Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

COMUNICAZIONI NUMERICHE

II^a PROVA FACOLTATIVA – 10-06-09

Esercizio 1

Al ricevitore di Fig. 1 viene applicato il segnale PAM in banda passante $r(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)\cos(2\pi f_0 t) + w(t)$ con $f_0 >> 1/T$, simboli a_i, indipendenti ed equiprobabili, appartenenti all'alfabeto $A \equiv [-1,1]$. Il rumore w(t) introdotto dal canale è Gaussiano, a media nulla, con densità spettrale di potenza $S_W(f) = \frac{N_0}{2} \cdot \{G_T(f - f_0) + G_T(f + f_0)\}$ dove $G_T(f) = \sqrt{T \cdot |f|}\, rect(fT/2)$ è lo spettro dell'impulso trasmesso $g_T(t)$. Nell'ipotesi che la risposta impulsiva del filtro in ricezione sia $g_R(t) = g_T(t)$, e che il decisore sia un comparatore a soglia zero con livelli ± 1, si calcoli:

1) L'equivalente in banda base del ricevitore, rispetto alla frequnza f_0
2) L'energia trasmessa media per simbolo
3) La densità spettrale di potenza della componente di rumore all'uscita del filtro in ricezione $g_R(t)$
4) La risposta impulsiva del sistema e si verifichi la condizione di Nyquist.
5) La Probabilità di errore su Bit (BER).

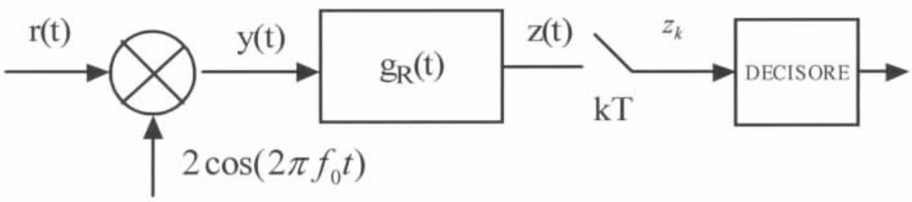


Fig.1

Esercizio 2

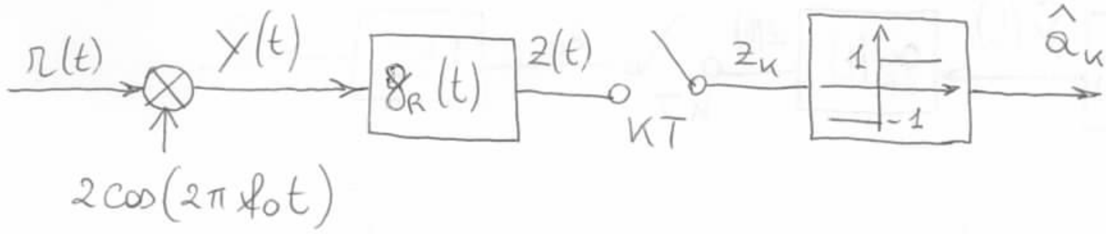
Si enunci il teorema di Lucky per un equalizzatore Zero Forcing (ZF) per un sistema PAM in banda base e se ne faccia uso per il calcolo dei coefficienti (p_{-1}, p_0, p_1) di un equalizzatore a tre prese, nell'ipotesi che risposta impulsiva numerica del sistema sia $g(k) = \frac{1}{4}\delta(k+1) + \delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k-1)$.

Esercizio 3

Si definisca e si descrivano i principali parametri del quantizzatore "Mid-riser" di un sistema PCM.

COMPITINO 10/6/03

ESERCIZIO 1

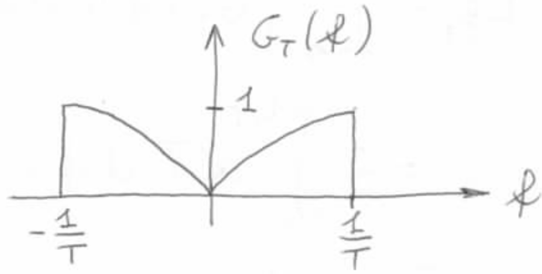


$$r(t) = s(t) + w(t) \qquad \text{con } s(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)\cos(2\pi f_0 t)$$

