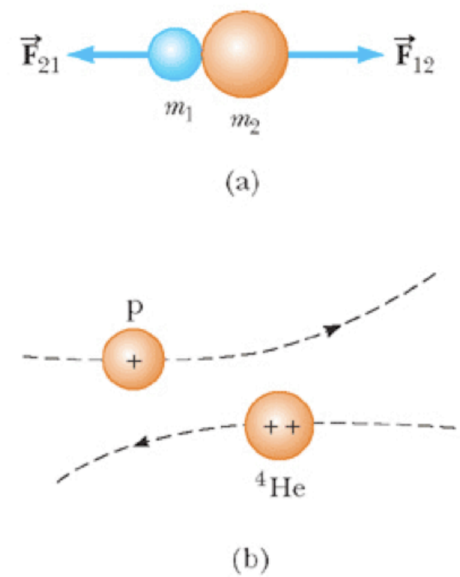
Collisioni

- In una *collisione* (o *urto*), due oggetti si avvicinano e interagiscono fortemente per un tempo *molto breve*, durante il quale qualunque forza esterna è *molto più piccola* delle forze di interazione, dette *impulsive*, fra gli oggetti. Non vale se anche le forze esterne sono impulsive!

- Di conseguenza le *sole* forze importanti agenti sul sistema dei due oggetti sono le *forze di interazione*, uguali e opposte, così che la quantità di moto totale del sistema *non cambia nella collisione*.

- Il tempo di collisione è di solito così breve che lo spostamento degli oggetti durante la collisione è trascurabile.



Collisioni in una dimensione

Due particelle di massa m_1 ed m_2 su di una retta. La particella 1 viaggia con velocità v_{1i} e urta la particella 2 che viaggia con velocità v_{2i} nella stessa direzione ($v_{1i} > v_{2i}$ perché la collisione avvenga).

Chiamiamo v_{1f} e v_{2f} le velocità finali dopo la collisione (tutte le velocità possono essere positive o negative). Per la conservazione della quantità di moto:

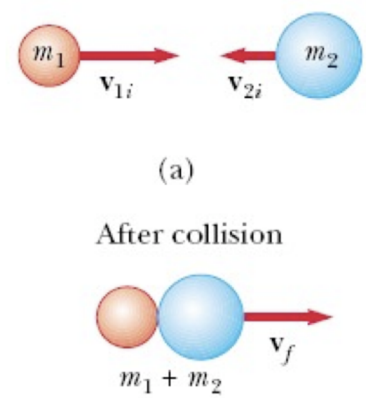
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

...ma questo non basta a stabilire le velocità finali date le velocità iniziali. Serve informazione addizionale dipendente dal *tipo* di collisione. I due casi per i quali la soluzione è semplice sono:

- Collisione *perfettamente anelastiche*
- Collisione *perfettamente elastiche*

Collisioni perfettamente anelastiche in una dimensione

Nelle collisioni *perfettamente anelastiche* le particelle rimangono attaccate dopo la collisione e proseguono come una sola particella di massa $m_1 + m_2$ e velocità $v_{1f} = v_{2f} = v_f$.
Per la conservazione della quantità di moto:



$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \Longrightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

In tre dimensioni:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

E' spesso più facile capire i processi di collisioni nel "sistema del centro di massa". Un sistema di riferimento solidale con il centro di massa delle due particelle si muove con velocità $\vec{V} = \vec{v}_f$. In tale sistema, $\vec{v}'_{1i} = \vec{v}_{1i} - \vec{V}$, $\vec{v}'_{2i} = \vec{v}_{2i} - \vec{V}$, ed è immediato verificare che $m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0$ e che dopo l'urto la particella risultante è ferma.

Collisioni anelastiche, bilancio energetico

Per semplicità consideriamo il caso in cui una particella di quantità di moto $\vec{p} = m_1\vec{v}_i$ incide su di una particella ferma. La quantità di moto totale prima dell'urto è $\vec{p}$ ed è conservata: $\vec{p} = m_1\vec{v}_i = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$.

