Esercizi svolti di Ricerca Operativa

A.A. 2024-2025

Tommaso Renzoni

Ci sono quattro esercizi tipici nell'esame scritto di Ricerca Operativa, ciascuno accompagnato da un breve richiamo alla teoria. Sebbene questi richiami possono risultare utili per affrontare i problemi proposti in sede di esame, non sono sufficienti da soli per la preparazione completa.

1. Esercizio 1

Questo esercizio richiedere di risolvere problemi di PL ed eseguire un passo del simplesso. Si introduce poi un piano di taglio di Gomory per trattare il problema di produzione intera. Infine, si valuta se l'aggiunta del taglio migliora il gap e si verifica se è raggiunta l'ottimalità.

Esercizio 1 (05/06/2024)
Il primo passo è modellizzare correttamente il problema e portarlo in formato primale standard.

Si progetta una dieta composta da vitamina A, B, C e ferro introducendo tavolette di Vitatav, Bentav ed Extratav. La tabella mostra il contenuto in milligrammi di ogni tavoletta. Si vuole minimizzare il costo della dieta $\Longrightarrow \min 4x_1 + 6x_2 + 7x_3$

	A	B	C	Ferro	costo
Vitatav	10	10	20	4	4
Bentav	15	20	10	5	6
Extratav	20	15	20	2	7

La dieta deve contenere almeno 80, 30, 60 e 14 milligrammi di vitamina A, B, C e ferro

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ & 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geqslant 80,\\ & 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \geqslant 30,\\ & 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geqslant 60\\ & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geqslant 14\end{aligned}$$

e deve avere almeno il 25% di Vitatav ed almeno il doppio di Bentav rispetto ad Extratav.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ & x_1 \geqslant \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3) \Longleftrightarrow 4x_1 \geqslant x_1 + x_2 + x_3 \Longleftrightarrow 3x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 0\\ & x_2 \geqslant 2x_3 \Longleftrightarrow x_2 - 2x_3 \geqslant 0\end{aligned}$$

$$\text{Modello: } (p)\begin{cases}\min 4x_1 + 6x_2 + 7x_3\\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geqslant 80\\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \geqslant 30\\ 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geqslant 60\\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geqslant 14\\ 3x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 0\\ x_2 - 2x_3 \geqslant 0\\ x_i \geqslant 0\ \forall i \in \{1,2,3\}\end{cases} \equiv \begin{cases}-\max -4x_1 - 6x_2 - 7x_3\\ -10x_1 - 15x_2 - 20x_3 \leqslant -80\\ -10x_1 - 20x_2 - 15x_3 \leqslant -30\\ -20x_1 - 10x_2 - 20x_3 \leqslant -60\\ -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leqslant -14\\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 0\\ -x_2 + 2x_3 \leqslant 0\\ -x_1 \leqslant 0\\ -x_2 \leqslant 0\\ -x_3 \leqslant 0\end{cases}$$

➢ <u>Effettuare un passo del simplesso, per risolvere il rilassato continuo, partendo da una soluzione che prevede assunzione solamente di Vitatav.</u>

La soluzione ammissibile è $\overline{x} = (x_1, 0, 0)$, si deve minimizzare x_1

$-10x_1 \leqslant -80 \Longrightarrow x_1 \geqslant 8$
$-10x_1 \leqslant -30 \Longrightarrow x_1 \geqslant 3$
$-20x_1 \leqslant -60 \Longrightarrow x_1 \geqslant 3$
$-4x_1 \leqslant -14 \Longrightarrow x_1 \geqslant 7/2$
$-3x_1 \leqslant 0 \Longrightarrow x_1 \geqslant 0$

Quindi $\overline{x} = (8, 0, 0)$. Trovo la base associata: $B = \{1, 8, 9\}$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -15 & -20 \\ -10 & -20 & -15 \\ -20 & -10 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -80 \\ -30 \\ -60 \\ -14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo del simplesso primale:

1. Costruisci il problema duale e calcolo la soluzione di base duale $\overline{y}$
2. if $y_B \geqslant 0$ then STOP (sono all'ottimo)
   else l'indice uscente $h := \min\{i \in B : \overline{y}_i < 0\}$
   calcola $W := -A_B^{-1}$ e indica W^h la h-esima colonna di W.
3. if $A_i W^h \leqslant 0 \; \forall i \in N$ then STOP $((p) = +\infty, \; (d) = \emptyset)$
   else calcola $r_i := \dfrac{b_i - A_i \overline{x}}{A_i W^h}$ se $i \in N, \; A_i W^h > 0$ e trova il minore di questi rapporti
   per trovare l'indice entrante k.
4. Aggiorna la base e torna al passo 1.

Problema duale:

$$(d) \begin{cases} \min -80y_1 - 30y_2 - 60y_3 - 14y_4 \\ -10y_1 - 10y_2 - 20y_3 - 4y_4 - 3y_5 - y_7 = -4 \\ -15y_1 - 20y_2 - 10y_3 - 5y_4 + y_5 - y_6 - y_8 = -6 \\ -20y_1 - 15y_2 - 20y_3 - 2y_4 + y_5 + 2y_6 - y_9 = -7 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$B = \{1, 8, 9\} \Longrightarrow \begin{cases} -10y_1 = -4 \\ -15y_1 - y_8 = -6 \\ -20y_1 - y_9 = -7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{5} \\ 6 + y_8 = 6 \\ 8y_1 + y_9 = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{5} \\ y_8 = 0 \\ y_9 = -1 \end{cases}$$

Quindi l'indice uscente è $h = 9$

$$A_B = \begin{bmatrix} -10 & -15 & -20 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = -A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & -3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; W^9 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

- $A_2 W^9 = 5 > 0$, quindi calcolo $r_2 = \dfrac{b_2 - A_2 \overline{x}}{A_2 W^9} = \dfrac{-30 - \begin{bmatrix} -10 & -20 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{5} =$
  $= \dfrac{-30 + 80}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$
- $A_3 W^9 = 20 > 0$, quindi calcolo $r_3 = 5$
- $A_4 W^9 = 6 > 0$, quindi calcolo $r_4 = 3$
- $A_5 W^9 = 7 > 0$, quindi calcolo $r_5 = 24/7$
- $A_6 W^9 = 2 > 0$, quindi calcolo $r_6 = 0$
- $A_7 W^9 = 2 > 0$, quindi calcolo $r_7 = 4$

Il più piccolo rapporto è r_6, quindi l'indice entrante è $k = 6$, $B^{NEW} = \{1, 6, 8\}$

➢ Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo?

