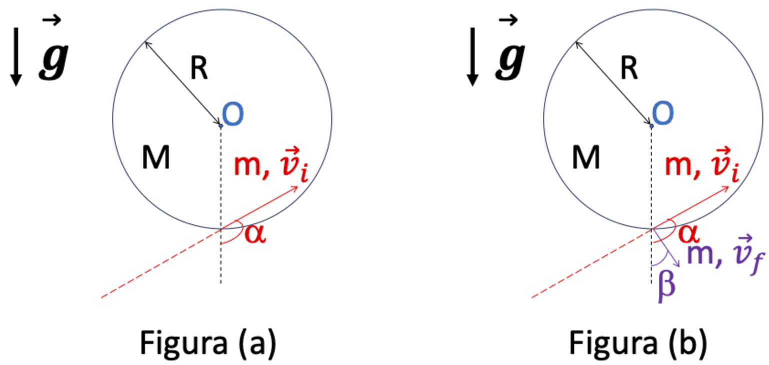
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 20/09/2023

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Una pallina, assimilabile a un punto materiale, di massa $m = 5\ g$ urta un disco omogeneo di massa $M = 200\ g$ e raggio $R = 20\ cm$ fermo, che può solo ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il suo centro (O, nella Figura a) e ortogonale al piano del disco. La direzione della velocità del punto materiale prima dell'urto giace sul piano del disco. Il modulo della velocità un istante prima dell'urto con il disco è $v_i = 100\ m/s$ e l'angolo di incidenza della pallina (vedi Figura a) è $\alpha = 60^0$

Nel caso in cui l'urto è perfettamente anelastico, ovvero se la pallina resta attaccata all'esterno del disco, si determini :

1.1 il modulo della velocità angolare ω_{pin} del disco subito dopo l'urto

$$\omega_{pin} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalle forze interne nell'urto

$$\mathcal{L} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Con riferimento alla Figura b, consideriamo ora il caso in cui l'urto è anelastico invece che perfettamente anelastico, ovvero la pallina non resta attaccata all'esterno del disco.

Se la velocità della pallina dopo l'urto ($\overrightarrow{v}_f$ di Figura b), giace sul piano del disco, si dimezza in modulo e forma un angolo $\beta = 30^0$, si determini:

1.3 il modulo della velocità angolare ω_{in} del disco subito dopo l'urto

$$\omega_{in} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla Figura, un fascio di forma cilindrica di raggio R è costituito da protoni. Si supponga che i protoni nel fascio siano distribuiti in modo uniforme con densità volumetrica (numero di protoni per unità di volume) pari a n e che essi viaggiano in direzione parallela e concorde all'asse z del cilindro.
Questo fascio genera un campo elettrico che a una distanza $r_A = 5\ cm$ ($r_a < R$) dall'asse del fascio è di modulo pari a $0.03\ V/m$ mentre a una distanza $r_B = 20\ cm$ ($r_B > R$), è tre volte più piccolo di quello in r_A.

2.1 Scrivere le espressioni del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio in coordinate cilindriche e fare un grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro

$\overrightarrow{E}$= ....

2.2 Calcolare n (il numero di protoni per m^3)

n= ....

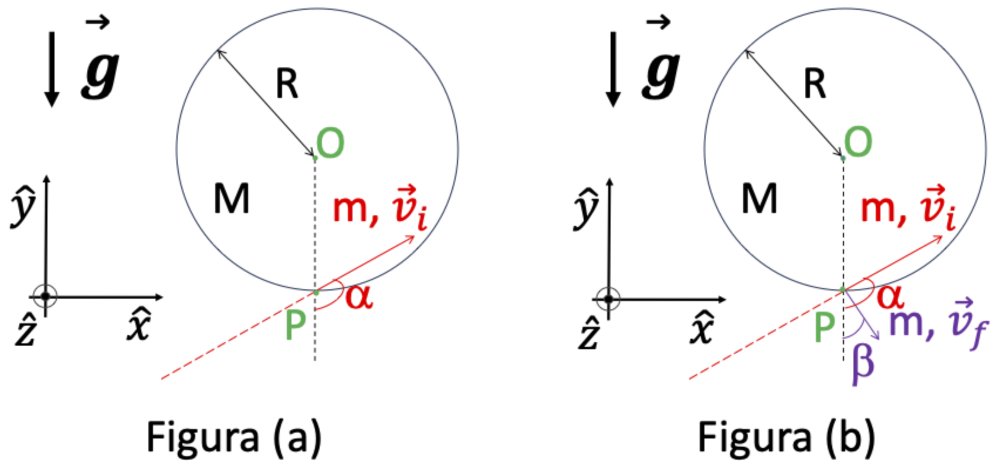
2.3 Calcolare il raggio R del fascio

R= ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli*
$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$, carica del protone $q_p = 1.6 \times 10^{-19}\ C$

