3.4 相互独立的随机变量
—— 将事件独立性推广到随机变量上

■ 定义　设（X，Y）的联合分布函数为$F(x, y)$，两个边缘分布函数分别为$F_X(x), F_Y(y)$，如果对于任意的x, y都有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量**X**，**Y**相互独立。

■ 特别，对于离散型和连续型的随机变量，该定义分别等价于

离散型　X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切 i,j 有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

即 $$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

连续型　X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

实际意义

在实际问题或应用中，当X的取值与Y的取值互不影响时，我们就认为X与Y是相互独立的，进而把上述定义式当公式运用.

补充说明

在X与Y是相互独立的前提下，

- 边缘分布可确定联合分布！

$$\boxed{F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)}$$

例1　设（X，Y）的概率分布（律）为

Y / X	-1	0	2	$p_{i\cdot}$
1/2	2/20	1/20	2/20	1/4
1	2/20	1/20	2/20	1/4
2	4/20	2/20	4/20	2/4
$p_{\cdot j}$	2/5	1/5	2/5	

证明：X、Y相互独立。

逐个验证等式

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$$

证　∵X与Y的边缘分布律分别为

X	-1	0	2
$p_{\cdot i}$	2/5	1/5	2/5

Y	1/2	1	2
$P_{j.}$	1/4	1/4	2/4

$$p_{11}=\frac{2}{20}=p_{1.}\cdot p_{.1} \qquad p_{12}=\frac{1}{20}=p_{1.}\cdot p_{.2}$$

$$p_{13}=\frac{4}{20}=p_{1.}\cdot p_{.3}$$

$$p_{21}=p_{2.}\cdot p_{.1} \qquad p_{22}=p_{2.}\cdot p_{.2} \qquad p_{23}=p_{2.}\cdot p_{.3}$$

$$p_{31}=p_{3.}\cdot p_{.1} \qquad p_{32}=p_{3.}\cdot p_{.2} \qquad p_{33}=p_{3.}\cdot p_{.3}$$

∴X、Y相互独立

例2　设（X，Y)的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)} & x\geq 0\ ,y\geq 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

判断X、Y是否独立。

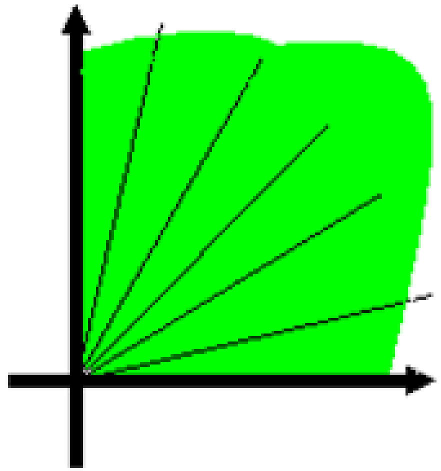
解　边缘密度函数分别为

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dy$$

当 $x\geq 0$ 时　$\varphi_X(x)=\int_0^{+\infty}6e^{-2x-3y}dy=2e^{-2x}$

当 $x<0$ 时　$\varphi_X(x)=0$

所以，$$\varphi_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & (x\geq 0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$$



同理可得 $$\varphi_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & (y\geq 0)\\ 0, & (y<0)\end{cases}$$

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\ge 0\\ 0\ , & x<0\end{cases},\qquad \varphi_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}\ , & y\ge 0\\ 0\ , & y<0\end{cases}$$

$$\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & (x\ge 0, y\ge 0)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\varphi(x\ ,y)$$

所以 X 与 Y 相互独立。

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,

X, Y为相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

X,Y 为相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$

证 $\Rightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1, y$ 有 μ_2 $\quad \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$

故 $\rho=0$

$\Leftarrow$ 将 $\rho=0$ 代入 $f(x,y)$ 即得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$