6.2　抽样分布

统计量 $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的不含任何未知数的函数，它是一个随机变量

统计量的分布称为抽样分布。在使用统计量进行统计推断时常需要知道它的分布。当总体的分布函数为已知时，抽样分布是确定的，然而要求出统计量的精确分布，一般来说是困难的。

由于正态总体是最常见的总体，因此这里主要讨论正态总体下的抽样分布.

由于这些抽样分布的论证要用到较多的数学知识，故在本节中，我们主要给出有关结论，以供应用.

一、三个重要分布

数理统计中常用的抽样分布除正态分布外,

还有三个非常有用的连续型分布, 即

χ^2分布

t分布

F分布

数理统计的三大分布(都是连续型).

它们都与正态分布有密切的联系.

! 在本章中特别要求掌握对正态分布、χ^2分布、t分布、F分布的一些结论的熟练运用. 它们是后面各章的基础.

（一） χ^2—分布

定义 设总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是 X 的一个样本，则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为**n** 的 χ^2 分布，记作

$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

自由度是指独立随机变量的个数，

$\chi^2(n)$ 分布的密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

$\chi^2(n)$ 分布密度函数的图形

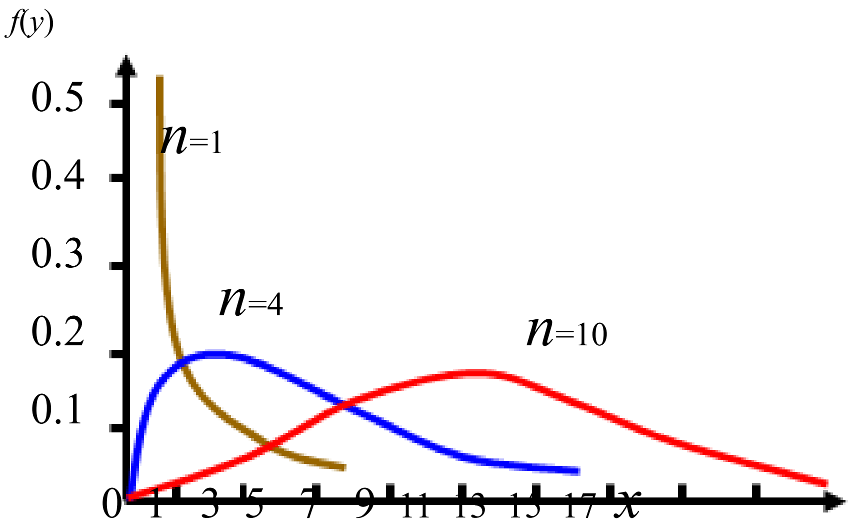


图5-4

其图形随自由度的不同而有所改变.

$$P\left\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\right\} = \alpha$$

χ^2分布表(附表4(P_{200})).

χ^2分布的上α分位点

满足 $P\{\chi^2(n) > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(y)dy = \alpha$

的数$\chi_\alpha^2(n)$为χ^2分布的上α分位点，

其几何意义见图5-5所示.

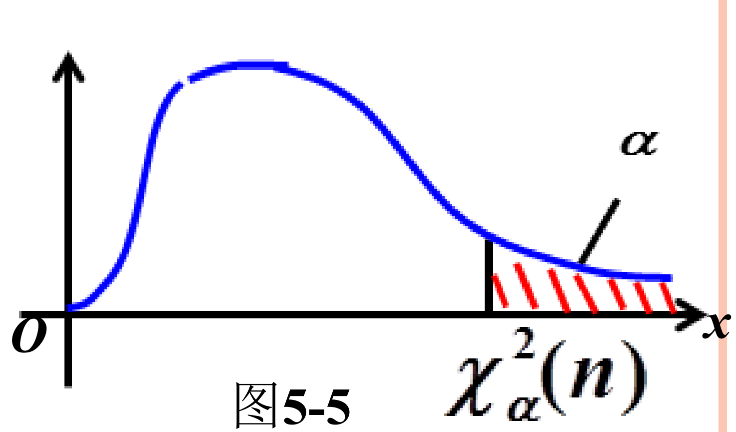


图5-5

其中$f(y)$是χ^2-分布的概率密度.

