Testi suggeriti

- Simon Haykin, «Digital Communications Systems», Wiley, 2014
- Marco Luise, Giorgio M. Vitetta, «Teoria dei segnali», McGraw-Hill, 2009
- Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai, «Probability, Random Variables, and Stochastic Processes», McGraw-Hill, 2002

Canale di comunicazione binario simmetrico

Esercizio:

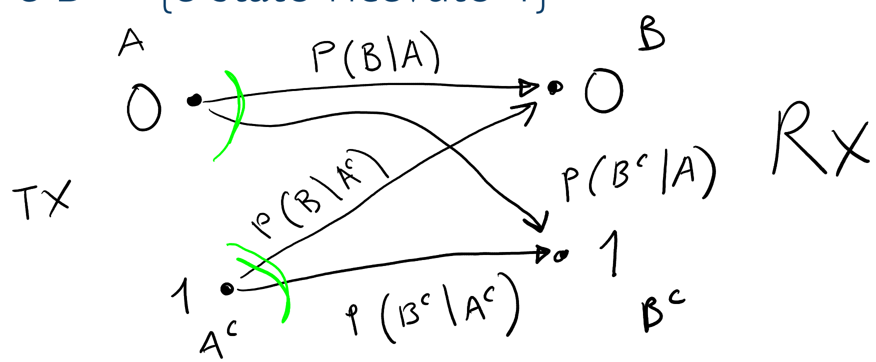
In un sistema di comunicazione:

- 1 è trasmesso con probabilità p = 0,3 e 0 con (1-p) = 0,7
- La probabilità di errore è $P_e = 0{,}01$

Si supponga che sia stato ricevuto 0:
qual è la probabilità che 0 sia stato effettivamente trasmesso?

Definiamo A = {è stato trasmesso 0} e A^c = {è stato trasmesso 1}
Definiamo B = {è stato ricevuto 0} e B^c = {è stato ricevuto 1}

Calcolare P[A|B] = ?



$$P(A) = 1 - p = 0{,}7$$

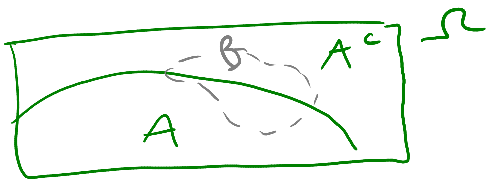
$$P(A^c) = p = 0{,}3$$

$$P_e = 0{,}01 = P(B^c|A) = P(B|A^c)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

BAYES

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 0{,}99$$



$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) = 0{,}99 \cdot 0{,}7 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 = 0{,}696$$

$$P(A|B) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}7}{0{,}696} \cong 0{,}996$$

$$P_e = 0 \rightarrow P(B|A) = 1 = P(B^c|A^c) \qquad P(B) = 1 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}3 = 0{,}7$$

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot 0{,}7}{0{,}7} = 1$$

$$P_e = 0{,}5 \qquad P(B|A) = P(B|A^c) = 0{,}5$$

$$P(B) = 0{,}5 \cdot P(A) + 0{,}5 \cdot P(A^c) = 0{,}5\left[P(A) + P(A^c)\right] = 0{,}5$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot P(A)}{0{,}5} = P(A)$$

Moneta perfetta o moneta truccata?

Esercizio:

- Una scatola contiene due monete: la prima è una moneta «perfetta», la seconda è una moneta truccata avente P({Testa}) = 0,8
- Viene scelta casualmente una delle due monete, che viene poi lanciata per 10 volte in condizioni indipendenti, osservando l'uscita di 5 facce Testa e 5 facce Croce
- Qual è la probabilità che la moneta scelta sia quella «perfetta»?
- Cosa può dirsi di questa probabilità se si osservano 5000 facce Testa su 10000 lanci?

