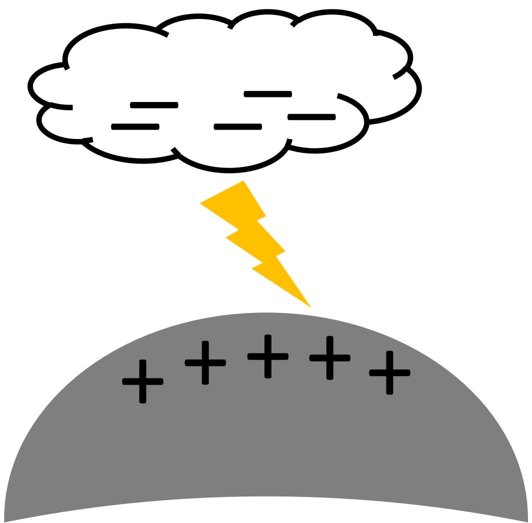
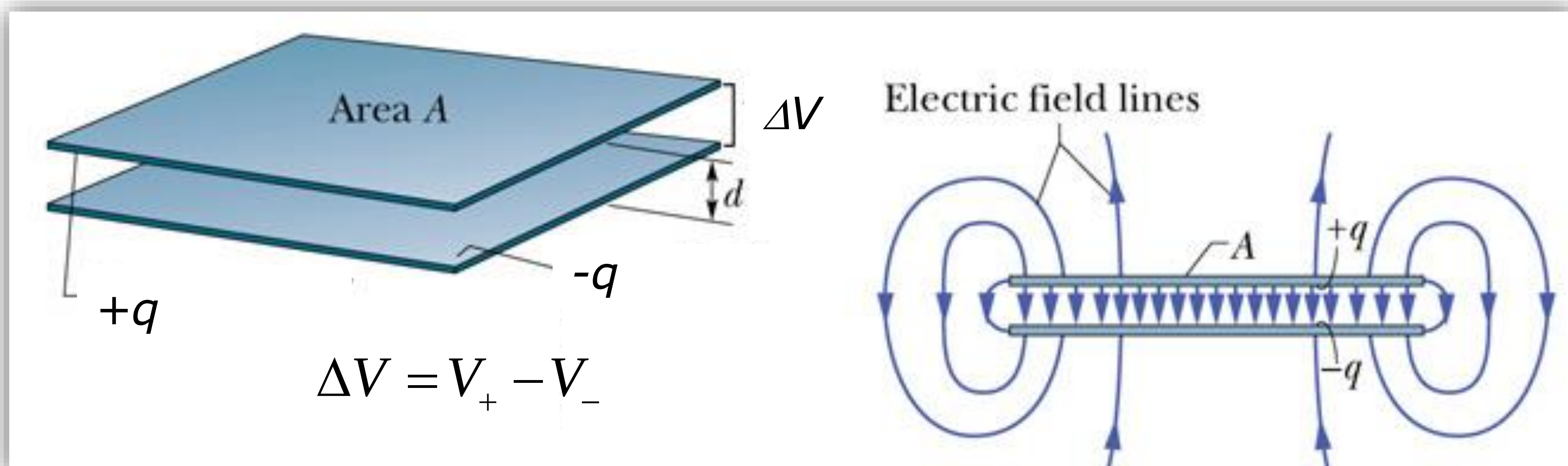
Il condensatore

- ✓ Il **condensatore** (a volte detto **capacitore**, dall'inglese 'capacitor') è uno strumento fondamentale in elettronica poiché **consente di immagazzinare e rilasciare energia elettrica in modo molto rapido**
- ✓ Il classico esempio è il **flash** della macchine fotografiche: una normale batteria non eroga energia abbastanza rapidamente da consentire l'emissione del lampo nei tempi brevissimi richiesti dall'esposizione ottica; altro esempio è il **defibrillatore,** in grado di produrre una scarica elettrica molto intensa sul corpo del paziente
- ✓ Il condensatore è **onnipresente nei circuiti analogici e digitali**, poiché permette la manipolazione delle correnti e dei potenziali (lo troveremo nei circuiti RC, LC, RLC)
- ✓ Il concetto di condensatore si applica a moltissimi casi; per esempio **l'atmosfera terrestre** è un **enorme condensatore carico** (vicino al suolo E~100 N/C, ma in caso di maltempo E~3000 N/C) che sfoga attraverso i fulmini l'eccesso di energia elettrostatica accumulata nell'atmosfera

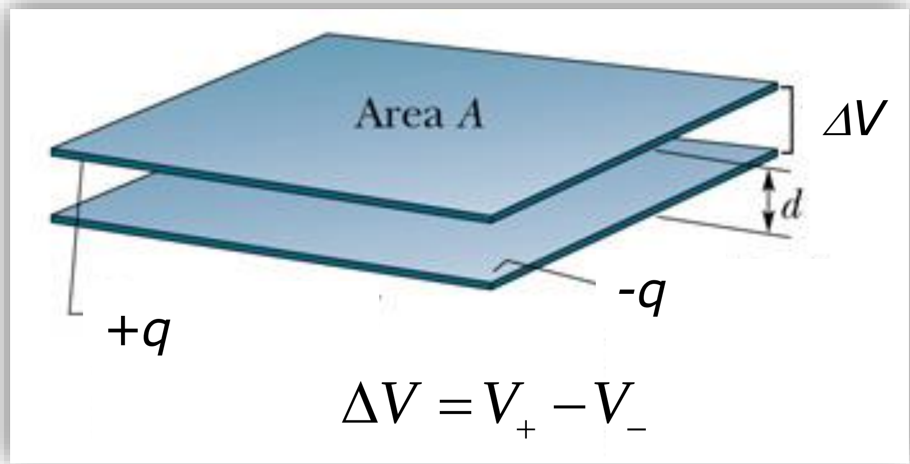


Il condensatore piano

- ✓ Il condensatore piano è costituito da **due piani conduttori** (anche detti **piatti** o **armature**); se sono privi di carica, il condensatore è scarico
- ✓ Connessi ai poli di una batteria, i **piatti vengono caricati di carica** q e $-q$; corrispondentemente, si genera tra i piatti un campo elettrico uniforme ed una d.d.p. $\Delta V = V_+ - V_-$ **uguale alla d.d.p. tra i poli della batteria**
- ✓ Per d.d.p. del condensatore si intende sempre la d.d.p. tra piatto positivo e piatto negativo, dunque $\Delta V > 0$
- ✓ la forma del contorno (rettangolare, circolare, ecc) è inessenziale fintanto che gli **effetti di bordo sono trascurabili**
- ✓ vediamo in figura le linee di campo di un condensatore: lontano dai bordi il il campo è **uniforme all'interno, e nullo all'esterno**; vicino ai bordi però il campo può essere notevolmente distorto



Capacità



La caratteristica più importante del condensatore è la sua **capacità (C)**; la capacità è il rapporto tra la carica e la d.d.p. tra i due piatti:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad q = C\,\Delta V$$

- ✓ Si può anche dire che la **capacità del condensatore** corrisponde alla quantità di carica che è necessario accumulare sui piatti per generare una d.d.p. unitaria tra i piatti
- ✓ L'unità di misura della capacità è il **FARAD (F)**: un Farad è uguale ad un Coulomb su un Volt
- ✓ 1 Farad è una capacità enorme: per una ΔV=1 V, vuol dire avere sui piatti una carica q= 1 C molto grande !! la capacità dei comuni condensatori va dal pF al μF; mentre nei **supercondensatori** si raggiungono capacità del Farad

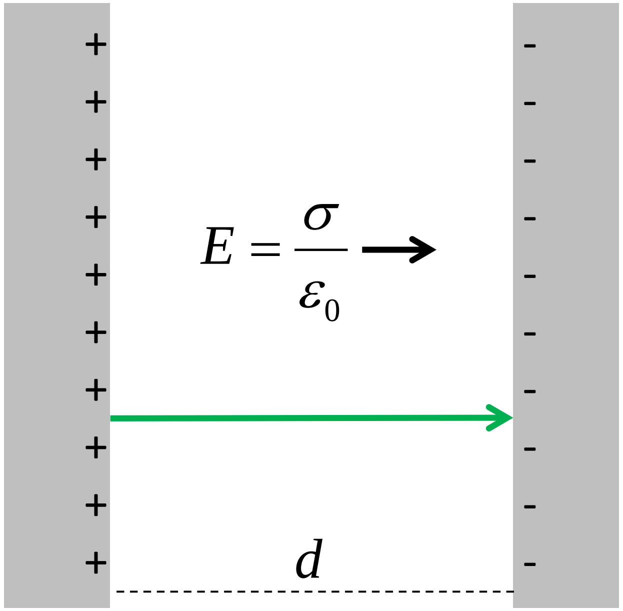
$$1F = 1\,\frac{C}{V}$$

Attenzione a non confondere capacità e Coulomb, entrambi si indicano con C !!

