Descrizione statistica del primo ordine

- Fissato un istante t, $X(t)$ rappresenta una variabile aleatoria
  → La sua funzione di distribuzione è detta **funzione di distribuzione del primo ordine** del processo $X(t)$:

$$F_X(x;t) = \Pr\{X(t) \leq x\}$$

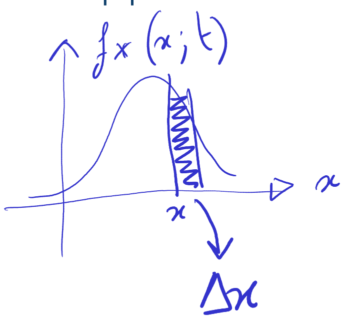
- Naturalmente questa funzione dipende anche da una *variabile temporale* perché le proprietà statistiche della variabile aleatoria $X(t)$ cambiano, in generale, al cambiare dell'istante di tempo t al quale si "campiona" il processo

- Analogamente, si definisce la **funzione densità di probabilità (ddp) del primo ordine** del processo $X(t)$:

$$f_X(x;t) = \frac{\partial F_X(x;t)}{\partial x}$$

Interpretazione di $f_X(x;t)$ in termini di freq. relativa

- Ripetiamo N volte un dato esperimento → In ciascuna prova osserviamo una funzione del tempo x(t) (una *realizzazione*). Otteniamo così N realizzazioni del processo
- Dati due numeri *x* e *t*, se indichiamo con $\Delta n_t(x)$ il numero di realizzazioni per cui si verifica che al tempo *t* il valore della funzione *x*(*t*) è compreso tra *x* ed *x*+Δ*x*, con Δ*x* opportunamente piccolo, si ha:

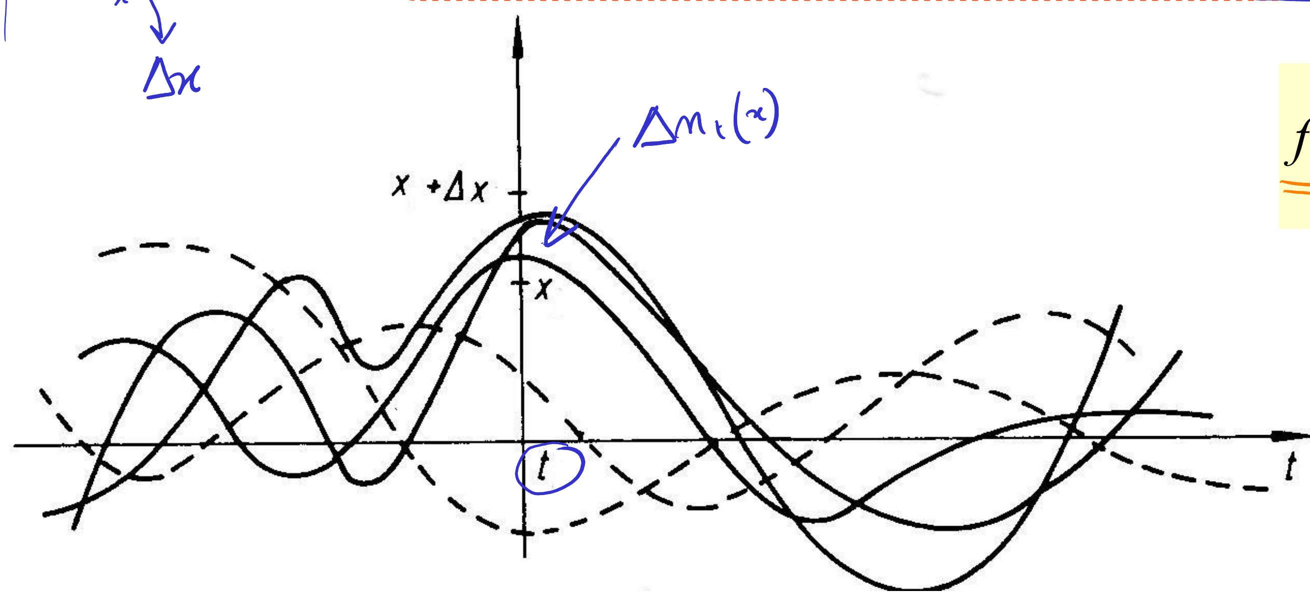


$$f_X(x;t)\Delta x \cong \Pr\{x \le X(t) < x+\Delta x\} = \lim_{N\to\infty}\frac{\Delta n_t(x)}{N}$$

$$f_X(x;t) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}}\frac{\Delta n_t(x)}{N\Delta x}$$

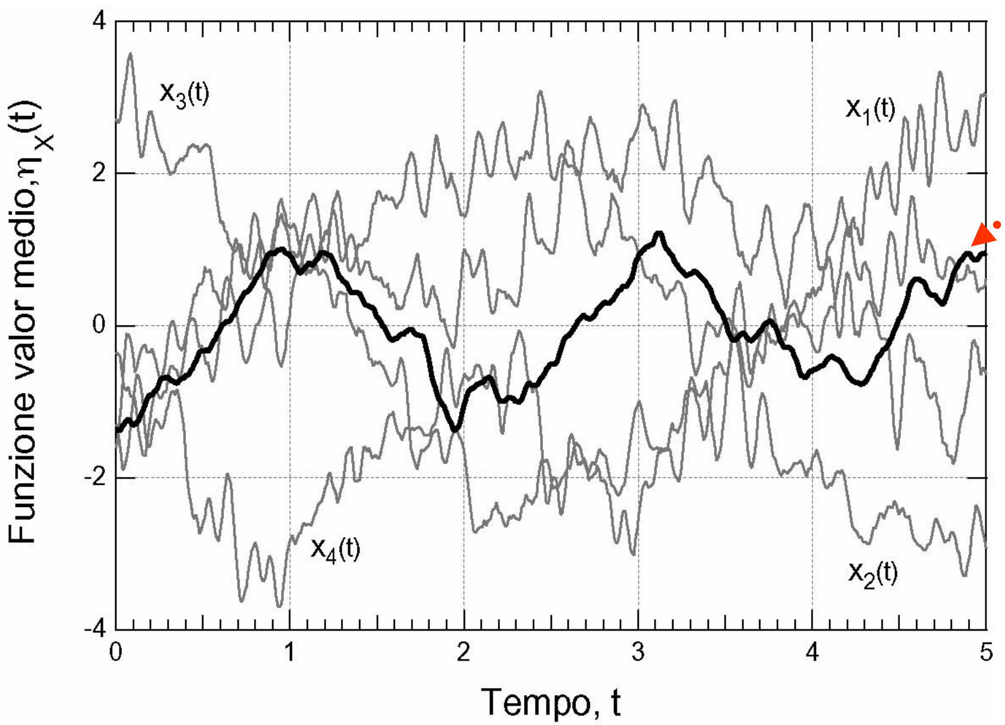
$$\hat{f}_X(x;t) = \frac{\Delta n_t(x)}{N\Delta x}$$

