22 MAGGIO 2023

STABILITÀ INTERNA (MATRICE A - AUTOV.)

RAGG. OSS.

AUTOV. PARTE COMPL. OSS. E RAGGIUNG. $(\hat{A}_b)$ $\xrightarrow{\text{POLI}}$ $G(s)$

STABILITÀ BIBO (ESTERNA) POLI $Re<0$ DI $G(s)$

SISTEMA INTERNAM. AS. STABILE $\Rightarrow$ BIBO STABILE

$\cancel{\Leftarrow}$

PER UN SISTEMA IN FORMA MINIMA (COMPL. OSS E RAGG.)

VALE $\Leftrightarrow$

LTI

STAB. INTERNA

$(\delta x_0 \to \delta x(t))$

- INSTABILE
- STABILE
  - MARGINALM.
  - ASINTOTICAM.

STAB ESTERNA

(BIBO)

$u \to y$

- INSTABILE
- STABILE

IMPLICA

~~NON~~ IMPLICA IN GENERALE

(SOLO PER SISTEMI IN FORMA MINIMA)

LEMMA PBH PER RAGG. E OSS.

REALIZZAZIONE

$$
\begin{tikzcd}
(A, B, C, D) \arrow[rr, bend left, "1"] & & G(s) \arrow[ll, bend left, "2\ ?"]
\end{tikzcd}
$$

1

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

SOLUZ. UNICA

(LEGAME INGRESSO USCITA)

2 VEDIAMO ADESSO, CI ASPETTIAMO INFINITE POSSIBILITÀ

(INFINITE SCELTE EQ. PER VARIABILI DI STATO)

$$G(s) = \frac{N_{G(s)}}{D_{G(s)}} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

FORMA PIÚ GENERALE POSSIBILE (grado $N_{G(s)} \leq$ grado $D_{G(s)}$)

SISTEMA PROPRIO / STRETTAMENTE PROPRIO

RISCRIVIAMO $G(s)$:

$$G(s) = \frac{\beta_n\left(s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0\right) + \overbrace{\left(\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}\right)}^{\hat{\beta}_{n-1}} s^{n-1} + \dots + \overbrace{\left(\beta_1 - \beta_n \alpha_n\right)}^{\hat{\beta}_1} s + \underbrace{\left(\beta_0 - \beta_n \alpha_0\right)}_{\hat{\beta}_0}}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \hat{\beta}_n$$

$\hat{\beta}_n = \beta_n$

$\hat{\beta}_i = \beta_i - \beta_n \alpha_i \quad \forall i \neq n$

UNA POSSIBILE REALIZZAZIONE

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$C = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \cdots & \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = \hat{\beta}_n$$

- PER COSTRUZIONE È SEMPRE COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE
- LA COMPLETA OSSERVABILITÀ È LEGATA AD EVENTUALI POLINOMI A FATTOR COMUNE TRA $N_G(s)$ E $D_G(s)$ [CANCELLAZIONI]

UNA REALIZZAZIONE ALTERNATIVA

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 \; \cdots \; 0 & -\alpha_0 \\ & -\alpha_1 \\ I_{n-1 \times n-1} & \vdots \\ & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

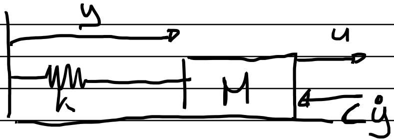
COME SOPRA DIPENDE DAI SOLI $2n+1$ PARAMETRI α E $\hat{\beta}$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} 0 \; \cdots \; 0 & 1 \end{array}\right] \qquad D = \hat{\beta}_n$$

PER COSTRUZIONE È SEMPRE COMPLETAM. OSS.

FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ

LA RAGGIUNGIBILITÀ È LEGATA A EVENTUALI CANCELLAZIONI.



FORMA NORMALE

$$M\ddot{y} = -c\dot{y} - ky + u$$

FdT

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{y}$

FORMA DI STATO

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) + f(0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0 \cdot u \end{cases}$$

NEL CALCOLO DI f.d.t.

