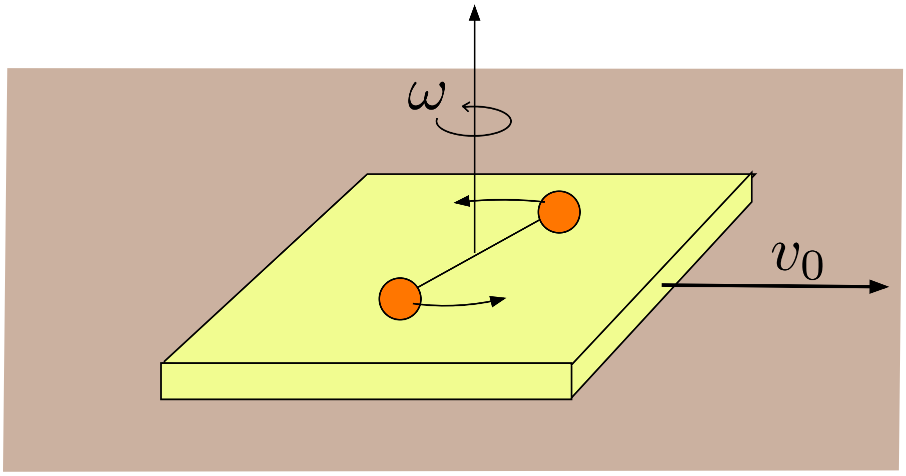
Esercizio (tratto dal problema 6.17 del Mazzoldi 2)

Due punti materiali di uguale massa $m = 0.5\,\mathrm{Kg}$ sono posti agli estremi di una sottile asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $2R = 40\,\mathrm{cm}$, e ruotano in un piano orizzontale con velocità angolare costante $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ rispetto al centro dell'asta. Il sistema è montato sopra una piattaforma a cuscino d'aria che si muove con velocità $v_0 = 0.8\,\mathrm{m/s}$ lungo un piano orizzontale. Calcolare:

1. l'energia cinetica del sistema dei due punti
2. il momento angolare relativo al centro di massa



SOLUZIONE

Dati iniziali:

$$
\begin{aligned}
R &= 0.2\,\mathrm{m} \\
m &= 0.5\,\mathrm{Kg} \\
\omega &= 10\,\mathrm{s}^{-1} \\
v_0 &= 0.8\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

1. L'energia cinetica (rispetto al laboratorio) si scrive utilizzando il teorema di König

$$
\underbrace{K}_{\text{energia cinetica rispetto al lab.}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2}_{\text{energia cinetica del CM}} + \underbrace{K'}_{\text{energia cinetica rispetto al CM}} \tag{1}
$$

- Calcoliamo l'energia cinetica del CM. Il centro di massa si trova al centro dell'asta, e si muove dnque solidalmente alla zattera con velocità v_0. Per cui

$$
\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 = \frac{1}{2}\,2m\,v_0^2 = mv_0^2 \tag{2}
$$

- Per calcolare l'energia cinetica K' rispetto al CM possiamo procedere in due modi:

Primo modo
Relativamente al CM le due masse si muovono di moto circolare uniforme, per cui

$$
|\mathbf{v}_1'| = \omega R \tag{3}
$$

$$
|\mathbf{v}_2'| = \omega R \tag{4}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
K' &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \\
&= m\omega^2R^2
\end{aligned} \tag{5}
$$

Secondo modo
Siccome il CM si strova sull'asse di rotazione, l'energia cinetica rispetto al CM si può anche scrivere come

$$
K' = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{6}
$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, e vale

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i d_i^2 = \\
&= mR^2 + mR^2 = \\
&= 2mR^2
\end{aligned} \tag{7}
$$

Sostituendo (7) in (6) otteniamo

$$
\begin{aligned}
K' &= \frac{1}{2}\,2mR^2\,\omega^2 = \\
&= m\omega^2R^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

che coincide con (5)