Istogramma (normalizzato)



Descrizione statistica del primo ordine

Indici statistici del primo ordine



Funzione valor medio del processo $X(t)$:

$$\eta_X(t) = E\{X(t)\} = \int x f_X(x;t)\,dx$$

Funzione potenza media statistica (istantanea):

$$P_X(t) = E\{X^2(t)\} = \int x^2 f_X(x;t)\,dx$$

Funzione varianza del processo $X(t)$:

$$\sigma_X^2(t) = E\left\{\left(X(t) - \eta_X(t)\right)^2\right\}$$

$$= \int (x - \eta_X(t))^2 f_X(x;t)\,dx$$

$$= P_X(t) - \eta_X^2(t)$$

In generale sono funzioni del tempo *t*

Nota: non necessariamente $\eta_X(t)$ deve coincidere con una della funzioni campione del processo $X(t)$

Descrizione statistica del primo ordine

$$F_X\left(x;t_1\right)=\Pr\left(\left\{X\left(t_1\right)\leq x\right\}\right)$$

$F_X(x;t_1)$ è sufficiente a caratterizzare le proprietà del processo? NO

Esempio: *Valore di un titolo in borsa*
→ L'andamento del titolo al variare del tempo non è prevedibile
Sia $X(t)$ la quotazione (aleatoria) del titolo: un investitore è interessato alla probabilità di realizzare un utile, cioè alla probabilità dell'evento che la quotazione del titolo all'istante t_2 di vendita sia maggiore della quotazione all'istante t_1 di acquisto:

$$\Pr\left(\left\{X\left(t_2\right)\geq X\left(t_1\right)\right\}\right)$$

Questa probabilità non può essere ricavata dalla funzione $F_X(x;t_1)$ (del primo ordine) perché richiede la considerazione *congiunta* di *due* variabili aleatorie estratte dallo stesso processo *in due istanti distinti*

Descrizione statistica del secondo ordine

Dati due istanti t_1 e t_2, consideriamo le v.a. $X(t_1)$ e $X(t_2)$; la loro funzione di distribuzione congiunta, che dipende in generale da t_1 e t_2, è detta **funzione di distribuzione del secondo ordine** del processo $X(t)$:

$$F_X\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) = \Pr\left\{X\left(t_1\right) \le x_1, X\left(t_2\right) \le x_2\right\}$$

Analogamente, si definisce la **funzione densità di probabilità del secondo ordine** del processo $X(t)$:

$$f_X\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Il ragionamento può essere esteso a piacere → La descrizione statistica di un processo è *completa* solo quando si è in grado di caratterizzare il comportamento statistico *congiunto* di un numero N arbitrario di variabili aleatorie $X(t_1)$, $X(t_2)$,…, $X(t_N)$ estratte da $X(t)$ a N istanti diversi, comunque grande sia l'intero N, e comunque si scelga la N-upla di istanti $(t_1, t_2, \ldots, t_N)$

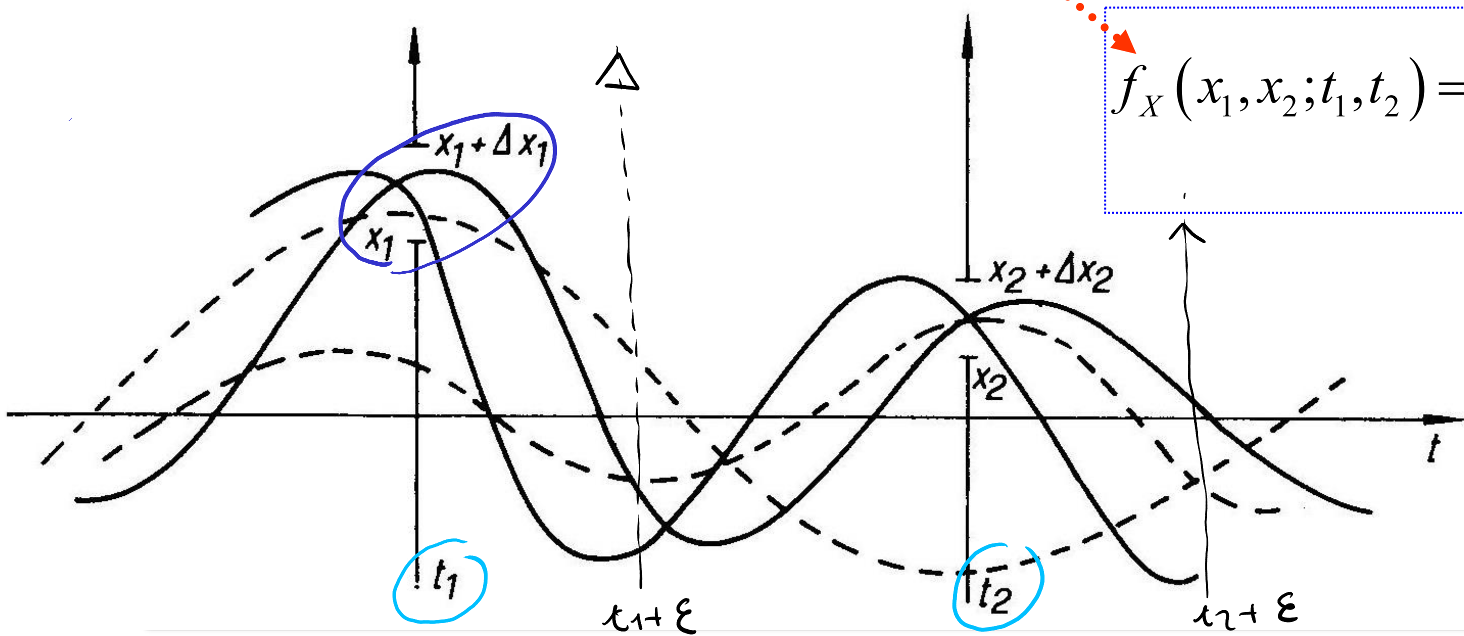
Interpretazione di $f_X(x1,x2;\, t1,t2)$ in termini di frequenza relativa

