Valladolid Online Judge
The Math & Number Theory Lovers' Contest Solutions

Amber
[ADN.cn]
hupo001@gmail.com

完成情况:

State	Contest State	Title	Method
AC		The Unreal Tournament	递推，二项式，概率
AC		Liar or Not Liar that is the...	数论，$x^2 + y^2 = n$ 的解判定
AC	AC	Is This Integration ?	基础几何计算
AC	AC	Romeo and Juliet !	平面几何
AC		Divisibility Testing! Wow!	数论，枚举求解 $b^k \equiv c \pmod d$
AC		The Last Non-zero Digit.	数论
AC	AC	How Many Pieces of Land ?	数列，递推
AC	AC	Trees in a Wood.	数论
AC		The Largest/Smallest Box ...	函数，求导
AC		The Optimal Coffee Shop!!	平面几何
AC		A Dinner with Schwarzenegger!!!	组合数学，函数
AC	AC	Let's Dance !!!	组合数学，二项式

Problem A: The Unreal Tournament

Brief

Program Name: `UVa_10207_A.cpp`
Method Summary: 递推，二项式，概率
Time Complexity: $O(N)$ for each query
Finished Date: 2007-3-14

Description

给出 $P(i,j)$ 的定义：

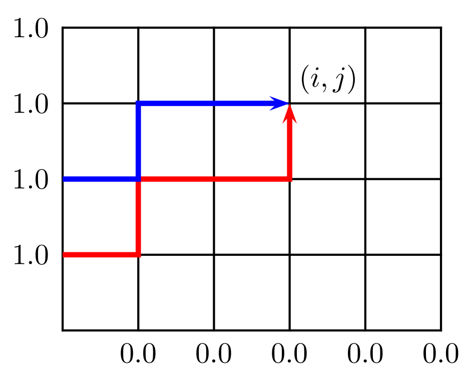
$$\begin{array}{rcl} P(0,0) & & \text{无意义} \\ P(0,j) & = & 1 \quad (j>0) \\ P(i,0) & = & 0 \quad (i>0) \\ P(i,j) & = & p \cdot P(i-1,j) + q \cdot P(i,j-1) \quad (i,j>0) \end{array}$$

求 $P(i,j)$ 以及递归求解 $P(i,j)$ 遍历的结点数。

Solution

直接按定义模拟求解需要 $O(N^2)$，为了降低解决问题的复杂度，就需要观察解的形式。

下图给出了 $P(i,j)$ 直观图。最左一列的 1.0 表示 $P(0,j)$ 的值为 1.0。最底下一列 0.0 表示 $P(i,0)$ 的值为 0.0。而中间结点 $P(i,j)$ 的一个解对应了从最左列某个结点 $(0,k)$ 出发向右或向上行走到达 (i,j)的路径（第一步必须向右）。向右走，则路径的概率应乘上系数 p；向上走，则乘上系数 q。



从某个最左列起点 $(0,k)$ 先向右一步到达 $(1,k)$，再到达 (i,j) 的方法数为 $\binom{i-1+j-k}{i-1}$，则从 $(0,k)$ 出发到达 (i,j) ，概率和为 $\binom{i-1+j-k}{i-1} \cdot p^i \cdot q^{j-k}$。所以，有：

$$\begin{aligned} P(i,j) &= \sum_{k=1}^{j} \binom{i-1+j-k}{i-1} \cdot p^i \cdot q^{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{i-1+k}{i-1} \cdot p^i \cdot q^k \end{aligned}$$

于是只使用 $O(N)$ 的时间计算 $P(i,j)$。

再考虑递归求解 $P(i,j)$ 遍历的结点数，设为 $F(i,j)$。通过归纳，得到：

$$\begin{aligned} F(0,j) &= F(i,0) = 0 \\ F(i,j) &= F(i-1,j) + F(i,j-1) + 2 \end{aligned}$$

