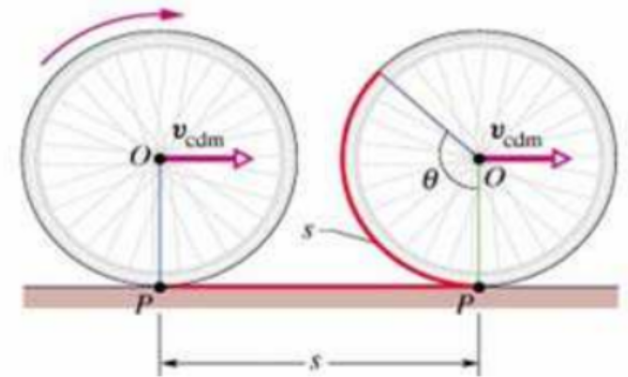


Moto di puro rotolamento

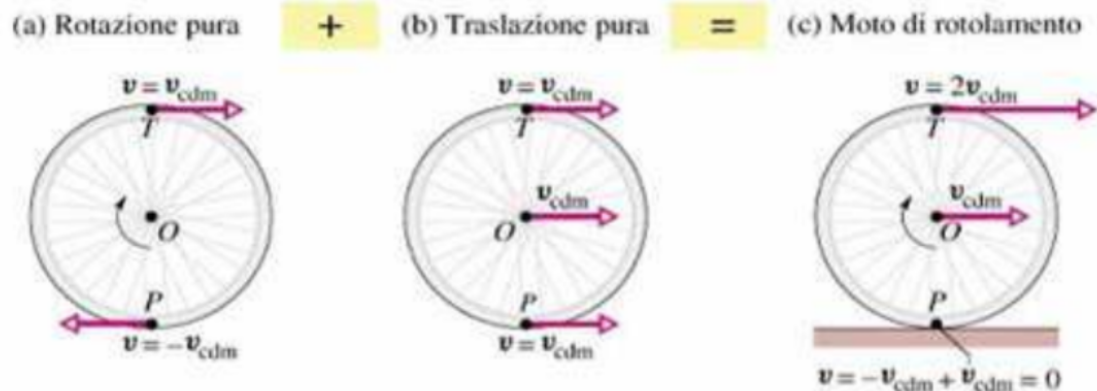
Si parla di *moto di puro rotolamento* quando un corpo rotola senza strisciare, ovvero la velocità del punto di contatto (P in figura) lungo il piano di contatto è *nulla*.



Le *condizioni di puro rotolamento* sono (R = raggio della ruota):

$$s = R\theta; \quad v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega; \quad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Il moto di puro rotolamento è descrivibile come un moto di traslazione

