ALGEBRA LINEARE – LEZIONE

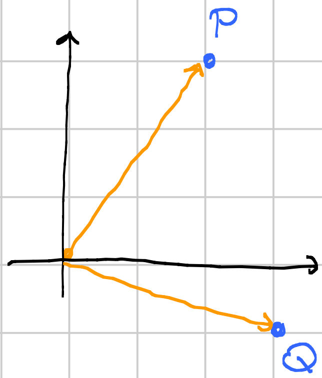
Note Title 28/09/2018

1. Spazi vettoriali e applicazioni lineari
2. Geometria analitica
3. Sistemi lineari
4. Prodotti scalari

MATRICI

Geometria analitica e vettori

Spazio che si considera: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, o più in generale $\mathbb{R}^n$.
Gli elementi hanno risp., 2, 3, ..., n coordinate



Posso identificare i p.ti del piano con coppie di numeri

$P = (2,3)$

$Q = (3,-1)$

componenti

Posso pensare i punti come "vettori" che hanno punto di applicazione nell'origine e "freccia" nel p.to in questione

Con un po' di astrazione posso pensare a vettori a n componenti

Notazione: in $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow (x,y)$

in $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow (x,y,z)$

$\vdots$

in $\mathbb{R}^{28} \rightsquigarrow (x_1, x_2, \dots, x_{28})$

— o — o —

Operazioni tra vettori
- somma (differenza)
- prodotto per uno scalare
- prodotto scalare
- norma

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Siano x e y in $\mathbb{R}^n$. Diciamo

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

Allora si definisce

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n)$$

$\boxed{\text{PRODOTTO PER UNO SCALARE}}$ Prodotto tra un vettore e un numero ne ottengo un vettore

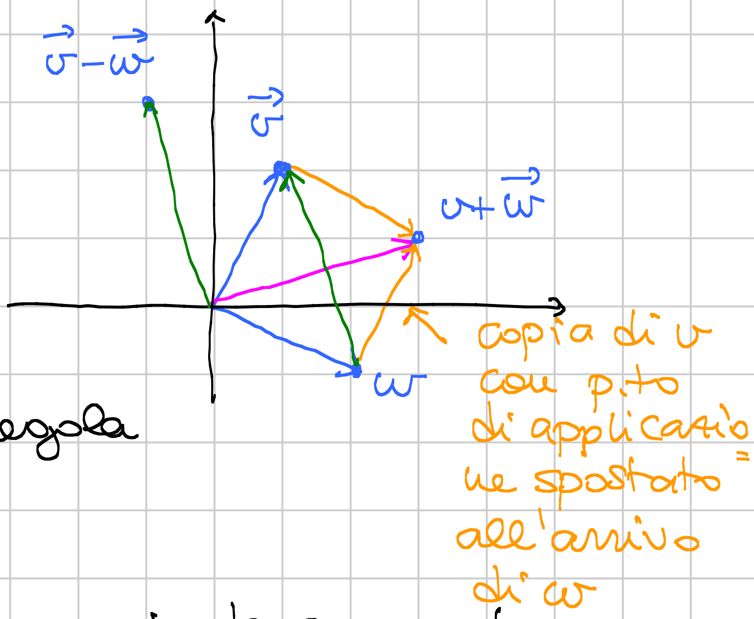
$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Interpretazione geom. nel piano

$\vec{v} = (1,2)$
$\vec{w} = (2,-1)$

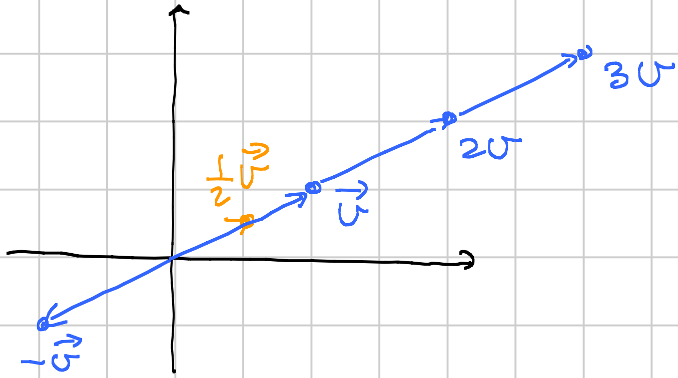
$\vec{v} + \vec{w} = (3,1)$



La somma si ottiene con la regola del parallelogramma

$\vec{v} - \vec{w} = (-1,3)$ = vettore che aggiunto a w produce v.

