МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математический анализ
2 семестр

Учебно-методическое пособие
Для студентов очно-заочной и заочной форм обучения
Институты РТС, ИТ, Электроники

Москва

МИРЭА

2016

Составители: Т.Р. Игонина, О.А. Малыгина, И.Н. Руденская, Н.С. Чекалкин

Введение

Пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 Московского технологического университета (МИРЭА) для студентов очно-заочной и заочной форм обучения институтов РТС, Информационных технологий и Электроники. Пособие содержит список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена (зачета) по курсу математического анализа 2-го семестра, перечень рекомендуемой литературы. Приведены примерные варианты контрольных работ по курсу, образец билета, а также типовой расчет. Решение заданий типового расчета обеспечит студенту полноценное усвоение содержания курса.

Методические указания

Содержание курса математического анализа 2-го семестра отражено в предлагаемом списке теоретических вопросов.

Теоретические вопросы по курсу

1. Определение первообразной функции. Теорема о множестве первообразных. Неопределенный интеграл. Свойство линейности интеграла. Таблица основных интегралов.
2. Методы интегрирования функций (замена переменной, интегрирование по частям). Интегрирование рациональных функций, тригонометрических выражений, иррациональностей. Примеры.
3. Определение определенного интеграла. Формулировка теоремы о существовании определенного интеграла от кусочно-непрерывной функции. Свойства определенного интеграла (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств, оценка интеграла и др.).
4. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Приложения (вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения и др.). Примеры.
5. Определение несобственных интегралов от функций на бесконечном интервале и от неограниченных функций. Основные свойства, аналог формулы Ньютона-Лейбница. Понятие сходимости. Примеры.
6. Определение двойного интеграла, его геометрический смысл. Свойства интеграла (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств и др.). Сведение двойного интеграла к повторному интегрированию.
7. Двойной интеграл в полярных координатах. Приложения двойного интеграла. Примеры.

8. Определение тройного интеграла, его свойства, вычисление в декартовых координатах. Примеры.

9. Цилиндрические и сферические координаты. Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах. Приложения тройного интеграла. Примеры.

10. Определение криволинейного интеграла по длине дуги, его свойства, приложения.

11. Определение криволинейного интеграла по координатам, его свойства. Формула Грина.

12. Скалярное поле, его производная по направлению. Градиент скалярного поля, его свойства. Применение градиента для вычисления вектора единичной нормали к поверхности.

13. Дивергенция и ротор векторного поля, их свойства.

14.* Задача о количестве жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени. Определение потока векторного поля. Теорема Остроградского, ее векторная запись.

15.* Линейный интеграл и циркуляция векторного поля, теорема Стокса, ее векторная запись. Примеры.

Для успешного усвоения содержания курса математического анализа 2-го семестра рекомендуется выполнить типовые задания, представленные в настоящем пособии.

Для *очно-заочной формы обучения* по курсу рекомендуется проведение 2-х контрольных работ:

- *контрольная работа №1* «Методы интегрирования. Определенный интеграл»,
- *контрольная работа №2* «Несобственный интеграл, двойной интеграл, тройной интеграл».

Для *заочной формы обучения* по курсу рекомендуется проведение контрольной работы №1.

По курсу выполняется типовой расчет. Преподаватель назначает каждому студенту группы номер варианта. Студент в соответствии с номером варианта выполняет задания из пособия в отдельной тетради. Решение каждой задачи должно быть подробным с указанием использованных теоретических положений. Содержание типового расчета (номера задач) указываются преподавателем из приведенного ниже списка основных задач курса.

Выполнение типового расчета – обязательное условие допуска студента на экзамен (зачет).

Приведем типовые образцы контрольных работ по курсу и экзаменационных (зачетных) билетов.

