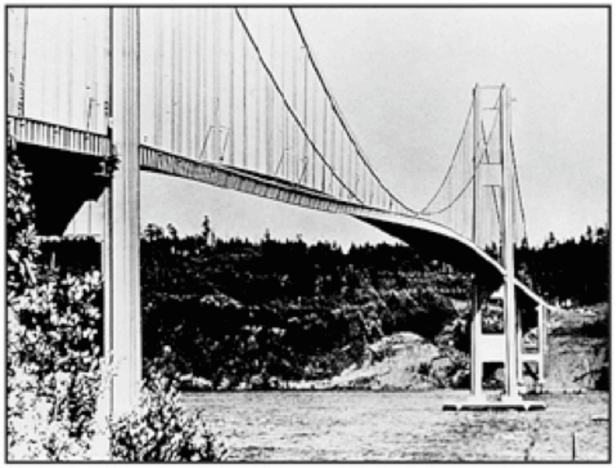
Oscillazioni

- Si produce un'oscillazione quando un sistema viene *perturbato rispetto a una posizione di equilibrio stabile*

- Caratteristica più evidente del moto oscillatorio è di essere un moto *periodico*, ovvero che si ripete con regolarità nel tempo

- Le oscillazioni hanno un'importanza notevole nel mondo fisico.



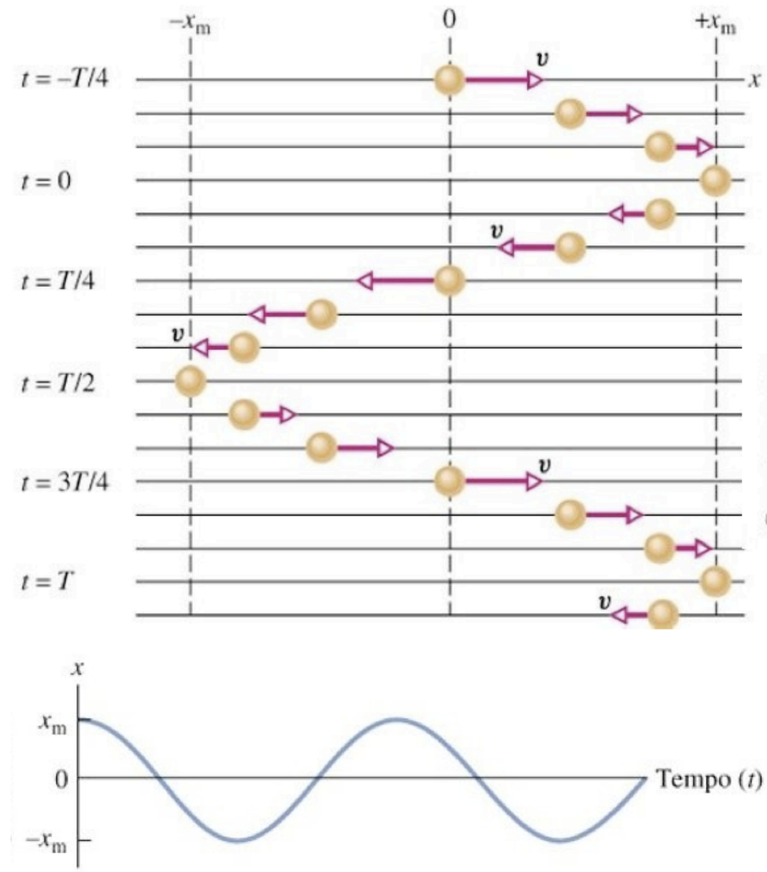

Moto periodico

Qualunque movimento che si ripeta ad intervalli regolari è definito come *moto periodico*.

Il moto periodico è caratterizzato da

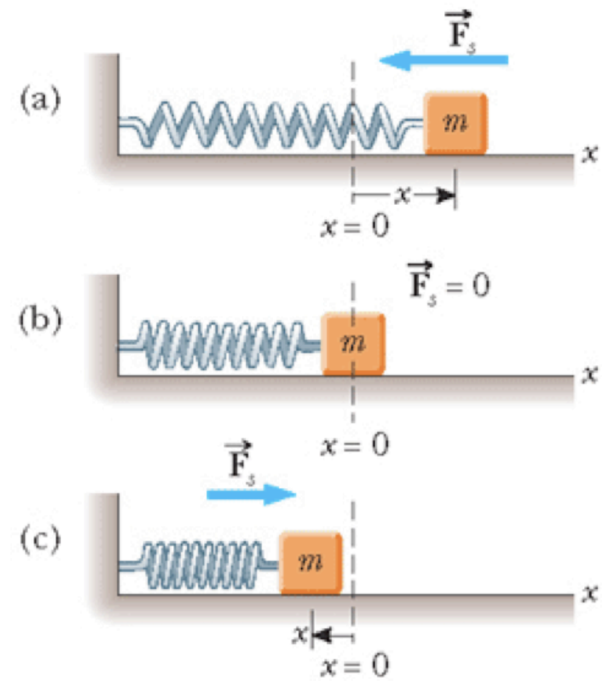
- *Frequenza* f: numero di oscillazioni compiute in un secondo. Si misura in *Hertz*: 1 Hz=1 s^{-1}.

