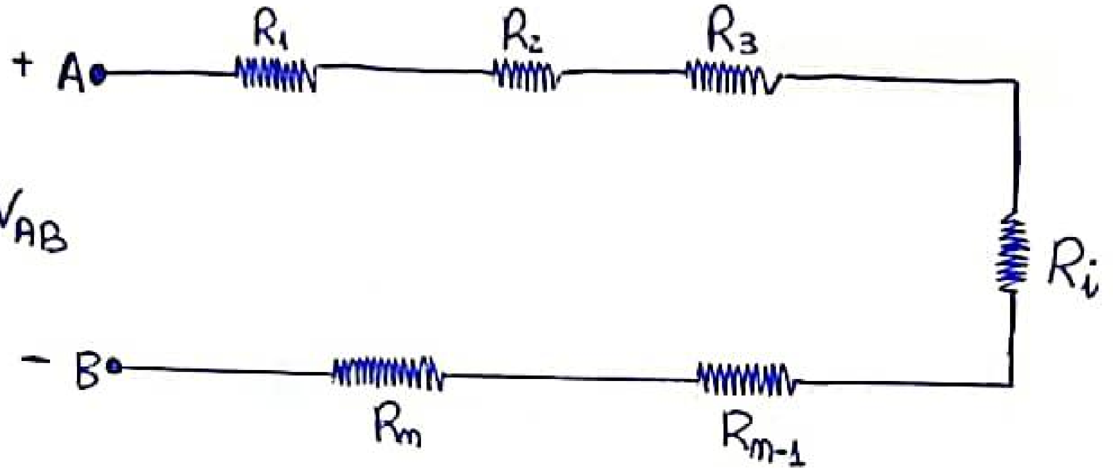
PARTITORE DI TENSIONE



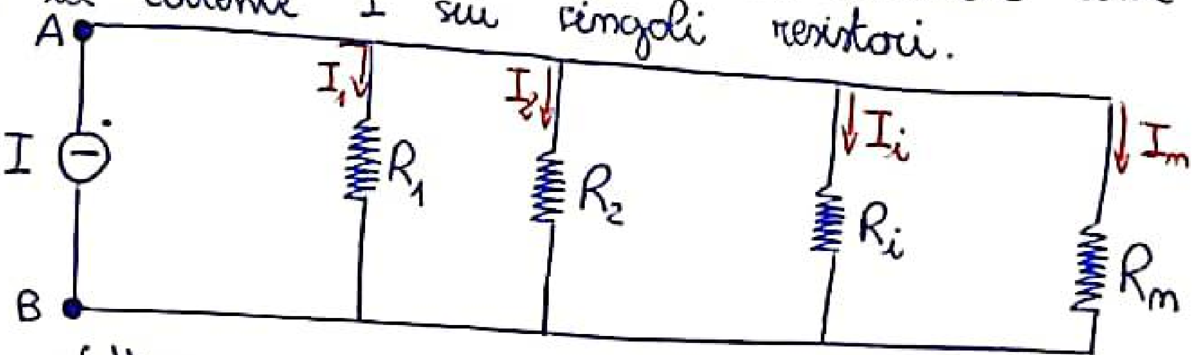
(1.1)

Supponiamo di avere un collegamento di m resistori come illustrato in (1.1). Supponiamo inoltre di conoscere la tensione V_{AB}. Si vuole ricavare come si ripartisce la tensione V_{AB} sui singoli RESISTORI.
La corrente che scorre su i RESISTORI, essendo tutti in SERIE, è comune a tutti.

$$I = \frac{V_{AB}}{\sum_{i=1}^{m} R_i}$$

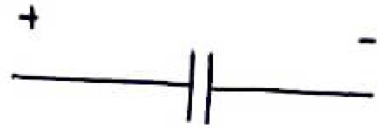
$\Rightarrow$ La tensione ai capi del resistore i è data da : $V_i = R_i I = R_i \cdot \frac{V_{AB}}{\sum_{J=1}^{m} R_J}$

PARTITORE DI CORRENTE : Si vuole conoscere come si ripartisce la corrente I sui singoli resistori.



La conduttanza equivalente è data da $G = \sum_{i=1}^{m} G_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{R_i}$
Da cui segue $V_{AB} = I/G$.
La singola corrente $I_i = G_i V_{AB} = G_i \frac{I}{\sum^{m} G_J} = \frac{1}{R_i} \frac{I}{\sum_{J=1}^{m} \frac{1}{R_J}}$

CONDENSATORE



$C \triangleq$ capacità

Equazione costitutiva: $\boxed{Q(t) = C\, v(t)}$ (1.0)

Per risolvere il problema fondamentale delle reti è conveniente esprimere le due grandezze fondamentali (tensione e corrente) una in funzione dell'altra.

Notando che $i(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{i(t) = C\frac{dv}{dt}}$ (1.1)

Dalla (1.1), integrando entrambi i membri, si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\, d\tau + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\, d\tau = \boxed{v(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\, d\tau}$$

POTENZA:

$$P(t) = v(t)\, i(t) = v(t)\, C\frac{dv}{dt} \gtrless 0$$

NON ABBIAMO INFORMAZIONI SUL SEGNO

ENERGIA:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} P(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, i(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, C \cdot \frac{dv}{\cancel{d\tau}}\cancel{d\tau} = C\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, dv =$$

$$= \frac{C}{2}v^2(t) - \frac{C}{2}v^2(-\infty) = \frac{C}{2}v^2(t) \geq 0 \quad \text{SEMPRE}$$

*

IL CONDENSATORE È UN BIPOLO TEMPO-INVARIANTE, CON MEMORIA, LINEARE e PASSIVO.

* per $t \to -\infty$ si suppone che il condensatore sia scarico

INDUTTORE

$L \triangleq$ induttanza

Equazione costitutiva: $\boxed{\Phi = L\, i(t)}$

Anche nel caso dell' induttore è sconveniente utilizzare l' equazione costitutiva per risolvere il problema fondamentale delle reti. Ricordando che $v = \frac{d\phi}{dt}$

$$\boxed{v(t) = L \frac{d\, i(t)}{dt}}$$

POTENZA:

$$p(t) = v(t)\, i(t) = L \frac{d\, i(t)}{dt}\, i(t) \gtrless 0$$ NESSUNA INFORMAZIONE SUL SEGNO

ENERGIA:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = L \int_{-\infty}^{t} \frac{d\, i(\tau)}{\cancel{d\tau}}\, i(\tau)\, \cancel{d\tau} = L \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\, i(\tau) =$$

$$= \frac{L}{2} i^2(t) - \underset{*}{\frac{L}{2} i^2(-\infty)} = \frac{L}{2} i^2(t) \geq 0$$ SEMPRE

L' INDUTTORE è UN BIPOLO LINEARE, TEMPO-INVARIANTE, PASSIVO SENZA MEMORIA.

* supposto che per $t \to -\infty$, sull' induttore non scorre corrente

ENERGIA INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI (SONO PASSIVI)

$$p(t) = v_1(t)\,i_1(t) + v_2(t)\,i_2(t)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} v_1(\tau)\,i_1(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\,i_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \underbrace{L_1 \frac{d\,i_1(\tau)}{\cancel{d\tau}}}_{\text{CADUTA DI AUTO 1}} i_1(\tau)\,\cancel{d\tau} + \int_{-\infty}^{t} \underbrace{M \frac{d\,i_2(\tau)}{\cancel{d\tau}}}_{\text{CADUTA DI MUTUA 1}} i_1(\tau)\,\cancel{d\tau} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \underbrace{L_2 \frac{d\,i_2(\tau)}{\cancel{d\tau}}}_{\text{CADUTA DI AUTO 2}} i_2(\tau)\,\cancel{d\tau} + \int_{-\infty}^{t} \underbrace{M \frac{d\,i_1(\tau)}{\cancel{d\tau}}}_{\text{CADUTA DI MUTUA 2}} i_2(\tau)\,\cancel{d\tau} =$$

$$= \frac{L_1}{2}\left[i_1(\tau)\right]^2 \Big|_{-\infty}^{t} + \frac{L_2}{2}\left[i_2(\tau)\right]^2 \Big|_{-\infty}^{t} + M \int_{-\infty}^{t} d\,i_1(\tau)\,i_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+ M \int_{-\infty}^{t} d\,i_2(\tau)\,i_1(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{L_1}{2}\left[i_1(t)\right]^2 + \frac{L_2}{2}\left[i_2(t)\right]^2 + M \int_{-\infty}^{t} \frac{d\left(i_1(\tau)\,i_2(\tau)\right)}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{L_1\left[i_1(t)\right]^2 + L_2\left[i_2(t)\right]^2 + 2M\left[i_1(t)\,i_2(t)\right]\right\} \geq 0$$

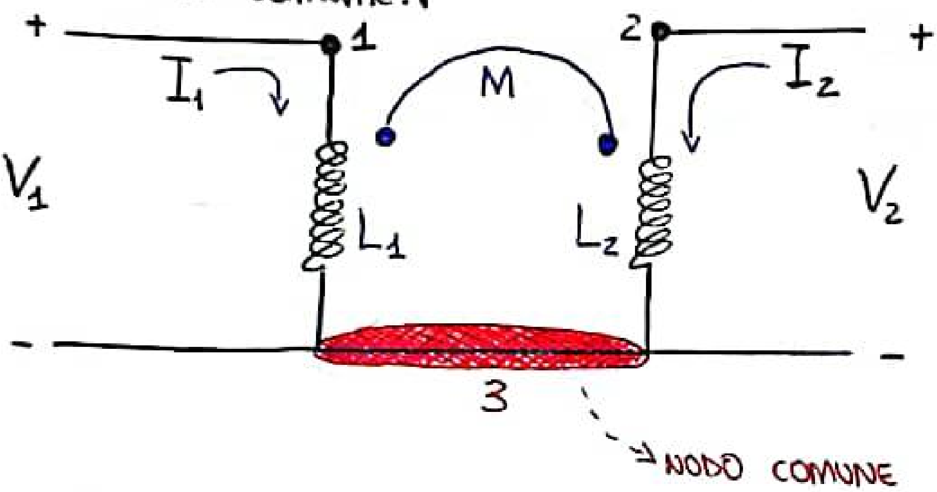
* $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

* per $t \to -\infty$ si suppone che il circuito non sia attraversato da correnti per cui $i_1(-\infty) = i_2(-\infty) = 0$.

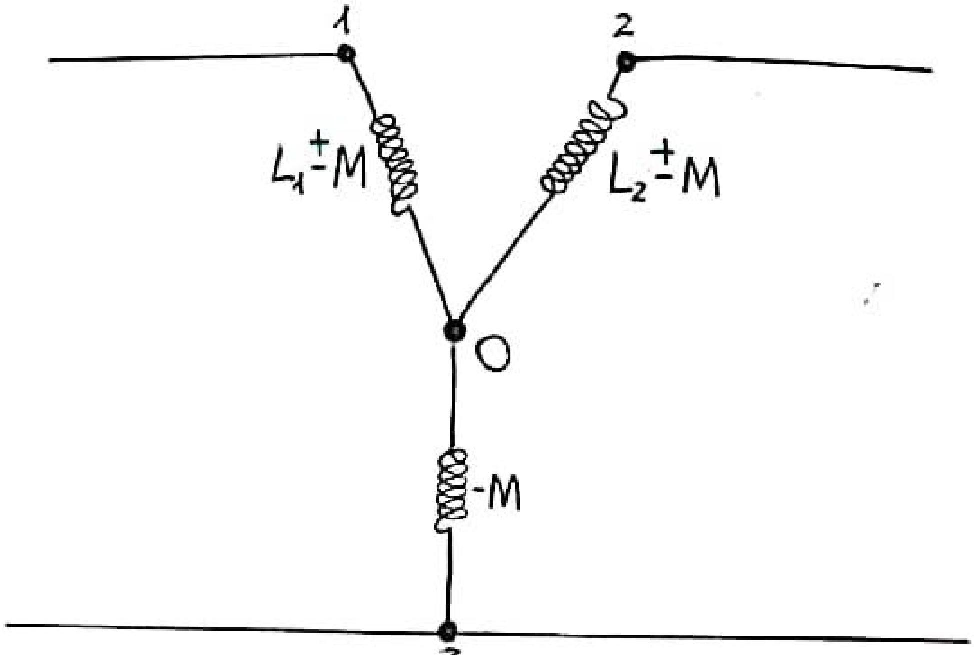
TRASFORMAZIONE TOPOLOGICA INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

IPOTESI: i due induttori devono avere un nodo a comune.

CASO ①: Il contrassegno di entrambi si trova all'opposto del nodo a comune.



Procedimento:
- Si assegna un nome ai nodi. Nodo 1 al nodo più vicino a L_1, Nodo 2 al nodo più vicino a L_2, Nodo 3 al nodo in comune.
- Si aggiunge un nodo, chiamiamolo 0.
- Applichiamo la trasformazione topologica.



CASO ②: il contrassegno di uno si trova vicino al nodo in comune.

→ Rimane tutto uguale ma la trasformazione cambia (VEDI VERDE)

DOMINIO FASORIALE

(CIRCUITI A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE)

Un circuito si dice a regime periodico sinusoidale se tutte le tensioni e tutte le correnti possono essere rappresentate nella forma:

$$x(t) = \underbrace{X_m}_{\text{VALORE MASSIMO}} \sin(\underbrace{\omega}_{\text{PULSAZIONE}} t + \overbrace{\varphi_M}^{\text{FASE}})$$

PULSAZIONE $\omega = \frac{2\pi}{T}$

e tutte hanno la stessa PULSAZIONE.

VETTORE ROTANTE : $I(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

FASORE : $\dot{I} = I(0) = I_m e^{j\varphi}$

"Un fasore è un numero complesso la cui interpretazione è un vettore rotante, nel piano di Gauss, considerato nell'istante $t=0$."

COME SI PASSA DA DOMINIO DEL TEMPO A DOMINIO FASORIALE?

Sia $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_M)$ allora $\dot{I} = X_m e^{j\varphi_M}$

COME SI PASSA DA DOMINIO FASORIALE A DOMINIO DEL TEMPO?

