Stabilità (à la Lyapunov)

Considera le conseguenze sul movimento del sistema di un'incertezza sul valore iniziale dello stato (ipotesi ingressi fissi e noti).

Stabilità (à la Lyapunov)

Considera le conseguenze sul movimento del sistema di un'incertezza sul valore iniziale dello stato (ipotesi ingressi fissi e noti).

"Piccole" perturbazioni dello **stato iniziale** rispetto a un valore di riferimento, provocano solo "piccole" perturbazioni del **movimento dello stato**, eventualmente destinate ad annullarsi per "tempi lunghi".

Stabilità dell'equilibrio

Ingresso constante: $\boldsymbol{u(t) = \bar{u}}$

Corrispondente stato di equilibrio: $\boldsymbol{\bar{x}}$

Consideriamo un movimento ***perturbato*** ottenuto da $\boldsymbol{u(t) = \bar{u}}$ ma a partire da x_0 (diverso da $\boldsymbol{\bar{x}}$).

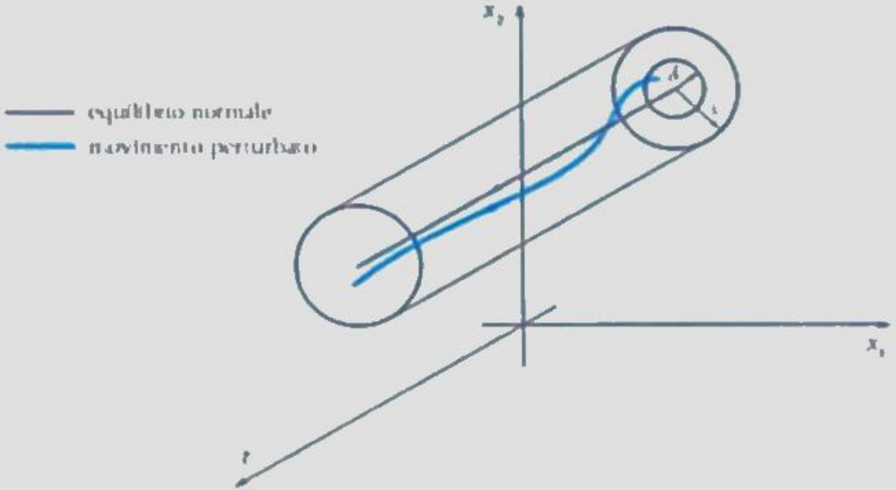
Definiamo

Uno stato di equilibrio $\boldsymbol{\bar{x}}$ e' **stabile**, se per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per *tutti* gli x_0 che soddisfano

$$||x_0 - \bar{x}|| \leq \delta$$

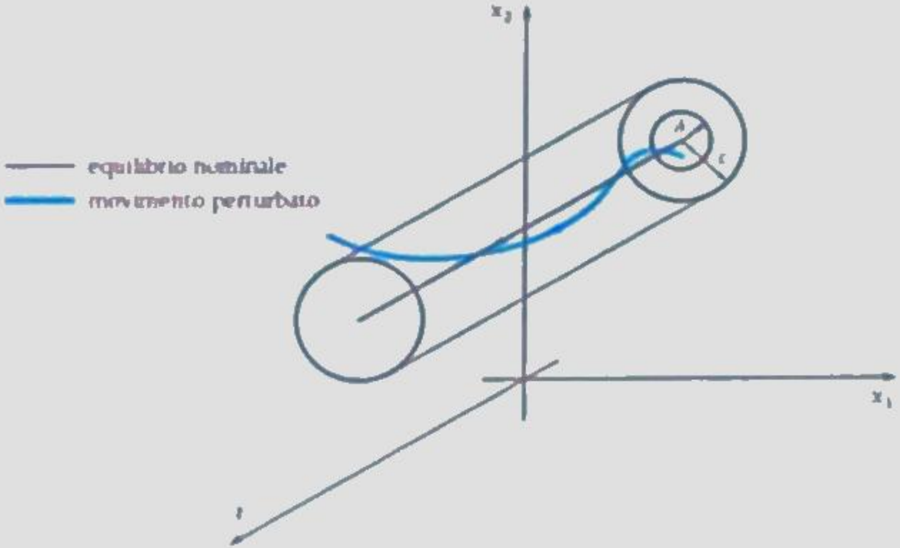
Si ha: $$||x(t) - \bar{x}|| \leq \epsilon \qquad t \geq 0$$

Stabilità dell'equilibrio



Equilibrio stabile.

