Equazioni non lineari
Metodi stazionari ad un punto

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 10

Outline

Data l'equazione $f(x) = 0$, si può costruire una funzione $\phi(x)$ tale che l'equazione data sia equivalente ad una equazione della forma

$$x = \phi(x)$$

Basta porre, ad esempio,

$$\phi(x) = x - g(x)f(x)$$

dove $g(x)$ è un'arbitraria funzione continua purché risulti diversa da zero almeno in un intervallo contenente gli zeri di $f(x)$

Se α è uno zero di $f(x)$ ($f(\alpha) = 0$) si ha anche $\alpha = \phi(\alpha)$ e viceversa

α si dice un **punto fisso** della funzione $\phi(x)$

Per ogni scelta della funzione $\phi(x)$ si può considerare un metodo iterativo stazionario ad un punto della forma

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Il problema di approssimare uno zero α di $f(x)$ si riduce a quello di costruire con un processo iterativo del tipo introdotto una successione convergente ad α, punto fisso di $\phi(x)$

Outline

1. Teoremi
   - Teorema di convergenza locale
   - Teorema sull'ordine di convergenza
2. Metodo di Newton
   - Ordine di convergenza
   - Condizioni sufficienti di convergenza
3. Efficienza di un metodo

Diamo adesso una condizione sufficiente per la convergenza locale del metodo precedente, cioè una convergenza dipendente dalla scelta di x_0

Teorema di convergenza locale

Sia $\alpha = \phi(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{I}$, $\phi \in C^1(\mathcal{I})$
Se esistono due numeri positivi ρ e K con $K < 1$, tali che $\forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset \mathcal{I}$ si verifichi la condizione

$$| \phi'(x) | \leq K$$

allora per il metodo $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ valgono le seguenti proposizioni:

1. se $x_0 \in \,]\alpha - \rho, \alpha + \rho[\; \Rightarrow x_n \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ per $n \in \mathbb{N}$
2. se $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, allora $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$
3. α è l'unico punto fisso di $\phi(x)$ in $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

Dimostrazione

La proposizione 1 si dimostra per induzione, cioè, scelto un $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, si ammette per ipotesi che sia, per un certo n, $x_n \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, ossia $|x_n - \alpha| < \rho$ e si deduce che deve essere $x_{n+1} \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, ovvero $|x_{n+1} - \alpha| < \rho$
Infatti, facendo uso della struttura del metodo e del teorema del valor medio, si ha

$$x_{n+1} - \alpha \ = \ \phi(x_n) - \phi(\alpha) \ = \ \phi'(\xi_n)(x_n - \alpha)$$

dove ξ_n è compreso tra x_n e α
Dall'ipotesi fatta su x_n e da quelle del teorema segue

$$|x_{n+1} - \alpha| \ = \ |\phi'(\xi_n)|\,|x_n - \alpha| \ \leq \ K\,|x_n - \alpha| \ < \ \rho$$

Dimostrazione

La proposizione 2 segue dall'ipotesi $0 < K < 1$ e dalla disuguaglianza

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K^{n+1} |x_0 - \alpha|$$

che si ottiene per ricorrenza dalla relazione finale della slide precedente

Infine la proposizione 3 si dimostra per assurdo
Se in $]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ esistesse un altro punto fisso $\beta \neq \alpha$, si avrebbe

$$|\alpha - \beta| = |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| = |\phi'(\xi)| \, |\alpha - \beta| \leq K|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

In generale l'ordine di convergenza di un metodo iterativo è un numero reale $p \geq 1$
Per i metodi iterativi stazionari ad un punto vale il teorema seguente

Teorema sull'ordine di convergenza

Un metodo iterativo stazionario ad un punto, la cui funzione di iterazione $\phi(x)$ sia sufficientemente derivabile, ha ordine di convergenza uguale ad un numero intero positivo p
Se il metodo converge ad α, la convergenza è di ordine p allora e solo che si abbia

$$\phi(\alpha) = \alpha, \ \phi^{(i)}(\alpha) = 0 \ \text{ per } \ 1 \leq i < p, \ \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

