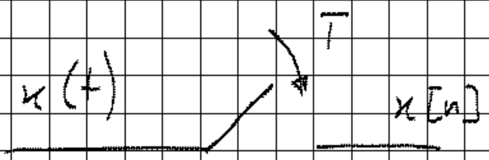
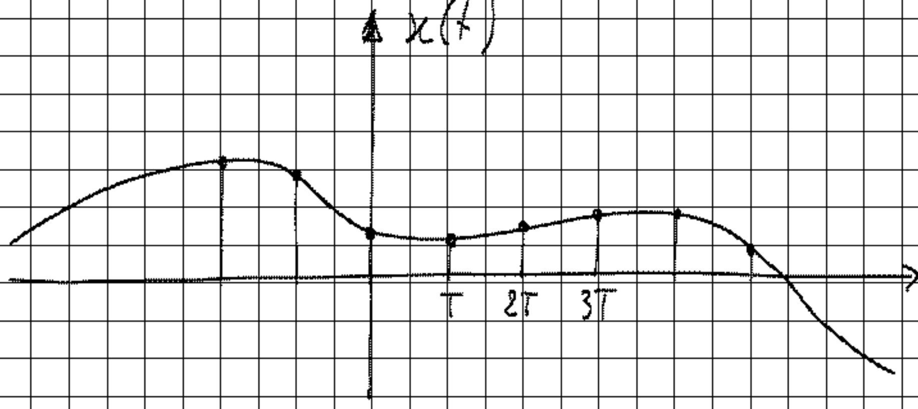
SEGNALI CAMPIONATI





$x[n] = x(nT)$ sequenza ottenuta per campionamento di un segnale analogico

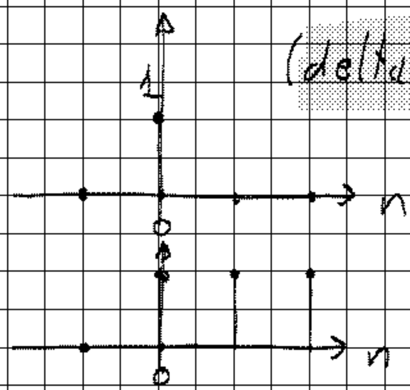
T = intervallo di campionamento

$F = \frac{1}{T}$ = frequenza di campionamento

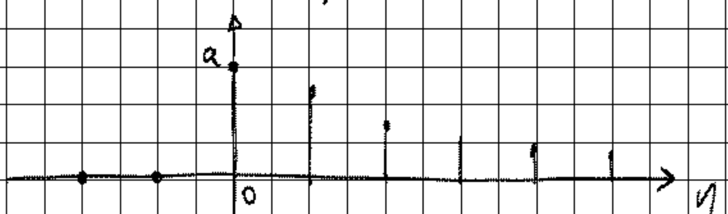
Sequenze notevoli

·) $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ (delta di Kronecker)

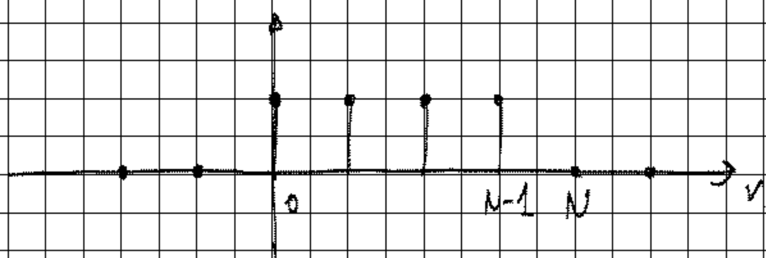
·) $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ (gradino)



·) $x[n] = a^n u[n]$, $0 < a < 1$ (esponenziale)



·) $x[n] = u[n] - u[n-N]$ (rettangolo)



·) $x[n] = \exp[j2\pi F_0 n]$ (oscillazione discreta)

