Numerische Mathematik
Leistungsnachweis 1
Janike Katter, Sandra Schellenberger
IC3

1. Leistungsnachweis zur Numerischen Mathematik

Aufagbe 1:

Intervall $[0,3]$

$$S(x) = \begin{cases} 4 + k_1 x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 & \text{für } x \in [0,1] \\ 1 - \frac{4}{3}(x-1) + k_2(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 & \text{für } x \in [1,2] \\ 1 + k_3(x-2) + (x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 & \text{für } x \in [2,3] \end{cases}$$

Gesucht: k_1, k_2, k_3

1. Ableitung:

$$s_0'(x) = k_1 + 4x - \frac{1}{2}x^2$$
$$S_1'(x) = -\frac{4}{3} + 2k_2(x-1) - 0{,}5(x-1)^2$$
$$s_2'(x) = k_3 + 2(x-2) - 0{,}5(x-2)^2$$

2. Ableitung:

$$S_0''(x) = 4 - 1x$$
$$S_1''(x) = 2k_2 - 1(x-1)$$
$$S_2''(x) = 2 - 1(x-2)$$

3. Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} S_0'''(x) &= -1 \\ S_1'''(x) &= -1 \\ S_2'''(x) &= -1 \end{aligned}\right\} \text{Not-a-Knot Bedingungen erfüllt!}$$

$h_0 = 1-0 = 1$, $h_1 = 2-1 = 1$, $h_2 = 3-2 = 1$ (Intervallbreiten)

Aus den Not-a-Knot Bedingungen folgt:

$$c_0 = \frac{(h_0 + h_1)c_1 - h_0 c_2}{h_1}$$

Unsere Werte eingesetzt:

$$2 = \frac{(1+1)k_2 - 1 \cdot 1}{1} \Leftrightarrow 2 = 2k_2 - 1 \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{3}{2}}$$

Weil der Spline eine stetige Funktion ist, müssen die 1. Ableitungen für die Intervallgrenzen übereinstimmen.

$S_0'(1) \overset{!}{=} S_1'(1)$:

$$k_1 + 4 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}$$
$$\boxed{k_1} = -\frac{4}{3} - 4 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{29}{6}}$$

$S_1'(2) \overset{!}{=} S_2'(2)$:

$$-\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{k_3 = \frac{7}{6}}$$

Unsere Lösung:

$$k_1 = \frac{29}{6}, \quad k_2 = \frac{3}{2}, \quad k_3 = \frac{7}{6}$$