La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

Se A e' una matrice a valori reali, gli autovalori e autovettori sono complessi e coniugati

E' possibile usare un cambio di coordinate reale che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi (blocchi al piu' di dimensione 2)

Il numero di blocchi e' pari al numero di coppie di autovalori complessi e coniugati.

[FONDAMENTI DI AUTOMATICA, BICCHI
PARTE I

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$$

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione q > 1 corrispondenti ad autovalori complessi coniugati

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan

Forma complessa di Jordan

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$$

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione q > 1 corrispondenti ad autovalori complessi coniugati

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan — Forma complessa di Jordan

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \quad \xleftrightarrow{\text{simile}} \quad \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$$

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione q > 1 corrispondenti ad autovalori complessi coniugati

$$I \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan

Forma complessa di Jordan

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

Block 1: $\quad 1, t$

$$\boxed{\lambda_1 = 0, \quad ma = 2, \quad mg = 1}$$

$$\lambda_2 = j, \quad ma = 2, \quad mg = 1$$

$$\lambda_3 = -j, \quad ma = 2, \quad mg = 1$$

Block 2: $\quad \cos(t), \sin(t)$

$t\cos(t), t\sin(t)$

Il sistema e' instabile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 5, \quad ma = 1, \quad mg = 1$ Block 1: e^{5t}

$\lambda_2 = 1 + 2j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$

$\lambda_3 = 1 - 2j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$

Block 2: $e^t \sin(2t), \ e^t \cos(2t)$

$\lambda_4 = -2, \quad ma = 3, \quad mg = 1$

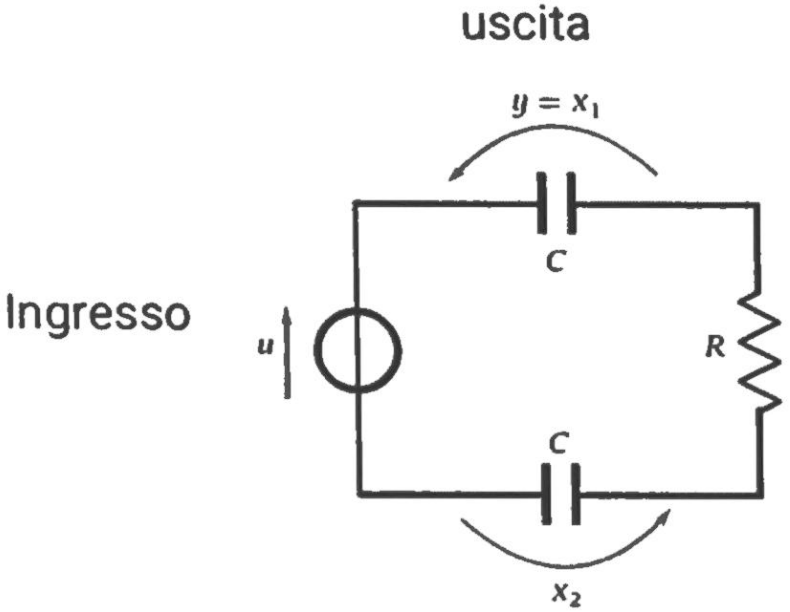
Block 3: $e^{-2t}, \ te^{-2t}, \ t^2 e^{-2t}$

Altre proprietà strutturali dei sistemi lineari

Nei sistemi lineari la stabilità dipende solo dalla *struttura* del sistema (e in particolare dalla sola matrice **A**).
Esistono altre proprietà che dipendono dalla struttura del sistema e che sono di interesse per la regolazione automatica?

Due problemi:
- Che ingresso dare per portare il sistema in un dato stato?
- Come determinare lo stato se abbiamo solo la misura dell'uscita?

Raggiungibilità



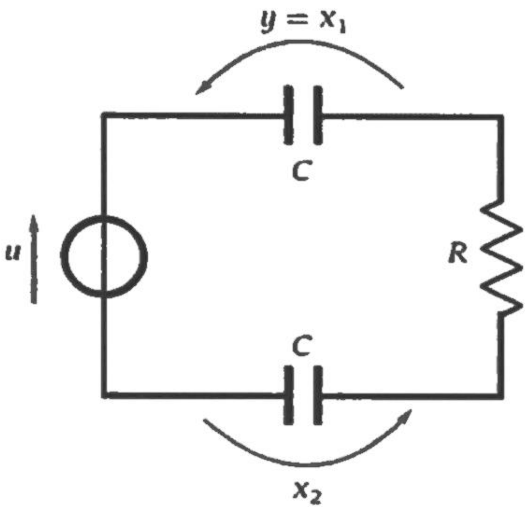
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Raggiungibilità

