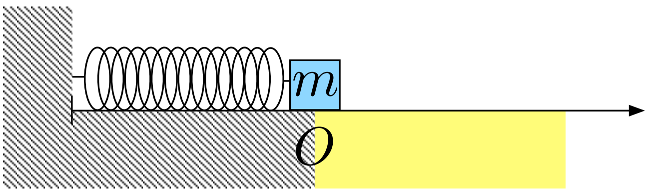
Esercizio **(tratto dal Problema 4.29 del Mazzoldi 2)**

Un corpo di massa $m = 0.5\,\mathrm{Kg}$ è agganciato ad un supporto fisso tramite una molla di costante elastica $k = 2\,\mathrm{N/m}$; il corpo è in quiete nel punto O di un piano orizzontale, che è liscio a destra di O e scabro a sinistra di O. Viene impressa al corpo una velocità $v_0 = 0.16\,\mathrm{m/s}$ verso destra. Calcolare:

1. di quanto è allungata la molla nell'istante in cui il corpo si ferma.

Il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ e si ferma dopo aver percorso una distanza di $5\,\mathrm{cm}$ alla sinistra di O. Calcolare

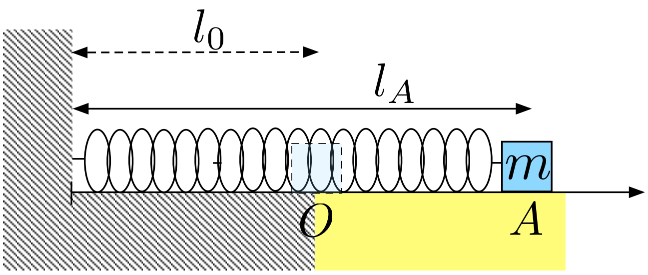
2. il valore del coefficiente di attrito dinamico μ.



SOLUZIONE

DATI INIZIALI
$m = 0.5\,\mathrm{Kg}$
$k = 2\,\mathrm{N/m}$
$v_0 = 0.16\,\mathrm{m/s}$
$|\Delta l'| = 0.05\,\mathrm{m}$

1. La prima parte del moto si svolge dal punto O al punto A, in cui il corpo si arresta alla destra di O.



In questa fase il corpo è soggetto alla sola forza elastica della molla. Indicando con l la coordinata lungo il piano

$$F(l) = -k(l - l_0) \tag{1}$$

dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla. Possiamo risolvere il problema in due modi

Primo modo (Bilancio energetico)
Dato che la forza della molla è conservativa, possiamo applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{2}$$

dove l'energia meccanica è data da

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta l)^2}_{\text{en. potenz. elastica}} \qquad \Delta l = l - l_0 \tag{3}$$

Inizialmente la molla è a riposo (il punto materiale si trova in $l = l_0$) e quindi

$$E_m^{in} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{4}$$

mentre quando il punto materiale si arresta si ha

$$E_m^{fin} = \frac{1}{2}k(\Delta l_{max})^2 \tag{5}$$

Inserendo (4) e (5) in (2) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}k(\Delta l_{max})^2 \\ &\Rightarrow \quad \Delta l_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \end{aligned} \tag{6}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta l_{max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \\
&= \sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{Kg}}{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
& \quad \text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg}\,\mathrm{m/s}^2 \\
&= \sqrt{\frac{0.25\,\mathrm{Kg}}{\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}^2}}}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= \sqrt{0.25\,\mathrm{s}^2}\, 0.16 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= 0.08\,\mathrm{m} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Secondo modo (Equazioni della dinamica):
Nel tratto da O ad A l'unica forza che agisce sul punto materiale è la forza elastica della molla. Denotiamo con l la coordinata del punto materiale (l'origine $l = 0$ è situata nel punto in cui la molla è agganciata al supporto). Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
ma &= F \\
& \Downarrow \\
m \frac{d^2 l}{dt^2} &= -k(l - l_0) \\
& \Downarrow \\
\frac{d^2 l}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(l - l_0) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Questa è l'equazione differenziale che dobbiamo risolvere, con le condizioni iniziali (relative all'istante in cui il punto materiale parte da O verso destra)

$$\left\{ \begin{aligned} l(t=0) &= l_0 \\ \frac{dl}{dt}(t=0) &= v_0 \end{aligned} \right. \qquad (9)$$