$f(0)$ NON LO CONSIDERO

PERCHÉ È DETERMINANTE <u>SOLO</u> PER EV. LIBERA

(f.d.t. È LEGATA ALL'EVOLUZ. FORZATA)

$$M\ddot{y} = -c\dot{y} - ky + u$$

$$s^2 M Y(s) + s\,c\,Y(s) + k\,Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{K}{M}}$$

DA f.d.t. $\longrightarrow$ REALIZZAZIONE

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -c/M \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

FORMA C. DI OSSERV.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -K/M \\ 1 & -c/M \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

DALLE PRIME LEZIONI

FORMA NORMALE ∞ FORMA DI STATO

REALIZZAZ. ∇

(TRA QUESTE RAGG. / OSS.)

f.d.t.

$C(sI-A)^{-1}B+D$

$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow s$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \neq 0 \\ \leftarrow \neq 0 \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ = 0 & & \neq 0 \end{matrix}$$

RAGGIUNGIBILITÀ

COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

OSSERVABILITÀ

NON COMPL. OSSERVABILE

STABILITÀ INTERNA

-1 m.a. $= 2$
m.g. $= 1$

0 m.a. $=$ m.g. $= 1$

MOM e^{-t} $t e^{-t}$

$e^{0t} = 1$

MARGINALM. STABILE

• PER f.d.t.

POLO IN 0

(AUTOV. 0 APPARTIENE ALLA PARTE COMPL. R E O)

BIBO STABILITÀ

(STABILITÀ ESTERNA)

TUTTI I POLI A PARTE $\mathrm{Re} < 0$?

NO, SENZ'ALTRO UN POLO IN ZERO

→ INSTABILE

• POTREBBE ESSERCI AL PIÙ UN POLO IN −1

$$\text{COSTANTE} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow \text{RAMPA}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = (s+1)^2 s$$

$$\mathrm{cof}(sI-A) = \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ s & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$-1(-s) = +s$$

$$\mathrm{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s(s+1) & s & 0 \\ 0 & s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

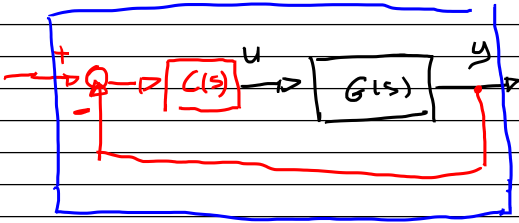
$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix} = -\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s} =$$

