

Indice

CAP 1. RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE, GEOMETRIA E CALCOLO DIFFERENZIALE.....	1
1.1. VETTORI – SPAZI VETTORIALI.....	1
1.2. MATRICI – OPERAZIONI.....	5
1.2.1. <i>Formule di inversione di matrici</i>	7
1.3. RANGO, OPERATORI LINEARI, TRASFORMAZIONI.....	8
1.4. TRASFORMAZIONI LINEARI.....	12
1.5. AUTOVALORI E AUTOVETTORI.....	13
1.5.1. <i>Calcolo degli autovalori</i>	13
1.5.2. <i>Calcolo degli autovettori</i>	14
1.6. FORMA DI JORDAN.....	16
1.7. NOTE SULLE MATRICI.....	19
1.8. NUMERI COMPLESSI, OPERAZIONI E PROPRIETÀ.....	21
1.9. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI.....	23
1.10. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL 1° ORDINE.....	24
1.11. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DEL 2° ORDINE.....	26
1.12. EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE.....	30
 CAP 2. ANALISI DEI SISTEMI.....	 33
2.1. DEFINIZIONE DI SISTEMA.....	33
2.2. CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI.....	35
2.2.1. <i>Statico-Dinamico</i>	35
2.2.2. <i>Monovariabile-Multivariabile</i>	35
2.2.3. <i>Lineare-Non lineare</i>	36
2.2.4. <i>Invariante-Variante</i>	36
2.2.5. <i>Continuo-Discreto</i>	37
2.2.6. <i>Strettamente proprio-Proprio</i>	37
2.2.7. <i>A dimensione finita-A dimensione infinita</i>	37
2.2.8. <i>Deterministici-Stocastici</i>	37
2.3. CONTROLLO DEI SISTEMI.....	38
2.3.1. <i>Strategie di controllo</i>	38
2.4. LINEARIZZAZIONE.....	41
2.4.1. <i>Espansione in serie di Taylor</i>	42
 CAP 3. TRASFORMATATA DI LAPLACE.....	 49
3.1. DEFINIZIONE DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE.....	49
3.2. PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATATA DI LAPLACE.....	52
3.3. SEGNALI CANONICI.....	59
3.3.1. <i>Funzione gradino unitario</i>	59
3.3.2. <i>Funzione impulso o delta di Dirac</i>	60
3.4. USO DELLA <i>LT</i> PER LA SOLUZIONE DI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI.....	63
3.4.1. <i>Scomposizione in fratti semplici</i>	64
3.5. TABELLA DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE PIÙ COMUNI.....	72
 CAP 4. FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.....	 75
4.1. FUNZIONE DI TRASFERIMENTO PER SISTEMI LINEARI.....	75
4.2. DIAGRAMMI A BLOCCHI.....	81
4.3. SISTEMI IN RETROAZIONE.....	83
4.3.1. <i>Retroazione unitaria</i>	84
4.3.2. <i>Retroazione non unitaria</i>	85
4.3.3. <i>Sistemi con disturbi</i>	86
4.4. ANALISI DI UN SISTEMA CON I DIAGRAMMI A BLOCCHI.....	87

CAP 5. VARIABILI DI STATO.....	93
5.1. RAPPRESENTAZIONE DI SISTEMI LINEARI TRAMITE VARIABILI DI STATO.....	93
5.2. VARIABILI DI STATO DALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI.....	95
5.2.1. <i>Senza derivate di variabili di ingresso</i>	95
5.2.2. <i>Con derivate di variabili di ingresso</i>	96
5.3. SOLUZIONE DEL SISTEMA IN FORMA DI VARIABILI DI STATO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.....	101
5.4. SOLUZIONE DEL SISTEMA IN FORMA DI VARIABILI DI STATO NEL DOMINIO DEL TEMPO.....	103
5.4.1. <i>Trasformata di Laplace</i>	103
5.4.2. <i>Espansione in serie di potenze</i>	104
5.4.3. <i>Riduzione alla forma diagonale o a quella di Jordan</i>	104
5.4.4. <i>Teorema di Caley-Hamilton (1.5.)</i>	108
5.5. PROPRIETÀ DELLA MATRICE DI TRANSIZIONE DELLO STATO.....	110
5.6. SOLUZIONE GENERALE DI UN SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE.....	111
5.7. RISPOSTE DI UN SISTEMA AGLI INGRESSI CANONICI.....	112
 CAP 6. STABILITÀ.....	 113
6.1. INTRODUZIONE.....	113
6.2. STABILITÀ DEI MOVIMENTI.....	116
6.3. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI.....	118
6.4. METODO DI LYAPUNOV.....	123
6.5. STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI.....	126
6.6. STABILITÀ MEDIANTE MATRICI/FUNZIONI DI TRASFERIMENTO.....	128
6.7. CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ.....	132
6.8. ESEMPI DI SINTESI DI SISTEMA DI CONTROLLO PER LA STABILITÀ(MOLTO IMPORTANTE)	136
 CAP 7. CONTROLLABILITÀ E OSSERVABILITÀ.....	 141
7.1. CONTROLLABILITÀ E RAGGIUNGIBILITÀ.....	141
7.2. OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ.....	147
7.3. SCOMPOSIZIONE CANONICA.....	150
7.4. REALIZZAZIONE MINIMA.....	154
7.5. SISTEMI INTERCONNESSI.....	157
 CAP 8. RISPOSTA TEMPORALE.....	 161
8.1. RISPOSTA A REGIME.....	162
8.1.1. <i>Strutture possibili</i>	162
8.1.2. <i>Funzioni d'ingresso</i>	163
8.1.3. <i>Errore a regime</i>	164
8.1.4. <i>Ordine della FdT</i>	167
8.1.5. <i>Errore a regime in risposta al gradino unitario</i>	168
8.1.6. <i>Errore a regime in risposta al segnale rampa</i>	170
8.2. RISPOSTA TRANSITORIA.....	172
8.2.1. <i>Risposta transitoria per sistemi del 1° ordine</i>	173
8.2.2. <i>Risposta transitoria per sistemi del 2° ordine</i>	177
8.3. INFLUENZA DEGLI ZERI SULLA RISPOSTA TEMPORALE.....	183
8.3.1. <i>Sistemi del primo ordine con uno zero</i>	183
8.3.2. <i>Sistemi del secondo ordine con uno zero</i>	184
8.4. SISTEMI DI ORDINE SUPERIORE.....	188
 CAP 9. RISPOSTA IN FREQUENZA.....	 193
9.1. TRASFORMATI DI FOURIER.....	193
9.1.1. <i>Trasformata serie di Fourier</i>	193
9.1.2. <i>Trasformata continua di Fourier</i>	194
9.2. IDENTIFICAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA.....	196
9.3. DIAGRAMMI DI BODE.....	200

9.3.1. Introduzione ai diagrammi di Bode.....	200
9.3.2. Regole per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo.....	207
9.3.3. Regole per il tracciamento del diagramma asintotico della fase.....	212
9.3.4. Procedura per la costruzione dei diagrammi di Bode.....	217
9.4. DIAGRAMMI DI NYQUIST.....	221
9.4.1. Introduzione ai diagrammi polari.....	221
9.4.2. Tracciamento di diagrammi polari.....	224
9.4.3. Regole generali per la costruzione dei diagrammi polari.....	228
9.5. RISPOSTA IN FREQUENZA PER CASI PARTICOLARI.....	232
9.5.1. Termine di ritardo.....	232
9.5.2. Sistemi instabili.....	234
9.5.3. Sfasamento non minimo.....	236
9.6. RISPOSTA IN FREQUENZA E PARAMETRI TEMPORALI.....	239
9.6.1. Parametri di progetto dalla risposta in frequenza.....	239
9.6.2. Parametri a regime dalla risposta in frequenza.....	241
CAP 10. INTRODUZIONE AL CONTROLLO.....	243
10.1. PROBLEMA DEL PENDOLO.....	243
10.1.1. Analisi del sistema.....	244
10.1.2. Controllo del sistema.....	246
10.1.3. Controllo del sistema non in posizione di equilibrio.....	251
10.1.4. Diagramma a blocchi completo.....	257
10.2. PRESTAZIONI DEL CONTROLLORE.....	259
10.3. CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO.....	261
10.3.1. Condizioni nominali.....	261
10.3.2. Condizioni non nominali.....	264
10.3.3. Struttura generale del controllore.....	265
CAP 11. LUOGO DELLE RADICI.....	267
11.1. DEFINIZIONI E PROPRIETÀ.....	267
11.2. COSTRUZIONE DEL LUOGO DELLE RADICI DIRETTO.....	271
11.3. ESEMPI DI TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI.....	282
11.4. COSTRUZIONE DEL LUOGO DELLE RADICI INVERSO.....	289
CAP 12. CRITERIO DI NYQUIST.....	295
12.1. TEOREMA DI CAUCHY.....	295
12.2. SCELTA DEI PARAMETRI.....	297
12.3. CRITERIO DI NYQUIST.....	303
12.4. STABILITÀ IN CONDIZIONI PERTURBATE.....	306
12.5. MARGINI DI STABILITÀ.....	309
12.5.1. Margine di guadagno.....	310
12.5.2. Margine di fase.....	312
12.6. NOTE SUI MARGINI DI STABILITÀ.....	314
12.6.1. Stabilità, instabilità e stabilità marginale.....	314
12.6.2. Influenza del guadagno.....	315
12.6.3. Presenza di ritardi nell'anello.....	318
12.6.4. Sistemi a sfasamento non minimo.....	320
12.6.5. Relazione con lo smorzamento.....	323
12.6.6. Relazione con la banda passante.....	324
12.6.7. Sistemi a stabilità condizionata.....	326
CAP 13. CONTROLLO E CONTROLLORI PID.....	329
13.1. ESEMPI DI CONTROLLO TRAMITE IL LUOGO DELLE RADICI.....	329
13.1.1. Stabilizzazione.....	329
13.1.2. Rispetto delle specifiche.....	333
13.2. I CONTROLLORI PID.....	345

13.2.1. Azione Proporzionale.....	345
13.2.2. Azione Integrale.....	346
13.2.3. Azione Proporzionale-Integrale.....	347
13.2.4. Azione Proporzionale-Derivativa.....	347
13.2.5. Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa.....	348
13.3. NOTE SUI CONTROLLORI PID.....	350
13.3.1. Struttura I-PD.....	350
13.3.2. Fenomeno del wind-up.....	350
13.3.3. Possibile implementazione.....	352
13.4. IL METODO DI ZIEGLER-NICHOLS.....	354
13.4.1. Metodo del gradino in anello aperto.....	354
13.4.2. Metodo dell'aumento del guadagno in ciclo chiuso.....	355
14. RETI CORRETTRICI.....	359
14.1. RETI CORRETTRICI PIÙ COMUNI.....	359
14.2. RETI ANTICIPATRICI.....	362
14.2.1. Implementazione di una rete anticipatrice.....	365
14.2.2. Regole per il progetto di una rete anticipatrice.....	366
14.2.3. Esempio di progetto di una rete anticipatrice.....	366
14.3. RETI RITARDATRICI.....	370
14.3.1. Implementazione di una rete ritardatrice.....	372
14.3.2. Regole per il progetto di una rete ritardatrice.....	373
14.3.3. Esempio di progetto di una rete ritardatrice.....	373
14.4. RETI A SELLA.....	377
14.4.1. Implementazione di una rete a sella.....	380
15. ASSEGNAZIONE DEI POLI.....	383
15.1. APPROCCIO TRAMITE L'EQUAZIONE DIOFANTINA.....	383
15.2. RETROAZIONE DELLO STATO.....	388
15.2.1. Retroazione dello stato con controllo integrale.....	395
15.3. STIMATORI O OSSERVATORI DELLO STATO.....	397
15.3.1. L'osservatore di Luenberger.....	397
CAP. 16. ESEMPIO: SOSPENSIONI BUS.....	401
16.1. DESCRIZIONE DEL PROBLEMA E REQUISITI DI PROGETTO.....	401
16.2. REALIZZAZIONE DEL MODELLO TRAMITE FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.....	403
16.2.1. Inserimento delle equazioni in MATLAB.....	404
16.2.2. Risposta ad anello aperto.....	404
16.3. REALIZZAZIONE DEL MODELLO TRAMITE VARIABILI DI STATO.....	407
16.3.1. Inserimento delle equazioni in MATLAB.....	408
16.3.2. Risposta ad anello aperto.....	409
16.4. CONTROLLO DEL SISTEMA IN RETROAZIONE: REGOLATORI PID.....	411
16.4.1. Schema a ciclo chiuso.....	411
16.4.2. Inserimento delle equazioni del sistema controllato in MATLAB.....	412
16.4.3. Diagramma della risposta a ciclo chiuso.....	412
16.5. CONTROLLO DEL SISTEMA IN RETROAZIONE: TECNICA DEL LUOGO DELLE RADICI.....	415
16.5.1. Diagramma del luogo delle radici.....	415
16.5.2. Inserimento del compensatore.....	416
16.5.3. Diagramma della risposta a ciclo chiuso.....	419
16.6. CONTROLLO DEL SISTEMA IN RETROAZIONE: RETI CORRETTRICI.....	421
16.6.1. Diagramma della risposta di frequenza.....	421
16.6.2. Inserimento di un regolatore con doppia rete anticipatrice.....	422
16.6.3. Diagramma della risposta a ciclo chiuso.....	423
16.7. CONTROLLO DEL SISTEMA IN RETROAZIONE: RETROAZIONE DELLO STATO.....	426
16.7.1. Progettazione del controllore in retroazione dello stato.....	426
16.7.2. Tracciato della risposta a ciclo chiuso.....	428
16.8. PROGETTO DELLA SOSPENSIONE DI UN BUS IN SIMULINK.....	429
16.8.1. Sviluppo del modello.....	429

16.8.2.	<i>Risposta ad anello aperto.....</i>	434
16.8.3.	<i>Estrazione del modello lineare in MATLAB.....</i>	434
16.8.4.	<i>Implementazione della retroazione completa dello stato.....</i>	436
16.8.5.	<i>Risposta a ciclo chiuso.....</i>	441
16.9.	<i>ANIMAZIONI.....</i>	443
16.9.1.	<i>Il menù delle animazioni.....</i>	443
16.9.2.	<i>Modello in anello aperto tramite FdT.....</i>	443
16.9.3.	<i>Modello in anello aperto tramite variabili di stato.....</i>	444
16.9.4.	<i>Controllori PID.....</i>	444
16.9.5.	<i>Controllo con la tecnica del luogo delle radici.....</i>	445
16.9.6.	<i>Reti correttrici.....</i>	447
16.9.7.	<i>Controllo con retroazione dello stato.....</i>	448

Cap 1. Richiami di algebra lineare, geometria e calcolo differenziale

In questo capitolo vengono richiamati alcuni concetti di algebra lineare, geometria e calcolo differenziale che risultano essere importanti strumenti per affrontare gli argomenti sviluppati in seguito.

1.1. Vettori – Spazi vettoriali

Definizione – Spazio vettoriale

Si definisce **spazio vettoriale** (\mathbf{V}) su \mathbb{R} reale(o \mathbb{C} complesso) un insieme di elementi (vettori) dotato di:

a) Somma $\bar{v}_1 \in \mathbf{V}, \bar{v}_2 \in \mathbf{V} \Rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in \mathbf{V}$

b) Prodotto $\bar{v} \in \mathbf{V}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \bar{v} \in \mathbf{V}$

c) Esistenza dello zero

$$\exists \text{ un elemento di } \mathbf{V} \text{ (zero di } \mathbf{V} \text{) } \bar{0} \text{ tale che } \bar{0} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{0} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in \mathbf{V}$$

In modo da verificare le seguenti condizioni:

1) Associatività della somma

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbf{V}$$

2) Esistenza dell'opposto

$$\forall \bar{v} \in \mathbf{V} \exists \bar{v}' \in \mathbf{V} \text{ (opposto di } \bar{v} \text{) tale che } \bar{v} + \bar{v}' = \bar{0}$$

3) Commutatività della somma

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbf{V}$$

4) Associatività del prodotto

$$(\lambda_1 \lambda_2) \bar{v} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{v}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{v} \in \mathbf{V}$$

5) Distributività della somma rispetto al prodotto

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{v} = \lambda_1 \bar{v} + \lambda_2 \bar{v} \quad \text{e} \quad \lambda (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \lambda \bar{v}_1 + \lambda \bar{v}_2$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbf{V}$$

6) Invarianza del prodotto per l'unità

$$1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in \mathbf{V}$$

Esempi:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 + j3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

Definizione – Sottospazio vettoriale

Si definisce come **sottospazio vettoriale** il sottoinsieme di uno *spazio vettoriale* \mathbf{V} i cui elementi rispettino le condizioni imposte dalla definizione di *spazio vettoriale*.

Esempio:

$$\text{Dati } \bar{a}_1 \in \mathbb{R}^n, \bar{a}_2 \in \mathbb{R}^n \text{ e due scalari } (\alpha_1, \alpha_2) \\ \bar{v} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 \text{ è un sottospazio in } \mathbb{R}^n \text{ scritto come } H = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}.$$

Le dimensioni di un *sottospazio* sono date dal numero minimo di vettori necessari a formare il *sottospazio*.

Un *sottospazio* è uno *spazio vettoriale*.

Definizione – Dipendenza lineare

Dati n vettori $\bar{v}_i \in \mathbf{V}$ e n scalari $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, si dice che tali vettori sono:

a) **Linearmente indipendenti** se

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

b) **Linearmente dipendenti** se

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n = 0$$

con almeno un set non nullo di scalari.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{linearmente indipendenti}$$

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{0} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 1$$

linearmente dipendenti

Definizione – Dimensione di un sottospazio

La **dimensione** di un sottospazio è data dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti selezionabili dal sottospazio stesso.

Esempio:

I vettori $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Sono linearmente indipendenti
- Definiscono un sottospazio \mathbb{R}^2

Definizione – Prodotto scalare

Si definisce **prodotto scalare** (*canonico*) di due vettori non nulli $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{V}$ la funzione $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

che gode delle seguenti proprietà:

- $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v} \quad (\bar{v} \cdot \bar{w} = \overline{\bar{w} \cdot \bar{v}})$
- $(\bar{v} + \bar{w}) \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{w} \cdot \bar{u}, \quad \bar{u} \in \mathbf{V}$
- $(k\bar{v}) \cdot \bar{w} = k(\bar{v} \cdot \bar{w}), \quad k \text{ scalare}$
- $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, uguale a zero se e solo se \bar{v} è il vettore nullo

Definizione – Prodotto vettoriale

Si definisce **prodotto vettoriale** (o *esterno*) di due vettori non nulli e non paralleli $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore:

$$\bar{v} \times \bar{w} = \bar{v} \wedge \bar{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto vettoriale è tale che:

- $\bar{v} \times \bar{w}$ è ortogonale sia a \bar{v} che a \bar{w}
- $(\bar{v} \times \bar{w}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ i due vettori sono linearmente dipendenti
- $\bar{v} \times \bar{w} = -\bar{w} \times \bar{v}$
- $\bar{v} \times (\bar{w} \times \bar{u}) \neq (\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{u}$

Definizione – Vettori ortogonali

Due vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbf{V}$ si dicono **ortogonali** se il loro prodotto scalare fornisce il vettore nullo:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \mathbf{0}$$

Definizione – Base di V^m

Una **base** di un sottospazio V^m ad m dimensioni è un insieme di m vettori, $\bar{v}_i \in V^m$ linearmente indipendenti e tali che ogni $\bar{v}^* \in V^m$ si può ottenere come loro combinazione lineare; dato un vettore $\bar{v}^* \in V^m$ esiste un'unica rappresentazione tale che:

$$\bar{v}^* = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots a_m \bar{v}_m \in V^m$$

La scelta della **base** di un sottospazio è arbitraria, basta che soddisfi la definizione

Definizione – Base ortogonale

Una base di uno spazio vettoriale V^m si dice **ortogonale** se i suoi elementi sono a due a due ortogonali:

$$\text{Base ortogonale} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in } V^2$$

Si dice **ortonormale** se è ortogonale ed ogni suo vettore ha norma uguale a 1:

$$\text{Base ortonormale} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in } V^2$$

1.2. Matrici – Operazioni

Una matrice A ($p \times q$) è ottenibile come prodotto esterno di 2 vettori \bar{v}_1 ($p \times 1$), \bar{v}_2 ($1 \times q$)

$$A = \bar{v}_1 \bar{v}_2$$

Le matrici possono essere divise in funzione delle loro dimensioni in:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} A \quad (n \times n) \quad \text{quadrata}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} A \quad (n \times m) \quad , \quad \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} B \quad (p \times q) \quad \text{rettangolari}$$

Definizione – Matrice trasposta

Data una matrice $A = [a_{ij}]_n^m$ si dice **matrice trasposta** di A la matrice che si ottiene scambiando fra loro le righe e le colonne:

$$A^T = [a_{ji}]_n^m = [a_{ij}]_m^n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Definizione – Matrice simmetrica/antisimmetrica

Una matrice quadrata si dice:

$$\begin{array}{ll} \text{simmetrica} & \text{se } A^T = A \\ \text{antisimmetrica} & \text{se } A^T = -A \end{array}$$

Definizione – Determinante

Data una matrice quadrata A ($n \times n$) ad essa è associato il **determinante** di A definito dal seguente algoritmo ricorsivo:

per prima cosa definiamo il **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} come il termine ottenuto dal determinante della matrice A eliminandone la riga i -esima e la colonna j -esima moltiplicato per $(-1)^{i+j}$:

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Allora, se $n = 1$ si pone:

$$\det(A) = a_{11}$$

e se $n > 1$ si definisce

$$\det(A) = |A| = \sum_{h=1}^n a_{ih} \cdot \hat{a}_{ih}$$

Il **determinante** gode della seguente proprietà:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Definizione – Matrice inversa

Data una matrice quadrata A ($n \times n$) si definisce **matrice inversa** di A , la matrice A^{-1} ($n \times n$) tale che:

$$A^{-1}A = A A^{-1} = I_n$$

Definizione – Matrice degli aggiunti

La $Adj(A)$, **matrice degli aggiunti** di A ($n \times n$), è la matrice composta dagli elementi a'_{ij} ottenuti dalla relazione:

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

dove A_{ji} è la sottomatrice ($(n-1) \times (n-1)$) che rimane togliendo ad A la riga j -esima e la colonna i -esima.

Da questa definizione si può ottenere una relazione per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata, utilizzando il determinante della matrice stessa:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 4 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Definizione – Matrice singolare

Si definisce **matrice singolare** la matrice A per la quale $\det(A) = 0$ e quindi non esiste l'inversa A^{-1} ; in caso contrario la matrice viene detta **non-singolare** o **invertibile**.

Esiste un'importante relazione fra l'invertibilità di una matrice e la soluzione di sistemi lineari quadrati come indicato nel seguente

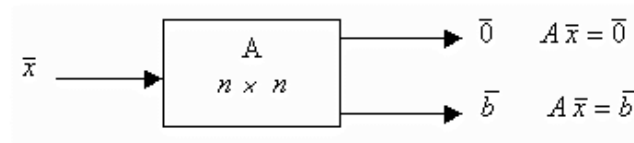
Teorema 1.1.

Data una matrice quadrata A ($n \times n$) ciascuna delle sei affermazioni che seguono implica le altre cinque:

- 1) A è invertibile (non singolare)
- 2) L'unica soluzione di $A\bar{x} = \bar{0}$ è $\bar{x} = \bar{0}$
- 3) Il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha un'unica soluzione $\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \quad \forall \bar{b} \in \mathbf{V}^n$
- 4) A è equivalente, in riga, a I_n
- 5) Le righe (colonne) di A sono linearmente indipendenti
- 6) $\det(A) \neq 0$

Da questo teorema si possono dedurre due osservazioni:

- a) Se $A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n]$ e $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$ solo per $\bar{x} = \bar{0}$, allora gli $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ sono una base di un sottospazio di dimensione n , essendo n -vettori linearmente indipendenti
- b) La matrice A può essere vista come una *Trasformazione*



1.2.1. Formule di inversione di matrici

Sia data una matrice A , quadrata e partizionata:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

in cui A_{11} , A_{22} sono sottomatrici quadrate; supposto poi che $|A_{11}| \neq 0$, si può scrivere:

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

con

$$\Delta = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

Si deduce che A è non singolare se e solo se lo è Δ , detta **complemento** di A_{11} in A .
In modo simile si procede per:

$$\hat{\Delta} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

dove, ovviamente, la (1.1.) ha gli elementi trasposti.

Nel caso in cui A sia triangolare, la (1.1.) si semplifica producendo:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

Supponendo quindi che A_{11} e A_{22} siano entrambe non singolari, si ha:

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

e

$$\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$$

1.3. Rango, operatori lineari, trasformazioni

Il calcolo del numero di righe (colonne) linearmente indipendenti riguarda in generale matrici rettangolare; per il suo calcolo risulta importante introdurre la nozione di *rango*.

Definizione – Rango

Il **rango** di una generica matrice A ($m \times n$) è dato dal numero di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Per il *rango* valgono le seguenti proposizioni:

- 1) $\text{rango}(A) \equiv$ numero di righe linearmente indipendenti
- 2) $\text{rango}(A) \equiv$ numero di colonne linearmente indipendenti
- 3) $\text{rango}(A) \equiv \text{rango}(A^T)$
- 4) $\text{rango}(A) \leq \min(m, n)$
- 5) Se $m = n$, esiste $A^{-1} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = n$
- 6) Il *rango* è invariante rispetto a pre-post moltiplicazioni di A per matrici non singolari
- 7) $\text{rango}(A_1) = \gamma_1, \text{rango}(A_2) = \gamma_2 \Rightarrow \text{rango}(A_1 A_2) \leq \min(\gamma_1, \gamma_2)$.

Definizione – Operatore lineare

Ipotizzando di associare ad A il sistema $A \bar{x} = \bar{b}$, dove $\dim(\bar{x}) = n$ e $\dim(\bar{b}) = m$, A viene anche detta **operatore lineare** del vettore $\bar{x} \Rightarrow \bar{b}$.

Definizione – Sistema omogeneo/non omogeneo

Consideriamo il sistema A ($m \times n$), \bar{x} ($n \times 1$), \bar{b} ($m \times 1$), allora si ha:

$$A \bar{x} = \bar{b} \quad \text{ sistema non omogeneo (non autonomo) } \quad (1.2)$$

$$A \bar{x} = \bar{0} \quad \text{ sistema omogeneo (autonomo) } \quad (1.3)$$

È noto che, dato \bar{b} , per \bar{x} si hanno tre possibilità:

- una soluzione
- infinite soluzioni
- nessuna soluzione

l'equazione (1.2.) si può riscrivere come:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}$$

quindi \bar{b} è una combinazione lineare ovvero:

$$\bar{b} \in \mathbf{V} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$$

Definizione – Spazio immagine

Il sottospazio formato dalle colonne di A , \bar{a}_i , si dice **Spazio immagine** (*Range space* di A)

$$\mathcal{R}(A) \equiv \text{span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$$

Poiché le colonne di A hanno dimensione m , si ha che:

$$\mathcal{R}(A) \in \mathbb{R}^m \quad (\mathbb{C}^m)$$

Proposizione

Il sistema (1.2.) ha soluzione se e solo se:

$$\bar{b} \in \mathcal{K}(A) \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(A) = \text{rango}([A | \bar{b}])$$

La soluzione di (1.2.) ha la formula generale

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h \quad (1.4)$$

dove:

$$\bar{x}_p = \text{Soluzione particolare}$$

$$\bar{x}_h = \text{Soluzione omogenea, cioè } A\bar{x}_h = \bar{0}$$

Si noti che a differenza del caso di equazioni differenziali, dove le condizioni al contorno forniscono l'unicità, la (1.4.) indica un numero infinito di soluzioni.

Definizione – Nullo di A

La soluzione omogenea \bar{x}_h di $A\bar{x}_h = \bar{0}$ forma un sottospazio chiamato **Nullo di A (Kernel)** ovvero:

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{\bar{x}_{h1}, \bar{x}_{h2}, \dots, \bar{x}_{hr}\}$$

dove \bar{x}_{hi} sono r soluzioni linearmente indipendenti e quindi:

$$\mathcal{N}(A) \in \mathbb{R}^r \quad (\mathbb{C}^r)$$

\Rightarrow lo spazio nullo è quindi un sottospazio di \mathbb{R}^n e

$$0 < r \leq n \quad \text{e} \quad r = n \quad \Rightarrow \quad A \equiv 0_{m \times n}$$

A questo punto è possibile trovare una relazione fra $\text{rango}(A)$, posto per ipotesi uguale ad γ , e le dimensioni di $\mathcal{K}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$.

Per definizione è:

$$\text{rango}(A) = \dim \mathcal{K}(A)$$

$$\gamma = N^\circ \text{ di } \bar{a}_i \text{ linearmente indipendenti}$$

$$\text{rango}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n \quad (\gamma + r = n)$$

La verifica su queste affermazioni può essere fatta mediante applicazione di riduzione per riga (colonna) alla matrice A fino a renderla triangolare superiore.

Teorema 1.2.

La soluzione di (1.2.) esiste se e solo se $\bar{b} \in \mathcal{K}(A)$ ed ha la forma:

$$\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h = \bar{x}_p + \mathcal{N}(A)$$

La soluzione è unica se e solo se $\mathcal{N}(A)$ è vuoto, ovvero se $\text{rango}(A)$ è pari a n .

Esempi:

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \bar{x} = \bar{0}$$

$$rango(A) = 3, \dim \mathcal{N}(A) = 1, \infty^1 \text{ soluzioni} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad rango(A) = 2, \dim \mathcal{N}(A) = 1, \infty^2 \text{ soluzioni} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad rango(A) = 3, \dim \mathcal{N}(A) = 0, 0 \text{ soluzioni}$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad rango(A) = 2, \dim \mathcal{N}(A) = 1, \infty^1 \text{ soluzioni} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \bar{b} \quad \text{la soluzione esiste se e solo se}$$

$$\bar{b} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soluzione}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \bar{b} \quad \text{soluzione}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \bar{b} \quad \text{soluzione}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{non esiste soluzione in quanto } \bar{b} \notin \text{span} \mathcal{K}(A) \in \mathbb{R}^3$$

1.4. Trasformazioni lineari

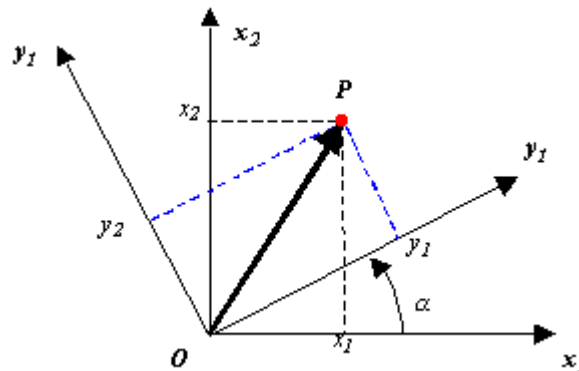
Definizione – Trasformazione lineare

Dato due spazi vettoriali \bar{X} , \bar{Y} si definisce **trasformazione lineare** A la matrice che mappa in modo univoco un vettore in \bar{X} con uno in \bar{Y} secondo la relazione:

$$\bar{x} \in \bar{X}, \bar{y} \in \bar{Y} \Rightarrow \bar{y} = A\bar{x}$$

Esempio:

Trasformazione di coordinate



Considerando il vettore $(\overline{P-O})$ per cui è $|(\overline{P-O})| = r$ si individuano le due rappresentazioni:

$$\bar{x} = (x_1, x_2)^T \quad ; \quad \bar{y} = (y_1, y_2)^T$$

si può scrivere:

$$x_1 = r \sin \alpha, \quad x_2 = r \cos \alpha$$

$$y_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$$

$$y_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

e quindi T è la trasformazione lineare tale che:

$$\bar{y} = T \bar{x} \quad T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Definizione – Trasformazione di similitudine

Una particolare *trasformazione* è la **trasformazione di similitudine**.

Date 2 matrici quadrate A ($n \times n$), B ($n \times n$) $\exists T$ ($n \times n$), $|T| \neq 0$ tale che

$$\begin{cases} B = T^{-1}AT \\ A = TBT^{-1} \end{cases}$$

Esistono particolari *trasformazioni di similitudine* di interesse nell'analisi di sistemi:

1. $A = M^{-1}AM$ $A = \text{diagonale}$
2. $J = P^{-1}AP$ $J = \text{quasi-diagonale}$

1.5. Autovalori e autovettori

Definizione – Autovalori e autovettori

Si supponga di voler risolvere il problema seguente: data una matrice quadrata A ($n \times n$) determinare lo scalare λ ed il vettore $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ (\mathbb{C}^n) tale che valga la relazione

$$A \bar{v} = \lambda \bar{v} \quad \text{ovvero} \quad \lambda \bar{v} = A \bar{v} \quad (1.5)$$

Una prima interpretazione è di tipo geometrico in quanto A è un operatore lineare che trasforma il vettore \bar{v} in sé stesso a meno di un fattore di scala.

Il vettore \bar{v} viene indicato come una **direzionale invariante** di A e si definiscono:

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{autovalore di } A \\ \bar{v} &= \text{autovettore (destro) associato a } \lambda \end{aligned}$$

La (1.5.) può anche essere riscritta come:

$$(\lambda I - A) \bar{v} = 0 \quad (1.6)$$

Affinchè sia $\bar{v} \neq 0$, λ deve essere tale per cui $\text{rango}(\lambda I - A) < n$, ovvero è singolare, ovvero ha determinante nullo, per cui:

$$|\lambda I - A| = \Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (1.7)$$

Definizione – Polinomio caratteristico

$\Delta(\lambda)$ si chiama **polinomio caratteristico** e il suo annullarsi fornisce n autovalori:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \{\lambda_i\}$$

1.5.1. Calcolo degli autovalori

Gli autovalori costituiscono un set di numeri autoconiugati, ovvero numeri reali e numeri complessi e coniugati, quindi:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_i)^r \dots (\lambda - \lambda_k) (\lambda - \lambda_k^*) \dots$$

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 & \text{ reali, distinti, molteplicità algebrica} = 1 \\ \lambda_i & \text{ reale, ripetuto, molteplicità algebrica} = r \\ \lambda_k, \lambda_k^* & \text{ coppia complessa coniugata} \end{aligned}$$

Esempi:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1) (\lambda - 4) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2) (\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3 \quad \lambda_1 = -1 + j\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 - j\sqrt{2}$$

3. Gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi della diagonale stessa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6) \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 6$$

1.5.2. Calcolo degli autovettori

Ad ogni autovalore λ_i corrisponde un autovettore \bar{v}_i (almeno uno).

Esempi:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = 2 \quad (\lambda_1 I - A)\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{v}_1 = 0$$

$$\bar{v}_1 \in \mathcal{N}(\lambda_1 I - A) = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad (\lambda_2 I - A)\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{v}_2 = 0$$

$$\bar{v}_2 \in \mathcal{N}(\lambda_2 I - A) = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2j$$

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2j & 4 \\ -1 & 2j \end{pmatrix} \bar{v}_1 = 0 \quad \bar{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -2j & 4 \\ -1 & -2j \end{pmatrix} \bar{v}_2 = 0 \quad \bar{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} -2j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni autovalore λ_i di molteplicità algebrica 1 esiste un solo autovettore linearmente indipendente; ad una coppia di autovalori complessi e coniugati, corrisponde una coppia di autovettori complessi e coniugati

L'uso di autovettori come *elementi di trasformazione di similitudine* ha elevato l'interesse nell'analisi di sistemi.

Sia A una matrice $(n \times n)$, con autovalori reali e distinti e complessi coniugati $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ e consideriamo la matrice $M = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$; per costruzione $|M| \neq 0$ e prendendo in considerazione la trasformazione di similitudine $M^{-1}AM = \Lambda$ si ha che:

- Λ è una matrice diagonale
- $\lambda_i(\Lambda) = \lambda_i(A)$
- Gli autovalori di Λ sono ottenuti per semplice trasformazione di coordinate
- Λ ha gli autovalori sulla diagonale

Esempi:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \bar{v}) = 2; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}AM = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Considerando il caso di autovalori complessi:

$$A (2 \times 2), \Rightarrow \lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \lambda_2 = \sigma_1 - j\omega_1$$

gli autovettori corrispondenti sono:

$$\bar{v}_1 = \bar{\alpha} + j\bar{\beta}, \quad \bar{v}_2 = \bar{\alpha} - j\bar{\beta}$$

$$3. \text{ Considerando } M = [\bar{v}_1, \bar{v}_2] \Rightarrow M^{-1}AM = \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 + j\omega_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - j\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Considerando } M = [Re(\bar{v}_1), Im(\bar{v}_2)] \Rightarrow M^{-1}AM = \Lambda_b = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

1.6. Forma di Jordan

Definizione – Forma di Jordan

Non sempre è possibile diagonalizzare una matrice; ciò succede, in genere, nel caso in cui vi siano, ad esempio, autovalori a molteplicità $r > 1$ per cui non sia possibile associare r autovettori linearmente indipendenti.

In tal caso è comunque possibile trasformare la matrice in una forma “quasi-diagonale” detta **forma di Jordan**.

Definizione – Molteplicità geometrica

Il numero di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti ad uno stesso autovalore si dice **molteplicità geometrica**; essa eguaglia $\dim[\mathcal{N}(\lambda I - A)]$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

dal calcolo degli autovettori risulta un solo autovettore linearmente indipendente

$$(\lambda I - A) \bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix} \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bar{v} = \bar{0} \quad \bar{v} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{molteplicità geometrica} = 1$$

Teorema 1.3.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia diagonalizzabile è che la molteplicità geometrica e quella algebrica siano uguali.

Nel caso di autovalori distinti, il teorema è banalmente valido; nel caso di autovalori con molteplicità > 1 si consideri:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad (\lambda_1 I - A) \bar{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{v} = 0$$

vi sono 2 autovettori linearmente indipendenti in quanto $\dim \mathcal{N}(\lambda_1 I - A) = 2$

$$\bar{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.4.

Una matrice quadrata A ($n \times n$) avente un autovalore λ_i con molteplicità n può essere trasformata mediante similitudine in una **forma di Jordan**, “quasi-diagonale”, avente nella diagonale l’autovalore λ_i e unità (1) in numero pari alla differenza tra molteplicità algebrica e geometrica.

Esempi:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = A$$

La differenza fra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica non è sufficiente a determinare la forma di Jordan, cioè la matrice di similitudine necessaria alla trasformazione.

Sia A (3×3) tale che $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La struttura della forma di Jordan dipende dalla base usata per la matrice di similitudine P non singolare tale per cui:

$$P^{-1}AP = J$$

Definizione – Matrice modale

Si definisce **matrice modale** la matrice formata da tutti autovalori linearmente indipendenti.

Nel caso precedente solamente la forma J_3 proviene da una soluzione di $(\lambda I - A)\bar{v} = \bar{0}$ che produca 3 autovettori linearmente indipendenti $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ ovvero $\bar{v}_i \in \text{span}\{\mathcal{H}(\bullet)\}$.

Nel caso J_1 esiste un solo autovettore linearmente indipendente, nei casi J_2^1, J_2^2 ne esistono due.

Definizione – Autovettori generalizzati

Le colonne mancanti (2 per J_1), (1 per J_2^1, J_2^2) a formare l'appropriata P sono i cosiddetti **autovettori generalizzati** associati agli autovettori ottenuti mediante calcolo tradizionale.

Il calcolo degli **autovettori generalizzati** \bar{v}_i^j si effettua nel modo seguente:

$(\lambda_i I - A)\bar{v}_i = 0$	Autovettori
$(\lambda_i I - A)\bar{v}_i^1 = -\bar{v}_i$	Autovettori generalizzati
$(\lambda_i I - A)\bar{v}_i^2 = -\bar{v}_i^1$	“ “
....	“ “
....	“ “

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \quad \lambda_i = 2 \quad \text{molteplicità algebrica} = 3$$

$$(\lambda_i I - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(\lambda_i I - A) \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ essendo } rango [\lambda I - A] = 2$$

Il problema ha molteplicità geometrica = 1 quindi vi sono 2 autovettori generalizzati

$$(\lambda_i I - A) \bar{v}_1^1 = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_1^1 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_i I - A) \bar{v}_1^2 = - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_1^2 = \gamma \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = [\bar{v}_1, \bar{v}_1^1, \bar{v}_1^2], \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad J = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si hanno quindi due autovettori linearmente indipendenti per J_2^1, J_2^2 :

$$J_2^1 \Rightarrow P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_1^1 \quad \bar{v}_2] \quad J_2^2 \Rightarrow P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_2^1]$$

per J_3 vi sono invece 3 autovettori linearmente indipendenti per cui la forma di Jordan è diagonale.

$$J_3 \Rightarrow P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3]$$

1.7. Note sulle matrici

Sia data la matrice quadrata A ($n \times n$):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

allora se $A_{12} = 0$ oppure $A_{21} = 0$ si ha che

$$\{\lambda_i(A)\} = \{\lambda_i(A_{11})\} \sqcup \{\lambda_i(A_{22})\}$$

Sia data la matrice quadrata A ($n \times n$) reale e simmetrica $\Rightarrow A^T = A$; si ha allora che:

- $\rightarrow \lambda_i$ sono reali, $i = 1, 2, \dots, n$
- $\rightarrow \forall \lambda_i$ ha tanti autovettori linearmente indipendenti quanto è la sua molteplicità algebrica
- \rightarrow Gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono *ortogonali*
- $\rightarrow \exists Q$ ortogonale ($Q^T Q = I$) tale che $Q^T A Q = \Lambda$

Definizione – Autovettori sinistri

Data la matrice quadrata A ($n \times n$) con (λ_i, \bar{v}_i) $i = 1, 2, \dots, n$ per cui $(\lambda I - A)\bar{v} = 0$ e definita la matrice modale $M = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$ e ricavata la M^{-1} :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1^T \\ \bar{\mu}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n^T \end{bmatrix}$$

Si definiscono **autovettori sinistri associati ad A** i vettori $\bar{\mu}_i$ e per essi è valida la relazione

$$M^{-1} = [\lambda_i I - A^T] \bar{\mu}_i = \bar{0} \quad \text{ovvero} \quad \bar{\mu}_i [\lambda_i I - A] = \bar{0}$$

Teorema 1.5. - Cayley-Hamilton

Ogni matrice quadrata A ($n \times n$) soddisfa la propria equazione caratteristica

$$A \Rightarrow \det [\lambda I - A] = \Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

allora vale:

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$$

Il teorema di *Cayley-Hamilton* giuoca un ruolo fondamentale nello studio delle caratteristiche di sistemi LTI.

Esempio:

Sia A ($n \times n$) non singolare; esiste quindi A^{-1} .

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1}\Delta(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I + a_0A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_0} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I) \quad a_0 \neq 0 \text{ essendo } a_0 = \det(A)$$

Così, per esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 & -1 \\ -6 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

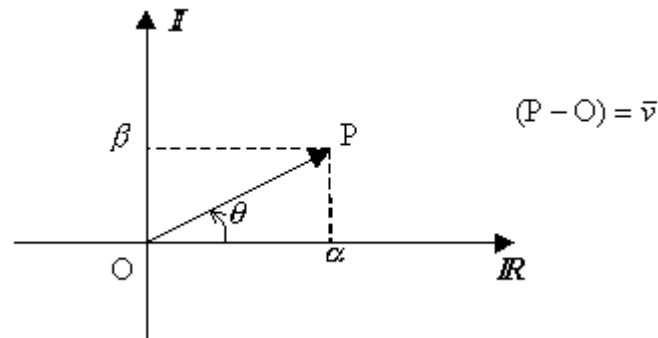
$$\Rightarrow \Delta(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 3\lambda + 43$$

$$\Rightarrow \Delta(A) = A^3 - 7A^2 + 3A + 43I = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{43} (A^2 - 7A + 3I) \quad \text{dove, ovviamente } A^2 = A \cdot A.$$

1.8. Numeri complessi, operazioni e proprietà

Un numero complesso può essere rappresentato sul piano cartesiano tramite il punto P:



Il numero complesso può essere rappresentato in tre modi diversi:

$$1) \quad \bar{v} = \alpha + j\beta$$

$$2) \quad \bar{v} = \begin{cases} |\bar{v}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & \text{modulo} \\ \vartheta = \tan^{-1}(\beta/\alpha) & \text{fase} \end{cases} \quad 0 \leq \vartheta \leq 360^\circ$$

$$3) \quad \text{Notando che } \alpha = |\bar{v}| \cos \vartheta, \quad \beta = |\bar{v}| \sin \vartheta \text{ si ha:}$$

$$\bar{v} = |\bar{v}|(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$$

Fra le operazioni e le proprietà relative ai numeri complessi quelle di maggior interesse sono:

- *Formule di Eulero*

$$e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta \quad e^{-j\vartheta} = \cos \vartheta - j \sin \vartheta \quad (1.8)$$

$$\sin \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2} \quad (1.9)$$

- *Disuguaglianza di Schwarz*

$$|\bar{v}_1 + \bar{v}_2| \leq |\bar{v}_1| + |\bar{v}_2|$$

- *Prodotto*

Dati \bar{v}_1 e \bar{v}_2 con $(|\bar{v}_1|, \vartheta_1)$ e $(|\bar{v}_2|, \vartheta_2)$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \Rightarrow \begin{cases} |\bar{v}_1 \bar{v}_2| = |\bar{v}_1| |\bar{v}_2| \\ \angle(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) = \angle \bar{v}_1 + \angle \bar{v}_2 = \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases}$$

- *Divisione*

Dati \bar{v}_1 e \bar{v}_2 con $(|\bar{v}_1|, \vartheta_1)$ e $(|\bar{v}_2|, \vartheta_2)$

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{v}_1/\bar{v}_2| = |\bar{v}_1|/|\bar{v}_2| \\ \angle(\bar{v}_1/\bar{v}_2) = \angle\bar{v}_1 - \angle\bar{v}_2 = \vartheta_1 - \vartheta_2 \end{cases}$$

- *Esponenziale complesso*

Sia $e^{\bar{z}}$ una funzione di variabile complessa, dove $\bar{z} = \alpha + j\beta$ si ha:

$$e^{\bar{z}} = e^{(\alpha + j\beta)} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}$$

e dalla (1.8.)

$$\bar{z} = |\bar{z}| (\cos \vartheta + j \sin \vartheta) \quad \text{da cui:}$$

$$\bar{z} = r e^{j\vartheta} \quad \text{dove } r = |\bar{z}| \text{ e } \vartheta = \beta$$

- *Somma di esponenziali complessi*

Considerando:

$$\bar{z} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \quad c_{1,2} = \delta \pm j\gamma$$

si ha:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{z} &= (\delta + j\gamma) e^{(\alpha + j\beta)t} + (\delta - j\gamma) e^{(\alpha - j\beta)t} = \\ &= \delta e^{\alpha t} (e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + j\gamma e^{\alpha t} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) = \\ &= 2\delta e^{\alpha t} \cos(\beta t) - 2\gamma e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \\ &= 2e^{\alpha t} [\delta \cos(\beta t) - \gamma \sin(\beta t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bar{z} &= |c_1| e^{j\phi_1} e^{(\alpha + j\beta)t} + |c_1| e^{-j\phi_1} e^{(\alpha - j\beta)t} = \\ &= |c_1| e^{\alpha t} \{ e^{j(\beta t + \phi_1)} + e^{-j(\beta t + \phi_1)} \} = \\ &= 2|c_1| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi_1) = \\ &= 2|c_1| e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi'_1) \end{aligned}$$

1.9. Equazioni differenziali lineari

Prendiamo in considerazione un caso scalare, ovvero un'equazione del 1° ordine (per semplicità a coefficienti costanti):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Moltiplicando entrambe i membri per $e^{-at} \neq 0, \forall t > 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{-at} \dot{x}(t) &= e^{-at} a x(t) + e^{-at} b u(t) \quad \Rightarrow \quad e^{-at} \dot{x}(t) - a e^{-at} x(t) = e^{-at} b u(t) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \frac{d[e^{-at} x(t)]}{dt} = e^{-at} b u(t) \end{aligned}$$

integrando in $[t_0, t]$, si ha:

$$e^{-at} x(t) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad e^{-at} x(t) = e^{-at_0} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

e, infine, moltiplicando per $e^{at} \neq 0, \forall t > 0$:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Il primo termine del secondo membro rappresenta l'*evoluzione libera*, cioè l'andamento del sistema lasciato in assenza di ingresso; il secondo termine rappresenta invece l'*evoluzione forzata*, cioè la parte di risposta dovuta all'ingresso.

Generalmente le due "parti" della risposta vengono indicate come

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.10)$$

dove $x_p(t)$ è la *soluzione particolare* mentre $x_h(t)$ è la *soluzione dell'omogenea*.

Quanto visto per il caso scalare risulta valido anche per sistemi di equazioni ove si sostituiscano gli scalari a e b con le matrici A e B (considerate sempre tempo-invarianti e quindi costanti).

1.10. Equazioni differenziali ordinarie lineari del 1° ordine

Forma generale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{Equazione differenziale non omogenea} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{Equazione differenziale omogenea} \quad (1.12)$$

Teorema 1.6.

Se $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue, esiste soltanto **una** soluzione della (1.11.)

La soluzione generale di (1.11.) è data da:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.13)$$

dove

$x_h(t)$ soluzione di (1.12.)

$x_p(t)$ soluzione particolare (funzione di $u(t)$)

- Il calcolo di $x_h(t)$ si esegue per sostituzione;
posto:

$$x_h(t) = c e^{\lambda t} \quad (c, \lambda) \text{ parametri non noti}$$

sostituendo in (1.12.), si ha

$$c \lambda e^{\lambda t} = a c e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = a$$

e, tenendo presenti le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0 = x_h(0) = c e^{\lambda 0} = c \quad \Rightarrow \quad c = x_0$$

si ottiene

$$x_h(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{at}$$

- La soluzione particolare $x_p(t)$ dipende da $u(t)$ e deve soddisfare la (1.11.), quindi:

$$\dot{x}_p(t) = a(t)x_p(t) + b(t)u(t).$$

Nel seguito si farà quasi sempre riferimento ad equazioni differenziali a coefficienti costanti, cioè del tipo:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b u(t)$$

Esempi:

1. $u(t) = k = \text{costante}$

Posto $x_p(t) = k_1 = \text{costante}$, per sostituzione, nella (1.11.), si ottiene:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{k}_1 = 0 = ak_1 + bk$$

$$k_1 = -\frac{b}{a}k$$

Verifica:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_0 e^{at} - \frac{b}{a}k \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = a x_0 e^{at}$$

Ma, dalla (1.11.) si ha che:

$$\dot{x}(t) = a x_0 e^{at} - bk + bk = x_0 a e^{at} \quad \text{C.V.D.}$$

2. $u(t) = Ae^{\delta t}$

posto $x_p(t) = k_1 e^{\delta t}$, ancora per sostituzione:

$$\dot{x}_p(t) = k_1 \delta e^{\delta t} = ak_1 e^{\delta t} + bAe^{\delta t}$$

$$k_1 \delta = ak_1 + bA \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{bA}{\delta - a}$$

Verifica:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_0 e^{at} + \frac{bA}{\delta - a} e^{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = x_0 a e^{at} + \frac{bA\delta}{\delta - a} e^{\delta t}$$

Ma, dalla (1.11.) si ha che:

$$\dot{x}(t) = a x_0 e^{at} + \frac{abA}{\delta - a} e^{\delta t} + bAe^{\delta t} = a x_0 e^{at} + \frac{bA\delta}{\delta - a} e^{\delta t} \quad \text{C.V.D.}$$

1.11. Equazioni differenziali ordinarie lineari del 2° ordine

Forma generale:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Se $f(t) = 0$ la (1.14.) si dice **omogenea** e diventa:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x_0, \dot{x}_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Teorema 1.7.

Si possono sempre trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti della (1.15.).

Esempio

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - 10x(t) = 0$$

$$x_1(t) = c_1 e^{-5t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{2t} \quad \text{la verifica si può fare per sostituzione}$$

Teorema 1.8.

Se $x_{1h}(t)$ e $x_{2h}(t)$ sono soluzioni della (1.15.), lo è anche una qualsiasi combinazione lineare:

$$x_h(t) = c_1 x_{1h}(t) + c_2 x_{2h}(t)$$

Teorema 1.9.

Siano $x_{1h}(t)$ e $x_{2h}(t)$ 2 soluzioni della (1.15.); esse sono *Linearmente Indipendenti* se e solo se il determinante Wronskiano è $\neq 0$, cioè:

$$W = \begin{vmatrix} x_{1h}(t) & x_{2h}(t) \\ \dot{x}_{1h}(t) & \dot{x}_{2h}(t) \end{vmatrix} = x_{1h}(t)\dot{x}_{2h}(t) - x_{2h}(t)\dot{x}_{1h}(t) \neq 0$$

Teorema 1.10.

Siano $x_{1h}(t)$ e $x_{2h}(t)$ 2 soluzioni linearmente indipendenti della (1.15.); se $x_{3h}(t)$ è un'altra soluzione esiste un'unica coppia (c_1, c_2) tale che :

$$x_{3h}(t) = c_1 x_{1h}(t) + c_2 x_{2h}(t)$$

Nel caso di equazioni *non omogenee* date dalla (1.14.) la soluzione generale vale:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 x_{1h}(t) + c_2 x_{2h}(t) + x_p(t) \quad (1.16)$$

Nel caso di *coefficienti costanti*, l'equazione omogenea diventa:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0 \quad (1.17)$$

e la sua soluzione risulta di tipo esponenziale:

$$x_h(t) = e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + a \dot{x}(t) + b x(t) = (\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda t} = 0$$

Dato che $e^{\lambda t} \neq 0$, si può dividere il secondo membro per $e^{\lambda t}$ ottenendo:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \textbf{equazione algebrica associata all'omogenea}$$

È chiaro che se λ è una soluzione dell'equazione algebrica, $x(t) = c e^{\lambda t}$ è una soluzione per la (1.17.), per cui, si può scrivere:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda t}$$

L'equazione algebrica è di secondo grado e presenta due radici λ_1, λ_2 ; solitamente la soluzione della (1.17.) viene espressa in funzione della tipologia di λ_1 e λ_2 :

- $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ reali e distinti

$$x_{1h}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_{2h}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{linearmente indipendenti in quanto } W \neq 0$$

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow$ reali ripetuti

$$x_{1h}(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad x_{2h}(t) = c_2 t e^{\lambda t}, \quad W \neq 0$$

$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ complessi coniugati

Formalmente λ_1 e λ_2 sono 2 radici distinte e quindi vale sempre la relazione:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Le costanti c_1 e c_2 sono anch'esse dei numeri complessi

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm j\beta$$

$$c_1, c_2 = \delta \pm j\gamma$$

$$x_h(t) = (\delta + j\gamma) e^{(\alpha + j\beta)t} + (\delta - j\gamma) e^{(\alpha - j\beta)t} \quad (1.18)$$

Dalla (1.18.) si possono ottenere 2 forme reali per la soluzione omogenea:

$$\text{I.} \quad x_h(t) = \delta e^{\alpha t} (e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + j\gamma e^{\alpha t} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})$$

e sfruttando le formule di Eulero (1.8.) e (1.9.):

$$x_h(t) = 2 e^{\alpha t} [\delta \cos(\beta t) - \gamma \sin(\beta t)]$$

II. Dalla (1.18.) si ottiene

$$c_1 = |c_1| e^{j\phi_1}, \quad c_2 = |c_2| e^{-j\phi_1}$$

dove

$$|c_1| = |c_2| = |c| = \sqrt{\delta^2 + \gamma^2} \quad \phi_1 = \tan^{-1} \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\begin{aligned} x_h(t) &= |c| e^{j\phi_1} e^{(\alpha+j\beta)t} + |c| e^{-j\phi_1} e^{(\alpha-j\beta)t} = |c| e^{\alpha t} \left\{ e^{j(\beta t + \phi_1)} + e^{-j(\beta t + \phi_1)} \right\} \\ &= 2|c| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi_1) = 2|c| e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi_1') \end{aligned}$$

Esempi

1. $\ddot{x}(t) - x(t) = t^2$

In questo caso l'equazione omogenea risulta essere:

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 0$$

e la sua soluzione è data da:

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Per la soluzione particolare si ha invece che, poiché $f(t) = t^2$ è un polinomio di secondo grado, ci si aspetta che la soluzione particolare sia anch'essa un polinomio di secondo grado, del tipo:

$$x_p(t) = a + bt + ct^2$$

Si ha quindi che:

$$\ddot{x}_p(t) = 2c$$

da cui:

$$2c - (a + bt + ct^2) = t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c - a = 0 \\ -b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2$$

$$x_p(t) = -2 - t^2$$

ottenendo infine:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2 - t^2$$

2. $\ddot{x}(t) - x(t) = 2e^t$

L'equazione omogenea $\ddot{x}(t) - x(t) = 0$ ha come soluzione generale:

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Si può notare che in questo caso la $f(t) = 2e^t$ è una delle soluzioni dell'equazione omogenea; per tal motivo è impossibile trovare una soluzione del tipo Ae^t per l'equazione non omogenea.

Ricordando però che se λ è una radice doppia dell'equazione algebrica associata a un'equazione differenziale omogenea, due soluzioni della stessa sono e^t e te^t si può ipotizzare che una possibile soluzione dell'equazione non omogenea possa essere del tipo $x_p(t) = Ate^t$.

Sarà quindi:

$$\dot{x}_p(t) = Ae^t(t+1) \quad \ddot{x}_p(t) = Ae^t(t+2)$$

e quindi:

$$\ddot{x}_p(t) - x_p(t) = Ae^t(t+2) - Ate^t = 2Ae^t = 2e^t$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad \Rightarrow x_p(t) = te^t$$

ottenendo infine:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t.$$

1.12. Equazioni differenziali di ordine superiore

Forma generale (a coefficienti costanti):

$$\begin{cases} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t) \\ x_0, \dot{x}_0, \dots \end{cases} \quad (1.19)$$

La soluzione generale per la (1.19.) risulta essere

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ x(t) &= \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} + x_p(t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Se le λ_i sono le n soluzioni della $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ allora si ha che il contributo alla soluzione generale è:

- per ogni λ_i reale e distinta:

$$c_i e^{\lambda_i t}$$

- per ogni λ_i di molteplicità m :

$$c_i e^{\lambda_i t} + c_{i+1} t e^{\lambda_i t} + \dots + c_{i+m} t^{m-1} e^{\lambda_i t}$$

- per ogni coppia λ_i, λ_j complessa

$$2 |c| e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$$

Teorema 1.11.

Un'equazione differenziale di tipo (1.19.) (o un sistema di equazioni differenziali di tipo (1.19.)) può sempre essere trasformato in un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine.

Considerando la (1.19.), definiamo:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}, \dots, \quad \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

e sia il vettore $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$$

si può quindi scrivere la (1.19.) come:

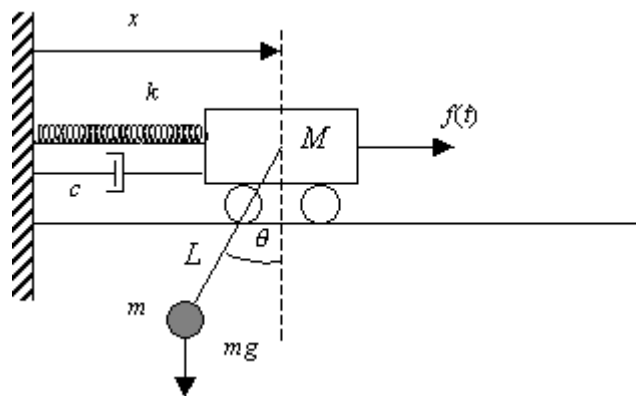
$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bf(t)$$

dove

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempi

Modello carro-ponte



Nelle ipotesi di $L = \text{costante}$, attrito trascurabile, k richiamo elastico, c smorzamento viscoso e posto che:

$$\begin{cases} x_m = x - L \sin \theta \cong x - L\theta \\ y_m = -L \cos \theta \cong -L \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$

Come già visto, per sistemi del secondo ordine è possibile risolvere il problema in due modi:

- A. La soluzione per sostituzione risulta, in questo caso, complicata.
- B. Trasformando il sistema in un sistema di equazioni del 1° ordine:

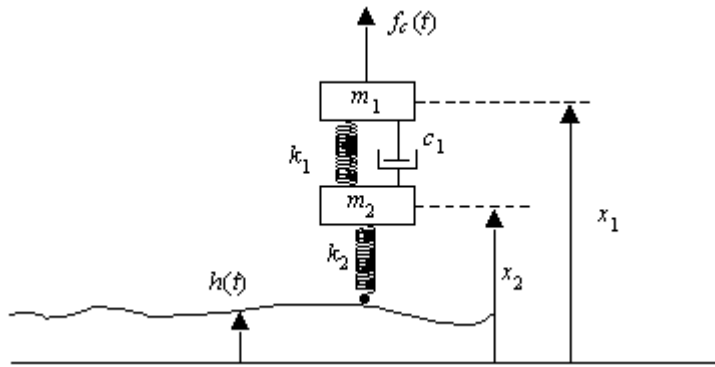
$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mL}{M+m} \dot{x}_4 - \frac{c}{M+m} x_2 - \frac{k}{M+m} x_1 + \frac{1}{M+m} f(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\dot{x}_2}{L} - \frac{g}{L} x_3 \end{cases}$$

posto $a = \frac{1}{M}$ e $b = \frac{1}{ML}$ si ha:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ak & -ac & -amg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -bk & -bc & -b(M+m)g & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} f(t)$$

Modello ammortizzatore



m_1 = carico sulla ruota
 m_2 = ruota
 $h(t)$ = variazione dell'altezza del fondo stradale rispetto al riferimento
 k_1, c_1 = ammortizzatore
 k_2 = pressione pneumatico

Le equazioni che regolano il sistema sono:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_c(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2[x_2 - h(t)] \end{cases}$$

Posto $\bar{z} = [x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2]^T$ e supponendo, per semplicità, $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = c_1 = 1$ si ottiene:

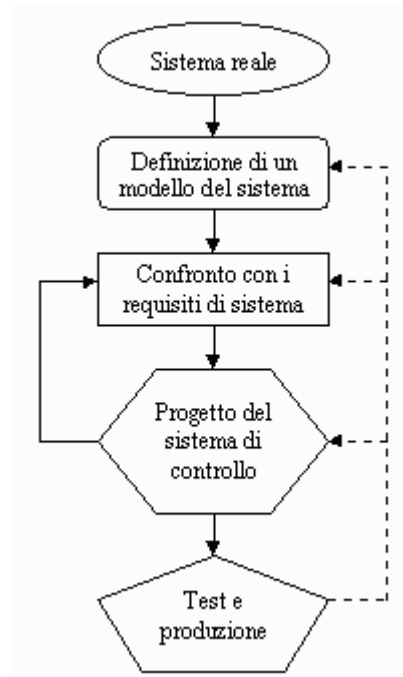
$$\dot{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \bar{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f_c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_2 \end{pmatrix} h(t)$$

Cap 2. Analisi dei sistemi

In questo capitolo verranno forniti i primi concetti fondamentali dei sistemi, le loro proprietà e le loro caratterizzazioni.

2.1. Definizione di sistema

Solitamente un problema di controllo comprende diverse parti e diverse operazioni; lo schema progettuale è così rappresentabile:

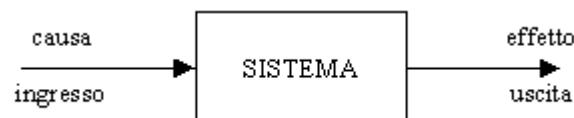


L'elemento centrale nello studio è il *sistema* che deve essere controllato, o meglio, un modello, opportunamente realizzato, di tale sistema.

Definizione – Sistema

Si definisce **sistema** (*impianto, processo, modello*) un insieme di oggetti e/o eventi interconnessi che descrive una relazione di causa-effetto (basata su leggi fisiche, sociologiche, economiche, ecc.).

Le proprietà dei sistemi dipendono dalle caratteristiche interne (dalla natura) del sistema stesso; il comportamento di un sistema, la sua evoluzione si dice “*comportamento dinamico*” del sistema e gli elementi necessari alla sua descrizione sono le “*variabili di sistema*”.



Le variabili tramite cui il sistema interagisce col mondo esterno si possono suddividere in due classi di appartenenza:

- le **variabili di ingresso** (o *variabili indipendenti* o *cause*) che agiscono dall'esterno sul sistema fisico influenzandone il comportamento (rappresentano quindi la causa) e che, a loro volta, si suddividono in:

- *Disturbi* o *variabili non manipolabili*: variabili “esogene”, cioè imposte dall'esterno e non controllabili;
- *Controlli* o *variabili manipolabili*: variabili “endogene” il cui andamento può essere imposto dal progettista.

- le **variabili di uscita** (o *variabili dipendenti* o *effetti*) che il prodotto del sistema; esse, a loro volta, si possono suddividere in:
- variabili regolate di cui si desidera un preciso comportamento;
 - variabili usabili (misurate) per effettuare modifiche sul sistema.

Non sempre la conoscenza delle variabili di ingresso in un certo istante è sufficiente a determinare il valore delle variabili di uscita allo stesso istante; può infatti accadere che due sistemi identici, cui vengano applicate nello stesso istante le stesse variabili di ingresso forniscano variabili di uscita diverse fra loro.

Per definire completamente un sistema è quindi necessario definire un altro insieme di variabili:

- le **variabili di stato** che descrivono la situazione interna del sistema in modo da consentire, note le variabili di ingresso e l'istante di applicazione delle stesse, il calcolo delle variabili di uscita. I valori di queste variabili ad un determinato istante permettono di valutare l'andamento futuro delle variabili di stato stesse e di quelle di uscita una volta noti i valori delle variabili di ingresso negli istanti successivi (proprietà di separazione).

Il (modello del) sistema può quindi essere descritto sfruttando le variabili sopra definite, tramite due diverse rappresentazioni:

1) **Rappresentazione ingresso-uscita o esterna.**

L'andamento dell'uscita viene determinato senza la necessità di utilizzare o anche solo definire le variabili di stato.

Definite $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$ come variabili di ingresso e uscita rispettivamente, questo tipo di rappresentazione può essere scritta, nel dominio del tempo, come:

$$\bar{y}(t) = \bar{g}(\bar{u}(t), t) \quad (2.1)$$

La (2.1.) viene detta **trasformazione** (o *mappa*) **ingresso-uscita**.

2) **Rappresentazione di stato o ingresso-stato-uscita o interna.**

Indicando con $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$ i vettori delle variabili di ingresso, stato e uscita rispettivamente, la rappresentazione di stato viene scritta come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (2.2)$$

La prima equazione del sistema (2.2.) è detta **equazione di stato** (o *mappa di transizione dello stato*) mentre la seconda è la **trasformazione** (o *mappa*) **ingresso-uscita** del caso precedente.

Il numero delle variabili di stato, n , è detto **ordine** del sistema.

2.2. Classificazione dei sistemi

Esistono diversi modi di classificare i sistemi, da un punto di vista fisico, da uno matematico, produttivo, ecc.

Per lo studio che ci interessa la classificazione viene fatta sull'analisi dell'evoluzione delle variabili di sistema nel tempo.

2.2.1. Statico-Dinamico

Definizione – Sistema statico

Un **sistema statico** è un sistema in cui tutti i segnali risultano costanti nel tempo (fermo o in regime di moto uniforme); le variabili possono anche essere in funzione della variabile tempo ma il legame fra tali funzioni coinvolge solo i valori delle variabili nello stesso istante.

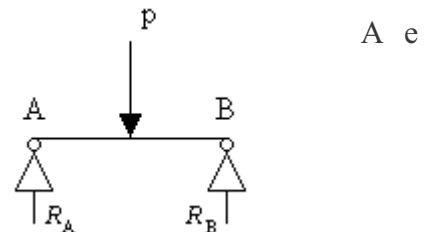
Lo studio di un sistema statico è un problema di equilibrio governato da **equazioni algebriche**.

Esempi

1)

Le reazioni che governano il sistema nei punti A e B sono:

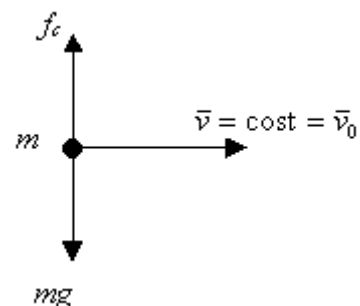
$$R_A = R_B = p/2$$



2)

Per mantenere un moto rettilineo uniforme bisogna applicare un'opportuna forza f_c che contrasti la forza di gravità:

$$f_c = mg$$



Definizione – Sistema dinamico

Si definisce **sistema dinamico** un sistema in cui la relazione di causa-effetto è dipendente dal tempo (ha un'accelerazione diversa da zero) ed è governato da **equazioni differenziali**; riesce a descrivere il comportamento degli oggetti considerati anche quando le variabili non sono tutte costanti nel tempo.

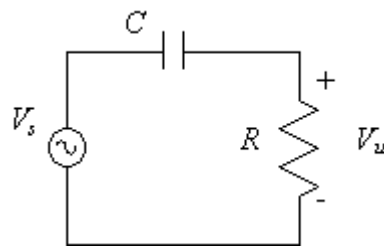
In seguito, quando si parlerà di sistema, si farà sempre riferimento a un sistema dinamico.

2.2.2. Monovariabile-Multivariabile

Definizione – Sistema monovariabile

Un sistema è **monovariabile** o **SISO** (Single Input Single Output) se è dotato di una sola variabile di ingresso e di una sola variabile di uscita, per cui è, posto come al solito che sia $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$, $m = p = 1$.

Esempio



V_s = variabile d'ingresso

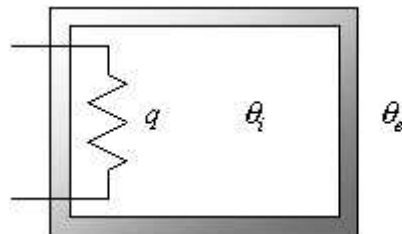
V_u =
variabile d'uscita

Definizione – Sistema multivariabile

Un sistema è **multivariabile** o **MIMO** (Multiple Input Multiple Output) se sono presenti più relazioni causa-effetto, cioè se m e p (dimensioni dei vettori delle variabili di ingresso e uscita) non sono unitarie.

Esempio

Forno



q e θ_e = variabili d'ingresso

θ_i = variabile d'uscita

2.2.3. Lineare-Non lineare

Definizione – Sistema lineare

Un sistema si definisce **lineare** se le funzioni che ne governano l'andamento sono lineari e quindi per esso è valido il principio di sovrapposizione degli effetti.

Definizione – Sistema non lineare

È un sistema **non lineare** quello per cui non sono valide le proprietà dei sistemi lineari.

Si deve fare attenzione al fatto che alcuni sistemi possono ammettere modelli lineari fino a quando le variabili del sistema rimangono all'interno di determinati limiti.

2.2.4. Invariante-Variante

Definizione – Sistema invariante o stazionario

In genere i processi fisici cambiano la loro struttura nel tempo (per usura, invecchiamento, ecc.); se tali mutazioni non influiscono col passare del tempo sulla risposta dei processi alle sollecitazioni esterne, il sistema si dice **invariante** o **stazionario**.

Dal punto di vista matematico ciò implica che le funzioni (le mappe) che controllano l'andamento del sistema, non dipendono esplicitamente dal tempo; in pratica la stessa sollecitazione in due istanti diversi provoca nel sistema sempre la stessa risposta, ovviamente traslata nel tempo.

Per l'analisi dei sistemi invarianti, proprio per questa proprietà, nel seguito verrà quasi sempre considerato come istante iniziale il valore $t_0 = 0$.

Definizione – Sistema variante o non stazionario

Un sistema è **variante** o **non stazionario** se una o più funzioni del sistema dipendono direttamente dalla variabile tempo; un esempio banale è dato da un sistema meccanico la cui usura comporta un cambiamento di comportamento nel tempo.

2.2.5. Continuo-Discreto

Definizione – Sistema continuo

Si definisce come sistema **continuo** (o tempo-continuo) un sistema in cui la variabile tempo, da cui dipendono tutte le variabili del sistema, è di tipo reale.

Definizione – Sistema discreto

È un sistema **discreto** (o tempo-discreto) un sistema in cui la variabile tempo è un intero.

2.2.6. Strettamente proprio-Proprio

Definizione – Sistema strettamente proprio

Un sistema è detto **strettamente proprio** o **puramente dinamico** se le sue variabili di uscita non dipendono da quelle di ingresso in modo diretto ma solo attraverso le variabili di stato; la trasformazione d'uscita, quindi, non dipende dall'ingresso.

Definizione – Sistema proprio

È un sistema **proprio** quello per cui l'uscita dipende in maniera diretta dall'ingresso; si noti che i sistemi statici, per la cui descrizione non è necessaria l'introduzione delle variabili di stato, sono, ovviamente, tutti propri.

2.2.7. A dimensione finita-A dimensione infinita

Definizione – Sistema a dimensione finita o a parametri concentrati

Un sistema è detto **a dimensione finita** o **a parametri concentrati** se, per descrivere la sua situazione interna al tempo t , è sufficiente conoscere un numero finito, n , di scalari reali (le n componenti del vettore di stato).

Definizione – Sistema a dimensione infinita o a parametri distribuiti

È definito come sistema **a dimensione infinita** o **a parametri distribuiti** un sistema per cui lo stato all'istante t è costituito da una funzione di una o più variabili; ciò vuol dire che la prima relazione del sistema (2.2.) diventa un'**equazione differenziale a derivate parziali**.

2.2.8. Deterministici-Stocastici

Definizione – Sistema deterministico

Un sistema è detto **deterministico** se nessuna variabile del sistema (sia essa d'ingresso, di stato o d'uscita) è di tipo aleatorio.

Definizione – Sistema stocastico

Il sistema **stocastico** è quello per cui non è possibile utilizzare la definizione di deterministico.

2.3. Controllo dei sistemi

Nell'affrontare i problemi di controllo dei sistemi solitamente si segue lo schema riportato ad inizio capitolo; una volta individuato il sistema fisico che si desidera controllare, si devono affrontare due tipologie di problemi:

- Problemi di sintesi:

- a) Creazione di un modello del sistema
- b) Realizzazione del sistema di controllo

- Problemi di analisi:

Verifica delle prestazioni del sistema completo, includendo, cioè, anche il modello del controllore; tale operazione risulta indispensabile, finito il progetto, prima di realizzare e installare il sistema, per verificare che tutte le specifiche richieste siano soddisfatte.

- costruzione del modello

Un “buon” modello del sistema è indispensabile per realizzare un efficace progetto del sistema di controllo; un modello è essenzialmente una rappresentazione matematica delle leggi fisiche che governano il sistema, utile per analizzare e riprodurre i risultati.

Il modello migliore è quello che garantisce le più alte capacità di predizione delle prestazioni del sistema e di riproduzione del suo comportamento.

Un modello più preciso, inoltre, permette di arrivare al progetto di un controllore più efficiente e meno costoso; si deve comunque tenere presente che un modello troppo complesso può risultare non utilizzabile.

- analisi delle prestazioni

L'analisi delle prestazioni include lo studio delle caratteristiche del sistema come stabilità, sensitività, comportamento durante il raggiungimento degli obiettivi, ecc.; l'analisi del sistema si riduce, quindi, al calcolo delle soluzioni (numeriche o analitiche) delle equazioni che rappresentano il modello.

Solitamente l'analisi di modelli complessi può richiedere prolungate simulazioni al computer.

- realizzazione del sistema di controllo

L'obiettivo primario nel progetto di un sistema di controllo è quello di modificare le proprietà del sistema in esame; se l'analisi del sistema è un processo di “previsione”, il progetto di controllo è un processo di “decisione”.

Il controllo coinvolge, solitamente, tre aspetti:

- a) Conoscenza dello stato del sistema, quindi misure o stime dello stato.
- b) Definizione di un'appropriata strategia di controllo (progetto).
- c) Implementazione della strategia di controllo tramite strumenti (attuatori) che permettano di modificare il comportamento del sistema.

2.3.1. Strategie di controllo

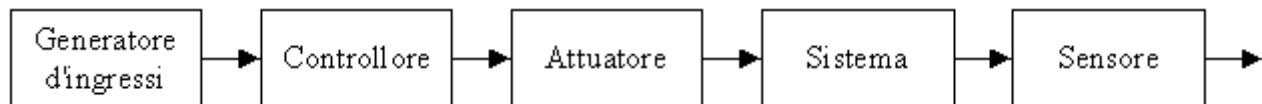
Le strategie di controllo si possono fondamentalmente dividere in due classi:

- ad **anello aperto**

- ad **anello chiuso** (feedback, retroazione)

Il *controllo ad anello aperto* è più semplice, necessita di meno componenti, è più facilmente realizzabile ma richiede un'accurata conoscenza del sistema, cioè una sua descrizione molto precisa tramite il modello analitico del sistema stesso.

Un difetto di tale strategia è che, una volta che la procedura di controllo è iniziata, non può essere modificata; lo schema a blocchi di un controllo ad anello aperto può essere riassunto come segue:



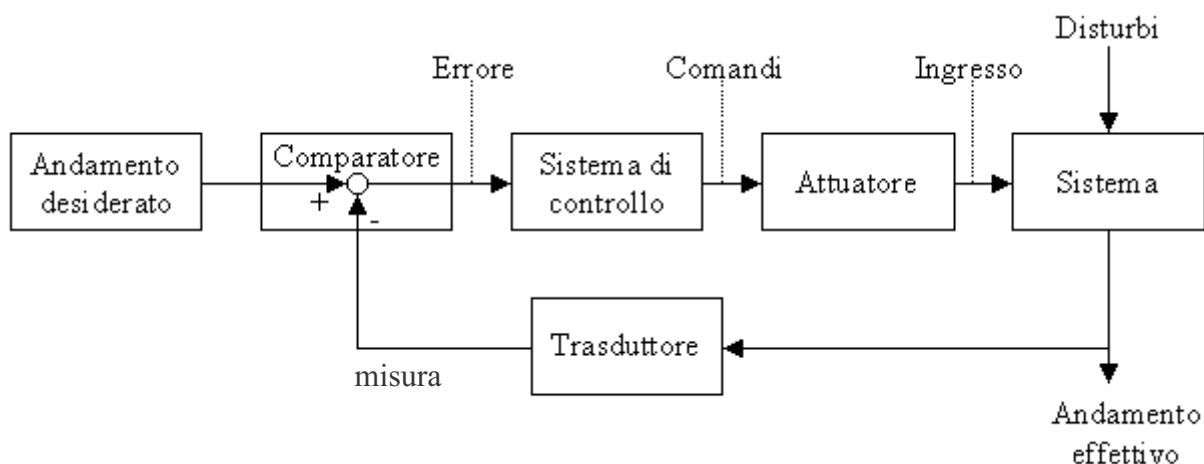
Esempi tipici di sistemi controllati ad anello aperto sono:

- lavatrice, tostapane, forno a microonde
- sistemi di navigazione aeronautici
- processi automatizzati di saldatura
- impianti di assemblaggio robotizzati
- sistemi di orientazione di sonde spaziali

Il *controllo ad anello chiuso* è più complesso ma più diffuso soprattutto perché permette di agire sul comportamento del sistema durante il funzionamento; l'importanza di tale tipo di controllo risiede anche nella possibilità di trattare un certo numero di incertezze nella fase di costruzione del modello del sistema.

La descrizione ed il comportamento funzionale del sistema di controllo ad anello chiuso possono essere descritti utilizzando un diagramma a blocchi, ognuno dei quali può essere esso stesso un sistema di tipo meccanico, idraulico, elettrico, ecc.

Un sistema di controllo può, per esempio, essere rappresentato come:

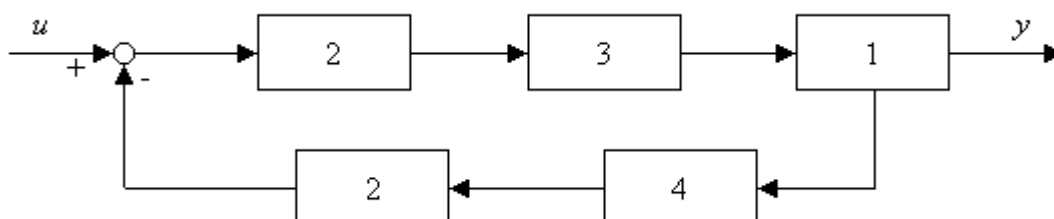


Risulta evidente che per effettuare l'analisi dei sistemi non è necessario avere il sistema fisico vero e proprio ma solo un suo modello matematico.

Il controllo ad anello chiuso è fondamentale nei problemi di controllo per la presenza di due elementi che rendono pressoché impossibile l'utilizzo dello schema ad anello aperto:

- 1) Le inevitabili inesattezze nella costruzione del modello matematico.
- 2) La presenza dei disturbi.

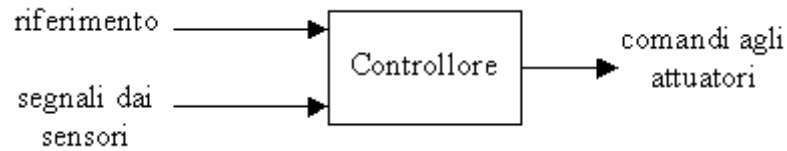
Uno schema del tutto generico, per questa tipologia di controllo, che mette in evidenza i principali componenti, può essere



in cui si distinguono:

1 - Sistema che deve essere controllato.

2 - *Controllori*



Il controllore può essere un dispositivo fisico (meccanico, elettrico, idraulico, computer) o un opportuno software.

3 - *Attuatori*

Gli attuatori trasformano i comandi ricevuti dal controllore in segnali di potenza utili per il controllo del sistema.

Gli scopi principale di un attuatore sono:

- trasformare il segnale di controllo in un segnale che sia utilizzabile dal sistema che deve essere controllato
- incrementare la potenza del segnale che, bassa in ingresso, deve essere portata a livelli sufficientemente alti da poter agire sul sistema

Attuatori tipici sono pompe, giunti, servomotori, motori elettrici, ecc.

4 - *Sensori*

I sensori rilevano l'andamento del sistema, trasformando i segnali che ricevono in impulsi di bassa potenza utili per i controllori.

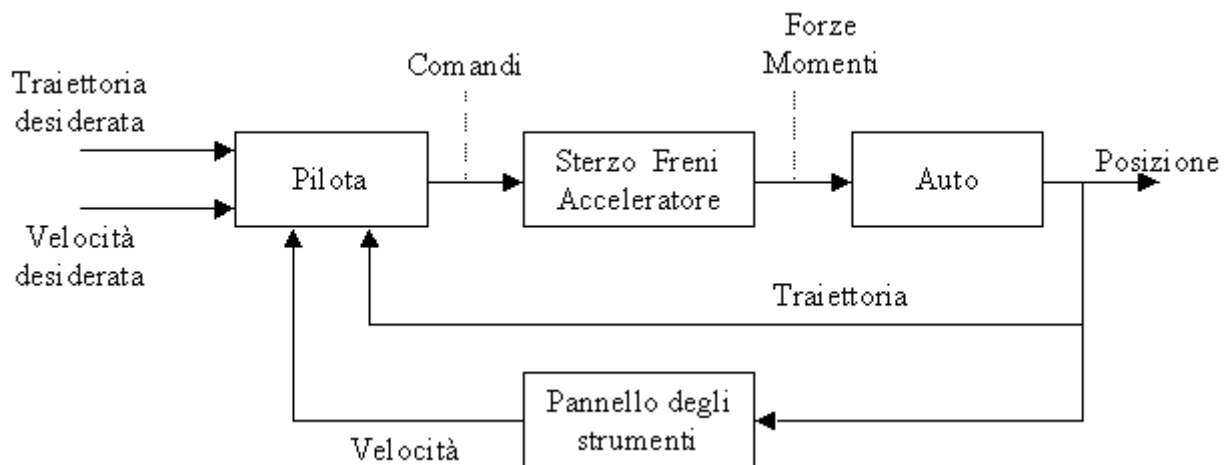
Gli scopi principale di un sensore sono:

- misurare le variabili del sistema
- convertire tali misure in segnali utilizzabili dai controllori

Sensori tipici sono trasduttori, potenziometri, accelerometri, giroscopi, ecc.

Esempio

Guida di un autoveicolo



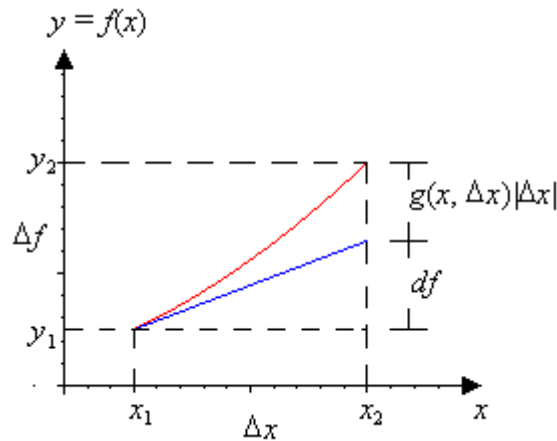
In questo esempio il pilota ricopre le funzioni di comparatore e di sistema di controllo, l'insieme sterzo, freni, acceleratore è il blocco degli attuatori, l'auto è il sistema da controllare e il pannello degli strumenti funge da sensore.

2.4. Linearizzazione

Nella sezione (2.2.3.) sono state fornite le definizioni di sistema lineare e non lineare; lo studio di sistemi lineari è estremamente più semplice, grazie alle proprietà che questi hanno, rispetto a quello di sistemi non lineari, la cui analisi risulta spesso estremamente complessa.

Per questi motivi si cerca di approssimare i sistemi non lineari con modelli lineari che risultino fedeli al sistema originale ma siano più semplici da affrontare.

Consideriamo la figura seguente:



Si vuole approssimare la funzione $y = f(x)$ (in rosso) con una funzione lineare di x (in blu) in modo da poter scrivere:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \cong df$$

dove Δf è l'**incremento** della funzione lineare.

In effetti, dalla figura, si può ricavare che è:

$$\begin{cases} \Delta f = df + g(x, \Delta x) |\Delta x| \\ df = k \Delta x \end{cases}$$

Assumendo che sia:

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} g(x, \Delta x) = 0$$

si può scrivere:

$$\Delta f \approx df = \frac{df(x)}{dx} dx$$

dove il termine $\frac{df(x)}{dx}$ è il **differenziale** della funzione.

L'approssimazione di un sistema non lineare viene effettuata in termini di linearizzazione attorno ad un punto particolare, definito punto d'equilibrio (o punto stazionario); supponendo di affrontare l'analisi di un'equazione differenziale del primo ordine con $x(t)$ generica funzione del tempo, cioè:

$$\dot{y} = f(x(t)) \quad (2.3)$$

sono date le seguenti definizioni

Definizione – Punto stazionario

Si definisce come **punto stazionario** il valore x_0 della $x(t)$ tale che:

$$\dot{y} = f(x_0) = 0 \quad (2.4)$$

Definizione – Punto d'equilibrio

Il punto stazionario x_0 è detto **punto di equilibrio** se, una volta che il sistema è giunto in tale punto, non può più lasciarlo (a meno di azioni di forze esterne al sistema).

2.4.1. Espansione in serie di Taylor

L'espansione in serie di Taylor è una tecnica estremamente efficace per la linearizzazione di equazioni (sistemi) non lineari intorno ad un loro punto di equilibrio.

Si consideri una funzione scalare di una variabile (anch'essa scalare) nella forma (2.3.) e sia x_0 un punto di equilibrio tale quindi da soddisfare la (2.4.); assumendo poi che la $f(x)$ abbia le derivate di ordine sufficiente, la (2.3.) può essere scritta come serie di Taylor attorno al punto x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x_0} \delta x^2 + \dots \quad (2.5)$$

dove:

$$x(t) = x_0 + \delta x \Rightarrow f(x) = f(x_0 + \delta x)$$

La relazione (2.5.) può essere riscritta anche come:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \delta x + g(x, \delta x)$$

Poiché la parte che interessa è quella relativa a piccoli scostamenti di δx dal punto di equilibrio, si ha che:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \delta \dot{x} \cong f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \delta x + \dots$$

con i termini di ordine superiore che, molto piccoli, possono essere trascurati.

Dato che x_0 è un punto di equilibrio, si ha che:

$$\dot{x}_0 = f(x_0) = 0$$

e dalla precedente espressione si ricava che:

$$\delta \dot{x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \delta x = a \delta x \quad (2.6)$$

La (2.6.) è la versione linearizzata della (2.5.) almeno fino a quando $x(t)$ si mantiene nelle vicinanze di x_0 e le variazioni da x_0 sono piccole.

Esempio

$$\dot{x} = f(x) = 4x^2 - 6x + 2$$

$$f(x_0) = 0 = 4x_0^2 - 6x_0 + 2 = 4x_0(x_0 - 1) - 2(x_0 - 1) = (x_0 - 1)(2x_0 - 1)$$

da cui si evince che i punti di equilibrio sono:

$$\begin{cases} x_{01} = 1 \\ x_{02} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{01}} = (8x - 6)|_{x_{01}} = 2$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{02}} = (8x - 6)|_{x_{02}} = -2$$

Si ottengono così le relazioni:

$$\dot{x}_{1L} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{01}} \delta x = 2(x - x_{01}) = 2(x - 1)$$

$$\dot{x}_{2L} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{02}} \delta x = -2(x - x_{02}) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 - 2x$$

che rappresentano l'equazione iniziale linearizzata intorno ai due rispettivi punti di equilibrio.

Nel caso di una funzione scalare di più variabili:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) \quad (2.7)$$

dove

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots]^T \quad \text{e} \quad \bar{x} = \bar{x}_0 + \delta \bar{x}$$

L'espansione di Taylor della (2.7.) richiede l'introduzione del **gradiente** di f .

Definizione – Gradiente

Quando una funzione di più variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ha derivate parziali, ad ogni punto (x_1, x_2, \dots, x_n) è possibile associare il vettore delle n derivate parziali:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

che è detto il **gradiente** di f , spesso indicato con il simbolo ∇f .

Per linearizzare la (2.7.) si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1} \bigg|_{x_0} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bigg|_{x_0} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \bigg|_{x_0} \delta x_n + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \bigg|_{x_0} \delta x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \bigg|_{x_0} \delta x_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \bigg|_{x_0} \delta x_n^2 + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \bigg|_{x_0} \delta x_1 \delta x_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{x_0} \delta x_i \delta x_j + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

da cui, conservando solo i termini del primo ordine ed eliminando i termini relativi all'equilibrio, si ha:

$$f(\bar{x}) \cong f(\bar{x}_0) = \nabla f \big|_{x_0} \delta \bar{x}$$

Il caso più generale di equazioni differenziali non lineari è quello di un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine con m incognite.
Supponiamo per semplicità $m = n$:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (2.8)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \dot{\bar{x}} &= [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T \\ \bar{f} &= [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \end{aligned}$$

Assumendo che \bar{x}_0 sia il vettore degli stati di equilibrio e che:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \delta \bar{x}(t)$$

l'espansione in serie di Taylor della (2.8.) fino ai termini del secondo ordine, comporta l'uso di due matrici:

- la **matrice Jacobiana** delle derivate del primo ordine

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- la **matrice Hessiana** delle derivate di secondo ordine

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

usando le quali si può scrivere:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}_0 + \delta \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}_0) + J|_{\bar{x}_0} \delta \bar{x} + \frac{1}{2!} \delta \bar{x}^T H|_{\bar{x}_0} \delta \bar{x} + \dots \quad (2.9)$$

Lo stato di equilibrio \bar{x}_0 si trova usando la definizione, per cui è:

$$\dot{\bar{x}}_0 = \bar{f}(\bar{x}_0) = 0 \quad (2.10)$$

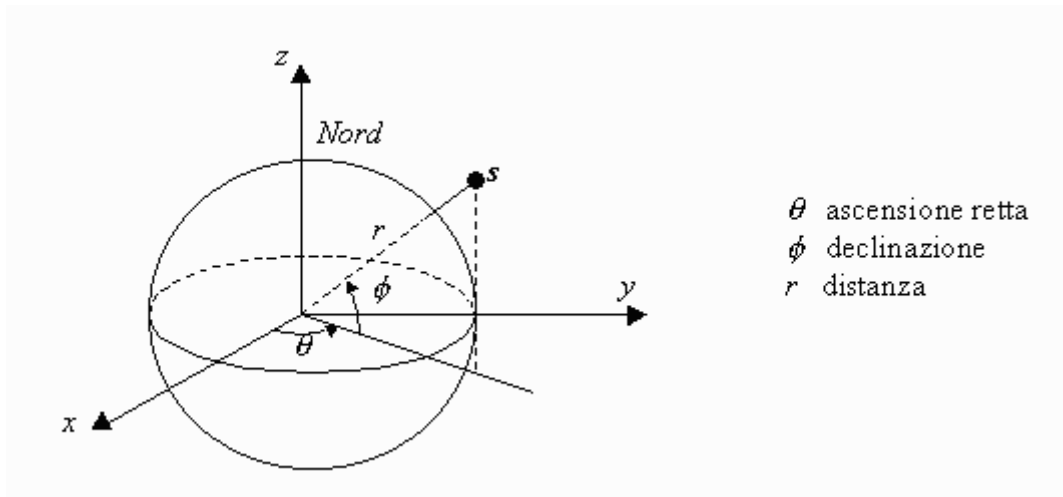
Utilizzando la (2.9.) e la (2.10.) si ottiene facilmente la forma linearizzata della (2.8.):

$$\delta \dot{\bar{x}} = J|_{\bar{x}_0} \delta \bar{x} \quad (2.11)$$

La (2.11.) è un sistema di n equazioni differenziali lineari che descrive un movimento attorno allo stato di equilibrio \bar{x}_0 ; lo stato (gli stati) di equilibrio può essere trovato resolvendo la (2.10.), cosa non sempre semplice.

Esempio

Moto linearizzato di un satellite in un'orbita circolare



Le ipotesi semplificative di cui si deve tener conto sono:

- La Terra è considerata sferica e a densità uniforme (si trascura lo schiacciamento dei poli).
- Il satellite è approssimabile con un punto uniforme di massa m .
- La forza gravitazionale g è costante.

Il moto del satellite è determinato dalla sua posizione $[r, \theta, \phi]$ e dalla sua velocità $[\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}]$ espresse in coordinate sferiche; tenendo presente che:

- Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + (r\dot{\theta} \cos \phi)^2]$$

- Energia potenziale:

$$V = -\frac{km}{r} = -\frac{gMm}{r}$$

e definendo la funzione Lagrangiana $L = T - V$, si possono ricavare le equazioni di Lagrange del moto:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \\ i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases} \quad (2.E1.)$$

dove:

- x_i sono le **coordinate generalizzate**;
- Q_i sono le **forze generalizzate**, dovute a forze non conservative (disturbi, azioni di controllo).

In questa situazione si possono costruire due vettori:

- Il **vettore di stato**:

$$\bar{x} = [r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}]^T$$

- Il **vettore del controllo** che raggruppa le entità di cui si dispone per il controllo (Q_i in (2.E1.))

$$\bar{u} = [u_r, u_\theta, u_\phi]^T$$

Dalla (2.E1.) si ricava:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + r\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{u_r}{m} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi}{\cos \phi} + \frac{u_\theta}{mr \cos^2 \phi} \\ \ddot{\phi} = -\dot{\theta}^2 \cos \phi \sin \phi - \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} + \frac{u_\phi}{mr} \end{cases} \quad (2.E2.)$$

sistema che descrive il moto del satellite in coordinate sferiche.

Usando la notazione matriciale, la (2.E2.) può essere riscritta come:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}) \quad (2.E3.)$$

sistema che è quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 \cos^2 x_5 + x_1 x_6^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_r}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{2x_4 x_6 \sin x_5}{\cos x_5} + \frac{u_\theta}{m x_1 \cos^2 x_5} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_4^2 \cos x_5 \sin x_5 - \frac{2x_2 x_6}{x_1} + \frac{u_\phi}{m x_1} \end{cases} \quad (2.E4.)$$

Per linearizzare il sistema di equazioni (2.E4.) è necessario:

1) **Trovare le condizioni di equilibrio**

Per individuare lo stato (gli stati) di equilibrio bisogna **imporre che le equazioni del sistema siano tutte pari a 0 e quindi risolverle** trovando, tramite una soluzione numerica, il vettore (\bar{x}_0, \bar{u}_0) .

Una delle soluzioni per l'equilibrio è rappresentata dall'orbita circolare equatoriale con altitudine r_0 , velocità angolare dell'orbita ω_0 e tale che l'attrazione gravitazionale sia uguale alla forza centrifuga:

$$m\omega_0^2 r_0 = \frac{km}{r_0^2}$$

Scegliendo quest'orbita, ottenuta in assenza di controllo, lo stato di equilibrio è dato da:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [r_0, 0, \omega_0 t, \omega_0, 0, 0]^T \\ \bar{u} &= [0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (2.E5.)$$

2) **Linearizzare il sistema** (2.E4.) calcolando l'espansione in serie di Taylor attorno allo stato di equilibrio (2.E5.), ottenendo:

$$\dot{\delta \bar{x}} = A \delta \bar{x} + B \delta \bar{u}$$

dove A e B sono le opportune matrici Jacobiane:

$$A = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}_0}, \quad B = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right|_{\bar{u}_0}$$

e, trascurando il termine δ delle variabili perturbate, si ottiene:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/mr_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/mr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} \quad (2.E6.)$$

Il moto linearizzato attorno all'orbita circolare nominale (x_0, ω_0) può essere disaccoppiato in una **perturbazione sul piano equatoriale** (le prime quattro equazioni) e in **una perturbazione sull'azimuth** (le ultime due equazioni); dall'analisi delle (2.E6.) si possono ricavare informazioni sul tipo di movimento (linearizzato).

Prendendo in considerazione il movimento privo di controllo si ha:

$$\partial \dot{\bar{x}} = A \partial \bar{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \partial \bar{x}$$

La matrice A ha 6 autovalori, ma il moto lungo l'azimuth è disaccoppiato e governato dalla partizione A_{22} cui **corrispondono gli autovalori**:

$$\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{\omega_0^2} j$$

Il movimento è quindi del tipo:

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi(t) = a \sin \omega_0 t + \phi_0$$

e il satellite oscilla lungo l'azimuth intorno al valore nominale di $\phi_0 = 0^\circ$, con frequenza pari a $2\pi\omega_0$.

Il moto equatoriale è "combinato" e caratterizzato dalla partizione A_{11} di A ; gli autovalori sono $\lambda_{1/2} = 0$, corrispondenti al movimento in θ , e, per il moto lungo r , $\lambda_{3/4} = \pm \sqrt{\omega_0^2} j$.

Poiché i due autovalori sono uguali a 0, il moto secondo l'angolo θ è crescente nel tempo, mentre quello lungo r risulta essere una oscillazione:

$$\delta\theta = at + b = \omega_0 t$$

$$r = r_0 + \delta r = c \sin \omega_0 t + r_0$$

Cap 3. Trasformata di Laplace

Da quanto visto nel capitolo precedente si può affermare che un sistema lineare, tempo-invariante, MIMO può essere rappresentato dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

che richiede, per essere risolto, lo studio di equazioni differenziali spesso anche molto complesse; in questo capitolo viene introdotta una tecnica che permette uno studio molto più agevole dei sistemi, nel caso siano descritti dalla (3.1.) oppure da equazioni differenziali.

3.1. Definizione della trasformata di Laplace

Uno dei metodi più efficaci per risolvere equazioni differenziali è quello della *trasformata di Laplace*; tale tecnica risulta, per i nostri scopi, estremamente importante poiché permette:

- di semplificare notevolmente la soluzione di equazioni differenziali;
- di introdurre il concetto di *funzione di trasferimento*.

L'efficacia della trasformata di Laplace sta nel fatto che essa dà la possibilità di convertire equazioni differenziali in equazioni algebriche (il cui studio è, chiaramente, molto più semplice) la cui soluzione fornisce quella delle equazioni di partenza una volta che venga effettuata la trasformazione inversa.

Per poter dare una corretta definizione della trasformata di Laplace è necessario utilizzare il concetto di integrale improprio.

Definizione – Integrale improprio

Un'operazione di integrazione fra 0 e ∞ si definisce **integrale improprio**; in maniera formale si ha che, se t_0 è un numero reale per ogni funzione $f(t)$, si ha:

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{t_0}^A f(t)dt$$

Se il limite esiste ed è finito si dice che l'integrale improprio converge, altrimenti diverge.

Esempio

Sia data la funzione $f(t) = e^{at}$, dove $a \neq 0$, allora:

$$\int_0^{\infty} e^{at} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{at} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{a} (e^{a\tau} - 1)$$

e si ha che:

- se $a < 0$ il limite risulta finito e limitato ($= -1/a$);
- se $a > 0$ il limite diverge ($a \rightarrow +\infty$).

La trasformata di Laplace è, in effetti, un particolare tipo di integrale improprio.

Definizione – Trasformata di Laplace (LT)

Sia $f(t)$ una funzione reale definita per $t \geq 0$ e sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa; se l'integrale

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (3.2)$$

converge, la funzione $F(s)$, è detta **trasformata di Laplace (LT)** della $f(t)$.

Definizione – Trasformata inversa di Laplace (ILT) o antitrasformata di Laplace

Viene detta **trasformata inversa di Laplace (ILT)** della $F(s)$, la funzione $f(t)$ e viene indicata:

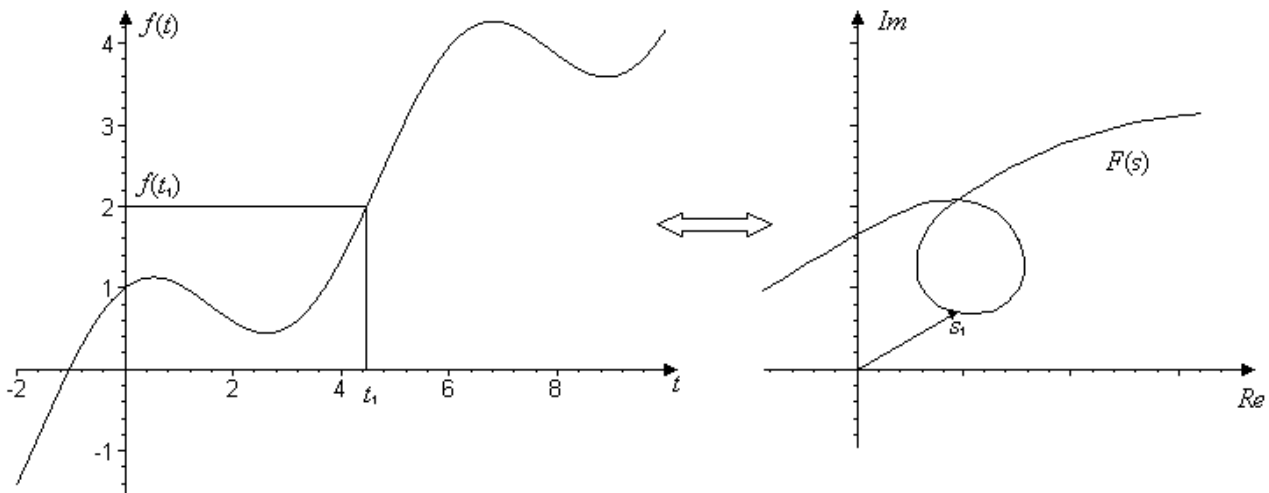
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - jR}^{\sigma + jR} F(s) e^{st} ds \quad (3.3)$$

La trasformata di Laplace è quindi un'operazione che, applicata ad una funzione del tempo $f(t)$ fornisce una funzione nella variabile s , $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, mentre la trasformata inversa esegue l'operazione opposta.

Si noti che:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t)$$

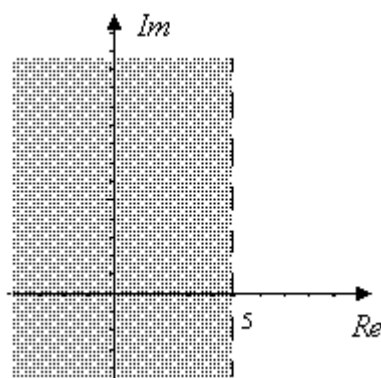
e, quindi, che la trasformazione è biunivoca.

**Esempio**

Data la funzione $f(t) = e^{5t}$ se ne cerca la trasformata di Laplace; secondo la definizione è:

$$\mathcal{L}\{e^{5t}\} = \int_0^{\infty} e^{5t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(5-s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-5)t} dt = \frac{1}{s-5} e^{-(s-5)t} \Big|_0^{\infty}$$

che converge per $(s-5) > 0$, dove s è detta **ascissa di convergenza**; si ha quindi che:



$$F(s) = 0 - \frac{1}{5-s} e^{-(s-5)0} = \frac{1}{s-5}$$

È importante individuare quali sono le funzioni che possiedono la LT ; a tale scopo si devono richiamare alcuni concetti di analisi.

Definizione – Punti di discontinuità

Una funzione $f(t)$ ha un **punto di discontinuità** in τ se:

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t)$$

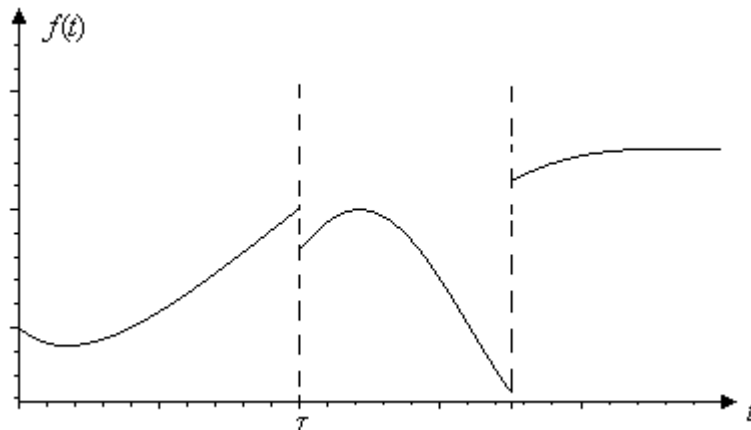
o se:

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) \neq f(\tau)$$

ma dove i limiti sono sempre, comunque, finiti.

Definizione – Funzione continua a tratti

Una funzione $f(t)$ definita in $(0, \infty)$ è detta **continua a tratti** se è continua tranne che in un numero finito di punti che però siano **punti di discontinuità**, che abbiano cioè limite destro e sinistro.



$$\lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t) = f_1(\tau), \quad \lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) = f_2(\tau), \quad f_1(\tau) \neq f_2(\tau)$$

Teorema 3.1. – Esistenza

Sia $f(t)$ una funzione continua a tratti per $t \geq 0$ e tale da soddisfare la condizione:

$$|f(t)| \leq M e^{at}$$

per $t \geq T$, con a , M e T costanti non negative fissate; sotto queste ipotesi la $\mathcal{L}\{f(t)\}$ esiste per ogni $s > a$ ed è unica.

3.2. Proprietà della trasformata di Laplace

Teorema 3.2. – Linearità della LT

Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni aventi LT, rispettivamente $F(s)$ e $G(s)$, e siano a e b due coefficienti non nulli; in tal caso si ha che:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad (3.4)$$

cioè la trasformata di Laplace è un'operazione lineare.

Corollario – Linearità della ILT

Siano $F(s)$ e $G(s)$ due funzioni aventi ILT, rispettivamente $f(t)$ e $g(t)$, e siano a e b due coefficienti non nulli; in tal caso si ha che:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = af(t) + bg(t) \quad (3.5)$$

cioè la trasformata inversa di Laplace è un'operazione lineare.

Le proprietà di linearità appena descritte permettono di affrontare lo studio delle equazioni, per il calcolo della LT, esaminando un singolo termine per volta.

Esempi

- 1) Sia data la funzione $f(t) = k = \text{costante}$, la sua LT, calcolata tramite la definizione, è:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{k\} = \int_0^{\infty} ke^{-st} dt = k \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{k}{-s} = \frac{k}{s}$$

Si noti che, per questo caso, deve essere $s > 0$.

