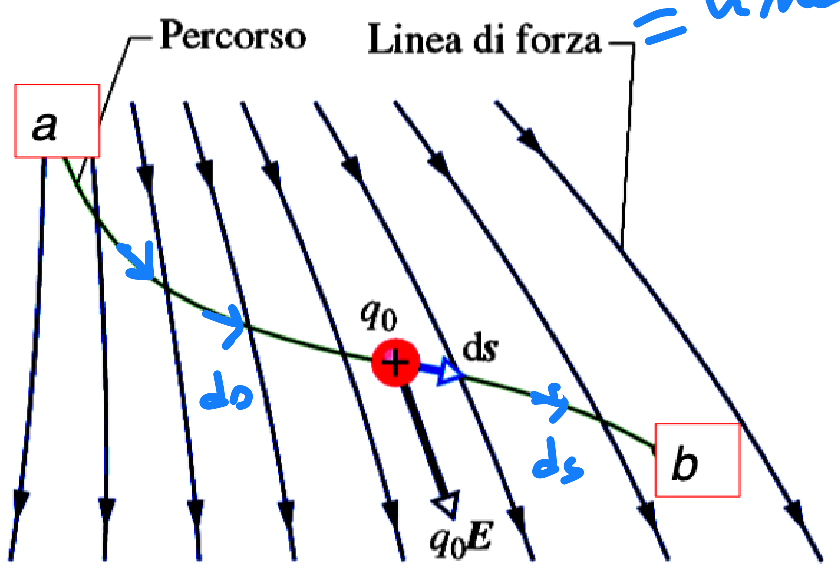
Lezione 36

- Energia potenziale e potenziale elettrostatico.
- Linee di campo e superfici equipotenziali.

Lavoro eseguito dal campo Elettrico E

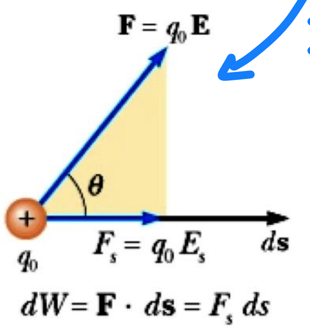
- Calcoliamo il lavoro che esegue il campo elettrico ***E***, determinato da cariche sorgenti, su una carica che si sposta lungo una traiettoria.

$E_{sorg.}$



= linee $\vec{E}$

q_0 da muovere da $a \rightarrow b$



$\vec{F}$

$d\vec{s}$

$$dL = \vec{E} q_0 \cdot d\vec{s}$$

$$L_{a,b} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

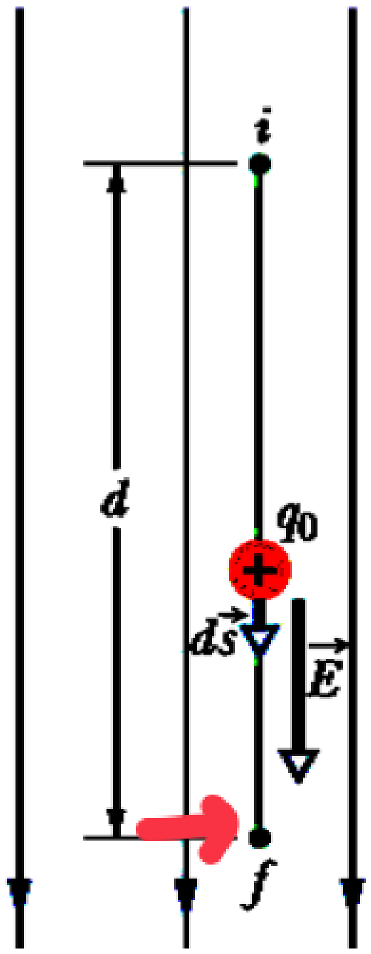
$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

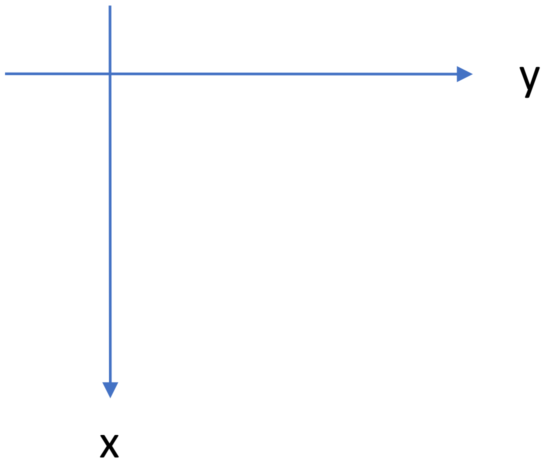
$$= \underbrace{q_0 E\, ds \cos\theta} = q_0 E_s\, ds$$

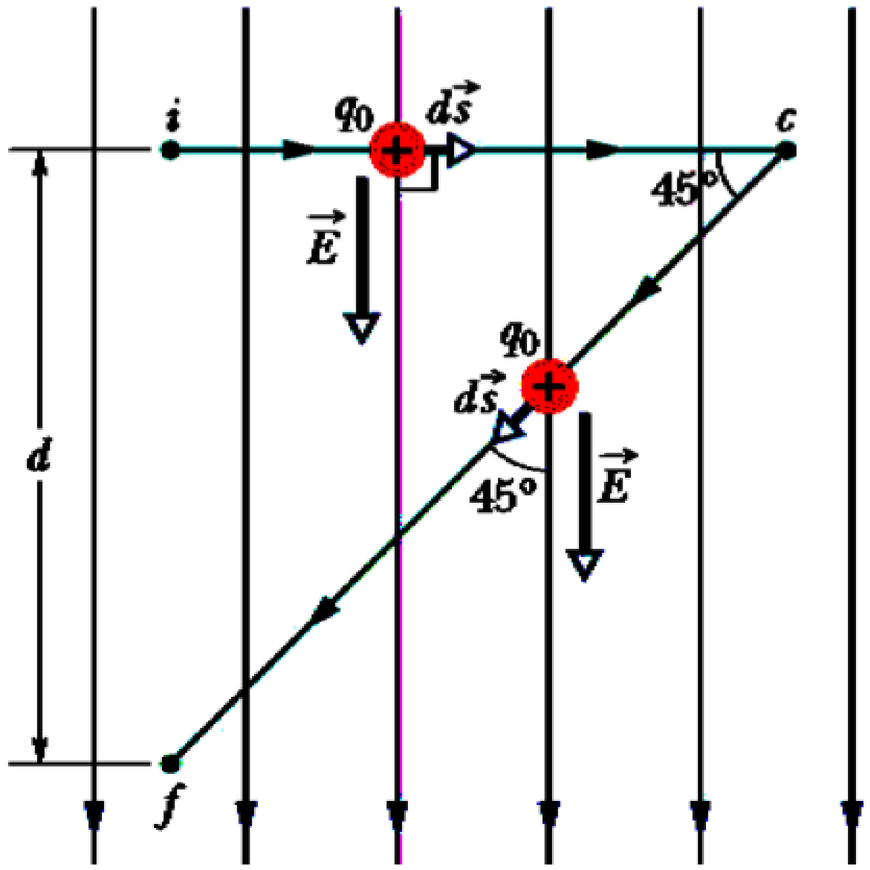
$E\cos\theta$

- Il lavoro che esegue il campo elettrico ***E*** è indipendente dal cammino. **Il campo elettrico è conservativo**, come lo erano il campo gravitazionale e la forza elastica.

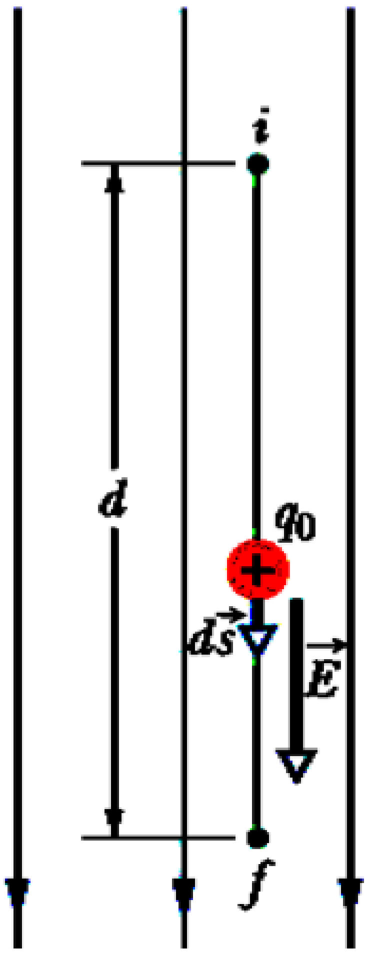
- Calcoliamo il lavoro che esegue il campo elettrico ***E***, uniforme, su una carica in moto tra due posizioni *(i) -> (f),* distanti *d*, lungo due traiettorie differenti.







- Calcoliamo il lavoro che esegue il campo elettrico ***E***, uniforme, su una carica in moto tra due posizioni (i) -> (f), distanti *d*, lungo due traiettorie differenti.



$$L_1 = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

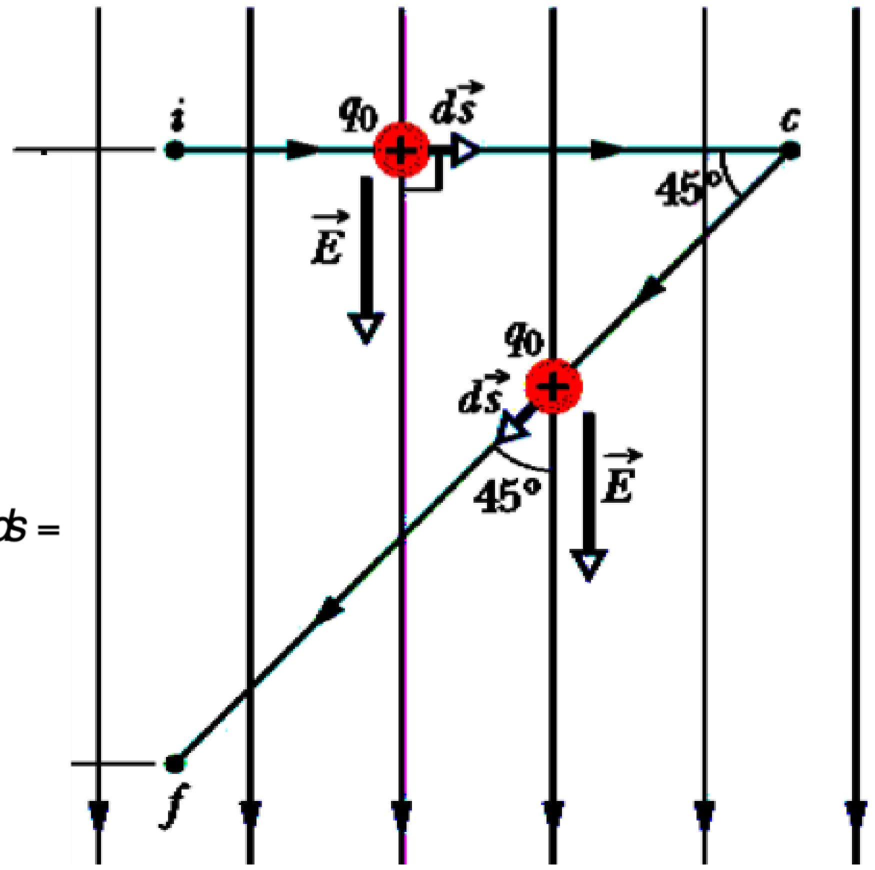
$$= q_0 \int_i^f E\cos(0)\, ds = q_0 E \cdot d$$

$$L_2 = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= q_0 \int_i^c \vec{E} \cdot d\vec{s} + q_0 \int_c^f \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= q_0 \int_i^c E\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) ds + q_0 \int_c^f E\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) ds =$$

$$= 0 + q_0 E \frac{\sqrt{2}}{2}\left(d \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) = q_0 E \cdot d$$



Lavoro, energia potenziale e differenza di potenziale

- Il campo elettrico è ***CONSERVATIVO***; dunque una carica immersa in un campo elettrico possiede un'energia potenziale, in virtù del fatto che essa può essere spostata dalla forza del campo elettrico

$$\boxed{\Delta U = -L}$$

Lavoro, energia potenziale e differenza di potenziale

- Il campo elettrico è ***CONSERVATIVO***; dunque una carica immersa in un campo elettrico possiede un'energia potenziale, in virtù del fatto che essa può essere spostata dalla forza del campo elettrico

$$\boxed{\Delta U = -L}$$

- La differenza di ***POTENZIALE*** ΔV (comunemente anche detto *tensione* o *voltaggio* o *d.d.p.*), ovvero l'energia potenziale per unita di carica

$$\boxed{\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{L}{q_0}}$$

- La ***d.d.p.*** $V_f - V_i$ tra due punti è uguale a (-) il lavoro compiuto dal campo per spostare la carica unitaria (q_0) dal punto iniziale a quello finale

Lavoro, energia potenziale e differenza di potenziale

- Il campo elettrico è ***CONSERVATIVO***; dunque una carica immersa in un campo elettrico possiede un'energia potenziale, in virtù del fatto che essa può essere spostata dalla forza del campo elettrico

$$\boxed{\Delta U = -L}$$

- La differenza di ***POTENZIALE*** ΔV (comunemente anche detto *tensione* o *voltaggio* o *d.d.p*.), ovvero l'energia potenziale per unita di carica

