Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

E' una proprietà dei sistemi lineari asintoticamente stabili

Se applichiamo un segnale d'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U_M \sin(\omega t)$$

Esaurito il transitorio, l'uscita sarà ancora sinusoidale

$$y(t) = |Y(w)| \sin(\omega t + \phi(w))$$

Diagrammi di Bode

MODULO E FASE

Diagramma di modulo (o ampiezza)

Rappresenta il modulo di $G(jw)$ al variare della pulsazione w

$|G(jw)|$ e w sono espressi in scala logaritmica

Per il modulo sia usano i deciBell (dB)

Per la pulsazione *w* si usa la scala logaritmica in base 10

$$x_{dB} = 20 \log_{10}(|x|)$$

Diagramma di fase

Rappresenta la fase di $G(jw)$ al variare della pulsazione w

La fase viene espressa in scala lineare
Per la pulsazione *w* si usa la scala logaritmica in base 10.

Diagrammi di Bode

MODULO E FASE

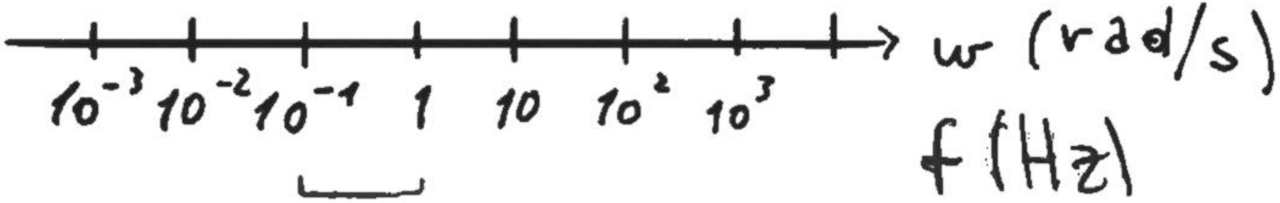
I diagrammi di Bode sono una possibile rappresentazione della risposta in frequenza

Più in generale possono rappresentare generiche funzioni *G(jw)* anche instabili, ovvero funzioni per cui la risposta in frequenza non esiste.

Diagrammi di Bode

PLOTS

Scala delle ascisse nei diagrammi di Bode



Decade: distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 10 (es: 0.2, 2)

Ottava: distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 2 (es: 4, 8)

Diagrammi di Bode

IL DECIBEL

Da Alexander Graham Bell
Originariamente usato per misurare le perdite di potenza lungo le linee telefoniche
Un Bel è il logaritmo del rapporto tra due livelli di potenza
Il deciBel è la decima parte del Bel

Il Bel (o il deciBel) non è un unità di misura assoluta è semplicemente il rapporto logaritmico tra due livelli di potenza.

Diagrammi di Bode

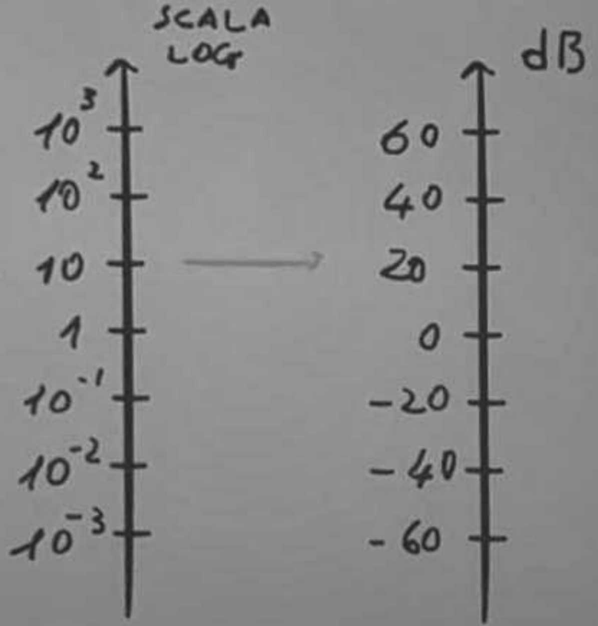
DIAGRAMMA DI AMPIEZZA

Nei diagrammi di Bode lo spettro di ampiezza viene riportato in unità logaritmiche (dB)

$$x_{dB} = 20 \log_{10}(|x|)$$

$$20\log_{10}(10) = 20 \cdot 1$$

$$20\log_{10}(0.1) = 20 \cdot (-1)$$



Diagrammi di Bode

DIAGRAMMA DI FASE

L'ordinata del diagramma di fase è rappresentata in scala lineare.
E' quindi un diagramma in scala semi-logaritmica (logaritmica lungo le ascisse; lineare sulle ordinate)
La sua unità di riferimento è il radiante. Rappresentazioni in gradi sono accettate.

