Decodifica mediante sindrome per i codici a blocco

Si definisce *sindrome* di $\mathbf{y}$, il vettore $\mathbf{s}$ ottenuto dal prodotto di $\mathbf{y}$ con la matrice di controllo di parità

$$\mathbf{s} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T = (\mathbf{x} + \mathbf{e})\,\mathbf{H}^T = \mathbf{x}\mathbf{H}^T + \mathbf{e}\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\mathbf{H}^T \tag{10}$$

- Tutti i membri di uno stesso coset hanno la stessa sindrome;
- La sindrome $\mathbf{s}$ è composta da $n - k$ cifre binarie;
- Le 2^{n-k} sindromi sono associate ai 2^{n-k} diversi coset del codice $\mathcal{C}(k, n)$;
- Ciascuna sindrome è associata ai 2^k pattern di errore appartenenti allo stesso coset.

Decodifica mediante sindrome per i codici a blocco

- Il decodificatore a sindrome compie quindi le seguenti operazioni:
  1. Calcola la sindrome $\mathbf{s} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T$;
  2. Associa la sindrome al coset leader corrispondente $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{e}_{CL}(\mathbf{s})$;
  3. Corregge l'errore sommando il coset leader alla n-upla $\mathbf{y}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{e}_{CL}(\mathbf{s}). \tag{11}$$

- La parola $\hat{\mathbf{x}}$ è una parola di codice:

$$\hat{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T = (\mathbf{y} + \mathbf{e}_{CL}(\mathbf{s}))\mathbf{H}^T = \mathbf{s} + \mathbf{s} = 0 \tag{12}$$

- Per costruzione, la parola di codice $\hat{\mathbf{x}}$ minimizza la distanza di Hamming da $\mathbf{y}$!

Decodifica a sindrome per il codice di Hamming $m = 3$

Il codice ha $d_{min} = 3$ ed è in grado di correggere *esattamente* un errore.

- Si sceglie la matrice $\mathbf{H}$ in maniera che la *tabella di decodifica* associ alla sindrome il pattern di errore a peso 1 in cui il bit messo a 1 sia nella posizione corrispondente alla conversione della sindrome in decimale.

Codice non sistematico

Syndrome	Coset leader
[000]	[0000000]
[100]	[1000000]
[010]	[0100000]
[110]	[0010000]
[001]	[0001000]
[101]	[0000100]
[011]	[0000010]
[111]	[0000001]

Codice non sistematico

Syndrome	Coset leader
[000]	[0000000]
[100]	[0000100]
[010]	[0000010]
[110]	[1000000]
[001]	[0000001]
[101]	[0100000]
[011]	[0010000]
[111]	[0001000]

Esercizio

- Un codice lineare a blocchi ha la seguente matrice di controllo di parità:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinare la matrice generatrice del codice;
2. Decodificare mediante decodifica a sindrome la parola $\mathbf{y} = [110110]$ ed identificare la parola di codice trasmessa.

Prestazioni sistemi codificati

Calcolo della probabilità di errore sulle parole di codice

Un codice a blocco $\mathcal{C}(k, n)$ con $d_{min} = 2t + 1$ è in grado di correggere fino a t errori.

- Una parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$ è errata quando il canale introduce un numero di errori maggiore di t.
- La probabilità di errore $P_w(e) = \Pr\{w(\mathbf{e}) > t\}$ si calcola

$$P_w(e) = \sum_{j=t+1}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

- $P_w(e)$ può essere lower-bounded dalla probabilità dell'evento più probabile: aver commesso $t + 1$ errori

$$P_w(e) \approx \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$$

Bound per il calcolo della probabilità di errore sul bit

Mentre la $P_w(e)$ si riesce a calcolare con precisione, nel caso del calcolo della probabilità di errore su bit codificato si deve per forza ricorrere ad approssimazioni.

- Il numero di bit errati in $\hat{\mathbf{x}}$ dopo la decodifica dipende dal vettore di errore $\mathbf{e}$ e da come agisce la decodifica a sindrome, che, in presenza di un numero di errori maggiore di t, aggiunge altri errori a quelli introdotti dal canale.
- La decodifica a sindrome restituisce sempre una parola di codice, quindi ogni volta che al ricevitore c'è un errore nella decodifica i bit errati sono almeno d_{min} degli n trasmessi.
- In questo caso la $P_b(e)$ si approssima

$$P_b(e) \approx \frac{d_{min}}{n} P_w(e) \approx \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}. \quad (1)$$