Università di Pisa

Pietro Ducange

Algoritmi e strutture dati

Ricerca in un insieme: Metodo Hash

a.a. 2020/2021

Si ringrazia la prof. Nicoletta De Francesco per aver messo a disposizione la maggior parte delle slide utilizzate nella presente lezione

Ricerca Lineare in Array

```
int linearSearch (InfoType *A , int n, InfoType x) {
    for (int i=0;i<n;i++) if (A[i]==x) return 1;
    return 0;
}
```

Limite Inferiore?

Complessità ?

Ricerca Binaria

Algoritmo applicabile se gli elementi sono mantenuti ordinati

```
int binSearch (InfoType *A ,InfoType x, int i=0, int j=n-1) {
    if (i > j) return 0;
    int k=(i+j)/2;
    if (x == A[k]) return 1;
    if (x < A[k]) return binSearch(A, x, i, k-1);
    else return binSearch(A, x, k+1, j)
}
```

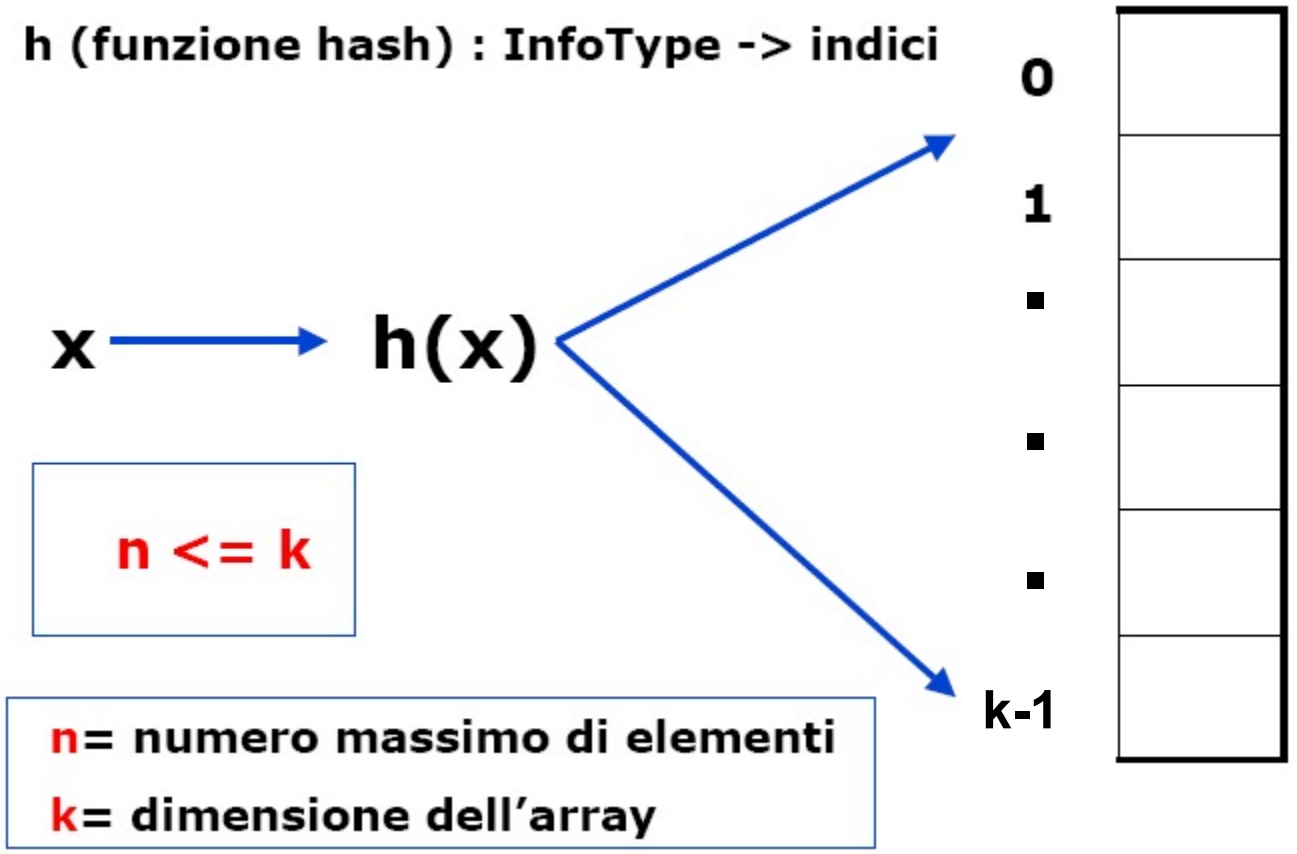
Limite Inferiore?

