

Esercizio #1

Una stanza illuminata da due lampadine in serie.
la probabilità che una lampadina sia guasta ed
un certo istante e^- p - si possono guastare in
maniera indipendente e l'una dall'altra.

Calcolare la probabilità che la stanza sia buia.

$$\Omega = \{ (F_1, G_2); (G_1, F_2); (G_1, G_2); (F_1, F_2) \}$$

$$A = \{ (F_1, G_2); (G_1, F_2); (G_1, G_2) \}$$

$$Pr\{A\} = ?$$

$$1) Pr\{A\} = Pr\{(F_1, G_2)\} + Pr\{(G_1, F_2)\} + Pr\{(G_1, G_2)\}$$

$$2) Pr\{A\} = 1 - Pr\{(F_1, F_2)\}$$

$$3) \mathcal{A}_1 = \{ (G_1, F_2); (G_1, G_2) \} \quad Pr\{\mathcal{A}_1\} = p$$

$$\mathcal{A}_2 = \{ (F_1, G_2); (G_1, G_2) \} \quad Pr\{\mathcal{A}_2\} = p$$

$$Pr\{A\} = Pr\{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2\} = Pr\{\mathcal{A}_1\} + Pr\{\mathcal{A}_2\} - Pr\{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2\} =$$

$$= p + p - p^2 = 2p - p^2$$

Esercizio #2

Ci sono due urne, una contiene 1 pallina nera e 2 bianche e l'altra 2 bianche e 2 nere.



L'esperimento consiste nello scegliere un'urna e poi nello scegliere una pallina.

Qual'è la probabilità di estrarre una pallina bianca.

$$\Omega = \left\{ (U_1, b_{11}) (U_1, b_{12}) (U_2, b_{21}) (U_2, b_{22}) \right. \\ \left. (U_1, n_{11}) (U_2, n_{12}) (U_2, n_{21}) \right\}$$

$$B = \left\{ (U_1, b_{11}) (U_1, b_{12}) (U_2, b_{21}) (U_2, b_{22}) \right\}$$

$$P_r\{B\} = \sum_i P_r\{B|U_i\} \cdot P_r\{U_i\}$$

$$U_1 \cup U_2 = \Omega$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

$$Pr\{B | U_1\} \cdot Pr\{U_1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$Pr\{B | U_2\} \cdot Pr\{U_2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$Pr\{B\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 1 sapendo che ho estratto una pallina bianca.

$$Pr\{U_1 | B\} = \frac{Pr\{B | U_1\} \cdot Pr\{U_1\}}{Pr\{B\}}$$

$$Pr\{B\} = \frac{7}{12}$$

$$Pr\{U_1\} = \frac{1}{2}$$

$$Pr\{B | U_1\} = \frac{2}{3}$$

$$Pr\{U_1 | B\} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

Esercizio #3

Un trasmettitore trasmette un segnale binario

$$\Pr\{T_b = 1\} = 0,3$$

$$\Pr\{T_b = 0\} = 0,7$$

$$\Pr\{E\} = 0,01$$

probabilità che il bit sia ricevuto erroneamente

Il ricevitore riceve uno 0 logico.

Calcolare la probabilità che sia stato trasmesso uno 0

$$\Pr\{T_0 | R_0\} = ?$$

Bayes

$$\Pr\{T_0 | R_0\} = \frac{\Pr\{R_0 | T_0\} \Pr\{T_0\}}{\Pr\{R_0\}}$$

$$\Pr\{R_0 | T_0\} = 1 - \Pr\{R_0 | T_1\} = 1 - 0,01 = 0,99$$

$$\Pr\{T_0\} = 0,7$$

$$\Pr\{R_0\} = \Pr\{R_0 | T_0\} \cdot \Pr\{T_0\} + \Pr\{R_0 | T_1\} \cdot \Pr\{T_1\} =$$

$$T_1 \cup T_0 = \Omega$$

$$T_1 \cap T_0 = \emptyset$$

$$= 0,99 \cdot 0,7 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,696$$

$$Pr\{T_0 | R_0\} = \frac{0,99 \cdot 0,7}{0,696} \cong 0,9956$$

Esercizio #4

Lo studente X è sottoposto ad un quiz con M possibili risposte.

Se X ha studiato risponde correttamente, altrimenti risponde a caso.

X ha studiato con probabilità p , supponiamo che sottoposto al quiz risponda correttamente.

