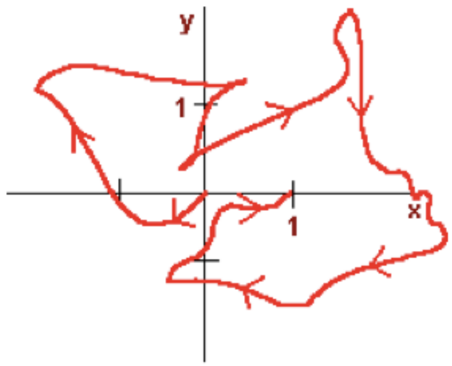
Forze Conservative

- In generale il lavoro fatto da una forza (più precisamente, da un *campo* di forze):

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r},$$



  può dipendere dal percorso seguito dalla particella.

- Se il lavoro fatto da una forza (o da un campo di forze) durante uno spostamento qualsiasi *dipende solo dalla posizione iniziale e finale*, ovvero è *indipendente dal percorso scelto*, si dice che la forza (o il campo di forze) è *conservativa*. (E' immediato dimostrare che il lavoro fatto su di un percorso chiuso da forze conservative è nullo).

- A livello microscopico, tutte le forze sono conservative.

Forze Conservative e non

Sono esempi di forze conservative:

- La forza *gravitazionale* (forza peso)
- La forza *elastica* (forza di una molla)
- La forza *elettrostatica* (attrazione fra cariche)

  e in generale, tutte le forze *centrali*, ovverosia forze dipendenti solo dalla distanza dal centro e dirette verso il centro

Sono invece *non* conservative:

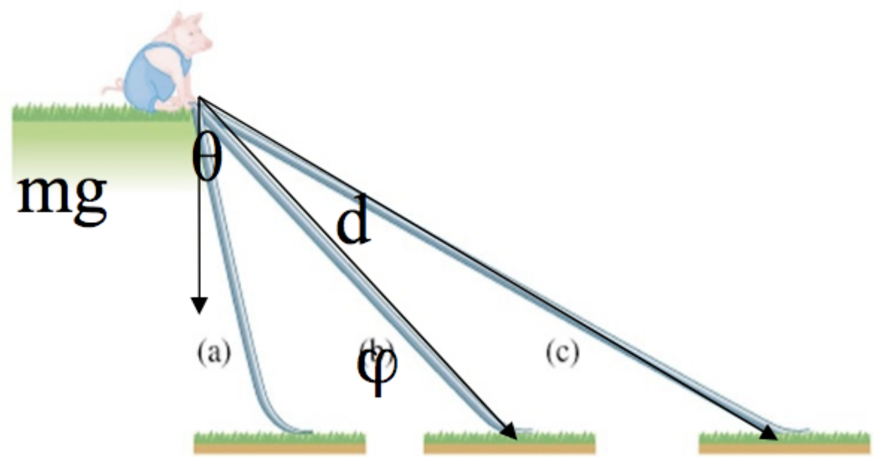
- Le forze di attrito e di resistenza

Forza peso: lavoro

Il lavoro fatto dalla forza peso dipende *solamente* dalla *differenza di quota* fra punto iniziale e punto finale.

E' immediato verificare che per qualunque percorso, il lavoro fatto dalla forza peso è sempre

$$L = mgh$$



dove $h = y_i - y_f$

E' immediato dimostrare che tutti i campi di forza costante sono conservativi.

Forza Elastica: lavoro

Il lavoro fatto dalla forza elastica dipende solo dall'allungamento della molla nel punto iniziale e finale.

Calcoliamo esplicitamente il lavoro fatto fra x_i e x_f:

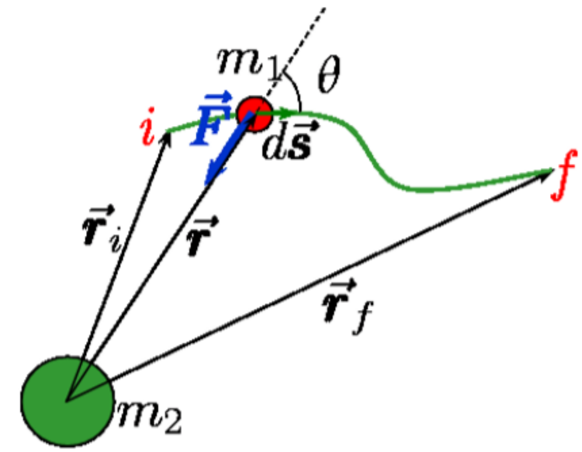
$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

