ELETTROTECNICA
Ingegneria Industriale

– SISTEMI TRIFASE –

Stefano Pastore

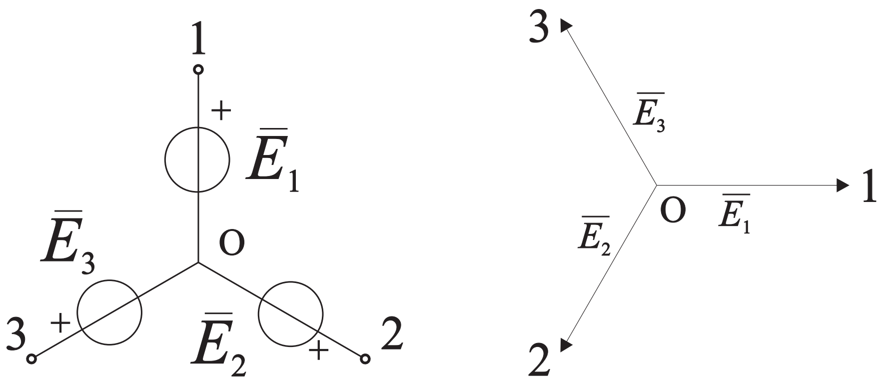
Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Corso di Elettrotecnica (043IN)

a.a. 2013-14

Generatore trifase

- Un generatore trifase equilibrato è composto da 3 generatori monofase collegati a stella o a triangolo, aventi la stessa ampiezza e sfasati tra loro di 2π/3 rad.



- Le tensioni **E** sono chiamate stellate o di fase, le **V** concatenate o di linea
- La relazione tra i fasori di una terna diretta o destrorsa (verso orario di rotazione) sono:

$$\begin{cases} \overline{E}_1 = E_1 \\ \overline{E}_2 = \overline{E}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \overline{E}_3 = \overline{E}_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \overline{E}_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi} = \overline{E}_1 e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Generatore trifase (2)

- Una terna inversa o sinistrorsa ruota in senso anti-orario
- Noi faremo riferimento sempre a terne destrorse
- Per distinguere le due terne in una presa trifase reale, si prende un morsetto a caso come riferimento di fase (morsetto 1) e si numerano gli altri in modo che lo sfasamento sia di volta in volta di $-2\pi/3$
- In pratica si prendono 3 fili a caso, si numerano e si verifica il verso di rotazione. Se è sbagliato, basta invertire tra loro 2 fili qualsiasi

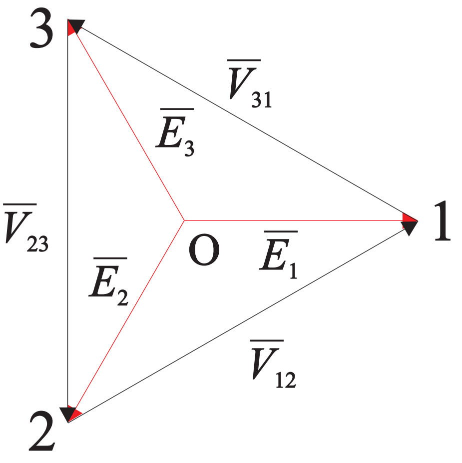
Tensioni concatenate

- La tensioni concatenate sono prese ai morsetti per cui

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = \overline{E}_1 - \overline{E}_2 \\ \overline{V}_{23} = \overline{E}_2 - \overline{E}_3 \\ \overline{V}_{31} = \overline{E}_3 - \overline{E}_1 \end{cases}$$

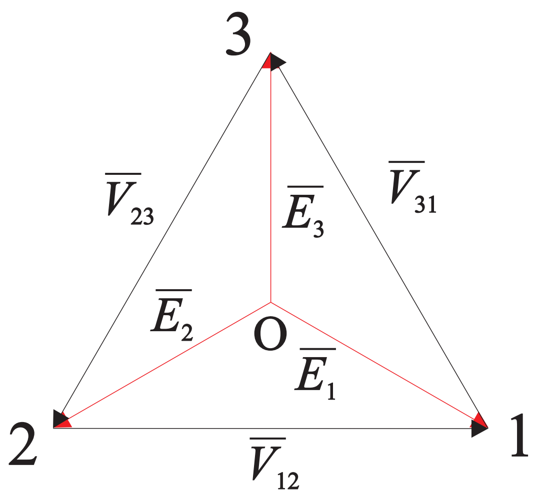
- La relazione diretta tra le due terne è (**E**$_1$ riferimento di fase)

