Esame di Ricerca Operativa del 28/05/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_2 \leq 1 \\ -5\,x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ 3\,x_1 \leq 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta deve aprire nuove agenzie in un territorio. Le città candidate ad ospitare le nuove sedi sono A,B,C,D mentre il territorio è diviso in 5 zone (1-2-3-4-5). I tempi di percorrenza medi da ciascuna zona alle città sono espresse dalla seguente tabella

	1	2	3	4	5
A	30	40	80	50	55
B	20	70	55	55	30
C	60	20	35	70	40
D	60	60	35	20	60

Si cerca il minor numero di localizzazioni tali che ogni zona abbia almeno un'agenzia a non più di 50 minuti.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB (DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

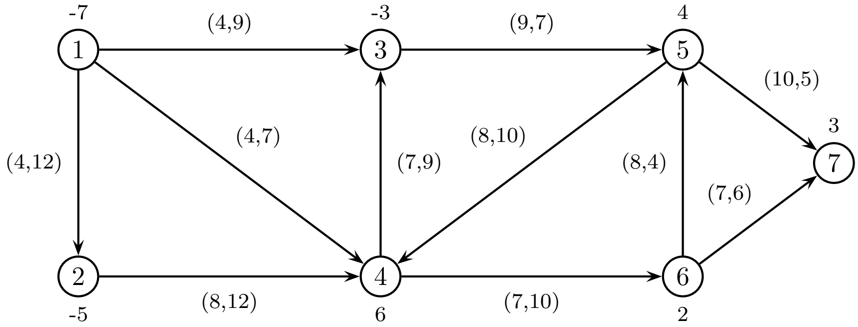
```
c=

A=                                b=

Aeq=                              beq=

lb=                               ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

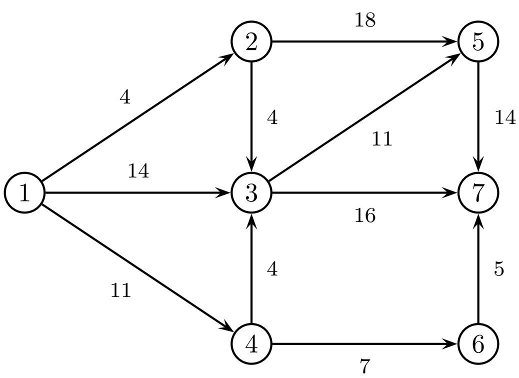


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)	(5,7)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (5,7)	(4,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

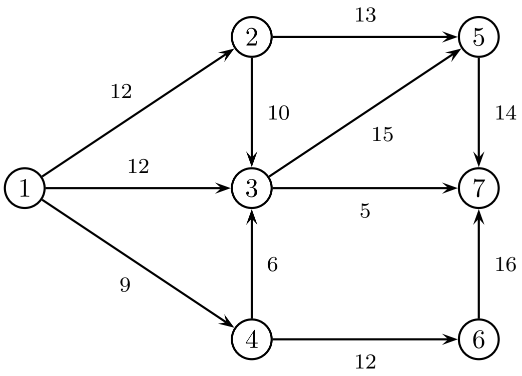
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \leq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	8	66	67	31
2		23	51	53
3			7	8
4				21

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{13}, x_{34}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 2x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 9 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 3 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$						
	$(0, -2))$						
	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$						
	$\left(-\frac{5}{3}, -12\right)$						

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 6\, x_2^2 + 3\, x_1 - 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(-5, 2)$ e $(1, 4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -5\,x_1 + x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 \le 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-1,\ -1)$	SI	NO
$\{2,\ 3\}$	$y = \left(0,\ \frac{25}{2},\ \frac{39}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(1,\ 4)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -4,\ -3,\ 0)$	4	1	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(0,\ 4)$	$\left(0,\ \frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{39}{5},\ 0\right)$	5	$5,\ \frac{55}{2}$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB DEL RILASSATO

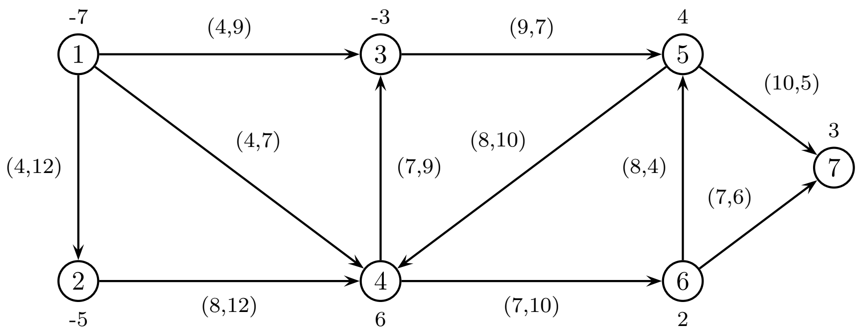
```
c=[ 1 ; 1 ; 1 ; 1]

