Teoremi della probabilità

I tre assiomi possono essere utilizzati per ottenere alcune altre proprietà di base della probabilità

- Proprietà 1: La probabilità di un evento impossibile è pari a zero: P[Ø] = 0

$P(\Omega) = 1$

$\Omega = \Omega \cup \emptyset$

$\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ disgiunti

$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$

$1 + P(\emptyset) = 1$

- Proprietà 2: P[A^c] = 1 – P[A], per ogni evento A

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(\Omega) = 1$

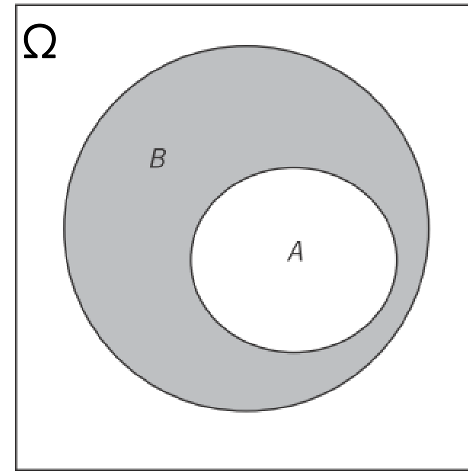
$\Omega = A \cup A^c$

$A \cap A^c = \emptyset$ disgiunti

$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$P(\Omega) = 1$

Teoremi della probabilità



- Proprietà 3: Se l'evento A si trova nel sottospazio di un altro evento B, allora: $\underline{\mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]}$ for $A \subset B$

$B = A \cup (A^c \cap B)$

$P(B) = P(A) + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{\geq 0}$

$P(B) \geq P(A)$

- Proprietà 4: Siano $A_1, A_2, \ldots, A_N$ N eventi disgiunti che soddisfano la condizione $\boxed{A_i \cap A_j = \emptyset}$, se $i \neq j$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_N = \Omega$, allora $\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \ldots + \mathbb{P}[A_N] = 1$

$P(\Omega) = 1 \rightarrow$ norm.

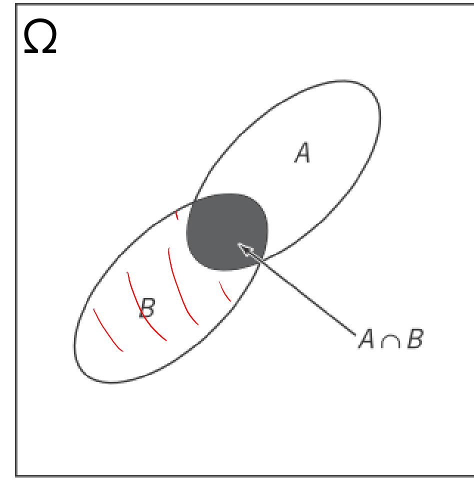
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N) = 1$

ADD. $\hookrightarrow P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_N) = 1$

Teoremi della probabilità

- Proprietà 5: Se due eventi A e B non sono disgiunti, allora

  P[AUB] = P[A] + P[B] – P[A∩B]



$$① \quad A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$

$$\downarrow \text{ADD}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

$$② \quad B = B \cap \Omega = B \cap (A^c \cup A) = (B \cap A^c) \cup (B \cap A)$$

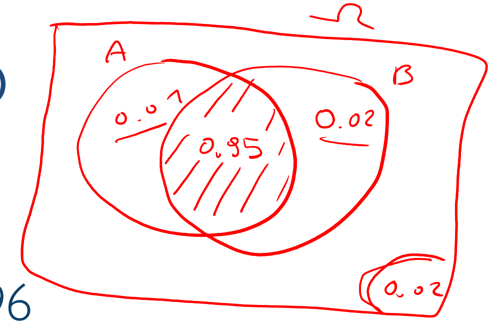
$$\downarrow \text{ADD}$$

$$P(B) = P(B \cap A^c) + P(B \cap A)$$

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) + \cancel{P(B \cap A^c)} - \cancel{P(B \cap A^c)} - P(B \cap A)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) - P(B) \overset{!}{=} P(A) - P(B \cap A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

Teoremi della probabilità – Esercizio



Esperimento casuale: produzione in serie di condensatori

- Probabilità che la capacità sia entro i limiti di tolleranza = 0.96
- Probabilità che la tensione di isolamento superi un certo valore minimo = 0.97
- Probabilità che almeno una delle condizioni sia soddisfatta = 0.98
- Calcolare la probabilità che il condensatore non sia commerciabile perché non soddisfa il requisito sulla capacità o quello sulla tensione di isolamento

$A = \{\text{capacità nei limiti}\}$ $B = \{\text{tensione isol superiore al valore minimo}\}$

$P(A) = 0{,}96$

$P(B) = 0{,}97$

$P(A \cup B) = 0{,}98$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= 0{,}96 + 0{,}97 - 0{,}98 = 0{,}95$$

$C = \{\text{cond. commerciabile}\} = A \cap B$

$\bar{C} = \{\text{cond NON comm.}\}$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}95 = 5\%$$

Definizione di un esperimento

- Secondo la definizione assiomatica di probabilità, per specificare in modo corretto un esperimento casuale deve essere data la terna $(\Omega, S, P(\cdot))$ detta ***spazio (o sistema) di probabilità***
- Quando per un esperimento casuale si sceglie una particolare funzione di probabilità (che ovviamente soddisfi gli assiomi) si dice che si adotta un ***modello di probabilità***

- La definizione assiomatica non suggerisce una particolare scelta della funzione probabilità; può essere scelta una qualunque $P(A)$ che soddisfi gli assiomi
- La definizione di probabilità *frequentista* e quella *classica* soddisfano gli assiomi e rappresentano due possibili scelte di $P(A)$

Proprietà della frequenza relativa

Esercizio: Si dimostri che la frequenza relativa soddisfa gli assiomi della probabilità

$$f_N(A) = \frac{n_A}{N}$$ Definizione di *frequenza relativa* dell'evento A

$n_{A \cup B} = n_A + n_B$

Assioma 1: $0 \le f_N(A) \le 1, \ \forall A$

Assioma 2: Se $A \cap B = \varnothing$: $f_N(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{N} = f_N(A) + f_N(B)$

Assioma 3: $f_N(\Omega) = \frac{N}{N} = 1$

$n_\Omega = N$

Spazio campione finito

Ω a_1 a_2 a_3

0 0 0 ← $\emptyset$
1 0 0
1 0 1

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$$ (alfabeto di M elementi)

2^3

S viene scelta come la totalità degli 2^M sottoinsiemi di Ω

La probabilità degli eventi elementari a_i è scelta in modo da soddisfare gli assiomi 1, 2 e 3

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{M} P(a_i) = 1$$

$$P(a_i) \geq 0, \forall i$$

Sia A un generico evento composto da eventi elementari:

$$A = \{a_1, a_2 \dots, a_m\}$$

$A = a_1 \cup a_2$

La probabilità di A è data da: $P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(a_i)$

Spazio campione finito

In tal modo un *sistema di probabilità finito* è completamente specificato assegnando l'alfabeto e la probabilità $P(a_i)$ degli eventi elementari: $(\Omega, S, P) = \left(\Omega, P(a_i)\right)$

Esempio: Lancio di una moneta

t, c eventi elementari (risultati)

$\varnothing, t, c, \{t, c\}$ 2^2 possibili eventi

Se la moneta è *non truccata* e se il numero *N* di prove è sufficientemente elevato:

$$f_N(t) \cong f_N(c) \cong \frac{1}{2} \Rightarrow P(t) = P(c) = \frac{1}{2}$$

Modello uniforme di probabilità

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$$ (alfabeto di M elementi)

Modello uniforme di probabilità: $\boxed{P(a_i) = \frac{1}{M}, \forall i}$

Sia A il generico evento: $A = \{a_1, a_2 \dots, a_m\}$

La probabilità di A è data da:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(a_i) = \frac{m}{M}$$

Nota: m è anche il numero di risultati favorevoli all'evento A, quindi la scelta del modello uniforme di probabilità è pertanto equivalente alla definizione **classica** della probabilità

Modello uniforme di probabilità

- Adottando il modello uniforme, il calcolo della probabilità di un evento si riduce al conteggio del numero di risultati ad esso favorevoli m

- L'ipotesi di equiprobabilità viene fatta in base a considerazioni di *simmetria* e viene quindi applicata in particolare al gioco dei dadi, del lotto, delle carte

Esempio: Sia dato un mazzo di 52 carte non truccato. Estraendo una carta, qual è la probabilità P(A) di ottenere un asso non di cuori? E la probabilità P(C) di ottenere una carta di cuori che non sia una figura?

A
2
3
10

Applico il modello uniforme di probabilità con M=52 elementi

$m_A=4 \rightarrow P(A) = \frac{m_A}{M} = \frac{3}{52}$ $\qquad$ $m_C=10 \rightarrow P(C) = \frac{m_C}{M} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$

Probabilità condizionata

Supponiamo di eseguire un esperimento che coinvolga una coppia di eventi A e B

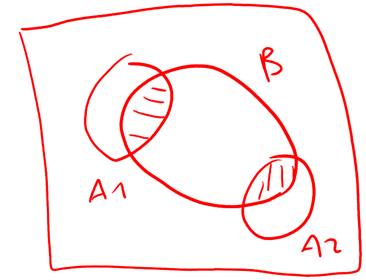
- Sia P[A|B] la probabilità dell'evento A dato che l'evento B si è verificato
- La probabilità P[A|B] è detta *probabilità condizionata di A dato B*

Assumendo che B abbia una probabilità non nulla, P[A|B] è data da

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Questa probabilità condizionata cattura l'informazione parziale che il verificarsi dell'evento B fornisce sull'evento A

Probabilità condizionata



Ω

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Fissato un evento B, P[A|B] è una legge di probabilità in quanto soddisfa gli assiomi:

1. Non negatività: soddisfatta per la definizione di P[A|B]
2. Additività: dati A_1 e A_2 disgiunti, $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2|B] = \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\mathbb{P}[B]}$

   Riconoscendo che i due eventi $A_1 \cap B$ e $A_2 \cap B$ sono anch'essi disgiunti, si può applicare l'assioma di additività

$$= \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap B] + \mathbb{P}[A_2 \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbb{P}[A_1 \cap B]}{\mathbb{P}[B]}}_{P(A_1|B)} + \underbrace{\frac{\mathbb{P}[A_2 \cap B]}{\mathbb{P}[B]}}_{P(A_2|B)}$$

3. Normalizzazione: considerando l'intero spazio campione Ω come evento A e

   notando che Ω⋂B=B → $P[\Omega|B] = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Probabilità condizionata

Interpretazione in termini di frequenza relativa
(supponendo di ripetere l'esperimento N volte):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cong \frac{\frac{n_{A\cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} = \boxed{\frac{n_{A\cap B}}{n_B}}$$

Se consideriamo solo la sequenza degli n_B risultati in cui si è verificato l'evento B, $P(A|B)$ approssima la frequenza di presentazione dell'evento A in tale sequenza

Nota: questa osservazione giustifica il termine *probabilità di A dato B*

Bayes' rule

Suppose

- the conditional probability P[A|B] and the individual probabilities P[A] and P[B] are all easily determined directly, but …
- the conditional probability P[B|A] is desired.

We first rewrite the definition of P[A|B] in the form $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]$

Clearly, we may equally write $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A]$

We therefore have $\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\mathbb{P}[A]$

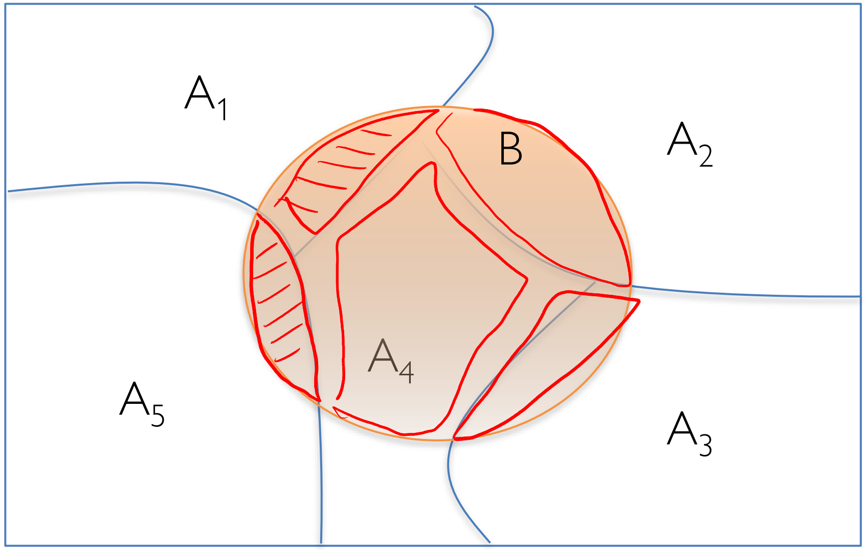
Provided that P[A] is nonzero:

$$\boxed{\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}}$$

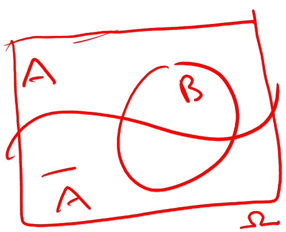
Law of total probability

Suppose $\{A_n; n=1,\ldots,N\}$ is a set of disjoint events ($A_i \cap A_k = \varnothing$ if $i \neq k$), constituting a partition of the sample space Ω, namely

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega$$



$$P[B] = P[B \cap \Omega] = P\left[B \cap \bigcup_{n=1}^{N} A_n\right] = P\left[\bigcup_{n=1}^{N} B \cap A_n\right] = \boxed{\sum_{n=1}^{N} P[B \cap A_n]}$$



$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$

$$\boxed{P[B] = \sum_{n=1}^{N} P[B|A_n] \cdot P[A_n]}$$

Esercizio: Radar Detection Problem

Let the events A and B be defined as follows:

$A = \{\text{a target is present in the area under surveillance}\}$

$A^c = \{\text{there is no target in the area}\}$

$B = \{\text{the radar receiver detects a target}\}$

In the radar detection problem, there are three probabilities of particular interest:

- $\mathbb{P}[A]$ probability that a target is present in the area; this probability is called the *prior probability*.
- $\mathbb{P}[B|A]$ probability that the radar receiver detects a target, given that a target is actually present in the area; this second probability is called the *probability of detection*.
- $\mathbb{P}[B|A^c]$ probability that the radar receiver detects a target in the area, given that there is no target in the surveillance area; this third probability is called the *probability of false alarm*.

The problem is to calculate the conditional probability $\mathbb{P}[A|B]$ which defines the probability that a target is present in the surveillance area given that the radar receiver has made a target detection.

Esercizio: Radar Detection Problem

Let the events A and B be defined as follows:

A = {a target is present in the area under surveillance}

A^c = {there is no target in the area}

B = {the radar receiver detects a target}

Suppose these three probabilities have the following values:

$\times\ \mathbb{P}[A] = 0.02$

$\times\ \mathbb{P}[B|A] = 0.99$

$\mathbb{P}[B|A^c] = 0.01$

T. BAYES

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(A^c) = 1 - P[A] = 0.98$$

T. PROB. TOTALE

$$P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)$$

$$P[A|B] = \frac{0{,}99\cdot 0{,}02}{0{,}99\cdot 0{,}02 + 0{,}01\cdot 0{,}98} \simeq 0{,}69$$

Eventi indipendenti

$P(\cancel{B|A}) = \frac{P(A|B)\cdot \cancel{P(B)}}{P(A)}$

- Supponiamo che il verificarsi dell'evento A non fornisca alcuna informazione sull'evento B; cioè $\boxed{P[B|A] = P[B]}$
- Dal teorema di Bayes abbiamo anche che P[A|B] = P[A]
- In questo caso speciale, notiamo che *la conoscenza del verificarsi di uno dei due eventi non ci dice nulla di più sulla probabilità di verificarsi dell'altro evento* rispetto a quanto sapevamo prima, senza quella conoscenza
- Eventi A e B che soddisfano questa condizione sono detti <u>**indipendenti**</u>
- Da $\mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$, la condizione $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ è equivalente a:

$$\boxed{\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]}$$

- Se un evento A è indipendente da un altro evento B, allora B è indipendente da A, e A e B sono quindi eventi indipendenti

Eventi indipendenti: interpretazione frequentista

- P[B|A] = P[B]
- P[A|B] = P[A]
- Se A e B sono indipendenti, il verificarsi di B non influenza la probabilità di A, e viceversa

In termini di frequenza di presentazione:

- $\dfrac{n_{A\cap B}}{n_A} \simeq \dfrac{n_B}{N}$ *La frequenza di B, nella sequenza di N ripetizioni dell'esperimento, approssima la frequenza di B nella sequenza di* n_A *ripetizioni in cui si è presentato A*
- $\dfrac{n_{A\cap B}}{n_B} \simeq \dfrac{n_A}{N}$ *La frequenza di A, nella sequenza di N ripetizioni dell'esperimento, approssima la frequenza di A nella sequenza di* n_B *ripetizioni in cui si è presentato B*

Esperimento aleatorio composto

Consideriamo ora due *diversi* esperimenti aleatori caratterizzati dagli spazi campione Ω_1 e Ω_2, con $\boldsymbol{\Omega_1 = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}}$ e $\boldsymbol{\Omega_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M\}}$

Esempio: lancio di un dado e di una moneta → Ω_1 = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}; $\Omega_2 = \{T, C\}$

Indichiamo con A_1 il generico evento del primo esperimento e con A_2 il generico evento del secondo esperimento

Indichiamo inoltre con $P_1[\cdot]$ e $P_2[\cdot]$ le rispettive funzioni di probabilità

E' possibile definire un *esperimento composto* con*:*

- Risultati: coppie ordinate $\boldsymbol{(\xi_i, \lambda_j)}$ dei risultati degli esperimenti componenti → (⚄, 'testa')
- Spazio campione: Ω pari al *prodotto cartesiano* degli spazi degli esperimenti componenti ($\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$)
- Eventi: tutti i sottoinsiemi di Ω del tipo $A = A_1 \times A_2$

Esperimento aleatorio composto

Esempio:

Si consideri l'esperimento costituito dal lancio di una moneta ripetuto 2 volte → Gli spazi campione sono:

$$\Omega_1 = \{\xi_1 = T, \xi_2 = C\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{\lambda_1 = T, \lambda_2 = C\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)\}$$

Si noti che gli elementi (T,C) e (C,T) sono distinti in quanto i risultati devono presentarsi in un dato ordine

Nota: se il numero di elementi in Ω_1 è N ed in Ω_2 è M, $\Omega_1 \times \Omega_2$ ha NM elementi

Esperimento aleatorio composto

- Consideriamo un evento A_1 nello spazio campione Ω_1 e A_2 in Ω_2: vogliamo calcolare la probabilità dell'evento $A = A_1 \times A_2$ nello spazio campione $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

- Se gli esperimenti componenti sono **indipendenti** (cioè, se il risultato del primo esperimento non influenza il risultato dell'altro): $P[A] = P_1[A_1] \cdot P_2[A_2]$

$P_1(\cdot)$ $P_2(\cdot)$

Osservazioni:

- Dalla conoscenza delle leggi di probabilità dei singoli esperimenti non è possibile, in generale, ricavare la legge di probabilità dell'esperimento congiunto

- Le considerazioni per una coppia di esperimenti aleatori indipendenti possono essere immediatamente estese al caso di N esperimenti aleatori indipendenti

Composizione di esperimenti indipendenti

- Attenzione a non confondere il concetto di indipendenza tra due **eventi** con quello di indipendenza tra due **esperimenti** !

- La condizione di indipendenza tra due eventi di uno stesso esperimento si riferisce alla probabilità dell'intersezione dei due eventi mentre l'indipendenza tra due esperimenti si riferisce al prodotto cartesiano degli eventi singoli

- Il prodotto cartesiano si può tuttavia esprimere facilmente come *intersezione* di due eventi nello spazio campione dell'esperimento composto:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_1 \times \Omega_2 \\ A_2 &= \Omega_1 \times A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)$$

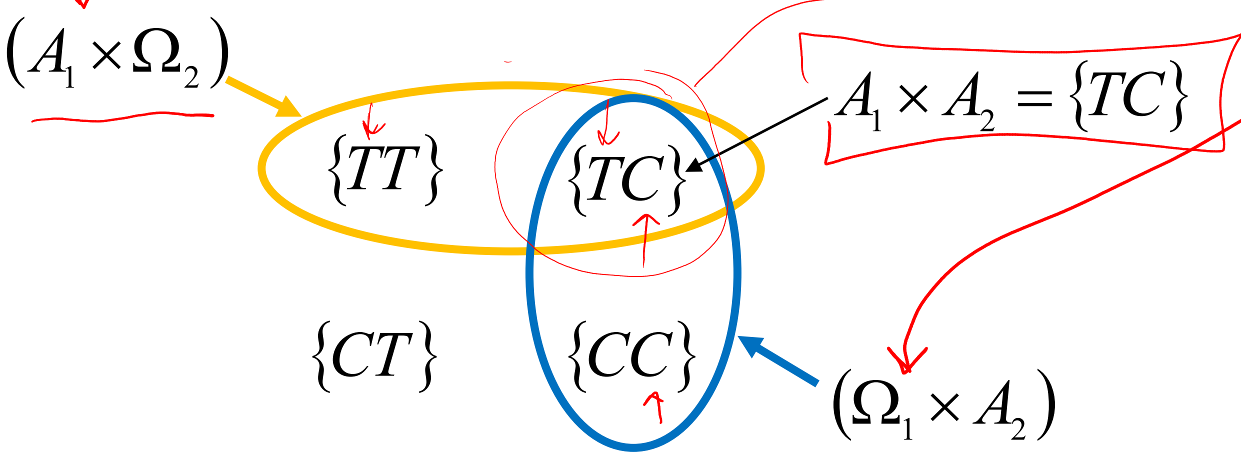
Composizione di esperimenti indipendenti

Esempio:

Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due monete

Se si pone: $A_1 = \{T\}$ e $A_2 = \{C\}$

$$\Rightarrow \quad A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = \{TC\}$$



Composizione di esperimenti indipendenti

Si può dunque porre:

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$$
$$P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$$

Infatti, l'evento $A_1 \times \Omega_2$ si verifica quando si presenta un risultato di A_1 nel primo esperimento ed un qualsiasi risultato nel secondo esperimento; cioè $A_1 \times \Omega_2$ si verifica quando si verifica A_1

Perciò, la probabilità dell'evento $A_1 \times \Omega_2$ nell'esperimento composto deve uguagliare la probabilità di A_1

Composizione di esperimenti indipendenti

Assumendo che gli *esperimenti* siano **indipendenti**, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \times A_2) = P\big((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)\big) \\
&= P(A_1 \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)
\end{aligned}
$$

Ovvero, la condizione di indipendenza tra i due **esperimenti** equivale ad assumere indipendenti tutti gli **eventi** del tipo:

$$
(A_1 \times \Omega_2) \text{ e } (\Omega_1 \times A_2)
$$

definiti nello spazio campione Ω dell'esperimento composto

Composizione di esperimenti indipendenti

Esempio: *Quale è la probabilità che lanciando due dadi perfettamente simmetrici, entrambi presentino o la faccia 4 o la 5?*

Soluzione (Metodo 1)

Si può considerare l'esperimento composto da due lanci indipendenti dei due dadi:

$$P_1(\xi_i) = \frac{1}{6}, \quad P_2(\lambda_j) = \frac{1}{6} \quad \text{(dadi non truccati)}$$

$$P((\xi_i, \lambda_j)) = P_1(\xi_i) P_2(\lambda_j) = \frac{1}{36}$$

Esperimenti componenti sono indipendenti

$$P((\xi_4, \lambda_4) \cup (\xi_5, \lambda_5)) = P((\xi_4, \lambda_4)) + P((\xi_5, \lambda_5)) = P_1(\xi_4)P_2(\lambda_4) + P_1(\xi_5)P_2(\lambda_5)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

Eventi disgiunti (mutuamente esclusivi) dell'esperimento congiunto

Nota: la soluzione poteva essere determinata facilmente anche nel caso di dadi truccati qualora fossero note le probabilità di presentazione delle singole facce nei due lanci

Composizione di esperimenti indipendenti

Esempio: *Quale è la probabilità che lanciando due dadi perfettamente simmetrici, entrambi presentino o la faccia 4 o la 5?*

Soluzione (Metodo 2)

L'esercizio può essere svolto senza considerare l'esperimento come composto da due esperimenti → Applicare il modello uniforme di probabilità osservando che il numero di possibili risultati che si ottengono lanciando 2 dadi è $6^2=36$, mentre il numero di risultati favorevoli è 2, pertanto:

$$P\big((\xi_4, \lambda_4) \cup (\xi_5, \lambda_5)\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

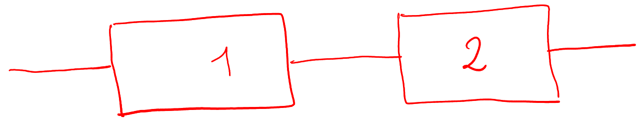
$M = 36$

$m_A = 2$

$\frac{2}{36}$

Nota: dal momento che si è adottato il modello uniforme di probabilità, questa soluzione non si adatta al caso di lancio di dadi truccati

Composizione di esperimenti indipendenti



Esercizio:

- Un apparecchio è formato da due componenti identici collegati in serie, per ognuno dei quali si sa che la probabilità di guastarsi entro 1000 ore di funzionamento è p=0.1
- Si suppone che i guasti dei due componenti si verifichino in modo *indipendente*
- Quale è la probabilità P(Guasto) che l'apparecchio si guasti entro 1000 ore?

$$P_1(G_1) = p = 0,1 \qquad P_2(G_2) = p = 0,1$$

$$P_1(F_1) = 1 - P_1(G_1) = 1 - p = 0,9 \qquad P_2(F_2) = 1 - p = 0,9$$

$$P[(F_1, F_2)] \underset{\uparrow}{=} P_1(F_1) \cdot P_2(F_2) = (1-p)^2 = 0,81$$

INDIP.
ESPERIMENTI
COMPONENTI

$$P(\text{Guasto}) = 1 - P[(F_1, F_2)] = 0,19$$

$$P[\text{Guasto}] = P\left[(G_1 \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times G_2)\right]$$

$$= P\left[(G_1 \times \Omega_2)\right] + P\left[(\Omega_1 \times G_2)\right] - P\left[(G_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times G_2)\right]$$

$$= P_1(G_1) + P_2(G_2) - P_1(G_1) \cdot P_2(G_2)$$

$$= p + p - p^2 = 2p - p^2 = 0{,}2 - 0{,}01 = 0{,}19$$

Prove ripetute binarie e indipendenti

Consideriamo un esperimento con uno *spazio campione* $\Omega = \{A, \bar{A}\}$ costituito da *due risultati* soltanto: $P(A) = p$; $P(\bar{A}) = 1 - p = q$

Consideriamo poi l'esperimento composto ottenuto ripetendo N volte lo stesso esperimento e facendo in modo che ciascuna prova sia <u>indipendente</u> dalle altre

Esempio: lancio di una moneta ripetuto N volte

Problema: Calcolare la seguente probabilità:

$$P(E) = P(A \text{ si verifica } k \text{ volte in un ordine qualsiasi})$$

Prove ripetute binarie e indipendenti

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_R$$ (E_i eventi disgiunti)

$\boldsymbol{R}$ = numero di sequenze distinte che contengono $\boldsymbol{k}$ eventi $\boldsymbol{A}$

$$E_1 = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k} \times \underbrace{\overline{A} \times \overline{A} \times \cdots \times \overline{A}}_{N\text{-}k}$$

Consistente nel verificarsi di A nelle prime k prove e dal non verificarsi di A nelle rimanenti N-k prove

E_2, E_3, …, E_R sono altre sequenze, con un *diverso ordine*, che contengono k eventi A e N-k eventi $\bar{A}$

$$P(E_i) = \underbrace{pp\cdots p}_{k}\underbrace{qq\cdots q}_{N\text{-}k} = p^k q^{N-k} \qquad \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{R}$$

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_R) = R p^k q^{N-k}$$

Prove ripetute binarie e indipendenti

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_R) = Rp^k (1-p)^{N-k}$$

R = combinazioni di N oggetti presi k a k:

Coefficiente binomiale

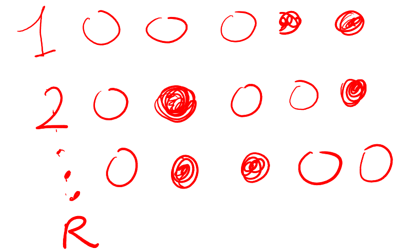
$$R = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

$$P(E) = P(A \text{ si verifica } k \text{ volte in un ordine qualsiasi}):$$

$$\boxed{P(E) = \underbrace{\frac{N!}{k!(N-k)!}}_{=R} p^k (1-p)^{N-k}}$$

Formula di Bernoulli (o binomiale)

Prove ripetute binarie e indipendenti



Esercizio 1:

- In un'urna sono contenute M biglie di identiche caratteristiche geometriche e meccaniche, fra le M biglie ve ne sono b bianche e le rimanenti di diverso colore
- Si estrae per 5 volte una biglia, rimettendola ogni volta nell'urna prima dell'estrazione successiva
- Quale è la probabilità P di ottenere, nelle 5 estrazioni, 3 volte una biglia bianca e 2 volte una biglia di diverso colore?

$$p = P\{\text{ottenere una biglia bianca nel singolo esperimento}\} = \frac{b}{M}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{b}{M}$$

$$P = P\{\text{3 biglie bianche su 5 prove}\} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{b}{M}\right)^3\left(\frac{M-b}{M}\right)^2$$

$N = 5$

$K = 3$

$$P = \frac{5\cdot 4\cdot b^3}{2\,M^5}(M-b)^2 = \frac{10\,b^3(M-b)^2}{M^5}$$

Prove ripetute binarie e indipendenti

Esercizio 2:

Si supponga di lanciare un dado 5 volte.

1) Quale è la probabilità che si presenti 2 volte la faccia 3?

2) Quale è la probabilità che si presenti almeno 2 volte la faccia 3?

$P\{\text{si presenta la faccia 3 nel singolo lancio}\} = \frac{1}{6} = p$

$P\{\text{NON} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "\} = 5/6 = q = 1-p$

$P\{\text{si presenta 2 volte su 5 lanci la faccia 3}\}$

$\|$

$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5!}{2!\,3!} p^2 (1-p)^3 = 0,16075$

Prove ripetute binarie e indipendenti

Esercizio 2:

Si supponga di lanciare un dado 5 volte.

1) Quale è la probabilità che si presenti 2 volte la faccia 3?

2) Quale è la probabilità che si presenti almeno 2 volte la faccia 3?

$P\{f_3$ si presenta almeno 2 volte$) =$

$P\{f_3$ si presenta 2 volte$) +$

$P\{$ " " 3 " $) +$

$P\{$ " " 4 " $) +$

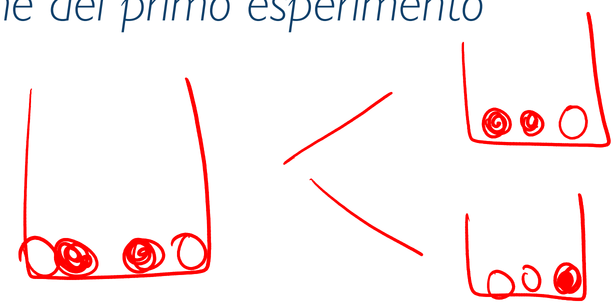
$P\{$ " " 5 " $) =$

$$= \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 = 0{,}1962$$

Composizione di esperimenti non indipendenti

Nella pratica si verificano spesso esperimenti **non indipendenti**

In questa classe ricadono quegli casi in cui *l'esecuzione del primo esperimento modifica lo spazio* $\mathbf{\Omega}_2$ *del secondo esperimento*



Esempio:

Si consideri l'estrazione di due biglie da una scatola che contiene due biglie bianche e due nere

- Se dopo l'estrazione della prima biglia, essa viene reinserita nella scatola allora i due esperimenti sono da considerare indipendenti (estrazione con rimpiazzo)
- Se invece la biglia estratta *non viene rimpiazzata* lo spazio campione del secondo esperimento viene modificato dal risultato del primo esperimento

→ I due esperimenti non possono pertanto essere considerati indipendenti

Composizione di esperimenti non indipendenti

Esempio:

Si calcoli la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di 40, entrambe risultino di fiori. Si assuma che il mazzo di carte non sia truccato.

Soluzione (Metodo 1)

- Si può descrivere questo esperimento come composto da due esperimenti singoli costituiti dall'estrazione di una singola carta dal mazzo
- Poiché dopo la prima estrazione la carta non viene rimpiazzata, il primo esperimento influenza i risultati del secondo (esperimenti dipendenti)
- Dal momento che il mazzo di carte non è truccato, è possibile applicare il *modello uniforme* di probabilità

Composizione di esperimenti non indipendenti

A = {Nella prima estrazione si ottiene una carta di fiori}

B = {Nella seconda estrazione si ottiene una carta di fiori}

$B|A$ = {Nella seconda estrazione si ottiene una carta di fiori dopo che nella prima si è ottenuta una carta di fiori}

$$P(A) = \frac{1}{4} = \frac{10}{40} \qquad P(B|A) = \frac{9}{39}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} = \frac{3}{52}$$

Nota bene: $P(B \mid A) = \dfrac{9}{39}$, mentre $P\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{10}{39}$

Composizione di esperimenti non indipendenti

Esempio:

Si calcoli la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di 40, entrambe risultino di fiori. Si assuma che il mazzo di carte non sia truccato.

Soluzione (Metodo 2)

- Dal momento che il mazzo di carte non è truccato, è possibile applicare il *modello uniforme* di probabilità
- Il numero di possibili risultati è dato dal numero di combinazioni di 40 oggetti presi 2 a 2:

M

$$C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{2!(40-2)!}$$

Composizione di esperimenti non indipendenti

m_A

- Il numero di risultati favorevoli è dato dal numero di possibili modi in cui si possono disporre 10 oggetti (le carte a fiori) a coppie; tale numero è dato dalle combinazioni di 10 oggetti presi 2 a 2:

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!}$$

$$\frac{m_A}{M} = P(\text{estrarre 2 carte a fiori}) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{3}{52}$$