Moltiplicare un vettore per un numero = dilatarlo ($\lambda > 1$)
o contrarlo ($\lambda < 1$)



Molt. per $\lambda < 0$ = ribaltare rispetto all'origine

<u>Oss.</u> Fare $\vec{v} - \vec{w}$ è come fare $\vec{v} + (-1)\cdot\vec{w}$
(La differenza si ottiene dalla somma e dal prodotto per -1)

PRODOTTO SCALARE (tra 2 vettori) [Più avanti: prod. sc. CANONICO]

INPUT: 2 vettori OUTPUT: numero

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{sinonimi}} = \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{} = \boxed{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}$$

<u>Esempio</u> $\vec{x} = (1, 0, 2, -1)$ $\vec{y} = (3, 5, -1, 0)$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 = 3 - 2 = 1.$$

— o — o —

NORMA DI UN VETTORE

Dato $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ la sua NORMA è il numero

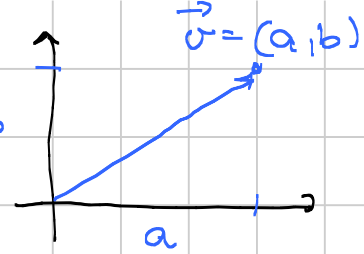
$$\boxed{\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$$

(lunghezza del vettore)

Pitagorone a n variabili

$\| (a,b) \| = \sqrt{a^2+b^2}$ = lunghezza

↑ Pitagora



<u>Oss.</u> $\| \vec{x} \| = \sqrt{\underbrace{< \vec{x}, \vec{x} >}_{}}$

Prodotto scalare di $\vec{x}$ con se stesso

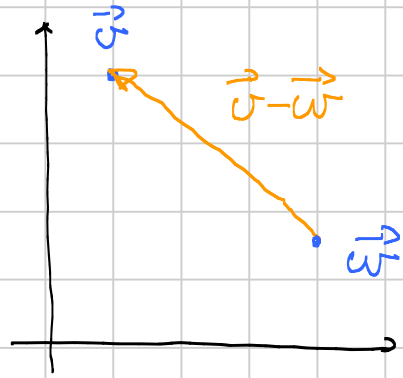
— o — o —

DISTANZA TRA DUE VETTORI

Dati $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ definiamo

$$\boxed{\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}}$$

— o — o —



<u>Proprietà del prodotto scalare</u>

① $< \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} > = < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{z} >$

<u>Dim.</u> $x_1 \cdot (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) + \dots + x_n (y_n + z_n)$

$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + \dots + x_n y_n + x_n z_n$

$= < \vec{x}, \vec{y} > + < \vec{x}, \vec{z} >$

② $< \lambda \vec{x}, \vec{y} > = \lambda x_1 \cdot y_1 + \lambda x_2 \cdot y_2 + \dots + \lambda x_n y_n$

$= \lambda < \vec{x}, \vec{y} >$

$= \lambda < \vec{y}, \vec{x} >$

— o — o —

NORMA DI SOMMA E DIFFERENZA

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle$$

spezzo 2ª somma

$$= \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \underbrace{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$

$$\boxed{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$$

Si possono anche dim. con i puntini:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2$$

$$= \underbrace{x_1^2}+\underbrace{2x_1y_1}+\underbrace{y_1^2}+\underbrace{x_2^2}+\underbrace{2x_2y_2}+\underbrace{y_2^2}+\dots+\underbrace{x_n^2}+\underbrace{2x_ny_n}+\underbrace{y_n^2}$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

<u>Esercizi</u> Provare a scrivere

$$\|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\|^2 \qquad \|\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\|^2 \qquad \|2\vec{x}+3\vec{y}\|^2$$

$$\|2\vec{x}-\vec{y}+3\vec{z}\|^2$$

<u>Achtung!</u> $\|-19\vec{x}\| = 19\|\vec{x}\|$ (e NON -19 !!!)

— o — o —