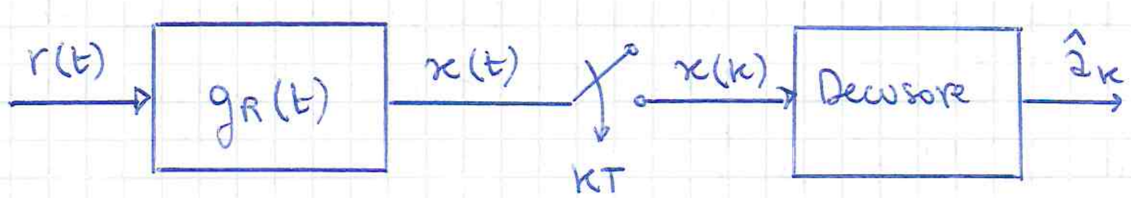
Calcolo della SER per un sistema PAM M-ario

Consideriamo un sistema PAM con alfabeto M-ario

$$\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

Vogliamo calcolare la probabilità media di errore sul simbolo deciso ammettendo che i simboli siano equiprobabili e che non sia presente ISI in ingresso al ricevitore. Lo schema del ricevitore è mostrato nella figura seguente.



Supponiamo che i filtri di trasmissione e ricezione siano entrambi a radice di coseno rialzato.

Il segnale ricevuto è espresso da

$$r(t) = s_R(t) + w(t)$$

dove

$$s_R(t) = A \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

mentre $w(t)$ è rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_w(f) = N_0/2$. Il coefficiente A tiene conto dell'attenuazione introdotta dal canale trasmissivo. Poichè vedremo come la SER dipende dall'energia media per simbolo ricevuto E_s, conviene trovare il legame tra E_s e l'attenuazione A.
La densità spettrale di potenza del segnale utile $s_R(t)$ è

$$S(f) = \frac{A^2}{T} E\{a_i^2\} |G_T(f)|^2$$

dove si è tenuto conto del fatto che, per simboli indipendenti ed equiprobabili, risulta

$$S_a(f) = E\{a_i^2\} = \frac{M^2 - 1}{3}$$

L'energia E_s per simbolo ricevuto è quindi

$$E_s = T \int_{-\infty}^{\infty} S(f) = \frac{A^2}{3}(M^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df$$

Poiché $G_T(f)$ è un impulso a radice di coseno rialzato, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f)\, df = g_{RCR}(0) = 1$$

e si trova quindi

$$E_s = \frac{A^2}{3}(M^2-1) \implies \boxed{A = \sqrt{\frac{3E_s}{M^2-1}}}$$

Dopo il filtro di ricezione abbiamo il segnale

$$x(t) = A \sum_i a_i g(t-iT) + n(t)$$

dove $g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$ è un impulso a coseno rialzato mentre $n(t)$ è un processo Gaussiano, a media nulla e potenza

$$\sigma^2 = E\{n^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2 df$$

Tenendo conto che $G_R(f)$ è un impulso a radice di coseno rialzato, si ha

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f)\, df = \frac{N_0}{2}$$

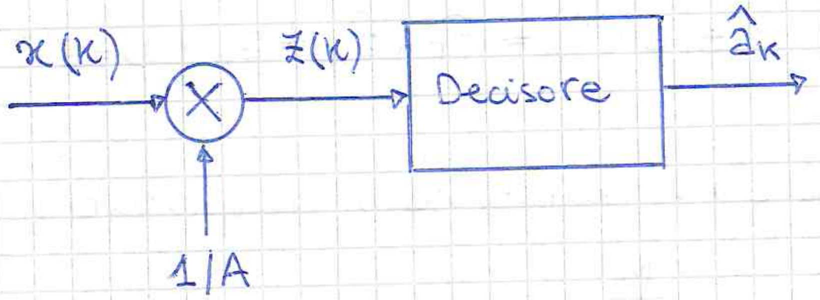
Il campione in uscita dal filtro di ricezione è allora

$$x(k) = A a_k + n_k$$

in cui $n_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ è una variabile aleatoria Gaussiana. Come si vede, il campione $x(k)$ è una versione "scalata" del simbolo trasmesso a_k immerso in rumore Gaussiano. Se il campione $x(k)$ fosse inviato direttamente in ingresso al decisore, le soglie di decisione dovrebbero essere opportunamente dimensionate tenendo conto dell'attenuazione A del canale, che può variare in modo imprevedibile a seconda delle condizioni del mezzo trasmissivo. Le soglie dovrebbero quindi essere ADATTATIVE, ovvero dovrebbero essere di volta in volta variate in accordo alle condizioni del canale. Poiché ciò non è pratico, si preferisce scalare opportunamente il segnale per il fattore A, in modo da rendere fisse le soglie del decisore. Pertanto, in ingresso al decisore viene inviato il campione

