

VERS.
PROVA

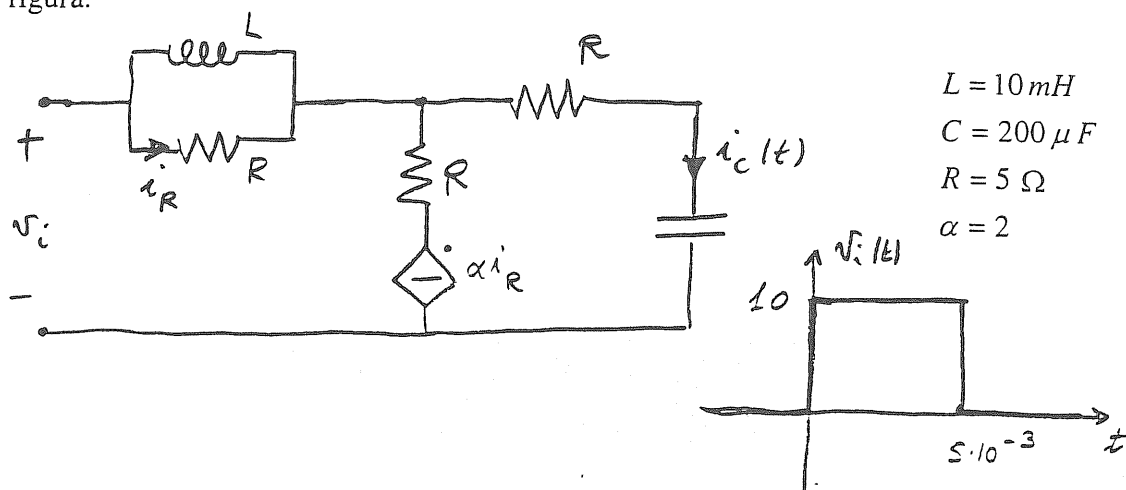
PROVA SCRITTA DI Elettrotecnica

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

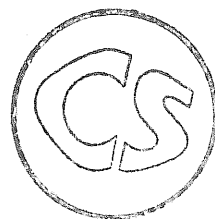
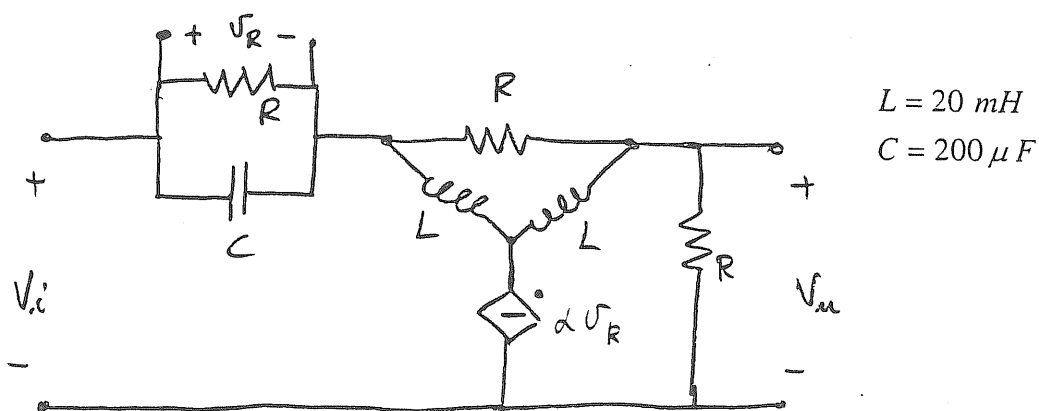
Pisa, 23 giugno 2000

Allievo:

- 1) Per il circuito di figura determinare l'espressione temporale della corrente sul condensatore C a seguito dell'applicazione in ingresso dell'impulso rettangolare di figura.



- 2) Per il circuito di figura determinare R ed α affinché la funzione di trasferimento $W(s) = V_u(s)/V_i(s)$ abbia uno zero reale in 1000 rad/sec ed il circuito risulti marginalmente stabile (1 polo nell'origine). Tracciare quindi i diagrammi di Bode del modulo e della fase.

