591AA 21/22 – ESAME INTERMEDIO

Istruzioni: Questo esame non sarà valutato. Questo esame copre gli argomenti contenuti nelle Lezioni 13-19 che sono pubblicati sulla classe di Google Classroom. Questo esame non copre tutti gli argomenti contenuti nelle Lezioni 13-19.

Problema 1. Esprimi la soluzione dell'equazione

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

simbolicamente tramite determinanti usando la regola di Cramer. [Scrivere la risposta usando i determinanti delle matrici 3x3, non necessario espandere i determinanti in polinomi nei coeffici-

Teorema (Regola di Cramer). Se $\det(A) \neq 0$ il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione x, data da

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \qquad \text{per ogni componente di } x \tag{E12}$$

dove B_i indica la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con b.

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Problema 2. Scrivi la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -5 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$
come prodotto LU dove U è una matrice triangolare superiore e $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ è una matrice triangolare inferiore che è un prodotto di matrici elementari.

$\boxed{\text{Fattorizzazione della matrice}}$

In particolare, Sia A una matrice $n \times n$ e $M_1, \ldots, M_k$ le mosse di Gauss necessarie per trasformare A in una matrice scalina A' utilizzando l'eliminazione gaussiana.

Sia E_j la matrice elementare ottenuta applicando M_j alla matrice identità $n \times n$.
Allora,
$$E_k \cdots E_1 A = A'$$
$$\boxed{E' = E^{-1}}$$
Perciò,
$$A = E_1' \cdots E_{k-1}' E_k' A'$$

$$A \xrightarrow[\substack{\text{Passo 1}: \; R_2 \mapsto R_2 + 2R_1 \\ \text{Passo 2}: \; R_3 \mapsto R_3 - 3R_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Passo 3}: \; R_3 \mapsto R_3 + 4R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Sia A una matrice con polinomio caratteristico $p_A(t) = t^3 + t + 1$. Mostrare con i risultati che A è diagonalizzabile (ha una base di autovettori).

Ricordiamo che se il polinomio caratteristico ha radici distinte allora la matrice è diagonalizzabile. Poiché tutto ciò che sappiamo è il polinomio caratteristico p(t), tutto ciò che possiamo fare è cercare di dimostrare che p(t) ha radici distinte. Per questo calcoliamo la risultante di p(t) e p'(t).

Il risultante $R(p,q)$ di due polinomi

$$p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0, \qquad q(x) = q_m x^m + \cdots + q_0$$

è il determinante della matrice $(n+m)\times(n+m)$ ottenuta iniziando dalla riga $\begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ e permutandola ciclicamente m volte, seguita dalla riga $\begin{pmatrix} q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ che è permutata ciclicamente n volte

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n & \cdots & p_0 \\ q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_m & \cdots & q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_m & \cdots & q_0 \end{pmatrix}$$

La proprietà chiave della risultante è che p e q hanno una radice comune sui numeri complessi se e solo se $R(p,q) = 0$.

$$p(t) = t^3 + t + 1, \qquad p'(t) = 3t^2 + 1$$

$$R(p,p') = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 31$$

Poiché questo è diverso da zero, p(t) ha 3 radici distinte

Richiamo dal problema 4b sui compiti per le lezioni 13, 14, 15

(b) Verificare con la risultante che il polinomio $f(x) = x^3 + bx + c$ ha una radice multipla se e solo se $4b^3 + 27c^2 = 0$.

In questo caso, b=c=1, quindi la risultante è 4+27=31

Problema 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Trova i dischi di Gershgorin di A.
(b) Spiega usando il teorema spettrale e i dischi della parte (a) perch A è una matrice definita positiva.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ (voci reali o complesse). Per $i = 1, \dots, n$ sia

$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

e sia

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\}$$

Ciascuno di questi dischi è chiamato disco di Gershgorin di A.