$$G(s) = \frac{-2s+s+1}{s(s+1)} = \frac{-s+1}{s(s+1)} = -\frac{s-1}{s(s+1)}$$



$$\underbrace{\frac{C(s)\cdot G(s)}{1+C(s)\cdot G(s)}}$$

IL PRODOTTO $C(s)\cdot G(s)$ DEVE AVERE ALMENO UN POLO NELL'ORIGINE

CONTROLLARE IN MODO CHE IL SISTEMA CONTROLLATO ABBIA ERRORE DI INSEGUIMENTO PER MF. A GRADINO NULLO

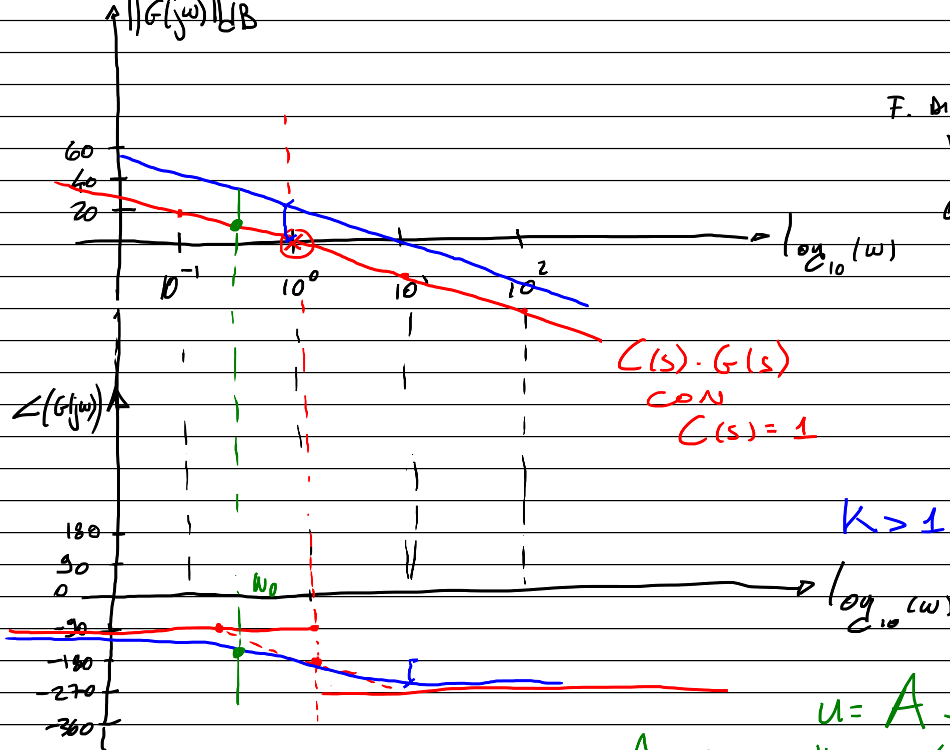
A REGIME

G(s) HA GIÀ UN POLO NELL'ORIGINE

QUAL È LA FORMA PIÙ SEMPLICE PER C(s) PER "SPERARE" CHE LA SPECIFICARE CHE LA SPECIFICA SIA GARANTITA?

$C(s) = K$

- GARANTIRE STABILITÀ DI $\dfrac{C(s)\,G(s)}{1+C(s)\,G(s)}$



$G(j\omega)$

F. di risp. armonica $G(s)$

o di risp in freq.

$C(s) \cdot G(s)$ con $C(s) = 1$

$$\frac{-s+1}{s(s+1)}$$

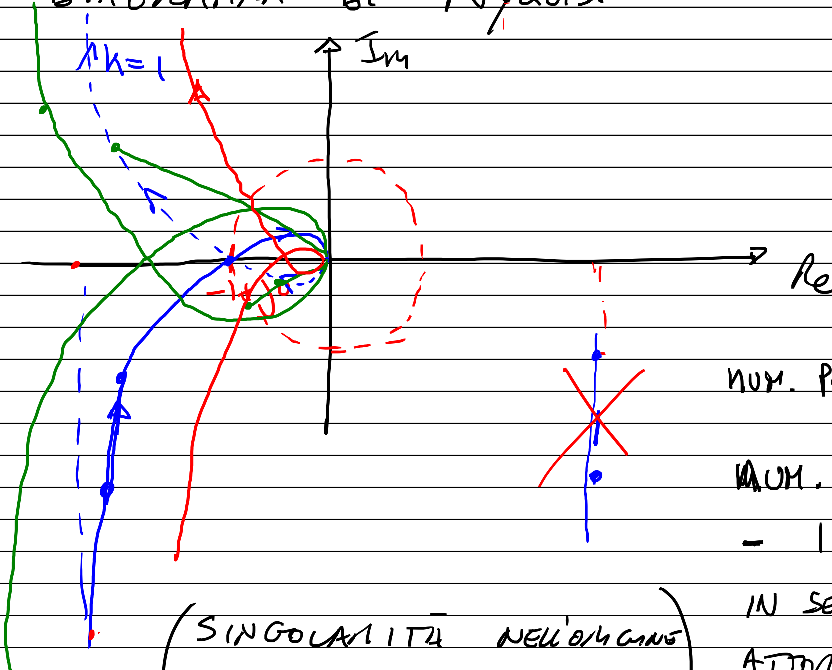
$K > 1$ ✓

$K \leq 1$ ✗

$$u = A \operatorname{sen} \omega_0 t$$

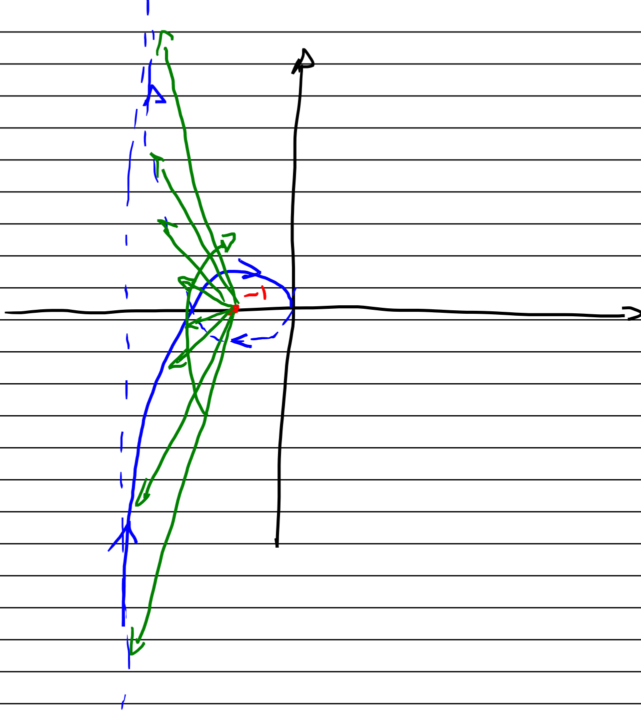
$$y = A \cdot \|G(j\omega_0)\| \operatorname{sen}(\omega_0 t + \angle G(j\omega_0))$$