Sia $\dot{X} = X_m e^{j\varphi_m}$ allora $x(t) = I_m\{\dot{X} e^{j\omega t}\}$

Dimostriamolo:

$$x(t) = I_m\{X_m e^{j\varphi_m} e^{j\omega t}\} = I_m\{X_m e^{j(\omega t + \varphi_m)}\} =$$

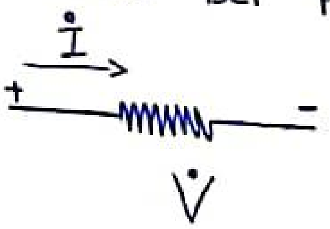
$$= I_m\{X_m \cos(\omega t + \varphi_m) + jX_m \sin(\omega t + \varphi_m)\} = \boxed{X_m \sin(\omega t + \varphi_m)}$$

Proprietà dei Fasori

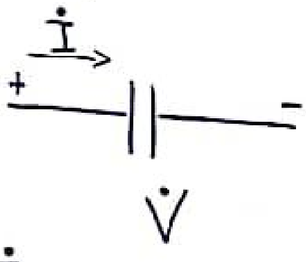
	$x(t)$	$\dot{X}$
DERIVATA	$\dfrac{\partial x(t)}{\partial t}$	$j\omega \dot{X}$
INTEGRALE	$\int x(t)$	$\dfrac{\dot{X}}{j\omega}$

Equazioni costitutive dei principali bipoli

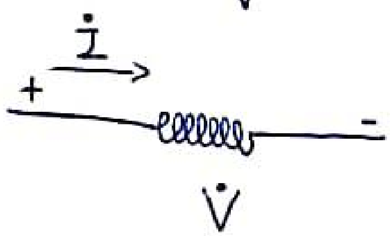
RESISTORE :



CONDENSATORE :

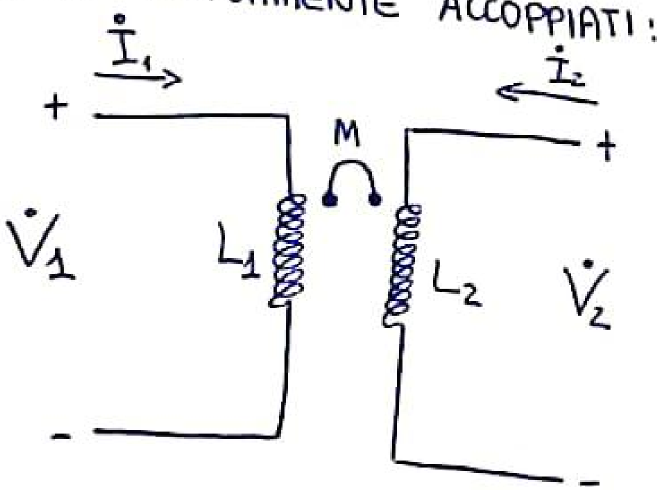


INDUTTORE :



	DOM. FASORIALE	DOM. TEMPO
RESISTORE	$\dot{V} = R\dot{I}$	$v(t) = R\,i(t)$
CONDENSATORE	$\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$
INDUTTORE	$\dot{V} = j\omega L\dot{I}$	$v(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI:



DOM. FASORIALE

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{V}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 &= j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}}$$

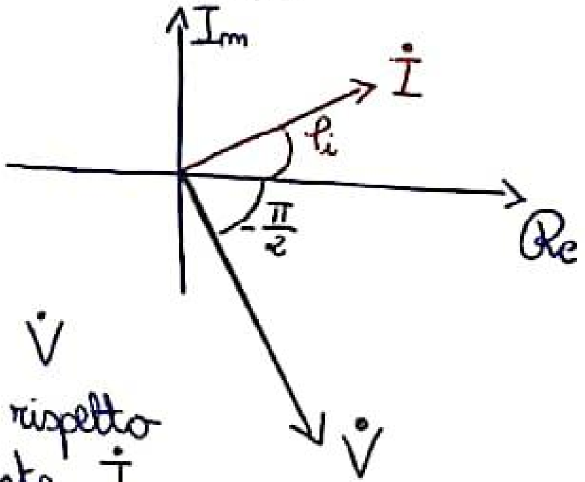
CONDENSATORE IN REGIME PERIODICO - SINUSOIDALE

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -\frac{1}{\omega C} j\,\dot{I}$$

Nel metodo fasoriale, l' operatore integrale si traduce dividendo il fasore del segnale integrando per $j\omega$.
Rappresentiamo il fasore della tensione in presenza di un' impedenza puramente resistiva.

$$\dot{I} = I_m e^{j\varphi_i}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = -j\frac{1}{\omega C} I_m e^{j\varphi_i} = \frac{I_m}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi_i} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})}$$

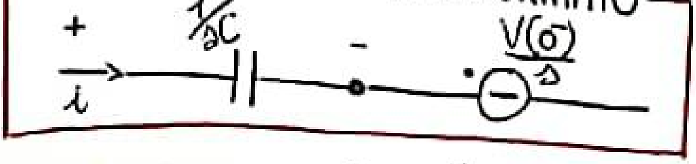


Il fasore della tensione $\dot{V}$ è in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto al fasore della corrente $\dot{I}$.

CONDENSATORE NEL DOMINIO DI LAPLACE

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

CONDUTTORE L-TRASFORMATO



$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$$

↑ TRASFORMATA DI LAPLACE DI UN INTEGRALE

$$V(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{I(s)}{sC} + \frac{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)\,d\tau}{s}$$

$$= \frac{1}{sC} I(s) + \frac{Q(0^-)}{sC} = \boxed{\frac{1}{sC} I(s) + \frac{V(0^-)}{s}}$$

INDUTTORE A REGIME PERIODICO - SINUSOIDALE

$$v(t) = L \frac{d\,i(t)}{dt}$$

Il fasore della derivata di un segnale periodico-sinusoidale è dato dal fasore del segnale moltiplicato per $j\omega$.

$$\dot{V} = j\omega L \dot{I}$$

Dimostriamolo: $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$ A

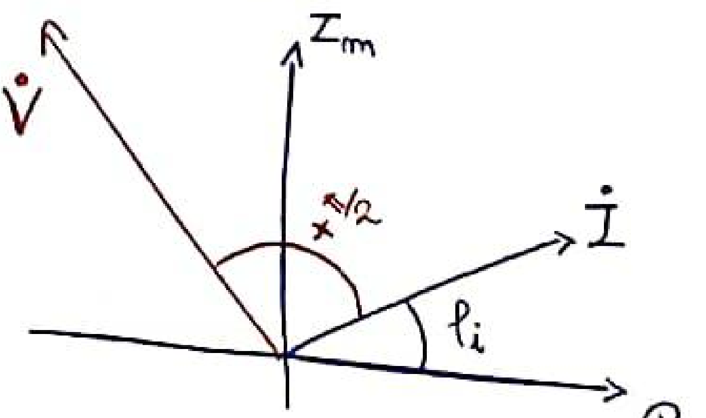
$$\frac{d\,i(t)}{dt} = I_m \cos(\omega t + \theta) \cdot \omega = I_m \omega \sin(\omega t + \theta + \tfrac{\pi}{2})$$

Il fasore della derivata della corrente, chiamandolo $\dot{X}$, è il seguente:

$$\dot{X} = I_m \omega \cdot e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} = I_m \omega e^{j\theta} e^{j\frac{\pi}{2}} = I_m \cdot \omega \cdot e^{j\theta} \cdot j = $$
$$= j\omega \cdot I_m e^{j\theta} = j\omega \dot{I}$$

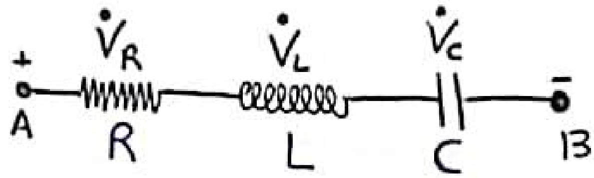
Da cui otteniamo: $\dot{V} = L\dot{X} = j\omega L \dot{I}$

Rappresentiamo il fasore della tensione $\dot{V}$ in caso di impedenza puramente induttiva:



$$\dot{V} = j\omega L \dot{I} = j\omega L I_m e^{j\theta_i} = \omega L I_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\theta_i} = \omega L I_m e^{j(\theta_i + \frac{\pi}{2})}$$

Supponiamo di avere:



$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C =$$

$$= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} =$$

$$= \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)\dot{I} =$$

$$= \underbrace{\left(R + j\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)\right)}_{\bar{Z}\,=\,\text{IMPEDENZA}}\dot{I} = \underbrace{\bar{Z}\,\dot{I}}_{\text{GENERALIZZAZIONE DELLA LEGGE DI OHM}}$$

Al contrario di TENSIONE e CORRENTE, le IMPEDENZE non hanno una rappresentazione tramite FASORI ma sono NUMERI COMPLESSI.

NOTA: l'equazione $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$ equivale a due equazioni nel dominio dei numeri complessi.

$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \iff V_m e^{j\varphi_V} = |Z| e^{j\varphi_Z} \cdot I_m e^{j\varphi_I}$$

$$V_m e^{j\varphi_V} = |Z| I_m e^{j(\varphi_Z + \varphi_I)} \iff \begin{cases} V_m = |Z| I_m \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \end{cases}$$

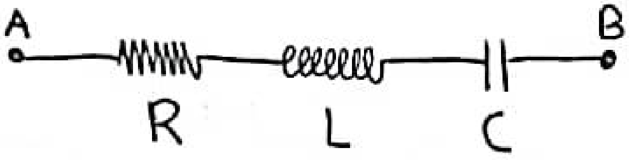
$$\dot{V} = \overbrace{(R + jX)}^{\text{IMPEDENZA}}\dot{I}$$

R → RESISTENZA

X → REATTANZA

RAPPRESENTAZIONE E NATURA DELLE IMPEDENZE

Supponiamo di avere:

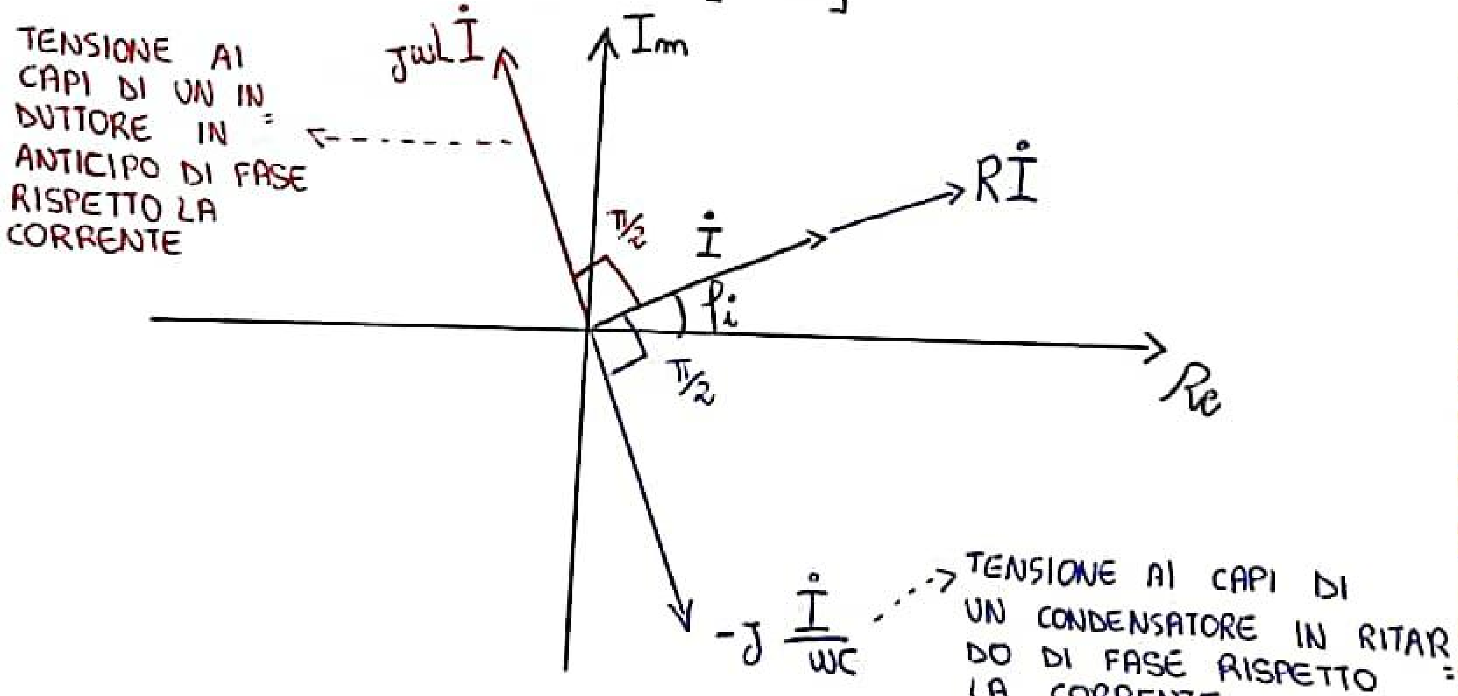


Qual' è la differenza di potenziale ai capi AB ?

$$\dot{V}_{AB} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$j\omega L\dot{I} = j\omega L I_m e^{j\varphi_i} = \left[\omega L I_m\right] e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi_i} = \left[\omega L I_m\right] e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

$$-j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \left[\frac{1}{\omega C} I_m\right] e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi_i} = \left[\frac{I_m}{\omega C}\right] e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})}$$



- Tensione e corrente, nel caso in cui l' impedenza è puramente RESISTIVA, sono in fase.

