Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 4\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,2\}$	$x =$		
$\{1,6\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

	capacità di peso (tonn)	capacità di spazio (m^3)
A	23	5000
B	15	8000
C	12	5000

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

	peso (tonn)	volume occupato ($m^3/tonn$)
P1	20	200
P2	14	280
P3	12	250

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 340 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

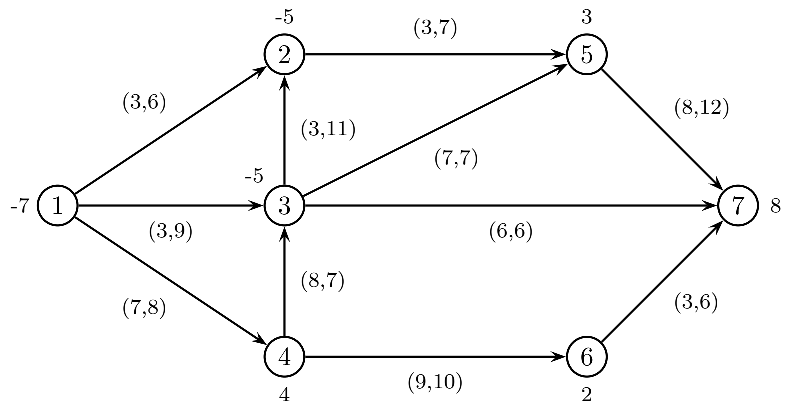
```
c=

A=                                        b=

Aeq=                                      beq=

lb=                                       ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

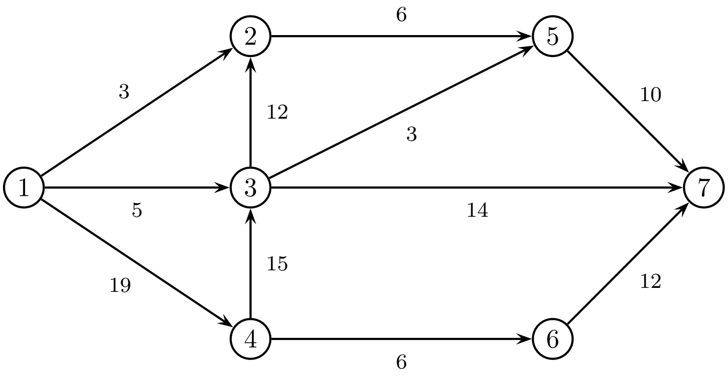


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(4,6)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

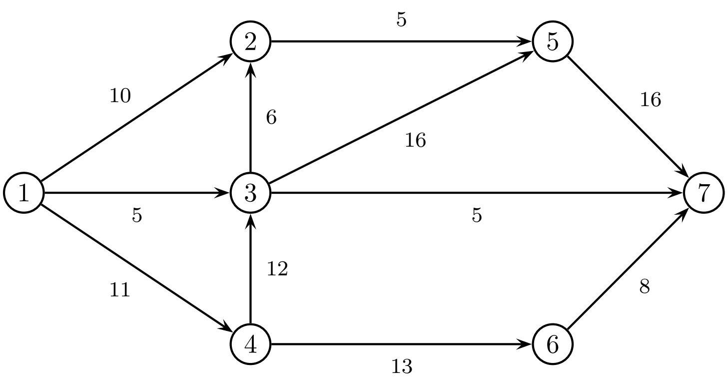
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 9\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \geq 69 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 49 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	21	50	21
2		12	51	25
3			9	29
4				21

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 4\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (1,\ 3)$	SI	NO
$\{1, 6\}$	$y = (-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -3)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3, 5\}$	$(-2,\ -5)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{7}{4},\ 0\right)$	3	8	1
2° iterazione	$\{1, 5\}$	$(-4,\ 0)$	$\left(\frac{2}{31},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{57}{31},\ 0\right)$	5	$31,\ \frac{93}{2}$	2

Esercizio 3.

`variabili decisionali`	`modello`
$x_{i,j}$ `= tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C`	$\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +340\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 14 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 23 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 15 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 12 \\ 200\ x_{1A} + 280\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \leq 6000 \\ 200\ x_{1B} + 280\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \leq 8500 \\ 200\ x_{1C} + 280\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \leq 5000 \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$

```
c = -[ 300; 300; 300; 340; 340; 340; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 280 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 280 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 280 0 0 250]
```