显然，在自由度n取定以后，$\chi_\alpha^2(n)$的值只与α有关.

例如，当n=21，α=0.05时，由附表4(P_{200})可查得，

$\chi_{0.05}^2(21) = 32.671$ 即 $P\{\chi^2(21) > 32.671\} = 0.05.$

(1) χ^2分布的数学期望与方差

设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则$E(\chi^2)=n$，$D(\chi^2)=2n$.

(2) χ^2分布的可加性

设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$, $\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 χ_1^2, χ_2^2相互独立,

则 $$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

(3)若$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立，都服从$N(0,1)$，则$X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$，反之若$X \sim \chi^2(n)$，则X可以分解成n个相互独立的标准正态随机变量的平方和。

例 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，则统计量$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$服从什么分布？

解 由已知，有

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$且$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，

则 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$且各 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}$相互独立，

由定义6.2.2得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

例 设$(X_1, X_2, \cdots, X_6)$为取自正态总体$X \sim N(0, 1)$的样本，$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，求常数c,使cY服从$\chi^2$分布？

解 由已知，有

$X_i \sim N(0, 1)$且$X_1, X_2, \cdots, X_6$相互独立，

则 $X_1+X_2+X_3 \sim N(0,3)$ 所以 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

同理 $\dfrac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$

且 $X_1+X_2+X_3$和$X_4+X_5+X_6$相互独立 根据χ^2分布的定义

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

且 $X_1+X_2+X_3$和$X_4+X_5+X_6$相互独立 根据χ^2分布的定义

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

于是

$$\frac{1}{3}Y=\frac{1}{3}[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]\sim \chi^2(2)$$

即当常数c=1/3时,cY服从χ^2分布。

（二）、t分布

定义：设随机变量$X \sim N(0, 1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X与Y相互独立，则称统计量$T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$

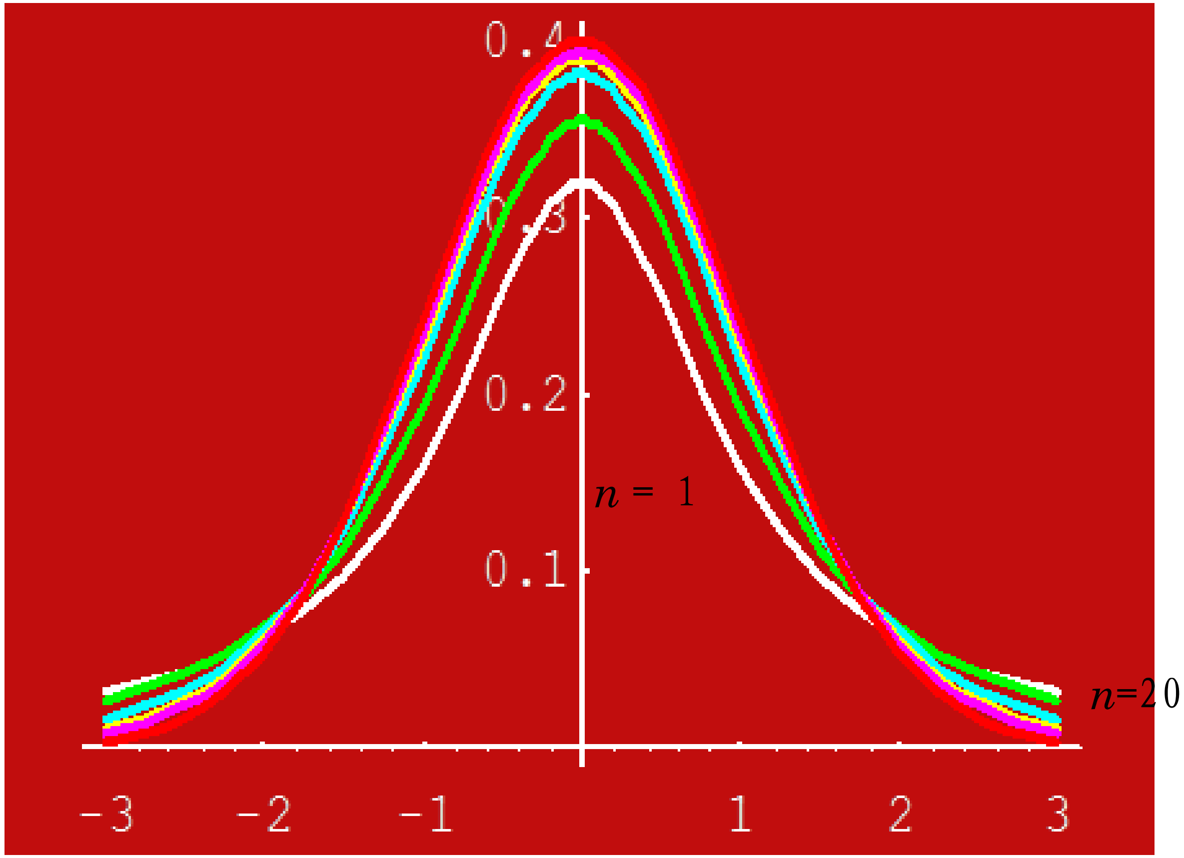
服从自由度为n的t分布或学生氏分布，记作 $T \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数为

