VARIABILI DI STATO

- Definizioni e Proprietà
- Derivazione delle Equazioni di Stato
- Soluzione delle Equazioni di Stato
- Esempi

Riferimenti

- Capitoli 2, Testo di Bolzern (parte)
- Capitolo 2, testo di Murray (download)
- Capitolo 2, Testo di Lewis (download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard

Definizioni e Proprietà

- La rappresentazione in variabili di stato (I-S-U) è un metodo efficace per descrivere sistemi MIMO nonlineari e lineari, sfruttando le proprietà delle matrici ed elementi di geometria.

- Dato un sistema dinamico a parametri concentrati con m ingressi u_i e p uscite y_j, è sempre possibile darne una rappresentazione mediante:

  - Equazioni differenziali (lineari e nonlineari)
  - Funzioni di Trasferimento (nel caso di sistemi lineari e tempo invarianti)
  - **Variabili di Stato.**

$$\begin{cases} \dfrac{d^{n_1} y_1}{dt^{n_1}} = f_1(u_1, u_2, \ldots) \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{d^{n_p} y_r}{dt^{n_p}} = f_r(u_1, u_2, \ldots) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t) = g(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) \in \Re^n \\ \boldsymbol{u}(t) \in \Re^m \\ \boldsymbol{y}(t) \in \Re^p \end{cases}$$

Definizioni e Proprietà

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}(t) \in \Re^n \\ \boldsymbol{u}(t) \in \Re^m \\ \boldsymbol{y}(t) \in \Re^p \end{cases}$$

- **Definizione**: il vettore $x(t)$ si definisce vettore di stato e/o vettore di variabili di stato ed è costituito dal numero minimo di variabili indipendenti necessarie a descrivere univocamente il sistema dinamico (noti gli ingressi) nel sottospazio $\Re^n$.

- **Nota**: Nel caso di sistemi lineari, la quadrupla di matrici $(A,\ B,\ C,\ D)$ non è unica e, dato un vettore di ingresso, esiste un numero infinito di vettori di stato appartenenti allo stesso sottospazio, i quali producono lo stesso vettore di uscita.

- Una rappresentazione nello spazio di stato costituisce un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, ottenibile da equazioni differenziali di ordine qualsiasi e/o funzioni di trasferimento (per sistemi LTI).

- Il numero minimo di variabili di stato è dato dal numero di condizioni iniziali necessarie alla soluzione delle equazioni differenziali di partenza.

Derivazione delle Equazioni di Stato

- Procedura per la derivazione della rappresentazione nello spazio di stato partendo da equazioni differenziali

- **Caso 1**: Equazioni differenziali senza derivate dell'ingresso

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = u}$$

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \ldots x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

$$x \in \Re^n$$

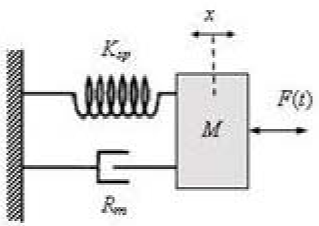
$$x = [x_1, x_2, x_3, \ldots x_n]^T$$

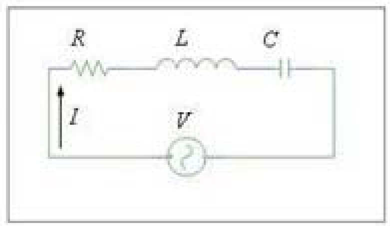
$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3, \ldots \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

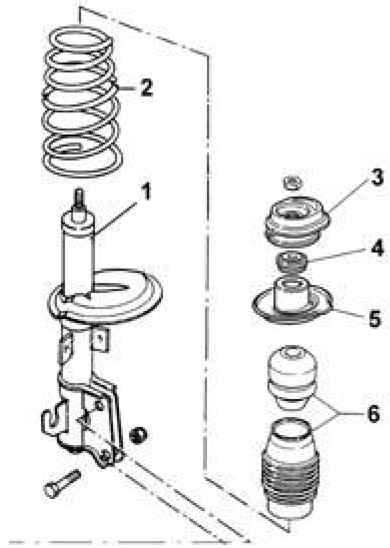
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A_{n\times n}\boldsymbol{x}(t) + B_{n\times 1}u(t) \\ y(t) &= C_{1\times n}\boldsymbol{x}(t) \qquad (*) \end{aligned}}$$

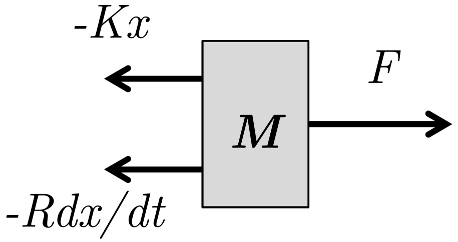
(*) La matrice D è non nulla se e solo se il sistema è proprio

Derivazione delle Equazioni di Stato









$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = F$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{M}F - \dfrac{R}{M}x_2 - \dfrac{K}{M}x_1 \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{R}{M} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}F$$

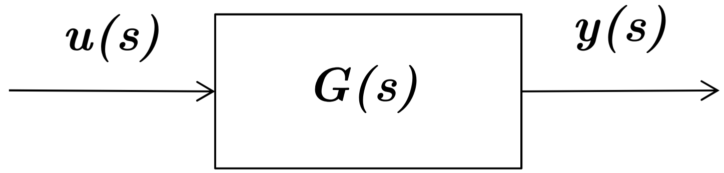
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\dddot{y} + 16\ddot{y} - 4y = 18u$$

$$y(s) = G(s)u(s)$$

$$G(s) = \frac{18}{s^3 + 16s^2 - 4}$$



$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} = -16\ddot{y} + 4y + 18u = -16x_3 + 4x_1 + 18u$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -16 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} u = A\boldsymbol{x} + Bu$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u = C\boldsymbol{x} + Du$$

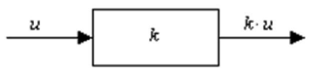
Derivazione delle Equazioni di Stato

- **Caso 2**: Equazioni con derivate dell'ingresso

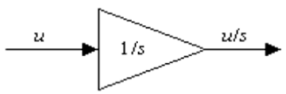
- Generalmente nelle equazioni differenziali compaiono le derivate degli ingressi e, in tal caso, è necessario utilizzare metodi analitici; le derivate di ordine più elevato delle variabili d'ingresso devono essere di ordine inferiore, o al massimo uguale, a quello di ordine più alto delle derivate delle variabili delle equazioni differenziali (causalità del sistema).

  - Uso di diagrammi analogici

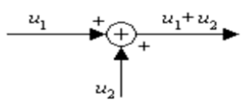
1) *Guadagno*



2) Integrale

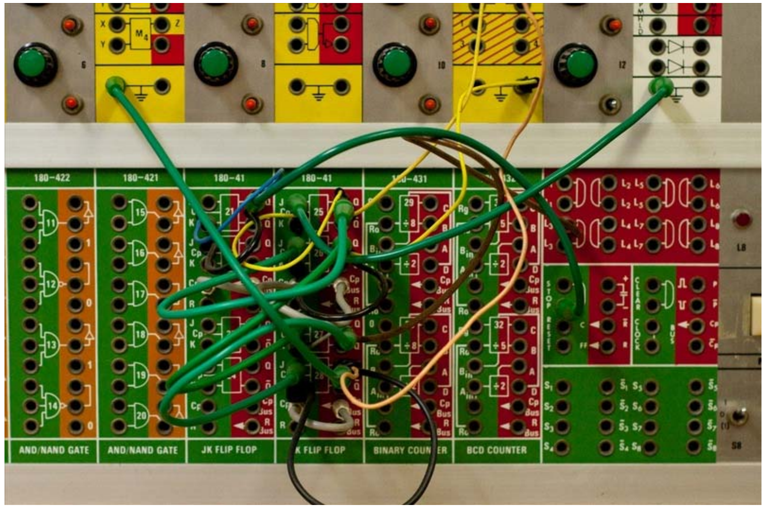


3) Sommatore

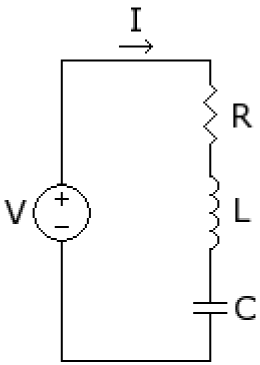


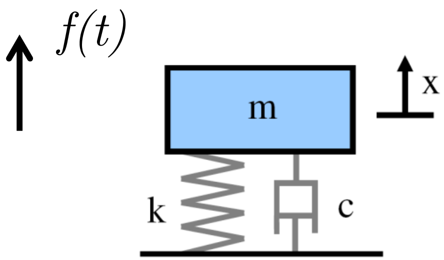
  - Uso di Operatori Integrali "1/s"
  - Uso di Operatori Differenziali "s"