Indicando con $\Delta n_{t_1 t_2}(x_1,x_2)$ il numero di realizzazioni la cui ampiezza è compresa tra x_1 e $x_1+\Delta x_1$ all'istante t_1 e tra x_2 e $x_2+\Delta x_2$ all'istante t_2, si ha:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,\Delta x_1 \Delta x_2 \cong \Pr\{x_1 \le X(t_1) < x_1+\Delta x_1,\, x_2 \le X(t_2) < x_2+\Delta x_2\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta n_{t_1 t_2}(x_1,x_2)}{N}$$

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2 \to 0\\ N\to\infty}} \frac{\Delta n_{t_1 t_2}(x_1,x_2)}{N \Delta x_1 \Delta x_2}$$



Descrizione statistica del secondo ordine

Indici statistici del secondo ordine: autocorrelazione

- Fissiamo adesso due istanti di tempo arbitrari t_1 e t_2 sul nostro processo $X(t)$, ottenendo le due variabili aleatorie $\boxed{Y=X(t_1)}$ e $\boxed{Z=X(t_2)}$ → E' significativa la correlazione $r_{YZ}=E\{YZ\}$ fra queste due variabili

- Il valore di questa correlazione risulterà *funzione dei due istanti* t_1 e t_2 ai quali le variabili sono state estratte, e potrà essere calcolata solo conoscendo la funzione densità di probabilità *del secondo ordine* del processo:

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\}=\int_{x_1=-\infty}^{+\infty}\int_{x_2=-\infty}^{+\infty} x_1\,x_2\cdot f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

- La funzione $R_X(t_1,t_2)$ si chiama *funzione di autocorrelazione* perché le due variabili aleatorie di cui si calcola la correlazione sono estratte dallo *stesso* processo aleatorio

Descrizione statistica del secondo ordine

Indici statistici del secondo ordine: autocovarianza

- Se invece tra le due variabili aleatorie Y e Z calcoliamo la covarianza otteniamo la *funzione di autocovarianza* $C_X(t_1,t_2)$ di $X(t)$:

$$C_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\eta_X(t_1)]\cdot[X(t_2)-\eta_X(t_2)]\}=$$

$$=\int_{x_1=-\infty}^{+\infty}\int_{x_2=-\infty}^{+\infty}[x_1-\eta_X(t_1)]\cdot[x_2-\eta_X(t_2)]f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$=R_X(t_1,t_2)-\eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$$

$$[x_1\cdot x_2-x_1\cdot\eta_X(t_2)-x_2\,\eta_X(t_1)+\eta_X(t_1)\cdot\eta_X(t_2)]$$

$$\iint$$

$$R_X(t_1,t_2)-\eta_X(t_1)\cdot\eta_X(t_2)-\cancel{\eta_X(t_2)\cdot\eta_X(t_1)}+\cancel{\eta_X(t_1)\cdot\eta_X(t_2)}$$

Nota: ponendo $t_1 = t_2 = t$, l'autocorrelazione e l'autocovarianza si identificano rispettivamente con il valore quadratico medio (potenza media statistica istantanea) e la varianza della v.a. $X(t)$:

$$R_X(t,t)=E\{X^2(t)\}=P_X(t) \qquad C_X(t,t)=E\{[X(t)-\eta_X(t)]^2\}=\sigma_X^2(t)$$

Processo stazionario in senso stretto

$t_1 \to t_1+\varepsilon \quad t_2 \to t_2+\varepsilon \quad t_N \to t_N+\varepsilon$

- Un processo aleatorio si dice ***stazionario in senso stretto*** se il suo comportamento statistico è invariante rispetto ad una traslazione dell'origine dei tempi

- Questo significa che i due processi $X(t)$ e $X(t+\varepsilon)$ hanno le stesse statistiche per ogni valore di ε e per ogni ordine N, ovvero la ddp congiunta soddisfa la seguente relazione:

$$f_X(x_1,\cdots,x_N;t_1,\cdots,t_N) = f_X(x_1,\cdots,x_N;t_1+\varepsilon,\cdots,t_N+\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon, t_1,\cdots,t_N, N$$

- I processi $X(t+\varepsilon)$ ed $X(t)$ si dicono *statisticamente equivalenti*, nel senso che non sono distinguibili tramite la misurazione delle loro statistiche
→ Ovviamente questo non vuol dire che le loro realizzazioni siano uguali

Stazionarietà del primo ordine

- Un processo aleatorio si dice **stazionario di ordine 1** se la densità di probabilità del primo ordine soddisfa la seguente relazione:

$$f_X(x;t) = f_X(x;t+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon, t$$

Questo implica che $f_X(x;t)$ sia indipendente da t:

$$f_X(x;t) = f_X(x)$$

- Il *valor medio*, la *potenza media* e la *varianza* di un processo stazionario (almeno) di ordine 1 sono perciò costanti

$$\eta_X(t) = E\{X(t)\} = \int x f_X(x;t)dx = \int x f_X(x)dx = \eta_X$$

$$P_X(t) = E\{X^2(t)\} = \int x^2 f_X(x;t)dx = \int x^2 f_X(x)dx = P_X$$

$$\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2(t) = P_X - \eta_X^2 = \sigma_X^2$$

