Esame di Ricerca Operativa del 17/02/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -2\,x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3\,x_2 \leq 9 \\ 4\,x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 13 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce tre tipi di piastrelle (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascuna materia prima richiesta per produrre una piastrella e la quantità massima (in Kg) di ciascuna materia prima che si può acquistare mensilmente:

	M1	M2	M3
P1	0.3	0.7	0.4
P2	0.4	0.2	0.3
P3	0.3	0.1	0.2
quantità massima	3000	1800	4000

Nella tabella sono riportate le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita e le quantità minime da produrre:

	P1	P2	P3
ore lavorative	1	0.8	0.5
prezzo di vendita	26	20	14
quantità minime	1100	2000	1200

Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della piastrella P1 non deve superare il 35% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le piastrelle fabbricate.

modello:

COMANDI DI MATLAB

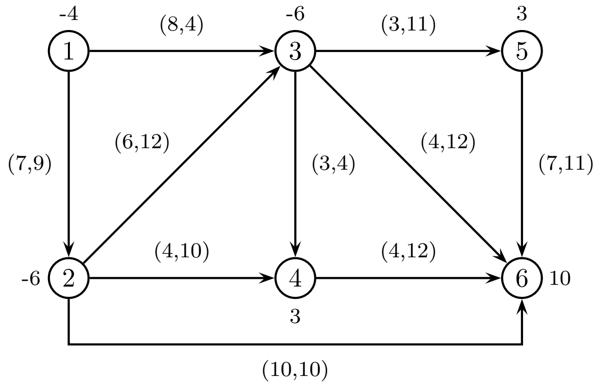
```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

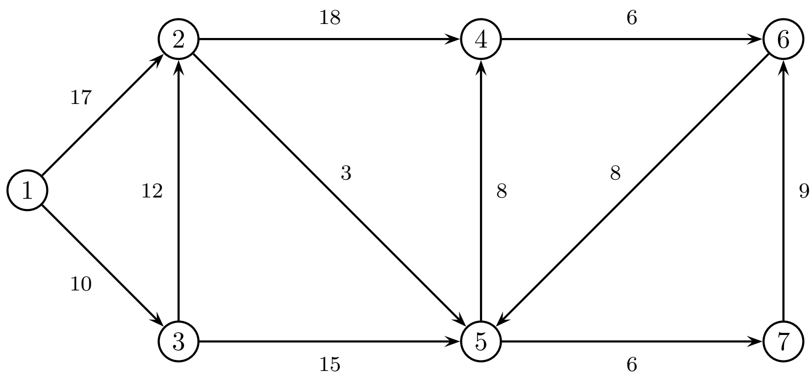


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(1,2)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

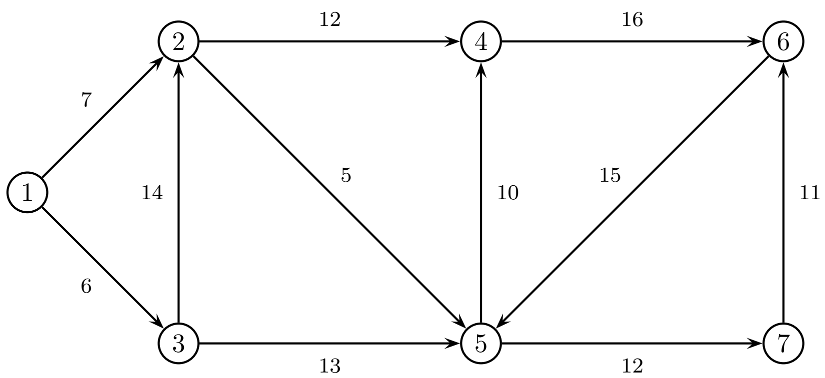
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	
Archi di U	(2,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 41 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	54	6	57	21
2		13	58	55
3			14	29
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{13}, x_{14}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 16 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\ x_1^2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-5, 3)$, $(2, 1)$, $(1, -4)$ e $(-4, -4)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 3\ x_2 \le 9 \\ 4\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 4 \\ 2\ x_1 + 2\ x_2 \le 13 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-4,\ 0)$	SI	NO
$\{5,\ 6\}$	$y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{17}{4},\ -\frac{19}{8}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(0,\ 3)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{44}{13},\ \frac{15}{13},\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{91}{3},\ 13$	5
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(1,\ -1)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{19}{7},\ \frac{44}{7},\ 0\right)$	4	7	2

Esercizio 3.

variabili decisionali: x_i = numero di piastrelle di tipo i prodotte, con $i = 1, 2, 3$.

modello:
$$\begin{cases} \max\ 26\ x_1 + 20\ x_2 + 14\ x_3 \\ 0.3\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.3\ x_3 \le 3000 \\ 0.7\ x_1 + 0.2\ x_2 + 0.1\ x_3 \le 1800 \\ 0.4\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.2\ x_3 \le 4000 \\ x_1 \le 0.3\ (x_1 + 0.8\ x_2 + 0.5\ x_3) \\ x_1 \ge 1100 \\ x_2 \ge 2000 \\ x_3 \ge 1200 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

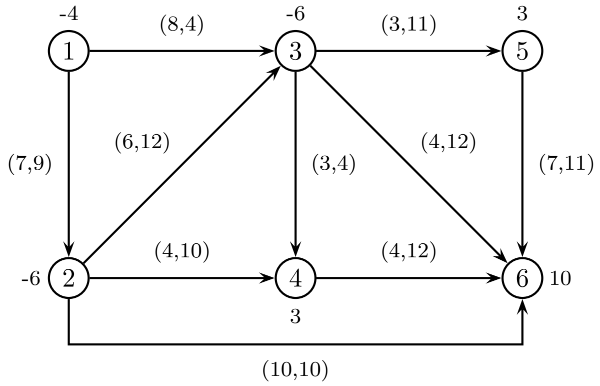
```
c=-[24;20;12]

