ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 15

Note Title 16/10/2018

SOMMA DI SOTTOSPAZI
SOMMA DIRETTA
FORMULA DI GRASSMANN

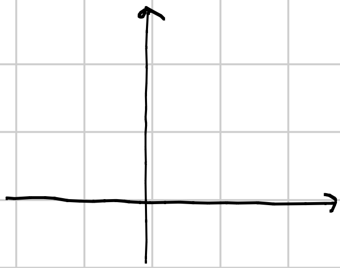
Sia X uno spazio vettoriale, e siano V e W due sottospazi.

Riscaldamento: $V \cap W$ e $V \cup W$ sono ancora sottospazi?

$\boxed{V \cap W \text{ SI}}$ $\quad v_1 \in V \cap W \quad v_2 \in V \cap W \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \in V \quad v_2 \in V \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in V \\ v_1 \in W \quad v_2 \in W \rightsquigarrow v_1 + v_2 \in W \end{array}\right\} v_1 + v_2 \in V \cap W \rightsquigarrow \text{chiuso risp. alla somma}$$

$$\begin{array}{l} v \in V \rightsquigarrow \alpha v \in V \\ v \in W \rightsquigarrow \alpha v \in W \end{array} \rightsquigarrow \alpha v \in V \cap W$$



L'unione $V \cup W$ in generale non è un sottospazio. In $\mathbb{R}^2$
- l'asse x e l'asse y sono s.sp., ma la loro unione non lo è (non è chiusa risp. alla somma)

Def. (Somma di sottospazi)
Siano V e W due sottospazi di uno sp. vett. X.
Allora si pone

$$V + W = \{ v + w \in X : v \in V, \; w \in W \}$$

Prop. $V+W$ è un sottospazio

Dim. (1) Prendo due elementi di $V+W$: v_1+w_1 e v_2+w_2
La loro somma è
$$v_1+w_1+v_2+w_2 = \underbrace{(v_1+v_2)}_{\in V}+\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W} \in V+W$$

(2) Prendo $v+w \in V+W$. Prendo $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$a(v+w) = \underbrace{av}_{\in V}+\underbrace{aw}_{\in W} \in V+W.$$

— o — o —

Def. La somma $V+W$ si dice somma diretta e si scrive

$$V \oplus W$$

se in aggiunta $V \cap W = \{0\}$ (minimo sindacale)

Prop. Supponiamo che $V\cap W = \{0\}$. Allora ogni vettore in $V \oplus W$ si scrive in modo unico nella forma $v+w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

Dim. Supponiamo che un elemento si scriva in due modi

$v_1+w_1 = v_2+w_2$. Allora

$$\underbrace{v_1-v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2-w_1}_{\in W} \in V\cap W$$

Essendo l'unico elemento comune lo 0, allora per forza

$v_1-v_2=0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1=v_2$
$w_2-w_1=0 \quad \rightsquigarrow \quad w_1=w_2$

— o — o —

Formula di GRASSMANN

Siano V e W due sottospazi di uno spazio vett. X. Allora

$$\boxed{\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W}$$

Corollario Se la somma è diretta, allora

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

Dim. Poniamo

$$\dim(V \cap W) = k$$
$$\dim(V) = k+m$$
$$\dim(W) = k+n$$

La tesi equivale a dim che

$$\dim(V+W) = k+m+n$$

Sia $e_1, \dots, e_k$ una base di $V \cap W$

Posso completarla ad una base di V aggiungendo m vettori

$$e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_m \quad \text{base di } V$$

Analogamente, posso completarla ad una base di W aggiungendo n elementi

$$e_1, \dots, e_k, w_1, \dots, w_n \quad \text{base di } W$$

Dico che

$$e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \quad \text{sono una base di } V+W$$

Se lo dim. ho finito perché è il numero che volevo.

