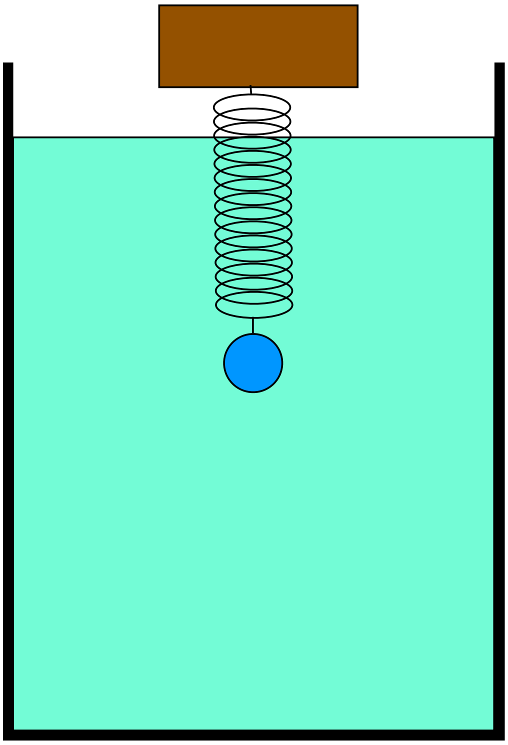
Esercizio (tratto dall'Esempio 9.7 del Mazzoldi 2)

Una sfera di massa $m = 0.8\,\mathrm{Kg}$ e raggio $R = 4.1\,\mathrm{cm}$ è appesa ad una molla di costante elastica $k = 125\,\mathrm{N/m}$. Se la sfera viene immersa in un liquido, si osserva che la posizione di equilibrio statico cambia di $2.0\,\mathrm{cm}$. Calcolare la densità del liquido.



SOLUZIONE

1. Consideriamo anzitutto il caso in cui non ci sia il fluido (vedi Fig.1) In tal caso la pallina, soggetta

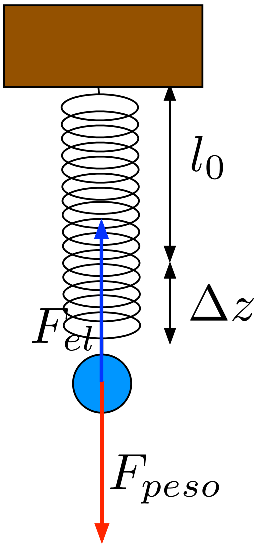


Figure 1:

alla forza peso, allunga la molla. La posizione di equilibrio (pallina ferma) si registra quando la forza totale che agisce sulla pallina è nulla, ossia quando la forza peso (diretta verso il basso) è compensata esattamente dalla forza elastica di richiamo della molla (diretta verso l'alto). Scegliamo l'asse z diretto verso il basso (come è usuale nei problemi con i fluidi).

Indichiamo con

$$\Delta z = \text{allungamento della molla in assenza del liquido}$$

$$\begin{aligned} \text{all'equilibrio:} \qquad & F_{tot} = 0 \\ & \Downarrow \\ & F_{peso} + F_{el} = 0 \\ & \Downarrow \\ & mg \ - \ k\Delta z = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

da cui otteniamo la relazione

$$mg \ = \ k\Delta z \tag{2}$$

2. Consideriamo ora il caso in cui il tutto è immerso nel liquido (vedi Fig.2). In questo caso, oltre alla forza peso e alla forza elastica, dobbiamo anche considerare la spinta di Archimede F_A che agisce sulla pallina, che è diretta verso l'alto. La posizione di equilibrio si registra quando la forza totale che agisce sulla pallina è nulla

$$\begin{aligned} \text{all'equilibrio:} \qquad & F_{tot} = 0 \\ & \Downarrow \\ & F_{peso} + F_{el} + F_A = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

dove

- La forza peso è ovviamente la stessa, indipendentemente dalla presenza del fluido

$$F_{peso} = mg$$

- L'allungamento in presenza del fluido è in generale diverso da quello in assenza del liquido, e quindi possiamo denotare

$$\Delta z' = \text{allungamento della molla in presenza del liquido}$$

Intuitivamente ci aspettiamo che l'allungamento in presenza del liquido sia minore rispetto a quello in assenza del liquido, dato che in presenza del liquido la spinta di Archimede 'aiuta' la forza elastica a compensare la forza peso diretta verso il basso. Dunque è sufficiente un allungamento minore della molla.

- La forza di Archimede (diretta verso l'alto) è pari al peso del *liquido* spostato, ossia il peso di una fittizia sfera di liquido che occuperebbe lo spazio della sfera di materiale se quest'ultima non ci fosse:

$$F_A = -m_l\, g \tag{4}$$

dove m_l è la massa di tale sferetta fittizia di liquido.
Se ρ_l denota la densità del liquido e V il volume della sfera, la massa del liquido si scrive come

$$m_l = \rho_l\, V = \rho_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

e dunque

$$F_A = -\rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g \tag{5}$$

Pertanto dalla (3) abbiamo

$$\begin{aligned} mg - k\Delta z' - \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g = 0 \\ [\text{uso ora la } (2)] \\ k\Delta z - k\Delta z' - \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g = 0 \\ \Downarrow \\ k(\Delta z - \Delta z') = \rho_l\, \frac{4}{3}\pi R^3\, g \end{aligned} \tag{6}$$

da cui

$$\rho_l = \frac{k(\Delta z - \Delta z')}{\frac{4}{3}\pi R^3\, g} \tag{7}$$

Dal testo sappiamo che

$$\Delta z - \Delta z' = 0.02\,\mathrm{m}$$

Pertanto, sostituendo i valori numerici, otteniamo

$$\begin{aligned} \rho_l &= \frac{125\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0.02\,\mathrm{m}}{\frac{4}{3}\pi(0.041\,\mathrm{m})^3\ \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 882.8\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^4} \\ &\quad [\text{uso ora N} = \mathrm{Kg\,m/s^2}] \\ &= 882.8\,\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned} \tag{8}$$

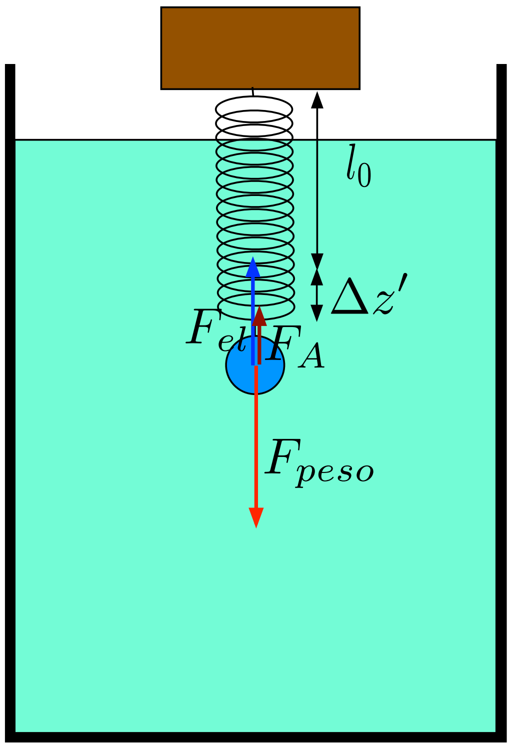


Figure 2: