例、某人打靶，圆靶半径为1m。设射击一定中靶，且击中靶上任一与圆靶同心的圆盘的概率与该圆盘的面积成正比。以X表示弹着点至靶心的距离，试求随机变量X的分布函数。

解、X可能取$[0,1]$上的任何实数。

当$x<0$时，$\{X\leqslant x\}$是不可能事件，于是

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，由题意可得

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant x\}=kx^2$$

而$F(1)=x^2$，另外$F(1)=P\{X\leqslant 1\}=1$，所以$k=1$

所以 $F(x)=x^2$

当$x\geqslant 1$时，由题意$\{X\leqslant x\}$是必然事件，故

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$$

解、X可能取$[0,1]$上的任何实数。

当$x<0$时，$\{X\leqslant x\}$是不可能事件，于是

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，由题意可得

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant x\}=kx^2$$

而$F(1)=x^2$，另外$F(1)=P\{X\leqslant 1\}=1$，所以$k=1$

所以 $F(x)=x^2$

当$x\geqslant 1$时，由题意$\{X\leqslant x\}$是必然事件，故

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$$

综上所述，既得X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

§2.4 连续型随机变量及其概率密度

1、连续型 随机变量的概念

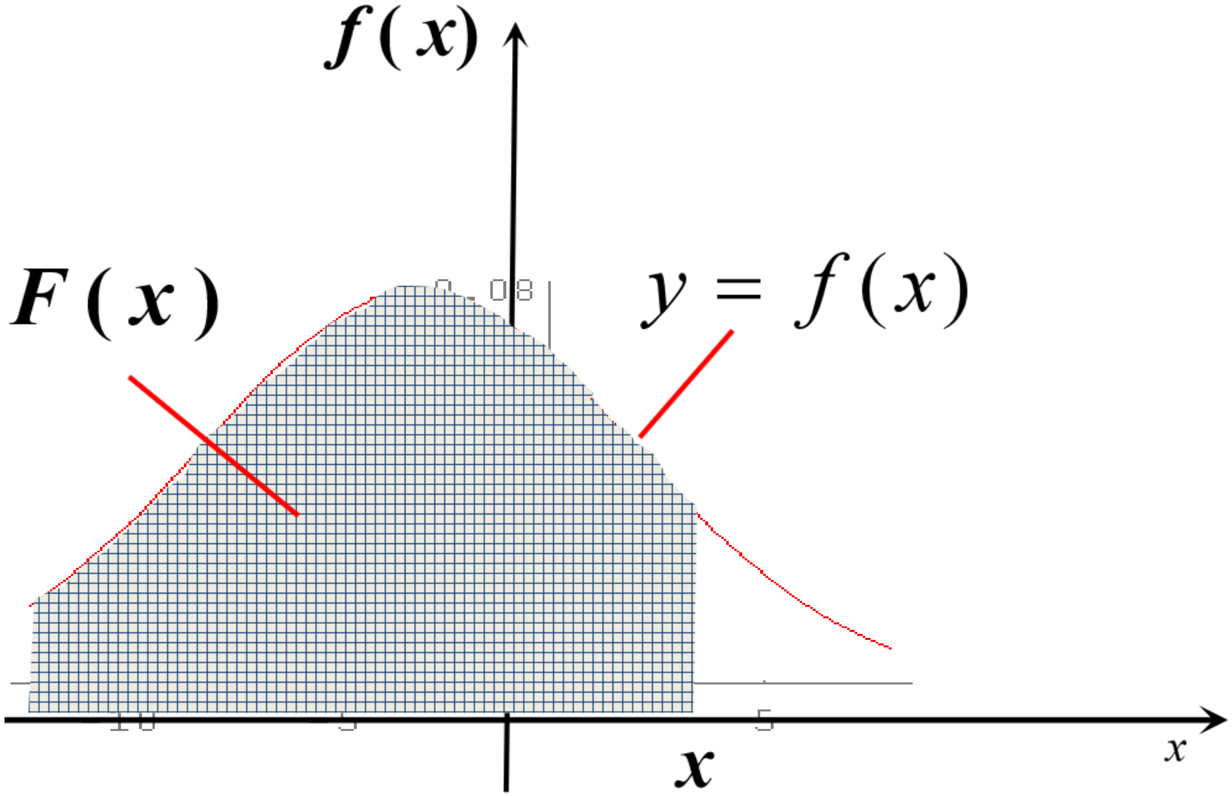
定义 **(P42)**如果对于随机变量X的分布函数 **F(x)**, 存在一个非负可积函数$f(x)$, 使对于任意实数**x**,有

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad -\infty<x<+\infty$$

则称 X 是 连续型随机变量，其中函数$f(x)$称为X的概率密度函数(Probability density function)，简记为概率密度.　　　常记为

$$X\sim f(x),\ (-\infty<x<+\infty)$$

分布函数与密度函数几何意义



注意：密度曲线在某点a处的高度，并不能反映X取a值的概率。但是，这个高度越大，则X取a附近值的概率就越大。也就是说，密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度。这也就是“概率密度”一词的由来。

概率密度函数的性质(P42)

