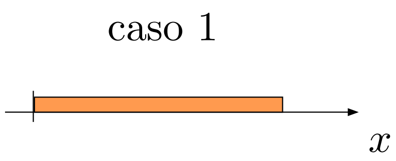
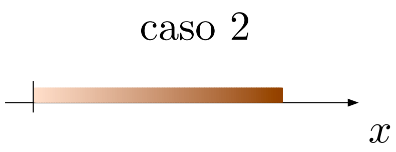
Esercizio

Un'asta sottile ha lunghezza $L = 2\,\mathrm{m}$ e massa $m = 50\,\mathrm{gr}$, e viene appoggiata sull'asse x con l'estremo sinistro sull'origine.

1. Calcolare la posizione del centro di massa dell'asta supponendo che l'asta sia omogenea.

2. Come cambia la posizione del centro di massa se l'asta non è omogenea, ma ha densità di massa che cresce linearmente da λ_1 (all'estremo sinistro) a λ_2 (all'estremo destro), dove $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Kg/m}$?





Si consideri ora una seconda asta omogenea, di uguale lunghezza L e di massa $150\,\mathrm{gr}$, che viene saldata alla sinistra di quella precedente. Considerando il caso di aste omogenee, si determini il centro di massa del sistema così formato, nei due casi

3. le due aste sono poste lungo la stessa direzione;

4. le due aste formano un angolo di 45^o.

SOLUZIONE
In generale la definizione di centro di massa per una distribuzione continua di punti è

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int_0^L x\,\lambda(x)dx}{m} \tag{1}$$

dove

$$\lambda(x) = \frac{dm}{dx} \tag{2}$$

è la densità lineare di massa. Consideriamo ora i due casi

1. **asta omogenea**
   In tal caso la densità di massa è costante nello spazio
   $$\lambda(x) = \text{cost} = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{L} \tag{3}$$
   Sostituendo (3) nell'Eq.(1) si ottiene
   $$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\,\frac{m}{L}dx}{m} = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{L}{2} \tag{4}$$
   Sostituendo i dati
   $$x_{CM} = \frac{2\,\text{m}}{2} = 1\,\text{m} \tag{5}$$

2. **asta con densità che cresce linearmente**
   Dal testo abbiamo una densità che varia come
   $$\lambda(x) = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{L}x \tag{6}$$
   come mostrato in Fig.1

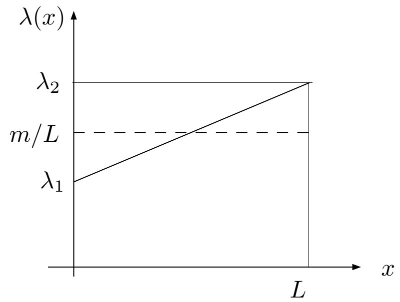


Figure 1: Il caso in cui la densità di massa varia linearmente con la posizione x lungo l'asta.

Conosciamo λ_1 dal testo. Per determinare λ_2 osserviamo che deve valere

$$\begin{aligned}
\int_0^L \lambda(x)\,dx &= m \\
&\Downarrow \\
\int_0^L \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{L}x\right) dx &= m \\
\left(\lambda_1 L + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{L}\frac{L^2}{2}\right) &= m \\
\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} &= \frac{m}{L} \\
\lambda_2 &= \frac{2m}{L} - \lambda_1
\end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo (6) nell'Eq.(1) si ottiene

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{\int_0^L x\,\lambda(x)dx}{m} = \frac{1}{m}\int_0^L x\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{L}x\right)dx = \\ &= \frac{1}{m}\left(\lambda_1\int_0^L x\,dx + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{L}\int_0^L x^2\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{m}\left(\lambda_1\frac{L^2}{2} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{L}\frac{L^3}{3}\right) = \\ &= \frac{L^2}{m}\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{3}\right) = \\ &= \frac{L^2}{6m}\left(3\lambda_1 + 2(\lambda_2-\lambda_1)\right) = \\ &= \frac{L^2}{6m}(\lambda_1 + 2\lambda_2) \end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo l'Eq.(7) si ottiene

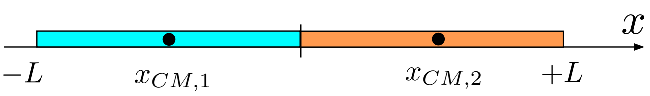
$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{L^2}{6m}(\lambda_1 + 2\cdot(\frac{2m}{L} - \lambda_1)) = \\ &= \frac{L^2}{6m}(\frac{4m}{L} - \lambda_1) = \\ &= \frac{2L}{3} - \frac{L^2}{6m}\lambda_1 \end{aligned} \tag{9}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{2\cdot 2\mathrm{m}}{3} - \frac{(2\mathrm{m})^2}{6\cdot 0.05\,\cancel{\mathrm{Kg}}}\,5\cdot 10^{-4}\,\frac{\cancel{\mathrm{Kg}}}{\mathrm{m}} = \\ &= \left(\frac{4}{3} - 0.0067\right)\mathrm{m} = \\ &= 1.33\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{10}$$

Confrontando il risultato (10) con il caso omogeneo [Eq.(5)], osserviamo che nel caso di densità che cresce linearmente il centro di massa è spostato verso la parte più densa dell'asta.