```
b = [ 20; 14; 12; 23; 15; 12; 5000; 8000; 5000]
```

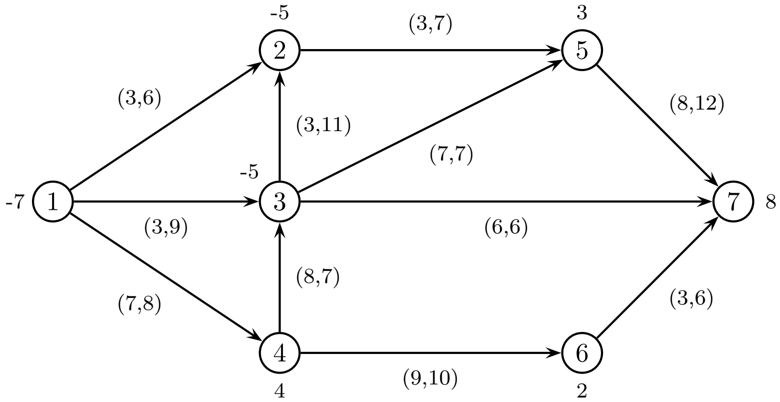
```
Aeq = []
```

```
beq = []
```

```
lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
ub = []
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

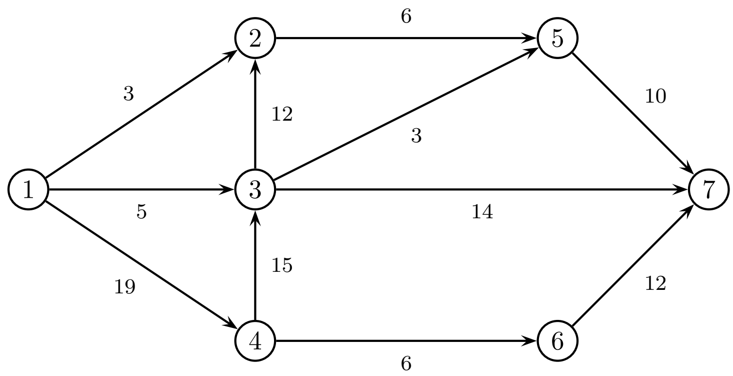


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(4,6)	$x = (7,\ 0,\ 0,\ 0,\ -12,\ 3,\ 0,\ -14,\ 10,\ 0,\ 8)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 3,\ 0,\ -8,\ 6,\ 11,\ 14)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

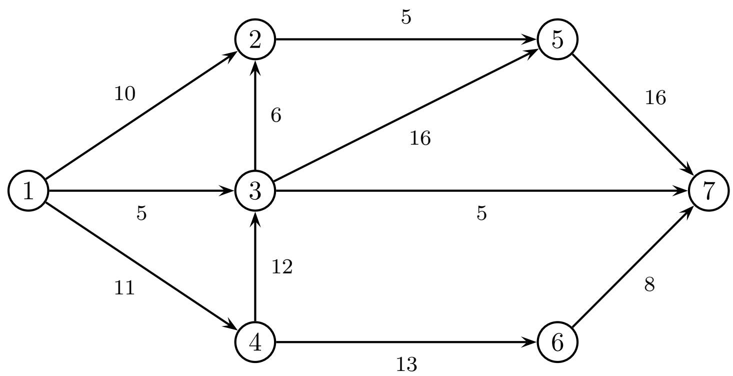
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	$(0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0)$	$(1,\ 0,\ 6,\ 7,\ 1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0)$
π	$(0,\ 6,\ 3,\ 7,\ 1,\ 16,\ 9)$	$(0,\ 3,\ 0,\ 7,\ -2,\ 16,\ 6)$
Arco entrante	(1,2)	(2,5)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 1	2 , 1
Arco uscente	(1,3)	(3,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		5		7		4		6	
nodo 2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 5	$+\infty$	-1	9	2	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	25	4	25	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	3	18	5	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		4, 5, 7		4, 7		4		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 5, 0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 5, 0)	10
1 - 4 - 6 - 7	8	(5, 5, 8, 5, 0, 0, 5, 0, 8, 5, 8)	18
1 - 4 - 3 - 5 - 7	3	(5, 5, 11, 5, 0, 3, 5, 3, 8, 8, 8)	21

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 9\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \geq 69 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 49 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{69}{11}\right)$ $\qquad v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 7)$ $\qquad v_S(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 12\,x_1 + 10\,x_2 \geq 63$

$r = 4$ $\qquad 6\,x_1 + 5\,x_2 \geq 32$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	21	50	21
2		12	51	25
3			9	29
4				21

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 84$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 4 – 5 – 1 $\qquad v_S(P) = 107$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.