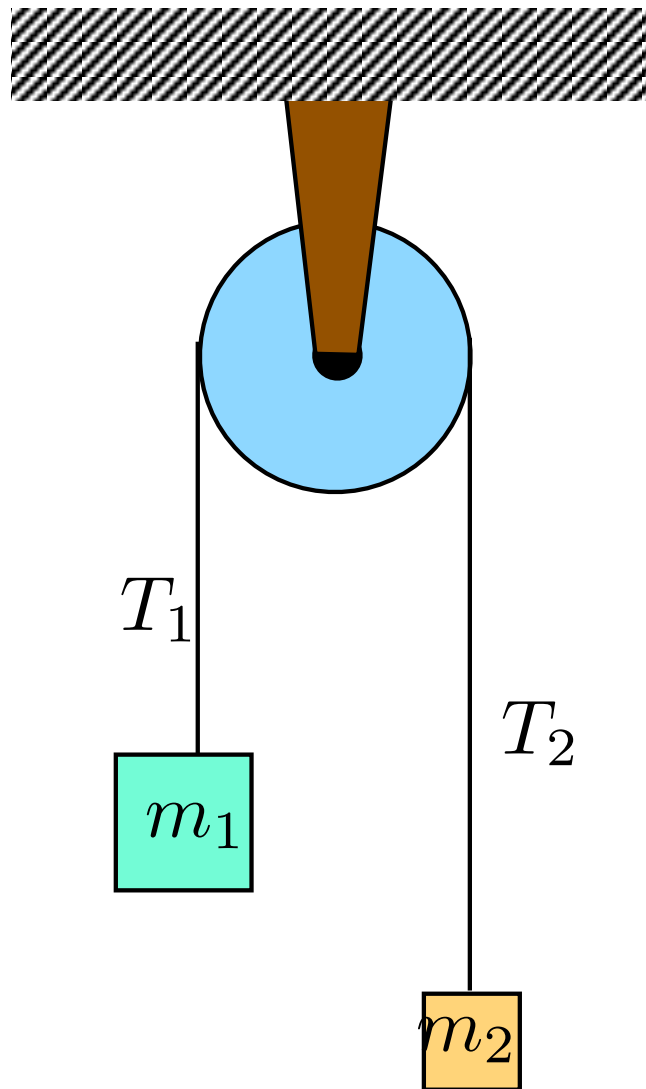


Esercizio (tratto dal Problema 45 del Mazzoldi)

Ad una carrucola di raggio R e massa m sono sospese due masse m_1 e m_2 , con $m_1 > m_2$. Il momento d'inerzia della carrucola rispetto all'asse passante per il suo centro e ortogonale al piano verticale in cui giace, vale I . Si suppone che il filo non slitti e che non ci sia attrito sull'asse. Calcolare

1. l'accelerazione delle due masse;
2. le tensioni del filo;
3. la reazione sull'asse della carrucola.



SOLUZIONE

Scegliamo anzitutto un verso convenzionale per il moto. Siccome il testo dice che $m_1 > m_2$, sembra naturale (anche se non è obbligatorio) scegliere il verso mostrato in figura 1. Scriviamo ora le equazioni

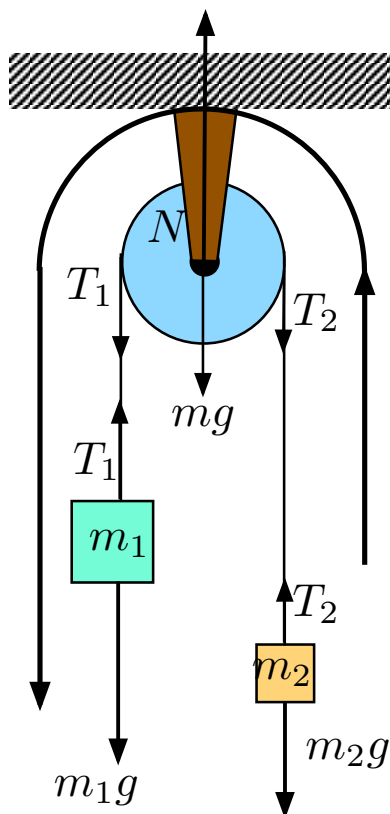


Figure 1:

del moto in base a tale verso convenzionale

- equazione per il corpo m_1

$$m_1g - T_1 = m_1a \quad (1)$$

- equazione per il corpo m_2

$$-m_2g + T_2 = m_2a \quad (2)$$

- equazioni per la carrucola

Come prima cosa elenchiamo tutte le forze che agiscono sulla carrucola:

- le tensioni T_1 e T_2 dei fili applicati alla carrucola (si noti che ciascuna parte di filo, a destra e a sinistra della carrucola, ha massa nulla, e dunque le tensioni ai capi di ciascuna parte di filo sono uguali ed opposte);
- la forza peso dovuta alla massa m del disco della carrucola;
- la reazione vincolare N del perno della carrucola.

