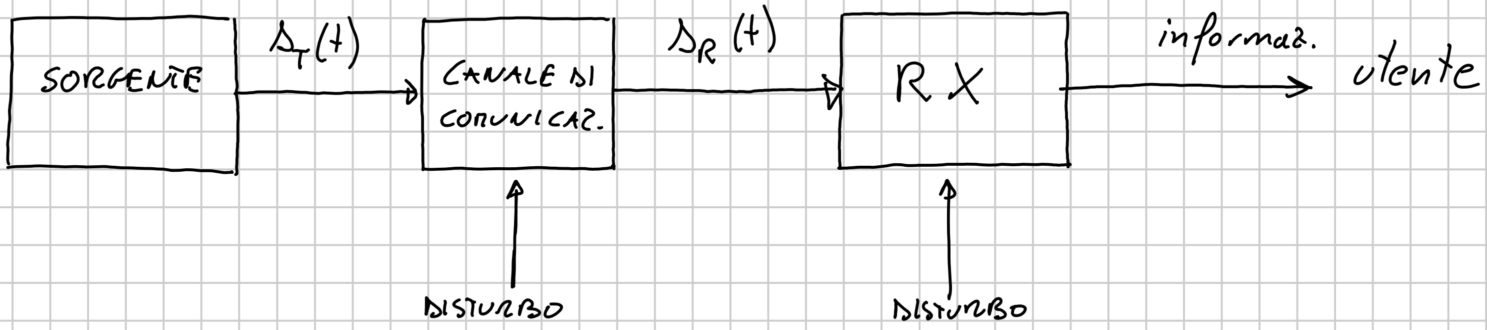
INTRODUZIONE AL CONCETTO DI RUMORE IN UN SISTEMA DI TLC

Un sistema di TLC ha come scopo quello di trasmettere informaz. tra un utente ed un altro.



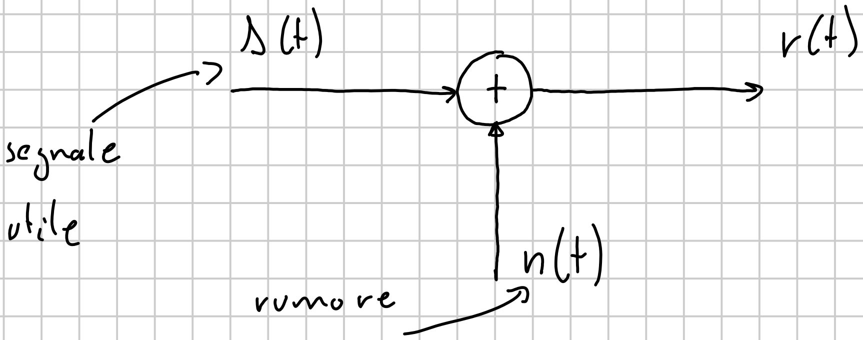
Tipicamente sono presenti disturbi che possono corrompere l'informazione. Tali disturbi agiscono soprattutto all'interno del canale di comunicazione e del ricevitore.

Chiameremo tale disturbo con il termine RUMORE.

Il rumore può essere rappresentato come un segnale aggiuntivo che si somma al SEGNALE UTILE. In questo caso si parla di <u>rumore additivo</u>.

Il rumore è un segnale sconosciuto che non può quindi essere rappresentato con una funzione analitica. La sua rappresentazione è quindi <u>statistica</u>. Questo tipo di segnali vengono definiti come SEGNALI ALEATORI.

Per poter descrivere segnali aleatori si deve introdurre il concetto di PROCESSO ALEATORIO. Nel caso si tratti di rumore questi vengono chiamati PROCESSI DI RUMORE.



MODELLO DI RUMORE ADDITIVO

Per poter comprendere il concetto di processo aleatorio (o stocastico) è necessario introdurre elementi di:

1) Teoria e calcolo delle probabilità
2) Variabili aleatorie

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

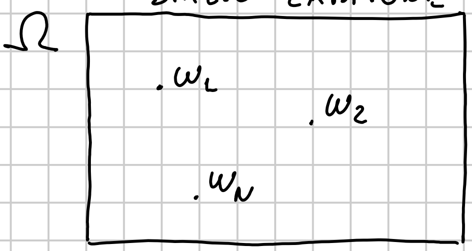
CONCETTO DI ESPERIMENTO CASUALE (O ALEATORIO)

Un esperimento casuale è da ritenersi tale se il risultato di tale esperimento non è deterministicamente predicibile

Es. Il lancio di un dado a sei facce
In questo caso non è possibile predire con certezza quale numero tra "1" e "6" uscirà.
Se però lanciamo il dado un numero N (molto grande) di volte, osserveremo che la faccia "1" uscirà all'incirca un numero di volte pari a $\frac{N}{6}$. Questa osservazione rappresenta una <u>regolarità statistica</u>.

