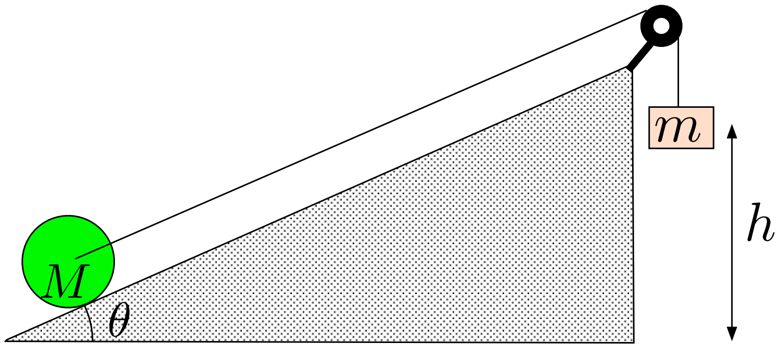
Esercizio (tratto dal problema 7.42 del Mazzoldi 2)

Un disco di massa $M = 8$Kg e raggio R è posto sopra un piano, inclinato di un angolo $\theta = 30^o$ rispetto all'orizzontale; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa $m = 6\,$Kg. Il filo è teso con la massa m bloccata ad un'altezza $h = 1.5\,$m dal suolo. All'istante $t = 0$ si lascia libera la massa m che inizia a scendere, facendo contemporaneamente salire il disco lungo il piano. Il moto del disco è di puro rotolamento.



Calcolare:

1. l'accelerazione con cui scende la massa m;
2. la velocità con cui la massa m tocca il suolo;
3. la quota massima raggiunta dal centro del disco (misurata rispetto alla quota che lo stesso centro aveva per $t = 0$) dopo che m ha toccato il suolo.

SOLUZIONE

Dati iniziali:

$$\begin{aligned} M &= 8\,\mathrm{Kg} \\ m &= 6\,\mathrm{Kg} \\ \theta &= \frac{\pi}{6} \\ h &= 1.5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Suddividiamo il moto in due tratti:

1. Il primo tratto va dall'istante $t = 0$ all'istante t^* in cui il corpo di massa m tocca il suolo. Osserviamo che in questo primo tratto, dato che il filo è inestensibile, il moto del centro di massa del disco (lungo il piano) ed il moto del corpo m (verticalmente) sono strettamente legati. Infatti quando m percorre una distanza d verticalmente il centro di massa del disco percorre anch'esso la stessa distanza d lungo il piano. Di conseguenza istante per istante il modulo $v(t)$ della velocità di m (diretta verticalmente) è uguale al modulo $v_{\mathrm{CM}}(t)$ del centro di massa del disco (diretta lungo il piano inclinato). Analogamente per le accelerazioni.

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{CM}} &= v \qquad (1) \\ & \qquad\qquad 0 \leq t \leq t^* \\ a_{\mathrm{CM}} &= a \qquad (2) \end{aligned}$$

2. Il secondo tratto di moto va dunque da t^* all'istante t_{fin} in cui il disco si arresta. Una volta che m tocca il suolo, il filo non esercita più alcuna tensione sul disco, e dunque questo procede nel suo moto svincolato da m.

Per risolvere il problema possiamo procedere in due modi:

PRIMO MODO (EQUAZIONI DELLA DINAMICA)

1. Fissiamo anzitutto un verso convenzionale per il moto del sistema. In base al testo sembra opportuno scegliere il verso dall'alto verso il basso per il corpo di massa m; conseguentemente per il disco il verso è quello longitudinale al piano inclinato con direzione verso l'alto.

   Equazione per il punto materiale m:
   Sul punto materiale m agiscono

   - la tensione $-T$ del filo (il segno $-$ è perché la tensione è diretta in verso opposto al verso convenzionalmente scelto per il moto di m);
   - la forza peso mg

   Quindi per il punto m possiamo scrivere

   $$mg - T = ma \qquad (3)$$

   Equazioni cardinali per il disco
   Elenchiamo innanzitutto le forze che agiscono sul disco:

   (a) la forza peso $M\vec{g} = -Mg\sin\theta\,\hat{\imath}_{||} - Mg\cos\theta\,\hat{\imath}_{\perp}$;

(b) la tensione $\vec{T} = T\,\hat{\imath}_{||}$ del filo;

