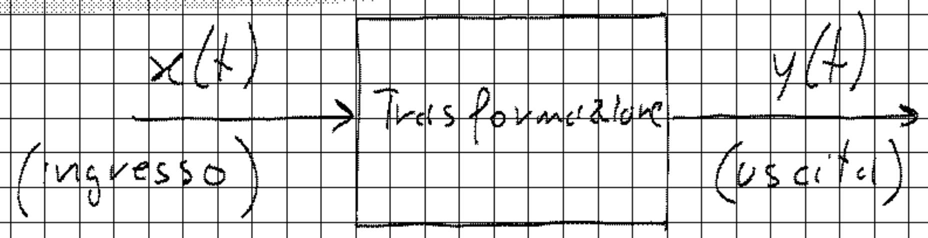
SISTEMI MONODIMENSIONALI LINEARI STAZIONARI A TEMPO CONTINUO

Definizione di sistema



$y(t) = T[x(t)]$

NB l'uscita "y" all'istante "t" non dipende solo dall'ingresso "x" all'istante "t" ma da $x(t)$ per $-\infty < t < +\infty$

Sistemi lineari

Se $x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$

allora $y(t) = T[x(t)] = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$

Sistemi stazionari

Se $y(t) = T[x(t)]$

allora $y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$

CARATTERIZZAZIONE DI SISTEMI LINEARI E STAZIONARI (SLS)

Risposta impulsiva

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(t)$$

$$h(t) = T\left[\delta(t)\right]$$

Se conosco la risposta impulsiva posso calcolare l'uscita del sistema quando in ingresso ho un segnale arbitrario

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Dimostrazione

$$y(t) = T\left[x(t)\right] = T\left[x(t) \otimes \delta(t)\right] =$$

$$= T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,\delta(t-\alpha)\,d\alpha\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,T\left[\delta(t-\alpha)\right]d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha)\,d\alpha = x(t) \otimes h(t)$$

NB. La risposta impulsiva $h(t)$ caratterizza COMPLETAMENTE il sistema

Proprietà

1) CAUSALITÀ

$$y(t) = T\left[x(\alpha);\ \alpha \leq t\right]$$

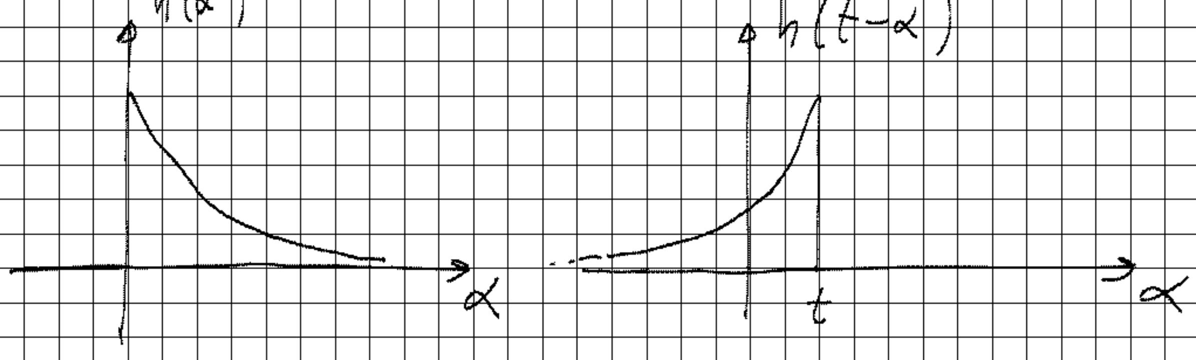
L'uscita all'istante "t" non può dipendere da valori dell'ingresso posteriori a tale istante

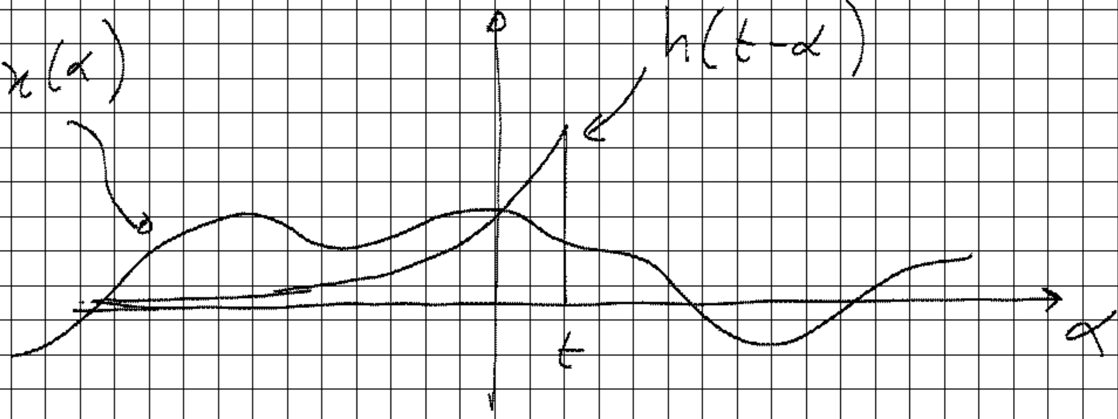
Un SLS è causale se $h(t)$ è causale

$h(t)$ causale $\Rightarrow$ $h(t) = 0$ per $t < 0$

Dimostrazione

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha =$$





Il prodotto $x(\alpha)\, h(t-\alpha) = 0$ per $\alpha > t$
per cui $y(t)$ non può dipendere da valori dell'ingresso di $x(t)$ posteriori a "t".

