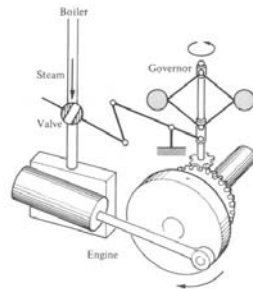
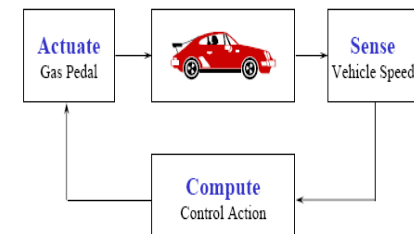
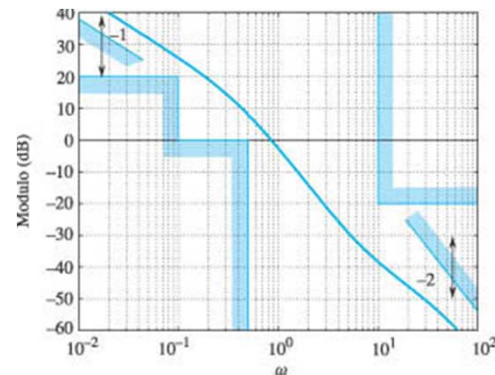
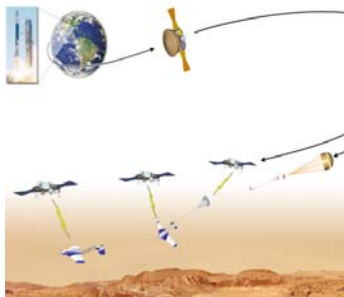
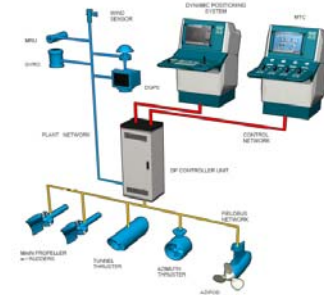




# SINTESI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA



1. Concetti Generali
2. Requisiti del Sistema di Controllo
3. SISO Shaping
4. Controllori Standard (Proprietà)
5. Controllori Standard nella Sintesi

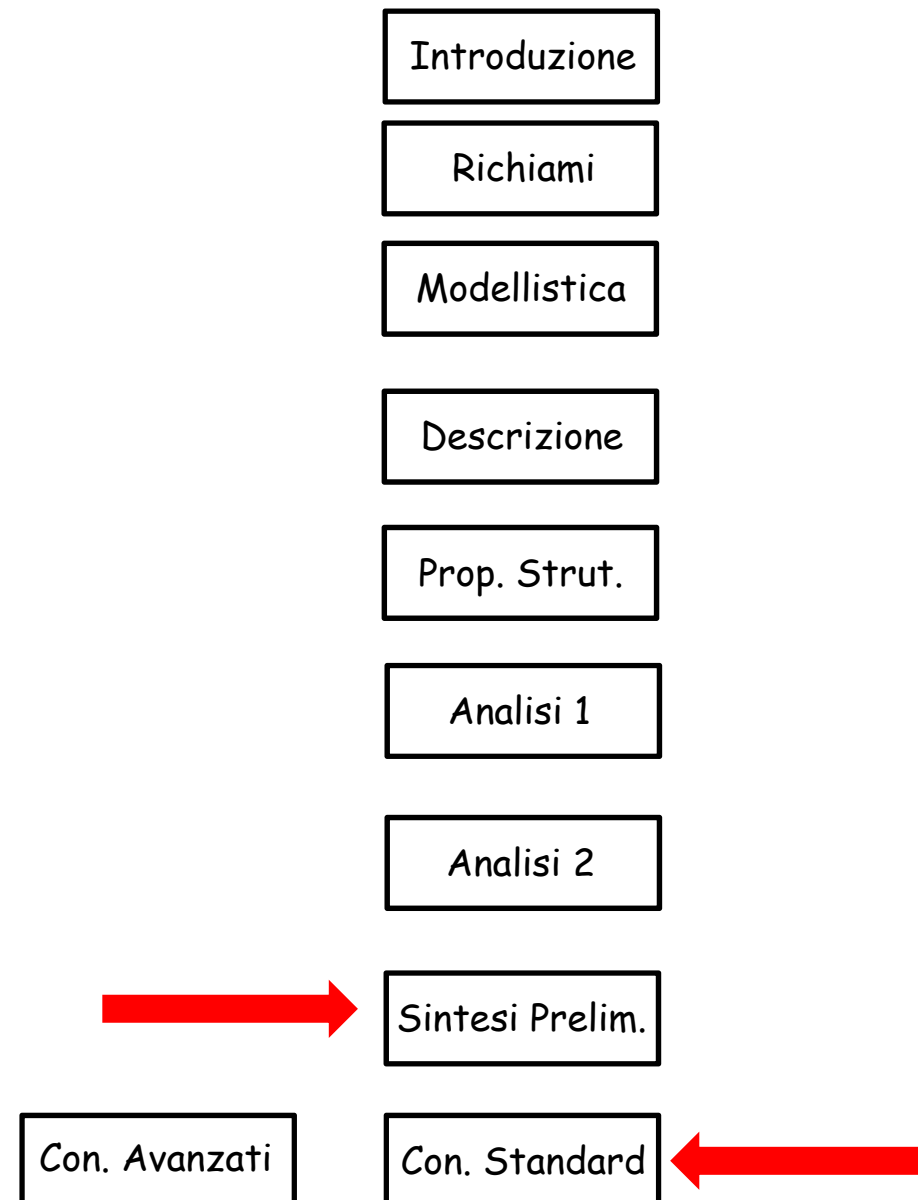




## Riferimenti



- Capitolo 12, 15 Testo di Bolzern
- Capitoli 12, 13 Lewis (download)
- Capitolo 10, 11 Murray (download)





## Concetti Generali



- Dato un generico sistema lineare tempo invariante rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Il problema di sintesi è quello della progettazione del controllore in modo che il sistema raggiunga un determinato tipo di prestazioni e che l'uscita abbia un andamento desiderato pur rispettando i limiti delle prestazioni imposte. Tale risultato deve valere, se possibile, in presenza di incertezze/errori presenti nel modello usato per la sintesi.
- Il primo passo è l'analisi delle proprietà del sistema per valutarne il comportamento ai segnali di ingresso (riferimento e disturbi) sia in assenza, che in presenza di incertezze nel modello che si utilizza nell'analisi del sistema stesso.



## Concetti Generali



- ❑ **Proprietà intrinseche dell'impianto: riguardano le proprietà strutturali del sistema da controllare e le caratteristiche temporali/frequenziali**

### ❑ **Stabilità**

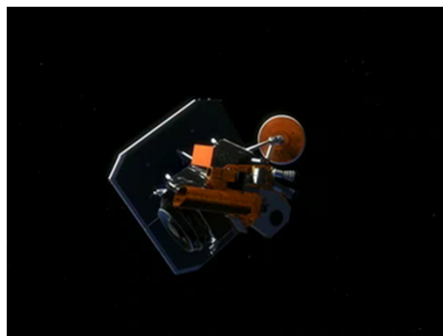
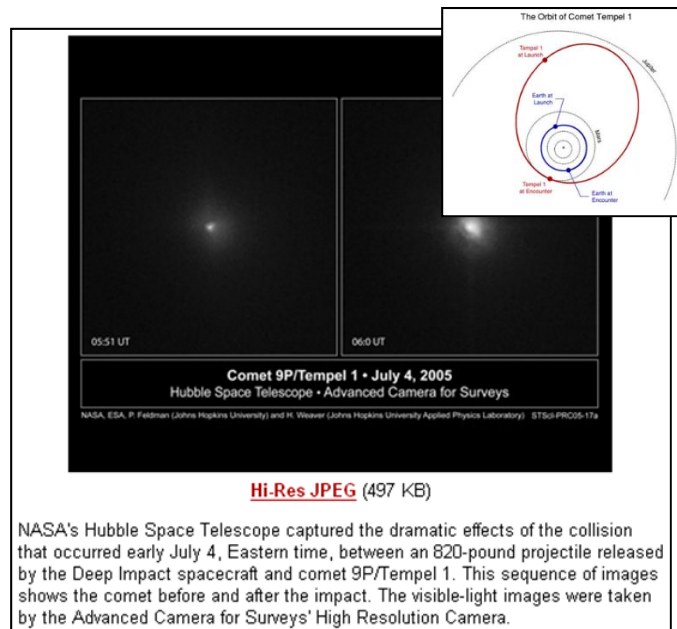
- la stabilità è necessaria per l'utilizzo di un qualsiasi sistema fisico, per:
  - il mantenimento del punto di equilibrio richiesto senza intervento esterno
  - la sicurezza delle operazioni
  - la riduzione dei carichi di lavoro del sistema di controllo (costi, possibilità di guasti, ecc.)
  - La verifica della velocità di risposta del sistema stesso.
- Il grado di stabilità è importante e dipende dal tipo di sistema in esame:
  - Per sistemi quali mezzi di trasporto, sistemi di telecomunicazioni, centrali di processo si richiede un'elevata stabilità per evitare oscillazioni e variazioni dall'equilibrio (Comfort, Sicurezza)
  - Per sistemi ad elevata manovrabilità quali veicoli sportivi, sistemi militari, sistemi di gestione di emergenze ambientali, si richiede una minore stabilità ed una elevata Banda Passante in modo da velocizzare la risposta a variazione nei comandi. In taluni casi, si può anche scegliere un sistema instabile e stabilizzato soltanto mediante il controllo.



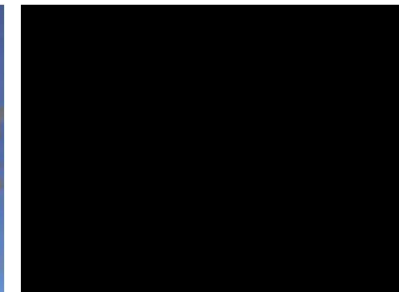
## Concetti Generali



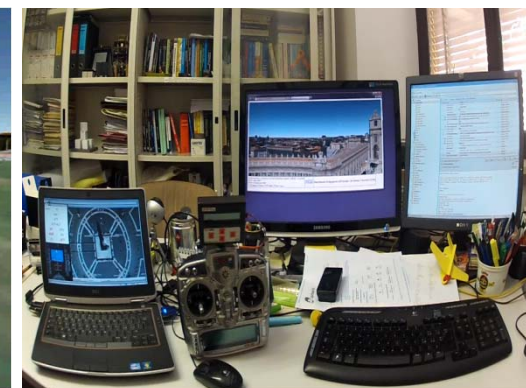
- Stabilità può essere ottenuta in anello aperto, se il modello è fedele al processo reale, oppure se non vi sono alternative tecniche



- Instabilità può portare ad eventi catastrofici se non controllata automaticamente



- Simulazione è parte integrante del processo di analisi





## Concetti Generali

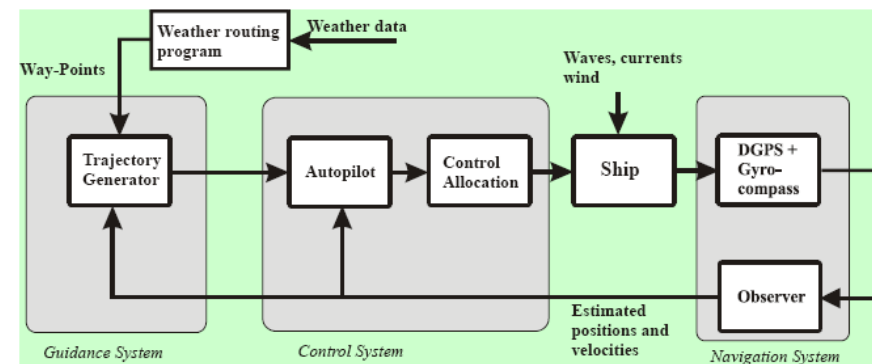
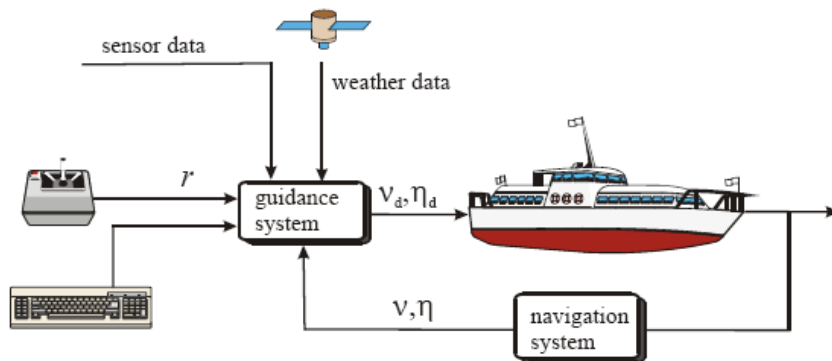


### □ Controllabilità

- E' richiesta garantire la stabilità del sistema e la gestione del vettore di stato nell'intero sottospazio di appartenenza.
- La sua valutazione permette di stabilire la quantità e le caratteristiche degli attuatori e l'allocazione delle risorse di controllo.

### □ Osservabilità

- Permette di determinare la quantità, caratteristiche e numero minimo dei sensori
- Definisce la necessità o meno di strumenti aggiuntivi (stimatori e/o filtri) per la determinazione del vettore di stato dalle uscite misurate



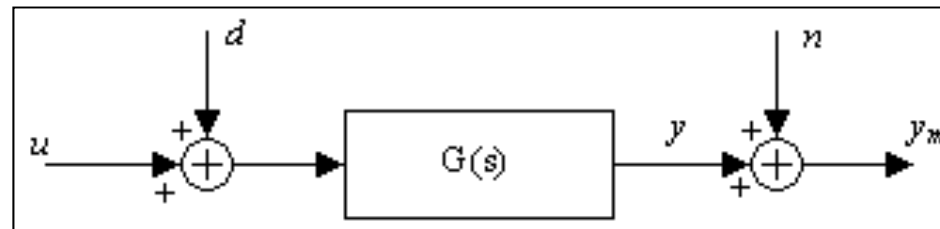


## Concetti Generali



❑ **Proprietà estrinseche dell'impianto (nominali):** Sono le proprietà relative alla risposta a segnali esterni, distinti in due categorie:

- Comandi o riferimenti
- Disturbi



❑ In generale, la risposta deve essere tale da:

- Garantire l'accuratezza rispetto a comandi e/o riferimenti
- Essere insensibile a disturbi e/o rumori; il sistema deve avere una "banda passante" per reiettare i disturbi funzioni della frequenza

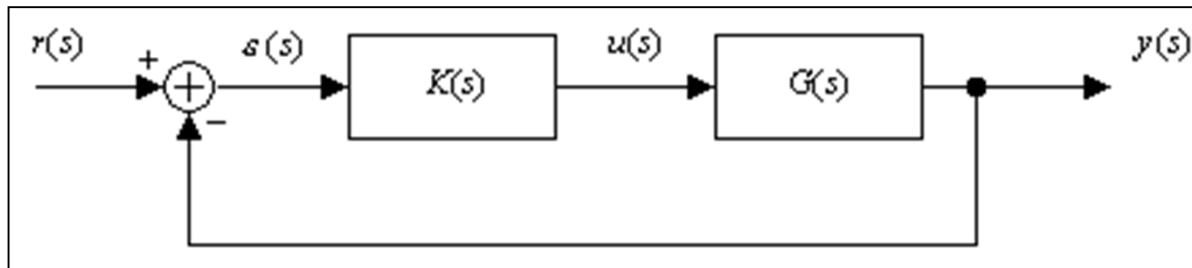


## Concetti Generali



- ❑ **Prestazioni in presenza di incertezze (Condizioni Non Nominali):** La presenza di incertezze è un aspetto critico del comportamento dei sistemi dinamici; in genere la  $G(s)$  è un modello del sistema fisico soggetto a:

- - Differenze assimilabili ad incertezze moltiplicative
- - Variazioni dei parametri, non linearità, ecc.



$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$
$$K(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

$$G_{ol}(s) = K(s)G(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{D(s)D_k(s)}$$
$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

- ❑ La retroazione è l'unico strumento (a meno di cancellazioni) per modificare i poli del sistema

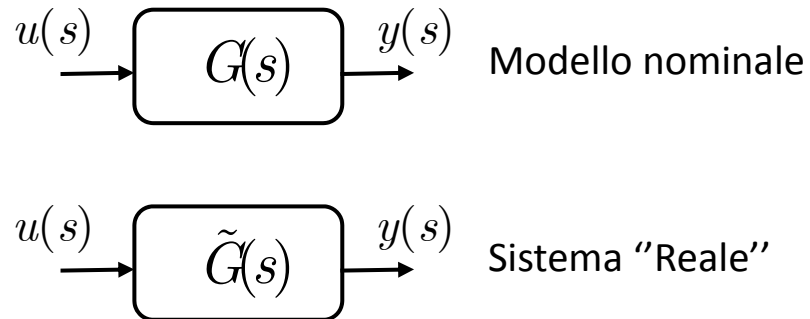




## Considerazioni Generali



### ❑ Riepilogo delle problematiche relative agli errori di modello:



### ❑ Formalismo matematico per la gestione di A. e B., mediante un esempio numerico:

$$\tilde{G}(s) = L(s) \cdot [G(s) + E(s)]$$

- $G(s)$  = modello nominale
- $L(s)$  = errori dovuti ad A.
- $E(s)$  = errori dovuti a B.

### ❑ Errori tipici tra i due sistemi:

- A. **Incertezze non strutturate**  
**multiplicative** (dinamiche trascurate, comportamento ad alta frequenza, ritardo di anello,...), trattabili come funzioni di variabile complessa e gestibili con i margini di stabilità oppure con il criterio di Nyquist
- B. **Variazioni parametriche** dovute ad errori sulle caratteristiche fisiche del processo che si riflettono sui poli, zeri e guadagno della FdT e sono parametri reali
- C. **Nonlinearità** quali limitazioni di segnale, dinamiche accoppiate, ... (non trattate nel corso)



## Considerazioni Generali



□ **Esempio Antenna:**  $G(s) = \frac{2}{s(s+4)}$

$$\tilde{G}(s) = L(s) \frac{2 \pm \delta_1}{s(s+4 \pm \delta_2)} = [1 + \Delta(s)] \frac{2 \pm \delta_1}{s(s+4 \pm \delta_2)}$$

- $\Delta(s)$  è rappresentazione matematica di un'incertezza limitata, moltiplicativa (in percentuale del modello) descritta da una funzione stabile, razionale fratta  $L(s)$

$$|\Delta(s)| = |L(s) - 1| \leq \Delta_{\max}; \forall \omega$$

- $\delta_i$  è rappresentano gli errori di modello nei vari parametri del sistema
  - $\delta_1 \sim 10\%$  del guadagno nominale
  - $\delta_2 \sim 20\%$  del valore nominale del polo

$$\tilde{G}(s) = [1 + \Delta(s)] \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s+4 + 0.2\Delta_2)}; |\Delta(s)| < \Delta_{\max}; |\Delta_1| < 1; |\Delta_2| < 1$$



## Considerazioni Generali

- Tutte le incertezze sono descritte da funzioni generali separabili nell'anello e vincolate soltanto da limitazioni in norma (oppure in modulo per sistemi SISO):

$$|\Delta(s)| < \Delta_{\max}; |\Delta_1| < 1; |\Delta_2| < 1$$

- Si può riscrivere un diagramma analogico a blocchi del sistema, in modo del tutto equivalente

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \tilde{G}(s) = [1 + \Delta(s)] \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)}$$

$$y(s) = \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)} [1 + \Delta(s)] u(s) = \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)} u'(s)$$

$$u'(s) = u(s) + \Delta(s)u(s)$$

$$s(s + 4 + 0.2\Delta_2)y(s) = (2 + 0.1\Delta_1)u'(s)$$

$$y'(s) = sy(s)$$

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2 y'(s) + 0.1\Delta_1 u'(s)$$

- In nero è rappresentato il modello nominale. In rosso i contributi degli errori/incertezze

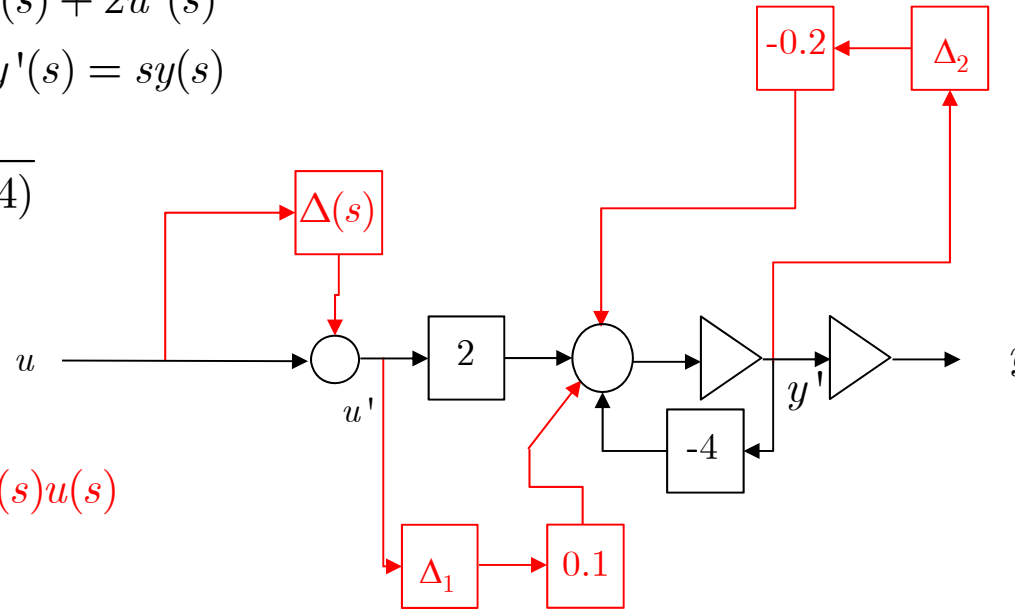


## Considerazioni Generali

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s)$$

$$u'(s) = u(s) \quad y'(s) = sy(s)$$

$$G(s) = \frac{2}{s(s+4)}$$



$$u'(s) = u(s) + \Delta(s)u(s)$$

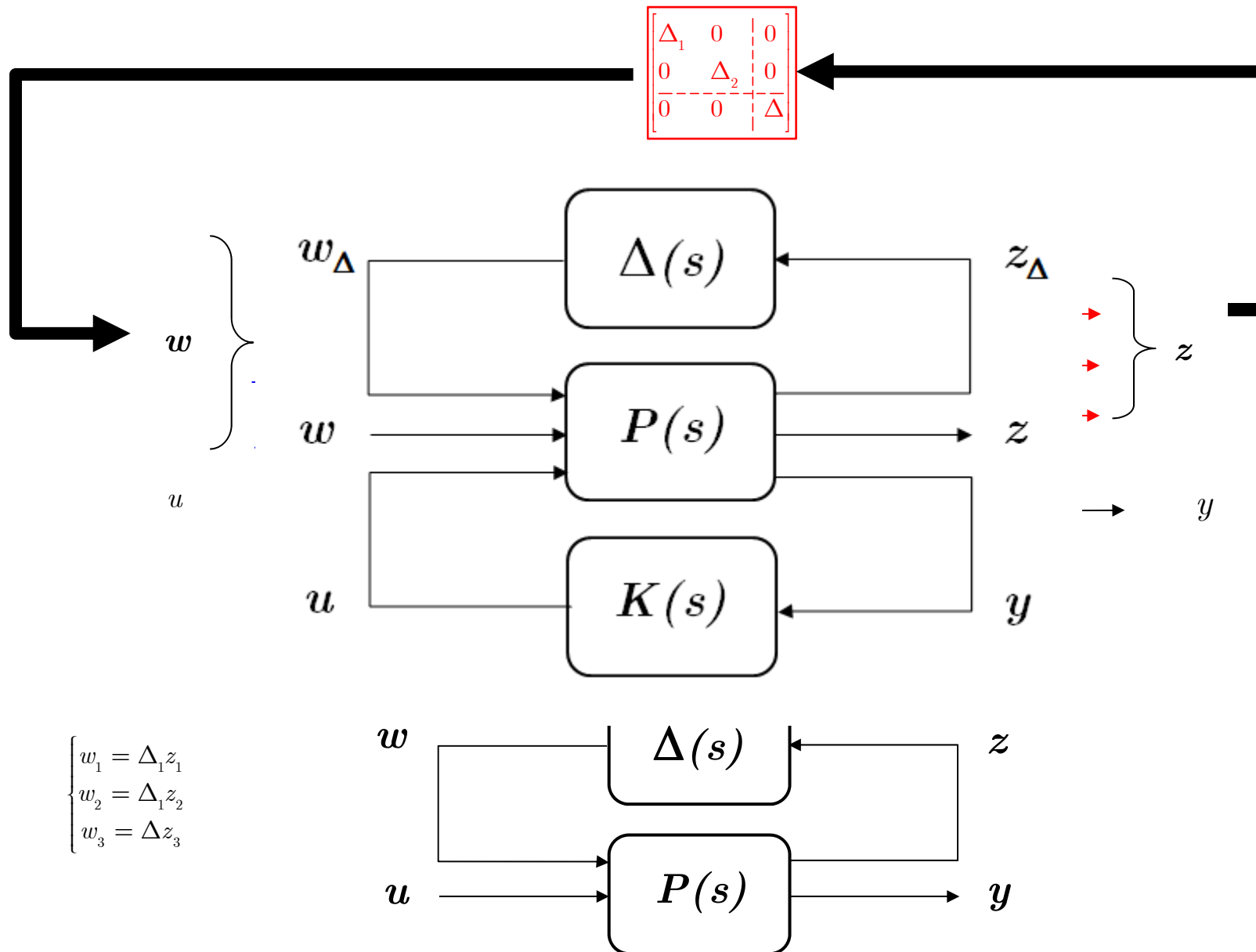
$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2 y'(s)$$

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2 y'(s) + 0.1\Delta_1 u'(s)$$

- La struttura può essere semplificata in due blocchi, uno che descrive il sistema nominale ed il secondo che raccoglie tutte le incertezze attraverso un set ingresso – uscita fittizio



## Considerazioni Generali





## Concetti Generali



### □ Effetto della retroazione in Condizioni non nominali

- **Perturbazioni dovute a Incertezze non strutturate:** Trattabili, mediante la retroazione che può garantire adeguati *Margini di Stabilità e Grado di Stabilità (o di robustezza)*
- **Variazioni dei Parametri:** Anche in questo caso, la retroazione ha un effetto positivo.
- Analisi qualitativa in assenza di feedback:

$$y(s) = G(s)r(s)$$

$$\tilde{y}(s) = \tilde{G}(s)r(s) = y(s) + \Delta y(s) = [G(s) + \Delta G(s)]r(s)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{y(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

- All'aumentare dell'errore di modello  $\Delta G$ , aumenta l'errore  $\Delta y$  sull'uscita prevista



## Considerazioni Generali



- In presenza di retroazione unitaria si ha:

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) \quad \tilde{y}(s) = \frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} r(s) = \frac{[G(s) + \Delta G(s)] K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)] K(s)} r(s)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{y}(s) - y(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{y}(s)}{y(s)} - 1 = \dots = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)K(s)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y(s)}{y(s)} &= \frac{\tilde{y}(s)}{y(s)} - 1 = \frac{\frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} r(s)}{\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s)} - 1 = \frac{\tilde{G}(s)K(s)[1 + G(s)K(s)]}{G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]} - 1 = \\ &= \frac{\tilde{G}(s)K(s)[1 + G(s)K(s)] - G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]}{G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]} = \\ &= \frac{[G(s) + \Delta G(s)] K(s)[1 + G(s)K(s)] - G(s)K(s)[1 + [G(s) + \Delta G(s)] K(s)]}{G(s)K(s)[1 + [G(s) + \Delta G(s)] K(s)]} = \\ &= \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + [G(s) + \Delta G(s)] K(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} \end{aligned}$$

- In questa situazione tramite il controllo è possibile ridurre l'errore in uscita introdotto dall'errore di modello; infatti al crescere di  $K(s)$  il valore di  $\Delta y(s)$  decresce.



# Requisiti di Controllo



- **Stabilità in Condizioni nominali**

- Stabilità interna
- Stabilità esterna
- Realizzazioni

$$K(s) = L\{k(t)\} = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^r \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

$$\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)$$

$$\frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n}$$

- **Stabilità in condizioni nominali (per)**

- Sensitività
- Stabilità multipla
- Robustezza

## ☐ Sommario

$$K(s) = \frac{k}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_j (1 + T_j s)} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

polo

Stabilità

- **Prestazioni**

- Precisione statica
  - Errore
- Precisione dinamica
  - Risposta transitoria
  - Attenuazione
  - Lirismo

Data la struttura generale di un controllore:

- Si determinano gli integratori necessari per la risposta a regime desiderata.
- Si sceglie la dinamica più adatta ed il guadagno statico per seguire l'andamento per la risposta transitoria
- Si modifica tale scelta per garantire adeguati margini di stabilità

uscita,

- **Prestazioni in condizioni non nominali (perturbate)**

- Precisione statica
- Precisione dinamica

- **Controllore Ottimale**
- **Modello Interno**
- **Controllore Predittivo**
- **Controllori non lineari (adattivi, Lyapunov, Relè, ecc.)**
- **Controllo MIMO Robusto**
- **Controllori neurali, fuzzy, ecc.**

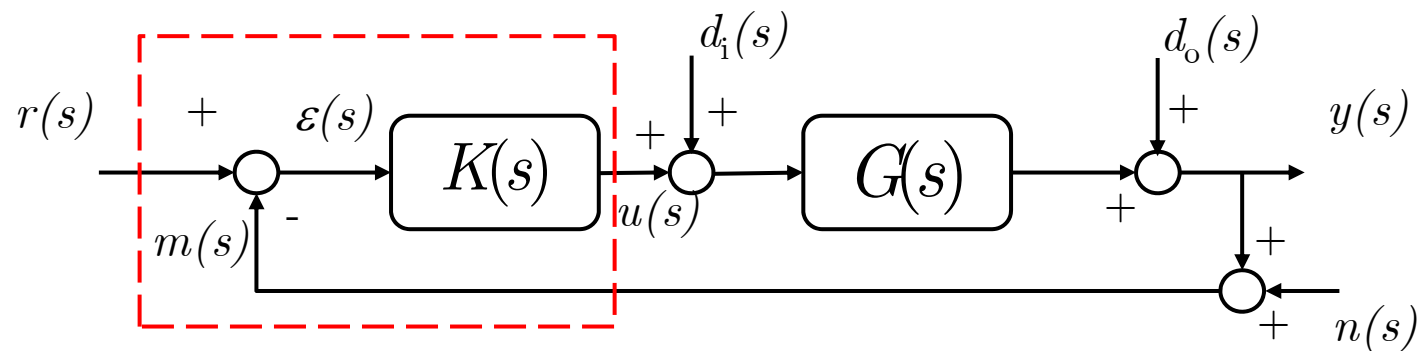




## Sintesi mediante Loop Shaping



- ❑ La procedura di Loop Shaping (sintesi in frequenza) opera sulla modifica della risposta in frequenza della FdT di anello, in modo da ottenere un risultato desiderato in anello chiuso
- ❑ La procedura è del tutto generale a parte che il sistema di partenza soddisfi a certi requisiti (modulo e fase della FdT di anello univocamente determinati). La difficoltà della procedura può aumentare (uso di Nyquist completo) nel caso di sistemi particolari.
- ❑ La sintesi del controllore può essere eseguita usando la FdT di anello oppure la sensitività  $S(j\omega)$ , in modo del tutto equivalente
- ❑ Consideriamo la struttura generale di un sistema in retroazione unitaria:



$r$  – Segnale di riferimento (inseguito dall'uscita  $y$ )  
 $d$  – Disturbo esterno (riferito all'ingresso e/o uscita)  
 $n$  – Rumore sensori (alta frequenza)  
 $\varepsilon$  – Errore  
 $y$  – Segnale di uscita  
 $u$  – Segnale al sottosistema attuatore  
 $m$  – Segnale di misura al controllore



## Sintesi mediante Loop Shaping



- Calcolo delle FdT di interesse nell'anello di retroazione

$$L(s) = G(s)K(s)$$

- FdT di Anello

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

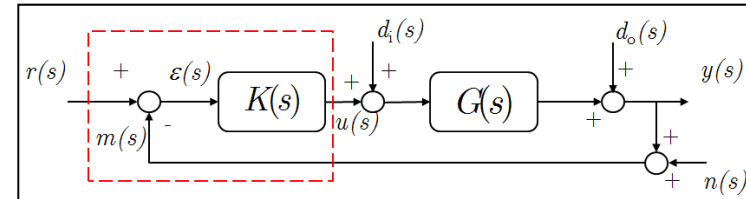
- Sensitività complementare (FdT in Ciclo Chiuso)

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

- Sensitività in ingresso (FdT Errore)

$$S_u(s) = K(s)S(s)$$

- Sensitività in uscita (FdT Attuatore)



$$y(s) = T(s)[r(s) - n(s)] + S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s)$$

$$\varepsilon(s) = S(s)[r(s) - n(s)] - S(s)d_o(s) - G(s)S(s)d_i(s)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d_o(s)] - T(s)d_i(s)$$



## Sintesi mediante Loop Shaping



### ❑ Progettare $K(s)$ tale che:

i) Stabilità in Condizioni nominali

$K(s)$  stabilizza  $G(s)$

ii) Risposta transitoria e a regime al comando

Errore a Regime (a segnali tipici, o funzioni sviluppabili in Serie di Fourier)

Velocità di risposta (tempo di salita, sovraelongazione, banda passante)

iii) Attenuazione dei disturbi

Ampiezza limitata nella frequenza del disturbo

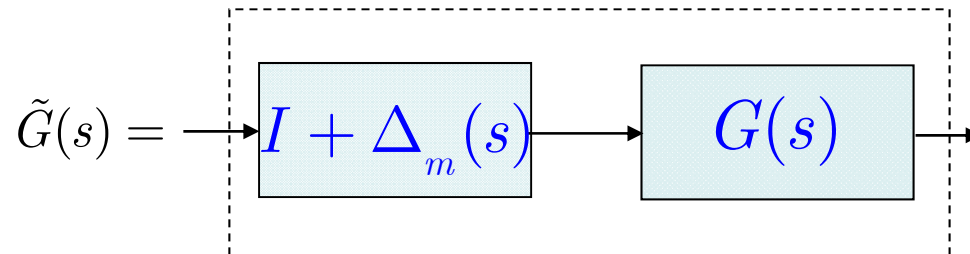
iv) Limite nella quantità di controllo

Ampiezza limitata per evitare saturazioni

v) Stabilità e Prestazioni in condizioni non nominali

Mantenimento della stabilità e prestazioni in presenza di errori sui parametri ed incertezze moltiplicative non strutturate

$$\tilde{G}(s) = G(s) \left[ I + \Delta_m(s) \right] = G(s)L(s)$$
$$L(s) = |L(s)| e^{j\angle L(s)}$$



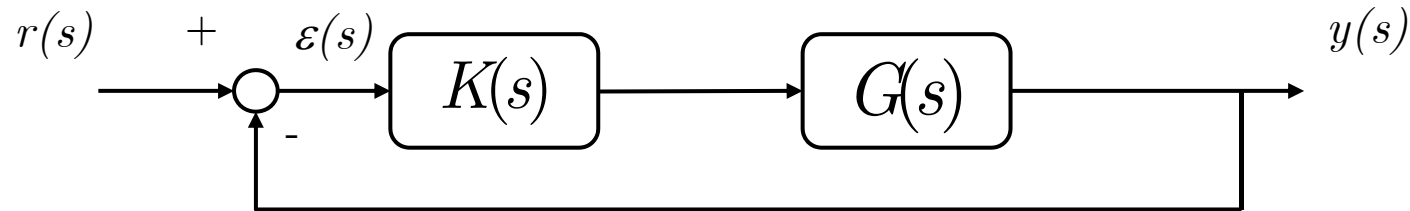
❑ In quanto segue, si fa riferimento (a meno di diversa specifica) a sistemi lineari la cui FdT in Anello Aperto soddisfi il Criterio di Bode per sistemi a fase minima. Questo permette di usare soltanto il modulo della Risposta in Frequenza in Anello Aperto (Altrimenti si richiede l'applicazione completa del Criterio di Nyquist).



## Inseguimento del Comando



- Principio della sovrapposizione degli effetti



$$\varepsilon(s) = S(s) \left[ r(s) - n(s) \right] - S(s) d_o(s) - G(s) S(s) d_i(s)$$

$$\frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s)$$

- La riduzione dell'errore richiede:  $|S(j\omega)| \leq \varepsilon_r < 1, \omega \in [0, \omega_r]$

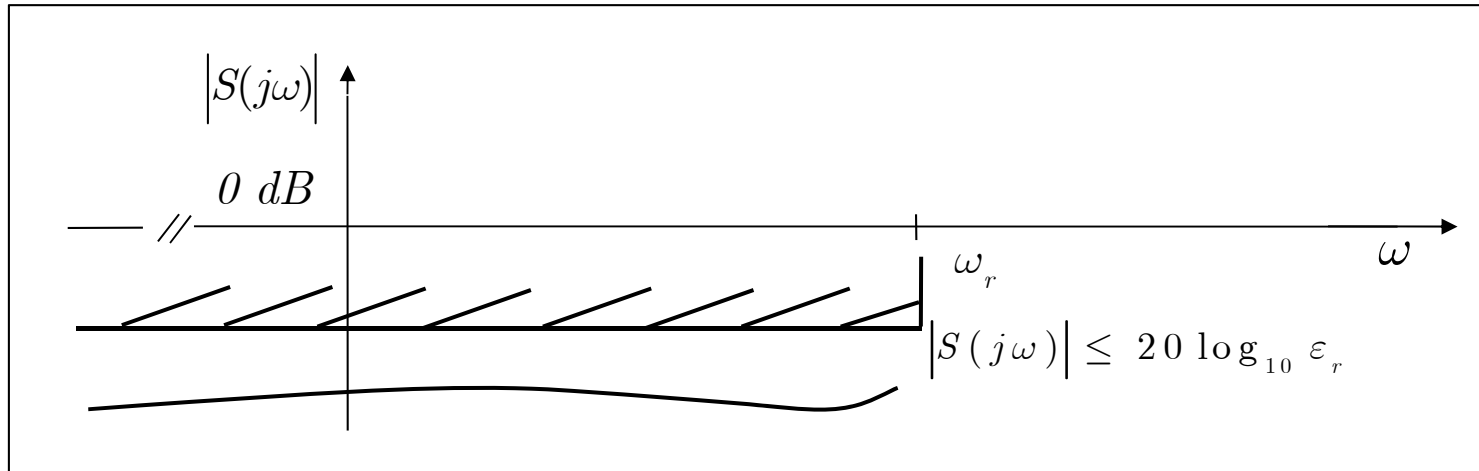
**NOTA:** Il comando/riferimento da seguire in funzione del tempo  $r(t)$ , viene rappresentato mediante sviluppo in serie di Fourier. Per lo studio del problema di precisione, può risultare più appropriata un'analisi in frequenza.