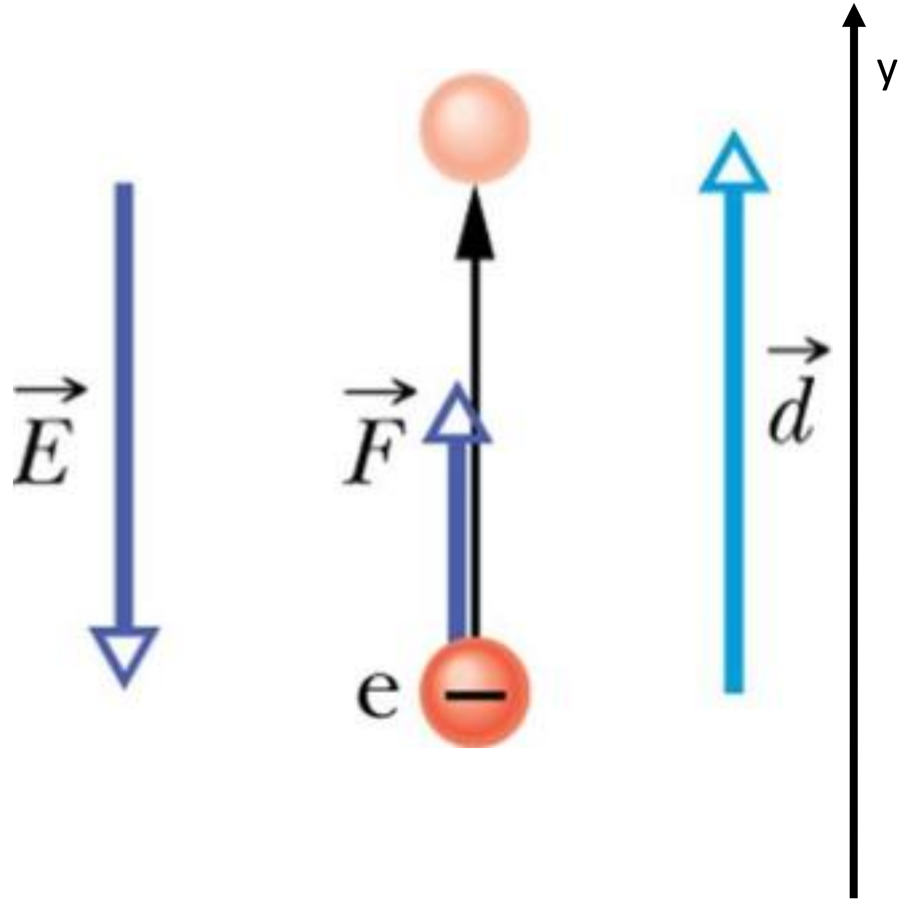
$$\boxed{\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{L}{q_0}}$$

- La ***d.d.p.*** $V_f - V_i$ tra due punti è uguale a (-) il lavoro compiuto dal campo per spostare la carica unitaria (q_0) dal punto iniziale a quello finale

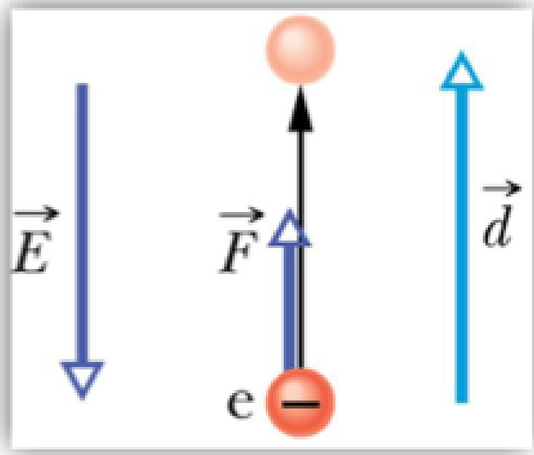
- Dato un campo elettrico ***E*** esiste una ***d.d.p.*** $V_f - V_i$ tra due punti dello spazio.

Lavoro ed energia potenziale: e^- in campo uniforme

- Esempio: consideriamo un elettrone in un campo elettrico uniforme *E = 100 N/C*;
- calcoliamo il lavoro compiuto dal campo e la variazione di energia potenziale dell'elettrone corrispondente ad uno spostamento *verso l'alto* pari a *d=100 m*



Consideriamo un elettrone in un campo elettrico uniforme d'intensità E = 100 N/C; l'elettrone viene spostato di 100 m



$$L = eEd = 1.6\times10^{-19}\,C \times 100\,\frac{N}{C} \times 100\,m = 1.6\times10^{-15}\,J$$

Il lavoro compiuto da un campo uniforme d'intensità *E*=100 N/C per spostare un elettrone di 100 m è uguale a 1.6x10^{-15} J

$$\Delta U = U_f - U_i = -L = -1.6\times10^{-15}\,J$$

A seguito di uno spostamento di 100 m, l'energia potenziale dell'elettrone si è ridotta di 1.6x10^{-15} J

$$\Delta V = V_f - V_i = -Ed = -100\,\frac{N}{C} \times 100\,m = -10^4\,V$$

Un campo uniforme d'intensità *E*=100 N/C genera, tra due punti distanti 100 m, una d.d.p. di 10^4 V

Lavoro ed energia potenziale, unità di misura

il lavoro ha le dimensioni di una energia, e si misura in **Joule (J)**:

$$[U] = [L] = N\,m = J$$

Il Potenziale ha dimensioni di energia diviso carica, e si misura in **Volt (V)**

$$[V] = \left[\frac{U}{q}\right] = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{C} = V$$

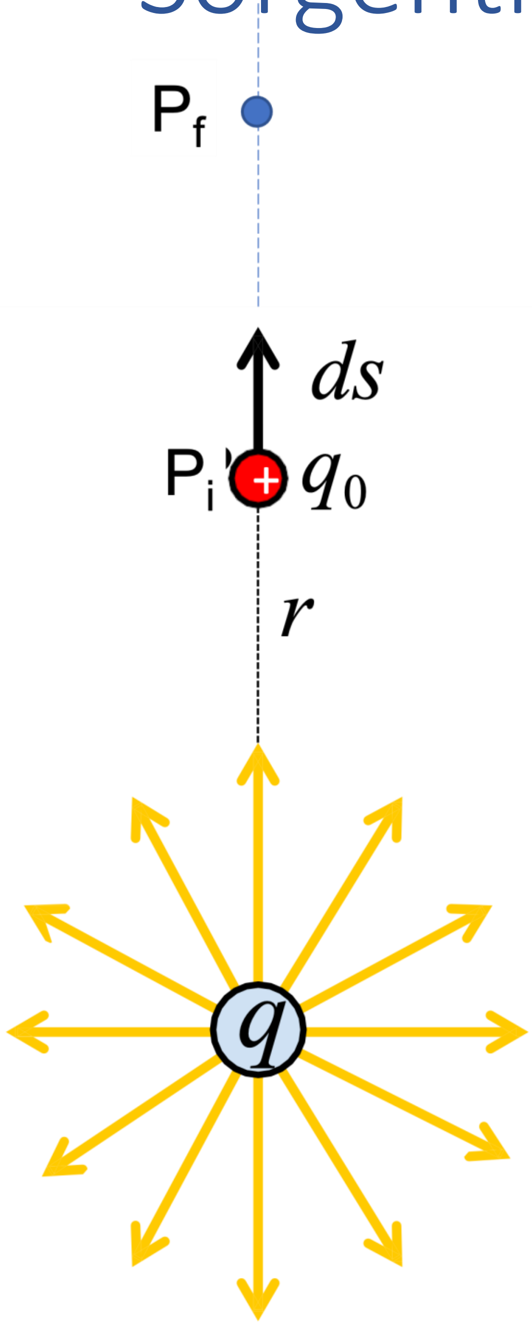
Dalla precedente equazione si vede che il **campo elettrico si può anche esprimere in V/m**, essendo:

$$\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

Una unità di lavoro ed energia molto utilizzata in fisica atomica è l'**elettronvolt** (eV); 1 eV è il lavoro compiuto per variare di 1 Volt il potenziale di una carica elementare:

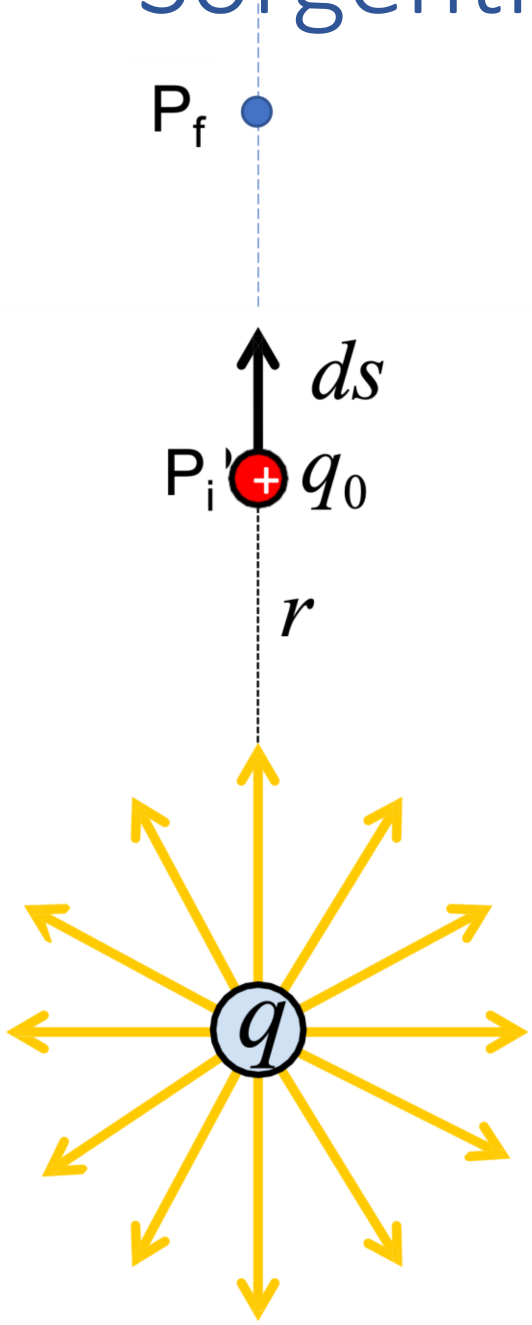
$$L = q\,\Delta V = e \times 1V = 1.6\times10^{-19}\,C \times \frac{J}{C} = 1.6\times10^{-19}\,J$$

Sorgenti del Potenziale: una carica puntiforme q



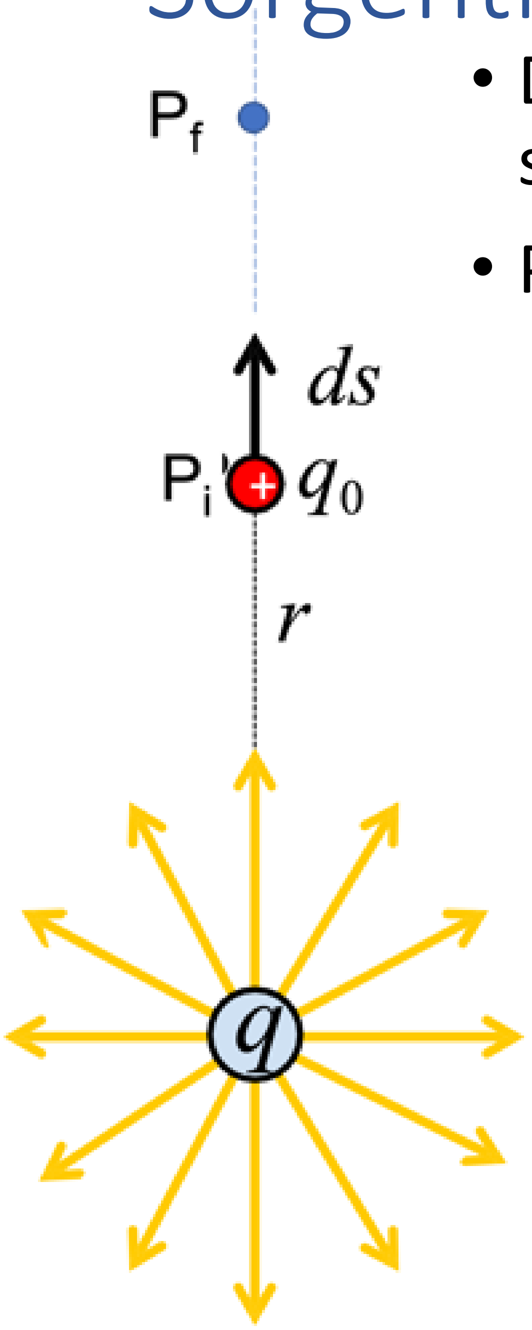
- Fissiamo nel nostro "spazio" contiene una carica puntiforme q (sorgente) positiva
- Poniamo una carica $q_0 > 0$ nel punto P_i e **calcoliamo il lavoro compiuto dal campo** generato da q per spostare q_0 dal punto iniziale P_i al punto finale P_f.
- Poiché il campo è conservativo, L non dipende dal percorso di q_0, per cui possiamo scegliere il percorso sul quale è più semplice calcolare l'integrale; questo è chiaramente la **traiettoria radiale** ($ds = dr$) lungo la quale **spostamento e campo sono sempre paralleli**

