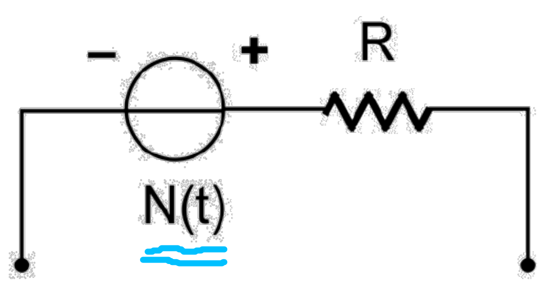
Processo di rumore bianco a tempo continuo

- Esempio 9.12 – Libro LV: Un comune resistore, oltre a presentare una resistenza R al passaggio della corrente, genera anche una debole tensione di rumore per il solo fatto di trovarsi a una temperatura T_R → Dovuto all'*agitazione termica* degli elettroni del materiale di cui è composto il resistore
- Quanto maggiore è la temperatura del componente, tanto più grande è l'agitazione termica e anche la tensione di disturbo (rumore) generata dal resistore, che viene chiamata *rumore termico*
- Modello più realistico: resistore ideale (cioè privo di disturbo) e generatore di tensione in serie al resistore responsabile della produzione del rumore termico
- Quest'ultimo viene a sua volta modellato come un processo aleatorio stazionario $N(t)$ di caratteristiche opportune



Processo di rumore bianco a tempo continuo

- La descrizione del rumore termico è abbastanza complessa, e coinvolge considerazioni di meccanica quantistica → Si può determinare l'espressione della densità spettrale di potenza della tensione di rumore termico:

$$S_N(f) = 2kT_R R \frac{|f|/f_0}{\exp(|f|/f_0) - 1}$$

≈ 1 per $|f| \ll f_0$

dove la frequenza caratteristica f_0 è pari a:

$$f_0 = \frac{kT_R}{h}$$

con k e h che rappresentano rispettivamente la costante di Boltzmann ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K$) e la costante di Planck ($h = 6.62 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$)

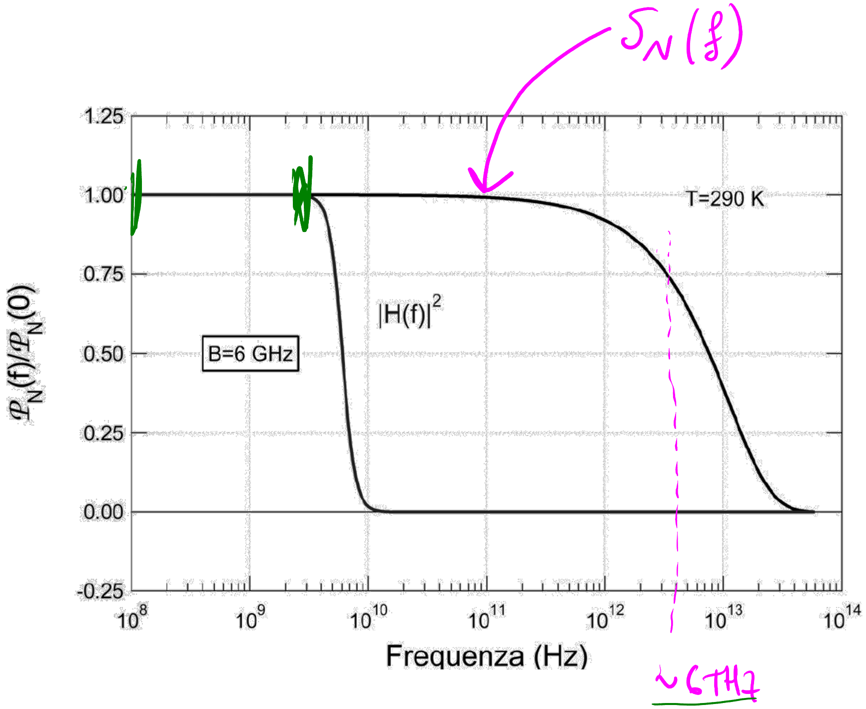
- Alla temperatura ambiente (T_R=290 K), la frequenza caratteristica dello spettro è pari circa a f_0=6.05 THz, cioè 6050 GHz!

