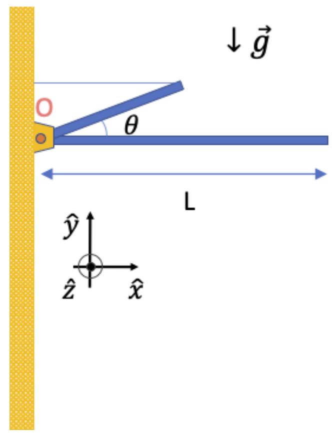
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 15/02/2023

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, si consideri un corpo rigido costituito da due aste sottili e omogenee dello stesso materiale, una di lunghezza $L = 80\ cm$ e una di lunghezza $L/2$, saldate a un estremo O e che formano un angolo di $\theta = 45^o$. La massa complessiva del corpo rigido costituito dalle due aste è $M = 100\ kg$ ed esso è ancorato in O a una parete verticale tramite un perno attorno al quale può ruotare senza attriti nel piano xy.
Il corpo è mantenuto in equilibrio statico nella disposizione indicata in figura tramite l'azione di una fune orizzontale e ideale (priva di massa e inestensibile) connessa a un estremo all'asta più corta, e all'altro estremo alla parete verticale.
Si calcoli:

1.1 il modulo della tensione $|\overrightarrow{T}|$ della fune

$$|\overrightarrow{T}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 La reazione $\overrightarrow{R}$ del perno

$$\overrightarrow{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A un certo istante la fune viene tagliata.

1.3 Determinare la velocità angolare ω del corpo rigido un istante prima dell'urto con la parete verticale.

$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

ESERCIZIO.2 – **Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, un solenoide rettilineo indefinito, con $n = 5\ cm^{-1}$ spire per unità di lunghezza e sezione quadrata di lato a, è percorso dalla corrente continua $i = 4\ A$.

2.1 Si determini il campo magnetico $\vec{B}$

in tutto lo spazio in coordinate cilindriche se l'asse z coincide con l'asse del solenoide, (non utilizzando semplicemente la formula ma ricavandola nel caso in esame)

$$\vec{B}= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Una spira quadrata di lato $b = 3\ cm$ con $b < a$ e resistenza totale $r = 2\ m\Omega$, giacente in un piano ortogonale all'asse del solenoide, è parzialmente inserita in esso, attraverso una sottile fenditura praticata sulla superficie dello stesso (si trascurino i corrispondenti effetti di bordo).

2.2 Calcolare il flusso di $\vec{B}$ concatenato con la spira, ϕ_B, quando essa si trova nella posizione indicata in figura.

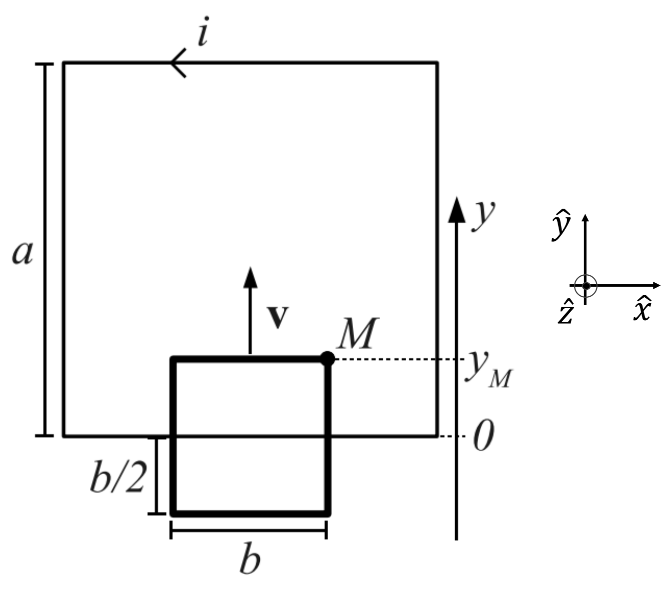
$$\phi_B= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dall'istante $t = 0$ la spira viene posta in moto con velocità costante, di modulo $v = 3\ m/s$, e diretta come indicato in figura. Corrispondentemente, la legge oraria per il punto M della spira nel riferimento scelto è : $y_M = \frac{b}{2} + vt$ (per $t > 0$).

2.3 Si calcoli il valore della corrente indotta $i_{ind}(t)$ nella spira in funzione del tempo fino a quando la spira ha coordinata $y_M = a$ e se ne faccia un grafico qualitativo dal tempo $t = 0$ al tempo $t = t'$ in cui il vertice M della spira ha coordinata $y_M = a$. Inoltre, nel caso in cui $i_{ind} \neq 0$, si determini il verso della corrente nella spira, giustificando la risposta e con un disegno.

