Esame di Ricerca Operativa del 30/06/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + x_2 \\ -x_1 + 7\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 50, 38 e 55 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

Stabilimento	costo giornaliero (euro)	produzione (tonnellate/giorno)		
		bassa	media	alta
1	380	5	3	2
2	440	1	2	4

Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

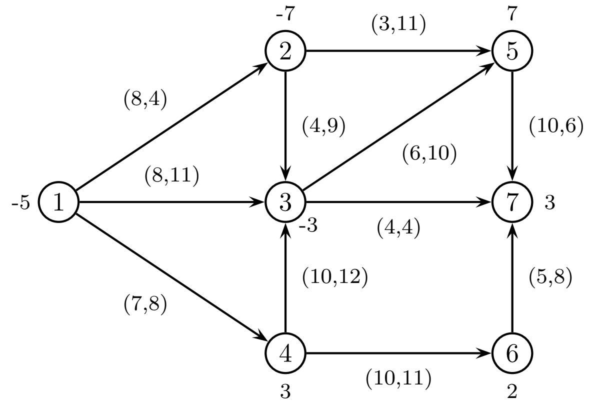
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

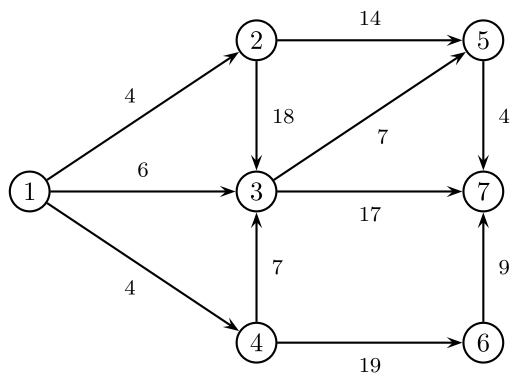


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(1,3)	$x =$		
(1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7)	(3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

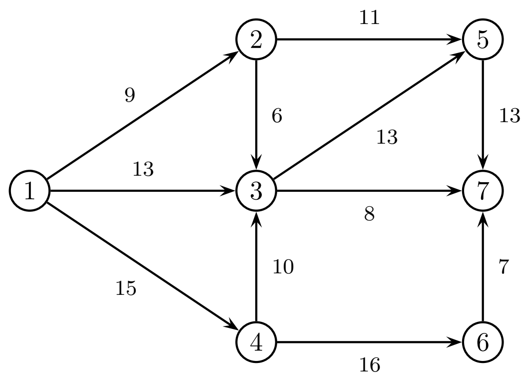
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 11\ x_1 + 19\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	7	23	13	21	8	6
Volumi	20	60	342	177	32	298	94

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	(0,0)						
	(,0)						
	(0,-10)						
$\left(5, \sqrt{5}\right)$							
$\left(5, -\sqrt{5}\right)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -6\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(5, 1)$, $(-2, 3)$, $(-1, 4)$ e $(1, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\,x_1 + x_2 \\ -x_1 + 7\,x_2 \le 7 \\ -x_1 - 4\,x_2 \le 7 \\ x_1 + 5\,x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ -x_2 \le 1 \\ x_1 + 4\,x_2 \le 6 \end{cases}$$

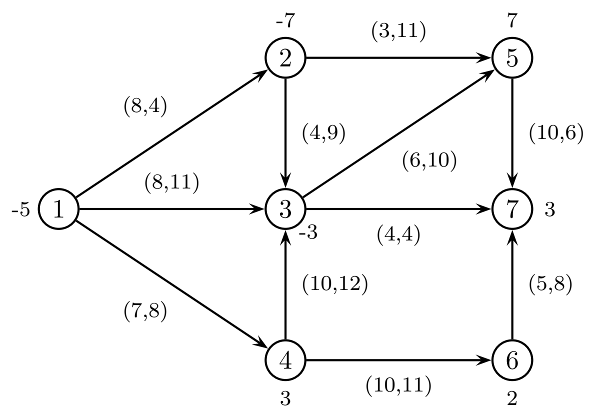
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-7,\ 0)$	SI	NO
$\{5,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -37,\ -9)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(4,\ -1)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -9,\ 8,\ 0)$	4	$18,\ 7$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(-3,\ -1)$	$(0,\ 9,\ 0,\ 0,\ -37,\ 0)$	5	$1,\ 13$	1