Processo di rumore bianco a tempo continuo

- Dall'andamento normalizzato di questa densità spettrale si vede che per frequenze $f \ll f_0$ lo spettro di potenza del rumore termico è praticamente costante e vale:

$$S_N(f) \cong S_N(0) = 2kT_R R$$

- Supponiamo ora che il rumore termico si trovi all'ingresso di un qualche sistema filtrante con banda B → Nella grande maggioranza dei casi pratici, la banda B del filtro sarà di alcuni ordini di grandezza più piccola di f_0



- **Per calcolare gli effetti del rumore termico sull'uscita di un qualunque sistema filtrante, l'effettiva densità di potenza del rumore termico può tranquillamente essere sostituita da quella di un (fittizio) rumore bianco**

Processi aleatori Gaussiani a tempo continuo

- Rumore termico: abbiamo studiato la densità spettrale di potenza (caratteristiche spettrali) senza specificare le caratteristiche di distribuzione delle ampiezze

- Fissiamo istante t_1 ed estraiamo la v.a. $X(t_1)$: il particolare valore del rumore termico deriva da un *gran numero di contributi elementari indipendenti* di tensione di rumore, provocati dai singoli elettroni in agitazione termica
  → Statistiche di $X(t_1)$ sono con ottima approssimazione Gaussiane

- Un processo aleatorio $X(t)$ si definisce *Gaussiano* se le n variabili aleatorie $[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)]$ da esso estratte agli istanti $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ risultano *congiuntamente Gaussiane* comunque si scelga il valore del parametro intero n e per qualunque n-upla di istanti $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$
  → Se le n variabili aleatorie Gaussiane $[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)]$ sono incorrelate, allora sono anche indipendenti

- La particolare forma della densità di probabilità congiunta Gaussiana comporta un'ulteriore proprietà dei processi Gaussiani: **se un processo Gaussiano $X(t)$ è *stazionario in senso lato*, allora è anche *stazionario in senso stretto***

Filtraggio dei processi Gaussiani

$X(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow Y(t)$

- Il problema del *filtraggio* di un processo aleatorio non è completamente risolubile → In generale è impossibile ottenere la descrizione *completa* del processo d'uscita $Y(t)$ nota quella del processo d'ingresso $X(t)$

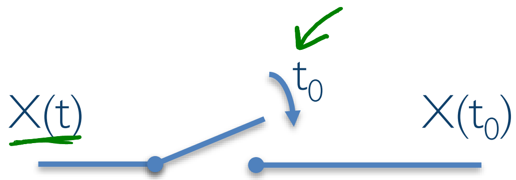
- Supponiamo però che ***X(t)*** sia **Gaussiano**: in tal caso è possibile dimostrare che anche il processo ***Y(t)*** è **Gaussiano**

- I processi Gaussiani sono l'eccezione che conferma la regola → Per questi è possibile dare una descrizione statistica completa del processo all'uscita di un SLS, quando siano note le caratteristiche del processo d'ingresso

- Se il processo Gaussiano d'ingresso a un SLS è stazionario in senso lato (e quindi anche in senso stretto), allora il processo di uscita è anch'esso Gaussiano e stazionario

Per concludere…

- Processo aleatorio Gaussiano X(t)



X(t_0) variabile aleatoria Gaussiana : $X(t_0) \in \mathcal{N}\left(\eta_X(t_0), \sigma_X^2(t_0)\right)$

In generale dipendenti dal tempo t_0

$$\sigma_X^2(t_0) = P_X(t_0) - \eta_X^2(t_0)$$
$$= R_X(t_0, t_0) - \eta_X^2(t_0)$$

$$f_X(x, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2(t_0)}} \exp\left[-\frac{\left(x - \eta_X(t_0)\right)^2}{2\sigma_X^2(t_0)}\right]$$

- Processo aleatorio Gaussiano e stazionario

$$\eta_X(t) = \eta_X \qquad R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$$

$t_1 - t_2 = \tau$

$$P_X = E\{X^2(t)\} = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df$$

$$\boxed{\sigma_X^2} = P_X - \eta_X^2$$

$$f_X(x, t_0) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left[-\frac{(x - \eta_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

