第三章　　二维随机变量及其分布

- 二维随机变量及其联合分布
- 边缘分布
- 随机变量的独立性
- 两个随机变量的函数的分布

前面我们讨论的是随机实验中单独的一个随机变量，又称为一维随机变量；然而在许多实际问题中，常常需要同时研究一个试验中的两个甚至更多个随机变量。

例如用温度和风力来描述天气情况；通过对含硫、含磷、含碳的测定来研究钢的成分；在气步枪打靶时，弹着点就要考虑两个随机变量：弹着点的横坐标和纵坐标；衡量**CPU**性能的高低，需要考虑主频、外频、电压以及缓存等指标的稳定性，这就涉及多个随机变量。

再例如 E：抽样调查15-18岁青少年的身高 X与体重 Y，以研究当前该年龄段青少年的身体发育情况。

不过此时我们需要研究的不仅仅是X及Y各自的性质， 更需要了解这两个随机变量的相互依赖和制约关系。因此， 我们将二者作为一个整体来进行研究，记为**(X, Y)**,称为二维随机变（向）量。

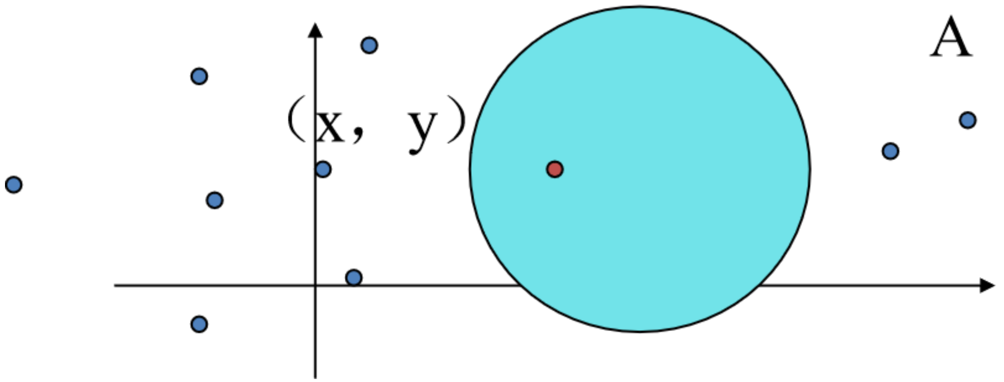
3.1二维随机变量

一、二维随机变量的定义、分布函数

■ 定义

设X、Y 为定义在同一样本空间Ω上的随机变量，则称向量(X, Y)为Ω上的一个二维随机变量。

二维随机变量(**X**，**Y**)的取值可看作平面上的点



二维随机变量的联合分布函数

■ P(60)定义：　若（**X，Y**）是随机变量，对于任意的实数x, y.

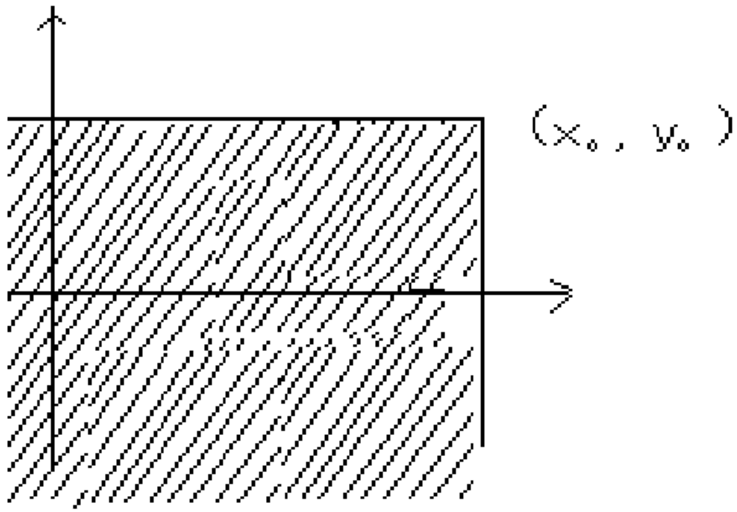
$$F(x,y)=P\{X\le x\bigcap Y\le y\}\overset{\text{记作}}{=}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量的联合分布函数

