Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un'asta omogenea di lunghezza L = 107.4 m e massa m = 248 kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa m_1= 62 kg e m_2= 31 kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente v_1 = 8 ms^{-1} e v_2 = 16 ms^{-1} in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze d_1 = 17.9 m e d_2 = 35.8 m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- ∘ Energia del sistema, E
- ∘ quantità di moto del sistema, $\overrightarrow{P}$
- ∘ momento angolare con polo nel centro dell'asta, $\overrightarrow{L}^o$

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne, ed il sistema non vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato), e in quanto la forza peso e la reazione vincolare, che giacciono sulla stessa retta di applicazione, sono in modulo uguali e hanno verso opposto, dando contributo nullo al momento delle forze.

2.a Calcolare la posizione $\overrightarrow{R}_{cm}$ e la velocità $\overrightarrow{v}_{cm}$ del centro di massa dopo l'urto

$$\overrightarrow{R}_{cm}= \quad (0,0,0) \text{ m} \qquad \qquad \overrightarrow{v}_{cm}= \quad (0,0,0) \text{ m/s}$$

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, $\overrightarrow{L}$

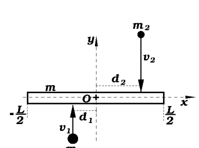
$$\overrightarrow{L}=\text{-}2.66\times 10^4 \ \hat{z} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$$K=1190 \text{ J}$$

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$$E_{rot}=1190 \text{ J}$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESCERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ mΩ è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\overrightarrow{B}_0 = (0\ ;0\ ;\ 7)$ T per $(-\infty \leq x \leq 0\ ;\ y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \leq \infty\ ;\ y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\overrightarrow{v}_0 = v_0\hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s.
Si trascuri l'induttanza della spira.

1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione x del lato a destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\overrightarrow{B}, x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$\phi(\overrightarrow{B}, x) = \begin{cases} B_0 ab & x \leq 0 \\ B_0 a(b-x) & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

$\phi(\overrightarrow{B}, x) =$ 2.24 $\times 10^{-2}$ wb per $-\infty \leq x \leq 0$ e $\phi(\overrightarrow{B}, x) = ($ 2.24 $\times 10^{-2}$ - 2.8 $\times 10^{-1}$ $x)$ wb per $0 < x \leq b$

1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione x del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$i(x)=$ 10.26 A per $0 < x < b$

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

2.a Calcolare la forza esterna $\overrightarrow{F}$ che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

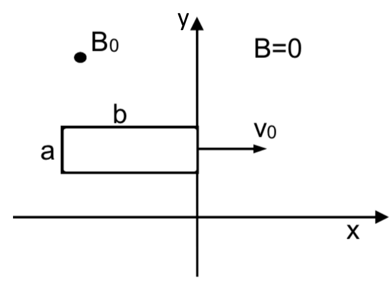
$$\overrightarrow{F} = 2.87 \times 10^{-1}\hat{x}\ N$$

3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

L=0.23 J

3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss}.

E_{Diss}=0.23 J



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1 = 62$ kg e $m_2 = 31$ kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8\ \mathrm{ms}^{-1}$ e $v_2 = 16\ \mathrm{ms}^{-1}$ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- Energia del sistema, E
- quantità di moto del sistema, $\vec{P}$
- momento angolare con polo nel centro dell'asta, $\vec{L}^{o}$

2.a Calcolare la posizione $\vec{R}_{cm}$ e la velocità $\vec{v}_{cm}$ del centro di massa dopo l'urto

$\vec{R}_{cm}=$ .... $\vec{v}_{cm}=$ ....

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, $\vec{L}$

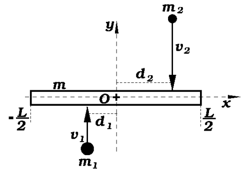
$\vec{L} =$ ....

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$K =$ ....

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$E_{rot} =$ ....



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ mΩ è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\overrightarrow{B}_0 = (0\ ; 0\ ;\ 7)$ T per $(-\infty \leq x \leq 0\ ;\ y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \leq \infty\ ;\ y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\overrightarrow{v}_0 = v_0\hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s.

Si trascuri l'induttanza della spira.