Dimostrazione

Usando la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha &= \phi(x_n) - \phi(\alpha) \\ &= \phi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \phi''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + \cdots\cdots \\ &\quad \cdots + \phi^{(p-1)}(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^{p-1}}{(p-1)!} + \phi^{(p)}(\xi_n)\frac{(x_n - \alpha)^p}{p!} \end{aligned}$$

dove ξ_x è compreso tra x_n e α

Dimostrazione

Se valgono le ipotesi sulle derivate successive di ϕ calcolate in α, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!} \neq 0$$

da cui si deduce che l'ordine di convergenza è p ed il fattore di convergenza vale $C = \frac{|\phi^{(p)}(\alpha)|}{p!}$

Viceversa se l'ordine è p, sia $\phi^{(i)}(\alpha)$ la prima derivata non nulla nel precedente sviluppo di Taylor intorno al punto α
Se fosse $i \neq p$, per il ragionamento diretto anche l'ordine sarebbe $i \neq p$ contro l'ipotesi per cui deve risultare $i = p$ e quindi valgono le ipotesi sulle derivate di ϕ

Criterio di arresto

Come criterio di arresto dell'algoritmo iterativo si può assumere la condizione

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq E$$

Per maggiori dettagli si guardino le dispense alle pagine 91-92

Outline

1. Teoremi
   - Teorema di convergenza locale
   - Teorema sull'ordine di convergenza
2. Metodo di Newton
   - Ordine di convergenza
   - Condizioni sufficienti di convergenza
3. Efficienza di un metodo

Il più importante (ed il più utilizzato) fra i metodi ad un punto è il **metodo di Newton**

Tale metodo si può applicare per approssimare uno zero α di $f(x)$ se, in tutto un intorno di α, $f(x)$ è derivabile con continuità

Assumendo la funzione di iterazione della forma

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

si ha il metodo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Il metodo di Newton ha una interpretazione grafica. Infatti l'iterata x_{n+1} è individuata dal punto d'incontro dell'asse delle ascisse con la tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $A_n \equiv [x_n, f(x_n)]$

Per questo motivo il metodo di Newton è anche noto come il **metodo delle tangenti**

Studiamo quale ordine di convergenza ha il metodo di Newton

Caso radice con molteplicità 1

Teorema

Sia α uno zero di semplice (o di molteplicità 1) della funzione $f(x)$ (sufficientemente derivabile) e il metodo di Newton sia convergente ad α

allora valgono le proposizioni

1. la convergenza è di ordine $p \geq 2$
2. se $p = 2$ il fattore di convergenza è $C = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|$

Dimostrazione

Per il primo punto, dalla struttura di $\phi(x)$ si ricava

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\end{aligned}$$

da cui segue

$$\phi'(\alpha) = 0$$

Questo risultato, dal teorema dimostrato in precedenza, dice che, per zeri semplici, il metodo di Newton ha ordine di convergenza almeno 2

Dimostrazione

Procedendo con il calcolo delle derivate si ha

$$\phi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Segue che se $f''(\alpha) \neq 0$ è anche $\phi''(\alpha) \neq 0$
Questo risultato garantisce che l'ordine è $p = 2$

Se invece si ha $f''(\alpha) = 0$ è anche $\phi''(\alpha) = 0$ e quindi si ha $p > 2$

La seconda tesi del Teorema discende direttamente dal Teorema generale sull'ordine di convergenza con $p = 2$

Osservazione 1

Si deve osservare che la convergenza del metodo di Newton è di tipo locale, cioè si verifica se si sceglie x_0 sufficientemente vicino ad α
A tale punto iniziale si può arrivare, ad esempio, col metodo di bisezione

Osservazione 2

Nel caso di radici semplici, per il metodo di Newton esistono sicuramente punti iniziali x_0 che lo rendono convergente
Infatti, risultando $\phi'(\alpha) = 0$, per la continuità della funzione, esiste un intorno di α per il quale vale la condizione principale del Teorema di convergenza locale

Caso radice con molteplicità maggiore di 1

Supponiamo ora che α sia per $f(x)$ uno zero di molteplicità $s \geq 1$
Si può scrivere

$$f(x) = g(x)(x-\alpha)^s, \text{ con } g(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^s} \text{ e } g(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$$

Per il metodo di Newton si ha

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{g(x)(x-\alpha)^s}{sg(x)(x-\alpha)^{s-1} + g'(x)(x-\alpha)^s} \\ &= x - \frac{g(x)(x-\alpha)}{sg(x) + g'(x)(x-\alpha)}\end{aligned}$$

