MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA PASSANTE

SEGNALE PASSABANDA

$$s(t) = a(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta(t)\right)$$

$a(t)$: inviluppo reale di $s(t)$

$\theta(t)$: fase di $s(t)$

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ a(t)\, e^{j\left(2\pi f_0 t + \theta(t)\right)} \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad , \quad \tilde{s}(t) = a(t)\, e^{j\theta(t)}$$

$\tilde{s}(t)$: inviluppo complesso di $s(t)$

PROCESSO PASSA-BANDA

$n(t)$ è un processo passa-banda se la sua DSP $S_n(f)$ è concentrata intorno ad una frequenza f_0 e se la banda B del processo è tale che $B \ll f_0$.

Un processo passa-banda può essere visto come il risultato della modulazione di un processo passa-basso, con $B \ll f_0$

$$n(t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{n}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$\tilde{n}(t)$: inviluppo complesso (passa-basso)

$n(t)$: rumore passa-banda (reale)

$$\tilde{n}(t) \triangleq n_c(t) + j\, n_s(t) \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Funzione di autocorrelazione (processo di rumore stazionario)

$$R_{nn}(\tau) \triangleq E[n(t)\, n(t-\tau)]$$

$$R_{n_c n_c}(\tau) \triangleq E[n_c(t)\, n_c(t-\tau)]$$

$$R_{n_s n_s}(\tau) \triangleq E[n_s(t)\, n_s(t-\tau)]$$

$$R_{n_c n_s}(\tau) = -R_{n_s n_c}(\tau) \triangleq E[n_s(t)\, n_c(t-\tau)]$$

$$\Rightarrow R_{nn}(\tau) = R_{n_c n_c}(\tau)\cos(2\pi f_0 t) - R_{n_s n_c}(\tau)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$= R_{n_s n_s}(\tau)\cos(2\pi f_0 t) + R_{n_c n_s}(\tau)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$= \mathbb{Re}\left\{ \left[R_{n_c n_c}(\tau) + j\, R_{n_s n_c}(\tau)\right] e^{j 2\pi f_0 t} \right\}$$

$$R_{\tilde{n}\tilde{n}}(\tau) \triangleq E[\tilde{n}(t)\, \tilde{n}^*(t-\tau)] =$$

$$= R_{n_c n_c}(\tau) + j\, R_{n_s n_c}(\tau)$$

$$\Rightarrow R_{nn}(\tau) = \mathbb{Re}\left\{ R_{\tilde{n}\tilde{n}}(\tau)\, e^{j 2\pi f_0 t} \right\}$$

$$\Rightarrow S_n(f) = TCF\left[R_{nn}(\tau)\right] = TCF\left[\mathbb{Re}\left\{ R_{\tilde{n}\tilde{n}}(\tau)\, e^{j 2\pi f_0 t} \right\} \right] =$$

$$= TCF\left[\frac{1}{2}\left\{ R_{\tilde{n}\tilde{n}}(\tau)\, e^{j 2\pi f_0 t} + R^*_{\tilde{n}\tilde{n}}(\tau)\, e^{-j 2\pi f_0 t} \right\} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} S_{\tilde{n}}(f - f_0) + \frac{1}{2} S_{\tilde{n}}(f + f_0) \}$$

N.B. $S_{\tilde{n}}(f)$ è reale e pari

MODULAZIONE PRIVA DI MEMORIA

Una modulazione si dice priva di memoria se il segnale trasmesso $s(t)$ dipende solo da $x[k]$ nel k-esimo intervallo di segnalazione

$$s(t) = f\left[x[k]\right], \quad kT_s < t \leq (k+1)T_s$$

Le seguenti modulazioni sono prive di memoria:

PAM (Pulse Amplitude Modulation in banda passante)
PSK (Phase Shift Keying)
QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

