Sistemi di più particelle

Finora abbiamo considerato il modo *di una singola particella*. Che cosa succede in sistemi di *molte particelle*, o in un sistema *non* puntiforme?

- Scomponendo il sistema in N particelle puntiformi, avremo bisogno di molte variabili per descriverne il moto:
  - N masse m_i, $i = 1, \ldots, N$
  - N posizioni $\vec{r}_i$ ($3N$ coordinate), N velocità $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$
  - N accelerazioni $\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt$, legate alle N forze $\vec{f}_i$ da $\vec{f}_i = m_i\vec{a}_i$.

- Una grossa semplificazione si ha quando si può trattare il sistema come un *corpo rigido*, ovvero come *non deformabile*:
  - In un corpo rigido, le posizioni relative di tutte le particelle che compongono l'oggetto rimangono costanti.

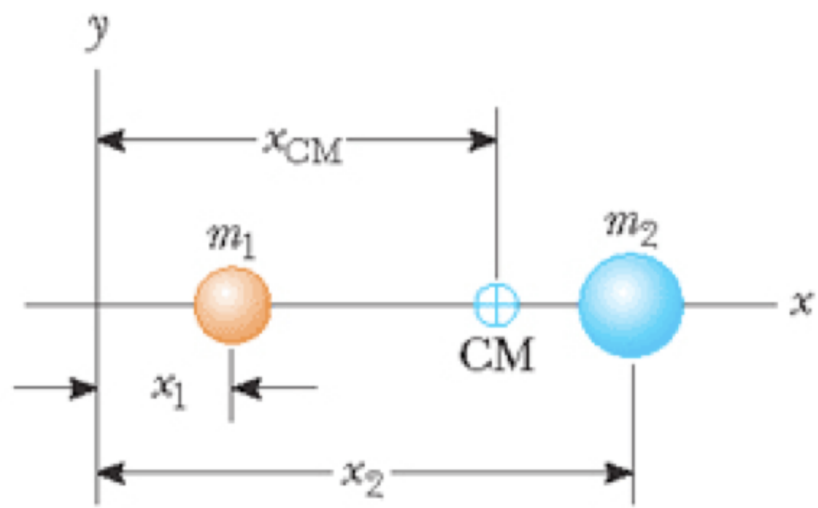
  Tutti gli oggetti reali sono più o meno deformabili, ma il modello del corpo rigido è molto utile in tutti i casi in cui la deformazione è piccola.

Centro di Massa

Possiamo descrivere il moto del sistema in modo più comodo e più semplice che con N leggi di Newton? Introduciamo il *Centro di Massa*.

Per due particelle di massa m_1 ed m_2 su di una retta nelle posizioni x_1 e x_2, la posizione del centro di massa x_{cm} è data da

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Notare come il centro di massa è nel centro della congiungente le due particelle se $m_1 = m_2$; in caso contrario, il centro di massa è spostato verso la particella più pesante.

Centro di Massa (2)

In tre dimensioni: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Per molte particelle:

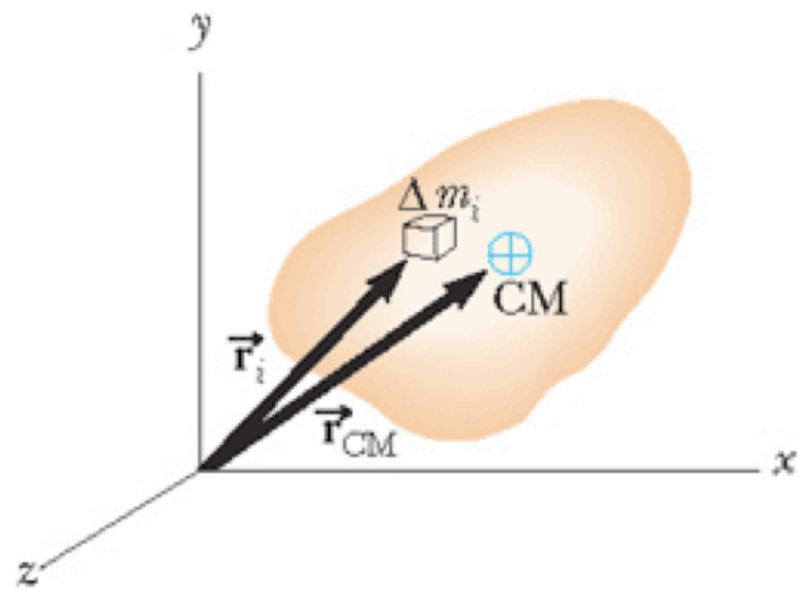
$\vec{r}_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_i m_i\vec{r}_i$, dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale.

Oggetto esteso: dividiamo in "cubetti"

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \Delta m_i\vec{r}_i$$

Nel limite di "cubetti" infinitesimi:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm,$$



che diventa un integrale sul volume:

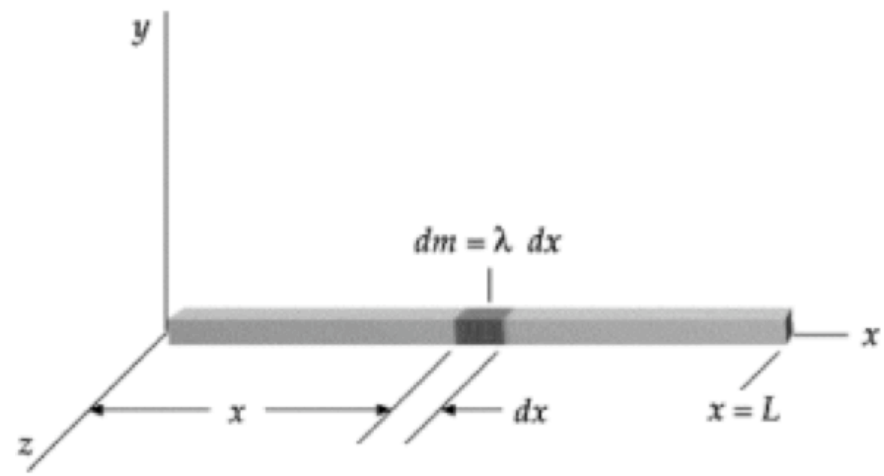
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV \qquad \text{introducendo la densità } \rho = \frac{dm}{dV}.$$

Un esempio di centro di massa per un oggetto

Il calcolo del centro di massa di un oggetto non è in generale semplice, ma lo è per oggetti *di densità costante* e *di forma semplice*. Esempio:

Una sbarra di densità lineare $\lambda = M/L$ costante, $dm = \lambda dx$, da cui

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L \\ &= \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2} \end{aligned}$$



Si è sfruttata la simmetria del sistema per semplificare la massimo il calcolo (integrale unidimensionale invece che tridimensionale). Notare che il risultato non è altro che il centro della sbarretta.

Centro di Massa di oggetti compositi

Consideriamo un oggetto composto da più parti. Indichiamo con $\sum_i^{(N)}$ la somma sulla parte $N-$esima. Il centro di massa di ogni parte è

$$\vec{r}_{cm}^{\,(N)} = \frac{\sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i}{\sum_i^{(N)} m_i} = \frac{\sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i}{M^{(N)}}, \qquad M^{(N)} = \sum_i^{(N)} m_i,$$

da cui $M^{(N)} \vec{r}_{cm}^{\,(N)} = \sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i$. Il centro di massa dell'oggetto composito:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_N \sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i}{\sum_N \sum_i^{(N)} m_i}$$

può quindi essere calcolato come

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_N M^{(N)} \vec{r}_{cm}^{\,(N)}}{\sum_N M^{(N)}}$$

ovvero come il centro di massa dei centri di massa delle varie parti.

Moto del centro di massa

Qual è il vantaggio di aver introdotto il centro di massa? Consideriamo il suo moto:

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots = \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

ovvero

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

Deriviamo di nuovo:

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots = \sum_i m_i\vec{a}_i$$

Per la II legge di Newton, $m_i\vec{a}_i = \vec{f}_i$, forza agente sulla i-esima particella:

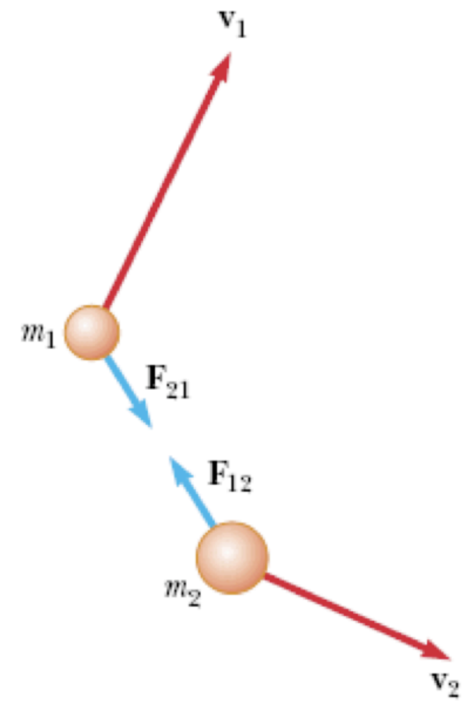
$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{f}_i$$

Moto del centro di massa (2)

Le forze agenti sulle particelle si possono dividere in due categorie:

• Forze *interne*, esercitate dalle altre particelle del sistema, e

• Forze *esterne*, esercitate da agenti esterni al sistema. Possiamo quindi scrivere



$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{f}_{i,ext} + \sum_i \vec{f}_{i,int}$$

ma per la terza legge di Newton, $\sum_i \vec{f}_{i,int} = 0$.

In conclusione, il moto del centro di massa è determinato *unicamente* dalla risultante delle sole *forze esterne*:

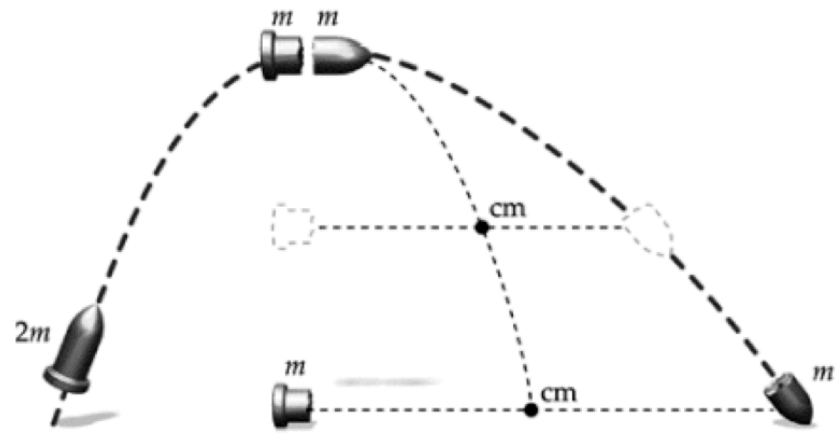
$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{f}_{i,ext} = \vec{F}_{ext}$$

Moto del centro di massa: esempio

Una chiave inglese su di una superficie priva di attrito. La chiave segue un moto relativamente complesso di rotazione, ma il suo centro di massa – il puntino bianco nella foto – esegue un moto rettilineo uniforme, in quanto la risultante delle forze esterne agenti sul corpo è nulla.

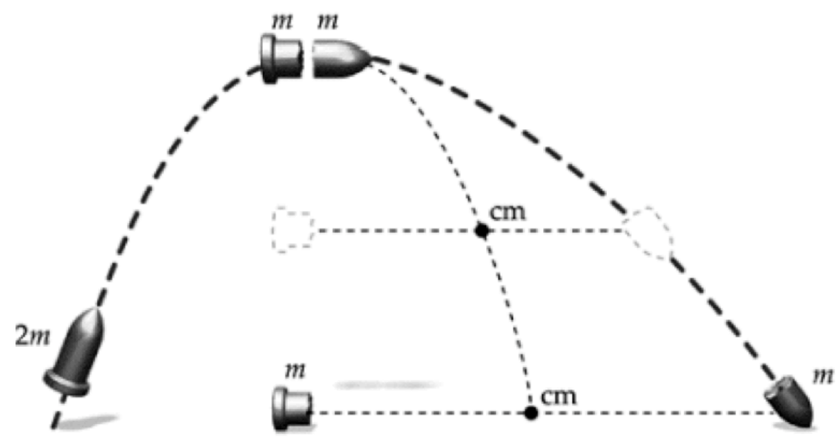
Moto del centro di massa: un problema "classico"

Un proiettile lanciato ad un angolo $\theta = 36.9^\circ$ con velocità iniziale $v = 24.5$ m/s si frammenta in due pezzi di massa uguale nel punto più alto della traiettoria. Uno dei frammenti cade giù in verticale. Dove atterra l'altro?



Moto del centro di massa: un problema "classico"

Un proiettile lanciato ad un angolo $\theta = 36.9°$ con velocità iniziale $v = 24.5$ m/s si frammenta in due pezzi di massa uguale nel punto più alto della traiettora. Uno dei frammenti cade giù in verticale. Dove atterra l'altro?



Soluzione: Il CM prosegue la sua traiettoria sotto l'effetto della forza di gravità, atterrando a distanza $x_{cm} = R$ dall'origine (punto di partenza). $R = v_0^2 \sin(2\theta)/g$ è la gittata. La proiezione sull'asse x del punto più alto della traiettoria dista $x_1 = R/2$ dall'origine. Di conseguenza:

$$R = x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{mR/2 + mx_2}{2m}$$

ovvero $x_2 = 3R/2$. Con i dati del problema: $R = 58.8$ m, $x_2 = 88.1$ m.

Quantità di Moto

La *Quantità di Moto*: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ per una particella (o oggetto descrivibile come una particella) di massa m e velocità $\vec{v}$, è una grandezza molto importante in Fisica. La quantità di moto

- è una grandezza *vettoriale*, diretta come la velocità, che può essere espressa in componenti $p_x = mv_x, p_y = mv_y, p_z = mv_z$
- ha le dimensioni di una massa per una lunghezza diviso un tempo; nel SI si misura in kg·m/s, oppure in N·s.

Si può riformulare la II legge di Newton usando la quantità di moto:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Conservazione della Quantità di Moto

Per un sistema composto di molte particelle, la quantità di moto totale è la somma vettoriale delle singole quantità di moto:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i, \qquad \text{ovvero} \qquad \vec{P} = M\vec{V}_{cm}$$

dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale del sistema, $\vec{V}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$ la velocità del centro di massa. E' immediato dimostrare che

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

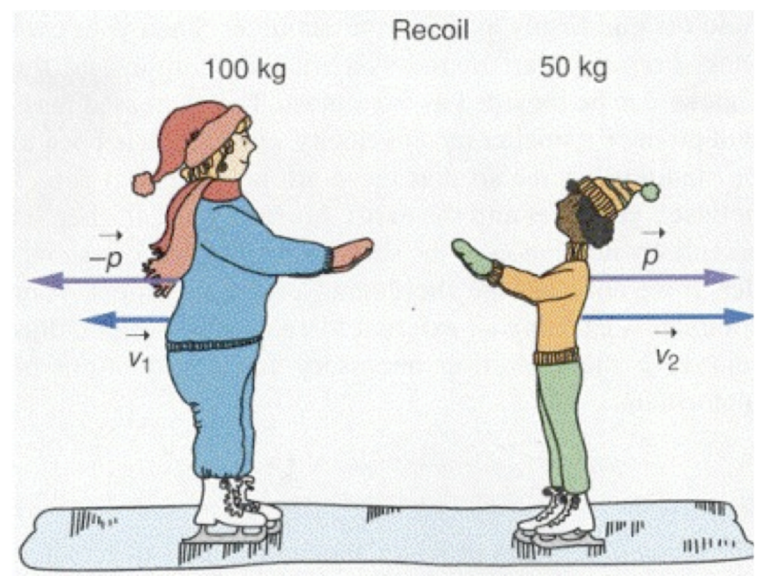
dove $\vec{F}_{ext}$ è la risultante delle sole *forze esterne* al sistema (le forze interne al sistema sono tutte coppie di azione e reazione e si elidono).

In assenza di forze esterne, la quantità di moto totale è conservata.

Conservazione della Quantità di Moto, esempio

Quantità di moto iniziale: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0$
Quantità di moto finale: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$
(ci sono solo forze interne!)
Supponiamo $m_1 = 100$ kg, $v_1 = 5$ m/s, $m_2 = 50$ kg.

- Quanto valgono p e v_2?
- Quanta energia (lavoro) è stata fornita da ciascuno dei due?



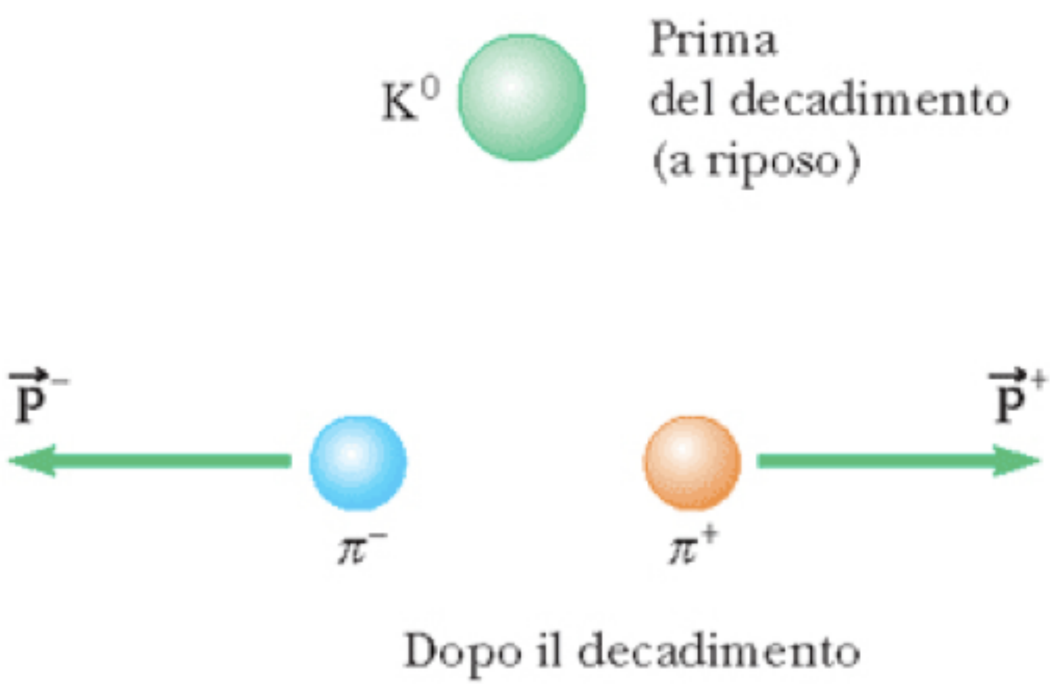
- $p = 100$ kg·5 m/s=500 kg·m/s
- $m_2 v_2 = p$ da cui $v_2 = 10$ m/s
- Lavoro fatto da 2 su 1:

$L_1 = m_1 v_1^2/2 = p^2/(2m_1) = 1250$ J
- Lavoro fatto da 1 su 2:

$L_2 = m_2 v_2^2/2 = p^2/(2m_2) = 2500$ J

Decadimento di particelle

Il mesone K^0 neutro decade spontaneamente in altre due particelle (cariche), π^+ e π^- (dette *pioni*). Se inizialmente il K^0 è a riposo, i due pioni hanno quantità di moto uguali e opposte in direzione, in quanto $\vec{P}_K = 0$, non agiscono forze esterne, quindi $\vec{P}^- + \vec{P}^+ = 0$. La conservazione della quantità di moto vale anche in questo sistema, molto differente da quello precedente!

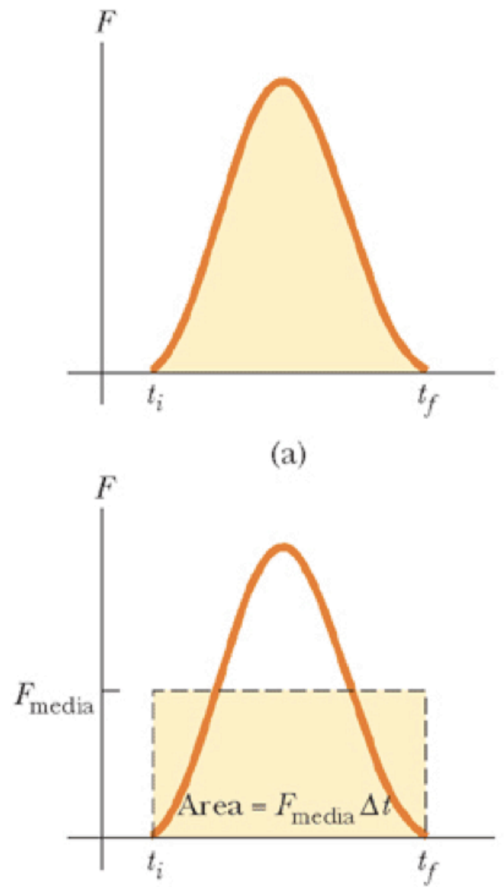


Impulso e quantità di moto

L'*impulso* di una forza è il vettore $\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt}$, dove t_i e t_f sono tempi iniziali e finali di un certo processo (esempio: urto). Unità: N·s.

La variazione della quantità di moto durante il processo è data dall'impulso della forza netta $\vec{F}$ agente sulla particella (*teorema dell'impulso*):

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.$$

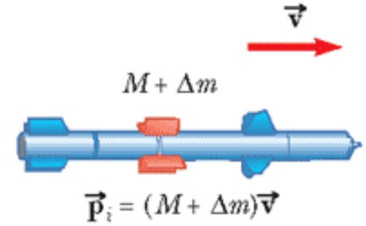


Si definisce la *forza media* $\langle\vec{F}\rangle$ che agisce durante il processo tramite l'impulso: $\langle\vec{F}\rangle = \dfrac{I}{t_f - t_i}$.

In figura: integrale della forza come area e confronto con forza media.

Un sistema a massa variabile: il razzo

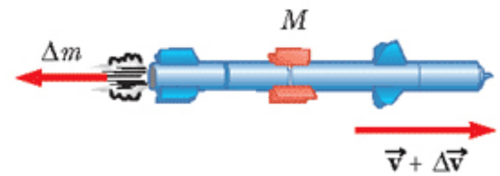
Esempio: razzo di massa M espelle massa Δm di gas in un tempo Δt a velocità u relativa al razzo. Per il teorema dell'impulso: $p_f = p_i + F\Delta t$, dove F è la forza esterna,



(a)

$$p_f = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - u), \qquad p_i = (M + \Delta m)v,$$

da cui $M\Delta v - u\Delta m = F\Delta t$. Nel limite $\Delta t \to 0$:



(b)

$$\boxed{M\frac{dv}{dt} = F - u\frac{dM}{dt}}$$ (notare che $\Delta m \to -dM$)

Se F è trascurabile, $Mdv = -udM$, da cui $\int_0^{v(t)} \frac{dv}{u} = -\int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM}{M}$, assumendo $v(t=0)=0$, $M(t=0)=M_0$:

$$\frac{M_0}{M(t)} = e^{v(t)/u} \quad \text{oppure} \quad v(t) = u \log\left(\frac{M_0}{M(t)}\right).$$