DESCRIZIONE FORMALE DI UN ESPERIMENTO CASUALE

SPAZIO CAMPIONE



$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

esempio le sei facce di un dado

SPAZIO CONTENENTE TUTTI I POSSIBILI RISULTATI DI UN ESP.

Si possono definire dei gruppi di risultati, che chiamiamo EVENTI.

Formalmente si definisce un EVENTO un sottoinsieme dello spazio campione che soddisfa le seguenti condizioni

- se A è un evento, anche il suo complemento $\bar{A}$, rispetto all'insieme Ω, è un evento

- se A e B sono eventi, anche la loro unione $A \cup B$ è un evento

Usando queste due proprietà si può dimostrare che:

- $A \cap B$ è un evento
- $A \cup \bar{A} = \Omega$ è un evento (EVENTO CERTO)
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ è un evento (EVENTO IMPOSSIBILE)

CARATTERIZZAZIONE COMPLETA DI UN ESPERIMENTO CASUALE

Al fine di caratterizzare completamente un esperimento casuale occorrono:

j) la descrizione di uno spazio campione Ω

jj) le definizioni e proprietà degli eventi

jjj) legge di probabilità: la quale associa ad ogni evento una misura della probabilità che esso si presenti.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ (KOLMOGOROV)

1) La probabilità di un evento A è non-negativa:

$$P\{A\} \geq 0$$

2) La probabilità dell'evento certo è unitaria

$$P\{\Omega\} = 1$$

3) Dati due eventi A e B mutuamente esclusivi (che non si possono verificare contemporaneamente), la probabilità dell'evento unione è pari alla somma delle probabilità dei singoli eventi

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

PROPRIETÀ

- $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$
- $P\{\emptyset\} = 0$
- $0 \leq P\{A\} \leq 1$
- $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

SIMBOLOGIA e NOMENCLATURA

$A \cup B \Rightarrow A + B$

$A \cap B \Rightarrow AB$

$P\{AB\} \Rightarrow$ probabilità congiunta di A e B

$P\{A\}, P\{B\} \Rightarrow$ probabilità marginali di A e B

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}$$

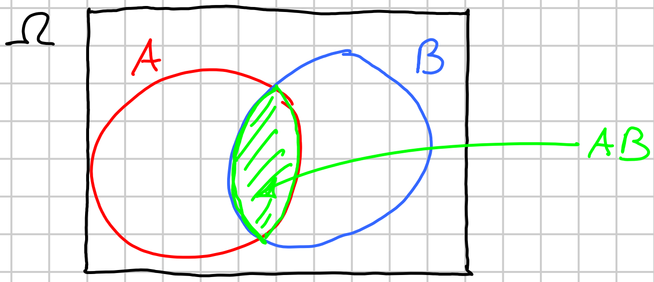
probabilità dell'evento A condizionata al verificarsi dell'evento B

SIGNIFICATO:

$\Rightarrow$ è la probabilità che si verifichi l'evento A dopo che si è già verificato l'evento B. Attenzione che questa probabilità considera uno spazio campione diverso da quello indicato dalla semplice $P\{A\}$.

Infatti solo gli elementi che verificano l'evento B fanno parte del nuovo spazio campione.

Da notare che la probabilità $P\{AB\}$ che indica il verificarsi sia di A che di B è normalizzata alla $P\{B\}$.



DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA' (PASCAL)

$$P\{A\} = \frac{N_F(A)}{N_P}$$, $N_F(A)$ = nr. di casi favorevoli ad A

N_P = nr. di casi possibili

es. lancio di un dado e risultato pari

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$

$N_F(A) = 3$, $N_P = 6$ $\Rightarrow$ $P\{A\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

N.B. Questo tipo di definizione ha senso solo nell'ipotesi che tutti i possibili risultati dell'esperimento (non contempla il caso del dado truccato)

DEFINIZIONE DI PROBABILITA' DI VON MISES (FREQUENTISTA)

$$P\{A\} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$, N_A = nr. di risultati favorevoli ad A

N = nr. di prove dell'esperimento

$\Rightarrow$ Problemi di calcolo del limite e di esistenza (convergenza)