Qual'è la probabilità che abbia studiato davvero?

$$S = \{X \text{ ha studiato}\}$$

$$Pr\{S\} = p$$

$$C = \{X \text{ ha risposto correttamente}\}$$

$$Pr\{C | S\} = 1$$

$$\bar{S} = \{X \text{ non ha studiato}\}$$

$$\Pr\{C | \bar{S}\} = \frac{1}{M}$$

$$S \cap \bar{S} = \emptyset$$

$$S \cup \bar{S} = \Omega$$

$$\Pr\{S | C\} = ?$$

Bayes

$$\Pr\{S | C\} = \frac{\Pr\{C | S\} \cdot \Pr\{S\}}{\Pr\{C\}}$$

$$\Pr\{C\} = \Pr\{C | S\} \cdot \Pr\{S\} + \Pr\{C | \bar{S}\} \cdot \Pr\{\bar{S}\} =$$

$$= 1 \cdot p + \frac{1}{M} \cdot (1-p)$$

$$\Pr\{S | C\} = \frac{p}{p + \frac{1}{M}(1-p)}$$

Esercizio #5

Un libro A che ha 200 pagine e un libro B che ha 300 pagine.

Questi due libri sono aperti indipendentemente da due lettori.

Calcolare la probabilità dell'evento

$$d = \{ \text{pag A} > \text{pag B} \} = \{ P_A > P_B \}$$

• I risultati dell'esperimento sono coppie di pagine (P_A, P_B)

• le coppie favorevoli sono quelle in cui $P_A > P_B$

$$Pr \{ P_A > P_B \} = \sum_{n=1}^{300} Pr \{ P_A > P_B \mid P_B = n \} \cdot Pr \{ P_B = n \}$$

$$Pr \{ P_B = n \} = \frac{1}{300}$$

$$n \leq 200$$

$$Pr \{ P_A > P_B \mid P_B = n \} = \frac{200 - n}{200}$$

$$Pr \{ P_A > P_B \} = \sum_{n=1}^{200} \frac{1}{300} \cdot \frac{200 - n}{200} = \frac{1}{300 \cdot 200} \sum_{n=1}^{200} (200 - n) =$$

$$= \frac{1}{300 \cdot 200} \sum_{n=0}^{199} n = \frac{1}{300 \cdot 200} \left(\frac{199 \cdot 198}{2} \right)$$

Esercizio # 6

È data una V.A. $X \in \mathcal{N}(0, 1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

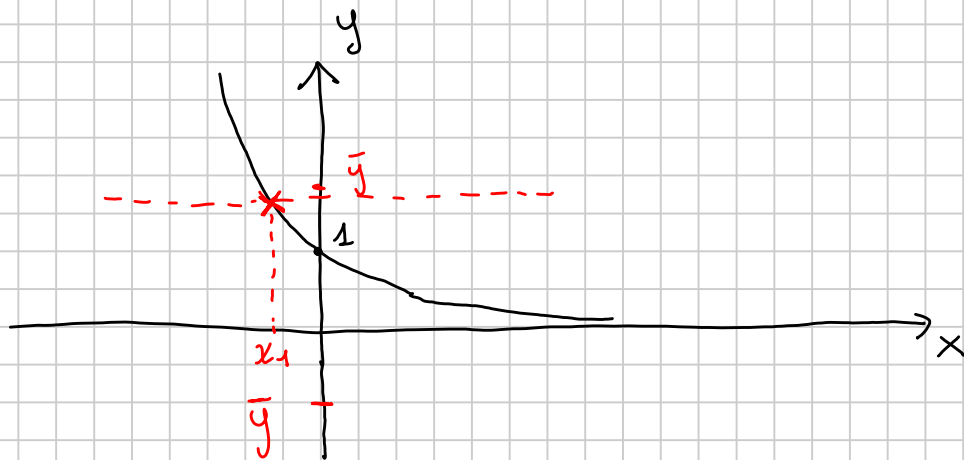
Determinare $f_Y(y)$ e η_Y della V.A.

$$-Y = e^{-X}$$

V.A. LOGNORMALE

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$y = g(x_i)$$



Se $\bar{y} < 0$ non ci sono soluzioni $\Rightarrow f_Y(y) = 0 \quad \bar{y} < 0$

Se $\bar{y} > 0$ \exists 1 sola soluzione $x_1 = -\ln(\bar{y})$

$$f_X(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$$

$$g'(x_1) = -e^{-x_1} = -y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} u(y)$$

$$\eta_Y = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy$$

$$\eta_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$\eta_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2} + x\right)} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{1}{2} \left[(x+1)^2 - 1 \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} dx =$$