A=[0.3 0.4 0.3;0.7 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.65 -0.28 -0.175]      b=[3000;1800;4000;0]

Aeq=[]                                                          beq=[]

lb=[1100; 2000; 1200]                                           ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

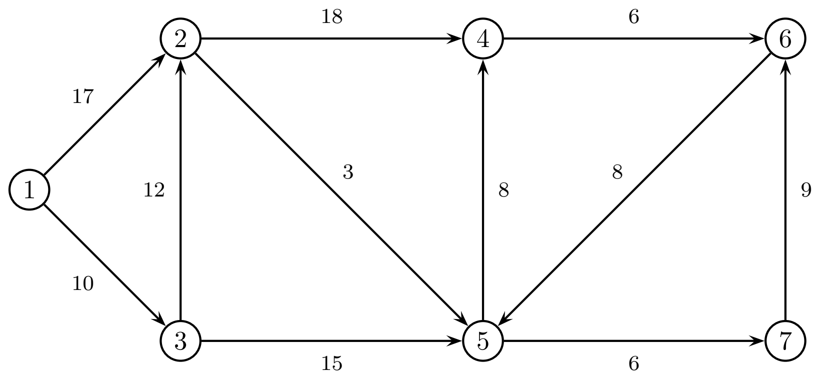


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(1,2)	$x = (9,\ -5,\ 0,\ 15,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 13,\ -3)$	NO	NO
(1,2) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6)	(2,3)	$\pi = (0,\ 7,\ 8,\ 11,\ 8,\ 15)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

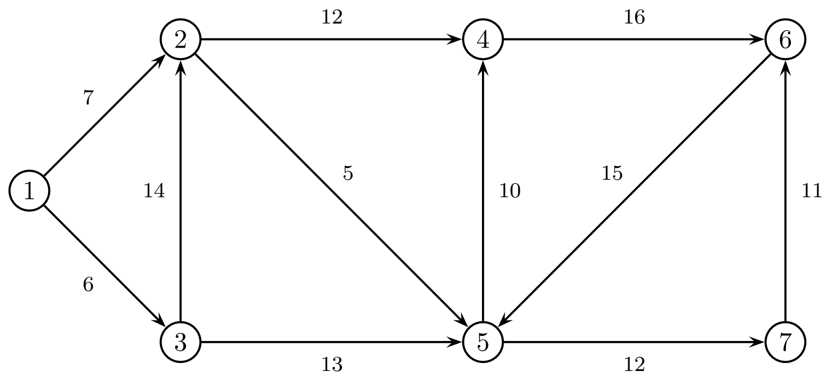
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,3) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)
Archi di U	(2,6)	
x	(4, 0, 0, 0, 10, 3, 3, 0, 0, 0)	(0, 4, 0, 0, 6, 3, 3, 4, 0, 0)
π	(0, 7, 8, 11, 11, 12)	(0, 2, 8, 11, 11, 12)
Arco entrante	(2,6)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 4	8 , 3
Arco uscente	(1,2)	(3,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		7		4		6	
nodo 2	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1
nodo 3	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	2	28	5	28	5	28	5	28	5
nodo 5	$+\infty$	-1	25	3	20	2	20	2	20	2	20	2	20	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	7	34	4	34	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	5	26	5	26	5	26	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	6	(5, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	1	(6, 6, 1, 5, 0, 6, 1, 0, 12, 1, 0)	12