2) STABILITÀ BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se $|x(t)| < M \quad \forall t$

allora $y(t) = T[x(t)] < K \quad \forall t$

Per SLS la stabilità BIBO vale se e solo se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

Dimostrazione della sufficienza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| = H < \infty$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\alpha)|\, |h(t-\alpha)|\, d\alpha$$

$$\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\alpha)|\, d\alpha = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\alpha)|\, d\alpha = MH$$

quindi $|y(t)| \leq K$, $K = MH$

Altre proprietà

3) Memoria

·) Sistema senza memoria (istantaneo)

$$y(t) = T[x(t)]$$

dove "y" all'istante "t" dipende solo da "x" all'istante "t".

·) Sistema con memoria

È un sistema per cui non vale la condizione sopra

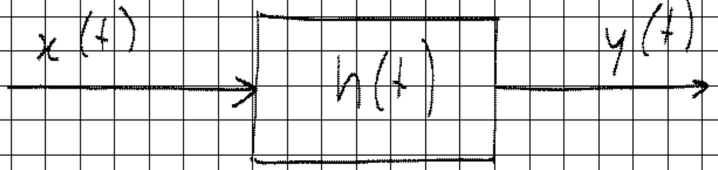
4) INVERTIBILITÀ

Dato $y(t) = T[x(t)]$

il sistema è invertibile se esiste una trasformazione $T^{-1}[\,]$ tale che

$$x(t) = T^{-1}[y(t)]$$

Risposta in frequenza



$$x(t) = e^{j2\pi f t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f \alpha}\, h(t-\alpha)\, d\alpha = (t-\alpha = \beta)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f (t-\beta)}\, h(\beta)\, d\beta =$$

$$= e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\, e^{-j2\pi f \beta}\, d\beta = x(t)\, H(f)$$

$$H(f) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} h(t)$$

$$\boxed{H(f) \triangleq \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}}$$ I^a definizione

$$\boxed{H(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$ II^a definizione

$$\boxed{H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{X(f)}}$$ III^a definizione

La III^a definizione deriva da

$$
\begin{array}{ccccc}
y(t) & = & x(t) & \otimes & h(t) \\
\Updownarrow{\scriptstyle TCF} & & \Updownarrow{\scriptstyle TCF} & & \Updownarrow{\scriptstyle TCF} \\
Y(f) & = & X(f) & & H(f)
\end{array}
\Rightarrow \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}
$$

RISPOSTA IN AMPIEZZA ED IN FASE

$A(f) = |H(f)|$ RISPOSTA IN AMPIEZZA

$\varphi(f) = \angle H(f)$ RISPOSTA IN FASE

Questo ci permette di poter separare il calcolo del modulo e della fase dello spettro del segnale in uscita noto quello di ingresso

$$
\begin{cases}
|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \\
\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)
\end{cases}
$$

RISPOSTA AL GRADINO

$$
u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)
$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha = (t-\alpha = \beta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\, u(t-\beta)\, d\beta = \int_{-\infty}^{t} h(\beta)\, d\beta$$

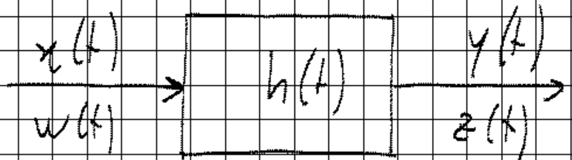
$$\Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\beta)\, d\beta$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

PROPRIETÀ FILTRI LINEARI

INTEGRAZIONE

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$



$$w(t) = x(t) \otimes u(t) = u(t) \otimes x(t)$$

$$z(t) = w(t) \otimes h(t) = \left[u(t) \otimes x(t)\right] \otimes h(t) =$$

$$= u(t) \otimes \left[x(t) \otimes h(t)\right] = u(t) \otimes y(t) =$$

$$= y(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\, d\alpha = z(t)$$

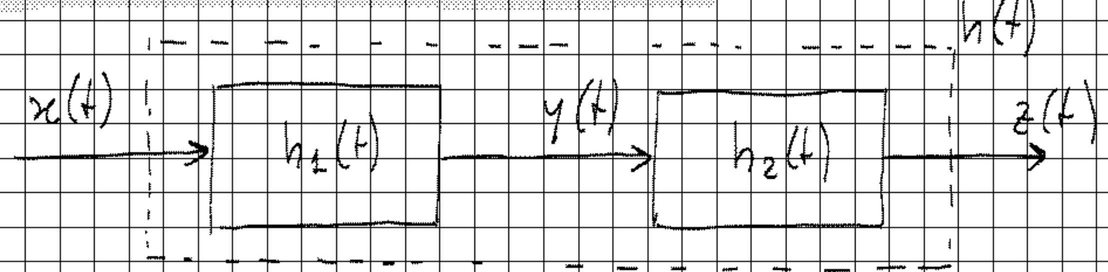
DERIVAZIONE

La proprietà di derivazione si può dedurre da quella della integrazione facendo un ragionamento inverso

