

ELETTROTECNICA
Ingegneria Industriale
– BIPOLI E TRASFORMATE –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Elettrotecnica (043IN)
a.a. 2013-14

Classificazione dei componenti

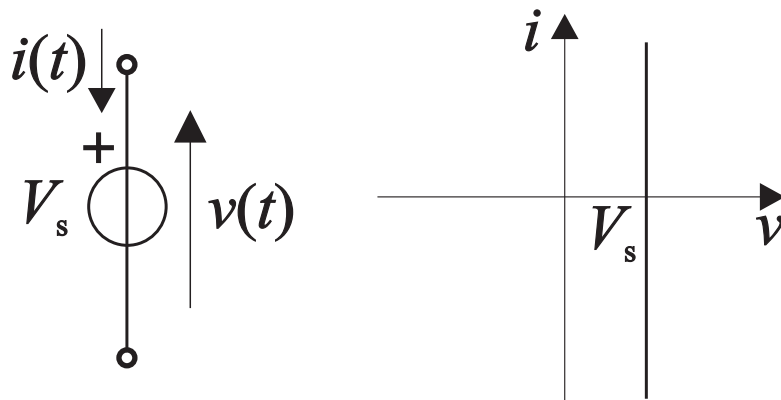
- Dipende dalle equazioni costitutive del modello del componente, se è lineare o no, dinamico (con derivata) o algebrico, con parametri costanti o variabili nel tempo
 - Lineari
 - Non-lineari
 - Resistivi
 - Dinamici
 - Tempo-invarianti (T-I)
 - Tempo-varianti (T-V)
- Le scelte non sono mutuamente esclusive, ma vanno applicate una alla volta a ogni componente

Classificazione: esempi

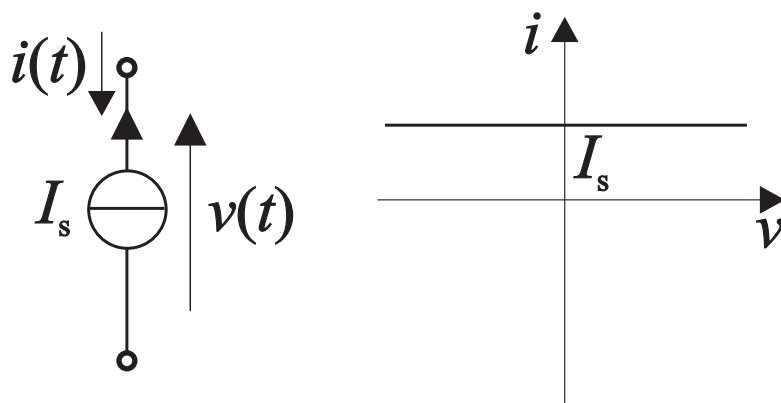
- $v(t) = R i(t)$ (resistenza) \rightarrow bipolo, lineare, resistivo, T-I
 - $i(t) = I_0 (e^{v(t)/v_T} - 1)$ (diodo) \rightarrow bipolo, nonlineare, resistivo, T-I
 - $v(t) = R(t) i(t)$ (p.e. interruttore) \rightarrow bipolo, lineare, resistivo, T-V
 - $i(t) = C dv(t)/dt$ (condensatore) \rightarrow bipolo lineare ($Q = C V$), dinamico, T-I
- I circuiti si classificano in base ai componenti

Sorgenti ideali di tensione e corrente

- Una sorgente ideale di tensione mantiene il valore della tensione costante qualunque sia la corrente erogata



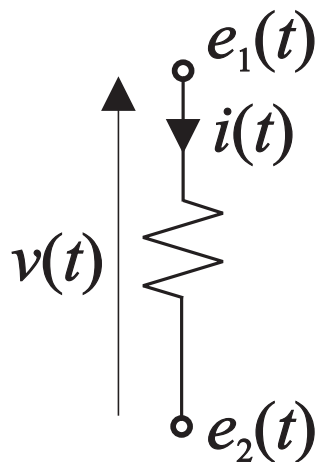
- Una sorgente ideale di corrente mantiene il valore della corrente costante qualunque sia la tensione



Legge di Ohm

- Le resistenze sono componenti a due terminali che dissipano l'energia elettrica. L'equazione costitutiva è chiamata “legge di Ohm”, dove il coefficiente R è detto resistenza

$$v(t) = R i(t)$$



- L'inverso della resistenza è chiamata conduttanza ($G = 1/R$)

$$i(t) = G v(t)$$

Legge di Ohm (2)

- Il coefficiente di proporzionalità R è chiamato “resistenza” e si misura in $[\Omega]$. Per un conduttore cilindrico, vale la relazione

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

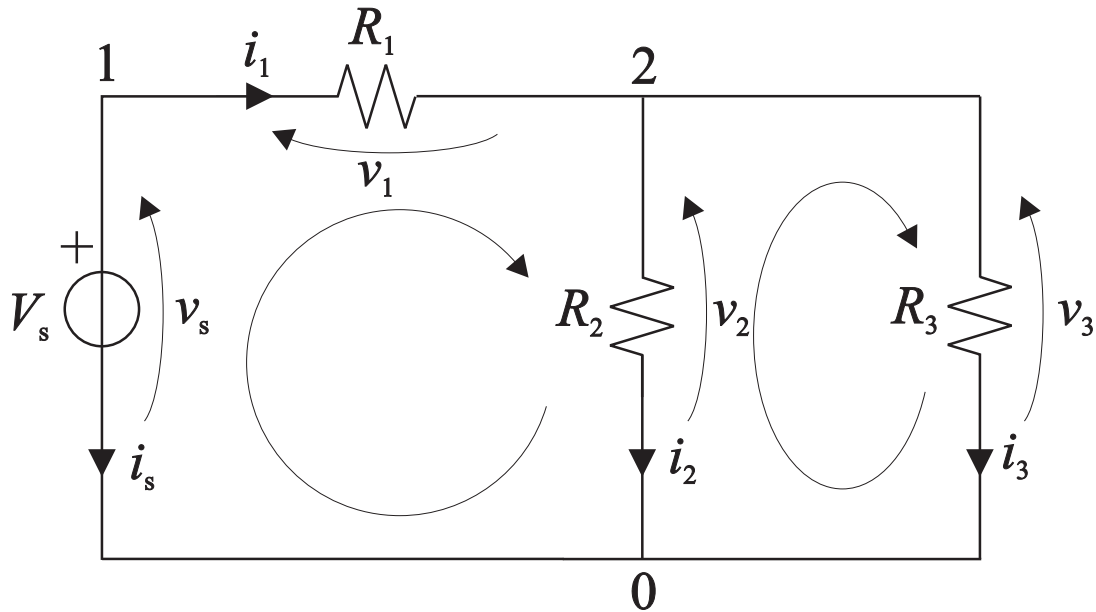
- Dove ρ è la resistività del materiale, l la lunghezza e S la sezione
- La conduttanza G si misura in $[\Omega^{-1}]$ o in $[S]$
- La potenza dissipata vale

$$p = vi = Ri^2 = Gv^2$$

Metodo del Tableau

- Abbiamo scritto le equazioni topologiche (IK e IIK) di un circuito:
 - $2b$ incognite
 - b equazioni di Kirchhoff
- Mancano ancora b equazioni per completare il sistema, ovvero le equazioni costitutive dei componenti
- Il sistema complessivo che si ottiene si chiama Tableau. Se i componenti sono lineari e resistivi, il Tableau è descritto da una matrice

