ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 12

Note Title 12/10/2018

- → Combinazione lineare
- → SPAN
- → Generatori
- → Vettori linearmente dipendenti / indipendenti
- → Basi di uno spazio vettoriale

Setting generale: $\mathbb{K}$ campo e V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Def. (Comb. lineare)
Sia $n \geq 1$ un numero intero
Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori (elementi di V)
Siano $c_1, \dots, c_n$ numeri (elementi di $\mathbb{K}$)
Allora

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

è una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $c_1, \dots, c_n$.

Esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $v = (2,3,4)$, $n = 1$

Usando solo v le sue comb. lineari sono del tipo cv dove $c \in \mathbb{R}$
= retta che passa per l'origine e ha direzione data da v.

$\vec{v} = (2,3,4)$ e $\vec{w} = (-1,0,-2)$. Le loro comb. lin.
sono del tipo

$$a\vec{v} + b\vec{w}$$

= piano per l'origine che contiene $\vec{v}$ e $\vec{w}$

—o—o—

Def. (span) Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ vettori dati in V.
Si definisce

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

l'insieme di tutte le comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ al variare dei coefficienti, cioè

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) = \{ c_1 v_1 + \dots + c_m v_m : (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \}$$

Prop. $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$ è un s.sp. vettoriale di V.

Dim. Devo fare 2 verifiche

- è chiuso rispetto alla somma, cioè la somma di 2 comb. lin. è ancora una comb. lin.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_m \to 1^a \text{ comb. lin.}$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_m \to 2^a \text{ comb. lin.}$$

Se le sommo, ottengo

$$(a_1+b_1) v_1 + (a_2+b_2) v_2 + \dots + (a_n+b_n) v_m \to \text{comb. lin.}$$

- è chiuso risp. al prodotto per un numero, cioè una comb. lin. moltiplicata per un numero viene ancora una comb. lin.

$$a(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_m) = (ac_1) v_1 + (ac_2) v_2 + \dots + (ac_n) v_m$$

— o — o —

Esempio In $\mathbb{R}^3$

- $\mathrm{Span}((2,3,4))$ = retta di direzione $(2,3,4)$
- $\mathrm{Span}((2,3,4), (-1,2,1))$ = piano per l'origine che contiene i 2 vettori

Def. Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V
Si dice che $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono GENERATORI di V se ogni elemento $v \in V$ si può scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$.
Formalmente

$$\forall v \in V \quad \exists (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{K}^m \quad t.c. \quad v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

Def. (Dipendenza / indipendenza lineare)
Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori di V

- Si dice che $v_1, \dots, v_m$ sono $\boxed{\text{linearmente dipendenti}}$ se esiste una loro comb. lineare che viene il vettore nullo ma con almeno un coeff. $\neq 0$
- Si dice che $v_1, \dots, v_m$ sono $\boxed{\text{linearmente indipendenti}}$ se la loro unica comb. lin. che viene il vettore nullo è quella con tutti i coeff. $= 0$. Formalmente:

$$\boxed{c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_m \vec{v}_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0}$$

0 di V $\qquad$ 0 di $\mathbb{K}$

Def. (BASE di uno sp. vettoriale)
Si dice che $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono una base di V se

(i) sono generatori
(ii) sono lin. indipendenti

— o — o —

Esempio 1 $\quad V = \mathbb{R}^3 \quad e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$

Dico che $\{e_1, e_2, e_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ che si chiama BASE CANONICA.
Per dim. che è una base devo fare 2 verifiche

(1) sono generatori, cioè che ogni $v \in \mathbb{R}^3$ è comb. lin. di e_1, e_2, e_3

$$\vec{v} = (x, y, z) = \underset{c_1}{x}\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + \underset{c_2}{y}\underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + \underset{c_3}{z}\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

(2) sono linearmente indipendenti, cioè che l'unica loro comb. lin. che viene 0 è quella con tutti coeff. nulli

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = (c_1, c_2, c_3) = \text{vettore nullo} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi di grado ≤ 3.

Dico che una base è $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}, \underset{v_4}{x^3}\}$ (4 elementi di V)

- Sono generatori perché ogni $p(x)$ di grado ≤ 3 è del tipo

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \text{comb. lin. di } v_1, v_2, v_3, v_4$$

- sono lin. indip. perché l'unico modo di far venire $\vec{0}$, cioè il polinomio nullo, è usare $a = b = c = d = 0$.

Esempio 3 $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (1,2,3)$ $v_3 = (0,-1,1)$

Provo a verificare che sono una base

- Sono generatori? Dato un generico vettore (A,B,C), cerco coeff. x, y, z numeri t.c.

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = (A, B, C)$$

$$(x+y,\ 2y-z,\ x+3y+z) = (A, B, C)$$

Devo risolvere un sistema lineare

$$\begin{cases} x+y = A \\ 2y-z = B \\ x+3y+z = C \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 1 & 3 & 1 & C \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 0 & 2 & 1 & C-A \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & -1 & B \\ 0 & 0 & 2 & C-A-B \end{array}\right)$$

La forma a scala è fatta bene, cioè ogni riga ha il PIVOT e non ci sono gradini di spessore ≥ 2, quindi il sistema ha sempre soluzione.

- Sono lin. indipendenti? Devo imporre

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = \text{vettore nullo}$$

e sperare che questo implichi che $x = y = z = 0$.

Mi ritrovo lo stesso sistema con $A = B = C = 0$ e dalla forma a scala ottenuta deduco che per forza $x = y = z = 0$.

—o—o—

Teorema (Proprietà delle basi)
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in MODO UNICO come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Che ogni v si scrive è conseguenza del fatto che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori.
Supponiamo ci sia $v \in V$ che si scrive in 2 modi

$$\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n}_{v} = \underbrace{b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n}_{v}$$

Portando tutto a sx e riorganizzando trovo

$$(a_1-b_1)v_1+(a_2-b_2)v_2+\dots+(a_n-b_n)v_n=0$$

Ma essendo i v_i lin. indip., per forza dove essere

$$a_1-b_1=a_2-b_2=\dots=a_n-b_n=0$$

cioè $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_n=b_n$.

— o — o —

<u>Oss</u>. Fissata una base, ogni elemento $v\in V$ lo posso pensare come n-upla di numeri

$v \rightsquigarrow$ coeff. della sua rappresentazione.