ELETTROTECNICA
Ingegneria Industriale

– TRANSITORI –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Elettrotecnica (043IN)
a.a. 2013-14

Introduzione

- Studieremo il transitorio nel dominio del tempo dei circuiti LDI del I ordine con sorgente costante e sorgente sinusoidale

- Come transitorio intendiamo l'evoluzione dinamica del circuito da uno stato prefissato, dovuto alle condizioni iniziali del componente dinamico, allo stato di regime, dovuto alle sorgenti indipendenti

Equazione differenziale del I ordine

- Consideriamo la seguente equazione differenziale del I ordine lineare a coefficienti costanti con condizione iniziale X_0

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{x(t)}{\tau} + \dfrac{x_s(t)}{\tau} \\ x(0) = X_0 \end{cases}$$

- La soluzione generale di questa equazione differenziale è costituita da una famiglia di funzioni $x(t)$. Si può dimostrare che esiste una sola soluzione di questa famiglia che ha come condizione iniziale X_0

Equazione omogenea associata

- Definiamo come “omogenea associata” l’equazione differenziale ottenuta ponendo a zero il termine noto $x_s(t)$ (forzante), ovvero

$$\dot{x}^o(t) = -\frac{x^o(t)}{\tau}$$

- La soluzione dell’omogenea associata è:

$$x^o(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- La differenza di due soluzioni è ancora soluzione della omogenea associata

$$x_1^0(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad x_2^0(t) = K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow x_1^0(t) - x_2^0(t) = \overbrace{(K_1 - K_2)}^{K'} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Differenza di soluzioni

- Supponiamo che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano due soluzioni generali della famiglia, allora la loro differenza sarà comunque soluzione dell’omogenea associata

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{x_1(t)}{\tau} + \frac{x_s(t)}{\tau}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_2(t)}{\tau} + \frac{x_s(t)}{\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = -\frac{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)}{\tau}$$

- Quindi

$$x_1(t) - x_2(t) = x^o(t) = K'e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione generale

- La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà data dalla soluzione dell'omogenea associata sommata a una soluzione qualsiasi, detta particolare, della equazione completa

$$x(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)$$

- Infatti si ha

$$x_1(t) - x_2(t) = K_1e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t) -$$
$$-\left(K_2e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)\right) =$$
$$= \left(K_1 - K_2\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = K'e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione generale (2)

- La costante K viene determinata imponendo la condizione iniziale, ovvero:

$$x(0) = X_0 = K + x^p(0)$$
$$\Rightarrow K = X_0 - x^p(0)$$

- Da cui la soluzione generale per $t \geq 0$ con condizione iniziale X_0 è

$$x(t) = \left(X_0 - x^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + x^p(t)$$
$$t \geq 0$$

Soluzione generale omogenea

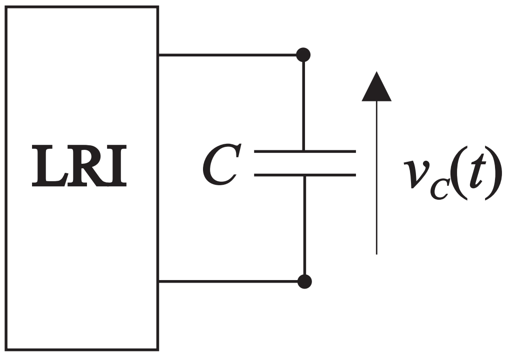
- Se l'equazione differenziale non contiene termine forzante, la soluzione generale con condizione iniziale X_0 è:

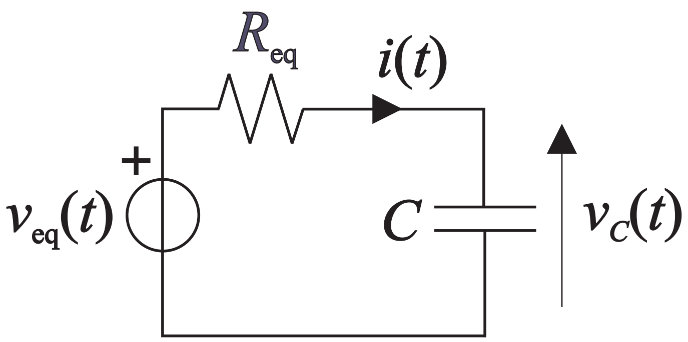
$$x(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Questo caso corrisponde, come vedremo, alla scarica di un condensatore o di un induttore su una resistenza

Circuiti RC del I ordine

- Possiamo applicare alla parte resistiva di un circuito LDI RC del I ordine (ai morsetti del condensatore) il teorema di Thevenin





- Quindi questo semplice circuito RC riassume il comportamento di tutti i circuiti LDI RC del I ordine

Equazione differenziale

- Scriviamo l'equazione differenziale del circuito per t ≥ 0 e $v_C(0) = V_0$

$$v_{eq}(t) = R_{eq} i(t) + v_C(t)$$

$$i(t) = C \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow v_{eq}(t) = R_{eq} C \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t)$$

- Definendo la "costante di tempo" come

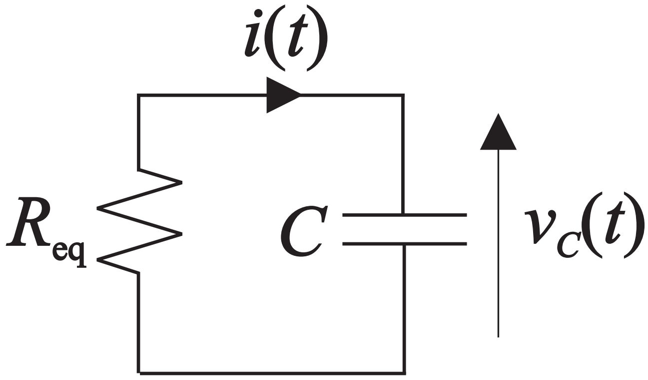
$$\tau_C = R_{eq} C \quad [\mathrm{s}]$$

- Si ottiene per $t \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{v}_C(t) = -\dfrac{v_C(t)}{\tau_C} + \dfrac{v_{eq}(t)}{\tau_C} \\ v_C(0) = V_0 \end{cases}$$

Equazione omogenea

- Se il circuito è omogeneo e non ci sono sorgenti indipendenti ($v_{eq}(t) = 0$), allora l'equazione differenziale diventa



$$\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{\tau_C}$$

- La soluzione rappresenta la scarica di un condensatore su una resistenza con condizione iniziale V_0

$$v_C(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

Soluzione generale

- Nel caso in cui ci siano delle sorgenti indipendenti attive, la soluzione generale con condizione iniziale V_0 è

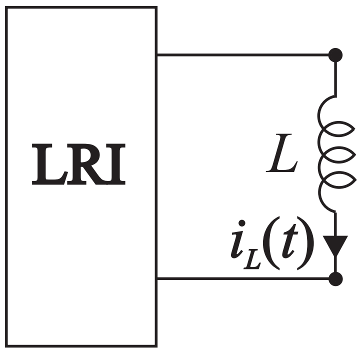
$$v_C(t) = \left(V_0 - v_C^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + v_C^p(t) \ \text{V}$$

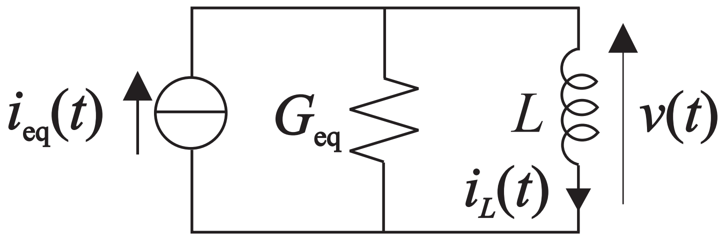
$$t \geq 0$$

- Dove la soluzione particolare $v^p{}_C(t)$ dipende dal tipo di sorgente

Circuiti RL del I ordine

- Possiamo applicare alla parte resistiva di un circuito LDI RL del I ordine (ai morsetti dell’induttore) il teorema di Norton





