# ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 39

Note Title 20/11/2018

## $\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ (Diagonalizzazione di LUSSO)

<u>Def.</u> (Applicazione lineare simmetrica)
Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare si dice simmetrica se

$$\boxed{\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^n$$

(cioè $f$ "migra nei prodotti scalari")

<u>Def.</u> (Matrice simmetrica) Sia $A$ matrice $n \times n$.
Si dice che $A$ è simmetrica se

$$\boxed{A = A^t}$$

<u>Parentesi</u> Cosa possiamo dire dell'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche?

$\boxed{1}$ È uno sp. vettoriale
(Facile verifica: se $A = A^t$ e $B = B^t$, allora $(A+B) = (A+B)^t$ e $(aA) = (aA)^t = a A^t$)

$\boxed{2}$ Dipende solo da quello che metto sulla diagonale e nel triangolo superiore (il resto viene "copiato")

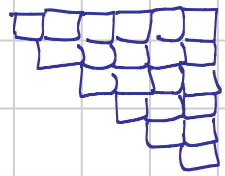
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

3 Formalmente è come chiedere che gli el. $a_{i,j}$ verifichino

$$\boxed{a_{i,j} = a_{j,i}}$$

4 Qual è la dim. dello spazio? $\dfrac{n(n+1)}{2}$

1° modo Posso scegliere liberamente



- tutta la 1ª riga $\rightsquigarrow$ $n$
- tutta la 2ª riga − primo el. $\rightsquigarrow$ $n-1$
- " " 3ª riga − primi 2 el. $\rightsquigarrow$ $n-2$

Andando avanti così ottengo

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

somma progr. aritm.

2° modo Posso scegliere come mi pare

- gli elem. sulla diagonale $\rightsquigarrow$ $n$ scelte
- metà dei rimanenti, cioè $\dfrac{n^2-n}{2}$

Sommando ottengo

$$n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

☺

— o — o —

Conclusione: l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è uno sp. vett. di dim

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{Prop.}}$ Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applic. lineare.

Allora $f$ è simmetrica se e solo se la matrice associata ad $f$ usando una qualunque base ORTONORMALE è simmetrica (la stessa base viene usata in partenza col arrivo)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono due implicazioni

$\boxed{\Rightarrow}$ Ipotesi : $f$ simmetrica
Tesi : matrice simmetrica (se ho base ortonormale)

Chi è l'elemento $a_{i,j}$ della matrice associata?
Chiamiamo $v_1, \dots, v_n$ la base.
Allora $a_{i,j}$ è la component di $f(v_j)$ rispetto a $v_i$
e quindi

$$a_{i,j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{le comp.} \\ \text{si calcolano} \\ \text{con prod.} \\ \text{scalare}}}{=} \langle f(v_j), v_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ simm}}}{=} \langle v_j, f(v_i) \rangle \qquad * \qquad \leftarrow v_i$$

$$= \langle f(v_i), v_j \rangle = a_{j,i} \qquad \qquad \underset{f(v_j)}{\uparrow}$$

Ho usato che abbiamo una base ortonormale per poter calcolare le componenti usando i prodotti scalari.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ipotesi: matrice risp. base ortonorm. $\{v_1, \dots, v_n\}$ è simm.
Tesi : $f$ è simm., cioè migra nei prodotti scalari

Siano $v$ e $w$ due elementi di $\mathbb{R}^n$.
Siano $x$ e $y$ i vettori colonna costituiti dalle comp. di $v$ e $w$ rispetto alla base data.
Sia $A$ la matrice associata ad $f$ in questa base

Allora $Ax$ è il vettore colonna delle comp. di $f(v)$
$Ay$ " " " " $f(w)$

Ora osservo che $\langle f(v), w \rangle = y^t A x$

Fatto generale: se devo fare il prodotto scalare tra due vettori è come moltiplicarli dopo averli messi uno in riga ed uno in colonna

$$(y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n$$

Quindi
$$\langle f(v), w \rangle = y^t A x$$
$$\langle \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{v}, \underset{\substack{\downarrow \\ Ay}}{f(w)} \rangle = (Ay)^t x = y^t A^t x = y^t A x$$

e quindi $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

— o — o —

<u>Oss</u>. Abbiamo usato l'interpretazione del prodotto scalare come prodotto tra una riga ed una colonna

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ (Versione applic. lineari)

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un' applic. lineare.
Allora $f$ è simmetrica se e solo se esiste una base $\boxed{\text{ortonormale}}$ costituita da autovettori

$\boxed{\text{TEOREMA SPETTRALE}}$ (Versione matrici)

Sia $A$ una matrice $n \times n$.
Allora $A$ è simmetrica se e solo se è diagonalizzabile mediante una matrice $M$ $\boxed{\text{ortogonale}}$ (cioè una matrice $M$ tale che $M^{-1} = M^t$)

<u>Oss</u>. In entrambi i casi abbiamo una diag. di lusso.

$\boxed{\text{Caso applic., implicazione facile}}$

Ipotesi : esiste base ortonormale di autovettori
Tesi : applicazione è simmetrica

Considero la matrice rispetto a tale base. La matrice è diagonale, quindi simmetrica.
Grazie alla prop., concludiamo che $f$ è simmetrica.

$\boxed{\text{Caso matrice, implicazione facile}}$

Ipotesi : $A$ si diagonalizza mediante matrice ortogonale
Tesi : $A$ è simmetrica

Esiste $M$ ort. t.c. $M^{-1}AM = D$, cioè $A = MDM^{-1} \overset{M^{-1}=M^t}{=} MDM^t$
Ma allora
$$A^t = (MDM^t)^t = (M^t)^t D^t M^t = MDM^t = A$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$

- Per quali valori di a è diagonalizzabile (e basta) sui reali?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ a & 4-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} (1-\lambda)(4-\lambda)-2a=0 \\ \lambda^2-5\lambda+4-2a=0 \end{array}$$

$$\Delta = 25-4(4-2a) = 25-16+8a = 9+8a$$

- Se $\Delta > 0$, cioè $9+8a>0$, cioè $a > -\frac{9}{8}$, allora abbiamo 2 autovalori reali distinti, quindi di sicuro è diag. sui reali
- Se $\Delta < 0$, cioè $a < -\frac{9}{8}$, allora abbiamo 2 autovalori complessi distinti, quindi è diag. in $\mathbb{C}$, ma non in $\mathbb{R}$.
- Se $\Delta = 0$, cioè $a = -\frac{9}{8}$, allora ci sarà autov. reale di molt. alg. $=2$, e devo andare a vedere la mg.

$$\lambda^2-5\lambda+\frac{25}{4}=0 \qquad \left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \lambda=\frac{5}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{9}{8} & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{9}{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ha rango } 1 \rightsquigarrow \text{NO diag.}$$

- Per quali valori di a la matrice è diag. mediante una matrice ortogonale?

Se e solo se $a=2$. Applicazione del teo. spettrale in versione matriciale.
Qui abbiamo usato l'implic. già dimostrata.

— o — o —