591AA 21/22 – COMPITO, LEZIONI 16 E 17

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

Problema 1.

(a) Verificare che $|z-3|+|z+3|=10$ definisce l'equazione di un'ellisse.
(b) Usa la formula di de Movier per verificare che

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$$

Problema 2. [8.53, Schaum, pg 303, pdf 311]. Risolvi i seguenti sistemi lineari usando la regola di Cramer.

(a)

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 7 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y - 6z &= 5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2z + 3 &= y + 3x \\ x - 3z &= 2y + 1 \\ 3y + z &= 2 - 2x \end{aligned}$$

Problema 3. Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^t = -A$.

(a) Verificare che se n dispari allora $det(A) = 0$.

Se $n = 2m$ è pari, risulta che

$$\det(A) = (pf(A))^2$$

dove $pf(A)$ è chiamato il pfaffiano di A. Se $A = (a_{ij})$ allora il segno di $pf(A)$ è selezionato in modo che $a_{12}a_{34}\cdots a_{2m-1,2m}$ abbia un segno $+1$.

(b) Verificare che

$$pf\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + dc$$

Problema 4. [9.3, Schaum, pg 321, pdf 329] Trova i polinomi caratteristici delle seguenti matrici:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 5. [9.4, Schaum, pg 321, pdf 329] Trova i polinomi caratteristici delle seguenti matrici:

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 6. Trova i dischi di Gershgorin per le matrici nella parte (a) dei 2 problemi precedenti.

Problema 7. Trova il polinomio caratteristico della mappa lineare $L : P_3[x] \to P_3[x]$,

$$(L(f))(x) = f(x+1)$$

Problema 8. Sia A una matrice $n \times n$ (con voci complesse). Verificare che

$$\langle Az, w\rangle = \langle z, A^* w\rangle$$

relativo il prodotto hermitiano standard

$$\langle (z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$$

su $\mathbb{C}^n$. [Ricorda che $A^* = (\bar{A})^t$.]