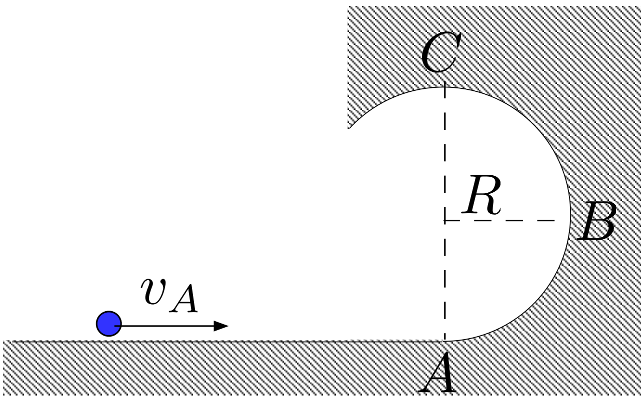
Esercizio (tratto dal Problema 4.39 del Mazzoldi 2)

Un corpo di massa $m = 200\,\mathrm{Kg}$ entra con velocità $v_A = 20\,\mathrm{m/s}$ in una guida verticale circolare liscia di raggio $R = 5\,\mathrm{m}$. Calcolare:

1. la velocità nei punti B e C;
2. la reazione vincolare della guida nei punti A, B e C;
3. il valore minimo di v_A affinché il corpo arrivi nel punto C mantenendo il contatto con la guida



SOLUZIONE

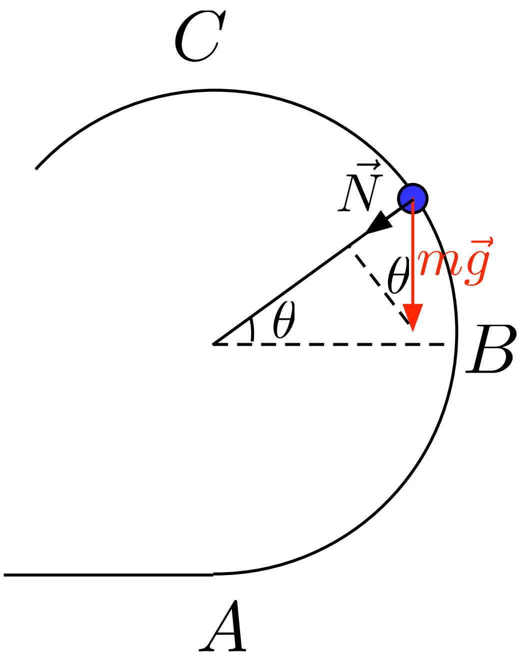
Dati iniziali:

$$
\begin{aligned}
m &= 200\,\mathrm{Kg} \\
R &= 5\,\mathrm{m} \\
v_A &= 20\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

1. Le forze che agiscono sul punto materiale sono

i) forza peso:	$m\vec{g}$	(diretta verticalmente)
ii) reaz. vincolare della guida:	$\vec{N} = -N\,\vec{u}_r$	(diretta radialmente verso il centro)

   e sono mostrate in figura.



Dato che la forza peso è conservativa e la reazione vincolare non compie lavoro possiamo applicare in ogni punto del moto la conservazione dell'energia meccanica

$$
E^m = K + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{1}
$$

Da dove si vede? Dal teorema dell'energia cinetica:

$$
\Delta K = \underbrace{W_{peso}}_{\text{lavoro forza peso}} + \underbrace{W_N}_{\text{lavoro reaz. vincolare}} \tag{2}
$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
W_{peso} &= -\Delta E_p && \text{(perché la forza peso è conservativa)} \\
W_N &= 0 && \text{(perché } \vec{N}\cdot d\vec{s} = 0 \text{ istante per istante)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

e quindi

$$
\Delta K = -\Delta E_p \qquad \Rightarrow \qquad \Delta(K + E_p) = 0 \tag{4}
$$

Inizialmente (in A) il punto materiale possiede unicamente energia cinetica

$$E_{m,A} = \frac{1}{2} m v_A^2 \tag{5}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica segue dunque che

- **in B**

$$\begin{aligned} E_{m,A} &= E_{m,B} \qquad\qquad (6) \\ \frac{1}{2} m v_A^2 &= \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B \qquad (h_B = R) \\ &\Rightarrow \; v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \\ &= 17.38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad\qquad (7) \end{aligned}$$

- **in C**

$$\begin{aligned} E_{m,A} &= E_{m,C} \qquad\qquad (8) \\ \frac{1}{2} m v_A^2 &= \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C \qquad (h_C = 2R) \\ &\Rightarrow \; v_C = \sqrt{v_A^2 - 4gR} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 4 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \\ &= 14.28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora la reazione vincolare

