DEFINIZIONI ALGEBRA LINEARE

SISTEMA LINEARE

1) È un insieme di **m** equazioni lineari con **n** incognite che devono essere verificate contemporaneamente.

SPAZIO EUCLIDEO IN $\mathbb{R}^n$

2) $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

- ✓ Fissato un generico intero n, si denoterà con $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali. L'intero n si dirà dimensione di $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.
- ✓ Dato $x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, il numero reale x_i è detto **i-esima componente** del vettore x.
- ✓ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} : \mathbf{x} = \mathbf{y} \equiv \mathbf{con}\ \forall \mathbf{i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\},\ \mathbf{x_i} = \mathbf{y_i}$

3) **SOMMA DI VETTORI:** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \equiv (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n} + \boldsymbol{y_n})$

4) **PRODOTTO SCALARE PER VETTORE:**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},\ \ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\lambda x} = (\boldsymbol{\lambda x_1}, \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{\lambda x_n})$$

5) **ASSIOMI SPAZIO VETTORIALE**

I. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$;
II. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;
III. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},\ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\lambda y}$;
IV. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},\ \forall \boldsymbol{\lambda}, \mu \in \mathbb{R} : (\boldsymbol{\lambda} + \mu)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda x} + \mu \boldsymbol{x}$;
V. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}},\ \forall \boldsymbol{\lambda}, \mu \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\lambda}(\mu \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\lambda}\mu)\boldsymbol{x}$;
VI. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \mathbf{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
VII. $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\ , \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
VIII. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
IX. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \mathbf{0}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
X. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : (-\mathbf{1})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$;
XI. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : -(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

6) NORMA

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \ |\boldsymbol{u}| \equiv \sqrt{\boldsymbol{u}_1^2 + \boldsymbol{u}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{u}_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i^2}$$

ASSIOMI

I. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ |\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$;
II. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
III. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} : |\boldsymbol{\lambda x}| = |\boldsymbol{\lambda}||\boldsymbol{x}|$;
IV. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R} : \ |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.

7) VERSORI

Dato un vettore u $\in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, e supposto u $\neq$ 0, si definisce *versore* di *u* il vettore ottenuto considerandone il multiplo secondo il reciproco della sua norma, ossia $\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}$.

8) DISTANZA

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \equiv |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i)^2}$$

ASSIOMI

I. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq \boldsymbol{0}$;
II. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$;
III. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$;
IV. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$.

9) SFERA EUCLIDEA

BALL EUCLIDEA
$\forall \boldsymbol{u_0} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{\delta}) \equiv \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\delta}\}$

BALL APERTA
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{\delta}) \equiv \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v}) < \boldsymbol{\delta}\}$

BALL CHIUSA
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{\delta}) \equiv \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{d}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v}) \leq \boldsymbol{\delta}\}$

10)PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^n$

$$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ \boldsymbol{uv} \equiv \boldsymbol{u_1v_1} + \boldsymbol{u_2v_2} + \cdots + \boldsymbol{u_nv_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u_iv_i}$$

ASSIOMI

I. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{uu} \geq \boldsymbol{0}$;
II. $\boldsymbol{uu} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$;
III. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$;
IV. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R} \quad (\boldsymbol{\alpha u} + \boldsymbol{\beta v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\alpha uw} + \boldsymbol{\beta vw}$.

11)COSENO DELL' ANGOLO FRA VETTORI NON NULLI

$$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{cos}\,\widehat{\boldsymbol{uv}} \equiv \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$

12)PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{C}^n$

$$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \ \boldsymbol{uv} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u_i\overline{v_i}}$$

ASSIOMI

I. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \quad \boldsymbol{uu} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u_i\overline{u_i}} \equiv \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{u_i}|^2 \geq \boldsymbol{0}$;
II. $\boldsymbol{uu} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$;
III. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \quad \boldsymbol{vu} = \overline{\boldsymbol{uv}}$; EMISIMMETRIA;
IV. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n, \ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C} \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\alpha v} + \boldsymbol{\beta w}) = \overline{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{uv} + \overline{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{uw}$ e $(\boldsymbol{\alpha u} + \boldsymbol{\beta v})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\alpha uw} + \boldsymbol{\beta vw}$ SESQUILINEARITÀ.

