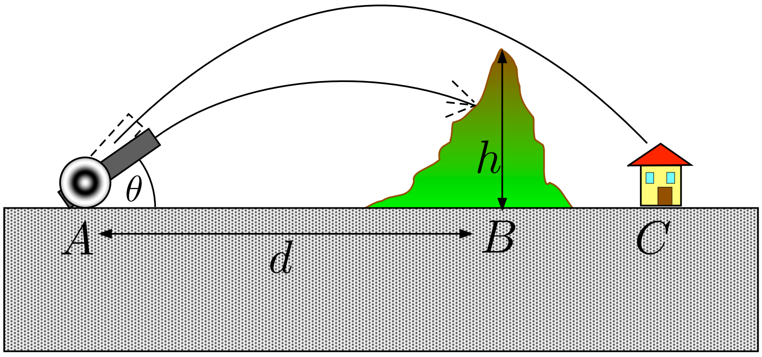
Esercizio

Con un cannone situato in A si tenta di colpire la costruzione posta in C, situata dietro una collina che raggiunge un'altezza massima $h = 500\,\mathrm{m}$ in corrispondenza del punto B alla base. La distanza tra A e B è $d = 5\,\mathrm{Km}$, il modulo della velocità di lancio del proiettile è $v_0 = \sqrt{10\,g\,d/9}$, mentre l'angolo θ d'inclinazione del cannone può essere variato a piacere. Si calcoli il valore massimo d^* che la distanza BC può assumere affinché la costruzione C non possa essere colpita dal proiettile (si trascuri la resistenza dell'aria).



SOLUZIONE

DATI NOTI
$v_0 = |\vec{v}_0| = \sqrt{10\, g\, d/9}$
$d = 5000\,\mathrm{m}$
$h = 500\,\mathrm{m}$

- Consideriamo una traiettoria che parte dal cannone A, in cui poniamo per comodità l'origine. L'equazione della traiettoria $A \to C$ si ottiene facilmente dalle leggi orarie del moto

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x(t) & = & v_0 \cos\theta\, t & \text{(moto rettilineo uniforme lungo } x) \\ \\ y(t) & = & v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{(moto uniformemente accelerato lungo } y) \end{array} \right. \tag{1}$$

Dalla prima equazione (1) ricaviamo $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ e, sostituendo nella seconda equazione, otteniamo l'equazione parabolica della traiettoria in termini dell'angolo θ e della velocità iniziale di lancio v_0.

$$y(x) = x \tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \tag{2}$$

- Imponiamo ora le due condizioni

1. La traiettoria caratterizzata dalla distanza massima d^* deve sfiorare la sommità della collina

$$\begin{array}{rcl} y(x = d) & = & h \\ & \Downarrow & \\ d \tan\theta - \dfrac{g\, d^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} & = & h \\ \text{[moltiplico per } 2 v_0^2 \cos^2\theta] & & \\ & \Downarrow & \\ g\, d^2 - 2 d v_0^2 \cos\theta \sin\theta + 2 h v_0^2 \cos^2\theta & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

2. Gittata totale. Utilizzando la formula per la gittata abbiamo

$$\begin{array}{rcl} d + d^* & = & \dfrac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \\ & \Downarrow & \\ g(d + d^*) & = & 2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta \end{array} \tag{4}$$

Sostituendo la (4) nella (3), e mantenendo la (4) otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} g\, d^*\, d = 2 h v_0^2 \cos^2\theta \\ \\ g(d + d^*) = 2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta \end{array} \right. \tag{5}$$

Utilizzando ora il dato $v_0 = \sqrt{10\, g\, d/9}$, e dividendo entrambe le equazioni per g, otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} d^* = \frac{20}{9} h \cos^2\theta \\ \\ d + d^* = \frac{20}{9} d \cos\theta \sin\theta \end{array} \right. \tag{6}$$

che è un sistema di due equazioni nelle due incognite θ e d^*, in termini dei dati noti d e h.