Per concludere…

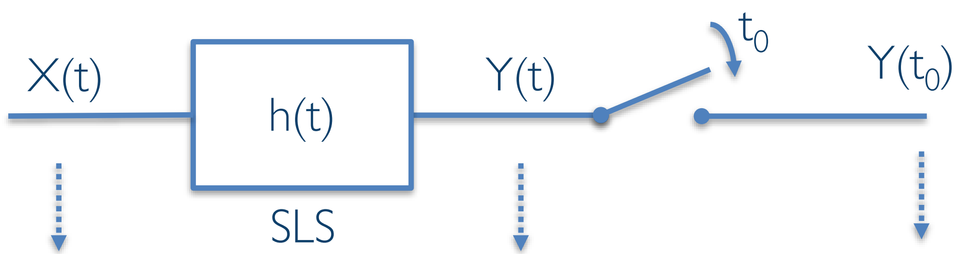
- Processo aleatorio Gaussiano bianco W(t)

$$\eta_W = 0 \qquad\qquad R_W(\tau) = k\,\delta(\tau)$$

$$S_W(f) = k$$

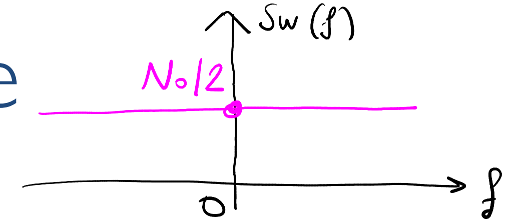
$$P_W = \sigma_W^2 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\eta_W^2}} = \sigma_W^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_W(f)df = +\infty$$

- Filtraggio di un processo Gaussiano

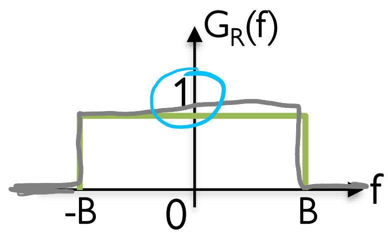


P. a. Gaussiano	→	P. a. Gaussiano	V. a. Gaussiana
$\eta_X(t)$	→	$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t)$	
$R_X(t_1, t_2)$	→	$R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$	

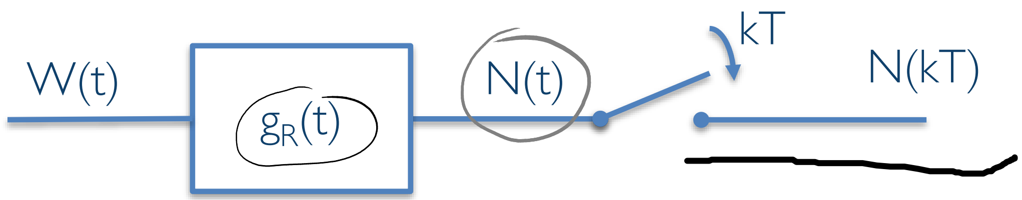
Ideal Low-pass Filtered White Noise



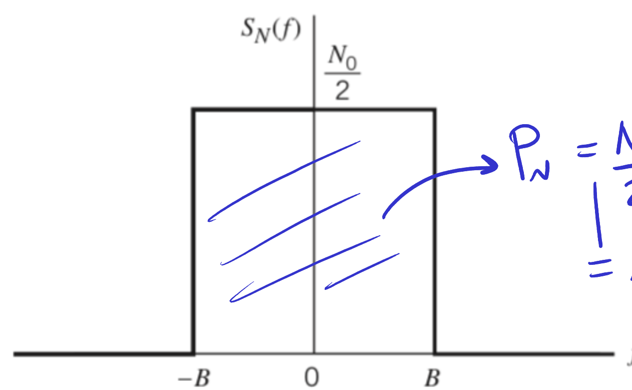
- **Example 4.10 – H Book**: Suppose that a white Gaussian noise $W(t)$ of zero mean and power spectral density $N_0/2$ is applied to an ideal low-pass filter of bandwidth B



$$S_N(f) = S_W(f) \cdot |G_R(f)|^2$$



$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ 0, & |f| > B \end{cases}$$



$$P_N = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 B$$

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Ideal Low-pass Filtered White Noise

$N(t)$

$$= \frac{N_0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}B \cdot \mathrm{sinc}(2B\tau) =$$