   - Consideriamo le forze. Scomponiamo la forza totale $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$ nelle componenti radiale e tangenziale:

$$\vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta \tag{9}$$

   con

$$\left\{ \begin{aligned} F_r &= -mg\sin\theta - N \\ F_\theta &= -mg\cos\theta \end{aligned} \right. \tag{10}$$

- Consideriamo ora l'accelerazione $\vec{a}$; anch'essa può scomporsi nelle componenti radiali e tangenziali
$$\vec{a} = a_r\,\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{a}_\theta \tag{11}$$
Ora, **fintanto che il punto materiale rimane attaccato alla guida**, il suo moto è circolare, e dunque la componente *radiale* dell'accelerazione è data da
$$a_r = -\frac{v^2}{R} \tag{12}$$
dove il segno $-$ indica che è centripeta.

- Dalla seconda legge della dinamica si ha
$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{13}$$
Uguagliando la (9) e la (11) componente per componente
$$\begin{cases} F_r &= ma_r \\ \\ F_\theta &= ma_\theta \end{cases} \tag{14}$$
e combinando la (12) con la prima delle (10), otteniamo per l'equazione radiale
$$m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta + N \tag{15}$$
ossia
$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right) \tag{16}$$
Questa equazione (valida *finché il punto rimane attaccato alla guida*) indica che la reazione vincolare N cambia istante per istante a seconda della posizione (identificata dall'angolo θ) e della velocità v del punto materiale. In particolare dunque si ha:

- **in A**

$$\begin{cases} \theta_A &= -\frac{\pi}{2} \\ v_A &= 20\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

e dunque

$$N_A = m\left(\frac{v_A^2}{R} - g\sin(-\frac{\pi}{2})\right) = m\left(\frac{v_A^2}{R} + g\right) \tag{17}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_A &= 200\,\mathrm{Kg}\left(\frac{\left(\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} + 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 200\,\mathrm{Kg}\left(80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 17962\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{18}$$

Osservazione:
Si noti che la reazione vincolare in A *non è* uguale ed opposta alla forza peso mg. Infatti, anche se prima di arrivare ad A il corpo m mantiene velocità costante (dunque accelerazione nulla), quando si trova in A la sua accelerazione *non è nulla*, dato che inizia a curvare (se non avesse accelerazione la sua velocità non potrebbe cambiare di direzione). L'accelerazione in A è infatti l'accelerazione centripeta $-mv_A^2/R$, dunque la risultante delle forze *non è* nulla (=la reazione vincolare non cancella esattamente la forza peso).

- **in B**

$$\begin{cases} \theta_B = 0 \\ v_B = 17.38\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

e dunque

$$N_B = m\left(\frac{v_B^2}{R} - g\sin(0)\right) \tag{19}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_B &= 200\,\mathrm{Kg}\left(\frac{\left(\frac{17.38\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} - 0\right) = \\ &= 200\,\mathrm{Kg}\left(60.41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 12083\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{20}$$

- **in C**

$$\begin{cases} \theta_C = \pi/2 \\ v_C = 14.28\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

e dunque

$$N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\sin(\frac{\pi}{2})\right) = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right) \tag{21}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} N_C &= 200\,\mathrm{Kg}\left(\frac{\left(14.28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{5\,\mathrm{m}} - 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 200\,\mathrm{Kg}\left(30.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = \\ &= 6195\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{22}$$

3. Calcoliamo ora la velocità minima che il corpo deve avere in A per poter raggiungere il punto C.

   - Se ci basassimo *unicamente* sulla conservazione dell'energia, dedurremmo che la velocità $v_{A,min}$ che il corpo deve avere per raggiungere C corrisponde alla condizione per cui il corpo raggiunge C con velocità nulla. Allora applicheremmo la conservazione dell'energia e avremmo [vedi Eq.(8)]

$$\begin{aligned} 0 = v_C &= \sqrt{v_{A,min}^2 - 4gR} \\ &\Rightarrow v_{A,min} = \sqrt{4gR} \end{aligned} \tag{23}$$

Questo risultato sarebbe tuttavia sbagliato. Per comprendere perché la conservazione dell'energia non è sufficiente osserviamo che, la reazione vincolare $\vec{N}$ della guida non è ancora entrata nell'utilizzare la conservazione dell'energia, dato che non compie lavoro. Tuttavia la reazione vincolare è presente, e dobbiamo tenerne conto.

- Se ora calcolassimo la reazione vincolare in C sostituendo nell'espressione (21) una velocità $v_C = 0$ (seguendo il ragionamento che si basa *puramente* la conservazione dell'energia), otterremo

$$N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right) = -mg < 0 \tag{24}$$

che corrisponde ad una reazione vincolare $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ diretta verso l'alto. Questo non è fisicamente possibile per questa guida ! Quindi il risultato (23) è necessariamente sbagliato.

