ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 57

Titolo nota 14/12/2018

Esempio 1 Cosa ottengo se compongo 2 rotazioni nello spazio?

Si tratta di due isometrie la cui parte di matrice ha Det = +1, quindi otterò una trasformazione con Det = +1, che può essere solo di 3 tipi:

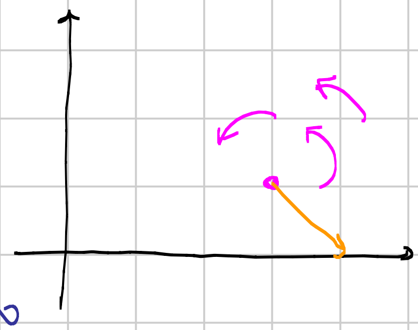
→ Identità (vuol dire che le due rotazioni erano rispetto allo stesso, con stesso angolo, verso opposto)

→ rotazione con nuovo asse e nuovo angolo

→ rotazione seguita da traslazione lungo asse.

Esempio 2 Già nel piano, cosa succede se ruoto di 60° A.O. intorno al punto (3,1) e poi traslo tutto in direzione (1,−1)

Viene una rotazione di 60° rispetto ad un altro punto!



Infatti viene una trasformazione del piano del tipo

$$f(x) = A_1x + b_1 \qquad \text{(rot. iniziale)}$$

$$g(x) = x + b_2 \qquad \text{(traslazione finale)}$$

$$g(f(x)) = \underset{\text{rotazione di } 60^\circ}{A_1}x + b_1 + b_2$$

Facciamo i conti

$$\underset{P}{(x,y)} \longrightarrow \underset{P-P_0}{(x-3, y-1)} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1) \end{pmatrix}$$

Alla fine aggiungo $P_0 = (3,1)$

$$(x,y) \to \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right)}_{\text{rotazione di } 60° \text{ intorno al p.to } (3,1)}$$

Se aggiungo $(1,-1)$ ottengo una nuova espressione con la stessa matrice, di cui volendo posso calcolare il p.to fisso.

Esempio 3 Consideriamo $(x,y,z) \rightsquigarrow (3-z,\ 2+x,\ 5-y)$

Capire che è una isometria e di cosa si tratta.

La scrivo nella forma $f(x) = Ax + b$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Colonne ortonormali $\Rightarrow$ matrice ortogonale $\Rightarrow$ isometria

Calcoliamo i punti fissi risolvendo

$$\begin{cases} 3-z = x \\ 2+x = y \\ 5-y = z \end{cases} \quad \begin{cases} x+z = 3 \\ -x+y = 2 \\ y+z = 5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z libera

$y = 5 - z$

$x = 3 - z$

Le soluzioni del sistema sono

$$(x, y, z) = (3-t,\ 5-t,\ t) = (3,5,0) + t(-1,-1,1)$$

L'insieme dei p.ti fissi è una retta, quindi la trasformazione è una rotazione intorno a quella retta.

Di quale angolo? Faccio gli autovalori della matrice, che saranno $\lambda = 1$ e $\lambda = \cos\theta \pm i \sin\theta$.

A quel p.to θ è l'angolo cercato.

La forma di Jordan reale è la matrice

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

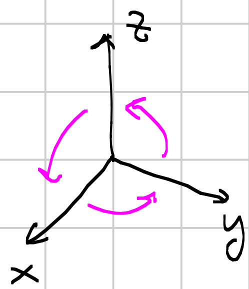
Chi è θ? Bovino: fare il pol. caratteristico e risolvere

Più astuto: gli autovalori sono 1, $\cos\theta + i\sin\theta$, $\cos\theta - i \sin\theta$

Allora

$$\operatorname{Tr} A = 0 = 1 + 2\cos\theta \quad \rightsquigarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \theta = 120°$$

Gli autovalori complessi coniugati sono $\quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.



<u>Esempio 4</u> La trasformazione che lascia $(0,0,0)$ fisso e manda

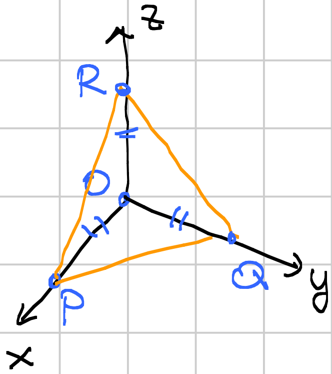
$(1,0,0) \longrightarrow (0,1,0)$

$(0,1,0) \longrightarrow (0,0,1)$

$(0,0,1) \longrightarrow (1,0,0)$

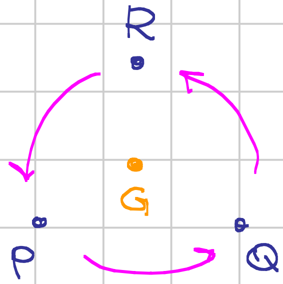
cioè $(x,y,z) \longrightarrow (z, x, y)$ è una rotazione di $120°$ intorno all'asse $t(1,1,1)$

Come visualizzare geometricamente



Consideriamo il piano che passa per P, Q, R cioè il piano di eq.

$$x + y + z = 1$$



Il triangolo PQR è equilatero perché i lati sono tutti lunghi $\sqrt{2}$ e ora è abbastanza chiaro che la trasf.

$P \to Q$

$Q \to R$

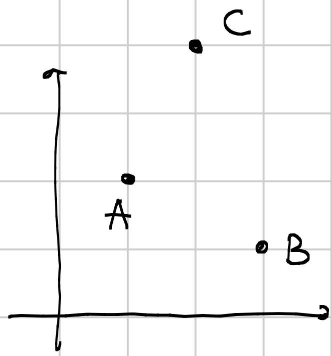
$R \to P$

è una rotazione di $120°$ rispetto al centro G del triangolo

Nota bene! il centro G è l'intersezione tra il piano $x+y+z=1$ e l'asse di rotazione $(1,1,1)$

—o—o—

Esempio 5 Siano A, B, C come in figura (in scala).



Determinare tutte le isometrie del piano che mandano il Δ in se stesso (ma non nec. $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$)

- Intanto c'è l'identità

- Calcolo lungh. dei lati : $AB = \sqrt{5} = AC$, $BC = \sqrt{10}$

  Il triangolo è isoscele in A.

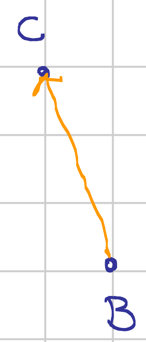
  Quindi per forza A deve andare in se stesso (è l'unico p.to che è equidistante dai 2 vertici)

  Quindi l'unica possibilità oltre all'identità è che

  $A \to A$ $\quad B \to C$ $\quad C \to B$

Fatto generale: nel piano, una affinità che lascia fissi 3 p.ti non allineati è per forza l'identità (pensare a come può essere fatto l'insieme dei p.ti fissi)

La trasformazione sarà la simmetria rispetto all'asse del segmento BC, cioè la retta che passa per A e per il p.to medio di BC.
In parametrica



$$\underbrace{(1,2)}_{A} + t\,(3,1)$$

La retta BC ha direzione $(-1,3)$
L'asse di BC ha direzione $\perp$, quindi $(3,1)$

Scriviamo la simmetria

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1, y-2) \rightsquigarrow \text{Matrice}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + (1,2)$$

La matrice è la simmetria rispetto alla retta di dir. $(3,1)$ cioè

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Matrice}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$