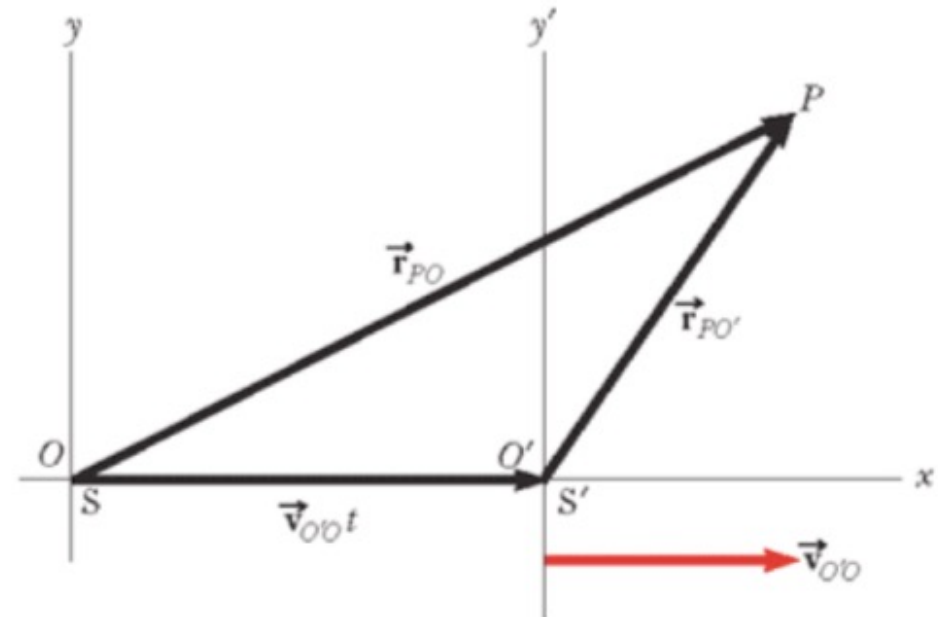


Sistemi di riferimento inerziali

- Il sistema di riferimento S è *stazionario o di laboratorio*
- Il sistema di riferimento S' è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) \vec{v}_0 costante



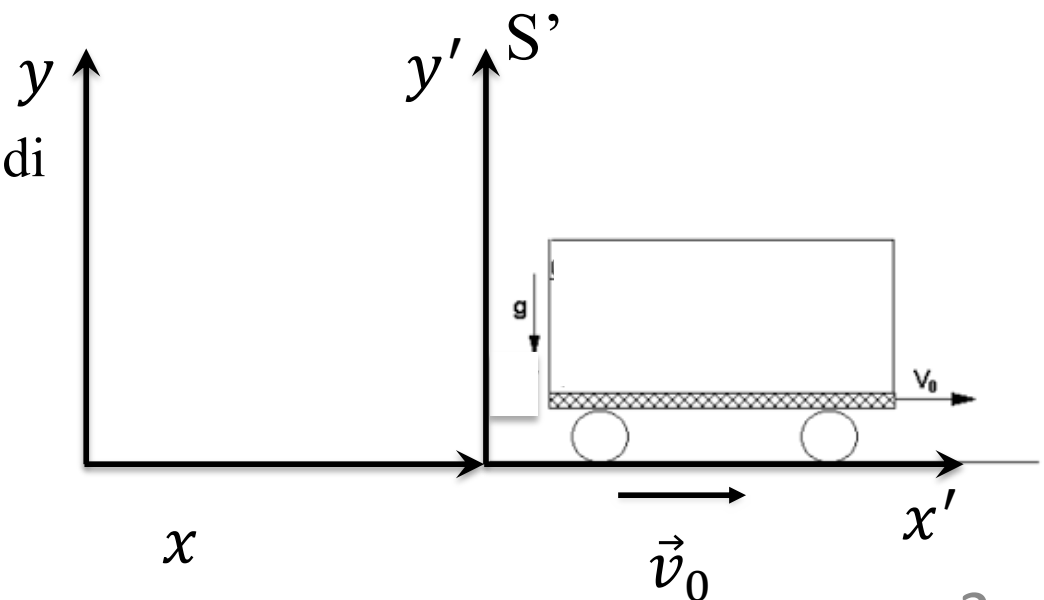
- Al tempo $t = 0$ le origini di S e S' coincidono. Vale: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$
- Derivando tale relazione: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$ (*trasformazione di Galileo*)
- Derivando nuovamente: $\vec{a} = \vec{a}'$ perché \vec{v}_0 è costante

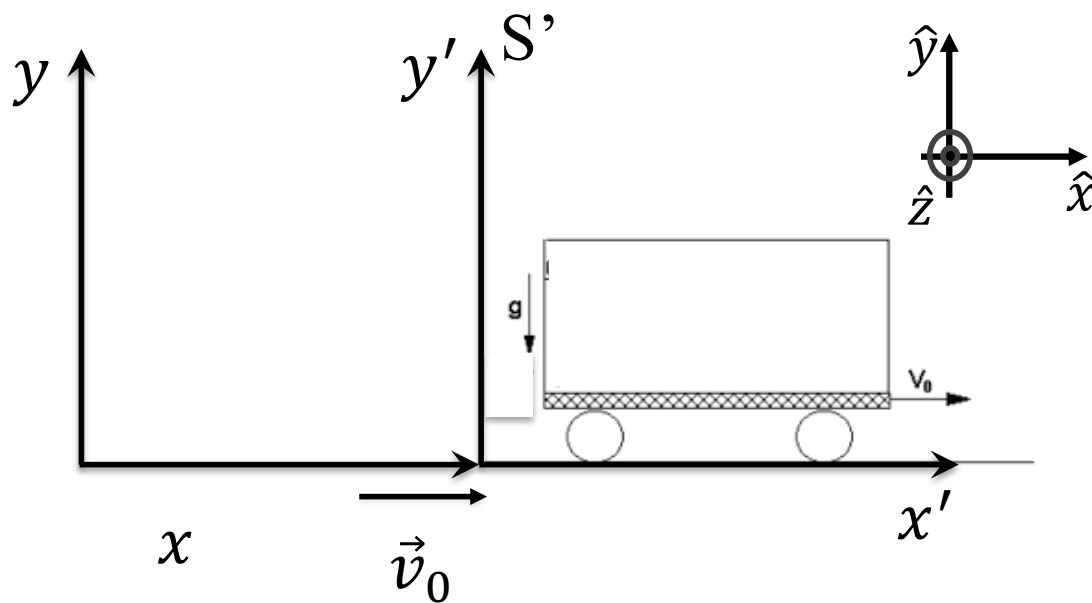
Sistemi di riferimento inerziali: Esempio treno in moto con velocità costante

Un gesso è lasciato cadere da un passeggero solidale a un treno in moto con velocità costante v_0 come in figura. Sia $S' = x'y'z'$ un sistema di riferimento solidale al treno. Cosa si osserva nel sistema solidale al treno in moto con velocità costante v_0 rispetto a un sistema S (vedi figura) solidale alla banchina della stazione nell'ipotesi che a $t=0$, l'istante in cui viene lasciato cadere il gesso le origini di S e S' coincidano?

In particolare

1. si descriva il tipo di moto nei due sistemi
2. Nell'ipotesi in cui nella direzione di caduta del gesso ci sia un foro si determini la velocità vettoriale di impatto al suolo nei due sistemi





Dati

$$\vec{v}_0 = (v_0, 0)$$

- Per $t=0$ le coordinate del gesso sono identiche nei due sistemi

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = \vec{r}'_0$$

- il gesso in S' viene “lasciato cadere” $\vec{v}'_0 = 0$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$$\vec{a}' = -g \hat{y}$$

$$\vec{v}' = -gt \hat{y}$$

$$\vec{r}' = (x_0, y_0 - \frac{1}{2}gt^2)$$

$$\vec{a} = -g \hat{y}$$

$$\vec{v} = v_0 \hat{x} - gt \hat{y}$$

$$\vec{r} = (x_0 + v_0 t, y_0 - \frac{1}{2}gt^2)$$

- La traiettoria in S è una parabola, il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $-g \hat{y}$
- La traiettoria in S' è rettilinea (lungo y') il gesso cade in verticale. Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $-g \hat{y}$
- il tempo impiegato ad arrivare a terra è lo stesso in S e S'

$$\begin{array}{lll}
\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t & \vec{a}' = -g \hat{y} & \vec{a} = -g \hat{y} \\
\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 & \vec{v}' = -gt \hat{y} & \vec{v} = v_0 \hat{x} - gt \hat{y} \\
\vec{a} = \vec{a}' & \vec{r}' = (x_0, y_0 - \frac{1}{2}gt^2) & \vec{r} = (x_0 + v_0 t, y_0 - \frac{1}{2}gt^2)
\end{array}$$

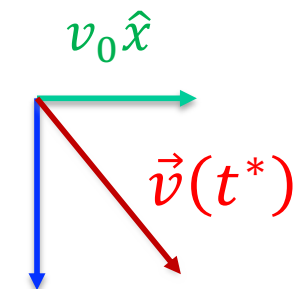
- Il tempo t^* impiegato ad arrivare a terra è lo stesso nei due SDR

$$t^* = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

- le velocità di impatto a terra in S e S' sono date da:

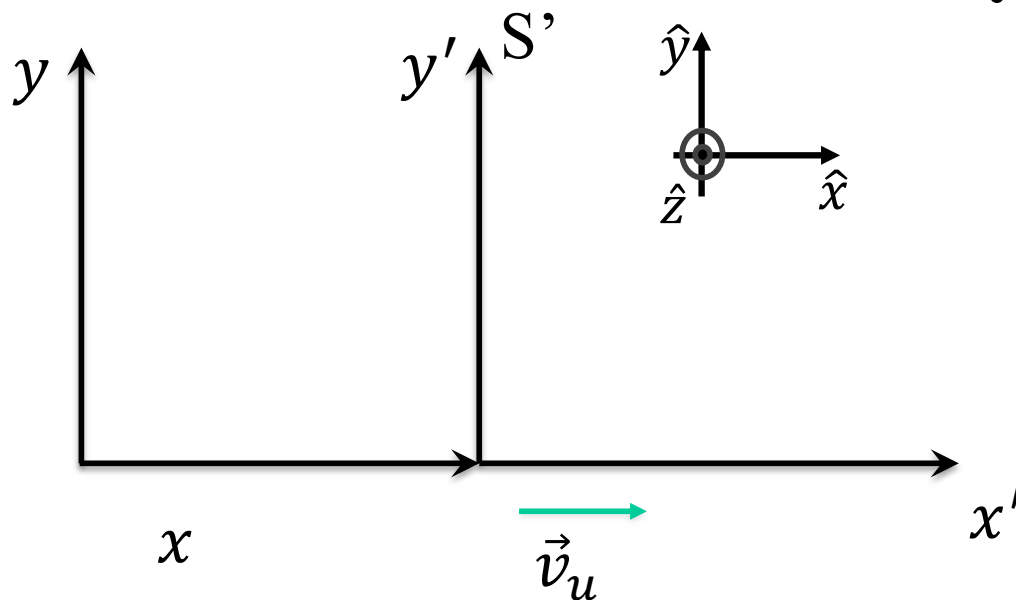
$$\vec{v}'(t^*) = -\sqrt{2gy_0} \hat{y}$$

$$\vec{v}(t^*) = v_0 \hat{x} - \sqrt{2gy_0} \hat{y}$$

$$\vec{v}'(t^*) = -\sqrt{2gy_0} \hat{y}$$


Sistemi di riferimento inerziali: come orientare l'ombrello...