$$= e^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx = e^{1/2}$$

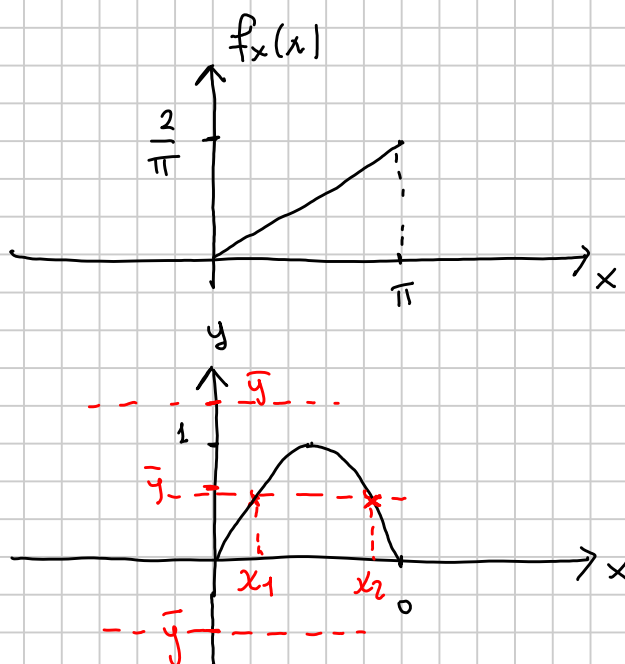
$\mathcal{N}(-1, 1)$

Esercizio #6

Sia X una v.a. tale che

$$f_X(x) = \frac{2x}{\pi^2} \text{ rect}\left(\frac{x - \pi/2}{\pi}\right)$$

Sia $Y = \sin(X)$ Trovare $f_Y(y)$ e η_Y



$$) \text{ se } \bar{y} > 1 \text{ e } \bar{y} < 0$$

non esistono soluzioni dell'equazione

$$y = g(x) \Rightarrow f_y(y) = 0 \quad y > 1 \text{ e } y < 0$$

$$) \text{ se } 0 \leq \bar{y} \leq 1$$

$$x_1 = \arcsin(y)$$

$$x_2 = \pi - x_1$$

$$) \quad g(x) = \sin(x)$$

$$g'(x) = \cos(x)$$

$$g'(x_1) = \cos(x_1)$$

$$g'(x_2) = \cos(\pi - x_1) = -\cos(x_1)$$

$$f_x(x_1) = \frac{2x_1}{\pi^2}$$

$$f_x(x_2) = \frac{2(\pi - x_1)}{\pi^2}$$

$$f_y(y) = \frac{2x_1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\cos(x_1)} + \frac{2(\pi - x_1)}{\pi^2 \cdot \cos(x_1)} = \frac{2\pi}{\pi^2 \cdot \cos x_1} = \frac{2}{\pi \cos x_1} =$$

$$= \frac{2}{\pi \cos(\arcsin(y))}$$

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y) dy$$

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx$$

$$\mu_y = \int_0^1 y \cdot \frac{2}{\pi \cos(2 \sin(y))} dy$$

$$z = 2 \sin(y)$$

$$y = \sin z$$

$$dy = \cos z \cdot dz$$

$$y = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow z = \pi/2$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin z \cdot \frac{2}{\pi \cdot \cancel{\cos z}} \cdot \cancel{\cos z} dz =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin z \, dz = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\sin(z) \, dz = -\frac{2}{\pi} \cos(z) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{\pi} (0 - (1)) = \frac{2}{\pi}$$

Esercizio #7

È data una v.a. $X \in \mathcal{N}(2, 2)$

Si costruisce una variabile

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X > 0 \\ -1 & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

Calcolare μ_Y e σ_Y^2

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot p_i = 1 \cdot p_1 - 1 \cdot p_{-1}$$

$$p_1 = P\{Y = 1\}$$

$$p_{-1} = P\{Y = -1\}$$

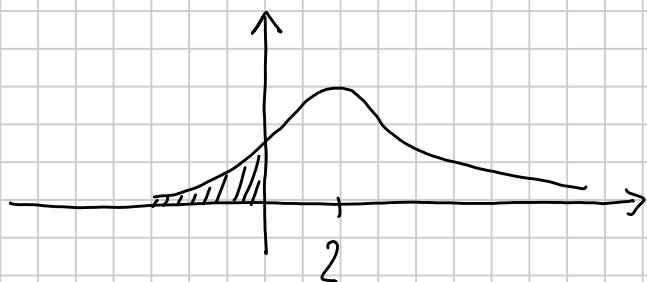
$$p_1 = \int_0^{+\infty} f_X(x) dx = P\{X > 0\}$$

$$p_{-1} = 1 - p_1$$

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx =$$

$$Y = g(X) = \text{sgn}(X)$$

$$\eta_Y = - \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} f_X(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^0 f_X(x) dx = \Phi\left(\frac{0-2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} f_X(x) dx = 1 - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\eta_Y = - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) + 1 - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sigma_Y^2 = E\left\{(Y - \eta_Y)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \eta_Y)^2 f_Y(y) dy =$$

$$= \sum_i (y - \eta_y)^2 \cdot p_i = (1 - \eta_y)^2 \cdot p_1 + (-1 - \eta_y)^2 \cdot p_{-1}$$