Caso radice con molteplicità maggiore di 1

Segue, con facili calcoli,

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{s}$$

Perciò, per $s > 1$, il metodo converge linearmente con fattore di convergenza $C = 1 - \frac{1}{s}$

Caso radice con molteplicità maggiore di 1

Osservazione 3

Anche nel caso di radici di molteplicità maggiore di 1, per il metodo di Newton esistono sicuramente punti iniziali x_0 che lo rendono convergente
Infatti, risultando $0 < \phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{s} < 1$, per la continuità della funzione, esiste un intorno di α per il quale vale la condizione principale del Teorema di convergenza locale

Caso radice con molteplicità maggiore di 1

Osservazione 4

Se si conosce la molteplicità $s > 1$ della radice α si può modificare il metodo di Newton in modo che la convergenza sia almeno quadratica utilizzando il processo iterativo

$$x_{n+1} = x_n - s\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Per la sua interpretazione grafica, il metodo di Newton ha delle condizioni sufficienti che assicurano la convergenza

Condizione di convergenza

Data l'equazione $f(x) = 0$, sia α una soluzione di molteplicità dispari con $[a, b]$ intervallo di separazione per α ed inoltre sia $f \in C^2([a, b])$

Se $f'(x)$ e $f''(x)$ sono di segno costante in $[a, b]$

allora

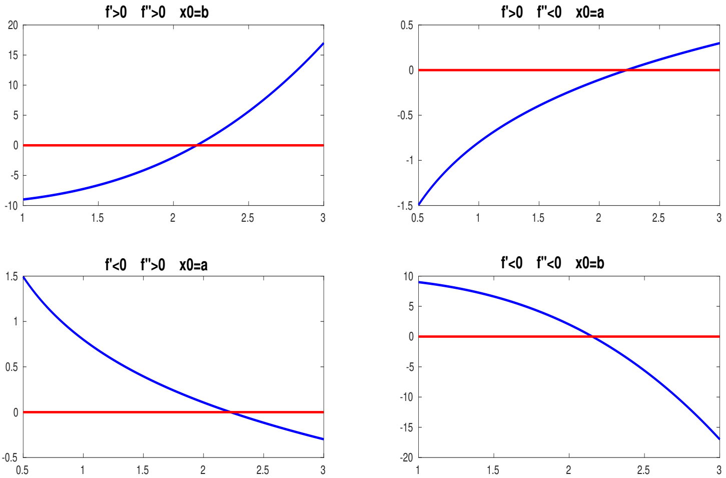
il metodo di Newton converge scegliendo come punto iniziale un valore $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$f(x_0)\, f''(x_0) \; > \; 0$$

Per avere la costanza del segno delle prime due derivate di $f(x)$ si hanno 4 possibili casi

1. $f'(x) > 0 \quad f''(x) > 0$
2. $f'(x) > 0 \quad f''(x) < 0$
3. $f'(x) < 0 \quad f''(x) > 0$
4. $f'(x) < 0 \quad f''(x) < 0$

Nella figura che segue sono mostrati i grafici qualitativi di $f(x)$ nei quattro casi con indicato, per ciascuno di essi, un possibile valore iniziale x_0


f'>0 f''>0 x0=b
f'>0 f''<0 x0=a
f'<0 f''>0 x0=a
f'<0 f''<0 x0=b

Outline

I metodi iterativi possono essere analizzati in base alla loro **efficienza**

Questo concetto non ha una definizione formale unica, esso è legato essenzialmente all'ordine p del metodo (e quindi alla sua capacità di ridurre l'errore ad ogni iterazione) ed al numero v di valutazioni di funzione per ogni iterazione (e quindi alla sua complessità computazionale)

