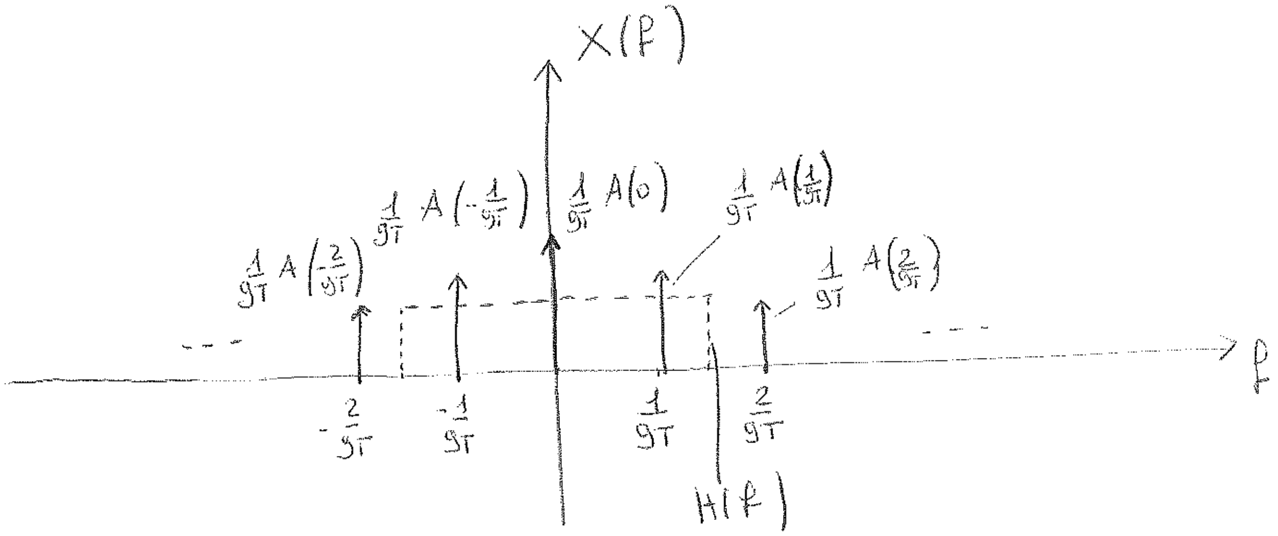
Esercizio 1

$$a(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + \left[\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right] \otimes \delta(t-3T) +$$

$$+ \left\{\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) - \left[\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right]\right\} \otimes \delta(t-6T)$$

$$X(f) = \frac{1}{9T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{n}{9T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{9T}\right)$$

Dove $A(f)$ è la trasformata di Fourier di $a(t)$.



$$H(f) = \text{rect}(f \cdot 3T) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{3}{9T}}\right)$$

All'uscita quindi del filtro

$$Y(f) = \frac{1}{9T}A(0)\,\delta(f) + \frac{1}{9T}A\left(-\frac{1}{9T}\right)\delta\left(f+\frac{1}{9T}\right) + \frac{1}{9T}A\left(\frac{1}{9T}\right)\delta\left(f-\frac{1}{9T}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{9T} A(0) + \frac{1}{9T} A\left(-\frac{1}{9T}\right) e^{j2\pi t/9T} + \frac{1}{9T} A\left(\frac{1}{9T}\right) e^{-j2\pi t/9T}$$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier di $a(t)$.

$$A(f) = 2T \operatorname{sinc}(2Tf) + T \operatorname{sinc}^2(fT)\, e^{-j6\pi fT} +$$

$$\left[2T \operatorname{sinc}(2fT) - T \operatorname{sinc}^2(fT)\right] e^{-j12\pi fT}$$

$$A(0) = 2T + T + T = 4T$$

$$A\left(\frac{1}{9T}\right) = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{9}\right)\left[1 + e^{-j12\pi/9}\right] +$$

$$T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{9}\right)\left[e^{-j6\pi/9} - e^{-j12\pi/9}\right] =$$

$$= -j\sqrt{3} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{9}\right) + 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{9}\right)\left[\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = K$$

$$A\left(-\frac{1}{9T}\right) = K^* = A^*\left(\frac{1}{9T}\right)$$ perché il segnale è reale e dispari.