A = {la moneta scelta è "perfetta"}

B = {5 Teste, 5 croce}

$P(A|B) = ?$

$$P(B|A) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$$

PROVE RIPETUTE BINARIE E INDIPENDENTI

Form. Bernoulli

$N = 10$
$K = 5$
$p = 0,5$

$$P(B|A) = \binom{10}{5} \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{252}{1024} = 0,246$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$P(A) = 0,5$

$P(A^c) = 0,5$

$$P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + \underbrace{P(B|A^c)}\cdot P(A^c) = 0{,}246\cdot 0{,}5 + 0{,}00264\cdot 0{,}5 \cong 0{,}1363$$

$$P(B|A^c) = \binom{10}{5}(0{,}8)^5(0{,}2)^5 = 252\cdot 0{,}16^5 \cong 0{,}00264$$

$N=10$
$k=5$
$p' = 0{,}8$

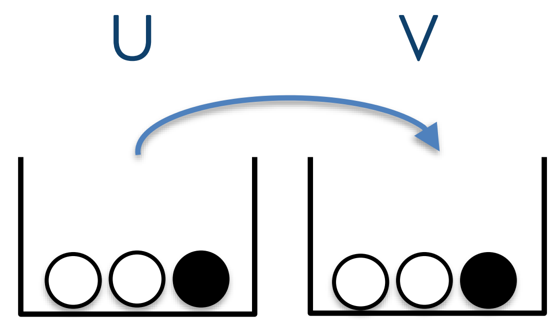
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\cancel{\binom{10}{5}}\frac{1}{2^{10}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\binom{10}{5}}\left[\frac{1}{2^{10}} + 0{,}16^5\right]}$$

$$= \frac{1}{1 + \underbrace{4^5}_{2^{10}}\cdot 0{,}16^5} = \frac{1}{1+(4\cdot 0{,}16)^5} = \frac{1}{1+0{,}64^5} \cong 0{,}9$$

$\{5000\ T\ su\ 10000\} = B'$

$$P(A|B') = \frac{1}{1+\underbrace{0{,}64^{5000}}_{\approx 0}} \simeq 1$$

Biglie in due urne



Esercizio:

Pesco una biglia a caso dall'urna U e la metto nell'urna V

1. Pesco poi una biglia dall'urna V: qual è la probabilità che sia bianca?
2. Se la biglia pescata dall'urna V è bianca, qual è la probabilità di aver pescato una biglia nera dall'urna U?

2. $P(C|A) = ?$

$A = \{$pesco una biglia bianca dall'urna V$\}$ → 1. $P(A) = ?$

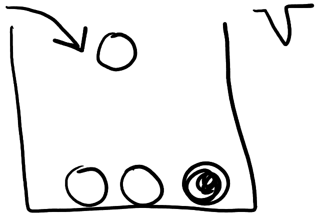
$B = \{$ " " " " " U$\}$

$C = B^c = \{$ " " nera dall'urna U$\}$

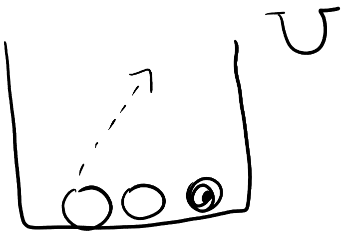
$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|C) \cdot P(C)$$

TEOR. PROB. TOTALE

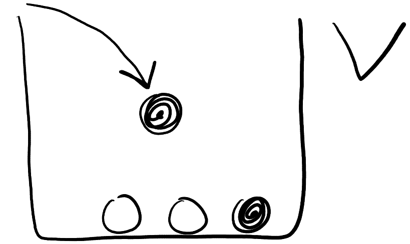
$P(A|B) = 3/4$



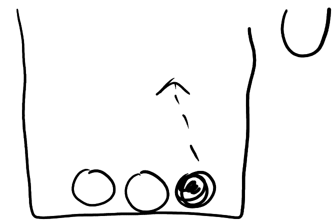
$P(B) = 2/3$



$P(A|C) = 1/2$



$P(C) = 1/3$



$$P(A) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2. $P(C|A) = \dfrac{P(A|C) \cdot P(C)}{P(A)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}$

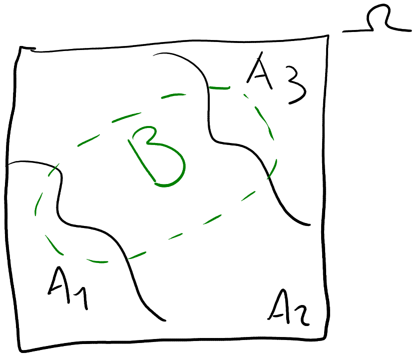
Contenitori di condensatori

Esercizio:

- Con riferimento alla tabella riportata sotto, si consideri il seguente esperimento: *prima si seleziona un contenitore tra i tre disponibili, poi si estrae un condensatore dal contenitore selezionato*
- Sapendo che è stato estratto un condensatore da 0.1 μF: quanto vale la probabilità che esso sia stato estratto dal contenitore #3?

