Sistemi tempo discreti

$[t \in \mathbb{N}]$ mentre nei tempi continui $t \in \mathbb{R}$

$k = 10 \to k = 11$ una unità di tempo discreta è passata!

A eventi → Hardware che dia input per iniziare evento

Temporizzato → temporizzatore che ciclicamente viene eseguito

Sistema tempo continuo $\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$ Eq Alle Differenze

Ex: Dynamics of a Rabbit Colony

Regole
- una coppia di conigli adulti genera coppia di figli una volta all'anno
- conigli giovani non fanno figli
- " " diventano adulti dopo un anno
- Num totale di conigli può essere modificato prelevando o aggiung coppie di conigli
- I conigli sono immortali

Definisco lo stato del sistema:

n_y : numero coppie CONIGLI giovani

n_a : numero coppie CONIGLI adulti

Def ingresso del sistema

u: numero di coppie di conigl GIOVANI aggiunte $(>\phi)$ o rimosse $(<\phi)$

$$\Rightarrow \quad n_a(k+1) = \underset{\text{IMMORT}}{n_a(k)} + \underset{\text{DA GIOV A ADULTI}}{n_y(k)}$$

$$n_y(k+1) = \underset{\text{FIGLI DEGLI ADULTI}}{n_a(k)} - n_y(k) + u(k)$$

questo NON MESSO DAL PROF

Uscita del sistema: num totale coppie di conigli

$$y(k) = n_a(k) + n_y(k)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} n_a(k) \\ n_y(k) \end{bmatrix} \qquad y(k) \qquad u(k)$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \qquad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

EQ ALLE DIFFER.

Formalismo per sistemi Tempo Discreti

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \overset{\swarrow \text{DIFF}}{\dot{x}(t)} = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{cases} = \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k, u_k) \end{cases}$$

Equivalenti

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{cases}$$

Sistema di equazioni delle Differenze

Se $f_1 \dots f_n$ sono lineari in $x_1 \dots x_n$, $u_1 \dots u_m$ si può scrivere in forma matriciale

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & & \\ & \cdots & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & & \\ & \cdots & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t)$$

Risposta di un sistema T. D. alle condizioni iniziali ed all'ingresso

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

definisco il tempo iniziale $t = t_0$ $\left(\begin{array}{l}\text{senza perdita di} \\ \text{generalità [sist tempo invariante]}\end{array}\right) = \emptyset$

$\downarrow$ matr F e G costanti!

Calcolo $x(1)$ da $x(0)$ (applico la "mappa di aggiornamento dello stato ad un passo")

$$x(1) = Fx(0) + Gu(0)$$

$$x(2) = Fx(1) + Gu(1) = F(Fx(0) + Gu(0)) + Gu(1) =$$

$$= F^2x(0) + FGu(0) + Gu(1)$$

$$x(3) = Fx(2) + Gu(2) = F(F^2x(0) + FGu(0) + Gu(1)) + Gu(2)$$

$$= F^3x(0) + F^2Gu(0) + FGu(1) + Gu(2)$$

$$\vdots$$

$$x(N) = F^N x(0) + \sum_{i=0}^{N-1} F^{N-1-i} Gu(i)$$

Mappa di aggiornam dello stato a N passi

Permette di aggiornare lo stato del sistema note:
- le condizioni iniziali $x(0)$
- la storia temporale dell'ingresso

$$x_N = \underbrace{F^N x(0)}_{\text{Risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i}^{N-1} F^{N-1-i} G u_i}_{\text{Risposta forzata}}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

Eq di Lagrange

SIST TEMP CONTINUI

Utile notare che:

$$\sum_{i=0}^{N-1} F^{N-1-i} G u_i = \underbrace{\left[G \;\vdots\; FG \;\vdots\; F^2G \;\vdots\; \dots \;\vdots\; F^{N-1}G \right]}_{N} \left.\begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}\right\} N$$

Uscita del sistema

$$y(t) = Hx(t) + Du(t)$$

$$\downarrow$$

$$y(N) = HF^N x(0) + H \sum_{i}^{N-1} F^{N-1-i} G u_i + Du(N)$$

Equilibrio per sistemi T.D.