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ (-\infty < t < +\infty)$$

其形状类似标准正态分布的概率密度的图形.

当n较大时，t分布近似于标准正态分布.



t 分布的图形(红色的是标准正态分布)

当n较大时，t分布近似于标准正态分布.

一般说来，当$n>30$时，t分布与标准正态分布$N(0，1)$就非常接近.

但对较小的n值，t分布与标准正态分布之间有较大差异.且$P\{|T|\geqslant t_0\}\geqslant P\{|X|\geqslant t_0\}$，其中$X\sim N(0，1)$，即在$t$分布的尾部比在标准正态分布的尾部有着更大的概率.

t 分布的性质

1° 若$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且$X, Y$相互独立，则
$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$
。反之，若T ~ t (n)，则有相互独立的X ~ N (0, 1)，$Y \sim \chi^2(n)$，使$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$.

2° $f(t)$是偶函数，

$$n \to \infty, f_n(t) \to \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

t 分布的上α分位点

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{T>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(t)dt=\alpha$$

的数$t_\alpha(n)$为t分布的上α分位点，

其几何意义见图**5-7.**

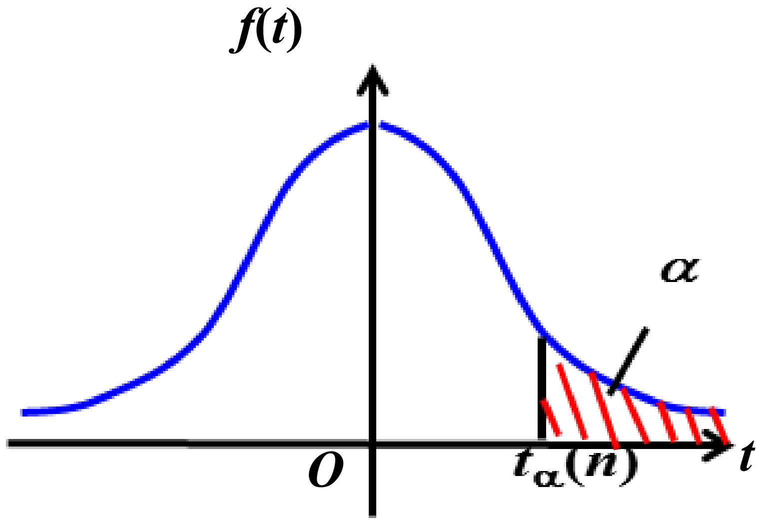


图**5-7**

在附表3 (P_{198})中给出了t分布的临界值表.