Tableau: esempio



- Circuito lineare resistivo T-I
- 3 nodi, 4 rami (4 c, 4 ddp) \Rightarrow 8 incognite
- 2 IK, 2 IIK, 4 costitutive \Rightarrow 8 equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} i_s + i_1 = 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ v_s - v_1 - v_2 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ v_s = V_s \\ v_1 - R_1 i_1 = 0 \\ v_2 - R_2 i_2 = 0 \\ v_3 - R_3 i_3 = 0 \end{array} \right.$$

Tableau: matrice

- Il sistema lineare in forma matriciale (matrice \mathbf{T}) è

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} i_s \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_s \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Il circuito è ben posto se si ha
 $\det \mathbf{T} \neq 0$

Sistemi Tableau

- Se aggiungo un componente nonlineare come il diodo, il sistema tableau diventa *nonlineare*, non più esprimibile quindi con una matrice
 - Se aggiungo un condensatore o un induttore, devo aggiungere alle variabili le derivate delle tensioni o delle correnti, o entrambe, e le relative condizioni iniziali. Il sistema sarà *dinamico*
 - Se aggiungo un interruttore ottengo un sistema T-V
- Ci occuperemo di sistemi lineari, resistivi o dinamici, T-I (LRI, LDI)

Principio di sovrapposizione degli effetti (PSE)

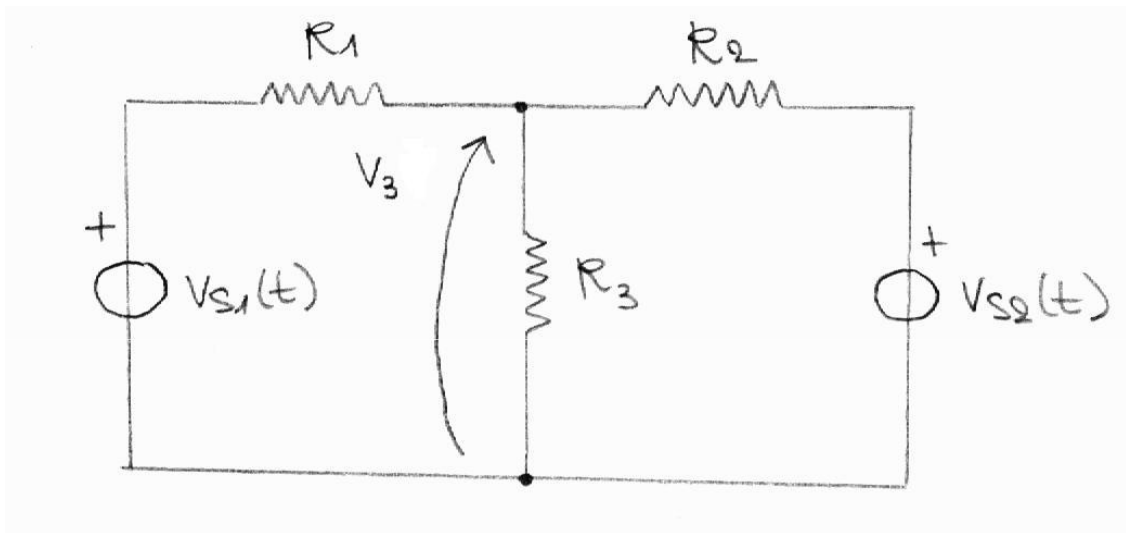
- E' il principio fondamentale dei circuiti lineari

Sia \mathcal{N} un circuito LRI con un'unica soluzione, alimentato da N sorgenti indipendenti di tensione e M sorgenti indipendenti di corrente.

Allora ogni potenziale di nodo, tensione o corrente di ramo può essere espressa come combinazione lineare delle sorgenti indipendenti, con coefficienti costanti che dipendono dai parametri omogenei del circuito, ma non dipendono dai valori delle sorgenti stesse.

PSE: esempio 1

- Circuito LRI con 2 sorgenti di tensione indipendenti



- Applicando PSE alla tensione $v_3(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} v_3(t) &= \alpha_1 v_{s1}(t) + \alpha_2 v_{s2}(t) = \\ &= v_3'(t) + v_3''(t) \end{aligned}$$

PSE: esempio 1 (2)

- Dove

$$v_3(t) = v_3'(t) = \alpha_1 v_{s1}(t) \quad \text{se } v_{s2}(t) = 0 \text{ V}$$

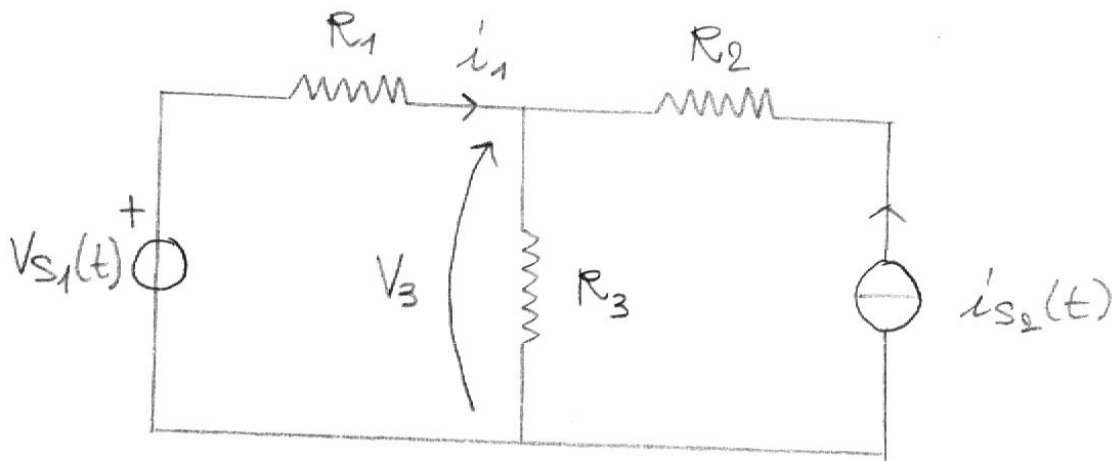
$$v_3(t) = v_3''(t) = \alpha_2 v_{s2}(t) \quad \text{se } v_{s1}(t) = 0 \text{ V}$$

- Sorgente di tensione nulla \rightarrow corto circuito
- Sorgente di corrente nulla \rightarrow circuito aperto
- Quindi (coefficienti α_k sono numeri puri)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{v_3(t)}{v_{s1}(t)} \Big|_{v_{s2}(t)=0} = \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} \\ \alpha_2 = \frac{v_3(t)}{v_{s2}(t)} \Big|_{v_{s1}(t)=0} = \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} \end{array} \right.$$

PSE: esempio 2

- Circuito LRI con 1 sorgente di tensione e 1 di corrente indipendenti

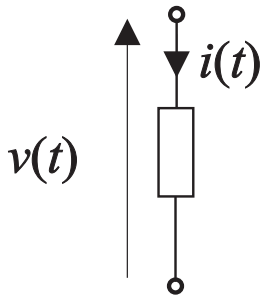


- Applicando PSE alla tensione $v_3(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} v_3(t) &= \alpha_1 v_{s1}(t) + r_2 i'_{s2}(t) = \\ &= v_3'(t) + v_3''(t) \end{aligned}$$

- Il coefficiente r_2 ha le dimensioni di una resistenza

Bipoli LRI



Rappresentazione implicita
del bipolo:

$$a v(t) + b i(t) = h_s(t)$$

- Rappresentazione esplicita di Thevenin:

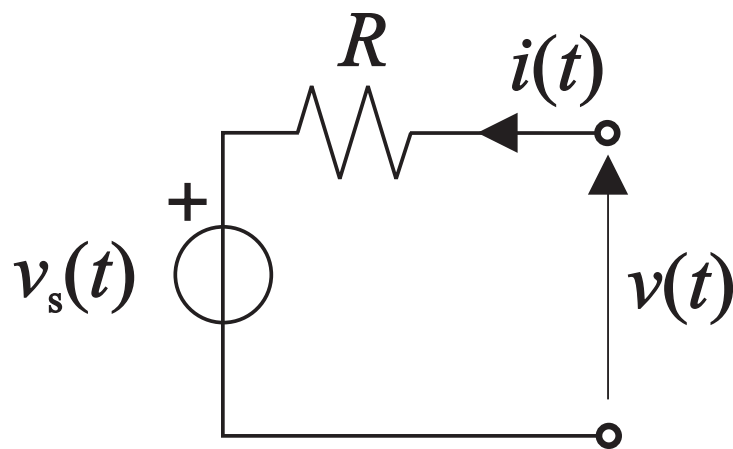
$$v(t) = -\frac{b}{a} i(t) + \frac{h_s(t)}{a} \quad (a \neq 0)$$
$$\Rightarrow v(t) = R i(t) + v_s(t)$$

- Rappresentazione esplicita di Norton:

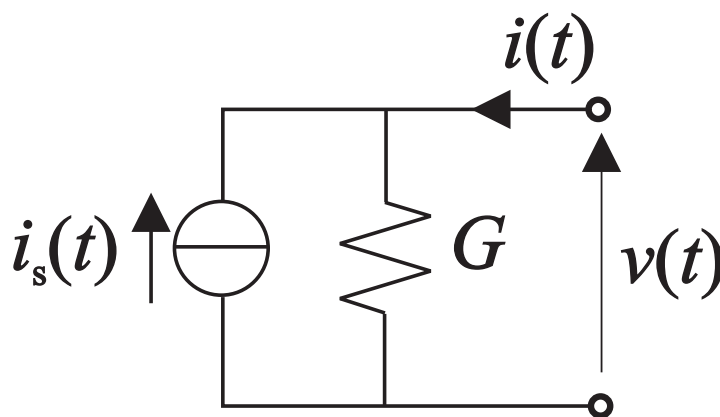
$$i(t) = -\frac{a}{b} v(t) + \frac{h_s(t)}{b} \quad (b \neq 0)$$
$$\Rightarrow i(t) = G v(t) + i_s(t)$$

Modelli di Thevenin e Norton

- Se esistono entrambi ($a \neq 0$, $b \neq 0$), sono due rappresentazioni diverse dello stesso bipolo



- Modello di Thevenin: $v(t) = Ri(t) + v_s(t)$



- Modello di Norton: $i(t) = Gv(t) - i_s(t)$

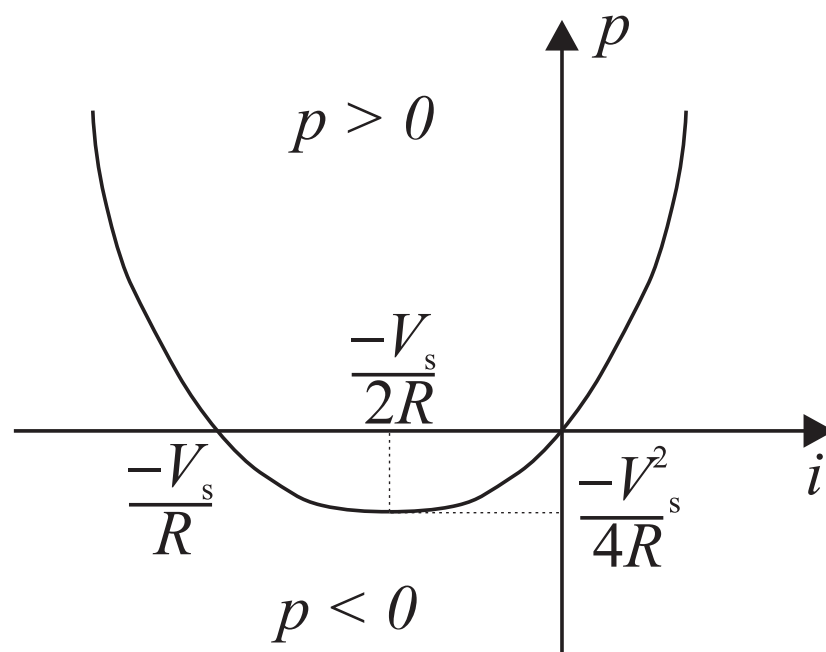
Analisi della potenza

- Supponiamo che esista la rappresentazione esplicita di Thevenin ($v_s(t) = V_s > 0, R > 0$):

$$p(t) = v(t)i(t) = [Ri(t) + V_s]i(t) = Ri(t)^2 + V_si(t)$$

- Max potenza erogabile (potenza disponibile):

$$p_d = \frac{-V_s^2}{4R}$$



Generatori reali

- Tengono conto delle perdite interne del generatore

1) Di tensione: modello di Thevenin

2) Di corrente: modello di Norton

- Rendimento:

$$\eta = \frac{\text{pot. sul carico}}{\text{pot. erogata}} = \frac{P_u}{P_e}$$

Generatori reali (2)

- Chiudendo un gen. tens. Su un carico R_u si ottiene:

$$\eta_V = \frac{R_u i^2}{V_s i} = \frac{R_u}{V_s} i = \frac{V_s}{R_s + R_u} \frac{R_u}{V_s} = \frac{R_u}{R_s + R_u}$$
$$0 \leq \eta_V \leq 1$$

- Se $R_s \ll R_u$, allora $\eta_V \approx 1$ e il generatore è detto di tensione
- Chiudendo un gen. corr. Su un carico G_u si ottiene:

$$\eta_I = \frac{G_u}{G_s + G_u}$$
$$0 \leq \eta_I \leq 1$$

- Se $G_s \ll G_u$, allora $\eta_I \approx 1$ e il generatore è detto di corrente

Condensatore

- Componente lineare dinamico
- Rappresentazione differenziale:

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ v(0) = V_0 \end{cases}$$

- Rappresentazione integrale

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

- Energia immagazzinata ($V_0 = 0$ V)

$$E_C(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = C \int_0^{v(t)} v dv = \frac{1}{2} C v^2$$

Induttore

- Componente lineare dinamico
- Rappresentazione differenziale:

$$\begin{cases} v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ i(0) = I_0 \end{cases}$$

- Rappresentazione integrale

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

- Energia immagazzinata ($I_0 = 0$ A)

$$E_L(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = L \int_0^{i(t)} i di = \frac{1}{2} Li^2$$

Fasori

- Sono definiti per le funzioni sinusoidali come:

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\{\bar{U}e^{j\omega t}\} = \Re\{|\bar{U}|e^{j(\omega t + \varphi_U)}\} = \\ &= |\bar{U}| \cos(\omega t + \varphi_U) \\ \text{dove : } \bar{U} &= |\bar{U}|e^{j\varphi_U} \quad (\in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

- Il vettore \mathbf{U} in campo complesso è detto FASORE. (N.B. L'angolo φ_U si misura sempre in rad)
- ω è la frequenza angolare (rad/s)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

Trasformata di Steinmetz

- Consideriamo l'insieme delle funzioni sinusoidali isofrequenziali (ω)

