§1.6 事件的独立性

事件的独立性

一般来说，条件概率$P(B|A)\neq P(B)$，即A发生与否对B发生的概率是有影响的。但例外的情形也不在少数，下面是一个例子：

例：有10件产品，其中8件为正品，2件为次品。从中取2次，每次取1件，设A_i={第i次取到正品}，i=1, 2

- 不放回抽样时，$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{9} \neq P(A_2) = \frac{8}{10}$

- 放回抽样时，$P(A_2 | A_1) = \frac{8}{10} = P(A_2)$

即放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率不影响

同样，A_2的发生对A_1的发生概率不影响

事件 A 发生对 B发生的概率没有影响，可视为事件A与B相互独立

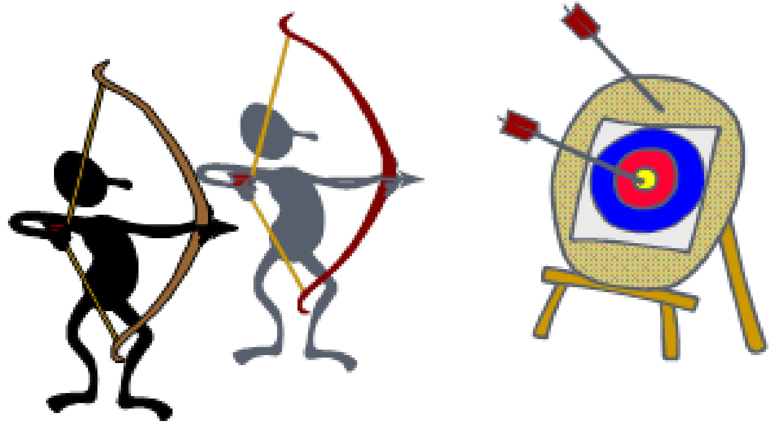
定义：设A，B为两随机事件，$P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

若P(B|A)=P(B)，即P(AB)=P(A)·P(B)

称A，B相互独立。

2

在实际应用中，往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立。



例如：　　　甲、乙两人向同一目标射击，记 A={甲命中}，　B={乙命中}，A与B是否独立？

由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率，故认为A、B独立 。 (即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率)。

又如：　一批产品共n件，从中抽取2件，设

A_i={第i件是合格品}，　i=1,2。

若抽取是有放回的,则A_1与A_2独立。

因为第二次抽取的结果不受第一次抽取的影响。

若抽取是无放回的，则A_1与A_2不独立。

因为第二次抽取的结果受到第一次抽取的影响。

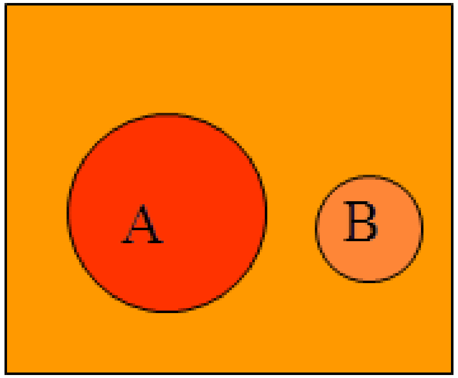
两事件相互独立的性质

1、设A和B是两个事件，且$P(A)>0$, 若A与B相互独立，

则$P(B)=P(B|A)$,反之亦然。

2、若 $P(A)>0$, $P(B)>0$,

则“事件 A 与 事件 B 相互独立”和 “事件 A 与 事件 B 互不相容”不能同时成立



如图 $P(AB)=0$,即A与B互不相容

而$P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$。

即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$。

故 A与B不独立。

即：若A、B互不相容，且$P(A)>0$，$P(B)>0$,

则A与B不独立。

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$, $P(B)>0$,

$P(AB)=P(A)P(B)>0$，则A、B不互不相容。

■ **定理**　下列四组事件，有相同的独立性：

（1）A与B；　（2）A与$\overline{B}$；

（3）$\overline{A}$与B；　（4）$\overline{A}$与$\overline{B}$

证明　若**A**、**B**独立，则　$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(AB)\right]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= \left[1 - P(A)\right]\left[1 - P(B)\right] = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

所以，$\overline{A}$与$\overline{B}$独立。

概念辨析

事件 A 与事件 B 独立

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

事件 A 与事件 B 互不相容

$$AB = \Phi \qquad P(AB) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

事件 A 与事件 B 为对立事件

$$AB = \Phi \qquad A \cup B = \Omega$$

$$P(A) + P(B) = 1$$

有限多个事件的独立性

如果事件A，B，C满足

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad P(AC)=P(A)P(C)$$

$$P(BC)=P(B)P(C) \qquad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称事件A，B，C相互独立。

注 意

事件A，B，C相互独立与事件A，B，C两两独立不同，两两独立是指上述式子中前三个式子成立。因此，相互独立一定两两独立，但反之不一定。

例 设有四张卡片，其中三张分别涂上红色、白色、黄色，而余下一张同时涂有红白黄三色。今从中随机抽取一张，记事件A={抽取的卡片有红色}， B={抽取的卡片有白色}， C={抽取的卡片有黄色}，考察A、B、C的独立性。

解、易知 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4} \qquad P(ABC)=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=P(A)P(B), \quad P(AC)=P(A)P(C), \quad P(BC)=P(B)P(C)$$

但$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B)P(C)$

因而A、B、C两两独立，但不相互独立。

定义

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个事件。如果对于所有可能的组合$1 \le i < j < k < \cdots \le n$下列各式同时成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & C_n^2 \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & C_n^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & C_n^n \end{cases}$$