13)PROIEZIONE

$$\boldsymbol{P_v u} \equiv \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{v}|^2}\,\boldsymbol{v} \quad , \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$$

14)AREA PARALLELOGRAMMA E TRIANGOLO

$$\boldsymbol{Area_P}\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sqrt{|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{uv})^2}$$
$$\boldsymbol{Area_T}\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{Area_P}\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

15)PRODOTTO VETTORE IN $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} det \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ - det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ASSIOMI

I. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \boldsymbol{\lambda}, \mu \in \mathbb{R}$: $(\boldsymbol{\lambda u} + \mu \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\lambda u} \wedge \boldsymbol{w} + \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$;

II. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$;

III. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$;

IV. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{uw}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{uv})$.

16)SISTEMA ORTOGONALE E ORTONORMALE

$\boldsymbol{u_1}, \dots, \boldsymbol{u_n}$ si dicono *ORTOGONALI* se $\boldsymbol{u_i u_j} = \boldsymbol{0} \quad \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{n}$
Se $|\boldsymbol{u_1}| = \cdots = |\boldsymbol{u_n}| = \boldsymbol{1}$, si dicono *ORTONORMALI.*

17)COMPLEMENTO ORTOGONALE $\quad \boldsymbol{W}^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{xw} = \boldsymbol{0}\ \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\}$

TEORIA DELLA DIMENSIONE

18)SPAN

$$\boldsymbol{Span}(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}) = < \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n} > := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i u_i}\, , \qquad \boldsymbol{\alpha_i} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{o}\ \mathbb{C} \right\}$$

19)DIPENDENZA LINEARE

Un sistema di vettori è detto *LINEARMENTE DIPENDENTE* se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri. Se $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}$ sono dipendenti allora $\exists\ \boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}$ NON TUTTI NULLI tali che $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i u_i} = \boldsymbol{0}$

20)INDIPENDENZA LINEARE

Un sistema di vettori che NON è dipendente si dice *LINEARMENTE INDIPENDENTE.* $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}$ linearmente indipendenti se $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i u_i} = \boldsymbol{0}$, è verificata solo se $\forall \boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{0}$

21)BASE

Una base di uno spazio vettoriale è un *SISTEMA DI GENERATORI INDIPENDENTE:*

$$X = < x_1, x_2, \dots, x_n > \quad e \quad x_1, x_2, \dots, x_n \; indipendenti$$

22)SOMMA DIRETTA

Posti $X_i, i = 1, \dots, n$ sottospazi di X e posto $\sum_{i=1}^{n} X_i = \{\sum_{i=1}^{n} x_i : x_i \in X_i\}$ come sottospazio somma, si dirà che tale somma sia *DIRETTA* e si scrive:

$\sum_{i=1}^{n} X_i = \oplus_{i=1}^{n} X_i$ **se** $\forall x_i, x'_i \in X_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \quad x_i = x'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

MATRICI

23)MATRICE

Una *matrice* **m×n**, a m righe ed n colonne, a termini razionali, reali o complessi, è una *funzione* $\mathcal{A} : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Q} \; o \; \mathbb{R} \; o \; \mathbb{C}$. Si usano i simboli $\mathbb{Q}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$ per denotare l´insieme delle matrici m×n a termini rispettivamente razionali, reali o complessi.

24)SOMMA TRA MATRICI E PRODOTTO MATRICE PER UNO SCALARE

$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ *SOMMA*	$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$ *PRODOTTO PER SCALARE*

25)MATRICE QUADRATA, TRIANGOLARE, DIAGONALE

- ✓ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con *m = n*, è detta *QUADRATA* ;
- ✓ Una matrice QUADRATA $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ viene detta *DIAGONALE* se $a_{ij} = 0 \; per \; i \neq j$
- ✓ Una matrice QUADRATA $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ viene detta *TRIANGOLARE* se $a_{ij} = 0 \; per \; i > j$ **.**

26)MATRICE IDENTICA

La matrice $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} : \begin{cases} 1 \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$ è detta *IDENTICA* (in $\mathbb{R}^{n\times n}$).

