Esame di Ricerca Operativa del 15/09/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ 4\ x_1 + x_2 \leq 19 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 18 \\ 5\ x_1 + x_2 \leq 23 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{3, 4}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce due beni P_1 e P_2 o nell'impianto A o in quello B utilizzando due macchine, una per la levigatura ed una per la pulitura. Nella tabella le ore necessarie per la produzione. L'impianto A ha a disposizione 80 ore per la levigatura e 60 per la pulitura mentre il B ne ha 60 e 75 ore. Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 kg. di materiale grezzo e la ditta ne ha in totale 120 Kg. Il profitto, da massimizzare in totale, é 10 euro per ogni unità di P_1 e 15 per P_2.

Impianto	A	A	B	B
Beni	P1	P2	P1	P2
Levigatura	4	2	5	3
Pulitura	2	5	5	6

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

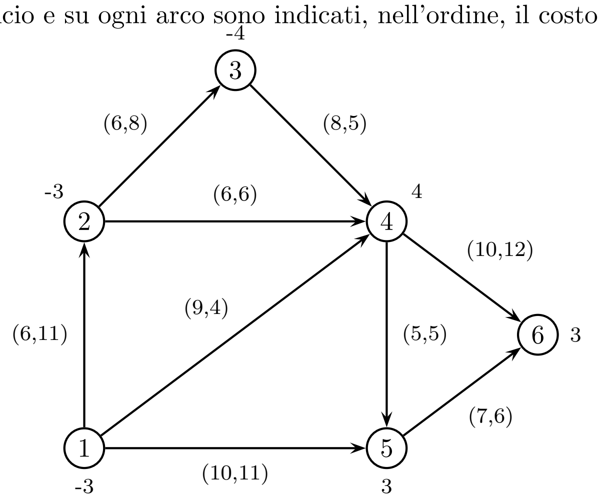
```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

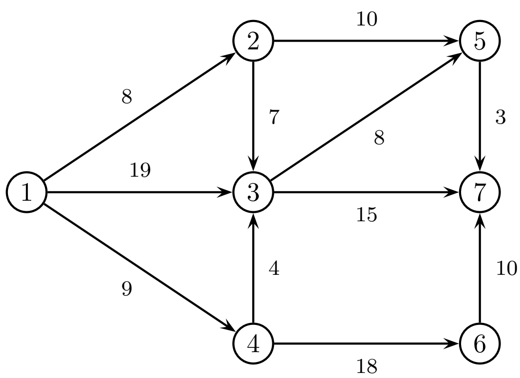


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (5,6)	(2,4)	$x =$		
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6)	(1,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

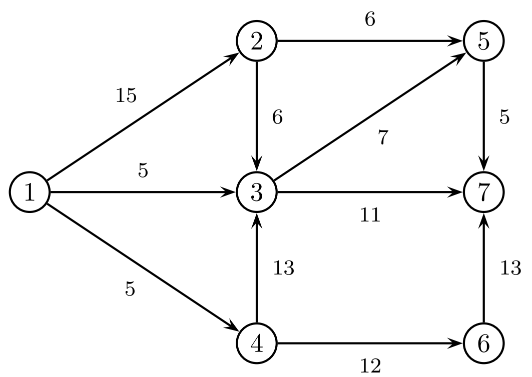
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 13\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 51 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 498 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	21	5	13	24	18	22	9
Volumi	233	28	149	81	184	447	492

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 + 3x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(-1,1)							
(-3,1)							
$\left(-3, \sqrt{3}\right)$							
$\left(-3, -\sqrt{3}\right)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 2\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-3, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, -4)$ e $(-2, -5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \leq -6 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ 4\,x_1 + x_2 \leq 19 \\ -x_1 + 3\,x_2 \leq 18 \\ 5\,x_1 + x_2 \leq 23 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x = (2,\ 2)$	SI	NO
$\{3,\,4\}$	$y = (0,\ 0,\ 5,\ -1,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\,5\}$	$(0,\ 6)$	$\left(0,\ -\frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ 0\right)$	2	$\frac{28}{3},\ 7,\ \frac{119}{16}$	4
2° iterazione	$\{4,\,5\}$	$(3,\ 7)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{2}{13},\ -\frac{5}{13},\ 0\right)$	5	$\frac{143}{7},\ \frac{91}{2},\ 13,\ 13$	3

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

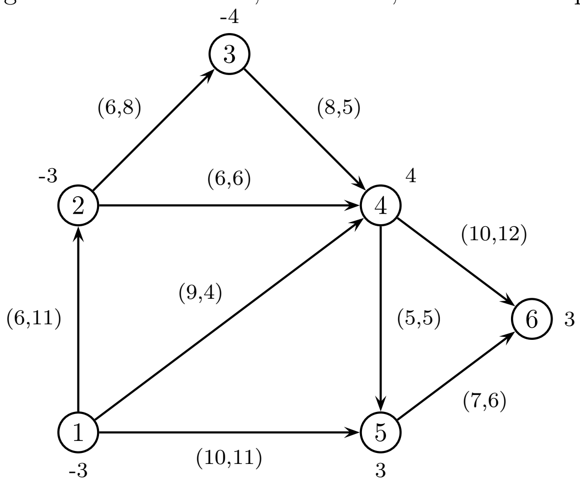
```
c=[-10;-15;-10;-15]

