Esercizio (tratto dal Problema 13.5 del Mazzoldi 2)

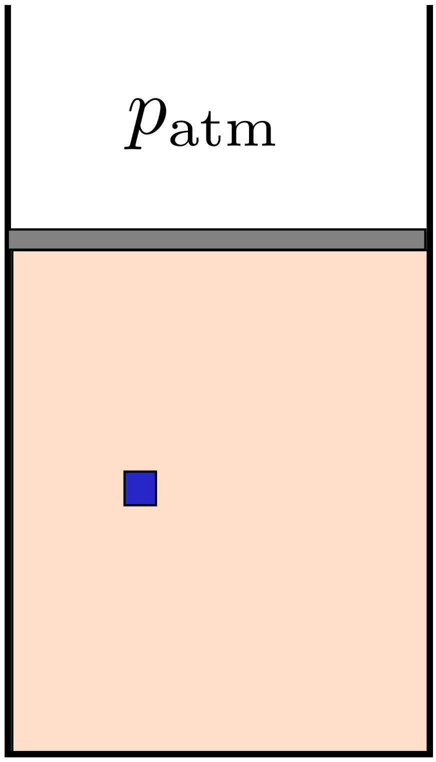
All'interno di un contenitore adiabatico di volume $V_i = 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$ si trovano un corpo metallico di massa $m = 0.8\,\mathrm{Kg}$, calore specifico $c = 130\,\mathrm{J\,Kg^{-1}\,K^{-1}}$ e volume trascurabile, e $n = 2.5$ moli di un gas ideale biatomico. La temperatura di equilibrio è $T = 290\,\mathrm{K}$. Con un riscaldatore elettrico si porta la temperatura del corpo al valore T_1 e, dopo qualche tempo, si osserva che la temperatura all'interno del contenitore raggiunge il nuovo valore di equilibrio $T_e = 470\,\mathrm{K}$.

1. Calcolare T_1;

Dopo il raggiungimento dell'equilibrio si lascia espandere liberamente il gas facendo scorrere senza attrito la base superiore del contenitore; durante il processo la pressione esterna è quella atmosferica. Alla fine dell'espansione c'è equilibrio termico all'interno del contenitore e equilibrio meccanico tra sistema e ambiente. Calcolare

2. la temperatura finale T_f all'interno del contenitore;

3. il volume finale V_f occupato dal gas.



Fabrizio Dolcini (http://staff.polito.it/fabrizio.dolcini/)
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino - Esercitazioni di Fisica I

SOLUZIONE

1. Siccome il contenitore è adiabatico, non c'è calore netto che entra o esce attraverso il contenitore. Pertanto tutto il calore ceduto dal corpo metallico è assorbito dal gas e solo dal gas

$$\underbrace{Q_{gas}}_{\substack{>0 \text{ perché il gas} \\ \text{assorbe calore dal corpo}}} + \underbrace{Q_{corpo}}_{\substack{<0 \text{ perché il corpo} \\ \text{cede calore al gas}}} = 0 \tag{1}$$

dove

$$Q_{gas} = \Delta U + \underbrace{W}_{\substack{=0 \text{ perché il} \\ \text{volume non cambia}}} = \Delta U = nc_V(T_e - T) \tag{2}$$

$$Q_{corpo} = mc\Delta T_{corpo} = mc(T_e - T_1) \tag{3}$$

Inserendo (2) e (3) in (1) si ottiene

$$nc_V\,(T_e - T) + mc\,(T_e - T_1)\; = 0$$

$$\rightarrow \quad T_1 = T_e + \frac{nc_V}{mc}(T_e - T) \tag{4}$$

e ricordando che per un gas biatomico

$$c_V = \frac{5}{2}R \tag{5}$$

si ottiene infine

$$\begin{aligned} T_1 &= T_e + n\frac{5}{2}\frac{R}{m\,c}(T_e - T) = \\ &= 470\,\mathrm{K} + 2.5\,\mathrm{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8.314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\,\cancel{\mathrm{K}}}}{0.8\,\cancel{\mathrm{Kg}} \cdot \frac{130\,\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{Kg}}\,\cancel{\mathrm{K}}}}\,(470\mathrm{K} - 290\,\mathrm{K}) = \\ &= 560\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{6}$$

2. Osserviamo ora che, alla nuova temperatura T_e, il gas ha una pressione determinata dall'equazione di stato $p_e V_i = nRT_e$, dove il volume V_i non è cambiato durante la transformazione. Pertanto

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{nRT_e}{V_i} = \\ &= \frac{2.5\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\cancel{K}}} \cdot 470\,\cancel{\mathrm{K}}}{10^{-2}\,\mathrm{m}^3} = \\ &= 9.769\,\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = 9.769\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{7}$$

e dunque la pressione del gas all'interno del contenitore è maggiore della pressione atmosferica esterna

$$p_e = 9.769\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\; > p_{\mathrm{atm}} = 1.013\,\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{8}$$

Per questo motivo, quando la base superiore del contenitore viene lasciata libera, il gas si espande.