- Sostituendo (2) e (5) in (1) otteniamo

$$\begin{aligned} K &= m v_0^2 + m\omega^2 R^2 = \\ &= m\,(v_0^2 + \omega^2 R^2) \end{aligned} \tag{9}$$

Sostituendo i dati abbiamo

$$\begin{aligned} K &= 0.5\,\mathrm{Kg}\left(\left(0.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \frac{100}{\mathrm{s}^2}0.2^2\,\mathrm{m}^2\right) = \\ &= 0.32\,\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} \;+\; 2\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 2.32\,\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 2.32\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Il momento angolare $\mathbf{L}'$ rispetto al CM può calcolarsi in due modi:

Primo modo
Dalla definizione $\mathbf{L}'$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \\ &= \underbrace{\mathbf{r}'_1 \times m\mathbf{v}'_1}_{=\mathbf{L}'_1} + \underbrace{\mathbf{r}'_2 \times m\mathbf{v}'_2}_{=\mathbf{L}'_2} \end{aligned} \tag{11}$$

dove $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i$ sono le posizioni e le velocità rispetto al CM, come mostrate in Fig.1

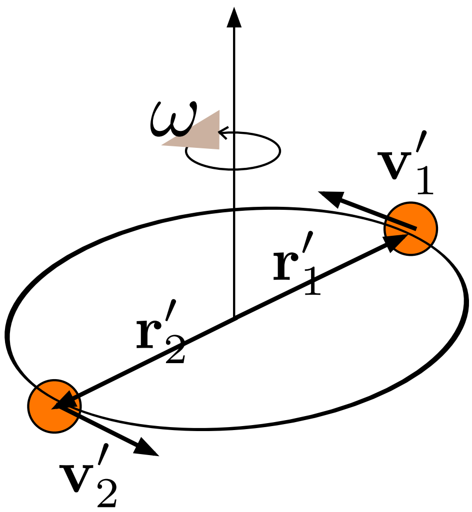


Figure 1:

- Dato che $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i$ giacciono sul piano della zattera, il momento angolare (prodotto vettoriale) è diretto ortogonalmente al piano della zattera. Il verso si ottiene con la regola della mano destra. Ad esempio per $\mathbf{L}'_1$, i) *trasporto anzitutto il vettore* $\mathbf{v}'_1$ *parallelamente fino a che la sua coda coincida con la coda di* $\mathbf{r}'_1$, ii) andando con la mano destra vado dal primo vettore al secondo vedo che il pollice punta verso l'alto. Dunque $\mathbf{L}'_1$ è diretto verso l'alto. Per $\mathbf{L}'_2$ trovo la stessa direzione. Pertanto

$$\mathbf{L}'_i = |\mathbf{L}'_i|\,\hat{\mathbf{k}} \qquad i = 1, 2 \tag{12}$$

con

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{L}'_i| &= |\mathbf{r}'_i|\, m \,|\mathbf{v}'_i| \underbrace{\sin\theta}_{=1} = \\
&= R\, m\, \omega R = \\
&= m\omega R^2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

da cui

$$
\mathbf{L}' = \mathbf{L}'_1 + \mathbf{L}'_2 = 2m\omega R^2\, \hat{\mathbf{k}}
\tag{14}
$$

con

$$
\begin{aligned}
L' &\doteq |\mathbf{L}'| = 2m\omega R^2 = \\
&= 2 \cdot 0.5\,\mathrm{Kg}\frac{10}{\mathrm{s}}\,(0.2\,\mathrm{m})^2 = \\
&= 10 \cdot 0.04\,\mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} = \\
&= 0.4\,\mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Secondo modo
Siccome il CM si strova sull'asse di rotazione, il momento angolare rispetto al CM si può anche scrivere come

$$
\mathbf{L}' = I\boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}
\tag{16}
$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, e vale [vedi (7)]

$$
I = 2mR^2
\tag{17}
$$

Pertanto

$$
\mathbf{L}' = 2m\omega R^2\, \hat{\mathbf{k}}
\tag{18}
$$

in accordo con la (14).