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

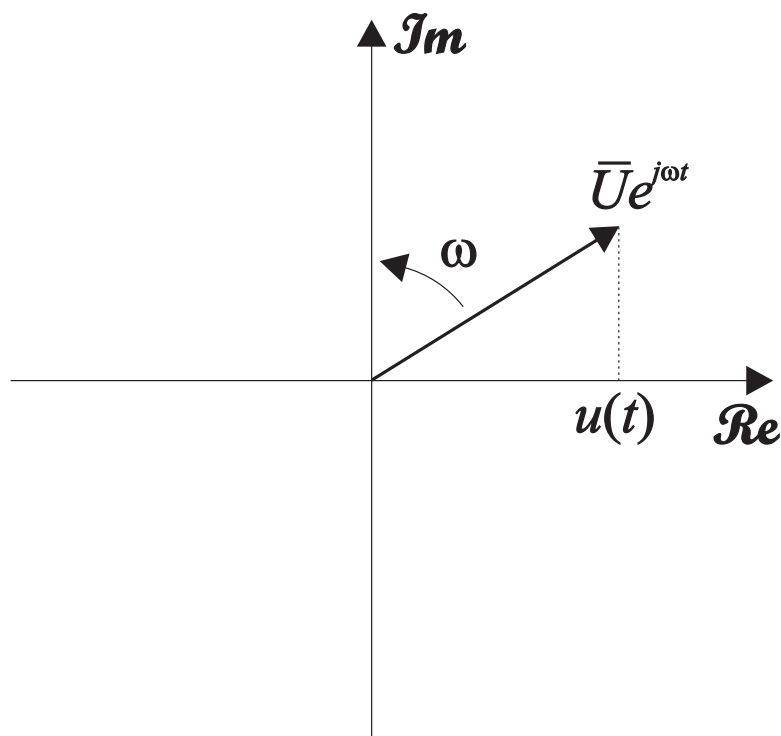
- Ogni $u(t)$ è identificata da una ampiezza A e da una fase φ
- Possiamo allora associare a ogni $u(t)$ un fasore \mathbf{U} e viceversa
- Trasformata di Steinmetz:

$$\begin{cases} u(t) \Rightarrow \bar{U} : & |\bar{U}| = A, \quad \varphi_U = \varphi + 2k\pi \\ \bar{U} \Rightarrow u(t) : & u(t) = \Re\{\bar{U} e^{j\omega t}\} \end{cases}$$

- NB: $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$, $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
($e^{-j\pi/2} = -j$)

Interpretazione geometrica

- La funzione sinusoidale $u(t)$ è la proiezione del vettore rotante sull'asse delle ascisse. Il fasore \bar{U} rappresenta il vettore per $t = 0$
- (Ricordiamo che: $|e^{j\omega t}| = 1$)



Proprietà di linearità

- Comporre linearmente due o più sinusoidi nel tempo equivale a comporre i fasori corrispondenti

u_1, u_2 : sinusoidi isofrequenziali (\mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) = \\ &= \lambda_1 \Re\{\bar{U}_1 e^{j\omega t}\} + \lambda_2 \Re\{\bar{U}_2 e^{j\omega t}\} = \\ &= \Re\{(\lambda_1 \bar{U}_1 + \lambda_2 \bar{U}_2) e^{j\omega t}\} = \\ &= \Re\{\bar{U} e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

$$\text{dove: } \bar{U} = \lambda_1 \bar{U}_1 + \lambda_2 \bar{U}_2$$

- Abbiamo trovato il fasore \mathbf{U} di $u(t)$ come combinazione lineare dei singoli fasori

Proprietà della derivata

- Derivare una sinusoide equivale a moltiplicare il fasore corrispondente per $j\omega$
- u : funzione sinusoidale (**U**)

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{d}{dt} u(t) = \\&= \frac{d}{dt} \Re\{\bar{U} e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\bar{U} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} = \\&\quad \Re\{(j\omega \bar{U}) e^{j\omega t}\} = \Re\{\bar{Y} e^{j\omega t}\} \\&\quad \text{dove : } \bar{Y} = j\omega \bar{U}\end{aligned}$$

- Abbiamo trovato il fasore **Y** di $y(t)$ moltiplicando il fasore **U** per $j\omega$

Proprietà dell'integrale

- Per l'integrazione si procede analogamente, dividendo U per $j\omega$:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{U}}{j\omega}$$

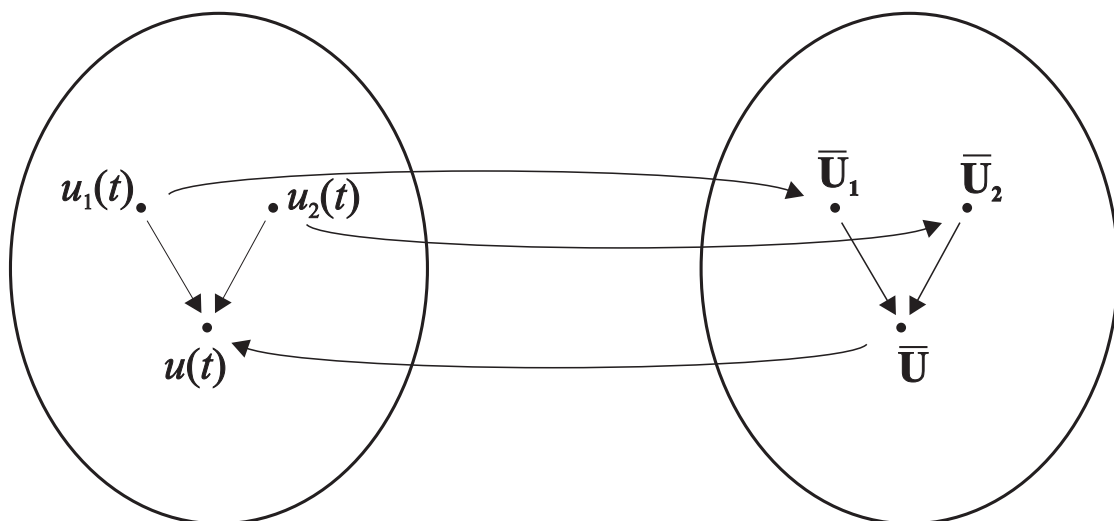
N.B. moltiplicare per j equivale a ruotare un vettore di $+\pi/2$, mentre dividere per j equivale a ruotare il vettore di $-\pi/2$, mantenendo in entrambi i casi il modulo costante.

$$(j = e^{j\pi/2}, 1/j = -j = e^{-j\pi/2})$$

- Applicheremo le trasformate ai circuiti LRI e LDI

Utilità delle trasformate

- Le trasformate sono strumenti che permettono una analisi matematica semplificata di un problema



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$$

- Dove $u(t) = \Re\{\mathbf{U}e^{j\omega t}\}$

Circuiti resistivi e fasori

- Un circuito LRI (sorgenti sinusoidali isofrequenziali) può essere descritto con il tableau

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{i}(t) = 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{v}(t) = 0 \\ \mathbf{M}\mathbf{v}(t) + \mathbf{N}\mathbf{i}(t) = \mathbf{h}_s(t) \end{cases}$$

- Per PSE tutte le variabili del circuito sono sinusoidali. Applicando Steinmetz, per la proprietà della linearità, si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{A}\bar{\mathbf{I}} = 0 \\ \mathbf{B}\bar{\mathbf{V}} = 0 \\ \mathbf{M}\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{N}\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{H}_s \end{cases}$$

- Si risolve il sistema nelle variabili complesse (fasori) e poi si anti-trasformano i risultati.

