Esercizio (tratto dal Problema 1.6 del Mazzoldi)

Una particella si muove lungo l'asse x nel verso positivo con accelerazione costante $a_1 = 3.1\,\mathrm{m/s^2}$. All'istante $t = 0$ la particella si trova nell'origine $x = 0$ con velocità nulla. All'istante $t_1 = 10.0\,\mathrm{s}$ il moto diventa uniformemente decelerato, e la particella si arresta all'istante $t_2 = 22.4\,\mathrm{s}$. Calcolare:

1. il valore dell'accelerazione a_2 tra t_1 e t_2;
2. lo spazio percorso dalla particella.

SOLUZIONE
Dati iniziali:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3.1\,\mathrm{m/s^2} \\ t_1 &= 10.0\,\mathrm{s} \\ t_2 &= 22.4\,\mathrm{s} \\ x(t=0) &= 0\,\mathrm{m} \\ v(t=0) &= 0\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

1. • Nel primo tratto ($0 \leq t \leq t_1$) il moto è uniformemene accelerato con accelerazione a_1. La legge oraria è

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 \tag{1}$$

dove le condizioni iniziali date dal problema sono

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t=0) = 0 \\ v_0 &= v(t=0) = 0 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{2}$$

e la velocità

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a_1 t \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{3}$$

All'istante t_1 il corpo si trova nella posizione

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \tag{4}$$

e ha velocità

$$v_1 = v(t_1) = a_1 t_1 \tag{5}$$

• A partire da t_1 il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $a_2 (< 0)$. Quindi la legge oraria è

$$x(t) = x_1 + v_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2 \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{6}$$

e la velocità

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_1 + a_2 (t - t_1) \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{7}$$

Come si sceglie la forma giusta per la legge oraria?
Dobbiamo scegliere una forma tale che a $t = t_1$ sia

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1 \\ v(t_1) &= v_1 \end{aligned} \tag{8}$$

Le Eq.(6) e (7) soddisfano queste condizioni, mentre se avessimo usato

$$x(t) = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \tag{9}$$

$$v(t) = v_1 + a_1 t \tag{10}$$

avremmo avuto

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1 + v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_2 t_1^2 \neq x_1 && (11) \\ v(t_1) &= v_1 + a_2 t_1 \neq v_1 && (12) \end{aligned}$$

le condizioni (8) non sarebbero state soddisfatte.

- Ora sappiamo che all'istante t_2 il punto si arresta, ossia

$$v(t_2) = 0 \tag{13}$$

Usando l'Eq.(7) per la velocità valutata in t_2:

$$v(t_2) = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = 0 \tag{14}$$

otteniamo

$$a_2 = -\frac{v_1}{t_2 - t_1} \tag{15}$$

Usando il risultato precedente $v_1 = a_1 t_1$ [Eq.(5)] otteniamo

$$a_2 = -\frac{a_1 t_1}{t_2 - t_1} \tag{16}$$

- Sostituiamo ora (solo ora!) i valori numerici

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_1 t_1}{t_2 - t_1} = \\ &= -\frac{3.1\,\mathrm{m/s^2}\,10.0\,\mathrm{s}}{22.4\,\mathrm{s} - 10.0\,\mathrm{s}} = \\ &= -\frac{31.0}{12.4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = \\ &= -2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} && (17) \end{aligned}$$

2. Per calcolare lo spazio percorso dal punto materiale possiamo procedere in due modi:

Primo modo
Ricordando l'Eq.(6) per la legge oraria valutata all'istante t_2 il punto si trova nella posizione

$$x(t_2) = x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 \tag{18}$$

Sostituendo in questa equazione i risultati ottenuti precedentemente

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \\ v_1 = a_1 t_1 \\ a_2 = -\frac{a_1 t_1}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} x_2 = x(t_2) &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a_1 t_1 (t_2 - t_1) = \\ &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_1 t_1 (t_2 - t_1) = \\ &= \frac{1}{2} a_1 t_1 t_2 && (19) \end{aligned}$$

NB: Non abbiamo sostituito il valore numerico di a_2 trovato prima, ma la sua espressione simbolica. Questo ci ha permesso di fare le semplificazioni algebriche e di arrivare ad un'espressione semplice.

Sostituiamo ora (solo ora!) i valori numerici

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \cdot 3.1 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \, 10.0 \, \mathrm{s} \cdot 22.4 \, \mathrm{s} = \\ &= 347.2 \, \mathrm{m} \end{aligned} \tag{20}$$

Secondo modo
Disegniamo l'andamento della velocità [Eq.(1) e (7)] in funzione del tempo

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t & 0 \leq t \leq t_1 \\ & \\ v_1 + a_2(t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \qquad (a_2 < 0) \end{cases} \tag{21}$$

che ha la forma di un triangolo.