- Quindi questo semplice circuito RL riassume il comportamento di tutti i circuiti LDI RL del I ordine

Equazione differenziale

- Scriviamo l'equazione differenziale del circuito per t ≥ 0 e $i_L(0) = I_0$

$$i_{eq}(t) = G_{eq}v(t) + i_L(t)$$

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\rightarrow i_{eq}(t) = G_{eq}L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t)$$

- Definendo la "costante di tempo" come

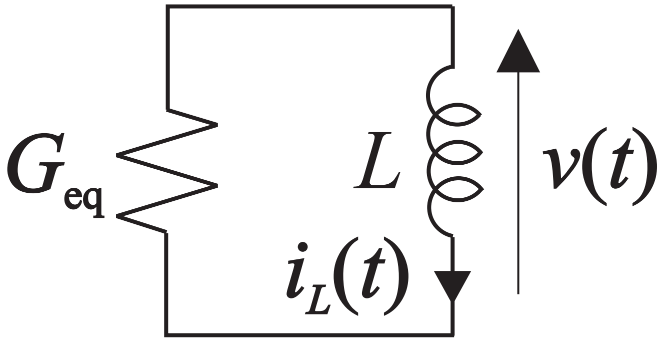
$$\tau_L = G_{eq}L \quad [s]$$

- Si ottiene per $t \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{i}_L(t) = -\dfrac{i_L(t)}{\tau_L} + \dfrac{i_{eq}(t)}{\tau_L} \\ i_L(0) = I_0 \end{cases}$$

Equazione omogenea

- Se il circuito è omogeneo e non ci sono sorgenti indipendenti ($i_{eq}(t) = 0$), allora l'equazione differenziale diventa



$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{\tau_\mathrm{L}}$$

- La soluzione rappresenta la scarica di un induttore su una resistenza con condizione iniziale I_0

$$i_L(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Soluzione generale

- Nel caso in cui ci siano delle sorgenti indipendenti attive, la soluzione generale con condizione iniziale I_0 è

$$i_L(t) = \left(I_0 - i_L^p(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}} + i_L^p(t) \ \text{A}$$

$$t \geq 0$$

- Dove la soluzione particolare $i^p_L(t)$ dipende dal tipo di sorgente

Concetto di stabilità

- La soluzione dell'omogenea associata è detta anche soluzione libera del circuito, in quanto dipende solo dalle condizioni iniziali
- Un circuito con le sorgenti indipendenti poste a zero è "stabile" se la soluzione libera tende a zero per $t \rightarrow \infty$
- Essendo la soluzione libera uguale a

$$x^{o}(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

"stabile" $\Rightarrow \tau > 0$

- Un circuito si dice invece instabile se: $\tau < 0$, quindi la soluzione $x^{o}(t) \rightarrow \infty$
- In un circuito stabile, l'energia immagazzinata nel circuito viene dissipata fino ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$
- I circuiti che esamineremo saranno stabili

Soluzioni particolari

- Esaminiamo ora le soluzioni particolari per le funzioni forzanti

1) Costante

2) Sinusoidale

Condensatore: sorgente costante

- Poniamo: $v_{eq}(t) = V_s \Rightarrow v^{p}{}_{C}(t) = V_p$
  Ricordando che

$$\dot{v}_C(t) = -\frac{v_C(t)}{\tau_C} + \frac{v_{eq}(t)}{\tau_C}$$

- Si ottiene

$$0 = -\frac{V_p}{\tau_C} + \frac{V_s}{\tau_C} \rightarrow V_p = V_s$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$v_C(t) = (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{\tau_C}} + V_s = V_0\, e^{-\frac{t}{\tau_C}} + V_s\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

