Bozza soluzione esercizio 3 - FILA A

$$X(t) = \int_{t-T}^{t} N(\alpha)\, d\alpha$$

$N(t)$ processo di rumore Gaussiano bianco con DSP

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

1) Si calcoli la risposta impulsiva e in frequenza dell'integratore a finestra mobile.

$$N(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(t)$$

$h(t)$ rappresenta la risposta impulsiva dell'integratore.

$$x(t) = N(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$

$h(t)$ deve essere tale che:

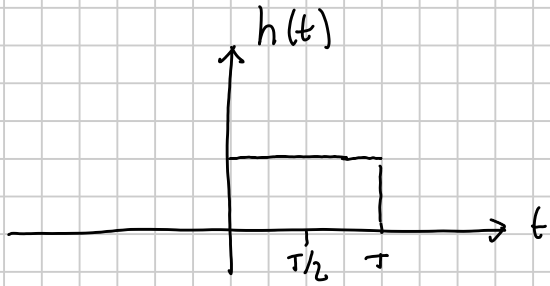
$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{t-T}^{t} N(\alpha)\, d\alpha$$

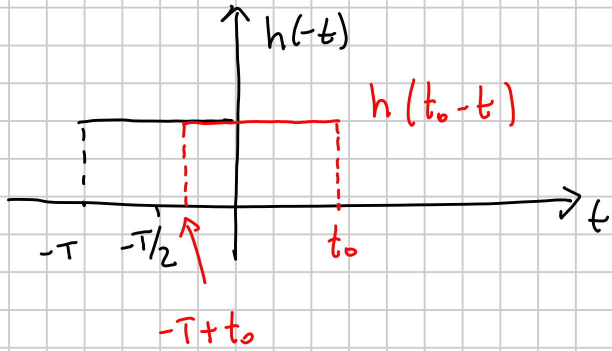
Quindi

$$h(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & t-T \leq \alpha \leq t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si ricava quindi che

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$





$$H(f) = T\,\text{sinc}(fT)\, e^{-j2\pi f T/2}$$

2) Calcolare la funzione di autocorrelazione di $X(t)$ e la sua DSP

$N(t)$ è un processo SSL e il sistema integratore è un sistema lineare e stazionario, quindi anche $X(t)$ è un processo SSL e Gaussiano.

$$S_X(f) = S_N(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

$$R_X(\tau) = \frac{N_0 T}{2}\left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right)$$

3) Si indichi con $X(t_0) = X$ la Variabile Aleatoria estratta dal processo, se ne descriva la densità di probabilità.

Come detto prima $X(t)$ è un processo SSL e Gaussiano quindi la V.A. $X(t_0)$ sarà una V.A. Gaussiana.

$$\eta_x(t) = \eta_N(t) \otimes h(t) = 0$$ poiché $\eta_N(t) = 0$

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{N_0 T}{2}$$ poiché è una V.A. a valor medio nullo.

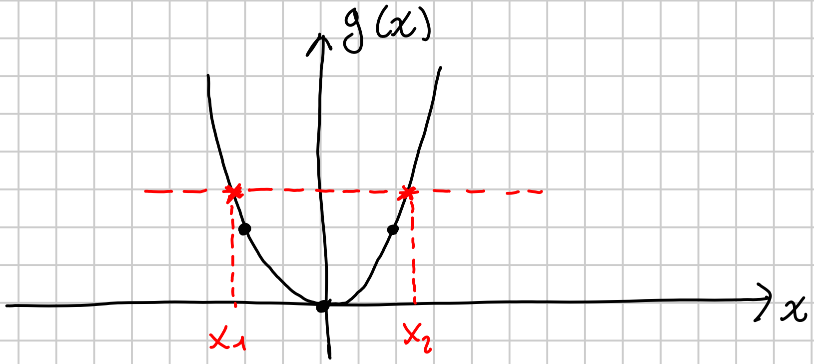
$$X(t_0) \in \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0 T}{2}\right)$$

4) La Variabile Aleatoria passa poi attraverso un quadratore che genera una nuova V.A.

$$Y = X^2$$

Si calcoli la densità di probabilità di Y e il suo valor medio.

Si deve utilizzare il "teorema fondamentale".



per $y \leq 0 \Rightarrow f_Y(y) = 0$

per $y > 0$ esistono 2 soluzioni

$$x_1 = -\sqrt{y}$$

$$x_2 = \sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}} \qquad y > 0$$

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2_x}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2_x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2_x}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \; x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2_x}}\, dx$$

$$\frac{d}{dx} e^{-f(x)} = e^{-f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2_x}} \cdot \left(-\frac{x}{\sigma^2_x}\right)$$

INTEGRALE PER PARTI

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\, f'(x)\, dx = g(x)\, f(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} g'(x)\, f(x)\, dx$$

$$g(x) = x$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2_x}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2_x}}$$

$$E(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \, \sigma_x^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{-x}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{-\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \left\{ \left[x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx \right\}$$

$x \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \to 0$ per $x \to \pm\infty$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \sigma_x^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx}_{1}$$

per le proprietà di normalizzazione

$$E\{x\} = \sigma_x^2$$

L'esercizio per la FILA B era molto simile cambiando soltanto la risposta impulsiva del sistema.