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = \sqrt{3}\,E_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \overline{V}_{23} = \sqrt{3}\,\overline{E}_2 e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,E_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \overline{V}_{12} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \overline{V}_{31} = \sqrt{3}\,\overline{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,E_1 e^{j\frac{5}{6}\pi} = \overline{V}_{23} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$



Riferimento di fase

- A seconda dei casi, prenderemo come riferimento di fase o la tensione di fase $\mathbf{E}_1$, o la tensione concatenata $\mathbf{V}_{12}$. In questo secondo caso il triangolo delle alimentazioni risulta ruotato “rigidamente” di $\pi/6$ rad



Carichi trifase

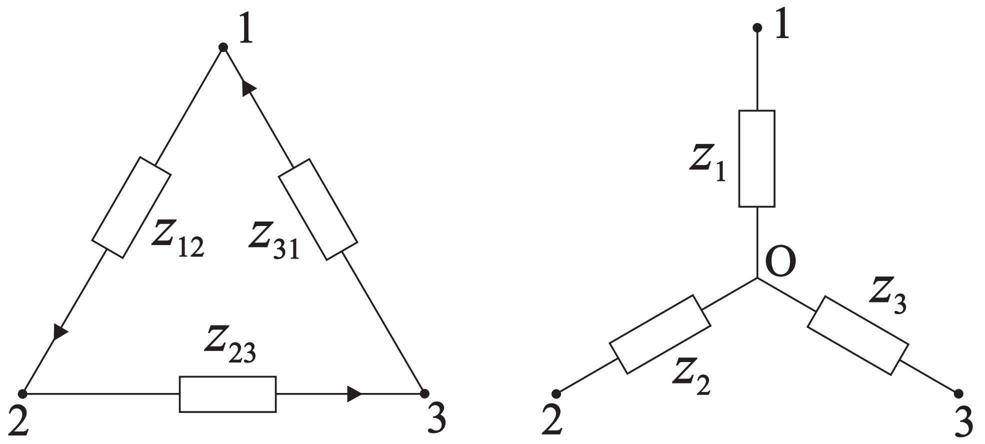
- Un carico trifase (in un sistema senza neutro) ha tre morsetti

- Può essere rappresentato con una terna di resistenze connesse a “stella” o a “triangolo”

- Per ogni carico trifase, si può trovare una rappresentazione a stella e una a triangolo “equivalenti” tra loro (dal punto di vista del circuito esterno), nel senso che le tensioni e le correnti del circuito esterno non cambiano

Trasformazioni triangolo-stella

- Tre resistenze a triangolo possono essere "trasformate" in tre resistenze a stella, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



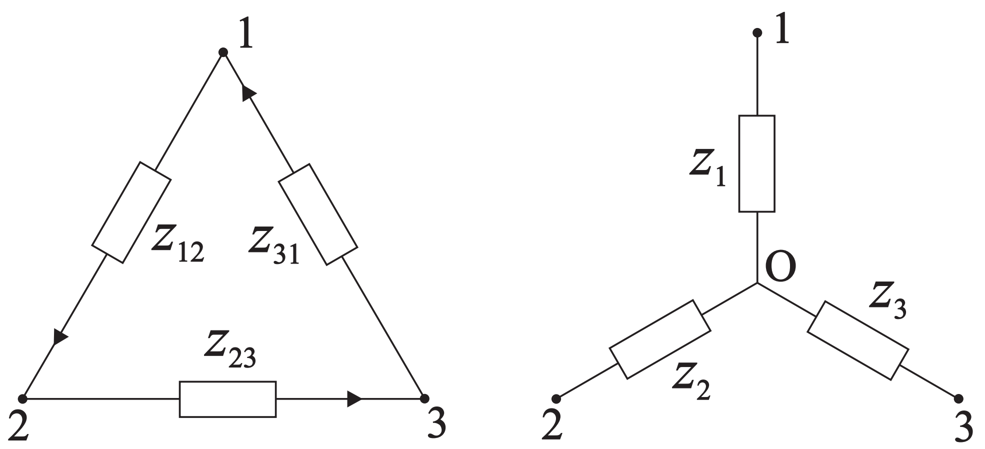
$$z_1 = \frac{z_{12} z_{13}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \; y_1 = y_{12} + y_{13} + \frac{y_{12} y_{13}}{y_{23}}$$

$$z_2 = \frac{z_{12} z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \; y_2 = y_{12} + y_{23} + \frac{y_{12} y_{23}}{y_{13}}$$

$$z_3 = \frac{z_{13} z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \; y_3 = y_{13} + y_{23} + \frac{y_{13} y_{23}}{y_{12}}$$