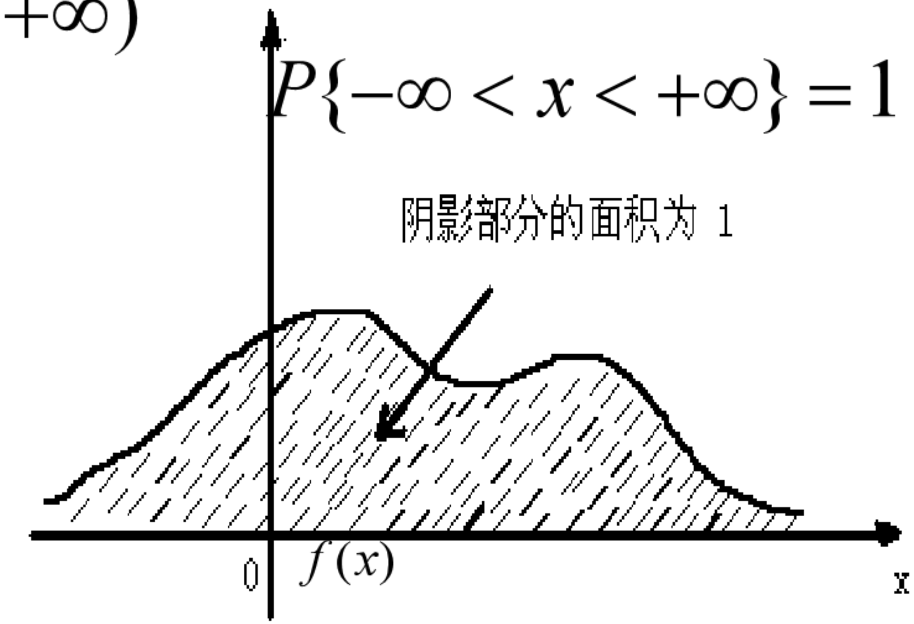
（1）非负性

$$f(x)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

（2）规范性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

常利用这两个性质检验一个函数能否作为连续随机变量的密度函数。



EX

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=ae^{-|x|}$$

求常数a.

答:

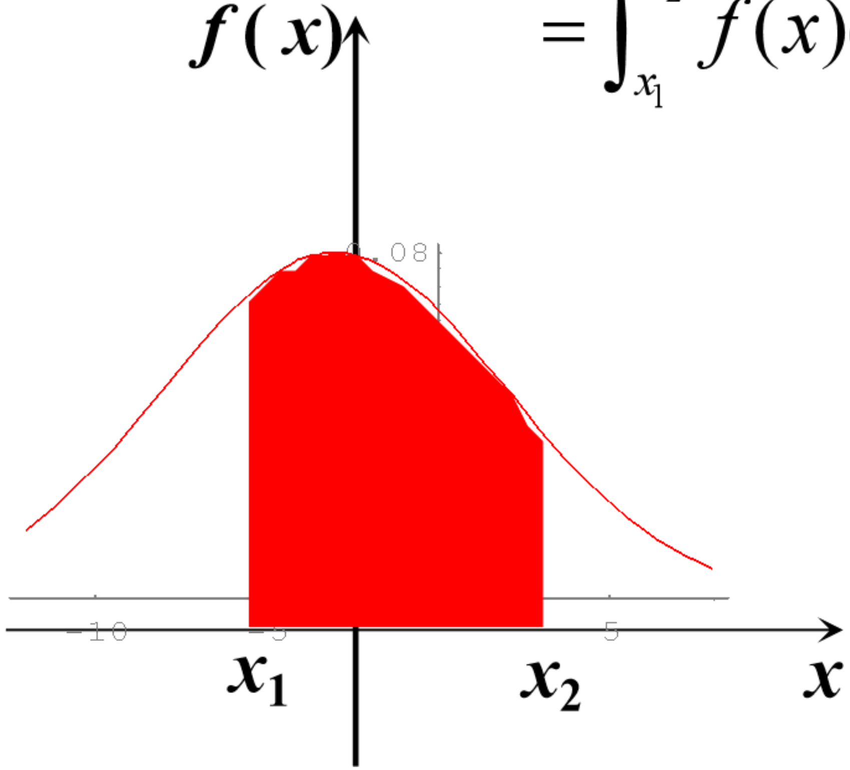
$$a=\frac{1}{2}$$

（3）对于 $\forall x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x) - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$



(4) 若x是**f(x)**的连续点，则

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

EX

设随机变量X的分布函数为

求$f(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

（5） 对任意实数b，若$X \sim f(x)$，

$(-\infty < x < \infty)$，则$P\{X=b\}=0$

命题 连续随机变量取任一常数的概率为零

强调 概率为**0**的事件未必不发生

注意:对于连续型随机变量X, $P\{X=a\}=0$

$$
\begin{aligned}
P\{a<X\le b\} &= P\{a\le X\le b\} \\
&= P\{a\le X<b\} \\
&= P\{a<X<b\} \\
&= \int_a^b f(t)dt \\
&= F(b)-F(a)
\end{aligned}
$$

例、设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)确定常数k,(2)求X的分布函数,(3)求$P\{1<X\le\dfrac{7}{2}\}$

解(1)由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$，得$\int_0^3 kx\mathrm{d}x+\int_3^4(2-\dfrac{x}{2})\mathrm{d}x=1$，得$k=\dfrac{1}{6}$

X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x/6 & 0\le x<3 \\ 2-x/2, & 3\le x<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) X的分布函数为

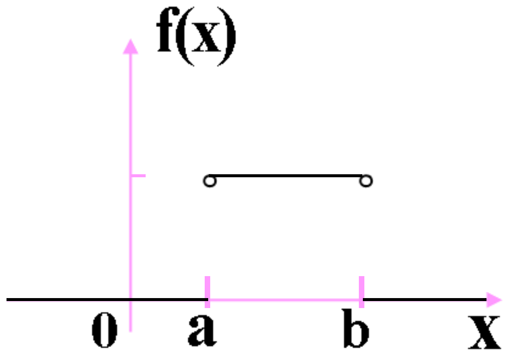
$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \frac{x}{6}dx=\frac{x^2}{12} & 0\le x<3 \\ \int_0^3 \frac{x}{6}dx+\int_3^x (2-\frac{x}{2})dx=-3+2x-\frac{x^2}{4} & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

$$(3)P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}$$

二、几个常用的连续型分布

1. 均匀分布(p44)

若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$



则称**X**在**(a, b)**内服从均匀分布。记作 **X~U(a, b)**

对任意实数**c, d (a<c<d<b)**，都有

$$P\{c<X<d\}=\int_c^d f(x)dx=\int_c^d \frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}$$

$$\forall (c,d)\subset (a,b),\qquad P\{c<X<d\}=\int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}$$

即 $\boldsymbol{X}$ 落在$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$内任何长为 $\boldsymbol{d-c}$ 的小区间的概率与小区间的位置无关,只与其长度成正比.