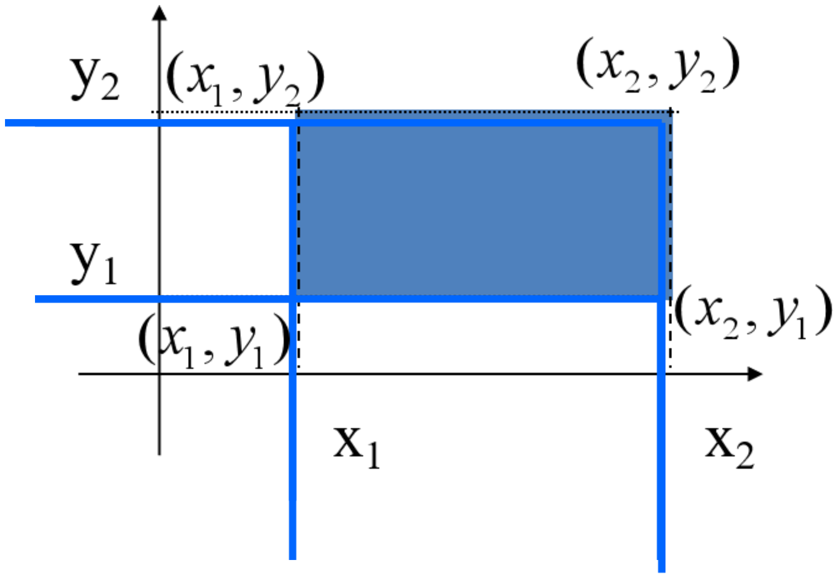
几何意义：分布函数**F(**x_0,y_0**)** 表示随机点**(X,Y)**落在区域

$\{(x,y),-\infty<x\le x_0,-\infty<y\le y_0\}$

中的概率。如图阴影部分：



由此可以推断$P\{x_1<x\le x_2, y_1<y\le y_2\}$



$F(x_2, y_2)$

$-F(x_2, y_1)$

$-F(x_1, y_2)$

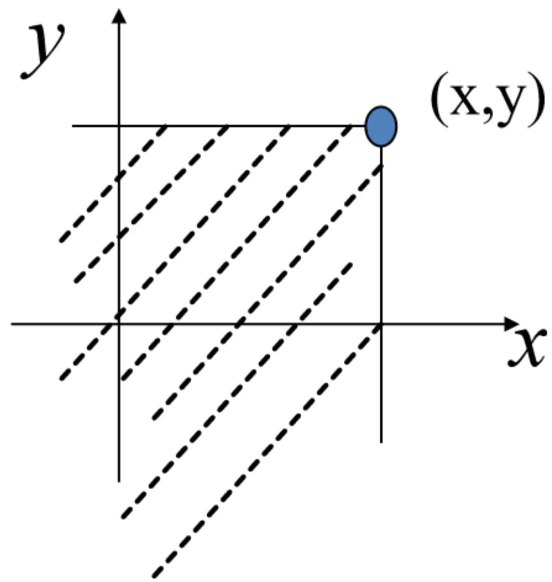
$+F(x_1, y_1)$

$$P\{x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

二维随机变量的联合分布函数性质

■ 性质

(1) $F(x, y)$分别关于x和y单调不减



(2) $0 \le F(x, y) \le 1$

$F(-\infty, y) = 0$ $\qquad$ $F(-\infty, -\infty) = 0$

$F(x, -\infty) = 0$ $\qquad$ $F(+\infty, +\infty) = 1$

(3) 对每个变量右连续

$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$ $\qquad$ $F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$