- *Periodo* $T = 1/f$: tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa.



Moto armonico

Se tendiamo o comprimiamo una molla con una massa a un estremo e poi la lasciamo andare, la massa oscillerà avanti e indietro (trascuriamo gli attriti). Questa oscillazione è chiamata *moto armonico (semplice)*.



Ad ogni istante, lungo x: $F = ma$ ma $F = -kx$ da cui

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ovvero

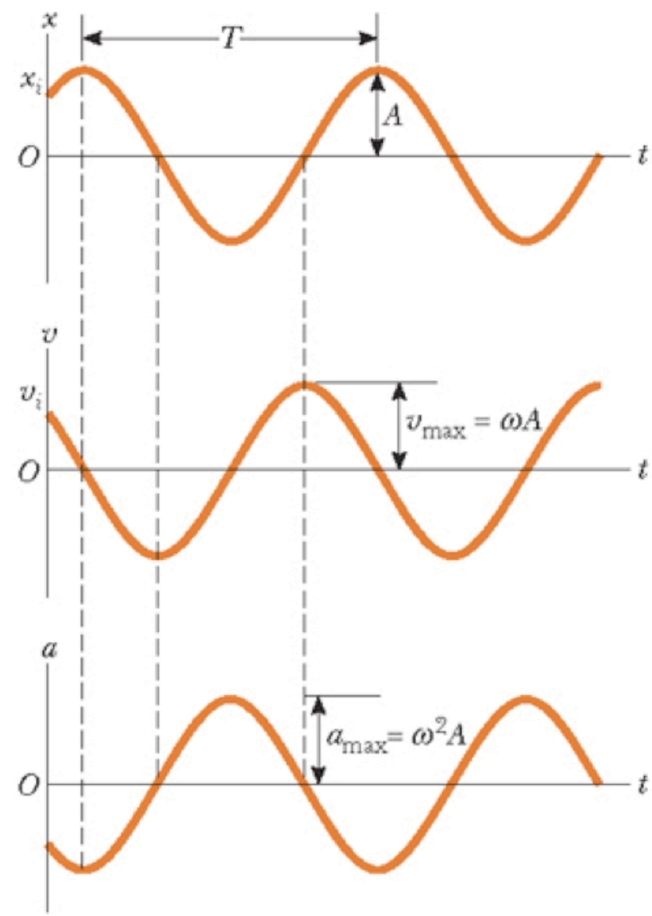
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

dove si è introdotto $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$, ovvero $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (*frequenza angolare*).

Dinamica del moto armonico

La soluzione generale dell'equazione del moto armonico, $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$, è

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{da cui} \\
v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi), \\
a(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)
\end{aligned}
$$



Periodo dell'oscillazione: $T = 2\pi/\omega$
Frequenza dell'oscillazione: $f = \omega/2\pi$.

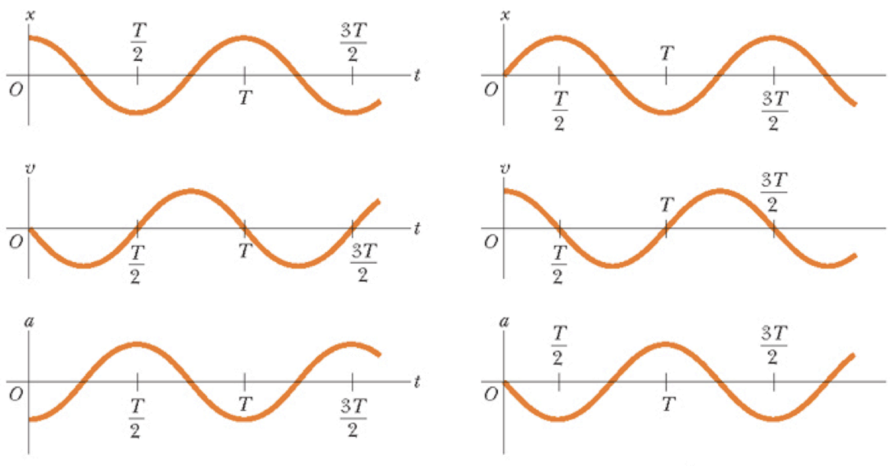
Ampiezza massima dell'oscillazione: $|x_{max}| = A$. Velocità massima: $|v_{max}| = \omega A$. Accelerazione massima: $|a_{max}| = \omega^2 A = \omega^2 |x_{max}|$.
La fase ϕ e l'ampiezza A sono determinate dalle *condizioni iniziali*.
Da notare che ω non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni!