Capacità del condensatore piano

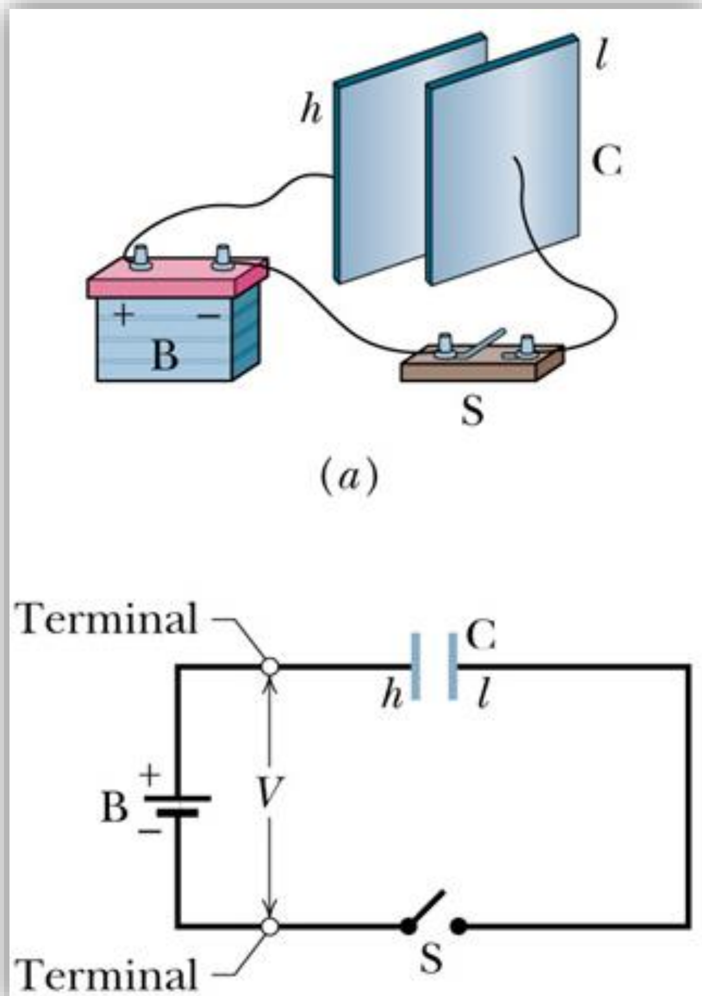
- Consideriamo un **condensatore piano**, con carica q, area dei piatti A, e distanza tra i piatti d; trascuriamo gli effetti di bordo ed **assumiamo il campo uniforme in tutti i punti interni al condensatore**
- Calcoliamo la d.d.p. tra i piatti considerando un cammino rettilineo (linea verde) che va dal piatto positivo al piatto negativo:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \qquad \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$



- La **capacità dipende soltanto da fattori geometrici**: essa aumenta con l'area e si riduce con la distanza tra i piatti
- In altri termini, il **rapporto tra carica e d.d.p. del condensatore è una caratteristica strutturale dell'oggetto**, non dipende da quanto un condensatore è carico o da quale d.d.p. ci sia ai piatti
- V_+-V_- è positivo, ovvero il **potenziale decresce linearmente muovendosi dal piatto positivo a quello negativo**

Caricamento del condensatore



- ✓ Per caricare il condensatore inizialmente scarico è necessario inserirlo in un circuito elettrico, ovvero **connetterlo ad una batteria**.
- ✓ La batteria genera una d.d.p. tra i suoi poli: a **circuito chiuso**, la carica + si trasferisce dal polo + della batteria al piatto *h* del condensatore, e la carica negativa dal polo - della batteria al piatto *l* del condensatore, fino a che poli e piatti non siano allo stesso potenziale.
- ✓ A questo punto la corrente si blocca: lungo i fili del circuito il potenziale è costante in ogni punto, e la **d.d.p. del condensatore si è portata ad un valore uguale a quello della batteria**: il condensatore è totalmente carico. Se ΔV è la d.d.p. della batteria e C la capacità del condensatore, la carica accumulata sui piatti è:

$$q = C\,\Delta V$$

Unità di misura della permittività dielettrica del vuoto

Ricordiamo quanto vale la permittività dielettrica del vuoto:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2}$$

Dalla relazione: $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$

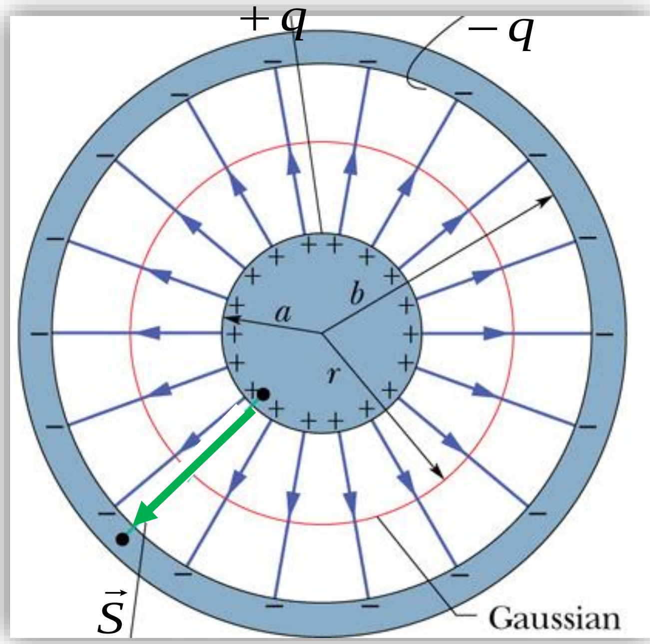
Risulta che la permittività può esprimersi anche in Farad per metro:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m} = 8.85 \frac{pF}{m}$$

In effetti:

$$1F = \frac{1C}{1V} = \frac{1C}{1\frac{N}{C}m} = \frac{1C^2}{1Nm}$$

Condensatore cilindrico



- ✓ In figura è mostrata la sezione di un condensatore cilindrico di lunghezza *L* costituito da due cilindri coassiali di raggi *a* e *b*, con carica +*q* e −*q*; sia *L* >> *a*,*b*, così da poter trascurare gli effetti di bordo
- ✓ Il campo elettrico (linee blu) ha simmetria cilindrica. All'interno del condensatore il campo è generato soltanto dal cilindro interno carico +, ed è equivalente a quello di un filo carico:

$$E = 2k\frac{\lambda}{r}$$

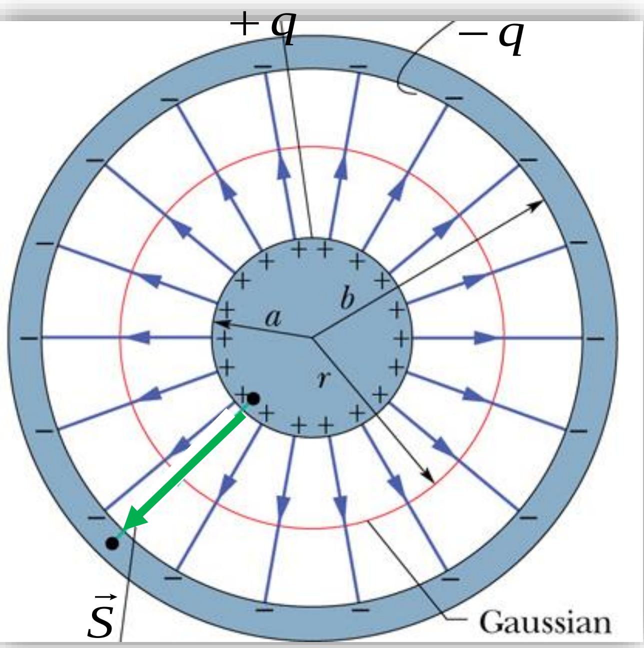
Consideriamo il cammino radiale (linea verde) che va dal cilindro positivo a quello negativo:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b E\,dr = 2k\lambda\int_a^b \frac{1}{r}dr = 2k\lambda\ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\lambda L}{2k\lambda\ln(b/a)} = \varepsilon_0\frac{2\pi L}{\ln(b/a)}$$

Anche per il condensatore cilindrico **la capacità è il prodotto della permittività del vuoto per un fattore geometrico**

Condensatore sferico



- ✓ Per il condensatore sferico utilizziamo la stessa figura, immaginando che rappresenti la sezione di una sfera conduttiva interna di raggio *a* e carica +q ed un guscio concentrico di raggio *b* e carica –q
- ✓ Il campo elettrico nel condensatore (linee blu) è determinato soltanto dalla sfera interna carica +, ed equivalente al campo della carica puntiforme posta nell'origine:

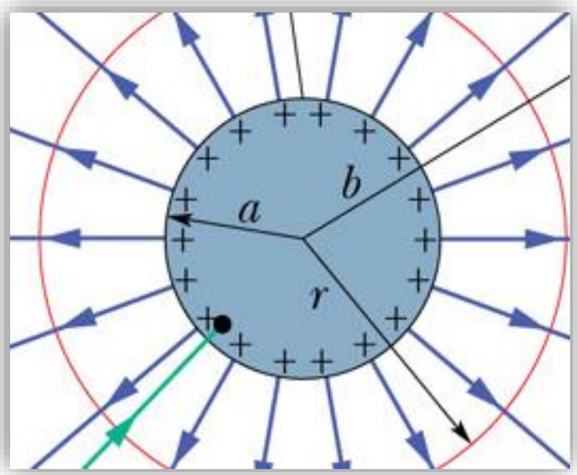
$$E = k\frac{q}{r^2}$$

Consideriamo il cammino radiale (linea verde) che va dal cilindro positivo a quello negativo:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b E\,dr = kq\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = -kq\frac{1}{r}\bigg|_a^b = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \qquad \Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \varepsilon_0\frac{4\pi ab}{b-a}$$

Sfera conduttiva isolata



Per il condensatore sferico abbiamo ricavato: $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{b-a}$

Consideriamo una distanza tra le sfere infinita: ponendo *b* → ∞ si può definire la capacità di un conduttore sferico isolato.

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1-(a/b)} \rightarrow 4\pi\varepsilon_0 a$$

- ✓ questo non è un caso privo di significato fisico: le linee di campo uscenti da una sfera conduttiva carica positivamente prima o poi dovranno andare a morire su un involucro carico negativamente che **neutralizza l'intero sistema** (ad esempio le pareti della stanza). Se il raggio della sfera è piccolo rispetto a questa distanza si può usare l'espressione della capacità per la sfera isolata.
- ✓ Il **limite di distanza infinita ha senso solo nel caso di condensatore sferico**, poiché la simmetria radiale si **conserva nel limite infinito**; nel caso cilindrico o uniforme l'aumento di distanza tra le armature produce effetti di bordo sempre maggiori, fino a distorcere completamente la simmetria originaria

Problema 25.1

Consideriamo un condensatore piano nei circuiti integrati della RAM di un calcolatore; sia A=1 mm^2 l'area dei piatti, e d=0.1 mm la distanza tra i piatti

1) Calcolare la capacità del condensatore.
2) Carichiamo il condensatore con una tensione ΔV = 4.5 V: quanti elettroni in eccesso ci sono sulla sua armatura negativa?