- A regime ($t \rightarrow \infty$):

$$v_C(t) \approx v_C^p(t) = V_s$$
$$\Rightarrow \dot{v}_C(t) = 0 \rightarrow i(t) = C\dot{v}_C(t) = 0$$

- Il condensatore è equivalente a un circuito aperto

Induttore: sorgente costante

- Poniamo: $i_{eq}(t) = I_s \Rightarrow i^p{}_L(t) = I_p$
  Ricordando che

$$\dot{i}_L(t) = -\frac{i_L(t)}{\tau_L} + \frac{i_{eq}(t)}{\tau_L}$$

- Si ottiene

$$0 = -\frac{I_p}{\tau_L} + \frac{I_s}{\tau_L} \rightarrow I_p = I_s$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$i_L(t) = \left(I_0 - I_s\right) e^{-\frac{t}{\tau_L}} + I_s = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau_L}} + I_s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

- A regime ($t \rightarrow \infty$):

$$i_L(t) \approx i_L^p(t) = I_s$$
$$\Rightarrow \dot{i}_L(t) = 0 \rightarrow v(t) = L\dot{i}_L(t) = 0$$

- L'induttore è equivalente a un corto circuito

Condensatore: sorgente sinusoidale

- Poniamo:

  $v_{eq}(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi_s)$ con: $V_s > 0$

  $\Rightarrow v^p{}_C(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi_p)$

- Trattandosi di una soluzione particolare (o a regime) sinusoidale, possiamo utilizzare i fasori (valore massimo per il modulo) per il suo calcolo

$$\overline{V}_C^{\,p} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R_{eq}} \overline{V}_{eq} = \frac{1}{1 + j\omega R_{eq} C} \overline{V}_{eq}$$

dove : $\overline{V}_{eq} = V_s e^{j\varphi_s}$

Condensatore: sorgente sinusoidale (2)

- Per la antitrasformazione, servono il modulo e la fase del fasore ottenuto

$$\left|\overline{V}_C^{\,p}\right| = \frac{V_s}{\sqrt{1+\omega^2 R_{eq}^2 C^2}}$$

$$\angle\overline{V}_C^{\,p} = \varphi_s - \mathrm{arctg}(\omega R_{eq} C) + 2k\pi$$

- Infine si ottiene $v^{\mathrm{p}}_C(t)$

$$v_C^p(t) = \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\omega t + \angle\overline{V}_C^{\,p}\right)$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$v_C(t) = \left(V_0 - \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\angle\overline{V}_C^{\,p}\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau_C}} + $$
$$+ \left|\overline{V}_C^{\,p}\right| \cos\left(\omega t + \angle\overline{V}_C^{\,p}\right)$$

Induttore: sorgente sinusoidale

- Poniamo:

  $i_{eq}(t) = I_s \cos(\omega t + \varphi_s)$ con: $I_s > 0$

  $\Rightarrow i^p{}_L(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi_p)$

- Trattandosi di una soluzione particolare (o a regime) sinusoidale, possiamo utilizzare i fasori (valore massimo per il modulo) per il suo calcolo

$$\bar{I}_L^p = \frac{\dfrac{1}{j\omega L}}{\dfrac{1}{j\omega L} + G_{eq}} \bar{I}_{eq} = \frac{1}{1 + j\omega G_{eq} L} \bar{I}_{eq}$$

dove : $\bar{I}_{eq} = I_s e^{j\varphi_s}$

Induttore: sorgente sinusoidale (2)

