Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

COMUNICAZIONI NUMERICHE – 12-01-09

Esercizio 1

Il segnale periodico $x(t)=\sum_n x_0(t-nT)$ con $x_0(t)=4\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$ **e** $T=4/B$ viene applicato al sistema di Fig.1. Si determini l'espressione temporale del segnale d'uscita y(t) e la sua potenza media.

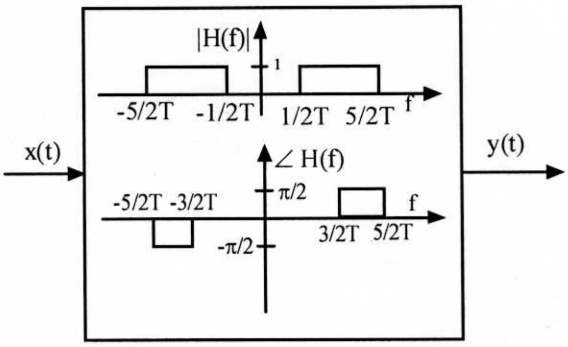


Fig.1

Esercizio 2

Al ricevitore di Fig. 2 viene applicato il segnale PAM in banda base $r(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)+w(t)$ in cui i simboli a_i, indipendenti, equiprobabili, appartengono all'alfabeto $A\equiv[-e,2e]$. Il rumore w(t) introdotto dal canale è Gaussiano, a media nulla, con densità spettrale di potenza $S_W(f)=\frac{N_0}{2}$ e l'impulso trasmesso $g_T(t)$ ha uno spettro $G_T(f)=T^2\cdot|f|\cdot e^{-|f|}\cdot rect(fT/2)$. Nell'ipotesi che:

1) La risposta in frequenza del filtro in ricezione $G_R(f)=e^{|f|}\cdot rect(fT/2)$ sia.

2) La strategia di decsione sia $\hat{a}_k=\begin{cases}-e & x_k\le\lambda\\ 2e & x_k>\lambda\end{cases}$ con $\lambda=3e/2$;

si calcoli:

1) L'energia trasmessa media per simbolo in un intervallo di segnalazione T.

2) La probabilità di errore su simbolo, verificando a priori l'assenza di interferenza intersimbolica mediante la condizione di Nyquist nel tempo.

3) Il valore ottimo di soglia λ che minimizza la probabilità di errore. Si commenti il risultato.

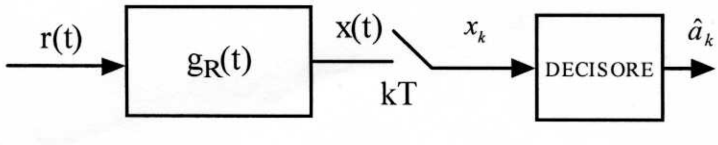


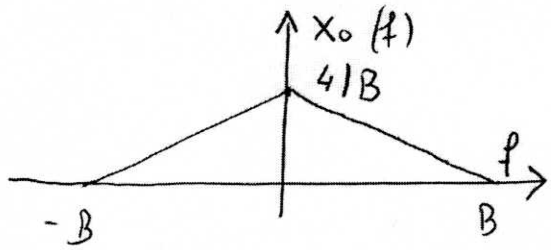
Fig. 2

Es. 1

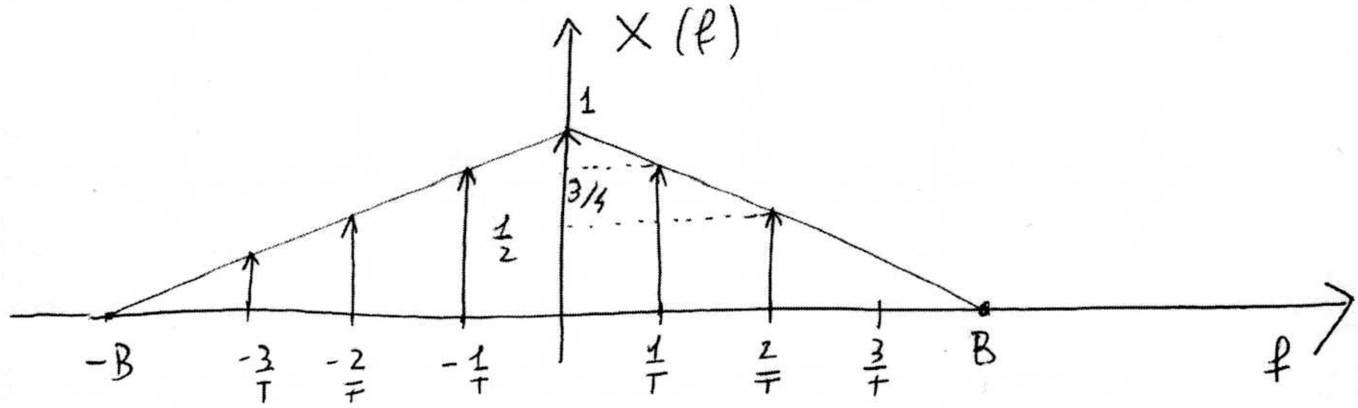
$$X(f) = \sum_k X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad \text{con} \quad \frac{1}{T} = \frac{B}{4}$$

$$X_k = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{B}{4} X_0\left(\frac{Bk}{4}\right) \quad \text{dove}$$

$$X_0(f) = \frac{4}{B}\left[1 - |f|/B\right] \mathrm{rect}\left(f/2B\right)$$



$$X(f) = \sum_k \left[1 - \frac{|k|}{4}\right] \mathrm{rect}\left(\frac{k}{8}\right) \delta\left(f - k \cdot \frac{B}{4}\right)$$