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \frac{pF}{m} \frac{1mm^2}{0.1mm} = 8.85 \frac{pF}{m} \times 1cm = 88.5 \times 10^{-3}\ pF = 88.5\ fF$$

PICO (p) = 10^{-12}; **FEMTO** (f) = 10^{-15}

$$q = C\,\Delta V = 88.5\ fF \times 4.5\ V = 400\ fC = 0.4\ pC$$

Il numero degli elettroni si ottiene dividendo la carica di ciascuna armatura per la carica dell'elettrone:

$$n = \frac{q}{e} = \frac{4 \times 10^{-13} C}{1.6 \times 10^{-19} C} = 2.5 \times 10^{6}$$

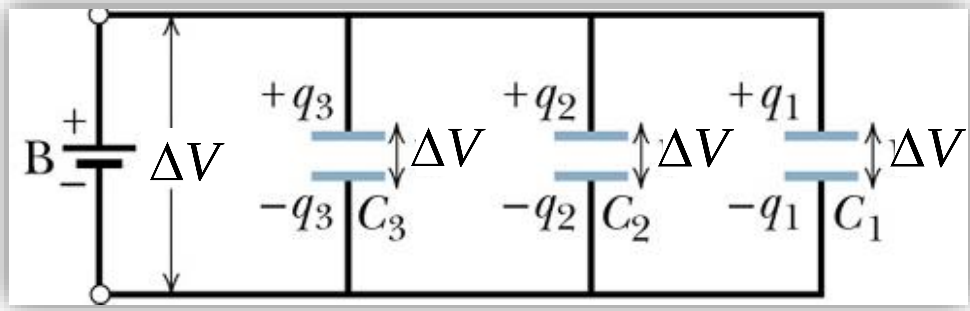
La carica di appena 0.4 pC corrisponde a 2.5 milioni di elettroni in eccesso !!

Condensatori in serie e in parallelo

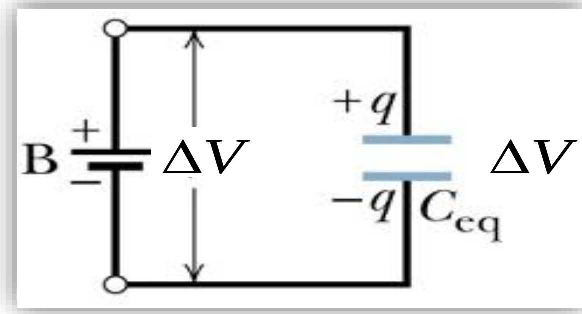
- I circuiti elettrici presentano spesso un gran numero di condensatori, i quali possono **essere combinati in due modalità fondamentali: serie e parallelo**
- **La combinazione in parallelo** consente di **sommare le capacità e le cariche dei singoli condensatori**, ovvero di comporre un condensatore equivalente la cui capacità sia somma delle capacità dei singoli condensatori
- **La combinazione in serie** consente di **redistribuire la d.d.p. ai capi dei condensatori**, ovvero di comporre un condensatore equivalente la cui d.d.p. è somma delle d.d.p. ai capi dei singoli condensatori, e la cui carica è uguale a quella dei singoli condensatori
- Possiamo ricavare delle leggi generali che consentono di **sostituire la capacità di molti condensatori con quella di un unico condensatore equivalente**, in modo da semplificare le leggi che regolano il funzionamento dei circuiti

Condensatori in parallelo

Circuito reale



Circuito ideale



- ✓ In figura è mostrato un **circuito con 3 condensatori in parallelo,** ovvero posti in modo da avere tra i piatti la stessa d.d.p. *ΔV;* all'equilibrio (ovvero dopo la fase di carica) *ΔV* è costante ed uguale alla tensione stabilita dalla batteria (B)
- ✓ Se i condensatori hanno **diversa capacità, anche le rispettive cariche saranno diverse**:

$$q_1 = C_1 \Delta V \quad q_2 = C_2 \Delta V \quad q_3 = C_3 \Delta V$$

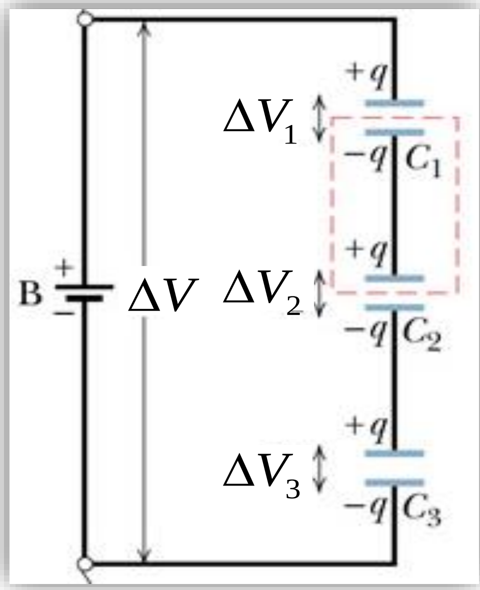
Se *q* è la somma delle cariche sui condensatori e C_{eq} la somma delle capacità si ha:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)\Delta V = C_{eq} \Delta V$$

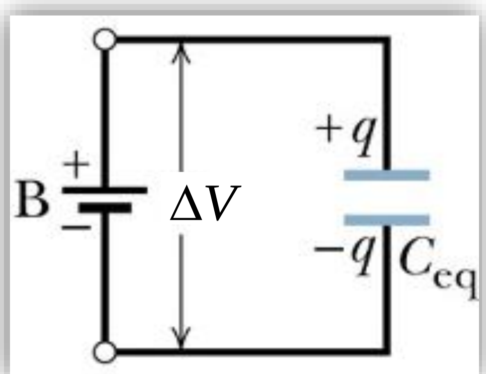
Dunque possiamo sostituire il circuito reale con uno ideale avente **un solo condensatore**, carica uguale alla somma delle cariche, capacità C_{eq} (detta **capacità equivalente**) uguale alla somma delle capacità, e d.d.p. uguale alla d.d.p. dei singoli condensatori

Condensatori in serie

Circuito reale



Circuito ideale



- ✓ In figura vediamo un circuito con tre **condensatori in serie**, allineati lungo un ramo del circuito
- ✓ ciascun condensatore ha **diversa d.d.p. ma uguale carica**; si noti che **la batteria carica esclusivamente i piatti collegati ai poli**, gli altri piatti si caricano per induzione.
- ✓ La carica dei condensatori è uguale poiché in ogni coppia di piatti connessi (come quelli interni alla curva rossa tratteggiata) viene indotta una carica uguale ed opposta.
- ✓ La somma delle d.d.p. dei condensatori è uguale alla d.d.p. della batteria, per cui:

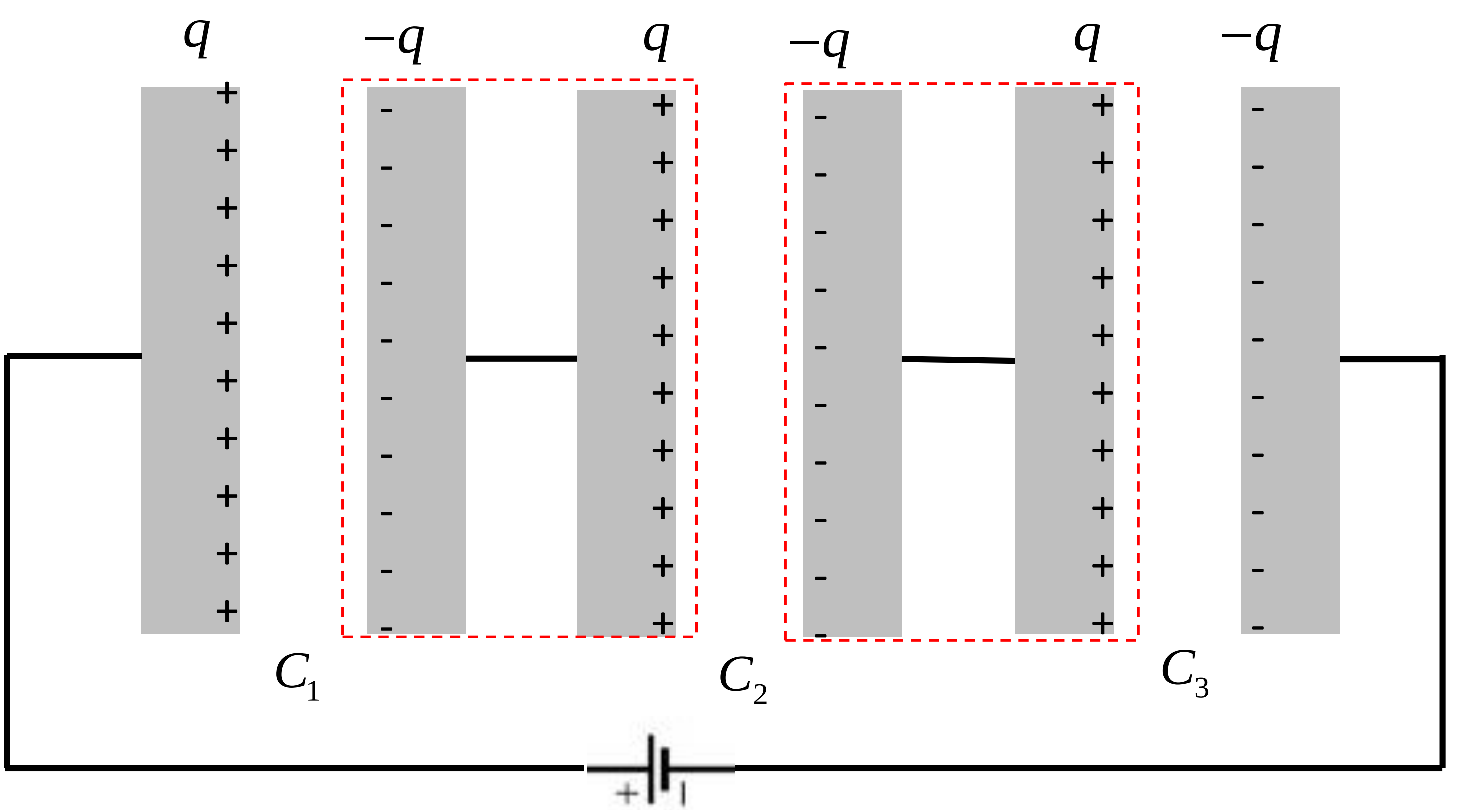
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Definiamo capacità equivalente della serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) \Rightarrow q = C_{eq}\Delta V$$

Nel circuito ideale il **condensatore equivalente ha stessa carica e d.d.p. uguale alla somma delle d.d.p. dei singoli condensatori**

