ELETTROTECNICA

Ingegneria Industriale

– POTENZA–

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Elettrotecnica (043IN)

a.a. 2013-14

Classificazione dei componenti in base alla potenza

- Se, per qualsiasi valore di t, valgono le seguenti relazioni, si ha che il componente è (convenzione normale):

- Dissipativo: $p(t) \geq 0$

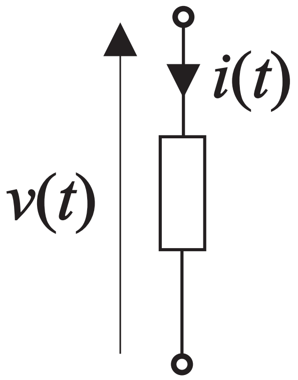
- Strettamente attivo: $p(t) \leq 0$

- Inerte: $p(t) = 0$

- Attivo: *altrimenti*

Potenza istantanea di un bipolo in regime sinusoidale

- Consideriamo un bipolo di impedenza *z* sottoposto alle seguente tensione e corrente e calcoliamo la potenza $p(t)$



$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V) \text{ V}$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_I) \text{ A}$$

$$p(t) = v(t) i(t) =$$
$$= V_M \cos(\omega t + \varphi_V)\, I_M \cos(\omega t + \varphi_I) =$$
$$= V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) =$$
$$= \frac{V_M I_M}{2} \left[\cos(\varphi_V - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)\right] =$$
$$= \frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) +$$
$$+ \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$

Potenza istantanea di un bipolo in regime sinusoidale (2)

- In alternativa, per il calcolo della potenza istantanea si possono utilizzare i fasori

$$v(t) \rightarrow \overline{V} = V_M e^{j\varphi_V}$$
$$i(t) \rightarrow \overline{I} = I_M e^{j\varphi_I}$$

$$p(t) = v(t)i(t) = \Re\left[\overline{V}e^{j\omega t}\right]\Re\left[\overline{I}e^{j\omega t}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\overline{V}e^{j\omega t} + \overline{V}^* e^{-j\omega t}\right]\frac{1}{2}\left[\overline{I}e^{j\omega t} + \overline{I}^* e^{-j\omega t}\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega t} + \overline{V}\,\overline{I}^* + \overline{V}^*\overline{I} + \overline{V}^*\overline{I}^* e^{-j2\omega t}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\Re\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right] + \frac{1}{2}\Re\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega t}\right] =$$
$$= \frac{V_M I_M}{2}\cos(\varphi_V - \varphi_I) +$$
$$+ \frac{V_M I_M}{2}\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$

Potenza istantanea di un bipolo in regime sinusoidale (3)

- Resistenza:

$$\bar{V} = R\bar{I} \rightarrow \varphi = 0 \rightarrow \varphi_I = \varphi_V$$

$$V_M = RI_M$$

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2}\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V)\right] \text{ W}$$

- Condensatore:

$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I} \rightarrow \varphi = -\pi/2 \rightarrow \varphi_I = \varphi_V + \pi/2$$

$$I_M = \omega C V_M$$

$$p(t) = \frac{1}{2}\omega C V_M^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_V + \pi/2) \text{ W}$$

- Induttore:

$$\bar{V} = j\omega L\bar{I} \rightarrow \varphi = \pi/2 \rightarrow \varphi_V = \varphi_I + \pi/2$$

$$V_M = \omega L I_M$$

$$p(t) = \frac{1}{2}\omega L I_M^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_I + \pi/2) \text{ W}$$

Potenza attiva di un bipolo

- Calcoliamo la **potenza attiva** come media della potenza istantanea su un multiplo di un semi-periodo $T/2$ ($T = 2\pi/\omega$)

$$P = \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} p(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) =$$

$$= \frac{V_M I_M}{2} \cos\varphi \ \text{[W]}$$

$$\text{dove}: t_B - t_A = k\frac{T}{2},\ k >> 1,\ \varphi = \varphi_V - \varphi_I$$

- Resistenza: $\varphi = 0$; $p(t) \geq 0 \rightarrow P = V_M I_M / 2$

- Condensatore: $\varphi = -\pi/2 \rightarrow P = 0$

- Induttore: $\varphi = \pi/2 \rightarrow P = 0$

Potenza attiva e apparente

- La potenza media è chiamata “attiva”. Rappresenta l’energia convertibile in lavoro. Per un bipolo con impedenza *z* (fase φ) si ha:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \cos\varphi \quad [\mathrm{W}]$$

- Dove:

$$P_{app} = \frac{V_M I_M}{2} \quad [\mathrm{VA}]$$

- È la potenza apparente

- cosφ: è il fattore di potenza

Valore efficace

- La potenza dipende dal quadrato della tensione o della corrente. Introduciamo perciò la media del quadrato di una di queste due grandezze

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T v^2(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

- In regime sinusoidale ciò corrisponde a

$$V_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_M\,, \quad I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_M$$

