Fonctions de plusieurs variables

Vidéo ■ partie 3.1. Définition et graphe
Vidéo ■ partie 3.2. Minimums et maximums
Vidéo ■ partie 3.3. Recherche d'un minimum

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur les fonctions de deux variables et la visualisation de leur graphe et de leurs lignes de niveau. La compréhension géométrique des fonctions de deux variables est fondamentale pour assimiler les techniques qui seront rencontrées plus tard avec un plus grand nombre de variables.

De nombreux phénomènes dépendent de plusieurs paramètres, par exemple le volume d'un gaz dépend de la température et de la pression ; l'altitude z d'un terrain dépend des coordonnées (x, y) du lieu.
Dans les réseaux de neurones, les fonctions de plusieurs variables interviennent de deux manières :

- lors de l'utilisation d'un réseau. C'est la partie la plus facile et la plus fréquente. On utilise un réseau déjà bien paramétré pour répondre à une question (Est-ce une photo de chat ? Tourner à droite ou à gauche ? Quel pion déplacer au prochain coup ?). La réponse est un calcul direct obtenu en évaluant une fonction de plusieurs variables.
- lors de la paramétrisation du réseau. C'est la partie difficile et le but de ce cours. Quels paramètres choisir pour définir ce réseau afin qu'il réponde au problème ? Ces paramètres seront choisis comme minimum d'une fonction de plusieurs variables. Une des difficultés est qu'il peut y avoir des milliers de paramètres à gérer.

1. Définition et exemples

1.1. Définition

Nous allons étudier les fonctions de deux variables, mais aussi de trois variables et plus généralement de n variables. Ces fonctions sont donc de la forme

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Un élément de l'ensemble de départ est un vecteur de type $x = (x_1, \dots, x_n)$. À chacun de ces vecteurs, f associe un nombre réel $f(x_1, \dots, x_n)$. On pourrait aussi limiter l'ensemble de départ à une partie E de $\mathbb{R}^n$.

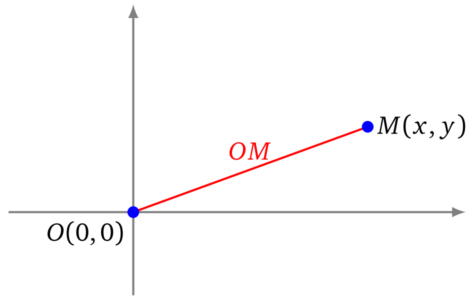
1.2. Deux variables

Lorsque $n = 2$, on préfère noter les variables (x, y) plutôt que (x_1, x_2). Voici quelques exemples.

Exemple.

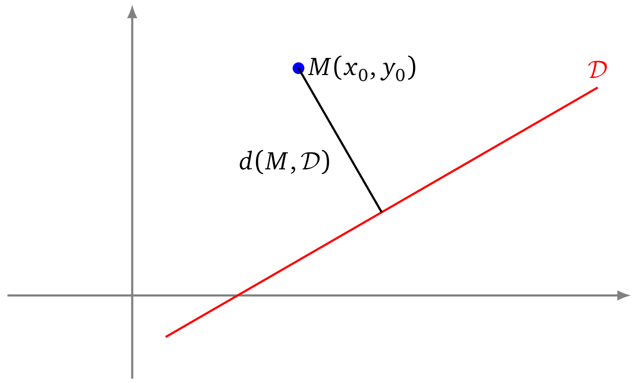
- $f(x, y) = 2x + 3y^2 + 1$.

- $f(x,y) = \cos(xy)$.
- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. f renvoie la distance entre un point $M(x,y)$ et l'origine $O(0,0)$.



- L'équation physique $PV = nRT$ implique $T = \frac{1}{nR}PV$: la température d'un gaz s'exprime en fonction de son volume et de la pression (n et R sont des constantes).
- La distance entre une droite fixée $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M(x_0, y_0)$ est donnée par une fonction de deux variables :

$$d(x_0, y_0) = d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

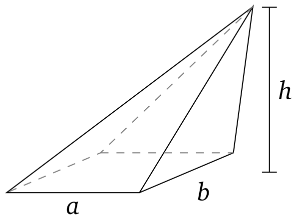


1.3. Trois variables

Exemple.

1. $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$. Cette fonction f est une fonction affine (a, b, c, d sont des constantes).
2. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ qui donne la distance au carré entre un point $M(x,y,z)$ et l'origine $O(0,0,0)$.
3. Le volume d'un cône à base rectangulaire dépend des longueurs des côtés a et b de la base et de la hauteur h :

$$V = f(a,b,h) = \frac{1}{3}abh.$$



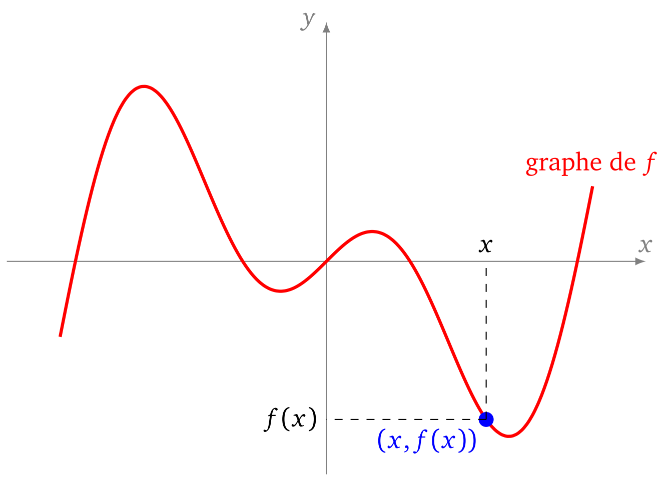
1.4. n variables

Exemple.

1. $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0$ une fonction affine (les a_i sont des constantes).
2. $f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2}$ exprime la distance entre les points $M(x_1,\dots,x_n)$ et $A(a_1,\dots,a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Graphe

Le cas le plus simple, et déjà connu, est celui des fonctions d'une seule variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. C'est l'ensemble de tous les points du plan de la forme $(x, f(x))$. Voici le graphe de la fonction $x \mapsto x\cos x$.

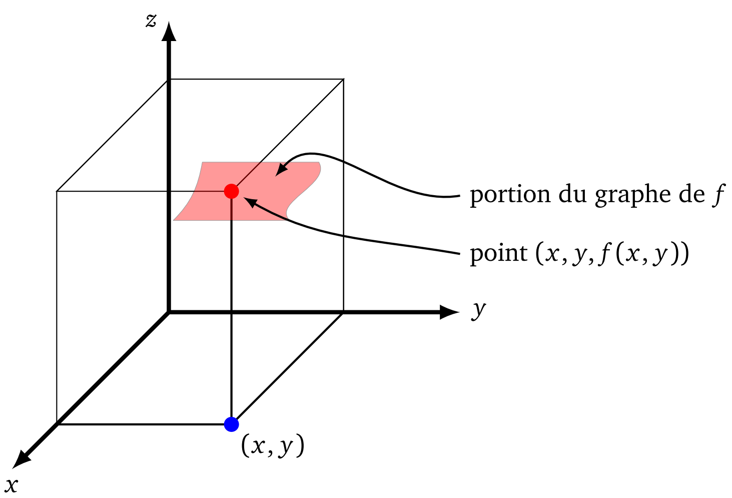


2.1. Définition

Définition.
Le ***graphe*** $\mathcal{G}_f$ d'une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ ayant pour coordonnées $(x, y, f(x, y))$, pour (x, y) parcourant $\mathbb{R}^2$. Le graphe est donc :

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x,y)\right\}.$$

Dans le cas de deux variables, le graphe d'une fonction est une surface tracée dans l'espace.