Примерный образец контрольной работы по теме
«Методы интегрирования. Определенный интеграл»

Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}+3+\sqrt{x}}{x}dx$; 4) $\int arctgx\, dx$

5) $\int_0^1 xe^{3x}\, dx$; 6) $\int \frac{(7x+5)dx}{x^2+5x+6}$; 7) $\int \frac{(6x^2+5x+2)dx}{x\ +4}$; 8) $\int (\sin^2 5x - \cos^2 x)\, dx$

Примерный образец контрольной работы по теме
«Несобственный интеграл, двойной интеграл, тройной интеграл»

1. Исследовать несобственный интеграл на сходимость. Если интеграл сходится, то вычислить его: $\int_0^{+\infty} xe^{-9x} dx$.
2. Расставить пределы интегрирования и изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где область D ограничена кривыми: $y = 1/x$, $y=4$, $y=x$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y=-x$ и параболой $y=2x-x^2$, с помощью двойного интеграла.
4. Вычислить объем пирамиды с помощью тройного интеграла: $x+2y+z=4$, $y=0$, $x=0$, $z=0$.

Примерный вариант экзаменационного (зачетного) билета

1. Вычислить:

а) $\int \frac{(arcctgx)^5+x-3}{1+x^2}dx$; б) $\int \ln x dx$; в) $\int \frac{4x+7}{(1+x)(x+3)}dx$; г) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

2. Исследовать несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-6x} dx$ на сходимость. Если интеграл сходится, то вычислить его.
3. Вычислить площадь области, ограниченной параболой и прямой: $y = x^2+2x$, $y = x+2$.

4.С помощью тройного интеграла найти объем пирамиды, ограниченной плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+3z=12$.

5. Найти градиент скалярного поля $U=\arcsin^3 5x+xy^6z^7+2z$.

6. Формула Грина. Вычислить с помощью формулы Грина: $\int\limits_L 3xydx+5x^2dy$, где $L=AB\cup BC\cup CA$, AB: $y=x^2$, $0\le x\le 1$, BC: $y=1$, CA: $x=0$.

7.* Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности σ: $2z=4-x^2-y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (первый октант).

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач контрольной работы или билета может быть изменено.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С, Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. М., 2001.

2. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика. Том 1- 4. М.: URSS, 2005.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 и 2. М.: Дрофа, 2004.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Г., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. М.: Физматлит, 2003.

6. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Лань, 2005.

7.Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис Пресс, 2004.

9. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А., др. Математический анализ (2 семестр). Учебно-методическое пособие. МИРЭА, 2014.

10. Гущина Е.Н., Игонина Т.Р., Евсеева О.А., Кольцова Е.В., Кузнецова Е.Ю., Малыгина О.А., Морозова Т.А., Немировская-Дутчак О.Э., Новикова А.И., Приходько В.Ю., Руденская И.Н., Татаринцев А.В., Унучек С.А., Фаркова Н.А., Чекалкин Н.С. Календарно-тематические планы для очно-заочного и заочного отделений факультетов РТС, Электроники, Информационных технологий. М.: МИРЭА. 2014. 64 с. // электронное издание. Рег. Свидетельство № 35184.

Основные типы задач по курсу математического анализа 2-ой семестр

Материал данного раздела содержит две части:

- *часть 1* «Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл и его приложения»;
- *часть 2* «Несобственные интегралы. Двойной и тройной интегралы, приложения. Элементы теории поля».

Часть 1

Неопределенный интеграл. Методы интегрирования Определенный интеграл и его приложения

Задачи части 1 составляют основу *контрольной работы №1*. Для успешной сдачи контрольной работы рекомендуется прорешать все задачи части 1. Задачи, идентичные задачам этой части, включены в экзаменационный (зачетный) билет.

Задачи по теме «Неопределенный интеграл. Методы интегрирования»

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл с помощью таблицы интегралов и свойства линейности. Сделать проверку с помощью дифференцирования.

1.1 $\int\left(9x^7-17e^x+\frac{1}{9x^2-16}\right)dx$

1.2 $\int\left(5\sqrt{x^3}+\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{6}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx$

1.3 $\int\left(3x\sqrt{x}-13\cos x+\frac{1}{8-2x^2}\right)dx$

1.4 $\int\left(\frac{2x+7\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}-6\sin x\right)dx$

1.4 $\int\left(\frac{19}{x^3}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{7}{2}5^x\right)dx$