Complessità ?

Metodo di ricerca hash

- metodo di ricerca in array
- non basato su confronti
- molto efficiente

Metodo hash


h (funzione hash) : InfoType -> indici
x
h(x)
0
1
.
.
.
k-1
n <= k
n= numero massimo di elementi
k= dimensione dell'array

Metodo hash: accesso diretto

h iniettiva:

h(x) : indirizzo hash dell'elemento che contiene x

```
bool hashSearch (InfoType *A , int n, InfoType x) {
    int i=h(x); if (A[i]==x) return true;
    else return false;
}
```

Problema: memoria (k può essere molto grande)

Complessità?

insieme di al massimo 5 cifre : accesso diretto

Insieme={0,1,2,7,9} (non noto apriori)

n= 5
k= 10

Inserimenti: { 0, 2, 7}

h(x)= x

h(0)= 0
h(2)=2
h(7)=7

0	1
1	0
2	1
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1
8	0
9	0

NB: non è necessario memorizzare l'elemento

Domanda

Quale dovrebbe essere il valore di k per memorizzare, ad accesso diretto le possibili parole della lingua italiana di lunghezza minore o uguale a 10 caratteri?

Metodo hash senza accesso diretto

Si rilascia l'iniettività e si permette che due elementi diversi abbiano lo stesso indirizzo hash:

h(x1) = h(x2) collisione

Bisogna gestire le seguenti situazioni:

- **Come si cerca un elemento se si trova il suo posto occupato da un altro**

- **come si inseriscono gli elementi**

Metodo hash ad indirizzamento aperto

Una prima soluzione:

funzione hash modulare: h(x)=(x%k) dove k è la dimensione dell'array

(siamo sicuri che vengono generati tutti e soli gli indici dell'array)

Legge di scansione lineare: se non si trova l'elemento al suo posto, lo si cerca nelle posizioni successive fino a trovarlo o ad incontrare una posizione vuota

- **L'inserimento è fatto con lo stesso criterio**
- **Una volta inseriti nella struttura dati, non possano più essere cancellati.**

Esempio: insieme di al massimo 5 cifre

Insieme={0,1,2,7,9} (non noto apriori)

