Esame di Ricerca Operativa del 09/06/14

(Cognome)	**(Nome)**	**(Corso di laurea)**

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{4, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{5,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce due tipi di farinaccio per alimentazione animale (A-B), che si vendono a 39 e 42 euro al quintale rispettivamente, in due reparti (1-2). Di farinaccio di tipo A bisogna produrne tra il 40 ed il 60 per cento del totale. Nella seguente tabella sono indicati i tempi di lavorazione dei farinacci (in ore) , le capacità produttive (in ore) dei reparti ed il costo orario.

	A	B	Capacità	Costo
1	0.19	0.23	90	2.81
2	0.21	0.18	85	3.19

Si cerca la pianificazione della produzione che massimizzi il profitto.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB (DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

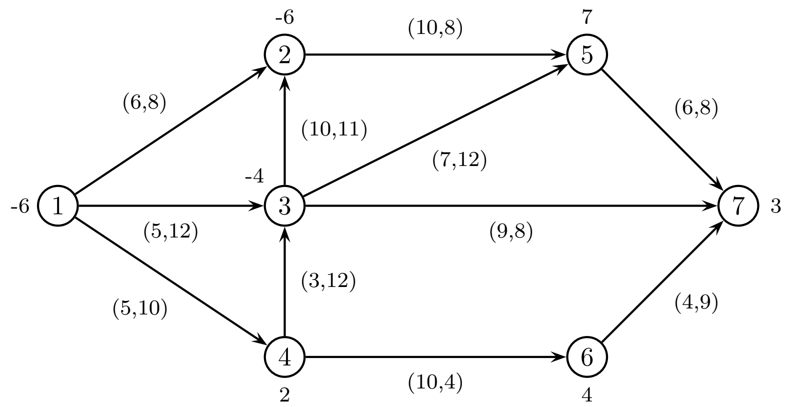
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

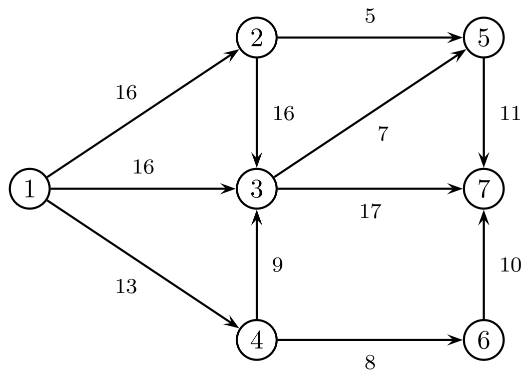


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(2,5)	$x =$		
(1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

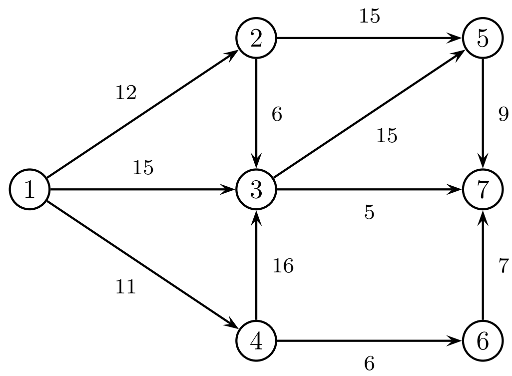
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \\ 12\ x_1 + 11\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	87	61	41
2		24	53	55
3			8	9
4				12

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	$\left(\frac{3}{2}, -22\right)$						
	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$						
	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$						
	$(0, -4))$						

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_1 + 5\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-4, -5)$, $(1, 2)$, $(1, -5)$ e $(-4, -0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{7}{3}, -5\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-6,\ -3)$	SI	NO
$\{4,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ -5)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(-3,\ 2)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -4,\ 7)$	5	$\frac{10}{3},\ 0$	4
2° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(-3,\ 2)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ -5)$	6	$5,\ 2$	3