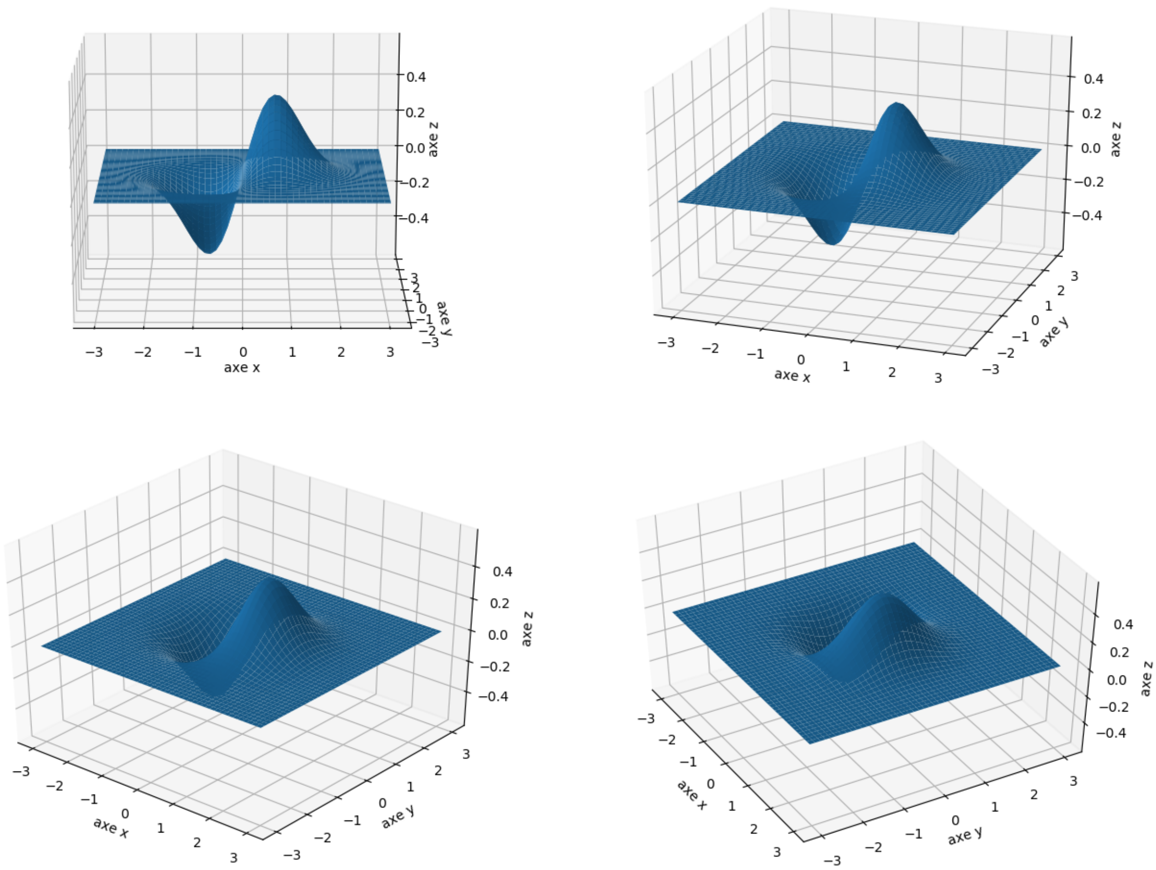
Exemple.
On souhaite tracer le graphe de la fonction définie par :

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

On commence par tracer quelques points à la main :

- si $(x, y) = (0, 0)$ alors $f(x, y) = f(0, 0) = 0$ donc le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ appartient au graphe.
- Comme $f(1, 0) = 1/e$ alors le point de coordonnées $(1, 0, 1/e)$ appartient au graphe.
- Pour n'importe quel y, on a $f(0, y) = 0$ donc la droite de l'espace d'équation $(x = 0$ et $z = 0)$ est incluse dans le graphe.
- Notons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance entre le point de coordonnées (x, y) et l'origine $(0, 0)$ alors on a la formule $f(x, y) = xe^{-r^2}$. Pour un point éloigné de l'origine, r est grand, donc e^{-r^2} est très petit, et $f(x, y)$ est très proche de 0.

Voici différentes vues de ce graphe.



2.2. Tranches

Afin de tracer le graphe d'une fonction de deux variables, on peut découper la surface en « tranches ». On fixe par exemple une valeur y_0 et on trace dans le plan (xOz) le graphe de la fonction d'une variable

$$f_{|y_0} : x \mapsto f(x, y_0).$$

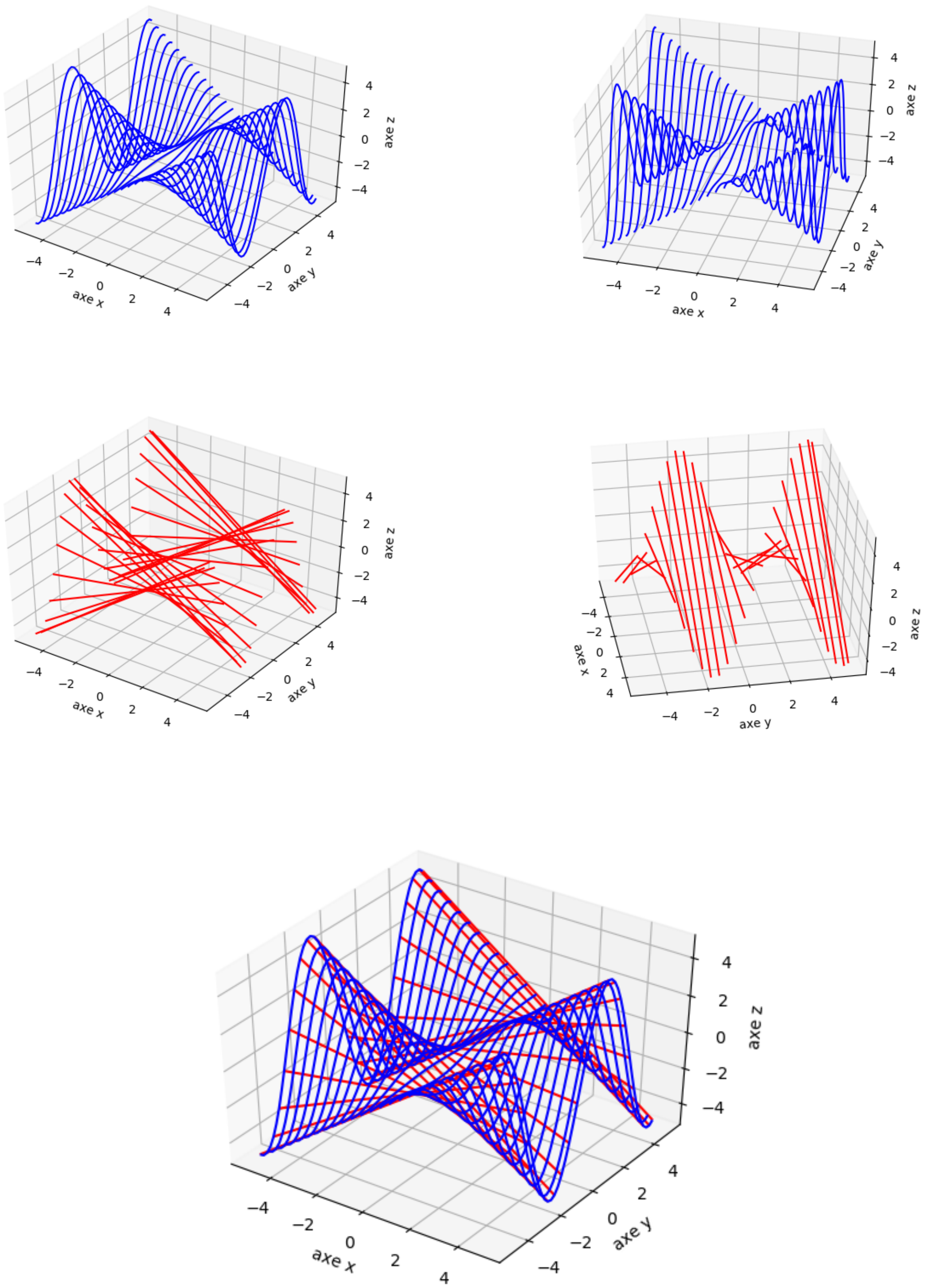
Géométriquement, cela revient à tracer l'intersection du graphe de f et du plan d'équation $(y = y_0)$. On recommence pour plusieurs valeurs de y_0, ce qui nous donne des tranches du graphe de f et nous donne une bonne idée du graphe complet de f.