- 2) Se la funzione data è $f(t) = \sin(at)$, il calcolo della sua LT risulta essere:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \int_0^{\infty} \sin(at)e^{-st} dt$$

Per risolvere questo integrale si usa la tecnica di integrazione per parti, dopo aver posto

$$u = \sin(at), \quad \dot{v} = e^{-st} \Rightarrow \dot{u} = a \cos(at), \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

si ottiene:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin(at)e^{-st} dt = \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st} dt + \frac{\sin(at)e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \cos(at)e^{-st} dt$$

e si arriva così alla relazione:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos(at)\}$$

Sempre utilizzando l'integrazione per parti, si ha, per il termine $\mathcal{L}\{\cos(at)\}$:

$$u = \cos(at), \quad \dot{v} = e^{-st} \Rightarrow \dot{u} = -a \sin(at), \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt = -\frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt + \frac{\cos(at) e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = -\frac{a}{s} \int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt + \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\sin(at)\} + \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{a}{s} \left[\frac{a}{s} \mathcal{L}\{\sin(at)\} + \frac{1}{s} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Tutto ciò è valido nell'ipotesi che sia $s > 0$; si noti che si poteva arrivare allo stesso risultato in maniera alternativa, sfruttando le formule di Eulero(1.9.), potendo scrivere:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{jat} - e^{-jat}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s-ja)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+ja)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{-(s-ja)t}}{-(s-ja)} - \frac{e^{-(s+ja)t}}{-(s+ja)} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-ja} - \frac{1}{s+ja} \right] = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2ja}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

Si noti inoltre che dalle relazioni precedenti, si ricava anche:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos(at)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{a} \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

3) La LT della funzione $f(t) = t^n$ è data da:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

e anche in questo caso, integrando per parti, si ha:

$$u = t^n, \quad \dot{v} = e^{-st} \Rightarrow \dot{u} = nt^{n-1}, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

da cui

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt + \frac{t^n e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

e, iterando il procedimento

$$F(s) = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{t^0\}$$

ma, poiché $t^0 = 1$, ricordando quanto visto nell'esempio 1), si ha:

$$F(s) = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{t^0\} = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^n} \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

anche questa volta, nell'ipotesi di $s > 0$.

4) Un caso numerico è dato dal calcolo della LT della funzione:

$$f(t) = 4t^3 - t^6 + 6 - 5e^{2t} + 6\sin(8t)$$

per la quale si ottiene, sfruttando gli esempi visti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{4t^3 - t^6 + 6 - 5e^{2t} + 6\sin(8t)\} = \\ &= 4 \frac{3!}{s^4} - \frac{6!}{s^7} + \frac{6}{s} - \frac{5}{s-2} + 6 \frac{8}{s^2 + 64} = \\ &= \frac{24}{s^4} - \frac{720}{s^7} + \frac{6}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{48}{s^2 + 64} \end{aligned}$$

Teorema 3.3. – Traslazione nel dominio del tempo

Sia $f(t)$ una funzione, nulla per $t < 0$ e con trasformata di Laplace $F(s)$; si supponga quindi di traslarla in avanti di un tempo $\tau > 0$, ottenendo la:

$$\hat{f}(t) = f(t - \tau)$$

Si trova che la LT della funzione traslata nel tempo è:

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s) \quad (3.6)$$

Teorema 3.4. – Traslazione nel dominio della variabile complessa

Sia $f(t)$ una funzione con trasformata di Laplace $F(s)$ e a una costante, reale o complessa, diversa da zero; definita poi la funzione:

$$\hat{f}(t) = e^{at} f(t)$$

si ha che la sua FT è:

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

e, quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t) \quad (3.7)$$

Esempi

1) Si vuole calcolare la LT della funzione:

$$\hat{f}(t) = e^{2t} \cos(3t)$$

Prendendo in considerazione una $f(t) = \cos(3t)$, per quanto visto in precedenza, si ha:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

e quindi, sfruttando la (3.7.):

$$\mathcal{L}\{e^{2t} \cos(3t)\} = F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

2) Usando la (3.7.) si vuole calcolare la *ILT* della funzione:

$$F(s) = \frac{s+9}{s^2 + 6s + 13}$$

Si cerca di portare la $F(s)$ in una forma da cui è facile ricavare l'antitrasformata:

$$F(s) = \frac{s+9}{(s+3)^2 + 4} = \frac{(s+3)+6}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}$$

e, sfruttando la (3.7.) e i risultati visti nei precedenti esercizi, si ha:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \right\} = e^{-3t} \cos(2t) + 3e^{-3t} \sin(2t).$$

Teorema 3.5. – Derivazione nel dominio del tempo

Sia $f(t)$ una funzione continua a tratti, con derivata prima anch'essa continua a tratti per $t \geq 0$, e tale che:

$$|f(t)| \leq M e^{at}$$

con $t \geq T$, dove a, M, T sono costanti non negative, allora la *LT* della derivata della $f(t)$ esiste per $s > a$ ed è:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (3.8)$$

Questo teorema può essere esteso per essere applicato alle derivate successive della $f(t)$, ammesso che esse esistano, ottenendo, con l'utilizzo iterativo della (3.8.):

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s[\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\}] - \dot{f}(0) = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (3.9)$$

e infine:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} \frac{d^j f(0)}{dt^j} \quad (3.10)$$

Esempi

1) Sia data la funzione $f(t) = \sin^2(at)$ e se ne calcoli la *LT*:

$$f(t) = \sin^2(at) \Rightarrow \dot{f}(t) = 2a \sin(at) \cos(at) = a \sin(2at)$$

da cui, ricordando la (3.8.) e quanto visto in precedenti esercizi, si può scrivere:

$$F(s) = a \frac{2a}{s^2 + 4a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin^2(at)\} = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$$

2) Si vuole risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace, utilizzando il teorema (3.4.) e indicando con $y(s)$ la LT di $y(t)$ è possibile scrivere:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} - 4y\} = s^2 y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 - 4y(s) = 0 \Rightarrow$$

$$(s^2 - 4)y(s) = s + 2 \Rightarrow y(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 4} \Rightarrow$$

e, sfruttando gli esempi precedenti:

$$y(s) = \frac{1}{s - 2} \Rightarrow y(t) = e^{2t}$$

3) Si vuole risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases}$$

Ragionando come nell'esempio precedente si ottiene:

$$y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2} \Rightarrow y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$$

Teorema 3.6. – Derivazione nel dominio della variabile complessa

Se la funzione $F(s)$, LT della funzione $f(t)$, è derivabile per tutti gli s , tranne un numero finito di valori, si ha che:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (3.11)$$

formula estendibile anche al calcolo della LT di $t^n f(t)$.

Teorema 3.7. – Integrazione nel dominio del tempo

Si supponga che la funzione $f(t)$ sia integrabile fra 0 e $+\infty$; si ha allora:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (3.12)$$

per cui, dividere per s nel dominio della variabile complessa equivale a integrare nel dominio del tempo e, quindi, il termine $1/s$ può essere interpretato come un *operatore di integrazione*.

Esiste infine un altro teorema che risulterà importante nello studio dei sistemi e riguarda il caso in cui, date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$, con LT rispettivamente pari a $F(s)$ e $G(s)$, si presenti, nel dominio della variabile complessa, la funzione $E(s) = F(s)G(s)$; per comprendere cosa rappresenti tale funzione è necessaria la seguente definizione.

Definizione – Convoluzione

Se $f(t)$ e $g(t)$ sono due funzioni continue a tratti, il loro **prodotto di convoluzione** è:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\eta)f(\eta)d\eta = g(t) * f(t) \quad (3.13)$$

dove $\eta = t - \tau$.

Teorema 3.8. – Convoluzione nel dominio del tempo

Siano $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, si ha allora:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s) \quad (3.14)$$

Esempio

Si vuole calcolare la ILT della funzione:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

Per prima cosa si scompone la $F(s)$ in due termini di cui, in esercizi precedenti, sono già state viste le antitrasformate, poi si applica la (3.14.):

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \cos(t) * \sin(t) \end{aligned}$$

e, a questo punto, sfruttando la (3.13.):

$$\begin{aligned} \cos(t) * \sin(t) &= \int_0^t \sin(t-\eta) \cos(\eta) d\eta = \int_0^t [\sin(t) \cos(\eta) - \cos(t) \sin(\eta)] \cos(\eta) d\eta = \\ &= \sin(t) \int_0^t \cos^2(\eta) d\eta - \cos(t) \int_0^t \sin(\eta) \cos(\eta) d\eta = \end{aligned}$$

$$= \left[\sin(t) \left(\frac{\sin(\eta) \cos(\eta) + \eta}{2} \right) - \cos(t) \frac{\sin^2(\eta)}{2} \right]_0^t = \frac{t \sin(t)}{2}.$$

Teorema 3.9. – Teorema del valore finale

Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$; nell'ipotesi che il $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ esista e sia finito, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (3.15)$$

Esempio

Sia data la funzione:

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-4t}$$

per la quale è, quindi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{4}$$

La sua LT risulta essere:

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s+4+3s}{s(s+4)} = \frac{s+1}{s(s+4)}$$

da cui:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{s+1}{s(s+4)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+4} = \frac{1}{4}$$

e quindi la (3.15.) è verificata.

Teorema 3.10. – Teorema del valore iniziale

Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$; nell'ipotesi che il $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$ esista, vale la relazione:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad (3.16)$$

Esempio

Sia data la funzione:

$$f(t) = e^t$$

per cui si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t = 1$$

e la sua LT è:

$$F(s) = \frac{1}{s-1}$$

In questo caso la (3.16.) non è applicabile dato che il limite:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \cdot \frac{1}{s-1} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s-1}$$

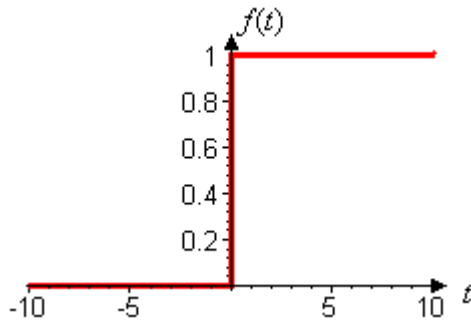
non esiste.

3.3. Segnali canonici

Nello studio dei sistemi di controllo rivestono un'estrema importanza due particolari funzioni che vengono utilizzate in un gran numero di applicazioni; il *gradino* e l'*impulso*.

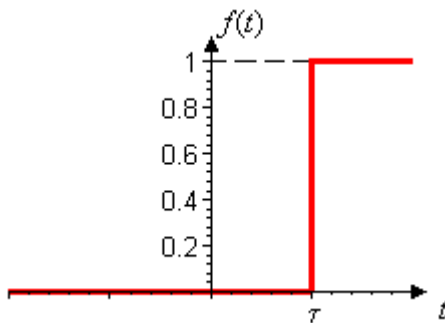
3.3.1. Funzione gradino unitario

La *funzione gradino unitario* o *funzione di Heaviside*, estremamente importante per le applicazioni pratiche, è così definita:



$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Supponendo che τ sia una costante fissata, è possibile traslare la funzione di Heaviside di un intervallo τ ottenendo:



$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases} \quad (3.18)$$

La trasformata di Laplace della funzione gradino si ricava applicando la definizione (3.2.), ottenendo:

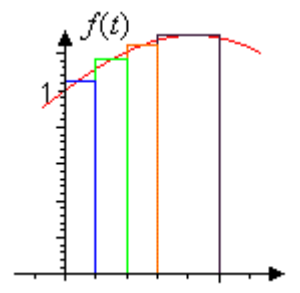
$$\mathcal{L}\{H(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} H(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-\tau s}}{s} \quad (3.19)$$

e, ovviamente, se $\tau = 0$:

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} H(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (3.20)$$

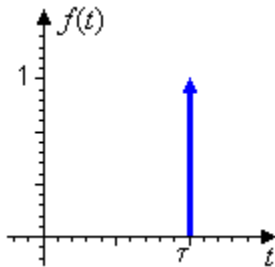
L'importanza di tale funzione è dovuta a due considerazioni:

- molti ingressi possono essere assimilati a un gradino (unitario o meno);
- è una funzione approssimante di funzioni non note; tramite un insieme di gradini è possibile, infatti, approssimare funzioni anche molto complesse:



3.3.2. Funzione impulso o delta di Dirac

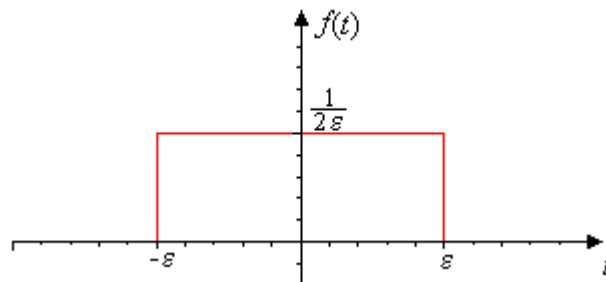
La *funzione impulso unitario* o *delta di Dirac*, indicata con $\delta(t-\tau)$, è definita, in maniera non rigorosa, come una funzione con le seguenti proprietà:



$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) dt = 1, & t = \tau \end{cases} \quad (3.21)$$

Si supponga che sia $\tau = 0$, in modo che $\delta(t-\tau) = \delta(t)$ e, per un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, si prenda in considerazione la funzione delta approssimata, $\delta_\varepsilon(t)$:

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |t| \leq \varepsilon \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases}$$



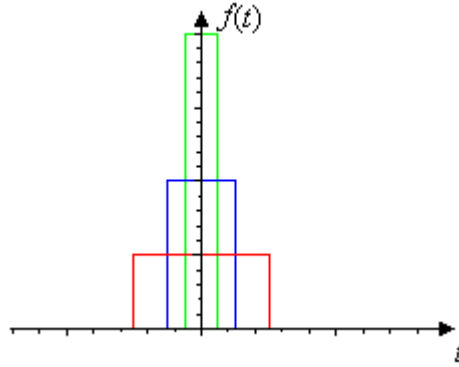
La funzione $\delta_\varepsilon(t)$ così definita è continua a tratti e tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$

La $\delta(t)$ può quindi essere definita come:

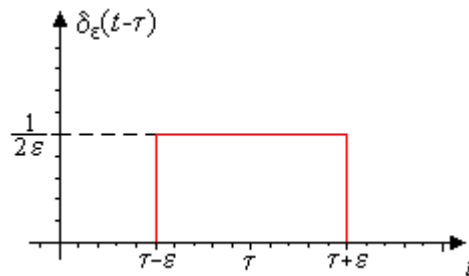
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) \quad (3.22)$$

Si può osservare che quando $\varepsilon \rightarrow 0$ l'area del rettangolo rimane invariata, mentre, ovviamente, aumenta la sua altezza:



In generale si può scrivere:

$$\delta(t - \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t - \tau)$$



È ovvio che la $\delta(t)$ non è una vera e propria funzione, ma, poiché è ottenuta come limite di una funzione continua a tratti, nel seguito verrà vista come una funzione.

Il calcolo della trasformata di Laplace della funzione delta di Dirac viene effettuato sfruttando la funzione gradino, ove si noti che si può scrivere:

$$\delta_{\varepsilon}(t - \tau) = \frac{1}{2\varepsilon} [H(t - (\tau - \varepsilon)) - H(t - (\tau + \varepsilon))]$$

quindi

$$\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = \mathcal{L}\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t - \tau)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_{\varepsilon}(t - \tau)\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2\varepsilon} [H(t - (\tau - \varepsilon)) - H(t - (\tau + \varepsilon))]\right\} =$$

e, sfruttando la (3.19.):

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \left[\frac{e^{-(\tau - \varepsilon)s}}{s} - \frac{e^{-(\tau + \varepsilon)s}}{s} \right] \right\} = \frac{e^{-\tau s}}{2s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \frac{e^{-\tau s}}{2s} 2s = e^{-\tau s}$$

Si può quindi riassumere:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-\tau s} \quad (3.23)$$

e:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (3.24)$$

Ricordando le (3.19.) e (3.20.) si verifica che la funzione impulso unitario può essere vista come la derivata della funzione gradino unitario.

Esempi

1) Volendo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = 1 \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

tramite la trasformata di Laplace, utilizzando la (3.9.), si può scrivere:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} \Rightarrow s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^2 + 1)y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow y(t) = 1 - \cos(t)$$

2) Volendo, invece, risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = \delta(t) \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

tramite la trasformata di Laplace, utilizzando le (3.9.) e (3.23.), si può scrivere:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + y(s) = 1 \Rightarrow (s^2 + 1)y(s) = 1 \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)} \Rightarrow y(t) = \sin(t)$$

3.4. Uso della LT per la soluzione di sistemi di equazioni differenziali

La trasformata di Laplace è stata introdotta come strumento per affrontare lo studio di sistemi di equazioni differenziali, con condizioni iniziali date, permettendone la trasformazione in sistemi di equazioni algebriche la cui analisi risulta, evidentemente, molto più semplice.

Così, per esempio, se il problema che si vuole affrontare è

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t) \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 0 \end{cases}$$

tramite la trasformata di Laplace, si arriva a scrivere l'equazione algebrica

$$(s^2 + as + b)y(s) - (s + a)y_0 - \dot{y}_0 = u(s)$$

da cui

$$y(s) = \frac{s + a}{(s^2 + as + b)} + \frac{u(s)}{(s^2 + as + b)}$$

È importante notare che il primo termine del secondo membro rappresenta la LT della risposta libera del sistema, mentre il secondo, la LT della parte forzata.

Supponendo che sia $u(t) = H(t)$ e sapendo dalla (3.20.) che $\mathcal{L}\{H(t)\} = 1/s$ si ha:

$$y(s) = \frac{s + a}{(s^2 + as + b)} + \frac{1}{s(s^2 + as + b)} = \frac{s(s + a) + 1}{s(s^2 + as + b)} = \frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}$$

Esempio

Se nel caso appena visto si suppone che sia $a = 3$, $b = 2$ e l'ingresso:

$$u(t) = e^{-2t} \cos(4t) \Rightarrow u(s) = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 16}$$

si ha:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{s + 2}{[(s + 2)^2 + 16](s^2 + 3s + 2)} = \\ &= \frac{(s + 3)(s^2 + 4s + 20) + s + 2}{(s^2 + 4s + 20)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 33s + 62}{s^4 + 7s^3 + 34s^2 + 68s + 40} \end{aligned}$$

In generale, una volta che sia noto il valore di $u(t)$, si può calcolare la $u(s)$ e la $y(s)$ viene, quindi, posta nella forma:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad m \leq n \quad (3.25)$$

Nel caso di un sistema di equazioni lineari differenziali, con condizioni iniziali date, il problema va affrontato nello stesso modo; così, se si ha il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + bx = u(t) \\ \dot{x} + cx - y = 0 \end{cases}, \quad y_0 = \dot{y}_0 = x_0 = 0$$

usando la *LT*:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (s^2 + as)y(s) + bx(s) = u(s) \\ (s + c)x(s) - y(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} b & (s^2 + as) \\ (s + c) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(s) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & (s^2 + as) \\ (s + c) & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(s) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2 + as)(s + c) + b} \begin{bmatrix} 1 & (s^2 + as) \\ (s + c) & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x(s) = \frac{u(s)}{(s^2 + as)(s + c) + b} \\ y(s) = \frac{s + c}{(s^2 + as)(s + c) + b} \end{cases} \end{aligned}$$

Si può notare che i denominatori delle due frazioni sono uguali al polinomio caratteristico del sistema di partenza e che, riportando le equazioni nella forma (3.25.), si ottiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} x(s) = \frac{u(s)}{s^3 + (c + a)s^2 + acs + b} \\ y(s) = \frac{s + c}{s^3 + (c + a)s^2 + acs + b} \end{cases}$$

Il problema che rimane da affrontare è quindi quello del calcolo della $\mathcal{L}^A\{\bullet\}$ che può essere effettuato in due modi:

- 1) Sfruttando delle tabelle che forniscono l'antitrasformata della maggior parte delle funzioni di interesse.
- 2) Utilizzando la tecnica della scomposizione in fratti semplici (PFE - Partial Fraction Expansion).

3.4.1. Scomposizione in fratti semplici

È già stato illustrato come, nello studio di equazioni differenziali, con condizioni iniziali date, si può arrivare, sfruttando la trasformata di Laplace, ad esprimere l'equazione stessa tramite la (3.25.):

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad m \leq n$$

che può essere portata nella forma:

$$F(s) = \frac{b_m}{a_n} \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} s^{m-1} + \dots + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}} = k \frac{s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \dots + b'_0}{s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_0} \quad (3.26)$$

con ovvio significato dei simboli.

Se la funzione è strettamente propria, cioè $m < n$, la (3.26.) può essere scomposta in una somma di termini facilmente antitrasformabili detta *somma di fratti semplici*; se invece la funzione risulta propria ma non strettamente, cioè $m = n$, la (3.26.) può essere comunque riportata alla somma di una costante e di una funzione strettamente propria che si possono, ovviamente, antitrasformare in maniera indipendente.

Per poter effettuare tale operazione è sufficiente ricordare che un polinomio di grado n a coefficienti reali ha n zeri reali o complessi, cioè l'equazione algebrica ad esso associata, imponendo l'annullarsi del polinomio stesso, ammette n radici reali o complesse; quindi, se

$$x(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

si può scrivere la $x(s)$ come:

$$x(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

Si noti che se una delle radici dell'equazione è complessa, sicuramente sarà presente anche la sua coniugata.

Se si indicano con z_i e p_i rispettivamente gli zeri dei polinomi a numeratore e denominatore della (3.26.), si può riscrivere la (3.26.) stessa:

$$F(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (3.27)$$

Le costanti complesse z_i sono dette *zeri* mentre le costanti complesse p_i sono i *poli* della funzione $F(s)$; una volta assegnati zeri e poli, una funzione è quindi completamente determinata, a meno di una costante k .

Riportando la (3.27.) in somma di fratti semplici, trascurando la costante k , si ha:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{B_r}{(s - p_i)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s - p_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{s - p_i} + \dots + \begin{cases} \frac{C_k}{s - p_k} + \frac{C_k^*}{s - p_k^*} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases} \quad (3.28)$$

I termini A_i , B_i , C_i e D_i sono delle costanti che corrispondono rispettivamente a poli semplici (gli A_i), multipli (B_i) o complessi coniugati (C_i e D_i) e sono detti **residui**; calcolando le antitrasformate delle frazioni che compongono la (3.28.), si ha che:

$$\begin{aligned} - \frac{A}{s - p} &\rightarrow Ae^{pt} \\ - \frac{B_r}{(s - p)^r} &\rightarrow \frac{B_r t^{r-1}}{(r-1)!} e^{pt} \end{aligned}$$

$$- \frac{C}{s-p} + \frac{C^*}{s-p^*} \rightarrow \mathcal{A}^{\operatorname{Re}\{p\}t} \cos[\operatorname{Im}\{p\}t + \beta] = \mathcal{A}^{\operatorname{Re}\{p\}t} \operatorname{sen}\left[\operatorname{Im}\{p\}t + \beta + \frac{\pi}{2}\right]$$

dove

$$\mathcal{A} = 2\sqrt{\operatorname{Re}^2\{C\} + \operatorname{Im}^2\{C\}}; \quad \beta = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{C\}}{\operatorname{Re}\{C\}}$$

Il calcolo dei residui viene effettuato nel seguente modo:

1) Radici reali e distinte $\rightarrow A_i$

$$\frac{A_i}{s-p_i} \rightarrow A_i = (s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$$

2) Radici reali ripetute (con molteplicità r) $\rightarrow B_i$

$$\frac{B_r}{(s-p)^r} \rightarrow B_{r-k} = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{ds^k} [(s-p)^r F(s)] \right\} \bigg|_{s=p}$$

3) Radici complesse coniugate $\rightarrow C_i$

$$\frac{C}{s-p} + \frac{C^*}{s-p^*} \rightarrow C = (s-p)F(s)\big|_{s=p}$$

Si noti che C è associata al polo con la parte immaginaria positiva.

Alternativamente, nel caso di poli complessi coniugati, questi possono essere scritti:

$$\frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove

$$p = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

I termini C_k e D_k sono reali e si trovano per sostituzione; per antitrasformare si utilizza il teorema (3.4.) di traslazione nel dominio della variabile complessa s .

Esempi

1) Si vuole trovare la *ILT* della funzione:

$$y(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+5)}$$

I poli della $y(s)$ sono $p_1 = -2$ e $p_2 = -5$ per cui la scomposizione in fratti semplici, deve essere:

$$y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+5}$$

Effettuando il calcolo dei residui si ottiene:

$$A_1 = (s+2)y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+2)(s+5)}\Big|_{s=-2} = \frac{s+4}{s+5}\Big|_{s=-2} = \frac{-2+4}{-2+5} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = (s+5)y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+5)(s+4)}{(s+2)(s+5)}\Big|_{s=-5} = \frac{s+4}{s+2}\Big|_{s=-5} = \frac{-5+4}{-5+2} = \frac{1}{3}$$

e quindi:

$$y(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+5} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t}$$

2) Si vuole trovare la *ILT* della funzione:

$$y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

I poli della $y(s)$ sono $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ e $p_3 = -2$, per cui può essere portata nella forma:

$$y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)}$$

e, con la scomposizione in fratti semplici, deve essere:

$$y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

Effettuando il calcolo dei residui si ottiene:

$$A_1 = s \cdot y(s)\Big|_{s=0} = \frac{s(s^2 + 3s + 1)}{s(s+1)(s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 3s + 2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = (s+1)y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{(s+1)(s^2 + 3s + 1)}{s(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s}\Big|_{s=-1} = \frac{1-3+1}{1-2} = 1$$

$$A_3 = (s+2)y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{(s+2)(s^2 + 3s + 1)}{s(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + s}\Big|_{s=-2} = \frac{4-6+1}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

e quindi:

$$y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

3) Si vuole trovare la *ILT* della funzione:

$$y(s) = \frac{s+1}{(s+4)^2(s+2)}$$

I poli della $y(s)$ sono uno in $p_1 = -2$ e due coincidenti in $p_{2,3} = -4$ e, con la scomposizione in fratti semplici, deve essere:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_2}{(s+4)^2} + \frac{B_1}{s+4}$$

Effettuando il calcolo dei residui si ottiene:

$$A = (s+2)y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+4)^2(s+2)}\Big|_{s=-2} = \frac{s+1}{(s+4)^2}\Big|_{s=-2} = \frac{-2+1}{(-2+4)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$B_2 = (s+4)^2 y(s)\Big|_{s=-4} = \frac{(s+4)^2(s+1)}{(s+4)^2(s+2)}\Big|_{s=-4} = \frac{s+1}{s+2}\Big|_{s=-4} = \frac{-4+1}{-4+2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{d}{ds}[(s+4)^2 y(s)]\Big|_{s=-4} = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+4)^2(s+1)}{(s+4)^2(s+2)}\right]\Big|_{s=-4} = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+1)}{(s+2)}\right]\Big|_{s=-4} = \\ &= \frac{s+2-(s+1)}{(s+2)^2}\Big|_{s=-4} = \frac{2-1}{(-4+2)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e quindi:

$$y(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+2)} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s+4)} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{2}te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-4t}$$

4) Si vuole trovare la *ILT* della funzione:

$$y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^3}$$

I poli della $y(s)$ sono tre coincidenti in $p_{1,2,3} = -1$ e, con la scomposizione in fratti semplici, deve essere:

$$y(s) = \frac{B_3}{(s+1)^3} + \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{s+1}$$

Effettuando il calcolo dei residui si ottiene:

$$B_3 = (s+1)^3 y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{(s+1)^3(s+3)}{(s+1)^3}\Big|_{s=-1} = s+3\Big|_{s=-1} = -1+3 = 2$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}[(s+1)^3 y(s)]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+1)^3(s+3)}{(s+1)^3}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}[s+3]\Big|_{s=-1} = s\Big|_{s=-1} = -1$$

$$B_1 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 y(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{(s+1)^3 (s+3)}{(s+1)^3} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} [(s+3)] \Big|_{s=-1} = 0$$

e quindi:

$$y(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow y(t) = 2 \cdot \frac{1}{2!} t^2 e^{-t} + t e^{-t} = t^2 e^{-t} + t e^{-t}$$

5) Si vuole trovare la *ILT* della funzione:

$$y(s) = \frac{10}{(s+2)(s^2+6s+25)}$$

I poli della $y(s)$ sono uno in $p_1 = -2$ e due complessi coniugati in $p_{2,3} = -3 \pm j4$, per cui può essere portata nella forma:

$$y(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3-j4)(s+3+j4)}$$

e, con la scomposizione in fratti semplici, deve essere:

$$y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{C}{s+3-j4} + \frac{C^*}{s+3+j4}$$

Effettuando il calcolo dei residui si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= (s+2)y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{(s+2)10}{(s+2)(s+3-j4)(s+3+j4)} \Big|_{s=-2} = \\ &= \frac{10}{(s+3-j4)(s+3+j4)} \Big|_{s=-2} = \frac{10}{(-2+3-j4)(-2+3+j4)} = \\ &= \frac{10}{(-1-j4)(-1+j4)} = \frac{10}{1+16} = \frac{10}{17} \approx 0,59 \\ C &= (s+3-j4)y(s) \Big|_{s=-3+j4} = \frac{(s+3-j4)10}{(s+2)(s+3-j4)(s+3+j4)} \Big|_{s=-3+j4} = \\ &= \frac{10}{(s+2)(s+3+j4)} \Big|_{s=-3+j4} = \frac{10}{(-3+j4+2)(-3+j4+3+j4)} = \frac{10}{(-1+j4)j8} = \\ &= -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(4+j)} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{4-j}{(4+j)(4-j)} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{4-j}{(16+1)} = -\frac{5}{17} + j \frac{5}{68} = -0,294 + j0,0735 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = -0,294 + j0,0735; \quad C^* = -0,294 - j0,0735$$

e quindi:

$$y(s) = \frac{0,59}{s+2} + \frac{-0,294 + j0,0735}{(s+3-j4)} + \frac{-0,294 - j0,0735}{(s+3+j4)}$$

la cui antitrasformata è:

$$y(t) = 0,59e^{-2t} + \mathcal{A}e^{\operatorname{Re}\{p_2\}t} \cos[\operatorname{Im}\{p_2\}t + \mathcal{B}]$$

dove

$$\mathcal{A} = 2\sqrt{\operatorname{Re}^2\{C\} + \operatorname{Im}^2\{C\}} = 2\sqrt{(-0,294)^2 + (0,0735)^2} = 0,606$$

$$\mathcal{B} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{C\}}{\operatorname{Re}\{C\}} = \tan^{-1} \frac{0,0735}{-0,294} = \tan^{-1}(0,25) = -194^\circ$$

e quindi:

$$y(t) = 0,59e^{-2t} + 0,606e^{-3t} \cos(4t - 194^\circ)$$

In maniera alternativa si può risolvere il problema scomponendo la $y(s)$ nel modo seguente:

$$y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Una volta calcolato, come visto in precedenza, il residuo relativo al polo reale, si ha che:

$$y(s) - \frac{0,59}{s+2} = \text{Contributo della coppia di poli complessi coniugati}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{10}{(s+2)(s^2+6s+25)} - \frac{0,59}{s+2} &= \frac{10 - 0,59(s^2+6s+25)}{(s+2)(s^2+6s+25)} = \\ &= \frac{10 - 0,59s^2 - 3,54s - 14,75}{(s+2)(s^2+6s+25)} = -\frac{0,59s^2 + 3,54s + 4,75}{(s+2)(s^2+6s+25)} \end{aligned}$$

Il numeratore deve essere divisibile per il termine $(s+2)$, relativo al polo reale, per cui si possono trovare le costanti C e D tali che:

$$0,59s^2 + 3,54s + 4,75 = -(s+2)(Cs + D)$$

$$\Rightarrow 0,59s^2 + 3,54s + 4,75 = -[Cs^2 + (2C + D)s + 2D] \Rightarrow \begin{cases} C = -0,59 \\ D = -4,75/2 = -2,375 \end{cases}$$

Tornando al calcolo del contributo dei poli complessi coniugati, si ha:

$$= -\frac{0,59s + 2,375}{s^2 + 6s + 25}$$

dove :

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= 25 \Rightarrow \omega_n = 5 \\ 2\zeta\omega_n &= 6 \Rightarrow \zeta = 3/5 = 0,6\end{aligned}$$

Il denominatore può essere riscritto nella forma:

$$\begin{aligned}s^2 + 6s + 25 &= (s + a)^2 + b^2 = s^2 + 2as + a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{25 - a^2} = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow s^2 + 6s + 25 &= (s + 3)^2 + 4^2\end{aligned}$$

e, il numeratore può essere scritto come

$$-0,59s - 2,375 = -0,59(s + 3) + 0,59 \cdot 3 - 2,375 = -0,59(s + 3) - 0,605$$

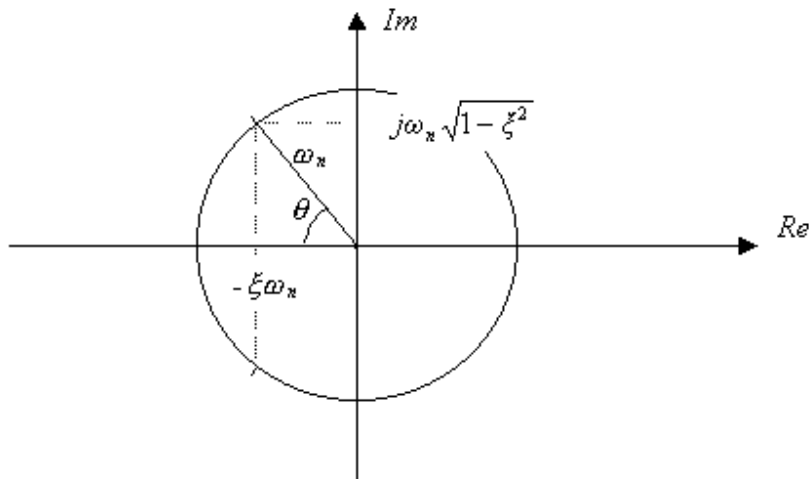
e si arriva così alla:

$$y(s) = \frac{0,59}{s + 2} - 0,59 \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2} - 0,15125 \frac{4}{(s + 3)^2 + 4^2}$$

la cui *LTI* risulta essere:

$$y(t) = 0,59e^{-2t} - 0,59e^{-3t} \cos(4t) - 0,15125e^{-3t} \sin(4t)$$

Andando a rappresentare la posizione dei poli nel piano complesso si verifica che:



e, dal confronto delle relazioni utilizzate si ottiene:

$$a = -\zeta\omega_n, \quad b = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

dove:

ω_n è la *pulsazione naturale* dei poli complessi coniugati
 $\xi = \cos(\theta)$ è il relativo *smorzamento*

3.5. Tabella delle trasformate di Laplace più comuni

Vengono di seguito riportate le trasformate di Laplace delle funzioni più comuni; come visto le funzioni del tempo devono essere nulle per $t < 0$ e quindi sono moltiplicate per la funzione scalino $H(t)$.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$H(t)$	$1/s$
$H(t-\tau)$	$e^{-\tau s}/s$
$t \cdot H(t)$	$1/s^2$
$H(t) - H(t-\tau)$	$\frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})$
$e^{-\tau t} \cdot H(t)$	$1/(s + \tau)$
$t \cdot e^{-\tau t} \cdot H(t)$	$\frac{1}{(s + \tau)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot H(t)$	$\frac{1}{s^n}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\tau t} \cdot H(t)$	$\frac{1}{(s + \tau)^n}$
$\frac{1}{\tau} (1 - e^{-\tau t}) \cdot H(t)$	$\frac{1}{s(s + \tau)}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \cdot H(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a} [(\alpha - a) \cdot e^{-at} - (\alpha - b) \cdot e^{-bt}] \cdot H(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} (1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}) \cdot H(t)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} [\alpha - \frac{b(\alpha-a)}{b-a} e^{-at} - \frac{a(\alpha-b)}{a-b} e^{-bt}] \cdot H(t)$	$\frac{s + \alpha}{s(s+a)(s+b)}$
$[\frac{1}{(b-a)(c-a)} e^{-at} + \frac{1}{(c-b)(a-b)} e^{-bt} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}] \cdot H(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$[\frac{\alpha-a}{(b-a)(c-a)} e^{-at} + \frac{\alpha-b}{(c-b)(a-b)} e^{-bt} + \frac{\alpha-c}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}] \cdot H(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$\text{sen}(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\text{sen}(\omega t \pm \varphi) \cdot H(t)$	$\frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t \pm \varphi) \cdot H(t)$	$\frac{s \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$t \text{sen}(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \text{cos}(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

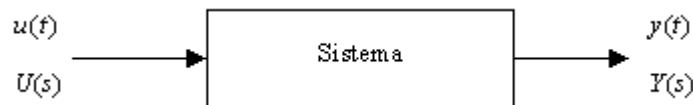
$f(t)$	$F(s)$
$e^{-\sigma t} \sin(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t} \cos(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$
$te^{-\sigma t} \sin(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{2\omega(s+\sigma)}{[(s+\sigma)^2 + \omega^2]^2}$
$te^{-\sigma t} \cos(\omega t) \cdot H(t)$	$\frac{(s+\sigma)^2 - \omega^2}{[(s+\sigma)^2 + \omega^2]^2}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \cdot H(t), \quad \varphi = \arg(\alpha + j\omega)$	$\frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a-b} (a e^{-at} - b e^{-bt}) \cdot H(t)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$[1 - \cos(\omega t)] \cdot H(t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\left[\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi) \right] \cdot H(t), \quad \varphi = \arg(\alpha + j\omega)$	$\frac{(s+\alpha)}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\left[\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \right] \cdot H(t), \quad \varphi = \arg(\alpha + ja)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2 + \omega^2)}$
$\frac{\sqrt{(\alpha-a)^2 + b^2}}{b} e^{-at} \sin(bt + \varphi) \cdot H(t), \quad \varphi = \arg(\alpha - a + jb)$	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2 + b^2}$
$\left[\frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{1}{b \sqrt{a^2 + b^2}} e^{-at} \sin(bt + \varphi) \right] \cdot H(t), \quad \varphi = \arg(a + jb)$	$\frac{1}{s[(s+a)^2 + b^2]}$
$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at}) \cdot H(t)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{a^2} [\alpha at + (a - \alpha)(1 - e^{-at})] \cdot H(t)$	$\frac{s+\alpha}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{a^2} [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}] \cdot H(t)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
$\frac{1}{a^2} \{ \alpha + [a(a - \alpha)t - \alpha] \cdot e^{-at} \} \cdot H(t)$	$\frac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$

Cap. 4. Funzione di trasferimento

4.1. Funzione di trasferimento per sistemi lineari

La **Funzione di Trasferimento** è un concetto basilare nello studio dei sistemi poiché permette la descrizione del rapporto ingresso-uscita di un sistema lineare nel dominio della variabile complessa s sfruttando la trasformata di Laplace.

È stato dimostrato che esiste una relazione biunivoca fra una funzione del tempo e la sua trasformata di Laplace, per cui è possibile indicare ingresso e uscita di un sistema, indifferentemente come:



Se si suppone che il sistema sia governato da un'equazione differenziale del tipo

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = u(t) \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

ricordando la (1.14.) si può scriverne la soluzione come:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Utilizzando, a questo punto, la trasformata di Laplace, si ha:

$$Y(s) = Y_h(s) + Y_p(s)$$

da cui si deduce che anche nel dominio della variabile complessa s si può parlare di evoluzione libera e risposta forzata.

La *LT* della (4.1.) risulta essere:

$$s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + asY(s) - ay_0 + bY(s) = U(s)$$

da cui

$$Y(s) = \frac{(s+a)y_0 + \dot{y}_0}{s^2 + as + b} + \frac{U(s)}{s^2 + as + b} \quad (4.2)$$

La relazione ingresso-uscita è completamente identificata dal termine

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + as + b} \quad (4.3)$$

e se si considerano nulle le condizioni iniziali, se cioè $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, si arriva alla seguente definizione.

Definizione – Funzione di Trasferimento (1)

La **Funzione di Trasferimento** di un sistema lineare è il rapporto fra la *LT* dell'uscita e la *LT* dell'ingresso quando tutte le condizioni iniziali sono nulle, quando cioè si ha solo la risposta forzata.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.4)$$

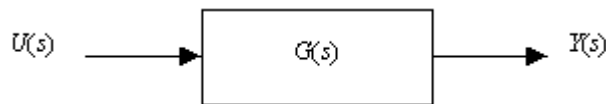
Una volta nota la *Funzione di Trasferimento* di un sistema, è possibile conoscerne l'uscita, qualunque sia l'ingresso, infatti è:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

e, utilizzando il *Teorema della convoluzione nel dominio del tempo* (3.8.) si ha:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

e quindi, graficamente si può riportare il sistema come:



Definizione – Funzione di Trasferimento (2)

La **Funzione di Trasferimento** di un sistema lineare è la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema stesso quando l'ingresso è costituito da un impulso unitario applicato a $t = 0$.

Si dimostra facilmente che le due definizioni coincidono, infatti si ha che:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

ma la *LT* di un impulso unitario è (3.24.):

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

per cui:

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s) .$$

Considerando non nulle le condizioni iniziali l'espressione dell'uscita diviene:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G^{ci}(s) \quad (4.5)$$

dove il termine $G^{ci}(s)$ non è una *funzione di trasferimento* ma solo un rapporto di polinomi che tiene conto dell'influenza delle condizioni iniziali.

Nella rappresentazione grafica del sistema si possono quindi distinguere

- $u(t), U(s)$ = Ingressi, controlli, comandi, riferimenti, disturbi.
- $y(t), Y(s)$ = Uscite, risposte.
- $G(s)$ = Sistema, impianto.

La *Funzione di Trasferimento* viene solitamente riportata, in maniera del tutto equivalente, in una delle seguenti forme:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad m \leq n \quad (4.6)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_j^m (s - z_j)}{\prod_i^n (s - p_i)}, \quad m \leq n \quad (4.7)$$

dove:

- k è il guadagno della *Funzione di Trasferimento*.
- z_j sono gli zeri della *Funzione di Trasferimento* e, a meno di cancellazioni, sono legati ai *residui* della scomposizione in fratti semplici; l'insieme degli zeri e, quindi, il numeratore $N(s)$ della *FdT*, influisce sull'ampiezza della funzione d'uscita nel dominio del tempo $y(t)$.
- p_i sono i poli della *Funzione di Trasferimento* e, a meno di cancellazioni, coincidono con le radici del polinomio caratteristico infatti:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y \Rightarrow D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

L'insieme dei poli, cioè il denominatore $D(s)$ della *FdT*, determina l'andamento temporale della $y(t)$ e, in particolare, la loro parte reale determina lo smorzamento delle oscillazioni, mentre la parte immaginaria la loro pulsazione.

Esempi

1. Si vuole trovare l'espressione della *LT* dell'uscita del sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{u}(t) - 8u(t) \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases}$$

Utilizzando la trasformata di Laplace si ottiene.

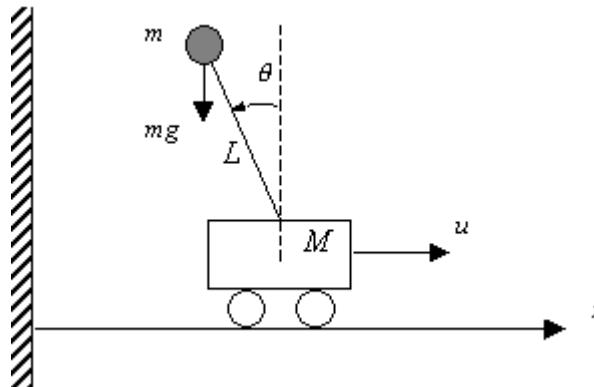
$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y_0 + \dot{y}_0 + (4s - 8)U(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(s+3)y_0 + \dot{y}_0}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{(4s-8)}{(s^2 + 3s + 2)} U(s) = Y_h(s) + Y_p(s)$$

da cui si deduce che in questo caso la relazione ingresso uscita e, quindi, la *Funzione di Trasferimento*, è:

$$G(s) = \frac{4(s-2)}{s^2 + 3s + 2}$$

2. Pendolo invertito



- M = massa del carrello
- m = massa del pendolo
- L = lunghezza del braccio (supposto di massa trascurabile)
- u = forza applicata al carrello

Il sistema ha due gradi di libertà e le sue equazioni descrittive risultano:

- Traslazione lungo x :

$$(M + m)\ddot{x} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + mL\ddot{\theta} \cos \theta = u$$

- Rotazione del braccio:

$$mL\ddot{x} \cos \theta + mL^2\ddot{\theta} = mgL \sin \theta$$

Linearizzando il sistema intorno alla posizione verticale del pendolo ($\theta = 0$) si ottiene:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = u \\ mL\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} = mgL\theta \end{cases}$$

Posto poi che sia $M = m = L = g = 1$, normalizzando cioè il sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \ddot{\theta} = u \\ \ddot{x} + \ddot{\theta} - \theta = 0 \end{cases}$$

Sfruttando poi la LT si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 2s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

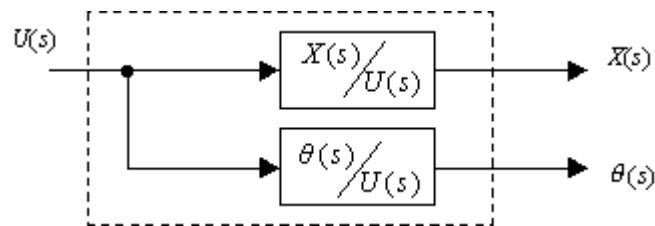
Definito quindi $\Delta(s)$ come:

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} 2s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 1 \end{bmatrix} = 2s^2(s^2 - 1) - s^4 = s^2(s^2 - 2)$$

si può scrivere:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s^2 - 1}{\Delta(s)}, \quad \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-s^2}{\Delta(s)}$$

Queste relazioni rappresentano le FdT del sistema e possono essere rappresentate con il seguente schema:



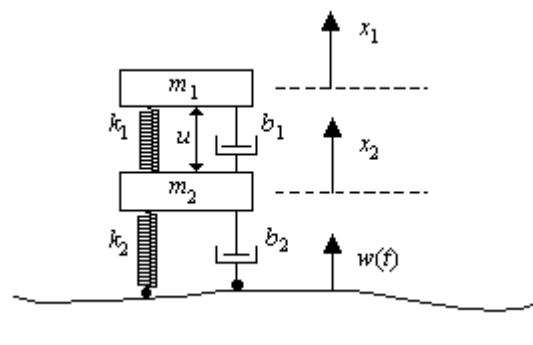
da cui si possono ricavare anche i valori delle altre grandezze, tenendo presente che:

$$\dot{X}(s) = sX(s), \quad \dot{\theta}(s) = s\theta(s)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow \dot{X}(s) = sX(s)$$

$$\theta(s) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow \dot{\theta}(s) = s\theta(s)$$

3. Modello ammortizzatore



- m_1 = massa del veicolo

- m_2 = massa del sistema di sospensione
- k_1 = costante elastica del sistema di ammortizzazione
- k_2 = costante elastica del sistema ruote\gomme
- b_1 = costante di smorzamento del sistema di ammortizzazione
- b_2 = costante di smorzamento del sistema ruote\gomme
- u = forza di controllo

Le equazioni del moto relative a tutto il sistema di ammortizzazione risultano essere:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) + u(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + b_2(\dot{w} - \dot{x}_2) + k_2(w - x_2) - u(t) \end{aligned}$$

Assumendo che tutte le condizioni iniziali siano nulle e utilizzando la *LT*, riportando il tutto in forma matriciale si ha:

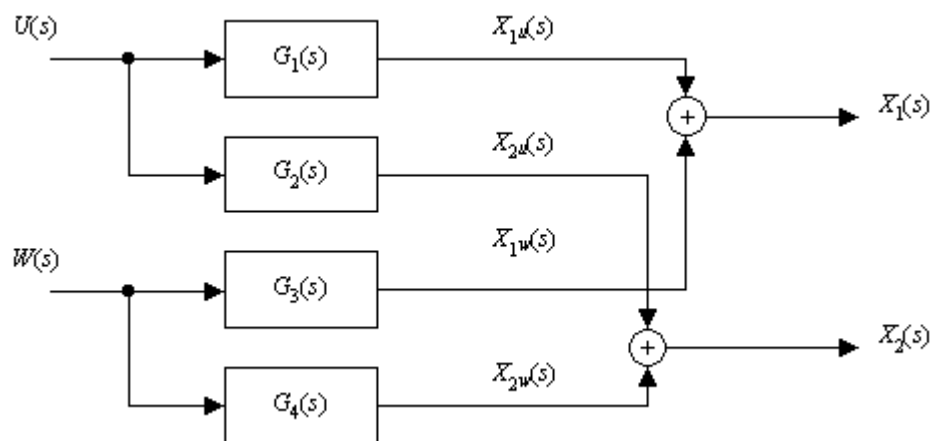
$$\begin{bmatrix} (m_1 s^2 + b_1 s + k_1) & -(b_1 s + k_1) \\ -(b_1 s + k_1) & [m_2 s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ (b_2 s + k_2) \end{bmatrix} W(s)$$

Si noti che il termine $w(t)$, considerato come ingresso, in realtà è un disturbo che tiene presente la "sconnessione" del fondo stradale.

In questo caso si possono individuare quattro diverse funzioni di trasferimento, indicate come:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)}, \quad G_3(s) = \frac{X_1(s)}{W(s)}, \quad G_4(s) = \frac{X_2(s)}{W(s)}$$

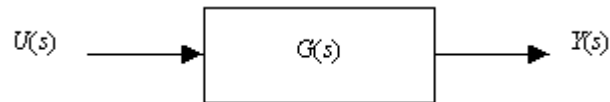
Se non ci sono cancellazioni poli-zeri, i denominatori delle quattro funzioni sono uguali fra di loro e i poli sono le radici dell'equazione algebrica associata alle due equazioni del moto; anche in questo caso è possibile rappresentare il sistema con uno schema:



4.2. Diagrammi a blocchi

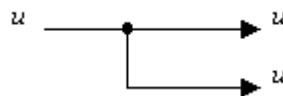
Come visto, un generico sistema può essere studiato tramite la sua FdT e, in particolare, tramite schemi che ne rappresentano il funzionamento; le interconnessioni e gli accoppiamenti dei componenti di sistemi lineari dinamici sono facilmente trattabili in termini di diagrammi a blocchi. A partire da un limitato numero di componenti è possibile realizzare complessi diagrammi a blocchi tramite cui rappresentare tutto ciò che è necessario conoscere delle caratteristiche dei sistemi lineari. Gli elementi base sono:

1) Sistema dinamico



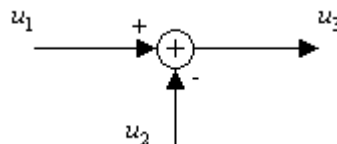
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) , \quad Y(s) = G(s) U(s)$$

2) Punto di diramazione



Es. Il timone e gli alettoni di un aereo vengono comandati insieme durante una virata.

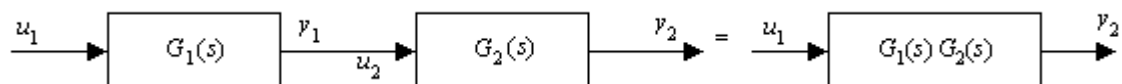
3) Nodo sommatore



$$u_3 = u_1 - u_2$$

Tali elementi basilari possono essere combinati in diversi modi per realizzare:

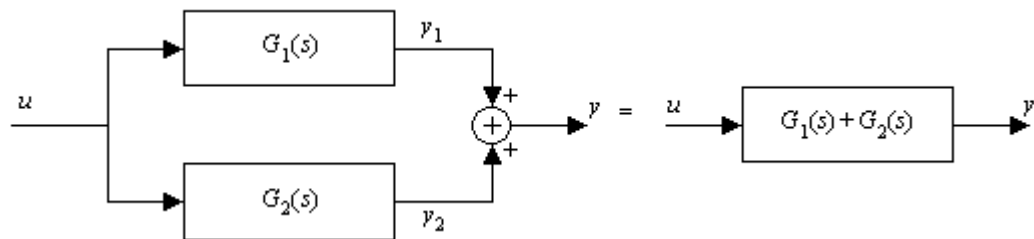
1) Sistemi in serie (o in cascata)



$$y_1 = G_1 u_1 , \quad y_2 = G_2 u_2 , \quad u_2 = y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_2(s) G_1(s)$$

2) Sistemi in parallelo

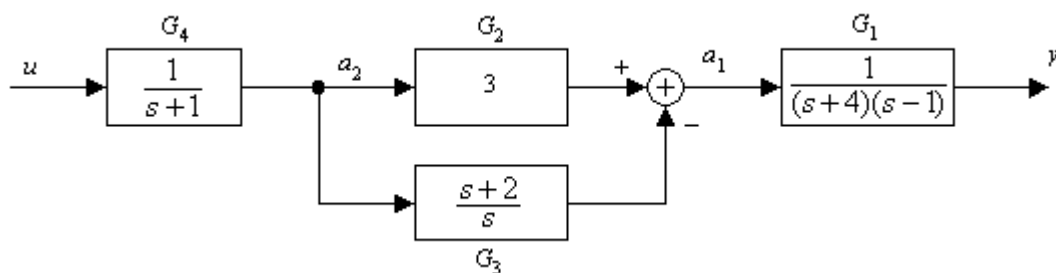


$$y_1 = G_1 u_1, \quad y_2 = G_2 u_2, \quad y = y_1 + y_2 \Rightarrow$$

$$y = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

Esempio:

Dato il seguente schema a blocchi



se ne vuole calcolare la FdT .

$$\begin{cases} y = G_1 a_1 \\ a_1 = (G_2 - G_3) a_2 \\ a_2 = G_4 u \end{cases} \Rightarrow y = G_1 (G_2 - G_3) G_4 u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 (G_2 - G_3) G_4 = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \left(3 - \frac{s+2}{s} \right) \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

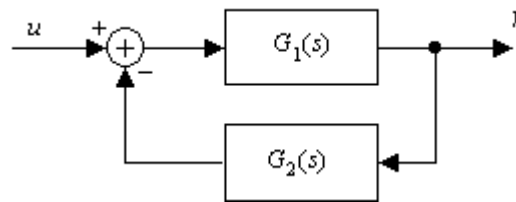
$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \cdot \frac{2(s-1)}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$

3) Sistema in retroazione (anello chiuso)

Sono sicuramente i sistemi che rivestono l'importanza maggiore e che richiedono uno studio più approfondito.

4.3. Sistemi in retroazione

Lo schema di un generico sistema in retroazione è:



$$y = G_1(u - G_2 y) = G_1 u - G_1 G_2 y \Rightarrow y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

Questo tipo di schema è quello più comune fra i sistemi di controllo, permette di comandare il sistema misurando un qualche errore tra l'andamento effettivo del sistema e quello desiderato ed è usato per:

- Stabilizzare il sistema
- Migliorare le caratteristiche del sistema
- Ridurre gli errori
- Correggere la risposta in presenza di disturbi

La retroazione può essere *positiva* o *negativa* in funzione del segno con cui il segnale riportato sull'ingresso entra nel sommatore; nel seguito si farà quasi sempre riferimento al caso di retroazione negativa (segno -) tenendo presente che il caso di retroazione positiva è comunque banalmente ricavabile.

Nell'affrontare lo studio di sistemi in retroazione hanno una grande importanza le seguenti funzioni:

Definizione – Sensitività

La **Sensitività** è definita dalla relazione:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (4.8)$$

Definizione – Sensitività complementare

La **Sensitività complementare** è definita dalla relazione:

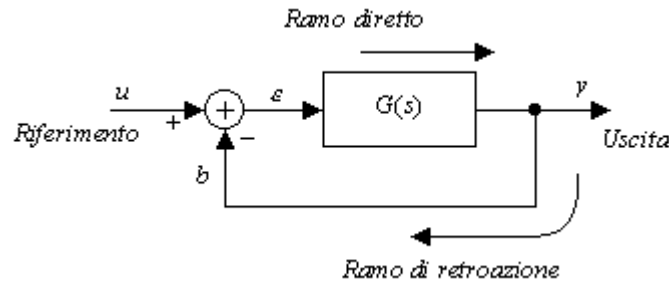
$$F(s) = \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \quad (4.9)$$

Si noti che:

$$S(s) + F(s) = 1$$

4.3.1. Retroazione unitaria

Il caso più semplice di schema in retroazione è il caso di retroazione unitaria:



in cui:

- u : il segnale di riferimento
- y : la variabile controllata
- ε : il segnale errore
- b : il segnale di retroazione
- $G(s)$: FdT della catena di amplificazione diretta

In un sistema a retroazione si possono individuare diverse FdT; dato che:

$$\begin{cases} y = G\varepsilon \\ \varepsilon = u - b \\ b = y \end{cases} \Rightarrow y = G(u - y) = Gu - Gy \Rightarrow (1 + G)y = Gu$$

si possono individuare:

- 1) FdT di anello chiuso (close loop):

data dal rapporto fra la LT del segnale d'uscita e quella del segnale d'ingresso:

$$G_{CL}(s) = G_u^y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (4.10)$$

Si può notare che in questo caso essa coincide con la Sensitività complementare.

- 2) FdT d'errore:

data dal rapporto fra la LT del segnale errore quella del segnale d'ingresso:

$$G_\varepsilon(s) = G_u^\varepsilon(s) = \frac{\mathcal{E}(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (4.11)$$

Si può notare che in questo caso essa coincide con la Sensitività.

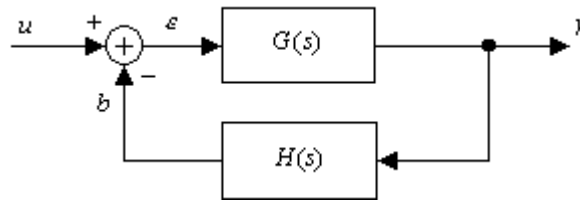
- 3) FdT di anello (aperto) (open loop):

data dal rapporto fra la LT del segnale di retroazione (che nel caso di retroazione unitaria coincide con il segnale d'uscita) e quella del segnale d'errore:

$$G_{OL}(s) = G_\varepsilon^b(s) = \frac{B(s)}{\mathcal{E}(s)} = G(s) \quad (4.12)$$

4.3.2. Retroazione non unitaria

In genere i sistemi ad anello di retroazione sono di tipo non unitario ed hanno almeno una FdT sia sul ramo di retroazione che su quello diretto; un esempio tipico è il seguente schema:



In questo caso le tre FdT viste sopra diventano:

- 1) FdT di anello chiuso (close loop):

data dal rapporto fra la LT del segnale d'uscita e quella del segnale d'ingresso:

$$G_{CL}(s) = G_u^y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)} \quad (4.13)$$

- 2) FdT d'errore:

data dal rapporto fra la LT del segnale errore e quella del segnale d'ingresso:

$$G_\epsilon(s) = G_u^\epsilon(s) = \frac{\mathcal{E}(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + H(s) \cdot G(s)} \quad (4.14)$$

- 3) FdT di anello (aperto) (open loop):

data dal rapporto fra la LT del segnale di retroazione e quella del segnale d'errore:

$$G_{OL}(s) = G_\epsilon^b(s) = \frac{B(s)}{\mathcal{E}(s)} = H(s) \cdot G(s) \quad (4.15)$$

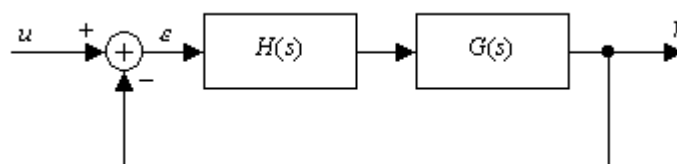
Si può notare che in questo caso, come del resto in quello di retroazione unitaria, il denominatore delle due prime FdT è dato dall'espressione:

$$1 + G_{OL}(s)$$

da cui si deduce l'importanza di tale FdT ; nota infatti quest'ultima è banale ricavare le altre senza effettuare calcoli.

Per motivi che saranno evidenziati in seguito, è preferibile trovarsi nel caso di retroazione unitaria; è sempre possibile trasformare un sistema in retroazione in uno a retroazione unitaria utilizzando un opportuno *prefiltraggio*.

Nel caso preso in esame si vuole realizzare il passaggio al seguente schema:



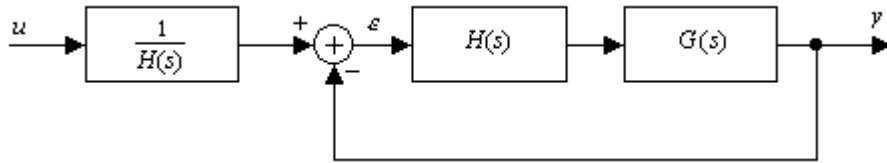
In questo caso le tre FdT sono rispettivamente:

$$G_{CL}(s) = \frac{H(s) \cdot G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}, \quad G_e(s) = \frac{1}{1 + H(s) \cdot G(s)}, \quad G_{OL}(s) = H(s) \cdot G(s)$$

L'unica differenza con lo schema d'origine si ha nel caso della *FdT* di anello chiuso; notando però che quella dello schema a retroazione non unitaria può essere riscritta come:

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)} = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{H(s) \cdot G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

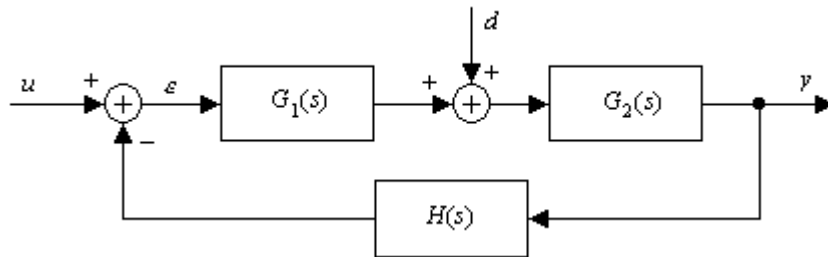
è sufficiente inserire un opportuno prefiltro per ottenere gli stessi risultati:



4.3.3. Sistemi con disturbi

In molti casi i sistemi sono influenzati non solo dai segnali di comando (ingressi) ma anche dai disturbi; per eliminare gli effetti indesiderati dei disturbi l'unica soluzione è quella di usare la retroazione.

Considerando il sistema



per il quale si ha:

$$y = G_2(s)[d + G_1(s)(u - H(s)y)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = G_2(s) \cdot d + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot u - G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot H(s) \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot H(s))y = G_2(s) \cdot d + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot u \Rightarrow$$

con retroazione:

$$\Rightarrow y = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot H(s)} \cdot d + \frac{G_2(s) \cdot G_1(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot H(s)} \cdot u$$

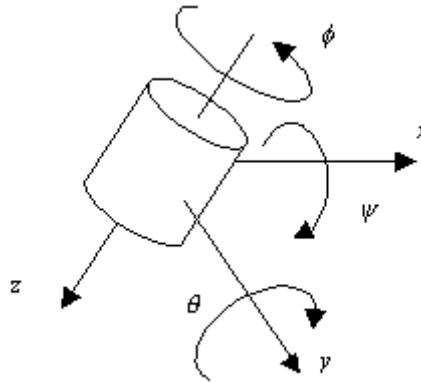
senza retroazione:

$$\Rightarrow y = G_2(s) \cdot d + G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot u$$

e si nota che nel caso di retroazione è possibile attenuare gli effetti dei disturbi, cosa non attuabile senza la retroazione.

4.4. Analisi di un sistema con i diagrammi a blocchi

Per meglio comprendere l'uso dei diagrammi a blocchi risulta utile l'esame di un caso pratico; si vuole studiare il moto di orientamento di un satellite.



L'asse z è rivolto verso la Terra mentre il moto orbitale avviene lungo l'asse x : in questo esempio si trascura il moto orbitale e si esamina l'assetto del satellite relativamente alla rotazione in beccheggio (cioè intorno all'asse y) in modo che il satellite risulti sempre orientato nella maniera corretta (cioè abbia sempre l'asse z rivolto verso le antenne a terra).

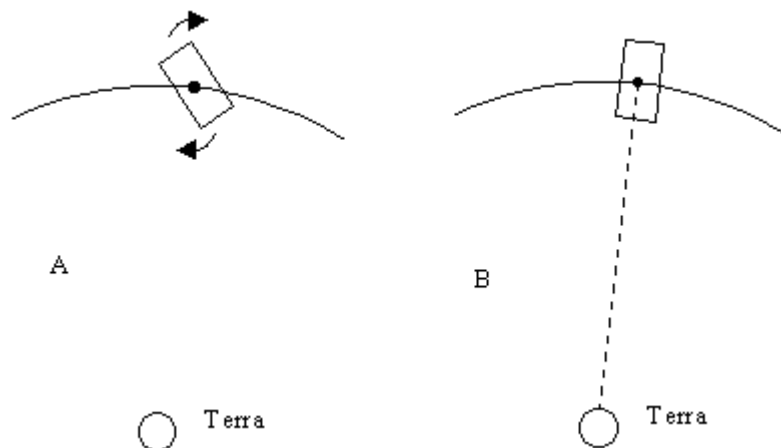
Partendo da queste considerazioni si può verificare che è valida la seguente relazione:

$$J \cdot \ddot{\theta} = M_{TOT} \quad (4.16)$$

in cui M_{TOT} è la somma di tutte le coppie che agiscono sul sistema, cioè:

- coppie di controllo
- coppia magnetica
- coppia gravitazionale
- coppie dovute agli urti

In questo caso si prendono in considerazione solo una coppia di controllo (M) ed una (M_G) gravitazionale; si noti che quest'ultima è dovuta all'effetto dell'attrazione gravitazionale quando il satellite non ha una distribuzione uniforme intorno al centro di massa:



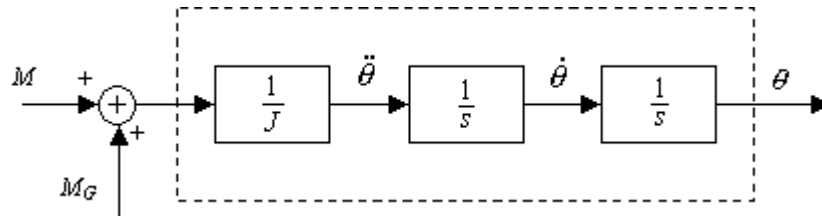
Nel caso A la coppia gravitazionale influisce sull'assetto del satellite, nel caso B la coppia gravitazionale non è presente; la coppia gravitazionale è perfettamente nota se si conosce con

esattezza la struttura del satellite (la forza di attrazione gravitazionale g è facilmente calcolabile in funzione del raggio orbitale del satellite) e quindi potrebbe essere sfruttata come aiuto al controllo ma, in questo esempio, viene considerata un disturbo.

La (4.16.) diviene quindi:

$$J \cdot \ddot{\theta} = M + M_G$$

e la sua rappresentazione in diagramma a blocchi è:



I vari elementi di cui si deve tener conto per la realizzazione dello schema a blocchi sono:

- Coppia di disturbo (M_G)

Si assume che sia:

$$M_G = C_g \sin(2\theta_T)$$

con

$$\theta_T = \theta_c + \theta$$

dove

- θ_c = Angolo di riferimento
- θ = Angolo di assetto effettivo

e si ha quindi:

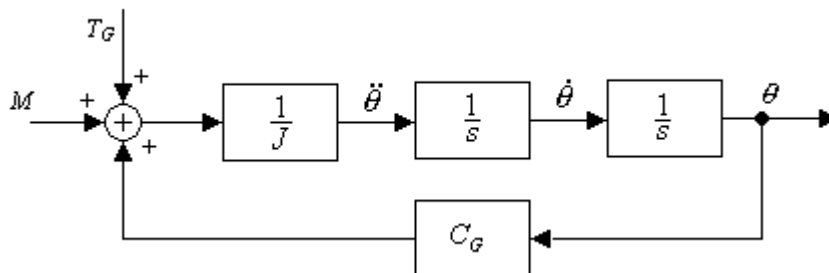
$$M_G = C_g \sin(2\theta_c + 2\theta) = C_g [\sin(2\theta_c) \cos(2\theta) + \cos(2\theta_c) \sin(2\theta)]$$

e, per valori piccoli di θ , si può porre:

$$\sin(2\theta) = 2\theta, \quad \cos(2\theta) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_G = C_g \sin(2\theta_c) + [C_g \cos(2\theta_c)] \cdot 2\theta_c = T_G + C_g \theta$$

e il relativo diagramma a blocchi è:

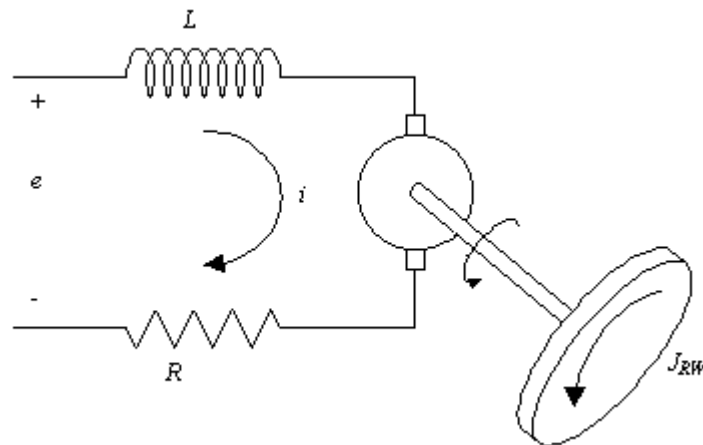


- Coppia di controllo (M)

In questo caso l'azione di controllo può essere effettuata tramite uno dei seguenti tipi di attuatori:

- ad elementi continui con parti rotanti, piccoli rispetto alla massa del sistema e basati sull'effetto giroscopico:
 - piatti inerziali
 - giroscopio
 - ruote inerziali
- ad elementi discontinui:
 - razzetti d'assetto

Sfruttando una ruota inerziale accoppiata ad un motore elettrico:



si ha la relazione:

$$e = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + e_b$$

o, equivalentemente:

$$E(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + E_b(s) \Rightarrow$$

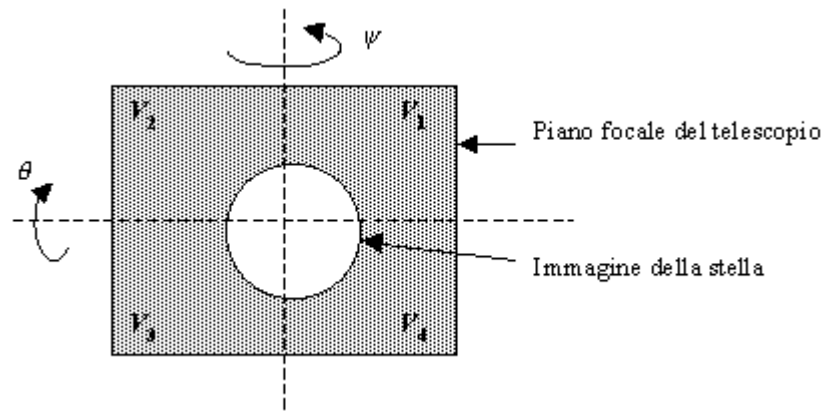
$$\Rightarrow I(s) = \frac{E(s) - E_b(s)}{R + L \cdot s}$$

- Sistema dei sensori

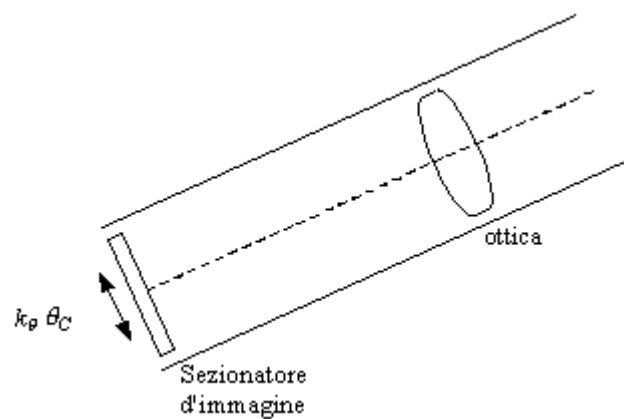
Il sistema di sensori può essere costituito da:

- piattaforme inerziali
- sensori giroscopici
- sensori stellari
- sensori d'orizzonte
- sistemi GPS

Utilizzando un sensore ottico di posizione (stellare), basato sul frazionamento dell'immagine di una stella su un telescopio:



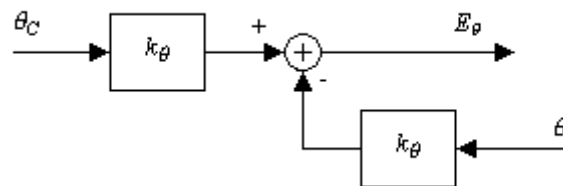
I quattro pannelli riescono a generare da una variazione di intensità luminosa una variazione di potenziale; nel caso in esame, prendendo in considerazione solo la rotazione θ



e detto che θ_C è stabilito dalla posizione laterale del pannello, si ha:

$$k_{\theta}(\theta_C - \theta) = (V_3 + V_4) - (V_1 + V_2) \triangleq E_{\theta}$$

e lo schema a blocchi che se ne ricava è:



Supponendo che e_b sia proporzionale alla velocità angolare della ruota inerziale e che sia:

$$\omega \gg \dot{\theta}$$

allora:

$$e_b \approx k_b \omega$$

- Motore a corrente di campo costante
In tal caso si avrebbe:

$$\begin{cases} -M = k_m i \\ J_{RW} \cdot \dot{\omega} = -M \end{cases}$$

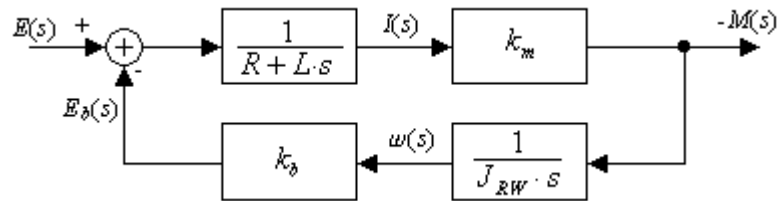
e poiché

$$I(s) = \frac{1}{R + L \cdot s} [E(s) - E_b(s)]$$

$$E_b(s) = k_b \cdot \omega(s)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{J_{RW} \cdot s} [-M(s)]$$

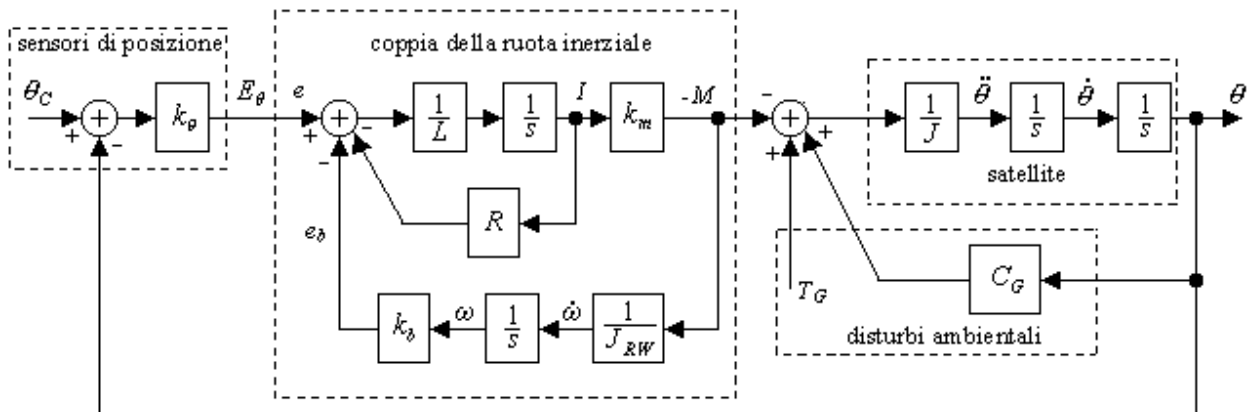
il diagramma a blocchi del sistema di attuatori diviene:



e si può quindi scrivere

$$-M(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b} E(s) = G_{ACT}(s) \cdot E(s)$$

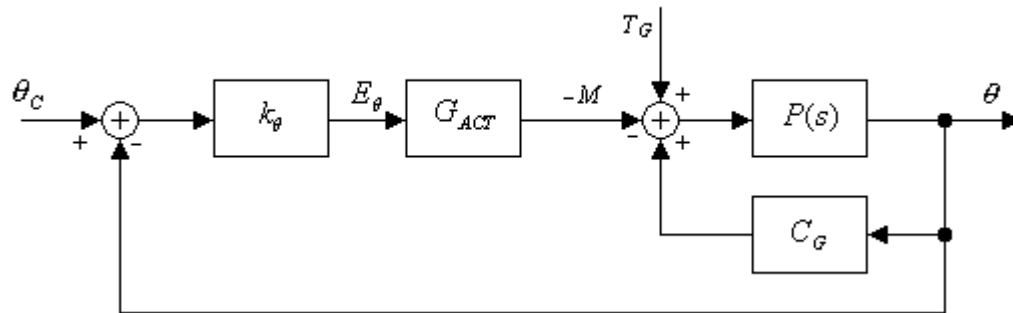
Il diagramma a blocchi di tutto il sistema è quindi:



e, posto che:

$$P(s) = \frac{1}{J \cdot s^2} \quad , \quad G_{ACT}(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b}$$

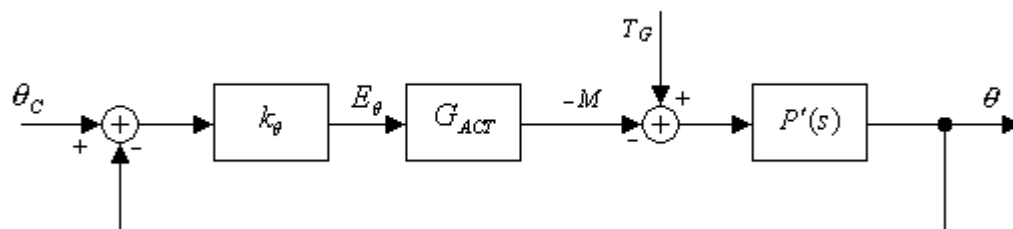
si può ridisegnare in maniera più compatta:



e, ponendo infine

$$P'(s) = \frac{P(s)}{1 - C_G P(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2 - C_G}$$

si ha lo schema:



Cap 5. Variabili di stato

5.1. Rappresentazione di sistemi lineari tramite variabili di stato

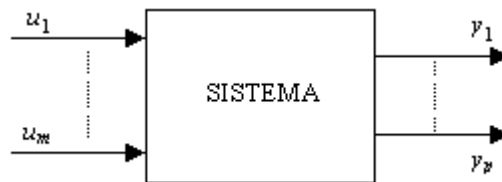
La rappresentazione tramite variabili di stato è un metodo estremamente efficace per rappresentare sistemi dinamici; in particolare si possono trattare sia sistemi *SISO* che *MIMO* (a ingressi e uscite multiple).

Con questa tecnica si usa molto l'algebra delle matrici sfruttando appositi software, tipo Matlab, che permettono di lavorare in maniera molto semplice con le matrici.

Nel seguito si farà riferimento a sistemi *LTI*.

Esistono tre tecniche equivalenti per descrivere i sistemi dinamici lineari e, fornita la descrizione tramite una di esse, è possibile ricavare le altre due anche se bisogna considerare che, talvolta, il passaggio da una rappresentazione all'altra può non essere univoco.

Dato un generico sistema lineare con m ingressi u_i ($i = 1, \dots, m$) e p uscite y_j ($j = 1, \dots, p$),



è possibile darne una rappresentazione tramite:

- 1) Equazioni differenziali o sistemi di equazioni differenziali
- 2) Funzioni di trasferimento
- 3) Variabili di stato

I primi due tipi sono stati già esaminati in precedenza; in questo capitolo viene esaminata la terza tecnica.

Generalmente la rappresentazione di un sistema lineare viene fornita tramite un set di equazioni differenziali ordinarie lineari del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{n_1} y_1}{dt^{n_1}} + \dots = f_1(u_1, u_2, \dots) \\ \vdots \\ \frac{d^{n_p} y_p}{dt^{n_p}} + \dots = f_p(u_1, u_2, \dots) \end{array} \right. \quad (\text{Cap. 5.1})$$

e, a partire da queste, è sempre possibile riscrivere il sistema nella seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{array} \right. \quad (\text{Cap. 5.2})$$

dove:

$$\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \bar{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

sono rispettivamente il vettore delle variabili di stato, quello delle variabili di ingresso e quello delle variabili d'uscita.

Nella (5.2.) sono presenti quattro matrici:

- $A = n \times n$, quadrata è la matrice di sistema
- $B = n \times m$,
- $C = p \times n$,
- $D = p \times m$

La rappresentazione del sistema tramite la (5.2.) non è univoca; infatti, dato un vettore di ingressi esiste un infinito numero di vettori di stato che forniscono lo stesso vettore delle uscite.

Definizione – *Vettore di stato o vettore delle variabili di stato*

Il vettore

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

è detto **Vettore di stato o vettore delle variabili di stato** ed è costituito dal minimo numero di variabili indipendenti che descrivono completamente il sistema dinamico una volta dati gli ingressi.

Il numero minimo di variabili di stato è uguale al numero delle condizioni iniziali necessarie a risolvere tutte le equazioni differenziali che descrivono il sistema; il vettore di stato può essere un vettore di variabili fisiche relative ad un sistema o di variabili matematiche.

Poiché una rappresentazione tramite variabili di stato è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, può essere ottenuta trasformando ogni equazione differenziale in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine; può essere equivalentemente ottenuta dalla funzione di trasferimento del sistema (e viceversa).

Si noti che nella (5.2.) l'uscita può essere fissata dalla struttura del sistema o libera a seconda delle scelte del progettista.

5.2. Variabili di stato dalle equazioni differenziali

5.2.1. Senza derivate di variabili di ingresso

Si consideri una generica equazione differenziale di ordine n :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 y = u \quad (\text{Cap. 5.3})$$

A partire da questa, posto

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ x_2 &= \dot{y} & \dot{x}_2 &= \ddot{y} = x_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} & \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ & & \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_1x_1 + u \end{aligned} \quad (\text{Cap. 5.4})$$

e, dalla (5.4.) si ottiene la prima equazione della (5.2.).

Esempi

- 1) Si consideri un sistema massa-molla-smorzatore descritto dall'equazione:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

e, posto:

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}f(t) \end{aligned}$$

e, quindi

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f = A\bar{x} + B\bar{u}$$

L'equazione che determina l'uscita dipende dal problema; supponendo di voler calcolare la posizione della massa si ha:

$$y = y(t) = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} f = C\bar{x} + D\bar{u}$$

2) Considerando il sistema governato dalle equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + 3y_2 = 4u_1 - 2u_2 \\ \dot{y}_2 + 8y_1 - 6y_2 = u_2 \end{cases}$$

posto

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = \dot{y}_1 \quad x_3 = y_2$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 - 3x_3 + 4u_1 - 2u_2 \\ \dot{x}_3 &= -8x_1 + 6x_3 + u_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ -8 & 0 & 6 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{u} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

Per l'uscita si ha:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{u} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

5.2.2. Con derivate di variabili di ingresso

In molti casi nelle equazioni differenziali compaiono le derivate degli ingressi e, in tal caso, è necessario utilizzare metodi analitici; le derivate di ordine più elevato delle variabili d'ingresso devono essere di ordine inferiore, o al massimo uguale, a quello di ordine più alto delle derivate delle variabili delle equazioni differenziali.

La procedura utilizzata per trovare la forma in variabili di stato è facilmente comprensibile tramite un esempio; considerando l'equazione differenziale:

$$\ddot{\theta} + 4\ddot{\theta} + 5\dot{\theta} + 6\theta = 2u_1 + 8\dot{u}_2$$

si nota subito che in essa sono presenti due ingressi e tre variabili di stato:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La relativa LT con condizioni iniziali nulle è:

$$s^3 \cdot \theta(s) + 4s^2 \cdot \theta(s) + 5s \cdot \theta(s) + 6\theta(s) = 2u_1(s) + 8s \cdot u_2(s)$$

e dividendo tutti i membri per la potenza più elevata di s (ricordando che $1/s$ rappresenta un'integrazione) si ha:

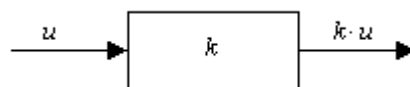
$$\theta(s) + \frac{4}{s} \cdot \theta(s) + \frac{5}{s^2} \cdot \theta(s) + \frac{6}{s^3} \theta(s) = \frac{2}{s^3} u_1(s) + \frac{8}{s^2} \cdot u_2(s)$$

relazione che può essere riscritta come

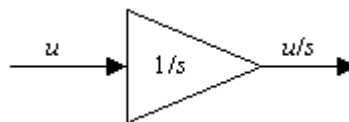
$$\theta(s) = \frac{1}{s} \cdot \left\{ -4\theta(s) + \frac{1}{s} \cdot \left[-5\theta(s) + 8 \cdot u_2(s) + \frac{1}{s} (-6\theta(s) + 2u_1(s)) \right] \right\}$$

Come nel caso della FdT anche con le variabili di stato si può passare ad una descrizione grafica del sistema con i diagrammi analogici; per prima cosa bisogna definire i blocchi base:

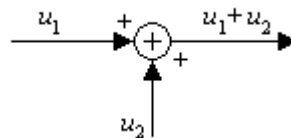
1) Guadagno



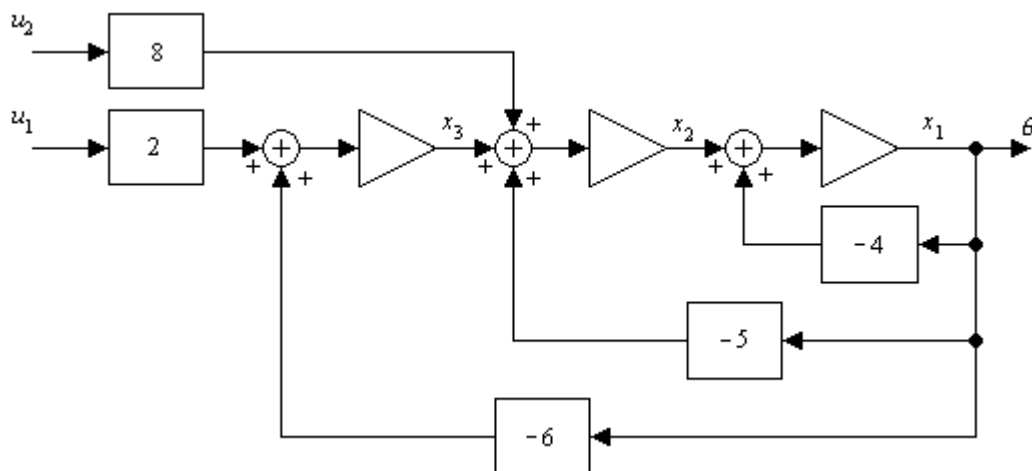
2) Integrale



3) Sommatore



a questo punto è possibile disegnare il diagramma a blocchi:



Selezionando come variabili di stato le uscite di ogni integratore (l'ordine non è importante) e scrivendo le equazioni differenziali del primo ordine per ognuna delle variabili di stato, si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 4x_1 \\ \dot{x}_2 &= 8u_2 + x_3 - 5x_1 \Rightarrow \\ \dot{x}_3 &= 2u_1 - 6x_1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \bar{u} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

L'equazione dell'uscita dipende dal problema; volendo che l'uscita coincida con θ , allora:

$$\theta = x_1 \Rightarrow y = x_1 \Rightarrow \bar{y} = [1 \ 0 \ 0] \bar{x} + [0 \ 0] \bar{u}$$

invece per un'altra scelta dell'uscita:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 4x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + [0 \ 0] \bar{u}$$

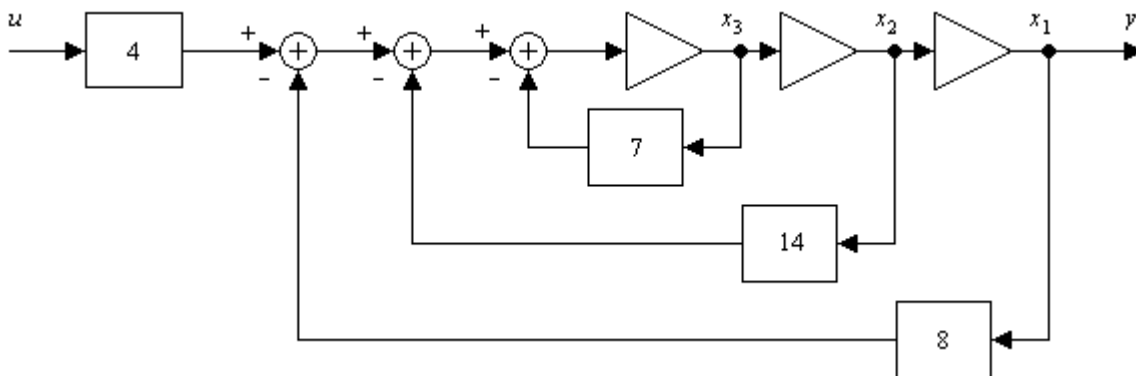
Esempio

Si vogliono trovare le matrici che descrivono il sistema a partire dalle relazioni:

- 1) $\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 14y(t) + 8y(t) = 4u(t)$
- 2) $\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 14y(t) + 8y(t) = 2\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 4u(t)$

1) Senza derivate dell'ingresso:

Dalla relazione si può dedurre lo schema a blocchi seguente:



Si noti che le variabili di stato (x_1, x_2, x_3) possono essere scelte indifferentemente anche in ordine inverso; comunque si ha che:

$$\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{u}(t) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \bar{y}(t) \in \mathbb{R}$$

e si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 4u - 8x_1 - 14x_2 - 7x_3 \end{cases}, \quad y = x_1$$

da cui si possono ricavare le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0), \quad D = (0)$$

2) Con derivate dell'ingresso

Si può riscrivere l'equazione come:

$$s^3 \cdot y + 7s^2 \cdot y + 14s \cdot y + 8y = 2s^2 \cdot u + 3s \cdot u + 4u$$

bisogna notare che:

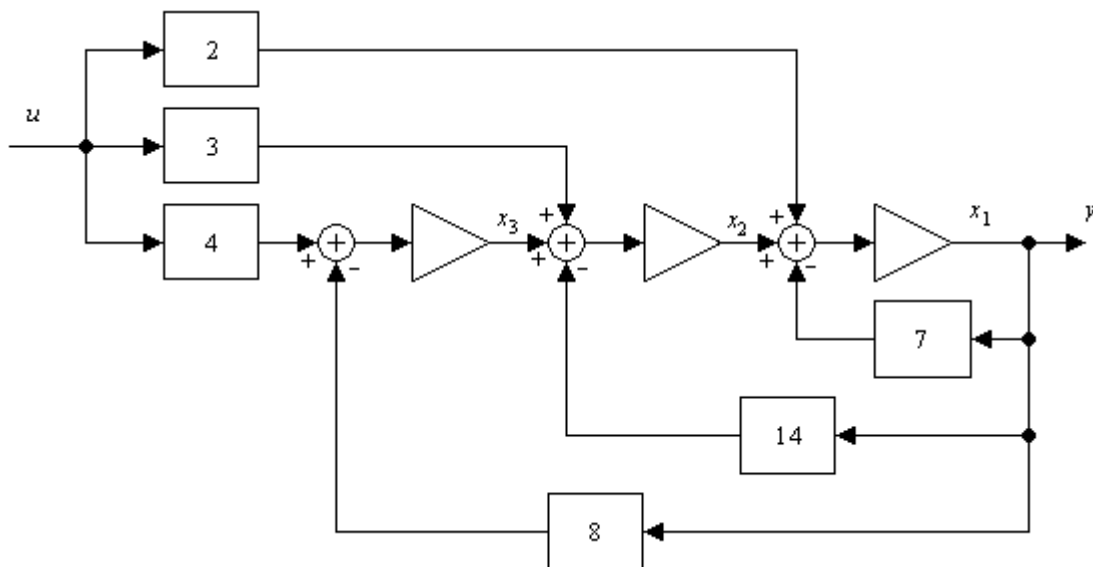
- s non è l'operatore di Laplace (per sfruttare la LT sono necessarie le condizioni iniziali) ma solo un modo di indicare l'operazione di derivazione.
- c'è un solo ingresso e non tre

a) Procedendo come illustrato in precedenza si ottiene:

$$y = -\frac{7}{s}y - \frac{14}{s^2}y - \frac{8}{s^3}y + \frac{2}{s}u + \frac{3}{s^2}u + \frac{4}{s^3}u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{s} \left\{ -7y + 2u + \frac{1}{s} \left[-14y + 3u + \frac{1}{s}(-8y + 4u) \right] \right\}$$

da cui:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u - 7x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 3u - 14x_1, \quad y = x_1 \\ \dot{x}_3 = 4u - 8x_1 \end{cases}$$

e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0), \quad D = (0)$$

b) Un altro modo di procedere in questa situazione è riscrivere la relazione di partenza come:

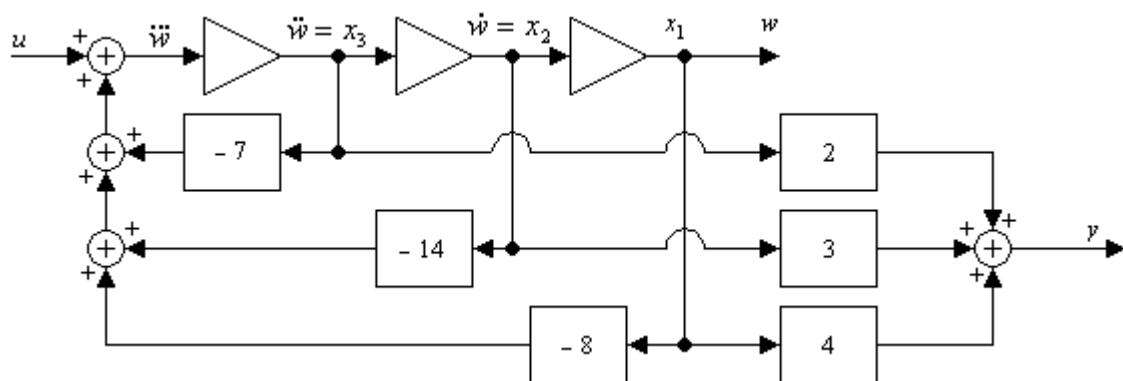
$$(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)y = (2s^2 + 3s + 4)u$$

si parla allora di variabili autonome scrivendo:

$$y = (2s^2 + 3s + 4)w = 2s^2 \cdot w + 3s \cdot w + 4w$$

$$u = (s^3 + 7s^2 + 14s + 8)w = s^3 \cdot w + 7s^2 \cdot w + 14s \cdot w + 8w$$

da cui:



e, quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -7x_3 - 14x_2 - 8x_1 + u \end{cases}, \quad y = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (4 \ 3 \ 2), \quad D = (0)$$

5.3. Soluzione del sistema in forma di variabili di stato nel dominio della frequenza

Una volta che il sistema lineare (dinamico) è stato posto in termini di variabili di stato se ne cerca la soluzione; dato quindi

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \end{cases}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad \text{solitamente } t_0 = 0 \quad (\text{Cap. 5.5})$$

dati $\bar{u}(t)$ e \bar{x}_0 bisogna trovare $\bar{y}(t)$, per $t \geq t_0$.

Per risolvere la (5.5.) si possono utilizzare due metodi, uno definito nel campo delle frequenze, l'altro nel dominio del tempo.

Si utilizza il metodo nel dominio della frequenza quando il sistema è tempo-invariante, cioè quando le matrici A , B , C e D sono **costanti**; la trasformata di Laplace della (5.5.) risulta essere:

$$\begin{cases} s\bar{X}(s) - \bar{X}_0 = A\bar{X}(s) + B\bar{U}(s) \\ \bar{Y}(s) = C\bar{X}(s) + D\bar{U}(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X}(s) = (sI - A)^{-1} \bar{X}_0 + (sI - A)^{-1} B\bar{U}(s) \\ \bar{Y}(s) = C\bar{X}(s) + D\bar{U}(s) \end{cases}$$

$$\bar{Y}(s) = C(sI - A)^{-1} \bar{X}_0 + [C(sI - A)^{-1} B + D]\bar{U}(s) \quad (\text{Cap. 5.6})$$

e calcolando l'antitrasformata di Laplace della (5.6.) si ottiene l'espressione dell'uscita.

Si noti che posto:

$$\bar{X}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]\bar{U}(s)$$

e quindi:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad \textbf{Matrice di trasferimento del sistema}$$

$H(s)$ è la matrice ($p \times m$) delle funzioni di trasferimento tra ogni ingresso e ogni uscita.

Esempio:

Sia il sistema in esame costituito da un ingresso e due uscite e tale che:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} = H(s) \quad \text{matrice } 2 \times 1$$

$$\bar{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} U(s)$$

Ponendo, per esempio, $u(t) = \delta(t)$ si ha:

$$\bar{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Considerando invece come $u(t)$ un ingresso unitario, si ha:

$$\bar{Y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s(s+1)} \\ \frac{-3}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} 3 - 2e^{-t} \\ -\frac{3}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

5.4. Soluzione del sistema in forma di variabili di stato nel dominio del tempo

Consideriamo ancora la (5.5.):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} \end{cases}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$$

e inizialmente esaminiamo la risposta libera (cioè con ingresso nullo) nel caso scalare:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale è:

$$x(t) = ke^{at}$$

e, come già visto, si ottiene:

$$x(t_0) = x_0 = ke^{at_0} \quad \Rightarrow \quad k = x_0 e^{-at_0}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$$

dove

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

è l'espansione in serie di potenze, infinita e convergente.

Per il caso multivariabile, per analogia, si ha:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

Definizione – Matrice di transizione dello stato

Si definisce, per i sistemi lineari e invarianti, come **matrice di transizione dello stato** la:

$$e^{A(t-t_0)}$$

Il calcolo della matrice di transizione può essere effettuato utilizzando diversi metodi illustrati di seguito.

5.4.1. Trasformata di Laplace

Dalla (5.5.), considerando sempre l'ingresso nullo e posto che $t_0 = 0$:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} \quad \Rightarrow \quad s\bar{X}(s) - \bar{X}_0 = A\bar{X}(s) \quad \Rightarrow \quad \bar{X}(s) = [sI - A]^{-1} \bar{X}_0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} \bar{x}_0 = e^{At} \bar{x}_0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = L^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{1}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{s+3}{(s+2)(s+4)} = \frac{1/2}{s+2} + \frac{1/2}{s+4}, \quad \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{-1/2}{s+2} + \frac{1/2}{s+4}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

5.4.2. Espansione in serie di potenze

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (\text{Cap. 5.7})$$

Questa tecnica, indicata se si dispone di sufficienti informazioni sulla serie, è utilizzata per l'implementazione su computer digitali.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A, \quad A^4 = I, \quad \dots$$

$$e^{At} = I \left[1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \right] + A \left[t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right] =$$

$$= I \cosh t + A \sinh t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

5.4.3. Riduzione alla forma diagonale o a quella di Jordan

Data una matrice quadrata A , è sempre possibile, come già visto nel *Cap.1*, trasformarla in una matrice diagonale Λ o in matrice di Jordan J tramite opportune trasformazioni di similitudine.

Si possono distinguere i due casi:

- a) Gli autovalori di A sono tutti distinti
Esiste una matrice M , non singolare, tale che:

$$M^{-1}AM = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = \text{Autovalori di } A \quad (\text{Cap. 5.8})$$

Tenendo presente che, dalla (5.8.):

$$A = MAM^{-1}$$

dalla (5.7.) si ha che:

$$e^{At} = MM^{-1} + MAM^{-1}t + MAM^{-1}MAM^{-1}\frac{t^2}{2!} + \dots =$$

$$= MIM^{-1} + MAM^{-1}t + MA^2M^{-1}\frac{t^2}{2!} + \dots =$$

$$= M \left\{ I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right\} M^{-1} = Me^{At}M^{-1}$$

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots + \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \dots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots + \lambda_1^k t^k + \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \cdots + \lambda_n^k t^k + \cdots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Dato che la matrice e^{At} si ricava facilmente conoscendo gli autovalori di A , per ottenere la matrice di transizione bisogna conoscere M e M^{-1} .

La matrice M è detta **matrice modale** ed è la matrice degli autovettori destri di A associati ai λ_i .

Poiché quindi:

$$M = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n] \quad \text{dove } (\lambda_i I - A)\bar{v}_i = 0$$

il problema si riduce ad un problema di calcolo di autovalori; considerando poi la M^{-1} , anche per essa si torna ad un problema di calcolo di autovalori e, ricordando quanto visto nel *Cap. I*, si trova che:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1^T \\ \bar{\mu}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{dove } \mu_i \text{ sono gli autovalori sinistri di } A \text{ associati ai } \lambda_i$$

$$e^{At} = M e^{At} M^{-1} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1^T \\ \bar{\mu}_2^T \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \mu_i^T e^{\lambda_i t} \bar{x}_0$$

- b) La matrice A ha autovalori con molteplicità algebrica maggiore di uno.
In tale situazione, generalmente non è possibile effettuare la diagonalizzazione; usando però un'appropriata trasformazione di similitudine, la matrice A può essere portata nella forma di Jordan (*Par I.6*).
Si trova, quindi, una matrice P , non singolare, tale che:

$$P^{-1}AP = J$$

Una volta calcolata P si può ricavare la J e, di conseguenza, come nel caso della diagonalizzazione:

$$A = PJP^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}$$

Per il calcolo di e^{Jt} esaminiamo il caso in cui J sia un unico blocco di Jordan, cioè:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i I + R$$

La matrice R ha due particolarità:

- a) Il prodotto di una qualsiasi matrice C moltiplicata per R fornisce la stessa matrice in cui però ogni colonna viene traslata verso destra e la prima colonna risulta essere una colonna di zeri.

$$CR = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n] R = [0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{n-1}]$$

b) Se R è una matrice $(n \times n)$, allora $R^n = 0$, infatti, per esempio, se $n = 3$:

$$R_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R^4 = R^5$$

Quindi, per $R (n \times n)$, si ha:

$$e^{Rt} = I + Rt + R^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + R^n \frac{t^n}{n!} + 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$e^{Jt} = e^{(\lambda_i I + R)t} = e^{\lambda_i t} e^{Rt}$$

In genere la matrice A può avere sia autovalori distinti che ripetuti e, in tal caso, può essere trasformata in una matrice composta da una combinazione di blocchi diagonali e blocchi di Jordan.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

e, quindi, gli autovettori:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{At} = M e^{At} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

e infine:

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} (2x_{10} + x_{20})e^{-t} - (x_{10} + x_{20})e^{-2t} \\ -(2x_{10} + x_{20})e^{-t} + (2x_{10} + 2x_{20})e^{-2t} \end{bmatrix}$$

5.4.4. Teorema di Caley-Hamilton (1.5.)

Per una matrice A ($n \times n$) $\Rightarrow \Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$, e quindi:

$$\begin{aligned} A^n &= -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_1A - a_0I \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{n+1} &= A A^n = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} \dots - a_1A^2 - a_0A = \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} \dots - a_1A^2 - a_0A) - a_{n-2}A^{n-1} \dots - a_1A^2 - a_0A \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{n+2} &= A A^{n+1} = -a_{n-1}A^{n+1} - a_{n-2}A^n \dots - a_1A^3 - a_0A^2 = \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} \dots - a_1A^2 - a_0A) - a_{n-2}A^n \dots - a_1A^3 - a_0A^2 \end{aligned}$$

Da queste relazioni si deduce che qualsiasi potenza della matrice A può essere espressa come combinazione delle prime $n-1$ potenze; sfruttando questa conclusione e ricordando la (5.7.) si può scrivere:

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t)$$

Si trovano i valori dei termini α_i usando il *Teorema di Caley-Hamilton* (1.5.) applicato ad ogni singolo autovalore:

$$\forall \lambda_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \lambda_i^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_2(t)\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

Considerando il caso di matrice A con autovalori distinti si costruisce la **Matrice di Vandermonde** e quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

la cui soluzione fornisce i valori degli $\alpha_i(t)$.

Esempio

Sia dato il sistema:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

Si trovano facilmente gli autovalori della matrice A :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

da cui si ottiene

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = A^2 + 3A + 2I = 0$$

e, quindi

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$$

Costruendo quindi la matrice di Vandermonde:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow e^{At} = (2e^{-t} - e^{-2t})I + (e^{-t} - e^{-2t})A = \\ & = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -3(e^{-t} - e^{-2t}) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice di Vandermonde nel caso di autovalori ripetuti risulta più complessa; per un autovalore di molteplicità r , per esempio, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_i^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_i & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)\lambda_i^{n-2} \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)(n-2)\lambda_i^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r! & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} \\ te^{\lambda_i t} \\ t^2 e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ t^{r-1} e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

la quale, nel caso di sistema con autovalori distinti e di molteplicità >1 , diventa, ovviamente, un blocco.

5.5. Proprietà della matrice di transizione dello stato

La matrice di transizione dello stato, assume in generale la forma:

$$\Phi(t, t_0)$$

e quindi

$$\bar{x} = \Phi(t, t_0)\bar{x}_0$$

relazione valida per sistemi lineari tempo-invarianti e tempo-varianti.
Nel caso di sistemi tempo-invarianti si ha:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (\text{Cap. 5.9})$$

Le proprietà della matrice di transizione dello stato sono:

1)

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A \Phi(t, t_0)$$

come si deduce, banalmente, dalla definizione

2)

$$\Phi(t_0, t_0) = I$$

infatti:

$$\Phi(t_0, t_0) = e^{A(t_0-t_0)} = I$$

3)

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

dalla definizione si ha:

$$\Phi(t_2, t_0) = e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)} e^{A(t_1-t_0)} = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

4)

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$$

anche in questo caso, sfruttando la definizione:

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = [e^{A(t-t_0)}]^{-1} = e^{A(t_0-t)} = \Phi(t_0, t)$$

5.6. Soluzione generale di un sistema lineare tempo invariante

Consideriamo la (5.5.) nel caso di ingresso non nullo e in cui sia $D = 0$ (l'analisi che segue non perde comunque in generalità), cioè:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}_0$$

Per similitudine al caso scalare, si ha:

$$e^{-At} \dot{\bar{x}} = e^{-At} A\bar{x} + e^{-At} B\bar{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-At} \dot{\bar{x}} - e^{-At} A\bar{x} = e^{-At} B\bar{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [e^{-At} \bar{x}] = e^{-At} B\bar{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-At} \bar{x} = e^{-At_0} \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} B\bar{u}(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}(\tau) d\tau \\ \bar{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \bar{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u}(\tau) d\tau \end{cases}$$

(Cap.

5.10)

5.7. Risposte di un sistema agli ingressi canonici

Ricoprono un particolare interesse le risposte di un sistema ai cosiddetti ingressi canonici, cioè:

1) Impulso unitario

Si consideri di essere nella seguente situazione:

$$u_j = \delta(t), \quad u_i = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{e} \quad \bar{x}_0 = 0$$

Si ha quindi:

$$B\bar{u} = b_j \delta(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_j(t) = Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b_j \delta(\tau) d\tau = Ce^{At} b_j$$

Nel caso di impulso unitario su ogni singolo ingresso, cioè:

$$\bar{u}(t) = \bar{\delta}(t) \Rightarrow \bar{y}(t) = Ce^{At} B$$

2) Gradino unitario

Anche in questo caso consideriamo non nullo un solo ingresso, cioè:

$$u_j = 1, \quad u_i = 0 \quad \forall i \neq j \quad \text{e} \quad \bar{x}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r_j(t) &= Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b_j 1(\tau) d\tau = \\ &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} b_j d\tau \end{aligned}$$

Dato che:

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1} [e^{At} - I]$$

in questo caso è:

$$r_j(t) = CA^{-1} [e^{At} - I] b_j = C [e^{At} - I] A^{-1} b_j$$

Nel caso di gradino unitario su ogni singolo ingresso, cioè:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

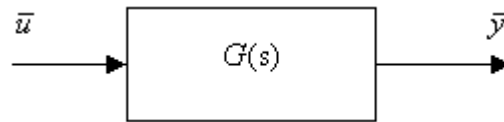
si ha:

$$\bar{y}(t) = C [e^{At} - I] A^{-1} B$$

Cap 6. Stabilità

6.1. Introduzione

Un generico sistema del tipo:



$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \\ \bar{y} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, t) \end{cases}, \quad \bar{x}_0 \quad (6.1) \quad (\text{Cap.}$$

è caratterizzato da tre **proprietà strutturali** fondamentali:

- **Stabilità:** definita per sistemi non lineari, lineari tempo varianti, lineari stazionari
- **Controllabilità:** definita per sistemi lineari tempo varianti, lineari stazionari
- **Osservabilità:** definita per sistemi lineari tempo varianti, lineari stazionari

In questo capitolo si esamina la stabilità di un sistema, cioè la capacità del sistema di ritornare in una posizione di quiete dopo una perturbazione.

Per prima cosa bisogna definire alcuni concetti di base.

