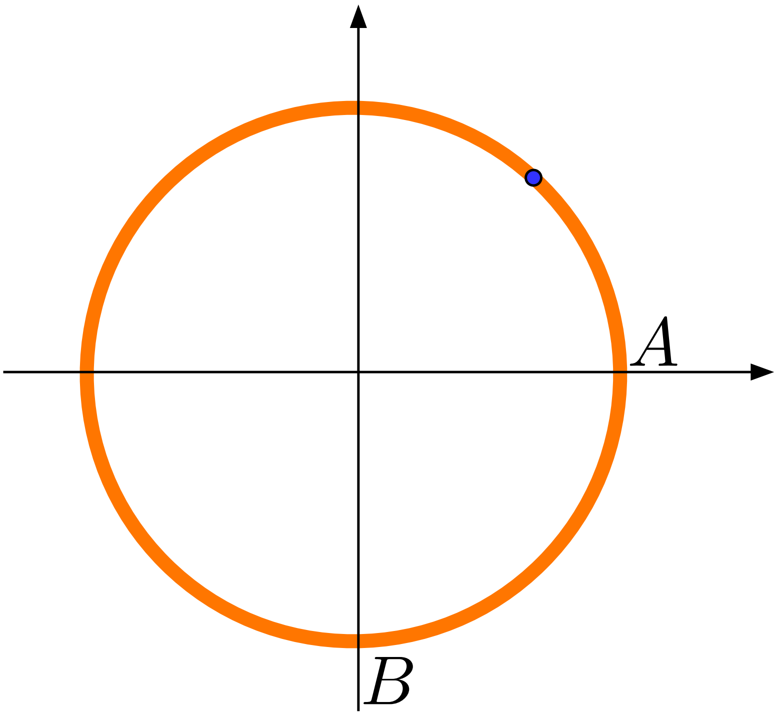
Esercizio (tratto dal Problema 2.8 del Mazzoldi 2)

Una particella si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 50\,\text{cm}$. Inizialmente parte dalla posizione A ($\theta = 0$) con velocità angolare nulla e si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione costante $\alpha = 2\,\text{s}^{-2}$, fino a raggiungere il punto B ($\theta = 3\pi/2$). In seguito, la particella decelera (con decelerazione costante), fino a fermarsi in A. Calcolare:

1. il tempo impiegato per andare da A a B;
2. l'accelerazione radiale in B;
3. l'accelerazione tangenziale nel tratto B $\rightarrow$ A.



SOLUZIONE:
DATI INIZIALI
Anzitutto convertiamo tutti i dati in unità del Sistema Internazionale, e gli angoli espressi in forma numerica.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} R & = & 0.5\,\mathrm{m} \\ \alpha & = & 2\,\mathrm{s}^{-2} \\ \theta_A & = & 0 \\ \omega_A & = & 0 \\ \theta_B & = & \frac{3}{2}\pi \end{array}}$$

1. Scegliamo come istante $t=0$ iniziale quello in cui la particella parte dal punto A.
   - Ricaviamo anzitutto la legge oraria nel tratto $A \to B$. Dal testo sappiamo che
     - il tratto $A \to B$ è un moto uniformemente accelerato;
     - l'angolo iniziale vale $\theta_A = 0$;
     - la velocità angolare iniziale in A vale $\omega_A = 0$;
     - l'accelerazione vale $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$;

     Da queste indicazioni deduciamo che la legge oraria dev'essere

     $$\theta(t) = \underbrace{\theta_A}_{=0} + \underbrace{\omega_A\, t}_{=0} + \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \;=\; \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \qquad 0 \le t \le t_B \tag{1}$$

   - Denotiamo con t_B l'istante in cui il punto arriva in B, ossia in corrispondenza dell'angolo $\theta_B = 3\pi/2$. Allora per definzione

     $$\theta_B = \theta(t=t_B) = \frac{1}{2}\alpha\, t_B^2 \tag{2}$$

     e pertanto

     $$t_B = \sqrt{\frac{2\theta_B}{\alpha}} \tag{3}$$

     Sostituendo i valori

     $$\begin{aligned} t_B &= \sqrt{\frac{2\,\frac{3}{2}\pi}{2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}\pi}\,\mathrm{s} = \\ &= \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\,\mathrm{s} = 2.17\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{4}$$

2. Dalla formula generale per l'accelerazione in un moto circolare abbiamo

$$\vec{a} \;=\; \underbrace{-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\substack{a_r\,=\,\text{accel. radiale} \\ \text{(centripeta)}}} \vec{u}_r \;+\; \underbrace{R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{a_\theta\,=\,\text{accel. tangenziale}} \;\vec{u}_\theta \tag{5}$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \frac{d\theta}{dt} = \alpha\, t && \qquad (6)\\
& && \forall t\ 0 \leq t \leq t_B\\
\alpha(t) &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv \alpha && \qquad (7)
\end{aligned}$$

