Esame di Ricerca Operativa del 09/01/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\, y_1 + 12\, y_2 + y_3 + y_4 + 4\, y_5 + 5\, y_6 \\ -y_1 - 4\, y_2 + y_4 + 4\, y_5 + 4\, y_6 = 4 \\ y_1 - 3\, y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-3,\ 0)$	SI	NO
$\{3,\ 5\}$	$y = (0,\ 0,\ 6,\ 0,\ 1,\ 0)$	SI	NO

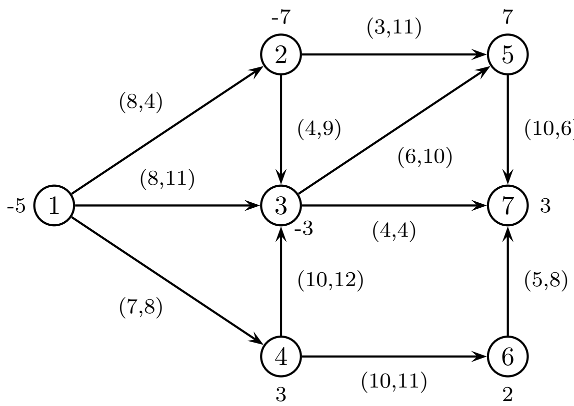
Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(-15,\ 16)$	$(0,\ 1,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0)$	1	$\frac{1}{2},\ \frac{8}{7}$	2
2° iterazione	$\{1,\ 4\}$	$(-1,\ 2)$	$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0\right)$	3	$1,\ 9$	1

Esercizio 3.

vedi esercizio 3 dell'altro compito

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

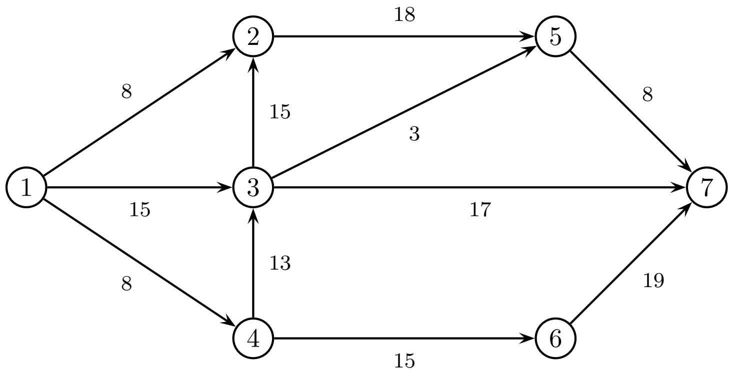


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7)	(1,3)	$x = (0,\ 11,\ -6,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ -14,\ 5,\ 0,\ 3)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7)	(3,5)	$\pi = (0,\ 8,\ 12,\ 7,\ 6,\ 11,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

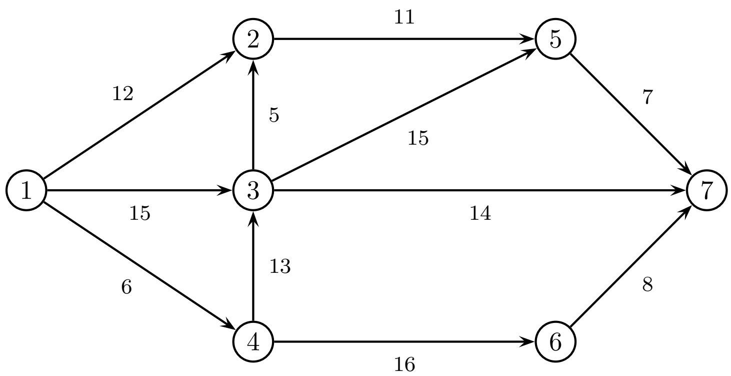
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	
x	$(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 2,\ 17,\ 12)$	$(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 14,\ 17,\ 12)$
Arco entrante	(3,5)	(2,5)
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	4 , 3	11 , 7
Arco uscente	(5,7)	(2,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		5		6		7	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	26	2	26	2	18	3	18	3	18	3	18	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	4	23	4	23	4	23	4	23	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	32	3	26	5	26	5	26	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0, 0, 0)	14
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 14, 0, 7, 0, 0, 14, 0, 0, 7, 0)	21
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 14, 6, 7, 0, 0, 14, 0, 6, 7, 6)	27