$$z(k) = \frac{1}{A} x(k)$$

secondo quanto riportato nella figura seguente



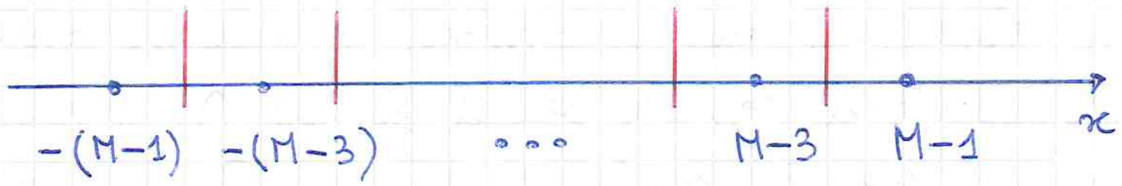
Il campione $z(k)$ è espresso da

$$z(k) = a_k + \eta_k$$

dove η_k è una variabile aleatoria Gaussiana, a media nulla, e con varianza

$$\sigma_\eta^2 = \frac{\sigma^2}{A^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{M^2-1}{3E_s} = \frac{M^2-1}{6(E_s/N_0)}$$

Il decisore suddivide l'asse x in zone di decisione, come mostrato nella figura seguente, con le soglie poste esattamente a metà tra due simboli adiacenti (strategia MV)



Usando il teorema della probabilità totale, si può esprimere la SER come

$$SER = \sum_{m=1}^{M} P(e|a^{(m)})\, P(a_k = a^{(m)})$$

dove

$$P(e|a^{(m)}) = Pr\{\hat{a}_k \neq a_k \,|\, a_k = a^{(m)}\}$$

Tenendo conto che i simboli sono equiprobabili, si ha

$$SER = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} P(e|a^{(m)})$$

per cui restano ora da calcolare le M probabilità condizionate $P(e|a^{(m)})$ per $m = 1, 2, \dots, M$. L'analisi dell'alfabeto $\mathcal{A}$ impiegato e delle zone di decisione poste sull'asse x, indica che i punti "interni" dell'alfabeto, ovvero i simboli $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-3)\}$, sono caratterizzati da zone di decisione di ampiezza 2 centrate sul corrispondente simbolo, per cui essi avranno stesse probabilità di errore condizionate. Discorso analogo vale per i due simboli laterali $\pm (M-1)$ di $\mathcal{A}$, per i quali le zone di decisione sono due semirette $(-\infty, -M+2)$ e $(M-2, +\infty)$, e avranno quindi stesse probabilità di errore condizionate.
Riassumendo quanto finora detto, possiamo scrivere

$$P(e|a^{(m)}) = P(e|a_k = 1) \quad \text{se } a^{(m)} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-3)\}$$

$$P(e|a_k = -M+1) = P(e|a_k = M-1)$$

per cui l'espressione della probabilità di errore media diventa

$$SER = \frac{M-2}{M} P(e|a_k = 1) + \frac{2}{M} P(e|a_k = M-1)$$

Calcoliamo ora le due probabilità di errore condizionate.

a) <u>Calcolo di $P(e|a_k = 1)$</u>

Condizionatamente all'aver trasmesso il simbolo $a_k = 1$, il campione ricevuto è espresso da

$$Z(k) = 1 + \eta_k$$

Poiché la zona di decisione relativa al simbolo $a_k = 1$ è l'intervallo $[0, 2]$

si ottiene infine

$$P(e|a_k=1) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

3) Calcolo di $P(e|a_k = M-1)$

Condizionatamente all'aver trasmesso il simbolo $a_k = M-1$, il campione ricevuto è espresso da

$$z(k) = M-1+\eta_k$$

Poichè la zona di decisione relativa a tale simbolo è la semi=retta $(M-2, +\infty)$

$$P(e|a_k=M-1) = \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma_\eta^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1/\sigma_\eta}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti, si trova

$$SER = \frac{M-2}{M} \cdot 2Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)$$

e, tenendo conto dell'espressione di σ_n, si ha

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(E_s/N_0)}{M^2-1}}\right)$$

In termini di E_d/N_0, la SER di un sistema PAM è allora

$$\boxed{SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(E_d/N_0)\log_2 M}{M^2-1}}\right)}$$

In particolare, per un PAM binario si ha $(M=2)$

$$\boxed{SER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_d}{N_0}}\right)} \quad \text{PAM binario}$$

Efficienza spettrale ed efficienza energetica

Si è visto come l'impulso di trasmissione $g_T(t)$ impiegato in un sistema PAM sia tipicamente a radice di coseno rialzato. Nel caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso è allora

$$S_s(f) = \frac{M^2-1}{3T} |G_T(f)|^2 = \frac{M^2-1}{3T} G_{RCR}(f)$$

per cui la banda impegnata dal segnale PAM è

$$B_T = \frac{1+\alpha}{2T}$$

e dipende sia dal fattore di roll-off α che dalla frequenza di segnalazione $f_s = 1/T$.