- Energia cinetica iniziale: $K_i = \dfrac{m_1 v_i^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m_1}$

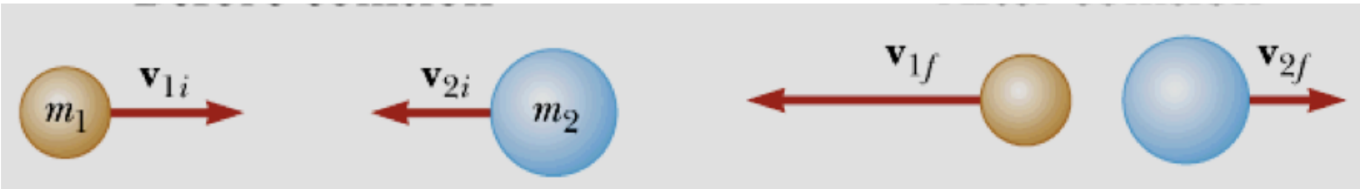
- Energia cinetica finale: $K_f = \dfrac{(m_1 + m_2)v_f^2}{2} = \dfrac{p^2}{2(m_1 + m_2)}$

da cui $K_f < K_i$ sempre. L'energia cinetica iniziale è in parte persa in energia termica, energia di deformazione, etc.

Nel sistema di riferimento del centro di massa, la cosa è ancora più evidente: $K_i > 0$ ma $K_f = 0$ in quanto la particella risultante è ferma. E' l'inverso, per così dire, del decadimento di una particella, in cui $K_i = 0$ e $K_f > 0$, a scapito dell'energia interna.

Collisioni elastiche

Consideriamo ora il caso di urti *elastici*, ovvero in cui l'energia cinetica è conservata.



Oltre alla conservazione della quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

vale la conservazione dell'energia (cinetica):

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Collisioni elastiche in una dimensione

Consideriamo il caso elastico unidimensionale. Se le masse e le velocità iniziali sono note, le velocità finali sono univocamente determinate:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad , \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Se $v_{2i} = 0$ (particella 1 in moto incidente su particella 2 ferma):

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad , \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Notare i due casi limite per $v_{2i} = 0$:

- particella incidente pesante ($m_1 >> m_2$): $v_{1f} \simeq v_{1i}$, $v_{2f} \simeq 2v_{1i}$
- particella incidente leggera ($m_1 << m_2$): $v_{1f} \simeq -v_{1i}$, $v_{2f} \simeq 0$

Collisioni in una dimensione, riassunto

- Collisioni *perfettamente anelastiche*: dopo l'urto le particelle restano attaccate. C'è perdita di energia cinetica.

- Collisioni (perfettamente) *elastiche*: le particelle rimbalzano l'una sull'altra, senza perdita di energia cinetica.

- Collisioni *anelastiche*: le particelle collidono con perdita di energia cinetica ma non restano attaccate.

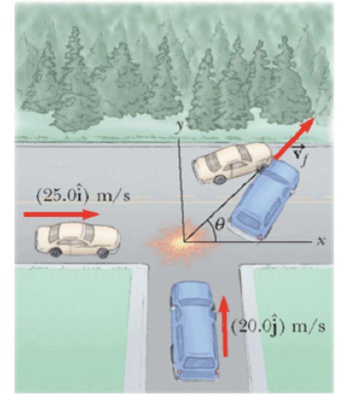
Quindi:

– La *quantità di moto* è *sempre* conservata in un urto fra particelle
(eccezione: presenza di forze esterne *impulsive*)

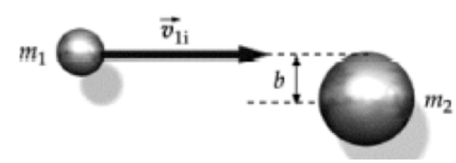
– L'*energia cinetica* è conservata solo negli urti *elastici*