例 设长途客车到达某一个中途停靠站时间T在12点10分至12点45分之间是等可能的，某旅客于12:20到达该车站，等候20min后离开，求他在这段时间能赶上客车的概率。

解 根据题意，客车停靠站的时间T ～**U[10,45]**，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{45-10}=\dfrac{1}{35} & 10\le t\le 45\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

所求概率为

$$P\{20\le T\le 40\}=\int_{20}^{40}\frac{1}{35}dt=\frac{4}{7}$$

2. 指数分布(p45)

■ 定义　　若连续型随机变量**X**的概率密度为

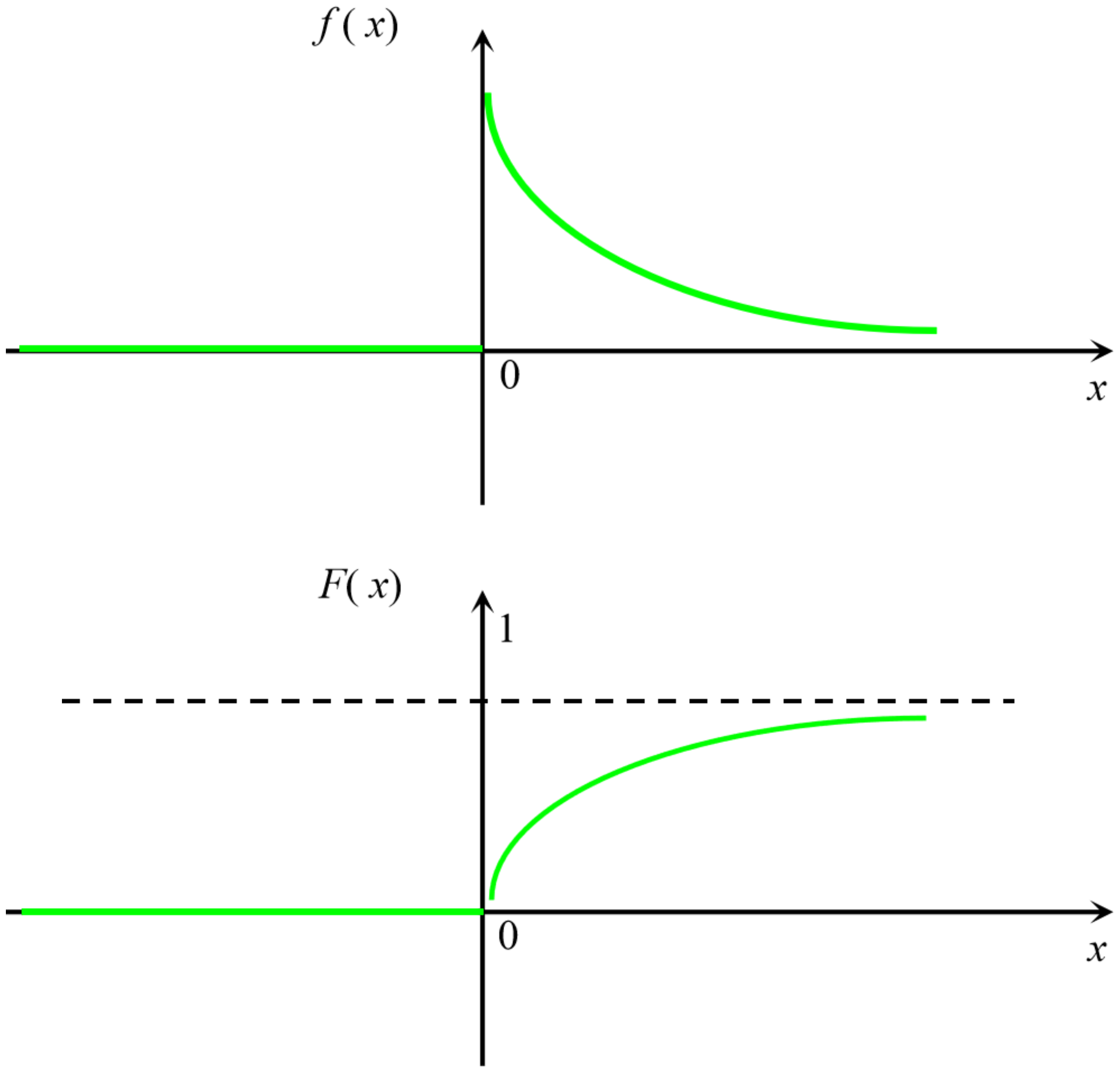
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad(\theta>0\text{为常数})$$

则称X服从参数为 θ 的指数分布.

$$X\sim E(\theta)$$

■ 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$


f(x)
0
x
F(x)
1
0
x

例 某种电子元件的寿命X（以h记）服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求此元件的寿命至少为200h的概率。

解 根据题意，所求的概率为

$$P\{X\geq 200\}=\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}dx=e^{-2}\approx 0.1353$$

例 设X服从参数为3的指数分布，求它的密度函数

及 $P\{X \geq 1\}$ 和 $P\{-1 < X \leq 2\}$

解 X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

$$P\{X \geq 1\}=\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=e^{-\frac{1}{3}}$$

$$P\{-1 < X \leq 2\}=\int_0^2\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=1-e^{-\frac{2}{3}}$$

例.电子元件的寿命X(年）服从参数为1/3的指数分布

(1)求该电子元件寿命超过2年的概率。

(2)已知该电子元件已使用了1.5年，求它还能使用两年以上的概率为多少?

解

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\qquad (1)\,p\{X>2\}=\int_2^{\infty}3e^{-3x}dx=e^{-6},.$$

$$(2)\,p\{X>3.5\mid X>1.5\}=\frac{p\{X>3.5,X>1.5\}}{\{X>1.5\}}=\frac{\int_{3.5}^{\infty}3e^{-3x}dx}{\int_{1.5}^{\infty}3e^{-3x}dx}=e^{-6}$$

指数分布的“无记忆性”

命题 若 $X \sim E(\theta)$,则

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}$$

事实上

$$P\{X>s+t \mid X>s\} = \frac{P\{X>s+t\} \cap P\{X>s\}}{P\{X>s\}} = \frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{s+t}{\theta}}}{e^{-\frac{s}{\theta}}} = e^{-\frac{t}{\theta}} = P\{X>t\}$$

故又把指数分布称为“永远年轻”的分布

若X是某一元件的寿命，那么“无记忆性”表明：已知元件已使用了s小时，它总共能使用至少s+t小时的条件概率，与从开始使用时算起它至少能使用t小时的概率相等。具有这一性质是指数分布有广泛应用的重要原因。

应用场合

用指数分布描述的实例有：

随机服务系统中的服务时间

电话问题中的通话时间

无线电元件的寿命

动物的寿命

指数分布常作为各种“寿命”分布的近似

连续型 随机变量的概念

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad -\infty < x < +\infty$$

(1) 均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$X \sim U(a,b)$$

(2) 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$X \sim E(\theta)$$

（3）正态分布 Normal Distribution

在许多实际问题中，考虑指标都受到为数众多的相互独立的随机因素的影响，而每一个因素的影响都是微小的，正常情况下都不能起压倒一切的主导作用。例如，电灯泡的指定条件下的耐用时间受到原料、工艺、保管条件等等因素的影响，而每种因素在正常情形下都是相互独立的，且他们的影响都是均匀地微小的，具有上述特点的指标一般都是可以认为具有以

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu,\sigma(>0)\text{为常数}$$

为密度的分布。

若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad \mu,\sigma(>0)\text{为常数}$$

则称X服从参数为 μ,σ^2 正态分布，记为

亦称高斯分布

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\because\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx \overset{\text{令}t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

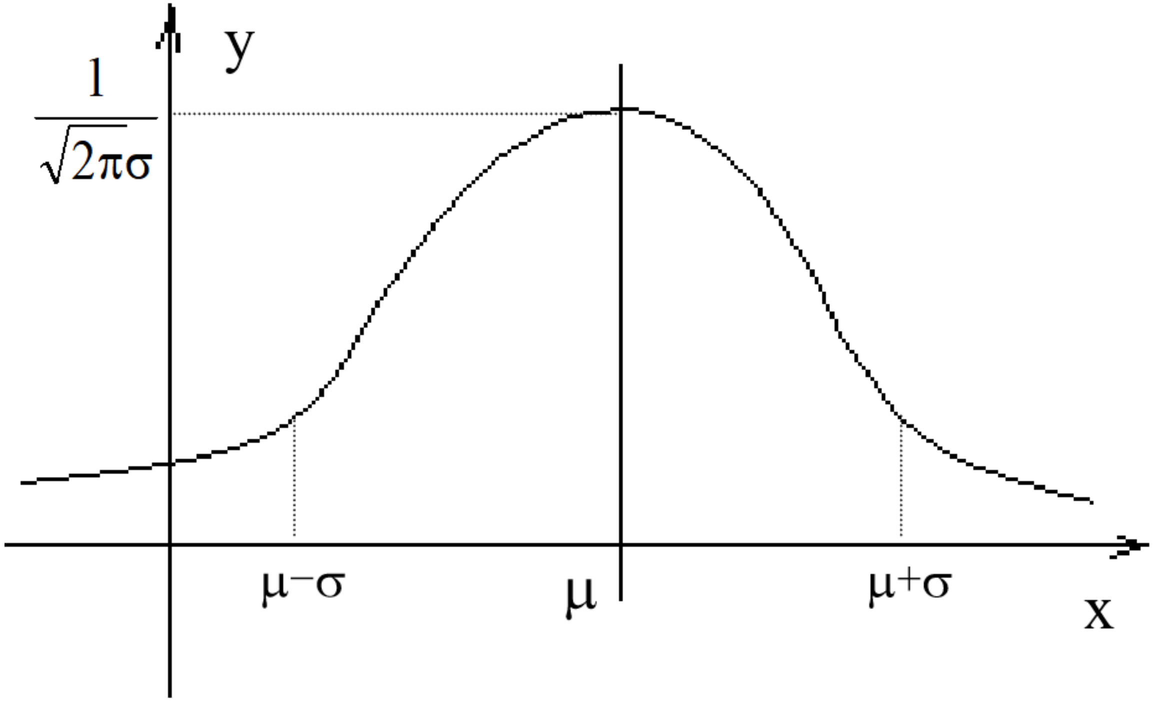
记 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$\Rightarrow I^2=\iint e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr\ \Rightarrow I=\sqrt{2\pi}\ \Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

正态分布是应用最广泛的一种连续型分布。大约在1733年，法国数学家棣莫佛最早给出二项概率的一个近似公式，这一公式被认为是正态分布的首次露面。后来，法国数学家拉普拉斯推广了这一结果。现在通常称之为是棣莫佛-拉普拉斯定理；德国伟大的数学家高斯在研究测量误差的概率分布时首先用他来刻画误差分析，所以正态分布又叫做高斯分布。现今德国10马克的印有高斯头像的钞票，其上还印有正态分布的密度曲线。这表明，高斯在诸多科学贡献中，对人类文明的影响最大的莫过于这一项。

