

Analisi dei Sistemi e delle Forze nell'Auto-Sollevamento con Seggiolino e Carrucola

Nel problema in esame un uomo seduto su un seggiolino si auto-solleva, tirando una corda che passa su una carrucola ideale (priva di attrito e massa). Per analizzare il sistema è utile distinguere due livelli di analisi:

1. **Sistema Globale:** Comprende l'uomo, il seggiolino, la corda, la carrucola e il vincolo che fissa la carrucola al soffitto.
2. **Sistema Subordinato:** Comprende l'uomo e il seggiolino, mentre la corda (e il relativo effetto trasmesso dalla carrucola) è considerata come forza esterna.

Adottiamo un sistema di coordinate cartesiane con asse x orizzontale e asse y verticale, con y positivo *verso l'alto*.

1. Caso a Velocità Costante

1.1. Analisi del Sistema Globale

Nel sistema globale le forze esterne sono:

- $\vec{P} = (0, -mg)$: il peso complessivo del sistema (si assume la massa di corda e carrucola trascurabile rispetto a quella dell'uomo+seggiolino).
- \vec{R} : la forza di reazione (vincolo) esercitata dal soffitto sulla carrucola, che fissa quest'ultima.

Le forze interne comprendono:

- Le tensioni nella corda, che agiscono tra l'uomo, il seggiolino e la carrucola.
- Le forze di azione-reazione fra l'uomo e la corda.

Per il terzo principio della dinamica tali forze si annullano nel bilancio globale. L'equilibrio (il moto avviene a velocità costante) del sistema globale richiede che la somma delle forze esterne sia nulla:

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{R} + (0, -mg) = (0, 0).$$

Pertanto, il vincolo sulla carrucola bilancia il peso del sistema:

$$\vec{R} = (0, mg).$$

1.2. Analisi del Sistema Subordinato (Uomo + Seggiolino)

Qui si considera il sistema formato da uomo e seggiolino, sul quale la corda agisce come agente esterno. Le forze agenti sono:

1. $\vec{P} = (0, -mg)$: il peso, diretto verso il basso.
2. \vec{F}_{corda} : la forza esercitata dalla corda. Dal momento che la corda passa sopra la carrucola e sostiene il seggiolino con due tratti, essa esercita una forza totale

$$\vec{F}_{\text{corda}} = (0, 2T),$$

dove T è la tensione nella corda. Questa forza è verso diretta verso l'alto, in quanto ciascun tratto della corda tende a sollevare il seggiolino.

Per il sistema subordinato in equilibrio (il moto avviene a velocità costante) la somma delle forze deve annullarsi:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{corda}} + \vec{P} = (0, 2T - mg) = \vec{0}.$$

Da cui:

$$2T - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2}.$$

1.3. Forza esercitata dall'uomo sulla corda

L'uomo tira l'estremità libera della corda applicando una forza \vec{F}_{uomo} . Per il principio di azione-reazione, la forza esercitata dalla corda sull'uomo (nel contatto) è uguale in modulo e opposta a \vec{F}_{uomo} . In condizioni ideali (corda inestensibile e carrucola ideale) la tensione si trasmette uniformemente, dunque il modulo della tensione è uguale al modulo della forza esercitata dall'uomo:

$$T = F_{\text{uomo}}.$$

Pertanto, per mantenere l'equilibrio o muoversi a velocità costante, l'uomo deve applicare una forza:

$$\vec{F}_{\text{uomo}} = (0, -\frac{mg}{2}).$$

Questa forza è verso diretta verso il basso.

2. Caso con Accelerazione $a \neq 0$

Supponiamo ora che il sistema subordinato (uomo + seggiolino) acceleri verticalmente con accelerazione di componente a . In questo caso il bilancio delle forze sul sistema subordinato (massa m) diventa:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{corda}} + \vec{P} = (0, 2T - mg) = m(0, a).$$

Pertanto:

$$2T - mg = ma.$$

Da cui:

$$2T = m(g + a) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m(g + a)}{2}.$$

Essendo $T = F_{\text{uomo}}$ (la forza applicata dall'uomo sulla corda), risulta:

$$\vec{F}_{\text{uomo}} = (0, -\frac{m(g + a)}{2}).$$

2.1. Nuova Reazione del Soffitto (Vincolo sulla Carrucola)

Analizziamo le forze che agiscono sulla carrucola. La carrucola è vincolata al soffitto che esercita su di essa la forza \vec{R} . Inoltre la carrucola è soggetta alle forze trasmesse dalla corda. In particolare, la corda sostiene il sistema uomo+seggolino mediante due segmenti, ciascuno con tensione T . Pertanto, la forza totale esercitata dalla corda sulla carrucola è:

$$\vec{F}_{\text{corda}} = (0, -2T).$$

La componente di questa forza è negativa, in quanto ciascun tratto della corda tira la carrucola verso il basso. Per mantenere l'equilibrio (la carrucola è fissa), la reazione \vec{R} del soffitto deve bilanciare le forze trasmesse dalla corda. Nel caso in cui il sistema uomo+seggolino acceleri con accelerazione a , il modulo della tensione diventa:

$$T = \frac{m(g + a)}{2}.$$

Di conseguenza, la forza complessiva esercitata dalla corda (che agisce sul punto di sospensione) è:

$$\vec{F}_{\text{corda}} = (0, -2T) = (0, -m(g + a)).$$

Affinché la carrucola rimanga in equilibrio, il vincolo del soffitto deve fornire una reazione pari e contraria:

$$\vec{R} = (0, m(g + a)).$$