做等量代换去掉常数项，令 $F'(i,j) = F(i,j) + 2$。

$$\begin{aligned} F(i,j) &= F(i-1,j) + F(i,j-1) + 2 \\ \Rightarrow \quad F(i,j) + 2 &= F(i-1,j) + 2 + F(i,j-1) + 2 \\ \Rightarrow \quad F'(i,j) &= F'(i-1,j) + F'(i,j-1) \end{aligned}$$

观察发现该递推式的形式与组合数类似：

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

考虑通过构造，将 $F'(i,j)$ 与 $\binom{n}{r}$ 联系起来。令 $n = i + j$，$r = i$，则 $F'(i,j) = C \cdot \binom{i+j}{i}$。其中 C 为一个常数，由于初值的不同，通过待定系数法，得出 $C = 2$。所以：

$$\begin{aligned} F'(i,j) &= 2 \cdot \binom{i+j}{i} \\ F(i,j) &= 2 \cdot \binom{i+j}{i} - 2 \end{aligned}$$

Remark

这是一道很繁琐的题，充分考察选手的不完全归纳能力。实际上，以上的结论我都是先猜测出答案的形式，再细化的。在考场中，若没有数学软件，就很花时间了。

Problem B: Liar or Not Liar that is the...

Brief

Program Name: `UVa_10208_B.cpp`
Method Summary: 数论，$x^2+y^2=n$ 的解判定
Time Complexity: $O(\pi(N))$
Finished Date: 2007-3-14

Solution

$x^2+y^2=n$ 的解判定是一个经典的问题，在《初等数论》[1] 中有详细的介绍。应用其中的定理2，便可以解决该题。

定理 B.1 (**定理**2,《**初等数论**》)： 设正整数 n 的质因数分解为 $n=\prod p_i^{a_i}$ ，则 $x^2+y^2=n \quad (n\in\mathbb{Z}^+)$ 有整数解的充要条件是 n 中不存在形如 $p_i\equiv 3 \pmod 4$ 且指数 a_i 为奇数的质因数 p_i。

对于 N 形式的询问，用 $O(\sqrt{N})$ 的时间分解质因数，根据定理进行判定。

对于 $N!$ 形式的询问，用 $O(\pi(N))$ 的时间，得到 $N!$ 质因数分解，进行判定。其中 $\pi(x)$ 表示不超过实数 x 的质数个数 (prime counting function)。而 $N!$ 中质数 p 的个数为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{N}{p^i}\right\rfloor$$

Remark

开始时，没有注意到 Fixed Message 中声明三角形边长可以为 0，导致考试中一直没有进展。之后的解题过程中，担心 $O(\pi(N))$ 的复杂度太高，可实际上输出前50个符合题意的质数即可。并且实际上，符合题意的质数的分布是很平均的，可能是 $\frac{1}{4}$（奇质数模 4 的结果只有两种，并且 a_i 可能为奇数或偶数）。所以复杂度远没有 $O(\pi(N))$。

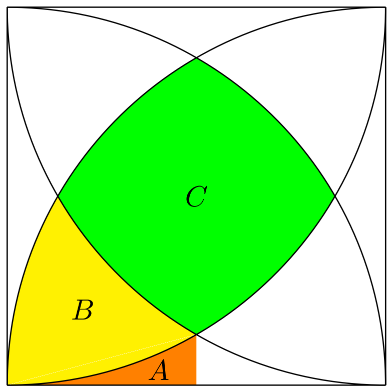
[1]潘承洞，潘承彪，《初等数论》，第二版，第六章，第 2 节，$x^2+y^2=n$

Problem C: Is This Integration ?

Brief

Program Name: `UVa_10209_C.cpp`
Method Summary: 基础几何计算
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-12

Solution



如图所示，其中A的面积为

$$\begin{aligned} S_A &= \int_0^{\frac{r}{2}} (r - \sqrt{r^2 - x^2})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{12 - 3\sqrt{3} - 2\pi}{24} \cdot r^2 \end{aligned}$$

