DODICESIMA

Esercizio 1. Nelle due tabelle che seguono sono riportate le distanze reciproche (in km) tra 8 cittá della regione Toscana ed il costo (in milioni di euro) per costruire una stazione dei vigili del fuoco in ognuna delle 8 cittá:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	26	31	35	19	17	13	23
2	26	0	25	18	17	23	14	34
3	31	25	0	19	11	17	33	19
4	35	18	19	0	25	22	16	17
5	19	17	11	25	0	28	34	10
6	17	23	17	22	28	0	15	28
7	13	14	33	16	34	15	0	23
8	23	34	19	17	10	28	23	0

Cittá	Costo di costruzione
1	3
2	2
3	4
4	5
5	4
6	7
7	3
8	5

In ogni cittá dobbiamo decidere se costruire o no una stazione dei vigili del fuoco, in modo che per ogni cittá esista almeno una stazione distante al piú 20 km.

a) Scrivere un modello matematico per minimizzare il costo totale di costruzione.
b) Applicare l'algoritmo di riduzione.
c) Determinare una valutazione superiore ed una inferiore.
d) Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Un ospedale deve organizzare il problema dei turni degli infermieri con programmazione settimanale. Supponiamo che l'azienda ospedaliera possa dislocare in quell'ospedale un numero di infermieri in base alle esigenze. Tali esigenze sono quantificate in modo da conoscere il numero minimo b_i di infermieri necessari per ogni giorno i della settimana e che ogni infermiere abbia il dovere di lavorare 5 giorni consecutivi ed il diritto poi a 2 giorni consecutivi di riposo. Supponiamo di avere $b = (17, 13, 15, 19, 14, 16, 11)$.

a) Scrivere un modello matematico per determinare il minimo numero di infermieri necessari.
b) Calcolare una valutazione inferiore tramite rilassamento continuo e le valutazioni superiori tramite un algoritmo "greedy".
c) Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

SOLUZIONI

Esercizio 1. La formulazione del problema é la seguente:

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 5x_8 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_1 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 8 \end{cases}$$

Il problema puó essere anche scritto nella forma classica di copertura dove il vettore c e la matrice A sono indicati nella tabella che segue:

c_j	3	2	4	5	4	7	3	5
$_i\backslash^j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	1
5	1	1	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	1	1	0
7	1	1	0	1	0	1	1	0
8	0	0	1	1	1	0	0	1

Osserviamo che é possibile effettuare una riduzione del problema: si ha che $A^6 \leq A^1 + A^3$ e che $c_6 = c_1 + c_3$, pertanto possiamo fissare la variabile $x_6 = 0$ ed eliminare la colonna 6. Inoltre $A^8 \leq A^3$ e $c_8 > c_3$, quindi fissiamo anche la variabile $x_8 = 0$ ed eliminiamo la colonna 8; infine le righe 3 e 8 sono uguali, pertanto si puó eliminare la riga 8. Il problema cosí ridotto diventa:

c_j	3	2	4	5	4	3
$_i\backslash^j$	1	2	3	4	5	7
1	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	0	1
5	1	1	1	0	1	0
6	1	0	1	0	0	1
7	1	1	0	1	0	1

Quindi le soluzioni ottime del problema (PC) iniziale sono $x^1 = (0,0,0,0,1,0,1,0)$ e $x^2 = (0,0,1,0,0,0,1,0)$ di costo 7.

Esercizio 2.

Introducendo le variabili x_i che rappresentano il numero di infermieri che cominciano a lavorare il giorno i, il problema si puó formulare cosí:

$$\begin{cases} \min \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_1 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_2 \\ \quad \vdots \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq b_7 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 7 \end{cases}$$

Senza il vincolo di interezza la soluzione ottima del problema é:

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3}, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = \frac{22}{3}, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = \frac{10}{3}, \quad x_7 = 5.$$

di valore $\frac{67}{3}$ e quindi $v_I(P) = 23$.

Operando un arrotondamento si genera la soluzione:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 4, \quad x_7 = 5$$

e quindi si dislocherebbero 25 ($v_S(P)$) infermieri in quell'ospedale.

$x = (4, 4, 2, 6, 0, 4, 3)$ é la soluzione ottima di valore 23.