DIAGRAMMA DI NYQUIST



NUM. POLI Re>0 A.C.
=
NUM. POLI Re>0 A.A.
− I CIRCONDAMENTI
IN SENSO ANTIORARIO
ATTORNO A −1+j0
DEL DIAGRAMMA COMPLETO

(SINGOLARITÀ NELL'ORIGINE
CONTANO PER MEZZO
GIRO)



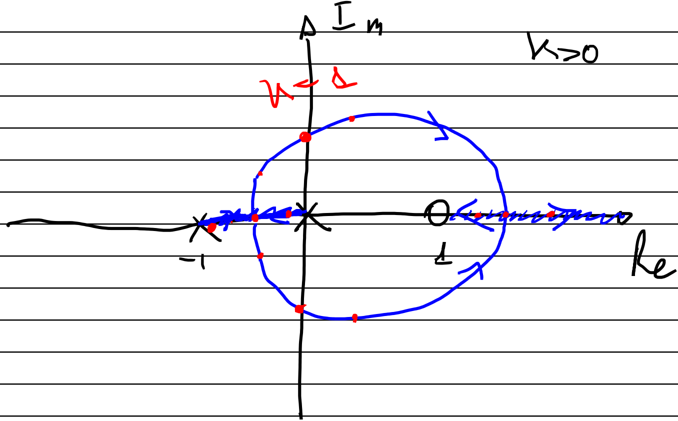
1 GIRO E MEZZO IN SENSO ORARIO

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2}$$

2 POLI Re > 0

PER

K > 1



$K>0$

LUOGO DELLE RADICI DEL DEN. DI

$$\frac{C(s)\cdot G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

AL VARIARE DI K

$$-\frac{s-1}{s(s+1)}$$

$$1+k\left(-\frac{s-1}{s(s+1)}\right)=0$$

$$s(s+1)-k(s-1)=0$$

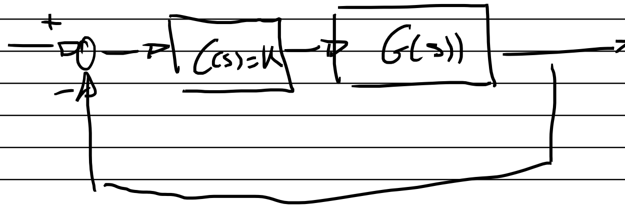
$$s^2+s-ks+k=0 \qquad s^2+s(1-k)+k=0$$

TUTTE LAMA CON $Re < 0$

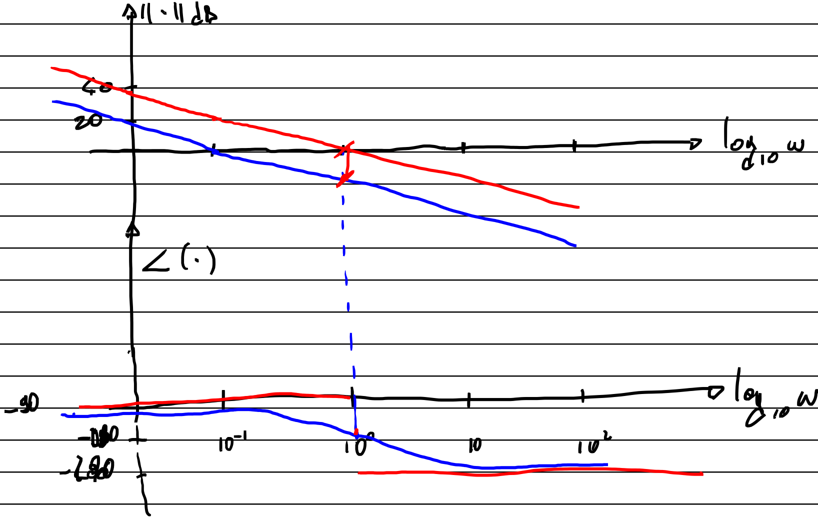
$1 - k > 0 \qquad k < 1 \qquad 0 < k < 1$

