Richiami e nuove nozioni di Algebra Lineare
II^a parte

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 4

Outline

Outline

Partizionamento a blocchi

Nelle applicazioni si utilizzano spesso matrici A **partizionate a blocchi** che sono matrici i cui elementi sono sottomatrici di A
Una qualunque matrice può essere partizionata a blocchi in molti modi
Il partizionamento più importante è il caso in cui i blocchi diagonali sono quadrati

Anche per le matrici partizionate a blocchi si possono avere matrici **triangolari a blocchi**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ \mathbf{O} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

Partizionamento a blocchi

Oppure **diagonali a blocchi**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

Osservazione

In questi casi particolari è facile verificare che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_{ii})$$

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **riducibile** se esiste una matrice di permutazione P tale che la matrice $P^T AP$ sia partizionabile nella forma

$$B = P^T \, A \, P = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{O} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

con **blocchi diagonali quadrati**

Se la matrice B ha qualche blocco diagonale ancora riducibile si può operare una nuova trasformazione con un'altra matrice di permutazione e così via fino ad arrivare alla **forma ridotta** della matrice A in cui tutti i blocchi diagonali risultano non riducibili

Una matrice che non sia riducibile è detta **irriducibile**

Da quanto visto in precedenza, la matrice B si ottiene dalla matrice A operando sulle righe e sulle colonne la stessa permutazione operata sulle colonne della matrice identica per ottenere P

Per stabilire se una matrice è riducibile o meno, cioè se esiste o no una matrice P che verifichi la definizione di riducibilità, **non** si può procedere per tentativi provando tutte le possibili matrici di permutazione (si ricorda che sono in numero pari a $n!$)

Serve una strada alternativa che eviti di dover procedere ad un numero elevato di prodotti tra matrici (si ricordi che i prodotti per matrici di permutazione sono facilmente programmabili senza eseguire prodotti classici tra matrici)

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, fissati n punti, detti **nodi**, $N_1, N_2, \ldots, N_n$, si dice **grafo orientato** associato ad A, il grafo che si ottiene congiungendo N_i a N_j con un cammino orientato da N_i a N_j per ogni $a_{ij} \neq 0$

Definizione

Un grafo orientato si dice **fortemente connesso** se da ogni nodo N_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, è possibile raggiungere un qualunque altro nodo N_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, seguendo un cammino orientato eventualmente passante per altri nodi

Teorema

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ risulta **irriducibile se e solo se** il grafo orientato ad essa associato risulta **fortemente connesso**

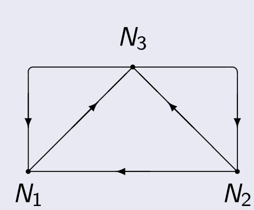
Esempio 1

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 12 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e ci chiediamo se risulta riducibile

Il grafo orientato associato è



Esempio 1

Conclusione

Il grafo orientato risulta fortemente connesso per cui, dal precedente Teorema, la matrice A è **irriducibile**

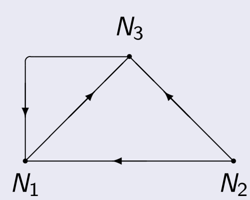
Esempio 2

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ci chiediamo se risulta riducibile

Il grafo orientato associato è



Esempio 2

Analizziamo il grafo compilando la seguente tabella

Nodi	Nodi collegati	Nodi non collegati
N_1	N_1 N_3	N_2
N_2	N_1 N_2 N_3	$- - - -$
N_3	N_1 N_3	N_2

Conclusione

Il grafo orientato risulta non fortemente connesso per cui la matrice A è **riducibile**

Esempio 2

Dalla tabella è possibile ricavare una matrice di permutazione che riduce la matrice A
Consideriamo un nodo che non raggiunge almeno un altro nodo: per esempio N_1
Cambiamo l'ordine dei nodi mettendo, dopo N_1, i nodi collegati e di seguito i nodi scollegati
In questo caso si ha il nuovo ordine

$$N_1 \qquad N_3 \qquad N_2$$

Una matrice di permutazione che riduce la matrice iniziale si ottiene riordinando le colonne della matrice identica come si sono riordinati i nodi del grafo

