ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 11

Note Title 12/10/2018

STRUTTURE ALGEBRICHE

- gruppo
- gruppo commutativo
- anello
- corpo
- $\boxed{\text{campo}}$
- modulo
- $\boxed{\text{spazio vettoriale}}$

<u>Def.</u> (Campo) Un campo è un insieme $\mathbb{K}$ su cui sono definite due operazioni, somma e moltiplicazione (operazioni binarie: prendono in INPUT due elementi e ne restituiscono uno). Somma e prodotto hanno le proprietà "classiche"

(S1) $a+b=b+a$

(S2) $a+(b+c)=(a+b)+c$

(S3) $\exists\, 0\in\mathbb{K}$ t.c. $a+0=a$

(S4) $\forall a\in\mathbb{K}\ \exists\, b\in\mathbb{K}$ t.c. $a+b=0$ ($b = -a$)

(P1) $a\cdot b=b\cdot a$

(P2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

(P3) $\exists\, 1\in\mathbb{K}$ t.c. $a\cdot 1=a$

(P4) $\forall a\in\mathbb{K}$ con $a\neq 0$ $\exists\, b\in\mathbb{K}$ t.c. $a\cdot b=1$ ($b = \frac{1}{a}$)

(D) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

<u>Esempi</u> Sono dei campi i seguenti insiemi

$\boxed{\mathbb{R}}$ numeri reali

$\mathbb{Q}$ razionali (frazioni)

$\mathbb{C}$ numeri complessi

Non sono campi

- $\mathbb{Z}$ (numeri interi) ⇝ manca (P4)
- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$ ⇝ manca (S4) e (P4)
- $\mathbb{R}[x]$ = polinomi ⇝ manca (P4)

Def. (spazio vettoriale) Sia $\mathbb{K}$ un campo (penseremo sempre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)
Uno spazio vettoriale è un insieme V in cui sono definite due operazioni

- somma : $V \times V \to V$ (input: 2 vettori, output: 1 vettore)
- prodotto per uno scalare : $\mathbb{K} \times V \to V$ (input: 1 numero e 1 vettore; OUTPUT: 1 vettore)

che hanno le seguenti 8 proprietà

(S1) $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$
(S2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
(S3) $\exists\ \vec{0} \in V$ t.c. $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$
(S4) $\forall \vec{u} \in V\ \exists\ \vec{v} \in V$ t.c. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$

quantificare per esercizio

(P1) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K}\ \ \forall b \in \mathbb{K}\ \ \forall \vec{v} \in V$
(P2) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{v} \in V$
(D1) $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v}+a\vec{w}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K}\ \ \forall \vec{v} \in V\ \ \forall \vec{w} \in V$
(D2) $(a+b)\cdot\vec{v} = a\vec{v}+b\vec{v}$ $\quad \forall a \in \mathbb{K}\ \ \forall b \in \mathbb{K}\ \ \forall \vec{v} \in V$

Esempio 1 $\quad \mathbb{K}=\mathbb{R} \qquad V=\mathbb{R}^n$
Le operazioni sono
→ sommare 2 vettori (componente per componente)
→ moltiplicare 1 vettore per un numero (molt. tutte le comp.)

Le verifiche sono tutte quasi ovvie. Per la cronaca
$\vec{0} = (0, \dots, 0)$
Dato $\vec{v} = (x_1, \dots, x_n)$, allora $-\vec{v} = (-x_1, \dots, -x_n)$

Esempio 2 $\quad \mathbb{K}=\mathbb{R} \qquad V = \mathbb{R}[x]$ = insieme di tutti i polinomi
Le operazioni sono
→ sommare 2 polinomi
→ moltiplicare un polinomio per un numero
Il prodotto tra 2 polinomi qui non entra.