$\Rightarrow$ La definizione frequentista è comunque in accordo con quella assiomatica

j) $P\{A\} \geq 0$ essendo $N_A \geq 0$, $N > 0$

$A \cap B = \phi$

jj) $$P\{A \cup B\} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_{A \cup B}}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A + N_B}{N} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

$$P\{A\} = P\{A|B\}$$

Quindi

$$\Rightarrow P\{A\} = P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \Rightarrow \boxed{P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}}$$

TEOREMA DI BAYES

$$\boxed{P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}\, P\{A\}}{P\{B\}}}$$ se $P\{A\}, P\{B\} \neq 0$

Dimostrazione

$P\{AB\} = P\{BA\}$ poiché $AB = BA$ $(A \cap B = B \cap A)$

$$P\{AB\} = P\{A|B\}\, P\{B\}$$
$$P\{BA\} = P\{B|A\}\, P\{A\}$$

$$P\{A|B\}\, P\{B\} = P\{B|A\}\, P\{A\}$$

$$P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}\, P\{A\}}{P\{B\}}$$

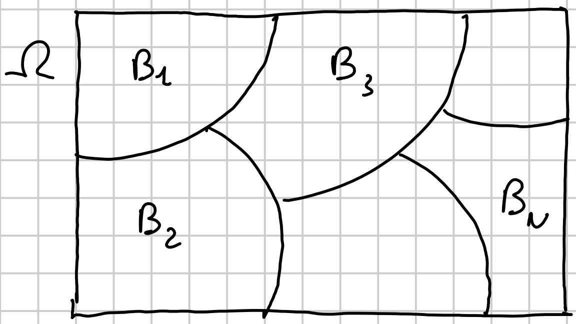
PARTIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE Ω

Una partizione di uno spazio campione è tale che, scegliendo N eventi B_i, $i = 1, 2, \dots, N$ con le seguenti proprietà

$$B_i \cap B_k = \phi \quad \forall\, i, k \quad \text{con} \quad i \neq k$$

allora

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = \Omega$$



Partizione di Ω

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

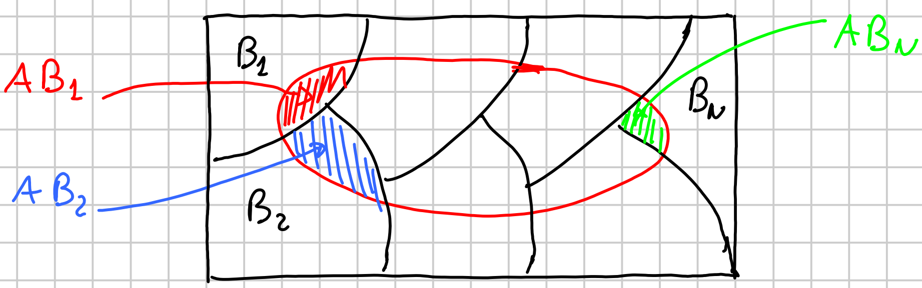
Se B_i, $i = 1, \dots, N$ rappresenta una partizione di Ω allora

$$\boxed{P\{A\} = \sum_{h=1}^{N} P\{A \mid B_i\}\, P\{B_i\}}$$

Dimostrazione

$$P\{A\} = P\{A\Omega\} = P\{A \sum_{i=1}^{N} B_i\} = P\{\sum_{i=1}^{N} A B_i\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P\{A B_i\} = \sum_{i=1}^{N} P\{A \mid B_i\}\, P\{B_i\}$$



ESPERIMENTO ALEATORIO COMPOSTO

Si parla di esperimento aleatorio composto quando si considerano contemporaneamente due o più esperimenti aleatori.

Esempio: il lancio di un dado e l'estrazione di una carta

Lo spazio campione di un esperimento composto è il prodotto cartesiano tra gli spazi campione dei singoli esperimenti:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N$$

I risultati di un esperimento composto sono costituiti da coppie ordinate dei risultati dei singoli esperimenti

Es. faccia del dado "1" e "asso di cuori"

Un evento dell'esperimento composto è costituito dal prodotto cartesiano degli eventi riferiti ai singoli esperimenti

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$$

Se gli esperimenti sono indipendenti, allora la probabilità di un evento A è calcolabile come il prodotto delle probabilità

$$P\{A\} = P\{A_1\} \, P\{A_2\} \cdot \ldots \cdot P\{A_N\}$$

dove $P\{A_1\}, \ldots, P\{A_N\}$ sono le leggi di probabilità dei singoli esperimenti.

