§1.5 条件概率 与贝叶斯公式

一、 条件概率与乘法公式

Ex

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，

十人依次从袋中各取一球(不放回)，问

第一个人取得红球的概率是多少？

第二 个人取得红球的概率是多少？

答：设A_i表示第i人取到红球,i $=1,2,\ldots,10$

$$P(A_i)=\frac{9!}{10!}=\frac{1}{10},i=1,2,\ldots,10$$

若已知第一个人取到的是白球，则第二个人取到红球的概率是多少？

若已知第一个人取到的是红球，
则第二个人取到红球的概率又是多少？

已知事件A发生的条件下，

事件B发生的概率称为

A条件下B的条件概率，记作

P(B|A)

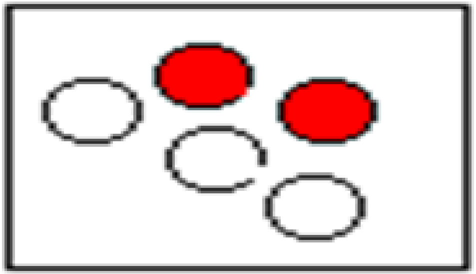
2

例3　设袋中有3个白球，2个红球，现从袋中任意抽取两次，每次取一个，取后不放回，

（1）已知第一次取到红球，求第二次也取到红球的概率;

（2）求第一次取到红球的概率

（3）求两次均取到红球的概率



设A——第一次取到红球,

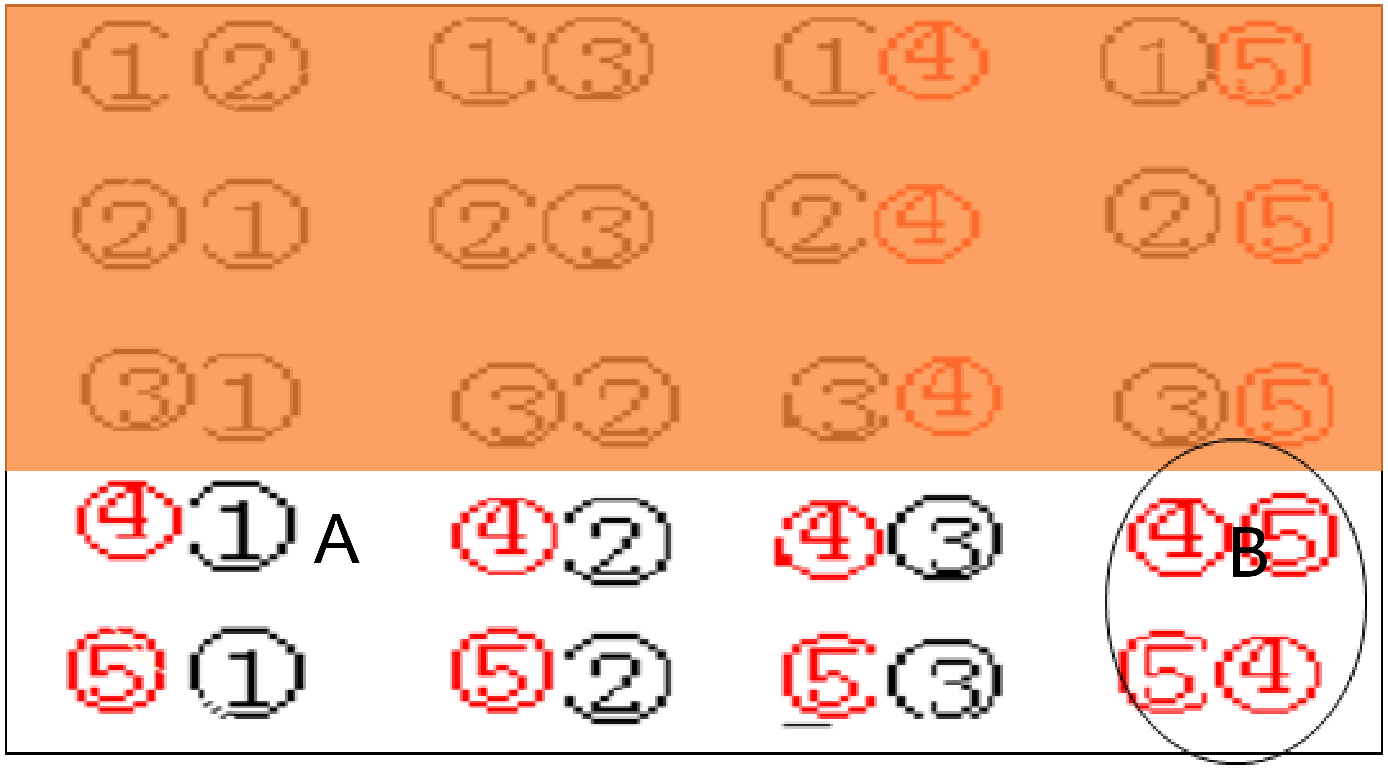
B——第二次取到红球.

