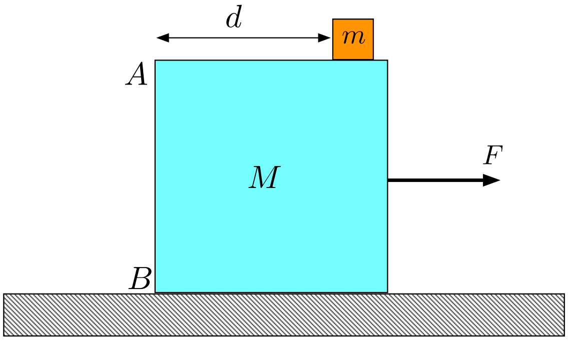
Esercizio (tratto dal Problema 17 del Mazzoldi)

Sopra un piano orizzontale è poggiato un cubo di massa $M = 50\,\mathrm{Kg}$ che può scorrere senza attrito sul piano. Sopra il cubo è poggiato un altro cubetto di massa $m = 10\,\mathrm{Kg}$ a distanza d dalla faccia AB del cubo più grande. All'istante iniziale, quando tutto è fermo, al cubo viene applicata una forza orizzontale costante $F = 100\,\mathrm{N}$ che lo mette in moto. Dopo $t = 2\,\mathrm{s}$ il cubetto cade.
Calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_D tra i due cubi.



SOLUZIONE

DATI INIZIALI

$$
\begin{array}{lcl}
m & = & 10\,\mathrm{Kg} \\
M & = & 50\,\mathrm{Kg} \\
F & = & 100\,\mathrm{N} \\
d & = & 0.50\,\mathrm{m} \\
t & = & 2\,\mathrm{s}
\end{array}
$$

- Osserviamo anzitutto che, se non ci fosse attrito tra i due cubi, il cubetto m rimarrebbe *fermo* rispetto al sistema del laboratorio, mentre il cubo M gli scorre sotto per effetto della forza F.
  Se invece c'è attrito tra i due cubi, il cubetto m esercita su M una forza $\mu_D mg$, diretta verso sinistra, 'trattenendo' il cubo M nel suo moto verso destra. Per il terzo principio della dinamica, il cubo M esercita sul cubetto m una forza uguale e contraria (diretta verso destra) trascinando con sé il cubetto m.

- Le equazioni di Newton per i due corpi sono

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} m a_m & = & +\mu_D m g \\ \\ M a_M & = & F - \mu_D m g \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_m & = & +\mu_D g \\ \\ a_M & = & \frac{F}{M} - \mu_D \frac{m}{M} g \end{array} \right. \tag{1}
$$

  Nel sistema solidale con cubetto m, il cubo scorre sotto di esso verso destra con accelerazione relativa

$$
\begin{aligned}
a &= a_M - a_m = \\
&= \frac{F}{M} - \mu_D \frac{m}{M} g - \mu_D g = \\
&= \frac{F}{M} - \mu_D g \left(1 + \frac{m}{M}\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

  Essendo tale accelerazione *costante* (dato che F, m, M sono costanti), il moto relativo è uniformemente accelerato, con velocità iniziale nulla.

- Dopo un tempo t, il cubetto m vede giungere il bordo AB del cubo grande, ossia vede il cubo M aver percorso una distanza d. Come è noto, in un moto uniformemente accelerato, in un tempo t lo spazio percorso vale

$$
d = \frac{1}{2} a\, t^2 \tag{3}
$$

  da cui

$$
a = \frac{2d}{t^2} \tag{4}
$$

- Uguagliando le due espressioni (2) e (4) per l'accelerazione relativa, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{2d}{t^2} &= \frac{F}{M} - \mu_D g \left(1 + \frac{m}{M}\right) \\
&\Downarrow \\
\mu_D &= \frac{\frac{F}{M} - \frac{2d}{t^2}}{g\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned}
\mu_D &= \frac{\frac{100\,\mathrm{N}}{50\,\mathrm{Kg}} - \frac{2 \cdot 0.5\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(1 + \frac{10\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{50\,\cancel{\mathrm{Kg}}}\right)} = \\
& \qquad\qquad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg\,m/s^2}] \\
&= \frac{(2 - 0.25)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81 \cdot \frac{6}{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\
&= 0.15 \qquad (6)
\end{aligned}$$