ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Titolo nota 09/11/2018

BASI ORTOGONALI – ORTONORMALI

Def. Siano $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dico che costituisco una

- base ORTOGONALE se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$

- base ORTONORMALE se sono una base ortogonale e in aggiunta $\| v_i \| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$.
  Questo è come dire che

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Esempio classico La base canonica è ortonormale

Fatto generale Siano $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ vettori non nulli e a 2 a 2 ortogonali.
Allora per forza sono una base.

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta che dim. che sono lin. indip.
Sia $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ una loro comb. lin. nulla
Faccio il prodotto scalare con v_i:

$$0 = \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle = c_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} + \dots + c_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0}$$

tutti nulli tranne quello al posto

$$= c_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\neq 0 \text{ perché } v_i \neq 0}$$

$\Downarrow$

$= 0$

Per forza $c_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.
——— $\circ$ ——— $\circ$ ———

Domanda: come calcolo le comp. di un certo v rispetto ad una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Provo a scrivere $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ e trovo $c_1, \dots, c_n$ risolvendo il sistema

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo v rispetto alla base canonica, poi applico la matrice di cambio base che costruisco

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Molto + comodo, ma funziona solo con le basi ortogonali.
Supponendo di avere

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

faccio il prod. scalare con v_i e come prima ottengo

$$\langle v, v_i \rangle = \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle$$

$$= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle$$

$$= c_i \langle v_i, v_i \rangle$$ (gli altri fanno 0 per ortogonalità)

Quindi

$$\boxed{c_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}$$

Se in aggiunta sapessi che la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale, allora

$$\boxed{c_i = \langle v, v_i \rangle}$$

Fatto generale: Le componenti di un vettore rispetto ad una base ortogonale si calcolano con le formule di sopra facendo 1 o 2 prod. scalari.

Come produco basi ortogonali?

Risposta: $\boxed{\text{GRAM} - \text{SCHMIDT}}$

Algoritmo che prende in INPUT una base qualunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ e restituisce in OUTPUT una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ tale che

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Come funziona l'algoritmo? Data $\{v_1, \dots, v_n\}$ base qualunque

1° passo: $w_1 = v_1$ ☺

2° passo: $w_2 = v_2 - \boxed{\dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}} w_1$

Numero

Idea che ci sta sotto: voglio porre $w_2 = v_2 + a w_1$ così sono sicuro $\text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{w_1, w_2\}$. Voglio scegliere a in maniera tale $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. Impongo la cond.

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 + a w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle = 0$$

se e solo se $a = -\dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$

3° passo: $w_3 = v_3 - \boxed{\dfrac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}} w_1 - \boxed{\dfrac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}} w_2$

Idea: cerco w_3 del tipo $v_3 + a w_1 + b w_2$.
Imponendo le 2 condizioni
$\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ e $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$
trovo che i valori di a e b sono quelli sopra [provare per es.]

<u>k-esimo passo</u> Supponendo di aver già trovato $w_1, \dots, w_{k-1}$ si pone

$$\boxed{w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i}$$

Per costruzione questo procedimento fornisce base ortogonale (ogni volta ho chiesto prod. scalare nullo con i prec.)
Inoltre ogni w_k è comb. lin. di $v_1, v_2, \dots, v_k$

— o — o —

<u>Data una base ortogonale, come ottengo una base ortonormale?</u>

Basta dividere ogni vettore per la sua norma!

Cioè se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base ortogonale, allora $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ sono una base ortonormale

- È evidente che hanno tutti norma 1 : $\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \|v_i\| = 1$
- Rimangono a 2 a 2 ortogonali :

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Trovare il valore di a per cui

$(1, 2)$ e $(3, a)$

sono una base ortogonale di R^2

Basta imporre che il prod. scalare sia nullo.

$3 + 2a = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{3}{2}$ $\qquad (1,2)$ e $\left(3, -\frac{3}{2}\right)$

Esempio 2   Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che contenga il vettore $\underbrace{(1,2,3)}_{v_1}$

Strategia: aggiungo v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base qualunque
poi applico Gram-Schmidt

$v_1 = (1,2,3)$ aggiungo $v_2 = (1,0,0)$ e v_3 $(0,1,0)$

Siamo sicuri siamo base? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det = 3   O.k.

Applico G.S. $w_1 = v_1 = \boxed{(1,2,3)}$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1,0,0) - \frac{1}{14}(1,2,3)$$

$$= \left(\frac{13}{14}, -\frac{2}{14}, -\frac{3}{14}\right)$$

Per comodità posso prendere anche $\boxed{(13,-2,-3) = w_2}$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (0,1,0) - \frac{2}{14}(1,2,3) - \frac{-2}{13^2+4+9}(13,-2,-3)$$

= conto

Alternativa   Per ottenere w_3, visto che sto cercando un vettore $\perp$ a w_1 e w_2, bastava usare la formula ex-misteriosa

<u>Esempio 3</u> Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio
$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 2x+y-3z=0\}$$
(piano che passa per l'origine)

Calcolare base ortogonale di V ed estenderla a base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

<u>Step 1</u> Mi procuro una base qualunque di V

$v_1 = (1,-2,0)$ $\qquad$ $v_2 = (0,3,1)$

$V = \text{Span}\{(1,-2,0),(0,3,1)\}$

Applico G.S. a questa base e trovo $\boxed{w_1 = (1,-2,0)}$

$$\boxed{w_2} = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,3,1) - \frac{-6}{5}(1,-2,0)$$
$$= (0,3,1) + \frac{6}{5}(1,-2,0) = \boxed{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)}$$

Conclusione: $(1,-2,0)$ e $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ sono base ortogonale di V, e lo sono pure
$(1,-2,0)$ e $(6,3,5)$

Verifica: sono ortogonali? SI
stanno in V? SI

Per completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ abbiamo 3 possibilità

- aggiungere un vettore e applicare GS
- formula ex-misteriosa
- uso i coeff. del piano! $\quad w_3 = (2,1,-3)$

— o — o —