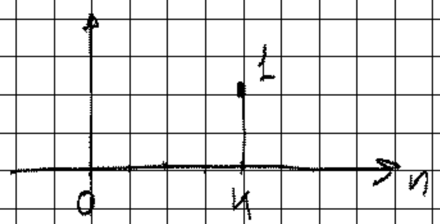
N.B. $x[n]$ è periodico se $F_0 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$

In tal caso il periodo $N = q'$, dove

$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ e dove p' e q' sono interi primi tra loro

Proprietà

·) $\delta[n-k]$



·) $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

·) $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

$$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$$

$$\boxed{\bar{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n f T}}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

Proprietà

$\bar{X}(f)$ è periodica di periodo $\frac{1}{T} \Rightarrow \bar{X}(f) = \bar{X}\left(f + \frac{k}{T}\right)$

Dimostrazione

$$\bar{X}\left(f+\frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n \left(f+\frac{k}{T}\right)T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n f T} \underbrace{e^{-j2\pi n k}}_{=1}$$

$$= \bar{X}(f)$$

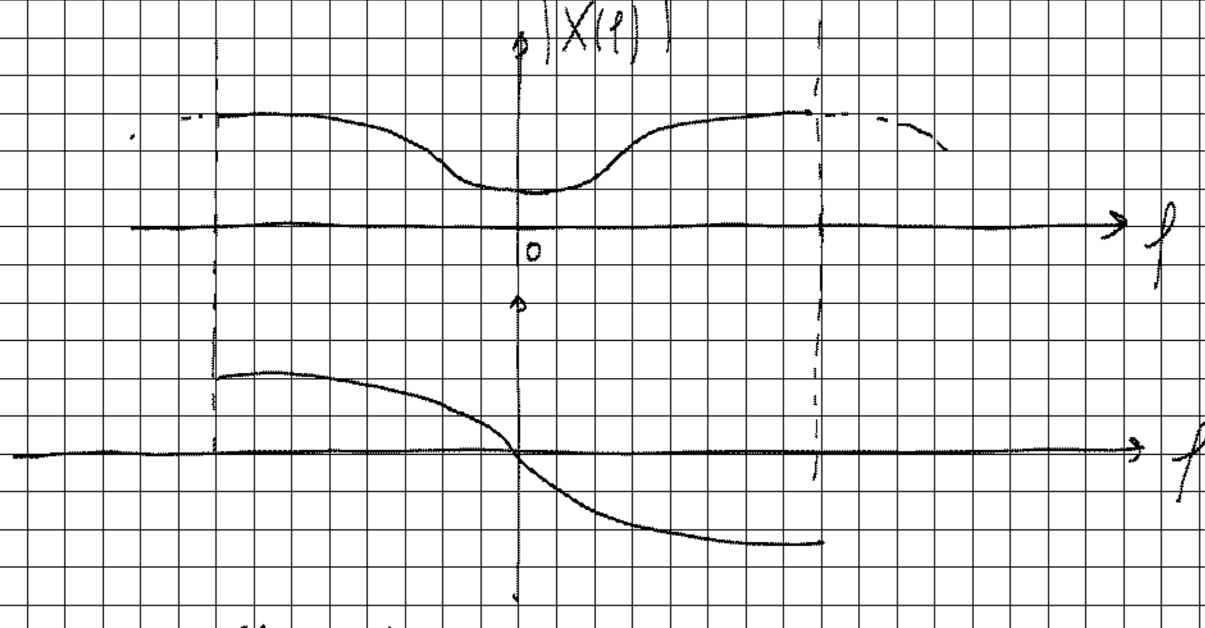
$$\boxed{x[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, e^{j2\pi n f T}\, df \qquad \text{ANTITRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA}}$$

