Lezione, Panoramica.

Spazi vettoriali

Sia $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Allora, per definizione,

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \implies \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(E1)}$$

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R} \implies c\vec{a} = (ca_1, \ldots, ca_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(E2)}$$

Più generalmente, sia S un insieme e $\mathbb{R}^S = \{\text{funzioni } h : S \to \mathbb{R}\}$ e $f, g \in \mathbb{R}^S$, $c \in \mathbb{R}$ definiamo

$$(f+g) : S \to \mathbb{R}, \qquad (f+g)(s) = f(s) + g(s) \qquad \text{(E1')}$$

$$cf : S \to \mathbb{R}, \qquad (cf)(s) = cf(s) \qquad \text{(E2')}$$

Esempio: $S = \{\text{Lunedì, Martedì, Mercoledì, Giovedì, Venerdì, Sabato, Domenica}\}$

$$f : S \to \mathbb{R}, \qquad f(X) = \text{centimetri di pioggia nel giorno X della settimana scorsa}$$
$$g : S \to \mathbb{R}, \qquad g(X) = \text{centimetri di pioggia il giorno X due settimane fa}$$
$$h = \frac{1}{2}(f+g) = \text{precipitazioni medie}$$

In particolare, se $S = \{1, \ldots, n\}$ abbiamo una correspondenza

$$a \in \mathbb{R}^S \longleftrightarrow \vec{a} = (a(1), \ldots, a(n)) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(E3)}$$

In generale, chiamiamo gli elementi di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^S$ vettori.

Le operazioni (E1) e (E1') sono chiamate addizione vettoriale. Le operazioni (E2) e (E2') sono chiamate moltiplicazione scalare

Se S è un insieme e T è un sottoinsieme di S, definiamo

$$\chi_T : S \to \mathbb{R}, \qquad \chi_T(s) = \begin{cases} 1, & s \in T \\ 0, & s \notin T \end{cases}$$

Se S è un insieme finito, chiamiamo l'insieme

$$B = \{\chi_{\{s\}} \mid s \in S\}$$

la base canonica di $\mathbb{R}^S$.

Esempio: $S = \{1, \ldots, n\}$. Sotto la corrispondenza (E3), la base canonica di $\mathbb{R}^S$ è l'insieme

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$

che di solito è chiamato la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Sistemi di equazioni (informale)

Siano $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni. Allora,

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0 \,\}$$

dimensione = numero di parametri locali

La dimensione prevista di $V(f_1, \dots, f_k)$ è $n-k$ perché $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n e ogni equazione $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ dovrebbe ridurre la dimensione dell'insieme di soluzioni di uno.

Esempio: $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ $\quad V(f) = \{\text{sphere of radius } 1\}$ (dim. prevista)

$g = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $\quad V(g) = \{0\}$

$h = h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$ $\quad V(h) = \emptyset$

In questo caso, solo $V(f)$ ha la dimensione previsa perché una somma di quadrati è non negativa.

Se sostituiamo i numeri reali con i numeri complessi, allora $V(f), V(g), V(h)$ sono tutti parametrizzati locali da due numeri complessi.

Richiamare: $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}$. Si scrive $(x, y) = x + iy,\qquad i = \sqrt{-1}$

Siano $z = x + iy,\quad w = u + iv$. Allora

$$z + w = (x + u) + i(y + v), \qquad zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + uy)$$

Se $z = x + iy \neq (0, 0)$ allora $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

Esempio: $i^2 = -1, \qquad (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$

Sistemi di equazioni lineari (informale)

Il sistema di equazioni $V(f_1, \dots, f_k)$ si dice lineare se (e sole se) ogni funzione ha la forma

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) - b_j \tag{E4}$$

dove i coefficienti a_{ij} e b_j sono costanti. Un sistema lineare si dice omogeneo se (e sole se) ogni $b_j = 0$. Altrimenti, si dice che il sistema lineare è disomogeneo.

Nota: Se $V(f_1, \dots, f_k)$ è un sistema lineare allora

$$V(h_1, \dots, h_k), \qquad h_j(x) = f_j(x) - f_j(0), \qquad j = 1, \dots, k \tag{E5}$$

è un sistema lineare omogeneo. Ogni sistema lineare omogeneo ha la soluzione

$$(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$

Un sistema lineare disomogeneo non deve necessariamente avere una soluzione. Per esempio, siano

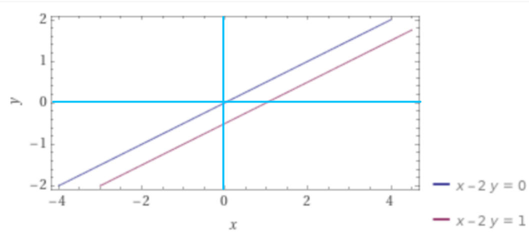
$$f_1(x, y) = x + y - 2, \quad f_2(x, y) = x - y, \quad f_3(x, y) = x + 2y - 1$$

Allora $V(f_1, f_2) = \{(1, 1)\}$, ma $f_3(1, 1) = 2$. Quindi, $V(f_1, f_2, f_3) = \emptyset$ (insieme vuoto).

Se un sistema lineare $V(f_1,\dots,f_k)$ ha una soluzione x' allora ogni soluzione di $V(f_1,\dots,f_k)$ ha la forma

$$x+x', \qquad x\in V(h_1,\dots,h_k)$$

dove $V(h_1,\dots,h_n)$ è il sistema lineare (E5).