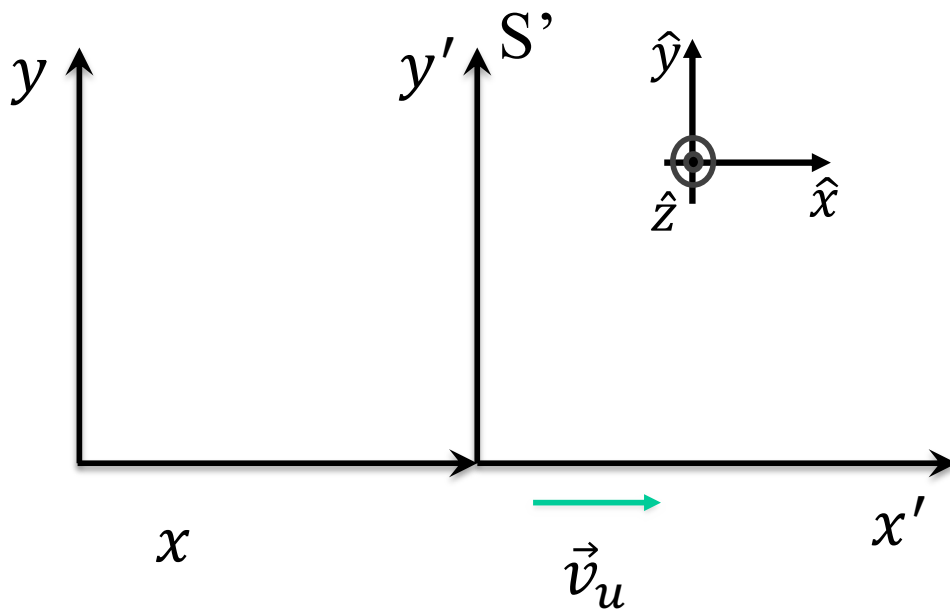
Un uomo cammina con un ombrello: se la pioggia cade verticalmente con $v_p = 8$ m/s e l'uomo cammina con velocità costante $v_u = 3$ m/s, si determini l'angolo ottimale di inclinazione dell'ombrello (per esempio rispetto alla verticale) e con quale velocità le gocce d'acqua colpiscono l'ombrello in tale situazione.



sistema mobile in moto con
velocità \vec{v}_u S' solidale
all'uomo

- Scegliamo 2 sistemi di riferimento
 - S solidale alla strada in cui cammina l'uomo con asse x con direzione e verso dell'uomo e asse y ortogonale e levogiro all'asse x.
 - S' solidale all'uomo con assi x'y' paralleli a xy in moto con velocità \vec{v}_u

sistema solidale alla strada
(inerziale) S



Dati

la pioggia **cade verticalmente** a terra con
 $v_p = 8 \text{ m/s}$

velocità dell'uomo $v_u = 3 \text{ m/s}$

- Angolo ottimale di inclinazione dell'ombrello rispetto alla verticale?
- Con quale velocità le gocce colpiscono l'ombrello quando l'angolo è ottimale?

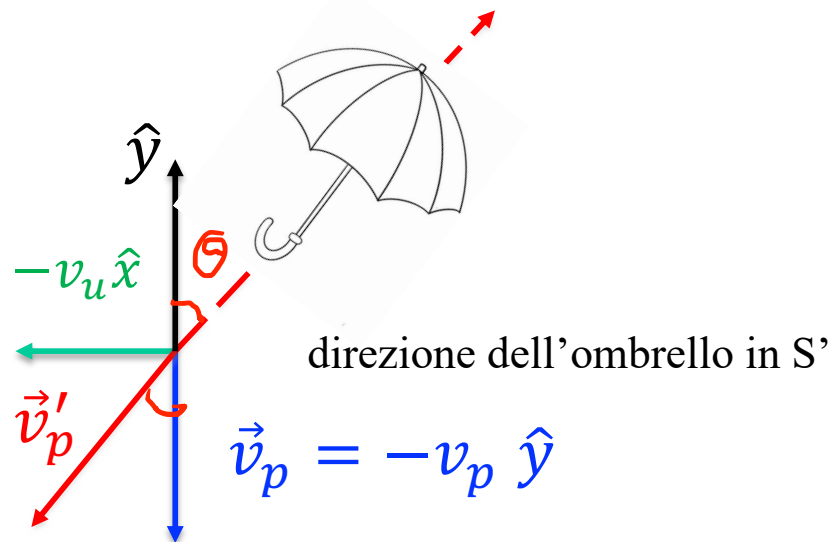
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$$\vec{v}_0 = v_u \hat{x}$$

in S' le gocce hanno $\vec{v}'_p = \vec{v}_p - \vec{v}_0 = \vec{v}_p - v_u \hat{x}$



$$\text{tg}\theta = \frac{v_u}{v_p} \Rightarrow \theta = \text{atg}\theta \left(\frac{v_u}{v_p} \right) = 20.55^\circ$$

$$v'_p = \sqrt{v_u^2 + v_p^2} = 8.54 \text{ m/s}$$

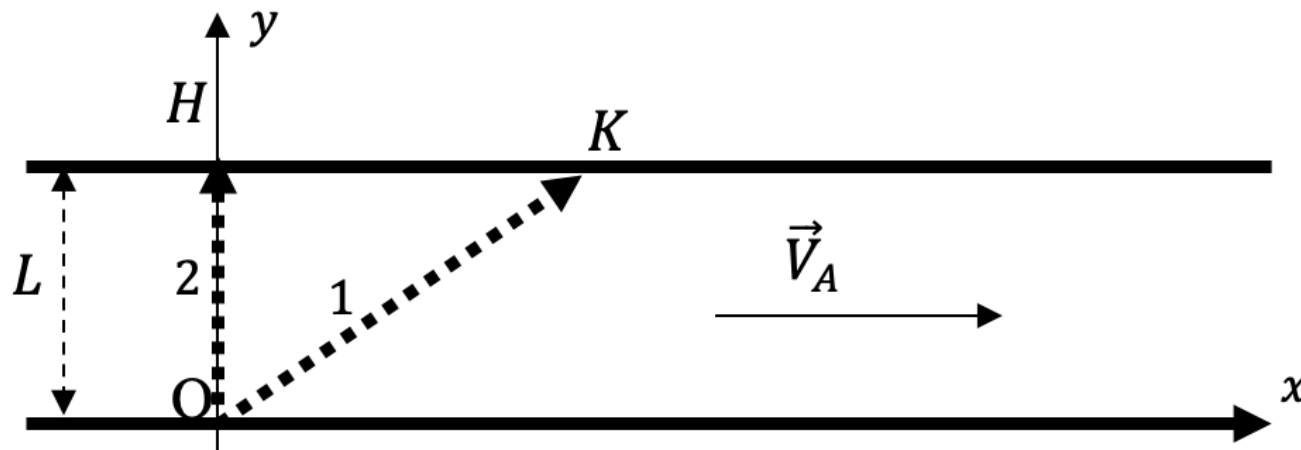
Sistemi di riferimento inerziali: esempio velocità relativa

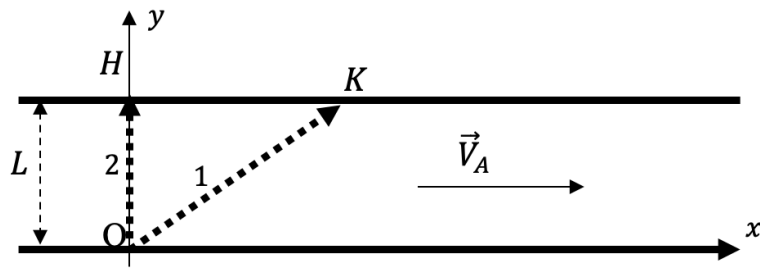
Una barca B parte dal punto O e si dirige verso la riva opposta di un fiume di larghezza $L = 200$ m ed in cui l'acqua scorre verso destra (come in Figura) con una velocità $V_A = 2$ m/s.

Si definisca un sistema Oxy come in figura **solidale alle sponde**.

La barca, rispetto all'acqua, si muove con velocità costante di modulo $V_B = 5$ m/s; la sua direzione può essere liberamente scelta dal pilota.

1) Calcolare la posizione del punto K in cui la barca arriva nel caso (1) in cui la prua viene diretta perpendicolarmente alla corrente ed il tempo impiegato per attraversare il fiume.





Dati $L=200 \text{ m}$
 $V_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{V}_A = V_A \hat{x}$
 $V_B = 5 \text{ m/s}$ velocità della
 barca relativa all'acqua

1) Calcolare la **posizione del punto K** in cui la barca arriva nel caso in cui **la prua viene diretta perpendicolarmente alla corrente** ed **il tempo t** impiegato per attraversare il fiume.

- S' solidale all'acqua con assi y' e x' paralleli a y e x, la cui origine è in moto lungo x con la velocità della corrente CHE È COSTANTE

$$\vec{v}_0 = V_A \hat{x} \quad \vec{v}' = V_B \hat{y}$$

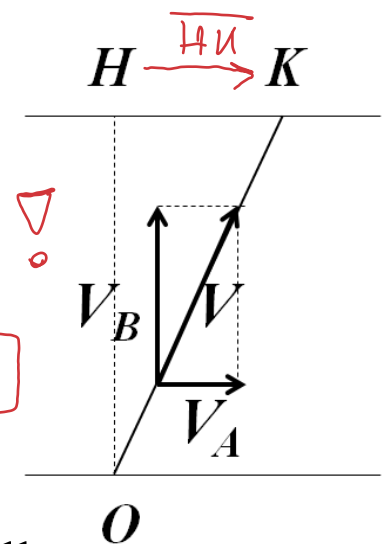
- Trasformazioni di Galileo

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{V} = (V_A, V_B)$$

$$t = \frac{L}{V_B} = \frac{200 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 40 \text{ s}$$

V_A Non incide al tempo

! dove \vec{V} è la velocità della barca nel sistema di riferimento xy solidale alle sponde !

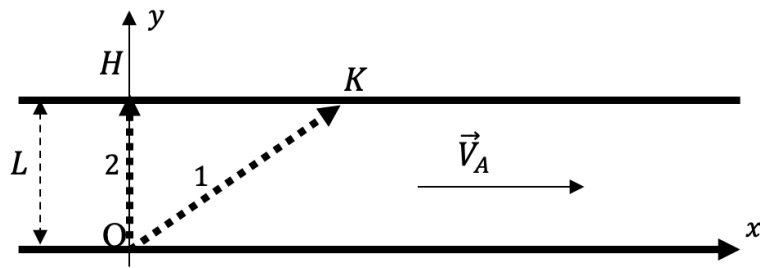


Ma la velocità della barca rispetto al riferimento a terra (solidale alle sponde) è $\vec{V} = (V_A, V_B)$, per cui, come mostrato in Figura:

1)

$$\overline{HK} = V_A t \quad L = V_B t \quad \frac{\overline{HK}}{L} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \overline{HK} = L \frac{V_A}{V_B} = 200 \times \frac{2}{5} \text{ m} = 80 \text{ m}$$

$$K = (80, 200) \text{ m}$$



Dati $L=2 \text{ m}$
 $V_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{V}_A = V_A \hat{x}$
 $V_B = 5 \text{ m/s}$ velocità della
 barca relativa all'acqua

2) Calcolare la direzione in cui rivolgere la prua per raggiungere (caso 2) il punto H ed il tempo impiegato per attraversare il fiume.

