Esame di Ricerca Operativa del 28/05/14

(Cognome)	**(Nome)**	**(Corso di laurea)**

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\, x_1 - 7\, x_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -5\, x_1 + x_2 \le 4 \\ 3\, x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 3\, x_1 \le 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 3\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta deve aprire nuove agenzie in un territorio. Le città candidate ad ospitare le nuove sedi sono A,B,C,D mentre il territorio è diviso in 5 zone (1-2-3-4-5). I tempi di percorrenza medi da ciascuna zona alle città sono espresse dalla seguente tabella

	1	2	3	4	5
A	30	80	40	50	55
B	60	35	20	70	40
C	20	55	70	55	30
D	60	35	60	20	60

Si cerca il minor numero di localizzazioni tali che ogni zona abbia almeno un'agenzia a non più di 50 minuti.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB (DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

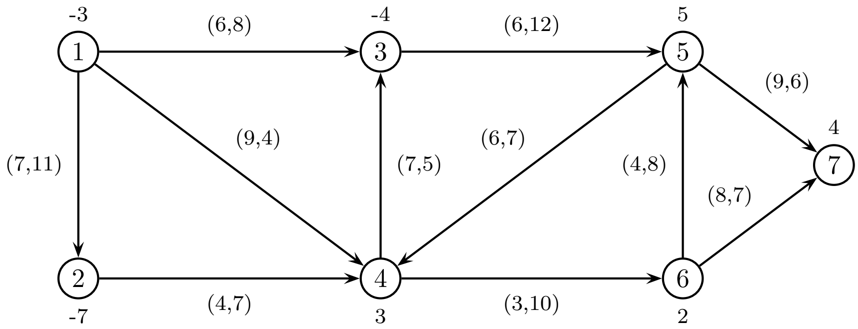
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

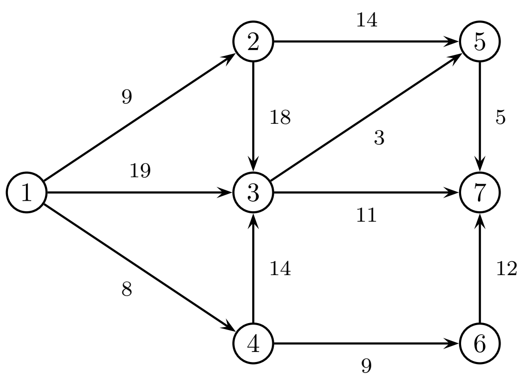


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (6,5) (6,7)	(4,6)	$x =$		
(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)	(2,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

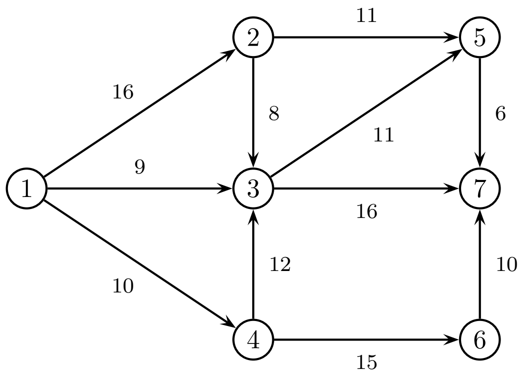
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(4,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	67	68	32
2		24	52	52
3			8	9
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{13}, x_{34}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 16 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	$\left(\frac{3}{8}, 0\right)$						
	$(0, -3)$						
	$\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$						
	$\left(-\frac{13}{8}, -16\right)$						

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 + 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(5,0)$, $(3,-4)$, $(1,-0)$ e $(3,3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{13}{3}, 1\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -5\,x_1 + x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 \le 11 \end{cases}$$

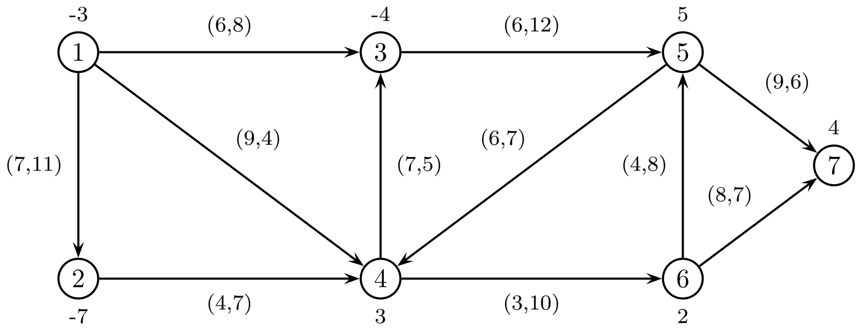
Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x = (-1,\ -1)$	SI	NO
$\{2,\,3\}$	$y = \left(0,\ \frac{17}{2},\ \frac{31}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\,5\}$	$(0,\ 4)$	$\left(0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{31}{5},\ 0\right)$	2	$\frac{55}{3},\ 5,\ \frac{55}{3}$	4
2° iterazione	$\{4,\,5\}$	$(1,\ 4)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ -11,\ 0)$	5	$5,\ 2,\ \frac{8}{3}$	3