Dimostrazione

$$T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_k x[k]\, e^{-j2\pi k f T}\, e^{j2\pi n f T}\, df =$$

$$= T\sum_k x[k] \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{j2\pi (n-k) f T}\, df}_{\neq 0 \text{ solo se } n=k} = T\, x[n]\, \frac{1}{T} = x[n]$$

Rappresentazione della TFS



N.B. è sufficiente rappresentare la TFS su un periodo

Perchè la TFS è periodica?

prendiamo due oscillazioni discrete

$$x_1[n] = e^{j2\pi n F_0 T}, \qquad x_2[n] = e^{j2\pi n \left(F_0 + \frac{m}{T}\right) T}$$

Le due oscillazioni sono in realtà la stessa oscillazione

$$x_2[n] = e^{j2\pi n F_0 T} e^{j2\pi n \frac{m}{T} T} = x_1[n] \underbrace{e^{j2\pi n m}}_{=1} = x_1[n]$$

Si conclude che una oscillazione alla frequenza F_0 ed una qualsiasi oscillazione alla frequenza $F_0 + \frac{m}{T}$, con $m \in \mathbb{Z}$ sono indistinguibili. Di conseguenza lo devono essere anche gli spettri.

$$\bar{X}_1(f) = \sum_n x_1[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_n e^{j2\pi n F_0 T} e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n e^{-j2\pi n (f - F_0) T} = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - F_0 - \frac{n}{T}\right)$$

$$\bar{X}_2(f) = \sum_n x_2[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_n e^{j2\pi n (F_0 + \frac{m}{T}) T} e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n e^{-j2\pi n (f - F_0 - \frac{m}{T}) T} = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - F_0 - \frac{m}{T} - \frac{n}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n'} \delta\left(f - F_0 - \frac{n'}{T}\right) \qquad (n' = n + m)$$

Condizione per l'esistenza della TFS

$x[n]$ ammette TFS se

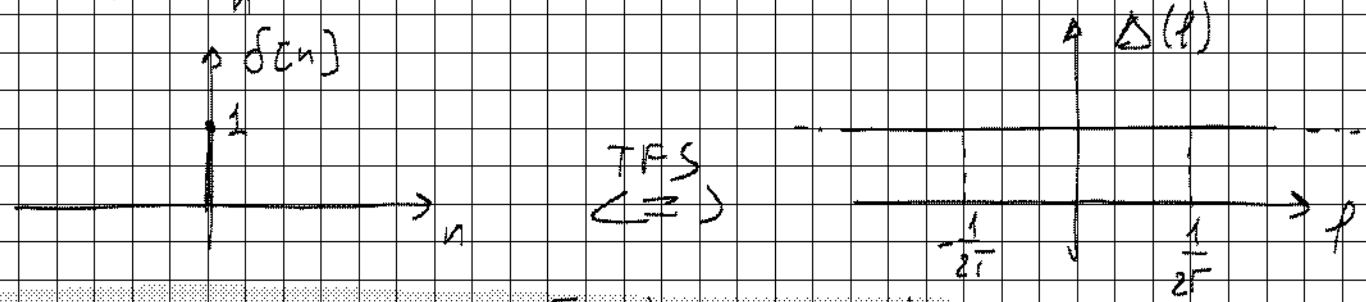
$$\sum_n |x[n]| < \infty$$

Dimostrazione

$$\left|\bar{X}(f)\right| = \left| \sum_n x[n] e^{-j2\pi n f T} \right| \leq \sum_n |x[n]| < \infty$$

ESEMPIO – TFS DI UNA $\delta[n]$

$$\bar{\Delta}(f) = \sum_n \delta[n]\, e^{-j2\pi n f T} = 1$$



RELAZIONE TRA $\bar{X}(f)$ e $X(f)$

$x[n] = x(nt)$ ottenuta per campionamento di $x(t)$ con intervallo di campionamento T

$$x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \quad , \quad x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Dimostrazione:

$$\bar{X}(f) = \sum_n x[n]\, e^{-j2\pi n f T} = \sum_n x(nT)\, e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, e^{j2\pi \alpha n T}\, d\alpha\; e^{-j2\pi n f T} =$$

