Laboratorio di Calcolo Numerico
Lezione 9

Formule di Newton-Cotes generalizzate

L'idea delle formule di Newton-Cotes generalizzate (talvolta dette composite) è che per rendere l'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ più accurata si può suddividere l'intervallo $[a, b]$ in L sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$ di uguale ampiezza e applicare una formula di Newton-Cotes in ciascuno di essi. (Attenzione alla notazione: L sottointervalli, $L + 1$ nodi x_j). Questo, nel caso della regola dei trapezi o della formula di Simpson da origine alle seguenti formule di quadratura:

- $J_1^{(G)}(f) = \frac{b-a}{2L}\left[f(x_0 + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L)\right]$
- $J_2^{(G)}(f) = \frac{b-a}{6L}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{L} f(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}) + f(x_L)\right]$

Esercizio 1. Si scriva una routine MATLAB

```
trapezi_gen(f, a, b, L)
```

che approssimi l'integrale di una funzione f (fornita in input come handle function) sull'intervallo $[a, b]$ usando la formula dei trapezi generalizzata con L sottointervalli.

(i) Si testi la routine per il calcolo dell'integrale di un polinomio di grado 1. Come si capisce guardando alla formula dell'errore, il valore ottenuto per un polinomio di primo grado (cioè con derivata seconda nulla) deve essere esatto (a meno della precisione macchina). Confrontare quindi il valore ottenuto con quello esatto (calcolato a mano).

(ii) Si approssimi il valore di
$$\int_1^2 \left(e^x + \frac{10}{x^2}\right) dx,$$
e si confronti il valore ottenuto con quello esatto (calcolabile a mano) o con quello restituito dalla funzione `integral` di MATLAB. In particolare, si tracci un grafico che mostri l'andamento del valore assoluto dell'errore al crescere del

numero di sottointervalli in cui si divide $[a, b]$. Rispetta le attese? Aggiungere alla figura il grafico della quantità

$$\max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12L^2}$$

che sappiamo essere una maggiorazione per il valore assoluto dell'errore.

Esercizio 2. Si scriva una routine MATLAB

```
simpson_gen(f, a, b, L)
```

che approssimi l'integrale di una funzione f (fornita in input come handle function) sull'intervallo $[a, b]$ usando la formula di Cavalieri-Simpson con L sottointervalli.

(i) Si testi la routine per il calcolo dell'integrale di un polinomio di grado 3, su cui dovrebbe fornire un risultato esatto (a meno della precisione di macchina).

(ii) Si approssimi il valore di

$$\int_1^2 \left(e^x + \frac{10}{x^2}\right) dx,$$

e si confronti il valore ottenuto con quello esatto (calcolabile a mano) o con quello restituito dalla funzione `integral` di MATLAB. In particolare, si tracci un grafico che mostri l'andamento del valore assoluto dell'errore al crescere del numero di sottointervalli in cui si divide $[a, b]$. Rispetta le attese? Aggiungere alla figura il grafico della quantità

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{2880L^4}$$

che sappiamo essere una maggiorazione per il valore assoluto dell'errore.

Contare il numero di valutazioni: trapezi vs Cavalieri Simpson

Abbiamo visto a lezione (e si vede facilmente dalle formule) che, a parità di sottointervalli L, la formula dei trapezi necessita di $L + 1$ valutazioni della funzione f, mentre la formula di Cavalieri-Simpson ne utilizza $2L + 1$. Vogliamo capire quale dei due metodi ha un costo minore (in termini di valutazioni di $f(x)$) se l'obbiettivo è una data accuratezza sulla stima dell'integrale.

Esercizio 3. Si considerino sia il metodo dei trapezi generalizzato che la formula di Cavalieri-Simpson. Per $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-7}$ si determini empiricamente/numericamente quale è il numero minimo di sottointervalli, $L_t(\epsilon)$ per i trapezi e $L_s(\epsilon)$ per Simpson, in cui deve essere suddiviso l'intervallo di integrazione affinchè l'errore della stima dell'integrale

$$\int_0^3 x^2 \sin(x)^3 dx,$$

sia inferiore a ϵ. Su un grafico in scala logaritmica su entrambi gli assi, si mostrino le due curve rappresentanti il numero minimo di valutazioni (valutazioni, non sottointervalli) necessarie ai due metodi per raggiungere un errore minore di ϵ. Cosa si può concludere dal grafico ottenuto?