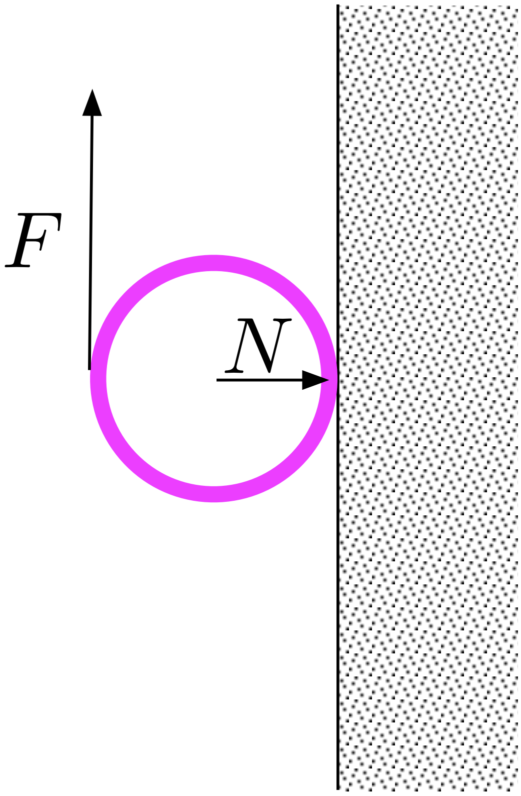
Esercizio (tratto dal problema 7.45 del Mazzoldi 2)

Un anello di massa $m = 4\,\mathrm{Kg}$ e raggio $R = 50\,\mathrm{cm}$ viene fatto salire lungo una parete verticale ($\mu_s = 0.4$) tramite l'applicazione della forza $F = 24\,\mathrm{N}$. L'anello è premuto contro la parete da una forza N. Nell'ipotesi che il moto sia di puro rotolamento, calcolare:

1. l'accelerazione dell'anello;
2. il valore minimo di N.



SOLUZIONE

Dati Iniziali:

$$
\begin{aligned}
m &= 4\,\mathrm{Kg} \\
R &= 0.5\,\mathrm{m} \quad \text{(NB: occorre convertire questo dato in unità del Sistema Internazionale)} \\
\mu_s &= 0.4 \\
F &= 24\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

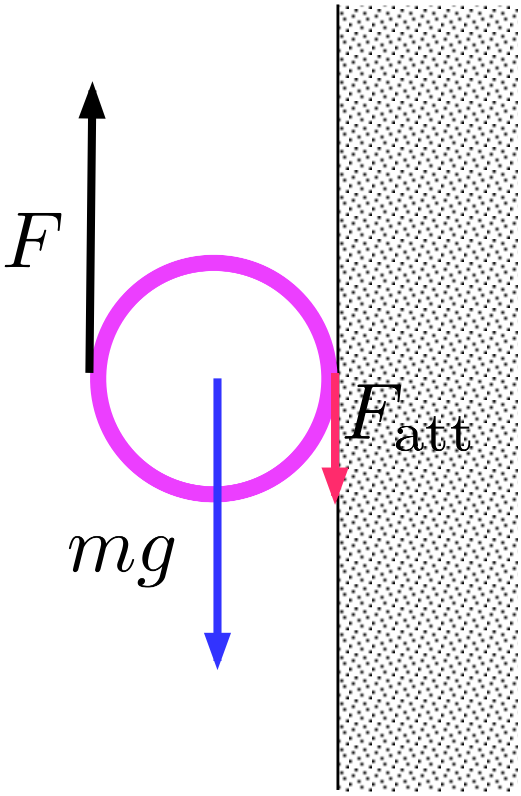


Figure 1:

1. Per calcolare l'accelerazione dell'anello occorre scrivere le equazioni della dinamica. Scegliamo come verso convenzionale quello dell'asse z orientato verso l'alto.
   Trattandosi di un corpo rigido abbiamo le equazioni per il centro di massa e le equazioni per il moto di rotazione attorno al centro di massa,