Sorgenti del Potenziale: una carica puntiforme q



- Fissiamo nel nostro "spazio" contiene una carica puntiforme q (sorgente) positiva
- Poniamo una carica $q_0 > 0$ nel punto P_i e **calcoliamo il lavoro compiuto dal campo** generato da q per spostare q_0 dal punto iniziale P_i al punto finale P_f.
- Poiché il campo è conservativo, L non dipende dal percorso di q_0, per cui possiamo scegliere il percorso sul quale è più semplice calcolare l'integrale; questo è chiaramente la **traiettoria radiale** ($ds = dr$) lungo la quale **spostamento e campo sono sempre paralleli**

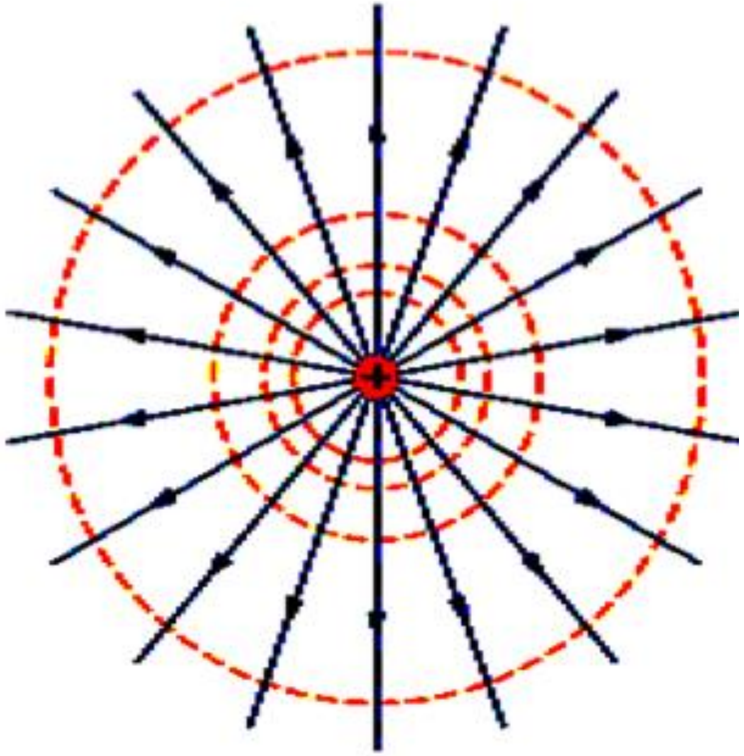
Sorgenti del Potenziale: superfici equipotenziali



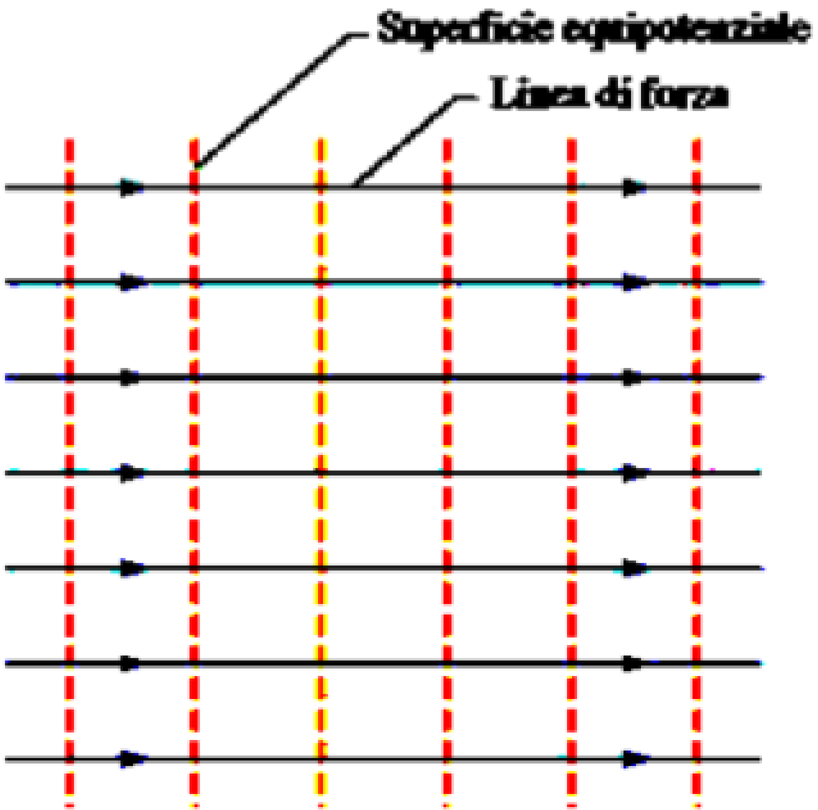
- Definiamo le superfici equipotenziali come le superfici dello spazio in cui il potenziale e` una costante: V(x,y,z) = costante
- Per tutti le coppie di punti di una superficie equipotenziale $\Delta V=0$
  - Su una qualsiasi carica in moto sulla superficie equipotenziale il campo elettrico non compie lavoro.
    - **Il vettore campo elettrico NON ha componenti tangenti alla superficie ma solamente ortogonali.**

E punta nel verso decrescente del potenziale
Cosi come per il campo vale il principio di sovrapposizione

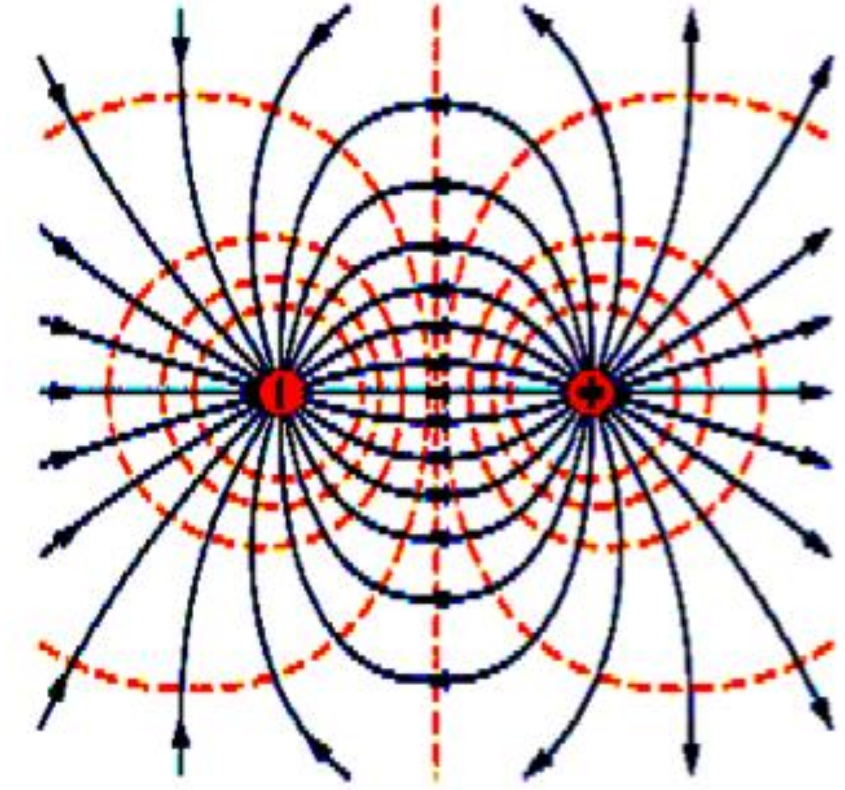
Superfici equipotenziali: esempi



• Carica puntiforme



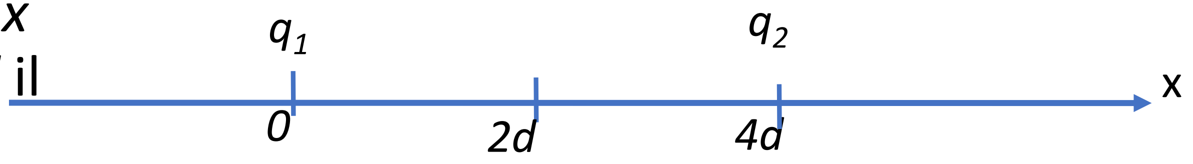
• Piano carico uniforme



• Dipolo

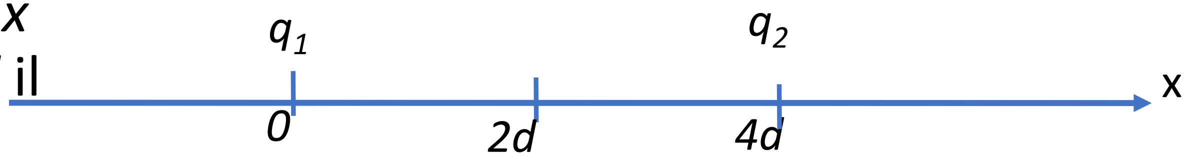
Sorgenti del Potenziale: due cariche puntiformi

- Poniamo una carica positiva q_1 nell'origine dell'asse x ed una negativa q_2 ad $x=4d$. Sappiamo che a $x=3d$ il potenziale è nullo.
- Calcoliamo il potenziale nei punti dell'asse x e ne facciamo il grafico.



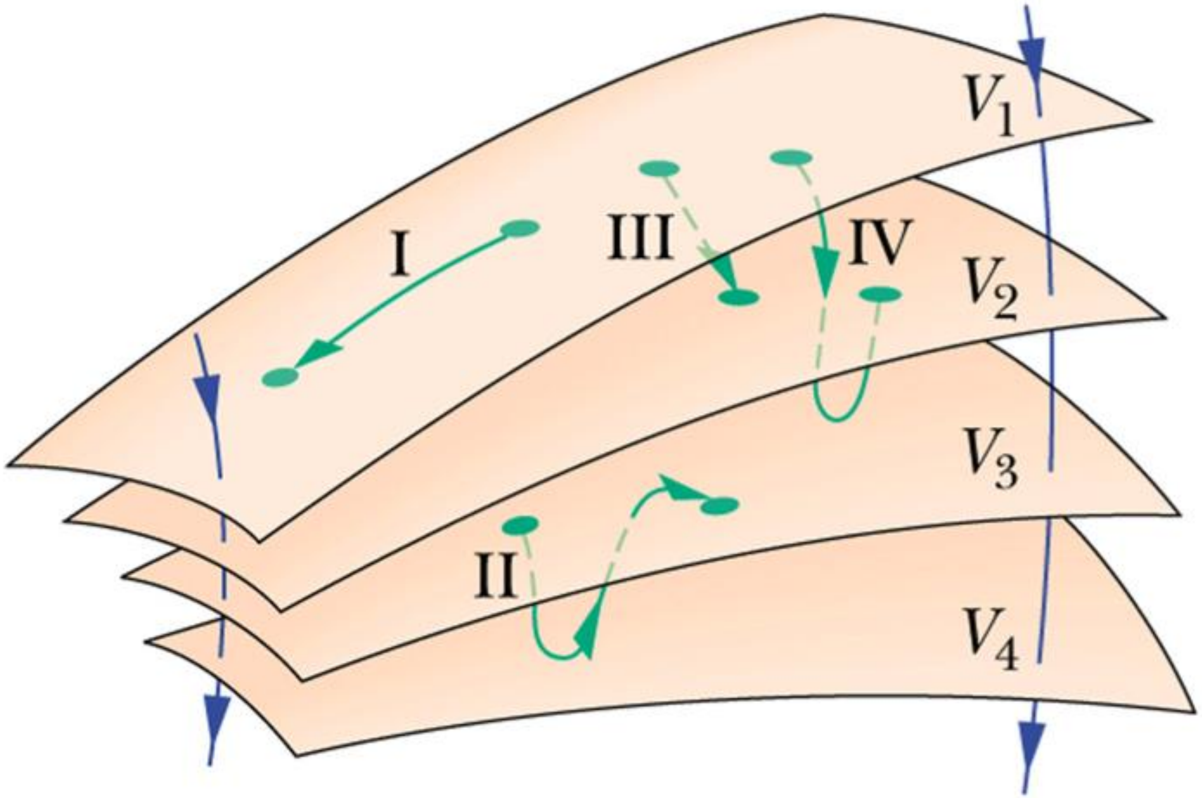
Sorgenti del Potenziale: due cariche puntiformi

- Poniamo una carica positiva q_1 nell'origine dell'asse x ed una negativa q_2 ad $x=4d$. Sappiamo che a $x=3d$ il potenziale è nullo.
- Calcoliamo il potenziale nei punti dell'asse x e ne facciamo il grafico.



Superfici equipotenziali e lavoro: sommario

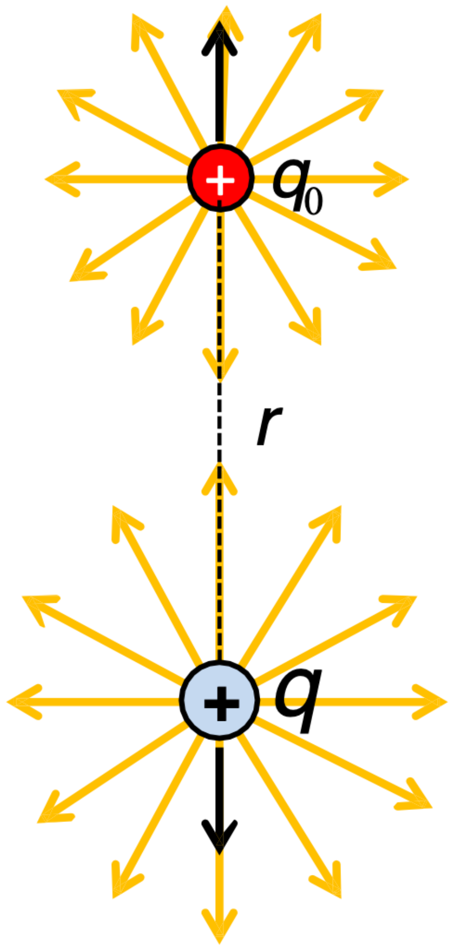
- Cosa accade al lavoro eseguito sulla carica nelle varie traiettorie?



