Numerische Mathematik
Leistungsnachweis 1
Janike Katter, Sandra Schellenberger
IC3

1. Leistungsnachweis zur Numerischen Mathematik

Aufagbe 1:

Intervall($[0,3]$

$$S(x) = \begin{cases} 4 + k_1 x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 & \text{für } x \in [0,1] \\ 1 - \frac{4}{3}(x-1) + k_2(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 & \text{für } x \in [1,2] \\ 1 + k_3(x-2) + (x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 & \text{für } x \in [2,3] \end{cases}$$

Gesucht: k_1, k_2, k_3

1. Ableitung:

$s_0'(x) = k_1 + 4x - \frac{1}{2}x^2$

$s_1'(x) = -\frac{4}{3} + 2k_2(x-1) - 0{,}5(x-1)^2$

$s_2'(x) = k_3 + 2(x-2) - 0{,}5(x-2)^2$

2. Ableitung:

$s_0''(x) = 4 - 1x$

$s_1''(x) = 2k_2 - 1(x-1)$

$s_2''(x) = 2 - 1(x-2)$

3. Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} s_0'''(x) &= -1 \\ s_1'''(x) &= -1 \\ s_2'''(x) &= -1 \end{aligned}\right\} \text{Not-a-Knot Bedingungen erfüllt!}$$

$h_0 = 1-0 = 1$, $h_1 = 2-1 = 1$, $h_2 = 3-2 = 1$ (Intervallbreiten)

Aus den Not-a-Knot Bedingungen folgt:

$$c_0 = \frac{(h_0 + h_1)c_1 - h_0 c_2}{h_1}$$

Unsere Werte eingesetzt:

$$2 = \frac{(1+1)k_2 - 1 \cdot 1}{1} \Leftrightarrow 2 = 2k_2 - 1 \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{3}{2}}$$

Weil der Spline eine stetige Funktion ist, müssen die 1. Ableitungen für die Intervallgrenzen übereinstimmen.

$s_0'(1) \overset{!}{=} s_1'(1)$:

$k_1 + 4 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}$

$\boxed{k_1} = -\frac{4}{3} - 4 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{29}{6}}$

$s_1'(2) \overset{!}{=} s_2'(2)$:

$-\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{k_3 = \frac{7}{6}}$

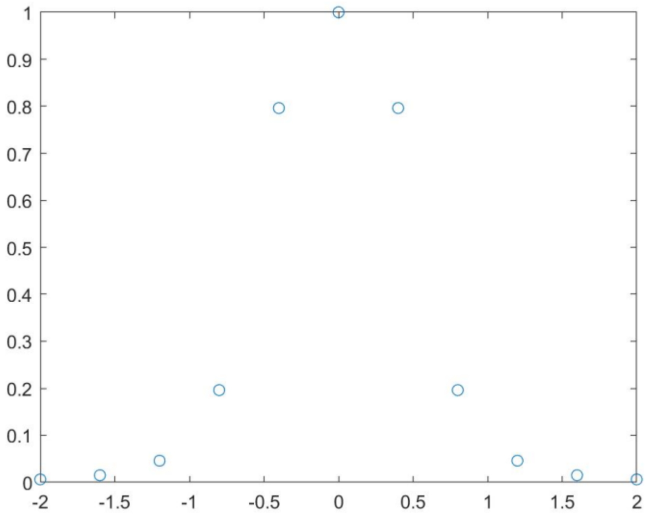
Unsere Lösung:

$k_1 = \frac{29}{6}$, $k_2 = \frac{3}{2}$, $k_3 = \frac{7}{6}$

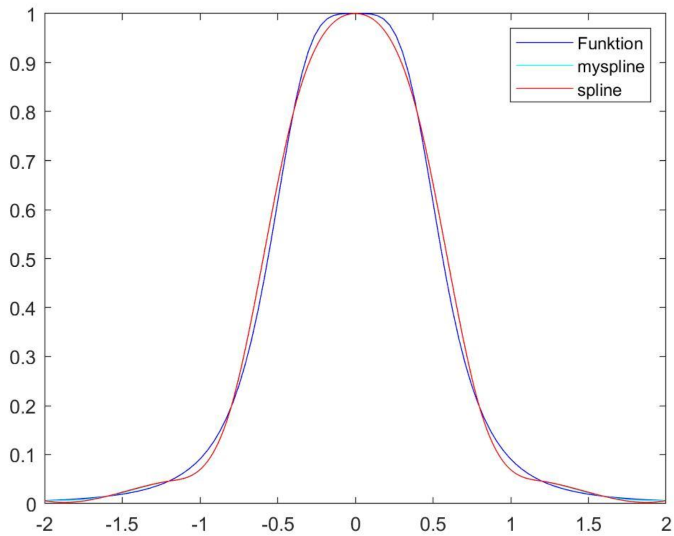
Numerische Mathematik
Leistungsnachweis 1
Janike Katter, Sandra Schellenberger
IC3

Aufgabe 2e:

Wir haben Punkte gegeben. Die Punkte liegen folgendermaßen im Koordinatensystem:



Die Annäherung mit dem Spline, sowohl mit unserer eigenen Funktion als auch mit der Funktion von Matlab wird die originale Funktion ziemlich genau angenähert:



Die myspline und spline Funktionen sind nur an den Rändern unterschiedlich, sonst liegen sie auf ein ander.