n=k=5

h(x)= x %k

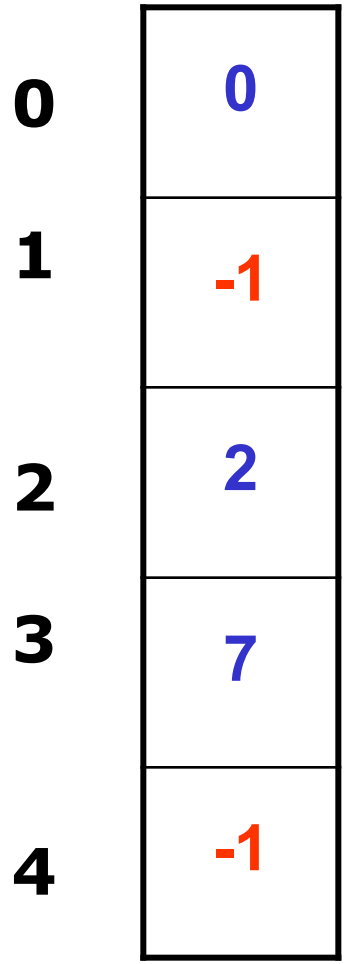
n/k=1

{ 0, 2, 7}

h(0)= 0

h(2)=2

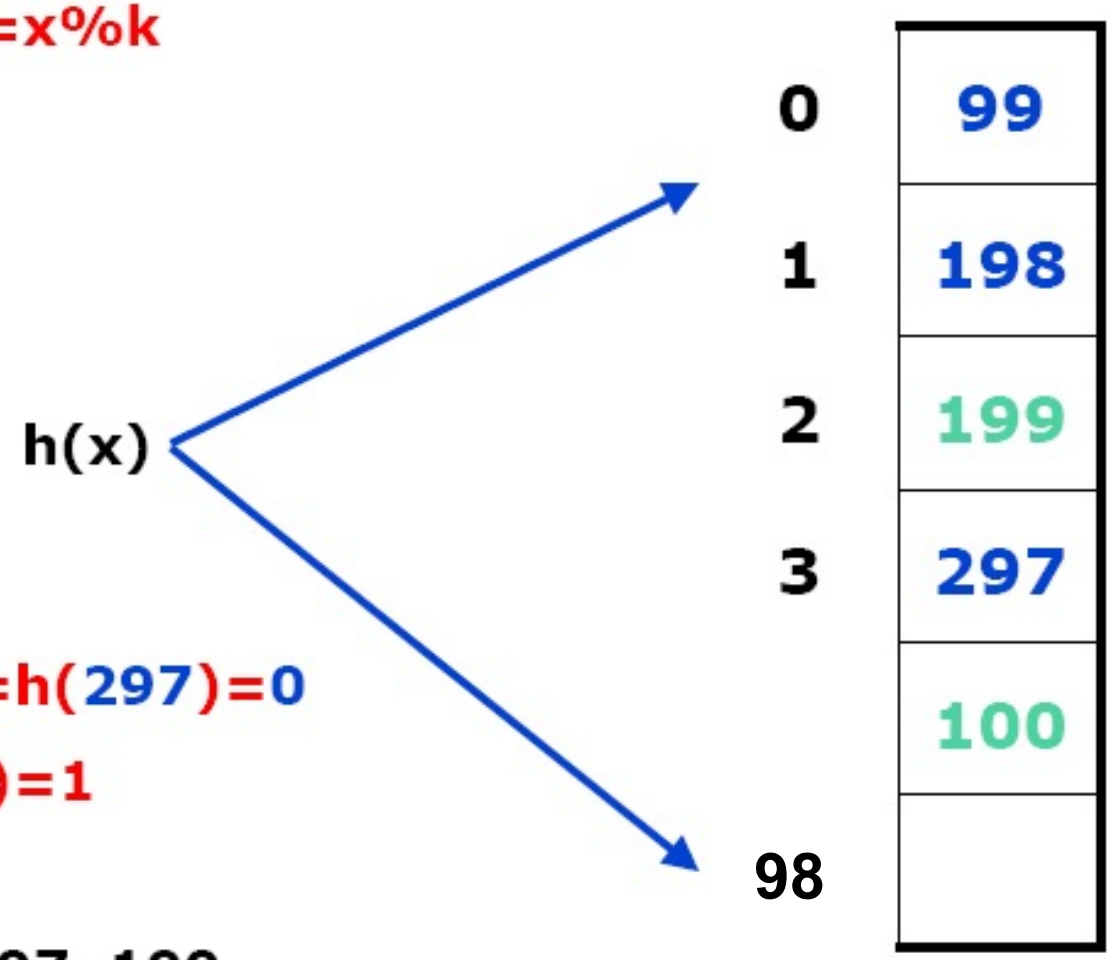
h(7)=2



esempio

Esempio: h(x)=x%k

K=99



h(99)=h(198)=h(297)=0

H(199)=h(100)=1

99, 198, 199, 297, 100

Conseguenze

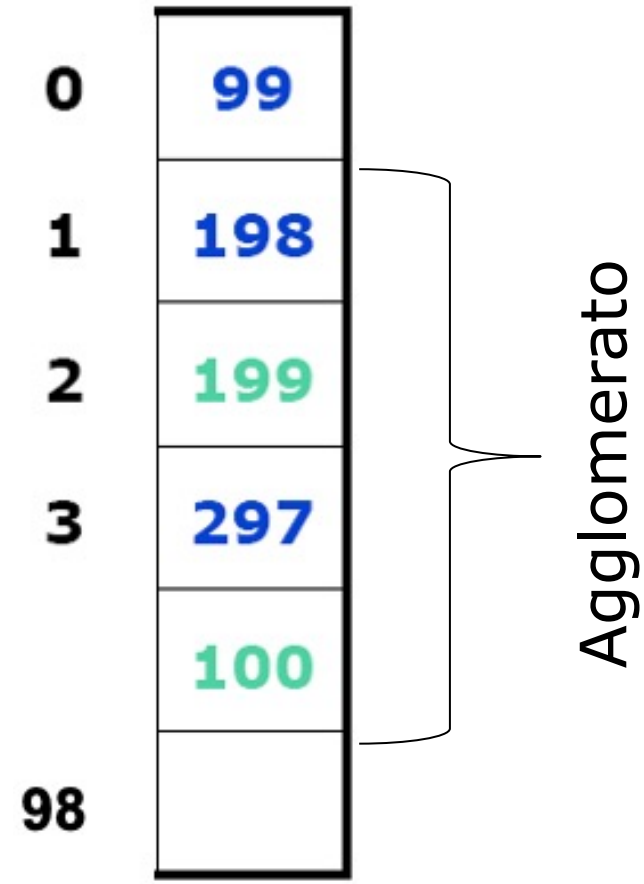
Agglomerato: **gruppo di elementi adiacenti con indirizzi hash diversi**