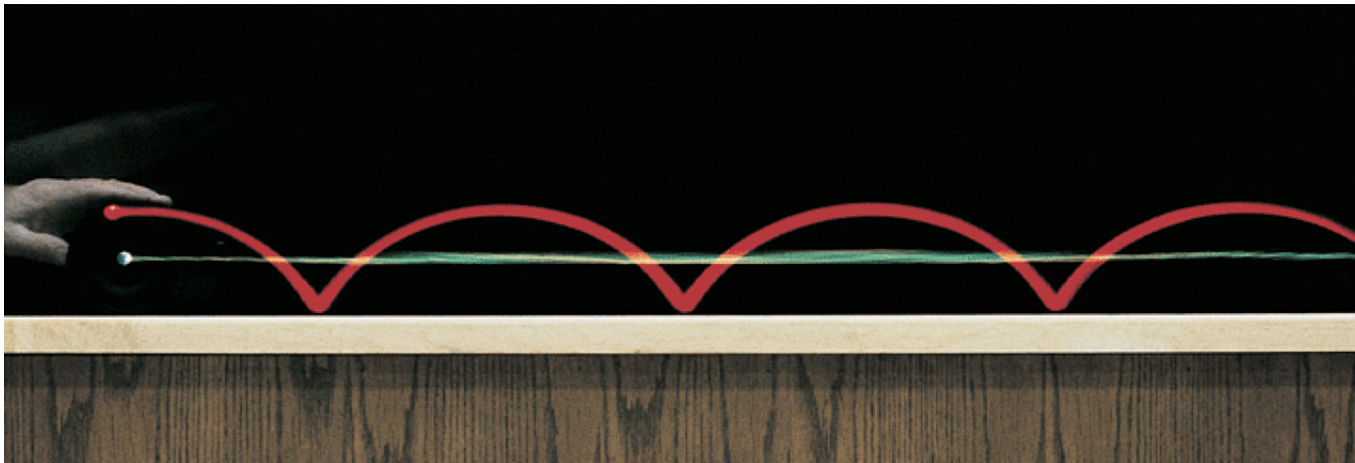


del centro di massa con velocità v_{cm} , più un moto rotatorio attorno al centro di massa con velocità angolare $\omega = v_{cm}/R$.

Moto di puro rotolamento II

E' immediato scrivere la legge oraria di un punto P sulla superficie esterna della ruota: assumendo $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 2R$,

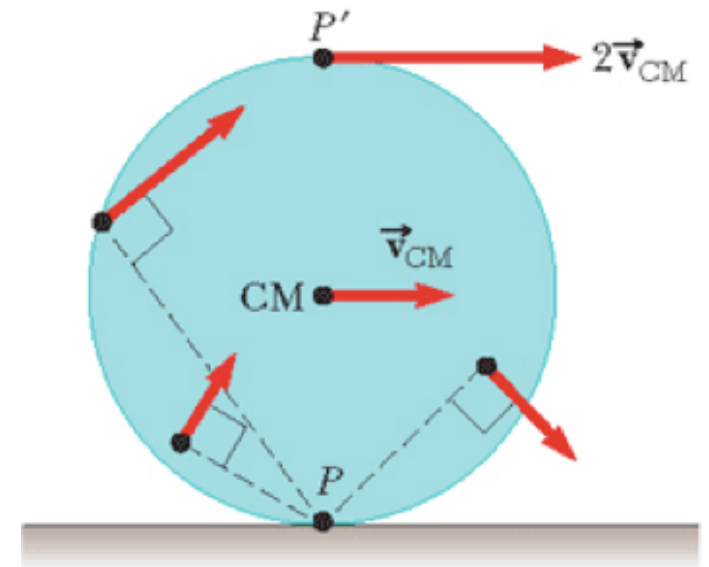
$$\begin{cases} x(t) &= R \sin(\omega t) + \omega R t \\ y(t) &= R \cos(\omega t) + R \end{cases}$$



In verde la traiettoria del centro di massa (che è anche il centro della ruota), in rosso la traiettoria del punto P, nota come *cicloide*

Moto di istantanea rotazione

Il moto di puro rotolamento può essere descritto alternativamente come un moto di rotazione attorno ad un asse *istantaneo* passante per il punto P, di velocità angolare ω . Il centro di massa ha velocità $v_{cm} = \omega R$, il punto P' ha velocità $2\omega R$, il punto P ha velocità nulla.



L'energia cinetica di un corpo che trasla e ruota è

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\omega^2 \equiv \frac{1}{2}I'\omega^2, \quad I' = MR^2 + I$$

che coincide con l'energia cinetica, che è solo rotazionale, di un moto di istantanea rotazione: I' è il momento d'inerzia *attorno all'asse di istantanea rotazione* (teorema degli assi paralleli)

Forze e lavoro nel moto di puro rotolamento

Il moto di puro rotolamento richiede in generale la presenza di *attrito* nel punto di contatto. Tuttavia l'attrito *non fa lavoro*: $dW = \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = 0$ perché il punto P di contatto è *fermo*