INDICI STAT. DEL 1° ORDINE

↓

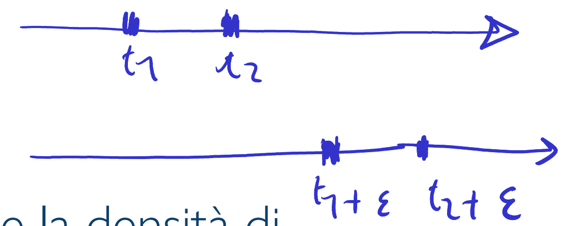
se SSS I°

$\eta_X \cancel{(t)}$

$P_X \cancel{(t)}$

$\sigma_X^2 \cancel{(t)}$

Stazionarietà del secondo ordine



- Un processo aleatorio si dice **stazionario di ordine 2** se la densità di probabilità del secondo ordine soddisfa la seguente relazione:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon, t_1, t_2$$

Questo implica che $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ dipenda solo da $\tau = t_2 - t_1$:

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;0,t_2-t_1) = f_X(x_1,x_2;\tau)$$

$\varepsilon = -t_1$

- Le funzioni di autocorrelazione e autocovarianza di un processo stazionario (almeno) di ordine 2 sono funzione di $\tau = t_2 - t_1$:

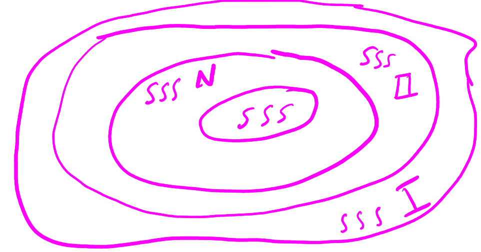
$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)X(t_1+\tau)\}$$

$$= \iint x_1 x_2 f_X(x_1,x_2;\tau)\,dx_1 dx_2 = R_X(\tau) = R_X(t_2-t_1)$$

$\eta_X \cdot \eta_X$

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) = R_X(\tau) - \eta_X^2$$

Stazionarietà di ordine N



N FISSATO
Non ho più N a scelta

- Un processo aleatorio si dice **stazionario di ordine *N***, se la densità di probabilità di ordine *N* soddisfa la seguente relazione:

$$f_X\left(x_1,\cdots x_N;t_1,\cdots,t_N\right)=f_X\left(x_1,\cdots,x_N;t_1+\varepsilon,\cdots,t_N+\varepsilon\right)\qquad\forall\varepsilon,t_1,t_2,\ldots,t_N$$

Questo implica che:

$$f_X\left(x_1,\cdots x_N;t_1,\cdots,t_N\right)=f_X(x_1,\cdots,x_N;\underbrace{t_2-t_1}_{\tau_1},\underbrace{t_3-t_1}_{\tau_2},\cdots,\underbrace{t_N-t_1}_{\tau_{N-1}})$$

- **Un processo stazionario di ordine *N* lo è anche di ogni ordine minore di *N***

→ Ciascuna densità di probabilità di ordine *K*<*N* si può ricavare da quella di ordine *N* mediante le regole marginali, ad esempio:

SSS II → SSS I

$$f_X\left(x_1,\cdots x_{N-1};t_1,\cdots,t_{N-1}\right)=\int f_X\left(x_1,\cdots x_N;t_1,\cdots,t_N\right)dx_N$$

$$=\int f_X\left(x_1,\cdots,x_N;t_1+\varepsilon,\cdots,t_N+\varepsilon\right)dx_N=f_X\left(x_1,\cdots,x_{N-1};t_1+\varepsilon,\cdots,t_{N-1}+\varepsilon\right)$$

$$\forall\varepsilon,t_1,t_2,\ldots,t_{N-1}$$

Processo stazionario in senso lato

- Un processo $X(t)$ si dice **stazionario in senso lato** o **debolmente stazionario** se il suo valore medio è costante e la sua funzione di autocorrelazione dipende soltanto da $\tau = t_2 - t_1$:

$$\eta_X(t) = E\{X(t)\} = \eta_X$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_1)X(t_1+\tau)\} = R_X(\tau)$$

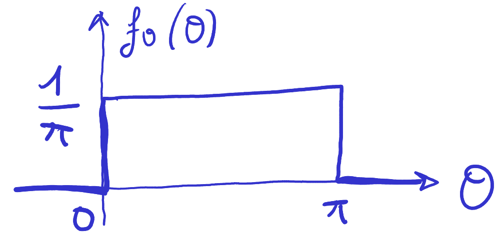
- La stazionarietà in senso lato riguarda soltanto due particolari statistiche del primo e del secondo ordine (quelle coinvolte nell'analisi in potenza)

- La stazionarietà in senso lato è una condizione più debole della stazionarietà di ordine 2 → Se il processo è stazionario di ordine 2 (o maggiore di 2) lo è anche in senso lato, ma non vale in generale il viceversa

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) = R_X(\tau) - {\eta_X}^2 = C_X(\tau)$$

Esercizio 1: processo aleatorio parametrico

- Esempi 9.2-9.3 – Libro LV: sia dato il processo aleatorio parametrico $X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ dove a e f_0 sono noti, e la fase iniziale è una variabile aleatoria $\Theta \in U(0, \pi)$



- $\eta_X(t) = E\{X(t)\} =$

v.a in funzione di Θ

$$E\{a\cdot\cos(2\pi f_0 t+\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta = \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\pi f_0 t+\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a}{\pi}\Big[\sin(2\pi f_0 t+\theta)\Big]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{a}{\pi}\Big(\underbrace{\sin(2\pi f_0 t+\pi)}_{=-\sin(2\pi f_0 t)} - \sin(2\pi f_0 t)\Big)$$

$$\boxed{\eta_X(t) = -2\,\frac{a}{\pi}\cdot\sin(2\pi f_0 t)}$$

- $R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} =$

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\} = E\{a\cdot\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot a\cos(2\pi f_0 t_2+\theta)\}$$

$$= a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2+\theta)\cdot \underline{\underline{f_\theta(\theta)}}\,d\theta$$