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 41 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{41}{13}\right)$ $v_I(P) = 16$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 4)$ $v_S(P) = 20$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $8\,x_1 + 6\,x_2 \geq 19$
$r = 4$ $10\,x_1 + 7\,x_2 \geq 23$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	54	6	57	21
2		13	58	55
3			14	29
4				22

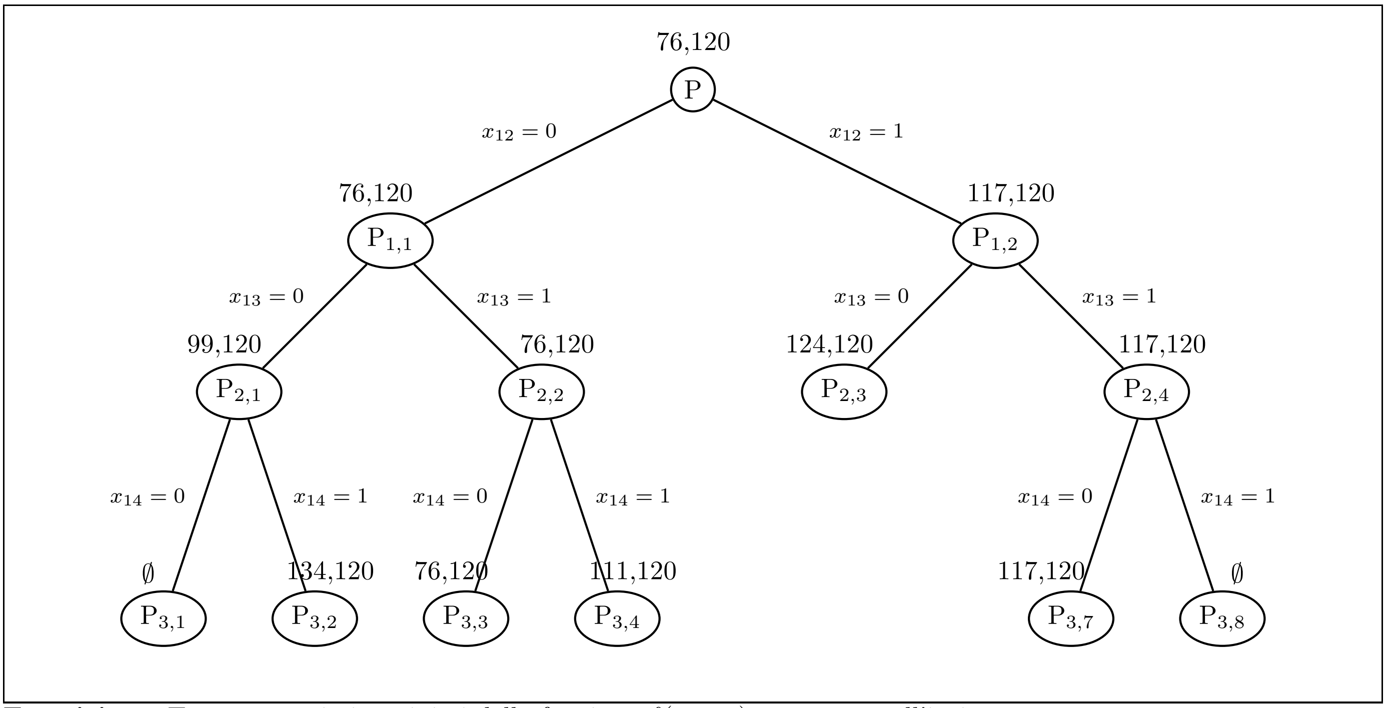
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $v_I(P) = 76$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 1 - 5 - 4 - 2$ $v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{13}, x_{14}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$	*cerchio* $\cap$ *iperbole*		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$	*cerchio* $\cap$ *iperbole*		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$	*cerchio* $\cap$ *iperbole*		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$	*cerchio* $\cap$ *iperbole*		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$	$\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1^2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-5, 3)$, $(2, 1)$, $(1, -4)$ e $(-4, -4)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$	$\frac{49}{3}\,x_1 - \frac{80}{3}\,x_2$	(-5 ,3)	$\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$	1	$(-5, 3)$