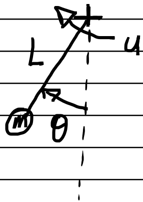
riccardo.costanzi@unipi.it

LUN	14:00	17:00	F8
MER	10:30	13:30	F6
GIO	8:30	10:30	F6

3 MAGGIO 2023



$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL\,\mathrm{sen}\,\theta = u$$

EQ. DIFFERENZIALE CHE LEGA

LA CAUSA DEL MOTO (u) INGRESSO

CON GLI EFFETTI DEL MOTO (θ) USCITA

$\theta(0) = \theta_0$

$\dot\theta(0) = \dot\theta_0$

$$F\left(y(t), \dot y(t), \dots, \overset{n}{y}(t), u(t), \dot u(t), \dots, \overset{p}{u}(t), t\right) = 0$$

$n \geq p$

FORMA NORMALE

$$\overset{n}{y}(t) = \hat F\left(y(t), \dot y(t), \dots, \overset{n-1}{y}(t), u(t), \dots, \overset{p}{u}(t), t\right)$$

$$\ddot\theta = \frac{1}{mL^2}\left(u - c\dot\theta - mgL\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$ FORMA NORMALE

EQ. DIFF DI GRADO n

1 eq. diff. DI GRADO n $\longrightarrow$ n eq. DIFF. DI GRADO 1

$$\dot x(t) = f\left(x(t), u(t), t\right) \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

(EQUIVALENZA CONDIZIONI INIZIALI)

$x(t)$ SOLUZIONE $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\forall t$

NOTA $x(t)$ ALLORA $y(t)$ FUNZIONE NON DIFF.

$$y(t) = g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t) =$$

$$= g(x(t), u(t), t)$$

UNA RAPP. <u>EQUIVALENTE</u> ALLA FORMA NORMALE È:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t \end{cases}$$

FORMA DI STATO

COME SI PASSA DALLA FORMA NORMALE ALLA FORMA DI STATO?

$$\overset{n}{y} = \hat{F}\left(y, \dots, \overset{n-1}{y}, u, t\right)$$

- CASO "SEMPLICE" $(p = 0)$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{n-1}{y} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = f(x, u, t)$$

$$y = x_1 = g(x, u, t)$$

C.I. SU y E DERIVATE

$\rightarrow$ C.I. SU x (LE x_0)

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2}\left(u - c\dot{\theta} - mgL \operatorname{sen}\theta\right)$$

FORMA NORMALE

$p = 0$

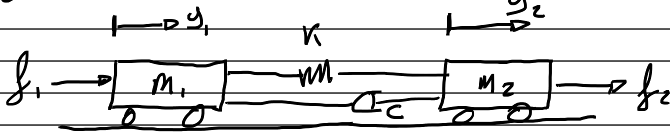
$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}\left(u - c\,x_2 - mgL \operatorname{sen} x_1\right) \end{bmatrix} = f(x, u, t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 = g(x, u, t) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO CAMELLINI



$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = f_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = f_2 \end{cases} \qquad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

FORMA NORMALE

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}\left(f_1 - c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k(y_1 - y_2)\right) \\ \frac{1}{m_2}\left(f_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k(y_2 - y_1)\right) \end{bmatrix}$$

C.I. y_{10}, y_{20}, $\dot{y}_{10}$, $\dot{y}_{20}$

$\downarrow$

x_0

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1}\left(u_1 - c\left(x_3 - x_4\right) - k\left(x_1 - x_2\right)\right) \\ \frac{1}{m_2}\left(u_2 - c\left(x_4 - x_3\right) - k\left(x_2 - x_1\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = g(x, u, t)$$

C.I. x_0

EQ. IN FORMA DI STATO

$u \to \boxed{\Sigma} \to y$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

u INGRESSI

y USCITE

x ? VETTORE DI STATO

"STATO" DEL SISTEMA

INSIEME DI VARIABILI NECESSARIE E SUFFICIENTI

t.c. CONOSCENDO $x(t_0)$

$u(t) \quad \forall t > t_0$

A CONOSCERE $x(t)$, $y(t)$ $\quad \forall t > t_0$

"SEPARAZIONE PASSATO E FUTURO"

$0 < p \leq n$ SOLO PER SISTEMI LINEARI

RICHIAMI PROPRIETÀ:

- CAUSALITÀ: L'USCITA ALL'ISTANTE t $y(t)$ DIPENDE SOLO DAGLI INGRESSI $u(\tau)$ CON $\tau \leq t$

  (STRETTAMENTE CAUSALE / PROPRIO $\tau < t$)

  - CRITERI:

    - FORMA NORMALE $\overset{n}{y} = \hat{F}(y, \dots, \overset{n-1}{y}, u, \dots, \overset{p}{u}, t)$