A=[ -1 -1 0 0 ; -1 0 -1 0; 0 0 -1 -1; -1 0 0 -1; 0 -1 -1 0]        b=[ -1;-1;-1;-1;-1 ]

Aeq=[]                                                               beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                    ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

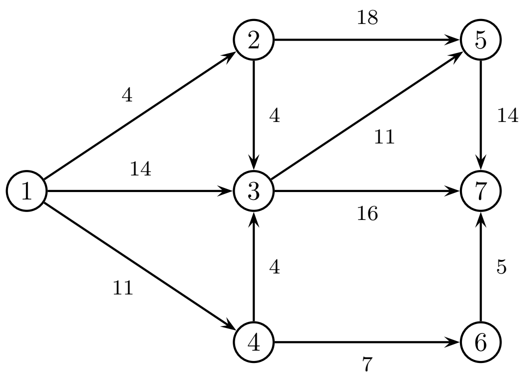


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)	(5,7)	$x = (-5,\ 0,\ 12,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ -6,\ 5,\ 0,\ -2)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (5,7)	(4,3)	$\pi = (0,\ 4,\ -5,\ 12,\ 4,\ 19,\ 14)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

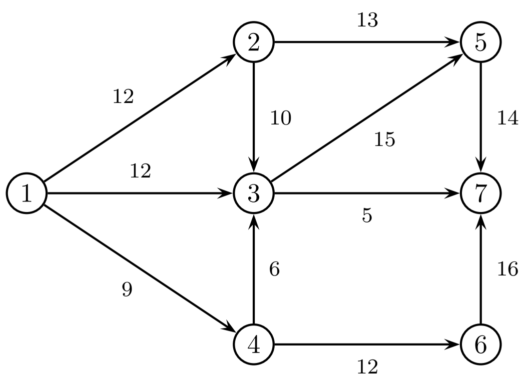
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 4, 3, 5, 7, 0, 2, 0, 3, 0, 0)	(0, 4, 3, 5, 7, 0, 2, 0, 3, 0, 0)
π	(0, −4, 4, 4, 19, 11, 29)	(0, −4, 4, 4, 8, 11, 18)
Arco entrante	(6,7)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 0	4 , 3
Arco uscente	(6,5)	(5,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		6		5		7	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	14	1	8	2	8	2	8	2	8	2	8	2	8	2
nodo 4	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 5	$+\infty$	-1	22	2	19	3	19	3	19	3	19	3	19	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	18	4	18	4	18	4	18	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	3	24	3	23	6	23	6	23	6
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		4, 5, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	12	(12, 5, 0, 0, 12, 0, 5, 0, 0, 12, 0)	17
1 - 3 - 5 - 7	2	(12, 7, 0, 0, 12, 2, 5, 0, 0, 14, 0)	19
1 - 4 - 6 - 7	9	(12, 7, 9, 0, 12, 2, 5, 0, 9, 14, 9)	28