Definizione – Movimento

Fissati l'istante iniziale, la funzione d'ingresso e lo stato iniziale del sistema:

$$\bar{x}_0, \quad \bar{u}(t), \quad t_0$$

si definisce **movimento** (dello stato) del sistema l'andamento dello stato stesso, ottenuto come soluzione del sistema di equazioni differenziali costituenti l'equazione di stato:

$$\tilde{\bar{x}}(t) \quad \forall t \geq t_0$$

Definizione – Equilibrio

Si definisce **equilibrio** quel particolare movimento per cui è:

$$\dot{\bar{x}}_E \triangleq 0$$

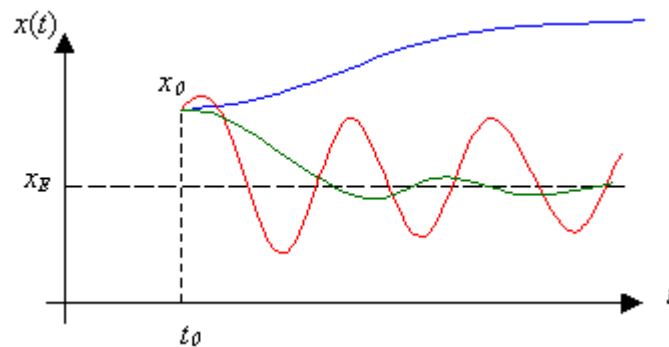
Definizione – Perturbazione

Si definisce **perturbazione** la variazione del movimento dovuta a variazioni dell'ingresso e/o delle condizioni iniziali, indicata come:

$$\tilde{\bar{x}}^*(t) = \tilde{\bar{x}}(t) + \delta\bar{x}(t)$$

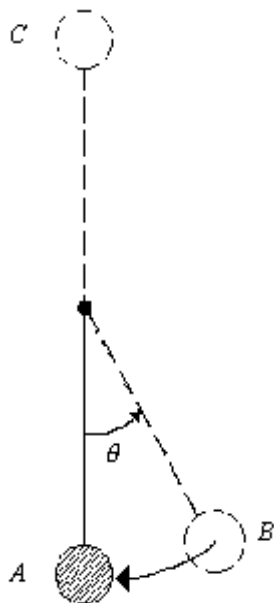
Lo studio della stabilità, come detto, permette di individuare il comportamento del sistema quando viene sottoposto a perturbazioni; una prima visione qualitativa dell'importanza dello studio della stabilità può essere fornito da alcuni semplici esempi:

1) Movimento perturbato



Se x_E rappresenta l'equilibrio del movimento e x_0 la condizione iniziale del sistema perturbato, l'analisi della stabilità permette di stabilire quale sarà l'andamento del sistema nel tempo; qualitativamente sono indicate le tre possibilità tipiche dell'evoluzione.

2) Pendolo



Le due posizioni A e C risultano entrambe di equilibrio, ma con una sostanziale differenza:

Posizione A) In questo caso le condizioni iniziali sono individuate dal valore $\theta_0 = 0$; se tali condizioni vengono perturbate (il pendolo viene portato in B) il pendolo tenderà a tornare nella posizione A (equilibrio stabile)

Posizione C) Le condizioni iniziali sono, questa volta, quelle per cui $\theta_0 = 180^\circ$; se il pendolo viene spostato pur di poco dalla sua situazione di equilibrio, tenderà ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale (equilibrio instabile).

3) Esempio matematico

Prendiamo in considerazione il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} \\ \dot{\bar{y}} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0$$

e supponiamo che la relativa matrice dinamica sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-t} x_{20} \\ e^{-2t} x_{30} \end{pmatrix}$$

Posto che:

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad c_3)$$

si ottiene:

$$y(t) = c_1 e^t x_{10} + c_2 e^{-t} x_{20} + c_3 e^{-2t} x_{30}$$

In questa situazione si possono anche verificare casi di evoluzione illimitata; infatti, se le condizioni iniziali sono del tipo:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

il sistema risulta stabile (l'unica componente che influisce sul sistema è data dall'esponenziale e^{-2t} che decresce col tempo), ma una piccola perturbazione nelle condizioni iniziali, tipo:

$$x_0 = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

porta il sistema ad essere instabile per la presenza della componente e^t .

6.2. Stabilità dei movimenti

Le definizioni seguenti sono riferite al caso più generale di un movimento dovuto ad una evoluzione libera (sistema autonomo) o forzata.

Definizione – Movimento stabile

Un movimento $\tilde{x}(\cdot)$ si dice **stabile** rispetto ad una perturbazione dello stato iniziale \bar{x}_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

tale che

$$\forall x_0 \in X : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$$

si ha

$$\|\tilde{x}(t, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) - \tilde{x}(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Definizione – Movimento asintoticamente stabile

Un movimento si dice **asintoticamente stabile** rispetto ad una perturbazione dello stato iniziale se:

- a) è stabile secondo la definizione precedente
- b) si ha:

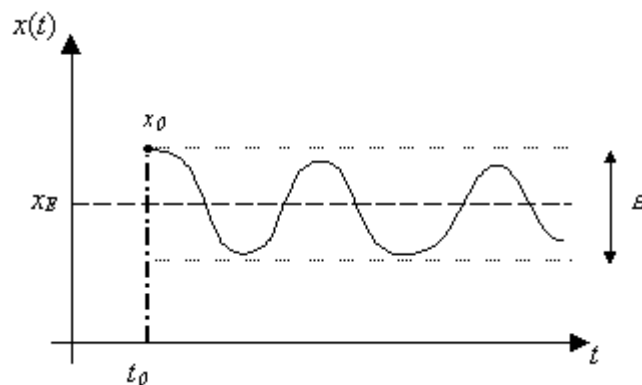
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t, t_0, x_0, \bar{u}(\cdot)) - \tilde{x}(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))\| = 0 \quad \forall x_0 \in X : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$$

Definizione – Movimento instabile

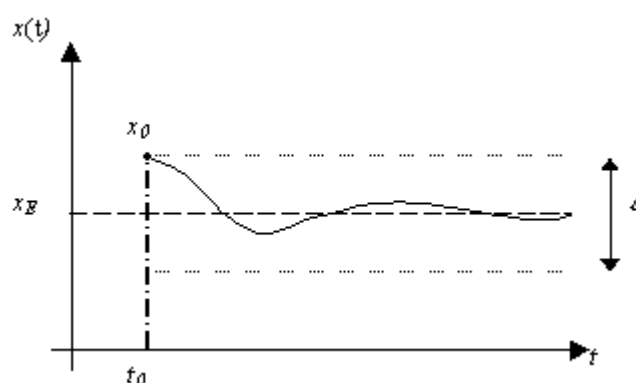
Un movimento si dice **instabile** rispetto ad una perturbazione dello stato iniziale se non ricade nei casi precedenti.

Esempi:

- 1) Movimento stabile



2) Movimento asintoticamente stabile



Ossevazioni:

- 1) Le definizioni di stabilità e asintotica stabilità sono valide anche per movimenti generati da perturbazioni limitate degli ingressi.
- 2) La δ è, in genere, una funzione del tipo

$$\delta(\varepsilon, t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u})$$
 Se però δ non dipende da t_0 si dice che la stabilità è **uniforme**.
- 3) Se δ può essere scelta arbitrariamente grande, la stabilità è detta **globale**, altrimenti è **locale**.
- 4) La stabilità di un movimento non implica la stabilità di un sistema; infatti, se ad un movimento stabile si fa corrispondere una diversa funzione d'ingresso, non è detto che esso presenti le stesse caratteristiche di stabilità.

6.3. Stabilità dei sistemi lineari

Le definizioni e le osservazioni viste finora sono valide sia per sistemi lineari che per quelli non lineari; la linearità di un sistema permette di generalizzare alcune caratteristiche di stabilità.

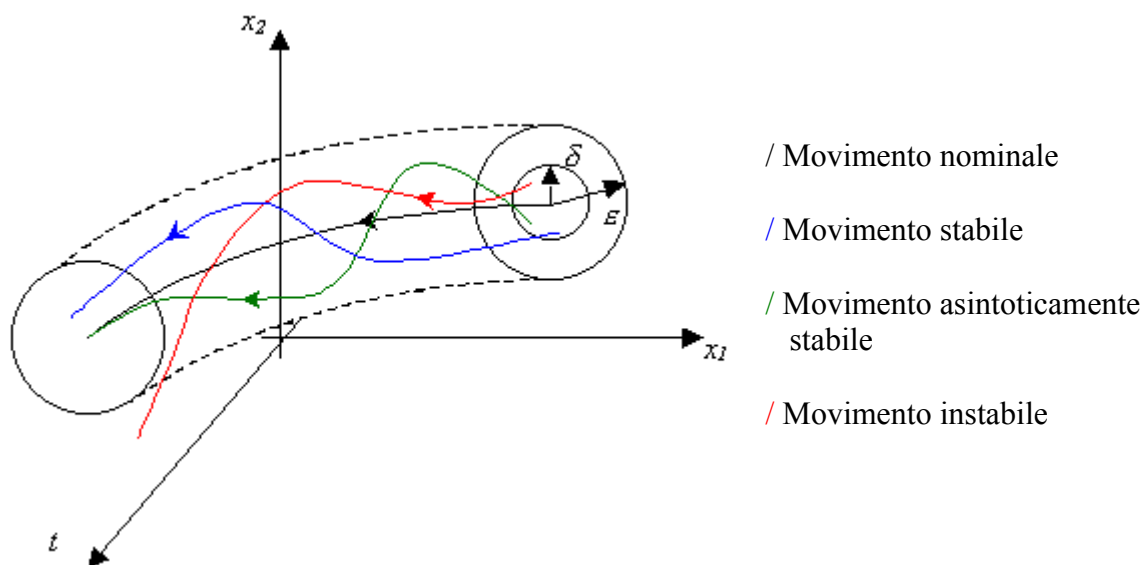
Teorema 6.1.

Un movimento di un sistema lineare è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se tutti i movimenti del sistema sono, rispettivamente, stabili, asintoticamente stabili o instabili.

Da questo teorema si deducono le seguenti proprietà:

- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.
- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso.
- Se un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a “piccole” perturbazioni (delle condizioni iniziali o dell'ingresso), lo è anche per perturbazioni di qualsiasi entità, purché finite.

Esempio



Per i sistemi lineari si ha la nota rappresentazione:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{x}_0$$

Posto:

$$\tilde{\bar{x}} = \text{movimento nominale}$$

$$\tilde{\bar{x}}_p = \tilde{\bar{x}} + \delta\bar{x} = \text{movimento perturbato}$$

e volendo analizzare l'andamento del “disturbo” si può scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\bar{x}}}_p - \dot{\tilde{\bar{x}}} &= A(\tilde{\bar{x}} + \delta\bar{x}) + B\bar{u} - A\tilde{\bar{x}} - B\bar{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta\dot{\bar{x}} = A\delta\bar{x} \end{aligned}$$

che rappresenta l'*evoluzione dello scostamento*; da questa relazione si può dedurre che:

- la stabilità può essere valutata riferendosi solamente al sistema autonomo.
- è sufficiente studiare la stabilità del movimento $\dot{x}(t) = 0$.
- per quanto detto anche in precedenza, si può parlare indifferentemente di stabilità di movimento/equilibrio o sistema.
- la conoscenza della matrice dinamica del sistema fornisce le informazioni sulla stabilità del sistema.

Ricordando la (5.9.), dato il sistema:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad \bar{x}_0 \quad (\text{Cap. 6.2})$$

si può scrivere:

$$\bar{x}(t) = \Phi(t, t_0)\bar{x}_0 \quad \begin{array}{ll} A = A(t) & \text{Sistemi lineari tempo varianti} \\ A = \text{costante} & \text{Sistemi lineari tempo invarianti} \end{array}$$

In questo caso la condizione di equilibrio è tale che:

$$\dot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_0 = 0$$

e per le definizioni di stabilità viste in precedenza si ha che il sistema è:

- stabile $\Leftrightarrow \|\Phi(t, t_0)\| \leq M \quad \forall t \geq t_0$
- asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0 \quad \forall t \geq t_0$

In particolare, per i sistemi *tempo invarianti*, si ha:

- stabile $\Leftrightarrow \|e^{A(t-t_0)}\| \leq M \quad \forall t \geq t_0$
- asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{A(t-t_0)}\| = 0 \quad \forall t \geq t_0$

Le definizioni di stabilità viste finora sono legate a proprietà *intrinseche* del sistema e vengono rappresentate come **proprietà di stabilità interne del sistema**; non dipendono né dalle particolari condizioni iniziali, né dagli ingressi ma solo dalla matrice dinamica e dai suoi autovalori.

Esistono poi definizioni relative alla **stabilità esterna** cioè all'evoluzione del sistema in presenza di azioni esterne (ingressi), come le seguenti.

Definizione – Stabilità BIBS (ILSL)

Un sistema lineare (tempo-variante o tempo-invariante) è **stabile BIBS** (Bounded Input Bounded State) o **ILSL** (Ingresso Limitato Stato Limitato) se $\forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\text{se } \|\bar{u}(t)\| < \delta \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow \|\bar{x}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(t, \tau) \bar{u}(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Definizione – Stabilità BIBO (ILUL)

Un sistema lineare (tempo-variante o tempo-invariante) è **stabile BIBO** (Bounded Input Bounded Output) o **ILUL** (Ingresso Limitato Uscita Limitata) se $\forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che:

$$\text{se } \|\bar{u}(t)\| < \delta \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| = \left\| C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(t, \tau) \bar{u}(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Nel caso di sistemi LTI le proprietà della stabilità interna sono facilmente verificabili grazie all'espressione della matrice di transizione; infatti:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

e l'espressione della perturbazione dell'equilibrio è data da:

$$\delta \bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \delta \bar{x}_0$$

Teorema 6.2.

Un sistema lineare stazionario è asintoticamente stabile se e solo se **tutti** gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa.

Teorema 6.3.

Un sistema lineare stazionario è stabile se e solo se gli autovalori di A sono a parte reale negativa o nulla, ma questi ultimi hanno molteplicità algebrica e geometrica uguale.

Teorema 6.4.

Un sistema lineare stazionario è instabile altrimenti.

Esempi

1)

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow \text{instabile}$$

infatti

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \bar{x}_0 \Rightarrow e^t, e^{-t} \text{ sono i modi propri del sistema}$$

2)

$$x = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3 \Rightarrow \text{asintoticamente stabile}$$

infatti

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

3)

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{stabile}$$

infatti

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

4)

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \text{instabile}$$

infatti

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

5)

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_{1/2} = 0$$

si nota che la matrice è in pratica un blocco di Jordan con:

- molteplicità algebrica = 2 (2 autovalori)
- molteplicità geometrica = 1 (1 blocco)

\Rightarrow **instabile**

infatti

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

6)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \Rightarrow \lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_3 = -1 \Rightarrow \textbf{stabile}$$

in questo caso, infatti, è:

- molteplicità algebrica = 2 (2 autovalori)
- molteplicità geometrica = 2 (2 blocchi)

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & e^{-t} \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

7)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} x \Rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \Rightarrow \textbf{stabile}$$

anche in questo caso:

- molteplicità algebrica = 2 (2 autovalori)
- molteplicità geometrica = 2 (2 blocchi)

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

8)

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \Rightarrow \lambda_{1/6} = 0$$

- molteplicità algebrica = 6 (6 autovalori)

- molteplicità geometrica = 3 (3 blocchi)

\Rightarrow **instabile**

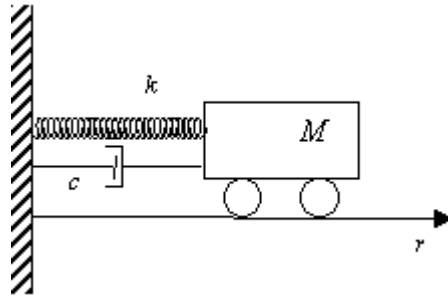
$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_0$$

6.4. Metodo di Lyapunov

Il metodo di Lyapunov è una procedura di valutazione della **stabilità interna** (per sistemi NL, LTV, LTI) basata sull'estensione delle proprietà energetiche di sistemi meccanici ed elettrici.

Una prima considerazione che si può fare, parlando di sistemi meccanici/elettrici, è che se l'energia totale meccanica/elettrica del sistema è continuamente dissipata, il sistema evolve verso l'equilibrio. Se ne deduce che lo studio dell'equilibrio può essere eseguito esaminando le variazioni nel tempo di una funzione scalare, cioè dell'energia totale.

Esempio



In un sistema di questo tipo si devono considerare:

- Energia cinetica
- Energia potenziale
- Energia dissipativa

L'equazione che regola il sistema è:

$$M \ddot{r} + c \dot{r} |\dot{r}| + k_0 r + k_1 r^3 = 0$$

in cui:

$$k_0 r + k_1 r^3$$

è l'equazione, non lineare, che governa la forza elastica, mentre

$$c \dot{r} |\dot{r}|$$

è la relazione, non lineare, che tiene conto dello smorzamento dovuto all'ammortizzatore.

Scegliendo il vettore di stato come:

$$\bar{x} = (r, \dot{r})^T \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{non lineare}$$

e supponendo di spostare la massa dal suo punto di equilibrio, che risulta essere:

$$\bar{x}_E = (0, 0)^T$$

si vuole scoprire se il movimento perturbato risulta stabile o meno.

Tenendo presente che l'energia totale risulta dalla somma fra quella cinetica e quella potenziale, si arriva a scrivere:

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \int_0^r (k_0 \xi + k_1 \xi^3) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k_0 r^2 + \frac{1}{4} k_1 r^4 \end{aligned}$$

Da questo risultato si può dedurre che le situazioni che possono presentarsi sono:

- 1) $V(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_E = 0 \Rightarrow$ Equilibrio
- 2) $V(\bar{x}) \rightarrow 0 \Rightarrow$ Stabilità asintotica
- 3) $V(\bar{x}) \rightarrow \infty \Rightarrow$ Instabilità

Come detto in precedenza, una grandezza scalare (l'energia meccanica) riflette l'ampiezza del vettore di stato ma si nota anche che la sua variazione nel tempo caratterizza le proprietà di stabilità del sistema.

La velocità di variazione dell'energia meccanica nel tempo è data dalla relazione:

$$\dot{V}(\bar{x}) = M \dot{r} \ddot{r} + (k_0 r + k_1 r^3) \dot{r}$$

e, sfruttando l'equazione del sistema, si arriva a:

$$\dot{V}(\bar{x}) = \dot{r} (-b \dot{r} |\dot{r}|) = -b |\dot{r}|^3$$

L'energia totale, quindi, viene continuamente dissipata dallo smorzatore fino a quando la massa non si ferma cioè fino a quando:

$$\bar{x} = 0$$

Definizione – Definizione di $V(\cdot)$

Si consideri una funzione $V(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; si ha che:

- V è **definita (semi-definita) positiva** in \bar{x}' se $V(\bar{x}') = 0$ e se $\exists \delta > 0$ tale che:

$$V(\bar{x}) > 0 \quad (V(\bar{x}) \geq 0) \quad \forall \bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}'\| < \delta, \quad \bar{x} \neq \bar{x}'$$

- V è **definita (semi-definita) negativa** in \bar{x}' se $V(\bar{x}') = 0$ e se $\exists \delta > 0$ tale che :

$$V(\bar{x}) < 0 \quad (V(\bar{x}) \leq 0) \quad \forall \bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}'\| < \delta, \quad \bar{x} \neq \bar{x}'$$

- V è **non definita** in \bar{x}' se non rientra nei casi precedenti.

A proposito di queste definizioni si noti che particolarmente utili risultano le funzioni quadratiche per cui si può scrivere:

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0$$

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} < 0 \Leftrightarrow A < 0$$

Teorema 6.5. – Metodo diretto di Lyapunov

Sia $V(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con le sue derivate parziali e si consideri uno stato di equilibrio per il sistema autonomo:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{con} \quad \bar{f}(\bar{x}') = 0$$

Sia, inoltre, $V(\cdot)$ definita positiva nel punto di equilibrio, e sia ancora:

$$\dot{V}(\cdot) = \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \bar{f}(\cdot)$$

Se $\dot{V}(\cdot) \leq 0$, \bar{x}' è stabile.

Se $\dot{V}(\cdot) < 0$, \bar{x}' è asintoticamente stabile.

Se $\dot{V}(\cdot) > 0$, \bar{x}' è instabile.

Osservazioni:

- Il sistema considerato è autonomo; la stabilità, in questa analisi, dipende solo da variazioni delle condizioni iniziali.
- Le precedenti sono condizioni *sufficienti* ma non *necessarie* per cui la determinazione di una funzione di Lyapunov $V(\cdot)$ che non le soddisfi non permette di ipotizzare alcuna conclusione sulla stabilità del punto di equilibrio considerato.
- Tale metodo non fornisce nessuna indicazione su come trovare la $V(\cdot)$ (non è operativo).

Esempi

- 1) Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione:

$$\dot{\bar{x}} = (1 - x^5)$$

Si deduce immediatamente che l'unico punto di equilibrio si ha per

$$\bar{x}_F = 1$$

Bisogna quindi scegliere una funzione di Lyapunov che sia continua, con derivate continue e definita positiva nel punto di equilibrio; si può scegliere allora la funzione:

$$V(x) = (1 - x)^2$$

per la quale si ha:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV}{dx} f(x) = -2(1-x)(1-x)^5 = -2(1-x)^6$$

che è sicuramente definita negativa nel punto di equilibrio che risulta, quindi, essere asintoticamente stabile.

- 2) Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Anche in questo caso è semplice trovare il punto di equilibrio che risulta essere:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si prende in considerazione la funzione di Lyapunov, continua, con derivate continue e definita positiva nel punto di equilibrio:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

per la quale si ottiene:

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV}{dx} f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = -2x_2^2(x_1^2 - 1)$$

Si può notare che se $|x_1| < 1$, allora:

$$\dot{V}(x(t)) > 0$$

per cui il punto di equilibrio in esame risulta instabile.

6.5. Stabilità dei sistemi lineari stazionari

Per i sistemi lineari stazionari la (6.1.) diventa:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y} = C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (\text{Cap. 6.3})$$

dove ora le matrici A , B e C sono costituite da elementi costanti.

L'analisi della stabilità, basata per i sistemi lineari sullo studio della (6.2.), può quindi essere, in questo caso, ristretta al sistema autonomo stazionario:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) \quad (\text{Cap. 6.4})$$

di cui si analizza la stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, che si sa essere anche punto di equilibrio:

$$\bar{x}'(t) = 0$$

In questo caso, scelta una matrice $P(n \times n)$ (posto che sia $x \in \mathbb{R}^n$) simmetrica e definita positiva, la funzione:

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x} > 0$$

è una funzione di Lyapunov; per studiarne la stabilità, bisogna quindi esaminare l'andamento della

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x} + \bar{x}^T P \dot{\bar{x}}$$

che, tenendo presente la (6.4.), diventa:

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T A^T P \bar{x} + \bar{x}^T P A \bar{x} = \bar{x}^T (A^T P + P A) \bar{x} \quad (\text{Cap. 6.5})$$

Definizione – Equazione di Lyapunov

Viene detta **Equazione di Lyapunov** la seguente relazione:

$$A^T P + P A = -Q$$

Sfruttando tale definizione, la (6.5.) diventa:

$$V(\bar{x}) = -\bar{x}^T Q \bar{x} \quad (\text{Cap. 6.6})$$

per cui l'asintotica stabilità del sistema si ha se, per una qualsiasi Q simmetrica e definita positiva, la (6.6.) risulta negativa.

Il risultato ottenuto viene formalizzato attraverso il seguente teorema.

Teorema 6.6.

Il sistema lineare autonomo (6.4.) è asintoticamente stabile se e solo se, per ogni matrice Q simmetrica e definita positiva, esiste una matrice P , anch'essa simmetrica e definita positiva, tale che:

$$A^T P + P A = -Q$$

L'importanza di tale teorema è data dal fatto che:

- Fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica.

- Fornisce una procedura sistematica per determinare una funzione di Lyapunov e, quindi, un metodo operativo per la verifica dell'asintotica stabilità di un sistema lineare stazionario.

Teorema 6.7.

Data una matrice A , tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa se e solo se esiste una matrice P simmetrica e definita positiva tale che:

$$A^T P + PA + Q = 0$$

con Q definita positiva.

Corollario

Se P esiste, è unica.

6.6. Stabilità mediante matrici/funzioni di trasferimento

Consideriamo il solito sistema lineare stazionario:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y} = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{(Cap. 6.7)}$$

Per tale sistema, come è già stato illustrato, si possono definire quattro diverse funzioni di trasferimento:

- 1) Fra stato iniziale e stato del sistema

$$G_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}(s) = (sI - A)^{-1}$$

- 2) Fra stato iniziale e uscita

$$G_{\bar{x}_0}^{\bar{y}}(s) = C[sI - A]^{-1}$$

- 3) Fra ingresso e stato del sistema

$$G_u^{\bar{x}}(s) = [sI - A]^{-1} B$$

- 4) Fra ingresso e uscita

$$G_u^{\bar{y}}(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

Per i sistemi autonomi (con ingresso nullo) l'analisi della stabilità richiede la valutazione delle proprietà della prima:

$$G_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}(s) = (sI - A)^{-1} = H(s)$$

e quindi della matrice $H(s)$ i cui elementi sono dati da rapporti di polinomi:

$$h_{ij}(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

L'andamento del vettore di stato e, quindi, le proprietà di stabilità del sistema, dipendono dai "poli" di ciascun termine; l'analisi delle risposte porta al seguente risultato.

Teorema 6.8.

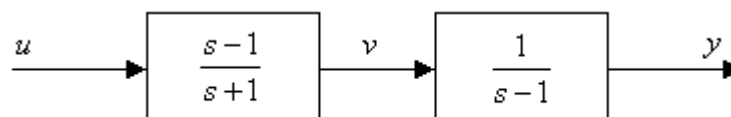
Il sistema (6.7.) è:

- 1) **Stabile** se tutti i poli di ciascun elemento h_{ij} hanno parte reale negativa tranne alcuni, a molteplicità unitaria, con parte reale pari a 0.
- 2) **Asintoticamente stabile** se tutti i poli di ciascun elemento h_{ij} hanno parte reale negativa.
- 3) **Instabile** altrimenti.

Si noti che l'insieme dei poli di ciascun elemento h_{ij} è, in realtà, l'insieme degli autovalori della matrice A e delle radici del polinomio caratteristico.

Utilizzando questa tecnica occorre fare estrema attenzione ai casi in cui nel sistema avvengano "cancellazioni"; l'esempio che segue ne illustra il motivo.

Sia dato un sistema (è il caso di cancellazione "zero-polo") rappresentabile col seguente schema a blocchi:



Portando il sistema in equazioni di stato, per il primo blocco si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2u \\ v = x_1 \end{cases}$$

mentre, per il secondo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2 + v \\ y &= x_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + x_1 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

Scegliendo come vettore di stato quello composto da x_1 e x_2 , si ha:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \bar{x} \end{cases}$$

Considerando il sistema nel suo insieme si ha che:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Si ha però che:

$$G_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_u^{\bar{x}}(s) = [sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_u^{\bar{y}}(s) = C[sI - A]^{-1} B = \frac{1}{(s+1)}$$

Si può verificare che la matrice $[sI - A]^{-1}$ corrisponde alla $H(s)$ del *Teorema 6.8.*, e poiché non tutti gli h_{ij} sono a parte reale negativa o nulla, il sistema risulta instabile, anche se né nella matrice di trasferimento ingresso-stato, né in quella ingresso-uscita, tali poli risultano presenti.

L'instabilità del sistema può essere valutata anche esaminando la matrice di transizione dello stato, che risulta essere:

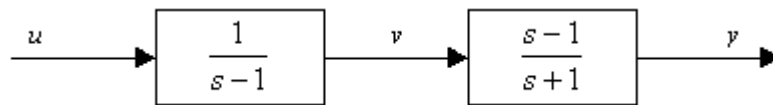
$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} x_{10} \\ \frac{1}{2} e^t x_{10} - \frac{1}{2} e^{-t} x_{10} + e^t x_{20} \end{pmatrix}$$

L'utilizzo delle $G_{\bar{u}}^{\bar{x}}(s)$ e $G_{\bar{u}}^{\bar{y}}(s)$ fa quindi perdere informazioni riguardo la stabilità del sistema; l'analisi della stabilità mediante le matrici di trasferimento, si può effettuare solamente se si ha la certezza che in esse compaiano tutti i poli di tutti gli elementi della matrice $[sI - A]^{-1}$.

Se tale informazione non è disponibile, si possono fare solo considerazioni di instabilità; se in qualche elemento delle matrici $[sI - A]^{-1}B$ e $C[sI - A]^{-1}B$ si trova un polo a parte reale positiva o multiplo a parte reale nulla, sicuramente tale polo è anche presente in qualche elemento della matrice $[sI - A]^{-1}$ e si può quindi affermare che il sistema è instabile.

Passando ad esaminare il caso di cancellazione “polo-zero”, lo schema preso in considerazione è:



Ovviamente la matrice di trasferimento ingresso-uscita del sistema rimane invariata e pari a:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Esaminando questo schema e sfruttando i risultati ottenuti in precedenza, si arriva a determinare le rappresentazioni in equazioni di stato che sono:

- per il primo blocco

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ v = x_1 \end{cases}$$

- per il secondo blocco

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2v \\ y = x_2 + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 \\ y = x_2 + x_1 \end{cases}$$

Scegliendo ancora una volta come vettore di stato il vettore

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} \end{aligned}$$

Sfruttando tale risultato si possono scrivere le varie funzioni di trasferimento che risultano essere:

$$G_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ -\frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad 131$$

In questo caso, anche se la matrice ingresso-uscita non può fornire (come ci si poteva aspettare) alcuna informazione sull'instabilità del sistema, non è così per la matrice di trasferimento ingresso-stato, che, al contrario, per la presenza del polo a parte reale positiva, accerta l'instabilità del sistema.

$$\Rightarrow G_{\bar{u}}^{\bar{y}}(s) = C[sI - A]^{-1}B = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

La conoscenza delle due matrici ingresso-uscita e ingresso-stato, risulta comunque utile nella verifica della stabilità esterna del sistema, come enunciato nei due seguenti teoremi.

Teorema 6.9.

Il sistema lineare (6.7.) è stabile BIBS (o ILSL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-stato $[sI - A]^{-1}B$ hanno parte reale negativa.

Teorema 6.10.

Il sistema lineare (6.7.) è stabile BIBO (o ILUL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-uscita $C[sI - A]^{-1}B$ hanno parte reale negativa.

La stabilità BIBO (ILUL) si riferisce al comportamento ingresso-uscita del sistema e quindi, spesso, un sistema stabile BIBO viene anche detto stabile *esternamente*.

Si faccia attenzione al fatto che la stabilità asintotica di un sistema implica anche la stabilità BIBO e BIBS ma che queste non implicano, in generale, la stabilità asintotica; se infatti si scrive la soluzione della prima delle (6.7.) sfruttando le matrici di trasferimento, si ha:

$$\bar{x}(s) = G_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}(s)\bar{x}_0 + G_u^{\bar{x}}(s)u(s)$$

e dall'esame di questa relazione si nota che se è stabile la matrice di trasferimento ingresso-stato, non è detto che lo sia il sistema, ma se lo è il sistema, forzatamente lo è anche la stato $[sI - A]^{-1}B$ (ingresso-stato).

6.7. Criterio di Routh-Hurwitz

Il criterio di Routh-Hurwitz è stato sviluppato per la determinazione delle proprietà delle radici di un polinomio e viene utilizzato come strumento di verifica della stabilità di un sistema senza doverne calcolare i poli.

Si prenda in considerazione un sistema monovariabile descritto dalla relazione:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{Cap. 6.8})$$

dove

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

Condizioni per la stabilità del sistema sono allora:

1) **Condizione necessaria**

Affinché il sistema (6.8.) sia asintoticamente stabile deve essere:

- I. $a_i \neq 0 \quad i=0,1,\dots,n$
- II. Tutti i coefficienti a_i hanno lo stesso segno

2) **Condizione necessaria e sufficiente**

Il sistema (6.8.) è asintoticamente stabile se e solo se:

- I. Rispetta la condizione necessaria
- II. La tabella di Routh generata da $D(s)$ è ben definita e tutti gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno (positivo); la tabella di Routh è così costruita:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	0
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots			
s^0					

dove:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

e così via.

Esempi

1) Sia

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

La tabella di Routh che si costruisce a partire da questo polinomio è

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s^1	32/3	0	
s^0	8		

Da cui si deduce che il sistema in esame è asintoticamente stabile; si noti che alla stessa conclusione si poteva arrivare notando che $D(s) = (s + 2)^3$ e che quindi le tre radici del sistema sono tutte in -2 .

2) Sia

$$D(s) = s^3 - s^2 + 6s - 6$$

Si nota subito che il sistema è instabile (i coefficienti a_i non hanno tutti lo stesso segno) ma come controprova si può utilizzare la tabella di Routh che è:

s^3	1	1	0
s^2	-1	-6	0
s^1	-5	0	
s^0	-6		

e, come ci si aspettava, c'è un cambiamento di segno.

Esaminando il polinomio si possono ricavare le radici del sistema che risultano essere:

$$r_1 = 2, \quad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{3}$$

E si nota che, proprietà sempre valida, il numero di radici a parte reale positiva è pari al numero di variazioni di segno nella tabella di Routh.

3) Sia

$$D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8$$

Guardando i coefficienti a_i non si può dire nulla sulla stabilità del sistema finché non si sia costruita la tabella di Routh:

s^3	1	2
s^2	1	8
s^1	-6	0
s^0	8	

da cui si deduce che il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno; analizzando il polinomio si vede che le radici sono:

$$r_1 = -2, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\sqrt{15}$$

Si noti che, come detto nel precedente esempio, il numero di radici a parte reale positiva, coincide con il numero di variazioni di segno nella tabella.

Gli esempi visti finora rientrano fra quelli *standard*; esistono però delle situazioni che portano a dei casi particolari che possono essere di due tipi:

1) Un elemento dell'array è nullo.

Sia

$$D(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Costruendo la tabella di Routh si arriva ad avere la seguente situazione:

s^3	1	1	0
s^2	0	1	0
s^1	?		
s^0			

in cui non si sa come proseguire; si pone allora, al posto dello 0 una variabile ε supposta molto piccola e si continua la costruzione della tabella che risulta essere:

s^3	1	1	0
s^2	ε	1	0
s^1	$(\varepsilon - 1)/\varepsilon$	0	
s^0	1		

Si hanno quindi due variazioni di segno, quindi due radici positive per cui il sistema risulta instabile.

2) Una riga dell'array risulta nulla.

Sia

$$Y(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$$

Si nota subito, dalla condizione necessaria del criterio di Routh, che il sistema è instabile e costruendo la tabella di Routh si ha:

s^5	1	24	-25	0
s^4	2	48	-50	0
s^3	0	0		
s^2	?			
s^1				
s^0				

In questo caso per continuare la costruzione della tabella si definisce il polinomio:

$$Y(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \Rightarrow \dot{Y}(s) = 8s^3 + 96s$$

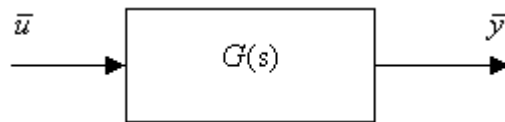
costruito prendendo in considerazione i termini presenti nella riga subito sopra quella nulla e facendone la derivata; sostituendo il polinomio così ottenuto alla riga mancante, si ha:

s^5	1	24	-25	0
s^4	2	48	-50	0
s^3	8	96	0	
s^2	24	-50		
s^1	112,7	0		
s^0	-50			

Nella tabella così ottenuta si rileva un cambiamento di segno da cui si deduce che c'è una sola radice a parte reale positiva.

6.8. Esempi di sintesi di sistema di controllo per la stabilità

1) Sia dato il seguente sistema:

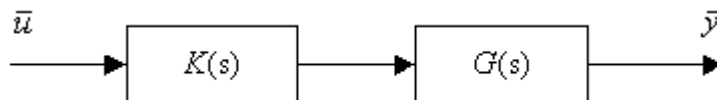


$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}$$

Si nota subito che il sistema risulta instabile per la presenza del polo $s = +3$.
Il controllo, come già visto, può essere effettuato con due tecniche differenti:

a) ad anello aperto

In questo caso il sistema con controllore diventa:



Per “eliminare” l’effetto del polo che rende instabile il sistema, la strada più semplice sembra quella di scegliere un controllore tale che:

$$K(s) = s-3 \Rightarrow G'(s) = K(s)G(s) = \frac{s+1}{(s+2)}$$

in modo che il sistema controllato risulti stabile (il polo a parte reale positiva non è più presente).

Tale scelta presenta però due problemi:

- Il controllore scelto, $K(s) = s-3$, non è fisicamente realizzabile; è possibile superare il problema scegliendo un controllore del tipo

$$K(s) = \frac{s-3}{s+10} \Rightarrow G'(s) = K(s)G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+10)}$$

Questa scelta permette di rendere stabile il sistema “spostando” il polo in maniera del tutto arbitraria (-10 è scelto a caso nel semipiano di parte reale negativa).

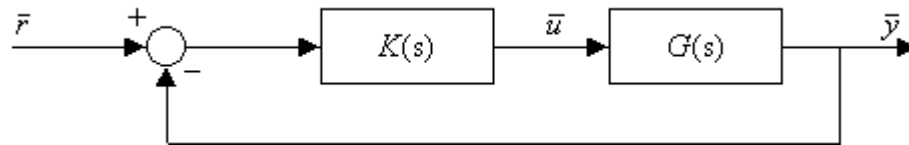
- In realtà tale operazione comporta una “cancellazione” fra lo “zero” del controllore e il polo del sistema iniziale; per poter effettuare tale cancellazione è però necessaria la perfetta conoscenza del polo.

Se infatti il polo è in $s = +3,000000001$ ma il controllore viene scelto con lo zero in $s = +3$, questa tecnica non funziona.

È quindi necessaria una conoscenza perfetta della dinamica, esente da qualsiasi errore; per questo motivo tale metodologia risulta spesso impraticabile.

b) ad anello chiuso

Il sistema con retroazione unitaria risulta essere:



In genere un controllore ha una funzione di trasferimento del tipo

$$K(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad m \leq n$$

e in questo caso la scelta più semplice è:

$$K(s) = k = \frac{b_0}{a_0}$$

ottenendo così:

$$G'(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)}$$

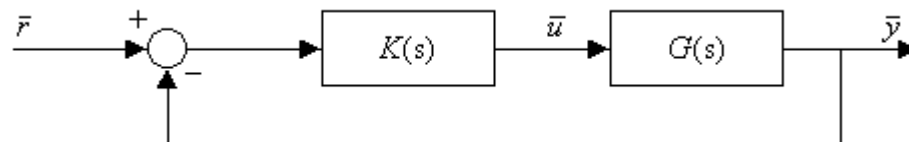
Costruendo la tabella di Routh si ha:

s^2	1	$(k-6)$
s^1	$(k-1)$	0
s^0	$(k-6)$	

Ponendo $k > 6$ il sistema così ottenuto risulta asintoticamente stabile; si noti che ponendo $k = 6$ il sistema è solo stabile, dato che i poli risultano essere rispettivamente $s_1 = 0$ ed $s_2 = -5$.

Il controllore utilizzato in questo caso è detto **controllore proporzionale**.

2) Si prenda in considerazione il sistema controllato in anello chiuso:



in cui l'impianto da controllare ha come funzione di trasferimento la:

$$G(s) = \frac{0.475}{s(s^2 + 11s + 10)}$$

Si nota subito che la $G(s)$ non può essere asintoticamente stabile per la presenza di un polo nell'origine; proprio per avere l'asintotica stabilità viene inserito un controllore con funzione di trasferimento pari a:

$$K(s) = k_1(s + k_2)$$

Il problema consiste nello scegliere le costanti k_1 e k_2 in modo da rendere il sistema controllato asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento ad anello chiuso, a retroazione unitaria, risulta essere:

$$G'(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{0.475k_1(s + k_2)}{s^3 + 11s^2 + (10 + 0.475k_1)s + 0.475k_1k_2}$$

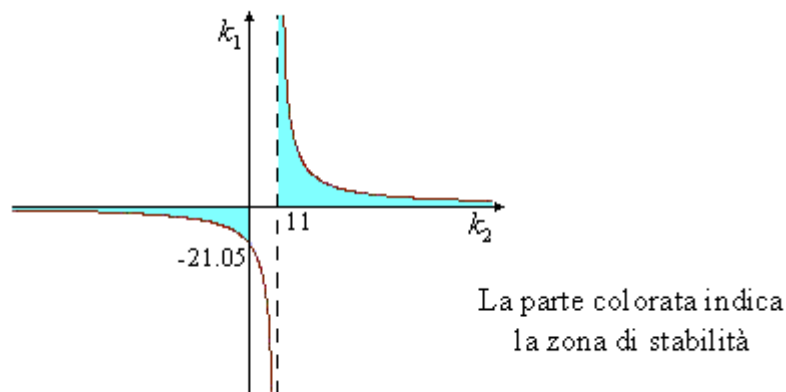
La relativa tabella di Routh è:

s^3	1	$10 + 0.475k_1$	0
s^2	11	$0.475k_1k_2$	0
s^1	$10 + 0.475k_1 + 0.043k_1k_2$	0	
s^0	$0.475k_1k_2$		

Per avere l'asintotica stabilità devono quindi essere rispettate due condizioni:

- 1) Le due costanti k_1 e k_2 devono avere lo stesso segno.
- 2) $k_1(0.475 - 0.0432 k_2) > -10$

Riportando queste condizioni su di un grafico, si ottiene:

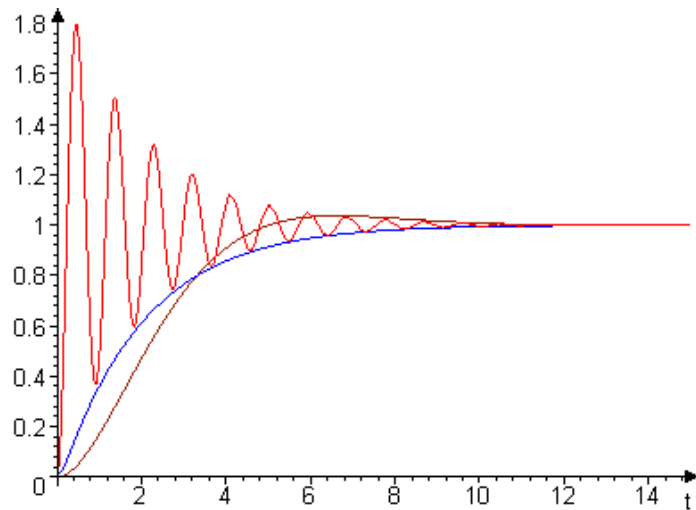


Specificando le due costanti si ottengono determinate caratteristiche della risposta temporale e viceversa (rispettando, ovviamente, i vincoli di stabilità).

La risposta temporale si può dedurre facilmente ricordando il *Teorema del valore finale* (3.9.); supponendo di avere come ingresso un gradino unitario si ha:

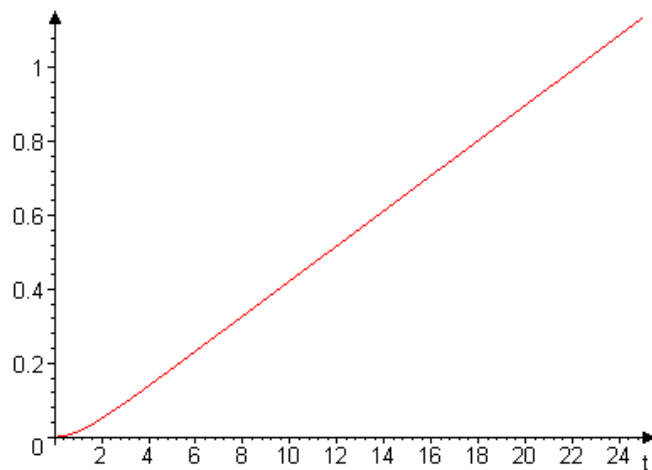
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG'(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G'(s) = 1$$

cioè dopo un transitorio, dipendente dai valori dei parametri k_1 e k_2 , l'uscita tende comunque a seguire il gradino posto come ingresso; nel grafico sono riportate le risposte a tre diverse coppie di valori di k_1 e k_2 .

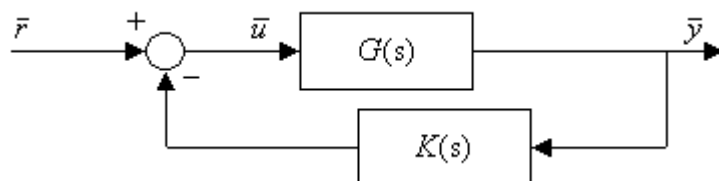


Si può facilmente vedere, tramite questo teorema, la differenza con il caso non controllato, per cui si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \rightarrow \infty$$



È possibile risolvere il problema della stabilità in maniera analoga spostando il controllore sulla catena di retroazione, cioè modificando lo schema a blocchi nel modo seguente:



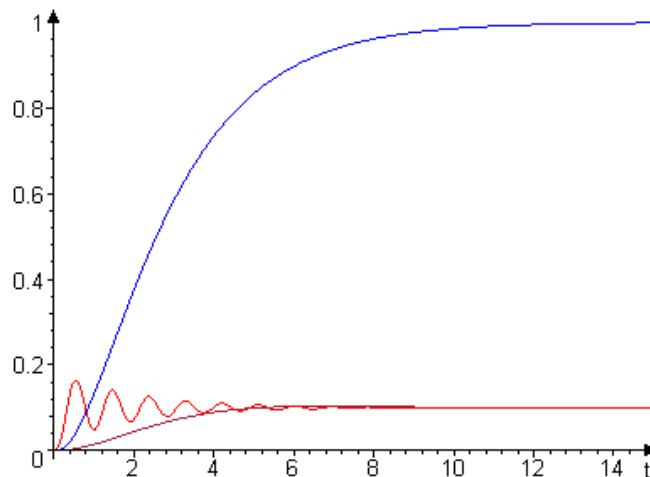
In questo caso la funzione di trasferimento del sistema risulta essere:

$$G''(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{0.475k_1}{s^3 + 11s^2 + (10 + 0.475k_1)s + 0.475k_1k_2}$$

e, sfruttando il *Teorema del valore finale* (3.9.), si ottiene, ipotizzando sempre di avere in ingresso un gradino unitario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG''(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G'(s) = \frac{1}{k_1 k_2}$$

e il suo comportamento temporale dipende dal valore dei due parametri k_1 e k_2 ; si noti che in questo caso i due parametri (nell'esempio riportato sono stati usati gli stessi valori del caso a reazione unitaria) condizionano non solo l'andamento del transitorio ma anche il valore cui tende, a regime, la risposta al gradino.



Si può notare che il sistema rimane, comunque, stabile; a quest'ultima conclusione si poteva facilmente arrivare, osservando che il denominatore delle due funzioni di trasferimento $G(s)$ e $G''(s)$ è lo stesso.

Cap 7. Controllabilità e Osservabilità

Dopo aver affrontato lo studio della stabilità, in questo capitolo si analizzano le altre proprietà strutturali del sistema:

- **Controllabilità e raggiungibilità**
- **Osservabilità e ricostruibilità**

Anche se le proprietà che verranno illustrate sono valide anche per sistemi lineari tempo varianti, ci si limita allo studio di sistemi lineari tempo invarianti, cioè del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}_0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (7.1)$$

7.1. Controllabilità e raggiungibilità

Si vuole studiare la capacità intrinseca del sistema di poter "pilotare", manipolare l'andamento temporale dello stato attraverso un opportuna scelta del segnale di ingresso (o di controllo).

Definizione – Sistema controllabile

Un sistema dinamico si dice **controllabile** dall'istante t_0 se è possibile trovare un segnale di controllo limitato $\bar{u}(t)$ tale da portare il sistema da uno stato iniziale $\bar{x}(t_0) \neq 0$ allo stato $\bar{x}(t_1) = 0$ in un tempo limitato (t_0, t_1) .

Definizione – Sistema raggiungibile

Un sistema dinamico si dice **raggiungibile** dall'istante t_0 se è possibile trovare un segnale di controllo limitato $\bar{u}(t)$ tale da portare il sistema dallo stato iniziale $\bar{x}(t_0) = 0$ ad uno stato $\bar{x}(t_1) \neq 0$ in un tempo limitato (t_0, t_1) .

Ricordando la (1.10.) si può scrivere che:

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau$$

da cui si possono ricavare nuove definizioni del tutto equivalenti alle precedenti.

Definizione – Sistema (completamente) controllabile

Un sistema dinamico si dice **controllabile** se:

$$\forall t > 0 \quad \exists \bar{u}(\tau) : e^{At} \bar{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau = 0 \quad (7.2)$$

L'insieme degli stati per cui vale la (7.2.) si indica con X_c (sottospazio di \mathbb{R}^n); se si verifica che $X_c = \mathbb{R}^n$ il sistema viene detto **completamente controllabile**.

Definizione – Sistema (completamente) raggiungibile

Un sistema dinamico si dice **raggiungibile** se:

$$\forall t > 0 \quad \exists \bar{u}(\tau) : \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau = \bar{x} \quad (7.3)$$

L'insieme degli stati per cui vale la (7.3.) si indica con X_R (sottospazio di \mathbb{R}^n); se si verifica che $X_R = \mathbb{R}^n$ il sistema viene detto **completamente raggiungibile**.

Teorema 7.1.

Per i sistemi lineari stazionari tempo continui si ha che $X_C = X_R$.

Dim

Si consideri il sistema completamente controllabile e quindi tale che $X_C = \mathbb{R}^n$; per la (7.2.) si ha che:

$$\forall t_1 > 0, \forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \exists \bar{u}(\tau) : \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau = -e^{At_1} \bar{x}_0 \quad (7.4)$$

Poiché e^{At_1} è una matrice a rango pieno ($\text{rango}(e^{At_1}) = n$), il secondo termine fornisce, al variare di \bar{x}_0 , tutti i vettori che appartengono ad \mathbb{R}^n ; la (7.4.) definendo la controllabilità di ogni stato implica la raggiungibilità di ogni vettore del tipo:

$$\bar{x} = -e^{At_1} \bar{x}_0 \quad \forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

e, poiché tale vettore può essere un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^n , ogni stato risulta raggiungibile, per cui:

$$X_C \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_R \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_C = X_R$$

La dimostrazione partendo dalla completa raggiungibilità del sistema è analoga.

Esempi

1) Dato il sistema

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

si vuole trovare la $u(t)$ tale che:

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Riportando il sistema in forma letterale:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

e scrivendone la soluzione utilizzando la LT, con la condizione iniziale scelta, si ha:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

e quindi:

$$BU(s) = (sI - A)X(s)$$

Si ha così che:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(s) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{cases} 0 = sX_1(s) - X_2(s) \\ U(s) = X_1(s) + (s+2)X_2(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_2(s) = sX_1(s) \\ U(s) = (1 + (s+2)s)X_1(s) \end{cases}$$

Supponendo ora che $X_1(s)$ sia del tipo:

$$X_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \Rightarrow U(s) = \frac{(1 + (s+2)s)N_1(s)}{D_1(s)}$$

Poiché $u(t)$ è un segnale reale e quindi causale, l'ordine del denominatore deve essere maggiore o uguale di quello del numeratore, quindi:

$$\deg(D_1(s)) \geq \deg(N_1(s) + 2)$$

Un andamento che soddisfa i requisiti, ricordando quanto visto nel *Cap3*. è:

$$x_1(t) = at^3 + bt^4$$

da cui si ottiene:

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = 3at^2 + 4bt^3$$

Mentre le condizioni iniziali sono automaticamente verificate, imponendo il rispetto di quelle finali si ha che:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 4b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 3t^3 - 2t^4 \Rightarrow X_1(s) = \frac{18}{s^4} - \frac{48}{s^5} = \frac{18s - 48}{s^5}$$

da cui, infine:

$$U(s) = \frac{(1 + (s+2)s) \cdot (18s - 48)}{s^5}$$

che, antitrasformata, fornisce l'andamento temporale di $u(t)$.

2) Dato il sistema e le sue condizioni iniziali

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \bar{x}(0) = 0$$

si vuole determinare l'insieme X_R .

Si può subito verificare che il sistema risulta non controllabile dato che il segnale di ingresso agisce in maniera equivalente su entrambe le variabili di stato; utilizzando la LT si ottiene:

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \end{cases}$$

Si noti che, qualsiasi sia la $U(s)$, si ha che $X_1(s) = X_2(s)$ e, quindi, che $x_1(t) = x_2(t)$; con quelle condizioni iniziali è possibile raggiungere, attraverso la scelta della $u(t)$, tutti gli stati tali che:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

mentre non è possibile raggiungere tutti quelli stati per cui:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a \neq b$$

Lo spazio di raggiungibilità risulta quindi essere:

$$X_R : \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

Un aspetto importante della controllabilità è la sua relazione con la stabilità del sistema; prendendo in considerazione un sistema del tipo:

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

si ha che è:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-3t} x_{20} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il sistema è instabile, per $x_1(t)$ e non può essere stabilizzato dato che risulta anche non controllabile (l'azione dell'ingresso agisce solo su $x_2(t)$).

Definizione – Sistema stabilizzabile

Un sistema si dice **stabilizzabile** se tutti i suoi stati instabili sono anche controllabili.

Definizione – Matrice di controllabilità

Dato un sistema del tipo:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^m$$

si definisce **matrice di controllabilità** la:

$$\mathcal{B} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \quad , \dim(n, (n+m)) \quad (7.5)$$

Teorema 7.2.

Un sistema lineare tempo continuo:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^m$$

è completamente controllabile se e solo se il rango della matrice di controllabilità è massimo, cioè se:

$$\text{rango}(\mathcal{B}) = \text{rango}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Dim

Supponendo, per semplicità e senza perdere di generalità, di essere nel caso di condizioni iniziali nulle si può scrivere:

$$\bar{x}(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\bar{u}(\tau) d\tau$$

Per la necessità bisogna dimostrare che

$$\bar{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{rango}(\mathcal{B}) = n$$

Sfruttando il *Teorema di Cayley-Hamilton* (1.5.) e quanto visto nel Par. 5.4.4. si può scrivere:

$$e^{A(t_1-\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

da cui:

$$\bar{x}(t_1) = \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i B\bar{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_1} \alpha_i(t) \bar{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \beta_i(i, \bar{u}, t_1)$$

e, quindi:

$$\begin{bmatrix} B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \bar{x}(t_1)$$

da cui si deduce che la matrice \mathcal{B} deve avere rango pari a n .

Teorema 7.3.

La proprietà di controllabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

Dim

Dato il sistema

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

operando il cambiamento di base, con T invertibile:

$$\bar{x} = T \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = T^{-1} \bar{x}$$

si ottiene:

$$\dot{\bar{z}} = T^{-1} A T \bar{z} + T^{-1} B \bar{u}$$

La matrice di controllabilità di questo sistema risulta essere:

$$\mathcal{B} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, (T^{-1}AT)^2T^{-1}B, \dots, (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B]$$

Considerando poi che:

$$(T^{-1}AT)^r = (T^{-1}AT)_1 \cdot (T^{-1}AT)_2 \cdot (T^{-1}AT)_3 \cdot \dots \cdot (T^{-1}AT)_r = T^{-1}A^rT$$

si ha:

$$\mathcal{B} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, T^{-1}A^2B, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}\mathcal{B}$$

e, dato che T^{-1} è di rango pieno, si ha:

$$\text{rango}(\mathcal{B}) = \min[\text{rango}(T^{-1}), \text{rango}(\mathcal{B})] = \text{rango}(\mathcal{B}).$$

Teorema 7.4.

Un sistema è non completamente controllabile se almeno una variabile di stato non è influenzata, direttamente o indirettamente, dall'ingresso.

Dim

Dato il sistema

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$$

si nota che solo le prime $n-m$ variabili di stato vengono influenzate dal controllo mentre le altre evolvono seguendo la relazione:

$$\dot{\bar{x}}_2 = A_{22}\bar{x}_2$$

non dipendendo dall'ingresso né direttamente né attraverso l'influenza delle altre $n-m$ variabili di stato, quindi:

$$\bar{x}_2(t) = e^{A_{22}t} \bar{x}_2(0)$$

per qualsiasi scelta del controllo, quindi il sistema è non completamente controllabile.

7.2. Osservabilità e ricostruibilità

Queste due proprietà del sistema si riferiscono alla possibilità di determinare lo stato iniziale (osservabilità) o quello attuale (ricostruibilità) di un sistema, noti struttura e segnale di controllo, in funzione della conoscenza del segnale d'uscita del sistema stesso.

Tali proprietà, come sarà chiaro in seguito, possono essere considerate duali rispetto a controllabilità e raggiungibilità.

Definizione – Sistema non osservabile

Il sistema (7.1.) si dice **non osservabile** se:

$$\bar{y}(t) = Ce^{At} \bar{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Definizione – Sistema (completamente) osservabile

Dato il sistema (7.1.) e indicando con X_{NO} il sottospazio di \mathbb{R}^n tale che:

$$X_{NO} = \{ \bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n : \bar{y}(t) = Ce^{At} \bar{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \}$$

cioè l'insieme degli stati non osservabili, il sistema dinamico si dice **completamente osservabile** se $X_{NO} = 0$.

Si noti che, definito X_O l'insieme degli stati osservabili, si ha $X_{NO} + X_O = \mathbb{R}^n$.

Definizione – Matrice di osservabilità

Dato il sistema (7.1.) si definisce **matrice di osservabilità** la:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Teorema 7.5.

Un sistema lineare (7.1.) è completamente osservabile (la coppia A, C è completamente osservabile) se e solo se il rango della matrice di osservabilità è massimo, cioè se:

$$\text{rango}(\mathcal{C}) = \text{rango}(C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1})^T = n$$

Dim

Supponendo che esistano r stati non osservabili, per essi si ha che:

$$\bar{y}(t) = Ce^{At} \bar{x}_{NO}(t) = 0$$

Sfruttando il *Teorema di Cayley-Hamilton* (1.5.) e quanto visto nel *Par. 5.4.4.* si può scrivere:

$$e^{A(t)} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t)$$

da cui:

$$\bar{y}(t) = C \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t) \bar{x}_{NO} = 0$$

Poiché gli $\alpha_i(t)$ sono n funzioni lineari e indipendenti, è:

$$\bar{y}(t) = C \alpha_0(t) \bar{x}_{NO} + CA \alpha_1(t) \bar{x}_{NO} + CA^2 \alpha_2(t) \bar{x}_{NO} + \dots + CA^{n-1} \alpha_{n-1}(t) \bar{x}_{NO} = 0$$

allora deve essere:

$$CA^i \bar{x}_{NO} = 0 \quad \forall i$$

che, in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}_{NO} = \mathcal{C} \bar{x}_{NO} = 0$$

Se il rango della matrice di osservabilità è massimo (n) l'unica soluzione dell'equazione è data dal vettore nullo, per cui X_{NO} risulta essere un insieme vuoto e ciò implica che il sistema è osservabile.

Teorema 7.6.

La proprietà di osservabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

Dim

Dato il sistema (7.1.) operando il cambiamento di base, con T invertibile:

$$\bar{x} = T \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = T^{-1} \bar{x}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = T^{-1} A T \bar{z} + T^{-1} B \bar{u} \\ \bar{y} = C T \bar{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \tilde{A} \bar{z} + \tilde{B} \bar{u} \\ \bar{y} = \tilde{C} \bar{z} \end{cases}$$

La matrice di osservabilità di questo sistema risulta essere:

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = \mathcal{C} T$$

e, poiché T è di rango n si ha che:

$$rango(\tilde{\mathcal{C}}) = \min[rango(T), rango(\mathcal{C})] = rango(\mathcal{C}).$$

Teorema 7.7.

Un sistema è non completamente osservabile se almeno una variabile di stato non influenza, direttamente o indirettamente, l'uscita.

Dim

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A_{11} = (m \times n)$$

si nota che l'uscita è influenzata solo dalle prime m componenti del vettore di stato che sono indipendenti dall'andamento delle altre $n-m$.

Posto che:

$$\bar{x}_1 = (x_1, \dots, x_m) \Rightarrow \bar{x}_1(t) = e^{A_{11}t} \bar{x}_1(0)$$

e quindi:

$$\bar{y}(t) = C_1 \bar{x}_1(t) = C_1 e^{A_{11}t} \bar{x}_1(0)$$

da cui si nota che l'uscita non dipende dalle condizioni iniziali delle altre $n-m$ variabili di stato e quindi il sistema non può essere completamente osservabile.

7.3. Scomposizione canonica

Nello studio dei sistemi è spesso utile avere delle rappresentazioni più comode per l'analisi delle proprietà strutturali; avendo visto che il cambiamento di base non modifica le proprietà di un sistema è sempre possibile utilizzare le rappresentazioni riportate.

Teorema 7.8.

Sia dato un sistema del tipo (7.1.), non completamente controllabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare $T = (T_1, T_2)$ tale che le colonne di T_1 formino una base per il sottospazio controllabile di dimensione m e le colonne di T_2 siano tali da fornire, insieme a quelle di T_1 , una base per \mathbb{R}^n .

Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$\bar{x} = T \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = T^{-1} \bar{x}$$

ed il sistema, equivalente per la controllabilità come enunciato dal Teorema 7.3., risulta:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} = [C_1 \quad C_2] \bar{z} \end{cases} \quad (7.7)$$

in cui

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{z}_{CO} \\ \bar{z}_{NC} \end{bmatrix}$$

La (7.7.) viene detta **forma standard di controllabilità (raggiungibilità)**.

Sotto queste condizioni, il sottosistema (A_{11}, B_1, C_1) di dimensione m è controllabile ed è detto *sottosistema controllabile* mentre il sottosistema $(A_{22}, 0, C_2)$ di dimensione p ($= n-m$), non controllabile, è detto *sottosistema non controllabile*.

Definizione – Forma compagna controllabile

Data la funzione di trasferimento di un sistema:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \\ &= \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \hat{\beta}_{n-2} s^{n-2} + \dots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \hat{\beta}_n \end{aligned}$$

dove:

$$\hat{\beta}_n = \beta_n, \quad \hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \hat{\beta}_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

si definisce **forma compagna controllabile** il sistema di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \dots \quad \hat{\beta}_{n-1}], \quad D = \hat{\beta}_n \quad (7.8)$$

che rappresenta sempre un sistema completamente controllabile; tale sistema risulta anche osservabile se e solo se i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ sono primi fra loro, non hanno cioè radici in comune.

Teorema 7.9.

Sia dato un sistema del tipo (7.1.), non completamente osservabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare $T = (T_1, T_2)^T$ tale che le righe di T_1 formino una base per il sottospazio osservabile di dimensione m e le righe di T_2 siano tali da fornire, insieme a quelle di T_1 , una base per \mathbb{R}^n .

Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$\bar{z} = T \bar{x}$$

ed il sistema, equivalente per l'osservabilità come enunciato dal *Teorema 7.6.*, risulta:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} = [C_1 \quad 0] \bar{z} \end{cases} \quad (7.9)$$

in cui

$$\bar{z} = [\bar{z}_O \quad \bar{z}_{NO}]$$

Il sistema (7.9.) viene detto **forma standard di osservabilità**.

Sotto queste condizioni, il sottosistema (A_{11}, B_1, C_1) di dimensione m è osservabile ed è detto *sottosistema osservabile* mentre il sottosistema $(A_{22}, B_2, 0)$ di dimensione p ($= n-m$), non osservabile, è detto *sottosistema non osservabile*.

Definizione – Forma compagna osservabile

Data la funzione di trasferimento di un sistema:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} =$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \hat{\beta}_{n-2} s^{n-2} + \dots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \hat{\beta}_n$$

dove:

$$\hat{\beta}_n = \beta_n, \quad \hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \hat{\beta}_n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

si definisce **forma compagna osservabile** il sistema di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$$

$$C = [\quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad], \quad D = \hat{\beta}_n \quad (7.10)$$

che rappresenta sempre un sistema completamente osservabile; tale sistema risulta anche controllabile se e solo se i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ sono primi fra loro, non hanno cioè radici in comune.

Teorema 7.10. - Kalman

Un sistema del tipo (7.1.), non completamente raggiungibile e non completamente osservabile, può essere posto, tramite una matrice di trasformazione T_K , nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \hat{A} \bar{x}(t) + \hat{B} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{C} \bar{x}(t) \end{cases} \quad (7.11)$$

dove

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [0 \quad \hat{C}_2 \quad 0 \quad \hat{C}_4]$$

in cui le dimensioni delle sottomatrici sono congruenti fra loro.

Il sottosistema:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2(t) = \hat{A}_{22} \bar{x}_2(t) + \hat{B}_2 \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{x}_2(t) \end{cases}$$

è completamente raggiungibile e osservabile.

Il sottosistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{x}_2(t) \end{cases}$$

ha ordine n_r ed è completamente raggiungibile.

Il sottosistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{A}_{24} \\ 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{x}_2(t) + \hat{C}_4 \bar{x}_4(t) \end{cases}$$

ha ordine n_o ed è completamente osservabile.

La matrice di trasformazione T_K , può essere ottenuta effettuando prima una scomposizione per la proprietà di raggiungibilità e poi una seconda scomposizione per l'osservabilità.

Definizione – Scomposizione canonica o di Kalman

Riscrivendo il sistema (7.11.) nella forma:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \hat{A}_{11} \bar{x}_1(t) + \hat{A}_{12} \bar{x}_2(t) + \hat{A}_{13} \bar{x}_3(t) + \hat{A}_{14} \bar{x}_4(t) + \hat{B}_1 \bar{u}(t) \quad (7.12)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = \hat{A}_{22} \bar{x}_2(t) + \hat{A}_{24} \bar{x}_4(t) + \hat{B}_2 \bar{u}(t) \quad (7.13)$$

$$\dot{\bar{x}}_3(t) = \hat{A}_{33} \bar{x}_3(t) + \hat{A}_{34} \bar{x}_4(t) \quad (7.14)$$

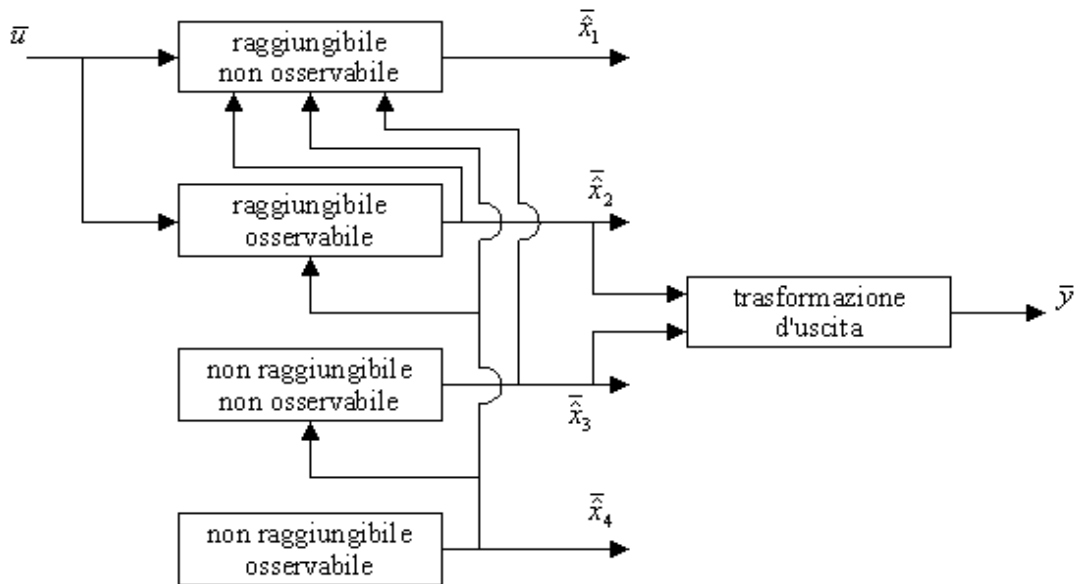
$$\dot{\bar{x}}_4(t) = \hat{A}_{44} \bar{x}_4(t) \quad (7.15)$$

$$\bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{x}_2(t) + \hat{C}_4 \bar{x}_4(t)$$

si ha che l'equazione (7.12.) rappresenta la parte raggiungibile e non osservabile del sistema, la (7.13.) quella raggiungibile e osservabile, la (7.14.) la parte non raggiungibile e non osservabile, la (7.15.) quella non raggiungibile e osservabile.

Tale scomposizione viene detta **scomposizione canonica o di Kalman**.

La scomposizione canonica può essere riportata in maniera grafica:



Gli autovalori della matrice \hat{A} , triangolare a blocchi, sono dati dall'insieme di quelli delle matrici che si trovano sulla diagonale dopo la scomposizione; tali autovalori sono detti rispettivamente della parte raggiungibile e non osservabile, della parte raggiungibile e osservabile e così via.

7.4. Realizzazione minima

Per il sistema (7.1.), ricordando quanto visto nel *Par. 5.3.*, si trova che la matrice di trasferimento (che lega ingresso e uscita del sistema), è:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

Nel passaggio al sistema (7.11.) si deve tener presente il seguente teorema.

Teorema 7.11.

La matrice di trasferimento $H(s)$ è invariante rispetto a cambiamenti di base.

Dim

Consideriamo il sistema (7.1.):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}$$

e una sua rappresentazione operando un cambiamento di base con T invertibile:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = T^{-1}AT\bar{z} + T^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} = CT\bar{z} \end{cases}$$

La matrice di trasferimento della seconda rappresentazione risulta essere quindi:

$$\begin{aligned} H'(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1} + T^{-1}B = CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B = \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B = H(s) \end{aligned}$$

Esaminando lo schema grafico della scomposizione di Kalman visto in precedenza, si può osservare che nella trasformazione d'uscita l'unico termine collegato all'ingresso è quello dovuto alla parte completamente raggiungibile e completamente osservabile da cui si può dedurre che nella matrice di trasferimento compaiono tutti e soli i poli completamente controllabili e osservabili, cioè, riferendosi al sistema (7.11.):

$$H(s) = H'(s) = \hat{A}_{22}$$

Sfruttando tale risultato si può enunciare il seguente teorema.

Teorema 7.12.

Un sistema è completamente osservabile e controllabile se e solo se nella matrice di trasferimento $H(s)$ compaiono tutti i poli del sistema, cioè tutti gli autovalori della matrice A .

Dim

Si prende in considerazione, per semplicità, un generico sistema, completamente osservabile e controllabile, ad un ingresso e un uscita (SISO) la cui matrice A abbia autovalori tutti distinti e, tramite un cambiamento di base, si effettua la diagonalizzazione, ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu \\ y = C\bar{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{z} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\bar{z} \end{cases}$$

Per i teoremi (7.4.) e (7.7.), essendo A diagonale, deve verificarsi che:

$$\tilde{b}_i \neq 0, \tilde{c}_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e, quindi, calcolando la matrice di trasferimento si ha:

$$H(s) = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \dots \quad \tilde{c}_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + \lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s + \lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

in cui, essendo $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ non possono esserci cancellazioni e, quindi, la $H(s)$ presenta tutti i poli del sistema.

Definizione – Realizzazione

Data una trasformazione lineare ingresso-uscita

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s)$$

si definisce **realizzazione** di $W(s)$ ogni sistema dinamico (A, B, C, D) tale che la sua matrice di trasferimento coincida con $W(s)$.

Definizione – Realizzazione minima

Una realizzazione (di $W(s)$) si definisce **minima** se la dimensione del sistema è inferiore o uguale alla dimensione di ogni altra realizzazione (di $W(s)$).

Teorema 7.13.

Una realizzazione è minima se e solo se è raggiungibile e osservabile.

Dim

Si supponga di avere una realizzazione minima di $W(s)$ ma che essa, per assurdo, non sia raggiungibile; con un cambiamento di base è sempre comunque possibile riportare il sistema nella forma standard di raggiungibilità che risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

Si ha però in questo caso che il sottosistema dato da:

$$\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1$$

risulta essere anch'esso una realizzazione di $W(s)$ e sicuramente di dimensioni inferiori rispetto al sistema di partenza che, per definizione, era una realizzazione minima.

Si procede in modo analogo per provare che una realizzazione minima è anche osservabile.

La dimostrazione che un sistema completamente raggiungibile e osservabile è anche una realizzazione minima viene tralasciata.

7.5. Sistemi interconnessi

La descrizione di un sistema interconnesso attraverso la funzione di trasferimento può essere effettuata solo se si suppone che quel sistema sia completamente controllabile e osservabile; se così non fosse, come visto in precedenza, la funzione di trasferimento non rappresenterebbe tutto il sistema ma solo la sua parte completamente osservabile e controllabile.

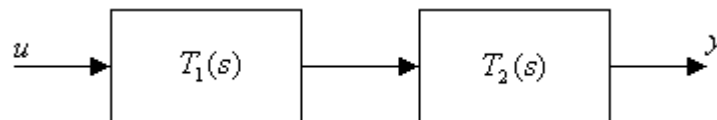
In pratica quando si ricava la FdT di un sistema non completamente osservabile e controllabile si hanno delle cancellazioni poli-zeri (o zeri-poli) per cui la FdT stessa non può essere utilizzata per studiare le proprietà strutturali del sistema.

I sistemi di interconnessione di maggior interesse e che verranno affrontati sono:

- Collegamento in cascata
- Collegamento in parallelo.

Teorema 7.14.

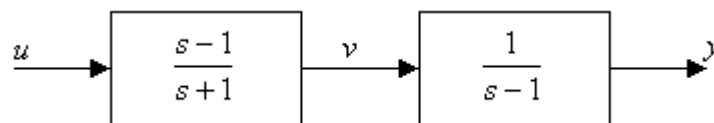
Collegando in cascata due sottosistemi aventi rispettivamente funzioni di trasferimento $T_1(s)$ e $T_2(s)$, si ha che:



- a) se il prodotto $T_1(s) \cdot T_2(s)$ non ha cancellazioni il sistema risulta completamente osservabile e controllabile
- b) se si hanno solo cancellazioni del tipo zero-polo (uno zero di $T_1(s)$ coincide con un polo di $T_2(s)$) il sistema risulta completamente osservabile e non completamente controllabile
- c) se si hanno solo cancellazioni del tipo polo-zero (un polo di $T_1(s)$ coincide con uno zero di $T_2(s)$) il sistema risulta completamente controllabile e non completamente osservabile
- d) se si hanno cancellazioni di entrambe i tipi, il sistema risulta non controllabile e non osservabile

Esempi

- 1) Cancellazione zero-polo



Passando alla rappresentazione in variabili di stato si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}$$

Le funzioni di trasferimento ingresso-uscita e ingresso-stato sono:

$$G_u^y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_u^x(s) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix}^T$$

La matrice di controllabilità risulta:

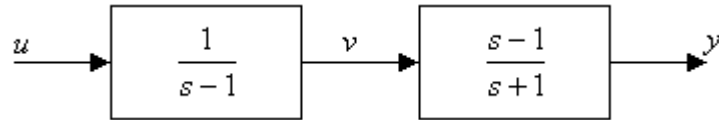
$$\mathcal{B} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e, dato che il rango della matrice è 1 il sistema risulta non controllabile.
La matrice di osservabilità, invece, è:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e il sistema risulta osservabile, dato che la matrice ha rango pari a 2.

2) Cancellazione polo-zero



Passando alla rappresentazione in variabili di stato si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}$$

Le funzioni di trasferimento ingresso-uscita e ingresso-stato sono:

$$G_u^y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_u^x(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{-2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}^T$$

La matrice di controllabilità risulta:

$$\mathcal{B} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

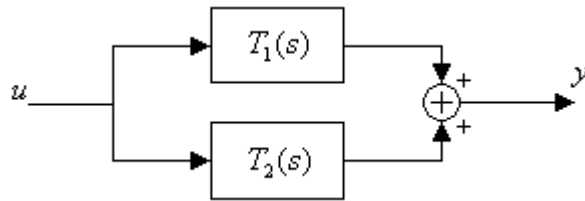
e, dato che il rango della matrice è 2 il sistema risulta completamente controllabile.
La matrice di osservabilità, invece, è:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e il sistema risulta non osservabile, dato che la matrice ha rango pari a 1.

Teorema 7.15.

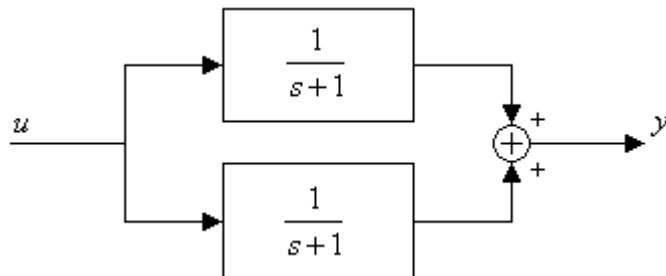
Un sistema formato dal parallelo di due sottosistemi è completamente controllabile ed osservabile se e solo se i due sottosistemi non hanno poli in comune.



Se esiste almeno un polo in comune ai due sottosistemi, il sistema globale risulta non completamente controllabile e non completamente osservabile.

Esempio

Considerando il sistema:



e passando alla rappresentazione in variabili di stato si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}$$

Le funzioni di trasferimento ingresso-uscita e ingresso-stato sono:

$$G_u^y(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_u^x(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^T$$

Le matrici di controllabilità e di osservabilità risultano essere rispettivamente:

$$\mathcal{B} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

In questo caso sia la matrice di controllabilità che la matrice di osservabilità hanno rango pari a 1 ed il sistema risulta quindi non controllabile e non osservabile.

Cap 8. Risposta temporale

L'analisi di un sistema passa, ovviamente, attraverso quelle che sono le sue prestazioni, cioè:

- Stabilità
- Risposta ai comandi (precisione, accuratezza, velocità di risposta)
- Risposta a disturbi e rumori
- Risposta non nominale

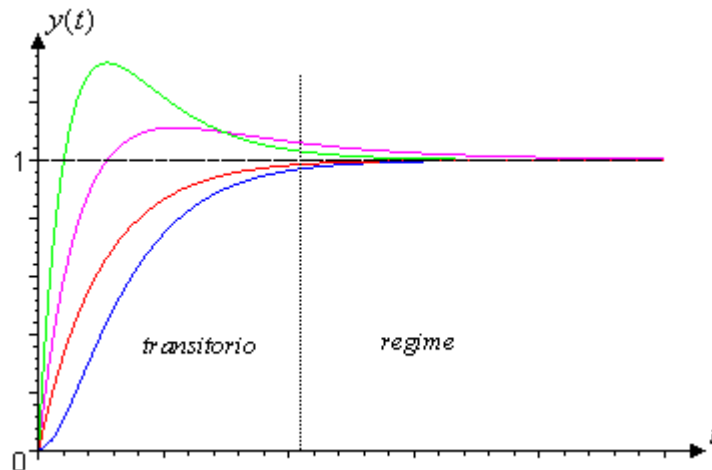
Gli strumenti utilizzati per lo studio di tali prestazioni sono:

- I criteri di stabilità come quello di Routh
- La risposta in frequenza
- La risposta temporale

La risposta temporale caratterizza l'andamento del segnale in uscita dal sistema quando questo viene sottoposto a determinati segnali in ingresso; l'esame della risposta temporale di un sistema viene diviso in due parti:

- risposta a regime,
- risposta transitoria.

Un tipico segnale utilizzato come ingresso per studiare la risposta temporale di un sistema è il gradino unitario, per il quale, possibili risposte hanno un andamento del tipo:



È quindi possibile riconoscere due zone che individuano rispettivamente la parte transitoria e quella a regime; ognuna di esse permette di studiare alcune proprietà del sistema in esame:

- risposta a regime:
 - precisione
 - errore a regime
 - insensibilità al disturbo
- risposta transitoria:
 - stabilità
 - ampiezza dell'oscillazione
 - velocità della risposta

8.1. Risposta a regime

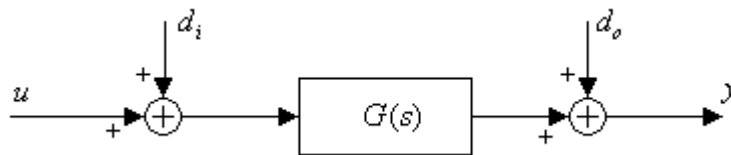
La risposta a regime è la parte della risposta temporale che si ha una volta finito il transitorio; tramite lo studio della risposta a regime è possibile:

- esaminare la precisione del sistema
- trovare il residuo di risposta in presenza di disturbi
- utilizzare l'errore come variabile di interesse

8.1.1. Strutture possibili

Lo studio della risposta a regime di un sistema controllato, può essere eseguito per sistemi ad anello aperto o, caso più interessante, per quelli ad anello chiuso.

Per i sistemi ad anello aperto, in presenza di disturbi, lo schema è:



e si ha che:

$$y = d_o + G(s)(u + d_i)$$

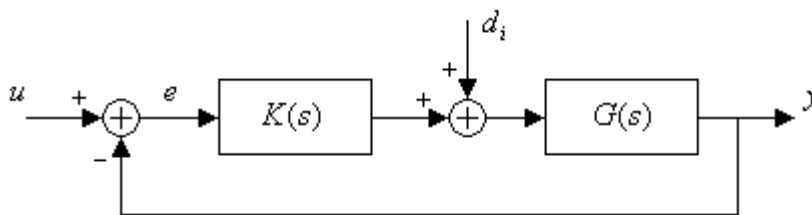
Sui due disturbi si può notare che:

- d_o entra direttamente in y e viene trascurata nello studio del sistema
- d_i ha la stessa FdT del segnale in ingresso

Se si suppone di essere in assenza di disturbi si può definire l'errore della risposta come:

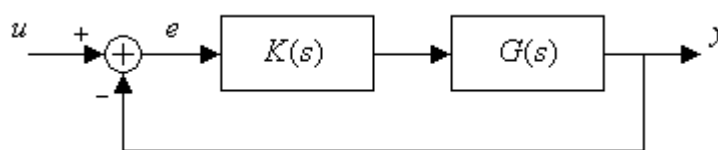
$$e = u - y = (1 - G(s)) \cdot u$$

Il sistema di controllo più interessante è quello di retroazione unitaria (Par. 4.3.1), trascurando il termine di disturbo in uscita:



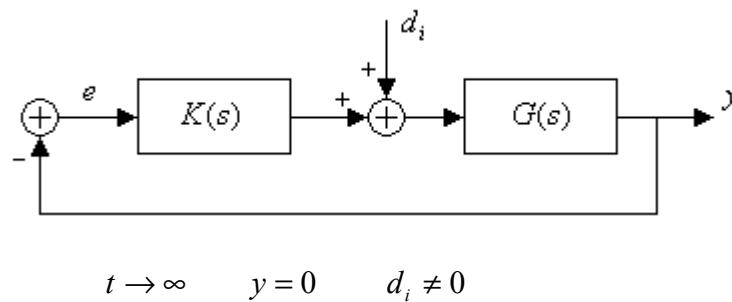
Poiché il sistema è lineare e SISO i due contributi si possono valutare separatamente:

1) segnale privo di disturbi:



$$t \rightarrow \infty \quad y = u$$

2) componente di disturbo:



Dall'esame dei due blocchi si possono dedurre le FdT di interesse (vedi anche le (4.10.) e (4.11.)):

$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (8.1)$$

$$G_{\epsilon}(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (8.2)$$

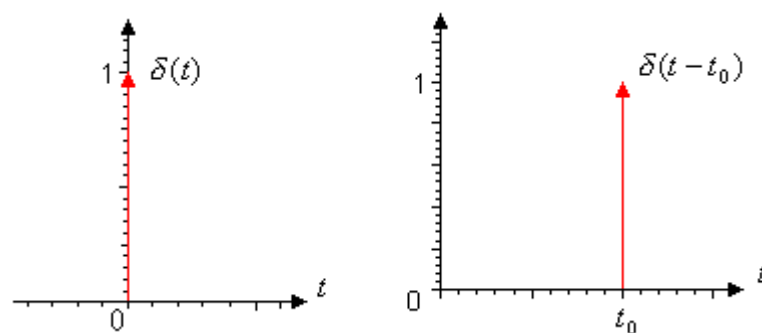
$$G_d(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (8.3)$$

8.1.2. Funzioni d'ingresso

Per valutare le caratteristiche delle risposte a regime dei sistemi si utilizzano funzioni test standard:

1) Delta di Dirac o impulso unitario (*Par 3.3.2.*):

$$\delta(t), \delta(t - t_0)$$

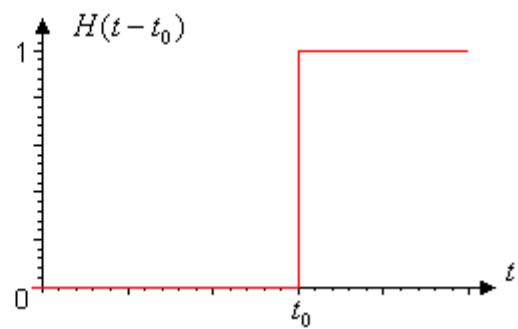
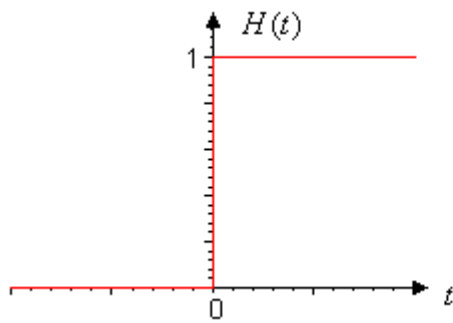


Le rispettive LT sono:

$$\delta(s) = 1, \delta(s) = e^{-t_0 s}$$

2) Segnale gradino unitario o di Heaviside (*Par 3.3.1.*):

$$H(t), H(t - t_0)$$

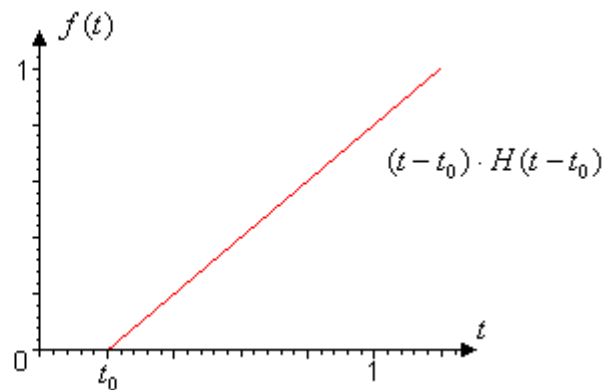
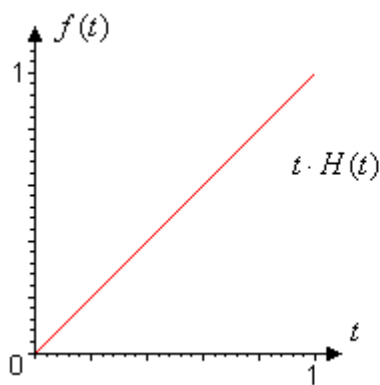


Le rispettive *LT* sono:

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad \delta(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-t_0 s}$$

3) Rampa unitaria

$$f(t) = t \cdot H(t) \quad , \quad f(t) = (t - t_0) \cdot H(t - t_0)$$



Le rispettive *LT* sono:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot e^{-t_0 s}$$

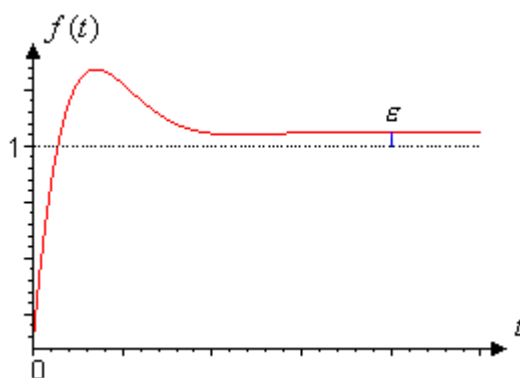
8.1.3. Errore a regime

L'errore è il parametro base per la valutazione della risposta a regime; il requisito fondamentale per il calcolo dell'errore a regime è la stabilità (asintotica) del sistema e, in tal caso, si può scrivere, sfruttando il *Teorema del valore finale* (3.9.):

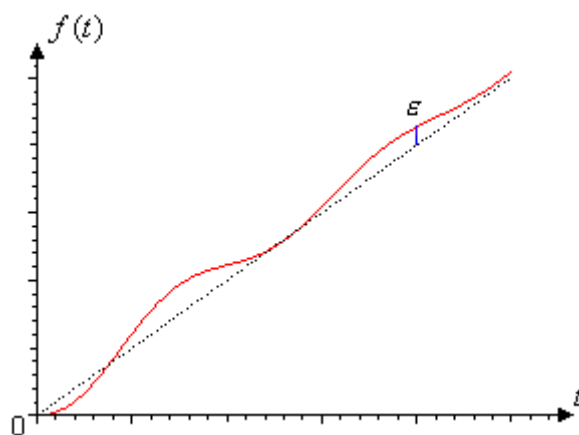
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{E}(s) \quad (8.4)$$

L'errore è dato dalla differenza fra segnale di uscita e segnale di ingresso e, graficamente, è identificabile come in questi due esempi:

1) errore al gradino

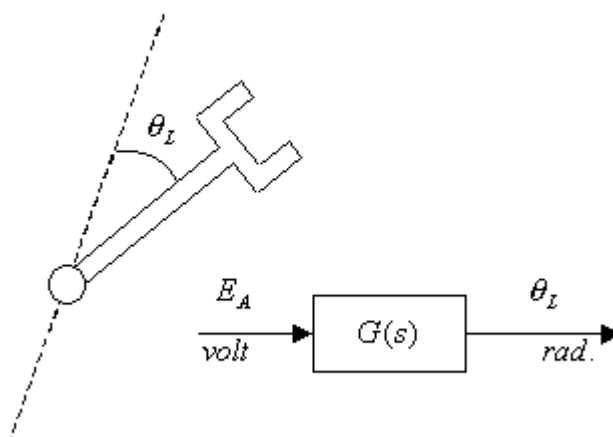


2) errore alla rampa



Esempio

Si vuole studiare il movimento di un link finale di un braccio robotico:

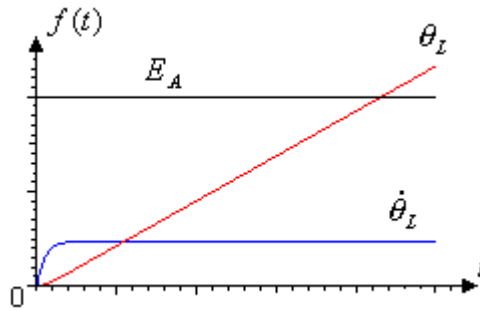


dove E_A è il comando dell'attuatore e θ_L è l'angolo di rotazione del link attorno al giunto; si suppone che la FdT sia:

$$G(s) = \frac{0,475}{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)} = \frac{\theta_L(s)}{E_A(s)}$$

Si nota che:

$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_A(s)} = s \cdot G(s) = \frac{0,475}{(s+1) \cdot (s+10)}$$



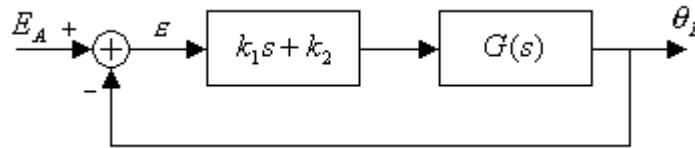
N.B. Il grafico riportato non è in scala,

Si ottiene, a regime, che

$$\varepsilon_{\dot{\theta}} = E_A - \dot{\theta}_L = 95,25\%$$

$$\varepsilon_{\theta} = \infty$$

Supponendo di voler limitare o annullare l'errore di angolo si deve progettare un apposito sistema di controllo; inserendo un controllore *PD* (*Proporzionale-Derivativo*) si ottiene:



e, ricordando le (8.1.)-(8.3.), si ha:

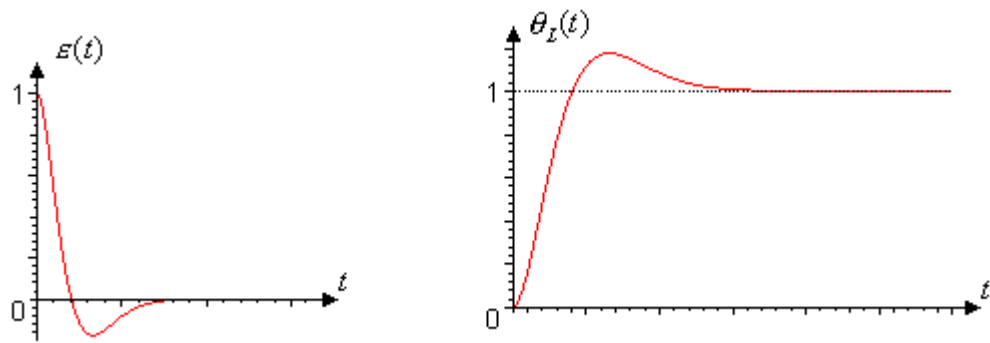
$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot E_A(s) \\ \theta_L(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot E_A(s) \end{cases}$$

Si ottiene poi, dalla (8.4.):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{(k_1 s + k_2) \cdot 0,475}{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)}} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)}{s \cdot (s+1) \cdot (s+10) + (k_1 s + k_2) \cdot 0,475} = 0 \end{aligned}$$

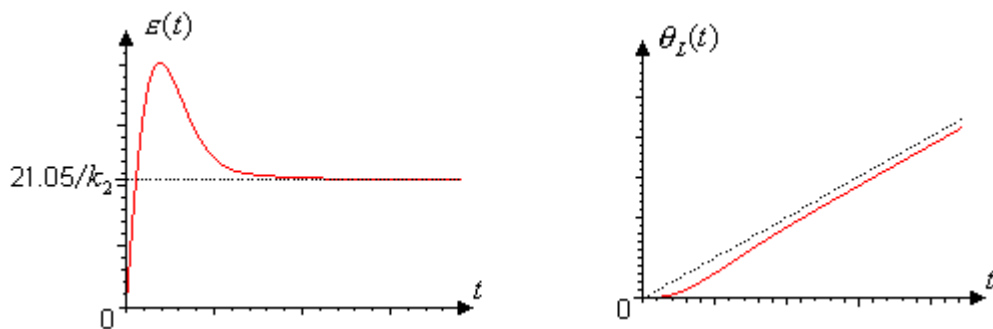
e quindi si riesce ad annullare l'errore di posizionamento; gli andamenti di errore e uscita sono rispettivamente:



Se il segnale di ingresso non fosse dato da un gradino unitario ma da una rampa si avrebbe:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{(k_1 s + k_2) \cdot 0,475}{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot (s+1) \cdot (s+10)}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+10) + s \cdot (k_1 s + k_2) \cdot 0,475} = \frac{10}{0,475 \cdot k_2}\end{aligned}$$

e quindi, l'errore alla rampa risulta funzione del parametro k_2 ; l'andamento dell'errore e del segnale in uscita in questo caso risulta essere:



8.1.4. Ordine della FdT

Ricordando la (8.2.) si ha che:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot U(s)$$

e si può quindi affermare che l'errore dipende da:

- 1 - l'ingresso $U(s)$
- 2 - la FdT ad anello aperto $G(s) \cdot K(s)$

È importante notare le differenti tipologie di risposta dei sistemi in funzione dell'ordine della FdT ad anello aperto; riscrivendo la $G(s) \cdot K(s)$ in forma fattorizzata, si ha:

$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s - z_i)}{s^j \prod_k (s - p_k)} \quad (8.5)$$

e quindi:

$j = 0$	tipo 0	$K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{(s+a)(s+b)\cdots}$
$j = 1$	tipo 1	$K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s(s+a)(s+b)\cdots}$
$j = 2$	tipo 2	$K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^2(s+a)(s+b)\cdots}$
$j = 3$	tipo 3	$K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^3(s+a)(s+b)\cdots}$

e così via.

La conoscenza dell'ordine della FdT ad anello aperto permette di ricavare in maniera estremamente veloce l'errore della risposta a regime sui segnali utilizzati come test.

8.1.5. Errore a regime in risposta al gradino unitario

Come già visto, la funzione gradino unitario, detta anche funzione di Heaviside, è tale che:

$$u(t) = H(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

e, ricordando la (8.2.)

$$G_{\varepsilon}(s) = \frac{\mathcal{E}(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)}$$

si ricava:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0 P(s)}$$

dove:

$$P(s) = \frac{\prod_i (s - z_i)}{s^J \prod_k (s - p_k)}$$

Per i diversi tipi di sistema si ha:

- Tipo 0

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0 P(s)} = \frac{1}{1 + k_0 \frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_k (-p_k)}}$$

da cui si deduce che l'errore è inversamente proporzionale al termine di guadagno k_0 per cui, anche un semplice controllo proporzionale permette di limitare l'errore (si tenga presente che per sistemi stabili i poli sono a parte reale negativa).

- Tipo 1

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0 P(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Si noti che tale relazione risulta valida anche per tutti i tipi di ordine superiore

Esempio

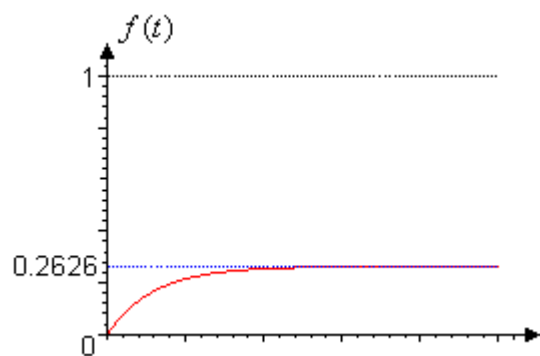
Si consideri un sistema con FdT :

$$G(s) = \frac{0,2214}{s + 0,8432}$$

Si vuole cercare di limitare l'errore della risposta a regime per un segnale d'ingresso a gradino unitario; la risposta a regime del sistema a tale ingresso è:

$$Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot U(s) = s \cdot \frac{0,2214}{s + 0,8432} \cdot \frac{1}{s} = 0,2626 \Rightarrow$$

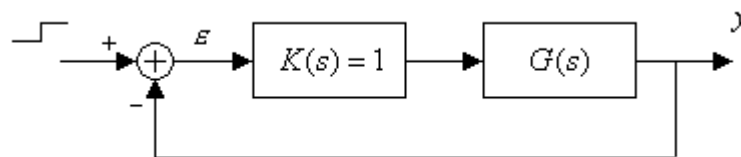
$$\Rightarrow y(t) = 0,2626 \cdot (1 - e^{-0,8432 \cdot t})$$



L'errore a regime risulta ovviamente pari a:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - y(t)) \cong 74\%$$

Inserendo un controllo di guadagno unitario in retroazione:



e, riprendendo le (8.2.) e (8.4.) si ha che:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + 1 \cdot \frac{0,2214}{s + 0,8432}} = \frac{1}{1 + 0,2626} = 0,792 \end{aligned}$$

quindi:

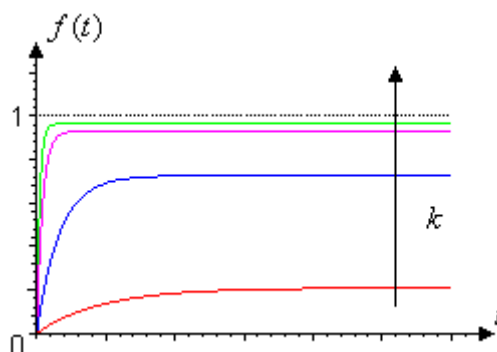
$$\varepsilon_{ss} = 79,2\%$$

Si noti che con questa soluzione si è ottenuto un valore peggiore del precedente.

Con un controllo *Proporzionale* (cioè $K(s) = k = \text{costante}$), si ha:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + k \cdot 0,2626}$$

e quindi, l'andamento dell'errore risulta inversamente proporzionale al valore di k :



K	$\varepsilon_{ss} \%$
1	79,2
10	27,6
50	7,1
100	3,7

Se invece si vuole rendere nullo l'errore è necessario utilizzare un sistema che sia almeno di ordine 1, cioè tale che:

$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{(s + a_1)(s + a_2) \cdots}{s \cdot (s + b_1)(s + b_2) \cdots}$$

e, in questo caso:

$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{0,2214}{s \cdot (s + 0,8432)} \Rightarrow K(s) = \frac{k_0}{s}$$

Si ha quindi un controllo di tipo *Integrale*, e il sistema ad anello chiuso, che ha errore nullo nella risposta al gradino unitario, ha come FdT la:

$$G_{cl}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{0,2214 \cdot k_0}{s^2 + 0,8432 \cdot s + 0,2214 \cdot k_0}$$

8.1.6. Errore a regime in risposta al segnale rampa

Se in ingresso al sistema si ha il segnale rampa vuol dire che:

$$u(t) = t \cdot H(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

e, ricordando ancora una volta la (8.2.), si ha:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{E}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot K(s) \cdot G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{D(s)}{N(s)}$$

Per i diversi tipi di sistema si ha:

- Tipo 0

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{\prod_k (s - p_k)}{\prod_i (s - z_i)} = \infty$$

- Tipo 1

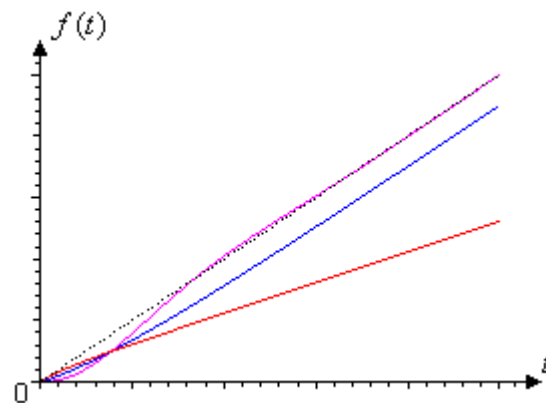
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot \prod_k (s - p_k)}{k_0 \cdot \prod_i (s - z_i)} = \frac{1}{k_0} \frac{\prod_k (-p_k)}{\prod_i (-z_i)}$$

e l'errore risulta finito e dipendente dal parametro k_0 .

- Tipo 2

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 \cdot \prod_k (s - p_k)}{k_0 \cdot \prod_i (s - z_i)} = 0$$

Per sistemi di tipo 2 o superiore, l'errore a regime risulta sempre nullo.



- indica la risposta del sistema di tipo 0,
- indica la risposta del sistema di tipo 1,
- indica la risposta del sistema di tipo 2.

8.2. Risposta transitoria

Attraverso l'analisi della risposta transitoria si riescono a determinare alcune caratteristiche del sistema:

- la stabilità
- l'ampiezza massima delle oscillazioni
- la velocità di risposta (la durata del transitorio)

Partendo dalla FdT si può evidenziare l'influenza che hanno i suoi elementi sulla risposta transitoria:

- i poli influenzano l'andamento temporale
- gli zeri influiscono sull'ampiezza e sul valore a regime della risposta stessa

Esempio

Si prendano in considerazione i sistemi le cui FdT risultino essere:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

sottoposti ad un ingresso impulsivo; per entrambe i sistemi l'uscita è data dalla forma:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

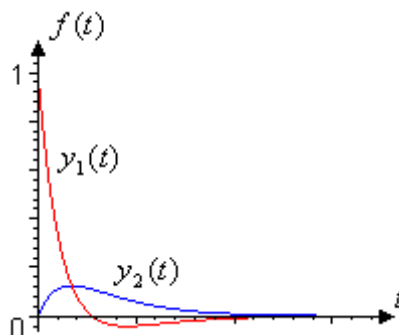
in cui il valore dei parametri c_1 e c_2 dipende dai termini presenti a numeratore.
Per i due sistemi si ha allora:

1)

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-4t}$$

2)

$$y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}$$



Nello studio della risposta transitoria si procede supponendo sempre che l'ingresso sia costituito da un segnale a gradino unitario e tenendo conto dell'ordine del sistema stesso (1°, 2°, e così via). In funzione dell'ordine del sistema si prendono in considerazione parametri diversi di analisi e progettazione.

8.2.1. Risposta transitoria per sistemi del 1° ordine

Si consideri un generico sistema del primo ordine:

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \quad (8.6)$$

Tale sistema è supposto stabile ($b>0$) e la sua risposta ad un ingresso a gradino unitario risulta essere:

$$y(t) = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt}) \quad (8.7)$$

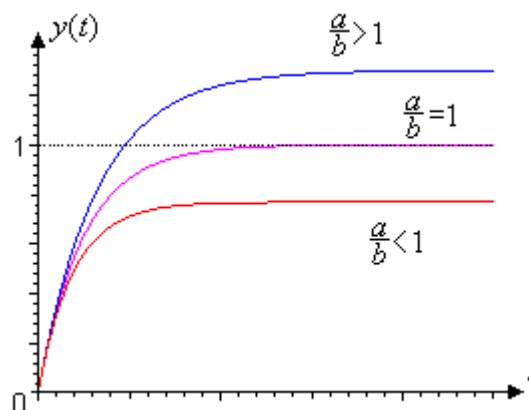
Tale sistema avrà un andamento a regime caratterizzato dalla relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{a}{b}$$

con un errore pari a

$$\varepsilon = 1 - \frac{a}{b}$$

e, il suo andamento, in funzione di diversi valori del rapporto a/b , risulta essere il seguente:



Si noti che l'errore a regime è nullo, ovviamente, solo se $a/b = 1$.

Analizzando sistemi di questo tipo, si cerca di verificare se esistano parametri che permettano di "classificare" in qualche modo la risposta transitoria dei vari sistemi di primo grado; prendendo in considerazione l'esempio appena visto si nota che quanto più b si avvicina allo 0 (comunque assumendo sempre valori positivi per garantire la stabilità) cioè, quanto più il polo del sistema si avvicina all'asse immaginario, più il sistema è "lento".

Da questa osservazione si può ricavare il parametro cercato definito come segue.

Definizione – Costante di tempo

Si definisce **costante di tempo** il parametro $\tau = 1/b$ tale che:

$$y(\tau) = 63\% y_{\infty} \quad \text{dove } y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

La scelta del valore del 63% deriva dal fatto che dalla (8.7.) si ottiene:

$$t = \tau = \frac{1}{b} \Rightarrow y(\tau) = \frac{a}{b}(1 - e^{-b\tau}) = \frac{a}{b}(1 - e^{-1}) = 0,632 \cdot \frac{a}{b} \cong 63\% \frac{a}{b}$$

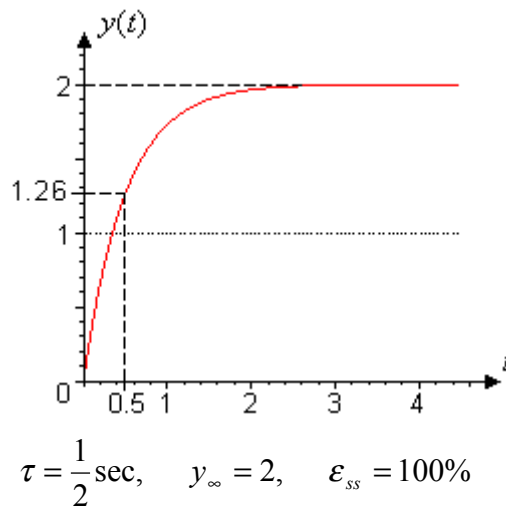
Si possono trovare altre definizioni della costante di tempo in cui, essendo essa pari a $3/b$, è tale che $y(\tau) = 95\%$ del valore finale.

Esempio

La risposta al segnale gradino unitario del sistema descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{4}{s+2}$$

è tale che:



Si vuole invece che il sistema sia tale che, per l'ingresso di un gradino unitario, si abbia:

$$\tau = 0,1 \text{ sec}, \quad \epsilon_{ss} \leq 2\% \text{ (0,02) errore all'infinito}$$

È quindi necessario progettare un sistema di controllo che realizzi la modifica del sistema in modo da rispettare le specifiche richieste:



e deve quindi essere:

$$K(s) = k \frac{s+2}{s+10}$$

Il numeratore ha questa forma per poter "cancellare" il polo del sistema originario mentre l'espressione al denominatore è obbligata dalla scelta della costante di tempo (il polo si viene a trovare in -10); il sistema controllato ha come FdT la:

$$G'(s) = \frac{4k}{s+10}$$

e la costante di tempo risulta quindi essere $\tau = 1/10$, come richiesto.

Per soddisfare anche la specifica riguardante l'errore a regime e tenendo presente che si ha:

$$y(t) = \frac{4k}{10} (1 - e^{-10t})$$

deve essere

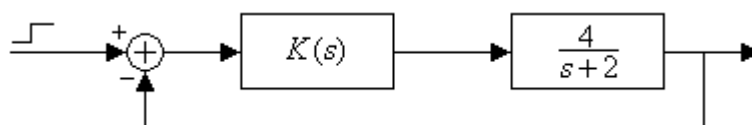
~~$$\frac{4k}{10} = 102 \quad (o \ 98) \Rightarrow k = 255 \quad (o \ 245)$$~~

e quindi il sistema di controllo deve essere tale che:

~~$$K(s) = 255 \frac{s+2}{s+10} \Rightarrow G'(s) = \frac{1020}{s+10}$$~~

Nell'utilizzare questo tipo di controllo, ad anello aperto, bisogna tenere presente che esso funziona solo nel caso in cui i dati forniti siano accurati; se, infatti, così non fosse, non si potrebbe eseguire la "cancellazione" del polo e le specifiche non potrebbero essere soddisfatte.

