Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 10/06/2024

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da un punto ciascuno. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\boxed{\begin{array}{r} 6 \text{ corrette} \to 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} \to 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} \to 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} \to 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} \to 0 \text{ punti} \end{array}}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tale che $A = B \cdot C$ dove

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1-2\mathbf{i} & \frac{1}{2} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1+2\mathbf{i} & 3-2\mathbf{i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Il **determinante** di A è $\boxed{-\frac{10}{3}\mathbf{i}}$

Supponiamo di avere eseguito in Matlab/Octave il comando `A=B*C`, ovvero di avere memorizzata la matrice A nella variabile omonima. Il **raggio spettrale** di A è stampato a schermo mediante la seguente (unica) riga di codice `max(abs(eig(A)))`

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$. Indicare quale delle seguenti porzioni di codice Matlab/Octave calcolano la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$.

V **[F]** `x = A/b;`

[V] F `x = A\b;`

[V] F `x = inv(A)*b;`

V **[F]**
```
[L, U] = lu(A);
x = L\(U\b);
```

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V **F**
```
[Q, R] = qr(A);
x = R/(Q'*b);
```

V **F**
```
[L, U] = lu(A);
x = U/(L/b);
```

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times p}, C \in \mathbb{C}^{p\times q}, D \in \mathbb{C}^{q\times r}$. Supponiamo di calcolare

$$M = (A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$$

seguendo l'ordinamento indicato dalle parentesi.

- V **F** Calcolare M costa $\mathcal{O}(npm + pqr + rmn)$.
- **V** F Calcolare M costa $\mathcal{O}(pnm + mpr + rpq)$.
- V **F** Calcolare M costa $\mathcal{O}(mnp + pnr + qmp)$.
- V **F** Calcolare M costa $\mathcal{O}(mnp + mqr + npr)$.
- **V** F In aritmetica floating point, cambiare l'ordine delle parentesi calcolando ad esempio $((A \cdot B) \cdot C) \cdot D$, cambia la matrice M calcolata.
- V **F** Cambiare l'ordine delle parentesi, non cambia il costo del calcolo di M.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, $k > 2$, nodi di interpolazione distinti e si consideri $f(x)$ polinomio di grado 2. Indicare se le seguenti approssimazioni di f risultano essere esatte su $[x_0, x_n]$.

- V **F** Spline cubica naturale calcolata rispetto agli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, k$.
- **V** F Approssimazione ai minimi quadrati dei punti $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, k$, rispetto alle funzioni modello $\varphi_0(x) = x^2 + x$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$.
- **V** F Interpolante nella base di Lagrange dei punti $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, k$.
- **V** F Interpolante nella base di Newton dei punti $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, k$
- V **F** Interpolante lineare a tratti negli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, k$.
- **V** F Interpolante di Hermite rispetto ai valori $(x_0, f(x_0)), (x_0, f'(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), (x_1, f'(x_1))$, $(x_2, f(x_2)), (x_2, f'(x_2))$.

Esercizio 2

Si considerino le funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x},$$
$$f_2(x,y) = (x+1)x + y = (x^2+x) + y.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si scriva l'espressione del coefficiente di amplificazione dell'errore relativo $\gamma(x)$ per $f_1(x)$.

(ii) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si calcoli l'errore algoritmico relativo dei due algoritmi (formule) indicati per la valutazione di $f_2(x,y)$. Si commenti su quale dei due può soffrire più spesso di cancellazione numerica.

(*i*) Il coefficiente di amplificazione è dato dalla formula

$$x \cdot \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

(*ii*) Per quanto riguarda la prima formula si ha $\epsilon_a = \frac{x(x+1)}{x(x+1)+y}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_3$ con ϵ_j errori di troncamento. Per la seconda formula si ottiene

$$\epsilon_a = \frac{x(x+1)}{x(x+1)+y}\left(\frac{x^2}{x+x^2}\epsilon_1 + \epsilon_2\right) + \epsilon_3 = \frac{x^2}{x(x+1)y}\epsilon_1 + \frac{x(x+1)}{x(x+1)+y}\epsilon_2 + \epsilon_3$$

.

Entrambe le formule soffrono di cancellazione solo quando il risultato finale è piccolo rispetto a x e y e non ve ne è una più che lo fa più spesso. È stato dato pieno punteggio anche a chi, non notando la semplificazione finale, ha affermato che la seconda formula può soffrire di cancellazione anche quando il risultato intermedio $x^2 + x$ è vicino a zero.

Esercizio 3

Sia $f(x) = \exp(2x) - \sin(x) - 2$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si dimostri che $f(x)$ non ha zeri fuori dall'intervallo $[0,\ \frac{1}{2}\log(3)]$ e che ha un'unico zero α dentro l'intervallo.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si dica se i metodi di punto fisso

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = \arcsin\left(\exp(2x_k) - 2\right),$$
$$x_{k+1} = g_2(x_k) = \frac{1}{2}\log(\sin(x_k) + 2),$$

convergono localmente ad α.

Si ricorda che: $\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(*i*) Per le proprietà del seno e dell'esponenziale è facile vedere che la funzione è sempre positiva su $[\frac{1}{2}\log(3), \infty)$ e sempre negativa su $(-\infty, 0]$. Inoltre la derivata di f è $2e^{2x} - \cos(x)$ che è sempre maggiore di 0 in $[0, \frac{1}{2}\log(3)]$; quindi la funzione è strettamente crescente nell'intervallo e questo implica che c'è un unico zero della funzione.

(*ii*) Per il primo metodo si ha $g_1'(x) = \frac{2\exp(2x)}{\sqrt{1-(\exp(2x)-2)^2}}$ ed in particolare $g'(\alpha) = \frac{2\exp(2\alpha)}{|\cos(\alpha)|} \geq 2$. Quindi questo metodo non è localmente convergente.

Per il secondo metodo si ha $g_2'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$ che è minore in modulo di $\frac{1}{2}$ per ogni x; quindi il secondo metodo è localmente convergente.

Esercizio 4

Si consideri l'integrale

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^2+1}+2\ dx.$$

(i) $\boxed{\text{1 Punto}}$ Trovare l'approssimazione dell'integrale mediante la **formula dei trapezi**.

(ii) $\boxed{\text{1 Punto}}$ Trovare l'approssimazione dell'integrale mediante la **formula di Simpson**.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dia una stima dell'errore ottenuto con le due formule.

$\boxed{\text{3 Punti}}$ Si consideri l'approssimazione dell'integrale

$$\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$$

mediante la **formula dei trapezi composita**. Determinare il numero di sottointervalli L, necessari ad avere un errore limitato da $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$.

(i) e *(ii)* Con entrambe le formule si ottiene il valore 4.

(iii) L'integrale è calcolato esattamente —> gli errori sono (entrambi) 0.

(iv) Sono necessari $L = 50$ intervalli.