Prova Facoltativa di Comunicazioni Numeriche - Parte II - Fila A

30 Maggio 2013

Es. 1 - Il consumo di inchiostro di tre stampanti inkjet e' descritto da tre variabili aleatorie indipendenti C_i (i = 1,2,3), in cui C_1 e' uniformemente distribuita in [1,10] mlt/pag, C_2 ha una d.d.p. di tipo esponenziale negativo a valor medio 5 mlt/pag e la d.d.p. di C_3 e' pari a $f_{C_3}(c) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{|c-6|}{5}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{c-6}{10}\right)$. Sapendo che il contenuto della cartuccia per le tre stampanti e' pari a 500 mlt, e supponendo di scegliere a caso una delle tre stampanti, calcolare la probabilita' di stampare almeno 100 pagine identiche prima di esaurire la cartuccia.

Es. 2 - Con riferimento alla Fig. 1, siano $X(t) = \frac{A}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$ e $Y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ due processi aleatori parametrici. Siano A e Θ due V.A. indipendenti con A uniformemente distribuita in [0,1] e Θ uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi]$. Sia inoltre $h(t) = sinc\left(\frac{t}{T}\right)$ e si assuma che $f_0 \gg \frac{1}{T}$. Si calcolino il valor medio, valor quadratico medio e varianza della V.A. Z.

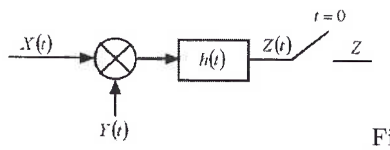


Fig 1

Es. 3 - In un sistema di comunicazione numerico il segnale ricevuto è $r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$ dove $s(t) = \sum_n x_c[n]\, p(t - nT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_n x_s[n]\, p(t - nT)\sin(2\pi f_0 t)$, i simboli sono indipendenti ed equiprobabili ed appartengono rispettivamente all'alfabeto $x_c[n] \in A_s^{(c)} = \{-1, 2\}$ e $x_s[n] \in A_s^{(s)} = \{-1, 1\}$, $n(t)$ è un processo di rumore Gaussiano bianco in banda con DSP pari ad $\frac{N_0}{2}$ e sono note le seguenti: $P(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)}$, $c(t) = \delta(t - t_0)$ e $h_R(t) = p(t + t_0)$. Nell'ipotesi che $f_0 \gg B$ e che $T = \frac{1}{B}$, calcolare: 1) Energia media per simbolo, 2) Potenza di rumore media in uscita dal filtro $h_R(t)$, 3) Determinare il valore di ϑ che garantisce l'assenza di cross-talk, 4) Calcolare la probabilità di errore sul simbolo QAM

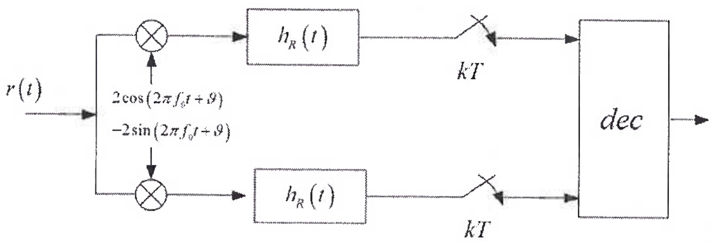


Fig. 2

Es. 4 - Dire quali, tra le seguenti funzioni, può essere un'autoccorelazione media di un processo aleatorio SSL reale. In ogni caso, giustificare la risposta.

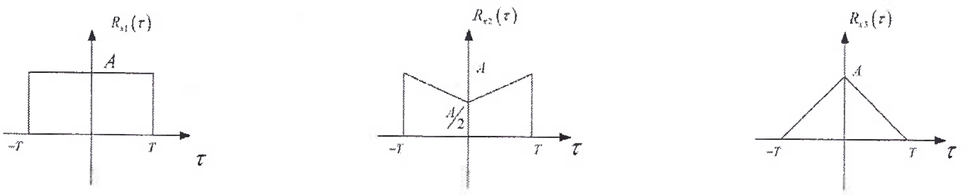


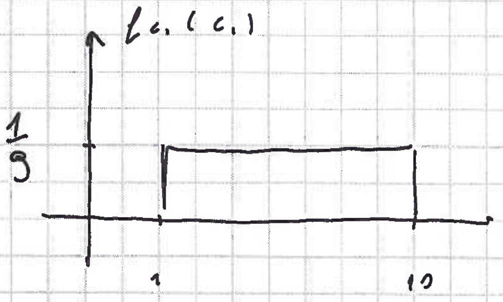
Fig. 3

Es. 5 - Dimostrare, per una modulazione PAM, che la condizione di Nyquist nel tempo garantisce l'assenza di ISI.

