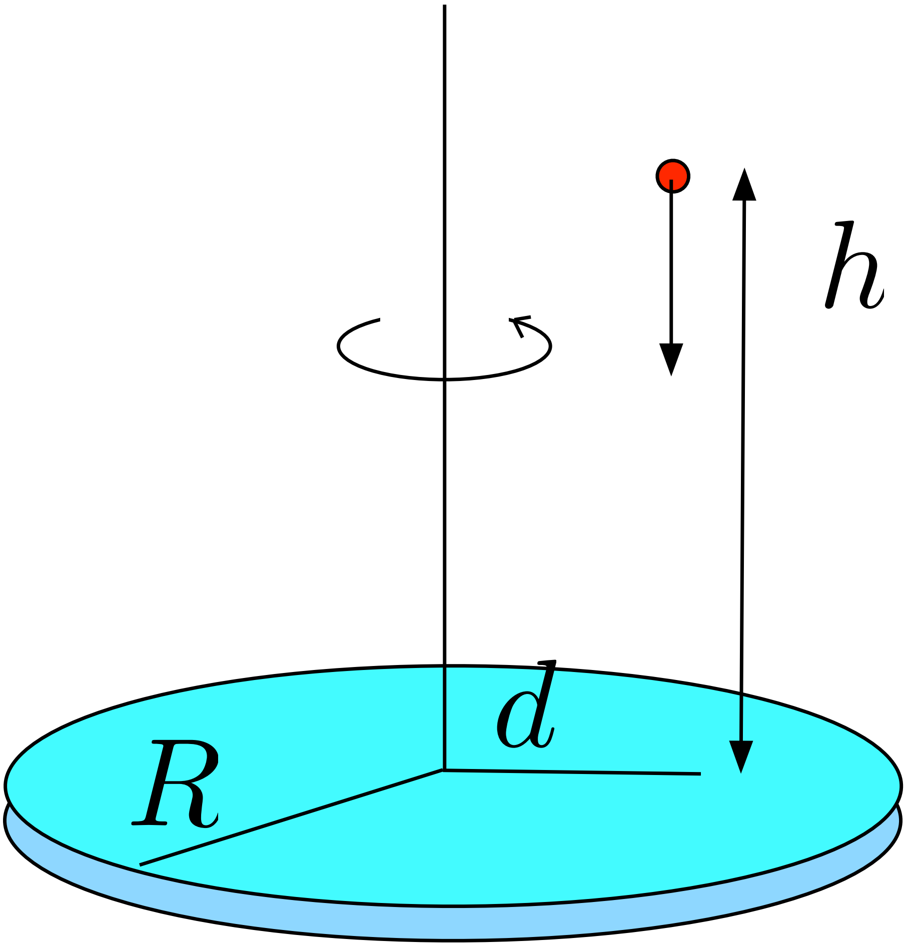
Esercizio **(tratto dall'esempio 6.22 p.189 del Mazzoldi)**

Un disco di massa M e raggio R ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il centro. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m. Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare:

1. la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto;
2. l'impulso della reazione vincolare;
3. l'impulso angolare della reazione vincolare.



SOLUZIONE

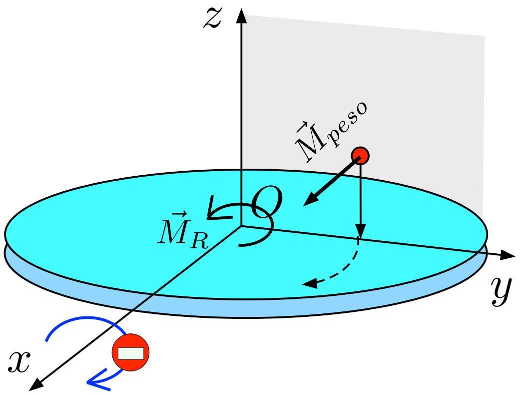
1. • Ci chiediamo innanzitutto se il sistema disco+particella sia isolato. La risposta è NO, dato che, oltre alle forze interne tra disco e particella che si esercitano all'istante dell'urto e che causano l'attaccarsi della particella al disco, esistono altre due forze esterne al sistema disco+particella:

- la forza peso che si esercita sulla particella fino a quando essa non si attacca al disco (dopo è di fatto inattiva, essendo cancellata dal piano del pisco stesso);

- la reazione vincolare del perno che agisce sul disco per mantenerlo attorno al suo asse di rotazione.

Siccome il sistema non è isolato, NON si conservano né la quantità di moto totale $\vec{P}$, né il momento angolare totale $\vec{L}$. Possiamo tuttavia cercare di verificare se esitano altre leggi di conservazione, magari meno generali, ma che ci permettano di risolvere il problema. Per fare questo è utile analizzare la tipologia delle forze esterne che non consentono a $\vec{P}$ e $\vec{L}$ di conservarsi.

