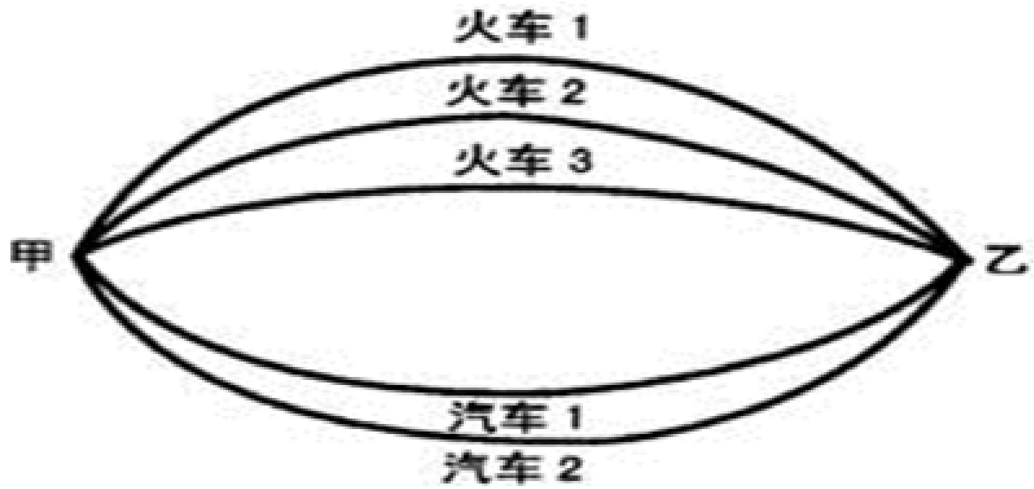
问题一：从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，一天中，火车有3班，汽车有2班．那么一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？



解：因为一天中乘火车有3种走法，乘汽车有2种走法，每一种走法都可以从甲地到乙地，所以共有 $3+2=5$ 种不同的走法。

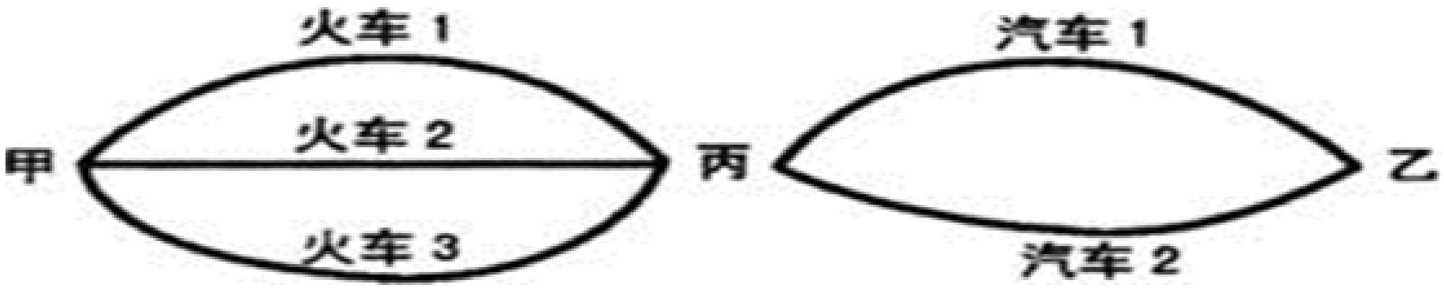
分类计数原理　完成一件事，有n类方式，在第1类方式中有m_1种不同的方法，在第2类方式中有m_2种不同的方法，…，在第n类方式中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有：

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。

分类计数原理又称为加法原理。

问题二：从甲地到乙地，要从甲地选乘火车到丙地，再于次日从丙地乘汽车到乙地。一天中，火车有3班，汽车有2班。那么两天中，从甲地到乙地共有多少种不同的走法？



这个问题与前一个问题有什么区别？

在前一个问题中，采用乘火车或汽车中的任何一种方式，都可以从甲地到乙地；而在这个问题中，必须经过先乘火车、后乘汽车两个步骤，才能从甲地到乙地.

解：因为乘火车有3种走法，乘汽车有2种走法，

所以乘一次火车再接乘一次汽车从甲地到乙地，

共有 $3\times2=6$ 种不同的走法。

分步计数原理 完成一件事，需要分成n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2 种不同的方法，…，做第n步时有m_n种不同的方法。那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法。

分步计数原理又称为乘法原理。

分类计数原理（加法原理）中，“完成一件事，有n类方式”，即每种方式都可以独立地完成这件事。进行分类时，要求各类方式彼此之间是相互排斥的，不论那一类办法中的哪一种方法，都能独立完成这件事。只有满足这个条件，才能直接用加法原理，否则不可以。

分步计数原理（乘法原理）中，“完成一件事，需要分成n个步骤”，是说每个步骤都不足以完成这件事。如果完成一件事需要分成几个步骤，各步骤都不可缺少，需要依次完成所有步骤才能完成这件事，而各步要求相互独立，即相对于前一步的每一种方法，下一步有m种不同的方法，那么完成这件事的方法数就可以直接用乘法原理。

