ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 30

Titolo nota 06/11/2018

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimensione e base di ker e Im (pensandola come $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$)

Rank (A) = 2 (esiste sotto matrice 2×2 con det ≠ 0 $\left(\begin{smallmatrix} - & | \end{smallmatrix}\right)$, d'altra parte non ci sono più di 2 colonne o righe lin. indip.)

Ma allora dim (Im (A)) = 2 (c-rango = dim (Im))

Ma allora dim (ker (A)) = 2 (4 − dim Im = 2)

Una base dell'immagine sono la 1ª e la 2ª colonna

Una base del ker mi richiede di risolvere $A\vec{x} = 0$, per cui posso limitarmi alle prime 2 righe

$$\begin{cases} x + 3y + z + 3w = 0 \\ 3x + y + 3z + w = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x + 3y + z + 3w = 0 \\ 8y \quad\quad + 8w = 0 \end{matrix}$$

$w = t, \; z = s, \; y = -t, \; x = -3y - z - 3w = -s$

$$(-s, -t, s, t) = t\,(0,-1,0,1) + s\,(-1,0,1,0)$$

una possibile base del ker

Esempio 2 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(\underbrace{1,1,0}_{v_1}) = (\underbrace{0,1,0}_{w_1}) \qquad f(\underbrace{1,0,0}_{v_2}) = (\underbrace{2,1,3}_{w_2})$$

$$f(\underbrace{1,1,1}_{v_3}) = (\underbrace{2,-1,+3}_{w_3})$$

Dim. e base di Ker e Im

Verifichiamo che tale f esiste. Serve che $\{v_1, v_2, v_3\}$ siano base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace}}}{\text{Det}} = -1 \neq 0 \implies \text{sono una base}$$

L'immagine è Span (w_1, w_2, w_3). Per sapere dim, li metto in una matrice e calcolo il rango

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & +3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{Det} = 0 \implies \text{rango} = 2 \implies \dim(\text{Im}) = 2$$

Osservo che w_1 e w_2 sono lin. indip.
(non sono uno multiplo dell'altro, oppure formano matrice 3×2 con D-rango $= 2$)

Quindi $\{w_1, w_2\}$ sono una base dell'immagine.
Lo sarebbero pure $\{w_2, w_3\}$ o $\{w_1, w_2\}$.

Per differenza abbiamo $\dim(\ker) = 1$ e per trovarne una base impongo $f(av_1 + bv_2 + cv_3) = 0$
cioè $\quad aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$

A occhio vedo $\quad w_3 = w_2 - 2w_1$, cioè $\quad 2w_1 - w_2 + w_3 = 0$

Quindi base ker è $\quad 2v_1 - v_2 + v_3 = $ conto

Scrivere la matrice associata ad f dalla canonica alla canonica.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B \\ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \end{array}$$

Rappresenta f dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica

Mi serve il cambio base dalla canonica alla $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ matrice cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica, quindi serve l'inversa

Matrice richiesta: $B\,M^{-1}$

— o — o —

Esempio 3 Sia V lo spazio delle matrici 2×2
Sia $f: V \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f(A) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinare dim. e base di ker e Im

Scriviamo l'applicazione in componenti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}$$

È come se avessi detto: "consideriamo $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a,b,c,d) = (a+2b, c+2d)$"

È come se stessi studiando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$\rightsquigarrow$ È la matrice che moltiplicata per $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ produce $\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}$

La matrice B ha rango 2, quindi dim (Im) = 2, quindi l'immagine è $\mathbb{R}^2$ e non è difficile trovarne una base 🙂

$$\text{Dim}(\ker) = \text{Dim}(\text{sp. partenza}) - \text{Dim}(\text{Im}) = 4-2=2$$

Mi manca una base del ker.
Banalmente devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ c+2d=0 \end{cases}$$ che ha come sol.

$$t(-2,1,0,0)+s(0,0,-2,1)$$

base del ker pensata a livello di componenti

Ma io mi aspetto un sottoinsieme di V che sono matrici
Quindi

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Verificare che effettivamente stanno nel ker.

—o—o—

Esempio 4 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$

$$W := \text{Span}\{\underbrace{(1,2,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,2)}_{v_2}\} \qquad V = \text{Span}\{\underbrace{(1,a,3)}_{v_3}\}$$

Per quali valori di a vale che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

Se è somma diretta l'intersezione è $\{0\}$, ma allora $V+W$ deve avere dim = 3. Ora $V+W = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ questi sono lin. indip. se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ ha Det $\neq 0$ $\leadsto$ conto con Sarrus

Posto che sia somma diretta, come scrivo la proiezione su W usando la base canonica in partenza e arrivo?

La proiezione su W è la funzione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$f(v_1) = v_1$ (si vede che $\dim \operatorname{Im} = 2$)

$f(v_2) = v_2$

$f(v_3) = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\leadsto$ rappresenta la proiezione dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla $\{v_1, v_2, v_3\}$

Per andare dalla canonica alla canonica servo

$$M B M^{-1}$$

dove M è la matrice $(v_1 | v_2 | v_3)$, cioè la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica.

— o — o —