Esercizio 5

1 Formulazione del Problema

Siano dati:

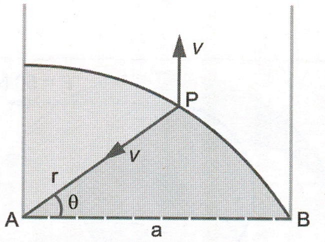
- Il punto $A = (0, 0)$ sulla sponda di un fiume;
- Il punto $B = (0, a)$ sulla sponda opposta;
- La corrente dell'acqua ha velocità costante

  $$\vec{v}_c = (0, v),$$

  ossia la corrente scorre lungo la direzione positiva dell'asse y;

Consideriamo una barca che parte da B, si muove con velocità costante in modulo v rispetto all'acqua e orientata sempre verso il punto A.

Determinare la traiettoria della barca.



v
P
v
r
θ
A
a
B

2 Soluzione

Poniamo come coordinate polari (r, θ) con origine in $A = (0, 0)$, in modo tale che un punto P abbia coordinate

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Il punto A corrisponde a $r = 0$ e il punto $B = (0, a)$ in questo sistema ha

$$r_B = \sqrt{0^2 + a^2} = a \quad \text{e} \quad \theta_B = \frac{\pi}{2}.$$

Velocità della Barca

La velocità della barca rispetto all'acqua è di modulo v ed è sempre diretta verso A, cioè lungo la direzione radiale (verso il centro). Quindi, la velocità relativa è:

$$\vec{v}_{b,\text{rel}} = -v\,\hat{r},$$

dove $\hat{r}$ è il versore radiale. La corrente ha velocità (in coordinate cartesiane)

$$\vec{v}_c = (0, v).$$

Esprimiamo questa velocità in coordinate polari. I versori polari sono:

$$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

Calcoliamo le componenti della corrente:

$$v_{c,r} = \vec{v}_c \cdot \hat{r} = 0 \cdot \cos\theta + v\sin\theta = v\sin\theta,$$

$$v_{c,\theta} = \vec{v}_c \cdot \hat{\theta} = 0 \cdot (-\sin\theta) + v\cos\theta = v\cos\theta.$$

Pertanto, la velocità totale della barca (somma della velocità relativa e della corrente) in coordinate polari è:

$$\vec{v} = (v_{c,r} - v)\,\hat{r} + v_{c,\theta}\,\hat{\theta} = \Big(v\sin\theta - v\Big)\hat{r} + v\cos\theta\,\hat{\theta}.$$

Questo implica le equazioni cinematiche:

$$\frac{dr}{dt} = v\Big(\sin\theta - 1\Big),$$

$$r\,\frac{d\theta}{dt} = v\cos\theta.$$

Determinazione della Traiettoria

Per trovare la relazione $r(\theta)$, eliminiamo il tempo scrivendo:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{v(\sin\theta - 1)}{(v\cos\theta)/r} = r\,\frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}.$$

Separiamo le variabili:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}\,d\theta.$$

Notiamo che
$$\frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta - \sec\theta.$$
Integrando entrambi i membri:
$$\int \frac{dr}{r} = \int \Big(\tan\theta - \sec\theta\Big) d\theta.$$
Il membro sinistro dà $\ln r$; per il membro destro:
$$\int \tan\theta \, d\theta = -\ln|\cos\theta| + C_1,$$
$$\int \sec\theta \, d\theta = \ln\Big|\sec\theta + \tan\theta\Big| + C_2.$$
Pertanto,
$$\ln r = -\ln|\cos\theta| - \ln\Big|\sec\theta + \tan\theta\Big| + C.$$
Sommando i logaritmi:
$$\ln r = -\ln\Big(|\cos\theta| \cdot |\sec\theta + \tan\theta|\Big) + C.$$
Osserviamo che
$$|\cos\theta|\,|\sec\theta + \tan\theta| = |1 + \sin\theta|$$
(perché $\sec\theta = 1/\cos\theta$ e $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$, quindi $\cos\theta(\sec\theta + \tan\theta) = 1 + \sin\theta$). Quindi:
$$\ln r = -\ln|1 + \sin\theta| + C,$$
cioè
$$r = K\frac{1}{1 + \sin\theta}.$$
La costante K si determina dalla condizione iniziale: quando $\theta = \pi/2$, $r = a$. Siccome $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, abbiamo:
$$a = \frac{K}{1+1} = \frac{K}{2} \quad \Longrightarrow \quad K = 2a.$$
Pertanto la traiettoria in coordinate polari è data da:
$$\boxed{r(\theta) = \frac{2a}{1 + \sin\theta}}.$$