Die Originalfunktion ist

$$f(x) = \frac{1}{1 + 10 * x^4}$$

Mit dem Newtonpolynom würden wir eine Funktion des Grades 10 als Näherung erhalten, was sehr stark von f(x) abweicht. Auch ist das Newtonpolynom über das ganze Intervall [-2,2] definiert, während der Spline immer abschnittweise ermittelt wird und in jedem Abschnitt vom Grad 3 ist.

Daraus ergibt sich, dass die Annäherung durch einen Spline in diesem Fall besser geeignet ist als die Annäherung mit dem Newtonpolynom.

3a)

$$f'(x) \approx \frac{4 * f(x0 + 3 * h) + 5 * f(x0) - 9f(x0 - 2 * h)}{30 * h}$$

Taylorentwicklung

$$f(x0 + h) = f(x0) + f'(x0) * h + \frac{f''(z)}{2} * h^2$$

Einsetzen:

$$e(h) = \frac{4 * (f(x0) + f'(x0) * 3 * h + \frac{f''(x0)}{2} * (3 * h)^2 + \frac{f'''(z)}{6} * (3 * h)^3) + 5 * f(x0) - 9((f(x0) - f'(x0) * 2 * h + \frac{f''(x0)}{2} * (2 * h)^2 - \frac{f'''(z)}{6} * (2 * h)^3)}{30 * h} - f'(x0)$$

$$e(h) = \frac{4 * f(x0) + 12 * h * f'(x0) + 18 * h^2 * f''(x0) + 18 * h^3 * f'''(z) + 5 * f(x0) - 9 * f(x0) + 18 * h * f'(x0) - 18 * h^2 * f''(x0) + 12 * h^3 * f'''(z) - 30 * h * f'(x0)}{30 * h}$$

$$e(h) = \frac{4 * f(x0) + 5 * f(x0) - 9 * f(x0) \quad + 12 * h * f'(x0) + 18 * h * f'(x0) - 30 * h * f'(x0) \quad + \quad 18 * h^2 * f''(x0) - 18 * h^2 * f''(x0) \quad + \quad 18 * h^3 * f'''(z) + 12 * h^3 * f'''(z)}{30 * h}$$

$$e(h) = \frac{30 * h^3 * f'''(z)}{30 * h} = f'''(z) * h^2 = O(h^2)$$

3b)

$$f'(x0) \approx \frac{4 * f(x0 + 2 * h) + 5 * f(x0) - 9f(x0 - 3 * h)}{30 * h}$$

$$e(h) = \frac{4 * (f(x0) + f^{'}(x0) * 2 * h + \frac{f''(z)}{2} * (3 * h)^2 + \frac{f'''(z)}{6} * (2 * h)^3) + 5 * f(x0) - 9((f(x0) - f^{'}(x0) * 3 * h + \frac{f''(z)}{2} * (2 * h)^2 - \frac{f'''(z)}{6} * (3 * h)^3)}{30 * h} - f^{'}(x0)$$

$$e(h) = \frac{4 * f(x0) + 8 * h * f'(x0) + 8 * h^2 * f''(x0) + 1\frac{16}{3} * h^3 * f'''(z) + 5 * f(x0) - 9 * f(x0) + 27 * h * f'(x0) - \frac{81}{2} * h^2 * f''(x0) + \frac{81}{2} * h^3 * f'''(z) - 30 * h * f'(x0)}{30 * h}$$

$$e(h) = \frac{5 * h * f'(x0) - \frac{65}{2} * h^2 * f''(x0) + \frac{275}{6} * h^3 * f'''(z)}{30 * h}$$

$$e(h) = \frac{5 * f'(x0) - \frac{65}{2} * h * f''(x0) + \frac{275}{6} * h^2 * f'''(z)}{30}$$