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$$ Il modulo è una funzione pari

$$\measuredangle G(j\omega) = -\measuredangle G(-j\omega)$$ La fase è una funzione dispari

Diagrammi di Bode

VALORI TIPICI

$\sqrt{2} \rightarrow 3\,dB$

$2 \rightarrow 6\,dB$

$5 \rightarrow 14\,dB$

$20 \rightarrow 26\,dB$

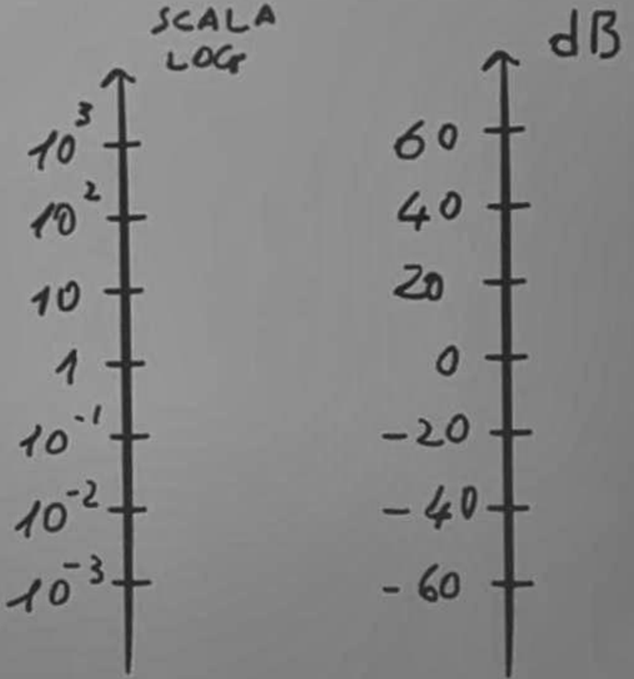
$50 \rightarrow 34\,dB$

$1/\sqrt{2} \rightarrow -3\,dB$

$1/2 \rightarrow -6\,dB$

$1/5 \rightarrow -14\,dB$

....



Diagrammi di Bode

SOMME DI LOGATIMI, SOMME DI ANGOLI

le fasi si sommano e nel diagramma di fase
non serve usare le scale logaritmiche

$$\begin{cases} a = |a| e^{j\measuredangle a} \\ b = |b| e^{j\measuredangle b} \end{cases} \rightarrow |a \cdot b| = |a||b| e^{j(\measuredangle a + \measuredangle b)}$$

poiché per le proprietà dei logaritmi i
prodotti diventano somme

$$\log(|a.b|) = \log|a| + \log|b|$$

E' utile usare le scale logaritmiche nei
diagrammi di modulo

Diagrammi di Bode

$G(s) =$

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

La forma fattorizzata della funzione di trasferimento rende agevole la costruzione dei diagrammi di Bode

Il valore in dB del modulo è dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore e dei fattori del denominatore

L'argomento è dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore e dei fattori del denominatore

