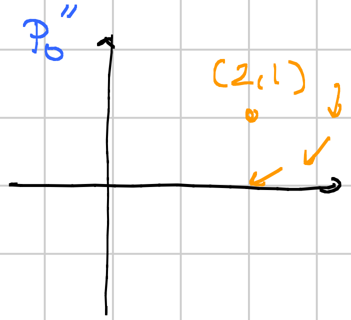
ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 54

Titolo nota 11/12/2018

Esercizio 1 Scrivere l'espressione della rotazione di 45° in verso ORARIO rispetto al punto (2,1)

Solito schema



$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ ruoto $\rightsquigarrow$ aggiungo P_0

Rotazione di 45° orario rispetto all'origine

$$\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

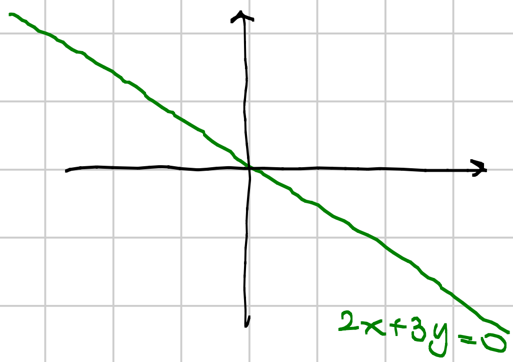
$$(x,y) \underset{\text{tolgo } P_0}{\rightsquigarrow} (x-2, y-1) \underset{\text{ruoto}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aggiungo nuovamente (2,1)

$$(x,y) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

Esercizio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $2x+3y=0$



Idea: v_1 che sta sulla retta va in v_1

$v_2 \perp$ alla retta va in $-v_2$

$v_1 = (-3,2)$ retta $= \mathrm{Span}(v_1)$

$v_2 = (2,3)$

Mi serve l'applicazione lineare $f(x,y)$ t.c.

$f(-3,2) = (-3,2)$ $\qquad f(v_1) = v_1$

$f(2,3) = (-2,-3)$ $\qquad f(v_2) = -v_2$

Questo lo posso fare in tanti modi

→ bovino: matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ incognita

→ metodo Rapuano

→ cambi di base

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{dalla } \{v_1, v_2\} \text{ alla canonica}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice nella base } \{v_1, v_2\}} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

dalla canonica alla $\{v_1, v_2\}$

$$-\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

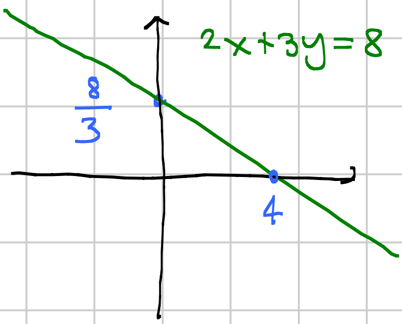
Matrice ortogonale del 2° tipo

[I segni sono stati corretti dopo il video]

$$f(x,y) = \left(+\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y, -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y\right)$$

[Verificare che qualche vettore vada dove deve]

Esercizio 3 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $2x+3y=8$



Cerco di spostare il problema nell'origine.

Scelgo P_0 sulla retta e poi come sempre

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quella di prima}}}{A}(P-P_0) \rightsquigarrow A(P-P_0) + P_0$$

Scelgo $P_0 = (4,0)$ e quindi

$$(x,y) \xrightarrow{\text{tolgo } P_0} (x-4,y) \xrightarrow{\text{simm.}} \left(+\frac{5}{13}x - \frac{20}{13} - \frac{12}{13}y, \frac{-12}{13}x + \frac{48}{13} - \frac{5}{13}y\right)$$

$$\xrightarrow{\text{aggiungo } P_0} \left(+\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{20}{13} + 4, -\frac{12}{13}x + \frac{48}{13} - \frac{5}{13}y\right)$$

[i segni sono stati cambiati dopo il video]

Esercizio 4 Scrivere la rotazione di $90°$ antiorario rispetto al punto $\underbrace{(-1,5)}_{P_0}$

La rotazione antioraria di $90°$ ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solita tecnica

$$(x,y) \xrightarrow{\text{tolgo } P_0} (x+1, y-5) \xrightarrow{\text{ruoto}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+5 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