On peut faire le même travail en fixant des valeurs x_0 avec les fonctions :

$$f_{|x_0} : y \mapsto f(x_0, y).$$

Exemple.
On souhaite tracer le graphe de la fonction définie par :

$$f(x, y) = x \sin(y).$$



En bleu les tranches pour lesquelles x est constant (deux points de vue), en rouge les tranches pour lesquelles y est constant (deux points de vue). Lorsque l'on rassemble les tranches (à x constant et à y constant), on reconstitue la surface (dernière figure).

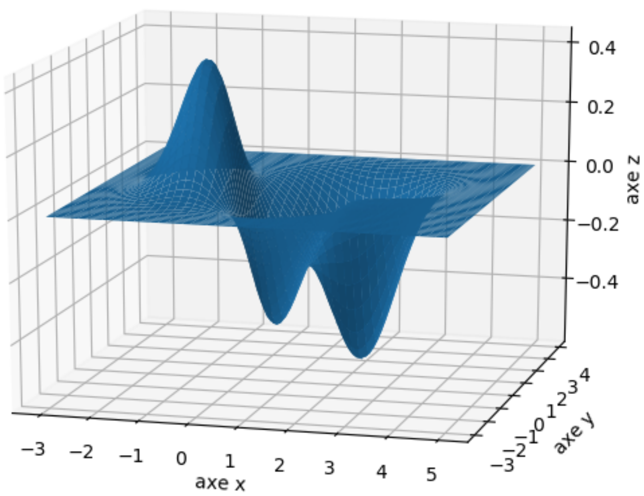
2.3. Minimum, maximum

Pour des fonctions de deux variables (ou plus) il existe une notion de minimum et de maximum.

Définition.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction.

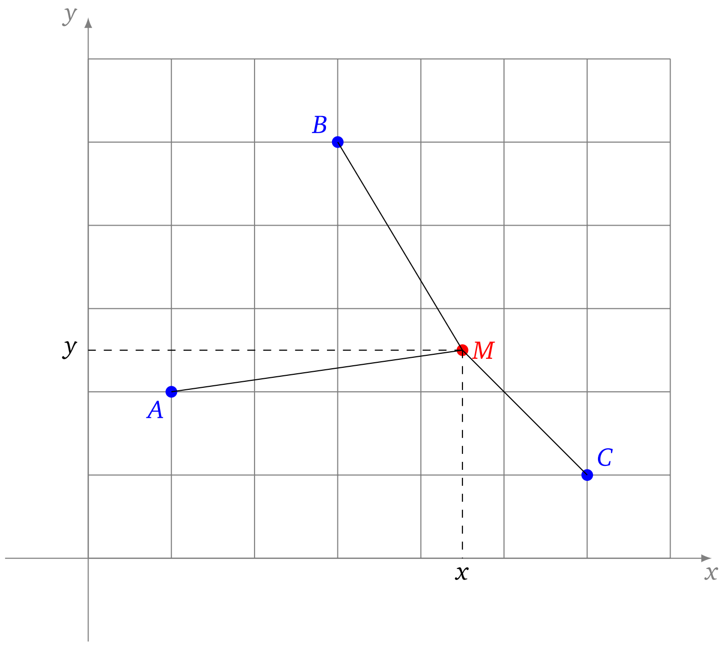
- f atteint un ***minimum global*** en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.
- f atteint un ***minimum local*** en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et un intervalle ouvert J contenant y_0 tels que pour tout $(x, y) \in I \times J$, on a $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.

Exemple.
Voici l'exemple d'une fonction qui admet deux minimums locaux. L'un est aussi un minimum global. Elle admet un maximum local qui est aussi global.



Trouver les bons paramètres d'un réseau de neurones nous amènera à trouver le minimum d'une fonction de plusieurs (et même de centaines de) variables. Voyons un exemple en deux variables.

Exemple.
Étant donnés trois points $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ et $C(6, 1)$, il s'agit de trouver un point $M(x, y)$ qui « approche au mieux » ces trois points. Il faut expliciter une fonction à minimiser pour définir correctement le problème. Nous décidons de prendre la somme des carrés des distances.



Il s'agit donc de minimiser la fonction f suivante, qui correspond à une fonction distance (aussi appelée fonction erreur ou bien fonction coût) :

$$f(x,y) = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-5)^2 + (x-6)^2 + (y-1)^2.$$

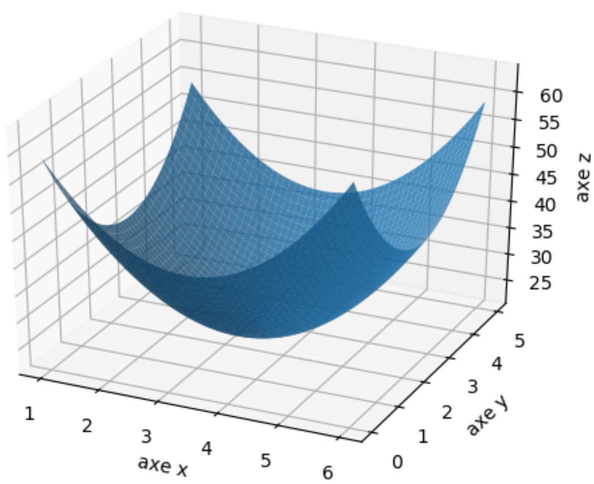
En développant on trouve :