- Sono generatori. Ogni elemento di $V+W$ è

$$
\begin{aligned}
v+w &= a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1v_1+\dots+b_mv_m \quad \rightsquigarrow v\\
&\quad +c_1e_1+\dots+c_ke_k+d_1w_1+\dots+d_nw_n \quad \rightsquigarrow w\\
&= \text{comb. lin. degli } k+m+n \text{ elementi}
\end{aligned}
$$

- Sono lin. indip. Supponiamo che non lo siano.
Prendiamo una comb. lin. nulla

$$a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1v_1+\dots+b_mv_m+c_1w_1+\dots+c_nw_n=0$$

Porto tutti i w a destra

$$\underbrace{a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1v_1+\dots+b_mv_m}_{\in V}=\underbrace{-c_1w_1-\dots-c_nw_n}_{\in W} \quad (*)$$

Quindi il vettore a destra sta nell'intersezione (e anche quello a sx, ma non ci interessa). Se sta in $V\cap W$, è comb. lin. di $e_1,\dots,e_k$, quindi

$$-c_1w_1-\dots-c_nw_n=d_1e_1+\dots+d_ke_k$$

Se a dx e/o a sx ci fosse un coeff. non nullo, allora i vettori $e_1,\dots,e_k,w_1,\dots,w_n$ sarebbero lin. dip., il che non è possibile perché sono una base di W.
Quindi in particolare tutti i $c_i\equiv 0$.
Ma allora a dx della $(*)$ ho 0 e quindi ho 0 anche a sx. Ma poiché $e_1,\dots,e_k,v_1,\dots,v_m$ sono una base di V, questo è possibile solo se tutti i coeff. sono nulli

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Siano V e W due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dim. 2
(cioè due piani passanti per l'origine)

- Può essere una somma diretta $V \oplus W$?
- Cosa può essere l'intersezione $V \cap W$?

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(V)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(W)}$$

può essere solo
2 oppure 3
(è $\geq \dim V$ e
$\leq \dim \mathbb{R}^3$)

Di conseguenza → se $\dim(V+W) = 3$, allora $\dim(V \cap W) = 1$
(i due piani si intersecano in una retta)
→ se $\dim(V+W) = 2$, allora $\dim(V \cap W) = 2$
(i due piani coincidono, quindi
$V = W = V \cap W = V + W$)

<u>Esempio 2</u> $X = \mathbb{R}^{15}$ $\dim(V) = 7$ $\dim(W) = 9$

Può essere somma diretta ?

No! se lo fosse avrei $\dim(V \cap W) = 0$, quindi

$$\dim(V+W) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 7}}{\dim(V)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 9}}{\dim(W)} = 16$$

Ma $\dim(V+W)$ al massimo è 15, quindi è impossibile.

—o —o —

Esempio 3 $\quad X = \mathbb{R}^3$

$V = \text{span}((0,1,2))$ retta

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x+y-3z=0\}$ piano

Dimostrare che $W \oplus V = \mathbb{R}^3$, e scrivere le componenti di $(1,2,3)$ rispetto a V e W.

Per dimostrare che la somma è diretta devo mostrare che $V \cap W = \{0\}$.

Gli elementi di V sono del tipo $(0, a, 2a)$ con $a \in \mathbb{R}$

Possono stare in W?

$$x+y-3z = a-6a = 0$$

il che è possibile solo se $a=0$.

Quindi la somma è diretta e $V+W = \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\dim(V+W)}_{= 3} = \underbrace{\dim V}_{= 1} + \underbrace{\dim V}_{= 2}$$

Chi è una base di W? $\qquad x+y-3z=0$

$(3,0,1) = w_1 \qquad (0,3,1) = w_2$

Si vede che sono lin. indip.

So che $(3,0,1)$, $(0,3,1)$ e $(0,1,2)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ quindi ogni vettore è loro comb. lineare.

Quindi

$$(1,2,3) = \underbrace{a(3,0,1)+b(0,3,1)}_{\in W} + \underbrace{c(0,1,2)}_{\in V}$$

Per trovare a,b,c basta risolvere un sistema.

[Interpretazione geom. nel video]

— o — o —