ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 50

Note Title 04/12/2018

Def. Un prodotto scalare si dice definito positivo se $\langle x, x\rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$.
Questo equivale a dire che la forma quadratica associata è definita positiva

Oss. Se ho la matrice in una qualunque base, allora basta calcolare la segnatura.

Componenti di un vettore

Sia $\langle v, w\rangle$ un prodotto scalare definito positivo in uno spazio vettoriale V.
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale rispetto a questo prodotto.
Dato un qualunque $v \in V$, come calcolo le componenti di v rispetto alla base?

Uso il prodotto scalare!

$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

Calcolo

$\langle v, v_i\rangle = c_1 \langle v_1, v_i\rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i\rangle$

$= c_i \langle v_i, v_i\rangle$ (gli altri sono tutti nulli)

Quindi $\boxed{c_i = \dfrac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}}$

(stessa formula, solo con un prod. scalare strano)
(def. pos. assicura che non ci saranno mai zeri al denominatore)

Applicazione simmetriche risp. prod. scalare strano

Sia V sp. vett., sia $\langle v, w \rangle$ prod. scalare, sia $f: V \to V$ lineare.

Si dice che f è simmetrica se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle} \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

f migra nei prodotti scalari

Cosa vuol dire in termini di matrici

- Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base qualunque di V
- Sia A la matrice che rappresenta f in questa base
- Sia B " " " " il prod. scalare "

$v \rightsquigarrow$ componenti x

$w \rightsquigarrow$ componenti y

$f(v) \rightsquigarrow$ " Ax

$f(w) \rightsquigarrow$ " Ay

$$\langle f(v), w \rangle = y^t B A x \qquad \langle v, f(w) \rangle = (Ay)^t B x = y^t A^t B x$$

Conclusione: f è simmetrica se e solo se

$$\boxed{BA = A^t B}$$

Caso speciale: Se la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale, allora $B = Id$ e quindi la matrice che rappresenta A risolve $A = A^t$, cioè è una matrice simmetrica.

$\boxed{\text{Teorema B-spettrale}}$ (Versione applicazioni)

Sia $f: V \to V$ un' applic. lineare simmetrica rispetto ad un prod. scalare "strano" definito positivo.
Allora esiste una base ortonormale (risp. al prod. "strano") costituita da autovettori di f.

$\boxed{\text{Teorema B-spettrale}}$ (Versione matrici)

Sia B una matrice simmetrica definita positiva
(il prod. scalare)
Sia A una matrice tale che (l'applic. lineare)

$$BA = A^t B$$

Allora esiste una matrice M invertibile tale che

$$M^{-1} A M = D \text{ diagonale}$$

$$M^t B M = Id$$

(è come dire che le colonne di M sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di matrice B)

Oss. La M in questione fa 2 cose contemporaneamente
- diagonalizza la A per similitudine
- sylvestrizza la B per congruenza

Oss. Quando si mette $B = Id$, si ritrova esattamente il teo. spettrale classico. In particolare la 2ª relazione diventa

$$M^t M = Id,$$

cioè M = matrice ortogonale.

<u>Esercizio</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = B$

① Calcolare la segnatura al variare di a.

Sylvester 1-2-3: $Det_{1\times 1} = 1$
$Det_{2\times 2} = -2$
$Det_{3\times 3} = 2 - a^2$

- Se $2-a^2>0$, cioè $a^2<2$, cioè $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$, allora $+ \, \vdots \, + \, - \, +$ quindi segnatura $+--$
  P V V
- Se $2-a^2<0$, cioè $|a|>\sqrt{2}$, allora $+ \, \vdots \, + \, - \, -$
  P V P
  e quindi segnatura $++-$
- Se $2-a^2=0$, allora segnatura $+-0$
  (un autovalore nullo almeno c'è
  una direz. di positività c'è : Span(e_1) : $n_+ \geq 1$
  " " " negatività " : Span(e_2) : $n_- \geq 1$)

<u>Oss.</u> Se sulla diagonale compare un numero ≤ 0, allora la forma NON può essere def. positiva

② Sylvestrizzare la matrice nel caso $a=1$.
Vogliamo trovare M invertibile t.c.

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Devo trovare v_1, v_2, v_3 t.c. siano B-ortogonali e
$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$, $\langle v_2, v_2 \rangle_B = \langle v_3, v_3 \rangle_B = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Scelgo v_1 t.c. $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$, ad esempio $v_1 = (1,0,0)$
- v_2 e v_3 li cerco nel B-ortogonale di v_1, cioè

$$(x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= x + z = 0$$

Nota bene: $x+z=0$ è il piano costituito da tutti i vettori che sono B-ortogonali a $(1,0,0)$

- Prendo una base del piano, ad esempio $(1,0,-1)$, $(0,1,0)$
- Ne salvo uno, ponendo $v_2 = (0,1,0)$ e calcolo il 3° o modificando quello che ho con GS oppure imponendo che sia B-ortogonale pure a v_2

$$(x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2y + z$$

Quindi per trovare v_3 risolvo
$$\begin{cases} -2y + z = 0 & \rightarrow \perp \text{ a } v_2 \\ x + z = 0 & \rightarrow \perp \text{ a } v_1 \end{cases}$$

Risolvendo trovo $v_3 = (2, 1, -2)$

- Ora v_1, v_2, v_3 sono base ortogonale. Come la rendo Sylvestrizzante?

$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$ $\qquad$ $\langle v_2, v_2 \rangle_B = -2$

$\langle v_3, v_3 \rangle_B = -$ q.c. (che si calcola con la matrice)

Per concludere poniamo

$$\hat{v}_1 = v_1$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{in modo} \qquad \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = -1$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\sqrt{q.c.}} \qquad \text{''} \qquad \langle \hat{v}_3, \hat{v}_3 \rangle = -1$$

Se uso $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ come colonne di una matrice M deve accadere che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— o — o —