In particolare, all'istante $t = t_B$ in cui giunge in B, si ha

$$a_r(t_B) = -R\,\omega_B^2 \tag{8}$$

dove la velocità angolare in B vale

$$\begin{aligned}
\omega_B &= \omega(t_B) = \alpha t_B = \\
&= [\text{uso ora (3)}] \\
&= \alpha\sqrt{\frac{2\theta_B}{\alpha}} = \\
&= \sqrt{2\,\alpha\,\theta_B}
\end{aligned} \tag{9}$$

CHECK: controllo dimensionale: la velocità angolare ha dimensione di s^{-1}. Controlliamo allora che il risultato ottenuto sia dimensionalmente giusto. Siccome gli angoli sono adimensionali e le accelerazioni angolari hanno dimensioni di s^{-2},

$$\left[\sqrt{2\,\alpha\,\theta_B}\right] = \sqrt{[\alpha]\ [\theta_B]} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{s}^2}\cdot 1} = \mathrm{s}^{-1} \tag{10}$$

La componente a_r in $t = t_B$ vale dunque

$$\begin{aligned}
a_r(t_B) &= -R\omega^2(t_B) = \\
&= -R\omega_B^2 = \\
&\quad [\text{uso (9)}] \\
&= -R\,2\,\alpha\,\theta_B
\end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned}
a_r(t_B) &= -\cancel{2}\ \cdot 0.5\cancel{0}\ \mathrm{m} \cdot \cancel{2}\ \frac{1}{\mathrm{s}^2}\,\frac{3\pi}{\cancel{2}} = \\
&= -3\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\
&= -9.42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

3. Calcoliamo ora l'accelerazione nel tratto $B \to A$. Dalla formula generale

$$\vec{a} = \underbrace{-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\substack{a_r\,=\,\text{accel. radiale}\\ \text{(centripeta)}}} \vec{u}_r + \underbrace{R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{a_\theta\,=\,\text{accel. tangenziale}} \vec{u}_\theta \tag{13}$$

vediamo che l'accelerazione tangenziale

$$a_\theta(t) = R\,\alpha(t) \qquad \text{(per qualsiasi moto circolare)} \tag{14}$$

è sostanzialmente data (a parte il raggio R) dall'accelerazione angolare $\alpha(t)$. Quindi occorre trovare l'accelerazione angolare nel tratto $B \to A$. Sappiamo dal testo che si tratta di un moto circolare uniformemente decelerato. Denotiamo con α' tale accelerazione (che sarà dunque negativa $\alpha' < 0$). Per determinarne il valore possiamo procedere in due modi:

Primo modo:

- Troviamo anzitutto la legge oraria della particella nel tratto $B \to A$. Sappiamo che:
  - è un moto circolare uniformemente decelerato con accelerazione $-\alpha'$,
  - all'istante t_B la particella si trova in B, ossia alla 'posizione' $\theta = \theta_B = 3\pi/2$;
  - all'istante t_B (in cui si trova in B) la particella ha velocità angolare $\omega_B = \sqrt{2\,\alpha\,\theta_B}$

  Da queste indicazioni possiamo dedurre che la legge oraria

  $$\theta(t) = \theta_B + \omega_B(t - t_B) - \frac{1}{2}\alpha'\,(t - t_B)^2 \qquad t_B \leq t \leq t_f \tag{15}$$

  e anche quella per la velocità

  $$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_B - \alpha'\,(t - t_B) \qquad t_B \leq t \leq t_f \tag{16}$$

- Indichiamo ora con t_f l'istante in cui la particella raggiunge nuovamente il punto A. Sappiamo dunque che all'istante t_f la particella avrà compiuto un intero giro, ossia la sua posizione vale $\theta = 2\pi$. Pertanto dalla legge oraria (15)

  $$2\pi = \theta_B + \omega_B(t_f - t_B) - \frac{1}{2}\alpha'\,(t_f - t_B)^2 \tag{17}$$

- Sappiamo anche che in tale istante t_f la particella si ferma. Pertanto vale che

  $$\omega(t_f) = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \omega_B - \alpha'\,(t_f - t_B) = 0 \tag{18}$$

  da cui ricaviamo che

  $$t_f - t_B = \frac{\omega_B}{\alpha'} \tag{19}$$

  Sostituendo ora (19) in (17) otteniamo

  $$\begin{aligned} 2\pi &= \theta_B + \omega_B\,\frac{\omega_B}{\alpha'} - \frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\omega_B}{\alpha'}\right)^2 \\ &= \theta_B + \frac{\omega_B^2}{\alpha'} - \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{\alpha'} = \\ &= \theta_B + \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{\alpha'} \end{aligned} \tag{20}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} 2\pi - \theta_B &= \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{\alpha'} = \\ &\Downarrow \\ \alpha' &= \frac{1}{2}\frac{\omega_B^2}{2\pi - \theta_B} = \\ &\quad [\text{usiamo } (9)] \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\,\alpha\theta_B}{2\pi - \theta_B} = \\ &= \frac{\alpha\,\theta_B}{2\pi - \theta_B} = \end{aligned} \tag{21}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{2\frac{1}{\mathrm{s}^2}\frac{3\pi}{2}}{2\pi - \frac{3\pi}{2}} = \\ &= \frac{3\pi}{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 6\,\mathrm{s}^{-2} = \end{aligned} \tag{22}$$