• Indichiamo con z l'asse del disco e con $y-z$ il piano identificato dall'asse del disco e dalla verticale di caduta della particella, e con x l'asse perpendicolare a tale piano e giacente sul piano del disco. Consideriamo come polo O il centro del disco e valutiamo rispetto a tale polo il momento delle forze esterne descritte sopra



(a) Essendo la forza peso diretta lungo z, il momento $\vec{M}_{peso}$ è diretto lungo l'asse x;

$$\vec{M}_{peso} = M_{peso}\,\hat{\imath} \tag{1}$$

dove $\hat{\imath}$ indica il versore lungo x.

(b) Perno: osserviamo che:

– il centro del disco rimane fermo al momento dell'urto. Questo significa che il perno esercita una *forza* (=la reazione vincolare $\vec{R}$) che impedisce al *centro di massa* del disco di spostarsi quando la pallina lo urta;

– l'asse del disco rimane fisso. Si noti che non è equivalente al punto precedente, perché anche se il centro del disco rimane fermo al momento dell'urto, l'asse di rotazione ruoterebbe sul piano $y-z$. Il fatto che l'asse rimanga fisso significa che al momento dell'urto il perno esercita anche un *momento* vincolare che impedisce alla particella di ruotare l'asse. Siccome contrasta una rotazione sul piano $y - z$, tale momento $\vec{M}_R$ è diretto lungo x.

$$\vec{M}_R = M_R\,\hat{\imath} \tag{2}$$

dove î indica il versore lungo x.

Pertanto abbiamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} = \vec{M}_{peso} + \vec{M}_R = (M_{peso} + M_R)\,\hat{\imath} \neq 0 \tag{3}$$

e ritroviamo appunto che il momento angolare $\vec{L}$ non si conserva, né in generale (a causa di $\vec{M}_{peso}$ e di $\vec{M}_R$), né attraverso l'urto (a causa di $\vec{M}_R$).

- Tuttavia, osservando che $\vec{M}_{peso}$ e $\vec{M}_R$ sono diretti lungo x [vedi Eq.(1) e (2)], in realtà in (3) è la sola componente L_x del momento angolare a non conservarsi. Scrivendo l'Eq.(3) in componenti $\vec{L} = L_x\hat{\imath} + L_y\hat{\jmath} + L_z\hat{k}$, abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_{peso} + M_R \neq 0 & \Rightarrow \quad L_x \text{ varia nel tempo} \\ \dfrac{dL_y}{dt} = 0 & \Rightarrow \quad L_y = \text{cost} \\ \dfrac{dL_z}{dt} = 0 & \Rightarrow \quad L_z = \text{cost} \end{cases} \tag{4}$$

Dunque, anche se il momento angolare come vettore non si conserva, le componenti L_y e L_z si conservano, e possiamo sfruttare questa proprietà. In particolare L_z si conserva attraverso l'urto, ossia

$$L_{z,prima} = L_{z,dopo} \tag{5}$$

- Prima dell'urto la componente L_z è data solamente dalla rotazione del disco, dato che la particella ha momento angolare solo lungo L_x.

$$L_{z,prima} = I_D\,\omega \tag{6}$$

Dopo l'urto il disco ruoterà con una nuova velocità angolare ω'; la particella si attacca al disco e dunque ruoterà solidalmente con esso, contribuendo ad aumentarne il momento d'inerzia. Per cui

$$L_{z,dopo} = (I_D + md^2)\,\omega' \tag{7}$$

Inserendo (6) e (6) in (5) otteniamo

$$\begin{aligned} I_D\,\omega &= (I_D + md^2)\,\omega' \\ &\Downarrow \\ \omega' &= \omega\,\frac{I_D}{I_D + md^2} = \omega\,\frac{1}{1 + \frac{md^2}{I_D}} \end{aligned} \tag{8}$$

Ricordando che il momento d'inerzia di un disco che ruota torno al suo asse vale

$$I_D = \frac{1}{2}MR^2 \tag{9}$$

otteniamo

$$\omega' = \omega \, \frac{1}{1 \; + \; 2\frac{m}{M}\frac{d^2}{R^2}} \tag{10}$$

2. Dato che la quantità di moto non si conserva attraverso l'urto, abbiamo

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima} \tag{11}$$

Questa variazione viene assorbita dal perno, e costituisce appunto l'impulso della reazione vincolare durante l'urto. Osserviamo che

- la quantità di moto del disco è sempre nulla, sia prima che dopo l'urto: nel disco ad ogni istante per ciascun elementino δm che ha una velocità $\vec{v}$ ce n'è un altro simmetrico rispetto all'asse che ha velocità $-\vec{v}$. Infatti il centro di massa del disco è fermo.