Condensatori in serie

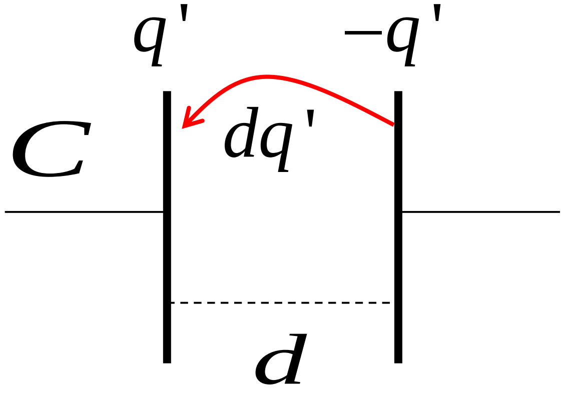


- ✓ Soltanto il piatto positivo di C_1 e quello negativo di C_3 si caricano perché effettivamente connessi ai poli della batteria; tutti gli altri piatti si caricano per induzione, ovvero per annullare i campi elettrici all'interno dello spessore dei piatti
- ✓ Se si genera carica –q sul piatto negativo di C_1, deve generarsi carica +q sul piatto positivo di C_2, poiché i due piatti connessi, racchiusi dalla linea rossa tratteggiata, sono complessivamente neutri; lo stesso accade tra il piatto negativo di C_2 e quello positivo di C_3

Energia immagazzinata nel condensatore

- ✓ L'energia immagazzinata nel condensatore è quella **erogata dalla batteria nel processo di carica**, e corrisponde al **lavoro effettuato dalla batteria per trasportare tutta la carica del condensatore da un piatto all'altro**, ovvero l'energia potenziale della carica trasferita tra i piatti
- ✓ Calcoliamo questa energia: consideriamo un condensatore piano, sia q' la carica sui piatti in un certo istante del processo di carica; consideriamo lo spostamento di una carica dq' dal piatto negativo a quello positivo; la **variazione di energia potenziale** associata allo spostamento di carica dq' da un piatto all'altro è

$$dU = dq'\Delta V_{q'} = dq'\frac{q'}{C}$$



Immaginiamo di partire dal condensatore scarico (q'=0) e trasferire carica progressivamente fino ad un totale di carica q (q'=q); la corrispondente energia potenziale è data dall'integrale:

$$\Delta U = \int_0^q dq'\Delta V_{q'} = \int_0^q dq'\frac{q'}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Energia immagazzinata nel condensatore

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2$$

Si noti che queste espressioni sono **valide in generale**, **non dipendono dal tipo di condensatore considerato (piano, cilindrico, sferico)**

ATTENZIONE: potevamo essere tentati di scrivere

$$a)\ \Delta U = q\Delta V \qquad b)\ \Delta V = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \Delta U = \frac{q^2}{C}$$

saremmo caduti in errore…

- ✓ **Mai confondere la carica che genera il potenziale con la carica spostata all'interno del campo**! In *a*) la carica *q* è all'interno del campo e viene **spostata** dalla d.d.p., mentre in *b*) la carica *q* è quella che **genera il campo e la d.d.p.**
- ✓ Nel procedimento corretto abbiamo distinto la carica spostata *dq'* dalla carica dei piatti *q'* che genera il campo. Alla fine del processo di carica (ovvero dopo l'integrazione in *q'*) la carica totale *q* sui piatti coincide con la carica totale spostata da un piatto all'altro; ma ciò è vero soltanto alla fine, non DURANTE il processo di carica.

Densità di energia del campo elettrico

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2$$

- ✓ L'energia del condensatore può interpretarsi come energia immagazzinata **nel volume compreso tra i piatti**, ovvero nella regione in cui è presente il campo elettrico
- ✓ dall'energia totale possiamo quindi determinare la **densità di energia, ovvero l'energia per unità di volume**
- ✓ nel caso di un **condensatore piano**:

$$u = \frac{\Delta U}{Vol} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2 \frac{1}{Ad} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 \frac{1}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- ✓ Questa è un'espressione fondamentale dell'elettromagnetismo, qui ricavata nel caso semplice di un condensatore piano, ma in realtà **valida in generale per qualunque campo elettrico**:
- ✓ dato un campo elettrico qualsiasi ***E*** in un punto dello spazio, l'**energia elettrostatica immagazzinata in quel punto è proporzionale al quadrato del campo elettrico**

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Il defibrillatore

- ✓ Il condensatore connesso ad una batteria ad elevata d.d.p. viene caricato rapidamente, immagazzinando una **grande quantità di energia in pochi secondi**
- ✓ Una volta carico, gli elettrodi vengono applicati sul petto del paziente che, essendo conduttore, chiude il circuito
- ✓ Il condensatore scarica la sua energia generando una corrente che fluisce nella regione del corpo compresa tra le piastre
- ✓ Calcoliamo energia e potenza scaricata da un condensatore da C=70 μF caricato con ΔV=5 kV

$$\Delta U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 70 \mu F \times 25 \times 10^6 V^2 = 875 J$$

Scarica questa energia nel tempo di un millisecondo significa scaricare sul corpo del paziente una **POTENZA (energia per unità di tempo):**

$$P = \frac{\Delta U}{t} = \frac{875 J}{10^{-3} s} = 875 kW$$

Batteria dell'auto

- ✓ La batteria è un dispositivo che consente di immagazzinare una grande quantità di carica elettrica e di energia, la quale viene erogata lentamente (dunque con bassa potenza) ma molto a lungo nel tempo
- ✓ Un esempio tipico è la batteria dell'auto: può durare diversi anni, prima che la carica, erogata all'accensione, sia totalmente esaurita; l'accensione del motorino d'avviamento non richiede grande velocità di erogazione

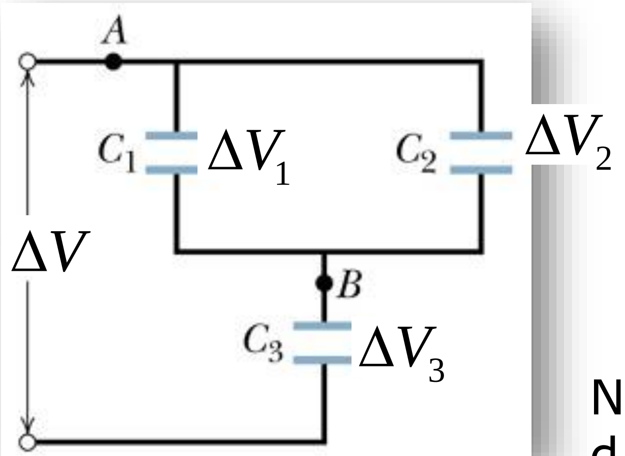
Caratteristiche di una tipica batteria auto:

- ✓ carica totale (q = 60 Ah)
- ✓ voltaggio ΔV =12 V
- ✓ corrente di spunto I_{MAX} = 540 A

$$q = 60\,Ah = 60\,A \times 3600\,s = 2.16 \times 10^5\,C$$

$$P_{MAX} = I_{MAX}\,\Delta V = 6.4\,kW$$

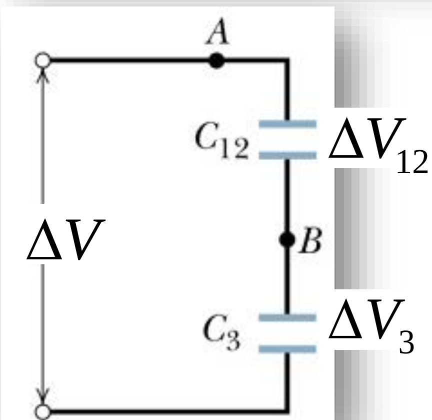
Problema 25.2



Il circuito in figura è collegato ad una batteria avente d.d.p. ΔV=12 V; i condensatori hanno capacità C_1=12 μF, C_2=6 μF, C_3=6 μF.

1) Calcolare la capacità equivalente dell'intero circuito

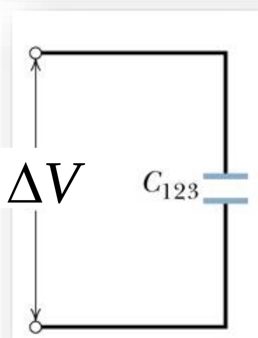
Notiamo che C_1 e C_2 sono connessi in parallelo, con d.d.p. comune tra i punti A e B. Dunque possiamo sostituirli con una C_{12} equivalente data da:



$$C_{12} = C_1 + C_2 = 18\mu F \qquad \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_{12}$$

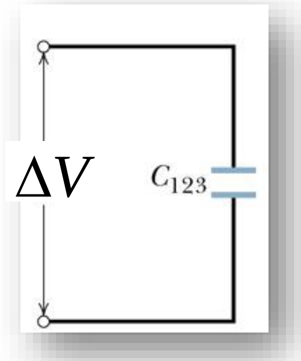
Notiamo ora che C_{12} e C_3 sono connessi in serie: possiamo quindi sostituirli con un condensatore di capacità equivalente:

$$\frac{1}{C_{123}} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}\right) \Rightarrow C_{123} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = 4.5\mu F$$



$$q_{123} = q_{12} = q_3$$

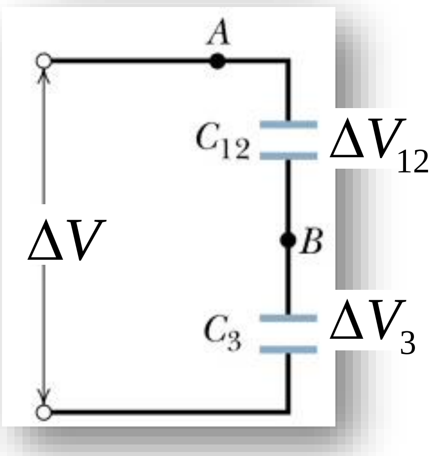
Problema 25.2



ΔV=12 V; C_1=12 μF, C_2=6 μF, C_3=6 μF.
2) Calcolare le d.d.p. ai capi dei 3 condensatori
3) Calcolare le cariche sui piatti dei 3 condensatori