Secondo modo:

- Utilizziamo la formula generale (che vale per tutti i moti circolari uniformemente accelerati)

$$\Delta\theta = \frac{\omega_{fin}^2 - \omega_{in}^2}{2\alpha} \tag{23}$$

dove ω_{in} è la velocità angolare ad un istante iniziale (arbitrario), ω_{fin} è la velocità angolare ad un istante finale (arbitrario), $\Delta\theta = \theta_{fin} - \theta_{in}$ è l'angolo spazzato dalla particella tra l'istante iniziale e quello finale, e α l'accelerazione angolare (costante) che caratterizza il moto uniformemente accelerato.

NB: Questa formula è, per il moto circolare uniformemente accelerato, l'esatto analogo della formula

$$\Delta x = \frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2a} \tag{24}$$

per il moto rettilineo uniformemente accelerato. Semplicemente lo 'spazio' è sostituito dagli angoli, le velocità sono sostituite da velocità angolari e l'accelerazione dall'accelerazione angolare. Si dimostra allo stesso modo.

- Applichiamo la formula generale (23) al nostro caso particolare, scegliendo :
  - come istante iniziale l'istante t_B in cui la particella si trova in B ($\theta_B = 3\pi/2$) e in cui la velocità angolare vale ω_B;
  - come istante finale l'istante t_f in cui la particella torna in A ($\theta = 2\pi$) e in cui la velocità angolare è nulla;
  - l'accelerazione angolare vale $-\alpha'$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta\theta = 2\pi - \frac{3\pi}{2} &= \frac{(0\,\mathrm{s}^{-1})^2 - \omega_B^2}{-2\alpha'} \\
&\Downarrow \\
\frac{\pi}{2} &= \frac{\omega_B^2}{2\alpha'}
\end{aligned} \tag{25}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{\omega_B^2}{\pi} = \\
&= [\text{uso ora (9)}] \\
&= \frac{2\alpha\,\theta_B}{\pi} = \\
&= \frac{2\alpha\,\frac{3\pi}{2}}{\pi} = \\
&= 3\,\alpha
\end{aligned} \tag{26}$$

Sostituendo i valori

$$\alpha' = 3\alpha = 3\;\cdot 2\,\mathrm{s}^{-2} = 6\,\mathrm{s}^{-2} \tag{27}$$

Avendo ora trovato l'accelerazione angolare α', possiamo ora determinare l'accelerazione tangenziale dalla (14)

$$a_\theta = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -R\alpha' = -0.5\,\mathrm{m}\cdot(6\,\mathrm{s}^{-2}) = -3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{28}$$

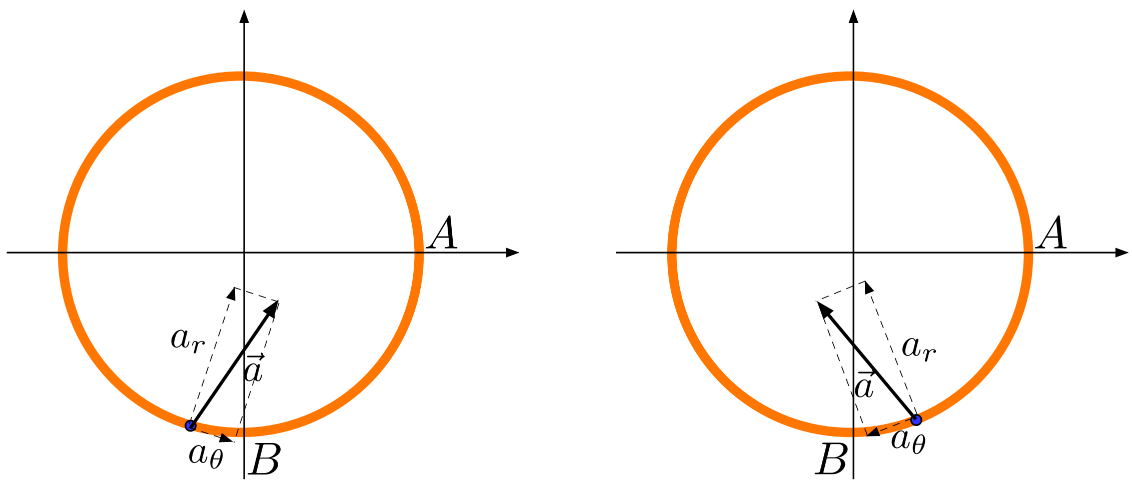


Figure 1: Il vettore accelerazione negli istanti precedenti and successivi a t_B (istante in cui la particella giunge in B). Si noti che la componente tangenziale a_θ dell'accelerazione cambia segno in maniera discontinua a $t = t_B$, in quanto il moto circolare passa da uniformemente accelerato ($\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha > 0$, vedi Eq.(7)) a uniformemente decelerato ($\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha' < 0$, vedi Eq.(28)).