Algoritmo di riduzione del gap:

1. Calcolo l'ottimo del rilassato continuo $\overline{x}_{RC}$
2. Porto il poliedro in formato duale standard e ricalcolo $\overline{x}_{RC}$
3. Individuo la base che genera $\overline{x}_{RC}$, individuo A_B, A_N, r
4. Calcolo $\widetilde{A} = A_B^{-1} A_N$
5. Scrivo il piano di taglio $\sum_{j \in N} \left\{ \widetilde{a}_{rj} \right\} x_j \geqslant \{ (\overline{x}_{RC})_r \}$

   Aggiungo il piano di taglio ai vincoli del problema e torno al punto 1.

Risolvo il problema (p) con linprog: $\overline{x}_{RC} = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3} \right)$ di valore $\dfrac{92}{3}$

Porto il poliedro di (p) in formato duale standard:

$$D = \begin{cases} -10x_1 - 15x_2 - 20x_3 + x_4 = -80 \\ -10x_1 - 20x_2 - 15x_3 + x_5 = -30 \\ -20x_1 - 10x_2 - 20x_3 + x_6 = -60 \\ -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_7 = -14 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_9 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

In formato duale $\overline{x}_{RC} = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{170}{3}, 20, \dfrac{22}{3}, 0, 0 \right)$

$r = 1$

$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \; N = \{4, 8, 9\}$

$$A = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -10 & -15 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -20 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & -10 & -20 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}\end{array}$$

$$A_B = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -10 & -15 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -20 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -10 & -20 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}\end{array}, \quad A_B^{-1} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -1/60 & 0 & 0 & 0 & -5/18 & -1/36 \\ -1/30 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & -7/18 \\ -1/60 & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 11/36 \\ -13/12 & 1 & 0 & 0 & 5/18 & -125/36 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -10/3 & 5/3 \\ -4/15 & 0 & 0 & 1 & -4/9 & -13/9 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}\end{array}$$

$$A_N = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 4 & 8 & 9 \end{matrix}\end{array}$$

$$\widetilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix} -1/60 & -5/18 & -1/36 \\ -1/30 & 1/9 & -7/18 \\ -1/60 & 1/18 & 11/36 \\ -13/12 & 5/18 & -125/36 \\ -1 & -10/3 & 5/3 \\ -4/15 & -4/9 & -13/9 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 8 & 9 \end{matrix} & \end{array}$$

$\widetilde{A}_r = \begin{bmatrix} -1/60 & -5/18 & -1/36 \end{bmatrix}$

Il piano di taglio è $\left\{-\frac{1}{60}\right\}x_4 + \left\{-\frac{5}{18}\right\}x_8 + \left\{-\frac{1}{36}\right\}x_9 \geqslant \left\{\frac{4}{3}\right\} \Longrightarrow$

$\frac{59}{60}x_4 + \frac{13}{18}x_8 + \frac{35}{36}x_9 \geqslant \frac{1}{3} \Longrightarrow 177x_4 + 130x_8 + 175x_9 \geqslant 60$

Per verificare se siamo arrivati all'ottimo, devo risolvere il problema in formato duale standard, aggiungendo il piano di taglio tra i vincoli. Se le variabili non slack sono intere, allora sono arrivato all'ottimo.

$$\begin{cases} -\max -4x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \\ -10x_1 - 15x_2 - 20x_3 + x_4 = -80 \\ -10x_1 - 20x_2 - 15x_3 + x_5 = -30 \\ -20x_1 - 10x_2 - 20x_3 + x_6 = -60 \\ -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_7 = -14 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_9 = 0 \\ -177x_4 - 130x_8 - 175x_9 \leqslant -60 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Risolvendo con linprog ottengo $\overline{x}_{RC} = \left(\frac{19}{13}, \frac{34}{13}, \frac{17}{13}, 0, \frac{735}{13}, \frac{280}{13}, \frac{98}{13}, \frac{6}{13}, 0\right)$, quindi, siccome $\overline{x}^1_{RC}$, $\overline{x}^2_{RC}$, $\overline{x}^3_{RC}$ sono frazionarie, allora non siamo arrivato all'ottimo. $c^T\overline{x}_{RC} = \frac{399}{13} \approx 30.7$

Trovo la soluzione ottima del problema di partenza con intlinprog: $\overline{x} = (3, 2, 1)$ con $c^T\overline{x} = 31$

Esercizio 1 (14/02/2024)

Un'azienda produce due tipi di torte industriali (margherita e ciambella) utilizzando farina, burro, uova e zucchero, volendo massimizzare il guadagno e dovendone produrre almeno 6 al giorno di ogni tipo.

	margherita	ciambella	disponibilità giornaliera
burro (etti)	0.7	1	15
farina (etti)	2.5	4	48
uova	4	2.50	50
zucchero (chili)	1.5	1.25	25
guadagno	8	12	

$$(p)\begin{cases} \max 8x_1 + 12x_2 \\ 0.7x_1 + x_2 \leqslant 15 \\ 2.5x_1 + 4x_2 \leqslant 48 \\ 4x_1 + 2.5x_2 \leqslant 50 \\ 1.5x_1 + 1.25x_2 \leqslant 25 \\ -x_1 \geqslant -6 \\ -x_2 \geqslant -6 \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}, \ A = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 2.5 & 4 \\ 4 & 2.5 \\ 1.5 & 1.25 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 15 \\ 48 \\ 50 \\ 25 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

➢ Effettuare un passo del simplesso applicato al rilassato continuo partendo dalla soluzione che prevede la minima produzione giornaliera.

Minima produzione giornaliera: $x_1 = 6,\ x_2 = 6$, $B = \{5, 6\}$

$$(d)\begin{cases} \min 15y_1 + 48y_2 + 50y_3 + 25y_4 - 6y_5 - 6y_6 \\ 0.7y_1 + 2.5y_2 + 4y_3 + 1.5y_4 - y_5 = 8 \\ y_1 + 4y_2 + 2.5y_3 + 1.25y_4 - y_6 = 12 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y_5 = 8 \\ -y_6 = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_5 = -8 \\ y_6 = -12 \end{cases}$$

Indice uscente $h = 5$

$$A_B = -Id \Longrightarrow A_B^{-1} = -Id \Longrightarrow W = Id$$
$$W^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

- $A_1 W^5 = \dfrac{7}{10} > 0$, quindi calcolo $r_1 = \dfrac{48}{7}$
- $A_2 W^5 = \dfrac{5}{2} > 0$, quindi calcolo $r_2 = \dfrac{18}{5}$
- $A_3 W^5 = 4 > 0$, quindi calcolo $r_3 = \dfrac{11}{4}$
- $A_4 W^5 = \dfrac{3}{2} > 0$, quindi calcolo $r_4 = \dfrac{17}{3}$

Il più piccolo rapporto è r_3, quindi l'indice entrante è $k = 3$

$B^{NEW} = \{3, 6\}$

➢ Trovare un intervallo di valutazione dell'ottimo del problema dato.