In alternativa si può realizzare il controllo del sistema ad anello chiuso seguendo lo schema:



e la FdT diventa:

$$G'(s) = \frac{4K(s)}{s+2+4K(s)}$$

Scegliendo un controllore tale che l'eccesso poli-zeri sia pari a 0 o al limite senza poli e zeri (cioè $K(s) = \text{cost.}$), si ha un errore a regime finito e non nullo; prendendo invece in considerazione un controllo con eccesso poli-zeri pari a 1, si ottiene un sistema con errore a regime nullo ma del secondo ordine.

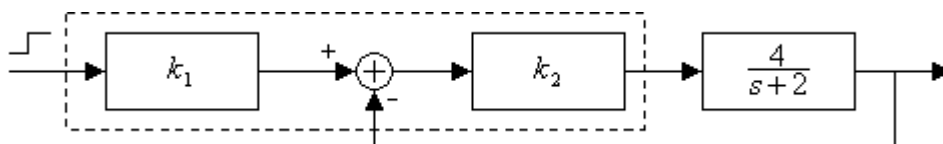
Rimanendo al caso di sistema del primo ordine (e quindi $K(s) = k$), poiché la specifica richiede che la costante di tempo sia pari a 0,1 sec., deve essere, ricordando la (8.6.):

$$b = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow 2 + 4k = 10 \Rightarrow k = 2$$

Per rispettare però la seconda specifica (errore a regime del 2 %) dovrebbe essere:

$$\frac{4k}{2+4k} = 0,98 \Rightarrow 4k \cdot (0,02) = 1,96 \Rightarrow k = 24,5$$

Con questo tipo di controllo non è quindi possibile soddisfare le specifiche richieste; uno schema di controllo che permette di soddisfarle entrambe è invece il seguente:



La FdT diventa, in questo caso:

$$G''(s) = \frac{4k_1k_2}{s + 2 + 4k_2}$$

Si nota banalmente che le modifiche alla dinamica del sistema vengono apportate solo dalla parte inserita nel circuito di retroazione; per soddisfare le specifiche date si impone che:

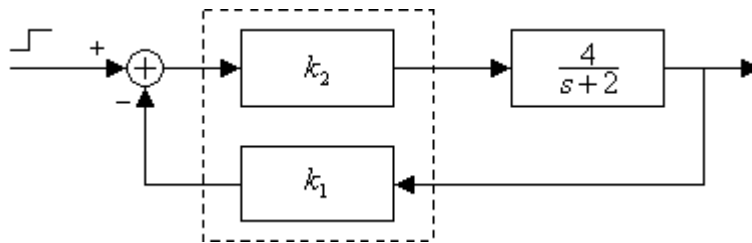
1) costante di tempo

$$b = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow 2 + 4k_2 = 10 \Rightarrow k_2 = 2$$

2) errore a regime

$$\frac{4k_1k_2}{2 + 4k_2} = \frac{8k_1}{10} = 0,8 \cdot k_1 = 0,98 \quad (\text{o } 1,02) \Rightarrow k_1 = 1,225 \quad (\text{o } 1,275)$$

Un'ulteriore soluzione è data dallo schema:



In questo caso è:

$$G''(s) = \frac{4k_2}{s + 2 + 4k_1k_2}$$

e, per le solite specifiche:

1) costante di tempo

$$b = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow 2 + 4k_1k_2 = 10 \Rightarrow k_1k_2 = 2$$

2) errore a regime

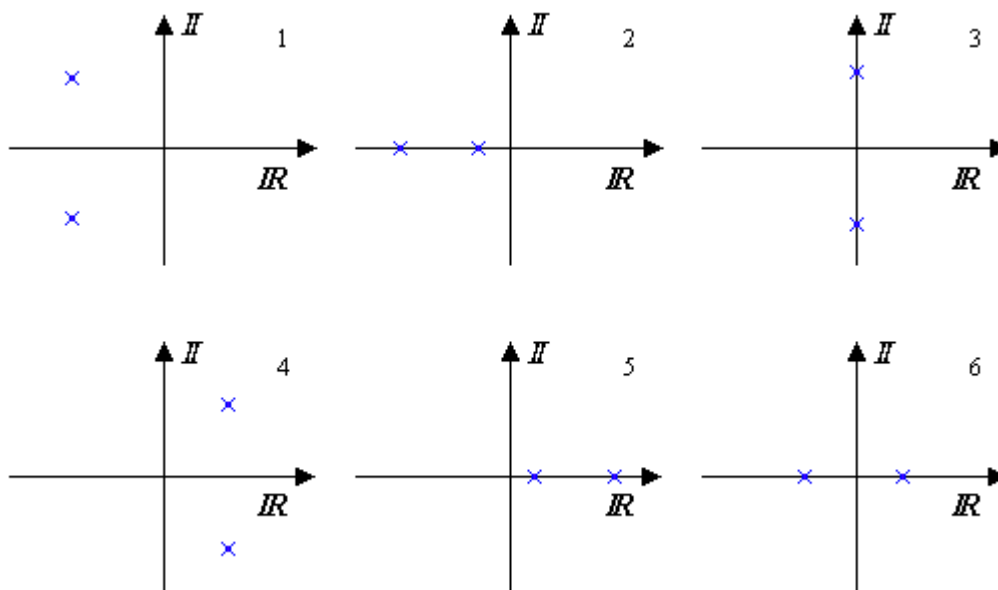
$$\frac{4k_2}{2 + 4k_1k_2} = \frac{4k_2}{10} = 0,4 \cdot k_2 = 0,98 \quad (\text{o } 1,02) \Rightarrow k_2 = 2,45 \quad (\text{o } 2,55)$$

per cui, il sistema rispetta le specifiche se

$$\begin{cases} k_1 = 0,82 \\ k_2 = 2,45 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} k_1 = 0,78 \\ k_2 = 2,55 \end{cases}$$

8.2.2. Risposta transitoria per sistemi del 2° ordine

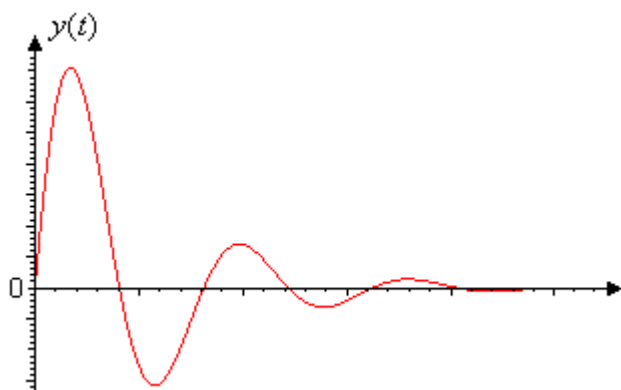
Le possibili disposizioni, nel piano complesso, dei poli di un sistema del secondo ordine sono sei:



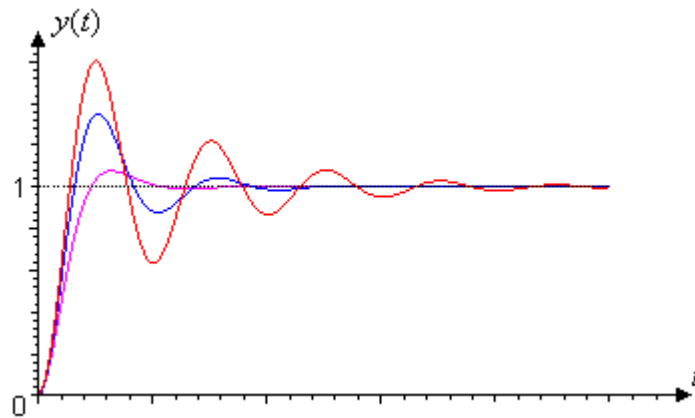
Esaminando la risposta transitoria di sistemi del secondo caso, l'unica situazione di interesse è data dal sistema 1; infatti, per gli altri si può notare che:

- sistema 2 : può essere visto come composizione di due sistemi del primo ordine,
- sistema 3 : è la rappresentazione di un'oscillazione autosostenuta; l'interesse su di esso è marginale dato che, spesso, un sistema del genere diviene instabile,
- sistemi 4, 5 e 6 : sono sistemi instabili che non interessano dato che, se devono essere studiati, vanno, per prima cosa, resi stabili.

Il sistema 1 rappresenta il caso di un'oscillazione smorzata; l'andamento temporale della risposta ad un ingresso impulsivo per un sistema di questo tipo è:



La risposta al segnale gradino unitario del sistema di secondo grado, in funzione di diversi valori dei suoi termini, può assumere diversi andamenti:



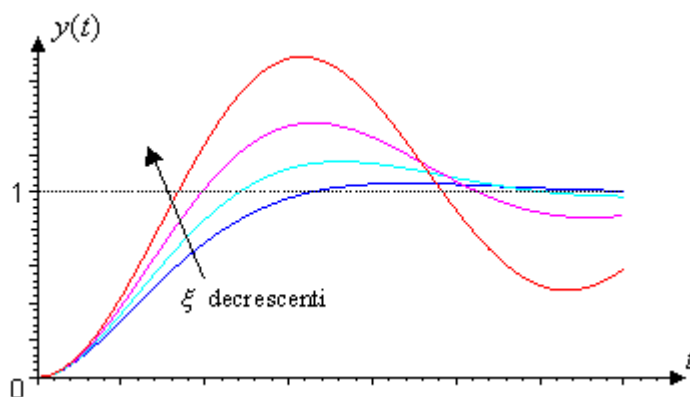
La FdT di un generico sistema di secondo ordine con poli complessi coniugati può esser posta nella forma:

$$G(s) = \mu \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.8)$$

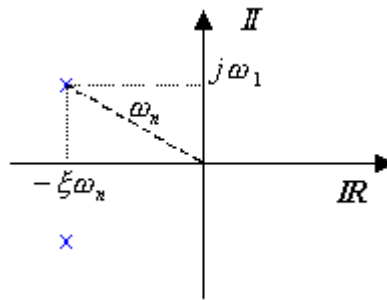
in cui μ è solo un coefficiente moltiplicativo che non influisce sull'andamento temporale (nel seguito, per comodità verrà supposto $\mu = 1$), mentre come già visto nel (Par 3.4.1).:

- ω_n è la *pulsazione naturale* ($\omega_n > 0$)
- ξ è lo *smorzamento*; da esso dipende la forma della risposta:
 - $\xi > 1$ → 2 radici reali (sistema del secondo tipo, sovrasmorzato)
 - $\xi = 1$ → 2 radici reali coincidenti (sistema del secondo tipo con smorzamento critico)
 - $0 < \xi < 1$ → 2 radici complesse coniugate (oscillazione smorzata)
 - $\xi = 0$ → 2 radici immaginarie pure (sistema del tipo 3, oscillazione non smorzata)

Considerando solo sistemi con due radici complesse coniugate si possono avere questo tipo di andamenti in funzione del valore di ξ (ma comunque compreso fra 0 e 1):



Sul piano complesso si ha:



dove:

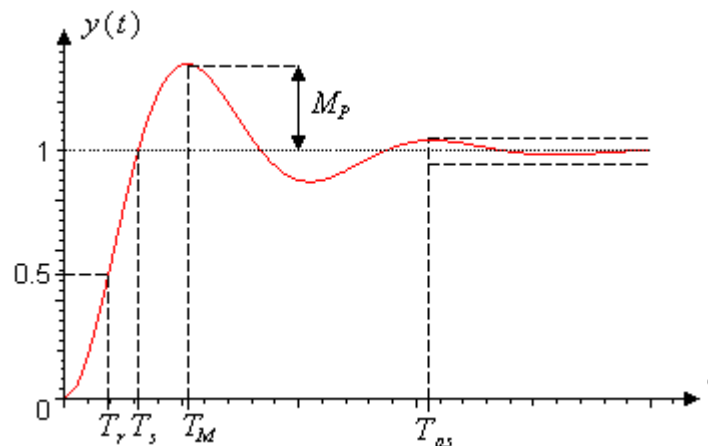
$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

L'espressione analitica della risposta allo scalino è:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1 - \xi^2} + \arccos(\xi)\right) \quad (8.9)$$

e risulta essere costituita da un termine sinusoidale moltiplicato per un esponenziale; la parte reale del polo fornisce l'esponente.

I parametri che caratterizzano l'andamento temporale di un sistema del secondo ordine sono:



- **Sovraelongazione massima percentuale M_p :**

Indicando con y_∞ il valore di regime dell'uscita, cioè a transitorio terminato, e con y_{\max} il valore massimo assunto dall'uscita, la sovravelongazione massima percentuale risulta essere definita dalla relazione:

$$M_p = 100 \cdot \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty} \quad (8.10)$$

A tale parametro è legato il *tempo di massima sovravelongazione* T_M , definito come (primo) istante in cui $y(t) = y_{\max}$; partendo dalla (8.9), con semplici calcoli, si può arrivare a trovare che:

$$y_{\max} = 1 + e^{-\left(\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)} \quad (8.11)$$

da cui si può ricavare che:

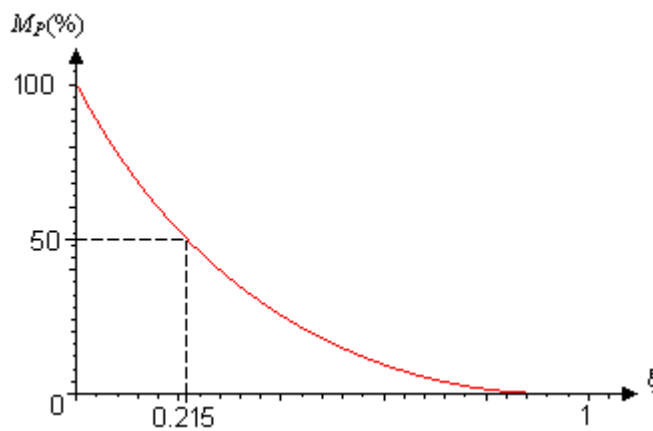
$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (8.12)$$

e quindi:

$$M_p = 100 \cdot e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (8.13)$$

La sovraelongazione massima fornisce anche una misura della "stabilità" del sistema; come visto, più il valore di ξ è basso più il sistema oscilla prima di raggiungere il valore di regime:

Poiché M_p e ξ sono legati dalla (8.13.), di cui si può riportare il grafico:



si verifica che al crescere del valore di M_p il valore di ξ decresce e il sistema risulta più "instabile".

Si faccia attenzione al fatto che il sistema, per valori di ξ maggiori di zero è comunque asintoticamente stabile; qui ci si riferisce all'andamento più o meno smorzato delle oscillazioni che la risposta presenta prima di arrivare al valore di regime.

- *Tempo di ritardo T_r :*

Tempo in cui l'uscita raggiunge il 50% del valore di regime, cioè:

$$y(T_r) = \frac{1}{2} y_\infty \quad (8.14)$$

Per il calcolo di tale parametro esistono delle formule approssimate:

$$T_r \cong \frac{1+0,7\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

$$T_r \cong \frac{1+0,6\xi+0,15\xi^2}{\omega_n} \quad 1 < \xi$$

Si noti che il secondo caso ($\xi > 1$) rappresenta il caso di due poli reali.

- **Tempo di salita T_s :**

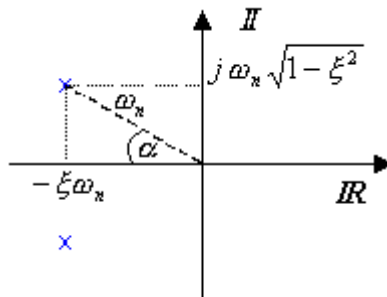
È definito come il tempo necessario affinché il sistema arrivi, la prima volta, al valore di regime; sfruttando la (8.9.), si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 y(T_s) &= 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n T_s} \sin\left(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2} + \arccos(\xi)\right) = \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n T_s} \left[\xi \cdot \sin\left(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}\right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}\right) \right] = \\
 &= 1 - e^{-\xi\omega_n T_s} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}\right) + \cos\left(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Si ottiene così che:

$$T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{-\omega_n \xi}\right)$$

e, ricordando che sul piano complesso la situazione è:



si può scrivere:

$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (8.15)$$

Anche per questo parametro esistono delle formule approssimate:

$$\begin{aligned}
 T_s &\cong \frac{0,8 + 2,5\xi}{\omega_n} & 0 < \xi < 1 \\
 T_s &\cong \frac{1 + 1,1\xi + 1,4\xi^2}{\omega_n} & 1 < \xi
 \end{aligned}$$

Un'altra definizione spesso utilizzata è quella per cui il tempo di salita è dato dal tempo necessario perché l'uscita passi dal 10% al 90% del suo valore di regime.

- **Tempo di assestamento $T_{a\epsilon}$:**

Tempo oltre il quale la differenza fra valore di regime e valore effettivo dell'uscita rimane al di sotto di un valore ϵ calcolato come percentuale del valore di regime

stesso (es. $\varepsilon = 5\%$ o 3% o 2% di y_∞); superato il tempo di assestamento il sistema viene considerato a regime.

Per il calcolo del tempo di assestamento esiste una formula approssimata per cui è:

$$T_{a\varepsilon} = -\frac{1}{\xi\omega_n} \cdot \ln \varepsilon \quad (8.16)$$

e valori tipici sono:

$$\varepsilon = 2\% \rightarrow T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \varepsilon = 5\% \rightarrow T_{a5} \cong \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Si noti che quanto visto è valido anche nel caso in cui il valore a regime dell'uscita sia diverso da 1; in tal caso è sufficiente considerare che tutti i parametri sono normalizzati col valore di regime.

8.3. Influenza degli zeri sulla risposta temporale

Come detto in precedenza, la presenza degli zeri nella FdT di un sistema influenza la risposta temporale dei sistemi stessi:

- influenza l'ampiezza
- annulla le frequenze di ingresso che coincidono con gli zeri

Esempio

Se il sistema in esame è caratterizzato dalla FdT

$$G(s) = 5 \cdot \frac{(s+1)}{s^2 + 2s + 9}$$

e l'ingresso è del tipo

$$u(t) = e^{-t}$$

si ha che:

$$U(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 9}$$

In uscita non compare quindi la risposta "forzata".

8.3.1. Sistemi del primo ordine con uno zero

La generica FdT di un sistema del primo ordine con uno zero, può essere riscritta come:

$$G(s) = k \cdot \frac{s-z}{s-p} = \frac{kz}{p} \cdot \frac{1-s/z}{1-s/p} = \mu \cdot \frac{1+\tau s}{1+Ts} = \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

dove μ è il *guadagno statico*, e:

$$T = -\frac{1}{p}, \quad \tau = -\frac{1}{z}, \quad \alpha = \frac{p}{z}$$

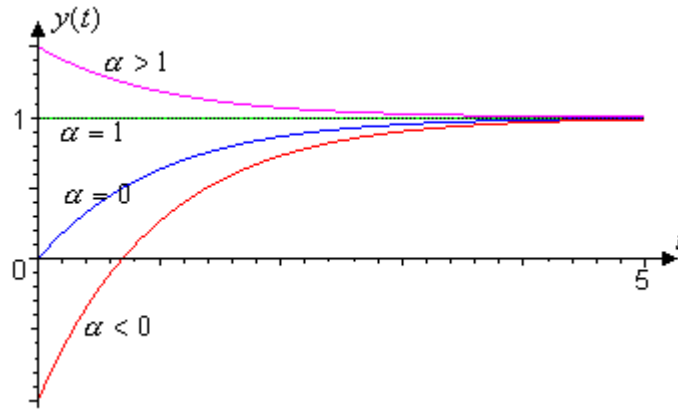
Supponendo poi che il sistema sia asintoticamente stabile e che in ingresso ci sia la funzione gradino unitario, l'uscita avrà la forma:

$$y(t) = \mu \left[1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{1}{T}t} \right] \quad t \geq 0 \quad (8.17)$$

Utilizzando i *Teorema del valore finale* (3.9.) e *Teorema del valore iniziale* (3.10.) si verifica che:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{s(1+Ts)} = \mu$$
$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{s(1+Ts)} = \mu\alpha$$

e quindi, l'andamento temporale di $y(t)$ in funzione di α è del tipo:



In questa simulazione si è supposto $T = 1$ e $\mu = 1$ (dal parametro T dipende la velocità di risposta, da μ invece il valore finale del guadagno).

In ogni caso (escludendo ovviamente $\alpha = 0$) l'uscita presenta una discontinuità in 0; si nota che per valori negativi di α , cioè in caso di zeri a parte reale positiva, il sistema risponde in maniera opposta rispetto al comando e risulta molto più lento nel raggiungere il valore di regime, mentre per valori di $\alpha > 1$ (cioè lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'asse immaginario rispetto al polo) l'uscita assume, inizialmente, un valore maggiore del valore di regime.

L'andamento di $y(t)$ è sempre comunque esponenziale e dipende dalla costante di tempo associata al polo.

8.3.2. Sistemi del secondo ordine con uno zero

L'influenza che ha la presenza di uno zero in un sistema del secondo ordine dipende dalla sua posizione sul piano complesso rispetto a quella dei due poli; per capirne l'importanza si possono esaminare i diversi casi.

Prendendo in considerazione un generico sistema con poli reali, la sua FdT può essere posta nella forma:

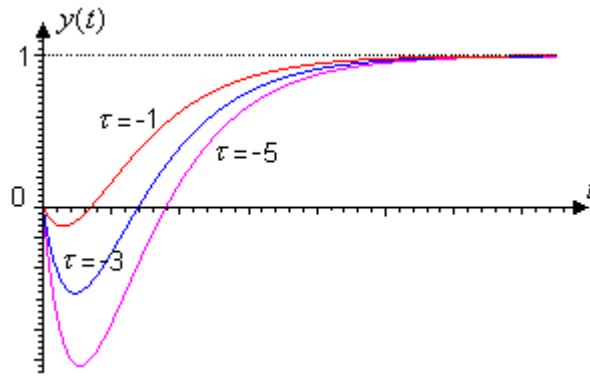
$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau \cdot s}{(1 + T_1 \cdot s)(1 + T_2 \cdot s)} \quad T_1 \neq \tau, \quad T_2 \neq \tau \quad (8.18)$$

e la relativa risposta al gradino unitario è:

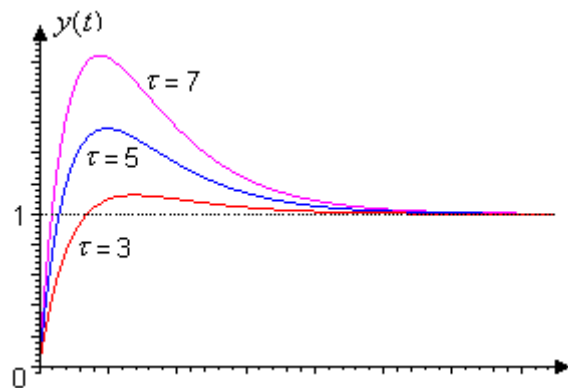
$$y(t) = \mu \cdot \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \quad t \geq 0 \quad (8.19)$$

Supponendo che il sistema sia asintoticamente stabile, l'andamento della risposta varia in funzione delle posizioni relative fra poli e zero:

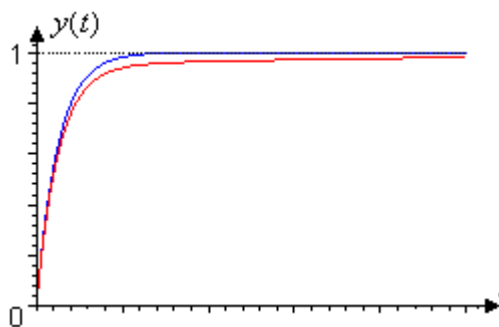
- 1) $\tau < 0$ - lo zero è a parte reale positiva: in tal caso la risposta nei primi istanti assume valori negativi, tanto più alti quanto più lo zero (la cui posizione è data da $-1/\tau$) è vicino all'origine:



- 2) $\tau \gg T_1 > T_2$ - lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'origine rispetto ai poli; la risposta presenta una sovraelongazione tanto più elevata quanto più lo zero è vicino all'origine

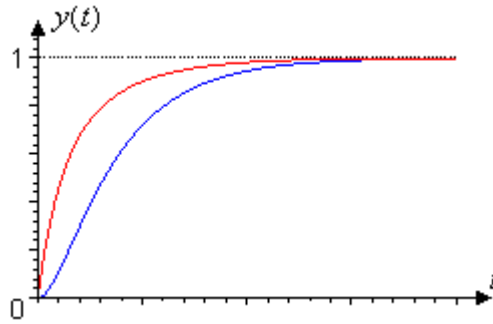


- 3) $\tau \cong T_1 \gg T_2$ - lo zero è molto vicino al polo più "lento"; il polo vicino allo zero può essere trascurato e il sistema può essere considerato del primo ordine come si può vedere dalle seguenti risposte (la rossa è del sistema del secondo ordine, la blu quella del sistema del primo ordine ottenuto dalla approssimazione):

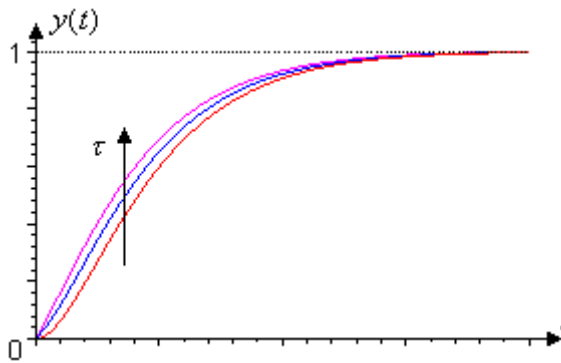


Se lo zero è vicino al polo più "veloce" (quello più lontano dall'origine) il sistema è sempre approssimabile con uno del primo ordine e ha una risposta quasi coincidente a quella del sistema approssimante, proprio perché viene trascurato il polo che ha un transitorio più breve.

- 4) $T_1 > \tau > T_2$ - lo zero è in mezzo ai due poli; lo zero tende a velocizzare la risposta rispetto al caso di sistema senza zeri (in rosso il sistema con lo zero, in blu quello senza):



- 5) $T_1 > T_2 > \tau$ - lo zero è più lontano dall'origine rispetto ai poli; più lo zero si allontana dall'origine, più la risposta del sistema si avvicina a quella del sistema privo di zeri (in rosso il sistema privo di zeri):



Passando al caso di sistemi con poli complessi coniugati, la FdT può essere scritta come:

$$G(s) = \mu \cdot \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.20)$$

Si può porre la (8.20.) nella forma:

$$G(s) = \mu \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \mu \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \tau s$$

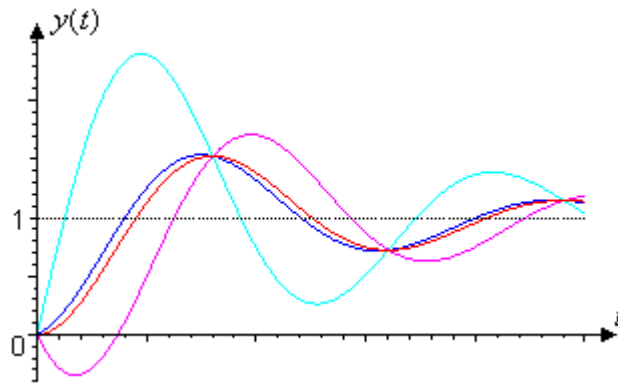
Ricordando la (8.8.) e indicando con $G'(s)$ tale FdT si può scrivere che:

$$G(s) = G'(s) + \tau s \cdot G'(s)$$

Dato che la risposta al gradino unitario della (8.8.) è data dalla (8.9.), indicando quest'ultima con $y'(t)$, si può scrivere, sfruttando le proprietà della LT (teorema 3.6.):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G'(s)}{s}\right] + \tau \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[s \cdot \frac{G'(s)}{s}\right] = y'(t) + \tau \cdot \frac{dy'(t)}{dt} \quad (8.21)$$

L'andamento della risposta di un sistema di questo tipo, in funzione di diversi valori di τ è:



La curva in rosso rappresenta il caso in assenza di zeri e l'andamento delle altre curve mostra che lo zero influenza la risposta del sistema analogamente al caso dei poli reali, infatti:

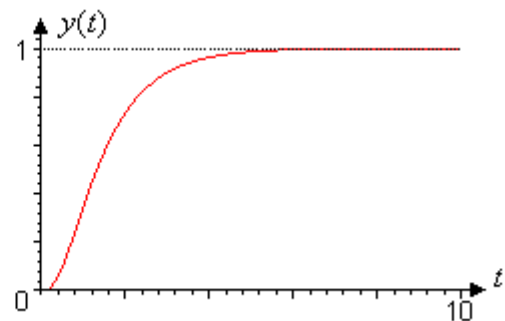
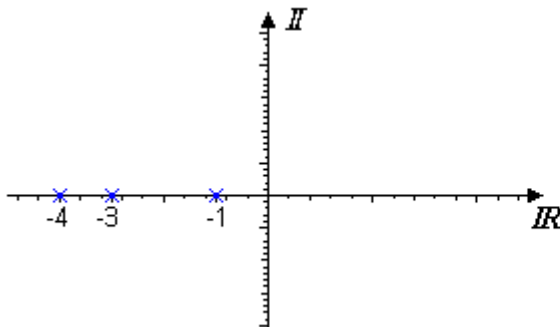
- la curva in viola si ricava per zeri a parte reale positiva ed ha una *sottoelongazione*;
- la curva in blu, che rappresenta il caso con lo zero lontano dall'origine, risulta assimilabile al caso senza zeri;
- la curva in azzurro, zero vicino all'origine, amplifica la sovraelongazione e velocizza la risposta.

8.4. Sistemi di ordine superiore

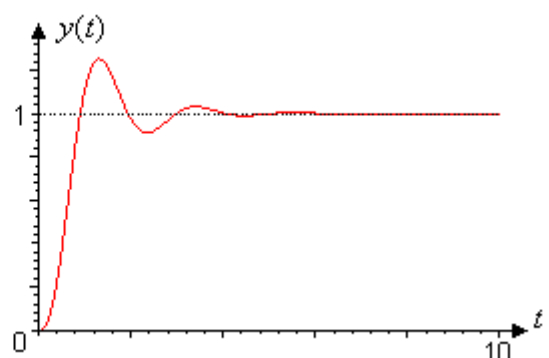
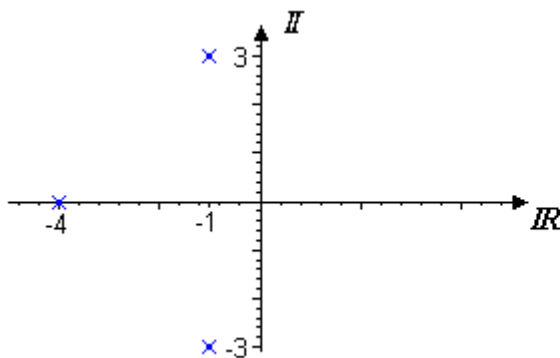
Per i sistemi di ordine superiore al secondo non esistono espressioni analitiche per il calcolo dei parametri della risposta transitoria anche se questa mantiene le stesse proprietà dei sistemi del secondo ordine e viene caratterizzata attraverso gli stessi parametri (tempo di salita, di assestamento, ecc.).

Due esempi di sistema del terzo ordine sono:

- 1) Sistema con tre poli reali; è assimilabile ad un insieme di tre sistemi del primo ordine i cui grafici di posizione dei poli e risposta al gradino possono essere del tipo:



- 2) Sistema con un polo reale e due poli complessi coniugati a parte reale negativa; in questo caso il sistema può essere visto come composto da uno del primo ordine e uno del secondo e i relativi grafici risultano essere:



Lo studio dei sistemi di ordine superiore non può quindi essere affrontato tramite formule approssimate come invece è possibile per i sistemi del secondo ordine, ma esistono delle tecniche che permettono di evitare, per ogni sistema, il ricorso al calcolo per via numerica.

La soluzione più utilizzata è quella di arrivare ad una approssimazione del sistema tramite il concetto dei *poli dominanti*; i *poli dominanti* di un sistema sono quelli, reali o complessi, molto più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri poli e sono i più importanti per lo studio della stabilità del sistema stesso.

È importante tenere presente che un polo viene considerato dominante in funzione della sua posizione in relazione agli altri poli e non in funzione della sua posizione "assoluta".

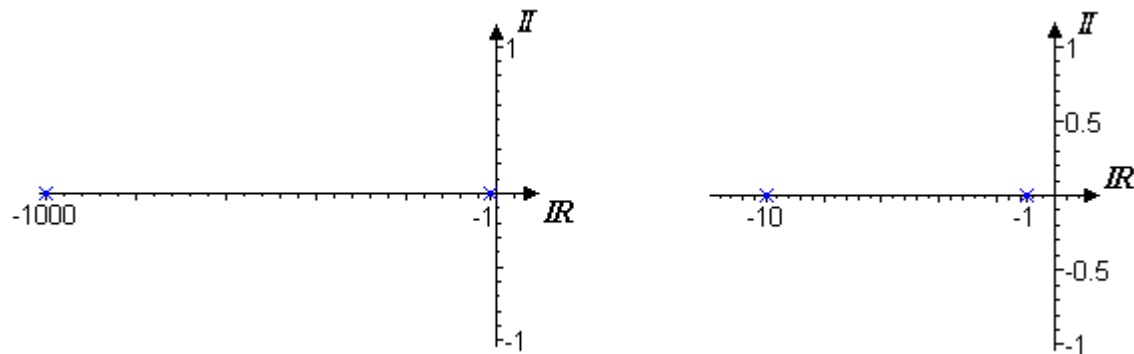
Esempio

Considerando i due sistemi:

$$G_1(s) = \frac{1000}{(s+1000)(s+1)},$$

$$G_2(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)}$$

le rispettive mappe poli-zeri sono:



e, passando nel dominio del tempo si ha:

$$y_1(t) = c_1 e^{-1000t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-1000t} + e^{-t}$$

$$y_2(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-10t} + e^{-t}$$

Volendo approssimare i sistemi con uno ridotto, per entrambe si potrebbe pensare di utilizzare il sistema:

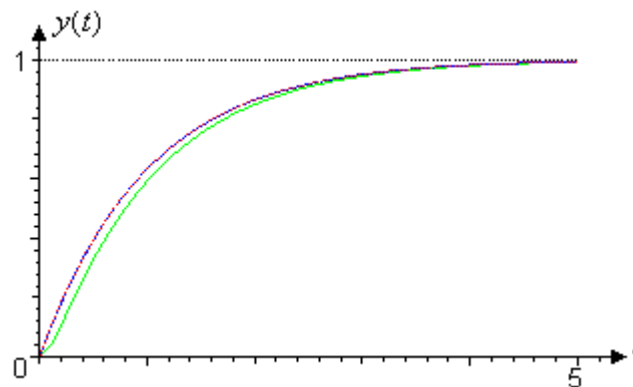
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

che, nel dominio del tempo fornisce la relazione:

$$y_1(t) = e^{-t}$$

Dal confronto con i due sistemi si può notare che, nella relazione di $y_1(t)$ il primo termine decresce molto rapidamente rispetto al secondo (per $t = 0,1$ si ha che $e^{-1000t} = 37 \cdot 10^{-45}$), ma non è così per il primo termine di $y_2(t)$ (per $t = 0,1$ si ha che $e^{-10t} = 0,37$).

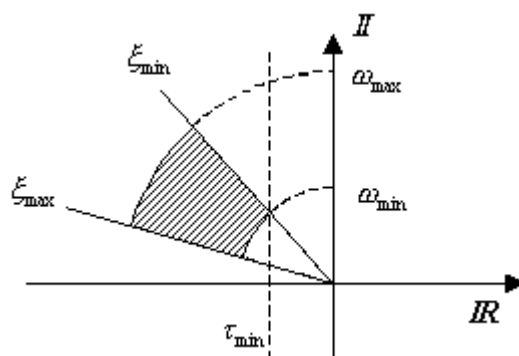
Da tali considerazioni si può dedurre che per il primo sistema l'approssimazione è accettabile e il polo in -1 è il polo dominante, mentre per il secondo il polo in -10 non può essere trascurato; è possibile vedere graficamente la differenza di comportamento dei due sistemi rispetto all'approssimazione dalle risposte al segnale gradino unitario:



La risposta del sistema 1 (in rosso) e del sistema ridotto (in blu) combaciano, mentre quella del sistema 2 (in verde), risulta, soprattutto a valori bassi di t , diversa.

Si può affermare che la "zona" dei poli dominanti dipende dalla particolare applicazione; è chiaro che se i poli dominanti sono complessi coniugati, rivestono ugual importanza sia la parte reale che quella immaginaria.

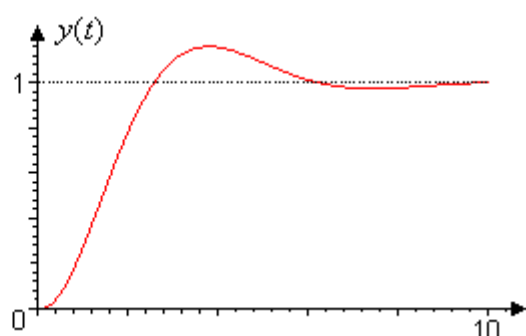
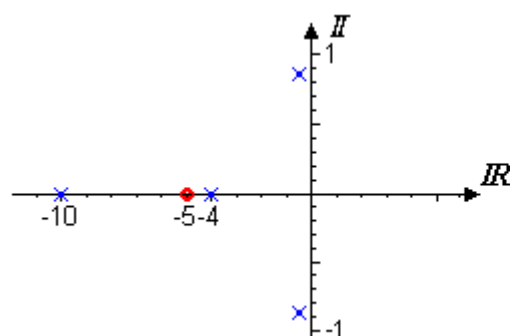
In alcuni casi possono poi esserci delle specifiche che richiedono che i poli si trovino all'interno di una determinata regione:



Sfruttando il concetto dei poli dominanti è possibile, sotto certe condizioni, la riduzione di sistemi di ordine più elevato in uno, approssimato, del secondo ordine; per esempio, è possibile ricavare un sistema del secondo ordine che ne approssimi uno del quarto caratterizzato dalla FdT :

$$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2 + s + 1)(s+4)(s+10)}$$

e la cui mappa poli-zeri (i poli sono in blu, lo zero in rosso) e la risposta al segnale gradino sono:

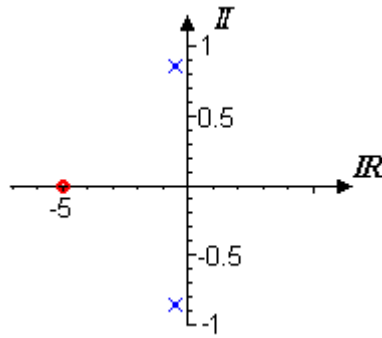


Se non è richiesta una precisione estrema il sistema può essere approssimato prendendo in considerazione solo i poli dominanti, cioè quelli con parte reale più vicina allo zero, che hanno una dinamica più lenta; è però necessario fare attenzione a quelle che sono le caratteristiche del sistema a regime e quindi anche al numeratore della FdT .

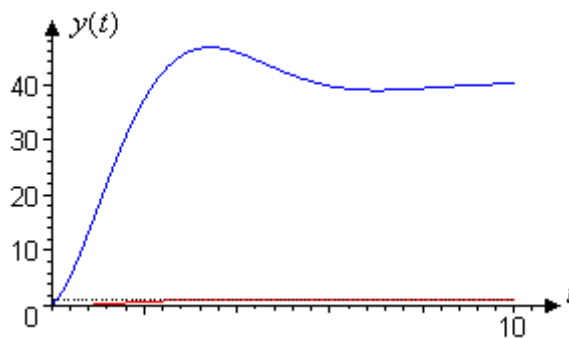
Nel caso in esame, se non tenendo conto di tale osservazione si potrebbe pensare di approssimare il sistema di partenza con l'espressione:

$$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2 + s + 1)}$$

Un simile sistema, la cui mappa poli-zeri è:



ha una risposta al segnale gradino molto diversa dal sistema di partenza come si può notare dal confronto fra le due risposte (in rosso il sistema del quarto ordine, in blu quello ridotto):

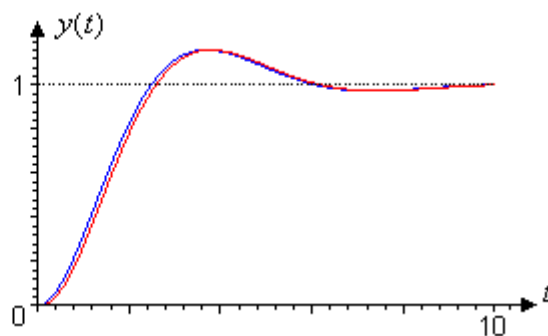
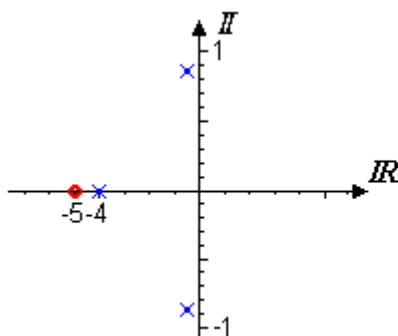


Per poter invece approssimare in maniera accettabile il sistema di partenza è necessario "modificare" opportunamente anche il numeratore; in pratica non si eliminano le variabili di stato più "veloci" ma si considera che esse abbiano già esaurito il loro transitorio e siano a regime. Così, nel caso in esame:

- approssimante del terzo ordine:

$$G'(s) = \frac{8}{10} \cdot \frac{s+5}{(s^2 + s + 1)(s+4)}$$

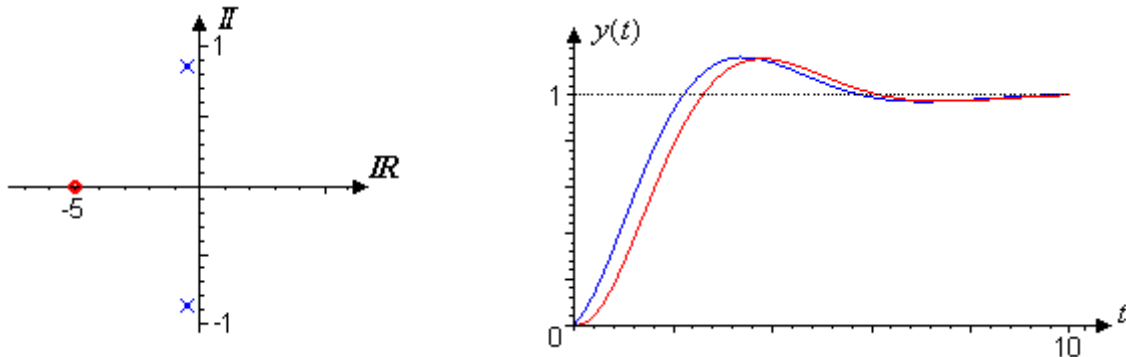
con mappa poli-zero e risposta al gradino (in rosso il sistema del quarto ordine, in blu quello ridotto):



- approssimante del secondo ordine:

$$G''(s) = \frac{8}{40} \cdot \frac{s+5}{(s^2 + s + 1)}$$

con mappa poli-zeri e risposta al gradino (con la solita convenzione per i colori:



Come era ovvio aspettarsi il modello ridotto di ordine più elevato è più fedele a quello originale; non tutti i poli sono quindi importanti allo stesso modo.

Esistono diverse tecniche per l'approssimazione di sistemi di ordine superiore con sistemi del secondo ordine, come quella della tangente, la tecnica delle aree, gli approssimanti di Padè o la *Trasformazione bilanciata* che tiene conto di controllabilità e osservabilità del sistema.

Cap 9. Risposta in frequenza

È il metodo più comunemente utilizzato per l'analisi e la progettazione di sistemi di controllo.

La risposta in frequenza è una rappresentazione della risposta dei sistemi a ingressi di tipo sinusoidale a diverse frequenze; l'uscita di sistemi lineari a tali ingressi sarà data da segnali sinusoidali alla stessa frequenza ma con ampiezze e fasi differenti.

Sfruttando il principio della sovrapposizione degli effetti è poi possibile utilizzare questa tecnica anche per altre tipologie di segnali; tutte quelle funzioni che, tramite la scomposizione armonica, possono rappresentare un segnale come combinazione lineare di componenti sinusoidali possono essere prese in considerazione (è il caso dei segnali che ammettono la *Trasformata di Fourier*).

Anche se può essere meno intuitiva di altri metodi visti in precedenza, ha però indubbi vantaggi specialmente in situazioni reali come la possibilità di ricavare le funzioni di trasferimento sfruttando dei dati fisici; per questo motivo è la tecnica principale utilizzata per determinare sperimentalmente il comportamento dinamico di un sistema.

Sviluppata nei primi anni '40, la risposta in frequenza fa un uso massiccio di tecniche grafiche e richiede solo l'analisi del sistema ad anello aperto anche per lo studio di sistemi ad anello chiuso.

Viene utilizzata per progettare i sistemi di controllo, ricavare i parametri caratteristici della risposta temporale come M_p , ε_{ss} , T_r , T_s , $T_{a\varepsilon}$, valutare la stabilità del sistema e valutarne la risposta in presenza di errori di modello.

9.1. *Trasformata di Fourier*

Come accennato, la risposta in frequenza può essere utilizzata non solo nel caso di segnali sinusoidali ma anche per segnali periodici non sinusoidali o, addirittura, aperiodici.

Di seguito vengono riportati solo i concetti fondamentali utili per il seguito della trattazione.

9.1.1. **Trasformata serie di Fourier**

Data una qualsiasi funzione periodica $x(t)$ di periodo T_0 (cioè tale che, per ogni t sia $x(t) = x(t + T_0)$) è sempre possibile esprimere tale funzione come somma di componenti sinusoidali.

Si può infatti ricostruire il generico segnale $x(t)$ come:

$$x(t) = A_0 + B_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + B_2 \cos(2\pi \cdot 2f_0 t + \varphi_2) + B_3 \cos(2\pi \cdot 3f_0 t + \varphi_3) + \dots$$

dove:

- A_0 è costante e rappresenta il caso degenere di segnale sinusoidale a frequenza nulla (valor medio)
- f_0 è la frequenza fondamentale = $1/T_0$

Ponendo che $B_i = 2A_i$ per ogni $i \neq 0$

$$x(t) = A_0 + 2A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + 2A_2 \cos(2\pi \cdot 2f_0 t + \varphi_2) + 2A_3 \cos(2\pi \cdot 3f_0 t + \varphi_3) + \dots$$

si può arrivare a scrivere che:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) \quad (9.1)$$

che è la *trasformata serie di Fourier in forma reale polare*.

Utilizzando le formule di Eulero si può facilmente arrivare alla *forma complessa*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{j2\pi \cdot kf_0 \cdot t} \quad (9.2)$$

dove

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot kf_0 \cdot t} dt \quad (9.3)$$

La (9.2.) è detta *formula di sintesi* mentre la (9.3.) è la *formula di analisi*.

Un'altra rappresentazione della trasformata serie di Fourier si ha con la *forma rettangolare reale*

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kf_0 t) - b_k \sin(2\pi kf_0 t) \quad (9.4)$$

dove:

$$a_k = \text{Re}\{X_k\} = \frac{1}{T_0} \int_{|T_0|} x(t) \cos(2\pi kf_0 t) \cdot dt$$

$$b_k = -\text{Im}\{X_k\} = \frac{1}{T_0} \int_{|T_0|} x(t) \sin(2\pi kf_0 t) \cdot dt$$

9.1.2. Trasformata continua di Fourier

Il concetto di poter riscrivere un segnale in una somma di componenti sinusoidali è estendibile anche ai segnali aperiodici; si ipotizza che essi siano dei segnali periodici il cui periodo, T_0 , tende all'infinito, cioè:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t)$$

dove con $x_p(t)$ si indica il segnale periodico di periodo T_0 .

In questa situazione, riprendendo le (9.2.) e (9.3.), posto che:

$$X(kf_0) \triangleq T_0 X_k$$

si ha:

$$X(kf_0) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot kf_0 \cdot t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_p(t) = f_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0) \cdot e^{j2\pi \cdot kf_0 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df$$

dove

$$X(f) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} X(kf_0)$$

e si ottengono così le relazioni

- *Equazione di sintesi o Antitrasformata continua di Fourier*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad (9.5)$$

- *Equazione di analisi o Trasformata continua di Fourier*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (9.6)$$

Al contrario del caso della trasformata serie, in cui è finito il periodo T_0 e le uniche armoniche sono quelle individuate da kf_0 , nella trasformata continua non esiste un periodo ma un *continuo* di frequenze da $-\infty$ a $+\infty$ e l'ampiezza di ciascuna componente (non si può parlare di armoniche) è infinitesima $|X(f)| \cdot df$.

Anche in questo caso la $x(t)$ viene vista come una sovrapposizione (non si può più parlare di somma) di oscillazioni complesse; $X(f)$ è il *coefficiente di Fourier* X_k portato al limite e fornisce ampiezza e fase dell'oscillazione:

$$A(f) = |X(f)| \cdot df \quad \varphi(f) = \angle X(f)$$

La risposta di un sistema lineare ad una qualsiasi funzione d'ingresso può quindi essere espressa come la sovrapposizione (o la somma) delle risposte del sistema ai diversi termini sinusoidali che compongono la funzione d'ingresso stessa.

9.2. Identificazione della risposta in frequenza

Dato un sistema lineare, stazionario e asintoticamente stabile del tipo:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

la risposta in frequenza è data dall'uscita $y(s)$ (o $y(t)$) a regime, quando l'ingresso è una funzione seno del tipo $u(t) = U \cdot \sin(\omega t) \cdot H(t)$

Si ha quindi, utilizzando la tabella della trasformata di Laplace (Par. 3.5.):

$$y(s) = G(s) \cdot U \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s + j\omega} + \frac{A_1^*}{s - j\omega} + \text{altri termini dovuti a } G(s)$$

e dove A_1^* è il complesso coniugato di A_1 .

L'uscita a regime, indicata con $y_{ss}(s)$, è quindi:

$$y_{ss}(s) = \frac{A_1}{s + j\omega} + \frac{A_1^*}{s - j\omega}$$

e i suoi termini possono essere calcolati tramite le espressioni dei residui (Par 3.4.1.):

$$A_1 = G(s) \cdot u(s) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{G(-j\omega) \cdot U}{-2j}$$

$$A_1^* = \frac{G(j\omega) \cdot U}{2j}$$

Poiché $s = j\omega$ è un numero complesso lo sono anche $G(j\omega)$ e $G(-j\omega)$ e possono essere scritti in termini di ampiezza e fase:

$$\begin{cases} G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi} \\ G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{-j\phi} = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\phi} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$

Utilizzando poi la *ILT* (Trasformata inversa di Laplace) (3.3) è possibile trovare la $y_{ss}(t)$:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A_1 e^{-j\omega t} + A_1^* e^{j\omega t} = \\ &= \frac{U \cdot |G(j\omega)|}{-2j} \cdot e^{-j\phi} e^{-j\omega t} + \frac{U \cdot |G(j\omega)|}{2j} \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t} = \\ &= \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \cdot U \cdot |G(j\omega)| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = U \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \phi) = Y \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

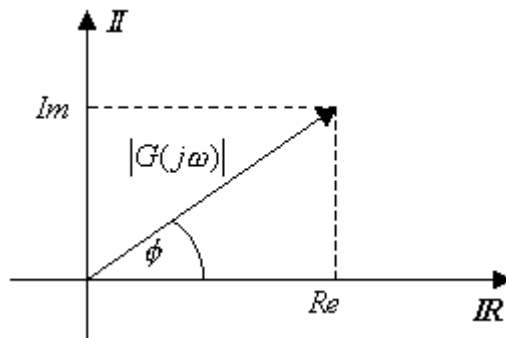
dove:

$$\begin{cases} Y = U \cdot |G(j\omega)| \\ \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$

Riassumendo si può affermare che:

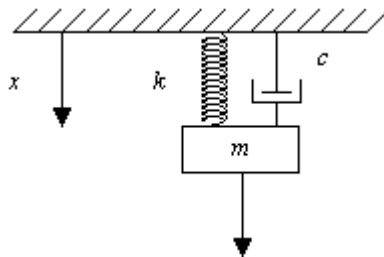
- la risposta in frequenza di un sistema lineare è un segnale sinusoidale con frequenza uguale a quella del segnale d'ingresso;
- l'ampiezza della risposta in frequenza Y dipende dall'ampiezza del segnale d'ingresso U e dall'ampiezza del sistema $|G(j\omega)|$;
- la fase della risposta in frequenza è uguale alla fase del sistema ϕ
- la risposta in frequenza di un sistema lineare è nota quando siano noti:
 - o ampiezza e fase di $G(j\omega)$;
 - o parte reale e parte immaginaria di $G(j\omega)$;

Infatti, una volta che la $G(s)$ è diventata un numero complesso, può essere rappresentata, indifferentemente, tramite modulo e fase o tramite parte reale e parte immaginaria:



- un sistema *ideale* risponde con $|G(j\omega)| = 1$ e $\angle G(j\omega) = 0^\circ$ a tutte le frequenze.

Esempio



Le equazioni che governano il sistema sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \\ u(t) = 10 \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s^2 + (c/m) \cdot s + k/m}$$

Supponendo che sia $m = 1\text{Kg.}$, $c = 1\text{Kg./s}$, $k = 1\text{Kg./s}^2$ si ha:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{cases} X = 10|G(j\omega)| \\ \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1} = \frac{1}{(1 - \omega^2) + j\omega}$$

Esprimendo la $G(j\omega)$ in ampiezza e fase si ha:

$$G(j\omega) = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \cdot e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{1 - \omega^2}}}$$

e quindi:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1 - \omega^2}$$

da cui

$$x(t) = \frac{10}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega}{1 - \omega^2})$$

Se la frequenza del segnale in ingresso è nota, è possibile determinare numericamente l'uscita; così, se $u(t) = 10 \cdot \sin(5t)$ (cioè $\omega = 5 \text{ rad/sec}$), si ha:

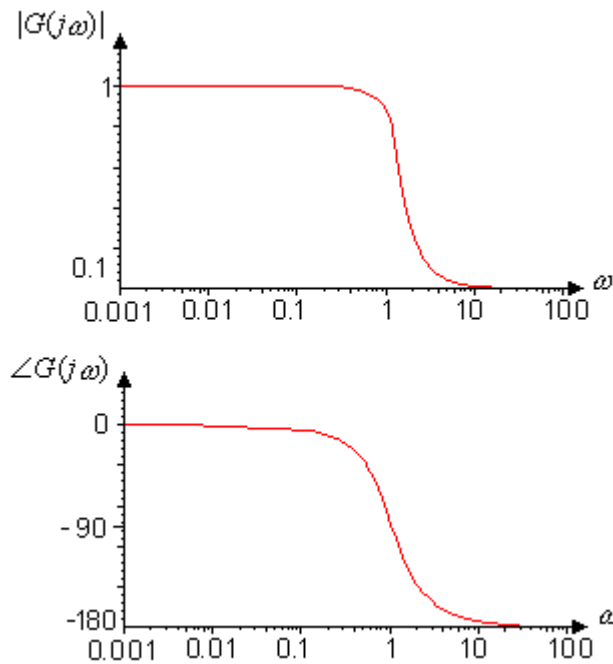
$$x(t) = 0.408 \sin(5t + 0.205)$$

Se si riesce a riportare l'andamento del modulo e della fase di $G(j\omega)$ in funzione della pulsazione $\omega = [0, \infty)$, è possibile determinare in maniera molto semplice la risposta in frequenza del sistema per l'intero range di frequenze.

Cercando di riportare graficamente l'andamento di modulo e fase in questo caso si ottiene, considerando diversi valori di ω :

- $\omega \rightarrow 0$	$ G(j\omega) \rightarrow 1$	$\angle G(j\omega) \rightarrow 0^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$	$ G(j\omega) \rightarrow 0$	$\angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$
- $\omega = 0.01$	$ G(j\omega) = 1$	$\angle G(j\omega) = -0.573^\circ$
- $\omega = 1$	$ G(j\omega) = 1$	$\angle G(j\omega) = -90^\circ$
- $\omega = 100$	$ G(j\omega) = 0.0001$	$\angle G(j\omega) = -179^\circ$

e, riportando tali dati su di un grafico si ottiene:



Dall'analisi di questi grafici, data una qualsiasi frequenza del segnale d'ingresso, è possibile ricavare la risposta; così, se $u(t) = \sin(10t)$ si ricava che $x(t) = 0.01 \cdot \sin(10t - 3.04)$.

Superata una certa frequenza il sistema non dà alcuna risposta (nell'esempio precedente dopo i 10-20 rad/s).

Definizione – Banda

Il range di frequenze all'interno del quale il sistema fornisce una risposta è detto **Banda**.

Ci sono tre diverse tecniche grafiche che forniscono una rappresentazione approssimata della risposta in frequenza nel range di frequenze di interesse; utilizzando il computer queste tecniche danno grafici accurati:

- *Diagrammi di Bode o diagrammi cartesiani*
- *Diagrammi di Nyquist o rappresentazioni polari*
- *Diagrammi di Nichols*

Si tratta comunque sempre di diagrammi, asintotici, approssimati.

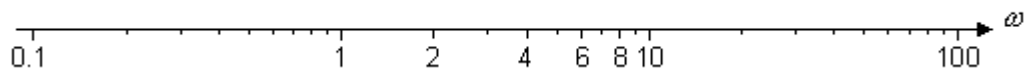
9.3. Diagrammi di Bode

9.3.1. Introduzione ai diagrammi di Bode

I *diagrammi di Bode* o *diagrammi cartesiani* sono la tecnica grafica più comunemente utilizzata per rappresentare la risposta in frequenza; tale rappresentazione viene effettuata tramite due diversi diagrammi, di modulo e di fase, in cui gli assi riportano:

- Per entrambe, l'asse delle ascisse riporta il valore delle diverse frequenze o, meglio, le diverse pulsazioni ω ; l'unità di misura saranno quindi rispettivamente l'*Hz* o i *rad/s*. (dove $1 \text{ Hz} = 2\pi \text{ rad/s}$).

La scala dell'asse delle ascisse è logaritmica in base 10:



Se il rapporto fra due pulsazioni è pari a 10 si dice che sono separate da una *decade*:

$$\text{decadi} = \frac{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10} 10}$$

così, se $\omega_1 = 10$ e $\omega_2 = 1000$, le due pulsazioni risultano separate da due decadi.

Se invece il rapporto fra due pulsazioni è pari a 2 si dice che sono separate da una *ottava*:

$$\text{ottave} = \frac{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10} 2}$$

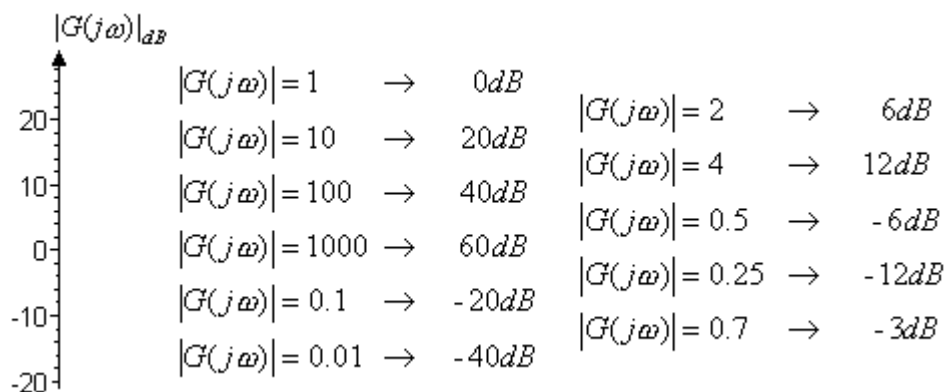
Si noti che il numero di ottave risulta pari a $1/(\log_{10} 2)$ numero di decadi.

Proprio perché la scala è logaritmica vengono pesantemente utilizzate le proprietà dei logaritmi.

- Nel *diagramma del modulo* l'asse delle ordinate riporta, ovviamente, il valore dell'ampiezza della $G(j\omega)$; i valori vengono riportati in *decibel (dB)*,

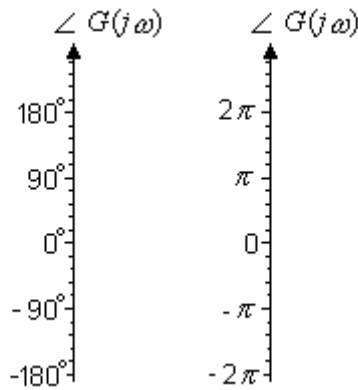
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|$$

e la scala risulta lineare; di seguito sono riportati anche alcuni valori di $|G(j\omega)|$ in *dB* che rivestono particolare importanza



Si noti che:

- Una differenza di 20 dB corrisponde ad un cambiamento di un'ordine di grandezza dell'ampiezza.
- Un grafico lineare asintotico approssimato può essere disegnato usando linee rette dato che la relazione fra dB e $\log_{10}\omega$ è lineare.
- Utilizzando i dB le ampiezze possono essere semplicemente sommate e sottratte.
- Nel *diagramma di fase* l'asse delle ordinate riporta, la fase di $G(j\omega)$ espressa in gradi o radianti, con scala lineare; quando la $G(j\omega)$ viene espressa in modulo e fase (cioè come $|G(j\omega)| \cdot e^{\angle G(j\omega)}$) anche le fasi possono essere sommate e sottratte.



Per costruire il diagramma di Bode, data una funzione di trasferimento, $G(s)$, bisogna seguire la seguente procedura:

1. Portare la $G(s)$ in forma fattorizzata:

$$G(s) = \frac{k \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\xi_{iz} s / \omega_{iz} + s^2 / \omega_{iz}^2)}{s^r \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_{ip} s / \omega_{ip} + s^2 / \omega_{ip}^2)} \quad (9.7)$$

2. Riscrivere la $G(s)$ ponendo $s = j\omega$, e portare l'espressione in *forma di Bode*:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)} \quad (9.8)$$

3. Sommare o sottrarre ogni componente

In $G(j\omega)$ la fase è data dalla somma (e sottrazione) delle fasi delle varie componenti e il modulo è dato dal prodotto dei moduli; ricordando però che il diagramma riporta il modulo espresso in dB si ha che anche il modulo è dato dalla somma dei moduli, espressi in dB, delle varie componenti:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = & 20 \cdot \log_{10}|k| - 20 \cdot r \cdot \log_{10}|j\omega| + \sum_i 20 \cdot \log_{10}|1 + j\tau_i \omega| + \\ & + \sum_i 20 \cdot \log_{10}|1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2| - \sum_i 20 \cdot \log_{10}|1 + jT_i \omega| + \\ & - \sum_i 20 \cdot \log_{10}|1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2| \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle k - r \cdot \angle(j\omega) + \sum_i \angle(1 + j\tau_i\omega) + \sum_i \angle(1 + 2j\xi_{iz}\omega/\omega_{iz} - \omega^2/\omega_{iz}^2) + \\ - \sum_i \angle(1 + jT_i\omega) - \sum_i \angle(1 + 2j\xi_{ip}\omega/\omega_{ip} - \omega^2/\omega_{ip}^2) \quad (9.10)$$

Esempio

$$G(s) = \frac{2 \cdot (s+1)}{s \cdot (s+10)}$$

1. La $G(s)$ in forma fattorizzata:

$$G(s) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)} = 0.2 \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)}$$

2. L'espressione in *forma di Bode*:

$$G(j\omega) = 0.2 \cdot \frac{1+j\omega}{j\omega \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

3. Modulo e fase risultano:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|0.2| - 20 \log_{10}|j\omega| + 20 \log_{10}|1+j\omega| - 20 \log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1+j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

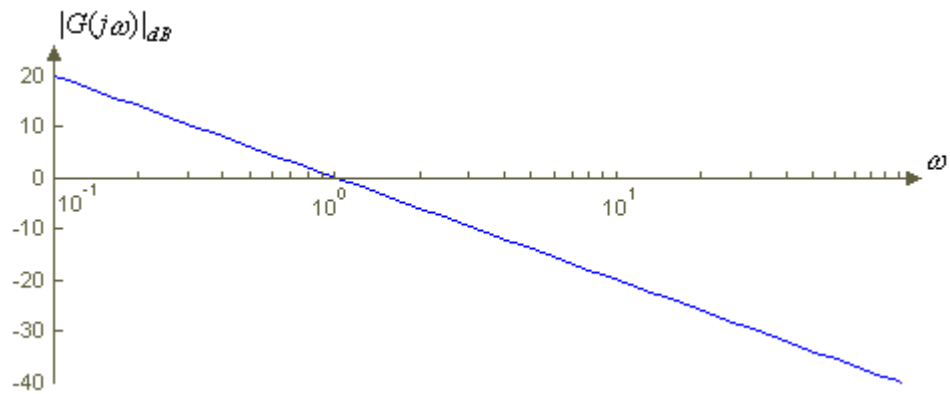
Per il tracciamento del grafico bisogna ora introdurre delle approssimazioni:

- Per il modulo:

$$1) \quad 20 \cdot \log_{10}|0.2| = -14$$

$$2) \quad -20 \cdot \log_{10}|j\omega|$$

Si ha ovviamente che per $\omega \rightarrow 0$ tende a ∞ mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a 0 con un andamento lineare con una pendenza di -20 dB/decade :



3) $20 \cdot \log_{10}|1+j\omega|$

Tenendo presente che

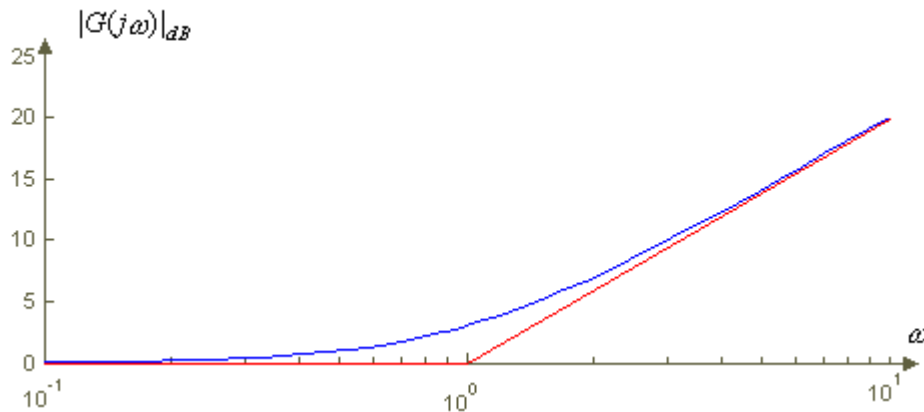
$$|1+j\omega| = \sqrt{1+\omega^2}$$

si possono fare le seguenti ipotesi:

a) $\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1+\omega^2} \approx 1$

b) $\omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1+\omega^2} \approx \omega$

e quindi, per $\omega \rightarrow 0$ tende a 0 mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a ∞ con un andamento lineare con una pendenza di 20 dB/decade.



La rappresentazione asintotica approssimata (riportata in rosso) perde validità per valori di ω prossimi a 1, come si può notare dal confronto con l'andamento reale (riportato in blu).

4) $-20 \cdot \log_{10}|1+j(\omega/10)|$

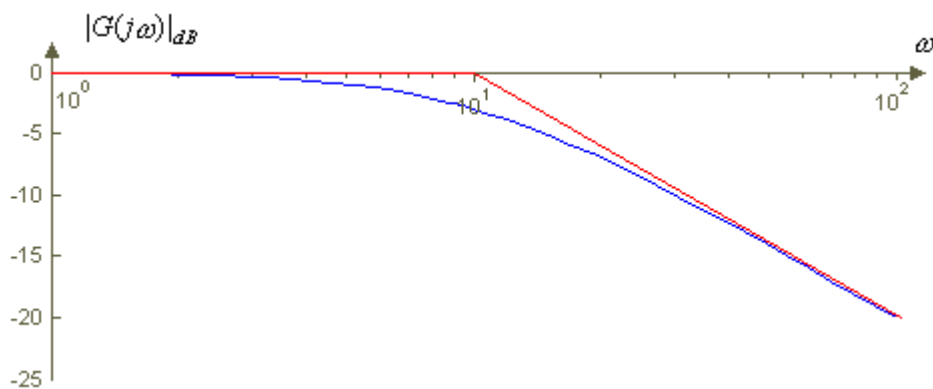
In questo caso si ha che:

$$\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}$$

si possono fare le seguenti ipotesi:

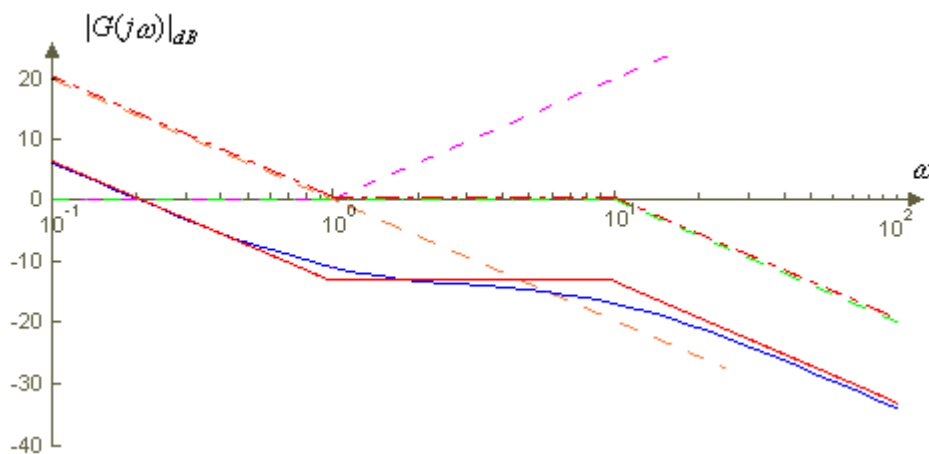
$$\begin{aligned} \text{a) } \omega \ll 10 &\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx 1 \\ \text{b) } \omega \gg 10 &\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx \frac{\omega}{10} \end{aligned}$$

e quindi, per $\omega \rightarrow 0$ tende a 0 mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a $-\infty$ con un andamento lineare con una pendenza di -20 dB/decade .



Anche in questo caso si ha che la rappresentazione asintotica approssimata (riportata in rosso) perde validità per valori di ω prossimi a 10, come si può notare dal confronto con l'andamento reale (riportato in blu).

A questo punto è possibile tracciare il diagramma completo; tipicamente in prima battuta si trascura il termine costante (in questo caso -14 dB) che viene inserito alla fine su tutte le frequenze, ottenendo così:



Le linee tratteggiate identificano le varie componenti: color arancio per la 2), viola per la 3) e verde per la 4); la linea tratteggiata rossa identifica il sistema trascurando il termine

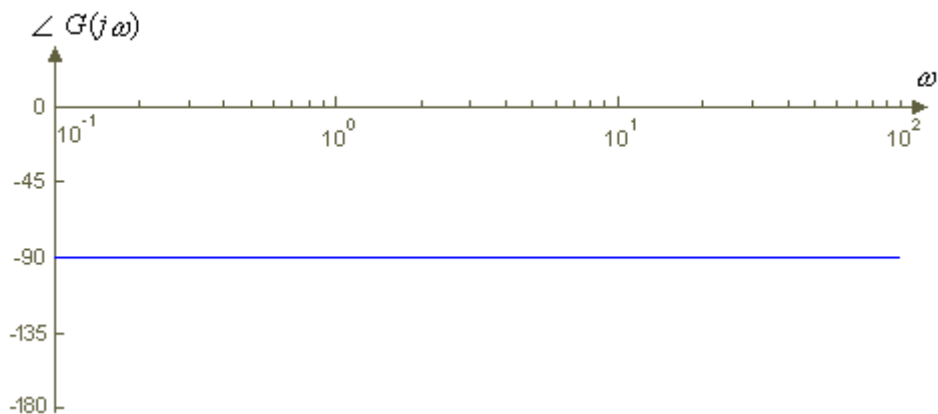
costante, la rossa continua il sistema approssimato completo mentre in blu è riportato l'andamento reale.

- Per la fase:

1) $\angle 0.2$ non influisce (0°)

2) $\angle(-j\omega)$

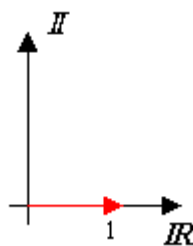
Questo termine introduce una fase pari a -90° per tutte le frequenze



3) $\angle(1+j\omega)$

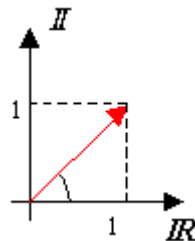
Il termine $(1+j\omega)$ rappresenta un vettore con parte reale pari a 1 e parte immaginaria pari a ω e quindi:

a) $\omega \rightarrow 0$



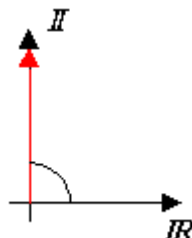
$$\angle(1+j\omega) = 0^\circ$$

b) $\omega = 1$



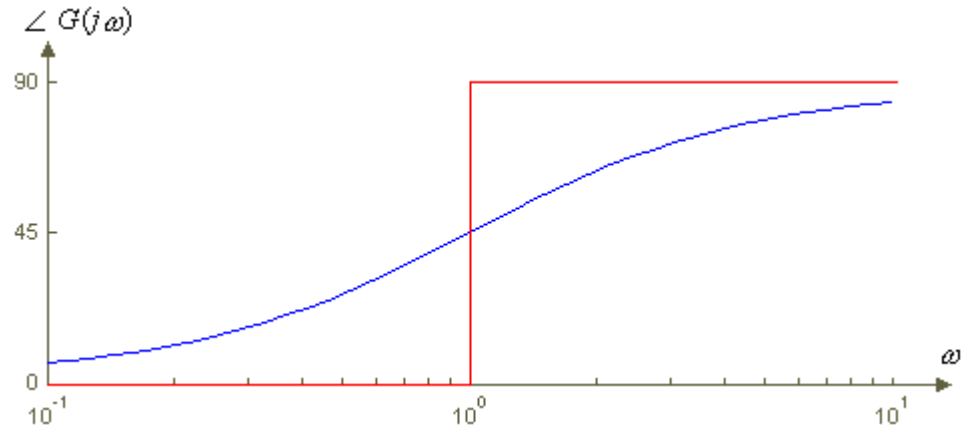
$$\angle(1+j\omega) = 45^\circ$$

c) $\omega \rightarrow \infty$



$$\angle(1+j\omega) = 90^\circ$$

L'andamento della fase per questo termine risulta quindi essere:



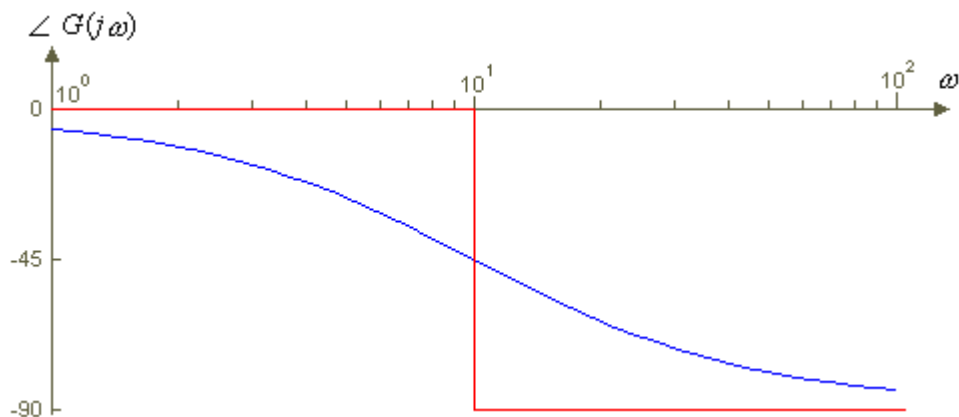
La linea rossa è l'andamento approssimato, mentre in blu quello reale; in molti testi viene utilizzata un altro tipo di approssimazione ma nel seguito varrà utilizzato sempre quello appena mostrato.

4) $\angle \{-[1+(j\omega/10)]\}$

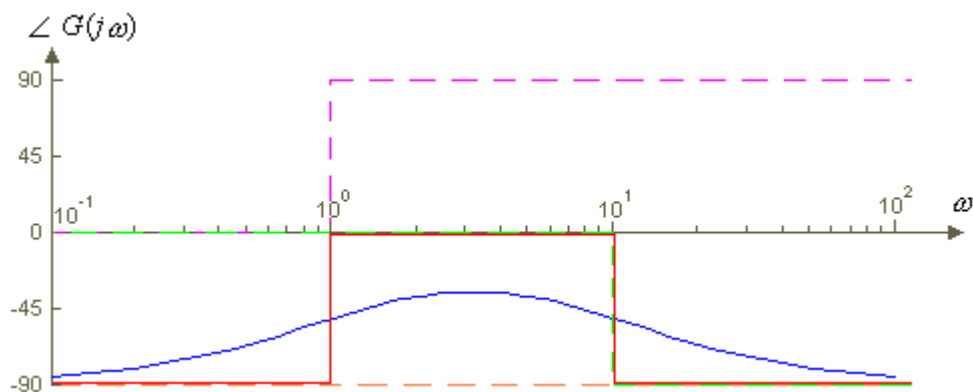
Con ragionamenti analoghi al termine appena visto si ha che:

- a) $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \angle \{-[1+(j\omega/10)]\} = 0^\circ$
- b) $\omega = 10 \Rightarrow \angle \{-[1+(j\omega/10)]\} = 45^\circ$
- c) $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle \{-[1+(j\omega/10)]\} = 90^\circ$

e quindi, con la solita convenzione dei colori per il grafico approssimato e per quello reale:



Sommando la fase dei singoli elementi si ottiene alla fine il seguente grafico, in cui la linea tratteggiata color arancio si riferisce alla componente 2), la viola alla 3) e la verde alla 4); la linea rossa identifica il sistema approssimato completo mentre in blu è riportato l'andamento reale:



9.3.2. Regole per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo

Riprendendo in considerazione la (9.8.) cioè la *forma di Bode*:

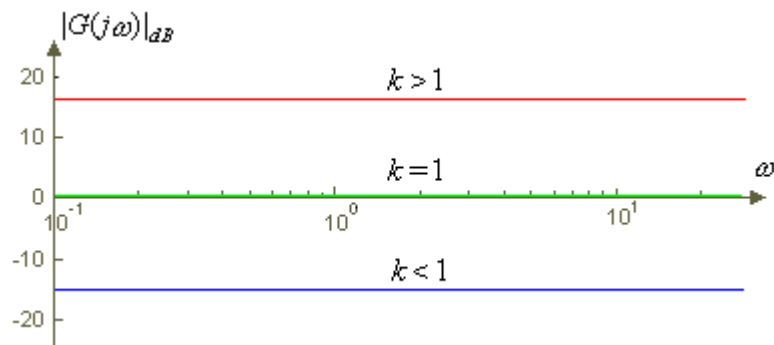
$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} + \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

si può notare che, qualsiasi funzione di trasferimento è costruita da una combinazione dei seguenti quattro componenti:

- 1) $\pm k$ costante di guadagno

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |k|$$

A questo termine corrisponde una retta parallela all'asse delle ascisse (delle ω) con ordinata positiva, negativa o nulla a seconda che il modulo di k sia maggiore, minore o uguale a 1.

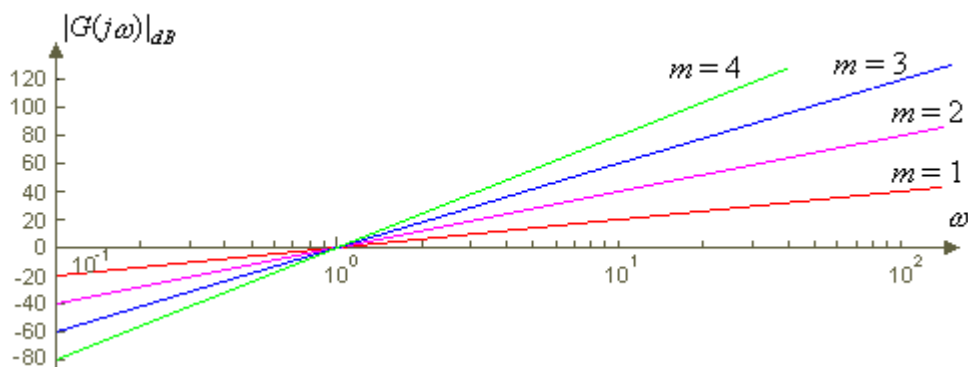


- 2) $(j\omega)^{\pm m}$ zeri/poli nell'origine

- a) zeri nell'origine (+ m)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |(j\omega)^m| = m \cdot 20 \log_{10} \omega$$

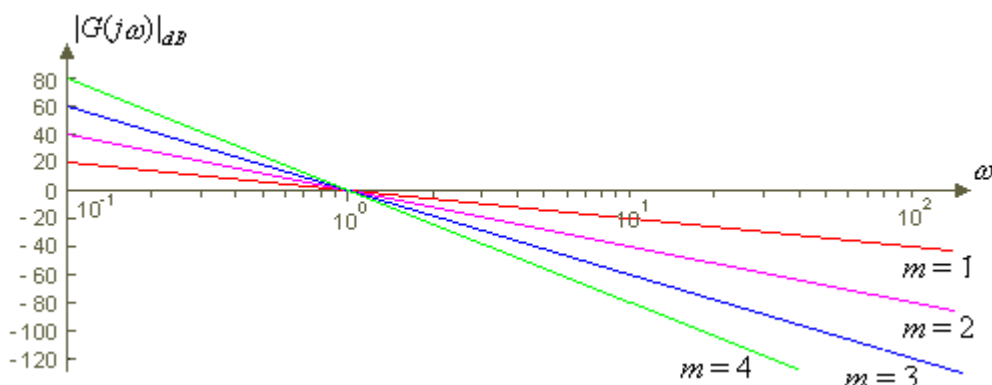
Questo termine inserisce una retta con una pendenza pari a $m \cdot 20$ dB/dec. e tale che per $\omega = 1$ si ha $|G(j\omega)| = 0$; per diversi valori di m :



b) poli nell'origine ($-m$)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} |(j\omega)^{-m}| = -m \cdot 20\log_{10} \omega$$

In questa situazione si ha una retta con una pendenza pari a $-m \cdot 20 \text{ dB/dec.}$ e tale che per $\omega = 1$ si ha $|G(j\omega)| = 0$; per diversi valori di m è:



3) $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$ zeri/poli semplici o ripetuti

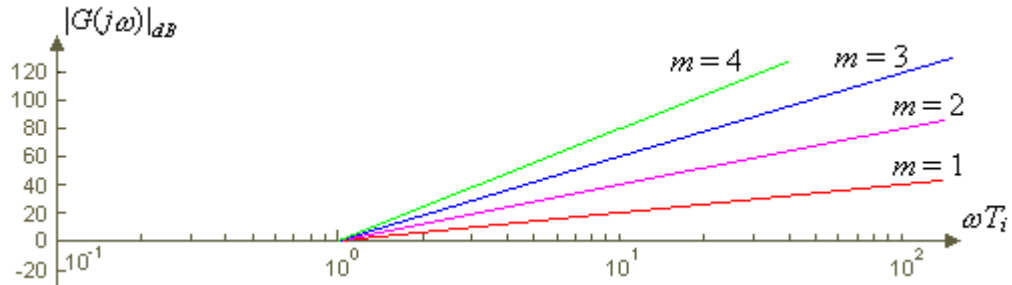
a) zeri ($+m$)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10} |(1 + j\omega T_i)^m| = m \cdot 20\log_{10} |1 + j\omega T_i|$$

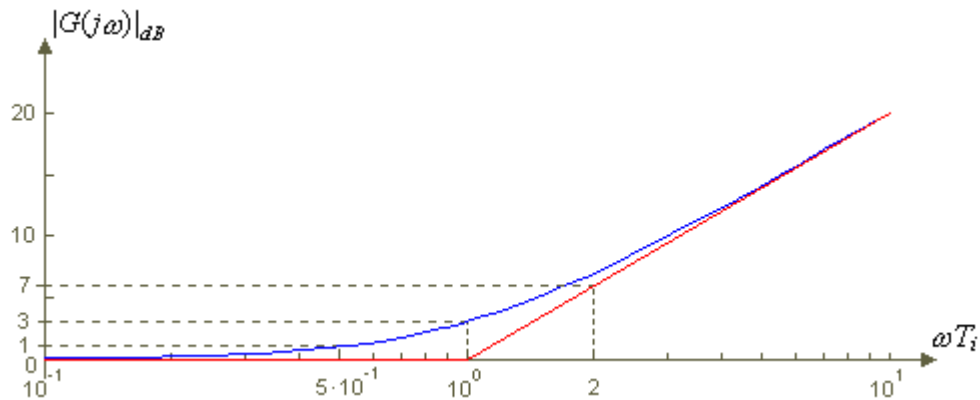
Per costruire il diagramma di Bode asintotico del modulo si considerano le seguenti approssimazioni:

- I. $\omega \ll 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = 0$
questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0 dB ;
- II. $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = m \cdot 20\log_{10}(\omega T_i)$
in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la retta con pendenza pari a $m \cdot 20 \text{ dB/dec.}$ e passante per la frequenza $\omega = 1/T_i$.

La frequenza $\omega = 1/T_i$ è detta *frequenza d'angolo* ed il punto d'intersezione degli asintoti viene definito *punto di rottura*; nel grafico sono riportati i diversi andamenti approssimati per diversi valori di m con l'asse delle ascisse normalizzato (la costante di normalizzazione è, evidentemente $1/T_i$).



Considerando il caso in cui $m = 1$, è interessante confrontare l'andamento approssimato con quello reale:

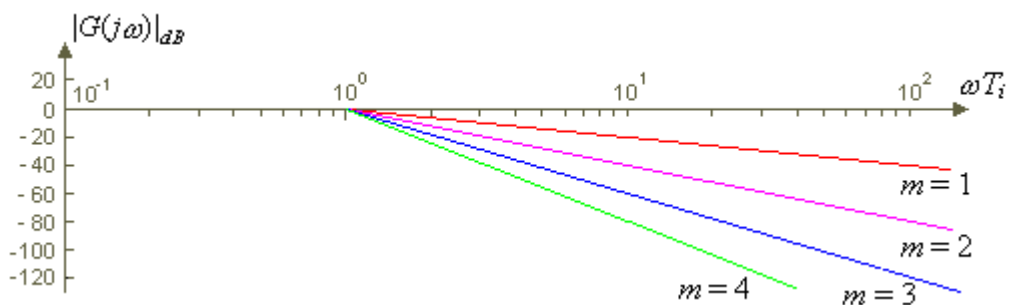


La curva effettiva si discosta di 3 dB alla *frequenza d'angolo* ed è possibile ricavare altri punti notevoli della curva effettiva per $\omega/T_i = 0,5$ in cui il modulo risulta uguale a 1 dB e per $\omega/T_i = 2$ in cui il modulo risulta uguale a 7 dB.

b) poli ($-m$)

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |(1 + j\omega T_i)^{-m}| = -m \cdot 20 \log_{10} |1 + j\omega T_i|$$

Con considerazioni del tutto analoghe al caso degli zeri e tenendo presente che questa volta le pendenze sono negative ($-m \cdot 20$ dB/dec.) si ottiene, per diversi valori del parametro m il seguente grafico:



4) $(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i - \omega^2/\omega_i^2)^{\pm 1}$ zeri/poli complessi coniugati ($\xi_i < 1$)

a) zeri complessi coniugati

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i - \omega^2/\omega_i^2| = 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_i^2)^2 + (2\xi_i \omega/\omega_i)^2}$$

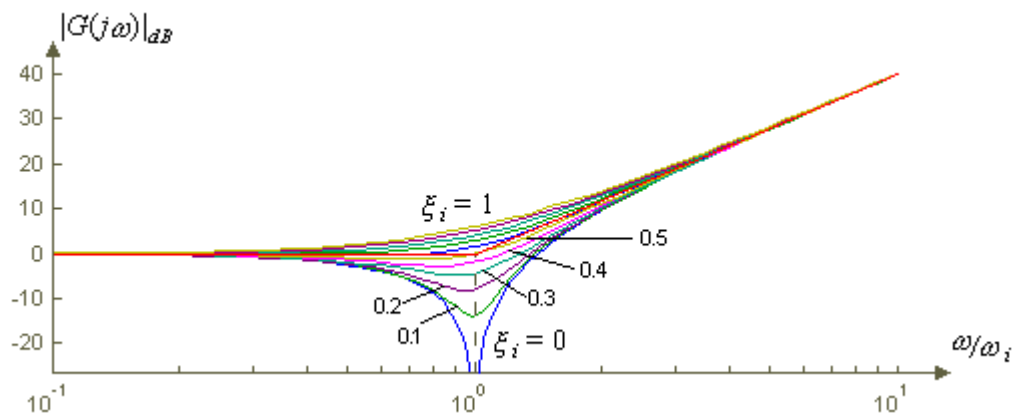
Per costruire il diagramma di Bode asintotico si considerano le seguenti approssimazioni:

- I. $\omega \ll \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0$
questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0 dB;
- II. $\omega \gg \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} (\omega/\omega_i)^2 = 40 \log_{10} (\omega/\omega_i)$
in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la retta con pendenza pari a 40 dB/dec. e passante per la frequenza $\omega = \omega_i$.

La frequenza ω_i è la *frequenza d'angolo* e per $\omega = \omega_i$ si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} 2\xi_i$$

valore che ovviamente aumenta al crescere di ξ_i .



Una situazione particolare si ha quando $\xi_i = 0$, cioè nel caso di due zeri immaginari puri; il fattore in esame diviene così $(1 - \omega^2/\omega_i^2)$ e ai due asintoti che si ottengono normalmente se ne aggiunge un terzo dato da una retta verticale che interseca l'asse delle ascisse sempre in ω_i .

Si noti che l'approssimazione asintotica (in rosso) non è sufficientemente rappresentativa della risposta in frequenza nel caso in cui ξ_i assuma valori minori di 0.4, valori per i quali è opportuno apportare la relativa correzione; la curva reale interseca l'asse 0 dB per $\omega/\omega_i = 1$ quando $\xi_i = 0.5$.

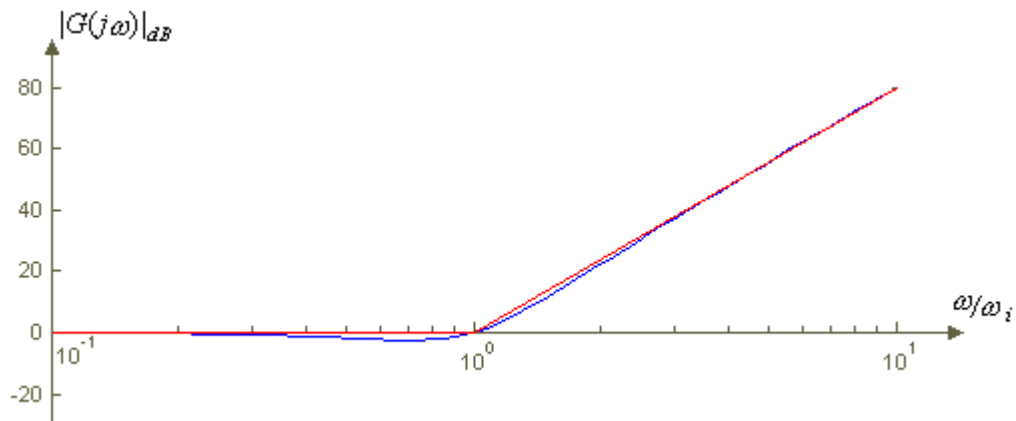
La frequenza ω_r per la quale si ottiene il minimo valore si definisce *frequenza di risonanza*; al variare del coefficiente di smorzamento è individuata annullando la derivata rispetto a ω/ω_i del modulo del fattore stesso:

$$\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - 2\xi_i^2} < \omega_i \quad (9.11)$$

e ad essa corrispondono i valori minimi:

$$M_s = -\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (9.12)$$

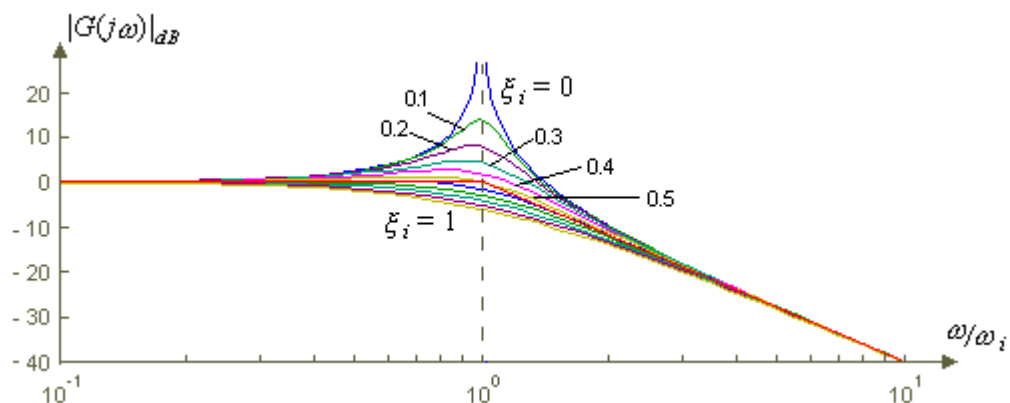
Se le coppie di zeri complessi coniugati sono più d'una, l'andamento di $|G(j\omega)|$ è simile; l'unica differenza è che l'asintoto ora cresce non più con una pendenza di 40 dB/dec. ma con una di $n \cdot 40$ dB/dec. (n numero di coppie di zeri complessi coniugati coincidenti); fissato $\xi_i = 0.5$ si ha con $n = 2$:



b) poli complessi coniugati

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} |(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i - \omega^2/\omega_i^2)^{-1}| = \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_i^2)^2 + (2\xi_i \omega/\omega_i)^2} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, utilizzando quanto visto per gli zeri si arriva a costruire, in maniera analoga, il seguente diagramma:



Tutte le considerazioni e i parametri visti per gli zeri sono valide tenendo presente l'unica differenza data dal segno (es. la pendenza è di - 40 dB/dec.).

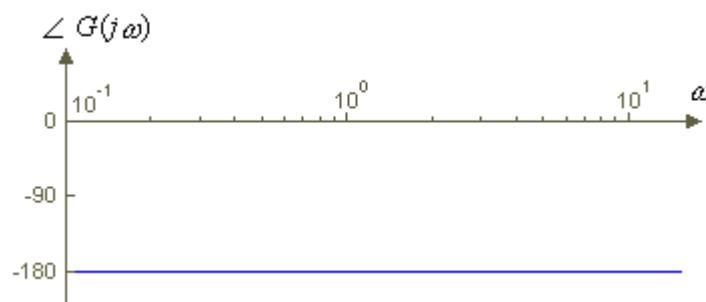
9.3.3. Regole per il tracciamento del diagramma asintotico della fase

Per il disegno del diagramma asintotico della fase si devono di nuovo analizzare singolarmente le solite quattro componenti:

- 1) $\pm k$ costante di guadagno

$$\angle G(j\omega) = \angle(\pm k)$$

Questo termine non influisce sulla fase se è positivo; nel caso, invece, in cui il termine di guadagno sia $-k$ introduce una fase pari a -180° ($-\pi$):



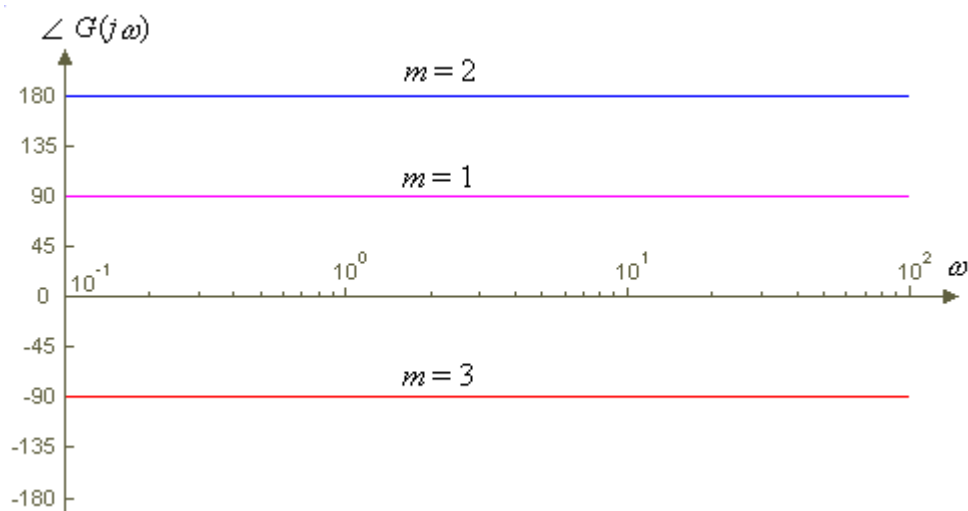
Si ricordi che il grafico della fase a volte può essere riportato anche fra -180° e 180° ; in tal caso è ovvio che la presenza di una costante di guadagno negativa può essere riportata indifferentemente a $+180^\circ$ o -180° .

- 2) $(j\omega)^{\pm m}$ zeri/poli nell'origine

- a) zeri nell'origine ($+m$)

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega)^m = m \cdot 90^\circ = m \frac{\pi}{2}$$

Questi zeri introducono un *anticipo di fase* o *anticipano*; per diversi valori di m :

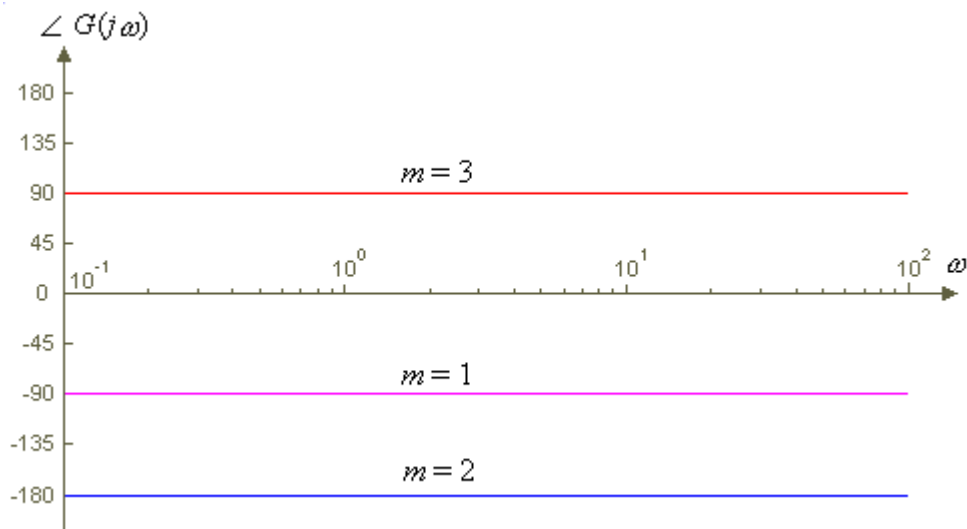


Anche in questo caso si deve tener presente che, se la rappresentazione della fase avviene fra -180° e 180° , il caso $m = 2$ può essere riportato indifferentemente ai due estremi, mentre per il caso $m = 3$ si considera che la fase 270° coincide con -90°

b) poli nell'origine ($-m$)

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^{-m} = -m \cdot 90^\circ = -m \frac{\pi}{2}$$

Questi poli introducono un *ritardo di fase* o *ritardano*; con le stesse considerazioni fatte per gli zeri, si ha, per diversi valori di m :



Si noti che in questo caso il termine corrispondente a $m = 3$ che introduce uno sfasamento pari a -270° viene riportato a 90° .

3) $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$ zeri/poli semplici o ripetuti

a) zeri ($+m$)

$$\angle G(j\omega) = \angle (1 + j\omega T_i)^m$$

Per prima cosa si considera il caso di $m = 1$ per il quale si ha che:

$$\angle G(j\omega) = \angle (1 + j\omega T_i) = \arctg(\omega T_i)$$

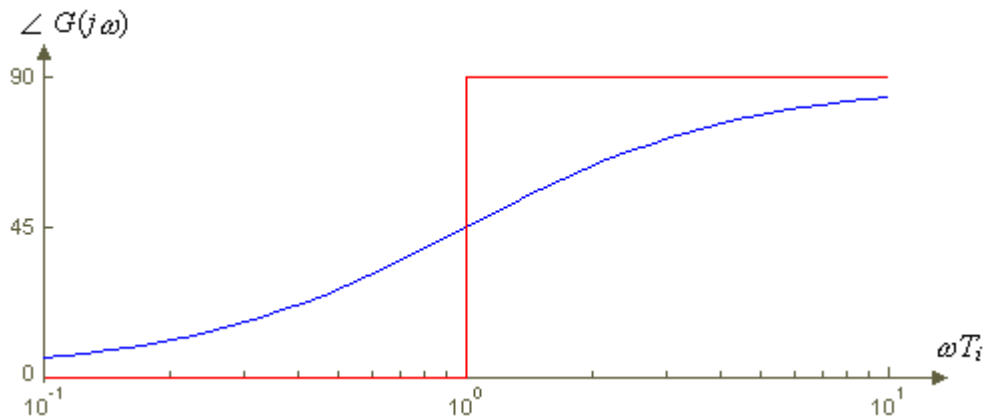
e per costruire il diagramma di Bode asintotico della fase si considerano le seguenti approssimazioni:

I. $\omega \ll 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$

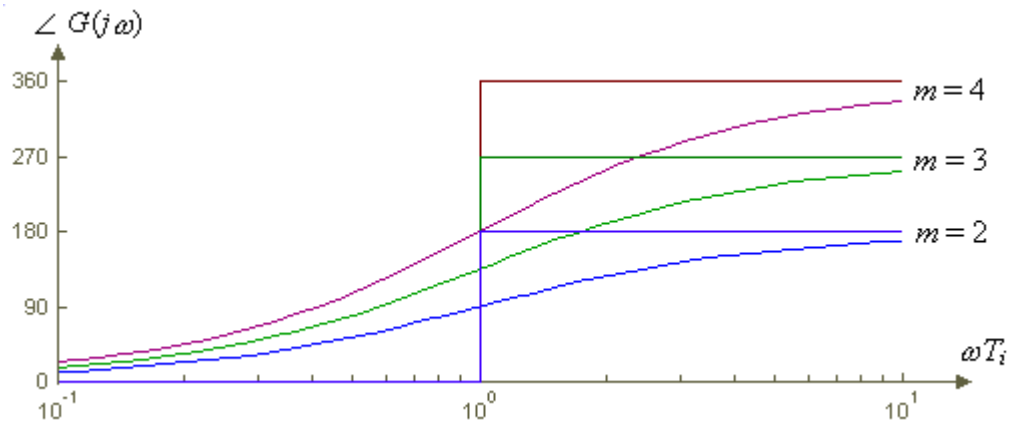
II. $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 90^\circ$

III. $\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 45^\circ$

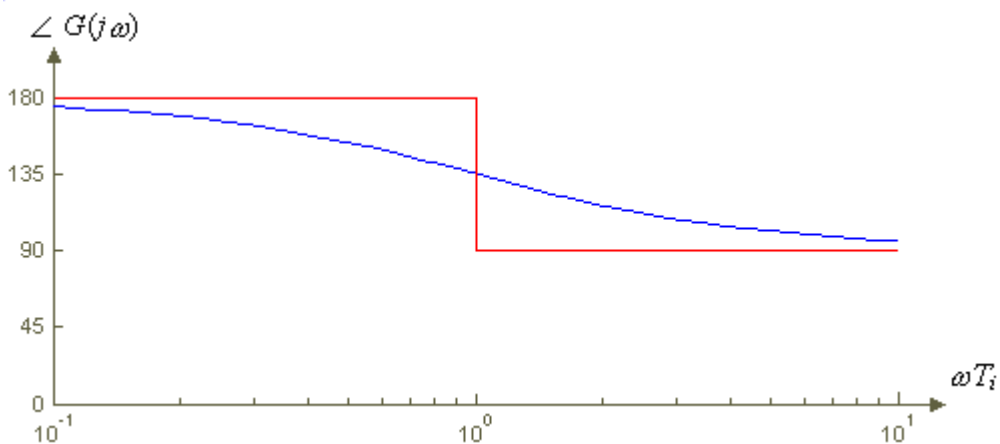
Il diagramma approssimato così ottenuto è riportato di seguito (in rosso) insieme all'andamento reale (in blu); si noti che in tale grafico l'asse delle ascisse è normalizzato (costante di normalizzazione pari a $1/T_i$).



Nel caso in cui sia $m > 1$ si ha che per $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 90^\circ$ e per $\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 45^\circ$; diagrammi (asintotici e reali) diversi per diversi valori di m sono:



Si deve fare attenzione al caso in cui gli zeri siano a parte reale positiva; un tale termine introduce una fase pari a $180^\circ - \arctg(\omega T_i)$ e quindi, sfruttando quanto visto sopra gli andamenti asintotico e reale sono:



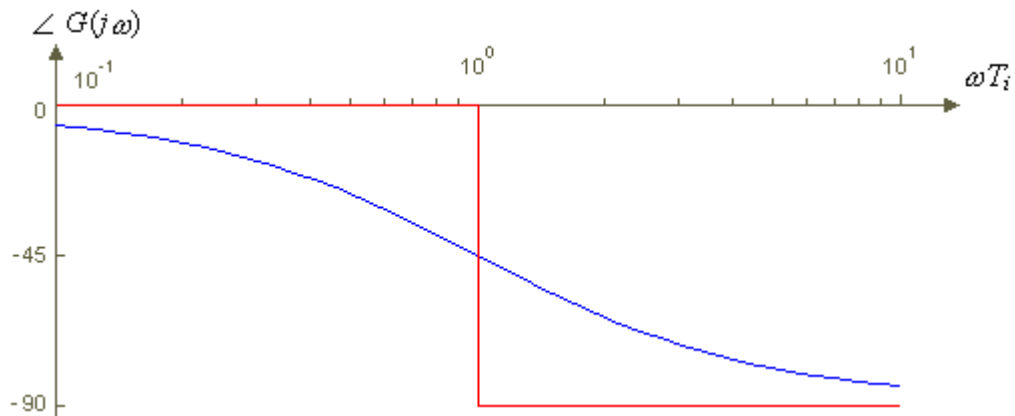
b) poli ($-m$)

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-m}$$

Considerando il caso di $m = 1$ si ha che:

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-1} = -\angle(1 + j\omega T_i) = -\arctg \omega T_i$$

Le considerazioni fatte per gli zeri sono valide anche per i poli e il diagramma asintotico che se ne ricava, tenendo presente la differenza del segno, è:



4) $(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i - \omega^2/\omega_i^2)^{\pm 1}$ zeri/poli complessi coniugati ($\xi_i < 1$)

a) zeri complessi coniugati

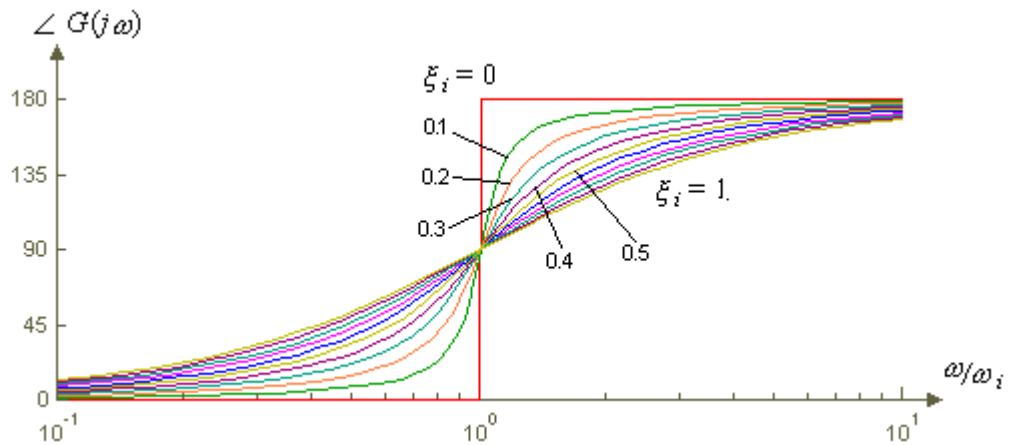
$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i - \omega^2/\omega_i^2) = \arctg \frac{2\xi_i \omega/\omega_i}{1 - \omega^2/\omega_i^2}$$

Per costruire il diagramma di Bode asintotico della fase si considerano le seguenti approssimazioni:

- I. $\omega \ll \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$
questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0° ;
- II. $\omega \gg \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = \arctg(-2\xi_i \omega_i/\omega) = 180^\circ$
l'approssimazione individua un altro asintoto dato dalla semiretta a 180°

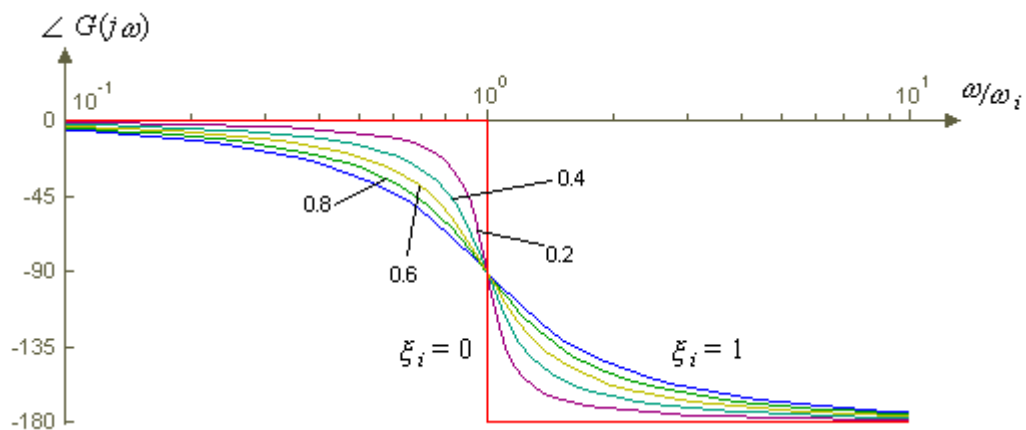
Si può poi notare che quando la frequenza assume il valore della frequenza d'angolo $\omega = \omega_i$ la fase è: $\angle G(j\omega) = \arctg[2\xi_i/(1 - 1)] = 90^\circ$.

