ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 19

Note Title 23/10/2018

KER E IMMAGINE DI APPLICAZIONI LINEARI

Defn. Siano V e W due spazi vettoriali, e sia $f: V \to W$ un'appl. lineare

- Si definisce $\ker f$ (o nucleo) l'insieme dei vettori che vanno a finire in 0, cioè

$$\boxed{\ker f := \{ v \in V : f(v) = 0 \}}$$

vettore in W

- Si definisce $\operatorname{Im} f$ (immagine) l'insieme dei vettori in W che sono f di qualcosa, cioè

$$\boxed{\operatorname{Im} f := \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ con } f(v) = w \}}$$

Proposizione Sia $f: V \to W$ come nella def. precedente

Allora

- $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V
- $\operatorname{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Dim per il ker Due verifiche

→ Se $v_1 \in \ker(f)$ e $v_2 \in \ker(f)$, allora $v_1 + v_2 \in \ker(f)$?

$f(v_1) = 0 \qquad f(v_2) = 0 \qquad \Rightarrow \quad f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0$

→ Se $v \in \ker$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $av \in \ker(f)$?

$f(av) = a \underbrace{f(v)}_{0} = 0$ ☺

Dim per Im Due verifiche

→ Se $w_1 \in \mathrm{Im}(f)$ e $w_2 \in \mathrm{Im}(f)$, allora $w_1+w_2 \in \mathrm{Im}(f)$?

$w_1 = f(v_1)$ $\quad w_2 = f(v_2)$ $\rightsquigarrow$ $w_1+w_2 = f(v_1+v_2) \in \mathrm{Im}\, f$

→ Se $w \in \mathrm{Im}(f)$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $aw \in \mathrm{Im}(f)$?

$w = f(v)$ $\rightsquigarrow$ $aw = af(v) = f(av) \in \mathrm{Im}(f)$

—o—o—

Oss. importante 1

$$\boxed{f: V \to W \text{ è iniettiva} \iff \ker(f) = \{0\}}$$

- Se è iniettiva, allora c'è un solo vettore che va a finire in 0, ed è il vettore 0 in partenza, quindi $\ker = \{0\}$
  (in W) (in V) (in V)

- Se $\ker(f) = \{0\}$, allora f è iniettiva.
  Infatti se $f(v_1) = f(v_2)$, allora $f(v_1 - v_2) = 0$, cioè $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, ma allora $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$

Oss. importante 2

$$\boxed{f: V \to W \text{ è surgettiva} \iff \mathrm{Im}(f) = W}$$

L'osservazione è sostanzialmente la definizione di funzione surgettiva

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad \text{t.c.} \quad f(v) = w$$

Teorema **RANK-NULLITY** (Teo. della dimensione)

Siano V e W due sp. vett. (di dim. finita) e sia $f: V \to W$ un'appl. lineare.
Allora

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \underset{\text{spazio di partenza}}{V}}$$

Dim. Sia $k = \dim(\ker)$
Sia $m \geq k$ la dim. di V

Prendiamo una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$
La completiamo ad una base di V aggiungendo $m-k$ el.

$$\{v_{k+1}, \dots, v_m\}$$

(ho usato il teorema che dice che si può ottenere una base aggiungendo vett. ad un insieme lin. indip.)

Dico che

$$\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)\}$$

sono una base di $\mathrm{Im}(f)$. Se è vero ho finito, perché sono in numero giusto. Per dim. che sono una base, servono due verifiche.

① Generano tutta l'immagine. Sia $w \in \mathrm{Im}(f)$.
Allora

$$w \underset{\text{def.}}{=} f(v) \underset{\substack{\text{scrivo } v \\ \text{nella base} \\ \text{di } V}}{=} f(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m)$$

$$= \underbrace{c_1 \overset{0}{f(v_1)} + \dots + c_k \overset{0}{f(v_k)}}_{\text{perché } v_1, \dots, v_k \in \ker} + c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_m f(v_m) \quad \text{quindi ok}$$

② Sono lin. indip.

Prendiamo una loro comb. lin. nulla

$$c_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + c_m f(v_m) = 0 \quad \text{ma allora}$$

in W

$$f(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m) = 0 \quad \text{ma allora}$$

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m \in \ker(f) \quad \text{ma allora}$$

$$c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_m v_m = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

Quando porto tutto a sx ottengo una comb. lineare di $v_1, \dots, v_m$ che fa 0. Essendo una base di V, questo è possibile solo se tutti i c_i sono nulli.

in V

0 come numero

— o — o —

Conseguenze del teorema rank-nullity $\quad f: V \to W$

$$\dim(\ker) + \dim(\mathrm{Im}) = \dim V$$

① Se $\dim W < \dim V$, allora f NON può essere $\boxed{\text{iniettiva}}$

Se fosse iniettiva, avremmo che $\dim(\ker) = 0$, ma allora

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}) \leq \dim W$$

$\mathrm{Im} \subseteq W$

② Se $\dim W > \dim V$, allora f NON può essere $\boxed{\text{surgettiva}}$

Se fosse surgettiva, allora $\mathrm{Im}(f) = W$ e quindi

$$\dim W \underset{W = \mathrm{Im}}{=} \dim(\mathrm{Im}) \underset{\dim(\ker) \geq 0}{\leq} \dim(\ker) + \dim(\mathrm{Im}) \underset{\text{teorema}}{=} \dim V$$

③ Se $\dim W = \dim V$, allora

$$\boxed{f \text{ iniettiva} \iff f \text{ surgettiva}}$$

Dim.

- Supponiamo che f sia iniettiva. Allora $\dim(\ker) = 0$, e quindi

$$\underbrace{\dim(\ker)}_{= 0} + \dim(\mathrm{Im}) = \dim V = \dim W$$

Ma allora $\dim(\mathrm{Im}) = \dim W$, ma allora $\mathrm{Im} = W$
(fatto generale: se un s.sp. ha la stessa dim. dello spazio, allora coincide con lo spazio stesso, perché una sua base è anche una base dello spazio)
Essendo $\mathrm{Im}\, f = W$, la funzione f è surgettiva

- Supponiamo che f sia surgettiva. Allora $\mathrm{Im}\, f = W$ e quindi $\dim(\mathrm{Im}) = \dim W$. Ma allora

$$\dim(\ker) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im})}_{= \dim W = \dim V} = \dim(V) \qquad \text{(rank-nullity)}$$

Quindi $\dim(\ker) = 0$ e quindi f è iniettiva.

Esempi $f: \mathbb{R}^{12} \to \mathbb{R}^{15}$ NO SURGETTIVA
$f: \mathbb{R}^{22} \to \mathbb{R}^{15}$ NO INIETTIVA e $\dim(\ker) \geq 7$
Anzi $\dim(\ker) = 7 \iff f$ è surgettiva.

— o — o —