Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 20/07/2023

Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data la matrice 2×2 ad entrate complesse

$$A = \begin{bmatrix} 3+4\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 4-3\mathbf{i} & -1 \end{bmatrix},$$

si calcolino:

$||A||_\infty = \boxed{6}$

$||A||_1 = \boxed{10}$

$\text{Traccia}(A) = \boxed{2+4\mathbf{i}}$

$\text{Determinante}(A) = \boxed{-6-8\mathbf{i}}$

$\text{Raggio spettrale}(A+\bar{A}) = \boxed{6}$

$\text{Raggio spettrale}((A+\bar{A})^{-1}) = \boxed{\frac{1}{2}}$

dove $\bar{A}$ indica la matrice ottenuta da A, applicando l'operazione di coniugio di un numero complesso, ad ogni sua entrata.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha = \phi(\alpha)$ e si indichi con $J\phi(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ il Jacobiano di ϕ valutato nel punto α. Inoltre indichiamo con $\det(\cdot)$ e $\rho(\cdot)$ determinante e raggio spettrale di una matrice. Si consideri l'approssimazione di α con il metodo iterativo $x_{k+1} = \phi(x_k)$.

V **F** Se $|\det(J\phi(\alpha))| < 1$ allora il metodo è localmente convergente.

V F Se $||J\phi(\alpha)|| < 1$ per una norma matriciale allora il metodo è localmente convergente.

V F Se $\rho(J\phi(\alpha)) < 1$ allora il metodo è localmente convergente.

V F Se $|\det(J\phi(\alpha))| > 1$ allora il metodo **non** è localmente convergente.

V **F** Se $||J\phi(\alpha)|| > 1$ per una norma matriciale allora il metodo **non** è localmente convergente.

V F Se $\rho(J\phi(\alpha)) > 1$ allora il metodo **non** è localmente convergente.

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice invertibile con elementi diagonali diversi da zero e $b \in \mathbb{C}^n$. Si consideri la risoluzione del sistema $Ax = b$ mediante i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, indicando con H_J e H_{GS} le rispettive matrici di iterazione.

V F Se A è a predominanza diagonale forte allora H_J, H_{GS} sono convergenti.

V F Se A è a predominanza diagonale debole allora H_J, H_{GS} sono convergenti.

V F Se A è tridiagonale allora H_J, H_{GS} sono convergenti.

V F H_J può essere invertibile.

V F H_{GS} può essere invertibile.

V F H_J può essere a predominanza diagonale forte.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $I_N = \sum_{j=0}^{N} a_j f(x_j)$ la **formula di quadratura di Newton-Cotes** con $N+1$ nodi per l'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$.

V F I_1 corrisponde alla formula dei trapezi su $[a, b]$.

V F I_2 corrisponde alla formula di Simpson su $[a, b]$.

V F I_N è una formula interpolatoria per ogni N intero maggiore o uguale a 1.

V F Il grado di precisione di I_N può essere minore di N

V F I nodi x_j sono equispaziati in $[a, b]$ per ogni N intero maggiore o uguale a 1.

V F I pesi a_j sono non negativi per ogni N intero maggiore o uguale a 1.

Esercizio 2

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si calcoli il polinomio di interpolazione di Hermite per la funzione $f(x) = 5+\sin(\frac{\pi}{2}x)$, nei nodi $x_0 = 0$ ed $x_1 = 1$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si scriva l'espressione dell'errore di interpolazione relativo al polinomio di Hermite su $[0, 1]$ e se ne dia una limitazione superiore al suo valore assoluto.

$\boxed{\text{(i)}}$ Imponendo le condizioni di interpolazione su $f(x)$ e sulla sua derivata si ottiene il polinomio di terzo grado

$$H_3(x) = 5 + \frac{\pi}{2}x + (3-\pi)\,x^2 + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)x^3.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ L'errore di interpolazione del polinomio di Hermite per funzioni sufficientemente regolari (come in questo caso) ci da l'espressione

$$|f(x) - H_3(x)| = |x(1-x)|^2 \frac{|f^{(4)}(\zeta)|}{4!}, \qquad \zeta \in [0, 1].$$

Utilizzando la maggiorazione $|x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$ su $[0, 1]$ e $|f^{(4)}| \leq \frac{\pi^4}{16}$ si ottiene la disuguaglianza

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \frac{\pi^4}{6144}.$$

Esercizio 3

Si consideri l'equazione nonlineare

$$|x^2 + x - 2| - |x + 1| = 0.$$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcolino tutte le radici reali dell'equazione.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Per ciascuna delle radici trovate si dica, giustificando la risposta, se il metodo iterativo

$$x_{k+1} = g(x_k) = \frac{1}{x_k} - 2$$

è localmente convergente

$\boxed{\text{(i)}}$ Il sistema ha esattamente 4 soluzioni date da

$$x_1 = \sqrt{3}, \qquad x_2 = -\sqrt{3}, \qquad x_3 = \sqrt{2} - 1, \qquad x_4 = -\sqrt{2} - 1.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ I valori x_1, x_2 non verificano $x = g(x)$, quindi il metodo non può convergere a loro. Calcolando il valore di $g'(x)$ in x_3 ed x_4 si ottiene convergenza locale per x_4 ma non per x_3.

Esercizio 4

Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{8}\left(a_0 f(0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(1)\right).$$

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Determinare i valori del peso a_0 e dei nodi x_1, x_2 (con $0 < x_1 < x_2 < 1$) che rendono massimo l'ordine di precisione della formula.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Determinare l'ordine di precisione della formula.

$\boxed{\text{(i)}}$ Imponendo l'esattezza della formula di quadratura per le funzioni $1, x, x^2$ si ottiene $a_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Verificando l'errore della formula su x^3 ed x^4, si ottiene che la formula ha grado 3.