L'andamento del diagramma asintotico (in rosso) e quello di diagrammi reali per vari valori di ξ_i sono:



Il diagramma approssimato della fase coincide con il caso reale quando lo smorzamento è nullo.

Se il termine in esame deriva da una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva, la fase risulta pari a $360^\circ - \arctg[2\xi_i \omega/\omega_i / (1 - \omega^2/\omega_i^2)]$; sfruttando quanto visto sopra e ricordando che per la fase 360° è equivalente a 0° , si ha che gli andamenti asintotico e reale, sempre in funzione di diversi valori del coefficiente di smorzamento, sono (anche in questo caso il diagramma asintotico e quello reale coincidono per $\xi_i = 0$):



b) poli complessi coniugati

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i + \omega^2/\omega_i^2)} = 0^\circ - \arctg \frac{2\xi_i \omega/\omega_i}{1 - \omega^2/\omega_i^2}$$

Per costruire il diagramma di Bode asintotico della fase di una coppia di poli complessi coniugati è quindi sufficiente utilizzare le stesse considerazioni fatte per gli zeri, ottenendo così gli stessi diagrammi, rovesciati rispetto all'asse delle frequenze; si ottiene quindi un grafico identico al caso di una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva.

9.3.4. Procedura per la costruzione dei diagrammi di Bode

Utilizzando tutte le nozioni viste finora è possibile ricavare i diagrammi di Bode asintotici di una qualsiasi risposta $G(s)$ seguendo la seguente procedura:

1. Riportare la $G(s)$ in termini di componenti, cioè nella forma fattorizzata (9.7.)
2. Riscrivere la risposta in forma di Bode (9.8.)
3. Imporre che la costante di guadagno sia pari a 1
4. Riportare sul grafico logaritmico tutte le frequenze d'angolo
5. Disegnare tutte le componenti partendo dalle frequenze più basse
6. Sommare e sottrarre le ampiezze al crescere di ω
7. Ripetere il passo 6. per le fasi
8. Spostare il diagramma delle ampiezze ricavato del termine di guadagno, pari a $20 \cdot \log_{10} k$

Esempio

$$G(s) = \frac{50 \cdot (s + 100)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s^2 + 10s + 100)}$$

1. Riportare la $G(s)$ in termini di componenti, cioè nella forma fattorizzata (9.7.)

$$G(s) = 50 \cdot \frac{100 \cdot \left(1 + \frac{s}{100}\right)}{s \cdot (1 + s) \cdot 100 \cdot \left(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100}\right)} = 50 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}{s \cdot (1 + s) \cdot \left(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

2. Riscrivere la risposta in forma di Bode (9.8.)

$$G(s) = 50 \cdot \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}{j\omega \cdot (1 + j\omega) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}$$

3. Imporre che la costante di guadagno sia pari a 1

$$G'(s) = \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}{j\omega \cdot (1 + j\omega) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}, \quad k = 50$$

4. Riportare sul grafico logaritmico tutte le frequenze d'angolo

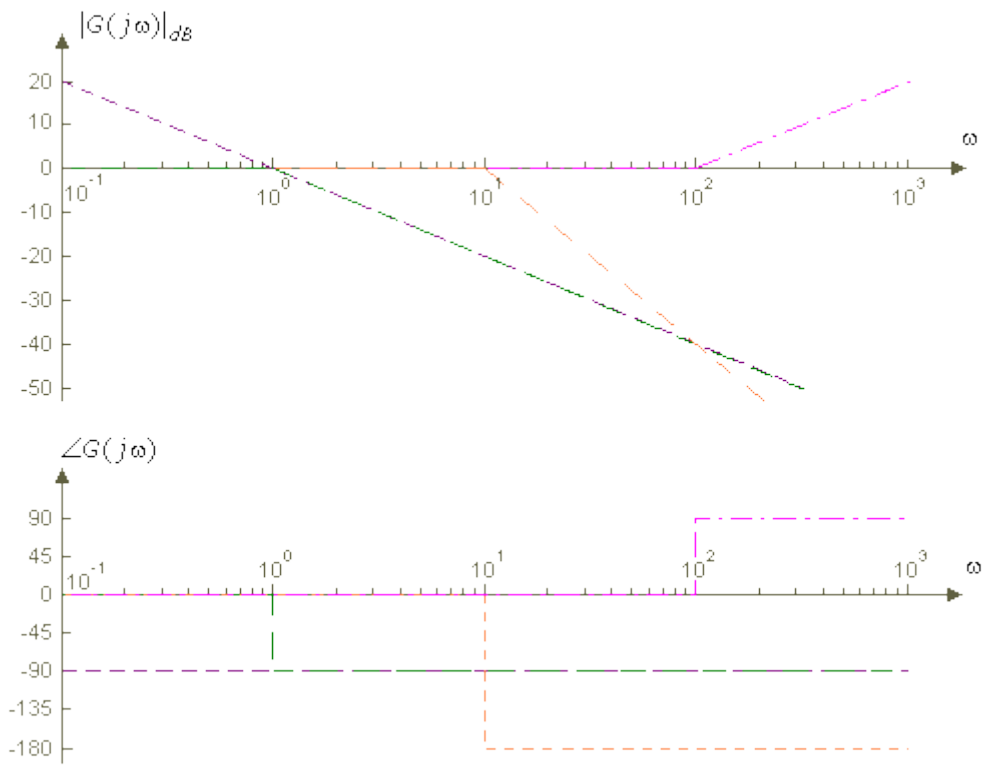
$$\left(1 + j\frac{\omega}{100}\right) \Rightarrow \omega_z = 100$$

$$(1 + j\omega) \Rightarrow \omega_{p1} = 1$$

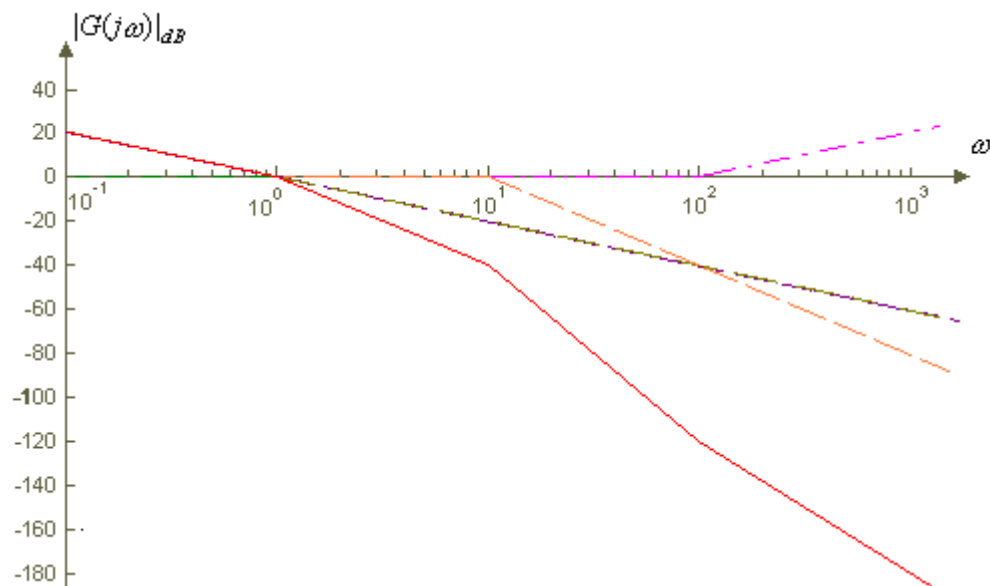
$$\left(1 + j\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right) \Rightarrow \omega_{p2} = 10, \quad \xi = 0.5$$



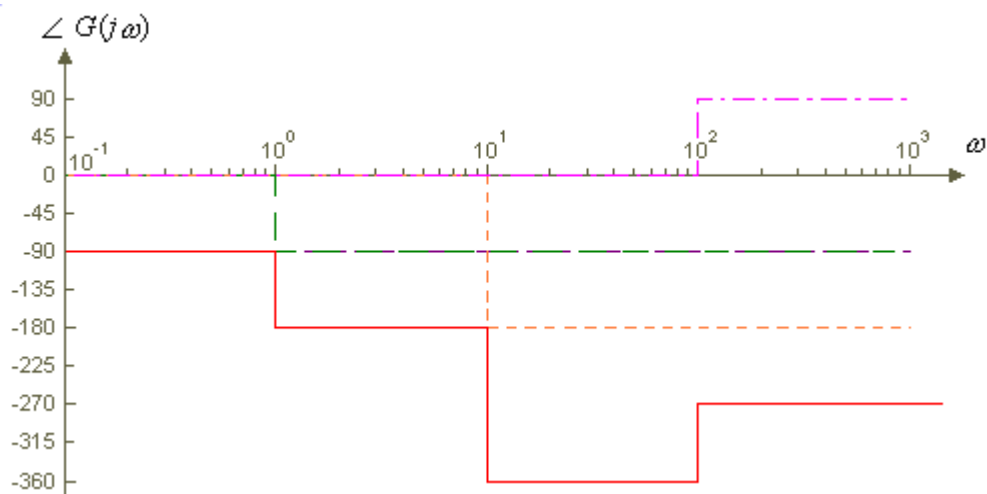
5. Disegnare tutte le componenti partendo dalle frequenze più basse



6. Sommare e sottrarre le ampiezze al crescere di ω



7. Ripetere il passo 6. per le fasi

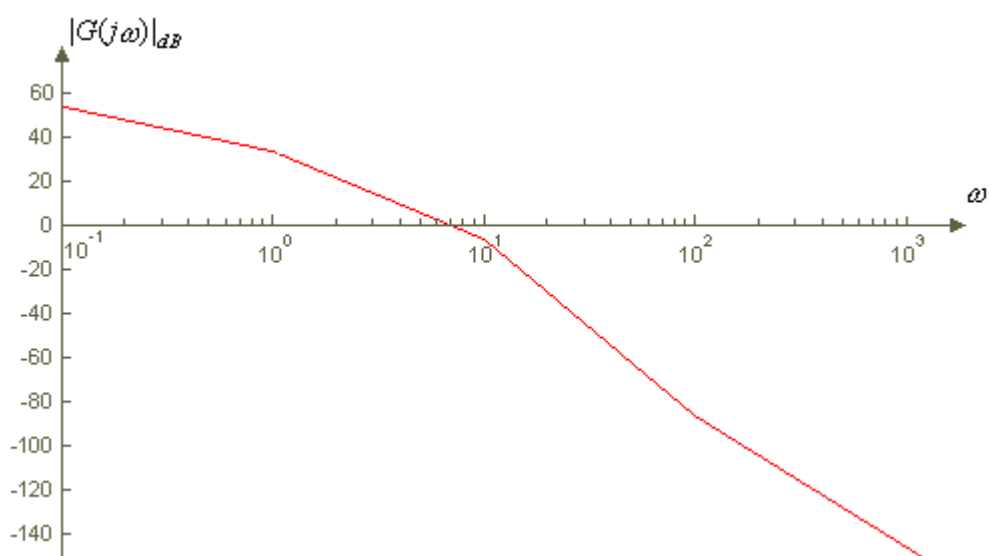


8. Spostare il diagramma delle ampiezze ricavato dal termine di guadagno, pari a $20 \cdot \log_{10} k$

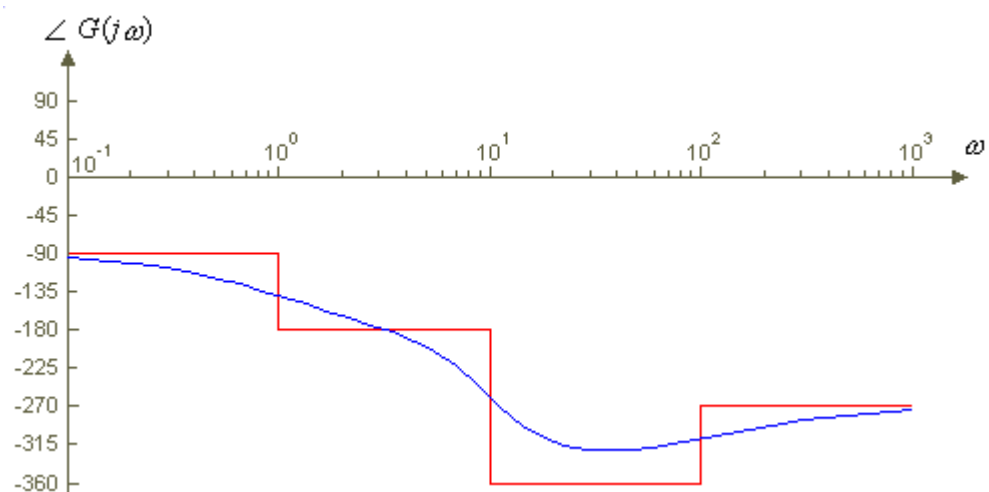
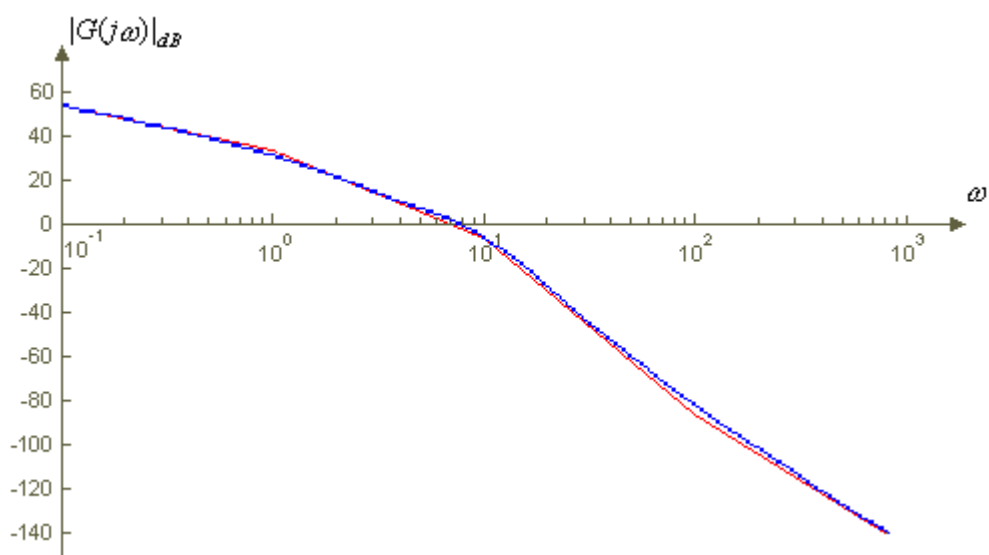
In questo caso è:

$$20 \cdot \log_{10} 50 = 33.98 \text{ dB}$$

e il diagramma asintotico delle ampiezze risulta:



Per verifica vengono riportati i diagrammi asintotici (in rosso) e quelli reali (in blu) di ampiezza e fase:



9.4. Diagrammi polari

9.4.1. Introduzione ai diagrammi polari

I diagrammi polari (o di Nyquist) sono una rappresentazione grafica alternativa della risposta in frequenza di sistemi lineari.

Data una funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare è il disegno di parte reale e parte immaginaria nel piano complesso posto che sia $s = j\omega$ ($\text{Re}[G(j\omega)]$ e $\text{Im}[G(j\omega)]$) e $\omega \in [0, \infty)$.

In molti casi il diagramma polare viene disegnato per un range di frequenze $\omega \in (-\infty, \infty)$; si noti che l'andamento del diagramma per $\omega \in (-\infty, 0^-]$ è il simmetrico, rispetto all'asse delle ascisse, del diagramma ottenuto per $\omega \in [0^+, \infty)$.

Per ottenere un diagramma polare si può seguire la seguente procedura:

1. Portare la $G(s)$ in forma fattorizzata:

$$G(s) = \frac{k \prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_{iz}\omega_{iz}s + \omega_{iz}^2)}{s^r \prod_i (s - p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_{ip}\omega_{ip}s + \omega_{ip}^2)} \quad (9.13)$$

2. Riscrivere la $G(s)$ ponendo $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (-z_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{iz}^2 + 2j\xi_{iz}\omega_{iz}\omega)}{(j\omega)^r \prod_i (-p_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{ip}^2 + 2j\xi_{ip}\omega_{ip}\omega)} \quad (9.14)$$

3. Riportare la $G(j\omega)$ in componenti reale e immaginaria:

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]$$

4. Trovare i valori di parte reale e parte immaginaria agli estremi dell'intervallo di interesse, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re}[G(j\omega)], \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Im}[G(j\omega)] \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Re}[G(j\omega)], \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Im}[G(j\omega)] \end{aligned}$$

5. Trovare i punti in cui la curva attraversa gli assi, cioè i valori di ω per cui si ha $\text{Re}[G(j\omega)] = 0$ e $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$.
6. Ricavare ampiezza e fase di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$

Esempio

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10}$$

1. Portare la $G(s)$ in forma fattorizzata: in questo caso è già nella forma desiderata
2. Riscrivere la $G(s)$ ponendo $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{5 + j\omega}{10 + j\omega}$$

3. Riportare la $G(j\omega)$ in componenti reale e immaginaria:

$$G(j\omega) = \frac{5 + j\omega}{10 + j\omega} = \frac{(5 + j\omega)(10 - j\omega)}{(10 + j\omega)(10 - j\omega)} = \frac{50 + \omega^2}{100 + \omega^2} + j \frac{5\omega}{100 + \omega^2}$$

4. Trovare i valori di parte reale e parte immaginaria agli estremi dell'intervallo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{50 + \omega^2}{100 + \omega^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{5\omega}{100 + \omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{50 + \omega^2}{100 + \omega^2} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{5\omega}{100 + \omega^2} = 0$$

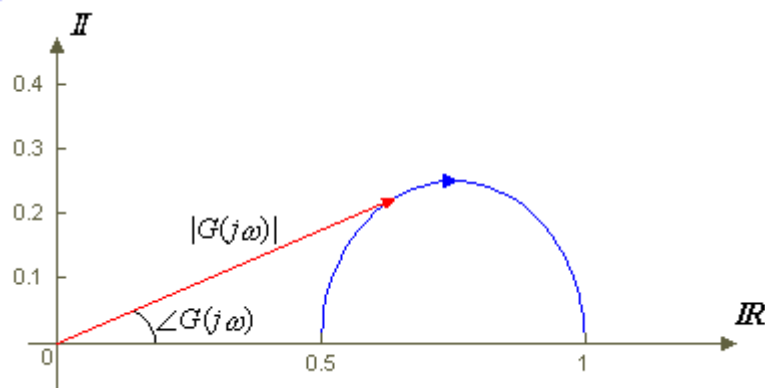
5. Trovare i punti in cui la curva attraversa gli assi, cioè i valori di ω per cui si ha $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0$ e $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0$; in questo caso non ci sono attraversamenti degli assi.

6. Ricavare ampiezza e fase di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$
Si trova banalmente che:

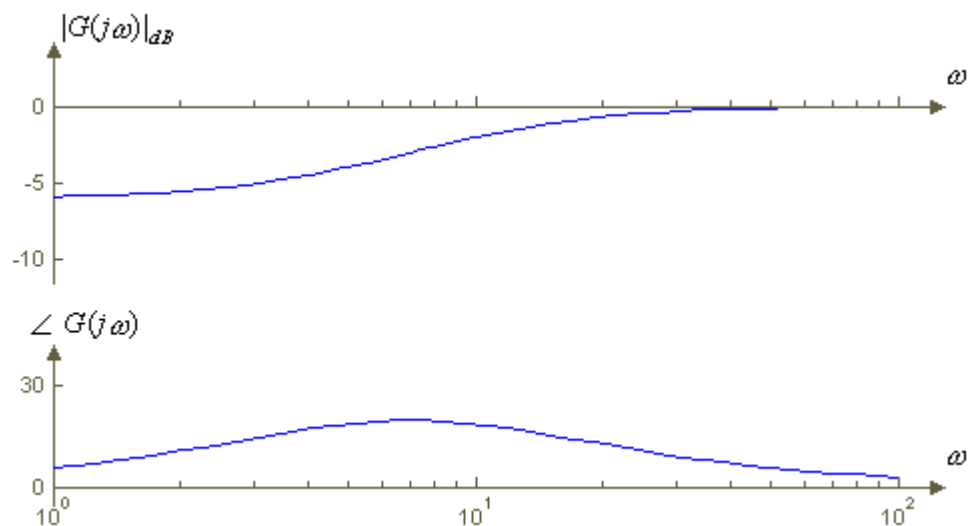
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = 0$$

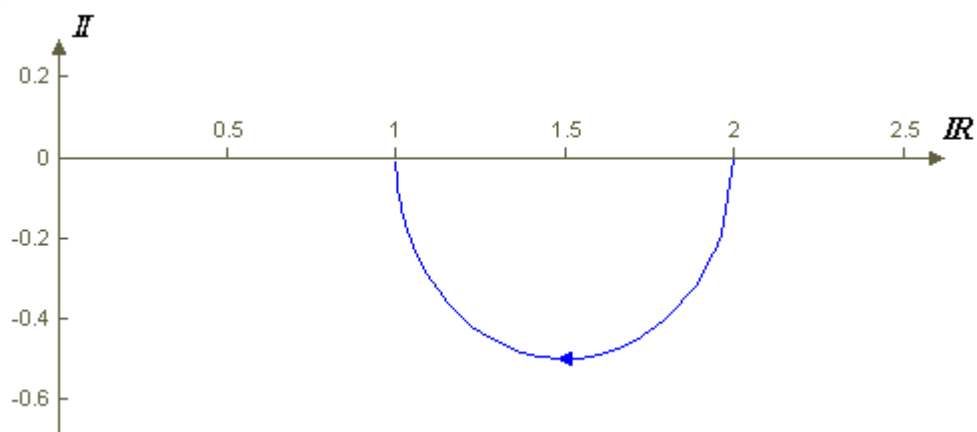
Il diagramma di Nyquist (curva in blu) risulta quindi essere:



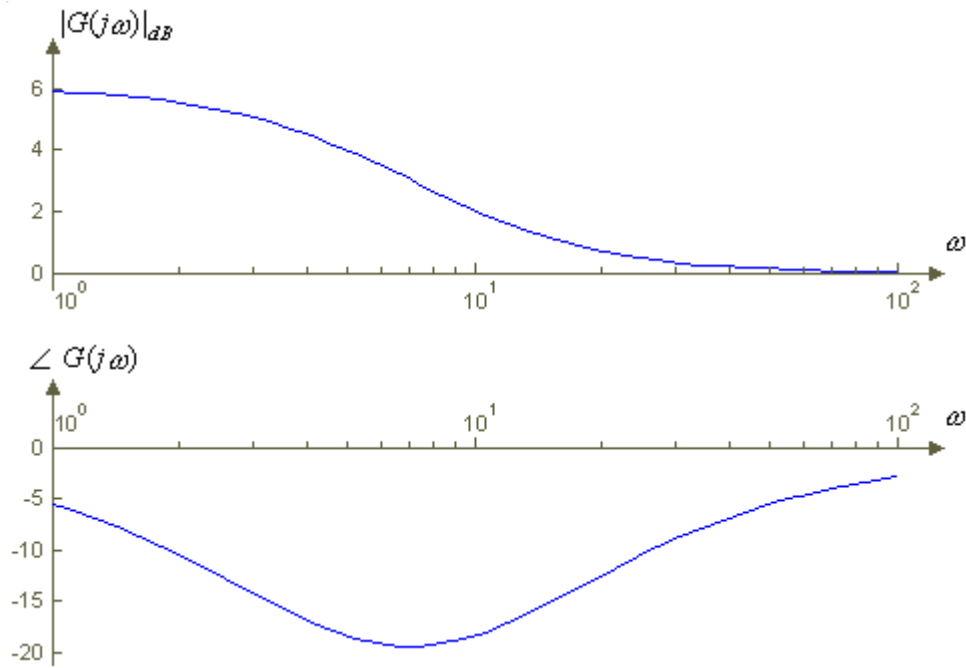
In rosso è stato riportato il vettore che rappresenta $G(j\omega)$ in modulo e fase; per capire meglio il funzionamento di tale diagramma può essere interessante osservare l'andamento della risposta in frequenza attraverso il relativo diagramma di Bode, che risulta:



E' interessante anche verificare che, invertendo numeratore e denominatore, il diagramma diventa:



Ciò avviene perché si ha che ora il polo è, in modulo, più piccolo dello zero e, come ci si poteva aspettare anche dall'analisi del relativo diagramma di Bode, l'ampiezza decresce prima di assestarsi e la fase che parte da 0° , diventa negativa prima di tornare a 0° :



9.4.2. Tracciamento di diagrammi polari

Il tracciamento dei diagrammi polari viene sempre effettuato tramite la procedura vista in precedenza; viene qui mostrata la costruzione del diagramma polare per alcuni casi generici che risultano essere i più utili e interessanti (si noti che $P_i = -p_i$).

1. Un polo:

$$G(s) = \frac{k}{s + P}$$

seguendo i passi della procedura, si ottiene:

$$G(j\omega) = \frac{k}{P + j\omega}$$

$$G(j\omega) = \frac{kP}{P^2 + \omega^2} + j \frac{-k\omega}{P^2 + \omega^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{kP}{P^2 + \omega^2} = \frac{k}{P}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega}{P^2 + \omega^2} = 0$$

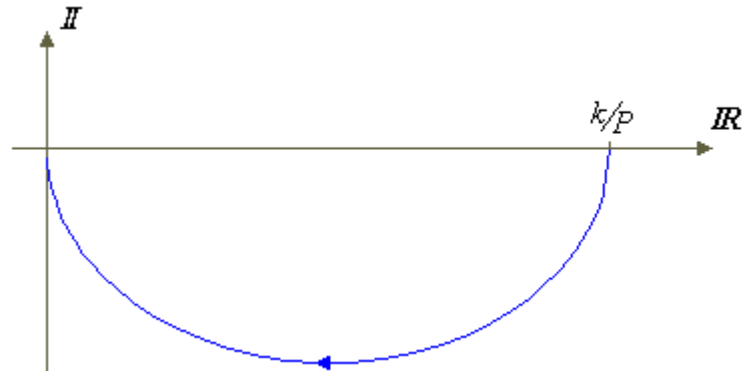
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{kP}{P^2 + \omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega}{P^2 + \omega^2} = 0$$

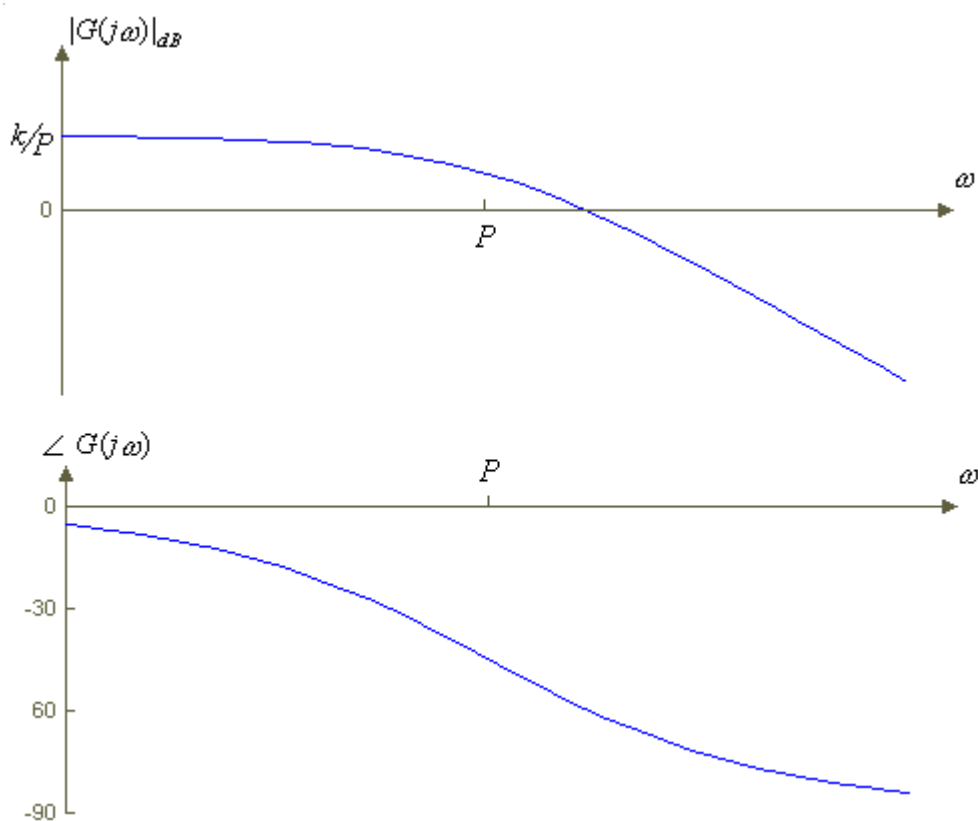
Non si verifica mai l'attraversamento degli assi e si ricava facilmente che:

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{P^2 + \omega^2}, \quad \angle G(j\omega) = 0^\circ - \angle(P + \omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{P}\right)$$

L'andamento del diagramma polare sarà del tipo:



I relativi diagrammi di Bode di ampiezza e fase risultano:



2. Due poli:

$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)}$$

Seguendo la solita procedura:

$$G(j\omega) = \frac{k}{(P_1 + j\omega)(P_2 + j\omega)}$$

$$G(j\omega) = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = \frac{k}{P_1 P_2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

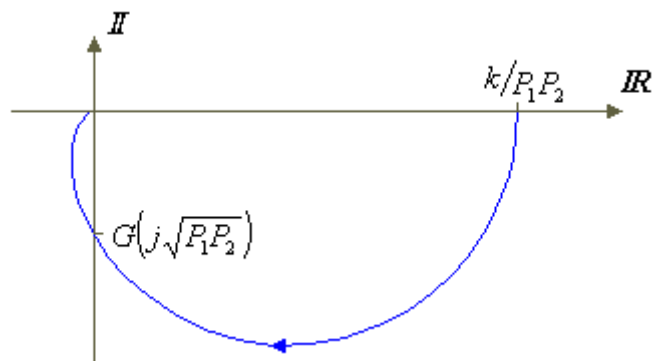
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

Cercando eventuali attraversamenti degli assi si nota che, mentre la parte immaginaria non può mai essere annullata (se non per i valori limite), per la parte reale si ha:

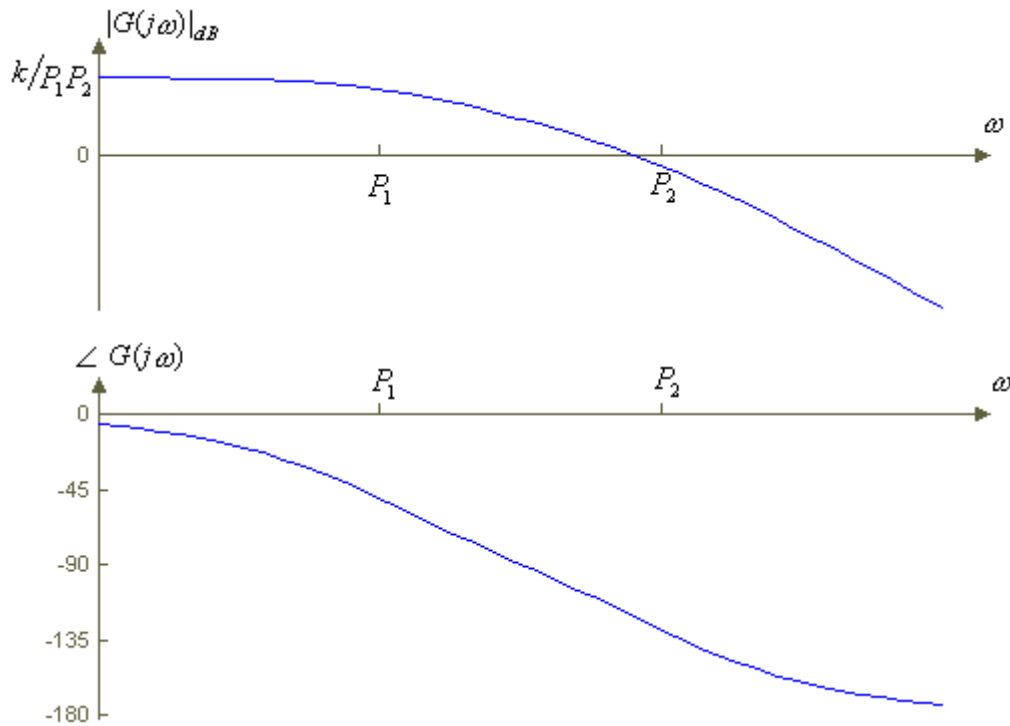
$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{P_1 P_2}$$

La curva attraversa quindi una volta l'asse immaginario mentre non attraversa quello reale; sostituendo la ω che annulla la parte reale nella parte immaginaria, si trova facilmente il punto di attraversamento.

Il diagramma polare è quindi:



mentre i relativi diagrammi di Bode sono:



3. Tre poli di cui uno nell'origine:

$$G(s) = \frac{k}{s(s + P_1)(s + P_2)}$$

Seguendo la solita procedura:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega \cdot (P_1 + j\omega)(P_2 + j\omega)}$$

$$G(j\omega) = \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -k \frac{P_1 + P_2}{P_1^2 P_2^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

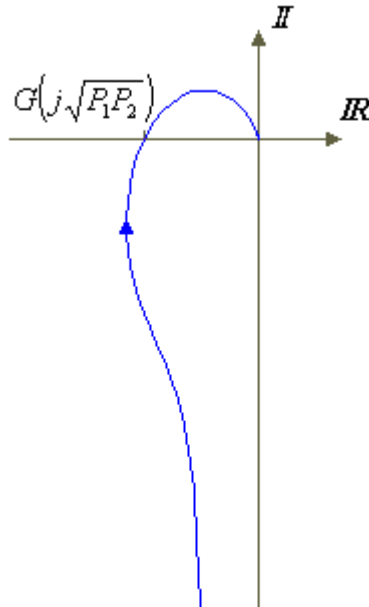
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

Cercando eventuali attraversamenti degli assi si nota che, mentre la parte reale non può mai essere annullata (se non per i valori limite), per la parte immaginaria si ha:

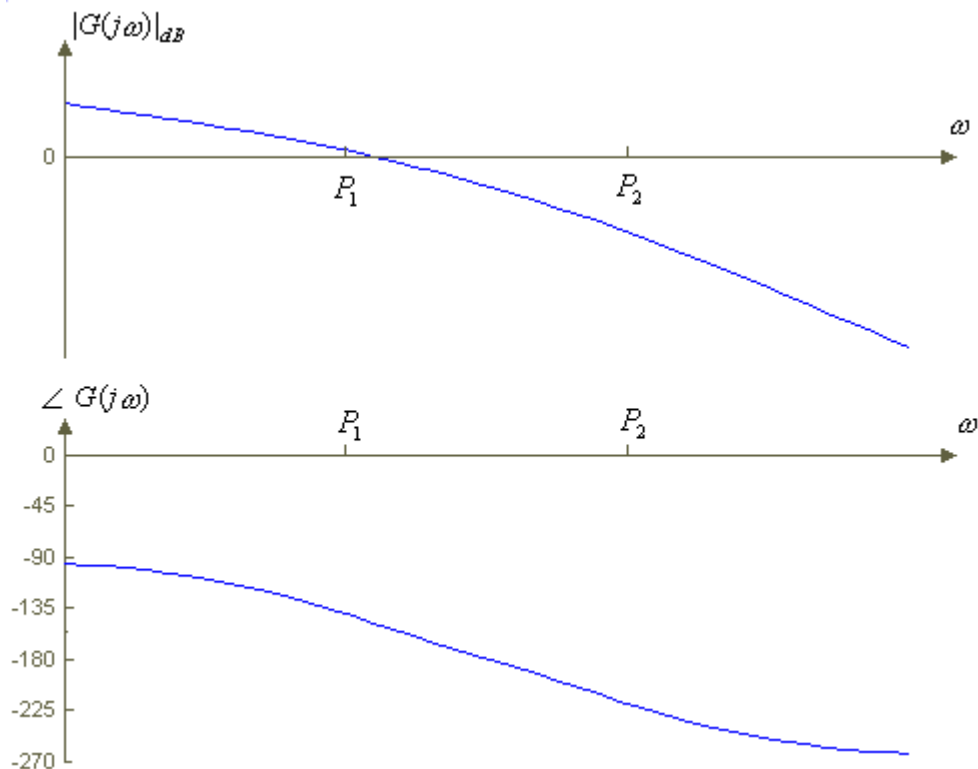
$$\text{Im}[G(j\omega)] = \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{P_1P_2}$$

La curva attraversa quindi una volta l'asse immaginario mentre non attraversa quello reale; anche in questo caso sostituendo la ω che annulla la parte immaginaria nella parte reale, si trova facilmente il punto di attraversamento.

Il diagramma polare è:



I diagrammi di Bode relativi a questa situazione sono:



Si noti che il diagramma di Bode della fase è molto d'aiuto nella costruzione del diagramma polare; da esso infatti è banale ricavare l'angolo con cui la curva del diagramma polare arriva nell'origine.

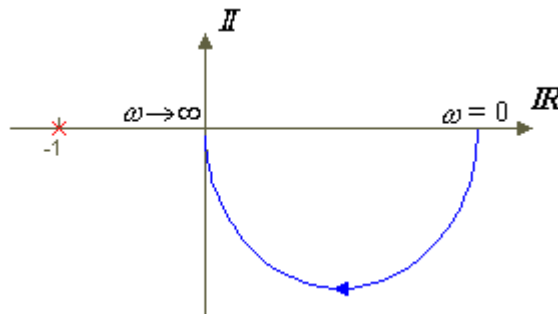
9.4.3. Regole generali per la costruzione dei diagrammi polari

L'andamento del diagramma è strettamente dipendente dai poli della risposta in frequenza; vengono qui mostrati andamenti caratteristici di funzioni generiche con uno o più poli alle quali è quasi sempre possibile fare riferimento.

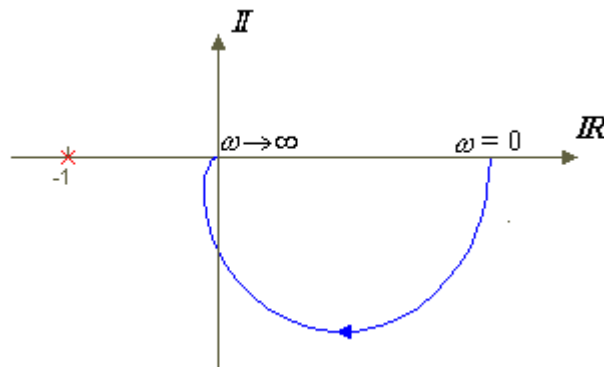
La prima operazione da effettuare nel costruire il diagramma polare è comunque sempre quella di determinare i valori assunti dalla risposta in frequenza nei valori limite ($\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$).

Come verrà mostrato più avanti, ha un'estrema importanza, essendo legato alla stabilità del sistema, il comportamento del diagramma polare nei riguardi del punto di coordinate $(-1, 0)$, che viene riportato nei seguenti grafici;

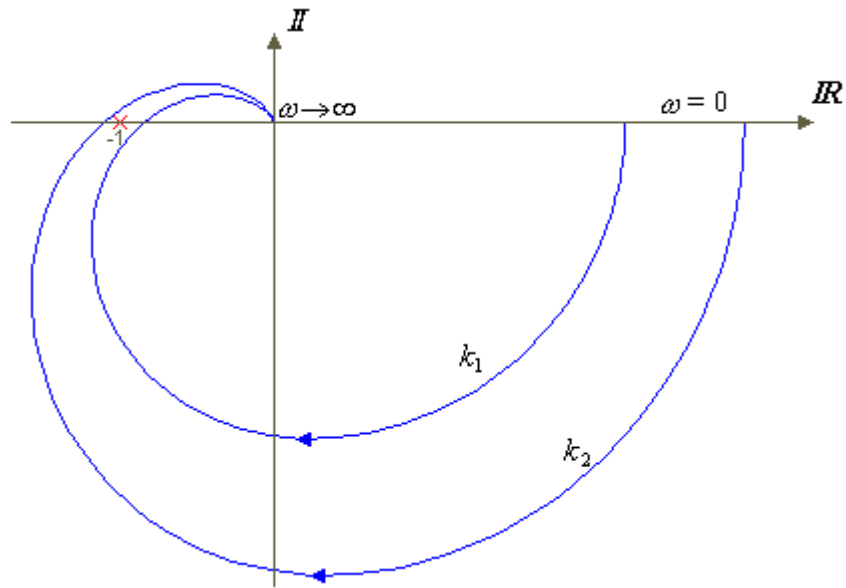
1)
$$G(s) = \frac{k}{s + P}$$



2)
$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)}$$

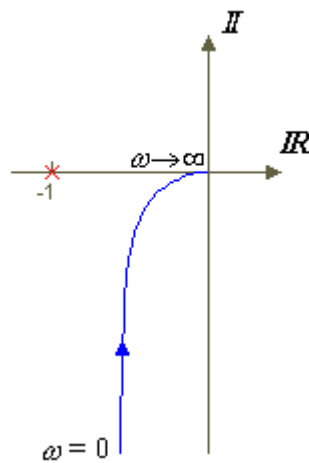


3)
$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)(s + P_3)}$$

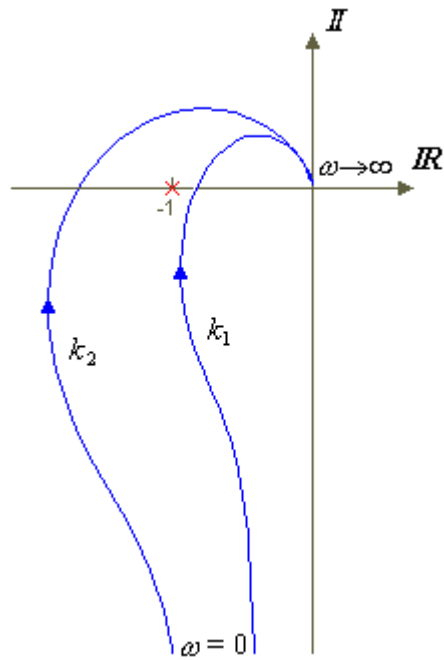


Si noti che in questo caso è estremamente importante il contributo del parametro k dato che, in funzione di esso, il diagramma circonda o meno il punto $(-1,0)$; nella figura sopra riportata si vedono due diagrammi della stessa risposta armonica in cui l'unico parametro a variare è proprio k ($k_1 < k_2$).

4)
$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + P)}$$

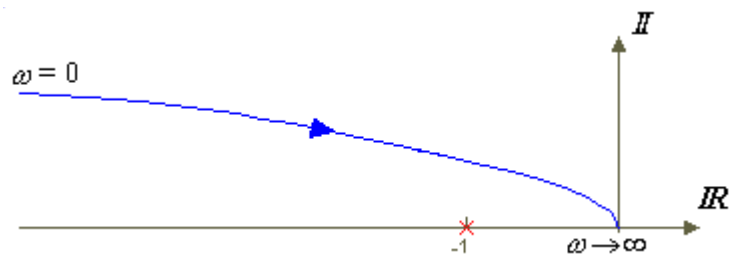


5)
$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + P_1)(s + P_2)}$$

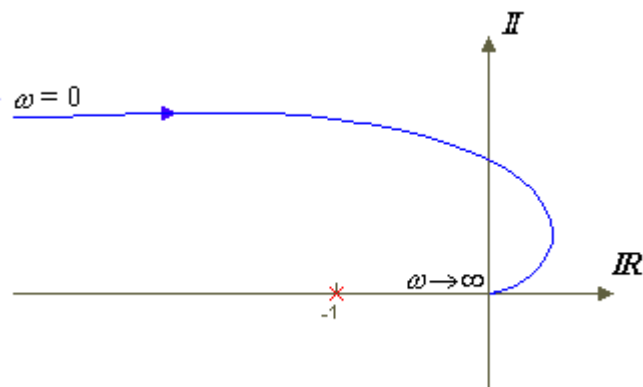


Anche in questo caso il diagramma circonda o meno il punto $(-1,0)$ in funzione della costante di guadagno k ($k_1 < k_2$).

6)
$$G(s) = \frac{k}{s^2 \cdot (s + P)}$$



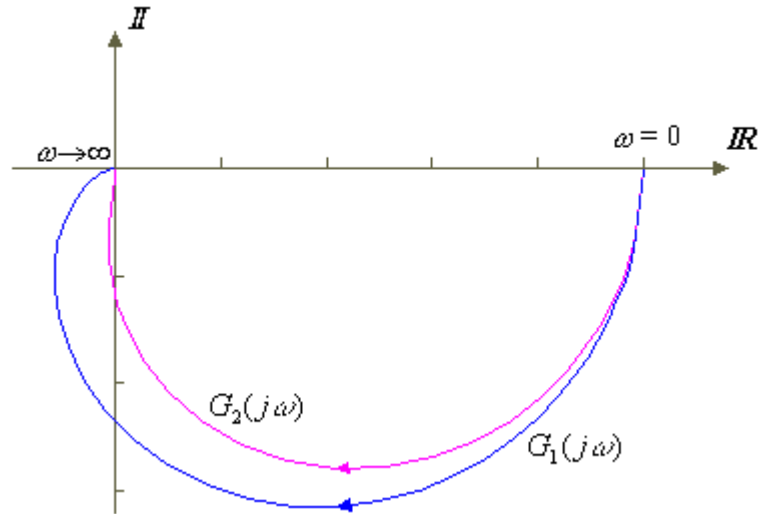
7)
$$G(s) = \frac{k}{s^2 (s + P_1)(s + P_2)}$$



Tutti gli esempi riportati sono relativi a FdT in cui non compaiono zeri la cui presenza "rallenta" l'andamento della fase; così, per esempio, confrontando i diagrammi polari di:

$$G_1(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)}, \quad G_2(s) = \frac{k \cdot (s + Z)}{(s + P_1)(s + P_2)}$$

si ha:



9.5. Risposta in frequenza per casi particolari

9.5.1. Termine di ritardo

E' importante capire come un ritardo (nel dominio del tempo) possa influire sulla risposta in frequenza del sistema; considerando un elemento di ritardo la sua FdT risulta:

$$G(s) = e^{-T_d s} \quad (9.15)$$

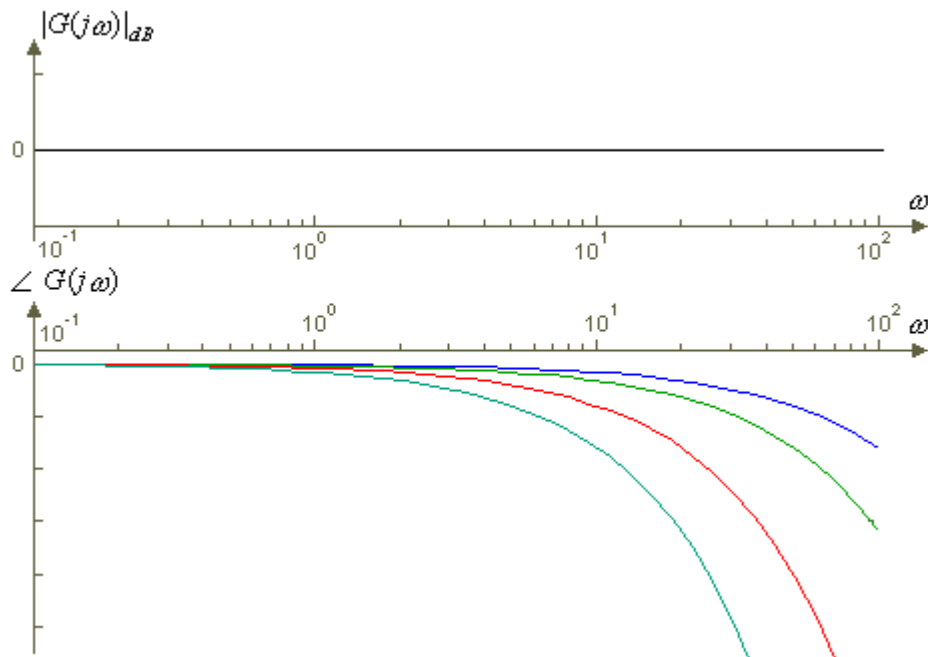
e, passando alla risposta in frequenza:

$$G(j\omega) = e^{-jT_d \omega} = \cos(\omega \cdot T_d) - j \sin(\omega \cdot T_d)$$

Passando a modulo e fase:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 1 \\ \angle G(j\omega) &= -T_d \omega \end{aligned}$$

I relativi diagrammi di Bode, per diversi valori di T_d , risultano essere:

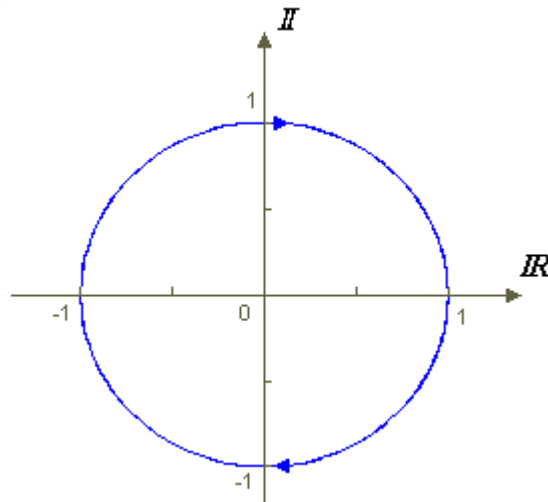


e, come ci si aspettava, mentre il modulo è sempre pari a 0 dB, l'andamento della fase dipende dal valore del ritardo e decresce più rapidamente al crescere dei valori di T_d (le curve di colore diverso individuano i diversi diagrammi di fase in funzione di diversi valori della costante di ritardo).

Si noti che per basse frequenze è possibile approssimare il termine di ritardo con un sistema del 1° ordine, cioè:

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1 + T_d \cdot s}$$

Il diagramma polare associato al ritardo (9.15.) è costituito, per quanto visto su modulo e fase, da una circonferenza di raggio unitario percorsa un numero infinito di volte in senso orario a partire dal semiasse reale positivo:

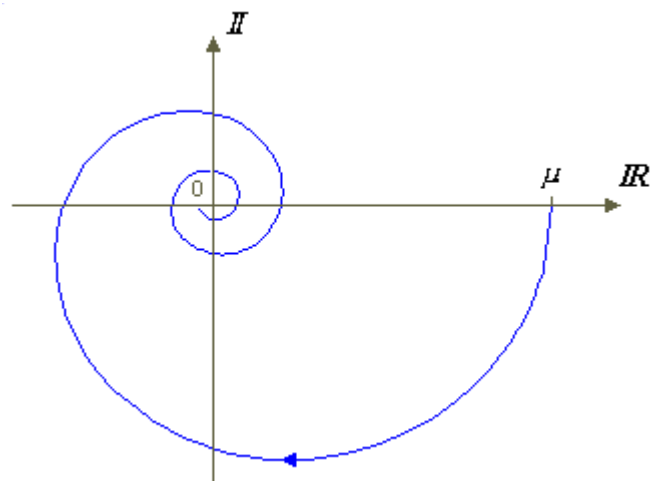


Esempi

1) Il diagramma polare della funzione

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-T_d s}, \quad \mu > 0, \quad T > 0$$

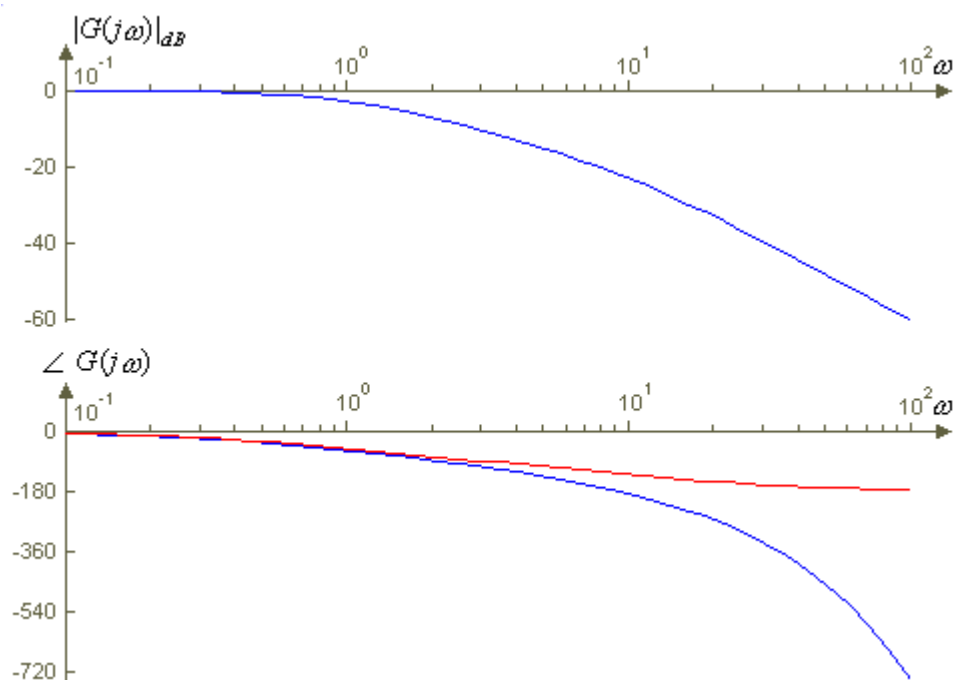
si ottiene notando che il modulo della $G(s)$ non è influenzato dal ritardo, mentre la fase decresce al crescere di ω in modo tale che il diagramma compie un numero sempre maggiore di giri in senso orario attorno all'origine del piano complesso:



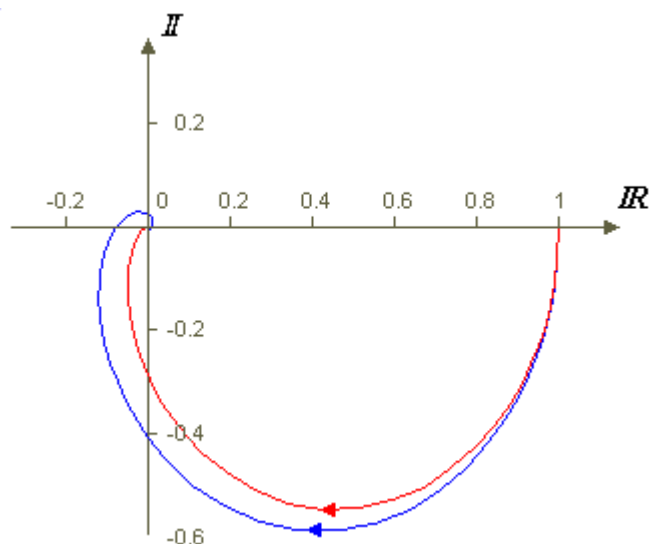
2) Data la FdT

$$G(s) = \frac{10 \cdot e^{-0.1}}{(s+1)(s+10)}$$

per vedere come l'elemento di ritardo influisca sulla risposta in frequenza sono riportati i diagrammi di Bode relativi a questa FdT con (in blu) e senza (in rosso) l'elemento di ritardo (ovviamente, poiché il ritardo non influenza l'ampiezza, i diagrammi di Bode dell'ampiezza delle due funzioni, coincidono).



Anche il diagramma di Nyquist permette di identificare le differenze fra le due risposte:



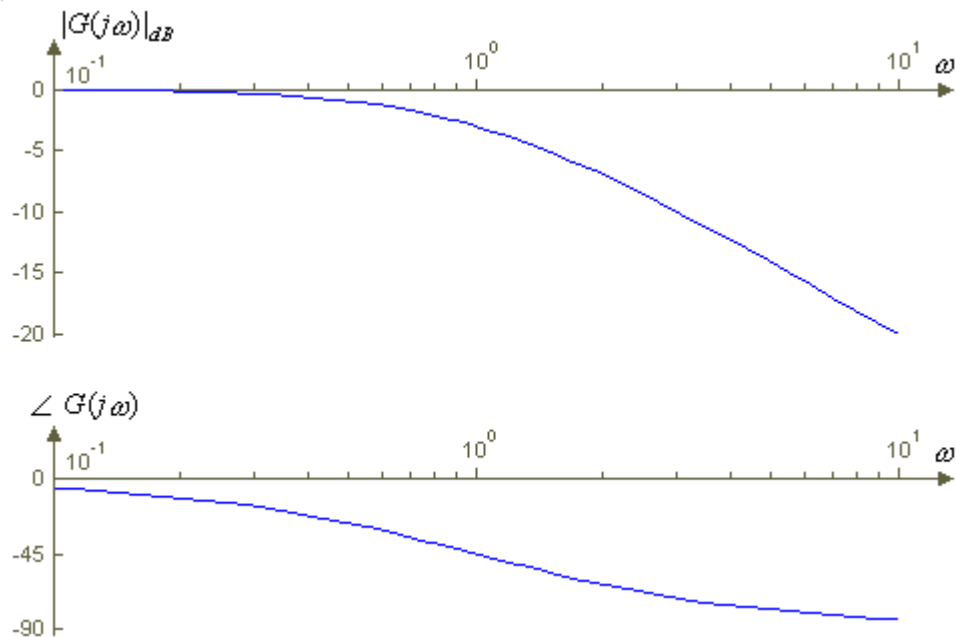
9.5.2. Sistemi instabili

I sistemi instabili sono quelli la cui FdT contiene dei poli a parte reale positiva; è interessante vedere come un polo instabile influisca sulla risposta in frequenza.

Considerando il caso di un polo a parte reale negativa:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

si possono ricavare, come visto, i diagrammi di Bode, che risultano:



Supponendo invece che il polo sia a parte reale positiva, la FdT diviene:

$$G_p(s) = \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s}$$

da cui si ricava:

$$G_p(j\omega) = -\frac{1}{1-j\omega}$$

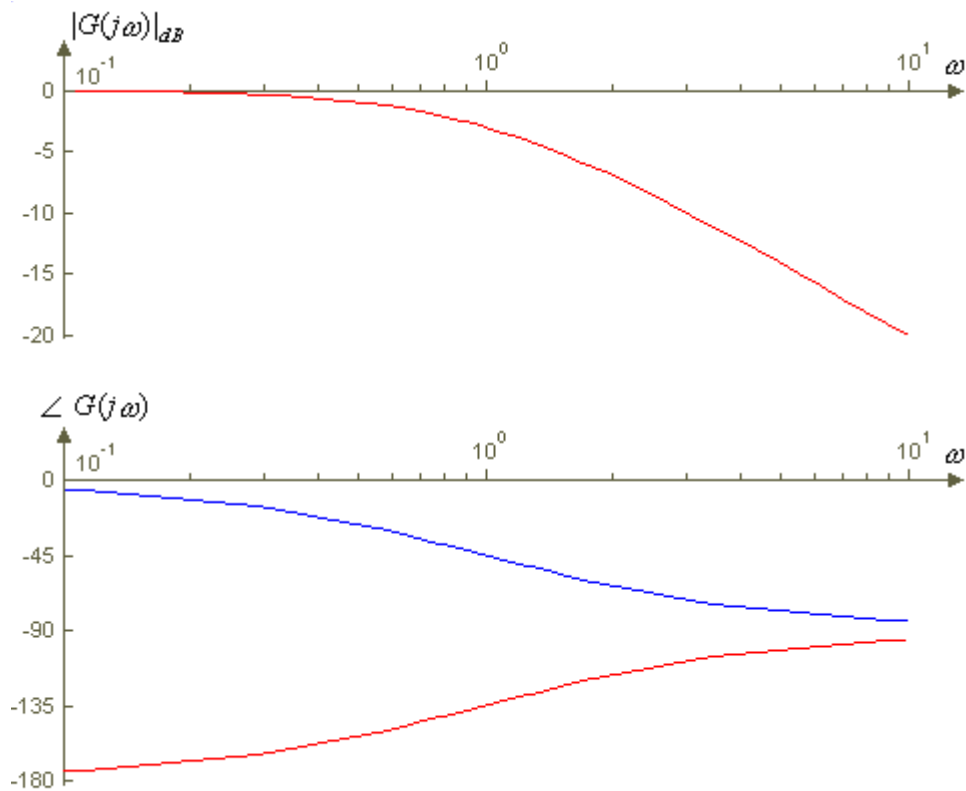
e, quindi:

$$|G_p(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = |G(j\omega)|$$

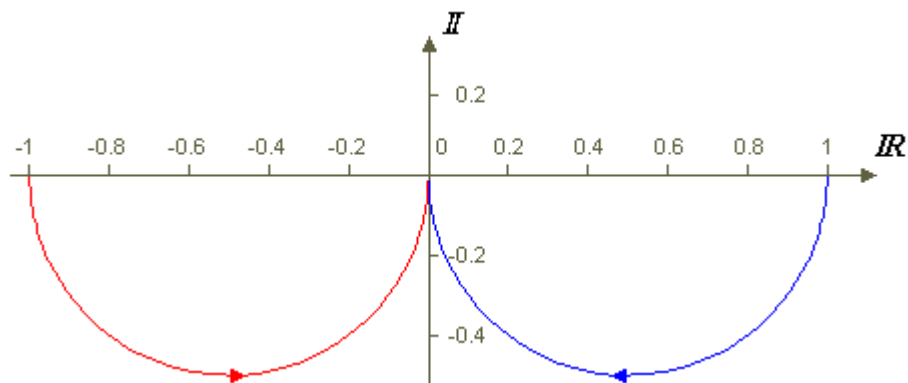
e

$$\angle G_p(j\omega) = \angle(-1) - \arctg(-\omega) = -180^\circ + \arctg \omega$$

Riportando insieme i diagrammi di Bode dei due casi, (in rosso il polo instabile, in blu quello stabile) si verifica che mentre il diagramma dell'ampiezza coincide, quello della fase è diverso; in particolare il polo a parte reale positiva si comporta, per la fase, come uno zero a parte reale negativa portando un incremento della fase di 90° .



Anche il diagramma di Nyquist mostra la netta differenza fra i due casi:



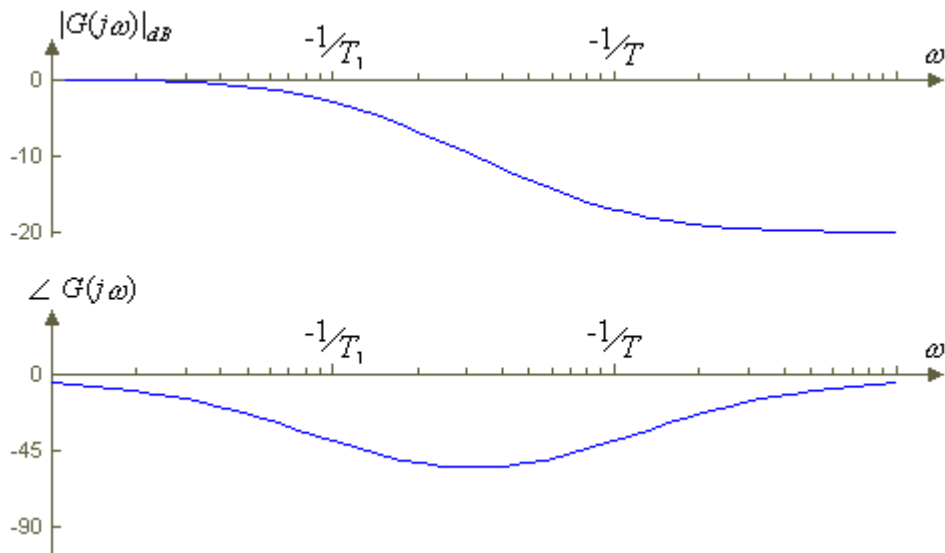
9.5.3. Sfasamento non minimo

Un sistema si dice a sfasamento non minimo quando ha uno o più zeri a parte reale positiva; al comportamento degli zeri "instabili" si è già accennato nella discussione sulle regole per la costruzione del diagramma di Bode della fase (*Par. 9.3.3.*).

Riprendendo in considerazione un sistema con uno zero a parte reale negativa:

$$G(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

e quindi con lo zero in $-1/T$ e il polo in $-1/T_1$, i diagrammi di Bode risultano:



Nel caso in cui, invece il sistema sia:

$$G(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

cioè con lo zero a parte reale positiva, si ha:

$$G_p(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}$$

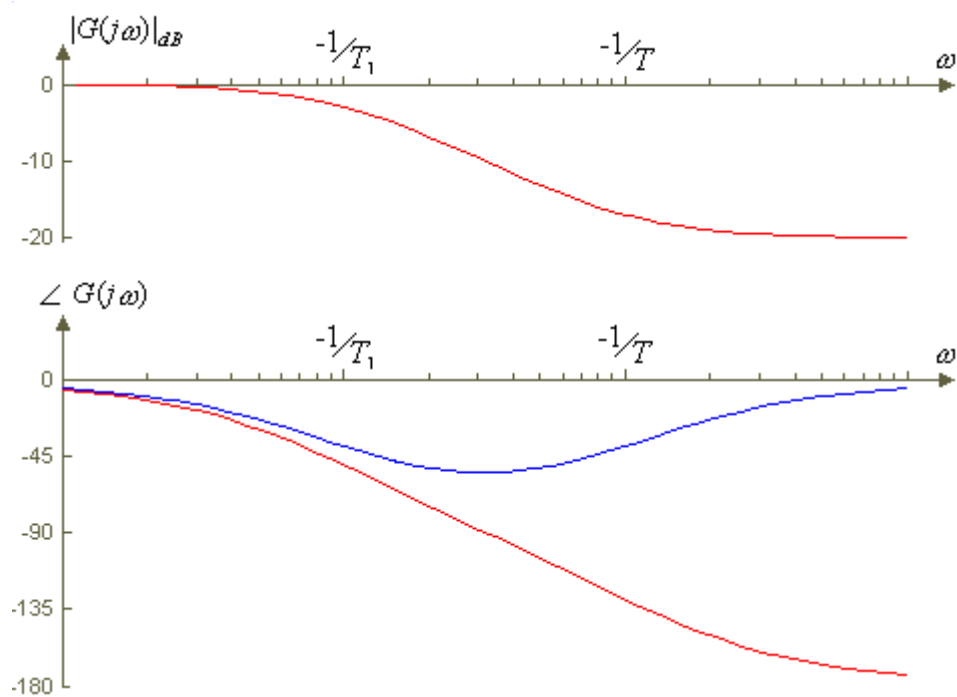
e, quindi:

$$|G_p(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} = |G(j\omega)|$$

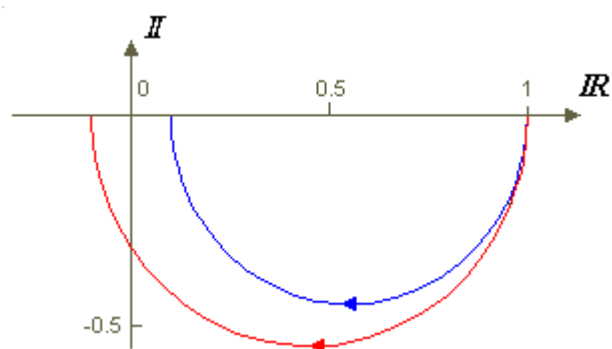
e

$$\begin{aligned} \angle G_p(j\omega) &= \angle(1 - j\omega T) - \angle(1 + j\omega T_1) = \\ &= \arctg(-\omega T) - \arctg(\omega T_1) = -\arctg(\omega T) - \arctg(\omega T_1) \end{aligned}$$

Riportando insieme i diagrammi di Bode dei due casi, (in rosso lo zero a parte reale positiva, in blu quello a parte reale negativa) si verifica che mentre il diagramma dell'ampiezza coincide, quello della fase è diverso; in particolare lo zero a parte reale positiva si comporta, per la fase, come uno polo a parte reale negativa portando un decremento della fase di -90° .



Anche in questo caso il diagramma di Nyquist mostra anch'esso la netta differenza fra le due situazioni:

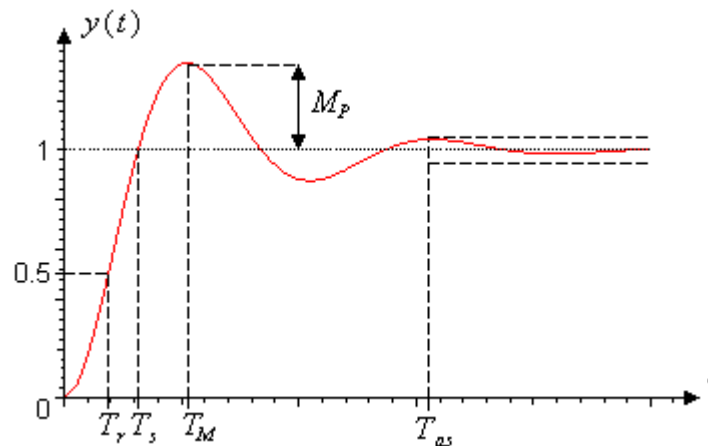


9.6. Risposta in frequenza e parametri temporali

9.6.1. Parametri di progetto dalla risposta in frequenza

Anche la risposta in frequenza può essere utilizzata per imporre delle specifiche, nel dominio della frequenza, per il progetto di sistemi di controllo, così come già visto, nel dominio del tempo, veniva fatto con la risposta temporale.

La generica risposta a un ingresso a gradino di un sistema del secondo ordine, come già visto (Par. 8.2.2.), è:



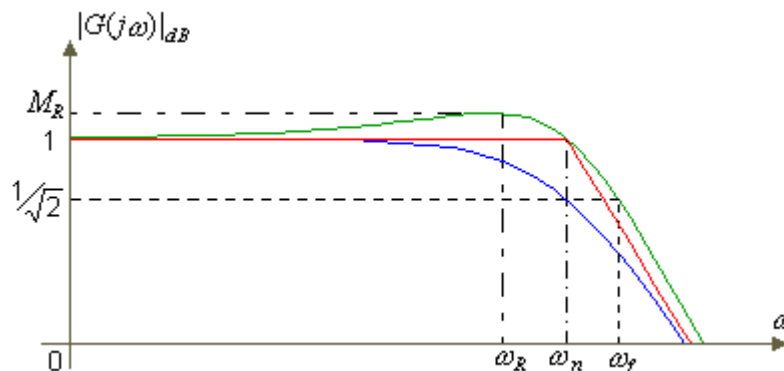
dove, ricordando le (8.12.), (8.13.), (8.15.) e (8.16.):

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad M_p = 100 \cdot e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}, \quad T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad T_{ae} = -\frac{1}{\xi\omega_n} \cdot \ln \varepsilon$$

Per lo studio dei parametri caratteristici della risposta in frequenza si fa riferimento a sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} \quad (9.16)$$

Come già visto (Par 9.3.2.), nel caso di poli complessi coniugati, il diagramma reale ha un andamento particolare in vicinanza della frequenza d'angolo ω_n :



I parametri più significativi sono:

- 1) La frequenza di *risonanza* ω_R , frequenza a cui la risposta assume il suo valore massimo; è legata alla frequenza d'angolo dalla relazione (9.11.):

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} < \omega_n$$

- 2) Il *picco di risonanza* M_R , rapporto fra valore massimo e valore statico della risposta, pari a (9.12.):

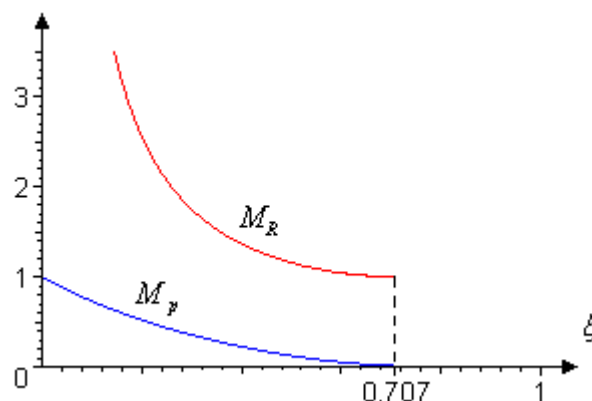
$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Nella figura precedente sono stati riportati, oltre che il diagramma asintotico (in rosso), anche quelli reali per due diversi valori del coefficiente di smorzamento ξ , 0.5 (in verde) e 0.707 (in blu), per i quali si ha che:

$$\xi = 0.707 \Rightarrow M_R \cong 1$$

$$\xi = 0.5 \Rightarrow M_R \cong 1.15$$

Esiste quindi una certa proporzionalità fra i due parametri M_R e M_p :



e comunque, più è alto il valore di M_R e più è veloce la risposta temporale.

- 3) La *larghezza di banda* o *banda passante* ω_f ; è la frequenza alla quale si ha:

$$\begin{aligned} |G(j\omega_f)|_{dB} &= |G(j0)|_{dB} - 3 \text{ dB} \\ |G(j\omega_f)| &\cong 70\% |G(j0)| \end{aligned}$$

Dalla (9.16.), se $|G(j0)|_{dB} = 1$, si ha che:

$$|G(j\omega_f)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_f^2}{\omega_n^2}}} = -3 \text{ dB}$$

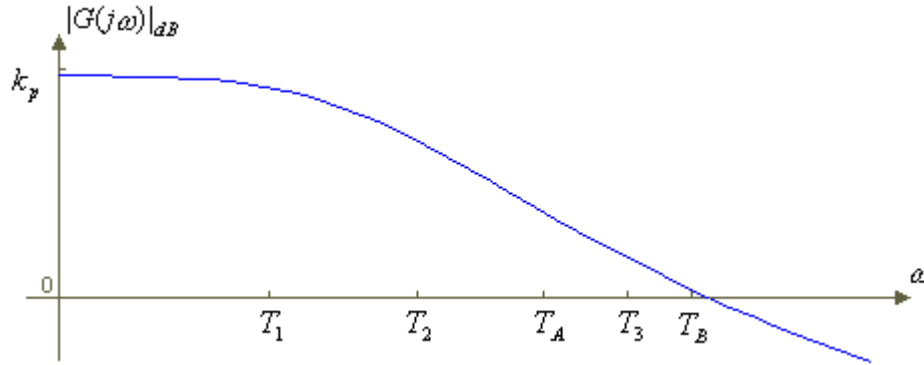
da cui si deduce che la banda passante è inversamente proporzionale al coefficiente di smorzamento; tale parametro determina le caratteristiche della risposta transitoria del sistema.

9.6.2. Parametri a regime dalla risposta in frequenza

Dalla risposta in frequenza è possibile ricavare anche i parametri della risposta a regime;

1) Sistema di tipo 0:

$$G(j\omega) = k_p \frac{(1 + j\omega T_A)(1 + j\omega T_B) \cdots}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots}$$

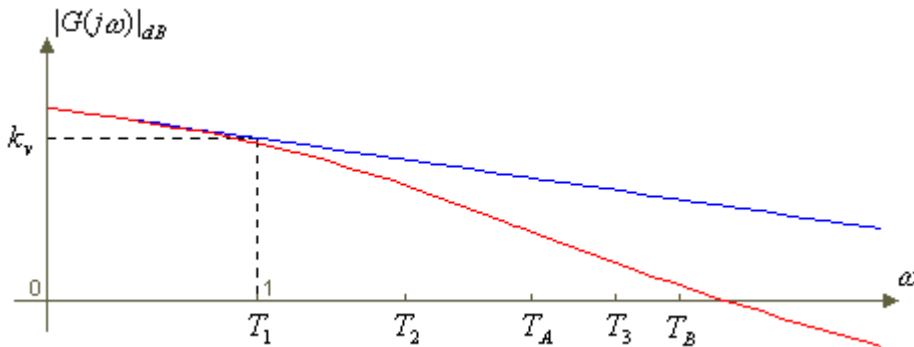


per cui è $|G(j0)| = k_p$ e, quindi, l'errore a regime al gradino sarà:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + k_p}$$

2) Sistema di tipo 1:

$$G(j\omega) = k_v \frac{(1 + j\omega T_A)(1 + j\omega T_B) \cdots}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots}$$



Dalla risposta in frequenza si può subito capire il tipo di sistema; se infatti per valori bassi della frequenza il diagramma ha una pendenza di -20 dB/dec sicuramente è di tipo 1 e l'errore al gradino sarà sempre nullo; per quanto riguarda l'errore alla rampa unitaria si ha invece:

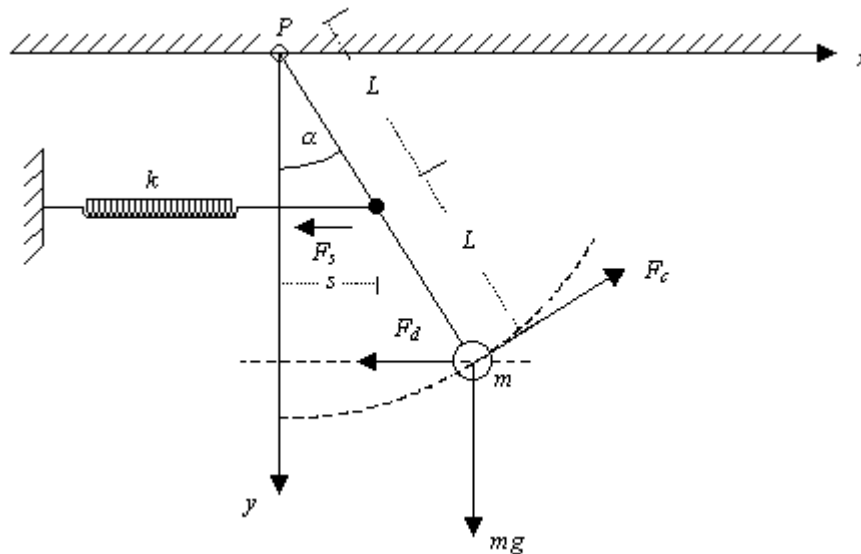
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + s \cdot G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot G(s)} = \frac{1}{1 + k_v}$$

Cap 10. Introduzione al controllo

Finora sono state illustrate le proprietà dei sistemi e le tecniche per l'analisi dei sistemi stessi; a questo punto bisogna utilizzare tali conoscenze per operare il controllo sui sistemi.

L'approccio più semplice a questo passaggio è quello di affrontare un esempio pratico di analisi e controllo.

10.1. Problema del pendolo

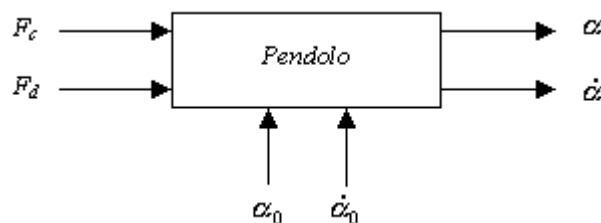


Il problema che si vuole risolvere è quello di descrivere l'andamento del sistema sopra riportato, e trovare a forza di controllo F_c che permetta di imporgli l'andamento desiderato; si noti che tale forza potrebbe, ad esempio, essere imposta sulla cerniera P tramite una coppia $M_c = 2L \cdot F_c$.

Le altre forze che agiscono sulla massa sono:

- la forza dovuta all'accelerazione gravitazionale mg
- la forza dovuta alla molla $F_s = k \cdot x_s$
- la forza di disturbo, concentrata sulla massa, dovuta a vento o altro, F_d

Si può quindi rappresentare il sistema tramite il seguente schema:



per il quale si impongono le ipotesi semplificative:

- asta rigida
- massa costante concentrata
- forza dovuta alla molla lineare in x
- forza di disturbo costante
- nessuna dissipazione sulla cerniera

10.1.1. Analisi del sistema

Per prima cosa si costruiscono le equazioni del moto:

1) Equilibrio dei momenti al punto P

Posto:

$$I = 4L^2 m$$

si ha

$$I\ddot{\alpha} = 2LF_c - F_s y_s - mgx_m + 2F_d L \cos \alpha$$

e, tenendo presente che:

$$F_s = kx_s = kL \sin \alpha$$

$$y_s = L \cos \alpha$$

$$x_m = 2L \sin \alpha$$

si ha:

$$\begin{cases} 4mL^2 \ddot{\alpha} + kL^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2mgL \sin \alpha = 2LF_c + 2F_d L \cos \alpha \\ x_m = 2L \sin \alpha \\ \dot{x}_m = 2L \dot{\alpha} \cos \alpha \\ y_m = 2L \cos \alpha \\ \dot{y}_m = -2L \dot{\alpha} \sin \alpha \end{cases}$$

2) Condizione di equilibrio (in assenza di disturbi)

$$\begin{cases} \alpha_E = 0 \pm 2\pi \cdot r, & r = 1, 2, 3, \dots \\ \dot{\alpha}_E = 0 \\ F_c = 0 \end{cases}$$

Il modello linearizzato risulta quindi essere:

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{4m} + \frac{g}{2L} \right) \alpha = \frac{1}{2mL} F_c + \frac{1}{2mL} F_d$$

e, posto

$$k_1 = \left(\frac{k}{4m} + \frac{g}{2L} \right), \quad k_2 = \frac{1}{2mL}$$

si può scrivere

$$\ddot{\alpha} + k_1 \alpha = k_2 (F_c + F_d)$$

Riportando il sistema in variabili di stato si ha, intendo con u la F_c :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix} d \\ y &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = I_2 \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

Scrivendo il sistema tramite la FdT si ha invece, trascurando il disturbo:

$$G(s) = \frac{k_2}{s^2 + k_1}$$

Per lo studio delle caratteristiche strutturali del sistema si comincia a studiarne la stabilità; si nota che se il pendolo è rivolto verso il basso è $k_1 > 0$ mentre il pendolo in alto è $k_1 < 0$, per cui si ha:

- equilibrio stabile, $k_1 > 0$:

$$\text{poli in } \pm j\sqrt{k_1}$$

e, il sistema, in presenza di forze esterne, risulta sottoposto a un moto armonico puro non asintoticamente stabile, e la sua oscillazione dipende dai valori numerici delle componenti.

- equilibrio instabile, $k_1 < 0$:

$$\text{poli in } \pm \sqrt{k_1}$$

il sistema risulta instabile

Per la controllabilità, ricordando la (7.5), la matrice di controllabilità risulta essere:

$$\mathcal{B} = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, poiché ha rango pari a 2, il sistema risulta completamente controllabile.

Per l'osservabilità, dalla (7.6), la matrice di osservabilità risulta essere:

$$\mathcal{C} = (C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, poiché ha rango pari a 2, il sistema risulta completamente osservabile.

Inserendo dati numerici si capisce meglio l'andamento del sistema; si scelgano i valori di k_1 e k_2 tali che sia:

$$\ddot{\alpha} + 2\alpha = 0.5F_c$$

quindi:

$$\alpha(t) = A_1 \sin(\sqrt{2}t + A_2)$$

in cui A_1 e A_2 dipendono dalle condizioni iniziali e dal contributo dell'ingresso.

Passando poi nel dominio di Laplace si ha:

$$s^2\alpha(s) - s\alpha_0 - \dot{\alpha}_0 + 2\alpha(s) = 0.5F_c(s)$$

da cui:

$$\alpha(s) = \frac{s\alpha_0 + \dot{\alpha}_0}{s^2 + 2} + \frac{0.5}{s^2 + 2} F_c(s)$$

realzione tramite cui è possibile trovare, facilmente, $\alpha(t)$ per differenti condizioni iniziali e differenti ingressi $F_c(t)$.

Così, per esempio:

1)

$$\begin{cases} \alpha_0 = 10^\circ = 0.1745 \text{ rad} \\ \dot{\alpha}_0 = 0 \\ F_c(t) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(s) = \frac{0.1745s}{s^2 + 2} \Rightarrow \alpha(t) = 0.1745 \cos \sqrt{2}t$$

2)

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \dot{\alpha}_0 = 3^\circ / \text{sec.} = 0.0524 \text{ rad / sec} \\ F_c(t) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(s) = \frac{0.0524}{s^2 + 2} = \frac{0.0524}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \Rightarrow \alpha(t) = 0.037 \sin \sqrt{2}t$$

3)

$$\begin{cases} \alpha_0 = 10^\circ = 0.1745 \text{ rad} \\ \dot{\alpha}_0 = 3^\circ / \text{sec.} = 0.0524 \text{ rad / sec} \\ F_c(t) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(s) = \frac{0.1745s + 0.0524}{s^2 + 2} = 0.1745 \cdot \frac{s}{s^2 + 2} + 0.037 \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = 0.1745 \cos \sqrt{2}t + 0.037 \sin \sqrt{2}t$$

4)

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \dot{\alpha}_0 = 0 \\ F_c(t) = 2 \text{ N} \end{cases}$$

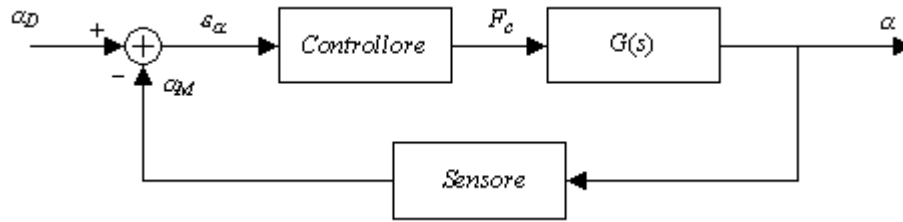
$$\alpha(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{0.5}{s^2 + 2} \Rightarrow \alpha(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos \sqrt{2}t)$$

In tutti i casi, come ci si aspettava, una volta che il pendolo viene disturbato dalla sua posizione di equilibrio (verticale), non può più tornarvi.

10.1.2. Controllo del sistema

Una volta trovate le equazioni che regolano il moto del sistema, si cerca di individuare la forza $F_c(t)$ che permetta di riportare il sistema nella condizione di equilibrio e di farcelo restare.

Utilizzando una struttura in retroazione ed assumendo di essere interessati solo alla posizione, si ha:



Il controllore più semplice da implementare è quello che interviene esclusivamente sull'errore di posizione, cioè tale che:

$$F_c = a \cdot \varepsilon_\alpha = a(\alpha_D - \alpha_M)$$

e, quindi, un controllo proporzionale.

L'equazione del moto del sistema diventa (posto che $\alpha_M = \alpha$):

$$\ddot{\alpha} + 2\alpha = 0.5 \cdot a(\alpha_D - \alpha) \Rightarrow \ddot{\alpha} + (2 + 0.5a)\alpha = 0.5 \cdot a \cdot \alpha_D$$

Poiché l'angolo di posizione desiderato è $\alpha_D = 0$, si può scrivere:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + (2 + 0.5a)\alpha = 0 \\ \alpha_0, \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

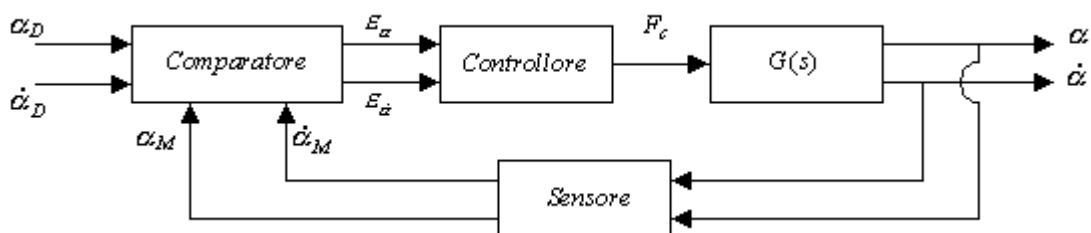
Supponendo di partire da una situazione in cui il pendolo è in una posizione non di equilibrio a velocità nulla, si può scrivere:

$$\alpha(s) = \frac{s\alpha_0 + \dot{\alpha}_0}{s^2 + (2 + 0.5a)} = \frac{s\alpha_0}{s^2 + (2 + 0.5a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\sqrt{2 + 0.5a} \cdot t) \quad \forall a$$

Con questo controllore non si riesce a portare il pendolo nella condizione di equilibrio desiderata, ma si modifica solo la frequenza di oscillazione; ciò avviene perché non è stato considerato l'errore sulla velocità, parametro che, nella posizione di equilibrio, deve essere pari a zero.

Da quanto appena visto si deduce che è necessario modificare la struttura del controllo in modo da considerare e manipolare anche l'errore sulla velocità angolare e non solo quello sulla posizione; per poter tenere presente anche l'errore sulla velocità è necessario, ovviamente, inserire un sensore che rilevi la velocità angolare del sistema:



Il controllore deve quindi essere del tipo:

$$F_c = a \cdot \varepsilon_\alpha + b \cdot \varepsilon_{\dot{\alpha}} = a(\alpha_D - \alpha_M) + b(\dot{\alpha}_D - \dot{\alpha}_M)$$

Tenendo presente che $\alpha_M = \alpha$ e che, per la condizione di equilibrio, deve essere:

$$\alpha_D = \dot{\alpha}_D = 0$$

si ottiene:

$$F_c = -a \cdot \alpha - b \cdot \dot{\alpha}$$

e quindi

$$\ddot{\alpha} + 0.5 \cdot b \cdot \dot{\alpha} + (2 + 0.5 \cdot a)\alpha = 0$$

e, utilizzando la *LT*, considerando le condizioni iniziali:

$$\alpha(s) \cdot s^2 - \alpha_0 \cdot s - \dot{\alpha}_0 + 0.5 \cdot b \cdot \alpha(s) \cdot s - 0.5 \cdot b \cdot \alpha_0 + (2 + 0.5 \cdot a)\alpha(s) = 0$$

e, quindi:

$$\alpha(s) = \frac{(s + 0.5 \cdot b)\alpha_0 + \dot{\alpha}_0}{s^2 + 0.5 \cdot b \cdot s + (2 + 0.5 \cdot a)}$$

in cui il numeratore dipende dalle condizioni iniziali.

Ponendo $a = 12$ e $b = 12$ si ha:

$$\alpha(s) = \frac{(s + 6)\alpha_0 + \dot{\alpha}_0}{s^2 + 6 \cdot s + 8}$$

equazione valida, per questo sistema perturbato, qualsiasi siano le condizioni iniziali; supponendo di avere

$$\begin{cases} \alpha_0 = 10^\circ = 0.1745 \text{ rad} \\ \dot{\alpha}_0 = 0 \end{cases}$$

si ricava:

$$\alpha(s) = 0.1745 \cdot \frac{(s + 6)}{s^2 + 6 \cdot s + 8}$$

Sfruttando quanto visto in precedenza (*Par. 3.4.1.*) si scompone la funzione in fratti semplici e se ne calcolano i residui, ottenendo così:

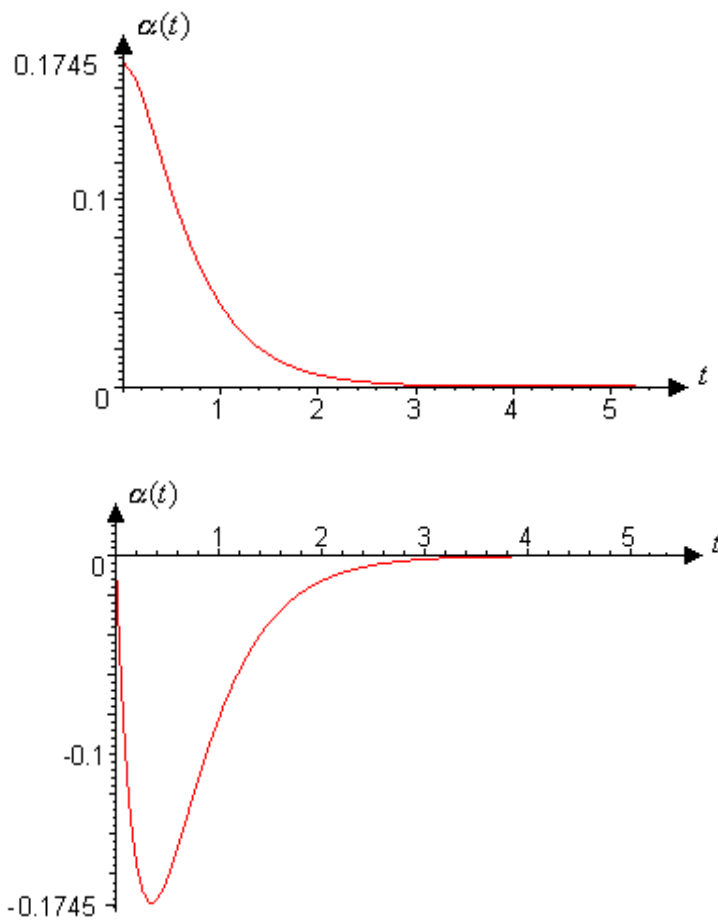
$$\alpha(s) = \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 4} = \frac{0.349}{s + 2} + \frac{-0.1745}{s + 4}$$

e, antitrasformando, si ricava:

$$\alpha(t) = 0.1745 \cdot (2 \cdot e^{-2t} - e^{-4t})$$

Si può facilmente verificare che l'angolo tende velocemente a 0 (per $t = 5$ l'angolo è pari a circa 0.0000158 rad) mentre la velocità angolare assume un valore negativo prima di tornare, anch'essa molto rapidamente, a 0.

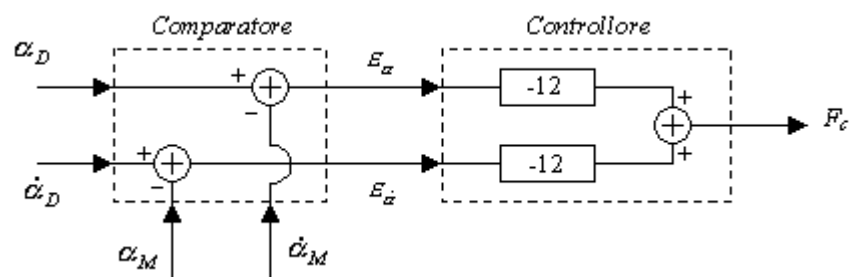
Gli andamenti nel tempo dell'angolo e della velocità angolare sono:



Il controllore sarà quindi individuato dalla relazione:

$$F_c = -12\alpha - 12\dot{\alpha}$$

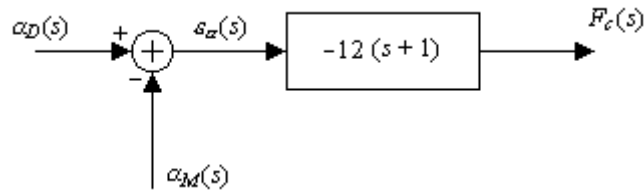
Come visto, in questo caso sono necessari due sensori e l'insieme *Comparatore-Controllore* può essere schematizzato come:



Se però si prende in considerazione la FdT del controllore si ha che:

$$F_c(s) = -12(s+1) \cdot [\alpha_D(s) - \alpha(s)]$$

da cui lo schema risulta:



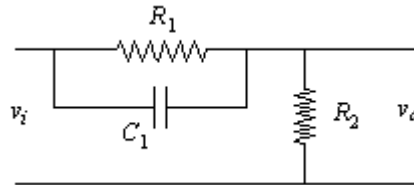
e si nota che il controllore può essere implementato anche con un solo sensore (di posizione).

La scelta del controllore più adatto è dettata dal problema che si sta affrontando:

- il primo tipo è più semplice dato che esegue solo operazioni di somma e amplificazione del segnale in ingresso ma necessita di due sensori (uno per la posizione e uno per la velocità);
- il secondo risulta più complesso, dovendo eseguire anche un'operazione di derivazione, ma ha bisogno di un solo sensore ed è, quindi, più preciso.

Il controllore con un solo sensore può essere realizzato in diversi modi, purché essi forniscano la FdT richiesta; una di queste implementazioni è la seguente:

a) Per prima cosa si costruisce una rete anticipatrice:



e la relazione fra le due tensioni risulta essere:

$$R_1 C_1 R_2 \dot{v}_o + (R_1 + R_2) v_o = R_1 C_1 R_2 \dot{v}_i + R_2 v_i$$

e da questa, utilizzando la LT si ottiene:

$$[R_1 C_1 R_2 s + (R_1 + R_2)] \cdot V_o(s) = (R_1 C_1 R_2 s + R_2) \cdot V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{R_1 C_1 R_2 s + R_2}{R_1 C_1 R_2 s + (R_1 + R_2)} \cdot V_i(s)$$

e ponendo:

$$\tau = R_1 C_1 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

si ha:

$$V_o(s) = \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau\alpha}} \cdot V_i(s)$$

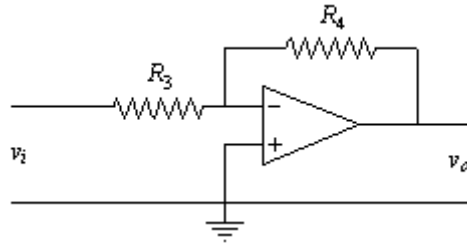
Scegliendo dei componenti tali per cui si abbia $\tau \cong 1$ e $\alpha \rightarrow 0$, come, per esempio:

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 10^{-3}\Omega, \quad C_1 = 1F$$

si ha:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} \cong s + 1$$

b) Si inserisce poi un *Amplificatore Operazionale*:



per il quale si ha che:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

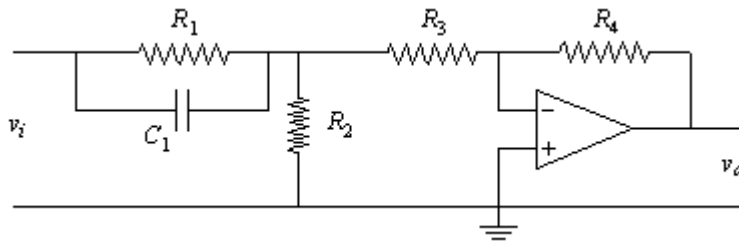
e scelte le resistenze:

$$R_4 = 12\Omega, \quad R_3 = 1\Omega$$

si ottiene:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -12$$

c) Infine si combinano i due circuiti in serie



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -12(s + 1)$$

La tensione $v_i(t)$ deve essere proporzionale allo spostamento $\alpha(t)$ per cui il sensore deve misurare l'angolo e trasformare questa misura in volts.

Il comando $v_o(t)$ proveniente dal controllore deve invece generare una forza F_c tale da produrre un momento opportuno sulla cerniera M_c ($M_c = F_c \cdot 2L$); a tale scopo può essere utilizzato un motore in continua (*DC Motor*).

10.1.3. Controllo del sistema non in posizione di equilibrio

Si suppone di voler portare il pendolo ad un angolo prestabilito diverso da quello dato dalla posizione di equilibrio vista in precedenza, e rendere tale posizione di equilibrio.

Si sceglie come nuovo obiettivo di arrivare alla situazione:

$$\begin{cases} \alpha_D = 5^\circ = 0.08726 \text{ rad} \\ \dot{\alpha}_D = 0 \end{cases}$$

Si deve tener presente che non interessa il transitorio della risposta del sistema, cioè come si comporta il pendolo fin quando non raggiunge la condizione desiderata, ma la stabilità del sistema stesso una volta raggiunta la posizione desiderata.

Il controllore visto in precedenza non riesce a soddisfare il requisito di progetto, infatti, utilizzandolo, si avrebbe:

$$F_c = a(\alpha_D - \alpha) + b(\dot{\alpha}_D - \dot{\alpha}) = a(\alpha_D - \alpha) - b\dot{\alpha}$$

da cui:

$$\ddot{\alpha} + 2\alpha = 0.5 \cdot a(\alpha_D - \alpha) - 0.5b\dot{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \frac{0.5a}{s^2 + 0.5bs + (2 + 0.5a)} \cdot \alpha_D(s)$$

Dal *teorema del valore finale* (3.9.) si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s\alpha(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.5a}{s^2 + 0.5bs + (2 + 0.5a)} \cdot \alpha_D(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.5a}{s^2 + 0.5bs + (2 + 0.5a)} \cdot \frac{0.08726}{s} = \frac{0.5a}{2 + 0.5a} 0.08726 \end{aligned}$$

e, per soddisfare il requisito, dovrebbe essere:

$$\alpha_{ss} = \frac{0.5a}{2 + 0.5a} 0.08726 = \alpha_D = 0.08726 \Rightarrow \frac{0.5a}{2 + 0.5a} = 1 \Rightarrow 1 = 2$$

quindi, ovviamente, con il controllore visto in precedenza non si può soddisfare la richiesta.

Per risolvere questo sistema è necessario utilizzare un altro tipo di controllo; scegliendo un controllore PID (proporzionale-integrale-derivativo), si ha:

$$F_c = a(\alpha_D - \alpha) + b(\dot{\alpha}_D - \dot{\alpha}) + c \int (\alpha_D - \alpha) dt$$

e quindi la dinamica del sistema diventa (ricordando che la velocità finale deve essere nulla):

$$\ddot{\alpha} + 2\alpha = 0.5a(\alpha_D - \alpha) - 0.5b\dot{\alpha} + 0.5c \int (\alpha_D - \alpha) dt$$

Sfruttando poi la *LT*, con condizioni iniziali nulle, si ottiene:

$$\alpha(s) \cdot s^2 + 2\alpha(s) = 0.5a\alpha_D(s) - 0.5\alpha(s) - 0.5b\alpha(s) \cdot s + \frac{0.5c}{s}\alpha_D(s) - \frac{0.5c}{s}\alpha(s)$$

e, infine:

$$\alpha(s) = \frac{0.5a \cdot s + 0.5c}{s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c} \alpha_D(s)$$

A questo punto si nota che le dimensioni del sistema sono aumentate, infatti il denominatore è diventato del terzo ordine; per verificare la bontà del controllore scelto è necessario:

- 1) Verificare la stabilità asintotica del sistema

Utilizzando il criterio di Routh-Hurwitz (*Par 6.7.*):

s^3	1	$2 + 0.5a$	0
s^2	$0.5b$	$0.5c$	0
s^1	$\frac{(2 + 0.5a)0.5b - 0.5c}{0.5b}$	0	
s^0	$0.5c$		

si ricavano le condizioni per la stabilità, che sono:

$$b > 0$$

$$c > 0$$

$$(2 + 0.5a)0.5b - 0.5c > 0 \Rightarrow a > \frac{2c}{b} - 4$$

- 2) Verificare che il requisito di progetto sia soddisfatto

Applicando anche in questo caso il *teorema del valore finale* (3.9.) si ottiene:

$$\alpha_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.5a \cdot s + 0.5c}{s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c} \alpha_D(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.5a \cdot s + 0.5c}{s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c} \cdot \frac{0.08726}{s} = 0.08726 \text{ rad} = 5^\circ = \alpha_D$$

Si può concludere che, con questo tipo di controllore:

- Il pendolo si porta nella posizione corrispondente ad un angolo di 5° indipendentemente dai valori dei parametri a , b , c .
- Il pendolo può essere portato in qualsiasi posizione si desidera, quindi a qualsivoglia α_D .
- I parametri a , b , c possono essere scelti liberamente per "sagomare" il transitorio, sempre rispettando le condizioni imposte per la stabilità.
- Il problema viene risolto anche se il sistema completo diventa di ordine superiore.

Esempi

1. Se le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \dot{\alpha}_0 = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\frac{\alpha(s)}{\alpha_D(s)} = \frac{0.5a \cdot s + 0.5c}{s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c}$$

Se si vuole che i poli del sistema siano:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -4$$

deve essere:

$$(s+1)(s+2)(s+4) = s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c$$

da cui:

$$s^3 + 0.5b \cdot s^2 + (2 + 0.5a) \cdot s + 0.5c = (s^2 + 3s + 2)(s+4) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 14 \\ c = 16 \end{cases}$$

e quindi

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{\alpha_D(s)} = \frac{12s + 8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

Utilizzando poi la tecnica della scomposizione in fratti semplici (*Par. 3.4.1.*) si può scrivere (ricordando che $\alpha_D = 0.08726$):

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{12s + 8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \cdot \alpha_D(s) = \frac{12s + 8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \cdot \frac{\alpha_D}{s} = \\ &= \frac{12s + 8}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot \alpha_D = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} + \frac{A_4}{s+4} \end{aligned}$$

e dal calcolo dei residui si ottiene:

$$A_1 = s \cdot \alpha(s) \Big|_{s=0} = s \cdot \frac{(12s+8) \cdot \alpha_D}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=0} = \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 4} \cdot \alpha_D = \alpha_D$$

$$A_2 = (s+1) \cdot \alpha(s) \Big|_{s=-1} = (s+1) \cdot \frac{(12s+8) \cdot \alpha_D}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-1} = \frac{-4}{-1 \cdot 1 \cdot 3} \cdot \alpha_D = \frac{4}{3} \cdot \alpha_D$$

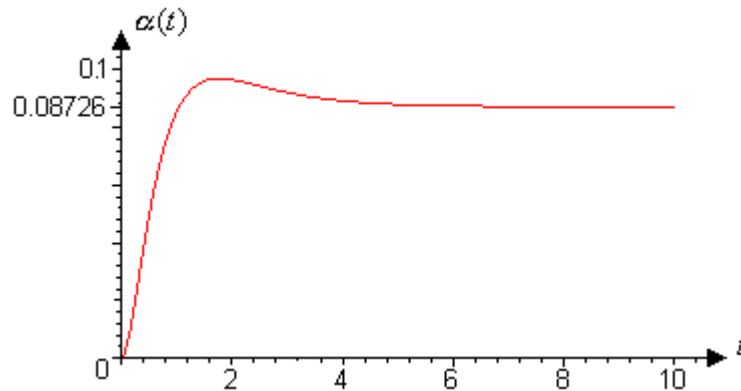
$$A_3 = (s+2) \cdot \alpha(s) \Big|_{s=-2} = (s+2) \cdot \frac{(12s+8) \cdot \alpha_D}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-2} = \frac{-16}{-2 \cdot (-1) \cdot 2} \cdot \alpha_D = -4 \cdot \alpha_D$$

$$A_4 = (s+4) \cdot \alpha(s) \Big|_{s=-4} = (s+4) \cdot \frac{(12s+8) \cdot \alpha_D}{s(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-4} = \frac{-40}{-4 \cdot (-3) \cdot (-2)} \cdot \alpha_D = \frac{5}{3} \cdot \alpha_D$$

ottenendo così:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_D \cdot \left(1 + \frac{4}{3} \cdot e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + \frac{5}{3} \cdot e^{-4t} \right) \text{rad} = \\ &= 0.08726 \cdot (1 + 1.33 \cdot e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + 1.67 \cdot e^{-4t}) \text{rad} \end{aligned}$$

L'andamento dell'angolo in funzione del tempo risulta quindi:



e, ricordando che 0.08726 rad corrispondono a 5° , si verifica che il sistema soddisfa i requisiti richiesti.

2. Se le condizioni iniziali sono:

$$\begin{cases} \alpha_0 = -10^\circ = -0.1745 \text{ rad} \\ \dot{\alpha}_0 = 0 \end{cases}$$

ricordando che:

$$F_c = a(\alpha_D - \alpha) + b(\dot{\alpha}_D - \dot{\alpha}) + c \int (\alpha_D - \alpha) dt$$

$$\Rightarrow F_c(s) = a\alpha_D(s) - a\alpha(s) - b\alpha(s)s + b\alpha_0 + \frac{c}{s}\alpha_D(s) - \frac{c}{s}\alpha(s) - \frac{c}{s}\alpha_0$$

e che:

$$s^2\alpha(s) - s\alpha_0 - \dot{\alpha}_0 + 2\alpha(s) = 0.5F_c(s)$$

si ottiene

$$\alpha(s) = G(s)\alpha_D(s) + D(s) = \alpha'(s) + D(s)$$

dove con $\alpha'(s)$ si indica il termine che risulta essere lo stesso del caso precedente.