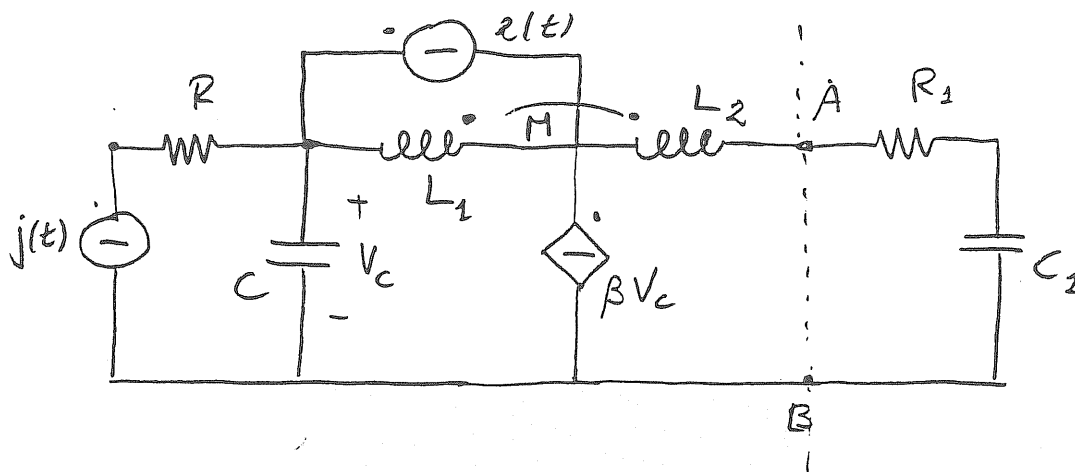


23/6/00

VERS.

PROVA

- 3) Il circuito rappresentato in figura è in condizione di regime stazionario per effetto dei generatori applicati. Determinare l'equivalente Thevenin del bipolo a monte della sezione A-B e le potenze attiva e reattiva sul bipolo serie R_1 e C_1 .



$$e(t) = 50 \cos(14t + \pi/3) \text{ V};$$

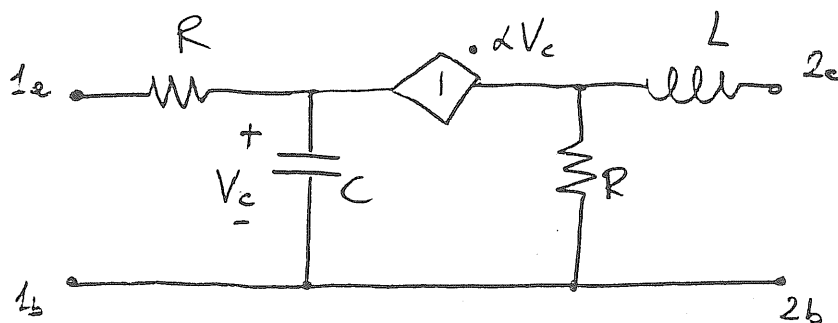
$$j(t) = 3 \sin(14t + \pi/4) \text{ A}$$

$$M = 10 \text{ mH}$$

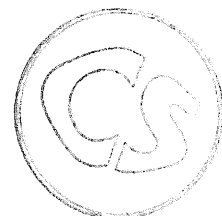
$$C = C_1$$

$$R = 10 \Omega; \quad L_1 = 15 \text{ mH}; \quad L_2 = 20 \text{ mH}; \quad C_1 = 100 \mu\text{F}; \quad R_1 = 5 \Omega; \quad \beta = 10;$$

- 4) Dato il sistema di figura determinare i parametri h del doppio bipolo in corrispondenza della pulsazione 1000 rad/sec assumendo $\alpha = 10$.
Determinare inoltre nella condizioni di porta 2 corto circuitata il valore di α tale che l'impedenza di ingresso risulti una pura reattanza.

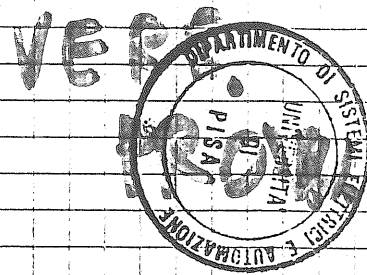


$$L = 10 \text{ mH}; \quad C = 50 \mu\text{F}; \quad R = 2 \Omega;$$



Prova scritta di elettrotecnica
del 23/06/00

(1)



