2.5 随机变量的函数的分布

■ 背景

在许多实际问题中,常常需要研究随机变量的函数的分布问题, 例:

☆ 测量圆轴截面的直径**d**,而关心的却是截面积:

$$S=\frac{1}{4}\pi d^2$$

d为随机变量, S 就是随机变量d的函数。

☆ 在统计物理中,已知分子的运动速度**x**的分布,求其动能:

$$y=\frac{1}{2}mx^2$$ 的分布。

一般地，设**y=g(X)**是一元实函数，**X**是一个随机变量，若**X**的取值在函数**y=g(X)**的定义域内，则**Y=g(X)**也为一随机变量。

密度函数　　随机变量　　分布函数

$$f_X(x) \text{ —— } X \text{ —— } F_X(x)$$

$$\downarrow$$

$$f_Y(y) \text{ —— } Y = g(X) \text{ —— } F_Y(y)$$

随机变量的函数

离散型随机变量的函数的分布

(p50) 设**X**一个随机变量，分布律为

$$\mathbf{X \sim P\{X = x_k\} = p_k,\quad k = 1, 2, \dots}$$

若$\boldsymbol{y = g(x)}$是一元单值实函数，则$\mathbf{Y = g(X)}$也是一个随机变量。求**Y**的分布律.

例:已知

X	-1	0	1
P_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$

求：$Y=X^2$的分布律

Y	1	0
P_k	$2/3$	$1/3$

一般地

X	x_1	$x_2 \cdots$	$x_k \cdots$
P_k	p_1	$p_2 \cdots$	$p_k \cdots$
Y=g(X)	$g(x_1)$	$g(x_2)\cdots$	$g(x_k)\cdots$

如果**g(x $_i$)**与**g(x $_j$)**相同，此时将两项合并，对应概率相加

例 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求$Y=(X-1)^2$的分布律.

解 由题设可得如下表格

x	-1	0	1	2
$Y=(x-1)^2$	4	1	0	1
概率	0.2	0.3	0.1	0.4

所以，$y=(x-1)^2$的分布律为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.4	0.1

求$Y=2X^2+1$的分布律.

解 由题设可得如下表格

x	-1	0	1	2
$Y=2x^2+1$	3	1	3	9
概率	0.2	0.3	0.4	0.1

所以，$y=2x^2+1$的分布律为

Y	1	3	9
p_k	0.3	0.6	0.1

连续型随机变量的函数的分布

设 **X** 为一个连续型随机变量，其概率密度函数为 ***f*** **(x)**。

y = ***g*****(x)**为一个连续函数，求随机变量**Y=g(X)**的概率密度函数

1、一般方法

(1)　求Y的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) \xlongequal{\text{根据分布函数的定义}} P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$= \int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

(2)　对$F_Y(y)$ 求导，得到 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = (F_Y(y))'$$

例　设随机变量X的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, 0<x<4\\ 0, 其它\end{cases}$$

求随机变量**Y=2X+8**的概率密度。

解（1）　先求**Y=2X+8**的分布函数 $\mathbf{F_Y(y)}$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le\frac{y-8}{2}\}=F_X(\frac{y-8}{2})$$

（**2**） 求**Y=2X+8**的概率密度

$$f_Y(y)=(F_Y(y))'=(F_X(\frac{y-8}{2}))'$$

$$=f_X(\frac{y-8}{2})(\frac{y-8}{2})'=f_X(\frac{y-8}{2})\frac{1}{2}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}, & 0<\frac{y-8}{2}<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad=\begin{cases}\frac{y-8}{32}, & 8<y<16\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例　设随机变量X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解　(1)先求 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

因为 $Y=X^2\geqslant 0$，所以 $y\leqslant 0$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$。

若 $y>0$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}< X\le\sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

（2） 求 $Y=X^2$ 的概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=(F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}))'$$

$$=f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'-f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}},\quad y>0$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设**X～N（0，1）**，其概率密度为：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

则 $Y=X^2$ 概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

此时称Y服从自由度为1的χ^2**分布,记作** $Y\sim\chi^2(1)$

结论：若 $X\sim N(0,1)$ **则** $X^2\sim\chi^2(1)$

例　设随机变量X服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=aX+b$ 的概率密度。

解　先求分布函数 $F_Y(y)$。

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{aX+b\le y\}$$

当 $a>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X\le\frac{y-b}{a}\}=F_X(\frac{y-b}{a})$$

所以，

$$f_Y(y)=f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

当 $a<0$ 时， $F_Y(y)=P\{X\geq \frac{y-b}{a}\}$

$$F_Y(y)=P\{X\geq \frac{y-b}{a}\}=1-P\{X<\frac{y-b}{a}\}$$

$$=1-F_X(\frac{y-b}{a})$$

$$f_Y(y)=-f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

所以， $Y\sim N\left(a\mu+b,(|a|\sigma)^2\right)$

■ 定理　正态分布的线性函数仍服从正态分布

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = aX + b(a \neq 0)$，则$Y \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

■ 推论

$$若X \sim N(\mu, \sigma^2)，则\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

正态分布的标准化

小结.

- 随机变量
  - 离散型——分布律
    归一性
    分布函数与分布律的互变
    概率计算
    - 0-1分布
      二项分布B（n,p)
      泊松分布P(λ)
  - 分布函数
    归一性
    概率计算
    单调性
  - 连续型——概率密度
    归一性
    概率计算
    分布函数与概率密度的互变
    - 正态分布的概率计算
    - 均匀分布U(a,b)
      正态分布N(μ, σ^2)
      指数分布E（θ）
- 随机变量函数的分布

习题课

一、填空：

1.设随机变量**X**服从参数为（**2,p**）的二项分布，

随机变量**Y**服从参数（**3,p**）的二项分布，若

$P\{X \geq 1\} = \dfrac{5}{9}$，则**P{Y≥1}=________**

2.设随机变量**X**服从（**0**，**2**）上的均匀分布，则随机变量**Y=X**^{2}在（**0**，**4**）内的密度函数为

$f_Y(y)=$ ___

3.设随机变量**X~N（2，** σ^2）**，**且**P（2<X<4）=0.3，**

则**P(X<0)=**

二. 从某大学到火车站途中有6个交通岗, 假设在各个交通岗是否遇到红灯相互独立, 并且遇到红灯的概率都是1/3. 以Y表示汽车在第一次停止之前所通过的交通岗数, 求Y的分布律. (假定汽车只在遇到红灯或到达火车站时停止)

三、某射手对靶射击，单发命中概率都为**0.6**，现他扔一个均匀的骰子，扔出几点就对靶独立射击几发，求他恰好命中两发的概率。

四. 已知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}(1-x) & -2<x<1\\ 0 & others\end{cases}$$

求：$Y=1-X^2$的概率密度