应用这两个原理的关键是看完成这件事情是“分类”还是“分步”。

例1、某班共有男生28名、女生20名，从该班选出学生代表参加校学代会。

(1)若学校分配给该班1名代表，有多少种不同的选法？

(2)若学校分配给该班2名代表，且男女生代表各1名，有多少种不同的选法？

例2、为了确保电子信箱的安全，在注册时，通常要设置电子信箱密码。在某网站设置的信箱中，

(1)密码为4位，每位均为0到9这10个数字中的一个数字，这样的密码共有多少个？

(2)密码为4位，每位均为0到9这10个数字中的一个，或是从A到Z这26个英文字母中的1个。这样的密码共有多少个？

(3)密码为4到6位，每位均为0到9这10个数字中的一个。这样的密码共有多少个？

引例

问题1 从甲、乙、丙3名同学中选出2名参加某天的一项活动，其中1名同学参加上午的活动，1名同学参加下午的活动，有多少种不同的方法？

解决这个问题，需分2个步骤：

第1步，确定参加上午活动的同学，从3人中任选1人有3种方法；

第2步，确定参加下午活动的同学，只能从余下的2人中选，有2种方法.

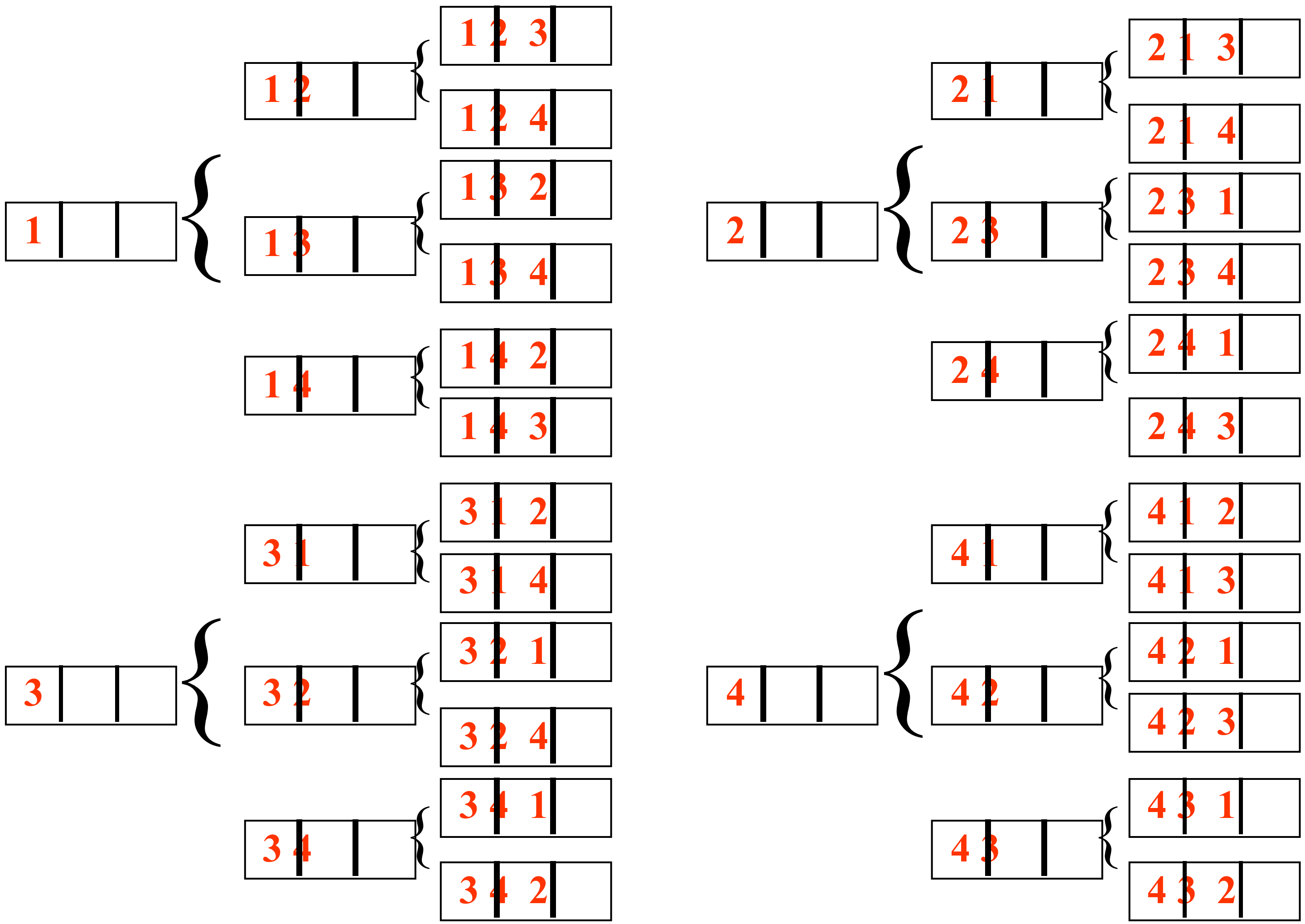
根据分步计数原理，共有：3×2＝6 种不同的方法.