(4)对于任意 $\boldsymbol{a < b, c < d}$

$$\boldsymbol{F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \ge 0}$$

事实上

$$\boldsymbol{F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)}$$

$$= P\{a < X \le b, c < Y \le d\} \ge 0$$

注意 对于二维 *r.v.*

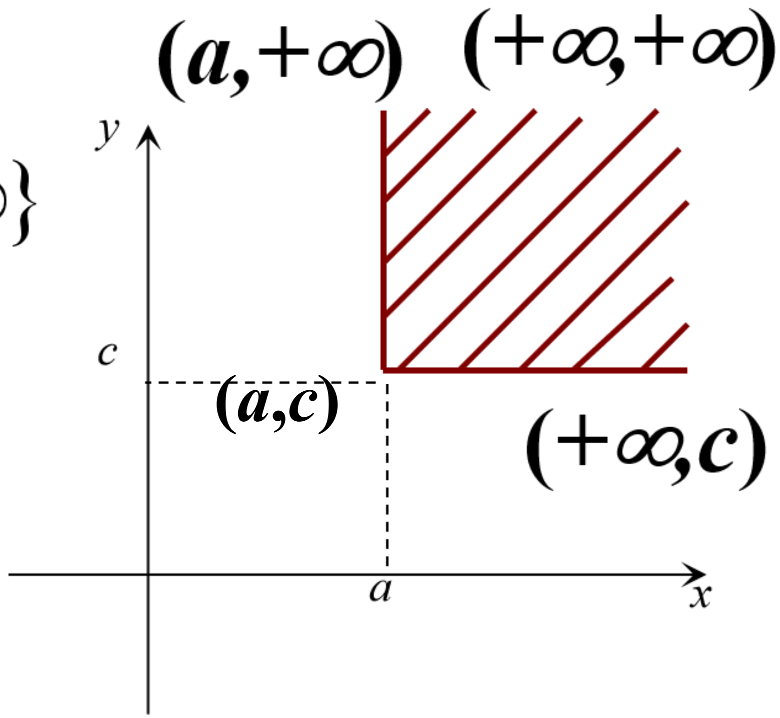
$$P\{X>a,Y>c\}\neq 1-F(a,c)$$

$$P\{X>a,Y>c\}$$

$$=P\{a<X<+\infty,c<Y<+\infty\}$$

$$=1-F(+\infty,c)$$

$$-F(a,+\infty)+F(a,c)$$



二、二维离散型随机变量

■ 定义

若二维 随机变量 （X，Y）的所有可能取值只有限对或可列对，则称（X，Y）为二维离散型随机变量。

■ 研究问题

如何反映（X，Y）的取值规律呢？

联想一维离散型随机变量的分布律。

（X，Y）的联合概率分布（分布律）P(62)

■ 表达式形式

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots; j=1,2,\cdots)$$

■ 表格形式（常见形式）

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

性质

$$0 \le p_{ij} \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$$

$p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_j\}$ 的求法

(1) 利用古典概型直接求;

(2) 利用乘法公式

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\mid X=x_i\}.$$

例 设随机变量X在1, 2, 3, 4这四个整数中等可能地取一个值，若X的值取定时，另一个随机变量Y在1~X等可能的任取一个整数值。求(X,Y)的联合分布律。

解 由于$\{X=i, Y=j\}$的取值情况是i=1,2,3,4,j取不大于i的正整数。根据乘法公式得

$$P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j \mid X=i\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i} \quad (i=1,2,3,4, j\le i)$$

于是得X，Y的联合分布率如下

Y \ X	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

例3 某校新选出的学生会 **6** 名女委员，文、理、工科各占**1/6**、**1/3**、**1/2**，现从中随机指定 **2** 人为学生会主席候选人. 令X, Y 分别为候选人中来自文、理科的人数.

求(X, Y) 的联合分布律和边缘分布律.