Stabilità dell'equilibrio



Equilibrio instabile.

Asintotica stabilità

Definiamo

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ e' **asintoticamente stabile,** se per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per *tutti* gli x_0 che soddisfano

$$||x_0 - \bar{x}|| \leq \delta$$

Si ha: $$||x(t) - \bar{x}|| \leq \epsilon \qquad t \geq 0$$

E inoltre:

$$lim_{t \to \infty} ||x(t) - \bar{x}|| = 0$$

Modellistica: equazioni differenziali lineari

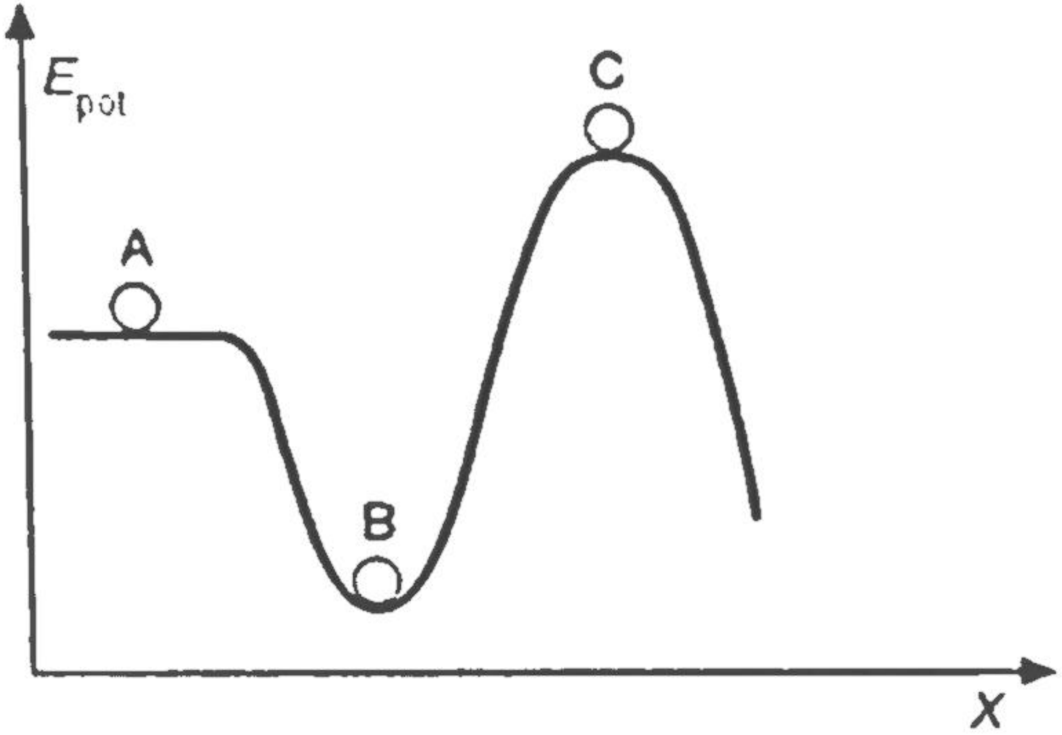
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

Per sistemi LTI (lineari tempo invarianti) possiamo calcolare in forma chiusa la funzione di transizione dello stato (cioè la soluzione)

