§1.3 频率与概率

历史上概率的四次定义

① 统计定义 ——— 基于频率的定义

② 古典定义 ——— 概率的最初定义

③ 几何定义

④公理化定义 ——— 1930年后由前

苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出

一、频率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件外）来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性的大小。我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次实验中发生的可能性的大小。为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性的大小——概率。

随机事件的频率Frequency

- 随机试验　　抛掷一枚均匀的硬币
- 试验总次数**n**　　将硬币抛掷**n**次
- 随机事件　　**A=**“出现正面”
- 事件**A**出现次数**m**　　出现正面**m**次
- 随机事件的频率　　$f_n(A)$　　$\frac{m}{n}$

$$f_n(A)=\frac{\text{事件A出现的次数}m}{\text{试验总次数n}}$$

频率稳定性的实例

------------------抛掷硬币的试验

Experiment of tossing coin

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

频率稳定性的实例

------------------抛掷硬币的试验

Experiment of tossing coin

- 历史纪录

试 验 者	抛 掷 次 数n	出现正面的次数m	出现正面的频率m/n
德.摩 根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

** 频率的性质：

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$

$2^\circ \quad f_n(S) = 1$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，则 $f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$

且 $f_n(A)$ 随n的增大渐趋稳定，记稳定值为p.

6

二 概率

定义1：$f_n(A)$的稳定值p定义为A的概率，记为P(A)=p

定义2：将概率视为测度，且满足：

1° $0 \le P(A) \le 1$

2° $P(S) = 1$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

称P(A)为事件A的概率。

说明：

1、频率从本质上来讲即是概率，故要求概率具有频率的性质。

2、概率是事件的一种固有属性。由事件自身确定，并且客观存在，好比一根木棒有长度，一块土地有面积，是随机事件发生的可能性大小的度量。

概率的性质

$$P(\varnothing)=0$$

证明 $S=S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$

由公理 3 知

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

所以

$$P(\varnothing)=0$$

不可能事件的概率为零

有限可加性

设A_1，A_2， $\cdots$，A_n两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明

在公理3中，取$A_i = \varnothing$ （i=n+1,n+2,⋯）.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\Phi)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad AB = \Phi$$

17世纪法国赌场中，赌场老板愿意用一对一的赌注设赌局，规则是：若玩家将一颗骰子抛掷四次，至少出现一次“6”点，则玩家赢。也有人提出另一种规则：若玩家将两颗骰子抛掷24次，至少出现一次“双6”点，则玩家赢。

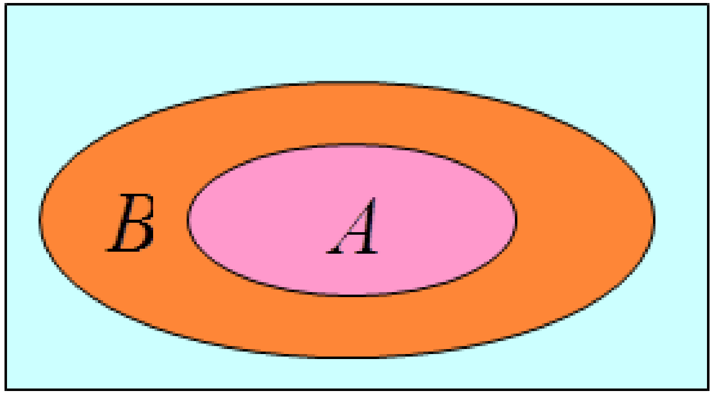
赌徒梅德尔认为上述两种赌博玩家赢的机会相同。他的推理如下

掷一颗骰子一次，有1/6的机会得“6”点，因此，在4次抛掷中，有4× 1/6=2/3的机会得到至少出现一次“6”点；掷一对骰子一次，有1/36的机会得“双6”点，因此，在24次抛掷中，有24× 1/36=2/3的机会得到至少出现一次“双6”点。根据这种推理，两种情况下玩家赢的机会相同。

但是，梅德尔在大量的抛掷骰子的试验中发现，第一种情况比第二种情况更可能出现，这是怎么回事？问题究竟出在哪里？

差事件的概率

若 $A \subset B$，则 P (B − A) = P(B) − P(A)



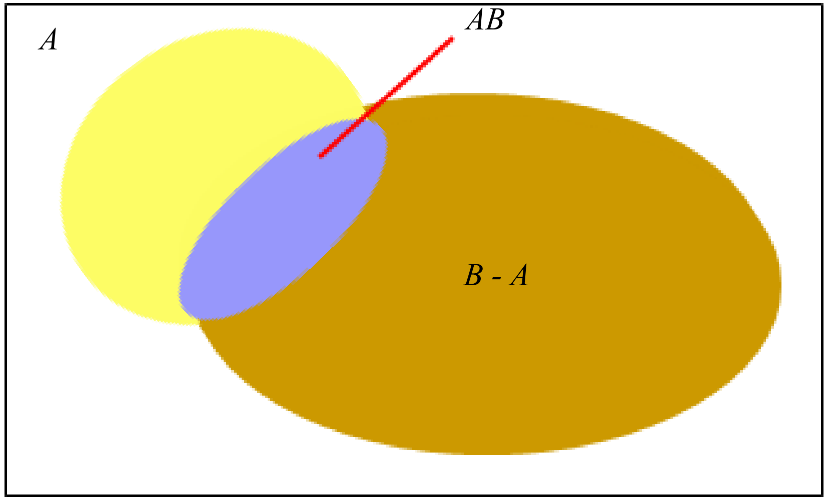
$$B = A \cup (B - A)$$

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$$

P（B－A）＝P（B）－P（A）

- 对任意两个事件A, B, 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$



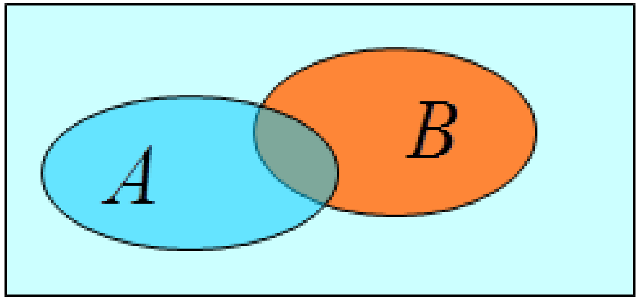
$$\because B = AB\cup(B-A)$$
$$且 AB\cap(B-A)=\varnothing$$

$$\therefore P(B)=P(AB\cup(B-A))=P(AB)+P(B-A))$$

加法定理

对任意两个随机事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



$$A\cup B=A\cup(B-AB)$$

且$A\cap(B-AB)=\varnothing$

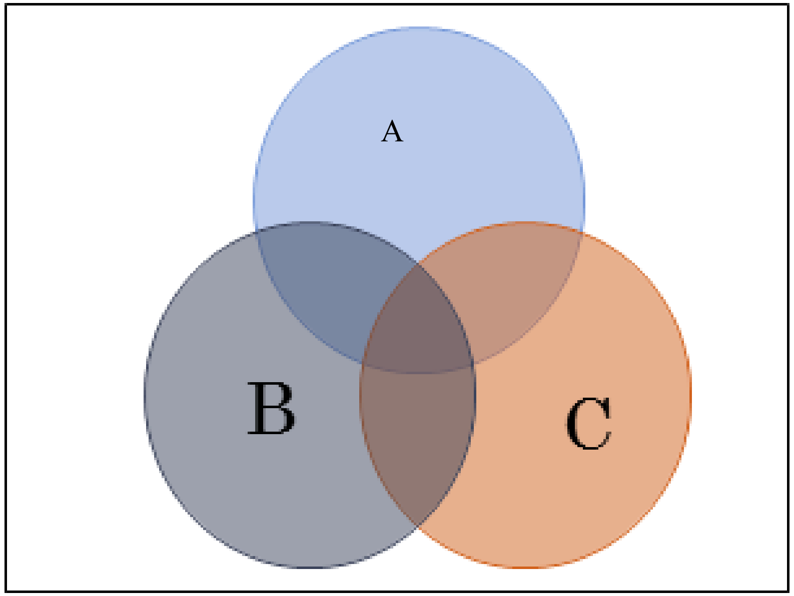
$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))$$

$$=P(A)+P(B-AB)$$

$$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

加法定理

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$



对立事件的概率

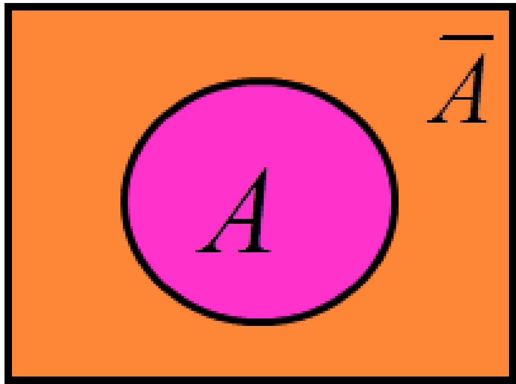
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

证明　由于A与其对立事件互不相容，由性质2有

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

而 $A \cup \overline{A} = \Omega, P(\Omega) = 1$

所以 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$



例 甲、乙两人同时向目标射击一次，设甲击中的概率为 **0.85**，乙击中的概率为 **0.8**．两人都击中的概率为 **0.68**．求目标被击中的概率.

解 设 A＝“甲击中目标”， B＝“乙击中目标”，C＝“目标被击中”， 则

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.85 + 0.8 - 0.68 = 0.97$$

例　设A, B是互不相容的事件，已知P(A)=0.4, P(B)=0.5, 求$P(\overline{A})$, $P(A\cup B)$,$P(A\overline{B})$,$P(\overline{A}\,\overline{B})$,$P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

解、$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$

$\because A, B$互不相容

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ =0.4+0.5=0.9$

$\therefore P(A\overline{B})=\ P(A)=0.4$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=\ P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.1$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=\ \ P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$

例 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出甲、乙二类问题的概率分别为**0.7**和**0.2**，两类问题都能答出的概率为**0.1**. 求小王

(1) 答出甲类而答不出乙类问题的概率

(2) 至少有一类问题能答出的概率

(3) 两类问题都答不出的概率

解 事件A，B分别表示“能答出甲,乙类问题”

(1) $$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.7 - 0.1 = 0.6$$

(2) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$$

(3) $$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.2$$

思考:

例1 中小王他能答出第一类问题的概率为**0.7**，答出第二类问题的概率为**0.2**，两类问题都能答出的概率为**0.1**. 为什么不是

$$0.7\times 0.2 \overset{?}{=} 0.1$$

若是的话，则应有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$

而现在题中并未给出这一条件.

在§**1.6**中将告诉我们上述等式成立的

条件是：事件 A_1, A_2 相互独立.

例　设A, B两个不同的事件

验证事件A和事件B恰有一个发生的概率为

$P(A)+P(B)-2P(AB)$