Esercizio (tratto dal problema 6.10 del Mazzoldi 2)

Due palline di uguale massa m vengono lanciate da una certa altezza, sotto l'azione della forza peso, con velocità iniziali $\vec{v}_1^0 = (2\vec{u}_x + 3\vec{u}_y)\,\mathrm{m/s}$ e $\vec{v}_2^0 = (4\vec{u}_x - 2\vec{u}_y)\,\mathrm{m/s}$ (l'asse x è orizzontale e l'asse y è verticale e orientato verso l'alto). Calcolare, al tempo $t^* = 0.1\,\mathrm{s}$

1. la velocità del centro di massa;
2. l'accelerazione del centro di massa;
3. il loro modulo.

SOLUZIONE

1. **Velocità del centro di massa**
   La legge oraria delle velocità per le due particelle è data da

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1^{\,0} - \vec{g}\,t \tag{1}$$
$$\vec{v}_2(t) = \vec{v}_2^{\,0} - \vec{g}\,t \tag{2}$$

e dunque la velocità del centro di massa è

$$\begin{aligned}\vec{v}_{CM}(t) &= \frac{m_1\,\vec{v}_1(t) + m_2\,\vec{v}_2(t)}{m_1+m_2} = \\ &= \frac{m_1\,(\vec{v}_1^{\,0} - \vec{g}\,t) + m_2\,(\vec{v}_2^{\,0} - \vec{g}\,t)}{m_1+m_2} = \\ &= \frac{m_1\,\vec{v}_1^{\,0} + m_2\,\vec{v}_2^{\,0}}{m_1+m_2} - \vec{g}\,t \end{aligned} \tag{3}$$

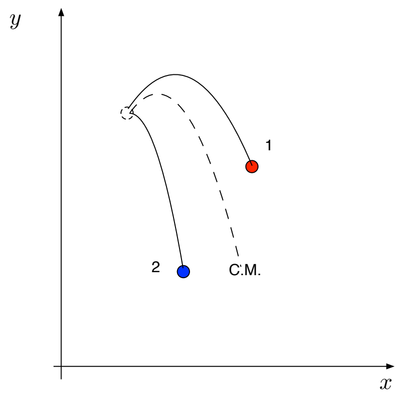
In componenti

$$\begin{cases} v_{CM,x}(t) = \dfrac{m_1\,v^0_{1,x} + m_2\,v^0_{2,x}}{m_1+m_2} = \text{const} \\ v_{CM,y}(t) = \dfrac{m_1\,v^0_{1,y} + m_2\,v^0_{2,y}}{m_1+m_2} - g\,t \end{cases}$$

Ricordando che le due masse sono uguali $m_1 = m_2 = m$, otteniamo

$$\begin{cases} v_{CM,x}(t) = \dfrac{v^0_{1,x} + v^0_{2,x}}{2} = \text{const} \\ v_{CM,y}(t) = \dfrac{v^0_{1,y} + v^0_{2,y}}{2} - g\,t \end{cases}$$

Sostituendo i dati, otteniamo



$$\begin{cases} v_{CM,x}(t^*) = \dfrac{2\,\text{m/s} + 4\,\text{m/s}}{2} = 3\,\text{m/s} \\ v_{CM,y}(t^*) = \dfrac{3\,\text{m/s} - 2\,\text{m/s}}{2} - 9.81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0.1\,\text{s} = (0.5 - 0.981)\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = -0.481\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

il cui modulo vale

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}_{CM}(t^*)| &= \sqrt{(v_{CM,x}(t^*))^2 + (v_{CM,y}(t^*))^2} = \\
&= \sqrt{(3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + (-0.481\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} = \\
&= 3.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

2. **Accelerazione del centro di massa**
Per entrambe le masse l'accelerazione è data solo dall'accelerazione di gravità. Dunque anche il centro di massa è soggetto all'accelerazione $\vec{g}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{CM}(t) &= \frac{m_1\,\vec{a}_1(t) + m_2\,\vec{a}_2(t)}{m_1 + m_2} = \\
&= \frac{m_1\vec{g} + m_2\,\vec{g}}{m_1 + m_2} = \\
&= \vec{g} = \mathrm{const} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

il cui modulo vale $9.81\,\mathrm{m/s^2}$.