591AA 21/22 – COMPITO 6

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

Problema 1. Nei casi (a) e (b) seguenti, determinare se esiste una funzione lineare L con le proprietà indicate.

(a) $L(1,0,0) = 1$, $L(1,1,0) = 2$, $L(1,1,1) = 3$, $L(1,0,1) = 2$.
(b) $L(1,1,0) = 1$, $L(1,0,1) = 2$, $L(0,1,1) = 3$, $L(1,1,1) = 4$.

Problem 2. Sia $F(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni sulla linea reale (Lezione 5, pagina 3). Siano a e b numeri reali. Dimonstrare che

$$(L(f))(x) = f(ax + b)$$

definisce una mappa lineare da $F(\mathbb{R})$ a $F(\mathbb{R})$.

Problema 3.

(a) Calcolare la formula per la proiezione da $\mathbb{R}^3$ sul piano $3x+4y+12z = 0$ usando le formule della lezione 6. Scrivi la tua risposta nella forma

$$\pi(x, y, z) = (L_1, L_2, L_3),$$

dove ogni L_i è una funzione lineare di (x, y, z).
(b) Trova la formula per la riflessione attraverso il piano data nella parte (a).

Problema 4. Usando le formule per la riflessione e la rotazione date a pagina 4 della Lezione 6, verifica che se ρ_1 è la riflessione rispetto a $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e ρ_2 è la riflessione rispetto a $u = (1, 0)$ allora $\rho_2 \circ \rho_1$ è una rotazione per 2θ. Formule utili:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Problema 5. Valutare le seguenti derivate e integrali:

(a) $\frac{d}{dx}(x^3 - x)$.
(b) $\frac{dr}{dt}$, $r(t) = (t^2, t^3, 0)$.
(c) $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\, dx$.
(d) $\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx$.

Per quali valori di x la derivata della parte (a) è uguale a zero? Cosa va storto quando si cerca di trovare la linea tangente alla curva nella parte (b) a $t = 0$? C'è una ragione geometrica per cui la risposta a (c) è zero? (d) C'è una ragione geometrica per cui la risposta a (d) è positiva?

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Problema 6. Siano U e V spazi vettoriali. Verificare che l'insieme

$$L(U, V) = \{L : U \to V \mid \text{L è una mappa lineare}\}$$

è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni:

- $(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$;
- $(cL)(u) = cL(u)$.