## Esercizio

Un uomo lancia in alto, verticalmente lungo l'asse $z$, un sasso da un'altezza $h_0 = 2\,\mathrm{m}$ dal suolo, con una velocità di $10\,\mathrm{m/s}$. Il sasso si muove di moto uniformemente accelerato, con un'accelerazione $g$ di modulo $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, diretta verso il basso.

1. Determinare l'altezza massima $z_{max}$ raggiunta dal sasso;
2. Determinare la velocità $v^*$ di impatto al suolo del sasso, e commentare se è maggiore o minore di quella di lancio;
3. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_p = mgz$ (detta 'energia potenziale'), dove $m$ è la massa del sasso e $z$ è l'altezza del sasso dal suolo ad un istante generico; rappresentare graficamente come varia $E_p(t)$ allo scorrere del tempo;
4. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (detta 'energia cinetica'); rappresentare graficamente come varia $E_k(t)$ allo scorrere del tempo;
5. Calcolare e disegnare l'andamento nel tempo della quantità $E = E_p + E_k$ (detta 'energia meccanica').

**SOLUZIONE**

Il moto del sasso avviene lungo l'asse $z$ (orientato verso l'alto). Risulta naturale scegliere come istante iniziale $t = 0$ quello in cui l'uomo lancia il sasso. Dal testo sappiamo che

- il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione $-g$ (dove il segno '-' tiene conto del fatto che tale accelerazione è diretta verso il basso);
- l'altezza iniziale da cui parte il sasso è $h_0 = 2\,\mathrm{m}$;
- la velocità iniziale con cui parte il sasso è $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$;

Da questi elementi possiamo dedurre cha la legge oraria del sasso lungo l'asse $z$ è:

$$z(t) = h_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

Conseguentemente, la legge oraria della velocità vale

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = v_0 - gt \tag{2}$$

1. La legge oraria (1) descrive come varia l'altezza $z$ del sasso al trascorrere del tempo. Per determinare l'altezza massima che il sasso raggiunge, dobbiamo calcolare il massimo della funzione $z = z(t)$. A tale scopo imponiamo l'annullamento della derivata

$$\frac{dz}{dt} = v(t) = v_0 - gt = 0 \tag{3}$$

Tale condizione è soddisfatta all'istante

$$t_{max} = \frac{v_0}{g} \tag{4}$$

Il valore di tale massimo è dato

$$\begin{aligned} z_{max} &= z(t_{max}) = \\ &= h_0 + v_0\,t_{max} - \frac{1}{2}gt^2_{max} = \qquad (5)\\ &= h_0 + v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \\ &= h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \qquad (6) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} z_{max} &= 2\,\mathrm{m} + \frac{100\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 7.10\,\mathrm{m} \qquad (7) \end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora l'istante in cui il sasso impatta il suolo. Possiamo procedere in due modi:

   - **Primo modo**
   Denotiamo tale istante (ignoto) con $t^*$. Per definizione tale istante è quello per cui si ha

$$\begin{aligned} z(t^*) &= 0 \\ &\Downarrow \\ h_0 + v_0\,t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}gt^{*2} - v_0t^{*2} - h_0 &= 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

che ha due soluzioni

$$\begin{cases} t_1^* &= \frac{v_0+\sqrt{v_0^2+2gh_0}}{g} > 0 \\ t_2^* &= \frac{v_0-\sqrt{v_0^2+2gh_0}}{g} < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Siccome ci interessa solo la soluzione nel futuro (nel passato il sasso non era in moto, ma in mano all'uomo), scartiamo la soluzione $t_2^*$ e teniamo solo la soluzione $t_1^*$. Quindi

$$t^* = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} \tag{10}$$

La velocità di impatto al suolo è per definizione la velocità che il sasso possiede all'istante $t^*$ in cui impatta il suolo. E dunque

$$\begin{aligned} v^* &= v(t^*) = v_0 - g\,t^* = \\ &= v_0 - g\,\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = \\ &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \end{aligned} \tag{11}$$

Osserviamo che è negativa perché chiaramente quando il sasso impatta il suolo la sua velocità è diretta verso il basso. Sostituendo i valori abbiamo

$$\begin{aligned} v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \\ &= -\sqrt{\frac{100\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,2\,\mathrm{m}} = \\ &= -\sqrt{(100 + 39.24)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= -11.8\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{12}$$

Osserviamo che $v^*$ è maggiore (in modulo) della velocità di lancio iniziale $v_0$.

