**Esame di Ricerca Operativa del 28/01/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -5\,x_1 - 4\,x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 2 \\ 2\,x_1 + x_2 \leq 1 \\ 4\,x_1 - x_2 \leq 5 \\ 5\,x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-4,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{53}{9},\ -\frac{28}{9}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(0,\ 1)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{26}{3},\ \frac{25}{3},\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $24,\ 3,\ 6$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ -1)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{14}{3},\ \frac{13}{3},\ 0\right)$ | 4 | 6 | 2 |

**Esercizio 3.** Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

| prodotti | alluminio (kg) | costo (euro/kg) | ricavo (euro/kg) |
|---|---|---|---|
| A | 0.3 | 12 | 25 |
| B | 0.6 | 6 | 30 |
| C | 0.9 | 7 | 38 |

Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali: $x_A$ = kg prodotti di A, $x_B$ = kg prodotti di B, $x_C$ = kg prodotti di C

modello:

$$\begin{cases} \max\ (25-12-2.1)\,x_A + (30-6-4.2)\,x_B + (38-7-6.3)\,x_C \\ 0.3\,x_A + 0.6\,x_B + 0.9\,x_C \leq 400 \\ 0.3\,x_A \leq (0.3\,x_A + 0.6\,x_B + 0.9\,x_C)/3 \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \\ x_C \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

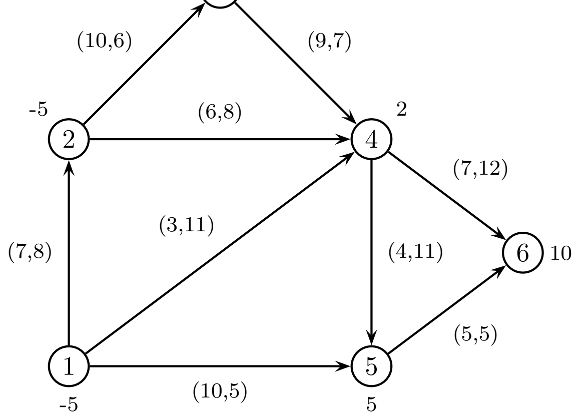
```
c = [-10.9; -19.8; -24.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                    b=[400; 0]

Aeq=[]                                               beq=[]

lb=[0;0;0]                                           ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

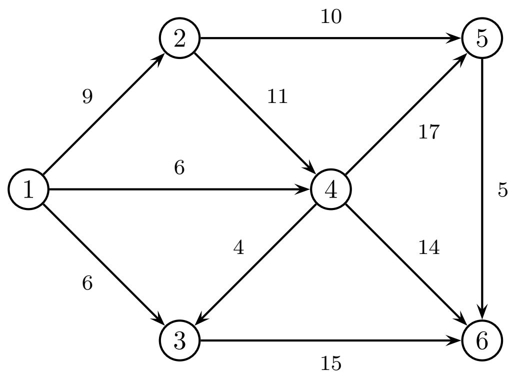



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,5) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,4) | $x = (-5,\ 11,\ -1,\ 0,\ 0,\ 7,\ 0,\ 16,\ -6)$ | NO | SI |
| (1,4) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,3) | $\pi = (0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 5,\ 10)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

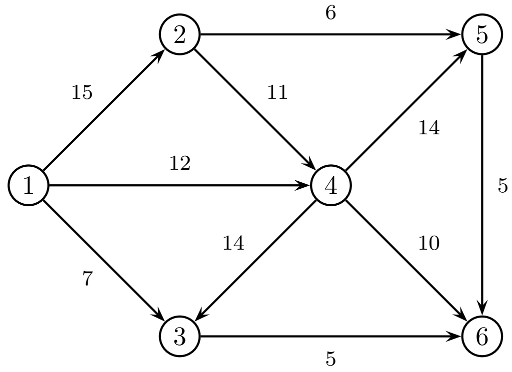
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,4) (1,5) (2,4) (3,4) (4,6) |
| Archi di U | (1,5) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0)$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 5,\ 10)$ | $(0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 10,\ 10)$ |
| Arco entrante | (1,5) | (4,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 0 | 11 , 5 |
| Arco uscente | (5,6) | (1,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 2 | | 5 | | 6 | |
| nodo 2 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 3 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 6 | | 2, 5, 6 | | 5, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 6 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 4 - 6 | 10 | (0, 5, 10, 0, 0, 5, 0, 0, 10, 0) | 15 |
| 1 - 2 - 5 - 6 | 5 | (5, 5, 10, 0, 5, 5, 0, 0, 10, 5) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 9 \ x_1 + 9 \ x_2 \\ 18 \ x_1 + 5 \ x_2 \geq 44 \\ 8 \ x_1 + 17 \ x_2 \geq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$ $\qquad v_I(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 4)$ $\qquad v_S(P) = 54$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 17\, x_1 + 5\, x_2 \geq 43$

$r = 2$ $\qquad 8\, x_1 + 16\, x_2 \geq 63$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 487 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 14 | 15 | 8 | 5 | 9 | 13 | 16 |
| Volumi | 122 | 270 | 48 | 12 | 58 | 69 | 20 |

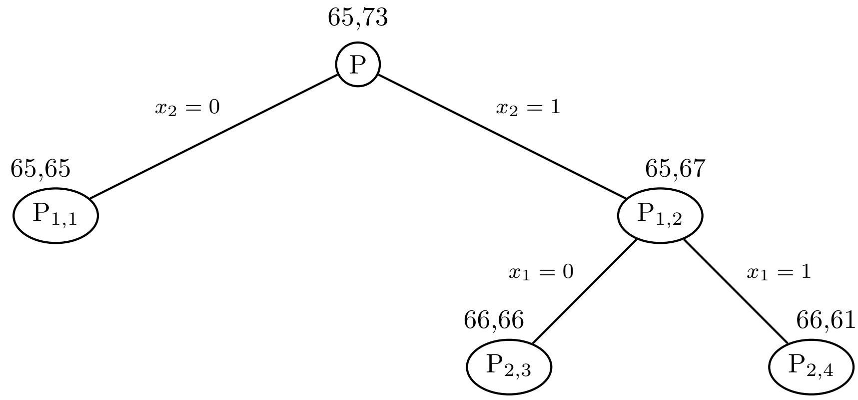
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ $v_I(P) = 65$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(1, \frac{79}{135}, 1, 1, 1, 1, 1\right)$ $v_S(P) = 73$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ valore ottimo = 66