Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{3, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

	capacità di peso (tonn)	capacità di spazio (m^3)
A	22	6000
B	16	8500
C	12	5000

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

	peso (tonn)	volume occupato ($m^3/tonn$)
P1	20	200
P2	15	300
P3	12	250

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 350 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

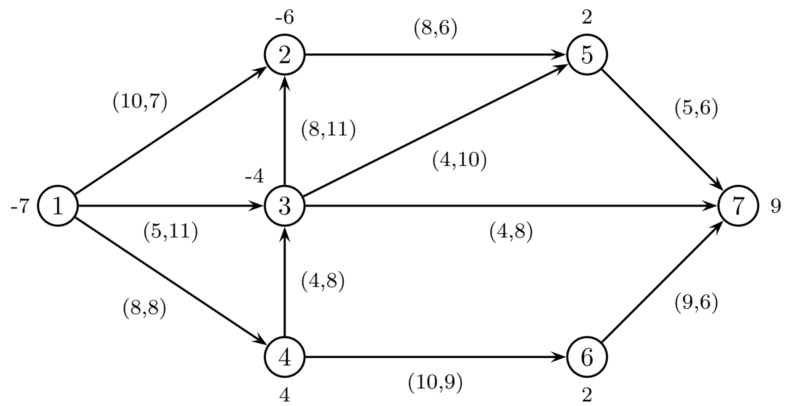
```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

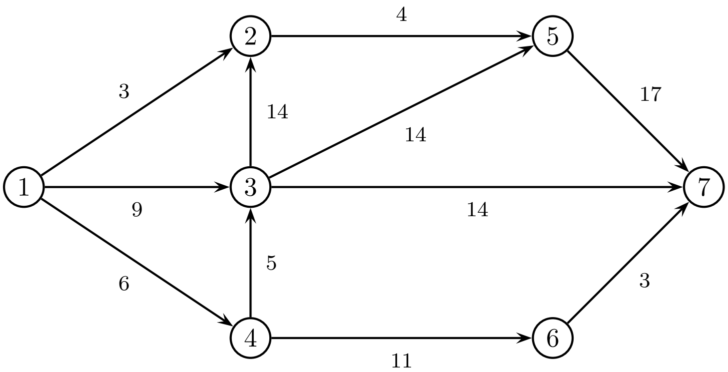


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,3)	$x =$		
(1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

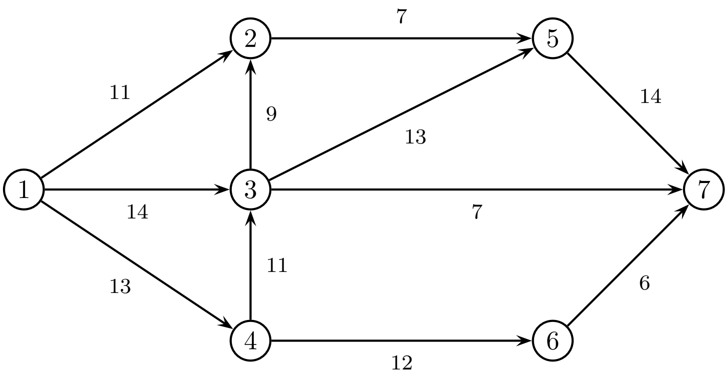
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,3) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \\ 15\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \geq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	22	51	21
2		13	52	25
3			10	29
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\, 2\}$	$x = (1,\ 3)$	SI	NO
$\{3,\, 6\}$	$y = (0,\ 0,\ -43,\ 0,\ 0,\ 26)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\, 4\}$	$(2,\ 0)$	$\left(0,\ \frac{5}{2},\ 0,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ 0\right)$	4	6	1
2° iterazione	$\{1,\, 2\}$	$(1,\ 3)$	$\left(\frac{11}{6},\ -\frac{7}{6},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	2	$\frac{342}{11},\ 18,\ \frac{666}{19}$	5

Esercizio 3.

variabili decisionali	modello
$x_{i,j}$ = tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C	$\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +350\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 15 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 22 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 16 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 12 \\ 200\ x_{1A} + 300\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \leq 6000 \\ 200\ x_{1B} + 300\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \leq 8500 \\ 200\ x_{1C} + 300\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \leq 5000 \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$

```
c = -[ 300; 300; 300;350; 350; 350; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 300 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 300 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 300 0 0 250]
```