PAM IN BANDA PASSANTE

Per una PAM M-aria in banda passante il segnale trasmesso per l'm-esimo livello si può scrivere come segue

$$s_m(t) = A_m \, p(t) \cos(2\pi f_0 t) \qquad m = 1, \dots, M$$

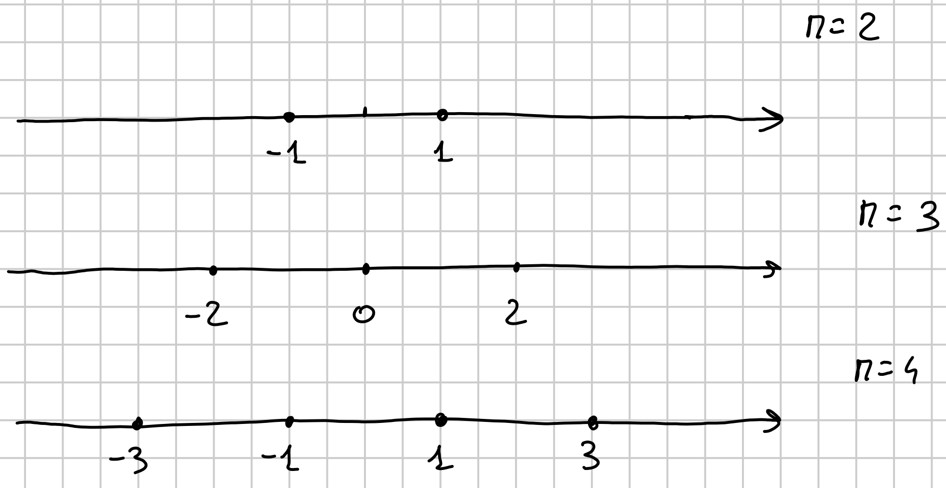
$$A_m = (2m - 1 - M)$$

$$p(t) = \text{impulso}$$

$$\tilde{s}_m(t) = A_m \, p(t)$$

COSTELLAZIONE DEI SIMBOLI

A_m è reale



$$E_m = \int s_m^2(t)\, dt = \int A_m^2\, p^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt$$

$$= A_m^2 \frac{E_p}{2}$$

MODULAZIONE DI FASE (PSK)

$$\begin{cases} s_m(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_m) \\ \theta_m = \frac{2\pi}{M}(m-1) \end{cases} \qquad m = 1, \dots, M$$

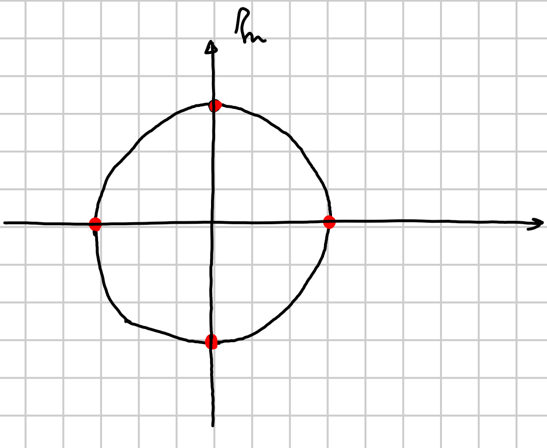
$$E_m = \frac{E_p}{2} = \text{costante} \qquad (\text{simboli equi-energia})$$

$$\tilde{s}_m = p(t)\, e^{j\theta_m} \quad , \quad m = 1, \dots, M$$

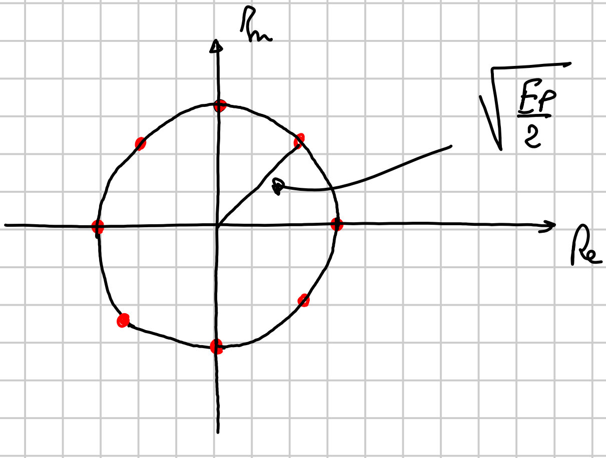
I simboli sono associati ad $e^{j\theta_m}$

COSTELLAZIONE DEI SIMBOLI

$M = 4$ (4-PSK)

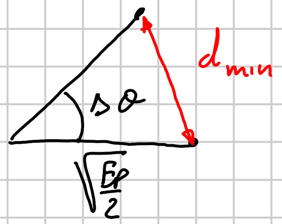


$M = 8$ (8-PSK)



$\sqrt{\frac{E_p}{2}}$ (raggio)