Dall' equazione $\varphi_Z = \varphi_v - \varphi_i$ si ottiene

$\varphi_Z = 0$ CARICO PURAMENTE RESISTIVO	$\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$ CARICO PURAMENTE INDUTTIVO	$\varphi_Z = -\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ CARICO PURAMENTE CAPACITIVO	$-\pi/2 < \varphi_Z < 0$ OHMICO CAPACITIVO	$0 < \varphi_Z < \pi/2$ OHMICO INDUTTIVO

AMMETTENZE

$$\overline{Z} = R + jX \Rightarrow \overline{Y} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2}$$

$\overline{Y}$ → AMMETTENZA

$$\overline{Y} = \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2} = G + jB$$

$\frac{R}{R^2+X^2}$ → CONDUTTANZA

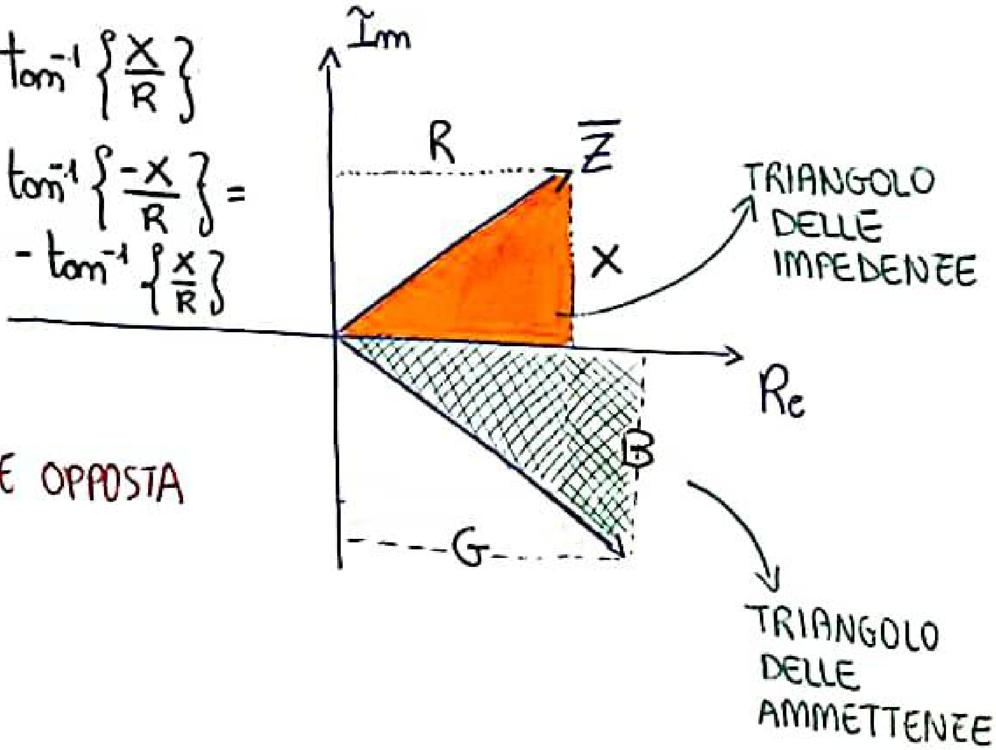
$\frac{X}{R^2+X^2}$ → SUSCETTANZA

Fase IMPEDENZA: $\tan^{-1}\left\{\frac{X}{R}\right\}$

Fase AMMETTENZA: $\tan^{-1}\left\{\frac{-X}{R}\right\} = -\tan^{-1}\left\{\frac{X}{R}\right\}$

⇓

HANNO FASE OPPOSTA



POTENZE IN REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

$$p(t) = v(t)\,i(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)\, I_m \sin(\omega t) =$$

$$= V_m I_m \left[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)\right]\sin(\omega t) =$$

$$= V_m I_m \left[\sin^2(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(\varphi)\right] =$$

$$= V_m I_m \left[\frac{(1-\cos(\omega t))}{2}\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(\varphi)\right] =$$

$$= V_m I_m \left[\frac{(1-\cos(\omega t))}{2}\cos(\varphi) + \frac{\sin(2\omega t)}{2}\sin(\varphi)\right] =$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\left[(1-\cos(\omega t))\cos(\varphi) + \sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

<u>POTENZA ATTIVA ISTANTANEA</u> $\triangleq \frac{V_m I_m}{2}\left[(1-\cos(2\omega t))\cos(\varphi)\right]$

<u>POTENZA REATTIVA ISTANTANEA</u> $\triangleq \frac{V_m I_m}{2}\left[\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$

Se l'impedenza è PURAMENTE RESISTIVA ($\varphi = 0$) allora si ha solo POTENZA ATTIVA.
Se l'impedenza è PURAMENTE INDUTTIVA (CAPACITIVA) allora si ha solo POTENZA REATTIVA.

In generale, la POTENZA ha una componente che dipende dagli elementi RESISTIVI e una componente che dipende dagli elementi REATTIVI.

NOTA: φ => si noti che in regime sinusoidale TENSIONE e CORRENTE NON SONO IN FASE.

POTENZA ATTIVA: $\boxed{P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt}_{\text{DEFINIZIONE}} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\varphi)$ [W]

La POTENZA ATTIVA è UNA MEDIA.

ATTENZIONE: $V_{EFF} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$, $I_{EFF} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$

e quindi si ricava: $P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\varphi) = V_{EFF} I_{EFF} \cos(\varphi)$

Si chiama POTENZA ATTIVA perchè come la POTENZA ATTIVA ISTANTANEA dipende da $\cos(\varphi)$.

POTENZA REATTIVA: $\boxed{Q \triangleq \max\left\{\frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right\} =}_{\text{DEFINIZIONE}}$

$= \frac{V_m I_m}{2}\sin(\varphi)$ [VAR] VOLT-AMPERE REATTIVI

Anche qui, visto che $\frac{V_m}{\sqrt{2}} = V_{EFF}$ e $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I_{EFF}$, si ricava

$Q = V_{EFF} I_{EFF} \sin(\varphi)$

POTENZA APPARENTE: $S \triangleq \frac{V_m I_m}{2} = V_{EFF} I_{EFF}$ [VA] VOLT AMPERE

(Preambolo: si prende $\dot{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_v} = V_{EFF} e^{j\varphi_v}$, $\dot{I} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i} = V_{EFF} e^{j\varphi_i}$)

POTENZA COMPLESSA: $\boxed{\overline{S} = \dot{V}\dot{I}^*}$ [VA]

$$\bar{S} = \dot{V}\dot{I}^* = V_{EFF}\, e^{j\varphi_v} \cdot I_{EFF}\, e^{-j\varphi_i} = V_{EFF} I_{EFF}\, e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

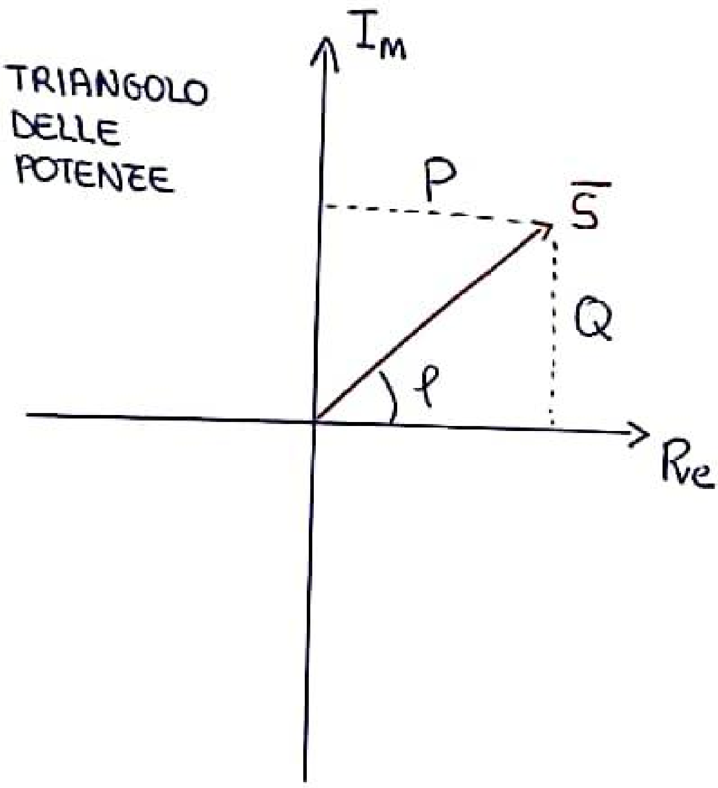
$$= V_{EFF} I_{EFF} \left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right) = P + jQ$$

$$P = R_e\{\bar{S}\}$$

$$Q = I_m\{\bar{S}\}$$

$\boxed{\bar{S} \text{ è l'unica potenza complessa, ovvero } \in \mathbb{C}}$

TRIANGOLO DELLE POTENZE



$$|S| = V_{EF} I_{EF} = S$$

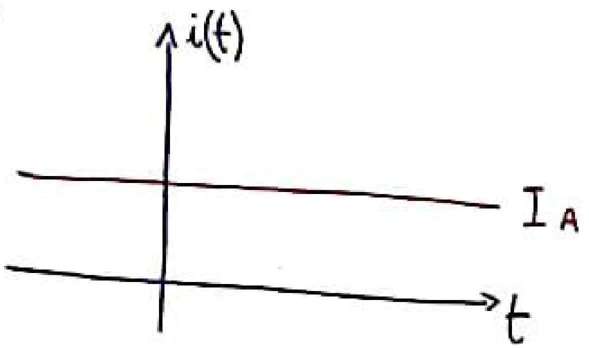
LA POTENZA APPARENTE è IL MODULO DELLA POTENZA COMPLESSA.
IL TRIANGOLO DELLE POTENZE è SIMILE AL TRIANGOLO DELLE IMPEDENZE.

VALORE EFFICACE: sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T.

$$\boxed{X_{EFF} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(\tau)\,d\tau}}$$

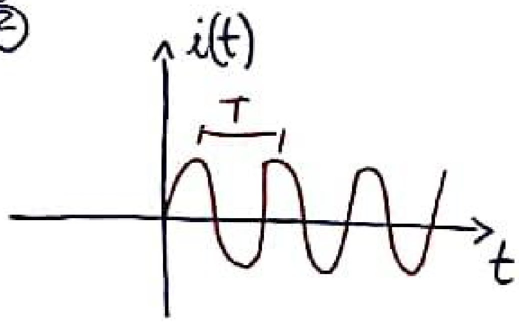
DEFINIZIONE

Interpretazione elettrica:
Supponiamo di calcolare l' energia dissipata da una RESISTENZA nel caso di una CORRENTE COSTANTE e nel caso di una CORRENTE PERIODICA nell' arco di un periodo T.

① 

$$P_R(t) = v(t)\,i(t) = R[i(t)]^2 = RI^2 \quad W$$

$$W = \int_0^T P_R(t)\,dt = \int_0^T RI^2\,dt = TRI^2 \quad J$$

② 

$$P_R(t) = v(t)i(t) = R[i(t)]^2 \quad W$$

$$W = \int_0^T P_R(t)\,dt = R\int_0^T [i(t)]^2 dt$$

Notiamo che $I_{EFF}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2 dt$ da cui, sostituendo nell' espressione di W, si ottiene:

$$W = RTI_{EFF}^2$$

La conclusione è la seguente: UNA CORRENTE COSTANTE e UNA CORRENTE PERIODICA DISSIPANO LA STESSA QUANTITA' DI ENERGIA (MISURATA SU UN INTERVALLO DI TEMPO PARI A T) A PATTO CHE $I_{COST} = I_{EFF}$

QUANTO VALE IL VALORE EFFICACE DI UN SEGNALE PERIODICO SINUSOIDALE ?

$$X_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T X_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{X_m^2}{T}\int_0^T (1-\cos^2(\omega t))\,dt} =$$

$$= X_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt} =$$

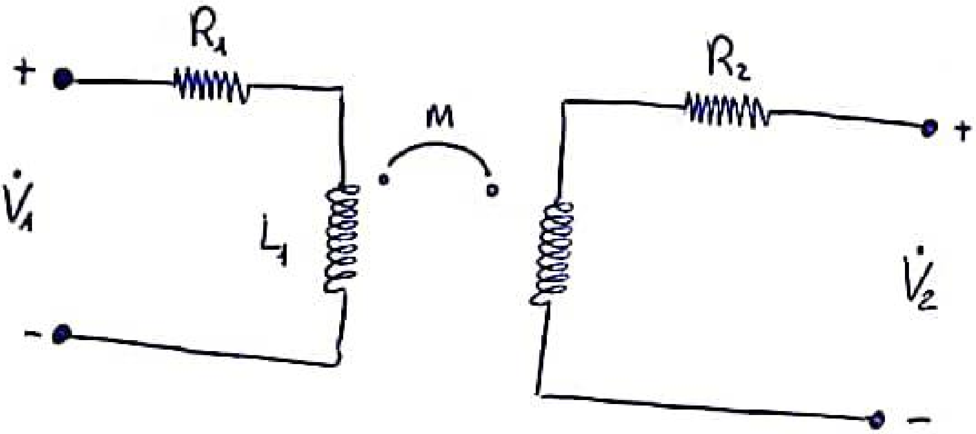
$$= X_m\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,dt} =$$

*

$$= \boxed{\frac{X_m}{\sqrt{2}}}$$

* Integrare una funzione sinusoidale su un multiplo del suo periodo fa ZERO.