Esercizio n° 1

La forma d'onda della tensione in ingresso può essere scritta come

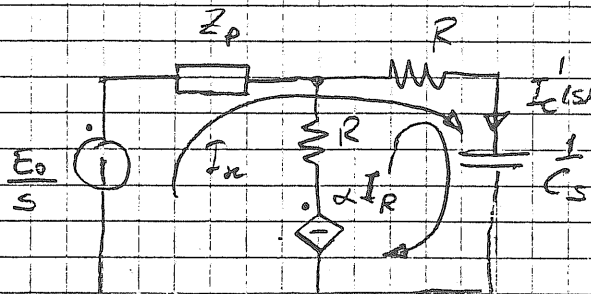
$$V_i(t) = E_0 u(t) - E_0 u(t-T)$$

$$\text{con } E_0 = 10 \text{ V}$$

$$T = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Essendo il circuito lineare e tempo invariante è sufficiente calcolare la risposta al gradino applicato nell'origine dei tempi.

$$Z_p = \frac{RLs}{R+Ls}$$



$$I_R = I_x \frac{Ls}{R+Ls}$$

$$\frac{E_0}{s} = \left(Z_p + R + \frac{1}{Cs} \right) I_x + \left(R + \frac{L}{Cs} \right) \alpha I_R$$

$$\frac{E_0}{s} = \left(\frac{RLs}{R+Ls} + R + \frac{1}{Cs} \right) I_x + \left(R + \frac{L}{Cs} \right) \alpha \frac{Ls}{R+Ls} I_x$$

$$\frac{E_0}{s} = \frac{RLCs^2 + RCs(R+Ls) + R+Ls + \alpha RLCs^2 + \alpha Ls}{(R+Ls)Cs} I_x$$

$$I_x = \frac{E_0}{s} \frac{(R+Ls)Cs}{(\alpha+2)RLCs^2 + [R^2C + (\alpha+1)L]s + R}$$

$$I'_C(s) = I_x + \alpha I_R = I_x \left(1 + \alpha \frac{Ls}{R+Ls} \right) = I_x \left(\frac{R + (\alpha+1)Ls}{R+Ls} \right)$$

23/6/00 (2)

VERB.

PROVA

$$I_c(s) = \frac{E_0}{(s+2)RLs^2 + [R^2C + (\alpha+1)L]s + R}$$

$$= \frac{E_0(\alpha+1)LC}{(s+2)RLC} \frac{s + \frac{R}{(\alpha+1)L}}{s^2 + \left[\frac{R}{(\alpha+2)L} + \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)RC} \right]s + \frac{1}{(\alpha+2)LC}}$$

$$= 7.5 \frac{s + 166.67}{s^2 + 875s + 1.25 \cdot 10^5} =$$

$$= 7.5 \frac{s + 166.67}{(s + 180)(s + 695)} =$$

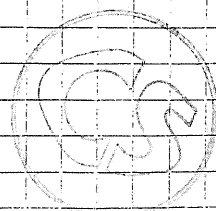
$$= 7.5 \left[-\frac{0.026}{s + 180} + \frac{1.026}{s + 695} \right]$$

$$i_c(t) = \left[7.7 \cdot e^{-695t} - 0.195 e^{-180t} \right] u(t)$$

La corrente richiesta è quindi

$$i_c(t) = \left[7.7 e^{-695t} - 0.195 e^{-180t} \right] u(t) +$$

$$\left[7.7 e^{-695(t - 5 \cdot 10^{-3})} - 0.195 e^{-180(t - 5 \cdot 10^{-3})} \right] u(t - 5 \cdot 10^{-3})$$



Prova scritta del 23/06/00

(3)

VERBA

MODI



Esercizio n°2

Si calcola inizialmente la funzione di trasferimento

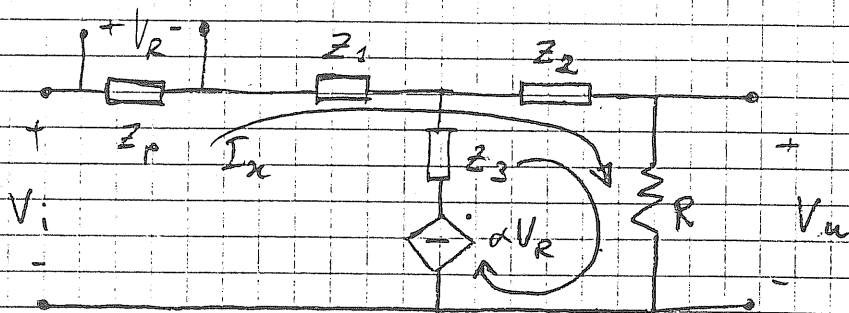
Conviene effettuare una trasformazione triangolo-stella ottenendo:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{RLs}{2Ls + R}$$