Distanza minima tra i simboli



$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$$

$$d_{min}^2 = \frac{E_p}{2} + \frac{E_p}{2} - 2\,\frac{E_p}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) = E_p\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)\right) =$$

$$= 2E_p \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

$$\boxed{d_{min} = \sqrt{2E_p}\,\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

La distanza minima aumenta all'aumentare dell'energia associata all'impulso e diminuisce all'aumentare di M

L'efficienza spettrale aumenta all'aumentare di M in quanto B_T è costante (dipende solo da $p(t)$) e $R_b = \frac{\log_2 M}{T_s}$

Quindi se si vuole che il sistema sia efficiente energeticamente questo non può essere efficiente anche spettralmente

MODULAZIONE QAM

$$s_m(t) = A_m^c\, p(t) \cos(2\pi f_0 t) - A_m^s\, p(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

A_m^c e A_m^s vengono scelti dal modulatore in base al simbolo $x[n]$. Vengono dette componente <u>in fase</u> e <u>in quadratura</u>

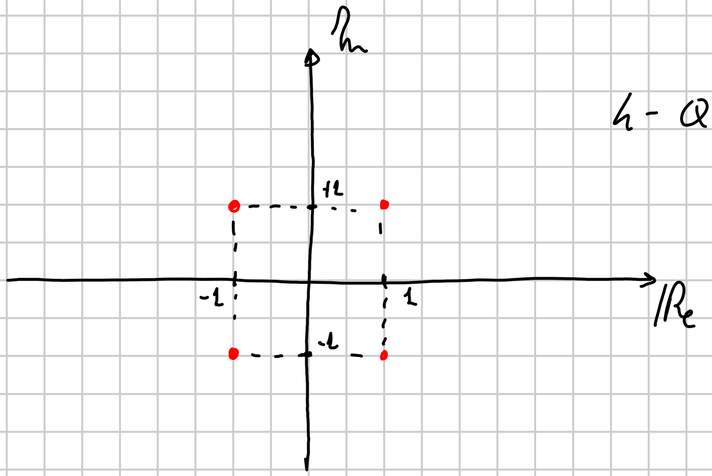
$$\tilde{s}_m(t) = \left(A_m^c + j A_m^s\right) p(t) = V_m e^{j\theta_m} p(t)$$

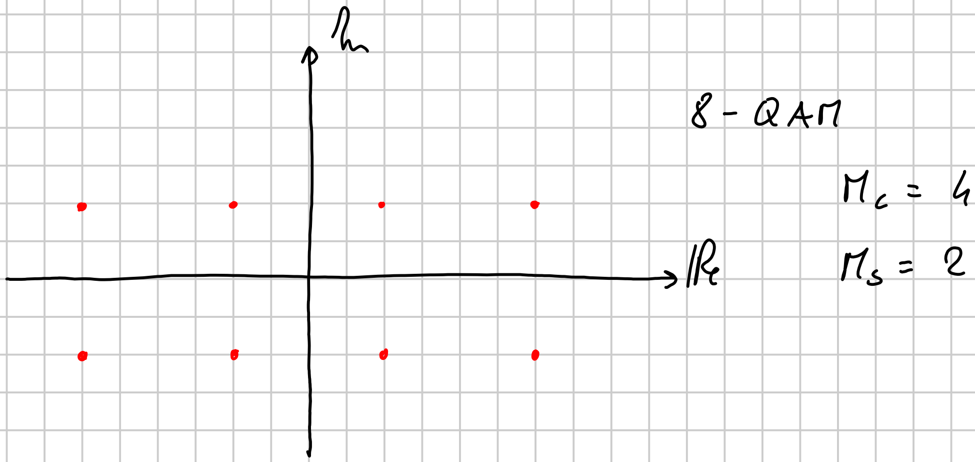
$$V_m = \sqrt{{A_m^c}^2 + {A_m^s}^2}, \quad \theta_m = \mathrm{tg}^{-1}\frac{A_m^s}{A_m^c}$$

$$E_m = \int s_m^2(t)\,dt = \frac{1}{2} E_p V_m^2 \qquad \text{(simboli non equi-energia)}$$

Ogni simbolo $x[n]$ viene rappresentato con un valore complesso $A_m^c + j A_m^s$

