$f(t)$ | $F(s)$

Trasformata dell'esponenziale

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{at}, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\, dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

L'integrale esiste solo se Re(s)>a (integrale ha esponente negativo e quindi converge)
a e' l'ascissa di convergenza

Proprietà della Trasformata di Laplace: Linearità

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$f_1(t)$

Date

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), & \mathrm{Re}(s) > \alpha_1, \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s), & \mathrm{Re}(s) > \alpha_2. \end{cases} \longrightarrow \mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$$

$$\mathrm{Re}(s) > \max(\alpha_1, \alpha_2)$$

Per dimostrarlo basta applicare la definizione

L'ascissa di convergenza e' il max delle ascisse di convergenza

Proprietà della Trasformata di Laplace: Linearità

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$$

Esempio - Calcolare la L-trasformata F(s) di $f(t) = sin(\omega t)1(t)$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Proprietà della Trasformata di Laplace: Linearità

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$$

Esempio - Calcolare la L-trasformata F(s) di

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} = \mathcal{L}\{\sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi)\} = \cos(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + \sin(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}.$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} = \cos(\phi) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin(\phi) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \cdot \cos(\phi) + s \cdot \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Proprietà della L-Trasformata: Traslazione in t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Traslazione in t:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

Come si dimostra

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)\cdot e^{-st}\,dt \overset{\tau = t - t_0}{=} \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau)\cdot e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau$$

$$= e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cdot e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-st_0}\cdot F(s).$$

Proprietà della L-Trasformata: Cambiamento di scala

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Vogliamo calcolare la trasformata di $\boxed{f(at)}$

Applichiamo la definizione e applichiamo il cambio di variable $\tau = at \downarrow d\tau = adt$

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \underbrace{\int_0^{+\infty} f(a \cdot t) \cdot e^{-st}\, dt} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} f(\tau) \cdot e^{-\frac{s}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Proprietà della L-Trasformata: Cambiamento di scala

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Vogliamo calcolare la trasformata di $f(t) = sin(3t)$

Trasformata seno per w=1 $\downarrow$

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Proprieta di scala $\downarrow$

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

Proprietà della L-Trasformata: derivazione in s

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d(F(s))}{ds}$$

Vediamolo con un esempio

Prendiamo la trasformata del Gradino $\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$

Facciamo la derivata rispetto a *s*

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-st}\, dt\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\Longrightarrow -\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s^2} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$$

Proprietà della L-Trasformata: derivazione in s

Possiamo allora costruire la L-trasformata di tutto un insieme di funzioni, applicando iterativamente la proprieta' di derivazione

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d(F(s))}{ds}$$

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n(F(s))}{ds^n}$$

Applicandola alla famiglia del gradino:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Proprietà della L-Trasformata: derivazione in s

Trovare la trasformata di Laplace di

$t^2 1(t)$

$t^3 1(t)$

$te^{at} 1(t)$

Proprietà della L-Trasformata: Traslazione in s

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Obiettivo: trovare la f(t) che ha originato F(s-a).

$$F(s-a) = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(s-a)t}\,dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} \left(e^{at}f(t)\right)\cdot e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$$

Ovvero quello che volevo ottenere e': $F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$

Esempio, calcolare: $\mathcal{L}\{e^{-kt}\cdot t^2\}$

Sapendo $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3} \longrightarrow \mathcal{L}\{e^{-kt}\cdot t^2\} = \dfrac{2}{(s+k)^3}$

Proprietà della L-Trasformata: Derivazione in t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s) \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = ?$$

$$\int u\,dv = \underline{u \cdot v} - \int \underline{\underline{v\,du}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{df}}{dt} \cdot e^{-st}\,dt = \underline{f(t) \cdot e^{-st}\Big|_0^{+\infty}} - \int_0^{+\infty} \underline{\underline{-s \cdot f(t) \cdot e^{-st}}}\,dt = \underline{\underline{s \cdot F(s)}} - \underline{f(0)}$$

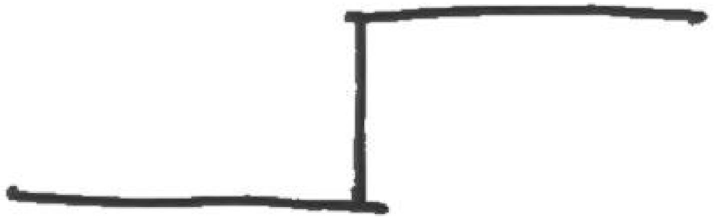
Integrazione per parti

poiche':

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$$

Proprietà della L-Trasformata: Derivazione in t

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0)$$



Attenzione: quanto vale la funzione in 0? Nel caso del gradino?

Nel caso di funzioni discontinue dobbiamo chiederci se usiamo 0+ oppure 0-

$$\mathbf{L}^{-}\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$\mathbf{L}^{+}\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$\mathbf{L}^{-}\{f(t)\} = \mathbf{L}^{+}\{f(t)\} + \int_{0^-}^{0^+} f(t) \cdot e^{-st}\, dt = \mathbf{L}^{+}\{f(t)\} + a_0$$

Proprietà della L-Trasformata: Derivazione in t

$$\underline{\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0)}$$

Esempio - gradino

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s \cdot \overset{F(s)}{\frac{1}{s}} - \overset{0}{f(0^-)} = 1 . = \mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} \text{ siccome } f(0^-) = 0$$

Il risultato ottenuto corrisponde alla trasformata dell'impulso di Dirac, che quindi puo' essere considerato la derivata del gradino unitario.

Proprietà della L-Trasformata: Integrazione in t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Data:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau, \quad g(0) = 0 \implies \frac{dg(t)}{dt} = f(t)$$

Calcolo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

1/s e' l'integratore

Proprietà della L-Trasformata: Integrazione in t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Esempio - calcolare TdL di $$f(t) = \int_0^t \sin(3\tau)\,d\tau$$

Sappiamo che:

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\} = \frac{3}{s^2+9}$$

Vogliamo calcolare la trasformata dell'integrale, per cui:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(3\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

Proprietà della L-Trasformata: Convoluzione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \end{cases}$$

La convoluzione nel tempo e' il prodotto delle trasformate

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Possiamo scrivere:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Proprietà della L-Trasformata: Convoluzione

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Applicando la definizione di L-Trasformata alla funzione integrale di convoluzione:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-st}\, dt$$

$$e^{-st} = e^{-s(t+\tau-\tau)}$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left(\int_0^{+\infty} f_2(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)}\, dt\right) d\tau$$

Proprietà della L-Trasformata: Convoluzione

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left(\int_0^{+\infty} f_2(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)}\, dt \right) d\tau$$

Pongo

$$v = t - \tau \quad dv = dt$$

E ottengo:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} \left(\int_{-\tau}^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv}\, dv \right) d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau} F_2(s)\, d\tau = F_2(s) \cdot \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau = F_2(s) \cdot F_1(s)$$

Proprietà della L-Trasformata: Convoluzione

Si applichi la proprietà di convoluzione per calcolare l'anti-trasformata di:

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)\cdot(s^2+1)}$$

Poiche' $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$ $\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos(\tau)\,d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\cos(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(\cos(t) + \sin(t) - e^{-t}\right)$$