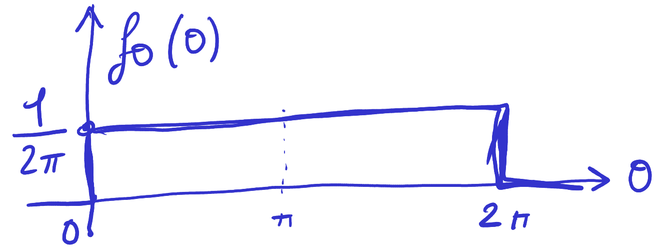
$$= \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2+\theta)\,d\theta \qquad \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$$= \frac{a^2}{\pi\cdot 2}\int_0^{\pi}\Big[\underbrace{\cos\big(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\theta\big)} + \underbrace{\cos\big(2\pi f_0(t_1-t_2)\big)}\Big]\,d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot\cos\big[2\pi f_0(t_1-t_2)\big] = R_X(t_1-t_2)$$

integro cos su un periodo $\Rightarrow \int = 0$

Esercizio 2: processo aleatorio parametrico

- **Esempio 9.5 – Libro LV**: sia dato il processo aleatorio parametrico $X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ dove a e f_0 sono noti, e la fase iniziale è una variabile aleatoria $\Theta \in U(0, 2\pi)$



- $\eta_X(t) = E\{X(t)\} =$

$$= \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta = \boxed{0 = \eta_X}$$

↳ INTEGRO SU UN PERIODO

- $R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)\, d\theta$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 2\Theta) + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\right] d\Theta$$

↳ integro su 2 periodi $\Rightarrow \int = 0$

↳ è costante → $\int$ moltiplica $\times\, 2\pi$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)] = R_X(t_1 - t_2)$$

$X(t)$ SSL

Esercizio 3: processo aleatorio parametrico

- Esempio 9.6 – Libro LV: Consideriamo il processo aleatorio parametrico

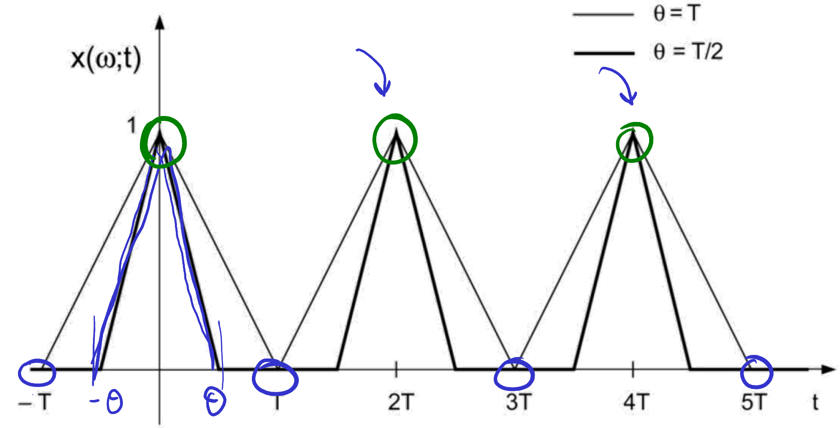
$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(t-2nT)$$

ottenuto attraverso la *periodicizzazione* del segnale aleatorio

$$P(t) = \left(1 - \frac{|t|}{\Theta}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\Theta}\right)$$

2Θ

dove Θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, T]$



- Verifichiamo se $X(t)$ è stazionario in senso lato.

$X(2kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \eta_x(2kT) = 1$

$= 1$

$X(2kT + T) = X[(2k+1)T] = 0 \quad$ NO $\quad \eta_x[(2k+1)T] = 0$

Esercizio 4: processo aleatorio parametrico

- **Esempio 9.8 – Libro LV**: Una situazione che capita spesso è quella in cui l'andamento di un segnale è noto, ma non se ne conosce esattamente la posizione rispetto a un riferimento temporale → Modello appropriato di processo aleatorio è del tipo:

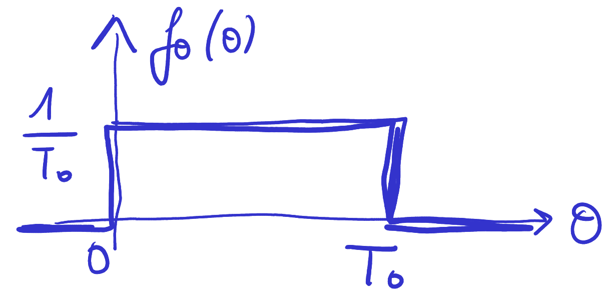
$$X(t) = p(t - \Theta)$$

dove $p(t)$ è un segnale determinato, mentre Θ è una variabile aleatoria che modella l'incertezza temporale sulla posizione del segnale.

- Come caso particolare, supponiamo che $p(t)$ sia un segnale determinato periodico: di periodo T_0

$$p(t) = p(t + T_0)$$

e che Θ sia uniformemente distribuito tra 0 e T_0



- Dimostriamo che $X(t)$ è stazionario in senso lato

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = E\{p(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-\theta)\cdot f_\theta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t-\theta)\,d\theta$$

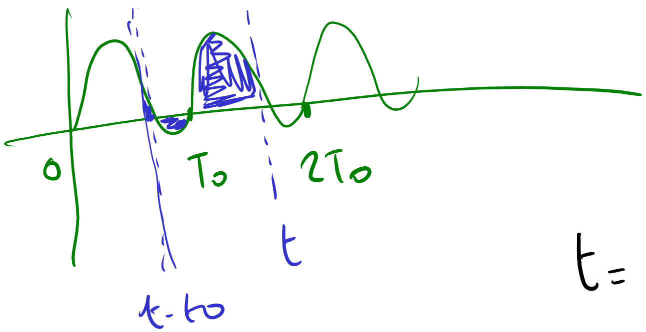
$\alpha = t-\theta$

$d\alpha = -d\theta$

$$= \frac{1}{T_0}\int_t^{t-T_0} p(\alpha)\,[-d\alpha] = \frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} p(\alpha)\,d\alpha$$

→ periodica di periodo T_0

↳ costante ⇒ $\underline{\underline{\eta_x(t) = \eta_x}}$



$$t = \frac{T_0}{2} \rightarrow \eta_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha)\,d\alpha$$

} valor medio temporale del segnale det. e periodico $p(t)$

$$R_x(t_1,t_2) \overset{?}{=} R_x(t_1-t_2)$$

$$E\{X(t_1)\cdot X(t_2)\} = E\{p(t_1-\theta)\cdot p(t_2-\theta)\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t_1-\theta)\cdot p(\underbrace{t_2-\theta}_{t_2-t_1+\alpha})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_1} p(\alpha)\cdot p(\alpha+t_2-t_1)\,d\alpha$$

