



# PROPRIETA' STRUTTURALI



- Introduzione
- Stabilità
  - Introduzione e Definizioni
  - Stabilità nei Sistemi Lineari
  - Metodo di Lyapunov
  - Stabilità mediante FdT
  - Criterio di Routh - Hurwitz
- Controllabilità / Raggiungibilità
- Osservabilità
- Realizzazioni



## Riferimenti



- Capitoli 2, 3, 4 Testo di Bolzern
- Capitoli 3 4, 6 testo di Murray (download)
- Appunti ECE801
- Lezioni di Boyd online video



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



# Introduzione

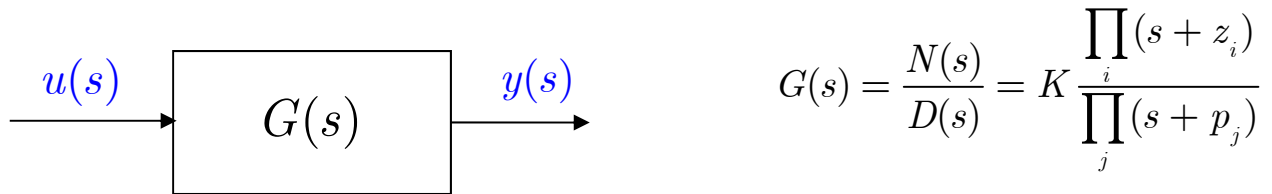


- ❑ L'analisi dei sistemi dinamici riguarda, in generale, lo studio di proprietà specifiche estraibili dalla loro modellazione matematica e che si dividono in:
  - **Proprietà interne o strutturali:** esse dipendono dalla natura stessa del sistema e non da sollecitazioni esterne
    - Le proprietà strutturali descrivono la capacità di un sistema di operare in modo autonomo, di descriverne in modo univoco la sua evoluzione completa e di permettere la gestione totale della sua evoluzione nel sottospazio di riferimento
  - **Proprietà esterne:** esse dipendono dalla relazione esterna ingresso - uscita
    - Le proprietà esterne descrivono la capacità o meno di un sistema di rispondere in modo appropriato a tipologie di ingresso endogeno ed esogeno
- ❑ Alla fine del processo di analisi, il progettista di un sistema di controllo possiede un set di parametri di riferimento, i quali forniscono i requisiti di progetto del comportamento desiderato del sistema stesso



## Proprietà strutturali

- L'analisi di sistemi dinamici lineari viene effettuata mediante 3 diverse rappresentazioni matematiche:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u \\ y_0, \dot{y}_0, \dots \end{cases}$$

- Modelli di processi fisici diversi possono essere rappresentati nella stessa forma analitica.
- **Possiamo usare proprietà generali dell'algebra lineare, della teoria delle matrici, dell'algebra delle funzioni complesse, ecc.. per stabilire caratteristiche generali riguardanti i sistemi studiati, indipendentemente dalla natura fisica del processo?**

Subset di un problema più complesso riguardante sistemi nonlineari in generale

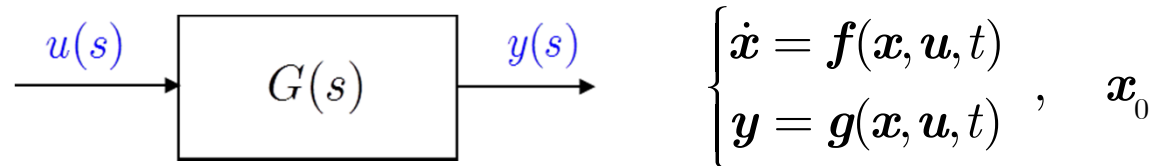
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{cases}$$



## Stabilità: Introduzione e Definizioni



- Il concetto di Stabilità è del tutto generale ed è applicabile a sistemi Lineari e Nonlineari, Continui e Discreti, Tempo invarianti e Tempo varianti



### Definizioni Preliminari

- Definizione:** Dati l'istante iniziale, lo stato iniziale ed il segnale di ingresso  $t_0$ ,  $x(t_0)$ ,  $u(t)$ : si definisce **movimento** dello stato, l'andamento dello stato al tempo corrente ottenuto come soluzione del sistema di equazioni differenziali costitutive.

$$\tilde{x}(t) \quad \text{soddisfa} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, u, t) \\ \tilde{y} = g(\tilde{x}, u, t) \end{cases}, \quad \tilde{x}_0$$

- Definizione:** Si definisce movimento di equilibrio, quel particolare movimento  $x_E(t)$  per cui:

$$\begin{cases} \dot{x}_E = 0 = f(x_E, u_E, t) \\ y_E = g(x_E, u_E, t) \end{cases}, \quad x_{E0}$$



## Stabilità: Introduzione e Definizioni



□ **Definizione:** Si definisce perturbazione, la variazione di un movimento dovuta a variazioni di condizioni iniziali e/o ingressi ed indicata come:

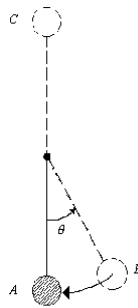
$$\tilde{x}^*(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}^*(t) = \dot{\tilde{x}}(t) + \delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*, t), \quad \tilde{x}_0^* = \tilde{x}_0 + \delta \tilde{x}_0$$

$$\dot{\tilde{x}}_E^*(t) = \dot{\tilde{x}}_E(t) + \delta \dot{x}(t) = \delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}^*, \tilde{u}, t), \quad \tilde{x}_0^* = \tilde{x}_0 + \delta \tilde{x}_0$$

**Perturbazione di un movimento per variazione di condizioni iniziali**  
**Perturbazione di un movimento di equilibrio per variazione di condizioni iniziali**

- La perturbazione può essere quindi la variazione di un movimento, oppure di un movimento di equilibrio.
- In generale, all'equilibrio, si suppone nulla la perturbazione di ingresso.



**Posizione A)** In questo caso le condizioni iniziali sono individuate dal valore  $\theta_0 = 0$ ; se tali condizioni vengono perturbate (il pendolo viene portato in B) il pendolo tenderà a tornare nella posizione A (equilibrio stabile)

**Posizione C)** Le condizioni iniziali sono, questa volta, quelle per cui  $\theta_0 = 180^\circ$ ; se il pendolo viene spostato pur di poco dalla sua situazione di equilibrio, tenderà ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale (equilibrio instabile)



## Stabilità: Esempi



- Per un sistema lineare autonomo, l'unica condizione di equilibrio è l'origine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-t} x_{20} \\ e^{-2t} x_{30} \end{pmatrix}$$

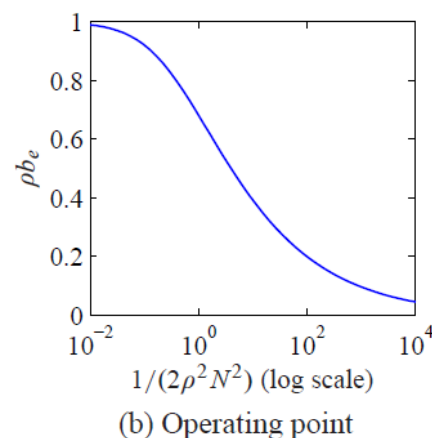
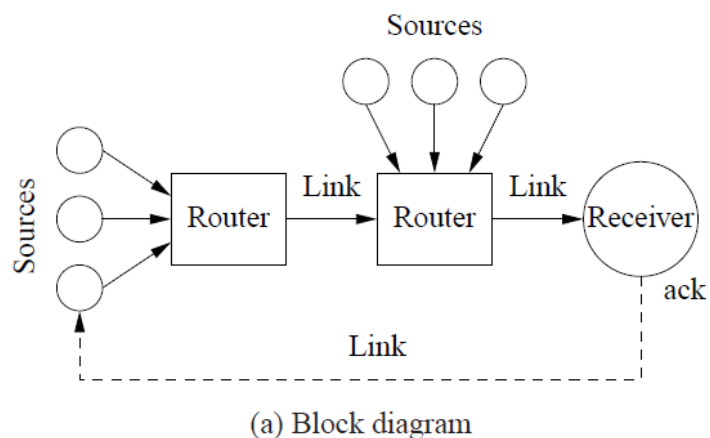
$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad y(t) = c_1 e^t x_{10} + c_2 e^{-t} x_{20} + c_3 e^{-2t} x_{30}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad y(t) = c_2 e^{-t} x_{20} + c_3 e^{-2t} x_{30}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_E = A\mathbf{x}_E = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_{E0} = 0$$



## Stabilità: Esempi



**Figure 3.12:** Internet congestion control. (a) Source computers send information to routers, which forward the information to other routers that eventually connect to the receiving computer. When a packet is received, an acknowledgment packet is sent back through the routers (not shown). The routers buffer information received from the sources and send the data across the outgoing link. (b) The equilibrium buffer size  $b_e$  for a set of  $N$  identical computers sending packets through a single router with drop probability  $\rho$ .

### Definizioni:

- $\omega$  = Router window size
- $b$  = Router buffer size
- $\rho$  = Probability Packet Drop
- $c$  = Link Capacity

Nel Caso di Singolo  
Router, con  $N$  Sorgenti e  
Max 500 packets Buffer:

$$x_1 = \omega, x_2 = b$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{x_2} - \rho c \left(1 + \frac{x_1^2}{2}\right) \\ \frac{N c x_1}{x_2} - c \end{bmatrix}$$

Calcolo dei punti di equilibrio:

$$\dot{\mathbf{x}}_E = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{c}{x_{2E}} - \rho c \left(1 + \frac{x_{1E}^2}{2}\right) \\ \frac{N c x_{1E}}{x_{2E}} - c \end{bmatrix} = 0$$



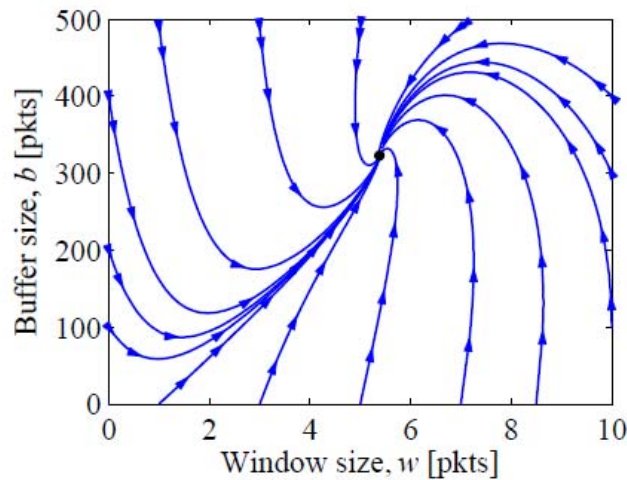


## Stabilità: Esempi

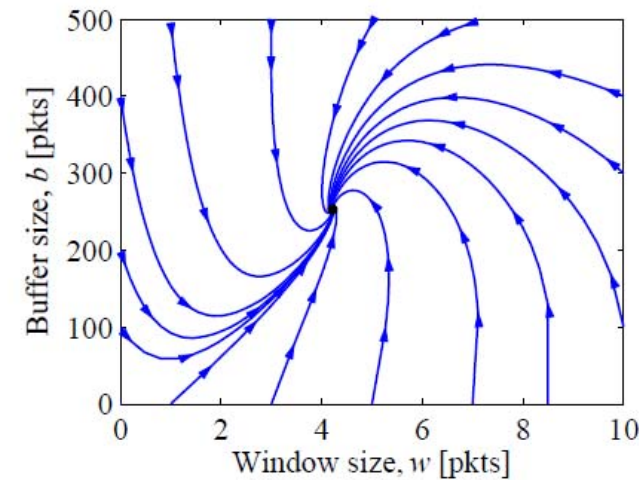


Sistema linearizzato (Ovvero andamento della perturbazione  $\delta \dot{x} = \dot{x}_E + \delta \dot{x}$ )

$$\delta \dot{x} = J \Big|_{x_E} \delta x = \begin{bmatrix} -\rho c x_1 & -\frac{c}{x_2^2} \\ \frac{Nc}{x_2} & -\frac{Nc x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} \Big|_{x_E} \delta x$$



(a)  $\rho = 2 \times 10^{-4}$ ,  $c = 10$  pkts/ms



(b)  $\rho = 4 \times 10^{-4}$ ,  $c = 20$  pkts/ms

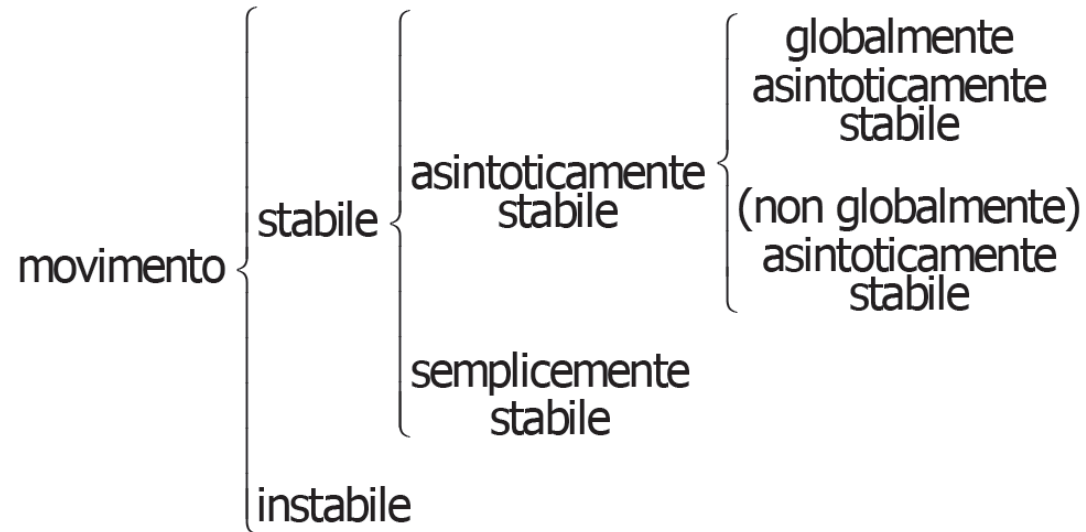
**Figure 4.10:** Phase portraits for a congestion control protocol running with  $N = 60$  identical source computers. The equilibrium values correspond to a fixed window at the source, which results in a steady-state buffer size and corresponding transmission rate. A faster link (b) uses a smaller buffer size since it can handle packets at a higher rate.



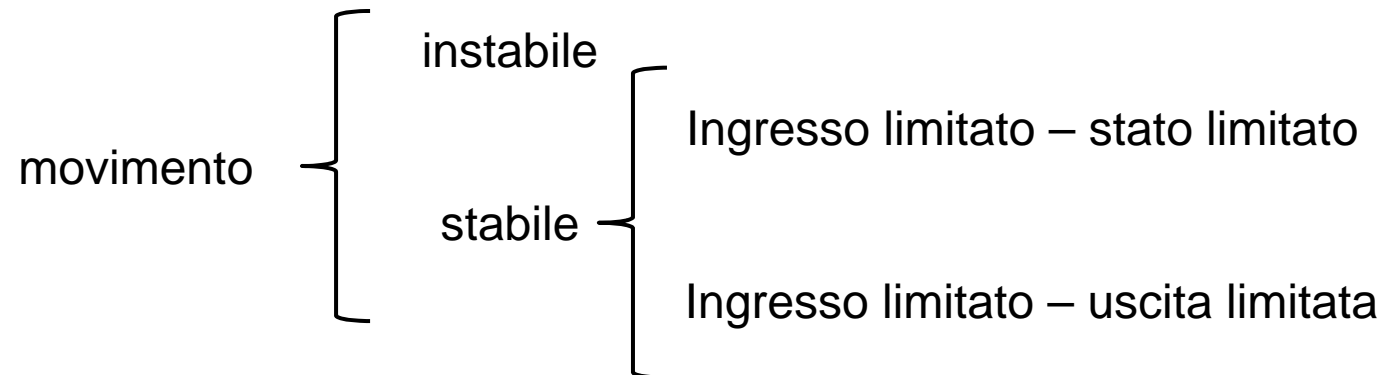
## Stabilità: Classificazione



❑ **Definizione-Stabilità Interna:** indipendente dagli ingressi al sistema



❑ **Definizione-Stabilità Esterna:** dipendente dagli ingressi al sistema





## Stabilità Interna

Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **stabile** se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per tutti gli stati iniziali  $x_0$  per cui risulta  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$ , si abbia

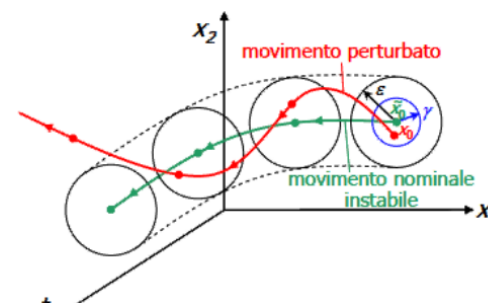
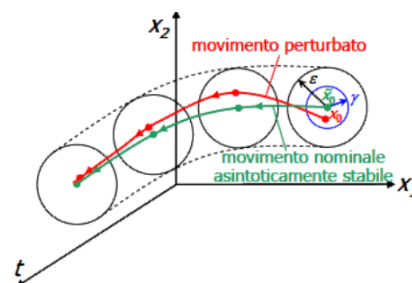
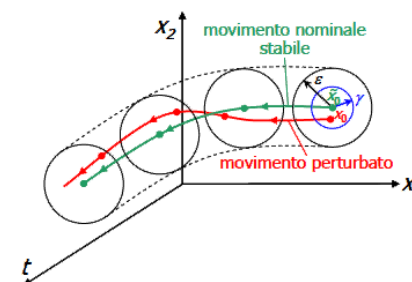
$$\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **asintoticamente stabile** se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per tutti gli stati iniziali  $x_0$  per cui  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$ , si abbia:

- 1)  $\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$

Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **instabile** se non soddisfa le condizioni di stabilità. In tal caso, esiste almeno un  $\varepsilon > 0$  tale che, per ogni  $\gamma > 0$ , almeno uno degli stati iniziali  $x_0$  per cui  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$  è tale che

$$\exists t \geq 0 : \|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| > \varepsilon$$





## Stabilità Interna

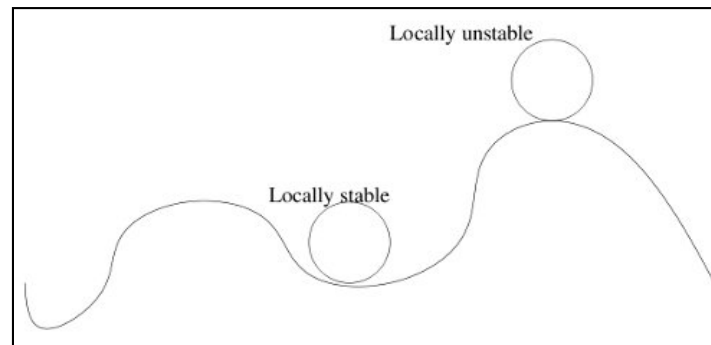


$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}, \quad x_0$$

- ❑ **Osservazione:** Le definizioni di stabilità e asintotica stabilità sono valide anche per movimenti generati da perturbazioni limitate degli ingressi.  $\gamma$  è, in genere, una funzione del tipo

$$\gamma(\varepsilon, t, t_0, x_0, u)$$

- Se  $\gamma$  non dipende da  $t_0$ , la stabilità è detta **uniforme**.
- Se  $\gamma$  può essere scelta arbitrariamente grande, la stabilità è detta **globale**, altrimenti è **locale**.
- La stabilità di un movimento non implica la stabilità di un sistema; infatti, se ad un movimento stabile si fa corrispondere una diversa funzione d'ingresso, o di condizioni iniziali, non è detto che esso presenti le stesse caratteristiche di stabilità.