Il filtro fa passare solo le righe a $\pm \frac{1}{T}$ e $\pm \frac{2}{T}$. In particolare le righe a $\pm \frac{2}{T}$ vengano sfasate di $\pm \pi/2$

$$Y(f) = \frac{3}{4}\left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi/2}\delta\left(f - \frac{2}{T}\right) + e^{-j\pi/2}\delta\left(f + \frac{2}{T}\right)\right]$$

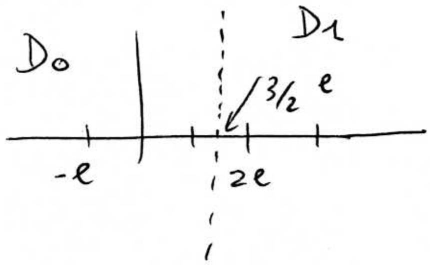
$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{4\pi t}{T}\right)} \qquad \boxed{P_y = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{13}{8}}$$

Es. 2

$$r(t)=\sum_i a_i \, g_T(t-iT)+u(t) \qquad a_i \in A \equiv [-e, 2e] \quad \text{eo}$$

$$S_u(f)=N_0/2 \; ; \quad G_T(f)=T^2 \, |f| \, e^{-|f|} \, rect(f\,T/2)$$

$$G_R(f)= e^{|f|} \, rect(f\,T/2) \; ;$$



1) $E_T=?$; 2) $P(e)=?$; 3) $\lambda_{opt}=?$

—o—

1)

$$E_T = P_T \cdot T \qquad P_T = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(f)\, df$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T^2} S_a(f) \cdot |G_T(f)|^2$$

$$R_a(m) = E[a_i^2]\, \delta(m) = \frac{[e^2+4e^2]}{2} \cdot \delta(m) = \frac{5}{2} e^2 \, \delta(m)$$

$$S_a(f) = T \cdot \frac{5}{2} e^2 \quad \Rightarrow \quad S_s(f) = \frac{5}{2} e^2 \, \frac{|G_T(f)|^2}{T}$$

$$\boxed{P_T = \frac{5}{2} \frac{e^2}{T} \cdot E_{g_T}}$$

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = T^4 \int_{-1/T}^{1/T} f^2 e^{-2f} df =$$

$$= 2T^4 \int_0^{1/T} f^2 e^{-2f} df$$

Calcolo integrale.

$$\int_0^{1/T} f^2 \cdot e^{-2f}\, df = f^2\left[-\frac{1}{2} e^{-2f}\right]\Bigg|_0^{1/T} - \int_0^{1/T} 2f\left[-\frac{1}{2} e^{-2f}\right] df =$$

$$= -\frac{f^2}{2} e^{-2f}\Big|_0^{1/T} + \int_0^{1/T} f\, e^{-2f}\, df =$$

$$= -\frac{f^2}{2} e^{-2f}\Big|_0^{1/T} + \left[-\frac{f}{2} e^{-2f}\right]_0^{1/T} + \int_0^{1/T} \frac{1}{2} e^{-2f}\, df =$$

$$= \left[-\frac{f^2}{2} e^{-2f}\right]_0^{1/T} + \left[-\frac{f}{2} e^{-2f}\right]_0^{1/T} - \frac{1}{4} e^{-2f}\Big|_0^{1/T}$$

$$= -\frac{1}{2T^2} e^{-2/T} - \frac{1}{2T} e^{-2/T} - \frac{1}{4} e^{-2/T} + \frac{1}{4}$$

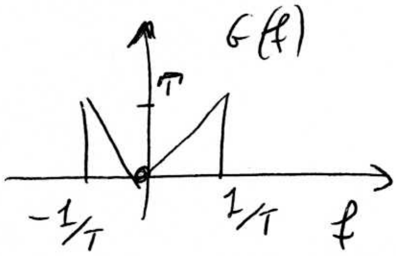
$$= \frac{1}{4}\left[1 - e^{-2/T}\left(1 + \frac{2}{T} + \frac{2}{T^2}\right)\right]$$

$$E_{g_T} = \frac{T^4}{2}\left[1 - e^{-2/T}\left(1 + \frac{2}{T} + \frac{2}{T^2}\right)\right]$$

$$\boxed{P_T = \frac{5}{4} e^2 T^3 \left[1 - e^{-2/T}\left(1 + \frac{2}{T} + \frac{2}{T^2}\right)\right]}$$

2) $P(e) = !$

$$G(f) = G_R(f) \cdot G_T(f) = T^2 |f| \; rect(fT/2)$$



$$\sum G\left(f - \frac{k}{T}\right) = T \Rightarrow g(0) = 1$$

$$x_k = g(0) \cdot a_k + n_k = e_k + n_k$$

$$n_k = n(t_k) \qquad n(t) = w(t) \otimes g_R(t) \in \mathcal{N}(0, S_n(f))$$

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2$$

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_0/2 \, |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{\cancel{2}} \cancel{2} \int_0^{1/T} e^{2f} df =$$

$$= \frac{N_0}{2} \left[e^{2/T} - 1 \right]$$

$$\boxed{P[e] = 1/2 \; Q\left[\frac{2e - \lambda}{\sigma_n}\right] + \frac{1}{2} \; Q\left[\frac{\lambda + e}{\sigma_n}\right]}$$

i) $\lambda_{opt} = ?$ $\qquad \lambda_{opt} = 0.5 e = e/2$ (nel mezzo fra i due simboli)