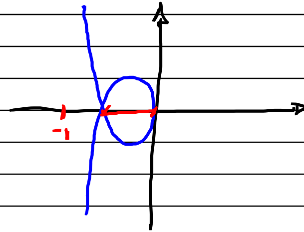
$k > 0 \qquad k > 0$

$$G(s) = \frac{-s+1}{s(s+1)}$$



$K = 0,1$





$K < 1$ ✓

$K > 1$ ✗

$$6 \operatorname{sen} t \longrightarrow \boxed{G_c(s)} \longrightarrow$$

$$G_c(s) = \frac{C(s)\,G(s)}{1 + C(s)\,G(s)}$$

$$G_c(s) = \frac{0{,}1\,(-s+1)}{s(s+1) + 0{,}1\,(-s+1)} \cdot \frac{1}{\cancel{s(s+1)}}$$

$$= \frac{0{,}1\,(-s+1)}{s^2 + s - 0{,}1\,s + 0{,}1} =$$

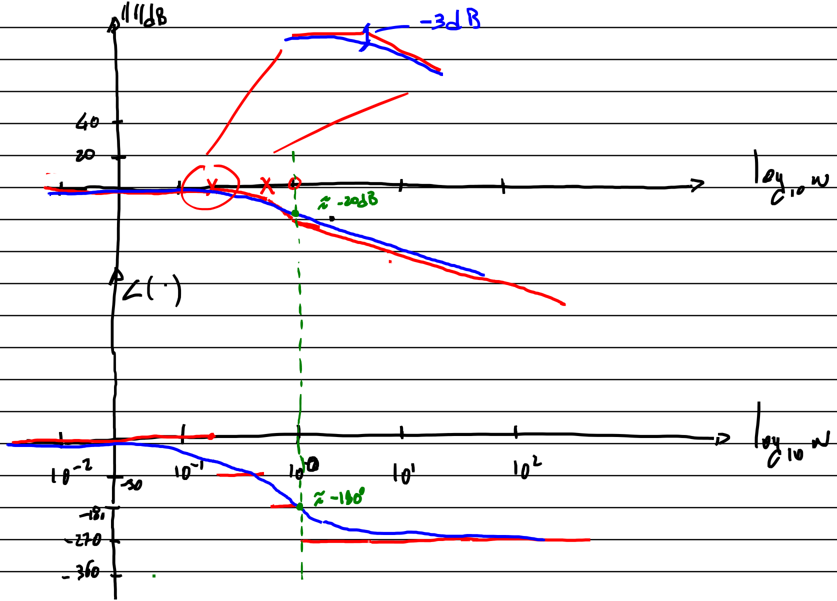
$$G_c(s) = \frac{0{,}1\,(-s+1)}{s^2 + 0{,}9\,s + 0{,}1} = \frac{\cancel{0{,}1}\,(-s+1)}{\cancel{0{,}1}\,(10s^2 + 9s + 1)}$$

z 1
p −0,775
p −0,125

$$\Delta = 0{,}81 - 0{,}4 = 0{,}41 \qquad \sqrt{0{,}41} \sim 0{,}65$$

$$\frac{-0{,}9 \pm \sqrt{0{,}41}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-1{,}55}{2} = -0{,}775 \\[2ex] \dfrac{-0{,}25}{2} = -0{,}125 \end{cases}$$

$$G_c(s) = \frac{-s+1}{\left(\frac{+s}{0{,}775} + 1\right)\left(\frac{s}{0{,}125} + 1\right)}$$



$$G_c(s) = \frac{-s+1}{\left(\frac{+s}{0,775}+1\right)\left(\frac{s}{0,125}+1\right)}$$

$$u = 6 \operatorname{sen} t$$

$$y \approx 0,6 \operatorname{sen}(t - \pi)$$

$$0,1 \approx \| G_c(j1) \|$$

$$G_c(s) = \frac{(-s+1)}{(10s^2 + 9s + 1)}$$

$$G_c(j1) = \frac{1-j}{-10+9j+1} = \underbrace{\frac{1-j}{-9+9j}} = \frac{1-\cancel{j}}{-9(1-\cancel{j})} = -\frac{1}{9}$$

$$\|G_c(j1)\| = \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{9} \qquad \angle(G_c(j\omega)) = -180^0 = -\pi$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

