Sistemi lineari – Metodi iterativi

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 8

Outline

Outline

Molti problemi conducono alla risoluzione di un sistema $Ax = b$ di dimensioni molto grandi con matrice A **sparsa**, cioè con pochi elementi non nulli
Se a un tale sistema si applica un metodo diretto, le matrici dei sistemi intermedi o di arrivo possono diventare matrici **dense**, cioè con un elevato numero di elementi non nulli

Sorgono così seri problemi di costo computazionale e di ingombro di memoria
In questi casi può giovare il ricorso ai metodi iterativi, in cui ogni iterazione richiede il prodotto di una matrice H per un vettore

Poiché la densità di H, come vedremo, è paragonabile a quella di A, se questa è una matrice sparsa, ogni iterazione comporta una mole di calcoli relativamente modesta ed un ingombro di memoria limitato

Cominciamo col vedere come da un sistema lineare $Ax = b$ si può costruire un metodo iterativo per approssimarne la soluzione

Dato il sistema lineare $Ax - b = 0$, con $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$ e $\det(A) \neq 0$, si trasforma il sistema dato in un altro equivalente della forma

$$x = H\,x + c$$

Ciò può farsi in molti modi; per esempio, con $G \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrice non singolare qualsiasi, si può scrivere

$$x = x - G\,(A\,x - b)$$

da cui

$$x = (I - G\,A)\,x + G\,b$$

che è della forma voluta ponendo $H = I - GA$ e $c = Gb$

La forma del sistema $x = Hx + c$ suggerisce il processo iterativo

$$x^{(k+1)} = H\, x^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

dove $x^{(0)}$ (vettore iniziale) è la prima approssimazione della soluzione

La matrice H è detta **matrice di iterazione** e definisce il metodo

Un metodo iterativo si dice **convergente** se la successione $\left\{x^{(k)}\right\}$ converge alla soluzione del sistema

Teorema di convergenza

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché un metodo iterativo della forma

$$x^{(k+1)} = H\,x^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

sia convergente per qualunque vettore iniziale $x^{(0)}$, è che la sua matrice di iterazione H sia convergente

Dimostrazione del Teorema di convergenza

Sia a la soluzione esatta del sistema $Ax = b$ e si voglia usare un metodo iterativo del tipo $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Essendo $x = Hx + c$ equivalente al sistema dato, vale l'identità

$$a = H\,a + c$$

Sottraendo membro a membro l'ultima uguaglianza dal processo iterativo otteniamo

$$x^{(k+1)} - a = H\,x^{(k)} - H\,a\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Indicando con $e^{(k)} = x^{(k)} - a$ l'errore associato a $x^{(k)}$, si ha

$$e^{(k+1)} \; = \; H \, e^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Per ricorrenza abbiamo

$$e^{(k+1)} = He^{(k)} = H^2 e^{(k-1)} = \cdots = H^{k+1} e^{(0)}$$

Dimostrazione del Teorema di convergenza

Per un arbitrario $e^{(0)}$, si avrà

$$\lim_{k\to\infty} e^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} H^{k+1} e^{(0)} = 0$$

se e solo se

$$\lim_{k\to\infty} H^{k+1} = \mathbf{O}$$

(che significa H matrice convergente)

Da alcuni risultati dell'Algebra Lineare che abbiamo ricordato o introdotto, si hanno i seguenti corollari

Corollario 1

Per la convergenza del metodo iterativo è **necessario e sufficiente** che risulti

$$\rho(H) < 1$$

Corollario 2

Condizione **sufficiente** per la convergenza del metodo iterativo è l'esistenza di una norma matriciale per cui si abbia

$$\|H\| < 1$$

Corollario 3

Condizione **necessaria** per la convergenza del metodo iterativo è

$$|\det(H)| < 1$$

Esempio 1

Un processo iterativo ha la matrice di iterazione

$$H = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ -10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Il metodo risulta convergente?

Soluzione

Poiché risulta

$$\|H\|_\infty = \frac{3}{4} (< 1)$$

il metodo risulta convergente

Riportiamo (senza dimostrazione) un risultato dell'Algebra Lineare
Per una qualunque norma matriciale naturale si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|H^k\|} = \rho(H)$$

Quindi per k abbastanza grande, risulta

$$\sqrt[k]{\|H^k\|} \simeq \rho(H)$$

Dalle precedenti relazioni segue, se $\|e^{(0)}\| \neq 0$,

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \leq \|H^k\| \simeq \rho^k(H)$$

