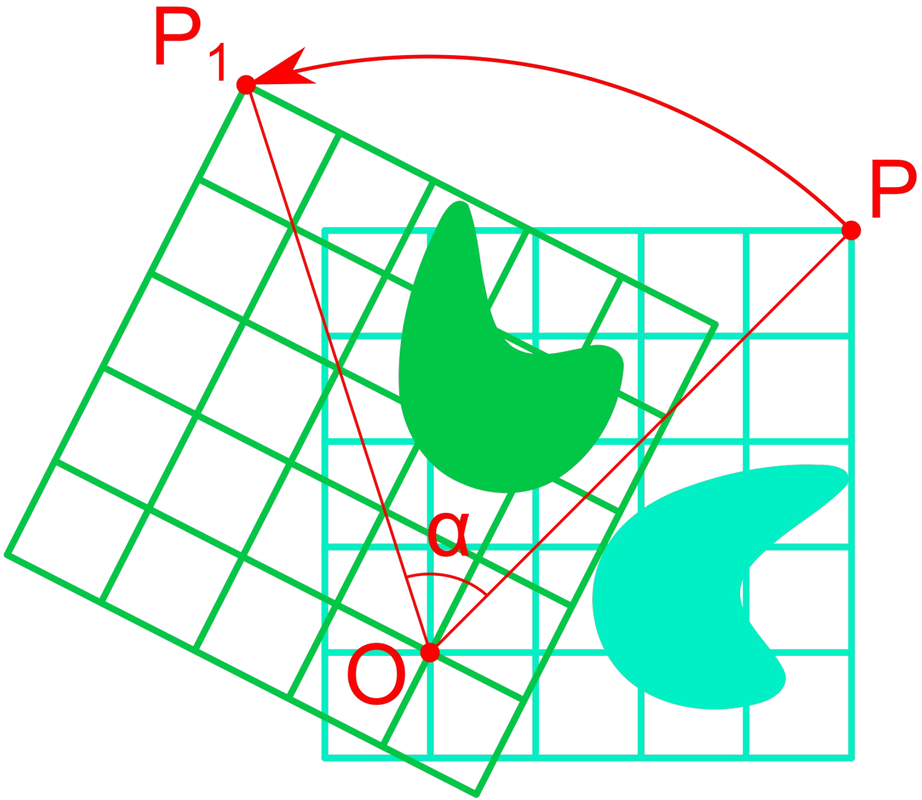


Autovalori e Modi

Autovalori e Modi

Sappiamo che: $$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

Caso 1: A diagonalizzabile

Caso 2: A non e' diagonalizzabile

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

E’ possibile scegliere T in modo che la matrice della dinamica risulti diagonale

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A_D}\mathbf{T} \qquad \mathbf{A_D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

In questo caso, il movimento libero dello stato risulta:

$$\hat{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}_D t}\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_D t)^k}{k!}\hat{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

In questo caso, il movimento libero dello stato risulta:

$$\hat{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}_D t}\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_D t)^k}{k!}\hat{x}_0$$

$$= \text{diag}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right\}\hat{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

In questo caso l'esponenziale di A ha una forma qualitativamente semplice:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1} e^{\mathbf{A_D}t} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

Le funzioni sono combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori di A, detti anche **modi propri** del sistema

Autovalori e Modi

Autovalori di $\boldsymbol{A_D}$

Caso 1: A diagonalizzabile

In questo caso, il movimento libero dello stato risulta:

$$(\mathbf{A}_D)^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^k \end{bmatrix}.$$

$$\hat{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}_D t}\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_D t)^k}{k!}\hat{x}_0$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!}\right\}\hat{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

In questo caso, il movimento libero dello stato risulta:

Autovalori di A_D

$$\hat{x}_l(t) = e^{\mathbf{A}_D t}\hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_D t)^k}{k!}\hat{x}_0$$

$$= \text{diag}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!}\right\}\hat{x}_0$$

$$= \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\hat{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$x_l(t) = \mathbf{T}^{-1}\hat{x}_l(t) = \mathbf{T}^{-1}\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}x_0$$

$$y_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}x_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$x_l(t) = \mathbf{T}^{-1}\hat{x}_l(t) = \mathbf{T}^{-1}\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}x_0$$