# Stabilità Interna nei Sistemi Lineari



La linearità di un sistema permette di semplificare alcune caratteristiche di stabilità.

□ **Teorema:** Un movimento di un sistema lineare è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se tutti i movimenti del sistema sono, rispettivamente, stabili, asintoticamente stabili o instabili.

Da questo teorema si deducono le seguenti proprietà:

- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.
- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso.
- Se un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a “piccole” perturbazioni (delle condizioni iniziali o dell'ingresso), lo è anche per perturbazioni di qualsiasi entità, purché finite.



## Stabilità Interna nei Sistemi Lineari



- Per i sistemi lineari, la stabilità interna può essere studiata analizzando il sistema omogeneo equivalente **(Condizione Sufficiente)**. Consideriamo infatti:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x_0$$

- Stabilità del movimento Nominale  $\tilde{x}$

$$\tilde{x}_p = \tilde{x} + \delta x \quad \text{Movimento Perturbato in condizioni iniziali e ingresso nominale}$$

$$\dot{\tilde{x}}_p - \dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x} + \delta x) + Bu - A\tilde{x} - Bu \Rightarrow \delta \dot{x} = A \delta x$$

- Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. la stabilità può essere valutata riferendosi solamente al sistema autonomo.
2. E' sufficiente studiare la stabilità del movimento all'origine.
3. Per quanto detto anche in precedenza, **si può parlare indifferentemente di stabilità di movimento/equilibrio o sistema.**
4. La conoscenza della matrice dinamica del sistema fornisce le **tutte le informazioni** sulla stabilità del sistema.



# Stabilità Interna nei Sistemi Lineari



## □ Sommario per Sistemi Lineari (applicazione delle definizioni)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A = A(t) \\ A = \text{costante} \end{array}$$

- Condizione/Stato di Equilibrio  $\mathbf{x}(t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_0 = 0$

- Requisito di Stabilità

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M \quad \forall t \geq t_0 \quad \left\| e^{A(t-t_0)} \right\| \leq M \quad \forall t \geq t_0$$

- Requisito di Stabilità Asintotica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| e^{A(t-t_0)} \right\| = 0 \quad \forall t \geq t_0}$$



## Stabilità Interna nei Sistemi Lineari



- Le definizioni di stabilità viste finora sono legate a proprietà *intrinseche* del sistema e vengono rappresentate come ***proprietà di stabilità interna del sistema***; non dipendono né dalle particolari condizioni iniziali, né dagli ingressi ma solo dalla matrice dinamica e dai suoi autovalori.

- Nel caso di sistemi LTI 
$$\delta x(t) = e^{A(t-t_0)} \delta x_0$$

- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è asintoticamente stabile se e solo se **tutti** gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa.
- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è stabile se e solo se gli autovalori di A sono a parte reale negativa o nulla, ma questi ultimi hanno molteplicità algebrica e geometrica uguale.
- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è instabile altrimenti.





## Stabilità Esterna dei Sistemi Lineari



La stabilità esterna si riferisce al comportamento limitato o meno dello stato o dell'uscita di un sistema, quando si hanno ingressi limitati.

- **Definizione – Stabilità BIBS:** Un sistema lineare tempo variante o tempo invariante è stabile BIBS (Bounded Input Bounded State (ingresso limitato stato limitato) se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \\ \forall \|u(t)\| < \delta, \forall t > t_0 \Rightarrow \|x(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \end{array} \right.$$

- **Definizione – Stabilità BIBO:** Un sistema lineare tempo variante o tempo invariante è stabile BIBO (Bounded Input Bounded Output (ingresso limitato uscita limitata) se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \\ \forall \|u(t)\| < \delta, \forall t > t_0 \Rightarrow \|y(t)\| = \left\| C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \end{array} \right.$$



## Stabilità: Esempi



$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{asintoticamente stabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

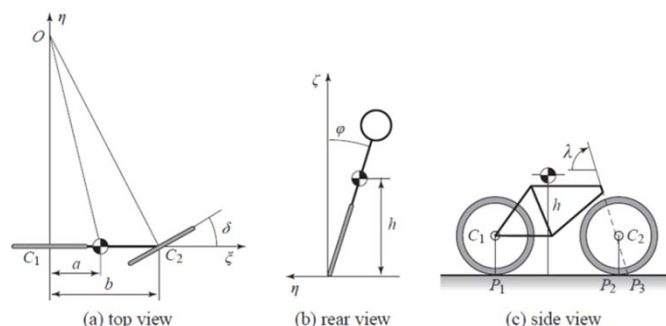
**BIBO stabile, Instabile**



## Stabilità: Esempi



❑ Consideriamo il modello di biciclo visto precedentemente



**Figure 3.5:** Schematic views of a bicycle. The steering angle is  $\delta$ , and the roll angle is  $\phi$ . The center of mass has height  $h$  and distance  $a$  from a vertical through the contact point  $P_1$  of the rear wheel. The wheel base is  $b$ , and the trail is  $c$ .

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57(-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$

Parameter	Symbol	Value for benchmark
Wheel base	$w$	1.02 m
Trail	$c$	0.08 m
Steer axis tilt ( $\pi/2$ - head angle)	$\lambda$	$\pi/10$ rad ( $90^\circ - 72^\circ$ )
Gravity	$g$	9.81 N/kg
Forward speed	$v$	various m/s, see tables 2
<b>Rear wheel R</b>		
Radius	$r_R$	0.3 m
Mass	$m_R$	2 kg
Mass moments of inertia	$(I_{Rxx}, I_{Ryy})$	(0.0603, 0.12) kg m <sup>2</sup>
<b>Rear Body and frame assembly B</b>		
Position centre of mass	$(x_B, z_B)$	(0.3, -0.9) m
Mass	$m_B$	85 kg
Mass moments of inertia	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ kg m <sup>2</sup>
<b>Front Handlebar and fork assembly H</b>		
Position centre of mass	$(x_H, z_H)$	(0.9, -0.7) m
Mass	$m_H$	4 kg
Mass moments of inertia	$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05892 & 0 & -0.00756 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.00756 & 0 & 0.00708 \end{bmatrix}$ kg m <sup>2</sup>
<b>Front wheel F</b>		
Radius	$r_F$	0.35 m
Mass	$m_F$	3 kg
Mass moments of inertia	$(I_{Fxx}, I_{Fyy})$	(0.1405, 0.28) kg m <sup>2</sup>

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + C v_0 \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{pmatrix} \phi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

$\phi(t)$  descrive la dinamica dell'angolo di rollio (lean angle)

$\delta(t)$  descrive la dinamica dello sterzo (steering angle)

$T$  è la coppia applicata al manubrio



## Stabilità: Esempi



- Trasformazione nello spazio di stato

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 = \varphi \\ x_2 = \delta \\ x_3 = \dot{\varphi} \\ x_4 = \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad u = T \quad M\dot{\mathbf{x}}_2 + Cv_0\mathbf{x}_2 + (K_0 + K_2v_0^2)\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -M^{-1}Cv_0\mathbf{x}_2 - M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2)\mathbf{x}_1 + M^{-1}Bu \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2) & -M^{-1}Cv_0 \end{array} \right] \mathbf{x} + M^{-1}Bu$$

- La stabilità del sistema dipende dagli autovalori della matrice  $A$ :

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2) & -M^{-1}Cv_0 \end{array} \right]$$



## Stabilità: Esempi



- Calcolo degli autovalori

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \left[ \begin{array}{c|c} \lambda I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \\ \hline M^{-1}(K_0 + K_2 v_0^2) & \lambda I_{2 \times 2} + M^{-1} C v_0 \end{array} \right] = \det \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

$$\det(\lambda I - A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I_{2 \times 2}) \cdot \det \left\{ (\lambda I_{2 \times 2} + M^{-1} C v_0) - \left[ M^{-1}(K_0 + K_2 v_0^2) \right] \left( \frac{1}{\lambda} I_{2 \times 2} \right) (-I_{2 \times 2}) \right\}$$

- Al variare della velocità, variano gli autovalori della matrice  $A$ , quindi variano le caratteristiche di stabilità del sistema.

%enter parameter data matrices M, C, K0, K2:

M=[96.8 -3.57;-3.57 0.258];

C=[0 -50.8;0.436 2.20];

K0=[-901.0 35.17;35.17 -12.03];

K2=[0 -87.06;0 3.50];

A=[zeros(2,2),eye(2,2);-inv(M)\*(K0+K2\*v0^2),-inv(M)\*C\*v0];

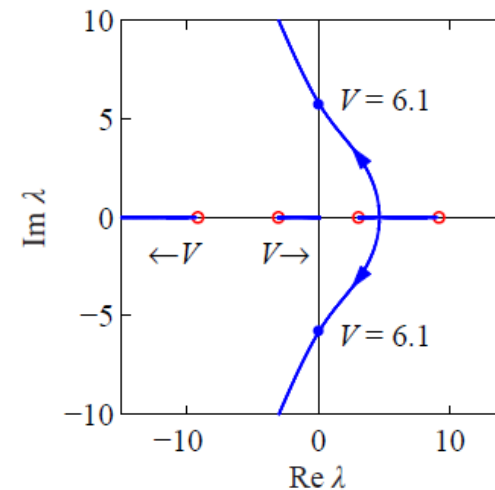
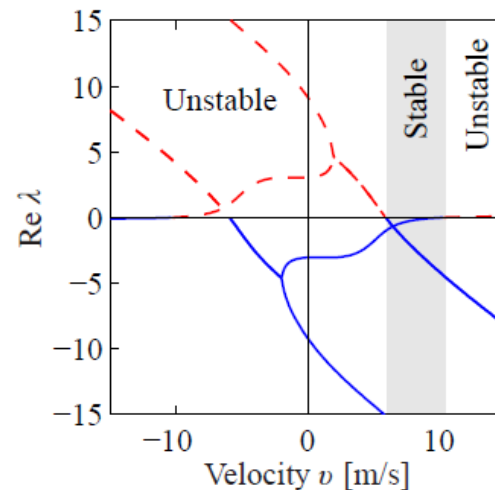
B=inv(M)\*[0;1];

eig(A);

v=0	v=1	v=6	v=7	v=10	v=20
9.18	7.57	-0.97	-0.46	-0.0123	0.0898
3.05	3.22	-0.1276 + 5.9291i	-1.3236 + 7.4054i	-4.2637 +11.8076i	-12.1732 +25.9492i
-9.18	-3.04	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.
-3.05	-10.4	-15.0	-15.8	-18.5754	-29.9738



## Stabilità: Esempi



1. Vi è instabilità a bassa velocità.
2. All'aumentare della velocità gli autovalori Hanno parte reale strettamente negativa e quindi il biciclo diviene 'autostabilizzante'.
3. Se la velocità aumenta ancora, un autovalore diventa instabile ma può essere controllato dal ciclista.

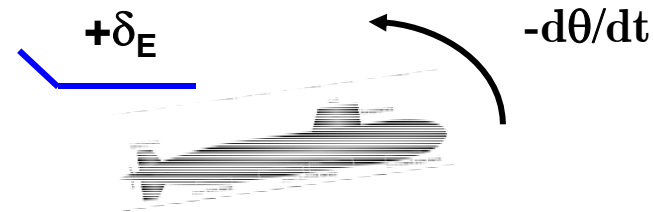
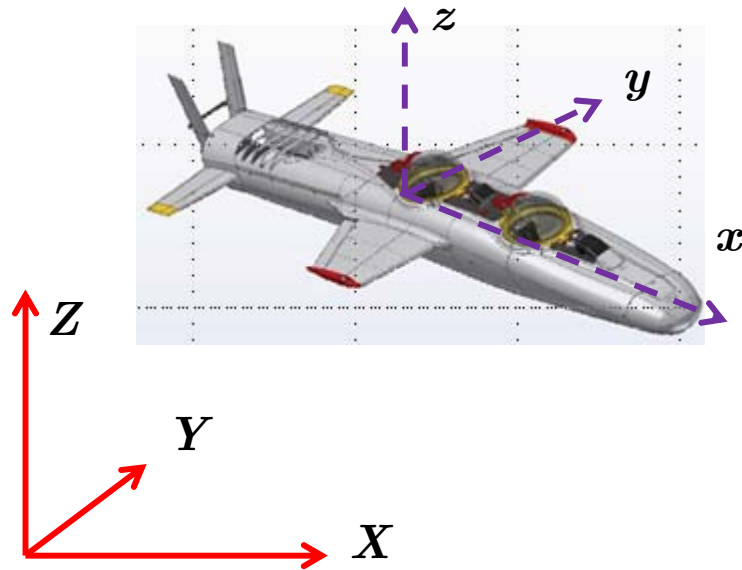
- This fourth order system has four distinct eigenmodes.
- A complex (oscillatory) eigenvalue pair is associated with a pair of complex eigenmodes.
- At high enough speeds, the two modes most significant for stability are traditionally called the **capsize mode** and **weave mode**.
- The **capsize mode** corresponds to a real eigenvalue with eigenvector dominated by lean: when unstable, a capsizing bicycle leans progressively into a tightening spiral with steer and lean both increasing proportionally as it falls over.
- The **weave mode** is an oscillatory motion in which the bicycle steers sinuously about the headed direction with a slight phase lag relative to leaning.
- The third eigenvalue is large, real and negative. It corresponds to the **castering mode** which is dominated by steer in which the front ground contact follows a tractrix - like pursuit trajectory, like the straightening of a swivel wheel under the front of a grocery cart.



## Stabilità: Esempi



- Consideriamo l'approssimazione lineare di beccheggio (pitch), di un veicolo sottomarino a profondità e velocità costanti.



$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} U = U_0 + \delta u \\ W = W_0 + \delta w \\ Q = Q_0 + \delta q \\ \Theta = \Theta_0 + \delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U = U_0 \\ W = W_0 \\ Q = \delta q \approx \delta \dot{\theta} \\ \Theta = \delta \theta \end{bmatrix}$$

$$(I_y - M_{\dot{q}})\ddot{\theta} - M_q\dot{\theta} + BG_z W\theta = \tau_s$$

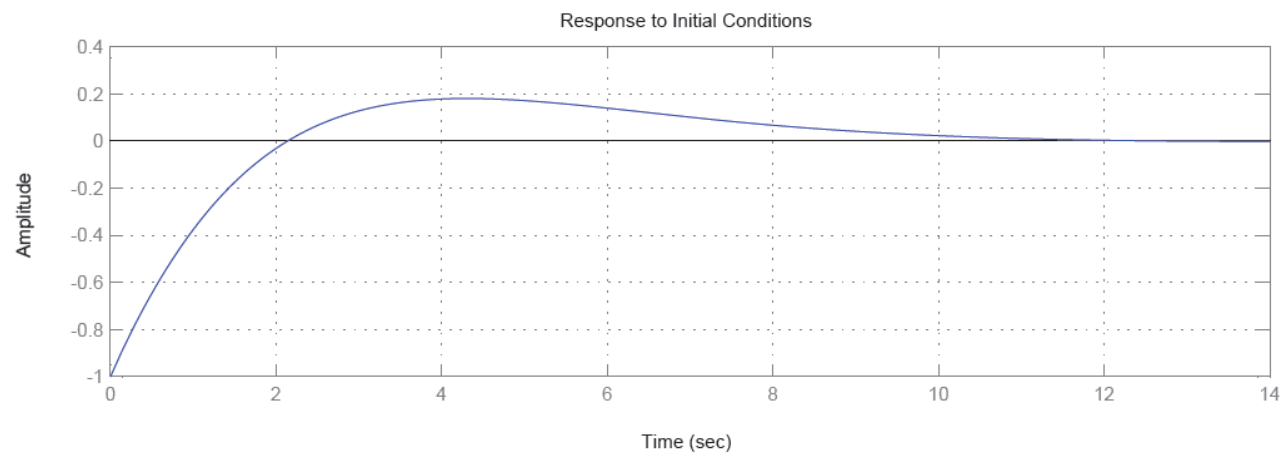
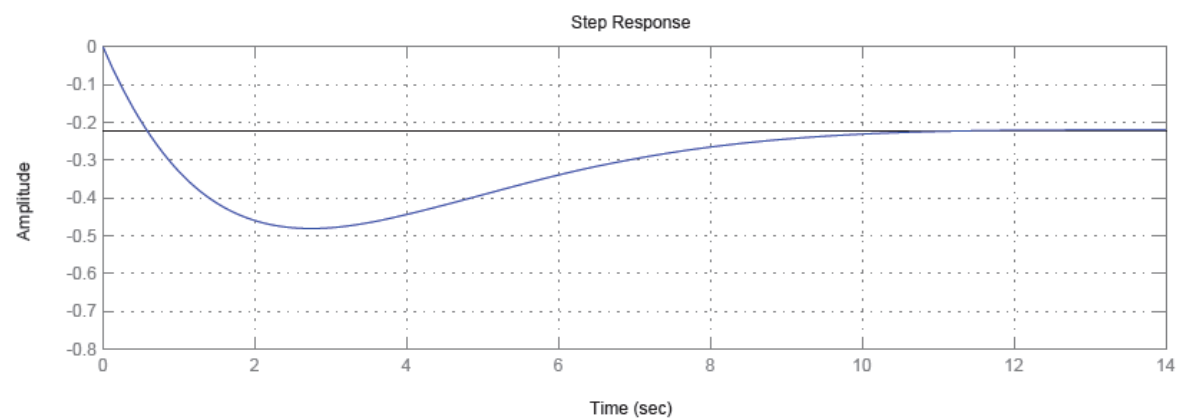
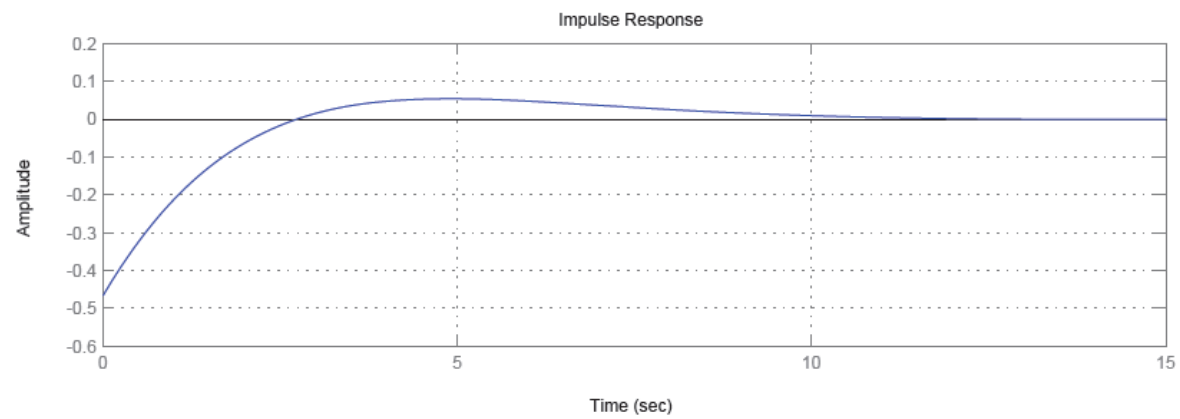
$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s^2 + 0.8s + 0.25}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.467 \\ .056 \end{bmatrix} \delta_E$$

$$y = \dot{\theta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Sistema Asintoticamente stabile

