Test Telematico di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 19/02/2021

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x,y) = \frac{x+2}{y}$$

in un punto $P_0 \in D = [0,1] \times [1,2]$.
Indicare con quale precisione si devono introdurre i dati e come eseguire le operazioni per avere un errore assoluto che verifichi la limitazione $|E_f| \leq 10^{-3}$.

2) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} .$$

3) Indicare intervalli di separazione per le soluzioni reali dell'equazione

$$e^x + x^2 - 4 \ = \ 0 \, .$$

Determinare valori iniziali che rendono convergente il metodo di Newton per la approssimazione delle soluzioni.

4) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & 1 \\ \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, .$$

Indicare i valori reali di α e β per i quali il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

1) Si pongono $|\delta_f| < \frac{1}{2}10^{-3}$ e $|\delta_d| < \frac{1}{2}10^{-3}$.
Risultano $A_x = 1$ e $A_y = 3$ per cui $|\delta_x| < \frac{1}{4}10^{-2}$ e $|\delta_y| < \frac{1}{12}10^{-2}$.
Quindi, per rientrare nella limitazione richiesta, basta introdurre x troncato alla quarta cifra decimale, y arrotondato alla quarta cifra decimale e arrotondare il risultato dell'operazione alla terza cifra decimale.

2) Risultano

$$L = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) L'equazione data ha due soluzioni reali

$$\alpha_1 \in]-2,-1[\qquad \alpha_2 \in]1,2[\,.$$

Dallo studio del segno delle funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$ si deduce che per applicare il metodo di Newton con successo si possono scegliere i valori iniziali

$$x_0^{(1)} = -2 \qquad x_0^{(2)} = 2\,.$$

4) Per avere una unica soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati, la matrice A deve risultare di rango 2.
Basta quindi che risultino diversi da zero i minori

$$\begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \beta - \alpha \qquad \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix} = -(\beta + \alpha) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix} = -2\alpha\,.$$

Si ha quindi l'unicità della soluzione se

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0 \qquad ((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})\,.$$