Modi

Le funzioni sono combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori di A, detti anche **modi propri** del sistema

$$y_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}x_0$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Notare che

Complex conjugate eigenvalues appear as pairs in systems with real coefficients. Let:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \text{and} \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i,$$

For each eigenvalue, the corresponding contribution to the solution involves an exponential term:

$$e^{\lambda_i t} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}.$$

Similarly, for the conjugate eigenvalue:

$$e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t}.$$

$$2\cos(\omega_i t).$$

$$e^{\lambda_i t} + e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{\sigma_i t}\left(e^{j\omega_i t} + e^{-j\omega_i t}\right).$$

$$e^{\lambda_i t} + e^{\bar{\lambda}_i t} = 2e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t).$$

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$\boldsymbol{x}_l(\boldsymbol{t}) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(\boldsymbol{t}) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}_l(\boldsymbol{t}) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

Modi

Autovalori e Modi

Caso 1: A diagonalizzabile

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$x_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$y_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

Modi

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1].$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Prendiamo

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix},$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Prendiamo

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}, \qquad T_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$x_l(t) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} x_0 =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_l(t) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0$$

$$e^{(1+j)t} = e^t e^{jt} = e^t(\cos(t) + j\sin(t)),$$

$$e^{(1-j)t} = e^t e^{-jt} = e^t(\cos(t) - j\sin(t)).$$

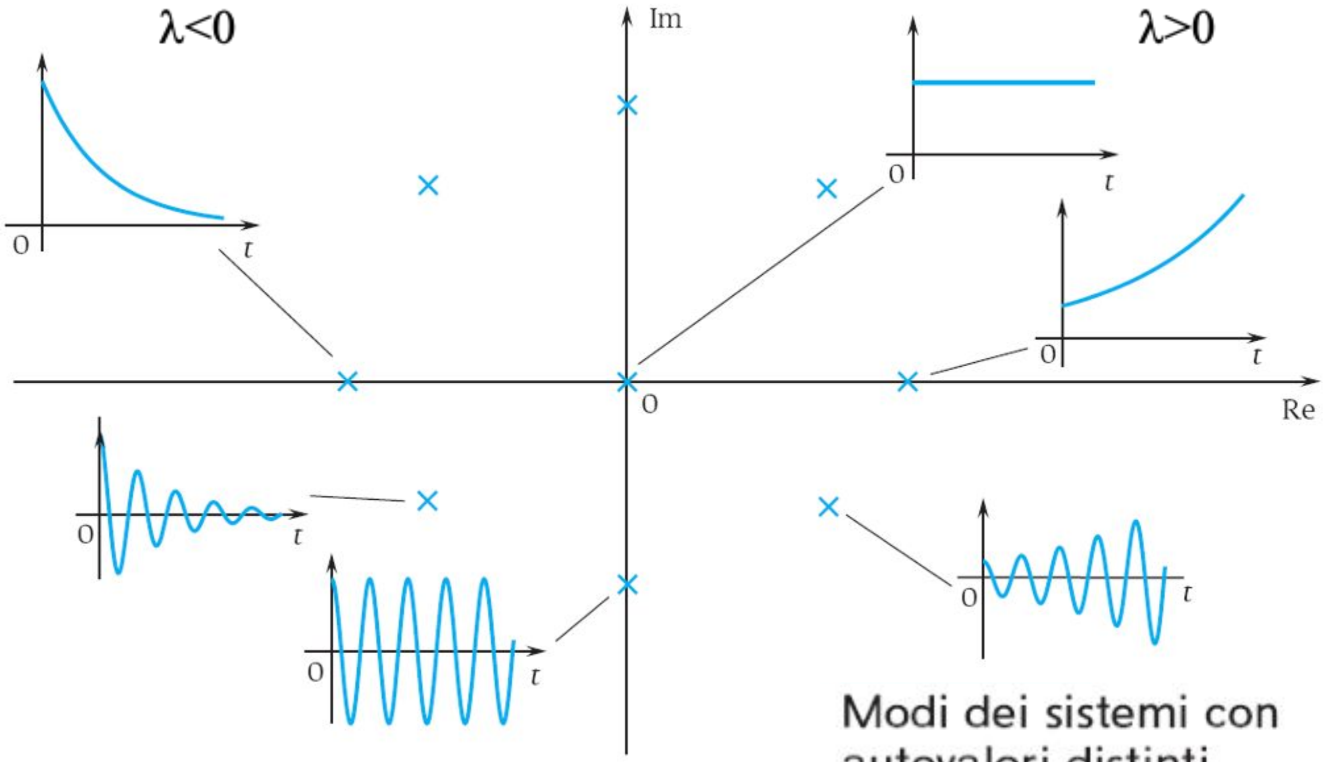
Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$y_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$y_l(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0 = \sqrt{2} e^t \begin{bmatrix} \cos(t+\pi/4) & \cos(t-\pi/4) \end{bmatrix} x_0$$