In questo caso affinché la barca punti sempre verso l'approdo H è necessario che la velocità della barca rispetto alla corrente non sia perpendicolare, ma formi un angolo θ tale da compensare l'effetto della corrente. L'analisi della Figura 2) mostra che

$$\vec{v}' = \vec{V}_B = -V_B \sin \theta \hat{x} + V_B \cos \theta \hat{y}$$

- La velocità della barca nel sistema xy deve avere componenti

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0 = V_A \hat{x}$$

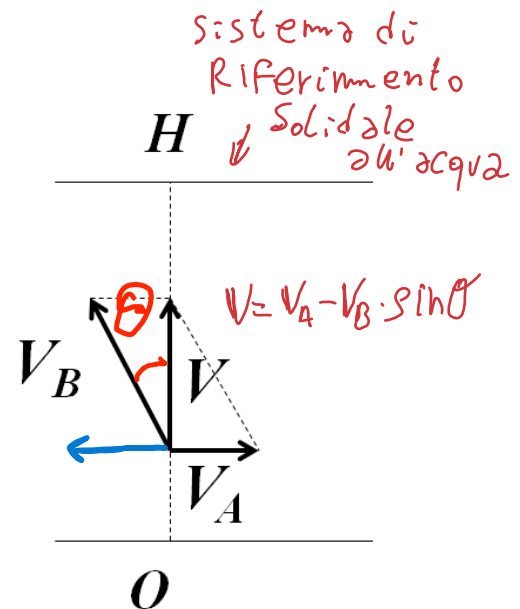
\Rightarrow il tempo di attraversamento del fiume è:

$$\vec{v} = \vec{V} = (V_A - V_B \sin \theta, V_B \cos \theta) = (0, V_B \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{V_A}{V_B} = 0.4 \Rightarrow 23.57^\circ$$

angolo da mantenere per arrivare ad H anche se spostati dalla corrente (sistema spande)

$$t = \frac{L}{V_B \cos \theta} = \frac{L}{V_B \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{200}{5 \times \sqrt{1 - 0.16}} = \frac{40}{0.9165} = 43.6 \text{ s}$$



Velocita' relativa



Figure 4.22 (a) Observer A on a moving skateboard throws a ball upward and sees its rise and fall in a straight-line path. (b) Stationary observer B sees a parabolic path for the same ball

- In tutti i sistemi di riferimento inerziali valgono i tre principi della dinamica
- Tutti gli osservatori solidali a tali sistemi misurano la stessa accelerazione e la stessa forza

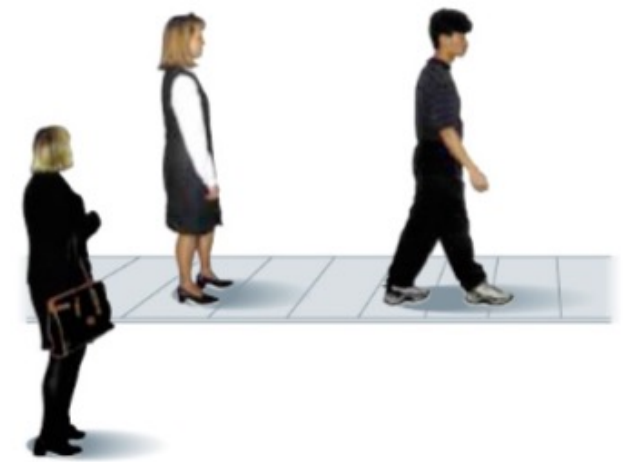
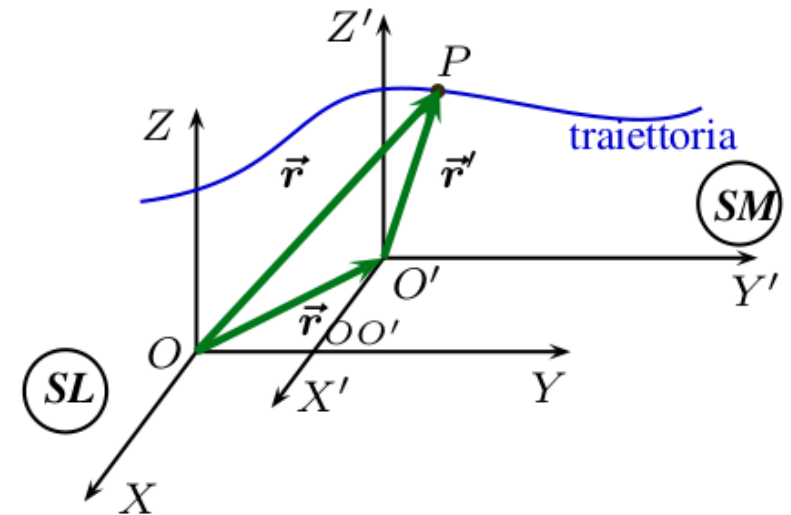


Figure 4.21 Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

Sistema mobile in moto con assi paralleli a quelli del SI con \vec{a}_T costante

- Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento SM (sistema mobile) è in moto con velocità \vec{v}_t e accelerazione \vec{a}_t (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento SL del laboratorio



SL= sistema del laboratorio:
INERZIALE

- il moto di OO' è puramente traslatorio e gli assi del sistema mobile non ruotano
 ∇ SM parallelo a SL ∇

- La relazione fra le posizioni diventa

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t)$$

- Derivando tale relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \quad \text{con } \vec{v}_t = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

- Derivando nuovamente

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T \quad \text{con } \vec{a}_T = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

a_T accelerazione
di trasciamento

∇ Nel sistema accelerato non vale la legge di inerzia ∇

(sostituito a_t con a_T)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T$$

- In un sistema inerziale, vale la legge di inerzia

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_T)$$

- nel sistema accelerato non vale la legge di inerzia

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_T$$

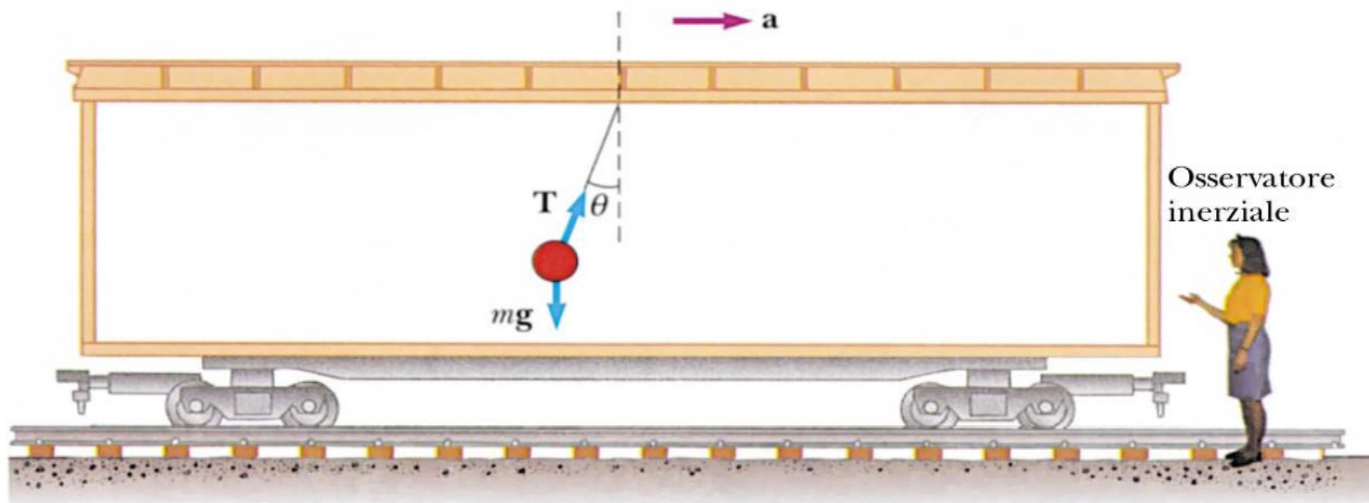
- **Definendo forza apparente** la grandezza $-m\vec{a}_T$
 - in un sistema **qualsunque** (inerziale e non inerziale) la massa per l'accelerazione misurata è uguale alla somma delle forze reali ($\sum \vec{F}$) e delle forze apparenti ($-m\vec{a}_T$)

$$\sum \vec{F} - m\vec{a}_T = \sum (\vec{F} + \vec{F}_{app})$$

Infatti in un **sistema inerziale** $m\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{F}_{app}=0$ **$m\vec{a} = \sum \vec{F}$**

In altre parole in un sistema non inerziale possiamo utilizzare le leggi di Newton se teniamo conto della presenza delle forze fittizie.

Esempio 1



(a)

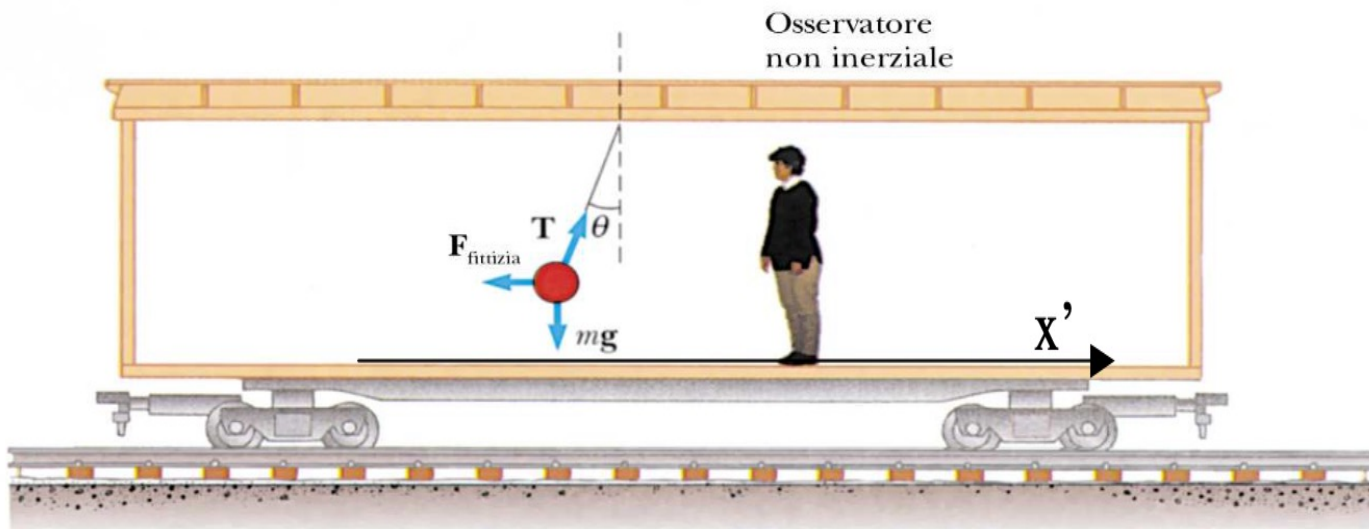
*Punto di vista
dell'osservatore
inerziale*

La sferetta sta accelerando verso destra e la componente della forza T lungo x genera l'accelerazione a .

$$T \sin \theta = ma$$

*Punto di vista
dell'osservatore non
inerziale.*

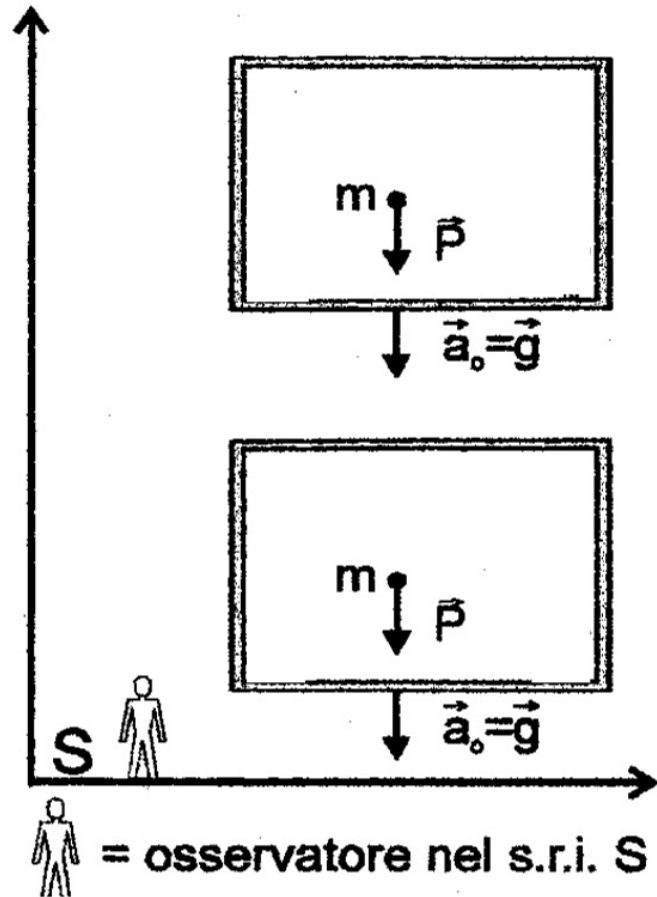
La sferetta è in quiete ed è soggetta ad una forza apparente lungo x $F_{App} = -ma$



(b)