Trasformazioni stella-triangolo

- Tre resistenze a stella possono essere "trasformate" in tre resistenze a triangolo, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



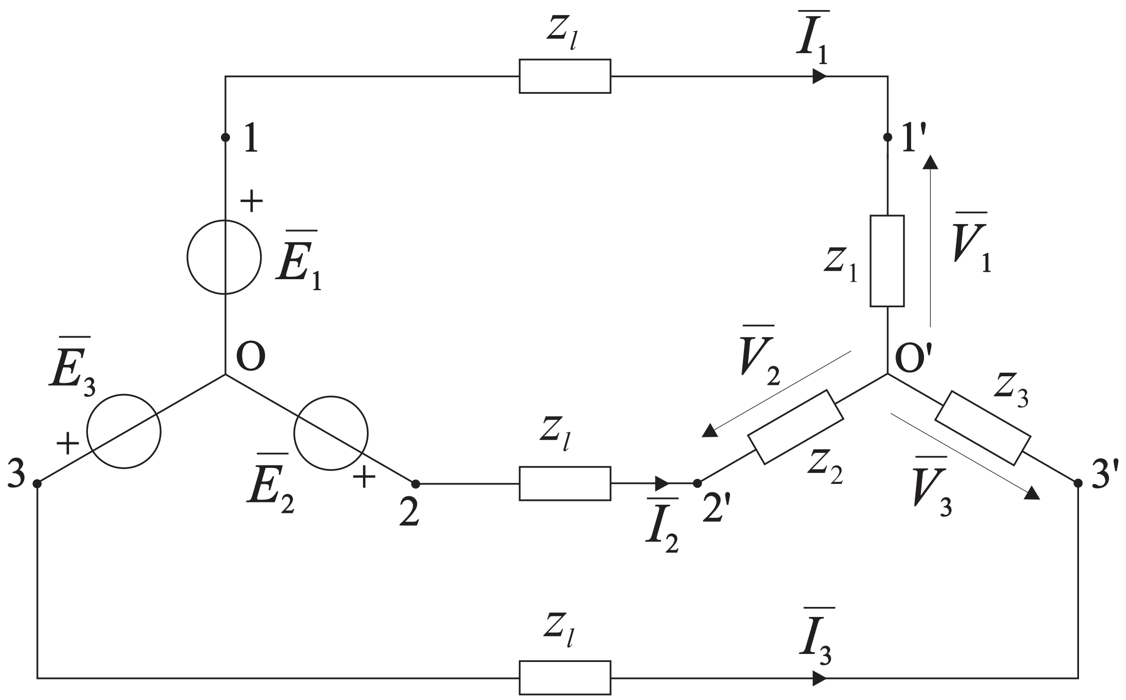
$$y_{23} = \frac{y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \; z_{23} = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$$

$$y_{13} = \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \; z_{13} = z_1 + z_3 + \frac{z_1 z_3}{z_2}$$

$$y_{12} = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2 + y_3}, \; z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