Derivazione delle Equazioni di Stato



Equivalenza elettromeccanica per la costruzione di diagrammi analogici equivalenti





$$\frac{d^2 i(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = v(t)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt} + \frac{c}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = f(t)$$

Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u + 3\dot{u} \qquad G(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+1}$$

- **Operatore Integrale:** $y = \frac{1}{s}\dot{y}$

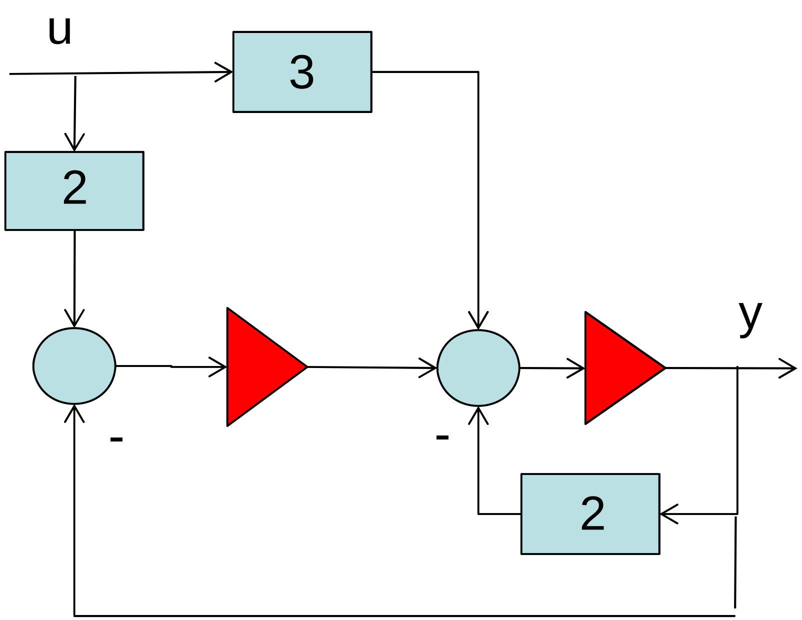
$$s^2 y + 2sy + y = 2u + 3su$$

$$s^2 y = 2u + 3su - 2sy - y$$

$$y = \frac{1}{s^2}\left[2u + 3su - 2sy - y\right]$$

$$y = \frac{2u}{s^2} + \frac{3u}{s} - \frac{2y}{s} - \frac{y}{s^2}$$

$$y = \frac{1}{s}\left\{3u - 2y + \frac{1}{s}\left[2u - y\right]\right\}$$



Derivazione delle Equazioni di Stato

Selezionando come **<u>variabili di stato le uscite di ogni integratore</u>** (l'ordine non è importante)

$$\dot{x}_1 = 3u - 2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2u - x_1$$

$$\dot{x}_1 = 2u - x_2$$
$$\dot{x}_2 = 3u - 2x_2 + x_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u = A\boldsymbol{x} + Bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u = A\boldsymbol{x} + Bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

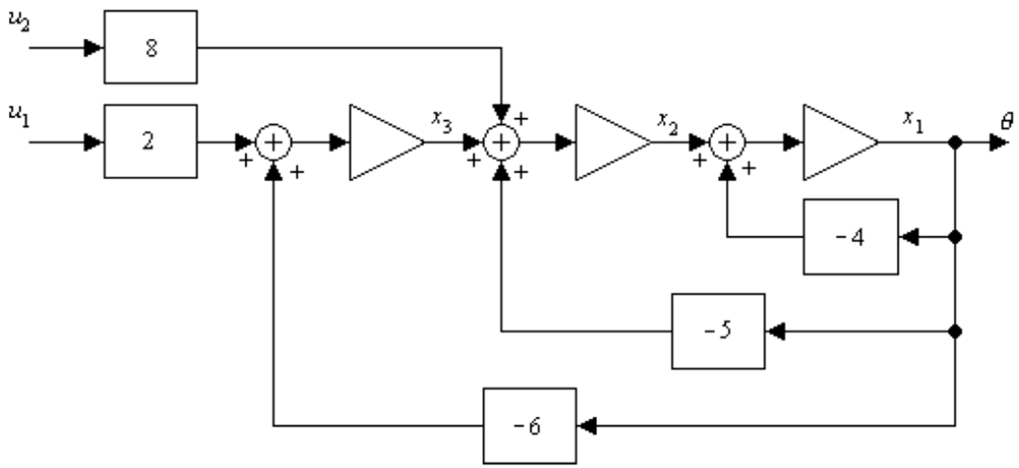
$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\dddot{\theta} + 4\ddot{\theta} + 5\dot{\theta} + 6\theta = 2u_1 + 8\dot{u}_2 \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$s^3 \cdot \theta(s) + 4s^2 \cdot \theta(s) + 5s \cdot \theta(s) + 6\theta(s) = 2u_1(s) + 8s \cdot u_2(s)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s} \cdot \left\{ -4\theta(s) + \frac{1}{s} \cdot \left[-5\theta(s) + 8 \cdot u_2(s) + \frac{1}{s}\left(-6\theta(s) + 2u_1(s)\right)\right]\right\}$$



Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\dot{x}_1 = x_2 - 4x_1$$
$$\dot{x}_2 = 8u_2 + x_3 - 5x_1$$
$$\dot{x}_3 = 2u_1 - 6x_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\theta = x_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$G(s) = ?$ **Vi sono 2 ingressi e una uscita -> ciò significa 2 FdT**

$$y(s) = \theta(s) = G_1(s)u_1(s) + G_2(s)u_2(s) = \frac{2u_1(s)}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} + \frac{8su_2(s)}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6}$$

Nel caso si vogliano come uscite le variabili θ e la sua derivata:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 4x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\dddot{y}(t) + 7\ddot{y}(t) + 14\dot{y}(t) + 8y(t) = 2\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 4u(t)$$

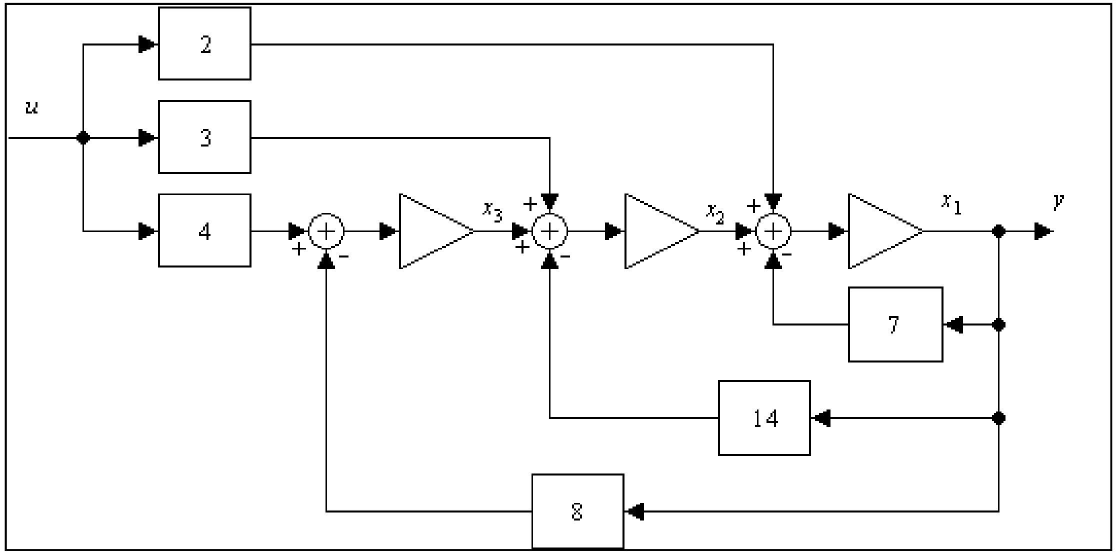
$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{(s + 0.75 + 1.199j)(s + 0.75 - 1.199j)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$s^3 \cdot y + 7s^2 \cdot y + 14s \cdot y + 8y = 2s^2 \cdot u + 3s \cdot u + 4u$$