Sistemi equivalenti di equazioni

Si osservi che: Per qualsiasi sistema di equazioni $V(f_1,\dots,f_k)$ abbiamo

(i) $V(f_1, f_1+f_2,\dots,f_k) = V(f_1,\dots,f_k)$ perché

$$\{f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0\} \iff \{f_1(x)=0, \quad f_1(x)+f_2(x)=0\}$$

(ii) $V(f_1, cf_2,\dots,f_k) = V(f_1,f_2,\dots,f_k)$ se $c\neq 0$

(iii) $V(f_1,\dots,f_k)$ è indipendente dell'ordine delle equazioni $f_1,\ f_2,\dots,f_k$.

Nel caso di sistemi di equazioni lineari, queste trasformazioni sono chiamate mosse di Gauss:

(1) Aggiungere un multiplo di un'equazione a un'altra.
(2) Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.
(3) Riordinare le equazioni.

Eliminazione di Gaussiana: Usa le regole (1)-(3) per semplificare un sistema di equazioni lineari in una forma facile da risolvere.

Assumere non zero usando la regola 3. Altrimenti, x_1 può assumere qualsiasi valore.

Elimina x_1 da queste equazioni usando la regola 1.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + {} & a_{1n}x_n - b_1 = 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + {} & a_{2n}x_n - b_2 = 0\\
\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \qquad\quad = 0\\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + {} & a_{kn}x_n - b_k = 0
\end{aligned} \qquad \text{(E6)}$$

Ripetete questo processo con ogni variabile x_j fino ad ottenere un sistema della forma

$$\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n - b'_1 \quad &= 0\\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n - b'_2 \quad &= 0\\
\ddots \qquad \vdots \qquad\quad &= 0\\
a'_{kk}x_k + \cdots + a'_{kn}x_n - b'_k \quad &= 0
\end{aligned} \qquad \text{(E6')}$$

Se (E6') ha un'equazione della forma $b'_j = 0$ dove $b'_j \neq 0$ allora (E6) non ha soluzioni. Altrimenti, possiamo trovare tutte le soluzioni con la "Sostituzione a ritroso"

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 6x+2y+z+1=0 \\ -2x+2y+z-7=0 \end{cases} \xrightarrow[R_2=R_2-3R_1]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z+4=0 \\ -2x+2y+z-7=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z-4=0 \\ 3y+2z-8=0 \end{cases} \xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z+4=0 \\ -4z+4=0 \end{cases}$$

Sostituzione a ritroso

$$-4z+4=0 \Longrightarrow z=1, \quad -y-2z+4=0 \Longrightarrow y=2$$
$$2x+y+z-1=0 \Longrightarrow x=-1$$

Di solito omettiamo le variabili usando la seguente notazione matriciale:

$2x+y+z=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=R_2-3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Applicazione: Soluzione numerica di equazioni differenziali.

Una derivata è un tasso di cambiamento istantaneo.

Le leggi della fisica producono spesso equazioni che coinvolgono la derivata prima $f'(x)$ e la derivata seconda $f''(x)$ di una funzione $f(x)$. Tali equazioni possono spesso essere risolte numericamente al computer come segue:

Per piccoli valori di h, abbiamo le seguenti approssimazioni:

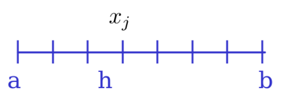
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{E7}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \tag{E8}$$

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u(x)y''(x) + v(x)y'(x) + w(x)y(x) = g(x), \qquad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Suddividere l'intervallo [a,b] in n parti



$$x_j = a + jh, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \qquad j = 0, \ldots, n$$

Siano $\quad y_j = y(x_j), \quad u_j = u(x_j), \quad v_j = v(x_j), \quad w_j = w(x_j), \quad g_j = g(x_j), \quad j = 0, \ldots, n$

Usando le equazioni (E7) e (E8) otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$u_j \left(\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right) + v_j \left(\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \right) + w_j y_j = g_j, \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

dove conosciamo già $y_0 = \alpha$ e $y_n = \beta$.

<u>Esempio</u>: $\quad y''(x) - y(x) = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$

$$\left(\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right) - y_j = f_j \implies y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} - h^2 y_j = h^2 f_j$$

$$\implies \begin{cases} y_{j+1} - (2+h^2)y_j + y_{j-1} = h^2 f_j, & j = 1, \ldots, n-1 \\ y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta \end{cases}$$

Moltiplicazione di matrici

<u>Richiamare</u>: Siano $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ matrici 2x2

Allora
$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} \tag{E9}$$

$$c_{11} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad c_{12} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad c_{22} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>: $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Moltiplicare una matrice e un vettore}}$

Siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Allora, $Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Av, \qquad u_1 : \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \qquad u_2 : \begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Autovettori e autovalori}}$

Supponiamo che A sia una matrice e v sia un vettore tale che

$$Av = \lambda v$$

Allora

$$A^n v = \lambda^n v$$

Esempio: $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v} = \overbrace{3}^{\lambda = 3} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v}$, $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v} = \overbrace{(-1)}^{\lambda = -1} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v}$

In generale, un vettore v non nullo è detto un autovettore di A se esiste una costante λ tale che

$$Av = \lambda v$$

Il numero λ è chiamato l'autovalore di A corrispondente a v.

$\boxed{\text{Determinante}}$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora $\det(A) = ad - bc$

L'autovalori di A sono l'soluzione dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

Allora, l'autovalori di A sono $\lambda = 3$, $\lambda = -1$.