Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 11/06/2021

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

In figura è rappresentato un sistema costituito da tre corpi: A, B, e C. A è un cilindro pieno di densità uniforme, di massa $M_A = 30.2\ kg$ e raggio$R_A = 25\ cm$. B è una puleggia, assimilabile a un disco, anch'esso di densità uniforme, massa $M_B = 14.4\ kg$ e raggio $R_B = 14.0\ cm$. C è assimilabile ad un punto materiale di massa $M_C = 66.2\ kg$. Attorno al cilindro (A) è avvolta una fune sottile, inestensibile e priva di massa, che passa attraverso la puleggia (B) e non scivola su di essa, che è collegata al corpo C. Nell'ipotesi in cui A rotola senza strisciare sul piano inclinato di $\theta = 9^0$, determinare:
1) l'accelerazione, $\overrightarrow{a}_C$, del corpo C

$$\overrightarrow{a}_C\text{=-7.534 } \hat{x} \text{ ms}^{-2}$$

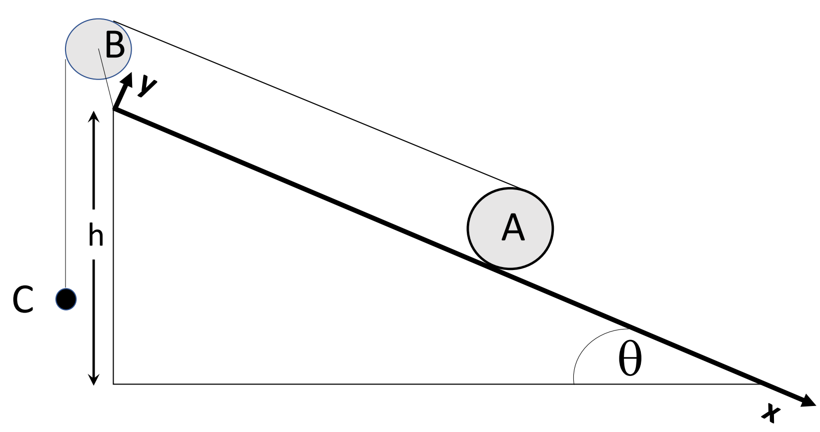
2) l'accelerazione angolare $\overrightarrow{\alpha}_A$ del cilindro

$$\overrightarrow{\alpha}_A\text{=15.068 } \hat{z} \text{ s}^{-2}$$

3) Il modulo della forza dovuta alla tensione del filo (T_C) esercitata su C

$$T_C\text{=163.249 N}$$

[**NB: Si assuma per i conti** $g = 10\ ms^{-2}$]



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Si realizza un elemento resistivo mettendo a contatto tre blocchi A, B e C disposti come in Figura di tre diversi materiali conduttori. L'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente mentre le sezioni dei blocchi sono in contatto elettrico.
L'elemento che si ottiene ha dimensioni (2L= 582 $\times$ 2d= 19 $\times$ W= 12) cm^3.
Le resistività degli elementi valgono rispettivamente ρ_A= 3.3 Ω m, ρ_B= 44.5 Ω m e ρ_C= 151.0 Ω m.
La faccia esterna del blocco A viene mantenuta ad un potenziale V$_A$= 63 V mentre la superficie D esterna e comune ai blocchi B e C viene mantenuta ad un potenziale V$_D$= -81 V come indicato in Figura.

1) Calcolare il valore in (kΩ) della resistenza R$_C$

$$R_C = 38.6 \text{ k}\Omega$$

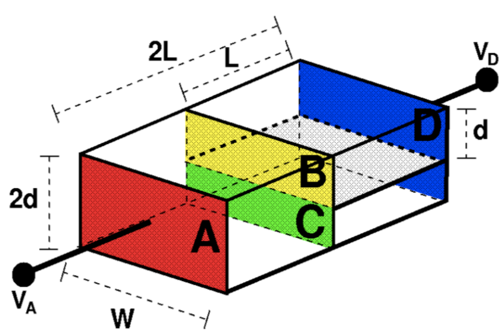
2) Calcolare la d.d.p. ΔV_C ai capi dell'elemento C e l'intensità del campo elettrico $|\vec{E}_C|$ nell'elemento R$_C$

$$\Delta V_C = 137.4 \text{ V} \qquad |\vec{E}_C| = 47.2 \text{ V/m}$$

Considerando che le densità di portatori di carica dei tre blocchi sono rispettivamente:
n_A= 9.2 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$; n_B= 0.8 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$; n_C= 8.6 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$:

3) Calcolare in (nm s^{-1}) la velocità di deriva v_C degli e^- nel blocco C

$$v_C = 0.023 \text{ nm } s^{-1}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo dell'elemento resistivo costituito dai 3 blocchi*)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 11/06/2021

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica

In figura è rappresentato un sistema costituito da tre corpi: A, B, e C. A è un cilindro pieno di densità uniforme, di massa $M_A = 30.2\ kg$ e raggio$R_A = 25\ cm$. B è una puleggia, assimilabile a un disco, anch'esso di densità uniforme, massa $M_B = 14.4\ kg$ e raggio $R_B = 14.0\ cm$. C è assimilabile ad un punto materiale di massa $M_C = 66.2\ kg$. Attorno al cilindro (A) è avvolta una fune sottile, inestensibile e priva di massa, che passa attraverso la puleggia (B) e non scivola su di essa, che è collegata al corpo C. Nell'ipotesi in cui A rotola senza strisciare sul piano inclinato di $\theta = 9^0$, determinare:
1) l'accelerazione, $\overrightarrow{a}_C$, del corpo C

$\overrightarrow{a}_C$=..............................

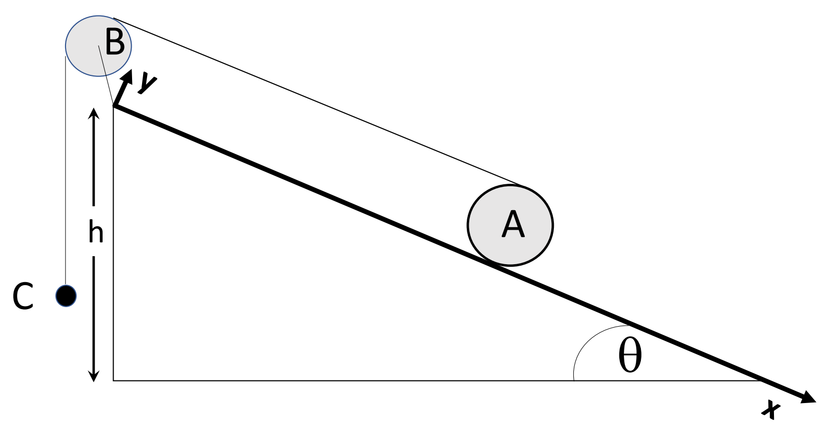
2) l'accelerazione angolare $\overrightarrow{\alpha}_A$ del cilindro

$\overrightarrow{\alpha}_A$ = ...

3) Il modulo della forza dovuta alla tensione del filo (T_C) esercitata su C

T_C=..............................

[**NB: Si assuma per i conti** $g = 10\ ms^{-2}$]



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Si realizza un elemento resistivo mettendo a contatto tre blocchi A, B e C disposti come in Figura di tre diversi materiali conduttori. L'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente mentre le sezioni dei blocchi sono in contatto elettrico.

L'elemento che si ottiene ha dimensioni (2L= 582 $\times$ 2d= 19 $\times$ W= 12) cm^3.

Le resistività degli elementi valgono rispettivamente ρ_A= 3.3 Ω m, ρ_B= 44.5 Ω m e ρ_C= 151.0 Ω m.

La faccia esterna del blocco A viene mantenuta ad un potenziale V$_A$= 63 V mentre la superficie D esterna e comune ai blocchi B e C viene mantenuta ad un potenziale V$_D$= -81 V come indicato in Figura.

1) Calcolare il valore in (kΩ) della resistenza R$_C$

$$R_C = \text{......................}$$

2) Calcolare la d.d.p. ΔV_C ai capi dell'elemento C e l'intensità del campo elettrico $|\vec{E}_C|$ nell'elemento R$_C$

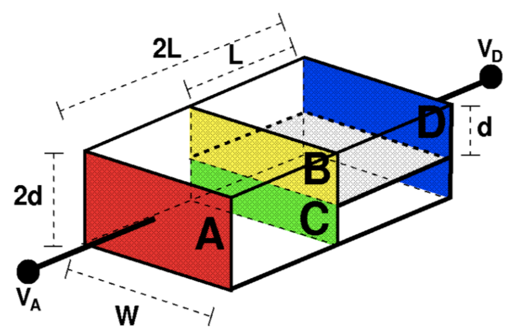
$$\Delta V_C = \text{......................} \qquad |\vec{E}_C| = \text{......................}$$

Considerando che le densità di portatori di carica dei tre blocchi sono rispettivamente:

n_A= 9.2 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$; n_B= 0.8 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$; n_C= 8.6 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$:

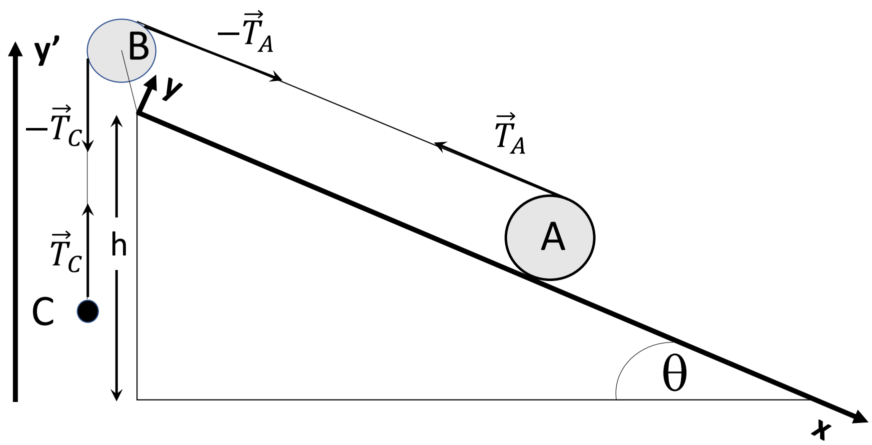
3) Calcolare in (nm s^{-1}) la velocità di deriva v_C degli e^- nel blocco C

$$v_C = \text{......................}$$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo dell'elemento resistivo costituito dai 3 blocchi*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1
Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto è fermo, pertanto la forza di attrito non compie lavoro, di conseguenza l'energia del sistema si conserva (è costante) poichè non ci sono forze dissipative. L'energia del sistema è data dalla somma delle energie potenziali e delle energie cinetiche dei tre corpi. Indicando con E_p^A, E_p^B e E_p^C l'energia potenziale dei tre corpi, l'energia potenziale del sistema,E_p, assumendo l'origine dell'energia potenziale in $y' = 0$ (vedi figura), è data da:

$$E_p = E_p^A + E_p^B + E_p^C = M_A g\,(h' - xsin(\theta)) + M_B g y'_B + M_C g y'_C$$

dove h' è la quota del centro di massa iniziale e y'_B e y'_C rappresentano la coordinata y' (vedi figura) del CM rispettivamente di B e di C. L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche dei tre corpi. Per il teorema di König, il corpo A ha energia cinetica rotazionale e traslazionale, mentre la puleggia ha solo energia rotazionale. Pertanto, l'energia cinetica del sistema E_k è data da:

$$E_k = \frac{1}{2}M_A v_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}M_C V_C^2$$

dove abbiamo indicato con I_A e I_B i momenti di inerzia del corpo A e del corpo B rispetto ai rispettivi centri di massa:

$$I_A = \frac{M_A R_A^2}{2} \qquad\qquad I_B = \frac{M_B R_B^2}{2}$$

La velocità del centro di massa $\vec{v}_A$ è diretta lungo l'asse x, $\vec{v}_A = v_A\hat{x}$, mentre la velocità di C è diretta lungo y', $\vec{v}_C = v_C\hat{y'}$. La velocità dei punti del filo coincide con la velocità periferica di B, $-\omega_B R_B$ diretta come $\hat{y'}$ dal lato peso e come $\hat{x}$ dal lato cilindro, che a sua volta coincide con la velocità di C, diretta come $\hat{y'}$ che a sua volta coincide con la velocità periferica di A, $-2\omega_A R_A = 2v_A$, diretta come $\hat{x}$. Pertanto valgono le seguenti relazioni:

$$v_C = -\omega_B R_B = 2v_A = -2\omega_A R_A \quad \Rightarrow \quad a_C = 2a_A \quad \alpha_A = -\frac{a_A}{R_A} \quad \alpha_B = -\frac{2a_A}{R_B}$$

Riscrivendo l'energia cinetica totale, sostituendo l'espressione dei momenti di inerzia e esprimendo ad es. tutto in funzione di v_A (avremmo potuto utilizzare v_C o ω_A o ω_B) otteniamo:

$$E_k = \frac{1}{2}M_A v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_A R_A^2\frac{v_A^2}{R_A^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_B R_B^2\left(\frac{2v_A}{R_A}\right)^2 + \frac{1}{2}M_C\,(2v_A)^2 = \frac{1}{2}v_A^2\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right)$$