- v_s: soluzione del rilassato continuo $\overline{x}_{RC} = \left(\dfrac{320}{39}, \dfrac{268}{39}\right)$ trovata con linprog

  $v_s = \left\lfloor c^T \overline{x}_{RC} \right\rfloor = \lfloor 148.1 \rfloor = 148$
- v_i : soluzione ammissibile $\overline{x} = (6, 6)$, $v_i = 128$

➢ Calcolare ed aggiungere il primo taglio di Gomory e dire se il gap migliora.

Porto il problema in formato duale standard:

$$\begin{cases} \max 8x_1 + 12x_2 \\ 0.7x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 2.5x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ 4x_1 + 2.5x_2 + x_5 = 50 \\ 1.5x_1 + 1.25x_2 + x_6 = 25 \\ -x_1 + x_7 = -6 \\ -x_2 + x_8 = -6 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\overline{x} = \left(\frac{320}{39}, \frac{268}{39}, \frac{31}{13}, 0, 0, \frac{160}{39}, \frac{86}{39}, \frac{34}{39}\right)$$

$B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $N = \{4, 5\}$

$$A = \begin{bmatrix} 7/10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 5/4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 7/10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 5/4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -10/39 & 16/39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16/39 & -10/39 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3/13 & -2/65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/39 & -23/78 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10/39 & 16/39 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 16/39 & -10/39 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{array} \end{array}$$

$$A_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \end{array}, \quad \widetilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -10\,/\,39 & 16\,/\,39 \\ 16\,/\,39 & -10\,/\,39 \\ -3\,/\,13 & -2\,/\,65 \\ -5\,/\,39 & -23\,/\,78 \\ -10\,/\,39 & 16\,/\,39 \\ 16\,/\,39 & -10\,/\,39 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 4 & \qquad 5 \end{array} & \end{array}$$

$r = 1,\ A_1 = \left(-\frac{10}{39}, \frac{16}{39}\right)$

Piano di taglio: $\{-10\,/\,39\}x4 \ + \ \{16\,/\,39\}x5 \ \geqslant \ \{320\,/\,39\}$

$\frac{29}{39}x_4 + \frac{16}{39}x_5 \geqslant \frac{8}{39} \Longrightarrow 29x_4 + 16x_5 \geqslant 8$

Un altro modo per verificare se con il piano di taglio siamo arrivati all'ottimo è trovare le variabili non slack partendo dalle variabili slack. Trovo x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2.5x_1 - 4x_2 \\ x_5 = 50 - 4x_1 - 2.5x_2 \end{cases} \Longrightarrow 1392 - 72.5x_1 - 116x_2 + 800 - 64x_1 - 40x_2 \geqslant 8$$

$\Longrightarrow 136.5x_1 + 156x_2 \leqslant 2184$

Aggiungo questo vincolo al problema primale di partenza e ottengo $\overline{x}_{RC} = (8, 7)$, quindi sono arrivato all'ottimo di PLI.

2. Esercizio 2

Questo esercizio richiede di risolvere problemi di PLI. In particolare, il problema dello zaino oppure il ciclo di costo minimo reti. Per lo zaino, si applicano algoritmi di rilassamento continuo per ottenere valutazioni inferiori e superiori, seguiti dalla risoluzione binaria tramite Branch and Bound e dall'uso di piani di taglio di Gomory per ridurre il gap. Per il ciclo minimo, si usano algoritmi delle toppe e Branch and Bound per trovare la soluzione ottima.

Esercizio 2 (26/06/2024):

Problema dello zaino: $\begin{cases} \max 28x_1 + 31x_2 + 35x_3 + 24x_4 \\ 12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 \leqslant 17 \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \vee x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$

➢ <u>Applicare gli algoritmi dei rendimenti per trovare le valutazioni superiori e inferiori nel caso intero e binario.</u>

Algoritmi dei rendimenti:

Sia $r \in \mathbb{R}^n, r_i := \frac{v_i}{p_i}$ il vettore dei rendimenti.

Zaino intero:

- x_s: saturo lo zaino con il bene di massimo rendimento, $v_s = \lfloor c^T x_s \rfloor$
- x_i: aggiungo sempre il bene di massimo rendimento finché non ci sta più. Continuo con gli altri beni finché ho esaurito lo spazio disponibile. $v_i = c^T x_i$

Zaino binario:

- x_s: carico i beni di massimo rendimento finché non ci stanno più; saturo lo zaino con una frazione dell'elemento che non ci sta. $v_s = \lfloor c^T x_s \rfloor$
- x_i: carico i beni di massimo rendimento finché non ci stanno più. $v_i = c^T x_i$

$$r = \left(\frac{28}{12}, \frac{31}{9}, \frac{35}{7}, \frac{24}{6}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{31}{9}, 5, 4\right)$$

Caso intero:

$$x_s = \left(0, 0, \frac{17}{7}, 0\right),\ v_s = \left\lfloor c^T x_s \right\rfloor = 85$$

$$x_i = (0, 0, 2, 0),\ v_i = c^T x_s = 70$$

Caso binario:

$$x_s = \left(0, \frac{4}{9}, 1, 1\right),\ v_s = \lfloor 72.7 \rfloor = 72$$

$$x_i = (0, 0, 1, 1),\ v_i = 59$$

➢ Risolvere il problema binario con il Branch and Bound, istanziando la variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassato continuo.

Branch and Bound per zaino binario:

1. Seleziona il sottoproblema da esplorare (variabile frazionaria)
2. Calcola $v_s(P_{ij})$ con il rilassato continuo
3. Controlla le seguenti regole di taglio:
    - Se $P_{ij} = \emptyset$, allora chiudi il nodo P_{ij}
    - Se $v_s(P_{ij}) \leqslant v_i(P)$ allora chiudi il nodo P_{ij}
    - Se $v_s(P_{ij}) > v_i(P)$ con $v_s(P_{ij})$ a componenti intere, allora aggiorna $v_i(P) = v_s(P_{ij})$ e chiudi il nodo P_{ij}
4. Scendi e torna al passo 2. finché tutte le foglie non sono state esplorate.