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$ $\{\dot{x} = f(x(t), u(t))$ in T.C.$\}$

x_e è un punto di equilibrio se

$$x_e = f(x_e, \cdot)$$ $\{\dot{x} = 0 = f(x, \cdot)\}$

Per trovare gli equilibri basta trovare

$$x_e = f(x_e, u_e)$$ al variare u_e ottengo differenti equilibri x_e

Passo successivo = al passo precedente

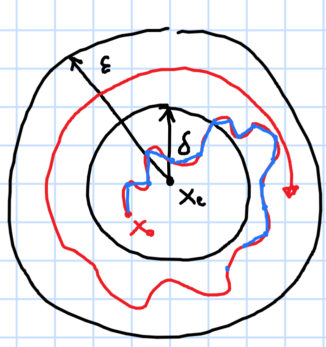
Stabilità di un equilibrio (Lyapunov)

dato $x_e = f(x_e, \cdot)$

x_e è un punto di equil stabile se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > \emptyset$: se $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t > \emptyset$

perturbo lo stato, da quel momento in poi lo stato evolverà ma non si allontana mai più di ε, allora def stabile

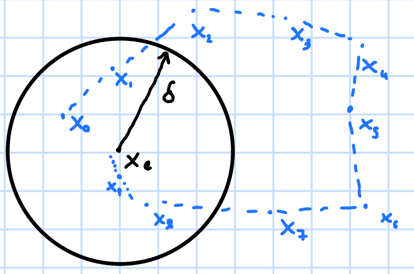


resta entro ε!

in realtà il "TRAGITTO" andrebbe fatto per punti e non con una linea continua

Equilibrio convergente

x_e è convergente se $\exists \delta$: se $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$



l'allont di x_e può essere anche molto grande

Equilibrio asintoticamente stabile

x_e è asintot STABILE se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \\ \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \end{cases}$$

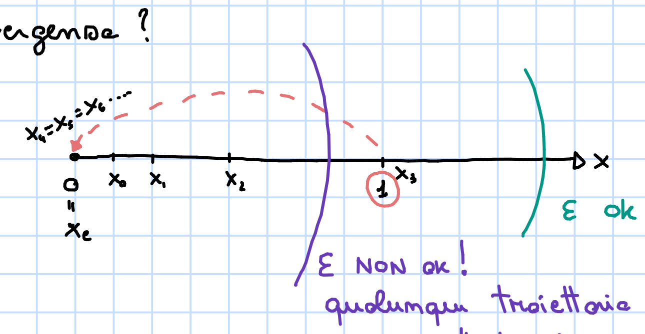
ESEMPIO: sistema TD converg ma NON stabile

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & \|x(t)\| < 1 \\ \emptyset & \|x(t)\| \geq 1 \end{cases}$$

Equilibri?

$$x_e = \begin{cases} 2x_e \to x_e = 2x_e \Rightarrow x_e = \emptyset \\ 0 \to x_e = \emptyset \end{cases}$$

Convergenza?



Stabilità?

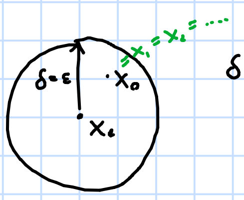
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: se $\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t > \emptyset$

Ex: sistema $x(t+1) = x(t)$

Equilibri? $x_e = x_e$ tutti gli x_e sono equilibrio

Stabilità?



$\delta = \varepsilon$

praticamente x_0 è il punto perturbato ???

Convergente?

$$\lim_{t \to \infty} \|\underset{\overset{|||}{x_0}}{x(t)} - x_e\| \to \emptyset$$

$\|x_0 - x_e\| \not\to 0$ NON CONVERGENTE

Parallelo con T.C.

