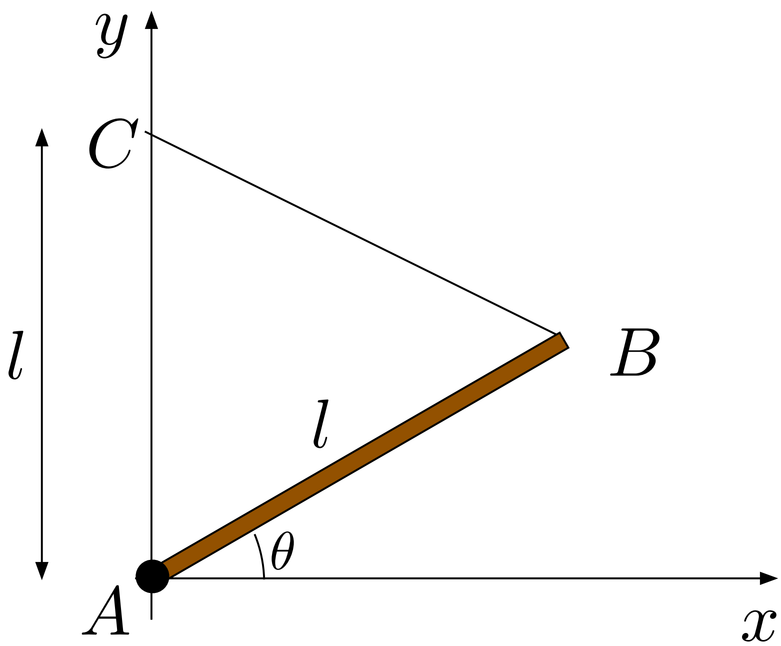
Esercizio **(tratto dal problema 7.21 del Mazzoldi 2)**

Un ponte levatoio è costituito da una tavola AB di massa $m = 600\,\text{Kg}$ lunga $l = 4\,\text{m}$. Quets tavola è incernierata sul lato A e può essere alzata agendo sul lato B con una fune, tirata dal punto C, posto sulla verticale passante per A e distante l da A. Calcolare:

1. il valore della tensione della fune quando il ponte è in equilibrio ad un angolo $\theta = 30^o$ rispetto all'orizzontale;

2. la reazione vincolare $\vec{R}$ in A in tale situazione.



SOLUZIONE

Il ponte levatoio è un corpo rigido. Affinché rimanga fermo in equilibrio occorre che non sia dotato né di moto traslatorio né di moto rotatorio. Le equazioni cardinali sono dunque

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \sum \vec{F}_i & = & 0 & \text{(nessuna forza netta} \rightarrow \text{nessun moto traslatorio)} \\ & & & \\ \sum \vec{M}_i & = & 0 & \text{(nessun momento netto} \rightarrow \text{nessun moto rotatorio)} \end{array} \right. \tag{1}$$

Indichiamo on x l'asse orizzontale (versore $\hat{\imath}$), con y l'asse verticale diretto verso l'alto (versore $\hat{\jmath}$) e con z l'asse uscente dal foglio (versore $\hat{k}$).

1. **Forze**
   Le forze che agiscono sul ponte sono:

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{\jmath} \qquad \text{forza peso} \tag{2}$$

$$\vec{T} = -T\cos\frac{\pi}{6}\hat{\imath} + T\sin\frac{\pi}{6}\,\hat{\jmath} \qquad \text{tensione della fune} \tag{3}$$

$$\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \qquad \text{reazione vincolare in A} \tag{4}$$

   (**NOTA BENE: Le reazioni vincolari, così come le tensioni, sono delle incognite da determinarsi!**) Dalla prima delle equazioni cardinali (1) abbiamo dunque

$$\begin{array}{rcl} m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ -mg\,\hat{\jmath} - T\cos\frac{\pi}{6}\hat{\imath} + T\sin\frac{\pi}{6}\,\hat{\jmath} + R_x\,\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ \left(-T\cos\frac{\pi}{6} + R_x\right)\hat{\imath} + \left(-mg + T\sin\frac{\pi}{6} + R_y\right)\hat{\jmath} & = & 0 \end{array}$$