	Contenitore #			
Capacità (μF)	**1**	**2**	**3**	**Totale**
0.1	**35**	**25**	**40**	**100**
0.5	**75**	**95**	**70**	**240**
1.0	**60**	**10**	**65**	**135**
Totale	**170**	**130**	**175**	**475**

Contenitori di condensatori



Capacità (μF)	Contenitore # 1	2	3	Totale
0.1	35	25	40	100
0.5	75	95	70	240
1.0	60	10	65	135
Totale	170	130	175	475

$A_1, A_2, A_3 \rightarrow A_i = \{$il condensatore è estratto dal contenitore $i\}$

$P\{A_i\} = \frac{1}{3}$ $\qquad B = \{$il condensatore estratto ha cap. $0,1\,\mu F\}$

$$P\{A_3 | B\} = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{40}{175} \cdot \frac{1}{3}}{0.2089} \approx 0,365$$

$P(A_3) = 1/3$

$P(B|A_3) = \frac{40}{175}$

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

$$= \frac{35}{170} \cdot \frac{1}{3} + \frac{25}{130} \cdot \frac{1}{3} + \frac{40}{175} \cdot \frac{1}{3} = 0,2089 \neq \frac{100}{475}$$

Due dissalatori

Esercizio:

- *Una nave è equipaggiata con due dissalatori, uno nuovo e uno ricondizionato, per la produzione di acqua dolce: ciascuno di essi è indipendente e in grado di sopperire alle necessità di bordo.*
- *La probabilità che nel corso di un mese un dissalatore nuovo si guasti è pari a p_N=0.05, mentre la probabilità che si guasti un dissalatore ricondizionato è p_R=0.2.*
- *Si calcoli la probabilità che la nave debba interrompere la navigazione entro un mese per l'impossibilità di generare acqua dolce.*

$$\Omega_N = \{\xi_1 = F_N ; \xi_2 = G_N\} \qquad P_N(F_N) = 1 - 0,05 = 0,95$$
$$P_N(G_N) = 0,05$$

$$\Omega_R = \{\lambda_1 = F_R ; \lambda_2 = G_R\} \longrightarrow P_R(F_R) = 1 - 0,2 = 0,8$$
$$P_R(G_R) = 0,2$$

$$\Omega = \Omega_N \times \Omega_R = \{(F_N, F_R); (F_N, G_R); (G_N, F_R); (G_N, G_R)\}$$

$$P(\text{rientro}) = P[(G_N, G_R)] = P_N(G_N) \cdot P_R(G_R) = 0,01$$

Diodi apparentemente identici

Esercizio:

Si hanno 10 diodi apparentemente identici, di cui 3 sono guasti. Qual è la probabilità che scegliendone a caso 5 se ne trovino 2 guasti?

$A = \{ \text{2 diodi guasti su 5 pescati} \}$

$$N = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!}$$

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$\binom{7}{3} \qquad \binom{3}{2}$$

$$n_A = \binom{7}{3} \times \binom{3}{2}$$

Studiare conviene?

Esercizio:

La probabilità che uno studente superi un esame universitario nell'ipotesi che abbia studiato è 0.9. Quella di superarlo senza aver studiato è 0.2. Si assuma pari a 0.75 la probabilità che uno studente abbia studiato. Sapendo che uno studente ha superato l'esame, qual è la probabilità che abbia studiato?

Intel 386

Esercizio:

In un calcolatore elettronico, ogni numero è rappresentato da una parola di 32 cifre binarie (0 ed 1). Sapendo che la probabilità di errore nella lettura di una singola cifra binaria è $p=10^{-3}$, si calcoli:

1) la probabilità che ci sia un solo errore in una parola;

2) la probabilità che non ci sia alcun errore in una parola.

$$P(1\ \text{ERRORE}) = \binom{N}{k} p^k \cdot (1-p)^{N-k} \qquad N=32,\ k=1,\ p=10^{-3}$$

$$= \underbrace{\binom{32}{1}}_{=32} 10^{-3} \cdot 0{,}999^{31} \simeq 0{,}031$$

$$P(0\ \text{ERRORI}) = \underbrace{\binom{32}{0}}_{1} \underbrace{(10^{-3})^0}_{1} \cdot 0{,}999^{32} \simeq 0{,}9685 \qquad N=32,\ k=0,\ p=10^{-3}$$