STABILITÀ INTERNA

INSTABILE

AUTOV: $1+j2$

$1-j2$

-1

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

MODI: $e^{\sigma t}\sin \omega t$

$e^{\sigma t}\cos \omega t$

$e^{-t} \qquad e^{t}\sin 2t$

$e^{t}\cos 2t$

RAGGIUNGIBILITÀ:

$$M_r \qquad [\lambda I - A \ \vdots \ B] \qquad M_r = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_r) = -64$$

$$\rho(M_r) = 3$$

COMPLETAM. RAGGIUNGIBILE

OSSERVABILITÀ:

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(M_o) = 16 \neq 0$$

$$\rho(M_o) = 3$$

COMPLETAMENTE OSSERVABILE

STABILITÀ ESTERNA: INSTABILE

f.d.t. den: $(s+1)\underbrace{(s-1+j2)(s-1-j2)}$

$(s-1)^2-(j2)^2=(s-1)^2+4$

$s^2-2s+1+4$

$$\frac{\text{GRADO} < 3}{(s+1)(s^2-2s+5)}$$

(D = 0 STRETT. PROPRIO)

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ $= 0$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 2 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\det(sI-A)=$
$(s+1)((s-1)^2+4)$

$$\operatorname{cof}(sI-A)=\begin{bmatrix} s^2-1 & -2(s+1) & 0 \\ 2(s+1) & s^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2+4 \end{bmatrix}$$

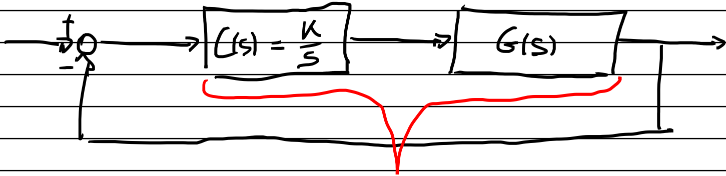
$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-1)^2+4} & +\frac{2}{(s-1)^2+4} & 0 \\ -\frac{2}{(s-1)^2+4} & \frac{s-1}{(s-1)^2+4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} -\frac{2}{(s-1)^2+4} & \frac{s-1}{(s-1)^2+4} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{4}{(s-1)^2+4}+\frac{1}{s+1}=\frac{-4s-\cancel{4}+s^2-2s+1+\cancel{4}}{(s+1)(s^2-2s+5)}$$

$$G(s) = \frac{s^2 - 6s + 1}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)}$$



ERRORE INSEG. A GRADINO NULLO A REGIME

ALMENO DI TIPO 1

ALMENO UN POLO IN 0

$K = ?$

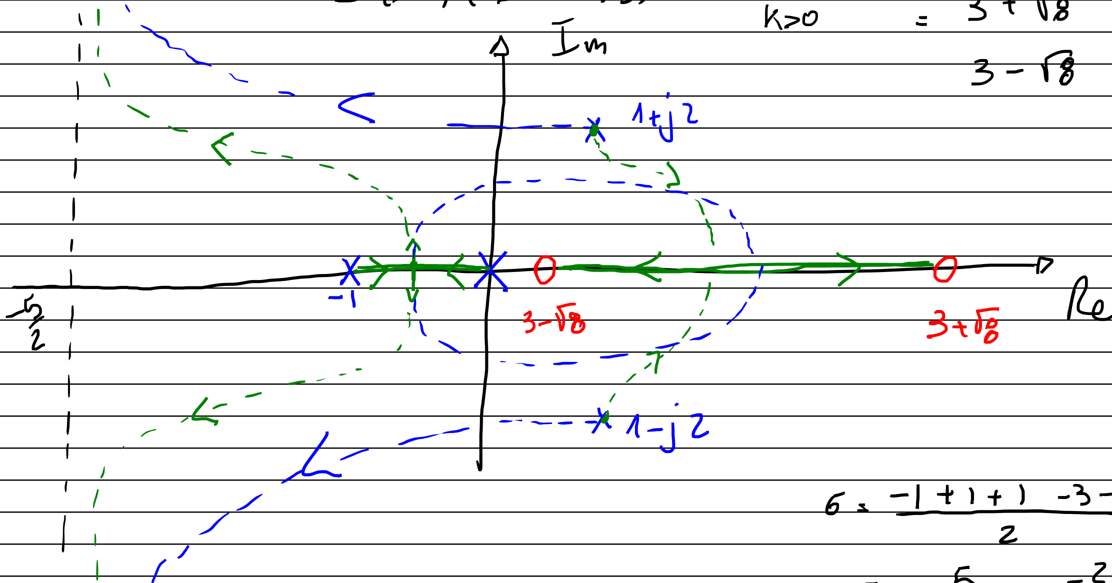
$$C(s)\,G(s) = \frac{K\,(s^2 - 6s + 1)}{s\,(s+1)\,(s^2 - 2s + 5)}$$