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 13\,x_2 \\ 15\,x_1 + 6\,x_2 \le 68 \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 \le 57 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{57}{10}\right)$ $\qquad v_S(P) = 74$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \le 5$
$r = 3$ $\qquad 3\,x_1 + 4\,x_2 \le 22$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	22	51	21
2		13	52	25
3			10	29
4				22

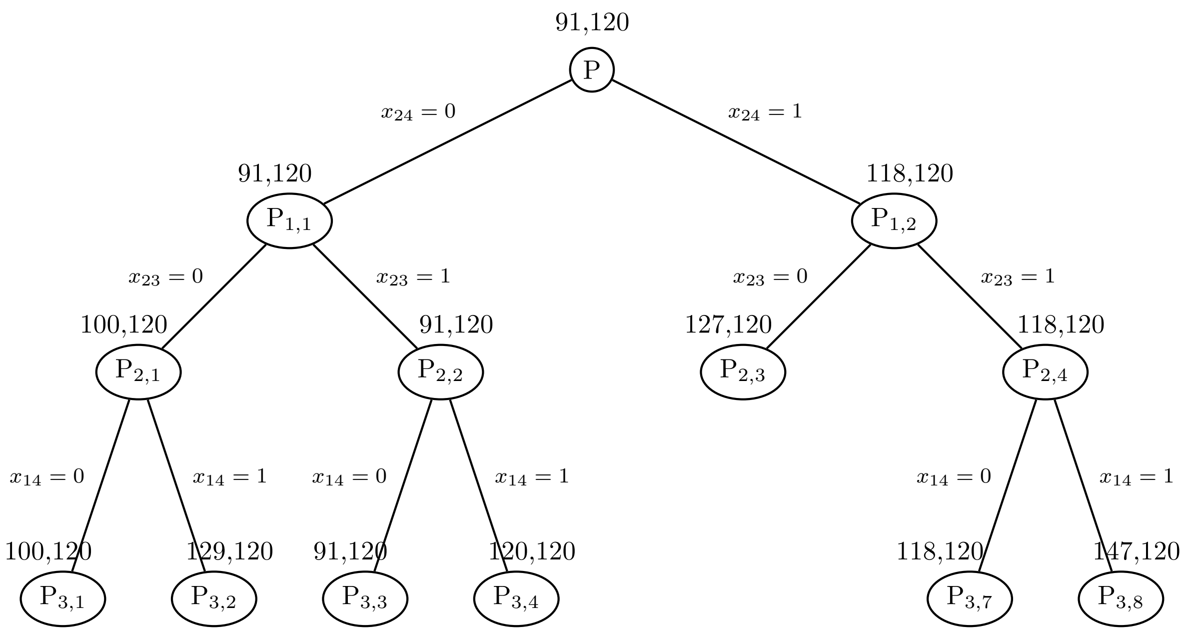
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 5) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 91$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 3 – 2 – 5 – 1 $\qquad v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{14}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2^2 \le 0, \quad x_1^2 - 4 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ -1)$	$(0,0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(-2,\ -1)$	$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-2,\ -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\dfrac{26}{90},-\dfrac{51}{90}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-2,\ \sqrt{2}\right)$	$\left(-\dfrac{38}{22},-\dfrac{83}{90}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1\,x_2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(3,-4)$, $(-5,-0)$, $(-1,-4)$ e $(2,-0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{1}{3},0\right)$	$(-0,1)$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\left(-\dfrac{11}{3},0\right)$	$\dfrac{14}{11}$	$\dfrac{1}{4}$	$\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$