→ PRODOTTO DI 2 FUNZ PERIODICHE IN T_0 → periodica in T_0

$\alpha = t_1-\theta \rightarrow d\alpha = -d\theta$

Scelgo $t_1 = \frac{T_0}{2}$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha) \cdot p[\alpha - (t_1 - t_2)] \, d\alpha = R_x(t_1 - t_2)$$

$X(t)$ è SSL

$\tau = t_1 - t_2$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha) \cdot p(\alpha - \tau) \, d\alpha \longrightarrow$$

funzione di autocorrelazione del segnale determinato e periodico di periodo T_0 $p(t)$

Proprietà della funzione di autocorrelazione

- **Proprietà 1**. L'ACF di un processo reale, stazionario almeno in senso lato, è una funzione reale e pari:

SSL

$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

$$\boxed{t' = t + \tau}$$

$$\underbrace{R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\}} = E\{X(t'-\tau)X(t')\}$$
$$= E\{X(t')X(t'-\tau)\} = R_X(-\tau)$$

$$R_X(0) = E\left\{X^2(t)\right\} = P_X \geq 0$$

✓ $R_X(0)$ viene detta **potenza media statistica (istantanea)** del processo $X(t)$: se consideriamo il processo $X(t)$ come l'insieme delle funzioni campione che rappresentano la tensione applicata ai capi di una resistenza unitaria, $x^2(t, \omega)$ è la potenza istantanea dissipata dalla realizzazione associata al risultato ω dell'esperimento casuale

→ Perciò il valore quadratico medio $R_X(t,t)=E\{X^2(t)\}$ fornisce il valore medio (statistico) della potenza dissipata sulla resistenza unitaria all'istante t

✓ Se il processo è stazionario almeno in senso lato, $R_X(t,t) = R_X(0) = \textit{costante}$ è la potenza media dissipata in qualunque istante

Proprietà della funzione di autocorrelazione

- **Proprietà 2**. L'ACF di un processo stazionario (almeno) in senso lato (s.s.l.) assume il valore max nell'origine:

$$|R_X(\tau)| \le R_X(0)$$

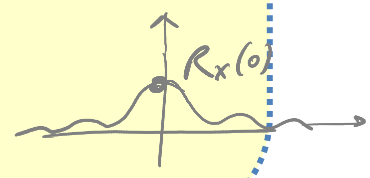
$E\{X^2(0)\} = R_x(0)$

$\pm 2R_x(\tau)$

$$E\{[X(t+\tau) \pm X(t)]^2\} \ge 0$$

$$E\{[X(t+\tau) \pm X(t)]^2\} = E\{X^2(t+\tau)\} + E\{X^2(t)\} \pm 2E\{X(t)X(t+\tau)\}$$

$$= 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \ge 0$$



Da cui si ricava $\pm R_X(\tau) \le R_X(0) \quad \Rightarrow \quad |R_X(\tau)| \le R_X(0)$

- **Proprietà 3**. Se un processo casuale $X(t)$ contiene una componente periodica $\boxed{X(t) = X(t+T_0)}$, anche l'ACF contiene una componente periodica dello stesso periodo T_0

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = E\{X(t)X(t+\tau+T_0)\} = R_X(\tau+T_0)$$

Proprietà della funzione di autocorrelazione

- **Proprietà 4**. Se l'ACF di di un processo s.s.l. non contiene componenti periodiche, vale:

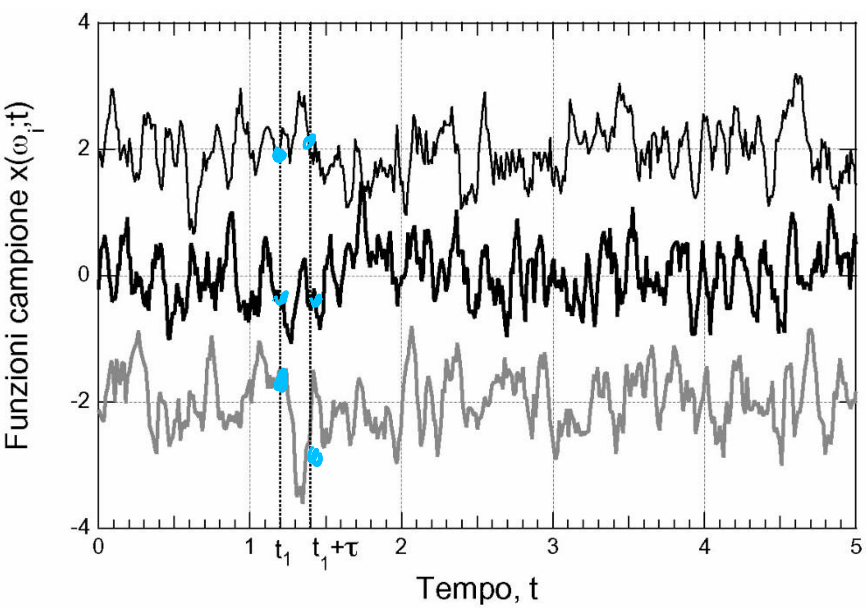
$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\left[C_X(\tau)+\eta_X^2\right] = \lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau)+\eta_X^2 = \eta_X^2$$

