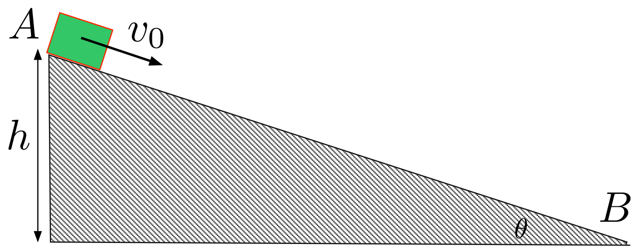
Esercizio (tratto dal Problema 3.36 del Mazzoldi 2)

Un corpo si trova all'estremo superiore A ($h = 50\,\mathrm{cm}$) di un piano inclinato ($\theta = 18^o$) scabro, con coefficiente di attrito statico μ_S e dinamico μ_D, rispettivamente.

1. Determinare il valore massimo che μ_S può assumere affinché il corpo, partendo da fermo, possa iniziare a scendere;

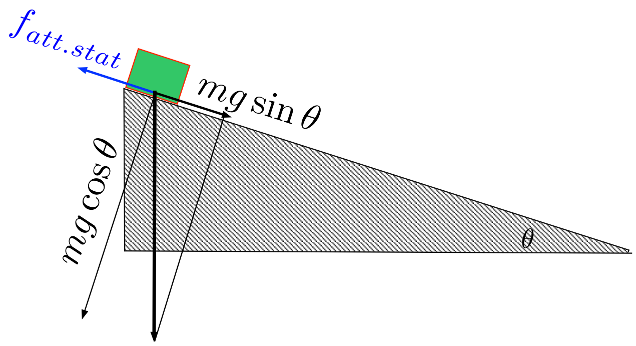
2. Supponiamo ora che il corpo venga lanciato da A con una velocità iniziale $v_0 > 0$, diretta longitudinalmente al piano inclinato, verso il basso. Calcolare il valore di v_0 tale che il corpo arrivi all'estremo inferiore B con velocità nulla. Disegnare v_0 in funzione del coefficiente μ_D;

3. Calcolare il valore esplicito di tale velocità nel caso $\mu_D = 0.35$.



SOLUZIONE:
DATI INIZIALI:

$$\begin{array}{rcl} \theta & = & \frac{\pi}{10} \\ h & = & 0.5\,\mathrm{m} \end{array}$$



Scomponiamo la forza peso in componente longitudinale e ortogonale al piano, come mostrato in figura.

1. Il corpo può iniziare a scendere lungo il piano se la componente longitudinale della forza peso è superiore alla forza *massima* che l'attrito statico può generare

$$mg\sin\theta > f_{att.stat}^{max} = \mu_S\, mg\cos\theta \tag{1}$$

ossia se

$$\tan\theta > \mu_S \tag{2}$$

Pertanto il valore massimo del coefficiente di attrito statico affinché il corpo possa scendere vale

$$\mu_S^{\max} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{10} = 0.32 \tag{3}$$

2. Scrivendo la legge della dinamica per la componente lungo il piano

$$\begin{array}{rcl} ma_{||} & = & mg\sin\theta - \mu_D\, mg\cos\theta \\ & \Downarrow & \\ a_{||} & = & g(\sin\theta - \mu_D\, \cos\theta) \end{array} \tag{4}$$

L'accelerazione $a_{||}$ lungo il piano, data dall'Eq.(4), è una costante nel tempo. Pertanto lungo il piano il corpo si muove di un moto rettilineo uniformemente accelerato. Il valore della velocità iniziale tale per cui il corpo si arresti proprio alla base del piano si può dunque determinare sfruttando la seguente relazione (valida solo per i moti rettilinei unif. accelerati)

$$\frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta s} = a_{||} \tag{5}$$

dove, nel nostro caso,

$$\begin{cases} \Delta s &=& \frac{h}{\sin\theta} \qquad \text{(spostamento lungo il piano)} \\ v_f &=& 0 \\ v_i &=& v_0 \\ a_{||} &=& g(\sin\theta - \mu_D\,\cos\theta) \end{cases} \tag{6}$$

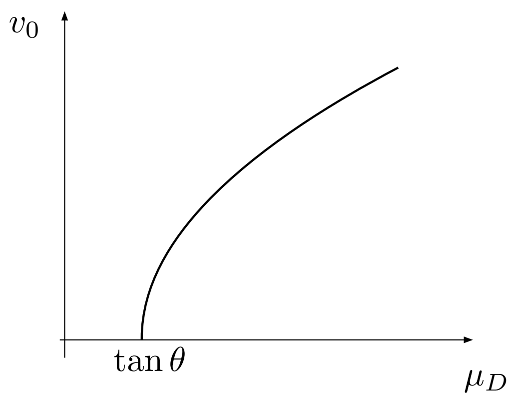
Pertanto

$$-\frac{v_0^2}{\frac{2h}{\sin\theta}} = g(\sin\theta - \mu_D\,\cos\theta) \tag{7}$$

e dunque il valore di velocità iniziale affinché il corpo si fermi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\theta}\,(\mu_D\,\cos\theta - \sin\theta)} = \sqrt{2gh\left(\frac{\mu_D}{\tan\theta} - 1\right)} \tag{8}$$

che ha una soluzione solo se $\mu_D \geq \tan\theta$.



3. Nel caso in cui $\mu_D = 0.35$ abbiamo

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2gh\left(\frac{\mu_D}{\tan\theta} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}0.5\,\mathrm{m}\left(\frac{0.35}{\tan\frac{\pi}{10}} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{9.81\,\left(\frac{0.35}{0.325} - 1\right)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 0.87\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{9}$$