- $L_I = 0$
- $L_{II} = 0$
- $L_{III} = -q(V_2-V_1)>0$
- $L_{IV}=L_{III}$

- Le linee di campo elettrico puntano verso la direzione decrescente del potenziale

Energia potenziale di due cariche puntiformi



Potenziale generato da q, nella posizione di q_0

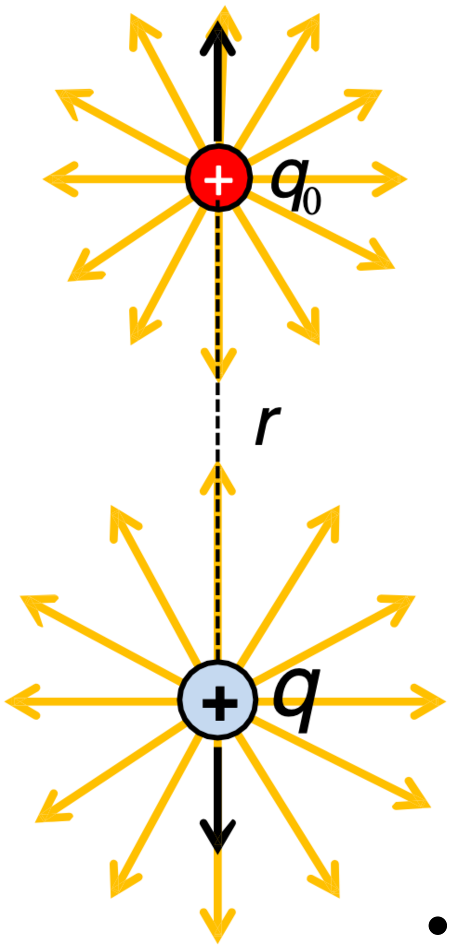
$$\boxed{V_q = k\frac{q}{r}}$$

Potenziale generato da q_0, nella posizione di q

$$\boxed{V_{q_0} = k\frac{q_0}{r}}$$

- Il potenziale, è una proprietà della sola carica sorgente che genera il campo

Energia potenziale di due cariche puntiformi



Potenziale generato da q, nella posizione di q_0

$$\boxed{V_q = k\frac{q}{r}}$$

Potenziale generato da q_0, nella posizione di q

$$\boxed{V_{q_0} = k\frac{q_0}{r}}$$

- Il potenziale, è una proprietà della sola carica sorgente che genera il campo
- **Calcoliamo l'energia potenziale**

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k\frac{q_0 q}{r}$$

- L'energia potenziale è la stessa per le due cariche, è quindi una proprietà dell'insieme delle due cariche (o del sistema di cariche)

Energia potenziale di due cariche puntiformi

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k \frac{q_0 q}{r}$$

- quando q e q_0 hanno segni concordi, U(r) è POSITIVA, e decresce separando le cariche da r all'infinito

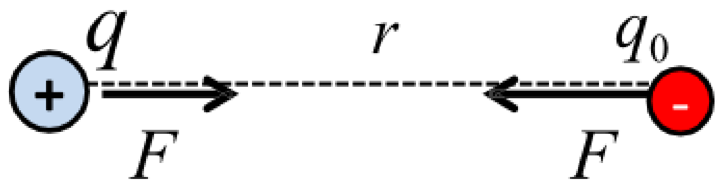
- U(r) è pari al lavoro fatto dal campo per portare le due cariche da r all'infinito

- in questo caso il sistema si dice NON LEGATO, poiché le forze tendono spontaneamente ad allontanare le cariche

Energia potenziale di due cariche puntiformi

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k \frac{q_0 q}{r}$$

- quando q e q_0 hanno segni discordi, U(r) è NEGATIVA ed aumenta separando le cariche da r all'infinito



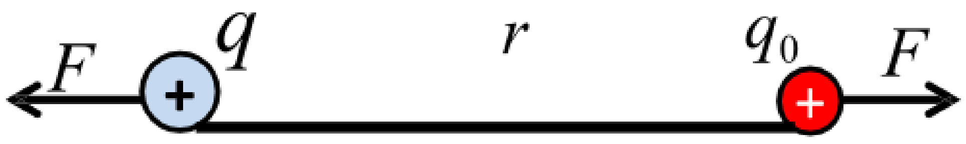
- U(r) corrisponde al lavoro speso contro il campo per separare le cariche da r ad infinito

- In questo caso il sistema si dice LEGATO, poiché le forze spontaneamente tendono ad avvicinare le particelle

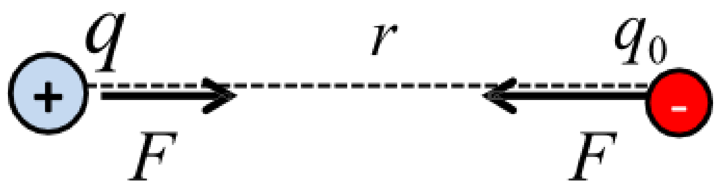
Energia potenziale di due cariche puntiformi

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k \frac{q_0 q}{r}$$

- quando q e q_0 hanno segni concordi, U(r) è POSITIVA, e decresce separando le cariche da r all'infinito; essa corrisponde al lavoro fatto dal campo per portare le due cariche da r all'infinito; in questo caso il sistema si dice NON LEGATO, poiché le forze tendono ad allontanare le particelle



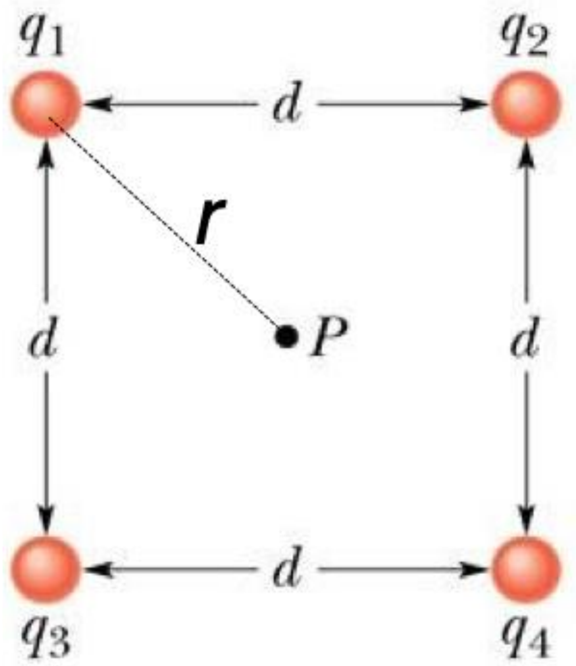
- quando q e q_0 hanno segni discordi, U(r) è NEGATIVA ed aumenta separando le cariche da r all'infinito; essa corrisponde al lavoro speso contro il campo per separare le cariche da r ad infinito; in questo caso il sistema è LEGATO, poiché le forze tendono ad avvicinare le particelle



Problema

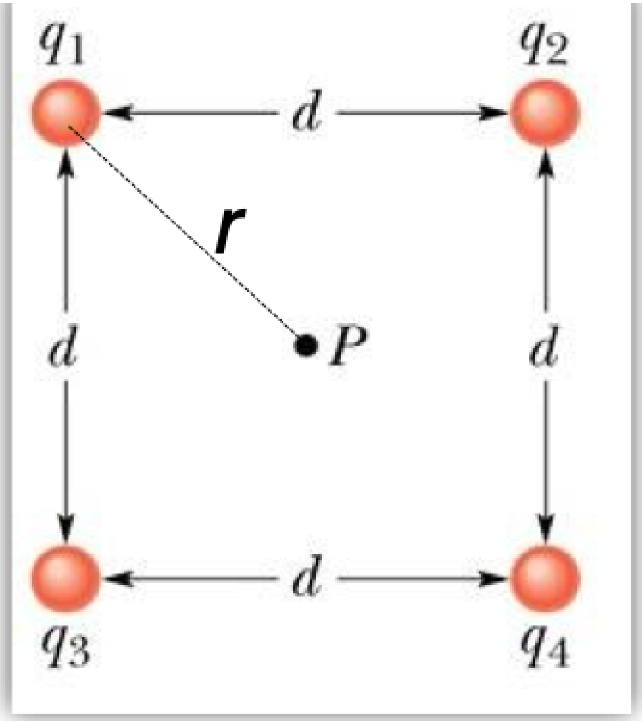
Date le 4 cariche in figura, q_1=6 nC, q_2=-4 nC, q_3=-3 nC, q_4=8 nC, a distanza d=1 m, calcolare:

1. il potenziale totale generato dalle cariche nel punto P (assumendo V(∞)=0)
2. L'energia potenziale totale del sistema
3. L'energia necessaria a separare le cariche ad una ad una, partendo da q_4 e proseguendo con q_3 e q_2



Date le 4 cariche in figura, q_1=6 nC, q_2=-4 nC, q_3=-3 nC, q_4=8 nC, a distanza d=1 m, calcolare:

1. il potenziale totale generato dalle cariche nel punto P (assumendo V(∞)=0)
2. L'energia potenziale totale del sistema
3. L'energia necessaria a separare le cariche ad una ad una, partendo da q_4 e proseguendo con q_3 e q_2



1. il **potenziale totale è la somma dei potenziali generati in P dalle 4 cariche:**

$$V_P = \frac{k}{r}\left(q_1 + q_2 + q_3 + q_4\right) = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{7\,nC}{m}\sqrt{2} = 89.1\,V$$

2. **L'energia potenziale totale è la somma delle energie potenziali di ciascuna coppia di cariche:**

$$U = \frac{k}{d}\left(q_1q_2 + q_1q_3 + \frac{q_1q_4}{\sqrt{2}} + \frac{q_2q_3}{\sqrt{2}} + q_2q_4 + q_3q_4\right) = \frac{k}{d}\left(-24-18+33.94+8.48-32-24\ \ (nC)^2\right.$$

$$= -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{55.6\,(nC)^2}{m} = -500.2\,nJ \qquad)$$

3. $U < 0$ significa che il sistema è **LEGATO** e possiede **un'energia potenziale immagazzinata al suo interno**, per cui è necessario **compiere lavoro dall'esterno** se si vuole portare le particelle cariche a distanza infinita, CONTRO l'azione legante del campo elettrico; calcoliamo l'energia potenziale che lega la carica q_4 alle altre 3 cariche:

$$U_4 = \frac{k}{d}\left(\frac{q_4 q_1}{\sqrt{2}} + q_2 q_4 + q_3 q_4\right) = \frac{k}{d}\left(+33.9 - 32 - 24\right)(nC)^2 = -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{22.06\,(nC)^2}{m} = -198.54\,nJ$$

Il segno – indica che dobbiamo spendere un'energia $-U$=198.54 *nJ* per separare q_4 dal sistema e portarla all'infinito; dopo aver eliminato q_4, calcoliamo l'energia potenziale che lega la carica q_3 alle altre 2 cariche rimanenti:

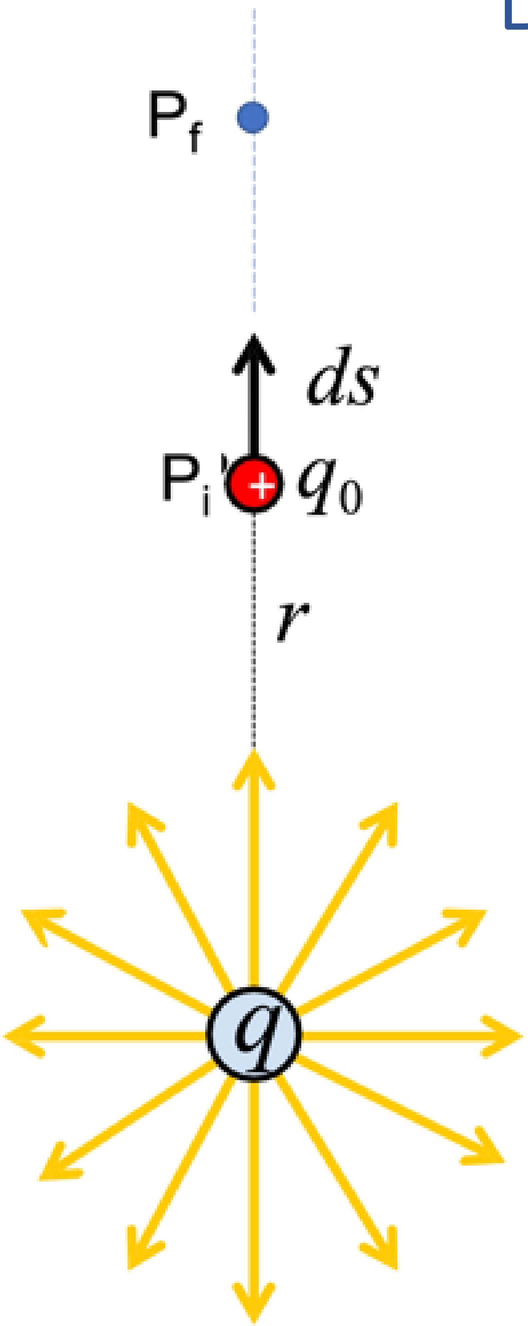
$$U_3 = \frac{k}{d}\left(q_1 q_3 + \frac{q_2 q_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{k}{d}\left(-18 + 8.48\right)(nC)^2 = -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{9.52\,(nC)^2}{m} = -85.7\,nJ$$

