# Il teorema di Grassmann sulla dimensione dei sottospazi

27 ottobre 2019

G.S.

Lo scopo della nota che segue è di provare il seguente teorema di Grassmann sulla relazione fra le dimensioni dei sottospazi somma ed intersezione e quello dei sottospazi originali.

**Teorema 1** (di Grassmann)**.** *Sia $Z$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $X$ e $Y$ due suoi sottospazi. Allora:*

$$dim(X+Y) + dim(X \cap Y) = dim(X) + dim(Y)$$

*Dimostrazione.* Se $dim(X) = 0$, e, di conseguenza, $X = \{\emptyset\}$ , si ha immediatamente che $X + Y = Y$ e $X \cap Y = \{\emptyset\}$. Dunque, i due membri della tesi coincidono. Analogamente se $dim(Y) = 0$.

Si supponga quindi $dim(X) > 0$ e $dim(Y) > 0$. Esaminiamo prima il caso in cui $dim(X \cap Y) = \{\emptyset\}$.

Siano $x_1 \dots x_n$ e $y_1 \dots y_m$ due basi rispettivamente per $X$ e $Y$. Questi sono entrambi diversi da $\emptyset$ e, essendo sottospazi di $Z$, sono di dimensione finita. Proviamo che

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$$

è una base per $X + Y$, la quale avra come dimensione $n + m$, come da tesi.

Sia dunque $v \in X + Y$, scelto ad arbitrio, e siano $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $x + y = v$. Poichè $< x_1 \dots x_n >= X$ e $< y_1 \dots y_m >= Y$, esistono $\alpha_i, i = 1 \dots n$ e $\beta_j, j = 1 \dots m$, tali che

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$$

Da cui segue subito

$$v = x + y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j yj \in < x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m >$$

E dunque il sistema $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ genera $X + Y$. Per provare che è indipendente, e completare così la prova, siano $\lambda_1, \dots \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j = 0$$

da cui
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$$
Dobbiamo provare che $\lambda_i = 0$, $i = 1 \dots n$, $\mu_j = 0$, $j = 1 \dots m$. Detto $w$ il valore comune dei due membri ($w \in X \cap Y$), risulta
$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in < x_1 \dots x_n >= X$$
ma anche
$$w = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \in < y_1 \dots y_n >= Y$$
Poiché $dim(X \cap Y) = 0$, ne segue $w = 0$, da cui
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j = 0$$
Per l'indipendenza degli $x_1 \dots x_n$ e degli $y_1 \dots y_n$, si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ e $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$. Per tale motivo,$x_1 \dots x_n$ e $y_1 \dots y_n$ sono indipendenti, e $dim(X + Y) = dim(X) + dim(Y)$ come da tesi.

Sia ora $dim(X \cap Y) > 0$ e sia $w_1 \dots w_k$ una base per $X \cap Y$. Sia $w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ un completamento ad una base di X e $w_1 \dots w_k, y_{k+1}, \dots, y_m$ uno ad una base di Y. Verrà provato che $w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m$ è una base per $X + Y$, da cui
$$dim(X+Y) = k+(n-k)+(m-k) = n+m-k = dim(X)+dim(Y)-dim(X \cap Y)$$
Analogamente a quanto visto prima, se $v \in X + Y$, $\exists x \in X$ e $\exists y \in Y$ per cui $w = x + y$. Dal fatto che $x \in X =< w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n >$ e $y \in Y =< w_1 \dots w_k, y_{k+1}, \dots, y_m >$, segue che
$$v = x + y = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \gamma_i w_i + \sum_{h=k+1}^{m} \delta_h y_h}_{y}$$
con il secondo membro che appartiene a $< w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m >$ Per provare l'indipendenza di tali generatori, e completare così la dimostrazione, siano $\alpha_i, \beta_j$ e $\gamma_h$ tali che
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j x_j + \sum_{h=k+1}^{m} \gamma_h w_h = 0 \qquad (*)$$
e proviamo che risultano tutti nulli. E' immediato che
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j x_j = -\sum_{h=k+1}^{m} \gamma_h w_h$$

e, detto $w$ il valore comune dei due membri, si ha che $w \in X \cap Y$, in quanto il primo membro appartiene ad X e il secondo a Y. Poiché $w_1 \dots w_k$ è una base per $X \cap Y$, e $w \in X \cap Y$, esistono $\alpha'_i$ tali che

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_i w_i \qquad (**)$$

e, poiché $w_1 \dots w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m$ è una base di X, per l'unicità delle coordinate rispetto a tale base, da $(**)$ e da

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j x_j$$

segue $\alpha'_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$ e $\beta_j = 0$, $j = k+1, \dots, n$. Sostituendo $\beta_j = 0$ in $(*)$, si ottiene poi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{h=k+1}^{m} \gamma_h y_h = 0$$

e, infine, per l'indipendenza di $w_1, \dots, w_k, y_{k+1}, \dots, y_m$, che sono una base di Y, segue $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$ e $\gamma_h = 0$, $h = k+1, \dots, m$. Ciò, assieme a $\beta_j = 0$, implica l'indipendenza e la tesi. $\square$

Il teorema di Grossmann fornisce un corollario interessante nel caso in cui $X + Y$ sia diretta. In tal caso, infatti, si ha che $X \cap Y = \{\emptyset\}$ e vale quindi il seguente teorema.

**Teorema 2.** *Se $X + Y = X \oplus Y$, allora*

$$dim(X \oplus Y) = dim(X) + dim(Y)$$