正面图案：德国数学家、物理学家和天文学家高斯头像

正态分布的密度函数的性质与图形（P47）



中间高
两边低

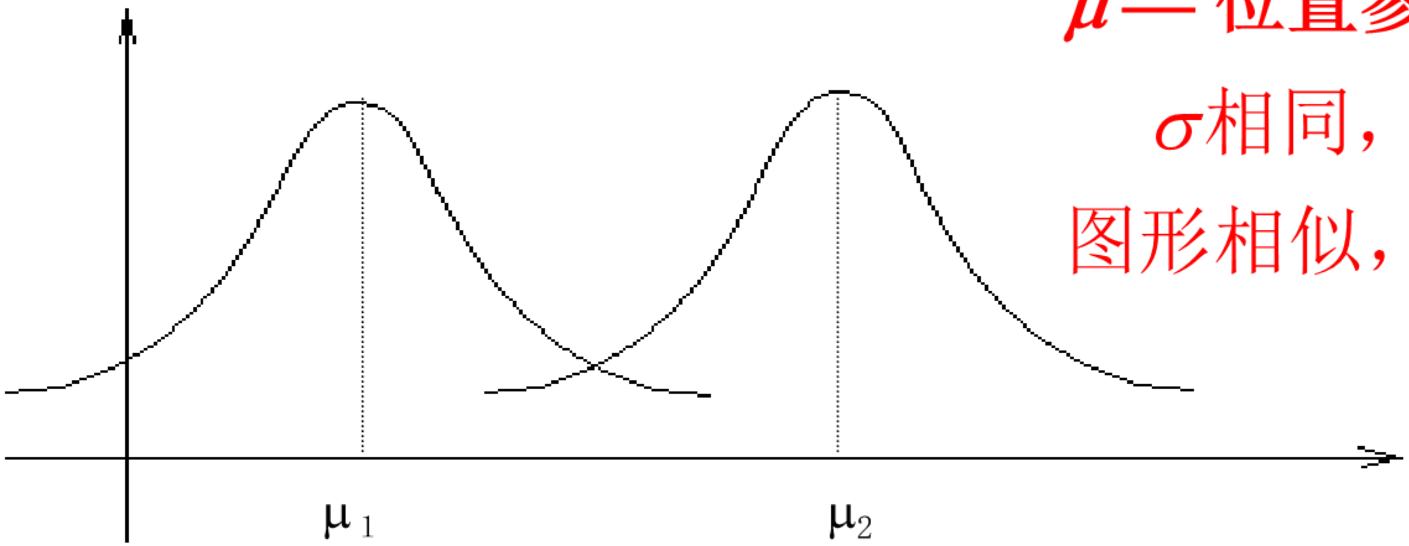
- 对称性

关于 $x = \mu$ 对称

- 单调性

$(-\infty, \mu)$ 升，$(\mu, +\infty)$ 降

μ，σ对密度曲线的影响



μ— 位置参数

σ相同，μ不同

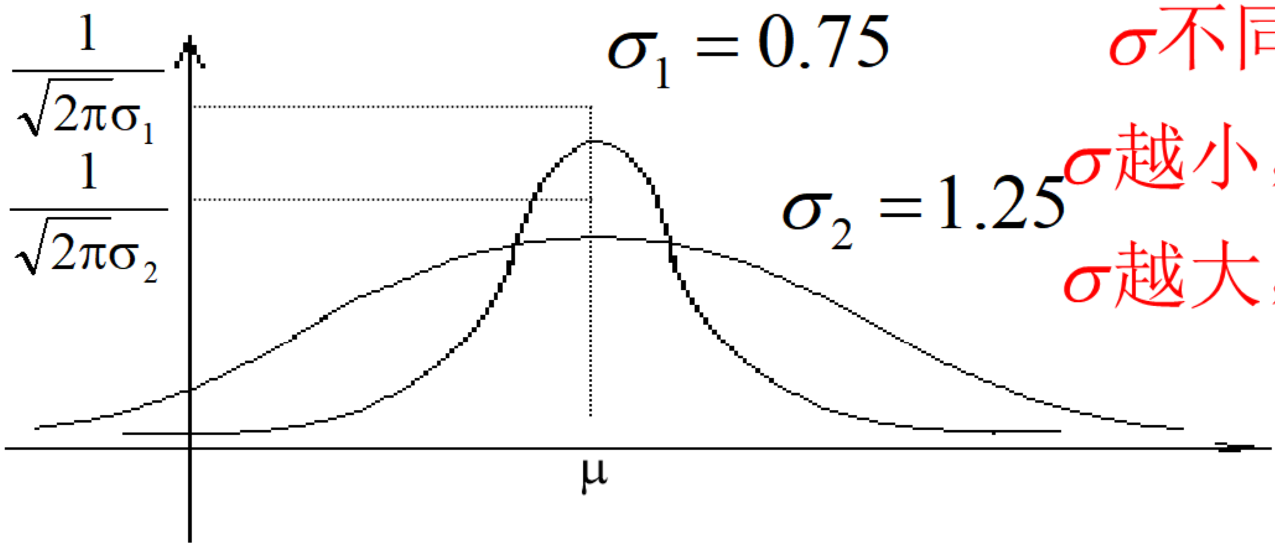
图形相似，位置平移

σ— 形状参数

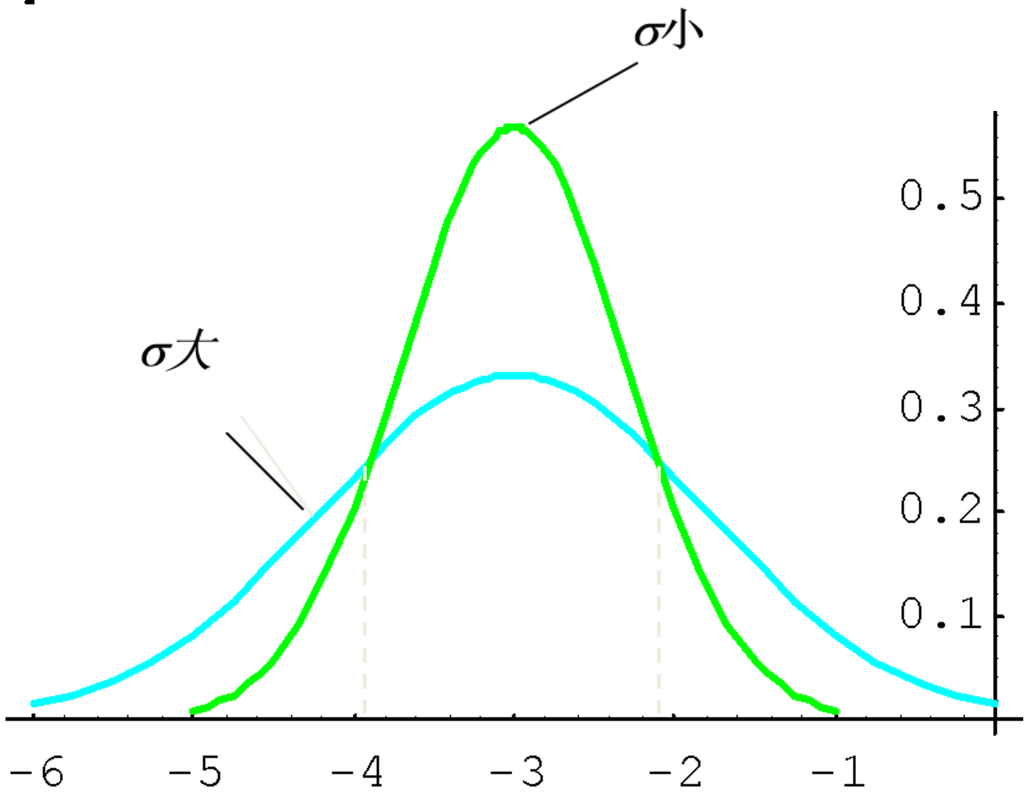
σ不同，μ相同

σ越小，图形越陡；

σ越大，图形越平缓



```
Show[fn1,fn3]
```

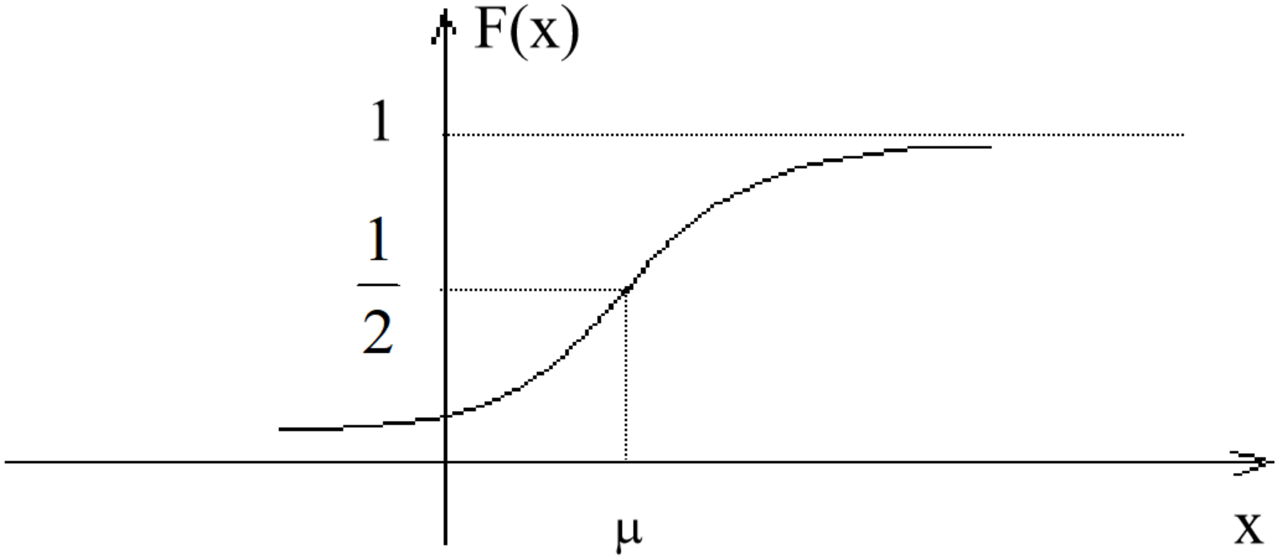


几何意义—— σ大小与曲线陡峭程度成反比

数据意义—— σ大小与数据分散程度成正比

正态分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$