Codice a ripetizione

- Nelle applicazioni in cui la probabilità di errore sul canale (per es. canale binario simmetrico) è particolarmente elevata si utilizza una codifica di canale → Aggiungere ridondanza al messaggio trasmesso per rilevare o correggere eventuali errori al ricevitore

- Codice a ripetizione: si utilizzano parole di codice che ripetono *n* volte (con *n* dispari) il bit di informazione che si vuole trasmettere:

$$0 \rightarrow 000\ldots00$$
$$1 \rightarrow \underbrace{111\ldots11}_{n}$$

- Il decoder esegue una decodifica a maggioranza
  → E' possibile correggere fino a $\frac{n-1}{2}$ errori nella parola trasmessa

Esempio:

- Calcolare la probabilità di errore residua P_r per un codice a ripetizione 3:1, in presenza di una probabilità di errore sul bit $P_e = p$
- Il codice può correggere un errore singolo

Codice a ripetizione – n = 3

- Calcolare la probabilità di errore residua P_r per un codice a ripetizione 3:1, in presenza di una probabilità di errore sul bit $P_e = p$
- Il codice può correggere un errore singolo

Messaggio	Parola di codice	Singolo errore	Doppio errore	Triplo errore
0	000	100, 010, 001	110, 101, 011	111
1	111	110, 101, 011	100, 010, 001	000

$$P_r(n=3) = P(2\ errori) + P(3\ errori) = \underbrace{\binom{3}{2}p^2(1-p)}_{2\ errori} + \overbrace{\binom{3}{3}p^3}^{3\ errori} = 3p^2(1-p) + p^3$$

Formula di Bernoulli

- Codice a ripetizione di ordine *n* (*n* dispari):

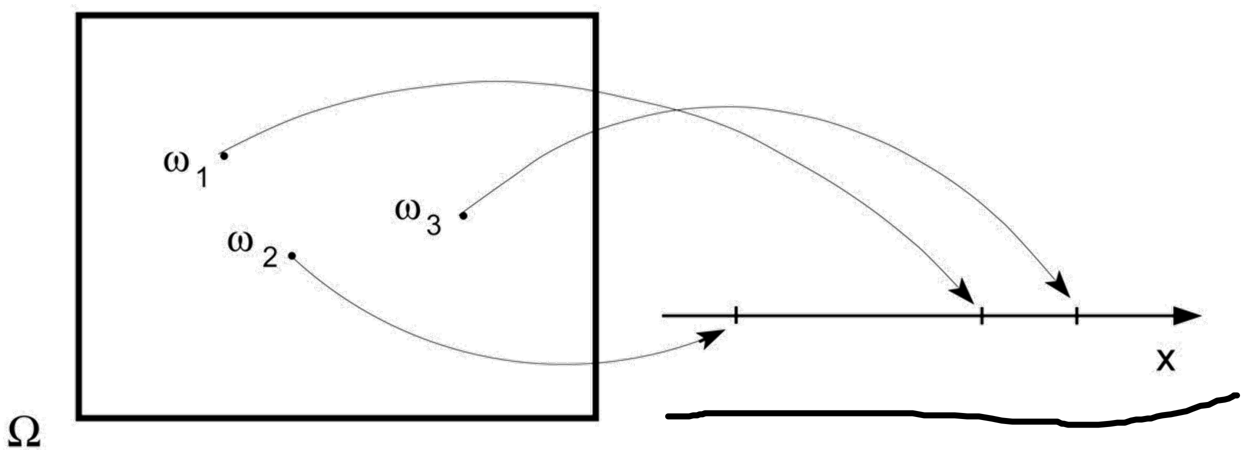
$$P_r(n) = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} P(k\ errori) = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\Omega_1 = \{ ⚀, ⚁, \ldots, ⚅ \}$