La presenza di collisioni ed agglomerati aumenta il tempo di ricerca

h(99)=h(198)=h(297)=0

H(199)=h(100)=1

99, 198, 199, 297, 100



Metodo hash: ricerca con scansione lineare

```
bool hashSearch (int *A , int k, int x) {
int i=h(x);
for (int j=0; j<k; j++) {
     int pos = (i+j)%k;          // somma in modulo
     if (A[pos ]== -1) return false ;
     if (A[pos ] == x) return true ;
      }
return false ;
}
```

-1: posizione vuota

Metodo hash : inserimento

```
int hashInsert (int *A , int k, int x) {
int i=h(x); int b=0;
for (int j=0; !b & j<k; j++) {
     int pos = (i+j)%k;
     if (A[pos ]== -1) {
          A[pos] = x; b=1;
          }
  }
return b;
}
```

Metodo hash: inserimento in presenza di cancellazioni

Consideriamo un array di dimensione 10 che dovrà contenere numeri naturali, con funzione hash h(x)= x % 10.

Supponiamo che nell'array siano stati inseriti, nell'ordine, i numeri 94, 52, e 174. La situazione sarà quella di Figura (a):

(a)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	52	-1	94	174	-1	-1	-1	-1

(b)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	52	-1	-2	174	-1	-1	-1	-1

Se effettuassimo la cancellazione dell'elemento 94, allora dovremmo passare alla situazione della Figura (b). Perché?

Metodo hash: inserimento in presenza di cancellazioni

```
int hashInsert (int *A , int k, int x) {
int i=h(x); int b=0;
for (int j=0; !b & j<k; j++) {
        int pos = (i+j)%k;
        if ((A[pos ]== -1)|| (A[pos ]== -2)) {
                        A[pos] = x;
                        b=1;
         }
}
return b;
}
```

-1: posizione vuota
-2: posizione disponibile

Metodo hash: ricerca con scansione lineare

```
bool hashSearch (int *A , int k, int x) {
int i=h(x);
for (int j=0; j<k; j++) {
     int pos = (i+j)%k;          // somma in modulo
     if (A[pos ]== -1) return false ;
     if (A[pos ] == x) return true ;
     }
return false ;
}
```

-1: posizione vuota
-2: posizione liberata

Scansioni

scansione_lineare(x;j) = (h(x) + cost*j) mod k

Es: (h(x) + j) mod k, j=1, 2, …

scansione_quadratica(x; j) = (h(x) + cost*j^2) mod k

Es: (h(x) + j^2) mod k j=1, 2, …

La diversa lunghezza del passo di scansione riduce gli agglomerati, ma è necessario controllare che la scansione visiti tutte le possibili celle vuote dell'array, per evitare che l'inserimento fallisca anche in presenza di array non pieno.

Tempo medio di ricerca per l'indirizzamento aperto

Il tempo medio di ricerca (numero medio di confronti) dipende da

- **Fattore di carico: rapporto $\alpha = n/k$ (sempre <=1) : numero medio di elementi per ogni posizione**
- **Legge di scansione (migliore con la scansione quadratica e altre più sofisticate)**
- **Uniformità della funzione hash (genera gli indici con uguale probabilità)**

Stima del numero medio di accessi

numero medio di accessi con la scansione lineare

$$<= 1/(1-\alpha)$$

Per esempio per α =0,5, abbiamo 2 accessi, per α =0,9 ne abbiamo 10

Esempio di tempi di scansione

$\frac{n}{M}$	scansione lineare	scansione quadratica
10%	1.06	1.06
50%	1.50	1.44
70%	2.16	1.84
80%	3.02	2.20
90%	5.64	2.87