POTENZA INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



Le resistenze in serie rappresentano il fatto che si dissipa potenza per effetto Joule

$$\dot V_1 = R_1 \dot I_1 + j\omega L_1 \dot I_1 + j\omega M \dot I_2$$

$$\dot V_2 = R_2 \dot I_2 + j\omega L_2 \dot I_2 + j\omega M \dot I_1$$

PRESA SINGOLARMENTE, LA POTENZA DI UN INDUTTORE MUTUAMENTE ACCOP. È SIA ATTIVA SIA REATTIVA.
IN COPPIA ⇒ SOLO REATTIVA

$$\bar S = \dot V_1 \dot I_1^* + \dot V_2 \dot I_2^* = R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot I_2 \dot I_1^* + R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot I_1 \dot I_2^* =$$

$$= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\left[\omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + \omega M \dot I_2 \dot I_1^* + \omega M \dot I_1 \dot I_2^*\right]$$

Si noti che $\dot I_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$, $\dot I_2^* = I_2 e^{-j\varphi_2}$

$\dot I_1 = I_1 e^{j\varphi_1}$, $\dot I_1^* = I_1 e^{-j\varphi_1}$

Da cui segue: $\dot I_2 \dot I_1^* = I_2 I_1 e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}$

$\dot I_1 \dot I_2^* = I_1 I_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = I_2 I_1 e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)}$

Consideriamo solamente $\omega M \dot I_2 \dot I_1^* + \omega M \dot I_1 \dot I_2^* =$

$$= \omega M \left[I_2 I_1 (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cancel{j\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}) + I_2 I_1 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cancel{j\sin(\varphi_2 - \varphi_1)})\right] =$$

$$= \omega M I_1 I_2 (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \in \mathbb{R}$$

In conclusione:

$$\bar S = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\underbrace{\left[\omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + \omega M I_1 I_2 (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2))\right]}_{\text{POTENZA (REATTIVA) RELATIVA IND. MUT. ACCOPPIATI}}$$

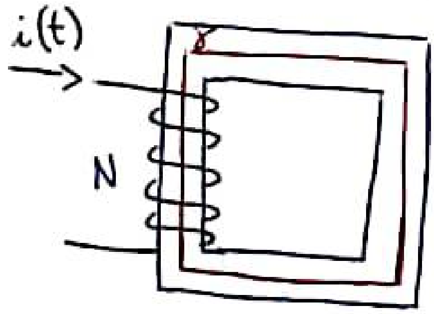
CIRCUITI MAGNETICI

INTENSITÀ CAMPO MAGNETICO $\triangleq H$ [Am]
INDUZIONE MAGNETICA o DENSITÀ FLUSSO MAGNETICO $\triangleq B$ [T]
FLUSSO MAGNETICO $\triangleq \phi$ [Wb]

- Legge di Ampere: $\oint_\gamma H\,dl = \sum I$
- $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$

  {A parità di campo magnetico, H, un materiale si induce "di più" rispetto ad un altro dipendentemente da μ_r}
- $\phi = \int_S B\,ds \overset{*}{\cong} BS$ {$*$: se B costante allora B esce dall'integrale.}

Esempio di circuito magnetico:



$$\oint_\gamma H\,dl = \sum I$$
$$\Downarrow \longrightarrow B = \mu_0 \mu_r H$$
$$\oint_\gamma \frac{B}{\mu_0 \mu_r}\,dl = NI$$
$$\Downarrow \longrightarrow \phi = BS$$
$$\oint_\gamma \frac{\phi}{\mu_0 \mu_r S}\,dl = NI \qquad (1.1)$$

Nel nostro caso, notando che l'integrale di linea è una somma sui 4 segmenti, la (1.1) diventa:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i}{\mu_0 \mu_r S_i} l_i = NI$$

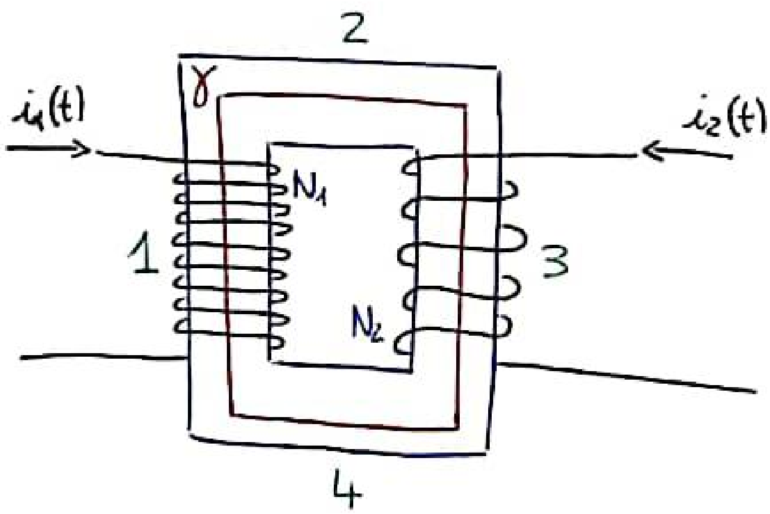
Ipotesi per i circuiti magnetici: $\mu_{fe} \to +\infty$
Questo implica che tutte le linee del campo magnetico si richiudono nel circuito.

LEGGE DI HOPKINSON

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i}{\mu_0 \mu_r S_i} l_i = \sum_{J=1}^{m} N_J I_J}$$

$n \triangleq$ numero di tronchi (segmenti della linea chiusa)
$m \triangleq$ numero di avvolgimenti

L'analogia tra circuiti magnetici e circuiti elettrici AUMENTA introducendo la RILUTTANZA. Facciamo un esempio:



Applicazione della legge di Hopkinson al circuito di sinistra:

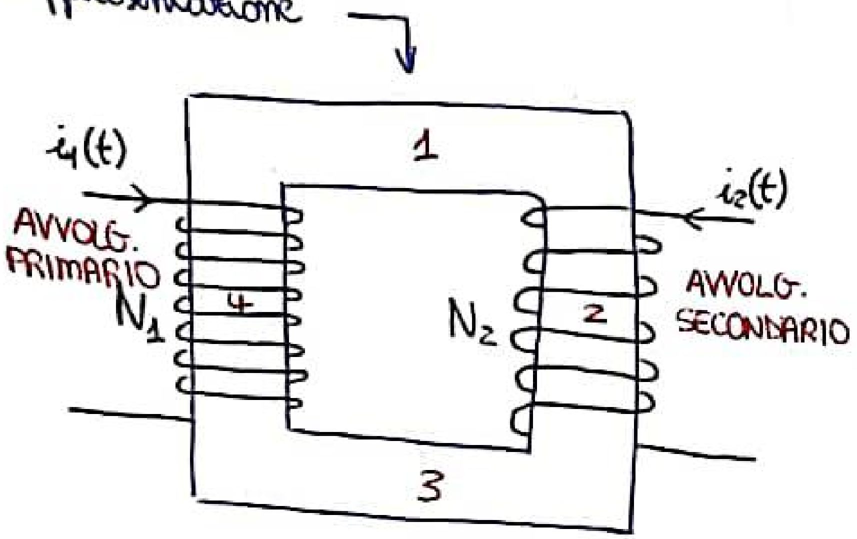
$$\frac{\phi_1}{\mu_0 \mu_r S_1} l_1 + \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S_2} l_2 + \frac{\phi_3}{\mu_0 \mu_r S_3} l_3 + \frac{\phi_4}{\mu_0 \mu_r S_4} l_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$\boxed{\text{RILUTTANZA} \quad \mathcal{R} \triangleq \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}}$$

La legge di Hopkinson diventa: $\mathcal{R}_1 \phi_1 + \mathcal{R}_2 \phi_2 + \mathcal{R}_3 \phi_3 + \mathcal{R}_4 \phi_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$

TRASFORMATORE (IDEALE)

Rappresentazione



Ipotesi del trasformatore ideale:

① $R_{avv} = 0$

② $\mu_{fe} \to \infty$

③ μ_{fe} costante

Scriviamo la legge di Hopkinson per il trasformatore:

$$\mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 + \mathcal{R}_3 \Phi_3 + \mathcal{R}_4 \Phi_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

Nelle ipotesi di idealità si ha $\mathcal{R}_i \to 0$ e quindi:

$$0 = N_1 I_1 + N_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2$$

$$\boxed{I_1 = -\frac{1}{m} I_2 \quad \text{dove } m \triangleq \frac{N_1}{N_2} = \text{RAPPORTO SPIRE}}$$

Il rapporto spire lega la corrente dell'AVVOLGIMENTO PRIMARIO con la corrente sull'AVVOLGIMENTO SECONDARIO.
Anche le tensioni ai due avvolgimenti sono legate tra loro:

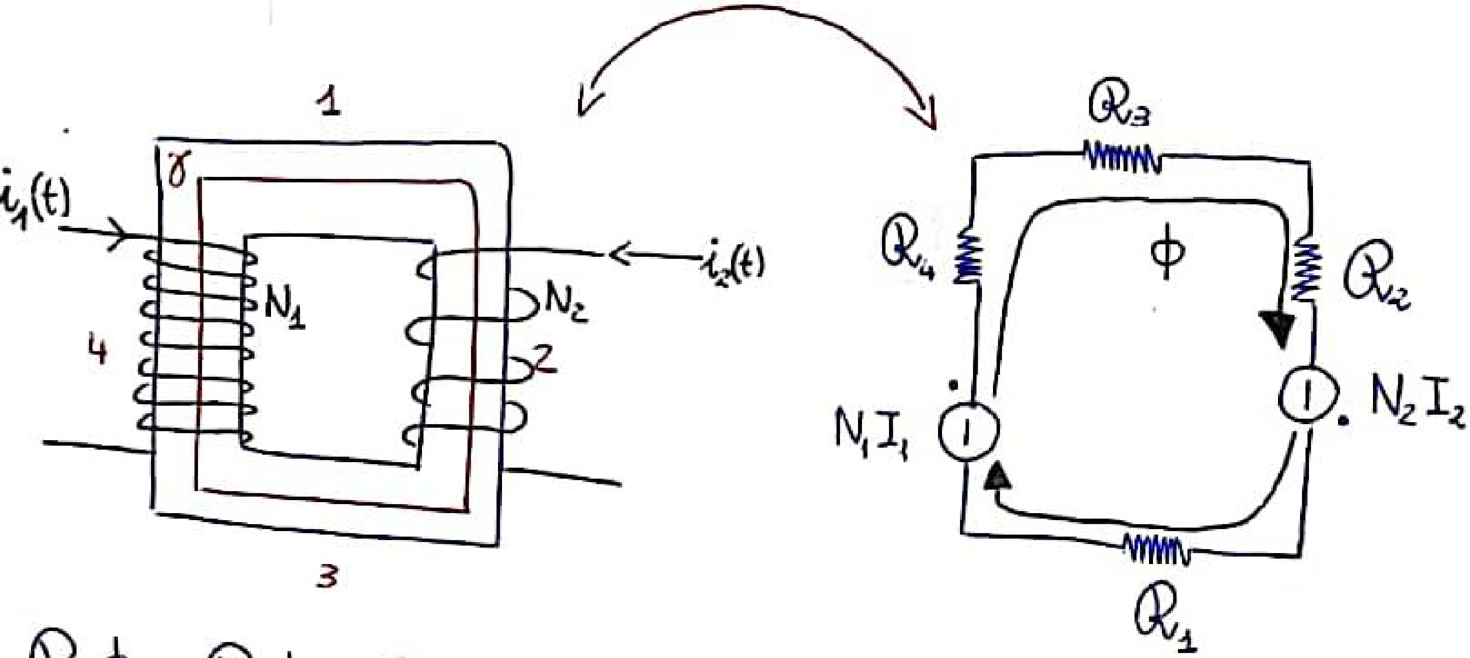
$$\dot{E}_1 = j\omega L_1 N_1 \dot{I}_1$$
$$\dot{E}_2 = j\omega L_2 N_2 \dot{I}_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{j\omega L_1 N_1 \dot{I}_1}{j\omega L_2 N_2 \dot{I}_2} = \frac{L_1 N_1 \dot{I}_1}{L_2 N_2 \dot{I}_2} = \frac{N_1 \Phi_1}{N_2 \Phi_2}$$

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{N_1 \Phi_1}{N_2 \Phi_2} \overset{*}{=} \frac{N_1 \Phi}{N_2 \Phi} = \frac{N_1}{N_2} = m \triangleq \text{RAPPORTO SPIRE}$$

* Se $\mu_{fe} \to +\infty$ allora in tutti i tronchi scorre lo stesso flusso Φ

"Equivalente elettrico" di un circuito magnetico



$$\mathcal{R}_1 \phi_1 + \mathcal{R}_2 \phi_2 + \mathcal{R}_3 \phi_3 + \mathcal{R}_4 \phi_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

CIRCUITI ELETTRICI		CIRCUITI MAGNETICI
R (RESISTENZA)	⟷	$\mathcal{R}$ (RILUTTANZA)
I (CORRENTE)	⟷	ϕ (FLUSSO MAGNETICO)
V (TENSIONE)	⟷	NI (TENSIONI MAGNETICHE)

•) Potenza apparente alla porta 1 del trasformatore

$$S_1 = E_1 I_1 = m E_2 \left(-\frac{1}{m} I_2\right) = -E_2 I_2 = -S_2$$

Con questa osservazione sulla potenza apparente alle due porte del trasformatore possiamo dire che, nel caso ideale, il trasformatore non eroga/dissipa potenza.

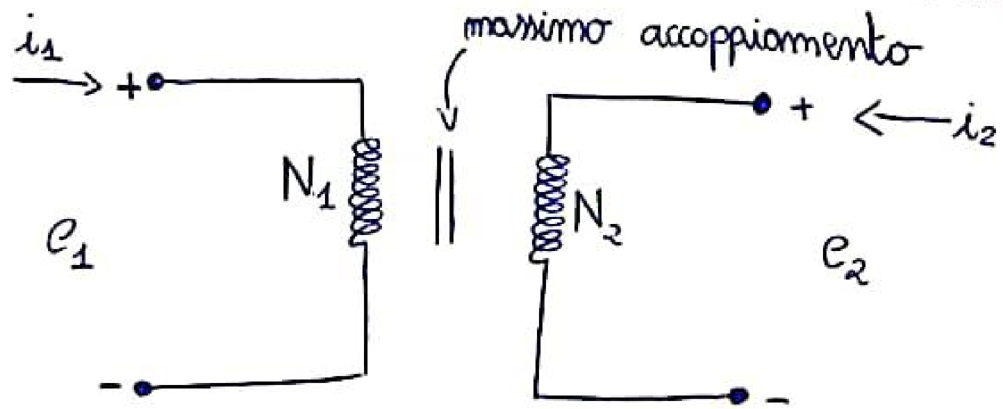
IL TRASFORMATORE SERVE A CAMBIARE I VALORI IN ENTRATA DI CORRENTE O TENSIONE.

