Esercizio 1

Si calcoli la TCF del segnale $x(t)=\sum_n x_0(t-nT)$ dove $x_0(t)=t/\tau\cdot rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$ con $\tau << T$. Quanto vale la potenza media di x(t)?

Esercizio 2

Al ricevitore di Fig. 1 viene applicato il segnale PAM in banda passante $r(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)\cos(2\pi f_0 t+\vartheta)+w(t)$ con $f_0 >> 1/T$, $\vartheta=\pi/3$, simboli a_i, indipendenti ed equiprobabili, appartenenti all'alfabeto $A\equiv[-1,1]$. Il rumore w(t) introdotto dal canale è Gaussiano, a media nulla, con densità spettrale di potenza $S_W(f)=\frac{N_0}{2}\left\{tri\left(\frac{f-f_0}{2B}\right)+tri\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right\}$ con B la banda dell'impulso trasmesso $g_T(t)$ il cui spettro è $G_T(f)=\sqrt{T}\,rect(fT)$. Nell'ipotesi che la risposta impulsiva del filtro in ricezione sia $g_R(t)=g_T(t)$ si calcoli:

1) L'energia trasmessa media per simbolo
2) La potenza media della componente di rumore all'uscita del filtro in ricezione $g_R(t)$
3) La BER.

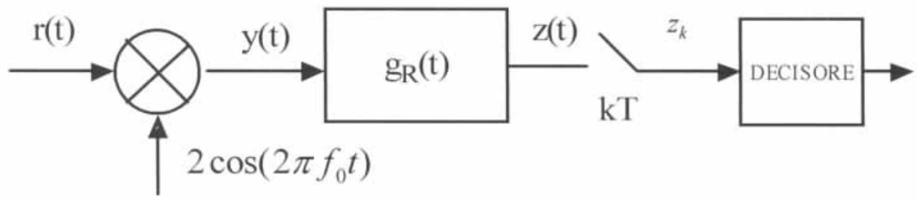
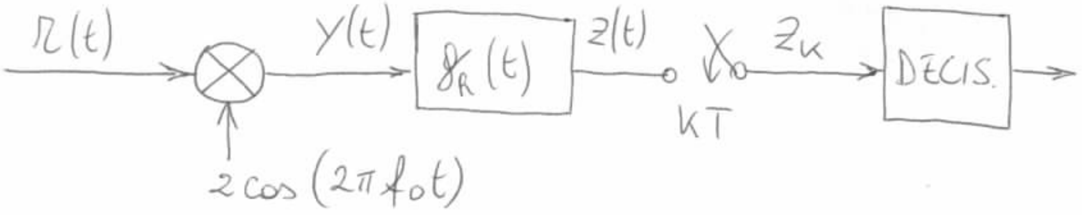


Fig.1

COMPITO 18/03/08

ESERCIZIO 2

PAM BANDA PASSANTE

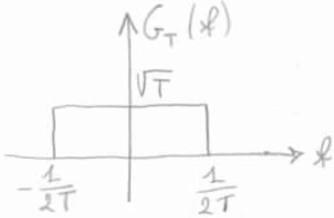


$$r(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT) \cos(2\pi f_0 t + \vartheta) + w(t) \qquad f_0 \gg 1/T \quad \vartheta = \pi/3$$

$a_i \in [-1, 1]$ indip. equip.

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \left\{ \mathrm{tri}\left(\frac{f - f_0}{2B}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f + f_0}{2B}\right) \right\}$$ con B banda di $g_T(t)$

$$G_T(f) = \sqrt{T}\, \mathrm{rect}(fT) \quad \text{e} \quad g_R(t) = g_T(t)$$



1. Energia trasmessa media per simbolo

NOTA: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

$$E_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \vartheta)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\frac{1}{2} g_T^2(t) + \underbrace{\frac{1}{2} g_T^2(t) \cos(4\pi f_0 t + 2\vartheta)}_{=0} \Big] dt =$$

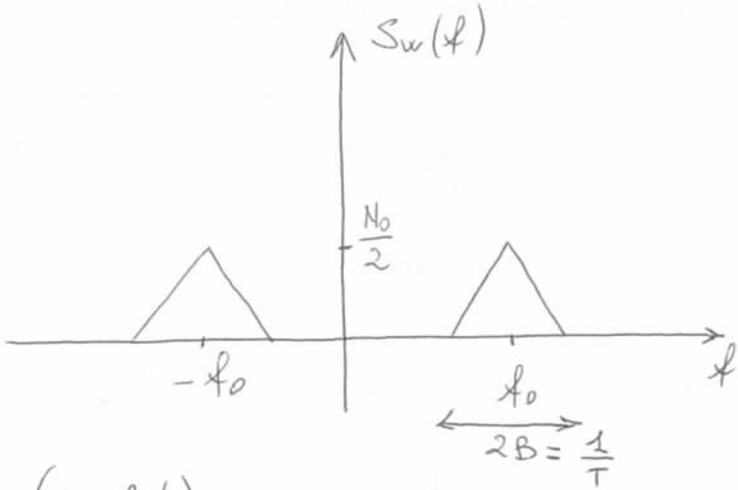
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} g_T^2(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_T^2(f)\, df =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sqrt{T}\, \mathrm{rect}(fT)\right]^2 df = \frac{1}{2} \int_{-1/2T}^{1/2T} T\, df =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2T} + \frac{T}{2T} \right] = \frac{1}{2}$$

2. La potenza media della componente di rumore all'uscita del filtro in ricezione $g_R(t)$

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}\left[tri\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + tri\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$



B è la banda di $G_T(f)$
$= 1/2T$

$$w(t) = w_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - w_s(t)\,sen(2\pi f_0 t)$$

$$S_{w_c}(f) = S_{w_s}(f) = N_0\, tri\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Il rumore dopo la demodulazione sarà:

$$2w(t)\cos(2\pi f_0 t) = 2w_c(t)\cos^2(2\pi f_0 t) - 2w_s(t)\,sen(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= w_c(t) + w_c(t)\cos(4\pi f_0 t) - w_s(t)\,sen(4\pi f_0 t)$$

Il filtro g_R usato in ricezione è un passa-basso, di conseguenza dopo il filtraggio rimarrà solo la componente $w_c(t)$.

$$n_c(t) = w_c(t) \otimes g_R(t) \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_c}^2)$$

$$S_{n_c}(f) = S_{w_c}(f)\,|G_R(f)|^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{n_c}^2 = P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_c}(f)\,|G_R(f)|^2\,df =$$

$$= N_0 T \int_{-1/2T}^{1/2T} tri\left(\frac{f}{2B}\right) df = N_0 T \cdot \frac{1}{2T} = \frac{N_0}{2}$$

3. Calcolare la BER

Il rumore dopo i filtraggi in rx è già caratterizzato, adesso ci occupiamo della componente utile del segnale.

$$y'(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)\cos(2\pi f_0 t + \vartheta) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= \left[\sum_i a_i g_T(t - iT)\right]\left[\cos(\vartheta) + \cos(4\pi f_0 t + \vartheta)\right]$$

dove si è usata la relazione $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

Anche in questo caso il filtro $g_R(t)$ toglie le alte freq.:

$$\Rightarrow z'(t) = y'(t) \otimes g_R(t) = \sum_i a_i g(t - iT)\cos\vartheta$$

La variabile di decisione, inclusiva di rumore, sarà:

$$z_k = a_k \cos\vartheta + n_{ck} \qquad \text{con } n_{ck} \in \mathcal{N}(0, \sigma_{nc}^2)$$

$$\text{e } \sigma_{nc}^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$a_k = \pm 1$$

$$z_{k|1} = \cos\vartheta + n_{ck}$$

$$z_{k|-1} = -\cos\vartheta + n_{ck}$$

$$P(-\hat{1}|1) = \Pr\{z_k < \lambda\} = Q\left(\frac{m_{z|1} - \lambda}{\sigma_{nc}}\right) = Q\left(\frac{\cos\vartheta}{\sigma_{nc}}\right)$$

$$P(\hat{1}|-1) = \Pr\{z_k > \lambda\} = Q\left(\frac{\lambda - m_{z|-1}}{\sigma_{nc}}\right) = Q\left(\frac{\cos\vartheta}{\sigma_{nc}}\right)$$

$$P(e) = BER = P(1)\,P(-\hat{1}|1) + P(-1)\,P(\hat{1}|-1) =$$

$$= \frac{1}{2} Q\left(\frac{\cos\vartheta}{\sigma_{nc}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{\cos\vartheta}{\sigma_{nc}}\right) =$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2\cos^2\vartheta}{N_0}}\right) =$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 1/4}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2N_0}}\right)$$