Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x seguendo la seguente legge oraria

$$x(t) = v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3 \tag{1}$$

con $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$.

1. Determinare le unità di misura delle costanti α e β;
2. Calcolare la velocità della particella;

Considerare ora il caso $\alpha = 2\,\mathrm{m/s^2}$ e $\beta = -(1/3)\,\mathrm{m/s^3}$

3. Determinare l'istante $t^* > 0$ in cui la particella si trova nell'origine dell'asse x;
4. Determinare il valore massimo v_{max} della velocità (in avanti) della particella;

SOLUZIONE

1. Le unità di misura delle costanti α e β si determinano dal fatto che

$$\begin{cases} [x(t)] & = & \mathrm{m} \\ [t] & = & \mathrm{s} \end{cases} \tag{2}$$

Tutti gli addendi dell'espressione (1) devono avere la stessa unità di misura di $x(t)$ (ossia m). Abbiamo quindi

$$\begin{cases} \mathrm{m} & = & [\alpha] \cdot \mathrm{s}^2 \\ \mathrm{m} & = & [\beta] \cdot \mathrm{s}^3 \end{cases} \tag{3}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} [\alpha] & = & \mathrm{m/s}^2 \\ [\beta] & = & \mathrm{m/s}^3 \end{cases} \tag{4}$$

2. La velocità della particella si calcola come la derivata rispetto al tempo della legge oraria della posizione

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3\right) \tag{5}$$

e si ottiene

$$v(t) = v_0 + 2\alpha t + 3\beta t^2 \tag{6}$$

3. La particella si trova nell'origine $x = 0$ negli istanti che soddisfano l'equazione

$$x(t) = v_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3 = 0 \tag{7}$$

ossia

$$t\,\left(v_0 + \alpha t + \beta t^2\right) = 0 \tag{8}$$

Questa equazione dà le tre soluzioni

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4v_0\beta}}{\underbrace{2\beta}_{=-2|\beta|}} = \dfrac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4v_0|\beta|}}{2|\beta|} < 0 \\ t_3 = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4v_0\beta}}{\underbrace{2\beta}_{=-2|\beta|}} = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4v_0|\beta|}}{2|\beta|} > 0 \end{cases} \tag{9}$$

La prima soluzione $t_1 = 0$ rappresenta l'origine dei tempi, la seconda $t_2 < 0$ un tempo nel passato; l'unica soluzione a tempi positivi è $t_3 > 0$. Sostituendo i valori $\alpha = 2\,\mathrm{m/s^2}$ e $\beta = -(1/3)\,\mathrm{m/s^3}$ e svolgendo i calcoli (anche sulle unità di misura !) otteniamo

$$t_3 = \frac{\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \sqrt{\frac{4\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4} + \frac{4\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}}}{\frac{2}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}} = \frac{\frac{2\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \sqrt{\frac{16}{3}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}}}{\frac{2}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}} = \frac{\frac{2\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{2}{3}\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^3}} = 6.46\,\mathrm{s} \tag{10}$$

e quindi la risposta è

$$t^* = t_3 = 6.46\,\mathrm{s} \tag{11}$$

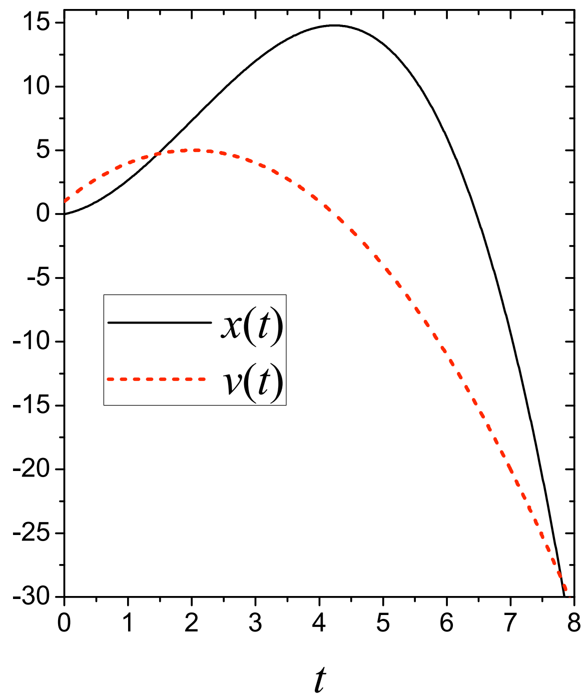

Figure 1: Andamento della legge oraria $x(t)$ [Eq.(1)] (curva nera solida) e della velocità $v(t)$ [Eq.(6)] (curva tratteggiata rossa).

4. Dall'espressione (6) per la velocità, osserviamo che $v(t)$ ha una legge parabolica nel tempo. Siccome $\beta < 0$ la parabola è rivolta verso il basso. Pertanto il massimo della velocità è il punto estremale, che si trova determinando l'annullamento della derivata della velocità (6) rispetto a t [dunque l'accelerazione].
   Imponendo quindi

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a(t) = 2\alpha + 6\beta t = 0 \tag{12}$$

otteniamo per soluzione il tempo al quale la velocità raggiunge il massimo, che dunque risulta

$$t_{max} = -\frac{\alpha}{3\beta} \tag{13}$$

Sostituendo il valore (13) nell'espressione generica della velocità otteniamo il valore di tale massimo

$$\begin{aligned} v_{max} &= v(t_{max}) = v_0 + 2\alpha t_{max} + 3\beta\, t_{max}^2 = \\ &= v_0 - \frac{2\alpha^2}{3\beta} + 3\beta\,\frac{\alpha^2}{9\beta^2} = \\ &= v_0 - \frac{2\alpha^2}{3\beta} + \frac{\alpha^2}{3\beta} = \\ &= v_0 - \frac{\alpha^2}{3\beta} \end{aligned} \tag{14}$$

Sostituendo i valori numerici $v_0 = 1\,\mathrm{ms}$, $\alpha = 2\,\mathrm{m/s^2}$ e $\beta = -\,\mathrm{m}/(3\mathrm{s}^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned} v_{max} &= 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \frac{\frac{4\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^4}}{3\cdot\frac{1}{3}\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^3}} = \\ &= 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

e dunque

$$v_{max} = 5\,\mathrm{m/s} \tag{15}$$

Si noti che per tempi lunghi la velocità (6) diventa grande e negativa (dato che $\beta < 0$), e dunque in *valore assoluto* la velocità diventa più grande di $5\,\mathrm{m/s}$, ma con segno negativo (velocità indietro), come mostrato in Fig.1.