```
b = [ 20; 15; 12; 22; 16; 12;6000; 8500; 5000]
```

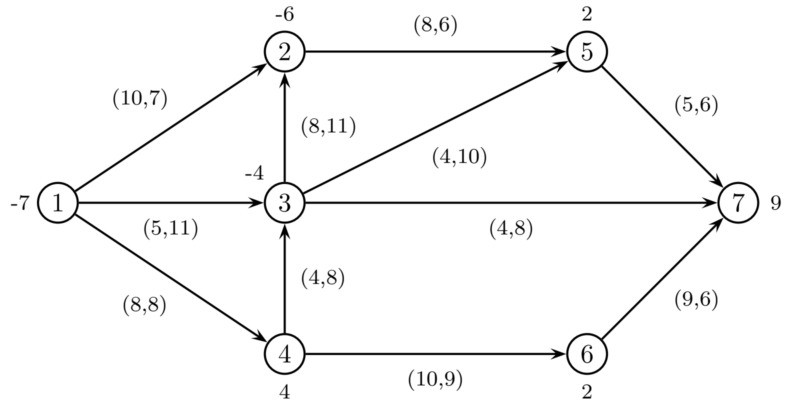
```
Aeq = []
```

```
beq = []
```

```
lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
ub = []
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

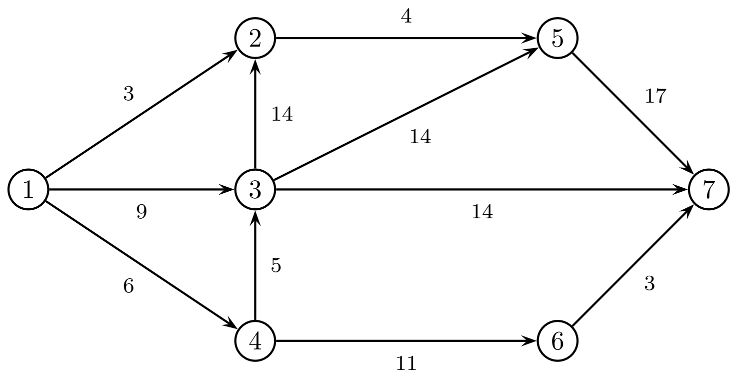


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,3)	$x = (-4,\ 11,\ 0,\ 2,\ 0,\ 11,\ 0,\ -4,\ 0,\ 11,\ -2)$	NO	NO
(1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3)	$\pi = (0,\ 14,\ 23,\ 8,\ 22,\ 18,\ 27)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

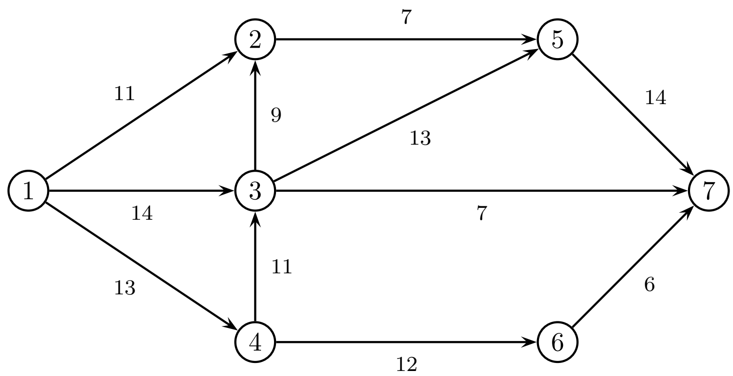
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,3) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(0, 0, 7, 6, 0, 2, 3, 1, 2, 6, 0)	(0, 1, 6, 6, 0, 2, 3, 0, 2, 6, 0)
π	(0, 8, 12, 8, 16, 18, 16)	(0, 1, 5, 8, 9, 18, 9)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 1	5 , 2
Arco uscente	(4,3)	(3,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		5		3		6		7	
nodo 2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 3	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2	7	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	5	23	3	20	6	20	6
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		3, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 7, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 7, 0)	14
1 - 3 - 5 - 7	7	(7, 14, 0, 7, 0, 7, 7, 0, 0, 14, 0)	21
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 14, 6, 7, 0, 7, 7, 0, 6, 14, 6)	27

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \\ 15\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \geq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$ $v_I(P) = 27$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 5)$ $v_S(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $14\,x_1 + 13\,x_2 \geq 59$

$r = 4$ $4\,x_1 + 3\,x_2 \geq 14$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	22	51	21
2		13	52	25
3			10	29
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (2 , 5) (3 , 4) $v_I(P) = 91$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 – 5 – 4 – 3 – 2 $v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.