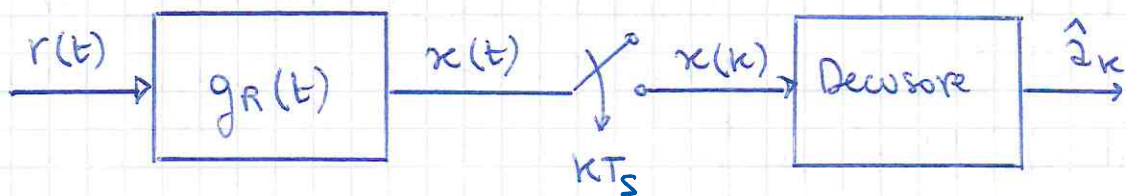


## Calcolo della SER per un sistema PAM M-ario

Consideriamo un sistema PAM con alfabeto M-ario

$$\mathcal{A} = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

Vogliamo calcolare la probabilità media di errore sul simbolo stesso assumendo che i simboli sono equi-probabili e che non sia presente ISI in ingresso al ricevitore. Lo schema del ricevitore è mostrato nella figura seguente.



Supponiamo che i filtri di trasmissione e ricezione sono entrambi a radice di coseno rialzato.

Il segnale ricevuto è espresso da

$$r(t) = s_R(t) + w(t)$$

dove

$$s_R(t) = A \sum_i a_i g_T(t - iT_s)$$

mentre  $w(t)$  è rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza  $S_w(f) = N_0/2$ . Il coefficiente  $A$  tiene conto dell'attenuazione introdotta dal canale trasmissivo. Poiché vediamo come la SER dipende dall'energia media per simbolo ricevuto  $E_s$ , conviene trovare il legame tra  $E_s$  e l'attenuazione  $A$ .

La densità spettrale di potenza del segnale utile  $s_R(t)$  è

$$S(f) = \frac{A^2}{T_s} E\{a_i^2\} |G_T(f)|^2$$

Dal momento è tenuto conto del fatto che, per simboli indipendenti ed equiprobabili, risulta

$$J_2(f) = E\{a_i^2\} = \frac{M^2 - 1}{3}$$

L'energia  $E_s$  per simbolo ricevuto è quindi

$$E_s = T_s \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = \frac{A^2}{3} (M^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df$$

Poiché  $G_T(f)$  è un impulso a radice di coseno rialzato, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f) df = g_{RCR}(0) = 1$$

e si trova quindi

$$E_s = \frac{A^2}{3} (M^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{3E_s}{M^2 - 1}}$$

Dopo il filtro di matched abbiamo il segnale

$$x(t) = A \sum_i a_i g(t - iT_s) + m(t)$$

dove  $g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$  è un impulso a coseno rialzato mentre  $m(t)$  è un processo Gaussiano, a media nulla e potenza

$$\sigma^2 = E\{m^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2 df$$

Tenendo conto che  $G_R(f)$  è un impulso a radice di coseno rialzato, si ha

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f) df = \frac{N_0}{2}$$

Il campione in uscita dal filtro di matched è allora

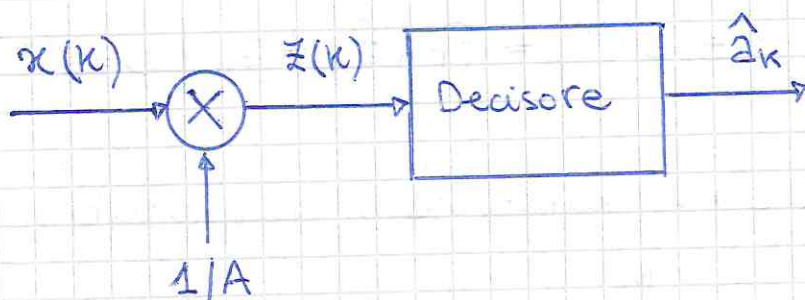


$$x(k) = A z_k + m_k$$

in cui  $m_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  è una variabile aleatoria Gaussiana. Come si vede, il campione  $x(k)$  è una versione "scalata" del simbolo trasmesso  $z_k$  immerso in rumore Gaussiano. Se il campione  $x(k)$  fosse inviato direttamente in ingresso al decisore, le soglie di decisione dovrebbero essere opportunamente dimensionate tenendo conto dell'attenuazione  $A$  del canale, che può variare in modo imprevedibile a seconda delle condizioni del mezzo trasmissivo. Le soglie dovrebbero quindi essere ADATTATIVE, ovvero dovrebbero essere di volta in volta variate in accordo alle condizioni del canale. Poiché ciò non è pratico, si preferisce scalare opportunamente il segnale per il fattore  $A$ , in modo da rendere fisse le soglie del decisore. Pertanto, in ingresso al decisore viene inviato il campione