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 20x - 16y + 76.$$

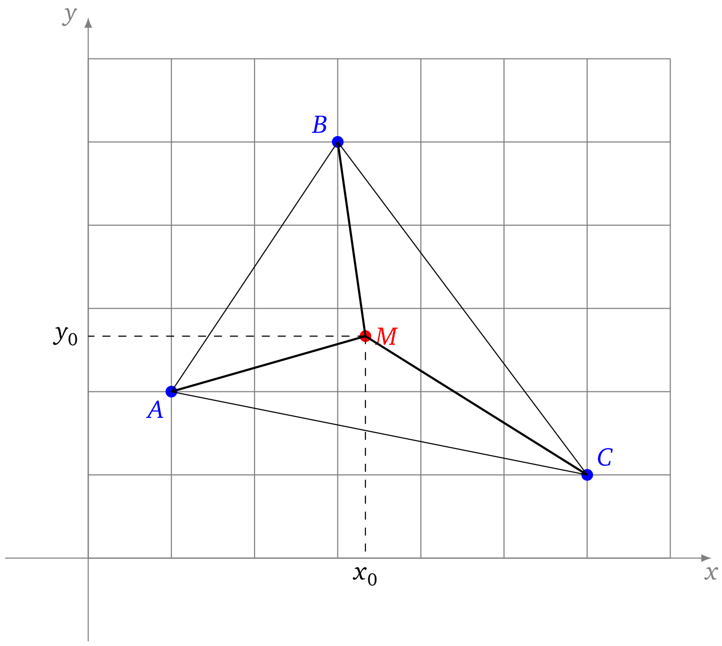
Le graphe de f nous suggère qu'il existe un unique minimum qui est le minimum global de f. Par recherche graphique ou par les méthodes décrites dans la section suivante, on trouverait une solution approchée. En fait la solution géométrique exacte est l'isobarycentre des points (autrement dit le centre de gravité du triangle ABC), ainsi :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \simeq (3.33, 2.66)$$

pour lequel f atteint son minimum $z_0 = f(x_0, y_0) = \frac{64}{3} \simeq 21.33$.



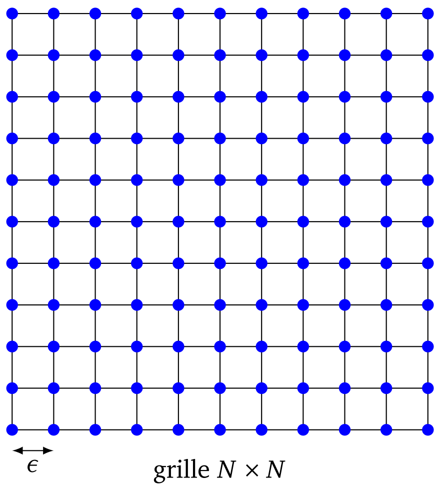
Le point qui convient le mieux à notre problème et en lequel notre fonction distance est minimale est donc le point de coordonnées $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$. Attention, un autre choix de la fonction distance f pourrait conduire à une autre solution (voir l'exemple de la prochaine section).



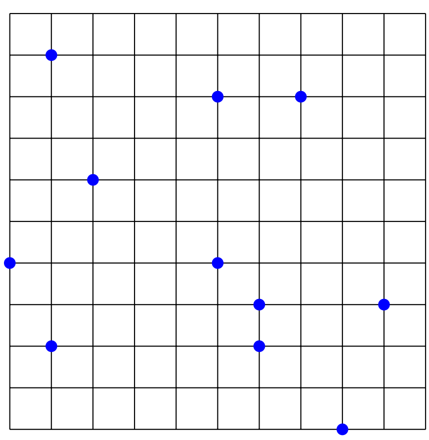
2.4. Recherche élémentaire d'un minimum

Voici trois techniques pour trouver les valeurs approchées des coordonnées du point en lequel une fonction de plusieurs variables atteint son minimum. Ces techniques sont valables quelque soit le nombre de variables même si ici elles ne sont décrites que dans le cas de deux variables.

Recherche sur une grille. On calcule $f(x, y)$ pour (x, y) parcourant une grille. On retient le point (x_0, y_0) en lequel $z_0 = f(x_0, y_0)$ est le plus petit. Si on le souhaite, on peut affiner la grille autour de ce point, en diminuant le pas ϵ pour améliorer l'approximation. C'est une technique qui demande N^2 calculs pour une grille de largeur N (et même N^n pour une fonction de n variables) ce qui peut être énorme.



grille $N \times N$

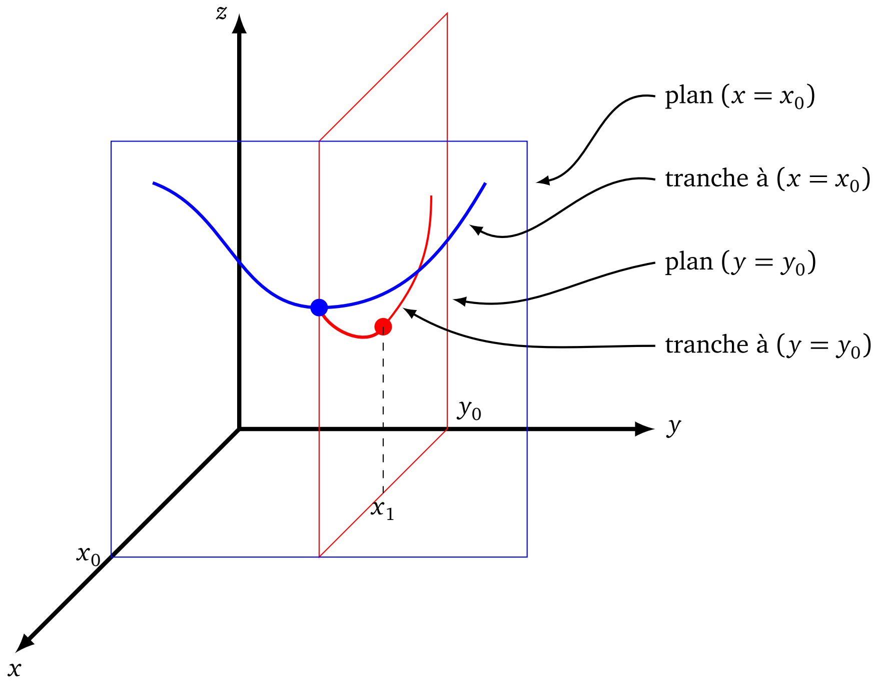


points au hasard

Recherche au hasard. Cela peut sembler incongru mais choisir quelques coordonnées (x, y) au hasard, calculer chaque valeur $z = f(x, y)$ et comme auparavant retenir le point (x_0, y_0) correspondant au z_0 minimal n'est pas ridicule ! Un ordinateur peut tester plusieurs millions de points en quelques secondes.

Bien sûr il y a de fortes chances de ne trouver qu'une solution approchée. C'est aussi une technique que l'on retrouvera plus tard : partir d'un point au hasard pour ensuite construire une suite de points convergeant vers un minimum. Et si cela n'est pas concluant, il faudra repartir d'un autre point tiré au hasard.

Recherche par tranche. L'idée est de se ramener à des fonctions d'une seule variable. En effet, pour les fonctions d'une variable, on sait qu'il faut chercher les minimums là où la dérivée s'annule.
On part d'une valeur x_0 (au hasard !). On cherche le minimum sur la tranche $x = x_0$, c'est-à-dire que l'on cherche le minimum de la fonction d'une variable $y \mapsto f(x_0, y)$. On trouve une valeur y_0 qui réalise un minimum. On change alors de direction en étudiant maintenant la tranche $y = y_0$ (pour le y_0 que l'on vient d'obtenir), on obtient l'abscisse x_1 du minimum de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$. On recommence depuis le début à partir de ce x_1. On obtient ainsi une suite de points (x_i, y_i) avec des valeurs $z_i = f(x_i, y_i)$ de plus en plus petites. On peut espérer tendre vers un minimum.



