

Prestazioni sistemi codificati

Codici a blocco

Calcolo della probabilità di errore sulle parole di codice

Un codice a blocco $\mathcal{C}(k, n)$ con $d_{min} = 2t + 1$ è in grado di correggere fino a t errori.

- ▶ Una parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$ è errata quando il canale introduce un numero di errori maggiore di t .
- ▶ La probabilità di errore $P_w(e) = \Pr\{w(\mathbf{e}) > t\}$ si calcola

$$P_w(e) = \sum_{j=t+1}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

- ▶ $P_w(e)$ può essere lower-bounded dalla probabilità dell'evento più probabile: aver commesso $t + 1$ errori

$$P_w(e) \approx \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$$

Bound per il calcolo della probabilità di errore sul bit

Mentre la $P_w(e)$ si riesce a calcolare con precisione, nel caso del calcolo della probabilità di errore su bit codificato si deve per forza ricorrere ad approssimazioni.

- ▶ Il numero di bit errati in $\hat{\mathbf{x}}$ dopo la decodifica dipende dal vettore di errore \mathbf{e} e da come agisce la decodifica a sindrome, che, in presenza di un numero di errori maggiore di t , aggiunge altri errori a quelli introdotti dal canale.
- ▶ La decodifica a sindrome restituisce sempre una parola di codice, quindi ogni volta che al ricevitore c'è un errore nella decodifica i bit errati sono almeno d_{min} degli n trasmessi.
- ▶ In questo caso la $P_b(e)$ si approssima

$$P_b(e) \approx \frac{d_{min}}{n} P_w(e) \approx \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}. \quad (1)$$

Confronto delle prestazioni tra sistemi codificati e non

La ridondanza introdotta dal codice comporta una maggiore 'spesa' energetica, infatti si utilizzano n bit codificati per trasmettere k bit di informazione.

- Il 'budget' energetico di k bit viene distribuito su n bit

$$kE_b = nE_{b,c} \implies E_{b,c} = \frac{k}{n}E_b$$

Confronto delle prestazioni tra sistemi codificati e non

La probabilità di errore sul bit per una BPSK non codificata è

$$P_b^{(BPSK)}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Nel caso codificato bisogna considerare che la probabilità di errore p dipende dal valore di SNR dei bit codificati

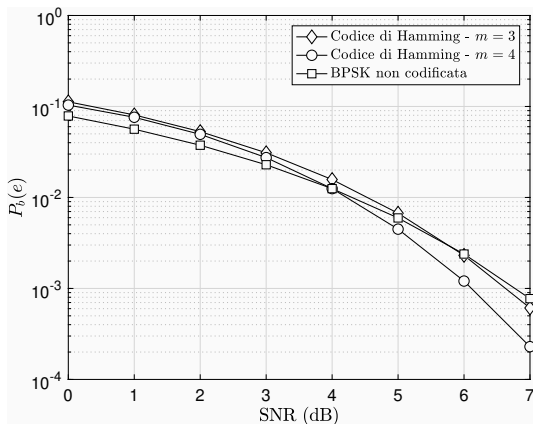
$$\frac{E_{b,c}}{N_0} = \frac{k}{n} \frac{E_b}{N_0}$$

- La probabilità $P_b(e)$ del codice in (1), va calcolata utilizzando

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b,c}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{k}{n} \frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (2)$$

Confronto delle prestazioni tra sistemi codificati e non

- Confronto delle prestazioni su canale Gaussiano di un sistema BPSK senza codifica con le prestazioni di un sistema codificato con codice di Hamming con $m = 3$ e $m = 4$.