Condizioni iniziali

L'ampiezza A e la fase ϕ di un moto armonico sono determinate dalle *condizioni iniziali*. Per esempio:

- $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = 0$
  da $v(0) = -\omega A \sin\phi = 0$ si ottiene $\phi = 0$
  da $x(0) = A\cos\phi = x_0$ si ottiene $A = x_0$:

$$x(t) = x_0 \cos\omega t$$



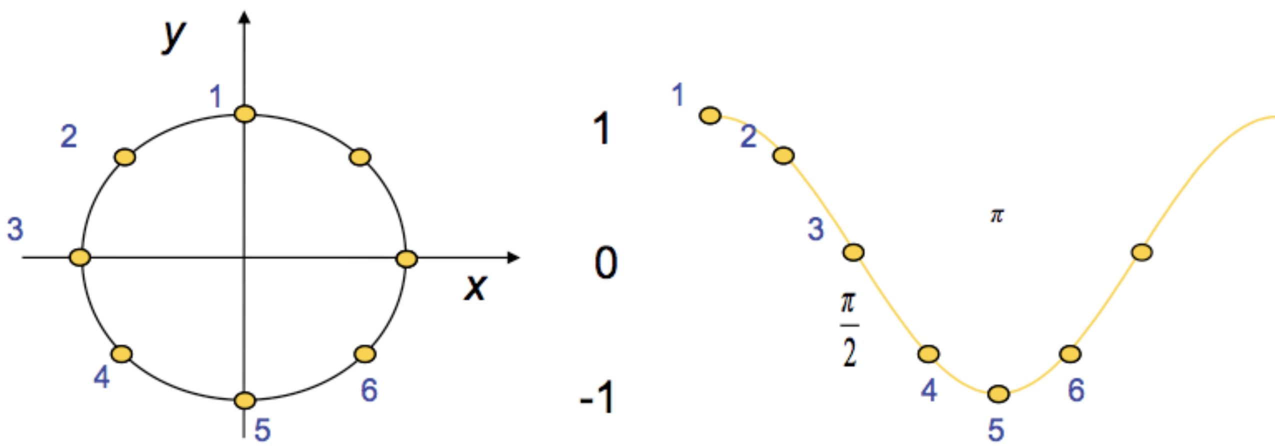
- $x(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$
  da $x(0) = A\cos\phi = 0$ si ottiene $\phi = -\pi/2$
  da $v(0) = -\omega A \sin\phi = v_0$ si ottiene $A = v_0/\omega$, da cui infine:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

(si è usato $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$)

Moto armonico e moto circolare uniforme

La proiezione su di un asse del moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio A a velocità angolare ω descrive un moto armonico



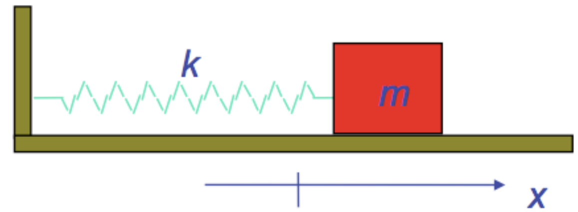
Il moto circolare uniforme su di un piano può essere descritto dal vettore $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (A\cos(\omega t + \phi), A\sin(\omega t + \phi))$$

E' immediato verificare che valgono tutte le proprietà del moto circolare uniforme: $\theta(t) = \omega t + \phi$, $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = A$, $v = \omega r$ (tangenziale), $a = \omega^2 r$ (centripeta).

Esempio: molla orizzontale

Una massa $m = 2$ kg attaccata a una molla oscilla con ampiezza $A = 10$ cm. A $t = 0$ la velocità è massima, e vale $v = +2$ m/s. Quanto valgono ω e la costante della molla k ? Qual è la legge del moto?



$$v_{max} = \omega A \Longrightarrow \omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{2\text{m/s}}{10\text{cm}} = 20\text{s}^{-1}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow k = m \cdot \omega^2 = 2\text{kg}(20\text{s}^{-1})^2 = 800\text{N/m}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

Dato che $v(0) = -A\omega \sin\phi = -v_{max}\sin\phi$, deve valere $\sin\phi = -1$, ovvero $\phi = -\frac{\pi}{2}$:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow x(t) = A\sin(\omega t)$$

Notare che servono due condizioni per determinare le due costanti A e ϕ: per esempio, ampiezza, velocità a $t = 0$; o posizione e velocità a $t = 0$.

