Teoria della probabilità

Introduzione

Due classi di modelli matematici:

1. Deterministici
2. Probabilistici

Un modello si definisce deterministico se non vi è alcuna incertezza riguardo il suo comportamento ad ogni istante di tempo

- I sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) sono esempi di modelli deterministici, poiché le uscite possono essere determinate *a priori*

Nei problemi reali, l'uso di un modello deterministico è inappropriato se il fenomeno fisico sottostante coinvolge troppi fattori sconosciuti (ad esempio, il lancio di un dado oppure l'arrivo di clienti a uno sportello)

- Un modello probabilistico tiene conto dell'incertezza in termini matematici

Introduzione

I modelli probabilistici sono necessari per la progettazione di sistemi che:

- abbiano prestazioni affidabili a fronte dell'incertezza,
- siano computazionalmente efficienti,
- e convenienti dal punto di vista economico.

Consideriamo un sistema di comunicazione digitale su un canale wireless; esso è soggetto a incertezze, le cui fonti includono:

1. rumore, generato all'interno dei TX/RX nei dispositivi elettronici di front-end;
2. fading del canale, dovuto al fenomeno del multipath, una caratteristica intrinseca dei canali wireless;
3. interferenze da parte di altri trasmettitori.

Per tenere conto di queste incertezze, è necessario un modello probabilistico del canale.

Introduzione

L'obiettivo della teoria della probabilità è duplice:

1. la descrizione matematica di modelli probabilistici
2. lo sviluppo di procedure di ragionamento probabilistico per gestire l'incertezza

Iniziamo lo studio della teoria della probabilità con un ripasso della teoria degli insiemi:

questo perché i modelli probabilistici assegnano probabilità alle collezioni (insiemi) di possibili risultati di esperimenti casuali

Teoria degli insiemi

Gli oggetti che costituiscono un insieme sono chiamati elementi dell'insieme. Sia A un insieme e x un elemento dell'insieme A. Per descrivere questa affermazione:

- Scriviamo $x \in A$; altrimenti scriviamo $x \notin A$
- Se l'insieme A è vuoto, lo indichiamo con ∅
- Se x_1, x_2, …, x_N sono tutti elementi dell'insieme A, allora scriviamo:

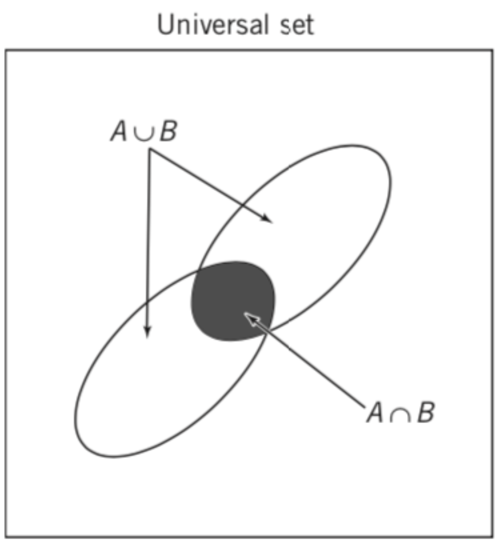
$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

- Se ogni elemento dell'insieme A è anche elemento dell'insieme B, diciamo che A è un sottoinsieme di B e scriviamo A ⊂ B
- Se A e B sono due insiemi tali che A ⊂ B e B ⊂ A, i due insiemi si dicono identici e si scrive A = B

Operazioni booleane sugli insiemi

Unione ed intersezione

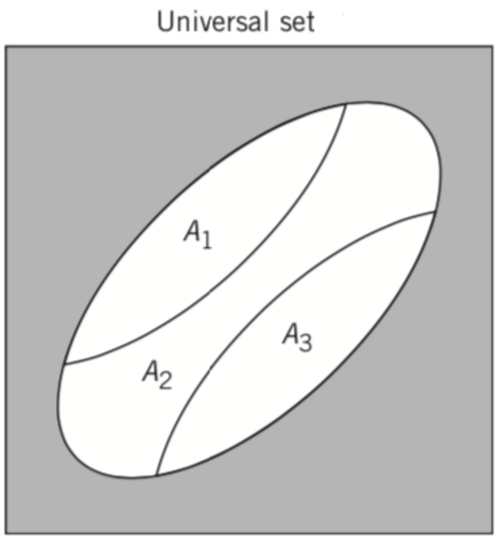
- L'unione **A ∪ B** di due insiemi A e B è definita dall'insieme di elementi che appartengono ad A o a B, o a entrambi.
- L'intersezione **A ∩ B** di due insiemi A e B è definita dall'insieme di elementi che appartengono sia ad A che a B.