Dobbiamo spendere un'energia $-U$=85.7 *nJ* per separare q_3 dalle altre due cariche; infine, calcoliamo l'energia che lega q_2 a q_1:

$$U_2 = \frac{k}{d}\left(q_1 q_2\right) = \frac{k}{d}\left(-18 + 12\right)(nC)^2 = -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{24\,(nC)^2}{m} = -216\,nJ$$

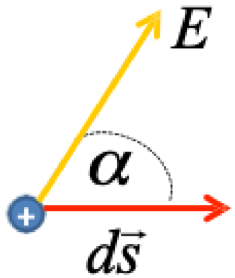
216 *nJ* è l'energia necessaria per separare all'infinito q_2 e q_1; chiaramente la somma di U_4, U_3, U_2 ci restituisce l'energia potenziale totale del sistema

Dal Potenziale al campo Elettrico



- Se i punti iniziale e finale sono molto vicini tra di loro possiamo considerare:
  - uno spostamento infinitesimo ed un corrispondente variazione infinitesima del potenziale

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_s ds$$

- **Se Conosciamo il potenziale** $V(x,y,z)$ in tutti i punti $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ all'interno di una certa regione di spazio, **possiamo:**
  - Calcolare le derivate del potenziale rispetto a *x*, *y*, *z*.
    - **ricavare il campo elettrico IN OGNI PUNTO ed OGNI DIREZIONE**

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = Ex \qquad -\frac{\partial V}{\partial y} = Ey \qquad -\frac{\partial V}{\partial z} = Ez \qquad -\nabla V = E$$

Potenziale generato da distribuzioni continue di carica

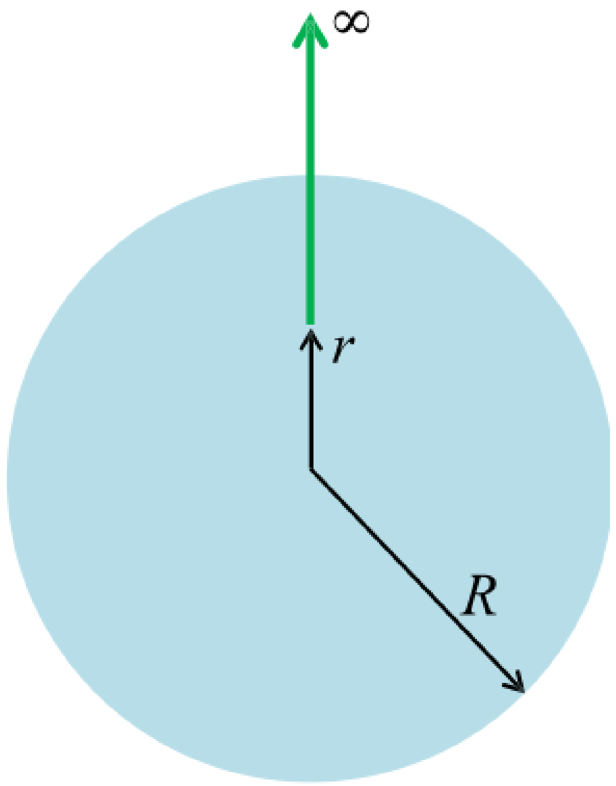
- Vale il principio di sovrapposizione
- Il potenziale è una quantità scalare, non ci sono componenti da calcolare
- NON esiste un equivalente del teorema di Gauss per il potenziale
- Possiamo usare 2 metodi

- Noto il campo elettrico ed un potenziale di riferimento

- il principio di sovrapposizione per cariche distribuite su linee superfici e volumi (densità di carica)

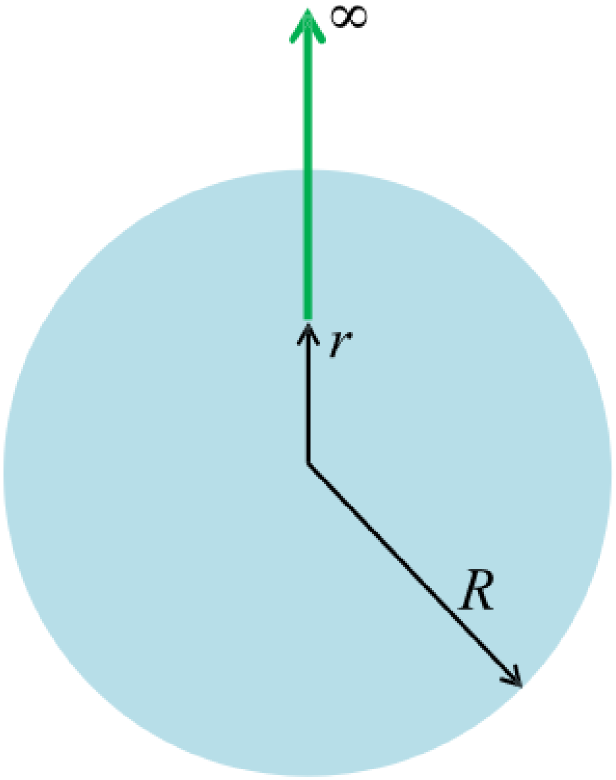
Potenziale generato da una sfera carica

- Nella regione all'esterno della sfera carica

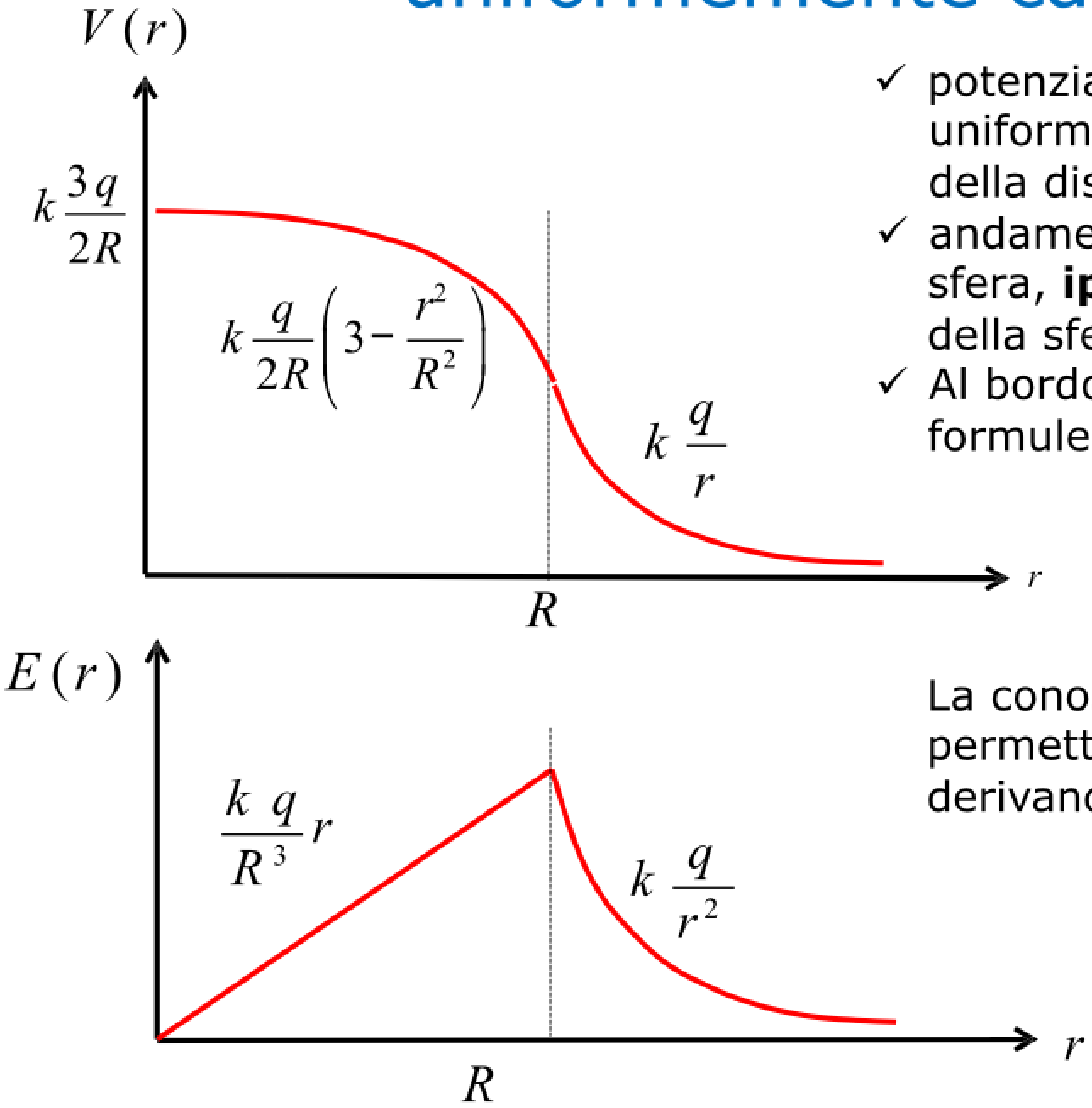


Potenziale generato da una sfera carica

- Nella regione all'interno della sfera carica



Potenziale di una sfera isolante uniformemente carica



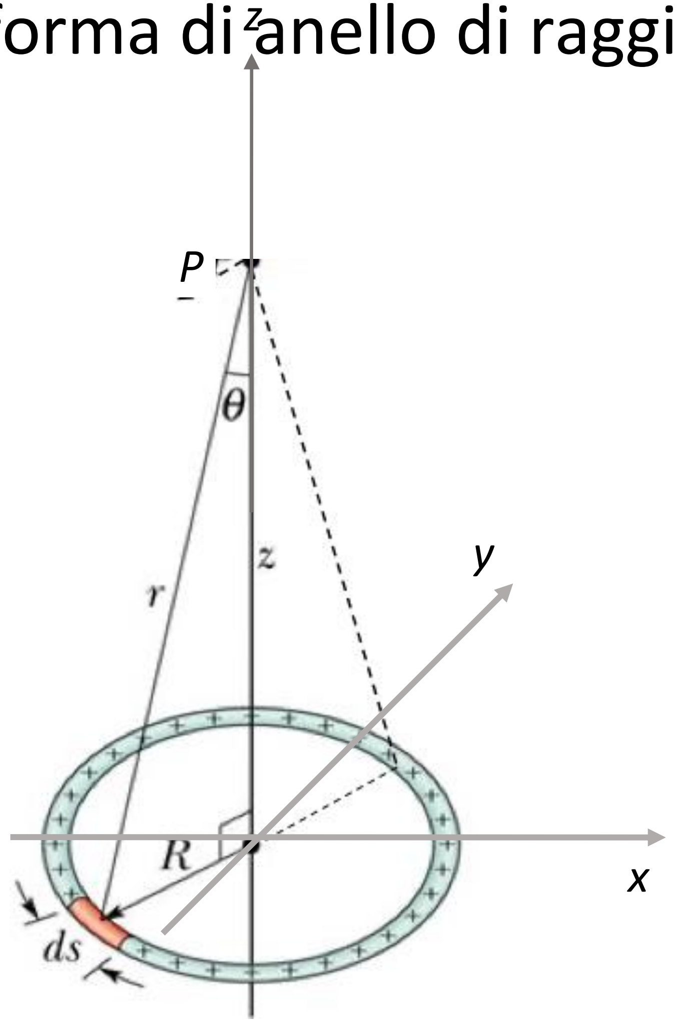
- ✓ potenziale di una sfera uniformemente carica in funzione della distanza dal centro
- ✓ andamento **parabolico** dentro la sfera, **iperbolico** all'esterno della sfera
- ✓ Al bordo della sfera ($r=R$) le due formule coincidono

La conoscenza di *V(r)* ci permette di ricavare il campo derivando rispetto ad *r*:

$$-\frac{dV(r)}{dr}=E(r)$$

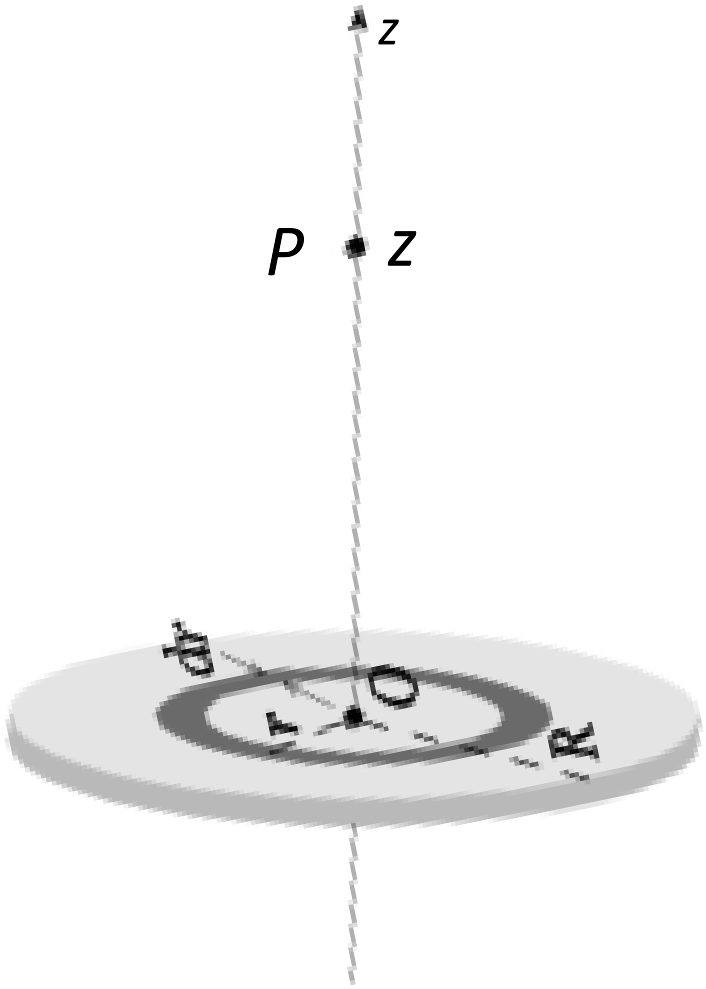
Potenziale generato da un anello carico

- Calcolare il potenziale sull'asse z di una distribuzione lineare di carche a forma di anello di raggio R posto sul piano x,y. Farne il grafico.



