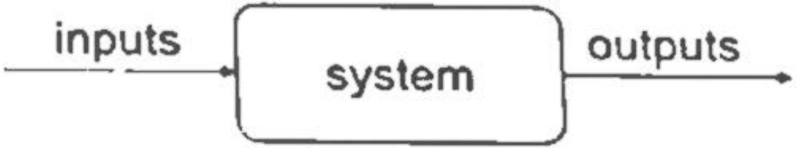
Sistemi dinamici

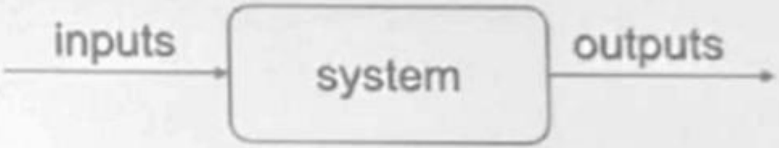
Un sistema dinamico e' (la rappresentazione di) un "oggetto" caratterizzato da **grandezze** (stati e uscite) **che variano nel tempo** e che **interagiscono con l'ambiente esterno.**

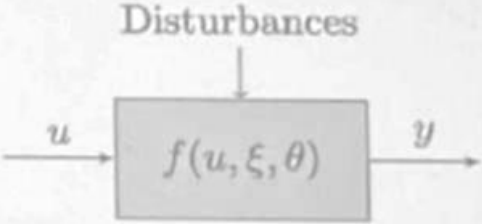
Un sistema dinamico e' normalmente costituito da più sottosistemi che interagiscono tra loro.

Sistema come 'scatola' o blocco

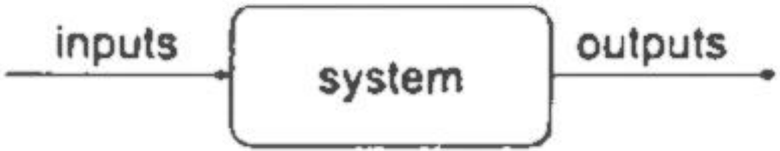


Sistema come ‘scatola’ o blocco





Sistema come 'scatola' o blocco

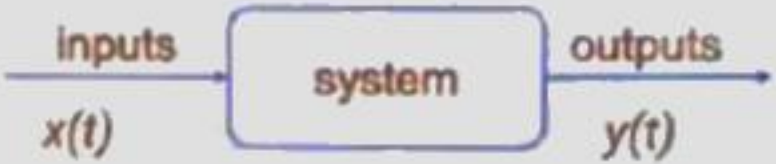


Il Problema del Controllo

Studiare come agire dall'esterno su un sistema per modificarne la naturale evoluzione ed ottenere un comportamento desiderato.

Proprieta' dei sistemi dinamici

1. Devono essere **causali**, ovvero l'uscita non può dipendere dai valori futuri dell'ingresso.
2. Possono essere stocastici o **deterministici**, se sono presenti o meno fenomeni aleatori nel legame ingresso-uscita.



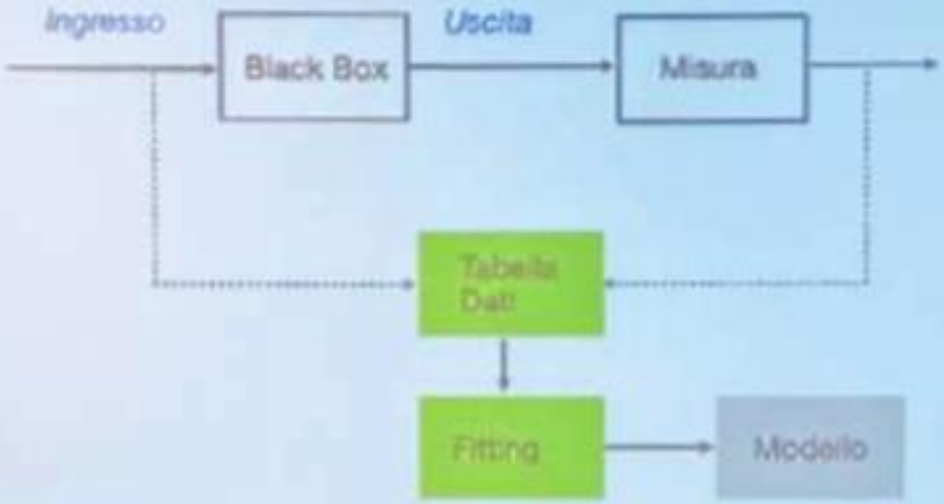
Un sistema LTI e' detto causale se l'uscita y(t) per un certo $\mathbf{t_d}$ *dipende dai valori dell'ingresso x(t) solo per valori di* $t \le \mathbf{t_d}$

