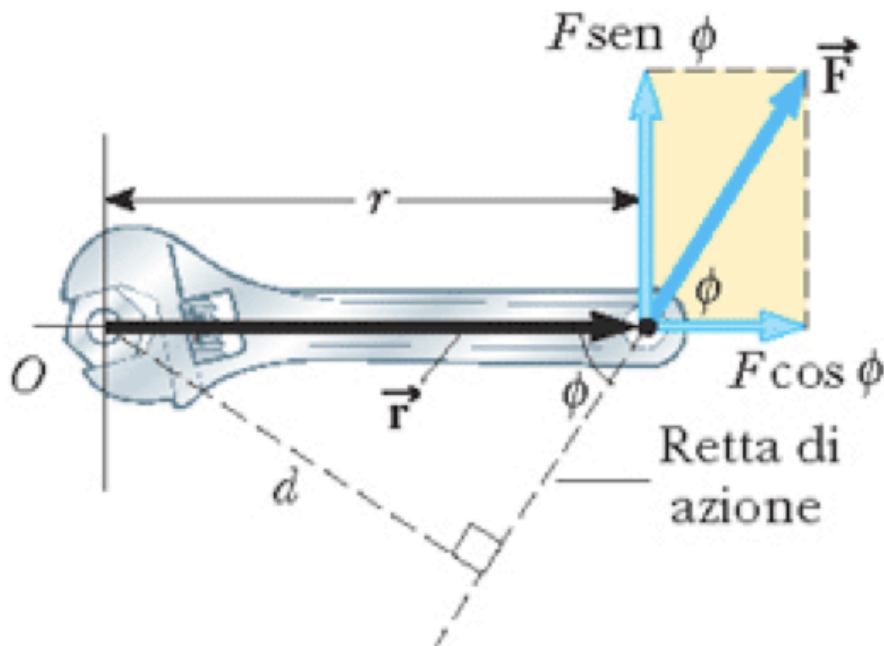


Momento di una forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

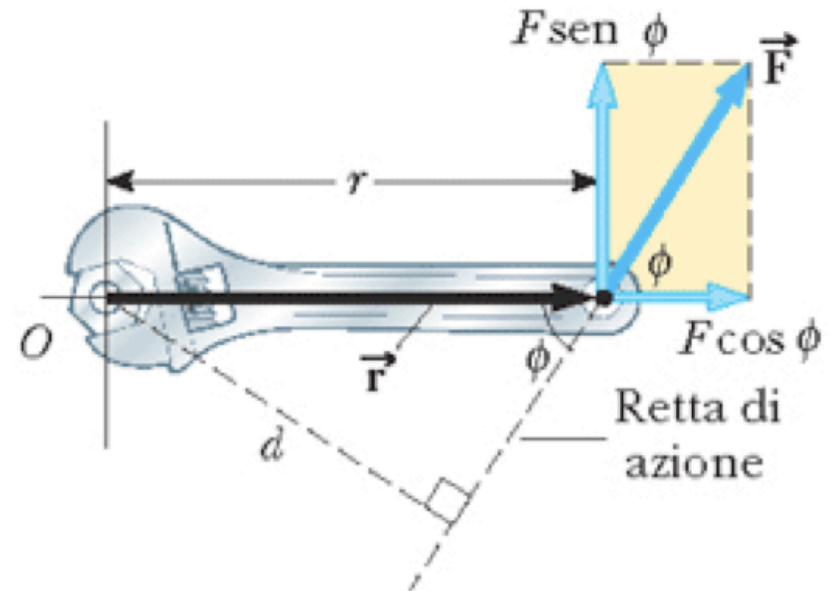
- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, \vec{F}* : è un vettore definito come $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine e dal punto ove la forza è applicata!* (tipicamente, l'origine è scelta su di un asse di rotazione)



- ϕ è l'angolo fra la forza \vec{F} e il vettore \vec{r} fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF \sin \phi = dF$ dove $d = r \sin \phi$ è il *braccio del momento* o della leva

Momento di una forza (2)

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).
- Solo la componente della forza ortogonale a \vec{r} produce momento, ovvero tende a far ruotare un corpo
- La componente lungo \vec{r} della forza *non produce momento*, ovvero non tende a far ruotare un corpo
- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*



Unità SI del momento: $\text{N}\cdot\text{m}$.

Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica *mai* in Joule.

