ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 03

Note Title 02/10/2018

Equazione della retta

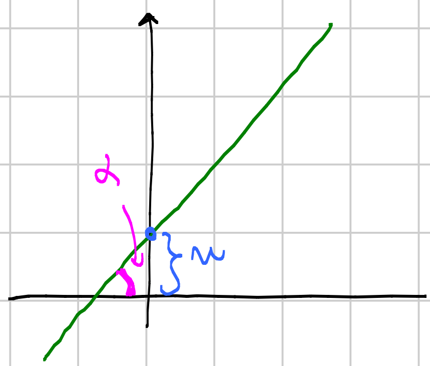
Rappresentazione cartesiana

→ esplicita $y = mx + n$
→ implicita $ax + by + c = 0$

	PRO	CONTRO
Esplicita	• due rette diverse hanno m o n diversi • comunque scelgo m ed n ottengo una retta	• Non si rappresentano rette verticali $x = a$
Implicita	• tutte le rette, anche verticali, si rappresentano	• La rappresentazione non è unica • non è vero che ottengo una retta per ogni scelta di a, b, c (ad esempio $a=b=0$ $c=5$ non va bene)

Passare dall'una all'altra è un facile conto.

Significato geometrico di m ed n nella esplicita $\boxed{y = mx + n}$

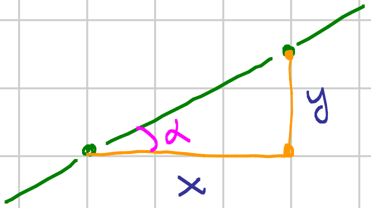


n = p.to staccato sull'asse y

m = coeff. angolare = tangente dell'angolo tra retta e semiasse positivo delle x

Esercizio La retta passante per $(2018, 35)$, $(2019, 42)$ ha coeff. angolare $m = 7$

(un quadretto a dx = 7 quadretti in alto)



$$m = \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

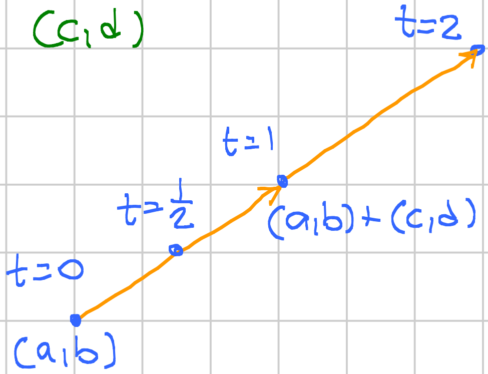
$\boxed{\text{Rappresentazione parametrica}}$ $\boxed{(a,b) + t\,(c,d)}$

parametro

$$\boxed{(a+tc,\ b+td)}$$

Interpretazione brutale: $(a,b)+t\,(c,d)$ rappresenta la posizione al tempo t di un omino.
Al tempo $t=0$ l'omino si trova in (a,b) ⇝ p.to iniziale
Al tempo $t=1$ " " " $(a,b)+(c,d)$, quindi il suo spostamento è descritto dal vettore (c,d)

Più che l'equazione di una retta, la rappr. parametrica indica un possibile modo di percorrerla