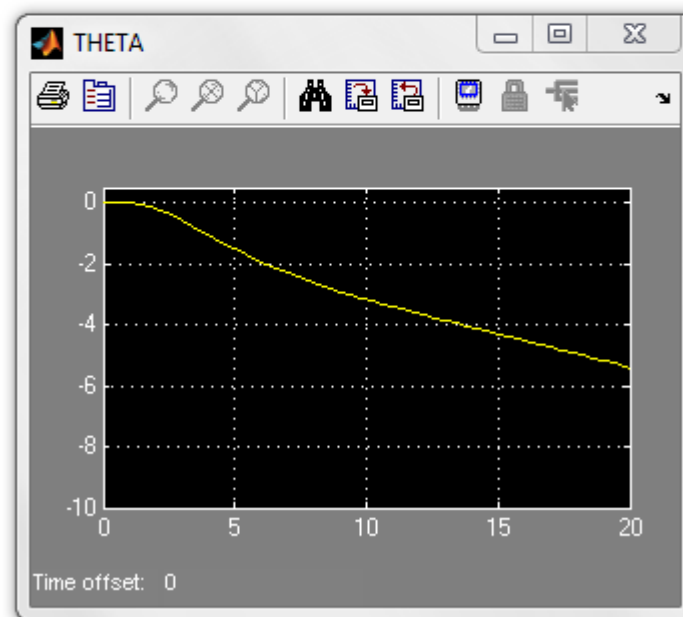
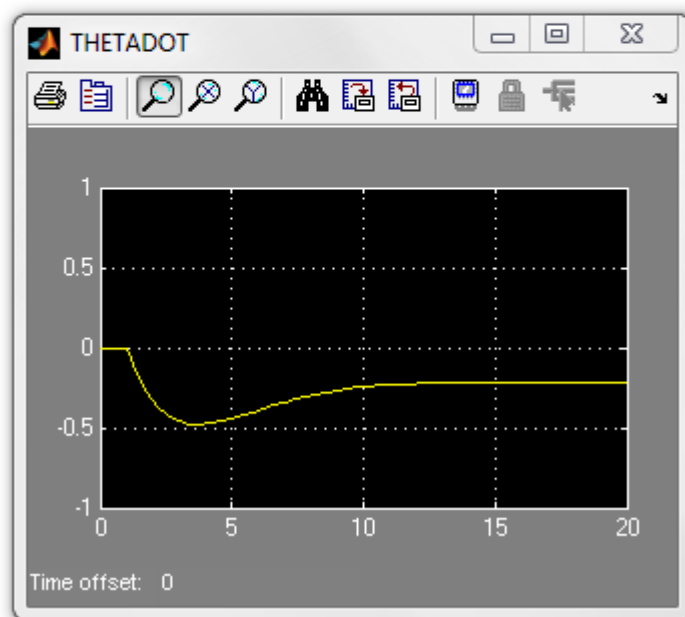
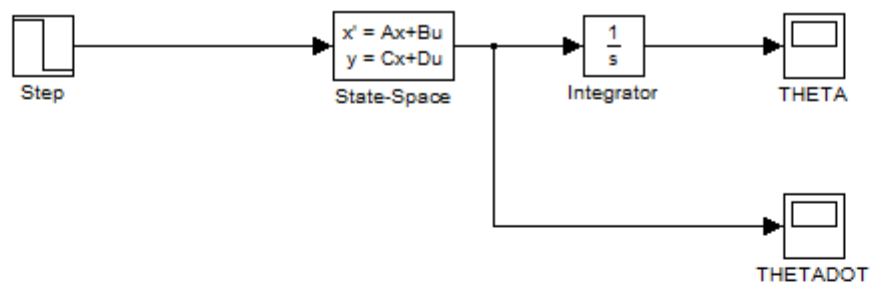
$$\begin{aligned} &-0.4000 + 0.3000i \\ &-0.4000 - 0.3000i \end{aligned}$$







# Esempi





## Stabilità Interna: Metodo di Lyapunov



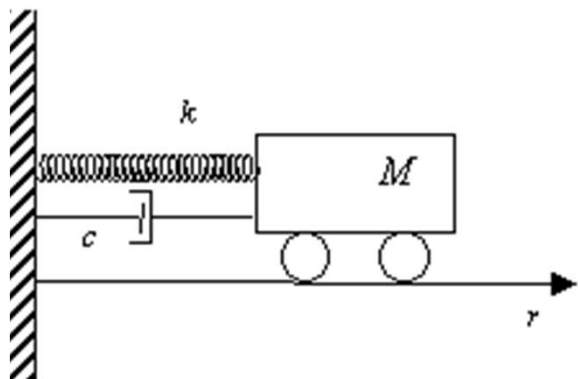
Il teoria della stabilità di Lyapunov permette di studiare la **stabilità interna** di sistemi dinamici (NL, LTV, LTI) ed fu sviluppata analizzando le proprietà energetiche di sistemi meccanici ed elettrici.

Il Principio base, su cui Lyapunov sviluppò la teoria che porta il suo nome, è che se l'energia totale di un sistema è continuamente dissipata, il sistema evolve verso l'equilibrio.

Se ne deduce che lo studio dell'equilibrio può essere eseguito esaminando le variazioni nel tempo di una funzione **scalare, cioè dell'energia totale**.



1857 - 1918



Consideriamo un sistema meccanico non conservativo:

- Energia cinetica dovuta alla velocità della massa
- Energia potenziale dovuta alla posizione della massa
- **Energia dissipativa dovuta a frizione, smorzamento ed altri fattori quali calore.**

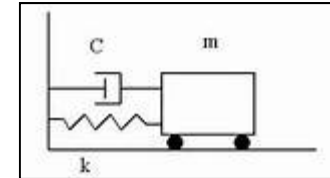


## Metodo di Lyapunov



Un modello nonlineare del sistema è dato da:

$$(1) \quad M \ddot{r} + c \dot{r} |\dot{r}| + k_0 r + k_1 r^3 = 0$$



Contributo dovuto all'elasticità della molla

Dissipazione dovuta allo smorzatore

- **Partendo dalla condizione di equilibrio di riposo, studiare la stabilità rispetto a perturbazioni nelle condizioni iniziali.**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}; \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Calcolo dell'energia meccanica: cinetica + energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \int_0^r (k_0 \xi + k_1 \xi^3) d\xi = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k_0 r^2 + \frac{1}{4} k_1 r^4$$

**Nota 1:** in assenza di altre forme di energia,  $V(\mathbf{x})$  rimane costante nel tempo (campo energetico conservativo).

**Nota 2:** La descrizione del moto (1) può essere ottenuta mediante le equazioni di Lagrange, posto  $L = T - V$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$



## Metodo di Lyapunov



❑ **Considerazioni sull'espressione dell'energia  $V(\mathbf{x})$ :**  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k_0r^2 + \frac{1}{4}k_1r^4$

- $V(\mathbf{x}) > 0$
  - $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_E = (r = 0, \dot{r} = 0)$
  - $V(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_E$
  - $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \infty \in \mathbb{R}^2$
- È una funzione positiva
  - La funzione è nulla soltanto all'origine (equilibrio)
  - Il movimento è asintoticamente stabile
  - Il movimento è instabile

L'energia meccanica riflette l'ampiezza del vettore di stato ma si nota anche che la sua variazione nel tempo caratterizza le proprietà di stabilità del sistema.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = M\dot{r}\ddot{r} + (k_0r + k_1r^3)\dot{r} \qquad \dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{r}(-c\dot{r}|\dot{r}|) = -c|\dot{r}|^3 < 0$$
$$c > 0$$

❑ L'energia totale, quindi, viene continuamente dissipata dallo smorzatore fino a quando la massa non si ferma.



# Metodo di Lyapunov

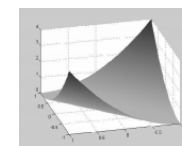
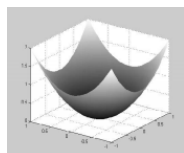


□ **Definizione – Funzione di Lyapunov:** Consideriamo una funzione scalare

$$V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{Si ha che:}$$

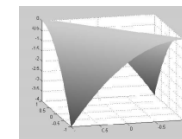
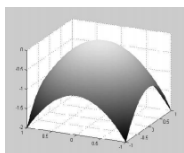
- $V$  si dice definita (semi-definita) positiva in  $\mathbf{x}'$  se:

$$V(\mathbf{x}') = 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0 \left( V(\mathbf{x}) \geq 0 \right) \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$



- $V$  si dice definita (semi-definita) negativa in  $\mathbf{x}'$  se:

$$V(\mathbf{x}') = 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) < 0 \left( V(\mathbf{x}) \leq 0 \right) \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$



- $V$  si dice non definita altrimenti.

- Esempio: forme quadratiche

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T > 0$$

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T < 0$$

- **Nota:** Una matrice reale quadrata simmetrica positiva (negativa) definita ha tutti gli autovalori positivi (negativi). Una matrice complessa quadrata simmetrica positiva (negativa) definita ha tutti gli autovalori di parte reale positiva (negativa)



# Metodo di Lyapunov



## □ Teoremi di Stabilità (si trascurano le differenze tra proprietà locale, uniforme, globale)

□ **Teorema:** –Stabilità dell'equilibrio di un sistema autonomo (Primo teorema di Lyapunov).

Consideriamo un sistema autonomo nonlineare avente un punto di equilibrio dato da  $\mathbf{x}_E$ , ovvero:

$$\dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E) = 0$$

Calcoliamo il sistema linearizzato intorno a tale condizione di equilibrio:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}$$

- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta \mathbf{x} = 0$ ) è asintoticamente stabile, allora anche il punto di equilibrio del sistema nonlineare  $\mathbf{x}_E$  è asintoticamente stabile,
- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta \mathbf{x} = 0$ ) è instabile, allora anche il punto di equilibrio del sistema nonlineare  $\mathbf{x}_E$  è instabile,
- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta \mathbf{x} = 0$ ) è stabile, allora non si può dire nulla sulla stabilità del punto di equilibrio del sistema nonlineare  $\mathbf{x}_E$ .



## Metodo di Lyapunov



- **Teorema:** –Metodo Diretto di Lyapunov (Secondo teorema di Lyapunov). Sia  $V(\cdot)$  una funzione di Lyapunov continua e con derivate parziali continue. Si consideri lo stato di equilibrio di un sistema autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}}_E = f(\mathbf{x}_E) = 0$$

Sia inoltre  $V(\mathbf{x}) > 0$  eccetto che al più  $V(\mathbf{x}_E) = 0$  e si calcoli la derivata prima totale rispetto al tempo:

$$\dot{V}(\cdot) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

Se  $\dot{V}(\cdot) \leq 0$ , **Lo stato di equilibrio è stabile**

Se  $\dot{V}(\cdot) < 0$ , **Lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile**

Se  $\dot{V}(\cdot) > 0$ , **Lo stato di equilibrio è instabile**

- **Nota:** nel caso più generale di funzione di Lyapunov con dipendenza esplicita del tempo  $V(\mathbf{x}, t)$ , si ha:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$



# Metodo di Lyapunov



## ❑ Osservazioni:

- ❑ Il sistema considerato è autonomo; la stabilità, in questa analisi, dipende solo da variazioni delle condizioni iniziali.
- ❑ Le precedenti sono condizioni sufficienti ma non necessarie per cui la mancanza di una funzione di Lyapunov non permette di ipotizzare alcuna conclusione sulla stabilità del punto di equilibrio considerato.
- ❑ **Tale metodo non fornisce nessuna indicazione su come trovare la funzione di Lyapunov**

## ▪ Esempio

$$\dot{x} = (1 - x^5) \quad \text{Unica Condizione di equilibrio: } x_E = 1$$

- scegliere una funzione di Lyapunov che sia continua, con derivate continue e definita positiva nel punto di equilibrio e nulla nel punto di equilibrio;

$$V(x) = (1 - x)^2 > 0 \quad \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -2(1 - x)(1 - x)^5 = -2(1 - x)^6$$

- è sicuramente definita negativa ed il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.





## Metodo di Lyapunov



❑ **Esempio:** Dato il seguente sistema nonlineare ed il suo punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}; \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo una funzione di Lyapunov continua, con derivate continue, positiva definita e nulla soltanto nel punto di equilibrio:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}; P = I$$

- Calcoliamo la derivata temporale della funzione di Lyapunov scelta:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = -2x_2^2(x_1^2 - 1)$$

$\forall |x_1| < 1 \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}) > 0$  ▪ L'origine è quindi un punto di equilibrio **instabile**



## Metodo di Lyapunov



- Per i sistemi lineari stazionari la teoria di Lyapunov si semplifica e si riduce allo studio della stabilità dell'origine.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_E(t) = 0 \end{cases}$$

In questo caso, data una qualsiasi matrice simmetrica e definita positiva  $P > 0$ , la funzione di Lyapunov può essere scelta come:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

Per studiare la stabilità, bisogna quindi esaminare il segno della variazione totale della funzione di Lyapunov nel tempo, ovvero:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x}$$

$$\text{Posto: } A^T P + P A = -Q \longrightarrow \dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$



## Metodo di Lyapunov



❑ **Definizione:** Si dice equazione di Lyapunov, la seguente equazione matriciale algebrica:

$$A^T P + PA = -Q$$

❑ **Teorema :** Un sistema lineare autonomo è asintoticamente stabile se e solo se, per ogni matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva, esiste una matrice  $P$ , anch'essa simmetrica e definita positiva, tale che:

$$A^T P + PA = -Q$$

❑ **Teorema:** Data una matrice  $A$ , tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa se e solo se esiste una matrice  $P$  simmetrica e definita positiva ed una matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva tale che:

$$A^T P + PA + Q = 0$$

**Corollario:** Se  $P$  esiste, è unica.



## Metodo di Lyapunov



□ **Teorema:** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa
2. Per tutte le matrici  $Q = Q^T > 0$ , esiste una soluzione unica  $P = P^T > 0$  dell'equazione:

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (1)$$

□ **Dimostrazione 1 -> 2**

Supponiamo che  $A$  abbia tutti gli autovalori di parte reale strettamente negativa.  
Definiamo:

$$P := \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

L'integrale esiste ed è finito. Verifichiamo che  $P$  è soluzione di (1).

$$A^T P + P A = \int_0^{+\infty} (A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A) dt$$



## Metodo di Lyapunov



$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{A^\top t} Q e^{At} \right) dt = \left[ e^{A^\top t} Q e^{At} \right]_0^{+\infty} = -Q$$

Essendo:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} = 0$

La soluzione è anche unica. Siano infatti  $P_1$  e  $P_2$  soluzioni di (1), ovvero:

$$A^\top P_1 + P_1 A + Q = 0$$

$$A^\top P_2 + P_2 A + Q = 0$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= e^{A^\top t} \left( A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A \right) e^{At} \\ &= e^{A^\top t} A^\top (P_1 - P_2) e^{At} + e^{A^\top t} (P_1 - P_2) A e^{At} \\ &= \frac{d}{dt} \left( e^{A^\top t} (P_1 - P_2) e^{At} \right) \end{aligned}$$



## Metodo di Lyapunov



Il termine  $e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}$  è quindi costante e per ogni  $t$  assume il valore che ha per  $t = 0$

$$e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At} = P_1 - P_2$$

Ma per  $t \rightarrow +\infty$   $P_1 - P_2 = 0$

Quindi le due soluzioni coincidono, ovvero la soluzione è unica. ■

- **Esempio:** Consideriamo l'equazione di Lyapunov con la seguente matrice  $A$ :

$$A^T P + P A + Q = 0; A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$$

- Scegliamo una matrice  $Q$  simmetrica e positiva definita:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} = q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} q_{11} > 0 & 0 \\ 0 & q_{22} > 0 \end{bmatrix}$$



## Metodo di Lyapunov



- Risolviamo per  $P$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & -3p_{12} \\ -3p_{12} & -4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{q_{11}}{2} > 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = \frac{q_{22}}{4} > 0 \end{cases}, \Rightarrow P = P^T > 0$$

- Ripetiamo la procedura con:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} > 0 & 0 \\ 0 & q_{22} > 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{11} = -\frac{q_{11}}{2} < 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = \frac{q_{22}}{4} > 0 \end{cases}, \Rightarrow P = P^T < 0$$



## Stabilità mediante FdT



□ Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

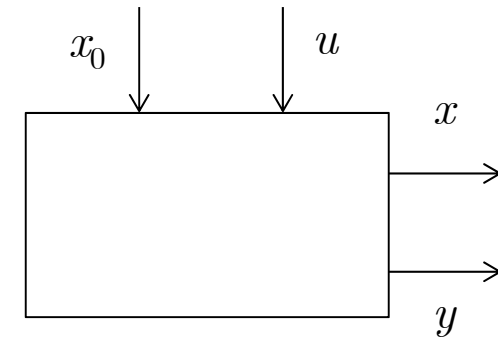
- Si possono definire quattro diverse «funzioni di trasferimento di segnale»:

$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s)$$

$$G_{x_0}^y(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1} B$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$



- Per i sistemi autonomi (con ingresso nullo) l'analisi della stabilità interna richiede la valutazione di

$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s) \quad h_{ij}(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$





## Stabilità mediante FdT



□ **Teorema** - Un sistema lineare è:

- **Stabile** se tutti i poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  hanno parte reale strettamente negativa tranne alcuni, a molteplicità unitaria, con parte reale pari a 0.
  - **Asintoticamente stabile** se tutti i poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  hanno parte reale strettamente negativa.
  - **Instabile** altrimenti.
- Si noti che l'insieme dei poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  è, in realtà, l'insieme degli Autovalori della matrice  $A$  e delle radici del polinomio caratteristico.

$$\lambda_i \{h_{ij}\} \subseteq \lambda_i \{A\}$$

Quale delle due funzioni risulta critica per la  
Valutazione della stabilità?

