Esercizio 1

Enunciato del Problema

Un'automobile, che si muove nel piano xy, parte a $t = t_0 = 0$ dal punto

$$A = (R, 0)$$

e percorre, in verso antiorario, la semicirconferenza di raggio

$$R = 1\,\mathrm{km}$$

e centro O fino al punto

$$B = (-R, 0).$$

Successivamente prosegue in linea retta fino al punto

$$C = (-R, -3R),$$

che raggiunge al tempo $t = t_f$. Durante tutto il moto il modulo della velocità è costante:

$$V_0 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Si richiede di calcolare:

(i) $\displaystyle\int_0^{t_f} V\,dt'$ (cioè la lunghezza della traiettoria).

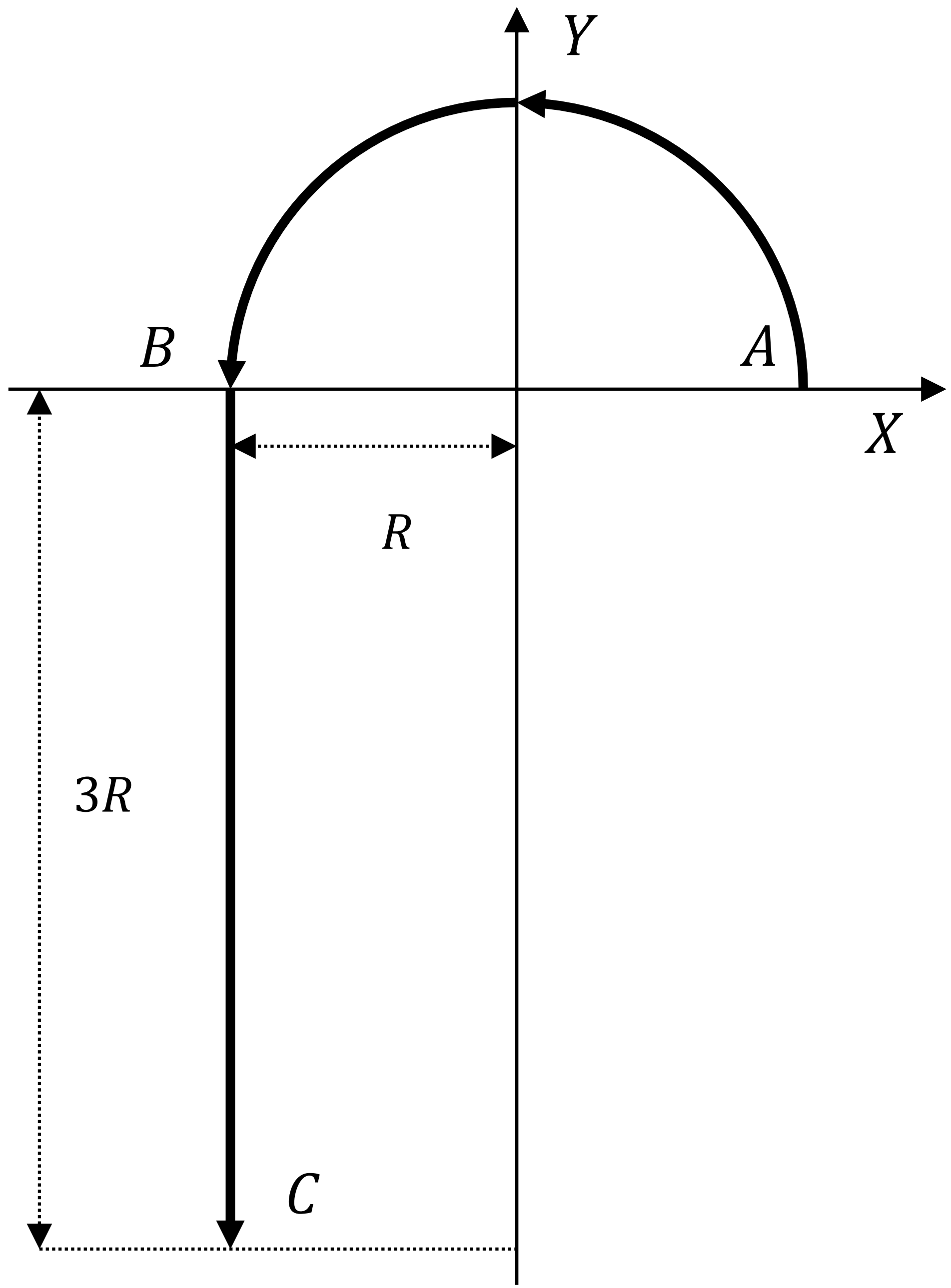
(ii) $\displaystyle\int_0^{t_f} \vec{V}\,dt$ (lo spostamento vettoriale dall'inizio alla fine del moto).

(iii) $\displaystyle\int_0^{t_f} \vec{a}\,dt$ (la variazione della velocità).

(iv) Il tempo t_f in cui l'auto raggiunge il punto C.

(v) Determinare le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ per $0 < t < t_f$.

(vi) Determinare l'accelerazione $\vec{a}(t)$.