Operazioni booleane sugli insiemi

Insiemi disgiunti e partizione

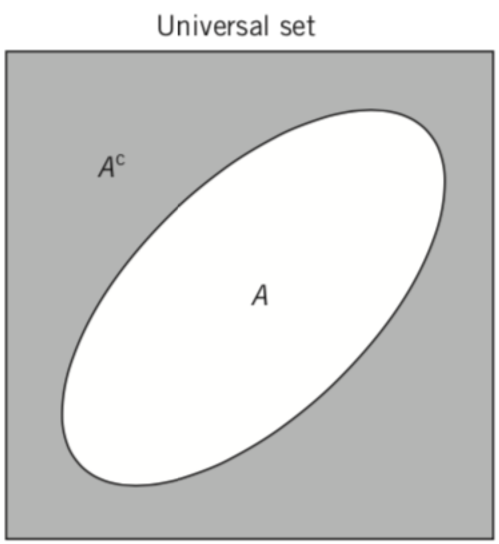
- Due insiemi A e B si dicono disgiunti se la loro intersezione è vuota, se cioè non hanno elementi in comune.
- La partizione di un insieme A si riferisce a una collezione di insiemi disgiunti, non vuoti, e tali che la loro unione è l'insieme A (nell'esempio $A_i \cap A_k = \emptyset$ se $i \neq k$ e $A = A1 \cup A2 \cup A3$)



Operazioni booleane sugli insiemi

Complementare

- Si indica l'insieme A^c come il complementare A (rispetto all'insieme universo U) se è composto da tutti gli elementi di U che non appartengono ad A



Algebra degli insiemi

LEGGI DELL'ALGEBRA DEGLI INSIEMI	
Leggi di idempotenza	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Leggi associative	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leggi commutative	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Leggi distributive	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leggi di identità	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leggi di complementarietà	
7a. $A \cup A^c = U$	7b. $A \cap A^c = \emptyset$
8a. $(A^c)^c = A$	8b. $U^c = \emptyset,\ \emptyset^c = U$
Leggi di De Morgan	
9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Teoria della probabilità

- La **teoria della probabilità** ha lo scopo di fornire un modello matematico per la descrizione dei fenomeni che non manifestano una regolarità deterministica

- L'approccio probabilistico cerca, mediante **l'analisi a posteriori** dei risultati ottenuti, di quantificare l'entità delle variazioni di una grandezza estraendo delle **regolarità globali** che possono essere di aiuto nella previsione d'insieme dei risultati futuri

- Esempio: Lancio di una moneta (*non truccata*)

Pur non essendo noto a priori quale sarà il risultato del lancio, ripetendo *un numero elevato* di volte l'esperimento si presenterà testa circa in metà delle prove

Terminologia

- *Esperimento casuale*: procedimento di osservazione dello "stato" finale del sistema sottoposto all'esperimento, che deve essere ipotizzato ripetibile un numero indefinito di volte con le stesse modalità di esecuzione

- *Risultato*: il risultato dell'esecuzione dell'esperimento
- L'insieme dei possibili risultati è specificato da un **parametro** o **attributo** che in un dato esperimento viene preso in esame

- *Spazio campione* Ω: l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento

Terminologia

- *Evento*: insieme dei risultati individuabili attraverso una loro caratteristica comune; un evento è un sottoinsieme dello spazio campione
- *Evento certo*: lo spazio campione Ω
- *Evento impossibile*: l'insieme vuoto ∅
- *Evento elementare a*: un *elemento* di Ω, cioè un singolo risultato dell'esperimento
- *Prova*: singola esecuzione dell'esperimento da cui si ottiene un singolo risultato *a*
  - ✓ Diremo che in una prova ***si è verificato*** l'evento *A* se il risultato *a* appartiene ad *A*
  - ✓ L'**evento certo** si verifica in ogni prova mentre l'**evento impossibile** non si verifica mai

Terminologia

- Le operazioni tra eventi sono operazioni tra insiemi

Ad esempio:

A ∪ B è l'evento unione (somma) che si verifica quando il risultato è un elemento di A ***oppure*** di B

A ∩ B è l'evento intersezione (prodotto) che si verifica quando il risultato è un elemento ***sia*** di A ***che*** di B

A – B è l'evento sottrazione che si verifica quando il risultato è un elemento di A ***ma non*** di B

Il concetto di probabilità

Probabilità dell'evento *A*: $\mathbf{0} \le P(A) \le \mathbf{1}$

- Con il termine probabilità di un evento *A*, *P*(*A*), indicheremo una **valutazione quantitativa** della **possibilità** che quell'evento si verifichi

- Da un punto di vista matematico *P*(*A*) è una funzione che ad un evento *A* associa un numero reale compreso tra 0 ed 1

- Valori di *P*(*A*) prossimi a 0 indicano che *A* si verifica raramente, mentre valori prossimi ad 1 indicano un'elevata possibilità che *A* si verifichi

1) Definizione classica della probabilità

- I primi studi risalgono a Pascal e a Fermat nel XVII secolo, e in seguito a Laplace (1749-1827), ed erano connessi all'analisi del gioco d'azzardo

- In base al primo approccio alla Teoria della Probabilità, la **probabilità** venne definita come segue:

Ipotesi: I risultati dell'esperimento sono ***ugualmente verosimili*** …
- M : numero di elementi dello spazio campione
- m_A : numero di elementi favorevoli all'evento A

Probabilità dell'evento *A*: $P(A) = \dfrac{m_A}{M}$

Esempio: la probabilità di estrarre un asso di qualsiasi colore da un mazzo di 52 carte *non truccate* è $P(A) = 4/52 = 1/13$

1) Definizione classica della probabilità

Vantaggi:

- Definisce la probabilità in modo **aprioristico**, senza ricorrere a nessuna prova sperimentale

Limiti:

- Si assume che i risultati siano tutti ugualmente verosimili, cioè *equiprobabili*; si noti che il concetto di probabilità è proprio ciò che si vuole definire
- Non si possono gestire quei casi in cui i risultati non sono equiprobabili (ad esempio il lancio di un dado *truccato*)

2) Definizione frequentista della probabilità

- La definizione di probabilità in termini di frequenza relativa fu proposta nel 1936* da **Von Mises**

- Si supponga di ripetere N volte un dato esperimento; se l'evento A si presenta n_A volte, si definisce ***frequenza relativa*** attinente l'evento A la quantità:

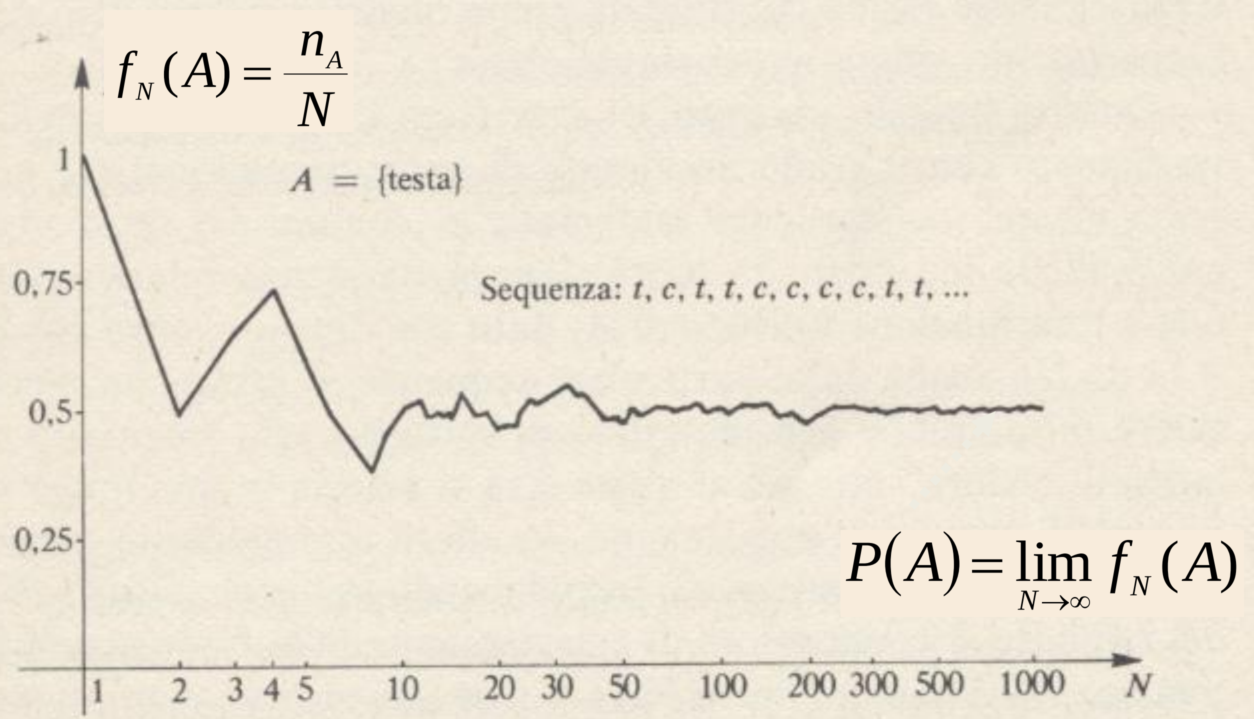
Frequenza relativa di A: $$f_N(A) = \frac{n_A}{N}$$

- La **probabilità dell'evento** A è definita come il limite, per N tendente all'infinito, della frequenza relativa:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} f_N(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$$

*R. Von Mises, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer-Verlag, Vienna, 1936

2) Definizione frequentista della probabilità



Esempio di frequenza relativa in funzione del numero N delle prove di un lancio di una moneta

2) Definizione frequentista della probabilità

- **Nota:** in pratica il limite non è calcolabile e la probabilità viene approssimata dalla frequenza relativa valutata su *un numero opportunamente elevato* di prove

- Il valore della frequenza relativa dipende da N e dalla particolare sequenza di risultati dell'esperimento messo in atto per valutare la frequenza relativa

- **Esempio:** ripetendo 1000 volte il lancio di una moneta si ottiene "Croce" in 495 prove e "Testa" nelle restanti 505; pertanto P("Croce") = 0.495; ripetendo altre 1000 volte l'esperimento non è detto che ottenga ancora P("Croce") = 0.495

2) Definizione frequentista della probabilità

Vantaggi

- Non si basa su ipotesi a priori ma sulla conoscenza a posteriori di un dato fenomeno ottenuta in maniera induttiva sulla scorta di dati sperimentali
- Definisce la probabilità anche se i possibili risultati dell'esperimento non sono egualmente probabili

Svantaggi

- Da un punto di vista matematico il limite non si può calcolare analiticamente
- Da un punto di vista pratico non è sempre possibile osservare un fenomeno per un numero di volte *sufficientemente grande*

3) Definizione assiomatica della probabilità

- Dai limiti del **modello induttivo,** basato sull'interpretazione frequentista della probabilità, deriva l'opportunità di ricorrere al **modello deduttivo** → Teoria assiomatica della probabilità, dovuta al matematico russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov
- Un assioma è un'affermazione che non si dimostra in quanto principio di base universalmente accettato
- Questa impostazione non dà una definizione diretta della probabilità, ma accetta qualunque approccio, purché questo rispetti le proprietà fondamentali, assunte come assiomi; da questi con l'ausilio della logica e della matematica si deducono le altre proprietà come teoremi

