Esame di Ricerca Operativa del 22/09/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 20\ y_2 + 8\ y_3 + 40\ y_4 + 4\ y_5 - y_6 \\ -2\ y_1 - 4\ y_2 + 8\ y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -2 \\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 6\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,3}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce tre tipi di finestre (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascun materiale richiesta per produrre una finestra e la quantità massima (in Kg) di ciascun materiale che si può acquistare mensilmente:

	M1	M2	M3
P1	0.2	0.8	0.4
P2	0.4	0.2	0.3
P3	0.3	0.1	0.2
quantità massima	3000	1500	4000

Nella seguente tabella sono riportate, per ogni finestra, le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita (in Euro) e le quantità minime da produrre:

	P1	P2	P3
ore lavorative	1	0.8	0.5
prezzo di vendita	24	20	12
quantità minime	1000	2000	1200

Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della finestra P1 non deve superare il 30% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le finestre fabbricate.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

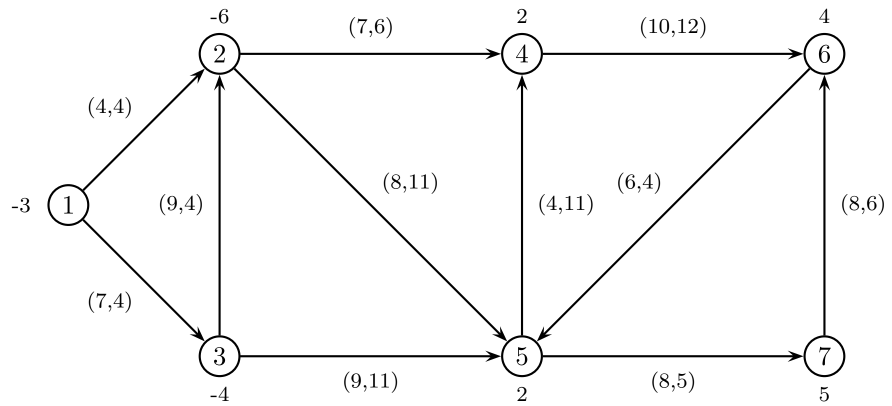
```
c=

A=                                        b=

Aeq=                                      beq=

lb=                                       ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

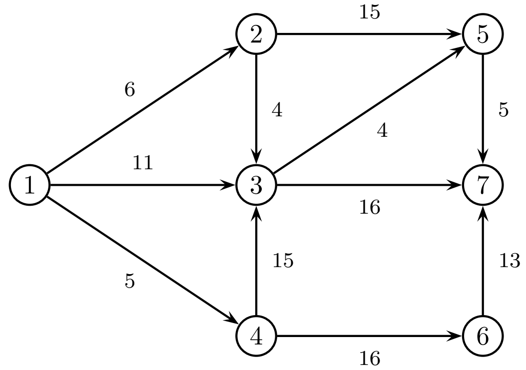


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6)	(3,5)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,2) (3,5) (5,7) (7,6)	(4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

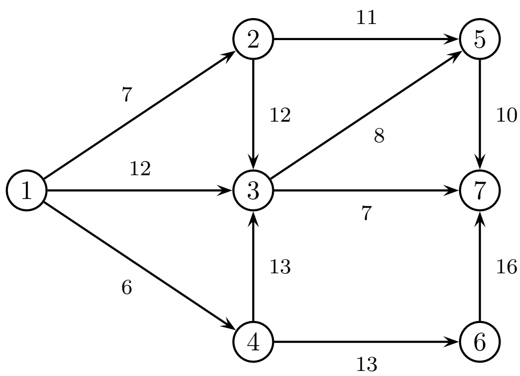
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 16\ x_2 \leq 67 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 701 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	12	18	19	22	6	15	14
Volumi	686	375	243	83	534	516	200

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$							
$\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$							
(0,-1)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1^2 - 2\, x_2^2 - 9\, x_1 - 3\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -2)$, $(3, 4)$, $(0, -2)$ e $(-4, 2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min \ -8\ y_1 - 20\ y_2 + 8\ y_3 + 40\ y_4 + 4\ y_5 - y_6 \\ -2\ y_1 - 4\ y_2 + 8\ y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -2 \\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	NO
$\{1,\ 6\}$	$y = (-3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 3\}$	$(-1,\ -8)$	$\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	1	$1,\ 9$	2
2° iterazione	$\{1,\ 3\}$	$(0,\ -8)$	$(1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0)$	5	$1,\ 2$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

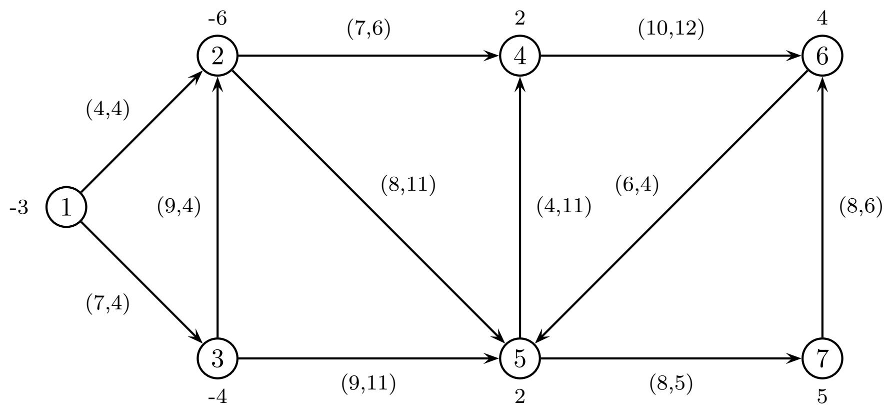
```
c=-[24;20;12]

