ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 35

Note Title 13/11/2018

AUTOVALORI
AUTOVETTORI
AUTOSPAZI

Problema di sottofondo: data $f: V \to V$ (stesso spazio in partenza ed arrivo) trovare una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che, usando questa stessa base in partenza ed arrivo, la matrice diventa semplice.

Esempio motivazionale Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare A^{2018}
2. Trovare B tale che $B^{10} = A$

Per ora non lo sappiamo fare.

Oss. Se la matrice fosse diagonale, sarebbe tutto molto più semplice.

Domanda: scegliendo bene la base, posso fare diventare una matrice diagonale?

$$\begin{array}{l} v_1 \to \\ v_2 \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$

Se voglio che la prima colonna abbia un λ_1 e sotto tutti 0 serve che

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

Idem per le colonne successive.
Quindi è interessante vedere se ci sono vettori che vanno in λ se stessi.

<u>Def</u>. Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata)

- Si dice che λ è un AUTOVALORE di A se esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c.

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

- Se λ è un autovalore, allora tutti i v che verificano l'uguaglianza e sono $\neq 0$ si dicono AUTOVETTORI

- Se λ è un autovalore, allora l'insieme di tutti i v che verificano, compreso quello nullo, si dice AUTOSPAZIO relativo a λ.

<u>Oss</u>. Le stesse definizioni si danno per una appli. lin. $f: V \to V$

- Autovalore: ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$

autovalore autovettore

<u>Oss</u>. È importante che $v \neq 0$, altrimenti qualunque λ sarebbe autovalore !!!

<u>Proprietà</u> L'autospazio relativo a λ è un s.sp. vettoriale.

<u>Dim</u>. Se $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$, allora $f(v_1+v_2) = \lambda(v_1+v_2)$

Se $f(v) = \lambda v$, allora $f(av) = af(v) = \lambda(av)$

Quindi l'autospazio è chiuso rispetto a somma e prodotto.

—o —o —

Come trovo autovalori / autovettori di una matrice o di una applic. lin.

Prop. Se A è una matrice $n \times n$, allora λ è autovalore di A se e solo se

$$\boxed{\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0}$$

Dim. Se λ è autovalore, allora esiste $v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$, cioè $Av - \lambda v = 0$, cioè $(A - \lambda Id)v = 0$, cioè $v \in \ker(A - \lambda Id)$, quindi il ker è non banale (contiene un vettore non nullo), ma allora $\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0$.

Viceversa, se $\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = 0$, allora il ker contiene almeno un vettore $v \neq 0$, cioè $(A - \lambda Id)v = 0$, cioè invertendo i passaggi $Av = \lambda v$, cioè λ è autovalore.

Esempio Calcolare autovalori, autovettori, autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Scrivo

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Basta togliere λ agli elementi sulla diagonale!

$$\operatorname{Det}(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = 2, 4$$

Gli autovalori di A sono $\lambda=2$ e $\lambda=4$.

Chi sono gli autovettori corrispondenti ?

$\boxed{\lambda=2}$ Cerco i vettori $v=(x,y)$ che vanno in 2 volte se stessi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y = 2x \\ -3x+5y = 2y \end{cases}$$

$$-x+y=0$$
$$-3x+3y=0 \leftarrow \text{inutile}$$

Deve succedere perché altrimenti l'unica sol. è $(0,0)$

Un possibile autovettore è $(1,1)$. Vanno bene tutti quelli del tipo (a,a) con $a\neq 0$.

$\boxed{\lambda=4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x+y = 4x \\ -3x+5y = 4y \end{matrix}$$

$$-3x+y=0$$
$$-3x+y=0 \leftarrow \text{ottimo}$$

Un possibile autovettore è $(1,3)$ (tutti sono $(a,3a)$ con $a\neq 0$)

Conclusione la matrice A ha
- autovalore $\lambda=2$ con corr. autovettore $(1,1)$
- " $\lambda=4$ " " " $(1,3)$

— o — o —

Modo più rapido di fare lo stesso conto

$\boxed{\lambda=2}$ $$A-2\,Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori di $\lambda=2$ sono gli el. del ker di questa

$\boxed{\lambda = 4}$ $A - 4\,Id = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e anche questa l'abbiamo già vista.

— o — o —

Abbiamo scoperto che, ponendo $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,3)$

questa è una base di $\mathbb{R}^2$ tale che $A v_1 = 2 v_1$, $A v_2 = 4 v_2$

Quindi in questa base la matrice è diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Detto più precisamente, esiste una matrice M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

La matrice M è il cambio di base dalla nuova alla canonica, cioè

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

L'inversa è $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ ☺

Ma allora

$$A = M D M^{-1}$$
$$A^2 = M D M^{-1} M D M^{-1} = M D^2 M^{-1}$$
$$A^3 = M D^3 M^{-1}$$
$$\vdots$$
$$A^{2018} = M D^{2018} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{2018} & 0 \\ 0 & 4^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per fare la radice decima di A basta prendere la radice decima della matrice diagonale e cambiare base.

— o — o —