Per risolvere l'Eq.(32) osserviamo che è simile all'equazione di un moto armonico

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\omega^2 l \qquad (10)$$

di cui sono note le soluzioni. Osservando che l_0 è costante possiamo scrivere

$$\frac{d^2 (l - l_0)}{dt^2} = -\frac{k}{m}(l - l_0) \qquad (11)$$

da cui, definendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (12)$$

e introducendo la variabile

$$l'(t) = l(t) - l_0 \qquad (13)$$

otteniamo

$$\frac{d^2 l'}{dt^2} = -\omega^2 l' \qquad (14)$$

che è l'equazione del moto armonico, la cui soluzione generale si può scrivere

$$l'(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{15}$$

Ricordando la relazione (13) otteniamo la soluzione generale dell'Eq.(8)

$$l(t) = l_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{16}$$

Le costanti A e B si determinano imponendo le condizioni iniziali (9)

$$\begin{cases} l(t=0) &= l_0 + A\cos(\omega\, 0) + B\sin(\omega\, 0) = l_0 \\ \\ \dfrac{dl}{dt}(t=0) &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{17}$$

ossia

$$\begin{cases} A &= 0 \\ \\ B\omega &= v_0 \qquad \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases} \tag{18}$$

Sostituendo i valori di A e B nella soluzione generale (16) otteniamo

$$\boxed{l(t) = l_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{19}$$

e la velocità è

$$v(t) = \frac{dl}{dt} = v_0\cos(\omega t) \tag{20}$$

Denotiamo ora con t_A l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto A di massimo allungamento della molla. Tale punto è caratterizzato dall'annullarsi della velocità

$$v(t_A) = v_0\cos(\omega t_A) = 0 \qquad \Rightarrow \omega t_A = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$

La coordinata del punta A è dunque

$$\begin{aligned} l_A = l(t_A) &= l_0 + \frac{v_0}{\omega}\underbrace{\sin(\omega t_A)}_{=+1} = \\ &= l_0 + \frac{v_0}{\omega} \end{aligned} \tag{22}$$

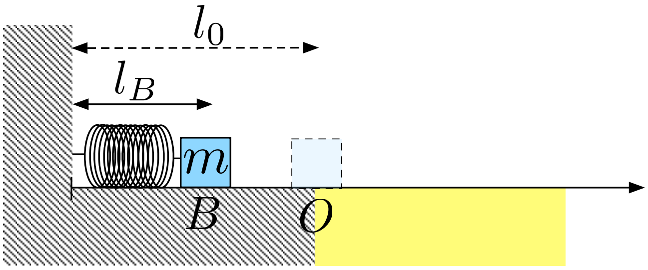
Ricordando la definizione (12) otteniamo che l'allungamento

$$\begin{aligned} \Delta l_{max} = l_A - l_0 &= \frac{v_0}{\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \end{aligned} \tag{23}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta l_{max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 = \\ &= \sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{Kg}}{2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ & \quad \text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg\,m/s^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.25\,\mathrm{Kg}}{\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}^2}}}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= \sqrt{0.25\,\mathrm{s}^2}\, 0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\ &= 0.08\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{24}$$

2. Il secondo tratto del moto va da quando il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ a quando si arresta dalla parte scabra del piano (a sinistra di O) in un punto che indichiamo con B. Anche



qui possiamo procedere in due modi:

Primo modo (Bilancio energetico):

In questo tratto le forze che agiscono sul punto materiale sono la forza elastica della molla e l'attrito dinamico del piano scabro. Dato che quest'ultima forza non è conservativa, l'energia meccanica non si conserva. Possiamo tuttavia applicare il teorema dell'energia meccanica (NB: non il teorema di *conservazione* dell'energia meccanica!)

$$\Delta E_m = W_{\rm nc} \tag{25}$$

dove ΔE_m è la variazione dell'energia meccanica e $W_{\rm nc}$ è il lavoro delle forze non conservative (in questo caso l'attrito dinamico). Nel tratto da O a B abbiamo dunque

$$\Delta E_m^{O\to B} = \int_O^B \vec{F}_{att} \cdot d\vec{l} \tag{26}$$

La variazione di energia meccanica vale

$$\begin{aligned} \Delta E_m^{O\to B} &= E_{m;B} - E_{m;O} = \\ &= \left(0 + \frac{1}{2}k(\Delta l')^2\right) - \left(\frac{1}{2}m(-v_0)^2 + 0\right) = \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \tag{27}$$

dove $\Delta l' = l_B - l_0$ e l_B è la coordinata del punto B.

