



# Rapport 1 Recherche Opérationnelle

Assala ASSELLALOU  
Alexandre MONTALDO  
Beya HACHICHA

Département Sciences du Numérique - HPC et Big Data  
2024-2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Assemblage</b>	<b>3</b>
2.1	Modélisation du problème . . . . .	3
2.2	Implémentation . . . . .	3
2.3	Résultat . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Affectation avec prise en compte des préférences</b>	<b>5</b>
3.1	Modélisation du problème . . . . .	5
3.2	Implémentation . . . . .	5
3.3	Résultat . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Application en optimisation pour l'e-commerce</b>	<b>6</b>
4.1	Cas particulier 1.1 . . . . .	6
4.1.1	Modélisation du problème . . . . .	6
4.1.2	Implémentation . . . . .	7
4.1.3	Résultat . . . . .	7
4.2	Cas particulier 1.2 . . . . .	8
4.2.1	Modélisation du problème . . . . .	8
4.2.2	Implémentation . . . . .	8
4.2.3	Résultat . . . . .	9
4.3	Cas particulier 2 . . . . .	9
4.3.1	Modélisation du problème . . . . .	9
4.3.2	Implémentation . . . . .	10
4.3.3	Résultat . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

## Table des figures

1	Résultat de la résolution du problème de l'assemblage PL . . . . .	4
2	Résultat de la résolution du problème de l'assemblage PLNE . . . . .	4
3	Résultat de la résolution du problème de l'affectation avec prise en compte des préférences . . . . .	6
4	Résultat de la résolution du problème de l'e-commerce (Cas Particulier 1.1) . . . . .	7
5	Résultat de la résolution du problème de l'e-commerce (Cas Particulier 1.2) . . . . .	9
6	Résultat de la résolution du problème de l'e-commerce (Cas Particulier 2) . . . . .	11

# 1 Introduction

Ce rapport porte sur la résolution de plusieurs problèmes d'optimisation que nous avons modélisés en séance de TD puis implémentés et résolus en séance de TP. La première partie du travail consistait à modéliser chaque problème en définissant sa fonction objectif et ses contraintes. La deuxième partie portait sur l'implémentation de ces modèles selon le format le plus adapté (lp ou gmpl) et leur résolution grâce au solveur glpsol de GLPK.

Les fichiers au format lp et gmpl jouent un rôle crucial dans cette démarche. Le format lp convient particulièrement aux problèmes avec des variables en dimension 1, où la représentation directe est simple et efficace. Quant au format gmpl, il est utilisé pour les problèmes plus complexes impliquant des matrices de variables, nécessitant des fichiers .mod pour la définition du modèle et des fichiers .dat pour les données. Ces fichiers peuvent ensuite être convertis en .lp pour la résolution finale avec glpsol.

## 2 Assemblage

### 2.1 Modélisation du problème

L'objectif de ce problème est d'aider une usine à savoir comment répartir ses ouvriers sur la construction de deux modèles de vélos différents afin de maximiser son bénéfice.

- **Variables de décision**

- $X_c$  : Nombre d'unités du vélo cargo **C** à fabriquer.
- $X_s$  : Nombre d'unités du vélo standard **S** à fabriquer.

- **Domaine de définition**

- Domaine PL :  $X_c, X_s \in \mathbb{R}, X_c, X_s \geq 0$
- Domaine PLNE :  $X_c, X_s \in \mathbb{N}, X_c, X_s \geq 0$

- **Problème d'optimisation**

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \max \quad 700X_c + 300X_s \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} X_c \leq 700 & \text{(Capacité de production par semaine)} \\ 2.5X_c + X_s \leq 1500 & \text{(Capacité de parking)} \\ 0.06X_c + 0.05X_s \leq 60 & \text{(Capacité de production des ouvriers)} \\ X_c \geq 0, X_s \geq 0 & \text{(Variables positives)} \\ X_c, X_s \in \mathbb{N} & \text{(Variables entières).} \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.2 Implémentation

La modélisation a été réalisée directement dans un fichier .lp. Ce format a permis de définir simplement la fonction objectif et les contraintes d'affectation, assurant qu'une personne est affectée à une seule tâche et qu'une tâche est réalisée par une seule personne. Vu que dans ce problème nos variables sont de dimension 1, nous avons choisi un format lp directement sans passer par un fichier .mod ou un fichier .dat.