   - Il moto del centro di massa è determinato dalla sommatoria delle forze che agiscono sull'anello. Esse sono
     - forza peso (diretta verso il basso, discorde al verso convenzionale)
     - forza esterna di trazione F (diretta verso l'alto, concorde al verso convenzionale)
     - forza di attrito F_{att}. Non sappiamo a priori dove sia diretta. Infatti di solito se abbiamo una forza esterna totale F applicata al centro di massa che trascina l'anello allora la

forza di attrito si oppone al moto; mentre se abbiamo una forza totale nulla ma un momento esterno applicato non nullo, allora la forza di attrito è diretta nello stesso verso del moto. In questo caso abbiamo una situazione intermedia, dove abbiamo una forza totale esterna ($= F - mg$) ma anche un momento esterno applicato non nullo (perché F non è applicata al centro). Dunque a priori non sappiamo quale sia il verso di $F_{\rm att}$ (oltre che il suo modulo). Supponiamo che sia diretta verso il basso (discorde al verso convenzionale). Ricordiamo che $F_{\rm att}$ è un'incognita da determinarsi. Pertanto se troveremo un valore positivo vorrà dire che il verso è effettivamente verso il basso, mentre se troveremo un valore positivo vorrà dire che è diretta verso l'alto. Dunque dalla prima delle equazioni cardinali abbiamo

$$F - mg - F_{\rm att} = ma_{\rm CM} \tag{1}$$

- Per il moto di rotazione scegliamo come polo il centro di massa stesso, ossia il centro dell'anello. Considerando il verso convenzionale scelto per il moto del centro di massa, appare naturale scegliere come verso convenzionale per le rotazioni quello ortogonale al foglio, nel verso entrante (indicato con $\hat{k}$).
  - In tal caso l'accelerazione angolare si scrive

    $$\vec{\alpha} = \alpha\,\hat{k} \tag{2}$$

  - Mentre la forza peso dà un momento nullo (perché non ha braccio rispetto al centro di massa), la forza di attrito $F_{\rm att}$ e quella di trazione F danno un momento diretto nel verso entrante

    $$\vec{M}' = (FR + F_{\rm att}R)\,\hat{k} \tag{3}$$

    Pertanto la seconda equazione cardinale

    $$\vec{M}' = I\,\vec{\alpha} \tag{4}$$

    (in cui I è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro dell'anello), proiettata lungo $\hat{k}$, implica che

    $$(F + F_{\rm att})R = I\alpha \tag{5}$$

  - Imponiamo ora la relazione di moto di puro rotolamento. Essa implica che il moto traslatorio del centro di massa ed il moto rotatorio del punto di contatto siamo legati dalla relazione

    $$a_{\rm CM} = \alpha\,R \tag{6}$$

    e dunque

    $$(F + F_{\rm att})R = I\,\frac{a_{\rm CM}}{R} \tag{7}$$

Combinando ora (1) e (7) otteniamo un sistema di due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F - mg - F_{\rm att} & = & ma_{\rm CM} \\ \\ F + F_{\rm att} & = & I\,\frac{a_{\rm CM}}{R^2} \end{array} \right. \tag{8}$$

nelle due incognite $F_{\rm att}$ e $a_{\rm CM}$.
Prendendo somma e differenza otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2F - mg & = & m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) a_{\rm CM} \\ \\ -mg - 2F_{\rm att} & = & m\left(1 - \frac{I}{mR^2}\right) a_{\rm CM} \end{array} \right. \tag{9}$$

Ricordando ora che il momento d'inerzia di un anello di massa m e raggio R vale

$$I = mR^2 \tag{10}$$

otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2F - mg & = & 2m\, a_{\rm CM} \\ \\ -mg - 2F_{\rm att} & = & 0 \end{array} \right. \tag{11}$$

ossia

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{\rm CM} & = & \dfrac{F}{m} - \dfrac{g}{2} \\ \\ F_{\rm att} & = & -\dfrac{mg}{2} \end{array} \right. \tag{12}$$

Dalla (12) osserviamo che la forza di attrito ha un valore negativo, ossia è diretta in verso opposto rispetto a quello preventivato in Fig.1, ed è dunque diretta verso l'alto.

- Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} a_{\rm CM} &= \frac{24\,\mathrm{N}}{4\,\mathrm{Kg}} - \frac{9.81}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 4.905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 1.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(verso l'alto)} \end{aligned} \tag{13}$$

e

$$\begin{aligned} F_{\rm att} &= -\frac{4\,\mathrm{Kg}\ \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} = \\ &= -19.6\,\mathrm{N} \qquad \text{(verso l'alto)} \end{aligned} \tag{14}$$

2. Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto è fermo nel sistema del Laboratorio. Pertanto la forza di attrito è di tipo statico. Ciò è possibile se

$$|F_{\rm att}| \leq \mu_s\, N \tag{15}$$

dove N è la forza normale alla superficie. Pertanto deve valere che

$$N \geq \frac{|F_{\rm att}|}{\mu_S} \tag{16}$$

Il valore minimo di N affinché il moto sia di puro rotolamento è dunque

$$N_{min} = \frac{|F_{\rm att}|}{\mu_S} = \frac{19.6\,\mathrm{N}}{0.4} = 49\,\mathrm{N} \tag{17}$$