- Risolviamo il sistema di equazioni. Per determinare d^*, dobbiamo eliminare θ. A tale scopo, ricaviamo $\cos^2\theta$ dalla prima ed eleviamo al quadrato la seconda equazione (6), utilizzando $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$\begin{cases} \cos^2\theta = \frac{9}{20}\frac{d^*}{h} \\ \\ (d^*+d)^2 = \frac{20^2}{9^2} d^2 \cos^2\theta(1-\cos^2\theta) \end{cases} \tag{7}$$

Sostituendo ora la prima equazione di (7) nella seconda, otteniamo un'equazione per d^*

$$\begin{aligned} (d^*+d)^2 &= \frac{20^2}{9^2}d^2\,\frac{9}{20}\frac{d^*}{h}(1-\frac{9}{20}\frac{d^*}{h}) \\ (d^*+d)^2 &= \frac{20^2}{9^2}d^2\;9d^*\,\frac{20h-9d^*}{20^2h^2} \\ d^{*2}+d^2+2d^*\,d &= \frac{d^2\,d^*}{9h^2}\,(20h-9d^*) \end{aligned}$$

ossia

$$(1+\frac{d^2}{h^2})d^{*2} - 2d^*\,d(\frac{10d}{h}-1)+d^2 = 0 \tag{8}$$

le cui soluzioni sono

$$d^*_{1,2} = \frac{d\,(\frac{10\,d}{9h}-1) \pm \sqrt{d^2\,(\frac{10\,d}{9h}-1)^2 - d^2(1+\frac{d^2}{h^2})}}{1+\frac{d^2}{h^2}} \tag{9}$$

Raccogliendo d

$$d^*_{1,2} = d\,\frac{(\frac{10}{9}\frac{d}{h}-1) \pm \sqrt{(\frac{10\,d}{9h}-1)^2 - (1+\frac{d^2}{h^2})}}{1+\frac{d^2}{h^2}} \tag{10}$$

e sfruttando il fatto che dai dati noti $d/h = 10$, otteniamo

$$\begin{cases} d^*_1 = 556\,\mathrm{m} \\ \\ d^*_2 = 446\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{11}$$

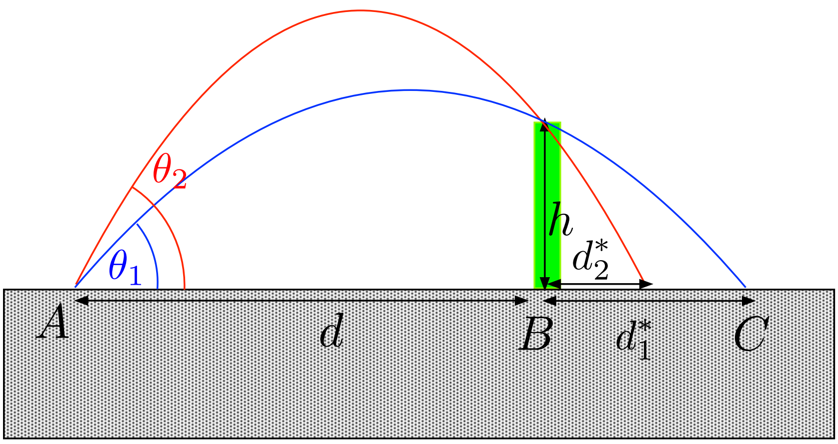


Figure 1: Le due soluzioni corrispondono alle due possibili traiettorie che passano per la sommità della collina.

I due angoli possibili di lancio sono dati dalla formula [vedi la prima delle Eq.(7)]

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{9}{20} \frac{d^*}{h}} \tag{12}$$

e valgono rispettivamente

$$\begin{cases} \theta_1 &= \pi/4 \simeq 0.785 \\ \\ \theta_2 &= 0.886 \end{cases} \tag{13}$$

Le due soluzioni corrispondono alle due possibili traiettorie che passano per la sommità della collina a valore fissato del modulo v_0 della velocità di lancio, come mostrato in Fig.1. La distanza di sicurezza che cerchiamo è la più piccola tra le soluzioni (11), ossia $d_2^* = 446\,\mathrm{m}$. Se dunque la costruzione è situata ad una distanza $d = BC$ inferiore a d_2^*, non può essere colpita dal cannone.