$\dot{x} = \emptyset$ oppure $\underbrace{\dot{x} = \emptyset + u}$ $\boxed{\text{Integratore !}}$

$\downarrow \mathcal{L}$

$sX(s) = u(s) \rightarrow \frac{X(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s}$

MATRICE DINAMICA

$\dot{x} = Ax + Bu$

$A = \emptyset \rightarrow \lambda(A) = \lambda \rightarrow$
autoval $\lambda = \emptyset$

$x_{k+1} = x_k$ oppure $\underbrace{x_{k+1} = x_k + u_k}$

$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

$A = 1 \rightarrow \lambda(A) = (\lambda - 1)$

autovalore $\boxed{\lambda = 1}$

Sommatore T.D.

Equilibri per sistemi TD Lineari Tempo Invarianti

$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

pongo per semplicità $u_k = \emptyset$ e trovo gli equilibri

$x_e = Ax_e \Rightarrow x_e = \emptyset$ sempre equilibrio !

$\Rightarrow x_e \neq 0$ può essere un punto di equilibrio

se $x_e = Ax_e \Rightarrow (A-I)x_e = \emptyset$

che succede se - $(A-I)$ non invertibile

- rango $(A-I) < n$ $\quad n = \dim(A)$
- $\det(A-I) = \emptyset$

In tutti questi casi, significa che A ha tra i suoi autovalori $\lambda = 1$!

Nota che è la stessa cosa che succ nel T.C. se A ha autovalori in $\emptyset$

allora è possibile avere equilibrio $\neq \emptyset$

$\Rightarrow$ se $x_e \neq 0$ è di equilibrio allora $\alpha \cdot x_e$ $\forall \alpha$ è un punto di equilibrio $\Rightarrow$ i punti di equilibrio sono infiniti !

DIM

x_e di equil $\quad x_e = Ax_e$

$\alpha x_e = \alpha \cdot (x_e) = \alpha \cdot (Ax_e) \Rightarrow \underline{\alpha \cdot x_e = A\alpha x_e}$

Risposta libera - i modi dei sistemi T.D.

$X_k = A^k x_0$ $\qquad \{ x(t) = e^{At} x_0 \}$

↳ A è simile ad una matrice diagonale $A = V \Lambda V^{-1}$

$\Rightarrow A^k = \underbrace{V\Lambda V^{-1} \cdot V\Lambda V^{-1} \cdot \ldots \cdot V\Lambda V^{-1}}_{k} =$

$= V\Lambda^k V^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}_m \qquad \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{bmatrix}_m$

λ_i autovalori di A

λ_i^k sono i modi !

Se A non è diagonalizzabile, nel T.C. usiamo forma di Jordan etc...

dati $\{ z_1 \ldots z_m \}$ autovalori di A $(m \times m)$

1) Se tutti gli z_i sono diff i modi del sistema sono z_i^k $\quad \{ e^{\lambda t} \text{ T.C} \}$

se z_i è complesso allora anche $\bar{z}_i$ è un autovalore

$\Rightarrow z = \rho e^{j\theta} \quad \bar{z} = \rho e^{-j\theta}$ e il modo associato a