# Inseguimento del Comando



- Vincolo Geometrico Al di sotto della “barriera”, per  $\omega \in [0, \omega_r]$

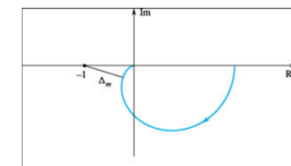


- Il requisito può essere imposto anche in termini di limite sulla funzione di anello

$$|S(j\omega)| \leq \varepsilon_r < 1, \omega \in [0, \omega_r]$$

$$\frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \varepsilon_r \quad |1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_r} \gg 1$$

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \cong |G(j\omega)K(j\omega)|$$

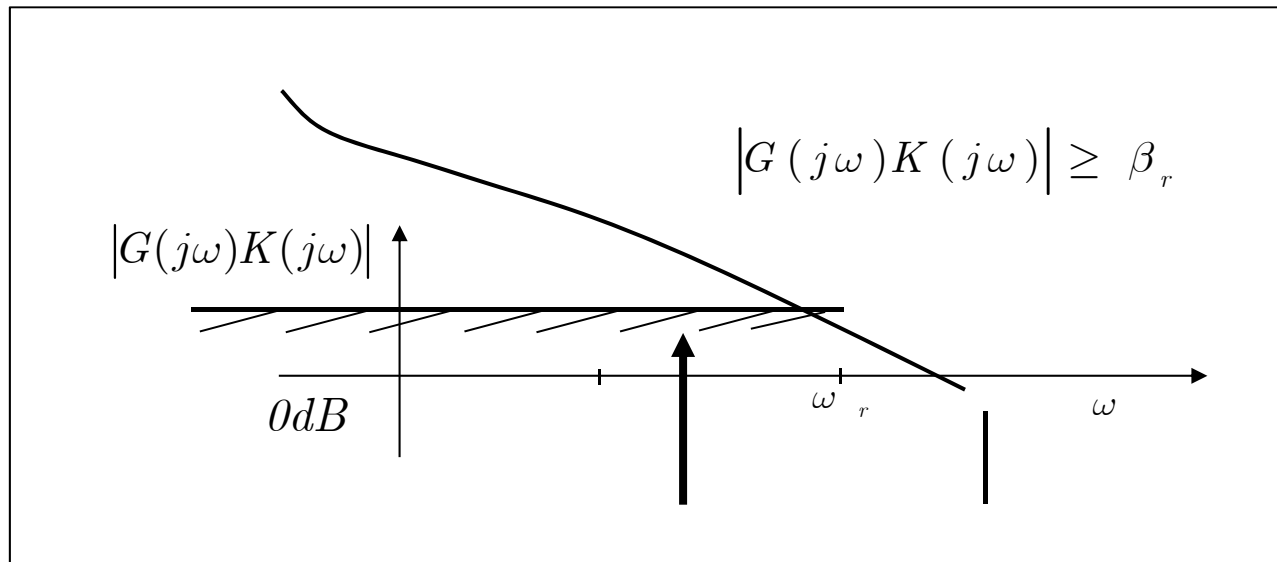




## Inseguimento del Comando



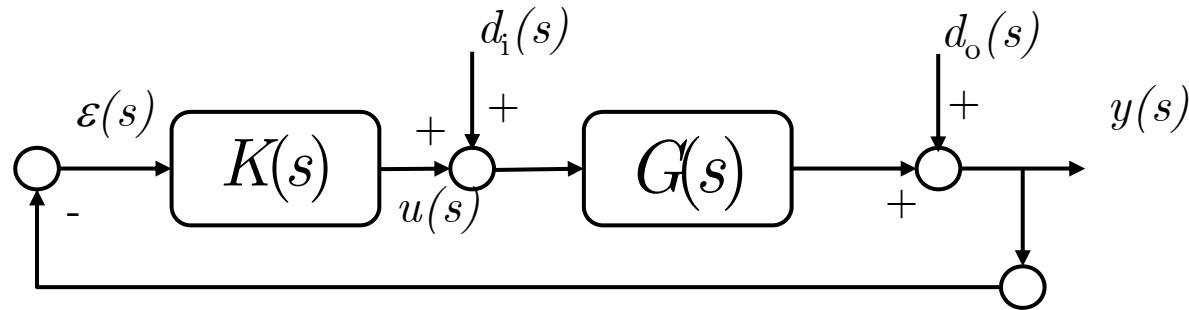
$$\Rightarrow \approx \left| G(j\omega)K(j\omega) \right| \geq \frac{1}{\varepsilon_r} = \beta_r \gg 1 \quad \omega \in [0, \omega_r]$$



- Il vincolo della “barriera” inferiore **deve essere soddisfatto** mediante una scelta appropriata di  $K(s)$



## Attenuazione Disturbi



- Il controllore deve ridurre l'impatto dei disturbi sull'uscita. Questo può essere ottenuto in due modi (a volte complementari):
  - Mediante 2 componenti di controllo, una in feedforward ed una in feedback (soprattutto nel caso di disturbi noti)
  - Mediante un unico controllore in feedback

$$y(s) = T(s) \left[ r(s) - n(s) \right] + S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s)$$

$$\frac{y(s)}{d_o(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s)$$

$$\frac{y(s)}{d_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = G(s)S(s)$$

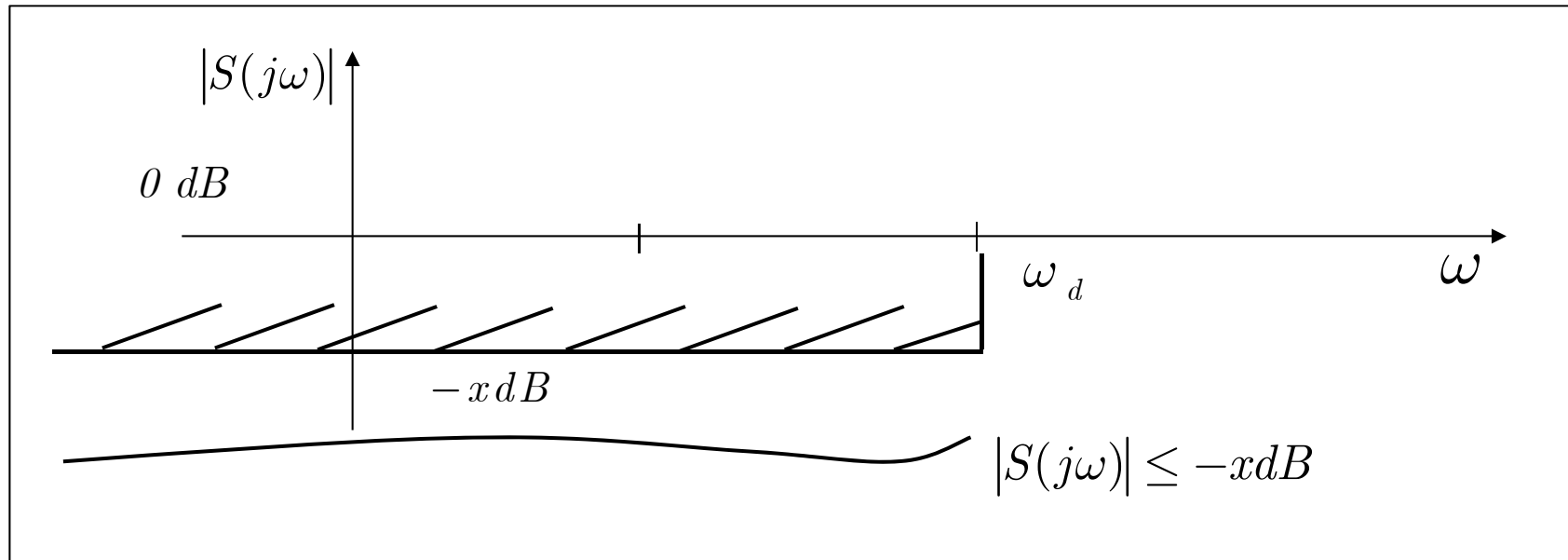
- La funzione di sensitività  $S(s)$  deve essere ridotta nella banda di frequenze dei disturbi
- Nel caso di disturbi in ingresso, la diminuzione deve essere maggiore per controbilanciare possibili amplificazioni dell'impianto a bassa frequenza



## Attenuazione Disturbi



$|S(j\omega)|$  Al di sotto della barriera di  $-x \text{ dB}$  per  $\omega \in [0, \omega_d]$



$[0, \omega_d]$  ed il limite superiore  $\varepsilon_d = -x$  dipendono dal problema specifico





## Attenuazione Disturbi

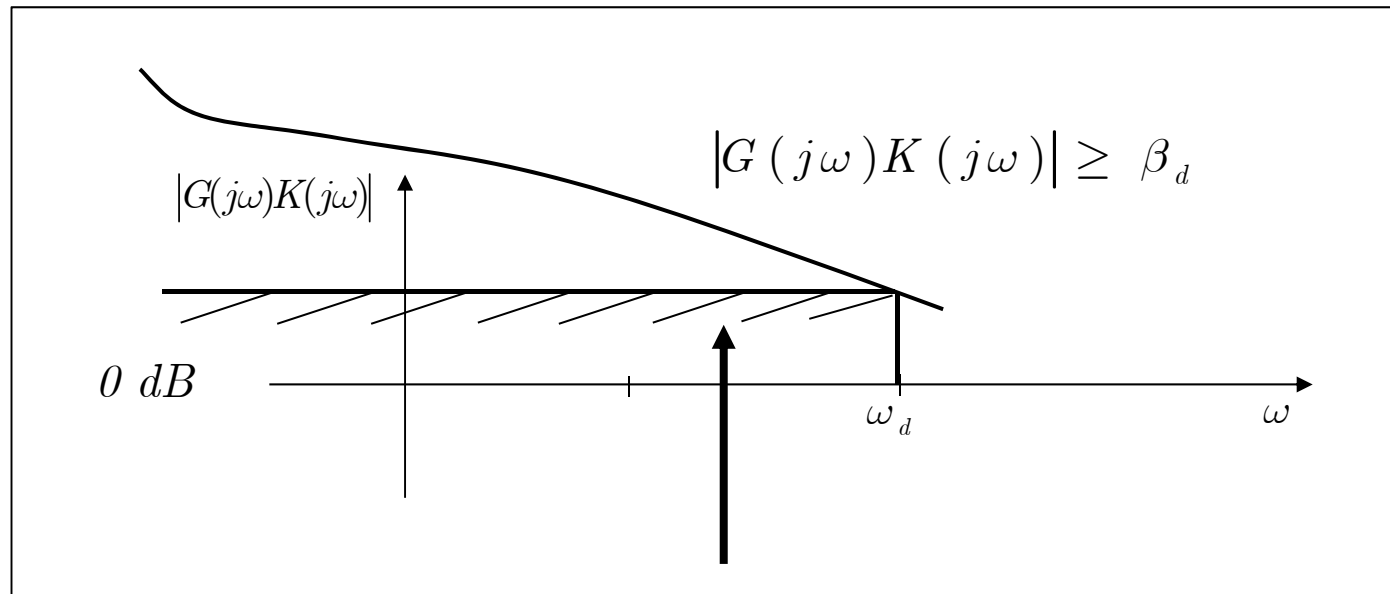


- Il requisito può essere imposto anche in termini di limite sulla funzione di anello

$$|S(j\omega)| \leq \varepsilon_d < 1, \omega \in [0, \omega_d]$$

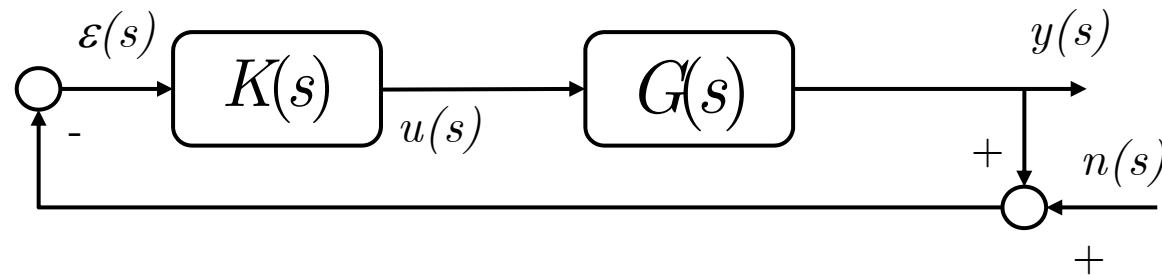
$$\frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \varepsilon_d \quad |1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_d} > 1$$

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \cong |G(j\omega)K(j\omega)| \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_d} = \beta_d \gg 1 \quad \omega \in [0, \omega_d]$$



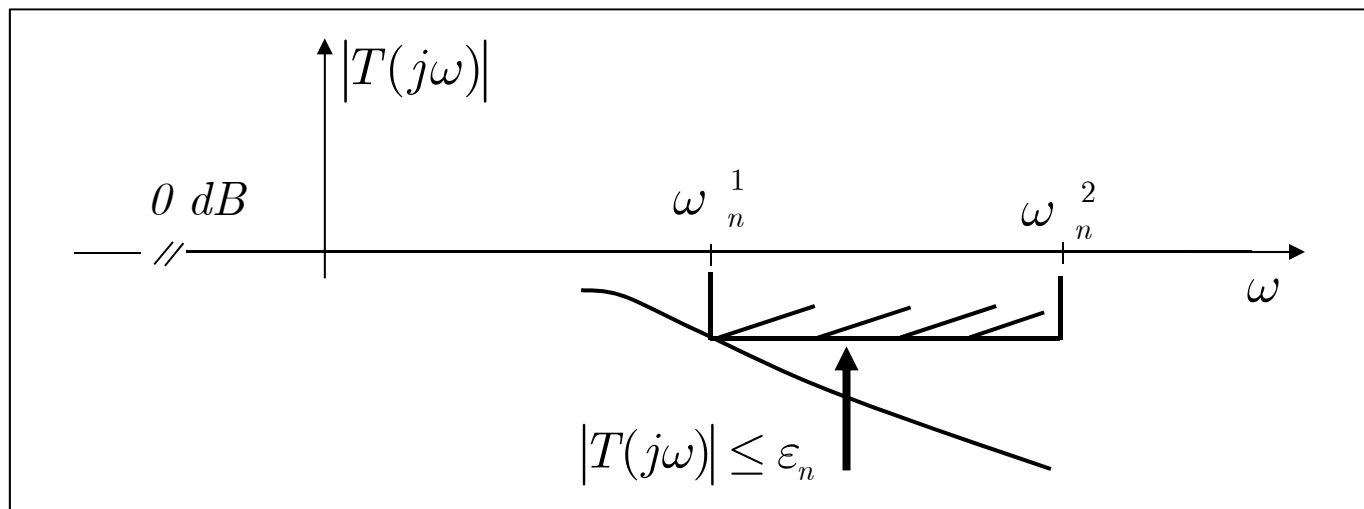


## Attenuazione Rumore ed Instabilità ad alta frequenza



$$y(s) = T(s) \left[ r(s) - n(s) \right] + S(s) d_o(s) + G(s) S(s) d_i(s)$$

$$\frac{y(s)}{n(s)} = -T(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad |T(j\omega)| \leq \varepsilon_n < 1, \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2]$$





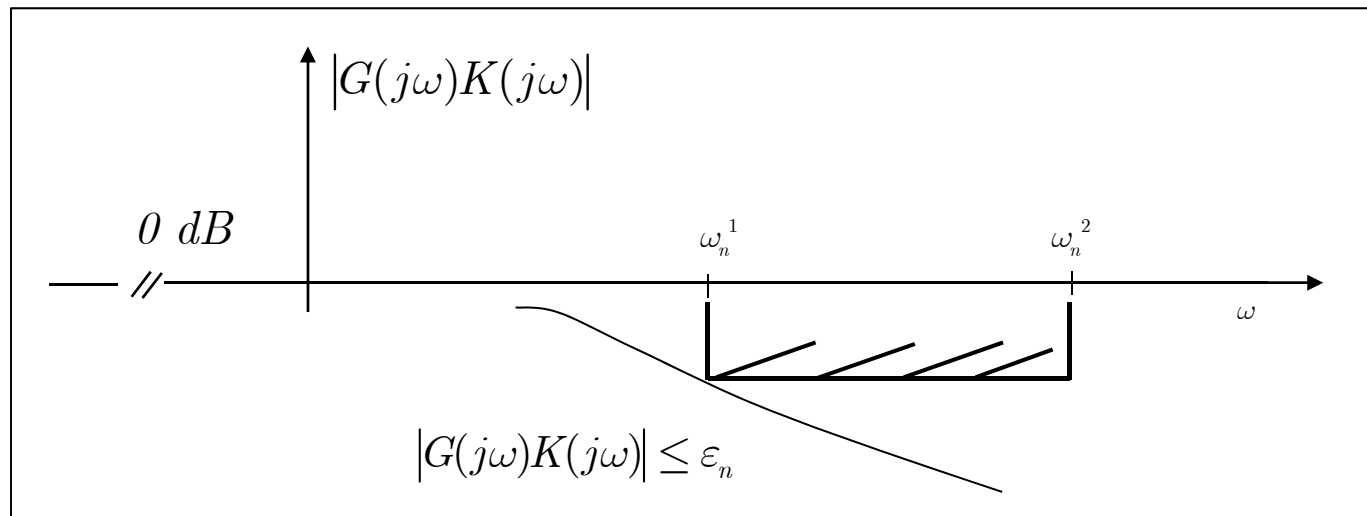
## Attenuazione Rumore ed Instabilità ad alta frequenza



- Il limite superiore “barriera” su  $|T(j\omega)|$  determina la scelta di  $K(s)$

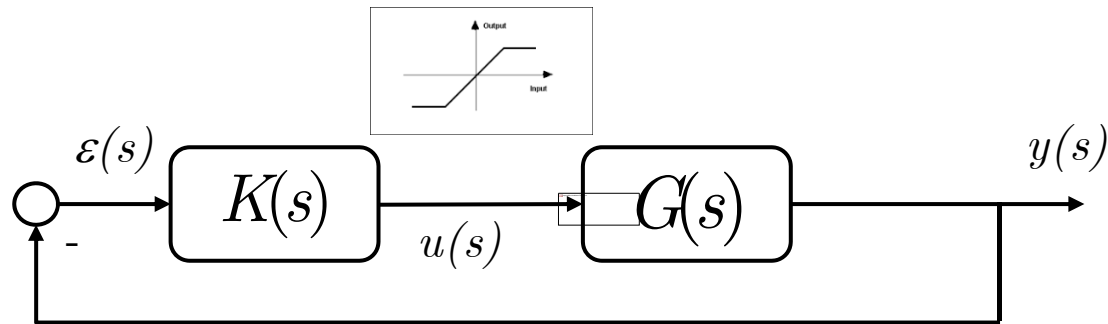
$$|T(j\omega)| \leq \varepsilon_n < 1, \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2] \quad \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq \varepsilon_n$$

$$\frac{|G(j\omega)K(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \cong |G(j\omega)K(j\omega)| \leq \varepsilon_n \ll 1 \quad \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2]$$





## Vincoli sugli Attuatori



- Il controllore  $K(s)$  può richiedere un'energia maggiore delle disponibilità degli attuatori e questa situazione deve essere considerata come uno dei limiti di progetto. **In mancanza di saturazioni esplicite in anello**, si devono imporre limitazioni al guadagno di anello

$$\frac{u(s)}{r(s)} = K(s) \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

$$\frac{u(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{T(s)}{G(s)}$$

- Supponiamo che il guadagno del sistema diminuisca ad alta frequenza (Comportamento di una dinamica strettamente propria)

$$|G(j\omega)| \leq \varepsilon_p \ll 1$$

$$\omega > \omega_p$$



## Vincoli sugli Attuatori



- Se la funzione di anello ha un guadagno non trascurabile, ovvero:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \quad \omega \in [\omega_p, \omega_q]$$

$$\left| \frac{u(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \approx |\sim 1| \cdot \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| = \frac{1}{\varepsilon_p} \gg 1$$

- Il segnale di attuazione può diventare troppo elevato, a meno di non ridurre il guadagno di anello a frequenze

$$\omega > \omega_p$$

- **Regola pratica:** Non estendere la banda passante aldilà della regione dove il guadagno del sistema comincia ad avere valori inferiori a 0 dB, ovvero:

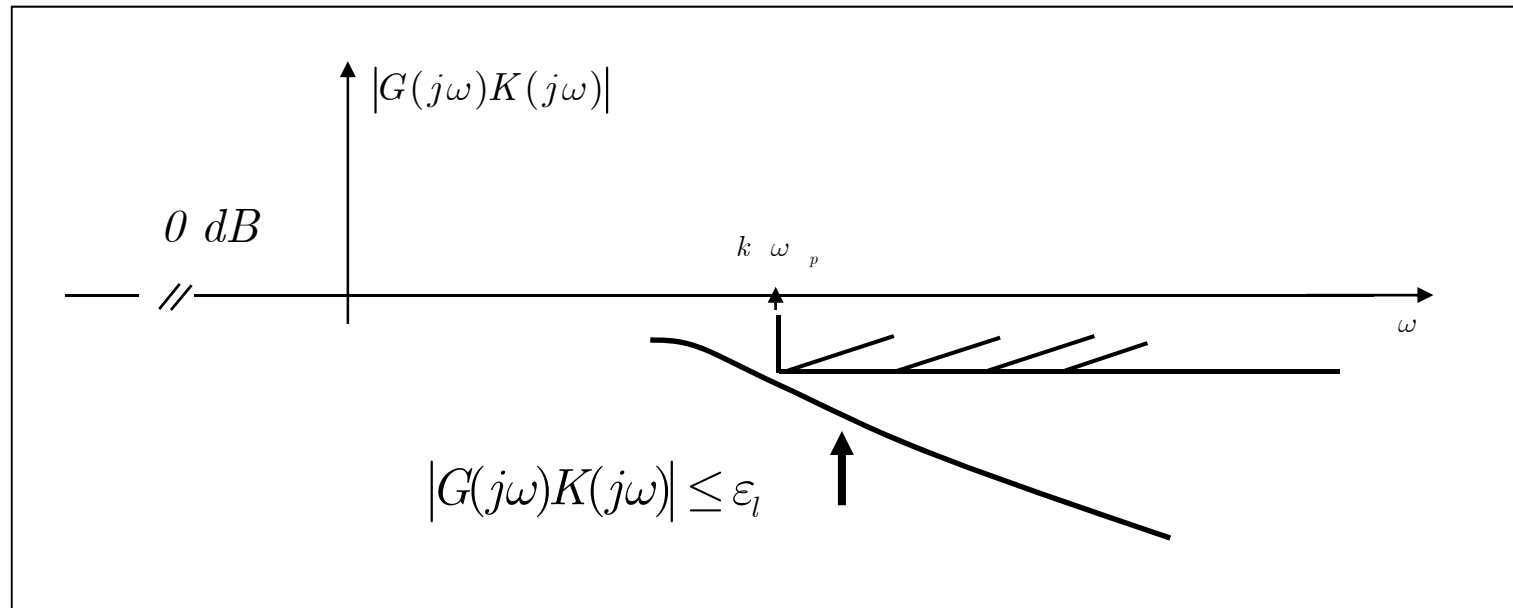
- ridurre il guadagno di anello alle frequenze dove il guadagno del sistema risulta troppo basso



## Vincoli sugli Attuatori



$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \varepsilon_l < 1 \quad \omega > k\omega_p; k > 1 \quad \text{Con } \varepsilon_l, k \text{ a scelta del progettista}$$



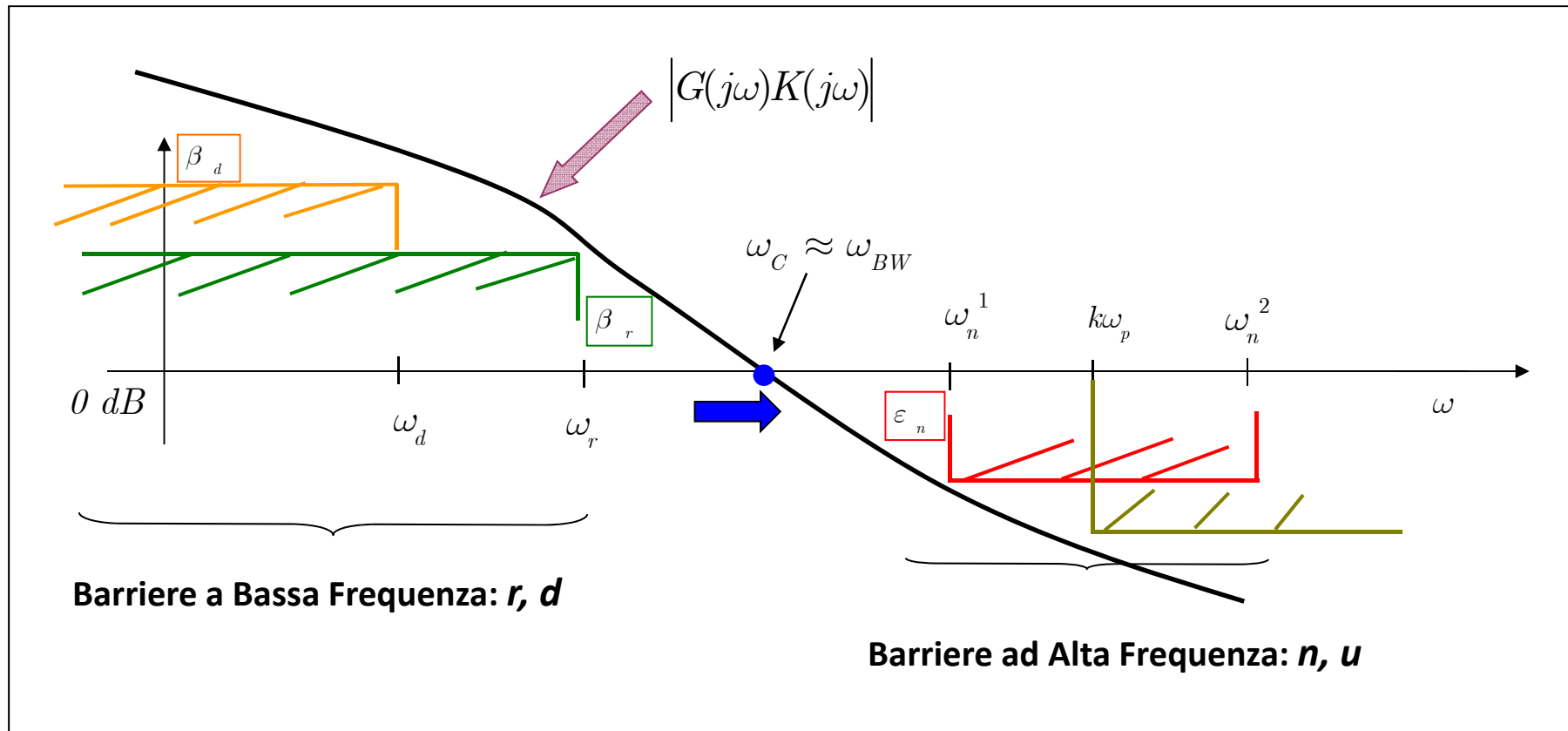
- Il limite della “barriera” è determinato dal vincolo sulla funzione di anello e determina le caratteristiche del controllore  $K(s)$



## Sommario



### □ Vincoli Generali sul Modulo (Guadagno) della Funzione di Anello



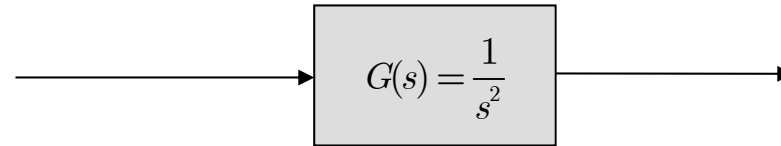
- **Obiettivo di Progetto:** modellare (shape) con scelta appropriata di  $K(s)$  il guadagno della funzione di anello  $G(s)K(s)$  in modo da rispettare le barriere, mantenendo la stabilità in ciclo chiuso



## Esempi



### □ Esempio 1:



- Requisiti di controllo: Progettare  $K(s)$  in modo da stabilizzare  $G(s)$  e rispettare i seguenti vincoli:

- i. Ridurre di almeno  $-80 \text{ dB}$  l'influenza del disturbo  $d_o$  all'uscita, nell'intervallo:

$$[0, \omega_d] = [0, 0.1] \text{ rad s}^{-1}$$

- ii. Seguire il riferimento  $r$  con errore minore o uguale a  $-40 \text{ dB}$  nell'intervallo:

$$[0, \omega_r] = [0, 1] \text{ rad s}^{-1}$$

- iii. Attenuazione del rumore  $n$  di almeno  $-20 \text{ dB}$  nell'intervallo:  $[\omega_n^1, \omega_n^2] = [10^2, 10^3] \text{ rad s}^{-1}$

- iv. Errore a regime ad una parabola unitaria  $e_{par}(\infty) \leq 0.02$

- v. Margine di Fase:  $PM \geq 45^\circ$

- vi. Margine di Guadagno:  $GM \geq +20 \text{ dB}$

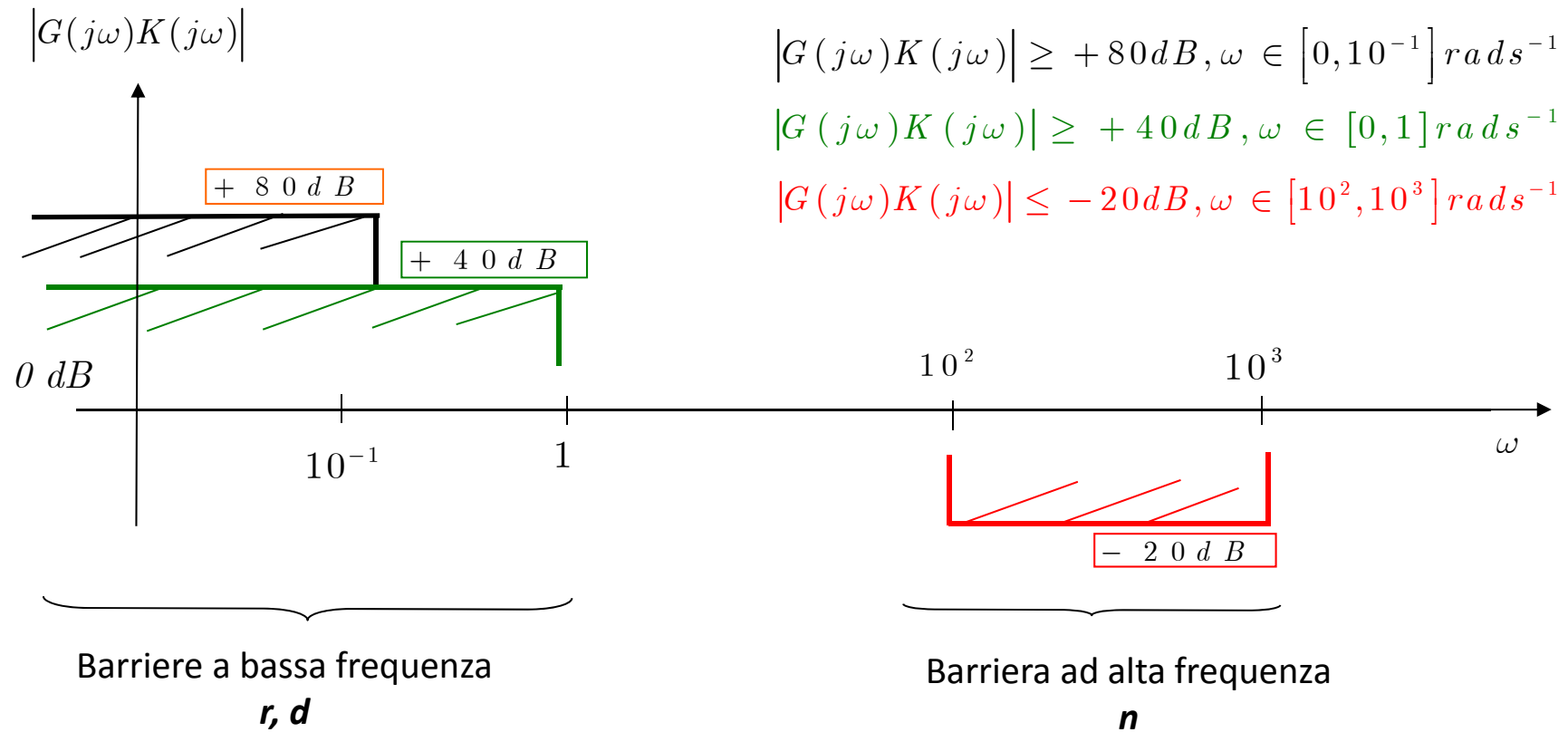




## Esempi



### □ Vincoli Geometrici: Requisiti i), ii), iii)





## Esempi



□ **Vincolo di Regime:** Requisito iv)

$e_{par}(\infty) \leq 0.02$  Ottenibile mediante controllore proporzionale in quanto  $G(s)$  ha due poli all'origine

$$\varepsilon(s) = \frac{r(s)}{1 + G(s)K(s)} \qquad \varepsilon(s) = \frac{2}{s^3} \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

Scelta:  $K(s) = \bar{k}H(s), |H(s)| = 1, \angle H(s) = 0^\circ$

$$e_{par}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{s^3} \frac{1}{1 + \frac{\bar{k}}{s^2}} = \frac{2}{\bar{k}} \leq 0.02 \qquad \boxed{\bar{k} \geq 100}$$

$$G_{ol}(s) = K(s)G(s) = \frac{\bar{k}}{s^2}$$



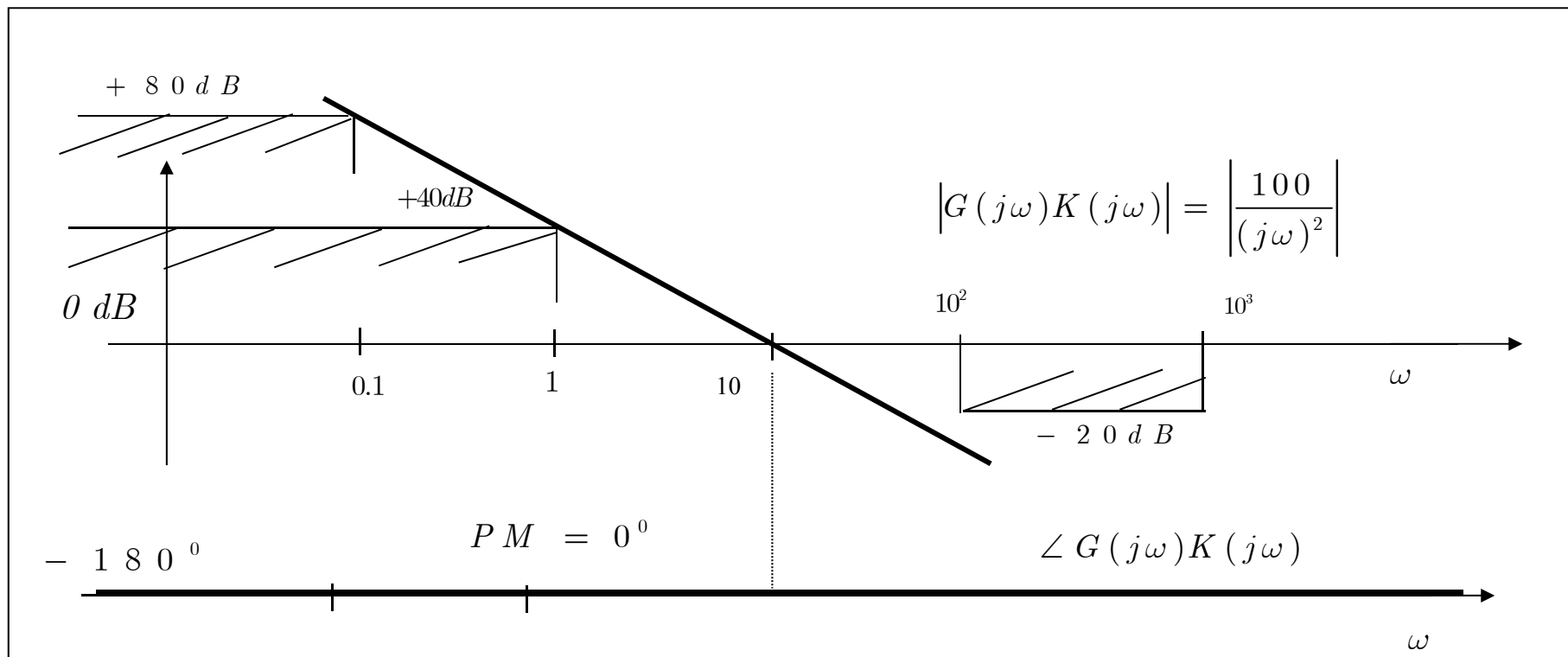
## Esempi



- Un candidato controllore è:

$$K(s) = \bar{k}\tilde{K}(s); \tilde{K}(s) = 1; \bar{k} = 100$$

- Verifica Vincoli in Frequenza



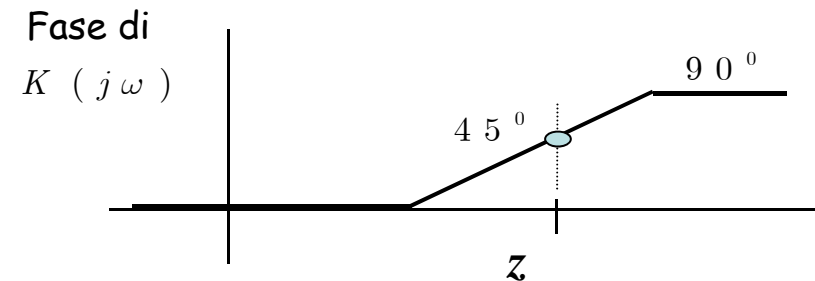
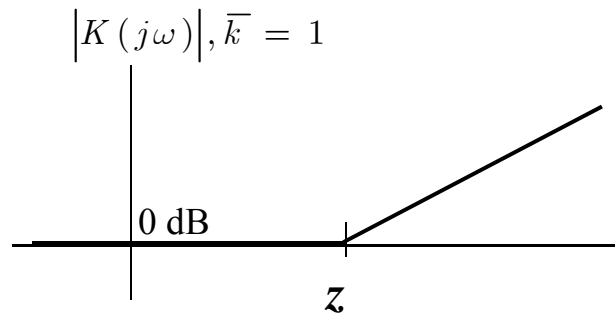
- I vincoli sono rispettati ma :**  $PM = 0^\circ$

$$T(s) = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{100}{s^2 + 100}$$



## Esempi

- E' necessario introdurre un anticipo di fase (regola 10 LR, zeri attraggono, poli respingono)
- Margine di fase richiesto  $PM^{des} = 45^0$ 
  - Aumento anticipo per fattore di sicurezza:  $PM^{des} - PM^{real} + \varepsilon$
  - Usiamo un anticipo puro  $K(s) = \bar{k} \frac{s+z}{z}; z = 10 \text{ rads}^{-1}$



- **NOTA:** se il controllore progettato funziona, ricordarsi di renderlo causale con l'aggiunta di un polo fuori banda

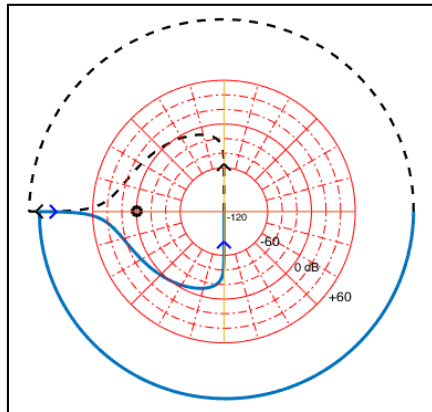


## Esempi

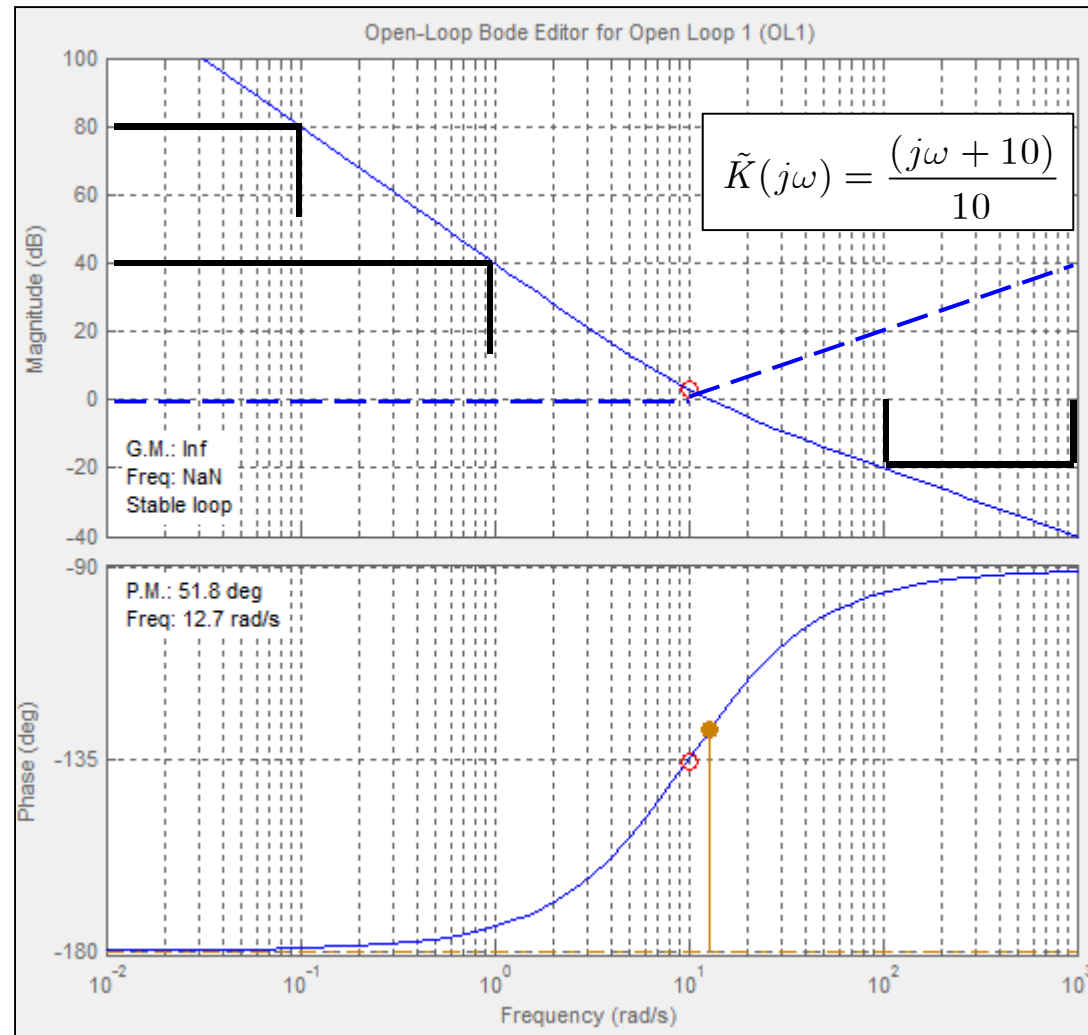


### Verifica dei Vincoli di Anello

$$K(s) = \bar{k}\tilde{K}(s); \tilde{K}(s) = \frac{(s + z)}{z};$$
$$\bar{k} = 100; z = 10 \text{ rad/s}^{-1}$$



- Poli instabili in Ciclo Aperto  $P=0$
- Numero di giri intorno a  $-1$   $N=0$
- Stabile in Ciclo Chiuso  $Z=0$
- Margine di Guadagno = inf.