Se $w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$ allora

$$x(t) = \frac{d}{dt} w(t) \Rightarrow y(t) = \frac{d}{dt} z(t)$$

SISTEMI IN CASCATA



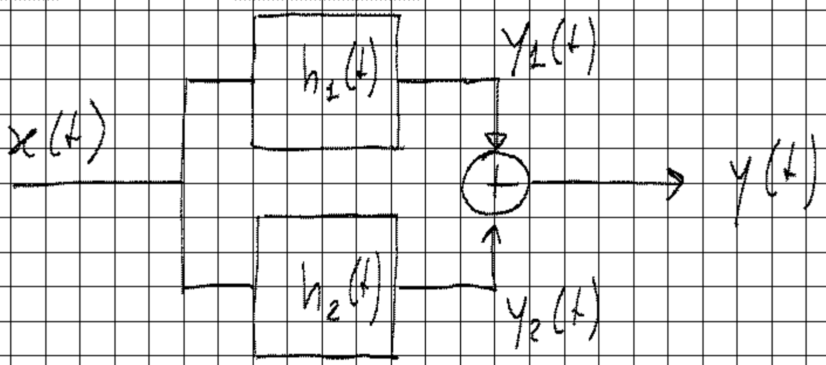
$$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = \left[x(t) \otimes h_1(t) \right] \otimes h_2(t) =$$

$$= x(t) \otimes \left[h_1(t) \otimes h_2(t) \right] = x(t) \otimes h(t)$$

$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

SISTEMI IN PARALLELO



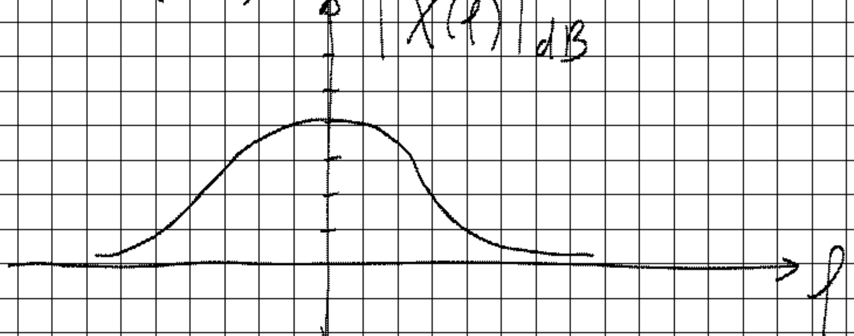
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) =$$
$$= x(t) \otimes \left[h_1(t) + h_2(t) \right] = x(t) \otimes h(t)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

IL DECIBEL

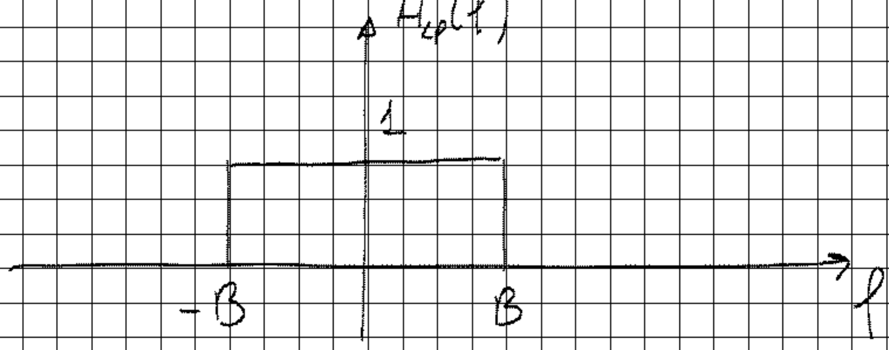
Spesso la risposta in ampiezza e' rappresentata in decibel (dB)



$$\left| X(f) \right|_{dB} = 10 \log \left| X(f) \right|$$

FILTRI IDEALI

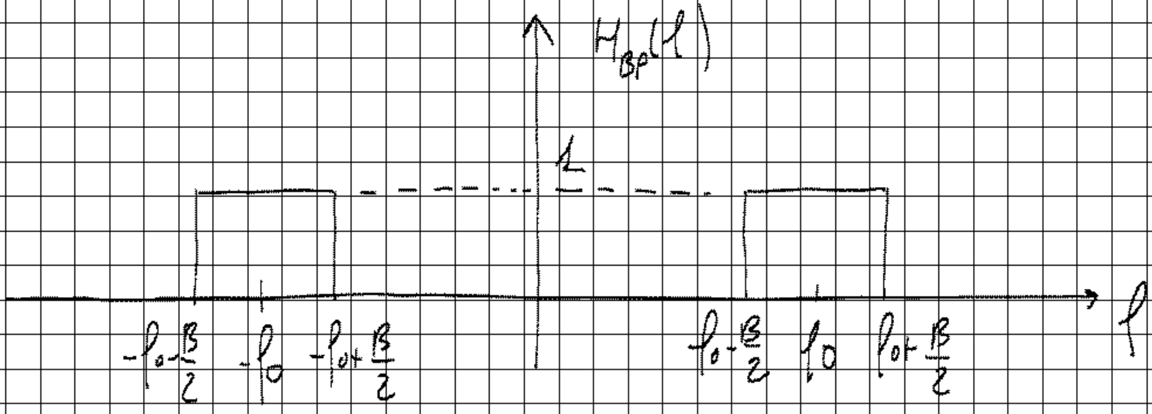
Passa basso di banda B



$$H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$ RISPOSTA IN FREQUENZA

$$h_{LP}(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$ RISPOSTA IMPULSIVA