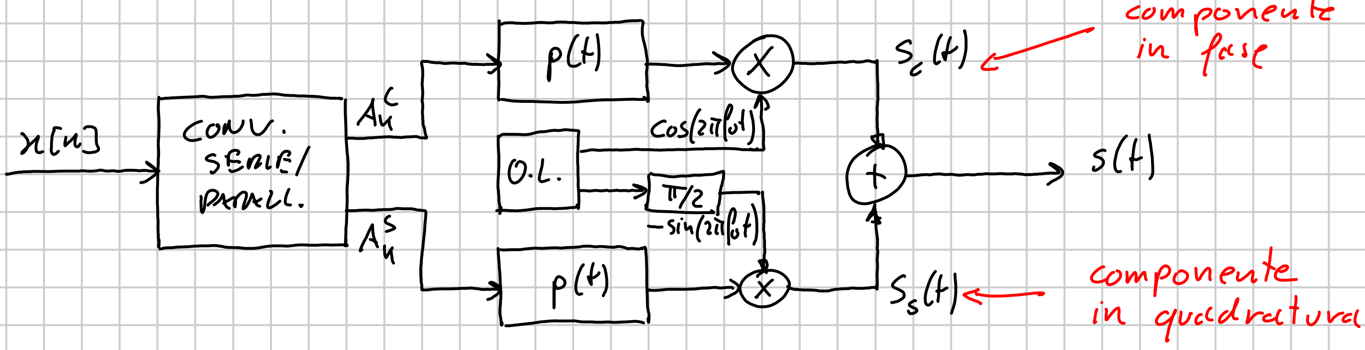
Se $x[n] \in A_s$ di dimensione M, allora $M_c \cdot M_s = M$
dove $A_m^c \in A_s^c = \{\alpha_1^c, \dots, \alpha_{M_c}^c\}$ e $A_m^s \in A_s^s = \{\alpha_1^s, \dots, \alpha_{M_s}^s\}$





$$\bar{E} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} E_m \qquad \text{energia media}$$

SCHEMA DI UN MODULATORE QAM



MODELLO EQUIVALENTE PER PAM, PSK e QAM

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[k]\, p(t - kT_s)$$

$$\tilde{x}[k] = \begin{cases} A_m \in A_s \text{ con elementi reali} & (PAM) \\ e^{j\theta_m}, \quad \theta_m \triangleq \frac{2\pi}{M} & (PSK) \\ A_m^c + j A_m^s & (QAM) \end{cases}$$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN SEGNALE NUMERICO MODULATO PAM, PSK o QAM

$$\boxed{S_s(f) = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{\tilde{x}}^2}{2}\left[P(f-f_0)^2 + P(f+f_0)^2 \right]}$$

Si nota che la DSP occupa una banda che è definita dalla banda dell'impulso sagomatore $p(t)$. Per effetto della modulazione la banda del segnale modulato è doppia rispetto alla banda di $p(t)$

$$B_T = 2B_p$$

Quindi l'efficienza spettrale diventa pari a:

$$\boxed{\eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{2B_p T_s}}$$

Per raggiungere ottime efficienze spettrali è importante progettare bene l'impulso sagomatore

IMPULSO SAGOMATORE RETTANGOLARE

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$|P(f)| = T_s \,\mathrm{sinc}(T_s f)$$

$$B_p = \frac{1}{2T_s} \Rightarrow B_T = \frac{1}{T_s}$$

$$\eta_B = \log_2 M$$

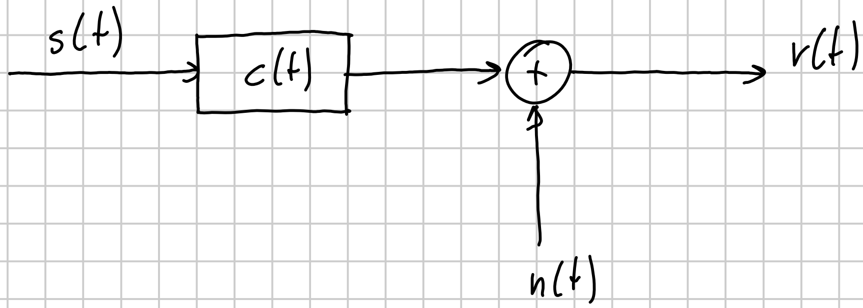
IMPULSO A RADICE QUADRATA DI COSENO RIALZATO