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

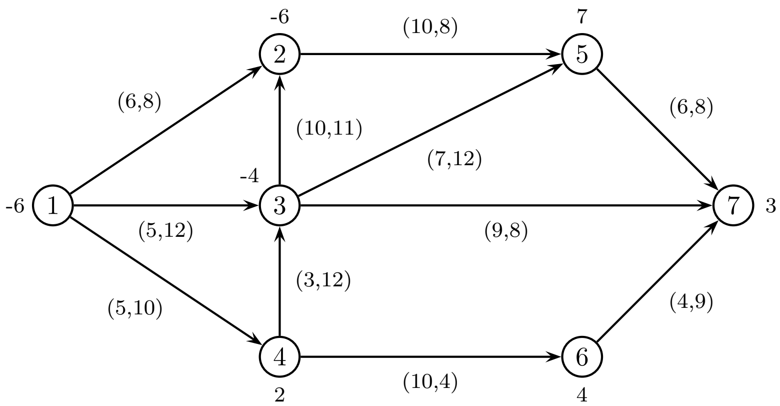
```
c=[-38.47; -41.35; -38.27; -41.43]

A=[0.19 0.23 0 0;0 0 0.21 0.18;-0.6 0.4 -0.6 0.4;0.4 -0.6 0.4 -0.6]     b=[90;85;0;0]

Aeq=[ ]                                                                 beq=[ ]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                       ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

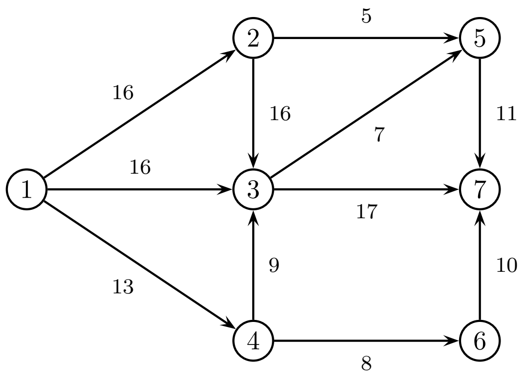


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(2,5)	$x = (6,\ 0,\ 0,\ 8,\ -4,\ 0,\ 0,\ -8,\ 6,\ 1,\ 2)$	NO	NO
(1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,\ 1,\ 8,\ 5,\ 11,\ 13,\ 17)$	SI	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

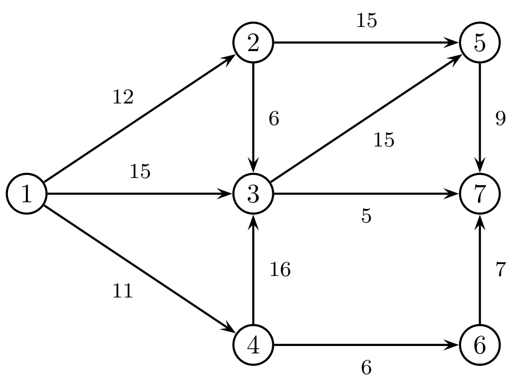
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(0, 0, 6, 8, 2, 2, 0, 0, 4, 3, 0)	(0, 0, 6, 8, 2, 2, 0, 0, 4, 3, 0)
π	(0, 18, 8, 5, 15, 15, 21)	(0, 6, −4, 5, 3, 15, 9)
Arco entrante	(1,2)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 0	10 , 2
Arco uscente	(4,3)	(3,2)

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		5		6		7	
nodo 2	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 3	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 4	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	2	21	2	21	2	21	2	21	2