$\Omega_2 = \{ lu, me, \ldots, sa \}$

Variabili aleatorie

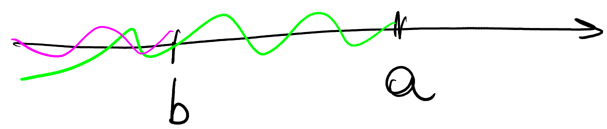
Definizione di variabile aleatoria



- Consideriamo un esperimento aleatorio avente uno spazio campione *Ω*, una classe degli eventi *S* e una legge di probabilità *P(·)*
- Definiamo una *corrispondenza*, indicata con $X(\omega)$, che associa a ciascun risultato ω dell'esperimento un unico numero *reale*
- Tale corrispondenza fra lo spazio *Ω* e l'asse reale è una *variabile aleatoria* se l'insieme di risultati dell'esperimento per i quali è verificata la disuguaglianza $X(\omega) \leq a$ è un *evento*, comunque si scelga il valore del parametro reale *a*
  → Posso assegnare al generico evento del tipo $\{X(\omega) \leq a\}$ una probabilità P(·)

Definizione di variabile aleatoria

- Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che si ottengono come unione o intersezione di sottoinsiemi del tipo $\{X(\omega) \leq a\}$ sono ancora degli eventi e quindi è possibile assegnare loro una *probabilità*



- In particolare, è un evento:

$$\{b < X(\omega) \leq a\} = \{X(\omega) \leq a\} - \{X(\omega) \leq b\}\ , \quad \text{con } b > a$$

Nota:
Nel seguito le variabili aleatorie saranno sempre rappresentate da lettere maiuscole omettendo la dipendenza dal risultato ω: X, Y invece di X(ω), Y(ω)

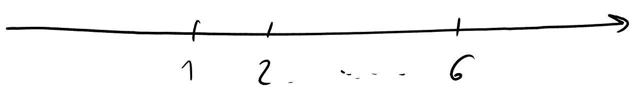
Definizione di variabile aleatoria

Esempio:
Nell'esperimento consistente nel lancio di una moneta posso definire le seguente variabile aleatoria X:

$$X(\text{"Testa"}) = 1, \quad X(\text{"Croce"}) = 0$$

Esempio:
Nell'esperimento consistente nel lancio di un dado i possibili risultati sono le sei facce f_i, i=1,2,...,6; si può definire la seguente variabile aleatoria

$$X(f_i) = i, \quad i = 1,2,\ldots,6$$



Definizione della funzione di distribuzione

Si indica con ***funzione di distribuzione*** di probabilità di una variabile aleatoria *X*, la funzione:

$$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\})$$

La definizione di variabile aleatoria assicura l'esistenza della funzione di distribuzione $F_X(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

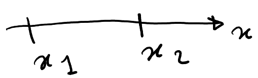
Nota:
Con la lettera minuscola si indica un valore reale generico ma *fissato* che identifica l'evento {X ≤ x} di cui deve calcolare la probabilità

Proprietà della funzione di distribuzione

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$

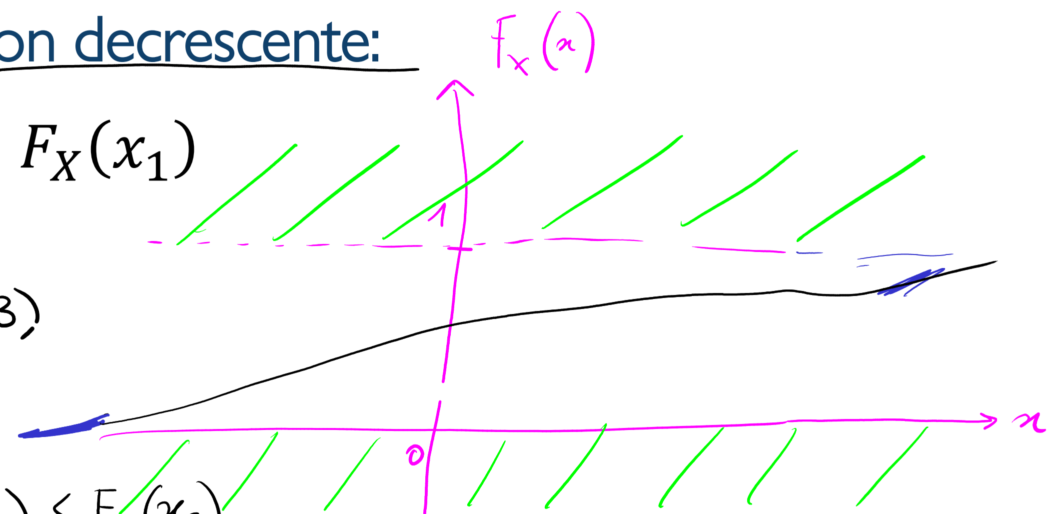
- $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = P(\{X \leq -\infty\}) = 0$$
  $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = P(\{X \leq +\infty\}) = 1$$