Valore efficace (2)

- La potenza attiva e quella apparente si esprimono quindi con i valori efficaci come

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi$$

$$P_{app} = V_{eff} I_{eff}$$

- Alimentando un resistore con una sorgente sinusoidale a tensione V_{eff}, ottengo la stessa dissipazione di potenza che avrei se lo alimentassi con una sorgente costante sempre a valore V_{eff}
- Se non altrimenti specificato, d'ora in poi il modulo dei fasori sarà formato con il valore efficace della funzione sinusoidale

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi), \quad \overline{X} = \frac{X_M}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$\overline{X} = X_{eff} e^{j\varphi}, \quad x(t) = \Re\left\{\sqrt{2}\,\overline{X} e^{j\omega t}\right\}$$

Potenza complessa

- Si definisce come

$$P_c = \overline{V}\ \overline{I}^* = |\overline{V}||\overline{I}|e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} =$$

$$= |\overline{V}||\overline{I}|\cos\varphi + j|\overline{V}||\overline{I}|\sin\varphi$$

- Potenza attiva:

$$P = \Re\{P_c\} = |\overline{V}||\overline{I}|\cos\varphi \ [\mathrm{W}]$$

- Potenza reattiva

$$Q = \Im\{P_c\} = |\overline{V}||\overline{I}|\sin\varphi \ [\mathrm{VAR}]$$

- Potenza apparente

$$P_{app} = |P_c| = |\overline{V}||\overline{I}| \ [\mathrm{VA}]$$

Potenza complessa nei bipoli elementari

- Resistenza

$$P_c = P = \left|\overline{V}\right|\left|\overline{I}\right| = R\left|\overline{I}\right|^2 = \frac{\left|\overline{V}\right|^2}{R}$$

$$Q = 0$$

- Condensatore

$$P_c = jQ = -j\left|\overline{V}\right|\left|\overline{I}\right| \rightarrow Q = -\left|\overline{V}\right|\left|\overline{I}\right| = -\omega C\left|\overline{V}\right|^2$$

$$P = 0$$

- Induttore

$$P_c = jQ = j\left|\overline{V}\right|\left|\overline{I}\right| \rightarrow Q = \left|\overline{V}\right|\left|\overline{I}\right| = \omega L\left|\overline{I}\right|^2$$

$$P = 0$$

Espressioni della potenza complessa

- $P_c = \overline{V}\,\overline{I}^* = z\overline{I}\,\overline{I}^* = z\left|\overline{I}\right|^2 = R\left|\overline{I}\right|^2 + jX\left|\overline{I}\right|^2$

  $\overline{V} = z\overline{I}$

- $P_c = \overline{V}\,\overline{I}^* = \overline{V}\left(\overline{V} / z\right)^* = \dfrac{\left|\overline{V}\right|^2}{z^*} =$

  $\overline{I} = \overline{V} / z$

  $= \left|\overline{V}\right|^2 \dfrac{R}{R^2 + X^2} + j\left|\overline{V}\right|^2 \dfrac{X}{R^2 + X^2}$

- $P_c = \overline{V}\,\overline{I}^* = y^*\overline{V}\,\overline{V}^* = y^*\left|\overline{V}\right|^2 = G\left|\overline{V}\right|^2 - jB\left|\overline{V}\right|^2$

  $\overline{I} = y\overline{V}$

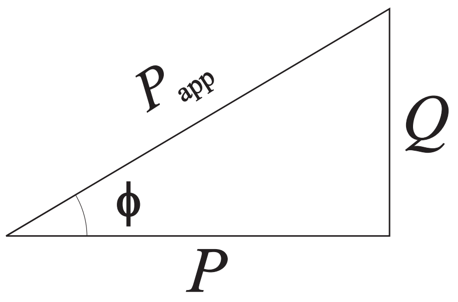
- $P_c = \overline{V}\,\overline{I}^* = \left(\overline{I} / y\right)\overline{I}^* = \dfrac{\left|\overline{I}\right|^2}{y} =$

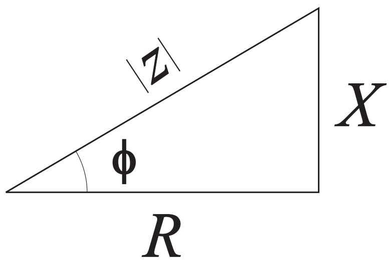
  $\overline{V} = \overline{I} / y$

  $= \left|\overline{I}\right|^2 \dfrac{G}{G^2 + B^2} + j\left|\overline{I}\right|^2 \dfrac{-B}{G^2 + B^2}$

Triangolo delle potenze

- Consideriamo la potenza complessa e le potenze attiva e reattiva. Il triangolo formato è simile al triangolo dell'impedenza.