$E_y = +\infty$ perché il segnale è periodico.

$$P_y = \left| \frac{1}{9T} A(0) \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{9T} A\left(\frac{1}{9T}\right) \right|^2 = \left(\frac{1}{9T} 4T\right)^2 + 2\left(\frac{1}{9T}\right)^2 |K|^2$$

$$|K|^2 = K \cdot K^* = 4T^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2}{9}\right) + 3T^2 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{2}{9}\right) - \operatorname{sinc}^2\left(\frac{1}{9}\right)\right]^2$$

Esercizio 2

$$P(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt) + B\,\mathrm{sinc}(Bt)$$

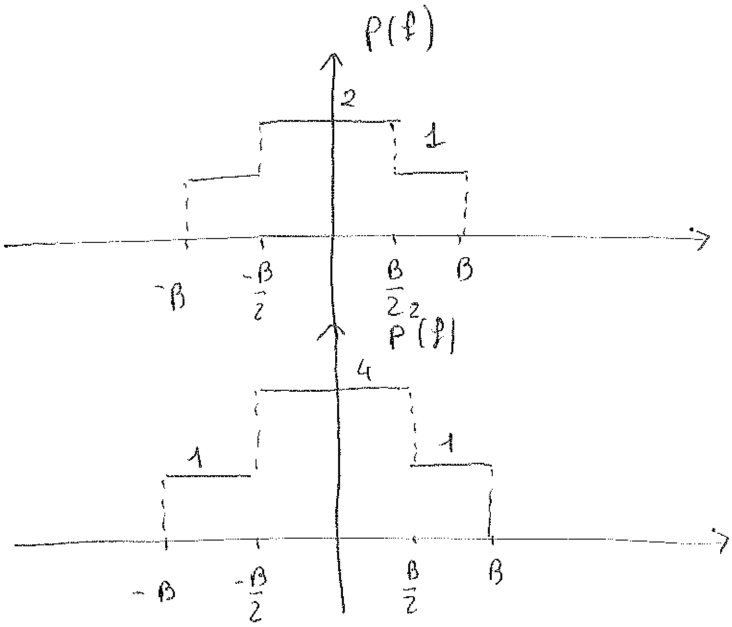
$$P(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$H_r(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

1) $E_s = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot E_p$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(f)\,df = 5B$$

$E_s = 10B$

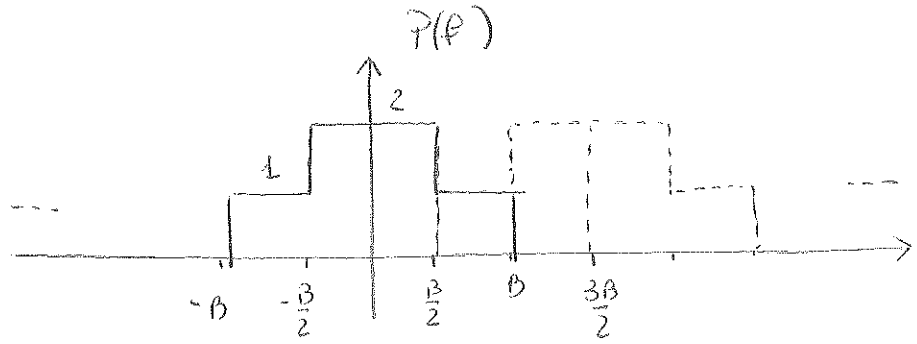


2) Affinché sia soddisfatta la condizione di Nyquist deve essere che

$$\sum_m H\left(f - m/T\right) = T \cdot h(0)$$

dove $H(f)$ è la risposta del canale in ricezione, T è l'intervallo di campionamento

$$H(f) = P(f) \cdot H_R(f) = P(f)$$



Da uno grafico si trova che l'istante di campionamento ottimo è

$$t_K = \frac{2}{3B}$$

$$\sum_m H\left(f - m\frac{3B}{2}\right) = 2$$

Si può anche verificare la condizione nel tempo (FACOLTATIVO)

$$h(t) = p(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt) + B\,\mathrm{sinc}(Bt)$$

$$h(m) = 2B\,\mathrm{sinc}\left(2B\,\frac{2}{3B}m\right) + B\,\mathrm{sinc}\left(B\,\frac{m2}{3B}\right) =$$

$$= 2B\,\mathrm{sinc}\left(\frac{4}{3}m\right) + B\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2m}{3}\right)$$

deve essere che
$$h(m) = \begin{cases} h(0) & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$h(m) = 2B \frac{\sin\left(\frac{4}{3} m \pi\right)}{\frac{4}{3} m \pi} + B \frac{\sin\left(\frac{2 m \pi}{3}\right)}{\frac{2 m \pi}{3}} =$$

$$= \frac{6}{4} \frac{B}{m \pi} \sin\left(\frac{4}{3} m \pi\right) + \frac{3}{2} \frac{B}{m \pi} \sin\left(\frac{2 m \pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{B}{m \pi} \left[\sin\left(\frac{4}{3} m \pi\right) + \sin\left(\frac{2m}{3} \pi\right)\right] =$$

$h(0) = 3B$

$h(m)\big|_{m \neq 0} = 0$ perché $\sin\left(\frac{4}{3} m \pi\right) = - \sin\left(\frac{2m}{3} \pi\right)$

3) $P_n = N_0 B$ potenza di rumore

$h(0) = 3B$

$y[k] = 3B\, x[k] + n_k$

$$P(e) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0 B}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{3B - 1}{\sqrt{N_0 B}}\right)$$