$$z(k) = \frac{1}{A} x(k)$$

secondo punto riportato nella figura seguente



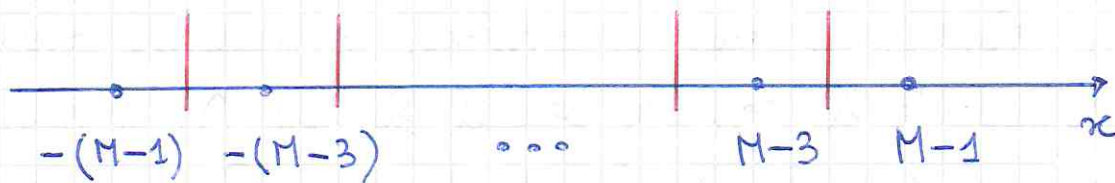
Il campione  $z(k)$  è espresso da

$$z(k) = a_k + \eta_k$$

dove  $\eta_k$  è una variabile aleatoria Gaussiana, a media nulla, e con varianza

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{\sigma^2}{A^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{M^2 - 1}{3E_s} = \frac{M^2 - 1}{6(E_s/N_0)}$$

Il decodificatore suddivide l'asse  $x$  in zone di decodifica, come mostrato nella figura seguente, con le soglie poste esattamente a metà tra due simboli adiacenti (strake = già MV)



Usando il teorema della probabilità totale, si può esprimere la SER come

$$SER = \sum_{m=1}^M P(e|a^{(m)}) P(a_k = a^{(m)})$$

dove

$$P(e|a^{(m)}) = \Pr\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = a^{(m)}\}$$

Tenendo conto che i simboli sono equiprobabili, si ha

$$SER = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P(e|a^{(m)})$$



per cui restano ora da calcolare le  $M$  probabilità condizionate  $P(e|a^{(m)})$  per  $m = 1, 2, \dots, M$ . L'analisi dell'alfabeto  $\mathcal{A}$  impiegato e delle zone di decisione poste sull'asse  $x$ , induce che i punti "interni" dell'alfabeto, ovvero i simboli  $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-3)\}$ , sono caratterizzati da zone di decisione di ampiezza 2 centrate sul corrispondente simbolo, per cui essi avranno stesse probabilità di essere condizionate. Discorso analogo vale per i due simboli laterali  $\pm (M-1)$  di  $\mathcal{A}$ , per i quali le zone di decisione sono due semirette  $(-\infty, -M+2)$  e  $(M-2, +\infty)$ , e avranno quindi stesse probabilità di essere condizionate. Riassumendo quanto finora detto, possiamo scrivere

$$P(e|a^{(m)}) = P(e|a_k=1) \quad \text{se } a^{(m)} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-3)\}$$

$$P(e|a_k=-M+1) = P(e|a_k=M-1)$$

per cui l'espressione delle probabilità di essere medie diventa

$$SER = \frac{M-2}{M} P(e|a_k=1) + \frac{2}{M} P(e|a_k=M-1)$$

Calcoliamo ora le due probabilità di essere condizionate.

## 2) Calcolo di $P(e|a_k=1)$

Condizionatamente all'aver fissato il simbolo  $a_k=1$ , il campione ricevuto è espresso da

$$Z(k) = 1 + \eta_k$$

Perché la zona di deviazione relativa al numero  $z_k = 1$  è  
l'intervallo  $[0, 2]$

si ottiene infine

$$P(e|z_k=1) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

### 3) Calcolo di $P(e|z_k = M-1)$

Condizionatamente all'aver trasmesso il simbolo  $z_k = M-1$ , il campione ricevuto è espresso da

$$z(k) = M-1 + \eta_k$$

Poiché la zona di decisione relativa a tale simbolo è la semi-retta  $(M-2, +\infty)$

$$P(e|z_k = M-1) = \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma_\eta^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/\sigma_\eta}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti, si trova



$$SER = \frac{M-2}{M} \cdot 2Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) + \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right)$$

e, tenendo conto dell'espressione di  $\sigma_m$ , si ha

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(E_s/N_0)}{M^2-1}}\right)$$

In termini di  $E_d/N_0$ , la SER di un sistema PAM è allora

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(E_d/N_0) \log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

Un particolare, per un PAM binario si ha ( $M=2$ )

$$SER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_d}{N_0}}\right) \quad \text{PAM binario}$$

