Il CAMBIO di BASE

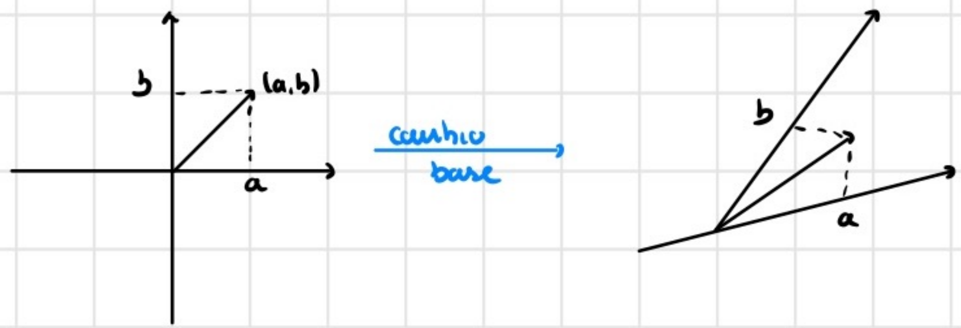
X è uno SPAZIO di DIMENSIONE FINITA. Fissata una base $v_1 \dots v_n \longrightarrow \dim X = n$

$\forall x \in X \ \exists! \ x_1 \dots x_n : \ x = \sum_{1}^{n} x_i v_i$

$x \in X \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\downarrow$

Ottenuta codifica numerica di qualsiasi spazio



Come cambiano le coordinate (dello stesso vettore) quando si cambia base?

→ MATRICE di CAMBIO BASE: dati X e $\{U_1,\dots U_n\}$ e $\{U'_1,\dots,U'_n\}$ due basi di X, la matrice di cambio base da $U_1\dots U_n$ (base vecchia) a $U'_1,\dots,U'_n$ (base nuova) è definita come $U'_J = M_{ij} \cdot \sum_{i=1}^{n} M_{ij} U_i$

Ha come colonne le coordinate di ciascuno dei vettori di U'_J rispetto alla base $U_1,\dots U_n$

Con Gauss-Jordan: $U_1\dots U_n | U'_1 \dots U'_n \longrightarrow e_1 \dots e_n | M$

Esempio

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$U_1 \quad U_2 \qquad U'_1 \quad U'_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$
$U_1 \quad U_2 \quad U'_1 \quad U'_2$

$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ → Matrice di CAMBIO BASE

$$(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Invertendo i ruoli di U_i ed U'_J si ottiene la matrice di cambio base nel VERSO OPPOSTO

→ LEMMA: Le matrici ottenute sono una l'inversa dell'altra

Dimostrazione

$f_1 \dots f_m \qquad f'_1 \dots f'_m$ basi di Y

$f'_J = N_{iJ} f_i$ e H è la matrice di cambio di base da $f'_1\dots f'_m$ a $f_1\dots f_m$ (verso opposto a N)

$f'_J = N_{iJ} f_i = N_{iJ} H_{Ki} f'_K$ dove N è nota e H è incognita

→ Il secondo membro è una combinazione della base $f'_1 \dots f'_m$ uguale a f'_J

→ $f'_J = 0 f'_1 + \dots + 0 f'_{J-1} + 1 f'_J + 0 f'_{J+1} + \dots + 0 f'_m$

Ne segue che $(HN)_{KJ} = \begin{cases} 1 & K=J \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ ⟶ Concludendo: $H = N^{-1}$

→ Come cambiano le coordinate di un vettore cambiando base?