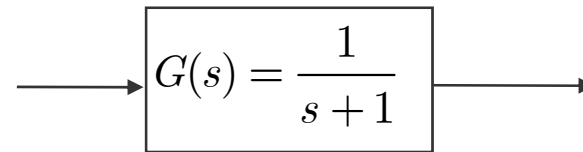




## Esempi



### ■ Esempio 2



- Progettare un controllore  $K(s)$  che garantisca la stabilità di  $G(s)$  e soddisfi i seguenti requisiti:

i. Errore statico di posizione = 0 (Errore nullo al gradino unitario).

ii. Attenuazione di almeno **-40 dB** per disturbi nella banda:  $[0, \omega_d] = [0, 10^{-2}] \text{ rad s}^{-1}$

iii. Inseguimento di un comando con errore minore o uguale a **-100 dB** nella banda:

$$[0, \omega_r] = [0, 10^{-3}] \text{ rad s}^{-1}$$

iv. Attenuazione di almeno **-40 dB** per rumori nella banda:  $[\omega_n^1, \omega_n^2] = [10^2, 10^3] \text{ rad s}^{-1}$

v. Margini di Stabilità:  $PM \geq 45^\circ$  ,  $GM \geq +20 \text{ dB}$



## Esempi



- Vincoli geometrici dalle condizioni ii., iii., iv.

$$|S(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +40dB \quad \omega \in [0, 10^{-2}] \text{ rads}^{-1}$$

$$|S(j\omega)| \leq -100dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +100dB \quad \omega \in [0, 10^{-3}] \text{ rads}^{-1}$$

$$|T(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \leq -40dB \quad \omega \in [10^2, 10^3] \text{ rads}^{-1}$$

- Vincolo sull'errore a regime dalla condizione i.

$$e_{ss}(\infty) = 0 \quad K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \tilde{K}(s); \tilde{K}(0) = 1$$

- E' necessario un integratore nella catena diretta

- Possibile scelta del Controllore e FdT di Anello

$$K(s) = \frac{\bar{k}}{s}; \bar{k} > 0 \quad G(s)K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \frac{1}{s+1}; \bar{k} > 0$$

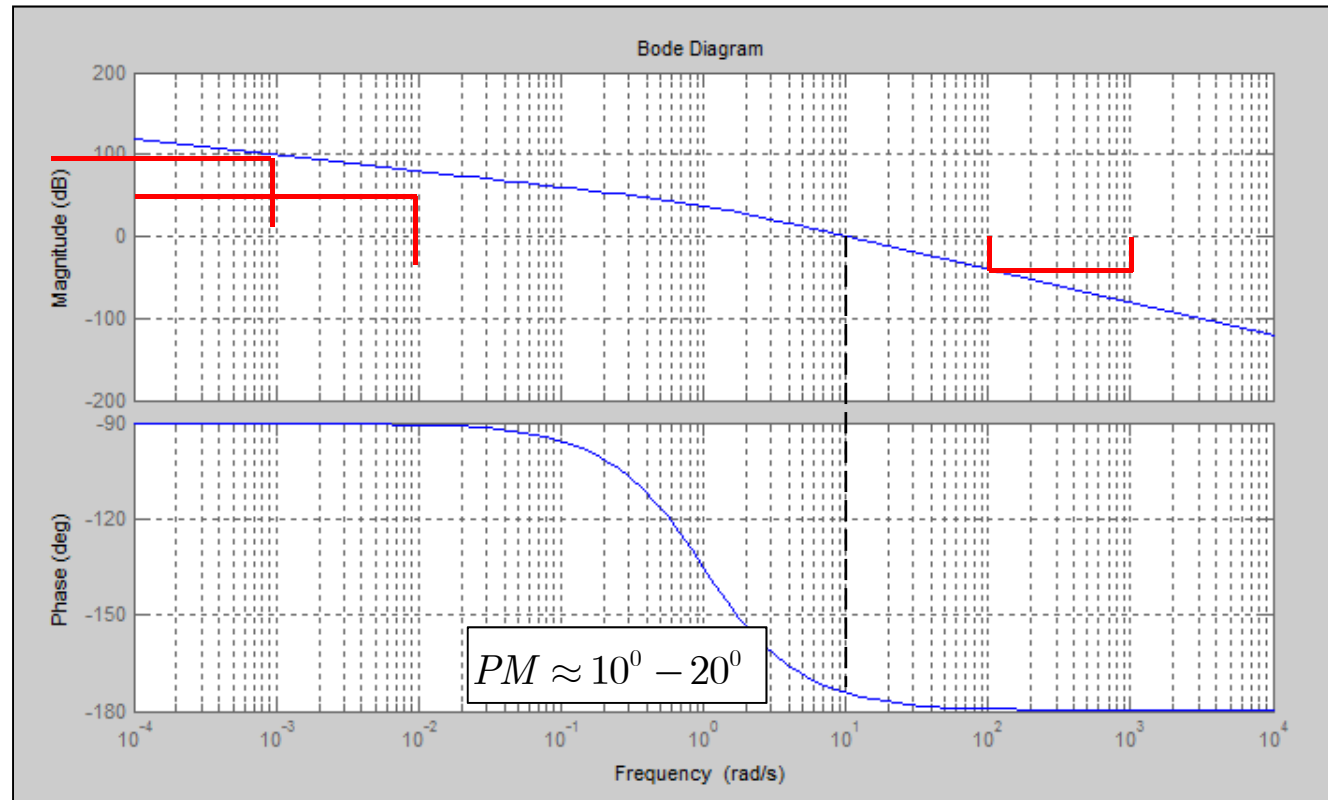


## Esempi



- Verifica Vincoli sulla FdT di Anello

$$|G(j\omega)K(j\omega)|; \bar{k} = 100$$



- I vincoli sul modulo sono rispettati, ma il margine di fase è circa 10-20 gradi

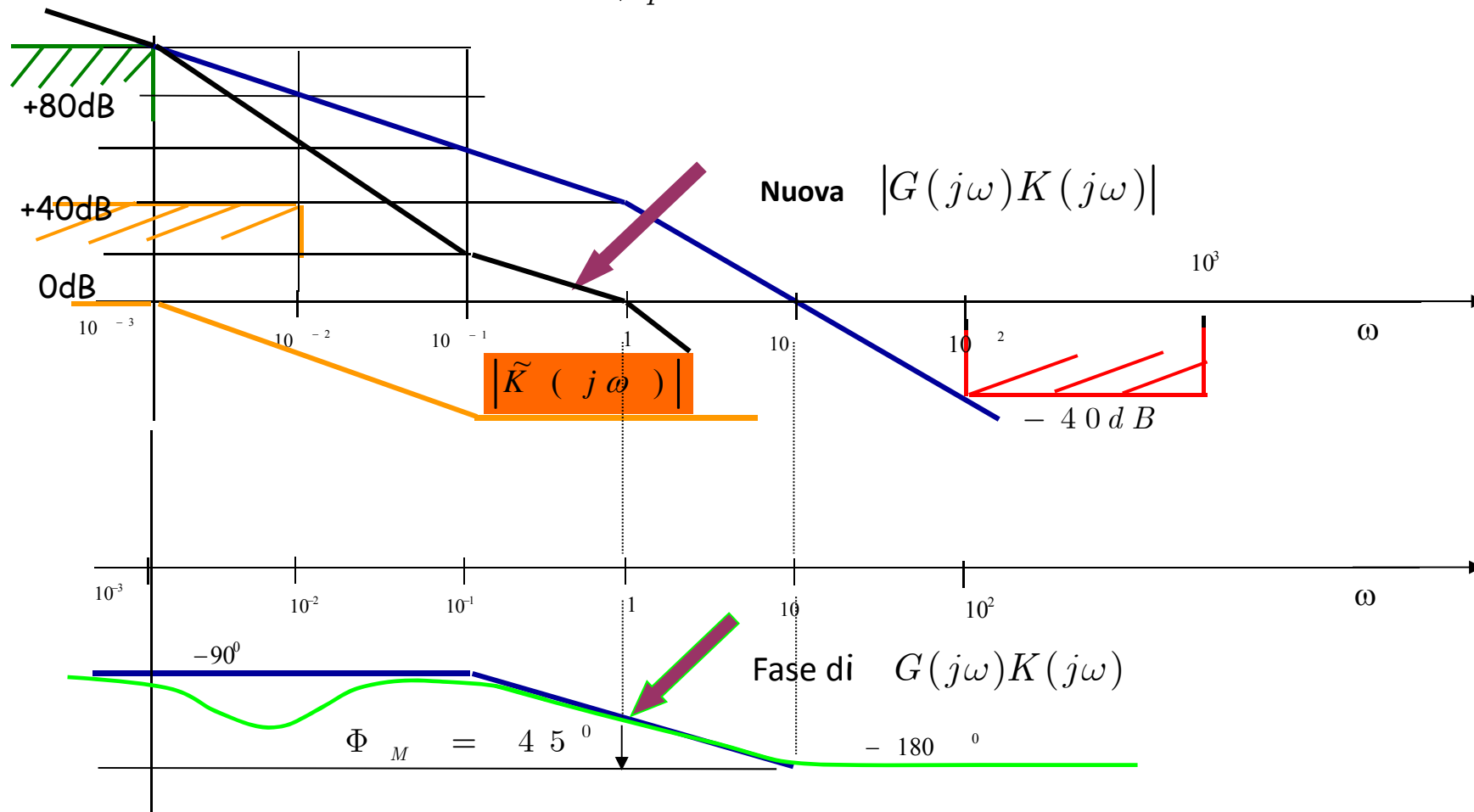




## Esempi

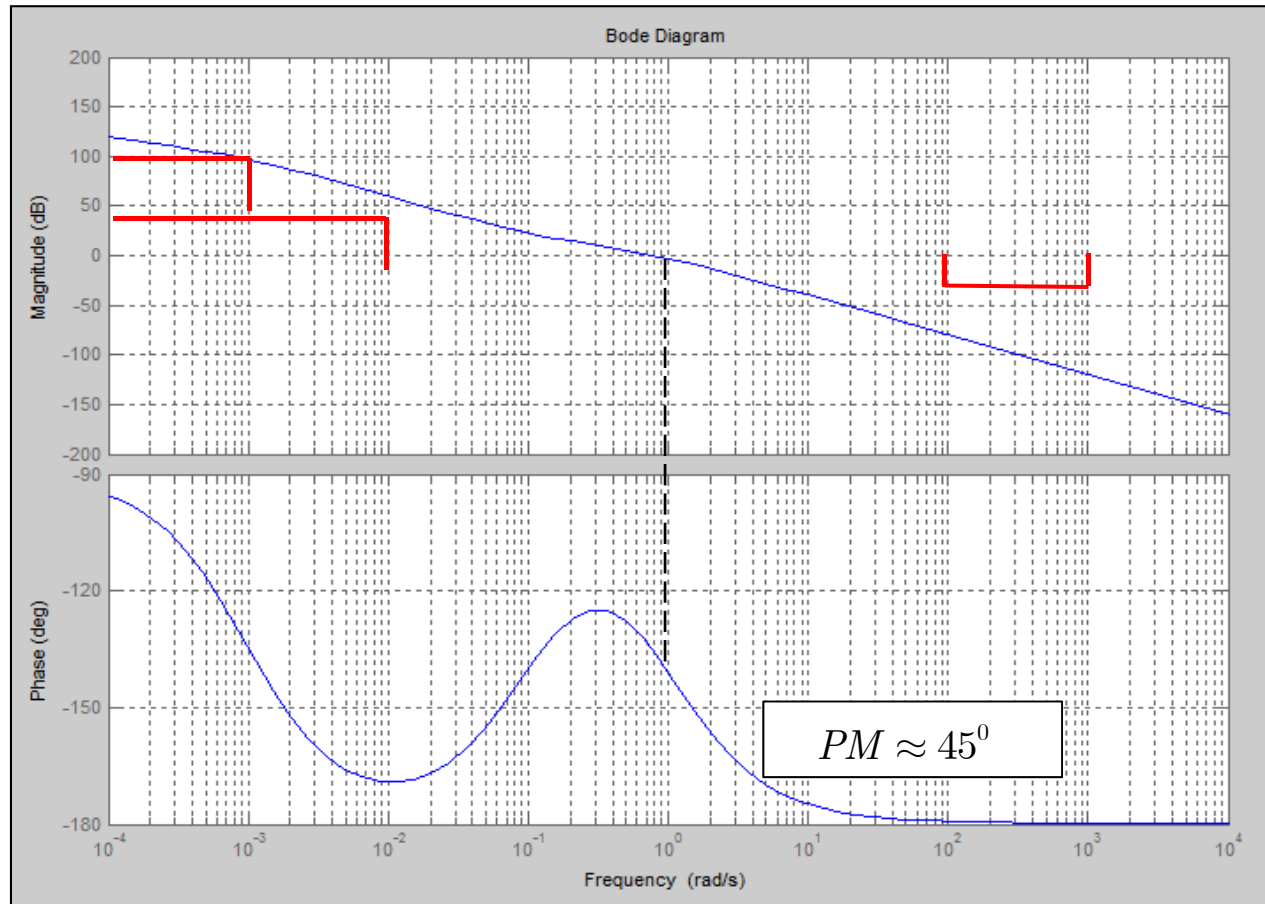
- La barriera ad alta frequenza non permette l'uso di un anticipo puro, Consideriamo perciò:

$$\tilde{K}(s) = \frac{p}{z} \frac{s+z}{s+p}, z > p > 0 \quad p=10^{-3}; z=10^{-1}$$

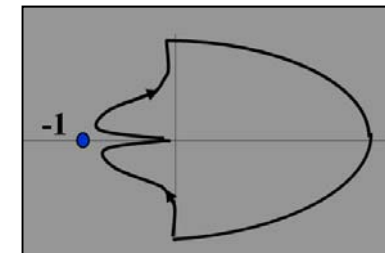
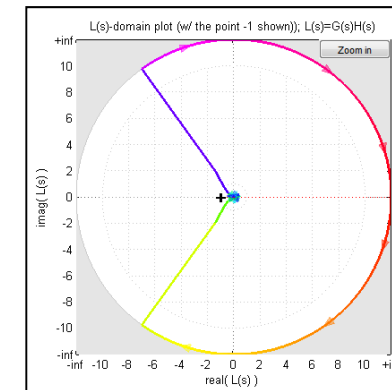




## Esempi



- Poli instabili in Ciclo Aperto  $P=0$
- Numero di giri intorno a  $-1$   $N=0$
- Stabile in Ciclo Chiuso  $Z=0$
- Margine di Guadagno = inf.





## Esempi



▪ **Esempio 3**  $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$

- Progettare un controllore  $K(s)$  che garantisca la stabilità di  $G(s)$  e soddisfi i seguenti requisiti:

i. Errore statico di velocità  $< 10\%$  (Errore alla rampa).

ii. Attenuazione di almeno **-60 dB** per disturbi nella banda:  $\left[0, \omega_d\right] = \left[0, 1\right] rad s^{-1}$

iii. Inseguimento di un comando con errore minore o uguale a **-40 dB** nella banda:

$$\left[0, \omega_r\right] = \left[0, 2\right] rad s^{-1}$$

iv. Attenuazione di almeno **-40 dB** per rumori per frequenze superiori :  $\omega_n \approx 100 rad s^{-1}$

v. Margini di Stabilità:  $PM \geq 45^\circ$  ,  $GM \geq 15 dB$



## Esempi



- Vincoli geometrici dalle condizioni ii., iii., iv.

$$|S(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +40dB \quad \omega \in [0, 2] \text{ rad/s}^{-1}$$

$$|S(j\omega)| \leq -60dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +60dB \quad \omega \in [0, 1] \text{ rad/s}^{-1}$$

$$|T(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \leq -40dB \quad \omega > 10^2 \text{ rad/s}^{-1}$$

- Vincolo sulla velocità di risposta transitoria

$$\omega_{BW} \geq 10 \text{ rad/s}^{-1} \quad G(s)K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \frac{1}{s+1}; \bar{k} > 0$$

- Vincolo sull'errore a regime dalla condizione i.

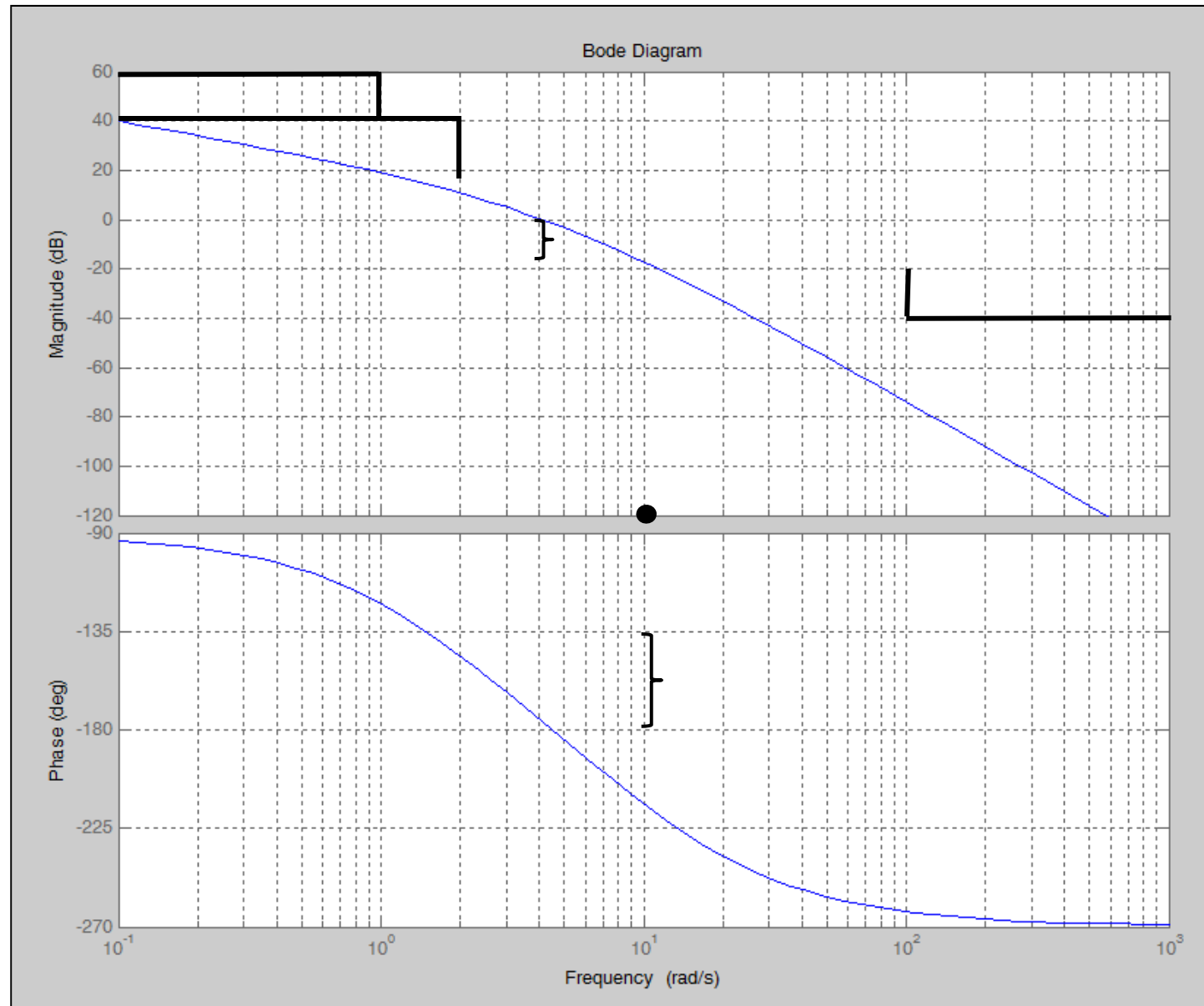
$$e_{ramp}(\infty) \leq 10\%$$

- Possibile scelta iniziale del Controllore in base al requisito di regime  $K(s) = \frac{\bar{k}}{s}; \bar{k} > 0$

$$e_{ramp}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) =$$
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{1}{\bar{k}} \frac{1}{s(s+2)(s+10)}} = \frac{20}{\bar{k}} \leq 0.1 \Rightarrow \bar{k} \geq 200$$

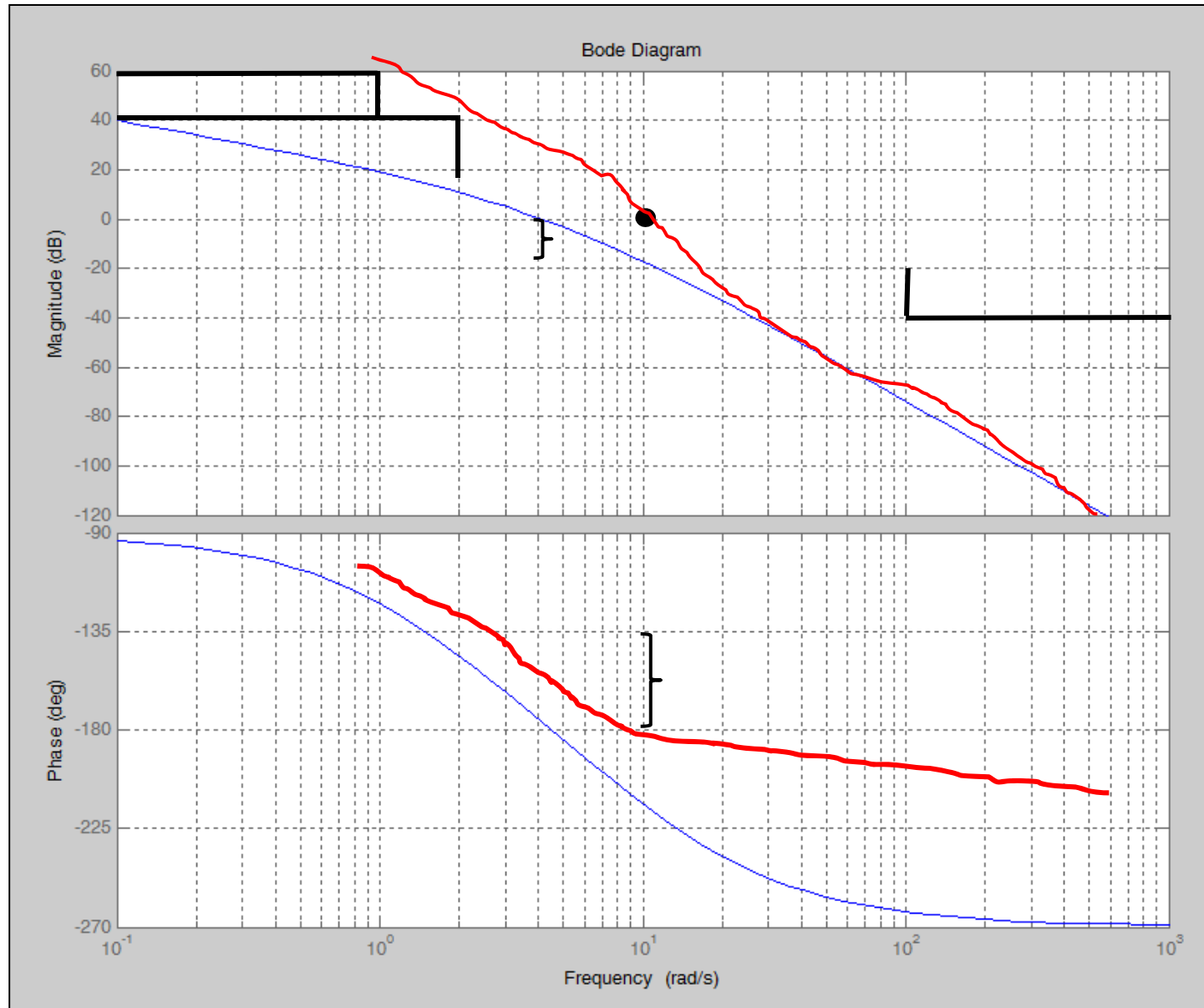


# Esempi





## Esempi

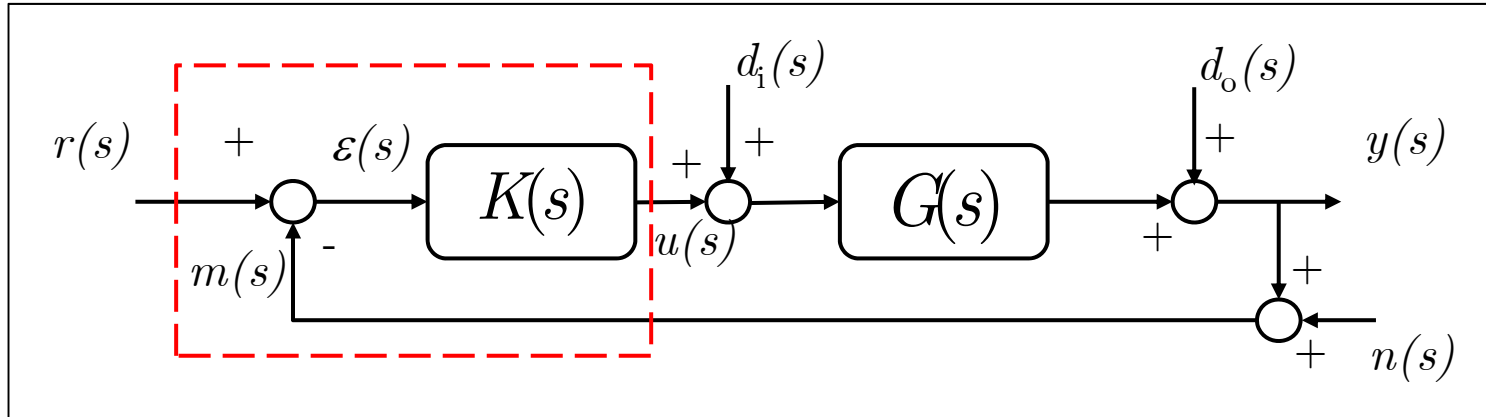




## Limiti sulle Prestazioni



- ❑ Il progetto del controllore può avere delle limitazioni intrinseche che non permettono il soddisfacimento dei requisiti



- **Limitazione Algebrica:** Consideriamo i seguenti requisiti, come esempio

$$\left| \frac{\varepsilon(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = |S(j\omega)| \leq 0.01$$

- Limitazione sull'errore a regime

$$\left| \frac{y(j\omega)}{n(j\omega)} \right| = |T(j\omega)| \leq 0.05$$

- Limitazione sulla sensitività al rumore



## Limiti sulle Prestazioni

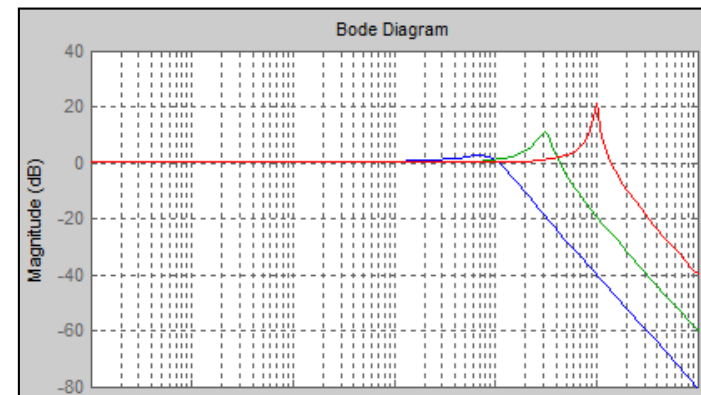
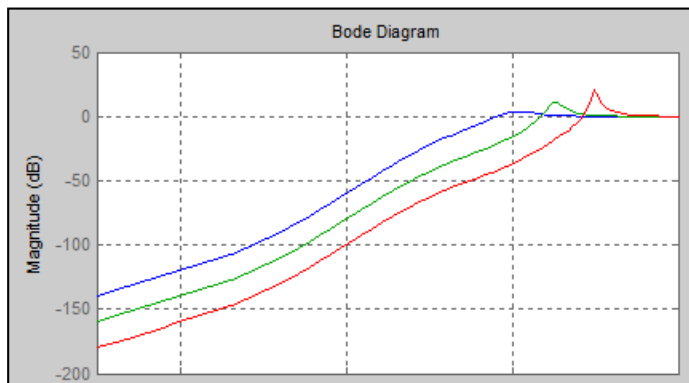


$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = 1$$

$$S(s) = 1 - T(s) \quad \Longrightarrow \quad |S(j\omega)| \geq 1 - |T(j\omega)|$$

$$|T(j\omega)| \leq 0.05 \quad \Longrightarrow \quad |S(j\omega)| \geq 1 - 0.05 = 0.95 \gg 0.01 \quad !!!! \quad \text{😞}$$

- Le specifiche di progetto non possono essere soddisfatte nella stessa banda di frequenza
- Andamenti tipici della sensitività e sensitività complementare al variare della FdT di anello



$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + G_{OL}(j\omega)}$$

$$T(j\omega) = \frac{G_{OL}(j\omega)}{1 + G_{OL}(j\omega)}$$



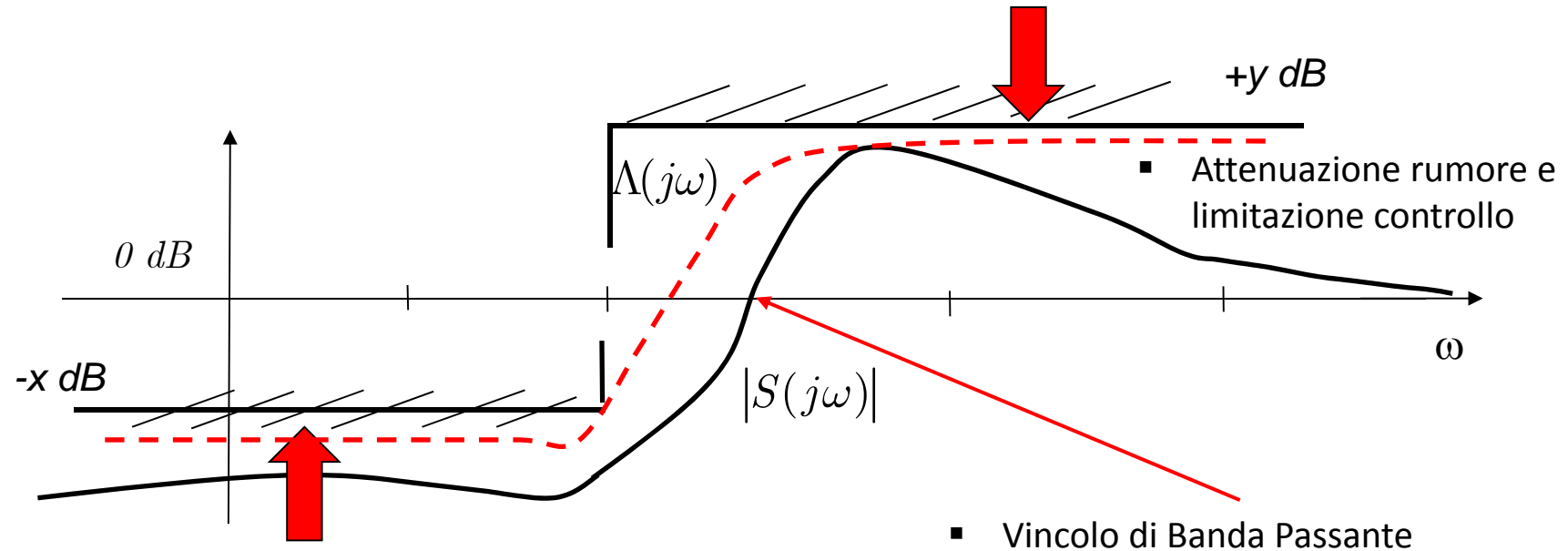


# Limiti sulle Prestazioni



- **Limitazione Analitica**

- **Problema:** Consideriamo un vincolo di forma sulla funzione di Sensività



- **Approccio:** Approssimare  $S(j\omega)$  con una funzione  $\Lambda(j\omega)$  stabile e con inversa stabile (Matematicamente significa: a fase minima e quindi invertibile)

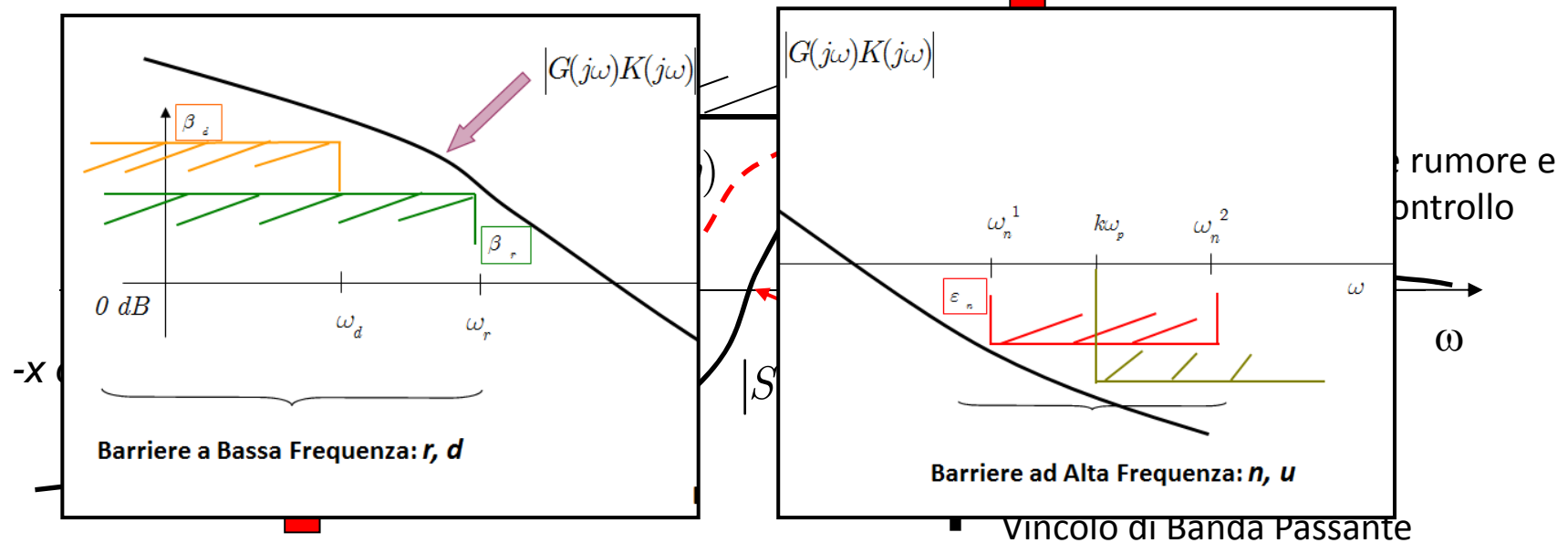


# Limiti sulle Prestazioni



- **Limitazione Analitica**

- **Problema:** Consideriamo un vincolo di forma sulla funzione di Sensività



- Vincoli di accuratezza e reiezione disturbi
- **Approccio:** Approssimare  $S(j\omega)$  con una funzione  $\Lambda(j\omega)$  stabile e con inversa stabile (Matematicamente significa: a fase minima e quindi invertibile)



## Limiti sulle Prestazioni



- Il problema di controllo si traduce quindi nel trovare un **controllore stabilizzante**  $K(s)$  tale che:

$$|S(j\omega)| \leq |\Lambda(j\omega)|$$

- Facciamo riferimento alla figura precedente

$$\begin{aligned} |\Lambda(s)| &= 10 \left( \frac{s+z}{s+10z} \right)^3 \\ |\Lambda(\infty)| &= 10 = +20dB = +y dB \\ |\Lambda(0)| &= 0.01 = -40dB = -x dB \end{aligned}$$

- Definiamo una funzione  $W(s)$  analitica nel semipiano di parte reale positiva (non ha singolarità in tale semipiano), tale che:

$$\Lambda^{-1}(j\omega) = W(j\omega)$$

- Se  $K(s)$  stabilizza  $G(s)$ , allora  $S(s)$  è analitica nel semipiano di parte reale positiva

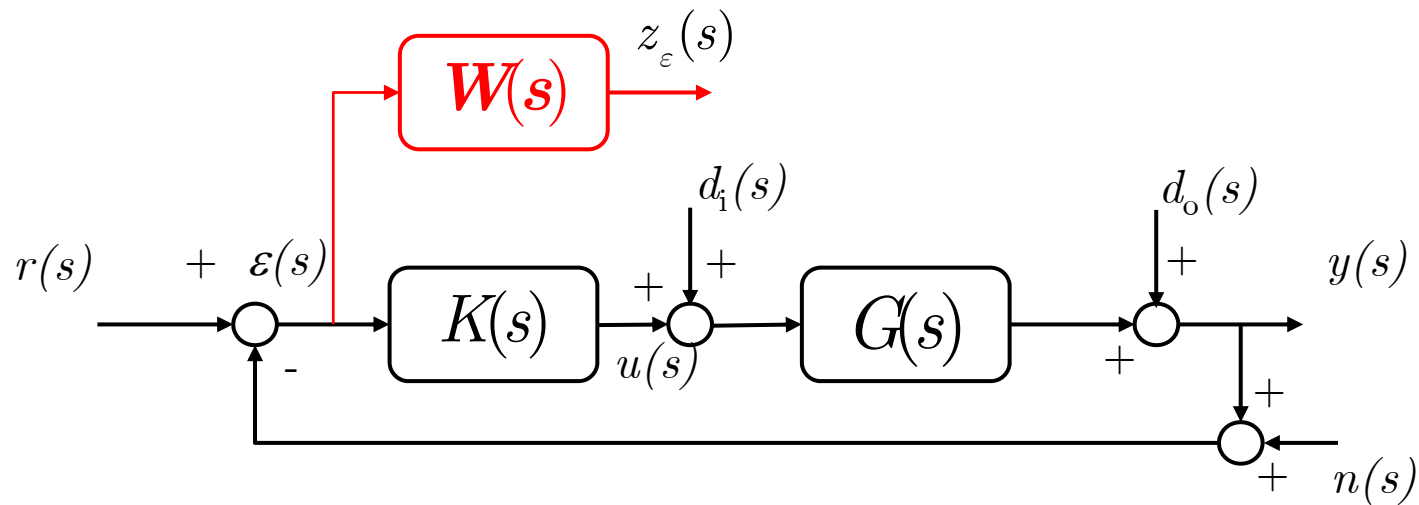
$$|S(j\omega)| \leq |\Lambda(j\omega)| \qquad |S(j\omega)\Lambda^{-1}(j\omega)| \leq 1$$



## Limiti sulle Prestazioni



$$\longrightarrow |S(s)W(s)| \leq 1; s \in C_+$$



$z_\varepsilon(s)$     ■ Uscita fittizia     $z_\varepsilon(s) = S(s)W(s)\varepsilon(s)$

□ I requisiti di progetto in termini di SHAPING sono soddisfatti se:

- Il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile (vedi margini di stabilità – ovvero stabilità robusta)
- L'uscita fittizia segue l'andamento dettato dal vincolo di shaping (prestazioni robuste)

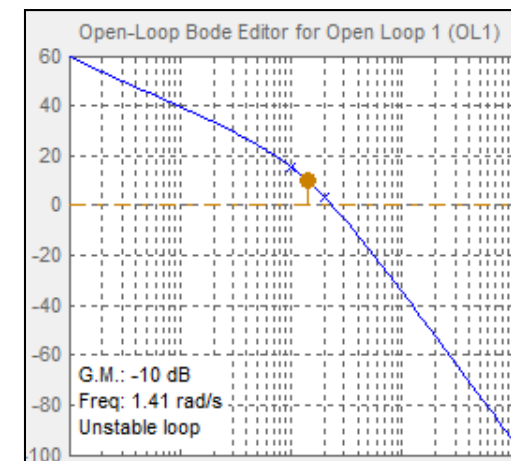
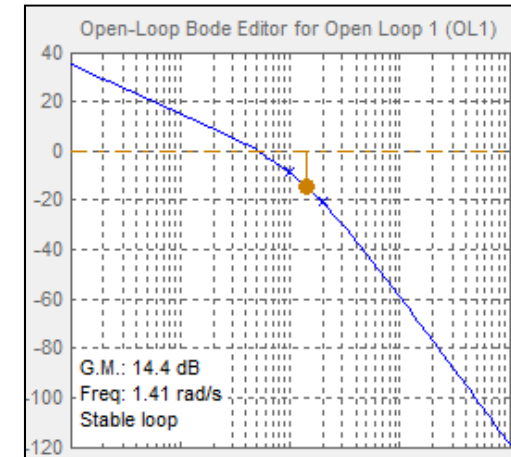
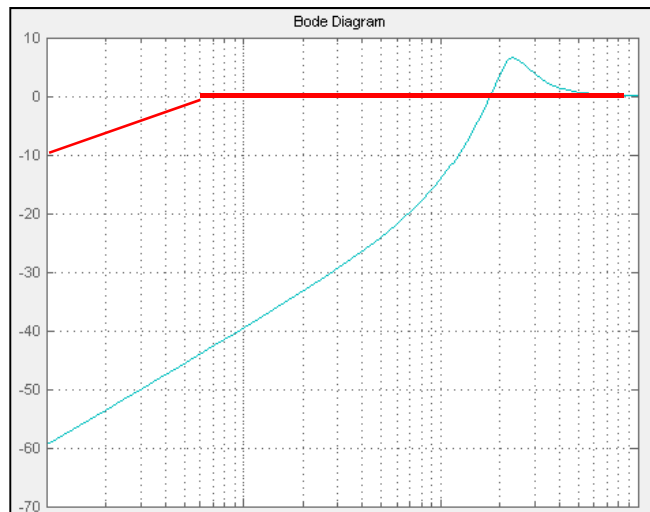
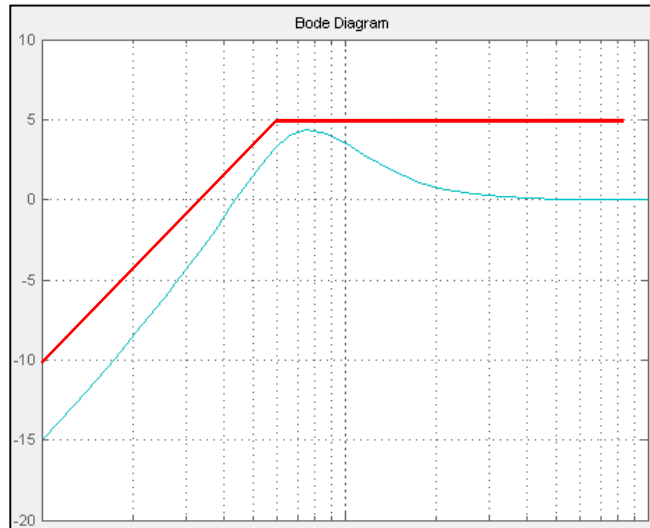


# Limiti sulle Prestazioni



$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + k}$$

$$G(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$





## Limiti sulle Prestazioni



$$|S(s)W(s)| \leq 1; s \in C_+$$

- Il soddisfacimento del vincolo di cui sopra può essere reso difficoltoso/impossibile nel caso di FdT di anello instabili e/o a sfasamento non minimo (**effetto waterbed**, ovvero Teorema di Bode)

- Teorema #1:** Dato un sistema la cui FdT di anello  $G_{ol}(s)$  sia stabile e a sfasamento minimo

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} 0 & (n-m) > 1 \\ -k \frac{\pi}{2} & (n-m) = 1 \end{cases} \quad k = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_{ol}(s)$$

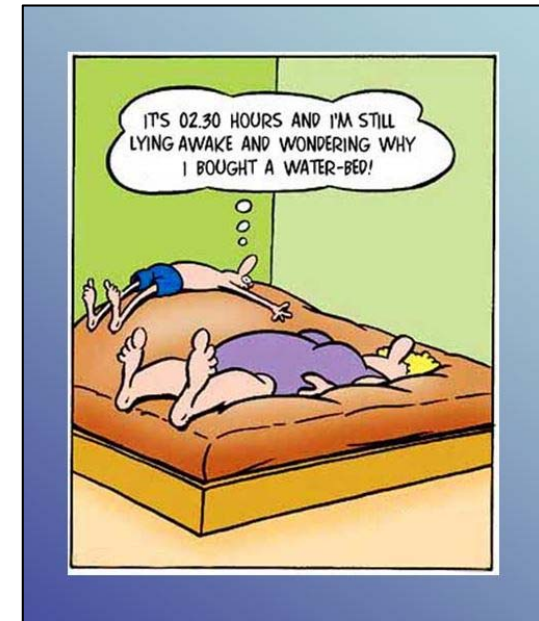
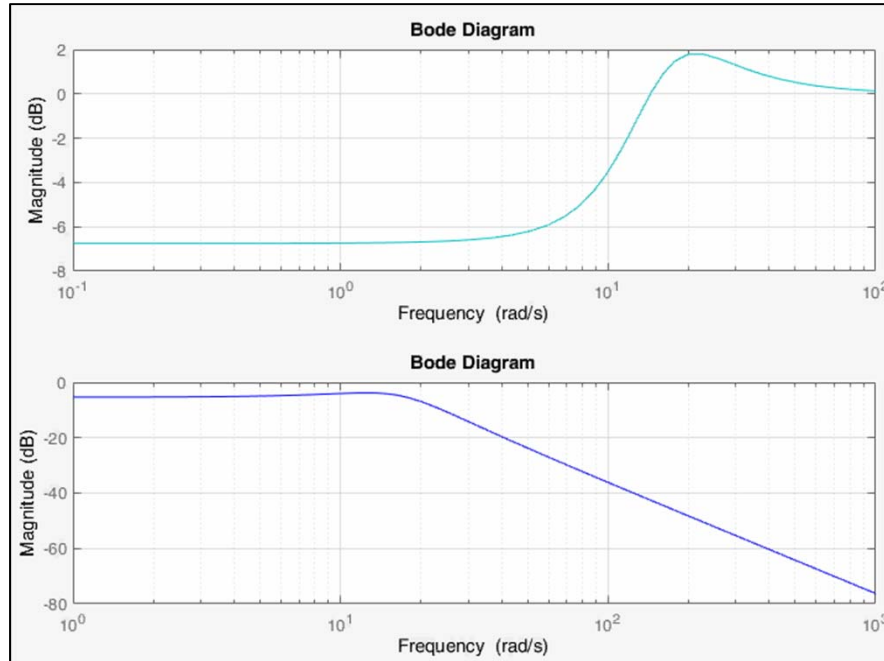
- Teorema #2:** Dato un sistema la cui FdT di anello  $G_{ol}(s)$  sia stabile e a sfasamento **non** minimo

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^q z_i & (n-m) > 1 \\ -k \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{i=1}^q z_i & (n-m) = 1 \quad \text{Re}[z_i] > 0 \end{cases} \quad k = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_{ol}(s)$$

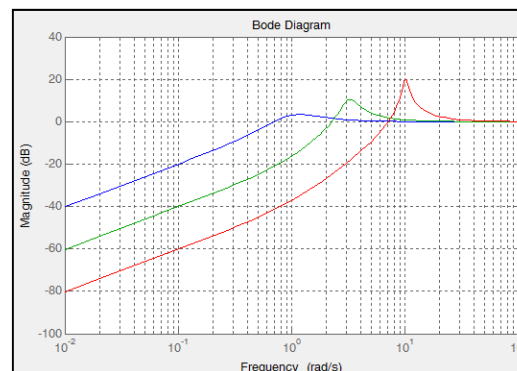




## Limiti sulle Prestazioni



- La presenza di zeri instabili e/o guadagni di anello elevati può vincolare le specifiche di banda passante e l'attenuazione a bassa frequenza.