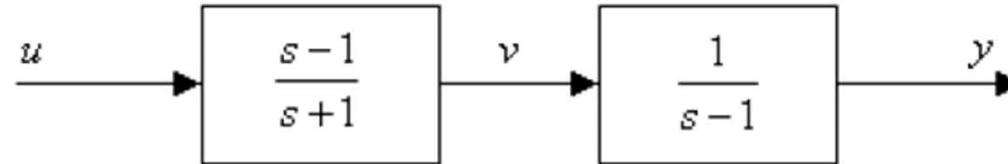
$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



## Stabilità mediante FdT

### ❑ Cancellazione ZERO - POLO



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2u \\ v = x_1 + u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + v \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + x_1 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$



## Stabilità mediante FdT



$$G_u^x(s) = [sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad G_u^y(s) = C [sI - A]^{-1} B = \frac{1}{(s+1)}$$

- Il **sistema risulta instabile**, anche se né nella matrice di trasferimento ingresso-stato, né in quella ingresso-uscita, tutti i poli risultano presenti. I poli instabili sono presenti soltanto in  $H(s)$ . **Il sistema è comunque stabile esternamente (BIBS e BIBO).**

- Test:

$$G^{NOCANC}(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{y(s)}{u(s)} \Leftrightarrow \ddot{y} - y = \dot{u} - u$$

- Consideriamo un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali nulle

$$y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

$$y(s) = \frac{A=1}{s} + \frac{B=-1}{s+1} + \frac{C=0}{s-1} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t}$$



## Stabilità mediante FdT



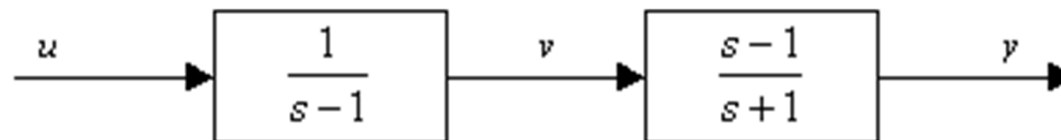
- Consideriamo un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali diverse da zero, per esempio:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (s^2 - 1)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0 + su(s) - u(s) = s + \frac{s-1}{s}$$

$$y(s) = \frac{2s^2 - s}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A=0}{s} + \frac{B=\frac{3}{2}}{s+1} + \frac{C=\frac{1}{2}}{s-1} \Rightarrow y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}x_{10} \\ \frac{1}{2}e^tx_{10} - \frac{1}{2}e^{-t}x_{10} + e^tx_{20} \end{pmatrix}$$

### ❑ Cancellazione POLO - ZERO





## Stabilità mediante FdT



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ v = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2v \\ y = x_2 + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 \\ y = x_2 + x_1 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B = \frac{1}{(s+1)}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$H(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G_u^x(s) = [sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}$$

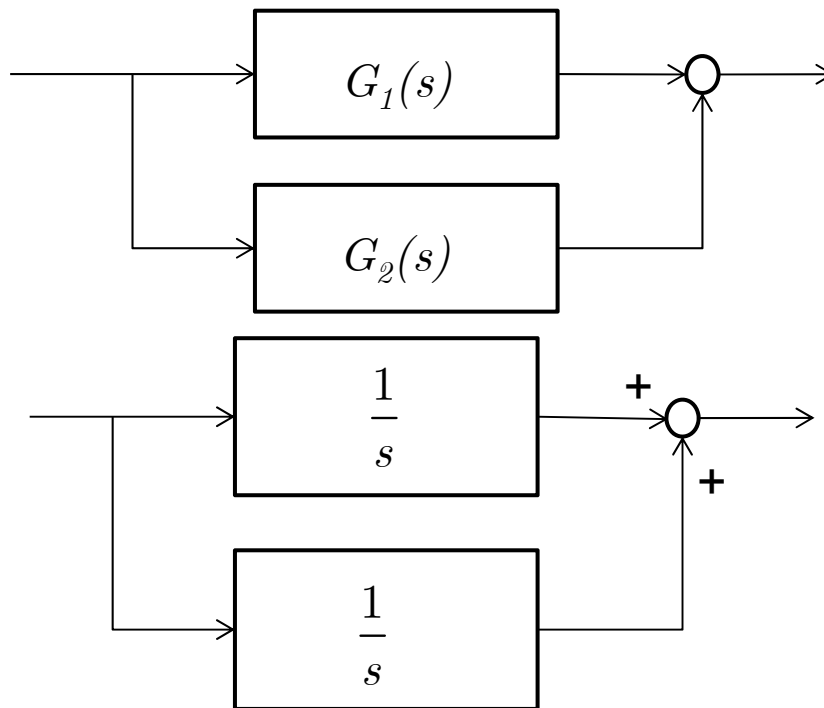
- Il sistema è instabile internamente , BIBS instabile ma BIBO stabile



## Stabilità mediante FdT

- ❑ La perdita di componenti dinamiche può avvenire anche senza una cancellazione, ma dalla struttura 'in parallelo' di un diagramma a blocchi.

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) \pm N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$



- ❑ I denominatori devono essere primi tra loro

$$G(s) = \frac{2}{s}$$

**Uno dei due integratori  
Non appare nella FdT**



# Stabilità mediante FdT



## □ Stabilità Esterna

- La conoscenza delle due matrici ingresso-uscita e ingresso-stato, risulta comunque utile nella verifica della stabilità esterna del sistema, come enunciato nei due seguenti teoremi.

□ **Teorema:** Un sistema lineare Tempo Invariante è stabile BIBS (o ILSL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-stato  $[sI - A]^{-1}B$  hanno parte reale negativa.

□ **Teorema:** Un sistema lineare Tempo Invariante è stabile BIBO (o ILUL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-uscita  $C[sI - A]^{-1}B + D$  hanno parte reale negativa.

$$\mathbf{x}(s) = G_{x_0}^x(s)\mathbf{x}_0 + G_u^x(s)\mathbf{u}(s)$$

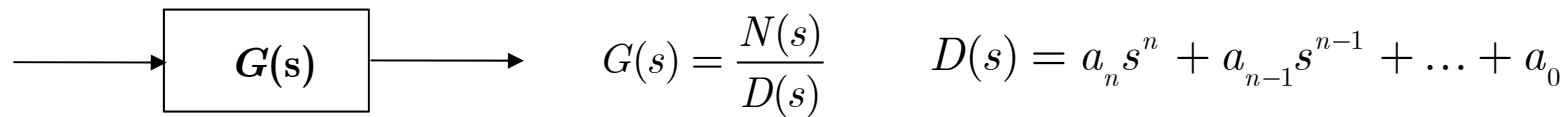
**Dai Risultati precedenti si può dire che, in generale, se un sistema è Asintoticamente stabile è anche BIBO (BIBS) stabile. Il viceversa non è comunque necessariamente vero.**



## Criterio di Routh (1876) – Hurwitz (1895)



Il criterio di stabilità di Routh - Hurwitz è una tecnica per il calcolo delle proprietà delle radici di un polinomio e che può servire per lo studio della stabilità di sistemi lineari Tempo Invarianti descritti da FdT senza dover calcolare i poli del sistema.



- Il criterio si basa su risultati precedenti dovuti a Cartesio riguardanti il segno delle radici di polinomi.

- Condizione necessaria**

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile deve valere:

1)  $a_i \neq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$

2) Tutti i coefficienti  $a_i$  hanno lo stesso segno

Routh, E. J. [1877] *A treatise on the stability of a given state of motion*, Cambridge University, Adam's Prize Essay.





## Criterio di Routh - Hurwitz



### ■ Condizione Necessaria e Sufficiente

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se:

- 1) Rispetta la condizione necessaria
- 2) La tabella di Routh generata da  $D(s)$  è ben definita e tutti gli elementi della Prima colonna (array) sono positivi.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_0$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	0
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	0
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$s^0$					

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1},$$



## Criterio di Routh - Hurwitz



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 8s^2 + s + 1}$$

- Sistema Asintoticamente Stabile

4	1	8	1	0
3	6	1	0	..
2	$\frac{47}{6}$	1	0	..
1	$\frac{11}{47}$	0	..	
0	$1 = a_0$	0	..	

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 4}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

- Sistema asintoticamente stabile;  
 $D(s) = (s + 2)^3$  i tre poli del sistema sono uguali a  $-2$ .

$s^3$	1	12	0
$s^2$	6	8	0
$s^1$	$32/3$	0	
$s^0$	8		



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10}{s^3 - s^2 + s - 6}$$

- Si nota subito che il sistema è instabile (i coefficienti  $a_i$  non hanno tutti lo stesso segno).

$$s_1 = 2, \quad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$s^3$	1	1	0
$s^2$	-1	-6	0
$s^1$	-5	0	
$s^0$	-6		

- Applicazione del criterio di Routh:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 8}$$

- il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno

$$s_1 = -2, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{15}{2}}$$

$s^3$	1	2
$s^2$	1	8
$s^1$	-6	0
$s^0$	8	



## Criterio di Routh - Hurwitz



- ❑ **Proprietà Generale:** il numero di radici a parte reale positiva, coincide con il numero di variazioni di segno nella prima colonna della tabella di Routh.
- ❑ **Caso Particolare #1:** Un elemento della prima colonna è nullo. Esso viene sostituito con un  $\varepsilon$  positivo arbitrariamente piccolo e la tabella completata.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{4}{s^3 + s + 1}$$

$s^3$	1	1	0
$s^2$	0	1	0
$s^1$	?		
$s^0$			

$s^3$	1	1	0
$s^2$	$\varepsilon$	1	0
$s^1$	$(\varepsilon - 1)/\varepsilon$	0	
$s^0$	1		

- Si hanno 2 variazioni di segno. Il sistema è Instabile, con due poli di parte reale positiva.



## Criterio di Routh - Hurwitz



❑ **Caso Particolare #2** : un'intera riga della tabella è formata da zeri.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 16s + 10}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50}$$

$s^5$	1	24	-25	0
$s^4$	2	48	-50	0
$s^3$	0	0		
$s^2$	?			
$s^1$				
$s^0$				



$$Y(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \Rightarrow \dot{Y}(s) = 8s^3 + 96s$$

$s^5$	1	24	-25	0
$s^4$	2	48	-50	0
$s^3$	8	96	0	
$s^2$	24	-50		
$s^1$	112,7	0		
$s^0$	-50			

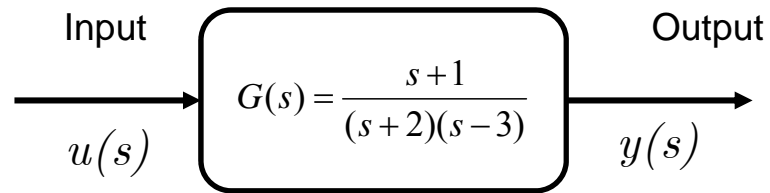
- Nella tabella così ottenuta si rileva un cambiamento di segno da cui si deduce che c'è una radice a parte reale positiva ed il Sistema è Instabile



# Criterio di Routh - Hurwitz



## ❑ Criterio di R – H Come tecnica di Sintesi di Controllo

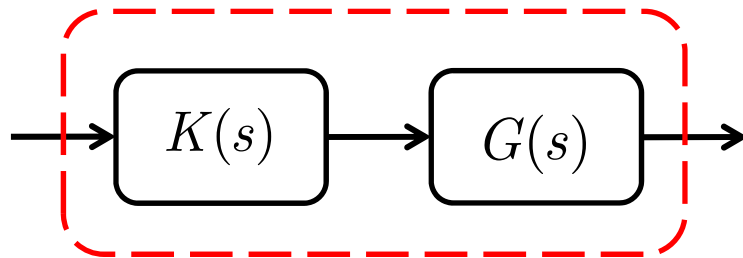


- Il sistema è instabile per qualsiasi ingresso e condizioni iniziali

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + \underbrace{c_2 e^{+3t}}_{\text{instabile}} + \dots$$

❑ **Problema di Controllo:** Stabilizzare il Sistema (Tutti i poli devono essere di parte reale strettamente  $< 0$ )

❑ **Controllo ad Anello Aperto:** Qualche che sia la forma del controllore  $K(s)$ , essa deve eseguire una cancellazione Zero – Polo per eliminare  $(s-3)$ .



$$K(s) = k(s-3) \Rightarrow G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

A. **Problema 1:** Chi garantisce che la cancellazione possa essere eseguita in pratica? (Problema tecnologico)

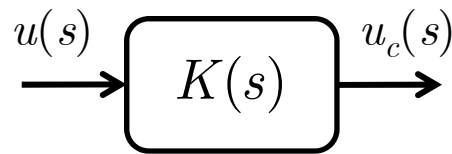


# Criterio di Routh - Hurwitz

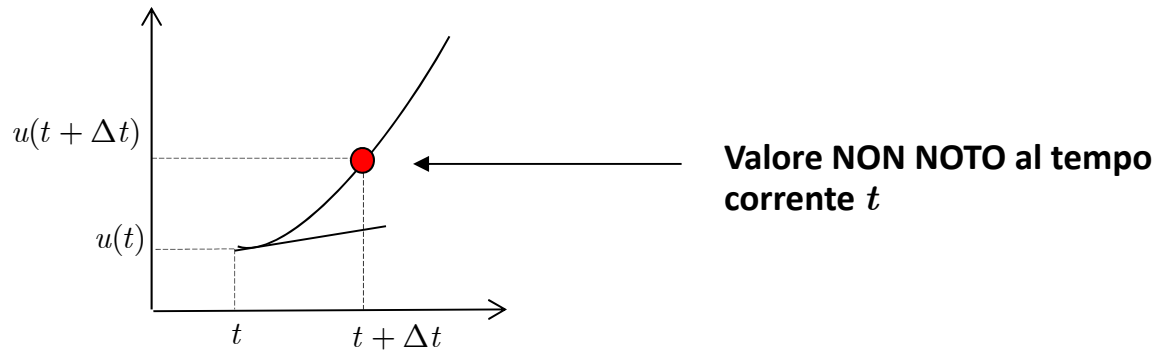


## B. Problema 2: Realizzabilità del controllore

$$K(s) = k(s - 3) \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)} \quad \text{Controllore non causale}$$



$$u_c(t) = \frac{du(t)}{dt} - 3u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$



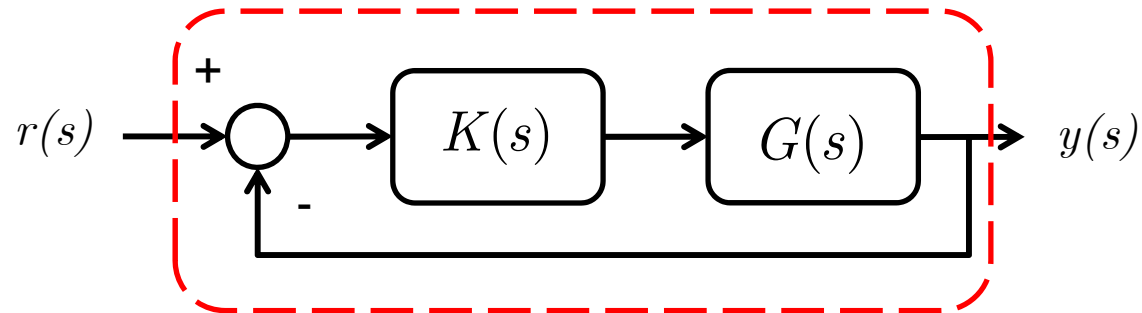
$$K(s) = \frac{s - 3}{s + P} \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 2)(s + P = 100)} \quad \text{Controllore causale}$$



## Criterio di Routh - Hurwitz



❑ **Controllo in Ciclo Chiuso:** Stabilizzazione mediante retroazione unitaria.



▪ **Scelta di Progetto:**

$$K(s) = k$$

$$G^{CL}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)}$$

$s^2$	1	$(k-6)$
$s^1$	$(k-1)$	0
$s^0$	$(k-6)$	

▪ Ponendo  $k > 6$  il sistema così ottenuto risulta asintoticamente stabile; si noti che ponendo  $k = 6$  il sistema è solo stabile, dato che i poli risultano essere rispettivamente  $s_1 = 0$  ed  $s_2 = -5$

▪ La risposta al gradino unitario del sistema originale vale:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2}, \Rightarrow y(t) = 1 - t$$





## Criterio di Routh - Hurwitz

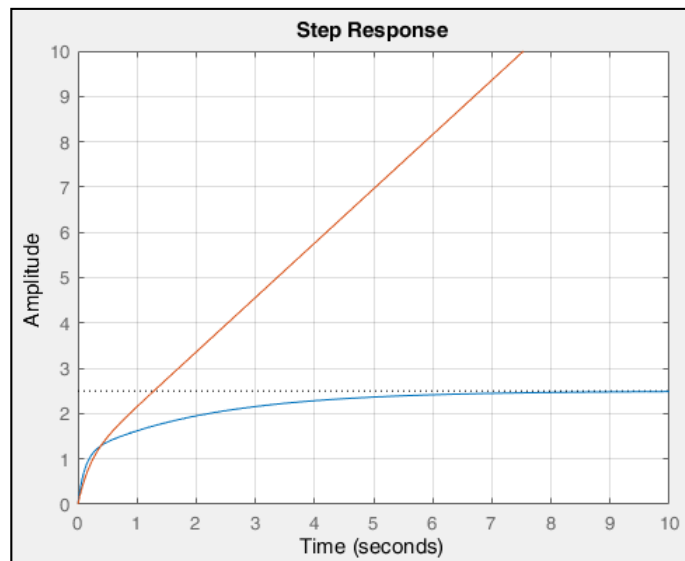


$$K(s) = 6$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 5s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{(s+5)}, \Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-5t}$$

$$K(s) = 10$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 9s + 4}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+8.5311)} + \frac{A_3}{(s+0.4689)},$$
$$\Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 e^{-0.4689t} + A_3 e^{-8.5311t}$$



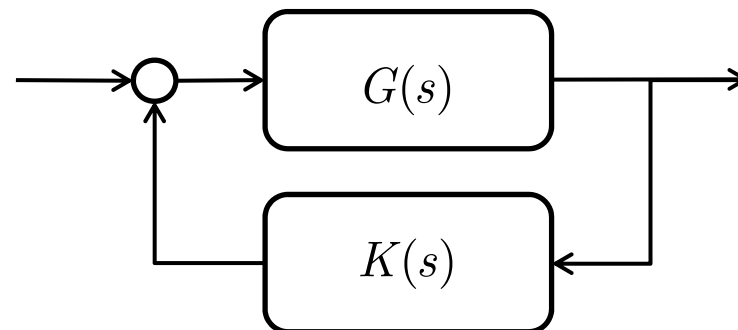


## Criterio di Routh - Hurwitz



❑ **Controllo in ciclo chiuso:** Stabilizzazione con controllore nella catena di retroazione

