ALGEBRA LINEARE DURATA: 1H

TEST SCRITTO

5. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la mappa lineare definita da

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p'(0) \\ p''(-1) \end{pmatrix} .$$

i) Verificare che $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2 + x^3, 2x + x^3, 1 - x^2, 1 + 3x\}$ é una base di $\mathbb{R}_3[x]$.
ii) Calcolare la matrice associata ad f rispetto a $\mathcal{B}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
iii) Calcolare la dimensione del nucleo di f esibendone una base.

6. Dato un intero positivo n, sia U la matrice n per n definita dalla formula

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,(n-1)} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{(n-1),0} & u_{(n-1),1} & \cdots & u_{(n-1),(n-1)} \end{pmatrix}$$

dove $u_{i,j} = \omega^{i-j}$ per $\omega = e^{2\pi i/n}$.

i) Verificare che U è una matrice unitaria se $n = 4$.
ii) Verificare che U è una matrice unitaria per ogni intero positivo n. Puoi usare la formula per la serie geometrica

$$1 + r + \cdots + r^\ell = \frac{1 - r^{\ell+1}}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$