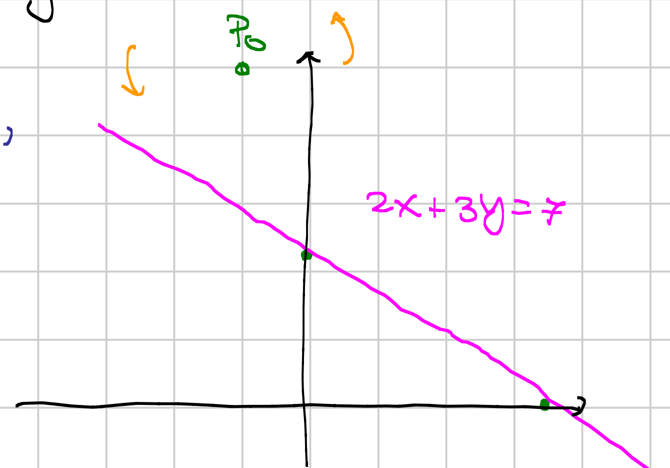
$$\xrightarrow{\text{aggiungo } P_0} (-y+5, x+1) + (-1,5) = (-y+4, x+6)$$

Conclusione $f(x,y) = (-y+4, x+6)$

Controllo pto fisso $(-1,5) \rightsquigarrow (-1,5)$

Esercizio 5 Nell'esercizio precedente, determinare l'immagine della retta $2x+3y=7$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Prendo P_1 e P_2 sulla retta, calcolo la loro immagine $f(P_1)$ e $f(P_2)$ usando f e poi scrivo la retta per $f(P_1)$ e $f(P_2)$



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo la retta in parametrica, tipo

$$\underbrace{\left(\tfrac{7}{2}, 0\right)}_{\text{p.to qualunque}} + t \underbrace{(-3, 2)}_{\substack{\text{vettore direzione} \\ \text{della retta}}}$$

La retta immagine avrà

- $f\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ come p.to base $\left(4, \frac{7}{2}+6\right) = \left(4, \frac{19}{2}\right)$
- come direzione il solo ruotato di $(-3,2)$, quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nuova retta in parametrica sarà

$$\left(4, \tfrac{19}{2}\right) + t(-2, -3)$$

A questo punto se serve passo in cartesiana

<u>Esercizio 6</u> Sempre con la stessa trasformazione, determinare la retta che, una volta ruotata, diventa la retta $y = x$

Ricordiamo che la trasformazione è
$$f(x,y) = (-y+4, x+6)$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ La retta richiesta è la rotazione di 90° ORARIA della retta $y = x$ intorno al solito p.to.
$\rightsquigarrow$ Devo scrivere questa nuova trasformazione

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Determino 2 p.ti P_1 e P_2 sulla retta $y = x$, ad esempio $P_1 = (1,1)$ $P_2 = (0,0)$
e cerco Q_1 e Q_2 tali che
$$f(Q_1) = (1,1) \qquad f(Q_2) = (0,0)$$

La retta richiesta è quindi la retta per Q_1 e Q_2

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Riscrivo la trasformazione

$$f(x,y) = (-y+4,\ x+6)$$

e osservo che sono interessato ai p.ti le cui immagini hanno le 2 coordinate uguali, quindi

$$-y+4 = x+6$$

cioè

$$\boxed{x+y+2=0} \quad \text{retta richiesta}$$

<u>Oss.</u> Se la retta richiesta fosse stata $3x+2y=7$, bastava imporre

$$3(-y+4)+2(x+6)=7 \quad \rightsquigarrow \quad 2x-3y+17=0$$

<u>Oss.</u> Quando si tratta di fare immagine/controimmagine di rette

→ le rappresentazioni parametriche vanno bene AVANTI

→ " " cartesiane " " INDIETRO

<u>Esercizio 7</u> Cosa succede se faccio una rotazione di 90° orario rispetto ad un p.to seguita da una rotazione di 90° antiorario rispetto ad un altro p.to ?

$$f_1(x) = A_1 x + b_1 \qquad\qquad f_2(x) = A_2 x + b_2$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_2 A_1}_{Id} x + A_2 b_1 + b_2$$

$$= x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{b_3} = \text{traslazione}$$

— o — o —