Sommando l'energia potenziale a quella cinetica e derivando l'energia rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 = -M_A g\dot{x}sin(\theta)) + M_C g\dot{y'} + \frac{1}{2}2v_A\dot{v}_A\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right)$$

dalla quale ricordando che $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_A$ e che $\dot{y'} = \frac{dy'}{dt} = 2v_A$ otteniamo:

$$-M_A g v_A sin(\theta)) + M_C g 2v_A + \frac{1}{2}2v_A\dot{v}_A\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right) = 0$$

poichè $\dot{v}_A = a_A$ dividendo entrambi i membri per v_A e risolvendo l'equazione otteniamo:

$$a_A = g\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right) \qquad a_C = 2a_A = 2g\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)$$

da notare che se $M_A sin(\theta) > 2M_C$ il corpo A scende sul piano inclinato ($a_A > 0$) e il corpo C sale verso l'alto ($a_C > 0$), se $M_A sin(\theta) < 2M_C$ il corpo A sale sul piano inclinato ($a_A < 0$) e il corpo C scende verso il basso ($a_C < 0$), l'accelerazione è nulla se $M_A sin(\theta) = 2M_C$. L'espressione di $\vec{a}_C = a_C\hat{y}'$, puo' anche essere espressa nel sistema di riferimento xy, in questo caso essa è data da:

$$\vec{a}_C = a_C(-sin(\theta)\hat{x} + cos(\theta)\hat{y})$$

Allo stesso risultato si arriva utilizzando la prima equazione cardinale per A e C, e la seconda cardinale per A e B.
Durante il moto vale il seguente sistema di equazioni (prima cardinale lungo x per il corpo A e lungo y' per il corpo B):

$$\begin{cases} \mathrm{M}_A a_A = -T_A + M_A g sin(\theta) + f_{xa} \\ \mathrm{M}_C a_C = T_C - M_C g \end{cases}$$

dove con f_{xa} abbiamo indicato la componente lungo x della forza di attrito. Dalla seconda cardinale per la puleggia B e il cilindro A:

$$\begin{cases} (\mathrm{R}_B T_C - R_B T A)\hat{z} = I_B\dot{\omega}_B\hat{z} \\ (\mathrm{R}_A T_A + R_A f_{xa})\hat{z} = I_A\dot{\omega}_A\hat{z} \end{cases}$$

Ricordando che:

$$a_A = -\dot{\omega}_A R_A \qquad a_C = -\dot{\omega}_B R_B = 2a_A$$

ed esprimendo le accelerazioni (anche quelle angolari) in funzione di a_A, si ottiene un sistema di 4 equazioni in quattro incognite (a_A, T_A, T_C, f_{ax}) la cui soluzione fornisce le risposte a tutte le domande del problema.

Domanda.2

Indicando con l'asse z il terzo asse del sistema xy con l' asse z uscente dal foglio:

$$\vec{\alpha}_A = -\frac{a_A}{R_A}\hat{z} = -\frac{g}{R_A}\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)\hat{z} \qquad \vec{\alpha}_B = -\frac{2a_A}{R_B}\hat{z} = -\frac{2g}{R_B}\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)\hat{z}$$

dalle quali se il corpo A scende, il cilindro ruota in verso orario come pure la puleggia.

Domanda.3

Applicando la seconda equazione cardinale al corpo B, con riferimento alla figura, indicando con T_A e T_B i moduli delle tensioni rispettivamente del lato cilindro e del lato peso, si ottiene:

$$(-R_B T_A + R_B T_C)\hat{z} = I_B\alpha_B\hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_B\alpha_B = \frac{1}{2}M_B R_B^2\alpha_B \quad \Rightarrow \quad T_C - T_A = \frac{1}{2}M_B R_B\left(-\frac{2a_A}{R_B}\right) = -M_B a_A$$

La tensione T_C entra nell'equazione del moto del corpo C:

$$T_C - M_C g = M_C a_C = M_C 2a_A$$

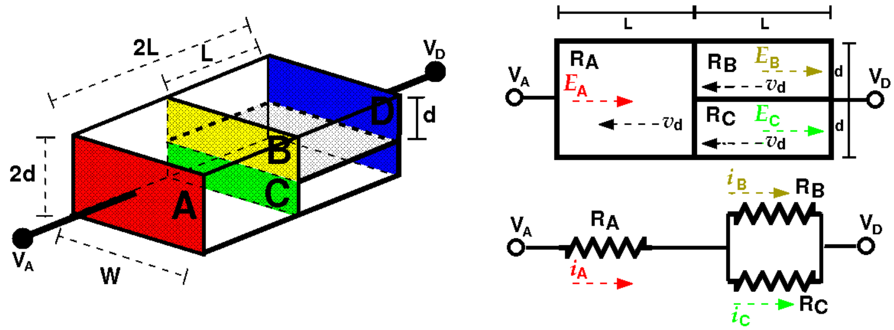
Utilizzando la seconda cardinale per B e l'equazione del moto per il corpo C otteniamo quindi:

$$T_A = 2M_C a_A + M_B a_A + M_C g \qquad T_C = M_C\,(g + 2a_A)$$

Soluzione Esercizio 2

Premessa

Notiamo che i tre blocchi possono essere schematizzati con tre resistenze concentrate R$_A$, R$_B$ e R$_C$.
Questa schematizzazione è possibile perchè "...l'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente ..."