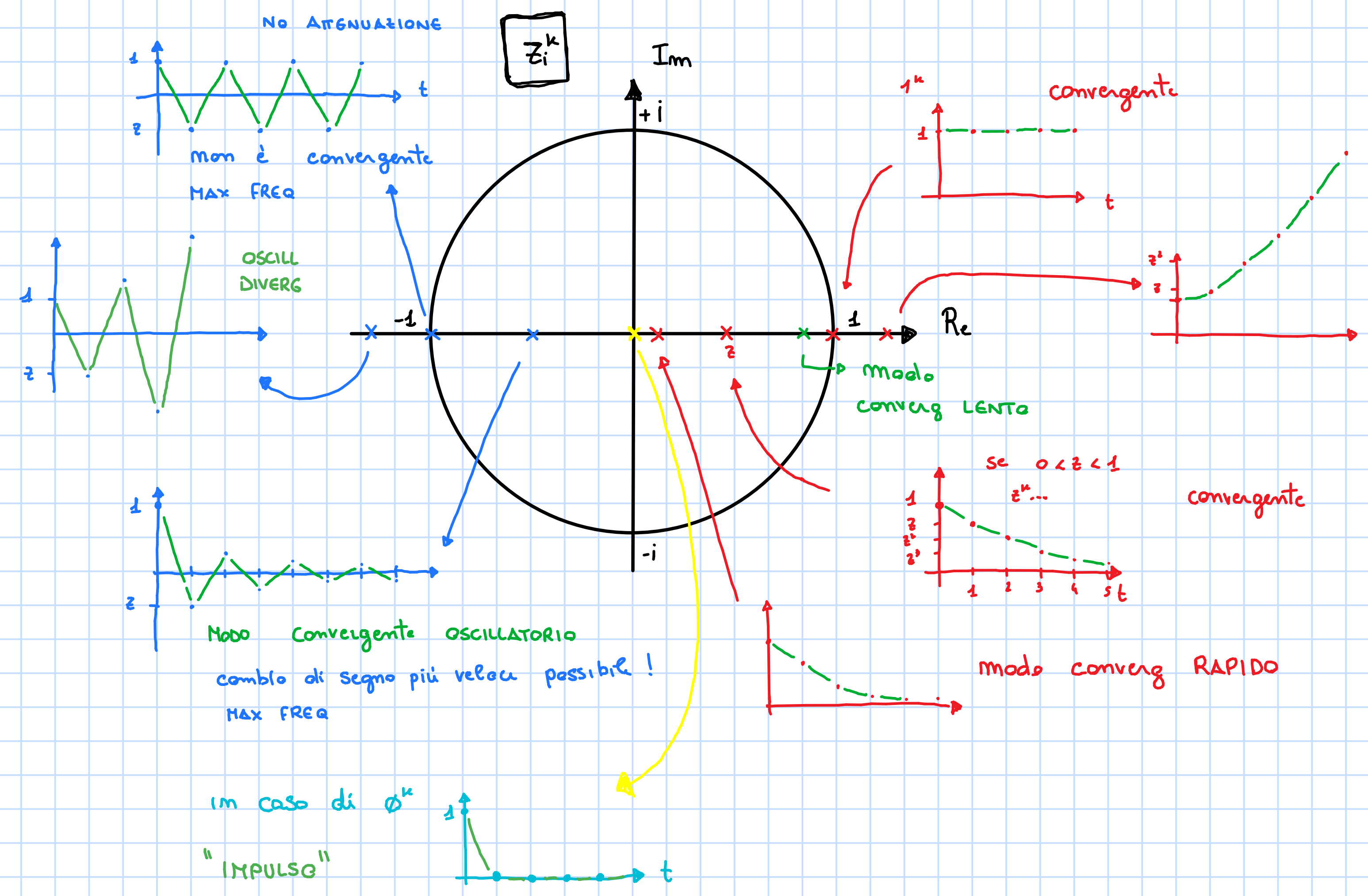
z e $\bar{z}$ è : $\rho^k \cdot \sin(\theta k + \varphi)$ $\quad \{ e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) \}$ T.C.