PROPRIO $n \geq p$ STRETTAM. $n > p$

• FORMA DI STATO

UN SISTEMA NON CAUSALE NON AMMETTE FORMA DI STATO

$u \to x \qquad x \to y$

STRETTAM. CAUSALE
$$\dot{x} = f(x, u, t)$$
$$y = g(x, \cancel{u}, t)$$

SE NELL' EQ. DI USCITA NON COMPARE ESPLICITAM. u

STAZIONARIETÀ - TEMPO INVARIANTE

DEF: A FRONTE DELLE STESSE C.I. E SEGNALI DI INGRESSO → COMPORTAMENTO INVARIANTE RISPETTO TRASL. TEMPORALI

CRITERI :

- FORMA NORMALE : $\dfrac{\partial \hat{F}(\cdot)}{\partial t} = 0$

- FORMA DI STATO : $\dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial t} = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial g(\cdot)}{\partial t} = 0$

LINEARITÀ :

SE IN FORMA NORMALE : $\hat{F}(\cdot)$ DIPENDE LINEARMENTE DA

$y, \dots, \overset{n-1}{y}, u, \dots, \overset{p}{u}$

$$\overset{n}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} - \alpha_i(t)\, \overset{i}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j(t)\, \overset{j}{u}(t)$$

SE È ANCHE STAZIONARIO α_i E β_j NON DIP. DAL TEMPO

IN FORMA DI STATO:

$$\dot{x} = f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u$$
$$y = g(x, u, t) = C(t)x + D(t)u$$

SE ANCHE STAZIONARIO (LTI)

DIM STATO DIM INGR.

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \; n \times n \qquad B \; n \times m$$
$$y = Cx + Du \qquad C \; l \times n \qquad D \; l \times m$$

DIM USCITA

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1}\left(u_1 - c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2)\right) \\ \frac{1}{m_2}\left(u_2 - c(x_4 - x_3) - k(x_2 - x_1)\right) \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}}_{A \quad 4\times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}^{B \quad 4\times 2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = g(x, u, t)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{2\times 4}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D_{2\times 2}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

RICHIAMO PROPRIETÀ SISTEMI LINEARI

- OGNI SOLUZ. INTEGRALE OMOGENEO $(u \equiv 0)$ DIP. **SOLO** DALLE C.I.

  $+$

  INTEGRALE PARTICOLARE (C.I. NULLE) DIP. **SOLO** DA INGRESSI

- $y_1(t) \dots y_n(t)$ SONO n SOLUZ. OMOGENEE INDIPENDENTI

OGNI SOLUZ. OMOGENEA È COMBINAZ. LINEARE DELLE n $y_i(t)$

- GLI n COEFFICIENTI DIPENDONO UNIVOCAMENTE DALLE C.I. DEL SISTEMA.

$$\begin{array}{ccc}
y(t_0) = y_{a0} & y(t_0) = y_{b0} & y(t_0) = \alpha y_{a0} + \beta y_{b0} \\
\dot{y}(t_0) = \dot{y}_{a0} & \dot{y}(t_0) = \dot{y}_{b0} & \dot{y}(t_0) = \alpha \dot{y}_{a0} + \beta \dot{y}_{b0} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\overset{n-1}{y}(t_0) = \overset{n-1}{y}_{a0} & \overset{n-1}{y}(t_0) = \overset{n-1}{y}_{b0} & \overset{n-1}{y}(t_0) = \alpha \overset{n-1}{y}_{a0} + \beta \overset{n-1}{y}_{b0} \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
y_a(t) & y_b(t) & \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)
\end{array}$$

PRINCIPIO SOVR. EFFETTI PER LE C.I. SULLA SOLUZ. OMOGENEA

- SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI VALE ANCHE PER INGRESSI

$y_{p_i}(t)$ INTEGRALE PARTICOLARE PER $u(t) = u_i(t)$

PER $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots$

$\hookrightarrow \quad y_p(t) = \alpha_1 y_{p_1}(t) + \alpha_2 y_{p_2}(t) + \dots$

- $y_p(t)$ INTEGRALE PARTICOLARE PER $u(t)$ ALLORA

$\dot{y}_p(t)$ " " " $\dot{u}(t)$

FORMA NORMALE $\longrightarrow$ FORMA DI STATO (SIST. LINEARI)

$p=0$ $$\overset{n}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{i}{y}(t) + u(t) \quad *$$

$$X = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{n-1}{y} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$I_{n-1 \times n-1}$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + 0\, u(t)$$

A FORMA COMPAGNA

ORIZZONTALE INFERIORE $\qquad \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda$

POLINOMIO CARATTERISTICO.

CASO PIÚ GENERALE (DERIVATE DELL'INGRESSO)

$0 < p \leq n$

$$\overset{n}{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \, \overset{i}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \, \overset{j}{u}(t)$$

EQ. AUSILIARIA

$$\overset{n}{z}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \, \overset{i}{z}(t) + u(t)$$

$\ast$

$\Downarrow$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j \, \overset{j}{z}(t) \quad \ast$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}$$

È UNA BUONA SCELTA PER LO STATO?

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i \quad * \qquad p < n$$

$$y = \underbrace{[\overbrace{\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_p}^{p+1} \quad 0 \dots 0]}_{n} x + 0 \cdot u$$