Sur la figure ci-dessus, on part d'une tranche (en bleu) choisie au hasard, donnée par $x = x_0$. Cette tranche définit le graphe d'une fonction d'une variable. On se déplace sur cette courbe jusqu'à atteindre le minimum de cette tranche, en une valeur y_0. On considère la tranche perpendiculaire donnée par $y = y_0$. On se déplace sur la courbe rouge jusqu'à atteindre le minimum de cette tranche, en une valeur x_1. On pourrait continuer avec une nouvelle tranche bleue $x = x_1$, etc.

Les descriptions données ici sont assez informelles, d'une part parce qu'il est difficile d'énoncer des théorèmes qui garantissent d'atteindre un minimum local et d'autre part parce qu'aucune technique ne garantit d'atteindre un minimum global. Lorsque l'on étudiera le gradient, nous obtiendrons une méthode plus efficace.

Exemple.
On reprend le problème précédent, à savoir trouver un point M qui approche au mieux les trois points A, B et C, mais cette fois on choisit la « vraie » distance comme fonction d'erreur :

$$g(x,y) = MA + MB + MC = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-1)^2}.$$

On applique ces trois techniques pour chercher le minimum de g en se limitant au carré $[0,6] \times [0,6]$.

1. Avec une grille $N \times N$. Par exemple pour $N = 100$, on évalue g en 10 000 points. On trouve $(x_{\min}, y_{\min}) \simeq (2.91, 2.97)$ pour une valeur $z_{\min} \simeq 7.84$.

2. Avec un tirage aléatoire de 1000 points, on trouve par exemple : $(x_{\min}, y_{\min}) \simeq (2.88, 2.99)$ et $z_{\min} \simeq 7.84$. Le résultat est similaire à la méthode précédente, bien qu'on ait effectué 10 fois moins de calculs.
3. Par les tranches. On part de la tranche $(x = 0)$. On pose $x_0 = 0$, la fonction à étudier est donc
$$g_{|x_0}(y) = \sqrt{1+(y-2)^2} + \sqrt{9+(y-5)^2} + \sqrt{36+(y-1)^2}.$$
C'est une fonction de la seule variable y pour laquelle on possède des techniques efficaces de recherche de minimum. On trouve que le minimum de $g_{|x_0}$ est atteint en $y_0 \simeq 2.45$. On recommence avec cette fois la tranche $(y = y_0)$ et on cherche le minimum de la fonction $g_{|y_0}(x) = g(x, y_0)$. On trouve que cette fonction atteint son minimum en $x_1 \simeq 2.84$. On recommence ce processus jusqu'à atteindre la précision souhaitée. Ainsi en 5 étapes on obtient une valeur approchée assez précise du minimum $(x_{\min}, y_{\min}) \simeq (2.90579, 2.98464)$ et $z_{\min} \simeq 7.83867$.

La première conclusion à tirer de ce qui précède est que pour résoudre un problème il faut définir correctement une fonction d'erreur, c'est-à-dire celle que l'on cherche à minimiser. La solution trouvée dépend de cette fonction d'erreur choisie. Enfin, la méthode des tranches est une méthode efficace pour trouver un minimum d'une fonction, mais nous en découvrirons une encore meilleure en utilisant le gradient.

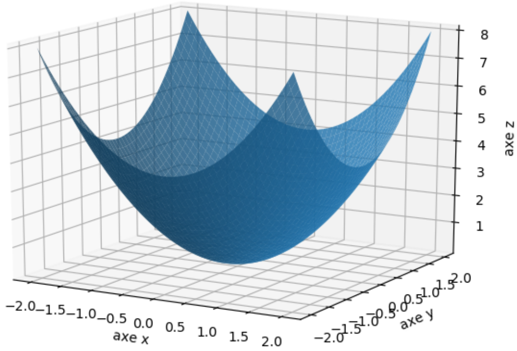
3. Lignes de niveau

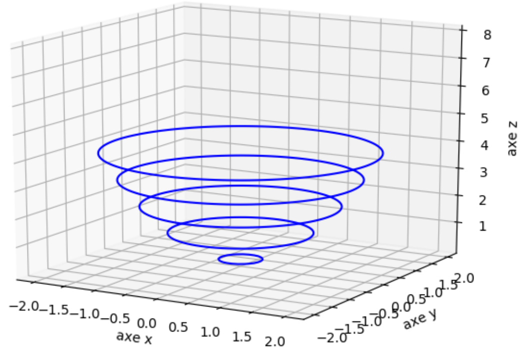
3.1. Définition

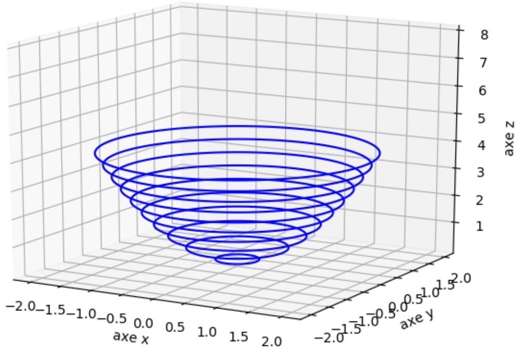
Définition.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. La ***ligne de niveau*** $z = c \in \mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les points (x, y) vérifiant $f(x, y) = c$:
$$L_c = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\right\}.$$
La ligne de niveau c est une courbe du plan $\mathbb{R}^2$.
On peut aussi définir une ***courbe de niveau***, c'est l'ensemble des points de l'espace obtenus comme intersection du graphe $\mathcal{G}_f$ et du plan $z = c$ qui est horizontal et « d'altitude » c. Ce sont donc tous les points $(x, y, f(x, y))$ avec $f(x, y) = c$. On obtient la courbe de niveau en translatant la ligne de niveau d'une altitude c.

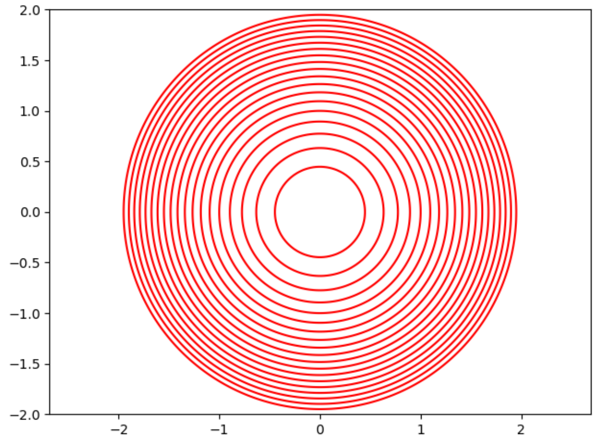
Exemple.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- Si $c < 0$, la ligne de niveau L_c est vide (aucun point n'est d'altitude négative).
- Si $c = 0$, la ligne de niveau L_0 se réduit à $\{(0, 0)\}$.
- Si $c > 0$, la ligne de niveau L_c est le cercle du plan de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$. On « remonte » L_c à l'altitude $z = c$: la courbe de niveau est alors le cercle horizontal de l'espace de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

Le graphe est alors une superposition de cercles horizontaux de l'espace de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\sqrt{c}$, $c > 0$.
Ci-dessous : (a) la surface, (b) 5 courbes de niveau, (c) 10 courbes de niveau, (d) les lignes de niveau dans le plan.