正态变量的条件

若随机变量X

① 受众多相互独立的随机因素影响

② 每一因素的影响都是微小的

③ 且这些正、负影响可以叠加

则称 X 为正态 随机变量

可用正态变量描述的实例极多：

各种测量的误差；　人体的生理特征；

工厂产品的尺寸；　农作物的收获量；

海洋波浪的高度；　金属线抗拉强度；

热噪声电流强度；　学生的考试成绩；

● ● ● ● ● ●　　　　● ● ● ● ● ●

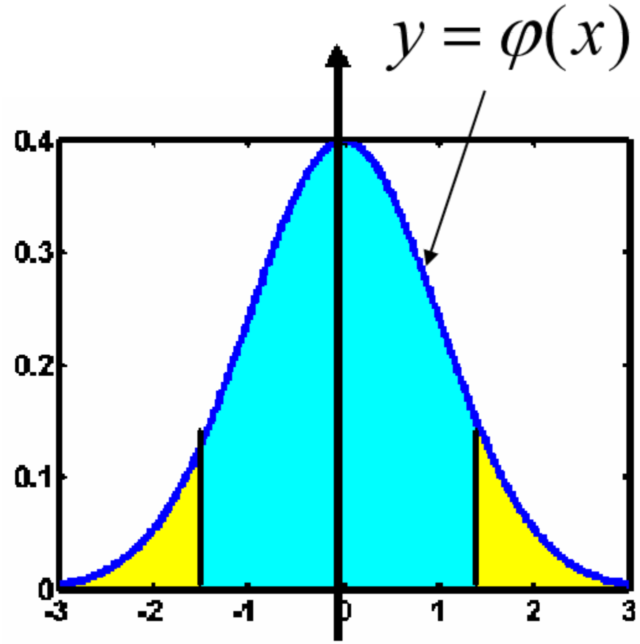
标准正态分布

Standard Normal distribution

■ 定义　　X～N（0，1）分布称为标准正态分布

■ 密度函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ 偶函数



$$\mu=0 \quad \sigma=1$$

■ 分布函数

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

其值有专门的表供查.