Spazio di probabilità

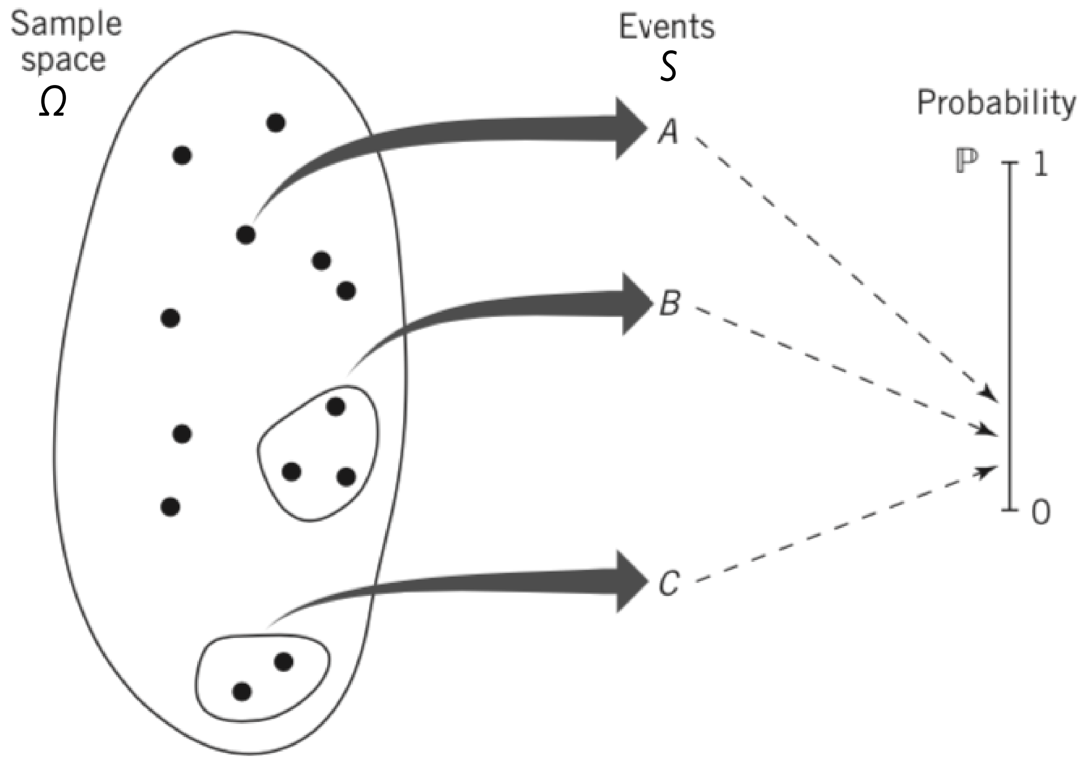
- Secondo la **definizione assiomatica di probabilità**, per specificare in modo corretto un esperimento casuale deve essere definita la terna $(\Omega, S, P(\cdot))$, detta ***spazio (o sistema) di probabilità***, composta dalle seguenti entità:

  - Un insieme Ω di punti detto *spazio campione*, cioè l'insieme di tutti gli esiti ipotizzabili di un esperimento casuale oggetto di studio;

  - Una opportuna classe S di sottoinsiemi di Ω detti *eventi*;

  - Una funzione a valori reali $P(\cdot)$, detta *probabilità*, definita sugli eventi di S, che associ ad ogni evento A di S un numero non negativo

Spazio di probabilità



- Un evento può coinvolgere un singolo risultato o un sottoinsieme dei possibili risultati nello spazio campione Ω

Assiomi della probabilità

Assioma 1 – Non negatività La probabilità dell'evento A è un numero non-negativo e limitato all'unità

$$O \leq \mathbb{P}[A] \leq 1 \qquad \text{for any event } A$$

Assioma 2 – Additività Se A e B sono due eventi <u>disgiunti</u> (i.e., $A \cap B = \emptyset$) , allora la probabilità della loro unione soddisfa la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

Assioma 3 – Normalizzazione La probabilità dell'intero spazio campione Ω è uguale all'unità

$$\mathbb{P}[\Omega] = 1$$