# ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 34



## FORME CANONICHE

Già visto: data un'applic. lineare $f: V \to W$ e date una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $V$ e una base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di $W$, posso costruire la matrice associata ad $f$
(la sua colonna $j$ sono le componenti di $f(v_j)$ rispetto alla base di $W$)

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \vert & \vert & & \\ \vert & \vert & \cdots & \\ \vert & \vert & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \vdots \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \end{array}$$

Domande:

① Se cambio base in partenza ed arrivo, come cambia la matrice ?

② Se scelgo bene le basi, posso fare venire la matrice particolarmente semplice, cioè con tanti zeri ?

— o — o —

Risposta alla domanda ①: uso matrici di cambio base

Sia $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ una nuova base di $V$

Sia $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ una nuova base di $W$

Chi è la matrice che rappresenta $f$ nelle nuove basi ?

Costruisco la matrice $N$ che ha dim $n \times n$ e ha come colonne le comp. di $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$ rispetto a $v_1, v_2, \dots$.
Analogamente costruisco $M$ matrice $m \times m$ che ha come colonne le comp. di $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ rispetto a $w_1, \dots, w_m$.
Allora la matrice richiesta è

$$\boxed{M^{-1} A N}$$

rappresenta $f$ dalla $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ alla $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$

$M^{-1}$: INPUT: comp. vecchie di $f(v)$
OUTPUT: comp. nuove di $f(v)$

$A$: applica $f$
INPUT: componenti vecchie di $v \in V$
OUTPUT: " " di $f(v) \in W$

$N$: INPUT: componenti nuove in $V$
OUTPUT: " vecchie in $V$

— o — o —

Risposta domanda ② Supponiamo che
- dim $V = n$
- dim $W = m$
- dim $(\mathrm{Im}(f)) = r$

Allora scegliendo bene le basi la matrice diventa

$$\begin{array}{c} \\ m \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right. \\ \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{m} \end{array}$$

cioè c'è un blocco $r \times r$ che è l'identità e tutto il resto sono $0$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per il rank-nullity sappiamo che

$$k = \dim(\ker(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = n - r$$

Scelgo una base per il ker e la completo ad una base di $V$

$$\overbrace{v_1, \dots, v_r}^{\text{quelli aggiunti}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{base di ker}} \rightsquigarrow \text{base di } V$$

Considero $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2), \dots, w_r = f(v_r)$
e so che questi sono una base dell'immagine, che posso completare ad una base di $W$ aggiungendo
$w_{r+1}, \dots, w_m$

Usando queste basi in partenza ed arrivo ho la matrice voluta.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \leftarrow w_1 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots & & \vdots & \leftarrow w_2 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \leftarrow w_r \\ 0 & \vdots & & 0 & 0 & & 0 & \\ f(v_1) & \cdots & & f(v_r) & f(v_{r+1}) & & f(v_n) & \end{array}$$

— o — o —

<u>Esempio</u> Prendiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ che abbia come matrice associata, dalla canonica alla canonica

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A \qquad f(x,y,z) = (2x+5y+2z,\ 5x+2y+5z,\ 〃,\ 〃)$$

Posso trovare una matrice $4\times4$ $M$ ed una matrice $3\times3$ $N$ tale che

$$M^{-1} A N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow w_1 \\ \leftarrow w_2 \\ \leftarrow w_3 \\ \leftarrow w_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \end{array}$$

$r = 2$ perché rango$(A)$ è proprio 2

Cerco di costruire $M$ ed $N$ seguendo la dimostrazione

- Cerco $v_3$ nel ker. Dovrei imporre $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

comb. lin. delle 3 colonne con coeff. $x, y, z$

La scelta buona è $x=1,\ y=0,\ z=-1 \rightsquigarrow v_3=(1,0,-1)$ è una base del Ker.

- La completo ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo
  $v_1=(1,0,0)$ e $v_2=(0,1,0)$
  Verifico che sono una base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -1 \neq 0 \quad \text{Ok}$$

- La matrice $N$ richiesta è il cambio base in $\mathbb{R}^3$ dalla $v_1, v_2, v_3$ alla canonica, quindi ha come colonne le comp. di $v_1, v_2, v_3$ rispetto alla canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = N$$

- Per calcolare $M$ mi serve la base $w_1, w_2, w_3, w_4$ in arrivo. Dalla dimostrazione sopra sappiamo che
  $w_1 = f(v_1) = (2,5,2,5)$ ← 1ª colonna di A
  $w_2 = f(v_2) = (5,2,5,2)$ ← 2ª colonna di A
  Li completo ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo
  $w_3 = (1,0,0,0)$
  $w_4 = (0,1,0,0)$
  Dovrei verificare la lin. indip., ma è un semplice conto.
  Ora $M$ è la matrice che ha questi come colonne!

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si dovrebbe verificare che

$$M^{-1} A N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'unico conto da fare è l'inversione di $M$.

— o — o —

<u>Fatto generale</u>: potendo scegliere a piacimento le basi in partenza ed arrivo, la matrice si riduce ad avere $r$ volte $1$ ed il resto $0$, dove $r$ è il rango!

<u>Esempio</u> Consideriamo le 3 matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = B \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = C$$

Due di queste matrici rappresentano la stessa $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ soltanto in 2 basi diverse.

Si tratta di $B$ e $C$ perché hanno rango 1, mentre $A$ ha rango 2.
La matrice $A$ posso farla diventare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

← $B$ e $C$ possono diventare così

Questo vuol dire che esistono $M$ matrice $3 \times 3$ ed $N$ matrice $4 \times 4$ invertibili tali che

$$M^{-1} B N = C$$

Come trovo $M$ ed $N$.
Dalla teoria sappiamo che

$$M_B^{-1} B N_B = D \quad e \quad M_C^{-1} C N_C = D$$

Quindi

$$M_B^{-1} B N_B = M_C^{-1} C N_C$$

$$M_C M_B^{-1} B N_B N_C^{-1} = C$$

$$\underbrace{(M_B M_C^{-1})^{-1}}_{= M^{-1}} B \underbrace{(N_B N_C^{-1})}_{= N} = C$$

— o — o —