(c) la reazione vincolare del piano $\vec{R} = R\,\hat{\imath}_{\perp}$;

(d) la forza di attrito $\vec{F}_{\rm att} = -F_{\rm att}\,\hat{\imath}_{||}$ che si esercita al punto di contatto tra il disco ed il piano inclinato (il segno '-' è perché la forza di attrito è diretta in verso opposto al verso convenzionalmente scelto per il moto);
NB: la forza di attrito esiste perché il testo ci dice che si tratta di un moto di rotolamento. Se non vi fosse attrito il disco salirebbe mantenendo sempre lo stesso punto di contatto col piano, senza ruotare. È dunque la forza di attrito che fa ruotare il disco.
NOTA BENE: A differenza del caso dei punti materiali, dove la forza di attrito è dinamica data da $\mu M g \cos\theta$ (coeff di attrito $\times$ componente normale del peso), nel caso di un corpo rigido che rotola la forza di attrito è tipicamente di tipo statico. Pertanto è un'incognita del problema, che NON è $\mu M g \cos\theta$ e che si deve determinare!

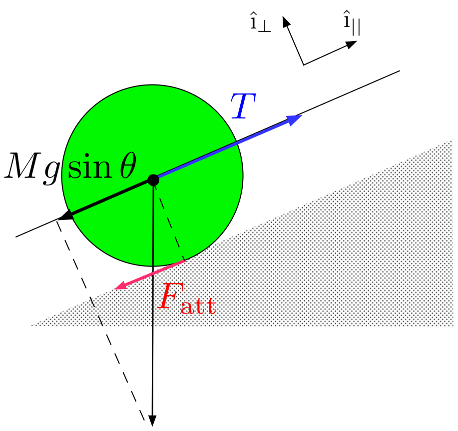
Il disco è un corpo rigido. Pertanto la sua dinamica è descritta da *due* equazioni, una per il moto traslatorio del centro di massa, ed una per il moto rotatorio attorno ad un asse.

<u>Moto traslatorio del C.M.:</u>
Il centro di massa del disco si muove lungo il piano, soggetto all'equazione:

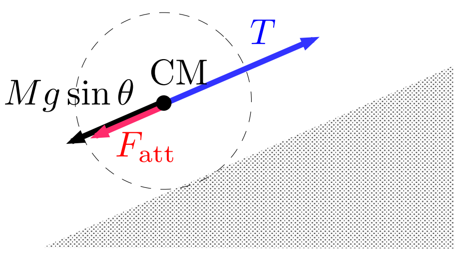
$$\sum_j \vec{F}^e_j \;=\; M\vec{a}_{\rm CM} \;=\; M a_{\rm CM}\,\hat{\imath}_{||} \tag{4}$$

dove M è la massa totale del sistema (=disco) e $\sum_j \vec{F}^e_j$ è la somma delle forze esterne che agiscono sul disco lungo il piano.

Osserviamo che l'Eq.(4) per il centro di massa è formalmente l'equazione per un solo punto materiale (il centro di massa) a cui devono pensarsi applicate tutte le forze esterne che agiscono sul punto materiale. Pertanto, <u>ai fini di questa equazione</u>, anche la forza di attrito (che è applicata al punto di contatto tra disco e piano e non al centro del disco) va pensata come applicata al centro di massa.



$\Rightarrow$



Scomponendo la (4) nelle due direzioni lungo il piano ($\hat{\imath}_{||}$) e ortogonale al piano ($\hat{\imath}_{\perp}$) abbiamo

$$-\,M g \sin\theta - F_{\rm att} + T \;=\; M a_{\rm CM} \qquad \text{(lungo il piano)} \tag{5}$$

$$-M g \cos\theta + R \;=\; M \cdot 0 = 0 \qquad \text{(il C.M. non si muove ortogonalmente al piano)} \tag{6}$$

Moto rotatorio attorno al C.M.