Siccome la forza di attrito si oppone sempre al moto ed è costante in modulo abbiamo

$$W_{\rm nc} = -|\vec{F}_{att}||\Delta l'| = -\mu\, mg|\Delta l'| \tag{28}$$

Si noti che il lavoro è *negativo*, e quindi l'energia meccanica diminuisce passando da O a B [vedi Eq.(26)], come è intuitivo aspettarsi in presenza di forze dissipative quali l'attrito.

Inserendo le Eq.(27) e (28) in (25) otteniamo

$$\frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu\, mg|\Delta l'| \tag{29}$$

da cui il coefficiente di attrito vale

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l')^2}{mg|\Delta l'|} \tag{30}$$

Inserendo i valori numerici otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{\frac{1}{2}0.5\,\mathrm{Kg}\left(0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \frac{1}{2}\,2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(-0.05\mathrm{m})^2}{0.5\,\mathrm{Kg}\,9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.05\,\mathrm{m}} = \\
& \quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg\,m/s^2}] \\
&= \frac{0.25\,\cdot 0.0256\frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s}^2} - \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.0025\mathrm{m}^2}{0.24525\,\frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= 0.016
\end{aligned} \tag{31}
$$

Secondo modo (Equazioni della dinamica):
Nel tratto da O a B la forza di attrito è diretta verso destra, dato che si oppone al moto verso sinistra. Denotiamo con l la coordinata del punto materiale (l'origine $l = 0$ è situata nel punto in cui la molla è agganciata al supporto). Quindi abbiamo

$$
\begin{aligned}
ma &= F \\
& \Downarrow \\
m\frac{d^2l}{dt^2} &= -k(l - l_0) + \mu mg \\
& \Downarrow \\
\frac{d^2l}{dt^2} &= -\frac{k}{m}(l - l_0) + \mu g
\end{aligned} \tag{32}
$$

Questa è l'equazione differenziale che dobbiamo risolvere, con le condizioni iniziali (relative all'istante in cui il punto materiale parte da O verso sinistra)

$$
\begin{cases}
l(t = 0) = l_0 \\
\\
\frac{dl}{dt}(t = 0) = -v_0
\end{cases} \tag{33}
$$

Per risolvere l'Eq.(32) osserviamo che è simile all'equazione di un moto armonico

$$
\frac{d^2l}{dt^2} = -\omega^2 l \tag{34}
$$

di cui sono note le soluzioni. Cerchiamo pertanto di ricondurre l'eq.(32) alla forma (34). A tale proposito osserviamo che il termine in l_0 e il termine μg sono entrambi costanti e possono dunque essere accorpati. Per cui riscriviamo (32) come

$$
\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(l - (l_0 + \frac{\mu mg}{k})\right) \tag{35}
$$

Definendo ora

$$
\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{36}
$$

e

$$
l'_0 = l_0 + \frac{\mu mg}{k} \tag{37}
$$

l'Eq.(35) diventa

$$
\frac{d^2l}{dt^2} = -\omega^2\left(l - l'_0\right) \tag{38}
$$

che è l'equazione di una molla con la stessa costante elastica ma una lunghezza a riposo diversa (l_0' anziché l_0).
In sostanza

Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l_0	+	Forza costante	$\Leftrightarrow$	Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l_0'

Siccome l_0' è costante, dall'Eq.(38) segue che

$$\frac{d^2(l-l_0')}{dt^2} = -\omega^2\left(l-l_0'\right) \tag{39}$$

ossia la variabile

$$l'(t) = l(t) - l_0' \tag{40}$$

soddisfa l'equazione del moto armonico

$$\frac{d^2 l'}{dt^2} = -\omega^2 l' \tag{41}$$

la cui soluzione generica si può scrivere nella forma

$$l'(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{42}$$

Dall'Eq.(40) otteniamo dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale (32)

$$l(t) = l_0' + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{43}$$

e ricordando l'espressione (37) per l_0' otteniamo

$$l(t) = l_0 + \frac{\mu m g}{k} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{44}$$