$$P(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$$

$$B_p = \frac{1+\alpha}{2T_s} \Rightarrow B_T = \frac{1+\alpha}{T_s}$$

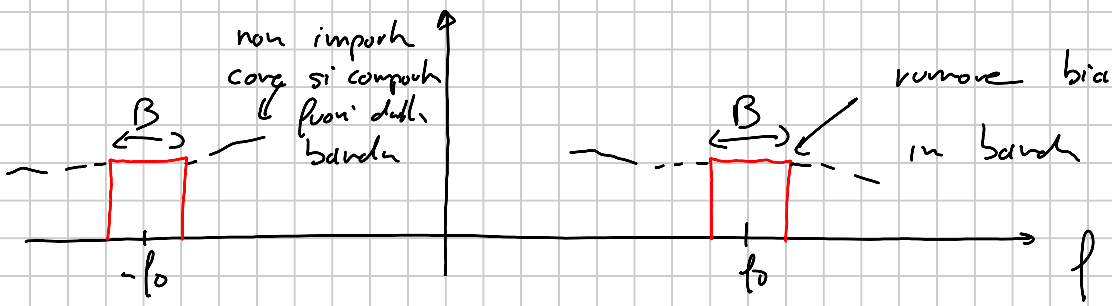
$$\eta_B = \frac{\log_2 M}{1+\alpha}$$

IL CANALE PASSA-BANDA

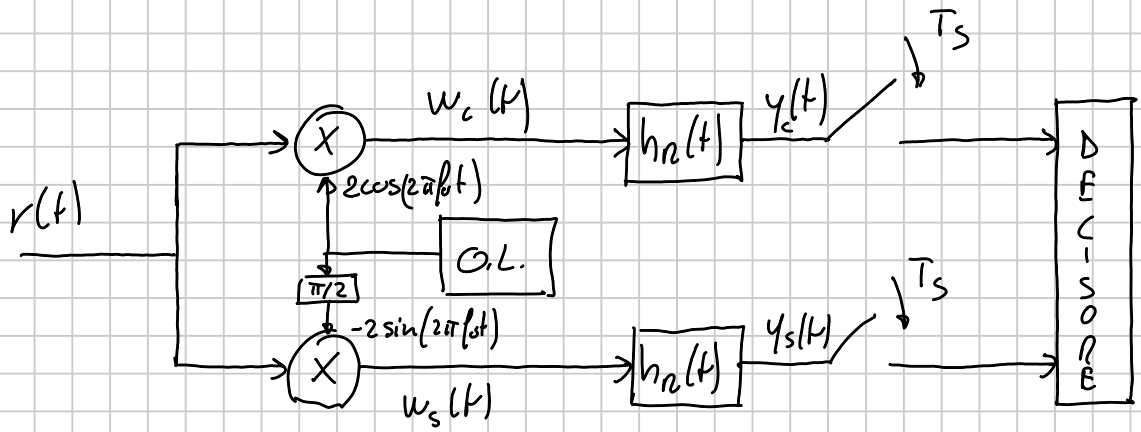


$$C(f) = TCF[c(t)] = \begin{cases} C(f) \neq 0 & f_0 - \frac{B_T}{2} < f < f_0 + \frac{B_T}{2} \quad \text{e sim.} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$n(t)$ = processo di rumore Gaussiano Bianco in banda



RICEVITORE M-PAM, M-PSK e M-QAM



N.B. per il M-PAM il ramo in quadratura in realtà non serve.

M - PAM

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x[k] \in A_s = \{\pm 1, \pm 3, \dots, M\}$$

$$r(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t)\right] \otimes c(t) + n(t)$$

Assumiamo il canale ideale in banda

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t) + n(t)$$

Dopo il demodulatore

$$w_c(t) = r(t) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s) + 2n(t)\cos 2\pi f_0 t + \text{comp a } 2f_0$$

Il filtro $h_R(t)$ è progettato per eliminare l'ISI e per massimizzare il SNR. Questo può essere fatto congiuntamente scegliendo

$$P(f) = H_R(f) = \text{radice di coseno rialzato.}$$

Questo è oltretutto un filtro passabasso che elimina la componente a $2f_0$.