- Per la antitrasformazione, servono il modulo e la fase del fasore ottenuto

$$\left|\bar{I}_L^p\right| = \frac{I_s}{\sqrt{1+\omega^2 G_{eq}^2 L^2}}$$

$$\angle \bar{I}_L^p = \varphi_s - \mathrm{arctg}(\omega G_{eq} L) + 2k\pi$$

- Infine si ottiene $i^p{}_L(t)$

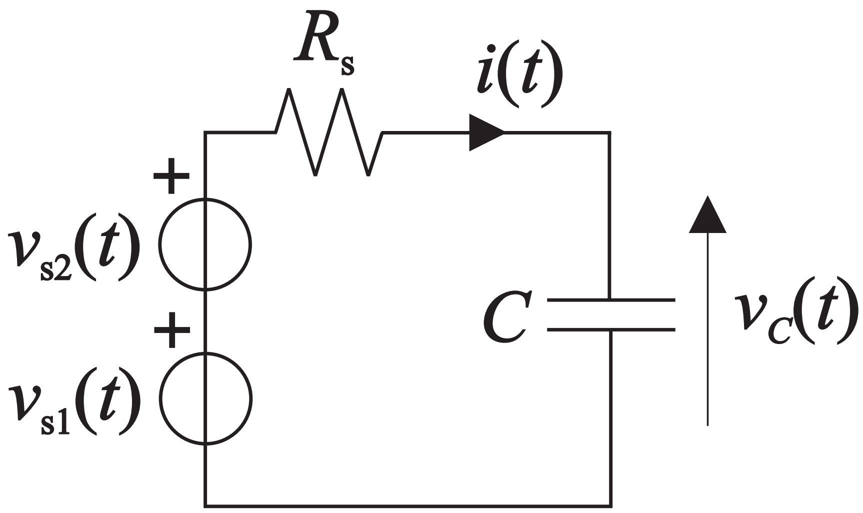
$$i_L^p(t) = \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\omega t + \angle \bar{I}_L^p\right)$$

- La soluzione generale per $t \geq 0$ è

$$i_L(t) = \left(I_0 - \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\angle \bar{I}_L^p\right)\right) e^{-\frac{t}{\tau_L}} +$$
$$+ \left|\bar{I}_L^p\right| \cos\left(\omega t + \angle \bar{I}_L^p\right)$$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari

- Prendiamo ad esempio un circuito RC del I ordine con 2 sorgenti indipendenti



- Essendo: $v_s(t) = v_{s1}(t) + v_{s2}(t)$
  la soluzione particolare $v^p{}_C(t)$ è esprimibile come

$$v_C^p(t) = v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)$$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari (2)

- Dove $v^{p1}{}_C(t)$ è associata a $v_{s1}(t)$ e $v^{p2}{}_C(t)$ è associata a $v_{s2}(t)$

1) accendiamo la sorgente $v_{s1}(t)$ e spegniamo $v_{s2}(t) = 0$. La soluzione particolare $v^{p1}{}_C(t)$ soddisfa l'equazione differenziale associata

$$\dot{v}_C^{p1}(t) = -\frac{v_C^{p1}(t)}{\tau_C} + \frac{v_{s1}(t)}{\tau_C}$$

2) accendiamo la sorgente $v_{s2}(t)$ e spegniamo $v_{s1}(t) = 0$. La soluzione particolare $v^{p2}{}_C(t)$ soddisfa anch'essa l'equazione differenziale associata

$$\dot{v}_C^{p2}(t) = -\frac{v_C^{p2}(t)}{\tau_C} + \frac{v_{s2}(t)}{\tau_C}$$

Principio di sovrapposizione delle soluzioni particolari (3)

- Sommando le equazioni appena scritte, si ottiene

$$\dot{v}_C^{p1}(t) + \dot{v}_C^{p2}(t) = -\frac{v_C^{p1}(t)}{\tau_\mathrm{C}} - \frac{v_C^{p2}(t)}{\tau_\mathrm{C}} +$$

$$+ \frac{v_{s1}(t)}{\tau_\mathrm{C}} + \frac{v_{s2}(t)}{\tau_\mathrm{C}}$$

- E applicando la proprietà della linearità della derivata e la proprietà associativa della somma