Le costanti A e B sono da determinarsi imponendo le condizioni iniziali (33)

$$\left\{\begin{array}{lcl} l(t=0) & = & l_0 + \frac{\mu m g}{k} + A\cos(\omega\, 0) + B\sin(\omega\, 0) = l_0 \\ \\ \frac{dl}{dt}(t=0) & = & -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)|_{t=0} = -v_0 \end{array}\right. \tag{45}$$

ossia

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & -\frac{\mu m g}{k} \\ \\ B\omega & = & -v_0 \qquad\quad \Rightarrow B = -\frac{v_0}{\omega} \end{array}\right. \tag{46}$$

Sostituendo le costanti A e B nella soluzione generale (44) otteniamo

$$\boxed{l(t) = l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{47}$$

La velocità è data dunque da

$$v(t) = \frac{dl}{dt} = \frac{\mu m g \omega}{k}\sin(\omega t) - v_0\cos(\omega t) \tag{48}$$

Denotiamo con t_B l'istante in cui il punto materiale raggiunge il punto B. Tale punto è caratterizzato dall'annullarsi della velocità

$$v(t_B) = \frac{\mu m g \omega}{k} \sin(\omega t_B) - v_0 \cos(\omega t_B) = 0 \tag{49}$$

e dunque

$$\tan(\omega t_B) = \frac{v_0 k}{\mu m g \omega} \tag{50}$$

Ricordando le formule di trigonometria

$$\begin{cases} \cos\alpha &= \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\ \sin\alpha &= \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \end{cases}$$

e utilizzando la (50) ricaviamo

$$\begin{cases} \cos(\omega t_B) &= \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} \\ \sin(\omega t_B) &= \dfrac{\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} \end{cases} \tag{51}$$

da cui possiamo ricavare la posizione del punto B

$$\begin{aligned} l_B = l(t_B) &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\cos(\omega t_B) - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t_B) = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} - \frac{v_0}{\omega}\frac{\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}} = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2}}\left(1 + \frac{v_0^2 k^2}{(\mu m g \omega)^2}\right) = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{\mu m g}{k}\sqrt{1+\left(\frac{v_0 k}{\mu m g \omega}\right)^2} = \\ &= l_0 + \frac{\mu m g}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{(\mu m g)^2 + \left(\frac{v_0 k}{\omega}\right)^2} = \\ & \quad [\text{uso } \omega^2 = k/m] \\ &= l_0 + \frac{\mu m g - \sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta l' \doteq l_B - l_0 = \frac{\mu m g - \sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \tag{52}$$

Dato che conosciamo $\Delta l'$ come dato dal problema, tale equazione ci permette di determinare μ.

Esplicitamente, da (52) otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta l' - \frac{\mu m g}{k} &= -\frac{\sqrt{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}}{k} \\
&\Downarrow \\
\Big(\Delta l' - \frac{\mu m g}{k}\Big)^2 &= \frac{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}{k^2} \\
&\Downarrow \\
(\Delta l')^2 - 2\Delta l' \,\frac{\mu m g}{k} + \frac{(\mu m g)^2}{k^2} &= \frac{(\mu m g)^2 + k m v_0^2}{k^2} \\
&\Downarrow \\
(\Delta l')^2 - 2\Delta l' \,\frac{\mu m g}{k} &= \frac{m v_0^2}{k} \\
&\Downarrow \\
2\Delta l' \,\frac{\mu m g}{k} &= (\Delta l')^2 - \frac{m v_0^2}{k} \\
&\Downarrow \\
\mu &= \frac{k}{2\Delta l' m g}\left((\Delta l')^2 - \frac{m v_0^2}{k}\right) \qquad (53)
\end{aligned}$$

ossia

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}k(\Delta l')^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}{m g \Delta l'} \qquad (54)$$

Sostituendo i valori numerici (ricordiamo che $\Delta l' = -0.05\,\mathrm{m}$) otteniamo

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\frac{1}{2}\;2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}(-0.05\mathrm{m})^2 - \frac{1}{2}0.5\,\mathrm{Kg}\left(0.16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{0.5\,\mathrm{Kg}\,\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(-0.05\,\mathrm{m})} = \\
&\quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg\,m/s^2}] \\
&= \frac{\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0.0025\,\mathrm{m}^2 - 0.25\,\cdot 0.0256\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}}{-0.24525\,\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= 0.016 \qquad (55)
\end{aligned}$$