Proprietà della L-Trasformata: Teorema valor iniziale

$$f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(t - t_0) + \frac{f_2}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}(t - t_0)^k$$

$$f_0 = f(t_0); \quad f_1 = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}; \quad f_2 = \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=t_0}; \quad f_k = \left.\frac{d^k f}{dt^k}\right|_{t=t_0}$$

$$t = 0; \quad f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}t + \frac{f_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}t^k + \dots$$

Proprietà della L-Trasformata: Teorema valor iniziale

$$f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(t - t_0) + \frac{f_2}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}(t - t_0)^k$$

$$f_0 = f(t_0); \quad f_1 = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}; \quad f_2 = \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=t_0}; \quad f_k = \left.\frac{d^k f}{dt^k}\right|_{t=t_0}$$

$$t = 0; \quad f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}t + \frac{f_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}t^k + \ldots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}} \longrightarrow F(s) = f_0\frac{1}{s} + f_1\frac{1}{s^2} + f_2\frac{1}{s^3} + \ldots + f_k\frac{1}{s^{k+1}}$$

Proprietà della L-Trasformata: Teorema valor iniziale

$$f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(t - t_0) + \frac{f_2}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{f_k}{k!}(t - t_0)^k$$

$$f_0 = f(t_0); \quad f_1 = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0}; \quad f_2 = \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=t_0}; \quad f_k = \left.\frac{d^k f}{dt^k}\right|_{t=t_0}$$

$$t = 0; \quad f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}t + \frac{f_2}{2!}t^2 + \dots + \frac{f_k}{k!}t^k + \dots$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}} \longrightarrow F(s) = f_0\frac{1}{s} + f_1\frac{1}{s^2} + f_2\frac{1}{s^3} + \dots + f_k\frac{1}{s^{k+1}}$$

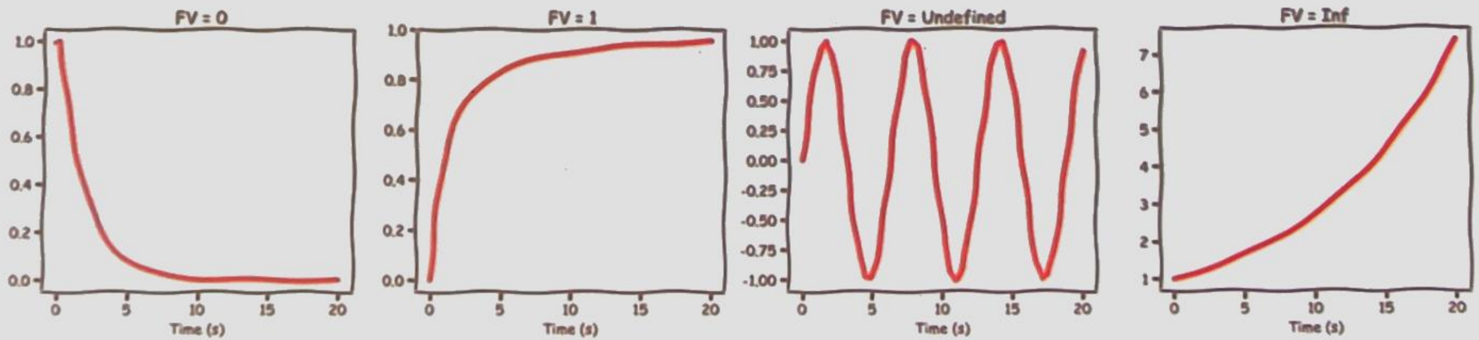
$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} \left(s \cdot F(s)\right)$$

Proprietà della L-Trasformata: Teorema valor finale

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} (s \cdot F(s))$$

Condizione

$\lim_{t \to +\infty} f(t)$ Esiste finito



Proprietà della L-Trasformata: Teorema valor finale

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}(s \cdot F(s))$$

Condizione

$\lim_{t\to+\infty} f(t)$ Esiste finito

Questo e' il

$\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0)$

Partiamo dalla trasformata di Laplace della derivata di f(t)

