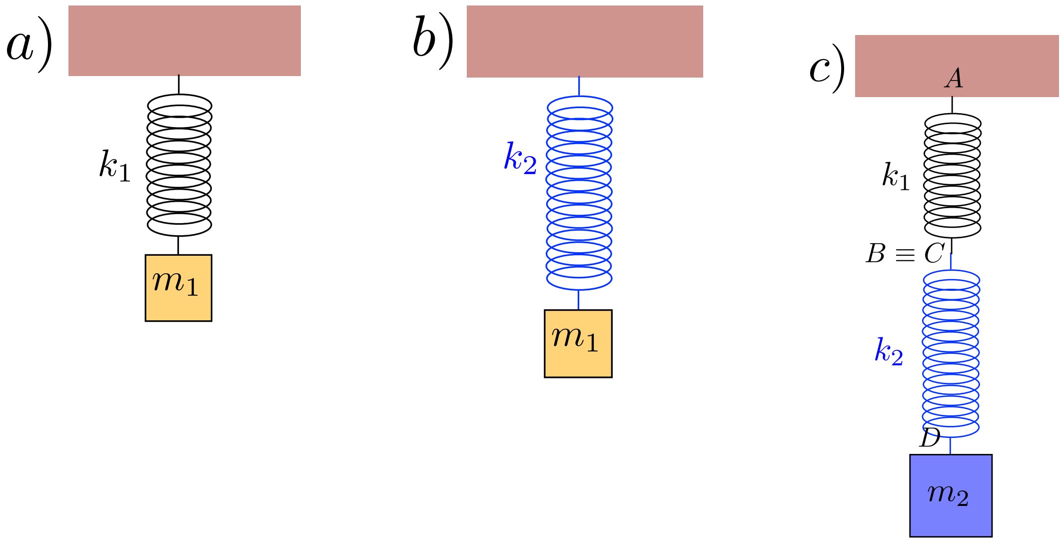
Esercizio (tratto dal Problema 3.15 del Mazzoldi 2)

Una molla ideale, fissata per l'estremo A al soffitto si allunga di 67 mm quando all'estremo B viene appesa una massa $m_1 = 1.25\,\text{Kg}$. La stessa massa provoca l'allungamento $\Delta l_2 = 19\,\text{cm}$ di una seconda molla ideale, fissata al soffitto per l'estremo C. Si congiungono ora le due molle: l'estremo A della prima molla viene fissato al soffitto, mentre l'estremo C della seconda è agganciato all'estremo B della prima. All'estremo D della seconda viene poi agganciata una massa $m_2 = 0.45\,\text{Kg}$. Calcolare l'allungamento totale del sistema.



SOLUZIONE

DATI INIZIALI

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 1.25\,\mathrm{Kg} \\
\Delta l_1 &= 0.067\,\mathrm{m} \\
\Delta l_2 &= 0.19\,\mathrm{m} \\
m_2 &= 0.45\,\mathrm{Kg}
\end{aligned}
$$

Scegliamo come verso positivo delle forze quello diretto verso il basso.

1. Consideriamo la situazione a), in cui alla prima molla è attaccata la massa m_1. Indichiamo con k_1 la costante elastica di tale molla. Su m_1 agiscono la forza peso (diretta verso il basso) e la forza elastica (diretta verso l'alto). Siccome m_1 è in equilibrio, la somma algebrica di queste due forze si annulla

$$
\begin{aligned}
m_1 g - k_1 \Delta l_1 &= ma = 0 && (1) \\
&\Downarrow \\
k_1 &= \frac{m_1 g}{\Delta l_1} && (2)
\end{aligned}
$$

2. Consideriamo ora la situazione b), in cui alla seconda molla è attaccata la stessa massa m_1. Indichiamo con k_2 la costante elastica di tale molla. Su m_1 agiscono la forza peso (diretta verso il basso) e la forza elastica (diretta verso l'alto). Di nuovo, siccome m_1 è in equilibrio, la somma algebrica di queste due forze si annulla

$$
\begin{aligned}
m_1 g - k_2 \Delta l_2 &= ma = 0 && (3) \\
&\Downarrow \\
k_2 &= \frac{m_1 g}{\Delta l_2} && (4)
\end{aligned}
$$

3. Consideriamo infine la situazione c), in cui alla composizione delle due molle è attaccata la massa m_2. Osserviamo che il punto $B \equiv C$ è in quiete, e dunque la somma della forza esercitata dalla prima molla (diretta verso l'alto) e quella esercitata dalla seconda molla (diretta verso il basso) si annulla

$$
-k_1 \Delta l_{AB} + k_2 \Delta l_{CD} = 0
$$

$$
\Rightarrow \quad k_1 \Delta l_{AB} = k_2 \Delta l_{CD} \qquad (5)
$$

D'altra parte anche la massa m_2 è in quiete, e dunque

$$
m_2 g - k_2 \Delta l_{CD} = 0
$$

$$
\Rightarrow \quad k_2 \Delta l_{CD} = m_2 g \qquad (6)
$$

Combinando (5) e (6) abbiamo

$$
\begin{aligned}
m_2 g &= k_1 \Delta l_{AB} \qquad \Rightarrow \Delta l_{AB} = \frac{m_2 g}{k_1} && (7) \\
m_2 g &= k_2 \Delta l_{CD} \qquad \Rightarrow \Delta l_{CD} = \frac{m_2 g}{k_2} && (8)
\end{aligned}
$$

L'allungamento totale del sistema delle due molle è dato da

$$\begin{aligned}\Delta l_{tot} &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{CD} = \\ &= \frac{m_2 g}{k_1} + \frac{m_2 g}{k_2} \end{aligned} \tag{9}$$

e dunque

$$\Delta l_{tot} = m_2 g \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \tag{10}$$

Usando ora le espressioni (2) e (4) trovate per k_1 e k_2, otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta l_{tot} &= m_2 g \left(\frac{\Delta l_1}{m_1 g} + \frac{\Delta l_2}{m_1 g} \right) = \\ &= \frac{m_2}{m_1} (\Delta l_1 + \Delta l_2) \end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta l_{tot} &= \frac{0.45\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{1.25\,\cancel{\mathrm{Kg}}} \cdot (0.067 + 0.19)\,\mathrm{m} = \\ &= 0.36 \cdot 0.257\,\mathrm{m} = \\ &= 0.093\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{12}$$

OSSERVAZIONE:
Immaginiamo di considerare la combinazione delle due molle come un'unica molla, caratterizzata da una costante elastica efficace k_{eff}. Il suo allungamento è dato dall'allungamento totale Δl_{tot}. Per la condizione di equilibrio, avremo pertanto che

$$m_2 g - k_{eff}\, \Delta l_{tot} = 0 \tag{13}$$

ossia

$$\Delta l_{tot} = m_2 g \cdot \frac{1}{k_{eff}} \tag{14}$$

Confrontando (10) e (14) otteniamo che

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{15}$$

ossia la molla data dalla combinazione seriale di due molle ha una costante elastica efficace k_{eff}, il cui inverso è la somma degli inversi delle due costanti elastiche. Notiamo dunque che in una combinazione di due molle, è quella più morbida che determina il k_{eff}, e non quella più rigida.