Esercizio 3. Vedi altro compito

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

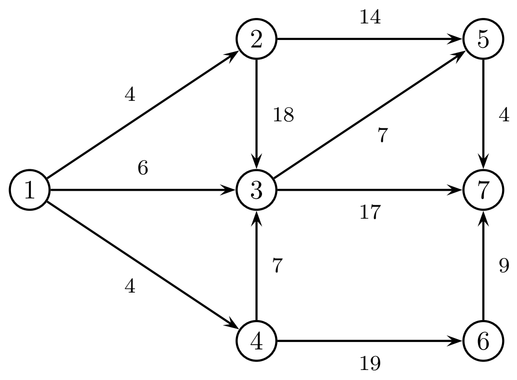


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(1,3)	$x = (0,\ 11,\ -6,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ -14,\ 5,\ 0,\ 3)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7)	(3,5)	$\pi = (0,\ 8,\ 12,\ 7,\ 6,\ 11,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

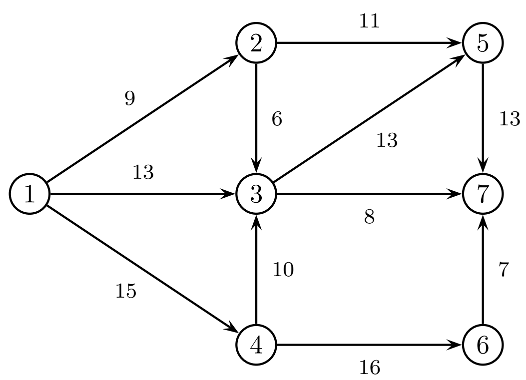
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	
x	$(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 2,\ 17,\ 12)$	$(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 14,\ 17,\ 12)$
Arco entrante	(3,5)	(2,5)
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	4 , 3	11 , 7
Arco uscente	(5,7)	(2,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		5		7		6	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	18	2	18	2	13	3	13	3	13	3	13	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	4	23	4	23	4	23	4	23	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	17	5	17	5	17	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	9	(9, 8, 0, 0, 9, 0, 8, 0, 0, 9, 0)	17
1 - 3 - 5 - 7	4	(9, 12, 0, 0, 9, 4, 8, 0, 0, 13, 0)	21
1 - 4 - 6 - 7	7	(9, 12, 7, 0, 9, 4, 8, 0, 7, 13, 7)	28

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 10\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 11\ x_1 + 19\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{9}{2}\right)$ $\qquad v_I(P) = 27$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_S(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 16\, x_1 + 13\, x_2 \geq 59$

$r = 4$ $\qquad 11\, x_1 + 9\, x_2 \geq 41$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	7	23	13	21	8	6
Volumi	20	60	342	177	32	298	94

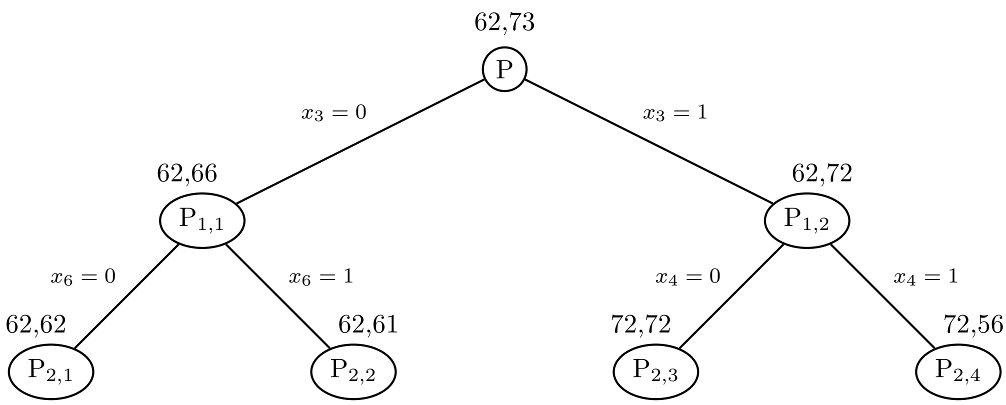
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 62$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \frac{259}{342}, 1, 1, 0, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 73$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 72$

Esercizio 9. vedi altro compito

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -6\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(5, 1)$, $(-2, 3)$, $(-1, 4)$ e $(1, -4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$	$(-1, 1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{49}{6}, \dfrac{49}{6}\right)$	$\dfrac{2}{49}$	$\dfrac{2}{49}$	$(-1, 4)$