- Dunque la quantità di moto, sia prima che dopo l'urto, è dovuta alla sola particella. In particolare
  - prima dell'urto la quantità di moto della particella è diretta lungo z e verso il basso. Indicando con v_p il modulo della velocità immediatamente prima dell'urto abbiamo

    $$\vec{P}_{prima} = -m v_p \, \vec{k} \tag{12}$$

    dove $\hat{k}$ è il versore lungo l'asse z verso l'alto.
  - dopo l'urto la particella rimane attaccata al disco, e dunque la sua velocità $\vec{v}'$ giace sul piano $x - y$ ed è diretta tangenzialmente lungo la circonferenza di rotazione di raggio d. In particolare, immediatamente dopo l'urto, la velocità è diretta lungo $-\hat{\imath}$

    $$\vec{P}_{dopo} = -m\omega' d \; \hat{\imath} \tag{13}$$

- Pertanto i vettori quantità di moto $\vec{P}_{prima}$ e $\vec{P}_{prima}$ sono ortogonali tra loro, ed abbiamo

$$\begin{aligned} |\Delta\vec{P}| &= |\vec{P}_{dopo} - \vec{P}_{prima}| = \\ &= \sqrt{|\vec{P}_{dopo}|^2 + |\vec{P}_{prima}|^2} = \\ &= \sqrt{m^2(\omega')^2 d^2 + m^2 v_p^2} \end{aligned} \tag{14}$$

  dove la velocità v_p della particella immediatamente prima dell'urto è determinata dalla sua altezza di caduta e vale

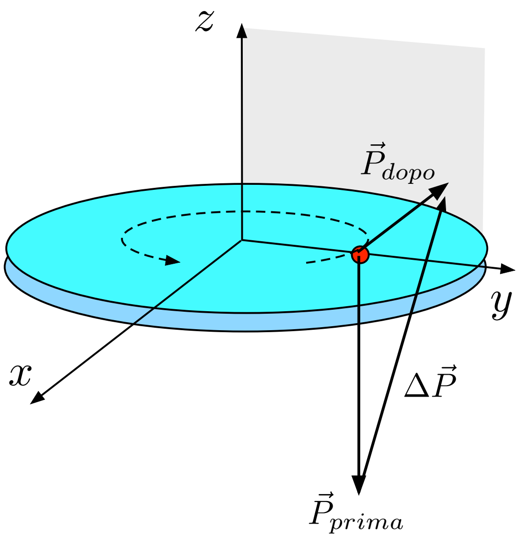
$$v_p = \sqrt{2gh} \tag{15}$$

  mentre ω' è dato dalla Eq.(10). Otteniamo dunque

$$|\Delta\vec{P}| = \sqrt{\frac{m^2\omega^2 d^2}{\left(1 \; + \; 2\frac{m}{M}\frac{d^2}{R^2}\right)^2} + 2m^2 gh} \tag{16}$$

- L'angolo che $\Delta\vec{P}$ forma con la verticale vale

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{|\vec{P}_{dopo}|}{|\vec{P}_{prima}|} = \\ &= \arctan\frac{m\omega' d}{m v_p} = \arctan\left(\frac{\omega d}{(1 \; + \; 2\frac{m}{M}\frac{d^2}{R^2})\sqrt{2gh}}\right) \end{aligned} \tag{17}$$



3. Dato che il momento angolare non si conserva attraverso l'urto, abbiamo

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{dopo} - \vec{L}_{prima} \tag{18}$$

Anche questa variazione viene assorbita dal perno, e costituisce appunto l'impulso angolare della reazione vincolare durante l'urto. Osserviamo che, a differenza della quantità di moto che è dovuta solo alla particella, il momento angolare è dovuto sia prima che dopo l'urto al disco ed anche alla particella. In particolare abbiamo

- prima dell'urto

$$\begin{aligned}\vec{L}_{prima} &= \underbrace{\vec{L}_{D,prima}}_{\text{disco}} + \underbrace{\vec{L}_{p,prima}}_{\text{particella}} = \\ &= I_D\,\omega\hat{k} - mdv_p\,\hat{\imath}\end{aligned} \tag{19}$$

- dopo l'urto

$$\vec{L}_{dopo} = (I_D + md^2)\,\omega'\hat{k} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{L} &= \vec{L}_{dopo} - \vec{L}_{prima} = \\ &= \underbrace{(I_D + md^2)\,\omega'\hat{k} \; - \; I_D\,\omega\hat{k}}_{=0 \quad \text{Eq.}(5)} + mdv_p\,\hat{\imath} = \\ &= mdv_p\,\hat{\imath} = \\ &= md\sqrt{2gh}\,\hat{\imath}\end{aligned} \tag{21}$$

dove le componenti lungo z si sono cancellate, appunto per la conservazione di L_z.