Passa banda di banda B



$$H_{BP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)$$

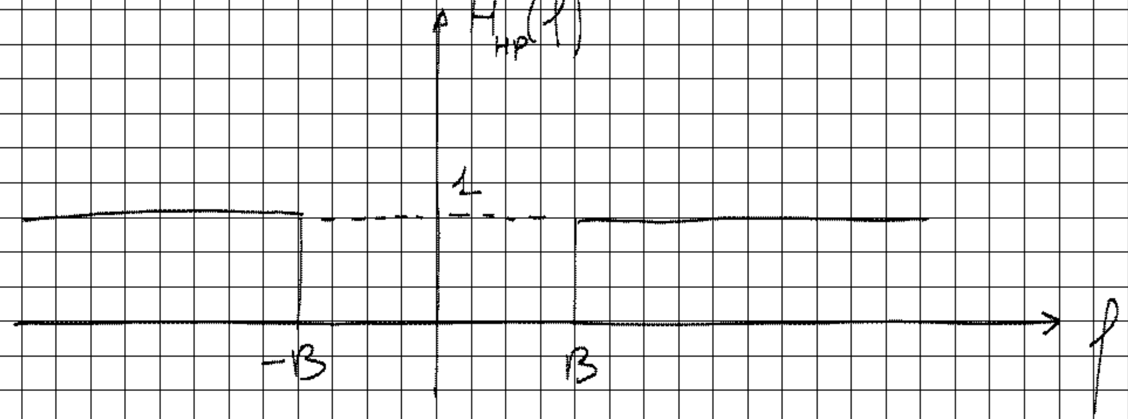
$$h_{BP}(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$$

N.B. La banda è definita come l'intervallo di frequenze positive dove lo spettro è non nullo

Per i filtri passabanda si definisce il fattore di qualità

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

Passa alto



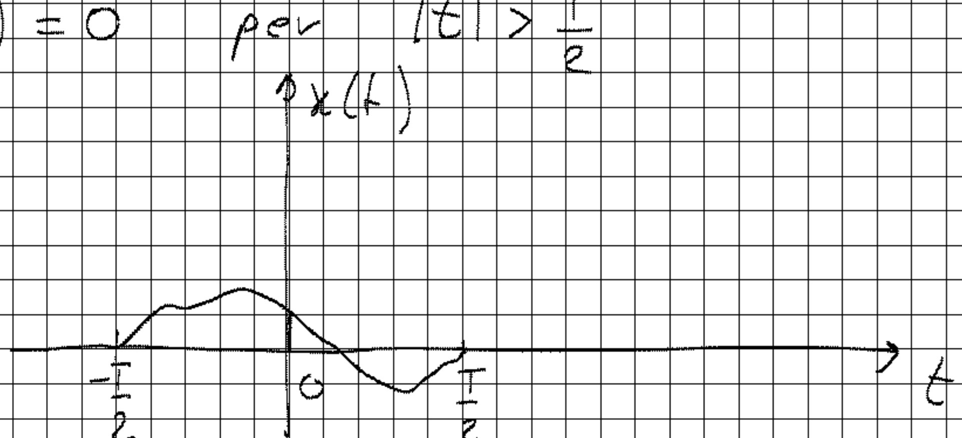
$$H_{HP}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$

DURATA e BANDA

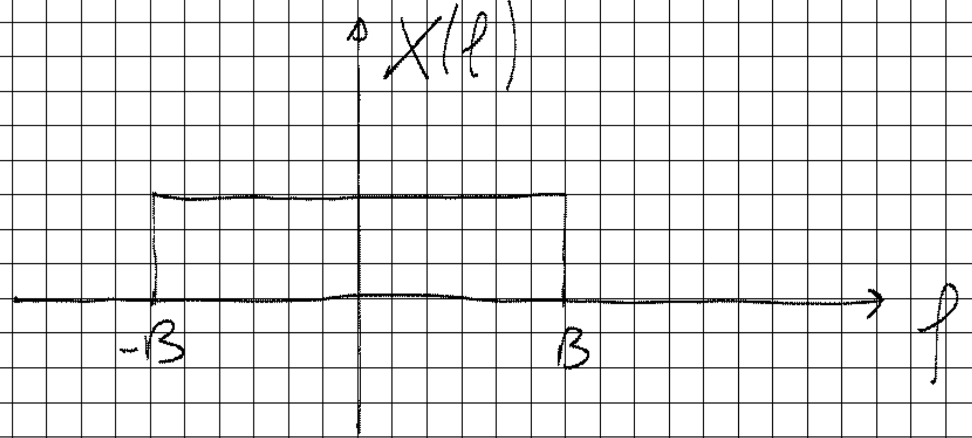
Segnale a durata rigorosamente limitata

$$x(t) = 0 \quad \text{per} \quad |t| > \frac{T}{2}$$



Segnale a banda rigorosamente limitata B

$$X(f) = 0 \quad |f| > B$$



PROPRIETÀ

$x(t)$ a durata rigorosamente limitata

$\Downarrow$

$X(f)$ a banda infinita

Dimostrazione

$$X(f) = TCF\left[x(t)\right] = TCF\left[x(t)\, rect\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$= X(f) \otimes \underbrace{T\, sinc(Tf)}_{\text{Banda infinita}}$$

Quindi la convoluzione di una qualunque funzione con una diversa da zero su tutto il dominio restituisce una funzione diversa da zero su tutto il dominio.