Si può dimostrare che in uscita al ramo in quadratura $y(t) \cong 0$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h(t-kT_s) + 2n(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

(1) rispetta il criterio di Nyquist (NO ISI)

(2) Massimizza l'SNR a $t = kT_s$

Vediamo il rumore

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{n}(t) = n_c(t) + j\, n_s(t)$$

Gaussiano bianco

Gaussiano bianco

$$2n(t)\cos(2\pi f_0 t) = n_c(t)\left(1 + \underbrace{\cos(4\pi f_0 t)}\right) - n_s(t)\underbrace{\sin(4\pi f_0 t)}$$

vengono eliminati dal passa basso

Per cui

rumore Gaussiano bianco in b.b.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h(t-kT_s) + n_c(t) \otimes h_R(t)$$

⇒ Per cui il segnale e' lo stesso di un PAM in banda base

⇒ Il decisore ottimo e' lo stesso ⇒ Quantizzatore uniforme nel caso di simboli equiprobabili.

⇒ Il calcolo delle prestazioni segue quello per la PAM in b.b.

QAM

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[n]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t) + \quad \Leftarrow \text{ramo in fase}$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[n]\, p(t-kT_s) \sin(2\pi f_0 t) \quad \Leftarrow \text{ramo in quadratura}$$

I simboli $x[n]$ vengono convertiti i simboli $x_c[n]$ e $x_s[n]$ dal codificatore (serie/parallelo).

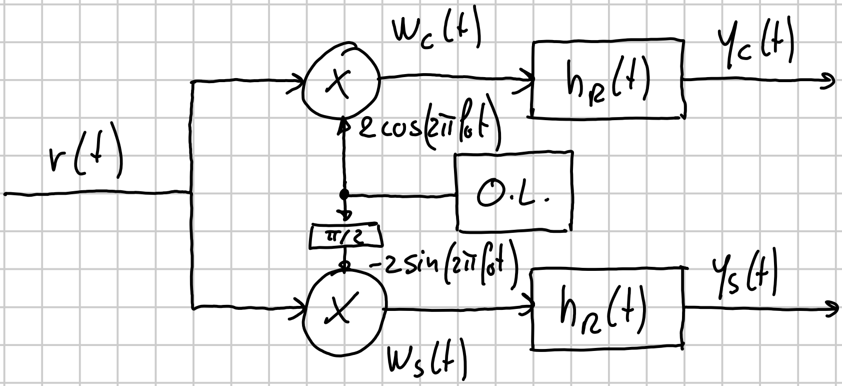
N.B. i simboli $x_c[n]$ e $x_s[n]$ sono indipendenti tra di loro.

Nel caso di canale ideale con rumore bianco in banda

$$r(t) = s(t) + n(t) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[n]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t) + n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (I)$$

$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[n]\, p(t-kT_s) \sin(2\pi f_0 t) + n_s(t) \sin(2\pi f_0 t) \right] \quad (Q)$$



Sul ramo in fase:

$$w_c(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, p(t-kT_s) + n_c(t)\right]\left(1+\cos(4\pi f_0 t)\right) +$$
$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, p(t-kT_s) + n_s(t)\right]\left(\sin(4\pi f_0 t)\right)$$

Se $P(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$ $\Rightarrow$ $H_R(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}$

$\downarrow$ passa basso $\qquad$ $\downarrow$ passa basso

$$y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, h(t-kT_s) + n_c(t) \otimes h_R(t)$$

Sul ramo in quadratura

$$w_s(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, p(t-kT_s) + n_c(t)\right]\left(-\sin(4\pi f_0 t)\right) +$$
$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, p(t-kT_s) + n_s(t)\right]\left(-1+\cos(4\pi f_0 t)\right)$$