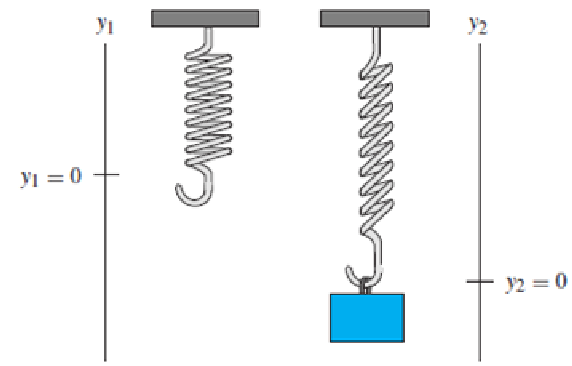
Moto armonico sotto forza costante

Cosa succede in presenza di forza elastica e di una forza costante?

Esempio: molla verticale con massa attaccata, in posizione $y_1(t)$.

La condizione di equilibrio ci dà $-ky_0 - P = 0$ ($P = mg$ è la forza peso) ovvero la massa scende a quota $y_0 = -P/k$. L'equazione del moto:

$$m\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = -ky_1(t) - P$$



con un cambio di variabile $y_1 = y_2 - y_0$ ritorna identica a quella del moto armonico semplice. Il centro delle oscillazioni è solo traslato di $-P/k$. Vale per ogni forza costante.

Due corpi legati da una molla

Consideriamo due masse m_1 e m_2 nelle posizioni x_1 e x_2 (assumiamo moto unidimensionale). La molla ha lunghezza a riposo ℓ e costante elastica k. Equazioni del moto:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2 - \ell), \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2 - \ell)$$

(attenzione ai segni!) da cui

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2 - \ell). \qquad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2 - \ell)$$

da cui, ponendo $z = x_1 - x_2 - \ell$:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) z \quad \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k}{\mu} z = -\omega^2 z$$

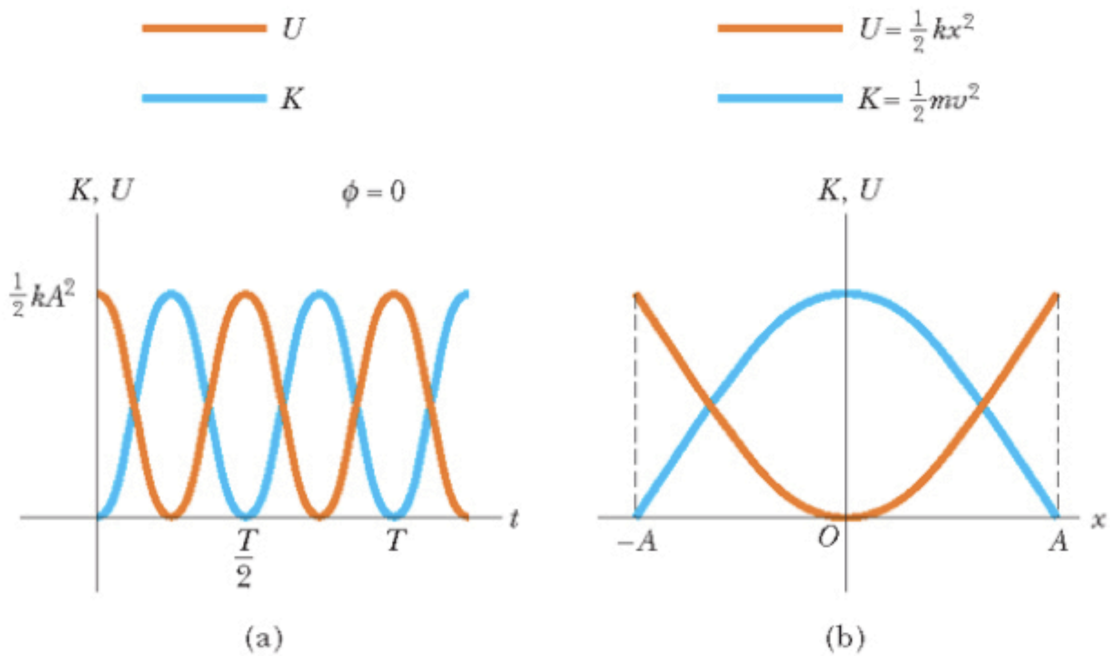
dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ e $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la *massa ridotta* del sistema

Energia nel moto armonico

Energia potenziale nel moto armonico: $\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2.}$ Cinetica: $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2.}$