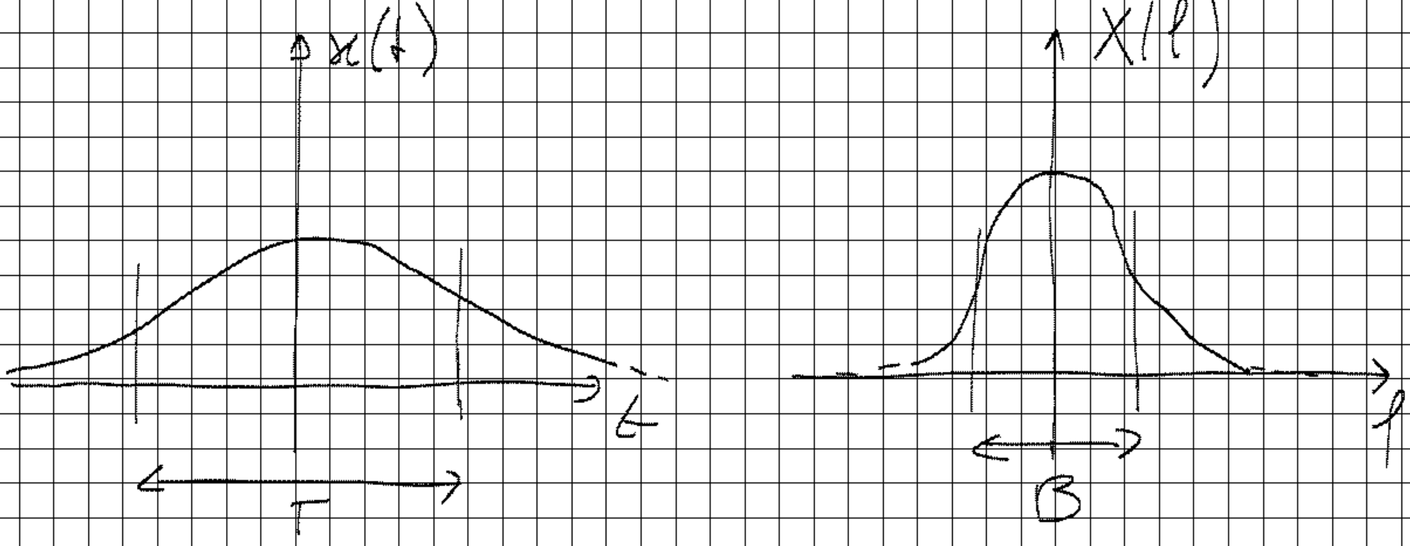
$$\boxed{\begin{array}{c} X(f) \text{ a banda rigorosamente limitata} \\ \Downarrow \\ x(t) \text{ a durata infinita} \end{array}}$$

$$x(t) = \text{ATCF}\left[X(f)\right] = \text{ATCF}\left[X(f)\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right]$$

$$= \underbrace{x(t) \otimes \underbrace{2B\,\text{sinc}(2Bt)}_{\text{durata infinita}}}_{\text{durata infinita}}$$

Problema

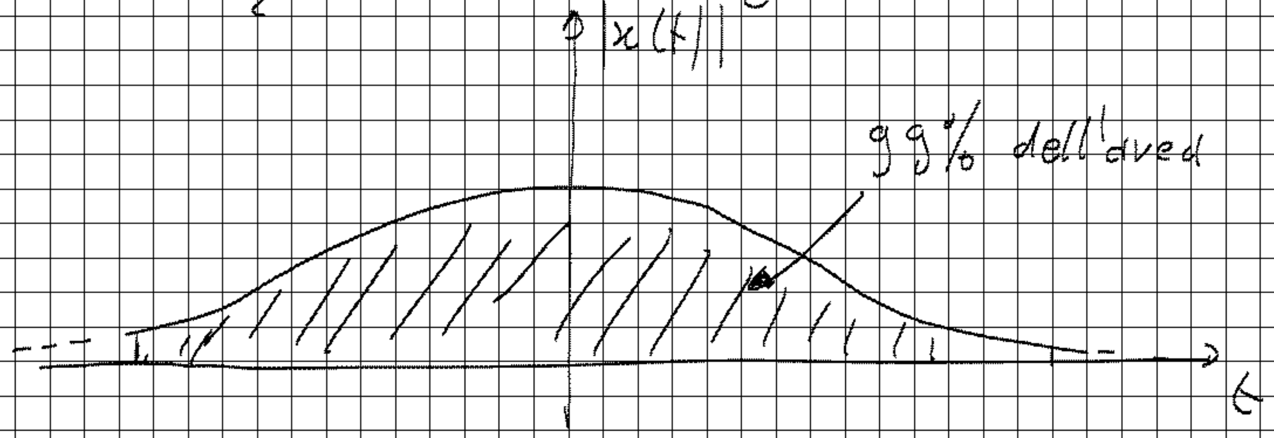
Una misura della durata e della banda va comunque definita in modo da ottenere valori finiti di entrambe.
In questo modo un segnale a banda limitata potrà aver durata limitata.



ALTRE DEFINIZIONI DI DURATA E BANDA

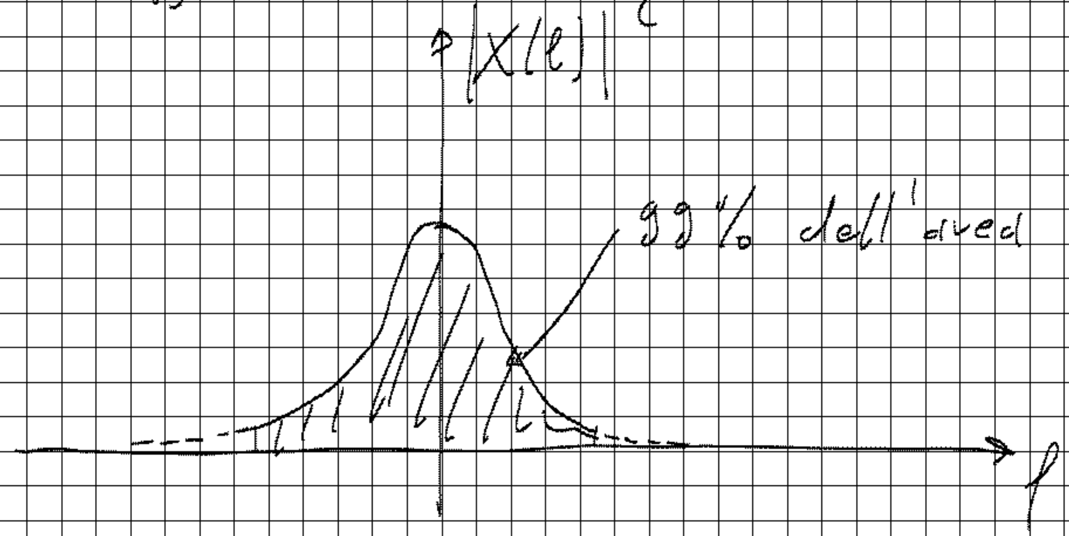
"Durata al 99% dell'energia"