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)} u(s)$$



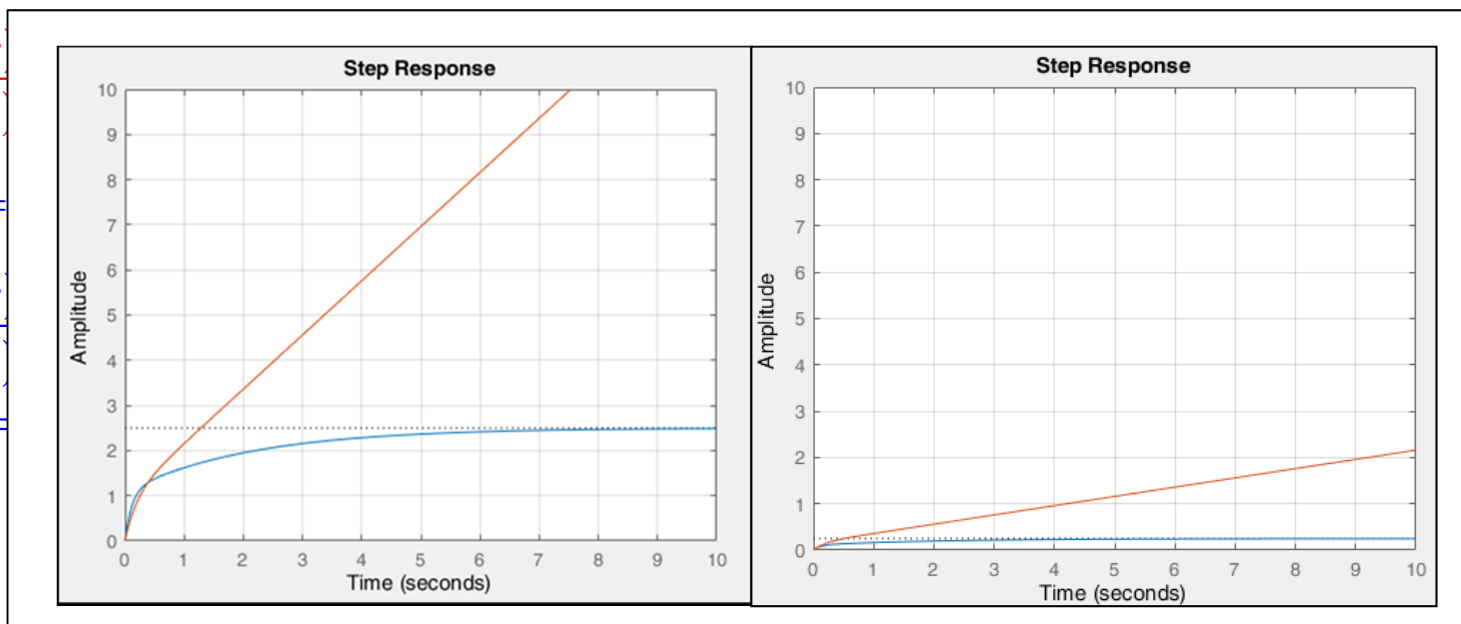
$$K(s) = 6$$

$$\frac{G(s)}{1 + K(s)}$$

$$K(s) =$$

$$\frac{G(s)}{1 + K(s)}$$

$$\Rightarrow y(t) =$$





## Criterio di Routh - Hurwitz



### ❑ Stabilizzazione in ciclo chiuso, Esempio #2

$$G(s) = \frac{s-1}{s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2}, \Rightarrow y(t) = 1 - t$$

A. Retroazione non unitaria,  $K(s) = k$

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s)$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$

B. Retroazione unitaria,  $K(s) = k$

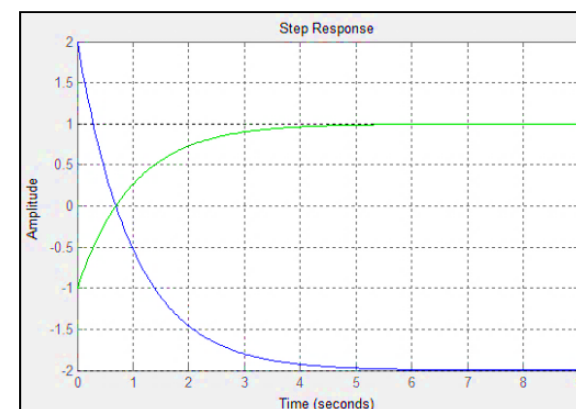
$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s)$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{k(s-1)}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$

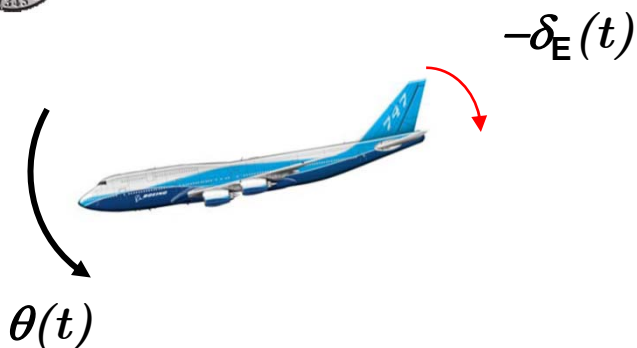
$$k = -0.5$$

$$\frac{2(s-1)}{s+1} \cdot \frac{-(s-1)}{s+1}$$





## Criterio di Routh - Hurwitz



$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$-0.3705 \pm 0.89j$  Poles

$-0.2969$  Zero

Gain = 1.1569

- L'andamento dell'angolo di beccheggio  $\theta(t)$  ad un comando a gradino in equilibratore  $\delta_E(t)$  tende all'infinito, all'aumentare del tempo.

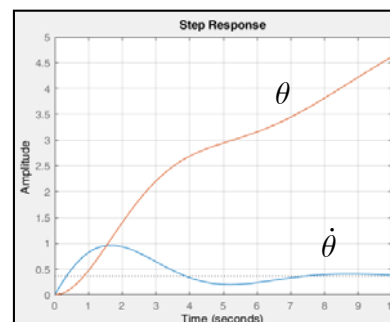
$$\theta(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)} \delta_E(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$$\theta(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-0.3705t} \sin(0.8597t + C_4)$$

- **Problema:** progettare un controllore in feedback, tale che l'angolo di beccheggio tenda ad un valore costante, ovvero  $\theta_{DES}(t)$

□ **Strumenti disponibili:**

- Retroazione
- Criterio di Routh
- Teorema del Valore Finale





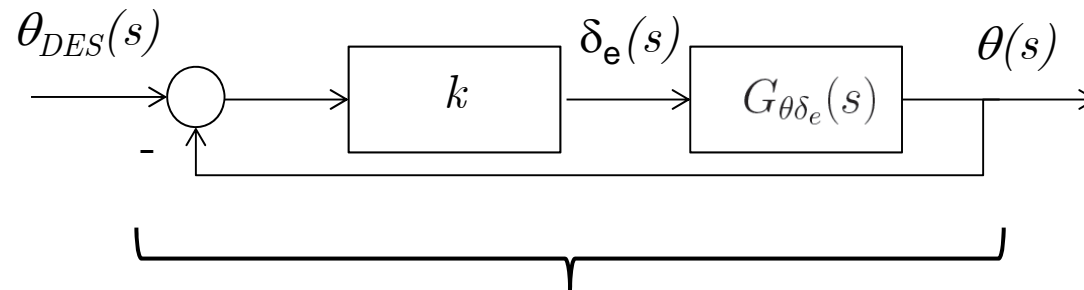
## Criterio di Routh - Hurwitz



### □ Requisiti:

- Controllabilità (vedi dopo..)
- Stabilità asintotica in ciclo chiuso

### □ Ipotesi di Lavoro: Retroazione unitaria con un controllore costante $K(s) = k > 0$



$$G^{CL}(s) = \left[ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \right]^{CL} = \frac{K(s)G_{\theta\delta_e}(s)}{1 + K(s)G_{\theta\delta_e}(s)} = \frac{1.1569ks + 0.3435k}{s^3 + 0.7410s^2 + (.9272 + 1.1569k)s + 0.3435k}$$

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & .9272 + 1.1569k & 0 \\ s^2 & .7410 & .3435k & \\ s^1 & .9278 + .6934k & 0 & \\ s^0 & .3435k & & \end{array}$$

□ Sistema asintoticamente stabile per  $k > 0$ .

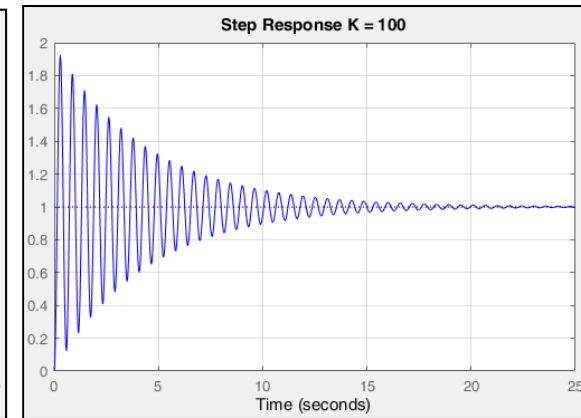
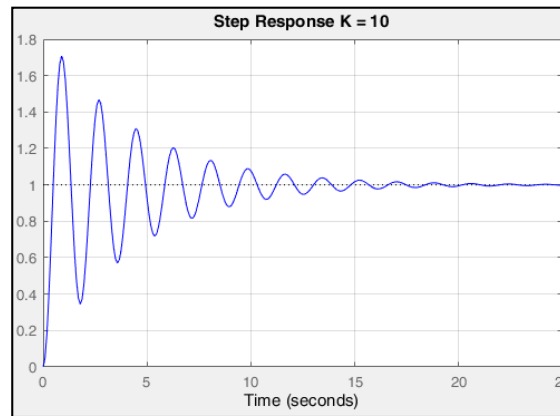
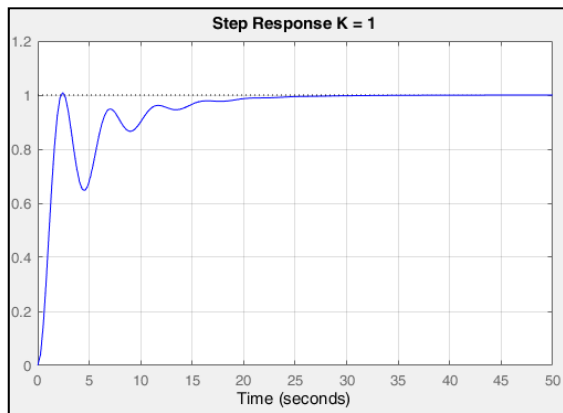


## Criterio di Routh - Hurwitz

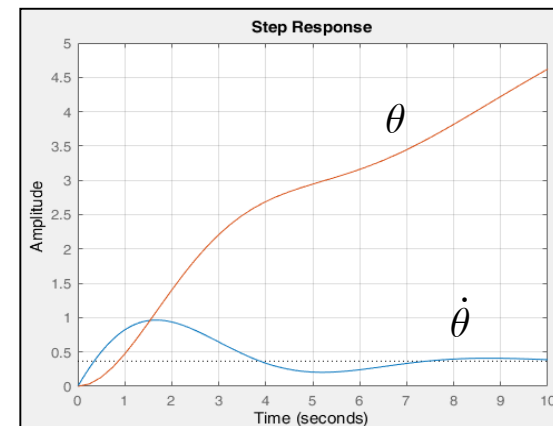


- Si può applicare il teorema del valore finale. Ponendo l'ingresso pari ad un gradino unitario si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G^{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = 1$$



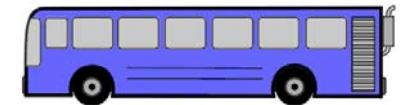
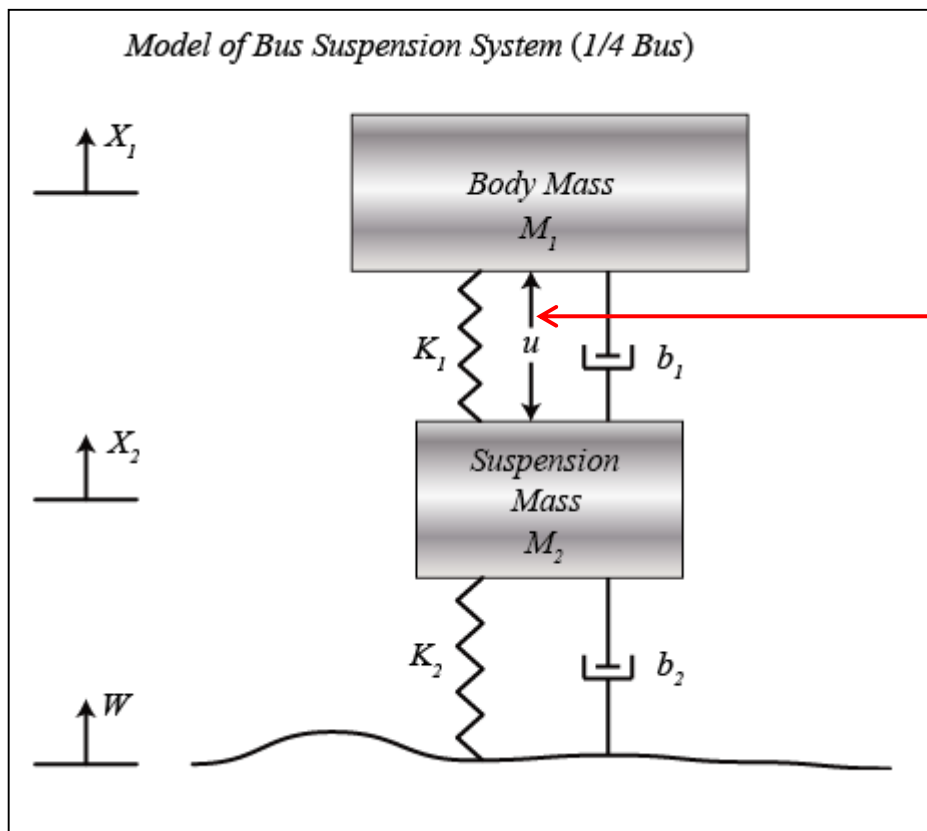
- Il comportamento fisico, naturale del sistema (angolo di beccheggio che cresce indefinitamente per un ingresso costante di equilibratore) viene alterato dal movimento dell'equilibratore stesso in funzione dell'angolo di beccheggio opportunamente amplificato.





## Criterio di Routh - Hurwitz

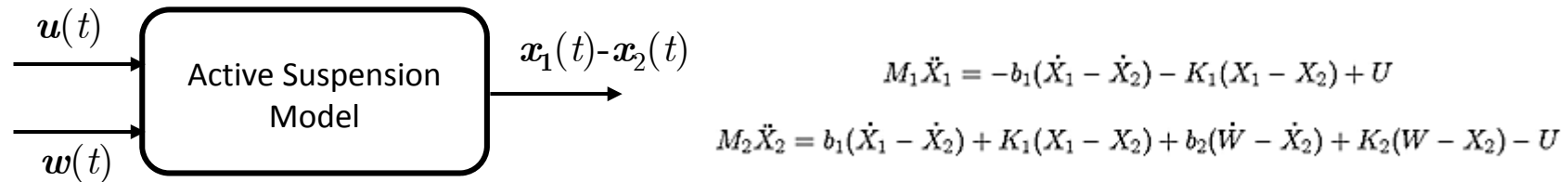
- When the suspension system is designed, a 1/4 model (one of the four wheels) is used to simplify the problem to a 1D multiple spring-damper system. A diagram of this system is shown below. This model is for an active suspension system where **an actuator is included that is able to generate the control force  $U$  to control the motion** of the bus body



- Control Objective:** to provide appropriate action  $u(t)$ , in order to maintain constant distance  $x_1 - x_2$  in the presence of a terrain disturbance  $w(t)$ .



## Criterio di Routh - Hurwitz



$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2s + K_2}{\Delta}$$

$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1b_2s^3 - M_1K_2s^2}{\Delta}$$

$$\Delta = (M_1s^2 + b_1s + K_1) \cdot (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (K_1 + K_2)) - (b_1s + K_1) \cdot (b_1s + K_1)$$

M1 = 2500;

M2 = 320;

K1 = 80000;

K2 = 500000;

b1 = 350;

b2 = 15020;

s = tf('s');

G1 = ((M1+M2)\*s^2+b2\*s+K2)/((M1\*s^2+b1\*s+K1)\*(M2\*s^2+(b1+b2)\*s+(K1+K2))-(b1\*s+K1)\*(b1\*s+K1));

step(G1),pause

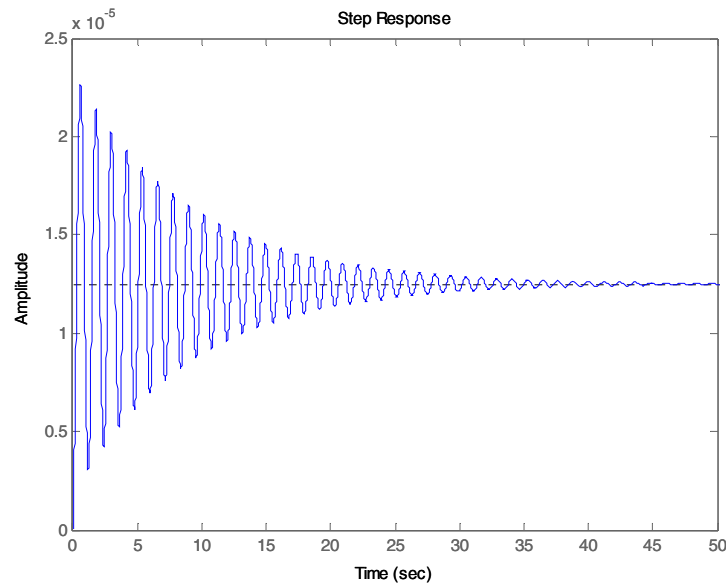
G2 = (-M1\*b2\*s^3-M1\*K2\*s^2)/((M1\*s^2+b1\*s+K1)\*(M2\*s^2+(b1+b2)\*s+(K1+K2))-(b1\*s+K1)\*(b1\*s+K1));

step(0.1\*G2)



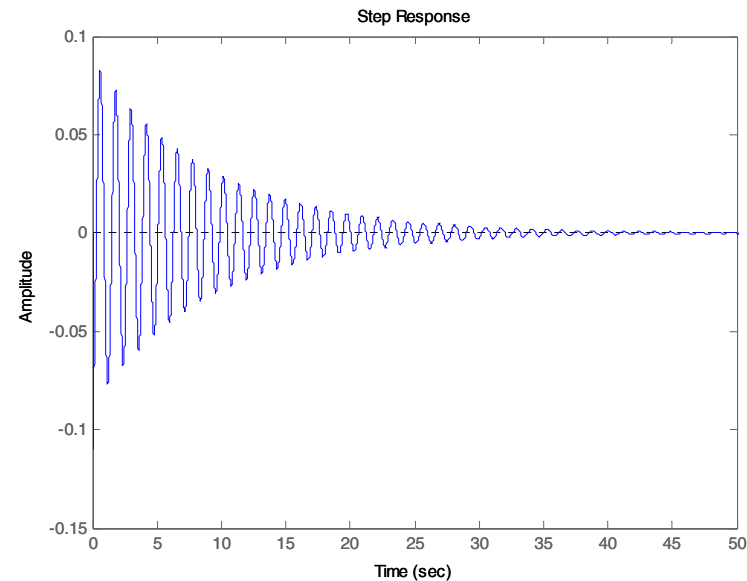


## Criterio di Routh - Hurwitz



Response to 1 m unit step Command

People sitting in the bus will feel very small amount of oscillation. Moreover, the bus takes an unacceptably long time to go back to the original state



Response to 0.1 m unit step Disturbance

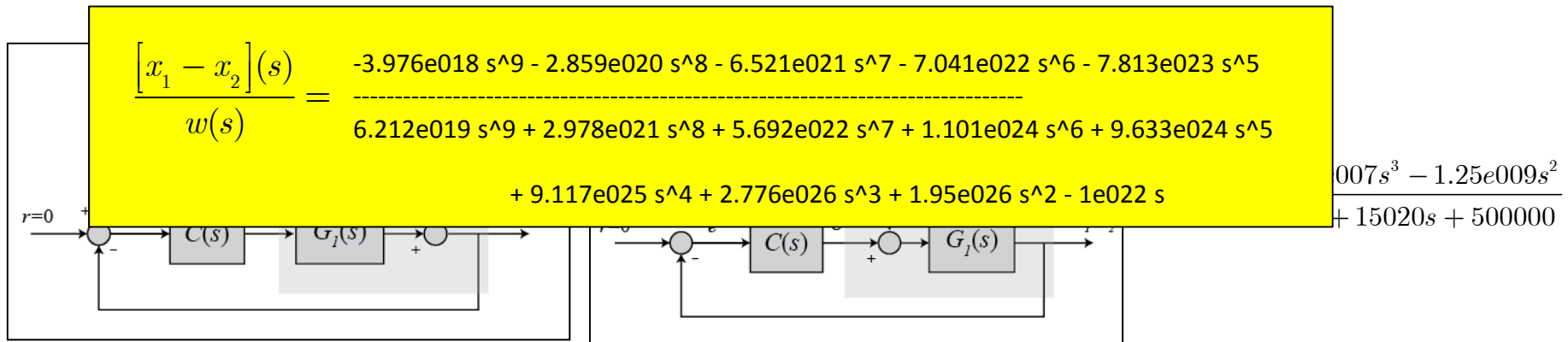
From this graph of the open-loop response for 10 cm step disturbance, we can see that when the bus passes a 10 cm high bump on the road, the bus body will oscillate for an unacceptably long time (~50 seconds) with an initial amplitude of **8 cm**. People sitting in the bus will not be comfortable with such an oscillation.