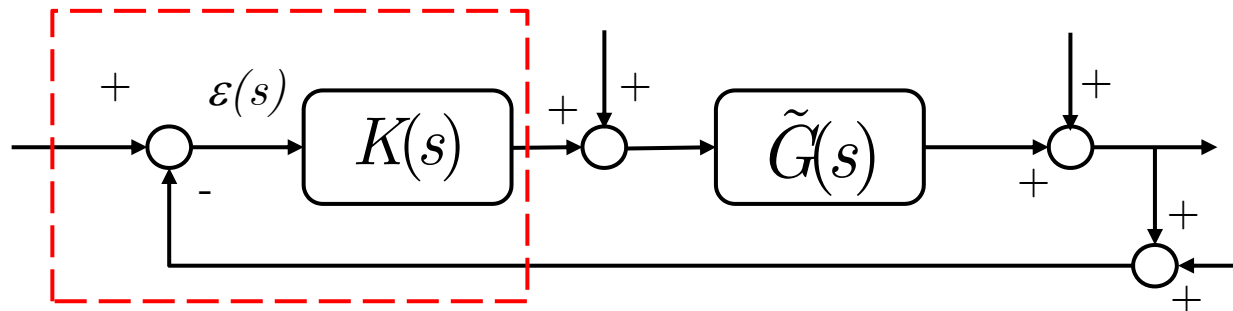
## Controllori Standard



- Esistono in pratica classi di controllori tipici che hanno proprietà e requisiti standard e che possono garantire specifiche prestazioni sia mediante la sintesi in frequenza, che con il luogo delle radici

- Controllori P.I.D.
- Reti Correttrici
- Predittore di Smith
- ...

$$K(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^r \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$
$$= K_s \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{s^r \prod_{j=1}^n (1 + \frac{s}{p_j})}, \quad K_s = K_0 \frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n}$$







## Controllori P.I.D.

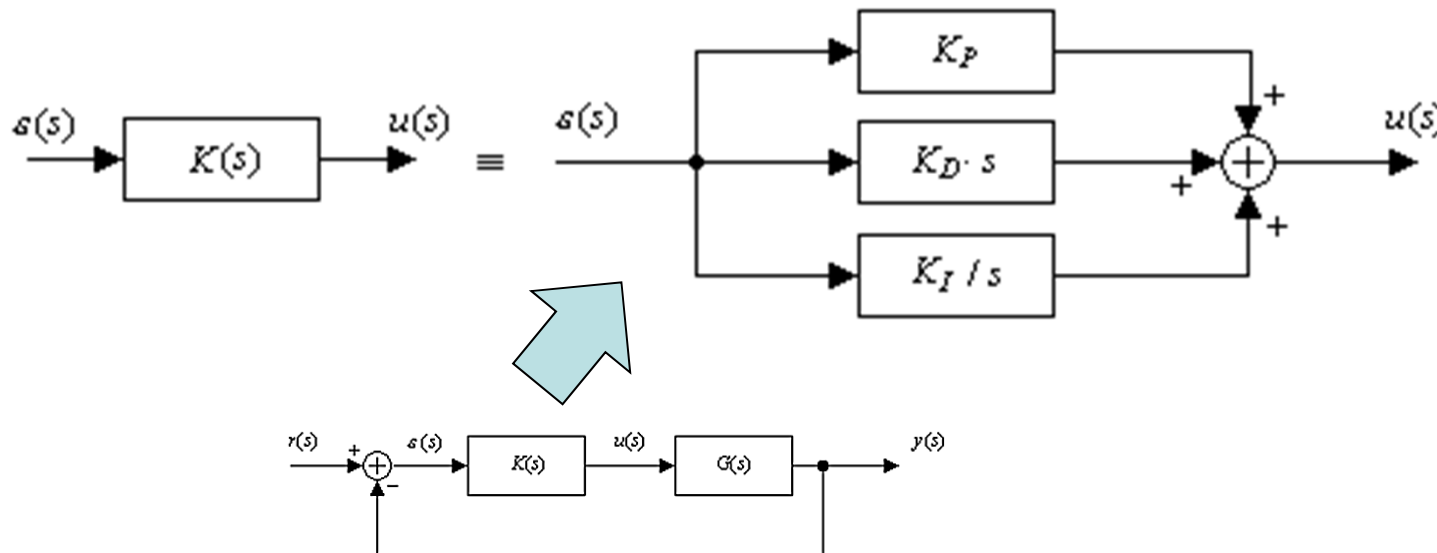


- ❑ I controllori PID sono tra i più usati in scala industriale, per controllori di processo a basso-medio livello tecnologico.

- Utilizzo su processi di varia natura
- Prestazioni soddisfacenti
- Facilità di taratura automatica dei guadagni
- Implementazione tecnologica in varie forme (meccanica, elettronica, digitale, idraulica, ecc.)
- Semplice da capire per la comunità scientifica non controllista



- Il principio base è la combinazione delle operazioni che è possibile fare su equazioni differenziali lineari.





# Controllori P.I.D.

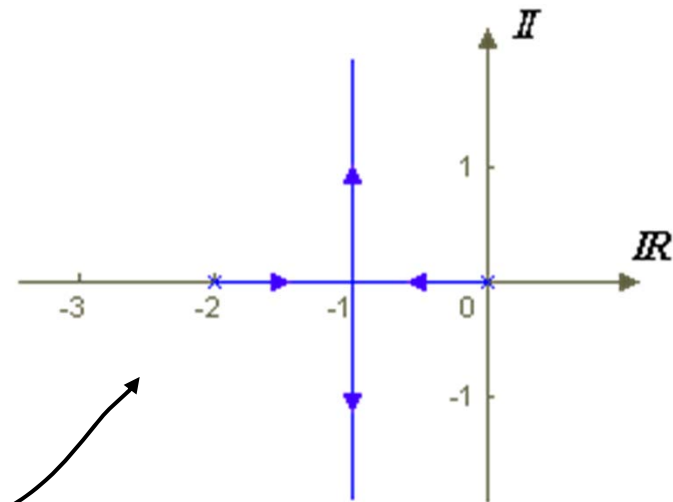
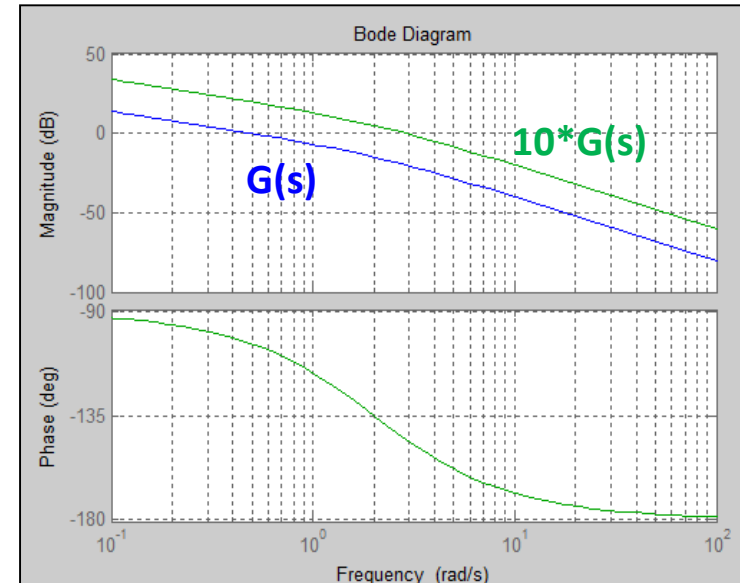


## □ Azione Proporzionale

$$\begin{cases} u(s) = K_P [r(s) - y(s)] = K_P \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) \end{cases}$$

- Controllo di sistemi stabili e/o asintoticamente stabili per cui è necessario alzare il guadagno di anello
- Riduzione dell'errore a regime a comandi tipici
- Aumento della Banda Passante

$$\omega_{BW} \approx \frac{0.35}{T_R}$$
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad K(s)G(s) = \frac{K_P}{s(s+2)}$$





## Controllori P.I.D.



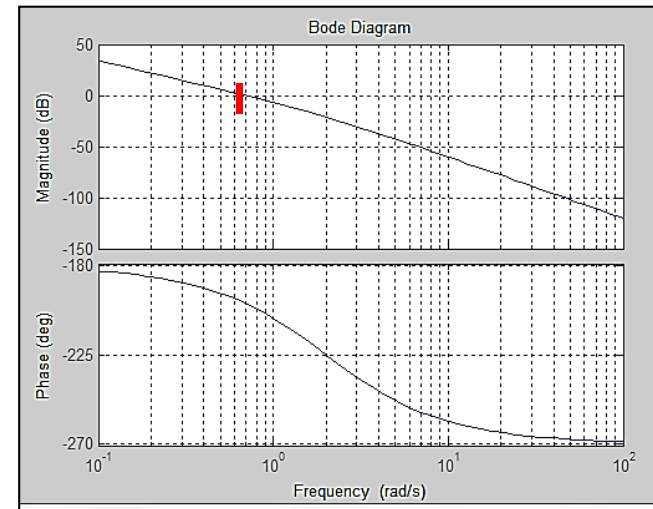
### □ Azione Integrale

$$\begin{cases} u(s) = \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

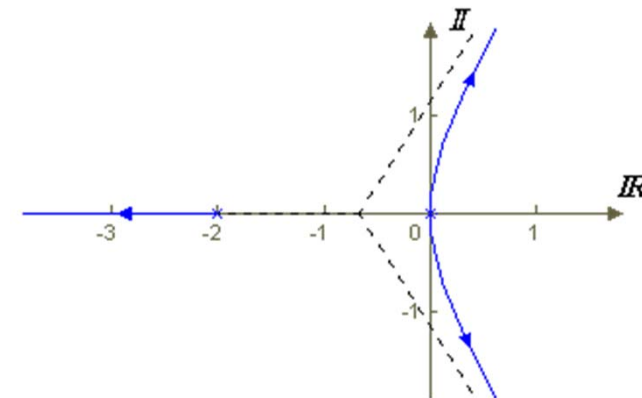
- Requisiti di errore a regime
- Aumento del Margine di Guadagno GM
- Aumento della Banda Passante
- **Possibilità di Instabilità a causa della perdita di fase dovuta all'integratore**

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$K(s)G(s) = \frac{K_I}{s^2(s+2)}$$



PM < 0, Instabile in anello chiuso





## Controllori P.I.D.

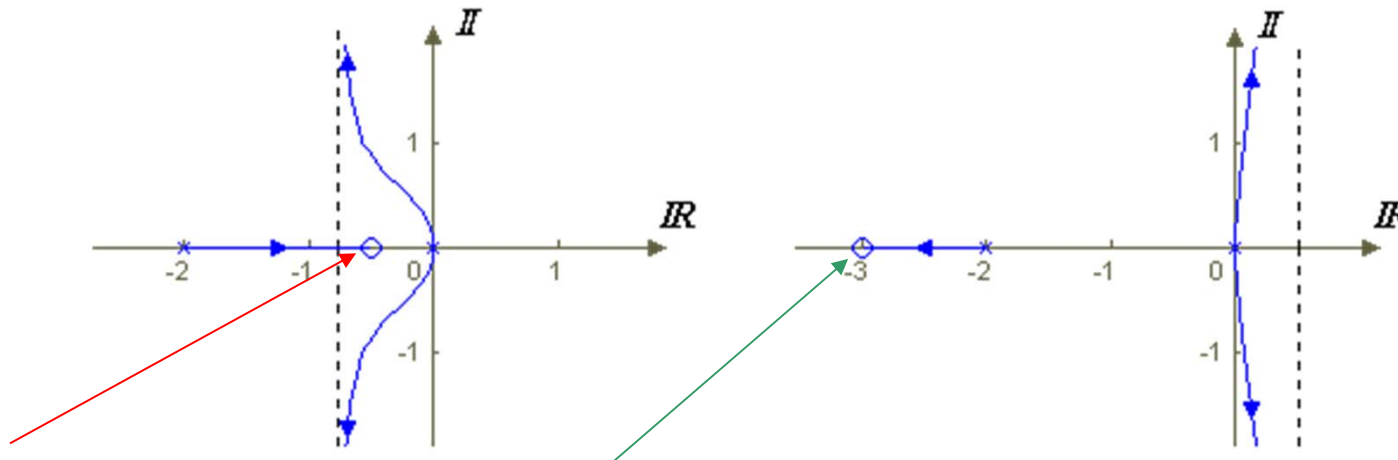


### □ Azione Proporzionale-Integrale, ovvero P.I.

- Controbilanciare l'effetto instabile del polo all'origine
- Aumento della Banda Passante
- Maggiore velocità di risposta

$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= \left( \frac{K_I}{s} + K_P \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \\ &= \frac{K_P s + K_I}{s^2(s+2)} = K_P \cdot \frac{s + K_I/K_P}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$



- **Nota:** vedere la rete correttrice a ritardo di fase



## Controllori P.I.D.



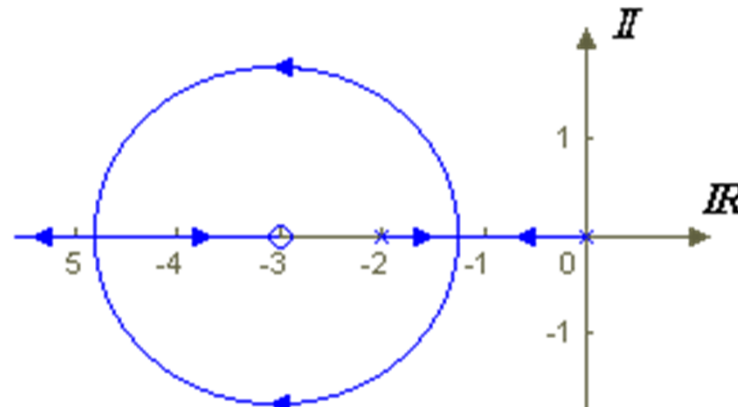
### □ Azione Proporzionale-Derivativa, ovvero P.D.

- Aumento di Banda Passante nel caso di sistemi senza problemi di stabilità
- Muove l'origine degli asintoti verso destra!!
- Aumento Margine di Fase PM
- Aumento velocità di risposta
- Controllore non causale che richiede l'inserimento di un polo fuori banda, dopo che è stato progettato.



$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = (K_P + K_D s) \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= (K_D s + K_P) \frac{1}{s(s+2)} = \\ &= \frac{K_D s + K_P}{s(s+2)} = K_D \cdot \frac{s + K_P/K_D}{s(s+2)} \end{aligned}$$



- **Nota:** vedere la rete correttrice ad anticipo di fase



## Controllori P.I.D.

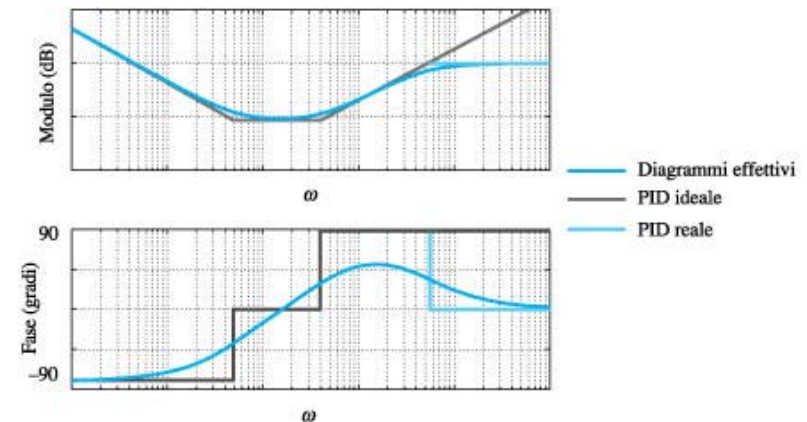


### □ Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa

- Nella sua forma completa, il controllore comprende tutte e tre le componenti
- Il controllore P.I.D. ideale ha due zeri ed un polo ed è quindi non causale

$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases}$$

$$K_{PID}^{REAL}(s) = \frac{K_I}{P} \frac{\frac{K_D}{K_I} s^2 + \frac{K_P}{K_I} s + 1}{s \left( \frac{s}{P} + 1 \right)}$$



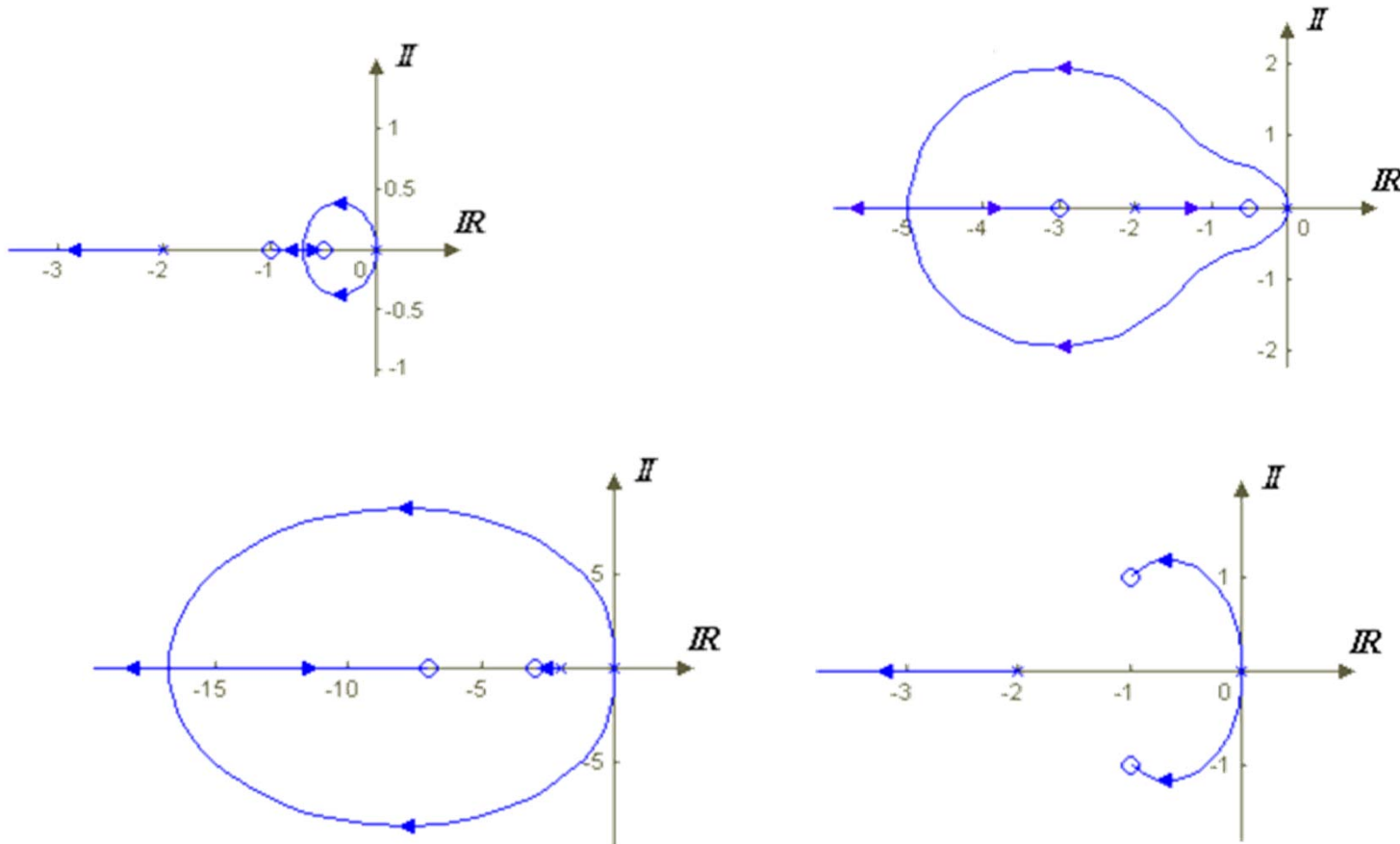


## Controllori P.I.D.



- Influenza della locazione degli zeri di un controllore PID

$$K_{PID}^{IDEAL}(s) \cdot G(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^2(s+2)} = K_D \cdot \frac{s^2 + K_P/K_D s + K_I/K_D}{s^2(s+2)}$$

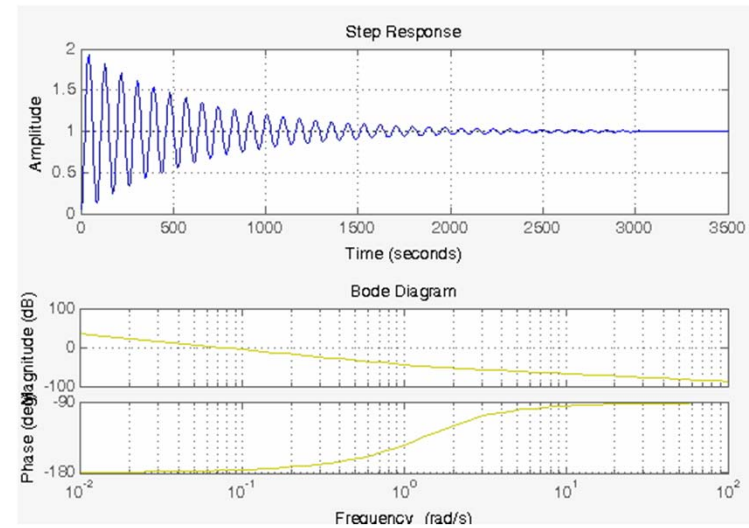
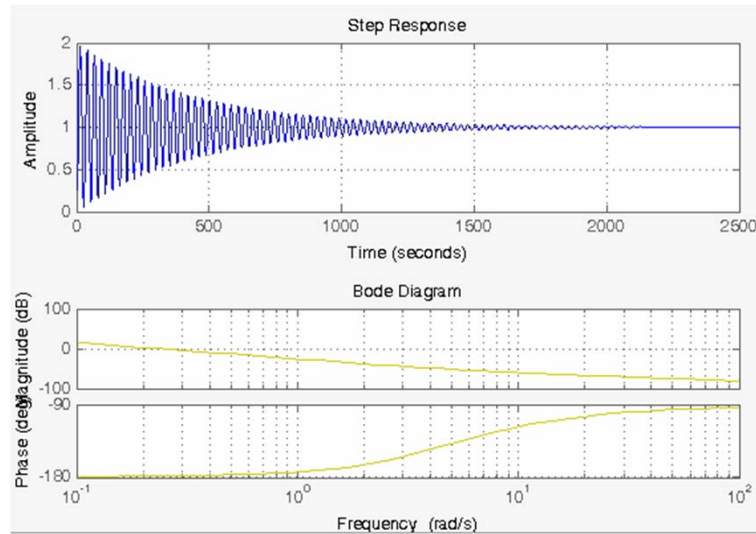
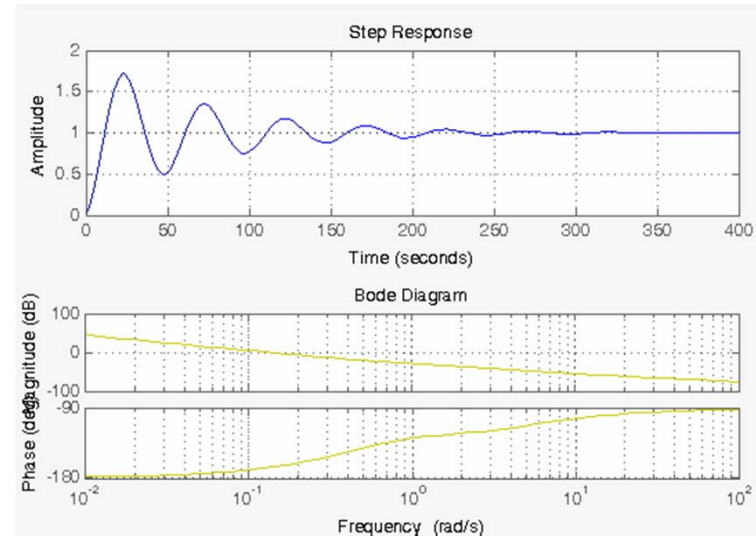
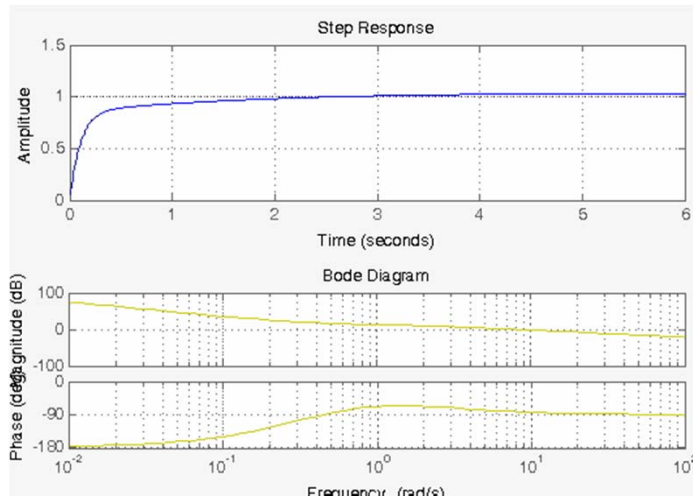




# Controllori P.I.D.



- Influenza della locazione degli zeri di un controllore PID (sisotool)







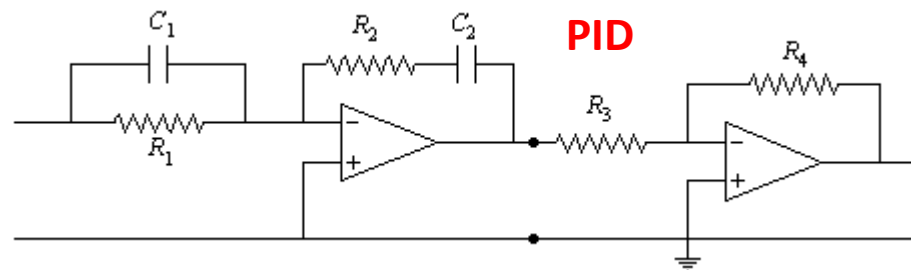
## Controllori P.I.D.



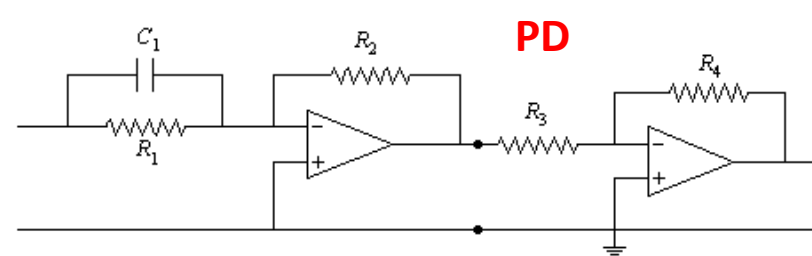
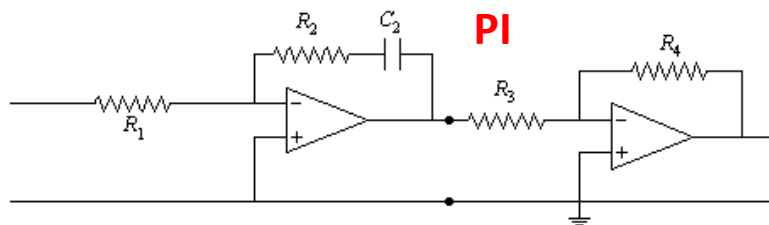
- Contributo alla risposta temporale

CL RESPONSE	RISE TIME	OVERSHOOT	SETTLING TIME	S-S ERROR
<b>K<sub>p</sub></b>	Decrease	Increase	Small Change	Decrease
<b>K<sub>i</sub></b>	Decrease	Increase	Increase	Eliminate
<b>K<sub>d</sub></b>	Small Change	Decrease	Decrease	Small Change

- Realizzazione Elettronica Analogica



$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left( C_1 R_2 s + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2 s} \right)$$

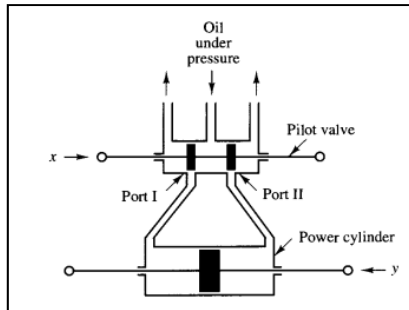




## Controllori P.I.D.



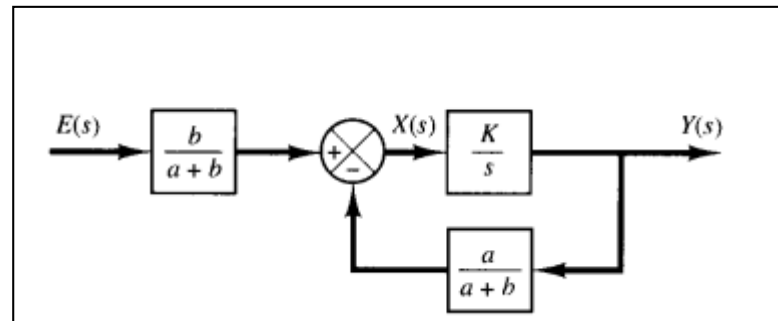
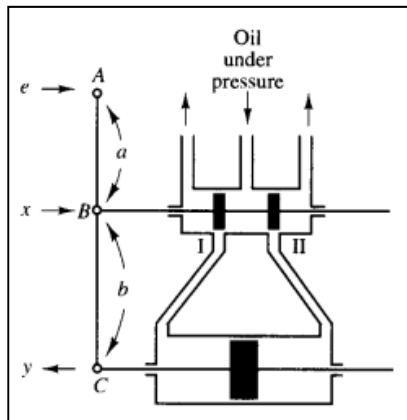
### Realizzazione Idraulica: Controllore Integrale



$$A[m^2]\rho[\frac{kg}{m^3}]dy[m] = q[\frac{kg}{sec}]dt[sec] \quad q = K_1x$$

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1x \Rightarrow \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

### Realizzazione Idraulica: Controllore Proporzionale - Integrante



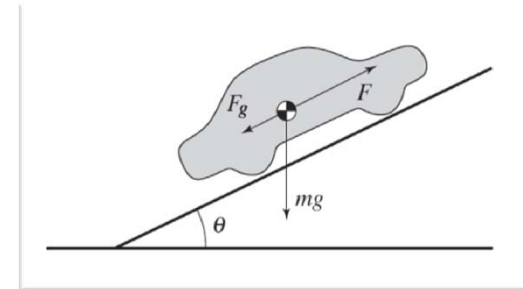
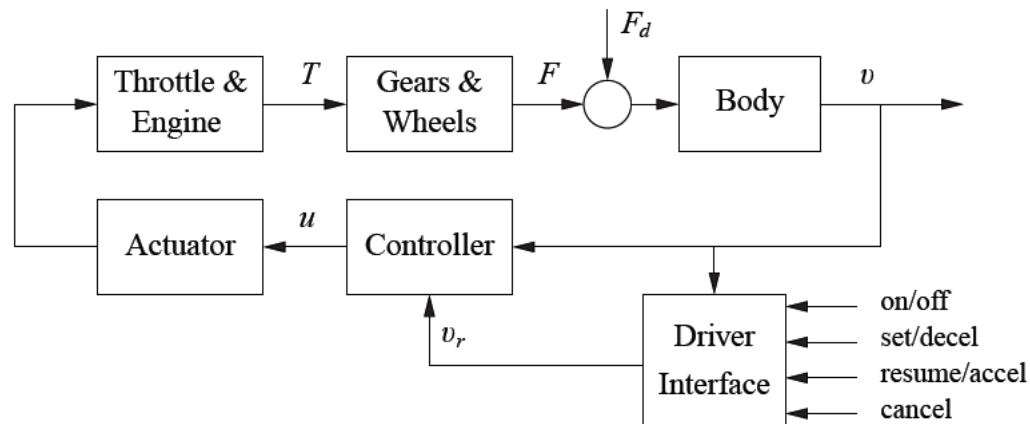
$$\frac{y(s)}{e(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{b}{a+b} \frac{K}{s}} = \frac{bK}{(a+b)s + Ka}$$



# Controllori P.I.D.

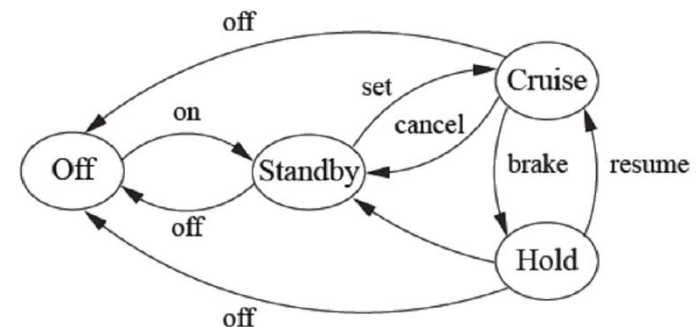


## □ Esempio: Cruise Control, Tracking di velocità



## □ Controllo diviso in 2 parti:

- Macchina a stati finiti per l'implementazione dei vari modi operativi.
- Controllo classico per il raggiungimento dei requisiti richiesti all'interno di ogni modo di operazione.



$$m \frac{dv}{dt} = F_c + F_d = F_c - F_a - F_g - F_r$$



## Controllori P.I.D.



- Il riferimento al controllore è dato dal guidatore:  $v = v_r$
- Modello linearizzato intorno ad una condizione di equilibrio data da velocità costante, pendenza della strada costante, posizione fissata dell'acceleratore per ottenere la velocità costante desiderata.  $(v_e, \theta_e, u_e)$

$$m \frac{d(v - v_e)}{dt} = -a(v - v_e) - b_g(\theta - \theta_e) + b(u - u_e)$$

- Esempio numerico:

$$\frac{dv}{dt} = -0.0101(v - 20) - 9.8\theta + 1.3203(u - 0.1530)$$

$$\begin{aligned}\dot{v} + 0.0101v &= -9.8\theta + 1.3203u + 0.202 - 0.2134 = \\ &= 1.3203u - 9.8\theta - 0.0114\end{aligned}$$

- La dinamica di moto perturbato vale quindi:

$$\dot{v} + 0.0101v = -9.8\theta + 1.3203u$$

- In condizioni di equilibrio la velocità decade con costante di tempo  $\tau$

$$v(t) = v_0 e^{-0.0101t}$$

$$\tau \approx 100 \text{ sec}$$



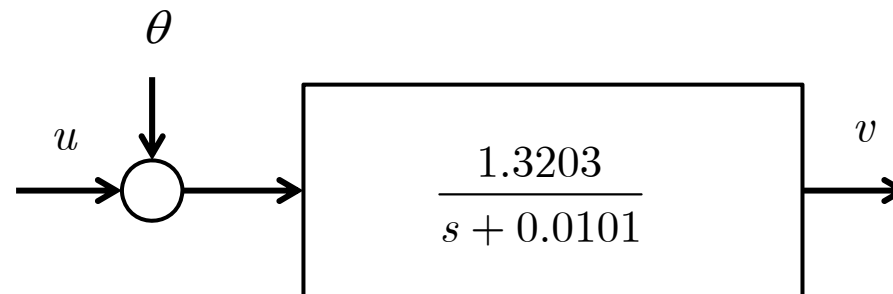
## Controllori P.I.D.



- Obiettivi del controllore:

- Aumentare la banda passante per velocizzare la risposta (Comportamento anticipo di fase)
- Risposta possibilmente del secondo ordine
- Riduzione del guadagno di anello per attenuazione dei disturbi

□ Problema del mantenimento di velocità costante in presenza di variazioni di pendenza della strada, variabile da controllare  $\Rightarrow v$ , con  $\theta$  = costante



□ **Nota:** La presenza di pendenza non nulla ( $\theta \neq 0$ ) può essere introdotta, a livello di modello in diversi modi:

- Presenza di un disturbo costante  $d_i = -9.8\theta$
- Compensazione mediante un ingresso di equilibrio

$$1.3203u - 9.8\theta = 1.3203(u + u')$$



## Controllori P.I.D.



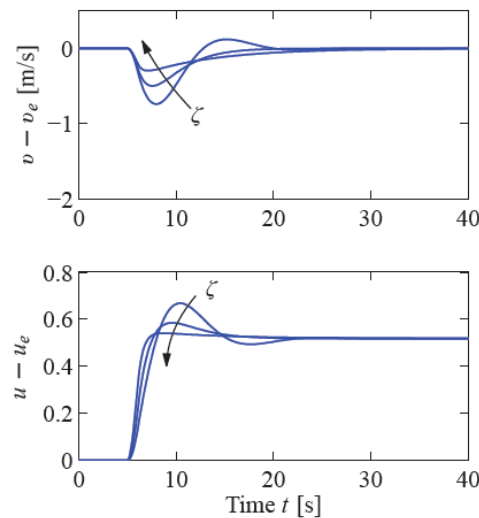
- Anticipo di fase, velocità di risposta ed errore a regime richiedono un controllore di tipo PI

$$G(s) = \frac{1.3203}{s + 0.0101}, K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

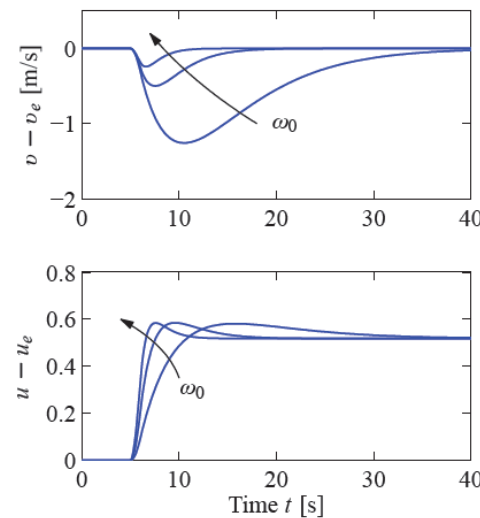
$$T(s) = \frac{1.3203(K_P s + K_I)}{s^2 + (0.0101 + K_P)s + K_I}, G(s)K(s) = \frac{1.3203(K_P s + K_I)}{s(s + 0.0101)}$$

$$D(s) = s^2 + (0.0101 + K_P)s + K_I = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

- Simulazioni relative a: salita con pendenza di  $4^\circ$  a  $t = 5$  sec.