$$D_{99} : \int_{-\frac{D_{99}}{2}}^{\frac{D_{99}}{2}} |x(t)|^2 \, dt = 0,99 \, E_x$$

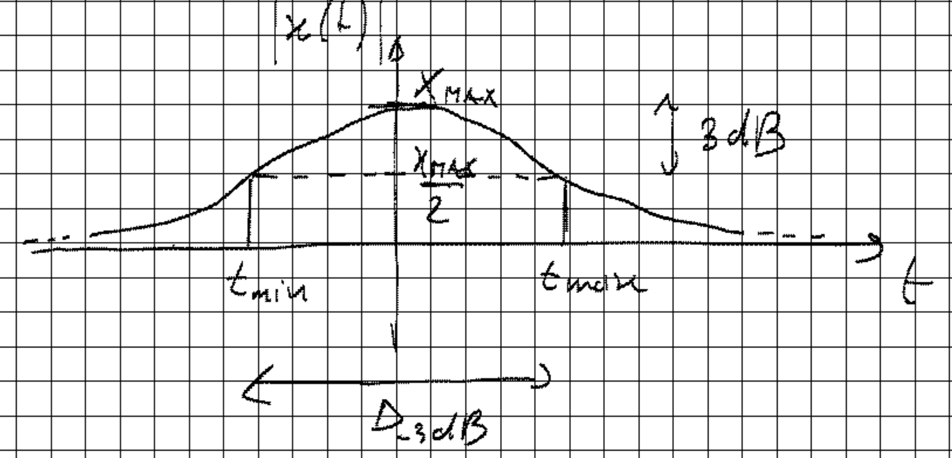


"Banda al 99% dell'energia"

$$B_{99} : \int_{-B_{99}}^{B_{99}} |X(f)|^2 \, df = 0,99 \, E_x$$

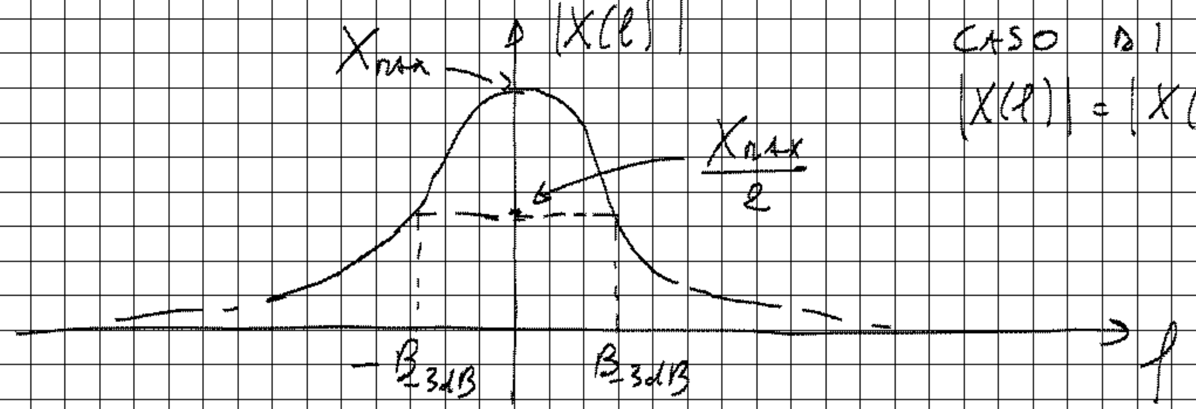


"Durata a −3dB"



$D_{-3dB} = t_{max} - t_{min}$ dove $[t_{min}, t_{max}]$
è l'intervallo temporale più ampio
dove $|x(t)| \geq \frac{X_{MAX}}{2}$ con $t \in [t_{min}, t_{max}]$

"Banda a − 3dB"



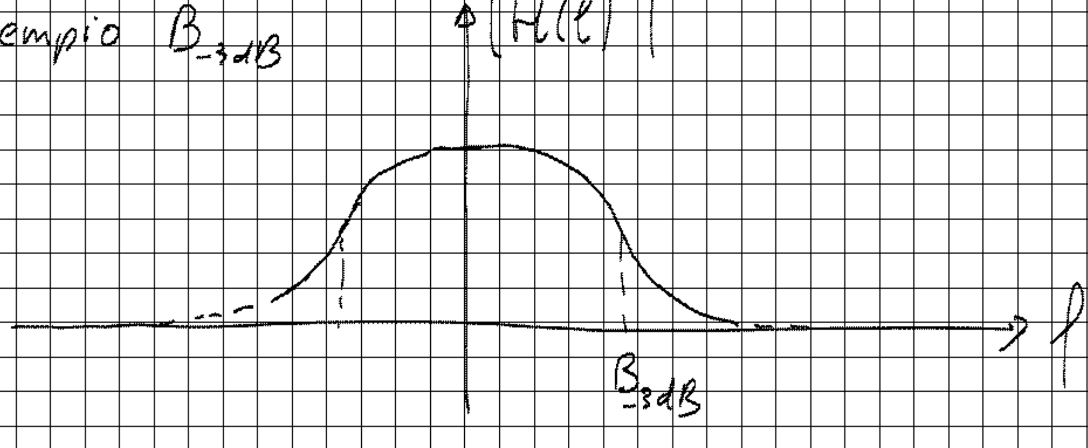
CASO DI
$|X(f)| = |X(-f)|$

B_{-3dB} : $X(B_{-3dB}) = \frac{X_{MAX}}{2}$

NB. DURATA e BANDA a −3dB hanno senso solo se si hanno segnali o spettri che decrescono monotonicamente