$v_i(P) = 59,\ x_{RC} = \left(0, \frac{4}{9}, 1, 1\right)$, inizio istanziando x_2

- $P_{11} : x_2 = 0$

  $x_{RC} = \left(\frac{1}{3}, 0, 1, 1\right),\ v_s = \lfloor 68.33 \rfloor = 68 > v_i(P)$, x_{RC} non è ammissibile quindi continuo

- $P_{12} : x_2 = 1$

  $x_{RC} = \left(0, 1, 1, \frac{1}{6}\right),\ v_s = \lfloor 70 \rfloor = 70 > v_i(P)$, x_{RC} non è ammissibile quindi continuo

- $P_{21} : x_2 = 0,\ x_1 = 0$

  $x_{RC} = (0, 0, 1, 1),\ v_s = 59 \leqslant v_i(P)$, quindi chiudo il nodo P_{21}

- $P_{22} : x_2 = 0,\ x_1 = 1$

  $x_{RC} = \left(1, 0, \frac{5}{7}, 0\right),\ v_s = \lfloor 53 \rfloor = 53 \leqslant v_i(P)$, quindi chiudo il nodo P_{22}

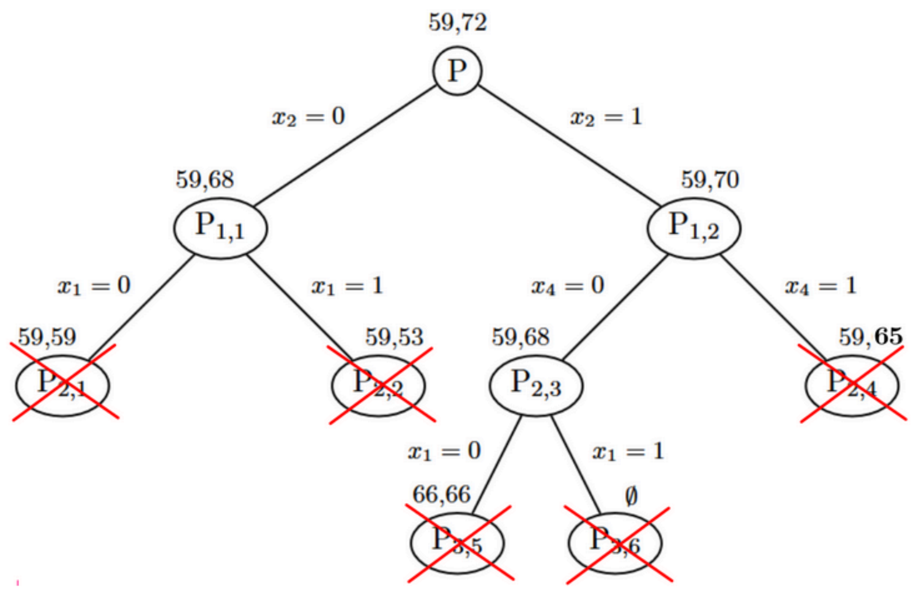
- $P_{23} : x_2 = 1,\ \ x_4 = 0$
  $x_{RC} = \left(\frac{1}{12}, 1, 1, 0\right),\ \ v_s = 68 > v_i(P)$, x_{RC} non è ammissibile quindi continuo

- $P_{24} : x_2 = 1,\ \ x_4 = 1$
  $x_{RC} = \left(0, 1, \frac{2}{7}, 1\right),\ \ v_s = 65 > v_i(P),\ \ x_{RC}$ non è ammissibile quindi continuo

- $P_{35} : x_2 = 1, x_4 = 0, x_1 = 0$
  $x_{RC} = (0, 1, 1, 0),\ \ v_s = 66 > v_i(P),\ \ x_{RC}$ è ammissibile quindi aggiorno $v_i(P) = 66$ e chiudo il nodo P_{35}. Nota come posso chiudere anche il nodo P_{24} perché $66 < v(P_{24}) < 65$ che è impossibile.

- $P_{36} : x_2 = 1,\ \ x_4 = 0,\ \ x_1 = 1$
  $P = \emptyset$, quindi chiudo il nodo P_{36}

Ho esplorato tutte le foglie, la soluzione ottima è $(0, 1, 1, 0)$ con valore ottimo 66



Esercizio 2 (17/07/2024):

➢ <u>Trovare il ciclo di costo minimo sulla rete:</u>

città	2	3	4	5
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			13	11
4				98

Comandi matlab per risolvere TSP simmetrico:

```
%     12  13  14  15  23  24  25  34  35  45
c = [ 16  21  64  46  16  59  58  13  11  98];

Aeq=[1  1  1  1  0  0  0  0  0  0 ;
     1  0  0  0  1  1  1  0  0  0 ;
     0  1  0  0  1  0  0  1  1  0 ;
     0  0  1  0  0  1  0  1  0  1 ;
     0  0  0  1  0  0  1  0  1  1 ];

beq= [2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2];

A = -[0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 ;
      1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 ;
      1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 ;
      1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 ;
      1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 ;
      1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 ;
      1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 ;
      0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 ;
      0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 ;
      0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 ];

b= -[1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1];
lb = [0 ; 0 ; 0; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0];
ub = [1; 1 ; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];

[x,v] = linprog(c, A , b , Aeq, beq, lb , ub);

disp(x)
disp(v)
```

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ \overline{x} = & (1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0) \end{array}$$

Ciclo di costo minimo: $1-2-4-3-5-1$, di valore 145

➢ Trovare una valutazione superiore con l'algoritmo delle toppe.

Algoritmo delle toppe:

1. Calcolo l'assegnamento di costo minimo i.e. senza vincoli di connessione (nei comandi, devo togliere la matrice A, il vettore b, e UB)
2. Seleziono un arco (i, j) del primo ciclo e un arco (k, l) del secondo.
3. Li elimino e li sostituisco con (i, l) e (k, j), rispettivamente.

```
[x,v] = linprog(c, [], [] , Aeq, beq, lb , ub);
```

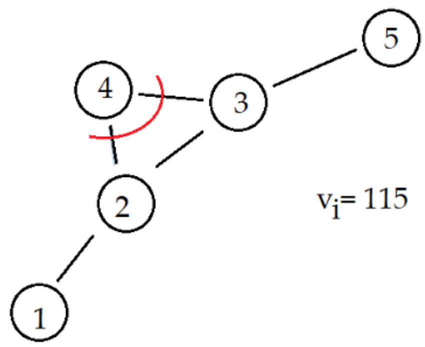
Ottengo $\overline{x}_i = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0),\ v_i = 145$. Siccome è ammissibile, poiché forma un ciclo Hamiltoniano, allora $v_s = v_i = \overline{v}$. Non mi serve fare l'algoritmo delle toppe, sono arrivato all'ottimo.

➢ Applicare il Branch and Bound utilizzando il 4-albero e l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3 ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35}.

K-albero di costo minimo:
Per trovare una valutazione inferiore, isolo il nodo k e costruisco un albero di copertura di costo minimo con i nodi rimanenti. Collego il nodo k all'albero di copertura con i due archi di costo minimo.

Per costruire l'albero di copertura di costo minimo si usa l'algoritmo di Kruskal:

1. Ordina gli archi in ordine non decrescente di costo.
2. Scegli l'arco più piccolo: se forma un ciclo con l'albero di copertura scartalo, altrimenti includilo nell'albero di copertura.
3. Ripeti 2. finchè non ci sono $(n-1)$ archi.