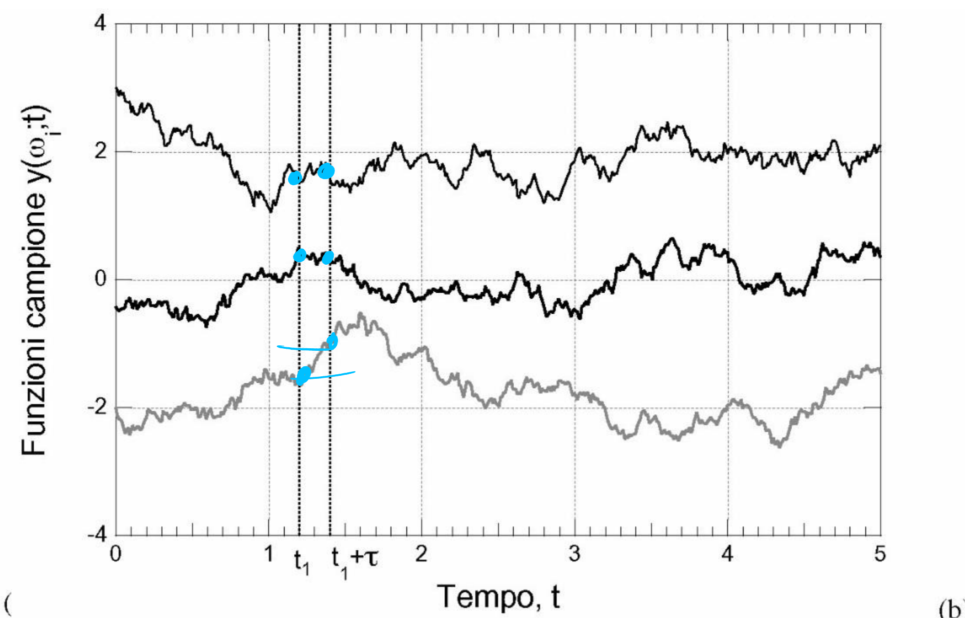
- Al crescere di τ, la distanza tra gli istanti t e $t - \tau$ aumenta e quindi le funzioni campione del processo «hanno tempo» per variare sensibilmente → I valori delle v.a. $X(t)$ e $X(t - \tau)$ tendono a diventare incorrelati, cioè la loro covarianza $C_X(\tau)$ si riduce progressivamente
- Al limite, quando $\tau \to \infty$ la covarianza si annulla e la funzione di autocorrelazione tende a coincidere con il quadrato del valor medio

Se $\eta_X = 0 \rightarrow \lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0$

ACF vs. velocità di variazione delle realizzazioni

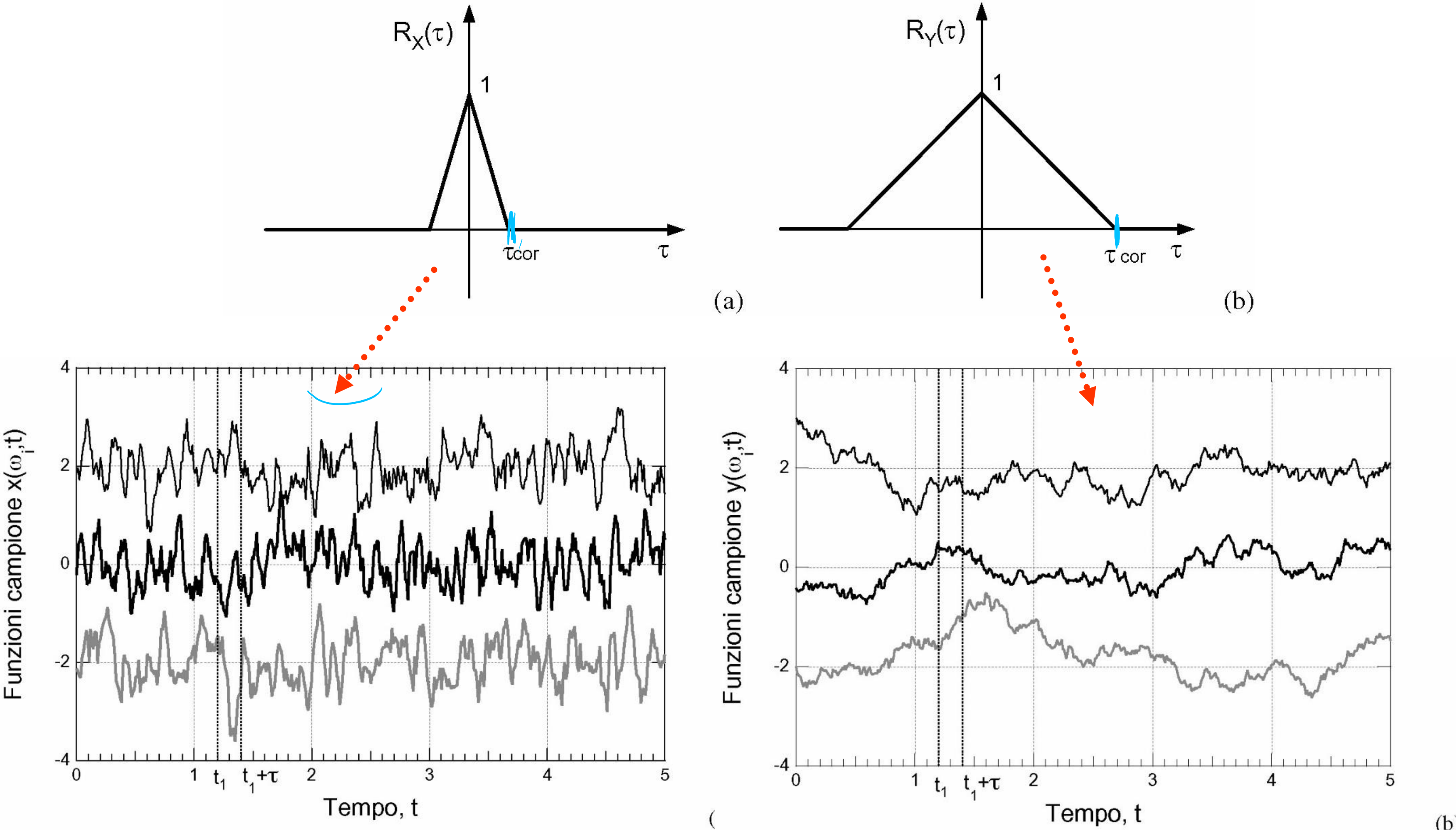
- I due insiemi di funzioni campione sono relativi a due diversi processi stazionari, rispettivamente $X(t)$ e $Y(t)$, aventi stesse statistiche del primo ordine (valor medio nullo, potenza, densità del primo ordine)
- Evidentemente, però, i due processi differiscono parecchio nella rispettiva *velocità media di variazione* delle funzioni campione → La funzione di autocorrelazione misura la *rapidità di variazione* del segnale aleatorio
- Per quantificare con un singolo parametro la "velocità" del segnale si introduce il *tempo di correlazione* τ_{cor}, definito come la minima distanza che deve intercorrere tra due istanti di osservazione affinché le variabili aleatorie estratte dal processo siano incorrelate