L'efficienza spettrale del sistema PAM è definita da

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_T} \qquad \text{(bit/s per Hz)}$$

dove

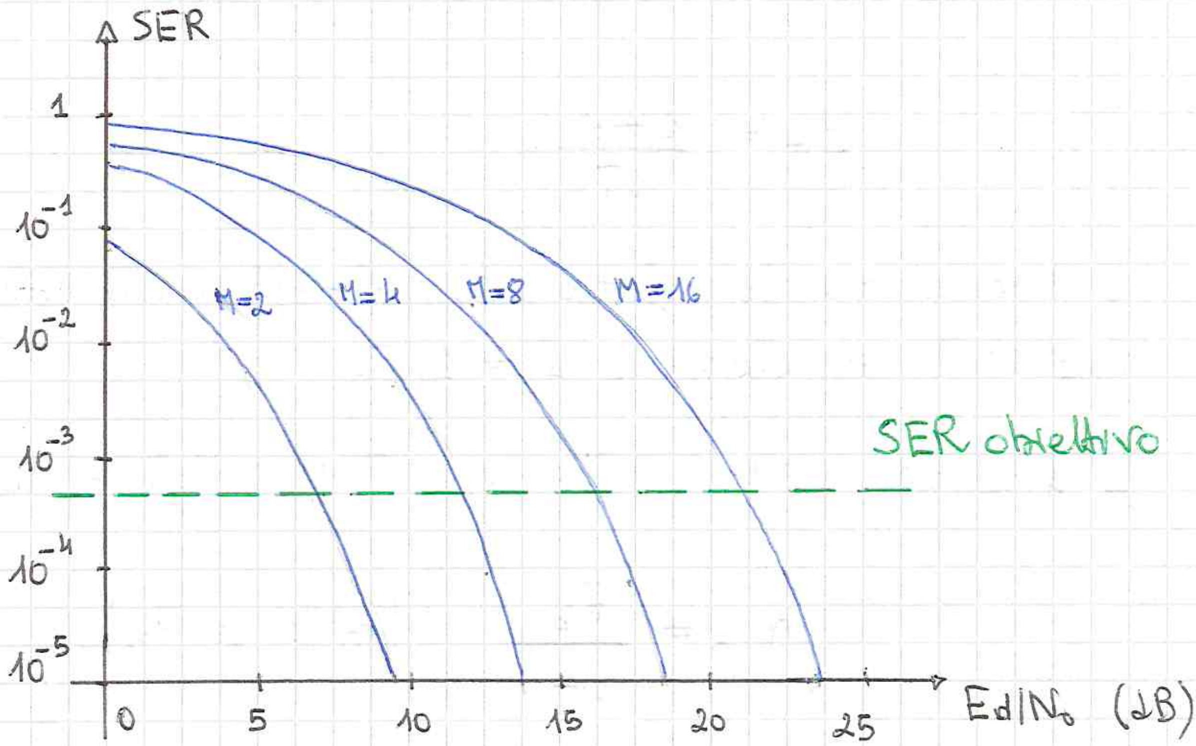
$$R_b = \frac{\log_2 M}{T}$$

è il bit-rate. Si ha pertanto

$$\boxed{\eta_{sp} = \frac{2\log_2 M}{1+\alpha}}$$

Questa espressione indica come l'efficienza spettrale del sistema aumenti al crescere della cardinalità M dell'alfabeto impiegato.

Per valutare l'efficienza energetica del sistema, occorre analizzare le curve di SER al variare del rapporto E_b/N_0. Tali curve sono mostrate nelle figure seguenti. La SER è espressa in scala logaritmica, ed il rapporto E_b/N_0 è espresso in dB.