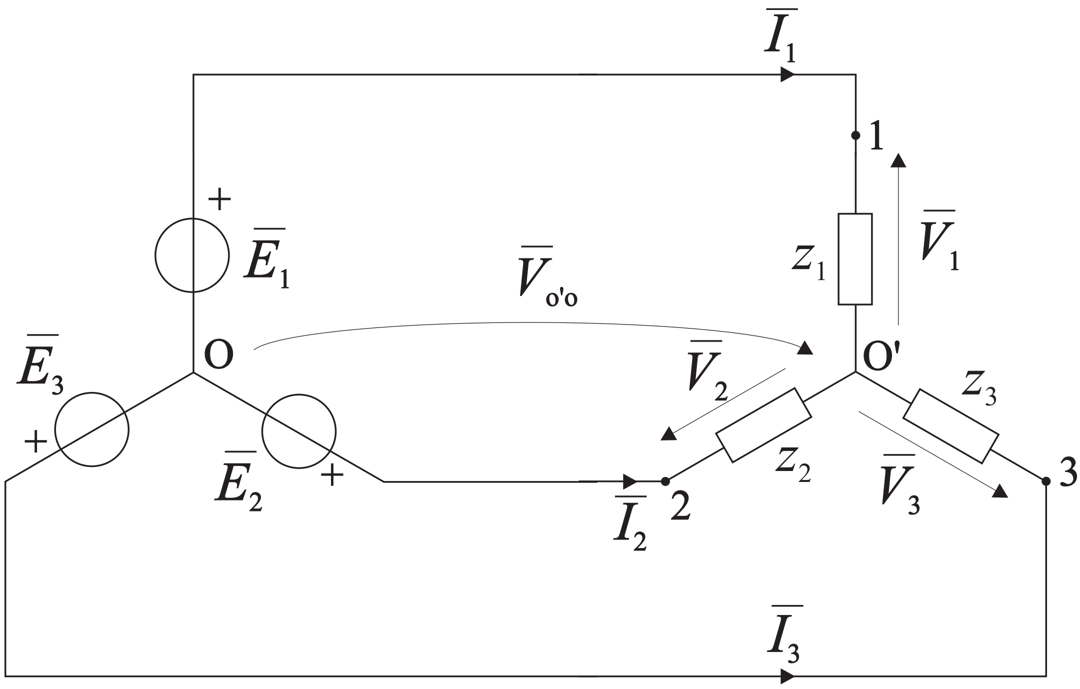
Sistemi trifase

- Un sistema trifase è composto da un generatore trifase, da una linea di alimentazione (trifase) e da un carico (trifase) collegato a stella o a triangolo. Se le impedenze sono diverse tra loro, il carico si dice squilibrato, altrimenti equilibrato



Sistemi squilibrati a stella

- Consideriamo un generatore trifase e un carico squilibrato a stella (trascuriamo le impedenze di linea z_l)



$$\begin{cases} \overline{E}_1 = \overline{V}_{O'O} + \overline{V}_1 \\ \overline{E}_2 = \overline{V}_{O'O} + \overline{V}_2 \\ \overline{E}_3 = \overline{V}_{O'O} + \overline{V}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{V}_1 = z_1 \overline{I}_1 \\ \overline{V}_2 = z_2 \overline{I}_2 \\ \overline{V}_3 = z_3 \overline{I}_3 \end{cases}$$

Sistemi squilibrati a stella (2)

- Calcoliamo la ddp tra i centri stella con il teorema di Millmann

$$\overline{V}_{O'O} = \frac{\dfrac{\overline{E}_1}{z_1} + \dfrac{\overline{E}_2}{z_2} + \dfrac{\overline{E}_3}{z_3}}{\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}}$$

- Le correnti in un carico squilibrato sono pertanto

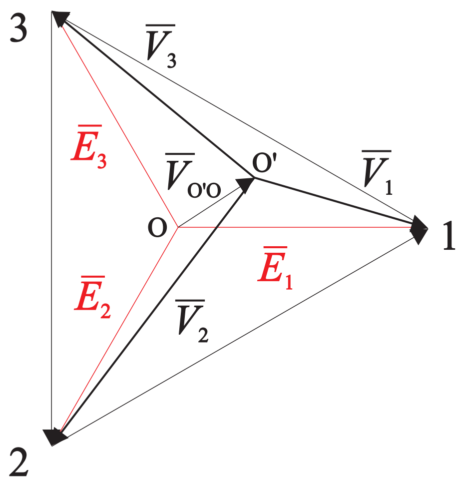
$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dfrac{\overline{V}_1}{z_1} = \dfrac{\overline{E}_1 - \overline{V}_{O'O}}{z_1} \\ \bar{I}_2 = \dfrac{\overline{V}_2}{z_2} = \dfrac{\overline{E}_2 - \overline{V}_{O'O}}{z_2} \\ \bar{I}_3 = \dfrac{\overline{V}_3}{z_3} = \dfrac{\overline{E}_3 - \overline{V}_{O'O}}{z_3} \end{cases}$$

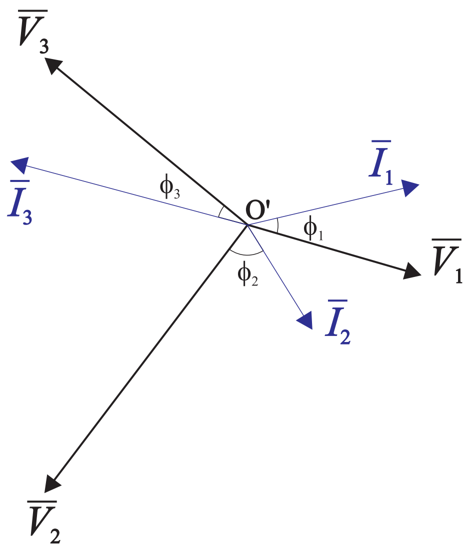
Posizione dei centri stella

- Il centro stella O’ del carico si sposta dal centro stella O del generatore tanto più il carico è squilibrato.