用 $1/4$ 圆面积的补减去 4 倍的 A 面积得到 B 的面积。

$$S_B = r^2 - \frac{\pi \cdot r^2}{4} - 4A$$

C 的面积就是剩下的面积：

$$S_C = r^2 - 4S_B - 8S_A$$

Remark

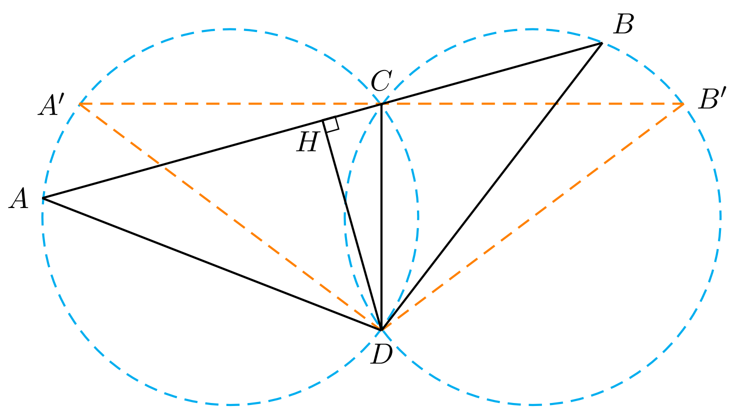
实际上，有很多简单的方法，比如添置一些 30° 的辅助线。但积分法想起来最快，数学计算也不是很复杂。

Problem D: Romeo and Juliet !

Brief

Program Name: `UVa_10210_D.cpp`
Method Summary: 平面几何
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-13

Solution



给定 C，D 且 $\angle CAD = \alpha$，$\angle CBD = \beta$ 固定。题目要求最小化 AB（A，C，B 共线）。从 D 向 AB 作垂线，交于 H。则

$$AB = AH + HB = DH \cdot \cot\alpha + DH \cdot \cot\beta$$

由于 $DH \leq CD$，所以 AB 在 H 与 C 重合时取到最大值。

Remark

简单的几何题，关键是将答案采用一些直观的变量与简单的数量表示出来。

Problem E: Divisibility Testing! Wow!

Brief

Program Name: `UVa_10211_E.cpp`
Method Summary: 数论，枚举求解 $b^k \equiv c \pmod d$
Time Complexity: $O(\sqrt{\max\{d,b\}}) + O(1000) + O(1000)$ for each query
Finished Date: 2007-3-15

Solution

将原数 d 写成 b 进制的形式 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b^i$，通过手工证明题目中给出的例子，发现规律与具有 $b^k \equiv c \pmod d$ 形式的方程的解 k 有关。下面给出通过例子不完全归纳得出的命题。

命题 E.1：

$$b^k \equiv 0 \pmod d \Rightarrow \text{Rightmost } k \tag{E.1}$$

$$b^k \equiv 1 \pmod d \Rightarrow \text{Add all } k \tag{E.2}$$

$$b^k \equiv -1 \pmod d \Rightarrow \text{Add all } 2k \text{ Alternate } k \text{ change sign} \tag{E.3}$$

证明： 由式(E.1)，对于 $\forall i \ge k$，有 $b^i \equiv 0 \pmod d$，这样可以看成取最后k位。即

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b^i = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot b^i \pmod d$$

由式(E.2)，对于 $\forall i \ge k$，有 $b^i = b^{i \bmod k} \pmod d$，可以看成每 k 位数分一组求和。即

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b^i = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j\cdot k} \cdot b^i \pmod d$$

由式(E.3)，对于 $\forall i \ge k$，有 $b^i = (-1)^{\lfloor i/k \rfloor} \cdot b^{i \bmod k} \pmod d$，可以看成每 k 位数分一组相间的加减求和。即

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot b^i = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \cdot \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j\cdot k} \cdot b^i \pmod d$$

■

- 对于式(E.1)，求解一个最小的 k，使得 $d \mid b^k$。先将 b，d 分解质因数：

$$b = \prod_{p \in \text{Prime}} p_i^{b_i}$$

$$d = \prod_{p \in \text{Prime}} p_i^{d_i}$$

若 $\exists i$，使得 $d_i > 0$ 且 $b_i = 0$，即被除数中不含除数中的质因数，那么式(E.1)无解。否则找到最小的 k，使得对于 $\forall i$，有 $b_i \cdot k \geq d_i$。即

$$k = \max_{b_i > 0} \lceil d_i / b_i \rceil$$

故解决式(E.1)的复杂度为 $O(\sqrt{\max\{d, b\}})$。

- 而对于式(E.2)，式(E.3)，题目要求解 $k \leq 1000$。这样通过最多 1000 次的枚举便可得到解或判无解。

Remark

这是一道思维比较麻烦的题，比赛中没有考虑做，而做起来不是特别难。

Problem F: The Last Non-zero Digit.