## 2.3 Résultat

```

SolAssembleurPL.sol.txt
1  Problem:
2  Rows:      5
3  Columns:   2
4  Non-zeros: 7
5  Status:    OPTIMAL
6  Objective: Benefice = 438461.5385 (MAXimum)
7

```

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	Xc	B	230.769	0		
2	Xs	B	923.077	0		

FIGURE 1 – Résultat de la résolution du problème de l’assemblage PL

```

SolAssembleurPLNE.sol.txt
1  Problem:
2  Rows:      5
3  Columns:   2 (2 integer, 0 binary)
4  Non-zeros: 7
5  Status:    INTEGER OPTIMAL
6  Objective: Benefice = 438400 (MAXimum)
7

```

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	Xc	*	232	0
2	Xs	*	920	0

FIGURE 2 – Résultat de la résolution du problème de l’assemblage PLNE

Les résultats obtenus respectent toutes les contraintes de production. Le nombre de chaque modèle de vélo à fabriquer est cohérent avec la capacité de production, la capacité du parking et le temps de travail des ouvriers. Les solutions retrouvées sont aussi adaptées aux domaines de définition pour les cas PL et PLNE.

### 3 Affectation avec prise en compte des préférences

#### 3.1 Modélisation du problème

L'objectif de ce problème est d'affecter  $N$  tâches à  $N$  personnes en essayant de respecter au maximum leurs préférences.

- **Variables de décision**

- $X[i, j]$  : Variable binaire

$$X[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ est affectée à la tâche } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Domaine de définition**

- $X[i, j] \in \{0, 1\}$ , pour tout  $i \in \text{PERSONNES}, j \in \text{TACHES}$ .

- **Problème d'optimisation**

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \max \quad \sum_{j \in \text{TACHES}} \left( \sum_{i \in \text{PERSONNES}} X[i, j] \cdot \text{Preferences}[i, j] \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i \in \text{PERSONNES}} X[i, j] = 1, & \forall j \in \text{TACHES} & \text{(Une personne par tâche)} \\ \sum_{j \in \text{TACHES}} X[i, j] = 1, & \forall i \in \text{PERSONNES} & \text{(Une tâche par personne)} \end{cases} \end{aligned}$$

#### 3.2 Implémentation

La modélisation a été réalisée dans GLPK en utilisant un fichier .mod pour exprimer la fonction de maximisation des préférences et les contraintes d'affectation, et un fichier .dat pour les données telles que les préférences des personnes pour chaque tâche. Vu que dans ce problème nos variables sont plutôt des matrices, nous avons choisi de travailler avec un format gmpl avec les fichiers .mod et .dat.

### 3.3 Résultat

≡ SolAffectationParPref.sol.txt

1 Problem:

2 Rows: 6

3 Columns: 9 (9 integer, 9 binary)

4 Non-zeros: 18

5 Status: INTEGER OPTIMAL

6 Objective: PreferenceTotale = 22 (MAXimum)

7

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	X(P1,T1)	*	0	1
2	X(P2,T1)	*	1	1
3	X(P3,T1)	*	0	1
4	X(P1,T2)	*	1	1
5	X(P2,T2)	*	0	1
6	X(P3,T2)	*	0	1
7	X(P1,T3)	*	0	1
8	X(P2,T3)	*	0	1
9	X(P3,T3)	*	1	1

FIGURE 3 – Résultat de la résolution du problème de l'affectation avec prise en compte des préférences

Les résultats obtenus associent bien une tâche par personne et une personne par tâche tout en maximisant la somme des préférences.

## 4 Application en optimisation pour l'e-commerce

### 4.1 Cas particulier 1.1

#### 4.1.1 Modélisation du problème

L'objectif de ce problème est de minimiser le coût total de livraison des fluides depuis les magasins vers les demandes, en tenant compte des stocks des magasins.

#### • Variables de décision

—  $X[i, j, k]$  : Variable binaire.

$$X[i, j, k] = \begin{cases} 1 & \text{si le fluide } j \text{ est fourni pour la demande } k \text{ depuis le magasin } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### • Domaines de définition

—  $X[i, j, k] \in \{0, 1\}$ , pour tout  $i \in \text{MAGASINS}, j \in \text{FLUIDES}, k \in \text{DEMANDES}$ .