Per convincersene, basta calcolare la velocità dall'equazione della cicloide

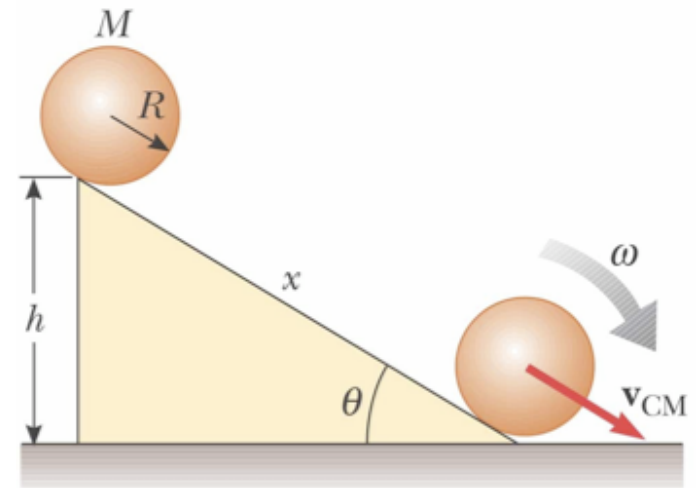
$$\begin{cases} v_x(t) &= R\omega \cos(\omega t) + \omega R \\ v_y(t) &= -R\omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

per $t = \pi/\omega$, ovvero quando $y(t) = 0$

Per lo stesso motivo, l'attrito è solo *statico*. Solo se il corpo oltre a ruotare *striscia* è presente attrito dinamico e dissipazione di energia.

Esempio: corpo che rotola su un piano inclinato

Consideriamo una sfera (o un cilindro) che rotola giù per un piano inclinato. Avremo $v = \omega R$, per la condizione di puro rotolamento. Possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica per determinare la velocità finale v .



Energia cinetica: $K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{v^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right)$

(I = momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa)

Energia potenziale: $U = Mgy$, dove y è la quota del centro di massa.

Conservazione dell'energia ($v = 0$ all'istante iniziale):

$$E_i = Mg(h + R) = \frac{v^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) + MgR = E_f$$

Energia meccanica di un corpo che rotola

Si trova infine
$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/R^2}}.$$

Per una sfera: $I = \frac{2}{5}MR^2$, $v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$

Per un cilindro: $I = \frac{MR^2}{2}$, $v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$

Nota: tutto ciò è valido nell'ipotesi che il corpo rotoli senza strisciare

Nota: $v < \sqrt{2gh}$, velocità finale senza rotolamento, per qualunque I .
Perché?

Dinamica di un corpo che rotola

Risolviamo ora lo stesso problema con forze e momenti.

- Lungo il piano: $Ma = Mg \sin \theta - F_a$, dove F_a è la forza di attrito
- Ortogonale al piano: $N = Mg \cos \theta$, dove N è la reazione vincolare
- Rispetto al centro della sfera: $I\alpha = \tau = RF_a$, dove $\alpha = a/R$.

Sostituendo dall'ultima equazione $F_a = Ia/R^2$ nella prima, si ottiene $(M + I/R^2)a = Mg \sin \theta$ da cui:

$$a = \frac{Mg \sin \theta}{M + I/R^2}, \quad \text{per una sfera: } a = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

ovvero un moto uniformemente accelerato, che può essere facilmente risolto e dà lo stesso risultato del calcolo precedente.

Forze in un corpo che rotola

Notare che

- l'attrito entra nelle equazioni del moto anche se non fa lavoro
- la forza di attrito vale $F_a = \frac{IF}{MR^2 + I}$, dove $F = Mg \sin \theta$ è forza che spinge il corpo, ed è opposta a questa
- deve valere la condizione $F_a \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos \theta$ o altrimenti il corpo inizia a scivolare!

Risolviamo ora il problema come *moto di rotazione attorno ad un asse passante per il punto di contatto istantaneo*. L'equazione del moto è

$$I' \alpha = \tau = RMg \sin \theta \quad \text{dove} \quad I' = I + MR^2$$

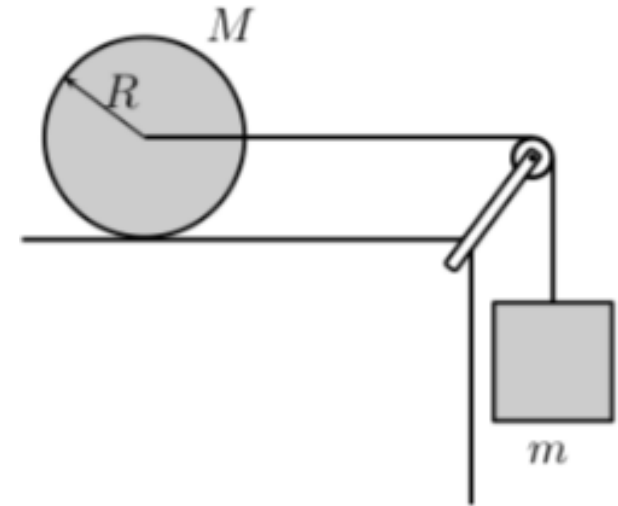
(teorema degli assi paralleli) da cui si ritrova il risultato precedente. Notare come la soluzione sia più semplice e l'attrito non compaia più.