- Le correnti formano una terna di fasori squilibrati con somma nulla per IK

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$





Carichi equilibrati a stella

- In caso di carico equilibrato:

$$z = z_1 = z_2 = z_3$$

- Per la proprietà fondamentale di una terna equilibrata

$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = 0 \qquad \forall x$$

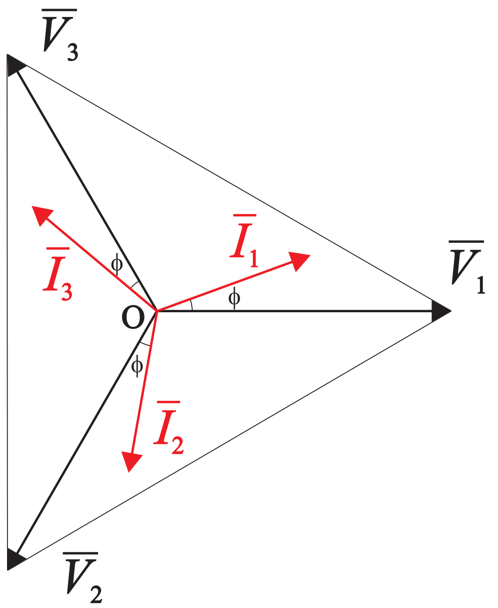
→ $\mathbf{V}_{O'O} = 0$ V

- Ovvero i centri stella coincidono

Carichi equilibrati a stella (2)

- Le tensioni sui carichi $\mathbf{V}_k$ coincidono con le tensioni di fase $\mathbf{E}_k$

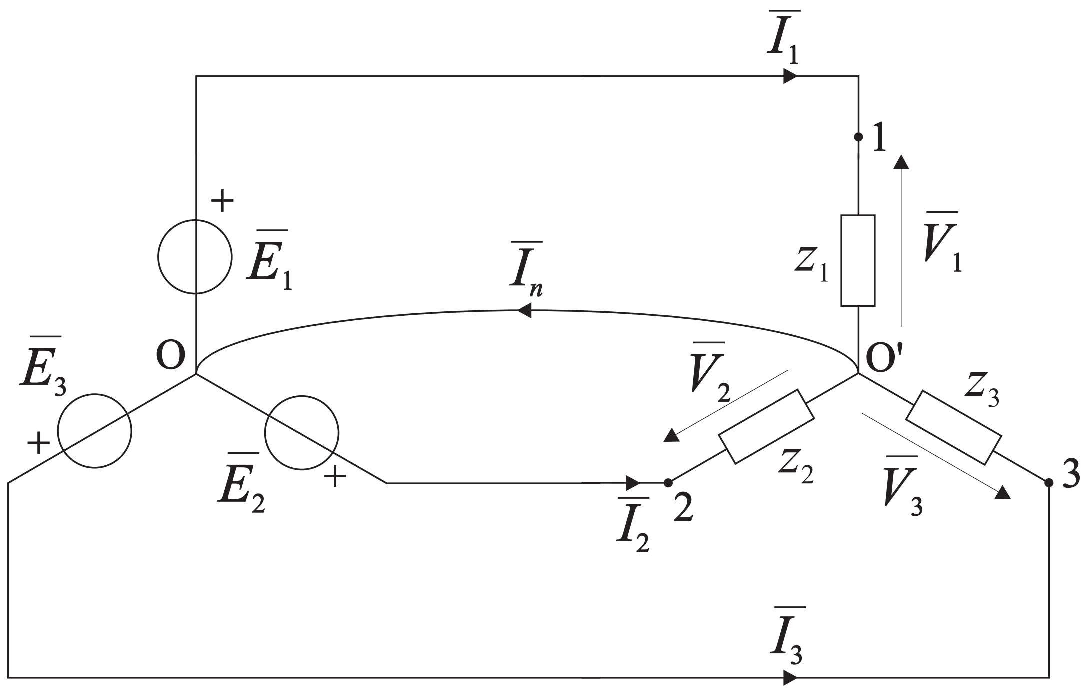
- Le correnti allora formano anch'esse una terna equilibrata e sono sfasate rispetto alle tensioni della fase φ dell'impedenza *z*.