COMPITINO II 2013 FILA A

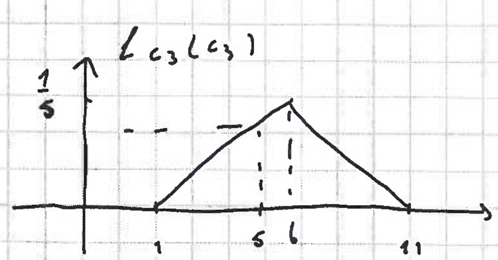
ESERCIZIO 1

C_1



C_2 $\quad f_{c_2}(c_2) = \frac{1}{5} e^{-\frac{c_2}{5}} u(c_2)$

C_3



$A = \{$ STAMPARE ALMENO 100 PAGINE IDENTICHE $\}$

$Pr\{A\} = \frac{1}{3} Pr\{A \mid \text{scelgo stampante } 1\} +$

$+ \frac{1}{3} Pr\{A \mid \text{scelgo } 2\} + \frac{1}{3} Pr\{A \mid \text{scelgo } 3\}$

$Pr\{A \mid \text{scelgo } i\} = Pr\{C_i \leq 5 \text{ mlt/pag}\}$

$Pr\{A \mid \text{scelgo } 1\} = \frac{1}{9} \cdot 4 = \frac{4}{9}$

$Pr\{A \mid \text{scelgo } 2\} = \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{c_2}{5}} dc_2 = \frac{1}{5}(-5) e^{-c_2/5}\Big|_0^5 =$

$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

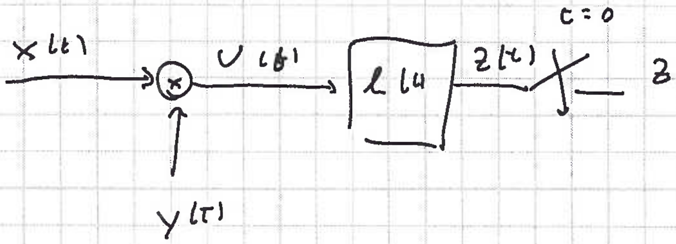
$$\Pr\{A \mid \text{Scelgo } 3\} = \frac{8}{25}$$

$$\Pr\{A\} = \frac{4}{27} + \frac{8}{75} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

ESERCIZIO 2

$$X(t) = \frac{A}{T}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$Y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$



$$A \in \mathcal{U}(0, 1)$$

$$\theta \in \mathcal{U}(-\pi, \pi)$$

$$U(t) = X(t)\,Y(t) = \frac{A}{T}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) =$$

$$= \frac{1}{2T} A\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\left[\cos(4\pi f_0 t + \theta) + \cos\theta\right]$$

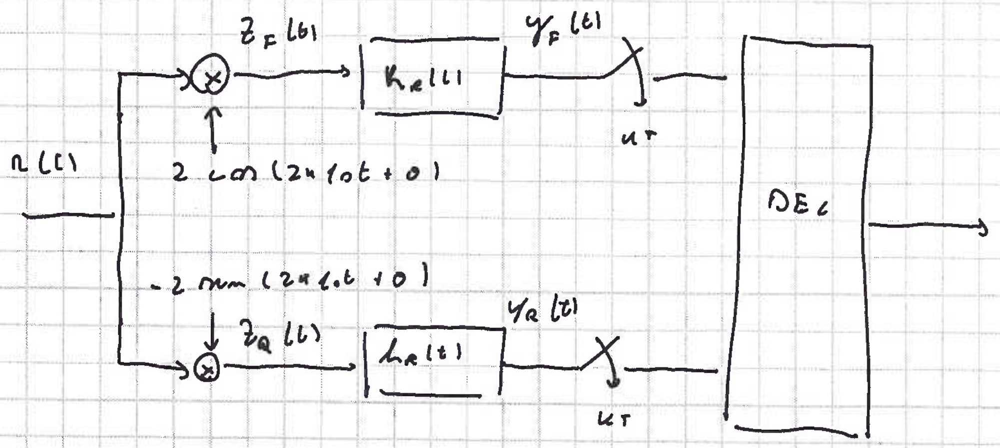
$$z(t) = \frac{1}{2} A\,\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(\theta)$$

$$z(0) = z = \frac{1}{2} A \cos(\theta)$$

$$E\{z\} = E\left\{\frac{1}{2} A \cos(\theta)\right\} = \frac{1}{2} E\{A\}\,\underbrace{E\{\cos\theta\}}_{=0} = 0$$

$$E\{z^2\} = \frac{1}{4}\,\underbrace{E\{A^2\}}_{=\frac{1}{3}}\,\underbrace{E\{\cos^2\theta\}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \sigma^2_z = \frac{1}{24}$$