Operatore Integrale:

$$y = -\frac{7}{s}y - \frac{14}{s^2}y - \frac{8}{s^3}y + \frac{2}{s}u + \frac{3}{s^2}u + \frac{4}{s^3}u \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{s}\left\{-7y + 2u + \frac{1}{s}\left[-14y + 3u + \frac{1}{s}\left(-8y + 4u\right)\right]\right\}$$



Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u - 7x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 3u - 14x_1, \quad y = x_1 \\ \dot{x}_3 = 4u - 8x_1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (0)$$

- **Operatore Differenziale:** $\dot{y} = sy$

$$(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)y = (2s^2 + 3s + 4)u$$

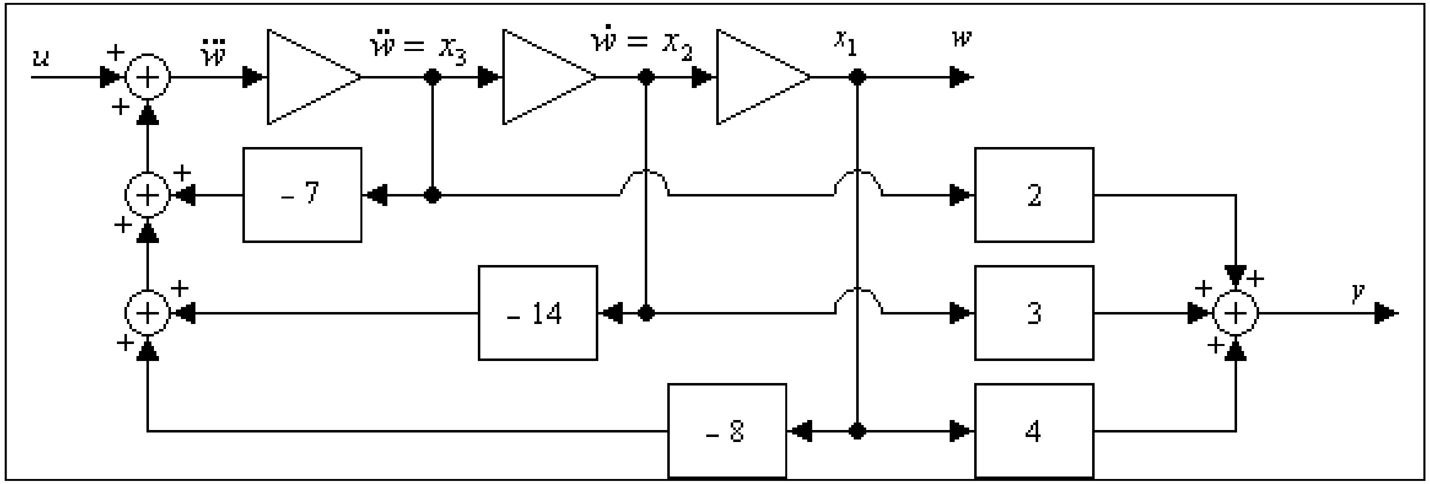
- Introduciamo una variabile ausiliaria w in modo da verificare l'identità di cui sopra, ovvero riscriviamo ingresso ed uscita ($u,\ y$) in funzione di w

$$y = (2s^2 + 3s + 4)w = 2s^2 \cdot w + 3s \cdot w + 4w$$
$$u = (s^3 + 7s^2 + 14s + 8)w = s^3 \cdot w + 7s^2 \cdot w + 14s \cdot w + 8w$$

$$(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)(2s^2 + 3s + 4)w = (2s^2 + 3s + 4)(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)w$$

- Individuare la derivata massima della variabile ausiliaria w in modo da sapere quante integrazioni sono necessarie

Derivazione delle Equazioni di Stato



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -7x_3 - 14x_2 - 8x_1 + u \end{cases} \quad , \quad y = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = (0)$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

- **Soluzione**: Data la rappresentazione ISU o in variabili di stato:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A_{n\times n}\boldsymbol{x}(t) + B_{n\times m}\boldsymbol{u}(t)\\ y(t) &= C_{p\times n}\boldsymbol{x}(t) + D_{p\times m}\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}}$$

Dati $\boldsymbol{u}(t)$ ed $\boldsymbol{x}_0$, determinare $\boldsymbol{x}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t)$, per ogni $t > t_0$.

- Metodo nel Dominio della Frequenza per Sistemi tempo invarianti, (A, B, C, D) matrici costanti.

- Metodo nel Dominio del Tempo per Sistemi tempo invarianti, tempo varianti e non lineari.

- **Dominio della Frequenza (ovvero attraverso FdT)**

$$\begin{aligned}s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}_0 &= A\boldsymbol{x}(s) + B\boldsymbol{u}(s)\\ \boldsymbol{y}(s) &= C\boldsymbol{x}(s) + D\boldsymbol{u}(s)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(sI - A)\boldsymbol{x}(s) &= \boldsymbol{x}_0 + B\boldsymbol{u}(s)\\ \boldsymbol{y}(s) &= C\boldsymbol{x}(s) + D\boldsymbol{u}(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(s) &= (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + (sI - A)^{-1}B\boldsymbol{u}(s)\\ \boldsymbol{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + C(sI - A)^{-1}B\boldsymbol{u}(s) + D\boldsymbol{u}(s)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{y}(s) = G(s)\boldsymbol{u}(s)\\ &G_{p\times m}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]\end{aligned}}$$

- **Esempio: 1**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

$$C(sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} = H(s) \quad \text{matrice 2x1}}$$

$$\boldsymbol{y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} U(s)$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

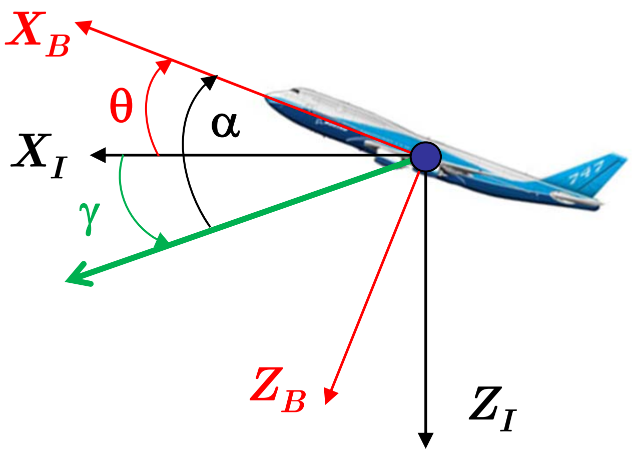
Ingresso impulsivo

$$\boldsymbol{y}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{s+1} \\ \dfrac{-3}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ingresso a Gradino Unitario

$$\boldsymbol{y}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{3}{s(s+1)} \\ \dfrac{-3}{s(s+2)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 3-2e^{-t} \\ -\dfrac{3}{2}(1-e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Esempio 2: Moto Longitudinale Linearizzato di un Velivolo



Condizioni di Equilibrio (Trim)

$$\begin{aligned} Quota &= Sea\ Level(ft) \\ Mach &= 0.2 \\ U_0 &= 221(ft/\sec) \\ \gamma_0 = \theta_0 - \alpha_0 &= -3.5^0 = -6.11 rad^{-2} \\ \alpha_0 &= 6^0 = 10.47 rad^{-2} \end{aligned}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