- Per questo tipo di guida, la reazione vincolare è *necessariamente* diretta verso l'interno del cerchio. Infatti la guida impedisce al punto materiale di muoversi verso l'esterno del cerchio, ma non verso l'interno. Pertanto, ricordando che $\vec{N} = -N\,\vec{u}_r$, deve valere

$$N \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \text{il corpo non può muoversi verso l'esterno} \tag{25}$$

- Questo significa che, pur avendo il corpo teoricamente un'energia sufficiente a raggiungere C, se la reazione vincolare N della guida si annulla *prima* che il corpo raggiunga C, di fatto la guida in quell'istante 'sparisce', perché non rappresenta più un vincolo. Il punto materiale si stacca dalla guida e cade sotto l'azione della forza peso.

- L'Eq.(16) è stata ricavata supponendo che il punto materiale si muova lungo la guida (infatti abbiamo usato l'espressione dell'accelerazione centripeta valida per un moto circolare). Dall'Eq.(16) ricaviamo che lungo *questa* guida deve valere ad ogni istante

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\sin\theta\right) \geq 0 \tag{26}$$

Pertanto la condizione corretta per determinare la velocità minima $v_{A,min}$ è imporre che la reazione vincolare della guida si annulli esattamente in C (identificato da $\theta_C = \pi/2$), non prima. E dunque

$$v_C^2 \geq gR \tag{27}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgR \tag{28}$$

ricaviamo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mgR \geq \frac{1}{2}mgR + 2mgR = \frac{5}{2}mgR \tag{29}$$

e dunque

$$v_A \geq \sqrt{5gR} \tag{30}$$

Sostituendo i valori numerici

$$
\begin{aligned}
v_{A,\min} &= \sqrt{5gR} = \\
&= \sqrt{5 \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \qquad (31)\\
&= 15.7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

COMMENTO 1

Si noti la differenza rispetto al caso in cui il punto materiale è sempre vincolato a muoversi su una guida, come mostrato in figura qui sotto. Se la guida fosse un vero e proprio binario (cioè che impedisce al punto di muoversi sia verso l'esterno del cerchio che di cadere verso l'interno), il valore N della reazione vincolare $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ potrebbe essere sia positivo (se $\vec{N}$ è diretta verso il centro) che negativo (se $\vec{N}$ è diretta verso l'esterno). Ad esempio ponendo il punto materiale in C, anche con velocità nulla, la reazione vincolare sarebbe diretta verso l'alto e N sarebbe negativo.

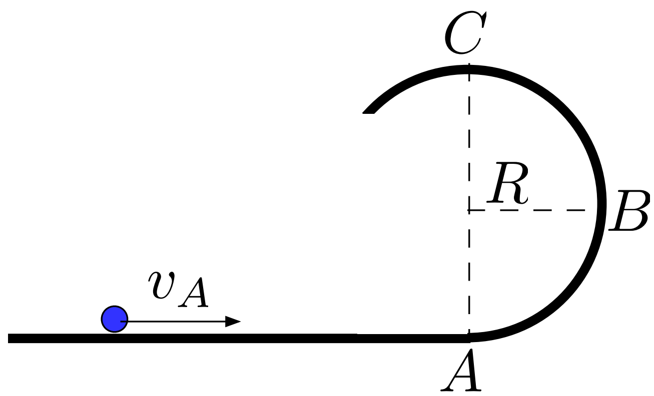


Figure 1: Il caso in cui la particella è vincolata a muoversi necessariamente lungo il binario circolare

In tal caso il vincolo $N \geq 0$ non sussiste, e la velocità minima affinché il punto giunga in C si ricaverebbe semplicemente dalla conservazione dell'energia meccanica imponendo che il punto giunga in C con velocità nulla

$$\frac{1}{2} m v_{A,\min}^2 = mg2R \qquad \Rightarrow v_{A,\min} = \sqrt{4gR} \qquad (33)$$

Nel caso del problema, invece, in cui il punto non è vincolato a muoversi necessariamente lungo la guida, non basta che il punto materiale abbia l'energia cinetica sufficiente a trasformarsi nell'energia potenziale relativa al punto C, ma occorre anche che abbia una velocità sufficiente a farlo rimanere incollato alla guida. Data la presenza della componente normale forza peso [vedi eq.(16)] la velocità minima è stabilita dalla condizione che la reazione vincolare sia non negativa

$$v_{A,\min} = \sqrt{5gR} \qquad (34)$$

ed è piú elevata del risultato (33).