Esercizio: Condizione di puro rotolamento

Un corpo di massa m trascina il centro di massa di un cilindro di massa M e raggio R . I coefficienti di attrito statico e dinamico sono μ_s e μ_d . Qual è il massimo m per cui il moto del cilindro è di puro rotolamento?

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} ma &= mg - T \\ MA &= T - F_a \\ I\alpha &= RF_a \quad (I = \frac{MR^2}{2}) \end{cases}$$



condizioni: $a = R\alpha$, $A = a$, $F_a \leq \mu_s Mg$

Sommando prima e seconda equazione: $(m + M)a = mg - F_a$

Dalla terza equazione: $\frac{M}{2}a = F_a$ (da cui $\alpha = \frac{F_a}{I}$)

Combinando con la precedente: $(m + \frac{3M}{2})a = mg$.

Condizione di rotolamento: $\frac{M}{2}a = F_a \leq \mu_s Mg$, da cui $\frac{m}{2m+3M} \leq \mu_s$

Notare che è sempre vera se $\mu_s \geq \frac{1}{2}$

Rotolamento con strisciamento

Cosa succede nel caso precedente se la condizione di puro rotolamento non è rispettata? Le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} ma &= mg - T \\ MA &= T - F_a \quad (F_a = \mu_d Mg) \\ I\alpha &= RF_a \quad (I = \frac{MR^2}{2}) \end{cases}$$

dove $A = a$ e non c'è relazione fra $R\alpha$ e a . Sommando prima e seconda equazione si determina il moto del centro di massa del cilindro:

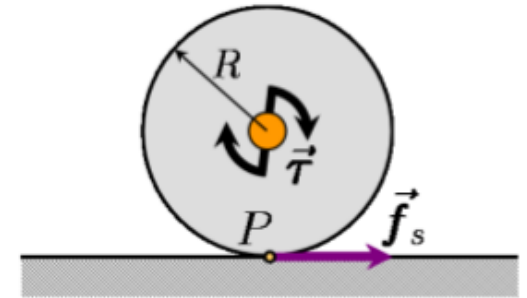
$$(m + M)a = mg - \mu_d Mg \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{mg - \mu_d Mg}{m + M}$$

La terza equazione determina il moto rotatorio del cilindro:

$$\alpha = \frac{\mu_d Mg}{I}$$

Esempio: Moto causato da momento torcente

Nei casi precedenti è una forza esterna applicata al corpo che causa il rotolamento. In altri casi (esempio: ruota di automobile) è un *momento torcente* che causa il moto di rotazione



Dalle equazioni:

$$\begin{cases} Ma = F_a \\ I\alpha = \tau - RF_a \end{cases}$$

con la condizione $a = \alpha R$ di puro rotolamento otteniamo

$$a = \frac{R\tau}{I + MR^2}, \quad F_a = \frac{MR\tau}{I + MR^2}.$$

Da notare che è la forza di attrito che spinge la ruota in avanti!

Deve ovviamente valere la condizione $F_a \leq \mu_s N$, dove N è la reazione vincolare agente sulla ruota ($N = Mg$ in questo caso)

Moto causato da momento torcente e da forza, confronto

A parità di accelerazione, la forza di attrito è maggiore se il corpo è spinto da una forza esterna o da un momento torcente?

per rispondere, servono i risultati ottenuti per il corpo che rotola da un piano inclinato:

$$a = \frac{FR^2}{I+MR^2}, \quad F_a = \frac{IF}{I+MR^2}, \quad \text{dove } F \text{ è la forza che spinge il corpo.}$$