

591AA 21/22 – ELENCO DEI PROBLEMI 2

Problema 1. Usa una tabella di verità per verificare che

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$ $(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$\neg(P \vee Q) \iff$
F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	V

Handwritten notes: A large green oval encircles the first four columns. A smaller green oval encircles the last column. Above the last column, the expression $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ is written with an arrow pointing to the fourth column. The value 'V' in the first row of the last column is circled.

Problema 2. Usa una tabella di verità per verificare che

$$(P \iff Q) \iff ((\neg Q) \iff (\neg P))$$

P	Q	$P \iff Q$	$(\neg Q) \iff (\neg P)$	$\alpha \iff \beta$
F	F	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Handwritten notes: Above the third column, the Greek letter alpha (α) is written. Above the fourth column, the Greek letter beta (β) is written. A large green oval encircles the last column. The values 'V' in the first and last rows of the last column are circled.

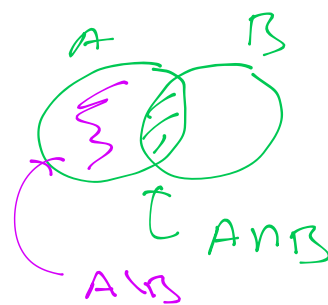
Problema 3. Verificare che

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

Illustrare con un diagramma.

① $A \subseteq C$, ② $C \subseteq A$

$s \in A$	$s \in B$	$s \in A \setminus B$	$s \in A \cap B$	$s \in C$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
F	F	F	F	F



Problema 4. Verificare che

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Illustrare con un diagramma.

Problema 5. Elencare tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3\}$

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, \emptyset

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

$S = \{A, B\}$ $\{A, B\}$ $\{A\}$, $\{B\}$, \emptyset

Problema 6. Se T è un sottoinsieme di S sia

$$\chi_T : S \rightarrow \{V, F\}, \quad \chi_T(s) = \begin{cases} V & s \in T \\ F & s \notin T \end{cases}$$

Contando il numero di possibili funzioni T , dimostrare che se S ha n elementi allora $\mathcal{P}(S)$ ha 2^n sottoinsiemi.

$S = \{1, 2, 3\}$

$T = \{1, 3\}$

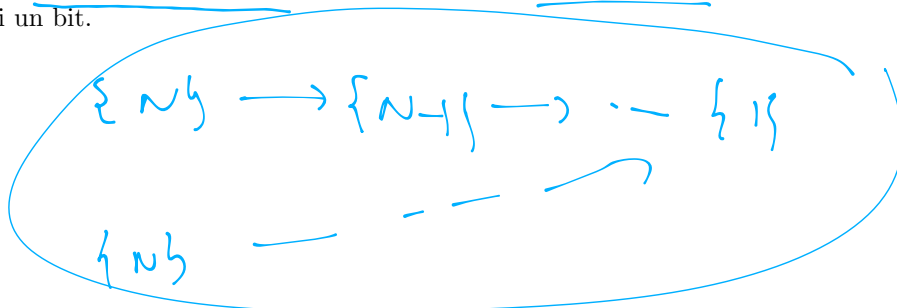
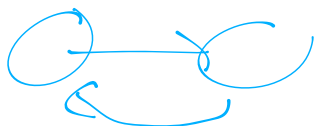
s	χ_T
1	V
2	F
3	V

s	χ
1	V
2	F
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots

$2 \times 2 \times 2$
 $\dots \times 2$
 $= 2^n$

Problema 7. Un algoritmo di compressione senza perdite se i dati originali possono essere perfettamente ricostruiti dal file compresso.

Mostrare per contraddizione che non esiste un algoritmo di compressione senza perdita che riduca la dimensione di ogni file di un bit.



Problema 8. Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$2(n+1)+1 = 2n+3$

P(1): $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$, $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ ✓

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \{ n(2n+1) + 6(n+1) \}}{6}$$

$$(2n+3)(n+2) = \frac{(n+1) \{ 2n^2 + n + 6n + 6 \}}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

✓