January 8

1 裂项相消法

1. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_2=2, S_6=12$，记 T_n 为 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和，则 $T_8=$ ( )

   A. $\dfrac{9}{5}$　B. $\dfrac{116}{45}$　C. $\dfrac{14}{5}$　D. $\dfrac{232}{5}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $2a_n\cdot b_n=1$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项的和为 ( )

   A. $\dfrac{50}{51}$　B. $\dfrac{1}{50}$　C. $\dfrac{50}{101}$　D. 50

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 $a_{n+1}^2-a_n^2=2a_{n+1}-2a_n+n+1$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{(a_n-1)^2}\right\}$ 的前 2025 项和为 ( )

   A. $\dfrac{2025}{2026}$　B. $\dfrac{2025}{1013}$　C. $\dfrac{2026}{2025}$　D. $\dfrac{2025}{1012}$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 ( )

   A. $a_5=6$

   B. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

   C. S_4, S_8, S_{12} 构成等差数列

   D. 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$ 前 200 项和为 $\dfrac{50}{101}$

5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_2=4, S_7=42$，则下列说法正确的是 ( )

   A. $a_6=7$

   B. $\{a_n+n\}$ 为递增数列

   C. $S_n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n$

   D. $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 4 项和为 $\dfrac{5}{21}$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_n=\cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^\circ\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)^\circ$, 则 $S_{90}=$ ________ 。

7. 已知函数 $f(x)=x^2+3x$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n)$，记数列 $\left\{\dfrac{2}{a_nf'\left(\frac{n}{2}\right)}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则使得 $T_n>\dfrac{11}{36}$ 成立的 n 的最小值为 ________ 。

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$, 且数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $S_{20}=$ ________ 。

9. 在正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 且 $a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_3=8, a_3=n(a_{n+1}-1)$.

（1） 证明: $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ 是常数列;

（2） 设 $b_n=\dfrac{1}{3S_n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

11. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}-a_n=2n+1$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 求 $\left\{\dfrac{\sqrt{a_{n+2}}-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

12. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均大于 1, 其前 n 项和为 S_n, 且 $a_2=4$, $S_3=14$,

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\log_2 a_k$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}, n^2a_n=S_n$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若 $b_n=a_{n+1}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求证: $T_n<\dfrac{1}{2}$.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，前 n 项和为 S_n，且 $S_5=15, a_1, a_3, a_9$ 成等比数列。

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 证明: $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<2(n\in N^*)$.

2 错位相减法

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{3n}-\dfrac{2}{3}\right)S_n$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{100}S_i=$ （　　）

A. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{203}{2\times 3^{100}}$　B. $\dfrac{9}{4}-\dfrac{197}{4\times 3^{99}}$　C. $\dfrac{9}{4}-\dfrac{203}{4\times 3^{99}}$　D. $\dfrac{9}{4}-\dfrac{203}{4\times 3^{100}}$

16. $19\times\dfrac{1}{2}+17\times\dfrac{1}{2^2}+15\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+1\times\dfrac{1}{2^{10}}=$ （　　）

A. $18+\dfrac{3}{2^{11}}$　B. $17+\dfrac{3}{2^{11}}$　C. $18+\dfrac{3}{2^{10}}$　D. $17+\dfrac{3}{2^{10}}$

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=2$, 且对任意 $n\in N^*$ 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2+\dfrac{2}{n}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项和为（　　）

A. $30\times 2^{31}+2$　B. $31\times 2^{31}+2$　C. $29\times 2^{30}+2$　D. $29\times 2^{31}+2$

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{n}{2^n}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ ( )

A. $\dfrac{2^n-n-1}{2^n}$ B. $\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$ C. $\dfrac{2^n-n+1}{2^n}$ D. $\dfrac{2^{n+1}-n+2}{2^n}$

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=\dfrac{n^2+n}{2}(n\in\mathbb{N}^*)$, 则 ( )

A. $a_1=1$ B. $a_n=\dfrac{n+1}{2^n}$ C. $\{a_n\}$ 为递减数列 D. $S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

20. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=2a_n+1$ ，则 ( )

A. $a_1=-1$

B. $a_n<a_{n+1}$

C. 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为等比数列

D. 数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 则 $T_n>-4$

21. 若 $1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+99\times2^{99}=A\times2^{100}+B$, 则 $A+B=$ ________ 。

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且点 (a_n,S_n) 总在直线 $y=2x-1$ 上, 则数列 $\{n\cdot a_n\}$ 的前 9 项和 $T_9=$ ________ 。

23. 已知数列 $\{a_n\},a_1=16,a_n=4a_{n-1}+3\cdot4^n,(n\geqslant2)$. 令 $b_n=\dfrac{a_n}{4^n}$,

（1） 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求出通项公式;

（2） 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,a_{n+1}=a_n+2^n+1$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若 $b_n=(2n-1)a_n-2n^2+n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_4=7,a_7=13$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设 $b_n=C_n^1+C_n^2\times2+C_n^3\times2^2+\cdots+C_n^n\times2^{n-1},n\in N^*$，且 $c_n=a_n(2b_n+1)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

26. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，满足 $a_1=1$ ，且 a_1,a_2,a_7 成等比数列.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设 $b_n=(a_n+3)\cdot2^{n-1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

27. 已知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列，且 $a_n-b_n=2$ ，$a_1=b_2=3$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（2） 求数列 $\left\{\left(\dfrac{a_n-1}{2}\right)\cdot2^{\frac{b_n-1}{2}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

28. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$ ，$a_1\neq a_2$，且 $3a_2,2a_3,a_4$ 成等差数列.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若 $b_n=\dfrac{n}{a_n}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

29. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3, a_{n+1}=\dfrac{na_n}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}$

（1） 证明: $\{na_n\}$ 为等差数列并求 a_n;

（2） 设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(x)$.