Tre problemi diversi

- **Modellistica**
- Simulazione
- Controllo

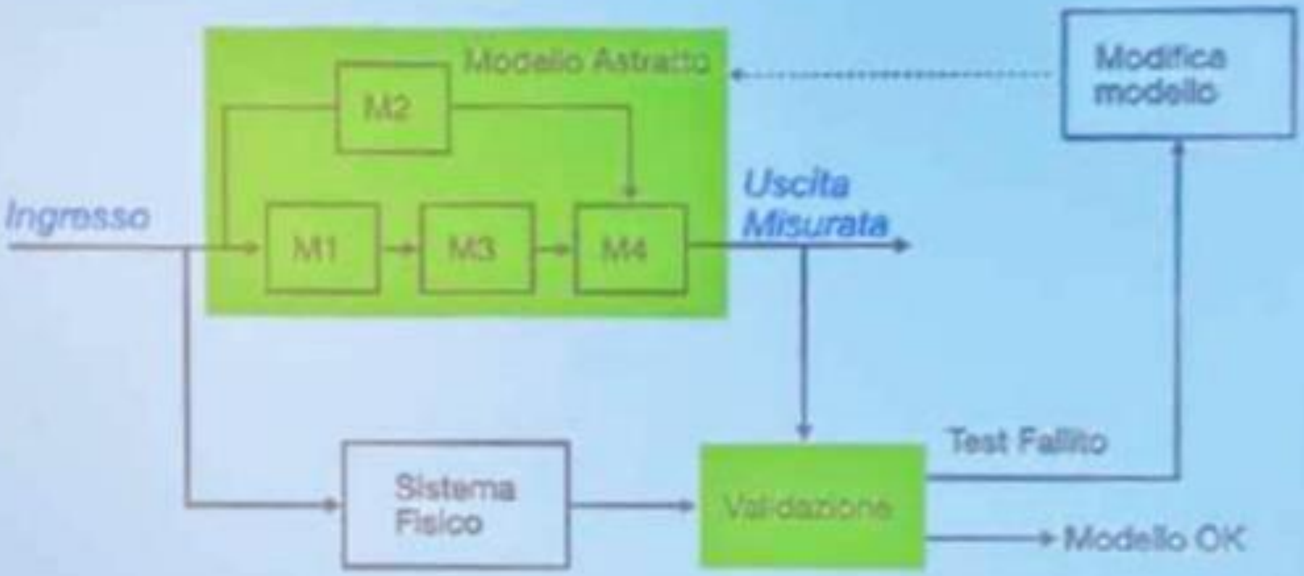
Modellistica - Black Box

- Approccio sperimentale (o induttivo)



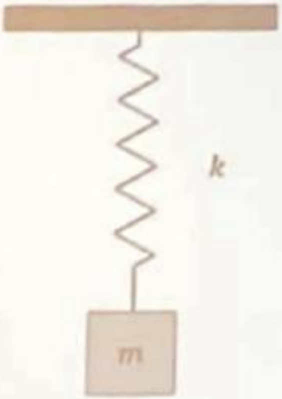
Modellistica - White Box

- Approccio analitico (o deduttivo)



Modellistica - Gray Box

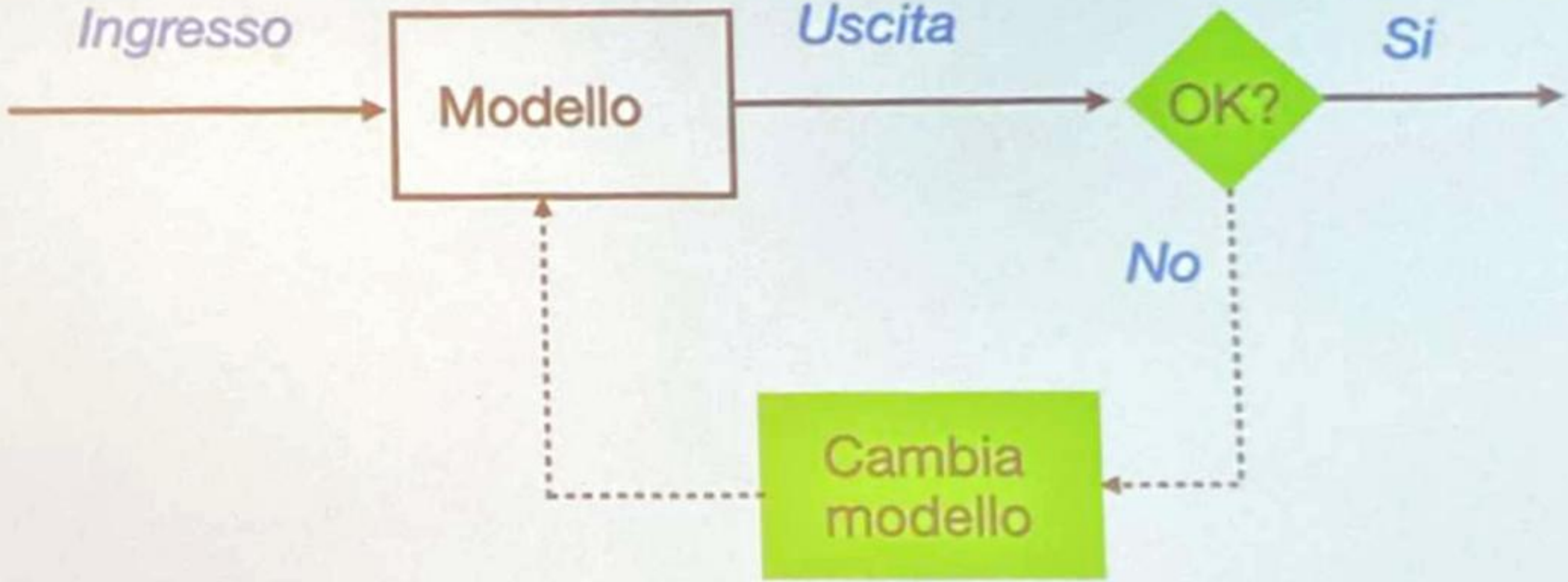
- Black box + white box
  - Conosciamo il comportamento generale, ma dobbiamo identificare parametri specifici