A=[0.2 0.4 0.3;0.8 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.7 -0.24 -0.15]        b=[3000;1500;4000;0]

Aeq=[]                                                          beq=[]

lb=[1000; 2000; 1200]                                           ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

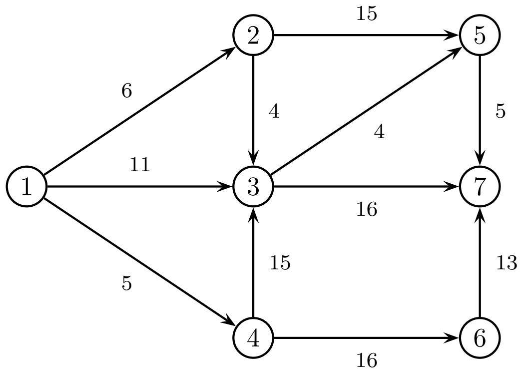


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6)	(3,5)	$x = (3,\ 0,\ 2,\ 0,\ -7,\ 11,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 4)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (3,2) (3,5) (5,7) (7,6)	(4,6)	$\pi = (0,\ 4,\ -5,\ 11,\ 4,\ 20,\ 12)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

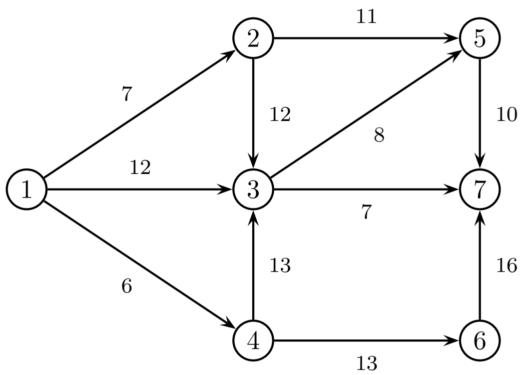
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(5,7)	(2,4) (5,7)
x	$(3,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 4,\ 4,\ 6,\ 5,\ 0,\ 0)$	$(3,\ 0,\ 6,\ 3,\ 0,\ 4,\ 4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ 4,\ 3,\ 16,\ 12,\ 26,\ 18)$	$(0,\ 4,\ 3,\ 16,\ 12,\ 26,\ 18)$
Arco entrante	(2,4)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 6	8 , 0
Arco uscente	(2,4)	(7,6)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		5		7		6	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	11	1	11	1	10	2	10	2	10	2	10	2	10	2
nodo 4	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	2	14	3	14	3	14	3	14	3
nodo 6	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	3	19	5	19	5	19	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 7, 0, 0, 7, 0, 7, 0, 0, 7, 0)	14
1 - 3 - 5 - 7	3	(7, 10, 0, 0, 7, 3, 7, 0, 0, 10, 0)	17
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 10, 6, 0, 7, 3, 7, 0, 6, 10, 6)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 + 6\,x_2 \\ 17\,x_1 + 16\,x_2 \le 67 \\ 8\,x_1 + 19\,x_2 \le 61 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{67}{17}, 0\right)$ $\qquad$ $v_S(P) = 31$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $\qquad$ $v_I(P) = 24$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad$ $x_1 \le 3$

$r = 4$ $\qquad$ $9\,x_1 + 8\,x_2 \le 35$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 701 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	12	18	19	22	6	15	14
Volumi	686	375	243	83	534	516	200

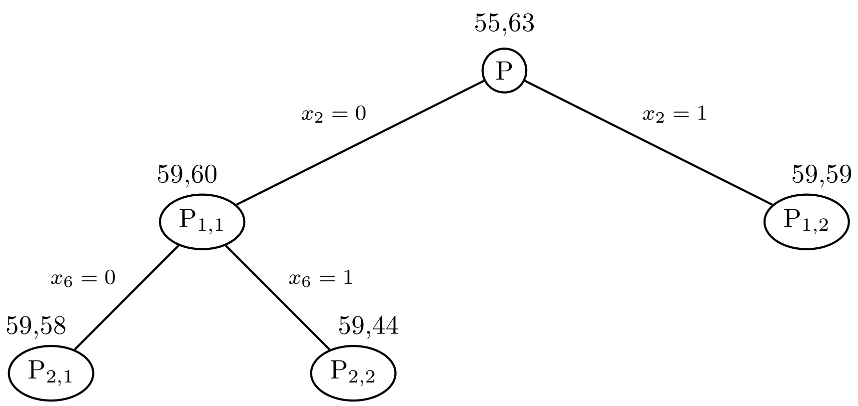
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ $\qquad$ $v_I(P) = 55$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{7}{15}, 1, 1, 0, 0, 1\right)$ $\qquad$ $v_S(P) = 63$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ $\qquad$ valore ottimo $= 59$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ -x_1^2 + x_2 + 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$	1		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$	1		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ -1)$	4		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1^2 - 2\ x_2^2 - 9\ x_1 - 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4,-2)$, $(3,4)$, $(0,-2)$ e $(-4,2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$	$(-1,-1)$	$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	$(-9,9)$	$\dfrac{4}{27}$	$\dfrac{4}{27}$	$(-4,2)$