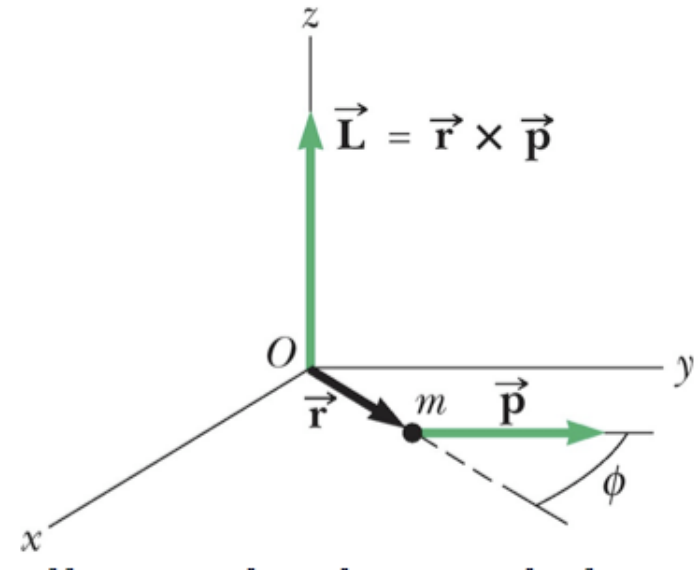
Momento angolare di una particella

Se il momento è l'analogo rotazionale della forza, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto? consideriamo il caso di un punto materiale

Momento angolare: è un vettore, di solito indicato con \vec{l} (o \vec{L} , vedi figura), definito come

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto di una particella.



- E' noto anche come *momento della quantità di moto*
- Il suo valore dipende dalla scelta dell'origine
- E' nullo se $\vec{r} \parallel \vec{p}$, ha modulo $l = rp \sin \phi$, dove ϕ è l'angolo fra \vec{r} e \vec{p} .

Equazioni del moto in forma angolare

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

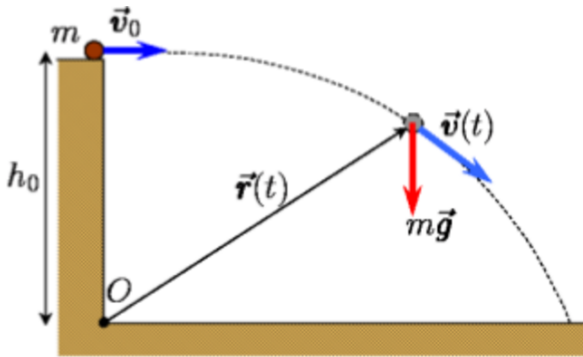
Quindi, $\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}}$, analogo rotazionale della II Legge di Newton.

- Non è una nuova legge fondamentale della dinamica! E' la II legge di Newton, specializzata al caso del moto rotatorio
- \vec{l} e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto agli stessi assi e alla stessa origine fissa; tuttavia la legge vale qualunque siano gli assi e l'origine scelta
- Se $\vec{\tau} = 0$, \vec{l} è costante (analogo rotazionale della I legge di Newton)

Quanto sopra è valido per sistemi di riferimento inerziali

Verifica della II legge in forma angolare

Consideriamo il moto di un proietto come in figura:



$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} ;$$

Calcoliamo ora il momento angolare:

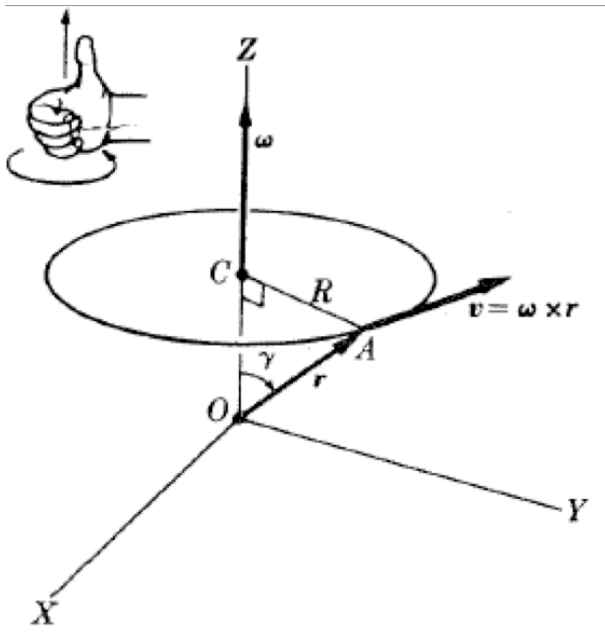
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(xv_y - yv_x)\hat{\mathbf{k}} = -mv_0 \left(h_0 + \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{\mathbf{k}}$$

e il momento della forza di gravità:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g = m\vec{r} \times \vec{g} = -mgx\hat{\mathbf{k}} = -m(v_0gt)\hat{\mathbf{k}}$$

da cui si verifica immediatamente che $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$