例如，当$n=15$，$\alpha=0.05$时，查t分布表得，

$t_{0.05}(15)=$ 1.7531 $t_{0.025}(15)=$ 2.1315

但当$n>45$时，如无详细表格可查，可以用标准正态分布代替t分布查$t_\alpha(n)$的值.

即 $t_\alpha(n)\approx z_\alpha$， $n>45$.

例 设$(X_1, X_2, \cdots, X_5)$为取自正态总体$X \sim N(0, 1)$的样本,求常数c,使

$$\frac{c(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$$

服从t分布？

解 由已知，有

$X_i \sim N(0, 1)$且$X_1, X_2, \cdots, X_5$相互独立，

则 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$ $X_3^2+X_4^2+X_5^2 \sim \chi^2(3)$ 且两者独立

要使

$$\frac{c(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} = \frac{\frac{c}{\sqrt{3}}(X_1+X_2)}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}$$

服从t分布， 则有 $\frac{c}{\sqrt{3}}(X_1+X_2) \sim N(0,1)$

又因为 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$ 所以 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

又因为 $X_1+X_2 \sim N(0,2)$ 所以 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

又 $\dfrac{c}{\sqrt{3}}(X_1+X_2) \sim N(0,1)$

$\therefore \dfrac{c}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore c = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

即 $c = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时, $\dfrac{c(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从t分布

例 设X_1，X_2，…，X_9和Y_1，Y_2，…，Y_9是来自同一个总体$X \sim N(0, 9)$的两个独立样本，确定

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9} Y_i^2}}$$

的分布。

解 由已知，有

$X_i \sim N(0, 9)$且X_1，X_2，…，X_9相互独立，

则 $\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,81)$ $\quad \therefore \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(0,1)$

而 $\frac{Y_i}{3} \sim N(0,1)$

根据χ^2的定义，有 $$\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{Y_i}{3}\right)^2=\sum_{i=1}^{9}\frac{Y_i^2}{9}\sim\chi^2(9)$$

又 $\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i$与$\sum_{i=1}^{9}\frac{Y_i^2}{9}$相互独立，根据$t$分布的定义，有

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}=\frac{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{9}\frac{Y_i^2}{9}\right)/9}}\sim t(9)$$

（三）、F分布

定义　　设随机变量$X \sim \chi^2(n_1)$、$Y \sim \chi^2(n_2)$，且与相互独立，则称随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$

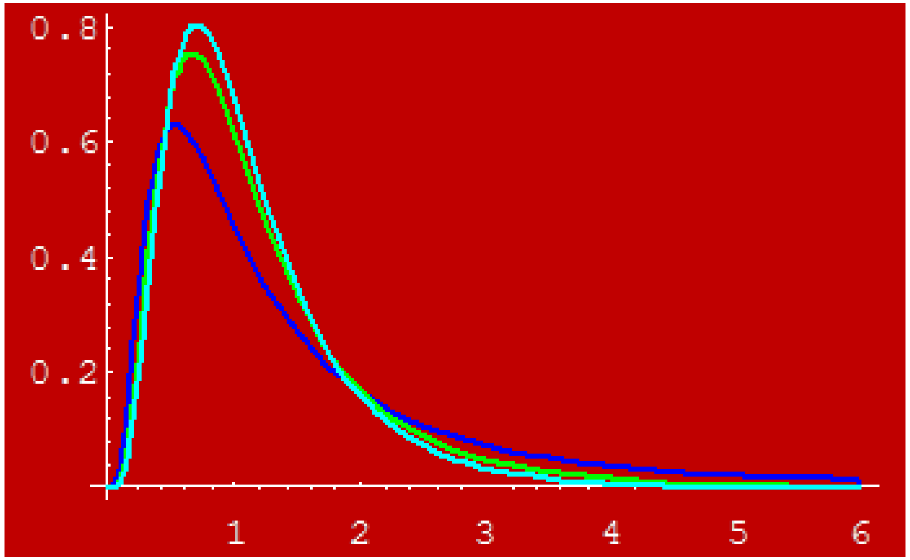
服从第一自由度为n_1，第二自由度为n_2的F分布，

记作　$F \sim F(n_1, n_2)$.