Autovalori e Modi:



Modi dei sistemi con autovalori distinti.

Autovalori e Modi

Caso 2: A NON diagonalizzabile

Matrice A ha autovalori multipli potrebbe non essere diagonalizzabile

E' comunque possibile trasformarla in forma di **Jordan**

La matrice ha una struttura quasi diagonale, con elementi non nulli sulla diagonale (autovalori) e elementi di valore unitario sulla sopradiagonale

Autovalori e Modi

Caso 2: A NON diagonalizzabile

Modi

$$t^{\eta-1}e^{\lambda_i t} \qquad \lambda_i \quad \textbf{reale}$$

$$t^{\eta-1}e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t+\varphi_i) \quad \lambda_i=\sigma_i+j\omega_i \quad \text{complesso}$$

Autovalori e Modi

Caso 2: A NON diagonalizzabile

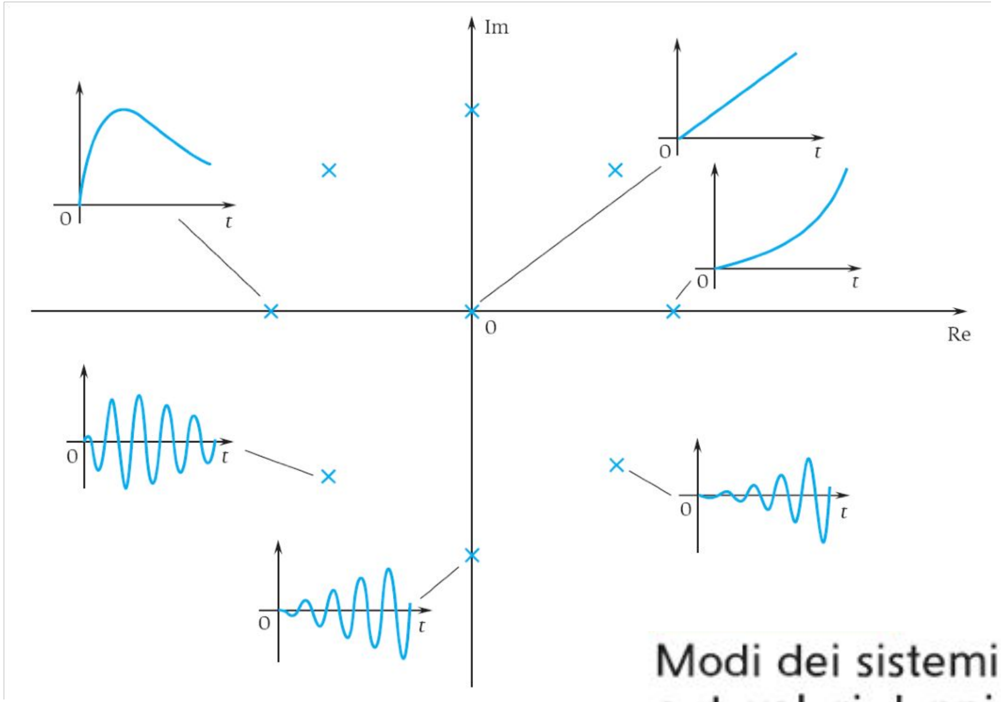
Modi

$$t^{\eta-1}e^{\lambda_i t} \qquad \lambda_i \quad \text{reale}$$

$$t^{\eta-1}e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \text{complesso}$$

intero compreso tra 1 e la massima dimensione dei miniblocchi
di Jordan associati all'autovalore

Autovalori e Modi



Modi dei sistemi con autovalori doppi.