ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 32

Titolo nota 09/11/2018

ORTOGONALE DI SOTTOSPAZI
SOMMA DIRETTA ORTOGONALE
PROIEZIONI ORTOGONALI

__Def.__ (Ortogonale di un s.spazio)
Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale.
Si definisce ortogonale di V il sottospazio

$$V^\perp := \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \}$$

__Interpret. geom. in $\mathbb{R}^3$__

- Se V = piano per l'origine, allora $V^\perp$ = retta per l'origine perp. al piano
- Se V = retta per l'orig., allora $V^\perp$ = piano per l'origine perp. alla retta.

__Prop.__ $V^\perp$ è davvero un s.sp. vettoriale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Bisogna dim. due cose

- Se $w_1 \in V^\perp$ e $w_2 \in V^\perp$, allora per ogni $v \in V$

$$\langle w_1 + w_2, v \rangle = \underbrace{\langle w_1, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w_2, v \rangle}_{=0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad w_1 + w_2 \in V^\perp$$

- Se $w \in V^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, allora per ogni $v \in V$

$$\langle a w, v \rangle = a \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=0} = 0 \quad \rightsquigarrow a w \in V^\perp$$

—o—o—

Proprietà dell'ortogonale Sia V un s.sp. di $\mathbb{R}^n$ e sia $V^\perp$ il suo ortogonale

Allora

(1) $V \cap V^\perp = \{0\}$

(2) $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

(3) $(V^\perp)^\perp = V$

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) Sia $v \in V \cap V^\perp$. Allora v è ortogonale a se stesso cioè

$$\langle v, v \rangle = 0 \quad \leadsto \quad v = 0$$

(2) Somma diretta vuol dire 2 cose

→ $V \cap V^\perp = \{0\}$ e questo lo abbiamo appena dim.

→ Dobbiamo dim. che ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive come $x = v + w$ con $v \in V$ e $w \in V^\perp$

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di V la completiamo ad una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$.
Poi applichiamo GS ottenendo una base ortogonale

$\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$

Ora $\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \underset{\overset{\uparrow}{GS}}{=} \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$

quindi i primi k w_i sono una base di V, i restanti $\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ sono elementi di $V^\perp$ perché sono perp. ad una base.

Ogni $x \in \mathbb{R}^n$ lo possiamo scrivere come comb. lineare

$$x = \underbrace{x_1 w_1 + \dots + x_k w_k}_{\in V} + \underbrace{x_{k+1} w_{k+1} + \dots + x_n w_n}_{\in V^\perp}$$

(3) Devo dimostrare che $(V^\perp)^\perp = V$.

Poniamo per semplicità $V^\perp = W$. Allora

$$\langle v, w \rangle = 0 \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in V$$

Questo dice che

$$V \subseteq W^\perp$$

(tutti gli elementi di v sono ortogonali a W)

Cosa succederebbe se $W^\perp$ fosse più grande di V?

Supponiamo che

$\dim V = k$

Allora per quanto detto sopra $\dim W = n-k$.

Se $W^\perp$ fosse più grande di V, allora avrebbe $\dim > k$

$$\underbrace{\dim(W)}_{n-k} + \underbrace{\dim(W^\perp)}_{\text{non può essere più di } k} = \underbrace{\dim(W+W^\perp)}_{n} + \underbrace{\dim(W \cap W^\perp)}_{0}$$

—o—o—

Def. Una somma diretta ortogonale è una somma del tipo

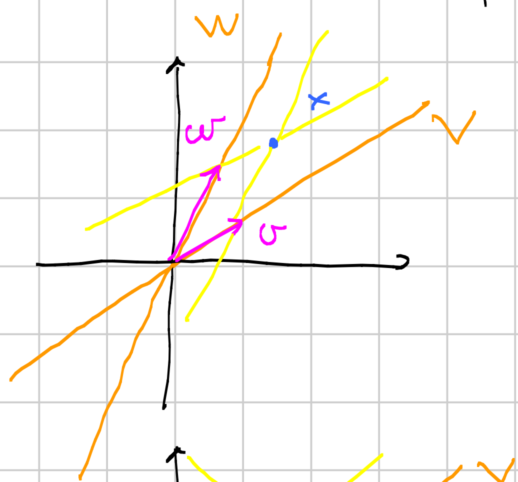
$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$$

Def. Se V è un s. sp. di $\mathbb{R}^n$, allora posso scrivere $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ e quindi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo UNICO nella forma

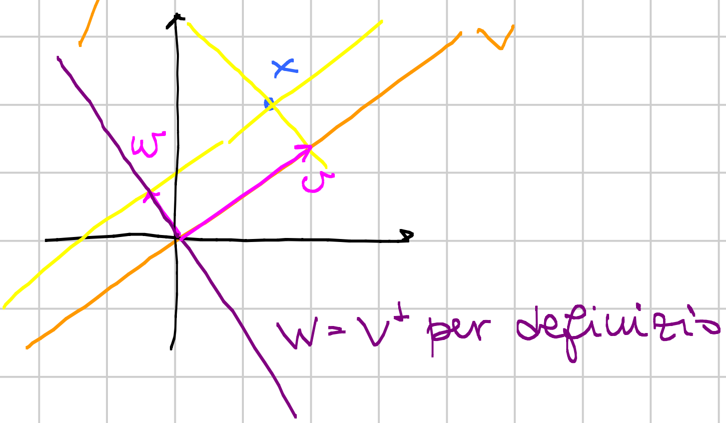
$$x = \underbrace{v}_{\text{proiezione ortogonale di } x \text{ su } V} + \underbrace{w}_{\text{proiezione ortogonale di } x \text{ su } W.} \qquad v \in V \quad e \quad w \in V^\perp$$

—o—o—

Achtung! Tutte le volte che uno spazio si scrive come somma diretta di 2 sottospazi V e W, allora per ogni x posso definire in modo unico le sue componenti rispetto a V e W. Devo assegnare sia V sia W per sapere chi sono le componenti



Quando parlo di proiezioni ortogonali, allora basta assegnare V e posso calcolare la componente rispetto a V, assumendo d'ufficio che $W = V^\perp$



Domanda: come calcolo la proiezione ORTOGONALE di un vettore x rispetto ad un s.sp. V?

→ Scrivo una base ortogonale di V ⇝ $\{v_1, \dots, v_k\}$

→ la completo ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

→ scrivo x come comb. lin. di $\{v_1, \dots, v_n\}$

→ Considero solo i primi k addendi

$$x = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k}_{\text{proiezione ort. di } x \text{ su } V} + \underbrace{x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n}_{\text{proiezione ort. di } x \text{ su } V^\perp}$$

Esempio $V = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z+w = 0,\ x-y+z=0 \}$
Voglio la proiezione ort. di $(1,2,3,4)$ rispetto a V.

① Mi procuro una base di V. Devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Vedo a occhio che z e w sono variabili libere

$z=1,\ w=0 \rightsquigarrow x=-1 \quad y=0 \rightsquigarrow (-1,0,1,0) \quad v_1$

$z=0,\ w=1 \rightsquigarrow x=-1 \quad y=-1 \rightsquigarrow (-1,-1,0,1) \quad v_2$

Quindi $V = \mathrm{Span}\{(-1,0,1,0),(-1,-1,0,1)\}$

② Con GS li faccio diventare una base ortogonale di V

$w_1 = (-1,0,1,0)$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (-1,-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}, -1, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

Una possibile base ortogonale di V è

$$\underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_1} \quad \text{e} \quad \underbrace{(+1,+2,+1,-2)}_{w_2}$$

③ Con queste sole informazioni posso calcolare la proiezione di $(1,2,3,4)$.
Immagino di aver completato w_1, w_2 ad una base ortog. $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Ora posso scrivere

$$(1,2,3,4) = \underbrace{\boxed{x_1 w_1 + x_2 w_2}}_{\text{proiez. ort. su } V} + \underbrace{x_3 w_3 + x_4 w_4}_{\text{... su } V^\perp}$$

Sapendo che la base è ortogonale abbiamo formula per le componenti

$$x_1 = \frac{\langle (1,2,3,4), w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{\langle (1,2,3,4), w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{-1}{10} = -\frac{1}{10}$$

Sostituendo trovo la componente richiesta.

④ Se volessi anche la comp. rispetto a $V^\perp$?
Faccio la differenza

⑤ Se proprio volessi anche w_3 e w_4

Completo w_1, w_2 ad una base a caso di $\mathbb{R}^4$ e poi faccio GS sui due aggiunti per renderli $\perp$ tra di loro e ai precedenti.

— o — o —