Circuiti dinamici e fasori

- Un circuito LDI (sorgenti sinusoidali isofrequenziali) può essere descritto con il tableau aggiungendo le derivate delle tensioni sui condensatori e delle correnti nelle induttanze. Supponiamo che le sorgenti siano sinusoidali isofrequenziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{i}(t) = 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{v}(t) = 0 \\ \mathbf{M}\mathbf{v}(t) + \mathbf{N}\mathbf{i}(t) = \mathbf{h}_s(t) \\ i_p(t) = C_p \frac{dv_p(t)}{dt} \\ v_q(t) = L_q \frac{di_q(t)}{dt} \end{array} \right.$$

- Per PSE e per la proprietà della derivata dei fasori, tutte le variabili **a regime** del circuito saranno sinusoidali

Circuiti dinamici e fasori (2)

- Applicando la trasformata di Steinmetz alle variabili sinusoidali ($\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{v}(t)$) del circuito si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\bar{\mathbf{I}} = 0 \\ \mathbf{B}\bar{\mathbf{V}} = 0 \\ \mathbf{M}\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{N}\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{H}_s \\ \bar{I}_p = j\omega C \bar{V}_p \\ \bar{V}_q = j\omega L \bar{I}_q \end{array} \right.$$

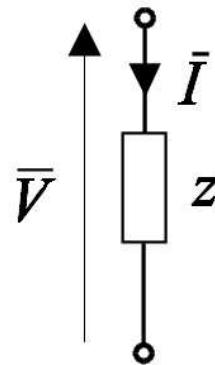
- Il sistema lineare va risolto nei fasori (\mathbf{I} , \mathbf{V}) delle variabili del circuito. Si può procedere infine alla operazione di anti-trasformazione per trovare le funzioni sinusoidali nel dominio del tempo

Impedenze e ammettenze

- Le impedenze (ammettenze) sono definite come estensione del concetto di resistenza (conduttanza), ovvero come rapporto dei fasori della tensione e della corrente di un bipolo e viceversa

$$z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R + jX = |z|e^{j\varphi}$$

$$y = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{1}{z} = G + jB = |y|e^{j\varphi_y} = \frac{1}{|z|}e^{-j\varphi}$$



- z : impedenza \rightarrow R : resistenza
 X : reattanza
- y : ammettenza \rightarrow G : conduttanza
 B : suscettanza

Elementi dinamici e trasformate

- Con i fasori, applicando le proprietà viste precedentemente, si ha

$$\begin{cases} \bar{I} = j\omega C \bar{V} \\ \bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V} = j\omega L \bar{I} \\ \bar{I} = \frac{1}{j\omega L} \bar{V} \end{cases}$$

$$z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad y_C = j\omega C$$

$$z_L = j\omega L, \quad y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

Impedenza e ammettenza con i fasori

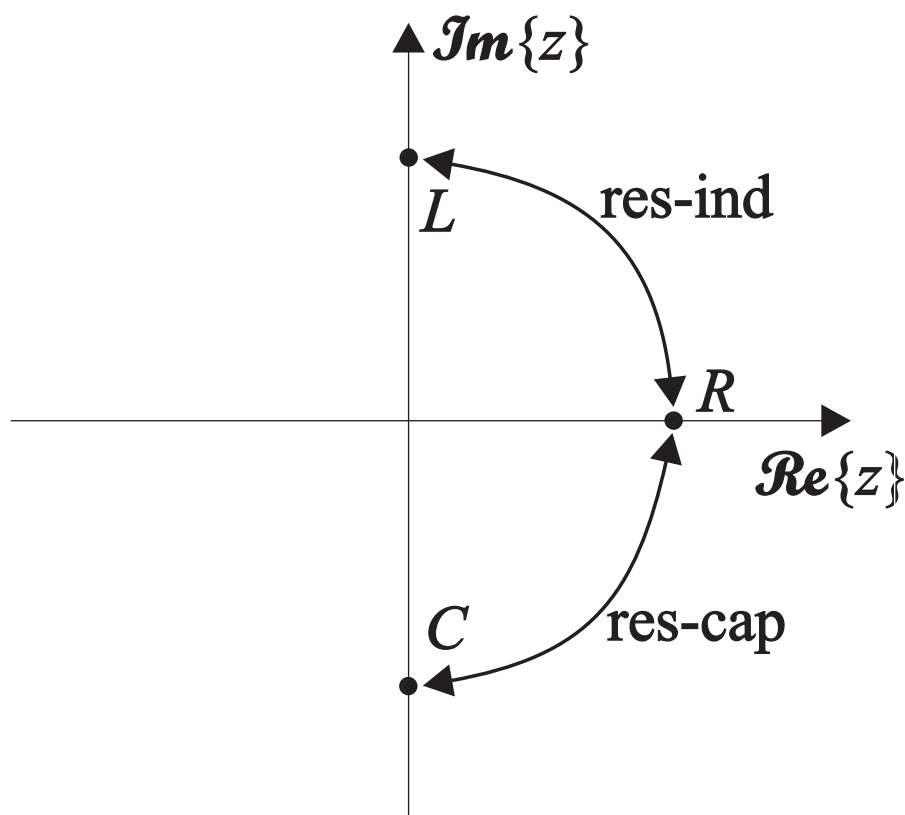
- Nel dominio dei fasori, la relazione tra l'impedenza e l'ammettenza è

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} |y| = \frac{1}{|z|} \\ \varphi_y = -\varphi \end{cases}$$
$$y = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Fase dell'impedenza

- Bipolo resistivo: $\varphi = 0$ ($z = R$)
- Bipolo capacitivo: $\varphi = -\pi/2$ ($z = 1/j\omega C$)
- Bipolo induttivo: $\varphi = +\pi/2$ ($z = j\omega L$)
- Bipolo resistivo-capacitivo: $-\pi/2 < \varphi < 0$
- Bipolo resistivo-induttivo: $0 < \varphi < \pi/2$

(Nel semipiano sinistro il bipolo eroga potenza)



Serie di bipoli

- Due bipoli sono connessi in serie quando sono percorsi dalla stessa corrente (le loro tensioni si sommano)

- $v = v_1 + v_2, \quad i = i_1 = i_2$

- $v_1 = R_1 i_1, \quad v_2 = R_2 i_2,$

- $v = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i = R_s i$

$$R_s = R_1 + R_2$$

- L'espressione sopra si estende a un numero n di resistori (resistenze)

- Nel caso di due soli componenti

- $1/G_s = 1/G_1 + 1/G_2 = (G_1 + G_2)/G_1 G_2$

$$G_s = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

- NB: $R \text{ --- cc } \rightarrow R, R \text{ --- ca } \rightarrow ca$
- NB: $R \text{ --- } R \text{ ---... --- } R \rightarrow nR$

Parallelo di bipoli

- Due bipoli sono connessi in parallelo quando sono sottoposti alla stessa tensione (le loro correnti si sommano)
- $i = i_1 + i_2, \quad v = v_1 = v_2$
- $i_1 = G_1 v_1, \quad i_2 = G_2 v_2,$
- $i = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2) v = G_p i$

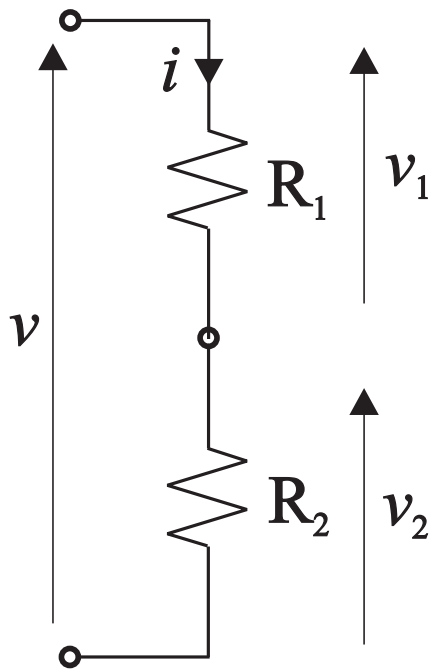
$$G_p = G_1 + G_2$$

- L'espressione sopra si estende a un numero n di resistori (conduttanze)
- Nel caso di due soli componenti
- $1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_1 + R_2)/R_1 R_2$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- NB: la R_p sarà sempre più piccola delle resistenze R_1 e R_2
- NB: $R//cc \rightarrow cc, R//ca \rightarrow R$
- NB: $R//R//...//R \rightarrow R/n$