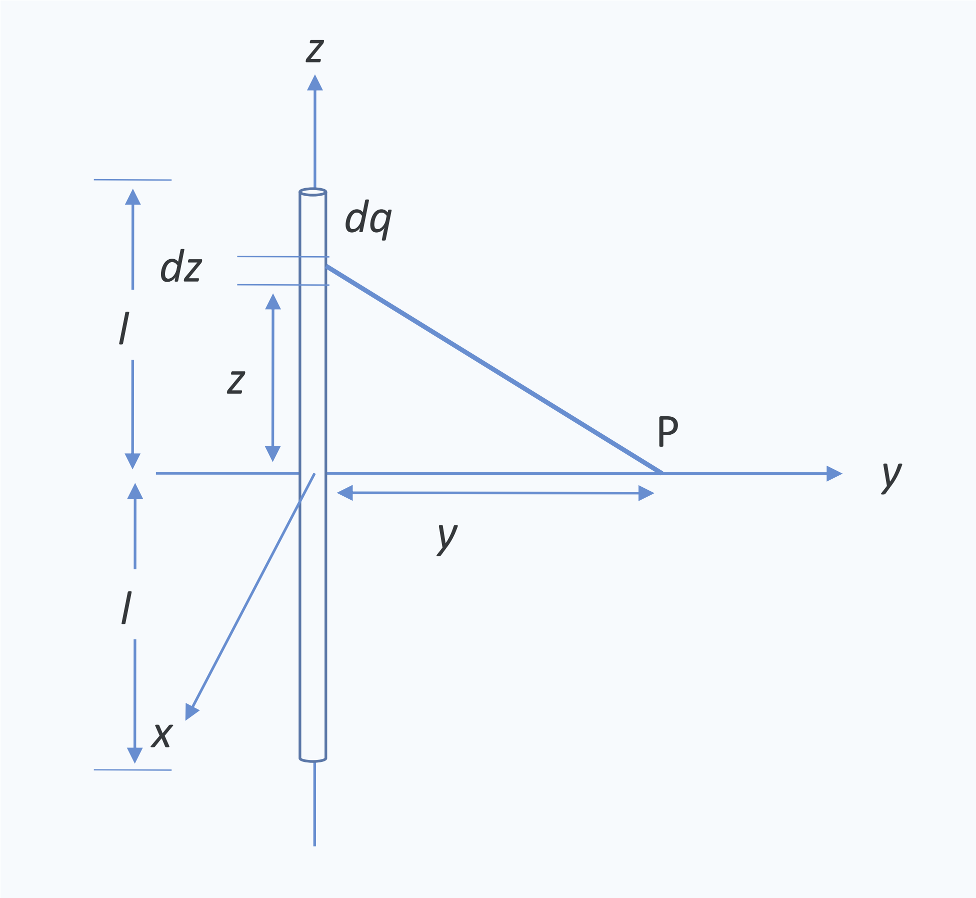
Potenziale generato da un disco sottile carico

- Calcolo da svolgere ad esercitazione o in autonomia



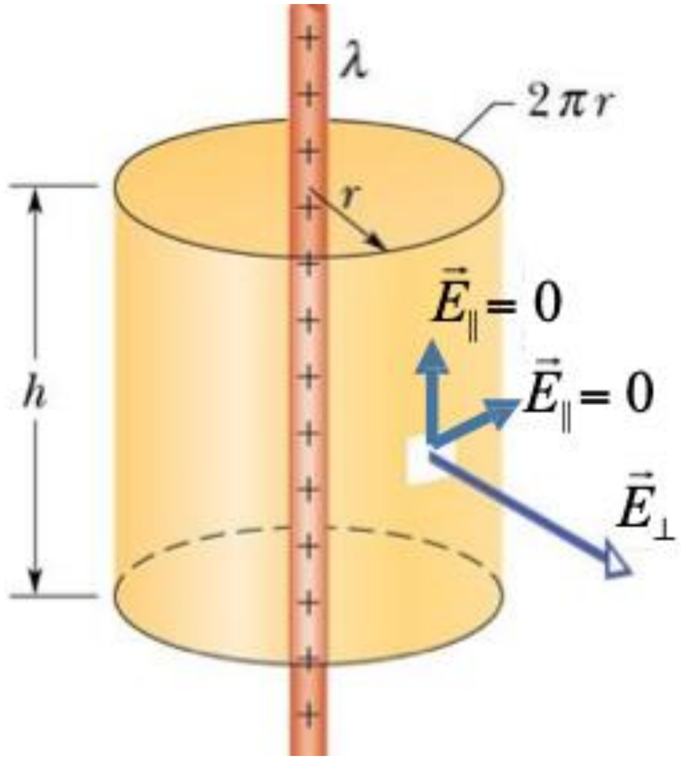
Potenziale generato da un'asta carica

- Ricavare il potenziale di una asta isolante carica in maniera uniforme con carica totale Q (da svolgere in autonomia)



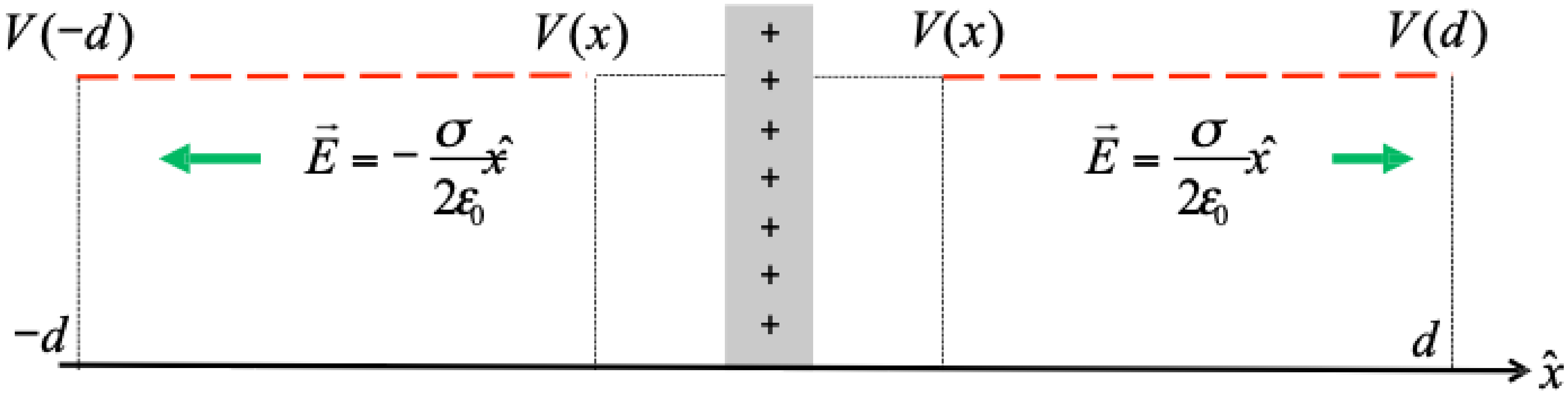
Potenziale generato da un filo lungo infinito con densità lineare di carica uniforme

- Ricavare il potenziale di una asta isolante carica in maniera uniforme con carica totale Q (da svolgere in autonomia)



Potenziale generato da un piano infinito carica

- Consideriamo un piano di area infinita uniformemente carico



Potenziale generato da un piano infinito carica

- Consideriamo un piano di area infinita uniformemente carico

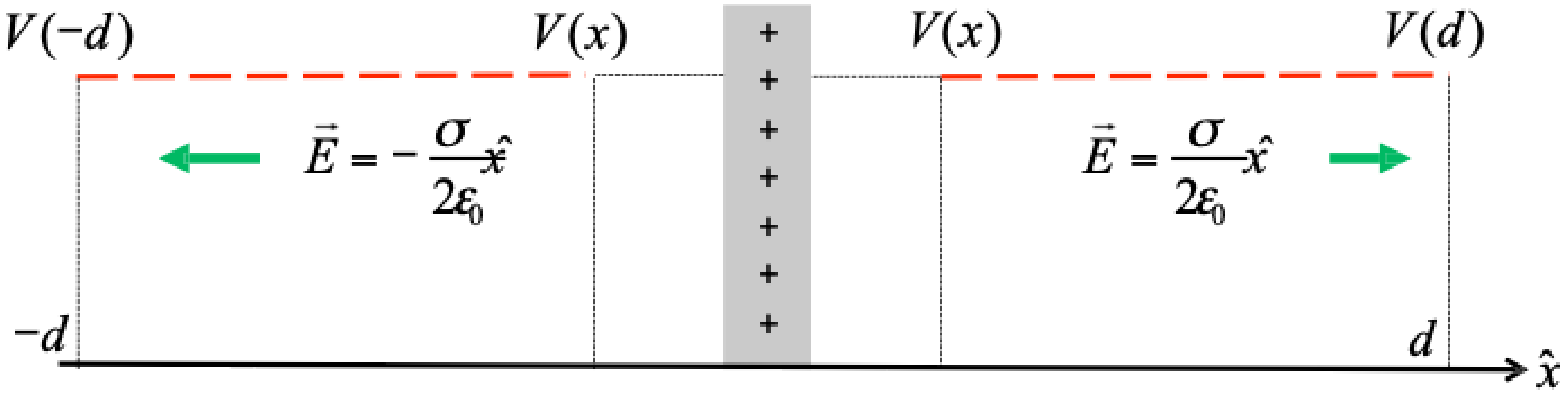
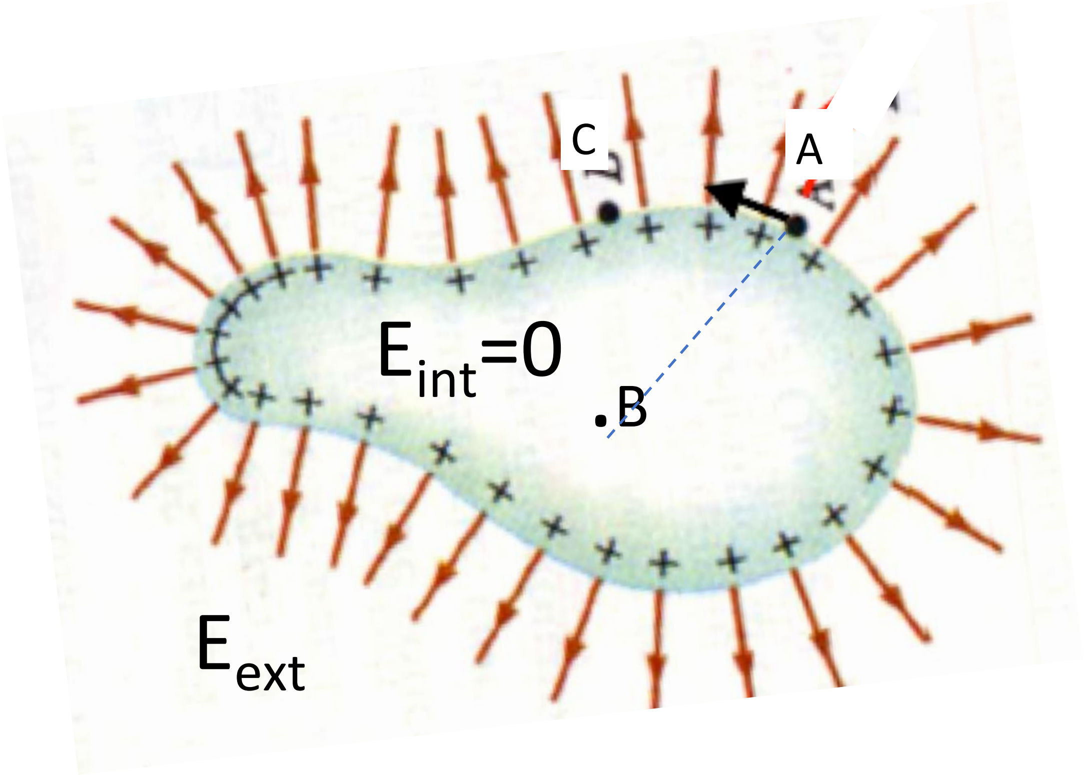


Grafico del potenziale per
Cariche positive e negative

Potenziale generato da un corpo conduttore carico

- Riassumiamo, **<u>in condizioni di equilibrio elettrostatico</u>** :
  - **il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo e se sono presenti delle cariche libere queste si disporranno sulla superficie.**
  - **Il campo elettrico ha la sola componente ortogonale alla superficie**