Codici convoluzionali

Generatori per i codici convoluzionali

- ▶ La bontà di un codice convoluzionale dipende dalla sua d_{free} .
- ▶ La d_{free} dipende dai codici generatori, dal rate $R = k/n$ e dalla constraint length L .
- ▶ Tipicamente i codici convoluzionali hanno $k = 1$ per limitare la complessità di codificatore e decodificatore.
- ▶ Fissato R e L i generatori ottimi sono quelli che massimizzano la d_{free} e possono essere trovati tramite una ricerca esaustiva fra tutte le possibili $(2^L)^n = 2^{Ln}$ combinazioni.
- ▶ A causa della limitata complessità i codici convoluzionali a $R = 1/2$ sono quelli più studiati.

Generatori ottimi per $R = 1/2$

Generatori ottimi (in ottale!) per codici convoluzionali a rate $R = 1/2$ al variare della constraint length L e d_{free} corrispondente.

Constraint length	Generatori ottimi		Distanza libera
L	\mathbf{g}_1	\mathbf{g}_2	d_{free}
3	7	5	5
4	17	15	6
5	35	23	7
6	75	53	8
7	133	171	10
8	371	247	10
9	763	561	12
10	1537	1131	12

Puncturing per i codici convoluzionali

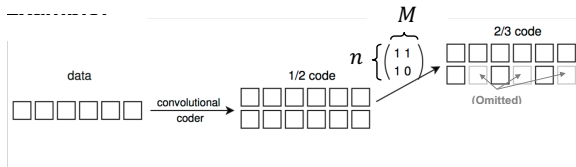
- ▶ In teoria, non c'è flessibilità nella scelta del rate dei codici convoluzionali che assume sempre valori del tipo $R = 1/n$.
- ▶ In realtà, la tecnica chiamata *puncturing* permette di costruire codici con rate maggiori partendo da un codice a rate $R = 1/n$.
- ▶ Il puncturing consiste nel cancellare alcuni bit all'uscita del codificatore. I bit vengono cancellati secondo un pattern preciso, espresso da una *puncturing table*, condiviso con il ricevitore, che quindi conosce esattamente la posizione dei bit cancellati.

Puncturing per i codici convoluzionali

- ▶ Il trasmettitore e il ricevitore si accordano sui bit codificati da omettere attraverso la puncturing table, che contiene n righe (una per bit in uscita) e M colonne. La matrice contiene un certo numero P di '1' e un numero $P - nM$ di '0'.
- ▶ Dopo il puncturing il rate del codice diventa

$$R' = \frac{1}{n} \frac{nM}{P} = \frac{M}{P}$$

- ▶ Esempio con $n = 2$, $M = 2$, $P = 3$ con rate $R' = 2/3$.



Puncturing per i codici convoluzionali

Tabella di puncturing per il codici convoluzionale a rate $R = 1/2$, $L = 7$ al variare della constraint length del rate $R = M/P$ in uscita e d_{free} corrispondente.

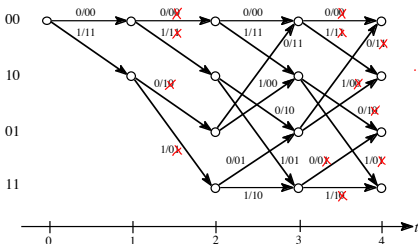
Il puncturing ottimo è stato trovato con una ricerca esaustiva su tutti i possibili pattern.

Rate M/P	Puncturing matrix	d_{free}
1/2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	10
2/3	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	6
3/4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	5
5/6	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	4
7/8	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	3

Esempio di traliccio dopo il puncturing

Traliccio del codice convoluzionale a rate $R = 2/3$ ottenuto dal codice convoluzionale ottimo con $R = 1/2$ e $L = 3$ applicando la matrice di puncturing $[11; 10]$.

I bit in corrispondenza del puncturing (marcati con una croce rossa) non vengono trasmessi e al ricevitore non contribuiscono al calcolo delle metriche di ramo.



Bound per le prestazioni dei codici convoluzionali

Ad alti rapporti segnale-rumore si trova la seguente approssimazione

- BPSK codificata con decodifica hard

$$P_e^{(b)} \approx Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{R d_{free}}{2}} \right)$$