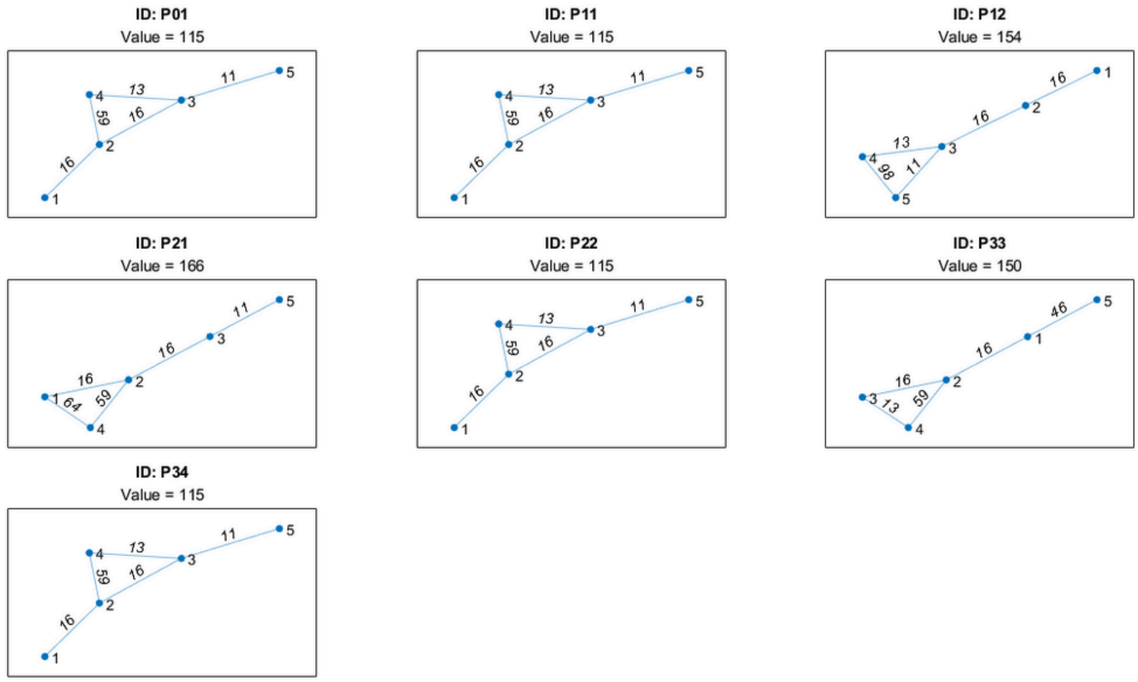


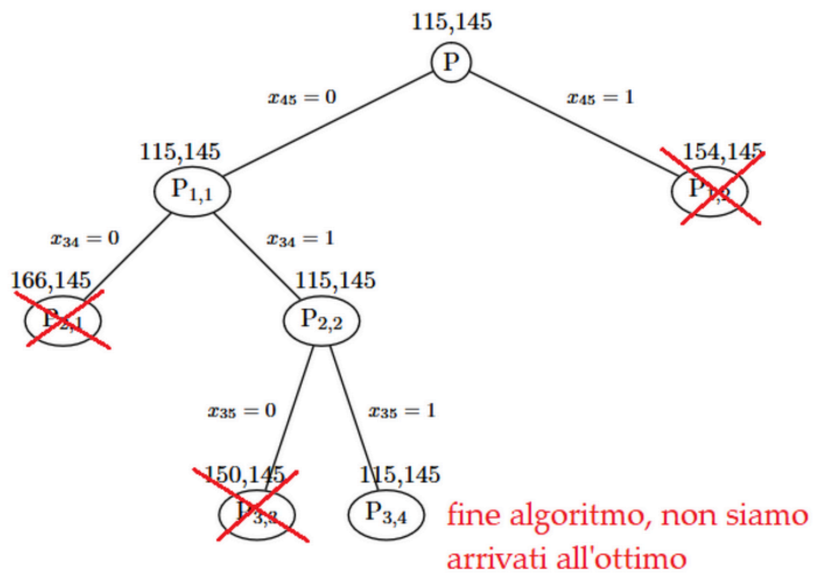
Algoritmo del nodo più vicino:
Per trovare una valutazione superiore, parto dal nodo i, scelgo di collegarlo al nodo j tale che c_{ij} è minimo.

Ciclo: $3-5-1-2-4-3$ di costo $v_s = 145$

Branch and Bound per TSP asimmetrico:

1. Seleziona il sottoproblema da esplorare (te le dà l'esercizio)
2. Calcola $v_i(P_{ij})$ con il k-albero minimo
3. Controlla le seguenti regole di taglio:
   - Se $P_{ij} = \emptyset$, allora chiudi il nodo P_{ij}
   - Se $v_i(P_{ij}) \geqslant v_s(P)$ allora chiudi il nodo P_{ij}
   - Se $v_i(P_{ij}) < v_s(P)$ con $v_i(P_{ij})$ ciclo hamiltoniano, allora aggiorna $v_s(P) = v_i(P_{ij})$ e chiudi il nodo P_{ij}
4. Scendi e torna al passo 2. finché tutte le foglie non sono state esplorate.





➢ <u>Stabilire una condizione necessaria ed una sufficiente affinchè il valore ottimo sia un numero pari</u>

Una condizione necessaria è una proprietà che deve essere verificata affinché il costo ottimo sia pari.

- $c^T\overline{x}$ è pari $\Longrightarrow$ c'è un numero pari di archi di costo dispari in $\overline{x}$

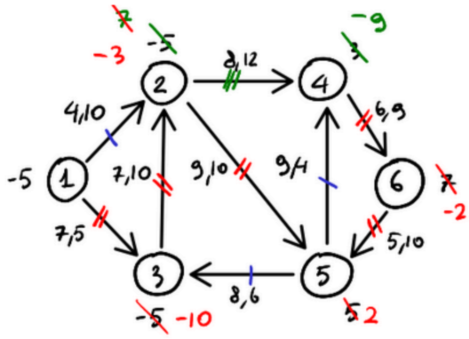
Una condizione sufficiente è una proprietà che garantisce che il costo ottimo sia pari.

- Gli archi di $\overline{x}$ hanno costo pari $\Longrightarrow c^T\overline{x}$ è pari

3. Esercizio 3

Questo esercizio richiede di risolvere problemi di PL su reti. In particolare bisogna verificare se il flusso e i potenziali sono degeneri, fare un passo del simplesso per flussi, trovare l'albero dei cammini minimi con Dijkstra, usare FFEK per trovare il taglio minimo e/o il flusso massimo.