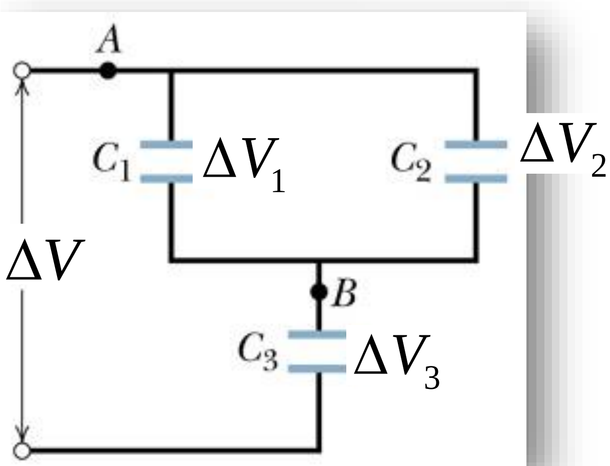
calcoliamo la carica ai piatti di C_{123}:

$$q_{123} = C_{123}\Delta V = 4.5\mu F \times 12V = 54\mu C$$



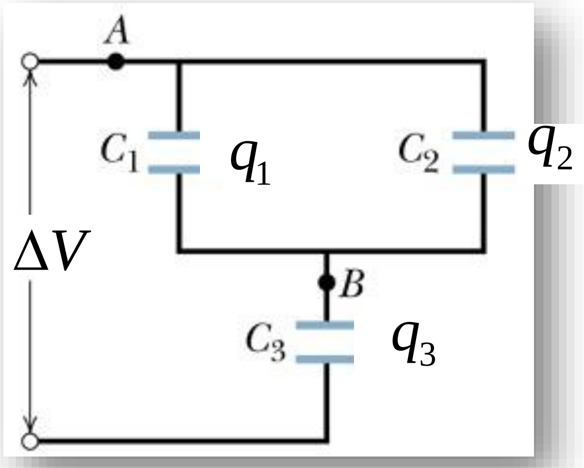
Questa carica è la stessa accumulata su C_{12} e su C_3. Utilizziamola per calcolare la tensione ai capi di C_{12} e C_3

$$\Delta V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{54\mu C}{18\mu F} = 3V \qquad \Delta V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{54\mu C}{6\mu F} = 9V$$



Come verifica del risultato notiamo che la somma di ΔV_{12} e ΔV_3 è uguale alla tensione ΔV della batteria; inoltre si ha $\Delta V_{12} = \Delta V_1 = \Delta V_2$; abbiamo quindi calcolato tutte le d.d.p. ai capi dei condensatori

Problema 25.2



Conosciamo tutte le d.d.p. ai capi dei condensatori, e le rispettive capacità ; possiamo quindi calcolare le cariche presenti su ciascun condensatore:

$$q_1 = C_1 \Delta V_1 = 12\mu F \times 3V = 36\mu C$$

$$q_2 = C_2 \Delta V_2 = 6\mu F \times 3V = 18\mu C$$

$$q_3 = C_3 \Delta V_3 = 6\mu F \times 9V = 54\mu C$$

Ovviamente non occorreva ricalcolare q_3 essendo:

$$q_{123} = q_{12} = q_3$$

Come verifica del risultato notiamo che la somma delle cariche q_1 e q_2 equivale alla carica precedentemente calcolata del condensatore equivalente C_{12} Conosciamo ed anche alla carica del condensatore in serie C_3

Condensatore con dielettrico

- ✓ Il concetto di capacità si deve al grande **Michael Faraday**, uno dei padri dell'elettromagnetismo classico (in Figura sono riportati sfere e gusci in ottone usati da Faraday come condensatori sferici).
- ✓ Nel 1837 Faraday fece un'altra scoperta importantissima:

- ✓ Inserendo un **materiale isolante** (anche detto **dielettrico**) come olio minerale o plastica tra i piatti del condensatore**, la capacità può aumentare enormemente;** ovvero aumenta la quantità di carica sui piatti relativa ad una data d.d.p. tra i piatti
- ✓ Rispetto al condensatore vuoto (chiamiamo C_{vuoto} la sua capacità), dopo l'inserimento del dielettrico **la capacità aumenta di un fattore moltiplicativo adimensionale che dipende dalla sostanza**, detto **COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA** ε_r

$$C = \varepsilon_r C_{vuoto}$$

NB: la formula è valida soltanto se il dielettrico riempie TOTALMENTE il condensatore

Condensatore con dielettrico

Possiamo quindi scrivere la **formula generale della capacità** come:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} A/d & \textit{piano} \\ 2\pi L / \ln(b/a) & \textit{cilindrico} \\ 4\pi ab/(b-a) & \textit{sferico} \end{cases}$$

vuoto: $\varepsilon_r = 1$ con dielettrico: $\varepsilon_r > 1$

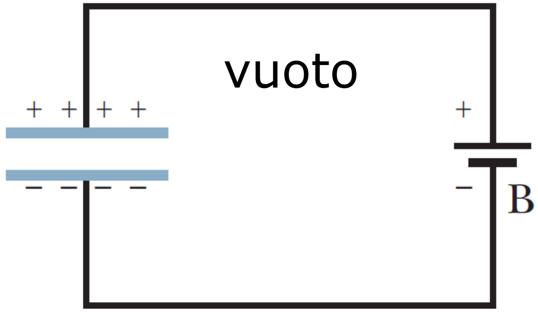
$\mathcal{L}$ è il **fattore geometrico**, ed ha la dimensione fisica di una lunghezza

Materiale	ε_r
vuoto	1 (per definizione)
aria (a 1 bar)	1,00054
olio per trasformatori	2,2
polistirolo	2,6
plexiglas, nylon	3,5
carta	3,6

Materiale	ε_r
quarzo	4,3
vetro pyrex	5,1
mica	5,4
porcellana	7,0
acqua (a 20 °C)	80
ceramica al titanio	130

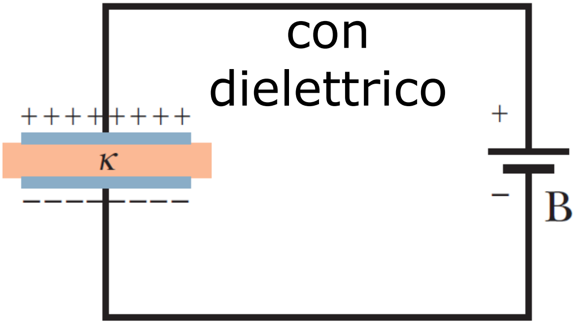
Condensatore connesso al circuito

- ✓ In genere il condensatore è connesso ad un circuito; nel caso mostrato in figura esso è a contatto con la batteria, dunque **la d.d.p. ΔV tra i piatti del condensatore è la stessa per il condensatore vuoto o con dielettrico**, poiché fissata dalla d.d.p. della batteria
- ✓ Dalla legge generale della capacità, si ha che riempiendo il condensatore con un dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r, **la carica ai piatti q e l'energia immagazzinata ΔU devono aumentare** di un fattore ε_r
- ✓ il surplus di carica ed energia del condensatore con dielettrico è ovviamente fornito dalla batteria



$$q = C_{vuoto}\Delta V$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}C_{vuoto}\Delta V^2$$



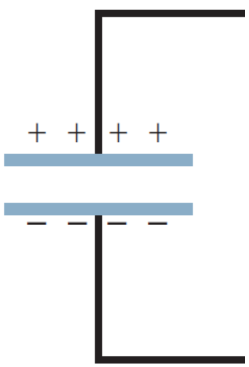
$$q' = \varepsilon_r C_{vuoto}\Delta V = \varepsilon_r q$$

$$\Delta U' = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_{vuoto}\Delta V^2 = \varepsilon_r \Delta U$$

Condensatore isolato

- ✓ Consideriamo un **condensatore carico isolato**, ovvero NON connesso al circuito; supponiamo che da vuoto abbia carica *q e* d.d.p. ΔV
- ✓ Introduciamo un dielettrico nel condensatore: **essendo isolato, la carica sui piatti non può variare**; poiché l'inserimento del dielettrico aumenta la capacità del condensatore, ne segue che dopo l'inserimento del dielettrico la d.d.p. ΔV ai piatti del condensatore e l'energia immagazzinata ΔU devono diminuire di un fattore ε_r :

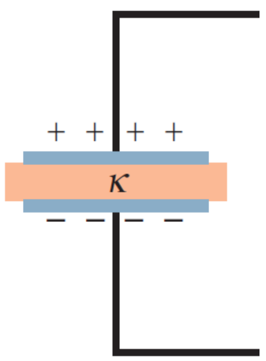
vuoto



$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_{vuoto}}$$

$$\Delta V = \frac{q}{C_{vuoto}}$$

con dielettrico



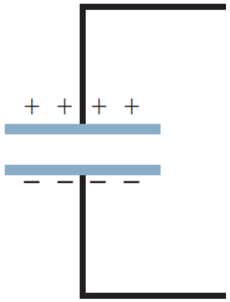
$$\Delta V' = \frac{q}{\varepsilon_r C_{vuoto}} = \frac{\Delta V}{\varepsilon_r}$$

$$\Delta U' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_r C_{vuoto}}$$

- ✓ Con l'inserimento del dielettrico il condensatore ha perso d.d.p, ed energia; ma l'energia non può scomparire, dov'è finita ? A dopo per la soluzione dell'enigma…

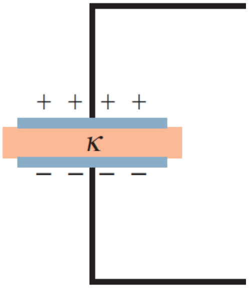
Problema 25.6

Un **condensatore isolato carico** di capacità a vuoto C_v=20 pF presenta una d.d.p. tra i piatti ΔV =10 V.
Si inserisce tra i piatti una **lastra di porcellana** con ε_r =5; calcolare l'energia immagazzinata dal condensatore vuoto ΔU e con dielettrico $\Delta U'$, e la d.d.p. tra i piatti $\Delta V'$ dopo l'inserimento del dielettrico



senza dielettrico:

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_v \Delta V^2 = \frac{20\,pF \times (10V)^2}{2} = 10^{-9}\,FV^2 = 1\,nJ$$

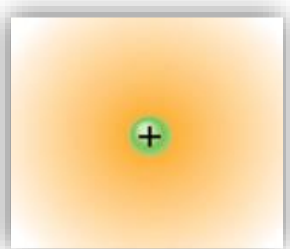


con dielettrico:

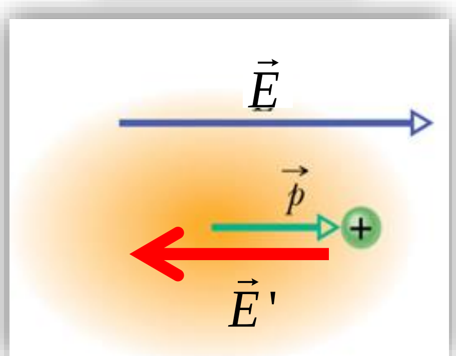
$$\Delta V' = \frac{\Delta V}{\varepsilon_r} = 2V \qquad \Delta U' = \frac{\Delta U}{\varepsilon_r} = 0.2\,nJ$$

Risposta dielettrica e polarizzazione

- ✓ In un **conduttore il campo elettrico non può penetrare**: per induzione, si formano cariche sulla superficie che **schermano completamente** il campo elettrico esterno
- ✓ In un **materiale isolante** in presenza di un campo elettrico, gli elettroni del materiale non sono liberi di muoversi; si verifica comunque una reazione della materia detta **polarizzazione**: le cariche negative (elettroni) e positive (nucleo) di ogni atomo si divaricano leggermente, formando **dipoli elettrici di dimensione atomica**
- ✓ Questi dipoli generano un loro campo elettrico che si oppone fortemente a quello esterno, riducendolo di molto (effetto di **schermo dielettrico, o risposta dielettrica**)



Atomo non polarizzato: la nuvola elettronica (giallo) è centrosimmetrica rispetto al nucleo positivo



In presenza di campo elettrico ***E*** (blu) l'atomo si polarizza: elettroni e nucleo si spostano in verso opposto formando un dipolo microscopico ***p*** (verde); il campo elettrico ***E'*** del dipolo (rosso) è orientato in verso opposto, ovvero **si oppone al campo esterno**

Risposta dielettrica e polarizzazione

- ✓ La costante dielettrica relativa ε_r rappresenta la '**risposta dielettrica**' del materiale all'azione del campo esterno: in presenza di campo, la materia isolante si polarizza, dando lungo ad un campo indotto che scherma (riduce) il campo elettrico esterno; la **riduzione del campo dovuta alla risposta dielettrica è quantificata da** ε_r **:** all'interno di un materiale dielettrico bisogna sostituire:

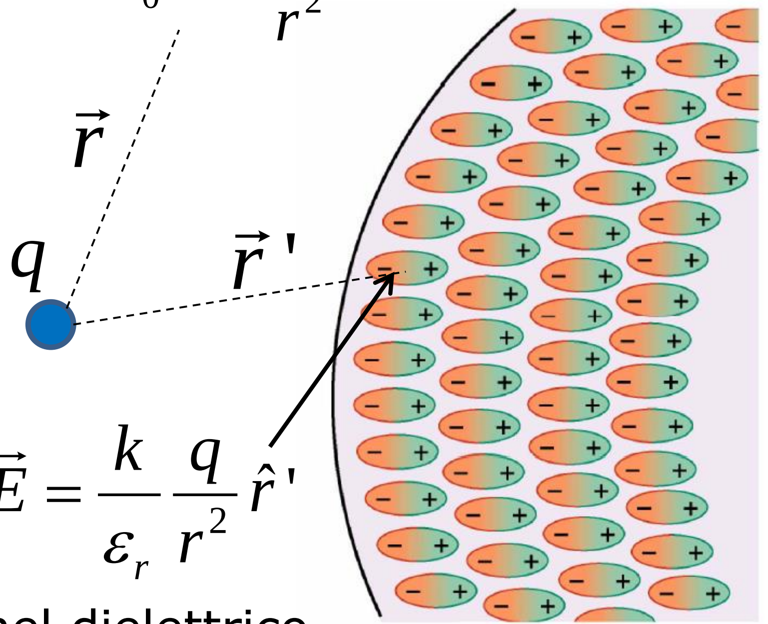
$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad k \rightarrow \frac{k}{\varepsilon_r}$$

nel vuoto

$$\vec{E}_0 = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- ✓ Consideriamo la carica *q* (blu), vicina alla superficie di una sfera isolante
- ✓ in un punto a distanza ***r*** nel vuoto (o nell'aria) il campo elettrico è quello dato dalla legge di Coulomb
- ✓ in un punto ***r'*** interno alla sfera (con *r*=*r'*) il campo è ridotto di un fattore ε_r, e dunque molto più piccolo che nel vuoto

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$



$$\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q}{r^2} \hat{r}\,'$$

nel dielettrico

Leggi dell'elettrostatica all'interno di un materiale dielettrico

All'interno di un materiale dielettrico, tutte le relazioni dell'elettrostatica viste per il caso del vuoto restano valide se si moltiplica la permittività dielettrica del vuoto per la costante dielettrica del materiale:

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad k \rightarrow \frac{k}{\varepsilon_r}$$

Esempi:

- ✓ potenziale e campo generati dalla carica puntiforme in un punto distante *r* dalla carica all'interno di un dielettrico:

$$V(r) = \frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q}{r} \qquad E(r) = \frac{k}{\varepsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

- ✓ potenziale e campo generati dallo strato conduttore in un punto distante *z* dal piano:

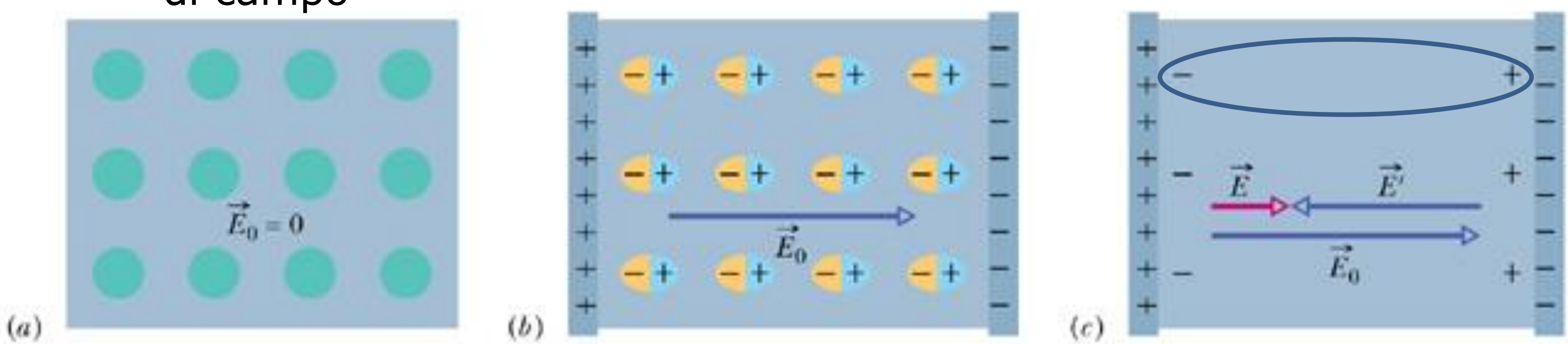
$$V(z) = \text{cost} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} z \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

Risposta dielettrica nel condensatore

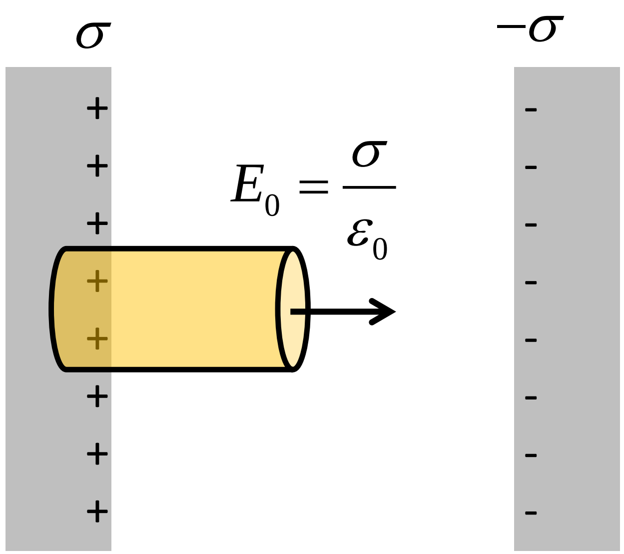
- ✓ Consideriamo un dielettrico in Figura (a); i cerchi indicano atomi neutri.
- ✓ Inseriamo il dielettrico in un condensatore che genera un campo E_0; gli atomi si polarizzano (Figura (b)) formando **catene di dipoli parallele al campo del condensatore**
- ✓ Ogni catena di dipoli corrisponde ad un dipolo unico avente stessa carica del singolo dipolo, ma lunghezza uguale a quella dell'intera catena.
- ✓ La risposta del dielettrico equivale alla creazione di un **doppio strato isolante di segno opposto** rispetto al doppio strato del condensatore
- ✓ In altre parole, la **risposta del dielettrico genera un campo indotto *E'* opposto in verso** e minore in modulo di E_0; il campo netto è E (Fig.(c))

dielettrico in assenza di campo

dielettrico inserito nel condensatore carico

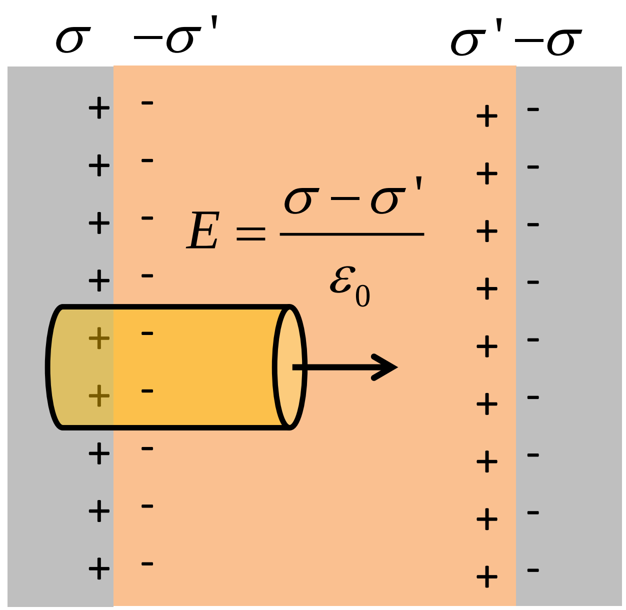


Legge di gauss nei dielettrici



Consideriamo un doppio strato carico q e densità planare σ; in assenza di dielettrico la legge di Gauss ci da (sia E_0 il campo in assenza di dielettrico):