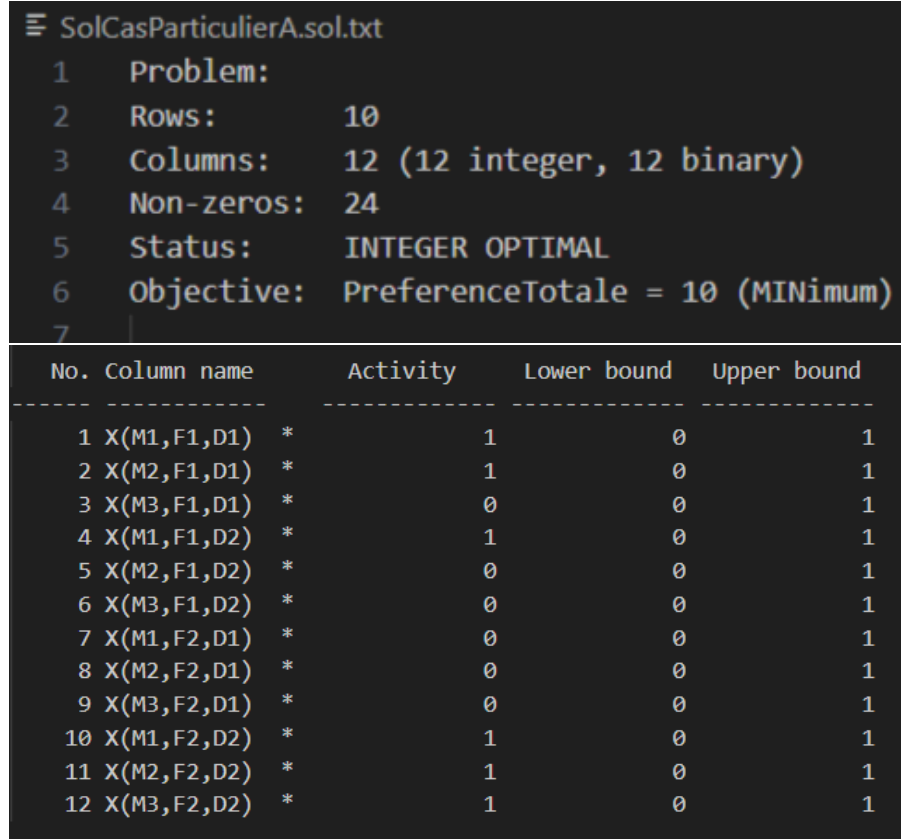
• **Problème d'optimisation**

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \min \sum_{k \in DEMANDES} \left( \sum_{j \in FLUIDES} \left( \sum_{i \in MAGASINS} X[i, j, k] \cdot C[i, j] \right) \right) \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i \in MAGASINS} X[i, j, k] = D[k, j], & \forall j \in FLUIDES, \forall k \in DEMANDES \\ & \text{(Demande satisfaite)} \\ \sum_{k \in DEMANDES} X[i, j, k] \leq S[i, j], & \forall i \in MAGASINS, \forall j \in FLUIDES \\ & \text{(Capacité de stock respectée)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Implémentation

La modélisation a été réalisée dans GLPK en utilisant un fichier .mod pour définir la fonction objectif et les contraintes, et un fichier .dat pour fournir les données, notamment les capacités des magasins, les demandes des clients et les coûts associés à chaque fluide. Vu que dans ce problème nos variables sont plutôt des matrices, nous avons choisi de travailler avec un format gmpl avec les fichiers .mod et .dat.

#### 4.1.3 Résultat



```

≡ SolCasParticulierA.sol.txt
1  Problem:
2  Rows:      10
3  Columns:    12 (12 integer, 12 binary)
4  Non-zeros:  24
5  Status:     INTEGER OPTIMAL
6  Objective:  PreferenceTotale = 10 (MINimum)
7

```

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound
1	X(M1,F1,D1)	*	1	0
2	X(M2,F1,D1)	*	1	0
3	X(M3,F1,D1)	*	0	0
4	X(M1,F1,D2)	*	1	0
5	X(M2,F1,D2)	*	0	0
6	X(M3,F1,D2)	*	0	0
7	X(M1,F2,D1)	*	0	0
8	X(M2,F2,D1)	*	0	0
9	X(M3,F2,D1)	*	0	0
10	X(M1,F2,D2)	*	1	0
11	X(M2,F2,D2)	*	1	0
12	X(M3,F2,D2)	*	1	0

FIGURE 4 – Résultat de la résolution du problème de l'e-commerce (Cas Particulier 1.1)

Les résultats obtenus pour ce problème sont cohérents avec les contraintes imposées. Chaque demande est entièrement satisfaite en respectant les quantités nécessaires pour chaque fluide tout en tenant compte des capacités de stock disponibles dans chaque magasin. Les coûts sont également

minimiser en optimisant la distribution ce qui nous a permis de retrouver une solution optimale tout en respectant les contraintes imposées.