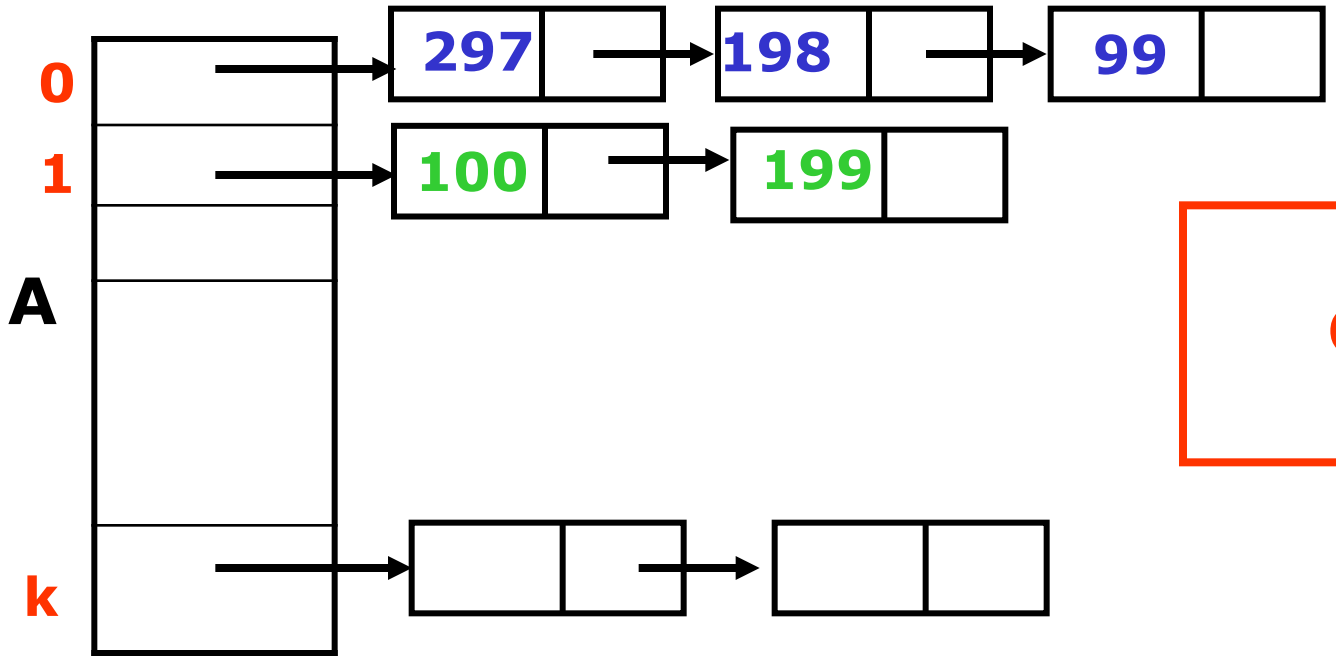
$M=k$

Problemi con l'indirizzamento aperto

Molti inserimenti e cancellazioni degradano il tempo di ricerca a causa degli agglomerati. E' necessario periodicamente "risistemare" l'array.

Metodo di concatenazione

- Array A di k <= n puntatori (n/k >= 1)
- elementi che collidono su i nella lista di puntatore A[i]
- evita del tutto gli agglomerati



$O(\alpha)$

Qualche domanda

Quale è la complessità dell'inserimento con il metodo di concatenazione?

Quale è la complessità della cancellazione con il metodo di concatenazione?

Quale è il principale problema del metodo di concatenazione?

Dizionari (tabelle)

chiave	informazione

Ricerca
Inserimento
Cancellazione

Con h(chiave) si raggiunge l'informazione

Es: rubrica telefonica, studenti (chiave: matricola)

Da Data Base Relazionali a Dizionari K-V

employee_id	first_name	last_name	address
1	John	Doe	New York
2	Benjamin	Button	Chicago
3	Mycroft	Holmes	London

FOREIGN KEY

payment_id	employee_id	amount	date
1	1	50,000	01/12/2017
2	1	20,000	01/13/2017
3	2	75,000	01/14/2017
4	3	40,000	01/15/2017
5	3	20,000	01/17/2017
6	3	25,000	01/18/2017