Talvolta si scrive $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; i = j \\ 0 \; i \neq j \end{cases}$ *" δ di KRONECKER"*.

27)MINORE

Una matrice $\mathbb{R}^{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}}$ ottenuta sopprimendo da una matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}$ righe ed $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}$ colonne viene detta *MINORE* (estratto) da A.
I *minori principali* sono quelli nei quali vengono soppresse righe e colonne dello stesso indice.

28)CONVENZIONE DI EINSTEIN (-LANDAU)

Se un prodotto di quantità dipendenti da indici contiene una coppia di indici uguali, è sottintesa *una somma di tutti i prodotti ottenuti* facendo variare gli indici in tutti i valori possibili.

$$\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i$$

29)PRODOTTO TRA MATRICI

Date $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ **e** $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}}$ si definisce $\boldsymbol{AB} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}}$ ponendo:

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \boldsymbol{A}_{ih}\boldsymbol{B}_{hj} \equiv \sum_{h=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ih}\boldsymbol{B}_{hj}$$

30)MATRICE TRASPOSTA

Data $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$, si definisce la matrice *TRASPOSTA* $\boldsymbol{A}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}} : (\boldsymbol{A}^*)_{ij} = \boldsymbol{A}_{ji}$

31)MATRICE AGGIUNTA ED AUTOAGGIUNTA

Data $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$, si definisce la matrice *AGGIUNTA* $\boldsymbol{A}^* \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}} : (\boldsymbol{A}^*)_{ij} = \overline{\boldsymbol{A}}_{ji}$

Se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, la matrice è detta *AUTOAGGIUNTA.*

32)MATRICE REGOLARE E MATRICE SINGOLARE

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ si dice *REGOLARE* se le sue colonne sono indipendenti, *SINGOLARE* altrimenti.

33)INVERTIBILITÀ

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ si dice *INVERTIBILE* se $\exists\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ tale che $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ (la matrice identica)

34)DETERMINANTE

Si definisce $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$ *la funzione* $\boldsymbol{det}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti *proprietà:*

- $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}) = \boldsymbol{1}$;
- $\boldsymbol{det}\left(\boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A_i}\ \dots, \boldsymbol{A_j}, \dots, \boldsymbol{A_n}\right) = -\boldsymbol{det}\ \left(\boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A_j}\ \dots, \boldsymbol{A_i}, \dots, \boldsymbol{A_n}\right)$;
- $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n}) + \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n})$;
- $\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{\lambda A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n}) = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n})$.

APPLICAZIONI LINEARI

35)OPERATORE LINEARE

$\boldsymbol{\mathcal{A}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ verificante la proprietà di *linearità:*

$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}')\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{X}$

ADDITIVITÀ

$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{\lambda \mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$

OMOGENEITÀ

36)INIETTIVA, SURIETTIVA, BIIETTIVA

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

INIETTIVITÀ

$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}\quad \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$

SURIETTIVITÀ

BIIETTIVITÀ

37)NUCLEO: $\boldsymbol{Ker\ A} = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$

38)IMMAGINE: $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} : \exists\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\ \boldsymbol{per\ cui}\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$

39)MATRICE ASSOCIATA AD $\mathcal{A}$ E A DUE BASI

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, e_j{}'}$$

40)MATRICE ASSOCIATA A CAMBIO DI BASE

La matrice di *cambio di base* è definita come la *matrice* avente come *colonne le coordinate di ciascuno dei vettori* di $\mathbf{e_1}'$ … $\mathbf{e_n}'$ rispetto alla base $\mathbf{e_1}$ … $\mathbf{e_n}$ e cioè $\mathbf{M} = (\mathbf{m_{ij}})$ ove:

$$\boldsymbol{e_j' = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i}$$

41)MATRICE ASSOCIATA A FORMA BILINEARE

Data un'applicazione bilineare $\boldsymbol{\alpha}$ definita sulle coppie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ di vettori di $\boldsymbol{X}$, a valori reali, e una base $\boldsymbol{u_i}$, $\boldsymbol{i = 1..n}$ **in** $\boldsymbol{X}$, si definisce *matrice associata all'applicazione bilineare* la matrice $\boldsymbol{a_j^i = \alpha\,(u_i\,,\,u_j\,)}$. Essa verifica $\boldsymbol{\alpha(x, y) = x_i{}'\, a_j^i\, y^j}$, ove $\boldsymbol{x_i}'$ è il vettore (riga) trasposto del vettore delle coordinate di $\boldsymbol{x}$ rispetto alla base di $\boldsymbol{X}$, e $\boldsymbol{y^j}$ è il vettore (colonna) delle coordinate di $\boldsymbol{y}$.

