Rappresentazioni equivalenti

Forma Generale

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

Equazione di ordine n e sistemi di ordine uno

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

Se lineare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix} \quad = Ax + Bu$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\Big\downarrow \; ?$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix} \quad = Ax + Bu$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m\times r}$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Se p=0 e scelgo come stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Se p=0 e scelgo come stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}([y, \dots, y^{(n-1)}], u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(\mathbf{x}, u, t) \end{bmatrix} = \bar{f}(\mathbf{x}, u, t)$$

$$y = x_1 = \bar{g}(\mathbf{x}, u, t)$$

Che e’ nella forma che desideriamo

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

p=0; Per sistemi lineari

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + u(t), \quad (p=0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad p = 0 \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Matrice in forma compagna orizzontale inferiore

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Se $0<p<n$; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

rappresenta la risposta del sistema all’ingresso u(t)

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Se *0<p<n*; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

rappresenta la risposta del sistema all'ingresso u(t)

Per linearità, se *y(t)* e' la risposta del sistema ad una combinazione lineare delle derivate di *u(t)* allora questa sarà una combinazione lineare delle derivate di *z(t)* con gli stessi coefficienti.

$$\longrightarrow \quad y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j z^{(j)}(t)$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Se *0<p<n*; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

rappresenta la risposta del sistema all'ingresso u(t)

Per linearità, se *y(t)* e' la risposta del sistema ad una combinazione lineare delle derivate di *u(t)* allora questa sarà una combinazione lineare delle derivate di *z(t)* con gli stessi coefficienti.

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j z^{(j)}(t)$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\ldots) \\ \vdots \\ f_n(\ldots) \end{bmatrix}$$

Se $0<p<n$; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

rappresenta la risposta del sistema all'ingresso u(t)

stato

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Per linearità, se *y(t)* e' la risposta del sistema ad una combinazione lineare delle derivate di *u(t)* allora questa sarà una combinazione lineare delle derivate di *z(t)* con gli stessi coefficienti.

uscita

$$y(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j z^{(j)}(t)$$

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Se $0<p<n$; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

A, B sono le stesse di prima

Equazione di uscita -> p+1 elementi diversi da 0

Rappresentazioni equivalenti

$$F(y(t), ..., y^n(t), u(t), ...u^p(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), ..., y^{n-1}(t), u(t), ...u^p(t), t)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

Se p=*n*; sistemi lineari

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

p=n quindi possiamo esplicitarlo

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} x_i + \beta_n \overset{(n)}{z} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} x_i - \beta_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} x_i + \beta_n u(t) =$$

$$\downarrow$$

A, B sono le stesse di prima

$$C = \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_n\alpha_0 & \beta_1 - \beta_n\alpha_1 & \cdots & \beta_{n-1} - \beta_n\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \beta_n \end{bmatrix}$$

Esempio - p < n, sistemi lineari

$$\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$$

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Esempio - p < n, sistemi lineari

$$\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$$

$$\overset{(n)}{y} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i \overset{(i)}{y}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j \overset{(j)}{u}(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$-\alpha_0 y, \quad -\alpha_2 \dot{y}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$\beta_0 u, \quad \beta_1 \dot{u}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Rappresentazioni equivalenti

Scelta variabili di stato non e' unica

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[T \in \Re^{n\mathrm{x}n}]{\text{Cambio variabili}} \hat{x} = Tx \longrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Matrice costante,
invertibile

Rappresentazioni equivalenti

Scelta variabili di stato non e' unica

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[T \in \Re^{n\mathrm{x}n}]{\text{Cambio variabili}} \hat{x} = Tx \longrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Matrice costante, invertibile

$$\dot{\hat{x}} = T\dot{x} = TAx + TBu \Rightarrow \dot{\hat{x}} = TAT^{-1}\hat{x} + TBu$$

$$y = Cx + Du = CT^{-1}\hat{x} + Du$$

Rappresentazioni equivalenti

Scelta variabili di stato non e' unica

$$\hat{A} = TAT^{-1} \qquad \hat{B} = TB$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[T \in \Re^{nxn}]{\text{Cambio variabili}} \hat{x} = Tx \longrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