(a)  $\omega_0 = 0.5, \zeta = 0.5, 1, 2$



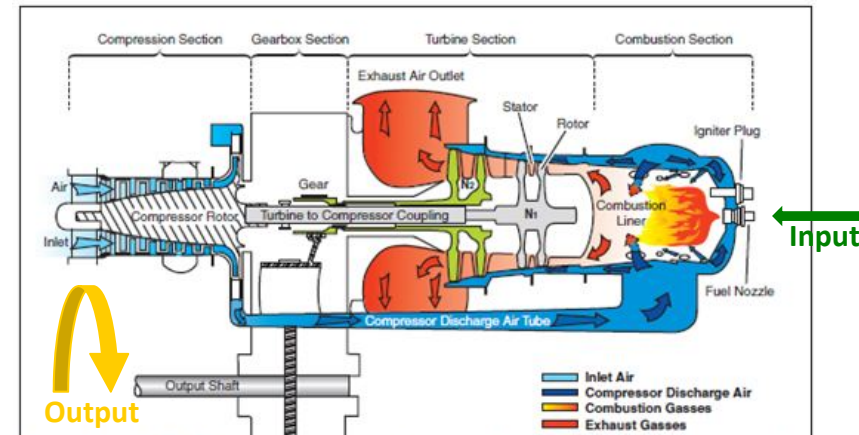
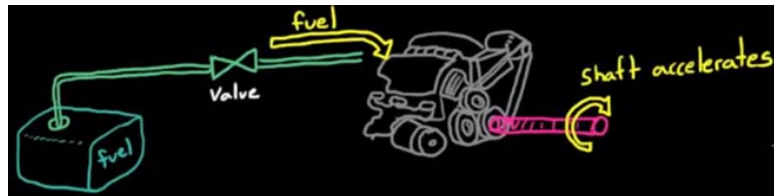
(b)  $\zeta = 1, \omega_0 = 0.2, 0.5, 1$



## Controllori P.I.D.

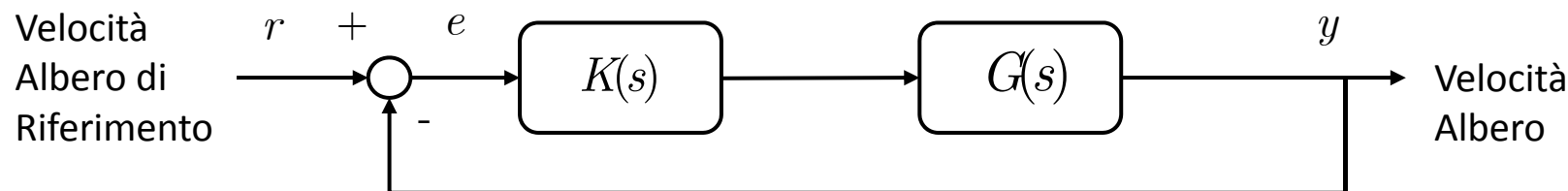


### □ Esempio: Controllo Albero Motore mediante Livello di Carburante

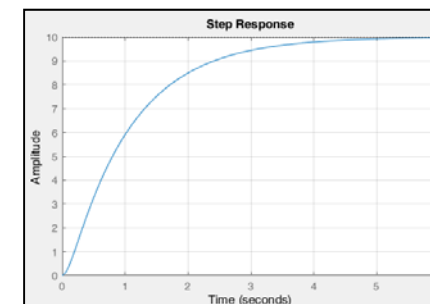


- Apertura della valvola (in radianti) produce un aumento della rotazione dell'albero (in radianti al secondo).

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1}, K_{PID}(s) = \frac{v(s)}{e(s)} = 5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}$$



- **Verifica Modello:** Apertura valvola produce un aumento del numero di giri fino al punto di equilibrio tra energia immessa (carburante che brucia) e perdite (calore, suono, frizione, ecc.). 1 Rad. Produce 10 Rad/sec

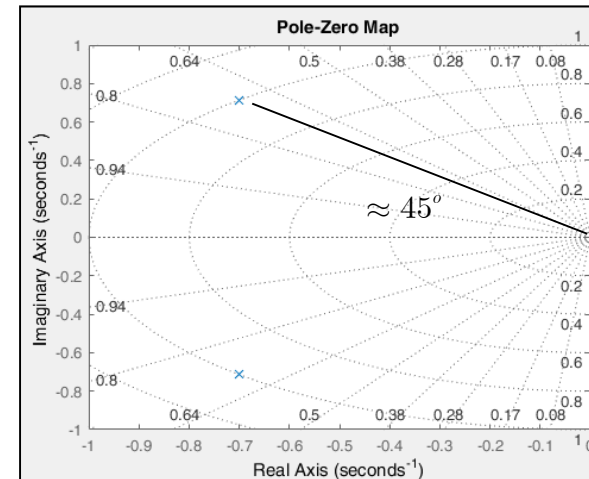
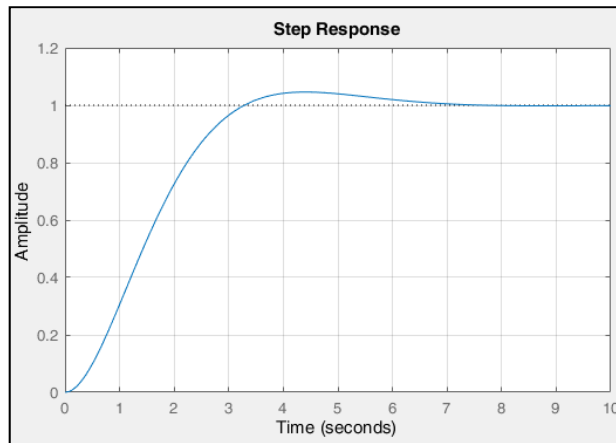




## Controllori P.I.D.



- **Specifiche di Progetto:** Selezionare il parametro  $\tau$  della componente integrale in modo da avere uno smorzamento in anello chiuso superiore a 0.7, (ovvero  $\xi \geq 0.7$ ) ed una stima dei poli in anello chiuso, mediante poli dominanti.



- Approccio con il Luogo delle Radici, isolando il parametro  $\tau$ :

$$K(s)G(s) = (5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}) \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1}$$

$$1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + (5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}) \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1} \right] = 0$$

$$1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + \tau \frac{0.01s^3 + 0.41s^2 + 5.1s}{5} \right] = 0$$

- Moltiplicazione e divisione della FdT in anello chiuso per 5



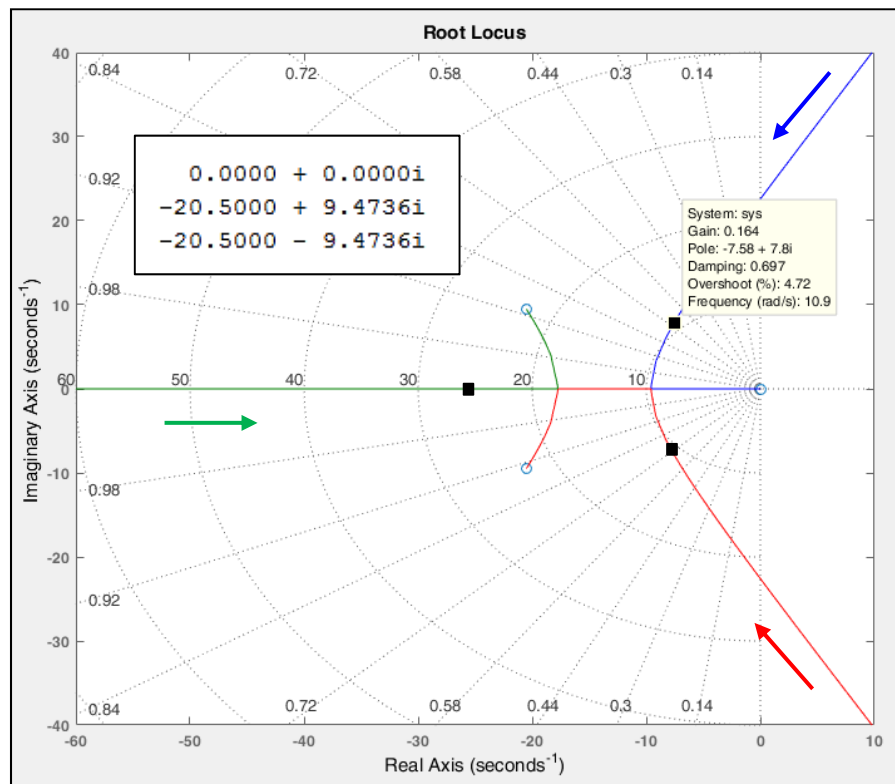


## Controllori P.I.D.



$$1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + \tau \frac{0.01s^3 + 0.41s^2 + 5.1s}{5} \right] = 0$$

- Il Luogo ha 3 zeri e nessun polo. Vi sono quindi 3 rami dei poli in ciclo chiuso che provengono da  $\infty$  e vanno agli zeri per  $0 > \tau > \infty$



- Baricentro del Luogo  $\approx -13.7$
- Per lo smorzamento minimo desiderato si ha (trigonometria):  
 $p_{1,2} \approx -7.6 \pm 7.8j$   
 $\tau \approx 0.16$
- Il terzo polo può essere calcolato dal valore del baricentro (costante per ogni guadagno):

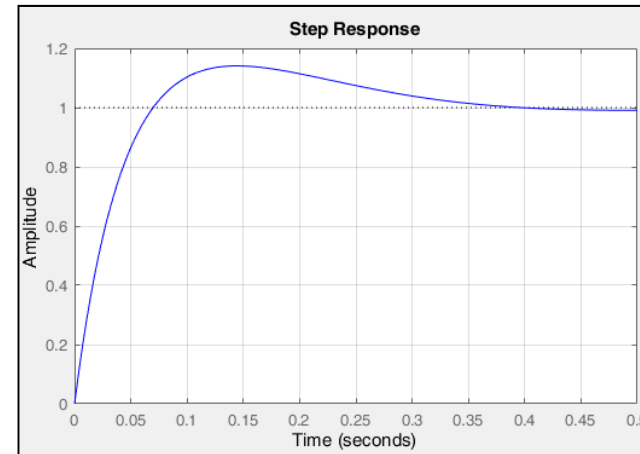
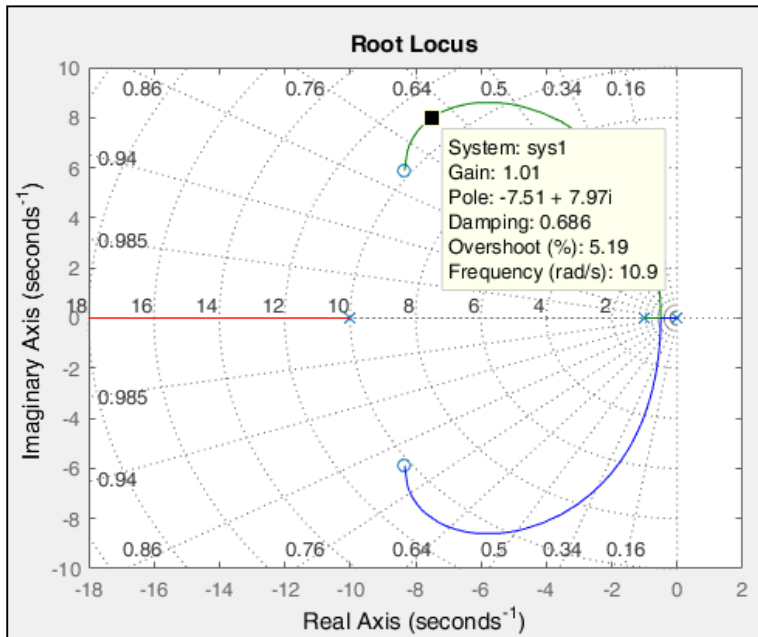
$$p_3 \approx -13.7 * 3 + 15.2 = -25.9$$



# Controllori P.I.D.

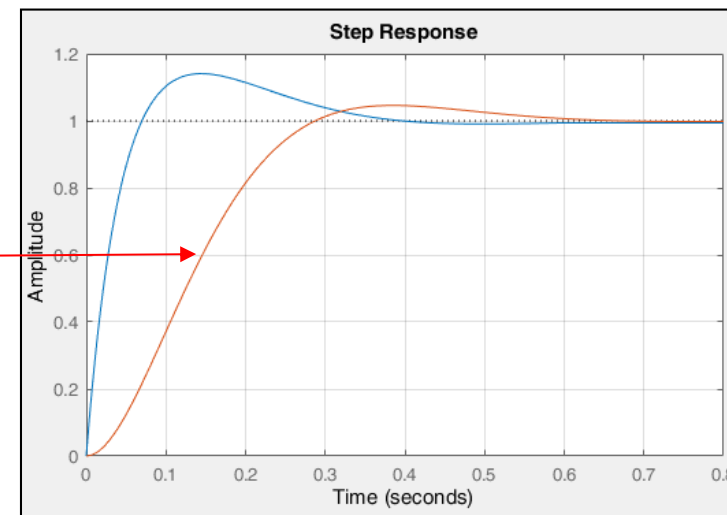


- Valutazione rispetto all'andamento desiderato mediante poli dominanti



$$G_{DES}(s) = \frac{130.6}{s^2 + 16s + 130.6}, \tau \approx 0.16, \xi = 0.7, \omega_n = 11.43$$

- La pulsazione propria non smorzata è stata scelta in modo da avere lo stesso tempo di assestamento



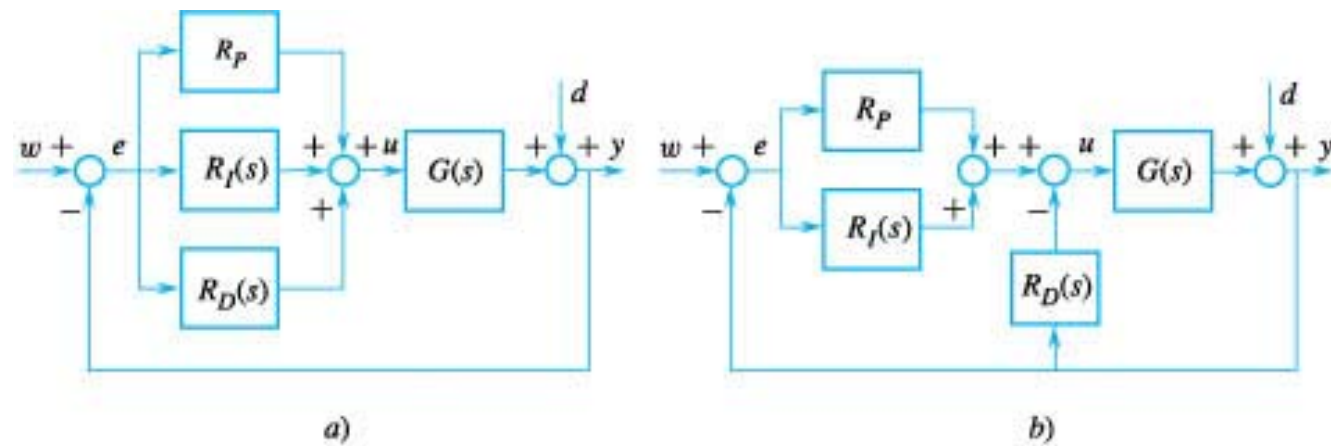


## Controllori P.I.D.

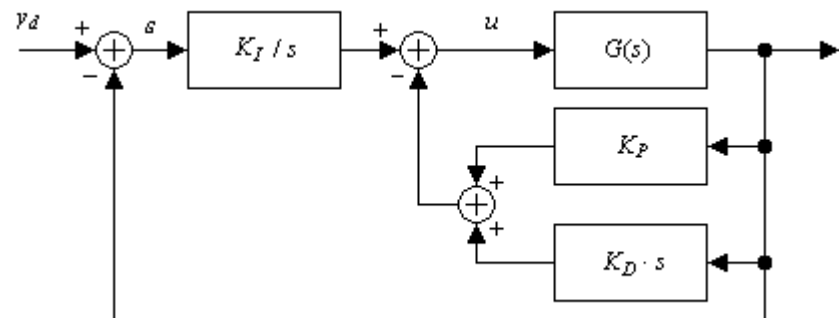


### Limitazioni: Azione derivativa

- Limitazione dell'azione derivativa



- L'azione derivativa in uscita migliora il comportamento del sistema non soggetto a brusche variazioni del segnale di errore quando esso viene derivato direttamente come nel caso standard



- I poli in anello chiuso sono gli stessi nelle tre implementazioni



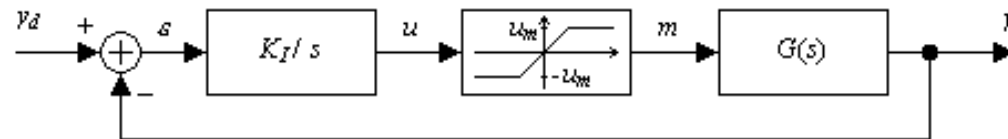
# Controllori P.I.D.



## ❑ Limitazioni: Fenomeno di Wind-up

- All'inizio dell'operatività, grandi errori transitori dello stesso segno vengono integrati dal controllore PID. Si possono avere situazioni per cui tale segnale cresce fino a saturare l'attuatore, portando anche ad instabilità in ciclo chiuso.
- Consideriamo un'azione puramente integrale con limiti di saturazione:

$$m(t) = \begin{cases} -u_m & \text{per } u(t) < -u_m \\ u(t) & \text{per } |u(t)| \leq u_m \\ u_m & \text{per } u(t) > u_m \end{cases}$$



- Se l'errore  $e$  mantiene lo stesso segno per un certo periodo di tempo, l'uscita dal blocco integratore cresce sempre di più e continua a crescere anche quando, per effetto della saturazione, l'uscita dell'attuatore è limitata al valore  $u_m$  (o  $-u_m$ ); in queste condizioni l'anello di regolazione risulta interrotto, dato che il termine integrale continua a crescere ma tale incremento non produce alcun effetto sulla variabile di comando dell'impianto. *Anche quando l'errore cambia segno il regolatore resta inattivo poiché, prima di avere un segnale utile per la regolazione, il termine integrale si deve "scaricare"; questi effetti dovuti alla saturazione dell'azione integrale sono noti come effetto wind-up*



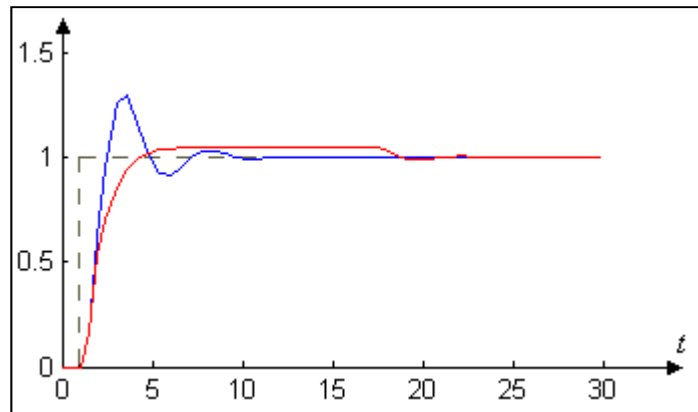
## Controllori P.I.D.



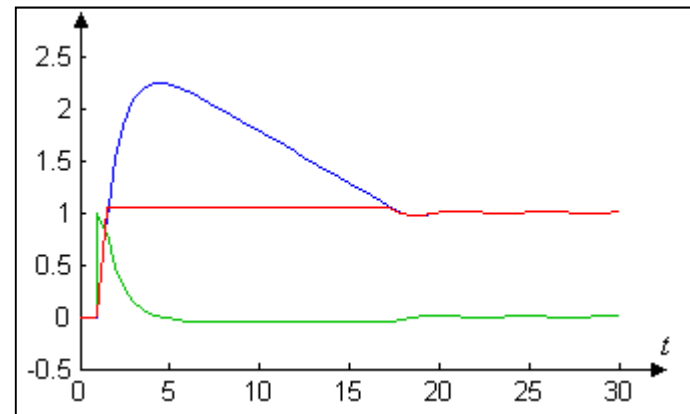
- Consideriamo un sistema con un ingresso a gradino (all'istante  $t = 1$ ) e tale che, per lo schema appena visto, sia

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_I = 2$$

Uscita



Errore, Controllo



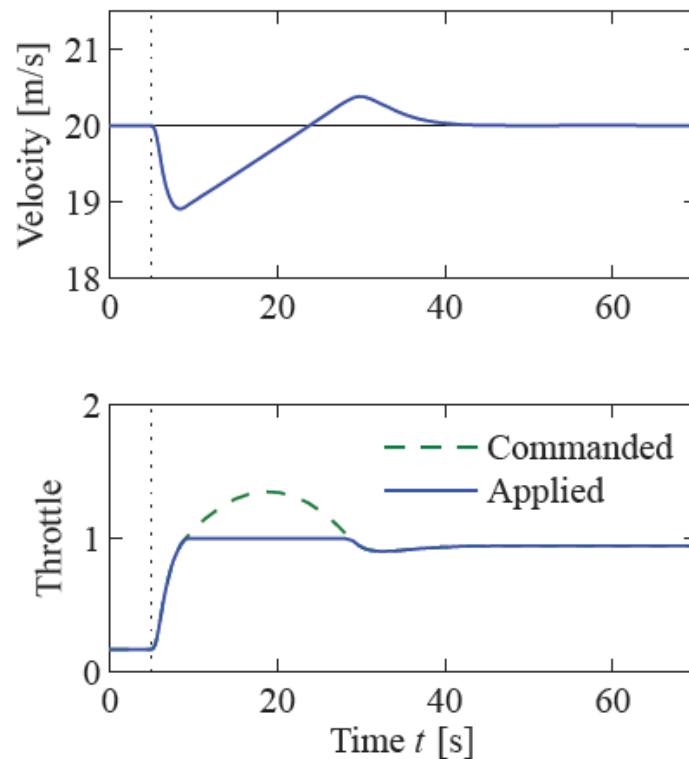
- Vedi testo di Bolzern, pag. 390 e sgg,



## Controllori P.I.D.



### □ Esempio: Cruise Control con Anti-wind up (Pendenza 6 gradi)

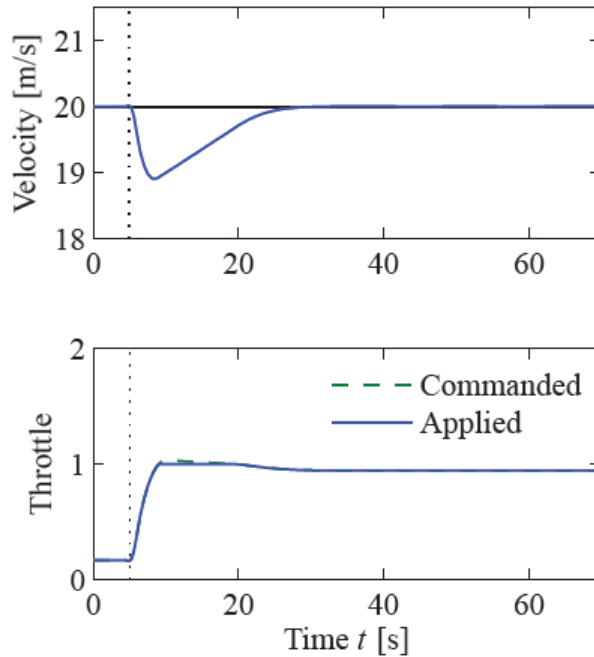


(a) Windup

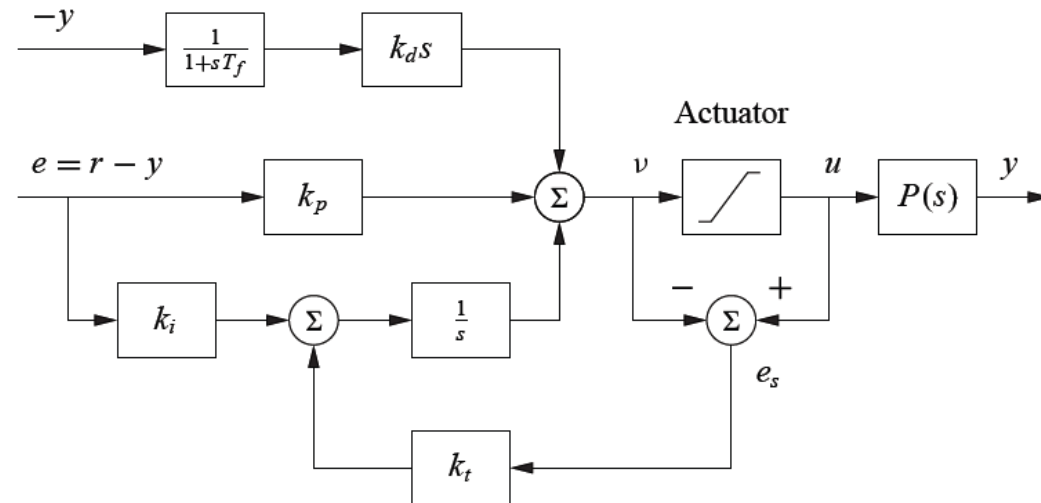
- When encountering the slope at time  $t = 5$ , the velocity decreases and the throttle increases to generate more torque.
  - However, the torque required is so large that the throttle saturates. The error decreases slowly because the torque generated by the engine is just a little larger than the torque required to compensate for gravity.
  - The error is large and the integral continues to build up until the error reaches zero at time 30, but the controller output is still larger than the saturation limit and the actuator remains saturated.
  - The integral term starts to decrease, and at time 45 and the velocity settles quickly to the desired value.
- **Notice that it takes considerable time before the controller output comes into the range where it does not saturate, resulting in a large overshoot.**



## Controllori P.I.D.



(b) Anti-windup



PID controller with a filtered derivative and anti-windup. The input to the integrator ( $1/s$ ) consists of the error term plus a “reset” based on input saturation. If the actuator is not saturated, then  $e_s = u - v$ , otherwise  $e_s$  will decrease the integrator input to prevent windup.



# Controllori P.I.D.



## □ Tuning

- Taratura Automatica
  - Nel caso di sistemi di cui non si conosce precisamente la FdT e/o sistemi nonlineari, è possibile stabilire delle regole empiriche di tuning (“Taratura”) dei parametri di un controllore P.I.D.
  - Le regole più note risalgono al 1942 e furono proposte inizialmente da **Ziegler e Nichols**.
  - Le tecniche principali sono due e si basano rispettivamente su:
    - Risposta ad un gradino di ingresso del processo (BIBO stabile) a catena aperta.
    - Misura del periodo di oscillazione del sistema a catena chiusa all'aumentare del guadagno  $K_p$ .
- Un generico controllore PID è dato da:

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$





# Controllori P.I.D.



## Metodo del Gradino in anello aperto

- Consideriamo un sistema privo di moto oscillatorio e rappresentabile dalla seguente FdT di anello:

$$G_{OL}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

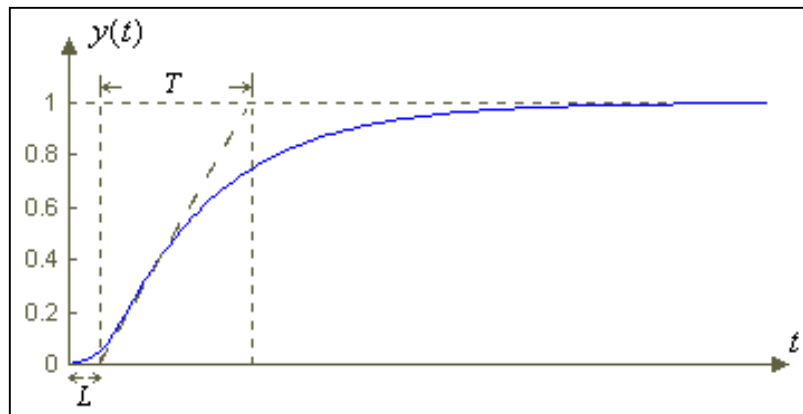


Tabella 1 di Z - N

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
$P$	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
$PI$	$\frac{0.9 \cdot T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
$PID$	$\frac{1.2 \cdot T}{L}$	$2 \cdot L$	$0.5 \cdot L$

Che produce, nel caso PID:

$$K(s) = 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = \frac{0.6 \cdot T \cdot (s + 1/L)^2}{s}$$



## Controllori P.I.D.



### ▪ Metodo dell'aumento del guadagno in ciclo chiuso

- Questo metodo si applica soltanto a sistemi che siano stabilizzabili. Mediante controllo proporzionale puro  $K_p$ , il sistema viene portato in oscillazione armonica ponendo

$$K_P = K_{CR} \qquad P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$$

- Da cui si ricava il periodo dell'oscillazione armonica

Tabella 2 di Z - N

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
$P$	$0.5 \cdot K_{CR}$	$\infty$	0
$PI$	$0.45 \cdot K_{CR}$	$\frac{1}{1.2} \cdot P_{CR}$	0
$PID$	$0.6 \cdot K_{CR}$	$0.5 \cdot P_{CR}$	$0.125 \cdot P_{CR}$



## Controllori P.I.D.



- Un controllore PID completo è dato quindi da:

$$K(s) = 0.6 \cdot K_{CR} \left( 1 + \frac{2}{P_{CR}s} + 0.125 \cdot P_{CR}s \right) = 0.075 \cdot K_{CR} P_{CR} \cdot \frac{(s + 4 / P_{CR})^2}{s}$$

- Il controllore PID può essere anche tarato per fornire uno specifico GM oppure PM**

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
Assegn. MG = $k_m$	$\frac{K_{CR}}{k_m}$	$\frac{P_{CR}}{\pi}$	$\frac{P_{CR}}{4\pi}$
Assegn. MF = $\Phi_m$	$K_{CR} \cos (\Phi_m)$	$\frac{P_{CR}}{\pi} \frac{1 + \sin (\Phi_m)}{\cos (\Phi_m)}$	$\frac{P_{CR}}{4\pi} \frac{1 + \sin (\Phi_m)}{\cos (\Phi_m)}$



## Controllori P.I.D.



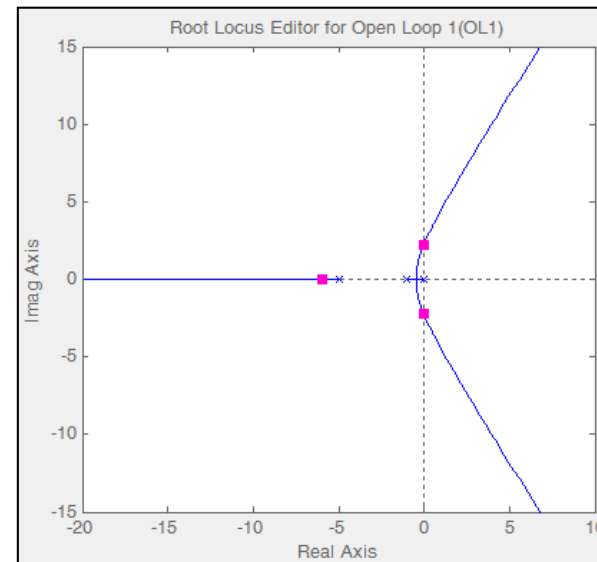
□ **Esempio**  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$

1. Consideriamo un controllore proporzionale  $K(s) = K_P$

$$T(s) = \frac{K_P}{s(s+1)(s+5) + K_P}$$

$s^3$	1	5
$s^2$	6	$K_P$
$s^1$	$5 - K_P/6$	
$s^0$	$K_P$	

$$K_{CR} = 30$$





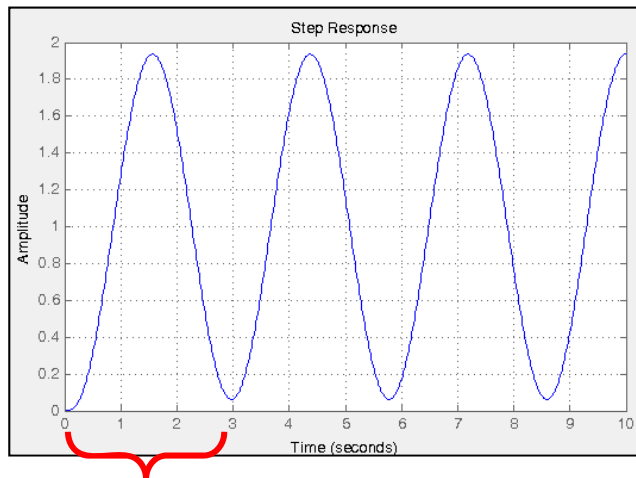
## Controllori P.I.D.



### 2. Calcolo del periodo critico $P_{CR}$

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s + 6)(s^2 + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -6 \\ s_{2/3} = \pm j\sqrt{5} \end{cases}$$



$P_{CR}$

$$P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \text{ sec.}$$



## Controllori P.I.D.



### 3. Taratura dei guadagni del controllore PID mediante ZN

$PID$	$0.6 \cdot K_{CR}$	$0.5 \cdot P_{CR}$	$0.125 \cdot P_{CR}$
-------	--------------------	--------------------	----------------------

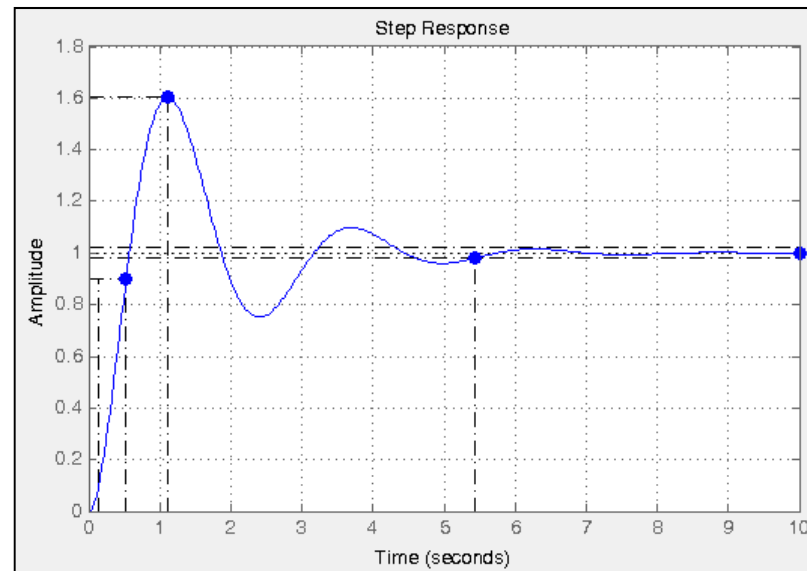
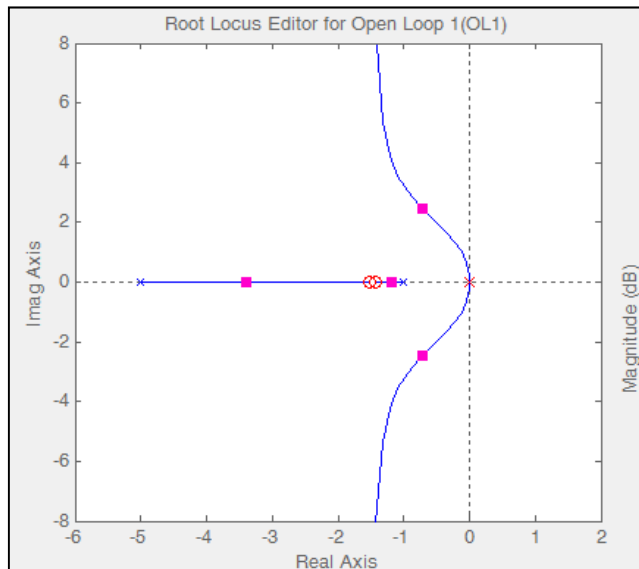
$$K_P = 0.6 \cdot K_{CR} = 18$$

$$T_I = 0.5 \cdot P_{CR} = 1.405 \text{ sec.}$$

$$T_D = 0.125 \cdot P_{CR} = 0.35 \text{ sec.}$$

$$K(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s} = 52.93 \cdot \frac{(1 + \frac{s}{1.5132})(1 + \frac{s}{1.3438})}{s}$$

$$K(s)G(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s^2(s + 1)(s + 5)}$$





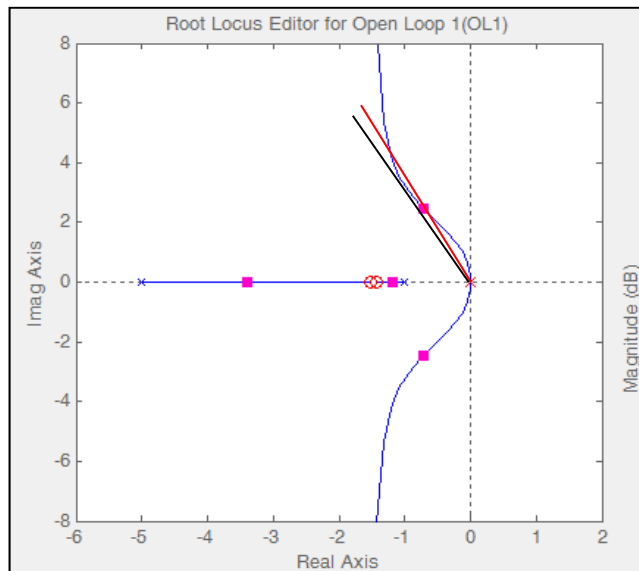
## Controllori P.I.D.



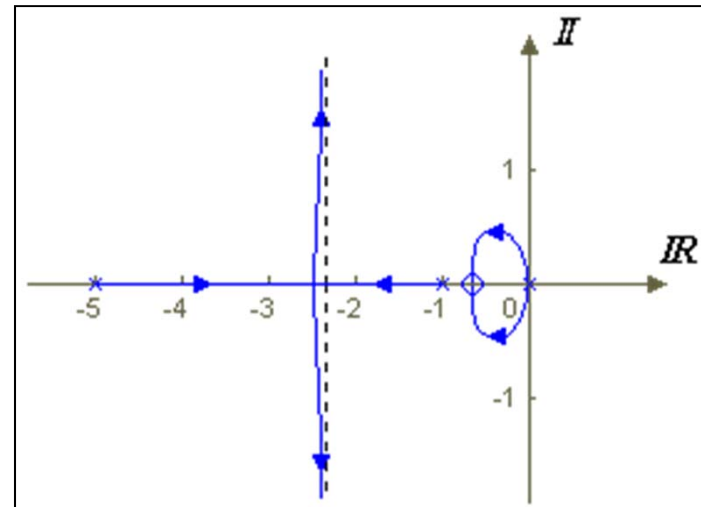
- Ulteriore taratura può essere fatta per migliorare (diminuire) il picco di sovraelongazione.

$$K(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s} \quad K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

- Si deve aumentare lo smorzamento dei poli dominanti



- Aumentando il guadagno ( $K_P$ ) non si cambia molto lo smorzamento, quindi dobbiamo agire su  $T_I$  e  $T_D$ .

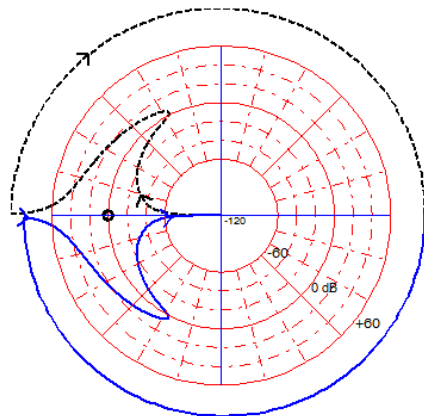
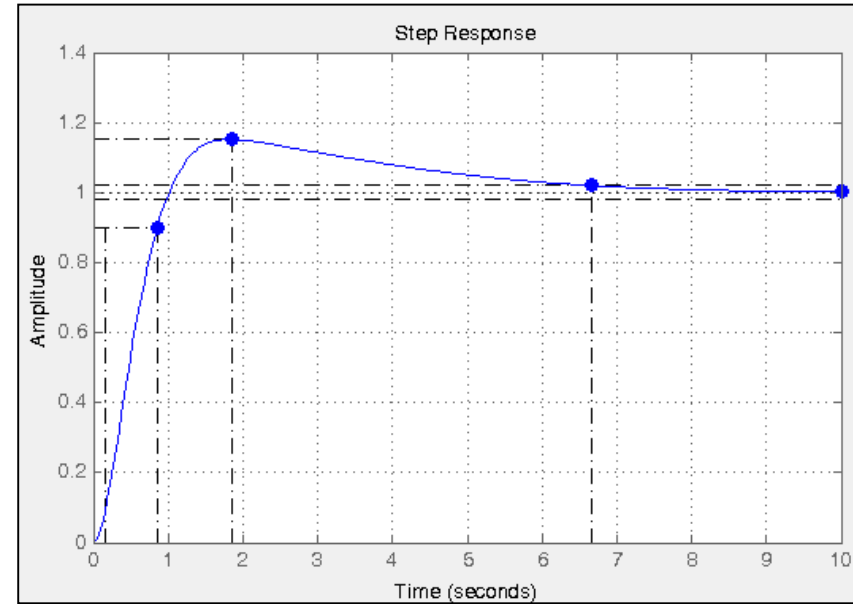
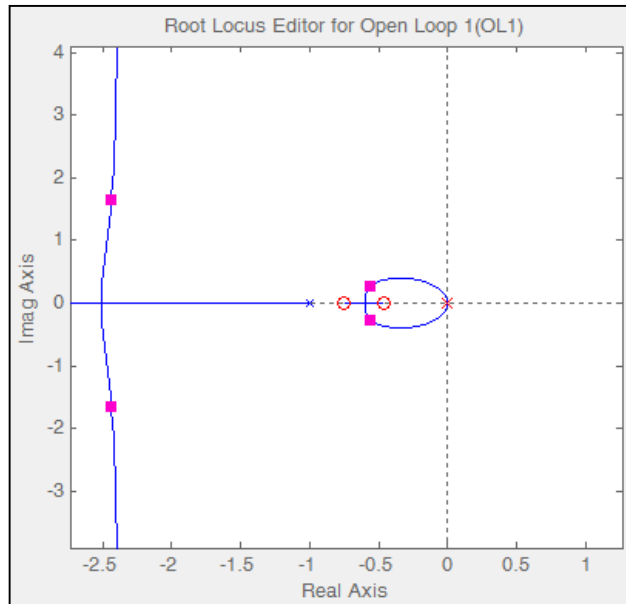




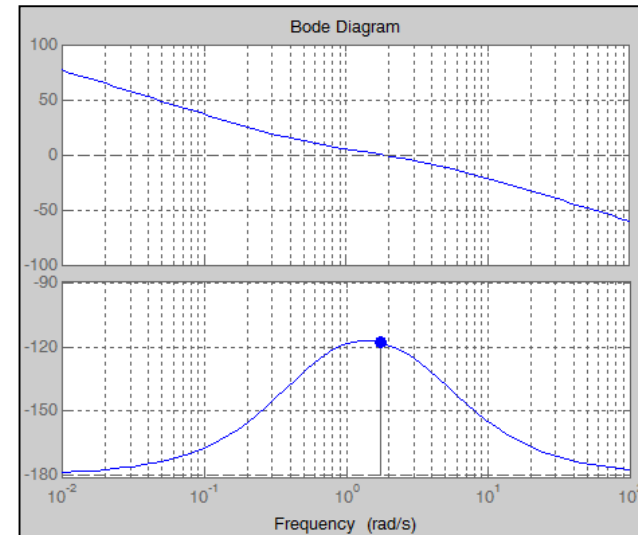
# Controllori P.I.D.



$$K(s) = 9.5375 \cdot \frac{(s + 0.4545)(s + 0.7692)}{s} = 3.3348 \cdot \frac{(1 + 2.2s)(1 + 1.3s)}{s}$$



$$Z = N + P = 0 + 0$$





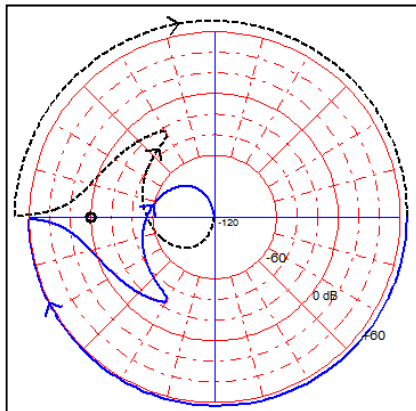
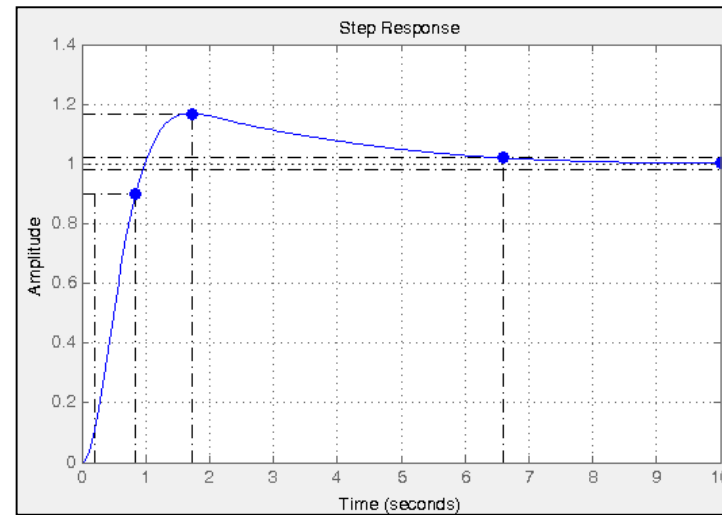
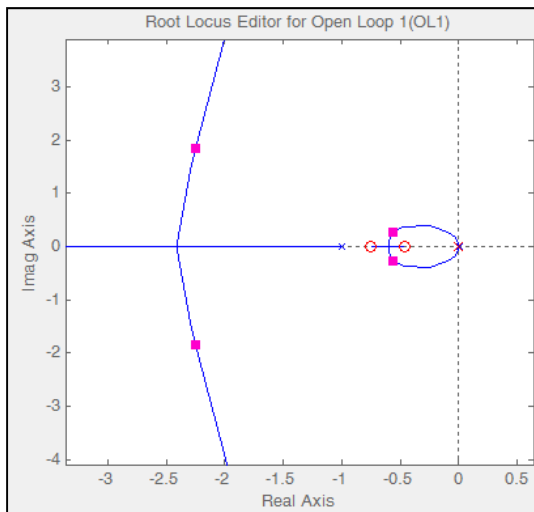


## Controllori P.I.D.

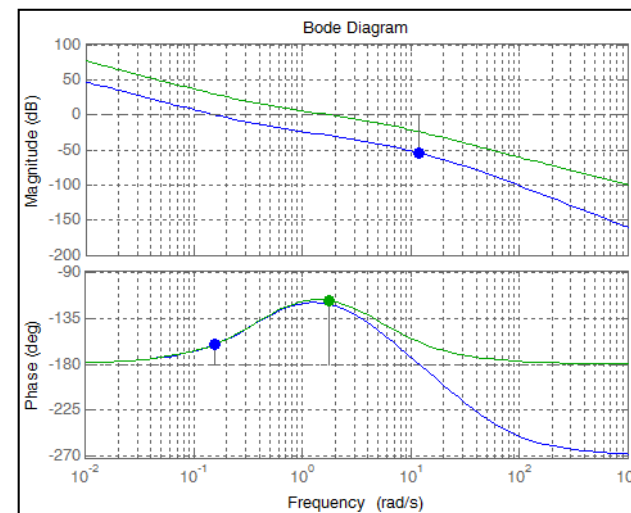


- Per rendere il controllore causale, inseriamo un polo fuori banda

$$|P| \geq |10\omega_{BW}| \approx |10\omega_C| = |10 \cdot 3| \Rightarrow \frac{1}{(s + 30)}$$



$$Z = N + P = 0 + 0$$





## Reti Correttrici

- Le reti correttrici sono dei sistemi di correzione del comportamento dinamico del sistema, che forniscono dei precisi andamenti in funzione della combinazione poli-zeri
- Le reti più comuni provengono storicamente da implementazioni circuitali e di elettronica analogica e digitale, anche se il loro comportamento ingresso-uscita si può realizzare mediante sistemi idraulici, meccanici, ecc.

Rete Anticipatrice (Lead)	Rete Ritardo-Anticipo (Lag-Lead) o a sella
Rete Ritardatrice (Lag)	Filtro a Spillo (Notch)
Rete Anticipo-Ritardo (Lead-Lag)	Filtro a T



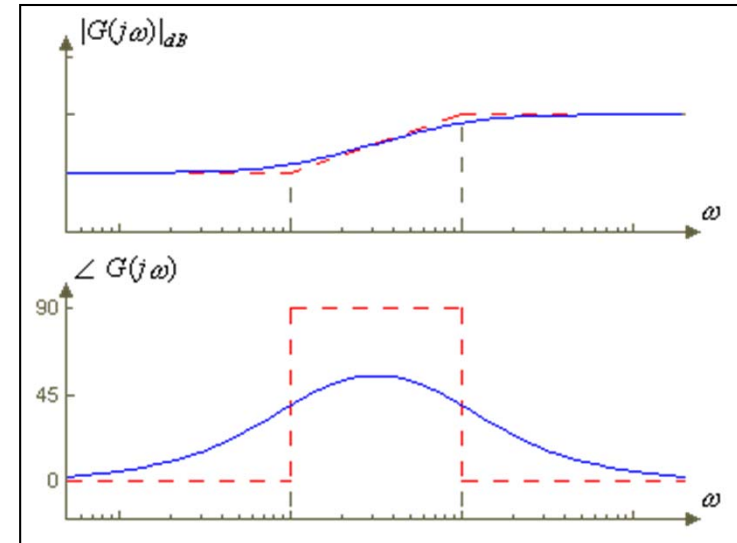
## Reti Correttrici - Lead

### □ Rete ad Anticipo di Fase (Lead Network)

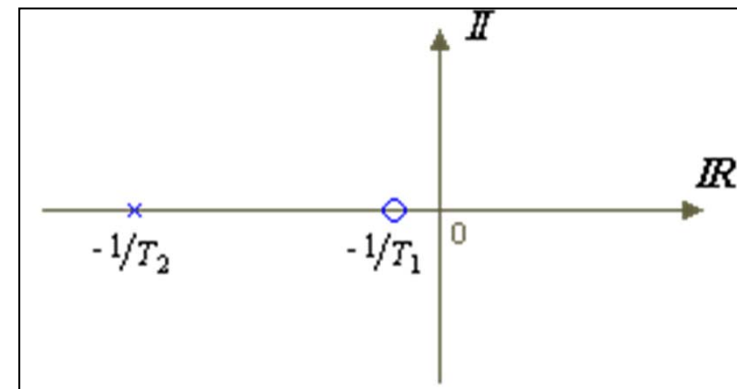
- La rete è anche nota come Filtro passa alto
- Aumenta la banda passante
- migliora la velocità della risposta
- riduce il valore della sovraelongazione e aumenta la stabilità
- alle le basse frequenze (rispetto a quelle della banda in cui agisce) la rete non sfasa ma attenua di  $\alpha$
- alle alte frequenze non sfasa e non attenua

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$



**Nota:** Controllore PD causale





## Reti Correttrici - Lead

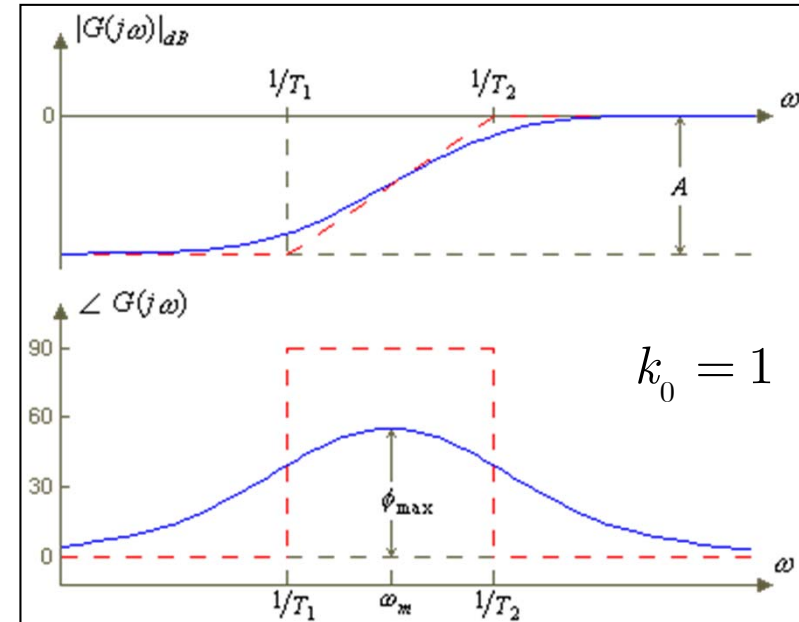


- Si può riscrivere la rete in modo diverso:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} = k_0 \alpha \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s}$$

- Maggiore è la distanza zero-polo e maggiore è il recupero di fase (in applicazioni pratiche  $\phi_{\max} \cong 60$  gradi)



- Massima Amplificazione ( $k_0 = 1$ )**  $A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} > 0$

- Frequenza di massimo Anticipo di Fase**  $\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}}$$



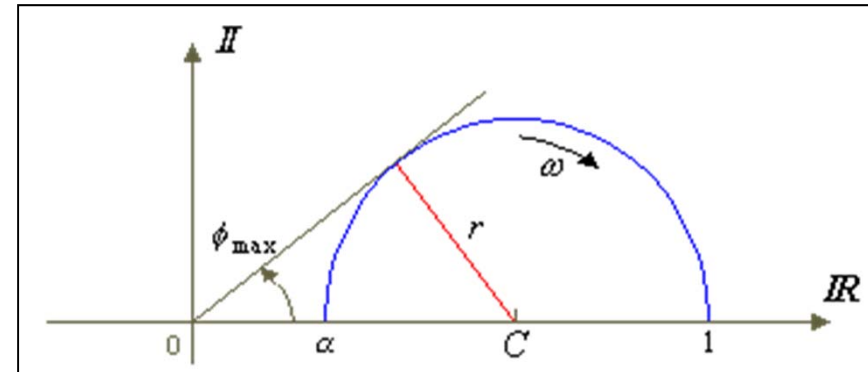
## Reti Correttrici - Lead



- Calcolo del massimo anticipo di fase:

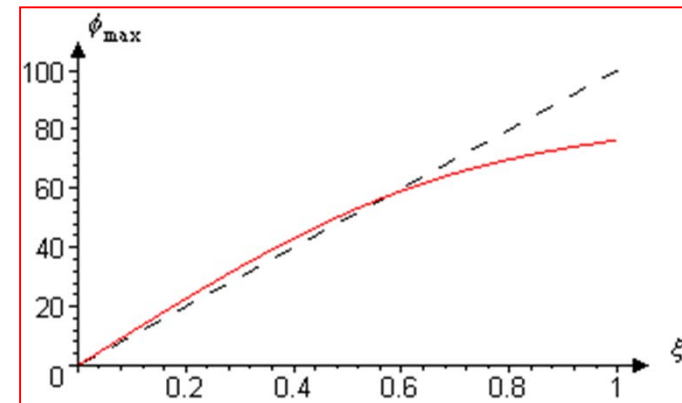
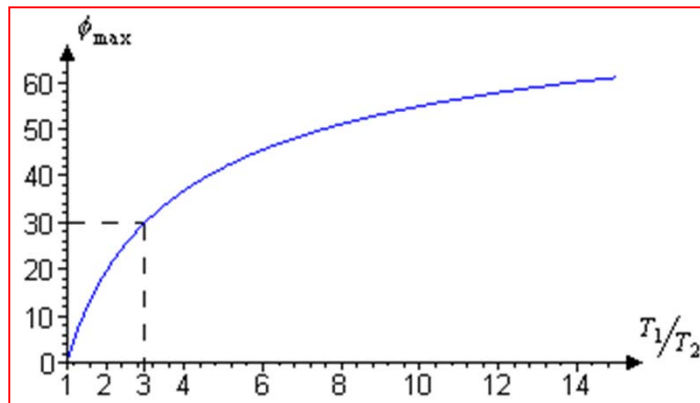
$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = \sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}}$$



- Per un modello del secondo ordine:

$$\phi_{\max} = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\left(\sqrt{4\xi^4 + 1 - 2\xi^2}\right)^{1/2}}$$





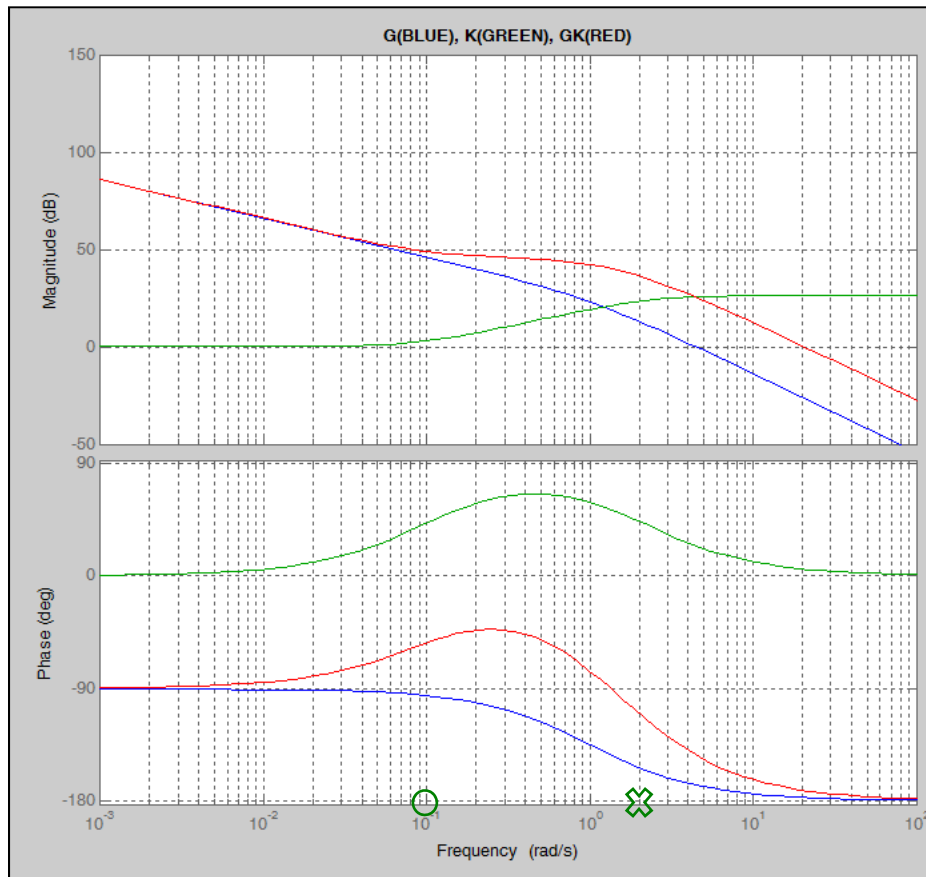
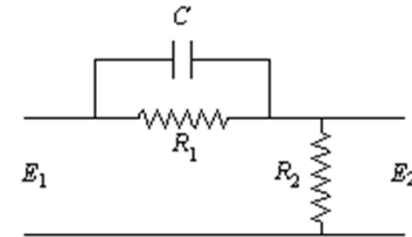
# Reti Correttrici - Lead



## Esempio

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{1+10s}{1+0.476s}$$



$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/Cs}{1 + R_1/Cs}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Cs + 1}$$

$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T_1 = R_1 C$$

Locazione dello zero:  $z = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{R_1 C}$

Locazione del polo:  $p = -\frac{1}{\alpha T_1} = -\frac{1}{\frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}}$



## Reti Correttrici - Lead



- Regole pratiche per la selezione della rete corretttrice ad anticipo di fase:  $K(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$
- 1. Calcolare guadagno ed integratori del controllore per avere la risposta a regime appropriata ->  $K_1(s)$
- 2. Calcolare il margine di fase **PM** della FdT di anello  $K_1(s) G(s)$
- 3. Calcolare l'incremento  $\Delta$  necessario ad avere il **PM** desiderato di progetto
- 4. Aumentare di un certo valore  $\varepsilon$  per tener conto dell'aumento nella frequenza di crossover dovuto all'inserimento della rete anticipatrice ottenendo il  $\Delta_{DES} = \Delta + \varepsilon$  di target
- 5. Calcolare il rapporto  $\alpha = T_2 / T_1$  mediante la relazione:

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = \sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- 6. Calcolare la nuova frequenza di crossover  $\omega_C^n$  tale che  $|K(j\omega_C^n)G(j\omega_C^n)| = A_{dB} = 20 \log_{10} \left( \left[ \frac{T_1}{T_2} \right] \right)$  al di sotto di 0 dB
- 7. Calcolare  $1/T_1$  e  $1/T_2$  con l'espressione al punto 5 e con la nuova frequenza di crossover

$$\omega_C^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

- 8. Calcolare la nuova  $K(s) G(s)$  e verificare il risultato. Eventualmente iterare incrementando il valore di  $\Delta_{DES}$



## Reti Correttrici - Lead



□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

- Errore alla rampa  $\leq 5\%$
- Margine di fase PM  $\geq 45^\circ$

- Definire la componente del controllore necessaria per il requisito a regime:

$$K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+2)} \quad \text{Tipo 1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{2}{0.05} = 40 \quad K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

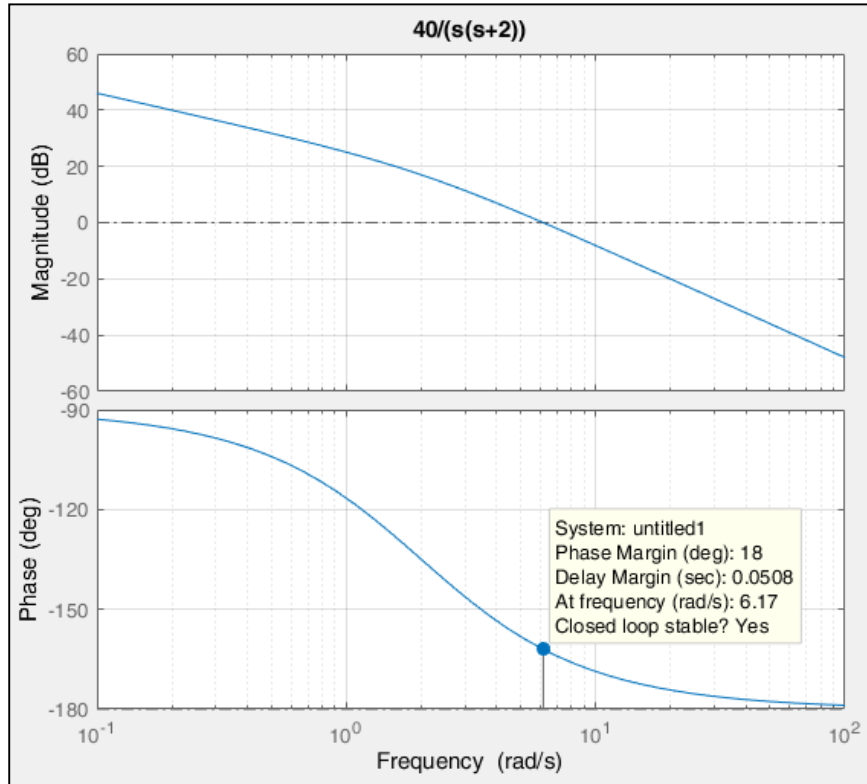




## Reti Correttrici - Lead



- Sintesi in Frequenza:  $K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$



- Il Margine di Fase vale:

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad} / \text{s}. \Rightarrow \mathbf{PM} = 18^\circ$$

- Requisito di Progetto:

$$\Delta = PM_d - PM = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ \Rightarrow \Delta_{DES} \approx 40^\circ$$

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 4.5991$$

- Trovare la nuova frequenza di taglio tale che

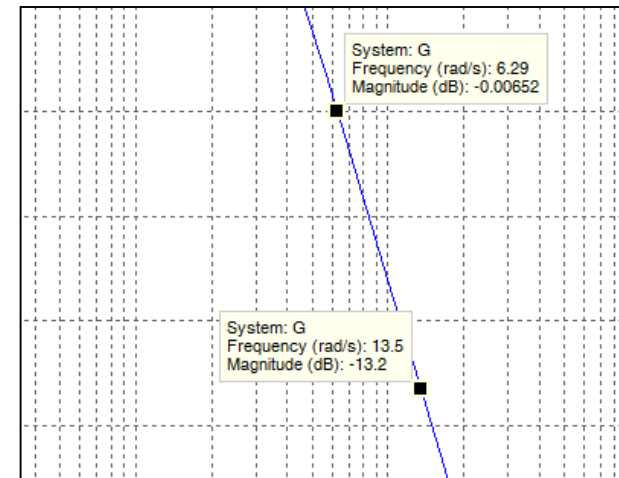
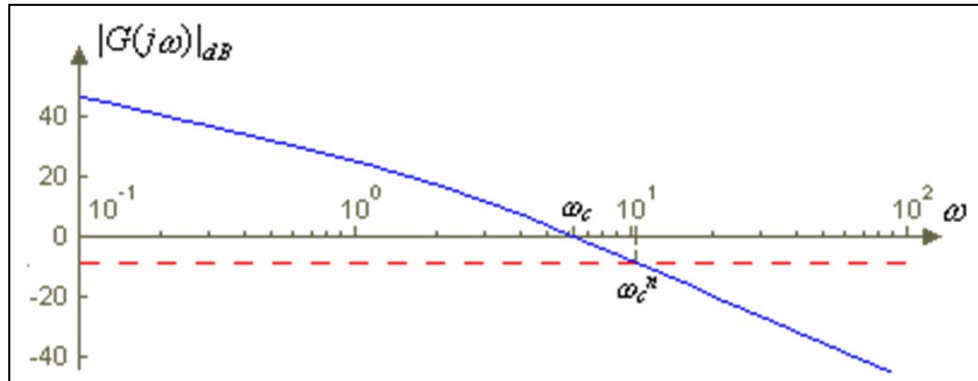
$$\left| K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n) \right| = -20 \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = -20 \log 4.5991 \cong -13.2535 \text{ dB}$$



## Reti Correttrici - Lead



$$\omega_c^n \cong 13.7 \text{ rad / s}$$



- Si possono calcolare adesso i valori del polo e dello zero usando la relazione che produce la frequenza di massimo anticipo di fase

$$\omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{T_1 / T_2}} = \frac{1}{\sqrt{4.5991 \cdot T_2}} \Rightarrow T_2 \cong 0.0352 \text{ s / rad} \\ \frac{T_1}{T_2} = 4.5991 \Rightarrow T_1 = 4.5991 \cdot T_2 \cong 0.1619 \text{ s / rad} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} \cong 6.1761 \text{ rad / s} \quad \frac{1}{T_2} \cong 28.41 \text{ rad / s}$$



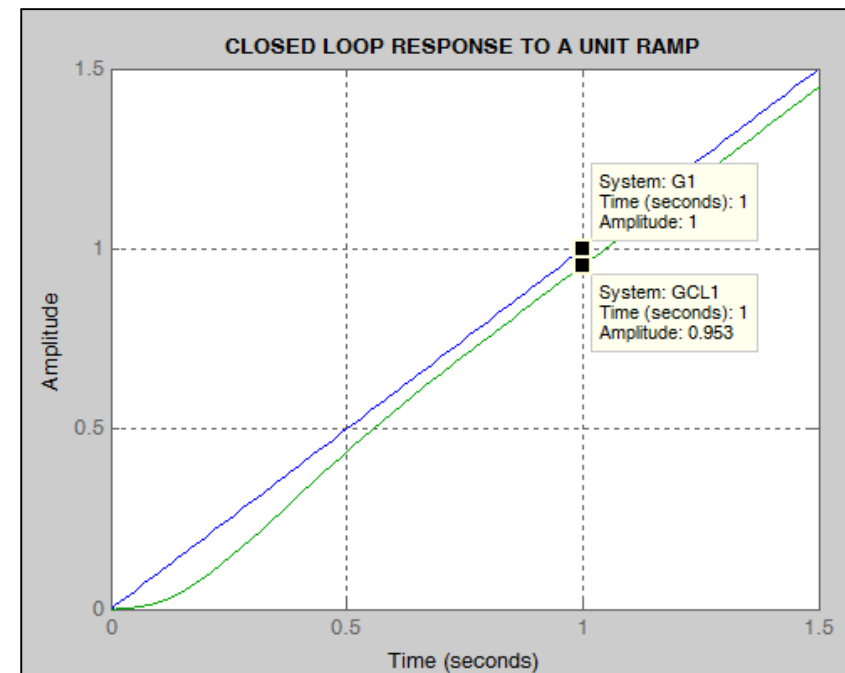
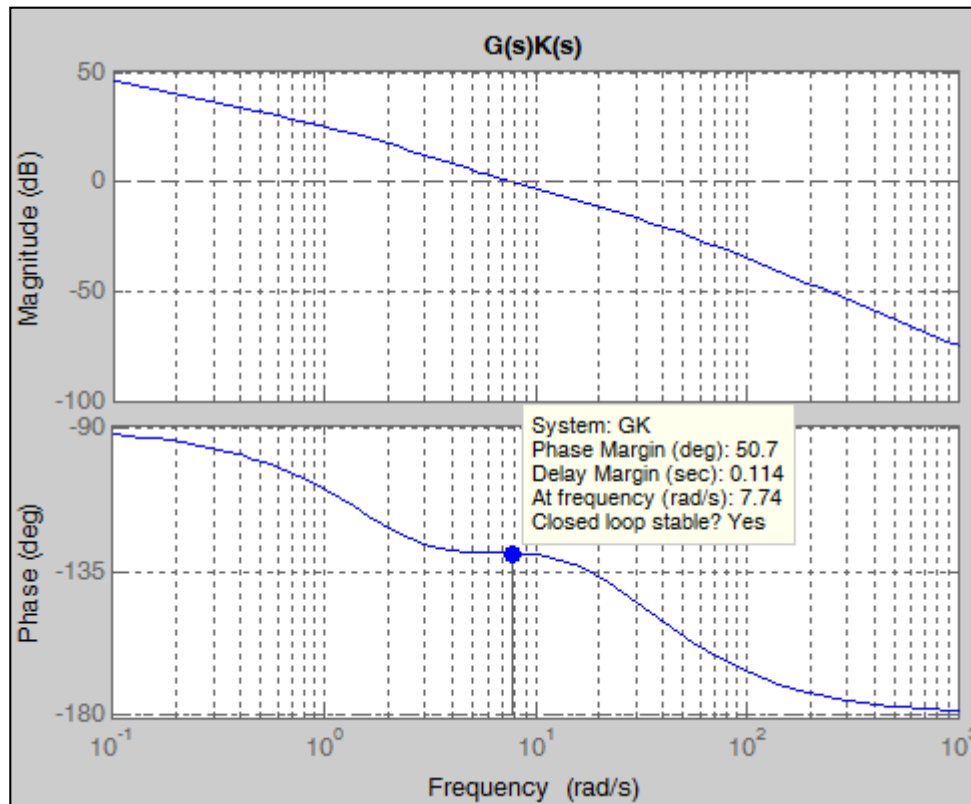
## Reti Correttrici - Lead



$$K(s)G(s) = k \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \cdot G(s) = 40 \cdot \frac{1 + 0.1619s}{1 + 0.0352s} \cdot \frac{1}{s(s + 2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K(s)G(s) = 183.98 \frac{s + 6.1767}{s + 28.41} \cdot \frac{1}{s(s + 2)}$$

- si ottiene **PM**  $\cong 50^\circ$

$$\epsilon_{RAMP} = 1 - 0.953 = 4.7\%$$



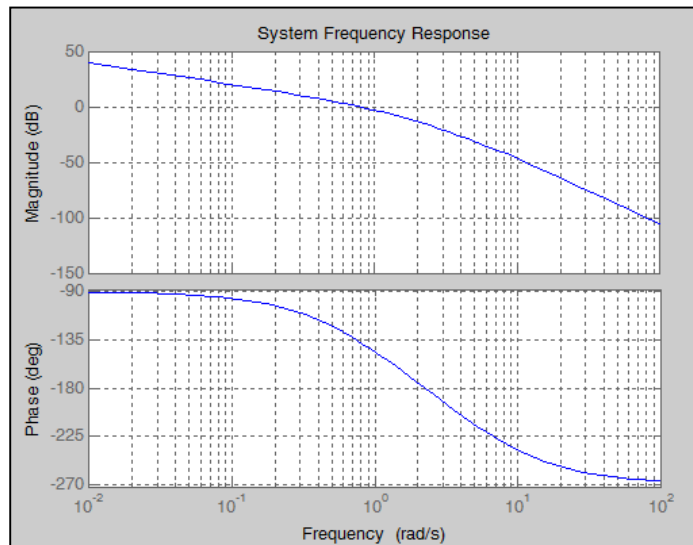


## Reti Correttrici - Lead



□ **Esempio:** Controllo di posizione di Azimuth di un modello semplificato di Antenna

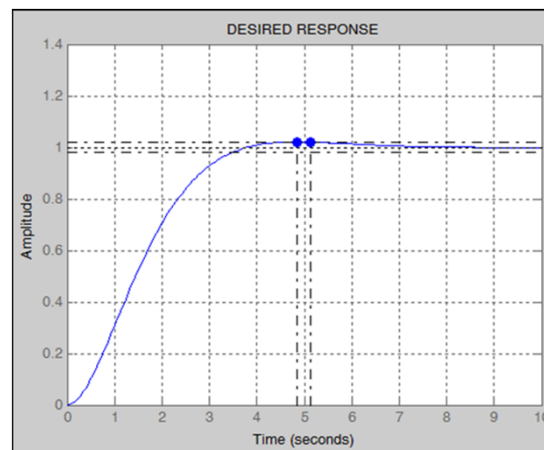
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{5}{s(s+1)(s+5)}$$



1. Errore nullo ad un gradino unitario
2. Tempo di assestamento non superiore a 5 secondi
3. Massima Sovraelongazione circa 2%

$$T_A = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq 5 \quad \xi \geq 0.78$$
$$M_P = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.02 \quad \omega_n \approx 1.03$$

$$G_{DES}(s) = \frac{1.061}{s^2 + 1.6s + 1.061}$$



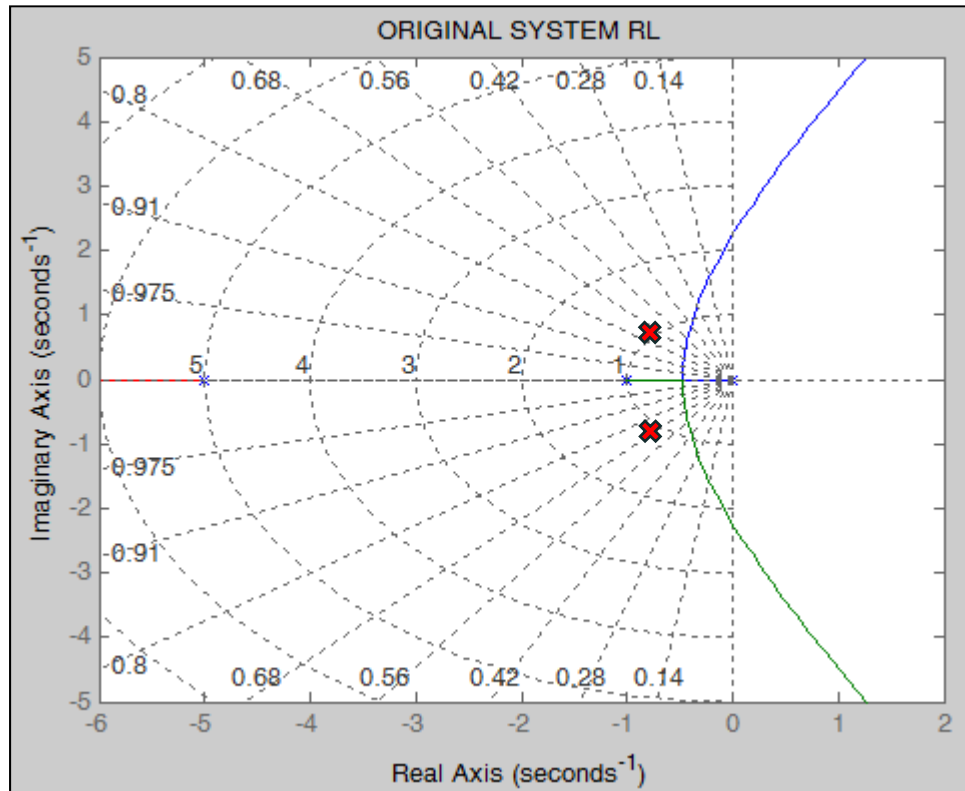


## Reti Correttrici - Lead

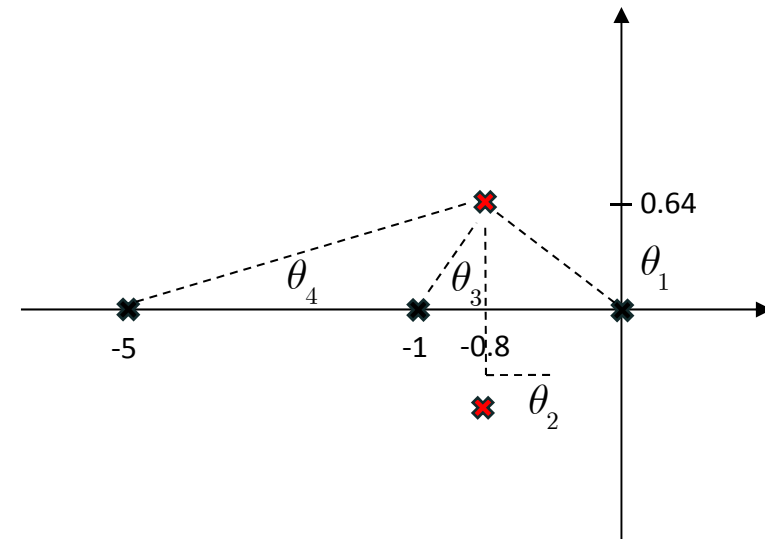


- Uso del Luogo delle Radici: i rami del luogo devono passare per i poli desiderati in anello chiuso

$$-0.8 \pm j0.64$$



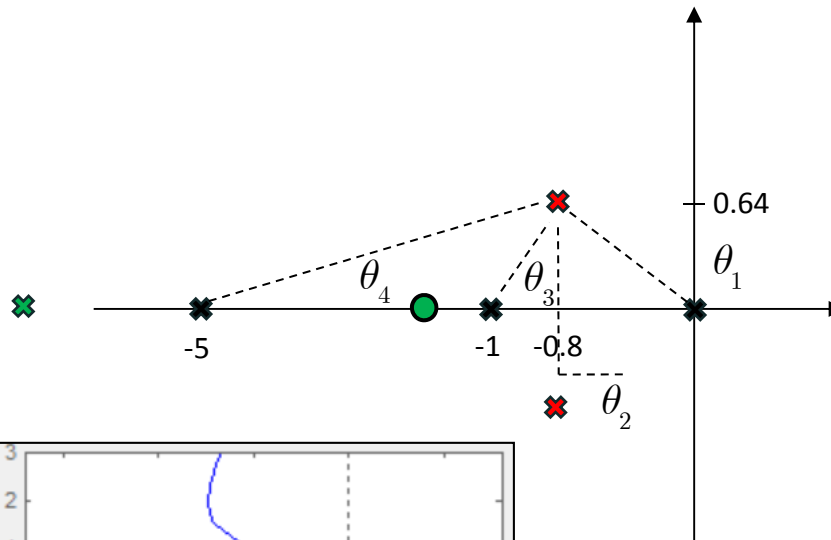
- I rami del Luogo devono muoversi verso sinistra  $\rightarrow$  rete ad anticipo di fase
- Uso della regola degli angoli del LR che dice che la somma algebrica deve valere  $\pi$  oppure un suo multiplo giro.



$$\theta_z - \theta_p - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 180 \quad \theta_z - \theta_p - 141.34 - 90 - 72.65 - 8.66 = 180$$



## Reti Correttrici - Lead

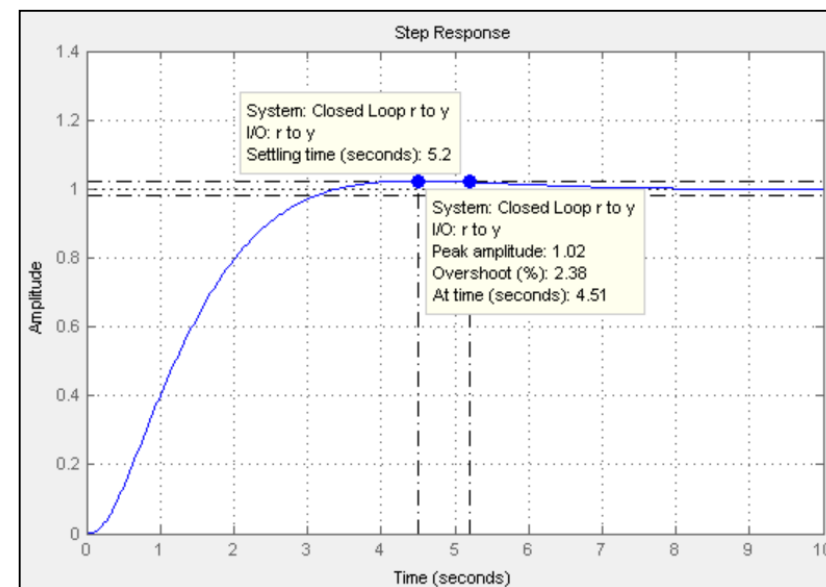
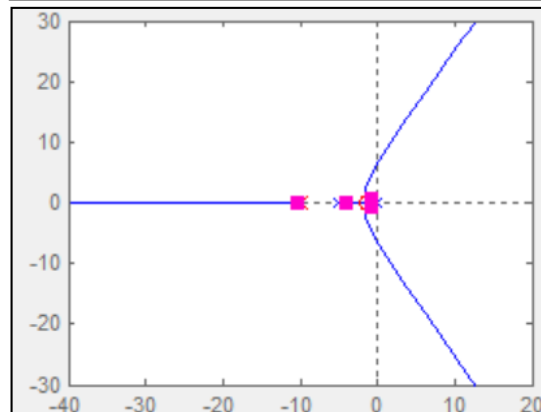
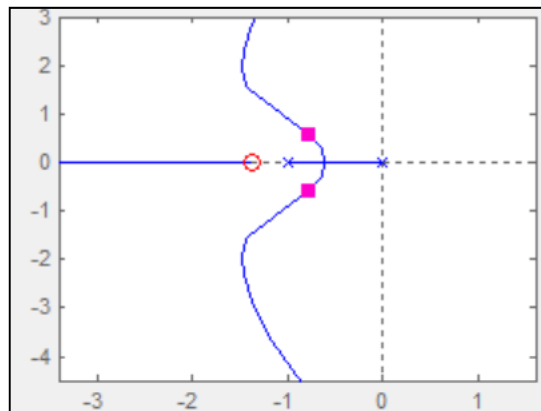


- Selezione del polo:  $p = -10$

$$\theta_P = 3.73$$

- Angolo dello zero:  $\theta_Z = 46.6$

- Locazione dello zero:  $z = -1.39$



- Il guadagno si può calcolare con la regola del modulo

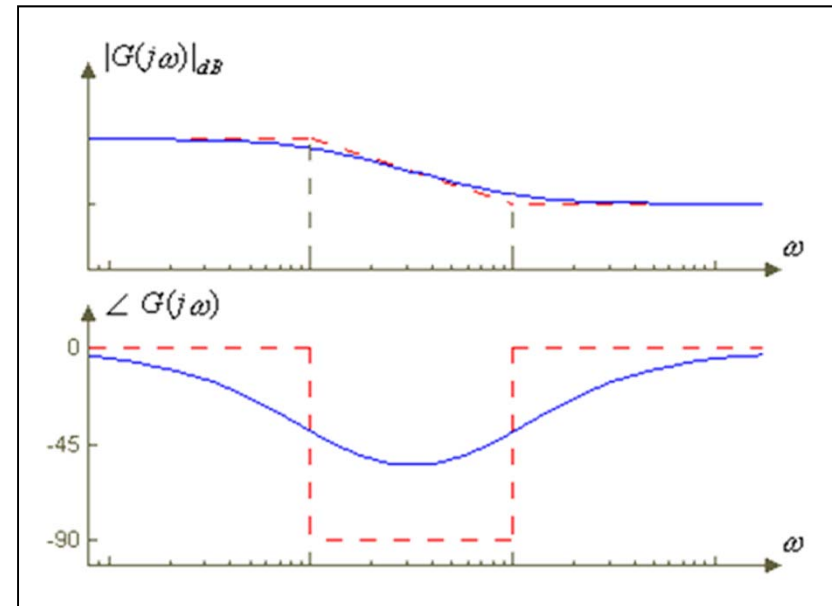
$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|$$



