Esercizio 2

Enunciato del Problema

Consideriamo un moto descritto, in coordinate polari, dalle seguenti equazioni:

$$r = r_0 \sin(\omega t), \quad \theta = \omega t,$$

con

$$r_0 = 0.05\,\mathrm{m}, \quad \omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

- Determinare la traiettoria (in coordinate cartesiane).
- Analizzare le grandezze cinematiche (velocità, accelerazione, periodo).

Soluzione

1. Conversione in Coordinate Cartesiane

Le relazioni tra coordinate polari e cartesiane sono:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Sostituendo $r = r_0 \sin(\omega t)$ e $\theta = \omega t$, si ottiene:

$$x(t) = r_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t), \quad y(t) = r_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t) = r_0 \sin^2(\omega t).$$

Utilizziamo ora la formula del doppio angolo:

$$\sin(2\omega t) = 2\sin(\omega t)\cos(\omega t),$$

da cui:

$$x(t) = \frac{r_0}{2}\sin(2\omega t).$$

Per $y(t)$ sfruttiamo l'identità:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2},$$

ottenendo:

$$y(t) = \frac{r_0}{2}\Big(1 - \cos(2\omega t)\Big).$$

2. Determinazione della Traiettoria

Per evidenziare la forma della traiettoria, si introduce il cambio di variabile:

$$X = x(t), \quad Y = y(t) - \frac{r_0}{2}.$$

Così:

$$X = \frac{r_0}{2}\sin(2\omega t), \quad Y = \frac{r_0}{2}\Big(1 - \cos(2\omega t)\Big) - \frac{r_0}{2} = -\frac{r_0}{2}\cos(2\omega t).$$

Calcolando:

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{r_0}{2}\sin(2\omega t)\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\cos(2\omega t)\right)^2 = \frac{r_0^2}{4}\Big(\sin^2(2\omega t) + \cos^2(2\omega t)\Big) = \frac{r_0^2}{4}.$$

Questa è l'equazione di una circonferenza di raggio

$$R = \frac{r_0}{2},$$

centrata in:

$$\left(0, \frac{r_0}{2}\right).$$

Con $r_0 = 0.05$ m:

$$R = 0.025\,\mathrm{m} \quad \text{e il centro è in } (0, 0.025\,\mathrm{m}).$$

3. Analisi del Moto in Coordinate Polari

Ricordiamo che qui le coordinate polari sono definite rispetto alla stessa origine del sistema cartesiano. Il vettore posizione è:

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}, \quad \text{con } r(t) = r_0 \sin(\omega t) \text{ e } \theta(t) = \omega t.$$

Derivando il vettore posizione rispetto al tempo, si ottiene il vettore velocità:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\hat{r} + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\hat{\theta}.$$

Calcoliamo $\dot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}\Big[r_0 \sin(\omega t)\Big] = r_0 \omega \cos(\omega t).$$

Poiché $\theta(t) = \omega t$, la derivata è:

$$\dot{\theta}(t) = \omega.$$

Quindi, la componente tangenziale è:

$$r(t)\,\dot{\theta}(t) = r_0 \sin(\omega t)\,\omega.$$

Il modulo della velocità è:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\Big(r_0\omega\cos(\omega t)\Big)^2 + \Big(r_0\omega\sin(\omega t)\Big)^2} = r_0\omega\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = r_0\omega.$$

Inserendo i valori numerici:

$$|\vec{v}(t)| = 0.05 \times 2\pi \approx 0.314\,\text{m/s}.$$

Poiché il modulo della velocità è costante, il moto è uniforme.

4. Moto Circolare Uniforme

Dalla parte precedente abbiamo ottenuto che il moto avviene con velocità costante, in modulo. La traiettoria è una circonferenza di raggio:

$$R = \frac{r_0}{2} = 0.025\,\text{m},$$

con centro nel punto:

$$(0, 0.025\,\text{m}).$$

Quindi si tratta di un moto circolare uniforme. Nel moto circolare uniforme, la relazione tra la velocità tangenziale v e la velocità angolare Ω è:

$$v = R\,\Omega.$$

Poiché $v = r_0\omega$, si deduce:

$$r_0\omega = \frac{r_0}{2}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \Omega = 2\omega.$$

Con $\omega = 2\pi$ rad/s:

$$\Omega = 4\pi\,\text{rad/s}.$$

Il periodo del moto circolare è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,\text{s}.$$

L'accelerazione centripeta è verso il centro della traiettoria, ovvero il punto

$$(0, 0.025\,\mathrm{m}),$$

e ha modulo:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(r_0\omega)^2}{r_0/2} = 2r_0\omega^2.$$

Calcolando il valore numerico:

$$a_c = 2 \times 0.05 \times (2\pi)^2 \approx 3.95\,\mathrm{m/s^2}.$$