Partitori di tensione



Si può applicare
quando ho due o più
(N) bipoli in serie

$$v = v_1 + v_2, \quad i = i_1 = i_2$$

$$v_1 = R_1 i, \quad v_2 = R_2 i, \quad v = (R_1 + R_2) i$$

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v$$

Partitori di tensione (2)

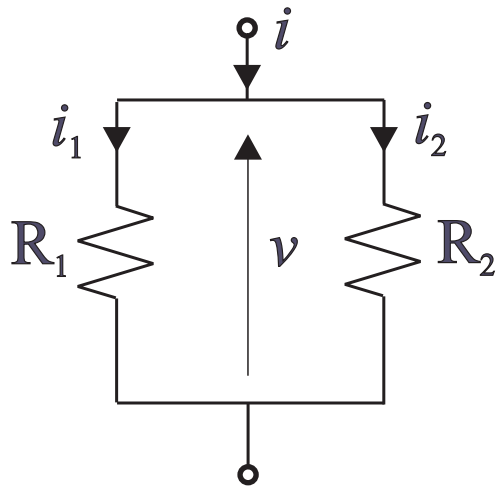
- Se ho solo 2 bipoli in serie, posso usare le ammettenze

$$v_1 = \frac{1/G_1}{1/G_1 + 1/G_2} v = \frac{G_2}{G_1 + G_2} v$$

$$v_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} v$$

- N.B. i componenti devono essere percorsi dalla stessa corrente perché la regola del partitore sia applicabile

Partitori di corrente



Si può applicare
quando ho due o più
(N) bipoli in parallelo

$$i = i_1 + i_2, \quad v = v_1 = v_2$$

$$i_1 = G_1 v, \quad i_2 = G_2 v, \quad i = (G_1 + G_2) v$$

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i, \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

$$i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} i$$

Partitori di corrente (2)

- Con due bipoli in parallelo, posso usare le resistenze

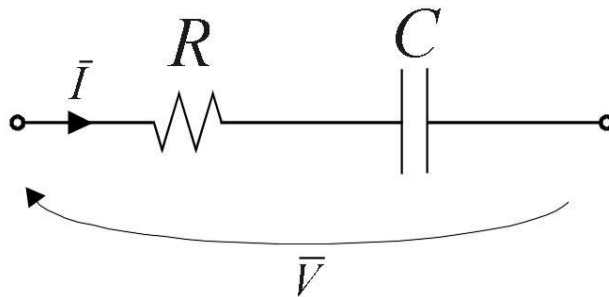
$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

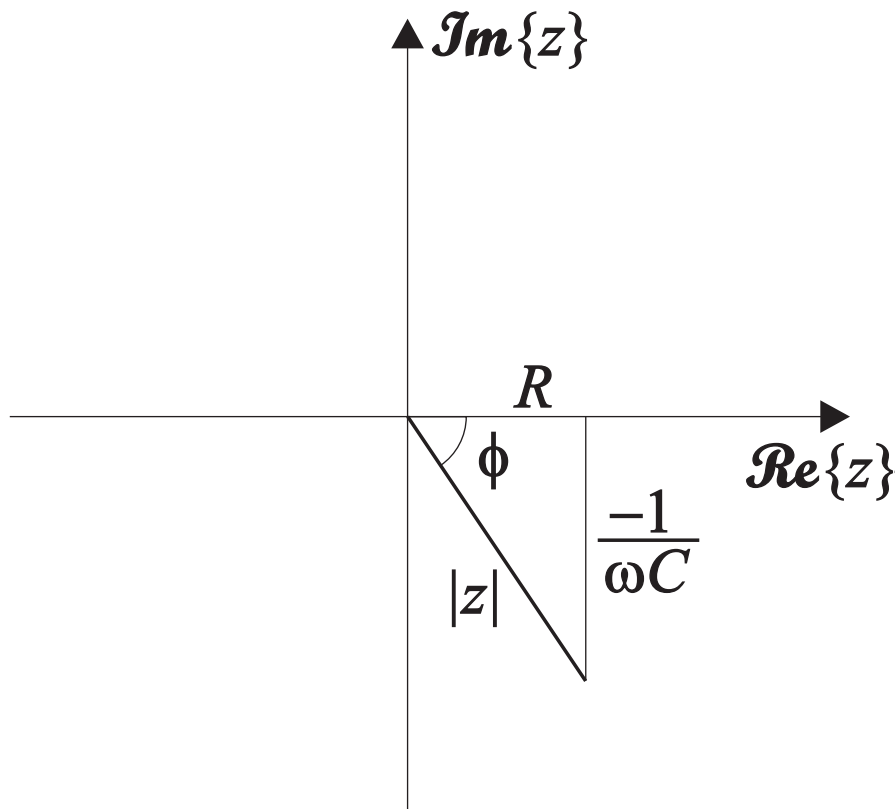
- N.B. Scorre più corrente nel ramo con resistenza minore (vedi sistemi di terra)

Bipoli dinamici notevoli

- Consideriamo la serie di una resistenza e di un condensatore ($R, C > 0$)

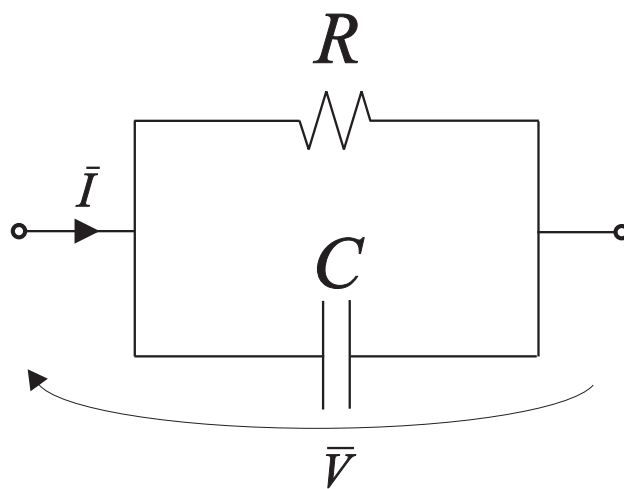


$$z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$



Bipoli dinamici notevoli (2)

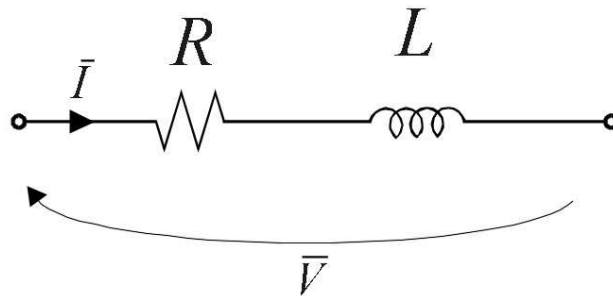
- Consideriamo il parallelo di una resistenza e di un condensatore ($R, C > 0$)