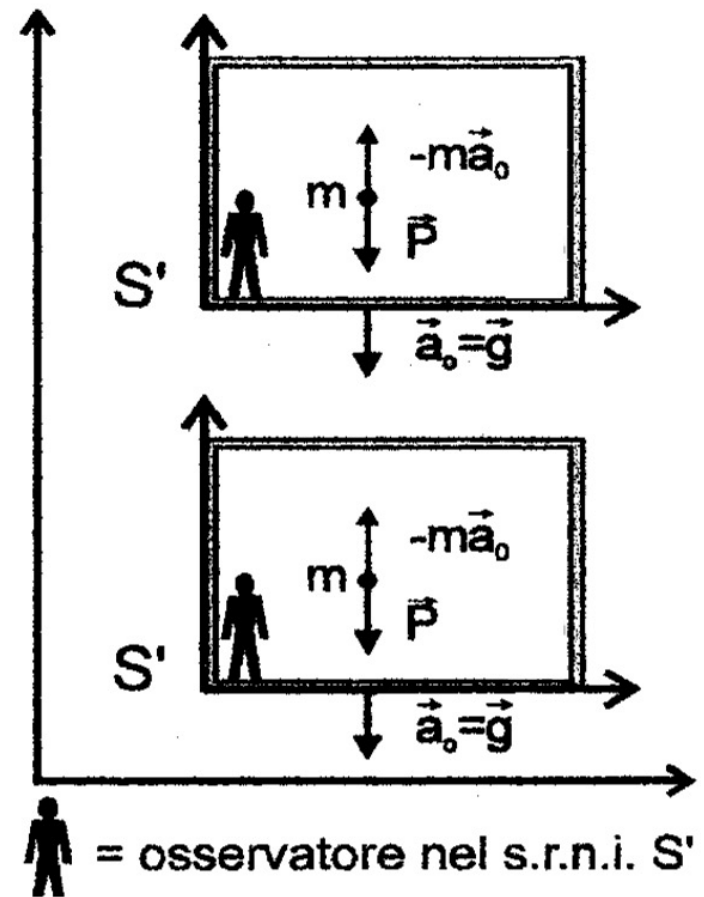
$$T \sin \theta - ma = 0$$

Esempio 2: Un corpo di massa m è lasciato cadere all'interno di un ascensore che precipita in caduta libera ($-g \hat{y}$)



a) Punto di vista dell'osservatore inerziale.
Il corpo di massa m cade con accelerazione libera con accelerazione $-g \hat{y}$

$$\Rightarrow -P = ma = -mg$$



b) Punto di vista dell'osservatore non inerziale.
Il corpo di massa m è in quiete ed è soggetto ad una forza fittizia tale che

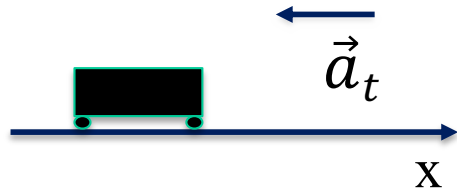
$$\Rightarrow -P + F_{App} = 0 \quad \Rightarrow F_{App} = mg$$

- Le forze apparenti “appaiono” solo e sempre nei SDR non inerziali
 - infatti non nascono da interazioni fra corpi, ma sono un effetto (per l'appunto “apparente”) dovuto al moto accelerato del sistema per cui sono nulle in un SDR in moto rettilineo uniforme (inerziale)
- Criterio per distinguere una forza apparente da una reale
 - una forza apparente non è una forza fra due corpi, **per essa NON vale il terzo principio** (azione e reazione)

Esempio: Un treno si muove in linea retta a $108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$, poi inizia a frenare con accelerazione costante e si ferma in 30 s . Calcolare nel sistema di riferimento del treno le forze reali e quelle apparenti su un passeggero di massa $m = 50 \text{ kg}$ che resta seduto al suo posto durante la frenata.

Soluzione.

- L'accelerazione di trascinamento ha modulo: $|\vec{a}_t| = 1 \text{ m/s}^2$ ed è diretta in verso opposto alla velocità del treno (che sta rallentando), per cui la forza apparente è



$$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t = +50 \text{ N } \hat{V}$$

dove \hat{V} è il versore della velocità del treno; la forza apparente quindi è diretta in avanti, nel verso della velocità.

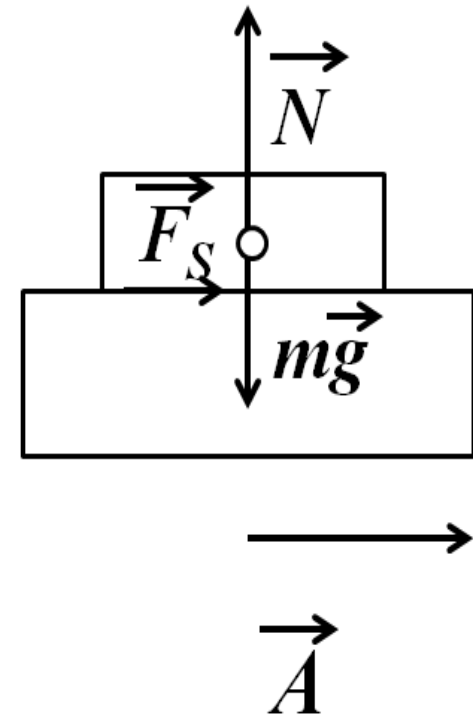
- Rispetto al treno il viaggiatore è fermo per ipotesi (rimane al suo posto), per cui: $|\vec{a}'| = 0$. Pertanto:

$$m\vec{a}' = 0 = \sum (\vec{F} + \vec{F}_{app})$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = -\sum \vec{F}_{app} = +m\vec{a}_t = -50 \text{ N } \hat{V}$$

Esercizio. Un veicolo, con una cartellina appoggiata sul suo tetto, sta accelerando su una strada orizzontale e rettilinea con accelerazione \vec{A} di modulo 2 m/s^2 .

- 1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via.
- 2) Calcolare, invece, il moto della cartellina rispetto a terra e rispetto al veicolo se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15.



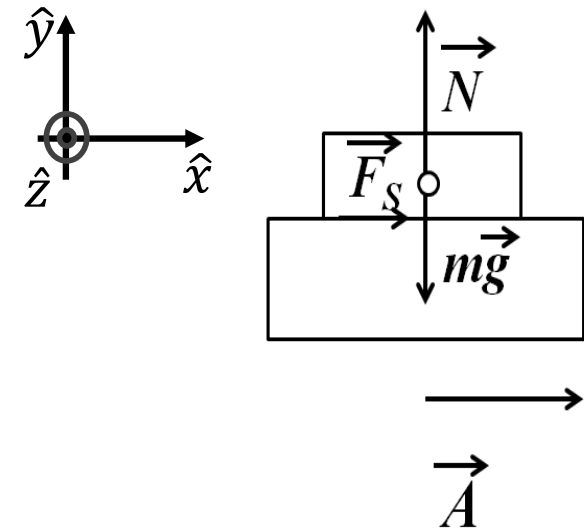
D1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via

Soluzione.

- Siccome la cartellina non scivola via, nel riferimento del veicolo
 $\vec{a}' = 0$

- Nel riferimento a terra

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t = \vec{a}_t = \vec{A}.$$



Nel sistema in moto dove la cartellina è ferma:

$$m\vec{a}' = 0 = \sum (\vec{F} + \vec{F}_{app}) = \sum (\vec{F} - m\vec{a}_t)$$

$$\begin{array}{l} \text{Proiettando lungo y} \\ \text{Proiettando lungo x} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N - mg = 0 \\ F_S - mA = 0 \end{array} \right. \quad mA = F_S \leq \mu_S mg \quad \Rightarrow \mu_S^{min} = \frac{A}{g} = 0.204$$

- Si noti che
 - l'accelerazione nel riferimento del veicolo è nulla
 - mentre nel riferimento a terra è $|\vec{A}| = 2 \text{ m/s}^2$

D2.1) Determinare **il moto della cartellina rispetto a terra** se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15

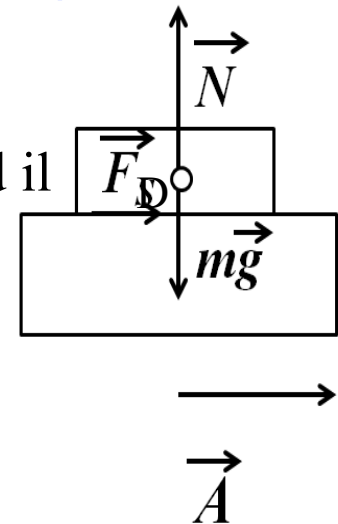
- Se $\mu_S < 0.204$, la cartellina scivola. L'accelerazione rispetto al riferimento a terra è determinata unicamente da \vec{F}_D :

$$m\vec{a} = \vec{F}_D \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_D}{m} = \frac{\mu_D mg \hat{x}}{m} = 0.15 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \hat{x} = 1.47 \text{ m/s}^2 \hat{x}$$

D2.2) Determinare il moto della cartellina rispetto al veicolo se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15

- Rispetto al riferimento del veicolo:

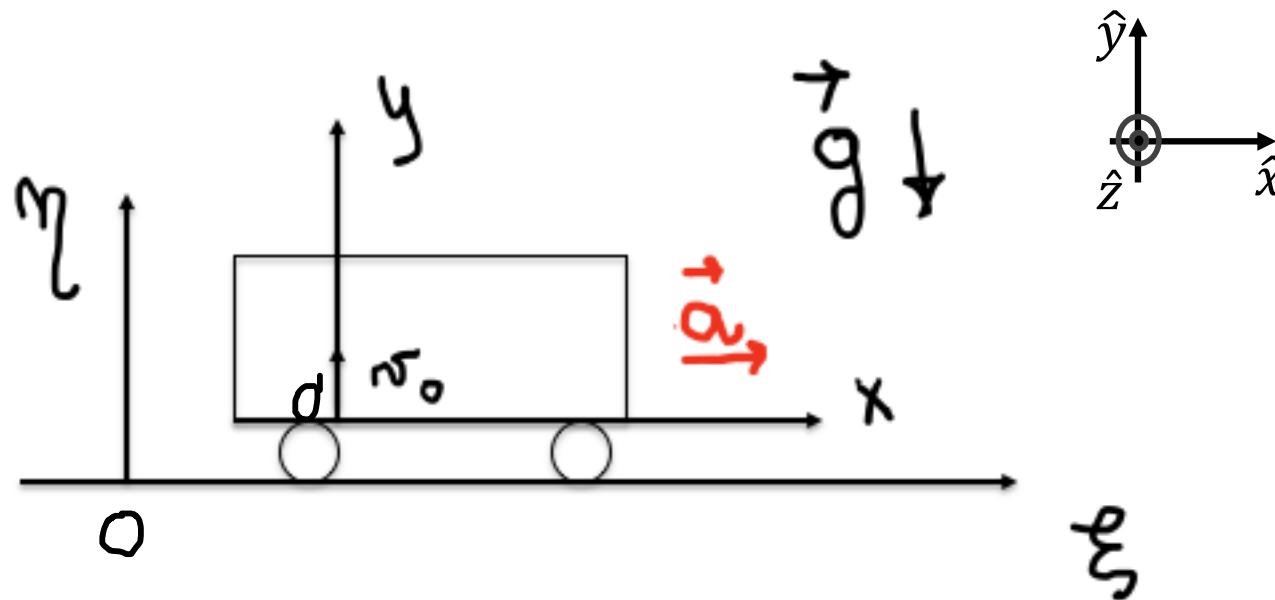
$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} = (1.47 - 2) \text{ m/s}^2 \hat{x} = -0.53 \text{ m/s}^2 \hat{x}$$