1.6 $\int\left(\frac{x^2-6}{x^5}+\frac{12}{\sin^2 x}-\frac{3}{x^2+4}\right)dx$

1.7 $\int\left(8\sqrt[5]{x^4}-15\cos x+\frac{3}{\sqrt{9x^2+4}}\right)dx$

1.8 $\int\left(\frac{17x^6-2}{x^2}+9e^x+\frac{1}{9x^2-4}\right)dx$

1.9 $\int\left(\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}-\frac{15}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$

1.10 $\int\left(\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{7}{x^3}+\frac{8}{x}\right)dx$

1.11 $\int\left(9x^7+e^x+4-\frac{1}{9x^2-25}\right)dx$

1.12 $\int\left(13x\sqrt{x}-3\sin x+\frac{1}{9-2x^2}\right)dx$

1.13 $\int\left(\frac{x^2-9}{x^{12}}+\frac{12}{\cos^2 x}-\frac{17}{x^2+4}\right)dx$

1.14 $\int\left(\frac{6x+17\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+15x+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-16\cos x\right)dx$

1.15 $\int\left(\frac{11}{\cos^2(x)}+15+\frac{72}{x^5}+\frac{18}{x}\right)dx$

Задача 2. Вычислить неопределенные интегралы методом замены переменной. Сделать проверку с помощью дифференцирования.

2.1 $\int e^{6x}dx$ 2.2 $\int e^{-8x+9}dx$ 2.3 $\int \cos(9x)dx$

2.4 $\int \sin(3x+16)dx$ 2.5 $\int tgxdx$ 2.6 $\int ctg(8x)dx$

2.7 $\int \frac{6}{3x+7}dx$ 2.8 $\int \frac{\ln^6 x}{x}dx$ 2.9 $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2.10 $\int \frac{arctg^5(3x)}{9x^2+1}dx$ 2.11 $\int e^{\sin^2 x}\sin 2xdx$ 2.12 $\int \frac{xdx}{\left(x^2+4\right)^6}$

2.13 $\int \frac{dx}{\cos^2 x(6tgx+5)}$ 2.14 $\int \frac{(x+arctgx)dx}{1+x^2}$ 2.15 $\int \frac{\left(\sqrt[3]{3+\ln x}\right)dx}{x}$.

Задача 3. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям. Сделать проверку с помощью дифференцирования.

3.1 $\int xe^{-8x}dx$ 3.2 $\int x^2e^{-6x+7}dx$ 3.3 $\int x\cos(9x)dx$

3.4 $\int x^2\sin(15x)dx$ 3.5 $\int \ln(7x)dx$ 3.6 $\int arcctg(6x)dx$

3.7 $\int x\arcsin xdx$ 3.8 $\int 5x\arccos(4x)dx$ 3.9 $\int e^{5x}\cos(7x)dx$

3.10 $\int e^{-2x}\sin(5x)dx$ 3.11 $\int x\ln(2x)dx$ 3.12 $\int (x^2+17)e^{12x}dx$

3.13 $\int arctg\sqrt{x}dx$ 3.14 $\int e^x\ln\left(1+2e^x\right)dx$ 3.15 $\int x\ln^2 xdx$.

Задача 4. Вычислить неопределенные интегралы от дробно-рациональных функций.

4.1 $\int \frac{5}{3x+12}dx$ 4.2 $\int \frac{14}{(3x+5)^{85}}dx$ 4.3 $\int \frac{3x+4}{(x^2-2x+3)}dx$

4.4 $\int \frac{4x-15}{x^2+5x+8}dx$ 4.5 $\int \frac{8x-3}{(x+3)(x+4)}dx$ 4.6 $\int \frac{4x+7}{(x+5)(x+3)x(x-2)}dx$

4.7 $\int \frac{5x^2+2}{(x+5)(x+1)^3}dx$ 4.8 $\int \frac{4x+19}{(x^2+x+1)x(x-2)}dx$ 4.9 $\int \frac{x-6}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

4.10 $\int \frac{dx}{x^3+8}$ 4.11 $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$ 4.12 $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$

4. 13 $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$ 4.14 $\int \frac{x^3dx}{x^3-27}$ 4.15 $\int \frac{(x^6+5x^2-3)dx}{x^2+4}$

Задача 5. Вычислить неопределенные интегралы от тригонометрических функций.