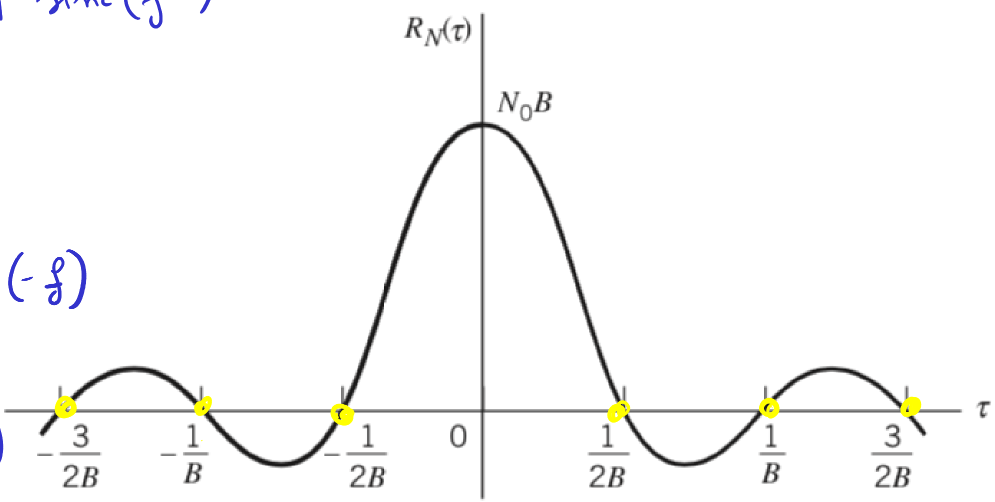
$$S_N(f) = \frac{N_0}{2} rect\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \rightleftharpoons \quad R_N(\tau) = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau)\, df \; = N_0 B\, \mathrm{sinc}(2B\tau)$$

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T\, \mathrm{sinc}(fT)$$

Se $x(t) \rightleftharpoons X(f)$,

allora $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

$$rect\left(\frac{f}{2B}\right) \rightleftharpoons 2B \cdot \mathrm{sinc}(2Bt)$$



- Since the input noise W(t) is Gaussian (by hypothesis), it follows that the band-limited noise N(t) at the filter output is also Gaussian

Ideal Low-pass Filtered White Noise

Suppose that N(t) is sampled at the rate of 2B times per second → $T = \frac{1}{2B}$

- N(0), N(T), N(2T),…,N(kT),… } incorrelate ⇒ indip

$$\eta_N(kT) = \eta_W(kT) \cdot G_R(0) = 0$$

$$\sigma_N^2(kT) = P_N(kT) = R_N(0) = N_0B = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f)df$$

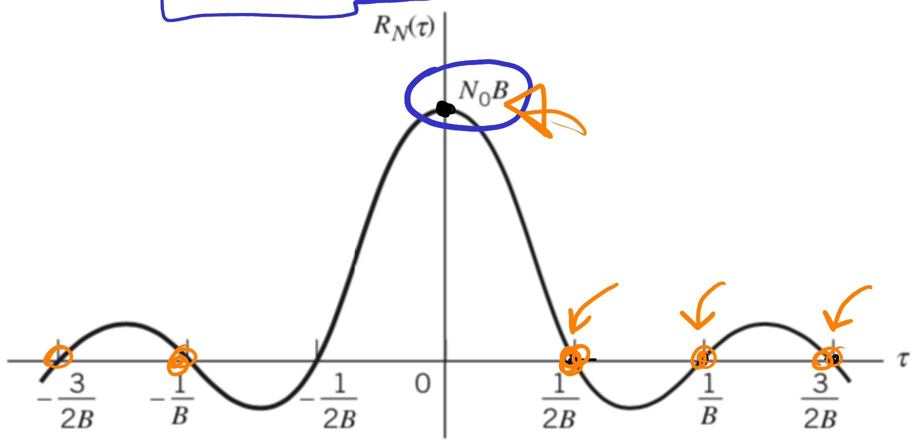
$$N(kT) \in \mathcal{N}(0, N_0B)$$

- Each noise sample follows a Gaussian distribution with zero mean and variance N_0B

$T = \frac{1}{2B}$

$$E\{N(k_1T) \cdot N(k_2T)\} = R_N((k_1 - k_2)T) = R_N\left(\frac{k_1 - k_2}{2B}\right) = 0 \quad \forall\ k_1 \neq k_2$$