(assumiamo una molla ideale e senza massa)

Forza elettrostatica o gravitazionale: lavoro

Per una forza dipendente dall'inverso del quadrato della distanza:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$



attrattiva se $k > 0$, repulsiva se $k < 0$, diretta dalla particella 2, assunta fissa nel centro, verso la particella 1,

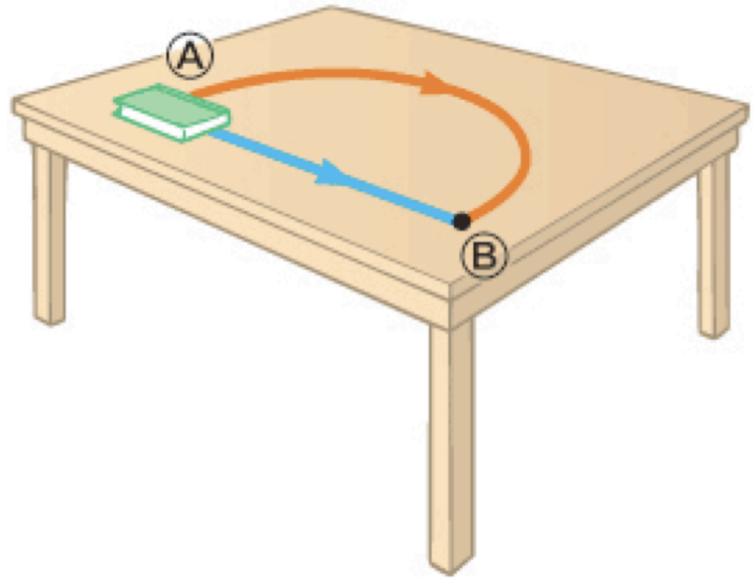
il lavoro fatto dipende solo dalla distanza iniziale e finale dal centro:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -k \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = k \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right]$$

Questo è il caso della forza elettrostatica (fra cariche) e gravitazionale (fra masse)

Forza di attrito: lavoro

Il lavoro fatto dalla forza di attrito *dipende dal percorso fatto*. Esempio: oggetto che striscia su di una superficie. La forza di attrito è costante in modulo e diretta in direzione opposta allo spostamento:



$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_i^f F dr = -F \int_i^f dr = -F\ell,$$

dove ℓ è la lunghezza del percorso.

NB: l'attrito statico *non* fa lavoro, per definizione: lo spostamento è nullo (oppure, come nel caso della ruota, lo spostamento è ortogonale alla forza di attrito)

Energia potenziale

Perché le forze conservative sono così importanti? Perché è sempre possibile introdurre una *funzione della posizione della particella*, detta *energia potenziale*, U, tale per cui:

$$U_i - U_f = L_{if}$$

dove L_{if} è il lavoro fatto dalle forze conservative fra lo stato iniziale i e lo stato finale f (che non dipende dal percorso seguito).

Per un corpo nel campo gravitazionale terrestre: $U(y) = mgy$
Per un corpo sottoposto a forze elastiche: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$
Per un corpo sottoposto a una forza $-k/r^2$: $U(x) = -\frac{k}{r}$

Da notare che l'energia potenziale è definita *a meno di una costante*. Solo *differenze* di energia potenziale sono significative.

Energia meccanica

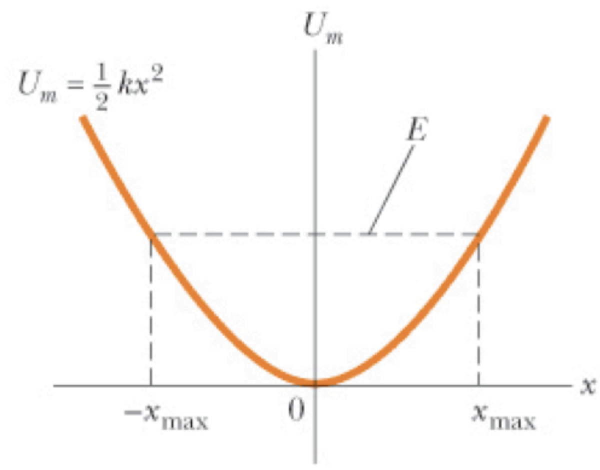
La quantità $\boxed{E = K + U}$ è detta *energia meccanica*.

Dal teorema dell'energia cinetica e dalla definizione di energia potenziale:

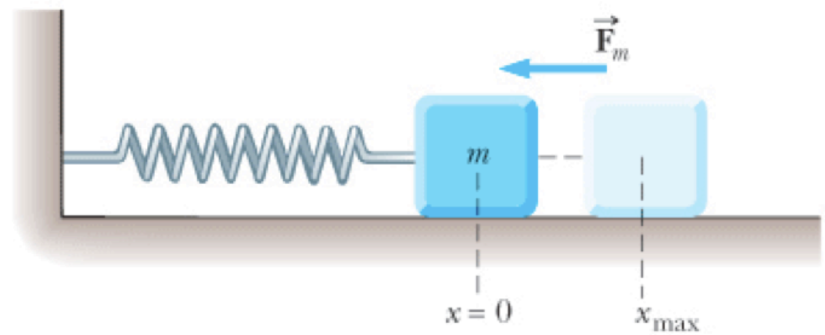
$$L_{if} = K_f - K_i, \qquad L_{if} = U_i - U_f$$

si ottiene immediatamente la legge di *conservazione dell'energia meccanica*:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$



(a)



ovvero l'energia meccanica E non varia durante il moto (in presenza di sole forze conservative): è una *costante del moto*.

Energia meccanica in presenza di attrito

Per una particella su cui agiscono più forze conservative, l'energia meccanica contiene un termine di energia potenziale per ogni forza.

Per una particella sottoposta ad una forza conservativa e a forze di attrito, l'energia meccanica *non* si conserva. E' però possibile enunciare, a partire dal teorema dell'energia cinetica, una legge più generale:

$$\Delta(K+U) = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = L_a$$

dove L_a è il lavoro (sempre negativo) fatto dalle forze di attrito.

NB: l'energia si conserva sempre! L'energia meccanica "persa" riappare sotto forma di energia termica (ovvero, di aumento della temperatura) della particella e della superficie con attrito. L'equivalenza fra calore e lavoro sarà enunciata in Termodinamica.

Forze ed Energia potenziale

Le forze conservative determinano l'energia potenziale tramite il lavoro. Possiamo determinare le forze se è nota l'energia potenziale?

Consideriamo un caso unidimensionale per semplicità. Per definizione:

$$U(x) = U(x_i) - \int_{x_i}^{x} F(x')dx'.$$

Da qui si ricava immediatamente la forza:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x).$$

Generalizzazione a tre dimensioni:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)\right) \equiv -\nabla U(x,y,z)$$

dove il simbolo nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ rappresenta l'operatore *gradiente*.

Forze ed Energia potenziale (2)

Per un corpo nel campo gravitazionale terrestre:

$$U(y) = mgy, \qquad F = -\frac{dU}{dy} = -mg$$

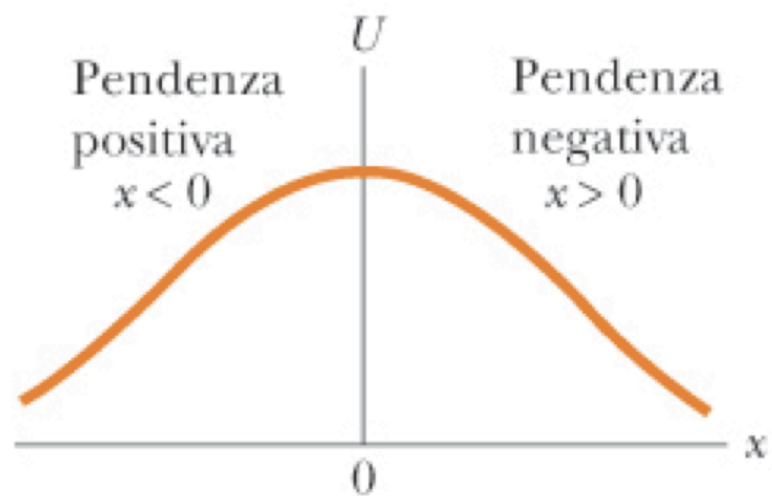
Per un corpo sottoposto a forze elastiche:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

Notare che:

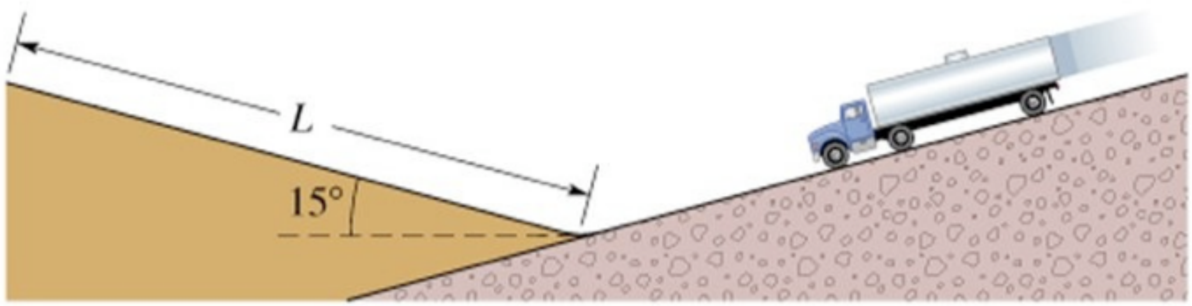
- la forza è nulla nei minimi e massimi di U; nei minimi l'equilibrio è *stabile*, nei massimi è *instabile* (vedi figura)

- la forza punta nella direzione in cui U *diminuisce*.



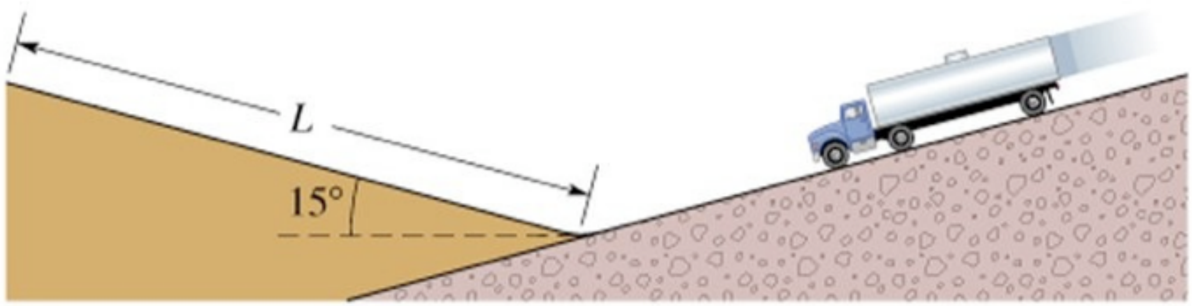
Esercizio

Un camion che viaggia a $v = 130$ km/h imbocca la corsia di emergenza, che consiste in un tratto lungo L in salita di pendenza $15°$. In assenza di attrito, calcolare il minimo valore di L affinché il camion si arresti (momentaneamente)



Esercizio

Un camion che viaggia a $v = 130$ km/h imbocca la corsia di emergenza, che consiste in un tratto lungo L in salita di pendenza $15°$. In assenza di attrito, calcolare il minimo valore di L affinché il camion si arresti (momentaneamente)

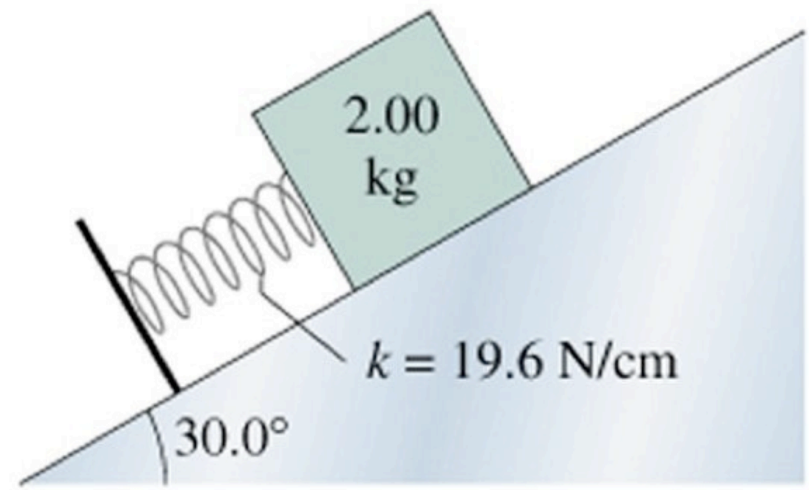


$K_i = mv^2/2 = mgL\sin 15°$ da cui $L = v^2/(2g\sin 15°) = 257$ m

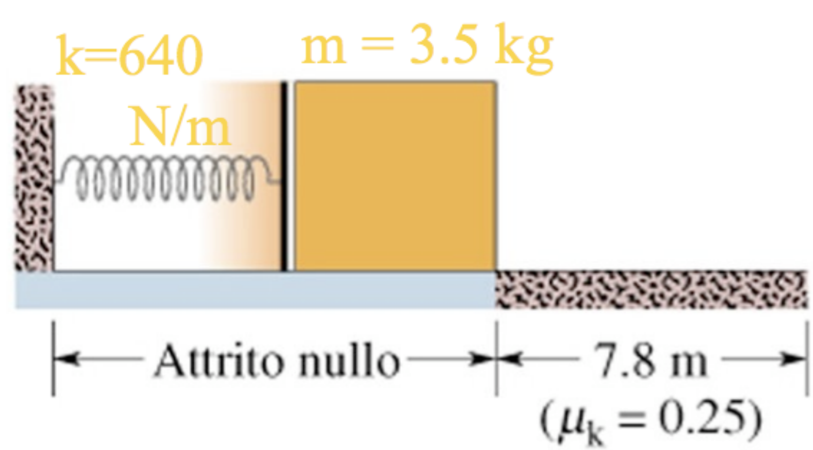
$(v = 130\mathrm{km/h} \cdot (1000\mathrm{m}/1\mathrm{km}) \cdot (1\mathrm{h}/3600\mathrm{s}) = 36.1$ m/s; $\sin 15° = 0.258)$

Esercizi

- Inizialmente la molla è compressa di 20 cm, poi è lasciata libera. Quanto lontano lungo il piano inclinato viene spinto il blocco?



- Il blocco di massa $m = 3.5$ kg viene spinto via da una molla di costante $k = 640$ N/m inizialmente compressa, si distacca quando la molla ha raggiunto la posizione di riposo, si ferma dopo 7.8 m per l'attrito ($\mu_d = 0.25$). Di quanto era compressa la molla inizialmente?



Soluzione 1

Energia meccanica: $E = K + E_{el} + E_g$, dove K è l'energia cinetica, E_{el} è l'energia elastica, E_g l'energia potenziale gravitazionale.

Stato iniziale: $K = 0$; $E_{el} = kx^2/2$, dove $x = 20$ cm; $E_g = 0$, assumendo $h = 0$ nella posizione iniziale.

Energia finale: $K = 0$; $E_{el} = 0$; $E_g = mgh$, dove h è l'altezza rispetto alla posizione iniziale, $h = L \sin 30° = L/2$. Da cui: $mgL/2 = kx^2/2$, ovvero $L = kx^2/mg = 4$ m (attenzione alle unità), a partire dal punto rappresentato in figura.

Notare come non sia necessario (ma è possibile: esercizio consigliato) scindere il problema in due parti: la massa "sparata" dalla molla fino a $x = 0$, la massa che sale liberamente lungo il piano inclinato.

Soluzione 2

In presenza di forze d'attrito, vale $E_f - E_i = L$, con L lavoro delle forze d'attrito.

Energia meccanica iniziale: $E_i = E_{el} = kx^2/2$, energia elastica, con x sconosciuto.

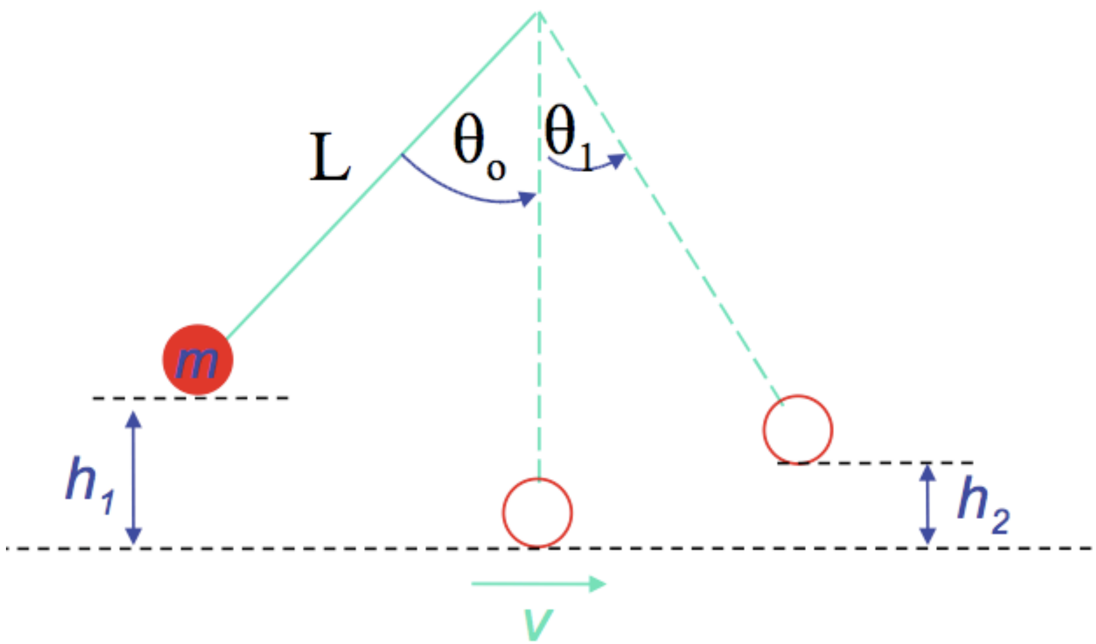
Energia meccanica finale: $E_f = 0$. Lavoro fatto dalle forze di attrito: $L = \mu_d mgd$ (noto).

Da qui: $kx^2/2 = \mu_d mgd$, ovvero $x = \sqrt{2\mu_d mgd/k} = 0.45$ m.

Notare come anche in questo caso non sia necessario (ma è possibile: esercizio consigliato) scindere il problema in due parti: la massa "sparata" dalla molla fino a $x = 0$, la massa che scivola con attrito lungo il piano.

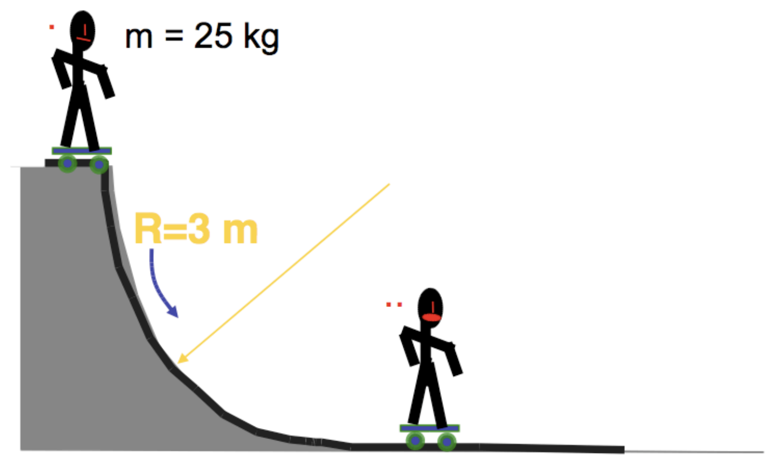
Esercizio: pendolo semplice

La pallina m è inizialmente ferma ad un'altezza h_1. Quanto vale e in quale punto è massima la sua velocità? A quale altezza h risale dall'altro lato? Se $L = 1$ m e $\theta_0 = 15°$, calcolare la velocità di m nella posizione $\theta_1 = 10°$.



Esercizio: skateboard

- $m = 25$ kg, $R = 3$ m. Qual è la velocità alla fine della discesa (partendo da fermo)?
- E se invece salta giù dall'altra parte?
- Supponiamo che l'attrito riduca la velocità finale a $v_f = 7$ m/s. Quanto vale il lavoro fatto dalle forze di attrito?



Soluzioni

1. Pendolo: vale $mv^2/2 + mgh =$ costante. La costante è data dal valore iniziale $v = 0$ a quota $h = h_1$, da cui $mv^2/2 + mgh = mgh_1$ (assumendo $h = 0$ nel punto più basso raggiunto dal pendolo). Ovviamente il pendolo lasciato libero risalirà fino a quota $h = h_1$ dall'altro lato. A quota $h_2 < h_1$ la velocità v_2 sarà data da $mv_2^2/2 + mgh_2 = mgh_1$, ovvero $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$, Dato che $h_1 = L(1 - \cos 15°)$, $h_2 = L(1 - \cos 10°)$, avremo $v_2 = \sqrt{2gL(\cos 10° - \cos 15°)} = 0.61$ m/s.

2. Skateboard: $V_f = \sqrt{2gR} = 7.67$ m/s, giacché la differenza fra quota iniziale e finale è R. Il risultato non dipende dalla massa del saltatore e non cambia se la traiettoria è diversa (per esempio, saltare giù dal lato sbagliato): la velocità finale è determinata dalla differenza di quota. Se l'attrito riduce la velocità finale a $v_f = 7$ m/s, ciò significa che le forze di attrito hanno fatto un lavoro pari a $L = mV_f^2/2 - mv_f^2/2 = 123$ J.