Per le stesse considerazioni su $P(f)$ e $H_R(f)$ si ottiene

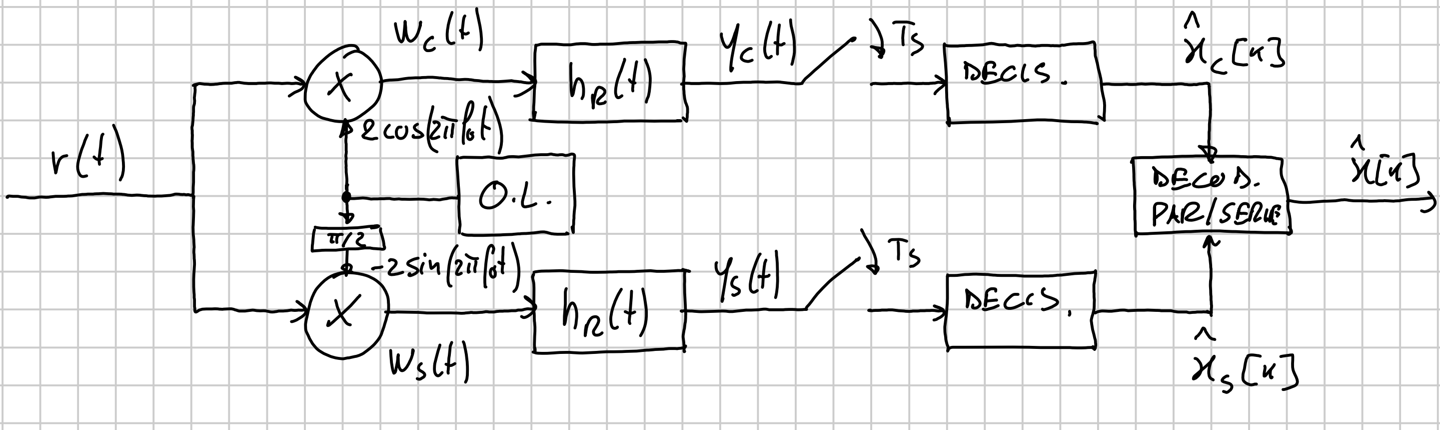
$$y_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, h(t-kT_s) + n_s(t) \otimes h_r(t)$$

Si notano quindi le seguenti cose

1) La trasmissione dei simboli $x_s[n]$ non comporta nessun effetto nel ramo in fase del ricevitore, così come la trasmissione dei simboli $x_c[n]$ non comporta nessun effetto nel ramo in quadratura del ricevitore.

2) La modulazione QAM può essere quindi vista come una doppia modulazione PAM, una che avviene sulla componente in fase ed una sulla componente in quadratura. Le due modulazioni avvengono in maniera indipendente

3) Il ricevitore ottimo prevede quindi una strategia di decisione indipendente per ogni componente. Essendo nota la strategia di decisione ottima per la PAM, questa è anche la strategia di decisione ottima per ogni singola componente.

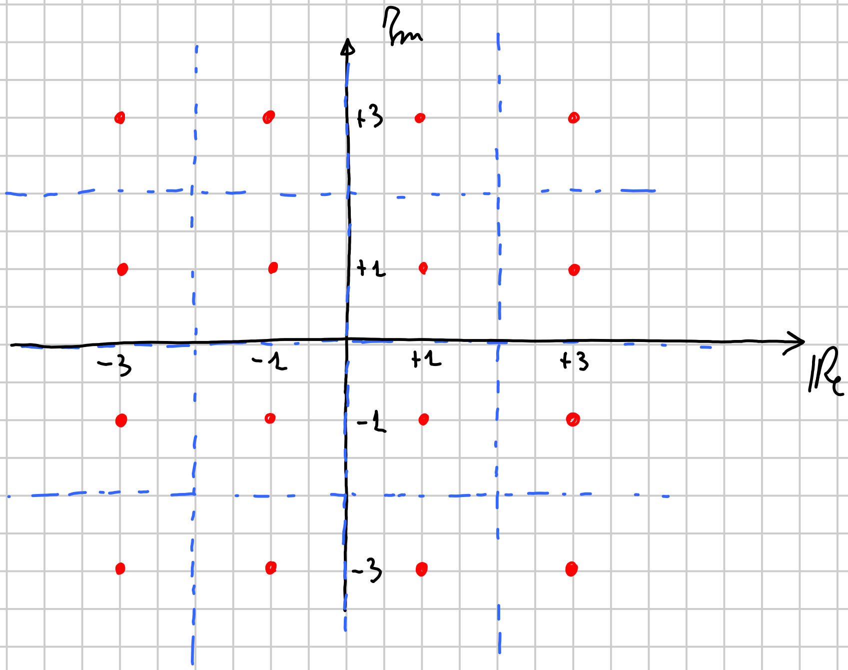


Osservazioni

Nel caso di simboli equiprobabili il decisore è un semplice quantizzatore uniforme.

Nel caso particolare di 4-QAM, il problema diventa equivalente al caso di due PAM binarie indipendenti.

Esempio: ZONE DI DECISIONE PER UN 16-QAM



In realtà le decisioni vengono prese separatamente sui due rami, ma il risultato è equivalente ad un decisore bidimensionale come sopra.