$$F = m\ddot{x} + kx$$

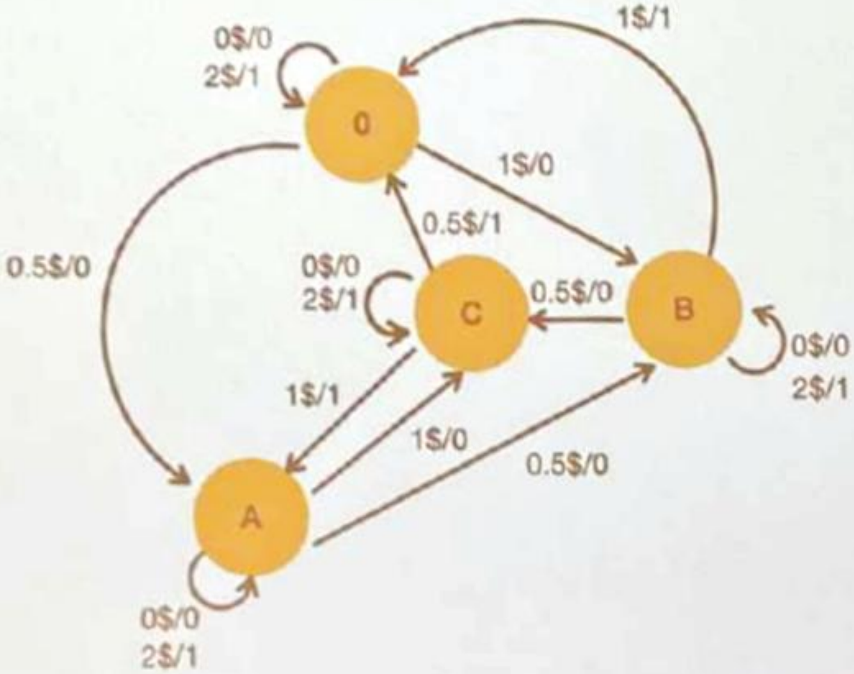
Modellistica

- Approccio pragmatico



Modellistica: macchine a stati

Macchina a stati finiti per erogazione di un bene



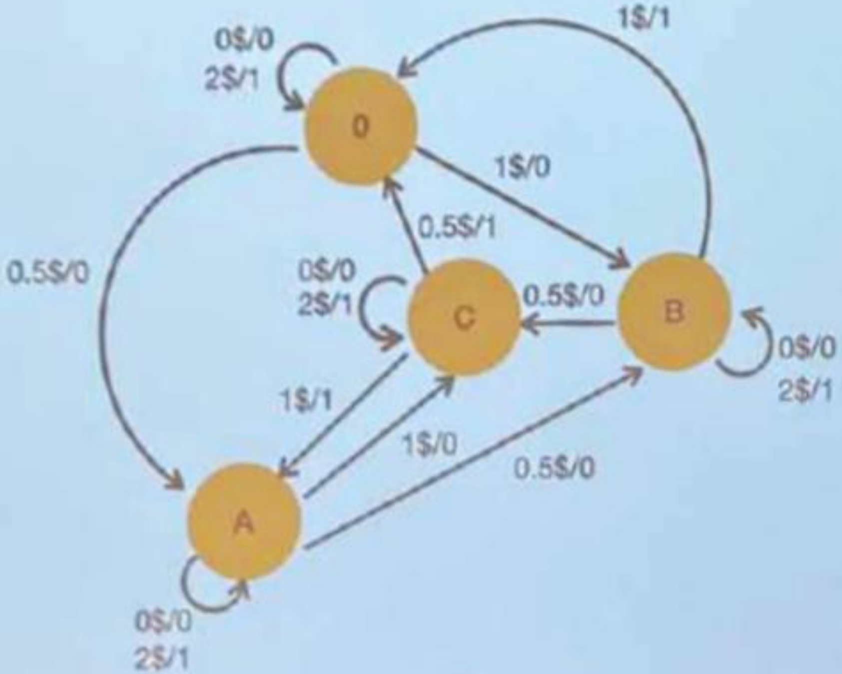
Modellistica: macchine a stati

Macchina a stati finiti per erogazione di un bene

Bevanda costo 2$

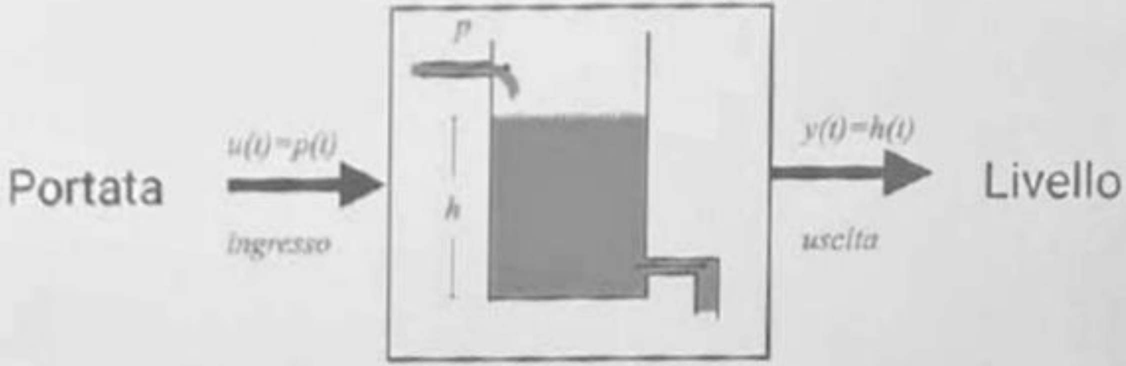
Macchinetta accetta:
0, 50 Cents, 1, 2 Euro