Collisioni in tre dimensioni

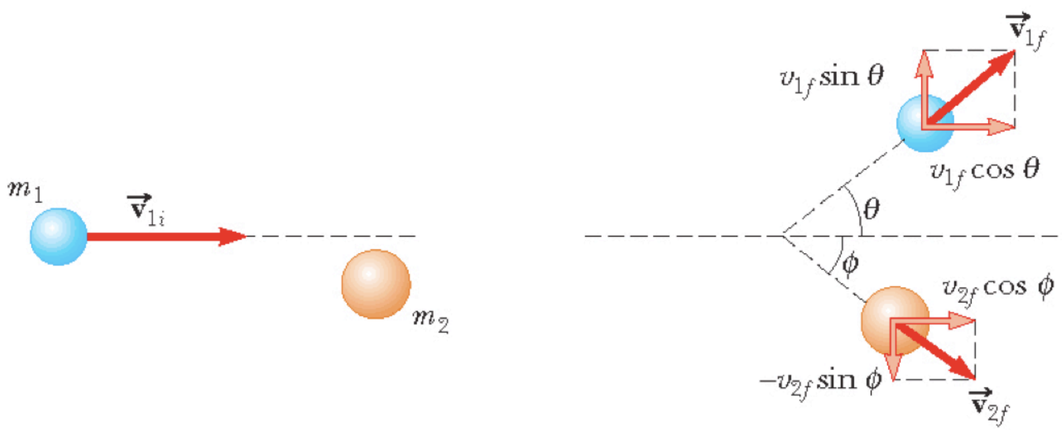
- Il caso perfettamente anelastico si tratta come in una dimensione: $(m_1 + m_2)\vec{v}_f = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$.
  La velocità dopo l'urto è univocamente determinata



- Nel caso elastico, la traiettoria dopo l'urto dipende dalla "geometria" dell'urto. Qui sotto, un esempio di urto "radente" di una particella in moto incidente su di una ferma.



La traiettoria finale dipenderà da b, *parametro d'urto*.



(a) Prima della collisione (b) Dopo la collisione

Collisioni in tre dimensioni (2)

La soluzione generale del problema diventa un po' complessa. Vediamo il caso speciale di particella incidente su una in quiete di massa uguale.

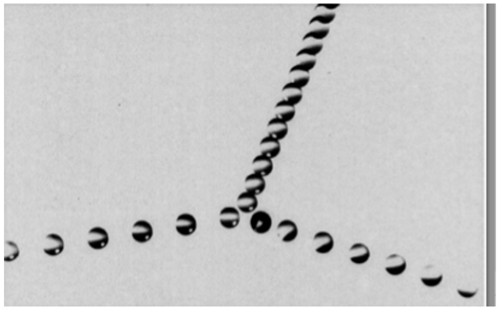
Usiamo la conservazione della quantità di moto e facciamone il quadrato:

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \Longrightarrow p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f}$$

Dalla conservazione dell'energia cinetica per $m_1 = m_2 = m$:

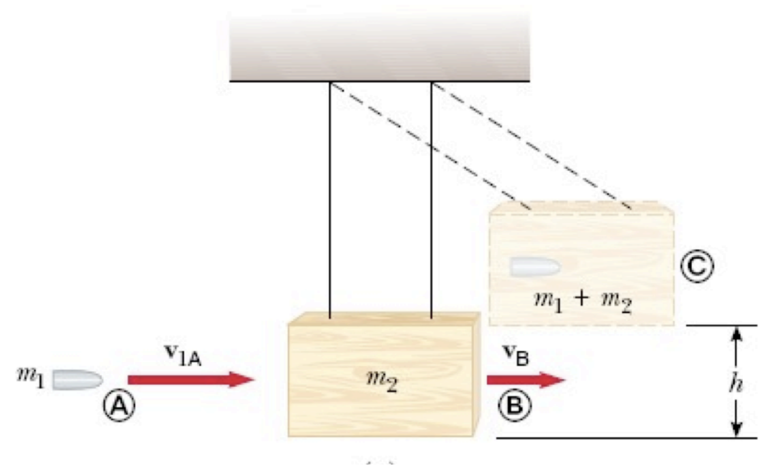
$$\frac{p_{1i}^2}{2m} = \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m} \Longrightarrow p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2$$

da cui $\boxed{\vec{p}_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0}$, ovvero le due particelle proseguono in direzioni ortogonali, a meno che $\vec{p}_{1f} = 0$.

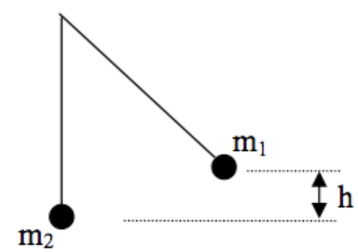


Urto anelastico: due problemi "classici"

Pendolo balistico: Il proiettile si conficca dentro al blocco, che di conseguenza si muove e sale fino ad una quota h. Qual è la velocità v del proiettile in entrata in funzione di h, assumendo di conoscere la massa del proiettile, m_1, e del blocco, m_2?



Due pendoli si trovano fermi nella situazione illustrata in figura. Il primo viene lasciato libero alla quota h e colpisce il secondo. Supponendo che l'urto sia completamente anelastico e trascurando tutti gli attriti e le masse dei fili, qual è l'altezza massima h' alla quale risalgono le due sfere attaccate?



Soluzione: pendolo balistico

La soluzione si fa in *due passi distinti*:

- Conservazione della quantità di moto per l'urto anelastico fra proiettile e blocco: vale $v_{1A} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_B$
- Conservazione dell'energia per il successivo moto del blocco con il proiettile: $\frac{m_1 + m_2}{2} v_B^2 = (m_1 + m_2) g h \to v_B = \sqrt{2gh}$

Infine: $v_{1A} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$.

Non è corretto usare la conservazione dell'energia meccanica fra lo stato iniziale (prima dell'urto: proiettile con velocità v, blocco in quiete) e lo stato finale (proiettile conficcato, blocco fermo a quota h)!

Riuscite in modo analogo a risolvere il secondo problema?

Energia potenziale gravitazionale di un oggetto

Nella soluzione dell'esercizio precedente si è trascurato il fatto che il pendolo balistico è un oggetto esteso. Qual è l'energia potenziale gravitazionale di un corpo esteso?

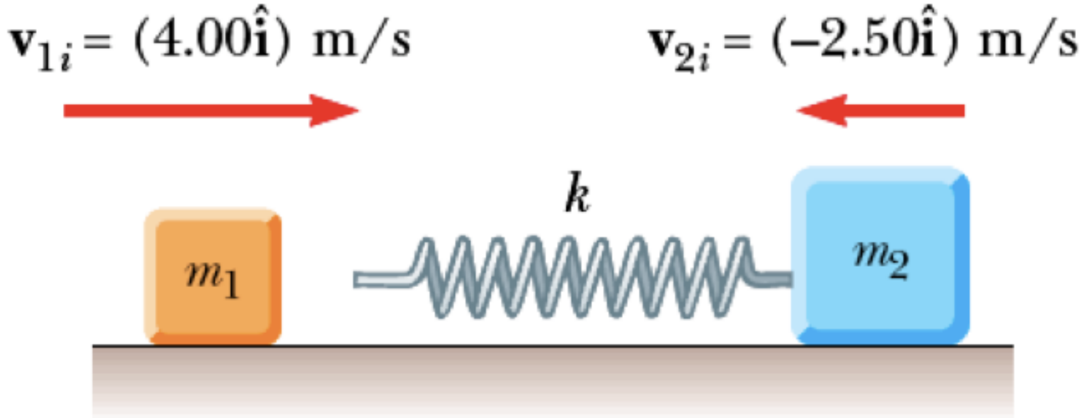
Dimostriamo che l'energia potenziale gravitazionale di un corpo è la stessa che se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa:

$$U = \sum_i m_i g h_i = g\left(\sum_i m_i h_i\right) = g\left(\sum_i m_i\right) h_{cm} = M g h_{cm}$$

dove $h_{cm} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i h_i$

Problema: una collisione veramente "elastica"

Il corpo 1 di massa $m_1 = 1.6$ kg viaggia a velocità $v_1 = 4$ m/s; per il corpo 2, $m_2 = 2.1$ kg e $v_2 = -2.5$ m/s. La costante della molla (ideale) è $k = 600$ N/m e non ci sono attriti.



- Qual è la velocità dei due blocchi dopo la collisione? (facile)
- Qual è la massima compressione della molla nell'urto? (meno ovvio)

Soluzione

- L'urto è elastico e avviene in una dimensione, per cui possiamo applicare le formule trovate in precedenza:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} = -3.34 \text{m/s}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} = 3.12 \text{m/s}$$

- La massima compressione si ha quando $v_1 = v_2 = v_{CM}$ (lo si capisce facilmente passando nel sistema di riferimento del CM). Quando ciò avviene, per la conservazione dell'energia (cinetica + elastica):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

con $v_{CM} = \dfrac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = 0.31$ m/s da cui $x = 6.4$ cm