Esercizio 3.
VEDI SOLUZIONI ALTRO COMPITO

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

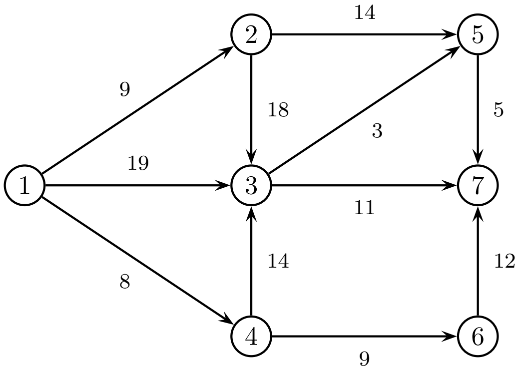


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (6,5) (6,7)	(4,6)	$x = (0,\ -3,\ 6,\ 7,\ 1,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 4,\ 4)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)	(2,4)	$\pi = (0,\ 7,\ -3,\ 9,\ 3,\ 12,\ 20)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

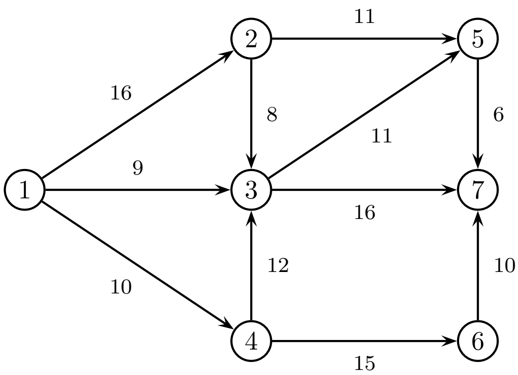
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	(1,4) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)
Archi di U	(4,6)	
x	$(0,\ 0,\ 3,\ 7,\ 4,\ 0,\ 10,\ 3,\ 4,\ 8,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 3,\ 7,\ 4,\ 0,\ 7,\ 0,\ 4,\ 5,\ 0)$
π	$(0,\ 5,\ -3,\ 9,\ 3,\ -1,\ 12)$	$(0,\ 5,\ 10,\ 9,\ 16,\ 12,\ 25)$
Arco entrante	(4,6)	(1,3)
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	Inf , 3	8 , 3
Arco uscente	(5,4)	(1,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		6		3		5		7	
nodo 2	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 3	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	2	23	2	22	3	22	3	22	3
nodo 6	$+\infty$	-1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	6	29	6	27	5	27	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		3, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 3 - 7	7	(7, 9, 0, 7, 0, 0, 16, 0, 0, 0, 0)	16
1 - 2 - 5 - 7	6	(13, 9, 0, 7, 6, 0, 16, 0, 0, 6, 0)	22
1 - 4 - 6 - 7	10	(13, 9, 10, 7, 6, 0, 16, 0, 10, 6, 10)	32

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 12\,x_1 + 7\,x_2 \\ 12\,x_1 + 8\,x_2 \geq 57 \\ 9\,x_1 + 16\,x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{57}{8}\right)$ $\qquad v_I(P) = 50$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 8)$ $\qquad v_S(P) = 56$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 11\,x_1 + 7\,x_2 \geq 50$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	67	68	32
2		24	52	52
3			8	9
4				22

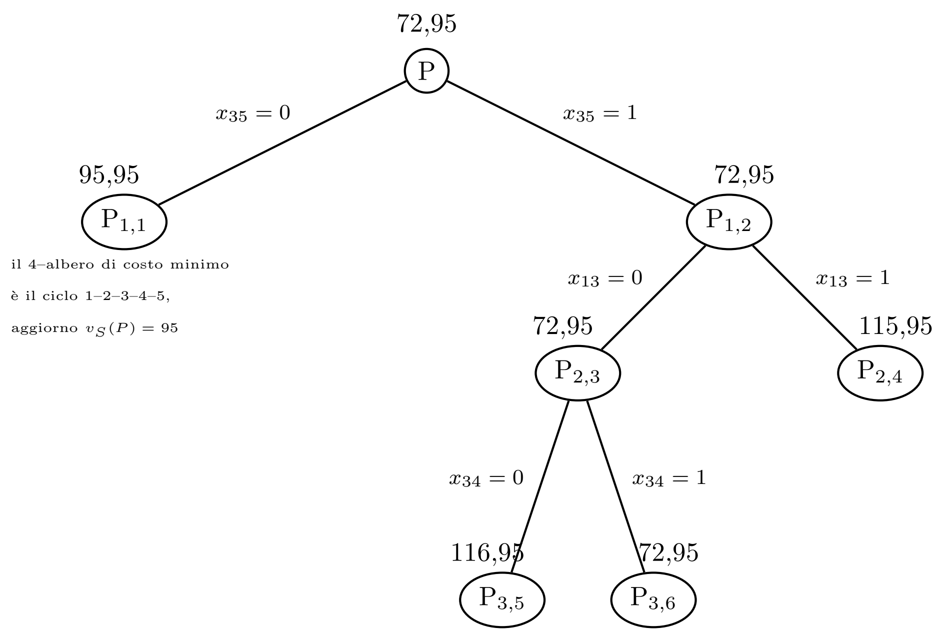
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 72$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 1 – 5 – 3 – 4 $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{13}, x_{34}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 16 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-4,\ 0)$	$\left(\frac{3}{8}, 0\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$	$(0, -3)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(4,\ 0)$	$\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-4,\ -8)$	$\left(-\frac{13}{8}, -16\right)$		NO	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 + 5\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(5, 0)$, $(3, -4)$, $(1, 0)$ e $(3, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{13}{3}, 1\right)$	$(3, 2)$	$\begin{pmatrix} 4/13 & -6/13 \\ -6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{98}{39}, \frac{49}{13}\right)$	$\frac{26}{49}$	$\frac{26}{49}$	$(3, 3)$