标准正态分布的概率计算

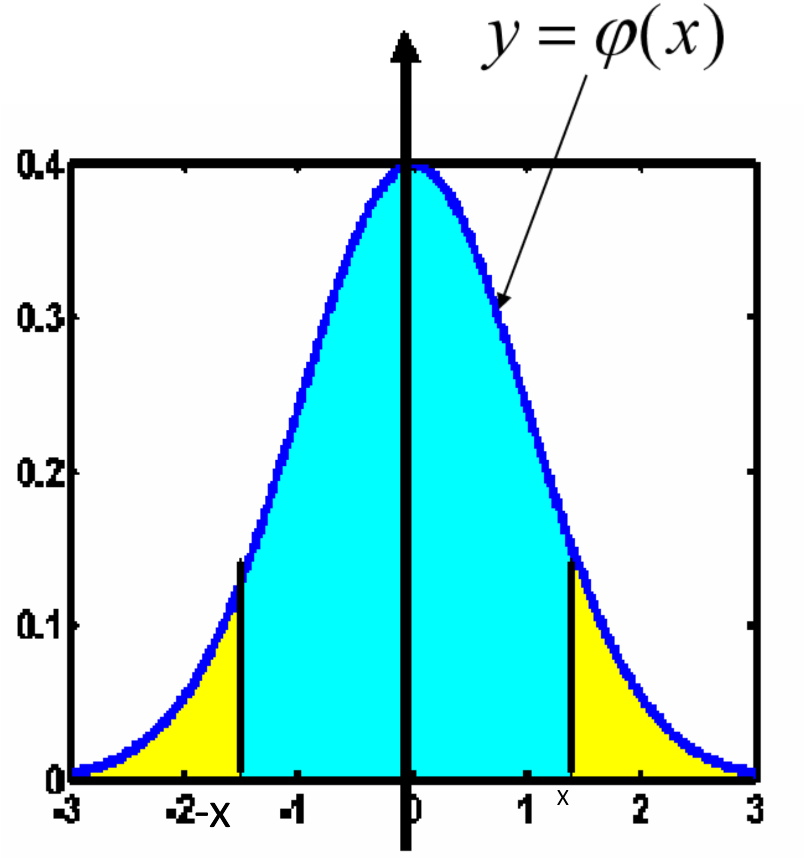
- 分布函数

$$\Phi(x) = P\{X \le x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

$$\Phi(0) = 0.5$$



标准正态分布的概率计算

- 公式

$$P\{a \le X \le b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P\{X \le b\} = \Phi(b) \qquad P\{X \ge a\} = 1 - \Phi(a)$$

- 查表

$x \ge 0$时，$\Phi(x)$的值可以查表

$x < 0$时，$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

- 例 $X \sim N(0, 1)$

$$P\{1 \le X \le 2\} = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

$$P\{X \le -1\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P\{|X| \le 1\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

一般正态分布的标准化

■ 定理

如果 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

■ 推论

(1) 如果 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$\text{因为} F(x)=P\{X \le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(2) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2)-F(x_1)$$

$$=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

查标准正态

分布表

一般正态分布的区间概率

$X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$　　$\Phi(x)$为标准正态分布函数

- $P\{a < X \le b\} = \Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$

- $P\{X \le b\} = \Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})$

- $P\{X > a\} = 1 - \Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$

例

设X~N（1，4），求 P{0<X<1.6}

解

$$\mu=1,\ \sigma=2$$

$$P\{0<X<1.6\}=\Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)$$

$$=\Phi(0.3)-\Phi(-0.5)$$

$$=\Phi(0.3)-\left[1-\Phi(0.5)\right]$$

$$=0.6179-1+0.6915=0.3094$$

例、在某类人群中，假设人们的体重$X \sim N(55, 10^2)$(单位:kg)，任意选一人，试求:(1)他的体重在区间[45, 65]内的概率；(2)他的体重大于85的概率。

$$解(1)P\{45 \le X \le 65\} = \Phi(\frac{65-55}{10}) - \Phi(\frac{45-55}{10})$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) \ = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$(2)P\{X > 85\} = 1 - P\{X \le 85\} = 1 - P\{X \le 85\}$$