解 X 与 Y 的可能取值分别为**0 , 1**与**0 , 1 , 2.**

由古典概型

$$P\{X=0, Y=0\}=C_3^2/C_6^2 = 3/15,$$

相仿有

$$P\{X=0,Y=1\}=C_2^1C_3^1/C_6^2=6/15,$$

$$P\{X=0,Y=2\}=C_2^2/C_6^2=1/15;$$

$$P\{X=1,Y=0\}=C_1^1C_3^1/C_6^2=3/15,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=C_1^1C_2^1/C_6^2=2/15,$$

$$P\{X=1,Y=2\}=0.$$

故联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	3/15	6/15	1/15
1	3/15	2/15	0

与一维随机变量的情形类似有

$$F(x,y)=\sum_{x_i \le x}\sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

式中，和式是对一切满足 $x_i \le x$ 和 $y_j \le y$ 的i,j来求得。

三、二维连续型随机变量的联合概率密度

■ 定义　若存在非负函数f(x,y)，使对任意实数x，y，二元随机变量(X,Y)的分布函数可表示成如下形式

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$$

则称(X,Y)是二元连续型随机变量。f（x，y）称为二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数.

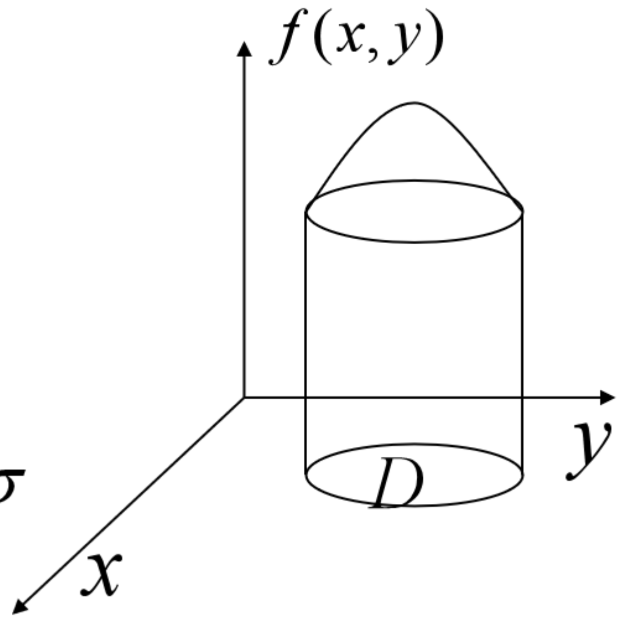
联合概率密度函数的性质

- 非负性 $f(x,y) \geq 0$

- 归一性 $F(+\infty,+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

- $$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

- 几何解释



$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

随机事件的概率=曲顶柱体的体积

例 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数 **k**；

(2) 求 $P\{0<X\le 4, 0<Y\le 1\}$ **(3)** 求 $P\{X<Y\}$

回忆：若 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$,

区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$

则 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy$

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ke^{-(2x+3y)}dxdy = k\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-3y}dy$$

$$=k[-\frac{1}{2}e^{-2x}]_0^{+\infty}[-\frac{1}{3}e^{-3y}]_0^{+\infty} = k\cdot\frac{1}{6}=1$$

所以 $k=6$

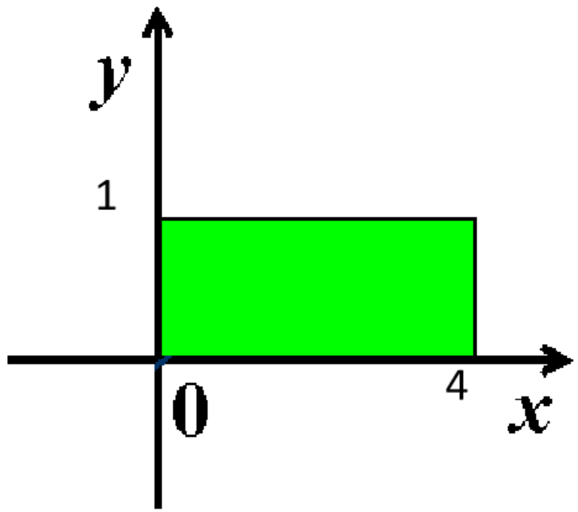
$$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) $P\{0 < X \le 4,\ \ 0 < Y \le 1\}$

$$= \int_0^1 \int_0^4 6e^{-(2x+3y)} dxdy$$

$$= \int_0^4 2e^{-2x} dx \int_0^1 3e^{-3y} dy$$

$$= (1-e^{-8})(1-e^{-3}) \approx 0.95$$



(3)