Esercizio 3 (10/01/2024):



$T = \{(1,3), (2,5), (3,2), (4,6), (6,5)\}$

$U = \{(2,4)\}$

$$\bar{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 46 & 53 & 54 & 65 \\ 0, & 5, & 12, & 3, & 10, & 9, & 0, & 0, & 2 \end{array}$$

➢ <u>Determinare se flusso e potenziale sono degeneri</u>

> Come costruire un flusso di base $\overline{x}$:
>
> 1. Pongo $\overline{x}_L := 0,\ \overline{x}_U := u_U$
> 2. Aggiorno $b_i = b_i + u_{ij},\ b_j = b_j - u_{ij}$
> 3. Ispezionando prima le foglie (i):
>   - se $(i) \longrightarrow (j)$ allora $x_{ij} = -b_i,\ b_j \leftarrow b_j - x_{ij}$
>   - se $(i) \longleftarrow (j)$ allora $x_{ji} = b_i,\ b_j \leftarrow b_j + x_{ij}$

- $(1) \longrightarrow (3)$ quindi $x_{13} = 5,\ b_3 = -10$
- $(3) \longrightarrow (2)$ quindi $x_{32} = 10,\ b_2 = -3$
- $(2) \longrightarrow (5)$ quindi $x_{25} = 3,\ b_5 = 2$
- $(4) \longrightarrow (6)$ quindi $x_{46} = 9,\ b_6 = -2$
- $(6) \longrightarrow (5)$ quindi $x_{65} = 2,\ b_5 = -0$

Per costruire il potenziale $\overline{\pi}$ si fa il costo cumulativo, ricordando che, se si attraversa un arco al contrario, il costo si deve sottrarre.

$$\overline{\pi} = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0, & 14, & 7, & 12, & 23, & 18 \end{array}$$

Un flusso di base è degenere se $\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} = 0$ o se $\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} = u_{ij}$
Un potenziale di base è degenere se $\exists (i,j) \in L : c^{\pi}_{ij} = 0$ o se $\exists (i,j) \in U : c^{\pi}_{ij} = 0$

- Siccome $\overline{x}_{13} = 5 = u_{13}$, allora il flusso $\overline{x}$ è degenere
- $c^{\pi}_{12} = -10,\ c^{\pi}_{24} = 10,\ c^{\pi}_{53} = 24,\ c^{\pi}_{54} = 20,$ siccome $c_{ij}^{\pi} \neq 0\ \forall (i,j) \in (L \cup U)$ allora il potenziale $\overline{\pi}$ non è degenere

➢ <u>Fare un passo dell'algoritmo del simplesso per flussi</u>

Algoritmo del simplesso per flussi:

1. $c^\pi_{ij} = c_{ij} + \overline{\pi}_i - \overline{\pi}_j$
   <u>if</u> $c^\pi_{ij} \geqslant 0 \ \forall (i,j) \in L, \ \ c^\pi_{ij} \leqslant 0 \ \forall (i,j) \in U \Longrightarrow$ STOP (ottimo)
   <u>else</u> $(p,q) := \min\Big\{\big\{(i,j) \in L : c^\pi_{ij} < 0\big\} \cup \big\{(i,j) \in U : c^\pi_{ij} > 0\big\}\Big\}$ arco entrante
2. L'arco entrante forma un ciclo $\mathcal{C}$. Fisso su $\mathcal{C}$ un verso concorde con (p,q) se $(p,q) \in L$, altrimenti fisso un verso discorde.
   $\theta^+ := \min\limits_{\mathcal{C}^+} \{u_{ij} - \overline{x}_{ij}\}, \ \theta^- := \min\limits_{\mathcal{C}^-} \{\overline{x}_{ij}\}, \ \theta := \min\big\{\theta^+, \theta^-\big\}$
   <u>if</u> $\theta = +\infty \Longrightarrow$ STOP $\left(c^T x = -\infty\right)$
   <u>else</u> $(r,s) := \min\Big\{\big\{(i,j) \in \mathcal{C}^- : x_{ij} = \theta\big\} \cup \big\{(i,j) \in \mathcal{C}^+ : u_{ij} - x_{ij} = \theta\big\}\Big\}$
3. Aggiorno la tripartizione T, L, U

$(1,2) \in L, \ c^\pi_{12} = -10 < 0$, quindi l'arco entrante è $(1,2)$

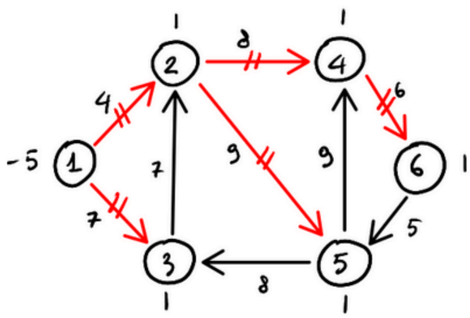
$\mathcal{C} = \{(1,2), \ (1,3), \ (3,2)\}, \ \mathcal{C}^+ = \{(1,2)\}, \ \mathcal{C}^- = \{(1,3),(3,2)\}$
$\theta^+ = u_{12} - \overline{x}_{12} = 10,$
$\theta^- = \min\{5, 10\} = 5$
$\theta = \min\{5, 10\} = 5 \Longrightarrow$ l'arco uscente è $(1,3)$

$T_{\text{New}} = \{(1,2),(2,5),(3,2),(4,6),(6,5)\}$

➢ <u>Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 e la soluzione ottima in termini di flusso su reti.</u>

Algoritmo di Dijkstra:

1. $\overline{\pi}_i := \begin{cases} 0, & i = r \\ +\infty, & i \neq r \end{cases}, \ p_i := \begin{cases} 0, & i = r \\ -1, & i \neq r \end{cases}, \ Q = \{1, \dots, n\}$
2. **while** $Q \neq \emptyset$
   estrai da Q il nodo con $\overline{\pi}_i$ minima.
   $\forall j \in FS(i)$, **if** $\pi_j > \pi_i + c_{ij} \Longrightarrow p_j = i, \ \pi_j = \pi_i + c_{ij}$



$Q = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\}$

$$\overline{\pi} = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (0, & \cancel{\infty}, & \cancel{\infty}, & \cancel{\infty}, & \cancel{\infty}, & \cancel{\infty}) \\ & 4 & 7 & 12 & 13 & 18 \end{array}$$

$$p = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (0, & \cancel{-1}, & \cancel{-1}, & \cancel{-1}, & \cancel{-1}, & \cancel{-1}) \\ & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\overline{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 25 & 32 & 46 & 53 & 54 & 65 \\ (4, & 1, & 2, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0) \end{array}$$

Iterazioni:
1 2 3
4 5 6

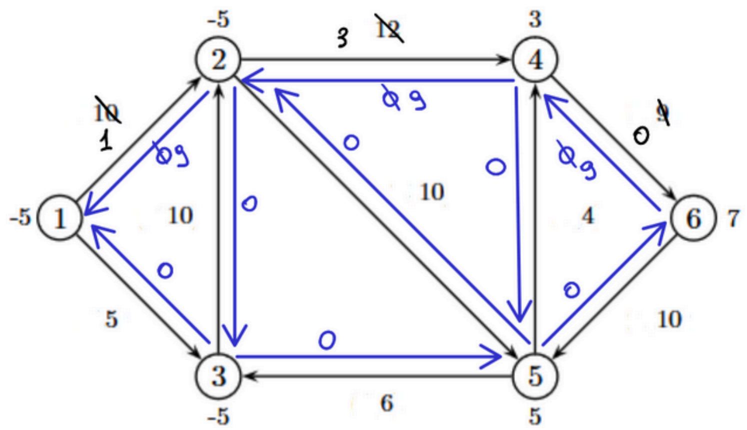
➢ Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 6 di capacità minima e la soluzione ottima del problema di flusso massimo.