5.1 $\int \sin 8x \cos 9x dx$ 5.2 $\int \sin 7x \cos^2 3x dx$ 5.3 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

5.4 $\int 6\sin^8 x dx$ 5.5 $\int (\sin^3 x+5)dx$ 5.6 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$

5.7 $\int \frac{45dx}{\sqrt{\cos x \ \sin x}}$ 5.8 $\int \frac{1}{4\sin x}dx$ 5.9 $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$

5.10 $\int \frac{\cos 5x dx}{1+\sin 5x}$ 5.11 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ 5.12 $\int \frac{\sin^5 x}{1+2\cos x}dx$

5.13 $\int \frac{8}{2\sin^2 x-\cos^2 x}dx$ 5.14 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$ 5.15 $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

Задача 6. Вычислить неопределенные интегралы от выражений, содержащих иррациональности.

6.1 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ 6.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}}$ 6.3 $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

6.4 $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$ 6.5 $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$ 6.6 $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

6.7 $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$ 6.8 $\int \frac{x+\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x-3}}dx$ 6.9 $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$

6.10 $\int 6x\sqrt{1-x^2}\,dx$ 6.11 $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$ 6.12 $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x}dx$

6.13 $\int \frac{8dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ 6.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 6.15 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Задачи по теме «Определенный интеграл и его приложения»

Задача 7. Вычислить определенный интеграл.

7.1 $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ 7.2 $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$ 7.3 $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$

7.4 $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{7+tgx}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$ 7.5 $\int\limits_0^{2\pi} 2^6 \sin^4 x \cos^4 x dx$

7.6 $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ 7.7 $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$ 7.8 $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$

7.9 $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ 7.10 $\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos \ln x dx$ 7.11 $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

7.12 $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 7.13 $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

7.14 $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ 7.15 $\int\limits_0^{arctg\frac{2}{3}} \frac{6+tgx}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$

Задача 8. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми.

1	$y=\cos^3 x\sin^2 x, y=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$	2	$y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y=0, x=1, x=e^3$
3	$y=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}, y=0, x=1$	4	$y=\arccos x, y=0, x=0$
5	$y=xarctgx, y=0, x=\sqrt{3}$	6	$y=\ln x,$ ось OX и $x=e$
7	$y=\frac{x^2}{3}$ и $y=4-\frac{2}{3}x^2$	8	$y=\frac{1}{1+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{2}$
9	$y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$	10	$y=e^x$ и $y=e^{-x}, x=1$
11	$\rho=5(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi]$	12	$\begin{cases} x=1-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$
13	$x^2+y^2=R^2$	14	$x^2+4y^2=4$
15	$\rho=4\sin^2\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$		

Задача 9. Вычислить с помощью определенного интеграла:

- длину дуги кривой (для вариантов 1-12);

- объем тела, образованного вращением $y=f(x)$ *вокруг оси OX (для вариантов 13-20);*

- площадь поверхности, образованной вращением $y=f(x)$ *вокруг оси OX (для вариантов 21-26).*

1	$y=1-\ln\sin x, \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$	2	$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,$ $0\le x\le\frac{8}{9}$
3	$y=2-e^x, \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$	4	$\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=(1-\cos t) \end{cases}, 0\le t\le\pi$

5	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	6	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$
7	$\rho = 2(1 - \cos\varphi), \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$	8	$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
9	$\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$	10	$\rho = 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$
11	$y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4,$ $0 \le x \le \frac{1}{2}$	12	$y = \ln(x^2 - 1), 2 \le x \le 3$
13	$y = \sqrt{x}e^x, x = 1, y = 0$	14	$y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{x^3}{8}$
15	$y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$	16	$y = e^{1-x}, y = 0,$ $x = 0, x = 1$
17	$y = \sin^2 x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$	18	$y = e^{-x}, y = 0,$ $x = 0, x = 1$
19	$(y - 3)^2 + 3x = 0, x = -3$	20	$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 3x \\ y = 0 \end{cases}$
21	$y = x^3, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}$	22	$y = \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$
23	$x^2 + y^2 = R^2$	24	$x^2 + 4y^2 = 4$
25	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$ (петли кривой)

Задача 10. Вычислить с помощью определенного интеграла:

- статические моменты M_x и M_y кривой L относительно осей Ох и Оу (линейная плотность $\rho = 1$). Найти координаты центра тяжести кривой L (для вариантов 1-10).