概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})(1+\frac{n_1}{n_2}x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

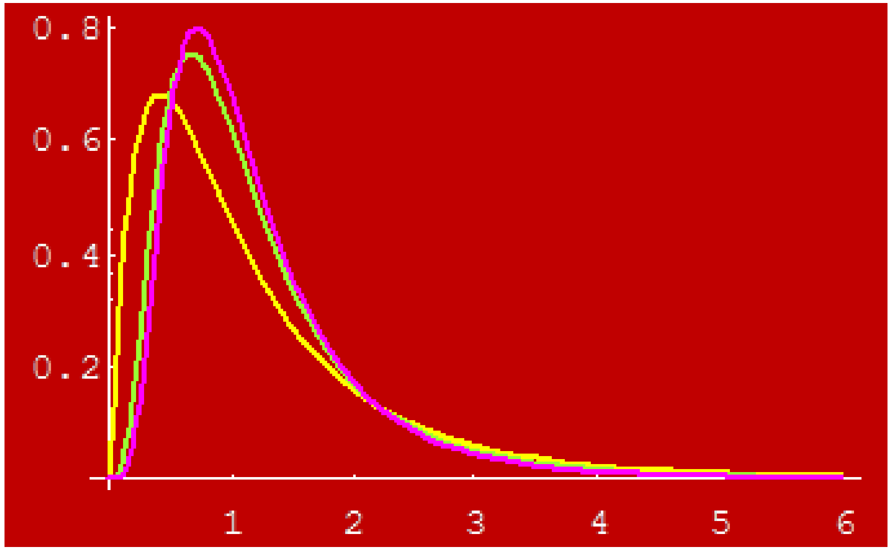
其图形见图



$m = 10, n = 4$

$m = 10, n = 10$

$m = 10, n = 15$



$m = 4, n = 10$

$m = 10, n = 10$

$m = 15, n = 10$

ch6-21

性质：若$X\sim F(n_1, n_2)$，则 $\dfrac{1}{X}\sim F(n_2, n_1)$.

F分布的上α分位点

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{F(n_1,n_2)>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(y)dy=\alpha$$

的数$F_\alpha(n_1, n_2)$为F分布的上α分位点，

其几何意义如图5-7所示.

其中$f(y)$是F分布的概率密度.

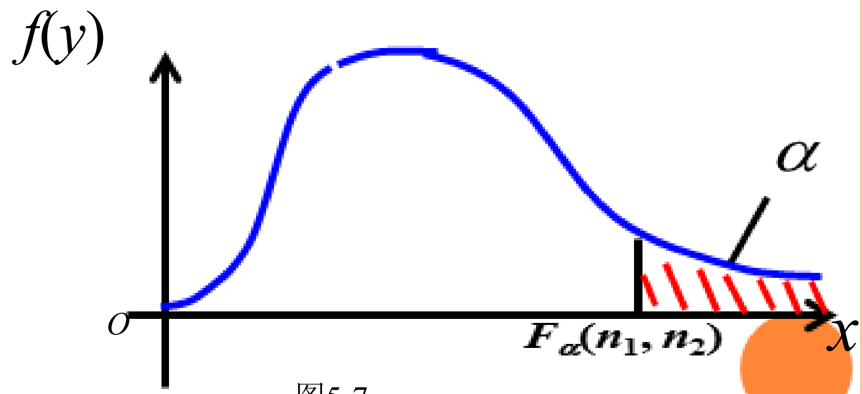


图5-7

F 分布的上α分位点

$F_{\alpha}(n_1, n_2)$的值可由F分布表查得.

附表5(P_{202}~P_{210})分α=0.1、α=0.05、α=0.025、α=0.01、α=0.005、α=0.001给出了F分布的上α分位数.

查表时应先找到相应的α值的表.

