# ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 18

Note Title 23/10/2018

## Idea generale

- Fissata una base, gli el. di uno sp. vettoriale diventano numeri (le comp. di un vettore rispetto alla base)

- Fissate una base in partenza ed in arrivo, le applicazioni lineari diventano numeri (la matrice associata all'appl.)

Sp. vett $\rightsquigarrow$ Numeri

Appl. lineari $\rightsquigarrow$ Matrici

Data $f: V \longrightarrow W$, scelgo base $v_1, \dots, v_n$ in partenza, scelgo una base $w_1, \dots, w_m$ in arrivo e ottengo una matrice $A$. Come calcolo $f(v)$ dato $v \in V$?

Procedura

- scrivo $v$ come $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ $\quad v \rightsquigarrow (c_1, \dots, c_n)$
- Penso $(c_1, \dots, c_n)$ come vettore colonna e lo moltiplico per la matrice $A$

$$m \updownarrow \overset{\overset{n}{\longleftrightarrow}}{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \updownarrow n$$

Ottengo un vettore colonna lungo $m$.

- Gli $m$ numeri ottenuti al passo precedente sono le componenti di $f(v)$ rispetto alla base $w_1, \dots, w_m$

$A \rightsquigarrow$ INPUT: componenti di $v$ rispetto alla base $v_1, \dots, v_n$

$\rightsquigarrow$ OUTPUT: componenti di $f(v)$ rispetto " " $w_1, \dots, w_m$

**Esempio** Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'appl. lineare tale che

$$f(\underbrace{1,0,1}_{v_1}) = (2,3) \qquad f(\underbrace{1,1,0}_{v_2}) = (1,1) \qquad f(\underbrace{0,0,1}_{v_3}) = (0,2)$$

- Dimostrare che esiste ed è unica

Uso il teorema di struttura: posso mandare una base dello spazio di part. dove mi pare e a quel punto l'appl. è unica.

Quindi basta verificare che $v_1, v_2, v_3$ sono base di $\mathbb{R}^3$.

Essendo 3 vett., basta verificare lin. indip.

$$a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \rightsquigarrow \quad a=b=c=0$$

- Scrivere la matrice $A$ associata ad $f$ usando in partenza ed arrivo la base canonica.

Mi serve calcolare

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1)$$
$$f(0,1,0) =$$
$$f(0,0,1) = (0,2)$$

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1) = (2,3) - (0,2) = (2,1)$$

$$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (1,1) - (2,1) = (-1,0)$$

A questo punto scriviamo la matrice

$$f(1,0,0) = 2\,(1,0) + 1\,(0,1)$$
$$f(0,1,0) = -1\,(1,0) + 0\,(0,1)$$
$$f(0,0,1) = 0\,(1,0) + 2\,(0,1)$$

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \text{ base arrivo} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{array} & \\ \text{base part.} & \end{array}$$

- Calcolare $f(\underbrace{7,4,-2}_{v})$

Scrivo $(7,4,-2)$ come $7 \cdot (1,0,0) + 4(0,1,0) + (-2)(0,0,1)$

Moltiplico per la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10 e 3 sono le componenti di $f(v)$ rispetto alla base dello sp. di arrivo.
Quindi

$$f(v) = 10(1,0) + 3(0,1) = (10,3)$$

- Scrivere la matrice B associata ad f usando
  → in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$
  → in arrivo la base $\{(1,1), (1,0)\}$ $\{w_1, w_2\}$

$f(v_1) = (2,3) = 3(1,1) - 1(1,0)$
$f(v_2) = (1,1) = 1(1,1) + 0(1,0)$
$f(v_3) = (0,2) = 2(1,1) - 2(1,0)$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

- Calcolare $f(7,4,-2)$ usando le nuove basi e la nuova matrice

<u>Step 1</u> Calcolo le componenti di $(7,4,-2)$ rispetto alla base $v_1, v_2, v_3$

$$(7,4,-2) = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1)$$

$a+b=7$ $\quad$ $a=3$

$b=4$ $\quad$ $b=4$ $\quad$ $v \rightsquigarrow (3,4,-5)$

$a+c=-2$ $\quad$ $c=-5$

<u>Step 2</u> Moltiplico le componenti per la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

<u>Step 3</u> Ricostruisco $f(v)$ usando le nuove componenti

$$f(v) = 3w_1 + 7w_2 = 3(1,1) + 7(1,0) = \boxed{(10,3)}$$

— o — o —

<u>Domanda</u>: siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ due basi dello stesso spazio vettoriale $V$.
Se conosco le componenti di $v$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$, come calcolo le componenti di $v$ rispetto alla base $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ ?

Risposta: uso la MATRICE DI CAMBIO DI BASE

→ INPUT: comp. di $v$ rispetto alla 1ª base
→ OUTPUT: " " " " 2ª base

Come costruisco questa matrice ?
Scrivo i vettori della vecchia base usando la nuova e uso i coeff. come colonne

$$v_1 = c_{1,1}\hat{v}_1 + c_{2,1}\hat{v}_2 + \dots + c_{n,1}\hat{v}_n$$

1ª colonna

In generale

$$v_k = c_{1,k}\,\hat{v}_1 + c_{2,k}\,\hat{v}_2 + \dots + c_{n,k}\,\hat{v}_n$$

k-esima colonna

$$\begin{array}{cccc|l} & & & & \\ \multicolumn{4}{c|}{\left(\begin{array}{cccc} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)} & \begin{array}{l} \leftarrow \hat{v}_1 \\ \leftarrow \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \hat{v}_m \end{array} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & \end{array}$$

<u>Esempio precedente</u> Sp. vett. $\mathbb{R}^3$

base vecchia : canonica $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$

base nuova : $(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)$

Scrivo i vettori della vecchia usando la nuova

$$(1,0,0) = 1\,(1,0,1) + 0\,(1,1,0) - 1\,(0,0,1)$$
$$(0,1,0) = -1\,(1,0,1) + 1\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1)$$
$$(0,0,1) = 0\,(1,0,1) + 0\,(1,1,0) + 1\,(0,0,1)$$

Matrice di cambio di base dalla vecchia alla nuova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il vettore $(7,4,-2)$.
Nella vecchia si scrive come

$$(7,4,-2) = 7\,(1,0,0) + 4\,(0,1,0) - 2\,(0,0,1)$$

Applico la matrice di cambio ai numeri

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$ componenti rispetto alla base nuova

Quindi $(7,4,-2) = 3(1,0,1) + 4(1,1,0) - 5(0,0,1)$

Gli stessi numeri li avevamo ottenuti prima risolvendo il sistema lineare.

La stessa matrice va bene per trasformare TUTTI i vettori, senza risolvere ulteriori sistemi lineari.

<u>Oss.</u> Il sistema lineare si risolve una volta per tutte per costruire la matrice di cambio di base.

— o — o —