1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione x del lato a destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\overrightarrow{B}, x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$\phi(\overrightarrow{B}, x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione x del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$i(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Calcolare la forza esterna $\overrightarrow{F}$ che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

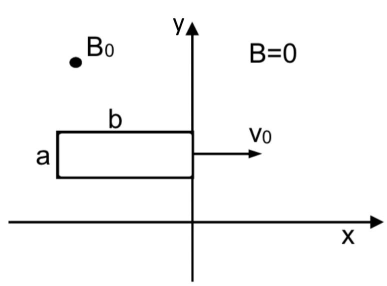
$$\overrightarrow{F} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

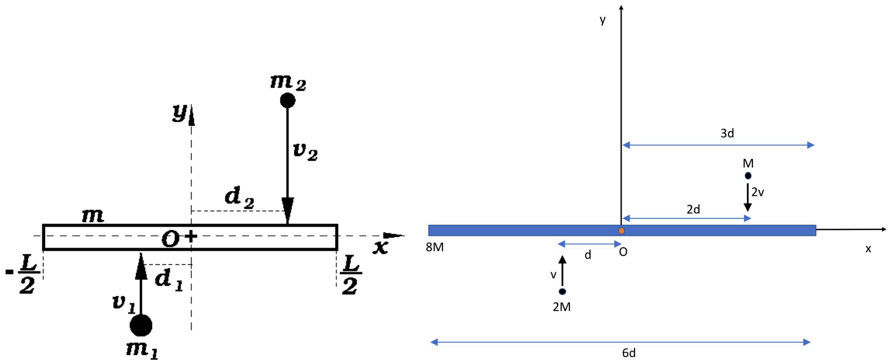
3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss}.

$$E_{Diss} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne, ed il sistema non vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato), e in quanto la forza peso e la reazione vincolare, che giacciono sulla stessa retta di applicazione, sono in modulo uguali e hanno verso opposto, dando contributo nullo al momento delle forze.
Domanda.2
Notiamo che: $m = 8m_2 = 8M$, $m_1 = 2m_2 = 2M$, $d_2 = 2d_1 = 2d$ e $v_2 = 2v_1 = 2v$ Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = m + m_1 + m_2 = 8M + 2M + M$ la massa del sistema, per la posizione del centro di massa otteniamo:

$$x_{cm} = \frac{m(0) + (m_1)(-d_1) + m_2(d_2)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Ovviamente, si ottiene lo stesso risultato se usiamo le espressioni delle masse e delle distanze in funzione di d e M

$$x_{cm} = \frac{8M(0) + (2M)(-d) + M(2d)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O:

$$\overrightarrow{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Dalla conservazione della quantità di moto del sistema, $\overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{P}_f$, otteniamo per le tre componenti:

$$\begin{cases} 0 = m_{tot} v_{cm}^x = 0 \\ m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_{tot} v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot} v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Oppure vedi fig.b usando M e v:

$$\begin{cases} 0 = m_{tot} v_{cm}^x = 0 \\ (2M)v - M(2v) = m_{tot} v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot} v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Per cui:

$$\overrightarrow{v}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = M + 2M + 8M$ la massa del sistema vale :

$$x_{cm} = \frac{M(2d) + (2M)(-d) + 8M(0)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O e con la posizione del centro di massa prima dell'urto:

$$\overrightarrow{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Come era prevedibile dalla conservazione della quantità di moto, dalla conservazione della velocità del cm e dal fatto che quest'ultima è nulla.

Dalla conservazione del momento angolare $\overrightarrow{L}_i^o = \overrightarrow{L}_f^o$ si ottiene:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = \overrightarrow{L}$$

ma anche usando M, v e d:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(M(2v)(2d) + (2M)vd\right)\hat{z} = -6Mvd\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = \overrightarrow{L}$$

Domanda.3

Dalla conservazione del momento angolare (domanda 2)

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(m_1 v_1 d_1 + m_2 v_2 d_2\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

ma anche usando M, v e d:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(M(2v)(2d) + (2M)vd\right)\hat{z} = -6Mvd\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

con I_O momento di inerzia rispetto al centro di rotazione che coincide con il cm del sistema dato da:

$$I_0 = \frac{1}{12}(m)(L)^2 + m_2(d_2)^2 + m_1 d_1^2$$

ma anche, notando che $L = 6d$, e usando M e v e d :

$$I_0 = \frac{1}{12}(8M)(6d)^2 + M(2d)^2 + 2Md^2 = (24 + 4 + 2)Md^2 = 30Md^2$$

Di conseguenza dopo l'urto poichè il centro di massa è fermo (domanda 2) e coincide con il centro dell'asta, il sistema ruoterà attorno ad esso (domanda 2) con velocità angolare ω data da:

$$\omega = -\frac{(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1)}{I_0}$$

ma anche, usando M e v e d

$$\omega = -\frac{6Mvd}{30Md^2} = -\frac{v}{5d}$$

Utilizzando il teorema di Koenig per determinare l'energia cinetica del sistema dopo l'urto, otteniamo:

$$K = \frac{1}{2}m_{tot}v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{30Md^2v^2}{25d^2} = \frac{3}{5}Mv^2$$