Brief

Program Name: `UVa_10212_F.cpp`
Method Summary: 数论
Time Complexity: $O(\pi(N))$ 或 $O(\log N)$
Finished Date: 2007-3-15

Solution

利用 $N!$ 中质数 p 的个数公式：$\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{N}{p^i}\right\rfloor$。将 $N!$ 分解质因数，设其中 2 的指数为 a_2，5 的指数为 a_5。则 $N!$ 末尾 0 的个数为 $zero=\min\{a_2,a_5\}$。令 $a_2'=a_2-zero$，$a_5'=a_5-zero$，对于其他质因数：$a_i'=a_i$。则答案为

$$\sum p_i^{a_i'} \mod 10$$

Remark

开始认为 $O(\pi(N))$ 的复杂度会超时，结果居然 AC。后来，尝试地想有没有 $O(\log N)$ 的算法，但失败了。

Solution 2

由于 $P_N^M=\frac{N!}{(N-M)!}$ 的情况复杂，应该先考虑极端的情况，即求出 $N!$ 的最后非 0 位。由于因子 2 和 5 的组合导致了末位的 0 的产生，所以先将它们分离出来，单独处理。设 $N!$ 分解质因数，设其中 2 的指数为 a_2，5 的指数为 a_5。则 $N!$ 末尾 0 的个数为 $zero=\min\{a_2,a_5\}$。令 $a_2'=a_2-zero$，$a_5'=a_5-zero$。则本问题的答案为

$$\frac{N!}{2^{a_2}\times 5^{a_5}}\times 2^{a_2'}\times 5^{a_5'} \bmod 10$$

设 $F(N)$ 表示除去 N 中所有的因子 2 和 5 后得到的数。则

$$\frac{N!}{2^{a_2}\times 5^{a_5}}=F(N!)=\prod_{i=1}^{N}F(i)$$

由于 $F(N)$ 中不含因子 2 和 5，则 $F(N)$ 的末位数字只可能是 $1,3,7,9$。设 $G_p(N)$ 表示 $F(1)\ldots F(N)$ 中末位数字为 p 的数的个数，其中 $p\in\{3,7,9\}$。所以，$F(N!)$ 可以表示成如下形式：

$$F(N!)\equiv 3^{G_3(N)}\times 7^{G_7(N)}\times 9^{G_9(N)} \pmod{10}$$

下面考虑计算 $G_p(N)$。由于 $F(i)$ 的值不是规则的，可以将 $F(1)\dots F(N)$ 中的数划分为若干类，使得每一类中的 $F(i)$ 的值有连续的规律，即以比值 $\frac{i}{F(i)} = L = 2^a \times 5^b$ 作为划分标准。

对于某个类 L 中的 i 可以写成这样的形式（$i = F(i) \cdot L$）：

$$1 \cdot L,\ 3 \cdot L,\ 7 \cdot L,\ 9 \cdot L,\ 11 \cdot L,\ 13 \cdot L,\ 17 \cdot L,\ 19 \cdot L \dots$$

正是由于 $F(N)$ 中不含因子 2 和 5，上式 L 前的系数的末位数字只可能是 $1, 3, 7, 9$。但不妨补齐那些可以被因子 2 或 5整除的系数，实际上它们并不影响末位数字是 $1, 3, 7, 9$ 的 $F(i)$ 的个数。即：

$$1 \cdot L,\ 2 \cdot L,\ 3 \cdot L,\ 4 \cdot L,\ \dots,\ \left\lfloor \frac{N}{L} \right\rfloor \cdot L$$