Image extracted from: https://medium.com/@wishmithasmendis/from-rdbms-to-key-value-store-data-modeling-techniques-a2874906bc46

Da Data Base Relazionali a Dizionari K-V

employee_id	first_name	last_name	address
1	John	Doe	New York
2	Benjamin	Button	Chicago
3	Mycroft	Holmes	London

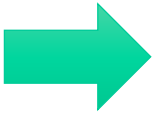
```
employee:$employee_id:$attribute_name = $value


employee:1:first_name = "John"
employee:1:last_name = "Doe"
employee:1:address = "New York"


employee:2:first_name = "Benjamin"
employee:2:last_name = "Button"
employee:2:address = "Chicago"


employee:3:first_name = "Mycroft"
employee:3:last_name = "Holmes"
employee:3:address = "London"
```

Da Data Base Relazionali a Dizionari K-V

:

payment:$payment_id:$employee_id:$attribute_name = $value

payment_id	employee_id	amount	date
1	1	50,000	01/12/2017
2	1	20,000	01/13/2017
3	2	75,000	01/14/2017
4	3	40,000	01/15/2017
5	3	20,000	01/17/2017
6	3	25,000	01/18/2017



```
payment:1:1:amount = "50000"
payment:1:1:date = "01/12/2017"

payment:2:1:amount = "20000"
payment:2:1:date = "01/13/2017"

payment:3:2:amount = "75000"
payment:3:2:date = "01/14/2017"

payment:4:3:amount = "40000"
payment:4:3:date = "01/15/2017"

payment:5:3:amount = "20000"
payment:5:3:date = "01/17/2017"

payment:6:3:amount = "25000"
payment:6:3:date = "01/18/2017"
```

Da Data Base Relazionali a Dizionari K-V

```
employee:1:first_name = "John"
employee:1:last_name = "Doe"
employee:1:address = "New York"


employee:2:first_name = "Benjamin
employee:2:last_name = "Button"
employee:2:address = "Chicago"


employee:3:first_name = "Mycroft"
employee:3:last_name = "Holmes"
employee:3:address = "London"


payment:1:1:amount = "50000"
payment:1:1:date = "01/12/2017"


payment:2:1:amount = "20000"
payment:2:1:date = "01/13/2017"


payment:3:2:amount = "75000"
payment:3:2:date = "01/14/2017"


payment:4:3:amount = "40000"
payment:4:3:date = "01/15/2017"


payment:5:3:amount = "20000"
payment:5:3:date = "01/17/2017"


payment:6:3:amount = "25000"
payment:6:3:date = "01/18/2017"
```

Esercizio

Dato un array di 101 posizioni che memorizza un insieme di al massimo 80 elementi, indicare il contenuto delle prime 4 celle dell'array, inizialmente vuoto, dopo le operazioni seguenti (indirizzamento con il metodo del resto, scansione lineare unitaria):

a) **Inserimento dell'elemento 101**
b) **Inserimento dell'elemento 202**
c) **Inserimento dell'elemento 204**
d) **Cancellazione dell'elemento 202**
e) **Inserimento dell'elemento 304**

Indicare il risultato se l'azione d) non viene eseguita

Qual è il fattore di carico?

Soluzione

a) Inserimento dell'elemento 101 (indirizzo Hash:?)
b) Inserimento dell'elemento 202 (indirizzo Hash:?))
c) Inserimento dell'elemento 204 (indirizzo Hash:?))
d) Cancellazione dell'elemento 202
e) Inserimento dell'elemento 304 (indirizzo Hash:?))

	inizio	Dopo a)	Dopo b)	Dopo c)	Dopo d)	Dopo e)
0	-1					
1	-1					
2	-1					
3	-1					

fattore di carico = 80%

Soluzione Senza step d)

a) Inserimento dell'elemento 101 (indirizzo Hash:?))

b) Inserimento dell'elemento 202 (indirizzo Hash:?)

Inserimento dell'elemento 204 (indirizzo Hash:?))

~~c) Cancellazione dell'elemento 202~~

d) Inserimento dell'elemento 304 (indirizzo Hash:?))

	inizio	Dopo a)	Dopo b)	Dopo c)	~~Dopo d)~~	Dopo e)
0	-1					
1	-1					
2	-1					
3	-1					

Bibliografia

Demetrescu:

Paragrafo 7.1 e 7.2

Cormen:

Capitolo 11