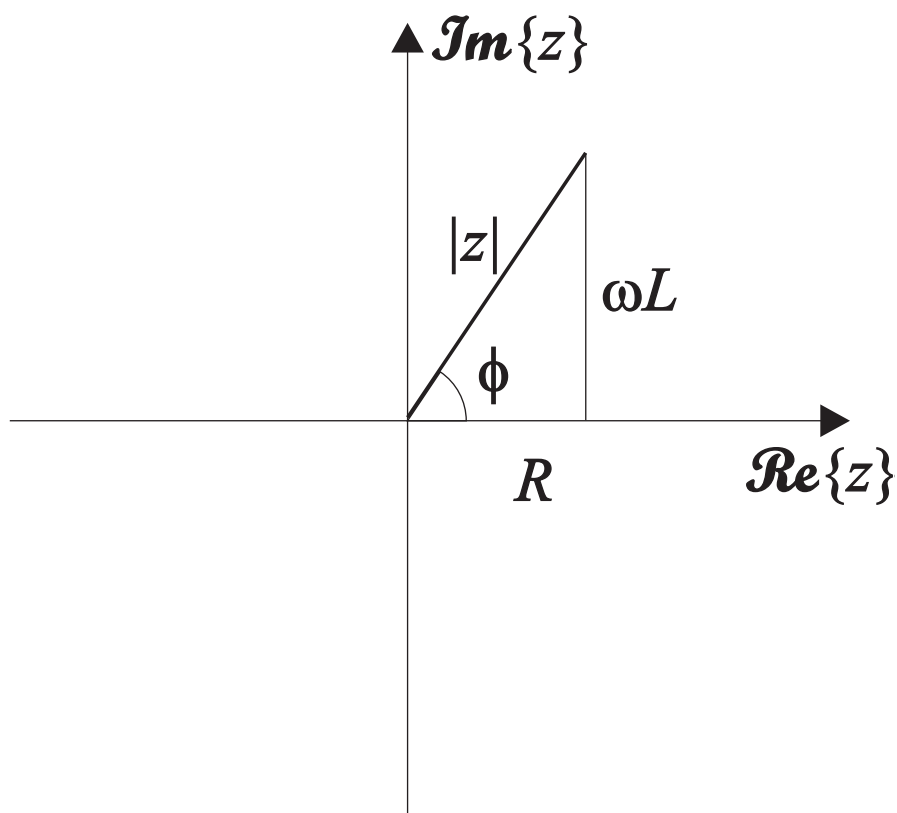
$$\begin{aligned} z &= \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \\ &= \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + j \frac{-\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \end{aligned}$$

Bipoli dinamici notevoli (3)

- Consideriamo la serie di una resistenza e di un induttore ($R, L > 0$)

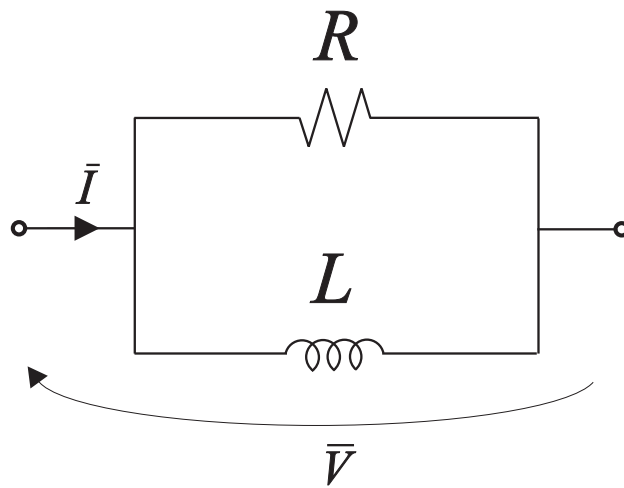


$$z = R + j\omega L$$



Bipoli dinamici notevoli (4)

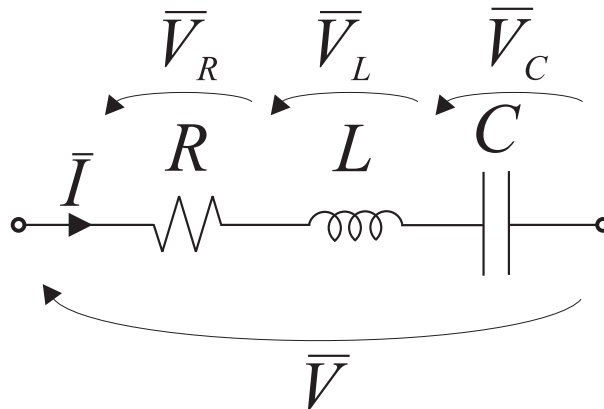
- Consideriamo il parallelo di una resistenza e di un induttore ($R, L > 0$)



$$\begin{aligned} z &= \frac{R \, j\omega L}{R + j\omega L} = \\ &= \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

Circuiti risonanti reali serie

- Consideriamo la serie di una resistenza, di un induttore e di un condensatore ($R, L, C > 0$)



$$z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- La reattanza si annulla in ω_0 , frequenza di risonanza

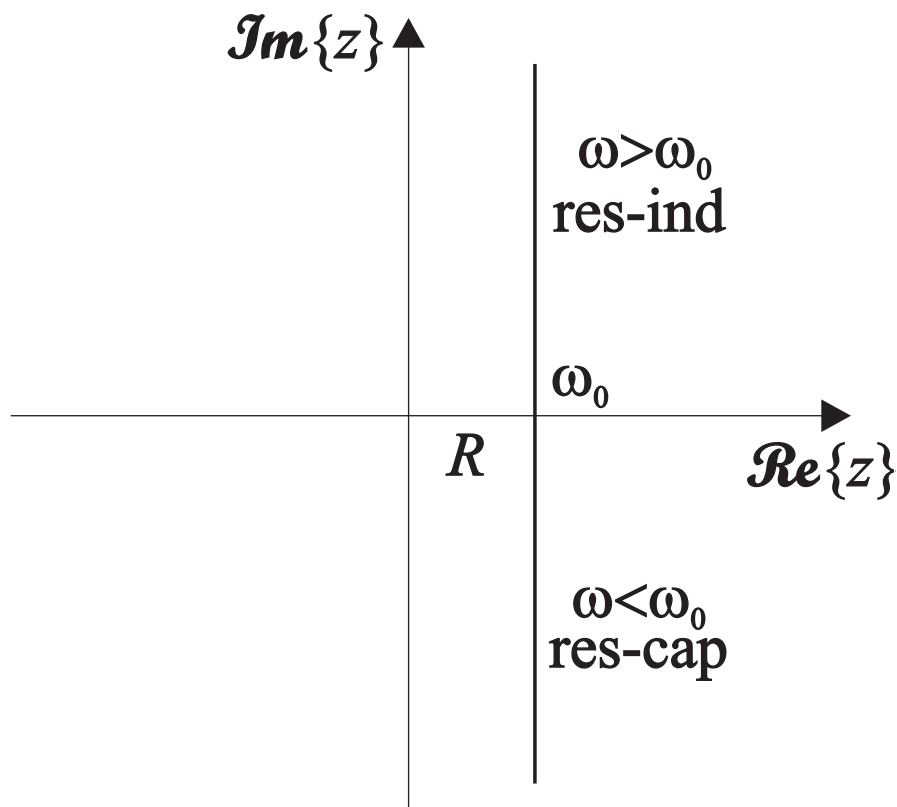
$$X_s = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$X_s > 0$ per $\omega > \omega_0$ (comportamento res - ind)

$X_s < 0$ per $\omega < \omega_0$ (comportamento res - cap)

