2.3、随机变量的分布函数

Distribution Function

对于离散型随机变量，分布律可以用来表示其各个可能值的概率，但在实际中有很多非离散型随机变量，由于其可能的取值不能一一列举出来，因而就不能像离散型随机变量那样可以用分布律来描述它。另外，我们常常所遇到的非离散型随机变量取任一指定的实数值的概率都等于0（这一点在下一节将会讲到）。

再者，在实际中，对于这样的随机变量，例如误差**ε**，元件寿命**T**等，我们并不会对误差**ε=0.05mm**时寿命**T=1251.3**感兴趣，而是考虑误差落在某个区域内的概率，寿命**T**大于某个数的概率。因而我们转而去研究随机变量所取的值落在一个区域$(x_1,x_2]$的概率：$P\{x_1<X\leqslant x_2\}$.但由于

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

因此我们只需要知道$P\{X \le x_2\}$和$P\{X \le x_1\}$就可以了。

下面引入随机变量的分布函数的概念。

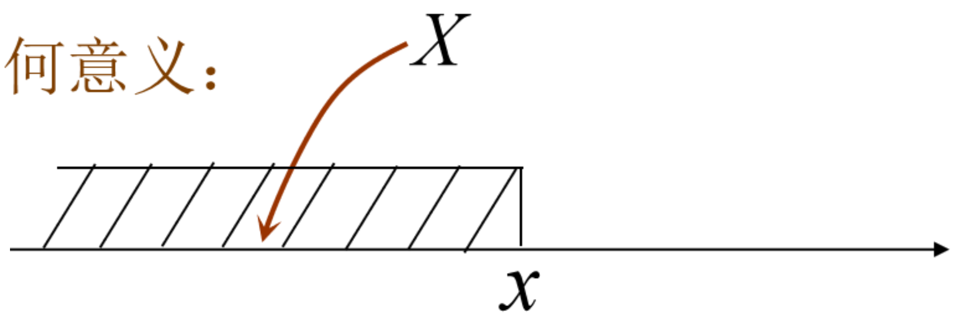
1、分布函数的定义

定义 设 X 为随机变量, x 是任意实数,称函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

为 X 的**分布函数**.

$F(x)$的几何意义:



作用:利用分布函数求各种随机事件的概率

二、分布函数的性质

1、**单调不减性**：若$x_1<x_2$，则$F(x_1)\le F(x_2)$;

2、**归一性**：对任意实数x，$0\le F(x)\le 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

