Esame di Ricerca Operativa del 28/6/23

(Cognome)	**(Nome)**	**(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. Un'industria automobilistica produce 3 diversi modelli di autovettura: classica, elegante e sportiva. Ogni autovettura deve essere lavorata in tre diversi stabilimenti A, B e C. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella seguente tabella, insieme al profitto per autovettura:

	classica	elegante	sportiva
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Profitto	10000	15000	22000

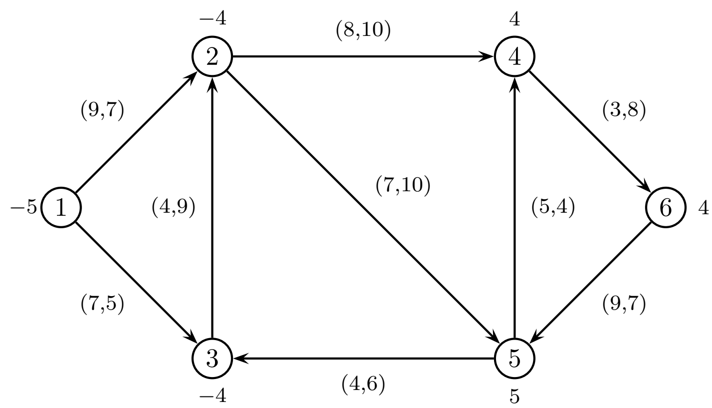
La capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti è limitata ad 8 ore per gli stabilimenti A e B ed a 5 ore per lo stabilimento C. Il numero giornaliero di autovetture sportive non deve superare il 20% del totale, mentre il numero giornaliero di autovetture classiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Determinare le quantità giornaliere da produrre per ciascun modello, in modo da massimizzare il profitto. Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione che prevede di non produrre autovetture di tipo elegante e sportivo e di produrre quelle classiche al massimo possibile (anche non intero). Calcolare la soluzione ottima del rilassato continuo. Calcolare il primo taglio di Gomory. Calcolare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	14	16	34	18
2		20	35	21
3			22	19
4				17

Trovare una valutazione calcolando il 5–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 3. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{12}, x_{14}, x_{24}. Siamo arrivati all'ottimo? Se dovessi obbligatoriamente non usare l'arco di costo minimo, la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,4), (2,5), (4,6) e (5,3) e l'arco (3,2) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima. Quale é la soluzione ottima del problema del flusso massimo visto come flusso di costo minimo?

Esercizio 4. Si consideri la funzione obiettivo

$$f(x_1, x_2) = 2\,x_1\,x_2 + x_1 + 4\,x_2$$

da minimizzare sul poliedro di vertici $(0,1)$, $(-1,-5)$, $(-3,-5)$ e $(-3,-1)$.
Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(-3, -\dfrac{11}{3}\right)$. Dire se i punti (0,1) e (-2,-1/2) sono stazionari; calcolare eventualmente i moltiplicatori LKKT e classificarli.

SOLUZIONI

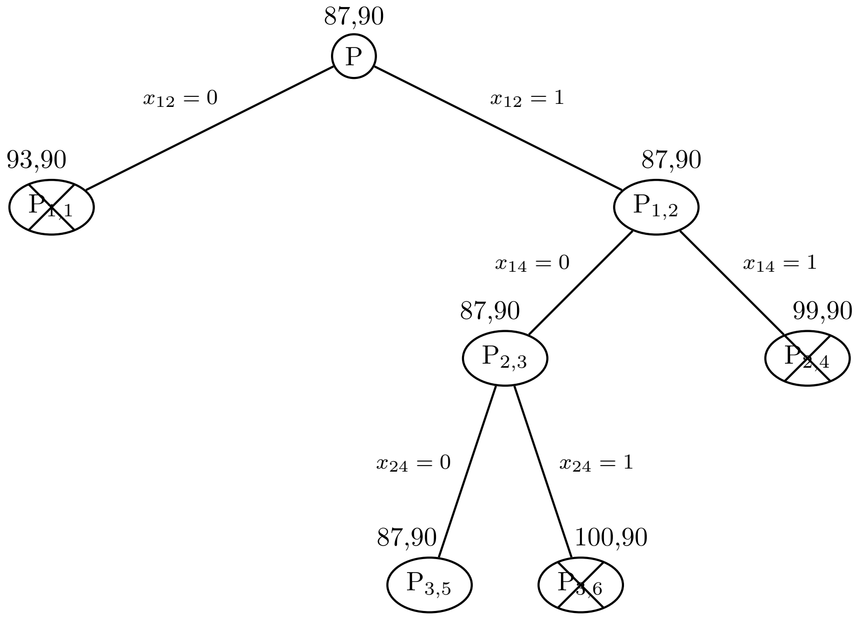
Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 10000x_1 + 15000x_2 + 22000x_3 \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \le 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \le 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \le 300 \\ x_3 \le 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \ge 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Punto di partenza $(480/31, 0, 0)$ con base $B = \{2, 7, 8\}$. La duale è $(0, \frac{10}{31}, 0, 0, 0, 0 - \frac{45}{31}, -\frac{172}{31})$. Indice uscente 7; rapporto minimo $r_3 = \frac{540}{613}$, indice entrante 3. Soluzione ottima $(8.96, 1.61, 2.64)$. Base ottima per il taglio di Gomory $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, dopo aver portato il poliedro in formato duale standard. La prima riga della matrice dei piani di taglio è $(\frac{334}{10561}, -\frac{219}{10561}, -\frac{1330}{757})$. Soluzione ottima PLI: $(12, 0, 2)$.

Esercizio 2.

5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 5) (3 , 4) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 87$
ciclo: 3 – 1 – 2 – 5 – 4 $\quad v_S(P) = 90$



Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (4,6) (5,3)	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6)
Archi di U	(3,2)	
x	(0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0)	(0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0)
π	(0, −4, 7, 4, 3, 7)	
Arco entrante	(3,2)	
ϑ^+, ϑ^-	$+\infty$, 0	
Arco uscente	(5,3)	

Il taglio di capacitá minima è $N_T = 6$ di capacità 8.

Esercizio 4.

Punto	F.O. linearizzato	y^k	Passo	Nuovo punto
$\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$	$-19/3\, x_1 - 2\, x_2$	$(0, 1)$	$\frac{85}{168}$	$(-83/56, -47/36)$

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$	$(-1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, 2)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$(-3, -1)$

I vincoli sono $-2x_1 + 3x_2 \le 3$ e $6x_1 - x_2 \le -1$

Il punto $(0, 1)$ é stazionario ed i moltiplicatori sono (-27/16, -17/16) ed é massimo locale.

Il punto $(-2, -1/2)$ é stazionario ed i moltiplicatori sono (0,0,0,0) essendo interno. L'Hessiana ha autovalori discordi e quindi é una sella.