Uscita:
- 0 (nulla)
- 1 (bevanda)



Esempio - Controllo livello serbatoio

Sistema dinamico

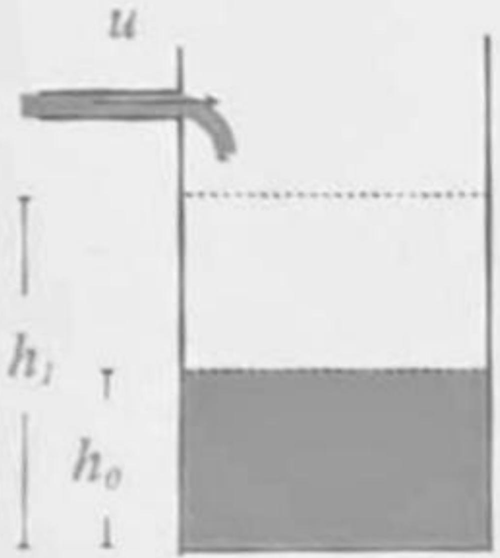


Problema del controllo Mantenere costante il livello al valore desiderato $\bar{h}$

Segnale di riferimento $h^{\circ}(t)=\bar{h}$ Cosa voglio in uscita (detto anche set point)

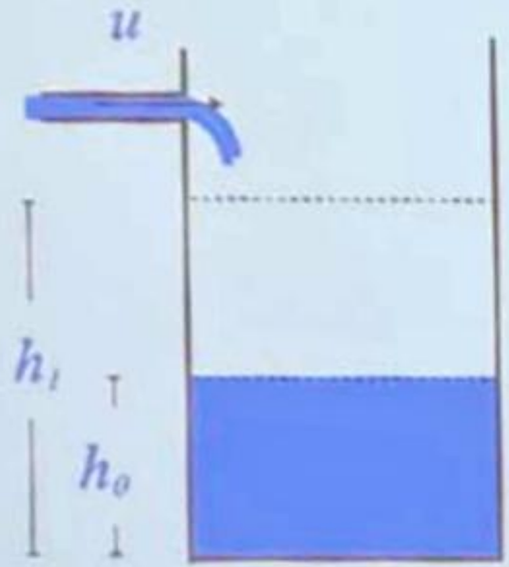
Azione di controllo Apertura chiusura rubinetto, ovvero scelta di *u(t)*

E allora...



$$\Delta V = A \cdot (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) \cdot d\tau$$

E allora...



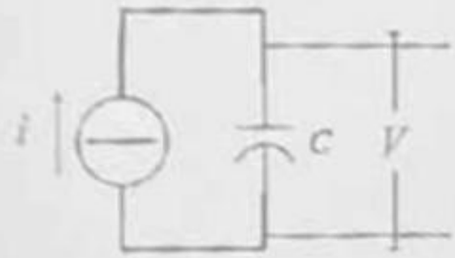
$$\Delta V = A \cdot (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) \cdot d\tau$$

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = u(t)$$

Chiamiamo $x = h \longrightarrow \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \frac{1}{A} u(t)$

Anche in questo caso lo stato e' importante! La quantità d'acqua nel serbatoio dipende da quanta acqua c'e'.

Esempio - Circuito di carica di un condensatore



$$\Delta q = C \cdot (V_1 - V_0) = \int_{t_0}^{t_1} i(\tau) \cdot \tau$$

$$C \cdot \frac{dV}{dt} = i(t)$$

Esempio - Legge di Newton

$m \cdot \frac{dv}{dt} = F(t)$ Chiamiamo $x = v \longrightarrow$ $\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \frac{1}{m}F(t)$

Esempio - Legge di Newton

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F(t)$$

Chiamiamo $x = v \longrightarrow \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \frac{1}{m}F(t)$

L'integratore

Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

Tutti i sistemi LTI hanno le seguenti proprietà fondamentali:

- **Omogeneità**: se si scala l'ingresso $u(t)$, allora l'uscita verrà scalata dello stesso fattore:

$$au(t) \Rightarrow ay(t)$$

  (ad esempio, se si raddoppia l'ingresso, anche l'uscita raddoppierà).

Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

Tutti i sistemi LTI hanno le seguenti proprietà fondamentali:

- **Omogeneità**: se si scala l'ingresso $u(t)$, allora l'uscita verrà scalata dello stesso fattore:

$$au(t) \Rightarrow ay(t)$$

(ad esempio, se si raddoppia l'ingresso, anche l'uscita raddoppierà).

