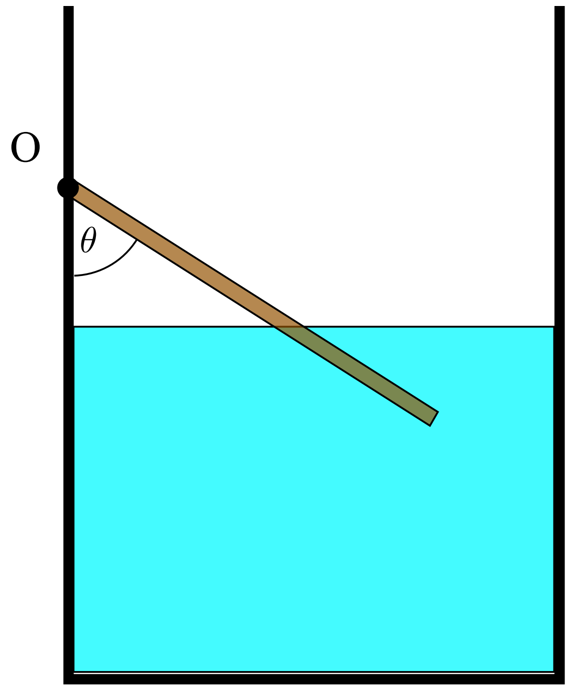
Esercizio (tratto dall'Esempio 8.2 del Mazzoldi)

Un'asta sottile di lunghezza l, sezione S e densità uniforme ρ è incernierata nel suo estremo O alla parete di un recipiente parzialmente riempito d'acqua. L'asta può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per O. Mentre O è fuori dall'acqua, l'altro estremo è immerso e, all'equilibrio, la parte di lunghezza dell'asta che rimane fuori dall'acqua è d. Calcolare la densità del materiale di cui è composta l'asta, e la reazione vincolare del perno in O, in termini di ρ_l, d, S e l.



SOLUZIONE
Sull'asta agiscono 3 forze

- forza peso $m\vec{g}$;

$$\begin{cases} \text{diretta lungo } z \text{ verso il basso} \\ \text{applicata al CM dell'asta} \end{cases} \qquad m\vec{g} = -mg\,\hat{\jmath} \tag{1}$$

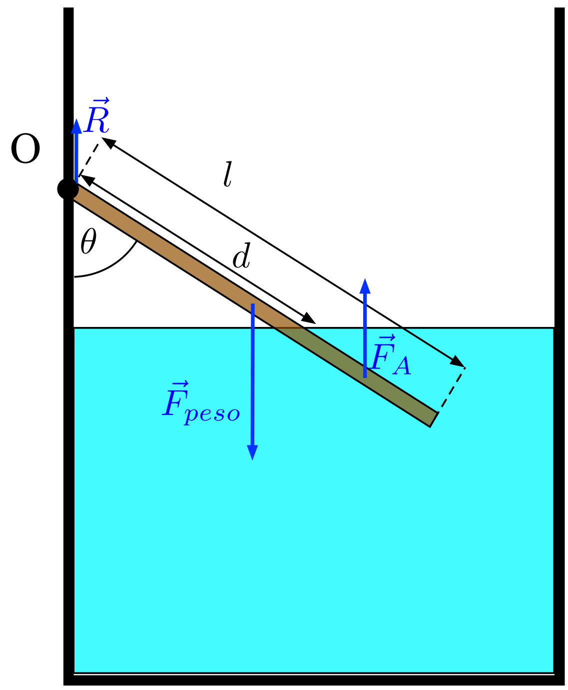
  dove $\hat{\jmath}$ è il versore lungo z verso l'alto.

- spinta di Archimede $\vec{F}_A$;

$$\begin{cases} \text{diretta lungo } z \text{ verso l'alto} \\ \text{applicata al CM della parte } \textit{immersa} \end{cases} \qquad \vec{F}_A = m_l g\,\hat{\jmath} \tag{2}$$

  dove m_l è la massa dell'acqua che è stata spostata dalla parte *immersa* dell'asta.