3

A——第一次取到红球,

B——第二次取到红球

S=



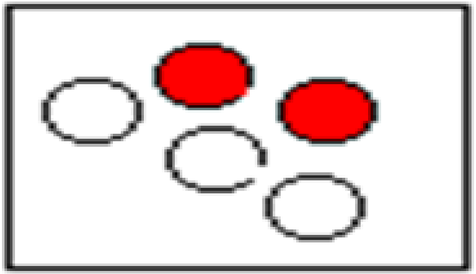
4

例3　设袋中有3个白球，2个红球，现从袋中任意抽取两次，每次取一个，取后不放回，

（1）已知第一次取到红球，求第二次也取到红球的概率;

（2）求第一次取到红球的概率

（3）求两次均取到红球的概率



设A——第一次取到红球,

B——第二次取到红球.

$$(1)\quad P(B|A)=1/4$$

$$(2)P(A)=\frac{2\times1+2\times3}{A_5^2}=\frac{2}{5}$$

$$(3)P(AB)=\frac{2\times1}{A_5^2}=\frac{1}{10}$$

5

显然，若事件A、B是古典概型的样本空间S中的两个事件，其中A含有n_A个样本点,AB含有n_{AB}个样本点，则

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n}{n_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

一般地，设A、B是S中的两个事件，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

6

概率 P(B|A)与P(AB)的区别与联系

联系：事件**A**，**B**都发生了

区别：

（**1**）在积事件概率**P(AB)**指**A**，**B**同时发生的概率。而**P(B|A)**指**A**发生的条件下**B**发生的概率，故此时**A**、**B**在时间上有一定的“先后”关系或逻辑上有“主从”关系。

（**2**）样本空间不同，在**P(B|A)**中，事件**A**成为样本空间；**P(AB)**在原样本空间**S**中考虑。

条件概率的计算方法

（1） 可用缩减样本空间法

（2） 用定义与有关公式

例 设试验E为掷两颗骰子，观察出现的点数。B=“两颗骰子点数相等”，A=“两颗骰子的点数之和为4”，求 $P(A|B)$

解 以(i,j)表示第一颗骰子为i点，第二颗骰子为j点，则

S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),⋯,(6,1),(6,2),...,(6,6)}

B＝{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}.

A＝{ (2,2), (1,3), (3,1)}.

AB＝{(2,2)}.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/36}{6/36}=1/6$$

另外，也可以直接从条件概率的含义来考虑问题。

当**B**发生时，样本空间缩减为**Ω'＝B=｛（1，1），（2，2），（3，3），（4，4），（5，5），（6，6）｝.**

而AB={(2, 2)}　　所以$P(A|B)=1/6$

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

- 非负性 $P(B|A) \geq 0$
- 归一性 $P(S|A) = 1$
- 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$

- $P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1B_2 | A)$
- $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$
- $P(B_1 - B_2|A) = P(B_1|A) - P(B_1B_2|A)$

乘法法则

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \Longleftarrow P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$=P(B)P(A|B) \Longleftarrow P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 推广

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2))\cdots P(A_n|(A_1A_2\cdots A_{n-1}))$$

- 例：某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次；某人第一次参加能通过的概率为60%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为80%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为90%。求这人能通过考核的概率。

解：设 A_i={ 这人第i次通过考核 }，i=1,2,3

A={ 这人通过考核 }，

$\boxed{P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)}$

$1-P(A_2 \mid \bar{A}_1)$

$=1-0.8=0.2$

$$A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3,\text{且}A_1、\ \bar{A}_1 A_2、\ \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3\text{互不相容}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3)$$

$$= P(A_1) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2 \mid \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= 0.60 + 0.4\times 0.8 + 0.4\times 0.2\times 0.9 = 0.992$$