Sovrapposizione degli effetti

Se un modello di sistema ha risposte $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a due ingressi qualsiasi $x_1(t)$ e $x_2(t)$, la risposta del sistema alla combinazione lineare di questi ingressi:

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

è data dalla combinazione lineare delle risposte individuali:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

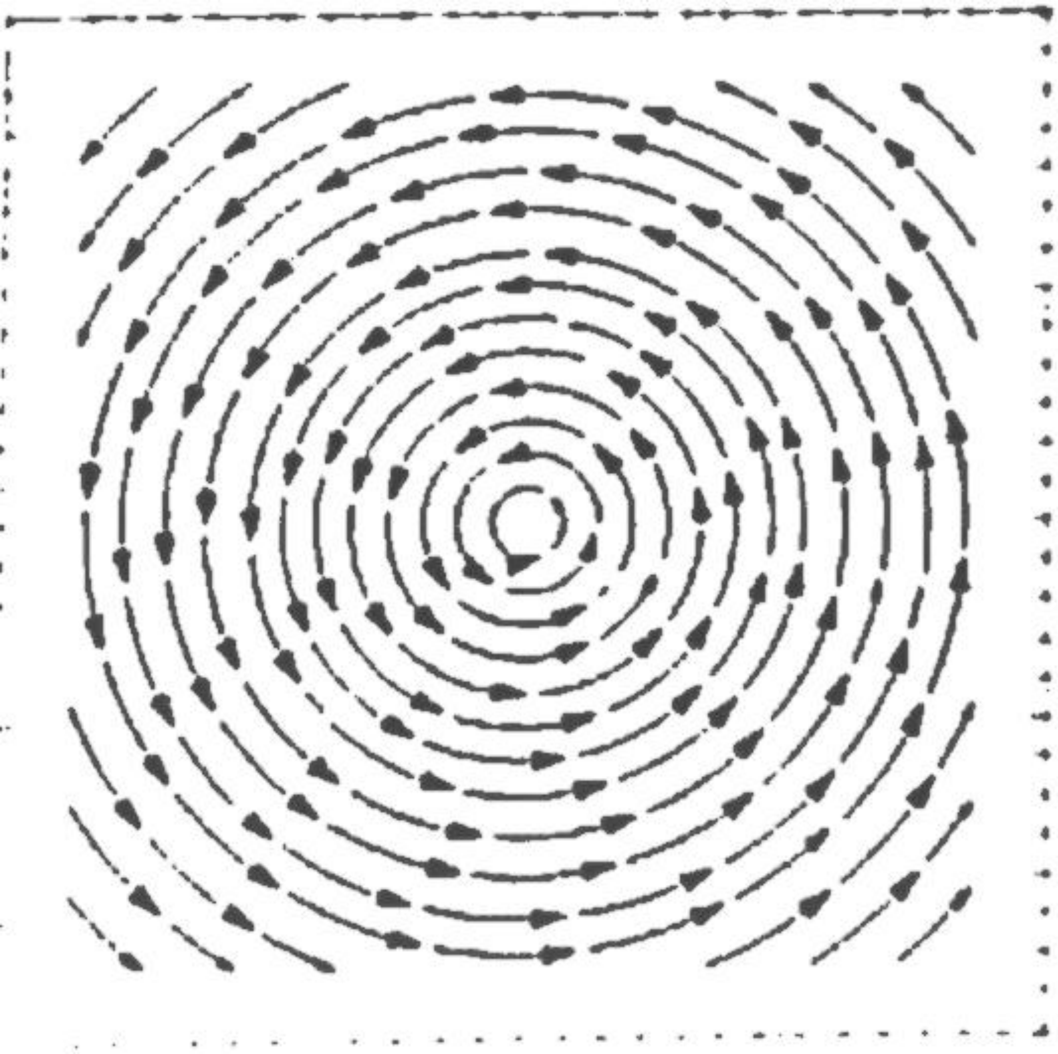
Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

- Invarianza nel tempo
  - Il sistema si comporta allo stesso modo indipendentemente da quando avviene l'azione.
  - Formalmente, nelle equazioni non vi è una dipendenza esplicita dal tempo.
  - Lo stesso ingresso traslato nel tempo produce lo stesso output anch'esso traslato nel tempo:
  - Un ingresso $x(t-\tau)$ produce un'uscita $y(t-\tau)$.

Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI)

"Linear systems are important because we can solve them."

Richard Feynman.



Modellistica: equazioni differenziali lineari

Modellistica: equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione standard per rappresentare la **dinamica di un sistema**.

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

Modello in Variabili di Stato

Modellistica: equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione standard per rappresentare la **dinamica di un sistema**.

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

La matrice [A] evidenzia proprietà di stabilità

Modellistica: equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione standard per rappresentare la **dinamica di un sistema**.

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

La matrice [A] evidenzia proprietà di stabilità

La coppia di matrici [A,B] evidenzia proprietà di controllabilità

Modellistica: equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione standard per rappresentare la dinamica di un sistema.