E' quindi sufficiente analizzare il termine indicato con $D(s)$ per avere l'andamento temporale dell'angolo del pendolo; con la tecnica dei fratti semplici (Par. 3.4.1.) si ottiene:

$$D(s) = \frac{s^2 \alpha_0 + 0.5b \alpha_0 s - 0.5c \alpha_0}{s^3 + 0.5bs^2 + (2 + 0.5a)s + 0.5c} = \frac{s^2 + 7s - 8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \cdot \alpha_0 =$$

$$= \frac{(s-1)(s+8)}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot \alpha_0 = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+4}$$

Con il calcolo dei residui, si ottiene:

$$A_1 = (s+1) \cdot D(s) \Big|_{s=-1} = (s+1) \cdot \frac{(s-1)(s+8) \cdot \alpha_0}{(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-1} = \frac{-2 \cdot 7}{1 \cdot 3} \cdot \alpha_0 = -\frac{14}{3} \cdot \alpha_0$$

$$A_2 = (s+2) \cdot D(s) \Big|_{s=-2} = (s+2) \cdot \frac{(s-1)(s+8) \cdot \alpha_0}{(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-2} = \frac{-3 \cdot 6}{-1 \cdot 2} \cdot \alpha_0 = 9 \cdot \alpha_0$$

$$A_3 = (s+4) \cdot D(s) \Big|_{s=-4} = (s+4) \cdot \frac{(s-1)(s+8) \cdot \alpha_0}{(s+1)(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-4} = \frac{-5 \cdot 4}{-3 \cdot (-2)} \cdot \alpha_0 = -\frac{10}{3} \cdot \alpha_0$$

da cui:

$$d(t) = \alpha_0 \cdot \left(-\frac{14}{3} \cdot e^{-t} + 9 \cdot e^{-2t} - \frac{10}{3} \cdot e^{-4t} \right) rad$$

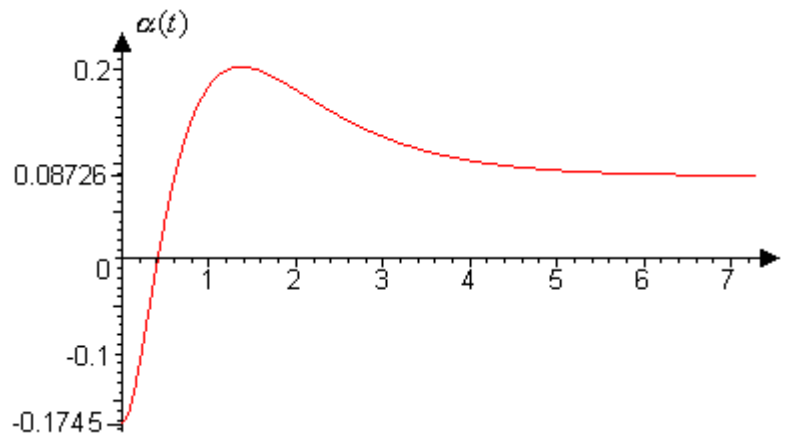
Tenendo presente che $\alpha_0 = -2\alpha_D$, l'andamento dell'angolo in funzione del tempo risulta:

$$\alpha(t) = \alpha'(t) + d(t) =$$

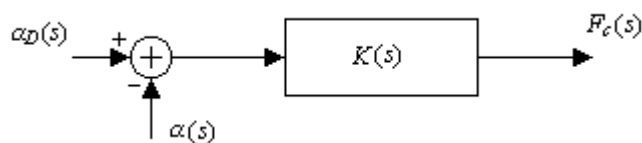
$$= \alpha_D \cdot \left(1 + \frac{4}{3} \cdot e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t} + \frac{5}{3} \cdot e^{-4t} + \frac{28}{3} \cdot e^{-t} - 18 \cdot e^{-2t} + \frac{20}{3} \cdot e^{-4t} \right) rad =$$

$$= \alpha_D \cdot \left(1 + \frac{32}{3} \cdot e^{-t} - 22 \cdot e^{-2t} + \frac{25}{3} \cdot e^{-4t} \right) rad$$

$$= 0.08726 \cdot (1 + 10.667 \cdot e^{-t} - 22 \cdot e^{-2t} + 8.333 \cdot e^{-4t}) rad$$



Anche per il controllore *PID* è possibile trovare un'implementazione; tenendo presente che lo schema è:



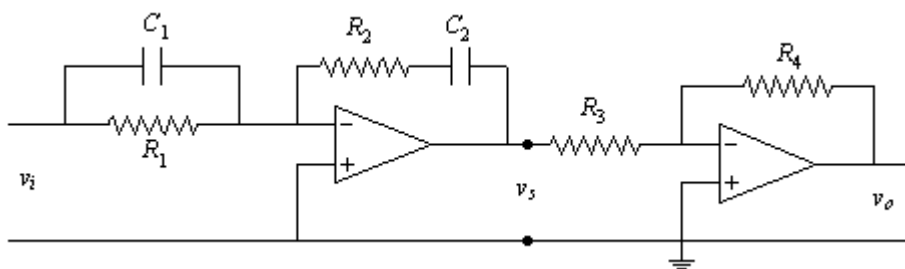
e che, in generale si può scrivere:

$$F_c = a(\alpha_D - \alpha) + b(\dot{\alpha}_D - \dot{\alpha}) + c \int (\alpha_D - \alpha) dt$$

deve essere:

$$K(s) = \frac{F_c(s)}{\alpha_D(s) - \alpha(s)} = a + bs + \frac{c}{s} = \frac{bs^2 + as + c}{s}$$

Il seguente schema realizza la FdT desiderata:



infatti è:

$$\frac{v_s(s)}{v_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

dove:

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

e, quindi:

$$\frac{v_s(s)}{v_i(s)} = -\frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s}$$

Considerando poi che:

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

si ottiene:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)R_4}{R_1 C_2 R_3 s}$$

relazione che può essere riscritta, secondo quanto visto per la $K(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{v_o(s)}{v_i(s)} &= \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2) R_4}{R_1 C_2 R_3} + \frac{C_1 R_2 R_4}{R_3} s + \frac{R_4}{R_1 C_2 R_3 s} = \\ &= \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2) R_4}{R_1 C_2 R_3} \left[1 + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2) s} \right] = k_D \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_I s} \right)\end{aligned}$$

10.1.4. Diagramma a blocchi completo

Riepilogando quanto visto sinora si hanno:

- l'impianto

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{F_c(s)} = \frac{0.5}{s^2 + 2} \quad \text{rad/N}$$

- il controllore

$$\begin{cases} K(s) = \frac{F_c^c(s)}{\varepsilon(s)} = a + bs + \frac{c}{s} & \text{volt/volt} \\ \varepsilon(s) = \alpha_D(s) - \alpha_M(s) & \text{volt} \end{cases}$$

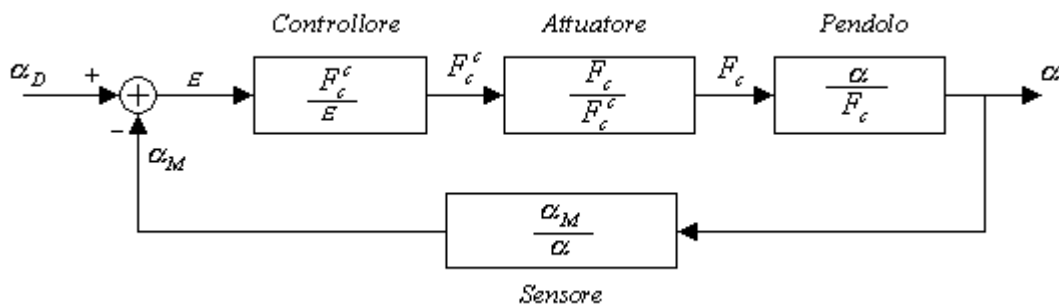
- il sensore

$$\frac{\alpha_M(s)}{\alpha(s)} = k_s \quad \text{volt/rad}$$

- l'attuatore

$$\frac{F_c(s)}{F_c^c(s)} = k_A \quad \text{N/volt}$$

Lo schema a blocchi del sistema in esame risulta così:



Per questo schema si è infine dedotto che:

- Per $a = b = 12$, $c = 0$ il controllore (PD) si comporta da regolatore portando e mantenendo il pendolo in posizione verticale.
- Per $a = 24$, $b = 14$, $c = 16$ il controllore (PID) opera in maniera da portare il pendolo nella posizione desiderata (nell'esempio in quella con un angolo pari a 5° rispetto alla verticale) e di mantenerlo in tale posizione.

10.2. Prestazioni del controllore

Dato un generico sistema lineare rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases}$$

e per il quale quindi è:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

il problema del controllo del sistema è dato dalla progettazione del controllore in modo che il sistema raggiunga un determinato tipo di prestazioni e che l'uscita abbia un andamento desiderato pur rispettando i limiti delle prestazioni imposte.

Il primo passo, quindi, nella definizione del controllo è l'individuazione delle caratteristiche del sistema per poi affrontare lo studio delle reazioni del sistema ai segnali di ingresso e agli eventuali disturbi, si deve poi considerare anche il caso, non raro, della presenza di incertezze nel modello che si utilizza nell'analisi del sistema.

1. Proprietà intrinseche dell'impianto

Le proprietà strutturali di un sistema, come già visto sono:

- Stabilità
- Controllabilità
- Osservabilità

Fra queste la stabilità è la caratteristica necessaria per l'utilizzo di un qualsiasi sistema fisico, per:

- il mantenimento del punto di equilibrio richiesto senza intervento esterno
- la sicurezza delle operazioni
- la riduzione dei carichi di lavoro del sistema di controllo

Poiché la stabilità del sistema implica che la risposta temporale sia tale da annullarsi partendo da condizioni iniziali non nulle, un sistema può essere "più" o "meno" stabile in funzione della velocità con cui la risposta tende a zero.

Il grado di stabilità dipende dal tipo di sistema in esame:

- per aerei commerciali o satelliti per telecomunicazioni si ricerca una maggiore stabilità che però rende lento il sistema stesso;
- per aerei militari o sistemi missilistici si ha una minore stabilità che però permette di ottenere sistemi estremamente veloci e agili.

2. Proprietà estrinseche dell'impianto (nominali)

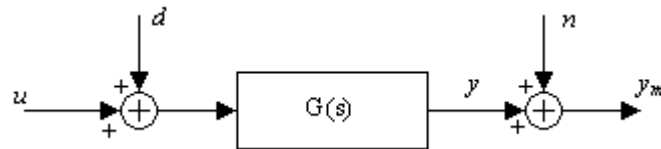
Sono le proprietà relative alla risposta agli impulsi esterni, che possono essere distinti in due categorie:

a) Comandi o riferimenti

- dal sistema di controllo
- dal sistema di navigazione
- da pilota/operatore

b) Disturbi

- dovuti a fattori esterni (d)
- dovuti a "rumori" introdotti dai componenti (n)



In generale la risposta dei sistemi deve essere tale da:

- 1) fare in modo che l'uscita segua i comandi in modo molto accurato;
- 2) essere insensibile a disturbi e/o rumori; il sistema deve quindi avere una "banda passante" per reiettare i disturbi.

3. Prestazioni in situazioni di incertezza

La presenza di incertezze è il vero aspetto critico del comportamento dei sistemi dinamici; in genere la $G(s)$ è un modello non totalmente fedele del sistema fisico; la non fedeltà del modello è dovuta a una varietà di fattori:

- Non linearità che possono essere dovuti alla particolare struttura del sistema (effetti giroscopici, effetto Coriolis, ecc.) o alla sua realizzazione fisica (problemi di saturazione, situazioni di isteresi, ecc.)
- Dinamiche trascurate o non note
- Errori di modello (incertezze ad alta frequenza, semplificazioni e riduzioni d'ordine)
- Variazioni di parametri

Il controllore deve essere progettato tenendo presenti tutti questi aspetti e, quindi, essere in grado di garantire adeguate prestazioni (di stabilità e di rapporto ingresso-uscita) anche in presenza di errori nel modello del sistema.

10.3. Controllo ad anello chiuso

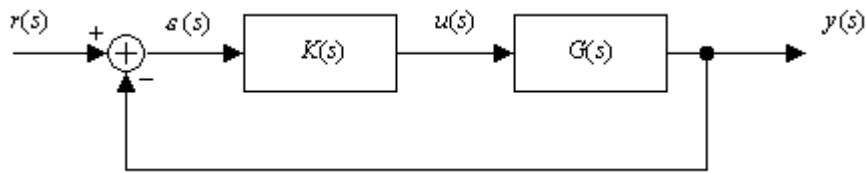
In precedenza, descrivendo i sistemi in retroazione (Par.4.3.) o affrontando il problema della stabilità dei sistemi (Par. 6.8.) è stato già mostrato come in presenza di situazioni particolari, come:

- incertezze nel modello del sistema $G(s)$
- presenza di disturbi non perfettamente noti
- necessità di modificare dinamicamente il sistema

l'unica soluzione possibile è data dall'uso di sistemi di controllo con retroazione.

10.3.1. Condizioni nominali

Si è già visto che lo schema di una struttura a retroazione unitaria è del tipo:



da cui, posto:

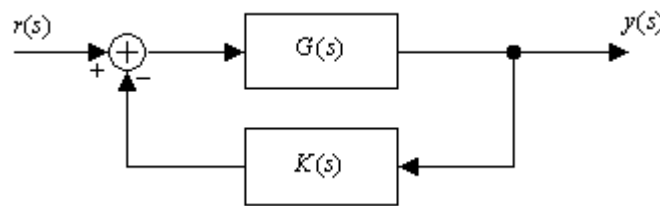
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad K(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

si ottiene:

$$G_{cc}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{\frac{N(s)N_k(s)}{D(s)D_k(s)}}{1 + \frac{N(s)N_k(s)}{D(s)D_k(s)}} = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)} \quad (10.1)$$

relazione da cui si nota che, con la retroazione, vengono modificati i poli del sistema.

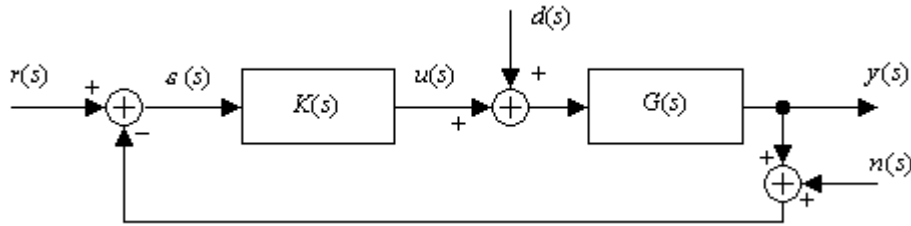
E' interessante notare che, per quanto riguarda la stabilità del sistema, è indifferente la locazione del controllore nell'anello; se infatti il sistema ad anello chiuso fosse:



$$G_{cc}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1 + \frac{N(s)N_k(s)}{D(s)D_k(s)}} = \frac{N(s)D_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)} \quad (10.2)$$

e, poiché la stabilità del sistema dipende dai suoi poli e quindi dal denominatore della FdT che rimane invariato, come detto, la posizione del controllore all'interno dell'anello è ininfluente.

Tornando al caso di retroazione unitaria, si nota che, in realtà, tenendo presenti anche disturbi e rumori, la generica struttura ad anello chiuso è data dal diagramma a blocchi riportato di seguito:



dove:

- $y(s)$ è l'uscita
- $y(s) + n(s)$ è l'uscita misurata
- $n(s)$ è il rumore (ad alte frequenze)
- $d(s)$ è il disturbo esterno sull'ingresso
- $u(s)$ è il controllo
- $r(s)$ è ingresso di riferimento, il comando esterno

Dall'esame dello schema si ha:

$$\begin{cases} y(s) = G(s) \cdot [d(s) + u(s)] \\ u(s) = K(s) \cdot [r(s) - y_m(s)] \\ \varepsilon(s) = r(s) - y_m(s) \end{cases} \quad (10.3)$$

Dalla (10.3.) si ricavano le *FdT* relative fra uscita e segnali d'ingresso

$$\begin{aligned} y(s) &= G(s) \cdot [d(s) + u(s)] = G(s) \cdot [d(s) + K(s) \cdot \varepsilon(s)] = \\ &= G(s) \cdot d(s) + G(s)K(s) \cdot r(s) - G(s)K(s) \cdot y(s) - G(s)K(s) \cdot n(s) \end{aligned}$$

e, quindi:

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) \quad (10.4)$$

Per il controllo $u(t)$, sempre dalla (10.3.) si ottiene:

$$\begin{aligned} u(s) &= K(s) \cdot [r(s) - y(s) - n(s)] = \\ &= K(s) \cdot \left[r(s) - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) - n(s) \right] \end{aligned}$$

e quindi:

$$u(s) = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) - \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) \quad (10.5)$$

Infine, per l'errore, si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= r(s) - y(s) - n(s) = \\ &= r(s) - \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) - n(s) \end{aligned}$$

da cui:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} r(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) - \frac{1}{1 + G(s)K(s)} n(s) \quad (10.6)$$

Il problema della stabilità è comune a tutte le relazioni ingresso-uscita e può essere studiato anche senza l'esame del sistema ad anello chiuso, ma semplicemente esaminando l'andamento dell'espressione $1 + G(s)K(s)$ e quindi dallo studio del sistema ad anello aperto; da quest'ultimo si può, infatti, ricavare il modo in cui il controllore opera sulla stabilità del sistema ad anello chiuso.

Se $G(s)K(s) \gg 1$ (cioè $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$) l'errore tende a zero; poiché però $G(s)K(s)$ è la FdT ad anello aperto, si può dedurre che il controllore deve lavorare sulla risposta ad anello aperto per poter ottenere le caratteristiche desiderate ad anello chiuso.

Le relazioni (10.4.), (10.5.) e (10.6.) possono essere riscritte sfruttando le funzioni di *sensitività* (4.8.) e *sensitività complementare* (4.9.), che in questo caso risultano:

- Sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

- Sensitività complementare

$$F(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

e che forniscono, quindi, le:

$$\begin{cases} y(s) = F(s) \cdot r(s) + G(s)S(s) \cdot d(s) - F(s) \cdot n(s) \\ u(s) = K(s)S(s) \cdot r(s) - F(s) \cdot d(s) - K(s)S(s) \cdot n(s) \\ \varepsilon(s) = S(s) \cdot r(s) - G(s)S(s) \cdot d(s) - S(s) \cdot n(s) \end{cases} \quad (10.7)$$

Il comportamento del sistema in reazione ai diversi ingressi può essere studiato esaminando il contributo di ogni singolo segnale:

- 1) Risposta al comando

Supponendo $d(s) = n(s) = 0$ si ha:

$$\begin{cases} y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) = F(s) \cdot r(s) \\ u(s) = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) = K(s)S(s) \cdot r(s) \\ \varepsilon(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} r(s) = S(s) \cdot r(s) \end{cases}$$

Se, come ragionevole, l'obiettivo è quello di avere $y(s) = r(s)$ (cioè $\varepsilon(s) = 0$), deve essere $G(s)K(s) \gg 1$ (alto guadagno di anello), da cui si ottiene $F(s) \cong 1$, $S(s) \cong 0$.

- 2) Risposta al disturbo

Supponendo $r(s) = n(s) = 0$ si ha:

$$\begin{cases} y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) = G(s)S(s) \cdot d(s) \\ u(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) = -F(s) \cdot d(s) \\ \varepsilon(s) = -\frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} d(s) = -G(s)S(s) \cdot d(s) \end{cases}$$

In questo caso l'obiettivo è di reiettare il disturbo e quindi di far sì che, con $d(s) \neq 0$, si abbia comunque $y(s) \cong 0$; anche in questo caso deve essere $G(s)K(s) \gg$ quindi $F(s) \cong 1$ e $S(s) \cong 0$.

- 3) Risposta al rumore (disturbi alle alte frequenze)
In questo caso si ha $r(s) = d(s) = 0$ da cui:

$$\begin{cases} y(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) = -F(s) \cdot n(s) \\ u(s) = -\frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} n(s) = -K(s)S(s) \cdot n(s) \\ \varepsilon(s) = -\frac{1}{1 + G(s)K(s)} n(s) = -S(s) \cdot n(s) \end{cases}$$

Anche qui l'obiettivo è quello di reiettare il segnale di ingresso per avere $y(s) \cong 0$ con $n(s) \neq 0$; per ottenere ciò questa volta deve essere $G(s)K(s) \ll$ (basso guadagno di anello), quindi $F(s) \cong 0$ e $S(s) \cong 1$.

Potenzialmente esistono quindi dei conflitti fra i requisiti per le risposte ai diversi ingressi (comando, disturbo e rumore).

10.3.2. Condizioni non nominali

Come detto in precedenza la struttura a retroazione permette di risolvere i problemi dovuti a due particolari situazioni cui lo schema ad anello aperto non riesce a porre rimedio:

1. Variazioni di parametri
2. Errori di modelli e di approssimazioni

Si suppone, per semplicità, di essere nel caso di assenza di disturbi e rumori.

- 1) Caso di sistema ad anello aperto e senza controllore
 - condizioni nominali

$$y(s) = G(s) \cdot r(s)$$

- condizioni non nominali

$$\tilde{y}(s) = y(s) + \Delta y(s) = \tilde{G}(s) \cdot r(s) = [G(s) + \Delta G(s)] \cdot r(s)$$

In questa situazione è:

$$\frac{\Delta y(s)}{y(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

per cui, all'aumento dell'errore di modello, corrisponde un aumento dell'errore in uscita.

2) Caso di sistema con controllore e retroazione unitaria

- condizioni nominali

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s)$$

- condizioni non nominali

Il controllore viene implementato, ovviamente, facendo riferimento al modello, per cui, passando in condizioni non nominali, si ha:

$$\tilde{y}(s) = \frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} r(s) = \frac{[G(s) + \Delta G(s)]K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} r(s)$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y(s)}{y(s)} &= \frac{\tilde{y}(s) - y(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{y}(s)}{y(s)} - 1 = \frac{[G(s) + \Delta G(s)]K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} \cdot \frac{1 + G(s)K(s)}{G(s)K(s)} - 1 = \\ &= \frac{1 + G(s)K(s) + \Delta G(s)/G(s) + \Delta G(s)K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} - 1 = \\ &= \frac{1 + G(s)K(s) + \Delta G(s)/G(s) + \Delta G(s)K(s) - 1 - [G(s) + \Delta G(s)]K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} = \\ &= \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} \end{aligned}$$

In questa situazione tramite il controllo è possibile ridurre l'errore in uscita introdotto dall'errore di modello; infatti al crescere di $K(s)$ il valore di $\Delta y(s)$ decresce.

10.3.3. Struttura generale del controllore

In base a quanto visto fino a questo punto si può affermare che la forma più generale di un controllore risulta essere del tipo:

$$K(s) = \frac{k}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_j (1 + T_j s)} = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (10.8)$$

Per la costruzione della (10.8.) di un particolare controllore si procede secondo i seguenti passi:

- 1) Si determinano gli integratori necessari per la risposta a regime desiderata.
- 2) Si sceglie la rete correttiva più adatta per seguire l'andamento desiderato della risposta in frequenza.
- 3) Si sceglie l'opportuno valore del guadagno statico.

L'implementazione classica di un controllore generico nella forma (10.8.) viene effettuata mediante due tecniche principali utilizzate anche in combinazione:

- controllori PID
- reti correttrici

Nel caso in cui si voglia ottenere la stabilità di un sistema instabile, tenendo presente che, per un generico sistema si ha:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e che, con un controllo in retroazione unitaria, la FdT a ciclo chiuso diventa la (10.1.):

$$G_{cc}(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

e ora la stabilità dipende dall'espressione a denominatore in cui, evidentemente, il controllore ricopre una estrema importanza.

Per poter utilizzare efficacemente tale tipo di controllo è necessario avere degli strumenti che permettano di verificare come l'introduzione del controllore modifichi le caratteristiche del sistema; a tale scopo vengono utilizzati:

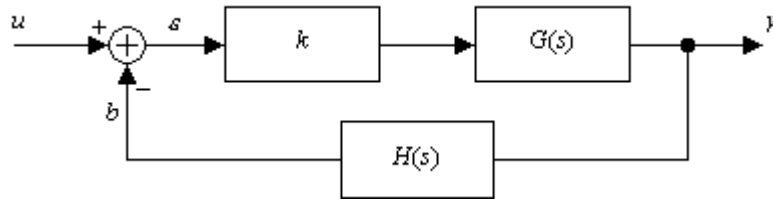
- il criterio di Routh
- la risposta in frequenza
- i parametri della risposta temporale
- il luogo delle radici

Cap 11. Luogo delle radici

Una delle tecniche disponibili per l'analisi e la sintesi dei sistemi di controllo in retroazione è quella del metodo del luogo delle radici; tale tecnica è un procedimento grafico per la costruzione, a partire dalla *FdT* di anello, del tracciato descritto nel piano complesso dai poli in ciclo chiuso in funzione del guadagno di anello.

11.1. Definizioni e proprietà

Lo schema generico di un sistema in retroazione è:



in cui:

- $G(s)$ include il sistema (l'impianto) originale, gli attuatori e parte del controllore
- $H(s)$ include i sensori e parte del controllore
- k è il *guadagno di anello*, parametro che viene modificato

La *FdT* di anello chiuso risulta essere:

$$G_{CL}(s) = \frac{k \cdot G(s)}{1 + k \cdot G(s) \cdot H(s)} \quad (11.1)$$

Come già visto (*Par. 4.3.*), se il blocco $H(s)$ si trovasse sulla catena diretta, ottenendo quindi un sistema di reazione unitaria, la *FdT* di anello chiuso sarebbe:

$$G_{CL}(s) = \frac{k \cdot G(s) \cdot H(s)}{1 + k \cdot G(s) \cdot H(s)} \quad (11.2)$$

ma la *FdT* di anello (aperto) non cambierebbe, risultando sempre:

$$G_{OL}(s) = k \cdot G(s) \cdot H(s) \quad (11.3)$$

e, in entrambe i casi, il denominatore è:

$$D(s) = 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) \quad (11.4)$$

Poiché i poli dello schema ad anello chiuso sono le radici dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione, cioè di:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \quad (11.5)$$

si troveranno gli stessi poli sia per la (11.1.) che per la (11.2).

Definizione – Luogo delle radici

Per un sistema in retroazione con FdT di anello del tipo (11.3.) si definisce **luogo delle radici** il luogo descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica (11.5.) al variare del parametro reale k da $-\infty$ a $+\infty$ in cui per:

- $k > 0$ si ha il *luogo diretto* (LD)
- $k < 0$ si ha il *luogo inverso* (LI)
- $k = 0$ la retroazione è assente e i poli del sistema coincidono con quelli della FdT di anello

Si faccia attenzione al fatto che il parametro k qui utilizzato non coincide con la costante di guadagno della *forma di Bode* (9.8.); studiando il luogo delle radici, infatti, si riporta sempre la FdT

nella forma (4.7.):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_j^m (s - z_j)}{\prod_i^n (s - p_i)}, \quad m \leq n \quad (4.7.)$$

$$G_{OL}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_j^m (s - z_j)}{\prod_i^n (s - p_i)}, \quad m \leq n \quad (11.6)$$

per cui i due parametri risultano distinti anche se fra loro proporzionali.

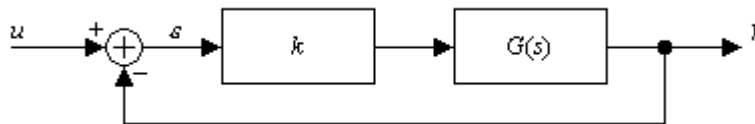
Lo studio del luogo delle radici viene effettuato generalmente solo per valori positivi del parametro di guadagno k ma può estendersi banalmente al caso di $k < 0$; il luogo delle radici risulta estremamente utile nel giudicare l'effetto della variazione del guadagno di anello su stabilità e risposta del sistema in retroazione, come illustrato dai seguenti esempi.

Esempi

1) Dato il sistema con FdT :

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

si nota che esso, in anello aperto, risulta instabile dato che il polo si viene a trovare in $+1$; in caso di retroazione unitaria ($H(s) = 1$), si ottiene:

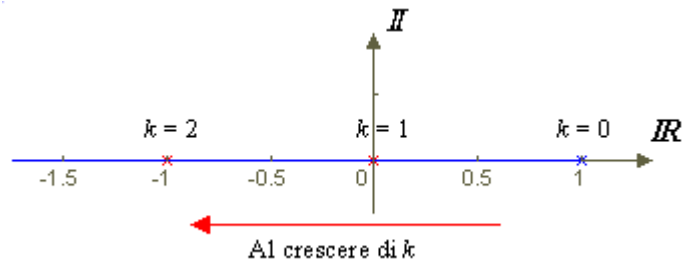


per cui è

$$G_{OL}(s) = \frac{k}{s-1} \rightarrow G_{CL}(s) = \frac{k}{s+k-1}$$

Nel sistema a retroazione unitaria il polo risulta posto in $(1 - k)$ per cui il sistema risulta stabile per $k \geq 1$; il luogo delle radici si ottiene studiando, al variare di k da 0 a $+\infty$, della:

$$s + k - 1 = 0$$



Si ha quindi che:

- $0 \leq k < 1 \rightarrow$ sistema instabile
- $k = 1 \rightarrow$ sistema stabile
- $k > 1 \rightarrow$ sistema asintoticamente stabile

Se oltre alla stabilità del sistema viene richiesta anche una determinata costante di tempo si calcola il valore necessario di k (Par. 8.2.1.)

2) Si esamini il caso del sistema con FdT :

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

Anche in questo caso il sistema risulta instabile per la presenza di un polo in $+1$; in caso di retroazione unitaria si ottiene:

$$G_{OL}(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)} \rightarrow G_{CL}(s) = \frac{k}{s^2 + s + k - 2}$$

Si noti che si sarebbe giunti alla stessa situazione se il sistema e il controllore fossero stati:

$$G(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{k}{s+2}$$

I poli del sistema in retroazione risultano essere:

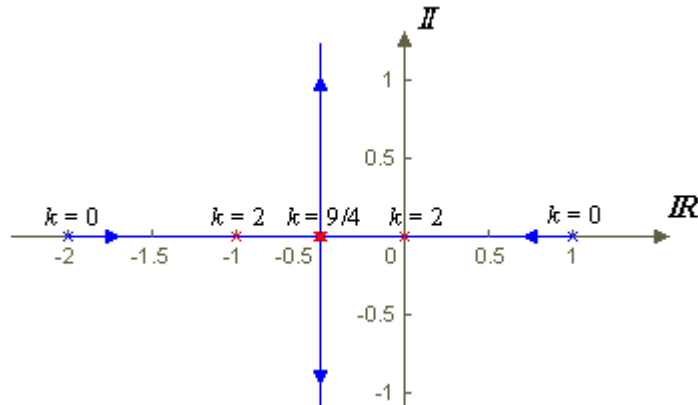
$$p_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(k-2)}$$

e, al variare di k da 0 a $+\infty$ si ottiene:

- $k = 0$ (non reazionato) $\rightarrow p_1 = 1, p_2 = -2$
- $k = 2$ $\rightarrow p_1 = -1, p_2 = 0$
- $k = 9/4$ $\rightarrow p_1 = p_2 = -1/2$
- $k > 9/4$ \rightarrow i poli di anello chiuso diventano complessi:

$$p_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j\sqrt{4k-9}$$

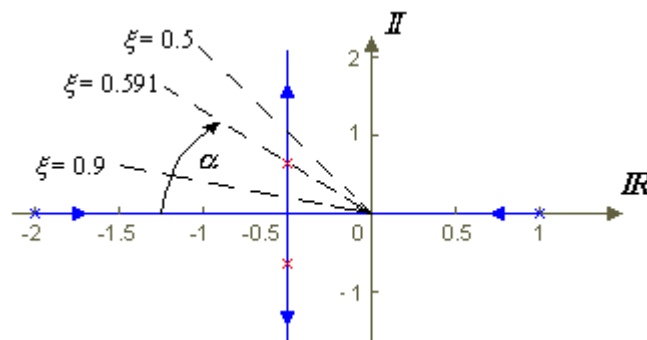
con parte reale costante e pari a $-1/2$ e parte immaginaria che tende a $+\infty$ ($-\infty$) quando $k \rightarrow +\infty$



$$(\sum s-p - \sum s-z)/\text{num eccesso zeri poli} = -2-1-0.5-0.5-0+1/6 = -0.5$$

Si deduce così che per $k > 2$ il sistema è stabile e che, se si vuole che il sistema non sia oscillatorio smorzato, deve essere $k < 9/4$; la scelta di k può poi essere legata ad altre esigenze come, per esempio, volere che la risposta temporale abbia una sovralongazione pari al 10%, caso in cui deve essere, ricordando la (8.13.):

$$M = 0.1 = e^{(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})} \Rightarrow \xi = 0.591$$



Si ottiene quindi che:

$$\xi \omega_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 0.846 \text{ rad/sec}$$

e, considerato che $\cos\alpha = \xi$, si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\sqrt{4k-9} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.682 \Rightarrow k = 2.72$$

guadagno con il quale si riescono ad ottenere stabilità e sovralongazione desiderate.

11.2. Costruzione del luogo delle radici diretto

Il tracciamento del luogo delle radici è facilmente realizzabile tramite software di calcolo e grafica; esistono comunque delle semplici regole tramite cui costruire in maniera qualitativa il luogo delle radici anche senza ricorrere a tali strumenti.

Tale costruzione approssimata risulta utile per avere un'idea immediata sul comportamento del sistema retroazionato senza ricorrere a mezzi di calcolo e per rendersi conto dell'effetto, sul sistema stesso, di modifiche della FdT di anello come la variazione del guadagno di anello o l'introduzione di poli e zeri.

Il problema consiste nel disegnare, per ogni $G(s) \cdot H(s)$, la funzione:

$$f(k) = 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \quad , \quad 0 \leq k < \infty$$

e, quindi, dalla (11.6.):

$$G_{OL}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad m \leq n \quad (11.7)$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right| \quad (11.8)$$

e

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero}) \quad (11.9)$$

dove z_j e p_i sono rispettivamente zeri e poli del sistema in anello aperto; partendo da essi, è possibile tracciare l'andamento del luogo.

Per il tracciamento del luogo delle radici si devono seguire le seguenti regole.

Regola 1

Se $k = 0$ i poli a ciclo chiuso coincidono con i poli a ciclo aperto; ***il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.***

Poiché

$$|G(s) \cdot H(s)| = \frac{1}{|k|}$$

si ha che:

$$k \rightarrow 0 \Rightarrow |G(s) \cdot H(s)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow p_i$$

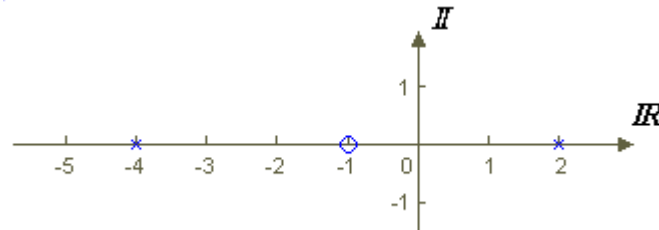
Esempio

Sia:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+4)}$$

e quindi:

- zeri di anello aperto $z_1 = -1$
- poli di anello aperto $p_1 = 2$; $p_2 = -4$



dove \times indica il polo e \circ lo zero ad anello aperto.

Per $k = 0$ il luogo delle radici è costituito semplicemente dai punti -4 e 2.

Regola 2

Per $k \rightarrow \infty$ si ha che i poli a ciclo chiuso tendono

- o agli zeri di anello aperto
- o a ∞

Poiché

$$|G(s) \cdot H(s)| = \frac{1}{|k|}$$

si ha che:

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow |G(s) \cdot H(s)| = \frac{\left| \prod_{j=1}^m (s - z_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^n (s - p_i) \right|} \rightarrow 0$$

e quindi:

- $|G(s) \cdot H(s)| \rightarrow 0$ se $s \rightarrow z_j$ (zeri a ciclo aperto)
- $|G(s) \cdot H(s)| \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$ (se $n > m$)

Dato un sistema con FdT con n poli e m zeri (con $n \geq m$), se $k \rightarrow \infty$, m poli a ciclo chiuso tendono agli m zeri di anello aperto e i restanti $n-m$ poli a ciclo chiuso tendono all'infinito.

Regola 3

Il luogo delle radici ha un numero di rami pari a n , numero di poli della FdT di anello aperto.

Se si ha che:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

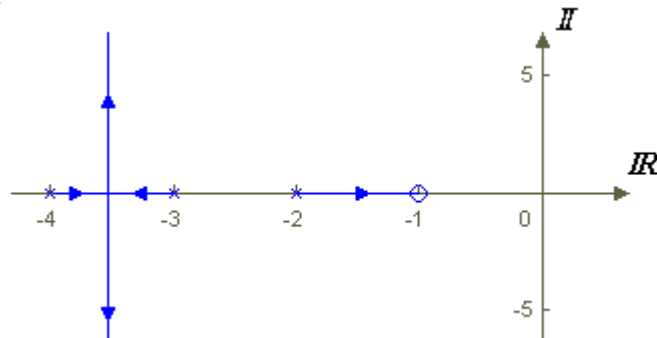
il luogo delle radici presenta tre rami; per $k = 0$ il luogo delle radici parte dai tre punti -2, -3, -4 mentre per $k \rightarrow \infty$ due rami vanno all'infinito e il terzo va a -1 (dove si trova lo zero di anello aperto).

Regola 4

Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Riprendendo il caso della regola 3, quindi con un polo che va sullo zero e due all'infinito, in prima approssimazione, si ha un andamento del tipo:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$



Regola 5

I rami che individuano lo spostamento dei poli che tendono all'infinito (n-m), seguono asintoti che:

- *si intersecano sull'asse reale nel punto di ascissa:*

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad (11.10)$$

- *formano, con l'asse reale, angoli pari a:*

$$\psi_{ar} = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11.11)$$

Esempi

- 1) Riprendendo ancora il caso precedente si ha che, per il caso:

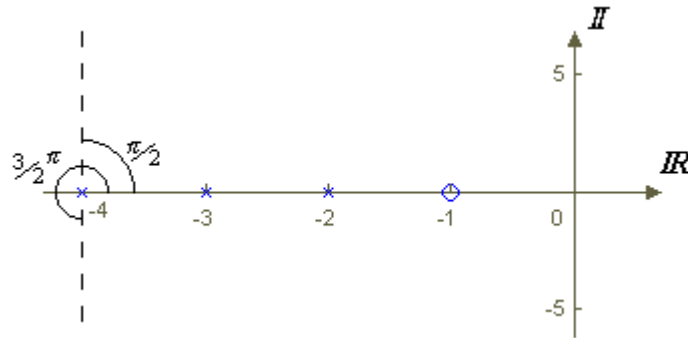
$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

si ha:

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2-3-4+1}{3-1} = -4$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{2}\pi$$

e gli asintoti risultano quindi essere:



2) Se si ha:

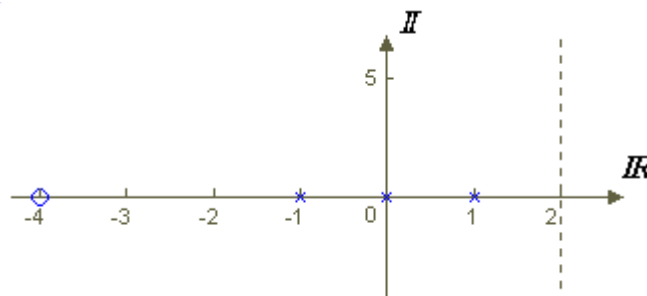
$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+4}{s(s+1)(s-1)}$$

allora:

- 3 poli a ciclo aperto in 0, 1 e -1, quindi 3 rami
- uno zero a ciclo aperto in -4
- eccesso poli-zeri ($n-m$) uguale a 2, quindi 2 asintoti per i quali:

$$x_a = \frac{0-1+1+4}{3-1} = 2, \quad \psi_{a0} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{2}\pi$$

- un ramo va a -4, gli altri due all'infinito lungo gli asintoti trovati



Regola 6

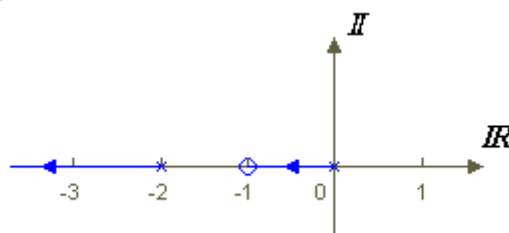
Lungo l'asse reale il luogo delle radici lascia alla sua destra un numero dispari di singolarità, cioè di poli e zeri a ciclo aperto.

Esempio

Sia:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+1}{s(s+2)}$$

seguendo le regole viste finora si ha:



Regola 7

In alcuni casi il luogo delle radici può lasciare l'asse reale (*punti di uscita*) o tornarvi (*punti d'ingresso*); il valore dell'ascissa di tali punti si trova risolvendo la relazione:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \quad (11.12)$$

in cui k si ricava a partire dalla (11.5.).

Si faccia attenzione al fatto che il calcolo di tale relazione può portare a diverse soluzioni, alcune anche non accettabili poiché i punti così ricavati non appartengono al luogo delle radici.

Esempio

Riprendendo in considerazione la:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+4}{s(s+1)(s-1)}$$

dalla (11.5.) si ha:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+4}{s(s+1)(s-1)} = -1 \Rightarrow$$

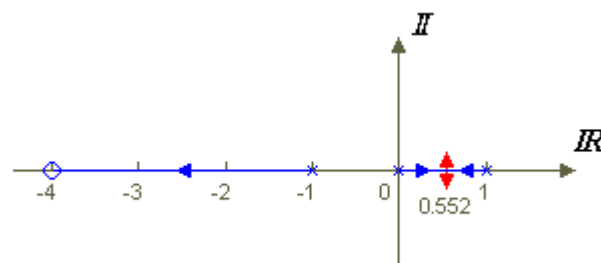
$$\Rightarrow k = -\frac{s(s+1)(s-1)}{s+4} \Rightarrow$$

per la (11.11.):

$$\Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{(3s^2-1)(s+4) - s^3 + s}{(s+4)^2} = -\frac{2s^3 + 12s^2 - 4}{(s+4)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -5.943 \\ s_2 = -0.609 \\ s_3 = 0.552 \end{cases}$$

Per la regola 6 però, solo s_3 appartiene al luogo delle radici e risulta essere un punto di uscita:



I punti di uscita e di ingresso si trovano risolvendo la relazione (11.11.) in cui k si ricava a partire dalla (11.5.).

Regola 8

Poli e zeri di anello aperto rappresentano punti di partenza e di arrivo dei rami del luogo delle radici; nel caso in cui tali singolarità siano reali, i rami vi partono o arrivano lungo l'asse reale ma se invece si è in presenza di poli o zeri complessi, è importante conoscere l'angolo di partenza o arrivo. Il calcolo è basato sulla (11.8.), per cui è:

$$\angle H(s) \cdot G(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

Supponendo di prendere un punto nell'intorno infinitesimo della singolarità (polo o zero) e quindi tale da appartenere al luogo delle radici, sfruttando la (11.8.) e tenendo presente che, sotto queste ipotesi, la tangente si può "confondere" con l'angolo, si può affermare che:

- per i poli

l'angolo di partenza da un polo complesso è pari a $(2\nu + 1)\pi$ meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri poli più gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli zeri.

- per gli zeri

l'angolo di arrivo a uno zero complesso è pari a $(2\nu + 1)\pi$ meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri zeri più gli angoli dei segmenti che lo congiungono ai poli.

L'angolo di partenza da un polo complesso e di arrivo a uno zero complesso si determinano utilizzando, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_{p_k} &= (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j) \\ \gamma_{z_k} &= (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i) \end{aligned} \quad (11.13)$$

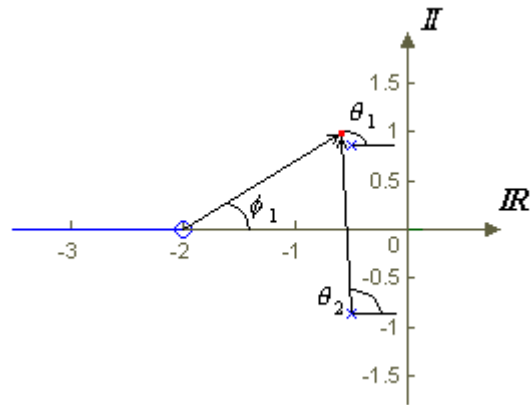
Esempio

Sia:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s + 2}{s^2 + s + 1}$$

per cui, quindi:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 \pm j0.866, \quad z_1 = -2$$



Volendo trovare l'angolo con cui il luogo delle radici parte dal $p_1 (-0,5 + j0.866)$, tenendo presente che:

$$\theta_2 \cong \frac{\pi}{2}, \quad \phi_1 \cong \frac{\pi}{6}$$

si ha, dalla prima delle (11.12.):

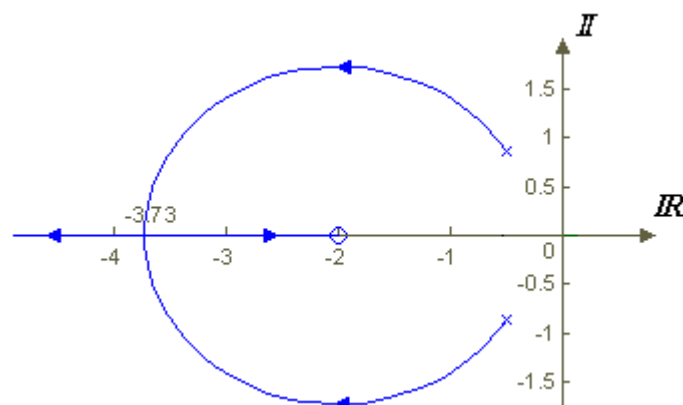
$$\gamma_{p_1} = \theta_1 = \pi - \theta_2 + \phi_1 = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

Per la regola 7, sfruttando le (11.5.) e (11.11.) si ha poi:

$$k = -\frac{s^2 + s + 1}{(s + 2)} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 + 4s + 1}{(s + 2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$s_1 = -3.73 \quad s_2 = -0.268$$

quindi il luogo delle radici rientra sull'asse reale in s_1 (s_2 non vi appartiene) e, tenendo conto di tutte le regole viste finora, si può dedurre che il luogo delle radici avrà il seguente andamento:



Regola 9

Il valore del parametro k per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova utilizzando il metodo di Routh.

Questa regola è di estrema importanza perché determina il cosiddetto k critico, cioè il valore massimo del guadagno prima che il sistema divenga instabile o il suo valore minimo necessario per la stabilità del sistema stesso (a ciclo chiuso).

Esempi

1) Se:

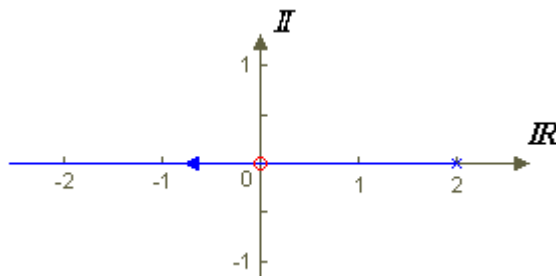
$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{1}{s-2}$$

dalla (11.5.):

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s - 2 + k = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 1 \\ s^0 & k-2 \end{array}$$

per cui, il luogo delle radici è:



e per $k > 2$ ($k = 2$ è il k critico per cui attraversa l'asse immaginario, segnato con un cerchio rosso) si rende il sistema stabile.

2) Se:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

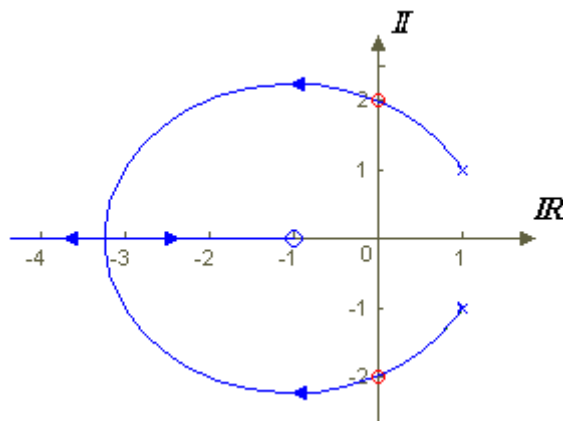
si ha:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s^2 - 2s + 2 + k(s+1) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + (k-2)s + k+2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k+2 \\ s^1 & k-2 & \\ s^0 & k+2 & \end{array}$$

Il luogo delle radici è:



e anche in questo caso $k = 2$ è il k critico, valore del guadagno oltre cui il sistema diviene stabile.

3) Se:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{s-1}{s^2 + 2s + 2}$$

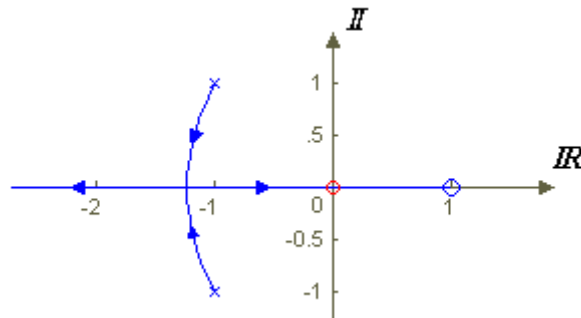
si ha:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 2 + k(s-1) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + (k+2)s + 2 - k = 0 \Rightarrow$$

s^2	1	$2-k$
s^1	$k+2$	
s^0	$2-k$	

Il luogo delle radici ora è:



e ancora una volta $k = 2$ è il k critico, ma, in questo caso, per un guadagno maggiore di k il sistema diviene instabile.

Regola 10

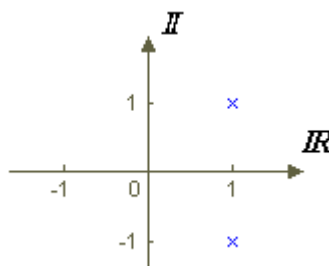
Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.

Questa regola risulta fondamentale nel progetto dei controlli dato che permette di individuare le posizioni in cui si devono inserire le singolarità.

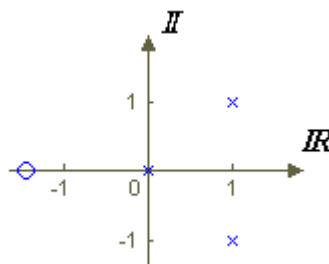
Esempio

Sia:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$



Per stabilizzare questo sistema è necessario inserire almeno uno zero; si supponga poi di voler fare in modo che il sistema in retroazione abbia errore nullo in risposta a un gradino unitario, per cui si deve inserire un polo nell'origine, portando la situazione ad essere:



per cui è:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s - z_1}{s(s^2 - 2s + 2)}$$

Per la regola 5 si ha che gli asintoti sono 2, intersecano l'asse reale, per la (11.9.) in $2 - z_1$ e quindi sicuramente nel semipiano positivo (z_1 è a parte reale negativa) ed il sistema risulta sicuramente instabile.

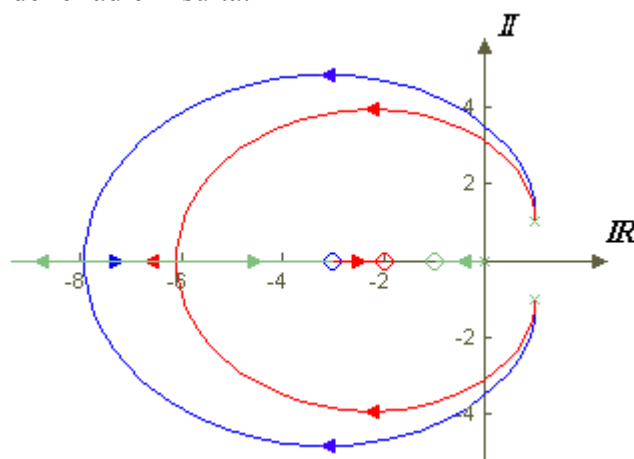
La regola 10 suggerisce di inserire un ulteriore zero per "attrarre" il luogo delle radici nel semipiano negativo; per soddisfare tutte le specifiche, il controllore non può quindi essere semplicemente proporzionale, bensì del tipo:

$$K(s) = k \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s}$$

Il sistema completo a ciclo chiuso risulta così essere caratterizzato dalla:

$$K(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s(s^2 - 2s + 2)}$$

per cui il luogo delle radici risulta:



I due sistemi riportati hanno entrambe uno zero in -1 e l'altro rispettivamente in -2 (rosso) e in -3 (blu); in verde sono riportati i rami e le singolarità comuni ai due casi.

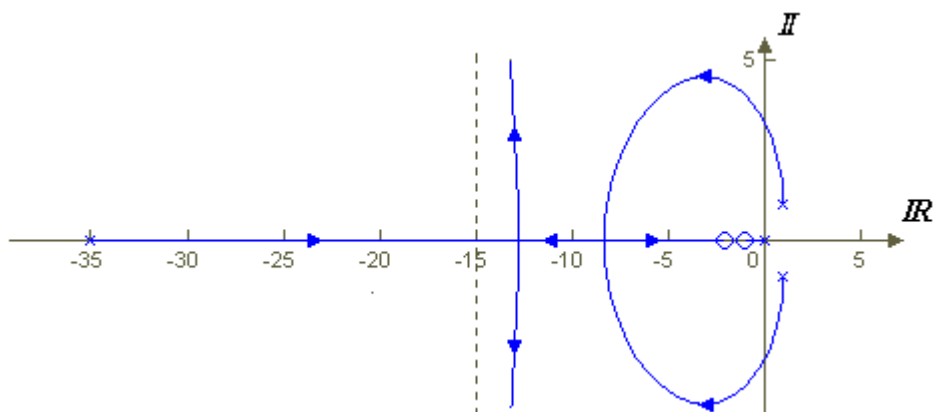
Dall'analisi del confronto dei due sistemi si deduce che più lo zero è lontano, minore è la sua influenza sui poli e maggiore deve quindi essere il termine di guadagno per arrivare alla

stabilità; la scelta della posizione dello zero è comunque legata al tipo di risposta transitoria desiderata.

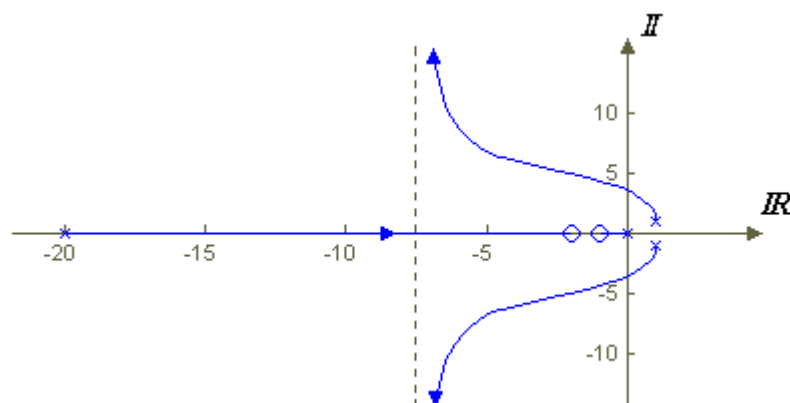
Si faccia attenzione al fatto che in realtà un controllore così fatto non è realizzabile, essendo non causale; si utilizza allora un controllore che ha un altro polo posizionato in modo da influenzare nel modo minore possibile l'andamento visto.

Tenendo conto di questo polo e considerando il caso dello zero in -2 si possono avere due diversi andamenti in funzione della posizione del polo stesso:

$$K(s) = k \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+P)} \Rightarrow K(s) \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+P)(s^2 - 2s + 2)}$$



o



Per verificare quale dei due casi si stia realizzando si sfrutta la regola 7 determinando se esistano e dove siano posizionati i punti di uscita e ingresso del luogo delle radici; come regola di base si può osservare che più il nuovo polo tende a $-\infty$, più i rami si avvicinano all'asse reale.

Se un'ulteriore specifica richiesta fosse l'errore nullo della risposta ad un segnale rampa, sarebbe necessario inserire un ulteriore polo nell'origine e rifare tutti i conti.

11.3. Esempi di tracciamento del luogo delle radici

Prima di vedere alcuni esempi di tracciamento di luogo delle radici può essere utile riepilogare le regole che si utilizzano:

- 1) Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.
- 2) I poli a ciclo chiuso tendono agli zeri di anello aperto o all'infinito.
- 3) Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero di poli della FdT di anello aperto.
- 4) Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- 5) Gli asintoti sono tali che:

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}, \quad \psi_{ar} = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- 6) Il luogo delle radici sull'asse reale lascia alla sua destra un numero dispari di singolarità.
- 7) I punti di uscita e di ingresso si trovano dalla soluzione della:

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

- 8) L'angolo di partenza o di arrivo per singolarità complesse è dato da:

$$\gamma_{p_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$

$$\gamma_{z_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

- 9) Il k critico si calcola tramite il metodo di Routh.
- 10) Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.

Nei seguenti esempi viene data per scontata l'applicazione delle regole di più semplice utilizzazione come quelle relative alla partenza dai poli, l'arrivo sugli zeri o all'infinito, la simmetria rispetto all'asse reale, il numero dei rami e l'appartenenza di porzioni dell'asse stesso al luogo delle radici in funzione del numero di singolarità lasciate sulla destra.

Esempi:

- 1) Dato un sistema per cui:

$$k \cdot G(s) \cdot H(s) = k \cdot \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

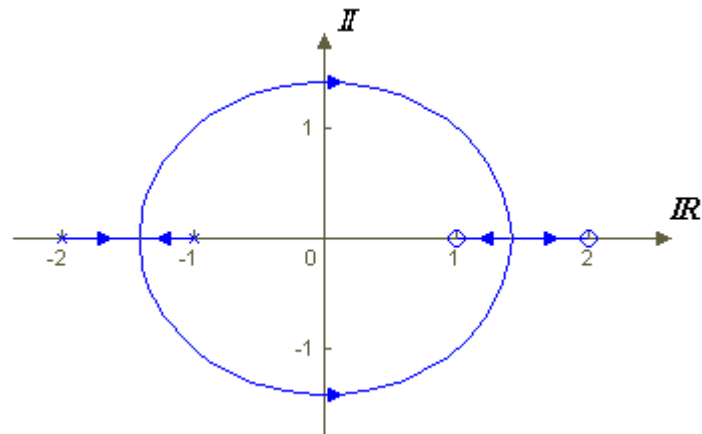
Si nota che in questo caso non ci sono asintoti ($n = m$) e bisogna quindi cercare i punti di uscita e ingresso, che risultano, dalla (11.11) (regola 7):

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow (s+1)(s+2) + k(s-1)(s-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -6 \cdot \frac{s^2 - 2}{(s^2 - 3s + 2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s^2 - 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

il luogo delle radici risulta quindi:



Sfruttando la regola 9 si trova il k critico:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow (s+1)(s+2) + k(s-1)(s-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+k)s^2 + 3(1-k)s + 2(1+k) = 0$$

e, per il criterio di Routh:

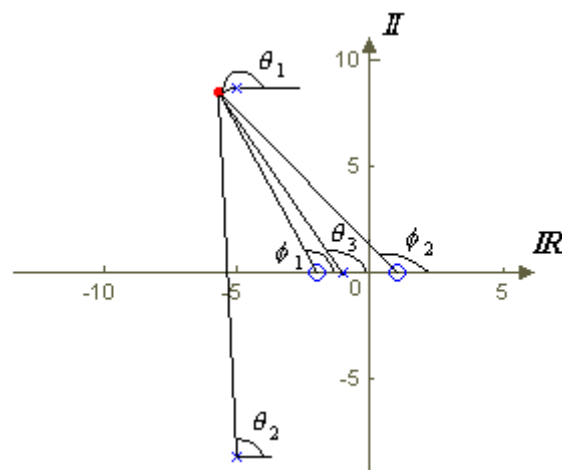
s^2	$1+k$	$2(1+k)$
s^1	$3(1-k)$	
s^0	$2(1+k)$	

per cui $k = 1$ è il k critico per il quale il sistema diventa instabile.

2) Dato il sistema:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s^2+10s+100)}$$

si deduce l'esistenza di un solo asintoto ($n = 3, m = 2$); l'angolo di partenza dai poli complessi si calcola secondo la regola 8 e sfruttando la prima delle (11.12.):



$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 + \phi_1 + \phi_2$$

in cui:

$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\theta_3 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-4}\right) \cong 114.79^\circ$$

$$\phi_1 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-3}\right) \cong 109.11^\circ$$

$$\phi_2 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-6}\right) \cong 124.72^\circ$$

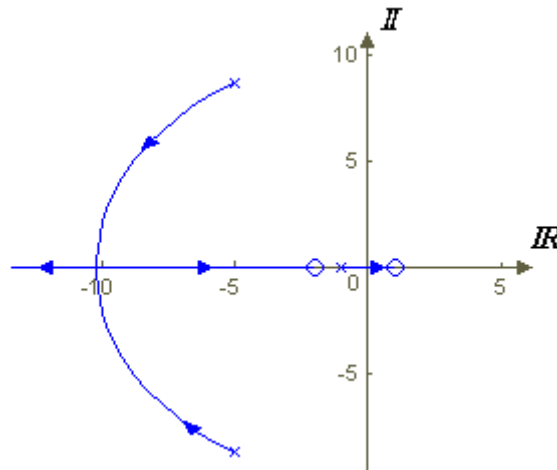
e quindi:

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 114.79^\circ + 109.11^\circ + 124.72^\circ \cong 209.04^\circ$$

Si nota subito che sicuramente esiste almeno un punto di ingresso e sfruttando la (11.11.), si trova che:

$$\begin{aligned} 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 &\Rightarrow k(s-1)(s+2) + (s+1)(s^2 + 10s + 100) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{(s+1)(s^2 + 10s + 100)}{(s-1)(s+2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -10.23, \quad s_2 = 10.5 \end{aligned}$$

e, poiché s_2 non appartiene al luogo delle radici, s_1 è il punto di ingresso (per $k = 10.22$). Il luogo delle radici risulta quindi essere:



Sfruttando la regola 9 si trova il k critico:

$$\begin{aligned} 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 &\Rightarrow k(s-1)(s+2) + (s+1)(s^2 + 10s + 100) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s^3 + (11+k)s^2 + (110+k)s + 100 - 2k = 0 \end{aligned}$$

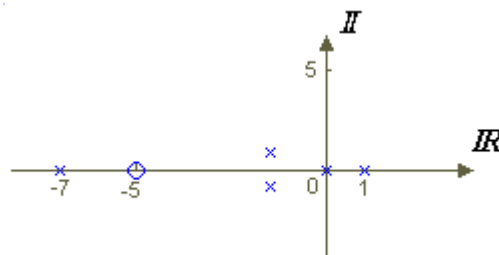
e, per il criterio di Routh:

s^3	1	$110 + k$
s^2	$11 + k$	$100 - 2k$
s^1	$\frac{1110 + 123k + k^2}{11 + k}$	0
s^0	$100 - 2k$	

per cui $k = 50$ è il k critico oltre il quale il sistema diventa instabile. Questo tipo di sistema non può essere stabilizzato con alcun controllore per la presenza dello zero a parte reale positiva cui, al crescere di k , prima o poi tenderà uno dei poli; si faccia attenzione al fatto che non è possibile cancellare tale zero con un polo del controllore perché, in tal caso, si vorrebbe realizzare un controllore instabile.

3) Dato il sistema:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s + 5}{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}$$



Si nota subito che il luogo delle radici presenta quattro asintoti ($n - m = 4$) che intersecano l'asse reale, basandosi sulla (11.9.), nel punto:

$$x_a = \frac{0 + 1 - 7 - 1.5 - 1.5 + 5}{5 - 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

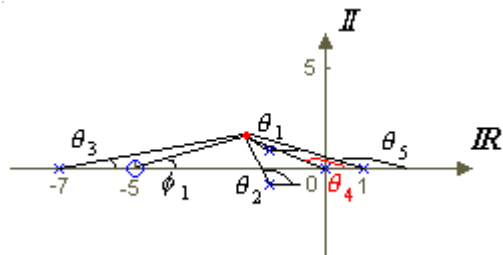
formando con l'asse stesso, dalla (11.10.), angoli pari a

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{4}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{4}\pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{4}\pi, \quad \psi_{a3} = \frac{7}{4}\pi$$

Si verifica facilmente la presenza di un punto di uscita; sfruttando come al solito la (11.11.) si trova:

$$\begin{aligned} 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) &= 0 \Rightarrow k(s + 5) + s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \frac{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}{s + 5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dk}{ds} &= 0 \Rightarrow s = 0.59 \end{aligned}$$

Per trovare l'angolo di partenza dai poli complessi, come al solito, secondo la regola 8 e sfruttando la prima delle (11.12.):



$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \phi_1$$

in cui:

$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\theta_3 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{5.5}\right) \cong 8.95^\circ$$

$$\theta_4 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-1.5}\right) \cong 150^\circ$$

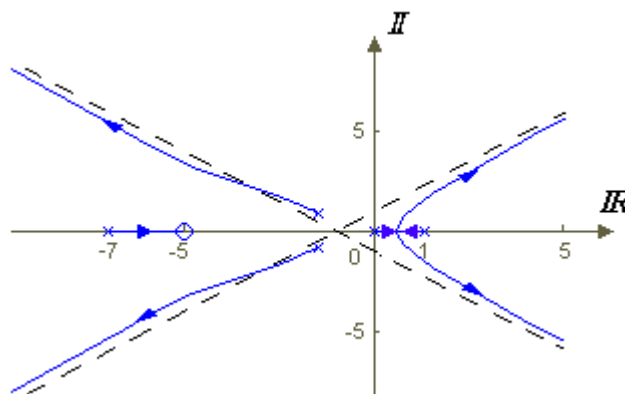
$$\theta_5 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-2.5}\right) \cong 160.89^\circ$$

$$\phi_1 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{3.5}\right) \cong 13.9^\circ$$

e quindi:

$$\theta_1 \cong 3\pi - 90^\circ - 8.95^\circ - 150^\circ - 160.89^\circ + 13.9^\circ \cong 144.06^\circ$$

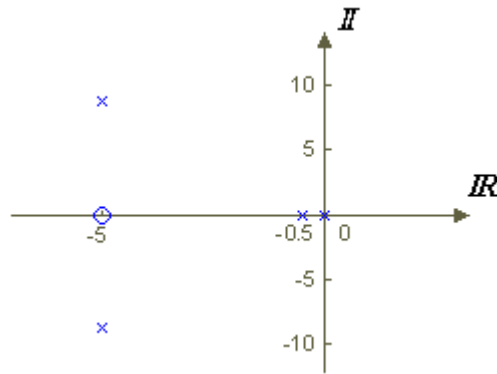
Il luogo delle radici risultante è:



Ovviamente il sistema risulta essere instabile per qualunque valore di k .

4) Sia dato il sistema:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s + 5}{s(s + 0.5)(s^2 + 10s + 100)}$$



Poiché $n-m = 3$, ci saranno tre asintoti e sfruttando le (11.9.) e (11.10.):

$$x_a = \frac{0 - 0.5 - 5 - 5 + 5}{4 - 1} = \frac{-5.5}{3} = -1.83$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$

Dall'analisi della situazione in ciclo aperto si intuisce la presenza di un punto di uscita e uno di ingresso; dalla (11.11) si ha:

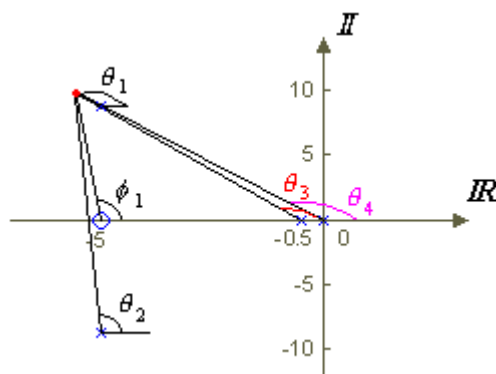
$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow k(s+5) + s(s+0.5)(s^2 + 10s + 100) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{s(s+0.5)(s^2 + 10s + 100)}{s+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -8.04, \quad s_2 = -0.25$$

dove, ovviamente, s_1 è il punto di ingresso mentre s_2 è un punto di uscita.

Per trovare l'angolo di partenza dai poli complessi, come al solito, secondo la regola 8 e sfruttando la prima delle (11.12.):



$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \phi_1$$

in cui:

$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\theta_3 \cong \arctg\left(\frac{8.66}{-4.5}\right) \cong 117.46^\circ$$

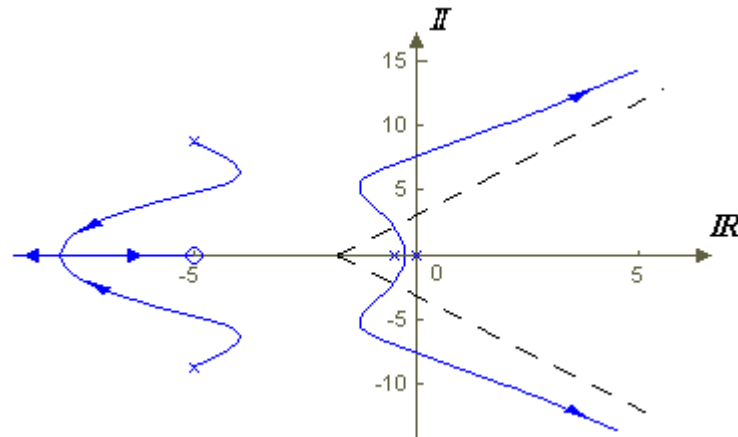
$$\theta_4 \cong \arctg\left(\frac{0.866}{-5}\right) \cong 120^\circ$$

$$\phi_1 \cong 90^\circ$$

e quindi:

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 117.46^\circ - 120^\circ + 90^\circ \cong -57.46^\circ$$

Il luogo delle radici del sistema in esame risulta essere:



Sfruttando la regola 9 si trova il k critico:

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow k(s+5) + s(s+0.5)(s^2+10s+100) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^4 + 10.5s^3 + 105s^2 + (50+k)s + 5k = 0$$

e, per il criterio di Routh:

s^4	1	105	$5k$
s^3	10.5	$50+k$	
s^2	$\frac{1052.5-k}{10.5}$	$5k$	
s^1	$\frac{(1052.5-k)(50+k)-551.25k}{10.5}$		
s^0	$5k$		

facendo i calcoli si ottiene che $k = 547,39$ è il k critico per il quale il sistema diventa instabile.

11.4. Costruzione del luogo delle radici inverso

Il luogo delle radici inverso fornisce l'andamento dei poli a ciclo chiuso quando la costante di guadagno k è negativa o quando, pur essendo k positiva, si è in presenza di retroazione positiva. Partendo dalle (11.5.) e (11.6.), si ha che:

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| = -\frac{1}{k} \quad (11.14)$$

e

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = 2v\pi \quad (v \text{ intero}) \quad (11.15)$$

Rivisitando le regole viste nel caso di luogo diretto, si ha che:

Regola 1

Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.

Regola 2

Dato un sistema con FdT con n poli e m zeri (con $n \geq m$), se $k \rightarrow -\infty$, m poli a ciclo chiuso tendono agli m zeri di anello aperto e i restanti $n-m$ poli a ciclo chiuso tendono all'infinito.

Regola 3

Il luogo delle radici ha un numero di rami pari a n , numero di poli della FdT di anello aperto.

Regola 4

Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Regola 5

I rami che individuano lo spostamento dei poli che tendono all'infinito ($n-m$), seguono asintoti che si individuano tenendo conto che:

- *si intersecano sull'asse reale, come nel luogo diretto, nel punto di ascissa:*

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

- *formano, con l'asse reale, angoli pari a:*

$$\psi_{ar} = \frac{2r\pi}{n - m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11.16)$$

Regola 6

Lungo l'asse reale il luogo delle radici lascia alla sua destra un numero pari di singolarità, cioè di poli e zeri a ciclo aperto.

Regola 7

I punti di uscita e di ingresso si trovano risolvendo l'equazione:

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

Regola 8

L'angolo di partenza da un polo complesso e di arrivo a uno zero complesso si determinano utilizzando, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_{p_k} &= 2v\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j) \\ \gamma_{z_k} &= 2v\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i) \end{aligned} \quad (11.17)$$

Regola 9

Il valore del parametro k per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova utilizzando il metodo di Routh.

Regola 10

Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.

Gli esempi che seguono mostrano le differenze fra il luogo delle radici diretto e quello inverso.

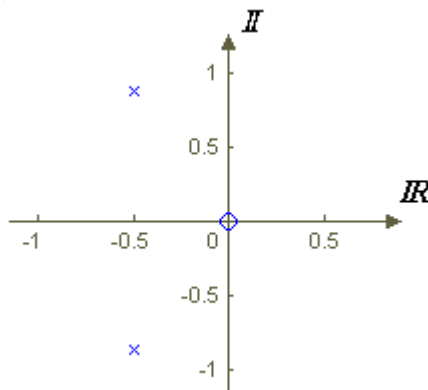
Esempi

1) Si vogliono disegnare il luogo delle radici diretto e inverso del sistema:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

quindi con:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = 0$$



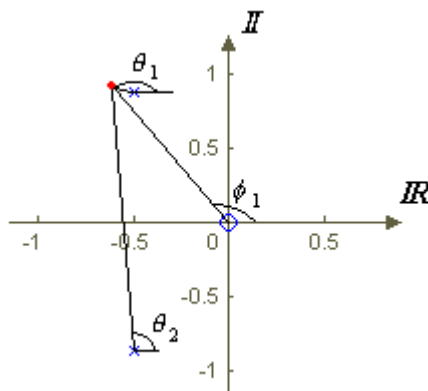
A) $k \geq 0$

Per prima cosa si deve individuare il punto di ingresso che risulta essere, utilizzando le solite procedure:

$$\begin{aligned}
1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 &\Rightarrow ks + s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow k = \frac{s^2 + s + 1}{s} &\Rightarrow \frac{dk}{ds} = \frac{s^2 - 1}{s^2} \\
\Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0 &\Rightarrow s_{1,2} = \pm 1
\end{aligned}$$

e, poiché l'unico dei due che appartiene al luogo delle radici è -1, questo è il punto di ingresso.

Per il calcolo degli angoli di partenza dai poli (complessi), si ha che:



e, quindi:

$$\theta_1 = \pi - \theta_2 + \phi_1$$

in cui:

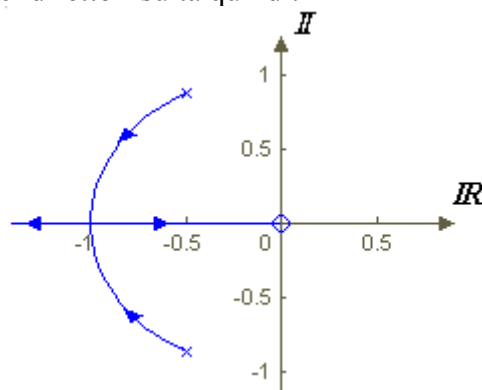
$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\phi_1 \cong 120^\circ$$

e quindi:

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ + 120^\circ \cong 210^\circ$$

Il luogo delle radici diretto risulta quindi:



B) $k \leq 0$

Anche in questo caso si ha un punto di ingresso individuato dalla stessa relazione vista in precedenza:

$$\begin{aligned}
 1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) &= 0 \Rightarrow ks + s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow k &= -\frac{s^2 + s + 1}{s} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 - 1}{s^2} \\
 \Rightarrow \frac{dk}{ds} &= 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1
 \end{aligned}$$

Ricordando però che nel luogo inverso la parte di asse reale che vi appartiene è quello che ha alla sua destra un numero pari di singolarità, questa volta è il punto -1 a non far parte del luogo.

Per l'angolo di partenza dai poli questa volta è:

$$\theta_1 = 0 - \theta_2 + \phi_1$$

in cui:

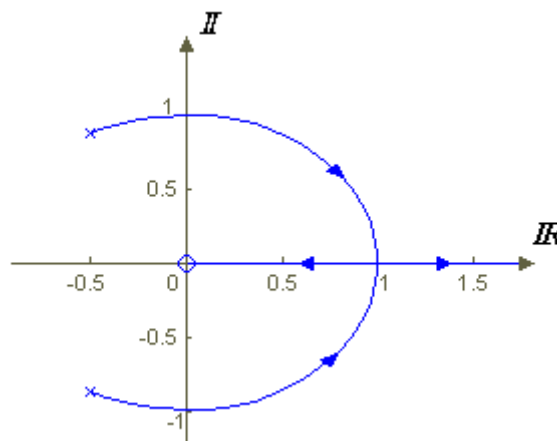
$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\phi_1 \cong 120^\circ$$

e quindi:

$$\theta_1 \cong -90^\circ + 120^\circ \cong 30^\circ$$

e il luogo inverso risulta:

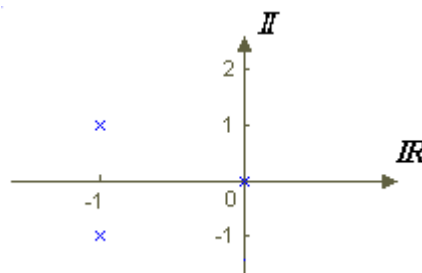


2) Si vogliono disegnare il luogo delle radici diretto e quello inverso del sistema:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

quindi senza zeri e con:

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -1 \pm j$$



A) $k \geq 0$

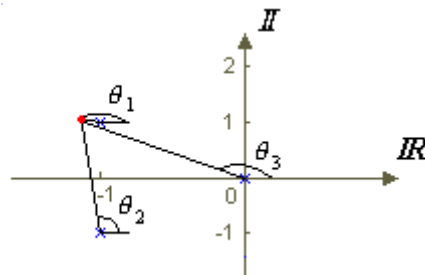
Poiché in questo caso si ha $\nu = n - m = 3$ saranno presenti tre asintoti individuabili come al solito dalla loro intersezione sull'asse reale:

$$x_a = \frac{0 - 1 - 1}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$

e dalla loro inclinazione:

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per trovare l'angolo di partenza dai poli complessi, come al solito:



e, quindi:

$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3$$

in cui:

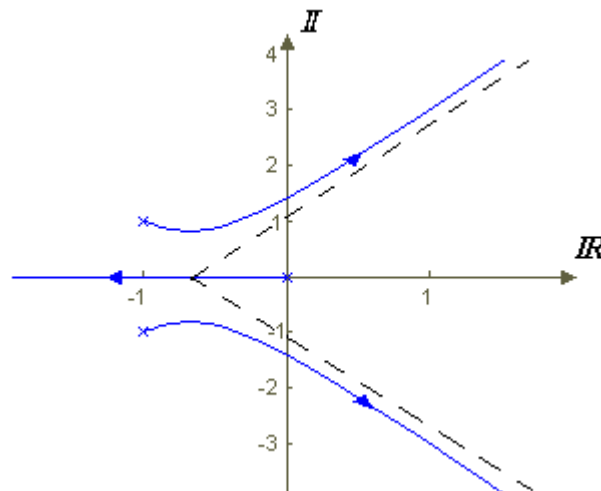
$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\theta_3 \cong 135^\circ$$

e, infine:

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 135^\circ \cong -45^\circ$$

Il luogo delle radici diretto risulta:



B) $k \leq 0$

Sfruttando i risultati ottenuti per il luogo diretto e tenendo presente opportunamente le differenze da introdurre, si ha che i tre asintoti incrociano sempre l'asse reale alla stessa ascissa ma questa volta la loro inclinazione, dalla (11.15.), è:

$$\psi_{a0} = 0, \quad \psi_{a1} = \frac{2}{3}\pi, \quad \psi_{a2} = \frac{4}{3}\pi$$

L'angolo di partenza dai poli, invece, basandosi sulla prima delle (11.16.) è:

$$\theta_1 = 2\pi - \theta_2 - \theta_3$$

in cui:

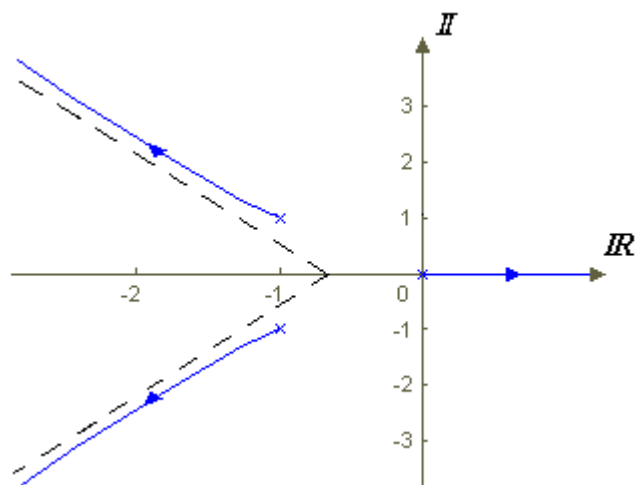
$$\theta_2 \cong 90^\circ$$

$$\theta_3 \cong 135^\circ$$

e, infine:

$$\theta_1 \cong 2\pi - 90^\circ - 135^\circ \cong 135^\circ$$

Il luogo inverso è quindi:



Cap 12. Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è uno strumento fondamentale per lo studio della *stabilità relativa* (cioè della stabilità in situazione di condizioni perturbate) in un sistema a ciclo chiuso, utilizzando la risposta in frequenza della FdT di anello aperto.

Gli strumenti matematici utilizzati per l'applicazione di tale criterio sono:

- La teoria delle funzioni di variabile complessa
- Le trasformazioni conformi
- Il teorema di Cauchy

12.1. Teorema di Cauchy

Il teorema di Cauchy è uno strumento necessario per l'applicazione del criterio di Nyquist; per enunciare tale teorema è utile richiamare alcune nozioni sulle funzioni di variabile complessa.

Definizione – Funzione analitica

Una funzione di variabile complessa:

$$F(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$

è una **funzione analitica** in D se esiste e se esistono le sue derivate $\forall s \in D$, ovvero quando siano soddisfatte le *condizioni di analiticità*:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \quad (12.1)$$

dette anche *relazioni di Cauchy-Riemann*.

Teorema 12.1. - Cauchy (trasformazioni conformi)

Si consideri la generica funzione analitica $F(s)$:

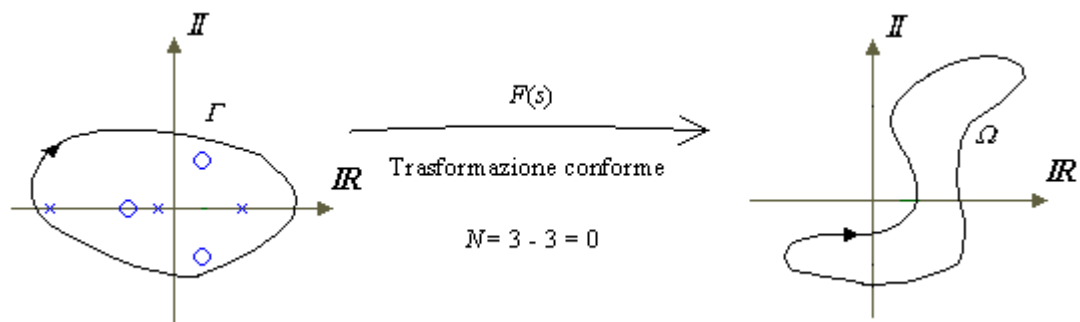
$$F(s) = k \cdot \frac{\prod_j^m (s - z_j)}{\prod_i^n (s - p_i)}, \quad m \leq n$$

con un numero finito di poli (p_i) e zeri (z_j).

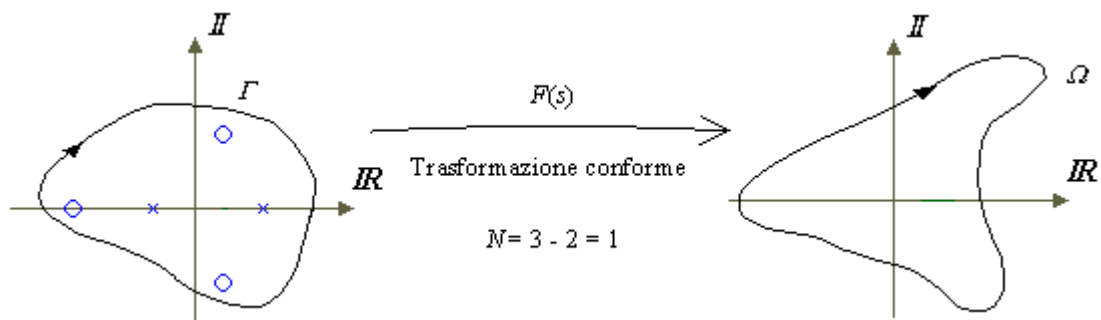
Si definisca poi un contorno chiuso Γ che racchiuda l'insieme dei poli e degli zeri.

Sotto queste ipotesi, percorrendo Γ in senso orario, $F(s)$ mappa Γ in una curva chiusa Ω che gira intorno all'origine in senso orario un numero di volte pari a $N = m - n$. (N n° eccesso zeri poli)

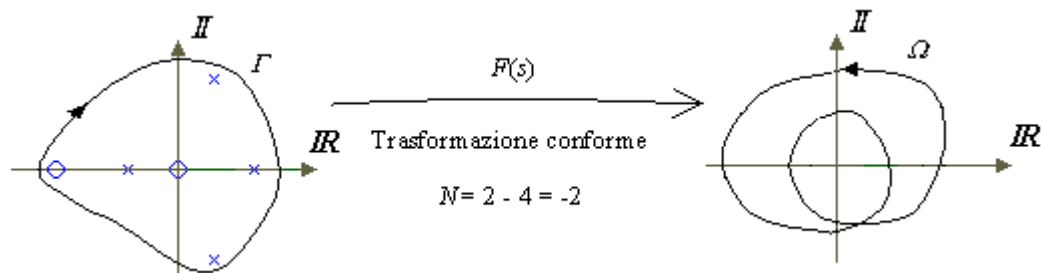
Esempi



Il numero dei poli è uguale a quello degli zeri per cui la curva Ω non circonda l'origine.

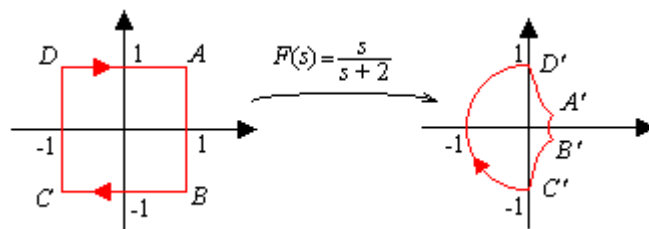


In questo caso si ha una rotazione in senso orario intorno all'origine



Ora invece si hanno due rotazioni in senso antiorario.

Un esempio di trasformazione conforme può essere la seguente:



12.2. Scelta dei parametri

Per sfruttare opportunamente il teorema appena visto per il criterio di Nyquist bisogna scegliere opportunamente i parametri che in esso compaiono, cioè Γ , Ω e $F(s)$.

- $F(s)$

Poiché lo scopo è quello di studiare la stabilità del sistema $G(s)$ a ciclo chiuso, si sceglie come $F(s)$:

$$F(s) = 1 + K(s) \cdot G(s) \quad (12.2)$$

da cui, posto che sia :

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

si ha:

$$F(s) = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)} \quad (12.3)$$

Ricordando che, come già visto:

$$G_{OL}(s) = K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

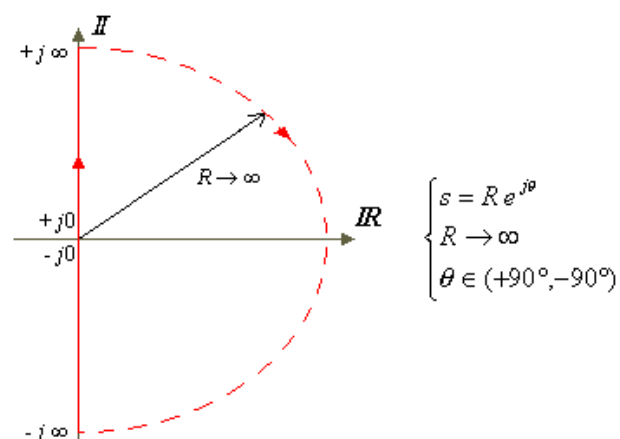
$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

si deduce che gli zeri di $F(s)$ sono i poli in ciclo chiuso mentre i poli di $F(s)$ coincidono con i poli a ciclo aperto; per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso gli zeri di $F(s)$ devono quindi essere a parte reale negativa.

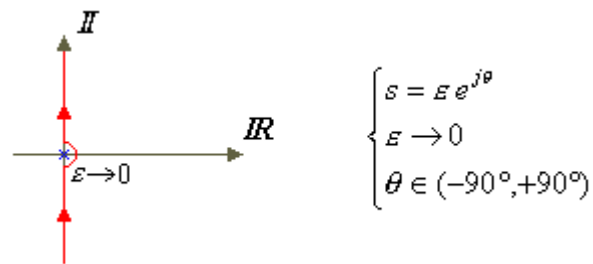
- Γ

Γ è il semipiano di parte reale positiva eccetto al più un numero finito di punti singolari sull'asse immaginario.

Posto allora $s = j\omega$ con ω che va da $-\infty$ a $+\infty$ si può anche scrivere:



Nel caso di punti singolari sull'asse immaginario si considerano delle semicirconferenze di raggio ε e centro in poli e zeri immaginari della $F(s)$ con $\varepsilon \rightarrow 0$:



Si noti che:

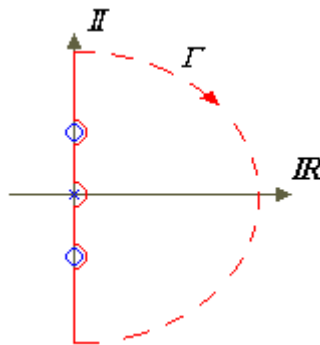
- **se uno degli zeri di $F(s) \in \Gamma$ vuol dire che il sistema è instabile in ciclo chiuso;**
- **se uno dei poli di $F(s) \in \Gamma$ vuol dire che il sistema è instabile in ciclo aperto.**

Se, invece di considerare la $F(s)$ sopra definita, si utilizza per l'applicazione del teorema di Cauchy, la

$$F'(s) = F(s) - 1 = K(s) \cdot G(s) \quad (12.4)$$

si ottiene la traslazione della curva Ω che, invece di girare (eventualmente) intorno all'origine, ruota intorno al punto $(-1, 0)$.

Da questa scelta dei parametri e sfruttando il teorema di Cauchy, si ha che, considerando un caso generico del tipo:



un percorso completo di Γ in senso orario produce una curva Ω che ruota intorno al punto $(-1, 0)$ in senso orario un numero di volte pari a $N = Z - P$ dove:

- **Z è il numero dei poli in ciclo chiuso racchiusi in Γ e quindi instabili;**
- **P è il numero dei poli in ciclo aperto racchiusi in Γ e quindi instabili.**

Si ottiene quindi banalmente che:

$$Z = N + P \quad (12.5)$$

relazione tramite cui è possibile verificare se esistono e quanti sono i poli instabili a ciclo chiuso.

La curva Ω che si ricava applicando il teorema di Cauchy con Γ e $F'(s)$ è in pratica il diagramma di Nyquist per $\omega \in (-\infty, +\infty)$ e dall'esame del comportamento di quest'ultimo rispetto al punto $(-1, 0)$ si ricava il valore di N e, quindi, di Z .

Esempi

1) Sia data la:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

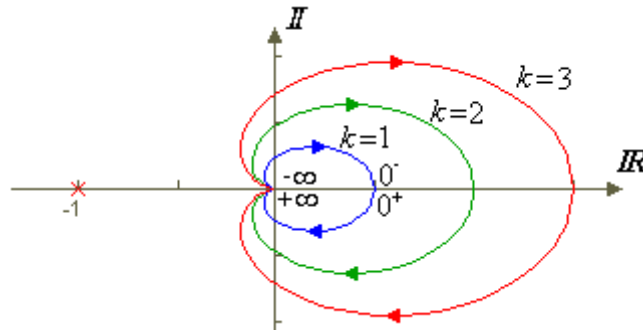
in cui i due poli sono stabili, cioè a parte reale negativa.

Sfruttando la (12.4.) si ottiene:

$$F'(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

per cui $P = 0$.

Disegnando il diagramma polare del sistema si ottiene:

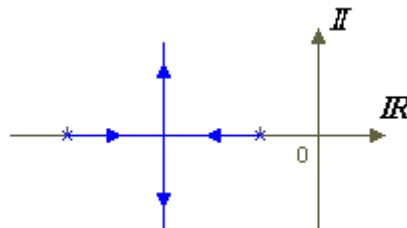


e si ricava così che, anche al crescere di k , $N = 0$, da cui, per la (12.5.):

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

cioè non esistono poli instabili a ciclo chiuso.

L'applicazione delle regole e delle procedure descritte porta a dedurre che il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile, come si può verificare anche dall'esame del luogo delle radici:

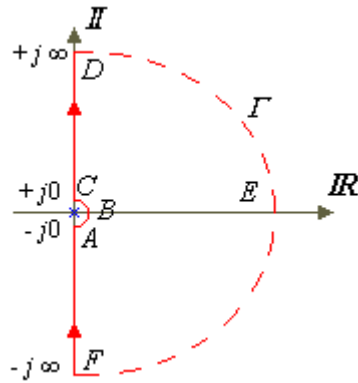


Non è quindi necessario preoccuparsi di T ma è sufficiente tracciare il diagramma di Nyquist di anello aperto, conoscere il numero di eventuali poli instabili in anello aperto (P) e contare il numero di accerchiamenti (N) del punto $(-1, 0)$.

2) Data la:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s(s - p)}$$

si nota l'assenza di poli instabili, quindi $P = 0$ (perché i poli sono a parte reale negativa)
; la rappresentazione sul piano complesso è:

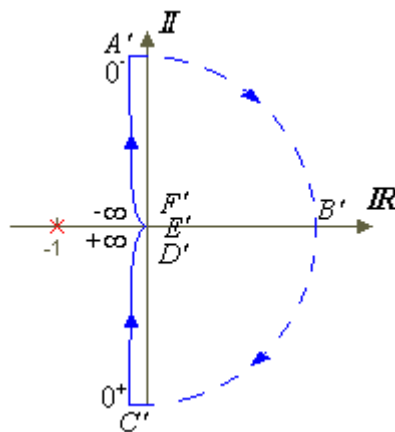


Si verifica che, in questo caso, per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha:

$$|K(s) \cdot G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle(K(s) \cdot G(s)) = \angle \frac{k}{\varepsilon \cdot e^{j\theta}} = \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

ma poiché per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha che θ va da -90° a $+90^\circ$ allora $\angle(K(s) \cdot G(s))$ va da $+90^\circ$ a -90° ; si ottiene quindi il seguente andamento:

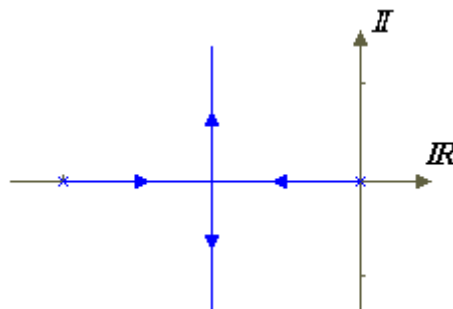


da cui si deduce che $N = 0$.

Dalla (12.5.) si ottiene infine:

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

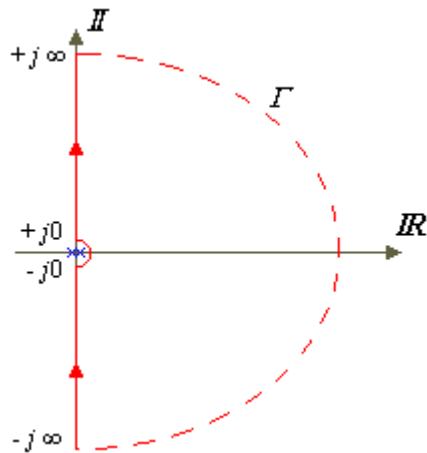
e quindi il sistema a ciclo chiuso è stabile, come si può verificare anche dall'analisi del luogo delle radici:



3) Nel caso di poli multipli nell'origine:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s^2(s-p)}$$

si ha sempre $P = 0$ e, nel piano complesso:

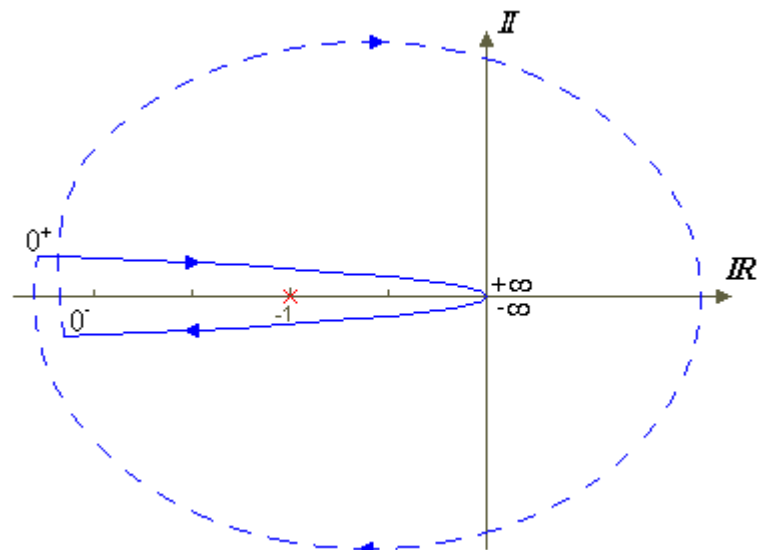


In questo caso, per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha:

$$|K(s) \cdot G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle(K(s) \cdot G(s)) = \angle \frac{k}{\varepsilon^2 \cdot e^{j2\theta}} = \frac{k}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}$$

ma poiché per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha comunque che θ va da -90° a $+90^\circ$ allora $\angle(K(s) \cdot G(s))$ va da $+180^\circ$ a -180° ; si ottiene quindi:

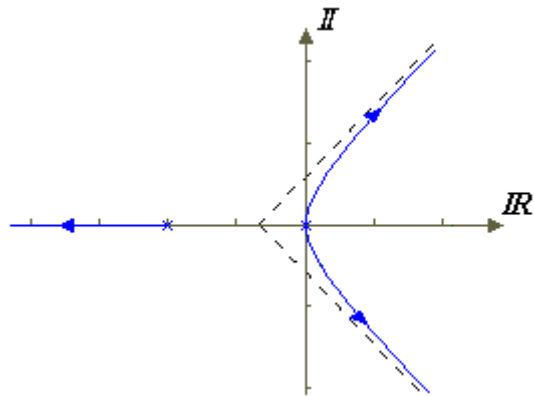


in cui si nota che, questa volta, $N = 2$ (il diagramma gira intorno al punto $(-1, 0)$ due volte in senso orario).

Sempre dalla (12.5.) si ottiene:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

e il sistema in ciclo chiuso risulta instabile per la presenza di due poli a parte reale positiva, come rivela anche il luogo delle radici del sistema:



12.3. Criterio di Nyquist

In funzione della presenza o meno di poli a parte reale positiva in anello aperto si hanno due enunciati del criterio di Nyquist:

- 1) Un sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non gira intorno a $(-1, 0)$ quando non sono presenti poli instabili in anello aperto, cioè:

$$P = 0 \text{ e } Z = N + P = 0$$

in cui Z è il numero di poli instabili a ciclo chiuso, P il numero di poli instabili a ciclo aperto e N il numero di accerchiamenti del punto $(-1, 0)$ in senso orario per ω che va da $-\infty$ a $+\infty$ in senso orario.

- 2) Un sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist della FdT in anello aperto gira, in senso antiorario, intorno a $(-1, 0)$ un numero di volte N pari a P , numero di poli instabili in anello aperto, quando cioè:

$$N = -P$$

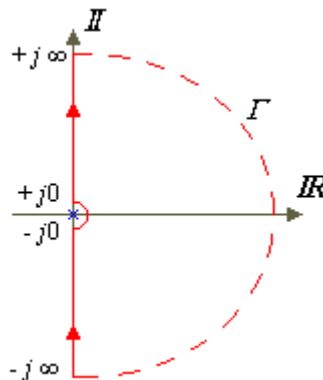
Esempio

Si vuole studiare la stabilità a ciclo chiuso del sistema:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

al variare di k .

Il sistema ha tre poli ma nessuno instabile, per cui è $P = 0$; la solita rappresentazione di Γ sul piano complesso è:



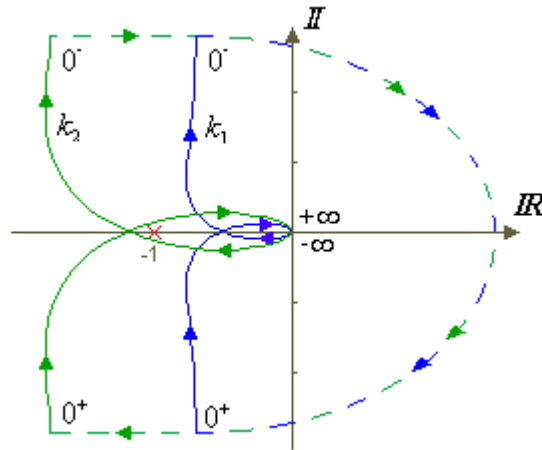
Si verifica che, in questo caso, per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha:

$$|K(s) \cdot G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle(K(s) \cdot G(s)) = \angle \frac{k}{\varepsilon \cdot e^{j\theta}} = \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

e poiché per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha che θ va da -90° a $+90^\circ$, allora $\angle(K(s) \cdot G(s))$ va da $+90^\circ$ a -90° .

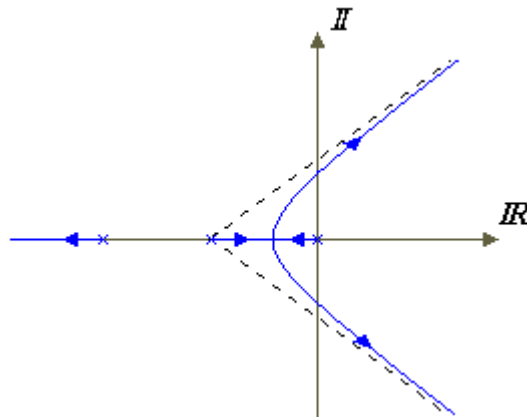
Costruendo il diagramma di Nyquist per due diversi valori di k si ottiene:



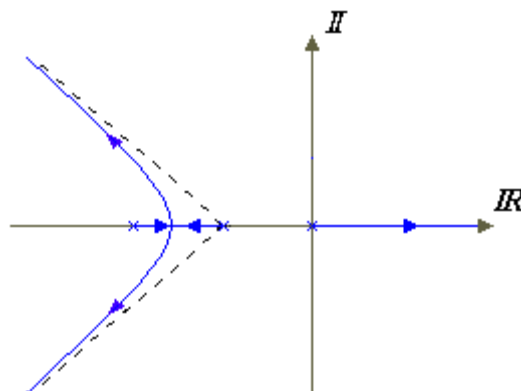
in cui:

- per k_1 il punto $(-1, 0)$ non viene circondato, quindi $N = 0$ e, dalla (12.5.) $Z = 0$; il sistema risulta stabile in ciclo chiuso.
- per k_2 il grafico ruota intorno al punto $(-1, 0)$ due volte in senso orario, da cui si deduce che $N = 2$ e, sempre dalla (12.5.), $Z = 2$; il sistema a ciclo chiuso è instabile.

Si capisce quindi che esiste un k critico, oltre il quale il sistema in ciclo chiuso diviene instabile, come conferma anche l'analisi del luogo delle radici del sistema stesso:



Si noti che per valori negativi di k , il luogo delle radici inverso è:



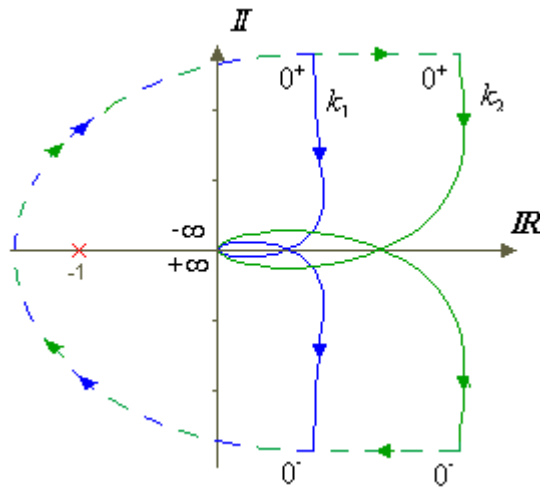
ed il sistema risulta sempre instabile; alla stessa conclusione si poteva giungere sfruttando il criterio di Nyquist, tenendo presente che, per k negativi, per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha:

$$|K(s) \cdot G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle(K(s) \cdot G(s)) = \angle \frac{k}{\varepsilon \cdot e^{j\theta}} = \frac{k}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

e poiché per s che va da $j0^-$ a $j0^+$ si ha che θ va da -90° a $+90^\circ$, allora $\angle(K(s) \cdot G(s))$ va anch'essa da -90° a $+90^\circ$.

Il diagramma di Nyquist per gli stessi valori di k utilizzati in precedenza ma presi negativi risulta essere:

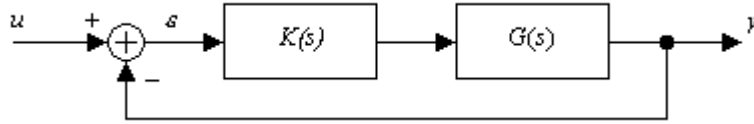


e quindi, per qualsiasi valore di k , il diagramma circonda sempre una volta il punto $(-1, 0)$ in senso orario, per cui è $N = 1$ e, sfruttando la (12.5.) essendo comunque $P = 0$, si ha $Z = 1$; il sistema risulta quindi essere sempre instabile.

12.4. Stabilità in condizioni perturbate

Il vantaggio del criterio di Nyquist sta nel fatto che permette di lavorare anche in condizioni non nominali, in presenza di disturbi, errori di modello ed altro.

Lo studio del sistema perturbato si basa sul solito schema di retroazione unitaria



che, come noto, ha FdT pari a:

$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (12.6)$$

e la cui stabilità viene studiata analizzando la relazione:

$$1 + K(s) \cdot G(s) = 0 \Rightarrow K(s) \cdot G(s) = -1$$

Si parla di sistema perturbato e quindi di *stabilità relativa*, in presenza di:

- Non linearità
- Dinamica non modellata
- Variazioni di parametri

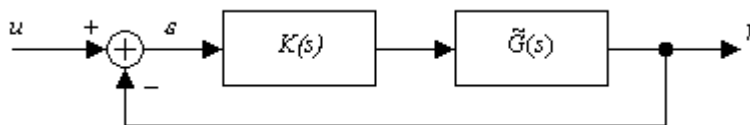
Supponendo di poter rappresentare tali incertezze di modellizzazione del sistema in forma razionale fratta, si può scrivere:

$$L(s) = L(j\omega) = |L(j\omega)| e^{j\angle L(j\omega)}$$

e, quindi:

$$\tilde{G}(s) = L(s) \cdot G(s)$$

potendo così riportare il sistema perturbato nella forma:



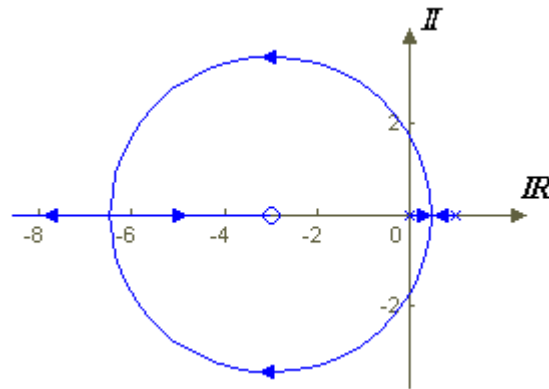
La FdT da esaminare per lo studio della stabilità e delle prestazioni in ciclo chiuso risulta quindi:

$$\tilde{G}_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot \tilde{G}(s)}{1 + K(s) \cdot \tilde{G}(s)}$$

In un precedente esempio è stato mostrato come la variazione di k può portare un sistema stabile ad essere instabile; un'altra situazione del genere si ha per il sistema:

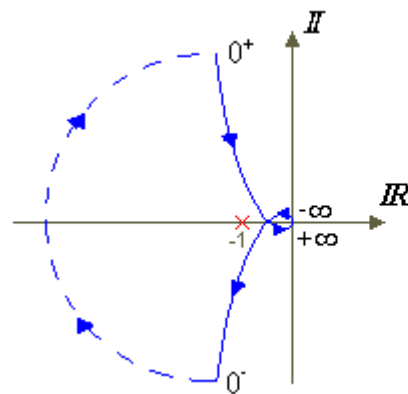
$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-1)}$$

Il luogo delle radici del sistema risulta:



e si nota che esiste un k_{CR} (critico) oltre il quale il sistema si stabilizza e che per $k < 0$ il sistema è sempre instabile; analizzando il sistema con il criterio di Nyquist, si ottengono i seguenti diagrammi:

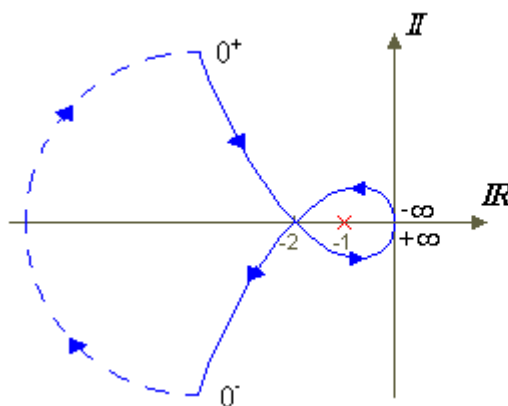
- $k < k_{CR}$



$$\begin{aligned} P &= 1 \\ N &= 1 \\ Z &= N + P = 2 \end{aligned}$$

Il sistema è instabile in ciclo chiuso

- $k > k_{CR}$



$$\begin{aligned} P &= 1 \\ N &= -1 \\ Z &= N + P = 0 \end{aligned}$$

Il sistema è stabile a ciclo chiuso; si noti che $N = -1$, dato che il diagramma circonda il punto $(-1, 0)$ in senso antiorario.