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0) \xrightarrow{\text{Facciamo il limite per s->0}} \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}\, dt} = \lim_{s\to 0}(s \cdot F(s)) - f(0)$$

E possiamo quindi dire: $\lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s\to 0}(s \cdot F(s)) - f(0)$

Proprietà della L-Trasformata: Teorema Valore Finale

Caso 1 $e^{-t} \rightarrow \dfrac{1}{s+1}$ per t->Inf, vale 0

Posso applicare il teorema del valor finale $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} (s \cdot F(s))$

Caso 2

$e^{t} \rightarrow \dfrac{1}{s-1}$

sF(s)=0 per s->0

per t->Inf, vale Inf

Decomposizione in fratti semplici

Decomposizione in fratti semplici

$$G(s) = \boxed{\frac{n(s)}{d(s)}} = \frac{n(s)}{(s-s_1)^h \cdot R(s)}$$

Tutti gli altri poli

Rapporto di polinomi

Poli in s_1 con molteplicita' h

Posso scrivere G(s) come somma di residui polari

$$G(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)^h} + \frac{k_2}{(s-s_1)^{h-1}} + \cdots + \frac{k_h}{(s-s_1)} + T(s)$$

Decomposizione in fratti semplici

$$G(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)^h} + \frac{k_2}{(s-s_1)^{h-1}} + \cdots + \frac{k_\mu}{(s-s_1)} + T(s)$$

$$\downarrow$$

$$(s-s_1)^h \cdot G(s) = k_1 + k_2 \cdot (s-s_1) + k_3 \cdot (s-s_1)^2 + \cdots + k_h \cdot (s-s_1)^{h-1} + T(s) \cdot (s-s_1)^h$$

Facendo il limite per $s \to s_1$

$\lim_{s \to s_1} \left((s-s_1)^h \cdot G(s)\right) = k_1$ Trovo il primo residuo polare.

Posso iterare la procedura. Se faccio la derivata rispetto a s del primo termine:

$$\frac{d\left[(s-s_1)^h \cdot G(s)\right]}{ds} = k_2 + 2 \cdot k_3 \cdot (s-s_1) + \cdots + (h-1) \cdot k_h \cdot (s-s_1)^{h-2} + resto$$

Decomposizione in fratti semplici

$$G(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)^h} + \frac{k_2}{(s-s_1)^{h-1}} + \cdots + \frac{k_\mu}{(s-s_1)} + T(s)$$

$$\downarrow$$

$$(s-s_1)^h \cdot G(s) = k_1 + k_2 \cdot (s-s_1) + k_3 \cdot (s-s_1)^2 + \cdots + k_h \cdot (s-s_1)^{h-1} + T(s) \cdot (s-s_1)^h$$

$$\lim_{s \to s_1} \left((s-s_1)^h \cdot G(s) \right) = k_1$$

$$\frac{d\left[(s-s_1)^h \cdot G(s)\right]}{ds} = k_2 + 2 \cdot k_3 \cdot (s-s_1) + \cdots + (h-1) \cdot k_h \cdot (s-s_1)^{h-2} + resto$$

$$\lim_{s \to s_1} \frac{d\left[(s-s_1)^h \cdot G(s)\right]}{ds} = k_2$$

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \to s_1} \frac{d^{i-1}\left[(s-s_1)^h \cdot G(s)\right]}{ds^{i-1}}$$

Continuando arrivo a generalizzare

Decomposizione in fratti semplici: esempio

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)\cdot(s+1)^3} \qquad G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s\to s_1} \frac{d^{i-1}\left[(s-s_1)^h \cdot G(s)\right]}{ds^{i-1}}$$

$$A = \lim_{s\to -3}(s+3)G(s) = \lim_{s\to -3} \frac{s+2}{(s+1)^3} = \frac{-1}{(-2)^3} = \frac{1}{8}$$

$$D = \lim_{s\to -1}(s+1)^3 G(s) = \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)^3(s+2)}{(s+3)(s+1)^3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^3(s+2)}{(s+3)(s+1)^3} = \frac{(s+3)-(s+2)}{(s+3)^2} = \frac{1}{4}$$