那么称$A_1, A_2, \cdots, A_n$是相互独立的。

共有（**2^n-n-1**）个等式

对满足相互独立的多个事件，有

(1) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

将$A_1A_2\cdots A_n$中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的n个事件仍然相互独立。

例　某大学生给四家单位各发了一份求职信，假定这些单位彼此独立，通知他去面试的概率分别是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$。问这个学生至少有一次面试机会的概率是多少？

解、 A_i= “第i个单位通知他面试” （i=1,2,3,4）

$$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{3},P(A_3)=\frac{1}{4},P(A_4)=\frac{1}{5},$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3))(1-P(A_4))$$

$$=1-(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})=\mathbf{0.8}$$

例：有4个独立元件构成的系统(如图)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。

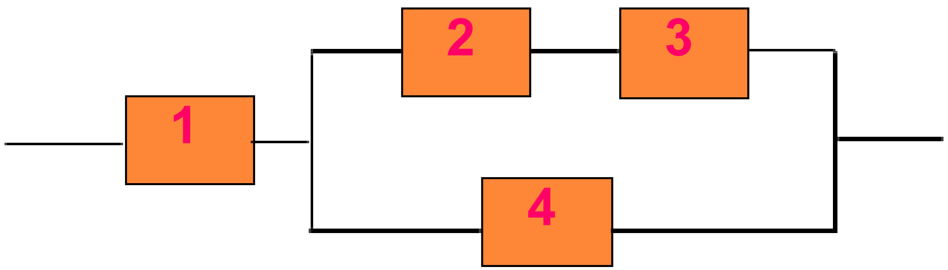
解：设$A_i=\{第i个元件运行正常\}, i=1,2,3,4$

$$A=\{系统运行正常\}$$

则：$A=A_1(A_2A_3\cup A_4)$ 由题意知，A_1,A_2,A_3,A_4相互独立

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2A_3\cup A_4)=p(p^2+p-p^3)$$

另解，$P(A)=P(A_1A_2A_3\bigcup A_1A_4)=p^3+p^2-p^4$，对吗?



注意：这里系统的概念与电路中的系统概念不同

14

例　要验收一批（**100**件）乐器。验收方案如下：自该批乐器中随机地取三件测试（设**3**件乐器的测试结果是相互独立的），如果三件中至少有一件在测试中被人认是音色不纯，则这批乐器就被拒绝接收。设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为**0.95**，而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为**0.01**，如果已知这**100**件乐器中恰有**4**件是音色不纯的。试问这批乐器被接收的可能性是多少？

例　甲乙2人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p=0.6,问对甲而言，采用三局两胜制有利还是五局三胜制有利？设各局胜负相互独立。

解、 采用三局两胜制，甲最终获胜，其胜局的情况是：“甲甲”或“乙甲甲”或“甲乙甲”。而这三种结局互不相容。于是由独立性得甲最终获胜的概率为

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p) = 0.648$$

采用五局三胜制，甲最终获胜，至少需比赛三局（可能赛3局，也可能赛4局或5局）且最后一局必须是甲胜，而前面甲须胜2局。

$$p_2 = p^3 + C_3^2 p^3(1-p) + C_4^2 p^3(1-p)^2 = 0.683$$

Bayes 公式在医学上的应用

——肠癌普查

设事件 A_i 表示第 i 次检查为阳性,事件 B 表示被查者患肠癌,已知肠镜检查效果如下:

$$P(A_i|B)=P(\overline{A_i}|\overline{B})=0.95,\text{且}P(B)=0.005$$

某患者首次检查反应为阳性,试判断该患者是否已患肠癌? 若三次检查反应均为阳性呢?

由Bayes 公式得

$$P(B|A_1) = \frac{P(B)P(A_1|B)}{P(B)P(A_1|B) + P(\overline{B})P(A_1|\overline{B})}$$

$$= \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.05}$$

$$\approx 0.087.$$

首次检查反应为阳性
患肠癌的概率并不大

$$P(B|A_1A_2)$$

$$=\frac{P(B)P(A_1A_2|B)}{P(B)P(A_1A_2|B)+P(\overline{B})P(A_1A_2|\overline{B})}$$

$$=\frac{P(B)P(A_1|B)P(A_2|B)}{P(B)P(A_1|B)P(A_2|B)+P(\overline{B})P(A_1|\overline{B})P(A_2|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.005\times0.95^2}{0.005\times0.95^2+0.995\times0.05^2}\approx 0.6446$$

接连两次检查为阳性患肠癌的可能性过半

两次检查反应均为阳性,还不能断

定患者已患肠癌.

$$P(B|A_1A_2A_3)=\frac{0.005\times0.95^3}{0.005\times0.95^3+0.995\times0.05^3}$$

$$\approx 0.9718$$

连续三次检查为阳性　　　几乎可断定已患肠癌

伯努利

Jacob Bernoulli

1654-1705

瑞士数学家

概率论的奠基人

伯努利 (Jacob Bernoulli)简介

伯努利家属祖孙三代出过十多位数学家. 这在世界数学史上绝无仅有.

伯努利幼年遵从父亲意见学神学,当读了 笛卡尔的书后,顿受启发,兴趣转向数学.

1694年,首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式,同年关于双纽线性质的论文,使伯努利双纽线应此得名.

1695年提出著名的伯努利方程

$$dx/dy = p(x)y + q(x)y^n$$

此外对对数螺线深有研究，发现对数螺线经过各种变换后，结果还是对数螺线，在惊叹此曲线的奇妙之余，遗言把对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词：

纵使变化，依然故我

1713年出版的巨著《推测术》，是组合数学及概率史的一件大事. 书中给出的伯努利数、伯努利方程、伯努利分布等，有很多应用，还有伯努利定理，这是大数定律的最早形式.