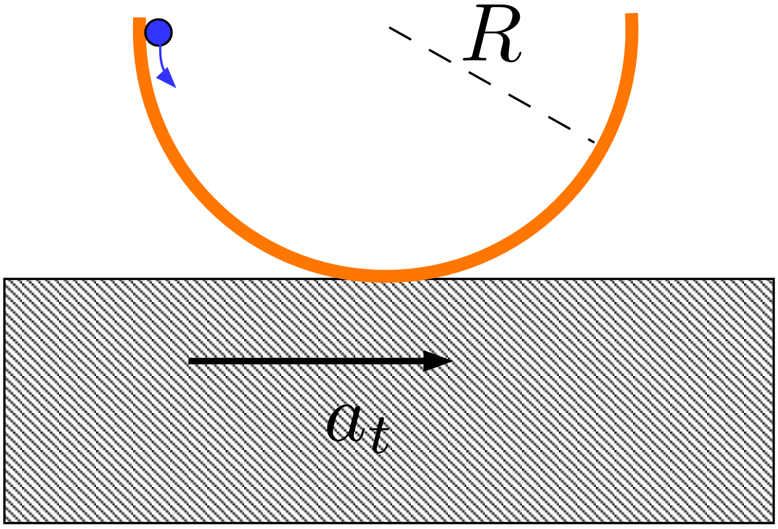
Esercizio (tratto dal problema 5.10 del Mazzoldi)

Una guida semicircolare liscia verticale di raggio $R = 40\,\mathrm{cm}$ è vincolata ad una piattaforma orizzontale che si muove con accelerazione costante $a_t = 2\,\mathrm{m/s^2}$ lungo la direzione orizzontale. Un punto materiale, inizialmente fermo sulla guida all'estremo del diametro orizzontale viene lasciato scivolare. Calcolare la velocità v_0 rispetto alla guida quando il corpo giunge nel punto piú basso e confrontarla con il valore che si ottiene quando la guida è ferma.



SOLUZIONE

Dati iniziali:

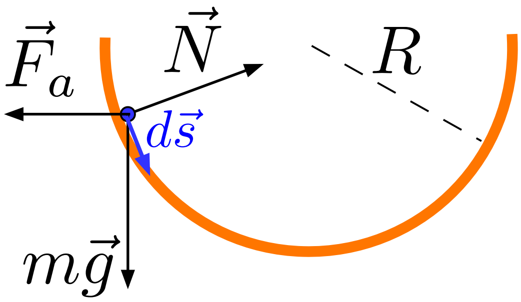
$$\begin{aligned} R &= 0.4\,\mathrm{m} \quad \text{(abbiamo riscritto i dati in unità del S.I. } 40\,\mathrm{cm} \to 0.4\,\mathrm{m}) \\ a_t &= 2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Consideriamo il sistema di riferimento della piattaforma, in cui la guida è ferma. Siccome tale sistema è in moto accelerato rispetto al sistema inerziale del laboratorio, il sistema della piattaforma NON è un sistema di riferimento inerziale. Pertanto non possiamo applicare le usuali leggi della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ che riguardano le forze reali e da cui derivano, tra l'altro, i teoremi sull'energia meccanica. Nel caso presente le forze reali che agiscono sul punto materiale sono:

- forza peso $m\vec{g}$
- reazione vincolare $\vec{N}$ della guida

Possiamo tuttavia considerare che, nel sistema di riferimento della piattaforma, il punto materiale sia soggetto, oltre alle forze reali, ad un'ulteriore forza apparente che origina puramente dalla non-inerzialità del sistema

- $\vec{F}_a = -m\vec{a}_t$



Con questa precauzione possiamo scrivere:

$$\vec{F}' = m\vec{a} \tag{1}$$

dove

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{N} + \vec{F}_a \tag{2}$$

è la somma di *tutte* le forze (reali ed apparenti) viste dal sistema della piattaforma, e $\vec{a}$ è l'accelerazione del punto materiale calcolata nel sistema di riferimento della piattaforma. Formalmente l'Eq.(1) è uguale alla seconda legge della dinamica. Da essa, come è noto, discende il teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m\vec{a} \\ &\Downarrow \\ W' &= \Delta K \end{aligned} \tag{3}$$

dove

$$W' = \int \vec{F}' \cdot d\vec{s} \tag{4}$$

ΔK è la variazione di energia cinetica nel sistema di riferimento della piattaforma e W è il lavoro eseguito dal campo di forze $\vec{F}'$ (reali+apparenti):

$$W' = \underbrace{W_{\text{peso}}}_{\text{lavoro della forza peso}} + \underbrace{W_a}_{\text{lavoro della forza apparente}} + \underbrace{W_N}_{\text{lavoro della reazione vincolare}} \tag{5}$$

Osserviamo che il lavoro W_N della reazione vincolare è nullo, dato che, istante per istante, tale forza $\vec{N}$ è sempre ortogonale allo spostamento infinitesimo

$$\delta W_N = \vec{N} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad \Rightarrow W_N = 0 \tag{6}$$

Pertanto, ai fini del bilancio energetico, la reazione vincolare non conta perché non compie lavoro. La forza *efficace* che conta per il teorema dell'energia cinetica è

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{eff}} &= \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_a = \\ &= -mg\vec{u}'_z - ma_t\vec{u}'_x \end{aligned} \tag{7}$$

dove $\vec{u}'_x$ e $\vec{u}'_z$ sono i versori lungo gli assi nel sistema di riferimento della piattaforma. Da (3) e (6) possiamo scrivere

$$W_{\text{eff}} = \Delta K \tag{8}$$

dove W_{eff} è il lavoro della forza efficace $\vec{F}_{\text{eff}}$.