II legge in forma angolare e moto circolare uniforme



Nel moto circolare uniforme, la forza centripeta \vec{F}_c ha momento nullo (calcolato rispetto al punto C , centro di rotazione):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_c = 0, \text{ da cui } \frac{d\vec{l}}{dt} = 0.$$

Il vettore \vec{l} (pure calcolato rispetto al punto C) è quindi costante, con modulo $l = mvR = m\omega R^2$, direzione ortogonale al

piano, verso secondo la regola della mano destra: $\vec{l} = mR^2\vec{\omega} \equiv I\vec{\omega}$.

Rispetto ad un punto generico sull'asse, da $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ si trova

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega}r^2 - m\vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$$

da cui $\vec{l} = \vec{l}_a + \vec{l}_\perp$ dove $\vec{l}_a = m\vec{\omega}r_\perp^2 = mR^2\vec{\omega}$ è parallelo all'asse di rotazione,

$\vec{l}_\perp = -m\vec{r}_\perp(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$ ortogonale. Vale $\frac{d\vec{l}_\perp}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{l}_\perp$, da cui si trova $\frac{d\vec{l}_\perp}{dt} = \vec{\tau}$.

Momento angolare di un sistema di particelle

Il momento angolare di un sistema di particelle, che indichiamo con \vec{L} , è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni particella:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i$$

Differenziando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^{(ext)} = \vec{\tau}^{(ext)}$$

dove $\vec{\tau}^{(ext)}$ è la somma vettoriale dei momenti *delle sole forze esterne*. Analogamente al caso della quantità di moto, la somma dei momenti delle forze interne è nulla: per ogni coppia i, j di particelle, vale $\vec{\tau}_{ij}^{(int)} + \vec{\tau}_{ji}^{(int)} = 0$, perché $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ e $\vec{F}_{ji}^{(int)}$ sono *uguali in modulo*, giacciono *sulla stessa retta*, ma con *verso opposto*.

Momento angolare di un corpo rigido

Per un corpo rigido, il momento angolare totale diventa un integrale.
Per un disco sottile, il momento angolare \vec{L} (rispetto al centro di rotazione) vale

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \vec{\omega} \equiv I \vec{\omega}$$

dove I è il momento d'inerzia del disco attorno all'asse di rotazione. In generale possiamo scrivere, per la proiezione L_a del momento angolare lungo l'asse di rotazione, $L_a = I\omega$. Questo è l'analogo rotazionale della relazione $\vec{p} = m\vec{v}$ fra quantità di moto e velocità.

La relazione fra momento e accelerazione angolare:

$$\frac{dL_a}{dt} = I\alpha = \sum \tau_{ext,a}$$

valida per asse di rotazione fisso, è l'analogo rotazionale di $m\vec{a} = \vec{F}$.