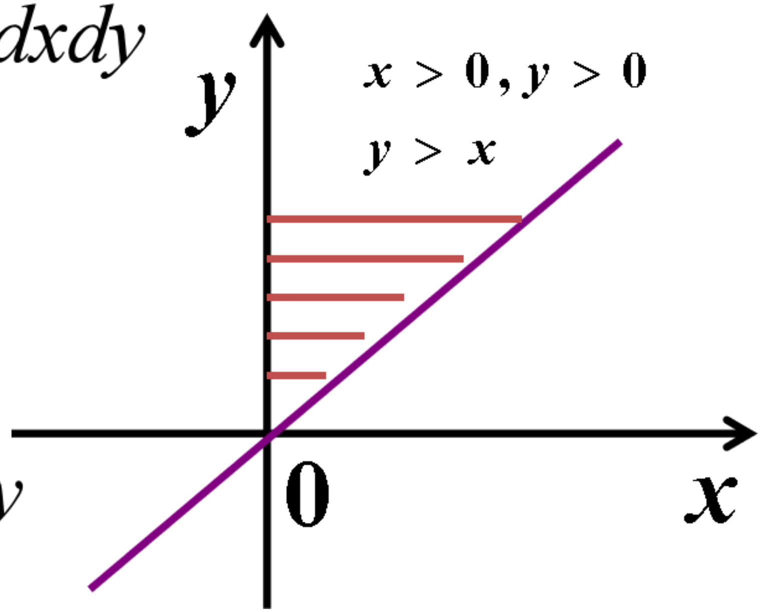
$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x<y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{y} 6e^{-(2x+3y)}dx\right]dy$$

$$=\int_0^{+\infty} 3e^{-3y}[1-e^{-2y}]dy$$

$$=\int_0^{+\infty} 3e^{-3y}dy-\int_0^{+\infty} 3e^{-5y}dy=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$



两个常用的二维连续型分布

(1)二维均匀分布(p71)

若二维随机变量**(X, Y)**的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\subset R^2\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

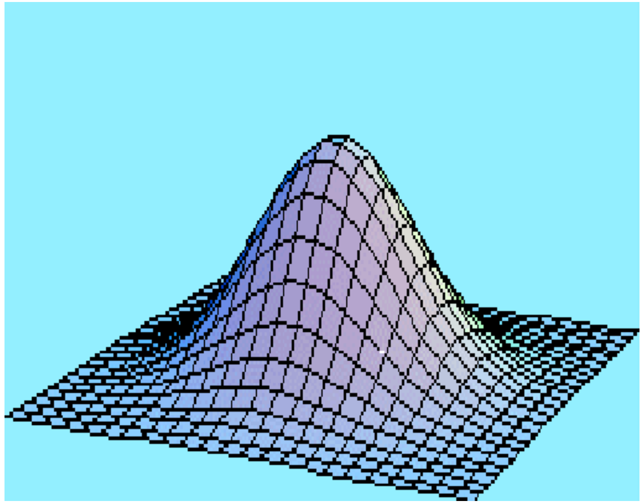
则称**(X, Y)**在区域**D**上**(**内**)** 服从均匀分布。

(2)二维正态分布N($\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$)

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为(P66)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中，μ_1、μ_2为实数，$\sigma_1>0$、$\sigma_2>0$、$|\rho|<1$，则称(X, Y) 服从参数为$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$的二维正态分布，可记为



$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$