$$3 \pm \sqrt{9-1} =$$

$K > 0$

$$= 3 + \sqrt{8}$$

$$3 - \sqrt{8}$$



$$\sigma = \frac{-1+1+1 \quad -3-3}{2}$$

$$= -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$$G_G(s) = \frac{C(s)\ G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$1 + C(s)\,G(s) \qquad 1 + \frac{K(s^2 - 6s + 1)}{s(s+1)(s^2 - 2s + 5)}$$

$$s(s+1)(s^2 - 2s + 5) + K(s^2 - 6s + 1) = 0$$

$$G(s) = \frac{s-1000}{(s+1)(s^2+s+100)}$$ BODE

STABILITÀ ESTERNA (BIBO) : SI!

FORMA DI BODE:

$$\frac{-100\cancel{0}}{10\cancel{0}} \frac{\left(-\frac{s}{1000}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s^2}{100}+\frac{s}{100}+1\right)} = -10 \frac{\left(-\frac{s}{1000}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s^2}{100}+\frac{s}{100}+1\right)}$$

GUADAGNO DI BODE -10

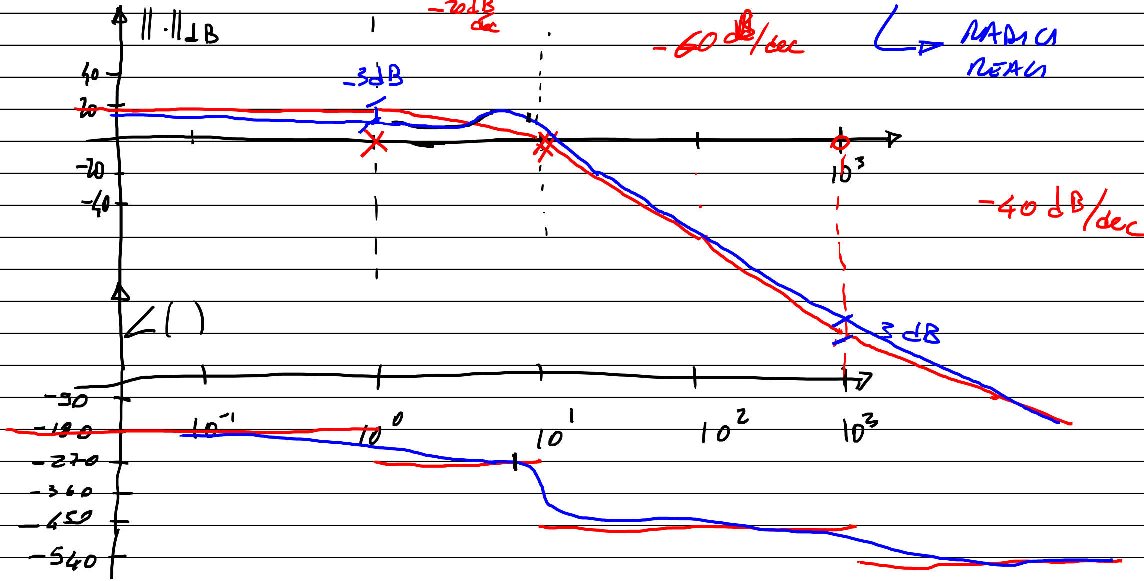
$$\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$$