Ad esempio, l'efficieenza E può essere definita da

$$E = \frac{p}{v}$$

Riportiamo l'efficienza dei metodi che abbiamo introdotto

Bisezione

$$E = \frac{1}{1} = 1$$

Secanti

$$E = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Newton (α semplice)

$$E = \frac{2}{2} = 1$$

Newton (α molteplicità maggiore di 1)

$$E = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esempio 1

Separare le radici dell'equazione

$$x + \log x = 0$$

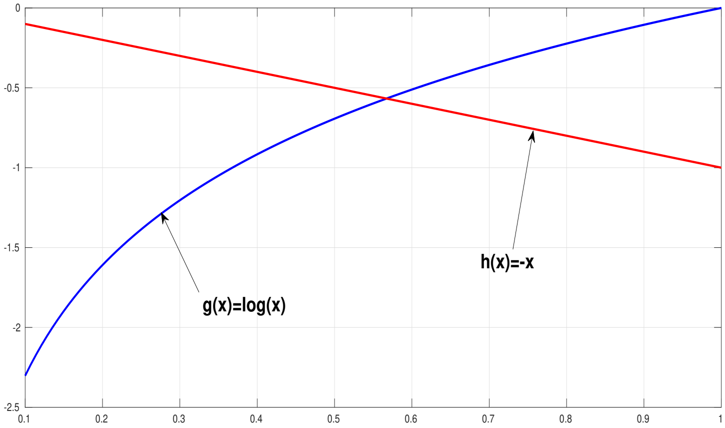
Studiare la convergenza dei metodi iterativi

1. $x_{n+1} = -\log(x_n)$
2. metodo di Newton

Eseguiamo una separazione grafica ponendo

$$g(x) = \log x \qquad h(x) = -x$$

Esempio 1



Esempio 1

Dalla figura si deduce che l'equazione ha una sola soluzione

$$\alpha \in]0.5, 0.6[$$

Il primo processo iterativo ha la funzione di iterazione data da

$$\phi(x) = -\log x$$

la cui derivata prima è

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x}$$

Esempio 1

Sull'intervallo di separazione di α risulta

$$\left|\phi'(x)\right| > 1$$

per cui il metodo non assicura la convergenza

Esaminiamo il metodo di Newton
Ponendo $f(x) = x + \log x$, risultano

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Esempio 1

Sull'intervallo di separazione di α risultano

$$f'(x) > 0 \qquad f''(x) < 0$$

per cui, scegliendo $x_0 = 0.6$, il metodo di Newton converge

Esempio 2

Separare le radici dell'equazione

$$3\,x^2\,e^{-x} \;=\; 1$$

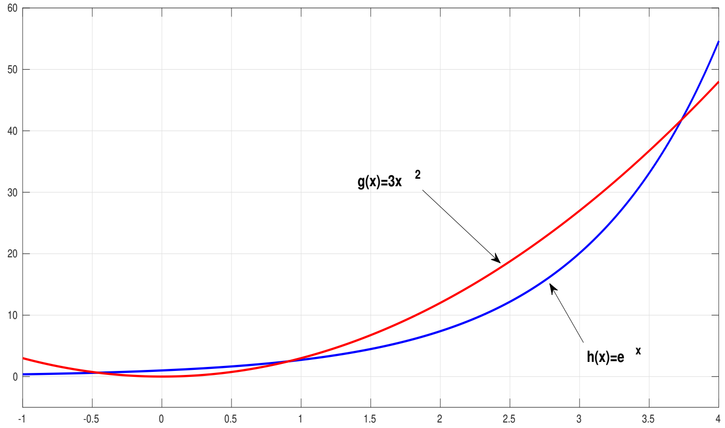
Studiare la convergenza dei metodi iterativi

1. $x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{3x_n}$
2. $x_{n+1} = \log(3x_n^2)$
3. metodo di Newton

Eseguiamo una separazione grafica ponendo

$$g(x) \;=\; 3\,x^2 \qquad h(x) \;=\; e^x$$

Esempio 2



Esempio 2

Dalla figura si deduce che l'equazione ha tre soluzioni

$$\alpha_1 \in]-1/2, -1/3[\qquad \alpha_2 \in]2/3, 1[\qquad \alpha_3 \in]7/2, 4[$$

Il primo processo iterativo proposto, procedendo come nell'esempio precedente e utilizzando anche la derivata seconda della funzione di iterazione, non converge ad α_1 e α_3 mentre converge ad α_2

Esempio 2

Il secondo processo iterativo proposto, procedendo come nell'esempio precedente e utilizzando anche la derivata seconda della funzione di iterazione, non converge ad α_1 e α_2 mentre converge ad α_3

Il metodo di Newton converge nei tre casi scegliendo come punti iniziali

$$x_{0,1} = -\frac{1}{2} \qquad x_{0,2} = 1 \qquad x_{0,3} = 4$$