Variabili di Stato:

- u = componente velocità di traslazione lungo l'asse xB
- w = componente velocità di traslazione lungo l'asse yB
- q = componente velocità di rotazione intorno all'asse yB
- θ = Equazione cinematica di rotazione intorno all'asse yB

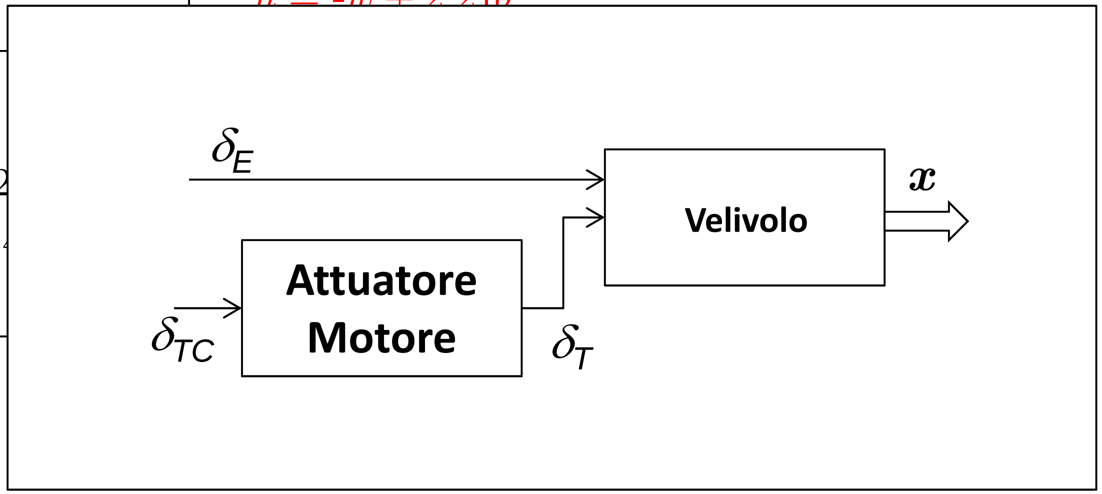
$$\boldsymbol{x}_{AC}(t) = \begin{bmatrix} u \\ w = \alpha U_0 \\ q = \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}; u_{AC}(t) = \delta_E; u_T(t) = \delta_T; \boldsymbol{d}(t) = \begin{bmatrix} u_w \\ w_w \end{bmatrix}$$

$$\dot{\delta}_T = 0.25\delta_T + 0.25\delta_{TC}$$

$$\dot{h} = -w + 2.21\theta$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.021 & .122 & 0 \\ -.209 & -.53 & 2.2 \\ .017 & -.164 & -. \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_{TC} \end{bmatrix}$$



1. **La dinamica del motore è disaccoppiata nella direzione aereo -> motore (ma non l'inverso)**

$$\dot{\delta}_T = 0.25\delta_T + 0.25\delta_{TC} \Rightarrow G_T(s) = \frac{0.25}{s + 0.25} \qquad \delta_{TC} = 1 \Rightarrow \delta_T = 1 - e^{-0.25t}$$

2. **La dinamica della quota (traslazione lungo zI) è combinazione lineare di 2 variabili di stato e può essere calcolata a parte**

$$\dot{h} = -w + 2.21\theta$$

3. **Trascuriamo per adesso la componente di disturbo, si deve risolvere quindi:**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} -.021 & .122 & 0 & -.322 & 1 \\ -.209 & -.53 & 2.21 & 0 & -.044 \\ .017 & -.164 & -.412 & 0 & .544 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 \end{array}\right] \boldsymbol{x} + \left[\begin{array}{c|c} .0 & 0 \\ -.064 & 0 \\ -.378 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & .25 \end{array}\right] \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}_{AC}(t) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \boldsymbol{x}(t)$$

$$G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B \qquad (4\times 2) = (4\times 5)\cdot(5\times 5)\cdot(5\times 2)$$

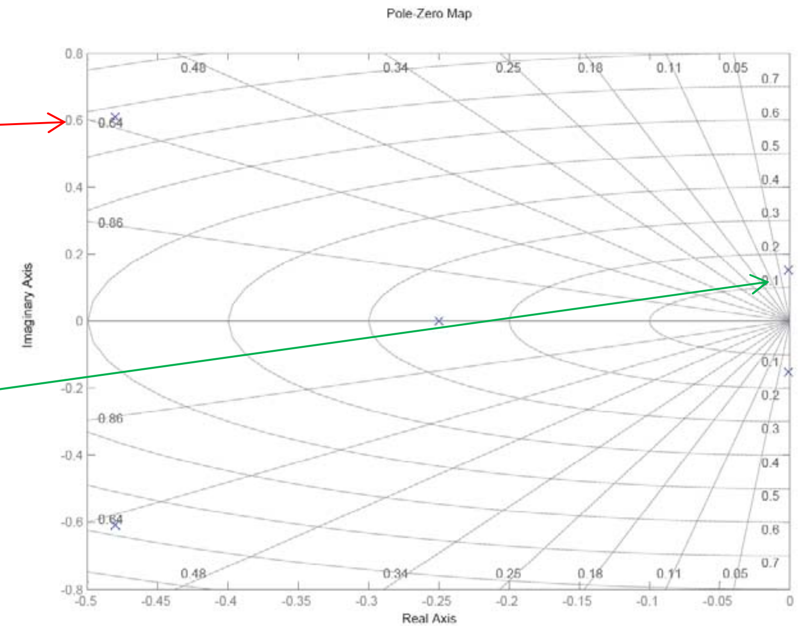
Soluzione delle Equazioni di Stato

$$G(s)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s+.021&-.122&0&.322&-1\\.209&s+.53&-2.21&0&.044\\-.017&.164&s+.412&0&-.544\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&s+.25\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}.01&0\\-.064&0\\-.378&0\\0&0\\0&.25\end{bmatrix}$$

0	0.0100	0.0041	0.0228	0.0667	0.0153	0	0.0000	0.2500	0.2342	0.1375	-0.0238
0	-0.0640	-0.8812	-0.2349	-0.0304	-0.0064	0	0.0000	-0.0110	0.2435	-0.0059	0.0091
0	-0.3780	-0.2921	-0.0627	-0.0033	-0.0000	0	-0.0000	0.1360	0.0810	0.0158	0.0000
0	-0.0000	-0.3780	-0.2921	-0.0627	-0.0033	0	0.0000	-0.0000	0.1360	0.0810	0.0158

1.0000   1.2130   0.8668   0.1801   0.0198   0.0035

```
>> roots([1.0000    1.2130    0.8668    0.1801    0.0198    0.0035])

ans =

  -0.4804 + 0.6083i
  -0.4804 - 0.6083i
  -0.2507
  -0.0008 + 0.1524i
  -0.0008 - 0.1524i

>> eig(a)

ans =

  -0.4804 + 0.6083i
  -0.4804 - 0.6083i
  -0.0011 + 0.1523i
  -0.0011 - 0.1523i
  -0.2500
```



Soluzione delle Equazioni di Stato

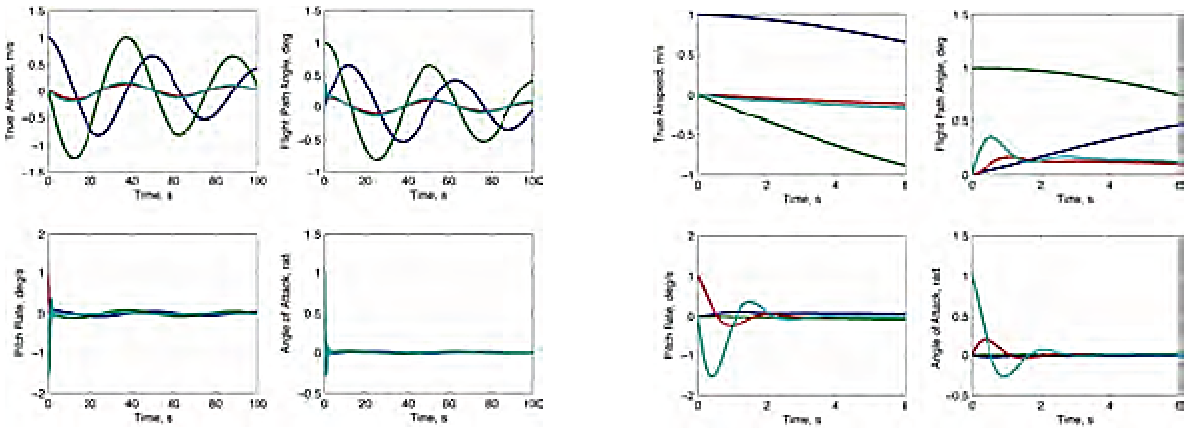
$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}u(t)\\ w(t)\\ q(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_1 e^{-0.4804t}\sin(0.6083t+\boldsymbol{C}_2)+\boldsymbol{C}_3 e^{-0.0011t}\sin(0.1543t+\boldsymbol{C}_4)$$