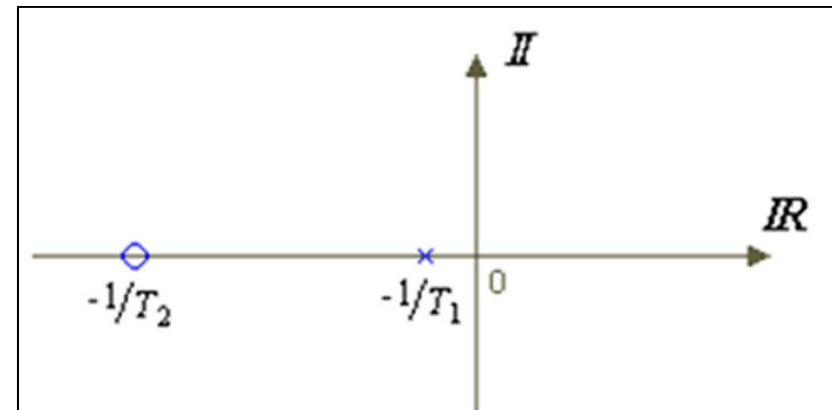
## Reti Correttrici - Lag

### □ Rete a Ritardo di Fase (Lag Network)

- La rete è anche nota come Filtro passa basso
- Aumenta il guadagno a bassa frequenza
- Elimina i rumori ad alta frequenza
- Aumenta la precisione a regime
- Rallenta la velocità di risposta
- Diminuisce la Banda passante



$$K(s) = k \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{T_1}}$$
$$T_1 > T_2, \quad k_0 = k \frac{T_2}{T_1}$$





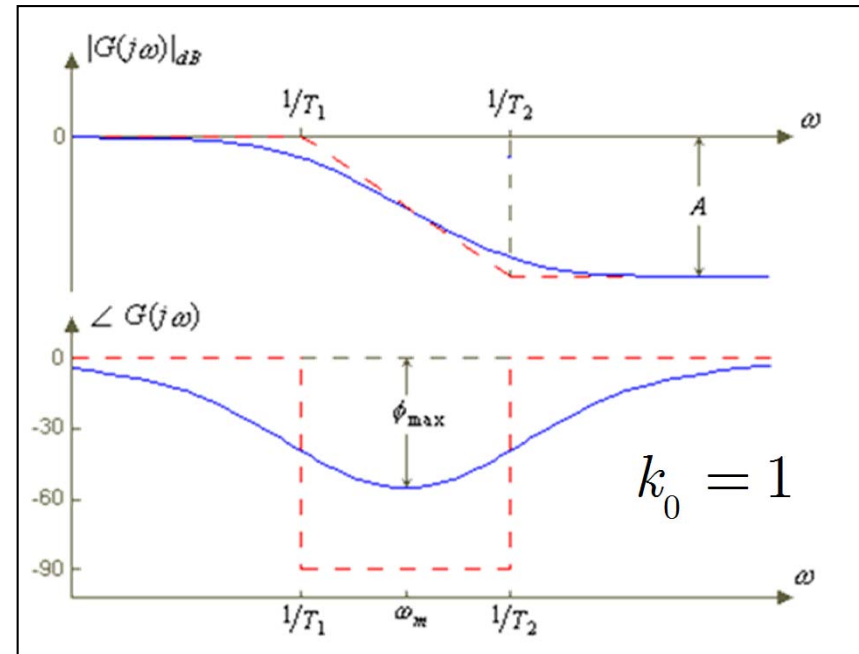
## Reti Correttrici - Lag

- Si ha anche:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{\alpha T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} = k_0 \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s}$$

- Maggiore è la distanza zero-polo e maggiore è la perdita di fase ( $\phi_{\max} \cong -60^\circ$ )



- Massima Attenuazione  $A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2}$

- Frequenza di massimo Ritardo di Fase

$$\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{\alpha}}$$



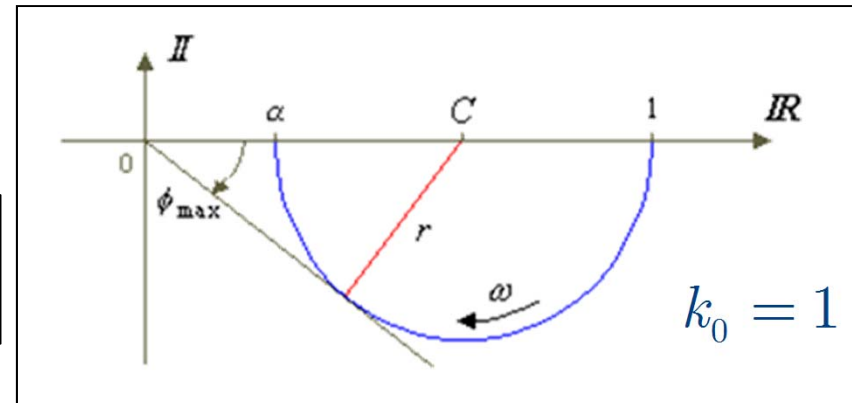


## Reti Correttrici - Lag



- Il massimo ritardo è dato da:

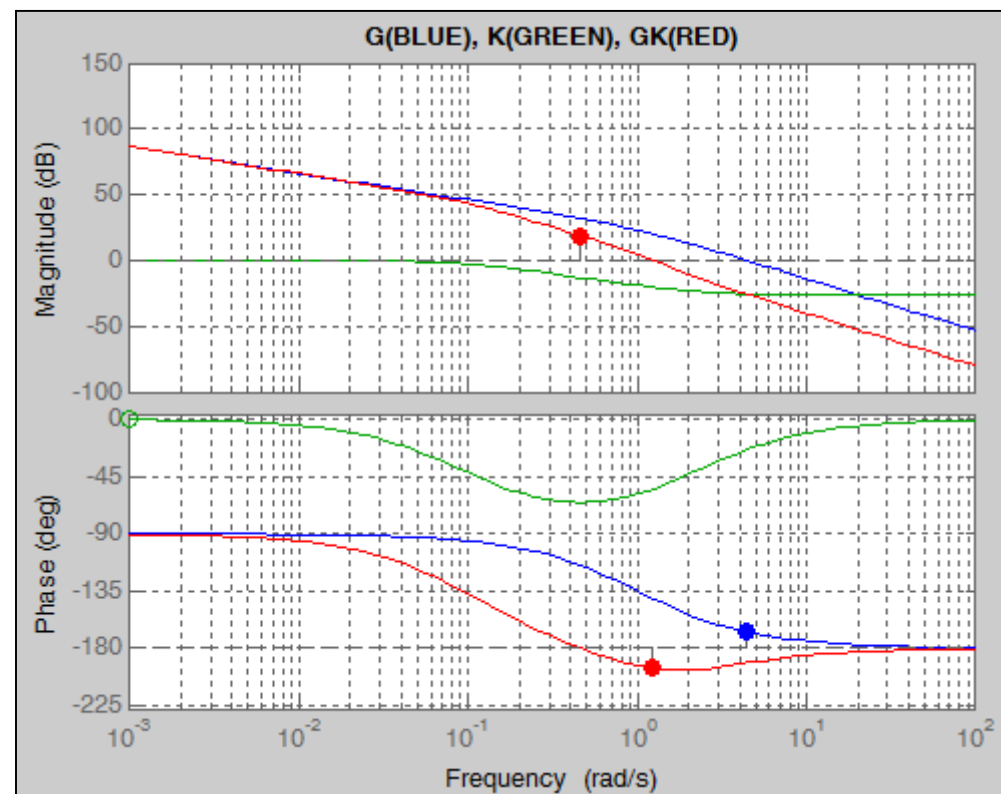
$$\phi_{\max} = -\sin^{-1} \frac{1 - (T_2 / T_1)}{1 + (T_2 / T_1)} = -\sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$



### Esempio

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)} \quad K(s) = \frac{1 + 0.476s}{1 + 10s}$$

- Nota: in questo esempio, la rete correttrice a ritardo di fase non stabilizza il sistema in anello chiuso

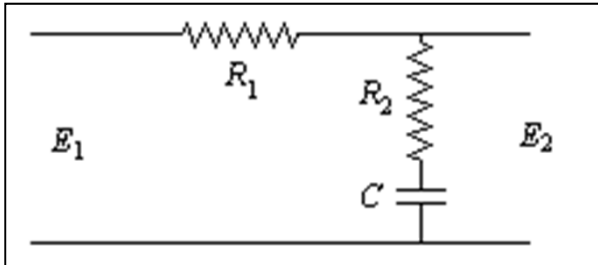




## Reti Correttrici - Lag



- Implementazione Circuitale Analogica



$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = (R_1 + R_2)C \quad G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

- Note:**

1. Al tendere del polo verso frequenze più basse, la rete correttiva a ritardo di fase tende ad un controllore PI.
2. Il polo e lo zero devono essere vicini se si vuole mantenere le caratteristiche di risposta transitoria dei poli dominanti



## Reti Correttrici - Lag



### ■ Regole pratiche di sintesi in frequenza

1. Calcolare guadagno ed integratori del controllore per avere la risposta a regime appropriata ->  $K_1(s)$
2. Calcolare il margine di fase **PM** della FdT di anello  $K_1(s) G(s)$  dalla risposta in frequenza
3. Calcolare l'incremento  $\Delta_{DES} = \Delta + \varepsilon$  necessario ad avere il **PM**<sub>DES</sub> desiderato di progetto
4. Trovare la nuova frequenza di crossover  $\omega_C^n$  tale che:

$$\angle G_{OL}(j\omega_C^n) = -180^\circ + PM_{DES}$$

5. Scegliere  $T_2$  in modo che  $\omega_2 = 1/T_2$  cada una decade prima di  $\omega_C^n$  **Zero**
6. Calcolare  $|K(j\omega_C^n)G(j\omega_C^n)|$  ed il rapporto  $T_1/T_2$
7. Calcolare il valore di  $1/T_1$  **Polo**
8. Calcolare la nuova  $K(s) G(s)$  e verificare il risultato. Eventualmente iterare incrementando il valore di  $\Delta_{DES}$



## Reti Correttrici - Lag



□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

- Errore alla rampa  $\leq 5\%$
- Margine di fase PM  $\geq 45^\circ$

- Definire la componente del controllore per i requisiti a regime:
- Non ci sono variazioni di guadagno rispetto al caso della rete ad anticipo di fase

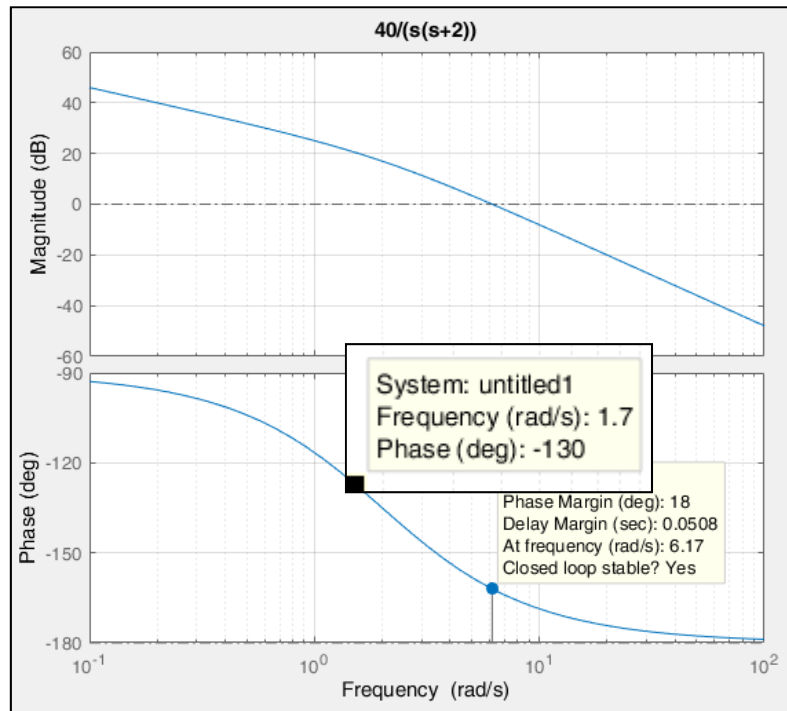
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{2}{0.05} = 40$$

$$K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$



## Reti Correttrici - Lag



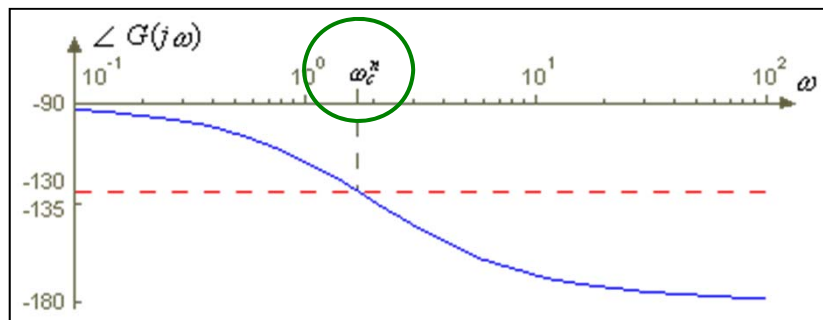
$$K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad/sec} \Rightarrow PM = 18^\circ$$

- La frequenza richiesta per il PM desiderato :

$$\angle K(j\omega_c^n)G(j\omega_c^n) = -180^\circ + PM_{DES} = -130^\circ$$

- La nuova frequenza si determina dal diagramma delle fasi



$$\omega_c^n \cong 1.678 \text{ rad/s}$$



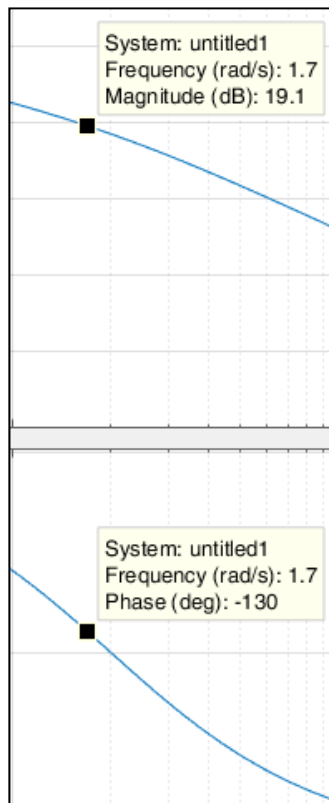
## Reti Correttrici - Lag



- Si sceglie **lo zero**  $T_2$  in modo che  $\omega_2 = 1/T_2$  cada una decade prima di  $\omega_c^n$

$$\frac{1}{T_2} = \omega_2 = \frac{\omega_c^n}{10} \Rightarrow T_2 = \frac{10}{\omega_c^n} \cong 5.959$$

- Dalla massima attenuazione disponibile, si può calcolare **il polo** della rete.



$$A_{dB} = \left| K(j\omega_c^n)G(j\omega_c^n) \right|_{dB} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} \cong 19.1dB \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} \cong 9.12$$

$$T_1 \cong 9.12 \cdot T_2 \cong 54.4$$

$$K(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.168}{s + 0.018}$$



## Reti Correttrici - Lag

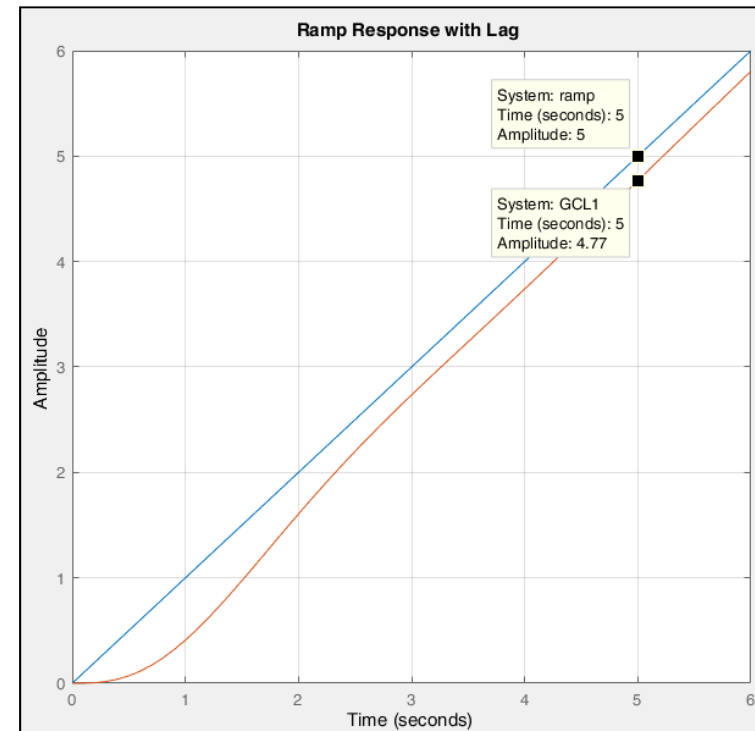
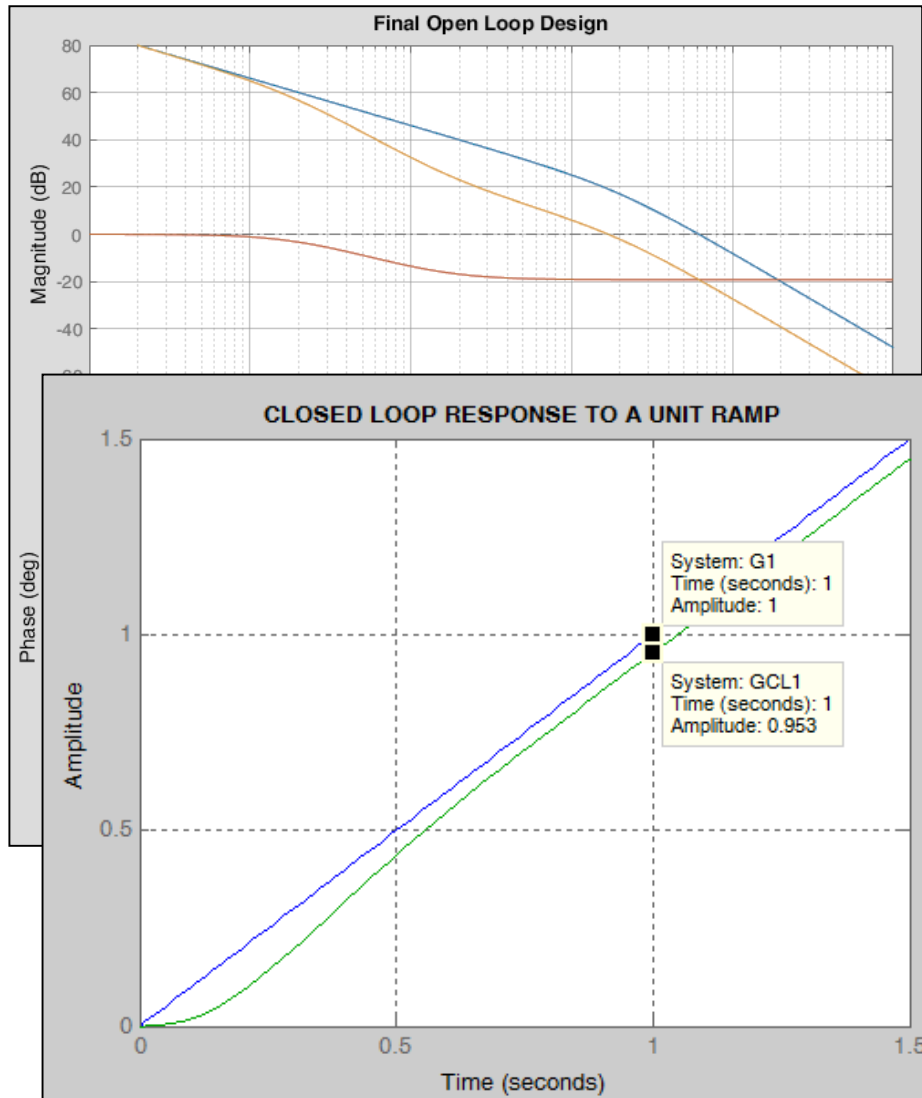


$$K(s)G(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} \cdot \frac{1}{s(s + 2)}$$

- Iterazioni successive possono essere necessarie per avere il **PM** desiderato

$$K(s) = 40 \cdot \frac{6.174s + 1}{59.256s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.162}{s + 0.017}$$

$$\text{PM} \cong 45.81^\circ$$



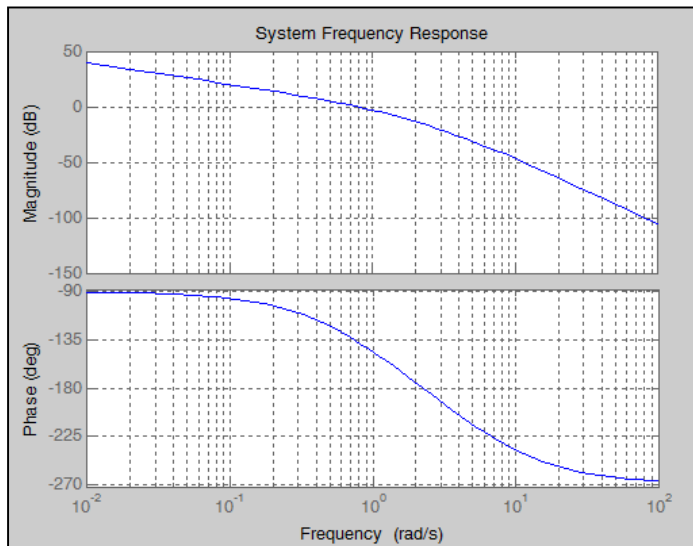


## Reti Correttrici - Lag



- Progetto di una rete a ritardo di fase mediante il Luogo delle Radici

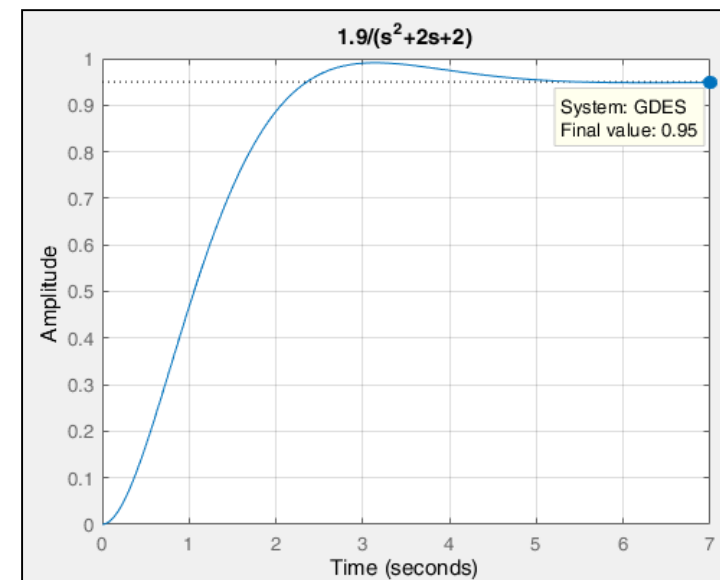
$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$



- Il controllore non annulla l'errore, ma cerca di soddisfare le caratteristiche transitorie, riducendo l'errore.

- Errore ad un gradino unitario inferiore a 5%
- Poli dominanti target  $p_{1,2} = -1 \pm j$
- $\omega_n = 1.4$  rad/sec,  $\zeta = 0.7$

$$G_{DES}(s) = \frac{1.9}{s^2 + 2s + 2}$$



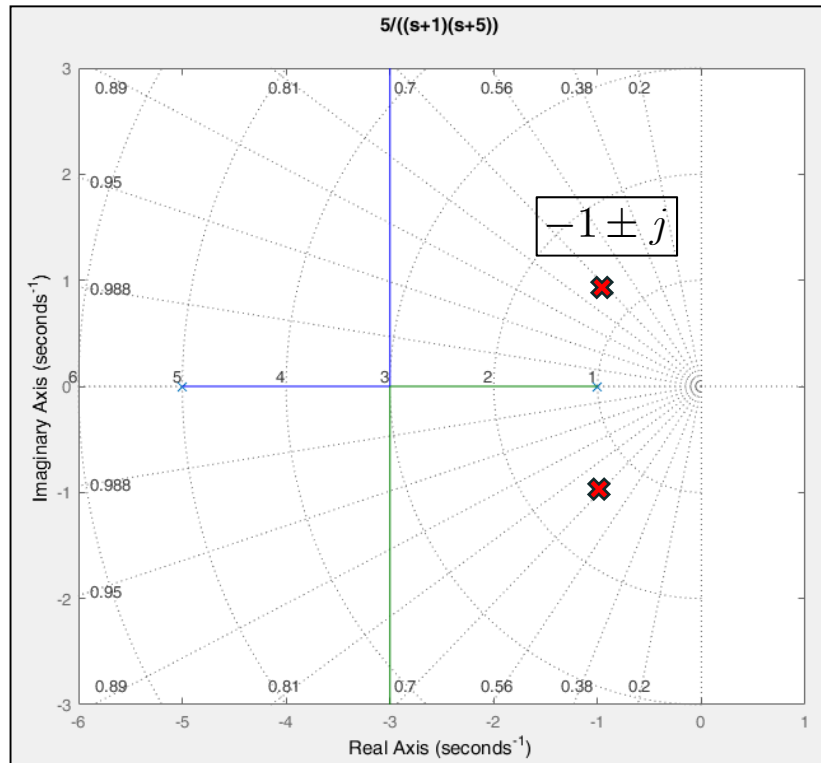




## Reti Correttrici - Lag



- Valore desiderato dei poli in anello chiuso



- Rapporto zero - polo

$$\frac{z}{p} = \frac{D(0) - \varepsilon_{SS}^{DES} D(0)}{\varepsilon_{SS}^{DES} N(0)}$$

- Riduzione dell'errore a regime mediante Lag Network

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Ingresso a gradino come esempio

$$\varepsilon_{SS} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} \frac{1}{s} = \frac{D(0)}{N(0) + D(0)}$$

- Contributo Lag Network

$$\varepsilon_{SS}^{DES} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{N(s)(s+z)}{D(s)(s+p)}} \frac{1}{s} = \frac{pD(0)}{zN(0) + pD(0)}$$

- Requisito di progetto

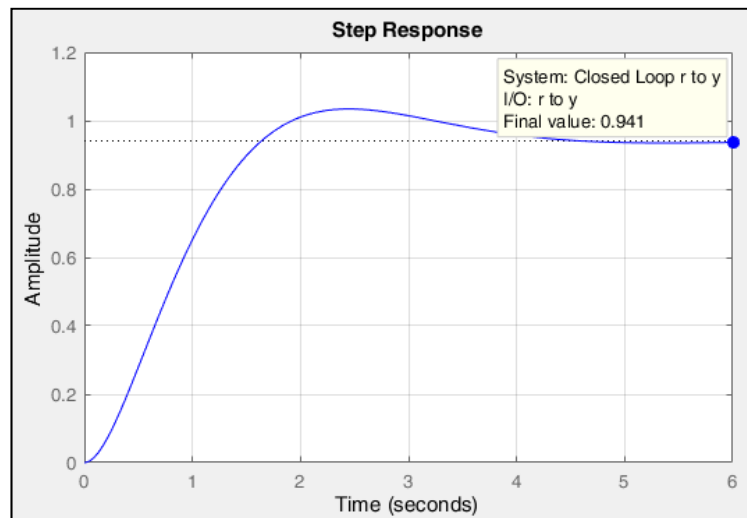
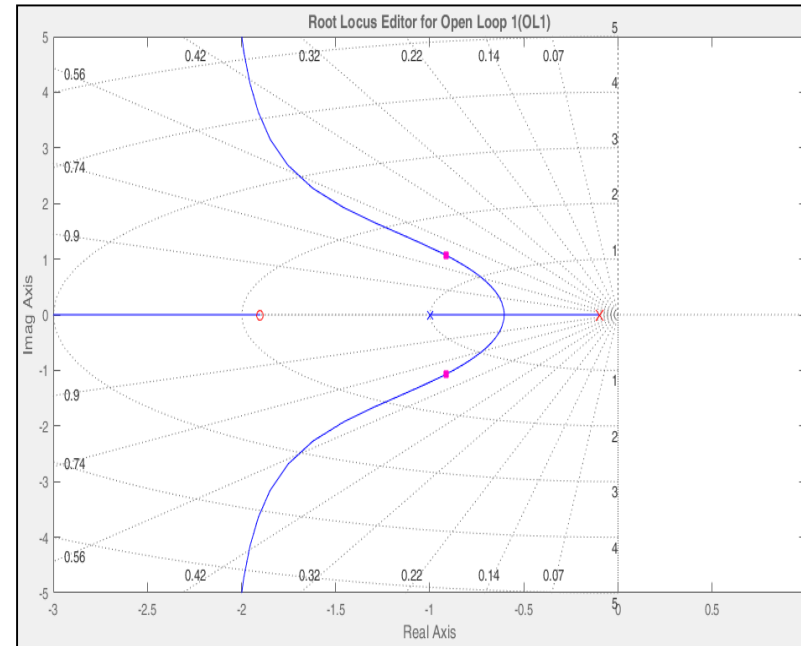
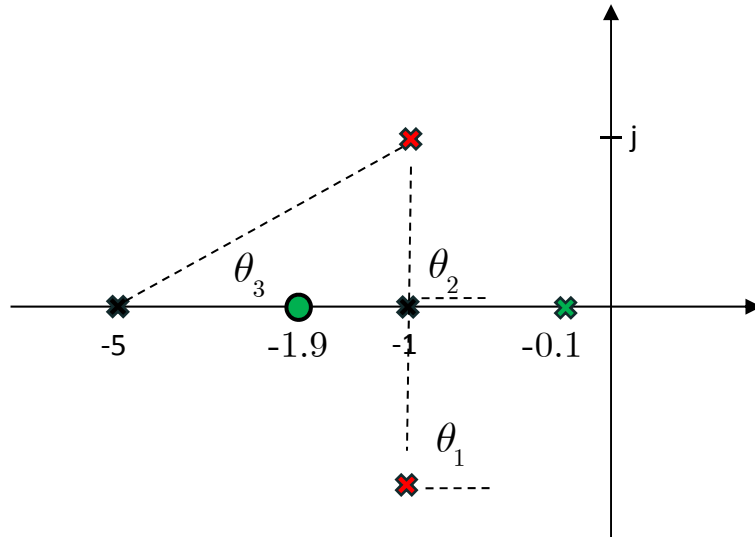
$$\varepsilon_{SS}^{DES} = \frac{5 - 0.05(5)}{0.05(5)} = 0.05 \Rightarrow \frac{z}{p} = 19$$



## Reti Correttrici - Lag



- Il polo deve essere vicino all'origine in modo da avvicinarsi al comportamento integrale. Lo zero viene di conseguenza, essendo  $z = 19p$

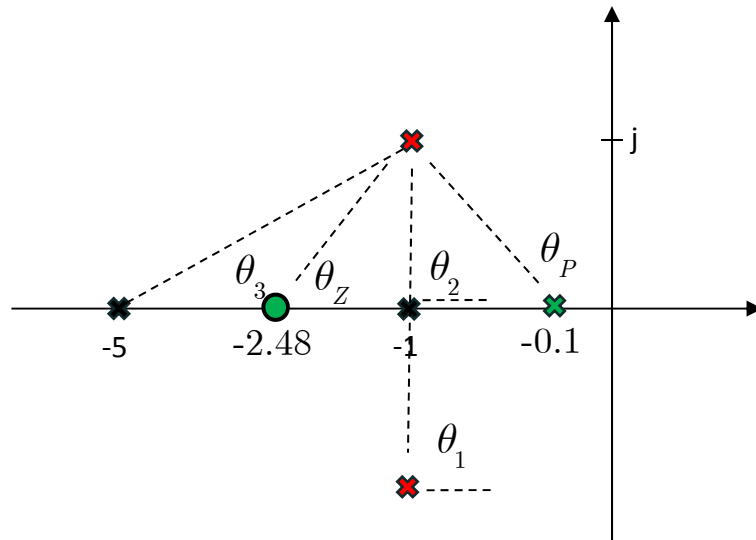




# Reti Correttrici - Lag



- Valutazione degli angoli

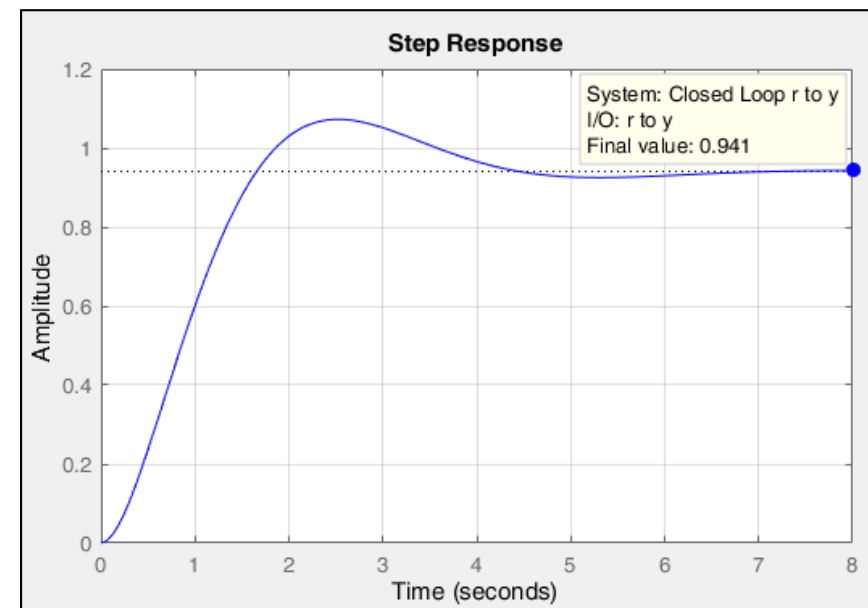
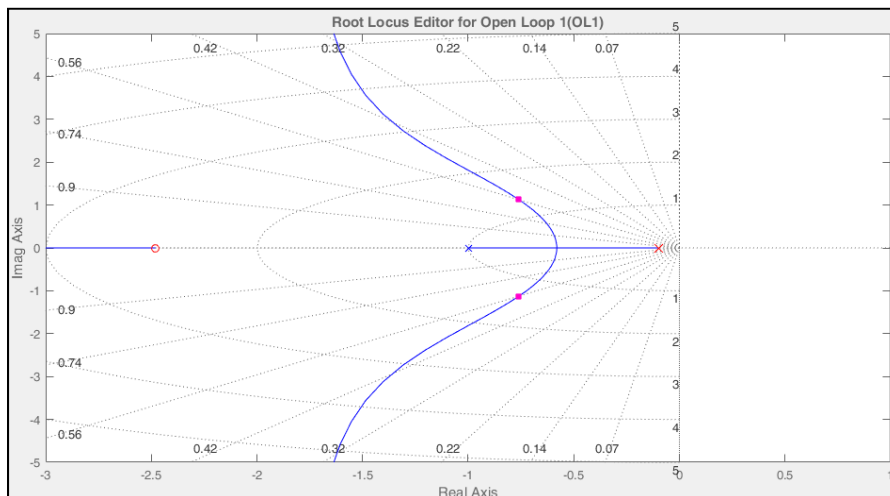


$$\sum_{j=1}^m \theta_{zj} - \sum_{i=1}^n \theta_{pi} = (2v + 1)\pi$$

$$\theta_Z - \theta_P - 90 - 90 - 14.04 = 180$$

$$\theta_Z - \theta_P = 2\pi + 14.04$$

$$\theta_Z = 2\pi + 14.04 + 132 = 506.04 = 2\pi + 146.04$$





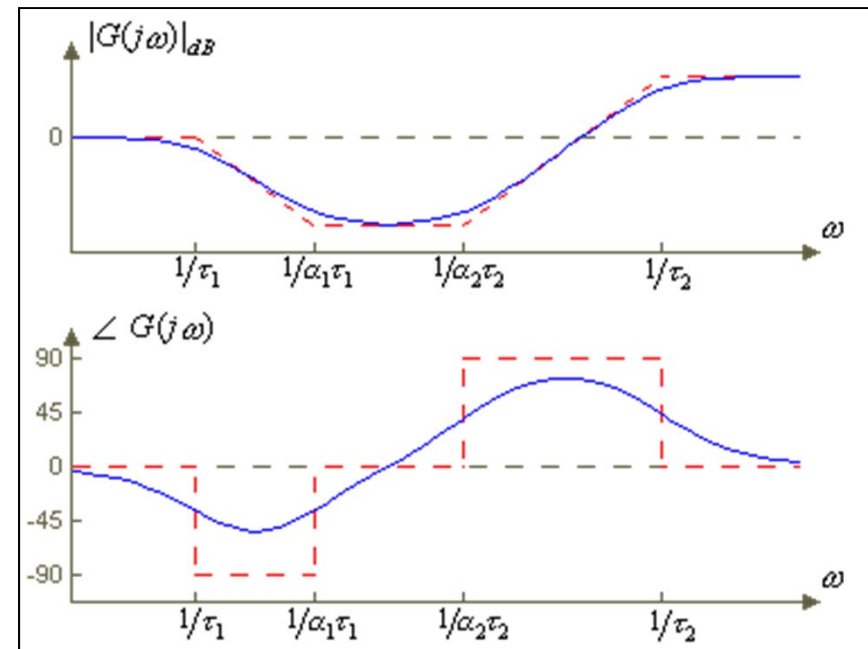
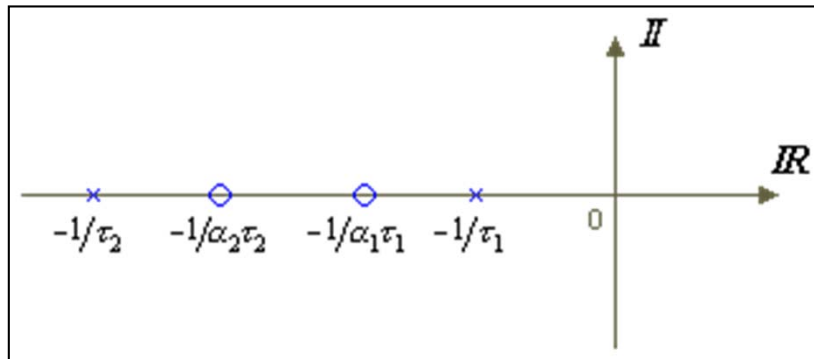
## Reti Correttrici - Reti a Sella



- Questa rete non è altro che una combinazione di due reti lag e lead

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha_1 \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + \alpha_2 \tau_2 s)}{(1 + \tau_2 s)}$$

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{\tau_1}, \quad 0 < \alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 = \frac{T_2}{\tau_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad \tau_1 > \tau_2$$





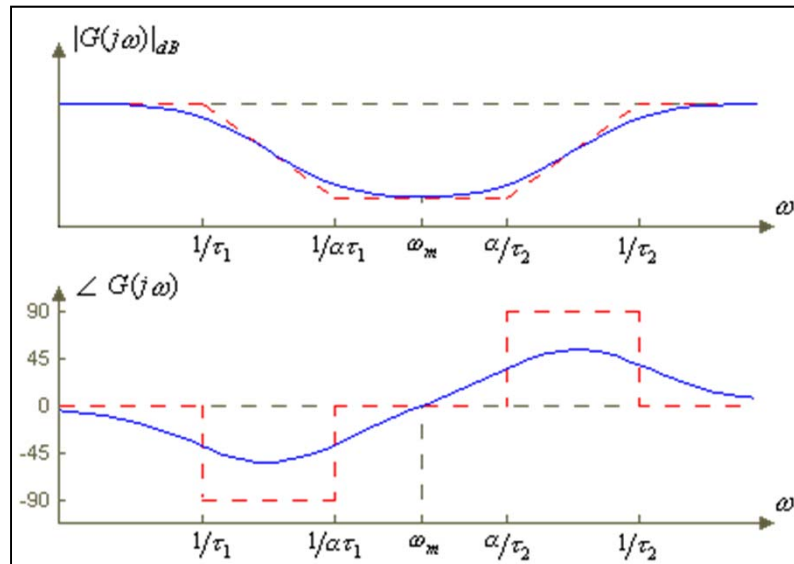
## Reti Correttrici - Reti a Sella



- Una struttura comune, che riduce il numero di parametri è quella dove l'attenuazione dovuta al ritardo e l'amplificazione dovuta all'anticipo sono le stesse:

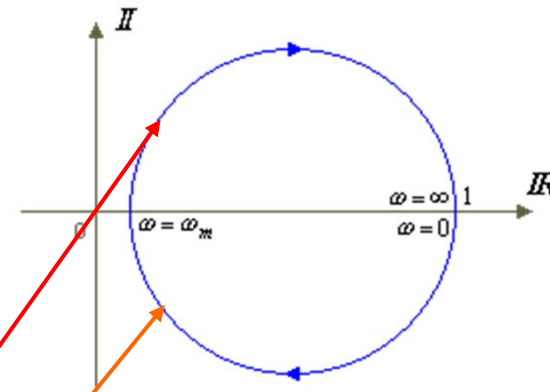
$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = \alpha$$

