Esame di Ricerca Operativa del 18/09/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 17\ y_1 + 3\ y_2 + 28\ y_3 + 16\ y_4 + 3\ y_5 + 5\ y_6 \\ -6\ y_1 - 2\ y_2 + 7\ y_3 + 4\ y_4 - 2\ y_5 - 2\ y_6 = 2 \\ 10\ y_1 + 2\ y_2 + 2\ y_3 - 3\ y_4 - 4\ y_5 + 3\ y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	degenere	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
passo 1	{2,4}						
passo 2							

Esercizio 2. Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

prodotti	alluminio (kg)	costo (euro/kg)	ricavo (euro/kg)
A	0.3	12	26
B	0.6	6	31
C	0.9	7	39

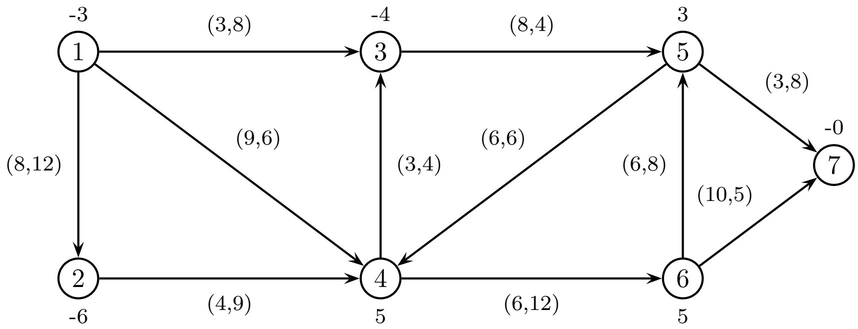
Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

`c=`	`intcon=`
`A=`	`b=`
`Aeq=`	`beq=`
`lb=`	`ub=`

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(5,4)	
x		
degenere		
π		
degenere		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 12\ x_2 \leq 66 \\ 7\ x_1 + 19\ x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

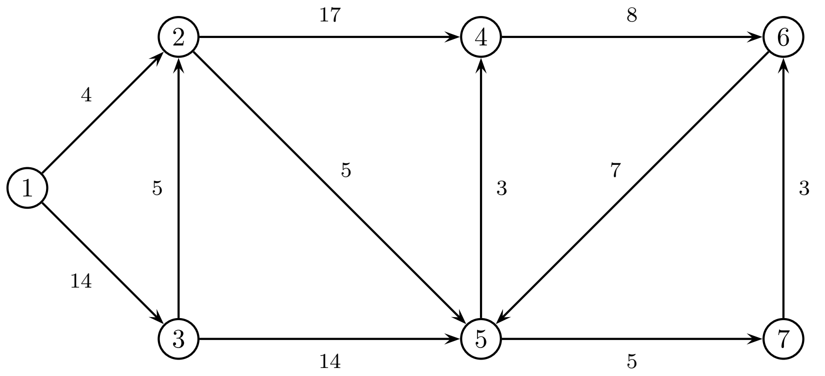
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

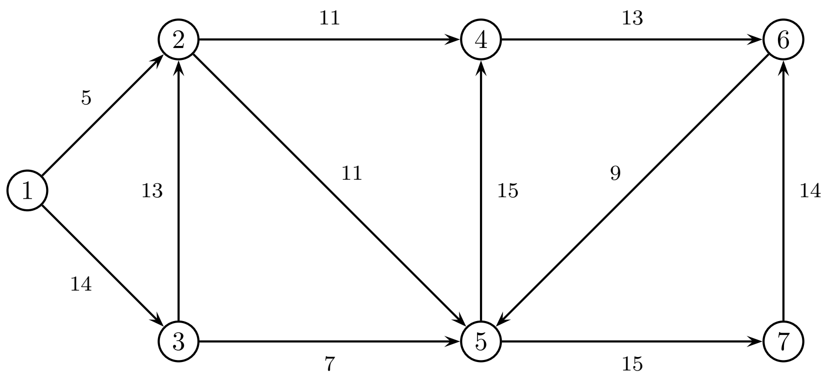
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{14}, x_{34} dicendo se l'algoritmo si é concluso o dovrebbe continuare.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; 9 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$							
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$							
$\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 - 12\, x_1\, x_2 - 6\, x_2^2 + 5\, x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-3, -1)$, $(-4, 2)$, $(1, -2)$ e $(5, 2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$\left(\frac{41}{2},\ 22\right)$	$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	1	$\frac{1}{11},\ \frac{1}{4}$	2
2° iterazione	$\{1,\ 4\}$	$\left(\frac{211}{22},\ \frac{82}{11}\right)$	$\left(\frac{1}{11},\ 0,\ 0,\ \frac{7}{11},\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{2}{29},\ \frac{7}{41}$	1

Esercizio 2.

variabili decisionali: x_A = kg prodotti di A, x_B = kg prodotti di B, x_C = kg prodotti di C

modello:
$$\begin{cases} \max\ (26-12-2.1)\ x_A + (31-6-4.2)\ x_B + (39-7-6.3)\ x_C \\ 0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C \leq 400 \\ 0.3\ x_A \leq (0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C)/3 \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \\ x_C \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c = [-11.9; -20.8; -25.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                    b=[400; 0]