Z	1000	Re > 0
P	−1	Re < 0
2P	$\omega_n = 10$	Re < 0

$$\zeta = \frac{1}{20}$$

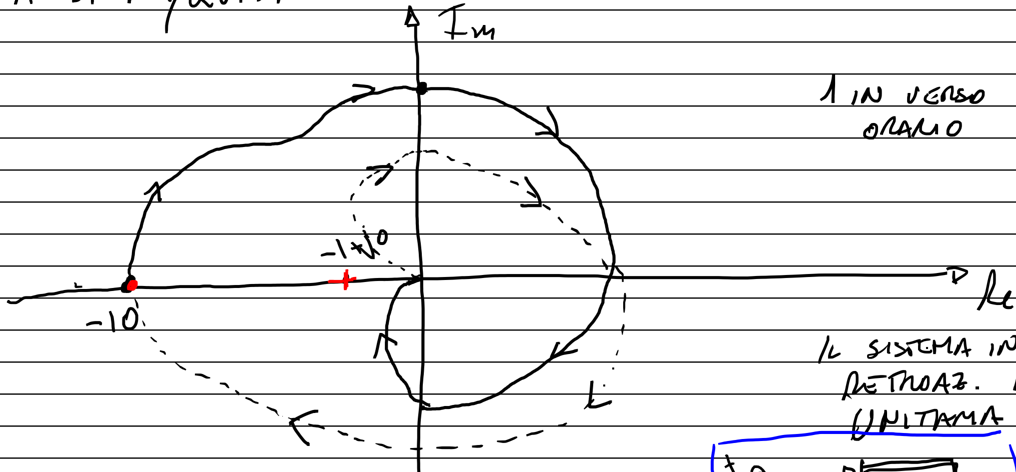
$$\frac{2}{\cancel{1}0}\zeta = \frac{1}{10\cancel{0}} = \frac{1}{20}$$

$$\left[s^2 + 8s + 1 \right] \qquad \omega_n = 1 \qquad \frac{2\zeta}{\omega_n} = 8 \qquad \zeta = 4$$



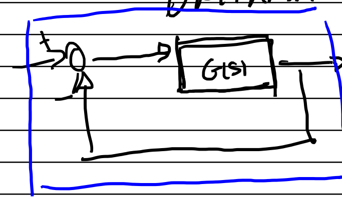
$$20 \log_{10} |-10| \qquad 20 \log_{10} 10 = 20\,dB$$

DIAGRAMMA DI NYQUIST



1 IN VERSO ORARIO

IL SISTEMA IN RETROAZ. NEG. UNITARIA

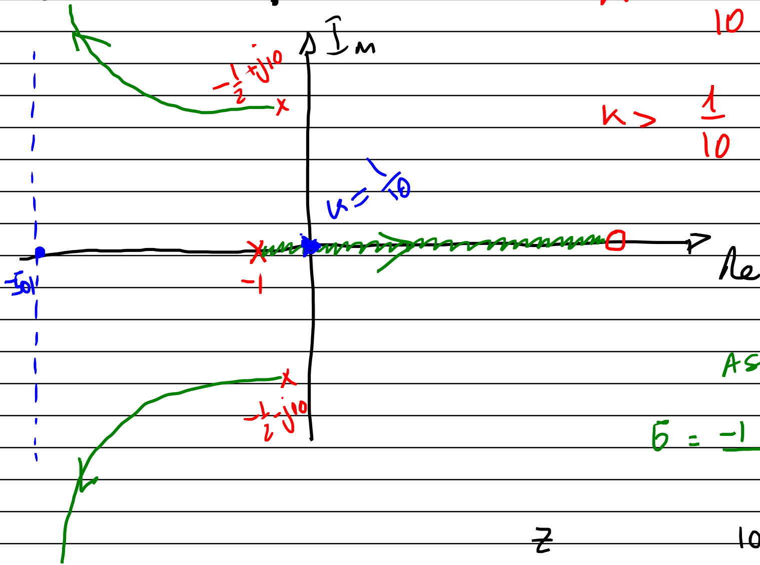


$$G_c(s) = \frac{1\,G(s)}{1+1\,G(s)}$$

3 POLI DI CUI 1 CON $Re > 0$

2 CON $Re < 0$

AL VARIARE DI K?



$K < \frac{1}{10}$ 0 POLI $Re>0$ SISTEMA STABILE

$K > \frac{1}{10}$ 1 POLO $Re>0$ ~~SIST~~. INSTAB.

ASINTOTI $3-1=2$

$$\sigma = \frac{-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1000}{2} = -501$$

z	1000	$Re>0$
p	-1	$Re<0$
2p	$\omega_n=10$	$Re<0$

$s^2+s+100$

$$\frac{-1\pm\sqrt{1-400}}{2} \simeq -\frac{1}{2}\pm j10$$