Algoritmo di FFEK:

1. Inizializzo il flusso $\overline{x} = \vec{0}$
2. Costruisco il grafo residuo $G(x)$
3. if $\exists C_{aum}$ then calcola $\delta := \min\{r_{ij} : (i,j) \in C_{aum}\}$
   spedisci δ unità di flusso lungo C_{aum}, torna al passo 2.
   else STOP $\overline{x}$ è un flusso massimo ed un taglio di capacità minima è (N_S, N_T)
   dove $N_S = \{i \in N : \exists C_{aum}$ da s a $i \in G(x)\}$, $N_T = N \setminus N_S$

Per trovare un cammino aumentante si usa "l'algoritmo della croce":

1. Disegno una tabella 1×2. Sulla colonna di sinistra scrivo il nodo s. Sulla colonna di destra scrivo in ordine lessicografico i nodi di $FS(s)$ tali che $r_{ij} > 0$.
2. Si prende il primo nodo della colonna di destra, diciamo i e si scrive sotto, nella colonna di sinistra. Nella colonna di destra si scrivono i nodi di $FS(i)$ tali che $r_{ij} > 0$ non ancora visitati dal nodo precedente.
3. Itero il passo 2. finché nella colonna di destra non appare il nodo t. Il cammino aumentante si trova vedendo qual'è il nodo nella colonna di sinistra che ha permesso di raggiungere t. Si cerca la riga in cui questo nodo appare sulla colonna di destra e si procede guardando quale fosse il nodo da cui è stato raggiunto finché non si arriva a s.



1	2 3
2	4 5
4	6

1-2-4-6

$\delta = 9$

1	~~2~~ 3
~~2~~	4 ~~5~~
~~4~~	
~~5~~	
3	

• Non ci sono altri cammini aumentanti, quindi

$\bar{x}_{12} = 9$, $\bar{x}_{24} = 9$, $\bar{x}_{46} = 9$

Gli altri $\bar{x}_{ij} = 0$

• $N_T = 6$

$N_S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

• max flow = 9

4. Esercizio 4

Questo esercizio richiede di applicare il metodo di Frank-Wolfe e gradiente proiettato per risolvere problemi di PNL. Si parte da un punto iniziale, si esegue un aggiornamento e si studiano punti specifici per valurare se sono ottimali. Inoltre, bisogna trovare massimo e minimo della funzione obbiettivo su tutto $\mathbb{R}^2$ e calcolare i moltiplicatori di Lagrange.

Esercizio 4 (05/06/2024):

Sia $f(x) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 6x_1 + 8x_2$

sul poliedro P di vertici $(-2,3)$, $(0,5)$, $(2,1)$ e $(1,-3)$. Sia $x^k := \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

➢ Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe a partire da x^k per la minimizzazione di f.

Come scrivere il poliedro dati i vertici:

La retta passante per due punti A, B ha equazione $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

si prova l'origine nell'equazione ottenuta per vedere se mettere $\leqslant$ oppure $\geqslant$

- Retta passante per $(-2,3)$ e $(0,5)$:
  $\dfrac{x_1+2}{0+2} = \dfrac{x_2-3}{5-3} \Longrightarrow x_1 + 2 = x_2 - 3 \Longrightarrow x_1 - x_2 = -5$
  provo il punto $(0,0)$: $0 \geqslant -5$ quindi la disequazione è $-x_1 + x_2 \leqslant 5$
- La disequazione dei punti $(0,5)$ e $(2,1)$ è $2x_1 + x_2 \leqslant 5$
- La disequazione dei punti $(2,1)$ e $(1,-3)$ è $4x_1 - x_2 \leqslant 7$
- La disequazione dei punti $(-2,3)$ e $(1,-3)$ è $-2x_1 - x_2 \leqslant 1$

Metodo di Frank Wolfe per massimi e minimi:

1. Calcolo una soluzione y^k del problema linearizzato $\begin{cases} \overset{\min}{\max}\ \nabla f(x^k)^T x \\ x \in P \end{cases}$
2. **if** $d^k := (y^k - x^k) = 0$, **then** STOP (x^k è stazionario)

   else calcolo una soluzione t^k del problema $\overset{\min}{\max}_{t \in [0,1]} f(x^k + td^k)$
3. Poni $x^{k+1} := x^k + t^k(y^k - x^k)$

$\nabla f(x) = (-4x_1 + 4x_2 - 6,\ 4x_1 - 4x_2 + 8)$
$\nabla f(x^k) = (6, -4) \sim (3, -2)$

- Problema linearizzato: $\begin{cases} \min \nabla f(x^k) \cdot x \\ Ax \leqslant b \end{cases}$

  Con le linee di isocosto si vede che il vertice ottimo è $y^k = (-2, 3)$

- Direzione: $d^k = y^k - x^k = \left(\frac{-6}{3}, \frac{9}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

- Restrizione: $\phi(t) := f(x^k + td^k) = f\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) + t\left(\frac{-8}{3}, \frac{-2}{3}\right)\right) = -8t^2 - \frac{40}{3}t + ...$

  Non mi interessa il termine costante in quanto devo fare la derivata ϕ'

- Passo: $t_k := \min\limits_{t\in[0,1]} \phi(t)$, siccome la funzione è monotona decrescente per $t \in [0, 1]$, allora $t_k = 1$

- $x^{k+1} = x^k + t_k d^k = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (-2, 3)$

➢ <u>Fare un passo del metodo del gradiente proiettato a partire da x^k per la minimizzazione di f.</u>

Metodo del gradiente proiettato per massimi e minimi:

1. Pongo $k := 0$, trovo M a partire dai vincoli attivi $\mathcal{A} = \left\{i : A_i x^k = b_i\right\}$
2. Calcolo $H := Id - M^T\left(MM^T\right)^{-1}M$ e la direzione $d^k := \overset{H(-\nabla f(x^k))}{H\nabla f(x^k)}$
3. **if** $d^k \neq 0$

   then calcolo una soluzione $\widehat{t_k}$ del problema $\begin{cases} \max t \\ A(x^k + td^k) \leqslant b \end{cases}$

   calcolo una soluzione t_k del problema $\overset{\min}{\max\limits_{t\in[0,\widehat{t_k}]}} f(x^k + td^k)$

   aggiorno $x^{k+1} = x^{k+1} + t_k d^k$, incrementa k e torna al passo 1.

   else $d^k = 0$ calcolo $\lambda := -\left(MM^T\right)^{-1} M\nabla f(x^k)$

   if $\lambda \overset{\geqslant}{\leqslant} 0$ **then** STOP (x^k è stazionario)

   else calcolo $\lambda_j := \overset{\min}{\max\limits_{i\in\mathcal{A}}} \lambda_i$, elimino da M la riga A_j e torno al passo 2.