Se $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, $U(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$, $K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$
L'energia meccanica $E = K + U$ non dipende dal tempo (è conservata!):

$$E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2$$



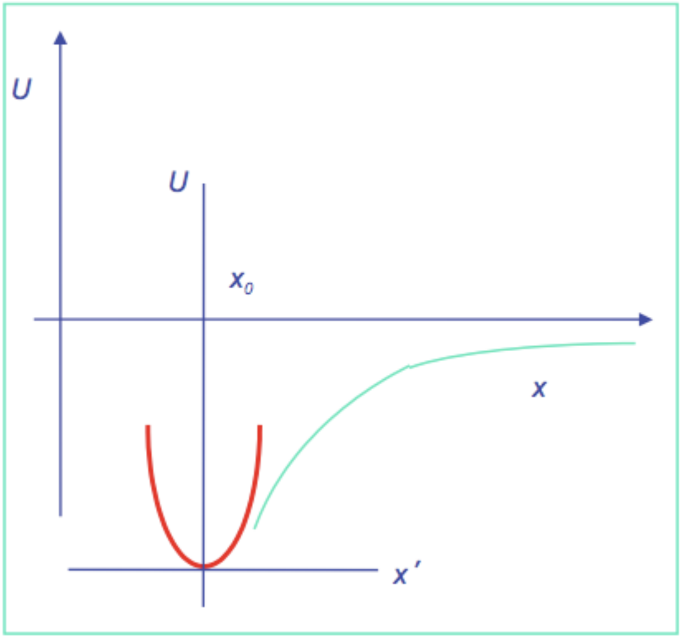
Notare che l'energia meccanica dipende dal *quadrato* dell'ampiezza di oscillazione.

Moto approssimativamente armonico

L'energia potenziale del moto armonico è una funzione *quadratica* delle coordinate.

Esistono in natura moltissimi casi di moto "quasi" armonico, dovuto ad un'energia potenziale "approssimativamente" armonica. Esempio: energia potenziale fra due atomi in una molecola, come H_2. Attorno alla posizione di equilibrio x_0, vale lo *sviluppo in serie di Taylor*:

$$U(x) \simeq U(x_0)+(x-x_0)\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0}+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}+\ldots$$



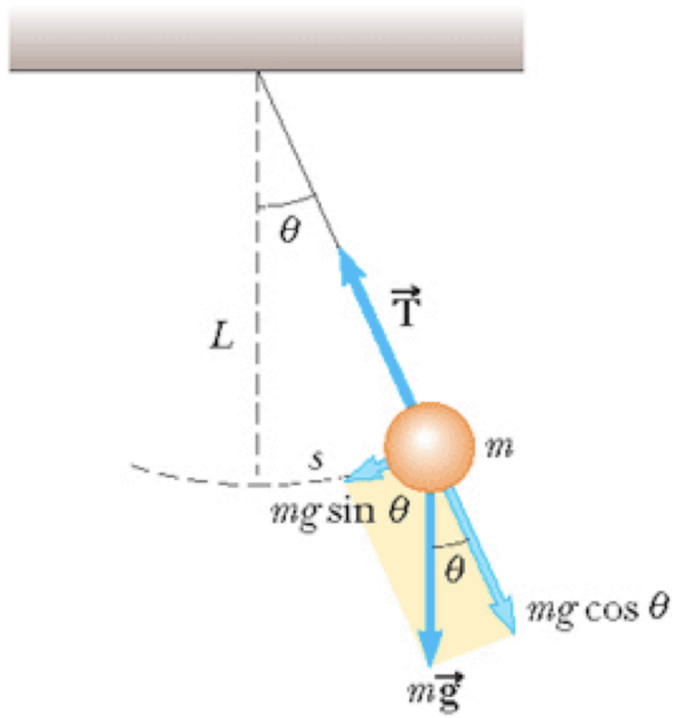
ma in $x = x_0$ vale $\frac{dU}{dx} = 0$ (equilibrio!); ponendo $x' = x - x_0$, $U' = U - U(x_0)$:

$$U'(x') \simeq \frac{1}{2}k'x'^2, \quad k' = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}$$

Dato che $F = -dU(x)/dx$, un potenziale quadratico produce forze lineari in x.

Il pendolo semplice

Il pendolo semplice è un altro esempio notevole di moto approssimativamente armonico.



Soluzione con le forze (lungo l'arco):

$$F = ma = mL\alpha = -mg\sin\theta$$

Con i momenti (rispetto al punto di oscillazione):

$$\tau = I\alpha = -mgL\sin\theta$$

Dato che $I = mL^2$ si ottiene la stessa equazione.