### Efficienza spettrale ed efficienza energetica

Si è visto come l'impulso di trasmissione  $g_T(t)$  impregato in un sistema PAM sia tipicamente a ridosso di coseno rialzato. Nel caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso è allora

$$S_s(f) = \frac{M^2-1}{3T_s} |G_T(f)|^2 = \frac{M^2-1}{3T_s} G_{RCR}(f)$$

per cui la banda impiegata dal segnale PAM è

$$B_T = \frac{1+\alpha}{2T_s}$$

e dipende ora dal fattore di roll-off  $\alpha$  che dalla frequenza di segnalazione  $f_s = 1/T_s$

L'efficienza spettrale del sistema PAM è definita da

$$\eta_{sp} = \frac{R_d}{B_T} \quad (\text{bit/s per Hz})$$

dove

$$R_d = \frac{\log_2 M}{T_s}$$

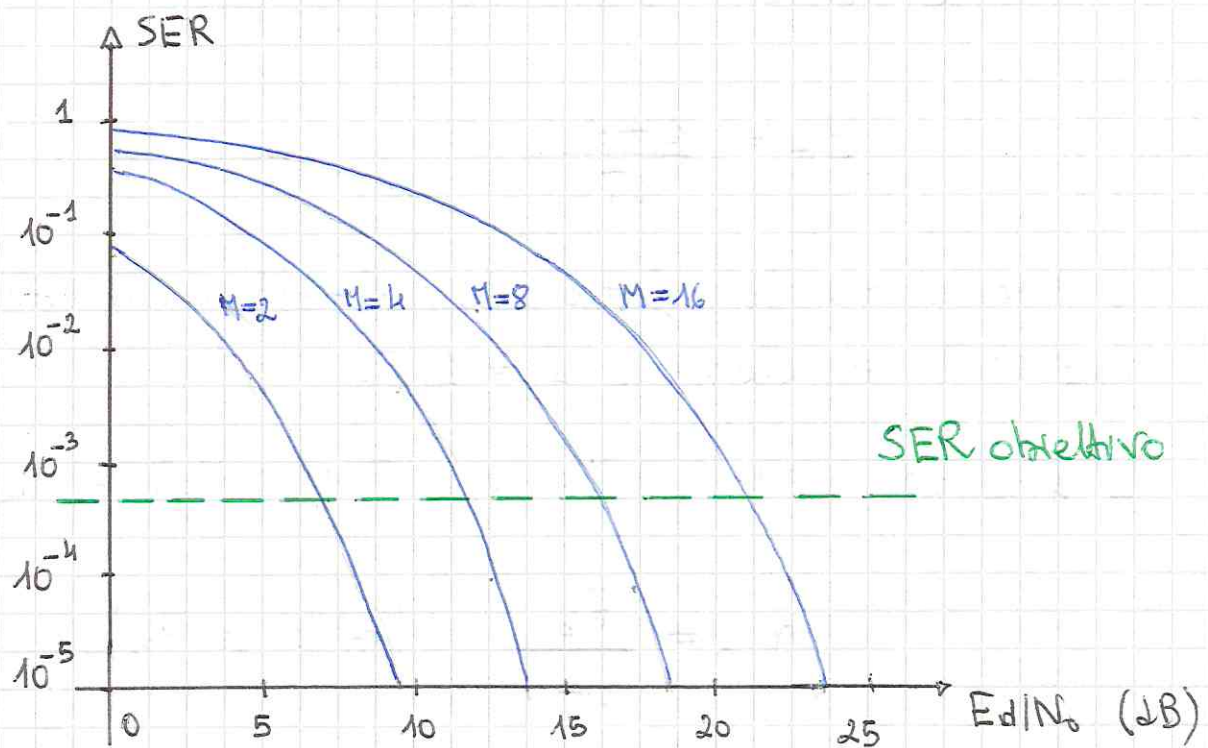
è il bit-rate. Si ha pertanto

$$\eta_{sp} = \frac{2 \log_2 M}{1+\alpha}$$

Questa espressione indica come l'efficienza spettrale del sistema aumenti al crescere della cardinalità  $M$  dell'alfabeto impiegato.

Per valutare l'efficienza energetica del sistema, occorre analizzare le curve di SER al variare del rapporto  $E_d/N_0$ . Tali curve sono mostrate nelle figure seguenti. La SER è espressa in scala logaritmica, ed il rapporto  $E_d/N_0$  è espresso in dB.