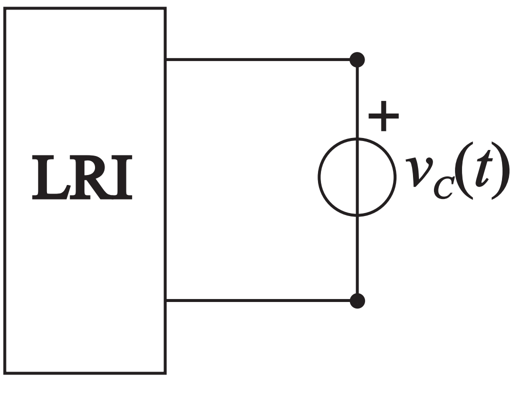
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)\right) = -\frac{\left(v_C^{p1}(t) + v_C^{p2}(t)\right)}{\tau_\mathrm{C}} +$$

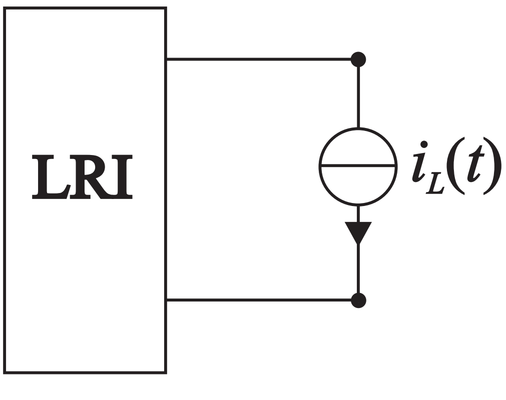
$$+ \frac{\left(v_{s1}(t) + v_{s2}(t)\right)}{\tau_\mathrm{C}}$$

- Risulta che la soluzione particolare associata a entrambe le sorgenti è composta dalla somma delle soluzioni particolari associate alle singole sorgenti

Circuito resistivo associato

- Per trovare le altre variabili del circuito, i condensatori vengono sostituiti con dei generatori di tensione di valore $v_C(t)$ e gli induttori con dei generatori di corrente di valore $i_L(t)$. Si ottiene così il circuito resistivo associato che può essere risolto con i metodi noti





Parallelo e serie di C e L

- Parallelo di due condensatori:

$$C_\mathrm{p} = C_1 + C_2$$

- Serie di due condensatori:

$$C_\mathrm{s} = (C_1\ C_2)/(C_1 + C_2)$$

- Serie di due induttori:

$$L_\mathrm{s} = L_1 + L_2$$

- Parallelo di due induttori

$$L_\mathrm{p} = (L_1\ L_2)/(L_1 + L_2)$$

Partitori di C e L

- Un partitore di tensione realizzato con due condensatori o due induttori permette di avere un rapporto di riduzione indipendente dalla frequenza

