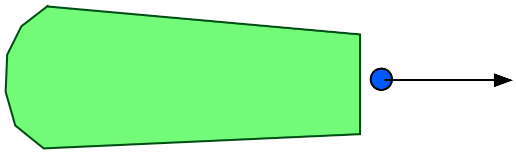
Esercizio (tratto dal problema 6.9 del Mazzoldi 2)

Un cannone di massa $M = 2500\,\mathrm{Kg}$ spara un proiettile di massa $m = 5\,\mathrm{Kg}$ con velocità $v = 300\,\mathrm{m/s}$. Calcolare

1. La velocità di rinculo del cannone
2. l'energia cinetica del cannone
3. la costante elastica di una molla che possa arrestare la corsa del cannone in $30\,\mathrm{cm}$.



SOLUZIONE

Dati iniziali:

$$
\begin{aligned}
M &= 2500\,\mathrm{Kg} \\
m &= 5\,\mathrm{Kg} \\
v &= 300\,\mathrm{m/s} \\
\Delta l &= 0.3\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

1. Il sistema cannone+proiettile è un sistema isolato, dato che le forze che causano lo sparo del proiettile sono forze interne a tale sistema, e che non vi sono agenti esterni che agiscono su tale sistema. Pertanto la quantità di moto totale del sistema isolato si conserva tra prima e dopo lo sparo (vedi Fig.1).

$$
\begin{aligned}
P_{\text{prima}} &= P_{\text{dopo}} \\
0 &= M v_{\text{can}} + m v
\end{aligned} \tag{1}
$$

da cui ricaviamo che

$$
v_{\text{can}} = -\frac{m}{M}\, v \tag{2}
$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$
\begin{aligned}
v_{\text{can}} &= -\frac{5\,\mathrm{Kg}}{2500\,\mathrm{Kg}}\, 300 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= -\frac{3}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \\
&= -0.6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{3}
$$

dove il segno '-' indica che il cannone si muove verso sinistra.

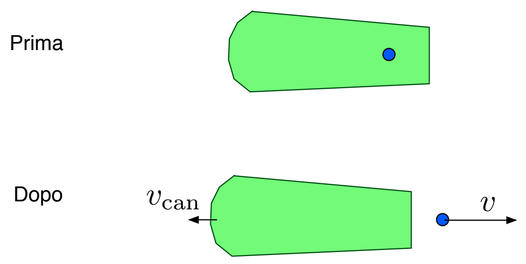


Figure 1: Il sistema cannone+proiettile è un sistema isolato, e la quantità di moto totale del sistema si conserva tra prima e dopo lo sparo del proiettile.

2. L'energia cinetica del cannone dopo lo sparo vale

$$
K_{\text{can}} = \frac{1}{2} M v_{\text{can}}^2 \tag{4}
$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$
\begin{aligned}
K_{\text{can}} &= \frac{1}{2} 2500\,\mathrm{Kg} \left(-\frac{3}{5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right)^2 = \\
&= 450\,\mathrm{Kg}\, \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\
&= 450\,\mathrm{J}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Nota Bene: L'energia cinetica del sistema cannone+proiettile non si conserva tra prima e dopo lo sparo. Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} K_{\text{prima}} &= 0 \\ K_{\text{dopo}} &= K_{\text{can}} + K_{\text{pro}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{can}}^2 + \frac{1}{2}mv^2 > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Il fatto che l'energia cinetica non si conservi non deve sorprendere. Infatti la conservazione della quantità di moto totale dipende solo dal fatto che il sistema è isolato, ossia dal fatto che le uniche forze che agiscono sono forze *interne*. La conservazione dell'energia, invece, dipende anche dal tipo di tali forze interne, ossia se sono conservative o no. Il fatto che l'energia non si conservi indica che le forze interne non sono conservative.

3. Il cannone si dirige ora verso la molla (inizialmente a riposo), che comprimendosi esercita una forza elastica rallentando il cannone, fino ad arrestarlo (vedi Fig.2). Osserviamo che

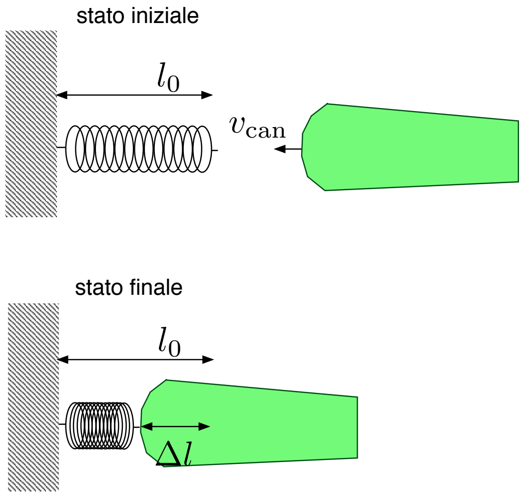


Figure 2:

- Quando il cannone entra in contatto con molla, il sistema cannone+proiettile *non è più isolato*, dato che un agente esterno (=la molla) esercita una forza su uno dei due componenti del sistema (=il cannone). Pertanto dall'istante in cui il cannone tocca la molla *la quantità di moto P del sistema non si conserva*, ma diminuisce. Infatti il cannone si arresta, ossia passa da una velocità v_{can} a velocità nulla.
- La forza che la molla esercita sul cannone per arrestarlo è la forza elastica, che è conservativa. Pertanto possiamo applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica

$$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{7}$$

Nello stato iniziale l'energia meccanica è data dall'energia cinetica del cannone. All'istante finale, ossia quando la molla è compressa ed il cannone si arresta, l'energia meccanica è data dall'energia potenziale elastica della molla. Pertanto

$$\begin{aligned} K_{\text{can}}^{in} &= E_{p,\text{mol}}^{fin} \\ \frac{1}{2}Mv_{\text{can}}^2 &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

da cui

$$k = \frac{2K_{\text{can}}^{in}}{(\Delta l)^2} \tag{9}$$

Sostituendo i dati

$$k = \frac{2 \cdot 450\,\mathrm{J}}{(0.3\,\mathrm{m})^2} = 10.000\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m}^2} = 10^4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \qquad (10)$$