I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle funzioni elementari

Diagrammi di Bode

VALORI TIPICI

$\sqrt{2} \rightarrow 3\,dB$

$2 \rightarrow 6\,dB$

$5 \rightarrow 14\,dB$

$20 \rightarrow 26\,dB$

$50 \rightarrow 34\,dB$

$1/\sqrt{2} \rightarrow -3\,dB$

$1/2 \rightarrow -6\,dB$

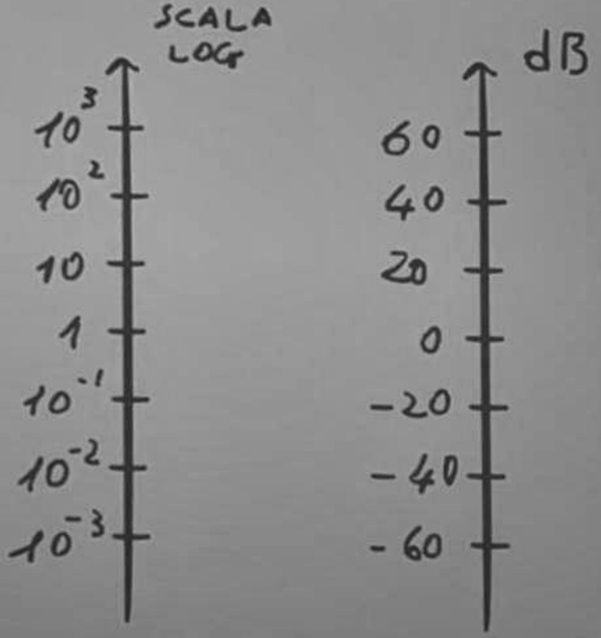
$1/5 \rightarrow -14\,dB$

...

$$A_{dB} = 20 \log_{10} A$$

Ogni 6dB il valore di A raddoppia

Ogni 20dB il valore di A è x10



Diagrammi di Bode

VANTAGGI SCALE LOGARITMICHE

E' possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi

I diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi

I diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori

Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^h} \frac{\prod_{i=1}^{m-u} (1 \pm j\omega T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n-h-r} (1 \pm j\omega T_{p_i})} \frac{\prod_{i=1}^{u} \left(1 \pm j\omega \frac{2 \xi_{z_i}}{\omega_{oz_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{oz_i}^2}\right)}{\prod_{i=1}^{r} \left(1 \pm j\omega \frac{2 \xi_{p_i}}{\omega_{op_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{op_i}^2}\right)}$$

Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

$$\underset{s = j\omega}{G(j\omega)} = \frac{\overset{\text{guadagno di Bode}}{K_B}}{\underbrace{(j\omega)^{\overset{h}{\text{tipo del sistema}}}}_{\text{poli nell'origine}}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-u} \overbrace{\left(1 \pm j\omega T_{zi}\right)}^{\text{zeri semplici}} \; \prod_{i=1}^{u} \overbrace{\left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{zi}}{\omega_{0zi}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0zi}^2}\right)}^{\text{zeri complessi e coniugati}}}{\prod_{i=1}^{n-h-r} \underbrace{\left(1 \pm j\omega T_{pi}\right)}_{\text{poli semplici}} \; \prod_{i=1}^{r} \underbrace{\left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{pi}}{\omega_{0pi}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0pi}^2}\right)}_{\text{poli complessi e coniugati}}}$$

I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle funzioni elementari

Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Caso con soli poli e zeri semplici

$$\log|G(j\omega)| = \sum_{i=1}^{m} \log|1 \pm j\omega T_{z_i}| - \sum_{i=1}^{n} \log|1 \pm j\omega T_{p_i}|$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \sum_{i=1}^{m} \measuredangle(1 \pm j\omega T_{z_i}) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle(1 \pm j\omega T_{p_i})$$

Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Fase:

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

IF $\omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) \simeq 0°$

IF $\omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) \simeq -90°$

IF $\omega\tau = 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -45°$

Caso Polo Stabile

$\tau > 0$

Questi sono 3 punti: come li uniamo?