ESERCIZIO 3



$$E_s = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt \right\}$$

$$s_i(t) = x_c(i)\, p(t - iT) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(i)\, p(t - iT) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$E_s = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x_c^2(i)\, p^2(t - iT) \cos^2(2\pi f_0 t) + x_s(i)\, p^2(t - iT) \sin^2(2\pi f_0 t) + \right.$$

$$\left. - 2\, x_c(i)\, x_s(i)\, p^2(t - iT) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) \Big) dt \right\} =$$

$$= E\{x_c^2(i)\} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - iT) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t) \right) dt +$$

$$+ E\{x_s^2(i)\} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - iT) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t) \right) dt +$$

$$- E\{x_c(i)\, x_s(i)\} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - iT)\, \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} E\{x_c^2(i)\} E_p + \frac{1}{2} E\{x_s^2(i)\} E_p =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} E_p + \frac{1}{2} E_p = \frac{7}{4} E_p = \frac{7}{4} B$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 \, df = B$$

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t) =$$

$$= s(t - t_0) + n(t) =$$

$$= \sum_n x_c(n)\, p(t - nT - t_0) \cos(2\pi f_0 t \underbrace{- 2\pi f_0 t_0}_{\alpha = -2\pi f_0 t_0}) +$$

$$+ \sum_n x_s(n)\, p(t - nT - t_0) \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) + n(t)$$

RAMO IN FASE

$$z_F(t) = z_{Fs}(t) + z_{Fn}(t)$$

$z_{Fn}(t)$ ↳ componente di rumore

$z_{Fs}(t)$ ↳ componente di segnale

$$z_{Fs}(t) = \sum_n x_c(n)\, p(t - nT - t_0) \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\, 2\cos(2\pi f_0 t + \theta) +$$

$$+ \sum_n x_s(n)\, p(t - nT - t_0) \sin(2\pi f_0 t + \alpha)\, 2\cos(2\pi f_0 t + \theta) =$$

$$= \sum_n x_c(n)\, p(t - nT - t_0) \left(\cos(\alpha - \theta) + \cos(4\pi f_0 t + \alpha + \theta) \right)$$

$$- \sum_n x_s(n)\, p(t - nT - t_0) \left(\sin(\alpha - \theta) + \sin(4\pi f_0 t + \alpha + \theta) \right)$$

$$y_F(t) = y_{Fs}(t) + y_{Fn}(t)$$

$$y_{Fs}(t) = \sum_n x_c(n)\, g(t - nT) \cos(\alpha - \theta) +$$

$$- \sum_n x_s(n)\, g[t - nT]\, \sin(\alpha - \theta)$$

$$g(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

$$G(f) = P(f)\, C(f)\, H_R(f) = P^2(f)$$

$$y_{Fn}(t) = n_{uF}(t)$$

$$P_{nuF} = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2\, df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(f)\, df = N_0 B$$

RAMO IN QUADRATURA

$$z_{QS}(t) = - \sum_n x_c(n)\, p(t - nT - t_0) \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\, 2 \sin(2\pi f_0 t + \theta) +$$

$$+ \sum_n x_s(n)\, p(t - nT - t_0) \sin(2\pi f_0 t + \alpha)\, 2 \sin(2\pi f_0 t + \theta) =$$

$$= \sum_n x_c(n)\, p(t - nT - t_0) \sin(4\pi f_0 t + \alpha + \theta) \sin(\alpha - \theta) +$$

$$+ \sum_n x_s(n)\, p(t - nT - t_0) \left(\cos(\alpha - \theta) - \cos(4\pi f_0 t + \alpha + \theta) \right)$$

$$y_{QS}(t) = \sum_n x_s(n)\, h(t - nT) \cos(\alpha - \theta) +$$

$$+ \sum_n x_c(n)\, h(t - nT) \sin(\alpha - \theta)$$

ASSENZA DI CROSS-TALK

$$\alpha - \theta = 2\pi k$$

$$\theta = \alpha + 2k\pi = -2\pi f_0 t_0 + 2k\pi$$

$P_{m,Q} = N_0 B$

Verifica assenza di ISI

$$G(f) = P^2(f)$$

$$\sum_i G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1 \Rightarrow h(n) = \frac{1}{T}$$

$$P_E^{(QAM)}(b) = P_E^{(F)}(b) + P_E^{(Q)}(b)$$

P. err. ramo in quadratura

Probabilità di errore ramo in fase

$$P_E^{(F)} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1/T}{\sqrt{N_0 B}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{2/T}{\sqrt{N_0 B}}\right)$$

$$P_E^{Q} = Q\left(\frac{1/T}{\sqrt{N_0 B}}\right)$$

ESERCIZIO 4

1) NO perché $S_x(f)$ avrebbe componenti < 0

2) NO perché non ha il massimo in 0

3) SI rispetta tutte le proprietà