In caso di errori di modello può accadere che a fronte di una situazione di stabilità in ciclo chiuso desiderata si riscontri una situazione effettiva di instabilità; si può giungere ad una tale condizione per 2 diversi errori di modellizzazione:

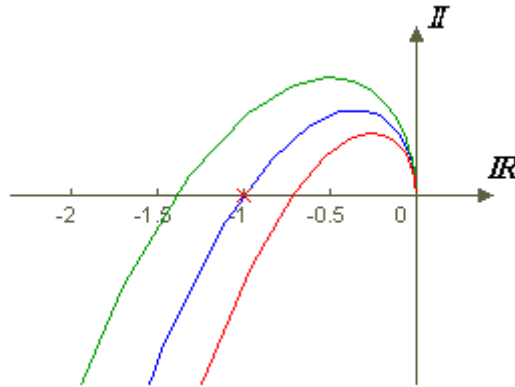
1) Errore di guadagno

L'esempio sopra riportato mostra come, modificando la costante di guadagno k , si possa passare da una situazione di stabilità ad una di instabilità; se quindi, modellando il sistema, si introduce un errore dovuto a $|L(j\omega)|$, si può portare il sistema in una situazione critica.

2) Errore di fase

Realizzando il modello del sistema si può commettere un errore anche sulla fase, dovuto al termine $\angle L(j\omega)$; un errore di questo tipo comporta un anticipo o un ritardo di fase che può rivelarsi anch'esso critico per il sistema stesso.

Facendo riferimento all'esempio visto in precedenza, l'andamento (parziale) del diagramma di Nyquist in caso di anticipo (in rosso) o ritardo (in verde) di fase diventa (in blu è riportato il sistema originale con $k = 1$):



Anche un errore sulla fase può quindi influire sulla condizione di stabilità.

Appare evidente, quindi, l'importanza di conoscere la *robustezza* del sistema, cioè la sua capacità di conservare le caratteristiche di stabilità anche in caso di disturbi o errori di modello che influiscano sul guadagno di anello aperto o sulla fase.

Da quanto visto è banale dedurre che un sistema stabile a ciclo aperto è tanto più *robusto*, cioè lontano dalle condizioni che lo rendono instabile, quanto più il suo diagramma di Nyquist si sviluppa lontano dal punto critico $(-1, 0)$.

Definizione – Grado di stabilità

Per un sistema stabile in anello aperto con FdT data da $G(s)$, viene detta **grado di stabilità** la distanza vettoriale di $G(j\omega)$ dal punto $(-1, 0)$ poiché al variare di tale distanza può cambiare il valore di N nel criterio di Nyquist e, quindi, la stabilità a ciclo chiuso.

12.5. Margini di stabilità

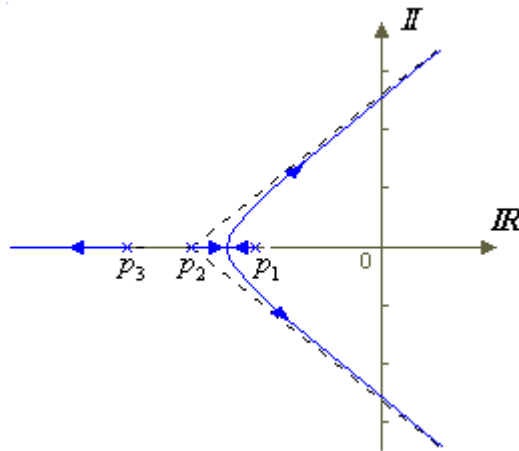
Come visto, la stabilità robusta di un sistema retroazionato può essere valutata tramite il diagramma di Nyquist del sistema in ciclo aperto, prendendo in esame il grado di stabilità.

Si rendono necessari però altri indicatori che forniscano informazioni, anche parziali, sul grado di robustezza e che siano facilmente calcolabili; si introducono a tale scopo due parametri, i *margini di stabilità*, che misurano la *stabilità relativa*, dei sistemi in retroazione.

Si consideri un sistema stabile ad anello aperto del tipo:

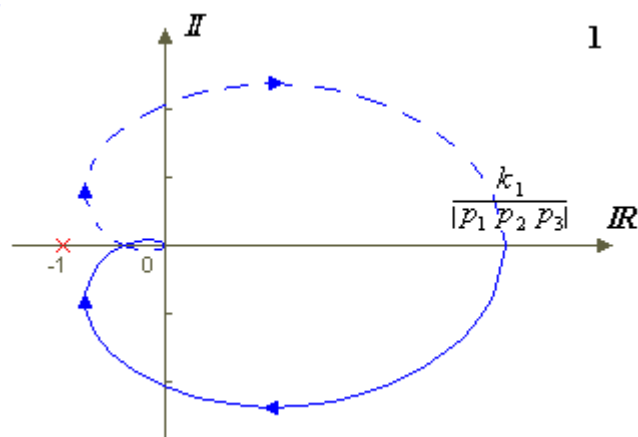
$$G(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

il cui luogo delle radici risulta:



Si nota che il sistema, sotto certe condizioni può divenire instabile; prendendo in considerazione, per esempio, due diversi valori della costante di guadagno, con $k_2 > k_1$, si ha:

- k_1

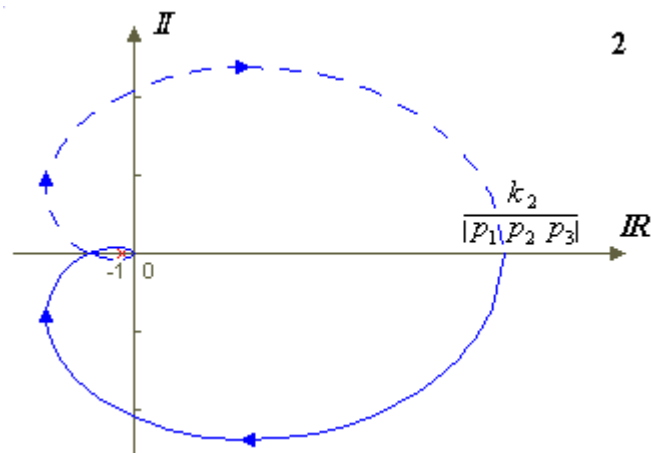


caso in cui, dalla (12.5.), si ottiene:

$$Z = N + P = 0 + 0 = 0$$

e il sistema è quindi stabile.

- k_2

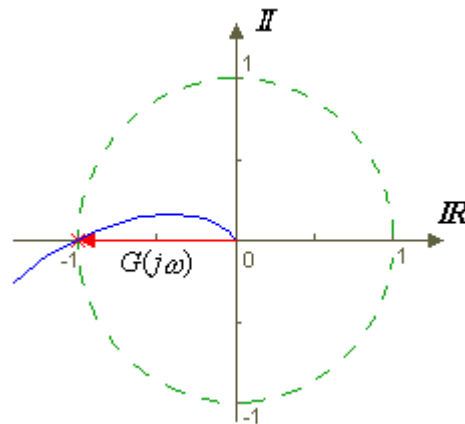


in cui è:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

e il sistema è quindi instabile.

Si vorrebbe allora riuscire a caratterizzare quelle che sono le variazioni fra i casi 1 e 2; per prima cosa si può notare che quando k assume il valore critico, si verifica che:



la FdT ha modulo pari a 1 (0 dB) e fase pari a -180° .

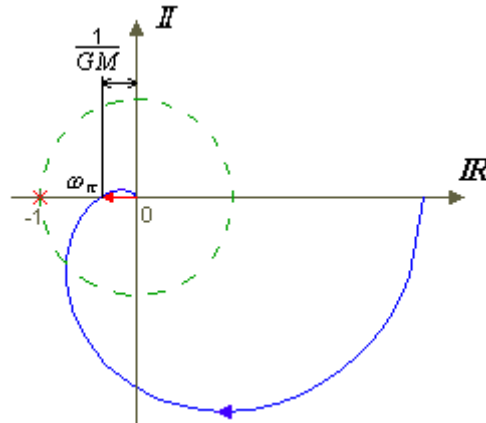
Prendendo in considerazione il generico sistema stabile a tre poli visto in precedenza si possono facilmente introdurre i concetti di *margin di guadagno* e *margin di fase*.

12.5.1. Margine di guadagno

Supponendo di trovarsi nel caso in cui la FdT di anello aperto è:

$$G(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

e tale che il suo diagramma polare, fissato k , sia:



Ricordando la definizione del *grado di stabilità* si arriva alla seguente definizione.

Definizione – Margine di guadagno

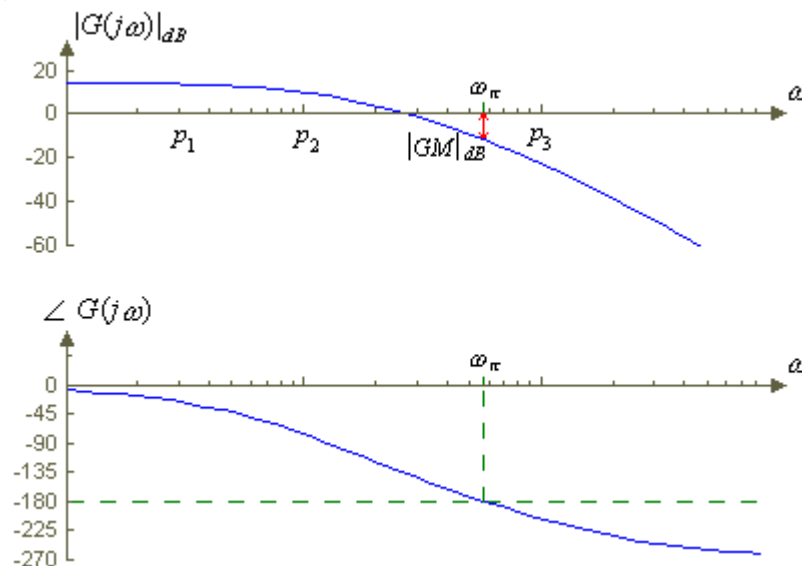
Si definisce ***margin*** ***di guadagno*** del sistema il valore:

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \quad (12.7)$$

cioè l'inverso del modulo della FdT calcolata nel punto di intersezione con l'asse reale, in cui la pulsazione, indicata come ω_π , è quindi tale che $\angle G(j\omega_\pi) = -180^\circ$.

Per garantire la stabilità di un sistema deve essere $GM > 0$.

La valutazione del margine di guadagno può essere ottenuta direttamente dai diagrammi di Bode di modulo e fase, che risultano essere:



Una volta individuata la pulsazione ω_π , per cui $\angle G(j\omega_\pi) = -180^\circ$, si calcola il valore di $|G(j\omega_\pi)|_{dB}$, da cui si ricava il margine di guadagno $|GM|_{dB} = -|G(j\omega_\pi)|_{dB}$.

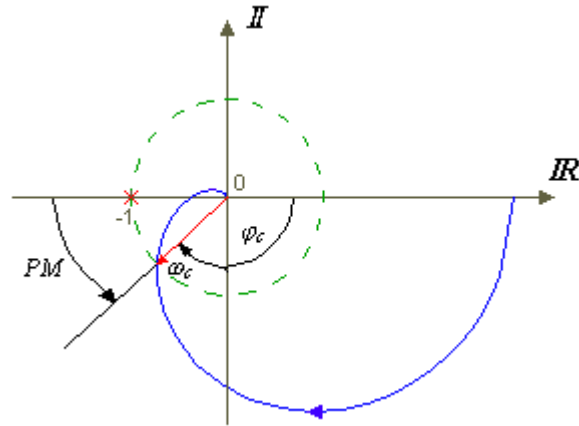
Il margine di guadagno GM rappresenta il limite superiore del valore che può assumere la costante di guadagno k oltre il quale il sistema perde la proprietà di stabilità asintotica; rappresenta, quindi, una misura del grado di robustezza della stabilità in rapporto ad eventuali incertezze sul guadagno d'anello.

12.5.2. Margine di fase

Sempre nel caso di sistema con FdT di anello aperto:

$$G(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

sfruttando il diagramma polare:



e dalla definizione del *grado di stabilità* si arriva al concetto di *margin* di fase.

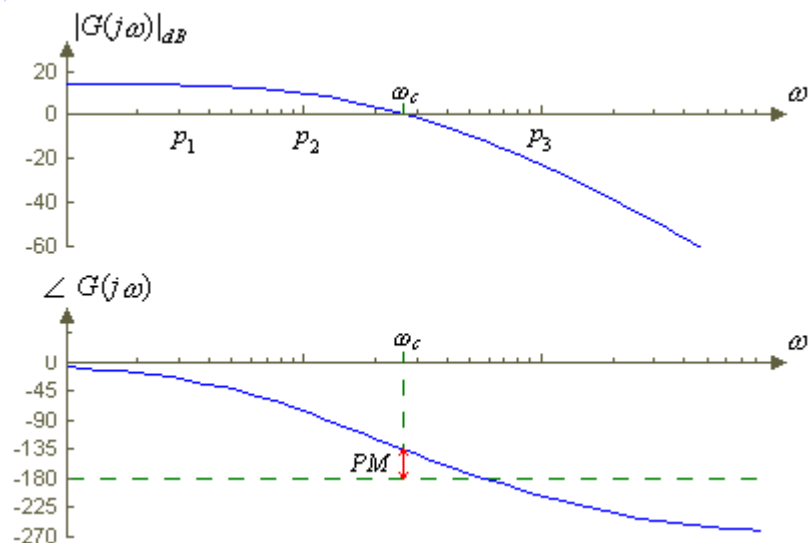
Definizione – Margine di fase

Si definisce **margin** di fase del sistema il valore:

$$PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \varphi_c \quad (12.8)$$

pari cioè a 180° più φ_c ($= \angle G(j\omega_c)$), detta *fase critica*, cioè la fase del sistema calcolata nel punto di intersezione del diagramma del sistema con il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, in cui quindi la pulsazione, indicata come ω_c e detta *pulsazione critica*, è tale che $|G(j\omega_c)| = 1$; il sistema è stabile se $PM > 0$.

Anche la valutazione del margine di fase può essere ottenuta dai diagrammi di Bode:



Una volta individuata la *pulsazione critica* ω_c , per cui $|G(j\omega_c)|_{dB} = 0$, si calcola il valore di $\angle G(j\omega_c)$, da cui si ricava il margine di fase $PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$.

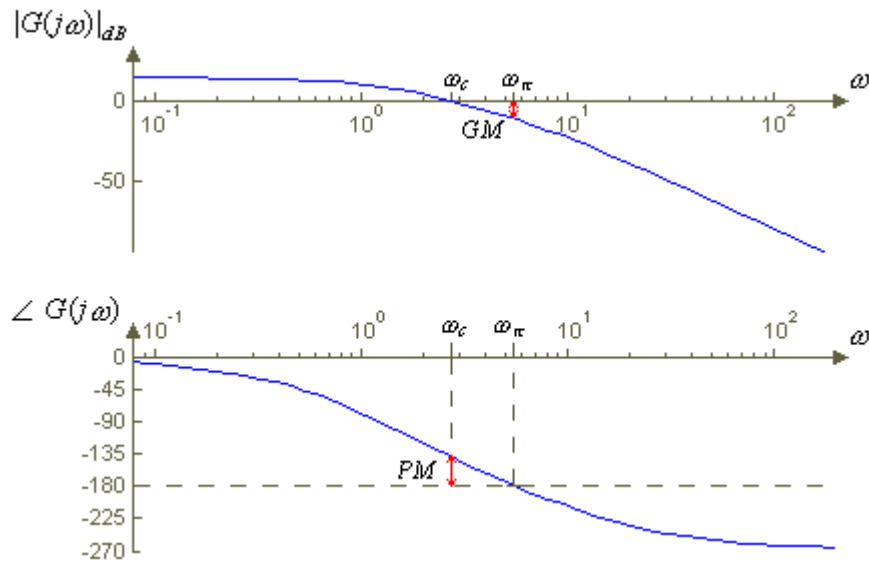
Il margine di fase PM rappresenta una misura del grado di robustezza della stabilità in rapporto ad eventuali incertezze sulla fase della funzione d'anello in corrispondenza della *pulsazione critica* o in presenza di ritardi di tempo (che influiscono solo sulla fase del sistema).

12.6. Note sui margini di stabilità

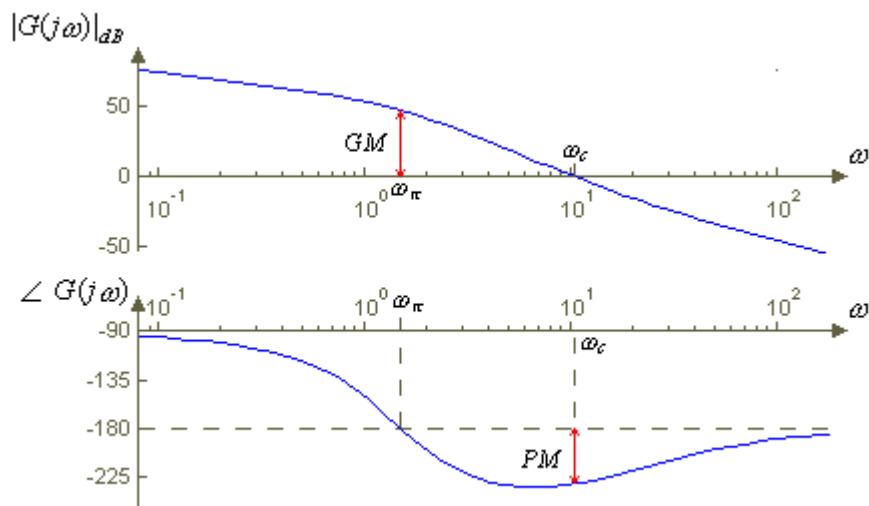
12.6.1. Stabilità, instabilità e stabilità marginale

Dalle definizioni date dei margini di stabilità si deduce che si ha:

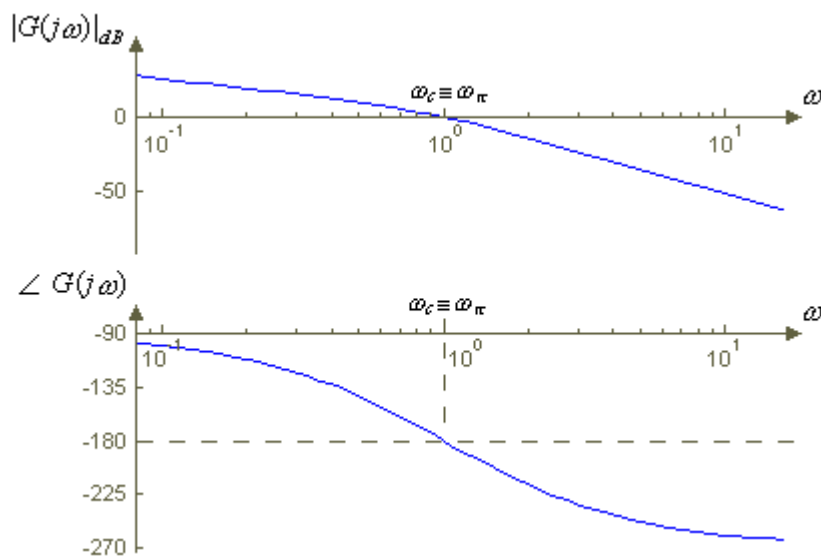
- stabilità a ciclo chiuso se è $GM > 0$ e $PM > 0$



- instabilità a ciclo chiuso se $GM < 0$ o $PM < 0$



- *stabilità marginale* a ciclo chiuso se $GM = PM = 0$



12.6.2. Influenza del guadagno

L'influenza della variazione del valore della costante di guadagno sulle caratteristiche di un sistema dipende, ovviamente, dal tipo di sistema che si analizza; gli esempi che seguono mostrano come la variazione del parametro k porti a situazioni diverse per sistemi diversi.

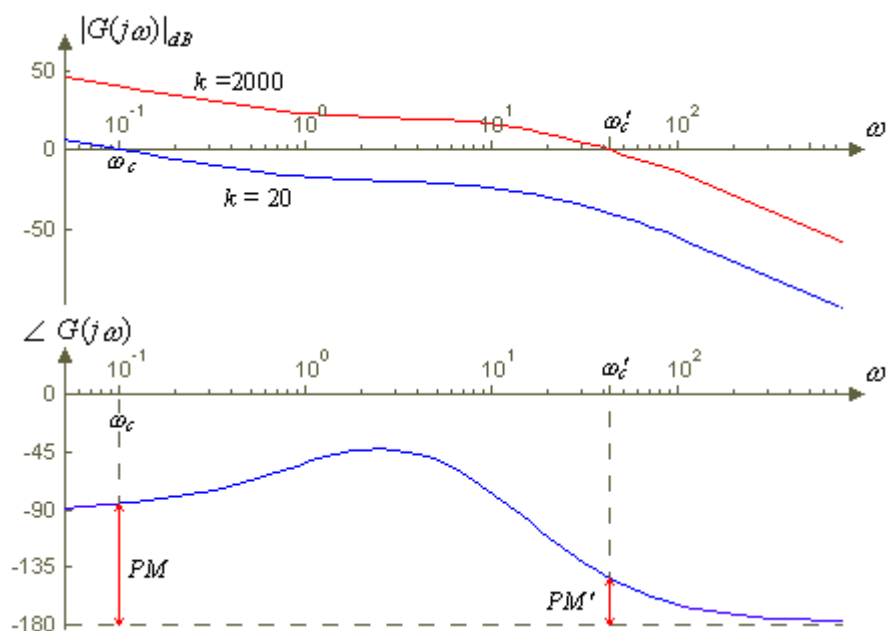
Prendendo in considerazione il sistema con FdT di anello:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)(s+20)}$$

posto in anello chiuso in retroazione unitaria e con un controllore proporzionale, tale quindi che la FdT ad anello chiuso sia:

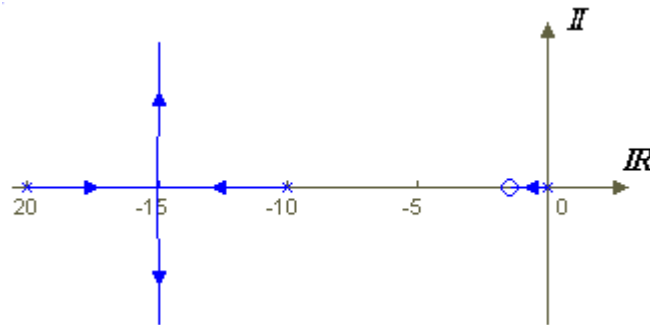
$$K(s) \cdot G(s) = k \frac{s+1}{s(s+10)(s+20)}$$

dai diagrammi di Bode, si verifica che:

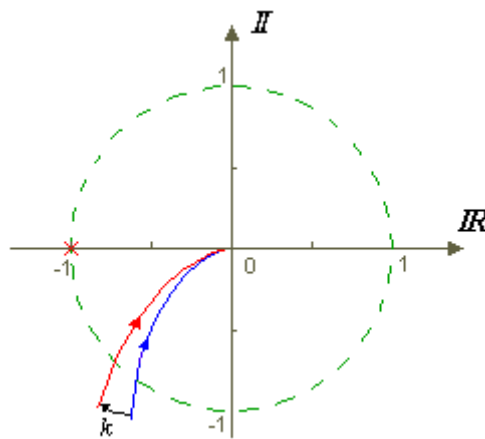


all'aumentare del valore di k il margine di fase decresce (almeno a partire da un valore di k maggiore di 200); si noti altresì che il margine di guadagno è infinito, dato che la fase del sistema è, in modulo, inferiore a 180° per qualsiasi valore di k .

Il sistema è quindi asintoticamente stabile, come si può verificare anche dall'analisi del luogo delle radici:



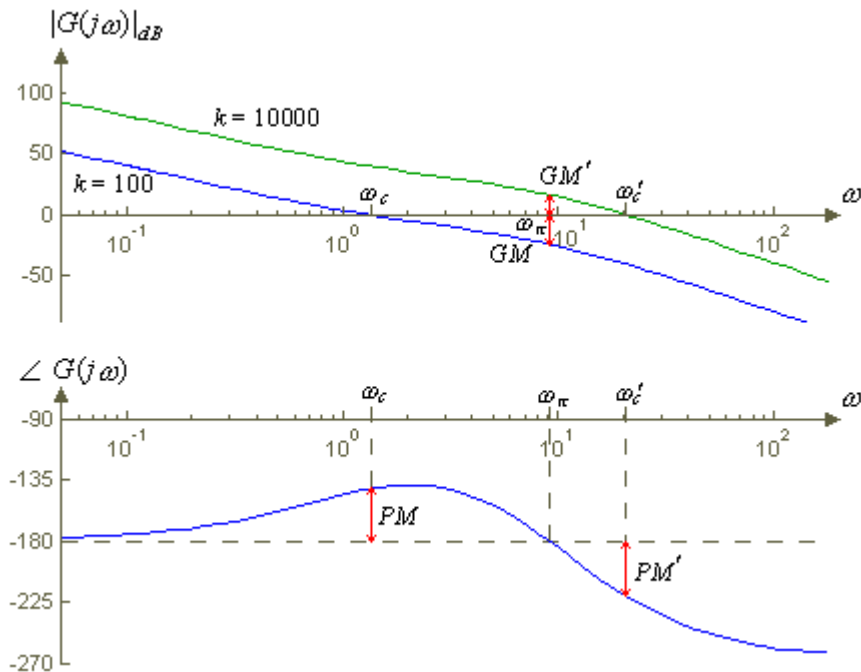
mentre il diagramma di Nyquist ha un andamento del tipo:



da cui è possibile trarre le stesse conclusioni sui margini di stabilità. Considerando invece il sistema ad anello chiuso in retroazione unitaria:

$$K(s) \cdot G(s) = k \cdot \frac{s+1}{s^2(s+10)^2}$$

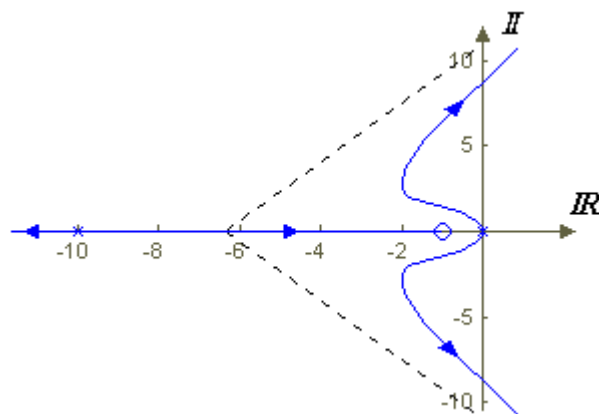
dall'analisi dei diagrammi di Bode si ha:



In questa situazione si può notare l'estrema importanza che assume il valore di k per la stabilità del sistema; per $k = 100$ (diagramma di ampiezza in blu) entrambe i margini di stabilità (GM e PM) risultano positivi e il sistema è, quindi, stabile mentre quando $k = 10000$ (diagramma di ampiezza in verde) entrambe i margini (GM' e PM') assumono valori negativi ed il sistema è quindi instabile.

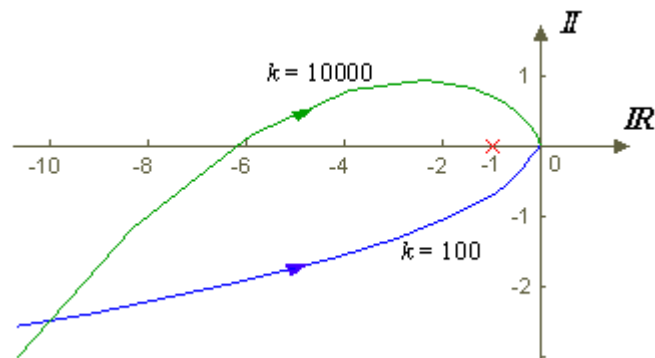
In genere se l'attraversamento dell'asse delle ascisse ($|G(j\omega_c)|_{dB} = 0$) ha una pendenza maggiore di 20 dB/dec. c'è la possibilità di avere una situazione di instabilità in ciclo chiuso; si noti infatti che se la pendenza è di 40 dB/dec. o maggiore, l'eccesso poli-zeri a tale frequenza (cioè che influiscono sul diagramma di Bode fino a tale frequenza) in tale punto è maggiore o uguale a 2 e quindi, molto probabilmente la fase è uguale o inferiore a -180° .

Il luogo delle radici conferma quanto dedotto dai diagrammi di Bode, infatti:



e si nota che esiste un k critico oltre il quale il sistema diviene instabile.

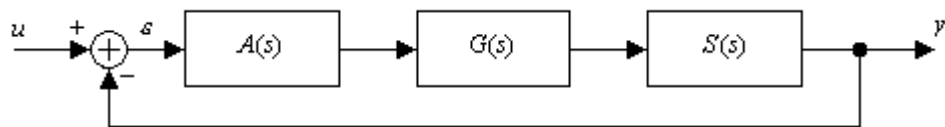
Anche il diagramma di Nyquist mette in evidenza le caratteristiche del sistema:



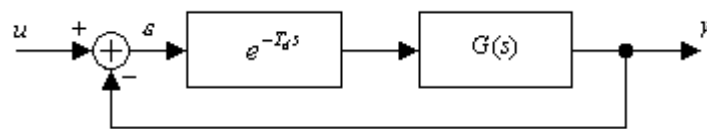
Si noti che anche per valori di k inferiori al k critico il diagramma attraversa l'asse reale, ma in una posizione estremamente vicina all'origine.

12.6.3. Presenza di ritardi nell'anello

Il sistema completo con attuatori e sensori può essere schematizzato come:



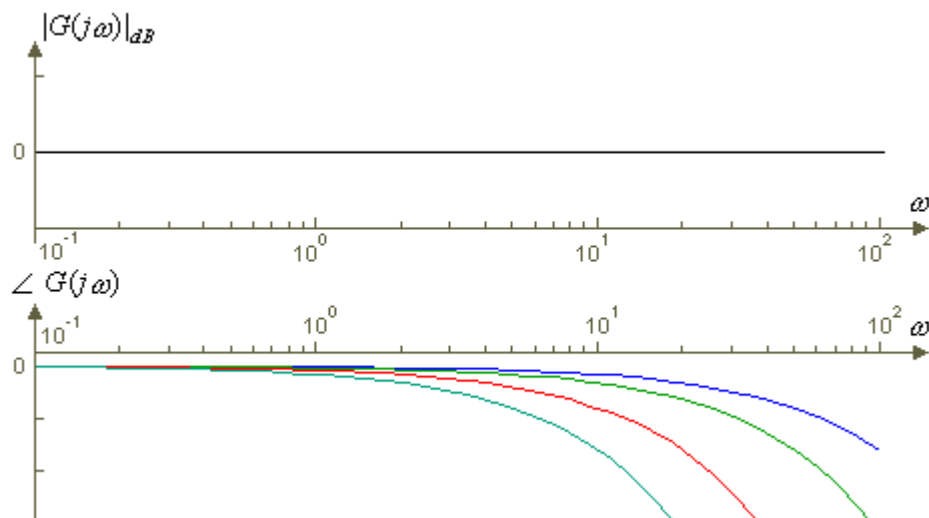
Le risposte di attuatori e sensori (blocchi $A(s)$ e $S(s)$) dovrebbero essere più veloci (arrivare a regime più velocemente) di quella del sistema; trascurando la risposta effettiva di tali blocchi e considerandone solo il ritardo introdotto, si può riportare lo schema nella forma:



in cui, come già visto (*Par. 9.5.1.*), è:

$$\left| e^{-T_d s} \right| = 1 = 0 \text{ dB} \quad \angle e^{-T_d s} = -T_d \omega \quad (12.9)$$

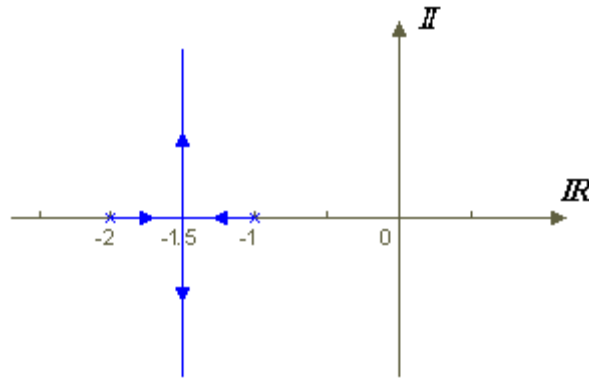
da cui si deduce che la fase del sistema viene modificata mentre il modulo rimane invariato:



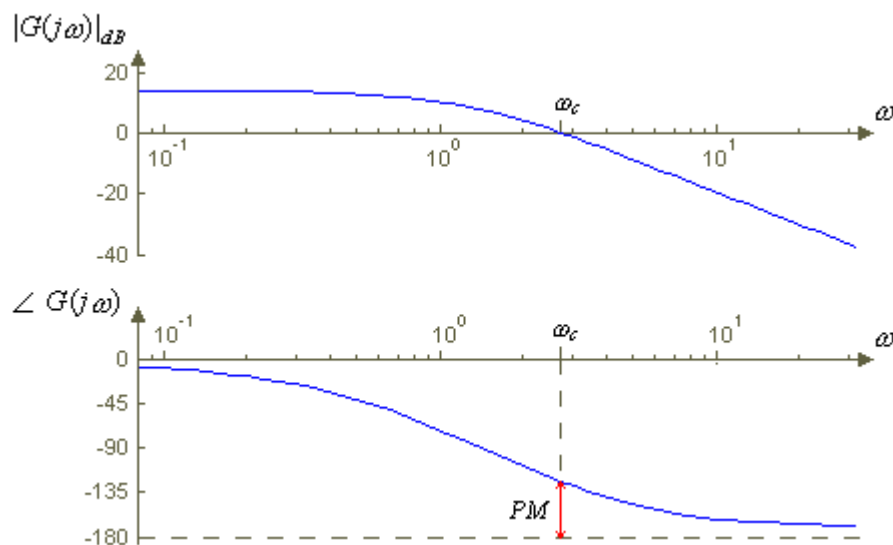
L'introduzione del ritardo comporta quindi una variazione nei margini di stabilità; prendendo in esame il caso del sistema:

$$K(s) \cdot G(s) = k \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

per il quale si hanno luogo delle radici



e diagrammi di Bode (per $k = 10$):



si può verificare che risulta asintoticamente stabile, con margine di guadagno infinito e margine di fase maggiore di zero.

Inserendo il termine di ritardo si ha:

$$\tilde{G}(s) = k \cdot \frac{e^{-T_d s}}{(s+1)(s+2)}$$

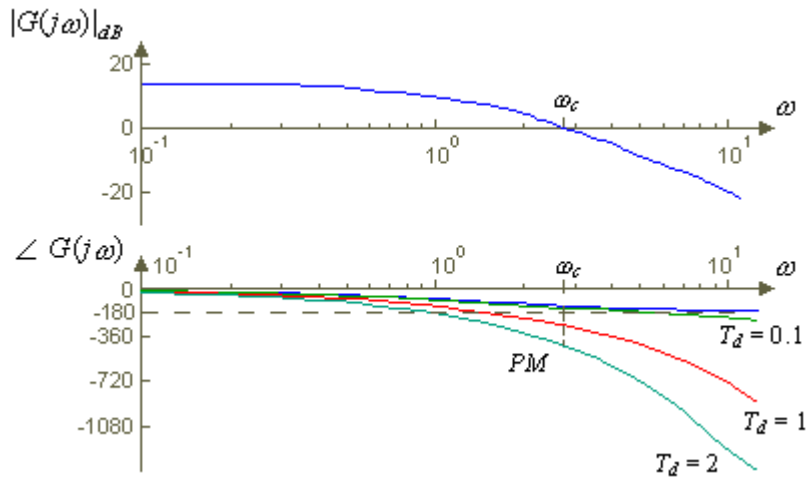
per cui è:

$$\angle \tilde{G}(s) = \angle G(s) + \angle e^{-T_d s}$$

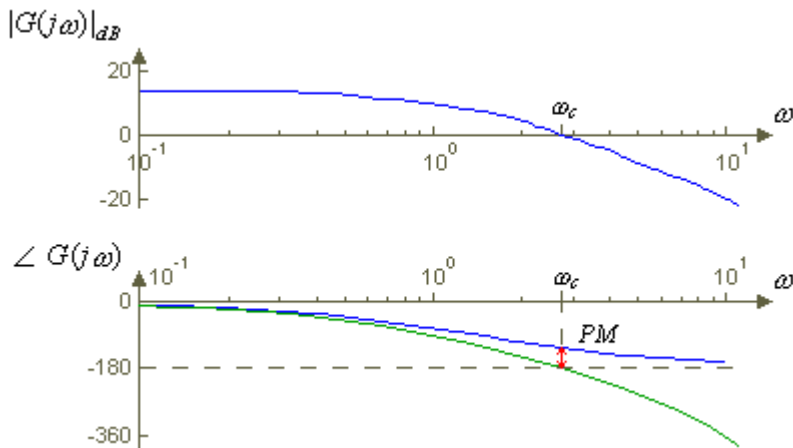
L'elemento di ritardo introduce, per la (12.9.), una fase che risulta essere:

ω	0.1	1	2
T_d			
0.1	-0.573°	-5.73°	-57.3°
1	-5.73°	-57.3°	-573°
2	-11.46°	-114.6°	-1146°

e i diagrammi di Bode della FdT per diversi valori del ritardo stesso, risultano (in blu l'andamento senza ritardo):



Nel sistema privo di ritardo il margine di fase, essendo $\omega_c = 2.76$ (rad/s), risulta essere $PM \cong 56^\circ$; il sistema diventa quindi instabile quando, per $\omega_c = 2.76$ (rad/s), il ritardo è tale da portare PM a 0 (*ritardo critico* T_{cr}):



$$\omega_c T_{cr} = PM = 56^\circ = 0.977 \text{ rad} \Rightarrow T_{cr} = \frac{PM}{\omega_c} = \frac{0.977}{2.76} \cong 0.354 \text{ s.}$$

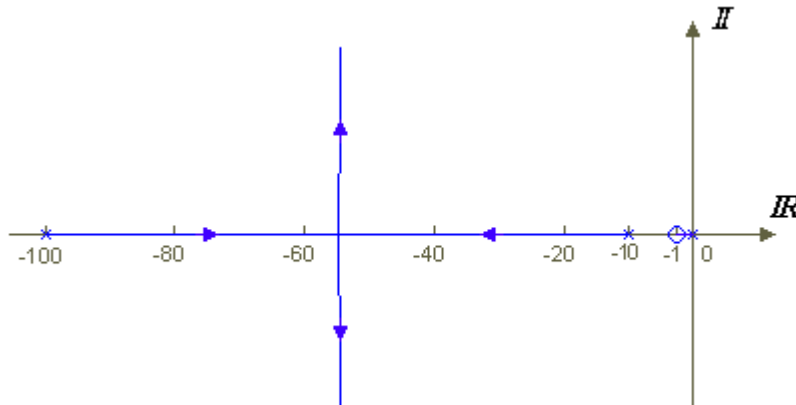
12.6.4. Sistemi a sfasamento non minimo

La presenza di zeri a parte reale positiva può portare a problemi di stabilità se il guadagno è sufficientemente elevato.

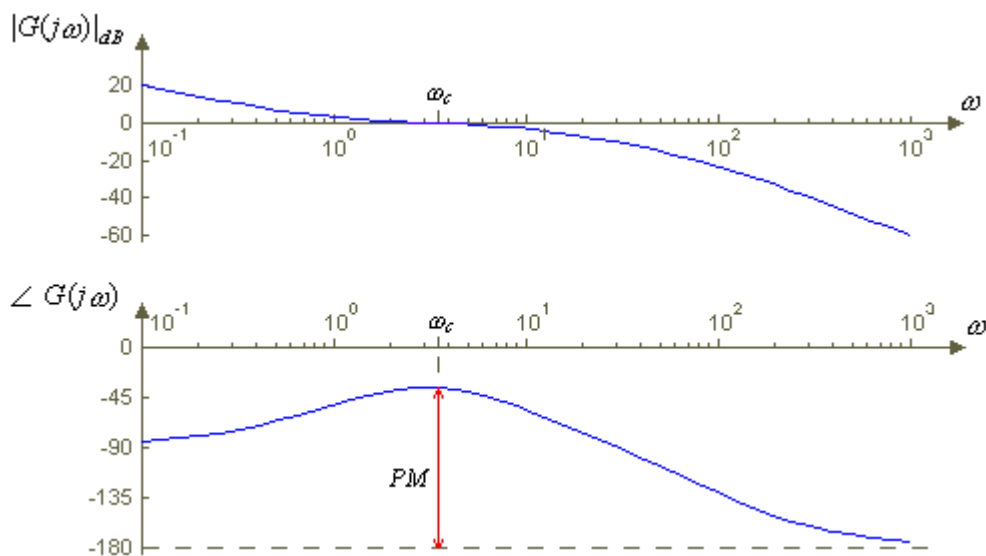
Prendendo in esame il caso di un sistema stabile con uno zero a parte reale negativa, come:

$$K(s) \cdot G(s) = k \frac{s+1}{s(s+10)(s+100)}$$

analizzando luogo delle radici:



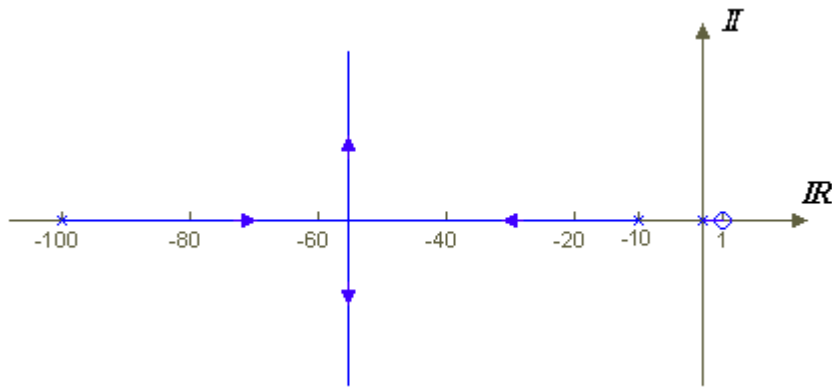
se ne deduce la stabilità asintotica per qualsiasi valore di $k (> 0)$; i diagrammi di Bode per $k = 1000$ sono:



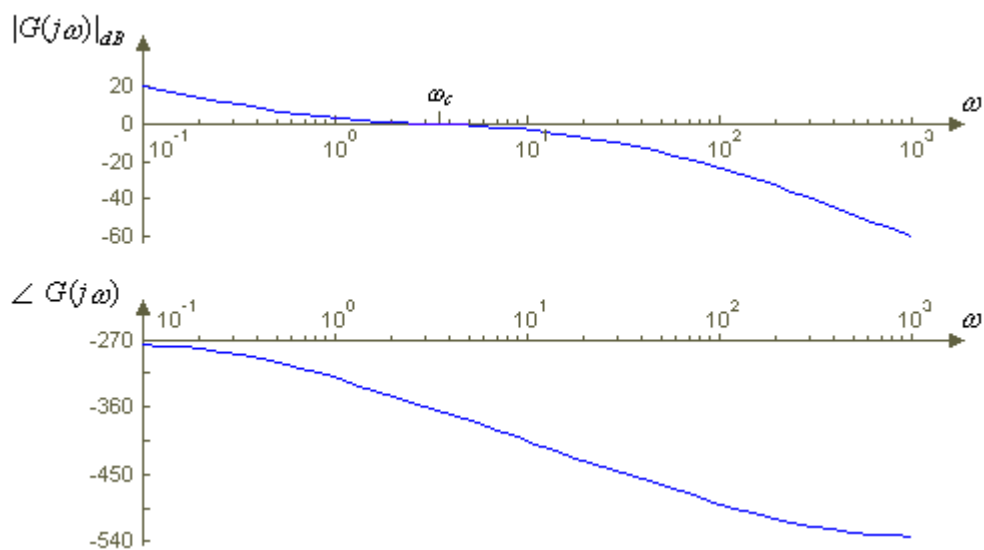
e si trova che GM è infinito mentre, per $\omega_c (\cong 3.15 \text{ rad/s})$, $PM = 108^\circ$.
Supponendo che lo zero sia instabile, cioè a parte reale positiva, la FdT risulta essere:

$$K(s) \cdot G(s) = k \frac{s-1}{s(s+10)(s+100)}$$

e, sempre nell'ipotesi di $k > 0$, il luogo delle radici è ora:



ed il sistema risulta sempre instabile; cercando i margini di stabilità sotto queste ipotesi, si ha:

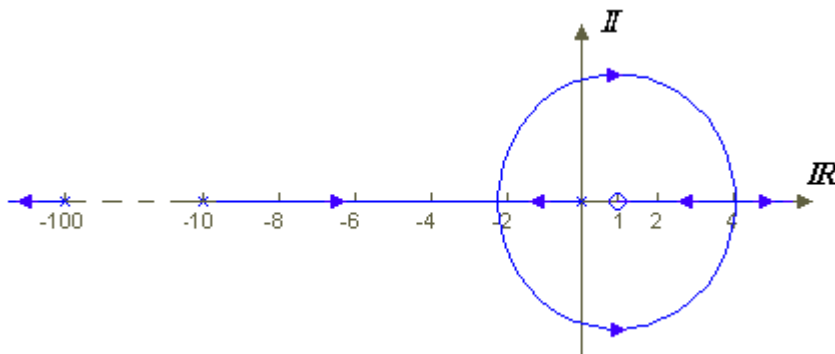


come ci si aspettava avendo visto che il sistema è instabile.

La stabilità del sistema a ciclo chiuso può essere recuperata tramite due metodi fra loro equivalenti:

- Retroazione positiva
- $k < 0$

Ipotizzando che sia $k < 0$, il luogo delle radici è:



per cui, scegliendo un k minore (in valore assoluto) del k critico il sistema è stabile.

Ricordando quanto visto nello studio del luogo delle radici (Cap. 9.) per trovare il k critico si pone:

$$\begin{aligned}
1 + K(s) \cdot G(s) &= 0 \Rightarrow s(s+10)(s+100) + k(s-1) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow s(s^2 + 110s + 1000) + ks - k = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow s^3 + 110s^2 + (1000 + k)s - k = 0
\end{aligned}$$

e , utilizzando il criterio di Routh, si ottiene:

s^3	1	$1000 + k$
s^2	110	$-k$
s^1	$\frac{110(1000 + k) + k}{110}$	0
s^0	$-k$	

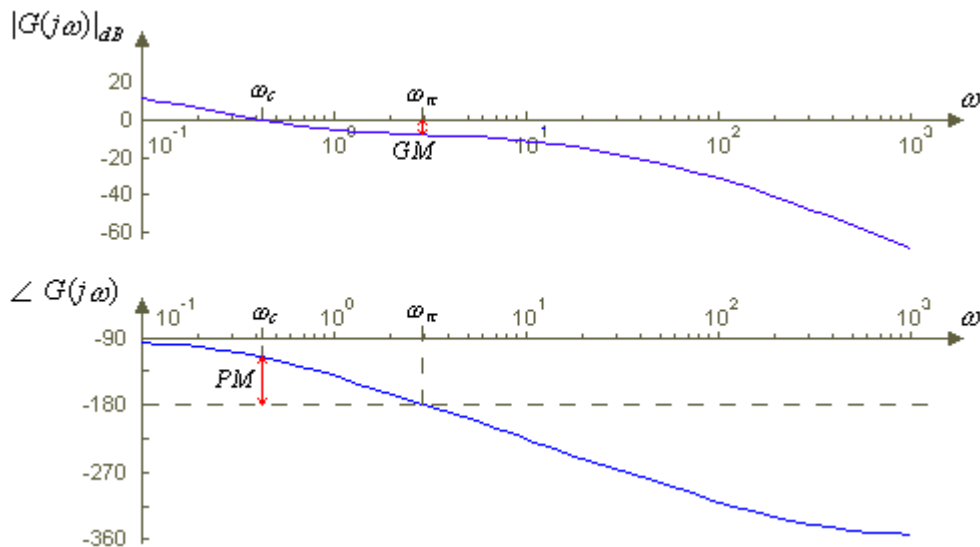
per cui è:

$$\begin{cases} k < 0 \\ 110(1000 + k) + k > 0 \Rightarrow k > -\frac{110000}{111} \cong -991 \end{cases}$$

Scegliendo allora $k = -400$, valore per cui il sistema a ciclo chiuso è stabile, i poli a ciclo chiuso risultano essere:

$$p_1 = -0.78, \quad p_2 = -4.93, \quad p_3 = -104.28,$$

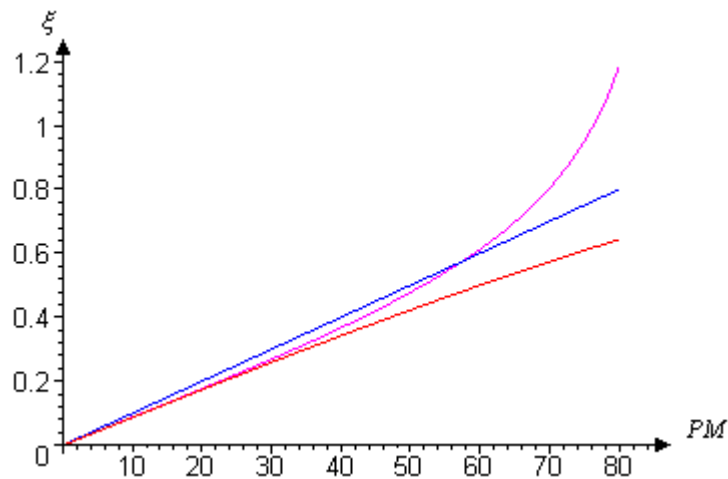
mentre dai diagrammi di Bode:



si ricava che per $\omega_c (\cong 0.437 \text{ rad/s})$ si ha $PM \cong 64^\circ$ mentre per $\omega_\pi (\cong 3.02 \text{ rad/s})$ si ha $GM \cong 7.7 \text{ dB}$; entrambe i margini sono quindi positivi, come deve essere per un sistema stabile.

12.6.5. Relazione con lo smorzamento

Il margine di fase è legato da una relazione di proporzionalità al coefficiente di smorzamento ξ dei poli dominanti complessi coniugati di un sistema; esistono diverse relazioni approssimate fra i due parametri:



Le tre relazioni approssimate che vengono solitamente utilizzate, riportate nel grafico precedente, sono:

- in rosso:

$$\xi = \sin\left(\frac{PM}{2}\right) \quad (12.10)$$

- in blu, ottenuta sostituendo alla funzione seno il suo argomento espresso in radianti (PM è solitamente espresso in gradi):

$$\xi \cong \frac{PM}{100} \quad (12.11)$$

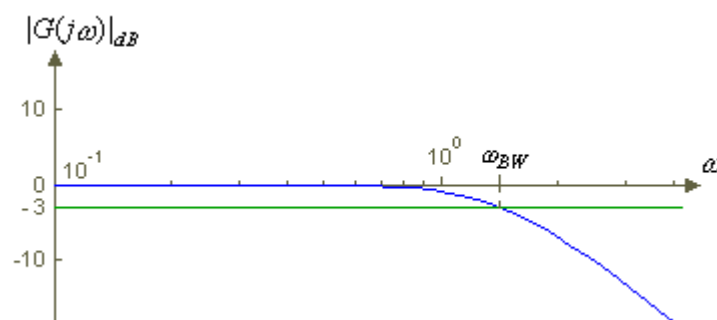
- in viola:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\sin(PM)}{\sqrt{\cos(PM)}} \quad (12.12)$$

Si noti che in quest'ultimo caso, per valori di PM prossimi a 75° , il valore del coefficiente di smorzamento ξ è 1; i poli diventano quindi reali.

12.6.6. Relazione con la banda passante

Esiste anche una relazione fra i margini di stabilità e la banda passante del sistema a ciclo chiuso; prendendo in considerazione, per semplicità, un sistema del secondo ordine che si comporta come un filtro passa-basso a guadagno unitario, tale cioè da avere un diagramma di Bode di ampiezza del tipo:



si ha che il suo limite di banda è dato dalla relazione:

$$|G_{CL}(j\omega_{BW})| = \frac{|G_{OL}(j\omega_{BW})|}{|1 + G_{OL}(j\omega_{BW})|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12.13)$$

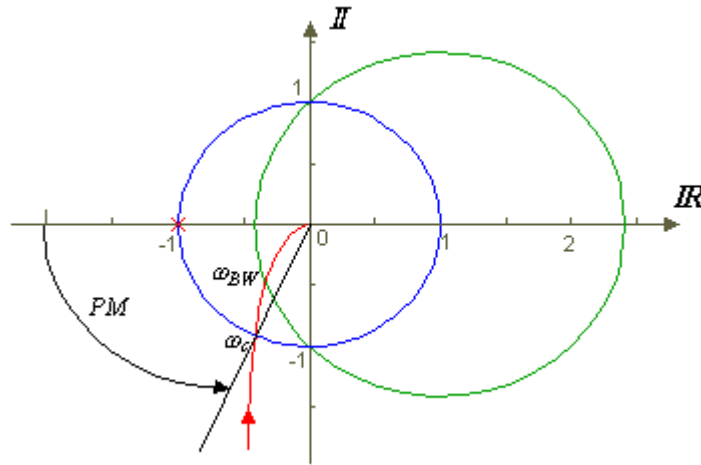
L'insieme dei punti del piano complesso che soddisfa la relazione:

$$\frac{|s|}{|1+s|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (12.14)$$

individuano la circonferenza di centro 1 e raggio $\sqrt{2}$.

Combinando le (12.13.) e (12.14.) si ricava che i valori di ω per cui il segnale non viene "tagliato" dalla caratteristica passa-basso del sistema a ciclo chiuso sono quelli per cui il diagramma polare del sistema di anello aperto ricade all'interno della circonferenza ottenuta dalla (12.14.).

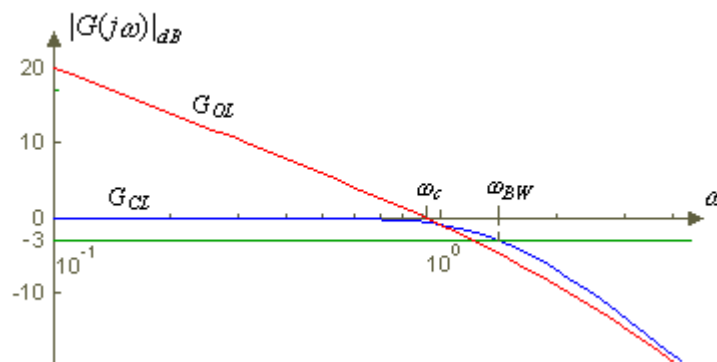
Sovrapponendo i due diagrammi si ottiene infatti:



in cui il cerchio in verde è quello che individua il limite di banda a ciclo chiuso mentre quello in azzurro individua la pulsazione di attraversamento a ciclo aperto.

Si nota che per valori del margine di fase prossimi ai 90° è possibile approssimare il limite di banda del sistema a ciclo chiuso ω_{BW} con la pulsazione di attraversamento del sistema di anello aperto ω_c .

Esaminando il diagramma di Bode di ampiezza di entrambe si ottiene (in rosso la FdT di ciclo aperto, in blu quella di ciclo chiuso, in verde il valore -3 dB che individua il limite di banda):



e si verifica anche tramite questo che è:

$$\omega_{BW} \cong \omega_c \quad \text{ma} \quad \omega_{BW} > \omega_c$$

12.6.7. Sistemi a stabilità condizionata

E' già stato visto (*Par. 12.6.1.*) come la stabilità di un sistema retroazionato dipenda, in determinati casi, dal valore della costante di guadagno k , al cui aumentare può perdere o acquistare la stabilità asintotica; esiste un'altra tipologia di sistemi la cui stabilità dipende dal valore di k e che ricopre un'enorme importanza.

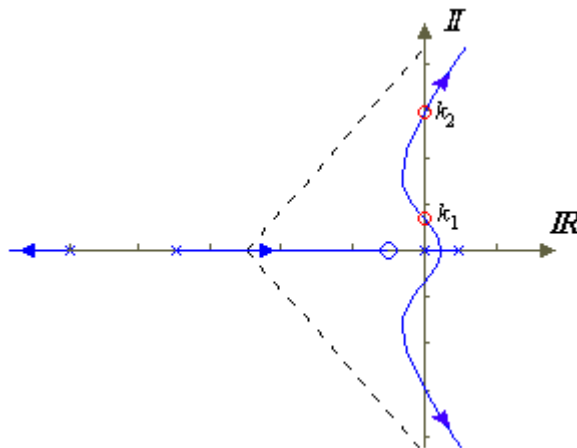
Prendendo in considerazione un sistema con FdT a ciclo aperto data da:

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

se ne deduce facilmente l'instabilità per la presenza di un polo a parte reale positiva; per stabilizzare in retroazione il sistema si inserisce un controllore del tipo:

$$K(s) = k \frac{s + z}{s}$$

scegliendo la posizione dello zero in modo da avere un luogo delle radici del tipo:



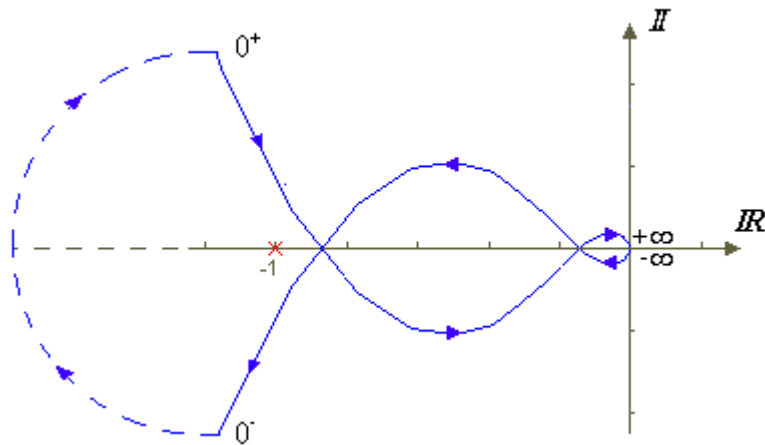
in cui si nota che, per $k_1 < k < k_2$ il sistema risulta asintoticamente stabile.

Definizione – Sistema a stabilità condizionata

Un sistema che, stabile per un determinato valore di k , diviene instabile per valori della costante di guadagno inferiori o superiori, viene detto **sistema a stabilità condizionata**.

In pratica, al crescere del valore di k si hanno tre diverse situazioni; indicando con k_1 e k_2 i due k critici, con $k_1 < k_2$, al variare di k si ha:

$$1) \quad k < k_1$$

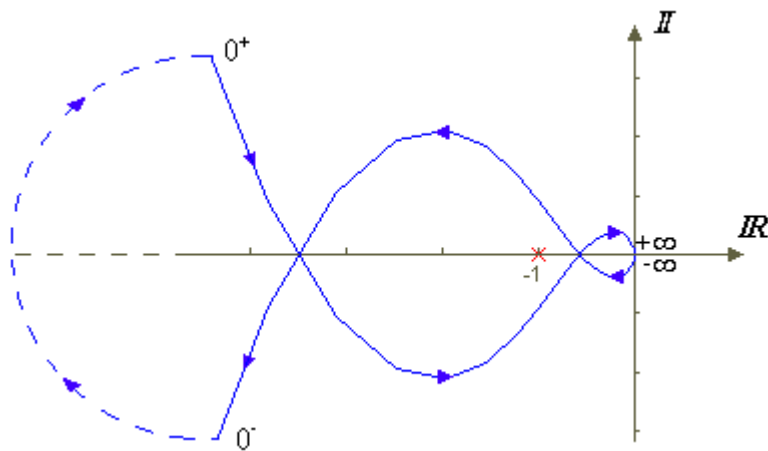


In questa situazione è:

$$\begin{cases} P=1 \\ N=1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$

ed il sistema risulta, quindi, instabile.

2) $k_1 < k < k_2$

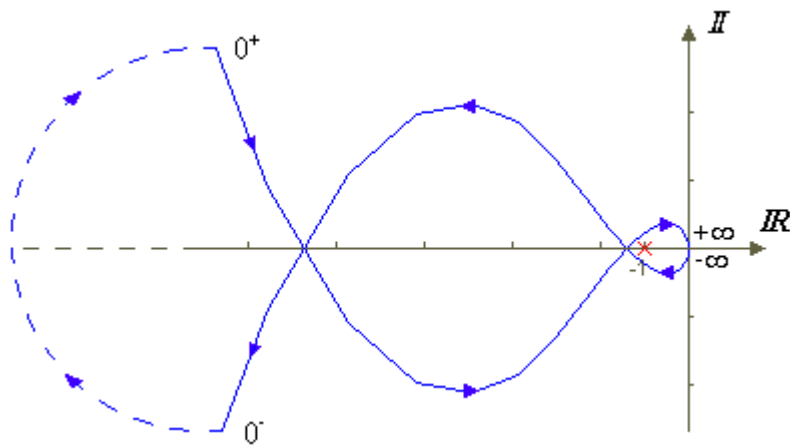


Per questi valori della costante di guadagno si ha:

$$\begin{cases} P=1 \\ N=-1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 0$$

ed il sistema è quindi stabile.

3) $k > k_2$

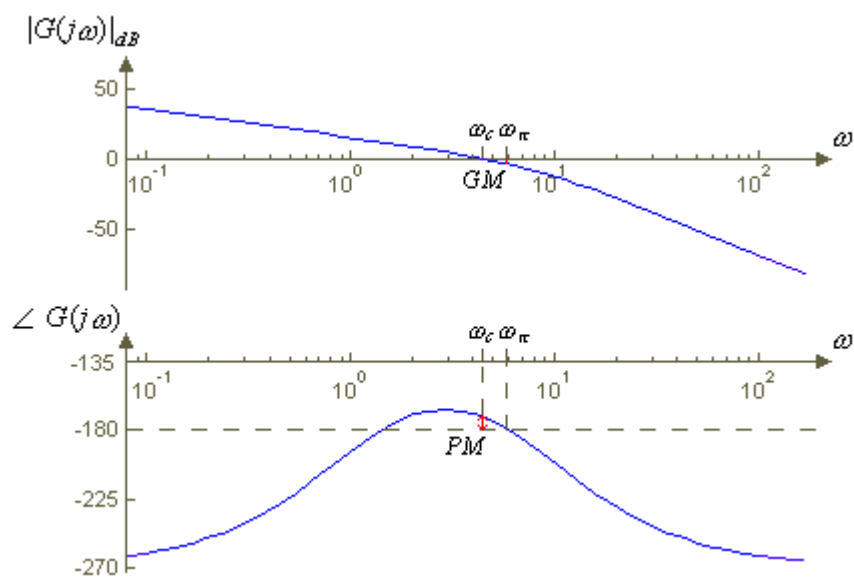


caso in cui è:

$$\begin{cases} P=1 \\ N=1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$

ed il sistema torna ad essere instabile.

Supponendo di trovarsi nella condizione di stabilità ($k_1 < k < k_2$) si ottengono i seguenti diagrammi di Bode:



da cui si nota che, come ci si poteva aspettare, il sistema rimane stabile quando i margini di stabilità assumono valori positivi.

Cap 13. Controllo e controllori PID

Si è già accennato (*Par 10.3.*) al fatto che dall'esame delle caratteristiche del sistema a ciclo aperto:

$$G_{OL}(s) = K(s) \cdot G(s)$$

si riescono a ricavare quelle del sistema retroazionato:

$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)}$$

Si è visto, infatti, che (*Cap 8.-9.*):

- per avere un errore nullo in risposta al segnale di comando in ciclo chiuso, il sistema deve avere un alto guadagno di anello (aperto), cioè $K(s) \cdot G(s) \gg 1$;
- per eliminare i disturbi deve essere $K(s) \cdot G(s) \gg 1$;
- per eliminare i rumori (disturbi alle alte frequenze) deve essere $K(s) \cdot G(s) \ll 1$;
- per ridurre gli errori di modellizzazione deve essere $K(s) \gg 1$;
- per avere un errore nullo a regime in risposta ad un segnale gradino unitario la $G_{OL}(s)$ deve avere un integratore ($1/s$);
- per avere una risposta più veloce il guadagno k deve essere grande.

Per realizzare i controllori opportuni a soddisfare le specifiche di sistema a ciclo chiuso, si possono utilizzare tre diverse tecniche:

- i controllori PID
- le reti correttive
- l'assegnamento dei poli

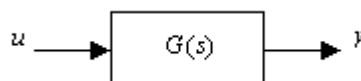
Prima di esaminare l'utilizzo dei controllori *PID* si mette in evidenza l'importanza del luogo delle radici nel progetto dei controllori.

13.1. Esempi di controllo tramite il luogo delle radici

Il luogo delle radici del processo è uno strumento fondamentale nel progetto dei controllori; dall'analisi del suo andamento si riesce a risalire alla configurazione poli-zeri che il controllore deve avere affinché il sistema complessivo risulti avere le specifiche desiderate.

13.1.1. Stabilizzazione

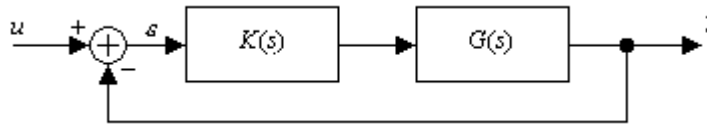
Dato il sistema in anello aperto:



con

$$G(s) = \frac{s + 5}{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}$$

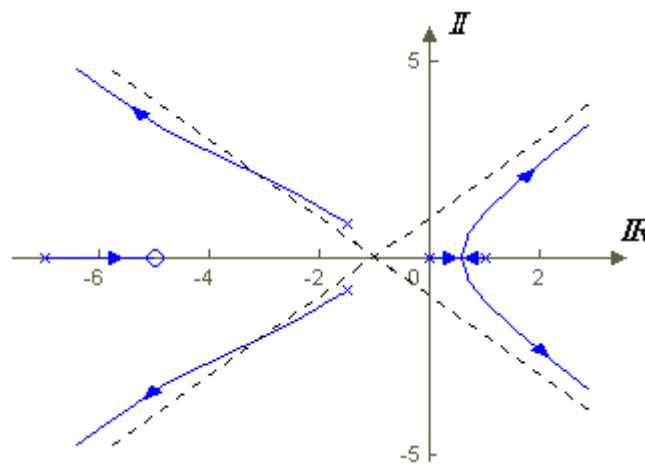
si vuole individuare il controllore che renda stabile il sistema retroazionato:



Il sistema originale ha:

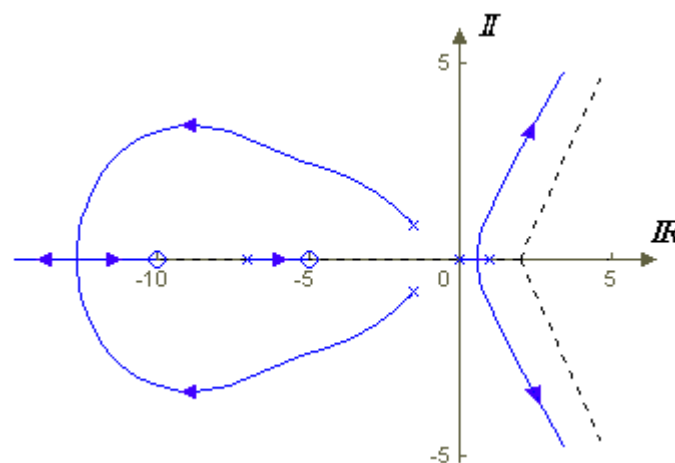
- uno zero : $s = -5$;
- 5 poli : $s_1 = 1, s_2 = 0, s_{3/4} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_5 = -7$;

e, avendo un polo a parte reale positiva, è instabile; come si può verificare dal luogo delle radici, un semplice controllore proporzionale (con $k > 0$) non riesce a stabilizzare il sistema:

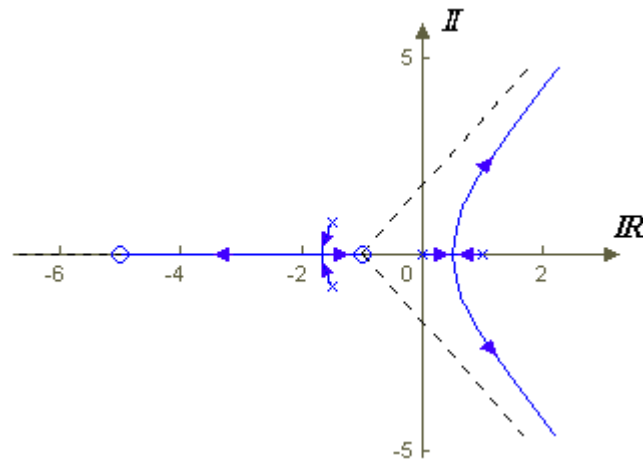


Bisogna quindi attirare i rami "instabili" nel semipiano dei reali negativi; un primo tentativo può essere quello di inserire un controllore con uno zero ma, in tal modo, l'eccesso poli-zeri è pari a tre e i due asintoti che non si trovano sull'asse continuano a "portare" i poli nel semipiano destro, indipendentemente dalla posizione dello zero, come si vede dai seguenti esempi:

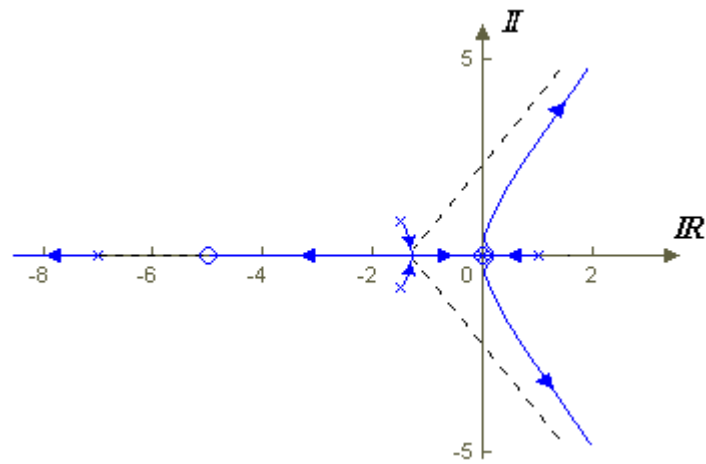
- zero in $s = -10$:



- zero in $s = -1$:



- zero in $s = -0.01$:

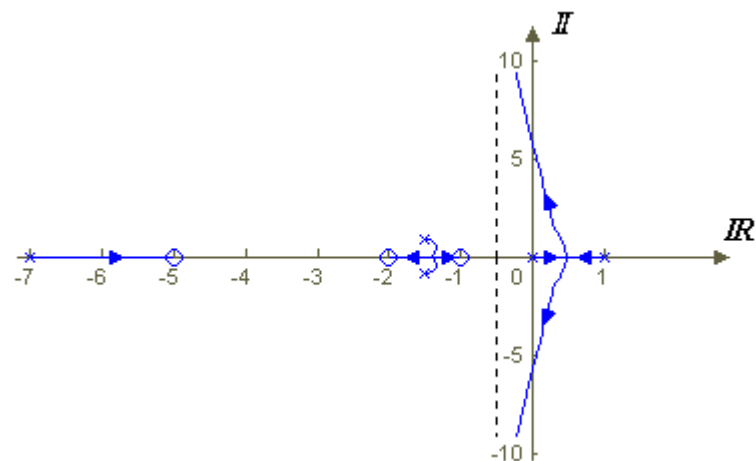


Inserendo, invece, un controllore con due zeri, cioè:

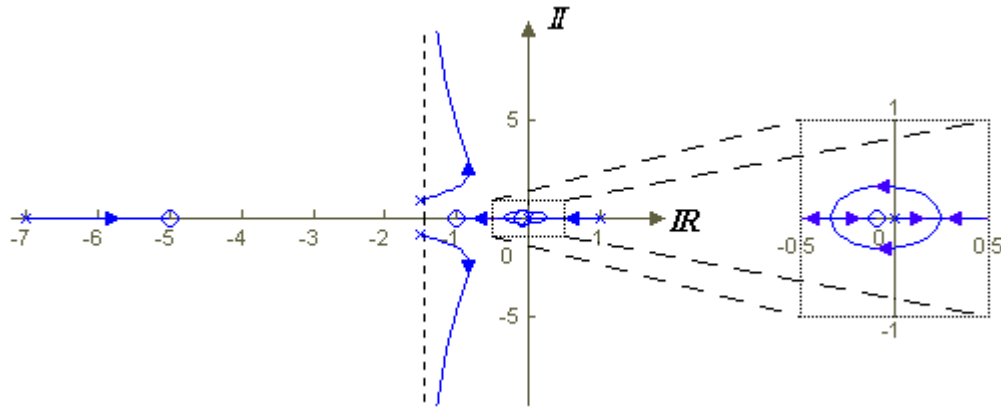
$$K(s) = (s - z_1)(s - z_2)$$

si ottengono diversi andamenti in funzione della posizione degli zeri:

- $z_1 = -1, z_2 = -2$



- $z_1 = -0.1, z_2 = -1$

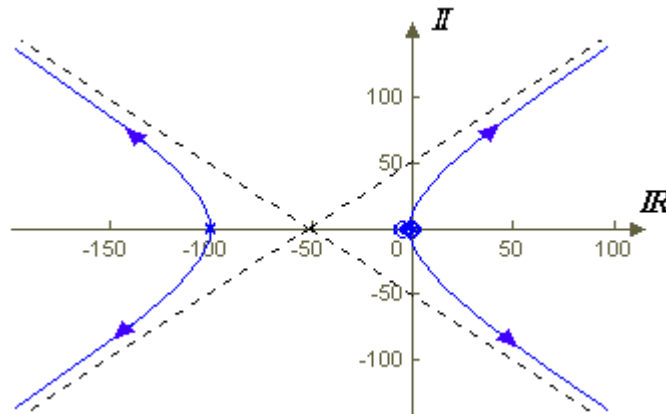


Si deve tener presente che il controllore introdotto non è fisicamente realizzabile perché non causale; il controllore reale avrà anche due poli, anche se posti opportunamente lontani, in modo da non influenzare l'andamento per le frequenze di interesse.

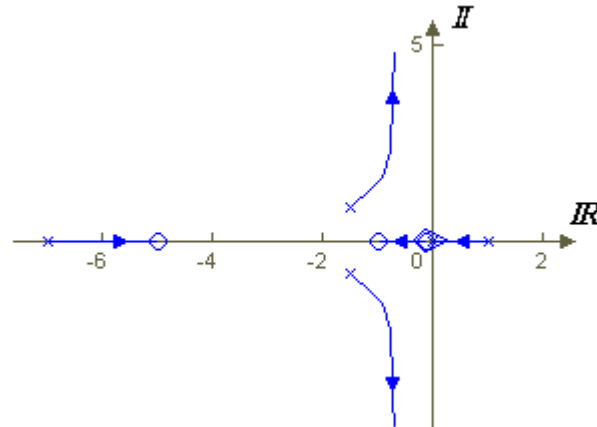
In tal caso, però, considerando il controllore reale:

$$K(s) = \frac{(s + 0.1)(s + 1)}{(s + 100)^2}$$

l'eccesso poli-zeri del sistema controllato è nuovamente pari a quattro e gli asintoti tornano a portare i rami del luogo delle radici nel semipiano dei reali positivi:



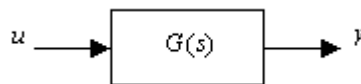
Considerando però le singolarità "dominanti", cioè solo quelle più vicine all'origine degli assi:



si nota che l'andamento è praticamente identico a quello ipotizzato in assenza dei poli; in questo caso il sistema può tornare a essere instabile, ma solo per valori del guadagno ($k \cong 1.2 \cdot 10^6$) estremamente elevati e quindi non di interesse.

13.1.2. Rispetto delle specifiche

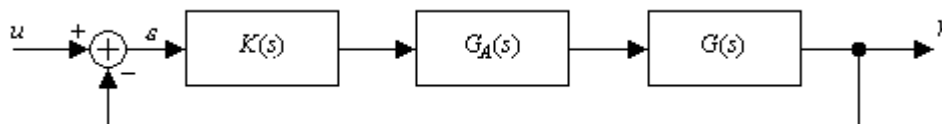
Dato il sistema in anello aperto:



con

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)(s+2)}$$

si vuole che il sistema retroazionato:

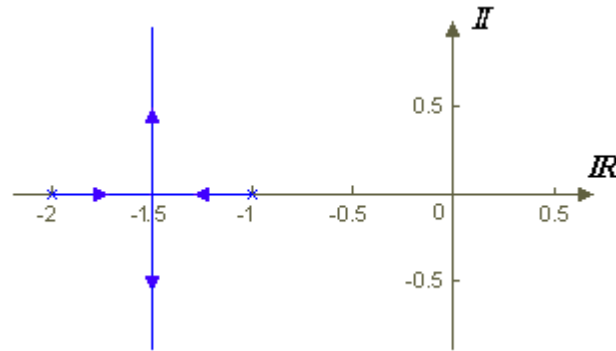


dove $G_A(s)$ è la *FdT* della componente dovuta agli attuatori, sia tale da soddisfare le seguenti specifiche:

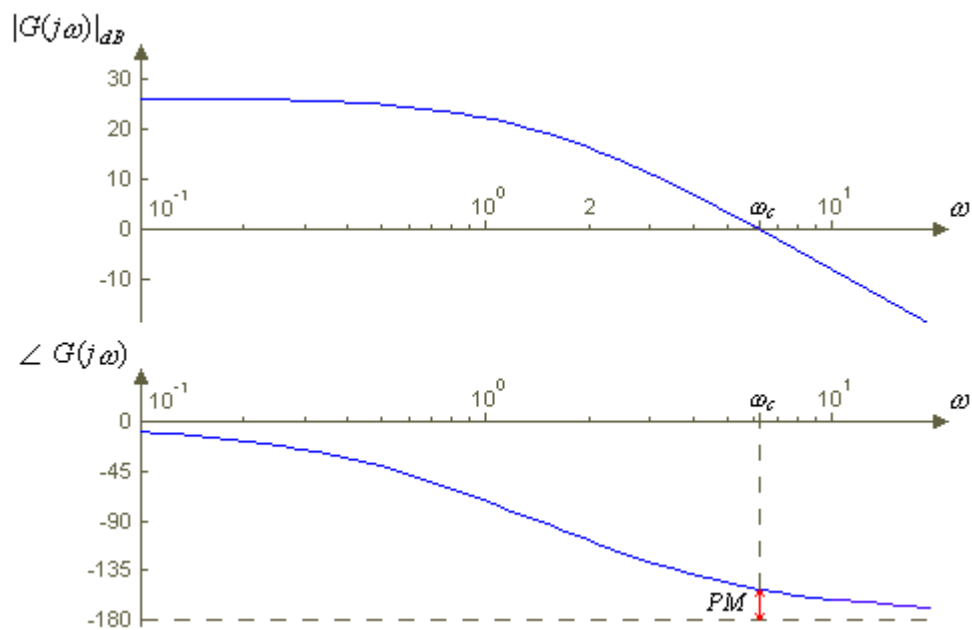
- Per il sistema nominale (privo cioè dei disturbi derivanti dagli attuatori) si vuole che:
 1. $T_{a2} \leq 5 \text{ sec.}$
 2. $M_P \leq 10 \%$
 3. $\varepsilon_{\infty} = 0$
- Per il sistema in condizioni non nominali (cioè tenendo conto degli attuatori) si vuole che il sistema riesca a soddisfare le stesse specifiche.

- Sistema in condizioni nominali

Per prima cosa si esamina il luogo delle radici del sistema



da cui si nota che, retroazionando il sistema con un controllo proporzionale ($K(s) = k$), il sistema in ciclo chiuso rimane asintoticamente stabile per qualsiasi k ; dai suoi diagrammi di Bode:



si ricava che:

- $\omega_c \cong 6.126 \text{ rad/s.}$
- $PM \cong 27.35^\circ$
- $GM \rightarrow \infty$

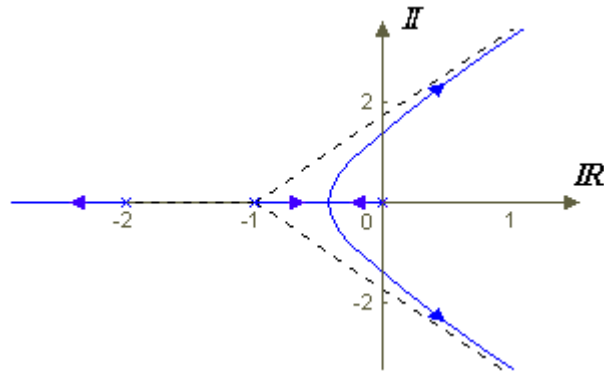
Per soddisfare la richiesta al punto 3., per quanto visto (*Par. 8.1.5.*), è necessario inserire un integratore, dato che la $K(s) \cdot G(s)$ deve essere di *Tipo 1*; il controllore deve quindi avere la forma:

$$K(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k}{s} \cdot \frac{N(s)}{D'(s)}$$

Tralasciando momentaneamente gli altri termini e supponendo che il controllore sia costituito solo da k/s , si ha che:

$$G_{OL}(s) = K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{40}{(s+1)(s+2)}$$

FdT per la quale il luogo delle radici risulta essere:



e dal suo esame si nota che esiste un k critico oltre il quale il sistema diviene instabile. Con la solita tecnica per il calcolo del k critico con l'applicazione del criterio di Routh, si trova che:

$$1 + K(s) \cdot G(s) = 0 \Rightarrow s(s+1)(s+2) + 40k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + 40k = 0$$

e, quindi:

s^3	1	2
s^2	3	$40k$
s^1	$1 - \frac{20}{3}k$	0
s^0	$40k$	

da cui, infine, si ricava:

$$\begin{cases} 1 - \frac{20}{3}k > 0 \Rightarrow k < \frac{3}{20} = 0.15 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k_{cr} = 0.15$$

Per $k = 0.15$ il denominatore della FdT in ciclo chiuso diventa:

$$1 + K(s) \cdot G(s) = s(s+1)(s+2) + 6 = s^3 + 3s^2 + 2s + 6 =$$

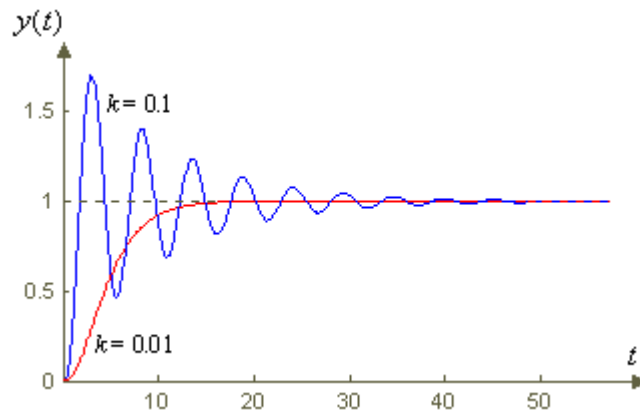
$$= s^2(s+3) + 2(s+3) = (s^2 + 2)(s+3)$$

e i poli del sistema sono:

$$p_1 = -3$$

$$p_{2/3} = \pm j\sqrt{2}$$

Per valori di k inferiori al k critico il sistema risulta quindi stabile e la sua risposta al gradino unitario, in funzione di k stesso, è:



Per le specifiche richieste deve essere:

- Per la richiesta 2., dalla (8.13.):

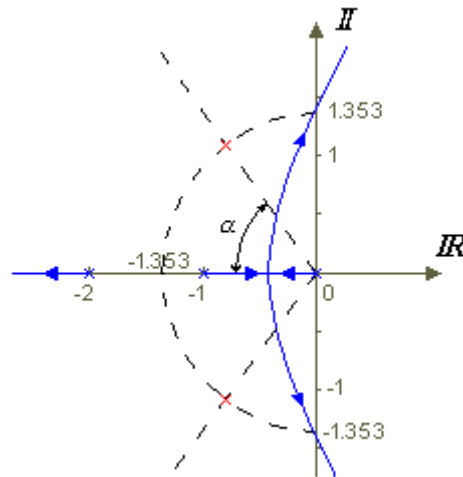
$$\xi = \frac{\ln(100 / M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / M_p)}} = 0.591$$

$$\alpha = \arccos \xi = 53.78^\circ$$

- Per la specifica 1., dalla (8.16):

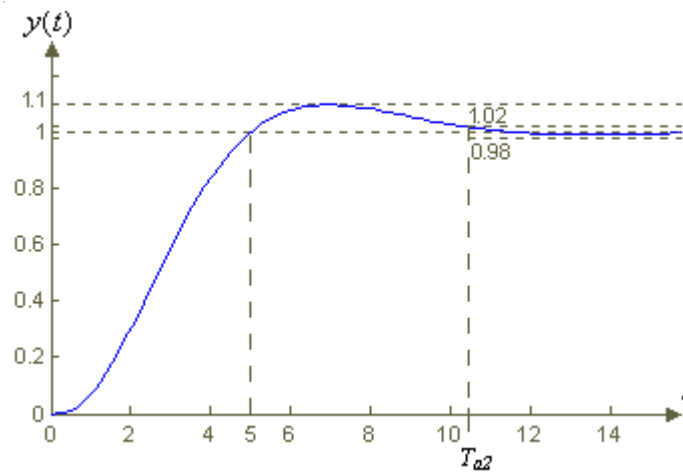
$$\omega_n = \frac{4}{T_{a2} \cdot \xi} = 1.353 \text{ rad / s.}$$

Dall'analisi del luogo delle radici si ha che:



il solo integratore non permette di soddisfare le specifiche di interesse, dato che il luogo delle radici non passa su quelli che devono essere i poli del sistema (indicati in rosso).

Si può verificare che scegliendo $k = 0.021$ si ottiene $\xi \cong 0.591$ ma $\omega_n \cong 0.6 \text{ rad/s.}$ ($\neq 1.353 \text{ rad/s.}$); la risposta al gradino unitario ha il seguente andamento:



in cui si nota che la specifica riguardante la sovraelongazione massima ($M_P \leq 10\%$) viene rispettata ma non così quella riguardante il tempo di assestamento ($T_{a2} > 5 \text{ sec.}$).

Per poter portare i poli nei punti prescelti è necessario inserire in maniera opportuna degli zeri per attrarre i rami verso le posizioni desiderate; tenendo però presente che, per la causalità, bisogna inserire un numero di poli almeno pari a quello degli zeri, l'eccesso poli-zeri sarà sempre pari a 3 e, quindi, ci sarà sempre un k critico oltre il quale il sistema diviene instabile.

Il controllore da inserire avrà quindi una FdT del tipo:

$$K(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{s-z}{s-p} = k \cdot \frac{z}{p} \cdot \frac{1-s/z}{1-s/p}$$

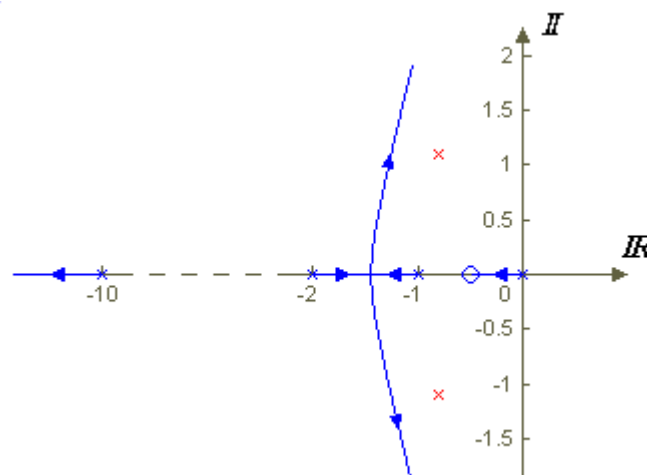
Si noti che è conveniente riportare la FdT del controllore in forma di Bode in modo che il guadagno viene influenzato solo dal termine $(k \cdot z)/p$ e risulta molto più semplice eseguire i calcoli.

Per portare i rami del luogo delle radici sui punti del piano complesso individuati dalle specifiche si possono seguire due strade:

- 1) Inserire lo zero fra il polo dell'integratore e il primo polo del sistema originario (Es. $z = -0.5$) e il polo del controllore lontano (Es. $p = -10$) in modo da non influenzare l'andamento del luogo delle radici in prossimità dell'origine; la FdT a ciclo aperto diventa:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{s+0.5}{s+10} \cdot \frac{40}{(s+1)(s+2)}$$

e il luogo delle radici:

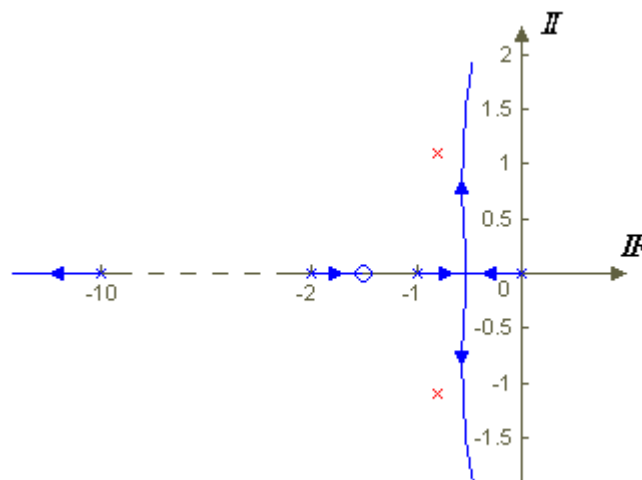


Questa scelta può funzionare con l'opportuno posizionamento dello zero ma il polo nell'origine tende a rimanere vicino alla sua posizione di partenza e, risultando dominante, "rallenta" il sistema.

- 2) Inserire lo zero fra i due poli a parte reale negativa (Es. $z = -1.5$) e, anche in questo caso il polo lontano ($p = -10$); la FdT a ciclo aperto diventa quindi:

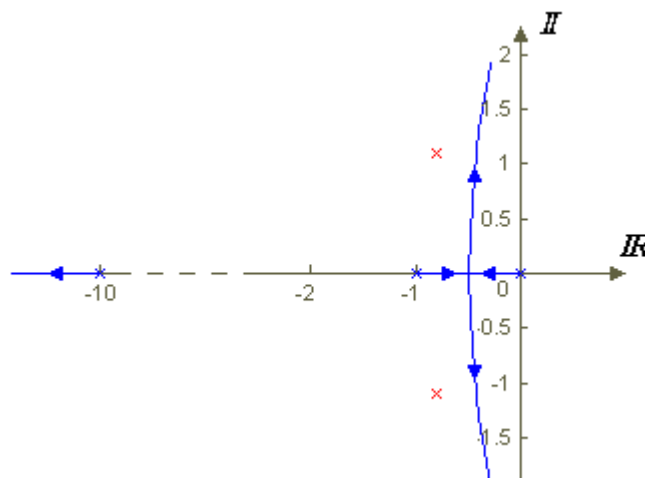
$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{s + 1.5}{s + 10} \cdot \frac{40}{(s + 1)(s + 2)}$$

e il relativo luogo delle radici è:

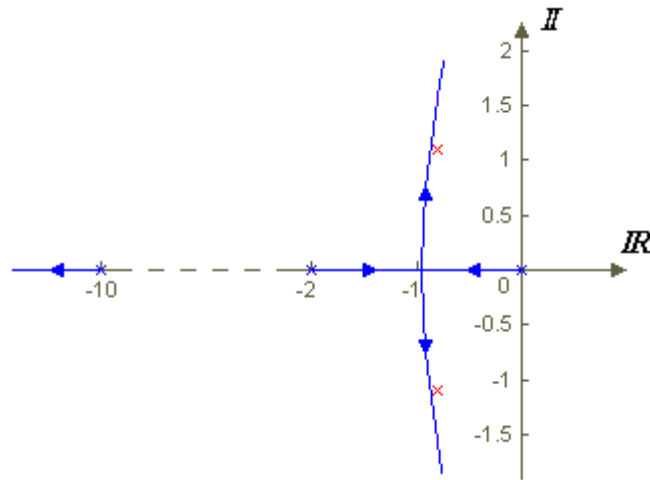


Tale scelta permette un lavoro più "preciso"; è necessario comunque capire come si comporta il sistema così ottenuto in funzione dello spostamento dello zero.

Una volta scelta la posizione di massima dello zero, si deve trovare la posizione che permetta di portare i rami del luogo delle radici a passare sui poli "desiderati"; supponendo di portare lo zero a cancellare il polo in -2, si ottiene:



mentre, effettuando la cancellazione del polo in -1:



Si capisce, quindi, che lo zero deve essere portato nelle vicinanze del polo in -1, dato che, in questo modo, i rami del luogo delle radici si spostano verso i punti di interesse. Partendo quindi dalla scelta $z = -1.5$, si deve spostarlo verso la coordinata -1 e procedendo iterativamente per tentativi, per $z \cong -1.093$ si ottiene:

$$K(s) \cdot G(s) = 10.93 \cdot \frac{(0.915 \cdot s + 1)}{s(0.1 \cdot s + 1)(s + 1)(0.5 \cdot s + 1)}$$

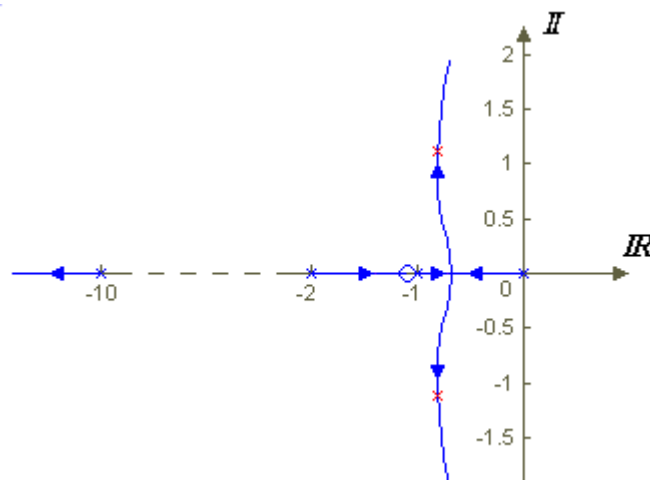
FdT per la quale è:

$$\xi = 0.591 \quad \omega_n = 1.353 \text{ rad} / s.$$

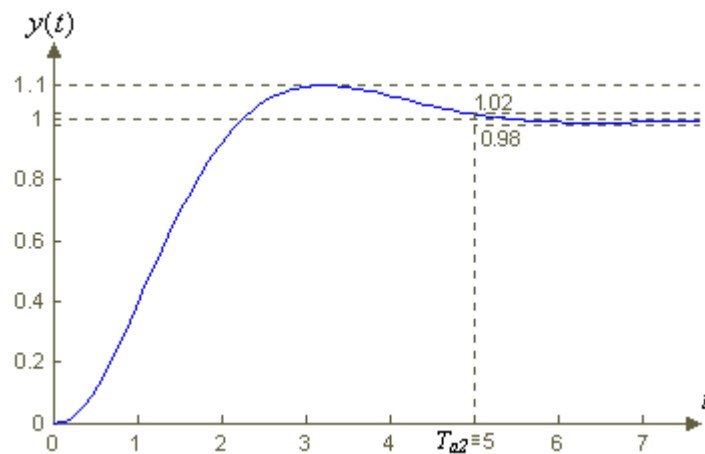
Inserendo quindi il controllore:

$$K(s) = 0.547 \cdot \frac{(0.915 \cdot s + 1)}{s(0.1 \cdot s + 1)}$$

si ottiene un sistema che, in ciclo chiuso, soddisfa le specifiche di progetto del sistema nominale, infatti il luogo delle radici risulta essere:



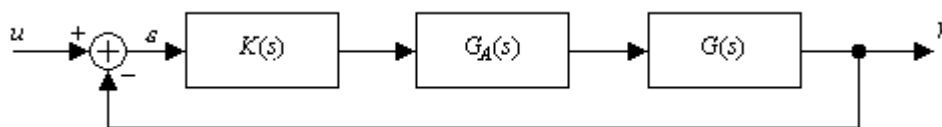
e quindi passante per i punti di interesse e la risposta al gradino unitario è:



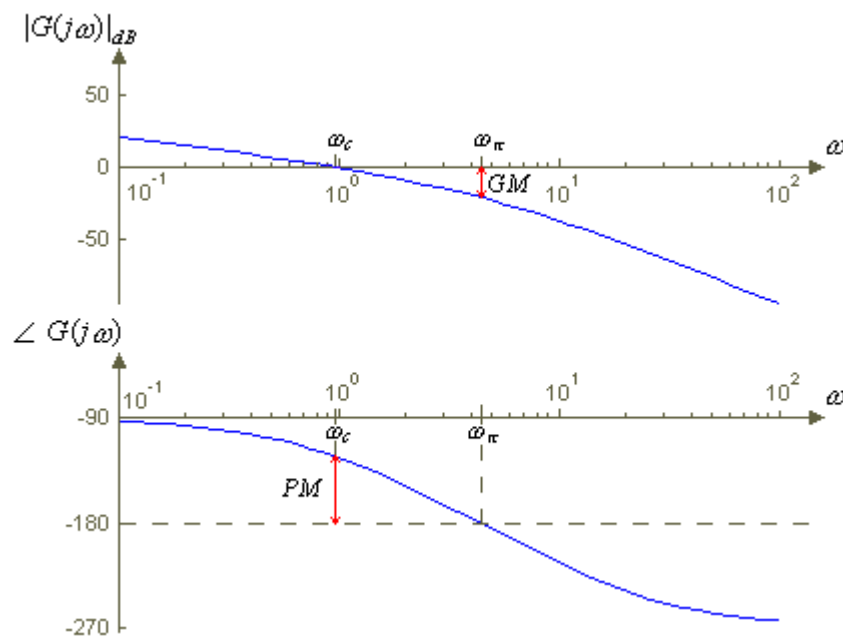
rispettando così le specifiche di progetto.

- Sistema in condizioni non nominali

Dopo aver realizzato il controllore per il sistema in condizioni nominali, si vuole verificare l'andamento del sistema in ciclo chiuso considerando anche la presenza degli attuatori; ricordando che lo schema è:



si deve tener presente che il blocco $G_A(s)$ ha una sua risposta in frequenza e quindi una sua banda passante che "disturba" il segnale che dal controllore deve arrivare al sistema. La risposta in frequenza del sistema nominale è:



e si ha che:

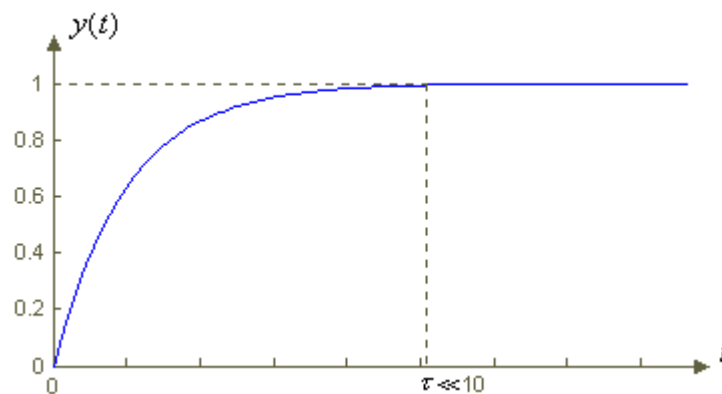
$$\omega_\pi = 4.33 \text{ rad/s} \Rightarrow GM = 21 \text{ dB}$$

$$\omega_c = 0.944 \text{ rad/s} \Rightarrow PM = 57^\circ$$

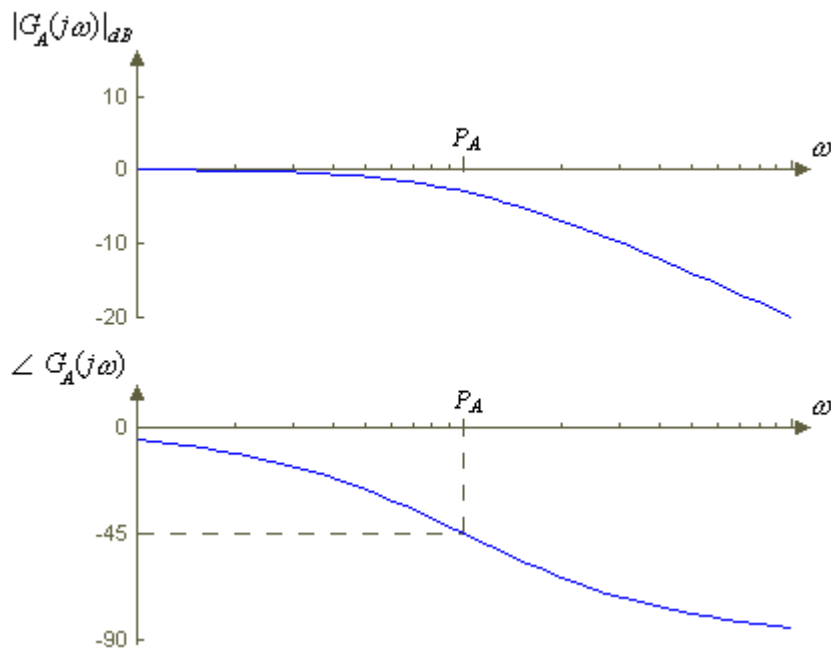
Il sistema ad anello chiuso è quindi asintoticamente stabile e rimane tale purchè l'influenza degli attuatori sia tale da non portare i margini di stabilità a valori negativi, quindi tale da non inserire un ritardo superiore a 57° e un'amplificazione di maggiore di 21 dB .

Si suppone che la dinamica dell'attuatore sia assimilabile a quella di un sistema del primo ordine:

$$G_A(s) = \frac{P_A}{s + P_A}$$



e, quindi, con risposta in frequenza del tipo:

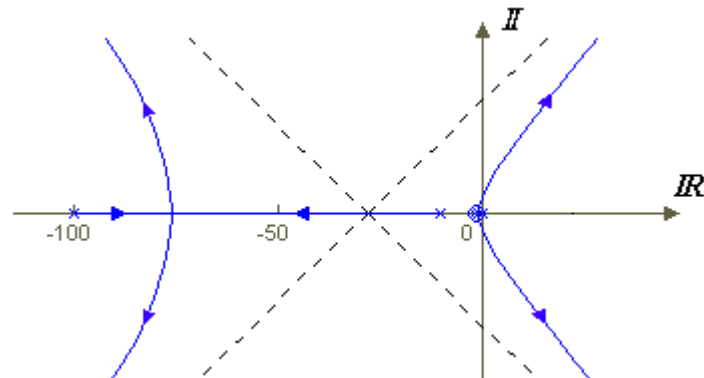


Tenendo presente che per il calcolo dei margini del sistema completo è sufficiente "sommare" i due diagrammi di Bode deve verificarsi che:

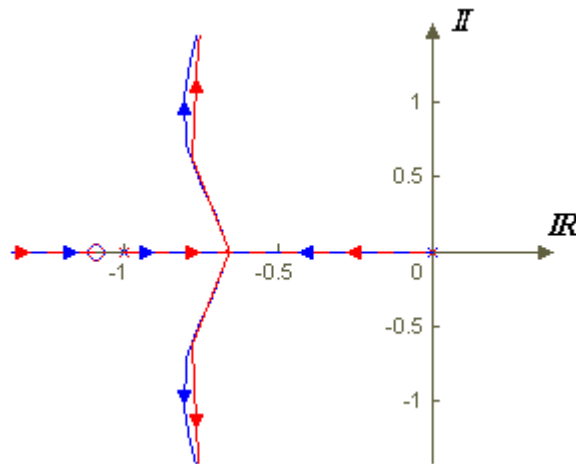
- $GM_t > 0 \Rightarrow \text{per } \omega = 4.33 \text{ rad/s. } |G_A(j\omega)| < 21 \text{ dB}$
- $PM_t > 0 \Rightarrow \text{per } \omega = 0.944 \text{ rad/s. } \angle G_A(j\omega) < 57^\circ$

La posizione del polo dell'attuatore, quindi, determina l'influenza che esso ha sul sistema:

- per $P_A = 100$ l'attuatore non modifica l'andamento del sistema nelle frequenze di interesse; in tal caso, infatti, il luogo delle radici del sistema diventa:

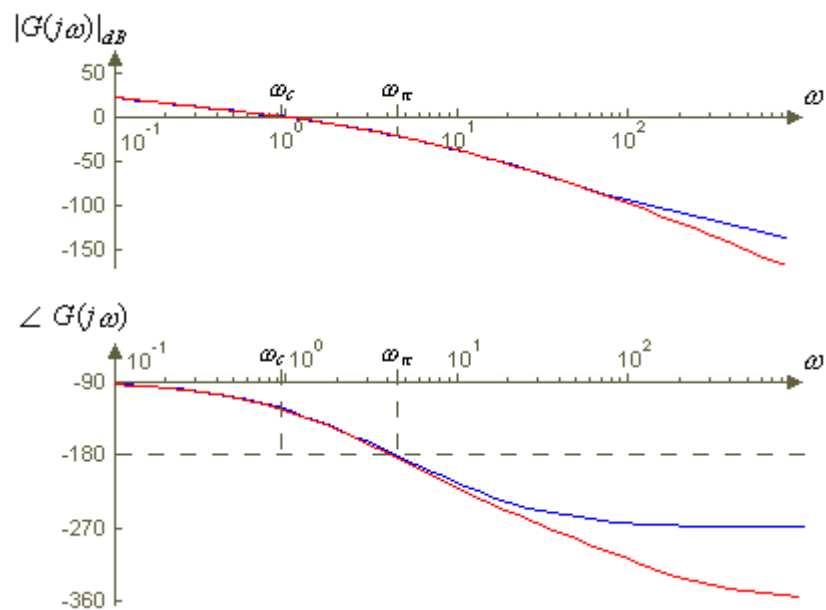


ma, nella zona vicina ai punti che caratterizzano le specifiche, confrontando il sistema "attuato" (in rosso) con quello nominale (in blu),

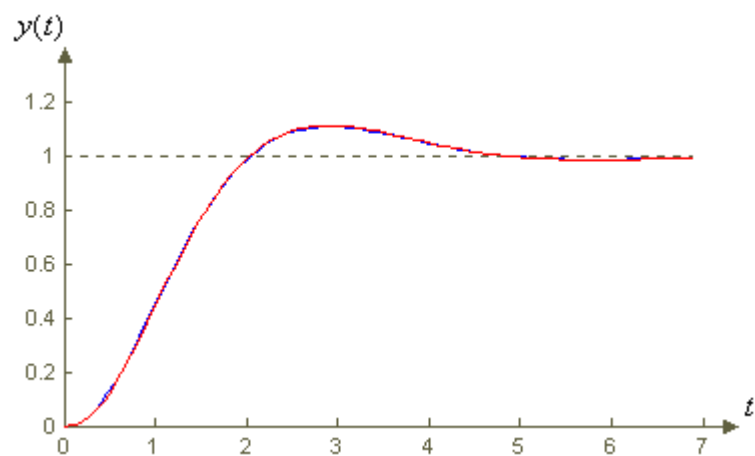


si verifica che i due sistemi hanno un andamento molto simile.