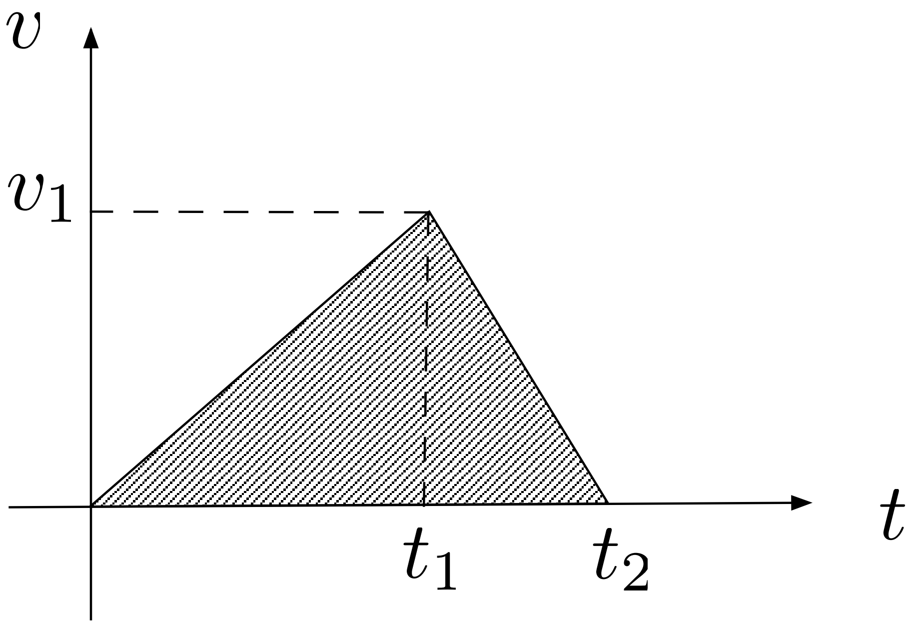

Figure 1: Legge oraria della velocità. Nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; t_1]$ il moto è uniformemente accelerato; la pendenza (= l'accelerazione) è costante e positiva. Nell'intervallo $t \in [t_1; t_2]$ il moto è uniformemente decelerato; la pendenza (=l'accelerazione) è costante e negativa.

La posizione finale si valuta come integrale della velocità

$$\begin{aligned} \underbrace{x(t_2)}_{x_2} - \underbrace{x(t=0)}_{=0} &= \int_0^{t_2} \frac{dx}{dt}\, dt = \int_0^{t_2} v(t)\, dt = \\ & \quad [\text{integrale=area del triangolo= base} \times \text{altezza } /2] = \\ &= \frac{1}{2} t_2 \, v_1 \end{aligned} \tag{22}$$

Ricordando che $v_1 = a_1 t_1$ otteniamo

$$x_2 = \frac{1}{2} a_1 t_1 t_2 \tag{23}$$

che coincide col risultato trovato precedentemente.

COMMENTO
Disegniamo la legge oraria [Eq.(2) e (6)]

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}a_1 t^2 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \\ v_1(t-t_1) + \frac{1}{2}a_2(t-t_1)^2 & t_1 \leq t \leq t_2 \qquad (a_2 < 0) \end{cases}$$

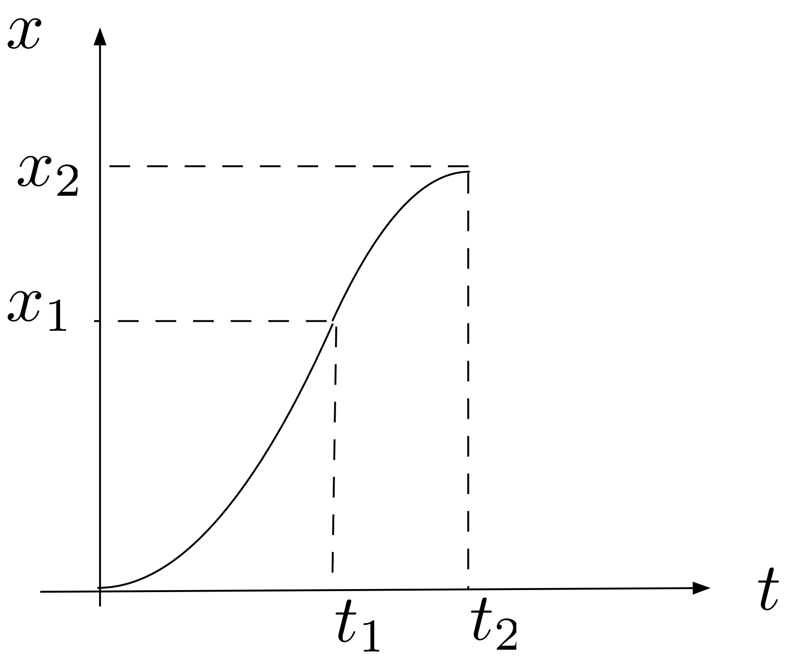

Figure 2: Legge oraria è costituita da due parabole: nell'intervallo $t \in [0\,\mathrm{s}; t_1]$ la concavità è rivolta verso l'alto perché l'accelerazione è positiva, mentre nell'intervallo $t \in [t_1; t_2]$ la concavità è rivolta verso il basso perché l'accelerazione è negativa. Si noti che nell'istante $t = t_1$ le due parabole hanno la stessa pendenza, che non è altro che la velocità all'istante t_1. Tale pendenza è data dal valore della velocità v_1, corrispondente al vertice in del triangolo in Fig.1. Il grafico di Fig.1 è la derivata del grafico della legge oraria $x(t)$.