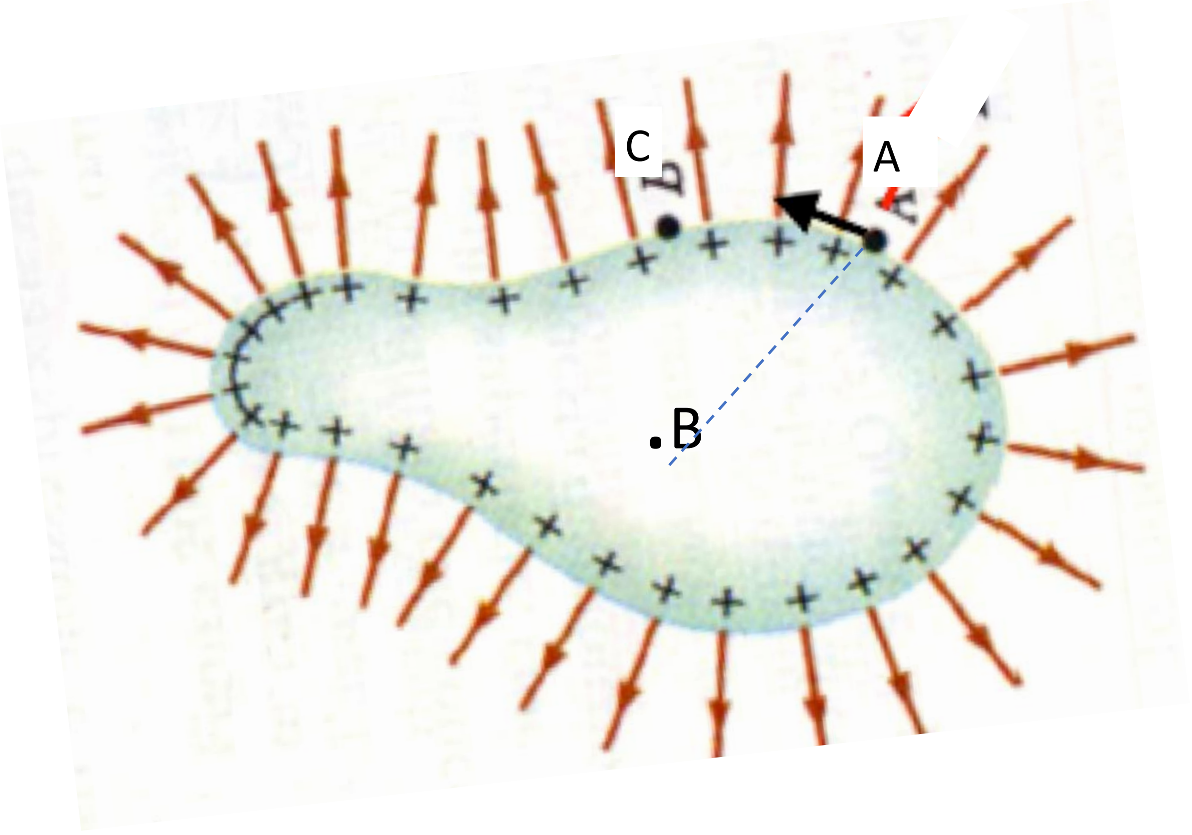
- Ad esempio per un conduttore carico positivamente osserviamo la seguente situazione
- **Cosa accade al potenziale elettrostatico nei punti A, B e C ?**



Potenziale generato da un corpo conduttore carico

(1) $$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

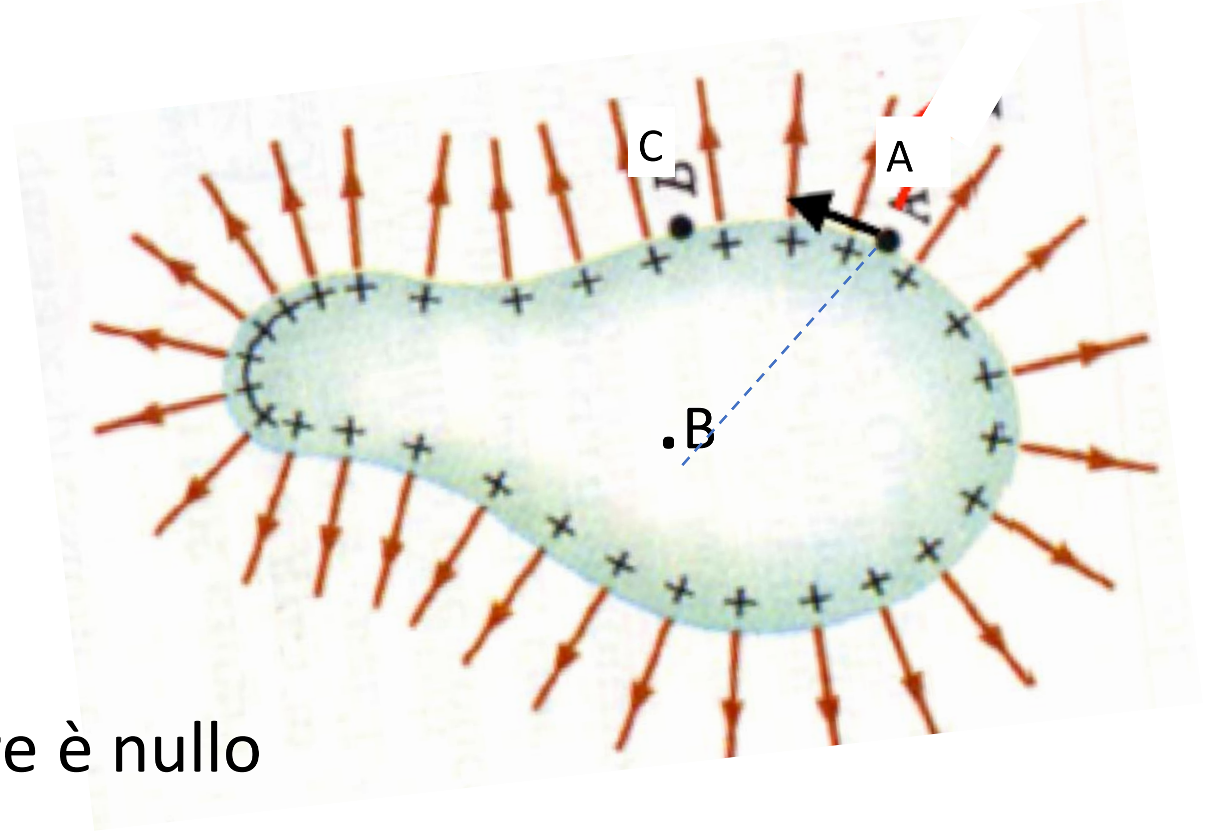
(2) $$\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$



Potenziale generato da un corpo conduttore carico

(1) $$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

(2) $$\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

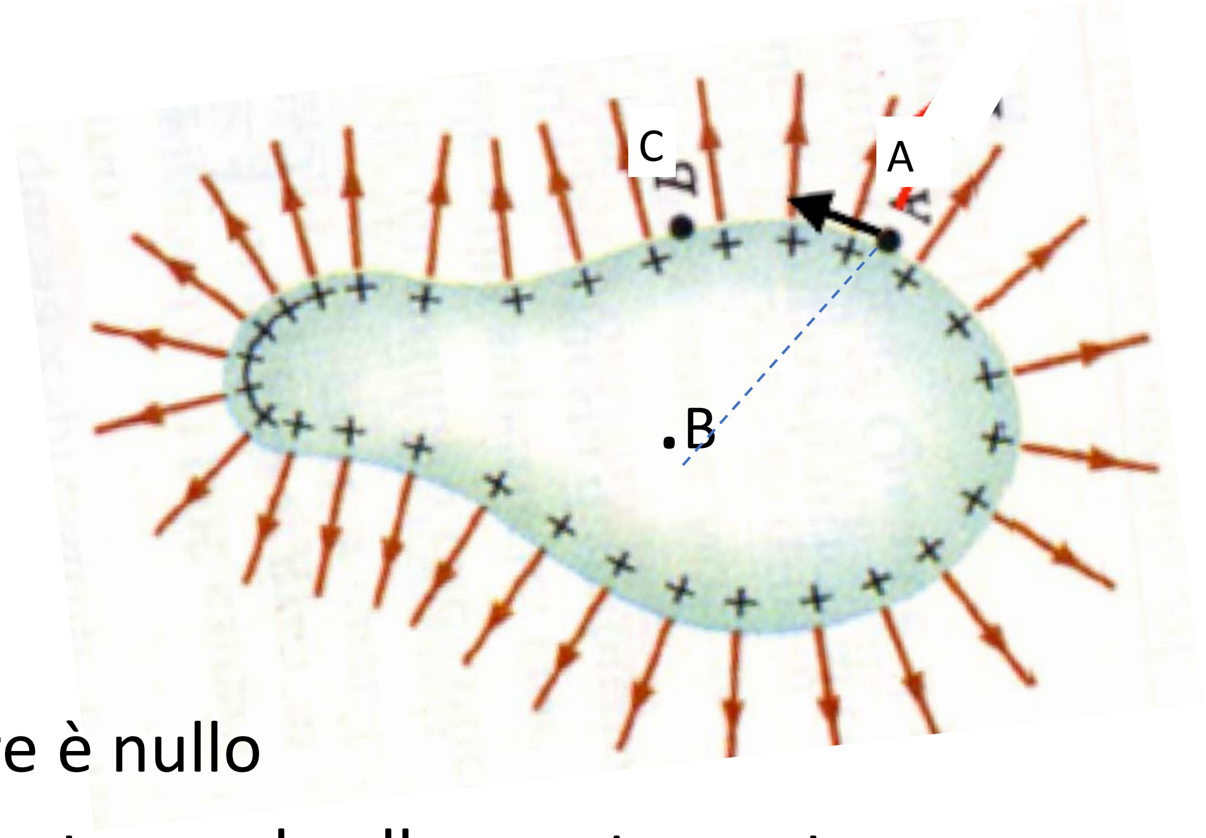


1) Visto che E all'interno del conduttore è nullo

Potenziale generato da un corpo conduttore carico

(1) $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

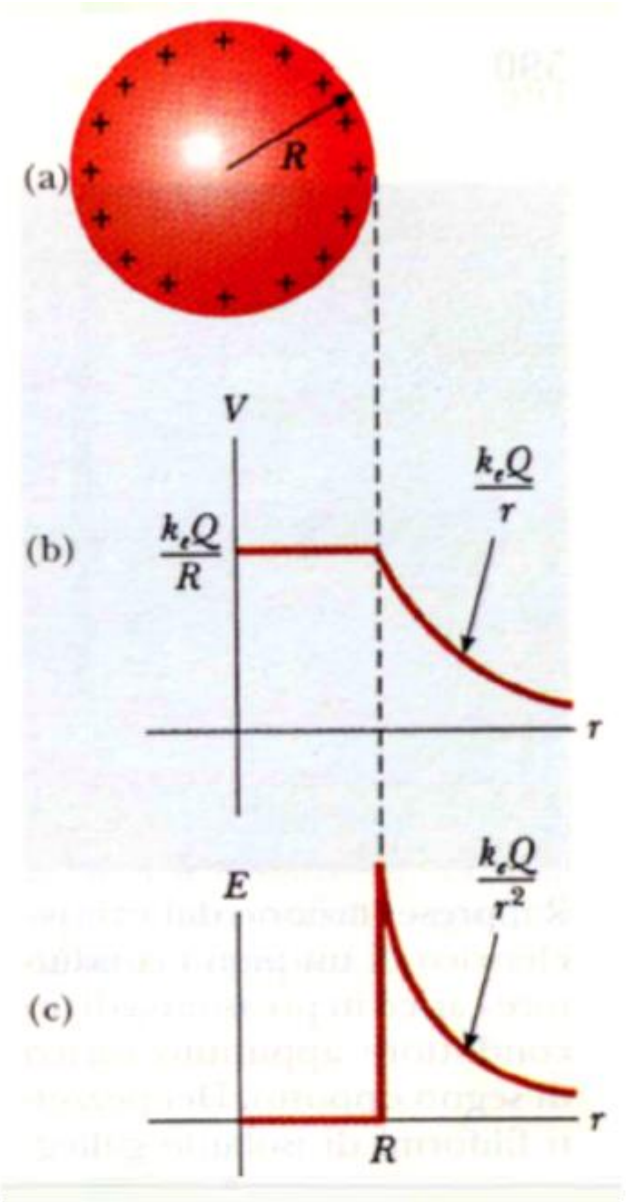
(2) $\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$



1) Visto che E all'interno del conduttore è nullo
2) visto che il campo sulla superficie è ortogonale allo spostamento

•Ne concludiamo che **tutti i punti di un conduttore si trovano allo stesso valore del potenziale elettrostatico, la superficie di un conduttore è equipotenziale**

Potenziale generato da una sfera conduttrice carica

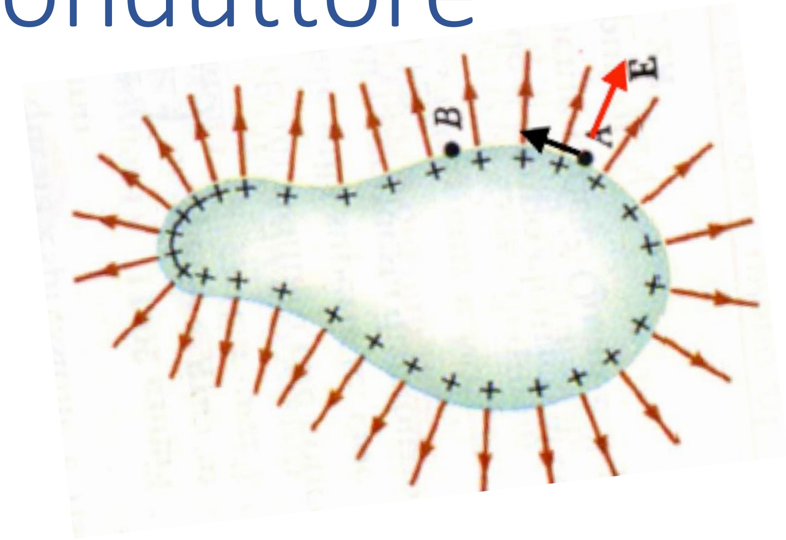


- Depositiamo una carica Q^+ su un conduttore sferico

Potenziale sulla superficie della sfera o potenziale del corpo conduttore

Potenziale di un conduttore

- La densità di carica sarà in generale non uniforme su tutta la superficie (ci attendiamo che sia uniforme solo nel caso in cui il conduttore sia sferico). Per un corpo di forma irregolare le cariche si accumulano nelle zono in cui il raggio di curvatura della superficie è più piccolo, cioè sulle punte.