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

La matrice [A] evidenzia proprietà di stabilità

La coppia di matrici [A,B] evidenzia proprietà di controllabilità

La coppia di matrici [A,C] evidenzia proprietà di osservabilità

Modellistica: equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione standard per rappresentare la **dinamica di un sistema.**

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

y(t) Movimento dell'uscita del sistema

***x(t)* Movimento dello stato del sistema**

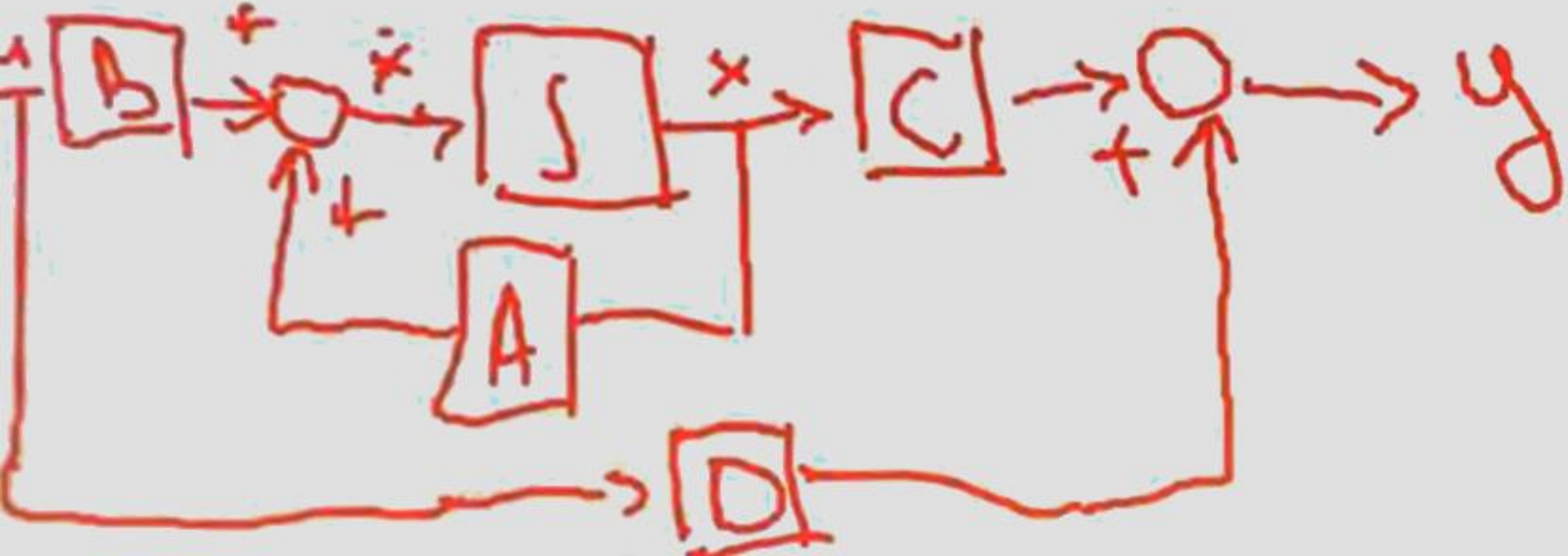
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

Equazioni e schemi a blocchi

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx + Du & A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r} \end{cases}$$

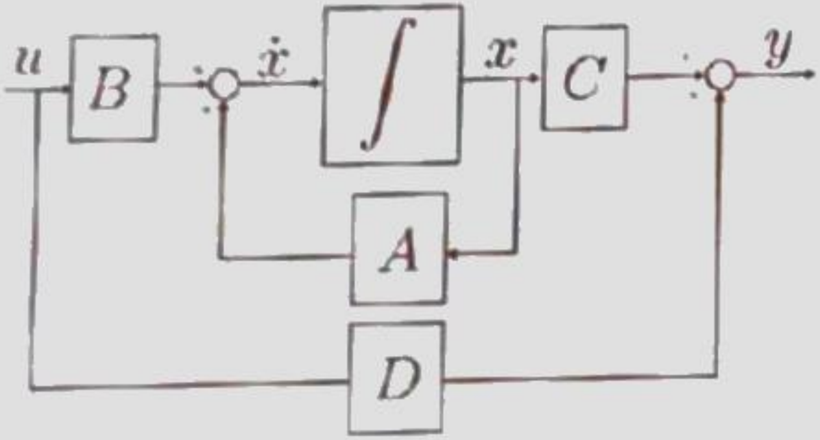
Equazioni e schemi a blocchi

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx + Du & A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r} \end{cases}$$



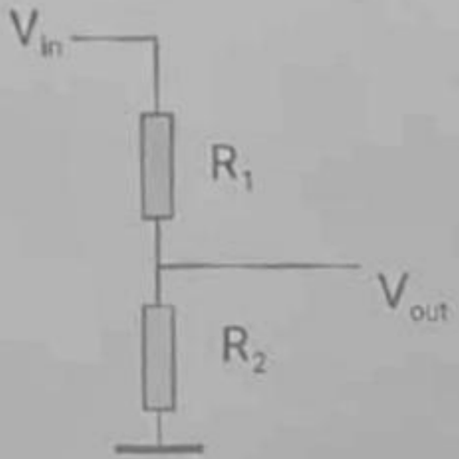
Equazioni e schemi a blocchi

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



Modellistica: Partitore resistivo o di tensione

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



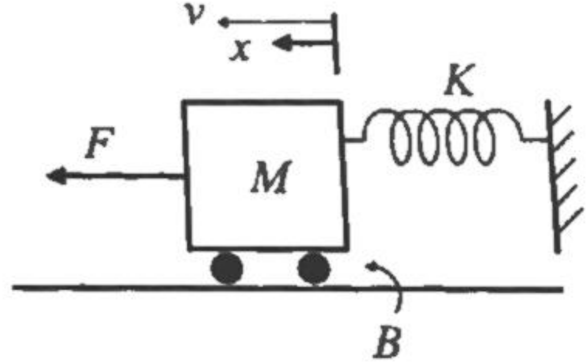
$$V_{out} = \alpha V_{in}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Modellistica: massa-molla-smorzatore

$$F(t) = M\frac{dv}{dt} + Bv + Kx$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}v + \frac{1}{M}F$$