- $F_X(x)$ è monotona non decrescente:
  $$x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$



$\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\} \rightarrow$ se $A \subset B$ $\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$



Proprietà della funzione di distribuzione

- $$\underbrace{P(x_1 < X \le x_2)} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$$

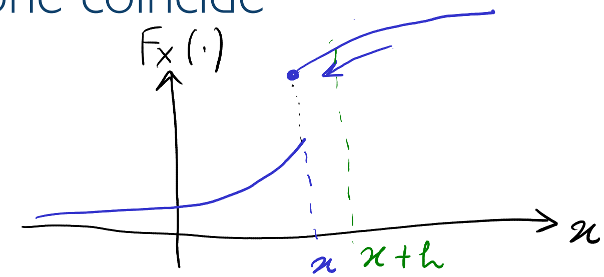
EVENTI DISGIUNTI

$$P(X \le x_2) = P(X \le x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$$

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$$

Proprietà della funzione di distribuzione

Nei punti di discontinuità il valore della funzione coincide con il suo limite destro:



- $$F_X(x^+) = \lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

quindi la funzione di distribuzione è continua da destra

$$\{X \leq x+h\} = \{X \leq x\} \cup \{x < X \leq x+h\} \qquad h > 0$$

EV. DISGIUNTI

$$P(X \leq x+h) = P(X \leq x) + P(x < X \leq x+h)$$

$$F_X(x+h) = F_X(x) + P(x < X \leq x+h)$$

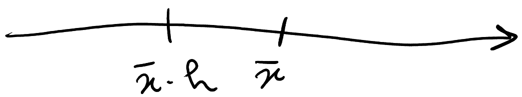
$$\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x) + \lim_{h\to 0^+} \underbrace{P(x < X \leq x+h)}_{= \emptyset}$$

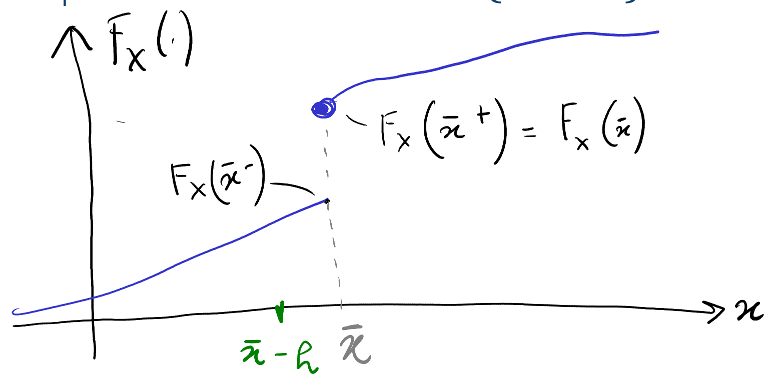
$$F_X(x^+) = F_X(x) + 0$$

Proprietà della funzione di distribuzione

- $P(\{X = \bar{x}\}) = F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-)$

Se la funzione di distribuzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto $x = \bar{x}$, la differenza tra il suo limite destro e sinistro è pari alla probabilità dell'evento $\{X = \bar{x}\}$





$$F_X(\bar{x}^+) = F_X(\bar{x}) = P(X \le \bar{x})$$

$$= P(X \le \bar{x} - h) + P(\bar{x} - h < X \le \bar{x})$$

$$\lim_{h \to 0^+}$$

$$F_X(\bar{x}^+) = F_X(\bar{x}^-) + P(X = \bar{x})$$

Proprietà della funzione di distribuzione

Le proprietà della funzione di distribuzione:

- $P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
- $F_X(x) - F_X(x^-) = P(X = x)$

mostrano che dalla conoscenza di $F_X(\cdot)$ è possibile determinare la probabilità di qualunque evento $\{X \in I\}$ essendo I un qualunque insieme reale ottenuto come somma di intervalli (chiusi, aperti, semiaperti) dell'asse reale → La conoscenza di $F_X(\cdot)$ rappresenta una **descrizione statistica completa** della variabile aleatoria X

Una descrizione statistica equivalente, ma a volte più semplice, è data dalla funzione *massa di probabilità*, nel caso di v.a. *discrete*, e dalla funzione *densità di probabilità*, nel caso di v.a. *continue*