- Si possono applicare il teorema di Pitagora e le formule della trigonometria

$$P_{app}^2 = P^2 + Q^2$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Q}{P}$$

Potenza istantanea per il trifase

- Si possono ricavare dalla potenza istantanea le seguenti espressioni che saranno utili nello studio dei sistemi trifase

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos\varphi \left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V)\right] +$$
$$+ \frac{V_M I_M}{2} \sin\varphi \, \sin(2\omega t + 2\varphi_V) =$$
$$= P\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V)\right] + Q \sin(2\omega t + 2\varphi_V)$$

Teorema di Boucherot

- Facciamo il bilancio delle potenze complesse in un circuito in regime sinusoidale. Da Tellegen, risulta che

$$P_{Ctot} = \sum_k P_{ck} = \overline{\mathbf{V}}^T \overline{\mathbf{I}}^* = 0$$

$$\Rightarrow \sum_k P_k = 0, \qquad \sum_k Q_k = 0$$

- Nel computo delle potenze, si deve prestare attenzione alla convenzione usata per i versi delle tensioni e delle correnti dei componenti

Teorema di Boucherot (2)

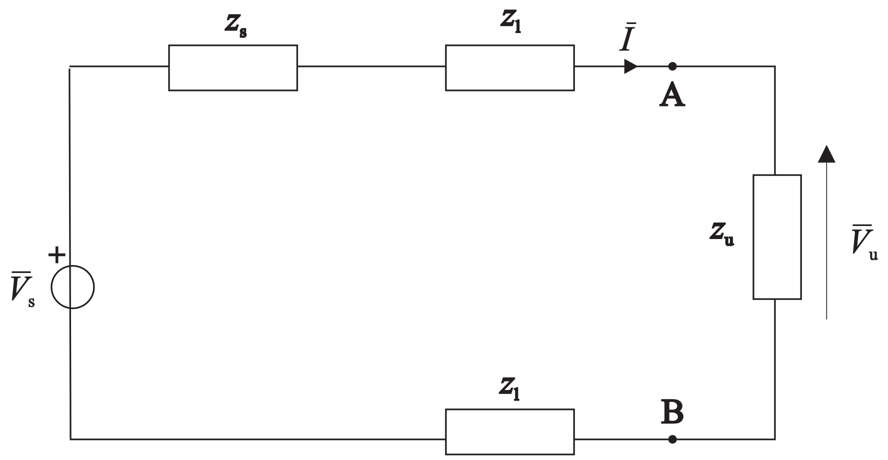
- Il teorema di Boucherot può essere utilizzato per caratterizzare da un punto di vista energetico un bipolo

- Nel caso di un risonante serie, considerato che la potenza reattiva di un condensatore è negativa mentre quella di un induttore è positiva, il bipolo sarà resistivo-induttivo o resistivo-capacitivo a seconda del componente reattivo che ha la maggiore potenza reattiva in valore assoluto

$$\begin{cases} Q_z = Q_C + Q_L \\ P_z = P_R \end{cases}$$

Rifasamento totale di un carico induttivo

- Consideriamo il seguente circuito di alimentazione di un carico z_u induttivo tramite una linea di trasmissione con impedenza z_l



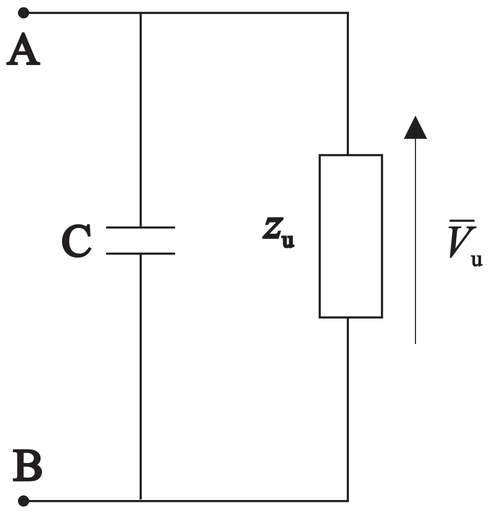
- Calcoliamo le perdite sulla linea

$$P_l = 2R_l\left|\bar{I}\right|^2 \qquad P_u = \left|\bar{V}_u\right|\left|\bar{I}\right|\cos\varphi_u \quad \Rightarrow \quad P_l = \frac{2R_l P_u^2}{\left|\bar{V}_u\right|^2\left(\cos\varphi_u\right)^2}$$

- Per minimizzare P_l si deve portare φ_u a zero

Rifasamento totale di un carico induttivo (2)

- Si inserisce quindi un condensatore C in parallelo per compensare la potenza reattiva Q_u del carico (e per annullare la $\Im\{y_u + y_C\}$)



$$Q_C + Q_u = 0 \rightarrow -\omega C |V_u|^2 + Q_u = 0$$

$$C = \frac{Q_u}{\omega |V_u|^2} = \frac{Q_u}{2\pi f |V_u|^2}$$

$$\Im\{y_u + j\omega C\} = 0 \rightarrow C = \frac{-B_u}{\omega}$$