Perciò, in un metodo convergente, $\|e^{(k)}\|$ si riduce almeno a $\|e^{(0)}\| \times 10^{-m}$ dopo un numero k di iterazioni tale che $\rho^k(H) \leq 10^{-m}$ ossia se

$$\frac{k}{m} \geq -\frac{1}{\mathrm{Log}\,\rho(H)}$$

Si vede che, nell'ambito dei metodi convergenti, la convergenza risulta tanto più rapida quanto più grande è il numero $-\mathrm{Log}\,\rho(H)$

Poiché il risultato è stato dedotto da relazioni asintotiche, al numero

$$V = \frac{m}{k} = -\mathrm{Log}\,\rho(H)$$

viene detto **velocità asintotica di convergenza** del metodo avente matrice di iterazione H

In base alla definizione di velocità asintotica di convergenza, se due metodi hanno matrici di iterazione con diverso raggio spettrale risulta più veloce quello che corrisponde al raggio spettrale minore

Riprendiamo in considerazione il processo iterativo

$$x^{(k+1)} = H\,x^{(k)} + c$$

Sottraendo ad entrambi i membri il vettore $x^{(k)}$ e tenendo conto che da $a = Ha + c$ si ricava $c = -(H - I)a$, si ha

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = H\,x^{(k)} - x^{(k)} - (H - I)a$$

Da quest'ultima relazione segue

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = (H - I)\,(x^{(k)} - a)$$

Infine, premoltiplicando per $(H - I)^{-1}$ (esiste?) e utilizzando due norme coerenti, otteniamo la maggiorazione

$$\|e^{(k)}\| \leq \|(H - I)^{-1}\| \, \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Quando si applica un metodo iterativo si deve stabilire un **criterio di arresto** per bloccare l'avanzamento delle iterazioni (essendo un processo al limite, in generale, non si raggiunge il limite)

Se E è una tolleranza d'errore prestabilita, un criterio spesso seguito è il seguente

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq E$$

che si basa sulla maggiorazione appena trovata

Tale criterio è chiaramente inefficiente se il numero $\|(H - I)^{-1}\|$ risulta molto grande

Esistono anche altri criteri di arresto legati, per esempio, al confronto tra il vettore residuo alla k-esima iterazione e il vettore dei termini noti

In ogni caso, per garantire che l'algoritmo termini dopo un numero massimo N di iterazioni, si affianca al criterio di arresto scelto, l'ulteriore condizione che il calcolo si arresti allorché sia

$$k \geq N$$

Outline

Introduciamo i due metodi iterativi più classici

Per definire questi due metodi iterativi si scomponga A nella forma

$$A = D - E - F$$

dove $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ mentre $-E$ e $-F$ sono matrici triangolari, rispettivamente inferiore e superiore, con la diagonale nulla

Il sistema $Ax = b$ si può quindi scrivere

$$(D - E - F)\, x = b$$

Il sistema si può quindi scrivere

$$D\,x \;=\; (E+F)\,x \;+\; b$$

da cui, se $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, si ottiene il **metodo di Jacobi**

$$x^{(k+1)} \;=\; D^{-1}\,(E+F)\,x^{(k)} \;+\; D^{-1}\,b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

la cui matrice di iterazione è

$$H_J \;=\; D^{-1}\,(E+F)$$

Risulta

$$
\begin{aligned}
H_J &= D^{-1}(E+F) \\
&= -\begin{pmatrix}
1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn}
\end{pmatrix} \cdot \\
&\qquad\qquad \begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice H_J

$$
H_J = -\begin{pmatrix}
0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\
a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} & \cdots & a_{2n}/a_{22} \\
a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & a_{3n}/a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\
a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & a_{n3/a_{nn}} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

Le equazioni che regolano il metodo di Jacobi sono date da

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right), \ i = 1, 2, \ldots, n, \ k = 0, 1 \ldots$$

Il vettore $x^{(k+1)}$ ottenuto con il metodo di Jacobi viene prima memorizzato in una posizione distinta da quella occupata da $x^{(k)}$ poi le n componenti $x_i^{(k+1)}$ vengono trasferite simultaneamente nelle posizioni prima occupate dalle $x_i^{(k)}$
Per questo motivo il metodo è detto anche metodo delle **sostituzioni simultanee**

Il sistema $(D - E - F)x = b$ si può scrivere nella forma

$$(D - E)\, x \;=\; F\, x \;+\; b$$

da cui, se $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, si ottiene il **metodo di Gauss-Seidel**

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

la cui matrice di iterazione è

$$H_{GS} \;=\; (D - E)^{-1}\, F$$

La matrice H_{GS}

Per la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel, in generale, non risulta possibile scrivere quali sono i suoi elementi

Si può solo osservare che la matrice H_{GS} è il prodotto della matrice triangolare inferiore $(D - E)^{-1}$ per la matrice triangolare superiore con diagonale nulla F