设 $H_p(N)$ 表示 $1 \dots N$ 中末位数字为 p 的数的个数，其中 $p \in \{3, 7, 9\}$。$H_p(N)$ 的计算比较简单：

$$H_p(N) = \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor + \begin{cases} 1 & N \bmod 10 \geq p \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

在某个类 L 中，那些使得 $F(i)$ 的末位为 p 的 i 的个数就是 $H_p(\lfloor \frac{N}{L} \rfloor)$ 。所以：

$$G_p(N) = \sum_{\forall a,b \geq 0,\ \ L = 2^a \times 5^b} H_p(\left\lfloor \frac{N}{L} \right\rfloor)$$

至此，我们已经可以以 $3, 7, 9$ 的幂乘积的形式表示 $F(N!)$。那么很容易的推广到 $P_N^M = \frac{N!}{(N-M)!}$，只要指数相减即可。

Remark 2

花了一些的时间想 $O(\log N)$ 的算法。思维方向就是把 2 和 5 提出来，顺水推舟，不难。这题是一道趣题，这种题想头都很多，但太多的思路，反而导致思维的混乱。难点就是在于临时设置的辅助函数的物理意义在头脑中要保持时刻清晰，不要设置后就在后来思维过程中改变了（我分析时，就是这样）。

Problem G: How Many Pieces of Land ?

Brief

Program Name: `UVa_10213_G.cpp`
Method Summary: 数列，递推
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-14

Solution

直接计算面数比较困难，可以考虑使用欧拉公式 $V - E + F = 2$。其中 V 为点数，E 为边数，F 为面数。

$$V = n + \frac{n}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n-3} i \cdot (n-2-i) \tag{G.1}$$

$$E = n + n + \frac{n}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-3} (i \cdot (n-2-i) + 1) \tag{G.2}$$

注记 G.1： 式(G.1)，式(G.2)的和式中，都有 $i \cdot (n-2-i)$ 的部分。和式表示枚举一条从固定点引出的对角线，对角线左边有 i 个点，右边有 $(n-2-i)$ 个点。左边点到右边点的连线在枚举的对角线上形成 $i \cdot (n-2-i)$ 个交点。划分出了 $i \cdot (n-2-i) + 1$ 个线段。每一个交点被重复计算了 4 次，所以最后除以 4。每一个线段被重复计算了 2 次，所以最后除以 2。 ■

将 V，E 带入欧拉公式，化简得到：

$$\begin{aligned} F &= 2 - V + E \\ &= \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 48}{24} \end{aligned}$$

由于 F 中多算了延伸向无限的面，所以最后答案为 $F - 1$。

Remark

考试时，并没有尝试对递推式化简，但很快的解决了问题。

Problem H: Trees in a Wood.

Brief

Program Name:	`UVa_10214_H.cpp`
Method Summary:	数论
Time Complexity:	$O(N^2)$
Finished Date:	2007-3-13

Solution

定义

$$F(a) = \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a,b) = 1,\ 1 \le b \le m\right\}$$

我们求的答案是就是

$$\frac{K}{N} = \frac{4\sum_{a=1}^{n} F(a) + 4}{4n \cdot m + 4}$$

根据题目中的提示

$$\varphi(a) = \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a,b) = 1,\ 1 \le b \le a\right\}$$

又由于

$$\gcd(a,b) = \gcd(a, b + a \cdot i)$$

则对于 $\forall i \ge 0$，有下式成立。

$$\varphi(a) = \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a, b + a \cdot i) = 1,\ 1 \le b \le a\right\}$$

上式的物理意义为 (a,b) 平移为 $(a, b + a \cdot i)$，即对于一个特定的 a，有

$$\begin{aligned}
F(a) &= \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a,b) = 1,\ 1 \le b \le m\right\} \\
&= \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a, b \bmod a) = 1,\ 1 \le b \le m\right\} \\
&= \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor \cdot \varphi(a) + \#\left\{(a,b) \mid \gcd(a,b) = 1,\ 1 \le b \le m \bmod a\right\}
\end{aligned}$$

所以对于一个特定的 a，只要不超过 a 次的 $\gcd$ 检查，即可得出 $F(a)$ 的值。

总复杂度为 $\sum_{a=1}^{n} a = O(n^2)$。

Remark

由于 $n \ll m$，所以就有了批量处理的动机。关键在于对 $\gcd(a,b) = \gcd(a, b + a \cdot i)$ 的理解，运用到批量处理上来。

Problem I: The Largest/Smallest Box ...