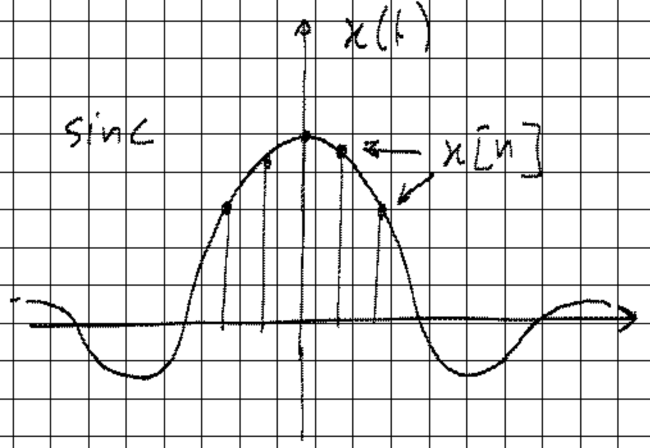
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \sum_n e^{-j2\pi (f-\alpha) nT}\, d\alpha =$$

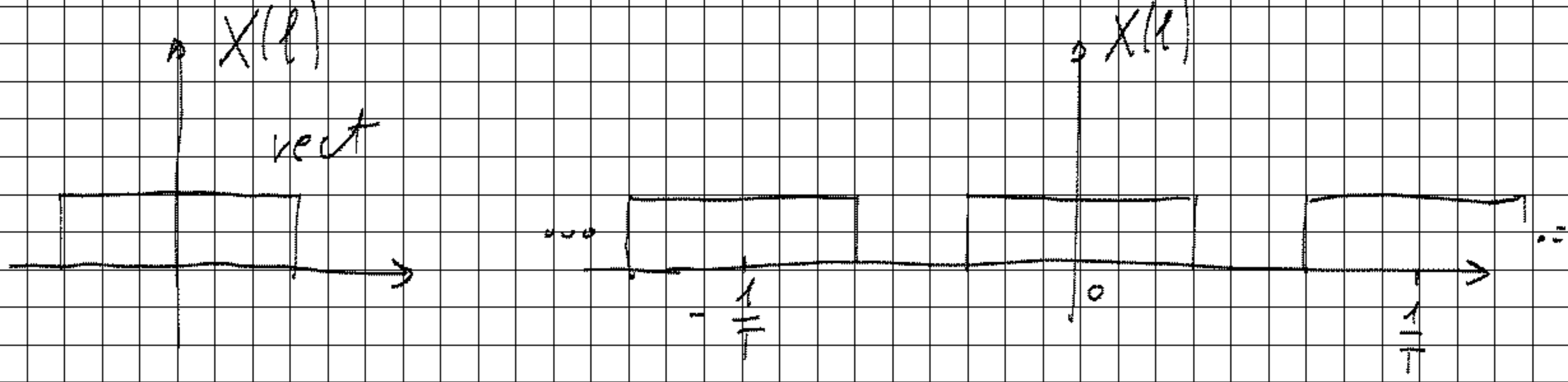
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \alpha - \frac{n}{T}\right) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, \delta\left[\left(f - \frac{n}{T}\right) - \alpha\right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Esempio





La sequenza $x[n]$ ottenuta per campionamento di $x(t)$ ha come spettro una periodocizzazione dello spettro dello spettro del segnale $x(t)$.