Ax + Bu

uscita

Ingresso



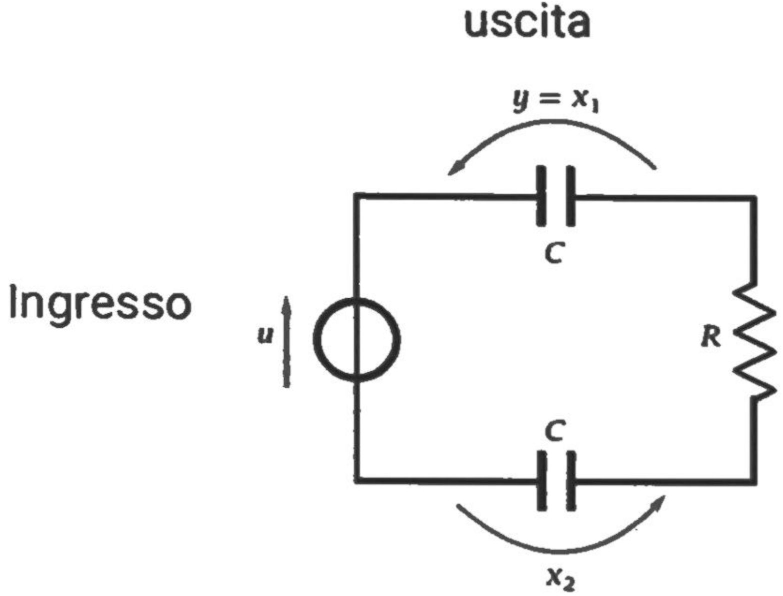
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))\\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))\\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}
$$

Cambio di variabile

$$
\begin{cases}
\hat{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)\\
\hat{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t)
\end{cases}
$$

$\leftarrow T$

Raggiungibilità



$$\dot{\hat{x}}_1(t) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1(t) - u(t))$$
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = 0$$
$$y(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t))$$

Raggiungibilità

Prendiamo il sistema dinamico di ordine n, con m ingressi, e *p* uscite

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Definizione

Uno stato $\tilde{x}$ del sistema LTI si dice **raggiungibile** se esistono un istante di tempo finito $\tilde{t} > 0$ e un ingresso $\tilde{u}$, definito tra 0 e $\tilde{t}$, tali che, detto $\tilde{x}_f(t)$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$, il movimento forzato dello stato generato da $\tilde{u}$ risulti $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$.

Un sistema i cui stati sono tutti raggiungibili si dice completamente raggiungibile

Raggiungibilità

Questa proprieta' divide gli stati in:

Raggiungibili x_R

Non Raggiungibili x_{NR}

Per verificare se un sistema e' completamente raggiungibile

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$$

Condizione necessaria e sufficiente per la raggiungibilità:

$$rank([\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = n$$

Raggiungibilità

Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, si può isolare la sua parte raggiungibile

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \xrightarrow{\quad \tilde{x}(t) = T_r x(t) \quad} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\hat{A}_a} & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \boxed{\hat{A}_b} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

n_R = rango(M_R)

Raggiungibilità

Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, si può isolare la sua parte raggiungibile

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \xrightarrow{\tilde{x}(t) = T_r x(t)} \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_R \\ \tilde{x}_{NR} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\hat{A}_a} & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \boxed{\hat{A}_b} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$$

n_R = rango(M_R)

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

$$\dot{\tilde{x}}_R = \hat{A}_a \tilde{x}_R + \tilde{\hat{A}}_{ab} \tilde{x}_{NR} + \hat{B}_a u$$

$$\dot{\tilde{x}}_{NR} = \hat{A}_b \tilde{x}_{NR}$$

Trovare la matrice T

Scegliamo n_r colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$

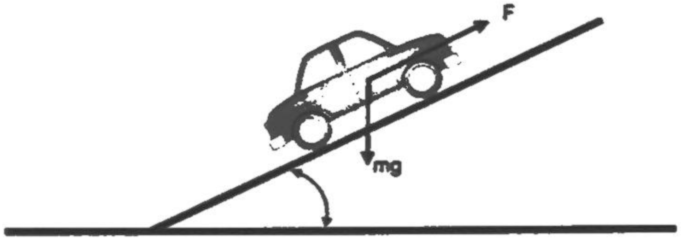
Ogni stato raggiungibile e' combinazione lineare delle colonne selezionate.

Aggiungo *n-n_r* colonne linearmente indipendenti

Raggiungibilita' - esempio, velocità di crociera

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{m} & -g \\ \left(-\frac{\beta}{m}\right)\frac{\gamma}{m} & g\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} \cdots$$

Sistema raggiungibile