- моменты инерции I_x и I_y кривой L (линейная плотность $\rho = 1$) относительно осей Ох и Оу (для вариантов 11-14).

- статические моменты M_x и M_y пластины D относительно осей Ох и Оу (плотность $\rho = 1$). Найти координаты центра тяжести пластины D (для вариантов 15-24).

1	L : отрезок прямой $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$	2	L : дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$
3	L : полуокружность $x^2+y^2=R^2,\quad y\le 0$	4	L : полуокружность $x^2+y^2=R^2,\quad x\le 0$
5	L : четверть окружности $x^2+y^2=R^2,\ x\le 0,\ y\ge 0$	6	L : парабола $3x=y^2,\ 0\le x\le 3$
7	L : парабола $3y=x^2,\ 0\le y\le 3$	8	L : треугольник, сторонами которого являются прямые $x+2y=2,\ x=0,\ y=0$
9	L : дуга экспоненты $y=e^{2x},\ 0\le x\le 2$	10	L : дуга цепной линии $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ -1\le x\le 1$
11	L : отрезок прямой $x+3y=3,\ x\ge 0,\ y\ge 0$	12	L : окружность $x^2+y^2=R^2$
13	L : полуокружность $x^2+y^2=R^2,\quad y\ge 0$	14	L : окружность $(x-1)^2+y^2=1,$
15	D : треугольник, ограниченный прямыми $x+2y=2,\ x=0,\ y=0$	16	D : прямоугольник, ограниченный прямыми $x=2,\ x=0,\ y=0,\ y=3$
17	D : фигура, ограниченная одной аркой синусоиды $y\le \sin x,\ y\ge 0,\ x\ge 0,\ x\le \pi$	18	D : фигура, ограниченная эллипсом и осями координат $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$
19	D: круг радиуса R $x^2+y^2\le R^2$	20	D : фигура, ограниченная параболами $y^2=4x+4,\ y^2=4-2x$
21	D : треугольник, ограниченный прямыми $x+y=2,\ x=2,\ y=2$	22	D : фигура, ограниченная параболой и осью Oy $y^2\le 1-x,\ x\ge 0$
23	D: половина круга радиуса R $x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0$	24	D: четверть круга радиуса R $x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ -x\le y\le x$

Часть 2
Несобственные интегралы.
Двойной и тройной интегралы, их приложения.
Криволинейные интегралы. Элементы теории поля

Решение задач *части 2* позволяет успешно подготовиться к *контрольной работе №2*. *Часть 2 содержит задачи типового расчета*. Задачи, идентичные задачам этой части, включены в экзаменационный (зачетный) билет.

Типовой расчет

Задачи по теме «Несобственные интегралы»

Задача 11. Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

11.1. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$ 11. 2. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3+5}$ 11. 3. $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}$

11.4. $\int_0^{\infty}\cos 2x dx$ 11. 5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ 11.6. $\int_1^{+\infty}\frac{(3x^2+5)dx}{4x^7+4x+9}$

11.7. $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+7}dx}{x^2+8x+1}$ 11. 8. $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx$ 11.9. $\int_0^{2}\frac{\sqrt{2-x}dx}{x^2-5x+6}$

11.10. $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+1)(\sqrt[3]{x+1})}$ 11.11. $\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ 11.12. $\int_0^{1}\frac{\sin 2x}{3x^2+\sqrt{x}}dx$

11.13. $\int_0^{0.5}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$ 11.14 $\int_1^{\pi} tgx\cdot dx$ 11.15. $\int_0^{e}\frac{1}{e^x-1}dx$

Задача 12. Вычислить несобственный интеграл.

