Esame di Ricerca Operativa del 13/9/23

(Cognome)	**(Nome)**	**(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. Un'industria chimica produce due tipi di fertilizzanti (A e B) la cui lavorazione è affidata ai reparti di produzione e di confezionamento. Per ottenere il fertilizzante è necessaria la lavorazione in entrambi i reparti. I tempi di lavorazione (in ore) per produrre una tonnellata di prodotto sono i seguenti:

	`Fertilizzante A`	`Fertilizzante B`
`reparto produzione`	1.9	1.5
`reparto confezionamento`	0.5	1

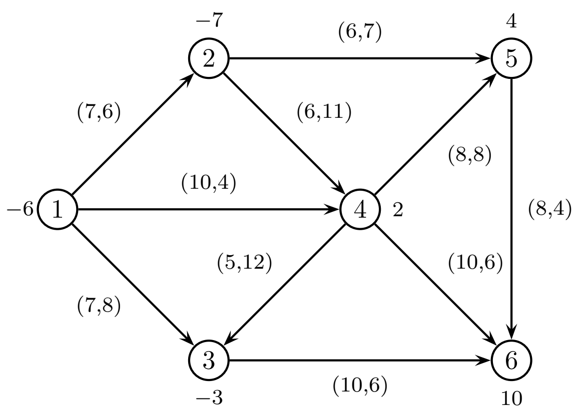
Ogni settimana il reparto di produzione lavora al massimo 100 ore e quello di confezionamento al massimo 55 ore. Inoltre l'industria vuole che la quantità prodotta di fertilizzante A non superi il 50% della quantità di fertilizzante B. Sapendo che la vendita di una tonnellata di fertilizzante A fornisce un profitto di 250 euro ed una di fertilizzante B 300 euro, l'industria vuole determinare le quantità di ciascun tipo di fertilizzante da produrre settimanalmente in modo da massimizzare il profitto complessivo. Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione in cui non si produce fertilizzante A. Calcolare la soluzione ottima del rilassato continuo. Calcolare il primo taglio di Gomory. Calcolare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	15	27	19
2		25	20	17
3			14	12
4				13

Trovare una valutazione calcolando il 4–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{34}, x_{35}, x_{45}. Siamo arrivati all'ottimo? Se dovessi obbligatoriamente usare l'arco di costo massimo, la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,4), (4,3), (4,5) e (4,6) e gli archi (2,4) e (3,6) come archi saturi, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima. Quale é la soluzione ottima del problema del flusso massimo visto come flusso di costo minimo?

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolato:

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + x_2^2 - 8\,x_1 - 6\,x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Calcolare il decremento in percentuale del valore della funzione obiettivo dopo un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe e dopo un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$. Trovare il minimo ed il massimo globale ed i relativi moltiplicatori.

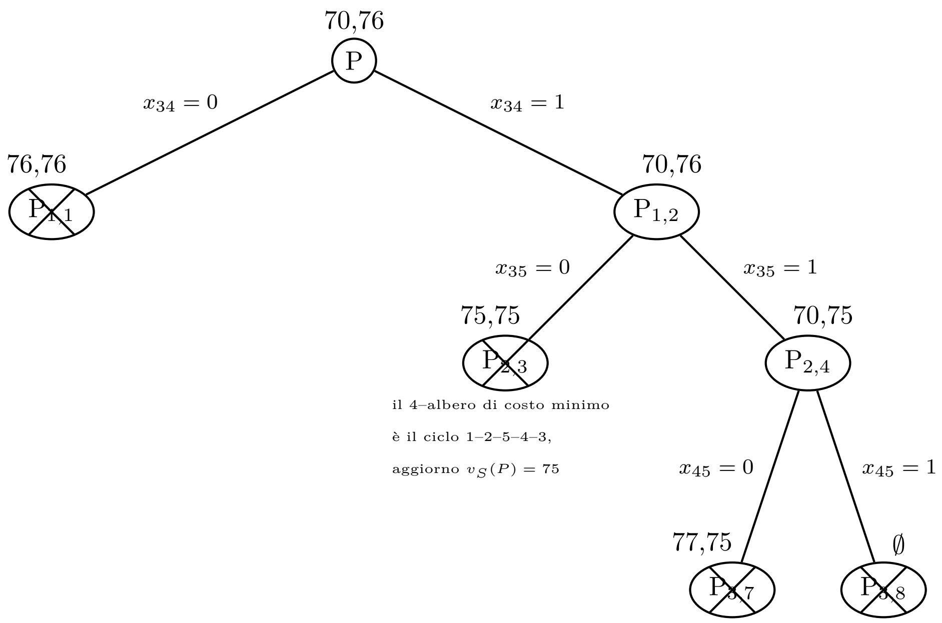
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 250\ x_A + 300\ x_B \\ 1.9\ x_A + 1.5\ x_B \leq 100 \\ 0.5\ x_A + x_B \leq 55 \\ x_A \leq 0.5\ x_B \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza $(0, 55)$ con base $B = \{2, 4\}$. La duale è $(0, 300, 0, -100, 0)$. Indice uscente 4; rapporto minimo $r_1 = \frac{350}{23}$, indice entrante 1. Soluzione ottima PL: $(15.2, 47.4)$. Base ottima per il taglio di Gomory $B = \{1, 2, 5\}$, dopo aver portato il poliedro in formato duale standard. La prima riga della matrice dei piani di taglio è $(\frac{20}{23}, -\frac{30}{23})$ e quindi $20x_3 + 16x_4 \geq 5$. Soluzione ottima PLI: $(14, 48)$.

Esercizio 2. 4–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 70$
ciclo: 1 − 3 − 5 − 4 − 2 $v_S(P) = 76$



Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (1,4) (4,3) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(2,4) (3,6)	
x	(4, 0, 2, 11, 0, 6, 3, 4, 4, 0)	
π	(0, 7, 15, 10, 18, 20)	
Arco entrante	(1,3)	
ϑ^+, ϑ^-	8 , 2	
Arco uscente	(1,4)	

I cammini aumentanti sono 1-3-6 (6), 1-4-6 (4), 1-2-4-6 (2), 1-2-5-6 (4). Il taglio di capacitá minima è $N_S = 1, 3$ di capacità 16.

Esercizio 4.

Metodo	Punto iniziale		Direzione	Passo	Punto successivo
Gradiente proiettato	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$	M=(0,1) e H= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	1/10	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
Frank-Wolfe	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$-5x_1 - 2x_2$ e $y_k = (3, 1)$	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$	11/13	$\begin{pmatrix} 36/13 \\ 15/13 \end{pmatrix}$

$(0, 1)$ massimo globale con moltiplicatori $(-6, 0, 0, 0, 0, -2)$; $(2.5, 1.5)$ minimo globale con moltiplicatori $(0, 0, 0, 3, 0, 0)$.