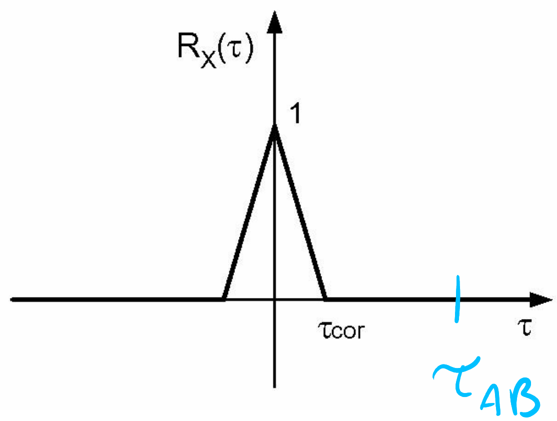


ACF vs. velocità di variazione delle realizzazioni

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\}$$



ACF vs. velocità di variazione delle realizzazioni



- Estraggo due v.a. A e B rispettivamente ai tempi t_A e t_B che distano temporalmente $\boldsymbol{t_A - t_B = \tau_{AB} > \tau_{cor}}$

- $C_{AB} = \mathrm{E}\{AB\} = R_X(t_A, t_B) = R_X(t_A - t_B) = R_X(\tau_{AB}) = 0$

Valor medio nullo

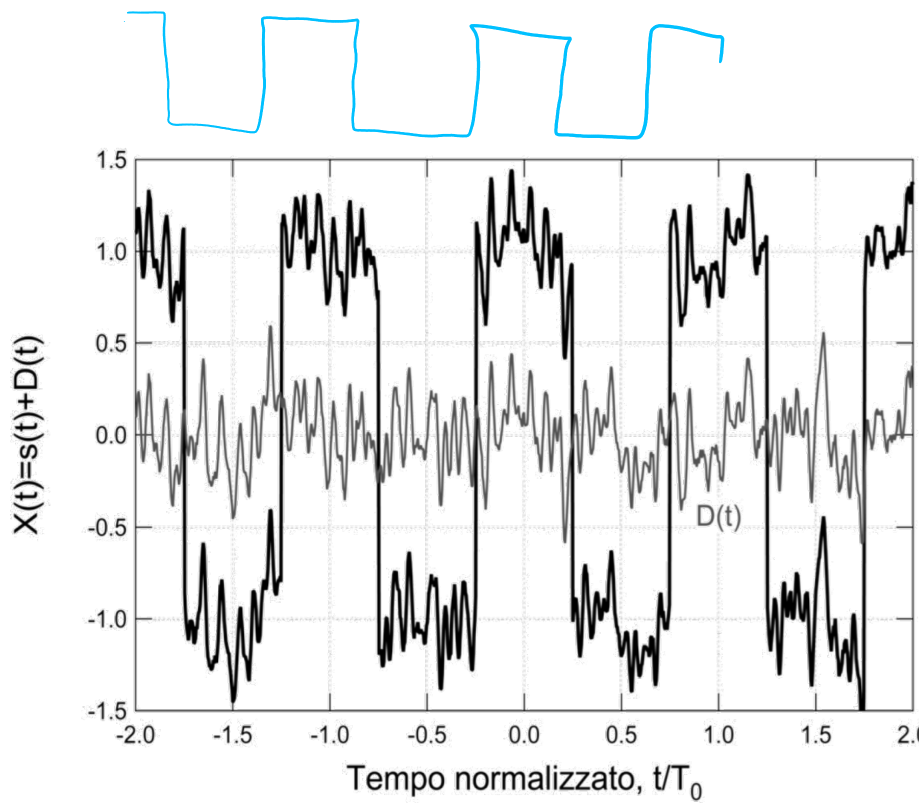
Relazione ingresso-uscita tra le statistiche semplificate

- Un caso tipico dell'elaborazione dei segnali è quello in cui l'osservato $X(t)$ è dato da una componente determinata $s(t)$ (il segnale "utile") accompagnata da un *disturbo* aleatorio a valor medio nullo $D(t)$ (chiamato anche *rumore*):

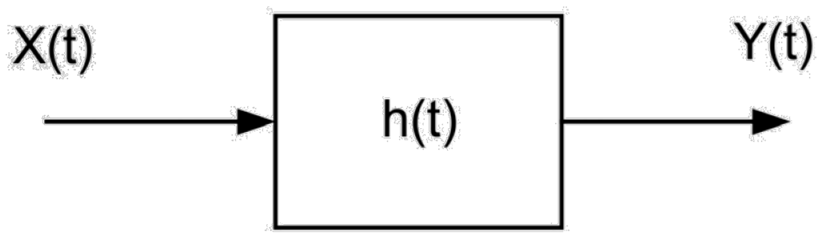
$$X(t)=\underline{s(t)}+D(t)$$

- Naturalmente, cerchiamo di elaborare $X(t)$ in modo da preservare la componente utile $s(t)$ e reiettare il più possibile il disturbo $D(t)$

- Questa operazione può essere effettuata da un *filtro*, cioè da un sistema lineare stazionario il cui comportamento riguardo ai segnali determinati è perfettamente noto



Filtraggio di un processo aleatorio con un SLS



- Inviamo un generico processo aleatorio $X(t)$ in ingresso ad un sistema lineare stazionario, e cerchiamo di stabilire le *caratteristiche statistiche* del processo aleatorio di uscita $Y(t)$, note quelle di $X(t)$
- Il segnale di uscita $Y(t)$ è un *nuovo* processo le cui funzioni campione possono essere facilmente messe in corrispondenza con i risultati dell'esperimento che ha generato $X(t)$:

$$y(\bar{\omega};t) = x(\bar{\omega};t;) \otimes h(t)$$

dove $h(t)$ è la risposta impulsiva del sistema in esame

- Questo risultato vale per qualunque realizzazione del processo $X(t)$, quindi, per riassumere:

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$