ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 24

Note Title 30/10/2018

$\boxed{\text{DET. } 3\times 3}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Det}(ae_1+be_2+ce_3,\ de_1+ee_2+fe_3,\ ge_1+he_2+ie_3)$$

$$a\operatorname{Det}(e_1,\ de_1+ee_2+fe_3,\ ge_1+he_2+ie_3)+b\operatorname{Det}(e_2,\dots,\dots)$$
$$+\,c\operatorname{Det}(e_3,\dots,\dots)$$

Espandendo tutto vengono 27 termini, di cui molti nulli perché contengono vettori ripetuti.
Alla fine i termini $\neq 0$ sono solo 6:

$$aei\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3)}_{=1}+bfg\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_2,e_3,e_1)}_{=1}+cdh\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_3,e_1,e_2)}_{=1}$$
$$+\,ceg\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_3,e_2,e_1)}_{=-1}+bdi\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_2,e_1,e_3)}_{=-1}+afh\,\underbrace{\operatorname{Det}(e_1,e_3,e_2)}_{=-1}$$

$$\operatorname{Det}(e_2,e_3,e_1)=-\operatorname{Det}(e_1,e_3,e_2)=\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3)=1$$

$$\operatorname{Det}(e_3,e_1,e_2)=-\operatorname{Det}(e_1,e_3,e_2)=\operatorname{Det}(e_1,e_2,e_3)=1$$

<u>Conclusione</u> $\boxed{\operatorname{Det}=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh}$

REGOLA DI SARRUS

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

parall. diag ↘

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

parall. diag. ↙

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$\boxed{\text{ACHTUNG}}$ SARRUS vale SOLO nel caso 2×2 e 3×3
In dimensione + alta servono altri metodi.

Interpretazione geometrica: volume del "parallelepipedo" generato dai vettori v_1, v_2, v_3.

— o — o —

DETERMINANTE E ALGORITMO DI GAUSS

Se A è matrice m×n, e ci lavoro alla Gauss, che succede al suo Det ?
Ci sono due operazioni

① Scambiare 2 righe ⇝ Det cambia segno

② Sostituire riga R_j con $R_j + bR_i$ (operazione ultraortodossa)

$$\text{Det}(..R_i.., R_j + bR_i, ...) = \text{Det}(..., R_i, ..., R_j, ...) + b\,\underbrace{\text{Det}(..., R_i, ..., R_i, ...)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \ (2\text{ volte } R_i)}$$

L'operazione ② in versione ULTRA-ORTODOSSA non cambia il determinante
In versione "classica" $R_j \rightsquigarrow aR_j + bR_i$ con $a \neq 0$ si moltiplica il determinante per a

Conseguenza: alla fine dell'algoritmo otteniamo una matrice a scala.
Se sappiamo calcolare il suo det, allora abbiamo finito.

Caso speciale : matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$

prod. el. diag. princ.

$\boxed{\text{Dim}}$ $\text{Det}(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$

$= \lambda_1 \text{Det}(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n)$

$= \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, \dots, \lambda_n e_n) = \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \underbrace{\text{Det}(e_1, \dots, e_n)}_{=1}$

Caso meno speciale: matrice triangolare superiore

↑ solo 0 sotto la diag. princ.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Det} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$

come se fosse diagonale

Nota bene : una matrice $n \times n$, ridotta a scala, è triangolare superiore (eventualmente con zeri anche sulla diagonale)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Scrivo la prima riga come $v_1 = \lambda_1 e_1 + w$

dipende solo da $e_2, \dots, e_n$

$\text{Det}(\lambda_1 e_1 + w, v_2, \dots, v_n) = \lambda_1 \text{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) + \underbrace{\text{Det}(w, v_2, \dots, v_n)}_{=0}$

L'ultimo termine fa 0 perché $w, v_2, \dots, v_n$ sono n vettori con la prima componente nulla, quindi è come fossero n vettori in $\mathbb{R}^{n-1}$, quindi sono per forza LIN. DIP. $\rightsquigarrow$ Det $= 0$.

Ora scrivo $v_2 = \lambda_2 e_2 + w$

↑ ha nulle le prime 2 componenti

$$\lambda_1 \operatorname{Det}(e_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda_1 \operatorname{Det}(e_1, \lambda_2 e_2 + w, \dots, v_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{Det}(e_1, e_2, v_3, \dots) + \lambda_1 \underbrace{\operatorname{Det}(e_1, w, v_3, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

n vettori che hanno nulla la 2ª comp., quindi LIN. DIP.

Procedendo di questo passo, arriviamo a $\lambda_1 \dots \lambda_n \underbrace{\operatorname{Det}(e_1, \dots, e_n)}_{\overset{\shortparallel}{1}}$

— o — o —

<u>Esempio</u> Calcolare il Det di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - \frac{1}{2}R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} \end{pmatrix} \quad R_4 - \frac{1}{3}R_3 \qquad \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$$

$$\operatorname{Det}(\text{Matrice iniziale}) = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot \frac{17}{6} = -17$$

<u>Oss.</u> Avendo usato solo passaggi ultraortodossi

$$\operatorname{Det} \text{ finale} = \operatorname{Det} \text{ iniziale}$$

Oss. Il Det di una matrice viene $= 0$ se e solo se la matrice ridotta a scala ha delle righe nulle alla fine, cioè se e solo se le colonne sono LIN. DIP.
(questo non dimostra l'intento iniziale, cioè che Det $= 0 \Rightarrow$ RIGHE lin. dip.)
La conclusione si avrà quando dimostreremo che Det di una matrice è uguale a quello della trasposta.

Oss. (di tipo logico)
Finora abbiamo dimostrato che esiste al massimo una funzione che ha le 4 proprietà (Det 1), ..., (Det 4)

Nessuno esclude, per ora, che lavorando alla Gauss in altro modo, si ottenga un valore diverso.
Se succedesse, vorrebbe dire che non esiste nessuna funzione con le 4 proprietà (cosa che è falsa, ma non lo abbiamo dim.)

— o — o —