- 2 MODI propri oscillatori
- Corto Periodo (Short Period) interessa prevalentemente le variabili $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{q}$
- Fugoide (Phugoid) interessa prevalentemente le variabili $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{q}$

- **LTI 4th-order responses viewed over different periods of time**
  - **4 initial conditions**

- **0 - 100 sec**
- **Reveals Phugoid Mode**

- **0 - 6 sec**
- **Reveals Short-Period Mode**



Laboratorio di Automazione e Robotica Università di Pisa

- **Dominio del Tempo**

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t)\end{cases}, \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

- Riprendiamo il caso visto in precedenza di un sistema scalare, omogeneo e tempo invariante

$$\begin{cases}\dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0\end{cases}$$

$$x(t) = ke^{at}$$

$$x(t_0) = x_0 = ke^{at_0} \Rightarrow k = x_0 e^{-at_0}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0$$

$$\boxed{e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!} + \dots}$$

- **Serie di Potenze globalmente convergente**

Soluzione delle Equazioni di Stato

Consideriamo il caso di un sistema multivariabile

$$\boldsymbol{x}(t) \in \Re^n$$

Per analogia con il caso scalare:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}, A^{n\times n} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

- **Definizione :** Matrice di transizione dello stato: Si definisce, per i sistemi lineari e invarianti, come **matrice di transizione dello stato**

$$e^{A(t-t_0)}$$

- **La soluzione del sistema omogeneo si riduce al calcolo della Matrice di Transizione**

Soluzione delle Equazioni di Stato

Metodo I: Serie di Potenze

$$\boxed{e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \ldots + A^k\frac{t^k}{k!} + \ldots}$$

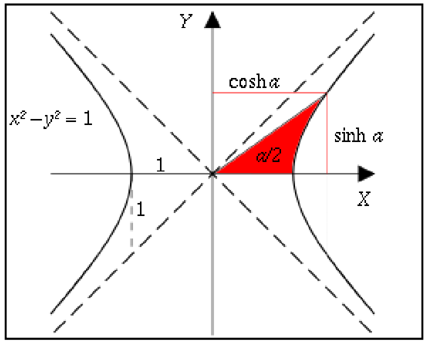
$$\boxed{A^i = A \cdot A \cdot A \ldots}$$

- **Esempio:** $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = A\,, \qquad A^4 = I\,, \qquad \ldots$$

$$e^{At} = I\left[1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \ldots\right] + A\left[t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= I\cosh t + A\sinh t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$



Soluzione delle Equazioni di Stato

Metodo II: Trasformata di Laplace

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \qquad \Rightarrow \qquad s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}(s) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}(s) = [sI - A]\boldsymbol{x}_0$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}(t) = L^{-1}\left\{ \left[sI - A\right]^{-1} \right\} \boldsymbol{x}_0 = e^{At}\boldsymbol{x}_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{e^{At} = L^{-1}\left\{ \left[sI - A\right]^{-1} \right\}}$$

- Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad [sI - A] = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} \\ \dfrac{1}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{s+3}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Metodo III: Riduzione in Forma di Jordan

Data una matrice quadrata A, è sempre possibile trasformarla in una matrice diagonale $\varLambda$ o in una matrice di Jordan J tramite opportune trasformazioni di similitudine.

Caso A: Autovalori di A distinti

$$M^{-1}AM = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad A = M\Lambda\ M^{-1}$$

$$e^{At} = MM^{-1} + M\Lambda\ M^{-1}t + M\Lambda\ M^{-1}M\Lambda\ M^{-1}\frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= MIM^{-1} + M\varLambda M^{-1}t + M\varLambda^2 M^{-1}\frac{t^2}{2!} + \dots =$$

$$= M\left\{I + \varLambda t + \varLambda^2\frac{t^2}{2!} + \dots\right\}M^{-1} = Me^{\varLambda t}M^{-1}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \Lambda^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots + \Lambda^k \frac{t^k}{k!} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \ldots + \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots + \lambda_1^k t^k + \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \cdots + \lambda_n^k t^k + \cdots \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

- Essendo $e^{\Lambda t}$ nota una volta noti gli autovalori di A, la matrice di transizione originale è ottenibile calcolando le matrici M e M^{-1}.

$$M = [v_1, v_2, \ldots, v_n] \qquad \text{dove } (\lambda_i I - A)v_i = 0$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix} \qquad \text{dove } \mu_i^T \left(\lambda_i - A\right) = 0$$

$$e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1} = \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\mu}_i^T e^{\lambda_i t} \boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i e^{\lambda_i t} = \boldsymbol{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + \boldsymbol{\alpha}_n e^{\lambda_n t}}$$

Caso B: Autovalori di A ripetuti

In tale situazione, usando un'appropriata trasformazione di similitudine P , la matrice *A* può essere portata nella forma di Jordan (la matrice P contiene gli autovettori ed eventuali autovettori generalizzati)

$$P^{-1}AP = J \qquad A = PJP^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Consideriamo, ad esempio, il caso in cui J sia un unico blocco di Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i I + R$$

Da cui:

$$\boxed{e^{Jt} = e^{(\lambda_i I + R)t} = e^{\lambda_i t} e^{Rt}}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

Il prodotto di una qualsiasi matrice C moltiplicata per R fornisce la stessa matrice in cui però ogni colonna viene shiftata verso destra e la prima colonna risulta essere una colonna di zeri.

$$CR = [c_1, c_2, \ldots, c_n]\ R \ = \ [0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}]$$

Se R è una matrice (n x n), allora R^n = 0, infatti, per esempio, se n = 3:

$$R_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R^4 = R^5$$

$$e^{Rt} = I + Rt + R^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + R^n \frac{t^n}{n!} + 0 \quad = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

Esempio:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right] \boldsymbol{x}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i I + R$$

$$e^{J_1 t} = e^{-t} e^{Rt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[\begin{array}{c|c} e^{J_1 t} & 0 \\ \hline 0 & e^{J_2 t} \end{array}\right] \boldsymbol{x}_0 = \left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-2t} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} e^{-t} + x_{20} t e^{-t} \\ x_2(t) = x_{20} e^{-t} \\ x_3(t) = x_{30} e^{-2t} \end{cases}$$

Metodo IV: Uso del Teorema di Cayley-Hamilton

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$$

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I$$

$$A^{n+1} = AA^n = -a_{n-1}\left[-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I\right] - a_{n-2}A^{n-1} - \ldots - a_0 A$$

$$A^{n+2} = AA^{n+1} = -a_{n-1}\left[-a_{n-1}\left[-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I\right] - a_{n-2}A^{n-1} - \ldots - a_0 A\right]$$
$$-a_{n-2}\left[-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_0 I\right] - \ldots - a_0 A^2$$

- Da queste relazioni si deduce che qualsiasi potenza della matrice A può essere espressa come combinazione delle prime *n*-1 potenze

$$\boxed{e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \ldots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t)}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

- Usando il Teorema di Caley-Hamilton si trovano i valori dei termini α_i per ogni autovalore:

$$\forall\lambda_i \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \lambda_i^2 \frac{t^2}{2!} + \; \ldots \; = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_2(t)\lambda_i^2 + \; \ldots \; + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

- Considerando il caso di matrice A con autovalori distinti si costruisce la ***Matrice Vandermonde*** da cui si possono calcolare i coefficienti α_i

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Nota: Una Versione della Matrice di Vandermonde esiste anche nel caso di autovalori con molteplicità >1.

