
Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 06/02/2013



COGNOME NOME

MATRICOLA...

--	--	--	--	--	--

RISPOSTE

1)

--

2)

--

3)

--

4)

--

5)

--

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 06/02/2013



1) Dire se sono possibili le seguenti affermazioni.

- a) Se $\|A\|_2 = 1$ può risultare $\|A\|_2 + \rho(A) = 2.5$?
- b) Se $\rho(A) = 1$ può risultare $\|A\|_2 + \rho(A) = 2.5$?
- c) Se $\|A\|_2 = 2$ può risultare $\|A^2\|_2 = 5$?
- d) Se $\rho(A^2) = 3$ può risultare $\|A\|_1 = 1$?

2) L'equazione

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

ha soluzioni

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 2.$$

Dire se sono soddisfatte le condizioni necessarie per la convergenza del metodo di bisezione ai valori α_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

3) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è riducibile.

Determinare una matrice di permutazione P che riduce la matrice data.

4) Risolvere, nel senso dei minimi quadrati, il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Il polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ è il polinomio di interpolazione di Hermite della funzione $f(x)$ di cui conosciamo i valori

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(1) = 1?$$

SOLUZIONE

- 1) Dalle proprietà delle norme matriciali e dal Teorema di Hirsh si ha
- a) Non risulta possibile perché $\|A\|_2 + \rho(A) \leq 2$;
 - b) È possibile perché $\|A\|_2 + \rho(A) \geq 1 + \|A\|_2$;
 - c) Non risulta possibile perché $\|A^2\|_2 \leq \|A\|_2\|A\|_2 \leq 4$;
 - d) Non risulta possibile perché $\rho(A) = \sqrt{3}$ e quindi $\|A\|_1 \geq \sqrt{3} > 1$.
- 2) Il metodo di bisezione converge se applicato per la approssimazione delle radici semplici α_1 e α_2 . Non converge per approssimare $\alpha_{3,4}$ essendo questa radice di molteplicità pari (manca il cambio di segno della funzione).
- 3) Dallo studio del grafo orientato si individua una matrice di permutazione che riduce la matrice data; per esempio, $P_1 = (\mathbf{e}^{(2)}|\mathbf{e}^{(1)}|\mathbf{e}^{(3)}|\mathbf{e}^{(4)})$.
La forma ridotta della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene con $P = (\mathbf{e}^{(2)}|\mathbf{e}^{(4)}|\mathbf{e}^{(3)}|\mathbf{e}^{(1)})$.

- 4) La soluzione si ottiene dal sistema delle equazioni normali $A^T A x = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è $x = (1, 0)^T$.

- 5) Il polinomio dato è il polinomio di interpolazione di Hermite poiché risulta di grado 3 ($k + 1$ punti con $k = 1 \Rightarrow$ grado massimo $2k + 1 = 3$) e verifica le condizioni

$$P(0) = 0, \quad P(1) = 0, \quad P'(0) = 1, \quad P'(1) = 1.$$