Decomposizione in fratti semplici: esempio

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)\cdot(s+1)^3} \qquad G(s) = \frac{A^{=1/8}}{s+3} + \frac{B^{=-1/8}}{s+1} + \frac{C^{=1/4}}{(s+1)^2} + \frac{D^{=1/2}}{(s+1)^3}$$

$$G(s) = \frac{1/8}{s+3} - \frac{1/8}{s+1} + \frac{1/4}{(s+1)^2} + \frac{1/2}{(s+1)^3} \qquad \frac{1}{s^2}$$

$$\downarrow$$

$$g(t) = \left(\frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{4}t\cdot e^{-t} + \frac{1}{4}t^2\cdot e^{-t}\right)\cdot 1(t)$$

Decomposizione in fratti semplici: esempio

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Complessi coniugati di A e B

$$G(s) = \frac{1}{(s+j)^2(s-j)^2} = \frac{A}{s+j} + \frac{A^*}{s-j} + \frac{B}{(s+j)^2} + \frac{B^*}{(s-j)^2}$$

Il coniugato del residuo e' uguale al residuo del coniugato

Calcoliamo i residui

Decomposizione in fratti semplici: esempio

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} \qquad G(s) = \frac{1}{(s+j)^2(s-j)^2} = \frac{A}{s+j} + \frac{A^*}{s-j} + \frac{B}{(s+j)^2} + \frac{B^*}{(s-j)^2}$$

$$B = \lim_{s\to -j}\left((s+j)^2 \cdot G(s)\right) = \lim_{s\to -j} \frac{1}{(s-j)^2} = -\frac{1}{4} = B^*$$

Ci troviamo il complesso e coniugato

$$A = \lim_{s\to -j} \frac{d}{ds}\left[(s+j)^2 \cdot G(s)\right] = \lim_{s\to -j} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-j)^2}\right) = \frac{j}{4}, \quad A^* = -\frac{j}{4}$$

Il residuo e' immaginario

Ed infine:

$$G(s) = \frac{j/4}{s+j} - \frac{j/4}{s-j} - \frac{1/4}{(s+j)^2} - \frac{1/4}{(s-j)^2} \longrightarrow g(t) = \frac{j}{4}\left(e^{-jt} - e^{jt}\right) \cdot 1(t) - \frac{1}{4}t \cdot \left(e^{-jt} + e^{jt}\right) \cdot 1(t)$$

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t)\right) \cdot 1(t)$$

Decomposizione in fratti semplici: esercizio

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3)+B(s+1)}{(s+1)(s-3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[f] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\right] = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

Decomposizione in fratti semplici: esercizio

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

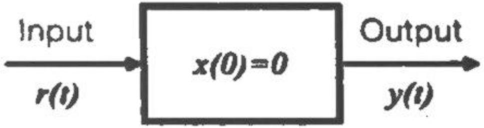
$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+2)}$$

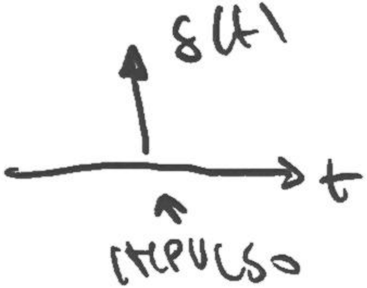
$$\mathcal{L}^{-1}[G] = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Risposta all'impulso

I sistemi LTI possono essere caratterizzati attraverso la loro risposta all'impulso

Ovvero l'uscita del sistema quando in ingresso vi e' un segnale molto breve





$$u(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=h(t)$$

Risposta all’impulso

I sistemi LTI possono essere caratterizzati attraverso la loro risposta all'impulso