当时n_1=2, n_2=18时，有 $F_{0.01}(2, 18)=$ 6.01

在附表5中所列的α值都比较小，当α较大时，可用下面公式

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$$

例如，

$$F_{0.99}(18, 2) = \frac{1}{F_{0.01}(2,18)} = \frac{1}{6.01} \approx 0.166$$

例　设总体$X\sim N(0,1)$，X_1，X_2，…，X_n为简单随机样本，试问下列统计量各服从什么分布？

$$(1)\ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}};\quad (2)\ \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}};\quad (3)\ \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2}.$$

解　(1)　因为$X_i\sim N(0,1)$，$i=1, 2, \cdots, n.$　所以

$X_1-X_2\sim N(0, 2)$，　$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),$$

$$X_3^2+X_4^2\sim \chi^2(2),$$

故

$$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\frac{(X_1-X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2}{2}}}\sim t(2).$$

例　设总体$X\sim N(0,1)$，X_1，X_2，…，X_n为简单随机样本，试问下列统计量各服从什么分布？

$$(1)\ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}};\quad (2)\ \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}};\quad (3)\ \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2}.$$

续解　(2)　因为$X_1\sim N(0,1)$，

$$\sum_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$$

故

$$\frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}}=\frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2\Big/(n-1)}}\sim t(n\text{-}1).$$

例　设总体$X\sim N(0,1)$，X_1，X_2，…，X_n为简单随机样本，试问下列统计量各服从什么分布？

$$(1)\ \frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}};\quad (2)\ \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}};\quad (3)\ \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2}.$$

续解　(3)　因为 $\sum_{i=1}^{3}X_i^2\sim\chi^2(3)$，$\sum_{i=4}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-3)$，

所以

$$\frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^{3}X_i^2\Big/3}{\sum_{i=4}^{n}X_i^2\Big/(n-3)}\sim F(3,n\text{-}3).$$

例　设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_{15}为X的简单随机样本，确定

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$$

的分布。

解、由于$X_1, X_2,\cdots, X_{15}$是来自总体$N(0,\sigma^2)$的样本,所有$X_i\sim N(0,\sigma^2)$,i=1,2,…,15,所以

$$\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$$

且它们相互独立。根据χ^2的定义有

$$\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10)$$

$$\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(10)$$

$$\left(\frac{X_{11}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_{12}}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(5)$$

而$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2$和$X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2$相互独立，根据$F$分布的定义，有

$$Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{10\sigma^2}}{\dfrac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{5\sigma^2}}$$

$$\sim F(10,5)$$

二、正态总体下的抽样定理

例 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体X的样本，且总体均值$E(X)=\mu$，总体方差$D(X)=\sigma^2$，求 $E(\overline{X}), D(\overline{X})$，$E(S^2)$。

解 根据样本的独立性，同分布性以及数学期望和方差的性质，有

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu,$$

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)\right]=\sigma^2$$

定理**6.2.1**：设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 是 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的 X 一个样本, 则样本均值服从正态分布

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

定理6.2.1.1 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，则

(1) 样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差S^2相互独立；

(2) $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

与以下补充性质的结论比较：

性质 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，则$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

定理6.2.3　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，则统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证　由于 $\overline{X}$ 与S^2相互独立，且

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

由定义5.4得

$$\frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = T \sim t(n-1)$$

定理6.2.4 设 n_1, S_1^2 为正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本容量和样本方差；n_2, S_2^2 为正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本容量和样本方差；且两个样本相互独立，则统计量

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

证明 由已知条件知

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

且相互独立， 由F分布的定义有

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (n_2-1)} = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

定理6.2.4 设$(X_1, X_2, \cdots, X_{n1})$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n2})$分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$的样本，且它们相互独立，则统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_n\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_n=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$,

S_1^2、S_2^2分别为两总体的样本方差.

(证略).

例 设总体$X \sim N(\mu, 4^2)$，X_1，X_2，…，X_{10}是$n=10$简单随机样本，S^2为样本方差，已知$P\{S^2>\alpha\}=0.1$,求α.