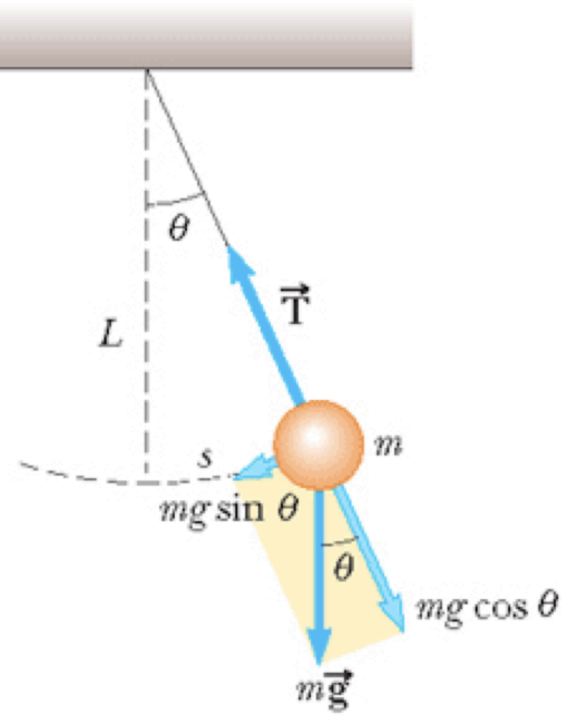
Per piccole oscillazioni: $\sin\theta \simeq \theta$, da cui $\alpha = -\dfrac{mgL}{I}\theta$ ovvero:

$\boxed{\alpha = -\omega^2\theta}$, dove $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{mgL}{I}} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}}$. Il pendolo oscilla quindi con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, *indipendente dall' ampiezza delle oscillazioni*, nel limite di piccole oscillazioni.

Il pendolo semplice (2)

Soluzione con la conservazione dell'energia:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$



(assumendo $U = 0$ nel punto più basso) da cui

$$E = \frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$mL^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Ricordando che $\alpha = d^2\theta/dt^2$ e assumendo la validità dell'approssimazione $\sin\theta \simeq \theta$, si riottiene l'equazione del moto armonico come in precedenza. Soluzione generale:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \theta_0).$$

Attenzione! $\dfrac{d\theta}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \theta_0) \neq \omega$! ω è una costante, $\dfrac{d\theta}{dt}$ no (oscilla)!

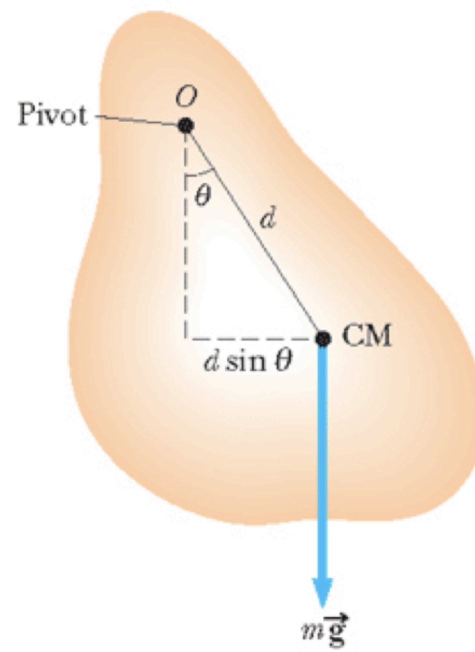
Il pendolo fisico (o reale)

Solido di forma arbitraria, di massa M, appeso e libero di ruotare attorno a un asse fisso *diverso dal suo centro di massa*.

Scriviamo l'equazione del moto rotatorio. Assumiamo I =momento d'inerzia per rotazioni attorno ad O.

$$I\alpha = \tau = -Mgd\sin\theta$$

dove d è la distanza fra O e il centro di massa (ricordare che il momento della forza peso è lo stesso che se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa)



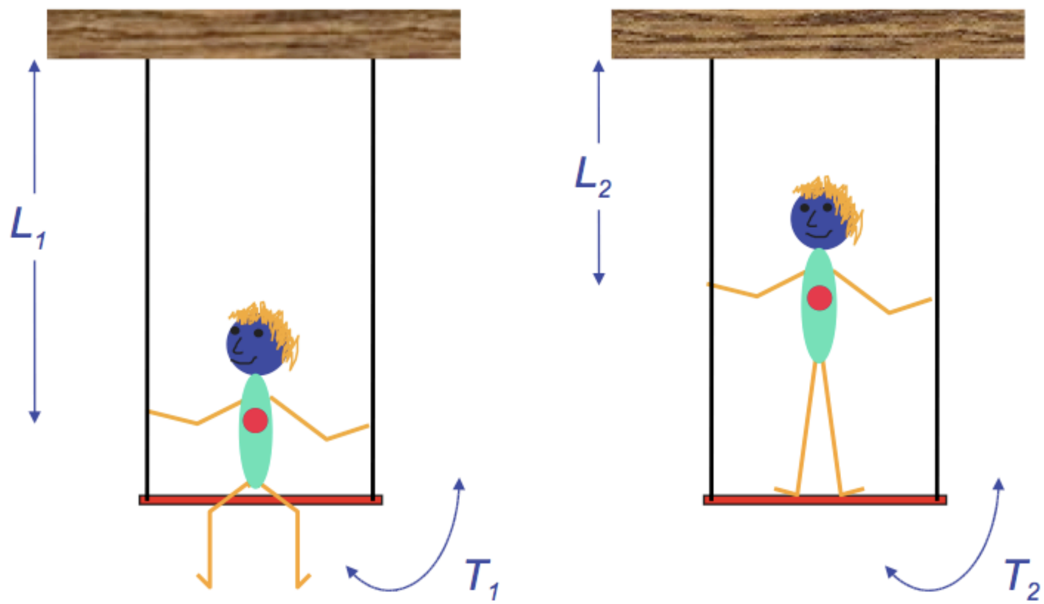
Notare che questa è l'equazione del moto di un pendolo di lunghezza d già trovata in precedenza. Per piccole oscillazioni:

$$I\alpha \simeq -Mgd\theta \Rightarrow \alpha = -\omega^2\theta, \qquad \omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

Di nuovo, siamo in presenza di oscillazioni armoniche di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$

Quiz

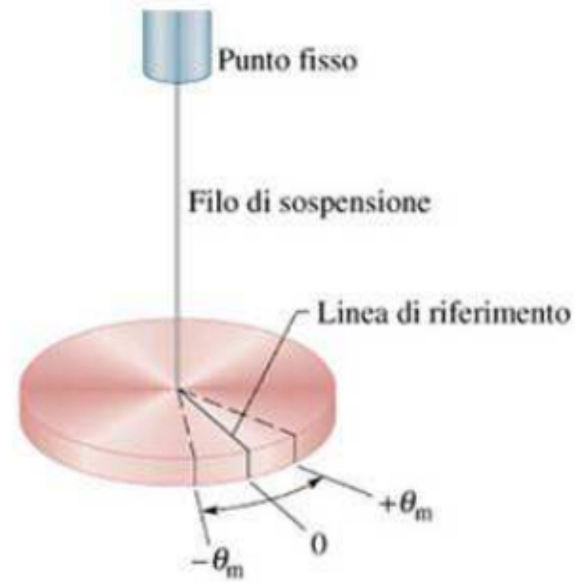
- In quale caso la frequenza di oscillazione è maggiore?



Il pendolo di torsione

Consideriamo ora il cosiddetto *pendolo di torsione*: un disco di momento d'inerzia I, appeso ad un filo come in figura.
Le rotazioni del disco inducono una torsione del filo. Nel limite di piccoli angoli di torsione, il filo, come reazione alla torsione, produce un momento torcente

$$\tau = -k\theta$$



La costante k dipende dal materiale (in particolare dal suo "modulo di rigidità") di cui è composto il filo

L'equazione del moto è $I\alpha = \tau = -k\theta$ da cui si ricava immediatamente la soluzione:

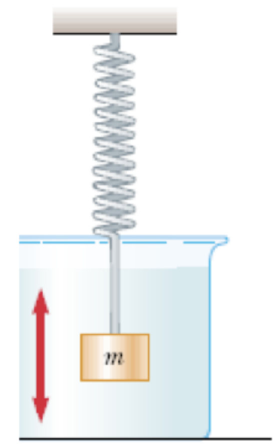
$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}},$$

e il periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/k}$

Oscillazioni smorzate

Consideriamo di nuovo una molla *in presenza di forze di attrito o di resistenza*.

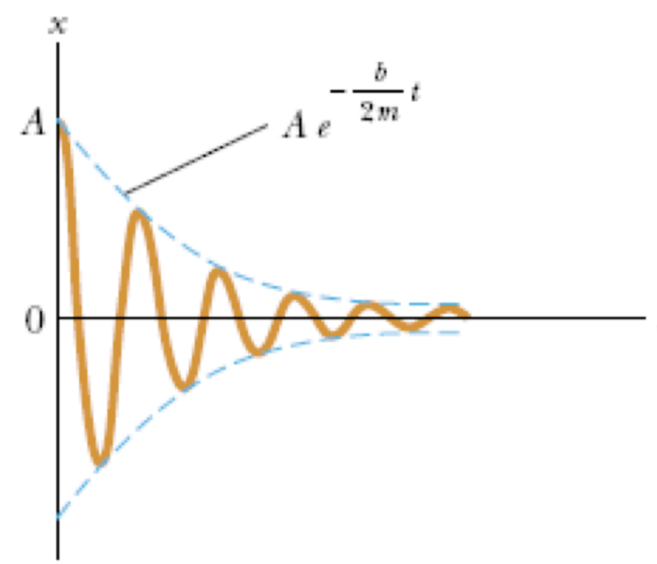
Per esempio, una molla che oscilla in un liquido viscoso, con forza di resistenza propozionale alla velocità:



$$ma = -ky - bv \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + b\frac{dy}{dt} = 0$$