Esempio 2

Si ha quindi

$$P = \left(e^{(1)} | e^{(3)} | e^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice ridotta a forma tringolare a blocchi

Eseguendo i conti si ha

$$B = P^T A P = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

Esempio 3

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ci chiediamo se risulta riducibile

Soluzione

La matrice data ha il grafo fortemente connesso per cui risulta **non riducibile**

Esempio 4

È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e ci chiediamo se risulta riducibile

Soluzione

La matrice risulta **riducibile** e viene ridotta, per esempio, dalla matrice $P = (e^{(1)}|e^{(4)}|e^{(2)}|e^{(3)})$

Risoluzione di un sistema lineare

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matrice dei coefficienti del sistema lineare $Ax = b$ e supponiamo che A sia riducibile e che P sia la matrice di permutazione che la riduce

Poniamo

$$B = P^T A P = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix}$$

con i blocchi diagonali B_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, k$, quadrati ed irriducibili
Inoltre, supponiamo che l'ordine dei blocchi B_{ii} sia p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, per cui $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$

Risoluzione di un sistema

Premoltiplicando il sistema lineare per la matrice P^T si ha

$$P^T A\, x = P^T b \implies P^T A\, P\, P^T x = P^T b$$

Ponendo $y = P^T x$ e $c = P^T b$, il sistema $Ax = b$ si trasforma nel sistema

$$B\, y = c$$

Risoluzione di un sistema

Partizionando i vettori y e c in blocchi di pari dimensione dei B_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, k$, il sistema risulta della forma

$$\begin{array}{ccccccccc} B_{11}y_1 & & & & & & & = & c_1 \\ B_{21}y_1 & + & B_{22}y_2 & & & & & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ B_{k1}y_1 & + & B_{k2}y_2 & + & \cdots & + & B_{kk}y_k & = & c_k \, . \end{array}$$

Risoluzione di un sistema

La prima equazione è un sistema lineare, con matrice dei coefficienti B_{11}, di ordine p_1, la cui incognita è il vettore y_1
Si risolve tale sistema e si sostituisce il vettore y_1 nelle equazioni seguenti.
La seconda equazione diviene un sistema lineare, quadrato di ordine p_2, da cui si ricava il vettore y_2 che può essere sostituito nelle equazioni seguenti
Procedendo in questo modo si ricavano tutti i blocchi y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, che costituiscono il vettore y
Una volta ottenuto l'intero vettore y si risale al vettore x tramite la relazione $x = Py$

Risoluzione di un sistema

Si osservi che se la matrice A è non singolare tale è anche la matrice B in quanto ottenuta da A con una trasformazione per similitudine (nozione che verrà introdotta a breve)

La matrice B ha il determinante uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi diagonali per cui se B è non singolare tali sono i blocchi B_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, k$

Questo assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione di tutti i sistemi lineari che via via si risolvono

Risoluzione di un sistema

La sostituzione del sistema lineare $Ax = b$ con il sistema lineare $By = c$ conduce alla risoluzione di k sistemi lineari tutti di ordine inferiore ad n al posto di un unico sistema lineare di ordine n

Il vantaggio dell'uso di questa trasformazione risulterà evidente quando saranno esposti i metodi numerici per la risoluzione dei sistemi lineari

Outline

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **autovalore** di A ogni numero $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che il sistema lineare

$$A\,x = \lambda\,x, \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

abbia soluzioni $x \neq 0$

Il vettore x è detto **autovettore destro** associato all'autovalore λ intendendo che x ed ogni vettore kx $(k \in \mathbb{C},\ k \neq 0)$ rappresentano lo stesso autovettore

Analogamente, è detto **autovettore sinistro** un vettore $y \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$y^T A = \lambda\, y^T$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli, un sistema lineare omogeneo ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema è singolare e cioè ha determinante nullo

Poiché $Ax = \lambda x$ è equivalente al sistema omogeneo

$$(A - \lambda I)\, x = 0 ,$$

ne segue che gli autovalori di A sono tutti e soli i numeri λ che soddisfano l'**equazione caratteristica**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Essendo

$$\det(A - \lambda I) = \det[(A - \lambda I)^T] = \det(A^T - \lambda I)$$

segue che A e A^T hanno gli stessi autovalori

Indichiamo con

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

il **polinomio caratteristico** della matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Siano λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, le soluzioni dell'equazione caratteristica (e quindi gli autovalori della matrice)

Possiamo scrivere

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

Sviluppando i conti si ha

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sigma_1\lambda^{n-1} \\ &+(-1)^{n-2}\sigma_2\lambda^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-2}\lambda^2 \\ &-\sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n\end{aligned}$$

dove i coefficienti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sono, ciascuno, la somma dei minori principali di ordine i estratti dalla matrice A.

Risultano importanti

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e

$$\sigma_n = \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

σ_1 si dice **traccia** di A e si indica col simbolo $tr(A)$

Dalle precedenti relazioni si hanno le implicazioni

$$\text{se } \exists\, i,\ 1 \le i \le n,\ \text{tale che } \lambda_i = 0 \implies \det(A) = 0$$

$$\det(A) = 0 \implies \exists\, i,\ 1 \le i \le n,\ \text{tale che } \lambda_i = 0$$

Raggio Spettrale

Definizione

Si dice **raggio spettrale** della matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ il numero reale non negativo

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\ \lambda_i\ |$$

Teorema

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è **convergente se e solo se** risulta $\rho(A) < 1$

(risultato di Algebra Lineare)

Trasformazioni per similitudine

Definizione

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ed una matrice $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non singolare, si dice **trasformata per similitudine** della matrice A, la matrice B tale che

$$B = S^{-1} A S$$

e le matrici A e B si dicono **simili**

Spesso, per indicare che A e B sono simili, si usa la scrittura

$$A \sim B$$

Trasformazioni per similitudine

Teorema

Due matrici simili A e B hanno gli stessi autovalori
Inoltre, per ogni autovalore λ, se x è autovettore di A, allora $S^{-1}x$ è autovettore di B

Dimostrazione

Si ha

$$\begin{aligned}
\det(B-\lambda I) &= \det(S^{-1}AS-\lambda I) = \det(S^{-1}AS-\lambda S^{-1}S)\\
&= \det[S^{-1}(A-\lambda I)S]\\
&= \det(S^{-1})\det(A-\lambda I)\det(S)\\
&= \det(A-\lambda I).
\end{aligned}$$

Poiché A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, segue che A e B hanno gli stessi autovalori

Trasformazioni per similitudine

Dimostrazione

Per provare la relazione tra gli autovettori basta osservare che da $Ax = \lambda x$ segue

$$\begin{aligned}
S^{-1} A x &= \lambda S^{-1} x\\
S^{-1} A I x &= \lambda S^{-1} x\\
S^{-1} A (S S^{-1}) x &= \lambda S^{-1} x\\
(S^{-1} A S) S^{-1} x &= \lambda S^{-1} x\\
B S^{-1} x &= \lambda S^{-1} x
\end{aligned}$$

Autovalori di potenze di matrici

Teorema

Se λ è autovalore della matrice A **allora** λ^k, $k \in \mathbb{N}$, è autovalore di A^k e gli autovettori di A sono anche autovettori di A^k

Se la matrice A è non singolare, il precedente teorema si può estendere a $k \in \mathbb{Z}$

In particolare, se la matrice A è non singolare, si ha che gli autovalori di A^{-1} sono i reciproci degli autovalori di A

Autovalori di matrici hermitiane

Teorema

Gli autovalori di una matrice hermitiana sono tutti reali

Dimostrazione

Sia λ un autovalore di A

Dalla uguaglianza $Ax = \lambda x$, si ottiene, premoltiplicando per x^H, $x^H Ax = \lambda x^H x$ ed ancora, dividendo per il numero reale e positivo $x^H x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

$$\lambda = \frac{x^H A x}{x^H x} \qquad \text{(Quoziente di Rayleigh)}$$

Abbiamo già visto che il numeratore risulta un numero reale per cui si ha la tesi