12.1. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 12.2. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^3 x)}$ 12.3. $\int_{\log_2 e}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

12.4. $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\sin 8x\,dx$ 12.5. $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+16x+15}$ 12.6. $\int_{1}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

12.7. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)arctg^4 x}$ 12.8. $\int_{1}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ 12.9. $\int_{1}^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

12. 10. $\int_{0}^{1}\ln x\,dx$ 12.11. $\int_{0}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$ 12. 12. $\int_{0}^{1}\ln^2 x\,dx$

12.13. $\int_{0}^{1}\frac{4dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x}}$ 12.14. $\int_{0}^{\ln^2 5}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 12.15. $\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

Задачи по теме «Двойной, тройной и криволинейный интегралы»

Задача 13. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_{a}^{b}dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy$.

№	a	b	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
1	0	2	$1-x^2/4$	$\sqrt{4-x^2}$
2	0	1	$-\sqrt{2-x^2}$	$2-x$
3	0	2	$-\sqrt{2x-x^2}$	$2-x$
4	0	$\sqrt{2}$	$x^2/2$	$\sqrt{3-x^2}$
5	0	2	$\sqrt{2x-x^2}$	$\sqrt{2x}$
6	0	1	$\sqrt{x}$	$3-2x$
7	0	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x$
8	0	$3/2$	$2x^2$	$6-x$
9	1	2	$-x$	$\sqrt{1+x^2}$
10	-1	$1/2$	x	$1-x^2$
11	0	1	$-x$	$\sqrt{4-x^2}$
12	-1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$

13	2	4	$\sqrt{4x-x^2}$	$\sqrt{8x}$
14	-6	2	$x^2/4-1$	$2-x$
15	1/4	1	$\sqrt{x}$	$\sqrt{4x}$

Задача 14. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры D, ограниченной заданными линиями.

1. $D:\quad y = x^2 - 4x;\quad y = 2 - 3x$
2. $D:\quad y = \sqrt{x+1};\quad y = -2x - 2;\quad x = 0$
3. $D:\quad y = x^2 + 1;\quad y = 4 - 2x$
4. $D:\quad y = e^{-x};\quad y = x + 1;\quad x = 1;\quad 0 \le x \le 1$
5. $D:\quad y = 4 - x^2;\quad y = x^2 - 4$
6. $D:\quad y = \sqrt{2-x};\quad y = 2x - 4;\quad x = 0$
7. $D:\quad y = \ln x;\quad y = 1 - x;\quad x = 2$
8. $D:\quad y = x^2 + 2x;\quad y = 5x + 4$
9. $D:\quad y = -\sqrt{x+1};\quad y = 3x + 3;\quad x = 0$
10. $D:\quad y = 1 - x^2;\quad y = x - 1$
11. $D:\quad y = e^{x};\quad y = -x + 1;\quad x = 1;\quad 0 \le x \le 1$
12. $D:\quad y = -x^2;\quad y = x^2 - 2$
13. $D:\quad y = \sqrt{x-1};\quad y = 2 - 2x;\quad x = 2$
14. $D:\quad y = -\ln x;\quad y = 2;\quad x = 2$
15. $D:\quad y = 2x - x^2;\quad y = 3x - 2$

Задача 15. С помощью тройного интеграла вычислить объем пирамиды *V*, ограниченной плоскостью α и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Проверить ответ с помощью геометрической формулы нахождения объема пирамиды.

Варианты задания плоскости α :

1. $\alpha: 4x + 2y - z = 8$
2. $\alpha: x + 2y - 5z = 20$
3. $\alpha: 4x + y - 3z = 24$
4. $\alpha: 5x + y - 3z = 30$

5. $\alpha: 2x+5y-3z=60$
6. $\alpha: 9x-y-3z=54$
7 $\alpha: x+5y-3z=45$
8. $\alpha: 9x+y-2z=18$
9. $\alpha: 6x-7y-3z=42$
10. $\alpha: x+9y-3z=27$
11. $\alpha: 12x-y+3z=36$
12. $\alpha: x+8y+5z=40$
13. $\alpha: 15x-y+3z=120$
14. $\alpha: -5x+6y-3z=30$
15. $\alpha: -9x+y+3z=60$
16. $\alpha: 7x+2y-3z=42$

Задача 16. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по замкнутому контуру L (обход контура L против часовой стрелки) двумя способами: непосредственно и по формуле Грина.