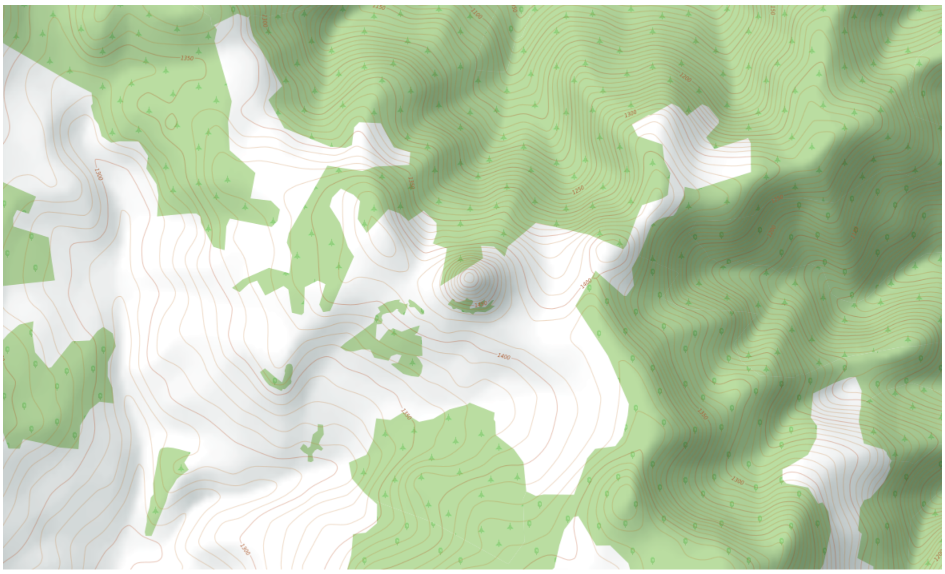






3.2. Exemples

Exemple.
Sur une carte topographique, les lignes de niveau représentent les courbes ayant la même altitude.



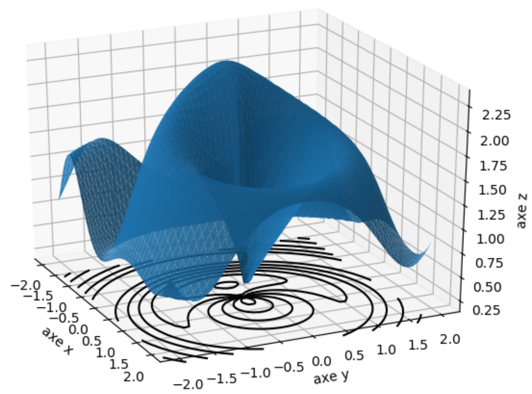
- Ici, une carte *Open Street Map* avec au centre le mont Gerbier de Jonc (source de la Loire, 1551 m).
- Les lignes de niveau correspondent à des altitudes équidistantes de 10 m (par exemple, pour $c = 1400$,

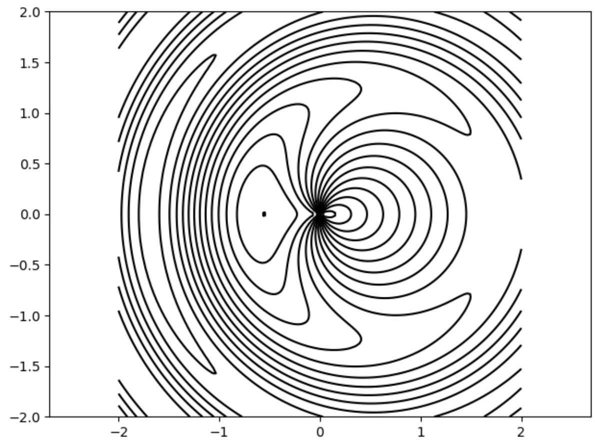
$c = 1410$, $c = 1420\ldots$).

- Lorsque les lignes de niveau sont très espacées, le terrain est plutôt plat ; lorsque les lignes sont rapprochées le terrain est pentu.
- Par définition, si on se promène en suivant une ligne de niveau, on reste toujours à la même altitude !

Exemple.
Voici le graphe et les lignes de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(r^2 - x)}{r} + 1 \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$





3.3. Surfaces quadratiques

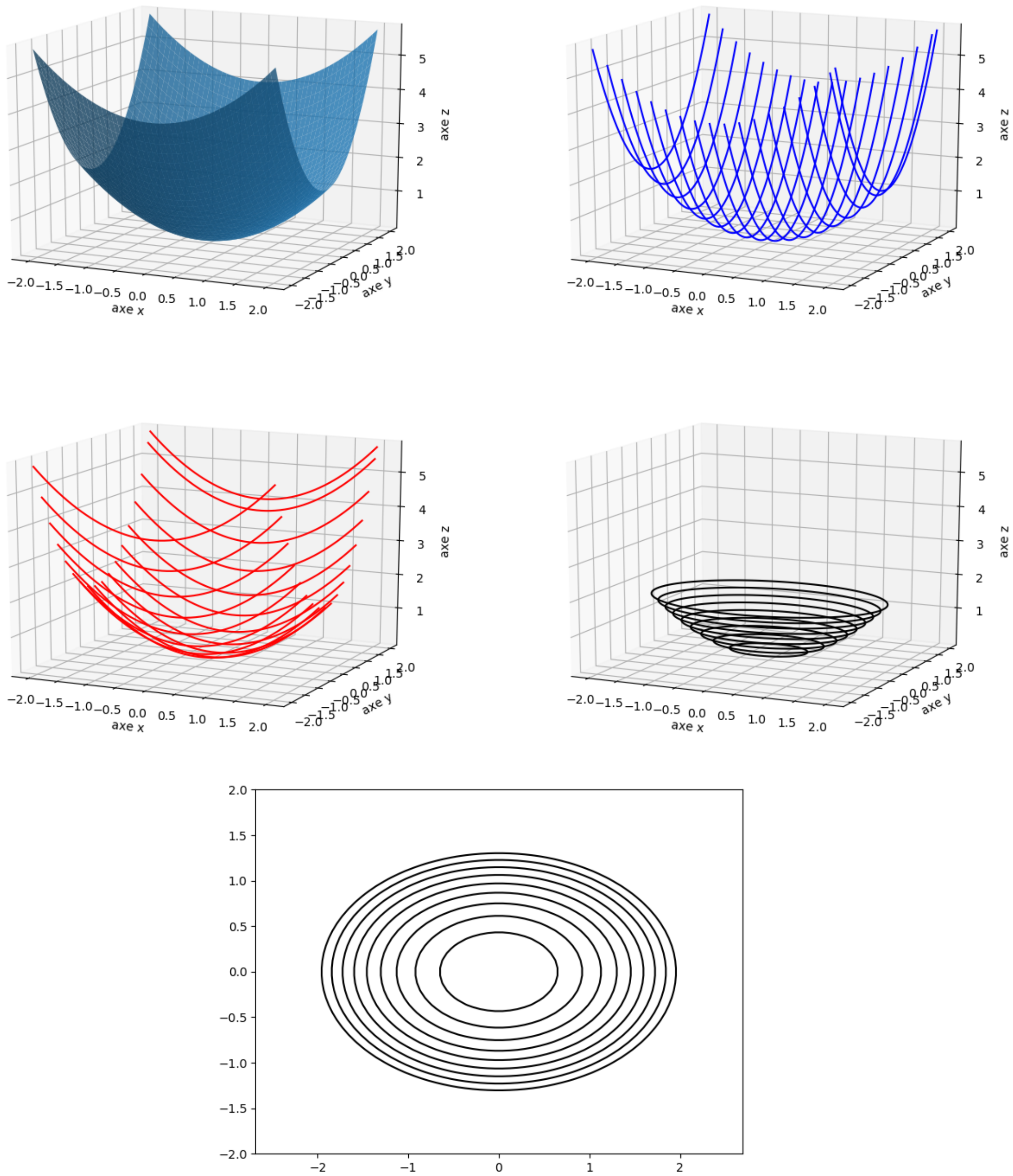
Ce sont des exemples à bien comprendre car ils seront importants pour la suite du cours.