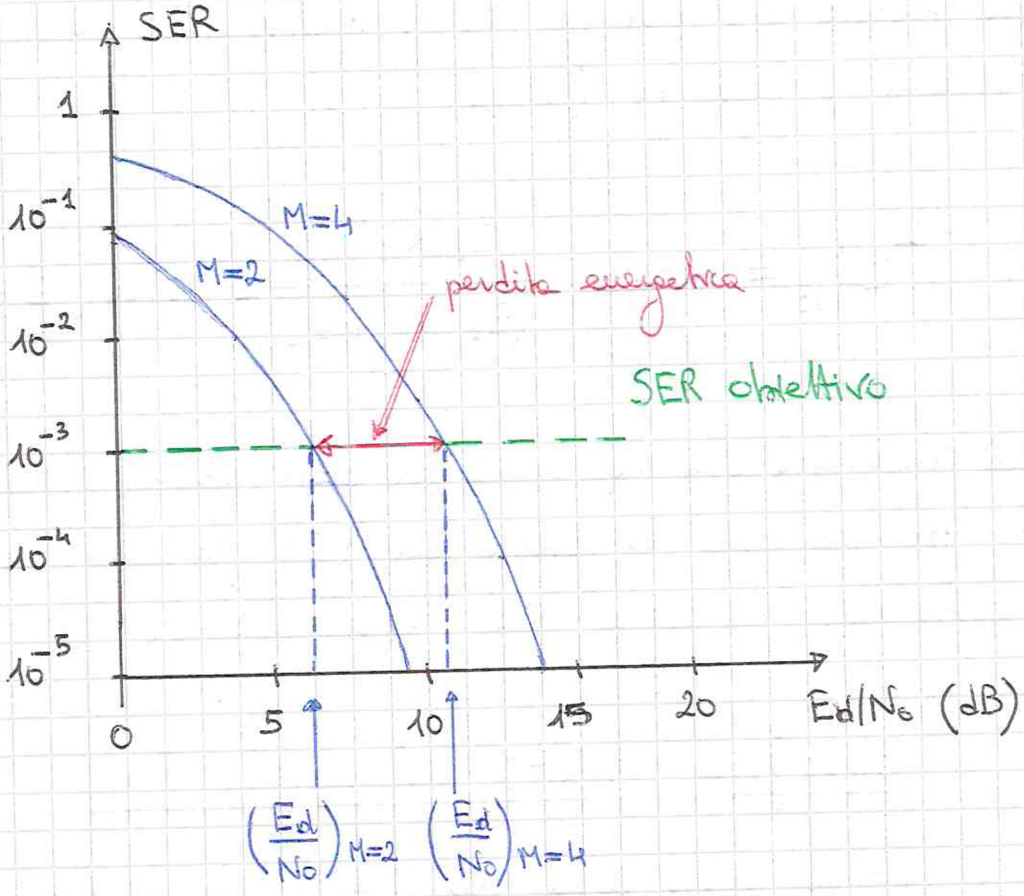


Come si vede, fissata una certa probabilità di errore obiettivo stabilita in base alla particolare applicazione (fonia, trasmissione dati, immagini), il rapporto E_d/N_0 richiesto per raggiungere la SER obiettivo cresce al crescere della cardinalità M dell'alfabeto impiegato. Questo indica come l'efficienza energetica del sistema diminuisca al crescere di M.

Possiamo quindi concludere che la scelta dell'alfabeto A è pilotata da due esigenze contrastanti: da un lato sarebbe bene scegliere una cardinalità M elevata per aumentare l'efficienza spettrale, dall'altro lato la scelta di un valore M elevato pregiudica l'efficienza energetica del sistema.

Si definisce "perdita energetica" di un sistema di comuni=

cazione numerica A rispetto ad un sistema B l'aumento (in dB) del rapporto E_d/N_0 necessario al sistema A per raggiungere la stessa SER del sistema B. In figura seguente è mostrato graficamente la perdita del sistema PAM quaternario rispetto al sistema PAM binario.



Per calcolare la perdita in modo analitico, basta uguagliare l'espressione della SER del sistema PAM nei casi M=2 e M=4, ottenendo

$$\frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=4}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=2}}\right)$$

Nell'uguaglianza tra due funzioni Q si tendono a trascurare eventuali coefficienti moltiplicativi e si uguagliamo pertanto gli argomenti delle due funzioni Q. Così facendo, si ottiene

$$\frac{4}{5}\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=4} = 2\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=2}$$

La perdita del sistema PAM quaternario rispetto al PAM binario è quindi (in dB)

$$L\,\big|_{dB} = 10\log_{10}\frac{(E_d/N_0)_{M=4}}{(E_d/N_0)_{M=2}} = 10\log_{10}\frac{5}{2} \simeq 4\,dB$$

Ciò significa che la curva di SER per il PAM quaternario è praticamente la stessa del PAM binario, salvo una traslazione di circa 4dB verso destra.