# Criterio di Routh - Hurwitz

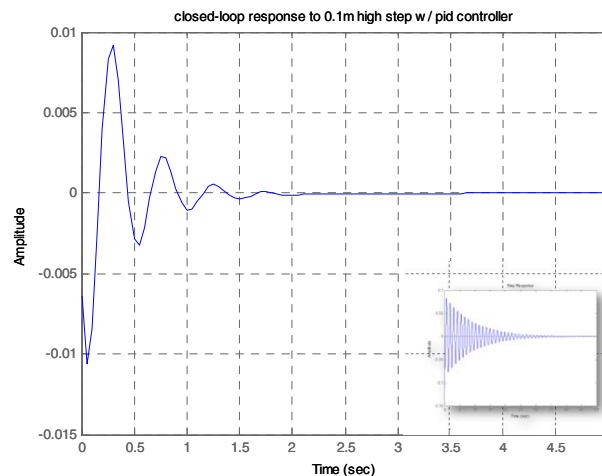


- ❑ **Problem:** design a feedback controller so that when there is a constant road disturbance, the relative distance of the two masses has the following behavior:
1. The distance value final value is reached with tolerance within 5 seconds,
  2. The maximum oscillation should not be higher than 5% of the final value (asymptotic value).



$$C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s} =$$

$$= 832100 + 208025s + \frac{624075}{s}$$





# Criterio di Routh - Hurwitz



<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

**CONTROL TUTORIALS**  
FOR **MATLAB® & SIMULINK®**

INTRODUCTION CRUISE CONTROL MOTOR SPEED MOTOR POSITION **SUSPENSION** INVERTED PENDULUM AIRCRAFT PITCH BALL & BEAM

**SYSTEM**

**MODELING**

**ANALYSIS**

**CONTROL**

PID

ROOT LOCUS

FREQUENCY

STATE-SPACE

DIGITAL

**SIMULINK**

**MODELING**

**CONTROL**

Welcome to the Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS): They are designed to help you learn how to use MATLAB and Simulink for the analysis and design of automatic control systems. They cover the basics of MATLAB and Simulink and introduce the most common classical and modern control design techniques.

**About the Authors:** These tutorials were originally developed by Prof. Bill Messner at Carnegie Mellon and Prof. Dawn Tilbury at the University of Michigan. Originally funded by NSF with further funding by MathWorks in 2011, Prof. Messner, Assoc. Prof. Rick Hill (U Detroit-Mercy), and PhD Student JD Taylor (CMU), completely redesigned the web interface and updated all of the tutorials to reflect

All contents licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



## Raggiungibilità, Controllabilità

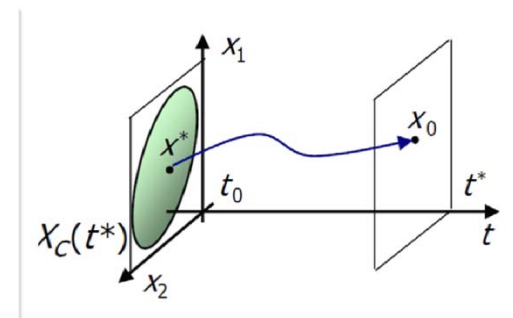
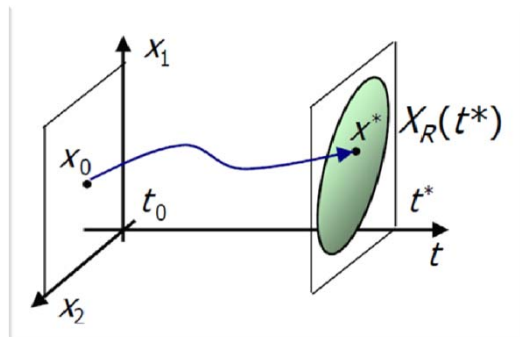


- Le proprietà che verranno illustrate sono valide anche per sistemi lineari tempo varianti e/o nonlineari, noi ci limitiamo allo studio di sistemi lineari tempo invarianti, cioè del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

Si vuole studiare la capacità intrinseca del sistema di poter "pilotare", manipolare l'andamento temporale dello stato attraverso un opportuna scelta del segnale di controllo.

1. Dove possiamo trasferire uno stato del sistema  $x(t_0)$  ad un istante  $t = t_1$  ?
2. Quanto velocemente possiamo trasferire uno stato del sistema ad un valore desiderato  $x(t_1)$  ?
3. Come possiamo calcolare il controllo  $u(t)$  tale che si possa trasferire  $x(t_0)$  ad un valore desiderato  $x(t_1)$  ?
4. Come possiamo trovare il minimo (più efficiente) controllo  $u(t)$  tale che valga 3. ?





## Raggiungibilità - Definizione



□ **Definizione – Sistema Raggiungibile:** Un sistema si dice raggiungibile dall'istante  $t_0$ , se è possibile trovare un segnale di ingresso **limitato**  $\mathbf{u}(t)$  tale da portare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  ad uno stato finale  $\mathbf{x}(t_1)$  in un **tempo limitato**  $[t_0, t_1]$ .

▪ Dato il Vettore di stato:  $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau; \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \left\{ \mathbf{u}(\tau), \|\mathbf{u}(\tau)\| < M : \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_1) \right\}$$

□ L'insieme di tutti gli stati per cui vale la definizione si indica con  $X_R$  (sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ ); se si verifica che  $X_R = \mathbb{R}^n$  il sistema viene detto **completamente raggiungibile**

□ L'insieme di tutti gli stati non raggiungibili  $X_{NR}$  è il complemento a  $X_R$  del sottospazio  $\mathbb{R}^n$ . Si ha quindi:

$$X_R \cup X_{NR} = \mathbb{R}^n$$



## Controllabilità - Definizione



□ **Definizione – Sistema Controllabile:** Un sistema si dice controllabile dall'istante  $t_0$ , se è possibile trovare un segnale di ingresso **limitato**  $u(t)$  tale da portare il sistema da uno stato iniziale  $x(t_0) \neq 0$  allo stato finale  $x(t_1) = 0$  in un **tempo limitato**  $[t_0, t_1]$ .

▪ Dato il Vettore di stato: 
$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau; x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \left\{ u(\tau), \|u(\tau)\| < M : e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0 \right\}$$

□ L'insieme di tutti gli stati per cui vale la definizione si indica con  $X_C$  (sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ ); se si verifica che  $X_C = \mathbb{R}^n$  il sistema viene detto completamente controllabile

□ L'insieme di tutti gli stati non controllabili  $X_{NC}$  è il complemento a  $X_C$  del sottospazio  $\mathbb{R}^n$ . Si ha quindi:

$$X_C \cup X_{NC} = \mathbb{R}^n$$



## Definizioni



□ **Teorema:** Per i sistemi lineari stazionari tempo continui si ha che  $X_C = X_R$ .

- Si consideri il sistema completamente controllabile e quindi tale che  $X_C = \mathbb{R}^n$ . Dalla definizione, posto  $t_0 = 0$ :

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \mathbf{u}(\tau) : e^{At_1} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau = 0$$

$$\forall t_1 > 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \exists \mathbf{u}(\tau) : \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau = -e^{At_1} \mathbf{x}_0$$

- Ma  $\text{Rango}(e^{At_1}) = n$ , quindi il secondo membro fornisce un vettore in  $\mathbb{R}^n$ , per ogni condizione iniziale

$$\mathbf{x} = -e^{At_1} \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

poiché tale vettore può essere un qualsiasi vettore di  $\mathbb{R}^n$ , ogni stato risulta raggiungibile, per cui:

$$X_C \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_R \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_C = X_R$$





## Esempi



Dato il sistema:

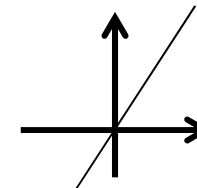
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad \text{è controllabile se} \quad X_C \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{2}{s+1} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \end{cases}$$

Il sistema risulta **non controllabile** in quanto per qualsiasi  $U(s)$ , si ha che  $X_1(s) = X_2(s)$  e, quindi  $x_1(t) = 2x_2(t)$  e  $X_C \in \mathbb{R}^1$

- Attraverso la scelta della  $u(t)$ , si possono raggiungere tutti gli stati tali che:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$



- Non si possono mai raggiungere stati per cui:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a \neq b$$





## Esempi



Dato il sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad \text{è controllabile se} \quad X_C \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \end{cases}$$

Il sistema risulta **controllabile** in quanto per ogni  $U(s)$ , si ha che  $X_1(s)$  non è mai una Combinazione lineare di  $X_2(s)$  e, quindi  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono linearmente indipendenti.

□ Attraverso la scelta della  $u(t)$ , si può sempre raggiungere uno stato  $\mathbf{x}(t)$  tale che:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a \neq b$$



## Proprietà



- Un aspetto importante della controllabilità è la sua relazione con la stabilità del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-3t} x_{20} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{pmatrix}$$

Il sistema è instabile nello stato  $x_1(t)$  e non può essere stabilizzato dato che risulta anche non controllabile (l'azione dell'ingresso agisce solo su  $x_2(t)$ ).

- **Definizione:** Un sistema si dice **stabilizzabile** se tutti gli stati instabili sono controllabili.

- Se un sistema è controllabile, esiste un ingresso che può fare evolvere il sistema all'origine con andamento desiderato mediante opportuna scelta dell'ingresso
- Se un sistema è stabilizzabile, vale lo stesso, ma con andamento parzialmente desiderato
- Altrimenti, non esiste ingresso per garantire un'evoluzione stabile all'equilibrio.
- **Come possiamo verificare in generale se un sistema è controllabile o no?**

$$\mathbf{x}(t_1) \in X_C \equiv \mathbb{R}^n$$



## Test di Controllabilità



□ **Definizione - Matrice di Controllabilità:** Dato un sistema lineare, tempo invariante:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

Si definisce matrice di Controllabilità  $\mathcal{B}$ , la matrice  $n \times nm$  data da:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$$

□ **Teorema:** Un sistema lineare continuo tempo invariante è controllabile **se e solo se** la sua matrice di controllabilità ha Rango massimo:

$$\text{rango}(\mathcal{B}) = \text{rango}\left((\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})\right) = n$$

□ **Traccia di Dimostrazione (Solo C. N.)**

- Per semplicità supponiamo di avere condizioni iniziali nulle

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$



## Test di Controllabilità



- La condizione necessaria richiede di dimostrare che, per ogni  $u(t)$  finito:

$$\mathbf{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{rango}(\mathcal{B}) = n$$

- Sfruttando il Teorema di Cayley-Hamilton

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_1 - \tau) A^i B \mathbf{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \beta_i(i, \mathbf{u}, t_1)$$

$$\beta_i(i, \mathbf{u}, t_1) = \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\begin{bmatrix} B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t_1)$$

Essendo la soluzione un vettore L.I.,  $\mathbf{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n$

Questo Implica che la matrice di Controllabilità  
Deve avere Rango massimo

$$\text{Rango}(\mathcal{B}) = n$$



## Teoremi sulla Controllabilità



□ **Teorema:** La proprietà di controllabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Operiamo un cambio di Base con la matrice non singolare  $T$

$$x = T z \Rightarrow z = T^{-1}x \quad \longrightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}AT z + T^{-1}Bu$$

- Se il sistema originale è Controllabile, così lo è il sistema trasformato. Infatti le due Matrici di Controllabilità hanno lo stesso Rango.

$$\tilde{\mathcal{B}} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, (T^{-1}AT)^2T^{-1}B, \dots, (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B]$$

$$(T^{-1}AT)^r = (T^{-1}AT)_1 \cdot (T^{-1}AT)_2 \cdot (T^{-1}AT)_3 \cdot \dots \cdot (T^{-1}AT)_r = T^{-1}A^rT$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, T^{-1}A^2B, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}\mathcal{B}$$

$$\boxed{Rango(\tilde{\mathcal{B}}) = \min[Rango(T^{-1}), Rango(\mathcal{B})] = Rango(\mathcal{B})}$$



## Teoremi sulla Controllabilità



□ **Teorema:** Un sistema è non completamente controllabile se almeno una variabile di stato non è influenzata, direttamente o indirettamente, dall'ingresso.

- Dato il sistema:

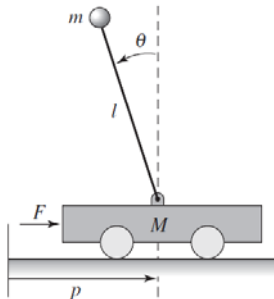
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^p$$

- Le prime  $n - p$  variabili sono influenzate direttamente dall'ingresso, mentre le altre seguono una evoluzione autonoma data da:

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = A_{22} \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{A_{22}t} \mathbf{x}_0$$

Indipendentemente dall'ingresso e quindi costituiscono un sottoinsieme non controllabile

- **Esempio - Pendolo**



$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{p} - ml \cos \theta \ddot{\theta} &= -c\dot{p} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F, \\ (J + ml^2)\ddot{\theta} - ml \cos \theta \ddot{p} &= -\gamma \dot{\theta} + mgl \sin \theta. \end{aligned}$$



- Poniamo  $c = \gamma = 0$  e consideriamo l'approssimazione lineare intorno all'equilibrio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2 l^2 g / \mu & 0 & 0 \\ 0 & M_t m g l / \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t / \mu \\ l m / \mu \end{bmatrix}$$

- Posto:

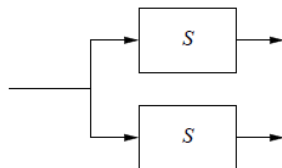
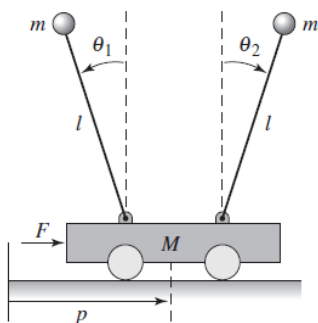
$$\mu = M_t J_t - m^2 l^2, \quad M_t = M + m \text{ and } J_t = J + m l^2$$

La matrice di controllabilità vale:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & J_t / \mu & 0 & g l^3 m^3 / \mu^2 \\ 0 & l m / \mu & 0 & g l^2 m^2 (m + M) / \mu^2 \\ J_t / \mu & 0 & g l^3 m^3 / \mu^2 & 0 \\ l m / \mu & 0 & g l^2 m^2 (m + M) / \mu^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rango } [\mathcal{B}] = 4$$



## Esempio – Pendolo 2



La dinamica dei due pendoli è  
La stessa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p & \theta_1 & \theta_2 & \dot{p} & \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\mu} & \frac{m^2 l^2 g}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_t m g l}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_t m g l}{\mu} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{J_t}{\mu} \\ \frac{l m}{\mu} \\ \frac{l m}{\mu} \end{bmatrix} F$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & J_t / \mu & 0 & \frac{g l^3 m^3}{\mu^2} & 0 & a_{42} B_{42} \\ 0 & l m / \mu & 0 & \frac{g l^2 m^2 (m + M)}{\mu^2} & 0 & a_{52} B_{42} \\ 0 & l m / \mu & 0 & \frac{g l^2 m^2 (m + M)}{\mu^2} & 0 & a_{63} B_{43} = a_{52} B_{42} \\ \hline J_t / \mu & 0 & \frac{g l^3 m^3}{\mu^2} & 0 & a_{42} B_{42} & 0 \\ l m / \mu & 0 & \frac{g l^2 m^2 (m + M)}{\mu^2} & 0 & a_{52} B_{42} & 0 \\ l m / \mu & 0 & \frac{g l^2 m^2 (m + M)}{\mu^2} & 0 & a_{63} B_{43} = a_{52} B_{42} & 0 \end{bmatrix}$$

Rango( $\mathcal{B}$ ) = 4

Sistema non controllabile





## Esempio Satellite



$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/mr_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/mr_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix}$$

### □ Moto Equatoriale Controllabile

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1/m & 0 & 0 & \frac{2\omega_0}{m} & \dots & \dots \\ 1/m & 0 & 0 & \frac{2\omega_0}{m} & \frac{3\omega_0^2}{m} - \frac{2\omega_0^2}{mr_0} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/mr_0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1/mr_0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & 0 & 0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & \dots & \dots \end{array} \right]$$

### □ Moto non-Equatoriale Controllabile

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1/mr_0 \\ 1/mr_0 & 0 \end{array} \right]$$



## Esempio Numerico



- Moto linearizzato della traiettoria di un satellite geostazionario in orbita equatoriale

$$\text{Unità: } \begin{cases} m & 10^3 Kg & = 1 \\ \omega_0 & rad / day & = 2\pi \\ r_0 & 10^4 Km & = 3.6 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 118.4 & 0 & 0 & 22.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.3537 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39.48 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & .28 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .28 \end{bmatrix} u(t)$$

```
a =
      0      1.0000      0      0      0      0
  118.4000      0      0      22.6200      0      0
      0      0      0      1.0000      0      0
      0     -0.3537      0      0      0      0
      0      0      0      0      0      1.0000
      0      0      0      0      0     -39.4800
```

```
>> b
```

```
b =
```

```
      0      0      0
   1.0000      0      0
      0      0      0
      0     0.2800      0
      0      0      0
      0      0     0.2800
```

```
>> rank(ctrb(a,b))
```

```
ans =
```

```
6
```

- Il sistema è controllabile



## Osservabilità - Definizioni



- Questa Proprietà riflette la capacità di determinare lo stato iniziale (**Osservabilità**) o quello corrente (**Ricostruibilità**) di un sistema, noti la struttura e segnale di controllo ed il segnale d'uscita del sistema stesso.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$$

- **Definizione:** Un sistema Lineare Tempo Invariante si dice **non osservabile** se:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Dato un sistema lineare tempo invariante, indichiamo il sottospazio di non osservabilità come:

$$X_{NO} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = 0, \forall t \geq 0 \right\}$$