$m > 1 \Rightarrow$ TRASFORMATORE RIDUTTORE

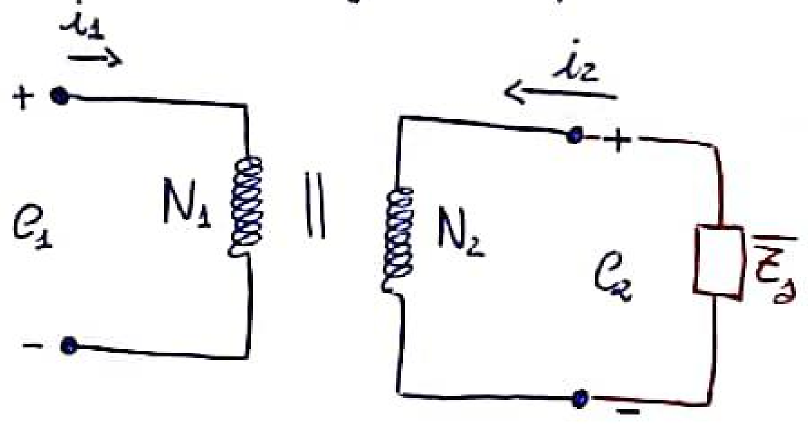
$m = 1 \Rightarrow$ TRASFORMATORE DI ISOLAMENTO

$m < 1 \Rightarrow$ TRASFORMATORE ELEVATORE

CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRASFORMATORE IDEALE



Impedenza vista dall' avvolgimento primario



$$\overline{Z}_s = \frac{e_2}{-i_2} = e_2 \cdot \left(\frac{1}{-(-m i_1)}\right) = \frac{e_2}{m i_1} = \frac{e_1}{m^2 i_1}$$

L' impedenza vista alla porta 1 è data da $\frac{e_1}{i_1}$, quindi

$$\frac{e_1}{i_1} = m^2 \overline{Z}_s$$

TRASFORMATORE REALE

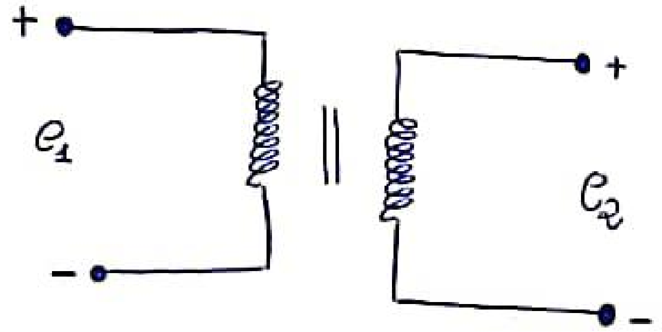
Le ipotesi fatte per il trasformatore ideale sono le seguenti:

i) $R_{AVVOLGIMENTI} = 0$ [si sta supponendo che AVV. PRIMARIO e SECONDARIO non dissipano potenza per effetto Joule]

ii) $\mu_{fe} \to +\infty$

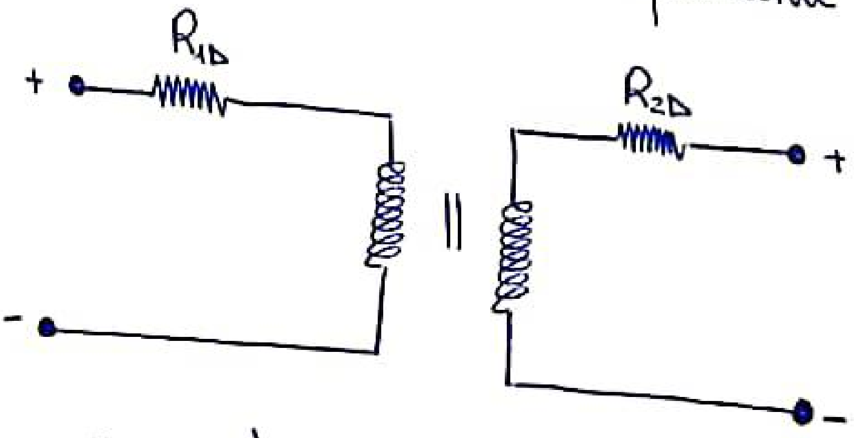
iii) μ_{fe} COSTANTE.

Prendiamo in considerazione il circuito equivalente del trasformatore ideale:



$M = \sqrt{L_1 L_2}$

Se rilassiamo l'ipotesi i) il circuito equivalente diventa:

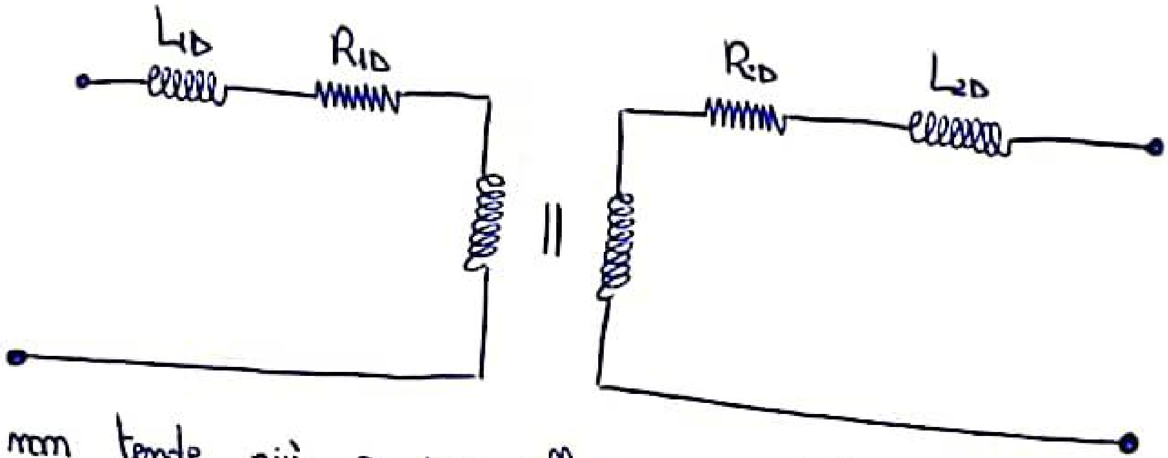


dove R_{1D} e R_{2D} rappresentano * il carico resistivo dell'avvolgimento primario e secondario.

La non idealità del materiale di cui sono fatti gli avvolgimenti implica che una parte della potenza si dissipi per effetto Joule. Si tiene in considerazione questo fenomeno attraverso R_{1D} e R_{2D}.

* rispettivamente.

Se rilassiamo l'ipotesi ii) il circuito equivalente diventa

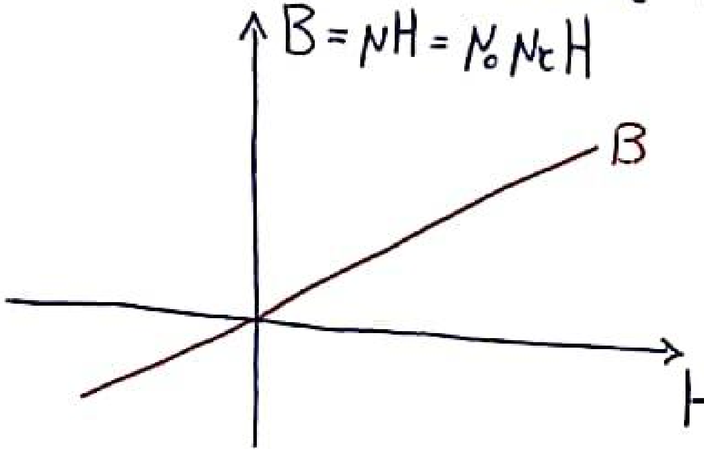


Se μ_{fe} non tende più a $+\infty$ allora non tutte le linee del campo magnetico H si richiudono nel materiale ferromagnetico di cui è composto il trasformatore. Si aggiungono L_{1D} e L_{2D} per rappresentare i flussi DISPERSI all'avvolgimento primario e secondario, ovvero i flussi magnetici che non si concatenano nell'avvolgimento ma si disperde in aria.

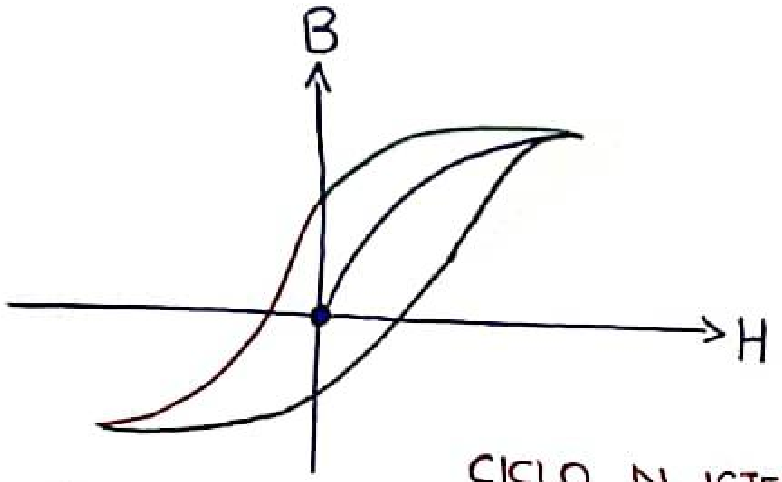
Il rilassamento dell'ipotesi iii) scaturisce un fenomeno detto ISTERESI.

Abbiamo visto che un materiale si induce magneticamente dipendentemente dal campo magnetico a cui è sottoposto e da μ_r. Se μ_r è costante allora si ha:

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$



Se μ_r non è costante il legame tra B e H non è più di proporzionalità diretta.



CICLO DI ISTERESI

Supponiamo di partire dalla situazione in cui $H = B = 0$.
All'aumentare di H, il materiale si induce magneticamente secondo l'andamento rappresentato dalla curva BLU (PRIMA MAGNETIZZAZIONE). Si noti che la curva tende ad un valore finito all'aumetare di H a valori molto alti (SATURAZIONE).
Quando H diminuisce, fino ad essere nullo, si può notare che B non diminuisce proporzionalmente a H (MAGNETIZZAZIONE RESIDUA).

Avendo rilassato le ipotesi ii) e iii) la legge di Hopkinson che descrive il trasformatore ideale diventa:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \mathcal{R}_1 \phi_1 + \mathcal{R}_2 \phi_2 + \mathcal{R}_3 \phi_3 + \mathcal{R}_4 \phi_4$$

$$\Rightarrow N_1 I_1 + N_2 I_2 = f(\mathcal{R}, \Phi)$$

Facendo una prova a vuoto sull'avvolgimento secondario $(I_2 = 0)$ si ottiene che:

$$N_1 I_0 = f(\mathcal{R}, \phi_0)$$

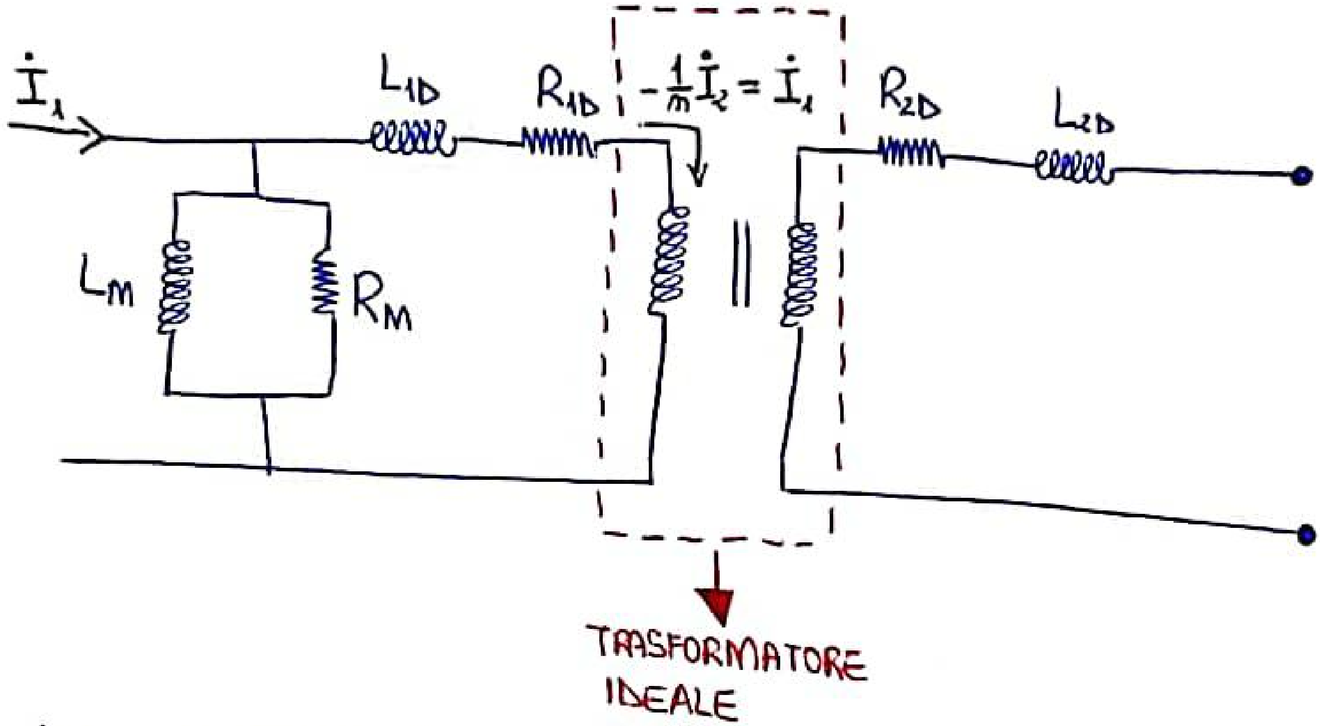
Si osserva sperimentalmente che $\boxed{\phi \cong \phi_0}$ da cui si ricava $f(\mathcal{R}, \phi) = f(\mathcal{R}, \phi_0)$.

$$N_1 I_0 = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$I_1 = I_0 - \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_0 - \frac{1}{m} I_2$$

Questa relazione ci suggerisce di aggiungere un nodo e applicare 1° PRINCIPIO KIRCHOFF

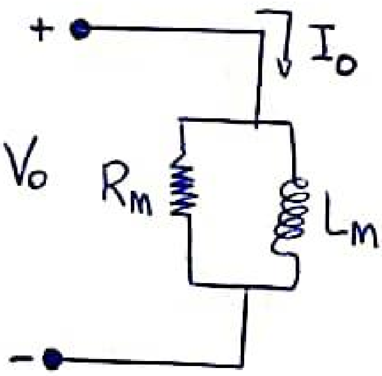
Circuito equivalente finale



STIMA DEI PARAMETRI:

① Prova a vuoto (si apre il secondario)

Avendo $\dot{I}_2 = 0$ allora il circuito che ci rimane è il seguente



Si misurano 3 GRANDEZZE FISICHE: V_0, I_0, P_0. Visto che la misurazione non può fornirci delle grandezze complesse, si calcola il valore efficace.

P_0, essendo un numero reale, non può essere altro che la potenza attiva dissipata sul resistore.

① $P_0 = R_m I_R^2 \quad \Rightarrow \quad P_0 = R_m \left(\frac{V_0}{R_m}\right)^2 = \frac{V_0^2}{R_m}$

Facilmente si ricava:

$$R_m = \frac{V_0^2}{P_0} \quad ; \quad \boxed{G_m = \frac{P_0}{V_0^2}}$$

Prestiamo attenzione! l' impedenza vista ai morsetti + e - sui quali abbiamo misurato V_0 e I_0 è la seguente:

$$\overline{Z}_m = \frac{\dot{V}_0}{\dot{I}_0} \qquad \overline{Y}_m = \frac{\dot{I}_0}{\dot{V}_0}$$

Purtroppo non conosciamo i fasori!