2) un autovalore z ha molteplic η

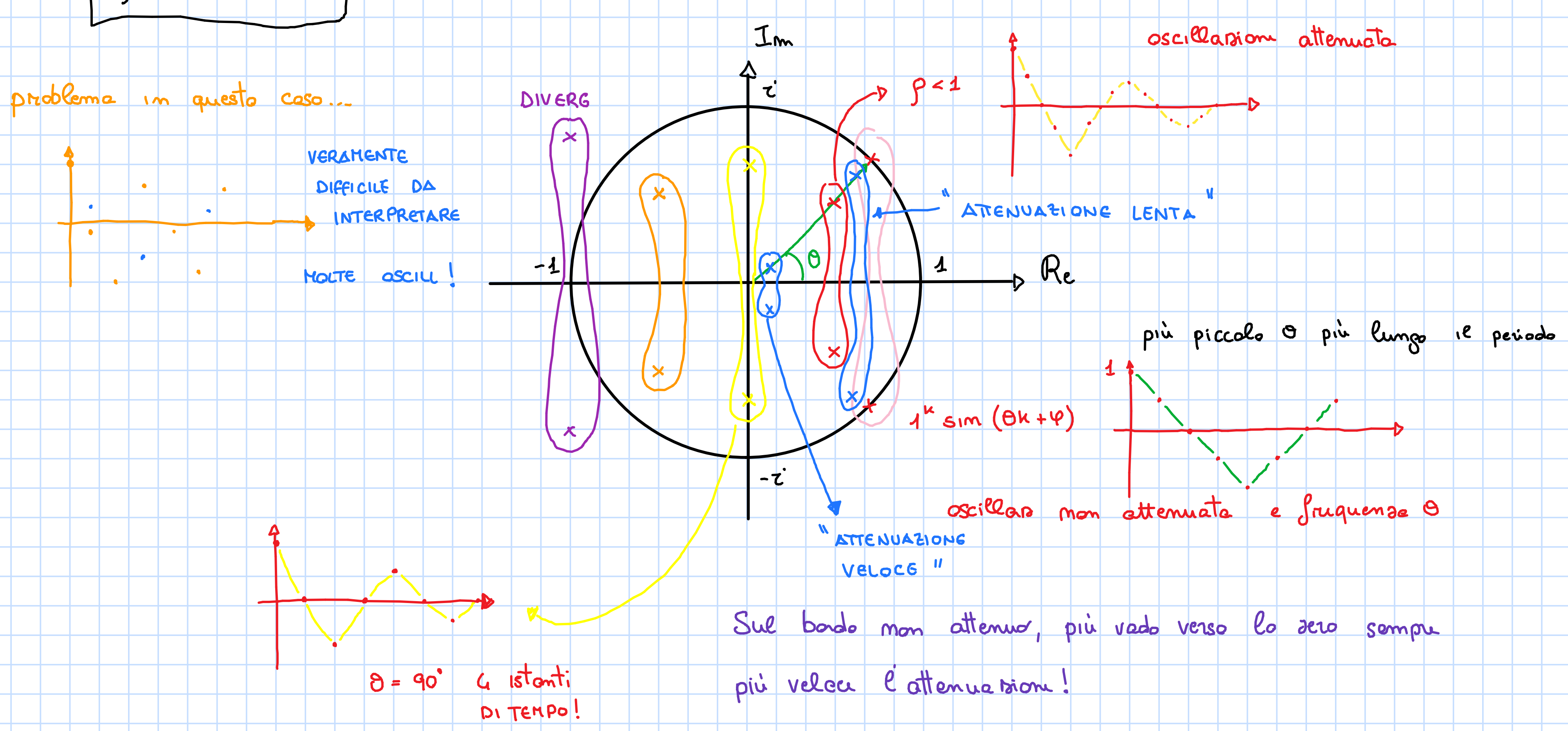
i modi sono : $\eta \begin{cases} k^0 z^k \\ k^1 z^{k-1} \\ \vdots \\ k^{\eta-1} z^{k-\eta+1} \end{cases}$ $\qquad \boxed{\begin{cases} t^0 e^{\lambda t} \\ t^1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ t^{m-1} e^{\lambda t} \end{cases} \text{T.C.}}$

se z è complesso $\Rightarrow$ i modi sono

η modi $\begin{cases} k^0 \cdot \rho^k \sin(\theta k + \varphi) \\ \vdots \\ k^{\eta-1} \rho^{k-\eta+1} \sin(\theta(k-\eta+1) + \varphi) \end{cases}$