$$Z_3 = \frac{L^2 s^2}{2Ls + R}$$

$$Z_p = \frac{R}{RCs + 1}$$

Il circuito diventa:



$$V_R = Z_p I_x$$

$$V_i = \left(\frac{R}{RCs + 1} + \frac{2RLs}{2Ls + R} + R \right) I_x + \left(R + \frac{RLs}{2Ls + R} \right) \alpha \frac{R}{RCs + 1} I_x$$

$$V_i = \frac{2RLs + R^2 + 2R^2CLs^2 + 2RLs + 2R^2CLs^2 + RCs^3 + 2RLs + R^2}{(RCs + 1)(2Ls + R)} I_x$$

$$+ \frac{2\alpha R^2Ls + 2R^3 + \alpha R^2Ls}{(2Ls + R)(RCs + 1)} I_x$$

$$V_i = R \frac{4RLCs^2 + 6Ls + R^2Cs + 2R + 3\alpha RLs + \alpha R^2}{(2Ls + R)(RCs + 1)} I_x$$

23/6/00

(4)

VERIF.

$$V_m = R(I_n + \alpha V_R) = R I_n \left(1 + \alpha \frac{R}{RCs+1} \right) = \text{PROVA}$$

$$= \frac{R I_n (RCs+1 + \alpha R)}{RCs+1}$$

$$V_m = \frac{V_i}{R} \frac{(RCs+1)(2Ls+R)}{4RLCs^2 + [R^2C + L(6+3\alpha R)]s + R(2+\alpha R)} \cdot \frac{R}{RCs+1}$$

$$W(s) = \frac{V_m}{V_i} = \frac{(2Ls+R)(RCs+1 + \alpha R)}{4RLCs^2 + [R^2C + L(6+3\alpha R)]s + R(2+\alpha R)}$$

Il valore di R tale che la $W(s)$ abbia uno zero in $1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ è dato da

$$\frac{R}{2L} = 1000 \Rightarrow R = 40 \Omega$$

Affinché la rete sia marginalmente stabile (con un polo sull'origine) basta che risulti:

$$R(2+\alpha R) = 0$$

$$\alpha = -\frac{2}{R} =$$

$$W(s) = \frac{2LRC \left(s + \frac{R}{2L} \right) \left(s + \frac{1+\alpha R}{RC} \right)}{4RLC \left[s^2 + \left(\frac{R}{4L} + \frac{6+3\alpha R}{4RC} \right) s + \frac{2+\alpha R}{4LC} \right]}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(s + \frac{R}{2L} \right) \left(s + \frac{1+\alpha R}{RC} \right)}{s^2 + \left(\frac{R}{4L} + \frac{6+3\alpha R}{4RC} \right) s + \frac{2+\alpha R}{4LC}}$$

Sostituendo ai dati numerici si ottiene:

$$W(s) = \frac{1}{2} \frac{(s+1000)(s+118.7)}{s^2 + 50s}$$



23/6/00

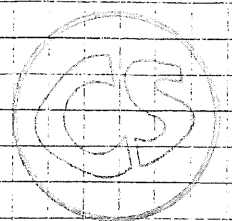
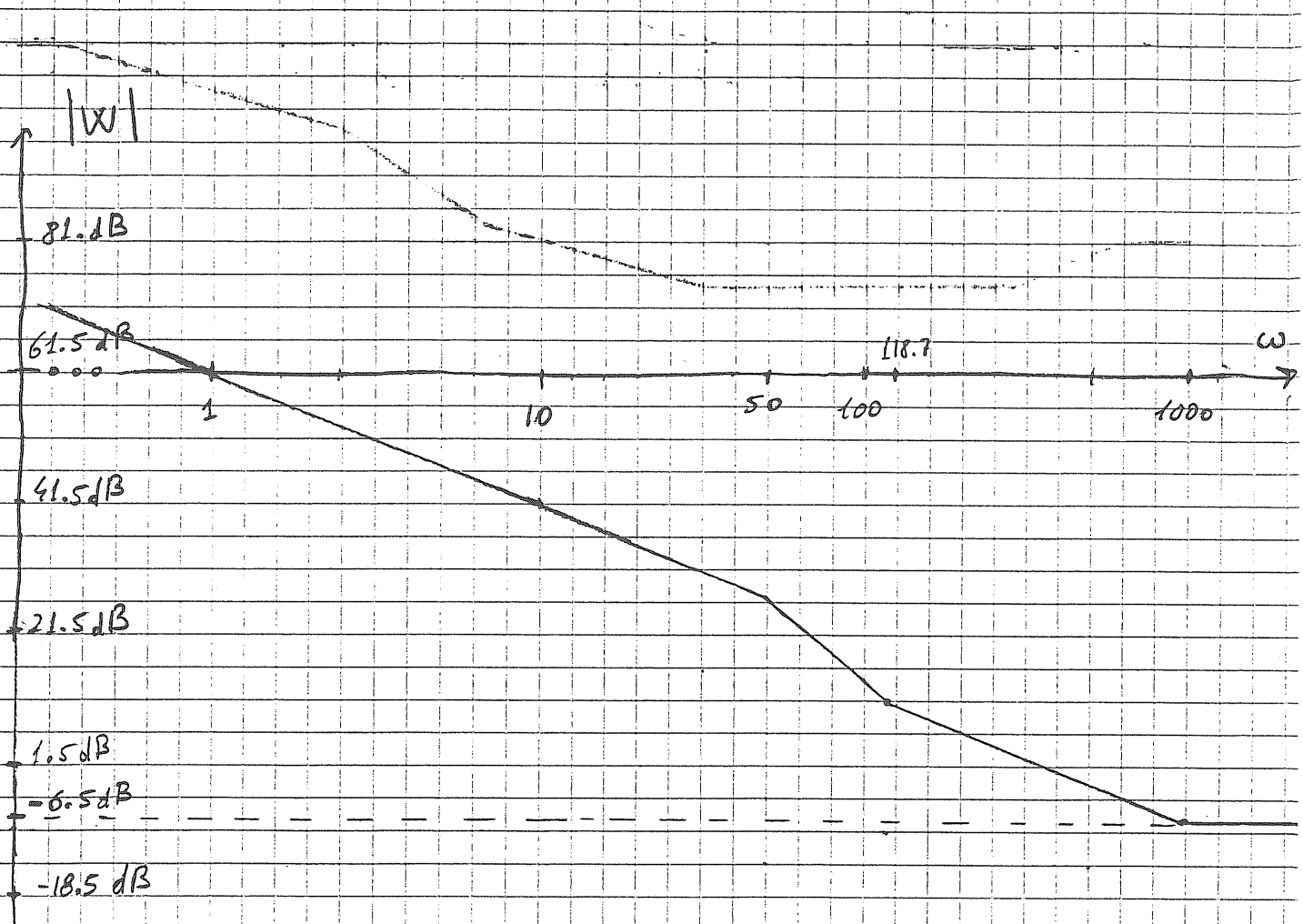
(5)

$$W(s) = \frac{1}{2} \frac{1000 \cdot 118.7}{50} \frac{\left(\frac{s}{1000} + 1\right) \left(\frac{s}{118.7} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{50} + 1\right)}$$

VERS.

