§1.4 等可能概型（古典概型）

定义

设 随机试验E 具有下列特点:

- 试验的样本空间只包含有限个元素
- 每个基本事件等可能性发生

则称 E 为 古典(等可能)型试验

古典概型中概率的计算:

记
$$n = S\text{中包含的样本点的个数}$$
$$k = A\text{中所包含的样本点的个数}$$

则事件A的概率

$$\boxed{P(A) = k / n}$$

古典概率的计算：抛掷骰子

抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数，求“出现的点数是不小于3的偶数”的概率.

- 试验

  抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数

- 样本空间

  S ={1，2，3，4，5，6} **n=6**

- 事件**A**

  A＝“出现的点数是不小于3的偶数” **={4，6}** **m=2**

- 事件**A**的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

例、掷一枚硬币三次，（1）设事件A_1为“恰有一次出现正面”，求$P(A_1)$；（2）设事件A_2为“至少有一次出现正面”，求$P(A_2)$

解、S={HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT}

A_1={HTT,THT,TTH}

$$P(A_1)=\frac{3}{8}$$

A_2={HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH}

$$P(A_2)=\frac{7}{8}$$

例、甲乙两个赌徒掷两颗骰子进行赌博游戏。

甲：我赌点数和为**9**；

乙：我赌点数和为**7**；

请问：两个人赢得可能性一样大吗？

古典概率的计算：正品率和次品率

设在**100** 件产品中，有 **4** 件次品，其余均为正品.

- 任取**3**件，全是正品的概率　　　　记**A=**“全是正品”

组合　$n = C_{100}^{3}$　　$k = C_{96}^{3}$　　$P(A) = \dfrac{C_{96}^{3}}{C_{100}^{3}}$

排列　$n = 100 \times 99 \times 98$　　$k = 96 \times 95 \times 94$

$$P(A) = \frac{96 \times 95 \times 94}{100 \times 99 \times 98}$$

- 任取**3**件，刚好两件正品的概率　　　　记**B=**“刚好两件正品”

$n = C_{100}^{3}$　　$k = C_{96}^{2} C_{4}^{1}$　　$P(C) = \dfrac{C_{96}^{2} C_{4}^{1}}{C_{100}^{3}}$

练习：设在**N** 件产品中，有 **D**件次品，其余均为正品．任取**n**件，问其中恰有**k(k≤D)**件次品的概率。

解：所求的概率为

$$P=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

上式为超几何分布的概率公式。

练习、课后习题第五题

古典概率的计算：投球入盒

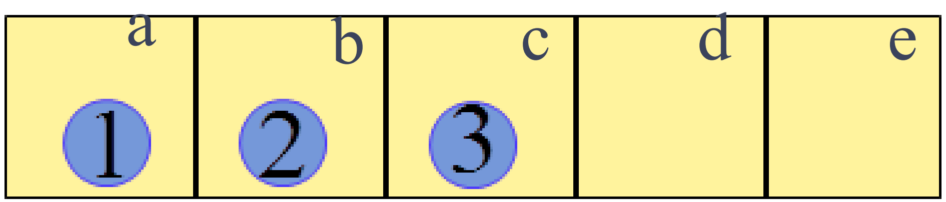
把3个小球随机地投入5个盒内。设球与盒都是可识别的。

- A= “指定的三个盒内各有一球

$$n = 5^3 \qquad m_A = 3! \qquad P(A) = \frac{3!}{5^3}$$

- B = “每个盒子最多有一个球”

$$n = 5^3 \qquad m_B = C_5^3 \cdot 3! \qquad P(B) = \frac{C_5^3 \cdot 3!}{5^3}$$



古典概率的计算：生日问题

某班有50个学生，求他们的生日各不相同的概率（设一年365天）

- 分析　此问题可以用投球入盒模型来模拟

50个学生 $\longrightarrow$ 50个小球

365天 $\longrightarrow$ 365个盒子

$$P(A)=\frac{C_{365}^{50}\cdot 50!}{365^{50}}\approx 0.03$$

至少有两人生日相同的概率为

$$P(\overline{A})\approx 1-0.03=0.97$$

- 例：一单位有5个员工，一星期共七天，老板让每位员工独立地挑一天休息，求不出现至少有2人在同一天休息的概率。

解：将5为员工看成5个不同的球，

7天看成7个不同的盒子，

记A={ 无2人在同一天休息 }，

则由上例知：

$$P(A)=\frac{C_7^5\cdot 5!}{7^5}\approx 14.99\%$$

例：(抽签问题)一袋中有a个红球，b个白球，记a+b=n. 设n个人依次在袋中各取一球，不放回地抽取。求第i(i=1,2,…,n)人取到白球（记为A_k）的概率。

解、可设想将n个球进行编号： ①②… ⓝ

其中 ①—— ⓐ 号球为红球，将n个人也编号为1,2,…,n.

$$\underset{1}{\underline{\quad}},\ \underset{2}{\underline{\quad}},\ \cdots,\ \underset{k}{\underline{\ \otimes\ }},\ \cdots,\ \underset{n}{\underline{\quad}}$$

可以是①号球，亦可以是②号球……是ⓝ号球

视 ①②…ⓝ 的任一排列为一个样本点，每点出现的概率相等。

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

----------与**k**无关

10

- **例7：某接待站在某一周曾接待12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?**

解：假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周的任一天中去接待站是等可能的，那么，12次接待来访者都是在周二、周四的概率为

$$\frac{2^{12}}{7^{12}}=0.000\,000\,3$$

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为实际推断原理)。

现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的。

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

8. 在 1500 件产品中有 400 件次品、1100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件

强度太弱的概率是多少？

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，求条件概率 $P(B \mid A \cup \overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=1/4, P(B \mid A)=1/3, P(A \mid B)=1/2$，求 $P(A \cup B)$.

15. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{孩子得病\}=0.6, P\{母亲得病 \mid 孩子得病\}=0.5,$$

$$P\{父亲得病 \mid 母亲及孩子得病\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品.

(2) 两件都是次品.

(3) 一件是正品，一件是次品.

(4) 第二次取出的是次品.

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？