nodo 6	$+\infty$	-1	21	4	21	4	21	4	21	4	21	4	21	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	3	32	5	31	6	31	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	9	(9, 5, 0, 0, 9, 0, 5, 0, 0, 9, 0)	14
1 - 4 - 6 - 7	6	(9, 5, 6, 0, 9, 0, 5, 0, 6, 9, 6)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \\ 12\ x_1 + 11\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{21}{4}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 5$
$r = 4$ $\qquad 5\,x_1 + 4\,x_2 \leq 26$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	87	61	41
2		24	53	55
3			8	9
4				12

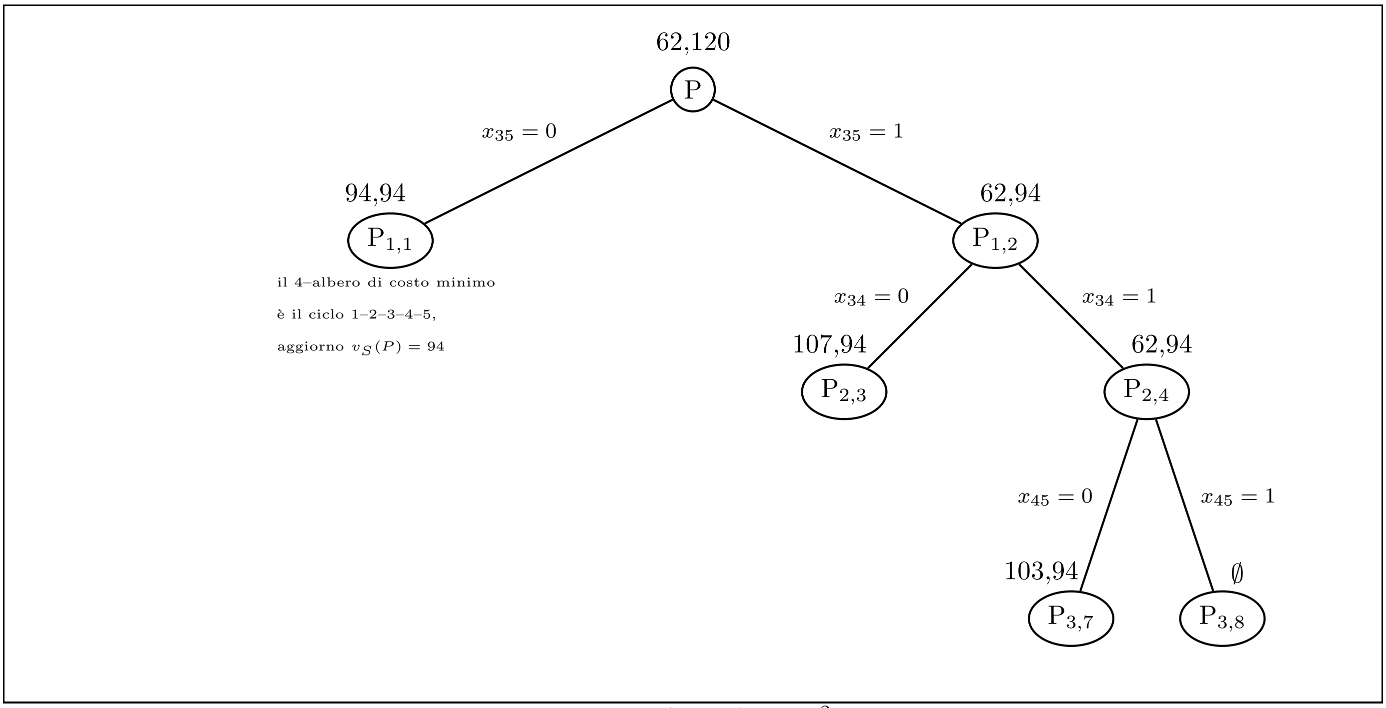
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 62$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $\qquad v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(6,\ 11)$	$\left(\frac{3}{2}, -22\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-6,\ -1)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(-6,\ 0)$	$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-3,\ 2)$	$(0, -4)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\, x_1^2 + 4\, x_1\, x_2 + 2\, x_1 + 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-4,-5)$, $(1,2)$, $(1,-5)$ e $(-4,0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{7}{3}, -5\right)$	$(0, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{110}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$(1, -5)$