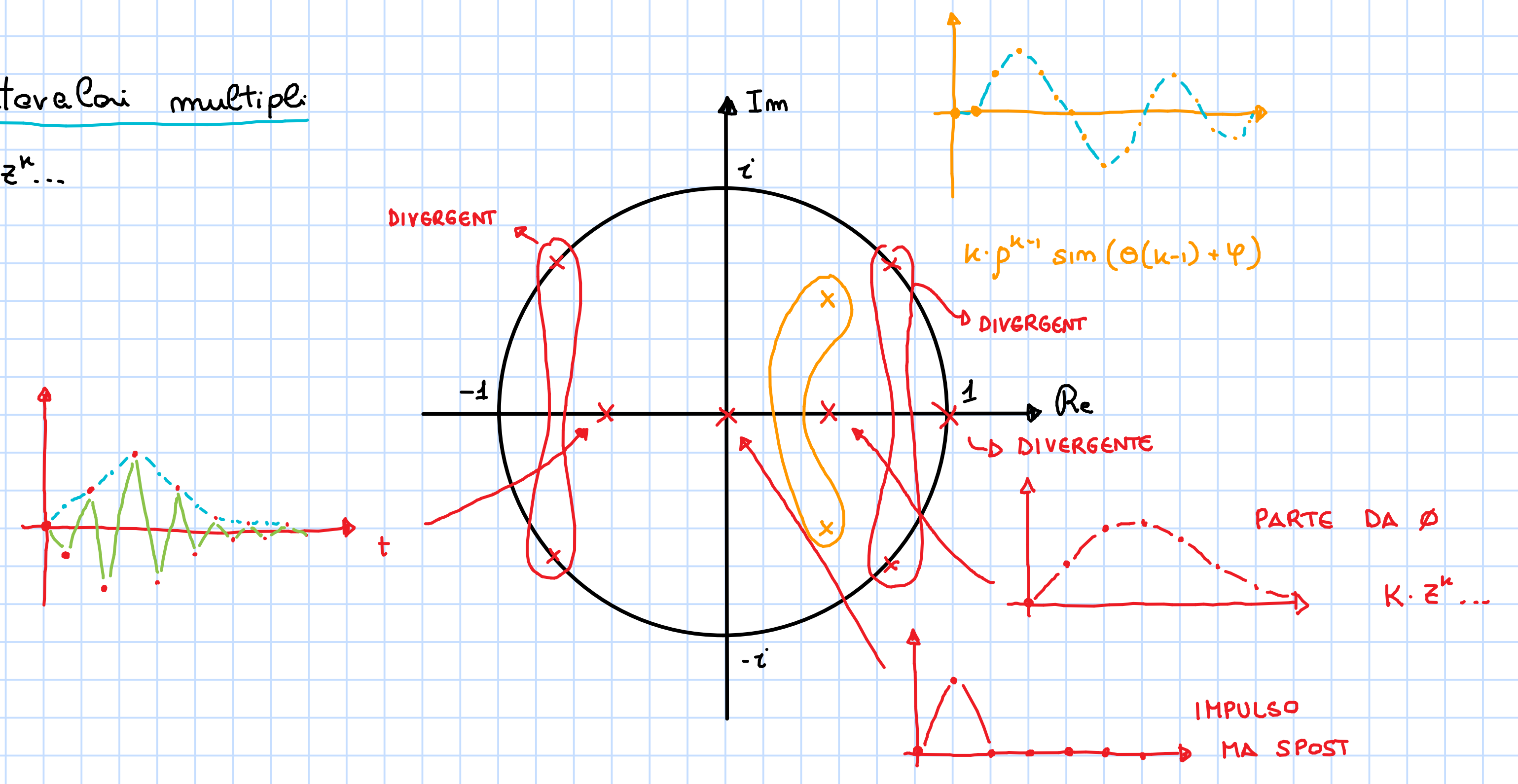
$\boxed{\rho^k \sin(\theta k + \varphi)}$



Sul bordo non attenuo, più vado verso lo zero sempre più veloce l'attenuazione !