Stati: posizione e velocità

Riportiamoci in A, B, C, D

Dato il nostro sistema:

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}v + \frac{1}{M}F$$

Scegliamo l'uscita: posizione:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

$$y = x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + (0)\, F$$

Riportiamoci in A, B, C, D $\dot{x} = Ax + Bu$

Dato il nostro sistema:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{K}{M}x - \dfrac{B}{M}v + \dfrac{1}{M}F \end{cases}$$

Scegliamo l'uscita: posizione:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F \longleftarrow \frac{dx}{dt} = v$$

$$y = x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + (0)\, F$$

Riportiamoci in A, B, C, D

Dato il nostro sistema:

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}v + \frac{1}{M}F$$

Scegliamo l'uscita: posizione:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

$$y = x = (1\ 0) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + (0)\, F$$

Scegliamo l'uscita: velocita':

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

$$y = v = (0\ 1) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + (0)\, F$$

Modello in variabili di stato

Re-packaging di equazioni differenziali di ordine arbitrario in un insieme di equazioni differenziali del primo ordine.

Permette di capire la relazione tra le singole variabili di stato

Avere un sistema di equazioni in forma matriciale permette analisi e progetto usando metodi matematici potenti.

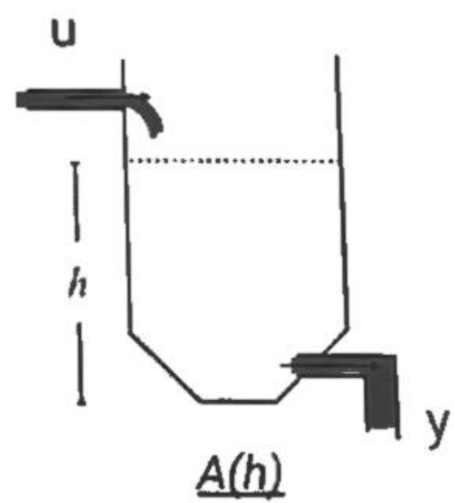
Le variabili di stato sono il minimo insieme di variabili che descrivono il sistema nella sua interezza, ovvero che permettono di predire il suo comportamento futuro.

Il mondo NON e' lineare

Non possiamo piu' usare la rappresentazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Es. serbatoio a sezione variable ed efflusso