Brief

Program Name: `UVa_10215_I.cpp`
Method Summary: 函数，求导
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-13

Solution

不妨设 $l \leq w$。体积函数：

$$f(x) = x \cdot (l - 2\,x) \cdot (w - 2\,x) \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$$

求函数 $f(x)$ 的极值点等价于解方程 $f'(x) = 0$。其中 $f'(x) = 12\,x^2 - 4(l + w) \cdot x + l \cdot w$。解得

$$x = \frac{l + w + \sqrt{l^2 - l \cdot w + w^2}}{6}$$

或

$$x = \frac{l + w - \sqrt{l^2 - l \cdot w + w^2}}{6}$$

其中，$x = \frac{l+w+\sqrt{l^2-l\cdot w+w^2}}{6}$ 是无意义的，舍去。

而最小值只在 $x = 0$ 或 $x = l/2$ 取到。

Remark

一开始总是 WA，但是看 board 后知道，输出时应当加上一个精度修正 10^{-6}。

Problem J: The Optimal Coffee Shop!!

Brief

Program Name:	`UVa_10216_J.cpp`
Method Summary:	平面几何
Time Complexity:	$O(1)$
Finished Date:	2007-3-13

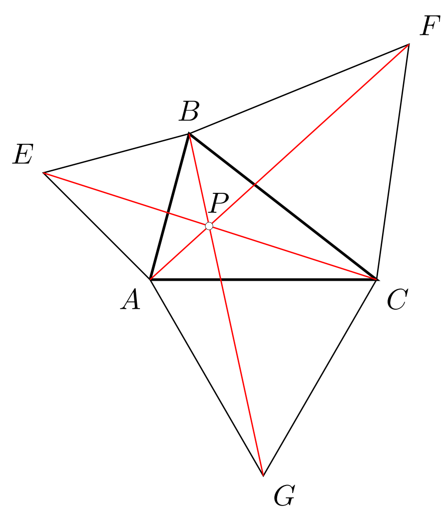
Description

给出三角形三边长，求该三角形的费马点，重心，内心，外心到三顶点的距离和。

Solution

- 费马点[2]

  费马点的性质：当三角形其中一个角大于 120°，费马点就在这个角点上；否则，费马点与相邻两个顶点的连线的夹角为 120°。



上图为费马点的构图方法，即基于三条边向外做等边三角形。等边三角形的顶点与相对的三角形顶点连边形成的三条直线的交点，就是费马点。由于 $\angle APB = 120°$ 且 $\angle AEB = 60°$，所以A, B, P, E四点共圆。由 Ptolemy's Theorem 知 $AP \cdot EB + BP \cdot AE = AB \cdot (EC - CP)$。又因为 $EB = AE = AB = a$，等式两端同除 a，得到 $AP + BP + CP = EC$。最后在 $\triangle\ ACE$ 中应用 Law of cosines，得到 EC 的长度。所以答案为：

$$D_P = AP + BP + CP = EC$$

[2]Weisstein, Eric W. "Fermat Points." From *MathWorld*–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/FermatPoints.html

- 重心

  由 Stewart's Theorem [3]可以得到中线长公式：

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

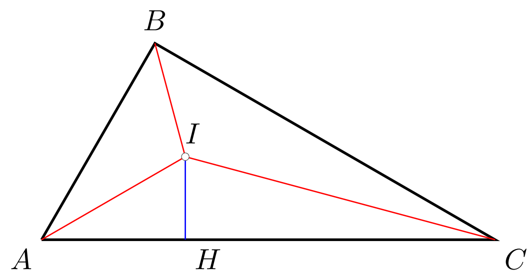
  同理可得到 m_a，m_b，于是答案为：

$$D_G = \frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c)$$

- 内心

  由面积法，得到内切圆半径为：

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$



  上图中，$AH = \dfrac{c+b-a}{2}$，所以 $AI = \sqrt{AH^2 + r^2}$，同理可得到 BI，CI。所以答案为 $D_I = AI + BI + CI$。