CORRELAZIONE TRA SEQUENZE

$$R_{xy}[k] = \sum_n x[n]\, y^*[n-k]$$

AUTOCORRELAZIONE

$$R_x[k] = \sum_n x[n]\, x^*[n-k]$$

DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

$$S_x(f) = TFS\left[R_x[k]\right] = \sum_k R_x[k]\, e^{-j2\pi k f T} =$$

$$= \sum_k \sum_n x[n]\, x^*[n-k]\, e^{-j2\pi k f T} =$$

$$= \sum_n x[n] \sum_k x^*[n-k]\, e^{-j2\pi k f T} = \qquad (n-k = k')$$

$$= \sum_n x[n] \sum_{k'} x^*[k']\, e^{-j2\pi (n-k') f T} =$$

$$= \sum_n x[n]\, e^{-j2\pi n f T} \left[\sum_{k'} x[k']\, e^{-j2\pi k' f T} \right]^* = \bar{X}(f)\, \bar{X}^*(f) =$$

$$= \left| \bar{X}(f) \right|^2$$

TEOREMA DI PARSEVAL PER SEQUENZE

$$\sum_n x[n]\, y^*[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, \bar{Y}^*(f)\, df$$

Dimostrazione

$$\sum_n x[n]\, y^*[n] = \sum_n T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, e^{j2\pi n f T}\, df \; y^*[n] =$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \sum_n y^*[n]\, e^{j2\pi n f T}\, df =$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \left[\sum_n y[n]\, e^{-j2\pi n f T} \right]^* df =$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, \bar{Y}^*(f)\, df$$

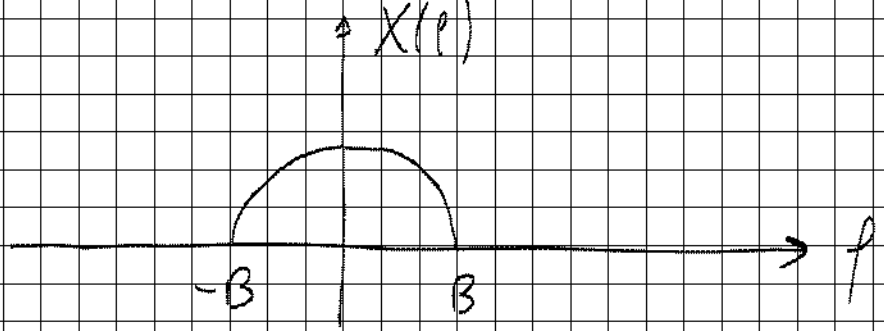
CALCOLO DELL'ENERGIA DI UNA SEQUENZA

$$E_x = R_x[0] = \sum_n |x[n]|^2 = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |\bar{X}(f)|^2\, df = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_x(f)\, df$$

CONDIZIONE DI NYQUIST

La condizione di Nyquist si applica a segnali che hanno banda rigorosamente limitata