A=[4 4 4 4; 4 2 0 0; 2 5 0 0; 0 0 5 3; 0 0 5 6]          b=[ 120 ; 80; 60; 60; 75]

Aeq=[]                                                   beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                        ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

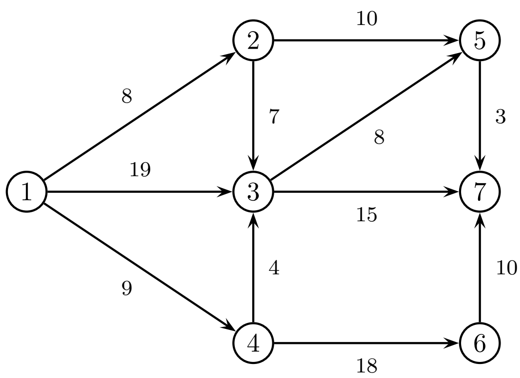


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (5,6)	(2,4)	$x = (-3,\ 0,\ 6,\ -6,\ 6,\ -2,\ 0,\ 0,\ 3)$	NO	NO
(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6)	(1,5)	$\pi = (0,\ 6,\ 12,\ 20,\ 25,\ 32)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

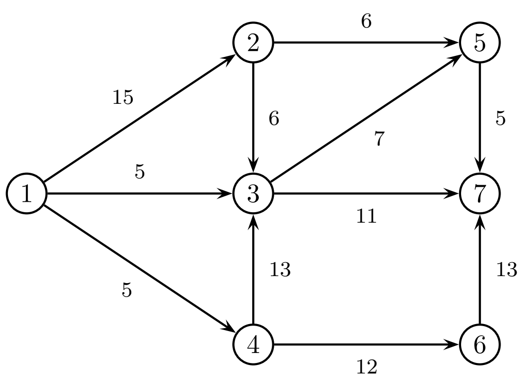
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,4) (4,5) (4,6)	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	$(3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 4,\ 3,\ 3,\ 0)$	$(3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 4,\ 3,\ 3,\ 0)$
π	$(0,\ 6,\ 1,\ 9,\ 14,\ 19)$	$(0,\ 6,\ -3,\ 5,\ 10,\ 15)$
Arco entrante	(1,5)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 0	11 , 3
Arco uscente	(1,4)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		5		7		6	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	19	1	15	2	13	4	13	4	13	4	13	4	13	4
nodo 4	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 5	$+\infty$	-1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	4	27	4	27	4	27	4	27	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	3	21	5	21	5	21	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 3 - 7	6	(6, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 0)	11
1 - 2 - 5 - 7	5	(11, 5, 0, 6, 5, 0, 11, 0, 0, 5, 0)	16
1 - 4 - 6 - 7	5	(11, 5, 5, 6, 5, 0, 11, 0, 5, 5, 5)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 13\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 51 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{51}{7}, 0\right)$ $v_I(P) = 44$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (8, 0)$ $v_S(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $3\,x_1 + 6\,x_2 \geq 22$ ovvero anche $x_1 + 2\,x_2 \geq 8$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 498 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	21	5	13	24	18	22	9
Volumi	233	28	149	81	184	447	492

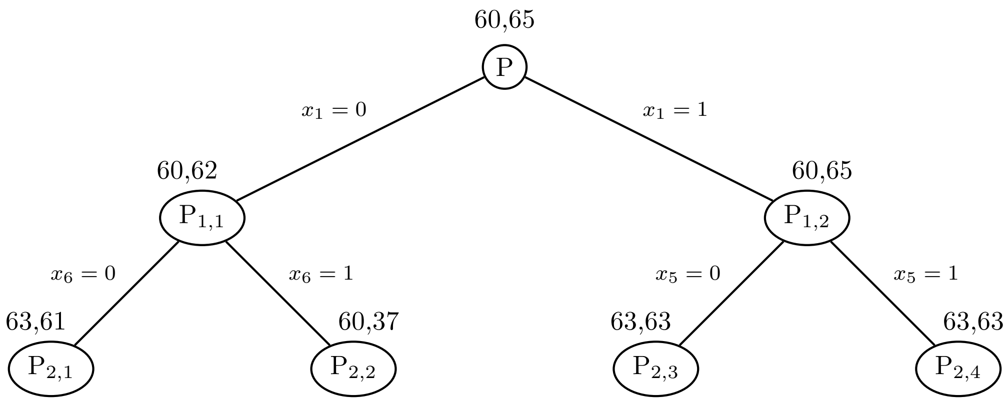
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ $v_I(P) = 60$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{205}{233}, 1, 0, 1, 1, 0, 0\right)$ $v_S(P) = 65$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ valore ottimo $= 63$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 + 3x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 1)$	$(0, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(-3,\ 1)$	$\left(0, -\frac{4}{3}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-3,\ \sqrt{3}\right)$			NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-3,\ -\sqrt{3}\right)$			SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\, x_1^2 + 4\, x_1 x_2 - 4\, x_2^2 + 9\, x_1 - 2\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-3, 4)$, $(-1, 2)$, $(-0, -4)$ e $(-2, -5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$	$(1, -2)$	$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}\right)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right)$