问题2：从a、b、c这3个字母中，每次取出2个按顺序排成一列，共有多少种不同的排法？并列出所有不同的排法。

这里的每一种排法就是一个排列。

讨论题

由数字1，2，3，4可以组成多少个没有重复数字的三位数？



排列定义

一般地，从n个不同元素中取出m（$m \leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列.

排列的定义中包含两个基本内容：

一是"取出元素"；二是"按照一定顺序排列"．"一定顺序"就是与位置有关，这也是判断一个问题是不是排列问题的重要标志.

根据排列的定义，两个排列相同，当且仅当这两个排列的元素完全相同，而且元素的排列顺序也完全相同.

如果两个排列所含的元素不完全一样，那么就可以肯定是不同的排列；如果两个排列所含的元素完全一样，但摆的顺序不同，那么也是不同的排列.

从n个不同的元素中取出m(m≤n)个元素的所有排列的个数，叫做从n个不同的元素中取出m个元素的排列数。用符号 A_n^m 表示。

问题1：从3个不同的元素中取出2个元素的排列数,记为

$$A_3^2 = 3\times 2 = 6$$

问题2：从4个不同的元素中取出3个元素的排列数,记为

$$A_4^3 = 4\times 3\times 2 = 24$$

从n个不同元素中取出2个元素的排列数是多少？A_n^2

A_n^3 呢？ A_n^m 呢？

排列数公式 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

1. 排列数公式的特点：第一个因数是n，后面每一个因数比它前面一个因数少1，最后一个因数是$n-m+1$，共有m个因数.

2. **全排列**：当$n=m$时即n个不同元素全部取出的一个排列.

全排列数：$A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1 = n!$（叫做$n$的阶乘）

3. **公式变形**：$A_n^m = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$

$$= \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1}{(n-m)\times(n-m-1)\times\cdots\times2\times1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

注：规定$0!=1$，其中$m\leqslant n$

小结

排列问题，是取出m个元素后，还要按一定的顺序排成一列，取出同样的m个元素，只要排列顺序不同，就视为完成这件事的两种不同的方法（两个不同的排列）．

由排列的定义可知，排列与元素的顺序有关，也就是说与位置有关的问题才能归结为排列问题．当元素较少时，可以根据排列的意义写出所有的排列．

问题推广—组合

组合：从n个不同元素中取出m(m≤n)个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合

①n个不同元素　　② 0≤m≤n，（m、n是自然数）

③组合与元素的顺序无关，排列与元素的顺序有关

④两个组合的元素完全相同为相同组合

组合数：从n个不同元素中取出m(m≤n)个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数　C_n^m　表示方法

探求组合数1

从甲. 乙. 丙. 丁四名优秀团员中选两名同学升旗，共有多少种选法?

乙 甲

甲 乙 丙 丁

甲 乙　甲 丙　甲 丁

乙 丙 丁

乙 丙　乙 丁

丙 丁

丙 丁

第一步四名同学中选出两个旗手共有 C_4^2 = 6种不同的方法

第二步确定旗手顺序共 A_2^2 = 2 种不同的方法

所以总共有**6×2=12**种不同的方法

$$A_4^2 = C_4^2 \times A_2^2 \longrightarrow C_4^2 = \frac{A_4^2}{A_2^2}$$

返回

探求组合数2

返回

(abc)	→	(abc, acb, bac, bca, cab, cba)	A_3^3
(abd)	→	(abd, adb, bad, bda, dab, dba)	A_3^3
(acd)	→	(acd, adc, cad, cda, dac, dca)	A_3^3
(bcd)	→	(bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb)	A_3^3

$C_4^3 = 4$ $\quad$ $A_4^3 = 24$

$$A_4^3 = C_4^3 \times A_3^3 \Longrightarrow C_4^3 = \frac{A_4^3}{A_3^3}$$

从a、b、c、d中取出3个元素的组合数 $\quad$ 是多少呢？

问题推广—组合

组合：从n个不同元素中取出m(m≤n)个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合

①n个不同元素　　② 0≤m≤n，　(m、n是自然数)

③组合与元素的顺序无关，排列与元素的顺序有关

④两个组合的元素完全相同为相同组合

组合数：从n个不同元素中取出m(m≤n)个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数　C_n^m　表示方法

返回

排列数(number of arrangement)公式

组合数(number of combination)公式

$$A_n^m = (n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

注：

(1) $A_n^n = n!$

(2) $0!=1$

(3) $0 \leqslant m \leqslant n$

m、n是自然数

(4) $C_n^0 = 1$

排列：**arrangement**

组合：**combination**