Autovalori multipli

$k \cdot z^k \ldots$



Possiamo concludere che per sistemi LINEARI TEMPO INV TEMPO DISCR :

- se $\forall z \quad |z| < 1 \quad \Rightarrow$ tutti i modi sono convergenti $\Rightarrow A^k x_0 \to \varnothing \quad \forall x_0 \Rightarrow$ è equilibrio nell'origine è converg
- se $\exists z : \quad |z| > 1 \quad \Rightarrow$ almeno un modo DIVERGENTE
  $\Rightarrow A^k x_0 \to \infty$ per qualche $x_0 \Rightarrow$ non è ne stabile ne convergente (equil in $\varnothing$)
- se $\exists z : |z| = 1 \quad \Rightarrow$ il modo associato non è converg ne divergente !
- se $\exists z : |z| = 1$ e $\eta > 1$ allora i modi sono divergenti !

$\Rightarrow$ Stabilità per Sistemi LTI temp discr

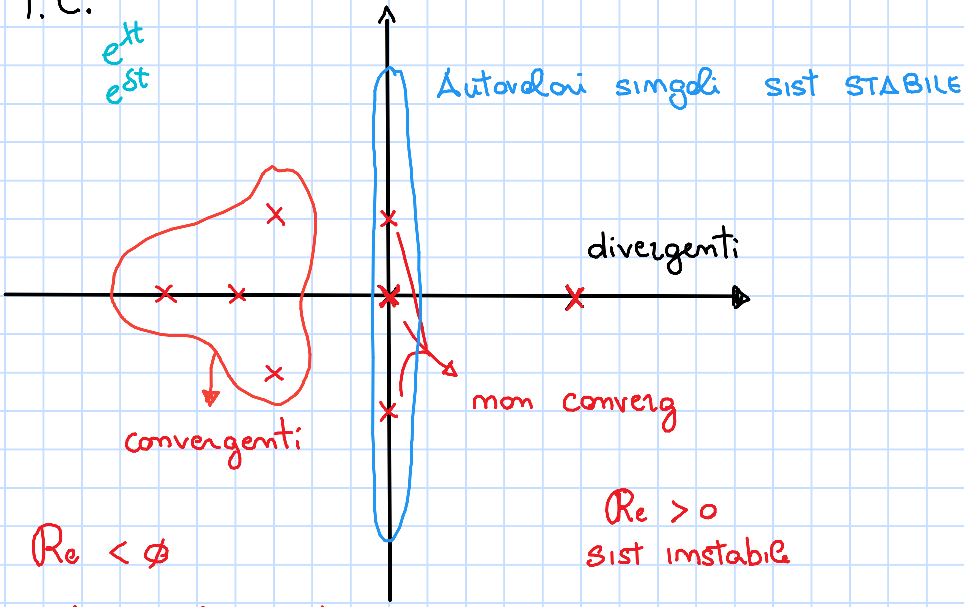
data $x_{k+1} = A x_k$ e z soluz di $\lambda(A) = \varnothing$

- se tutti $z : |z| < 1 \quad \Rightarrow$ SIST ASINTOT STABILE
- se anche solo uno z ha $|z| > 1 \Rightarrow$ SIST INSTABILE
- se $\exists z : |z| = 1$ e $\eta = 1$ SIST STABILE
- se $\exists z : |z| = 1$ e $\eta > 1$ SIST INSTABILE

T.C.

$e^{\lambda t}$

e^{st}



· sist asintotic stabile