La speranza è sempre l' ultima a morire!

$$|Y_m| = \frac{I_0}{V_0} = \sqrt{G_m^2 + B_m^2}$$

$$B_m = -\sqrt{\left(\frac{I_0}{V_0}\right)^2 - G_m^2}$$

si sceglie la soluzione negativa per via del triangolo delle AMMETTENZE

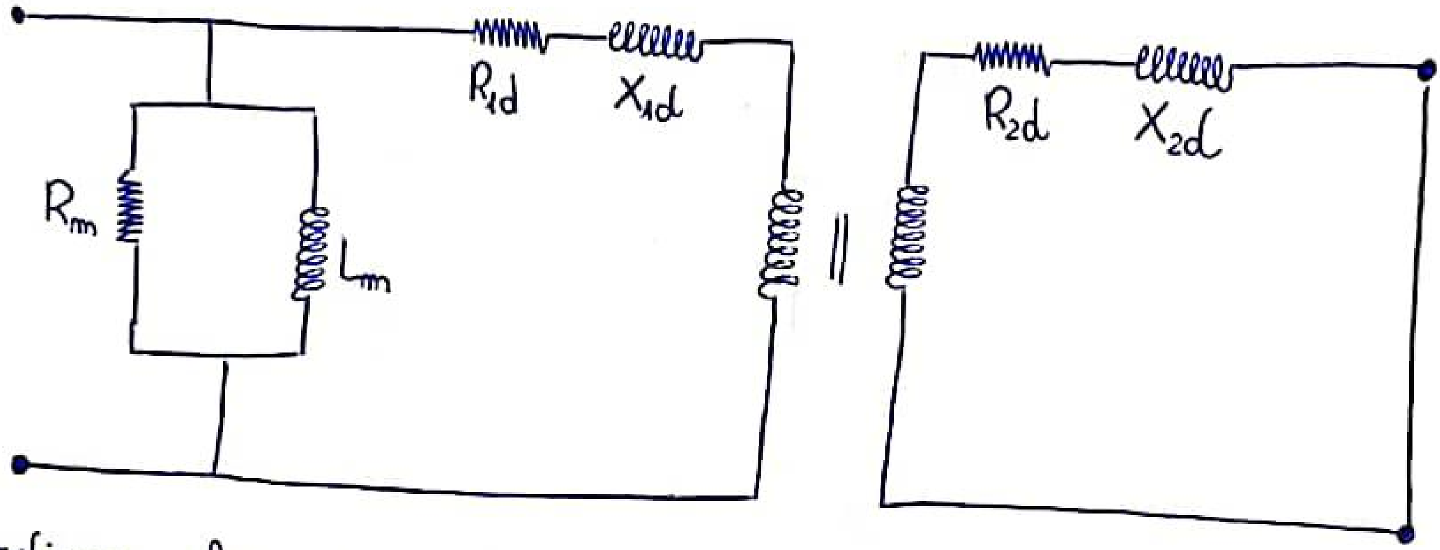
$$\overline{Z}_m = R + jX$$

$$\overline{Y}_m = G_m + jB_m$$

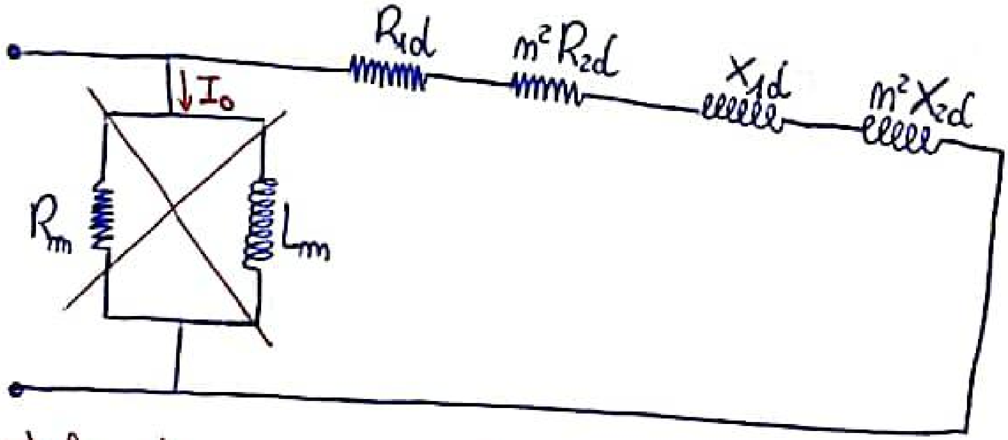
$$G_m = \frac{1}{R_m} \quad ; \quad B_m = \frac{1}{j\omega L_m} = -j\frac{1}{\omega L_m}$$

$$\boxed{B_m = -\sqrt{\frac{I_0^2}{V_0^2} - \frac{P_0^2}{V_0^4}}}$$

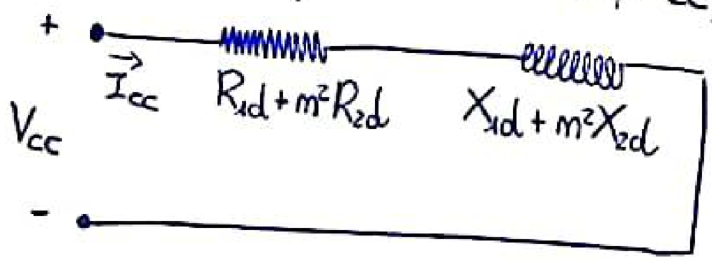
② Prova in CORTO CIRCUITO (SECONDARIO IN CORTO CIRCUITO)



Ricordiamo che un impedenza al secondario è vista dal primario come moltiplicata per n^2.
Da ciò si ricava:



Sperimentalmente si è provato che $I_0 \cong 0$
Si misurano 3 grandezze: V_{cc}, I_{cc}, P_{cc}.



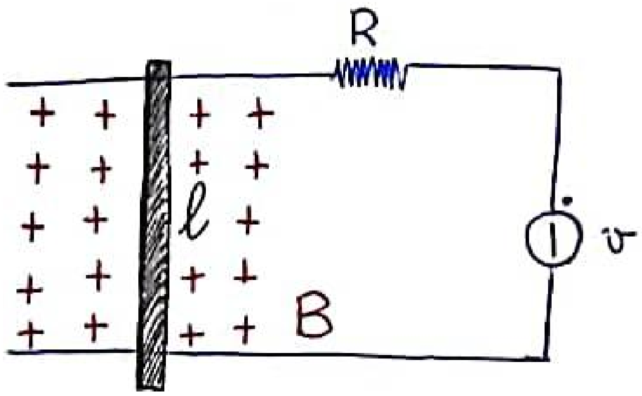
$$P_{cc} = V_{cc} I_{cc} = (R_{1d} + n^2 R_{2d}) I_{cc}^2 \Rightarrow R_{cc} = R_{1d} + n^2 R_{2d}$$

$$R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2}$$

$$|Z_{cc}| = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} = \sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2}$$

$$X_{cc} = + \sqrt{\frac{V_{cc}^2}{I_{cc}^2} - \frac{P_{cc}^2}{I_{cc}^4}} \Rightarrow \text{scelgo la soluzione POSITIVA}$$

CONVERSIONE ELETTROMECCANICA DELL' ENERGIA



Generatore di tensione in serie con una resistenza R (la R rappresenta gli effetti resistivi dei materiali di cui è composta la barretta e i binari).
La barretta può scorrere lungo due binari conduttivi e paralleli.

① FUNZIONAMENTO DA MOTORE (La barretta inizierà a muoversi a causa della corrente che la attraverserà).

FORZA DI LORENTZ: $F = qu \wedge B$ → campo magnetico

carica

velocità della carica

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$d\ell\, i = \frac{dq}{dt} d\ell$$ → velocità

$$\int i\, d\ell = \int u\, dq \Rightarrow i\ell = qu \Rightarrow B\ell i = quB$$

$$\boxed{F = B\ell i}$$

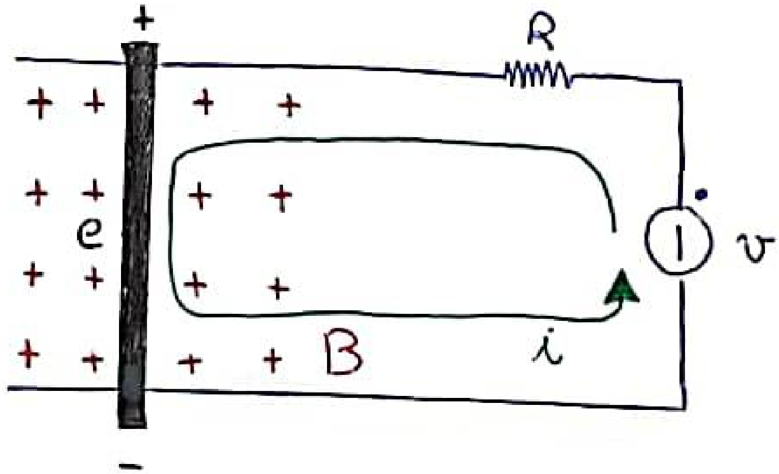
② FUNZIONAMENTO DA GENERATORE (il movimento della barretta causa una differenza di potenziale ai suoi capi)

$$F = q u B$$

$$F\ell = q u B \ell$$

$$\frac{F\ell}{q} = B \ell u \Rightarrow \boxed{e = B \ell u}$$

$\frac{\text{Lavoro}}{\text{carica}}$ = definizione di d.d. potenziale



Applicando il 2° principio di Kirchoff alla maglia di sopra si ha che:

$$0 = -v + Ri + e \Rightarrow v - e = Ri$$

$v > e$, $i > 0 \Rightarrow$ FUNZIONAMENTO DA MOTORE

$v < e$, $i < 0 \Rightarrow$ FUNZIONAMENTO DA GENERATORE

VELOCITÀ LIMITE DELLA BARRETTA

$$\begin{cases} v - e = Ri \\ Bli - f_r = m \frac{du}{dt} \end{cases}$$

velocità limite $\Rightarrow$ $\frac{du}{dt} = 0$

$$\begin{cases} v - e = Ri \Rightarrow i = \frac{v-e}{R} & (i \\ Bli = f_r & (ii \end{cases}$$

Sostituiamo la (i in (ii:

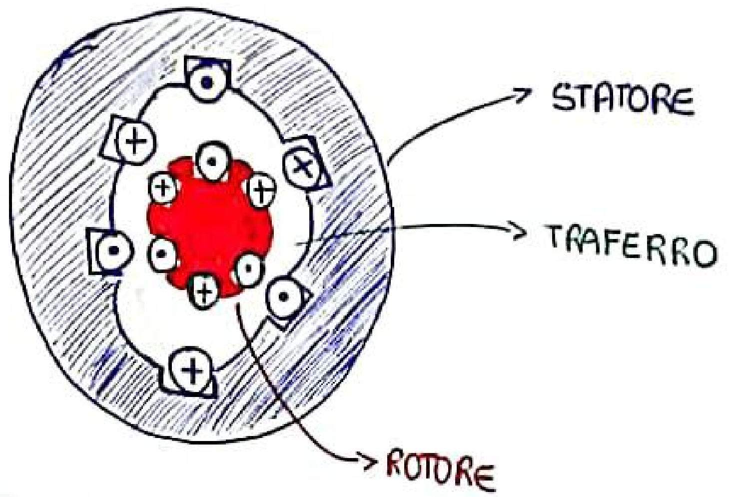
$$Bl \cdot \frac{v-e}{R} = f_r$$

Ricordando che $e = Blu$ ed inoltre $v = Blu_0$ dove u_0 è la velocità costante ottenuta in condizione di assenza di forze resistenti.

$$\frac{B^2l^2}{R}u_0 - \frac{B^2l^2}{R}u = f_r$$

$$\boxed{u = u_0 - \frac{f_r \cdot R}{B^2 l^2}}$$

MACCHINA ASINCRONA



Lo statore è di forma cilindrica, costituito da materiale ferromagnetico, come ci suggerisce il nome è un pezzo statico della macchina.
All' interno delle intercapedini di statore (CAVE) troviamo degli avvolgimenti. Quest' ultimi sono alimentati dall' esterno.
GLI AVVOLGIMENTI DI STATORE SONO ALIMENTATI DA SEGNALI SFASATI DI $\frac{2}{3}\pi$ ELETTRICI e MECCANICI.

$$i_1(t) = I_m \sin(\omega t)$$
$$i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$i_3(t) = I_m \sin(\omega t + \tfrac{4}{3}\pi)$$

Gli avvolgimenti sono posizionati a distanza di $\frac{2}{3}\pi$ l' uno dall' altro

Il campo magnetico generato da ogni corrente è il seguente:

$$B_1(t,\theta) = c \cdot i_1(t) \cdot \cos(p\theta)$$

PAIA POLARI

$$B_2(t,\theta) = c \cdot i_2(t) \cdot \cos(p\theta + \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$B_3(t,\theta) = c \cdot i_3(t) \cdot \cos(p\theta + \tfrac{4}{3}\pi)$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{B(\theta,t) = K \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - p\theta)}$$

CAMPO MAGNETICO ROTANTE

A CHE VELOCITÀ RUOTA IL CAMPO MAGNETICO ROTANTE?

Vediamo quanto intercorre tra 2 massimi:

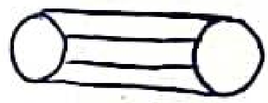
$$\begin{cases} \omega t_1 - p\theta_1 = 0 \\ \omega t_2 - p\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Omega_S = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\omega}{p}t_2 - \frac{\omega}{p}t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{p}$$

PARLIAMO DEL ROTORE:

AVVOLTO: del tutto simile, nella struttura, allo statore con l' unica differenza che gli AVVOLGIMENTI di ROTORE sono chiusi in CORTO CIRCUITO.

A GABBIA DI SCOIATTOLO:



A causa del campo magnetico rotante, le cui line di campo si richiudono in parte anche nel rotore, si ha:

$$e = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Attraverso l' induzione il rotore si alimenta e grazie alla FORZA DI LORENTZ il rotore comincia a muoversi.

A CHE VELOCITÀ RUOTA IL ROTORE?