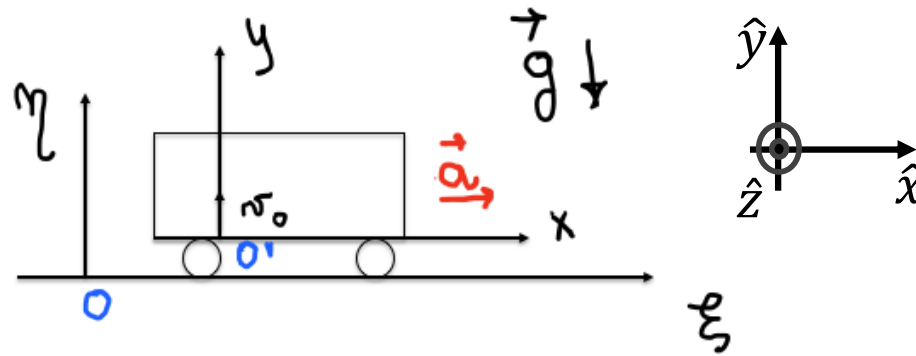
R2.2

- rispetto a terra il moto è *uniformemente accelerato con accelerazione, in avanti, di modulo 1.47 m/s^2*
- rispetto al veicolo è *uniformemente accelerato con accelerazione, all'indietro, di modulo 0.53 m/s^2*

Su un treno che si muove di moto rettilineo con accelerazione costante $a = 0.25 \text{ m/s}^2$ (rispetto alla terra) un chiodo, che si trova sul pavimento, viene lanciato con velocità $v_0 = 6 \text{ m/s}$ diretta verticalmente (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento. (14- 7. 77)



Calcolare a quale distanza
d dal punto di lancio
ricadrà il chiodo **sul**
pavimento del treno



$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{oo'}(t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$$

Dati

$$\vec{V}'(0) = \vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$$

$$\vec{R}'(0) = (0,0)$$

$$\vec{A}_t = \vec{a} = a \hat{x}$$

- SDR non inerziale solidale al treno come in figura

$$\text{da } \vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$$

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{A}_t = -g \hat{y} - a \hat{x}$$

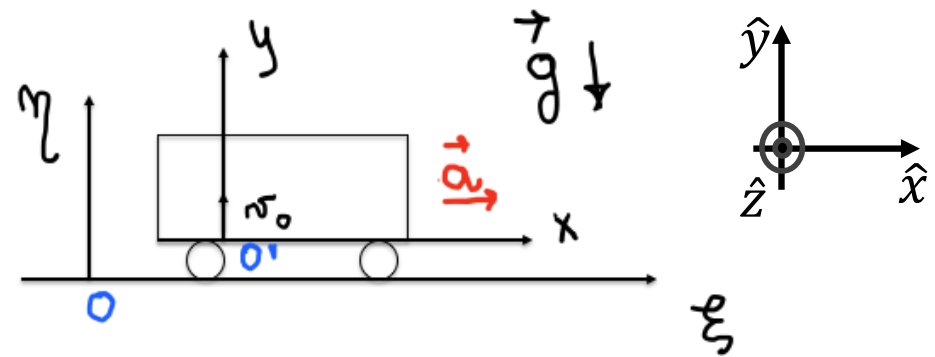
- il moto è uniformemente accelerato sia in x che in y

- da $\vec{A}' = -g \hat{y} - a \hat{x}$

$$\vec{V}' = -at \hat{x} + (v_0 - gt) \hat{y}$$

$$\vec{R}' = (x', y') = -\frac{at^2}{2} \hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right) \hat{y}$$

Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il chiodo **sul pavimento del treno**



$$\vec{R}' = (x', y') = -\frac{at^2}{2} \hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right) \hat{y}$$

sul pavimento del treno $y'=0$

$$\Rightarrow t \left(-\frac{gt}{2} + v_0\right) = 0 \quad \Rightarrow t^* = \frac{2v_0}{g}$$

**$t=0$ scartata perchè
corrisponde al lancio**

$$x'(t^*) = -\frac{at^{*2}}{2} = -18.7 \text{ cm} \quad \Rightarrow d = 18.7 \text{ cm}$$

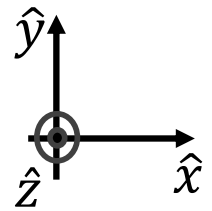
Determinare la traiettoria del chiodo come vista dalla terra

- SDR inerziale

la traiettoria descritta da chiodo è una parabola infatti

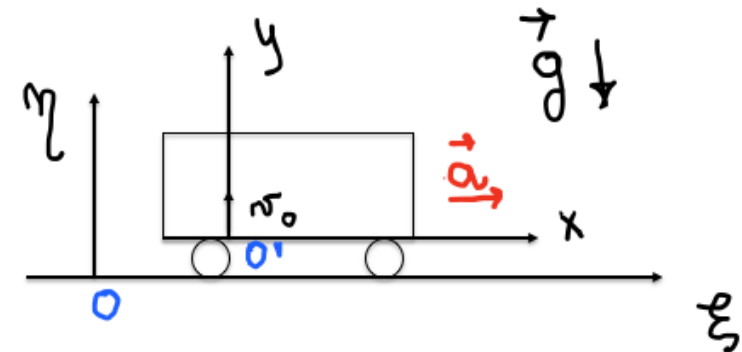
$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t) \quad \vec{R}_{OO'}(t) = \vec{R}_{OO'}(0) + \vec{V}_{OO'}(0)t + \frac{at^2}{2} \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= -\frac{at^2}{2} \hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right) \hat{y} + \frac{at^2}{2} \hat{x} + \vec{R}_{OO'}(0) + \vec{V}_{OO'}(0)t \\ &= \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right) \hat{y} + \xi(0)_{OO'} \hat{x} + \eta_{OO'}(0) \hat{y} + V_{xOO'}(0)t \hat{x} \\ &= (\xi(0)_{OO'} + V_{xOO'}(0)t) \hat{x} + \left(\eta_{OO'}(0) - \frac{gt^2}{2} + v_0 t\right) \hat{y} \end{aligned}$$



La traiettoria è quella di un grave lanciato al tempo $t=0$

- con velocità pari a $(V_{xOO'}(0), v_0)$
- da $(\xi(0)_{OO'}, \eta_{OO'}(0))$



Come deve essere: una volta lanciato il chiodo ha un'accelerazione pari a \vec{g}

di conseguenza anche se non conosciamo

$$\xi_{0'}(0) \quad v_{0'}^{\xi}(0) \quad \text{e} \quad \eta(0')$$

la traiettoria in η, ξ è parabolica!

coincide con la traiettoria di un grave

lanciato con velocità $\vec{v} = v_{0'}^{\xi}(0) \hat{\xi} + v_0 \hat{\eta}$
da $\eta_{0'}(0) \quad \xi_{0'}(0)$

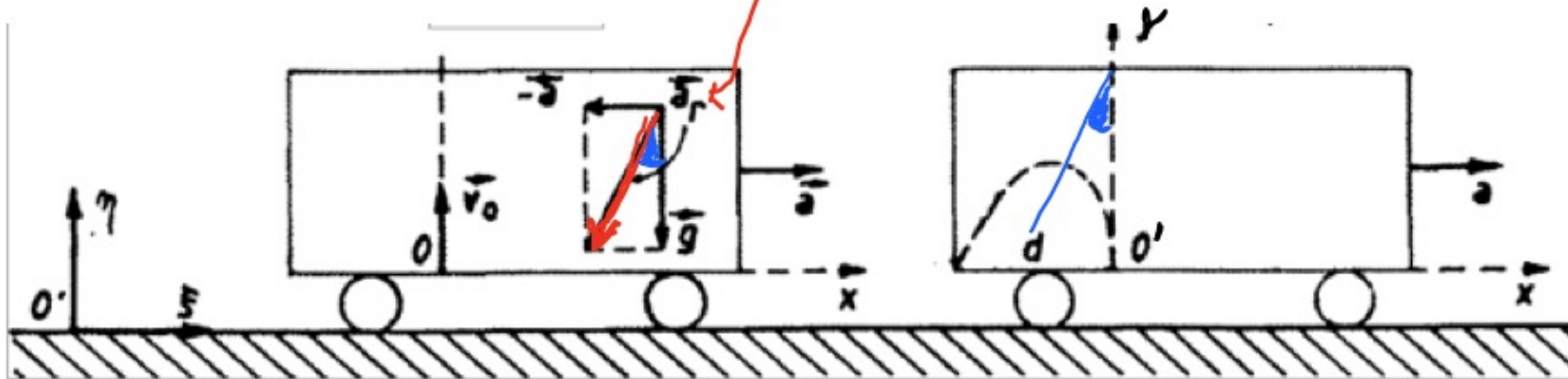
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$

nel nostro caso

$$\begin{array}{ccc} \text{lab} & \text{nel treno} & \text{Treno} \\ \vec{g} & = \vec{a}' + \vec{a} & \downarrow \end{array}$$

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}$$

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}$$



Determinare la traiettoria del chiodo come vista sul treno ($O'xy$)

La traiettoria in $O'xy$ è ancora una parabola ma non è simmetrica rispetto all'asse y . Ciò risulta evidente se si considera che in $O'xy$ (treno in moto accelerato) tutto va come se l'accelerazione di gravità cambi passando da \vec{g} a $\vec{g} - \vec{a}$, di modulo pari a $\sqrt{g^2 + a^2}$ e ruotata di $\alpha = \arctg(a/g)$ rispetto a g). La traiettoria parabolica sarà simmetrica rispetto all'asse indicato nella figura sopra a destra

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'è la traiettoria vista da un osservatore sul treno?

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$$

Indichiamo con V_t la velocità del treno

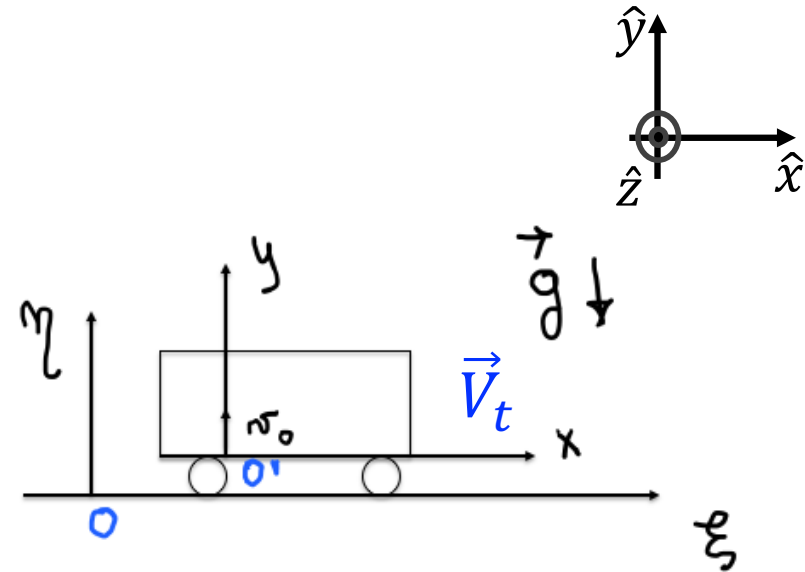
$$\vec{V}_t = V_t \hat{x}$$

- $\vec{A} = \vec{g} = -g\hat{y} = \vec{A}'$

- Nel sistema solidale al treno

$$\vec{R}'(0) = (0,0) \quad \vec{V}'(0) = (0, v_0) \quad \vec{R}'(t) = (0, v_0 t - \frac{gt^2}{2})$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato il chiodo sale in verticale e ricade nel punto di partenza



Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'è la traiettoria vista da un osservatore a terra?

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$$

$$\vec{V}_t = V_t \hat{x}$$

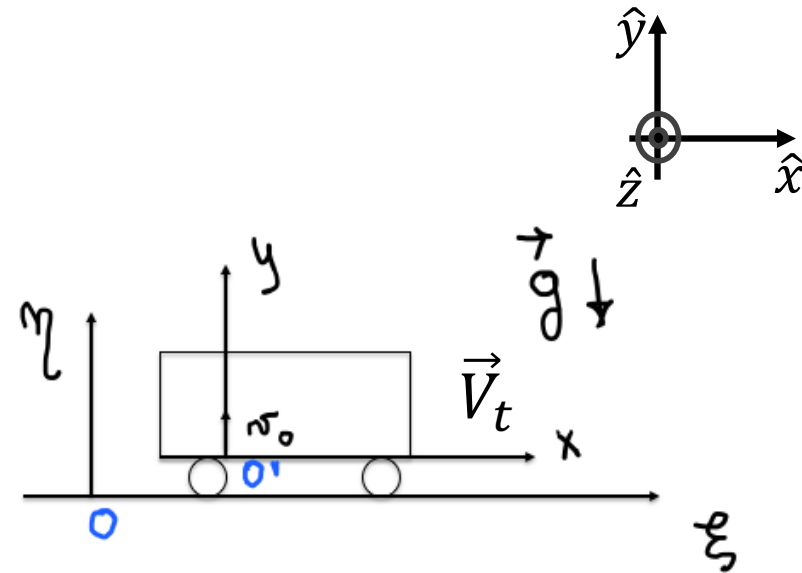
$$\vec{A} = \vec{g} = -g\hat{y} = \vec{A}'$$

$$\vec{V}(0) = \vec{V}'(0) + \vec{V}_t = (V_t, v_0)$$

$$\vec{R}(0) = \vec{R}_{OO'}(0) = (x_0, y_0)$$

$$\vec{R}(t) = (x_0 + V_t t, y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2})$$

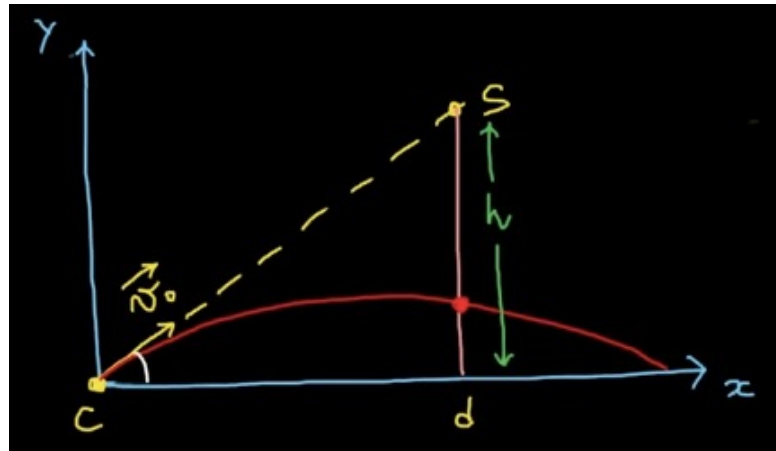
La traiettoria è una parabola!



Il problema della scimmia e del cacciatore

Un cacciatore si trova nel punto $(0,0)$ di un sistema di assi cartesiani ed intende sparare con un fucile ad una scimmia, che è appesa al ramo di un albero. Le coordinate della scimmia nel sistema di assi cartesiani sono (d, h) .

La scimmia ha una prontezza di riflessi infinita, per cui si lascia cadere dal ramo (in caduta libera verticale) nell'istante in cui vede il lampo dello sparo.



Trascurando la resistenza dell'aria e trattando sia il proiettile del fucile sia (soprattutto !) la scimmia come punti materiali, si determini l'angolo di sparo necessario al cacciatore per colpire la scimmia. Si esegua il calcolo prima nel SISTEMA INERZIALE DEL CACCIATORE e poi nel sistema NON INERZIALE DELLA SCIMMIA

Soluzione.

- Unica forza agente sia sul proiettile che sulla scimmia è la forza di gravità
- NEL SISTEMA INERZIALE** le equazioni del moto per il proiettile e la scimmia sono:

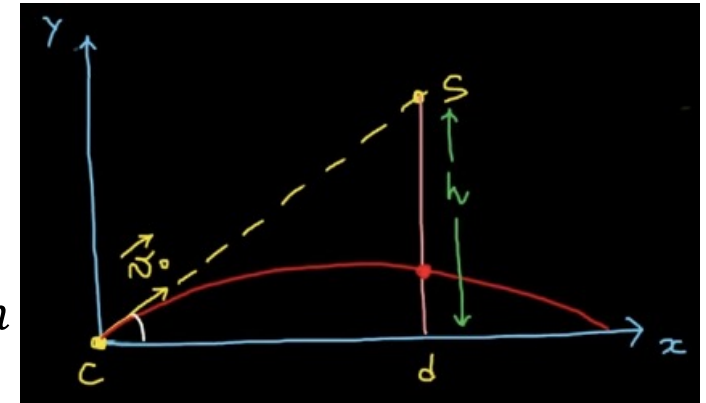
$$m_P \vec{a}_P = m_P \vec{g}; m_S \vec{a}_S = m_S \vec{g} \Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_S = \vec{g}$$

- condizioni iniziali

Proiettile

Scimmia

$$\begin{cases} x_P(0) = 0, y_P(0) = 0 \\ \vec{V}_P(0) = \vec{V}_0 = (V_0 \cos \theta, V_0 \sin \theta) \end{cases} \quad \begin{cases} x_S(0) = d, y_S(0) = h \\ \vec{V}_S(0) = (0,0) \end{cases}$$



\vec{V}_0 , velocità iniziale del proiettile

θ , angolo formato dalla direzione di \vec{V}_0 con l'orizzontale

- Equazioni del moto

$$\begin{cases} x_P = V_0 \cos \theta t \\ y_P = V_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- Nell'istante t^* in cui il proiettile colpisce la scimmia, la scimmia ed il proiettile hanno le stesse coordinate
 - Eguagliando x_P e x_S si determina t^*

$$t^* = \frac{d}{V_0 \cos \theta}$$

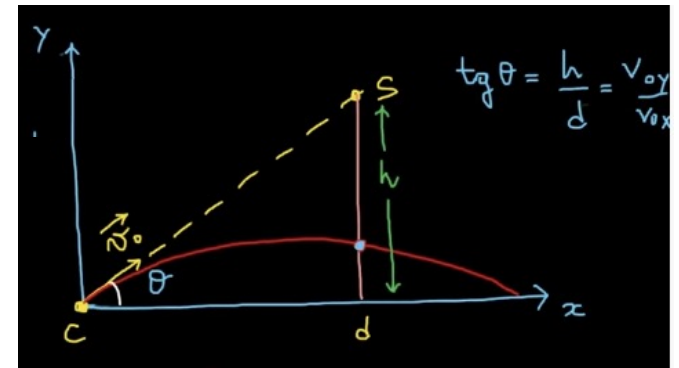
$$\begin{cases} x_P = V_0 \cos \theta t \\ y_P = V_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- Anche le coordinate y_P e y_S se la scimmia viene colpita sono le stesse
- l'istante t^{**} (che deve essere uguale a t^*) in cui le coordinate verticali sono eguali è

$$t^{**} = \frac{h}{V_0 \sin \theta} = t^* = \frac{d}{V_0 \cos \theta}$$

Imponendo l'eguaglianza fra t^* e t^{**} si determina θ :

$$\tan \theta = \frac{h}{d}$$



ovvero la direzione di sparo è proprio quella definita dalla posizione iniziale della scimmia rispetto al cacciatore. Si noti che il risultato è indipendente da $|\vec{V}_0|$ e conseguentemente anche dall'istante in cui il proiettile colpisce la scimmia.



«se un cacciatore spara in direzione di una scimmia appesa ad un albero la quale per la paura si lascia cadere nell'istante in cui parte il colpo, questa verrà colpita in pieno dal proiettile»

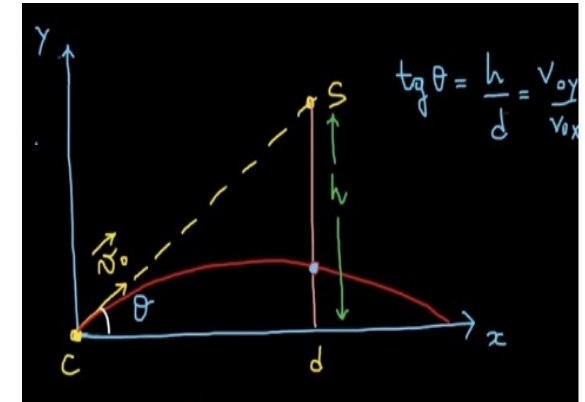
SISTEMA NON INERZIALE

- l'osservatore “solidale con la scimmia” misura sul proiettile anche una forza apparente, dovuta alla caduta libera della scimmia.
- Applicando la seconda legge di Newton generalizzata questo osservatore scrive:

$$m_P \vec{a}'_P = \vec{F} + \vec{F}_{app} = m_P \vec{g} - m_P \vec{a}_t = m_P (\vec{g} - \vec{g}) = 0$$

in quanto, a causa della caduta libera della scimmia,
l'accelerazione di trascinamento del sistema non inerziale è proprio \vec{g}

- il proiettile si muove quindi di moto rettilineo uniforme
- la scimmia? è ferma!

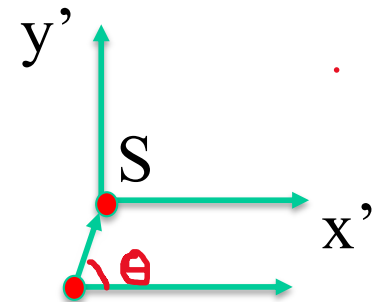


per cui la direzione del proiettile è costante e può essere calcolata in un istante qualunque

- All'istante $t = 0$ nel sistema di riferimento della scimmia:
coordinate del proiettile $(-d, -h)$
coordinate della scimmia $(0,0)$
- la direzione con cui il cacciatore punta la scimmia è definita da un angolo θ tale che:

$$\tan \theta = \frac{(0 - (-h))}{(0 - (-d))} = \frac{h}{d}$$

- come nel calcolo precedente

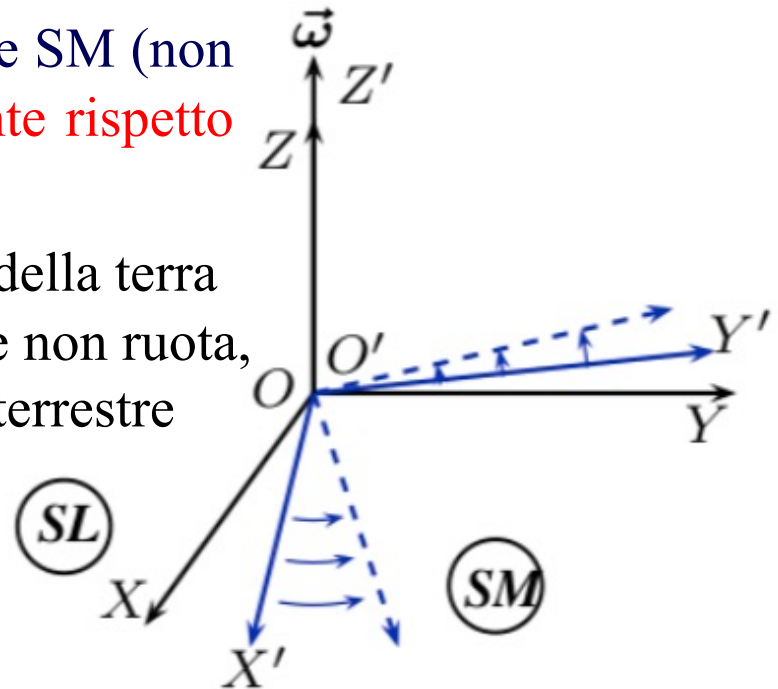


Si noti che il calcolo nel sistema non inerziale è molto più semplice ed immediato a causa della cancellazione (non accidentale !) fra l'accelerazione dovuta alla forza di gravità e l'accelerazione di trascinamento.

Sistemi di riferimento rotanti

- Consideriamo ora il caso in cui il sistema mobile SM (non inerziale) ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante rispetto al sistema inerziale SL come in figura:

Es. SL terna levogira con asse Z diretto dal centro della terra verso il polo nord origine nel centro della terra che non ruota, SM solidale alla terra che ruota attorno all'asse Z terrestre



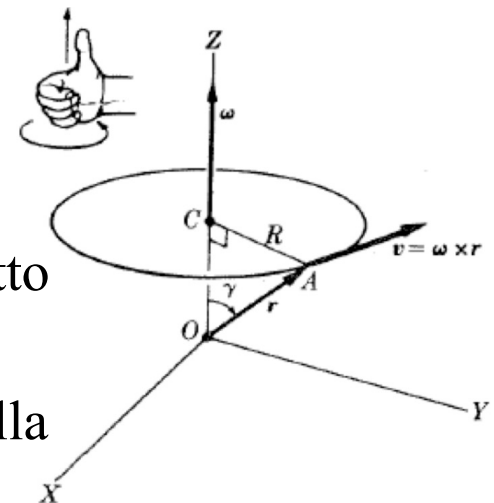
- Si può ricavare (senza dimostrazione) che l'accelerazione di trascinamento \vec{a}_t assume una forma inaspettata e non banale:

$$\vec{a}_t = +2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = +2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

- Per cui la relazione tra \vec{a} e \vec{a}' diviene

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

- $-\omega^2 \vec{R}$ è dovuto all'accelerazione (centripeta) di un oggetto solidale con SM e a distanza R dall'asse di rotazione
- $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ (noto come **accelerazione di Coriolis**) dipende dalla velocità del punto PM nel sistema rotante !