$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \overline{V}_1 / z \\ \overline{I}_2 = \overline{I}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \overline{I}_3 = \overline{I}_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Sistemi squilibrati a stella con neutro

- Per mantenere equilibrate le tensioni sul carico, si inserisce un quarto cavo detto "neutro"



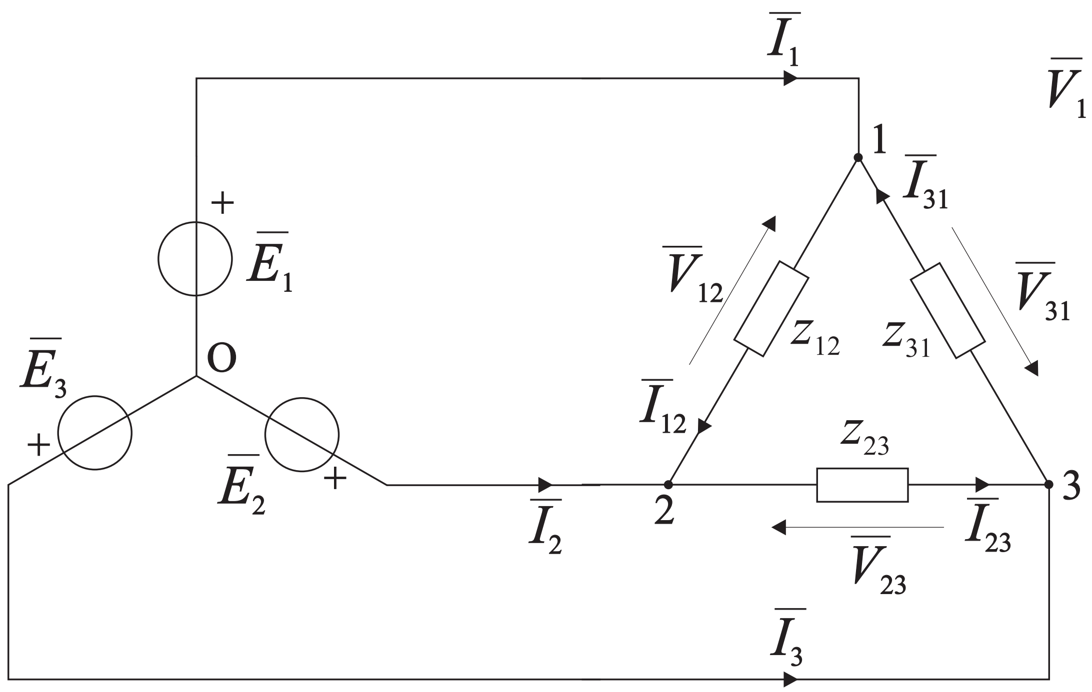
- $\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{V}_3 = \mathbf{E}_3$
- Le correnti restano squilibrate e si ha

$$\overline{I}_n = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$$

- In caso di carico equilibrato, $\mathbf{I}_n = 0$

Sistemi squilibrati a triangolo

- Un carico a triangolo può essere squilibrato o equilibrato ($z = z_{12} = z_{23} = z_{31}$)
- Le tensioni concatenate sono equilibrate per definizione, le correnti sono equilibrate solo in caso di carico equilibrato
- Nei sistemi senza neutro, i carichi a triangolo e a stella sono equivalenti per la "ben nota" trasformazione



Sistemi squilibrati a triangolo (2)

- Le correnti si calcolano

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} \end{cases}$$

- E quindi considerando le tensioni concatenate

$$\begin{cases} \bar{I}_{12} = \dfrac{\overline{V}_{12}}{z_{12}} \\ \bar{I}_{23} = \dfrac{\overline{V}_{23}}{z_{23}} \\ \bar{I}_{31} = \dfrac{\overline{V}_{31}}{z_{31}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = \dfrac{\overline{V}_{12}}{z_{12}} - \dfrac{\overline{V}_{31}}{z_{31}} \\ \bar{I}_2 = \dfrac{\overline{V}_{23}}{z_{23}} - \dfrac{\overline{V}_{12}}{z_{12}} \\ \bar{I}_3 = \dfrac{\overline{V}_{31}}{z_{31}} - \dfrac{\overline{V}_{23}}{z_{23}} \end{cases}$$

Carichi equilibrati

- La trasformazione stella-triangolo (sistema senza neutro) e viceversa è molto semplice, in quanto

$$z_{\mathrm{TRIANGOLO}} = 3z_{\mathrm{STELLA}}$$

- Un carico equilibrato si comporta sempre nello stesso modo, sia esso rappresentato da una stella o da un triangolo
- Le tensioni sulle impedenze e le correnti di linea sono equilibrate
- È conveniente utilizzare la stella per calcolare le correnti di linea
- In ogni caso, trovata una corrente, le altre si possono calcolare per sfasamento di $2\pi/3$

Potenza in un sistema trifase

- In generale per un carico a stella (con o senza neutro) senza impedenza di linea

$$P_c = \overline{V}_1 \overline{I}_1^* + \overline{V}_2 \overline{I}_2^* + \overline{V}_3 \overline{I}_3^* =$$
$$= P_{c1} + P_{c2} + P_{c3}$$

- Con il neutro si ha:

$$\overline{V}_1 = \overline{E}_1, \overline{V}_2 = \overline{E}_2, \overline{V}_3 = \overline{E}_3$$

- In generale per un carico a triangolo senza impedenza di linea

$$P_c = \overline{V}_{12} \overline{I}_{12}^* + \overline{V}_{23} \overline{I}_{23}^* + \overline{V}_{31} \overline{I}_{31}^*$$
$$= P_{c12} + P_{c23} + P_{c31}$$

N.B. non sono le correnti di linea, in quanto queste non scorrono sulle impedenze del carico

Potenza in un carico equilibrato

- Se il carico è equilibrato a stella o a triangolo (senza impedenza di linea), le tensioni e le correnti sono equilibrate, quindi hanno lo stesso modulo, per cui

$$\left|\overline{E}_1\right| = \left|\overline{E}_2\right| = \left|\overline{E}_3\right| = E_f$$

$$\left|\overline{I}_1\right| = \left|\overline{I}_2\right| = \left|\overline{I}_3\right| = I_L$$

$$z = |z| e^{j\varphi}$$

$$P_{c1} = E_f I_L \cos\varphi + j E_f I_L \sin\varphi =$$
$$= P_1 + jQ_1 = P_{c2} = P_{c3}$$

$$\begin{cases} P = 3 E_f I_L \cos\varphi \\ Q = 3 E_f I_L \sin\varphi \end{cases}$$

Potenza in un carico equilibrato (2)

- Oppure con le tensioni concatenate o di linea

$$\left|\overline{V}_{12}\right| = \left|\overline{V}_{23}\right| = \left|\overline{V}_{31}\right| = V_L$$
$$V_L = \sqrt{3}E_f$$

$$\begin{cases} P = \sqrt{3}\, V_L I_L \cos\varphi \\ Q = \sqrt{3}\, V_L I_L \sin\varphi \end{cases}$$

- Queste espressioni possono essere usate sia con un carico a triangolo, sia con un carico a stella, dal momento che la fase φ dell'impedenza non cambia con la relativa trasformazione

Potenza istantanea in un carico equilibrato

- Le potenze istantanee in un carico equilibrato a stella sono

$$p_1(t) = P_1 + P_1 \cos\left(2\omega t + 2\varphi_{V1}\right) + Q_1 \sin\left(2\omega t + 2\varphi_{V1}\right)$$
$$p_2(t) = P_2 + P_2 \cos\left(2\omega t + 2\varphi_{V2}\right) + Q_2 \sin\left(2\omega t + 2\varphi_{V2}\right)$$
$$p_3(t) = P_3 + P_3 \cos\left(2\omega t + 2\varphi_{V3}\right) + Q_3 \sin\left(2\omega t + 2\varphi_{V3}\right)$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$$

- Se il carico è equilibrato

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_a$$
$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \mathrm{Q}_r$$
$$\varphi_{V2} = \varphi_{V1} - 2\pi/3,\ \varphi_{V3} = \varphi_{V1} - 4\pi/3$$

- La potenza istantanea complessiva è quindi

$$p(t) = 3\,P_a$$

Rifasamento

- Il rifasamento di un carico trifase segue lo stesso principio del corrispondente monofase
- Si deve annullare la potenza reattiva del carico
- Supponendo che il carico sia induttivo, si procederà al rifasamento ponendo in parallelo 3 condensatori connessi a stella o a triangolo
- Per le relazioni esistenti tra le impedenze connesse a stella o a triangolo, la configurazione a triangolo permette di utilizzare condensatori di capacità minore, quindi meno costosi