13

二、全概率公式

全概率公式的引入

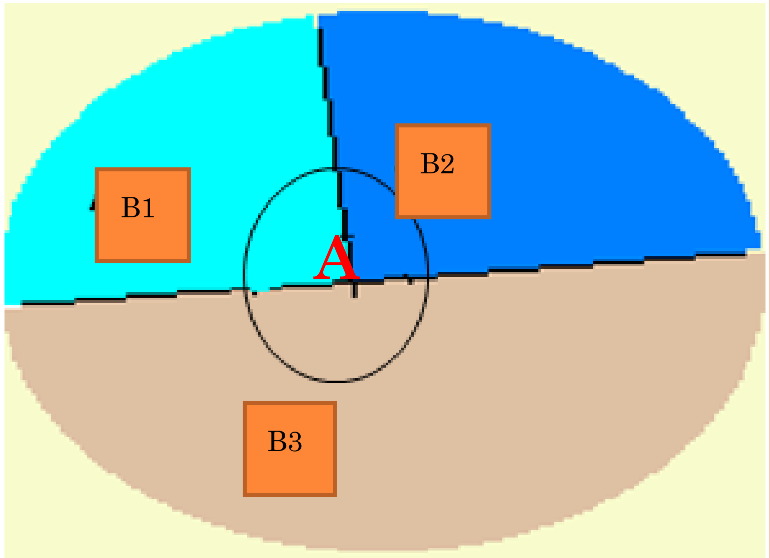
例 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌产品的次品率。

设：A：买到一件次品

B_1 ：买到一件甲厂的产品

B_2 ：买到一件乙厂的产品

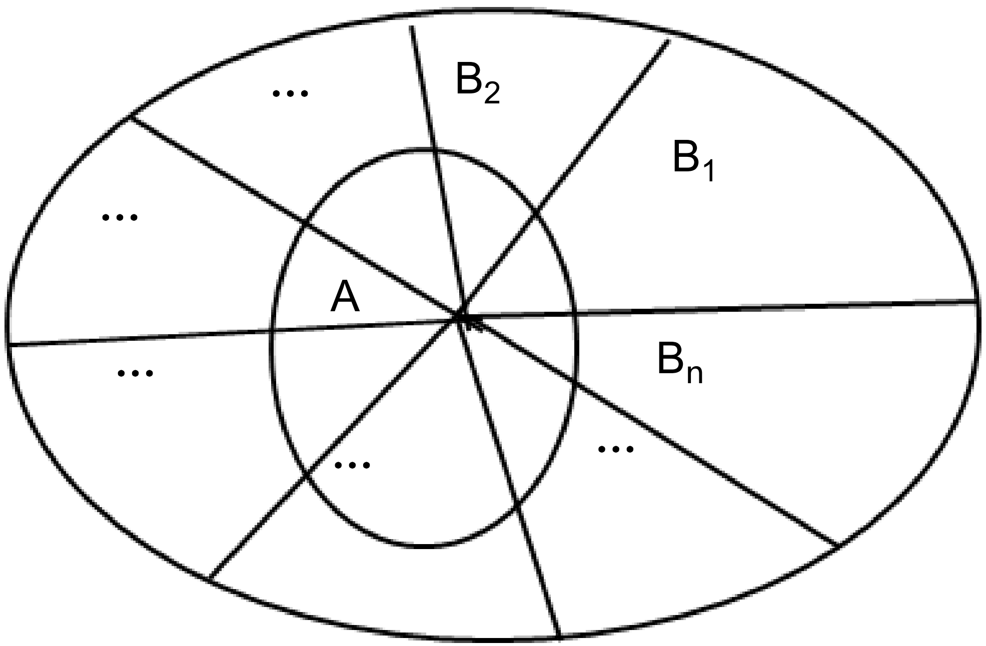
B_3 ：买到一件丙厂的产品



定义 事件组$B_1, B_2, \ldots, B_n$ (n可为∞)，称为样本空间S的一个划分，若满足：

$$(i)\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S;$$

$$(ii)\ B_i B_j = \varphi,\ (i \neq j),\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$



15

定理（全概率公式）设$B_1, B_2, \ldots, B_n$是S的一个划分，且$P(B_i)>0$，(i＝1，…，n)，则对任何事件$A\in S$有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

16

雨课堂 Rain Classroom

全概率公式

设B_1，B_2，…，B_n 是样本空间S的一个划分，
且 $P(B_i)>0$，$i=1，2，…，n$，则对任一随机事件A，
有

当前无法显示此图像。

注： 运用全概率公式关键在于找到满足定理中的条件
的事件组B_1，B_2，…，B_n
一般B_1，B_2，…，B_n是导致事件A 发生的全部“原因”

各原因下条件概率已知 $\xrightarrow{\text{全概率}}$ 求事件发生概率

例、袋子中有**a**只红球，**b**只白球，先从袋中任取一球，记下颜色后放回，同时向袋中放入同颜色的球一只，然后再从袋中取出一球，求第二次取到白球的概率。

解、**B1**={第一次取到红球}，**B2**={第一次取到白球}

A={第二次取到白球}，则**B1**，**B2**是**S**的一个划分，由全概率公式有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+1}{a+b+1}$$

$$=\frac{ab+b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

贝叶斯公式 Bayes’ Theorem

设B_1，B_2，…, B_n是样本空间S的一个划分，且诸

P（B_i）>0，A为S的任意事件，P（ A） >0 , 则有

$$\boxed{P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}}$$

(i =1 , 2 , ··· , n)