Ricordiamo $\Omega_S = \frac{\omega_1}{p}$ $\omega_1 \longrightarrow$ PULSAZIONE GRANDEZZE STATORE, $p \longrightarrow$ PAIA POLARI

$\Omega_S - \Omega_R = \frac{\omega_2}{p}$ $\omega_2 \longrightarrow$ PULSAZIONE GRANDEZZE ROTORE

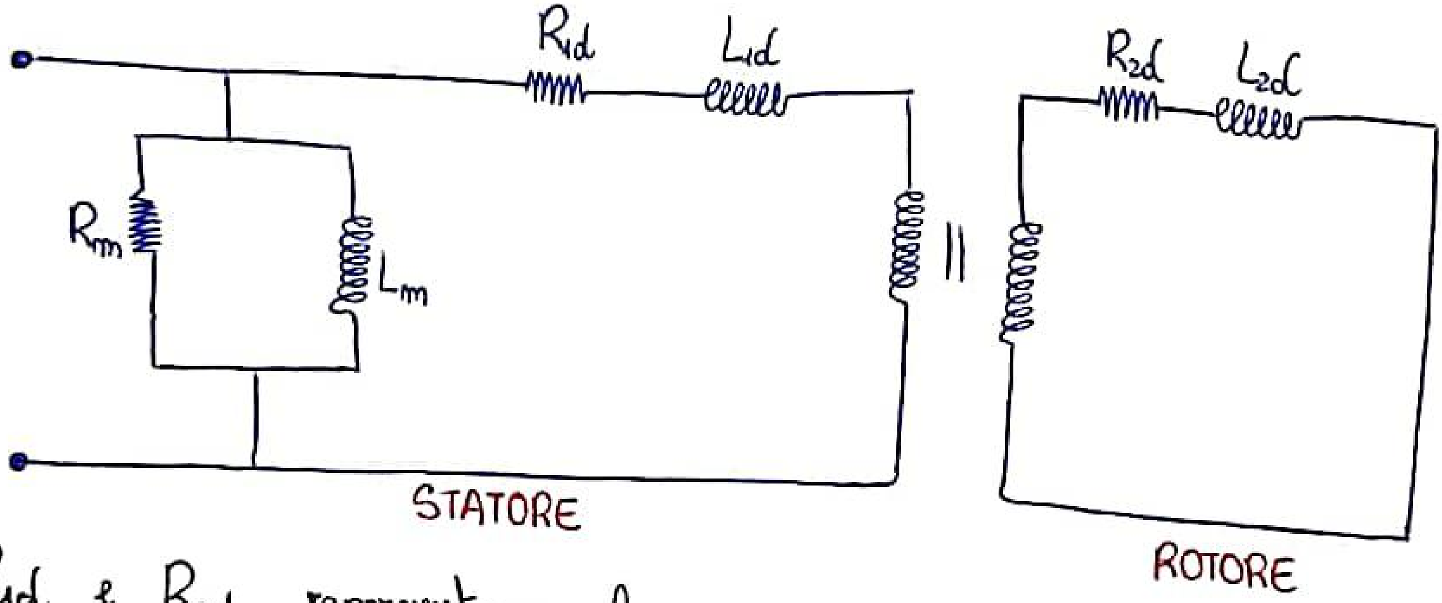
SCORRIMENTO: $S \triangleq \frac{\Omega_S - \Omega_R}{\Omega_S}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \Omega_R &= (1-S)\,\Omega_S \\ \omega_2 &= S\omega_1 \end{aligned}}$

CASI FISICI DI SCORRIMENTO

$S = 1 \Rightarrow \Omega_R = 0$ (ROTORE BLOCCATO)

$S = 0 \Rightarrow \Omega_R = \Omega_S$ (ROTORE LIBERO) ← caso ideale

CIRCUITO EQUIVALENTE



R_{1d} e R_{2d} rappresentano la RESISTENZA degli avvolgimenti di statore e rotore.

L_{1d} e L_{2d} rappresentano i flussi magnetici che non si richiudono all'interno della macchina (flussi dispersi).

R_m e L_m rappresentano gli effetti di magnetizzazione.

MACCHINA ASINCRONA

Ci ricordiamo che il circuito aveva una proprietà particolare:

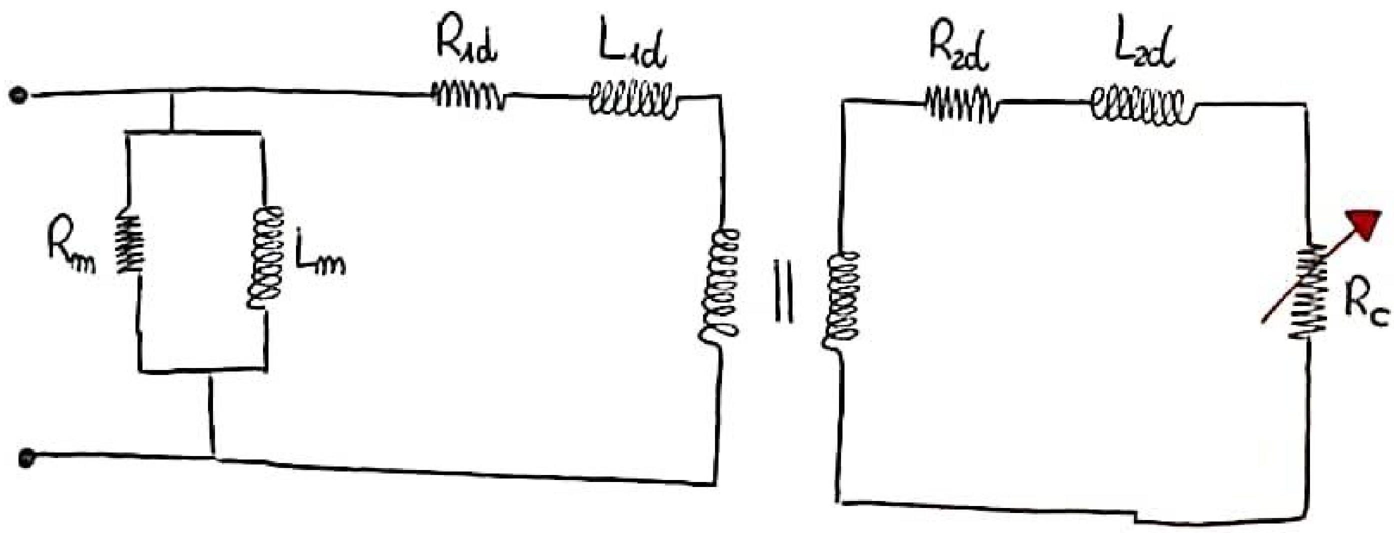
$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad , \quad \omega_2 = s\omega_1$$

Per poter studiare il circuito equivalente tramite i metodi visti dobbiamo ricondurre tutte le grandezze ad un unica pulsazione.

$$R_c = \frac{(1-s)}{s} R_{2d} \triangleq$$ Resistenza di carico (meccanico)

Non è legata alle resistenze elettriche degli avvolgimenti.

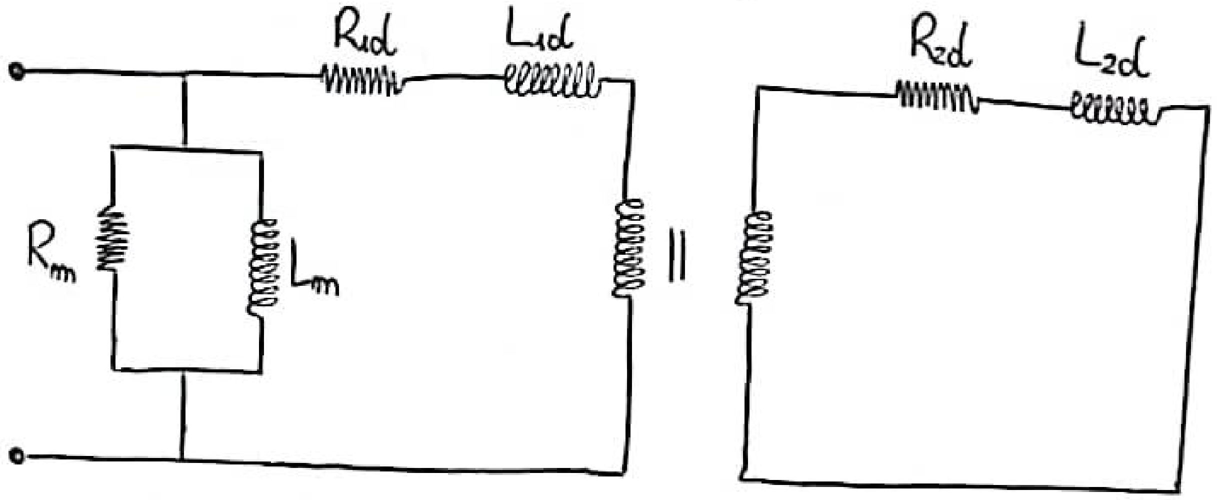
FUNZIONAMENTO	$S = \frac{\Omega_S - \Omega_R}{\Omega_S}$	$\Omega_R = (1-s)\Omega_S$	R_C	$P_m = R_c I_2^2$
GENERATORE (DINAMO TACHIMETRICA)	$S < 0$	$\Omega_R > \Omega_S$	$R_c < 0$	$P_m < 0$
ROTORE LIBERO	$S = 0$	$\Omega_R = \Omega_S$	$R_c \to \infty$	$P_m = 0$
MOTORE	$0 < S < 1$	$\Omega_R < \Omega_S$	$R_c > 0$	$P_m > 0$
ROTORE BLOCCATO	$S = 1$	$\Omega_R = 0$	$R_c = 0$	$P_m = 0$
FRENO	$S > 1$	Ω_R SEGNO OPPOSTO Ω_S		



MACCHINA ASINCRONA - CALCOLO PARAMETRI

1ª PROVA : ROTORE BLOCCATO $\Rightarrow s = 1 \quad (\omega_2 = \omega_1)$

Il circuito da studiare è il seguente:



→ Ci accorgiamo che è identica alla PROVA in C.C. del TRASFORMATORE.

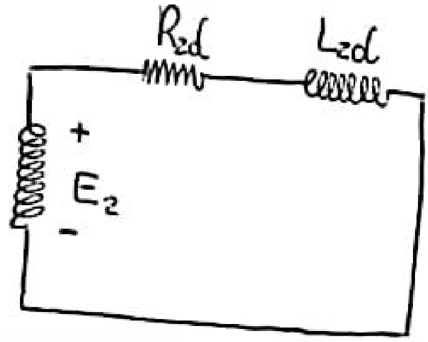
2ª PROVA : ROTORE LIBERO $\Rightarrow s = 0 \quad (\omega_2 = 0)$

→ Ci accorgiamo che questa prova è identica alla PROVA A VUOTO del TRASFORMATORE.

MACCHINA ASINCRONA - COPPIA

$$C_t = 3\frac{P_m}{\Omega_r} = 3 \cdot \frac{R_c I_2^2}{(1-s)\Omega_s} = 3 \cdot \frac{\frac{(1-s)}{s} R_{2d} |\dot{I}_2|^2}{(1-s)\frac{\omega_1}{P}} = \frac{3 R_{2d} P}{\omega_1} \frac{s E_{20}^2}{R_{2d}^2 + s^2 X_{2do}^2} \ *$$

Quanto vale I_2 ?



$$\dot{E}_2 + R_{2d}\dot{I}_2 + jX_{2d}\dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{E}_2}{R_{2d} + jX_{2d}} = -\frac{s\dot{E}_{20}}{R_{2d} + js X_{2do}}$$

$$\boxed{\frac{E_1^2}{E_{20}^2} = m^2 \quad *}$$

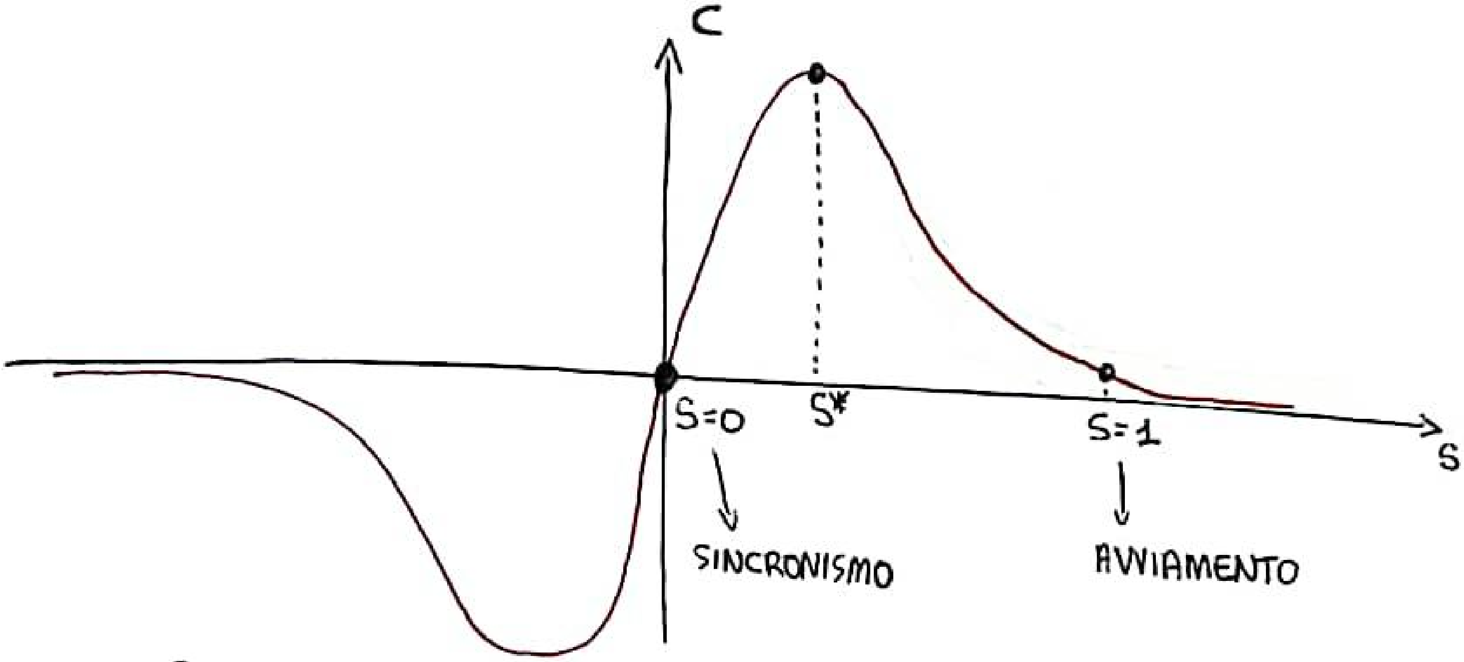
$$|\dot{I}_2| = \left| -\frac{s\dot{E}_{20}}{R_{2d} + js X_{2do}} \right| = \frac{s E_{20}}{\sqrt{R_{2d}^2 + s^2 X_{2do}^2}}$$

SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE DI C_t

$$\boxed{C = \frac{3P}{\omega_1} \cdot \frac{E_1^2}{m^2} \cdot \frac{R_{2d}}{\frac{R_{2d}^2}{s} + s X_{2do}^2}}$$

Macchina Asincrona - Rappresentazione della coppia

$$C(s) = \frac{3p}{\omega_1} \cdot \frac{E_1^2}{m^2} \cdot \frac{R_{2d}}{\frac{R_{2d}^2}{s} + sX_{2d0}^2}$$

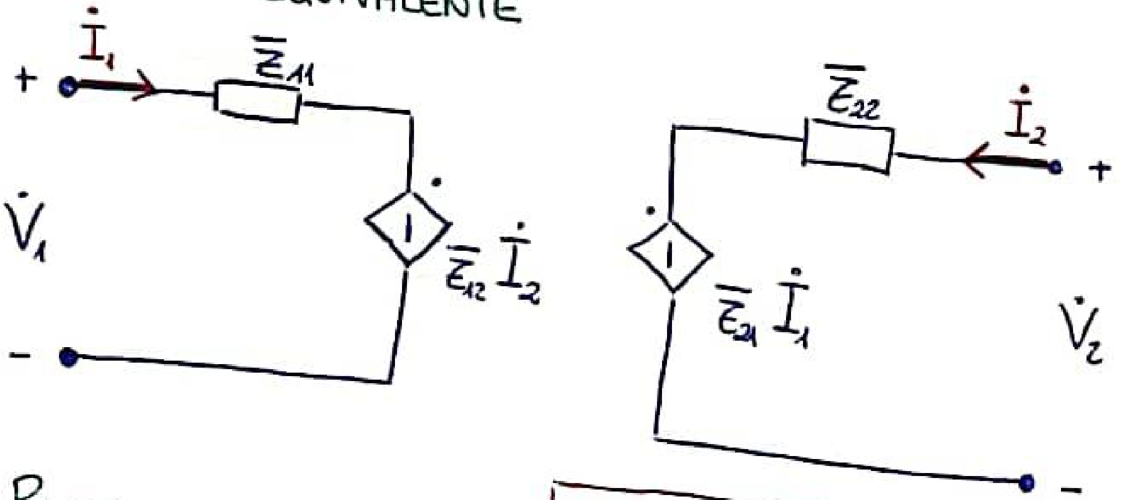


$$S^* = \frac{R_{2d}}{X_{2d0}}$$ → punto in cui si ha il massimo della coppia

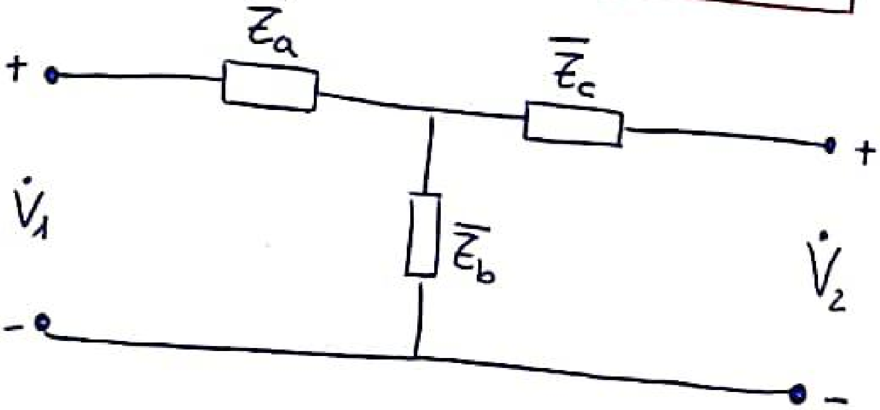
PARAMETRI $\overline{Z}$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \overline{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE



RETE RECIPROCA $\boxed{\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{21}}$



RAPPRESENTAZIONE EQUIVALENTE DELLA RETE RECIPROCA SI DICE A T.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{Z}_a\dot{I}_1 + \overline{Z}_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = (\overline{Z}_a + \overline{Z}_b)\dot{I}_1 + \overline{Z}_b\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{Z}_c\dot{I}_2 + Z_b(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \overline{Z}_b\dot{I}_1 + (\overline{Z}_c + \overline{Z}_b)\dot{I}_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

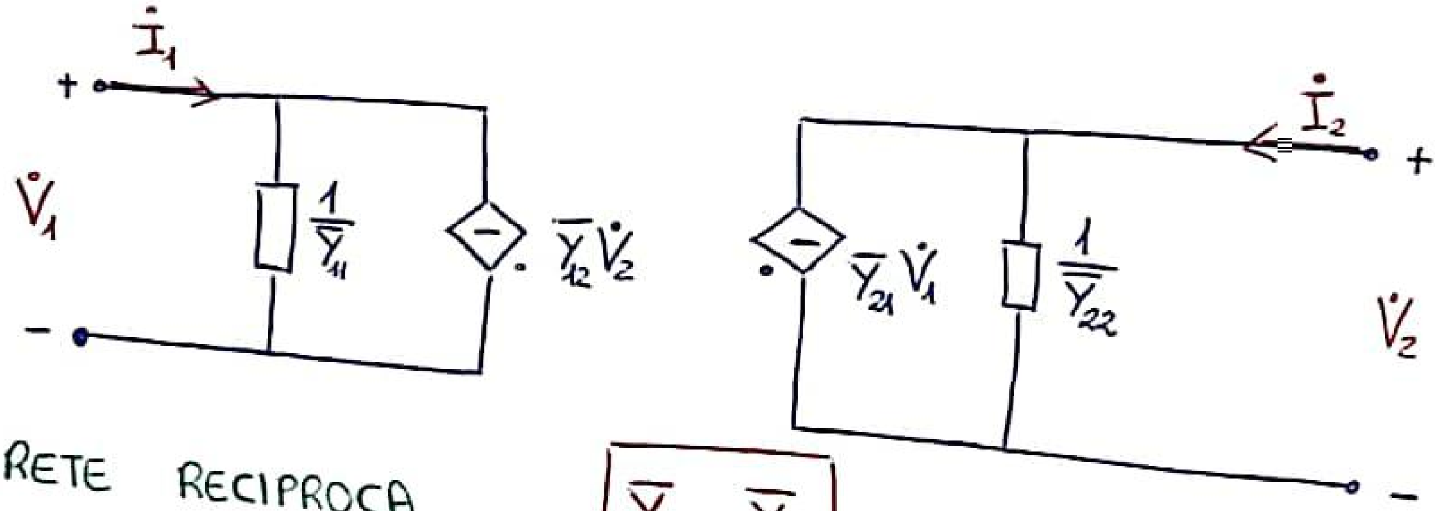
$$\begin{cases} \overline{Z}_b = \overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{21} \\ \overline{Z}_a = \overline{Z}_{11} - \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_c = \overline{Z}_{22} - \overline{Z}_{12} \end{cases}$$

PARAMETRI Y

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

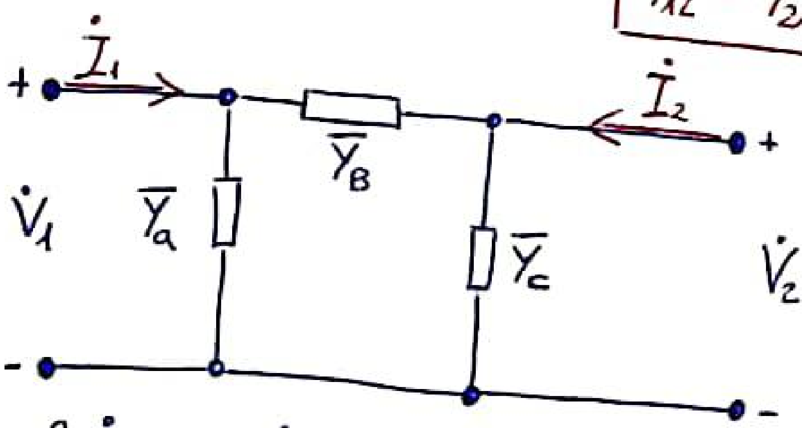
Si noti che $\bar{Y} = \bar{Z}^{-1}$

CIRCUITO EQUIVALENTE



RETE RECIPROCA

$$\boxed{\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21}}$$



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_a\dot{V}_1 + \bar{Y}_B\dot{V}_1 - \bar{Y}_B\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_c\dot{V}_2 + \bar{Y}_B\dot{V}_2 - \bar{Y}_B\dot{V}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = (\bar{Y}_a + \bar{Y}_B)\dot{V}_1 - \bar{Y}_B\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = -\bar{Y}_B\dot{V}_1 + (\bar{Y}_c + \bar{Y}_B)\dot{V}_2 \end{cases}$$

Da cui segue

$$\begin{cases} \bar{Y}_B = -Y_{12} = -Y_{21} \\ \bar{Y}_A = \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_c = \bar{Y}_{22} + \bar{Y}_{21} \end{cases}$$

PARAMETRI $\overline{H}$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \overline{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{h}_{21}\dot{I}_1 + \overline{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

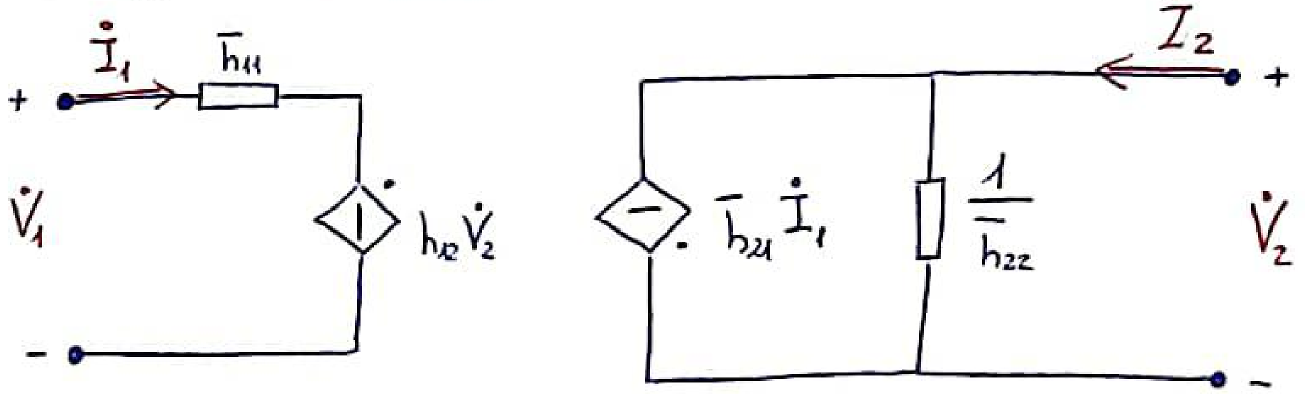
$h \triangleq$ hybrid

Perchè ibridi? La risposta è nelle unità di misura.

$[h_{11}] = \Omega \qquad [h_{12}] = [h_{21}] = \emptyset$

$[h_{22}] = S$

CIRCUITO EQUIVALENTE



CONDIZIONE DI RECIPROCITÀ

Si passa ai parametri $\overline{Z}$:

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2 - \frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1$$

Da ciò otteniamo

$$\dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2 - \frac{\overline{h}_{21}\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1 = \frac{\overline{h}_{11}\overline{h}_{22} - \overline{h}_{21}\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2$$

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{21} \Rightarrow \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}} = -\frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}} \Rightarrow \boxed{\overline{h}_{12} = -\overline{h}_{21}}$$

PARAMETRI T

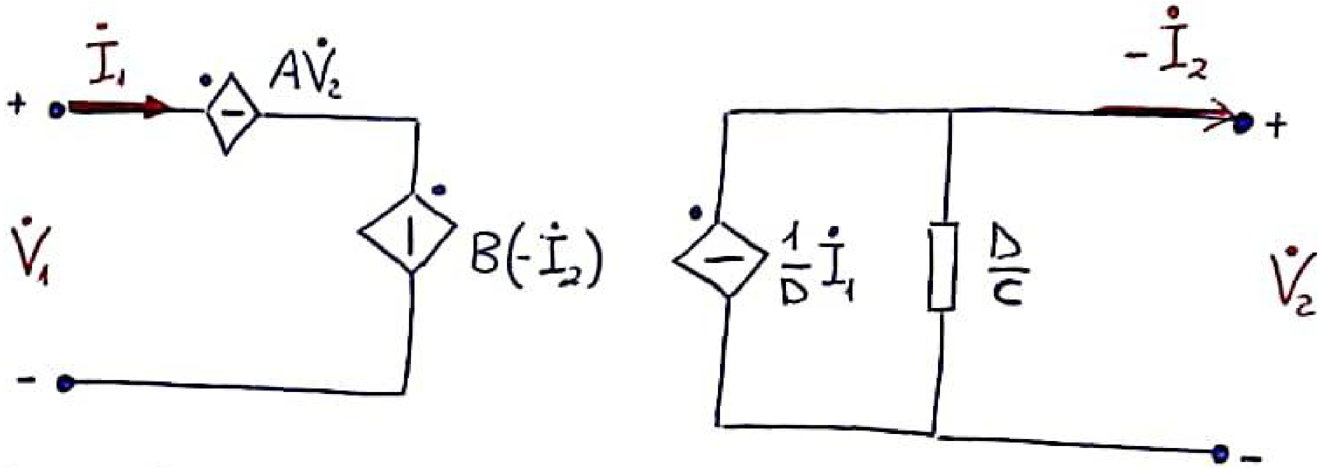
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

È tutto in funzione della seconda porta.

PARAMETRI DI TRASMISSIONE

CIRCUITO EQUIVALENTE

$$-\dot{I}_2 = \frac{1}{D}\dot{I}_1 - \frac{C}{D}\dot{V}_2$$



RETE RECIPROCA : si passa ai parametri $\overline{Z}$

$$\begin{cases} \dot{V}_2 = \frac{1}{C}\dot{I}_1 + \frac{D}{C}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_1 = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \frac{AD}{C}\dot{I}_2 + B(-\dot{I}_2) = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \frac{AD-BC}{C}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{21} \Longrightarrow \frac{AD-BC}{C} = \frac{1}{C} \Rightarrow AD-BC = 1 \Rightarrow \det(T) = 1$$

$C \neq 0$