Soluzione Esercizio 1

Domanda 1.1



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Nell'urto non si conserva la quantità di moto (non potendosi trascurare gli impulsi delle reazioni vincolari dell'asse), ma, avendo le reazioni vincolari momento nullo rispetto a un polo in O, il relativo momento angolare rimarrà costante (l'impulso delle forze peso può senz'altro essere trascurato non essendo il peso una forza impulsiva). Pertanto si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Non si conserva l'energia poichè l'urto è dichiarato essere anelastico (perfettamente anelastico).
Dalla conservazione del momento angolare rispetto a tale polo, indicando con $\overrightarrow{L}_i$ e $\overrightarrow{L}_f$ rispettivamente i momenti angolari iniziale e finale rispetto a tale polo si ottiene:

$$\overrightarrow{L}_i = \overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{L}_f = I\overrightarrow{\omega}_{pin}$$

dove, con riferimento alla Figura a, con $\overrightarrow{OP}$ abbiamo indicato un vettore che punta dal punto O al punto P, un istante prima dell'urto e con I si è indicato il momento di inerzia rispetto all'asse del disco del sistema disco-pallina:

$$I = \frac{MR^2}{2} + mR^2 \quad \Rightarrow \quad mRv_i sin\alpha \hat{z} = I\overrightarrow{\omega}_{pin}$$

Per cui uguagliando i moduli del momento angolare iniziale e finale rispetto all'asse di rotazione si ottiene:

$$mRv_i sin\alpha = I\omega_{pin} \quad \Rightarrow \quad \omega_{pin} = \frac{2mv_i sin\alpha}{R\,(M+2m)} = 20.62 rad/s$$

Domanda 1.2

Il lavoro delle forze interne è pari alla variazione di energia cinetica del sistema ΔT, ovvero:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I\omega_{pin}^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{(M+2m)\,R^2}{4}\omega_{pin}^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -24.10\ J$$

Domanda 1.3

Valgono le stesse leggi di conservazione della domanda 1.1 Con riferimento alla Figura b, Indicando con I_c il momento di inerzia del disco rispetto all'asse del disco (pari a $\frac{MR^2}{2}$) e applicando di nuovo il principio di conservazione del momento angolare rispetto al polo in O, si ha:

$$\overrightarrow{L}_i = \overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{L}_f = I_c\overrightarrow{\omega}_{in} + \overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}_f \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\omega}_{in} = \frac{1}{I_c}\left(\overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}_i - \overrightarrow{OP} \wedge m\overrightarrow{v}_f\right) = \frac{1}{I_c}\left(mRv_i sin\alpha - mRv_f sin\beta\right)\hat{z}$$

Per cui:

$$\overrightarrow{\omega}_{in} = \omega_{inz}\hat{z} = \frac{Rmv_i}{I_c}\left(sin\alpha - \frac{sin\beta}{2}\right)\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \mid \overrightarrow{\omega}_{in} \mid = \frac{2mv_i}{MR} \mid sin\alpha - \frac{sin\beta}{2} \mid = 15.40\ rad/s$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 2.1

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale E_r e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro, r, essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse z, per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di π attorno a un piano ortogonale all'asse z, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse z) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r, applicando la legge di Gauss, e considerando che al flusso, poichè il campo elettrico è radiale, contribuisce solo il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

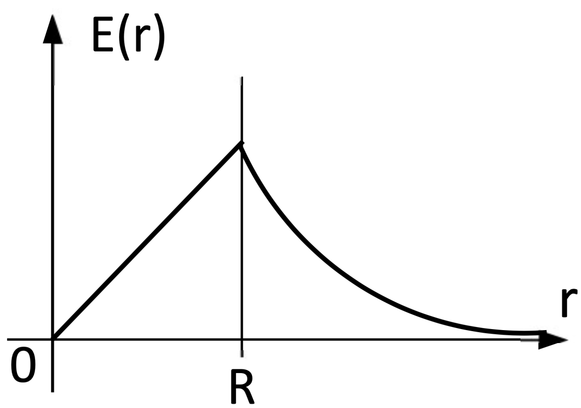
dove Q_{int} è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} \mathrm{nq}_p\pi r^2 h & 0 < r < R \\ \mathrm{nq}_p\pi R^2 h & R \leq r \end{cases}$$

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r}, \text{ dove } E_r(r) = \begin{cases} \frac{q_p n}{2\varepsilon_0} r & 0 \leq r < R \\ \frac{q_p n}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Il grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse r è riportato nella figura successiva.



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda 2.2

Dal valore noto del modulo del campo elettrico per $r = r_A$, $E(r_A)$, si ottiene:

$$E(r_A) = \frac{q_p n}{2\varepsilon_0} r_A \quad \Rightarrow \quad n = E(r_A)\frac{2\varepsilon_0}{q_p r_A} = 66.4 \times 10^6 m^{-3}$$

Domanda 2.3

Il raggio R si ricava dalla relazione:

$$E(r_B) = \frac{E(r_A)}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{E(r_A)}{E(r_B)} = \frac{\frac{q_p n}{2\varepsilon_0} r_A}{\frac{q_p n}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r_B}} = 3 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{r_A r_B}{3}} = 5.77 \times 10^{-2} m$$