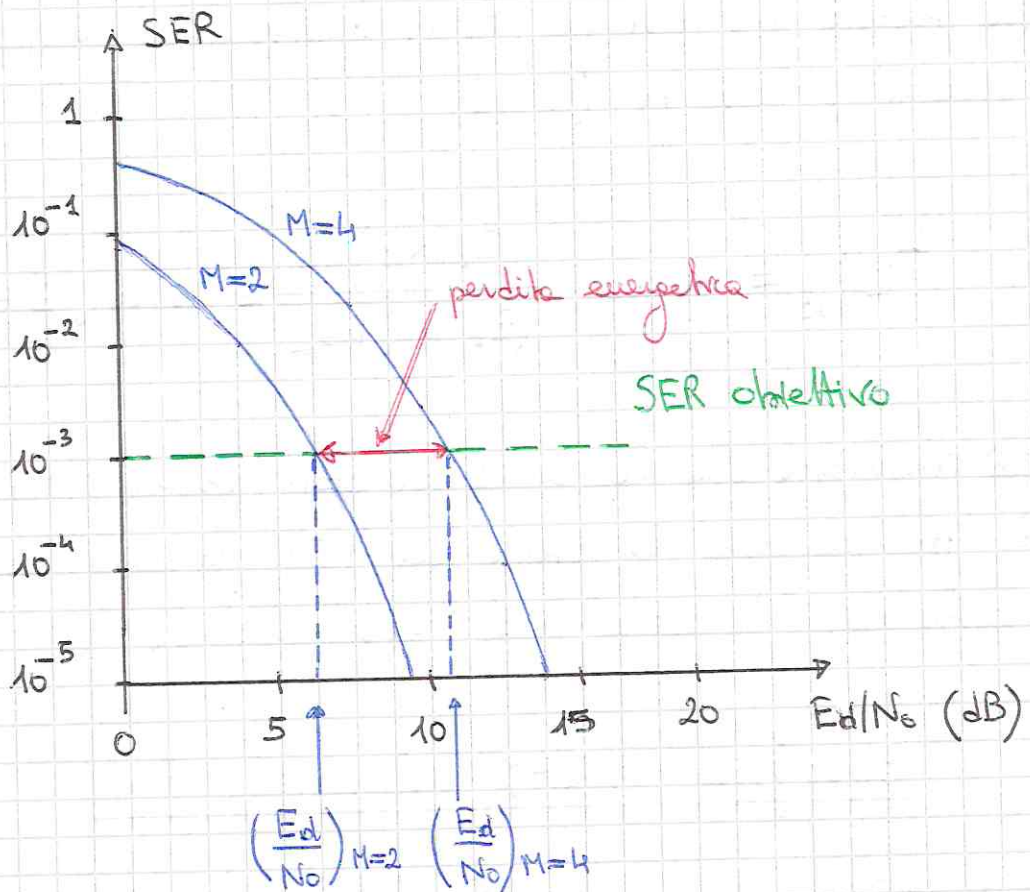
Come si vede, fissata una certa probabilità di errore obiettivo stabilita in base alla particolare applicazione (forma, trasmissione dati simboli), il rapporto  $E_d/N_0$  richiesto per raggiungere la SER obiettivo cresce al crescere della cardinalità  $M$  dell'alfabeto impiegato. Questo riduce come l'efficienza energetica del sistema diminuisca al crescere di  $M$ .

Possiamo quindi concludere che la scelta dell'alfabeto  $A$  è pilotata da due esigenze contrastanti: da un lato sarebbe bene scegliere una cardinalità  $M$  elevata per aumentare l'efficienza spettrale, dall'altro lato la scelta di un valore  $M$  elevato pregiudica l'efficienza energetica del sistema.

Si definisce "perdita energetica" di un sistema di comunica-



cazione necessaria A rispetto ad un sistema B l'aumento (in dB) del rapporto  $E_d/N_0$  necessario al sistema A per raggiungere la stessa SER del sistema B. Un figure seguente è mostrata graficamente la perdita del sistema PAM quaternario rispetto al sistema PAM binario.



Per calcolare la perdita in modo analitico, basta eguagliare l'espressione della SER del sistema PAM nei casi  $M=2$  e  $M=4$ , ottenendo

$$\frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{4}{5} \left( \frac{E_d}{N_0} \right)_{M=4}} \right) = Q \left( \sqrt{2 \left( \frac{E_d}{N_0} \right)_{M=2}} \right)$$

Nell'equazione tra due funzioni  $Q$  si tende a trascurare eventuali coefficienti moltiplicativi e si

uguagliando pertanto gli argomenti delle due funzioni Q.  
Così facendo, si ottiene

$$\frac{4}{5} \left( \frac{E_d}{N_0} \right)_{M=4} = 2 \left( \frac{E_d}{N_0} \right)_{M=2}$$

La perdita del sistema PAM quaternario rispetto al PAM  
binario è quindi (in dB)

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \frac{(E_d/N_0)_{M=4}}{(E_d/N_0)_{M=2}} = 10 \log_{10} \frac{5}{2} \approx 4 \text{ dB}$$

Ciò significa che la curva di SER per il PAM quaternario  
è praticamente la stessa del PAM binario, salvo una  
traslazione di circa 4 dB verso destra.