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha)s)}{(1 + \tau_2 s)}$$



la rete fornisce un anticipo di fase

la rete fornisce un ritardo di fase



Nota che per:  $\omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$

la rete ha sfasamento nullo e attenuazione pari a:

$$|G_c(j\omega_m)| = \frac{\alpha\tau_1 + \tau_2/\alpha}{\tau_1 + \tau_2}$$

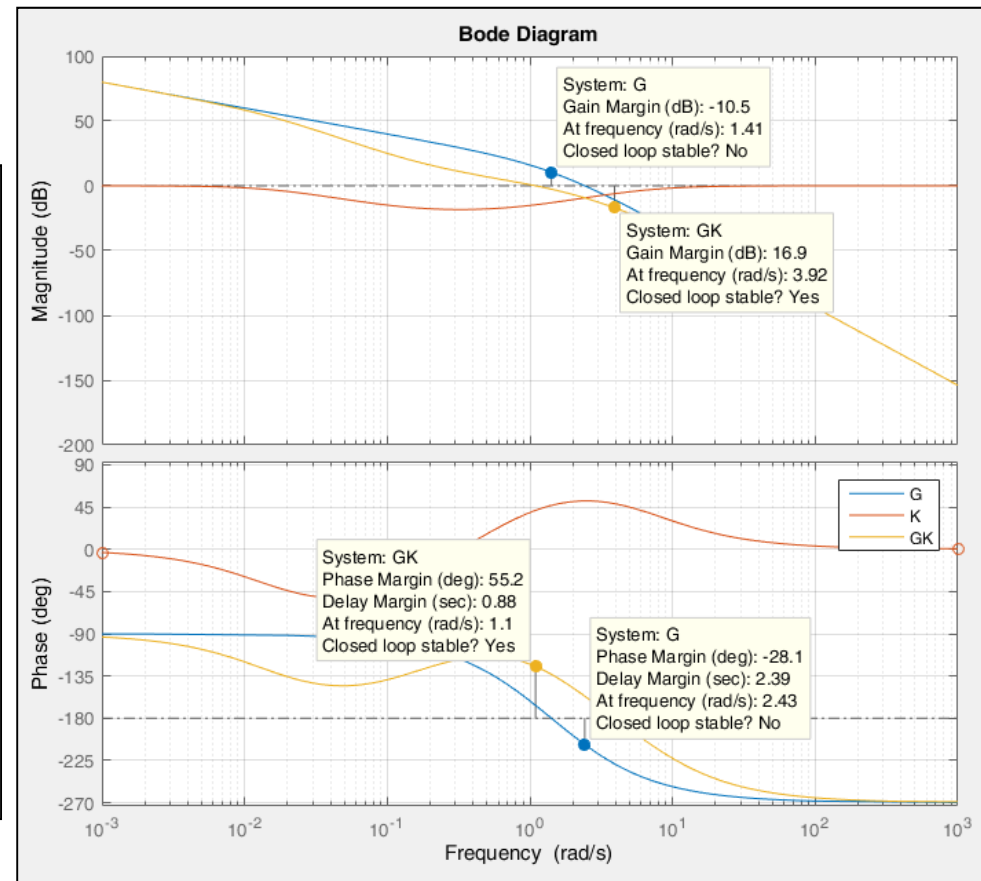
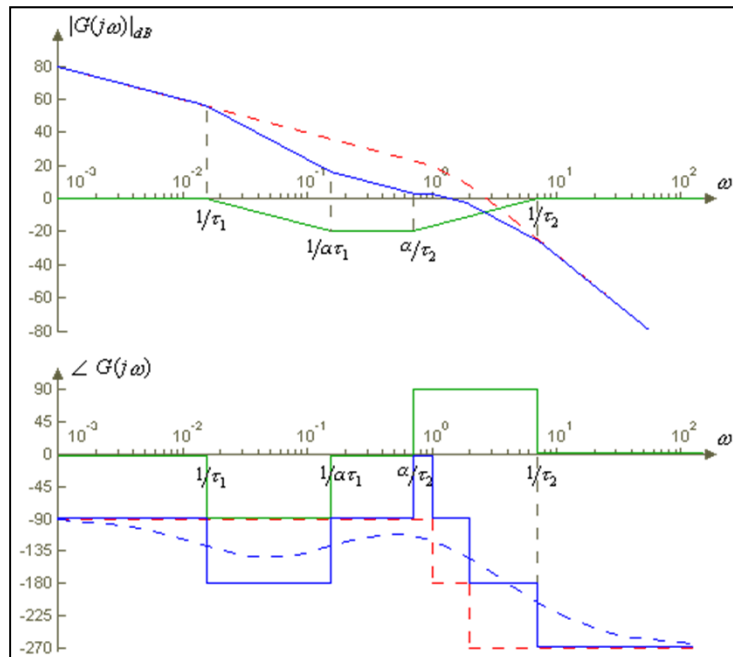


## Reti Correttrici - Reti a Sella



□ **Esempio:** Dato il sistema  $G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$

- Introduciamo una rete a sella data da:  $K(s) = \frac{s+0.15}{s+0.015} \cdot \frac{s+0.7}{s+7}$

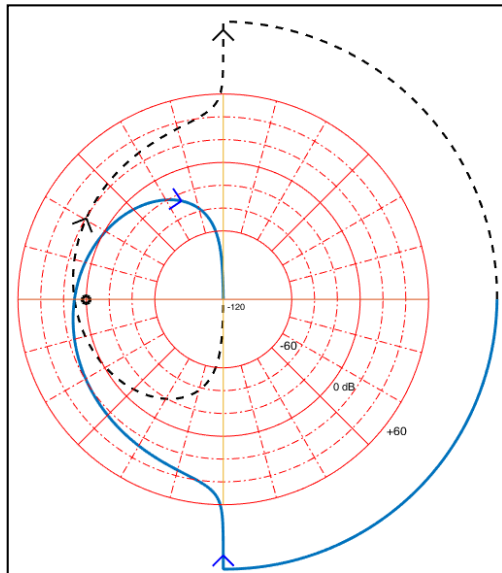




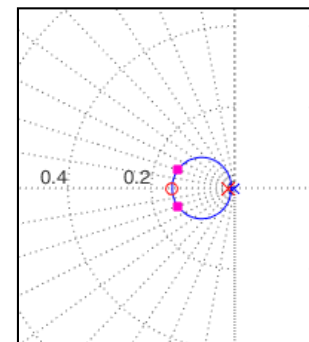
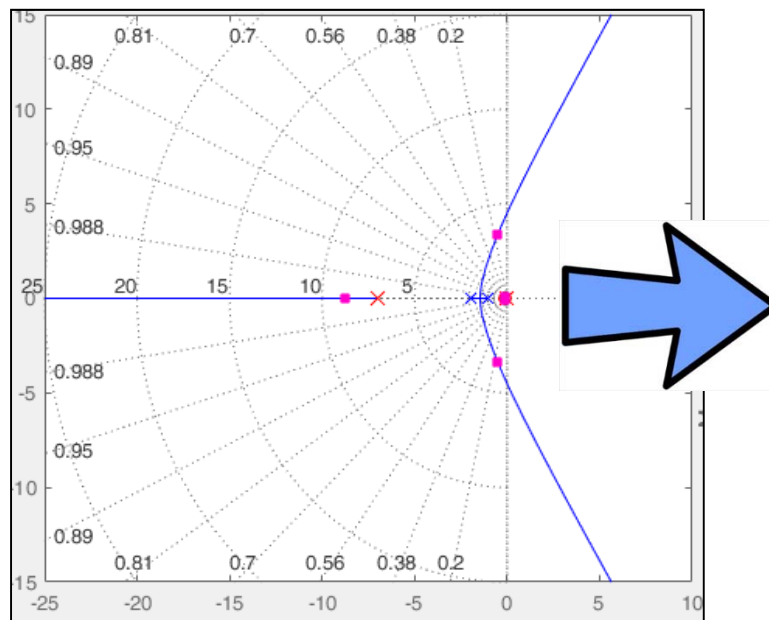
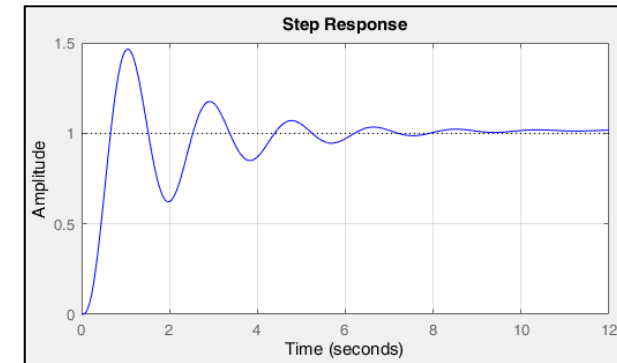
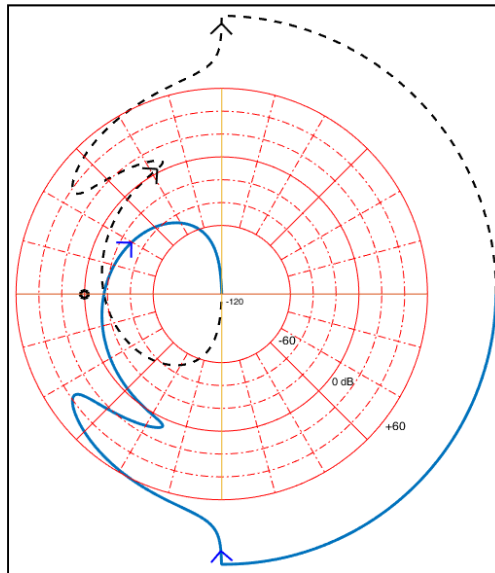
# Reti Correttrici - Reti a Sella



Uncompensated



Compensated

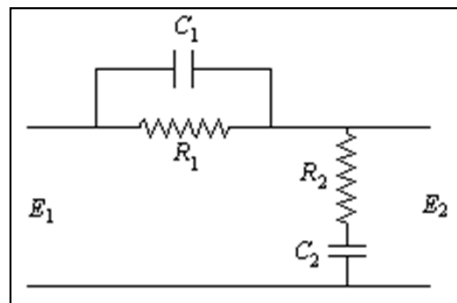




## Reti Correttrici - Reti a Sella



- Implementazione circuitale analogica:



$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/C_2 s}{R_1 // (1/C_1 s) + R_2 + 1/C_2 s} = \\
 &= \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left( \frac{R_1 / (C_1 s)}{R_1 + 1/C_1 s} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left( \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{\left[ R_1 + R_2(R_1 C_1 s + 1) \right] C_2 s + (R_1 C_1 s + 1)} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + R_2 C_2 s(R_1 C_1 s + 1) + (R_1 C_1 s + 1)} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}
 \end{aligned}$$

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s) + \tau_{ab} s} \quad G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{(1 + \alpha \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha) s)}{(1 + \tau_2 s)}$$

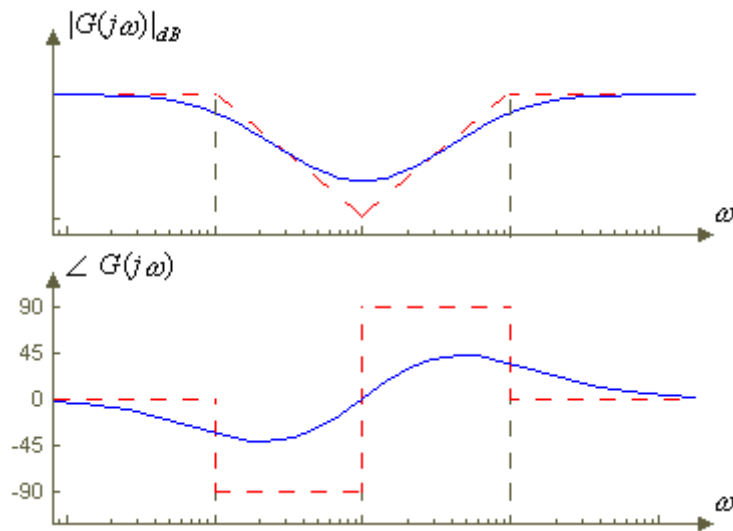




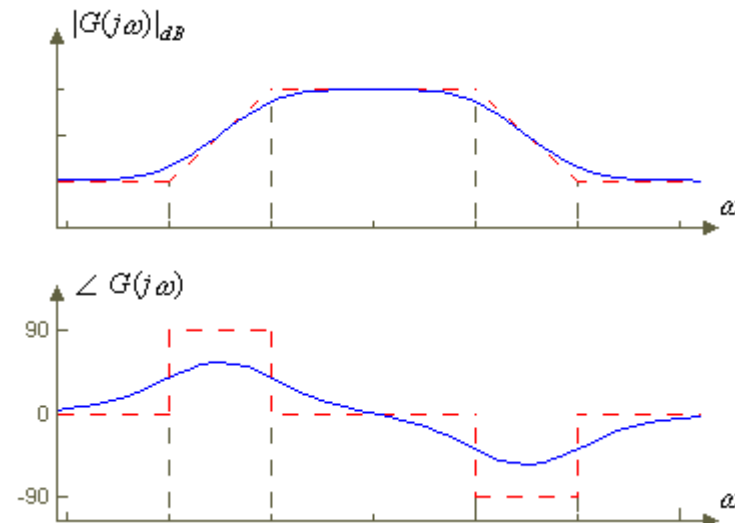
## Altre Reti Correttrici



### ❑ Rete a Spillo (Notch):



### ❑ Filtro Passa Banda (Lead-Lag)

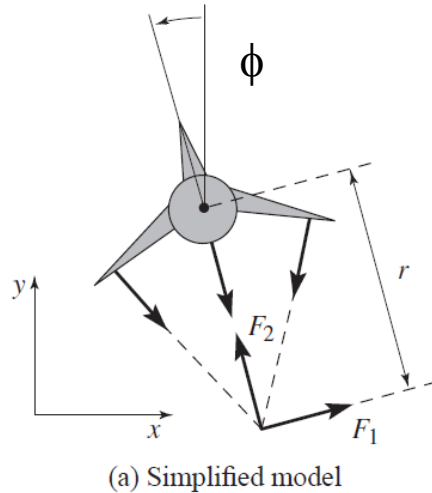




# Harrier Control (Murray)



## ❑ Esempio di Sintesi mediante doppio anello di controllo:



Symbol	Description	Value
$m$	Vehicle mass	4.0 kg
$J$	Vehicle inertia, $\phi_3$ axis	0.0475 kg m <sup>2</sup>
$r$	Force moment arm	25.0 cm
$c$	Damping coefficient	0.05 kg m/s
$g$	Gravitational constant	9.8 m/s <sup>2</sup>

(b) Parameter values

- **Problema:** Mantenimento della posizione di Hover in presenza di disturbo in rollio

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 + d \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 \cos \phi - F_2 \sin \phi \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 \cos \phi + F_1 \sin \phi - mg \end{cases}$$

### ▪ Sequenza di Controllo:

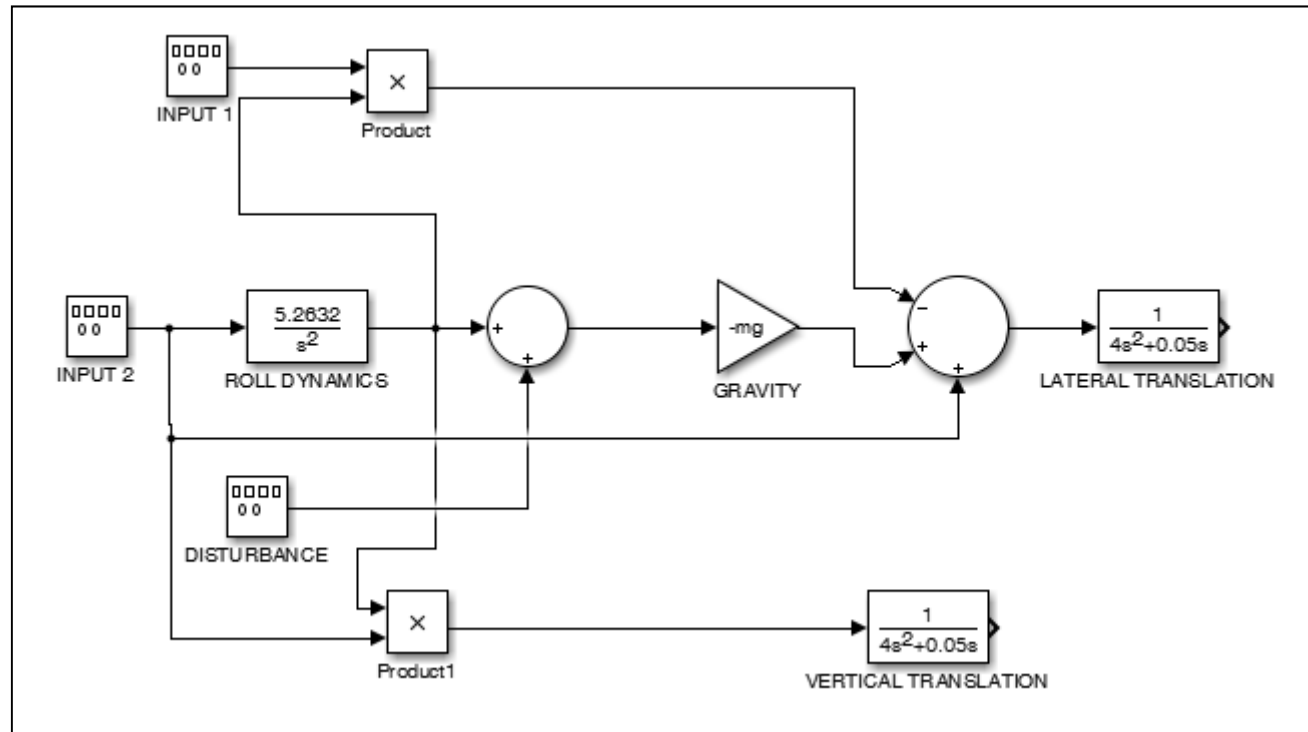
- Forza  $F_1$  per il controllo della posizione verticale
- Forza  $F_2$  per il controllo di Rollio e la posizione laterale

- Linearizzazione intorno alla Verticale (Rollio = 0 all'equilibrio):

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 + d = ru_1 + d \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi = u_1 - u_2\phi - mg\phi, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 + F_1\phi - mg = u_2 + u_1\phi \end{cases} \begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 - mg \end{cases}$$



## Harrier Control (Murray)



❑ **Considerazioni fisiche:** La dinamica di rollio è più veloce della dinamica di traslazione laterale, questo permette un controllo sequenziale a due anelli (interno in rollio, esterno in traslazione laterale)

▪ **Specifiche di Progetto in Rollio:**

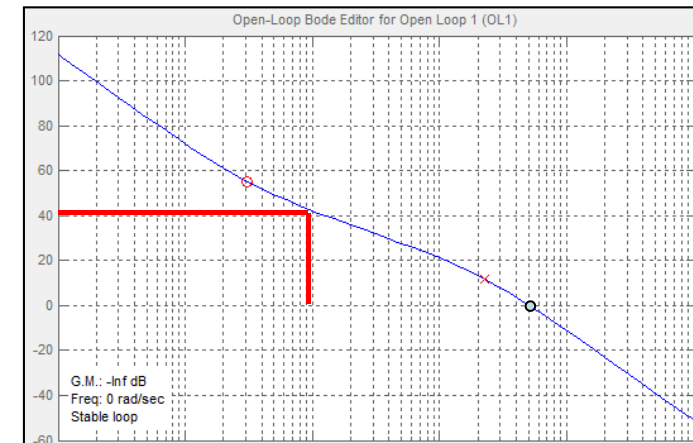
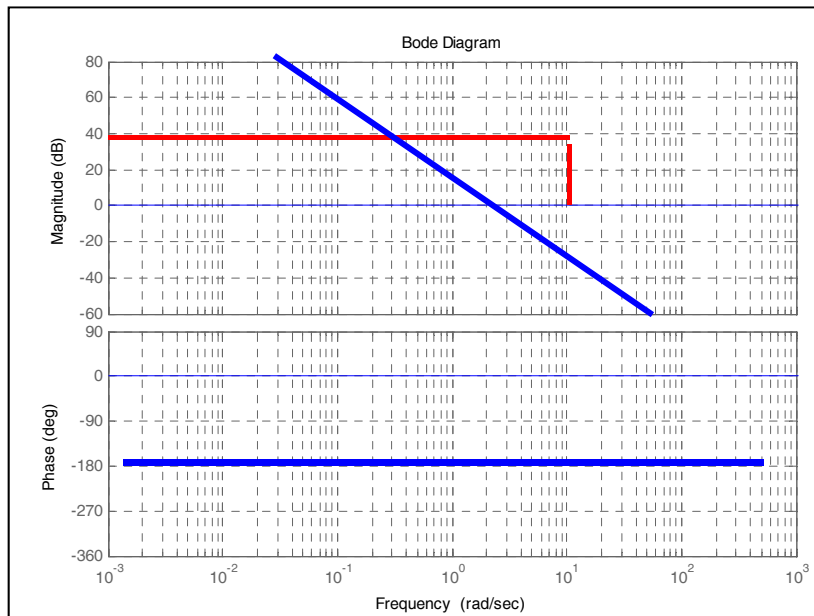
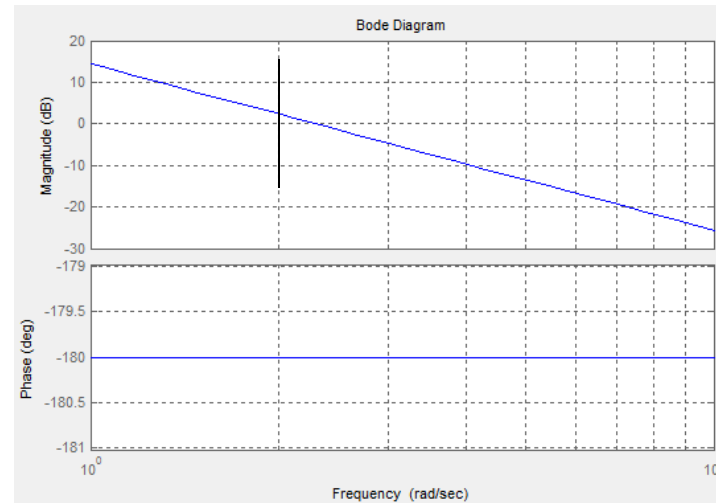
1. Errore a regime  $< 1\%$
2. Buon Inseguimento del comando fino a 10 rad/sec
3. Buona reiezione del disturbo fino a 1 rad/sec
4. Buoni Margini di Stabilità per incertezze sulla dinamica di Attuazione



# Harrier Control (Murray)



$$G_{u_1}^{\phi}(s) = \frac{\phi(s)}{u_1(s)} = \frac{5.2632}{s^2}$$



$$K_{ROLL}(s) = 109.97 \cdot \frac{1 + 0.33s}{1 + 0.0044s}, \begin{cases} Z \simeq -3.0 & GM = \infty \\ P \simeq -227.0 & PM = 37^\circ \end{cases}$$

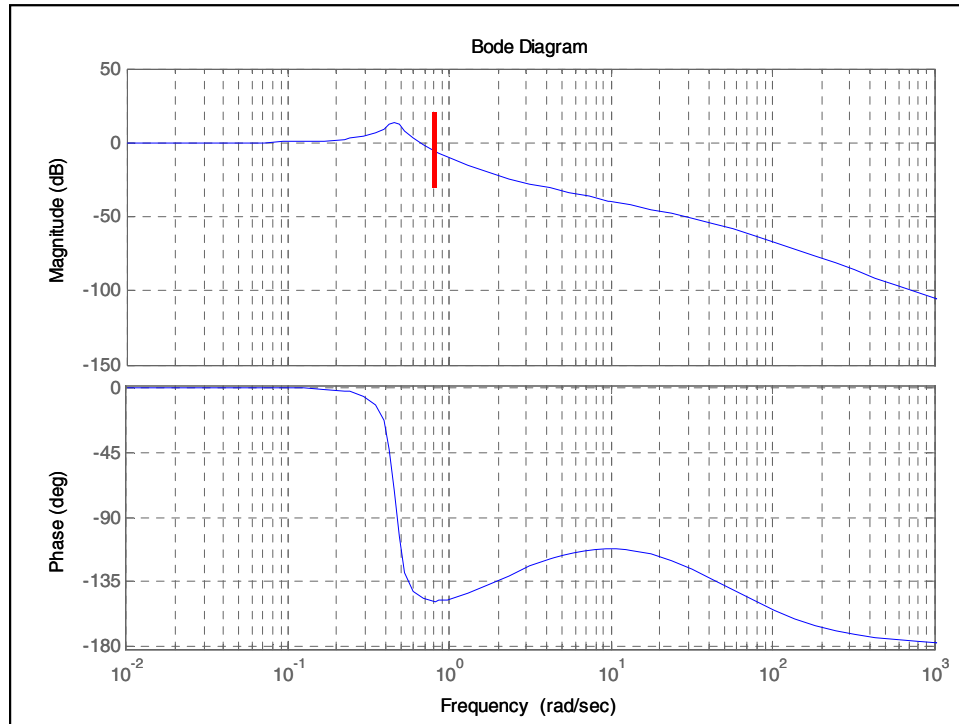
$$\omega_C \approx 500 \text{ rad/sec}$$



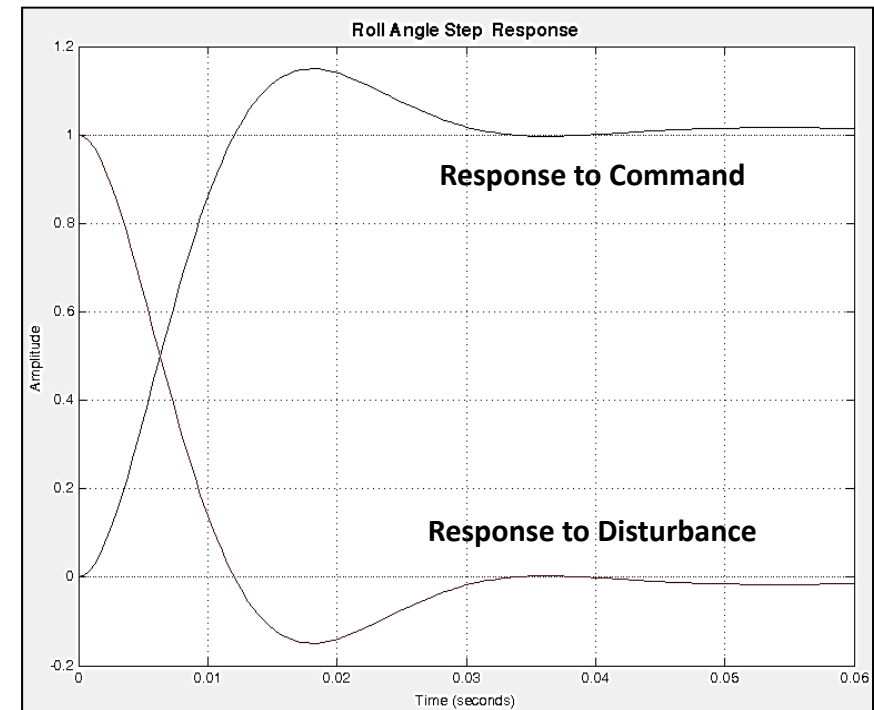
# Harrier Control (Murray)



$$\frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} = \frac{191s + 578.8}{0.0044s^3 + s^2 + 191s + 578.8}$$



$$T_R \approx \frac{0.35}{\omega_{BW} (Hz)} = 0.05$$



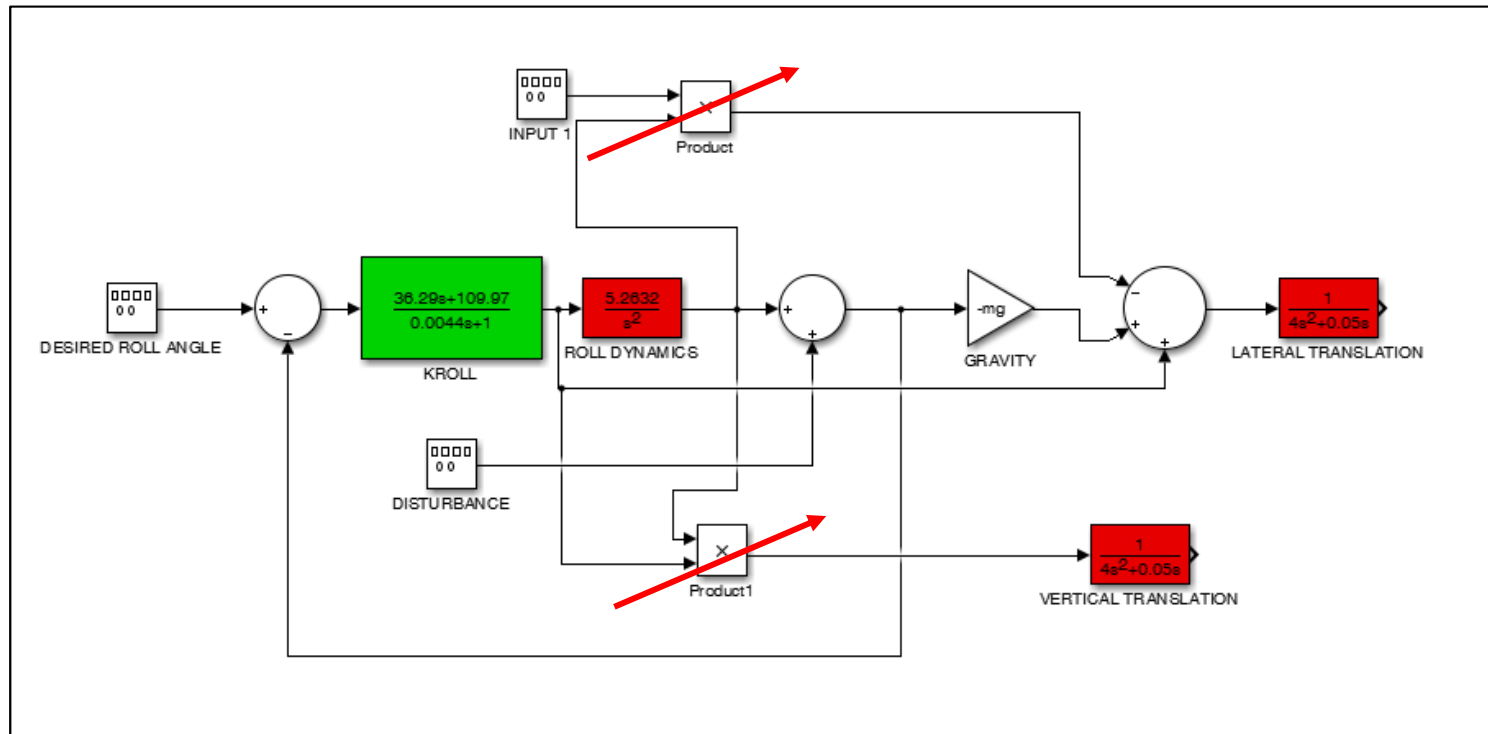


## Harrier Control (Murray)



- Controllo della Posizione laterale per il mantenimento della condizione di hover:

$$J\ddot{\phi} = rF_1 = ru_1$$
$$m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi \cong u_1 - mg\phi$$
$$G_{LAT}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs} = \frac{1}{4s^2 + 0.05s}$$

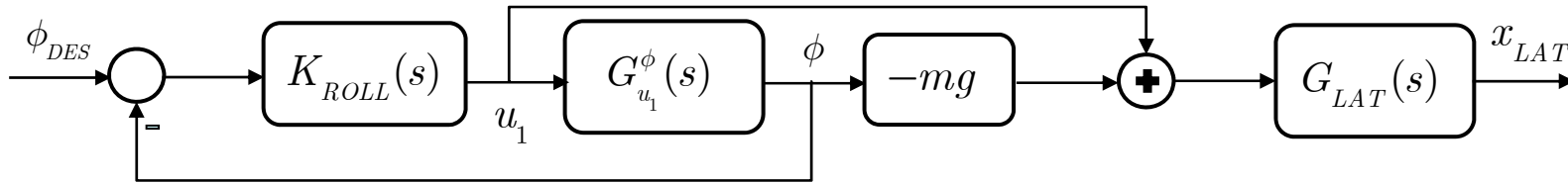




## Harrier Control (Murray)



- Anello interno controllato:



$$x(s) = G_{LAT}(s) \left[ K_{ROL}(s)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(s) \right] \phi_{DES}(s) = G_{INNER}(s) \phi_{DES}(s)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + K_{ROL}(s)G_{u_1}^\phi(s)}$$

- Assumendo che l'anello interno sia a regime:

$$K_{ROL}(s)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(s) \simeq K_{ROL}(0)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(0) = -mg$$

$$x(s) \simeq -mgG_{LAT}(s)\phi_{DES}(s) = \frac{-39.2}{4s^2 + 0.05s} \phi_{DES}(s)$$



## Harrier Control (Murray)

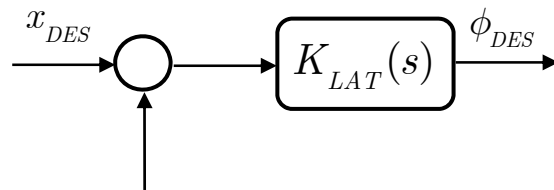
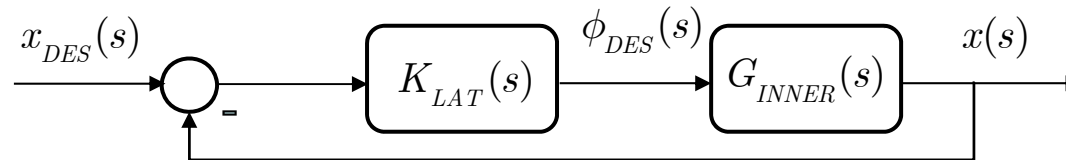


### ■ Specifiche di progetto:

1. Errore nullo a regime in posizione laterale
2. Banda passante di circa 1 rad/sec
3. FdT di Anello < 0.1 in modulo per frequenza superiori a 10 rad/sec

$$|L(j\omega)| = |K_{LAT}(j\omega)G_{INNER}(j\omega)| < 0.1, \omega > 10 \text{ rad / sec}$$

### ■ Anello esterno in posizione laterale:

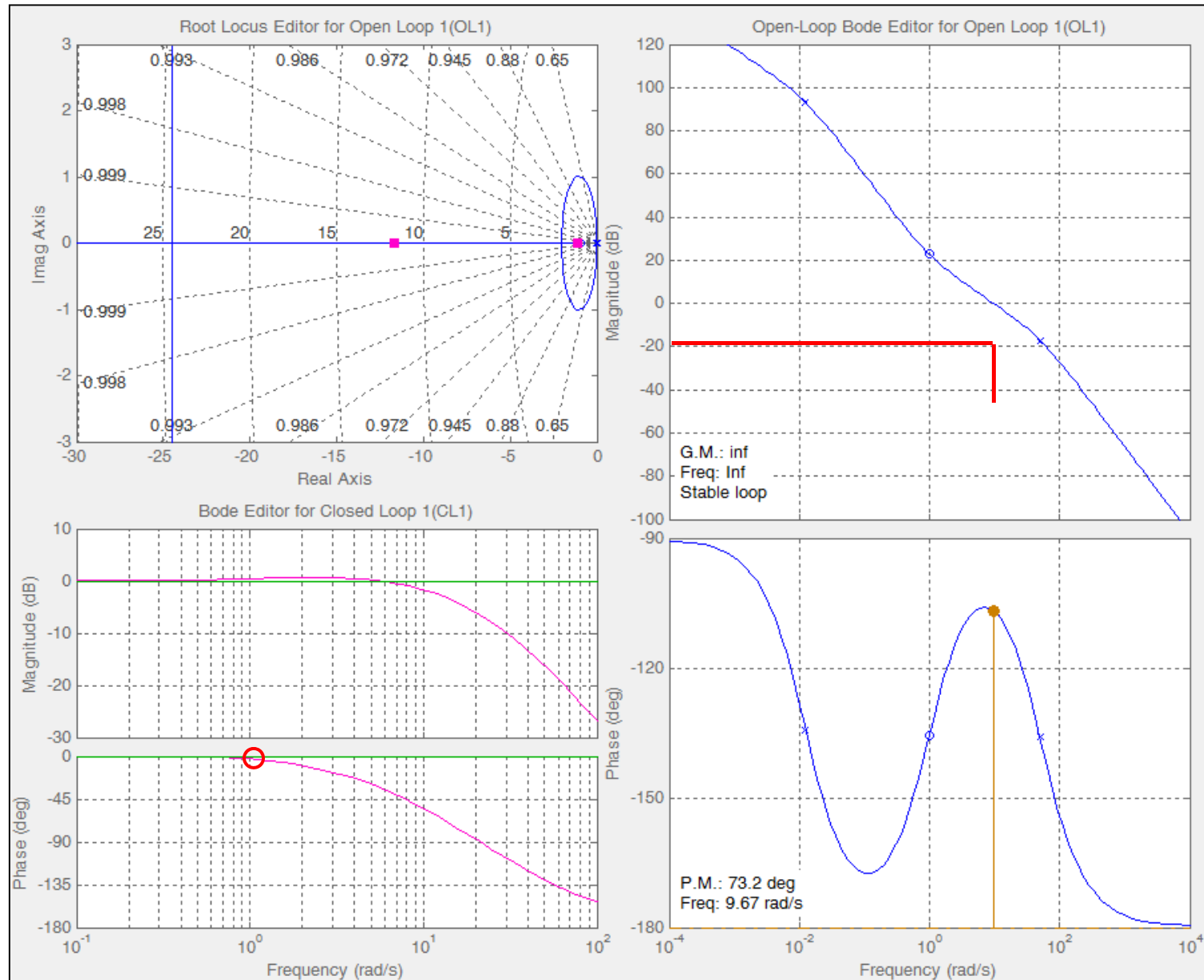


$$K_{LAT}(s) = -\frac{1+s}{1+0.02s} = -50 \frac{s+1}{s+50}$$



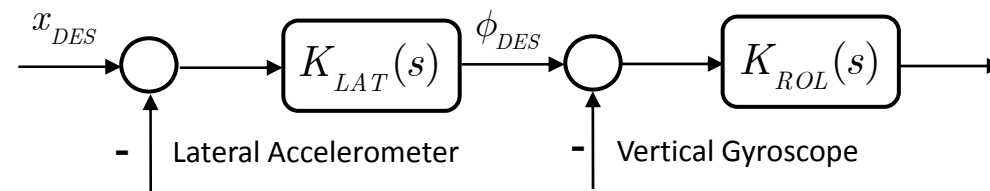
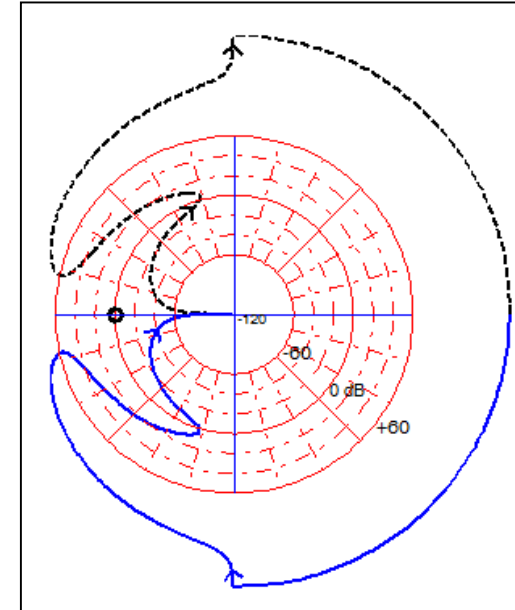
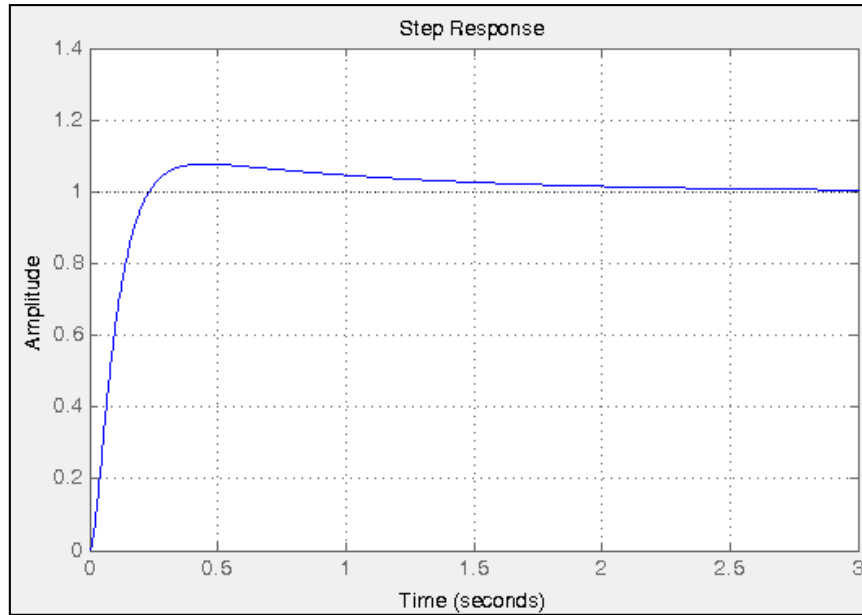


# Harrier Control (Murray)





# Harrier Control (Murray)



$$K_{LAT}(s) = -\frac{1+s}{1+0.02s}$$

$$K_{ROL}(s) = 109.97 \cdot \frac{1+0.33s}{1+0.0044s}$$



# Legame tra le Metodologie



## □ Dominio del Tempo

- Equazioni differenziali
- Risposta a Regime
  - Errore
- Risposta Transitoria
  - Sovraelongazione
  - Tempo di Salita
  - Tempo di Assestamento
  - Costante di tempo
- Approssimazione a Poli Dominanti
- Ritardo

## □ Dominio di Laplace

- Criterio di Routh
- Luogo delle Radici
  - Coefficiente di Smorzamento
  - Pulsazione propria
  - Guadagno critico di anello
- Locazione dei Poli Dominanti

## □ Dominio della Frequenza

- Sensitività complementare, Banda Passante
- FdT di Anello
- Frequenza di Attraversamento
- Funzione di Sensitività
- Margini di Stabilità
  - Margine di Guadagno
  - Margine di Fase
  - Grado di Robustezza
- Ritardo di Fase