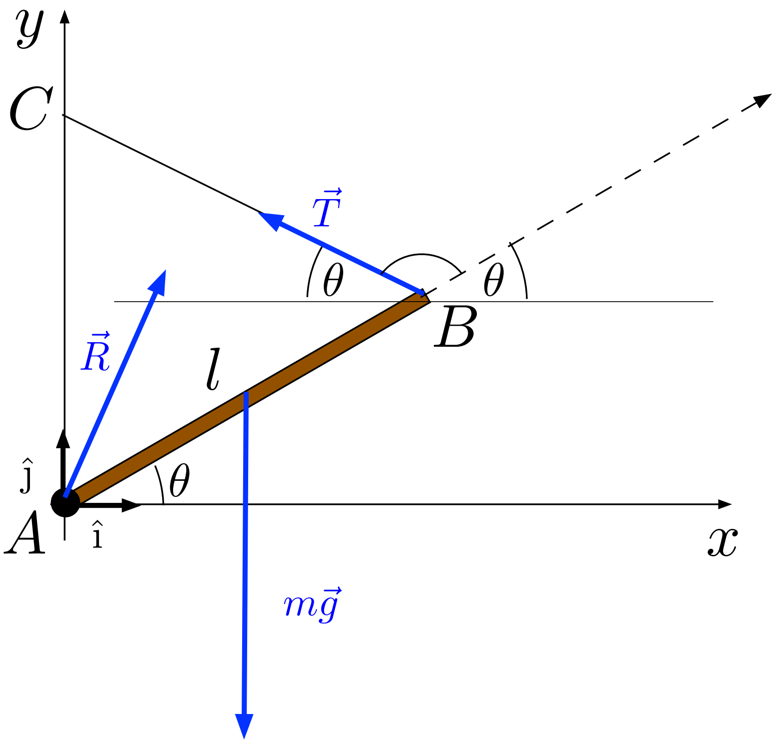
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -T\cos\frac{\pi}{6} + R_x & = & 0 \\ & & \\ -mg + T\sin\frac{\pi}{6} + R_y & = & 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

   da cui ricaviamo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_x & = & T\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}T \\ & & \\ R_y & = & mg - T\sin\frac{\pi}{6} = mg - \frac{T}{2} \end{array} \right. \tag{6}$$

2. **Momenti**
   Dobbiamo anzitutto specificare il polo rispetto a cui valutare i momenti $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ delle varie forze. Scegliamo, ad esempio, il punto A come polo.
   IMPORTANTE: Per valutare ciascuno dei momenti delle 3 forze occorre ricordare di trasportare parallelamente il vettore $\vec{r}$ (che identifica il punto di applicazione) ed il vettore $\vec{F}$ (che identifica la forza) in modo che abbiano la coda nel medesimo punto. In tal modo, sfruttando la regola della mano destra, possiamo stabilire la direzione del momento di ciascuna forza (in particolare se è entrante o uscente dal foglio).

   Notiamo che la reazione vincolare $\vec{R}$ ha braccio nullo perché è proprio applicata in A, e dunque non genera alcun momento. Le uniche forze che applicano un momento sono il peso e la tensione.



I momenti (rispetto ad A) che agiscono sul ponte sono dunque:

$$\vec{M}_{peso} = -mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\hat{k} \qquad \text{momento della forza peso} \tag{7}$$
$$\vec{M}_{T} = T\,l\,\sin(2\pi-2\theta)\,\hat{k} \qquad \text{momento della tensione} \tag{8}$$
$$\vec{M}_{R} = 0 \qquad \text{momento della reazione vincolare in A} \tag{9}$$

dove $\hat{k}$ è il versore uscente dal foglio.
Dalla seconda delle equazioni cardinali (1) abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{peso}+\vec{M}_T+\vec{M}_R &= 0\\
&\Downarrow\\
-mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\hat{k}\,+T\,l\,\sin(\pi-2\theta)\,\hat{k}\,+0 &= 0\\
&\Downarrow\\
\left(-mg\,\frac{l}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)+T\,l\,\sin(\pi-2\theta)\right)\,\hat{k} &= 0\\
&\Downarrow\\
-mg\,\frac{l}{2}\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}_{=\cos\theta}+T\,l\,\underbrace{\sin(\pi-2\theta)}_{=2\sin\theta\cos\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Otteniamo

$$T=\frac{mg}{4\sin\theta}=\frac{mg}{2} \tag{11}$$

Sostituendo i dati, otteniamo

$$T=\frac{mg}{2}=\frac{600\,\mathrm{Kg}\cdot 9.81}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=2943\,\mathrm{N} \tag{12}$$

Per determinare ora la reazione vincolare sostituiamo la tensione (11) nell'espressione (6)

$$\begin{cases} R_x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,mg \\ \\ R_y &= = mg - \frac{mg}{4} = \frac{3}{4}\,mg \end{cases} \tag{13}$$

Pertanto la reazione vincolare forma un angolo di

$$\phi_R = \arctan\frac{R_y}{R_x} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \tag{14}$$

con l'orizzontale.
Sostituendo i dati, troviamo

$$\begin{cases} R_x &= \frac{\sqrt{3}}{4}\,mg = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 600\,\mathrm{Kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2549\,\mathrm{N} \\ \\ R_y &= \frac{3}{4}\,mg = \frac{3}{4}\cdot 600\,\mathrm{Kg}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4414\,\mathrm{N} \end{cases} \tag{15}$$