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = E_0 A = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

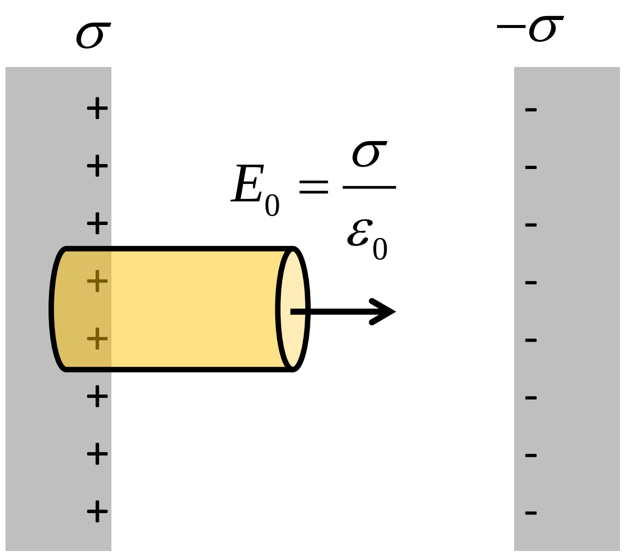


Riempiamo il doppio strato con un dielettrico di costante relativa ε_r; il dielettrico sviluppa, come risposta al campo generato dai piatti, un **doppio strato carico che si oppone a quello dei piatti**; sia q' la carica e σ' la densità di questo doppio strato; applichiamo la legge di Gauss al solito cilindretto:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,A = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

adesso ***E*** è il **campo totale** (campo dei piatti più campo di polarizzazione)

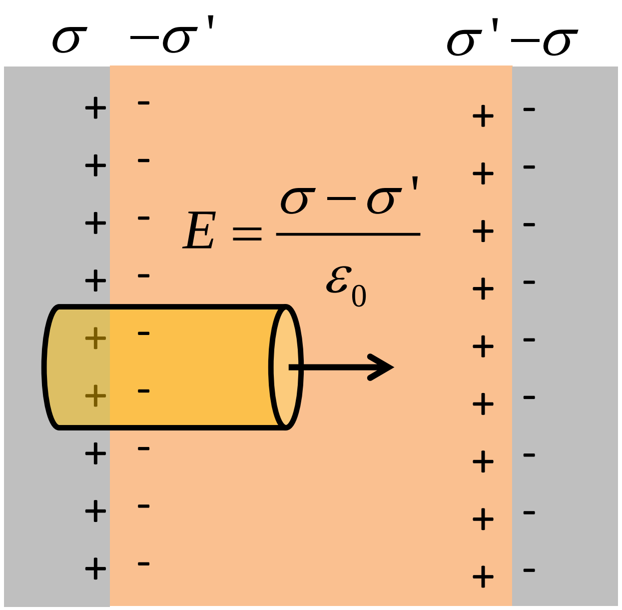
Legge di gauss nei dielettrici



Dalle precedenti formule ricaviamo il rapporto tra campo del condensatore vuoto e campo con dielettrico:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} = \frac{q - q'}{q}$$

Sappiamo inoltre che in ogni punto interno al dielettrico vale la relazione: $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

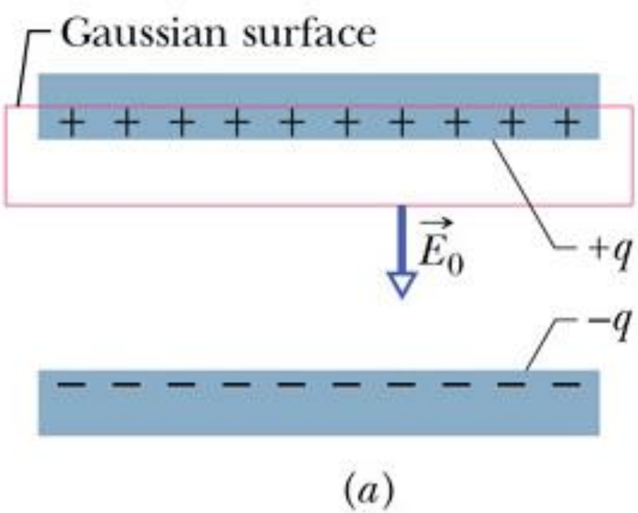


da cui: $\sigma - \sigma' = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r}$ $\qquad q - q' = \dfrac{q}{\varepsilon_r}$

vediamo che ε_r esprime la **riduzione di carica dovuta alla polarizzazione del dielettrico;** per una **superficie gaussiana interna al dielettrico** la legge di Gauss può scriversi:

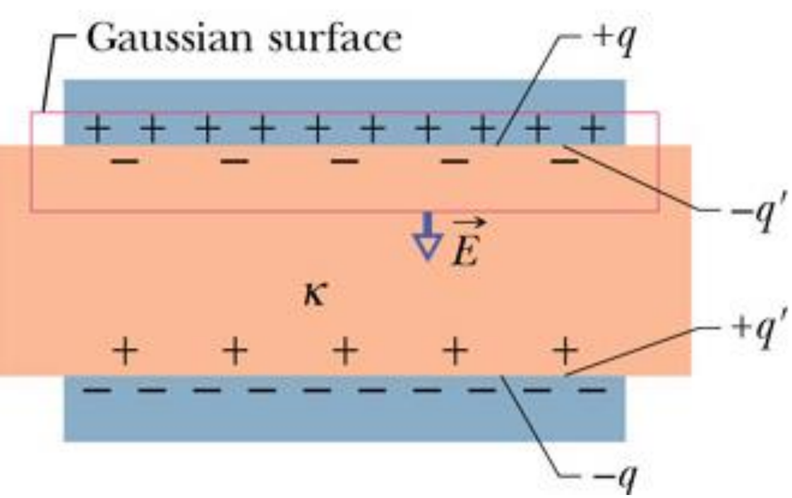
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

Energia potenziale del condensatore con dielettrico



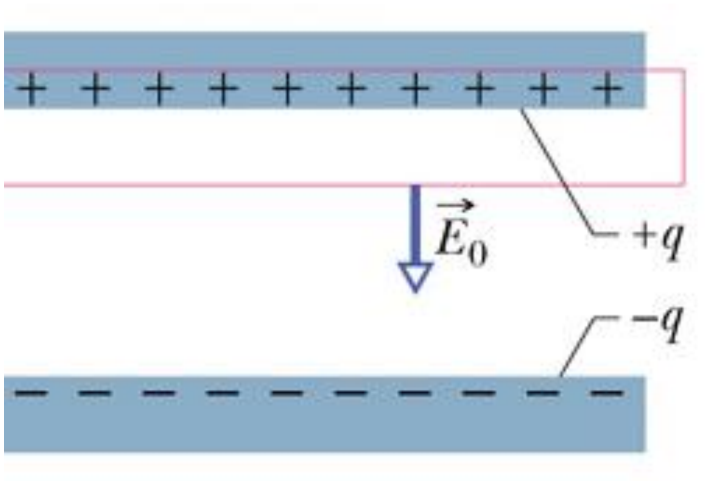
Abbiamo visto che se in un condensatore carico isolato inseriamo un dielettrico, l'energia immagazzinata si riduce; se ΔU_0 è l'energia del condensatore vuoto, dopo l'inserimento del dielettrico si ha:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_r C_{vuoto}} = \frac{\Delta U_0}{\varepsilon_r}$$



l'energia persa dal condensatore è utilizzata per 'risucchiare' il dielettrico all'interno del doppio strato; in altri termini, parte dell'energia del condensatore vuoto si trasforma in energia potenziale legante tra i piatti del condensatore e la superficie del dielettrico

Problema 25.7



La figura mostra un condensatore piano con piatti di area A = (10 cm)^2 distanti d=2 cm; si carica il condensatore a vuoto con una tensione ΔV_0=100 V; calcolare:

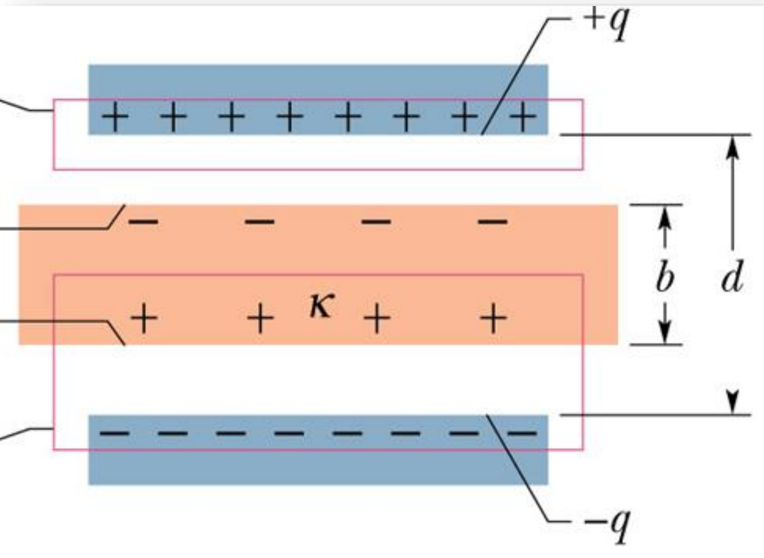
1) La capacità C_0 a vuoto
2) La carica sui piatti
3) Il campo elettrico E_0

$$1)\ C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \frac{pF}{m} \frac{10^{-2} m^2}{2\times 10^{-2} m} = 4.425\, pF$$

$$2)\ q = C_0\, \Delta V_0 = 4.42\, pF \times 100 V = 0.442\, nC$$

$$3)\ E_0 = \frac{\Delta V_0}{d} = 5000\ \frac{V}{m}$$

Problema 25.7



A condensatore isolato si inserisce tra i piatti una **lamina dielettrica** di spessore b=1 cm ed ε_r=2; il dielettrico è posto al centro tra i piatti e **NON riempie totalmente il condensatore**; calcolare:

4) Il campo elettrico E nell'intercapedine tra piatti e lastra e all'interno della lastra
5) La d.d.p. tra i piatti ΔV dopo l'introduzione della piastra
6) La capacità C con la lastra inserita