Aeq=[]                                              beq=[]

lb=[0;0;0]                                          ub=[]
```

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)
Archi di U	(5,4)	(3,5) (5,4)
x	(3, 0, 0, 9, 4, 0, 10, 6, 0, 5, 0)	(3, 0, 0, 9, 4, 0, 10, 6, 0, 5, 0)
π	(0, 8, 16, 12, 24, 18, 27)	(0, 8, 3, 12, 24, 18, 27)
Arco entrante	(1,3)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	0 , 3	6 , 3
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 12\ x_2 \leq 66 \\ 7\ x_1 + 19\ x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{66}{17}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 54$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

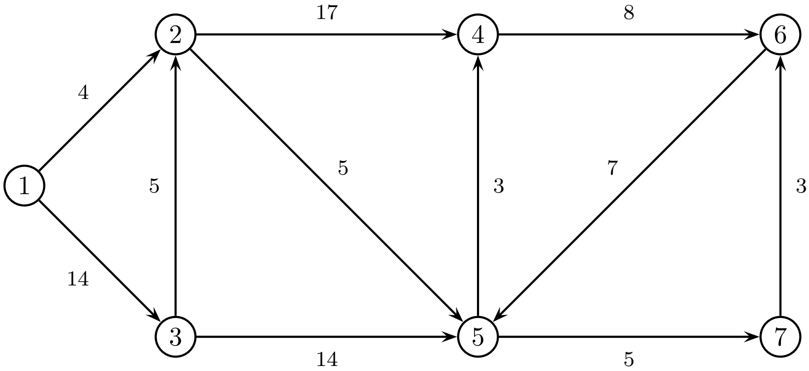
sol. ammissibile = $(3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 3$

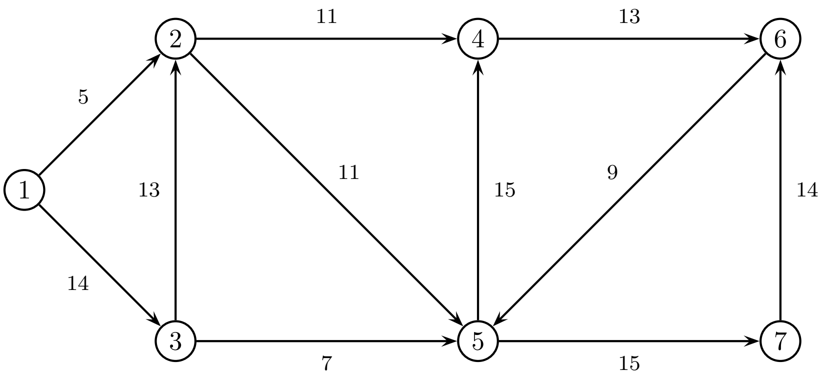
$r = 4$ $\qquad 10\,x_1 + 7\,x_2 \leq 38$

Esercizio 5.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		5		4		3		7		6	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	21	2	12	5	12	5	12	5	12	5	12	5
nodo 5	$+\infty$	-1	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	17	7	17	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	14	5	14	5	14	5	14	5	14	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		3, 4, 7		3, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	7	(5, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 3 - 2 - 5 - 7	3	(5, 10, 0, 8, 3, 7, 0, 0, 15, 0, 0)	15

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 6.

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

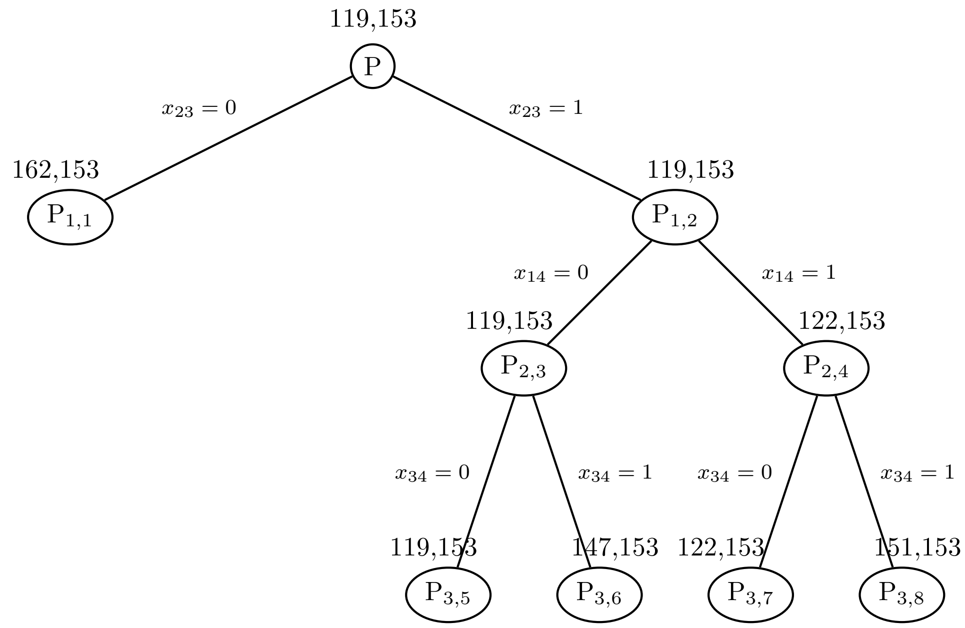
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 5) (4 , 5)	$v_I(P) = 119$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 – 3 – 2 – 5 – 4	$v_S(P) = 153$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{14}, x_{34}.



Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 9 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{13}}{6}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^2 - 12\,x_1\,x_2 - 6\,x_2^2 + 5\,x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-3,-1)$, $(-4,2)$, $(1,-2)$ e $(5,2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$	$(-3,-1)$	$\begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{61}{6}, -\frac{61}{2}\right)$	$\frac{2}{61}$	$\frac{2}{61}$	$(-3,-1)$