- The resulting noise samples *N(kT)* are then uncorrelated and, being Gaussian, they are *statistically independent*



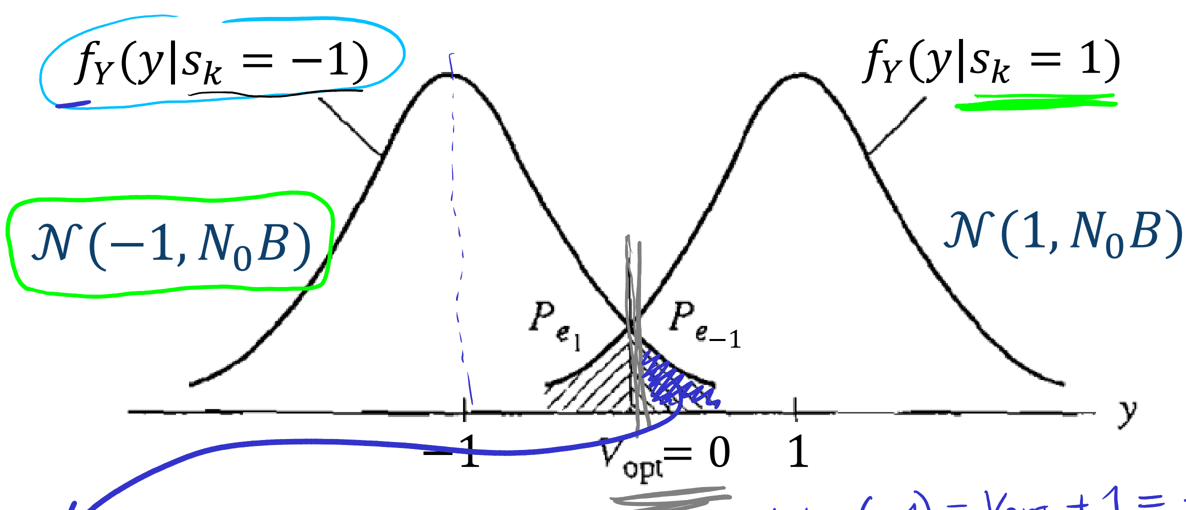
Ideal Low-pass Filtered White Noise

- At the receiver side, the received samples are: $Y(kT) = s_k + N(kT)$
- $\underline{Y} = \{Y(0), Y(T), \dots, Y((K-1)T)\}$
- Independent samples → The receiver can perform a decision sample by sample

$Y(kT)$

Binary Phase Shift Keying

- $P(e|Y(kT))$ → Supposing a BPSK modulation, $s_k \in \{-1, 1\}$:



$V_{opt} - (-1) = V_{opt} + 1 = +1$

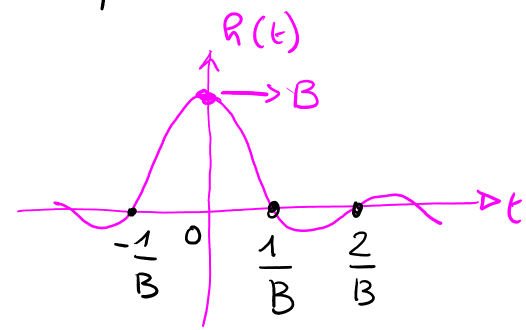
- $P_{e_{-1}} = P(e|s_k = -1) = Q\left(\frac{V_{opt}+1}{\sqrt{N_0B}}\right) = P_{e_1} = P(e|s_k = 1)$

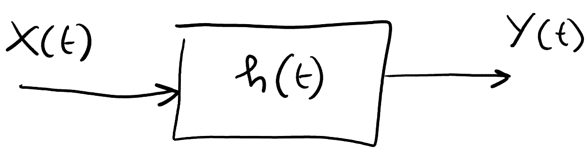
Esercizio 1 - Processo Gaussiano bianco

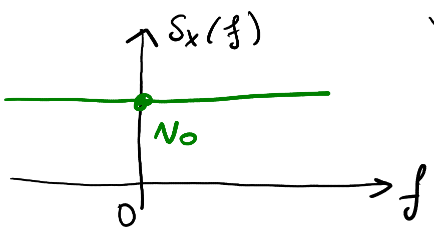
Un processo bianco Gaussiano X(t) con densità spettrale di potenza pari a N_0 viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = B \cdot sinc(Bt)$

a) Calcolare il valore medio del processo in uscita Y(t) $\rightarrow \eta_Y = 0$

b) Calcolare la potenza del processo in uscita Y(t)