（3） 求 $f'(-3)$

30. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3$，且对任意正整数 $n\geqslant 3$ 有 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1, b_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$

（1） 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

（2） 设 $c_n=\dfrac{2n-1}{b_n}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n

（a）求 S_n

（b）若不等式 $(-1)^n\lambda<S_n+\dfrac{n}{2^{n-2}}$ 对任意的正整数 n 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

3 倒序相加法

31. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{9^x+3}$.

（1） 求证: 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 对称;

（2） 求 $S=f(-2022)+f(-2021)+\cdots+f(0)+\cdots+f(2022)+f(2023)$ 的值.

32. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，且 $a_{10}=1$，

（1） 计算 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的值;

（2） 用书本上推导等差数列前 n 项和的方法, 求 $f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{18})+f(a_{19})$ 的值.

33. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知: $a_1=1$, $S_{n+1}a_n-S_na_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}a_n(n\in\mathbb{N}^*)$.

（1） 求证: 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 求和: $a_1C_n^0+a_2C_n^1+a_3C_n^2+\cdots+a_{n+1}C_n^n$.

34. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=n(n\in\mathbb{N}^*)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{a_n+2^{50}}$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 求数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n ;

（3） 求数列 $\{b_n\}$ 的前 99 项的和 T_{99} 的值.

4 分组与并项求和

35. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2n-1, & n\text{ 为奇数}\\ 2^n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_{10}=$ ( )

A. 107　B. 1409　C. 1414　D. 112

36. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}2, & n=1\\ 2n-1, & n\geqslant 2\end{cases}$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=$ ( )

A. 100　B. 101　C. 102　D. 103

37. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n, 且满足 $a_1=3, a_{2k}=8a_{2k-1}, a_{2k+1}=\frac{1}{2}a_{2k}, k\in N^*$, 则 $S_{2025}=$ ( )

A. $4^{2025}-1$　B. $3\times 2^{2025}-3$　C. $3\times 4^{1013}-9$　D. $5\times 4^{1012}-2$

38. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+\frac{n}{2^{n-1}}=2a_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}$，$a_1=\frac{5}{2}$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_{100} 的整数部分为 ( )

A. $2^{101}-1$　B. 2^{101}　C. $2^{101}+1$　D. $2^{100}+1$

39. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足，$a_1=0$ ，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+(\sqrt{3})^{n+1},\\ 3a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$ 设 $b_n=a_{2n}$ 记数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 S_{2n}，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则下列结论正确的是 ( )

A. $a_3=9$　B. $b_n=n\cdot 3^n$

C. $T_n=\frac{(n-1)\cdot 3^{n+1}+6}{2}$　D. $S_{2n}=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$

40. 已知数列 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2n-1}, n=2k-1, k\in N^*\\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n=2k, k\in N^*\end{cases}$ 则下列说法错误的是 ( )

A. 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 为等差数列　B. $\{a_n\}$ 是单调递减数列

C. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 20 项和为 -698860　D. 若 $a_m a_{m+1}=a_{m+2}$, 则 $m=2$

41. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2, n=2k-1, k\in N^*\\ 2a_n, n=2k, k\in N^*\end{cases}$, 则满足 $2025\leqslant S_m\leqslant 3000$ 的正整数 m 的所有取值集合为 ________ 。

42. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & n\text{为奇数}\\ a_n+2, & n\text{为偶数}\end{cases}$, $a_1=0$, 则 $a_8=$ ________ ；设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $S_{2024}=$ ________ 。(第二个空结果用指数幂表示)

43. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 其前 n 项和为 $S_n, a_1=1$, 且 $S_3+a_3, S_5+a_5, S_4+a_4$ 成等差数列.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设 $b_n=\begin{cases} a_n, & n=2k-1 \\ \dfrac{(3n+5)a_n}{(n-1)(n+1)}, & n=2k \end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

44. 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=1$, $S_3=6$, 且数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设若 $b_n=\begin{cases} a_n, & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{1}{a_n a_{n+2}} & n\text{为偶数}, \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

45. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=2, S_6=S_5+7$.

（1） 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若 $b_n=2^{a_n}$ ，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

46. 记 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $2S_n=a_n^2+a_n$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 设数列 $b_n=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n a_{n+2}}, & n\text{为奇数} \\ a_n+1, & n\text{为偶数} \end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

47. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=4\times 3^n$.

（1） 求证: $\{a_n-3^n\}$ 是等比数列;

（2） 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

（3） 令 $b_n=\dfrac{n^3}{a_n-2\times(-1)^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的最大项.

48. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $a_4=8, S_3=12$.

（1） 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2） 若等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n，且 $b_1b_2b_3=8, T_2=S_2$，设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n.

49. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=1$，且 S_6, S_8, S_7 成等差数列。

（1） 求 a_n;

（2） 设 $b_n=\begin{cases} n, & n\text{ 为偶数} \\ a_n, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$，$T_n$ 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 T_{2n};

（3） 设 $c_n=n^2\cdot 2^n\cdot|a_n|$, Q_n 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项的积, 求证: $Q_n<2^n\cdot \mathrm{e}^{n^2+n}$.

50. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, T_n 为数列 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $2S_n+a_n=3^n$.

（1） 证明: $\{4a_n-3^n\}$ 为等比数列;

（2） 求 S_n;

（3） 求 T_n.