## 4.2 Cas particulier 1.2

### 4.2.1 Modélisation du problème

L'objectif de ce problème est de minimiser le coût total de livraison des fluides depuis les magasins vers les demandes, en tenant compte des stocks des magasins mais cette fois en considérant les coûts fixes et variables des livraisons.

- **Variables de décision**

- $X[i, j, k]$  : Quantité du fluide  $j$  associée à la demande  $k$  provenant du magasin  $i$ .
- $Y[i, k]$  : Variable binaire.

$$Y[i, k] = \begin{cases} 1 & \text{si le magasin } i \text{ participe à la livraison de la demande } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Domaines de définition**

- $X[i, j, k] \geq 0$ , pour tout  $i \in \text{MAGASINS}, j \in \text{FLUIDES}, k \in \text{DEMANDES}$ .
- $Y[i, k] \in \{0, 1\}$ , pour tout  $i \in \text{MAGASINS}, k \in \text{DEMANDES}$ .

- **Problème d'optimisation**

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad \min \quad & \sum_{k \in \text{DEMANDES}} \left( \sum_{j \in \text{FLUIDES}} \left( \sum_{i \in \text{MAGASINS}} X[i, j, k] \cdot (Cv[k, i] + C[i, j]) \right) \right) \\
 & + \sum_{k \in \text{DEMANDES}} \left( \sum_{i \in \text{MAGASINS}} Y[i, k] \cdot Cf[k, i] \right) \\
 \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in \text{MAGASINS}} X[i, j, k] = D[k, j], \quad \forall j \in \text{FLUIDES}, \forall k \in \text{DEMANDES} \\ \quad \text{(Demande satisfaite)} \\ \sum_{k \in \text{DEMANDES}} X[i, j, k] \leq S[i, j], \quad \forall i \in \text{MAGASINS}, \forall j \in \text{FLUIDES} \\ \quad \text{(Capacité de stock respectée)} \\ Y[i, k] \leq \sum_{j \in \text{FLUIDES}} X[i, j, k], \quad \forall i \in \text{MAGASINS}, \forall k \in \text{DEMANDES} \\ \quad \text{(Contrainte Big-M pour Y égal à zéro)} \\ Y[i, k] \cdot 10000 \geq \sum_{j \in \text{FLUIDES}} X[i, j, k], \quad \forall i \in \text{MAGASINS}, \forall k \in \text{DEMANDES} \\ \quad \text{(Contrainte Big-M pour Y égal à un)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

### 4.2.2 Implémentation

La modélisation a été réalisée dans GLPK en utilisant un fichier .mod pour structurer la fonction objectif, les contraintes (quantité de fluide livrée, respect des capacités et contraintes Big-M), et un fichier .dat pour les données des magasins, des fluides et des demandes. Vu que dans ce problème nos variables sont plutôt des matrices, nous avons choisi de travailler avec un format gmpl avec les fichiers .mod et .dat.



### 4.2.3 Résultat

≡ SolCasParticulierB.sol.txt

1 Problem:

2 Rows: 22

3 Columns: 18 (18 integer, 6 binary)

4 Non-zeros: 60

5 Status: INTEGER OPTIMAL

6 Objective: CoutTotal = 368 (MINimum)

7

No.	Column name	Activity	Lower bound	Upper bound	
1	X(M1,F1,D1)	*	0	0	
2	X(M2,F1,D1)	*	0	0	
3	X(M3,F1,D1)	*	2	0	
4	X(M1,F1,D2)	*	1	0	
5	X(M2,F1,D2)	*	0	0	
6	X(M3,F1,D2)	*	0	0	
7	X(M1,F2,D1)	*	0	0	
8	X(M2,F2,D1)	*	0	0	
9	X(M3,F2,D1)	*	0	0	
10	X(M1,F2,D2)	*	1	0	
11	X(M2,F2,D2)	*	2	0	
12	X(M3,F2,D2)	*	0	0	
13	Y(M1,D1)	*	0	0	1
14	Y(M1,D2)	*	1	0	1
15	Y(M2,D1)	*	0	0	1
16	Y(M2,D2)	*	1	0	1
17	Y(M3,D1)	*	1	0	1
18	Y(M3,D2)	*	0	0	1