- reazione vincolare $\vec{R}$ del perno O.



L'asta è un corpo rigido, che nel problema descritto si trova in condizioni di statica. Pertanto abbiamo due equazioni della statica

1. moto traslatorio del CM: il CM è fermo

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{R} = 0 \tag{3}$$

   da cui ricaviamo che

$$\vec{R} = -m\vec{g} - \vec{F}_A = (m - m_l)g\,\hat{\jmath} \tag{4}$$

Nota Bene:
Siccome la massa m dell'asta è incognita (essendo incognita la sua densità ρ), la reazione vincolare (4) rimane per il momento ancora incognita.

2. moto rotatorio: l'asta non ruota attorno ad alcun polo:

$$\vec{M}_{peso} + \vec{M}_A + \vec{M}_R = 0 \tag{5}$$

Scegliamo come polo il perno O stesso, in tal caso il braccio della reazione vincolare è nullo e (5) si riduce a

$$\vec{M}_{peso} + \vec{M}_A = 0 \tag{6}$$

Con questa scelta di polo abbiamo eliminato da (5) la reazione vincolare $\vec{R}$, che è ancora incognita.
Abbiamo ora

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{M}_{peso} & = & \underbrace{\frac{l}{2}}_{\text{braccio}} \, mg \, \sin\theta \, \hat{k} \\ & & \\ \vec{M}_A & = & -\underbrace{\left(d + \frac{l-d}{2}\right)}_{\text{braccio}} m_l g \, \sin\theta \, \hat{k} \end{array} \right. \tag{7}$$

dove $\hat{k}$ è il versore *entrante* nel foglio.
Sostituendo (7) in (6) abbiamo

$$\left(\frac{l}{2} mg \, \sin\theta - \left(d + \frac{l-d}{2}\right) m_l g \, \sin\theta \right) \hat{k} = 0$$

da cui

$$\frac{l}{2} m = \left(d + \frac{l-d}{2}\right) m_l \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

$$m = m_l \, \frac{l+d}{l} \tag{9}$$

Osserviamo ora che

$$\left\{ \begin{array}{lcll} m & = & \rho \, S \, l & \text{(massa totale dell'asta)} \\ & & & \\ m_l & = & \rho_l \, S \, (l-d) & \text{(massa acqua corrispondente a parte immersa dell'asta)} \end{array} \right. \tag{10}$$

Sostituendo (10) in (9) otteniamo

$$\boxed{\rho = \rho_l \, \frac{l^2 - d^2}{l^2}} \tag{11}$$

dove la densità ρ_l dell'acqua è nota.

3. Ora che abbiamo determinato la densità ρ dell'asta, possiamo determinare la reazione vincolare (4). Infatti

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (m - m_l) g \,\hat{\jmath} && (12) \\ &\Downarrow \\ \vec{R} &= (\rho S l - \rho_l S(l-d)) g \,\hat{\jmath} && (13) \\ &\Downarrow \\ \vec{R} &= \rho_l S \left(\frac{\rho}{\rho_l} l - (l-d) \right) g \,\hat{\jmath} && (14) \\ &\Downarrow \;\; [\text{uso } (11)] \\ \vec{R} &= \rho_l S \left(\frac{l^2 - d^2}{l} - (l-d) \right) g \,\hat{\jmath} && (15) \\ &\Downarrow \\ \vec{R} &= \rho_l S \,(l-d)\, d \, g \,\hat{\jmath} && (16) \end{aligned}$$

La reazione vincolare è pertanto diretta verso l'alto, e la sua intensità si annulla sia quando $d = 0$ (asta posta orizzontalmente sulla superficie dell'acqua) che quando $d = l$ (asta posta verticalmente e completamente immersa).