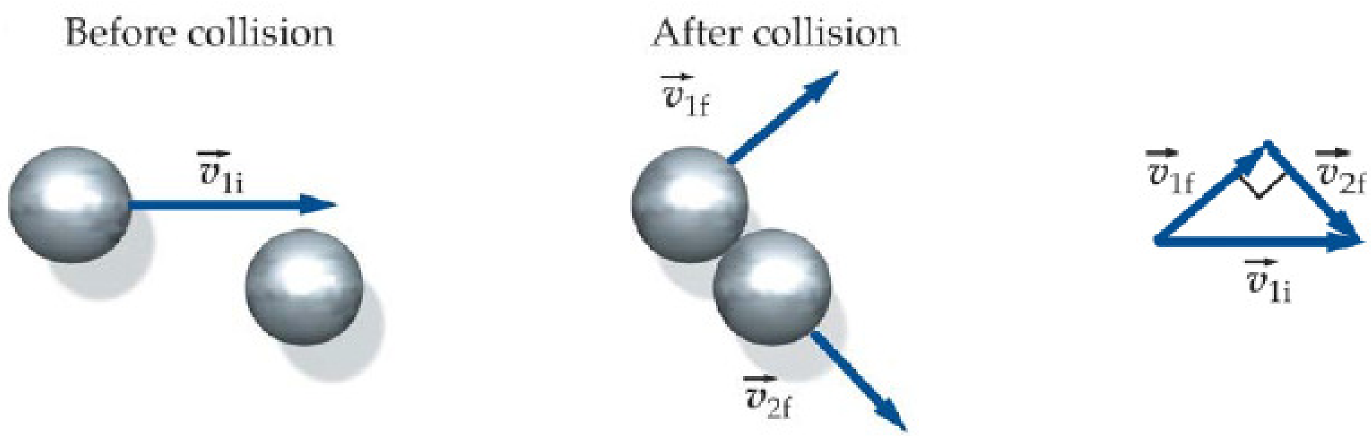
- Um caso interessante da **colisão elástica oblíqua** é quando **os corpos têm a mesma massa e um deles se encontra inicialmente em repouso**. A conservação do momento linear permite obter:

$$m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

A conservação da energia cinética permite obter:

$$\tfrac{1}{2}mv_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}mv_{2f}^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

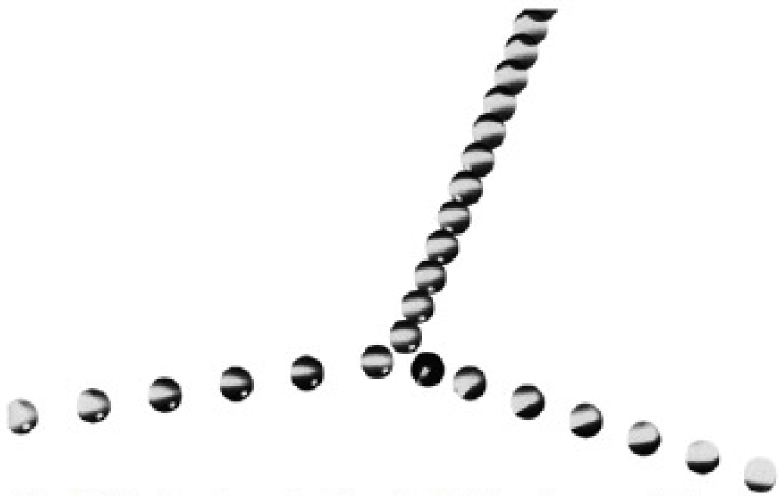
As três velocidades formam portanto um triângulo rectângulo, ou seja, **neste caso particular as velocidades finais são perpendiculares**.



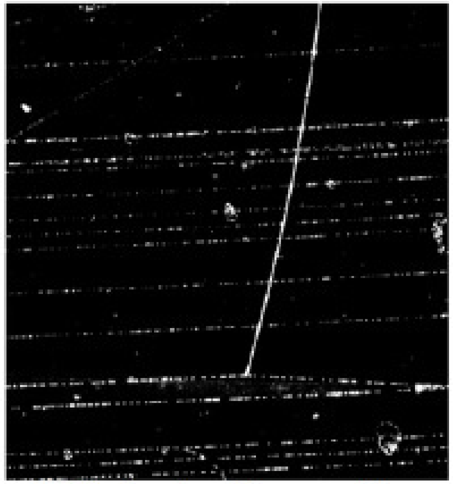
Colisões em duas ou três dimensões

- A equação usada para definir o coeficiente de restituição no choque frontal, também pode ser usada no caso do choque oblíquo, mas desde que seja aplicada apenas às projeções das velocidades relativas segundo a linha dos centros.

- As figuras ilustram dois exemplos de colisões elásticas oblíquas entre corpos com a mesma massa, encontrando-se um deles inicialmente em repouso. Em ambos os casos as velocidades finais são perpendiculares entre si. A ligeira curvatura da trajetória dos protões deve-se à ação de um campo magnético.



Colisão de duas bolas de bilhar (sem efeitos)



Colisão de dois protões