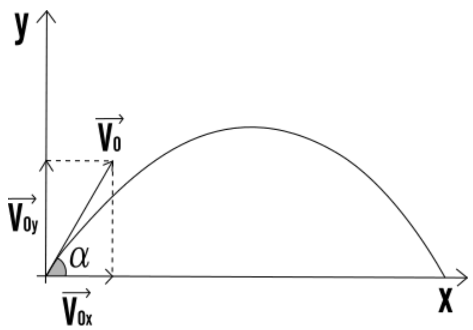
Moto parabolico

Moto di caduta libera in due dimensioni.

Vogliamo descrivere il moto di un proiettile che ha velocità $\vec{v}_0$ al tempo $t = 0$. Durante il moto, la posizione $\vec{r}(t)$ e la velocità $\vec{v}(t)$ variano continuamente in modulo, direzione e verso. L'accelerazione è costante verso il basso: $\vec{a} = \vec{g}$ e dunque si tratta di un moto di caduta libera.



Stabiliamo un sistema di riferimento con assi cartesiani orientati in modo che:

- asse delle x orizzontale
- asse delle y verticale verso l'alto

Supponiamo che il proiettile si trovi nell'origine del sistema di riferimento al tempo $t = 0$.

Condizioni iniziali

Scomponiamo il vettore velocità iniziale:

$$\vec{v}_0 = v_{x,0}\hat{\imath} + v_{y,0}\hat{\jmath}$$

Conoscendo il modulo $v_0 = |\vec{v}_0|$ e l'angolo α (detto "alzo"):

$$\begin{cases} v_{x,0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y,0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_0 = \left(v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_{y,0}}{v_{x,0}}\right) \end{cases}$$

Il vettore posizione iniziale è:

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$$

nel nostro caso particolare abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

L'accelerazione è costante e il vettore accelerazione:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

ha componenti:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Equazioni del moto

Le componenti dei vettori posizione, velocità e accelerazione sono tra loro indipendenti e il moto del proiettile può essere descritto come la composizione di due moti indipendenti:

- moto rettilineo uniforme per le componenti *x*
- moto rettilineo uniformemente accelerato per le componenti *y*

lungo *x*:
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x,0}t \\ v_x(t) = v_{x,0} \end{cases}$$

lungo *y*:
$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v_y(t) = v_{y,0} + a_y t \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni iniziali otteniamo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ v_x = v_0 \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

Calcolo del tempo di volo

Al tempo $t = t_{volo}$ abbiamo $y(t_{volo}) = 0$. Sostituendo:

$$y(t_{volo}) = 0 = v_0 \sin\alpha \, t_{volo} - \frac{1}{2} g t_{volo}^2$$

è un'equazione di secondo grado che ha soluzioni:

$$t_{volo} = 0 \qquad\qquad t_{volo} = \frac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g}$$

Calcolo della velocità finale

Al tempo $t_{volo} = \frac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g}$ abbiamo:

$$\begin{cases} v_x(t_{volo}) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t_{volo}) = v_0 \sin\alpha - g t_{volo} = v_0 \sin\alpha - g \cdot \dfrac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g} = -v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Il vettore velocità finale sarà dunque:

$$\vec{v}(t_{volo}) = v_0 \cos\alpha \, \hat{\imath} - v_0 \sin\alpha \hat{\jmath}$$

che ha modulo:

$$v(t_{volo}) = |\vec{v}(t_{volo})| = \left[v(t_{volo})_x^2 + v(t_{volo})_{y,0}^2\right]^{\frac{1}{2}} = [(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$v(t_{volo}) = v_0$$

Calcolo della posizione finale (gittata)

Sostituiamo $t_{volo} = \frac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g}$ nelle equazioni per le coordinate della posizione:

$$\begin{cases} x(t_{volo}) = v_0 \cos\alpha \, t_{volo} = v_0 \cos\alpha \cdot \dfrac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g} \\ y(t_{volo}) = 0 \end{cases}$$

La coordinata *x* della posizione finale è detta "gittata". Indicando la gittata con:

$$G = x(t_{volo})$$

abbiamo

$$G = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$$

Osserviamo che, fissato il modulo della velocità iniziale, la massima gittata si ottiene per:

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Calcolo della massima altezza

Alla massima altezza abbiamo: $v_y(t_{hmax}) = 0$. Sostituendo:

$$v_y(t_{hmax}) = v_0 \sin\alpha - g t_{hmax}$$

è un'equazione di primo grado da cui ricaviamo:

$$t_{hmax} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Osserviamo che $\quad t_{hmax} = \frac{1}{2} t_{volo}$

Sostituiamo $t_{hmax} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ nelle equazioni per le coordinate della posizione:

$$\begin{cases} x(t_{hmax}) = v_0 \cos\alpha \, t_{hmax} = v_0 \cos\alpha \cdot \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \\ y(t_{hmax}) = v_0 \sin\alpha \, t_{hmax} - \dfrac{1}{2} g (t_{hmax})^2 = v_0 \sin\alpha \cdot \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} x(t_{hmax}) = \dfrac{v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cos\alpha = \dfrac{G}{2} \\ y(t_{hmax}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} \end{cases}$$

Calcolo della traiettoria

Esprimiamo la componente verticale della posizione in funzione di quella orizzontale:

$$y = y(x)$$

a questo scopo consideriamo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \, t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha \, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ricaviamo il tempo dalla prima equazione:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

sostituiamo nella seconda:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = [\tan\alpha] \cdot x - [\frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}] \cdot x^2$$

si tratta di una parabola con concavità verso il basso:

$$y = Ax - Bx^2$$

con

$$\begin{cases} A = \tan\alpha \\ B = \dfrac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} \end{cases}$$