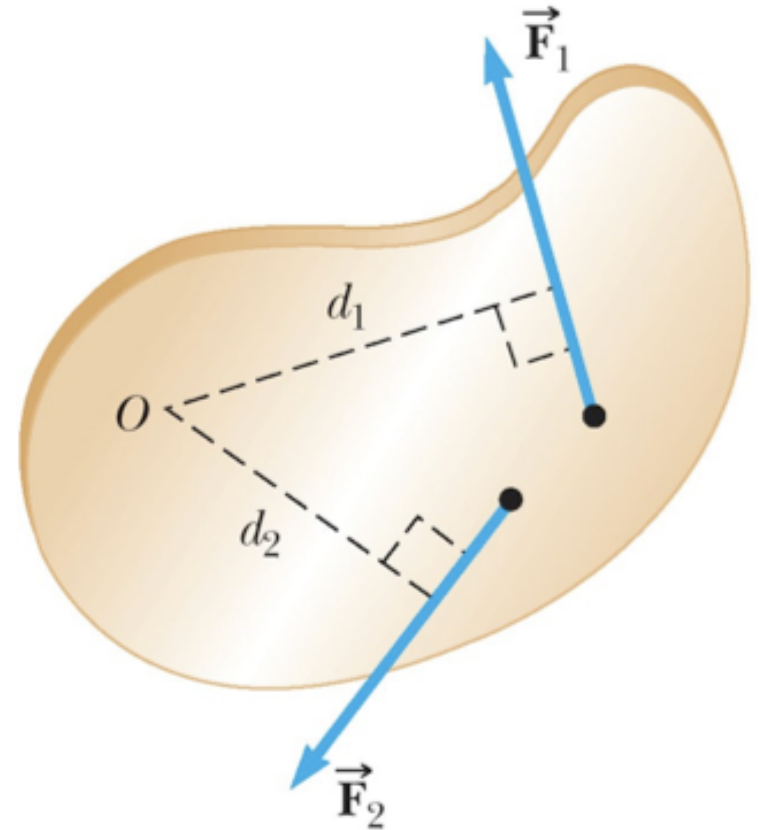
Momento risultante

Il momento totale (o risultante) agente su di un corpo è la *somma vettoriale* $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ dei momenti (delle sole forze esterne). Notare che se $\sum_i \vec{F}_i = 0$, il momento totale è *indipendente dall'origine scelta*.

Si parla di *coppia* di forze per due forze parallele e opposte applicate a distanza d l'una dall'altra. Una coppia ha momento $\tau = Fd$, diretto ortogonalmente al piano identificato delle due forze (e indipendente dalla scelta dell'origine). Una coppia di forze provoca una rotazione di un corpo ma non provoca alcuno spostamento del suo centro di massa.

Equilibrio di un corpo rigido

- Nell'esempio accanto, la forza \vec{F}_1 tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo, la forza \vec{F}_2 a causare una rotazione oraria.
- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il vettore $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano.



Le condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido sono quindi

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è *conservato* se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\vec{L} = \text{costante} \implies \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

durante un processo in cui non agiscano momenti esterni.

Ciò rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo. Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

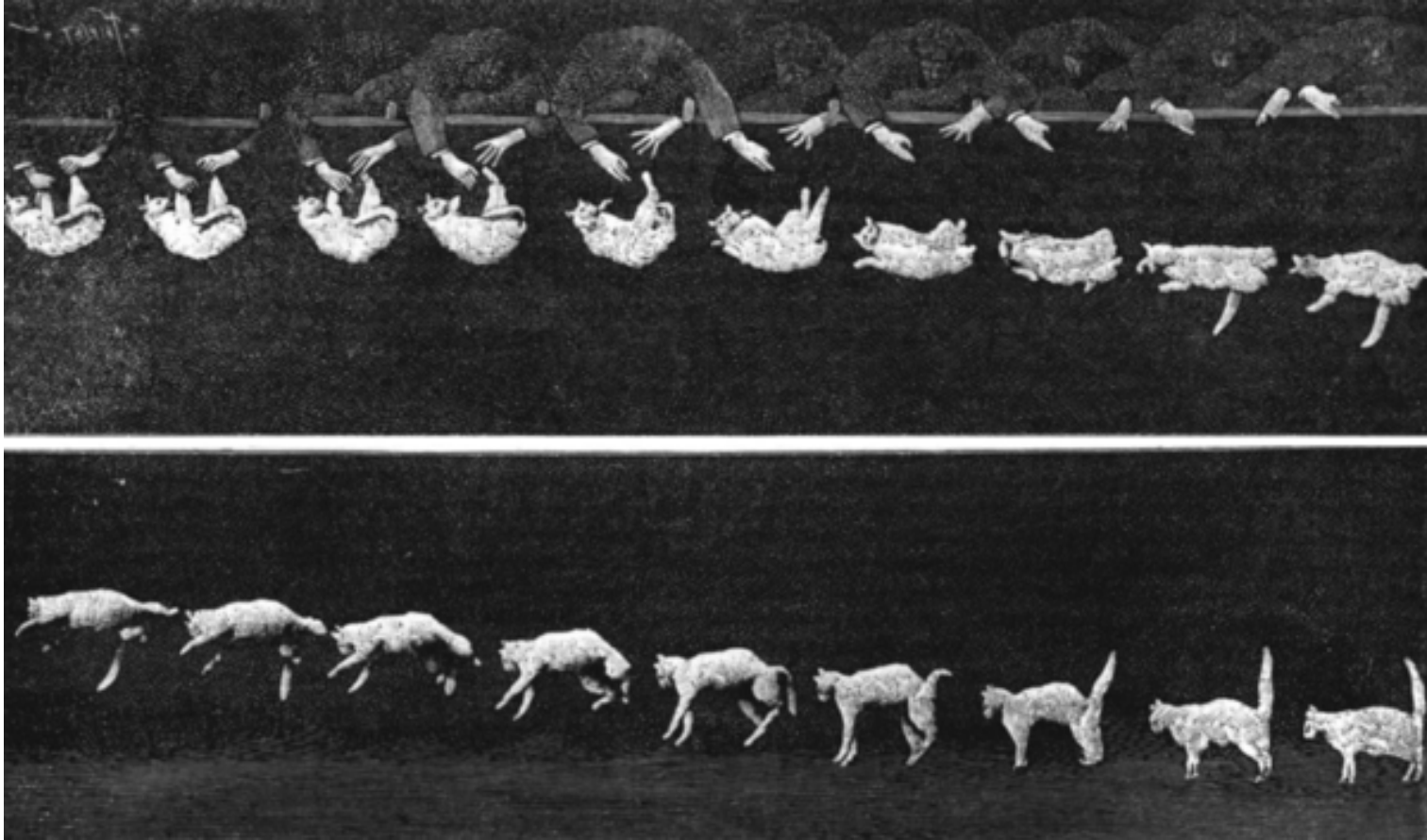
$$L = I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