Domanda.1

Il calcolo della resistenze di ogni elemento procede (dopo avere fatto le opportune equivalenze per le dimensioni dei blocchi) secondo la relazione (1) dove l indica la lunghezza dell'elemento (nel nostro caso: $l = L$ per tutti gli elementi) e S ne indica la superficie trasversa (nel nostro caso: $S_A \ = \ 2dW$; $S_B = S_C = \ dW$)

$$R_X \ = \ \rho \, \frac{l}{S} \quad \rightarrow \quad R_A \ = \ \rho_A \, \frac{L}{2dW} \qquad R_B \ = \ \rho_B \, \frac{L}{dW} \qquad R_C \ = \ \rho_C \, \frac{L}{dW} \tag{1}$$

Domanda.2

Le domande sono collegate poichè bisogna calcolare la d.d.p. ai capi dei blocchi per stimare l'intensità del campo elettrico in ciascuno di essi. Lo schema elettrico equivalente suggerisce di considerare due elementi in serie: il blocco A in serie al parallelo di B e C. La corrente i_{tot} sarà la stessa in questi due elementi mentre la d.d.p. complessiva $V_0 \ = \ V_A - V_D$ sarà anche la somma delle d.d.p. parziali $V_0 \ = \ \Delta V_A + \Delta V_{BC}$ *(dove indichiamo con il simbolo* ΔV_{BC} *il fatto che i blocchi B e C hanno la stessa d.d.p.).*
Per determinare i_{tot} bisogna calcolare la resistenza equivalente del circuito e applicare la prima legge di Ohm.
La resistenza equivalente R$_{eq}$ è quella del parallelo di R$_B$ e R$_C$ in serie con R$_A$. Il calcolo è riportato in (2)

$$R_{eq} = \ R_A \ + \ \frac{R_B \ R_C}{R_B \ + \ R_C} \tag{2}$$

La corrente i_{tot} che fluisce nel circuito è quindi:

$$i_{tot} = \ \frac{V_0}{R_{eq}} \tag{3}$$

Dalla 3 si può calcolare la caduta di tensione ΔV_A sul blocco A, mentre conoscendo V_0 e ΔV_A per differenza possiamo calcolare ΔV_{BC}, quella dei blocchi B e C. Queste risultano essere:

$$\Delta V_A = \ R_A \ i_{tot} \qquad \Delta V_{BC} = \ V_0 \ - \ \Delta V_A \tag{4}$$

Di conseguenza, il modulo del campo elettrico nei rispettivi blocchi vale:

$$|\vec{E}_A| = \ \frac{\Delta V_A}{L} \qquad |\vec{E}_{B(C)}| = \ \frac{\Delta V_{BC}}{L} \tag{5}$$

Domanda.3

Indicando con n_X la densità di portatori di carica, e con e la loro carica elettrica (nei conduttori i portatori di carica sono elettroni, $e = -1.602\ 10^{-19}$ C), la carica elettrica complessiva che fluisce in un tratto dl di un conduttore con sezione di area S, se i portatori si muovono con velocità (velocità di deriva) v_d, è data da:

$$dq = neSdl = n|e|Sv_d dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = i = n|e|Sv_d$$

dove con i abbiamo indicato la corrente nel tratto dl. Pertanto otteniamo la relazione (6) per v_d (anche legata alla densità di corrente $\vec{J} = \frac{i}{S}\hat{n}_S$ con $\hat{n}_S$ versore normale ad S e nel verso della corrente).
Per calcolare la velocità di deriva negli elementi A, B e C bisogna prima calcolare le correnti.
La corrente che fluisce attraverso l'elemento A è: $i_A = i_{tot}$
come si divide i_{tot} negli elementi B e C va calcolato dalla legge di Ohm: $i_B = \frac{\Delta V_{BC}}{R_B}$ $\qquad i_C = \frac{\Delta V_{BC}}{R_C}$

$$|\vec{v}_d| = \frac{|\vec{J}|}{n|e|} = \frac{i_X}{nS_X|e|} \qquad (X = A, B, C) \tag{6}$$