42)SPAZIO DUALE

Uno spazio duale è lo *spazio vettoriale* formato da tutti i funzionali lineari $\boldsymbol{f: V \to K}$ tale che:

$\boldsymbol{(f + g)(w) := f(w) + g(w)}$

$\boldsymbol{(\alpha f)(w) := \alpha f(w)}$

43)BASE DUALE

Sia $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{v_1, \dots, v_n}\}$ una base per V, la *base duale* $\boldsymbol{B^*} = \{\boldsymbol{v^*{}_1, \dots, v_n{}^*}\}$ è definita dalle relazioni $\boldsymbol{v^*{}_i(v_j) = \begin{cases} 1\ se\ i = j \\ 0\ se\ i \neq j \end{cases}}$

44)APPLICAZIONE INVERSA

$\mathcal{A}: X \to Y$ è detta INVERTIBILE se $\exists\, \mathcal{A}^{-1}: \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, detta INVERSA tale che:

$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x)) = x \ , \quad \forall x \in X \quad e \quad \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{-1}(y)\right) = y \ , \quad \forall y \in Y$

45)RANGO

$\mathcal{A}: X \to Y$, lineare, si definisce il RANGO di $\mathcal{A}$ come la dimensione della sua immagine

46)TIPI DI APPLICAZIONE LINEARE

Sia $\mathcal{A}: X \to Y$, $\mathcal{B}: X \to X$: allora

OMOMORFISMO	$\mathcal{A}$ è *lineare*
EPIMORFISMO	$\mathcal{A}$ *è lineare e suriettiva*
MONOMORFISMO	$\mathcal{A}$ *è lineare ed iniettiva*
ISOFORMISMO	$\mathcal{A}$ *è lineare e biiettiva*
ENDOMORFISMO	$\mathcal{B}$ *è un omomorfismo*
AUTOMORFISMO	$\mathcal{B}$ *è un isomorfismo*

47)ISOMORFISMO CANONICO

Dato X reale, di dimensione finita $n > 0$, e data una sua base $e_1 \dots e_n$ arbitraria, si definisce l'ISOMORFISMO CANONICO $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ relativo alla base $\mathbf{e_1} \dots \mathbf{e_n}$ come l'applicazione che associa ad ogni $x \in X$ le proprie coordinate $(\ x_1 \dots x_n\ ) \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla base.

48)APPLICAZIONE (FORMA) BILINEARE

Dato uno spazio vettoriale reale, una funzione (o anche forma, o applicazione) bilineare è una funzione $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$ lineare rispetto ad ogni variabile, ossia tale che $u \to \alpha(u, v)$ sia lineare per ogni v fissata, e $v \to \alpha(u, v)$ sia lineare per ogni u fissata.

TEORIA SPETTRALE

49)FORMA QUADRATICA

Dato uno spazio vettoriale reale X, una funzione $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ è detta forma quadratica su X se esiste una forma bilineare α su X tale che $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\ \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}$.

50)DIAGONALIZZABILITÀ

- ✓ Una forma bilineare $\boldsymbol{\alpha(u, v)}$ [o quadratica $\boldsymbol{\alpha(u, u)}$] su uno spazio reale $\boldsymbol{X}$ di dimensione finita $\boldsymbol{n}$ è detta diagonale rispetto ad una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ se la matrice $\alpha_{ij} = \alpha(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ che la rappresenta è diagonale.
  Verrà inoltre detta diagonalizzabile se esiste una base rispetto alla quale essa è diagonale.