- **Esempio:**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, Autovalori : \left(\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = +2 \right)$$

$$e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{+2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = \dfrac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3} \\ \alpha_1(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \end{cases}$$

$$e^{At} = \frac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(t) = e^{At} \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3}\left(3x_{10} - 4x_{20}\right) e^{-t} + \dfrac{4}{3} x_{20} e^{2t} \\ \dfrac{1}{3}\left(x_{10} - 2x_{20}\right) e^{-t} + \dfrac{1}{3}\left(x_{10} + 2x_{20}\right) e^{2t} \end{bmatrix}}$$

Soluzione delle Equazioni di Stato

- Consideriamo il Caso generale di Sistema forzato:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{cases} , \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}} = e^{-At}A\boldsymbol{x} + e^{-At}B\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{-At}\boldsymbol{x}\right] = e^{-At}B\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-At}\boldsymbol{x} = e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-At}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

NOTA:

Data la matrice di transizione, possiamo risolvere l'integrale

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \\ \boldsymbol{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \end{cases}}$$

Coordinate Modali

- Dato il sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ Consideriamo la Trasformazione $\boldsymbol{q} = M^{-1}\boldsymbol{x}$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = M^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = M^{-1}A\boldsymbol{x} = M^{-1}AM\boldsymbol{q} = \Lambda\boldsymbol{q}$$

- Il vettore ***q*** si chiama vettore modale o di coordinate modali

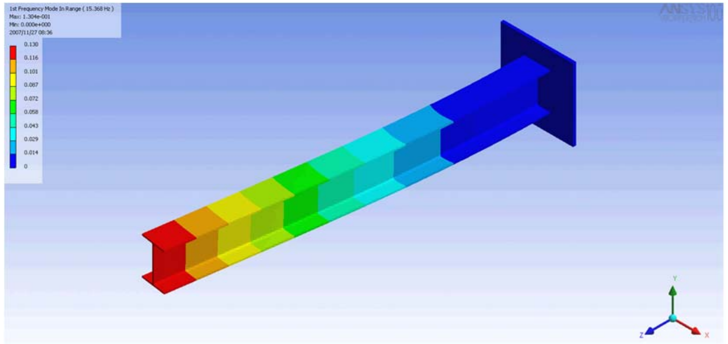
$$\boldsymbol{q}(t) = e^{\Lambda t}\boldsymbol{q}_0, \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \dots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{10} \\ \dots \\ q_{n0} \end{bmatrix}$$

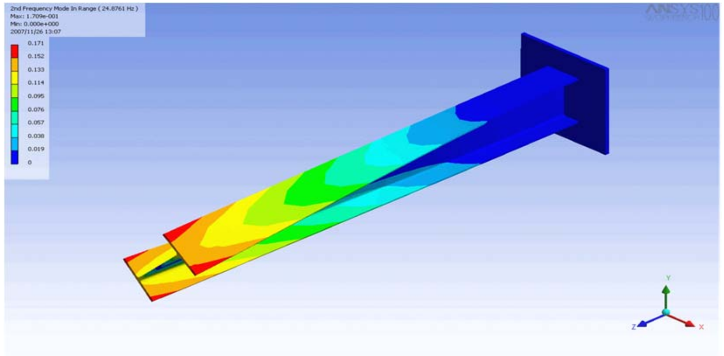
$$\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{q} = Me^{\Lambda t}\boldsymbol{q}_0 = v_1 e^{\lambda_1 t} q_{10} + \dots + v_n e^{\lambda_n t} q_{n0}$$

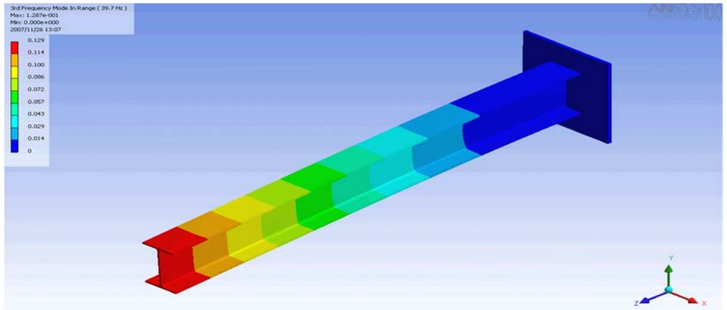
$$\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{q} = Me^{\Lambda t}M^{-1}\boldsymbol{x}_0 = v_1 \mu_1^T x_0 e^{\lambda_1 t} + \dots + v_n \mu_n^T x_0 e^{\lambda_n t}$$

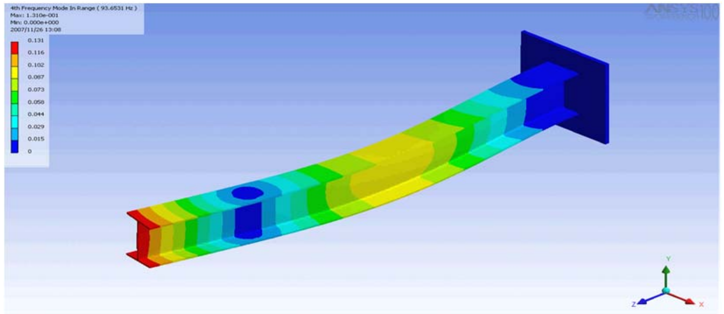
- **http://en.wikipedia.org/wiki/Vibration**

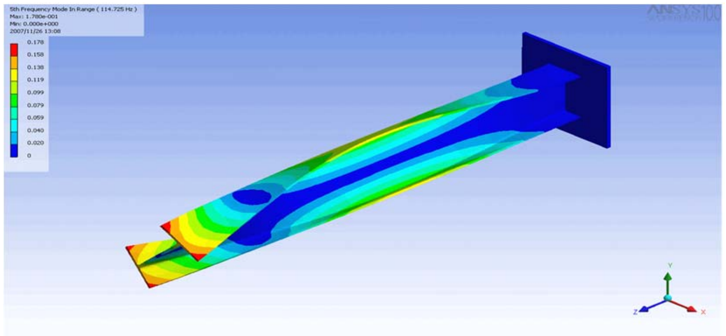
Coordinate Modali

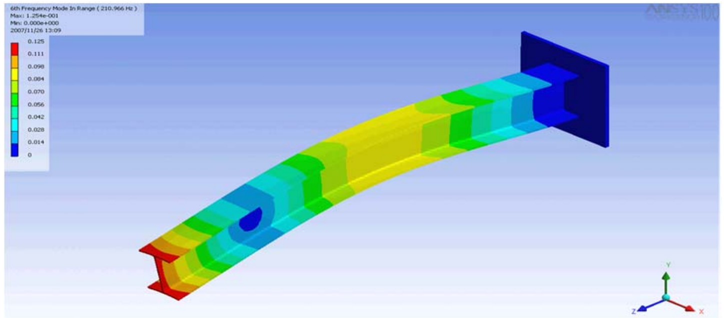












Coordinate Modali

Dato il sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} -.021 & .122 & 0 & -.322 & 1 \\ -.209 & -.53 & 2.21 & 0 & -.044 \\ .017 & -.164 & -.412 & 0 & .544 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 \end{array}\right] \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \boldsymbol{x}(t)$$

Autovalori

```
-0.4804 + 0.6083i
-0.4804 - 0.6083i
-0.0011 + 0.1523i
-0.0011 - 0.1523i
-0.2500
```

Autovettori

```
-0.0430 + 0.0961i  -0.0430 - 0.0961i   0.8905              0.8905
-0.9118            -0.9118            -0.0848 - 0.0291i  -0.0848 + 0.0291i
-0.0245 - 0.2419i  -0.0245 + 0.2419i   0.0659 - 0.0128i   0.0659 + 0.0128i
-0.2253 + 0.2182i  -0.2253 - 0.2182i  -0.0872 - 0.4323i  -0.0872 + 0.4323i
      0                  0                  0                  0

Column 5

-0.8943
 0.4200
-0.0006
 0.0025
 0.1544
```

