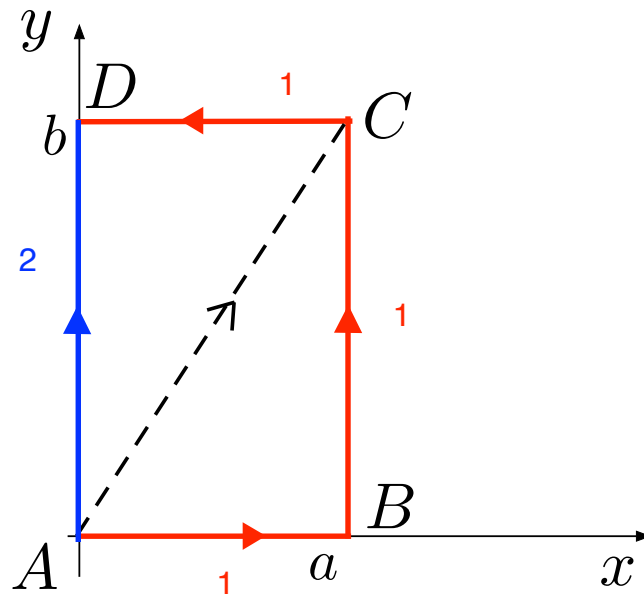


Esercizio

Una carica elettrica q si trova sul piano xy ed è soggetta ad un potenziale elettrostatico

$$V(x, y) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} (-x^2 + 3xy) \quad A = 5 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3 \quad (1)$$



Calcolare:

1. il campo elettrico che agisce sulla carica
2. il lavoro compiuto per spostare la carica q da A a D lungo il percorso $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ descritto in figura;
3. il lavoro per spostare la carica q da A a D verticalmente, e confrontarlo con il lavoro ottenuto al punto precedente;
4. il lavoro per spostare la carica da A a C lungo la diagonale, e confrontarlo con il lavoro compiuto nel tratto $A \rightarrow B \rightarrow C$

SOLUZIONE

1. Per calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, utilizzando il legame

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x, y) &= -\nabla V(x, y) = \\
 &= \left(-\frac{A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\
 &= \left(\underbrace{\frac{A}{4\pi\epsilon_0} (2x - 3y)}_{E_x(x, y)}, \underbrace{-\frac{A}{4\pi\epsilon_0} 3x}_{=E_y(x, y)} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Calcoliamo il lavoro lungo il percorso $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

$$W_{A \rightarrow D}^{\text{perc.1}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} \tag{3}$$

- $A \rightarrow B$
 x varia da 0 a a
 $y = \text{cost} = 0$

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= q \int_A^B (E_x dx + E_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\
 &= q \int_0^a E_x dx = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a (2x - \underbrace{3y}_{=0}) dx = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a 2x dx = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} a^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

Osserviamo che $W_{A \rightarrow B}$ si può calcolare anche sfruttando il fatto che il campo elettrostatico è conservativo, e dunque il lavoro per spostare una carica da A a B coincide con (meno) la variazione di energia potenziale

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= q \int_A^B (-\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= -q (V(B) - V(A)) = \\
 &= q (V(A) - V(B))
 \end{aligned} \tag{5}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= q(V(0,0) - V(a,0)) = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-0^2 + 3 \cdot 0 \cdot 0) - \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3 \cdot a \cdot 0) = \\
 &= +\frac{qA}{4\pi\epsilon_0}a^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

che coincide con quanto ottenuto nella (4).

- $B \rightarrow C$
 $x = \text{cost} = a$
 y varia da 0 a b

$$\begin{aligned}
 W_{B \rightarrow C} &= \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= q \int_B^C (E_x \underbrace{dx}_{=0} + E_y dy) = \\
 &= q \int_0^b E_y dy = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_0^b (-\underbrace{3x}_{=3a}) dy = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_0^b (-3a) dy = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} (-3a) \int_0^b dy = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} (-3ab)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Anche in questo caso si poteva effettuare il calcolo tramite il potenziale:

$$W_{B \rightarrow C} = q(V(B) - V(C)) \tag{8}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 W_{B \rightarrow C} &= q(V(a,0) - V(a,b)) = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3 \cdot a \cdot 0) - \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3ab) = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-3ab)
 \end{aligned} \tag{9}$$

che coincide con quanto ottenuto nella (7).