- ✓ Dato uno spazio vettoriale (reale o complesso) $\boldsymbol{X}$ e un operatore $\boldsymbol{\mathcal{A}: X \to X}$, diremo che tale operatore è diagonalizzabile se esistono basi di $\boldsymbol{X}$ formate da autovettori di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

51)AUTOVALORE, AUTOVETTORE, AUTOSPAZIO, SPETTRO, BASE SPETTR.

Sia $\boldsymbol{\mathcal{A}}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ se $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ e $\exists$ uno scalare $\boldsymbol{\lambda}$ tali che $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda u}$, allora $\boldsymbol{u}$ è un autovettore e $\boldsymbol{\lambda}$ il suo autovalore.

L' autospazio relativo a un certo $\boldsymbol{\lambda_1}$ è $< u_1, \dots, u_k >$, con $u_1, \dots, u_k : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\lambda_1 u}$ o anche $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1 Id})$.

L'insieme di tutti gli autovalori di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è detto spettro di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Una base spettrale di $\boldsymbol{X}$ è una base formata da autovettori di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$

52)POLINOMIO CARATTERISTICO

Data una matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$, si definisce equazione caratteristica di $\boldsymbol{A}$ l'equazione $\mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ Il polinomio $\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ è detto polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$.

53)ESPONENZIALE COMPLESSO

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\ (cos\ y + i\ sin\ y)}$$

54)DERIVATA

Data una funzione $f(t) = g(t) + i\,h(t)$, si definisce la sua derivata ponendo $f\ 0\ (t) \equiv g\ 0\ (t) + ih0\ (t)$ in ogni punto nel quale entrambe le componenti reali g e h siano derivabili.

55)OPERATORE AUTOAGGIUNTO

Sia $\mathcal{A}: X \to X.$ $\mathcal{A}$ è autoaggiunto se e solo se $(\mathcal{A}\,(u))v = u(\mathcal{A}\,(v))\ \forall\, u, v \in X$.

TEOREMI PRINCIPALI

1. FORMULA DI CRAMER
2. TEOREMA DI SYLVESTER
3. C.N.S $A_1 \dots A_n$ DIPENDENTE $\rightarrow det(A_1 \dots A_n) = 0$
4. LEMMA DI SCAMBIO
5. LEMMA FONDAMENTALE
6. C.N.S SOMMA DIRETTA
7. TEOREMA DI ESISTENZA DELLA PROIEZIONE
8. TEOREMA DI UNICITA' DELLA PROIEZIONE
9. TEOREMA DI EUCLIDE-VIETE
10. TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE
11. MINIMA DISTANZA
12. TEOREMA DI PITAGORA
13. IDENTITÀ
14. DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ
15. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
16. EQUIVALENZA DELLE DUE DISUGUAGLIANZE
17. $|u_v| \leq |u|$
18. C.N.S INVERTIBILITÀ MATRICI
19. TEOREMA DI CRAMER PER LE APPLICAZIONI LINEARI
20. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE
21. TEOREMA DI GRASSMANN PER LE APPLICAZIONI LINEARI
22. TEOREMA DI GRASSMANN PER I SOTTOSPAZI
23. TEOREMA DEI GENERATORI
24. TEOREMA MASSIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI
25. TEOREMA DI ESISTENZA DELLA BASE
26. TEOREMA DEL COMPLETAMENTO
27. TEOREMA DELLA DIMENSIONE
28. TEOREMA DI INVARIANZA DELLA DIMENSIONE
29. TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE DEL DOMINIO
30. TEOREMA DEI GENERATORI DELL'IMMAGINE
31. TEOREMA ISOMORFISMO CANONICO
32. TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI AUTOVETTORI / DEI SOTTOSPAZI INVARIANTI
33. TEOREMA DI INDIPINDENZA DEGLI AUTOVETTORI
34. C.N.S OPERATORE LINEARE AUTOAGGIUNTO
35. TEOREMA SEGNI FORMA QUADRATICA
36. CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ
37. TEOREMA DEGLI AUTOVALORI SEMPLICI
38. TEOREMA SPETTRALE CASO COMPLESSO
39. TEOREMA SPETTRALE CASO REALE
40. TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA