591AA 21/22 – ESAME INTERMEDIO

Instruzioni: Questo esame non verrà valutato. Questa prova copre alcuni, ma non tutti gli argomenti delle Lezioni 1-12.

Problema 1. Siano

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}, \qquad P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\},$$
$$P_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

(a) Trovare le rette $L_1 = P_1 \cap P_2$ e $L_2 = P_2 \cap P_3$;
(b) Trovare l'angolo (acuto) che formano le rette L_1 e L_2;
(c) Trovare la distanza tra i punti di intersezione di L_1 e L_2 ed il piano $x + y + z = 1$.

[Nota: Al posto di questo problema ci potrebbe essere un problema diverso con iper-piani, prodotto interno tra polinomi e interpolazione di Lagrange.

[Spazio extra per il problema 1]

Problema 2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la forma echelon ridotta di A;
(b) Trovare una base per lo spazio generato dalle righe di A.
(c) Trovare un sottoinsieme (proprio) B delle colonne di A che sia una base per lo spazio delle colonne di A. Scrivere le colonne di A non appartenenti a B tramite questa base.
(d) La matrice A è equivalente (per righe) alla matrice
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$
cioè ottenuta tramite combinazioni lineari di righe?

[Spazio extra per il problema 2]

Problema 3. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 con coefficienti in $\mathbb{R}$.

(a) Mostrare che
$$L(A) = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$$
è una applicazione lineare di $M_{2\times 2}$ in $M_{2\times 2}$;

(b) Trovare la matrice di L rispetto alla base
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Trovare una base di $\ker(L)$;

(d) Determinare la soluzione generale di
$$L(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Spazio extra per il problema 3]

Problema 4. Sia $P_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 (includendo lo 0).

(a) Dimostrare che $U = \{p \in P_3[x] \mid p(1) = p(2) = 0\}$ ed $W = \{p \in P_3[x] \mid p(x) = p(-x)\}$ sono sottospazi vettoriali di $P_3[x]$.

(b) Calcolare la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$.

Problema 5. Enunciare uno dei seguenti risultati:

(a) Il teorema del rango.
(b) La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
(c) La disuguaglianza triangiolare.