Ovvero l’uscita del sistema quando in ingresso vi e’ un segnale molto breve:

Fornisce solo la relazione ingresso-uscita

La risposta all’impulso puo’ essere usata per determinare come il sistema risponde ad altri ingressi

Risposta all'impulso

La relazione tra ingresso r(t) e uscita y(t) di un sistema dinamico, inizialmente rilassato (condizioni iniziali nulle), e' descritta da:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t g(t)r(\tau-\tau)d\tau; \;\; t \geq 0$$

uscita

ingresso

Risposta all'impulso

La convoluzione emerge naturalmente nella descrizione dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti (**LTI**) a causa delle proprietà di linearità (i.e., principio di sovrapposizione degli effetti) e invarianza nel tempo.

Risposta all'impulso

Supponiamo di avere un ingresso generico u(t). È possibile interpretarlo come la sovrapposizione continua di infiniti impulsi infinitesimali, ciascuno rappresentato dalla funzione δ(t):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

l'ingresso $u(\tau)$ in un istante particolare può essere visto come un impulso "pesato" e ritardato nel tempo:

Risposta all'impulso

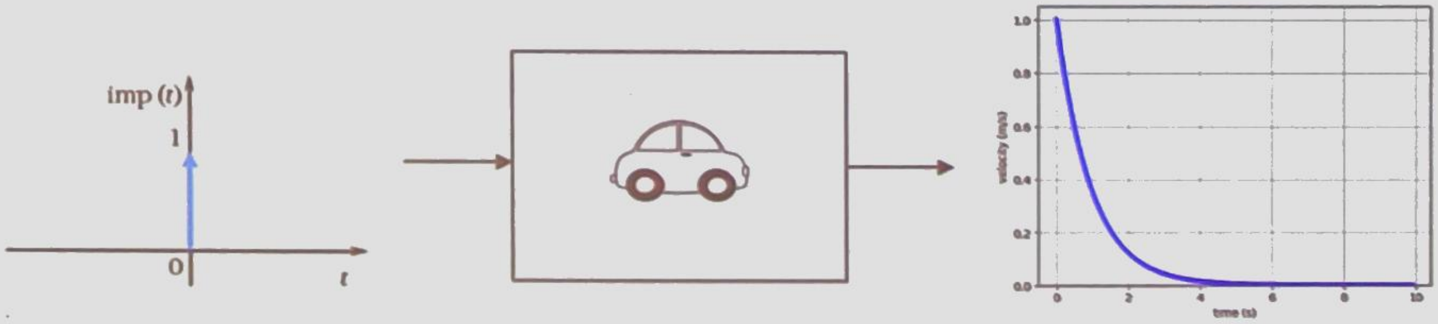
Supponiamo di avere un ingresso generico u(t). È possibile interpretarlo come la sovrapposizione continua di infiniti impulsi infinitesimali, ciascuno rappresentato dalla funzione δ(t):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

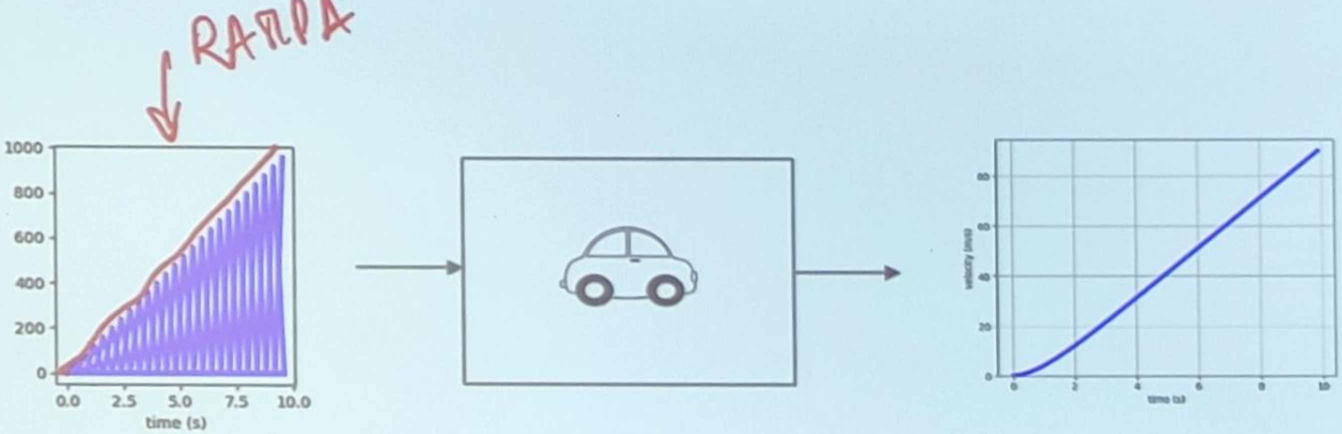
Sfruttando la linearità del sistema, l'uscita sarà la somma delle risposte impulsive corrispondenti, pesate dal valore dell'ingresso u(τ):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Risposta all’impulso