Attenzione: **nello spazio vuoto tra piatti e lastra il campo è uguale a quello del condensatore a vuoto**; la polarizzazione della lastra agisce soltanto all'interno della lastra

nell'intercapedine

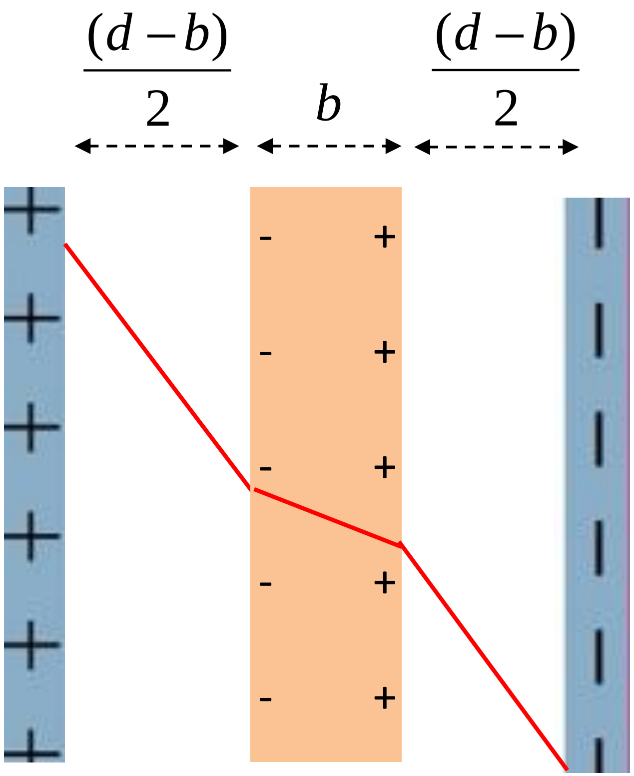
$$E = E_0 = 5000\ \frac{V}{m}$$

nella lastra

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = 2500\ \frac{V}{m}$$

Problema 25.7

La d.d.p. tra i piatti ΔV dopo l'introduzione della piastra (linea rossa) è uguale alla somma delle d.d.p. tra gli spazi vuoti e la d.d.p. tra le pareti della lastra; ΔV scende linearmente andando dal piatto positivo a quello negativo, con una pendenza uguale al valore del campo elettrico in quella regione



$$\Delta V = E_0 \frac{d-b}{2} + E\,b + E_0 \frac{d-b}{2}$$

$$= E_0 \left(d - b + \frac{b}{\varepsilon_r} \right) = 75V$$

A dielettrico inserito calcoliamo la **capacità dalla sua definizione generale**:

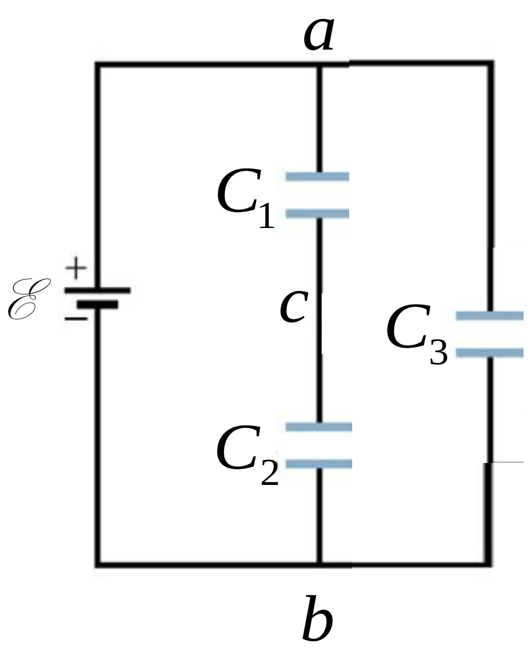
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{0.44\,nC}{75V} = 5.9\,pF$$

Si noti che l'applicazione della formula:

$$C = \varepsilon_r C_0 = 8.85\,pF$$

Porta ad un risultato sbagliato, poiché essa è **valida soltanto nel caso in cui il dielettrico riempie totalmente lo spazio tra i piatti**

Problema 3



Una batteria con forza elettromotrice $\mathscr{E}$ = 12 V viene connessa a 3 condensatori inizialmente scarichi con C_1=5 pF, C_2=10 pF, C_3=12 pF. Calcolare:

a) Le cariche q_1, q_2 , q_3 sui condensatori
b) La differenza di potenziale ΔV_1, ΔV_2 , ΔV_3 ai piatti dei 3 condensatori
c) L'energia U_1 , U_2 , U_3 immagazzinata nei condensatori
d) Ricalcolare le cariche q_1, q_2 , q_3 dopo che C_2 è stato interamente riempito di una sostanza di costante dielettrica relativa ε_{r1} = 4 e C_3 riempito di una sostanza con ε_{r3} = 2
e) Ricalcolare ΔV_1, ΔV_2 , ΔV_3 dopo l'inserimento dei dielettrici
f) Ricalcolare U_1 , U_2 , U_3 dopo l'inserimento dei dielettrici

Problema 3

Una batteria con forza elettromotrice $\mathscr{E}$ = 12 V viene connessa a 3 condensatori inizialmente scarichi con C_1=5 pF, C_2=10 pF, C_3=12 pF.

$$C_{12} = C_1 C_2 / \left(C_1 + C_2 \right) = 3.3333\, pF$$

$$q_{12} = q_1 = q_2 = C_{12}\mathscr{E} = 3.3333\, pF \times 12V = 40\ pC$$

$$q_3 = C_3\, \mathscr{E} = 12\, pF \times 12V = 144\ pC$$

$$\Delta V_3 = \mathscr{E} = 12V$$

$$\Delta V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{40\ pC}{5\, pF} = 8V \qquad \Delta V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{40\ pC}{10\, pF} = 4V$$

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 = 2.5\, pF \times 64 V^2 = 160\, pJ$$

$$\Delta U_2 = 5\, pF \times 16 V^2 = 80\, pJ \qquad \Delta U_3 = 6\, pF \times 144 V^2 = 864\, pJ$$

Problema 3

$\mathscr{E}$ = 12 V C_1=5 pF, C_2= 10 pF, C_3=12 pF, ε_{r1} = 4 , ε_{r3} = 2

$$\tilde{C}_{12} = \varepsilon_{r1} C_1 C_2 / \left(\varepsilon_{r1} C_1 + C_2 \right) = (200/30)\, pF = 6.666\, pF$$

$$q_1 = q_2 = \tilde{C}_{12} \mathscr{E} = 6.666\, pF \times 12V = 80\ pC$$

$$q_3 = (\varepsilon_{r3} C_3) \mathscr{E} = 24\, pF \times 12V = 288\ pC$$

$$\Delta V_1 = \frac{q_1}{\tilde{C}_1} = \frac{80\, pC}{20\, pF} = 4V \qquad \Delta V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{80\, pC}{10\, pF} = 8V$$

$$\mathscr{E} = \Delta V_3 = 12V$$

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} \tilde{C}_1 \Delta V_1^2 = 10\, pF \times 16 V^2 = 160\, pJ$$

$$\Delta U_2 = 5\, pF \times 64 V^2 = 320\, pJ \qquad \Delta U_3 = 12\, pF \times 144 V^2 = 1728\, pJ$$

Problema 25.5: sfera conduttiva isolata

Su una sfera conduttiva di raggio R=10 cm è collocata una carica q=1 nC; calcoliamo:

La capacità della sfera carica:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = 4\pi \times 8.85 \frac{pF}{m} \times 0.1m = 11.1pF$$

L'energia immagazzinata nel campo elettrico all'esterno della sfera:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(nC)^2}{11.1pF} = 0.45\times 10^{-7} J$$

Il campo elettrico sulla superficie della sfera:

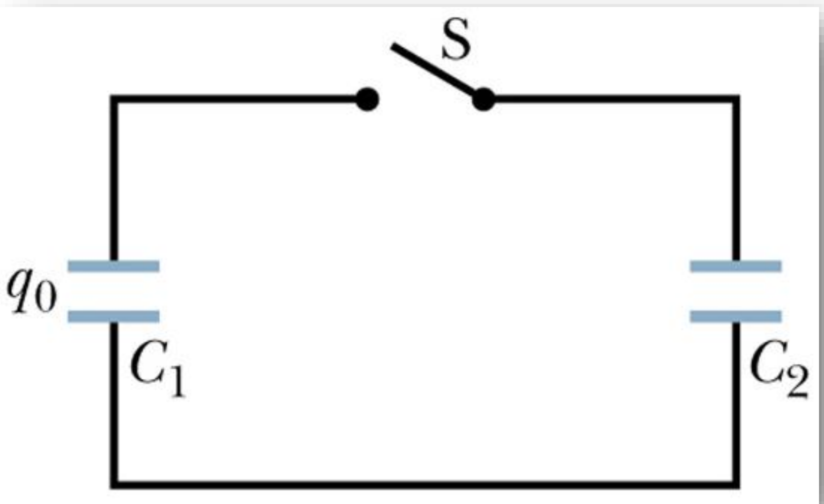
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = 9\times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{1nC}{(10\,cm)^2} = 9\times 10^2 \frac{N}{C} = 9\times 10^2 \frac{V}{m}$$

La densità di energia sulla superficie della sfera

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} 8.85 \frac{pF}{m} \times 81\times 10^4 \left(\frac{V}{m}\right)^2 = 0.36\times 10^{-5} \frac{J}{m^3}$$

Problema 25.3

Il condensatore C_1=5 μF viene caricato con una batteria a potenziale ΔV_0=12 V; la batteria viene poi rimossa e C_1 collegato ad un altro condensatore C_2=10 μF. A circuito chiuso una certa quantità di carica si trasferisce da C_1 a C_2 fino a raggiungere una condizione di equilibrio con uguale differenza di potenziale ai capi dei due condensatori; **calcoliamo la differenza di potenziale comune ΔV a circuito chiuso**



Se q_0 è la carica di C_1 ricevuta dalla batteria, all'equilibrio questa si deve conservare, per cui le cariche finali sui condensatori sono tali che

$$q_0 = q_1 + q_2$$

$$\Rightarrow C_1 \Delta V_0 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Delta V_0 = \frac{5}{15} 12V = 4\ V$$