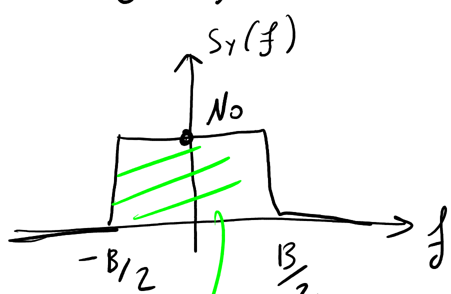


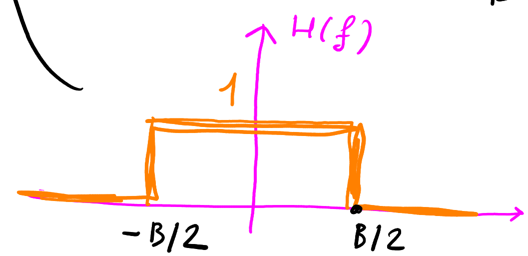
$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} N_0 & , |f| < B/2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

$$h(t) = B \cdot sinc(BT)$$
$$\Updownarrow$$
$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$\eta_X = \eta_X(t) = 0$$

$$\eta_Y(t) = \eta_Y = \underbrace{\eta_X}_{0} \cdot H(0) = 0$$





$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\,df = B \cdot N_0$$

P_y

Esercizio 2 - Processo Gaussiano bianco in banda B

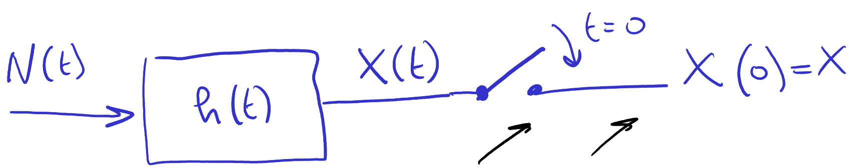
Sia N(t) un processo bianco Gaussiano in banda B con potenza N_0B. Viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

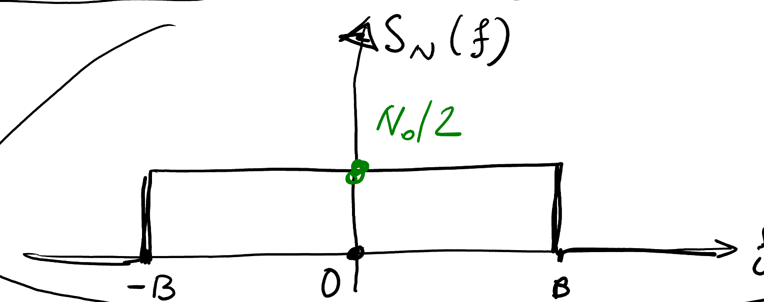
a) Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo in uscita X(t). → $S_x(f)$

b) Si determini la potenza del processo in uscita X(t).

Supponendo di campionare il processo X(t) al tempo t=0, sia X=X(0) la v.a. estratta.

c) Si calcoli la densità di probabilità di X.





$$\boxed{h(t) = e^{-2t}u(t)}$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-2(1+j\pi f)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2(1+j\pi f)}\left[e^{-2(1+j\pi f)t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2(1+j\pi f)}(0-1) = \frac{1}{2+j\cdot 2\pi f}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}$$

$$S_X(f) = S_N(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}, & |f| \le B \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $\Rightarrow$ $$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df = \frac{N_0}{8} \int_{-B}^{B} \frac{1}{1+\pi^2 f^2}\, df \underset{\substack{\nu = \pi f \\ df = \frac{d\nu}{\pi}}}{=} \frac{N_0}{8\pi} \int_{-\pi B}^{\pi B} \frac{1}{1+\nu^2}\, d\nu$$

$$\int \frac{1}{1+\nu^2}\, d\nu = \arctan(\nu) + c$$

$$P_X = \frac{N_0}{8\pi} \arctan(\nu)\Big|_{-\pi B}^{\pi B} = \frac{N_0}{8\pi} \cdot \Big(\arctan(\pi B) \underbrace{- \arctan(-\pi B)}_{+\arctan(\pi B)}\Big)$$

$$= \frac{N_0}{8\pi} \cdot 2\arctan(\pi B) = \boxed{\frac{N_0}{4} \cdot \arctan(\pi B) = P_X}$$

c) $X = X(0)$ è v.a. gaussiana $\quad X \in \mathcal{N}(\eta_X, \sigma_X^2)$

$$\eta_X = \underset{=0}{\eta_N} \cdot H(0) = 0$$

$$\sigma_X^2 = P_X - \eta_X^2 = P_X$$

$$X \in \mathcal{N}(0, P_X) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_X}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2P_X}}$$