解 因为$n=10$，$n-1=9$，$\sigma^2=4^2$， 所以

$$\frac{9S^2}{4^2} \sim \chi^2(9).$$

又 $P\{S^2>\alpha\}=P\{\frac{9S^2}{4^2}>\frac{9\alpha}{4^2}\}=0.1$,

所以 $\frac{9\alpha}{4^2}=\chi^2_{0.1}(9) \approx 14.684.$ 故

查表

$$\alpha \approx 14.684 \times \frac{16}{9} \approx 26.105$$

例　设总体$X \sim N(3, \sigma^2)$，X_1，X_2，$\cdots$，X_{10}是$n=10$简单随机样本，$S^2=4$为样本方差，求样本均值　落在2.1253 $\overline{X}$ 到3.8747之间的概率．

解　因为$n=10$，$S^2=4$，$\mu=3$，　　　　　所以

$$\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}} \sim t(9).$$

$$\therefore P\{2.1253 < \overline{X} < 3.8747\}$$

$$= P\{\frac{2.1253-3}{S/\sqrt{10}} < \frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}} < \frac{3.8747-3}{S/\sqrt{10}}\}$$

$$= P\{-1.383 < \frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}} < 1.383\}$$

$$= P\{|\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}}| < 1.383\}$$

$$\therefore P\{2.1253 < \overline{X} < 3.8747\}$$

$$\approx P\{|\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}}|<1.383\}$$

由

$$\frac{\overline{X}-3}{S/\sqrt{10}} \sim t(9).$$

根据t分布表可得，$t_{0.1}(9)=1.383.$

再由t分布的对称性以及双α分为点的定义可得

$$P\{2.1253 < \overline{X} < 3.8747\} \approx 1-2\times 0.1 = 0.8$$

例 (1) 设X_1，X_2，…，X_6是来自总体$X\sim N(2,3)$的样本，求α使 $P\{\sum_{i=1}^{6}(X_i-2)^2\le\alpha\}=0.95$。(2)设两个正态总体X,Y的方差分别为 $\sigma_1^2=12,\sigma_2^2=18$，在总体X,Y中分别抽取容量n1=61,n2=31的样本，且两个样本相互独立，样本方差分别为 S_1^2,S_2^2，求 $P\{S_1^2/S_2^2>1.16\}$。

解 （1）由于X_1，X_2，…，X_6是来自总体$X\sim N(2,3)$的样本，则

$$\frac{X_i-2}{\sqrt{3}}\sim N(0,1).$$

且他们相互独立，则

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{X_i-2}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(6).$$

$$\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{X_i-2}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(6).$$

要使

$$0.95 = P\{\sum_{i=1}^{6}(X_i-2)^2 \le \alpha\} = P\{\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{X_i-2}{\sqrt{3}}\right)^2 \le \frac{\alpha}{3}\}$$

$$= 1 - P\{\chi^2(6) > \frac{\alpha}{3}\}$$

即 $P\{\chi^2(6) > \frac{\alpha}{3}\} = 1 - 0.95 = 0.05$

查表得 $P\{\chi^2(6) > 12.592\} = 0.05$

所以 $\frac{\alpha}{3} = 12.592$

于是 $\alpha = 37.776$

例 (2)设两个正态总体**X,Y**的方差分别为 $,\sigma_1^2=12,\sigma_2^2=18$ 在总体**X,Y**中分别抽取容量**n1=61,n2=31**的样本，且两个样本相互独立，样本方差分别为 S_1^2,S_2^2，求 $P\{S_1^2/S_2^2>1.16\}$.

解 （**2**）由定理**6.2.4**，得

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/S_2^2}{12/18}\sim F(60,30)$$

$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>1.16\}=P\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}>\frac{1.16}{12/18}\}=P\{\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}>1.74\}$$

查表得$F_{0.05}(60,30)=1.74$,根据上α分位点的意义，有

$$P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}>1.16\}=0.05$$