dove $I_{i,f}$ sono i momenti d'inerzia iniziale e finale, $\omega_{i,f}$ le velocità angolari iniziale e finale. Se $I_f > I_i$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa.



Conservazione del momento angolare II

La conservazione del momento angolare è una legge fondamentale che dispiega i suoi effetti dalle stelle di neutroni alle particelle subnucleari...



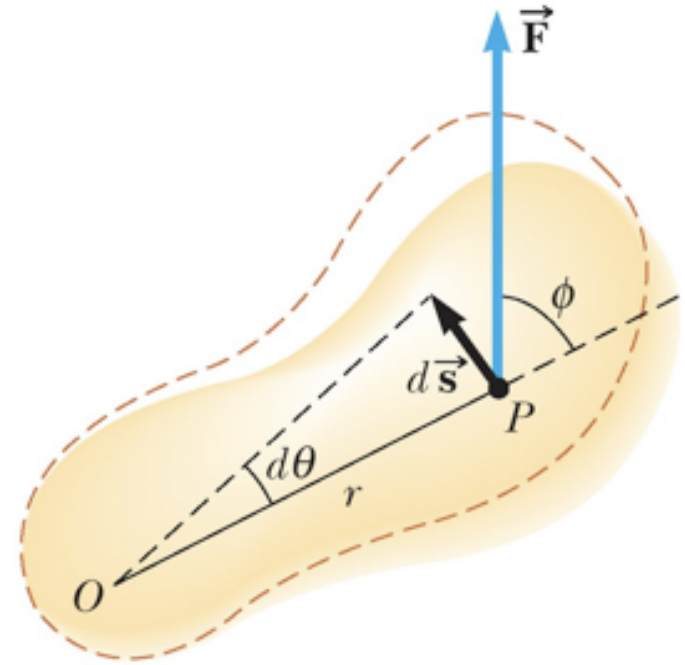
...e anche sui gatti, che sanno come girarsi in volo e atterrare sulle zampe senza violare la legge di conservazione del momento angolare. La cosa è ovviamente possibile perché il gatto non è un corpo rigido!

Lavoro nel moto rotazionale

Qual è il lavoro (W) fatto da una forza su di un corpo che sta ruotando?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi)(r d\theta) = \tau_a d\theta$$

La componente radiale della forza, $F \cos \phi$, non fa lavoro perché ortogonale allo spostamento



Teorema dell'energia cinetica, versione "rotazionale":

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_a d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \Delta K_R \quad , \quad K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

In presenza di traslazioni e rotazioni: $W = \Delta K + \Delta K_R$.

Potenza nel moto rotazionale

Il lavoro fatto per unità di tempo è detto *potenza*:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau_a \frac{d\theta}{dt} = \tau_a \omega.$$

Questo è l'analogo per il moto rotatorio di $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Più in generale si può scrivere $\mathcal{P} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$