Forze apparenti in un sistema rotante

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

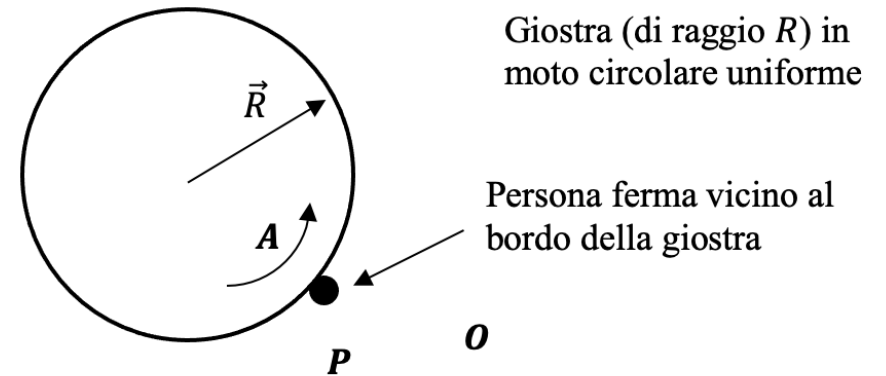
- Nel sistema rotante dell'esempio per un corpo di massa m varrà

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_t = \sum \vec{F} + \vec{F}_{App} \Rightarrow \vec{F}_{App} = m(-2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R})$$

La forza apparente sul punto materiale nel sistema mobile si manifesta come dovuta a due contributi **una forza centrifuga** e la **forza di Coriolis**

Esempio

- Sistema O è ancorato al suolo \Rightarrow sistema inerziale SL
- Sistema A è solidale alla giostra \Rightarrow sistema NON inerziale SM



Le origini dei due sistemi sono coincidenti (centro della giostra)

- Persona P ferma a terra solidale a SL
- Persona P rispetto alla giostra (SM) compie un moto circolare uniforme

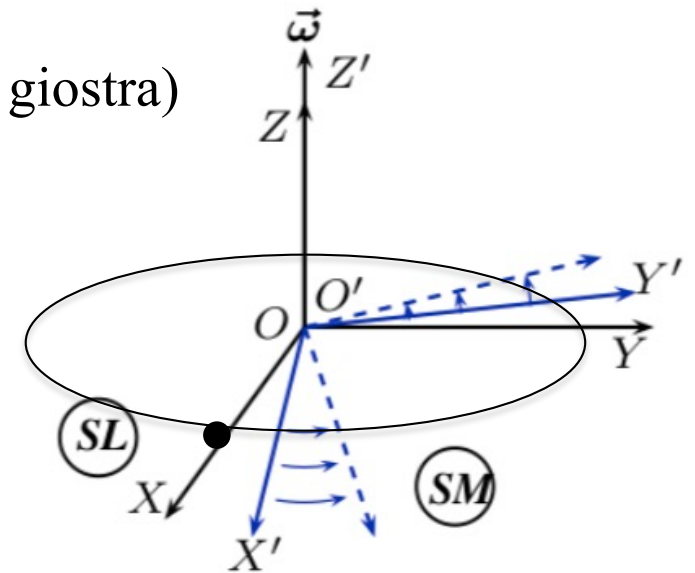
$$\Rightarrow \vec{a}' = -\omega^2 \vec{R} \quad \vec{v}' = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

- rispetto SL P è sempre fermo, per cui

$$\vec{v} = 0 \quad \vec{a} = 0$$

Verifichiamo la consistenza di queste osservazioni con la legge di composizione delle accelerazioni:

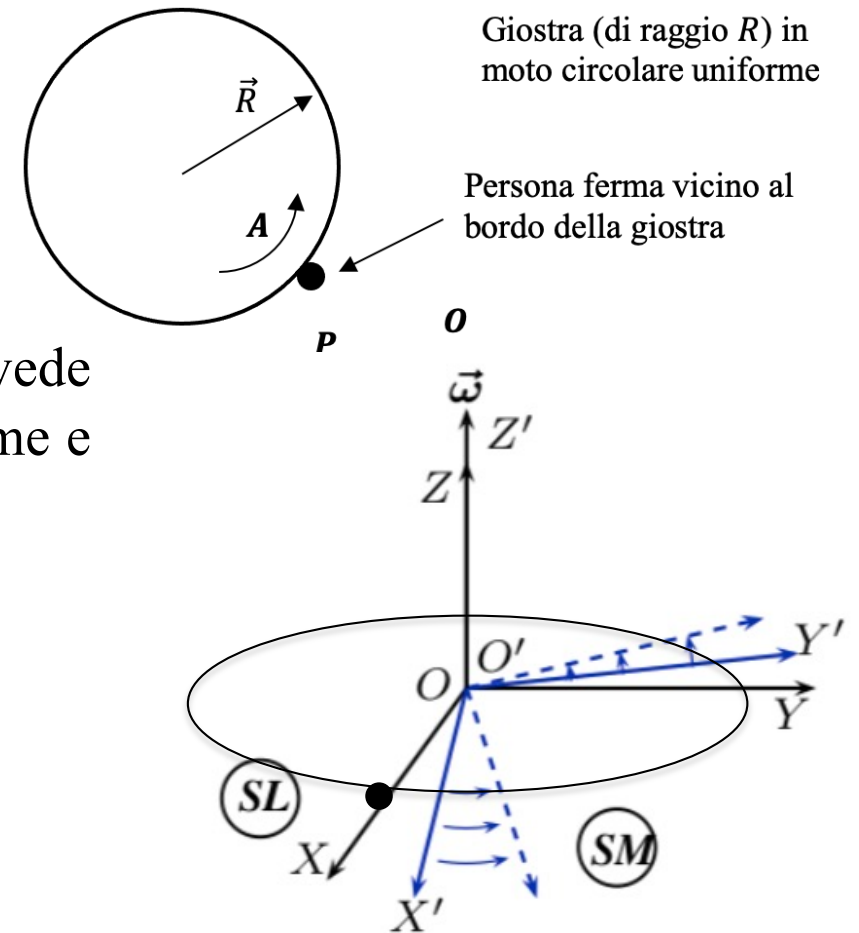
$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R} = 0 - 2\vec{\omega} \wedge (-\vec{\omega} \wedge \vec{R}) + \omega^2 \vec{R} \\ &= -2\omega^2 \vec{R} + \omega^2 \vec{R} = -\omega^2 \vec{R} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R} \\
&= 0 - 2\vec{\omega} \wedge (-\vec{\omega} \wedge \vec{R}) + \omega^2 \vec{R} \\
&= -2\omega^2 \vec{R} + \omega^2 \vec{R} = -\omega^2 \vec{R}
\end{aligned}$$

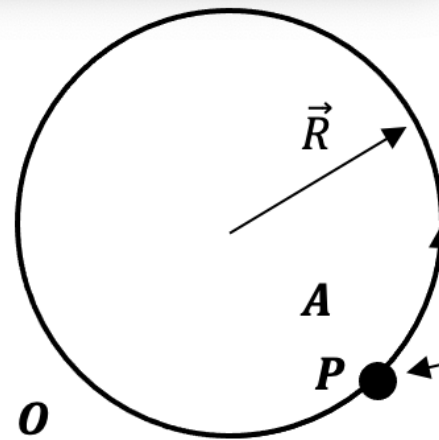
Infatti un osservatore che si trova sulla giostra vede la persona P muoversi di moto circolare uniforme e la sua accelerazione deve essere centripeta

- solo inserendo l'accelerazione di Coriolis si ottiene il risultato giusto



Esempio

- Sistema O è ancorato al suolo
 \Rightarrow sistema inerziale SL
- Sistema A è solidale alla giostra
 \Rightarrow sistema NON inerziale SM



Giostra (di raggio R) in moto circolare uniforme

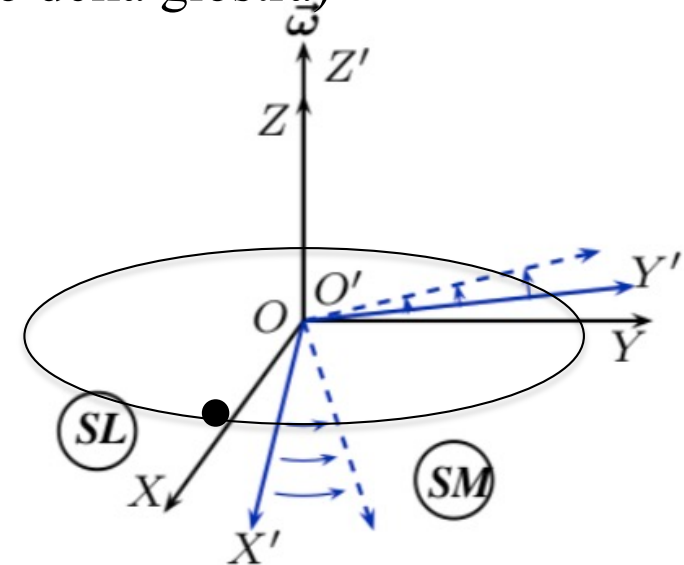
Persona ferma sulla giostra vicino al bordo

- Le origini dei due sistemi sono coincidenti (centro della giostra)
- Persona P ferma sulla giostra solidale a SM
- Persona P rispetto SL compie un moto circolare uniforme

$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{R} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

- rispetto SM P è sempre fermo, per cui

$$\vec{v}' = 0 \quad \vec{a}' = 0$$

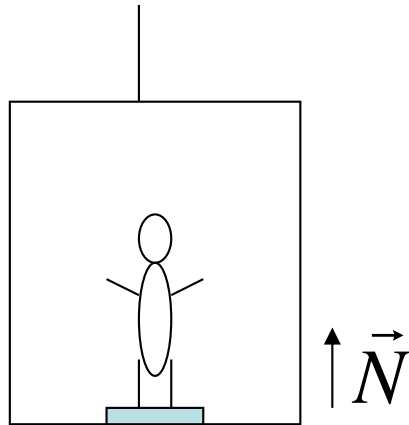


- Verifichiamo la consistenza di queste osservazioni con la legge di composizione delle accelerazioni:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R} = -\omega^2 \vec{R} + \vec{0} + \omega^2 \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{OK!}$$

Esercizio quanto segna una bilancia su un ascensore accelerato ?
Supponiamo che in un ascensore sia montata una bilancia, su cui è appoggiato un corpo di massa m . Se l'ascensore è fermo o in moto rettilineo uniforme, la bilancia “segna” un peso mg , **corrispondente al modulo della reazione \vec{N} della bilancia stessa che tiene il corpo in quiete**: ma cosa succede se l'ascensore è accelerato con accelerazione \vec{a} ? (non è precisato se il verso di \vec{a} sia verso l'alto o verso il basso, cioè se l'ascensore stia salendo o scendendo). Risolvere l'esercizio sia in un sistema di riferimento inerziale a terra, sia in un sistema di riferimento non inerziale solidale all'ascensore.

- Nel sistema di riferimento INERZIALE



Il peso apparente è la forza
A cui si oppone la bilancia con la sua forza normale

Peso apparente $P' = |\vec{N}| = N$

$$\sum F_y = N - mg = ma_y \Rightarrow N = mg + ma_y$$

$$P' = N = m(g + a_y)$$

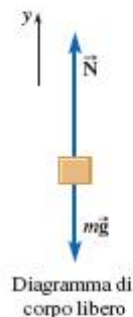
Se l'ascensore accelera verso l'alto, il peso apparente è maggiore

Se verso il basso ($a_y < 0$), peso apparente è minore

Se si rompe cavo $\Rightarrow a_y = -g \Rightarrow$ il peso apparente è nullo



(a)



(b)

Somma vettoriale
delle forze

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

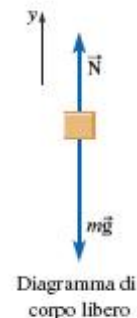
$$\sum \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$\sum \vec{F}$ è rivolta verso
l'alto, e quindi $N > mg$

(c)



(a)



(b)

Somma vettoriale
delle forze

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$\sum \vec{F}$ è rivolta verso il
basso, e quindi $N < mg$

(c)

- Nel sistema di riferimento NON INERZIALE

un osservatore solidale all'ascensore osserva il corpo di massa m fermo per cui, applicando la seconda legge di Newton in forma generalizzata, scrive l'equazione del moto del corpo come:

$$m\vec{a}' = 0 = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_t = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$$

$$N = mg + ma_y$$

esattamente come l'osservatore inerziale

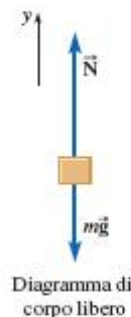
Se l'ascensore accelera verso l'alto, il peso apparente è maggiore

Se verso il basso ($a_y < 0$), peso apparente è minore

Se si rompe cavo $\Rightarrow a_y = -g \Rightarrow$ il peso apparente è nullo



(a)



(b)

Somma vettoriale delle forze

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$\Sigma \vec{F}$ è rivolta verso l'alto, e quindi $N > mg$

(c)



(a)



(b)

Somma vettoriale delle forze

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$\Sigma \vec{F}$ è rivolta verso il basso, e quindi $N < mg$

(c)

Sistema Rotante solidale alla Terra: quando può essere considerato inerziale?

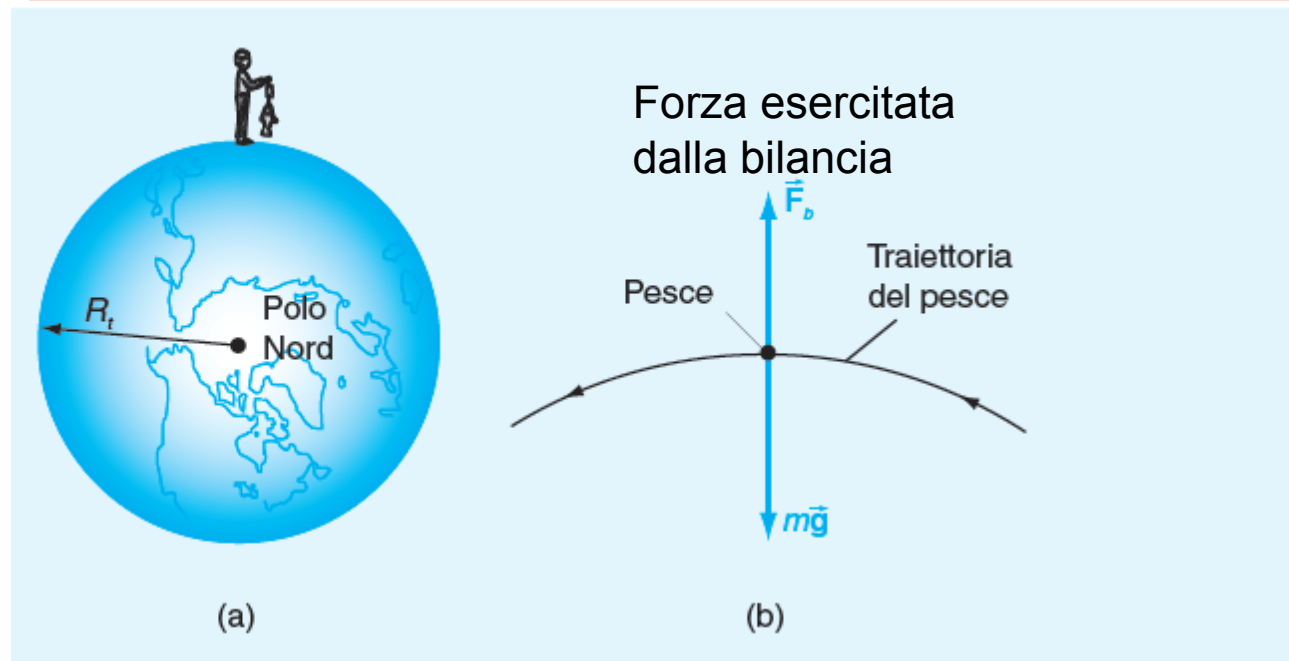


Figura 6.16

Diagramma di corpo libero per il pesce dell'Esempio 6.9 in un riferimento terrestre. L'intensità F_{app} della forza apparente è stata esagerata a scopo illustrativo.

In un sistema di riferimento inerziale solidale alla terra MA CHE NON RUOTA

$$\left(\sum_i F_{ri} \right) = +F_b - mg = ma_r = -m \frac{v^2}{R} = -m\omega^2 R = -mR \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$+F_b = mg - m \frac{v^2}{R} = m \left(g - \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right) = mg \left(1 - \frac{4\pi^2 R}{gT^2} \right) \cong mg 0.9965$$

$$R=6372 \text{ km}; T=86400 \text{ s} \Rightarrow ma_R = m \cdot 0.0337 \text{ N}$$

La terra in generale non è un sistema di riferimento inerziale

$$a_c = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

accelerazione **centripeta**
verso il Sole [moto attorno al sole]

$$a_c = 3.37 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

accelerazione **centripeta**
verso il centro della terra
[moto attorno all'asse terrestre]

sono **accelerazioni piccole** rispetto a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

- Può essere considerata un sistema inerziale quando le misure sono effettuate in tempi brevi tali da trascurare la rotazione terrestre e **nelle vicinanze della superficie terrestre**

$$\Rightarrow \vec{F}_{App} = m(-2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R}) \quad \omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Stazione Spaziale Internazionale

- Viaggia a una velocità media di 27600 km/h
 - 15,5 orbite al giorno
 - Mantenuta in orbita a un'altitudine compresa tra 330 e 410 km dal livello del mare.
 - Abitata dal 2 novembre 2000, da un equipaggio variabile tra 2 e 6 astronauti.
-
- Massa 419455 kg
 - Volume abitabile 425 m³
 - Lunghezza 72,8 m
 - Altezza 20 m
 - Larghezza 108,5 m



Esercizio (assenza di peso sulla stazione spaziale).

Un astronauta all'interno dell'ISS (International Space Station), in orbita circolare intorno alla Terra, sale su una bilancia e mentre è fermo sulla bilancia verifica che essa segna zero. Come mai ? È rilevante la quota a cui orbita la stazione spaziale ? E la sua velocità ?

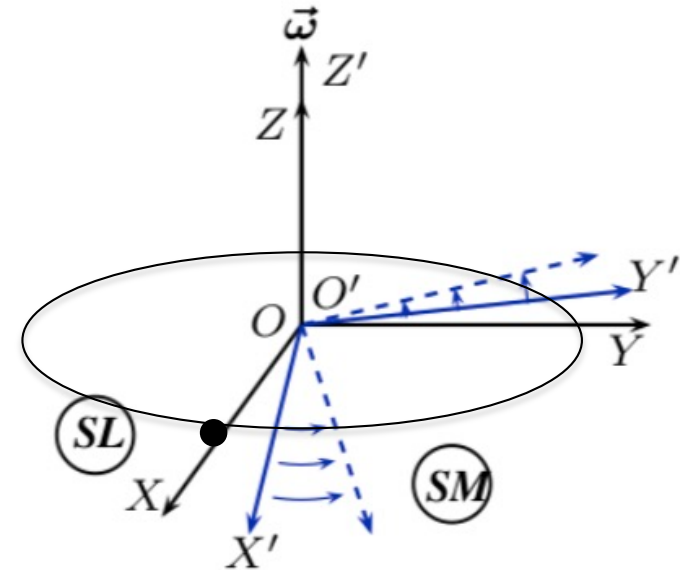
Soluzione

- l'ISS si muove lungo una traiettoria circolare
 - xyz SRI, origine in (0,0,0) piano dell'orbita su xy
 - $y' z'$ SRM, sistema rotante origine coincidente con origine SL, rotante attorno all'asse $z = z'$
- Accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$$

dove

- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare di rotazione dell'ISS rispetto alla Terra
- \vec{v}' è la velocità dei corpi all'interno dell'ISS misurati nel sistema mobile
- \vec{R} è il raggio vettore dal centro della Terra all'ISS.



l'astronauta sale su una bilancia e mentre è fermo sulla bilancia verifica che essa segna zero. Come mai ?

- L'astronauta è fermo sulla bilancia in SM e ha massa m

$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}' - \omega^2 \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = -\omega^2 \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

- l'equazione del moto nel sistema di riferimento non inerziale dell'ISS, dove l'astronauta è fermo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$m\vec{a}' = 0 = m\vec{g}(R) + \vec{N} - m\vec{a}_t$$

$$\Rightarrow \vec{N} = m(\vec{a}_t - \vec{g}(R)) = m(-\omega^2 \vec{R} - \vec{g}(R))$$

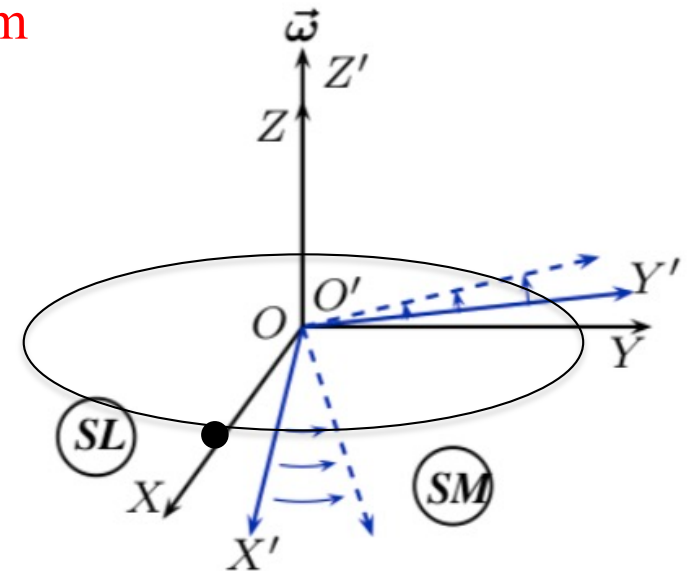
- $\vec{g}(R)$ è l'accelerazione di gravità a distanza R dalla Terra

$$\vec{g}(R) = -\frac{GM}{R^2} \hat{R}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = m\left(-\omega^2 \vec{R} + \frac{GM}{R^2} \hat{R}\right) = m\left(-\omega^2 \vec{R} + \frac{GM}{R^2} \hat{R}\right) = 0!$$

in quanto l'ultimo termine è nullo per la condizione di esistenza dell'orbita circolare dell'ISS

$$-m\omega^2 \vec{R} = -m\omega^2 R \hat{R} = -\frac{GmM}{R^2} \hat{R}$$



$$\Rightarrow \vec{N} = m \left(-\omega^2 \vec{R} + \frac{GM}{R^2} \hat{R} \right) = m \left(-\omega^2 \vec{R} + \frac{GM}{R^2} \hat{R} \right) = \mathbf{0!}$$

- Essendo la reazione vincolare nulla non c'è forza peso!
- La bilancia segna 0 ($\vec{N} = 0$) indipendentemente dalla quota orbitale e dalla velocità dell'ISS
- Nel sistema del laboratorio, come deve essere:

$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = -\omega^2 \vec{R}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$

$$m\vec{g}(R) + \vec{N} = \mathbf{0} + m\vec{a}_t = \mathbf{0} + \left(-m \frac{GM}{R^2} \hat{R} \right) = -m\omega^2 \vec{R} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \mathbf{0}$$