- Il disco, in quanto corpo rigido, ha con un grado di libertà in più rispetto ad un punto materiale, ossia può ruotare attorno ad un asse. Questo moto è descritto dalla seconda equazione cardinale del moto di un corpo rigido, ossia

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{M}_j^e$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare totale del corpo rigido (=disco) e M^e il momento totale delle forze esterne. Questa relazione vale nel sistema di riferimento del laboratorio, rispetto ad un qualsiasi polo. Tuttavia è in genere più conveniente mettersi nel sistema di riferimento del centro di massa, ed utilizzare il centro di massa stesso come polo. Si dimostra che in tale riferimento (che pure *non* è inerziale) vale

$$\boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_j \vec{M}_j'^{\,e}} \tag{7}$$

dove

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \tag{8}$$

e

$$\vec{M}'^{\,e} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}^e \tag{9}$$

sono il momento angolare ed il momento delle forze esterne relative al centro di massa (si noti che non solo le posizioni $\vec{r}_i'$ dei punti del disco sono riferite al polo = centro di massa, ma anche le velocità $\vec{v}_i'$ sono quelle viste dal sistema di riferimento del centro di massa e non quelle viste dal sistema inerziale).

Scriviamo dunque l'Eq.(7) esplicitamente per il disco, ossia nel sistema di riferimento del centro di massa del disco. In tale sistema il disco ha moto circolare (non uniforme!) rispetto all'asse passante per il suo centro.

- Il momento angolare $\vec{L}'$ del disco in rotazione rispetto all'asse che passa per il suo centro e perpendicolare al foglio si scrive come

$$\vec{L}' = I\vec{\omega} \tag{10}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto a tale asse, $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ con ω la velocità angolare e $\hat{k}$ è il versore che descrive l'asse di rotazione, dunque perpendicolare al foglio, nel verso entrante. Pertanto

$$\vec{L}' = I\omega\hat{k} \tag{11}$$

- Nel calcolare i momenti $\vec{M}'^{\,e}$ delle varie forze esterne rispetto al centro del disco osserviamo che,
  - $\vec{M}'_{\text{peso}} = 0$ (dato che la forza peso ha braccio nullo perché applicata direttamente al centro del disco);
  - $\vec{M}'_{\text{T}} = 0$ (dato che la tensione ha braccio nullo perché applicata direttamente al centro del disco);
  - $\vec{M}'_{\text{R}} = 0$ (dato che la reazione vincolare $\vec{R}$ è parallela al suo braccio);

Pertanto l'unica forza esterna che ha un momento non nullo è la forza di attrito, e vale

$$\vec{M}'_{\rm att} = \vec{r}'_{cont} \times \vec{F}_{\rm att} \tag{12}$$

dove $\vec{r}'_{cont}$ è il vettore che va dal centro al punto di contatto tra il disco ed il piano.

i) La direzione di $\vec{M}'_{\rm att}$ è ortogonale al foglio, e il verso è quello entrante nel foglio

ii) il modulo vale

$$M'_{\rm att} = |\vec{M}'_{\rm att}| = |\vec{r}'_{cont}||\vec{F}_{\rm att}| \underbrace{\sin\alpha}_{=1} = R\, F_{\rm att} \tag{13}$$

e dunque

$$\vec{M}'_{\rm att} = R\, F_{\rm att}\, \hat{k} \tag{14}$$

dove $\hat{k}$ è il versore entrante nel foglio.

- Inserendo la (11) e la (14) nella (7) otteniamo
  Dato che $M'_{\rm att}$ e $\vec{L}'$ hanno la stessa direzione ($=\hat{k}$) possiamo scrivere l'Eq.(7) per la sola componente lungo tale direzione

  $$I \frac{d\omega}{dt} = R\, F_{\rm att} \tag{15}$$

  La quantità

  $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{16}$$

  è l'accelerazione angolare del moto rotatorio del disco relativo al centro di massa. Quindi l'Eq.(15) si riscrive anche come

  $$I\, \alpha = R\, F_{\rm att} \tag{17}$$

Condizione di puro rotolamento

Utilizziamo ora l'informazione che il moto è di puro rotolamento. La velocità istantanea del punto di contatto (vista nel sistema inerziale del laboratorio) è data da

$$\vec{v}_{cont} = \vec{v}_{\rm CM} + \vec{v}'_{cont} \qquad\qquad \text{con } \vec{v}'_{cont} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{cont}$$

dove $\vec{v}_{\rm CM}$ è la velocità del CM (vista dal sistema del laboratorio) e $\vec{v}'_{cont}$ la velocità vista dal sistema del CM del disco.
i) Se il disco non rotolasse (se non ci fosse attrito) si avrebbe $\vec{v}'_{cont} = 0$ ed il punto di contatto seguirebbe il CM del disco;
ii) nel moto di puro rotolamento, invece, i due termini si cancellano l'uno con l'altro. Ciò significa che istante per istante la velocità del punto di contatto (misurata nel sistema di riferimento del CM del disco) è uguale ed opposta alla velocità traslatoria del centro di massa (misurata nel sistema inerziale del laboratorio). Quindi il punto di contatto ha una velocità nulla (=è istantaneamente fermo) nel sistema del laboratorio. Siccome il punto di contatto dista R dal centro del disco abbiamo $\vec{r}'_{cont} = \vec{R}$ e

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{\rm CM} & = & \omega\, R \\ & & \\ a_{\rm CM} & = & \alpha\, R \end{array} \right. \qquad \text{(perché il moto è di puro rotolamento)} \tag{18}$$

Sostituendo la seconda delle equazioni (18) nell'Eq.(17) otteniamo

$$\frac{I}{R^2} a_{\mathrm{CM}} = F_{\mathrm{att}} \tag{19}$$

Riassumendo, dalle equazioni (3), (5) e (19) abbiamo ottenuto le tre seguenti condizioni

$$\begin{cases} mg - T = m\,a & \text{(moto traslatorio del punto)} \\ -Mg\sin\theta - F_{\mathrm{att}} + T = Ma_{\mathrm{CM}} & \text{(moto traslatorio del CM del disco)} \\ \frac{I}{R^2} a_{\mathrm{CM}} = F_{\mathrm{att}} & \text{(moto rotatorio attorno al CM del disco)} \end{cases} \tag{20}$$

Ricordando ora che, essendo il filo inestensibile, del filo vale l'Eq.(2)

$$a_{\mathrm{CM}} = a$$

otteniamo un sistema completo di 3 equazioni in 3 incognite (=T, F_{att} e a)

$$\begin{cases} T = m\,(g - a) & \text{(moto del punto materiale } m\text{)} \\ -Mg\sin\theta - F_{\mathrm{att}} + T = Ma & \text{(moto traslatorio del CM del disco)} \\ \dfrac{I}{R^2} a = F_{\mathrm{att}} & \text{(moto rotatorio del disco)} \end{cases} \tag{21}$$

Risolvendo questo sistema si possono determinare l'accelerazione, la forza d'attrito e la tensione.

- Sostituendo la prima e la terza equazione nella seconda otteniamo

$$-Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2} a_{\mathrm{CM}} + m(g-a) = Ma \tag{22}$$

$$\Rightarrow g(m - M\sin\theta) = (m + M + \frac{I}{R^2})\,a \tag{23}$$

da cui ricaviamo che

$$a = g\,\frac{m - M\sin\theta}{m + M + \frac{I}{R^2}} \tag{24}$$

Per un disco il momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per il centro vale

$$I = \frac{1}{2} M\,R^2 \tag{25}$$

Inserendo (25) nell'Eq.(26) e ricordando (2) otteniamo che l'accelerazione verticale del punto m

$$a = a_{\mathrm{CM}} = g\,\frac{m - M\sin\theta}{m + \frac{3}{2}M} \tag{26}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned}
a &= 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{6\mathrm{Kg}-8\mathrm{Kg}\sin\frac{\pi}{6}}{6\,\mathrm{Kg}+\frac{3}{2}\cdot 8\,\mathrm{Kg}} = \\
&= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{6\mathrm{Kg}-8\mathrm{Kg}\frac{1}{2}}{18\,\mathrm{Kg}} = \\
&= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{9} = \\
&= 1.09\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned} \tag{27}$$

Osserviamo che la massa $m = 6\,\mathrm{Kg}$ è piú piccola della massa $M = 8\,\mathrm{Kg}$ del disco. Ciononostante il disco si muove verso l'alto. Questo perché per il disco conta solo la componente longitudinale della forza peso, che è $Mg\sin\theta$ e non Mg. Quindi la massa efficace del disco è $M\sin\theta = M/2$, che è piú piccola di m. Quindi il numeratore dell'Eq.(26) è positivo

- Dalla seconda equazione delle (21), possiamo ora trovare la forza d'attrito

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{att}} &= \frac{I}{R^2}\,a = \\
&= \frac{1}{2}M\,a = \\
& \quad [\text{sostituisco (26)}] = \\
&= \frac{1}{2}Mg\,\frac{m-M\sin\theta}{m+\frac{3}{2}M}
\end{aligned} \tag{28}$$

IMPORTANTE: Osserviamo che la forza di attrito

$$F_{\mathrm{att}} \neq \mu Mg\cos\theta$$

e dunque **NON E'** uguale al valore che avrebbe se si trattasse di un punto materiale che striscia su un piano scabro. La quantità a membro destro rappresenta il valore *massimo* che la forza di attrito statico può assumere, non il valore vero, che è dato da (28) e che in generale dipende non solo dal disco ma anche dalla massa m del punto materiale. Affinché il moto di puro rotolamento (ossia punto di contatto statico nel sistema del Laboratorio) sia possible occorre che

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{att}} &\leq \mu_s Mg\cos\theta \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}Mg\,\frac{m-M\sin\theta}{m+\frac{3}{2}M} &\leq \mu_s Mg\cos\theta \\
&\Downarrow \\
\mu_s &\geq \frac{m-M\sin\theta}{(2m+3M)\cos\theta}
\end{aligned} \tag{29}$$

che costituisce un vincolo sul coefficiente di attrito del piano.

La massa m si muove verticalmente di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = a_{\mathrm{CM}}$ [Eq.(26)]. Denotiamo con v^* la velocità con cui m tocca il suolo. Per determinare v^* possiamo utilizzare la formula (valida solo per il moto uniformemente accelerato!)

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2h} \tag{30}$$

dove h è lo spazio percorso, $v_1 = 0$ (m parte da fermo) e $v_2 = v^*$. Pertanto ricaviamo

$$v^* = \sqrt{2ah} \tag{31}$$

Utilizzando il risultato (27) ottenuto per a abbiamo

$$\begin{aligned} v^* &= \sqrt{2 \cdot 1.09 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \, 1.5 \, \mathrm{m}} = \\ &= 1.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{32}$$

2. Una volta che il corpo m tocca il suolo, il filo non esercita più alcuna tensione T. Il disco risulta completamente svincolato dal corpo m e (avendo nel frattempo acquistato energia cinetica) prosegue per un po' il suo moto lungo il piano inclinato, per poi arrestarsi ad un acerta altezza. Il moto in questo tratto è governato dalle sole equazioni prime due equazioni (21), ossia

   - moto traslatorio del CM del disco (in cui però ora $T = 0$)
   - moto rotatorio del disco

   Dunque abbiamo

$$\begin{cases} -Mg\sin\theta - F_{\mathrm{att}} = Ma_2 & \text{(moto traslatorio del CM del disco)} \\ \\ \dfrac{I}{R^2} a_2 = F_{\mathrm{att}} & \text{(moto rotatorio del disco)} \end{cases} \tag{33}$$

   dove abbiamo utilizzato per l'accelerazione il simbolo a_2 in questo secondo tratto di moto per distinguerla dall'accelerazione a determinata per il primo tratto in cui disco e corpo m sono accoppiati. Sostituendo la seconda nella prima equazione otteniamo

$$\begin{cases} -Mg\sin\theta - \dfrac{I}{R^2} a_2 = Ma_2 \\ \\ \dfrac{I}{R^2} a_2 = F_{\mathrm{att}} \end{cases} \tag{34}$$

   da cui si ottiene

$$a_2 = -\frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I}{R^2}} \tag{35}$$

   Ricordando che per un disco il momento d'inerzia è

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

   otteniamo

$$a_2 = -\frac{2}{3} g \sin\theta \tag{36}$$

   Pertanto in questo secondo tratto il moto del CM del disco longitudinalmente al piano è un moto uniformemente accelerato in cui:

- la posizione iniziale è h (perché è esattamente l'altezza di cui è sceso m quando impatta il suolo);
- la velocità iniziale è v^* (perché è la velocità con cui m impatta il suolo);
- l'accelerazione è a_2 data dalla (36).

Per determinare la distanza Δl percorsa dal CM (longitudinalmente al piano) dopo l'istante t^* in cui m tocca il suolo possiamo utilizzare allora la relazione (valida per moti uniformemente accelerati)

$$\Delta l = \frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2a_2} \tag{37}$$

dove scegliamo

$v_{in} = v^*$

$v_{fin} = 0$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Delta l &= -\frac{v^{*2}}{2a_2} = \\ & \quad [\text{usiamo la (31)}] \\ &= -\frac{2ah}{2a_2} = \\ &= -\frac{a}{a_2}\,h = \\ & \quad [\text{usiamo la (36)}] \\ &= \frac{3a}{2g\sin\theta}\,h \end{aligned} \tag{38}$$

Pertanto il tratto *totale* percorso dal CM longitudinalmente vale

$$\Delta l_{tot} = h + \Delta l = h + \frac{3a}{2g\sin\theta}\,h = h\left(1 + \frac{3a}{2g\sin\theta}\right) \tag{39}$$

che corrisponde ad una variazione di altezza in verticale

$$\begin{aligned} \Delta z_{CM} &= \Delta l_{tot}\,\sin\theta = \\ &= h\left(1 + \frac{3a}{2g\sin\theta}\right)\sin\theta = \\ &= h\left(\sin\theta + \frac{3a}{2g}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} \Delta z_{\rm CM} &= 1.5\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{2} + \frac{3\cdot 1.09\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right) = \\ &= 1\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{41}$$

SECONDO MODO (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA)
Nonostante sia presente un forza di attrito, possiamo applicare la conservazione dell'energia. Infatti, nel caso particolare del moto di puro rotolamento, tale forza non compie lavoro perché si esercita nel punto di contatto $\vec{r}_{cont}$ che, come osservato in precedenza, nel caso di puro rotolamento è sempre istantaneamente fermo. Infatti la velocità v_{cont} del punto di contatto (rispetto al sistema del laboratorio) è la combinazione della velocità traslatoria $v_{\rm CM}$ del centro di massa e della velocità $\vec{v}'_{cont}$ rispetto al sistema di riferimento del centro di massa. Siccome si tratta di moto di puro rotolamento si ha $\vec{v}'_{cont} = -\vec{v}_{CM}$ [vedi Eq.(18)] e dunque $v = 0$. Pertanto istante per istante il punto di contatto non si sposta ($d\vec{s} = 0$) e

$$W_{\rm att} = \int \vec{F}_{\rm att} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{=0} = 0 \tag{42}$$

Naturalmente il disco percorre una distanza finita in un tempo finito perché, istante per istante, il punto di contatto cambia. In conclusione la variazione di energia meccanica

$$\delta E_m = W_{\rm att} = 0 \tag{43}$$

è nulla, ossia l'energia si conserva. L'energia meccanica è data dall'energia meccanica del disco + quella del punto materiale m:

$$E_m = E_m^{\rm disco} + E_m^{\rm punto} \tag{44}$$

dove

$$E_m^{\rm disco} = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{\rm CM}^2}_{\text{en. cin. di traslazione}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{\text{en.cin. di rotazione}} + \underbrace{M g\, z_{\rm CM}}_{\text{en.pot}} \tag{45}$$

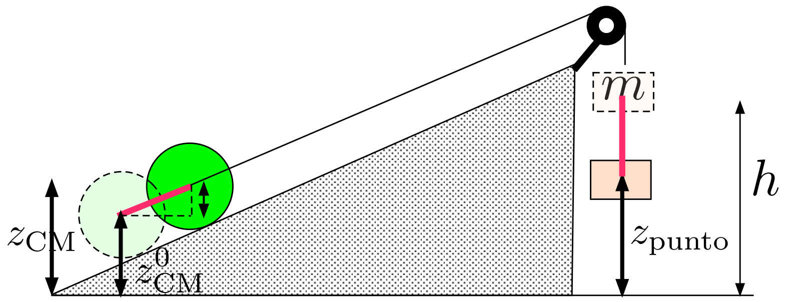
e

$$E_m^{\rm punto} = \frac{1}{2} m v^2 + \underbrace{m g\, z_{\rm punto}}_{\text{en.pot}} \tag{46}$$

Per scrivere l'energia cinetica del disco:
i) abbiamo usato il teorema di König

$$K = \frac{1}{2} M v_{\rm CM}^2 + K' \tag{47}$$

ii) per l'energia cinetica K' relativa al centro di massa abbiamo usato il fatto che nel centro di massa il moto è quello rotatorio di un corpo rigido, e dunque $K' = \frac{1}{2} I \omega^2$.



Osserviamo ora che

- Siccome il moto è di puro rotolamento la velocità traslatoria del centro di massa e quella angolare relativa al centro di massa sono legate da

$$v_{\rm CM} = \omega R \tag{48}$$

- siccome il disco e il punto materiale sono legati da un filo inestensibile si ha [vedi (1)]

$$v_{\rm CM} = v$$

e anche

$$z_{\rm punto} = h - \frac{z_{\rm CM} - z^0_{\rm CM}}{\sin\theta} \tag{49}$$

dove $z^0_{\rm CM}$ è l'altezza iniziale del centro di massa del disco. L'Eq.(49) si può equivalentemente scrivere come

$$z_{\rm CM} = z^0_{\rm CM} + (h - z_{\rm punto})\sin\theta \tag{50}$$

Pertanto l'espressione per l'energia meccanica in un generico istante del primo tratto di moto (dall'istante $t = 0$ fino a quando m tocca il suolo) è

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \\ &\quad + Mg\left(z^0_{\rm CM} + (h - z_{\rm punto})\sin\theta\right) + mgz_{\rm punto} \end{aligned} \tag{51}$$

Cominciamo dunque dal:

2. Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica. All'istante $t = 0$ si ha $v = 0$ e $z_{\rm punto} = h$. Pertanto

$$E_m^{in} = Mgz^0_{\rm CM} + mgh \tag{52}$$

mentre all'istante t^* in cui m tocca il suolo si ha $v = v^*$ e $z_{\rm punto} = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned} E_m(t^*) &= \frac{1}{2}Mv^{*2} + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^{*2} + \frac{1}{2}mv^{*2} + \\ &\quad + Mg\left(z^0_{\rm CM} + h\sin\theta\right) \end{aligned} \tag{53}$$

Uguagliando

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m(t^*) \\ Mgz^0_{\rm CM} + mgh &= \frac{1}{2}Mv^{*2} + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v^{*2} + \frac{1}{2}mv^{*2} + \\ &\quad + Mg\left(z^0_{\rm CM} + h\sin\theta\right) \end{aligned} \tag{54}$$

Semplificando $Mgz^0_{\rm CM}$ si ottiene

$$mgh - Mgh\sin\theta = \frac{1}{2}(m + M + \frac{I}{R^2})\, v^{*2} \tag{55}$$

e dunque

$$v^* = \sqrt{\frac{2hg(m - M\sin\theta)}{m + M + \frac{I}{R^2}}} \tag{56}$$

Ricordando che

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

si ricava

$$v^* = \sqrt{\frac{2hg(m - M\sin\theta)}{m + \frac{3}{2}M}} \tag{57}$$

1. Per determinare l'accelerazione notiamo che, in questo secondo modo di procedere, non sappiamo se il moto sia accelerato uniforme. Dobbiamo anzi dimostrarlo. Osserviamo allora che l'energia meccanica (51) si può scrivere come

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}(M + \frac{I}{R^2} + m)\, v^2 + g(m - M\sin\theta)z_{\text{punto}} + E_0} \tag{58}$$

dove

$$E_0 = Mg(z^0_{\text{CM}} + h\sin\theta) \tag{59}$$

è una costante.
L'espressione (58) per l'energia meccanica del sistema disco+punto è formalmente uguale all'energia meccanica di un punto materiale efficace che ha massa

$$m_{eff} = M + \frac{I}{R^2} + m \tag{60}$$

e che ha energia potenziale

$$E_{p,eff}(z_{\text{punto}}) = g(m - M\sin\theta)z_{\text{punto}} + E_0 \tag{61}$$

La forza che si esercita su tale punto è dunque

$$F = -\frac{\partial E_{p,eff}}{\partial z_{\text{punto}}} = -g(m - M\sin\theta) \tag{62}$$

e l'accelerazione è

$$a = \frac{F}{m_{eff}} = -\frac{g(m - M\sin\theta)}{m + M + \frac{I}{R^2}} \tag{63}$$

ossia una costante, e dunque il moto è uniformemente accelerato. Ricordando ora che per il disco