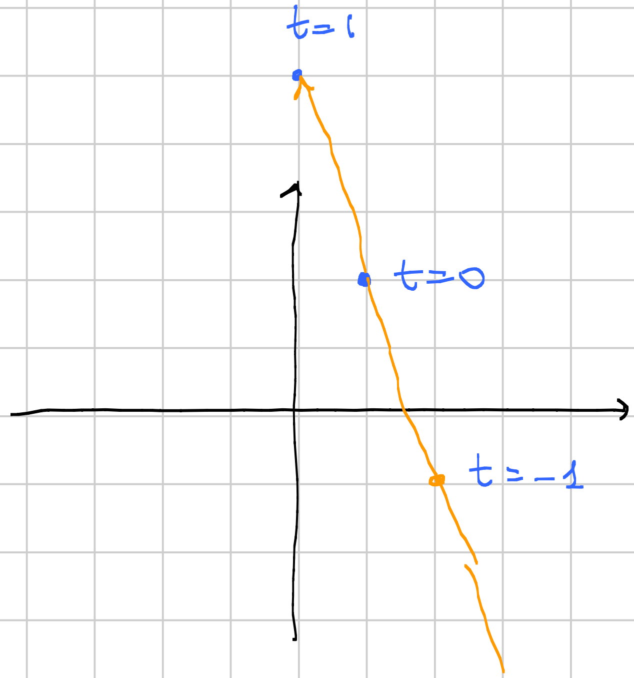


Esempio Disegnare la retta

$$(1,2) + t\,(-1,3)$$

$t=0 \rightsquigarrow (1,2)$
$t=1 \rightsquigarrow (1,2)+(-1,3) = (0,5)$

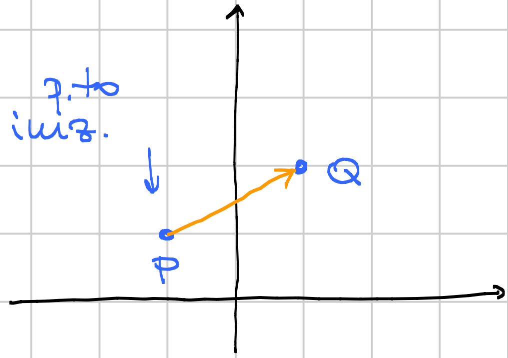
$t=-1 \rightsquigarrow (1,2) - 1\,(-1,3)$
$= (2,-1)$



<u>Esempio</u> Descrivere parametricamente la retta che passa per $(-1,1)$ e $(1,2)$
P Q

$(-1,1)+t\,(2,1)$

↑ uno dei due punti ↑ $Q-P$



Esistono altre rappr. parametriche della stessa retta

$(1,2)+t\,(-2,-1)$: parto da Q e vado verso P

Q P−Q

$(-1,1)+t\,(4,2)$: stessa della prima rappresentazione, solo percorsa a velocità doppia

Il coeff. angolare della retta è $\frac{1}{2}$.

— o — o —

<u>Fatto generale</u> Per la retta $(a,b)+t\,(c,d)$ il coeff. angolare è

$$\boxed{m=\frac{d}{c}}$$

se $c \neq 0$

(se mi sposto in orizz. di c, mi sposto in verticale di d)

Se $c=0$, vuol dire che la retta è verticale

— o — o —

Passaggio cartesiana ⇝ parametrica

$y=3x+4$ ⇝ calcolo 2 p.ti a scelta e poi come sopra

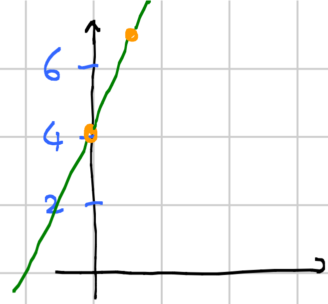
$x=0 \rightsquigarrow (0,4)$ P

$x=1 \rightsquigarrow (1,7)$ Q

$P+t\,(Q-P)$

$(0,4)+t\,(1,3)$

Passaggio parametrica $\rightsquigarrow$ cartesiana



$$(2,3) + t\,(1,-2)$$

1º modo Sostituisco $t=0$ e $t=1$ (o altri 2 valori "comodi")
e trovo due pti

$(2,3)$ e $(3,1)$

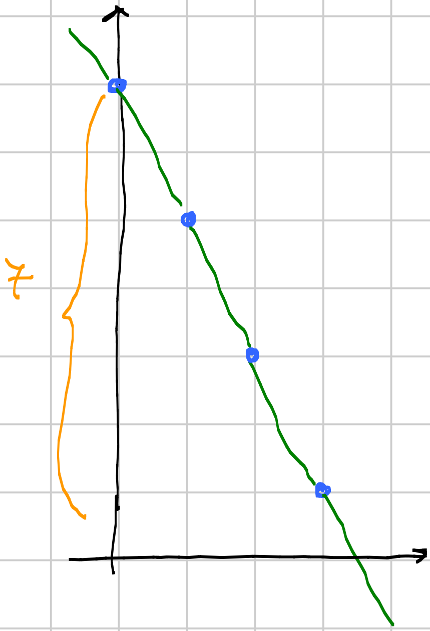
Scrivo con formule da precorso la retta per quei due p.ti