Coordinate Modali

$$\boldsymbol{q} = M^{-1}\boldsymbol{x} \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = M^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = M^{-1}A\boldsymbol{x} = M^{-1}AM\boldsymbol{q} = \Lambda\boldsymbol{q}$$

```
JNORM =

  Columns 1 through 4

  -0.4804 + 0.6083i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
   0.0000 - 0.0000i  -0.4804 - 0.6083i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0011 + 0.1523i  -0.0000 - 0.0000i
  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0011 - 0.1523i
        0                  0                  0                  0

  Column 5

   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 - 0.0000i
  -0.2500
```

Coordinate Modali

```
M =

  -0.0430    0.0961    0.8905         0   -0.8943
  -0.9118         0   -0.0848   -0.0291    0.4200
  -0.0245   -0.2419    0.0659   -0.0128   -0.0006
  -0.2253    0.2182   -0.0872   -0.4323    0.0025
        0         0         0         0    0.1544

>> inv(M)

ans =

  -0.1005   -1.1110    0.0269    0.0741    2.4391
   0.3066    0.0631   -3.9117    0.1117    1.5864
   1.0850   -0.0604    0.4233   -0.0085    6.4521
  -0.0117    0.6231   -2.0744   -2.2939   -1.7342
        0         0         0         0    6.4779
```

```
J =

  -0.4804    0.6083   -0.0000    0.0000    0.0000
  -0.6083   -0.4804   -0.0000         0    0.0000
  -0.0000    0.0000   -0.0011    0.1523    0.0000
   0.0000    0.0000   -0.1523   -0.0011   -0.0000
        0         0         0         0   -0.2500
```

$$e^{J_{NORM}t} = \begin{bmatrix} e^{(-.4804+j0.6083)t} & & & 0 & \\ & e^{(-.4804-j0.6083)t} & & & \\ & & e^{(-.0011+j0.1523)t} & & \\ & & & e^{(-.0011-j0.1523))t} & \\ & 0 & & & e^{-.25t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = M e^{J_{NORM}t} M^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\mu}_1^T\boldsymbol{x}_0 + \ldots + \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\mu}_n^T\boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1,..,n}\boldsymbol{C}_i e^{\lambda_i t}$$

$$\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\mu}_i^T x_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}_1 e^{-0.4804t}\cos(0.6083t + \boldsymbol{B}_1) + \boldsymbol{A}_2 e^{-0.0011t}\cos(0.1523t + \boldsymbol{B}_2) + \boldsymbol{A}_3 e^{-0.25t}$$

Risposta a Segnali Canonici

Valutazione della risposta di un sistema descritto nello spazio di stato a segnali standard usati in analisi di sistema e di controllo

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{cases} ,\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

- **Risposta all'impulso di Dirac**

Cosideriamo dapprima un singolo ingresso scalare impulsivo con condizioni iniziali nulle:

$$u(t) = u_j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ \delta(t) \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Bu(t) \Rightarrow b_j u_j(t) = b_j \delta(t)$$

Risposta a Segnali Canonici

$$g_j(t) = Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau} b_j \delta(\tau)d\tau + d_j\delta(t)$$

Usando la proprietà di campionamento della funzione di Dirac e notando che vale:

$$e^{-A\cdot 0} = I$$

$$g_j(t) = Ce^{At}b_j + d_j\delta(t)$$

Se estendiamo la risposta impulsiva a tutti gli *m* canali di ingresso si ha quindi:

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

Nota che:

$$L\left[g(t)\right] = CL\left[e^{At}\right]B + DL\left[\delta(t)\right] = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

Risposta al gradino unitario

$$r_j(t) = Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b_j u_{-1}(\tau)d\tau + d_j = C\int_0^t e^{A\xi}b_j u_{-1}(t-\xi)d\xi + d_j$$

$$r_j(t) = CA^{-1}\left[e^{At} - I\right]b_j + d_j$$

- Se estendiamo la risposta a tutti gli *m* canali di ingresso si ha quindi:

$$r(t) = CA^{-1}\left[e^{At} - I\right]B + D = C\left[e^{At} - I\right]A^{-1}B + D$$

- Nel caso di sistema con autovalori tutti di parte reale strettamente negativa

$$r_{ss} = \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{CA^{-1}\left[e^{At} - I\right]B + D\right\} = -CA^{-1}B + D$$

Proprietà della Matrice di Transizione

La matrice di Transizione ha delle speciali proprietà che diventano molto importanti dal punto di vista applicativo nel caso di **matrice esponenziale** (sistemi lineari tempo invarianti)

Dalla definizione:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + .. \frac{A^kt^k}{k!} + ..$$

$$e^{A\cdot 0} = I + A \cdot 0 + \frac{A^2 \cdot 0^2}{2!} + .. = I$$

$$\int_0^t e^{At} d\tau = It + \frac{A\ t^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!}..$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

Proprietà della Matrice di Transizione

$$\int_0^t e^{At} d\tau = It + \frac{A\ t^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!}..$$

$$A\int_0^t e^{At} d\tau + I = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!}.. = e^{At}$$

Nel caso di A non singolare:

$$\int_0^t e^{At} d\tau = A^{-1}(e^{At} - I) = (e^{At} - I)A^{-1}$$

Esempi

- **<u>Controllo di assetto satellite</u>: Il sistema ha due ingressi (θ_C e T_G) e, supponiamo una singola uscita θ. Le equazioni che descrivono il moto sono:**

$$J\ddot{\theta} - C_G\theta = -k_m i + T_G$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = k_\theta(\theta_c - \theta) - k_b\omega$$

$$J_{RW}\dot{\omega} = k_m i$$

- Il sistema ha 4 variabili di stato, 2 ingressi ed una uscita. Gli ingressi sono il riferimento ed il disturbo

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu + Ed \\ y = C\boldsymbol{x} \end{cases}, \boldsymbol{x} \in \Re^4, u \in \Re^1, y \in \Re^1, d \in \Re_1$$

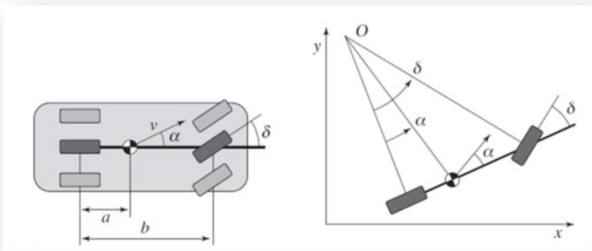
$$\begin{cases} x_1 = \theta \quad u_1 = \theta_c \quad y = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \quad d_1 = T_G \\ x_3 = i \\ x_4 = \omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta \\ \dot{x}_2 = \dfrac{C_G}{J}x_1 - \dfrac{k_m}{J}x_3 + \dfrac{1}{J}T_G \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{R}{L}x_3 - \dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{kb}{L}x_4 + \dfrac{1}{L}\theta_c \\ \dot{x}_4 = \dfrac{k_m}{J_{RW}}x_3 \end{cases}$$

Esempi

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{C_G}{J} & 0 & -\dfrac{k_m}{J} & 0 \\ -\dfrac{1}{L} & 0 & -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{k_b}{L} \\ 0 & 0 & \dfrac{k_m}{J_{RW}} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \theta_c + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_G \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

- **<u>Controllo di sterzata</u>: Il sistema ha un ingresso dato dall'angolo di sterzata ed una singola uscita che è la traslazione laterale.**



$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{a v_0}{b} \\ \dfrac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Esempi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16.67 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 6.25 \\ 4.1675 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{16.67}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 16.67t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .06 \end{bmatrix}; M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16.67 \end{bmatrix}; e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = M \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 16.67t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Controllo di Equilibrio di un biciclo: Il sistema ha un ingresso dato dalla coppia sul manubrio ed una uscita che è l'angolo di tilt.**