- **Secondo modo:**
  Disegniamo in Fig.1 la legge oraria della velocità, data dall'Eq.(2).

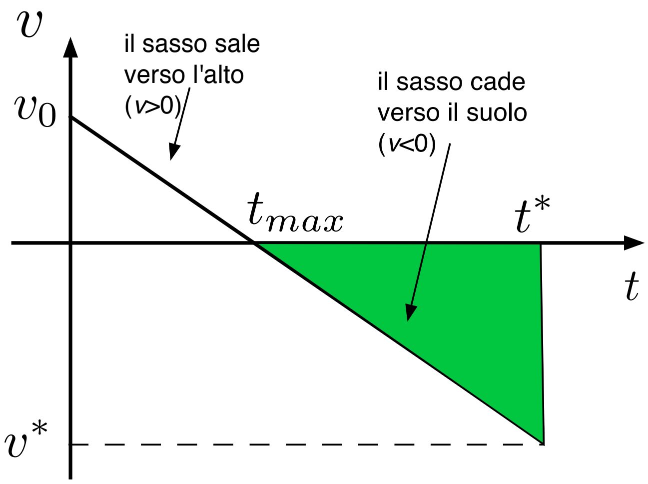


Figure 1: Legge oraria della velocità per il moto del sasso.

Sfruttiamo ora la formula generale

$$\Delta z = z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt \tag{13}$$

che vale per qualunque coppia di istanti $t_1$ e $t_2$, e la applichiamo al nostro caso. In particolare

- scegliamo come istante $t_1$ l'istante $t_{max}$ in cui il sasso raggiunge la massima altezza, e dunque $z(t_{max}) = z_{max}$ e $v(t_{max}) = 0$ perché in tale istante la velocità del sasso è per definizione nulla;

- scegliamo come istante $t_2$ l'istante $t^*$ in cui il sasso impatta il suolo, e dunque $z(t^*) = 0$ e $v(t^*) = v^*$ (incognita);

- pertanto $\Delta z = z(t^*) - z(t_{max}) = 0\,\mathrm{m} - z_{max} = -z_{max}$.

Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned} z(t^*) - z(t_{max}) = -z_{max} &= \int_{t_{max}}^{t^*} v(t)\, dt = \\ &= \text{area triangolo (col segno)} = \frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2} \\ &= (t^* - t_{max})\, \frac{v^*}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

D'altra parte l'accelerazione non è altro che la pendenza della curva $v(t)$, che può scriversi come

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^* - 0\,\mathrm{m/s}}{t^* - t_{max}} \qquad \Rightarrow \qquad t^* - t_{max} = \frac{v^*}{a} = -\frac{v^*}{g} \tag{15}$$

Sostituendo (15) in (14) abbiamo

$$\begin{aligned} -\, z_{max} &= -\frac{v^{*2}}{2\,g} \\ &\Downarrow \\ \Rightarrow v^{*2} &= 2g z_{max} \\ &\Downarrow \\ v^* &= -\sqrt{2g z_{max}} \qquad \text{(scegliamo il '-' perché fisicamente dev'essere verso il basso)} \\ &\Downarrow \quad \text{[uso ora (6)]} \\ v^* &= -\sqrt{2g\left(h_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right)} \\ &\Downarrow \\ v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2g h_0} \end{aligned} \tag{16}$$

che coincide con quanto trovato in (11) nel primo modo. E dunque sostituendo i valori abbiamo nuovamente

$$\begin{aligned} v^* &= -\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \\ &= -\sqrt{\frac{100\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,2\,\mathrm{m}} = \\ &= -\sqrt{(100+39.24)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= -11.8\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{17}$$

3. Dalla legge oraria (1) di $z(t)$ abbiamo che l'andamento nel tempo della quantità chiamata energia potenziale vale

$$\begin{aligned} E_p(t) &= mgz(t) = \\ &= mg\left(h_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \\ &= mgh_0 + mgv_0\,t - \frac{1}{2}mg^2t^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Il grafico di $E_p(t)$ in funzione del tempo, mostrato in Fig.2 a sinistra, è una parabola rovesciata verso il basso.