N.B. Non è detto che conoscendo le leggi di probabilità dei singoli esperimenti si possa risalire alla legge di probabilità dell'esperimento composto. Questo è semplice solo nel caso di indipendenza.

PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE BINARIE E INDIPENDENTI (PROVE DI BERNOULLI)

Si tratta di N esperimenti identici e indipendenti dove lo spazio campione è costituito solo da due possibili risultati
Es. testa o croce

Si identificano quindi
$\omega_0 \Rightarrow P\{\omega_0\} = p$
$\omega_1 \Rightarrow P\{\omega_1\} = 1 - P\{\omega_0\} = 1 - p$

L'evento $A = \{\omega_0$ si presenta k volte su $n\}$ si può calcolare con la formula di Bernoulli (binomiale)

$$P\{A\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , 0 \leq k \leq n$$

dove $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ESEMPIO 1

Supponiamo siano presenti due monete di cui una è perfetta ed una truccata:

- moneta perfetta $\Rightarrow$ $Pr\{\text{"testa"}\} = Pr\{\text{"croce"}\} = 0.5$
- moneta truccata $\Rightarrow$ $Pr\{\text{"testa"}\} = 0.8$, $Pr\{\text{"croce"}\} = 0.2$

Esperimento

1) Si sceglie una moneta a caso tra le due
2) Si lancia la moneta 10 volte osservando che per 5 volte esce "testa" e per 5 volte esce "croce".

$\Rightarrow$ Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta perfetta

Soluzione

Definizione degli eventi:

A = scegliere la moneta perfetta

B = osservare 5 "testa" e 5 "croce" su 10 lanci

Dobbiamo calcolare la probabilità $P\{A|B\}$

è una probabilità condizionata (a posteriori)

Altre conoscenze dal testo:

$P\{A\} = 0.5$

Utilizziamo il teorema di Bayes

$$P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}\, P\{A\}}{P\{B\}}$$

Dobbiamo calcolare $P\{B|A\}$ e $P\{B\}$

$P\{B|A\}$ = probabilità che esca "testa" 5 volte su 10

$$= \binom{n}{k} P\{A\}^k \left(1 - P\{A\}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{10!}{5!\,5!}\, 0.5^5 \cdot 0.5^5 = 252 \cdot 0.5^{10} \simeq 0.246$$

Per il calcolo di $P\{B\}$ si sfrutta il teorema della probabilità totale

$$P\{B\} = P\{B|A\}\, P\{A\} + P\{B|C\}\, P\{C\}$$

C = scegliere la moneta truccata

$P\{C\} = 1 - P\{A\} = 0.5$

N.B. A e C sono una partizione di Ω!! Questa è una condizione necessaria per la applicazione del teorema della probabilità totale.

$$P\{B|C\} = \binom{10}{5} 0.8^5 \cdot 0.2^5 \simeq 0.0264$$

$$P\{B\} = 0.246 \cdot 0.5 + 0.0264 \cdot 0.5 \simeq 0.136$$

$$P\{A|B\} = \frac{0.246 \cdot 0.5}{0.136} \simeq 0.903$$

ESEMPIO (2)

In una classe ci sono 30 persone. Quanto scommetteresti sul caso che almeno due persone siano nate lo stesso giorno?

A = almeno due persone sono nate lo stesso giorno

$\bar{A}$ = tutti sono nati in giorni diversi

$$P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\}$$

$N = 365$ giorni dell'anno

n = nato nell'n-esimo giorno dell'anno , $n \in [1, 2, \dots, 365]$

$$P\{n\} = \frac{1}{365}$$

Per induzione:

2 persone $\Rightarrow$ $P_2\{\bar{A}\} = \dfrac{364}{365} = \dfrac{\text{nr° casi favorevoli}}{\text{nr° casi possibili}}$

3 persone $\Rightarrow$ $P_3\{\bar{A}\} = P_2\{\bar{A}\} \cdot \dfrac{363}{365}$

⋮

K persone $\Rightarrow$ $P_K\{\bar{A}\} = P_2\{\bar{A}\} \cdot P_3\{\bar{A}\} \cdots P_{K-1}\{\bar{A}\} \dfrac{365-K+1}{365}$

$$= \frac{(N-1)!}{N^{K-1}(N-K)!}$$

$K = 30 \Rightarrow P\{\bar{A}\} = \dfrac{364!}{365^{29}(365-30)!} \simeq 0{,}27$

$\Rightarrow P\{A\} \simeq 0{,}73$