Definizione

La **molteplicità algebrica** $\alpha(\lambda)$ di un autovalore λ è la molteplicità di λ come radice dell'equazione caratteristica

Definizione

La **molteplicità geometrica** $\gamma(\lambda)$ di λ è la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$

In altre parole, la molteplicità geometrica di un autovalore indica il numero degli autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore e risulta

$$\gamma(\lambda) = n - r(A - \lambda I)$$

Teorema

Per ogni autovalore λ risulta

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

Definizione

Una matrice A si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice X non singolare tale che

$$X^{-1} A X = D, \qquad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Affinché una matrice sia diagonalizzabile, per ogni autovalore, deve risultare

$$\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$$

L'ultima uguaglianza è sicuramente verificata se la matrice A ha autovalori due a due distinti poiché risulta

$$\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) = 1$$

Traslazione dello spettro

Teorema (traslazione dello spettro)

Sia λ autovalore di A e $q \in \mathbb{C}$ **allora**
$B = A + qI$ ha come autovalore $\mu = \lambda + q$ con molteplicità algebrica e geometrica pari a quelle di λ e B ha gli stessi autovettori di A

Dimostrazione

Si ha

$$\det(B - \mu I) = \det(A + qI - \mu I) = \det(A - (\mu - q)I)$$

da cui $\lambda = \mu - q$
Le relazioni sugli autovettori si deducono da

$$Bx = \mu x \rightarrow (A + qI)x = \mu x \rightarrow Ax = (\mu - q)x \rightarrow Ax = \lambda x$$

Esempio 3

Calcolare gli autovalori della matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Osserviamo che J è una matrice simmetrica ed una particolare matrice di permutazione e, unendo le due informazioni, risulta

$$J^2 = J^T J = I$$

Esempio 3

Dall'ultima uguaglianza si deduce che gli autovalori di J elevati al quadrato sono uguali a 1

Poiché la matrice è simmetrica, sappiamo che i suoi autovalori sono sicuramente reali
Questo significa che J può avere solo autovalori uguali a ± 1
Si deve valutare quanti sono gli autovalori uguali a 1 e quanti sono uguali a -1

Possiamo dedurre come sono distribuiti gli autovalori calcolando la traccia $tr(J)$

Esempio 3

Risulta

$$tr(J) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \text{ pari } (n = 2k, k \in \mathbb{N}) \\ 1 & \text{se} \quad n \text{ dispari } (n = 2k+1, k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Ricordando che la traccia di una matrice è uguale alla somma degli autovalori si conclude che

$$\begin{aligned} n = 2k \ (\text{pari}) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = -1 \\ &\qquad \alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2) = k \\ n = 2k+1 \ (\text{dispari}) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = -1 \\ &\qquad \alpha(\lambda_1) = k+1, \ \alpha(\lambda_2) = k \end{aligned}$$

Esempio 4

Calcolare gli autovalori della matrice

$$A = I + a\, b^T, \qquad a, b \in \mathbb{R}^n$$

Operiamo una traslazione dello spettro considerando la matrice

$$B = A - I = a\, b^T$$

Esempio 4

Risulta

$$B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & a_{n-1} b_{n-1} & a_{n-1} b_n \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_{n-1} & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Se costruiamo il polinomio caratteristico calcolando i coefficienti σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\det(B - \mu\, I) = (-1)^n \mu^n + (-1)^{n-1} a^T b\, \mu^{n-1}$$

essendo $\sigma_1 = a^T b$, $\sigma_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, n$

Esempio 4

Si ha che gli autovalori di B sono

$$\mu_1 = a^T b \qquad \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_n = 0$$

Ricordando che si è operata una traslazione dello spettro, si conclude che gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 1 + a^T b \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1$$