Dini C^0

sabato 15 maggio 2021 22:19

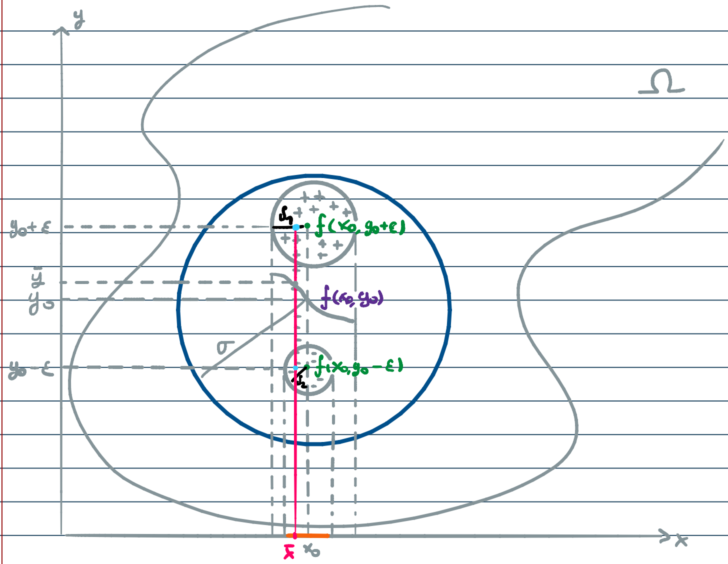
Dini C^0 $(f: \Omega \to \mathbb{R},\ (x_0, y_0) \in \mathring{\Omega})$

- $f(x_0, y_0) = 0$ ⟵ scelgo uno zero
- f continua in Ω
- $(x_0, y_0) \in \mathring{\Omega}$
- $y \to f(x, y)$ è strettamente crescente $\forall x : (x, y) \in \Omega$

allora
- $\exists \delta > 0,\ \varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$:
- $\varphi(x_0) = y_0$
- $f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- φ continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Il th. Dini è per la costruzione di zeri. Non ci dice se ci sono, ma come sono.

Scelgo uno zero, ovvero un punto $(x_0, y_0) \in \mathring{\Omega} : f(x_0, y_0) = 0$. Traccio gli assi e individuo x_0 e y_0.



poiché $(x_0, y_0) \in \mathring{\Omega} \to \exists B_\sigma((x_0, y_0)) \subseteq \Omega$

scelgo $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$ (dentro $B_\sigma((x_0, y_0))$), andando su trovo roba > 0, giù roba < 0 (inclusi i punti stessi), grazie all'IP4:

- $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$ (e individuo $y_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon$)
- $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$

per il th. di permanenza del segno e IP2, posso costruire 2 sfere in cui il segno rimane costante:

$\exists \delta_1 : |x - x_0| < \delta_1,\quad f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$

$\exists \delta_2 : |x - x_0| < \delta_2,\quad f(x, y_0 - \varepsilon) < 0$

l'importante è che $B_{\delta_1}(\dots)$ e $B_{\delta_2}(\dots)$ non tocchino $f(x_0, y_0)$ (lo zero), altrimenti non è più vero

proietto le sfere e trovo 2 intervalli, piglio il più piccolo, che sarà il δ della tesi

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

prendo un $\bar{x} : |x_0 - \bar{x}| < \delta$ e traccio la verticale, sono sicuro che con questo δ interseco entrambe le sfere, prendendo i punti che stanno sulla stessa quota e ottengo 2 punti (uno in $y_0 + \varepsilon$ l'altro in $y_0 - \varepsilon$) tali per cui la f assume valori discordi:

$y \to f(x, y)$ è definita su $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ perché essendo $B_\sigma((x_0, y_0))$ convessa, contiene anche il segmento di estremi $(x, y_0 + \varepsilon)$ e $(x, y_0 - \varepsilon)$, ed è continua perché f lo è TS4

per il th. zeri in $\mathbb{R}$ $y \to f(x, y)$ ha un solo zero $\bar{y}$, dato che è strettamente monotona, $\forall$ retta tracciata da uno $\bar{x}$

si pone allora $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$ = unico zero che sta sulla retta verticale basata su quell'x, di conseguenza:

$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0 \to f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ TS3

si ripete lo stesso passaggio $\forall \bar{x} : |\bar{x} - x_0| < \delta$ e ottengo un grafico ove ogni punto $\in$ ad una retta verticale

sappiamo inoltre che $f(x_0, y_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = 0 \to \varphi(x_0) = y_0$ TS2

TS1

in conclusione: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \to |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ e quindi $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$ purché $|x - x_0| < \delta$

$\blacksquare$