Il sistema si dice Osservabile, se e soltanto se  $X_{NO} = 0$ . Definendo il sottospazio di Osservabilità come  $X_O$ , si ha:

$$X_{NO} \cup X_O = \mathbb{R}^n$$



## Esempi - Definizioni



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} & y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

- Conoscendo l'uscita, possiamo avere direttamente la prima variabile di stato e calcolare la seconda dal segnale di uscita, per cui il sistema è **osservabile**.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - 2y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

In questo caso, la prima variabile di stato non è ottenibile dall'uscita, per cui il sistema è non osservabile

$$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{Ker}(Ce^{At}) \in \mathbb{R}^n$$



## Definizioni



- Un aspetto importante della osservabilità è la sua relazione con la stabilità del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-3t} x_{20} \end{pmatrix}, y(t) = x_2(t) = e^{-3t} x_{20}$$

- Il sistema è instabile nello stato  $x_1(t)$  e tale stato non è presente nell'uscita, per cui l'uscita del sistema non fornisce alcuna indicazione sulla stabilità.
- **Definizione – Sistema Rivelabile:** Un sistema si dice rivelabile se tutti gli stati non osservabili sono stabili
- **Definizione – Matrice di Osservabilità:** Dato un sistema lineare tempo invariante si definisce **matrice di osservabilità**, la matrice  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



## Test di Osservabilità



- **Teorema:** Un sistema lineare è completamente osservabile (la coppia  $A, C$  è completamente osservabile) se e solo se il rango della matrice di osservabilità è massimo, ovvero per:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$



$$\text{Rango}(C) = \text{Rango}\left((C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1})^T\right) = n$$

□ **Traccia di Dimostrazione**

- Supponiamo che esistano  $r$  stati non osservabili, per essi si ha:

$$y(t) = Ce^{At}x_{NO}(t) = 0, \quad x_{NO}(t) \in \mathbb{R}^r$$



## Test di Osservabilità



- Dal Teorema di Cayley – Hamilton:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t) \quad \longrightarrow \quad y(t) = C \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t) x_{NO} = 0$$

- Poiché  $\alpha_i(t)$  sono  $n$  funzioni linearmente indipendenti, si può scrivere:

$$y(t) = C \alpha_0(t) x_{NO} + CA \alpha_1(t) x_{NO} + CA^2 \alpha_2(t) x_{NO} + \dots + CA^{n-1} \alpha_{n-1}(t) x_{NO} = 0$$

$$CA^i x_{NO} = 0 \quad \forall i$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_{NO} = \mathcal{C} x_{NO} = 0$$

- Essendo  $x_{NO}$  non nullo, la Matrice di Osservabilità deve avere rango inferiore al rango massimo
- Se il rango della Matrice di Osservabilità è massimo ( $n$ ) l'unica soluzione dell'equazione è data dal vettore nullo, per cui  $X_{NO}$  risulta essere un insieme vuoto e ciò implica che il sistema è osservabile.



## Teoremi sull'Osservabilità



□ In modo del tutto duale alla proprietà di Controllabilità, si può dimostrare:

□ **Teorema:** La proprietà di osservabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x} = T\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = T^{-1}AT\mathbf{z} + T^{-1}B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = CT\mathbf{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \tilde{C}\mathbf{z} \end{cases}$$

□ **Teorema:** Un sistema è non completamente osservabile se almeno una variabile di stato non influenza, direttamente o indirettamente, l'uscita.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A_{11} = (m \times n)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) = C_1 e^{A_{11}t} \mathbf{x}_1(0)$$

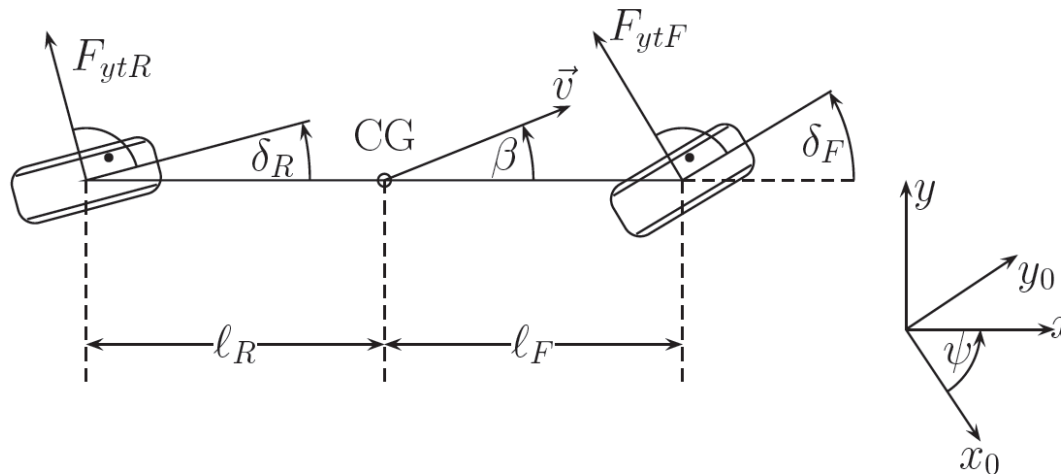
- Gli stati corrispondenti alla partizione  $A_{22}$  sono non osservabili





## Esempio

### □ Single Track Steering Model: Dynamics (Ackerman 1994)



$$\begin{aligned}F_{yF} &= F_{ytF} \cos \delta_F \\F_{yR} &= F_{ytR} \cos \delta_R \\F_x &= -F_{ytF} \sin \delta_F - F_{ytR} \sin \delta_R\end{aligned}$$

- Moto Laterale

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \cos \beta + m\dot{v} \sin \beta = F_{yF} + F_{yR}$$

- Moto Longitudinale

$$-mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \sin \beta + m\dot{v} \cos \beta = F_x$$

- Moto di imbardata (yaw)

$$J\ddot{\psi} = F_{yF} \ell_F - F_{yR} \ell_R + M_{zD}$$



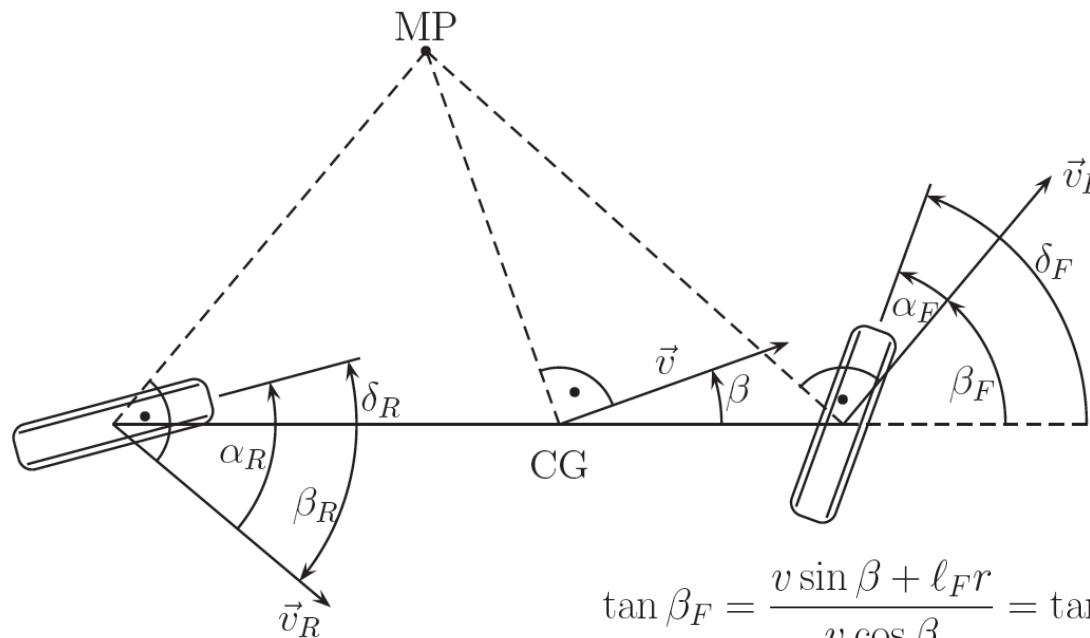
## Esempio



$$\begin{bmatrix} mv(\dot{\beta} + r) \\ m\dot{v} \\ J\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_{yF} + F_{yR} \\ F_{yF}\ell_F - F_{yR}\ell_R + M_{zD} \end{bmatrix}$$

### Single Track Steering Model: Kinematics

Relazione tra gli angoli dei pneumatici ( $\alpha_i, \delta_i, \beta_i$ )



$$v_R \cos \beta_R = v_F \cos \beta_F = v \cos \beta$$

$$v_F \sin \beta_F = v \sin \beta + \ell_F r$$

$$v_R \sin \beta_R = v \sin \beta - \ell_R r$$

$$\tan \beta_F = \frac{v \sin \beta + \ell_F r}{v \cos \beta} = \tan \beta + \frac{\ell_F r}{v \cos \beta}$$

$$\tan \beta_R = \frac{v \sin \beta - \ell_R r}{v \cos \beta} = \tan \beta - \frac{\ell_R r}{v \cos \beta}$$

$$\alpha_F = \delta_F - \beta_F$$

$$\alpha_R = \delta_R - \beta_R$$

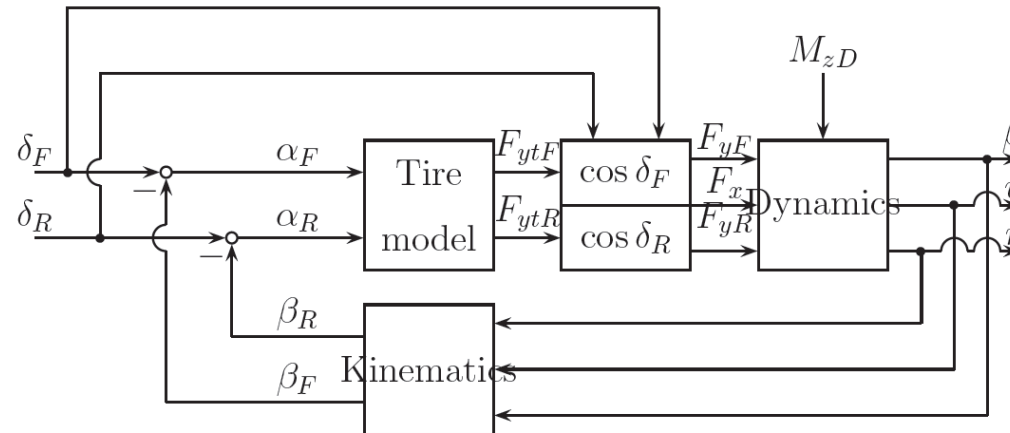


## Esempio



- La nonlinearità più critica è dovuta alla modellazione dei pneumatici, che dipende fortemente dalla sperimentazione:

$$\begin{cases} F_{ytF} = f_F(\alpha_F) \\ F_{ytR} = f_R(\alpha_R) \end{cases}$$



### □ Ipotesi di linearizzazione:

- Velocità costante (ovvero varia + lentamente delle altre variabili)
- Forza Longitudinale trascurabile  $F_x \approx 0$

$$\begin{cases} \dot{v} = 0 \\ v = \cos t. \end{cases}$$

- Angoli di sideslip (derapata) dello chassis sono piccoli  $\cos \beta_i = 1, \forall i = F, R, ()$
- Angoli di steering (sterzata) sono piccoli  $\cos \delta_i = 1, \forall i = F, R$



## Esempio



- Dalle precedenti ipotesi di linearizzazione sugli angoli di sterzata e derapata si ha:

$$\begin{aligned}\beta_F &= \beta + \ell_F r / v & F_{yF} &= F_{yF}(\alpha_F) \\ \beta_R &= \beta - \ell_R r / v & F_{yR} &= F_{yR}(\alpha_R)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} mv(\dot{\beta} + r) \\ J\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{yF}(\alpha_F) + F_{yR}(\alpha_R) \\ F_{yF}(\alpha_F)\ell_F - F_{yR}(\alpha_R)\ell_R + M_{zD} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_F = \delta_F - \beta_F, \alpha_R = \delta_R - \beta_R$$

- **Linearizzazione delle forze agenti sui pneumatici, mediante approssimazione dei dati sperimentali.**

$$F_{yF}(\alpha_F) = \mu c_F \alpha_F$$

$$F_{yR}(\alpha_R) = \mu c_R \alpha_R$$

$\mu$  = coefficiente di frizione

$c_F, c_R$  = rigidezze di curvatura (cornering)



## Esempio



$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{mv}(c_F\alpha_F + c_R\alpha_R) - r \\ \frac{\mu}{J}(c_F\ell_F\alpha_F - c_R\ell_R\alpha_R) + \frac{1}{J}M_{zD} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_F &= \delta_F - \beta_F \\ \alpha_R &= \delta_R - \beta_R \end{aligned}$$

$$\beta_F = \beta + \ell_F r / v$$

$$\beta_R = \beta - \ell_R r / v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{mv}[c_F(\delta_F - \beta - \ell_F r / v) + c_R(\delta_R - \beta + \ell_R r / v)] - r \\ \frac{\mu}{J}[c_F\ell_F(\delta_F - \beta - \ell_F r / v) - c_R\ell_R(\delta_R - \beta + \ell_R r / v)] + M_{zD}/J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_D \end{bmatrix} M_{zD}$$



## Esempio



$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_D \end{bmatrix} M_{zD}$$

$$a_{11} = -\mu(c_R + c_F)/mv$$

$$b_{11} = \mu c_F/mv$$

$$a_{12} = -1 + \mu(c_R \ell_R - c_F \ell_F)/mv^2$$

$$b_{12} = \mu c_R/mv$$

$$a_{21} = \mu(c_R \ell_R - c_F \ell_F)/J$$

$$b_{21} = \mu c_F \ell_F/J$$

$$a_{22} = -\mu(c_R \ell_R^2 + c_F \ell_F^2)/Jv$$

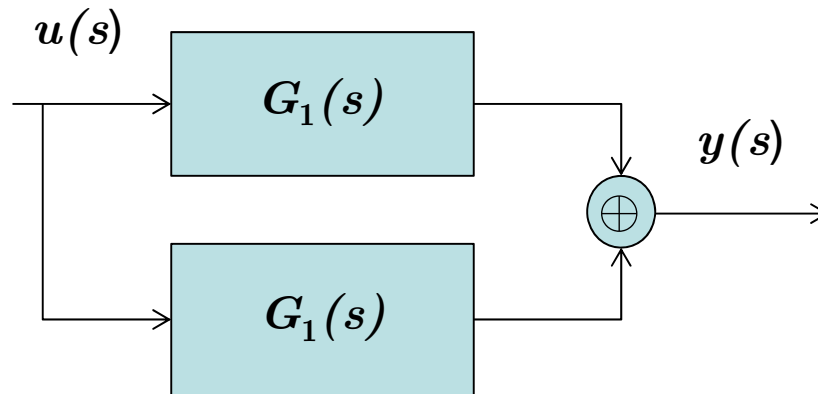
$$b_{22} = -\mu c_R \ell_R/J$$

$$b_D = 1/J$$

□ Determinare se il sistema è controllabile e osservabile nel caso di due o quattro ruote motrici).



## Esempio 2



$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s}$$

$$\mathcal{B} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{C} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- ❑ E' necessario aggiungere 1 sensore ed 1 attuatore, contributo del controllista alla progettazione iniziale dell'impianto



## Commenti



☐ Controllabilità

☐ Osservabilità

☐ Raggiungibilità

☐ Ricostruibilità

☐ Stabilizzabilità

☐ Rivelabilità

### ☐ Teorema della Dualità

$$1. \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$$

$$2. \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ y = B^T z \end{cases}, \quad z_0, \quad z \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$$

- **Controllabilità/Osservabilità del sistema 1. implica Osservabilità/Controllabilità del sistema 2 e viceversa**





## Scomposizioni Canoniche



- ❑ Nello studio dei sistemi lineari è spesso utile avere delle rappresentazioni più comode per l'analisi delle proprietà strutturali, sfruttando l'invarianza dimostrata dai precedenti teoremi.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

- ❑ **Teorema :** Sia dato un sistema non completamente controllabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare  $T = (T_1, T_2)$  tale che le colonne di  $T_1$  formino una base per il sottospazio controllabile di dimensione  $m$  e le colonne di  $T_2$  siano tali da fornire, insieme a quelle di  $T_1$ , una base per  $\mathbb{R}^n$ . Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$x = Tz \Rightarrow z = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} z \end{cases} \quad z = \begin{bmatrix} z_{CO} \\ z_{NC} \end{bmatrix}$$

### ▪ Forma Controllabile Compagna

il sottosistema  $(A_{11}, B_1, C_1)$  di dimensione  $m$  è controllabile ed è detto *sottosistema controllabile* mentre il sottosistema  $(A_{22}, 0, C_2)$  di dimensione  $p = n-m$ , non controllabile, è detto *sottosistema non controllabile*.



## Scomposizioni Canoniche



- **Teorema** : Sia dato un sistema non completamente osservabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare  $T = (T_1, T_2)$  tale che le colonne di  $T_1$  formino una base per il sottospazio osservabile di dimensione  $m$  e le colonne di  $T_2$  siano tali da fornire, insieme a quelle di  $T_1$ , una base per  $\mathbb{R}^n$ . Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$x = Tz \Rightarrow z = T^{-1}x$$

$$z = \begin{bmatrix} z_O & | & z_{NO} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & | & 0 \\ \hline A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & | & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

### ▪ Forma Osservabile Compagna

il sottosistema  $(A_{11}, B_1, C_1)$  di dimensione  $m$  è osservabile ed è detto *sottosistema osservabile* mentre il sottosistema  $(A_{22}, B_2, 0)$  di dimensione  $p = n-m$ , non osservabile, è detto *sottosistema non osservabile*.