$$= 1 - \Phi(\frac{85-55}{10})$$

$$= 1 - \Phi(3) \ = 0.0013$$

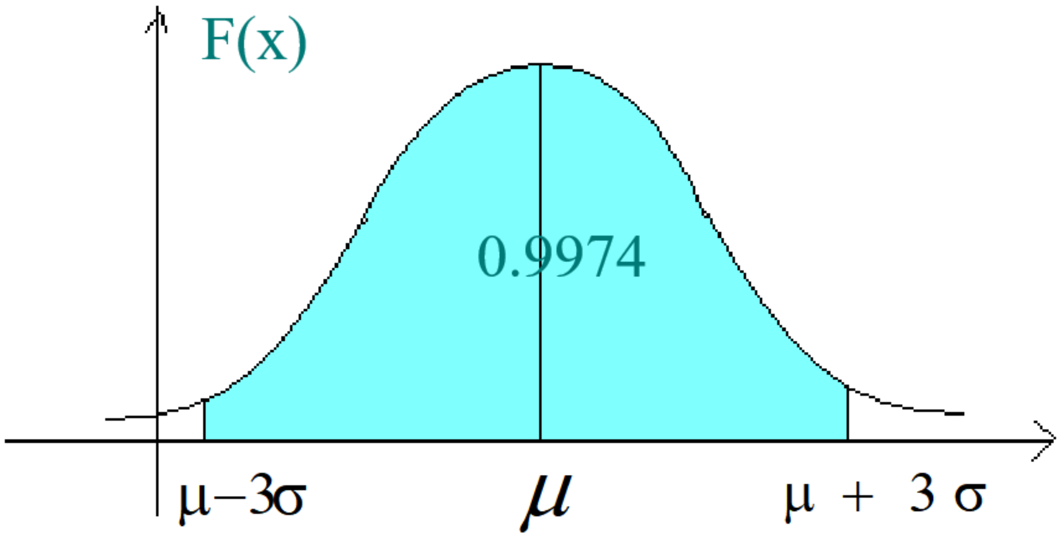
3σ准则

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

X的取值几乎都落入以μ为中心，以3σ为半径的区间内。这是因为：

$$P\{\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma\} = \Phi(3) - \Phi(-3)$$

$$= \Phi(3) - [1 - \Phi(3)] = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$



$\{|X - \mu| > 3\sigma\}$

是小概率事件

例、一种电子元件的使用寿命X（小时）服从正态分布$N(100,15^2)$,某仪器上装有3个这种元件，三个元件损坏与否是相互独立的.求：使用的最初90小时内无一元件损坏的概率.

解:设**Y**为使用的最初90小时内损坏的元件数，则Y~B(3,p)

其中

$$p = P\{X < 90\} = \Phi(\frac{90-100}{15}) \approx \Phi(-0.67) = 0.2514$$

故

$$P\{Y = 0\} = (1-p)^3 \approx 0.4195$$

正态分布的实际应用

某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报名，假设报名者的考试成绩 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 已知90分以上的12人，60分以下的83人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为78分，问此人能否被录取？

- 分析

首先求出 μ 和 σ

然后根据录取率或者分数线确定能否录取

解 成绩X服从 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$P\{X>90\}=\frac{12}{526}\approx 0.0228 \qquad P\{X<60\}=\frac{83}{526}\approx 0.1588$$

录取率为 $\frac{155}{526}\approx 0.2947$

可得

$$P\{X\le 90\}=\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=1-P\{X>90\}\approx 1-0.0228=0.9772$$

$$P\{X<60\}=\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)\approx 0.1588$$

得 $\Phi\left(\frac{\mu-60}{\sigma}\right)\approx 1-0.1588=0.8412$

查表得 $\frac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0 \qquad \frac{\mu-60}{\sigma}\approx 1.0$

解 ………..

查表得 $\dfrac{90-\mu}{\sigma}\approx 2.0$ $\dfrac{\mu-60}{\sigma}\approx 1.0$

解得 $\mu=70$ ， $\sigma=10$

故 $X\sim N\left(70,10^2\right)$

设录取的最低分为 x

则应有 $P\{X\geq x\}=0.2947$

$$P\{X<x\}\approx 1-0.2947=0.7053$$

$$\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=0.7053 \qquad \frac{x-70}{10}\approx 0.54$$

$$x=75.4$$

某人**78**分，可

被录取。

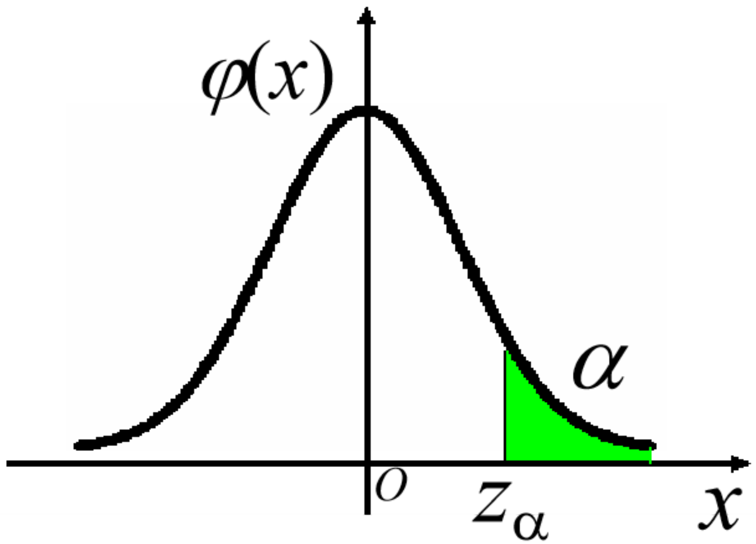
标准正态分布的上分位点

对标准正态分布变量$X\sim N(0,1)$和给定的α，上α分位数是由：

$$P\{X>z_\alpha\}=\int_{z_\alpha}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\alpha$$

即 $P\{X\le z_\alpha\}=1-\alpha$ 由$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$ 确定的点z_α.

如图.



由$\varphi(x)$图形的对称性可知$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$(了解)

例、将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内。调节器整定在 $d^\circ C$，液体的温度X(以$^\circ C$计)是一个随机变量，且 $X\sim N(d,0.5^2)$.(1)若 d=90°C,求X小于89°C的概率。(2)若要求保持液体的温度至少为80°C的概率不低于0.99，问d至少为多少?

$$解(1)P\{X<89\}=\Phi(\frac{89-90}{0.5})=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$

(2)按题意需求d满足

$$0.99\le P\{X\ge 80\}=1-P\{X\le 80\}$$

$$=1-\Phi(\frac{80-d}{0.5})$$

即 $$\Phi(\frac{d-80}{0.5})\ge 0.99=\Phi(2.327)$$

亦即 $$\frac{d-80}{0.5}\ge 2.327 \qquad \therefore\ d>81.1635$$