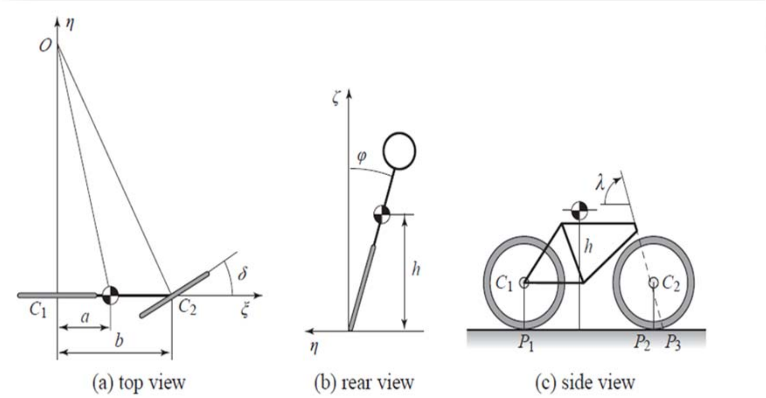


Figure 3.5: Schematic views of a bicycle. The steering angle is δ, and the roll angle is φ. The center of mass has height h and distance a from a vertical through the contact point P_1 of the rear wheel. The wheel base is b, and the trail is c.

$$M = \begin{pmatrix} 96.8\ (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57\ (-0.472) & 0.258\ (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8\ (-5.84) \\ 0.436\ (0.436) & 2.20\ (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0\ (-91.72) & 35.17\ (7.51) \\ 35.17\ (7.51) & -12.03\ (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06\ (-9.54) \\ 0 & 3.50\ (0.848) \end{pmatrix}.$$

Esempi

$$M\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\delta}\end{bmatrix}+Cv_0\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\delta}\end{bmatrix}+(K_0+K_2v_0^2)\begin{bmatrix}\varphi\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T\end{bmatrix}$$

Ipotesi: v_0 = 9 m/sec

$$\begin{bmatrix}96.8 & -3.57\\ -3.57 & 0.258\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\delta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -457.2\\ 3.924 & 19.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\delta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-901 & -7060.43\\ 35.17 & 271.47\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}T$$

- Definizione del vettore di stato, ingressi ed uscite:

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\varphi\\ \dot{\varphi}\\ \delta\\ \dot{\delta}\end{bmatrix};u(t)=T;y(t)=\varphi$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= 8.7411x_1+8.5031x_2+69.716x_3+0.2922u\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= -15.36x_1+102.4347x_2-87.3634x_3+0.2922u\end{cases}$$

Esempi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8.7411 & 8.5031 & 69.716 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15.36 & 102.4347 & -87.3634 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2922 \\ 0 \\ 7.92 \end{bmatrix} u \qquad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{9.43t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.9269t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

```
INVM =

 -117.3765    1.7572  -35.1427    1.0000
    9.0619    9.7761   80.8478         0
  108.3616  -11.4911  415.7435         0
         0         0  461.1070         0

>> M

M =

         0    0.0099    0.0084   -0.0093
         0    0.0931   -0.0078   -0.0093
         0         0         0    0.0022
    1.0000    0.9956    0.9999   -0.9999
```

Esempi

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{9.43t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-0.9269t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{q}_0+\int_0^t\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{9.43(t-\tau)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-0.9269(t-\tau)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{(t-\tau)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8.4335\\ 2.8566\\ \text{-}3.3577\\ 0\end{bmatrix}u(\tau)d\tau\right\}$$

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}q_{10}\\ e^{9.43t}q_{20}\\ e^{-0.9269t}q_{30}\\ e^{t}q_{40}\end{bmatrix}+\int_0^t\left\{\begin{bmatrix}8.4335\\ 2.8566\,e^{9.43(t-\tau)}\\ \text{-}3.3577\,e^{-0.9269(t-\tau)}\\ 0\end{bmatrix}u(\tau)d\tau\right\}$$

```
M =

         0    0.0099    0.0084   -0.0093
         0    0.0931   -0.0078   -0.0093
         0         0         0    0.0022
    1.0000    0.9956    0.9999   -0.9999
```

- **Risposta a condizioni iniziali**

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & .0099 & .0084 & -.0093\\ 0 & .0931 & -.0078 & -.0093\\ 0 & 0 & 0 & .0022\\ 1 & .9956 & .9999 & -.9999\end{bmatrix}\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}.0099e^{9.43t}q_{20}+.0084e^{-0.9269t}q_{30}-.0093e^{t}q_{40}\\ \ldots\\ .0022e^{t}q_{40}\\ \ldots\end{bmatrix}$$

Esempi

- Dati i sistemi:

$$\ddddot{y} + 5\dddot{y} + 9\ddot{y} + 7\dot{y} + 2y = \dot{u} + 4u$$

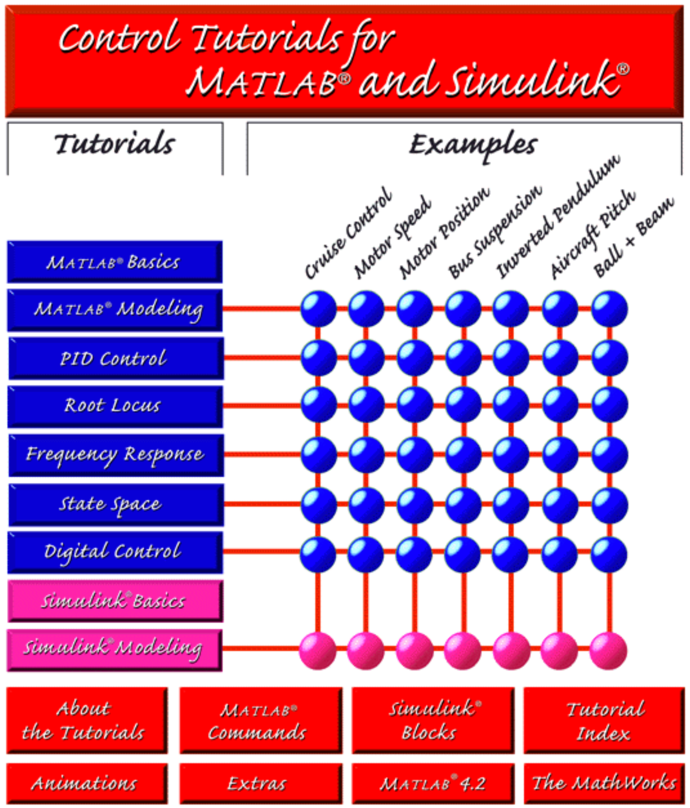
$$\dddot{y} + 4\ddot{y} - 6\dot{y} + 10y = \ddot{u} + 4u$$

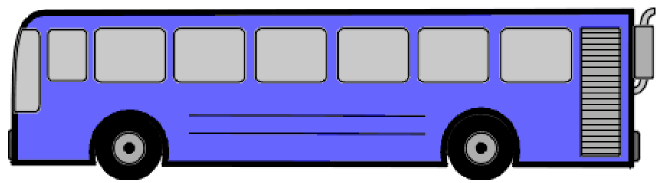
$$\begin{cases} 4\ddot{y}_1 - 8\dot{y}_1 + 6y_2 = u_1 + 4u_2 \\ \ddot{y}_2 - y_1 = 8u_2 \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione nello spazio di stato e calcolare
I vettori di stato e di uscita analiticamente e mediante Matlab

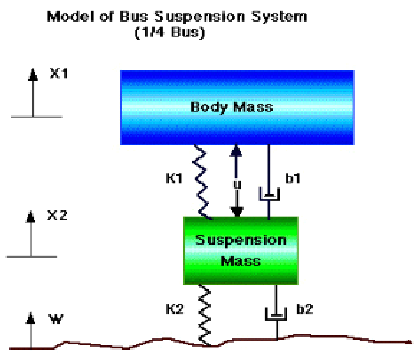
Esercizi

Software UMICH





l problem. When the suspension system is designed, a 1/4 bus model (one of the four wheels) is u



Sommario