Il mondo NON e' lineare

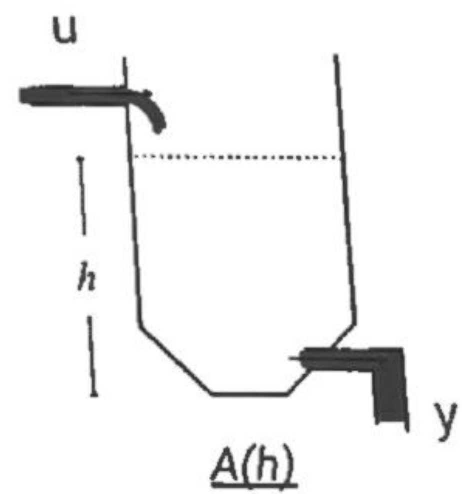
Ipotesi 1: valvola di uscita chiusa

$$\dot{h} = B(h)u$$

$$B(h) = \frac{1}{A(h)}$$

$$A(h)dh = u(t)dt$$

Es. serbatoio a sezione variable ed efflusso



Il mondo NON e' lineare

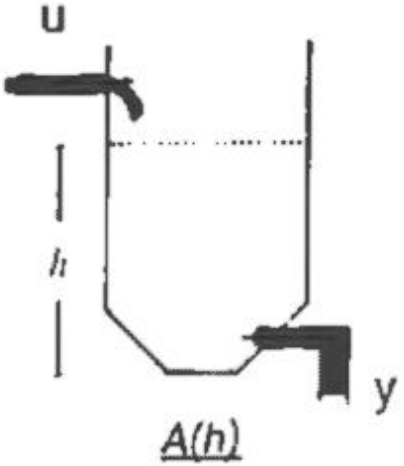
$$\dot{h} = B(h)u$$

$$B(h) = \frac{1}{A(h)}$$

Apriamo la valvola di uscita

$$\dot{h} = B(h)(u - y)$$

Es. serbatoio a sezione variable ed efflusso



Il mondo NON e' lineare

$$\dot{h} = B(h)u$$

$$B(h) = \frac{1}{A(h)}$$

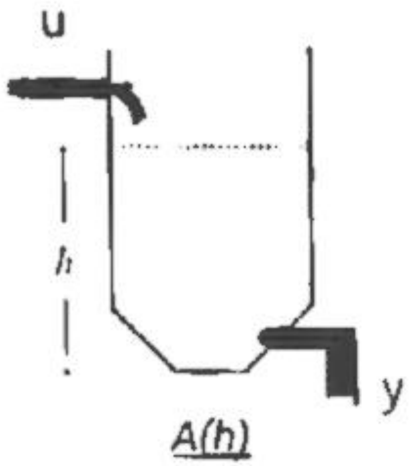
Apriamo la valvola di uscita

$$\dot{h} = B(h)(u - y)$$

$$y = k\sqrt{h}$$

$$\dot{h} = \frac{-k\sqrt{h}}{A(h)} + \frac{u}{A(h)}$$

Es. serbatoio a sezione variable ed efflusso

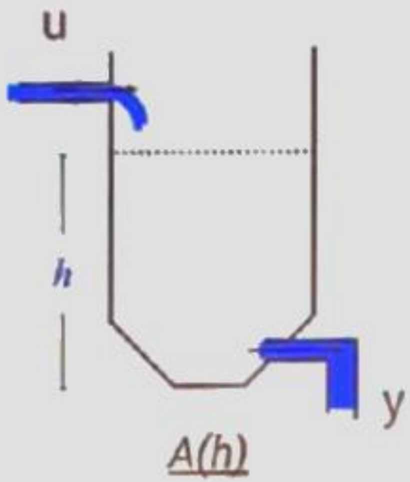


Il mondo NON e' lineare

$$\dot{h} = B(h)u$$

$$B(h) = \frac{1}{A(h)}$$

Es. serbatoio a sezione variable ed efflusso



Apriamo la valvola di uscita

$$\dot{h} = B(h)(u - y)$$

$$y = k\sqrt{h}$$

$$\dot{h} = \frac{-k\sqrt{h}}{A(h)} + \frac{u}{A(h)} \longrightarrow \dot{h} = g(h) + f(h)u$$

Il mondo NON e' lineare

$$\dot{h} = B(h)u$$

$$B(h) = \frac{1}{A(h)}$$

Forma bilineare

Apriamo la valvola di uscita

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

$$\dot{h} = B(h)(u - y)$$

$$y = k\sqrt{h}$$

$$\dot{h} = \frac{-k\sqrt{h}}{A(h)} + \frac{u}{A(h)} \longrightarrow \dot{h} = g(h) + f(h)u$$

Un modello matematico semplificato

$$m\frac{dv}{dt} + \alpha|v|v + \beta v = \gamma u - mgsin(\theta)$$

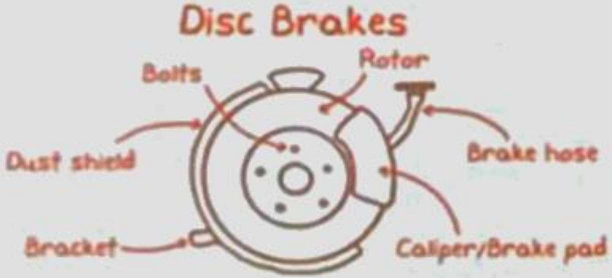
Ipotesi semplificative:

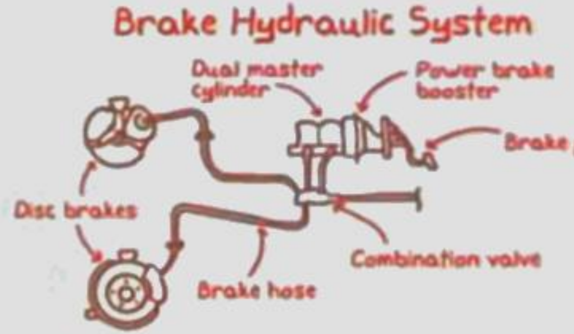
- Spinta del motore proporzionale alla apertura della valvola del gas;
- Attriti e resistenze lineari con la velocità;
- Piccole pendenze ($\theta < 30°$, $\sin\theta = \theta$)

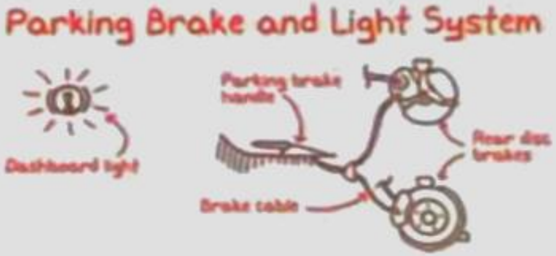
Proprieta' dei sistemi dinamici

1. Devono essere **causali**, ovvero l'uscita non può dipendere dai valori futuri dell'ingresso.
2. Possono essere stocastici o **deterministici**, se sono presenti o meno fenomeni aleatori nel legame ingresso-uscita.

Per esempio


Disc Brakes
Bolts
Rotor
Dust shield
Brake hose
Bracket
Caliper/Brake pad


Brake Hydraulic System
Dual master cylinder
Power brake booster
Brake pedal
Disc brakes
Combination valve
Brake hose


Parking Brake and Light System
Parking brake handle
Dashboard light
Rear disc brakes
Brake cable

Modellistica per sistemi dinamici

Cos'e' un sistema?

Un sistema e' un insieme di parti interconnesse e interagenti che formano un insieme più grande e complesso.

Cosa vuol dire essere dinamico?

Un sistema e' dinamico quando evolve nel tempo.

Parole chiave:

- *Ingresso (cosa entra nel sistema - vogliamo **inseguire** gli ingressi)*
- *Uscita (cosa esce dal sistema)*
- *Disturbo (segnale non desiderato, spesso casuale - vogliamo **reiettare** i disturbi)*
- *Stato*