Y
B
A
X
R
3R
C

Soluzione

(i) Lunghezza della traiettoria

La lunghezza della traiettoria è l'integrale, nell'intervallo di tempo, della velocità scalare, ovvero del modulo della velocità:

$$\int_0^{t_f} V\,dt' = s,$$

dove s è la lunghezza percorsa. L'automobile compie due tratti:

- **Tratto circolare:** dalla posizione $A = (R, 0)$ a $B = (-R, 0)$ lungo una semicirconferenza. La lunghezza di questo tratto è

  $$s_1 = \pi R,$$

  poiché la circonferenza completa è $2\pi R$ e ne percorre metà.

- **Tratto rettilineo:** dalla posizione $B = (-R, 0)$ a $C = (-R, -3R)$. La distanza percorsa è

  $$s_2 = 3R,$$

  in quanto il segmento verticale ha lunghezza pari a $3R$.

Pertanto, la lunghezza totale è

$$s = s_1 + s_2 = \pi R + 3R.$$

Con $R = 1\,\text{km}$ si ha:

$$s = (\pi + 3)\,\text{km} \approx 6.14\,\text{km}.$$

(ii) Spostamento vettoriale

Lo spostamento vettoriale $\Delta\vec{r}$ è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(0).$$

Dai dati:

$$\vec{r}(0) = A = (R, 0) \quad \text{e} \quad \vec{r}(t_f) = C = (-R, -3R),$$

si ottiene:

$$\Delta\vec{r} = (-R, -3R) - (R, 0) = (-2R, -3R).$$

(iii) Variazione di velocità

Per definizione,

$$\int_0^{t_f} \vec{a}\,dt = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(0).$$

Consideriamo la velocità all'istante iniziale e a quello finale:

- All'inizio ($t = 0$), l'automobile parte da $A = (R, 0)$ e, essendo il moto lungo la semicirconferenza in senso antiorario, la velocità è tangente alla traiettoria e punta verso l'alto:

  $$\vec{V}(0) = (0, V_0).$$

- Al termine del moto ($t = t_f$), durante il tratto rettilineo dalla posizione B a C, la velocità è parallela all'asse y (verso il basso):

  $$\vec{V}(t_f) = (0, -V_0).$$

Pertanto,

$$\vec{V}(t_f) - \vec{V}(0) = (0, -V_0) - (0, V_0) = (0, -2V_0),$$

cioè la variazione di velocità è $-2V_0$ lungo l'asse y.

(iv) Tempo totale t_f

Il tempo totale impiegato è dato dalla lunghezza totale del percorso divisa per la velocità costante:

$$t_f = \frac{s}{V_0} = \frac{\pi R + 3R}{V_0}.$$

Con $R = 1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ e $V_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, si ha:

$$t_f = \frac{(\pi + 3) \cdot 1000}{20} \approx \frac{6.14 \times 1000}{20} \approx 307\,\mathrm{s}.$$

(v) Funzioni orarie $x(t)$ e $y(t)$

Il moto dell'automobile si compone di due tratte:

1. Moto circolare (da A a B)

L'automobile percorre la semicirconferenza con moto circolare uniforme. La velocità angolare è:

$$\omega = \frac{V_0}{R}.$$

Il tempo per percorrere la semicirconferenza (tratto circolare) è

$$t_1 = \frac{\pi R}{V_0}.$$

Con $R = 1000\,\mathrm{m}$ e $V_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ si ha:

$$t_1 \approx 157\,\mathrm{s}.$$

Le coordinate del moto circolare (centro $O = (0, 0)$) sono:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right), \\ y(t) = R\sin\theta(t) = R\sin\left(\frac{V_0}{R}t\right), \end{cases} \qquad 0 \le t \le t_1.$$

2. Moto rettilineo (da B a C)

Per $t_1 < t \le t_f$, l'automobile procede lungo una retta. Poiché i punti $B = (-R, 0)$ e $C = (-R, -3R)$ hanno la stessa coordinata x, si ha:

$$x(t) = -R.$$

Il moto lungo y è rettilineo uniforme. Sia t_1 l'istante in cui $y = 0$; la velocità lungo y è $-V_0$ (verso il basso), pertanto:

$$y(t) = -V_0\,(t - t_1), \quad t_1 < t \le t_f.$$

Notiamo che, poiché $y(t_f) = -3R$, deve valere:

$$t_f - t_1 = \frac{3R}{V_0}.$$

(vi) Accelerazione $\vec{a}(t)$

L'accelerazione dipende dal tratto del moto.

1. **Moto circolare (per $0 \leq t \leq t_1$):**
   Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è centripeta ed ha modulo:

   $$a_c = \frac{V_0^2}{R}.$$

   Essa è diretta verso il centro $O = (0, 0)$, ovvero in direzione opposta al versore radiale $\hat{r}(t)$. Quindi:

   $$\vec{a}(t) = -\frac{V_0^2}{R}\,\hat{r}(t).$$

2. **Moto rettilineo (per $t_1 < t \leq t_f$):**
   Nel moto rettilineo uniforme l'accelerazione è nulla:

   $$\vec{a}(t) = \vec{0}.$$