Il concetto di Banda vale anche per i SLS dove si può definire la $H(f)$.

Esempio B_{-3dB}



DISTORSIONI LINEARI

Definizione di replica fedele

$y(t)$ è una replica fedele di $x(t)$ se

$$y(t) = K\,x(t-t_0)$$

$$\text{TCF} \Updownarrow \qquad ,\ K, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

Filtro "fedele"

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

Risposta in ampiezza di un filtro "fedele"

$$|H(f)| = |K|$$

Risposta in fase di un filtro "fedele"

$$\angle H(f) = -2\pi f t_0 + \angle K$$

Risposta in frequenza di un filtro "fedele"

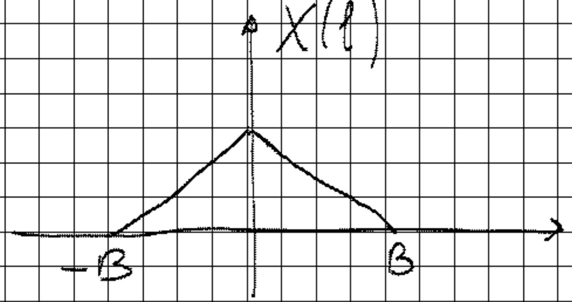
$$H(f) = |K| e^{-j\left[2\pi f t_0 - \angle K\right]}$$

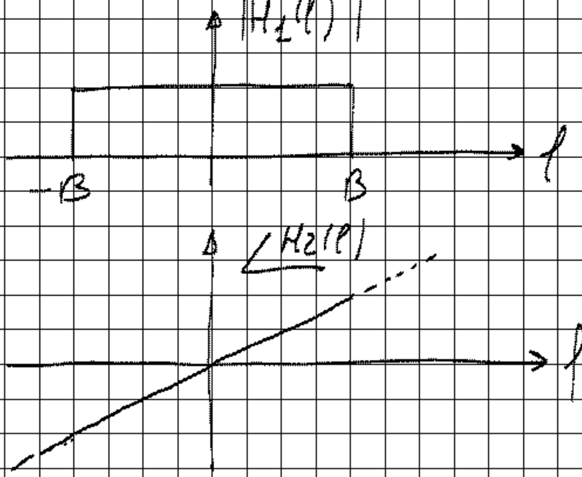
Risposta impulsiva di un filtro "fedele"

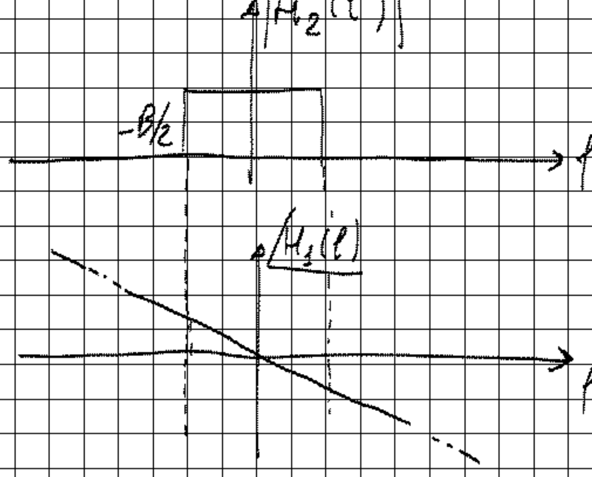
$$h(t) = K\,\delta(t-t_0)$$

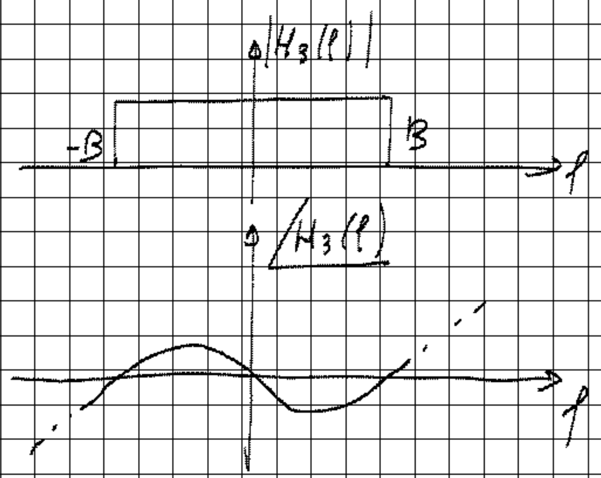
N.B. Filtri lineari possono provocare solo distorsioni lineari