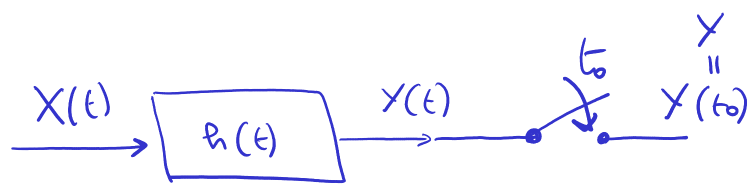
Esercizio 3 - Processo Gaussiano bianco

Sia dato un sistema LTI con la risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$ dell'esercizio precedente. All'ingresso del sistema viene posto il processo X(t) Gaussiano bianco con correlazione $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.

1) Calcolare la correlazione e la densità spettrale di potenza del processo Y(t) all'uscita del sistema e rappresentarle graficamente.
2) Calcolare la potenza dei processi X(t) e Y(t).
3) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y(t_0)=Y$ estratta dal processo di uscita al generico istante t_0.

$f_Y(y)$

4) Calcolare la probabilità che $\mathbf{Y} > \sqrt{\frac{N_0}{2}}$.



$h(t) = e^{-2t}u(t)$

$H(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f}$

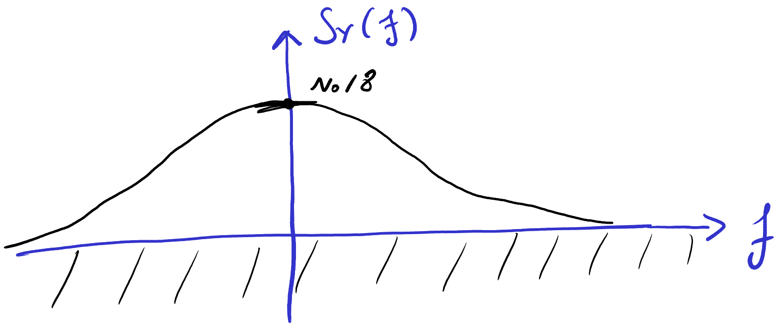
$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

$S_x(f) = \frac{N_0}{2}$

$R_y(\tau) = ?$

$S_y(f) = ?$

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2} = \underline{\frac{N_0}{8} \frac{1}{1 + \pi^2 f^2} = S_Y(f)}$$

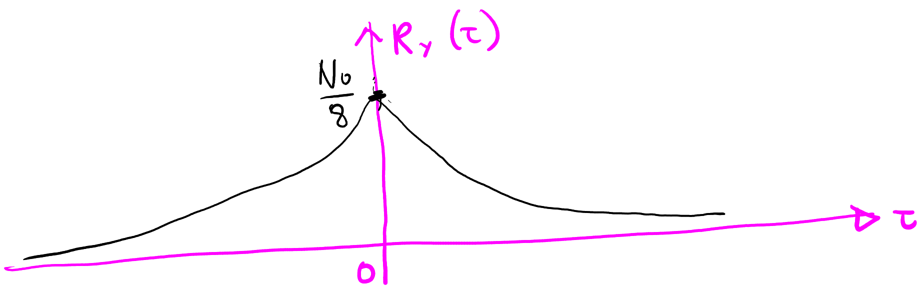


$$e^{-\alpha|t|} \rightleftharpoons \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\pi^2 f^2}$$

Se $\alpha = 2$

$$e^{-2|t|} \rightleftharpoons \frac{1}{1 + \pi^2 f^2}$$

$$R_Y(\tau) = \text{ATCF}[S_Y(f)] = \frac{N_0}{8} \cdot e^{-2|\tau|}$$



$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0/2\, df = +\infty$$

$$P_Y = R_Y(0) = N_0/8$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\, df = \frac{N_0}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\pi^2 f^2}\, df =$$