Dal primo principio si ha

$$\Delta U_{gas} = Q_{gas} - W_{gas} \tag{9}$$

dove

- la variazione di energia interna vale

$$\Delta U_{gas} \quad = \quad nc_V(T_f - T_e) \tag{10}$$

in quanto ΔU_{gas} dipende solo dagli stati iniziale e finale, che sono di equilibrio;

- il calore scambiato dal gas vale

$$Q_{gas} \quad = \quad -Q_{corpo} = -mc\,(T_f - T_e) \tag{11}$$

in quanto il contenitore è adiabatico;

- il lavoro W_{gas} effettuato dal gas *non* si può calcolare usando $W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV$ e sostituendo al posto di p l'equazione di stato $p = nRT/V$. Infatti durante l'espansione libera il gas *non* passa attraverso stati di equilibrio termodinamico, e la pressione p non è nemmeno una quantità ben definita durante tale processo.
Tuttavia, possiamo dire che, per il principio di azione e reazione, la forza F_{gas} che il gas esercita sull'ambiente è uguale ed opposta a quella che l'ambiente esercita sul gas, $F_{amb} = -F_{gas}$. Siccome l'ambiente è un enorme termostato in grado di mantenere sempre pressione e temperatura costante, la forza F_{amb} è data dalla pressione atmosferica $p_{\rm atm}$ per la superficie della base scorrevole, ed è diretta verso l'interno del recipiente durante l'espansione: $F_{amb} = -p_{\rm atm}S$. Pertanto

$$W_{gas} = -W_{amb} = -\int_{V_i}^{V_f} (-p_{\rm atm} dV) = p_{\rm atm}(V_f - V_i) \tag{12}$$

Sostituendo le Equazioni (10), (11) e (12) nella (9), si ottiene

$$nc_V(T_f - T_e) \quad = \quad -mc\,(T_f - T_e) - p_{\rm atm}(V_f - V_i) \tag{13}$$

ossia

$$(nc_V + mc)(T_f - T_e) \quad = \quad p_{\rm atm}(V_i - V_f) \tag{14}$$

Osserviamo infine che l'espansione libera termina quando la pressione interna al contenitore eguaglia quella atmosferica esterna. Pertanto lo stato finale è di equilibrio, il gas ha variabili termodinamiche ben definite, e si ha

$$p_f V_f = nRT_f \qquad \rightarrow \qquad p_{\rm atm} V_f = nRT_f \tag{15}$$

In tal modo l'equazione (14) si riscrive

$$(nc_V + mc)(T_f - T_e) \quad = \quad p_{\rm atm} V_i - nRT_f \tag{16}$$

da cui

$$(nc_V + mc + nR)T_f - (nc_V + mc)T_e \quad = \quad p_{\rm atm} V_i \tag{17}$$

$$T_f = \frac{p_{\rm atm} V_i + (nc_V + mc)T_e}{n(c_V + R) + mc} \tag{18}$$

Ricordando che

$$c_V = \frac{5}{2} R$$

si ha

$$T_f = \frac{p_{\rm atm} V_i + (\frac{5}{2} nR + mc) T_e}{\frac{7}{2} nR + mc} \tag{19}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned}
T_f &= \frac{1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 + \left(\frac{5}{2} \cdot 2.5\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\,\cancel{K}}} + 0.8\,\mathrm{\cancel{K}g} \cdot \frac{130\,\mathrm{J}}{\mathrm{\cancel{K}g\,\cancel{K}}}\right) 470\,\mathrm{\cancel{K}}}{\frac{7}{2} \cdot 2.5\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\,K}} + 0.8\,\mathrm{\cancel{K}g} \cdot \frac{130\,\mathrm{J}}{\mathrm{\cancel{K}g\,\,K}}} = \\
&= \frac{1.013 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa\,m}^3 + 73.302 \cdot 10^3\,\mathrm{J}}{176.748\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}} = \\
&\quad [\text{uso } \mathrm{Pa\,m}^3 = \mathrm{J}] \\
&= 420\,\mathrm{K}
\end{aligned} \tag{20}$$

3. Il volume finale si determina ora facilmente dalla (15), ottenendo

$$\begin{aligned}
V_f &= \frac{nRT_f}{p_{\rm atm}} = \\
&= \frac{2.5\,\mathrm{m\cancel{o}l} \cdot 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\cancel{o}l\,\cancel{K}}} \cdot 420\,\mathrm{\cancel{K}}}{1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = \\
&= 8.7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3
\end{aligned} \tag{21}$$