证明

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i A)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

求是某种原因造成得概率

贝叶斯

事件已发生

特别的，**n=2**时，$\mathbf{B_1}$记为**B**，此时$\mathbf{B_2}$就是 $\overline{\mathrm{B}}$

那么，全概率公式和贝叶斯公式分别为

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}$$

例、三个电池生产车间甲、乙、丙，同时生产某种普通电池和高性能电池，**1h**的总产量为**600**只，各车间的产量如下表：

车间	普通电池	高性能电池	产量小计
甲	200	100	300
乙	50	150	200
丙	50	50	100

某**1h**因为出了差错没有在电池上加上车间的标签就放入了仓库。求（**1**）在仓库里随机地取一只电池，它是高性能电池的概率是多少？（**2**）随机地取一只电池，已知它是高性能电池，它来自甲、乙、丙车间的概率是多少？

解、设**A**=“取到的是一只高性能电池”， $\mathbf{B_1}$=“取到的产品由甲车间生产”， $\mathbf{B_2}$=“取到的产品由乙车间生产”， $\mathbf{B_3}$=“取到的产品由丙车间生产”，显然$\mathbf{B_1}$，$\mathbf{B_2}$，$\mathbf{B_3}$为样本空间**Ω**的一个划分，

$$P(B_1)=\frac{300}{600}=\frac{1}{2},\quad P(B_2)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3},\quad P(B_3)=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\mid B_1)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3},\quad P(A\mid B_2)=\frac{150}{200}=\frac{3}{4},\quad P(A\mid B_3)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

（**1**）、由全概率公式可得

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+P(A\mid B_3)P(B_3)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

（**2**）、根据贝叶斯公式

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

由于**$P(B_2|A)>P(B_1|A)>P(B_3|A)$,**因此，这只电池来自乙车间的概率最大。

例：一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%，若甲出差，则乙出差的概率为20%；若甲不出差，则乙出差的概率为90%。(1)求近期乙出差的概率；(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

$$已知\ P(A)=0.80,\quad P(B|A)=0.20,\quad P(B|\bar{A})=0.90$$

(1) 由全概率公式可得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.8\times0.2+0.2\times0.9=34\%$$

(2)由贝叶斯公式可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$$

24

例、对以往数据分析结果表明，当机器调整的良好时，产品的合格率为**98%**，而当机器发生某种故障时，其合格率为**55%**。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为**0.95**。试求已知某天早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的可能性是多少。

解、**A={**产品合格**}**，**B={**机器调整良好**}**

例7 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应是阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大?

求解如下：　　设 C={抽查的人患有癌症}，

A={试验结果是阳性}，

则 $\overline{C}$ 示“抽查的人不患癌症”.

已知：P(C)=0.005,

P(A|C)=0.95,

$$P(\overline{C}) = 0.995,$$

$$P(A \mid \overline{C}) = 0.04。$$

求$P(C|A)$。

由贝叶斯公式，得

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}$$

代入数据， 计算得

$P(C \mid A)$= **0.1066**。

现在来分析一下结果的意义

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义？

如果不做试验，抽查一人，他是患者的概率

$P(C)=0.005$ 。

患者阳性反应的概率是**0.95**，若试验后得阳性反应，则根据试验得来的信息，此人是患者的概率为

$P(C \mid A)= 0.1066$ 。

从**0.005**增加到**0.1066**，将近增加约**21**倍。

说明这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有意义。

2. 检出阳性是否一定患有癌症**?**

试验结果为阳性**,**此人确患癌症的概率为

$$P(C \mid A)=0.1066。$$

即使检出阳性，尚可不必过早下结论有癌症，这种可能性只有**10.66% (**平均来说，**1000**个人中大约只有**107**人确患癌症**)**，此时医生常要通过再试验来确认。

贝叶斯公式

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

在贝叶斯公式中，$P(B_i)$和$P(B_i \mid A)$分别称为原因的先验概率和后验概率。

$P(B_i)(i=1,2,\cdots,n)$是在没有进一步信息(不知道事件A是否发生)的情况下, 人们对诸事件发生可能性大小的认识。

当有了新的信息(知道A发生), 人们对诸事件发生可能性大小$P(B_i \mid A)$有了新的估计。

贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化。

例、无线电通信中，由于随机干扰，当发出信号为“.”时，收到的信号为“.”、“不清”和“-”的概率分别为**0.7,0.2,0.1.**当发出信号为“-”时，收到的信号为“-”、“不清”和“.”的概率分别为**0.9,0.1,0.**如果发报过程中“.”和“-”出现的概率分别为**0.6**和**0.4**，当收到的信号为“不清”时，原发信号是什么？试加以推测。

雨课堂 Rain Classroom