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \leq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{49}{10}, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 68$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(4, 0)$ $\quad v_I(P) = 56$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\quad x_1 \leq 4$
$r = 4$ $\quad x_1 \leq 4$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	8	66	67	31
2		23	51	53
3			7	8
4				21

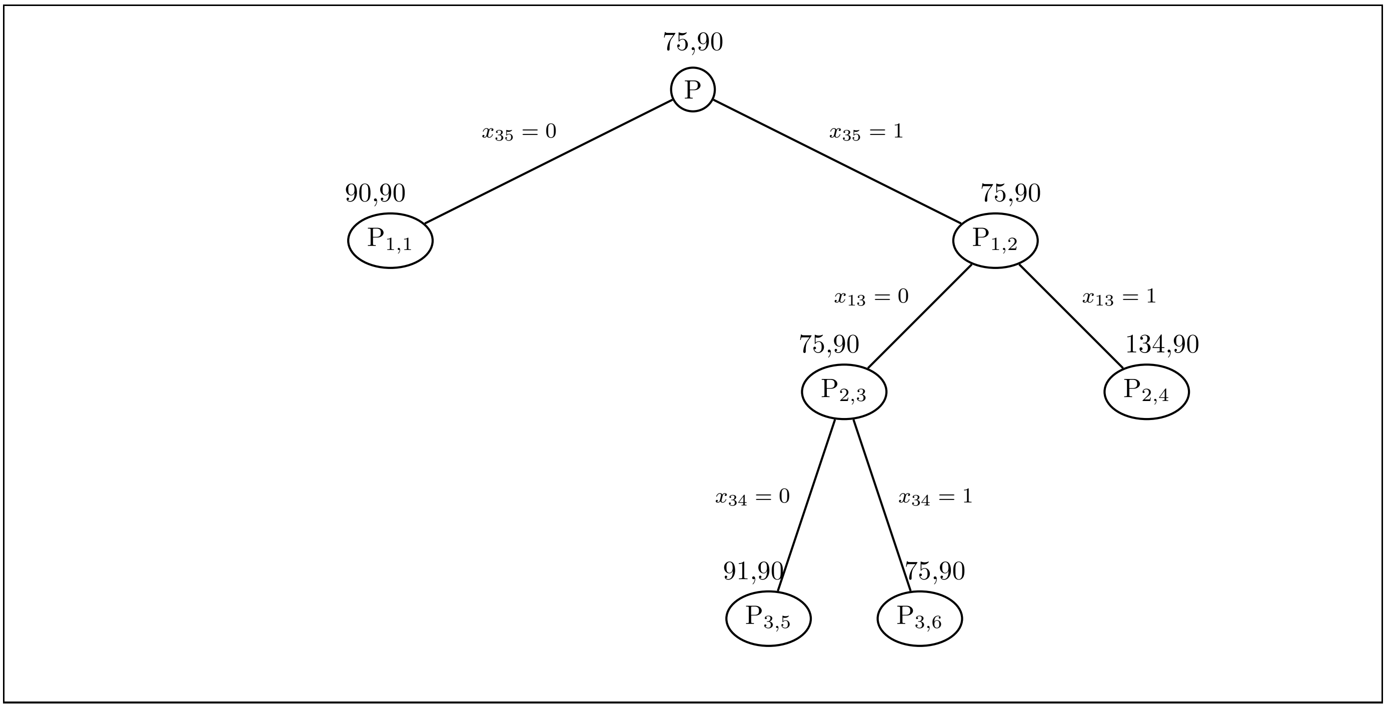
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 75$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\quad v_S(P) = 90$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{13}, x_{34}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 2x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 9 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 3 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-3,\ 0)$	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(2,\ -1)$	$(0, -2)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(3,\ 0)$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-3,\ -6)$	$\left(-\frac{5}{3}, -12\right)$		NO	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 6\, x_2^2 + 3\, x_1 - 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(-5, 2)$ e $(1, 4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$	$(1, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{95}{6}, \frac{95}{6}\right)$	$\frac{4}{95}$	$\frac{4}{95}$	$(2, 3)$