<u>Esempio 3</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\geq 4}[x]$ = polinomi di grado ≥ 4

Operazioni come prima

NON è uno sp. vett. : ad esempio

$p(x) = x^4 + 2x^2 \in V$ $q(x) = -x^4 + x^3 \in V$

Tuttavia $p(x) + q(x) \notin V$, quindi la somma non è ben definita

<u>Esempio 4</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ = pol. di grado ≤ 4

Questo è uno sp. vett. rispetto alle solite proprietà

<u>Esempio 5</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $V = M_{m \times n}$ = matrici $m \times n$

Le operazioni sono

→ sommare 2 matrici

→ moltiplicare una matrice per un numero

In questo caso $\vec{0}$ = matrice di tutti zeri

$-\vec{v}$ = matrice con tutti i segni cambiati

Anche in questo esempio non consideriamo il prodotto tra matrici

<u>Esempio 6</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ V = funzioni $f : \underbrace{(a,b)}_{\text{intervallo dato}} \to \mathbb{R}$

Operazioni:

→ sommare 2 funzioni

→ moltiplicare una funz. per un numero

— o — o —

Def. (Sottospazio vettoriale)

Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia V uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$, sia $W \subseteq V$.
Si dice che W è un sottosp. vettoriale se ha 2 proprietà

(i) è chiuso rispetto alla somma

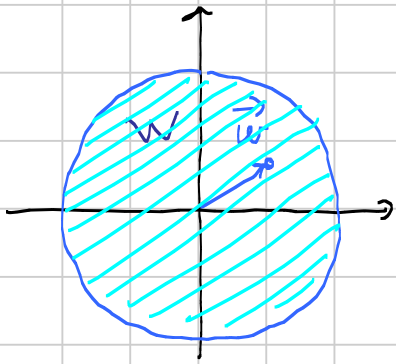
$$\boxed{\vec{w}_1 \in W \text{ e } \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W}$$

(ii) è chiuso rispetto al prodotto per scalari

$$\boxed{a \in \mathbb{K} \text{ e } \vec{w} \in W \Rightarrow a\vec{w} \in W}$$

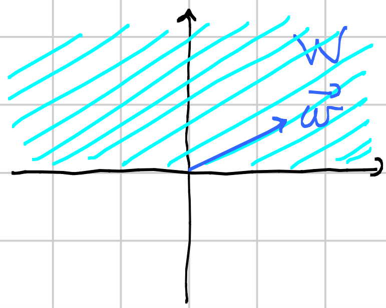
Esempio 1 $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}^2 \quad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

NON è un sottospazio vettoriale
Ad esempio, non vale (ii)
il $\vec{w}$ in figura, se moltiplicato
per $a \in \mathbb{R}$ abbastanza grande
"esce fuori"



Esempio 2 $\quad \mathbb{K}$ e V come sopra $\quad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

W è chiuso risp. alla somma
(se prendo due vettori con $y \geq 0$ e
li sommo, anche la somma ha $y \geq 0$)



W è chiuso risp. prodotto per numeri $a > 0$,
ma non è chiuso risp. prod. per numeri $a < 0$

NON è un s. sp. vett.

Esempio 3 $\mathbb{K}$ e V come sopra

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y=0\}$$

Questo è un s.sp. vett. Infatti

(i) è chiuso risp. somma

$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W$ $\qquad x_1+3y_1=0$

$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W$ $\qquad x_2+3y_2=0$

La somma $\vec{w}_1+\vec{w}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in W$?

Sì! $(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)=0$ (somma delle 2 rel. di sopra)

(ii) è chiuso risp. prodotto

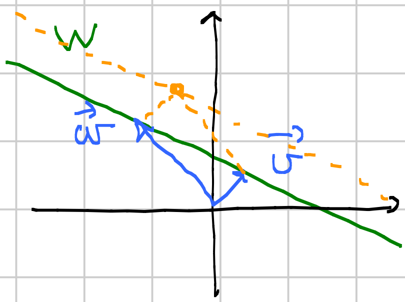
$\vec{w} = (x,y) \in W$ $\qquad x+3y=0$

$a \in \mathbb{R}$

$a\vec{w} = (ax, ay) \in W$? Sì! $ax+3ay = a(x+3y)=0$ ☺

Esempio 4 $\mathbb{K}$ e V come sopra $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y=5\}$

NON è chiuso risp. alla somma!



$\vec{w}_1 = (x_1, y_1) \in W$ $\qquad x_1+3y_1=5$

$\vec{w}_2 = (x_2, y_2) \in W$ $\qquad x_2+3y_2=5$

$\vec{w}_1+\vec{w}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)=10$ (e non 5)

— o — o —