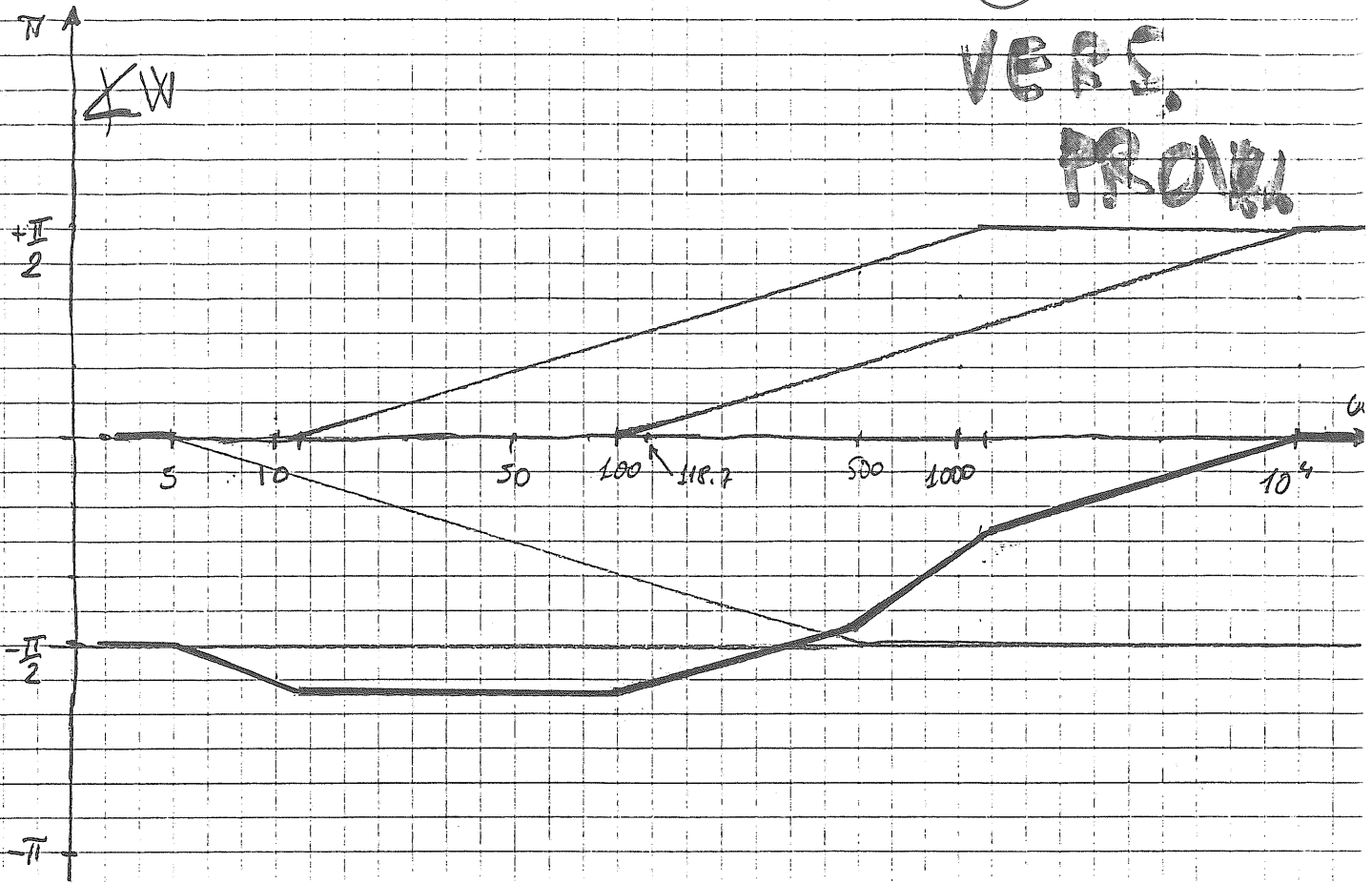
PROV.

$$= 1187 \frac{\left(\frac{s}{1000} + 1\right) \left(\frac{s}{118.7} + 1\right)}{s \left(\frac{s}{50} + 1\right)}$$



23/6/00 (6)

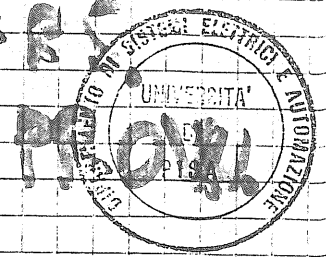
VERS.
PROV.



Prova scritta del 23/06/00

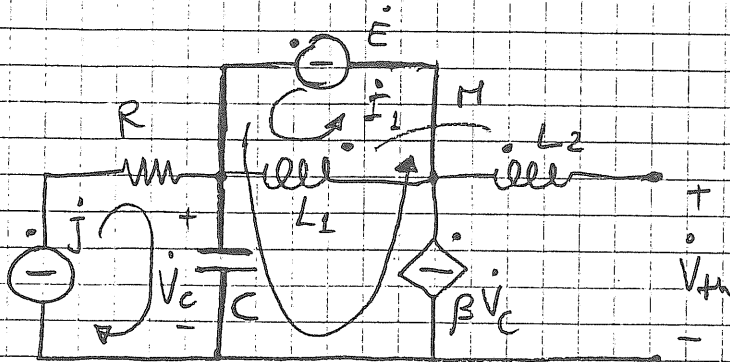
7

VERBA



Esercizio n° 3

Determinare la \dot{V}_{th}



$$\dot{E} = 50 e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}$$

$$\dot{J} = 3 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

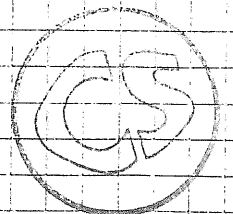
Con riferimento al sistema di correnti di angoli a figura si ha:

$$\dot{E} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{j\omega L_1} = 5.3 + j3.2 = 10.6 e^{j1.05} \text{ A}$$

$$\dot{V}_c = \frac{1}{j\omega C} (\dot{J} + \beta \dot{V}_c)$$

$$j\omega C \dot{V}_c = \dot{J} + \beta \dot{V}_c \Rightarrow \dot{V}_c = \frac{\dot{J}}{j\omega C - \beta} = -0.211 - j0.213 = 0.3 e^{-j2.35} \text{ V}$$

$$\dot{V}_{th} = j\omega M \dot{I}_1 - \dot{E} + \dot{V}_c = 14.22 - j8.55 = 16.6 e^{-j0.54}$$

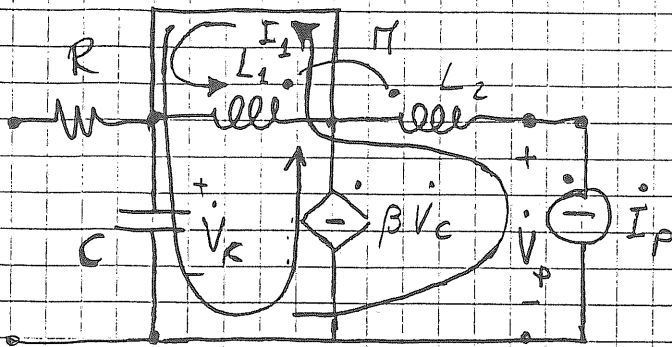


Determinazione dell'impedenza in Thevenin **VERS.**

23/6/00

PROVA

(8)



$$\bar{Z}_{th} = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p}$$

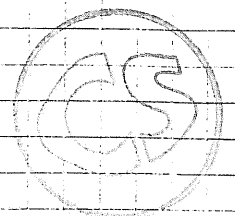
Con riferimento al sistema di correnti di maglia di figura si ha:

$$0 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_p \quad \dot{I}_1 = - \frac{j\omega M}{j\omega L_1} \dot{I}_p = -0.667 \dot{I}_p \quad A$$

$$\dot{V}_c = \frac{1}{j\omega C} (\dot{I}_p + \beta \dot{V}_c) \Rightarrow \dot{V}_c = \frac{\dot{I}_p}{j\omega C - \beta} = 0.1 e^{-j3.138} \dot{I}_p$$

$$\dot{V}_p = j\omega L_2 \dot{I}_p + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{V}_c = (0.0043 + j4.186) \dot{I}_p$$

$$\bar{Z}_p = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p} = 0.0043 + j4.186 = 4.1856 e^{j1.57} \Omega$$

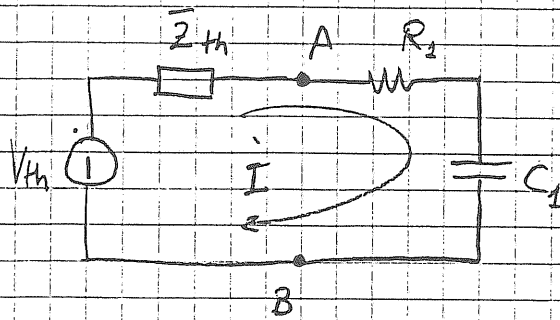


Per la valutazione delle potenze si usa il circuito
equivalente ottenuto:

VERBA
PROVA

23/6/00

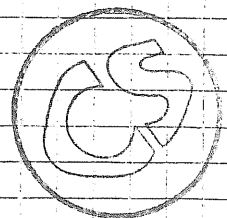
(9)