Questa è un'equazione differenziale omogenea, la cui soluzione generica ha la forma $y(t) = \exp(\lambda t)$, con λ complesso

Nel caso in cui $(b/2m)^2 < \omega_0^2 = k/m$, ovvero la forza di resistenza è piccola rispetto alla forza armonica, la soluzione è un'*oscillazione smorzata*



$$y(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Oscillazioni smorzate (dimostrazione)

La soluzione dell'equazione delle oscillazioni smorzate:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m\omega_0^2 y + b\frac{dy}{dt} = 0$$

si trova assumendo una soluzione $y(t) = e^{\lambda t}$, con λ complesso, $\lambda = \alpha + i\omega$. Sostituendo si trova

$$m\lambda^2 + m\omega_0^2 + b\lambda = 0$$

da cui

$$m(\alpha^2 - \omega^2) + m\omega_0^2 + \alpha b + i(2m\alpha\omega + b\omega) = 0$$

Dalla condizione sulla parte immaginaria, $\alpha = -\dfrac{b}{2m}$.

La condizione sulla parte reale diventa $\omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{b^2}{4m}$. Se il termine di destra è positivo, $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{4m}}}$. Rimettendo insieme i pezzi: $\boxed{y(t) = e^{-bt/2m} e^{i\omega t}}$

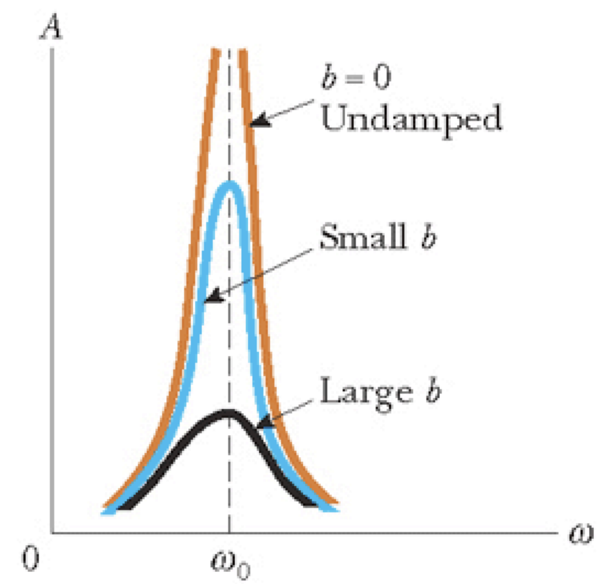
Oscillazione forzate

Consideriamo ora una molla in presenza di forze di attrito o di resistenza *e di una forza esterna oscillante*. Assumiamo che la forza esterna abbia la forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$. L'equazione del moto diventa

$$ma = -ky - bv + f \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + b\frac{dy}{dt} = F_0 \cos \omega t.$$

La soluzione generale di questa equazione è somma di una soluzione dell'equazione omogenea (oscillazione smorzata) e di una soluzione oscillatoria di frequenza ω. La prima scompare dopo il transiente iniziale.

Se lo smorzamento b è piccolo, l'ampiezza del moto oscillatorio a frequenza ω cresce se ω si avvicina a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, diventando molto grande per $\omega \simeq \omega_0$, cioè quando la frequenza di oscillazione della forza esterna è prossima ad una frequenza di vibrazione interna. Questo fenomeno si chiama *risonanza* ed è caratterizzato da un forte trasferimento di energia al sistema oscillante.



Oscillazione forzate (dimostrazione)

Conviene cercare una soluzione dell'equazione complessa

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + m\omega_0^2 z + b\frac{dz}{dt} = F_0 e^{i\omega t}, \qquad (F_0 \text{ è reale, si è posto } k = m\omega_0^2)$$

della forma $z(t) = Ae^{i\omega t}$, con A complesso, e prenderne la parte reale: $y(t) = \Re z(t)$. Sostituendo nell'equazione si trova

$$-m\omega^2 A e^{i\omega t} + m\omega_0^2 A e^{i\omega t} + i\omega b A e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega b}$$

e infine: $y(t) = F_0 \dfrac{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \cos\omega t + F_0 \dfrac{\omega b}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2} \sin\omega t$

Se $\omega \to \omega_0$, il secondo termine diventa dominante e

$$y(t) \sim \frac{\pi F_0}{2m\omega}\left[\frac{1}{\pi}\frac{(b/2m)}{(\omega - \omega_0)^2 + (b/2m)^2}\right]\sin\omega t$$

dove la funzione fra parentesi quadre è detta *Lorenziana*