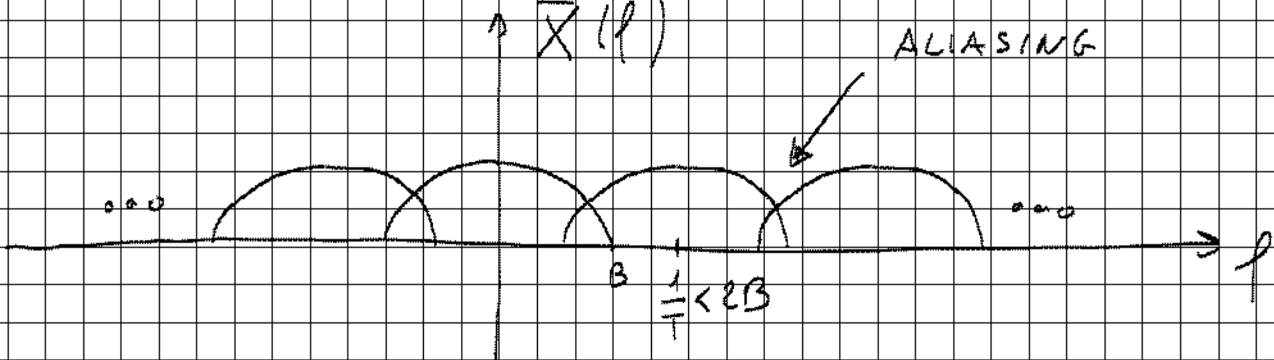
Se $x(t)$ ha banda rig. lim. B



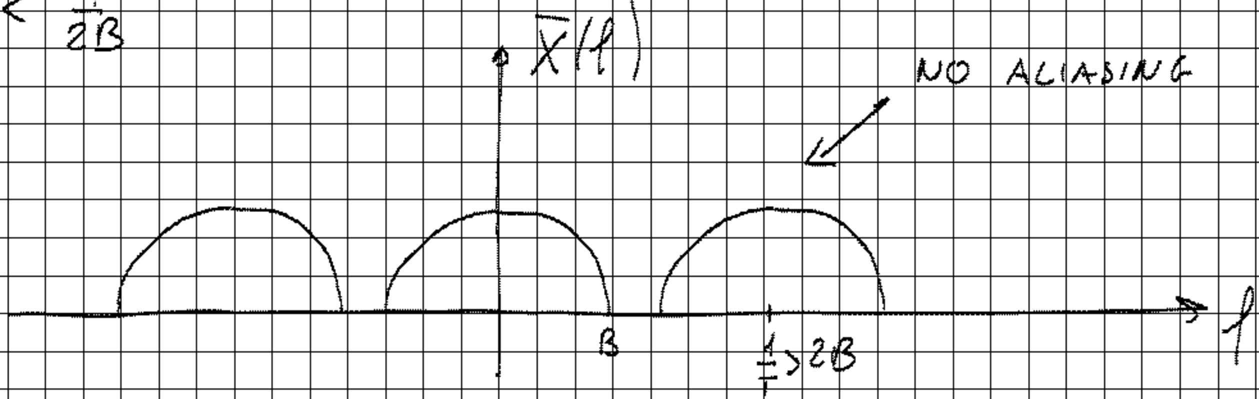
campionando con intervallo di campionamento T si possono verificare due casi

I) $T > \frac{1}{2B}$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



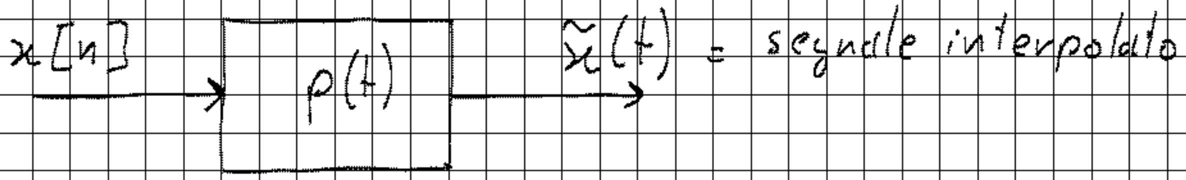
II) $T < \frac{1}{2B}$



La condizione di Nyquist è quella che mi garantisce assenza di "aliasing".