Exemple.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

- Les tranches sont des paraboles.
- Les lignes de niveau sont des ellipses.
- Le graphe est donc un ***paraboloïde elliptique***.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) les tranches avec x constant, (c) les tranches avec y constant, (d) les courbes de niveau, (e) les lignes de niveau dans le plan.

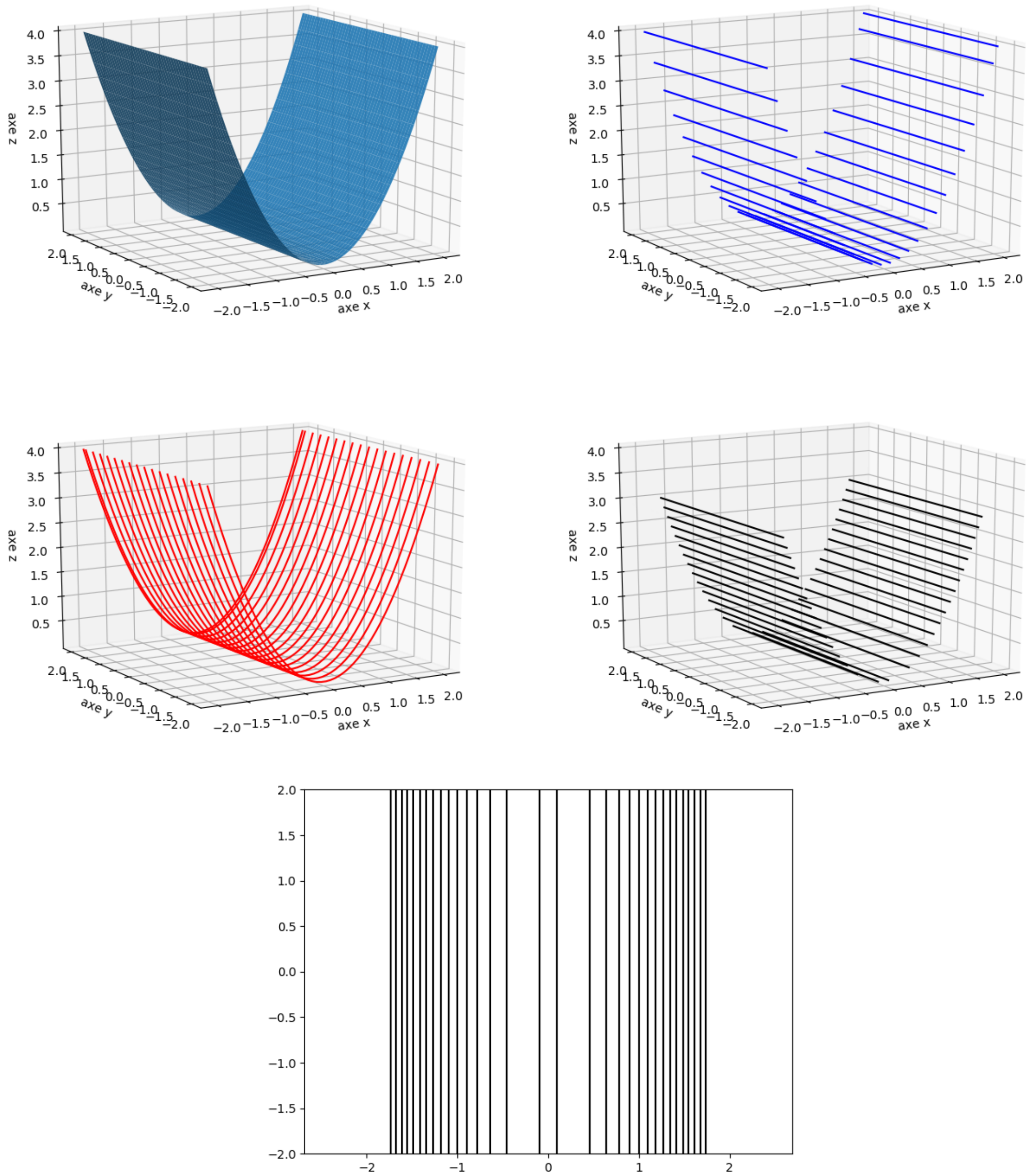


Exemple.

$$f(x,y) = x^2$$

- Les tranches obtenues en coupant selon des plans $y = y_0$ sont des paraboles. Dans l'autre direction, ce sont des droites.
- Les lignes de niveau sont des droites.
- Le graphe est donc un ***cylindre parabolique***.

Ci-dessous : (a) la surface, (b) les tranches avec x constant, (c) les tranches avec y constant, (d) les courbes de niveau, (e) les lignes de niveau dans le plan.

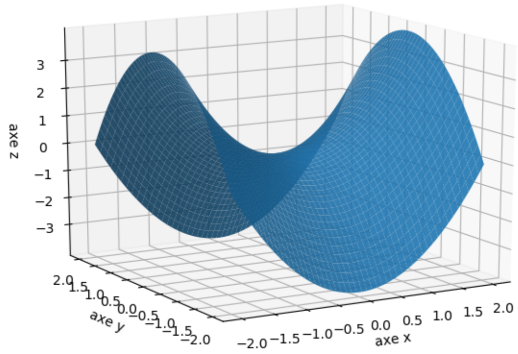


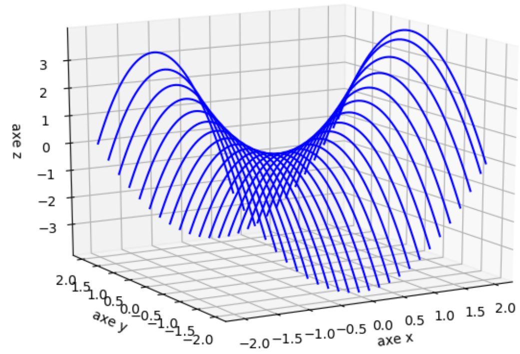
Exemple.