CALCOLO DELLA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL SIMBOLO

$$P_E^{(PAM)}(M_c) = P_c$$

probabilità di errore sul simbolo M_c-PAM } I

$$P_E^{(PAM)}(M_s) = P_s$$

probabilità di errore sul simbolo M_s-PAM } Q

$$P_E^{(QAM)}(M) = P_c(1-P_s) + P_s(1-P_c) + P_c P_s \simeq P_c + P_s \quad (P_c, P_s \ll 1)$$

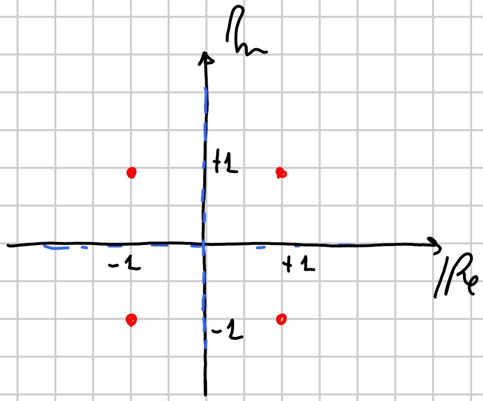
Probabilità di errore sul simbolo QAM

Se viene adottata la codifica di Gray:

$$P_b \simeq \frac{P_E(M)}{\log_2 M}$$

4 - QAM

La 4-QAM può essere vista come una doppia 2-PAM o BPSK. Su ogni canale (I e Q) viene codificato un bit di informazione.



$$P_E^{QAM}(4) \cong 2\, P_E^{(PAM)}(2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

$$P_b^{QAM} \cong \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

ha la stessa PROBABILITÀ DI ERRORE SUL BIT DI UNA BPSK !!

⇒ Si ottiene la stessa prestazione di un BPSK ma con una efficienza spettrale doppia

$$\eta_B^{(BPSK)} = \frac{1}{T_b B_T}$$

$$\eta_B^{(4\text{-}QAM)} = \frac{2}{T_b B_T}$$

Si ricorda che B_T è la banda del segnale trasmesso che dipende, nel caso PAM, PSK e QAM, solo da $p(t)$.

PROBLEMA DELLA FASE

Gli oscillatori in trasmissione e in ricezione non sono sincronizzati in fase. Questo vuol dire che esiste una differenza di fase θ_0 tra il tx ed il rx.

Tale differenza può essere rappresentata nel segnale trasmesso come:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$\theta_0 = \text{V.A.} \in \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

In ricezione questo comporta grossi problemi. Vediamo un esempio con la QAM con canale non distorcente:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, p(t-kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta) + n_c(t) \cos(2\pi f_0 t)$$
$$- \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, p(t-kT_s) \sin(2\pi f_0 t + \theta) + n_s(t) \sin(2\pi f_0 t)\right]$$

$$w_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, p(t-kT_s) \left[\cos\theta + \cos(4\pi f_0 t + \theta)\right] +$$
$$+ n_c(t) \left[1 + \cos(4\pi f_0 t)\right] +$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, p(t-kT_s) \left[\sin\theta + \sin(4\pi f_0 t + \theta)\right] +$$
$$- n_s(t) \left[\sin(4\pi f_0 t)\right]$$

$$y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_c[k]\, h(t-kT_s) \cos\theta + n_c(t) \otimes h_R(t) +$$
$$\underbrace{- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_s[k]\, h(t-kT_s) \sin\theta}_{\text{cross-talk}}$$

cross-talk (è un interferente)

N.B. Si può dimostrare che la stessa cosa succede sulla componente in quadratura.

RECUPERO DELLA FASE

Essendo la fase incognita, questa deve essere stimata al ricevitore. Per fare questo, si inviano delle sequenze di "training" che sono delle sequenze note.

Esempio:

Se si inviano simboli solo sulla componente in quadratura e si misura l'uscita del campionatore del ramo in fase, facendo delle ipotesi:

$$\begin{cases} x_s[n] = 1 \\ h[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad y_c[n] = -h[0]\, x_s[n] \sin\theta + n_{uc}[n]$$

dove $n_{uc}(t) = n_c(t) \otimes h_R(t)$

Quindi se $n_{uc}[n] \ll h[0]\, x_s[n] \sin\theta$ (SNR alto)

$$\Rightarrow -\sin\theta \simeq \frac{y_c[n]}{h[0]\, x_s[n]} \cong y_c[n]$$

Quando il SNR è basso si può trasmettere una sequenza di simboli tutti uguali ad "1" e fare una media

$$-\widehat{\sin\theta} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y[n]$$

$$\hat{\theta} = -\arcsin\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y[n]\right]$$