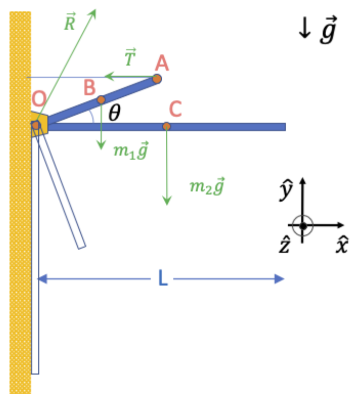
$$i_{ind}(t)= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA^{-1}



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 1.1
Il corpo rigido è stato ottenuto saldando due aste sottili omeogenee dello stesso materiale. Pertanto poichè un'asta (che indicheremo con 2) ha lunghezza L e l'altra (che indicheremo con 1) ha lunghezza $L/2$, vale la seguente relazione tra le masse m_1 e m_2 delle aste 1 e 2: $m_2 = 2m_1$. Inoltre poichè la massa totale delle due aste è M vale:

$$m_1 + m_2 = M = m_1 + 2m_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{3}M \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{2}{3}M$$

Il corpo rigido è inizialmente in equilibrio e quindi la risultante delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla. Le forze esterne sono la tensione del filo $\overrightarrow{T}$, la forza peso applicata al centro di massa (cm) del corpo rigido, $M\overrightarrow{g}$, che è la somma delle forze applicate al cm di ciascuna asta, $m_1\overrightarrow{g} + m_2\overrightarrow{g}$, la reazione del perno applicata in O. La prima equazione cardinale pertanto fornisce:

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = 0$$

Scegliendo il punto O come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, tenendo conto che $\overrightarrow{R}$ agisce in O, fornisce:

$$\vec{OA} \wedge \vec{T} + \vec{OB} \wedge m_1\vec{g} + \vec{OC} \wedge m_2\vec{g} = I_O\vec{\alpha} = 0 = \left(\frac{1}{2}TLsin\theta - \frac{L}{4}m_1gcos\theta - \frac{L}{2}m_2g\right)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}TLsin\theta - \frac{L}{12}Mgcos\theta - \frac{L}{6}2Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4 + cos\theta}{6sin\theta}Mg = \frac{8+\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}Mg = \frac{1+4\sqrt{2}}{6}Mg = 1.09 \times 10^3 \ N$$

dove I_O è il momento di inerzia rispetto al polo in O

Domanda 1.2
Mentre dalla seconda equazione cardinale all'equilibrio, proiettando lungo x e lungo y la risultante delle forze, otteniamo:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_x - T = 0 \\ \mathrm{R}_y - Mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{R}_x = T = 1.09 \times 10^3 \ N \\ \mathrm{R}_y = Mg = 9.81 \times 10^2 \ N \end{cases}$$

Domanda 1.3
Quando la fune viene tagliata, il corpo rigido scende ruotando intorno al perno in O. Non essendo presenti forze non conservative che compiono lavoro (il punto di applicazione della reazione $\overrightarrow{R}$, O, è fisso) l'energia meccanica si conserva:

$$\Delta K = -\Delta U = K_f - K_i = U_i - U_f = K_f = m_1g(h_{1i} - h_{1f}) + m_2g(h_{2i} - h_{2f}) = \frac{M}{3}g\frac{L}{4}(sin\theta + cos\theta) + \frac{2}{3}Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

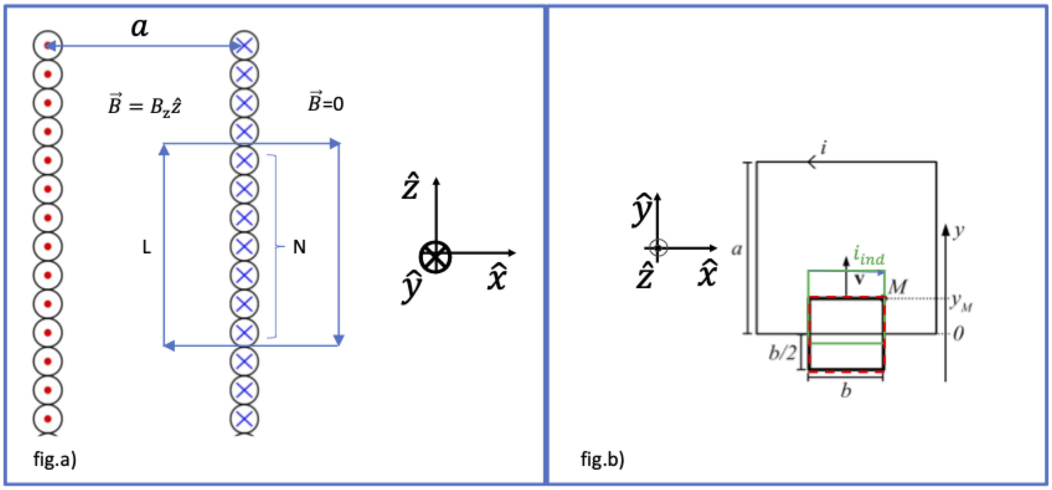
dove con K e U abbiamo indicato rispettivamente l'energia cinetica e potenziale iniziale (pedice i) e finale (pedice f), e $\frac{L}{4}(sin\theta + cos\theta)$ e $\frac{L}{2}$ sono le quote di cui scendono rispettivamente i centri di massa dell'asta corta e dell'asta lunga (equivalente ad assumere l'origine dell'energia potenziale in $y = 0$). Infine I_O, momento di inerzia del corpo rispetto al polo in O, si calcola usando il teorema di Steiner:

$$I_O = I_{O1} + I_{O_2} = \frac{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2}{12} + m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{m_2L^2}{12} + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M}{3}\frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{ML^2}{3}\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}ML^2$$

Per cui:

$$\frac{1}{8}ML^2\omega^2 = \frac{MgL}{3}\left(\frac{1}{4}(sin\theta + cos\theta) + 1\right) \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}(sin\theta + cos\theta) + 1\right]\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + 4\right)\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + 4\right)\frac{g}{L}} = 6.65 \ rad/s$$

Soluzione Esercizio 2



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Trattandosi di un solenoide rettilineo indefinito, dal teorema di Ampere, e sapendo che il campo è nullo al di fuori di esso ed è uniforme all'interno e parallelo all'asse z otteniamo:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_z L = \mu_0 I_{conc}$$

dove $I_{conc} = Ni$ è la corrente concatenata con la linea chiusa e orientata scelta per la circuitazione (vedi figura a), il segno algebrico è positivo, dato che per l'orientazione scelta del percorso la corrente concatenata è uscente per la regola della mano destra).
Dalla figura a, $B_z = \mu_0 i \frac{N}{L} = \mu_0 in$ per cui in coordinate cilindriche:

$$\vec{B} = B_z \hat{z} \quad dove \quad B_z = \begin{cases} \mu_0 ni = 2.5\ mT & \text{dentro il solenoide} \\ 0 & \text{fuori del solenoide} \end{cases}$$

Domanda 2.2

Orientando la spira in verso antiorario, la normale all'elemento ds della spira $\hat{n} = \hat{z}$ e il flusso del campo magnetico attraverso di essa è dato da:

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} ds = B_z b \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 nib^2 = 1.13 \mu T m^2$$

Domanda 2.3

$$\phi_B(t) = \begin{cases} \mu_0 nib \left(\frac{b}{2} + vt \right) & 0 \leq t \leq t_1 \\ \mu_0 nib^2 & t > t_1 \text{ e } y_M < a \end{cases}$$

Quando la spira si muove con velocità v diretta come nella figura b, il flusso del campo magnetico ad essa concatenato aumenta in funzione tempo fino a quando la spira entra completamente nel solenoide (all'istante $t = t_1 = \frac{b}{2v} = 0.005\ s$). Quando la spira è entrata completamente nel solenoide, il flusso è massimo e rimane costante. Poichè tra 0 e t_1 in flusso aumenta nella spira viene indotta una corrente che si oppone all'aumento del flusso e che pertanto circola in verso orario nella spira (vedi figura b). Mentre, per $t > t_1$ essendo il flusso costante la corrente indotta è nulla. Pertanto:

$$\mathrm{i}_{ind} = \frac{1}{r} \mid \frac{d\phi_B(t)}{dt} \mid = \begin{cases} \frac{\mu_0 nibv}{r} = 113\ mA & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \text{ e } y_M < a \end{cases}$$

Il grafico della corrente indotta in funzione del tempo è mostrato nella figura c.

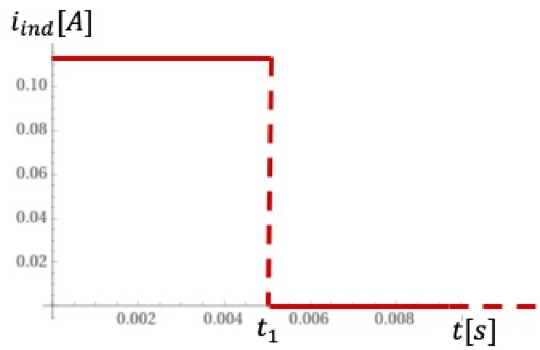


fig.c)

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)