- 外心

  外心到三顶点的距离和就是外接圆半径的三倍。

$$\begin{cases} 2R = \dfrac{c}{\sin C} \\ S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \end{cases} \Rightarrow \quad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

  所以答案为 $D_O = 3R$。

注意：退化三角形可能组成一条直线，这时只有 D_O 是无意义的。对于无意义的三角形，所有解均无意义。

Remark

纯粹考察平面几何知识。

[3]Weisstein, Eric W. "Stewart's Theorem." From *MathWorld*–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/StewartsTheorem.html

Problem K: A Dinner with Schwarzenegger!!!

Brief

Program Name: `UVa_10217_K.cpp`
Method Summary: 组合数学，函数
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-13

Solution

设当前排在第 x 位的，中奖的概率为 $F(x)$。对于前面的 x 个人（含售票员），生日都不相同的方案数为 P_n^x。则第 x 位获奖着有 x 种方式获奖。故得出：

$$F(x) = \frac{P_n^x \cdot x}{n^x}$$

该函数是一个单峰极值函数。该函数相邻两项的比值 $\frac{F(x+1)}{F(x)}$，在 $F(x)$ 接近最大值时趋于 1，即：

$$\frac{F(x+1)}{F(x)} \to 1$$

假设 $\exists x$，满足 $F(x+1) = F(x)$。则

$$\frac{P_n^{x+1} \cdot (x+1)}{n^{x+1}} = \frac{P_n^x \cdot x}{n^x}$$

$$\Rightarrow (n-x) \cdot (x+1) = n \cdot x$$

解得 $x = \frac{-1-\sqrt{4n+1}}{2}$ 或 $x = \frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$。由于解 $x = \frac{-1-\sqrt{4n+1}}{2} < 0$ 需要舍去，所以 $x^* = \frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}$ 为原方程的解。而 $\lceil \frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2} \rceil$ 便是最优的整数解。

Remark

做得过程是顺水推舟。我还是不理解实数方案的物理意义，看着过样例了就交了，没有深究其物理意义。而实际上有很多问题点，如：由于是单峰极值函数，为什么 x^* 到 x^*+1 之间的实数，不是更优的呢？

Problem L: Let's Dance !!!

Brief

Program Name: `UVa_10218_L.cpp`
Method Summary: 组合数学，二项式
Time Complexity: $O(1)$
Finished Date: 2007-3-12

Solution

由于分糖是随机的，一颗糖给男士的概率为 $\frac{m}{m+w}$，一颗糖给女士的概率为 $\frac{w}{m+w}$。则共给男士 $2i$ 颗糖的概率为 $\binom{c}{2i}(\frac{m}{m+w})^{2i} \cdot (\frac{w}{m+w})^{c-2i}$。其中 $\binom{c}{2i}$ 表示分糖的男女先后顺序的排列。所以符合题目要求的事件概率为

$$\sum_{i=0}^{\lfloor c/2 \rfloor} \binom{c}{2i} (\frac{m}{m+w})^{2i} \cdot (\frac{w}{m+w})^{c-2i} \tag{L.1}$$

观察知式(L.1)为 $(\frac{m}{m+w} + \frac{w}{m+w})^c$ 展开式的偶数项的和。根据组合数学知识，$(a+b)^n$ 展开式的偶数项为 $((a+b)^n + (-a+b)^n)/2$。所以答案化简为

$$\begin{aligned}
& \left((\frac{m}{m+w} + \frac{w}{m+w})^c + (-\frac{m}{m+w} + \frac{w}{m+w})^c \right) /2 \\
= & \frac{(m+w)^c + (-m+w)^c}{(m+w)^c} \\
= & \left(\frac{w-m}{w+m} \right)^c
\end{aligned}$$

Remark

没有遇到障碍，关键就是把概率表达式求出来，化简是顺理成章的。