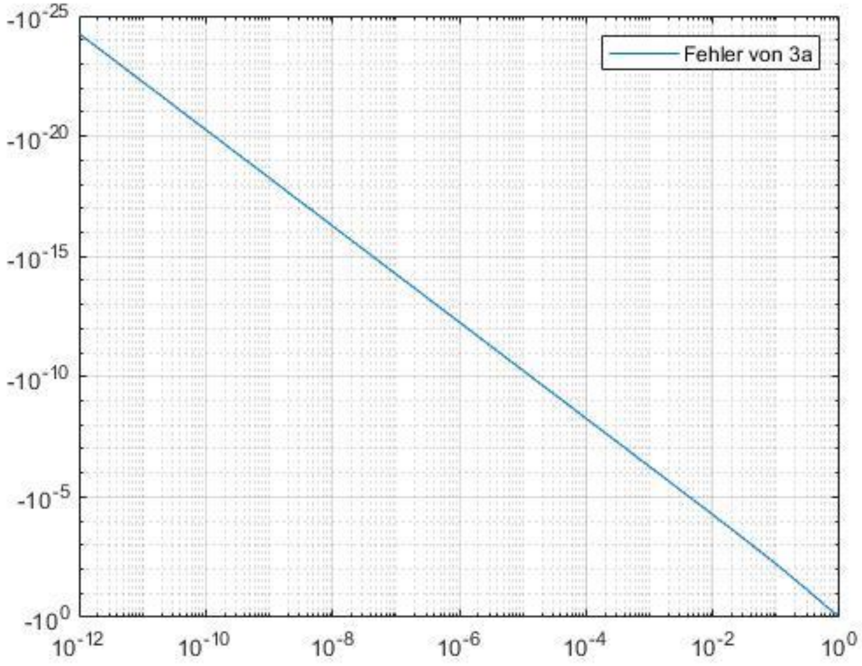
$$e(h) = \frac{5 * f'(x0) - \frac{65}{2} * h * f''(x0) + \frac{275}{6} * h^2 * f'''(z)}{30} \div 5$$

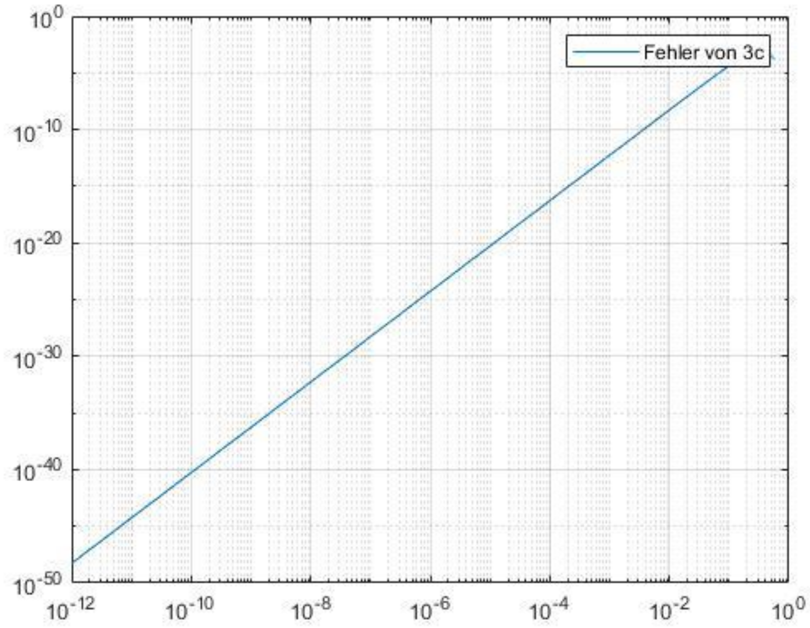
$$e(h) = \frac{f'(x0) - \frac{13}{2} * h * f''(x0) + \frac{55}{6} * h^2 * f'''(z)}{6} = O(1)$$

Näherungsformel von Aufgabe a) ist besser geeignet, da sich bei Aufgabe b) nicht so viel wegfällt. Das liegt an den Vorfaktoren die bei b) keine gemeinsamen Vielfachen haben. Bei a) sind jeweils 2 Vielfache von 2 und 3 in 2 verschiedenen Summanden. Bei b) sind die Vielfachen von 2 und 3 im selben Summanden.

Außerdem ist bei b) der Fehler konstant und bei a) h^2, das bedeutet, dass je Größer das h wird umso kleiner wird der Fehler.

3c)





3a) hat Ordnung O(h^2), was man auch in der Graphik gut sehen z. B an dem Punkt (10^-5,10^-10). Das bedeutet, wenn man x = 10^-5 nimmt und das quadriert kommt für y = 10^-10. Der Graph in der Graphik ist stellt somit h^2 dar.

3c) hat Ordnung O(h^4), das sieht man vor allem im Punkt (10^-10, 10^-40). (10^-10)^4 ist 10^-40. Das bedeutet der Graph von 3c) ist h^4.