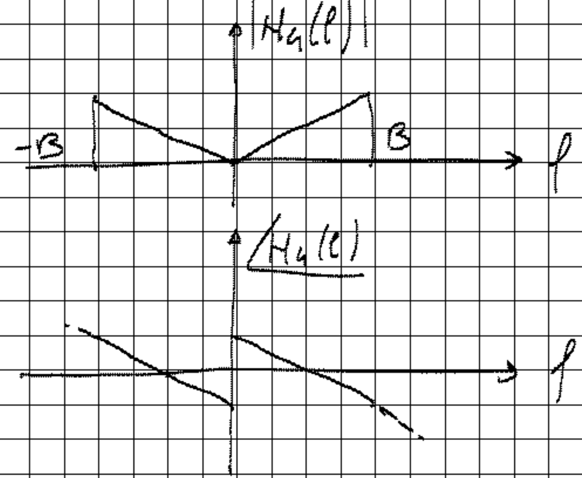
Esempi











- $H_1(f)$ non introduce distorsioni ($t_0 < 0$)
- $H_2(f)$ introduce distorsioni di ampiezza
- $H_3(f)$ introduce distorsioni di fase
- $H_4(f)$ introduce distorsioni di ampiezza e di fase

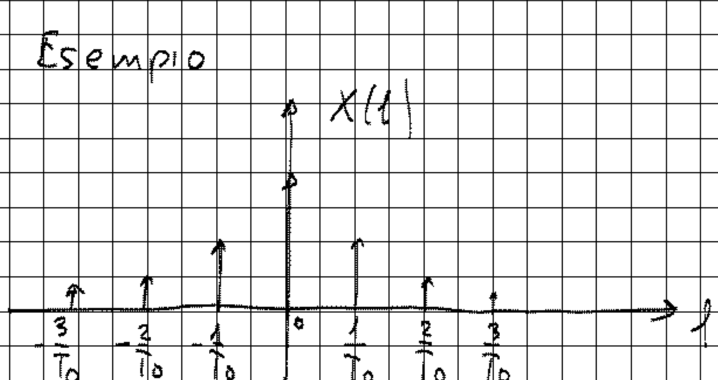
FILTRAGGIO DI SEGNALI PERIODICI

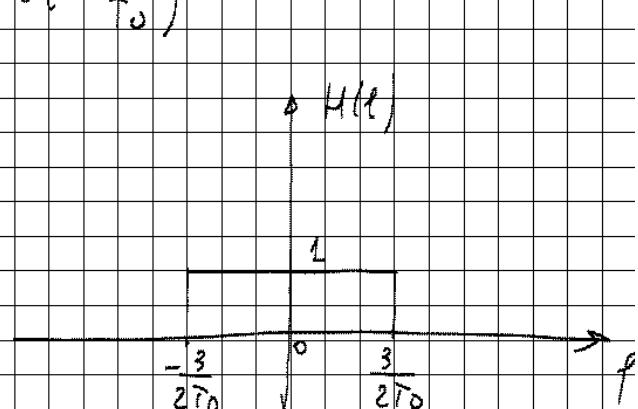
$$x(t) = x(t + kT_0)$$

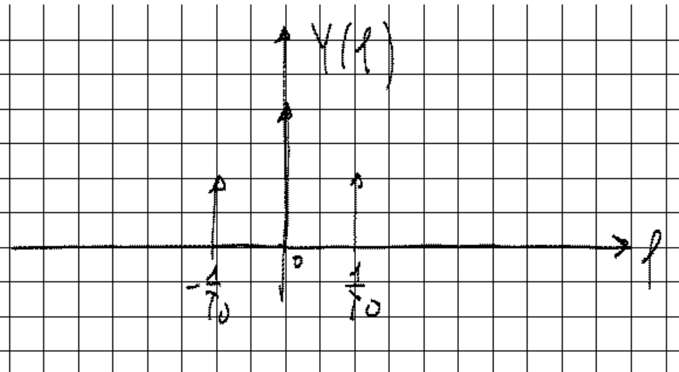
$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \sum_k X_k \,\delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) H(f)$$

Esempio



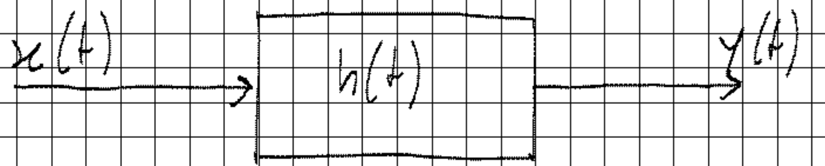




Il segnale in uscita da un filtro lineare quando in ingresso è presente un segnale periodico è ancora un segnale periodico

FILTRI ED ANALISI ENERGETICA

Per segnali aperiodici $\qquad h(t) \in \mathbb{R}$



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt, \quad R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

$$\boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)}$$

Dimostrazione

$$R_x(\tau) = x(\tau) \otimes x^*(-\tau)$$

$$R_x(\tau) \overset{TCF}{\Leftrightarrow} S_x(f) = |X(f)|^2$$

$$R_y(\tau) \overset{TCF}{\Leftrightarrow} S_y(f) = |Y(f)|^2$$

$$Y(f) = X(f)\, H(f)$$

$$S_y(f) = |X(f)|^2\, |H(f)|^2 = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f)$$

$$R_y(\tau) = FT^{-1}\left[S_y(f)\right] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Per segnali periodici

$$x(t) = x(t + kT_0)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Dimostrazione

$$S_y(f) = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = \sum_k |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) |H(f)|^2 =$$

$$= S_x(f)\, H(f)\, H^*(f)$$

$$R_y(f) = FT^{-1}\left[S_y(f) \right] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Per segnali aperiodici a potenza finita

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad , \quad X_T(f) = FT\left[x_T(t) \right]$$

$$x_T(t) = x(t)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)}$$