Risposta all'impulso



$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t g(t)r(t-\tau)d\tau; \;\; t \geq 0$$

Risposta all'impulso e funzione di trasferimento

La anti-trasformata di una funzione di trasferimento rappresenta la risposta all'impulso unitario

$Y(s) = G(s)\,\underline{U(s)}$

L'integrale della risposta all'impulso unitario rappresenta la risposta al gradino unitario

$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$$L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int g(t)dt$$

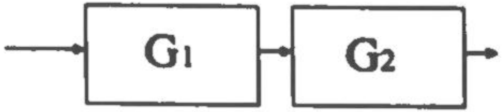
Schemi a blocchi

Rappresentazione standard e uniforme di sistemi e sottosistemi interconnessi con funzioni di trasferimento

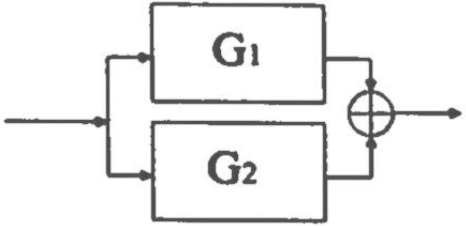
Identificazione di ingressi, uscite, elementi dinamici

Sempre utile concettualmente in fase di analisi

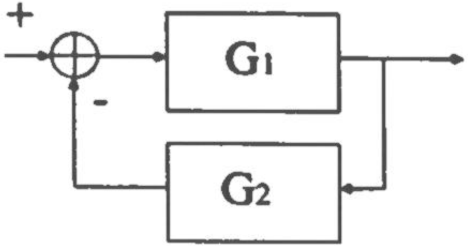
Algebra dei blocchi



$G = G_1 G_2$ connessione serie

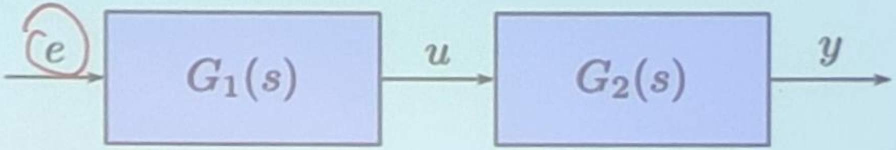


$G = G_1 + G_2$ connessione parallelo



$G = \dfrac{G_1}{1 + G_1 G_2}$ *connessione in retroazione!*

Algebra dei blocchi



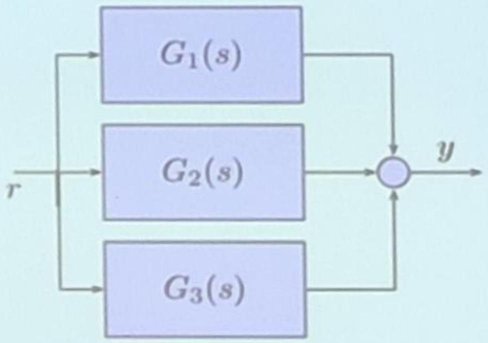
connessione serie

$$Y(s) = G_2(s)U(s)$$

$$U(s) = G_1(s)E(s)$$

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)E(s) \Rightarrow G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Algebra dei blocchi