№	L	P(x,y)	Q(x,y)
1	ΔABC $A(1,1)\quad B(2,2)\quad C(1,3)$	$2\left(x^2+y^2\right)$	$(x+y)^2$
2	$x^2/4+y^2/9=1$	$xy+x+y$	$xy+x-y$
3	$x^2+y^2=2x$	$xy+1$	$xy-x+y$
4	$x^2+y^2=4$	$-x^2y$	xy^2
5	$x^2/9+y^2/4=1$	$x+y$	$-x+y$
6	$y=\sin x, y=0, 0\le x\le\pi$	$e^x y$	e^x
7	$x^2/4+y^2=1$	x^3y	x^2+1
8	$y=x^2, y=1$	x^2y	$x+y$
9	$y=3x^2, y=2x$	$(x+y)^2$	$-(x-y)^2$
10	ΔABC $A(0,0)\quad B(2,4)\quad C(0,4)$	$3x^2y$	x^3+2x
11	$y=2x^2, y=2$	x^2-2xy	y^2-2xy
12	$x^2+y^2=4$	y^2+x	x^2+y
13	$y=x^2/4, y=x/2$	$2xy$	$-x^2$
14	$x=2y^2, 2y=x$	$2xy$	x^2+y^2
15	$x^2+y^2=9$	$x+y^2$	$x-y^2$

Задачи по теме «Элементы теории поля»

Задача 17. Найти градиент скалярного поля $u(M)$. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\overline{a}(M)$.

№	Скалярное поле $u(M)=F(x,y,z)$ Векторное поле $\overline{a}(M)$
1	$u(M)=e^{xy}+\cos^2(3z)$ $\overline{a}(M)=(ye^z)\vec{i}+\cos^2 xz\,\vec{j}+\ln(y^2x)\vec{k}$
2	$u(M)=xy^3+\ln(z^2)$ $\overline{a}(M)=(\arccos 2x+3z^2y)\vec{i}+\ln^2 z\,\vec{j}+(z^2y^2x)\vec{k}$
3	$u(M)=\sqrt{x^8}+x\sin(3z)$ $\overline{a}(M)=(tgx^2+\sqrt{yz})\vec{i}+z\arcsin x\,\vec{j}+4z^3(xy^2)\vec{k}$
4	$u(M)=z^2e^x+\arcsin(y^2)$ $\overline{a}(M)=(y^3e^z)\vec{i}+xz\cdot tg3y\,\vec{j}-(\cos^2 y+4x)\vec{k}$
5	$u(M)=\ln(x^2y)+\sqrt{z}$ $\overline{a}(M)=(x^2y+\ln z)\vec{i}+(\sin y+5z)\vec{j}+(z\cos x+3y^2)\vec{k}$
6	$u(M)=\cos(2x^3)-e^{yz}$ $\overline{a}(M)=(\arcsin y+z^6)\vec{i}+(\cos 2y-tg^2 z)\vec{j}+(\ln(7x)+y^3)\vec{k}$
7	$u(M)=\arcsin(xy)+z\ln^2 y$ $\overline{a}(M)=(y\ln z)\vec{i}+(\sqrt{xz})\vec{j}+(x\ln^2 y)\vec{k}$
8	$u(M)=x^2yz-ytg^2(z)$ $\overline{a}(M)=(x\sin y)\vec{i}+\sqrt[3]{x}\,\vec{j}+(y^8z)\vec{k}$
9	$u(M)=\ln^2(z)+\sin(x^3y)$ $\overline{a}(M)=\cos(6z)\vec{i}+x^2\ln(z)\vec{j}+x^3\arccos y\vec{k}$
10	$u(M)=3ze^{5x}-\sqrt[3]{y}$ $\overline{a}(M)=e^{zy}\vec{i}+\sqrt[3]{xy}\cos z\,\vec{j}+(\ln^2 x+5y+2z)\vec{k}$
11	$u(M)=xy\cos z+z^2$ $\overline{a}(M)=(e^{y^3z})\vec{i}+(z\arccos y)\vec{j}+\sqrt{4y+x^2}\,\vec{k}$
12	$u(M)=2y+z+\arccos(x^3)$ $\overline{a}(M)=(\ln(\cos z)+5xy)\vec{i}+(4z^6+tg3x)\vec{j}+(\cos^2 y+e^{x^3})\vec{k}$