Carichi a stella equivalenti

- Consideriamo un carico a stella squilibrato senza neutro che assorbe le correnti di linea $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ ed è alimentato con le tensioni concatenate $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{23}$ e $\mathbf{V}_{31}$. Vogliamo determinare le impedenze del carico a stella

$$\begin{cases} \overline{V}_{12} = z_1 \bar{I}_1 - z_2 \bar{I}_2 \\ \overline{V}_{23} = z_2 \bar{I}_2 - z_3 \bar{I}_3 \end{cases}$$

- 2 equazioni, 3 incognite, per cui una impedenza può essere scelta a piacere, per esempio la z_1. Essendo complessa, corrisponde a ∞^2 soluzioni, ovvero ∞^2 stelle "equivalenti" che, alimentate con la stessa terna di tensioni concatenate, assorbono le stesse correnti

Teorema di Aron

- Teorema di Aron: in un sistema trifase puro (anche dissimmetrico e squilibrato), la potenza complessa (così come la potenza istantanea) può essere calcolata valutando le tensioni di fase rispetto ad un riferimento qualsiasi O’ (teorema di Aron o della invarianza della potenza rispetto al centro stella).

- Le stelle equivalenti differiscono per la posizione del centro stella del carico *O*’ e, quindi, per le tensioni $\mathbf{V}_k$ di fase (del carico)

Teorema di Aron (2)

- Queste stelle assorbono la stessa potenza P_c che è invariante rispetto allo spostamento di *O'*

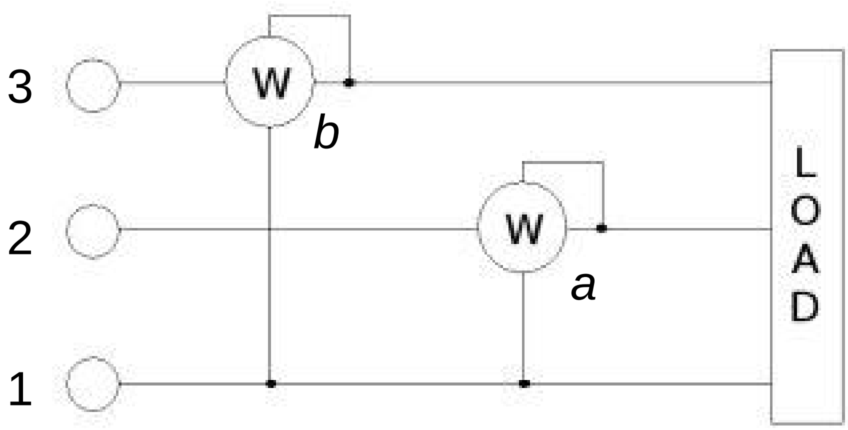
$$P_c = \overline{V}_1 \overline{I}_1^* + \overline{V}_2 \overline{I}_2^* + \overline{V}_3 \overline{I}_3^*$$

$$\begin{cases} \overline{V}_1'' = \overline{V}_1 - \overline{V}_{O''O'} \\ \overline{V}_2'' = \overline{V}_2 - \overline{V}_{O''O'} \\ \overline{V}_3'' = \overline{V}_3 - \overline{V}_{O''O'} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_c'' &= \overline{V}_1'' \overline{I}_1^* + \overline{V}_2'' \overline{I}_2^* + \overline{V}_3'' \overline{I}_3^* = \\ &= \overline{V}_1 \overline{I}_1^* + \overline{V}_2 \overline{I}_2^* + \overline{V}_3 \overline{I}_3^* - \\ &- \overline{V}_{O''O'} \underbrace{\left(\overline{I}_1^* + \overline{I}_2^* + \overline{I}_3^* \right)}_{=0} = P_c \end{aligned}$$

Inserzione Aron

- E' un metodo di misura della potenza elettrica di un sistema trifase tramite l'utilizzo di due soli wattmetri



$$
\begin{aligned}
&P_c = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* \\
&\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = -\bar{I}_2 - \bar{I}_3 \\
&P_c = \bar{V}_1\left(-\bar{I}_2^* - \bar{I}_3^*\right) + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* = \\
&= \left(\bar{V}_2 - \bar{V}_1\right)\bar{I}_2^* + \left(\bar{V}_3 - \bar{V}_1\right)\bar{I}_3^* = \\
&= \bar{V}_{21} \bar{I}_2^* + \bar{V}_{31} \bar{I}_3^* \\
&\Rightarrow P = \Re\{P_c\} = W_a + W_b
\end{aligned}
$$

- Per i sistemi equilibrati vale anche

$$
Q = \sqrt{3}\left(W_a - W_b\right)
$$