- $C \rightarrow D$
 x varia da a a 0
 $y = \text{cost} = b$

$$\begin{aligned}
W_{C \rightarrow D} &= \int_C^D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
&= q \int_C^D (E_x dx + E_y \underbrace{dy}_{=0}) = \\
&= q \int_a^0 E_x dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_a^0 (2x - \underbrace{3y}_{3b}) dx = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_a^0 (2x - 3b) dx = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a (2x - 3b) dx = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^a 2x dx - \int_0^a 3b dx \right) = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^a dx - 3b \int_0^a dx \right) = \\
&= -\frac{qA}{4\pi\epsilon_0} (a^2 - 3ab) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} (3ab - a^2)
\end{aligned} \tag{10}$$

o analogamente. Anche in questo caso si poteva effettuare il calcolo tramite il potenziale:

$$W_{C \rightarrow D} = q(V(C) - V(D)) \tag{11}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
W_{C \rightarrow D} &= q(V(a, b) - V(0, b)) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3ab) - \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-0^2 + 3 \cdot 0 \cdot b) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3ab)
\end{aligned} \tag{12}$$

che coincide con quanto ottenuto nella (10).

Sommando i tre contributi abbiamo

$$\begin{aligned}
W_{A \rightarrow D}^{\text{perc.1}} &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}a^2 + \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-3ab) + \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(3ab - a^2) = \\
&= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(a^2 - 3ab + 3ab - a^2) = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

3. Calcoliamo ora il lavoro lungo il percorso $D \rightarrow A$ verticalmente
 $x = \text{cost} = 0$

y varia da b a 0

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 2} &= \int_A^D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= q \int_A^D (E_x \underbrace{dx}_{=0} + E_y dy) = \\
 &= q \int_b^0 E_y dy = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0} \int_b^0 (-\underbrace{3x}_{=0}) dy = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

o analogamente

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 2} &= q(V(A) - V(D)) \\
 &= q(V(0,0) - V(0,b)) = \\
 &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-0^2 + 3 \cdot 0 \cdot 0) - \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(-0^2 + 3 \cdot 0 \cdot b) = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Confrontando la (13) e la (14) osserviamo che

$$W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 1} = W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 2} \tag{16}$$

ossia il lavoro per andare dal punto A al punto D *non dipende dal percorso*. Questo è dovuto ancora al fatto che il campo elettrostatico è conservativo, e dunque il lavoro è pari a (meno) la variazione di energia potenziale. Pertanto si ha

$$W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 1} = \underbrace{q(V(A) - V(B))}_{A \rightarrow B} + \underbrace{q(V(B) - V(C))}_{B \rightarrow C} + \underbrace{q(V(C) - V(D))}_{C \rightarrow D} = q(V(A) - V(D)) \tag{17}$$

$$W_{A \rightarrow D}^{\text{perc. } 2} = q(V(A) - V(D)) \tag{18}$$

ossia il lavoro per spostare una carica da un punto A al punto D non dipende dal percorso scelto, ma solo dai punti iniziale e finale.

4. Analogamente abbiamo che il lavoro da A a C

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow C}^{\text{diag}} &= \int_A^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= q \int_A^C (-\nabla V \cdot d\mathbf{r}) = \\
 &= -q(V(C) - V(A)) = \\
 &= q(V(A) - V(C))
 \end{aligned} \tag{19}$$

dove

$$\begin{cases} A &= (0,0) \\ C &= (a,b) \end{cases} \tag{20}$$

Ricordando che

$$V(x,y) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0}(-x^2 + 3xy) \tag{21}$$

abbiamo

$$\begin{cases} V(A) &= 0 \\ V(C) &= \frac{A}{4\pi\epsilon_0}(-a^2 + 3ab) \end{cases} \quad (22)$$

e dunque

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow C}^{\text{diag}} &= q(V(A) - V(C)) = \\ &= \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(a^2 - 3ab) \end{aligned} \quad (23)$$

e notiamo che

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} = \frac{qA}{4\pi\epsilon_0}(a^2 - 3ab) \quad (24)$$

Pertanto

$$W_{A \rightarrow C}^{\text{diag}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} \quad (25)$$

ossia il lavoro per spostare la carica da $A \rightarrow C$ non dipende dal percorso.