# Soluzioni prova scritta

## Ingegneria Informatica 16/02/2023

### Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri la matrice tridiagonale $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- **V** F $A$ è a predominanza diagonale debole.
- V **F** $A$ è a predominanza diagonale forte.
- V **F** $||A||_\infty = 1$.
- **V** F $||A||_\infty = 4$.
- **V** F Il determinante di $A$ è un numero intero.
- **V** F $A$ è invertibile.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Nella seguente lista dire se sono (V) o non sono (F) metodi stazionari a un punto.

- V **F** Metodo di bisezione.
- V **F** Metodo delle secanti.
- **V** F Metodo di Newton.
- **V** F Metodo di Newton-Raphson.
- V **F** Metodo QR per problemi ai minimi quadrati.
- V **F** Metodo QR per il calcolo degli autovalori.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi che non sono a risposta multipla.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice diagonalizzabile i cui autovalori verificano $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$. Si consideri il metodo delle potenze per il calcolo di $\lambda_1$ e del corrispondente autovettore con punto iniziale $x_0 \in \mathbb{C}^n$.

V **F** Eseguire $k$ iterazioni del metodo delle potenze costa $\mathcal{O}(kn)$ operazioni.

**V** F Eseguire $k$ iterazioni del metodo delle potenze costa $\mathcal{O}(kn^2)$ operazioni.

V **F** Eseguire $k$ iterazioni del metodo delle potenze costa $\mathcal{O}(kn^3)$ operazioni.

V **F** Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ allora il metodo converge per ogni punto iniziale $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

**V** F L'approssimazione dell'autovettore $v_1$ corrispondente a $\lambda_1$ restituita dall'algoritmo è un vettore di norma 1.

V **F** Se $A$ è Hermitiana definita positiva allora il metodo converge per ogni punto iniziale $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $q(x)$ polinomio e si indichi con $\rho(\cdot)$ il raggio spettrale di una matrice.

**V** F $\rho(A^3) = \rho(A)^3$.

**V** F Se $v$ autovettore dominante di $A$ allora $v$ autovettore dominante per $A^3$.

V **F** Per ogni polinomio $q(x)$ si ha $\rho(q(A)) = q(\rho(A))$.

V **F** Per ogni polinomio $q(x)$ si ha $\rho(q(A)) = |q(\rho(A))|$.

V **F** Per ogni polinomio $q(x)$: se $v$ autovettore dominante di $A$ allora $v$ autovettore dominante per $q(A)$.

V **F** Per ogni polinomio $q(x)$ si ha $\det(q(A)) = q(\det(A))$ (det = determinante).

## Esercizio 2

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si calcoli la sua fattorizzazione LU con pivoting parziale, ovvero le matrici $\Pi, L, U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ che verificano $\Pi A = LU$.

Si ha

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si calcoli il determinante di $A$.

$$\det(A) = 8.$$

## Esercizio 3

Data la tabella di valori

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $2.5$ | $2.5$ |

si consideri il problema di determinare i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $a \cdot 2^{-x} + b \cdot \sin(k\frac{\pi}{2}x)$ approssimi nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x)$, dove $k \in \mathbb{R}$ rappresenta un parametro assegnato.

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si determinino $a, b$ nel caso $k = 1$.

Per $k = 1$ il sistema delle equazioni normali diventa

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5.25 & -1.5 \\ -1.5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si determini per quali valori di $k$ la soluzione del problema ai minimi quadrati è unica.

Il problema è equivalente al sistema sovradeterminato $Ax = b$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sin(-k\pi/2) \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sin(k\pi/2) \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Il problema ha soluzione unica quando la matrice $A$ ha rango 2, che avviene ogni volta che $k$ non è un numero intero pari.

## Esercizio 4

Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^{\pi} f(x)|\cos(x)|\ dx \approx a_0 f(0) + a_1 f'(\pi).$$

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Determinare i valori dei pesi $a_0$ ed $a_1$ che rendono massimo l'ordine di precisione della formula. Dai calcoli

$$\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx = 2, \qquad \int_0^{\pi} x|\cos(x)|dx = \pi$$

ed imponendo l'esattezza della formula per le funzioni $1, x$ si ottiene $a_0 = 2$ ed $a_1 = \pi$.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Determinare l'ordine di precisione della formula.

Osservando che

$$\int_0^{\pi} x^2|\cos(x)|dx = \frac{1}{2}(-8 + 4\pi + \pi^2) \neq 2f(0) + \pi f'(\pi) = 2\pi^2$$

si conclude che il grado di precisione è 1.