ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 56

Note Title 14/12/2018

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE DELLO SPAZIO

<u>Domanda</u>: come sono fatte "geometricamente" tutte le

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice 3×3 ortogonale

Conviene guardare all'insieme dei p.ti fissi, cioè le soluzioni del sistema $f(x) = x$, cioè $Ax + b = x$, cioè

$$(A - Id)\,x = -b$$

(sistema lineare di 3 equ. in 3 incognite)

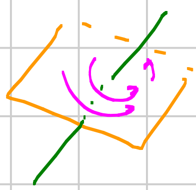
Ci sono varie possibilità.

1. L'insieme dei p.ti fissi ha dim 3, cioè è tutto $\mathbb{R}^3$. In questo caso $f(x) = x$ (identità), cioè $A = Id$ e $b = 0$

2. L'insieme dei p.ti fissi ha dim 2, cioè è un piano. Allora $f(x)$ è la simmetria risp. a questo piano.

3. L'insieme dei p.ti fissi ha dim 1, cioè una retta. Allora $f(x)$ è una rotazione intorno a questa retta.

4. Esiste un unico p.to fisso. Allora f è una rotazione intorno ad una retta seguita da una simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta



5. Non ci sono p.ti fissi.
   Da qui si aprono 3 sotto-casi

$\boxed{5.1}$ $f(x)$ è una traslazione

$\boxed{5.2}$ $f(x)$ è una simmetria rispetto ad un piano, seguita da una traslazione di un vettore b parallelo al piano

$\boxed{5.3}$ $f(x)$ è una rotazione rispetto ad un asse, seguita da una traslazione in direzione parallela all'asse stesso.

Domande: ① data una descrizione geometria, scrivere l'espressione analitica della trasformazione

② data una trasf. espressa mediante equazioni, capire di cosa si tratta geometricamente

Risposta a ②: avuta la trasf. nella forma $Ax+b$

→ calcolo l'insieme dei p.ti fissi

→ vedo in quali casi mi trovo.

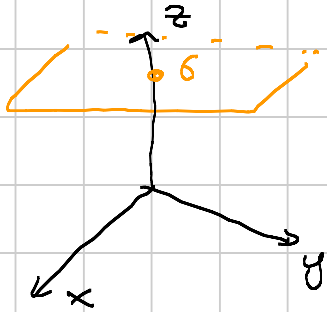
Se mi trovo nel caso senza p.ti fissi, per decidere tra 5.1, 5.2, 5.3 guardo la matrice A. Questa avrà per forza l'autovalore $\lambda = 1$ (perchè $A - Id$ non è invertibile, altrimenti avrei almeno un p.to fisso). Guardo la $mg(1)$ e allora

- se $mg(1) = 3$ (cioè $A = Id$) siamo nel 5.1
- se $mg(1) = 2$ siamo nel 5.2
- se $mg(1) = 1$ siamo nel 5.3

Risposta a ①: si cerca di portare il pbm. nell'origine dove lo sappiamo studiare.

— o — o —

Esempio Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano $z=6$



$P_0 = (0,0,6)$ (potrei prendere anche $(5,-2,6)$)
e seguo lo schema

$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow$ simmetrizzo $\rightsquigarrow$ aggiungo nuovamente P_0

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x,y,z-6)$ (equivale a spostare l'origine in $(0,0,6)$)

Adesso faccio simmetria rispetto al piano xy, cambiando il segno alla 3^a coordinata

$(x,y,z-6) \rightsquigarrow (x,y,6-z)$

Aggiungo $P_0 \rightsquigarrow (x,y,12-z)$.

Conclusione: la trasformazione è

$$\boxed{(x,y,z) \rightarrow (x,y,12-z)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}_{b}$$

Piccola verifica: calcolo l'insieme dei p.ti fissi

$(x,y,12-z) = (x,y,z)$ $\quad$ x libero
$f(x) = x$ $\quad$ y libero
$12-z=z \rightsquigarrow z=6$

— o — o —

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto al piano $x=3$

Con conti analoghi ai precedenti troviamo

$$(x,y,z) \rightsquigarrow (6-x, y, z)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Esempio 3 Cosa succede se faccio prima la simmetria rispetto a $z=6$ e poi la simmetria rispetto a $x=3$?

Componendo $f(x) = A_1 x + b_1$ e $g(x) = A_2 x + b_2$ otteniamo

$$g(f(x)) = A_2(A_1 x + b_1) + b_2 = \underbrace{A_2 A_1}_{A_3} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{b_3}$$

Se A_1 e A_2 corrispondono a simm., hanno Det $=-1$. Allora A_3 ha Det $+1$, quindi non può essere una simmetria

Oss. Le matrici ortogonali hanno Det $= \pm 1$.
Nella classificazione precedente

- hanno Det $=1$ i casi $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5.1}$, $\boxed{5.3}$
- hanno Det $=-1$ i casi $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5.2}$

Se compongo 2 simmetrie, posso finire solo nei casi 1, 3, 5.1, 5.3.
Nel caso descritto sopra è venuta una rotazione, perché a rimanere fissa è tutta la retta di eq. cartesiane $z=6$, $x=3$, che in parametrica è

$$(3,0,6) + t(0,1,0)$$

L'espressione analitica della composizione è

$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y,12-z) \longrightarrow (6-x,y,12-z)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rotazione di} \\ 180^\circ \text{ intorno all'asse } y}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio 4</u> Scrivere l'espressione della simmetria rispetto al piano

$$2x+3y-z=5$$

Prendo $P_0 \in$ piano, ad esempio $P_0=(1,1,0)$ e al solito

$$\underset{P}{(x,y,z)} \rightarrow \underset{P-P_0}{(x-1,y-1,z)}$$ ⇝ devo fare simmetria risp. al piano $2x+3y-z=0$

⇝ poi aggiungo di nuovo P_0

Come si scrive simm. risp. piano $2x+3y-z=0$?
Considero la base di $\mathbb{R}^3$ data da

$$\underbrace{\underset{v_1}{(1,0,2)} \qquad \underset{v_2}{(0,1,3)}}_{\text{base del piano}} \qquad \underset{\substack{v_3 \\ \text{(perp. al piano)}}}{(2,3,-1)}$$

La matrice che rappresenta la simmetria è data dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{nella base } v_1,v_2,v_3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{dalla canonica alla } v_1,v_2,v_3} = A$$

Alla fine farò

$$A\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(P-P_0)+P_0$$

Oss. Se invece di usare $\{v_1, v_2, v_3\}$ usavo una base ortonormale (con v_1 e v_2 $\in$ piano e $v_3 \perp$ al piano) il calcolo dell'inversa diventa molto più semplice, perché bastava fare la trasposta.
Anche se la base era solo ortogonale il calcolo era comunque + semplice (vedi lez. su basi ortogonali).

— o — o —