2º modo Scrivo la param. come $(\underset{x}{\underset{\parallel}{2+t}}, \underset{y}{\underset{\parallel}{3-2t}})$

Dalla 1ª ottengo $2+t=x \rightsquigarrow t=x-2$

Sostituisco nella 2ª: $y = 3-2t = 3-2(x-2) = 3-2x+4$

$$\boxed{y = 7-2x}$$



Rette passanti per l'origine

In cartesiana $y = mx \rightsquigarrow$ esplicita

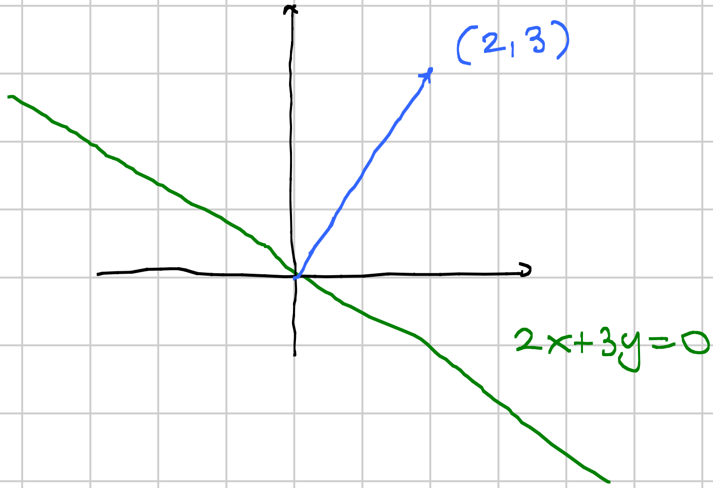
$ax+by = 0 \rightsquigarrow$ implicita

$\parallel$

$\langle (a,b), (x,y) \rangle = 0$ sono tutti i vettori (x,y) che sono perpend. ad (a,b)

Significato geom. di (a,b) nella implicita = vettore perpend. alla retta

<u>Esempio</u>: $2x+3y=0$



$y = -\frac{2}{3}x$

In forma parametrica diventa

$$(0,0)+t(3,-2) \quad \text{oppure} \quad (0,0)+t(-3,2)$$

<u>Fatto generale</u> Una possibile parametrizzazione di $ax+by=0$ è

$$(0,0)+t(-b,a) \quad \text{oppure} \quad (0,0)+t(b,-a)$$

<u>N.B.</u> La direzione è un vettore perpendicolare al vettore (a,b)

— o — o —

<u>Fatto generale</u>

- Forma esplicita: due rette con lo stesso coeff. ang. sono //
- Forma implicita: la retta $ax+by+c=0$ e la retta $ax+by=0$ sono parallele (se passo in esplicita ottengo lo stesso m)

Quindi in generale, data la retta $ax+by+c=0$, il vettore (a,b) è sempre un vettore $\perp$ alla direzione della retta

Esempio $5x+4y+3=0$

La direzione è $\perp$ a $(5,4)$, quindi una possibile direzione è $(-4,5)$.
Mettendo $y=0$ trovo $x=-\frac{3}{5}$, quindi la retta passa per $\left(-\frac{3}{5},0\right)$

e la forma parametrica è $\boxed{\left(-\frac{3}{5},0\right)+t(-4,5)}$

Esercizio Determinare l'angolo compreso fra la retta $\underbrace{y=2x}_{r_1}$ e la retta $\underbrace{x+5y=7}_{r_2}$

Scrivo r_1 ed r_2 in parametrica

r_1 : $(0,0)+t(1,2)$

r_2 : $(7,0)+t(-5,1)$

p.to a caso della retta

Basta calcolare l'angolo fra le due direzioni

$\langle (1,2),(-5,1)\rangle = \|(1,2)\|\cdot\|(-5,1)\|\cdot \cos(\text{angolo})$

$-5+2$

$-3 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos(\text{angolo})$

$\cos(\text{angolo}) = \frac{-3}{\sqrt{130}}$ ← è il maggiore dei 2 angoli

(Disegnare le 2 rette per rendersi conto che è plausibile)

— o — o —

[Ultimo esempio corretto dopo video]