Diagrammi di Bode

FUNZIONE ELEMENTARE: GUADAGNO COSTANTE

Funzione di risposta armonica

$$G(s) = K \rightarrow \quad G(j\omega) = |K| e^{j\varphi}$$

Modulo: $|G(j\omega)| = |K|$

Diagrammi di Bode

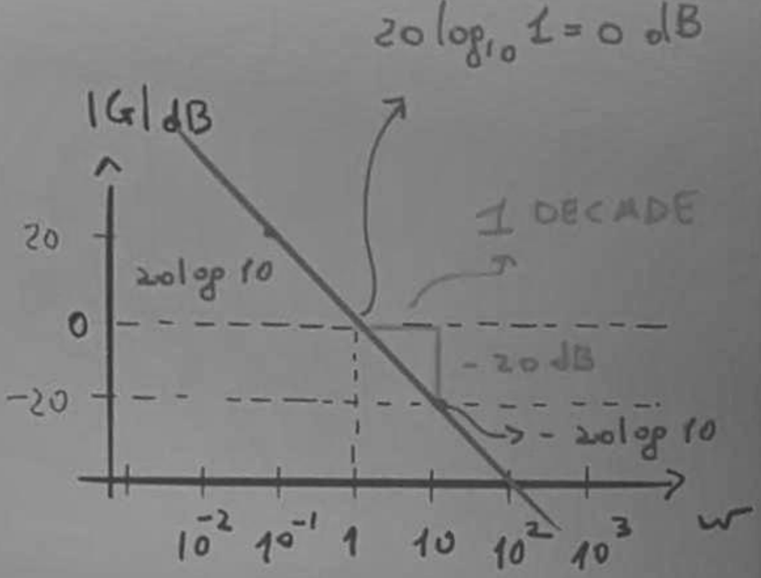
POLO NELL'ORIGINE

$$G(s) = \frac{1}{s} \Big|_{s=jw} \Rightarrow G(jw) = \frac{1}{jw}$$

Modulo: $|G(jw)| = \frac{1}{w}$

$$\Rightarrow 20 \log_{10} w^{-1} = -20 \log_{10} w$$

Retta in diagramma logaritmico che passa per w=1 con modulo 0 dB e pendenza -20dB/dec (ovvero -6 dB/ottava)



Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \xRightarrow{s=j\omega} \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

Fase:

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(s) = \left.\frac{1}{1+\tau s}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Modulo:

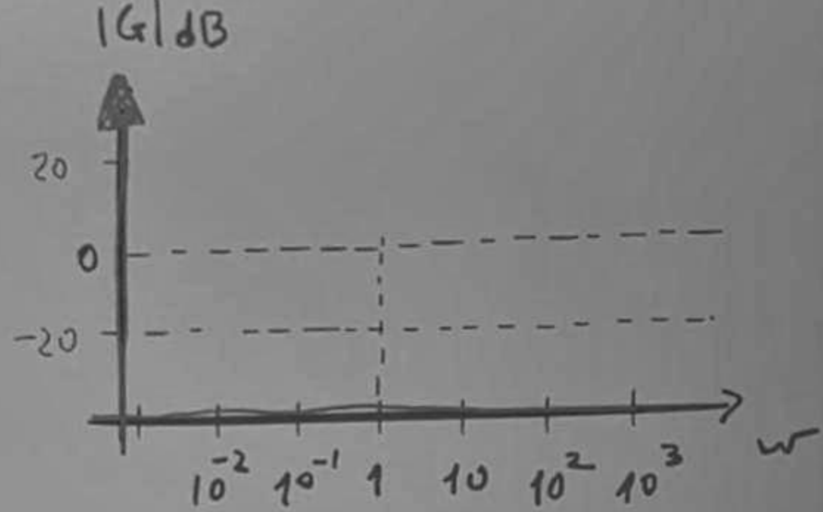
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

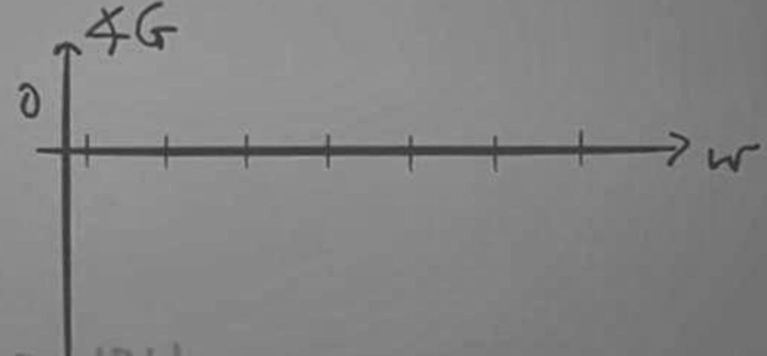
IF $\omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0\,dB$

IF $\omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{\omega\tau} =$

$$= \underbrace{20\log\left(\frac{1}{\tau}\right)}_{\text{NUMERO}} - \underbrace{20\log(\omega)}_{}$$

↳ RETTA CON PENDENZA $-20\,dB/dec$





Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

IF $\omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0\,dB$

IF $\omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\log(\omega)$$

$\omega = 1/\tau$ Punto di rottura

cambia la pendenza

⇓

Errore massimo

nel punto di rottura

$$|G(j\omega)|_{\omega=1/\tau} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3\,dB$$

Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}\Bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Fase:

$$\measuredangle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

IF $\omega^2\tau^2 << 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) \approx 0°$

IF $\omega^2\tau^2 >> 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) \approx -90°$

IF $\omega\tau = 1 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -45°$

Caso Polo Stabile

$\tau > 0$

Questi sono 3 punti: come li uniamo?