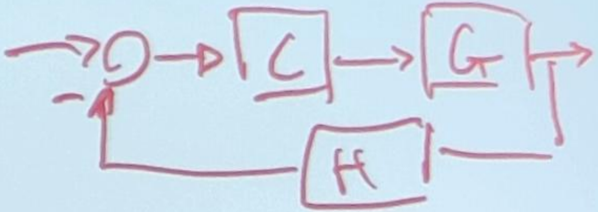


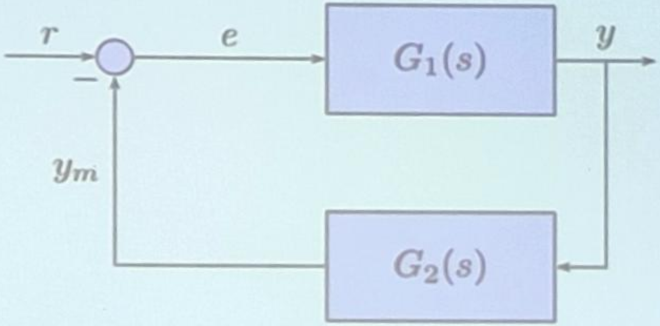
connessione parallelo

$$Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) + G_3(s)R(s) = (G_1(s) + G_2(s) + G_3(s))R(s)$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

Algebra dei blocchi





connessione in retroazione!

$$Y(s) = G_1(s) * E(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y_m(s)$$

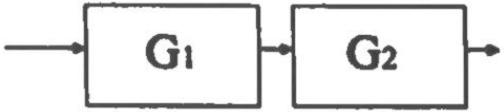
$$Y_m(s) = G_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G_1(s) * (R(s) - Y_m(s)) \rightarrow Y(s) = G_1(s) * (R(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$Y(s) + G_1(s)G_2(s)Y(s) = G_1(s) * R(s)$$

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

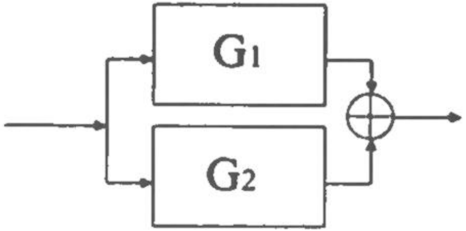
Raggiungibilità e osservabilità dei sistemi aggregati
Connessione in serie



$$G = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}\frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

se n_1 e d_2 hanno radici in comune, G non raggiungibile
(*cancellazione zero – polo*)
se n_2 e d_1 hanno radici in comune, G non osservabile
(*cancellazione polo – zero*)

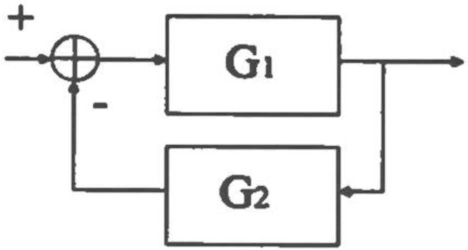
Raggiungibilità e osservabilità dei sistemi aggregati
Connessione in parallelo



$$G = \frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2}$$

se d_1 e d_2 hanno radici in comune, G non osservabile e non raggiungibile

Raggiungibilità e osservabilità dei sistemi aggregati
Connessione in retroazione



$$G = \frac{\frac{n_1}{d_1}}{1 + \frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2}} = \frac{n_1 d_2}{d_1 d_2 + n_1 n_2}$$

Regole relative alla connessione serie per il prodotto $G_1 G_2$

Cancellazioni possono avvenire quando N_1 e D_2 hanno fattori comuni

La retroazione *modifica i poli* e *non modifica gli zeri* del sistema in catena diretta (G_1)