- Ci chiediamo ora se la forza $\vec{F}_{\text{eff}}$ sia conservativa, ossia se esista un'energia potenziale E_p tale che

  $$\vec{F}_{\text{eff}} = -\vec{\nabla} E_p \tag{9}$$

  Se cosí fosse, potremmo scrivere

  $$W_{\text{eff}} = -\Delta E_p \tag{10}$$

  e l'Eq.(8) implicherebbe

  $$\Delta(K + E_p) = 0 \tag{11}$$

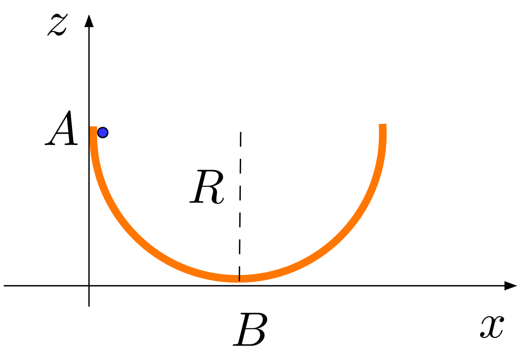
  ossia la conservazione dell'energia meccanica

  $$E_m = K + E_p \tag{12}$$

  anche nel sistema non inerziale della piattaforma! Questa legge di conservazione renderebbe molto semplice la risoluzione del problema.

- Vediamo dunque se esiste una funzione E_p tale che

  $$\vec{F}_{\text{eff}} = -\vec{\nabla} E_p \tag{13}$$



  Definiamo dunque un sistema di assi nel sistema della piattaforma come in figura, dove $x = 0$ corrisponde alla coordinata longitudinale del punto di caduta iniziale. Dall'Eq.(13)

  $$-mg\vec{u}'_z - ma_t\vec{u}'_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}'_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}'_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}'_z \tag{14}$$

Uguagliando componente per componente

$$\left\{ \begin{array}{lclll} F_{\mathrm{eff},x} & = & -ma_t = -\frac{\partial E_p}{\partial x} & \Rightarrow E_p = ma_t x + \mathrm{cost.\ in\ } x \\ F_{\mathrm{eff},y} & = & 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} & \Rightarrow E_p = \mathrm{cost.\ in\ } y \\ F_{\mathrm{eff},z} & = & -mg = -\frac{\partial E_p}{\partial z} & \Rightarrow E_p = mgz + \mathrm{cost.\ in\ } z \end{array} \right. \tag{15}$$

E' facile vedere che queste equazioni sono tra loro compatibili (in generale non è detto che lo siano, la forza potrebbe non essere conservativa), e che l'energia potenziale è

$$E_p(x,z) = \underbrace{mgz}_{\substack{\text{energia pot.} \\ \text{gravitazionale}}} + \underbrace{ma_t x}_{\substack{\text{energia pot.} \\ \text{apparente}}} \tag{16}$$

(si potrebbe anche aggiungere a tale espressione per E_p una qualsiasi quantità costante in x, y e z, non cambierebbe nulla)

- Dato che l'energia potenziale esiste, l'energia meccanica vale

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{mgz + ma_t x}_{=E_p(x,z)} \tag{17}$$

E applichiamo la conservazione dell'energia [Eq.(11)] nel tratto $A \to B$, ossia dal punto di partenza A al punto piú basso della guida. Abbiamo

$$E_{m,A} = 0 + mgR + 0 \tag{18}$$

$$E_{m,B} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + ma_t R \tag{19}$$

dove v_0 è la velocità nel punto piú basso della guida (notazione del testo).
Uguagliando

$$E_{m,A} = E_{m,B} \tag{20}$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + ma_t R \tag{21}$$

otteniamo

$$v_0 = \sqrt{2(g - a_t)R} \tag{22}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2(g-a_t)R} = \\ &= \sqrt{2\left(9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot 0.4\,\mathrm{m}} = \\ &= 2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{23}$$

- Nel caso in cui la piattaforma fosse ferma rispetto al sistema del laboratorio

$$a_t = 0$$

avremmo dall'Eq.(22) che

$$v_0 = \sqrt{2gR} \tag{24}$$

COMMENTO

Come si vede dall'espressione (22) per v_0, il risultato ha senso solo se $a_t \leq g$. Se infatti la piattaforma viene accelerata troppo (ossia piú forte dell'accelerazione di gravità g), il punto materiale non giunge mai al punto piú basso della guida. La forza efficace $\vec{F}_{eff}$ agisce infatti come una forza peso efficace diretta trasversalmente, il cui punto di equilibrio non si trova dunque sulla verticale. Il punto materiale oscillerebbe in tal caso attorno a tale posizione di equilibrio, determinata dal minimo dell'energia potenziale

$$\begin{aligned} E_p(x, z(x)) &= mgz(x) + ma_t x = \\ &= mg\left(R - \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{a_t}{g}x\right) \end{aligned} \tag{25}$$

dove $z(x)$ è determinata dall'equazione parametrica della guida $(z-R)^2 + (x-R)^2 = R^2$.