POLINOMIO CARATTERISTICO E POLINOMIO MINIMO

Sia A matrice $n \times n$, e sia $p(x)$ un polinomio.
Ha senso calcolare $p(A)$, cioè sostituire una matrice nel polinomio.
Se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

allora

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \, Id$$

<u>Domanda</u>: esistono dei polinomi tali che $p(A) = 0$?
(ovviamente polinomi non completamente nulli)

Risposta: SI. L'insieme delle matrici $n \times n$ è uno sp. vett. di dim. n^2. Considero

$Id, A, A^2, \dots, A^{n^2}$

Si tratta di n^2+1 matrici (c'è anche A^0 !!), quindi non possono essere lin. indip., quindi

$$c_0 Id + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$$

e questo corrisponde ad un polinomio di grado $\le n^2$.

TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY

Sia A matrice $n \times n$, sia $p_A(x)$ il suo polinomio caratteristico.
Allora

$$p_A(A) = 0$$

(se sostituisco una matrice nel pol. caratt. viene 0)

Esempio $A = \begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}2-\lambda&0\\1&4-\lambda\end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda) = \lambda^2-6\lambda+8$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\6&16\end{pmatrix}$$

$$A^2-6A+8Id = \begin{pmatrix}4&0\\6&16\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}12&0\\6&24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

La dimostrazione non è semplicissima, tranne in un caso, quello in cui A è diagonalizzabile

$\boxed{\text{Dim}}$ Per ipotesi esiste M invertibile tale che

$$D = M^{-1}AM \qquad \text{cioè} \qquad A = MDM^{-1}$$

da questa segue che $\quad A^k = MD^kM^{-1}$, ma non serve.

Quello che serve è avere una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ costituita da autovettori, cioè $\quad Av_i = \lambda_i v_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$

Pongo $\; B := p(A)$ dove $p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico
Cosa succede Bv_i
Se $\; p(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$, allora

$$B = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I$$

e quindi

$$Bv_i = a_n(A^nv_i) + a_{n-1}(A^{n-1}v_i) + \dots$$

$$= a_n\lambda_i^n v_i + a_{n-1}\lambda_i^{n-1}v_i + \dots + a_1\lambda_i v_i + a_0 v_i$$

$$= v_i \left(a_n \lambda_i^n + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots \right)$$

$$= v_i \, p(\lambda_i) = 0$$

perché λ_i è radice del polinomio caratteristico

Avendo dim. che $B v_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ per forza B è la matrice nulla.

— o — o —

Hamilton – Cayley e matrice inversa.

Torniamo all'esempio iniziale $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Il pol. caratt. è $\quad \lambda^2 - 6\lambda + 8$

quindi per HC :

$$A^2 - 6A + 8\,Id = 0$$

matrice nulla

Se moltiplico per A^{-1} trovo

$$A - 6\,Id + 8\,A^{-1} = 0$$

da cui

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\left(6\,Id - A\right) = \frac{3}{4}\,Id - \frac{1}{8}A$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Questo sistema permette di calcolare l'inversa facendo solo potenze (e diventa comodo in dimensione più alta)

— o — o —

ASSURDITÀ TOTALE

Il pol. caratteristico è $\quad p(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda\,Id)$

Se al posto di λ metto A viene $\quad p(A) = \mathrm{Det}\,(A - A) = 0$

(Se fosse così semplice, sarebbe vero anche per $\mathrm{Tr}\,(A - Id)$)

Domanda successiva: come sono fatti TUTTI i polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$?

$\boxed{\text{Risposta misteriosa}}$ Sono tutti e soli i polinomi multipli di un polinomio speciale, detto polinomio minimo di A, perché è quello di grado più basso che annulla A

Conseguenza: il pol. caratteristico è multiplo del pol. minimo.

Come è fatto il polinomio minimo?

$\boxed{\text{Risposta misteriosa}}$

- Ha le stesse radici del polinomio caratteristico, solo eventualmente con molteplicità minore (ma sempre almeno 1)
  (quindi se le radici del pol. caratt. sono tutte diverse, allora il minimo coincide con il caratteristico)
- Se il pol. caratt. ha radici multiple, queste compaiono nel pol. minimo con molteplicità uguale alla dimensione del più grande blocco di Jordan
  (quindi se è diag., tutte le radici hanno molt. 1 nel polinomio minimo).

Esempi A matrice 3×3. Pol. caratt. $(\lambda - 5)^3$.
Quali sono le possibili forme canoniche e quali i pol. minimi corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

pol. min. $(\lambda-5)^1$ pol. min $(\lambda-5)^3$ pol. min. $(\lambda-5)^2$

Esempio A matrice 5×5

Polinomio caratt. $(\lambda-2)^2(\lambda-7)^3$

Polinomio minimo $(\lambda-2)^1(\lambda-7)^2$

Trovare forma canonica

blocchi da 1

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}$$

Domanda: come sono fatte tutte le matrici t.c. $A^2 = 2A$

Riscrivo la relazione come $A^2 - 2A = 0$

Questo mi dice che il polinomio x^2-2x annulla A, quindi $x^2-2x = x(x-2)$ è un multiplo del pol. minimo.

Chi può essere il pol. minimo?

- può essere x, cioè $A = 0$
- può essere $x-2$, cioè $A - 2Id = 0$, cioè $A = 2Id$
- può essere $x(x-2)$. Se il pol. minimo è questo, il pol. caratt. sarà del tipo

$$x^a (x-2)^b \qquad \text{con } a+b = \text{dim. spazio}$$

quindi la matrice ha come autovalori solo 0 e 2 e tutti i blocchi sono da 1, perché 1 è l'esponente con cui compaiono x e $x-2$ nel pol. minimo. Quindi la matrice è diagonalizzabile e ha solo 0 e 2 sulla diagonale. Poi ovviamente A sarà del tipo

$$M^{-1} D M$$

diagonale con solo 0 e 2 sulla diagonale

— o — o —