Il Criterio di Routh

Si applica a sistemi con equazione caratteristica in forma polinomiale

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

>0

NON si applica a sistemi con ritardi di tempo, ovvero dove compare $\underline{e^{-\tau s}}$

In questi casi costruiamo
un approssimazione
polinomiale

Condizioni di applicabilità

Condizione **necessaria e sufficiente** per la stabilità asintotica:

tutti gli n+1 coefficienti del polinomio devono avere lo stesso segno
questa condizione diventa necessaria e sufficiente solo per $n <= 2$

(regola di Cartesio)

gli n+1 elementi della prima colonna della tabella di Routh devono avere lo stesso segno

Esempio

$$s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 5 & 2 \\
3 & 3 & 4 & \\
2 & \frac{11}{3} & 2 & \\
1 & \frac{26}{11} & 0 & \\
0 & 2 & &
\end{array}$$

Conclusione

Tutti i coefficienti del polinomio di partenza hanno segno positivo (cn)

Tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno

Tutte le radici Re<0

Esempio #2

$$s^6 + s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0$$

6	1	4	2	2
5	1	3	4	

Esempio #2

$$s^6 + s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0$$

6	1	4	2	2
5	1	3	4	
4	1	-2	2	
3	5	2		
2	$-\frac{12}{5}$	2		
$\underline{1}$	$-\frac{74}{12}$			
0	2			

Criterio di Routh

COEFFICIENTI SIMBOLICI

Determinare i valori di Kc per avere un sistema stabile

$$G_{OL} = \frac{K_c}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)}$$

Soluzione, calcoliamo $1 + G_{OL}$

Devo studiare questo polinomio

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{K_c}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)} = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+K_c)}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)}$$

Criterio di Routh

COEFFICIENTI SIMBOLICI

Equazione caratteristica

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+K_c) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 11 \\
2 & 6 & 6(1+K_c) \\
1 & 10 - K_c & \\
0 & 6(1+K_c) &
\end{array}$$

Criterio di Routh

COEFFICIENTI SIMBOLICI

Equazione caratteristica

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+K_c) = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 11 \\
2 & 6 & 6(1+K_c) \\
1 & 10-K_c & \\
0 & 6(1+K_c) &
\end{array}$$

Dipende da Kc

Regione di stabilita'

$10 - K_c > 0 \rightarrow K_c < 10$

$1 + K_c > 0 \rightarrow K_c > -1$

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

1. Primo termine (ed eventualmente altri) di una riga e' nullo

e' il termine pivot per il quale dividiamo nel costruire la tabella

$$p(s) = s^3 + s + 2$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{array}$$

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

1. Primo termine (ed eventualmente altri) di una riga e' nullo

e' il termine pivot per il quale dividiamo nel costruire la tabella

$$p(s) = s^3 + s + 2$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 \to \varepsilon & 2 \\ 1 & & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Due radici instabili con Re>0

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

2. Riga di tutti zeri

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ 2 & b & 1 \\ 1 & \frac{bc-1}{b} & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$\to$ IF $bc = 1$
RIGA TUTTA 0

(CASO A)

IF $bc - 1 > 0$

& $b, c > 0$ $\to$

Condizione necessaria non sufficiente di Routh

Allora il polinomio ha solo radici stabili

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

2. Riga di tutti zeri

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & c \\
\rightarrow 2 & b & 1 \leftarrow \\
1 & \frac{bc-1}{b} & \\
0 & 1 &
\end{array}$$

(CASO A)

IF $bc - 1 > 0$

& $b, c > 0$ →

Condizione necessaria non sufficiente di Routh

Allora il polinomio ha solo radici stabili

(CASO B) $bc = 1$

Metodo dell'equazione ausiliaria:

dalla riga precedente a quella tutta nulla

$$bs^2 + 1 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{1}{b} = \pm j\sqrt{\frac{1}{b}}$$

risolvo l'equazione e le sue radici coincidono con le radici mancanti per le quali la tabella non aveva dato informazioni

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

2. Riga di tutti zeri

$$q(s) = bs^2 + 1$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ \boxed{2} & \boxed{b} & \boxed{1} \\ 1 & \frac{bc-1}{b} & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1$$

(CASO C) $bc = 1$

Metodo della derivata

dalla riga precedente a quella tutta nulla

$$\boxed{q(s) = bs^2 + 1}$$

$$\frac{d}{ds} q(s) = 2bs$$

calcolo la derivata rispetto ad s e sostituisco i coefficienti alla riga tutta nulla

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

2. Riga di tutti zeri

$$\frac{dq}{ds} = 2bs$$

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1$$

(CASO C) $bc = 1$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2b & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

CASO 1:
Se la prima colonna MODIFICATA **non presenta** variazioni di segno si ha **stabilità semplice**.

Metodo della derivata

dalla riga precedente a quella tutta nulla

$q(s) = bs^2 + 1$

$\frac{d}{ds} q(s) = 2bs$

calcolo la derivata rispetto ad s e sostituisco i coefficienti alla riga tutta nulla

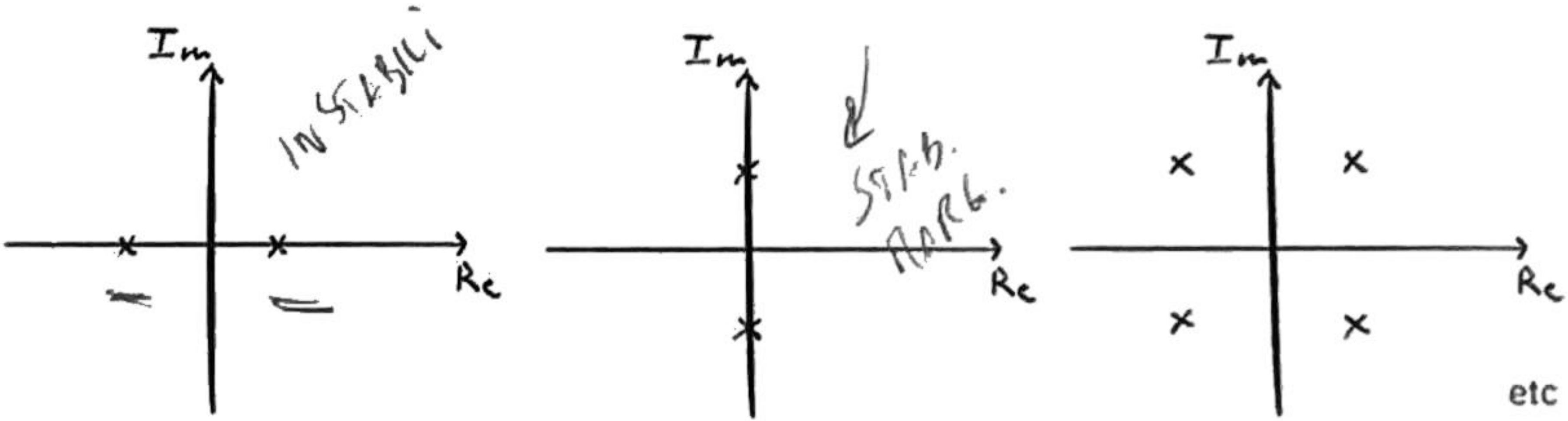
CASO 2:
Se la prima colonna MODIFICATA **presenta** variazioni di segno si ha **instabilità** per presenza poli a Re>0, e/o poli immaginari con molteplicità > 1.

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

2. Riga di tutti zeri

Possiamo avere solo i seguenti casi che portano a righe tutte 0 nella tabella di Routh



Radici con simmetria quadrante

Criterio di Routh

CASI SINGOLARI

Risolvere l'equazione ausiliaria nel caso di configurazioni polari con soluzioni immaginarie pure significa trovare le frequenze di oscillazione del sistema, quelle ai limiti della stabilita' per cui il sistema dinamico oscilla.

nel caso precedente:

eq. ausiliaria: $a(s) = bs^2 + 1 = 0$

$$a(j\omega) = -b\omega^2 + 1 = 0 \longrightarrow \underbrace{\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{b}}}$$

pulsazione critica di oscillazione del sistema dinamico, quando si verifica la condizione critica:

$bc - 1 = 0$

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria $20 - K > 0 \longrightarrow K < 20$

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$$20-k>0 \longrightarrow k<20$$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 7 & 1 \\
3 & 20-k & 5 & \\
2 & \dfrac{(20-k)7-5}{20-k} & 1 &
\end{array}$$

$$\longrightarrow \frac{135-7k}{20-k}$$

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$$20 - k > 0 \longrightarrow k < 20$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 7 & 1 \\
3 & 20-k & 5 & \\
2 & 135-7k & 20-K &
\end{array}
$$

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$20 - k > 0 \longrightarrow k < 20$

Abbiamo semplificato la tabella per evitare condizioni anche sul denominatore

4	1	7	1
3	$20-k$	5	
2	$135-7k$	$20-K$	
	$20-K$		

$\rightarrow -k^2 + 5k + 275 \rightarrow 0$

$135 - 7k > 0$

$20-K$ non e' piu' uguale al termine noto

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$$20 - k > 0 \longrightarrow k < 20$$

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 7 & 1 \\
3 & 20-k & 5 & \\
2 & 135-7k & 20-K &
\end{array}$$

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$20 - k > 0 \longrightarrow k < 20$

Abbiamo semplificato la tabella per evitare condizioni anche sul denominatore

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 7 & 1 \\
3 & 20-k & 5 & \\
2 & 135-7k & 20-k & \\
 & \boxed{\cancel{-k^2+5k+275}} & 0 &
\end{array}$$

$-k^2 + 5k + 275$

$135 - 7k > 0$

$20 - K$

non e' piu' uguale al termine noto

Criterio di Routh

ESEMPIO #2

$$F(s) = s^4 + (20 - K)s^3 + 7s^2 + 5s + 1$$

Condizione necessaria

$$20 - k > 0 \longrightarrow k < 20$$

$$20 - k > 0 \longrightarrow \underline{k < 20}$$

$$135 - 7k > 0 \longrightarrow \underline{k < \frac{135}{7}} = \underline{19.28}$$

$$-k^2 + 5k + 275 > 0 \longrightarrow \underbrace{k \in [-14.27, 19.27]}$$

K deve essere in questo intervallo

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

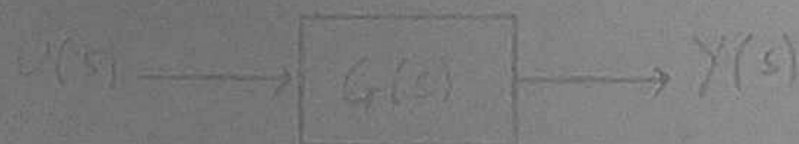
E' una proprietà dei sistemi lineari asintoticamente stabili

Se applichiamo un segnale d'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U_M \sin(\omega t)$$

Esaurito il transitorio, l'uscita sarà ancora sinusoidale

$$y(t) = |Y(w)| \sin(\omega t + \phi(w))$$



PUNTI IMPORTANTI:

Pulsazione dell'uscita è la stessa dell'ingresso

L'ampiezza e la fase dell'uscita dipendono dalla pulsazione d'ingresso

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

$$\rightarrow \quad u(t) = U_M \sin(\omega t) \qquad\qquad y(t) = |Y(w)| \sin(\omega t + \phi(w))$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Dimostrazione

$$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{jwt} - e^{-jwt}) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + w^2}$$

Uscita:

$$Y(s) = G(s)u(s) = \underbrace{\frac{A_1}{s - jw} + \frac{A_1^*}{s + jw}}$$ + termini transitori legati ai poli di G(s)

$\hookrightarrow$ so che ingresso ho una sinusoide

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

Data quindi l'uscita

$$Y(s) = G(s)u(s) = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_1^*}{s+j\omega} + \text{termini transitori legati ai poli di } G(s)$$

G(s) è stabile, per cui a regime andranno a zero

Possiamo calcolare la **Risposta a regime**

$$y(t)\Big|_{t\to\infty} = \qquad Y_\infty(s) = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_1^*}{s+j\omega}$$

A regime invece si mantengono i contributi della sinusoide, che non tendono a zero

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

Data quindi l'uscita

$$Y(s) = G(s)u(s) = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_1^*}{s+j\omega} + \text{termini transitori legati ai poli di } G(s)$$

G(s) è stabile, per cui a regime andranno a zero

Possiamo calcolare la **Risposta a regime**

$$Y_\infty(s) = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_1^*}{s+j\omega}$$

A regime invece si mantengono i contributi della sinusoide, che non tendono a zero

$$A_1 = \lim_{s\to j\omega} (s-j\omega)\, G(s)u(s) = (s-j\omega)\, G(s) \frac{\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = G(j\omega)\frac{1}{2j}$$

$$A_1^* = -G(-j\omega)\frac{1}{2j}$$

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

Possiamo calcolare la **Risposta a regime**

$G(j\omega)/2j$ $\rightarrow -\frac{1}{2j}G(-j\omega)$

$$Y_\infty(s) = \frac{A_1}{s-j\omega} + \frac{A_1^*}{s+j\omega}$$

$$A_1 = \lim_{s \to j\omega} (s-j\omega)\, G(s) u(s) = (s-j\omega)\, G(s) \frac{\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = G(j\omega)\frac{1}{2j}$$

$$A_1^* = -G(-j\omega)\frac{1}{2j}$$

$$y_\infty = \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t}$$

A_1

Valore a regime nel tempo

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

Possiamo calcolare la **Risposta a regime**

$$y_\infty = \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G(-j\omega t)}{2j} e^{-j\omega t}$$

Valore a regime nel tempo

Poichè $z \in \mathbb{C},\ z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad (1)$

scrivo: $G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j \measuredangle G(j\omega)} \quad (2)$

e ottengo: $$y_\infty \underset{(1)}{=} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}\right] \underset{(2)}{=} \mathrm{Re}\left[\frac{|G(j\omega)|}{j} e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}\right]$$

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

Possiamo calcolare la **Risposta a regime**

$$y_\infty = 2 R_e\left[\frac{G(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}\right] = R_e\left[\frac{|G(j\omega)|}{j}e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}\right] =$$

$$= R_e\left[\frac{|G(j\omega)|}{j}\left(\cos(\omega t + \measuredangle G) + j \sin(\omega t + \measuredangle G)\right)\right] =$$

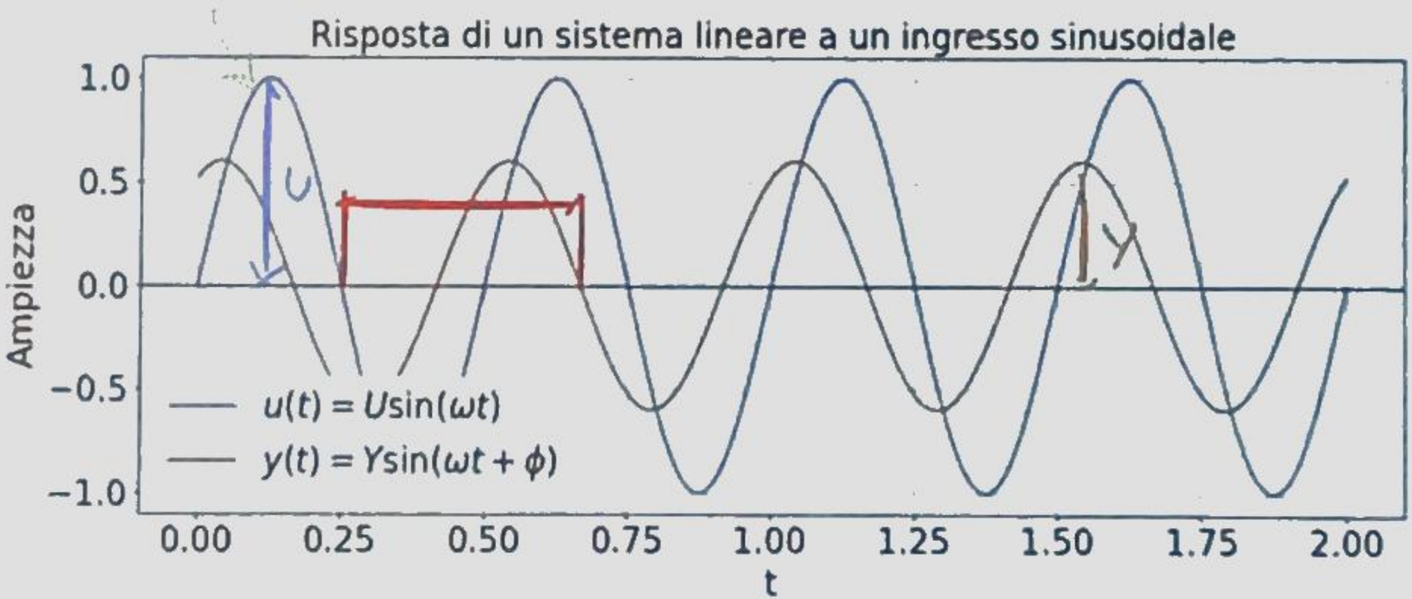
$$= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$$

Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

L'uscita a regime oscilla con pulsazione uguale a quella d'ingresso.

Il segnale ha ampiezza e fase che dipendono dal valore della pulsazione in ingresso.



Risposta in Frequenza

RIASSUNTO PUNTI PRINCIPALI

In molte applicazioni è importante conoscere la risposta a regime di un sistema (di misura) ad un **ingresso** di tipo **sinusoidale**.

Se il sistema è lineare e stazionario, a regime, l'uscita y(t) del sistema è ancora un segnale sinusoidale avente la stessa frequenza w del segnale in ingresso u(t)

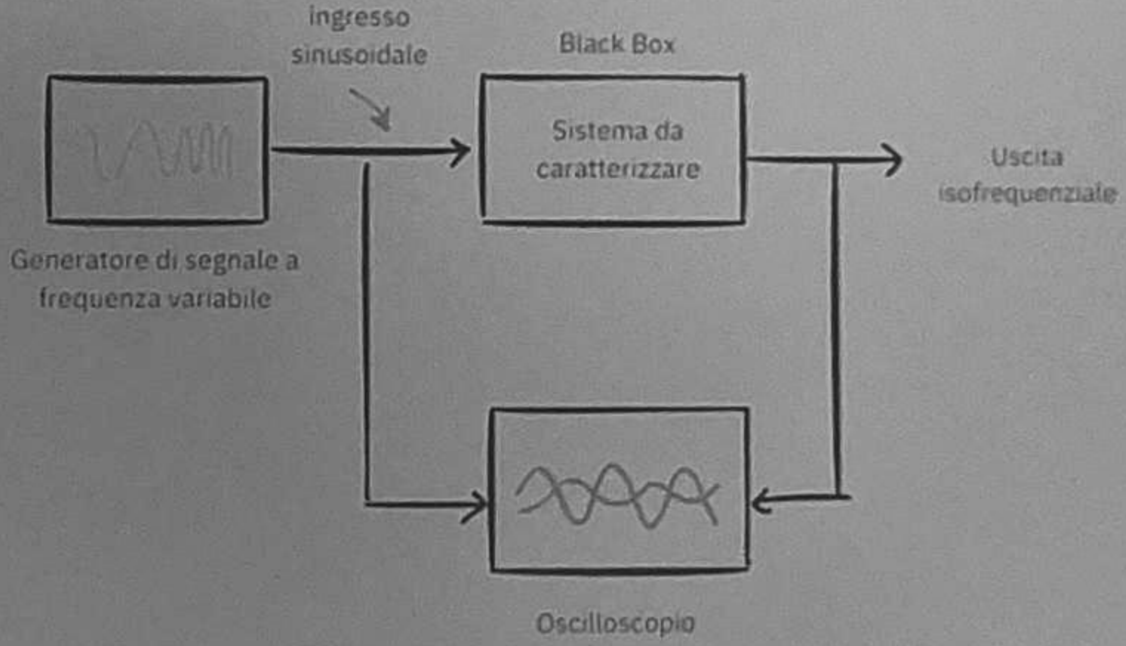
In generale l'ampiezza dell'output differisce da quella dell'input; inoltre i due segnali hanno fasi differenti.

Il rapporto in termini di ampiezze fra i segnali (**amplificazione** dinamica) e lo **sfasamento** variano al variare della pulsazione (*w)* del segnale di ingresso.

La **risposta in frequenza** di un sistema (di misura) consiste nell'indicazione di come l'amplificazione e lo sfasamento variano al variare della pulsazione (w).

Risposta in Frequenza

METODO SPERIMENTALE



Risposta in Frequenza

VISUALIZZAZIONE

La rappresentazione grafica della risposta armonica è in genere visualizzata nei **diagrammi di Bode**

Sono possibili rappresentazioni grafiche alternative estremamente valide con i **diagrammi di Nyquist e di Nichols**

Risposta in Frequenza

HENDRIK WADE BODE

December 24, 1905 - June 21, 1982

Ricercatore presso i Bell Laboratories (1926-67), poi docente presso l'Harvard University (1967-74).

Ha operato nel campo della teoria delle reti elettriche, delle comunicazioni a lunga distanza, dei sistemi elettronici per applicazioni militari.
Autore di un importante testo sulla progettazione di apparati elettronici: Network analysis and feedback amplifier design (1945).

Risposta in Frequenza

HENDRIK WADE BODE

H.W. Bode, "Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design", Bell System Technical Journal, Vol. 19, 1940, pp. 421-454.