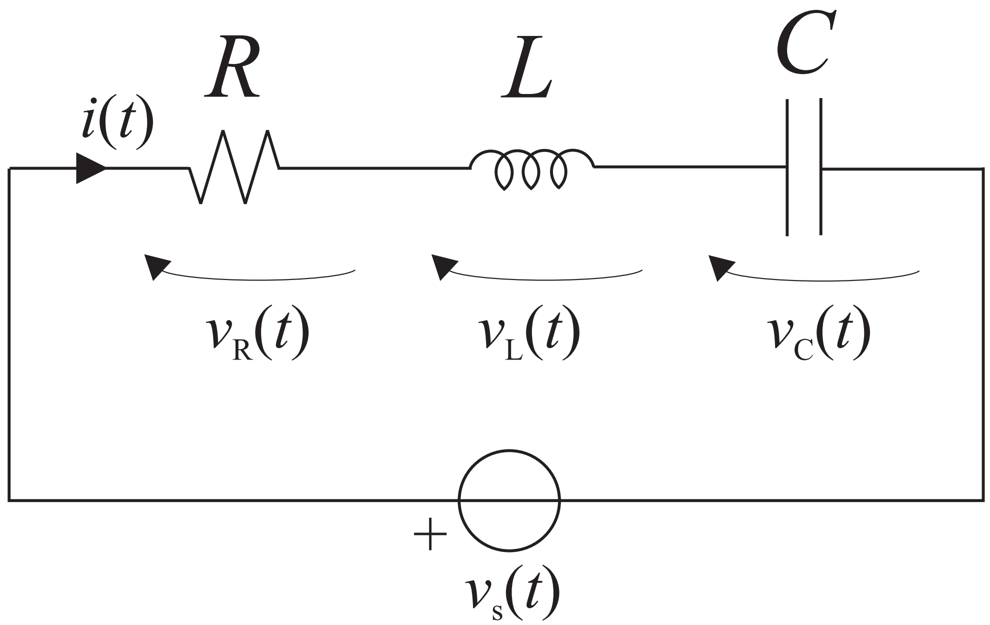
- Elemento importante: non dissipano potenza attiva come le resistenze

- N.B. A causa del fatto che il condensatore sta al denominatore dell'impedenza, si ha l'inversione degli indici

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_s} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Circuito risonante reale serie

- È un circuito RLC del II ordine (R, L, $C > 0$)



- Le variabili di stato sono $v_C(t)$ e $i_L(t)$, a cui sono associate le condizioni iniziali $v_C(0)$ e $i_L(0)$ (= $i(0)$)

$$v_s(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\dot{v}_C(t)$$

$$v_L(t) = L\dot{i}(t)$$

Circuito risonante reale serie (2)

- Ne risulta

$$v_s(t) = RC\dot{v}_C(t) + LC\ddot{v}_C(t) + v_C(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{v}_C(t) + \dfrac{R}{L}\dot{v}_C(t) + \dfrac{1}{LC}v_C(t) = \dfrac{1}{LC}v_s(t) \\ v_C(0) = V_0 \\ \dot{v}_C(0) = \dfrac{i(0)}{C} = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

- Il polinomio caratteristico associato alla equazione omogenea è

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{dove : } {}_1p_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Circuito risonante reale serie (3)

- La soluzione generale per t ≥ 0 è:

$$\begin{cases} v_C(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + v_C^p(t) \\ v_C(0) = V_0, \qquad \dot{v}_C(0) = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

- Dove k_1 e k_1 dipendono dalle condizioni iniziali
- La soluzione particolare viene calcolata come nel caso dei circuiti del I ordine
- Il circuito è stabile se $\Re\{p_1\}$ e $\Re\{p_2\}$ sono negative

Circuito risonante reale serie (4)

- Per $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ p_1 e p_2 sono reali → soluzione omogenea composta da due esponenziali reali (k_1 e k_2 sono reali)

- p_1 e p_2 sono complessi coniugati se:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0 \rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2z_0$$

La resistenza deve dissipare «poca energia» rispetto a quella immagazzinata dagli elementi reattivi (z_0: impedenza caratteristica)

Circuito risonante reale serie (5)

- Se p_1 e p_2 sono complessi coniugati, $p_1 = \sigma + j\omega$, $p_2 = \sigma - j\omega$, perché la soluzione $v_C(t)$ sia reale → $k_1 = k^*_2 = |\, k_1 \,| e^{j\varphi}$

- Si trova quindi

$$v_C(t) = 2e^{\sigma t}\Re\{k_1 e^{j\omega t}\} + v_C^p(t) \rightarrow$$

$$\begin{cases} v_C(t) = 2|k_1|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) + v_C^p(t) \\ v_C(0) = V_0, \qquad \dot{v}_C(0) = I_0 / C \end{cases}$$