$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_{th}}{\bar{Z}_{th} + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = 0.389 + j0.4437 = 0.59 e^{j0.85} \text{ A}$$

$$P = R_1 \frac{I^2}{2} = 0.871 \text{ W}$$

$$Q = \frac{1}{\omega C} \frac{I^2}{2} = 5.548 \text{ VAR}$$

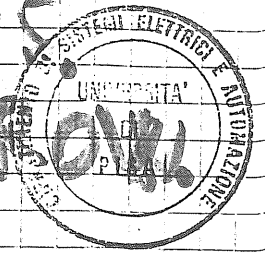


Prova scritta del 23/06/00

10

VERS

PROVA



Esercizio 4

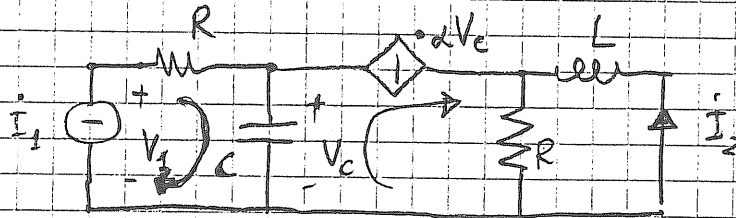
Valutazione parametri h

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$



$$\dot{V}_c = \frac{1}{j\omega C} (\dot{I}_1 - \alpha \dot{V}_c)$$

$$(j\omega C + \alpha) \dot{V}_c = \dot{I}_1$$

$$\dot{V}_c = \frac{\dot{I}_1}{j\omega C + \alpha}$$

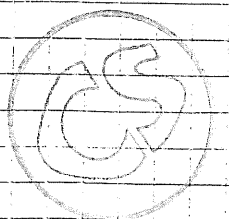
$$\dot{V}_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \dot{I}_1 - \frac{1}{j\omega C} \alpha \dot{V}_c =$$

$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C} \frac{\alpha}{j\omega C + \alpha}\right) \dot{I}_1 =$$

$$= \left[R + \frac{1}{j\omega C} \left(1 - \frac{\alpha}{j\omega C + \alpha}\right)\right] \dot{I}_1 =$$

$$= \left[R + \frac{1}{j\omega C} \left(\frac{j\omega C + \alpha - \alpha}{j\omega C + \alpha}\right)\right] \dot{I}_1 =$$

$$= R + \frac{1}{j\omega C + \alpha}$$



$$\dot{I}_2 = - \alpha \dot{V}_c \frac{R}{R+j\omega L} =$$

$$= - \frac{\alpha}{\alpha+j\omega C} \frac{R}{R+j\omega L} \dot{I}_2$$

23/6/00

VERBODEN

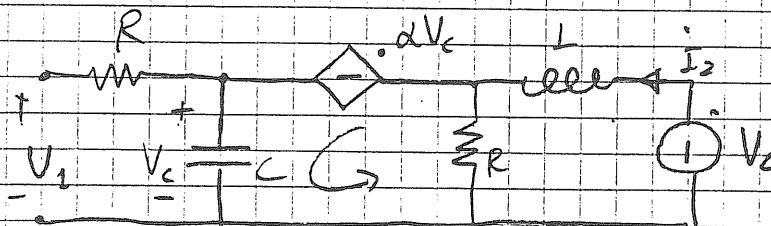
(11)

$$h_{11} = R + \frac{1}{j\omega C + \alpha}$$

$$h_{21} = - \frac{\alpha R}{(\alpha+j\omega C)(R+j\omega L)}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$



$$\dot{V}_c = - \alpha \dot{V}_c \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \dot{V}_c = 0$$

$$h_{12} = 0$$

$$h_{22} = \frac{1}{R+j\omega L}$$

De matrix wordt is

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{\alpha+j\omega C} & 0 \\ - \frac{\alpha R}{(\alpha+j\omega C)(R+j\omega L)} & \frac{1}{R+j\omega L} \end{bmatrix}$$

23/6/00 (12)

h_{11} è l'impedenza di ingresso con la
parte 2 cortocircuitata.

VERS.
PROVA

$$h_{11} = R + \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + j\omega C} = R + \frac{\alpha - j\omega C}{\alpha^2 + \omega^2 C^2} =$$

$$= \frac{R\alpha^2 + R\omega^2 C^2 + \alpha}{\alpha^2 + \omega^2 C^2} - \frac{j\omega C}{\alpha^2 + \omega^2 C^2}$$

Il valore richiesto di α è quello per il quale
risultato

$$R\alpha^2 + \alpha + R\omega^2 C^2 = 0$$

quindi

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4R^2\omega^2 C^2}}{2R}$$