Il seguente risultato fornisce la posizione approssimativa delle radici del polinomio caratteristico:

Teorema del cerchio di Gershgorin: Sia A una matrice quadrata con polinomio caratteristico p. Allora, ogni radice di p è contenuta in almeno uno dei dischi di Gershgorin di A.

(a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 2\}$,
$D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 2\}$, $D_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-6| < 2\}$

(b) La matrice A è simmetrica, quindi resta da mostrare che ha autovalori positivi. Poiché A è simmetrico, tutti gli autovalori di A sono reali. Poiché tutti i dischi di Gershgorin sono contenuti nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (disegna i dischi), ne segue che tutti gli autovalori di A sono positivi.

Problema 5. Sia A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Spiega usando il teorema spettrale perché A deve avere una base unitaria di autovettori.
(b) Trova una base unitaria di autovettori per A. Uno degli autovalori di A è zero.

(a)

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^t A \implies A \text{ è normale} \implies \text{A ha una base unitaria di autovettori}$$

(b) $p_A(t) = \det(tI - A) = t^3 + 3t^2 + 3t = t(t^2 + 3t + 3)$

$$p_A(t) = 0 \implies t = 0, \qquad t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\lambda = 0 \implies E_\lambda(A) = \ker(A) = \operatorname{span}(v_1), \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} \implies E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I) = \operatorname{span}(v_2), \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poiché A è una matrice reale $\quad Av = \lambda v \implies \overline{Av = \lambda v} = A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

$$\lambda = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2} \implies E_\lambda(A) = \operatorname{span}(v_3), \quad v_3 = \bar{v}_2$$

Corollario: Se A è una matrice normale e u e v sono autovettori di A con autovalori distinti, allora u e v sono ortogonali.
Dimostrazione: Sia $Au = \alpha u$ e $Av = \beta v$. Allora,

$$\alpha\langle u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle = \langle u, \bar{\beta} v\rangle = \beta\langle u, v\rangle$$

Quindi,

$$(\alpha - \beta)\langle u, v\rangle = 0$$

Poiché $\alpha - \beta \neq 0$ dobbiamo avere $\langle u, v\rangle = 0$.

Poiché A è normale e ha 3 autovalori distinti, gli autovettori corrispondenti sono ortogonali. Resta da dividere v_1, v_2, v_3 per le loro norme per trovare una base unitaria degli autovettori per A.

Problema 6. Sia $P_2[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due con coefficienti reali. Consideriamo il prodotto scalare

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

su $P_2[x]$. Applicare il processo di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ di $P_2[x]$.

$$(x^a, x^b) = \int_0^1 x^{a+b}\,dx = \frac{x^{a+b+1}}{a+b+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{a+b+1}$$

$$\mathrm{Proj}_u : V \to V, \qquad \mathrm{Proj}_u(v) = \frac{(v,u)}{(u,u)}u,$$

Lemma (Gram-Schmidt): Se $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ è un insieme finito di vettori linearmente indipendenti allora

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2), \quad v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3), \ \dots, \ v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Proj}_{v_k}(u_n)$$

è un insieme di vettori ortogonali tale che

$$\mathrm{span}(u_1, \dots, u_\ell) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_\ell), \qquad \ell = 1, \dots, n$$

$$S = \{u_1, u_2, u_3\} = \{1, x, x^2\}$$

$$v_1 = u_1 = 1$$

$$u_2 = x \implies \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2) = \frac{(x,1)}{(1,1)}1 = \frac{1}{2} \implies v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2) = x - \frac{1}{2}$$

$$u_3 = x^2 \implies \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3) = \frac{(x^2,1)}{(1,1)}1 = \frac{1}{3}$$

$$(x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^3\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) = \frac{(x^2, x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2})}(x - \frac{1}{2}) = 12(\frac{1}{4} - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2}) = x - \frac{1}{2}$$

$$v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) = x^2 - (x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$|v_3|^2 = \frac{1}{180}, \qquad |v_2|^2 = \frac{1}{12}, \qquad |v_1|^2 = 1$$

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = 1, \qquad w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \sqrt{3}(2x-1), \qquad w_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$