3、右连续性：对任意实数x，

$$F(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0).$$

反之，具有上述三个性质的实函数，必是某个

随机变量的分布函数。故该三个性质是

分布函数的充分必要性质。

一般地，对离散型随机变量

X ~ P{X= x$_k$} = p$_k$, k = 1, 2, …

其分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{k:x_k\le x}p_k$$

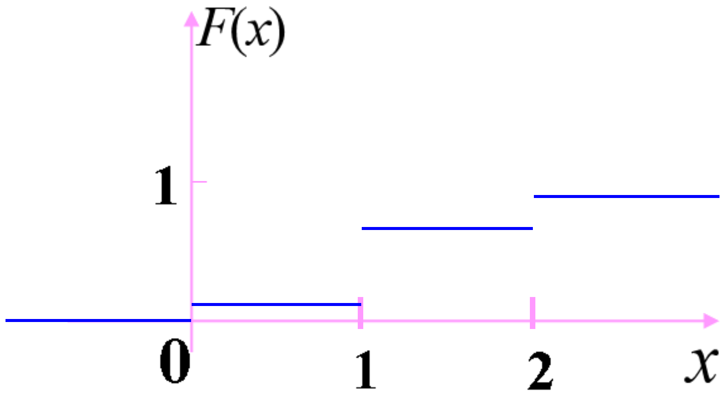
例**1** 设随机变量**X**具分布律如右表

试求出**X**的分布函数。

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

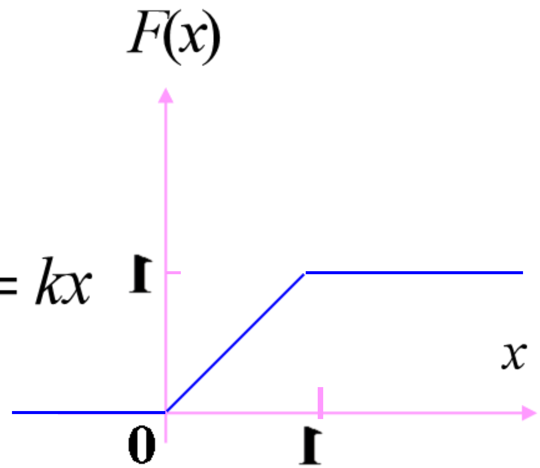
解

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 0.1, 0\le x<1\\ 0.7, 1\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$



例2 向[0,1]区间随机抛一质点，以X表示质点坐标.假定质点落在[0,1]区间内任一子区间内的概率与区间长成正比，求X的分布函数

解： $F(x)=P\{X\leqslant x\}$



当$x<0$时,$F(x)=0$;当$x>1$时,$F(x)=1$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时, $F(x)=P\{0\leq X\leq x\}=kx$

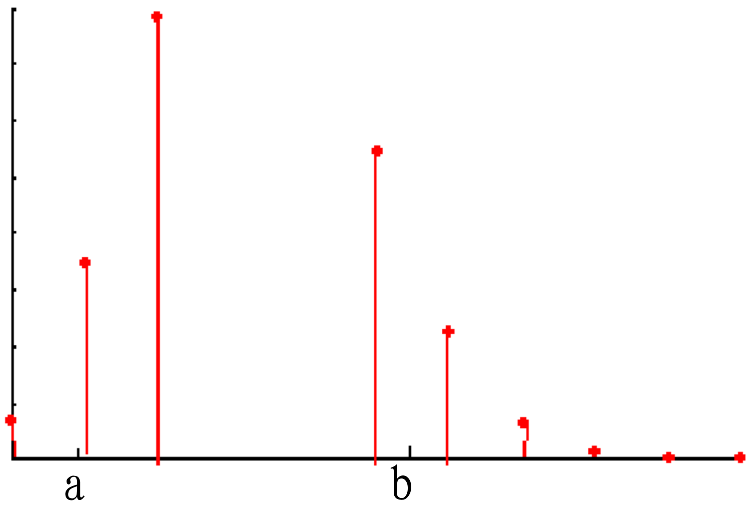
特别,$F(1)=P\{0\leqslant x\leqslant 1\}=k=1$

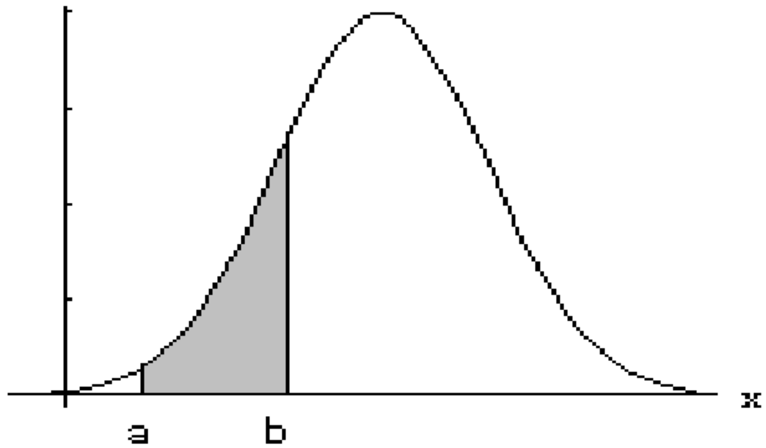
$$\therefore F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leq x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

?

用分布函数描述随机变量不如分布律直观，

对非离散型随机变量，是否有更直观的描述方法？





$$p\{a < X \leq b\} = ?$$