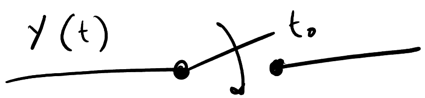
$\nu = \pi f$

$df = \frac{d\nu}{\pi}$

$$= \frac{N_0}{8\pi} \cdot \arctan(\nu) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{N_0}{8\pi}\Big(\underbrace{\arctan(+\infty)}_{\pi/2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\Big) = \frac{N_0}{8\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{N_0}{8} = P_Y$$

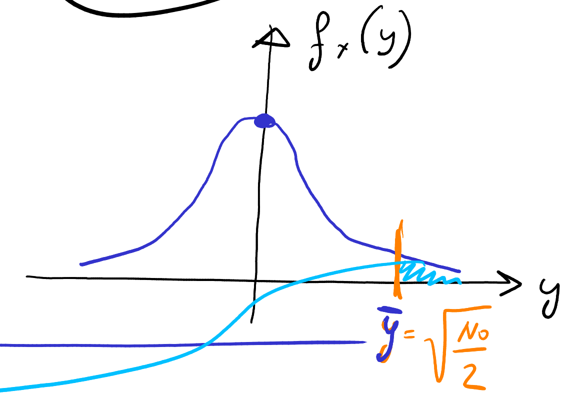
---

3) $Y(t)$  $Y(t_0) = Y$ $\quad$ Y è v.a. gaussiana

$$\eta_Y(t) = \underbrace{\eta_X(t)}_{=0 \text{ perché } X(t) \text{ è bianco}} \otimes h(t) = 0 \longrightarrow \eta_Y(t_0) = \eta_Y = 0$$

$$\sigma_Y^2 = P_Y - \underbrace{\eta_Y^2}_{=0} = P_Y = \frac{N_0}{8} = \sigma_Y^2$$

$$f_Y(y;t_0) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0}{8}}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\cdot\frac{N_0}{8}}}$$



---

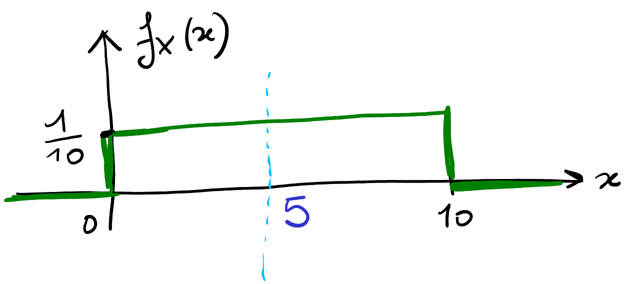
4) $$P\left(Y > \sqrt{\frac{N_0}{2}}\right) = Q\left(\frac{\bar{y} - \eta_Y}{\sigma_Y}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{N_0}{2}} - 0}{\sqrt{\frac{N_0}{8}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q(2) \cong 0{,}0228$$

Esercizio 4 – P.a. con autocovarianza e ddp note

$f_X(x)$

L'autocovarianza di un processo aleatorio X(t) con densità di probabilità distribuita uniformemente tra 0 e 10 è data da $C_X(\tau) = A\, e^{-\alpha|\tau|} \cos(2\pi f_0 \tau)$.

Calcolare la densità spettrale di potenza di X(t).



$$S_X(f) = ? = TCF[R_X(\tau)]$$

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = 5$$

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + \eta_X^2$$

$$R_X(\tau) = A \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) + 25$$

$$S_X(f) = TCF[R_X(\tau)] = 25\, \delta(f) + A \cdot TCF\left[e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

$$S_{X_0}(f) = TCF\left[e^{-\alpha|\tau|}\right] = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\pi^2 f^2}$$

$$S_x(f) = 25 \cdot \delta(f) + A \left\{ \frac{S_{x_0}(f - f_0) + S_x(f + f_0)}{2} \right\}$$

$$= 25\,\delta(f) + \frac{A}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\pi^2 (f - f_0)^2} + \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\pi^2 (f + f_0)^2} \right)$$

$$\underline{S_x(f)} = 25 \cdot \delta(f) + A \cdot \alpha \left(\frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 (f - f_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 (f + f_0)^2} \right)$$