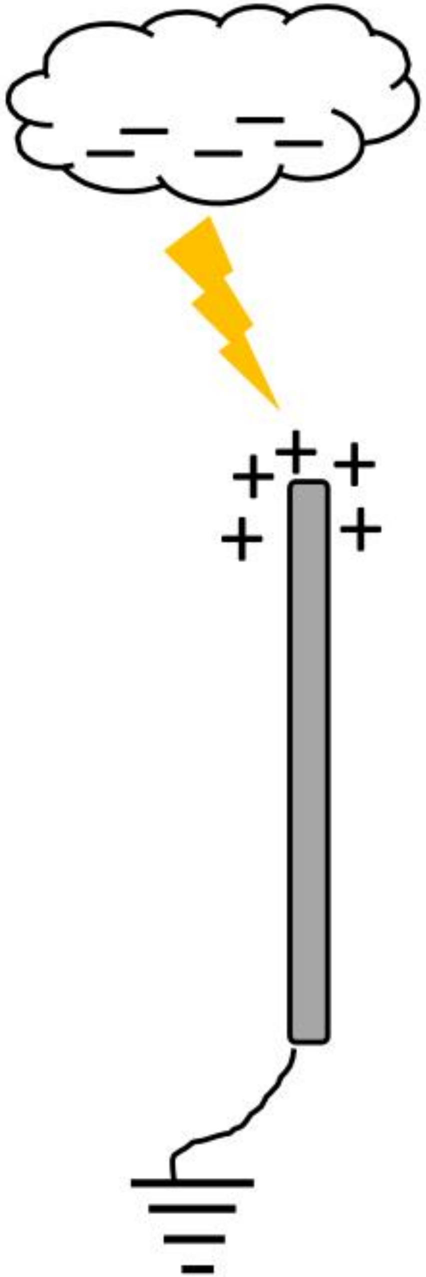
- Approssimiamo il nostro corpo irregolare come due sfere cariche elettricamente collegate tra loro. Se le due sfere devo essere equipotenziali, visto che sono un unico conduttore, allora

$$V_1 = V_2 = \frac{k_e q_1}{r_1} = \frac{k_e q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Il parafulmine

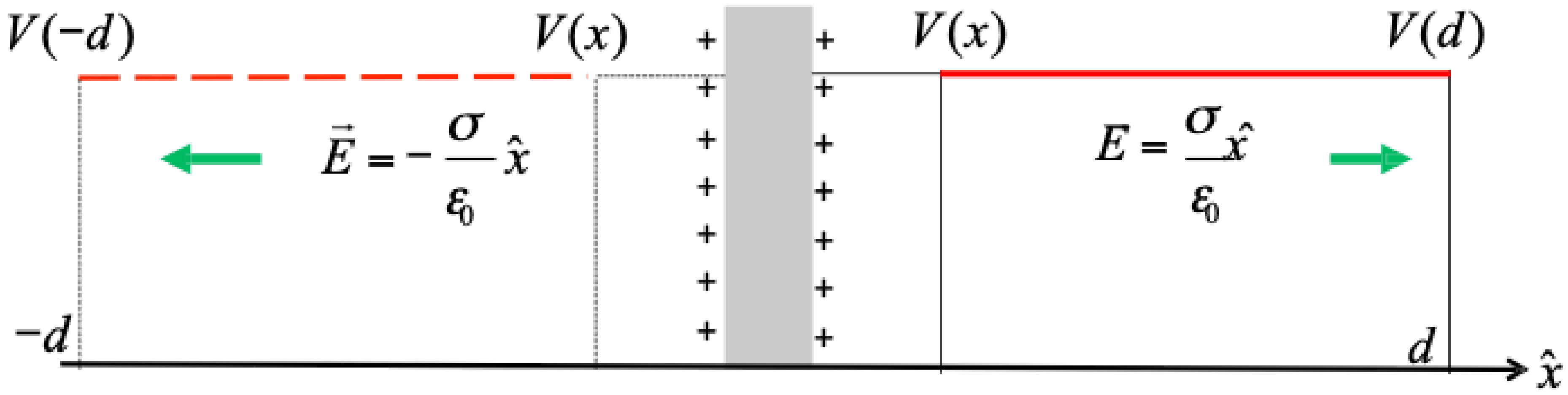
- ✓ Se il conduttore non è sferico, la carica tende ad accumularsi fortemente sulle punte. Il **parafulmine inventato da Benjamin Franklin nel 1700** è un'asta di metallo appuntita, collegata a terra da un filo conduttore
- ✓ Durante il temporale, la carica elettrica negativa delle nuvole crea per induzione un forte **accumulo di carica positiva sulla punta** del parafulmine

- ✓ Quando la d.d.p. tra nuvole e suolo supera un valore massimo si generano i **fulmini,** ovvero scariche elettriche di carica negativa (in pratica un flusso di elettroni) dalle nuvole al suolo
- ✓ I fulmini, attratti dalla carica positiva della punta, scaricano la tensione sul parafulmine. La carica attraversa il parafulmine e si disperde al suolo



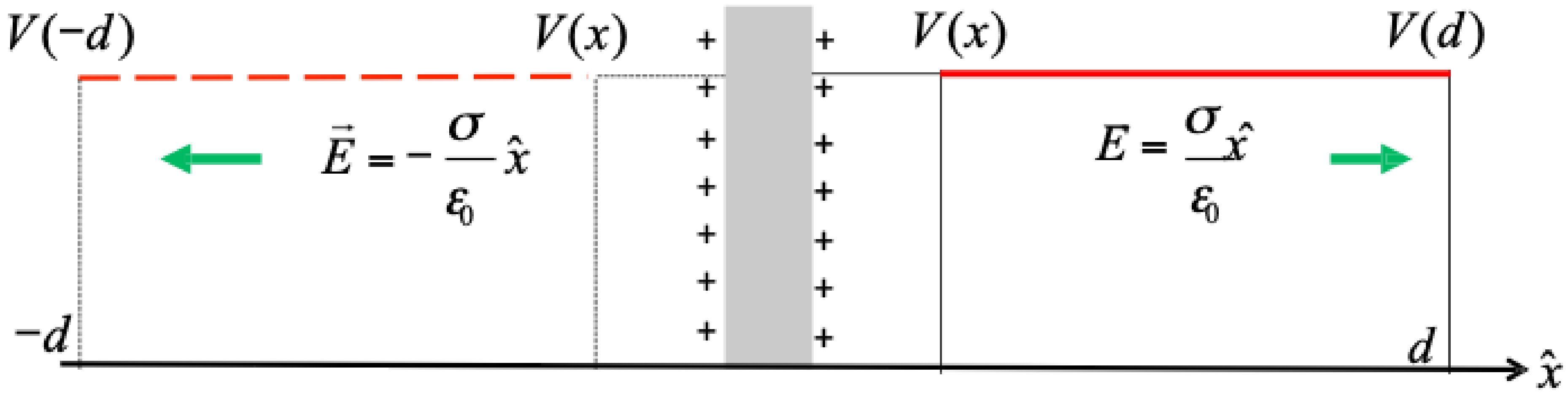
Potenziale generato da una lastra conduttrice carica

- Consideriamo una lastra conduttrice carica.



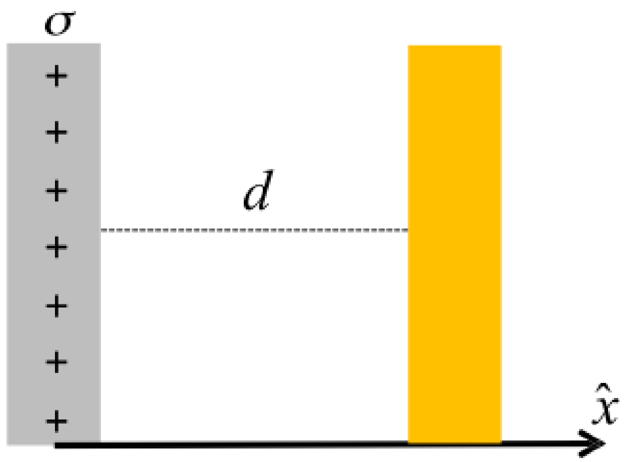
Potenziale generato da una lastra conduttrice carica

- Consideriamo una lastra conduttrice carica.



Potenziale di un piano isolante carico sovrapposto ad un piano conduttore scarico.

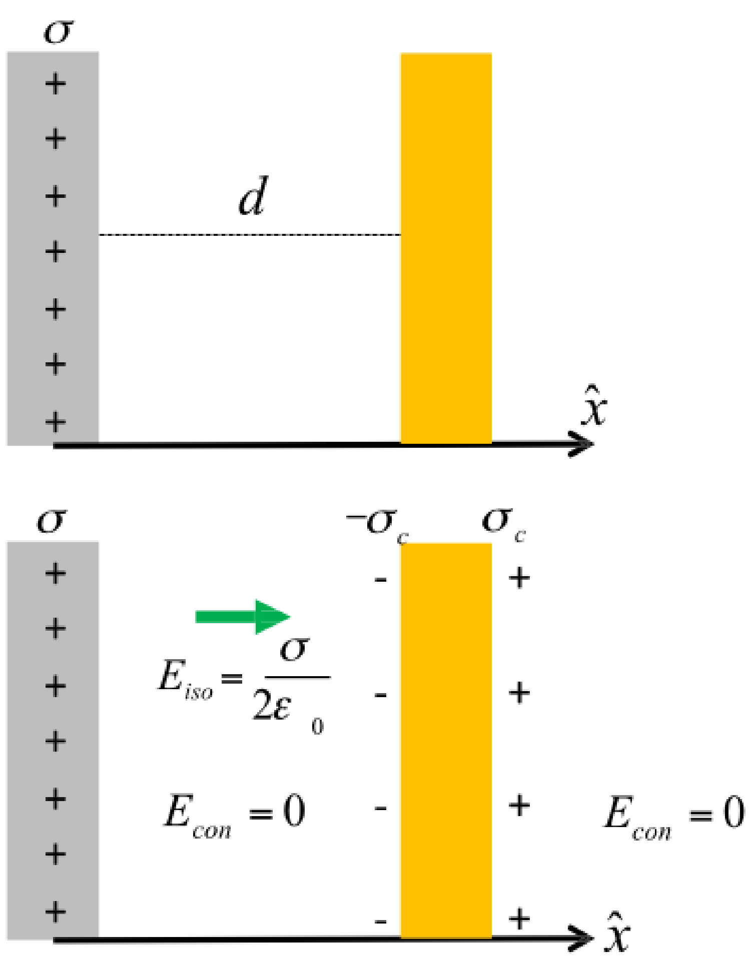
- Consideriamo una piastra isolante infinita (grigia) uniformemente carica con $\sigma = 1 \mu C/m^2$, posta ad x=0; a distanza d = 5 cm è posta una piastra conduttiva infinita neutra (gialla); calcolare:
- La densità di carica σc indotta sulle superfici del conduttore
- La d.d.p. tra i punti x=2 cm e x=4 cm
- La d.d.p. tra i punti x=2 cm e x=8 cm



Problema

- Consideriamo una **piastra isolante infinita** (grigia) uniformemente carica con $\sigma = 1\mu C/m^2$, in posizione $x=0$; a distanza d = 5 cm è posta una **piastra conduttiva infinita neutra** (gialla); calcolare:
- La densità di carica σ_c indotta sulle superfici del conduttore
- La d.d.p. tra i punti x=2 cm e x=4 cm
- La d.d.p. tra i punti x=2 cm e x=8 cm

- Essendo le piastre infinite possiamo supporre che la **densità indotta sia uniforme** sulle facce del conduttore
- inoltre, essendo neutro il conduttore **avrà stessa densità ma di segno opposto** sulle 2 facce
- i campi generati da piastre infinite sono anch'essi uniformi
- Il campo E_{con} generato dal conduttore è nullo al di fuori del conduttore, poiché le due facce del conduttore producono campi orientati in direzione opposta; dunque al di fuori della regione gialla vi è solo il campo dell'isolante E_{iso}



Principio di sovrapposizione per campo e potenziale

- Riassumiamo il principio di sovrapposizione

Così come il campo E può essere determinato integrando la distribuzione di carica:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq\,\hat{r}}{r^2} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x,y,z)\,\hat{r}}{r^2}dxdydz$$

Il potenziale elettrico può essere calcolato in modo analogo:

$$V(\vec{r}) = \int_{Volume} dV = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x,y,z)}{r}dxdydz$$

Si presti attenzione poiché E è una grandezza vettoriale mentre V è scalare.