FIGURE 5 – Résultat de la résolution du problème de l’e-commerce (Cas Particulier 1.2)

Tout comme pour le problème précédent, les résultats obtenus respectent les contraintes imposées. On rajoute ici des coûts fixes et des coûts variables. Pour assurer les livraisons optimales, des contraintes Big-M sont utilisées pour modéliser l’activation des magasins.

## 4.3 Cas particulier 2

### 4.3.1 Modélisation du problème

- Variables de décision

—  $X[i, j]$  : Variable binaire.

$$X[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si une livraison est faite du point } i \text{ vers le point } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

—  $Ordre[i]$  : Variable entière qui représente l’ordre auquel le point  $i$  est visité.

• **Domaines de définition**

- $X[i, j] \in \{0, 1\}$ , pour tout  $i, j \in \text{Points}$ .
- $\text{Ordre}[i] \in \mathbb{N}$ , pour tout  $i \in \text{Clients}$ .

• **Problème d'optimisation**

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \min \quad \sum_{i \in \text{Points}} \sum_{j \in \text{Points}} X[i, j] \cdot \text{Distances}[i, j] \\
 \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 X[i, i] = 0, \quad \forall i \in \text{Points} \\
 \quad \text{(Distance entre un point et lui-même)} \\
 \\
 \sum_{j \in \text{Points}} X[i, j] = 1, \quad \forall i \in \text{Points} \\
 \quad \text{(Une seule livraison par client)} \\
 \\
 \sum_{j \in \text{Points}} X[j, i] = 1, \quad \forall i \in \text{Points} \\
 \quad \text{(Un seul client par livraison)} \\
 \\
 \text{Ordre}[j] + (N - 1) \geq \text{Ordre}[i] + N \cdot X[i, j], \quad \forall i, j \in \text{Clients} \\
 \quad \text{(Respect de l'ordre des livraisons)} \\
 \\
 \text{Ordre}[i] \geq 1, \quad \forall i \in \text{Clients} \\
 \quad \text{(Ordre minimal)} \\
 \\
 \text{Ordre}[i] \leq 5, \quad \forall i \in \text{Clients} \\
 \quad \text{(Ordre maximal)}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

#### 4.3.2 Implémentation

Ce problème correspond au "Problème du Voyageur de Commerce" (TSP). Nous avons vu que ce problème se modélise à l'aide de variables binaires pour représenter les trajets et des contraintes pour éviter les sous-tours.

La modélisation a été réalisée dans GLPK en utilisant un fichier .mod pour définir la fonction objectif, les contraintes, et un fichier .dat pour les données telles que les distances et le nombre de clients. Vu que dans ce problème nos variables sont plutôt des matrices, nous avons choisi de travailler avec un format gmpl avec les fichiers .mod et .dat.

### 4.3.3 Résultat

```
≡ SolCasParticulierC.sol.txt
1  Problem:
2  Rows:      53
3  Columns:   41 (41 integer, 36 binary)
4  Non-zeros: 153
5  Status:    INTEGER OPTIMAL
6  Objective: DistanceTotale = 22 (MINimum)
7
37 Ordre(C1)  *          5
38 Ordre(C2)  *          1
39 Ordre(C3)  *          2
40 Ordre(C4)  *          4
41 Ordre(C5)  *          3
```

FIGURE 6 – Résultat de la résolution du problème de l’e-commerce (Cas Particulier 2)

Les résultats obtenus pour ce problème respectent les contraintes définies, garantissant ainsi une solution cohérente. L’ordre proposé évite bien les sous-tours, assure un circuit valide qui livre chaque client une seule fois et livre tous les clients et surtout, la solution minimise bien la distance totale.

## 5 Conclusion

Ce travail nous a permis d’apprendre à modéliser des problèmes d’optimisation en identifiant les variables de décision, les contraintes, les domaines de définition et les fonctions objectifs. Nous avons également appris à résoudre ces problèmes à l’aide de l’outil GLPK, en adaptant les formats aux spécificités de chaque modèle.