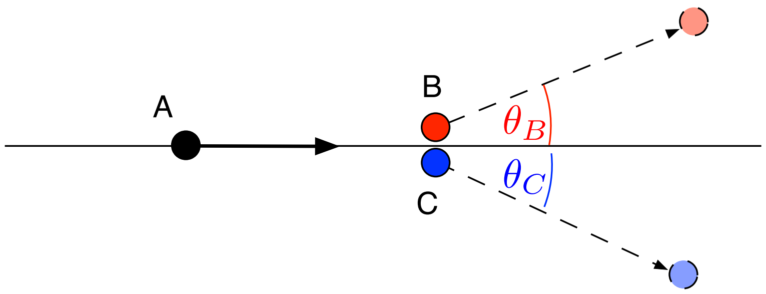
Esercizio (tratto dal Problema 8.13 del Mazzoldi 2)

Due punti materiali B e C a contatto, di massa m, vengono urtati elasticamente da un terzo punto A di pari massa, che si muove lungo la direzione x con velocità $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$. Dopo l'urto la velocità del punto A è lungo l'asse x, mentre B e C si muovono lungo due direzioni, che formano un angolo $\theta_B = 30^o$ e $\theta_C = -30^o$ con tale asse. Calcolare le velocità dei tre punti dopo l'urto.



SOLUZIONE

- **conservazione della quantità di moto attraverso l'urto**
  Dato che nell'urto si sviluppano solo forze interne al sistema delle tre masse, la quantità di moto totale si conserva attraverso l'urto:

$$\vec{P}(\text{prima}) = \vec{P}(\text{dopo})$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} P_x(\text{prima}) = P_x(\text{dopo}) \\ \\ P_y(\text{prima}) = P_y(\text{dopo}) \end{array} \right. \tag{1}$$

ossia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mv_0 &=& mv'_A + m\,v'_{B,x} + m\,v'_{C,x} \\ \\ 0 &=& m\,v'_{B,y} + m\,v'_{C,y} \end{array} \right. \tag{2}$$

Esprimendo le componenti in coordinate polari e ricordando che $\theta_B = -\theta_C = \pi/6$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mv_0 &=& mv'_A + mv'_B\cos\theta_B + mv'_C\cos\theta_C = m\left(v'_A + \frac{\sqrt{3}}{2}(v'_B + v'_C)\right) \\ \\ 0 &=& 0 + mv'_B\sin\theta_B + mv'_C\sin\theta_C = m\frac{1}{2}(v'_B - v'_C) \end{array} \right. \tag{3}$$

si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v'_B &=& v'_C \\ v_0 &=& v'_A + \sqrt{3}\,v'_B \end{array} \right. \tag{4}$$

- **conservazione dell'energia cinetica attraverso l'urto**
  Il testo dice che l'urto è elastico, e dunque l'energia cinetica si conserva:

$$\begin{array}{rcl} K(\text{prima}) &=& K(\text{dopo}) \\ &\Downarrow& \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &=& \frac{1}{2}m{v'_A}^2 + \frac{1}{2}m{v'_B}^2 + \frac{1}{2}m{v'_C}^2 \\ &\Downarrow& [\text{uso } v'_B = v'_C \text{ dalla (4)}] \\ v_0^2 &=& {v'_A}^2 + 2{v'_B}^2 \end{array} \tag{5}$$

La seconda delle equazioni (4) e l'Eq.(5) costituiscono un sistema di due equazioni per le due incognite v'_A e v'_B

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} v_0 &=& v'_A + \sqrt{3}\,v'_B & \rightarrow & v'_A = v_0 - \sqrt{3}\,v'_B \\ \\ v_0^2 &=& {v'_A}^2 + 2{v'_B}^2 & \rightarrow & v_0^2 = (v_0 - \sqrt{3}\,v'_B)^2 + 2{v'_B}^2 \end{array} \right. \tag{6}$$

  - Dalla seconda equazione (6) otteniamo

$$\begin{array}{rcl} v_0^2 &=& v_0^2 - 2\sqrt{3}\,v_0\,v'_B + 5{v'_B}^2 \\ &\Downarrow& \\ 0 &=& v'_B\,(5v'_B - 2\sqrt{3}\,v_0) \end{array} \tag{7}$$

Scartando la soluzione $v'_B = 0$ (il testo dice che B e C si muovono dopo l'urto), si ottiene

$$v'_B = v'_C = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, v_0 \tag{8}$$

e sostituendo i dati

$$v'_B = v'_C = \frac{2\sqrt{3}}{5}\, 5\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3.46\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{9}$$

– Sostituendo nella prima equazione (6) otteniamo

$$v'_A = v_0 - \sqrt{3}\, v'_B = v_0(1 - \sqrt{3}\, \frac{2\sqrt{3}}{5}) = -\frac{1}{5} v_0 \tag{10}$$

e sostituendo i dati

$$v'_A = -\frac{1}{5} \cdot 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -1\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{11}$$

ossia la massa A torna indietro lungo l'asse x.