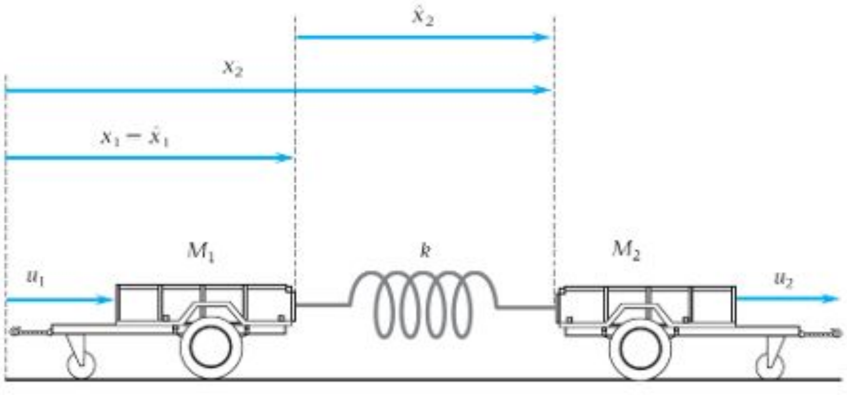
Matrice costante

$$\hat{C} = CT^{-1} \qquad \hat{D} = D$$

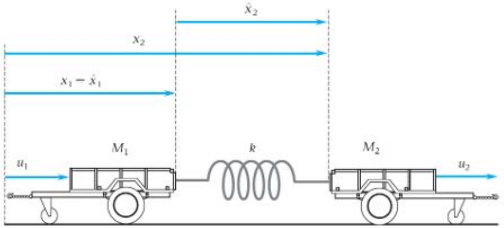
I due sistemi sono **equivalenti**, ovvero i movimenti dello stato sono legati dalla relazione $\hat{x} = Tx$
e i movimenti dell'uscita sono identici (dato lo stesso ingresso e c.i. tali che $\hat{x_0} = Tx_0$)

Stiamo semplicemente descrivendo in modo diverso lo stesso oggetto.

Rappresentazioni equivalenti: esempio



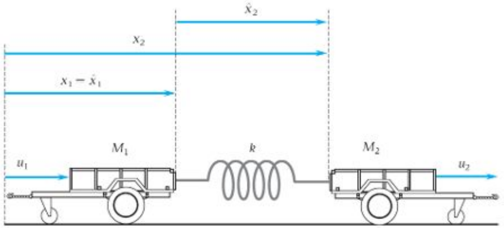
Rappresentazioni equivalenti: esempio



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Rappresentazioni equivalenti: esempio



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

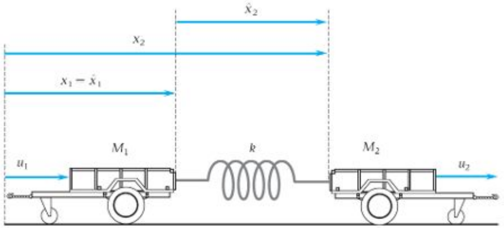
$$\hat{x}_1(t) = x_1(t)$$

$$\hat{x}_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

$$\hat{x}_3(t) = x_3(t)$$

$$\hat{x}_4(t) = x_4(t) - x_3(t)$$

Rappresentazioni equivalenti: esempio



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

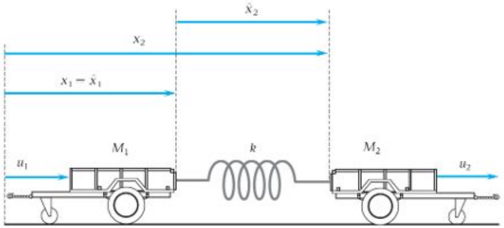
$$\hat{x}_1(t) = x_1(t)$$

$$\hat{x}_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

$$\hat{x}_3(t) = x_3(t)$$

$$\hat{x}_4(t) = x_4(t) - x_3(t)$$

Rappresentazioni equivalenti: esempio



$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k(M_1+M_2)}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ -\frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}$$