4. Dalla legge oraria (2) per per la velocità $v(t)$ abbiamo che l'andamento nel tempo della quantità chiamata energia cinetica vale

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \frac{1}{2}mv^2(t) = \\ &= \frac{1}{2}m\,(v_0 - gt)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m(v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0\,g\,t) = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0\,t + \frac{1}{2}mg^2t^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Il grafico di $E_k(t)$, mostrato in Fig.2 a destra, rappresenta una parabola verso l'alto, che tocca

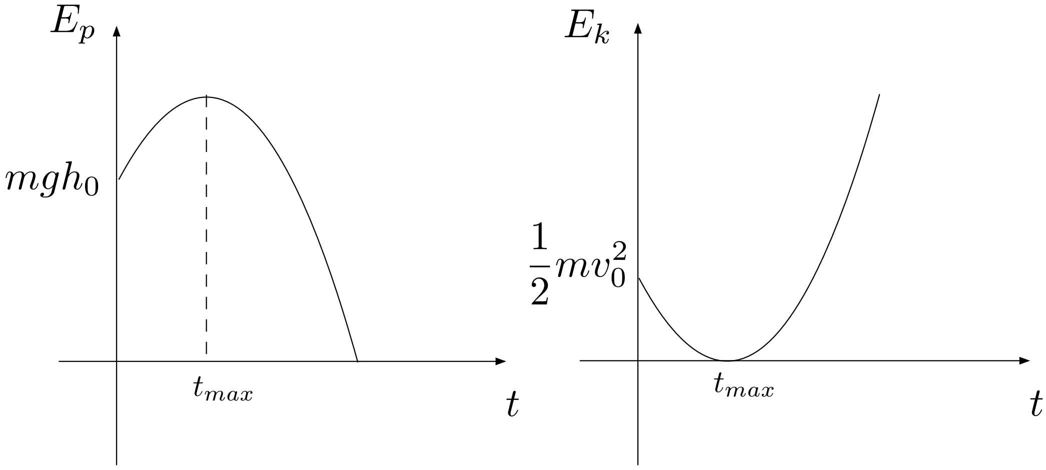


Figure 2: Andamento nel tempo dell'energia potenziale (a sinistra) e dell'energia cinetica (a destra).

l'asse dei tempi al'istante $t = t_{max}$, in cui $v = 0 \;\Rightarrow\; E_k = 0$.

5. Calcolando la somma di queste due quantità osserviamo che

$$\begin{aligned} E(t) &= E_p(t) + E_k(t) = \\ &= mgh_0 + mgv_0\,t - \frac{1}{2}mg^2t^2 \; + \; \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0\,t + \frac{1}{2}mg^2t^2 = \\ &= mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \tag{20}$$

*non* dipende dal tempo. Pertanto, mentre sia l'energia potenziale che l'energia cinetica, separatemente, dipendono dal tempo, la loro somma (energia meccanica) è una costante nel tempo, ossia si conserva.

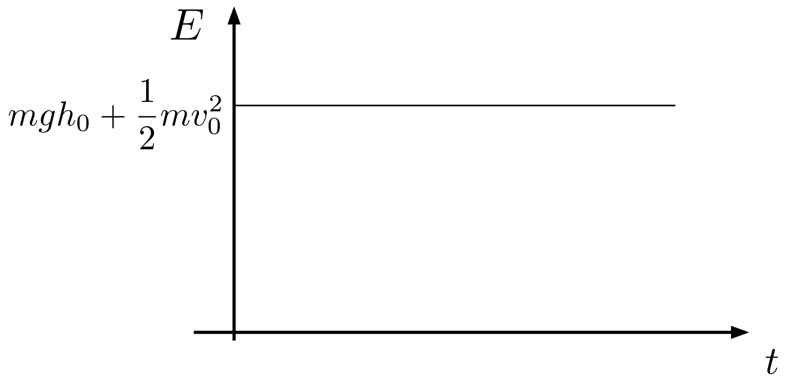


Figure 3: Mentre l'energia potenziale e l'energia cinetica, separatamnte, variano nel tempo, la loro somme $E$ rimane costante nel tempo.