$$\boxed{T \leq \frac{1}{2B} \iff F \geq 2B}$$

INTERPOLATORE

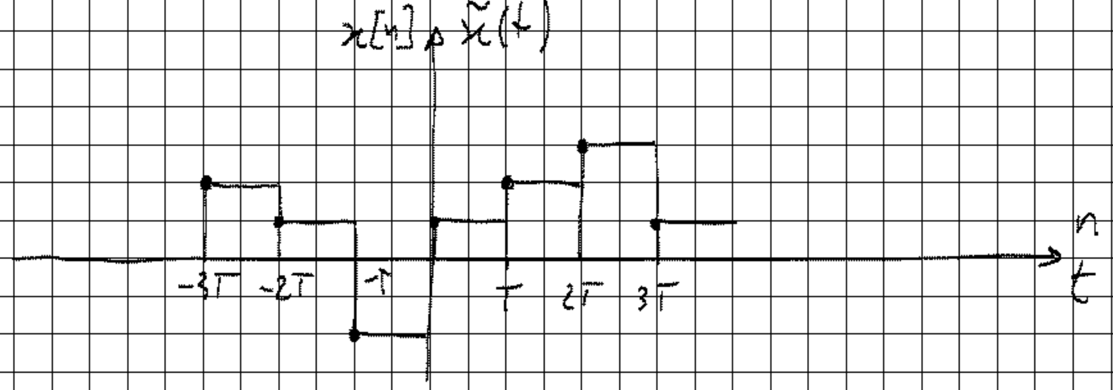


$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT)$$

N.B. $p(t)$ non è la risposta impulsiva di un SLS infatti in ingresso ha una sequenza ed in uscita un segnale analogico

Esempio : Interpolatore a mantenimento

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



Il segnale viene mantenuto a livello costante per un intervallo pari a T per poi variare istantaneamente al valore del campione successivo.

TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER DEL SEGNALE INTERPOLATO

$$\tilde{x}(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \tilde{X}(f), \quad p(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} P(f), \quad x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$$

$$\boxed{\tilde{X}(f) = \bar{X}(f)\, P(f)}$$

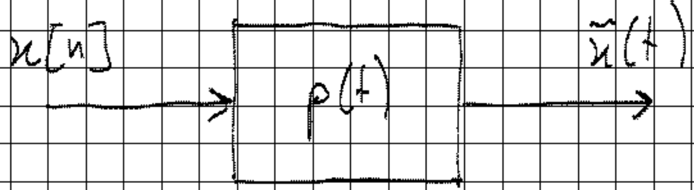
Dimostrazione:

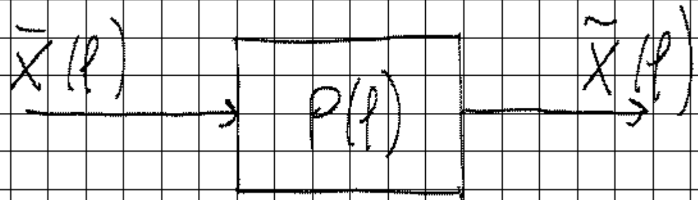
$$\tilde{X}(f) = FT\left[\tilde{x}(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x[n]\, p(t-nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \sum_n x[n]\, P(f)\, e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n x[n]\, e^{-j2\pi n f T}\, P(f) = \bar{X}(f)\, P(f)$$





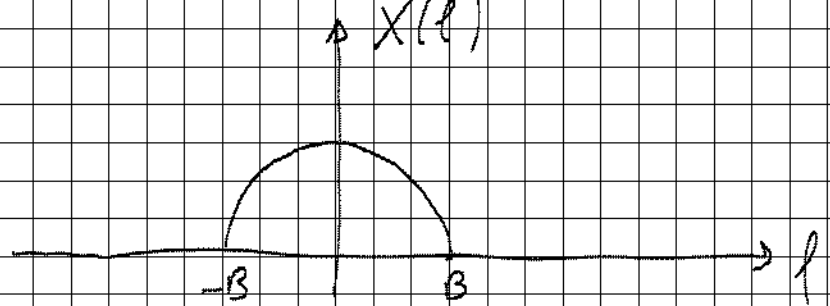
TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Dato un segnale $x(t)$ a banda rigorosamente limitata B, esso può essere ricostruito dai suoi campioni se e solo se è rispettata la condizione di Nyquist.
L'interpolatore che permette di ricostruire il segnale perfettamente è l'interpolatore cardinale, il quale ha la forma:

- $p(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$
- $P(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