## Decomposizione di Kalman



- ❑ La decomposizione di Kalman permette di separare le variabili di stato nei 4 sottospazi strutturali mediante una trasformazione di similitudine:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$$

- ❑ Un sistema lineare stazionario non completamente controllabile e non completamente osservabile, può essere posto, tramite una matrice di trasformazione non singolare  $T_K$ , nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_2 & 0 & \hat{C}_4 \end{bmatrix}$$



## Decomposizione di Kalman



$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{A}_{11} \bar{x}_1(t) + \hat{A}_{12} \bar{x}_2(t) + \hat{A}_{13} \bar{x}_3(t) + \hat{A}_{14} \bar{x}_4(t) + \hat{B}_1 \bar{u}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{A}_{22} \bar{x}_2(t) + \hat{A}_{24} \bar{x}_4(t) + \hat{B}_2 \bar{u}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{A}_{33} \bar{x}_3(t) + \hat{A}_{34} \bar{x}_4(t)$$

Sottosistema Non Osservabile e Non Controllabile

$$\dot{\hat{x}}_4(t) = \hat{A}_{44} \bar{x}_4(t)$$

$$\bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{x}_2(t) + \hat{C}_4 \bar{x}_4(t)$$

- Il dettaglio della scomposizione permette di evidenziare le partizioni del vettore di stato che sono controllabili, non controllabili, osservabili e non osservabili

- Sottosistema Controllabile

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_2 \hat{x}_2(t) \end{array} \right.$$

- Sottosistema Osservabile

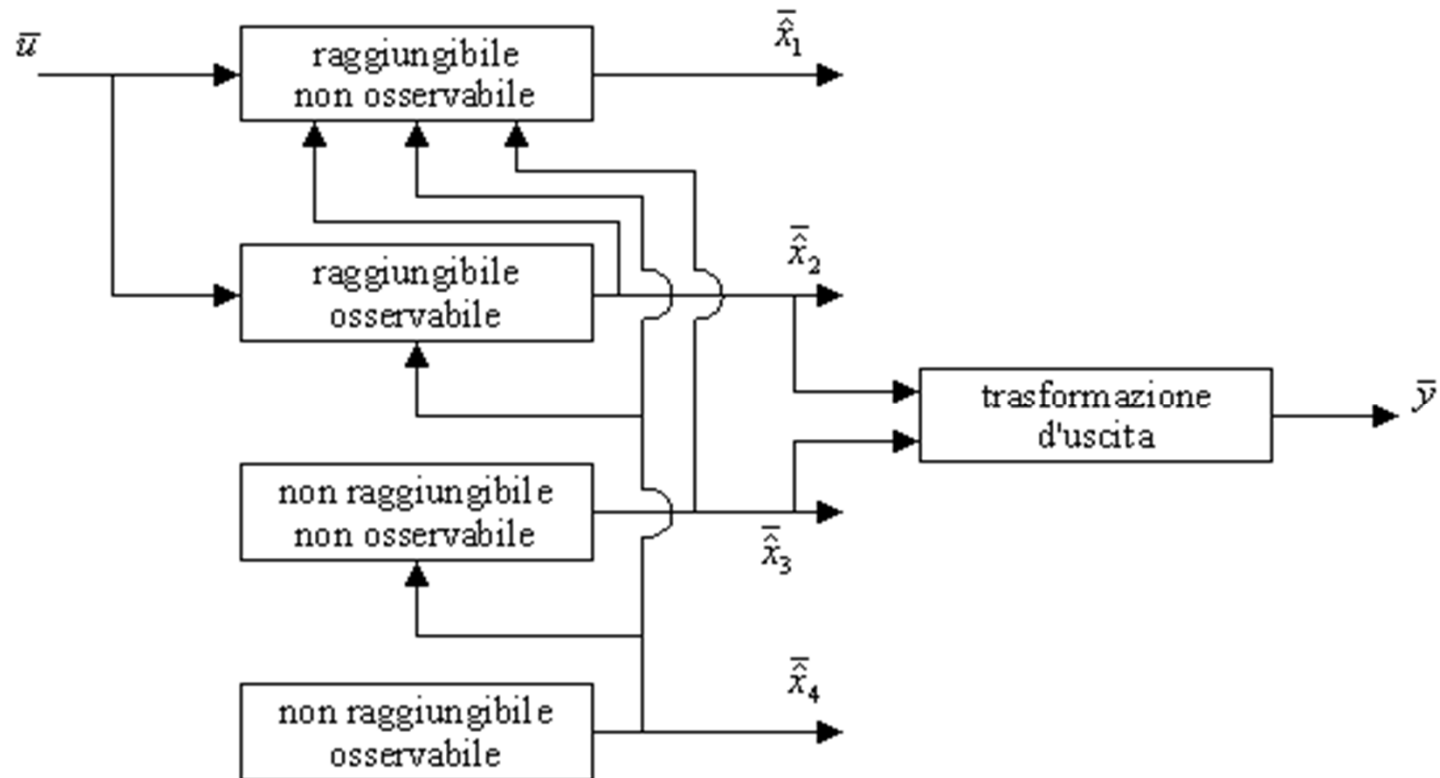
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{A}_{24} \\ 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \hat{C}_2 \hat{x}_2(t) + \hat{C}_4 \hat{x}_4(t) \end{array} \right.$$



## Decomposizione di Kalman

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{A}_{22}\hat{x}_2(t) + \hat{B}_2u(t) \\ y(t) = \hat{C}_2\hat{x}_2(t) \end{cases}$$

- Sottosistema Osservabile e Controllabile





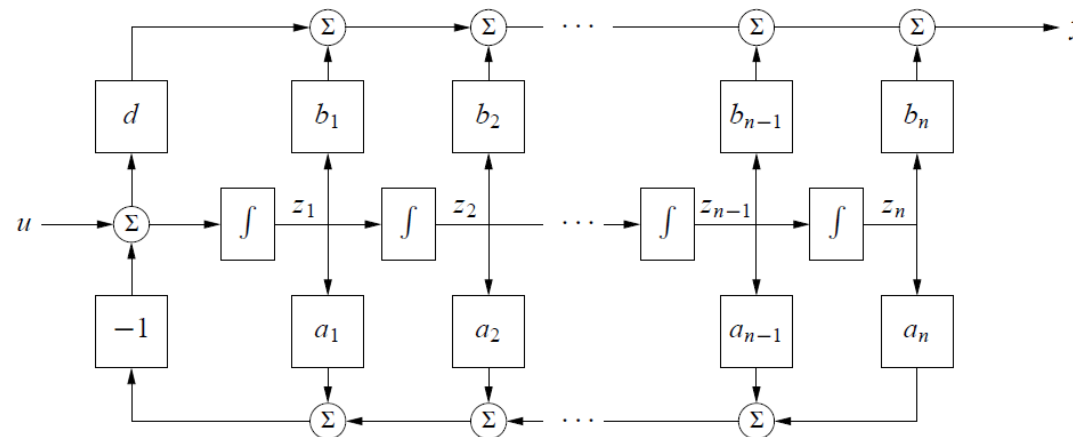
# Scomposizioni Canoniche

## ■ Forma canonica di controllabilità

$$\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow z = Tx \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{b}u; T = \tilde{B}_C^Z (B_C^X)^{-1}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix} z + du.$$





# Scomposizioni Canoniche

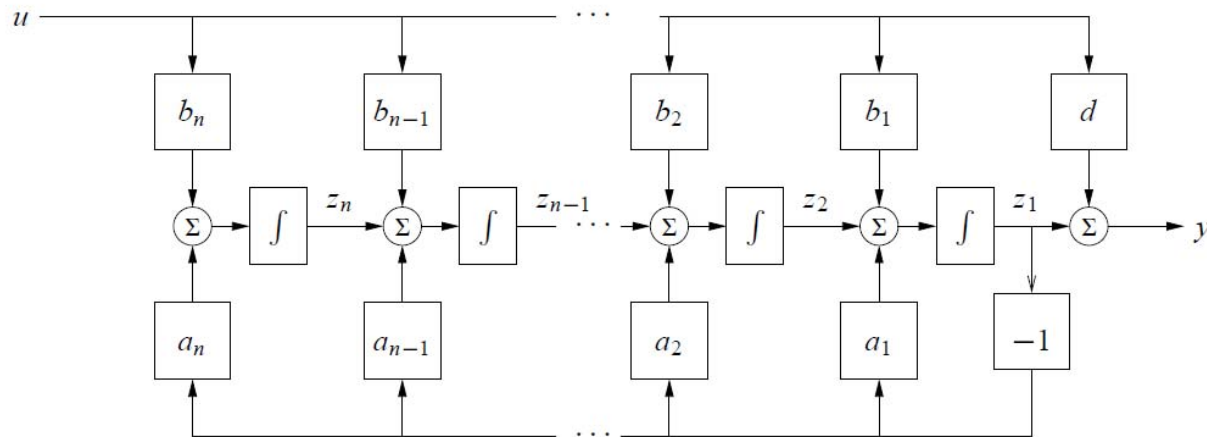


## Forma canonica di osservabilità

$$\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow z = Tx \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{b}u; T = \tilde{C}_C^Z (C_C^X)^{-1}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + Du.$$





## Realizzazioni



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p$$

- La matrice di trasferimento (che lega ingresso e uscita del sistema), è:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

- Teorema :** La matrice di trasferimento è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases} \Rightarrow G'(s)$$

$$\begin{aligned} G'(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1} + T^{-1}B = CT\left[T^{-1}(sI - A)T\right]^{-1} T^{-1}B = \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B = G(s) \end{aligned}$$





## Realizzazioni



- Esaminando la scomposizione di Kalman, si può osservare che nella trasformazione d'uscita l'unico termine collegato all'ingresso è quello dovuto alla parte completamente controllabile e completamente osservabile da cui si deduce che **nella matrice di trasferimento compaiono tutti e soli i poli completamente controllabili e osservabili**. Questo implica la terna:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = \hat{A}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2(t) + \hat{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{C}_2\hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{cases}$$

- **Teorema :** Un sistema è completamente osservabile e controllabile se e solo se nella matrice di trasferimento  $G(s)$  compaiono tutti gli autovalori della matrice  $A$ .
- Per la dimostrazione, consideriamo due esempi in cui la Trasformazione di Base porta ad una Forma Diagonale e ad una Forma di Jordan



# Realizzazioni



## □ Caso #1: Sistema Diagonalizzabile SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \Lambda\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{B}}u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{cases}$$

Essendo  $\mathbf{A}$  diagonale, deve verificarsi che  $b_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = 1, 2$

$$G(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{c_1 b_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2 b_2}{s - \lambda_2}$$

- Lo stesso si può dimostrare valido per sistemi MIMO, dove tutte le colonne della matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  e tutte le righe della matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$  devono essere non nulle



## Realizzazioni



### □ Caso #2: Sistema in Forma di Jordan SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = J\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y = \tilde{C}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{cases}$$

Essendo  $J$  una matrice di Jordan, La FdT diviene:

$$G(s) = \tilde{C}(sI - J)^{-1} \tilde{B} = \frac{c_1 b_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_1 b_2}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_2 b_2}{s - \lambda_1}$$

Affinchè entrambi i poli siano presenti nella FdT, è necessario che sia

$$\begin{cases} c_1 \neq 0 \\ b_2 \neq 0 \end{cases}$$

- In generale, per un sistema MIMO, devono essere quindi non nulle la prima colonna della matrice  $C$  e l'ultima riga della matrice  $B$  associate alla Forma di Jordan



# Realizzazioni



- **Definizione – Realizzazione:** Data una trasformazione lineare ingresso-uscita  $W(s)$ , si definisce **realizzazione** di  $W(s)$  ogni sistema dinamico  $(A, B, C, D)$  tale che la sua matrice di trasferimento coincida con  $W(s)$

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s), W(s) \Rightarrow (A, B, C, D)$$

- **Definizione – Realizzazione minima:** Data una rappresentazione ingresso – uscita, una realizzazione si definisce **minima** se la dimensione del sistema è inferiore o uguale alla dimensione di ogni altra realizzazione (di  $W(s)$ ).

- **Teorema:** Una realizzazione è minima se e solo se è controllabile e osservabile.

- La dimostrazione usa la scomposizione di Kalman per dimostrare che ogni realizzazione non Controllabile ed ogni realizzazione non Osservabile ha dimensioni maggiori di quella dei rispettivi sottosistemi Controllabili ed Osservabili.

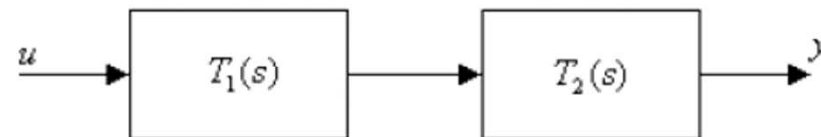


## Sistemi Interconnessi



- La descrizione di un sistema interconnesso attraverso la funzione di trasferimento può essere effettuata solo se si suppone che quel sistema sia completamente controllabile e osservabile; se così non fosse, come visto in precedenza, la funzione di trasferimento non rappresenterebbe tutto il sistema ma solo la sua parte contemporaneamente osservabile e controllabile.

Collegando in cascata due sottosistemi aventi rispettivamente funzioni di trasferimento  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ , si ha che:



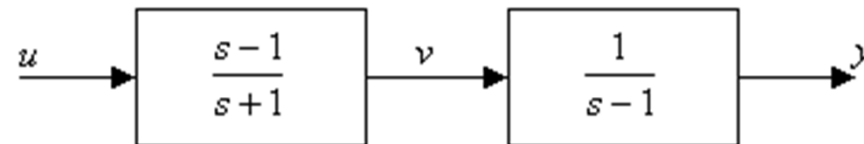
- a) se il prodotto  $T_1(s) \cdot T_2(s)$  non ha cancellazioni il sistema risulta completamente osservabile e controllabile
- b) se si hanno solo cancellazioni del tipo zero-polo (uno zero di  $T_1(s)$  coincide con un polo di  $T_2(s)$ ) il sistema risulta completamente osservabile e non completamente controllabile
- c) se si hanno solo cancellazioni del tipo polo-zero (un polo di  $T_1(s)$  coincide con uno zero di  $T_2(s)$ ) il sistema risulta completamente controllabile e non completamente osservabile
- d) se si hanno cancellazioni di entrambe i tipi, il sistema risulta non controllabile e non osservabile



# Sistemi Interconnessi

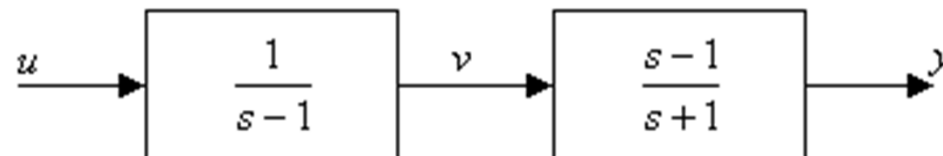


## ❑ Esempio: Cancellazione Zero-Polo



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Non Controllabile}$$
$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Osservabile}$$

## ❑ Esempio: Cancellazione Polo-Zero





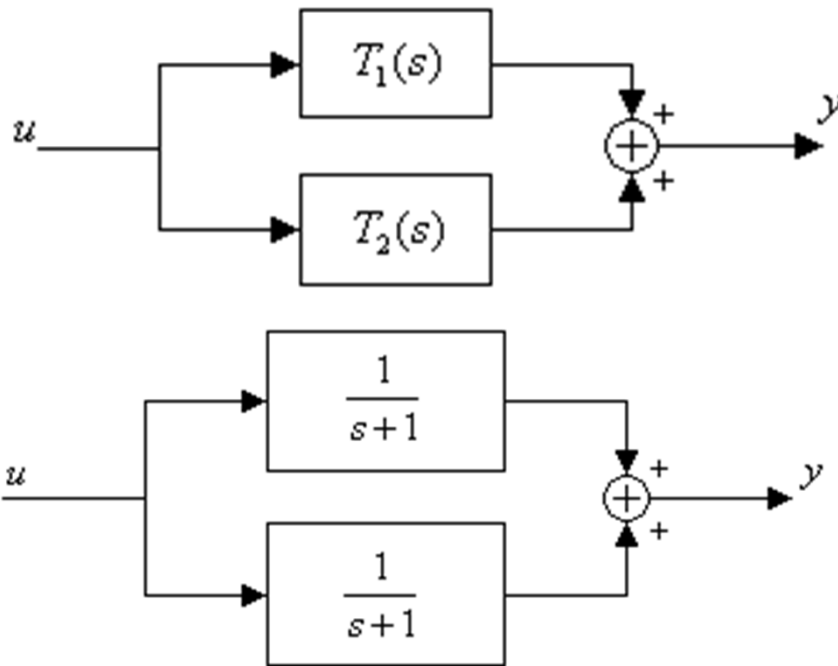
## Sistemi Interconnessi



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$
$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Controllabile

Non Osservabile



□ **Teorema:** Un sistema formato dal parallelo di due sottosistemi è completamente controllabile ed osservabile se e solo se i due sottosistemi non hanno poli in comune

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$



## Sistemi Interconnessi



$$G_u^y(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_u^x(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- In questo caso le matrici di controllabilità ed osservabilità hanno entrambe lo stesso Rango uguale ad 1 ed il sistema risulta non controllabile e non osservabile





# Esempi



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.4 & -1 & 14.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 16 & 3.7 & 0 \\ 0 & 14 & 9 & -27 & 4 \\ 6 & -9 & 48 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 17 & 44 & 0.8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 16 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0.6 & 15 \\ 4 & 13 & 0.01 & 9 & 0 \end{bmatrix} x$$

C =

1.0e+007 \*

0.0000	0	0.0000	0.0000	-0.0000
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	0.0000
-0.0001	0.0005	-0.0001	-0.0008	0.0001
0.0003	0.0000	0.0032	-0.0007	0.0002
0.0000	0.0009	0.0009	-0.0019	0.0003
-0.0041	0.0058	-0.0296	0.0099	-0.0013
-0.0041	0.0522	0.0025	-0.0794	0.0124
-0.0100	0.0308	-0.0616	-0.0101	0.0019
0.0624	-0.4992	0.2220	0.7747	-0.1094
-0.4135	0.8271	-2.8025	0.5914	-0.0596
-0.0316	-0.7348	-0.6567	1.8531	-0.2550

>> rank(C)

ans =

5

B =

1.0e+007 \*

0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0014	0.0037	-0.0203	-0.3628
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0020	0.0101	-0.0004	-0.3306
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	-0.0013	-0.0244	-0.0910	-0.1722
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0048	0.0133	-0.0613	-1.1616
0.0000	0	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0007	0.0056	0.0665	0.2001	0.2595

>> rank(B)

ans =

5



# Sommario



## ❑ Introduzione alle proprietà strutturali

1. Stabilità
2. Controllabilità (Raggiungibilità)
3. Osservabilità

## ❑ **Stabilità:** mantenimento di uno stato di equilibrio in presenza di azioni esterne e/o condizioni iniziali

- Definizioni (stabilità interna e stabilità esterna)
- Relazione tra stabilità ed autovalori della matrice  $A$  nel caso di sistemi LTI, invarianza rispetto a cambi di base
- Teoria della stabilità di Lyapunov: Funzione di Lyapunov, equazione di Lyapunov e relazione con gli autovalori di  $A$  per sistemi LTI
- Stabilità mediante analisi dei poli della FdT
- Criterio di Routh - Hurwitz



# Sommario



□ **Controllabilità:** capacità di gestire il vettore di stato in tutto il proprio sottospazio in un tempo limitato, con ingresso limitato

- Definizioni di controllabilità, raggiungibilità e stabilizzabilità
- Teoremi costitutivi, test PBH e matrice di controllabilità
- Invarianza rispetto a cambi di base. Forme compagne
- Relazione con il numero minimo di attuatori linearmente indipendenti

□ **Osservabilità:** capacità di ricostruzione del vettore di stato dal vettore di uscita

- Definizioni di osservabilità e rivelabilità
- Teoremi costitutivi, test PBH e matrice di osservabilità, teorema della dualità
- Invarianza rispetto a cambi di base. Forme compagne
- Relazione con il numero minimo di sensori linearmente indipendenti



# Sommario



## □ Realizzazioni:

- Decomposizione di Kalman nei 4 sottospazi costitutivi
- Realizzazioni e realizzazione minima
- Relazione tra controllabilità, osservabilità e dimensione della matrice di trasferimento
- Effetto di cancellazioni sulle proprietà strutturali
- Requisito affinché i poli della matrice di trasferimento siano tutti gli autovalori della matrice  $A$ .