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \end{cases}$$



E_{pot}
A
B
C
X

Equazioni differenziali lineari: soluzioni vettoriali

Caso vettoriale omogeneo (SISTEMA LTI con u(t)=0)

$$\dot{x}(t) = Ax(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(r) \in \Re$$

TEOREMA: La soluzione dell'equazione differenziale vettoriale e' del tipo:

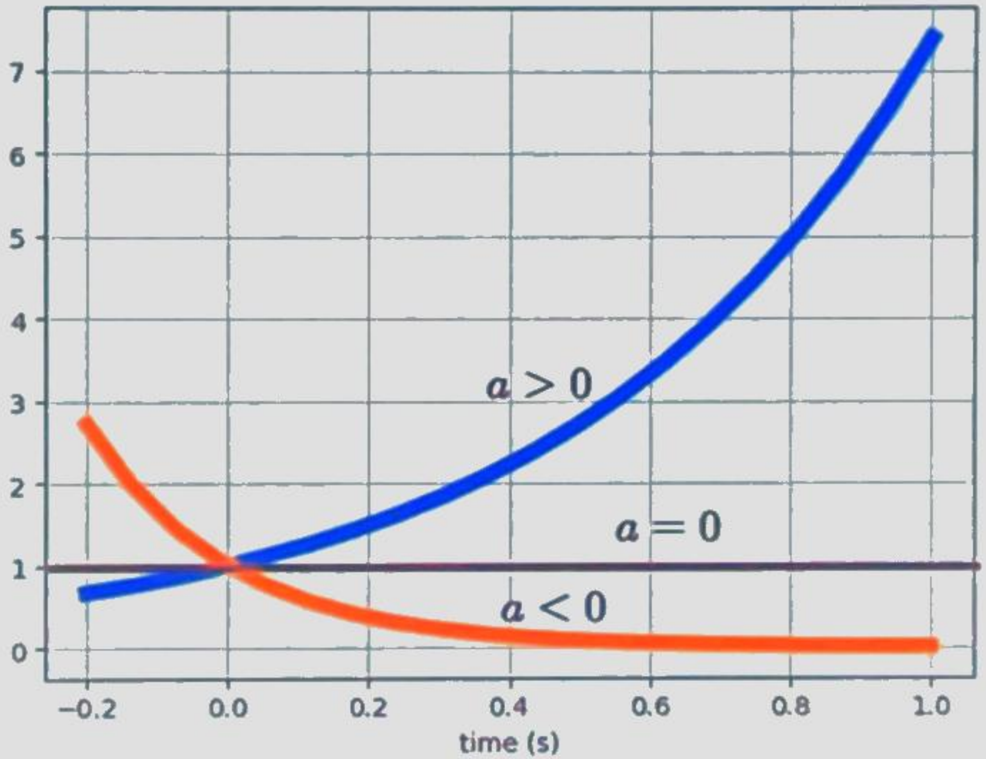
$$x(t) = e^{At}x_0$$

dove $$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r\frac{r^i}{r!} + \dots$$

E' chiamata **esponenziale della matrice A**

Equazioni differenziali lineari: soluzioni esplicite

$$x(t) = x_0 e^{at}$$



Equazioni differenziali lineari: soluzioni esplicite

Una equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0 = 0) = x_0 \end{cases}$$

Ha una soluzione del tipo: $x(t) = x_0 e^{at}$

Notate che il comportamento dipende dal segno e dal valore di **a o della sua parte reale:** $e^{at} = e^{(x+jy)} = e^{x}(cos(y) + jsin(y))$

Sviluppando in serie la funzione esponenziale:

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a^r \frac{t^r}{r!} \ldots \quad a \in \Re$$

La Matrice di Transizione

e^{At} E' chiamata matrice di transizione

Perche' determina in assenza di ingresso (u(t)=0), il **moto libero del sistema:**

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u = 0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

Allora definiamo **matrice di transizione dello stato** $\Phi(t, t_0)$ la soluzione **dell'equazione differenziale matriciale** (caso non stazionario)

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t); \quad X(t_0) = X_0$$