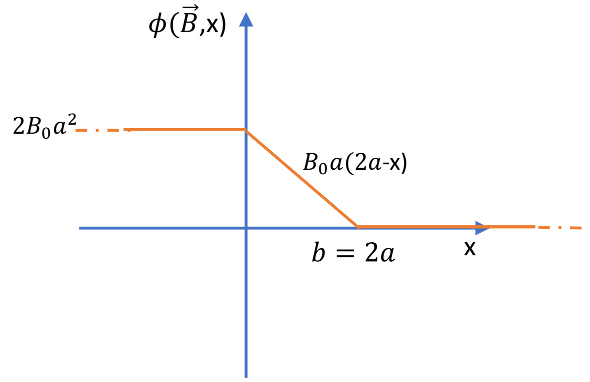
Poichè l'energia cinetica è solo rotazionale: $K = E_{rot}$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1.a

Notando che b=2a, il flusso del campo magnetico attraverso la spira è dato da:

$$\phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} \mathrm{B}_0 ab = 2B_0 a^2 & x \leq 0 \\ B_0 a(b-x) = B_0 a(2a-x) & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

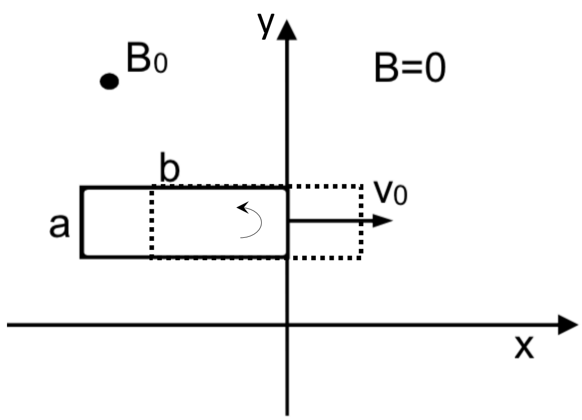


Domanda 1.b

La corrente indotta nella spira è non nulla solo per $0 < x < b$ dove il flusso non é costante in funzione del tempo. In questa regione dalla legge di Lentz:

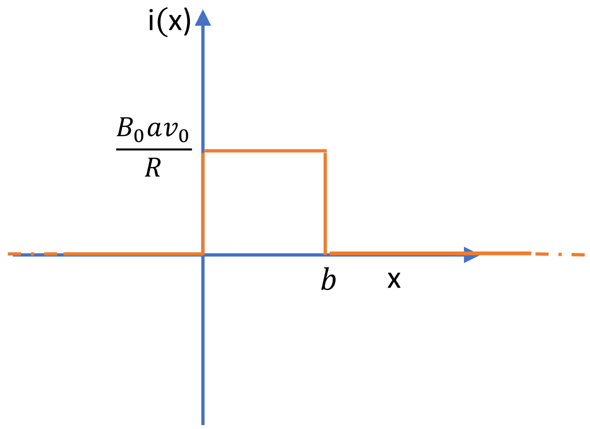
$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v_0 \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{B_0 a v_0}{R}$$

dove con fem abbiamo indicato la forza elettromotrice indotta e con i la corrente indotta che circola nella spira. Poichè nella regione $0 < x < b$ il flusso diminuisce, il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta, e pertanto, dato che il flusso del campo magnetico diminuisce, il suo verso è antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde a B_0. Il verso della corrente indotta è indicato nella seguente figura.



La corrente indotta in funzione della coordinata x del lato a destro è data da:

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$



Domanda 2.a
Poichè la spira è percorsa da corrente per $0 < x < b$, essa è sottoposta su ciascun lato L alla forza magnetica (forza di Laplace) $i\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}$. Le forze sui due lati paralleli alla velocità sono uguali in modulo e direzione ma hanno versi opposti in quanto il campo magnetico è lo stesso ma il verso della corrente è opposto nei due lati, la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B \neq 0$ è $\overrightarrow{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$, mentre la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B = 0$ è nulla. Per cui la forza magnetica risultante è $\overrightarrow{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$. D'altra parte se la spira si muove con velocità costante durante l'estrazione, la forza totale agente sulla spira deve essere nulla:

$$\overrightarrow{F}(a) + \overrightarrow{F} = 0$$

per cui la forza esterna applicata durante l'estrazione è

$$\overrightarrow{F} = iaB_0\hat{x} = \frac{B_0 a v_0}{R} aB_0\hat{x} = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R}\hat{x}$$

Domanda 3.a
Il lavoro L compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$ per estrarre tutta la spira è dato da:

$$L = \int_0^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = F \cdot b = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} b = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

Domanda 3.b
Poiche la potenza (W) dissipata sulla resistenza è costante, l'energia dissipata per effetto Joule sara uguale alla potenza dissipata $(W\ )$ per il tempo t* necessario ad estrarre tutta la spira:

$$W = i^2 R = \frac{fem^2}{R} = \frac{(B_0 a v_0)^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad E_{Diss} = \int_0^{t*} W dt = Wt* = W\frac{b}{v_0} = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

Ovviamente l'energia dissipata coincide con il lavoro fatto dalla forza esterna (L) per estrarre la spira.