Circuiti risonanti serie reali (2)

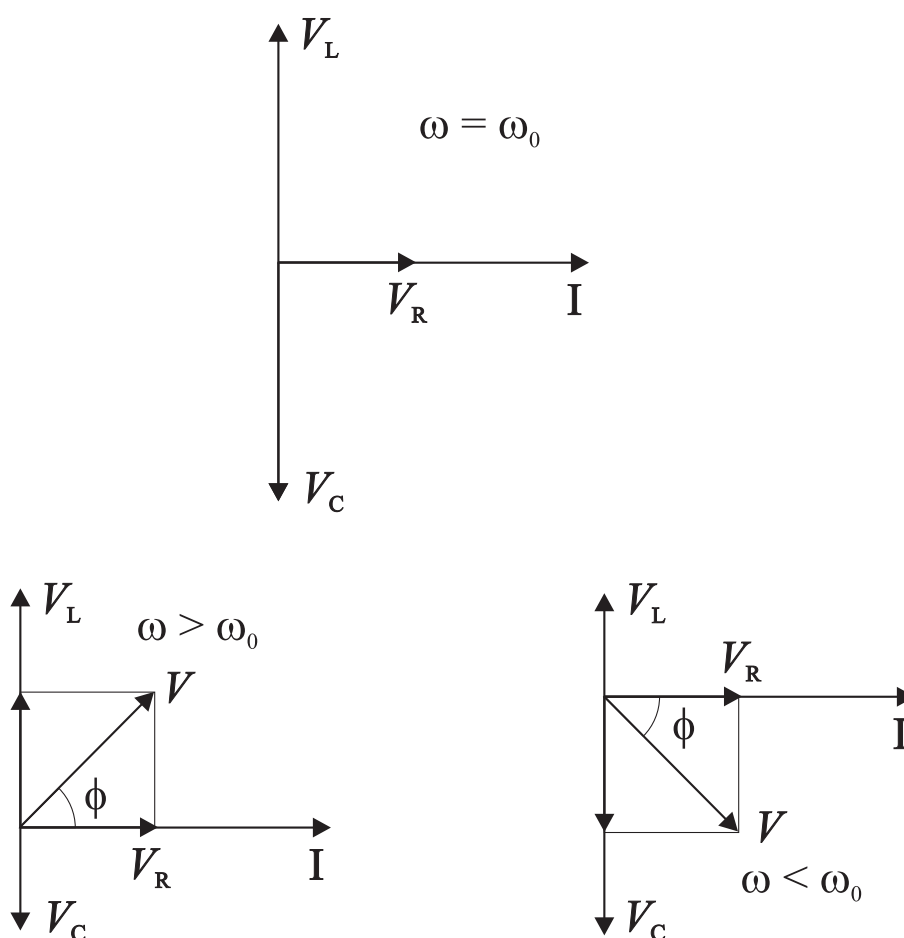
- In ω_0 abbiamo il minimo dell'impedenza ($z = R$), il cui modulo tende all'infinito per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$
- Se alimentiamo il circuito risonante con una sorgente di tensione sinusoidale costante in ampiezza, otteniamo il massimo della corrente alla frequenza di risonanza
- È il più semplice filtro passa-banda



Circuiti risonanti serie reali (3)

- Rappresentazione grafica dei fasori relativi a un circuito risonante serie reale, dove la corrente è:

$$i(t) = |\mathbf{I}| \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ A}$$



- Conta lo sfasamento relativo tra tensione e corrente (angolo ϕ), non il valore assoluto della fase che dipende dall'origine (arbitraria) dell'asse temporale

Circuiti risonanti serie reali (4)

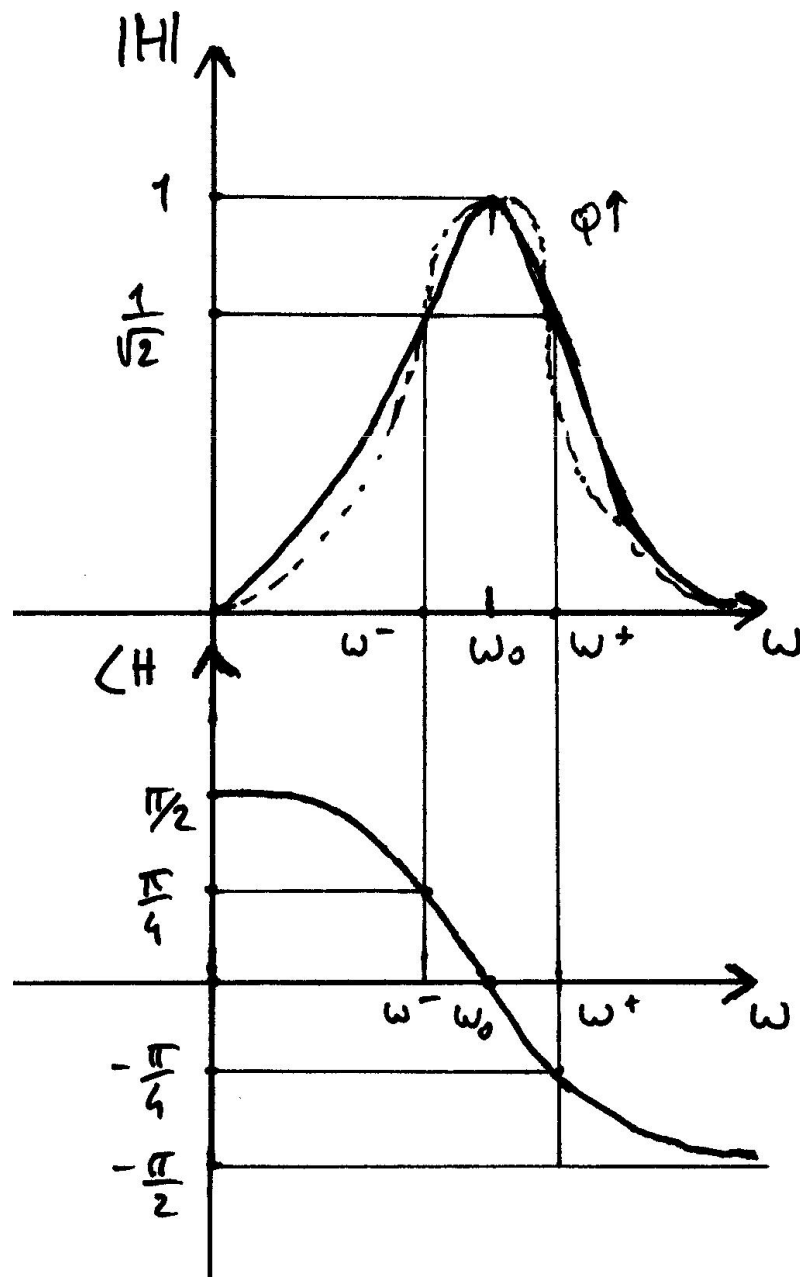
- Alimentiamo il bipolo con una sorgente di tensione sinusoidale con fasore \mathbf{V}_s e calcoliamo la ddp sulla resistenza in rapporto alla tensione di alimentazione

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}_R}{\bar{V}_s} &= \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{j\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} \left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = H(j\omega) \\ \text{con : } \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}\end{aligned}$$

- ω_0 : frequenza di risonanza
- Q : fattore di qualità

Circuiti risonanti serie reali (5)

- Disegniamo i diagrammi del modulo e della fase



Circuiti risonanti parallelo reali

- Sono equivalenti a quelli serie. Invece della impedenza, calcoleremo l'ammettenza (si scambiano tra loro tensioni e correnti)