13	$u(M)=tg(5y\ \ )-xyz^2$ $\bar{a}(M)=(tg^3 z+\sqrt[3]{x})\vec{i}+(2x\arcsin y+5z)\vec{j}+(\sin 6x)\vec{k}$
14	$u(M)=e^{x^2 y}-\sqrt{z}+5y$ $\bar{a}(M)=(xe^y+ze^y)\vec{i}+(\cos^6 x+8z^2)\vec{j}+(\ln x+3y^9)\vec{k}$
15	$u(M)=xe^{yz}+\sqrt[4]{z^5}$ $\bar{a}(M)=(\ln(\sin x)+tg^3 z)\vec{i}+(x^7 z-6y)\vec{j}+(8x^5+3yz))\vec{k}$

Задача 18. * Найти поток векторного поля $\bar{a}(M)$ через замкнутую поверхность σ двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя потоки через все гладкие куски поверхности σ;

2) по теореме Остроградского-Гаусса.

(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

№	$\bar{a}(M)$	σ
1	$x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$	$2z=4-x^2-y^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$
2	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$z^2=x^2+y^2, 0\le z\le 2$
3	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, y\ge 0, 0\le z\le 2$
4	$(1-z)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})+\mathbf{k}$	$(1-z)^2=x^2+y^2, 0\le z\le 1$
5	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$2z=9-x^2-y^2, z\ge 0$
6	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$
7	$\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4, x\ge 0, y\ge 0, 1\le z\le 3$
8	$x^2\mathbf{i}-z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4, x\ge 0, y\ge 1, z\ge 0$
9	$xy(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\mathbf{k}$	$y=4-x^2-z^2, y\ge 0, z\ge 0$
10	$\mathbf{i}+\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$	$2-z=x^2+y^2, z=-2$
11	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$y^2=x^2+z^2, 0\le y\le 1, z\le 0$
12	$xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2+z^2=4, 0\le z\le 1$
13	$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$	$z^2=x^2+y^2, -1\le z\le 0, x\ge 0$
14	$x\mathbf{i}+\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=9, y\ge 0, 0\le z\le 2$
15	$x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2z=2-x^2-y^2, z\ge 0$

Задача 19. * Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}(M)$ по контуру Г двумя способами:

1) непосредственно, вычисляя линейный интеграл векторного поля по контуру Г

2) по теореме Стокса.

(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

№	$\bar{a}(M)$	Г
1	$y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$x^2+z^2=4-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
2	$2y\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}-3x\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x+y+z=3$
3	$xy\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}$	$y^2=1-x-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
4	$x\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+y\mathbf{k}$	$x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$
5	$xy\mathbf{i}+x\mathbf{j}-yz\mathbf{k}$	$x^2+y^2=4, y=z$
6	$xy(\mathbf{i}+\mathbf{j})+z\mathbf{k}$	$x^2+z^2=1-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
7	$\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x=z+1$
8	$y\mathbf{i}-z^2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$	$x+2y+2z=4, x=0, y=0, z=0$
9	$z^2\mathbf{i}-x\mathbf{j}-y\mathbf{k}$	$x^2+z^2=4, y=z+1$
10	$y^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$3x+y+2z=6, x=0, y=0, z=0$
11	$y^2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$	$z^2=1-x-y, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
12	$z\mathbf{i}-x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=9, x+y+z=5$
13	$z^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$2x+y+z=2, x=0, y=0, z=0$
14	$y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$y^2=1-x-z, x=0, y=0, z=0$ (1 октант)
15	$z\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$	$x^2+y^2=1, x+y+z=3$

Для успешного усвоения курса математического анализа второго семестра требуются знания и умения по курсам математического анализа и алгебры первого семестра:
- вычисление производных функций одной и нескольких переменных;
- кривые и поверхности второго порядка.

В дальнейшем полученные знания по математическому анализу второго семестра будут использоваться в курсах:

- Математический анализ (III семестр, IV семестр);
- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей;
- Численные методы;
- Методы математической физики.

Содержание