3. Consideriamo ora il caso in cui una seconda asta viene saldata a sinistra di quella precedente. Iniziamo a considerare il caso in cui entrambe le aste giacciono lungo l'asse x.



Per determinare il centro di massa del sistema così ottenuto, possiamo considerare il centro di massa 'dei centri di massa' delle due aste. Infatti per definizione il centro di massa totale del sistema vale

$$\begin{aligned} X_{CM} &= \frac{\int_{-L}^{+L} x\,dm}{m_1+m_2} = \frac{\int_{-L}^{0} x\,dm + \int_0^{+L} x\,dm}{m_1+m_2} = \\ &= \frac{m_1\,x_{CM,1} + m_2\,x_{CM,2}}{m_1+m_2} \end{aligned} \tag{11}$$

dove

$$\begin{cases} x_{CM,1} = \dfrac{\int_{-L}^{0} x\,dm}{m_1} \\ \\ x_{CM,2} = \dfrac{\int_{0}^{L} x\,dm}{m_2} \end{cases} \tag{12}$$

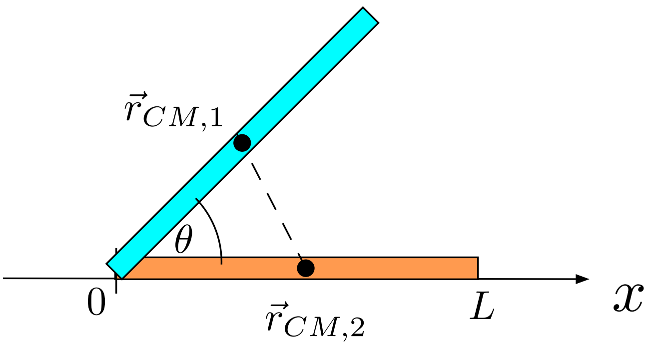
sono i centri di massa delle due aste (sinistra e destra, rispettivamente). Trattandosi di aste omogenee, il calcolo del CM di ciascuna asta è esattamente analogo a quello svolto al punto 1., e dunque

$$\begin{cases} x_{CM,1} = -1\,\mathrm{m} \\ \\ x_{CM,2} = +1\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{13}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X_{CM} &= \frac{m_1\,x_{CM,1} + m_2\,x_{CM,2}}{m_1+m_2} = \\ &= \frac{0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot(-1\,\mathrm{m}) + 0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}} + 0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}}} = \\ &= \frac{-15+5}{20}\,\mathrm{m} = \\ &= -0.5\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

4. Consideriamo ora il caso delle due aste omogenee che formano un angolo di $\pi/4$ tra loro Analogamente al caso precedente, abbiamo



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\,\vec{r}_{CM,1} + m_2\,\vec{r}_{CM,2}}{m_1+m_2} \tag{15}$$

dove

$$\begin{cases} \vec{r}_{CM,1} = \dfrac{L}{2}(\cos\theta\,,\sin\theta) = \dfrac{L}{2\sqrt{2}}(1\,,1) = (0.707\,,0.707)\,\mathrm{m} \\ \\ \vec{r}_{CM,2} = \dfrac{L}{2}(1\,,0) = (1\,,0)\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{16}$$

Pertanto, in componenti, l'Eq.(15) si riduce a

$$\begin{aligned} X_{CM} &= \frac{m_1\,x_{CM,1} + m_2\,x_{CM,2}}{m_1+m_2} = \\ &= \frac{0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot 0.707\,\mathrm{m} + 0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}} + 0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}}} = \\ &= 0.78\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{17}$$

e

$$
\begin{aligned}
Y_{CM} &= \frac{m_1\, y_{CM,1} + m_2\, y_{CM,2}}{m_1 + m_2} = \\
&= \frac{0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}} \cdot 0.707\,\mathrm{m} + 0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}} \cdot 0\,\mathrm{m}}{0.150\,\cancel{\mathrm{Kg}} + 0.050\,\cancel{\mathrm{Kg}}} = \\
&= 0.53\,\mathrm{m} \qquad (18)
\end{aligned}
$$