→ PROPOSIZIONE: Siano x_i, $i=1\dots n$ e x_J, $J=1\dots n$, le coordinate di un fissato vettore X rispetto alle basi $U_1\dots U_n$ e $U'_1\dots U'_n$, rispettivamente; sia (m_{iJ}) infine la matrice di cambio di base da $U_1\dots U_n$ a $U'_1 \dots U'_n$.
Allora si ha: $x_i = \sum_{J=1}^{n} m_{iJ} x'_J$ e $x'_h = \sum_{K=1}^{n} (m^{-1})_{hK} x_K$

Dimostrazione

$X = x_i U_i \qquad x_i \longrightarrow x'_i \longrightarrow X = x_i U_i = x_J U_J$ → base con x_J coordinata di X rispetto a U_J

$\quad$ → coordinata di X rispetto a U_J

$X = x'_i U'_i \longrightarrow X = x'_i U'_i = x'_i M_{Ji} U_J$

$x_J = M_{Ji} x'_i$ ⟶ Porta la base vecchia nella nuova ma coordinate nuove nelle vecchie

→ Forma SCALARE ⟶ Forma VETTORIALE: $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = M \begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}$ ⟶ PRODOTTO di MATRICI

Moltiplicando ambo i membri per M^{-1}: $M^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{MM^{-1}}_{I}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

La MATRICE ASSOCIATA: Sia $A: X \longrightarrow Y$, con A lineare e X e Y di dimensione finita. Siano poi $e_1 \dots e_n$ una base di X e $e_1' \dots e_m'$ una base di Y. La matrice associata ad A ed alle 2 basi è definita da $A(e_j) = A_{ij} e_i'$, dove A_{ij} è la coordinata di $A(e_j)$ rispetto a e_i'

PROPRIETÀ FONDAMENTALE: $A(x) = A(x_i e_i) \underset{\text{linearità}}{=\!=} x_i A(e_i) = x_i A_{ji} e_j' \in Y$ con $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow$ Coordinate di $A(x)$ rispetto alla base di arrivo

MATRICE ASSOCIATA al PRODOTTO di 2 applicazioni lineari

X, Y, Z spazi di dimensione finita e $e_1 \dots e_n$ base di X, $e_1' \dots e_m'$ base di Y e $e_1'' \dots e_p''$ basi di Z. Siano poi $\dot{A}: X \longrightarrow Y$ e $\dot{B}: Y \longrightarrow Z$ $\longrightarrow$ La matrice associata al prodotto $X \longrightarrow B(A(x))$ è la matrice prodotto BA delle matrici associate a $\dot{B}$ ed $\dot{A}$

Dimostrazione:

$$\dot{B}(\dot{A}(e_i)) \underset{\text{def. }A}{=\!=} \dot{B}(A_{ji} e_j') = A_{ji} \dot{B}(e_j') \underset{\text{def. }B}{=\!=} A_{ji} B_{hj} \underset{\in Z}{e_h''} = (BA)_{hi} e_h''$$

Come cambia la matrice associata se si cambiano le basi?

Si hanno X ed Y spazi vettoriali di dimensione finita e $\dot{A}: X \longrightarrow Y$ un'applicazione lineare fra di essi. Si hanno poi $e_1 \dots e_n$ ed $e_1' \dots e_n'$ basi di X e $f_1 \dots f_m$ e $f_1' \dots f_m'$ due basi in Y. Si ha poi A che è la matrice associata ad $\dot{A}$ ed alle vecchie basi $e_1 \dots e_n$ e $f_1 \dots f_m$ e A' che è la matrice associata ad $\dot{A}$ e alle basi nuove $e_1' \dots e_n'$, $f_1' \dots f_m'$. Si hanno poi M che è la matrice di cambio di base da $e_1 \dots e_n$ a $e_1' \dots e_n'$ e N che è la matrice di cambio di base da $f_1 \dots f_m$ a $f_1' \dots f_m'$

PROPOSIZIONE: In queste condizioni si ha: $A' = N^{-1}AM$

Dimostrazione

$$A(e_i') \underset{\text{base}}{\overset{\text{cambio}}{=\!=}} A(M_{ji} e_j) \overset{\text{linearità}}{=\!=} M_{ji} A(e_j) = M_{ji} A_{kj} f_k = \underbrace{M_{ji} A_{kj} N^{-1}_{hk}}_{(N^{-1}AM)_{hi}} f_h'$$

$f_k' = N_{hk} f_h$

$f_k = N^{-1}_{hk} f_h'$

$(N^{-1}AM)_{hi} f_h'$

A'_{hi} (matrice associata) $\longrightarrow A' = N^{-1}AM$