Il vincolo attivo su x^k è $2x_1 + x_2 \leqslant 5$, quindi la matrice $M = [2, 1]$

- Matrice di proiezione: $H = I - M^T\left(MM^T\right)^{-1}M = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

- Direzione $d^k := -H\nabla f(x^k) = \begin{bmatrix} -14/5 \\ 28/5 \end{bmatrix}$

- Passo massimo: $\widehat{t^k} : \begin{cases} \max t \\ A(x^k + td^k) \leqslant b \end{cases} \Longrightarrow \widehat{t^k} = \frac{5}{21}$

- Restrizione $\phi(t) = f\big(x^k + td^k\big) = -\dfrac{3528}{25}t^2 - \dfrac{196}{5}t + \ldots$

  Passo $t_k = \min\limits_{t \in [0, \widehat{t^k}]} \phi(t)$, siccome monotona decrescente allora $t_k = \dfrac{5}{21}$
- $x^{k+1} = x^k + t_k d^k = (0, 5)$

➢ Trovare minimo globale e relativi moltiplicatori. Trovare minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$

Teorema LKKT:

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ regolare. Siano $f, g, h \in C^1$

i. Se $\overline{x} \in D$ è un punto di minimo locale, allora $\exists \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \overline{\lambda} \geqslant 0,\ \exists \overline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tale che $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ soddisfa il sistema $LKKT$.

ii. Se $\overline{x} \in D$ è un punto di massimo locale, allora $\exists \overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \overline{\lambda} \leqslant 0,\ \exists \overline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tale che $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ soddisfa il sistema $LKKT$.

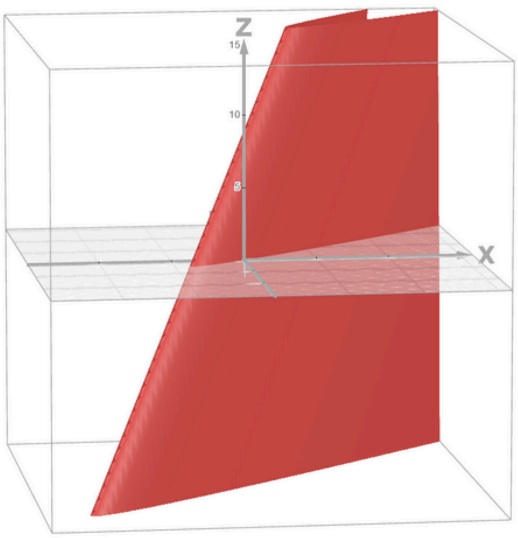
Il sistema LKKT:

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \nabla f(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum\limits_{j=1}^{p} \overline{\mu}_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 & n \text{ equazioni} \\ \langle \overline{\lambda}, g(\overline{x}) \rangle = 0 \quad m \text{ equazioni} \\ h(\overline{x}) = 0 \quad p \text{ equazioni} \end{cases}$$

f è concava quindi il minimo globale è un vertice del poliedro, ovvero il punto $(1, -3)$.

Risolvendo il sistema LKKT con $\overline{x} = (1, -3)$ trovo i moltiplicatori $\lambda = \left(0, 0, \dfrac{37}{3}, \dfrac{35}{3}\right)$

Il minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$ non esiste considerando la restrizione $x_1 = 0,\ x_2 = t$.



Esercizio 4 - parte 1 (09/01/2025):
Data la funzione $f(x) = x_1^2 - x_2$ e i vincoli $g(x) = -x_1 - 1,\ h(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4$, trovare i moltiplicatori $\overline{\lambda}, \overline{\mu}$ dei punti stazionari $(0,1),\ (0,-1),\ \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{63}}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ e classificarli.

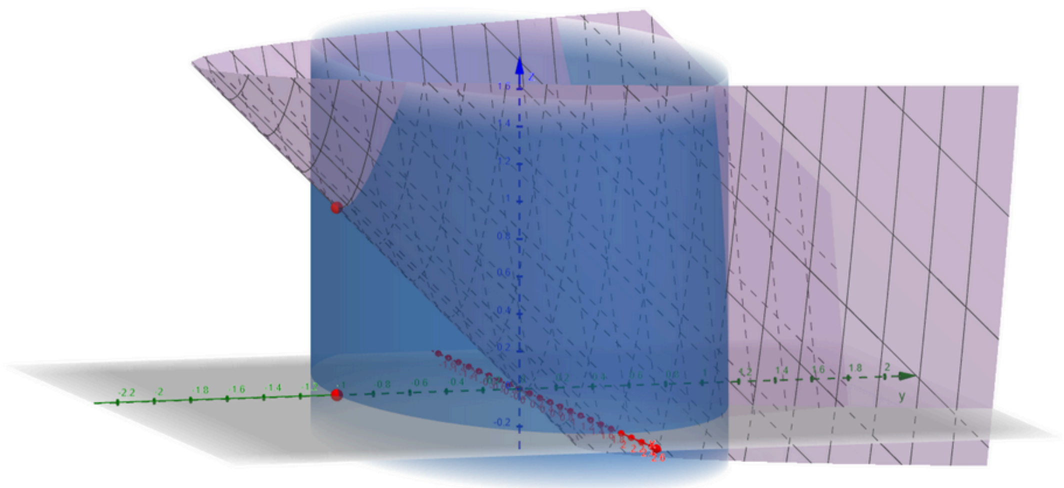
$\nabla f(x) = (2x_1, -1),\ \nabla g(x) = (-1, 0),\ \nabla h(x) = (2x_1, 8x_2)$

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 \\ \lambda_i g_i = 0 \\ h_i = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 + 2x_1\mu_1 = 0 \\ -1 + 8x_2\mu_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1 - 1) = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Il dominio è regolare e limitato, quindi, per Weierstrass, esistono massimo e minimo globali.

$\overline{x}$	$\overline{\lambda}$	$\overline{\mu}$	$f(\overline{x})$	**Classificazione**
$(0,1)$	0	$\frac{1}{8}$	-1	Minimo globale
$(0,-1)$	0	$-\frac{1}{8}$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.2$	Minimo locale / massimo locale / sella
$\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 < 0$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	Massimo locale
$\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 < 0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \approx 1.2$	Massimo locale
$\left(\frac{\sqrt{63}}{4}, -\frac{1}{8}\right)$	0	-1	$\frac{65}{16} \approx 4$	Massimo globale

Analisi locale del punto $(0,-1)$:



Il punto $(0,-1)$ è un minimo locale data la restrizione $x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0$