REGOLA

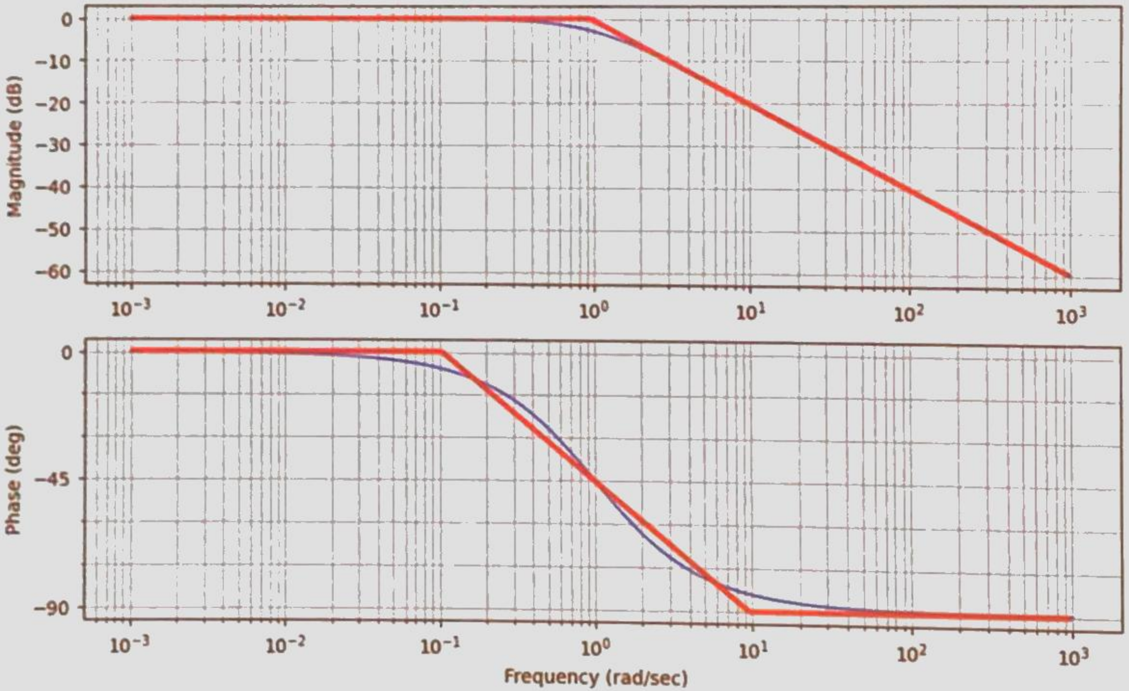
Considerare fase nulla una decade prima del punto di rottura;
Pari a -90 deg una decade dopo il punto di rottura;
Effettuare un raccordo lineare, passando esattamente per il valore -45 deg nel punto di rottura.

Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + jw}$$

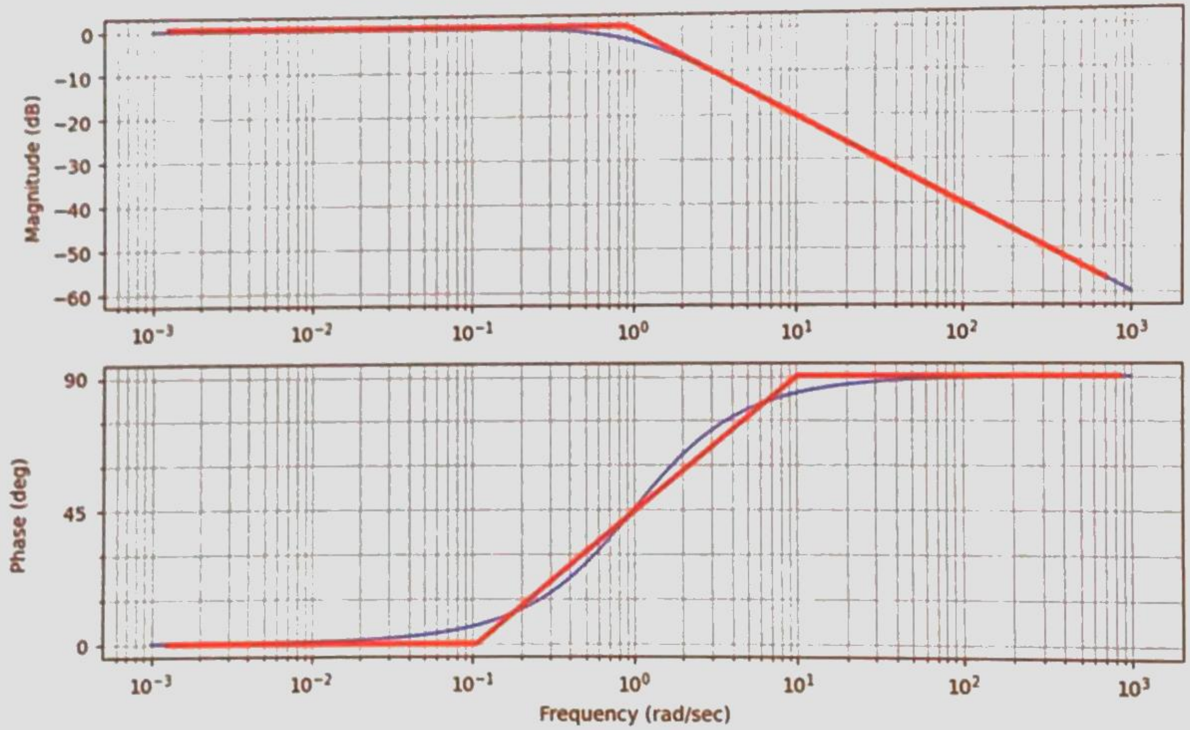
$\tau = 1$



Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - jw}$$



Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

polo $-\frac{1}{\tau}$

Distanza massima tra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow err = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\ dB$$

$$\text{In } \omega = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{2\tau}} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \approx 1\ dB \Rightarrow |err| \approx \underset{\text{vero}}{1\ dB} - \underset{\text{asintotico}}{0\ dB} = 1\ dB$$

$$\text{In } \omega = \frac{2}{\tau} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\omega=\frac{2}{\tau}} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+4}} \approx -7\ dB \Rightarrow |err| \approx 7\ dB - 6\ dB = 1\ dB$$

L'errore e' massimo nel punto di rottura, e si riduce simmetricamente rispetto ad esso

Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(s) = 1 + s\tau \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

Modulo:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 0\,dB$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 20\log_{10}\omega\tau$$

Fase:

$$\measuredangle G(j\omega) = \arctan \omega\tau$$

Il modulo è una retta nel diagramma logaritmico di pendenza +20 dB/dec (+6 dB/ottava)

La fase salirà di +90 gradi

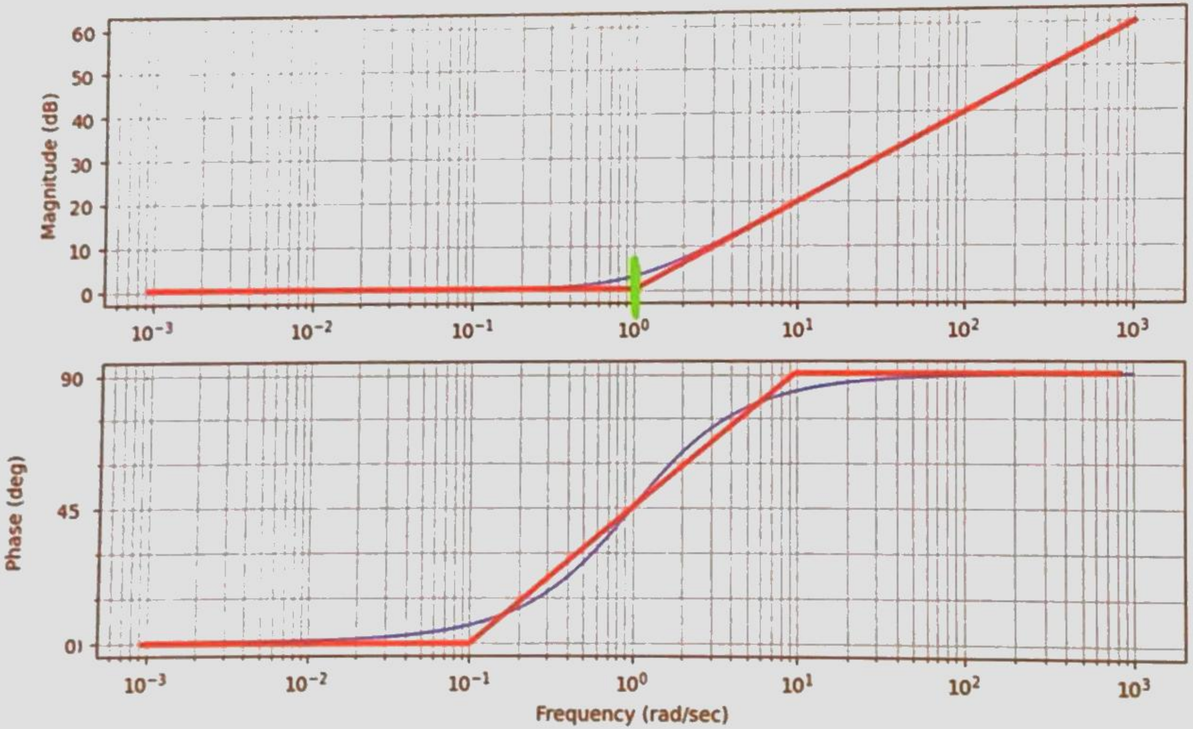
I diagrammi di Bode di uno zero semplice si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli dei poli semplici

Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(j\omega) = 1 + j\omega$$

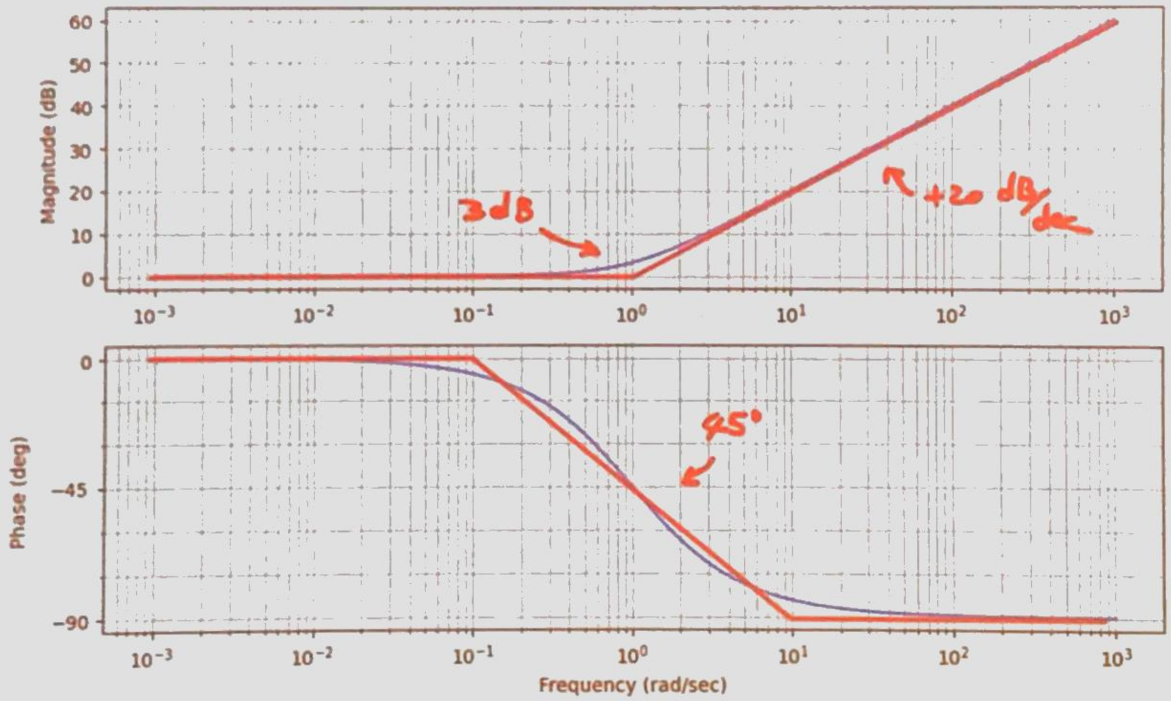
$\tau = 1$



Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(j\omega) = 1 - j\omega$$



Diagrammi di Bode

POLI DOPPI

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}\Bigg|_{s=j\omega} = \boxed{\frac{1}{(1+j\omega)^2}}$$

Prodotto di due poli semplici

↳

Con i logaritmi i prodotti diventano somme (modulo) e la fase si somma