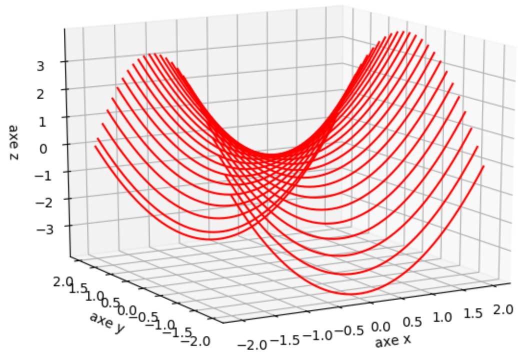
$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

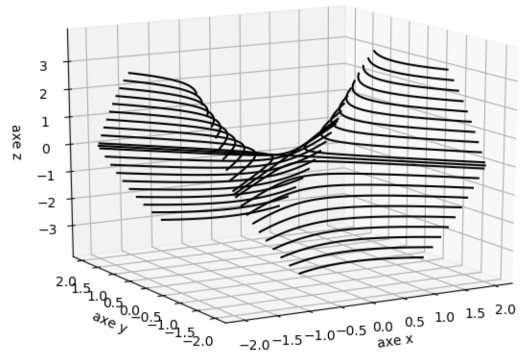
- Les tranches sont des paraboles, tournées vers le haut ou vers le bas selon la direction de la tranche.
- Les lignes de niveau sont des hyperboles.
- Le graphe est donc un ***paraboloïde hyperbolique*** que l'on appelle aussi la ***selle de cheval***.
- Un autre nom pour cette surface est un ***col*** (en référence à un col en montagne). En effet le point $(0,0,0)$, est le point de passage le moins haut pour passer d'un versant à l'autre de la montagne.

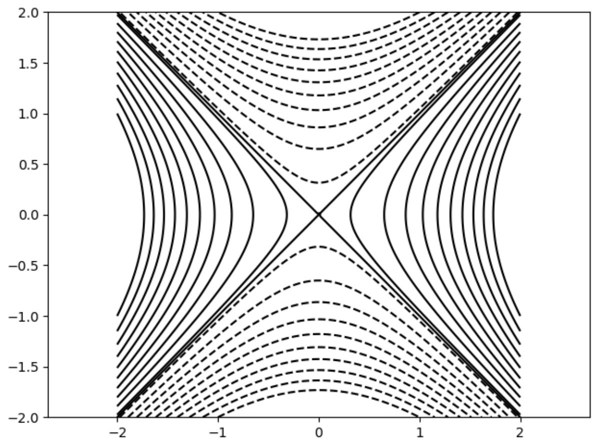
Ci-dessous : (a) la surface, (b) les tranches avec x constant, (c) les tranches avec y constant, (d) les courbes de niveau, (e) les lignes de niveau dans le plan (en pointillé les lignes de niveau négatif).









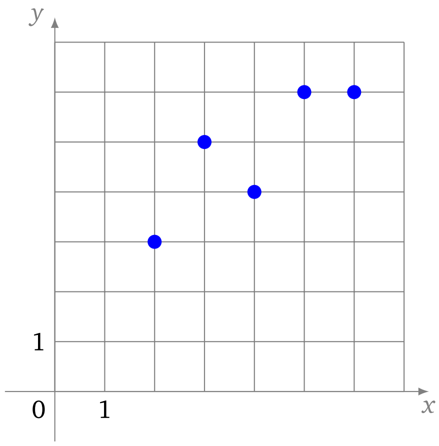


3.4. Régression linéaire

Exemple.
On se donne des points du plan, comme ci-dessous. On s'aperçoit qu'ils sont à peu près alignés et on souhaite trouver l'équation d'une droite :

$$y = ax + b$$

qui les approche au mieux.



Formalisons un peu le problème : on se donne N points $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Pour une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, la distance entre A_i et la droite $\mathcal{D}$ est donnée par la formule :

$$d(A_i, \mathcal{D}) = \frac{|ax_i - y_i + b|}{\sqrt{1+a^2}}.$$

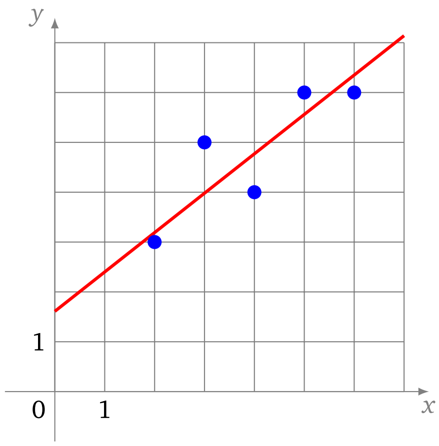
Pour se débarrasser des valeurs absolues et des racines carrées, on élève au carré et on décide que la droite qui approche au mieux tous les points A_i est la droite qui minimise la fonction

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} d(A_i, \mathcal{D})^2 = \frac{1}{1+a^2} \sum_{i=1}^{N} (ax_i - y_i + b)^2.$$

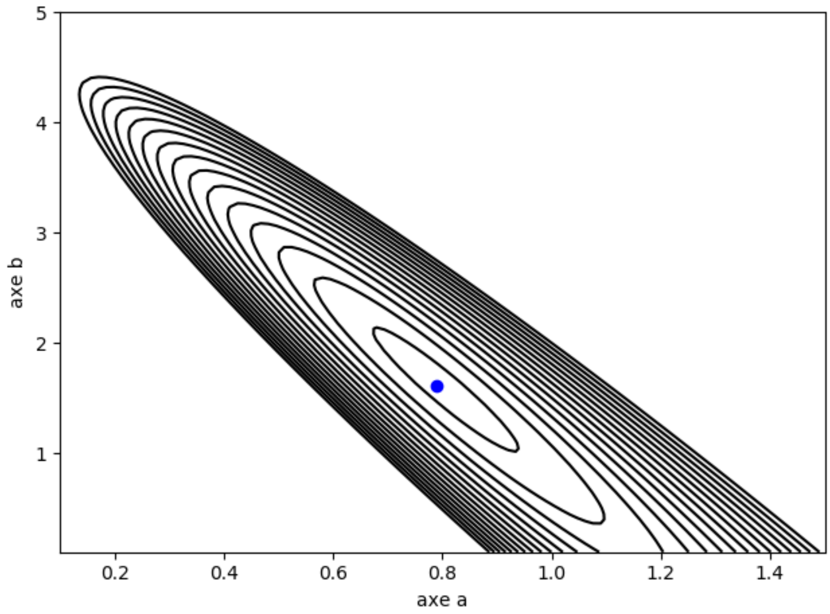
Pour les 5 points du dessin initial : $A_1(2,3)$, $A_2(3,5)$, $A_2(4,4)$, $A_4(5,6)$ et $A_5(6,6)$, il s'agit donc de trouver (a,b) qui minimise la fonction

$$f(a,b) = \frac{1}{1+a^2}\Big((2a-3+b)^2 + (3a-5+b)^2 + (4a-4+b)^2 + (5a-6+b)^2 + (6a-6+b)^2\Big).$$

On trace le graphe de f, les lignes de niveau de f, et on utilise les techniques à notre disposition pour trouver qu'un minimum global est réalisé en $(a,b) \simeq (0.8, 1.6)$, ce qui permet de tracer une droite $y = ax + b$ solution.



Lorsque l'on dessine les lignes de niveau, on s'aperçoit que le minimum (le point bleu) se trouve dans une région plate et allongée. Cela signifie que, bien que le minimum $(a_{\min}, b_{\min})$ soit unique, il existe beaucoup de (a,b) tels que $f(a,b)$ soit proche de la valeur minimale $f(a_{\min}, b_{\min})$. De plus, ces points (a,b) peuvent être assez éloignés de la solution $(a_{\min}, b_{\min})$ (par exemple tous les points de la zone ovale autour du point bleu). Ce qui signifie que beaucoup de droites très différentes approchent la solution optimale.


axe b
axe a
5
4
3
2
1
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4