Osserviamo ora che, siccome la carrucola è un corpo rigido, la sua dinamica – a differenza di quella dei punti materiali m_1 e m_2 – è descritta da *due* equazioni: una per il moto traslatorio del centro di massa (che in questo caso è fermo), e l'altro per il moto rotatorio attorno al centro di massa.

– Moto traslatorio del C.M.

In questo caso il centro di massa è fermo, e dunque

$$\underbrace{-T_1 - T_2 - mg + N}_{\sum F^{ext}} = \underbrace{0}_{Ma_{CM}} \quad (3)$$

$$\rightarrow N = mg + T_1 + T_2 \quad (4)$$

ossia la reazione vincolare N del perno compensa la forza peso e le due tensioni, impedendo al C.M. del disco di muoversi.

– Moto rotatorio attorno al C.M.

È descritto dall'equazione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (5)$$

dove \vec{L} è il momento angolare e \vec{M} è il momento delle forze esterne, calcolati rispetto al polo = centro del disco.

- * Per calcolare \vec{L} osserviamo che la carrucola ruota attorno all'asse di rotazione perpendicolare al foglio. Indicando con \hat{k} il versore uscente, abbiamo

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{con } \vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\omega \hat{k} \quad (6)$$

dove I è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse passante per il centro del disco.

- * Calcoliamo ora i momenti \vec{M} delle varie forze, rispetto al polo=centro del disco. Mentre la forza peso mg e la reazione vincolare N del perno danno momento nullo (perché sono applicate proprio al polo), la tensione T_1 applicata al disco dà un momento $\vec{M}_{T_1} = T_1 R \hat{k}$ diretto lungo \hat{k} , mentre la tensione T_2 applicata al disco dà un momento $\vec{M}_{T_2} = -T_2 R \hat{k}$ diretto nel verso entrante (opposto a \hat{k}). Quindi il momento totale è

$$\vec{M} = (T_1 - T_2) R \hat{k} \quad (7)$$

- * Inserendo la (6) e la (7) nella (5) otteniamo

$$I \frac{d\omega}{dt} \hat{k} = (T_1 - T_2) R \hat{k} \quad (8)$$

ossia

$$I\alpha = (T_1 - T_2) R \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (9)$$

– Condizione di puro rotolamento

Utilizziamo ora il fatto che il filo non slitta: siccome la carrucola ruota senza strisciare contro il filo, l'accelerazione angolare α e l'accelerazione longitudinale a dei corpi connessi al filo sono legati dalla relazione

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad (10)$$

Sostituendo (10) in (9) otteniamo

$$a \frac{I}{R^2} = T_1 - T_2 \quad (11)$$

Quindi le tre equazioni (1), (2) e (11)

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ -m_2 g + T_2 &= m_2 a \\ T_1 - T_2 &= a \frac{I}{R^2} \end{cases} \quad (12)$$

costituiscono un sistema di tre equazioni in tre incognite a, T_1 e T_2 . Sommando le tre equazioni si ottiene

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})a \quad (13)$$

da cui

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \quad (14)$$

Dalla prima equazione di (12) ricaviamo ora che

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1(g - a) = \\ &= m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \right) = \\ &= m_1 g \frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

e dunque

$$T_1 = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \quad (16)$$

Dalla seconda equazione di (12) ricaviamo ora che

$$\begin{aligned} T_2 &= m_2(g + a) = \\ &= m_2 g \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \right) = \\ &= m_2 g \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

e dunque

$$T_2 = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \quad (18)$$

La reazione vincolare si calcola allora dalla (3)

$$\begin{aligned} N &= T_1 + T_2 + mg = \\ &= m_1 g \frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} + m_2 g \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} + mg = \\ &= g \frac{m_1(2m_2 + \frac{I}{R^2}) + m_2(2m_1 + \frac{I}{R^2}) + m(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \\ &= g \frac{4m_1 m_2 + m(m_1 + m_2) + \frac{I}{R^2}(m + m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \end{aligned} \quad (19)$$