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{64}$$

otteniamo

$$a = -\frac{g(m - M\sin\theta)}{m + \frac{3}{2}M} \tag{65}$$

dove il segno '-' indica che è diretta verso il basso. Confrontando (57) con (65) si osserva che

$$v^* = \sqrt{2|a|h}$$

3. Per determinare tale altezza utilizziamo il principio di conservazione dell'energia. In questo secondo tratto di moto, siccome il disco è ormai svincolato dal punto materiale, l'energia che ci interessa è solo quella del disco, che si scrive come

$$E_m^{\text{disco}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2_{\text{CM}}}_{\text{en. cin. di traslazione}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{en.cin. di rotazione}} + \underbrace{Mg\, z_{\text{CM}}}_{\text{en.pot}} \tag{66}$$

Per scrivere l'energia cinetica:
i) abbiamo usato il teorema di König

$$K = \frac{1}{2}Mv^2_{\text{CM}} + K' \tag{67}$$

ii) per l'energia cinetica K' relativa al centro di massa abbiamo usato il fatto che nel centro di massa il moto è quello rotatorio di un corpo rigido, e dunque $K' = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Osserviamo ora che

- Siccome il moto è di puro rotolamento la velocità traslatoria del centro di massa e quella angolare relativa al centro di massa sono legate da

$$v_{\rm CM} = \omega R \tag{68}$$

Pertanto l'espressione per l'energia meccanica in un generico istante del primo tratto di moto (dall'istante $t = 0$ fino a quando m tocca il suolo) è

$$E_m^{\rm disco} = \frac{1}{2} M v_{\rm CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} v_{\rm CM}^2 + M g z_{\rm CM} \tag{69}$$

Denotiamo con t^* l'istante in cui m tocca il suolo, e con $z_{\rm CM}^*$ l'altezza che il centro di massa del disco ha raggiunto in tale istante. Siccome all'istante t^* il punto m ha percorso una distanza h rispetto alla posizione iniziale, il centro di massa del disco ha pure percorso una distanza h (lungo il piano inclinato), che corrisponde ad una variazione di altezza $h \sin\theta$ rispetto all'altezza iniziale $z_{\rm CM}^0$ che il centro di massa del disco aveva quando m si trovava all'altezza h. Quindi

$$z_{\rm CM}^* = z_{\rm CM}^0 + h \sin\theta \tag{70}$$

Allo stesso istante t^* la velocità con cui m tocca il suolo è v^*, che è anche la velocità che il centro di massa del disco possiede a quell'istante [vedi (1)]. Pertanto

$$\begin{aligned} E_m(t^*) &= \frac{1}{2} M {v_{\rm CM}^*}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} {v_{\rm CM}^*}^2 + M g z_{\rm CM}^* = \\ &= \frac{1}{2}(M + \frac{I}{R^2})\, {v_{\rm CM}^*}^2 + M g (z_{\rm CM}^0 + h \sin\theta) \end{aligned} \tag{71}$$

Denotiamo ora con t_{fin} l'istante in cui il disco si arresta. In tale istante $v_{\rm CM} = 0$ e il centro di massa ha percorso una certa altezza $\Delta z_{\rm CM}$ rispetto all'altezza $z_{\rm CM}^0$ iniziale. Pertanto

$$z_{{\rm CM},fin} = z_{\rm CM}^0 + \Delta z_{\rm CM} \tag{72}$$

Pertanto

$$E_m(t_{fin}) = 0 + M g z_{{\rm CM},fin} = M g (z_{\rm CM}^0 + \Delta z_{\rm CM}) \tag{73}$$

Per la conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} E_m(t^*) &= E_m(t_{fin}) \\ \frac{1}{2}(M + \frac{I}{R^2})\, {v_{\rm CM}^*}^2 + M g (z_{\rm CM}^0 + h \sin\theta) &= M g (z_{\rm CM}^0 + \Delta z_{\rm CM}) \\ &\Rightarrow \end{aligned} \tag{74}$$

Semplificando $M g z_{\rm CM}^0$ si ottiene

$$\Delta z_{\rm CM} = h \sin\theta + \frac{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) {v_{\rm CM}^*}^2}{2g} \tag{75}$$

Sostituendo ora l'Eq.(31) si può anche scrivere come

$$\Delta z_{\rm CM} = h \sin\theta + h \left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) \frac{a}{g} \tag{76}$$

Ricordando che per il disco

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\Delta z_{\mathrm{CM}} = h\left(\sin\theta + \frac{3a}{2g}\right) \tag{77}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}\Delta z_{\mathrm{CM}} &= 1.5\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{2} + \frac{3\cdot 1.09\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right) = \\ &= 1\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{78}$$