Questo ci dice che l'unica certezza che abbiamo è che la prima colonna di H_{GS} risulta nulla
Di conseguenza si ha che $\det(H_{GS}) = 0$ che non preoccupa visto che tale matrice **non** è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare

Versione per componenti

Le equazioni che regolano il metodo di Gauss-Seidel sono date da

$$x^{(k+1)} = D^{-1} E x^{(k+1)} + D^{-1} F x^{(k)} + D^{-1} b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Le singole equazioni sono

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Versione per componenti

L'algoritmo di Gauss-Seidel consente una maggiore economia di memoria rispetto a quello di Jacobi, in quanto ogni singola componente $x_i^{(k+1)}$ appena calcolata può essere subito memorizzata nella posizione prima occupata dalla vecchia componente $x_i^{(k)}$

Questo giustifica la denominazione di **metodo delle sostituzioni successive** spesso usata per il processo iterativo di Gauss-Seidel

Osservazione

Si osservi che per i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel è necessaria la condizione $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Se tale condizione non fosse verificata è possibile ottenerla riordinando le equazioni e, eventualmente, anche le incognite, purché la matrice A non sia singolare

In generale, a diversi ordinamenti delle equazioni soddisfacenti la condizione $a_{ii} \neq 0$, corrispondono diverse matrici di iterazione

Un esame della matrice A del sistema può dire subito se vi sono condizioni sufficienti per la convergenza

Teorema 1

Se A è una matrice a predominanza diagonale forte, allora il metodo di Jacobi e quello di Gauss-Seidel sono convergenti

Teorema 2

Se A è una matrice irriducibile e a predominanza diagonale debole, allora il metodo di Jacobi e quello di Gauss-Seidel sono convergenti

Verifichiamo solo il Teorema 1 nel caso del metodo di Jacobi

Ricordando la struttura e gli elementi della matrice H_J (vedi slide 24), abbiamo che la norma infinito della matrice risulta

$$\|H_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

L'ipotesi di predominanza diagonale forte della matrice A dice che

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Dall'ultima disuguaglianza segue

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Essendo $\|H_J\|_\infty$ il massimo dei primi membri della disuguaglianza, si ha

$$\|H_J\|_\infty < 1$$

che, come abbiamo visto, è una condizione sufficiente per la convergenza del metodo

Osservazione

Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, in generale, la convergenza di uno dei due metodi classici non implica necessariamente la convergenza dell'altro metodo

L'esempio 3.10.7 riportato sulle dispense mostra due sistemi lineari per la risoluzione dei quali converge solo uno dei due metodi classici (nel primo sistema converge solo il metodo di Jacobi mentre nel secondo sistema converge solo il metodo di Gauss-Seidel)

Caso particolare

Riportiamo un risultato importante nel caso in cui la matrice dei coefficienti del sistema lineare risulti tridiagonale

Se A è una matrice tridiagonale, cioè con $a_{ij} = 0$ per $| \, i - j \, | > 1$, e se si ha $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono o divergono insieme, avendosi

$$\rho(H_{GS}) \; = \; \rho^2(H_J)$$

Caso particolare

La relazione tra i due raggi spettrali ci dice che, se i due metodi convergono, le due velocità asintotiche di convergenza soddisfano la relazione

$$V_{GS} = 2\, V_J$$

Outline

Esempio 2

Un sistema lineare ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Determinare l'insieme dei valori complessi α per i quali il metodo di Jacobi converge

Soluzione

Poiché $\rho(H_J) = 2\,|\alpha|$, il metodo di Jacobi converge se

$$|\alpha| < \frac{1}{2}$$

Esempio 3

Un sistema lineare ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Determinare per quali valori α il metodo di Jacobi converge e per quali α il metodo di Gauss-Seidel converge

Soluzione

Poiché $\rho(H_J) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{|\alpha|}$ e $\rho(H_{GS}) = \frac{1}{16}|\alpha|$, entrambi i metodi convergono se

$$|\alpha| < 2^4$$

Esempio 4

Un sistema lineare ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Determinare per quali valori α il metodo di Jacobi converge e per quali α il metodo di Gauss-Seidel converge

Soluzione

Poiché $\rho(H_J) = |\alpha|$ e $\rho(H_{GS}) = |\alpha|^{3/2}$, entrambi i metodi convergono se

$$|\alpha| < 1$$

Esempio 5

Un sistema lineare ha come matrice dei coefficienti la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dire se il metodo di Gauss-Seidel converge

Soluzione

Poiché la matrice H_{GS}, partizionata a blocchi ha un autovalore nullo mentre l'altro blocco diagonale ha determinate uguale a $\frac{64}{9}$ segue che il metodo di Gauss-seidel **non** converge