$w(t)$ Gaussiano, $\eta_w = 0$ e $S_w(f) = \frac{N_0}{2}\left[G_T(f - f_0) + G_T(f + f_0)\right]$

$$G_T(f) = \sqrt{T}\sqrt{|f|}\,\mathrm{rect}(fT/2)$$

$$G_R(f) = G_T(f)$$



1. Equivalente in B.B. del rx

$$\tilde{r}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{w}(t)$$

$$\tilde{s}(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

$$S_{\tilde{w}}(f) = 2N_0 G_T(f), \quad S_{w_c}(f) = S_{w_s}(f) = N_0 G_T(f)$$

$$r(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{r}(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{\tilde{r}(t)e^{j\omega_0 t} + \tilde{r}^*(t)e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

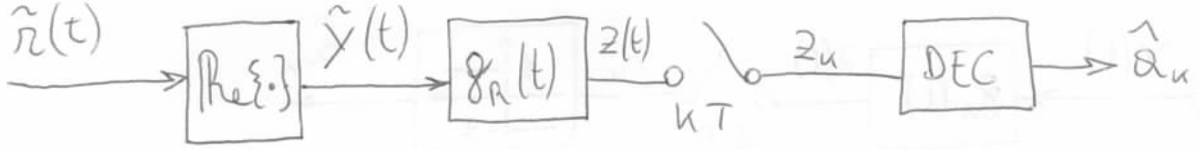
Ricordando che:

$$2\cdot\cos(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow 2r(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{\tilde{r}(t)e^{j2\omega_0 t}}{2} + \underbrace{\frac{\tilde{r}(t) + \tilde{r}^*(t)}{2}}_{= \mathrm{Re}\{\tilde{r}(t)\}} + \frac{\tilde{r}^*(t)e^{-j2\omega_0 t}}{2}$$

, questa è la componente in BB che è la sola parte di segnale che passa dal filtro in ricezione $g_R(t)$

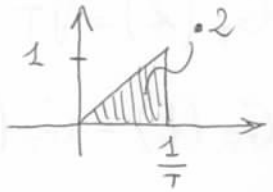
Di conseguenza, l'eq. in B.B. del ricevitore sarà:



2. Energia media trasmessa per simbolo $\bar{E}_T$

$$\bar{E}_T = E_{g_T}/2$$

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-1/T}^{1/T} |f| T \, df =$$



$$= 2 \int_0^{1/T} f T \, df = 2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_T = \frac{1}{2T}$$

3. La d.s.p. della componente di rumore all'uscita di $g_R(t)$

$\tilde{y}(t) = s_c(t) + w_c(t)$ dove $s_c(t) = \hat{s}(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT)$

$z(t) = z_c(t) + n_c(t)$ dove $z_c(t) = \sum_i a_i \, g(t - iT)$

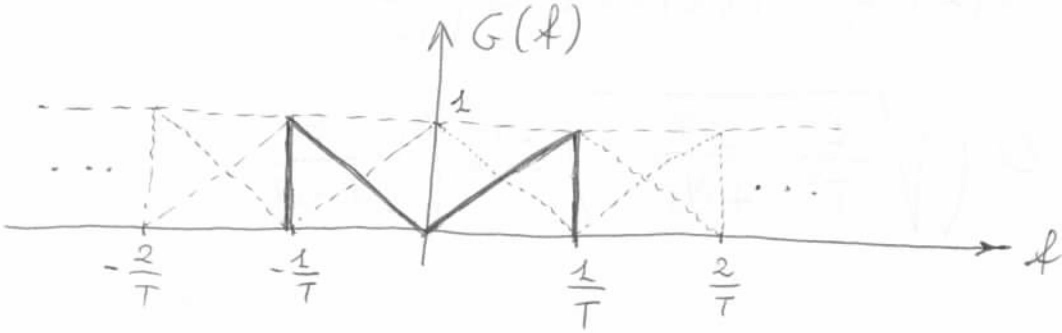
con $g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$

$$\Rightarrow S_{n_c}(f) = S_{w_c}(f) \, |G_R(f)|^2 = N_0 \, |G_T(f)|^3 =$$

$$= N_0 \, T^{3/2} \, |f|^{3/2} \, \mathrm{rect}(fT/2)$$

4. La risposta impulsiva del sistema e verificare la condizione di Nyquist

$$G(f) = G_T(f) \cdot G_R(f) = |G_T(f)|^2 = T\,|f|\,\mathrm{rect}(fT/2)$$



La condizione di Nyquist in frequenza:

$$\sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$$ è verificabile graficamente

$$\Rightarrow \quad g(kT) = \begin{cases} \frac{1}{T} & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