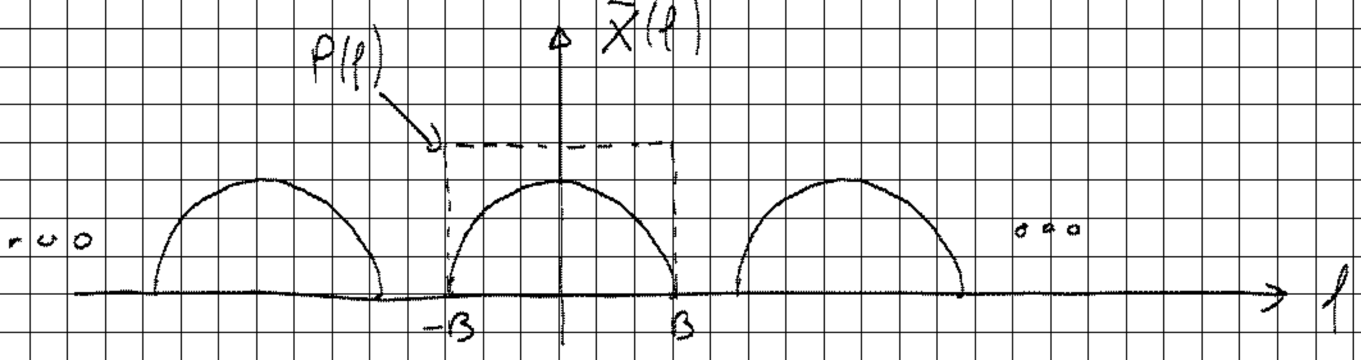
Dimostrazione (x via grafica)

$x(t)$ a banda rig. lim. B

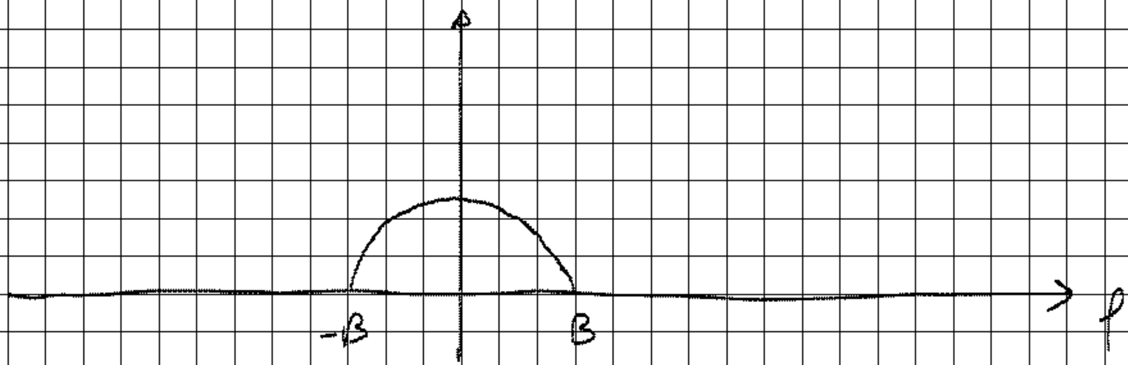


Quindi ottengo $x[n] = x(nT)$, $T \leq \frac{1}{2B}$

la cui TFS $\bar{X}(f)$ è data dalla somma di infinite repliche della $X(f)$ senza aliasing.



$$\tilde{X}(f) = \bar{X}(f)\,P(f) = X(f)$$



$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_n X\left(f-\frac{n}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{1}{T}X(f)$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{T}\,x(t)$$

Quindi il segnale può essere ricostruito come segue:

$$\tilde{x}(t) = \sum_n x[n]\,p(t-nT) =$$

$$= 2B\sum_n x[n]\,\mathrm{sinc}\left[2B(t-nT)\right] = \frac{1}{T}\,x(t)$$

In particolare, quando $T = \frac{1}{2B}$

$$x(t) = \sum_n x[n]\,\mathrm{sinc}\left[2B(t-nT)\right]$$

Esempio - Ricostruzione grafica da tre campioni con interpolatore cardinale

$T = \frac{1}{2B}$