5. La probabilità d'errore su bit (BER)

$$z_k = g(0) \cdot a_k + n_{c_k} = \frac{1}{T} a_k + n_{c_k}$$

$$n_{c_k} \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_c}^2)$$

$$\sigma_{n_c}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_c}(f)\,df = N_0 T^{3/2} \cdot 2 \int_0^{1/T} f^{3/2}\,df =$$

$$= 2 N_0 T^{3/2} \cdot \frac{2}{5} f^{5/2} \Big|_0^{1/T} = \frac{4 N_0}{5} T^{3/2} \frac{1}{T^{3/2} \cdot T} =$$

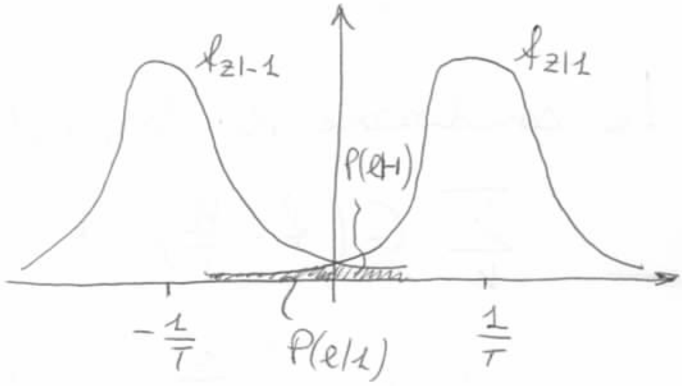
$$= \frac{4 N_0}{5T}$$

$$BER = P(e) = P(1)\,P(-\hat{1}\,|\,1) + P(-1)\,P(\hat{1}\,|-1)$$

$$P(-\hat{1}\,|\,1) = P(e\,|\,1) = Q\left(\frac{\eta_{z|1} - \lambda}{\sigma_{nc}}\right) = Q\left(\frac{1/T}{\sigma_{nc}}\right)$$

$$P(\hat{1}\,|-1) = P(e\,|-1) = P(e\,|\,1) = Q\left(\frac{1/T}{\sigma_{nc}}\right)$$

$$\Rightarrow BER = Q\left(\sqrt{\frac{1}{T^2}\cdot\frac{5T}{4N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{5}{4N_0T}}\right)$$



ESERCIZIO 2

$$q(k) = \sum_{\ell=-1}^{1} p_\ell \, g(k-\ell)$$ risposta impulsiva del sistema con equalizzatore

Teo di Lucky: $q(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=\pm 1 \end{cases}$ se $D_{IN} < 1$

$$g(k) = \frac{1}{4}\delta(k+1) + \delta(k) + \frac{1}{4}\delta(k-1)$$

$$D_{IN} = (M-1)\frac{\sum_{j\neq 0} |g(j)|}{g(0)} = \frac{1/4 + 1/4}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\begin{cases} q(0) = p_{-1}\,g(1) + p_0\,g(0) + p_1\,g(-1) = 1 \\ q(1) = p_{-1}\,g(2) + p_0\,g(1) + p_1\,g(0) = 0 \\ q(-1) = p_{-1}\,g(0) + p_0\,g(-1) + p_1\,g(-2) = 0 \end{cases}$$

Dal momento che: $g(1) = g(-1) = 1/4$, $g(0) = 1$, $g(\pm 2) = 0$

$$\begin{cases} q(0) = p_{-1}/4 + p_0 + p_1/4 \\ q(1) = p_0/4 + p_1 = 0 \\ q(-1) = p_{-1} + p_0/4 = 0 \end{cases}$$

Dalla 1° eq:

$$-\frac{1}{16}p_0 + p_0 - \frac{1}{16}p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{14}{16} = \frac{8}{7}$$

$$p_1 = -\frac{2}{7} = p_{-1}$$