La somiglianza dei sistemi per le frequenze di interesse si può verificare anche confrontando i relativi diagrammi di Bode (con la stessa convenzione sui colori):

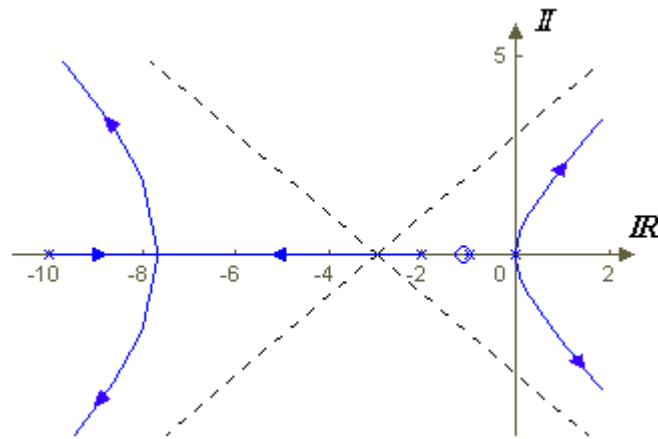


da cui si vede che, per le frequenze di interesse i grafici sono praticamente sovrapposti. Anche l'andamento della risposta ad un segnale d'ingresso a gradino unitario:

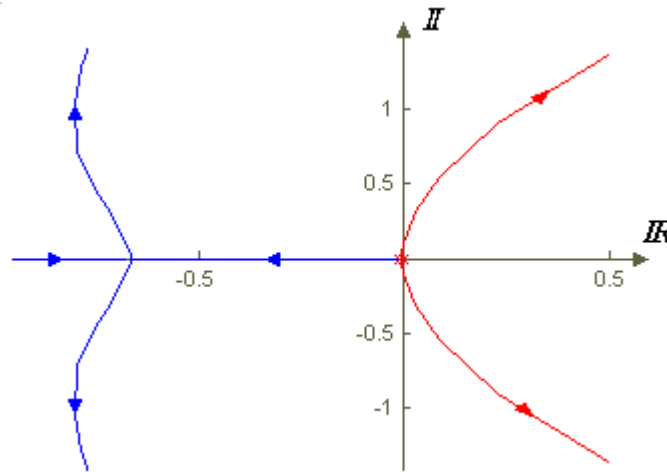


mostra la somiglianza fra i due sistemi.

- per $P_A = 0.01$ l'attuatore modifica l'andamento del sistema anche nelle frequenze di interesse; il luogo delle radici del sistema diventa infatti:

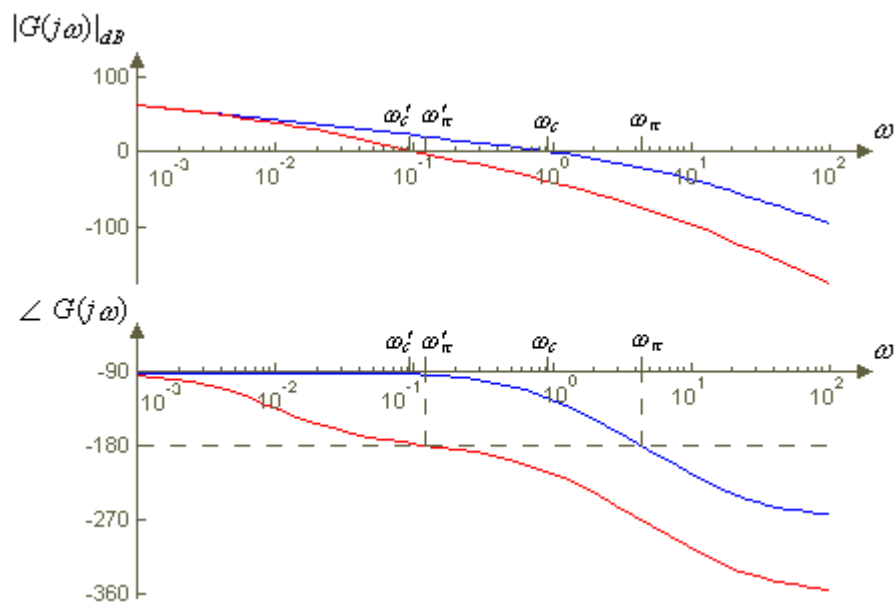


e, confrontando gli andamenti nella zona dei soliti punti, si ha (in blu il sistema nominale):

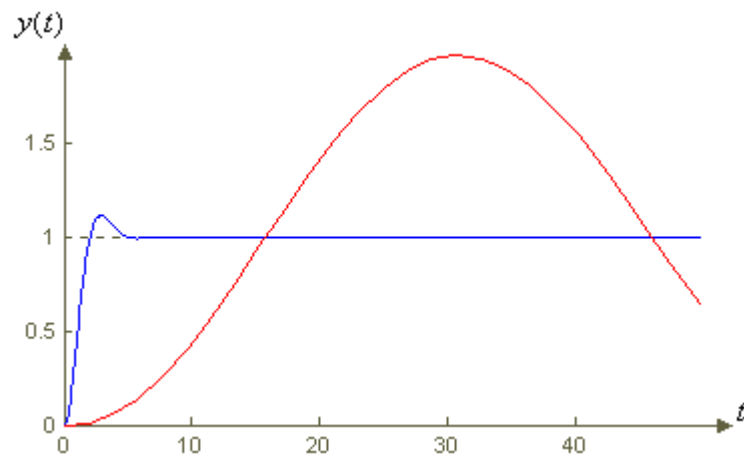


si nota la profonda differenza fra i due casi.

Confrontando i diagrammi di Bode del sistema nominale (in blu) e di quello che include questo tipo di attuttore (in rosso), si ha:



e si nota come gli andamenti siano profondamente differenti. Analizzando, infine, la risposta al segnale gradino unitario si vede che le specifiche di progetto non vengono rispettate (in blu il sistema nominale):



13.2. I controllori PID

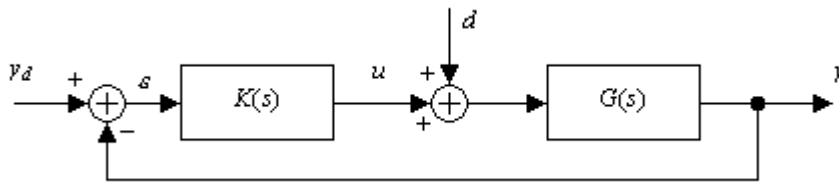
L'implementazione classica di un generico controllore, posto nella forma:

$$K(s) = \frac{k}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_j (1 + T_j s)} \quad (13.1)$$

può essere effettuato tramite la tecnica dei controllori *PID* (regolatori ad azione *Proporzionale, Integrativa, Derivativa*).

L'utilizzo dei controllori *PID*, cui si è già fatto riferimento nel *Cap.10*, è la tecnica di controllo più utilizzata nella pratica industriale, per la loro semplicità e l'ampia gamma di applicazioni che se ne può fare.

Dato un sistema $G(s)$ si vuole poter seguire un comando y_d posto in ingresso con errore nullo e avere un controllo completo del transitorio del segnale d'uscita y :



Un controllore *PID* può eseguire sul segnale errore ε una o più azioni, ognuna delle quali ha un determinata influenza sul segnale e modifica in maniera diversa il luogo delle radici del sistema.

13.2.1. Azione Proporzionale

La risposta del regolatore *Proporzionale* è data dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} u(s) = K_p [y_d(s) - y(s)] = K_p \varepsilon(s) \\ u(t) = K_p \varepsilon(t) \end{cases} \quad (13.2)$$

Il regolatore *Proporzionale* viene utilizzato, come già visto, per il controllo di sistemi stabili o asintoticamente stabili in cui un'elevata costante di guadagno in anello non compromette la stabilità e le prestazioni richieste al sistema non rendono necessario l'inserimento di ulteriori tipi di controllo; può essere utilizzato, in particolari situazioni, anche per stabilizzare un sistema instabile tale che, aumentando la costante di guadagno, si stabilizza.

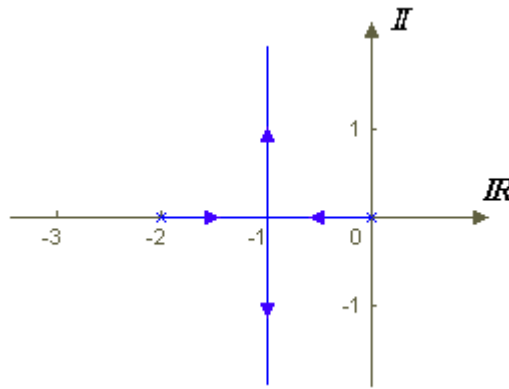
Se il sistema da controllare ha FdT :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

con un controllo proporzionale si ha:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{K_p}{s(s+2)}$$

ed il luogo delle radici rimane invariato ma, in funzione del valore del parametro K_p , si riposizionano i poli nel piano complesso sui rami del luogo delle radici originale.



13.2.2. Azione Integrale

La risposta del regolatore *Integrale* è caratterizzata dalle relazioni:

$$\begin{cases} u(s) = \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_I \int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt \end{cases} \quad (13.3)$$

I regolatori *Integrali* vengono utilizzati per soddisfare le richieste sull'errore a regime; si è visto infatti (*Par. 8.1.*) che, per avere un errore nullo ad un segnale gradino unitario, la *FdT* di anello deve essere di *Tipo 1* ed avere quindi un "termine di integrazione", per l'errore nullo in risposta ad un segnale rampa deve essere di *Tipo 2* e così via.

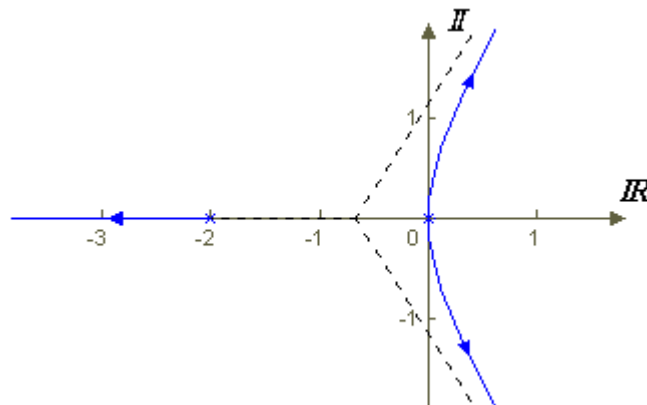
Per il sistema $G(s)$ visto sopra:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

con un controllo integrale si ha:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{K_I}{s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_I}{s^2(s+2)}$$

Si inserisce quindi un polo nell'origine, modificando il luogo delle radici che diventa:



e si nota che l'introduzione dell'azione integrale rende instabile il sistema a ciclo chiuso.

13.2.3. Azione Proporzionale-Integrale

In questo caso le relazioni che individuano le risposte del controllore sono:

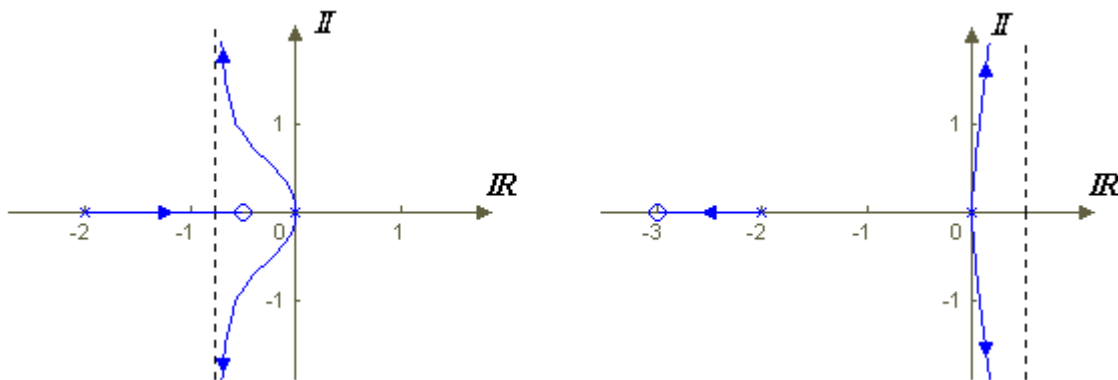
$$\begin{cases} u(s) = K_p \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) = \frac{K_p \cdot s + K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_I \int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt \end{cases} \quad (13.4)$$

Tali regolatori vengono utilizzati se, oltre all'azione integrale che soddisfi le prestazioni di errore a regime, è necessario inserire anche uno zero per avere una banda passante più larga e, quindi, una maggior velocità di risposta.

Considerando il solito sistema, si ottiene:

$$K(s) \cdot G(s) = \left(\frac{K_I}{s} + K_p \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_p s + K_I}{s^2(s+2)} = K_p \cdot \frac{s + K_I/K_p}{s^2(s+2)}$$

inserendo così un polo nell'origine e uno zero; in funzione del valore del rapporto (K_I/K_p) e quindi della posizione dello zero, il luogo delle radici può assumere uno dei due seguenti andamenti:



13.2.4. Azione Proporzionale-Derivativa

Le relazioni che individuano l'azione *Proporzionale-Derivativa* del controllore sono:

$$\begin{cases} u(s) = K_p \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = (K_p + K_D s) \varepsilon(s) \\ u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases} \quad (13.5)$$

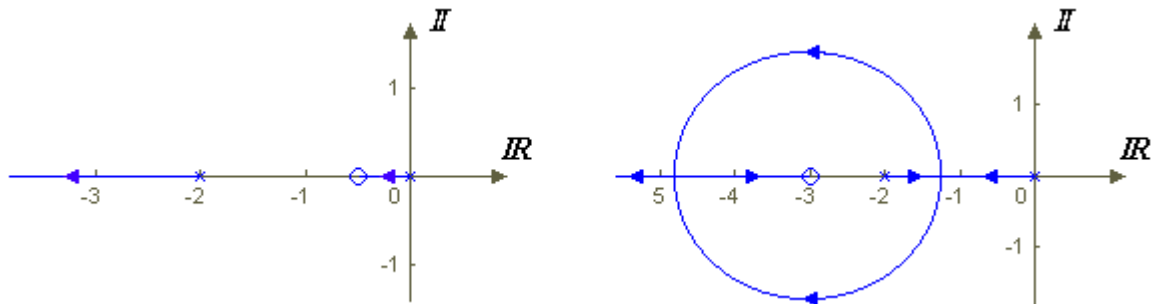
Si deve fare attenzione al fatto che, così come è stato indicato, questo regolatore non è realizzabile dato che risulta non causale (ha uno zero e nessun polo); in realtà un polo deve essere inserito e, nel caso ideale, può essere pensato all'infinito o, comunque, al di fuori delle frequenze di interesse.

Questa tipologia di regolatori viene utilizzata quando, non avendo problemi di stabilità o di prestazioni a regime, si vuole invece ottenere una banda passante più elevata e quindi una maggiore prontezza di risposta.

Inserendo un regolatore *PD* per il controllo del sistema in esame, si ha:

$$K(s)G(s) = (K_D s + K_p) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_D s + K_p}{s(s+2)} = K_D \cdot \frac{s + K_p/K_D}{s(s+2)}$$

inserendo così uno zero (e un polo all'infinito); in funzione del valore del rapporto (K_P/K_D) e quindi della posizione dello zero, il luogo delle radici può assumere uno dei due seguenti andamenti:



Bisogna tenere presente che, per la presenza del polo all'infinito (o comunque a frequenze molto elevate), saranno presenti, sempre comunque a frequenze elevate, due asintoti con pendenza $\pm \pi/2$.

13.2.5. Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa

La forma più generica di un controllore *PID* è individuata dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_{-\infty}^t \varepsilon(t) dt + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases} \quad (13.6)$$

infatti tutte quelle illustrate in precedenza derivano da queste ultime ove si consideri l'assenza di una o più azioni (cioè quando $K_P = 0$, $K_D = 0$ o $K_I = 0$).

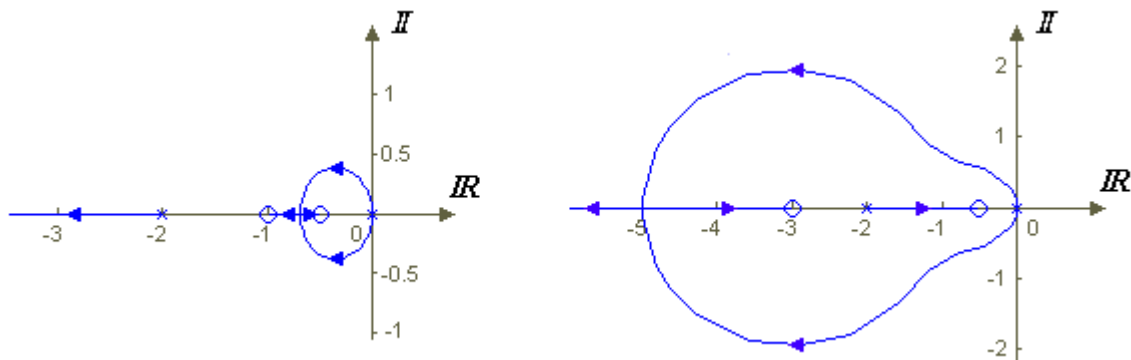
Si noti che, per la presenza dell'azione derivativa, anche questo regolatore risulta non causale (ha due zeri e un polo nell'origine); come in precedenza il polo c'è ma posto al di fuori delle frequenze di interesse (nel caso ideale può essere pensato all'infinito).

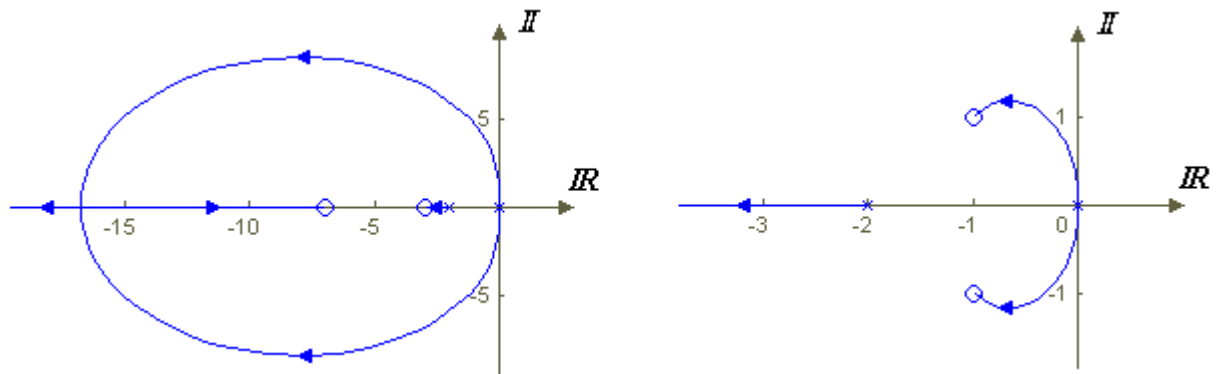
L'impiego dei *PID* consente il controllo di molte classi di sistemi e, scegliendo in maniera opportuna i valori dei tre parametri, si possono ottenere le azioni di tutti i regolatori visti sopra.

L'azione di un regolatore *PID* sul sistema in esame, implica che:

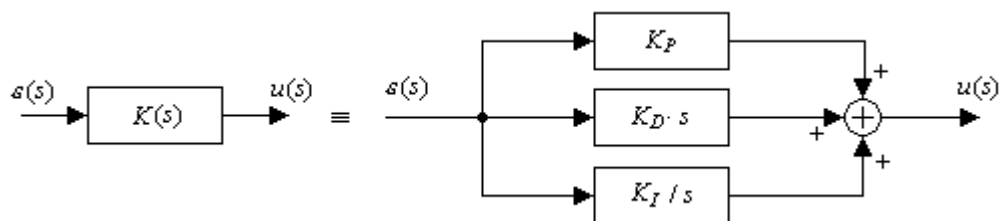
$$K(s) \cdot G(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^2(s+2)} = K_D \cdot \frac{s^2 + K_P/K_D s + K_I/K_D}{s^2(s+2)}$$

e quindi l'inserimento di due zeri, un polo nell'origine e un polo all'infinito; in funzione del valore dei tre parametri K_P , K_I e K_D , cambia la posizione degli zeri e il luogo delle radici può assumere uno dei seguenti andamenti:





Anche in questo caso si deve ricordare che, per la presenza del polo all'infinito (o comunque a frequenze molto elevate), saranno presenti a frequenze elevate due asintoti con pendenza $\pm \pi/2$.
Lo schema a blocchi di un *PID* risulta essere:

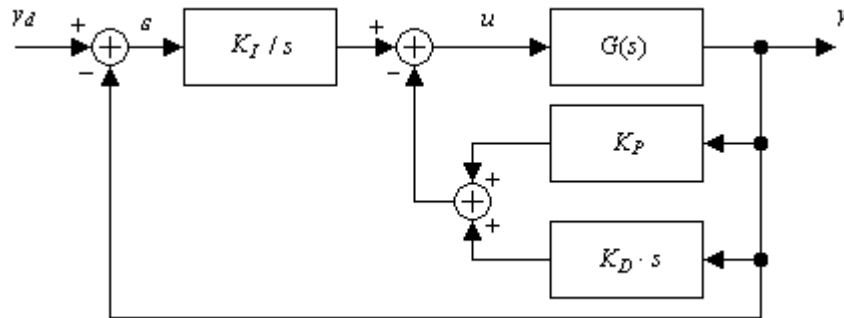


13.3. Note sui controllori PID

13.3.1. Struttura I-PD

In precedenza è stato riportato lo schema a blocchi di un regolatore *PID*; utilizzando tale schema si ha però un problema nel caso di rapide variazioni del segnale d'ingresso dato che la presenza del derivatore, comporta, come nel caso di ingresso a gradino, che la variabile di controllo $u(s)$ abbia un comportamento impulsivo, andamento che, normalmente, è da evitare.

Per non avere l'azione derivativa sulla catena diretta si modifica lo schema a blocchi utilizzando la cosiddetta struttura *I-PD*:



per cui, posto che, dalla prima delle (13.6.):

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (13.7)$$

la *FdT* del sistema a ciclo chiuso diventa:

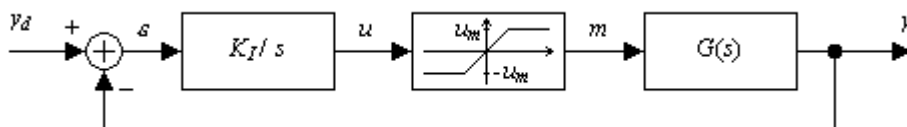
$$G_{CL}(s) = \frac{(K_I/s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (13.8)$$

13.3.2. Fenomeno del wind-up

In presenza di grossi errori e/o saturazione dell'attuatore (gli attuatori utilizzati nei sistemi di controllo hanno dei limiti sull'ampiezza delle uscite) la componente integrale del *PID* (come di un qualsiasi generico controllore) può avere un effetto "destabilizzante"; supponendo che il regolatore sia puramente integrale e che l'attuatore sia descritto dalle relazioni:

$$m(t) = \begin{cases} -u_m & \text{per } u(t) < -u_m \\ u(t) & \text{per } |u(t)| \leq u_m \\ u_m & \text{per } u(t) > u_m \end{cases}$$

in cui $m(t)$ è l'uscita e $u(t)$ l'ingresso, lo schema del sistema risulta:



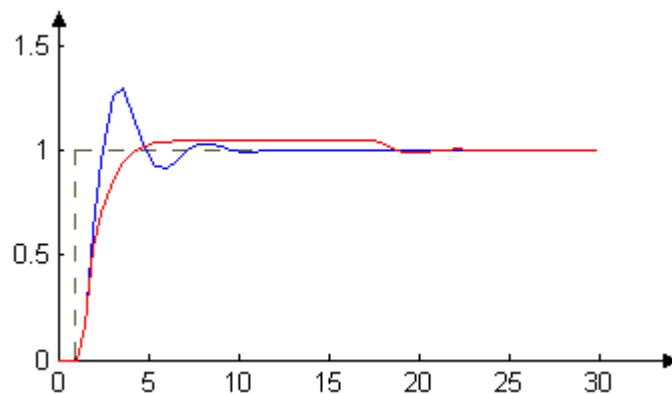
In questa situazione, se l'errore ε mantiene lo stesso segno per un certo periodo di tempo, l'uscita dal blocco integratore cresce sempre di più e continua a crescere anche quando, per effetto della saturazione, l'uscita dell'attuatore è limitata al valore u_m (o $-u_m$); in queste condizioni l'anello di regolazione risulta interrotto, dato che il termine integrale continua a crescere ma tale incremento non produce alcun effetto sulla variabile di comando dell'impianto.

Anche quando l'errore cambia segno il regolatore resta inattivo poiché, prima di avere un segnale utile per la regolazione, il termine integrale si deve "scaricare"; questi effetti dovuti alla saturazione dell'azione integrale sono noti come effetto *wind-up*.

Prendendo come esempio un sistema con un ingresso a gradino (all'istante $t = 1$) e tale che, per lo schema appena visto, sia:

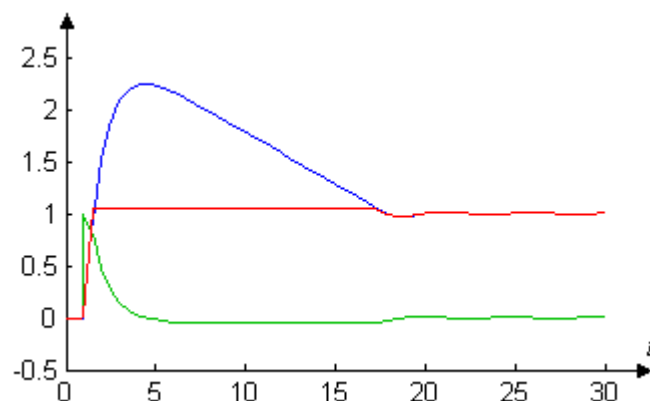
$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_I = 2$$

gli andamenti dell'uscita senza (in blu) e con (in rosso) l'effetto della saturazione sono:



e si nota che la saturazione dell'attuatore comporta un ritardo dell'uscita nel raggiungere il valore di regime.

Analizzando per questo esempio, l'andamento delle variabili ε (in verde), u (in blu) e m (in rosso) in presenza della saturazione

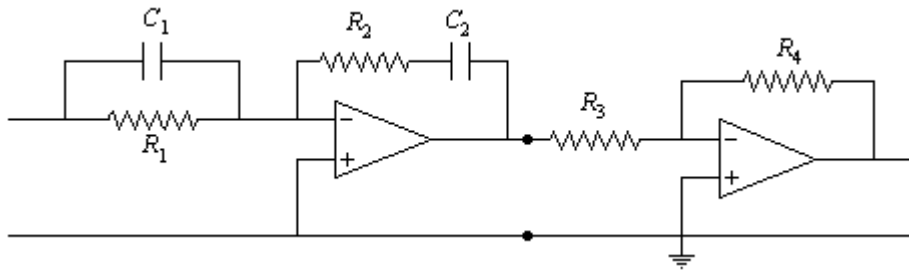


si riesce a comprendere meglio l'effetto di *wind-up*.

Esistono alcune tecniche che permettono di desaturare il regolatore, evitando il problema del ritardo del raggiungimento del valore di regime, basate sull'inserimento di opportuni blocchi in anello con l'attuatore.

13.3.3. Possibile implementazione

Nel *Par. 10.3.* è già stata illustrata una possibile implementazione, di un controllore *PID* ottenuto tramite circuiti elettrici:



per cui è:

$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(C_1 R_2 s + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2 s} \right)$$

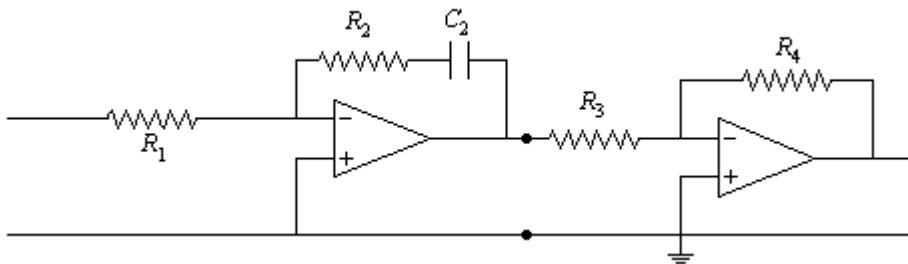
e, per la (13.7.):

$$K_P = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}, \quad K_I = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2}, \quad K_D = \frac{R_4 C_1 R_2}{R_3}$$

Si noti che, in realtà, il componente operazionale inserisce un polo ad alte frequenze, quindi fuori da quelle di interesse.

Dallo stesso circuito si possono ottenere i controllori:

- *PI*
eliminando C_1



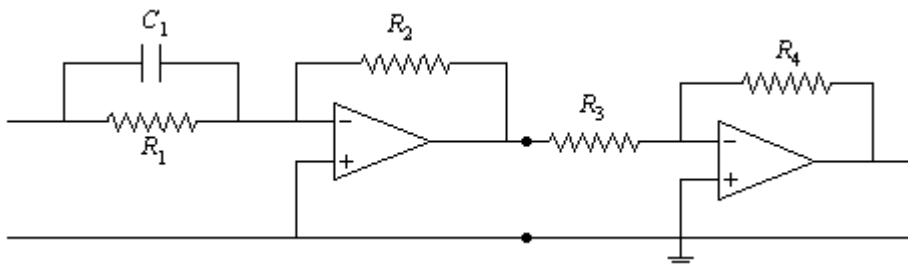
si ottiene:

$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_1 C_2 s} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C_2 s} \right)$$

e, quindi:

$$K_P = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}, \quad K_I = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2}$$

- *PD*
cortocircuitando C_2



si ha:

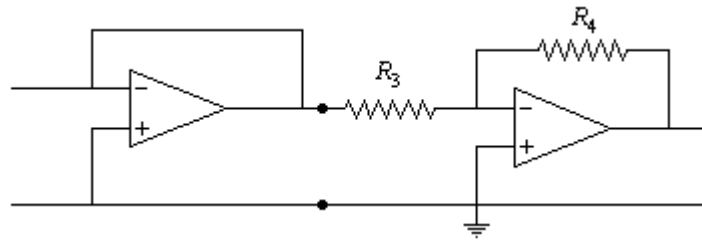
$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2(R_1 C_1 s + 1)}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(C_1 R_2 s + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

da cui:

$$K_P = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}, \quad K_D = \frac{R_4 C_1 R_2}{R_3}$$

- P

Considerando solo i componenti:



si ha:

$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \Rightarrow K_P = \frac{R_4}{R_3}$$

13.4. Il metodo di Ziegler-Nichols

Si verifica spesso che i sistemi da controllare siano caratterizzati da modelli fortemente non lineari per cui la sintonizzazione o taratura (tuning) del controllore, cioè la predisposizione finale dei suoi parametri, viene eseguita, nella maggior parte dei casi, manualmente "sul campo" mediante prove sperimentali sul sistema.

Le prime regole di taratura per i sistemi continui sono state introdotte da *Ziegler e Nichols* e forniscono, in generale, una prima scelta di parametri a partire dalla quale, mediante opportuni aggiustamenti dei loro valori e prove sperimentali, si giunge ad un comportamento soddisfacente, almeno per la maggior parte dei sistemi di controllo industriali.

Esistono due diverse tecniche che si basano rispettivamente su:

- 1) Risposta ad un gradino di ingresso del processo (BIBO stabile) a catena aperta.
- 2) Misura del periodo di oscillazione del sistema a catena chiusa all'aumentare del guadagno K_p .

Entrambe i metodi utilizzano la (13.7):

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

dopo però che si siano definiti due ulteriori parametri, cioè:

- la costante di tempo dell'azione derivativa T_D

$$T_D = \frac{K_D}{K_p} \quad (13.9)$$

- la costante di tempo dell'azione integrativa T_I

$$T_I = \frac{K_p}{K_I} \quad (13.10)$$

A questo punto si può scrivere:

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (13.11)$$

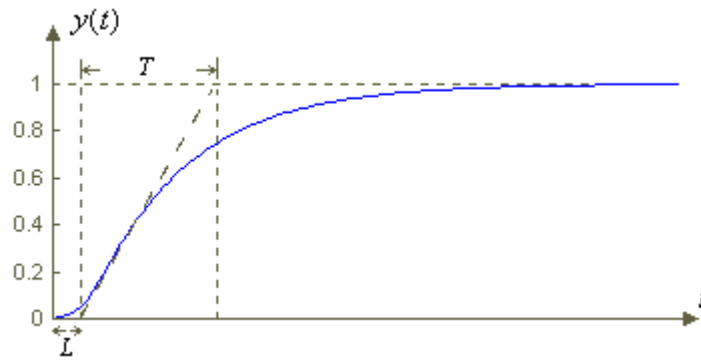
e i metodi forniscono dei criteri per la scelta di K_p , T_D e T_I .

13.4.1. Metodo del gradino in anello aperto

Si considera un sistema senza poli complessi o nell'origine, e quindi del tipo:

$$G_{OL}(s) = \frac{k \cdot e^{-Ls}}{Ts + 1}$$

in cui, i parametri L e T sono individuabili dalla risposta al gradino unitario:



In questo caso il criterio di Ziegler-Nichols fornisce una tabella per la taratura dei parametri K_P , T_D e T_I :

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$\frac{0.9 \cdot T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$\frac{1.2 \cdot T}{L}$	$2 \cdot L$	$0.5 \cdot L$

dalla quale si ricava che, nel caso di regolatore PID , per la (13.11), il controllore ha la FdT

$$K(s) = 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = 0.6 \cdot T \cdot \frac{(s + 1/L)^2}{s} \quad (13.12)$$

e, quindi, un polo nell'origine e due zeri coincidenti.

13.4.2. Metodo dell'aumento del guadagno in ciclo chiuso

Il secondo metodo di *Ziegler-Nichols*, applicabile esclusivamente a processi stabilizzabili, impiega inizialmente solo l'azione proporzionale (ponendo quindi $T_I = \infty$ e $T_D = 0$), aumentando il valore di K_P fino a portare il sistema retroazionato al limite di stabilità e determinando sperimentalmente il valore critico K_{CR} (*guadagno critico*), per il quale, avendo in ingresso un segnale a gradino, il sistema risponde con oscillazioni non smorzate di periodo:

$$P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} \quad (13.13)$$

Una volta determinati i valori di K_{CR} e P_{CR} è possibile tarare i parametri del regolatore secondo la seguente tabella:

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5 \cdot K_{CR}$	∞	0
PI	$0.45 \cdot K_{CR}$	$\frac{1}{1.2} \cdot P_{CR}$	0
PID	$0.6 \cdot K_{CR}$	$0.5 \cdot P_{CR}$	$0.125 \cdot P_{CR}$

Con questo metodo, quindi, nel caso di un controllore *PID* si ottiene:

$$K(s) = 0.6 \cdot K_{CR} \left(1 + \frac{2}{P_{CR}s} + 0.125 \cdot P_{CR}s \right) = 0.075 \cdot K_{CR} P_{CR} \cdot \frac{(s + 4/P_{CR})^2}{s} \quad (13.14)$$

e, anche in questo caso, oltre al polo nell'origine, ci sono due zeri coincidenti.

Si noti che:

- K_{CR} è il margine di guadagno del sistema controllato *GM*
- $\omega_{cr} = 2\pi/P_{CR}$ è la pulsazione per cui il diagramma polare $G(j\omega)$ attraversa il semiasse reale negativo e coincide, quindi, con ω_{π} , la pulsazione tramite cui si calcola il margine di guadagno stesso

Il controllore può quindi essere tarato conoscendo soltanto un punto della risposta in frequenza del sistema, cioè:

$$G(j\omega_{cr}) = -\frac{1}{K_{CR}}$$

Un esempio di applicazione di questo metodo si può avere esaminando il sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Se si considera un controllo solo proporzionale $K(s) = K_P$, per cui è:

$$\tilde{G}_{CL}(s) = \frac{K_P}{s(s+1)(s+5) + K_P}$$

dato che:

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K_P$$

il valore di K_{CR} si ricava con il criterio di Routh,:

s^3	1	5
s^2	6	K_P
s^1	$5 - K_P/6$	
s^0	K_P	

da cui si ottiene $K_{CR} = 30$.

Per $K_P = K_{CR}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} s^3 + 6s^2 + 5s + 30 &= 0 \Rightarrow (s+6)(s^2+5) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -6 \\ s_{2/3} = \pm j\sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi:

$$P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \text{ sec.}$$

Per un controllore *PID* si ha:

$$K_P = 0.6 \cdot K_{CR} = 18$$

$$T_I = 0.5 \cdot P_{CR} = 1.405 \text{ sec.}$$

$$T_D = 0.125 \cdot P_{CR} = 0.35 \text{ sec.}$$

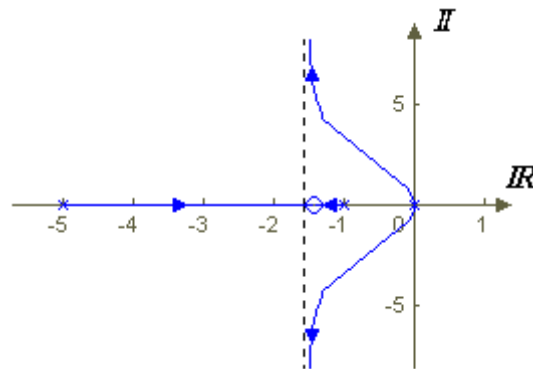
e, quindi:

$$K(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = 6.32 \cdot \frac{(s + 1.4235)^2}{s}$$

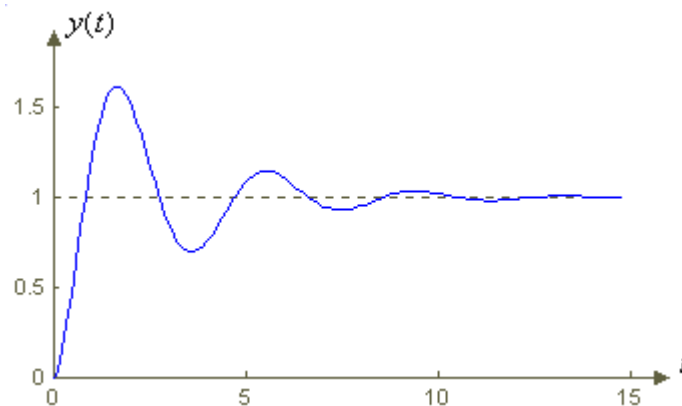
da cui:

$$K(s)G(s) = 6.32 \cdot \frac{(s + 1.4235)^2}{s^2 (s + 1)(s + 5)}$$

Il luogo delle radici del sistema è:



mentre la risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso, ottenuto con l'inserimento di questo controllore, è:

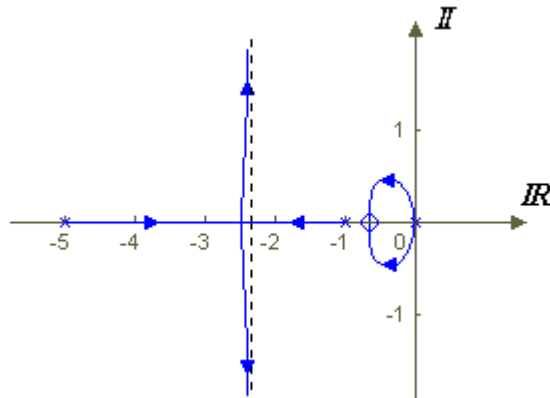


con una sovralongazione del 62%.

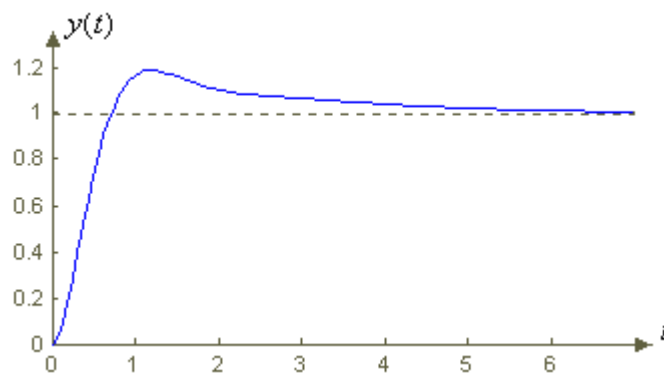
Per migliorare la risposta, diminuendo la sovralongazione, si possono modificare i parametri; così, lasciando inalterato il valore di K_P e modificando invece gli altri in modo da portare gli zeri coincidenti in $s = -0.65$ (tenendo presenti la (13.14.) e la seconda tabella di *Ziegler-Nichols*), si ottiene:

$$K(s) \cdot G(s) = 13.85 \cdot \frac{(s + 0.65)^2}{s^2 (s + 1)(s + 5)}$$

Il luogo delle radici risulta ora:



e la risposta del sistema al segnale gradino:

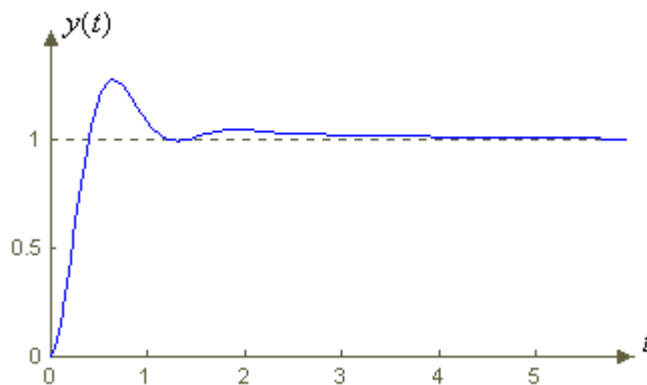


in cui la sovraelongazione è scesa al 19%

Lasciando poi invariati gli altri parametri e modificando il valore di $K_p (= 39.5)$ si ha:

$$K(s) \cdot G(s) = 30.38 \cdot \frac{(s + 0.65)^2}{s^2(s + 1)(s + 5)}$$

sistema che ha, ovviamente, lo stesso luogo delle radici di quello precedente ma risposta al gradino di andamento diverso:

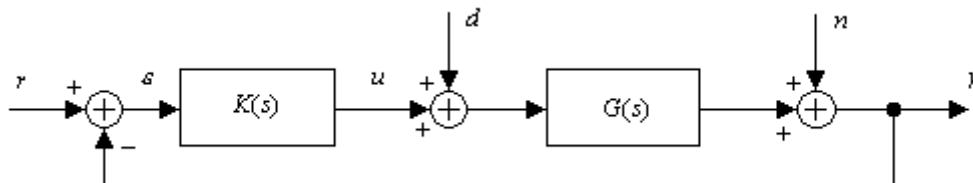


con una sovraelongazione del 28%.

Cap 14. Reti correttrici

14.1. Reti correttrici più comuni

Le reti correttrici sono dei sistemi di correzione del comportamento dinamico del sistema; elaborando il segnale errore, modificano l'andamento del sistema complessivo per soddisfare determinate specifiche su stabilità, velocità di risposta o altro.

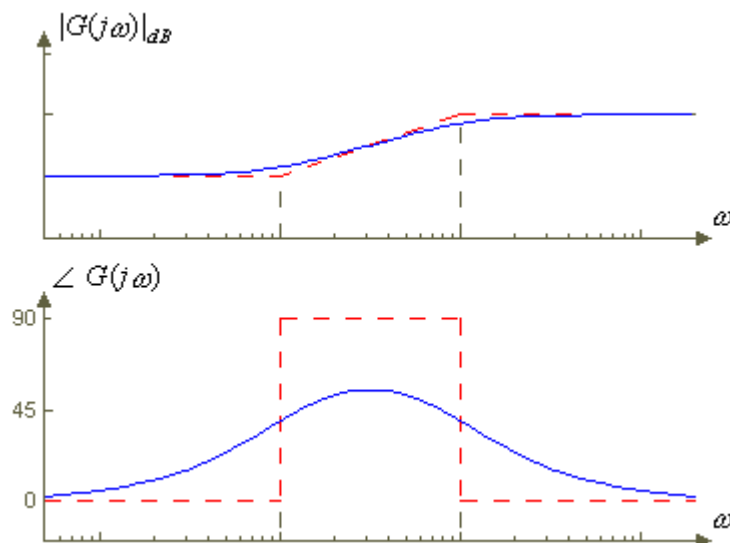


Le reti correttrici più utilizzate sono quelle di controllo a componenti elettronici (resistenze e capacità), ma si possono ottenere gli stessi risultati con sistemi di controllo a componenti meccanici (molle e ammortizzatori) o pneumatici.

Un primo approccio a questo tipo di regolatori, può essere effettuato illustrando il diagramma di Bode delle reti più diffusamente utilizzate:

1) Rete anticipatrice (lead network)

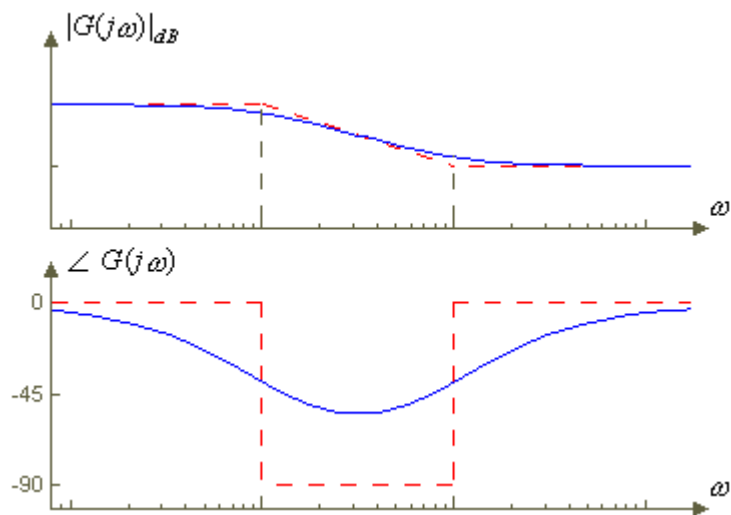
Il diagramma di Bode di questo tipo di reti ha il seguente andamento (in blu quello reale, in rosso quello approssimato):



La rete è un filtro passa-alto

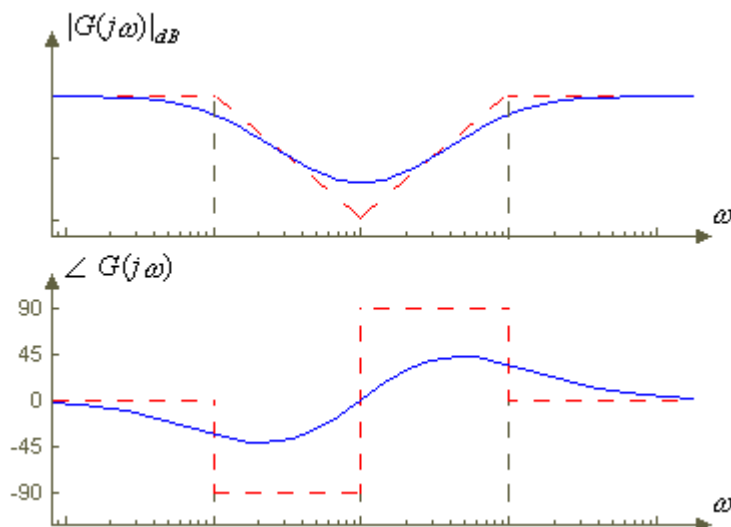
2) Rete ritardatrice (lag network)

In questo caso la rete è un filtro passa-basso:



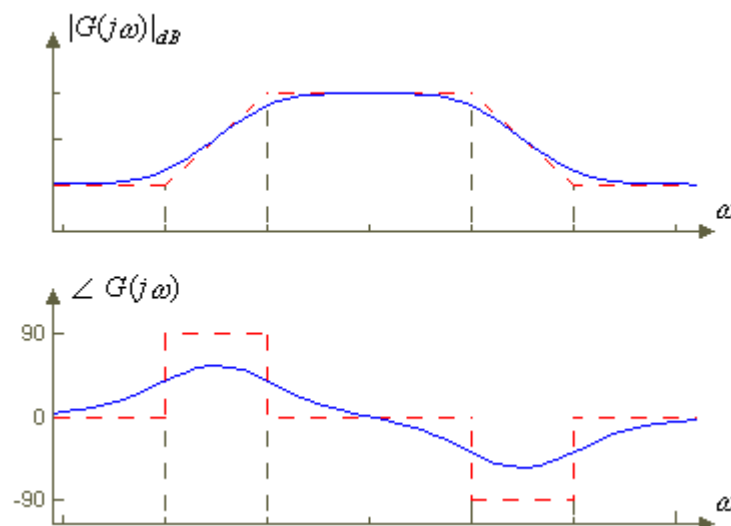
3) Filtro a spillo (notch filter)

La rete taglia solo una stretta fascia di frequenze:



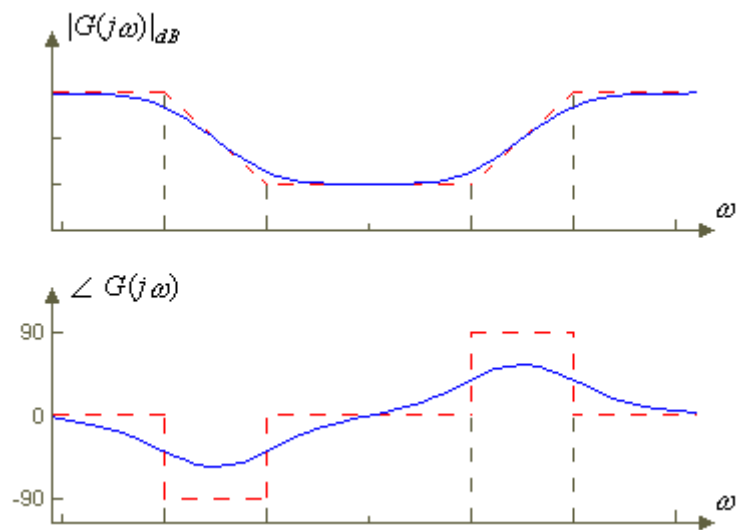
4) Rete ad anticipo e ritardo (lead-lag network)

La rete è un filtro passa-banda:



5) *Rete a ritardo e anticipo (lag-lead network)*

La rete è un filtro taglia-banda:



Le due ultime reti vengono anche dette *reti a sella*.

6) *Rete a T*

Le reti a T hanno diagrammi di Bode simili a quelli dei filtri a spillo; vengono utilizzate nel controllo di sistemi con poli dominanti complessi coniugati, in cui, facendo corrispondere gli zeri della rete con i poli del sistema, "sostituiscono" questi ultimi con quelli della rete, reali e quindi preferibili per gestire le caratteristiche di stabilità e risposta del sistema.

14.2. Reti anticipatrici

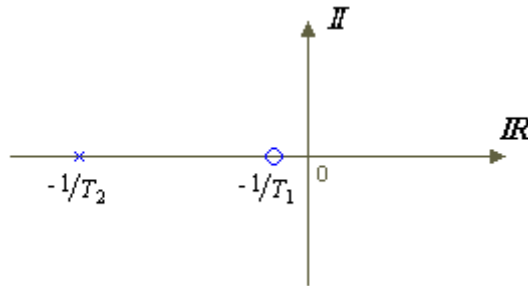
Le reti ad anticipo di fase (*lead network*) sono le più utilizzate per la stabilizzazione dei sistemi di controllo in retroazione ed hanno una FdT del tipo:

$$K(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}} \quad (14.1)$$

in cui:

$$T_1 > T_2, \quad k_0 = k \frac{T_1}{T_2}$$

e, quindi, lo zero è posizionato ad una frequenza inferiore rispetto al polo:



Si noti che, posto:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (14.2)$$

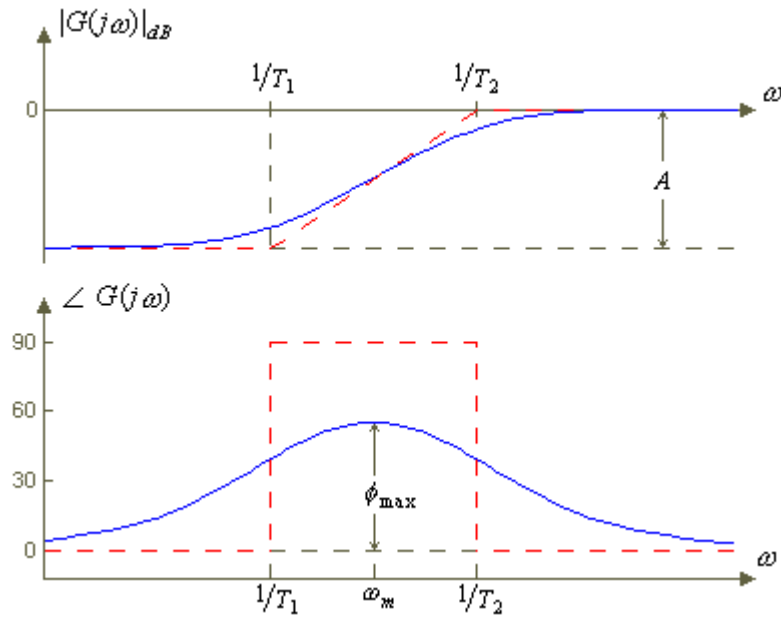
si può scrivere

$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}} = k_0 \alpha \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s}$$

Supponendo per semplicità che $k_0 = 1$ ($k = \alpha$) e avendo quindi:

$$K(s) = \alpha \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \quad (14.3)$$

il diagramma di Bode ha un andamento del tipo:



Appare evidente che quanto più lo zero e il polo sono lontani, tanto più è alto il recupero di fase (valore tipico delle reti anticipatrici è $\phi_{\max} \cong 60^\circ$) e maggiore è l'attenuazione in bassa frequenza. Si ha infatti che:

$$A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} \quad (14.4)$$

e inoltre, dato che:

$$\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

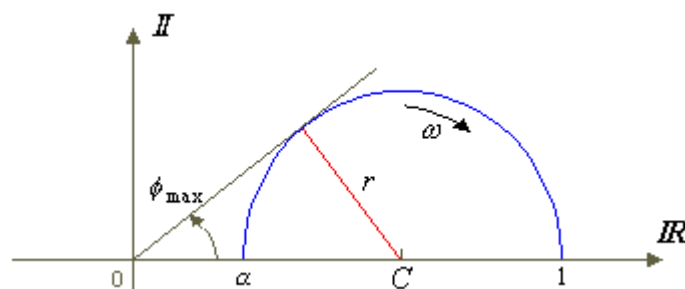
si trova che la frequenza ω_m (per cui si ha ϕ_{\max}) è:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}} \quad (14.5)$$

Riscrivendo la (14.1.) nella forma:

$$K(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2} = \alpha \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega \alpha T_1}$$

(sempre considerando $k_0 = 1$) si ricava il diagramma di Nyquist della rete:



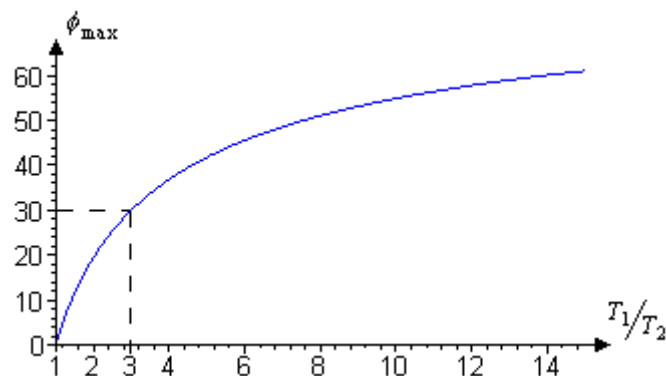
che risulta essere una semicirconfenza di centro C e raggio r , dove:

$$C = \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right) \quad r = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

e si ricava quindi:

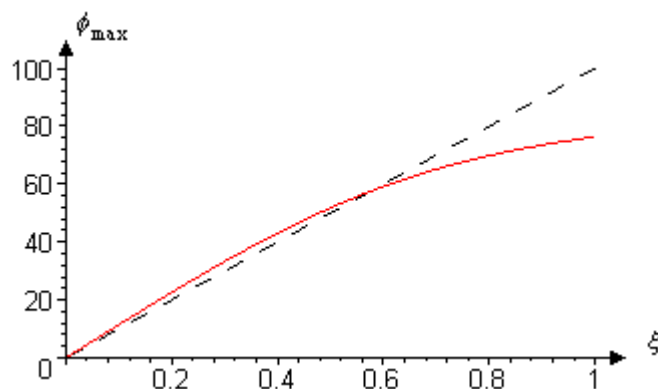
$$\phi_{\max} = \arcsen \frac{(T_1/T_2) - 1}{(T_1/T_2) + 1} = \arcsen \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (14.6)$$

Si può quindi riportare su di un grafico la relazione fra il valore di ϕ_{\max} e la posizione reciproca delle singolarità (polo e zero):



Un altro grafico approssimato che riveste un certo interesse è quello che mette in relazione il valore di ϕ_{\max} e il coefficiente di smorzamento di un sistema del secondo ordine, data dalla:

$$\phi_{\max} = \arctan \frac{2\xi}{\left(\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2 \right)^{1/2}} \quad (14.7)$$



L'introduzione di una rete anticipatrice nel controllo amplifica la banda, migliorando la velocità della risposta e riducendo il valore della sovrallungazione; per le basse frequenze (rispetto a quelle della banda in cui agisce) la rete non sfasa ma attenua di α mentre per le alte frequenze non sfasa e non attenua.

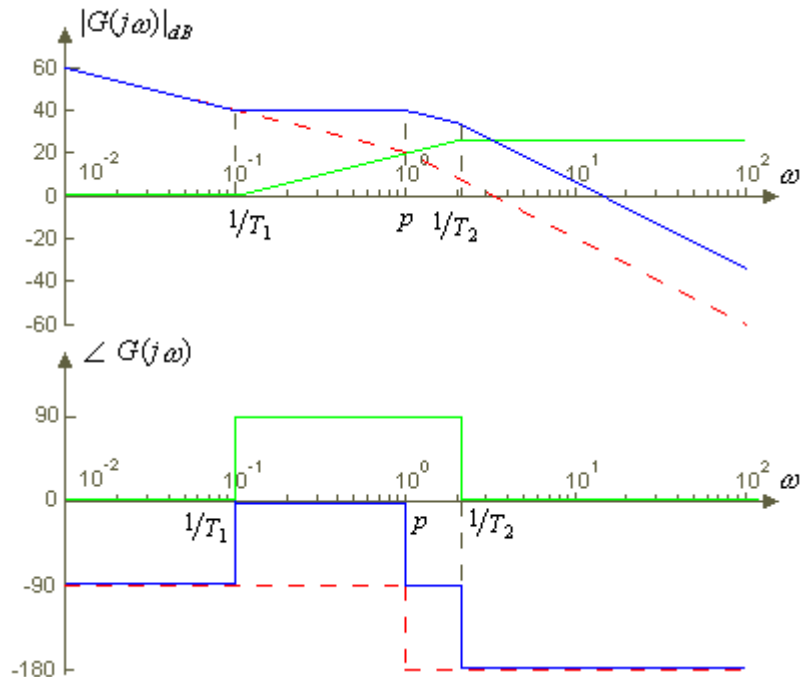
Un'idea di come una rete anticipatrice modifichi il sistema a cui viene applicata si può avere esaminando il diagramma di Bode della:

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

cui venga applicata la rete:

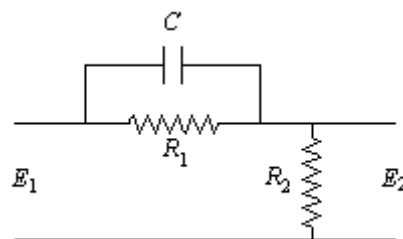
$$K(s) = \frac{1+10s}{1+0.476s}$$

Nel grafico sono riportati il diagramma della $G(s)$ in tratteggio rosso, in verde quello della $K(s)$ e in blu quello della $K(s) \cdot G(s)$; si noti che sono stati utilizzati i diagrammi di Bode approssimati che permettono una migliore comprensione dell'andamento:



14.2.1. Implementazione di una rete anticipatrice

La rete anticipatrice può essere implementata tramite il seguente circuito elettrico:



infatti si ha:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/Cs}{R_1 + 1/Cs}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1Cs}} = \\ &= \frac{R_2(1 + R_1Cs)}{R_2(1 + R_1Cs) + R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Cs + 1} \end{aligned}$$

e, posto:

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = R_1 C$$

si può scrivere:

$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

FdT che coincide con la (14.3.).

14.2.2. Regole per il progetto di una rete anticipatrice

Per progettare una rete che soddisfi le specifiche richieste si possono utilizzare le seguenti regole operative:

- 1) Calcolare il valore del guadagno k che permette di soddisfare le specifiche sull'errore a regime (eventualmente anche con l'inserimento di poli nell'origine).
- 2) Posto $K(s) = k$ trovare il margine di fase, PM , della $K(s) \cdot G(s)$.
- 3) Trovare il valore dell'incremento di fase Δ necessario per soddisfare la specifica sul PM .
- 4) Aumentare il valore di Δ di una percentuale per tener conto dell'aumento della frequenza di taglio dovuto all'inserimento della rete anticipatrice; si ottiene così l'anticipo di fase richiesto.
- 5) Calcolare, tramite la (14.6.), il valore del rapporto T_1/T_2 .
- 6) Trovare la nuova frequenza di taglio ω_c^n tale che:

$$\left| K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n) \right|_{dB} = 20 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

al di sotto di 0 dB.

- 7) Calcolare i valori di $1/T_1$ e $1/T_2$ utilizzando i risultati del punto 5 e la (14.5.) con la frequenza trovata:

$$\omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

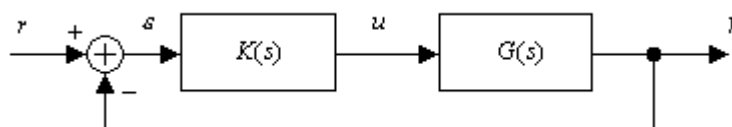
- 8) Disegnare l'andamento della $K(s) \cdot G(s)$ così ottenuta, verificare che i risultati soddisfino le specifiche ed, eventualmente, ripetere il procedimento incrementando ulteriormente il valore di Δ .

14.2.3. Esempio di progetto di una rete anticipatrice

Dato il sistema con FdT :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

si vuole progettare la rete ad anticipo di fase tale che il sistema in retroazione unitaria:



soddisfi le seguenti specifiche:

- errore in risposta al segnale rampa $\epsilon_{ss} \leq 5\%$;
- margine di fase $PM \geq 45^\circ$.

La sintesi del progetto va effettuata seguendo i passaggi indicati in precedenza:

- 1) Calcolare il valore del guadagno k che permette di soddisfare le specifiche sull'errore a regime (eventualmente anche con l'inserimento di poli nell'origine).

Ricordando la (8.2.):

$$G_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)}$$

da quanto visto nel (Par. 8.1.6.) si ha:

$$u(t) = t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

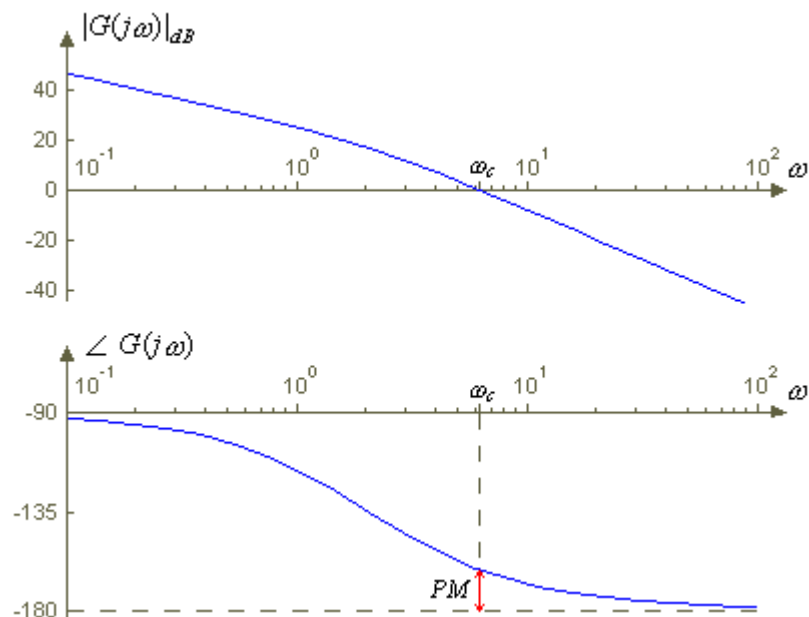
Poiché deve essere $\varepsilon_{ss} \leq 5\%$ si ha:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \Rightarrow k \geq \frac{2}{0.05} = 40$$

- 2) Posto $K(s) = k$ trovare il margine di fase, PM , della $K(s) \cdot G(s)$.
Disegnando il diagramma di Bode della:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

si ha:



e si trova che:

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad/s} \Rightarrow PM = 18^\circ$$

- 3) Trovare il valore dell'incremento di fase Δ necessario per soddisfare la specifica sul PM .
Tenendo presente che si vuole un $PM \geq 45^\circ$, deve essere:

$$\Delta = PM_d - PM = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$$

- 4) Aumentare il valore di Δ di una percentuale per tener conto dell'aumento della frequenza di taglio dovuto all'inserimento della rete anticipatrice; si ottiene così l'anticipo di fase richiesto.
In questo caso si pone $\Delta = 30^\circ$

- 5) Calcolare, tramite la (14.6.), il valore del rapporto T_1/T_2 .
Sfruttando la (14.6.):

$$\phi_{\max} = \arcsen \frac{(T_1/T_2) - 1}{(T_1/T_2) + 1} = 30^\circ \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 3$$

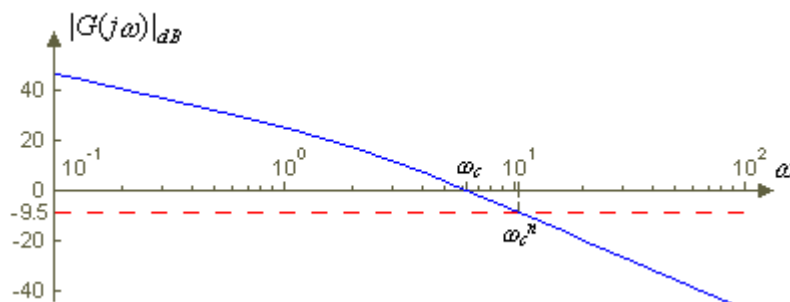
- 6) Trovare la nuova frequenza di taglio ω_c^n tale che:

$$\left| K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n) \right|_{dB} = 20 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right)$$

al di sotto di 0 dB.

Riprendendo in considerazione il diagramma di Bode ottenuto in precedenza si individua la nuova frequenza di taglio dove è:

$$\left| K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n) \right|_{dB} = -20 \log \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = -20 \log 3 \cong -9.5 \text{ dB}$$



e si ricava che:

$$\omega_c^n \cong 10.863 \text{ rad/s}$$

- 7) Calcolare i valori di $1/T_1$ e $1/T_2$ utilizzando i risultati del punto 5 e la (14.5.) con la frequenza trovata:

$$\omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} \omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{T_1 / T_2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \omega_c^n} \cong 0.053 \text{ s/rad} \\ \frac{T_1}{T_2} = 3 \Rightarrow T_1 = 3 \cdot T_2 \cong 0.159 \text{ s/rad} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} \cong 6.272 \text{ rad/s} \quad \frac{1}{T_2} \cong 18.816 \text{ rad/s}$$

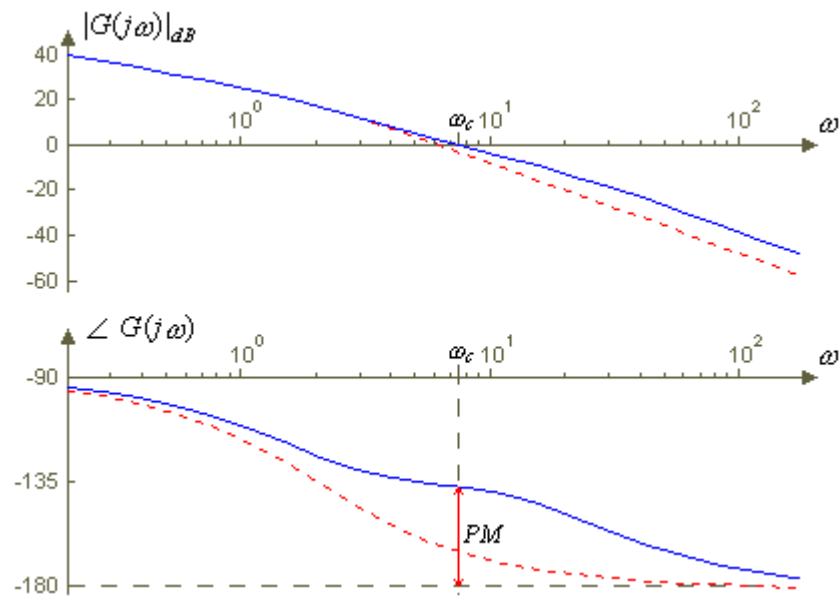
- 8) Disegnare l'andamento della $K(s) \cdot G(s)$ così ottenuta, verificare che i risultati soddisfino le specifiche ed, eventualmente, ripetere il procedimento incrementando ulteriormente il valore di Δ .

La FdT del sistema controllato con la rete anticipatrice ricavata è:

$$K(s) \cdot G(s) = k \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \cdot G(s) = 40 \cdot \frac{1 + 0.159s}{1 + 0.053s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(s) \cdot G(s) = 120 \frac{s + 6.272}{s + 18.816} \cdot \frac{1}{s(s+2)}$$

Il diagramma di Bode del sistema così ottenuto risulta (in tratteggio rosso il diagramma del sistema di partenza):



Si trova però che, con questa rete, si ottiene $PM \cong 43,31^\circ$; ripetendo il procedimento, scegliendo $\Delta = 33^\circ$ si ottiene la rete:

$$K(s) = 40 \cdot \frac{0.159s + 1}{0.047s + 1} = 135.585 \cdot \frac{s + 6.278}{s + 21.296}$$

con cui il margine di fase della $K(s) \cdot G(s)$ è $PM \cong 45,57^\circ$ e le specifiche di progetto risultano soddisfatte.

14.3. Reti ritardatrici

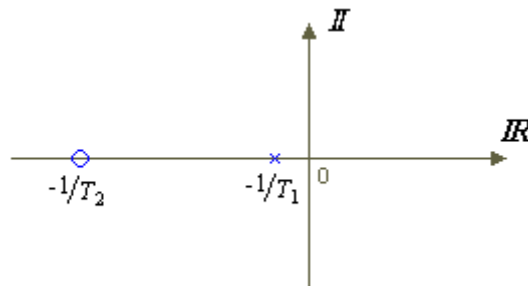
Le reti a ritardo di fase (*lag network*) hanno una FdT del tipo:

$$K(s) = k \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} \quad (14.8)$$

in cui:

$$T_1 > T_2, \quad k_0 = k \frac{T_2}{T_1}$$

e, quindi, lo zero è posto ad una frequenza superiore rispetto al polo:



Si noti che, posto:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (14.9)$$

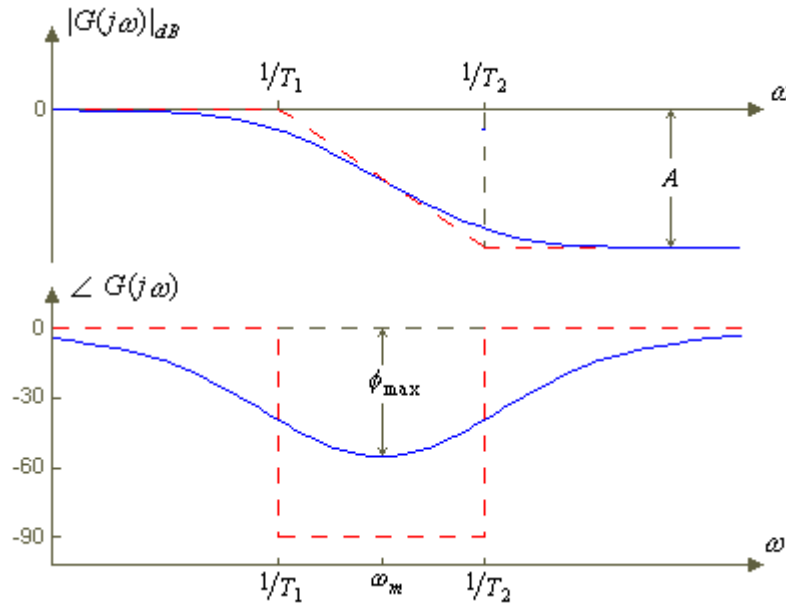
si può scrivere:

$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{T_1}} = k_0 \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s}$$

Il diagramma di Bode, supposto per semplicità $k = 1$ ($k_0 = \alpha$), e, quindi:

$$K(s) = \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s} \quad (14.10)$$

ha un andamento del tipo:



In questo caso, quanto più lo zero e il polo sono lontani, tanto più è alta la perdita di fase e maggiore è l'attenuazione in alta frequenza.

Si ha infatti che:

$$A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} \quad (14.11)$$

e inoltre, dato che:

$$\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$$

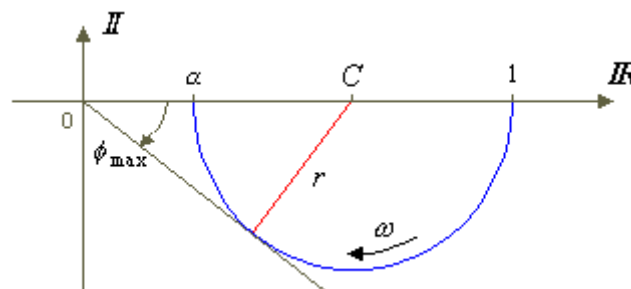
si trova che la frequenza ω_m (per cui si ha ϕ_{\max}) è:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{\alpha}} \quad (14.12)$$

Riscrivendo la (14.10.) nella forma:

$$K(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1} = \frac{1 + j\omega \alpha T_1}{1 + j\omega T_1}$$

sempre supposto che sia $k = 1$, si ricava il diagramma di Nyquist della rete:



che risulta essere una semicirconferenza di centro C e raggio r , dove:

$$C = \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right) \quad r = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

e si ricava quindi:

$$\phi_{\max} = -\arcsen \frac{1-(T_2/T_1)}{1+(T_2/T_1)} = -\arcsen \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (14.13)$$

Le reti ritardatrici sono essenzialmente dei filtri passabasso che aumentano i guadagni alle basse frequenze, eliminano i rumori in alta frequenza e migliorano la precisione della risposta a regime; riducendo la banda rendono però il transitorio più lento.

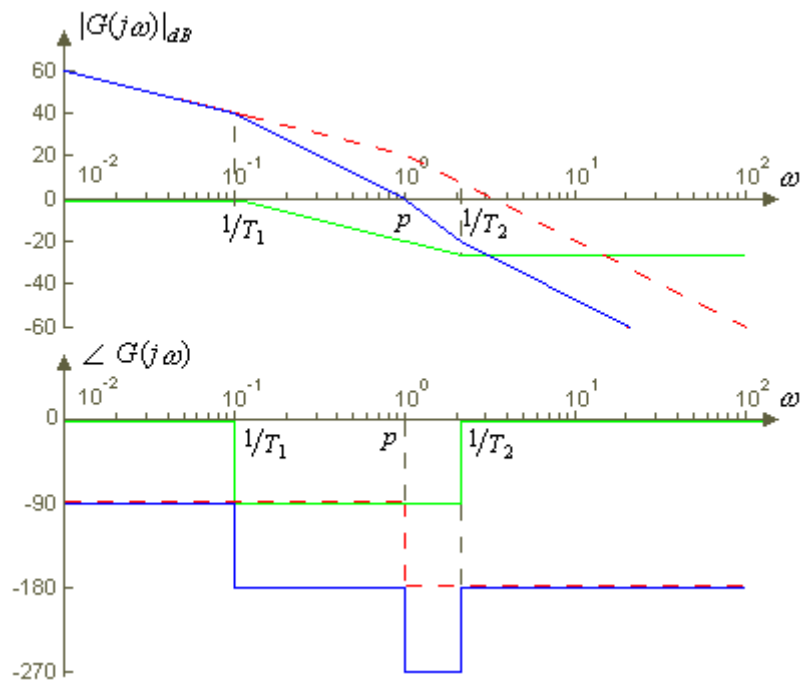
Anche in questo caso si può meglio comprendere come una rete ritardatrice modifichi il sistema a cui viene applicata esaminando il diagramma di Bode della:

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

cui venga applicata la rete:

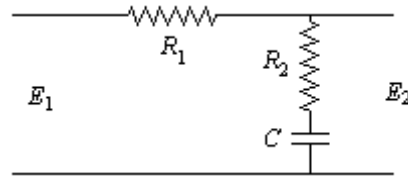
$$K(s) = \frac{1+0.476s}{1+10s}$$

Nel grafico sono riportati in rosso tratteggiato il diagramma della $G(s)$, in verde quello della $K(s)$ e in blu quello della $K(s) \cdot G(s)$; i diagrammi di Bode riportati sono sempre quelli approssimati:



14.3.1. Implementazione di una rete ritardatrice

La rete ritardatrice può essere implementata tramite il seguente circuito elettrico:



infatti si ha:

$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

e, posto:

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = (R_1 + R_2)C$$

si può scrivere:

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

FdT che coincide con la (14.10).

14.3.2. Regole per il progetto di una rete ritardatrice

Per progettare una rete ritardatrice che soddisfi specifiche richieste si possono utilizzare le seguenti regole operative:

- 1) Calcolare il valore del guadagno k che permette di soddisfare le specifiche sull'errore a regime (eventualmente anche con l'inserimento di poli nell'origine).
- 2) Posto $K(s) = k$ ricavare i diagrammi di Bode della $K(s) \cdot G(s)$.
- 3) Trovare la pulsazione ω_c^n tale che:

$$\angle G(j\omega_c^n) = -180^\circ + PM_d + 5^\circ$$

in cui PM_d è il margine di fase desiderato e i 5° tengono conto del contributo d'angolo dovuto alla rete; ω_c^n diviene la nuova frequenza di taglio.

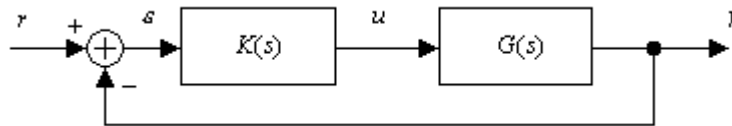
- 4) Scegliere T_2 in modo che $\omega_2 = 1/T_2$ cada una decade prima di ω_c^n .
- 5) Calcolare $|K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n)|_{dB}$ e il valore del rapporto T_1/T_2 .
- 6) Calcolare il valore di $1/T_1$.
- 7) Disegnare l'andamento della $K(s) \cdot G(s)$ così ottenuta e verificare che i risultati soddisfino le specifiche.

14.3.3. Esempio di progetto di una rete ritardatrice

Dato il sistema con FdT :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

si vuole progettare la rete ad anticipo di fase tale che il sistema in retroazione unitaria:



soddisfi le seguenti specifiche:

- errore in risposta al segnale rampa $\varepsilon_{ss} \leq 5\%$;
- margine di fase $PM \geq 45^\circ$.

Anche in questo caso la sintesi del progetto va effettuata seguendo i passaggi indicati in precedenza:

- 1) Calcolare il valore del guadagno k che permette di soddisfare le specifiche sull'errore a regime (eventualmente anche con l'inserimento di poli nell'origine).

Come nel caso della rete anticipatrice, ricordando la (8.2.):

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)}$$

da quanto visto nel (Par. 8.1.6.) si ha:

$$u(t) = t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Poiché deve essere $\varepsilon_{ss} \leq 5\%$ si ha:

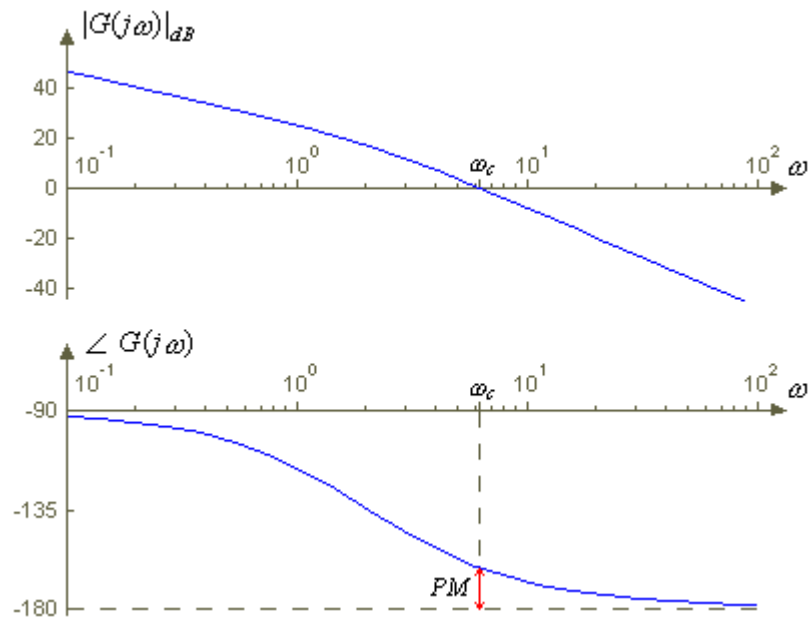
$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \Rightarrow k \geq \frac{2}{0.05} = 40$$

- 2) Posto $K(s) = k$ ricavare i diagrammi di Bode della $K(s) \cdot G(s)$.

Disegnando il diagramma di Bode della:

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

si ha, come visto per la rete anticipatrice:



e ovviamente:

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad/s} \Rightarrow PM = 18^\circ$$

3) Trovare la pulsazione ω_c^n tale che:

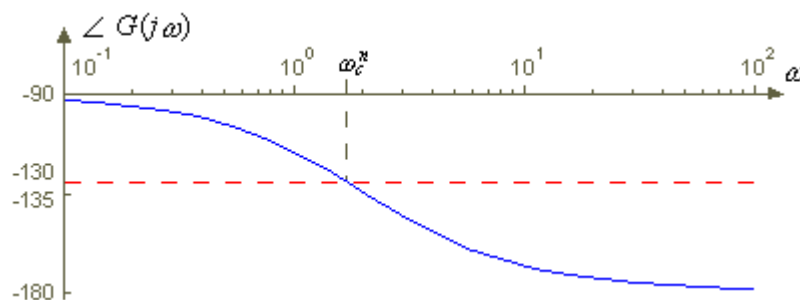
$$\angle G(j\omega_c^n) = -180^\circ + PM_d + 5^\circ$$

in cui PM_d è il margine di fase desiderato e i 5° tengono conto del contributo d'angolo dovuto alla rete; ω_c^n diviene la nuova frequenza di taglio.

In questo caso si vuole che:

$$\angle G(j\omega_c^n) = -180^\circ + PM_d + 5^\circ = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$$

Dal diagramma di Bode



si trova che la frequenza cercata è di circa 1.5 rad/s ; eseguendo i calcoli si può verificare che:

$$\omega_c^n \cong 1.678 \text{ rad/s}$$

4) Scegliere T_2 in modo che $\omega_2 = 1/T_2$ cada una decade prima di ω_c^n .
Il valore di T_2 si trova quindi ponendo:

$$\frac{1}{T_2} = \omega_2 = \frac{\omega_c^n}{10} \Rightarrow T_2 = \frac{10}{\omega_c^n} \cong 5.959 \text{ s/rad}$$

- 5) Calcolare $|K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n)|_{dB}$ e il valore del rapporto T_1/T_2 .
Calcolata la ω_c^n tramite il diagramma (o semplici calcoli) si trova:

$$A_{dB} = |K(j\omega_c^n)G(j\omega_c^n)|_{dB} \cong 19.209 \text{ dB}$$

e, dalla (14.11.):

$$20 \log \frac{T_1}{T_2} = A_{dB} \cong 19.209 \text{ dB} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} \cong 9.129$$

- 6) Calcolare il valore di $1/T_1$.
Dai risultati ottenuti sopra:

$$T_1 \cong 9.129 \cdot T_2 \cong 54.4$$

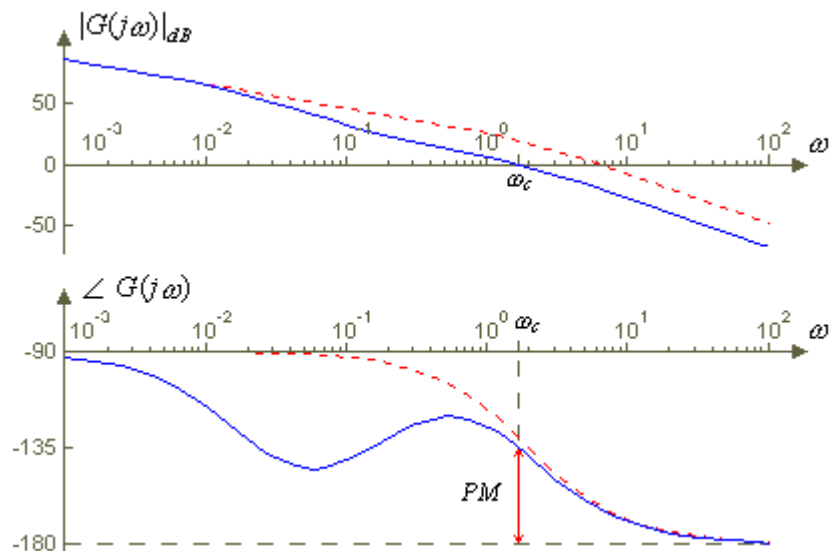
- 7) Disegnare l'andamento della $K(s) \cdot G(s)$ così ottenuta e verificare che i risultati soddisfino le specifiche.
La rete che si ottiene con questa procedura è:

$$K(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.168}{s + 0.018}$$

e si ha:

$$K(s) \cdot G(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} \cdot \frac{1}{s(s + 2)}$$

Il diagramma di Bode del sistema con la rete ritardatrice è (in tratteggio rosso il diagramma del sistema di partenza):



Anche in questo caso le specifiche non sono del tutto soddisfatte; si ha infatti che il margine di fase risulta $PM \cong 44.84^\circ$; se al punto 3) si pone, per individuare la ω_c'' , che la fase del sistema sia pari a -129° , si ottiene la rete:

$$K(s) = 40 \cdot \frac{6.174s + 1}{59.256s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.162}{s + 0.017}$$

che porta il margine di fase del sistema ad essere $PM \cong 45.81^\circ$.

14.4. Reti a sella

La combinazione di una rete ritardatrice e di una anticipatrice dà luogo alla rete a sella che ha come *FdT* la:

$$G_c(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (14.14)$$

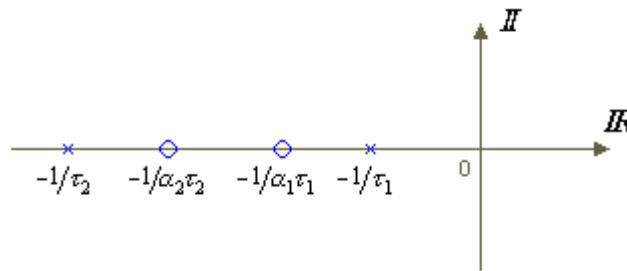
La rete più utilizzata è quella a ritardo-anticipo (*lag-lead network*) in cui quindi:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha_1 \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + \alpha_2 \tau_2 s)}{(1 + \tau_2 s)} \quad (14.15)$$

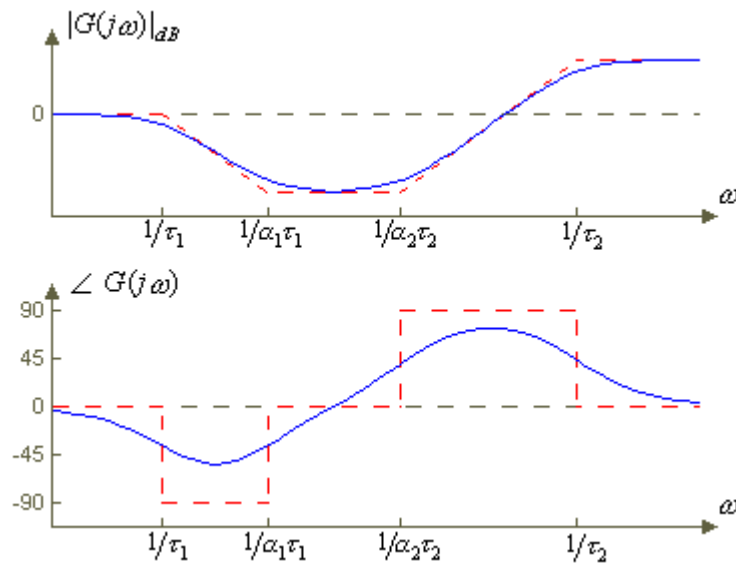
con:

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{\tau_1}, \quad 0 < \alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 = \frac{T_2}{\tau_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad \tau_1 > \tau_2$$

Le singolarità sono poste nel piano complesso nel seguente ordine (si noti che non devono esserci, ovviamente, cancellazioni poli-zeri):



Il diagramma di Bode di una rete a sella di questo tipo è:



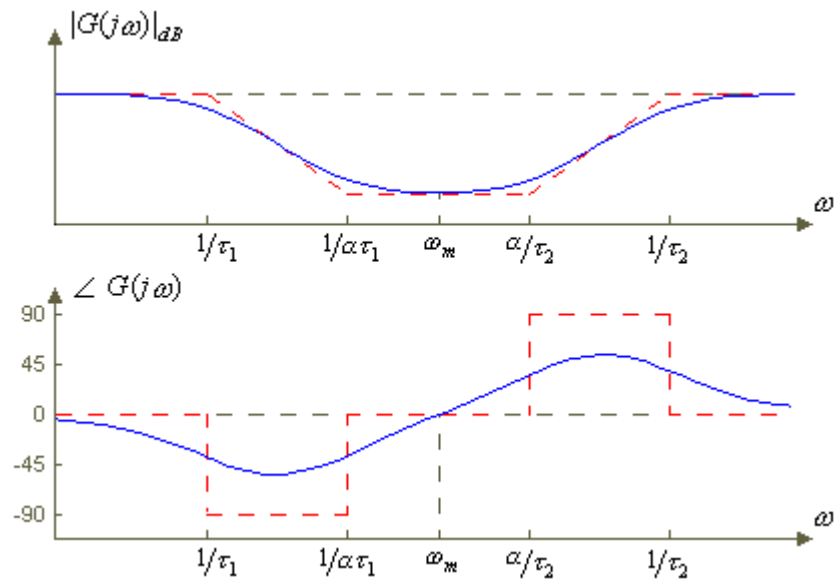
Nella maggior parte dei casi la rete a sella viene progettata in modo da avere:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = \alpha$$

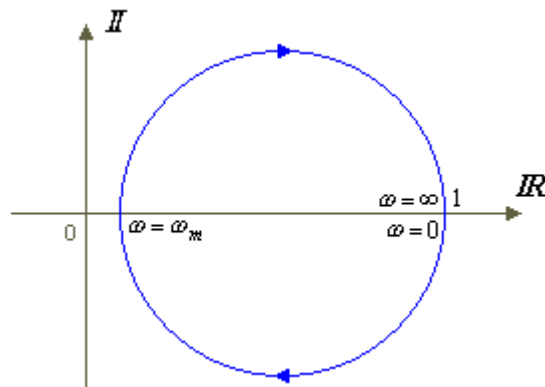
e, quindi:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha)s)}{(1 + \tau_2 s)} \quad (14.16)$$

In questo caso la rete risulta a guadagno unitario anche in alta frequenza, e il diagramma di Bode è:



mentre il diagramma di Nyquist:



Si noti che per:

$$\omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad (14.17)$$

la rete ha sfasamento nullo e attenuazione pari a:

$$|G_c(j\omega_m)| = \frac{\alpha\tau_1 + \tau_2/\alpha}{\tau_1 + \tau_2} \quad (14.18)$$

e per:

- $\omega < \omega_m$ la rete fornisce un ritardo di fase
- $\omega > \omega_m$ la rete fornisce invece un anticipo di fase

Tale rete consente quindi di sfruttare contemporaneamente i requisiti delle reti ritardatrici e anticipatrici visti in precedenza; rispetto a queste è tale che il suo progetto, tramite i diagrammi di Bode, è più semplice dato che, in corrispondenza della pulsazione ω_m attenua ma non sfasa.

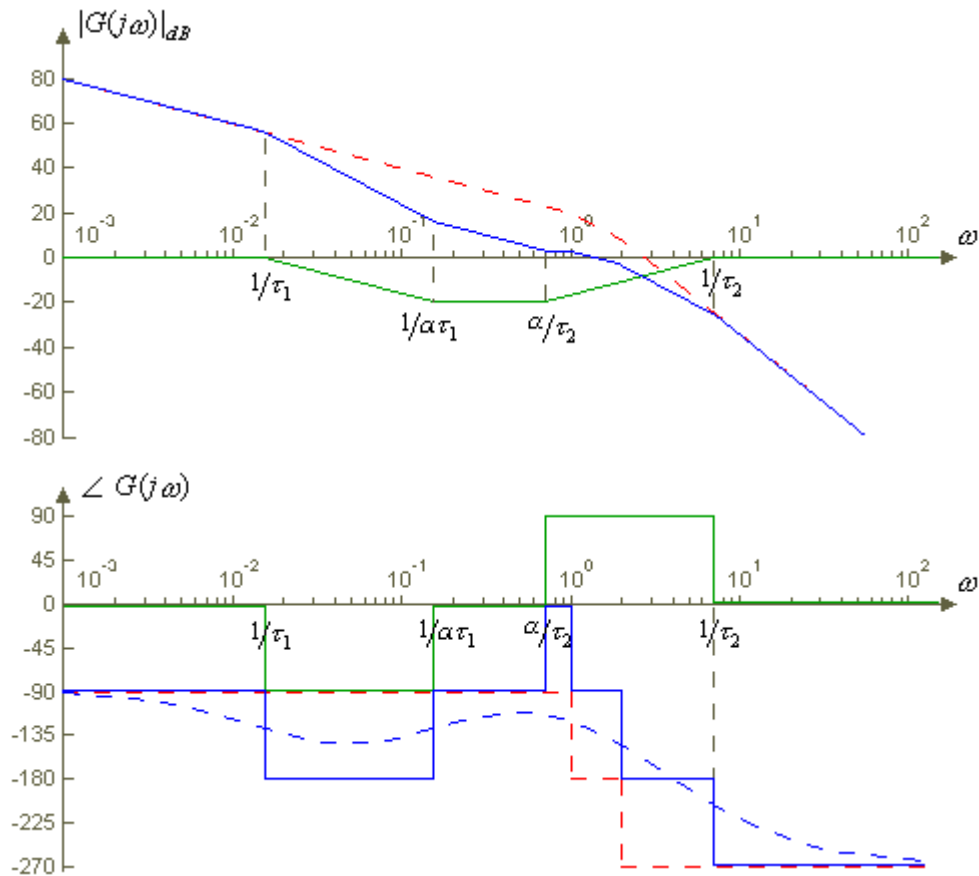
Prendendo in considerazione la:

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$

si può verificare che il sistema da essa rappresentato è instabile; supponendo di utilizzare una rete a sella caratterizzata dalla:

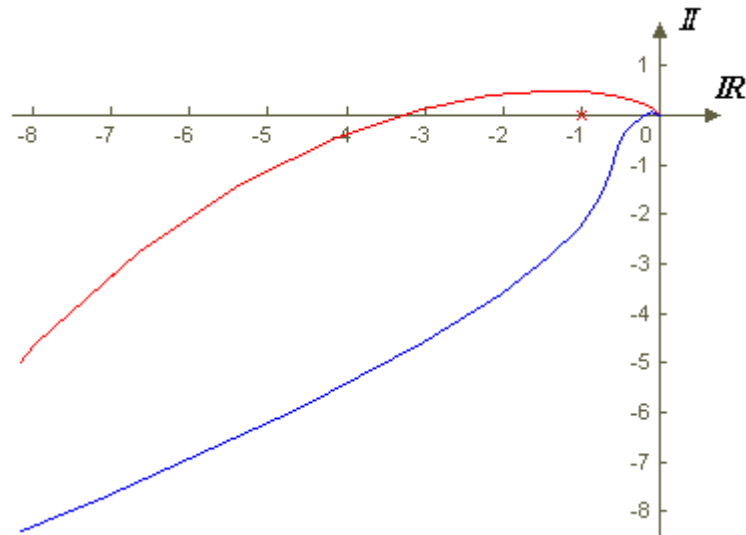
$$K(s) = \frac{s+0.15}{s+0.015} \cdot \frac{s+0.7}{s+7}$$

e riportando su di uno stesso grafico i diagrammi di Bode (approssimati) della $G(s)$ (in tratteggio rosso), della $K(s)$ (in verde) e della $K(s) \cdot G(s)$ (in blu) si capisce come la rete influisca sul sistema:



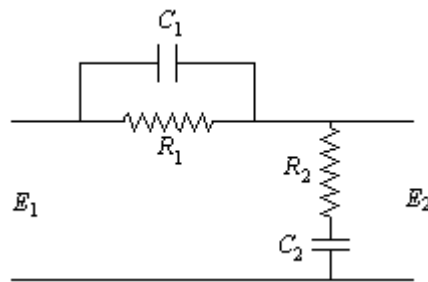
In tratteggio blu è stato riportato l'andamento reale della fase del sistema che include anche la rete corretttrice.

Anche dai diagrammi di Nyquist si può verificare come il sistema originale (in rosso) instabile venga stabilizzato dalla rete a sella presa in considerazione (il sistema controllato è riportato in blu):



14.4.1. Implementazione di una rete a sella

La rete ritardo-anticipo può essere implementata tramite il seguente circuito elettrico:



infatti si ha:

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/C_2 s}{R_1 // (1/C_1 s) + R_2 + 1/C_2 s} = \\
 &= \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left(\frac{R_1 / (C_1 s)}{R_1 + 1/C_1 s} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left(\frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{[R_1 + R_2(R_1 C_1 s + 1)]C_2 s + (R_1 C_1 s + 1)} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + R_2 C_2 s(R_1 C_1 s + 1) + (R_1 C_1 s + 1)} = \\
 &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}
 \end{aligned}$$

e, posto:

$$\tau_a = R_1 C_1, \quad \tau_b = R_2 C_2, \quad \tau_{ab} = R_1 C_2$$

si può scrivere:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s) + \tau_{ab} s}$$

Ponendo poi:

$$\tau_1 = \frac{\tau_a}{\alpha}, \quad \tau_2 = \alpha \tau_b$$

si può scrivere:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{(1 + \alpha \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha) s)}{(1 + \tau_2 s)}$$

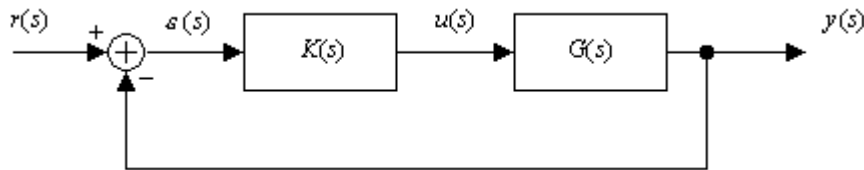
in cui, ovviamente, i valori di τ_1 e τ_2 sono legati a quello di τ_{ab} ; si è così ottenuta una FdT analoga alla (14.16.).

Cap 15. Assegnamento dei poli

La tecnica dell'assegnamento dei poli è un metodo di progetto di sistema utilizzabile quando il sistema considerato risulta completamente controllabile (*Par 7.1.*), tale cioè che tutte le variabili di stato siano misurabili e modificabili in retroazione; sotto queste condizioni, i poli del sistema possono essere disposti in qualsiasi posizione si desideri.

Il primo passo, nell'applicazione di tale tecnica, è quello della scelta dei poli a ciclo chiuso basata sulle specifiche della risposta transitoria e/o della risposta in frequenza (velocità di risposta, sovralongazione, larghezza di banda) o della risposta a regime.

Per un sistema in retroazione del tipo:



la cui *FdT* è:

$$G_{CL}(s) = \frac{N_{CL}(s)}{D_{CL}(s)} \quad (15.1)$$

aver individuato le posizioni che i poli devono assumere per soddisfare le specifiche di progetto, vuol dire aver definito la struttura del denominatore.

15.1. Approccio tramite l'equazione diofantina

Nell'ipotesi che sia la $G(s)$ che la $K(s)$ siano realizzazioni minime e ricordando che per la (10.1.):

$$G_{CL}(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)} \quad (15.2)$$

si può scrivere che:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \quad (15.3)$$

in cui, noti $N(s)$, $D(s)$ e $D_{CL}(s)$, si vogliono trovare numeratore e denominatore del controllore.

La (15.3.) è detta **equazione diofantina** e si può dimostrare che essa ammette un'unica soluzione per ogni generica $D_{CL}(s)$ se e solo se, come si è ipotizzato, $N(s)$ e $D(s)$ sono primi fra loro.

Considerando che la *FdT* di anello aperto risulta essere:

$$G_{OL}(s) = G(s) \cdot K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \quad (15.4)$$

e tenendo presente la (15.3.) si verifica banalmente che:

- se si vuole che $D_{CL}(s)$ contenga dei termini di $D(s)$, tali termini devono essere presenti anche nella $N_k(s)$ e, per la (15.4.), si hanno cancellazioni fra i poli del sistema e zeri del regolatore.
- se si vuole che $D_{CL}(s)$ contenga dei termini di $N(s)$, tali termini devono essere presenti anche nella $D_k(s)$ e, per la (15.4.), si hanno cancellazioni fra gli zeri del sistema e i poli del regolatore; si faccia attenzione al fatto che se il sistema presenta zeri a parte reale positiva, tali zeri devono comunque comparire anche nella $G_{CL}(s)$ perché, altrimenti, sarebbero cancellati da un polo del controllore che però, in tal caso, risulterebbe instabile.

- L'ordine di $D_{CL}(s)$ è dato dall'ordine del termine $D(s)D_k(s)$ (per la causalità dei sistemi l'ordine dei denominatori è maggiore uguale a quella dei nominatori).

Esempi:

1) Dato il sistema

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s-1)}$$

si vuole realizzare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso abbia un errore di risposta alla rampa pari a zero; per poter utilizzare l'equazione diofantina numeratore e denominatore del sistema devono essere primi fra loro e tale condizione è, ovviamente, soddisfatta.

Per soddisfare la richiesta sulla risposta alla rampa la FdT di anello aperto dovrà essere di tipo 2, cioè avere due poli nell'origine, per cui il regolatore deve avere anch'esso un polo nell'origine; poiché poi il sistema da controllare è instabile, per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il controllore deve essere almeno di ordine 2 e, per quanto visto, l'ordine della $D_{CL}(s)$ deve essere pari a 4.

Si pone allora che:

$$D_{CL}(s) = (s+1)^4$$

Il denominatore del regolatore ha la forma:

$$D_k(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$$

in cui, tenendo presente che deve avere un polo nell'origine, a_0 è nullo, quindi:

$$D_k(s) = a_2s^2 + a_1s$$

Supponendo che anche $N_k(s)$ sia di ordine 2 (può anche essere di ordine inferiore), posto quindi che:

$$N_k(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0$$

si ha:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s+1)^4 = 0.1 \cdot (b_2s^2 + b_1s + b_0) + s(s-1) \cdot (a_2s^2 + a_1s) \Rightarrow$$

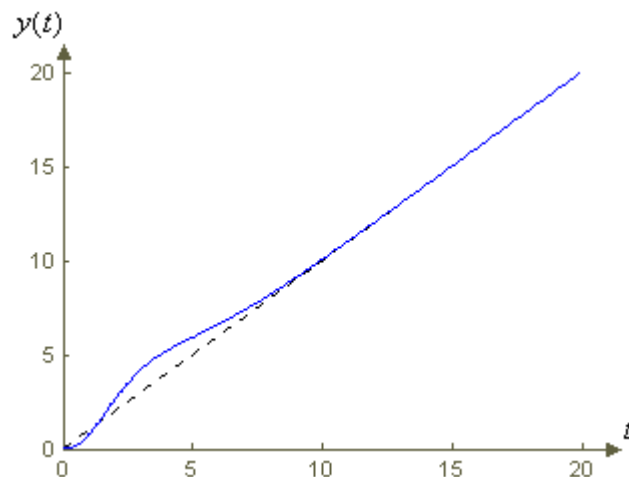
$$\Rightarrow s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = a_2s^4 + (a_1 - a_2)s^3 + (0.1b_2 - a_1)s^2 + 0.1b_1s + 0.1b_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 4 + a_2 = 5 \\ b_2 = 10(6 + a_1) = 110 \\ b_1 = 10 \cdot 4 = 40 \\ b_0 = 10 \cdot 1 = 10 \end{cases}$$

Il controllore è quindi:

$$K(s) = 10 \frac{11s^2 + 4s + 1}{s(s+5)}$$

e per il sistema controllato a ciclo chiuso la risposta alla rampa è:



2) Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 0) \bar{x} \end{cases}$$

si vuole realizzare un regolatore tale che i poli dominanti del sistema controllato permettano di avere:

- $\xi = 0.5$
- $T_{a2} \leq 2 \text{ s.}$

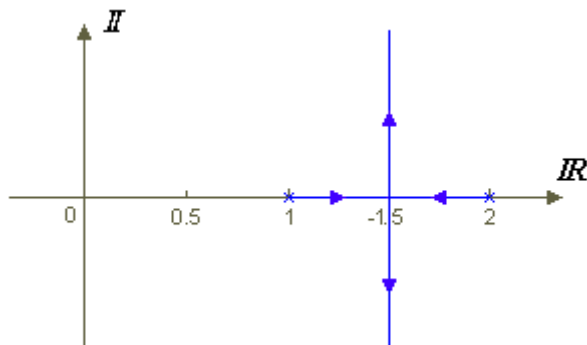
Sfruttando quanto visto in precedenza (*Par. 6.6.*) si possono scrivere la *FdT* ingresso-uscita:

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$

e la *FdT* ingresso-stato:

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{s^2 - 3s + 2} & \frac{5s}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}^T$$

Il sistema è instabile, dato che gli autovalori di della matrice A sono 1 e 2, per cui, il luogo delle radici del sistema è:



Le matrici di controllabilità (7.5.) e di osservabilità (7.6.) del sistema:

$$\mathcal{B} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

risultano entrambe di rango 2 da cui si deduce che il sistema è completamente controllabile e osservabile.

Per il rispetto delle specifiche deve essere:

$$\xi = 0.5, \quad T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{2}{\xi} = 4 \text{ rad/s.}$$

e, quindi, i poli dominanti devono essere tali da fornire il polinomio:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16$$

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema, come si può notare dal luogo delle radici sopra riportato), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati mentre il terzo verrà posto a frequenze elevate (es. $s = -10$) e deve essere, quindi:

$$D_{CL}(s) = (s+10)(s^2 + 4s + 16)$$

Se, come ipotizzato, si sceglie un regolatore di ordine 1, si ha:

$$D_k(s) = (a_1 s + a_0) \quad N_k(s) = (b_1 s + b_0)$$

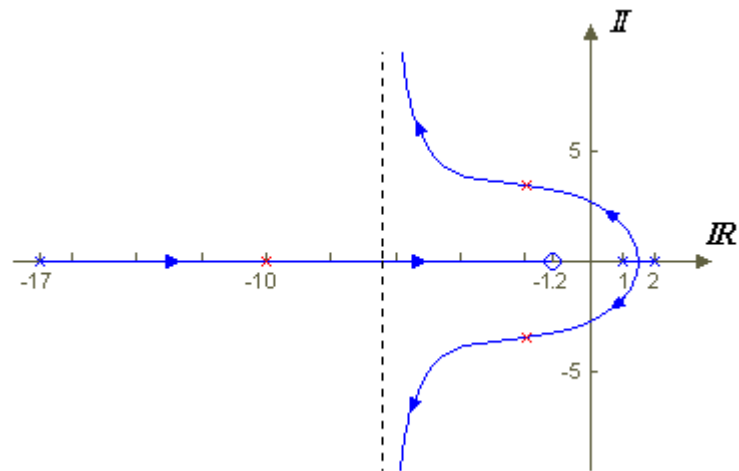
e, dalla (15.3.):

$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (s+10)(s^2 + 4s + 16) = 5(b_1 s + b_0) + (s^2 - 3s + 2)(a_1 s + a_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s^3 + 14s^2 + 56s + 160 = a_1 s^3 + (a_0 - 3a_1)s^2 + (-3a_0 + 2a_1 + 5b_1)s + 2a_0 + 5b_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 14 + 3 \cdot 1 = 17 \\ b_1 = (56 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 1)/5 = 21 \\ b_0 = (160 - 2 \cdot 17)/5 = 25.2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il regolatore che soddisfa le specifiche è quindi:

$$K(s) = 21 \frac{s+1.2}{s+17}$$

e il sistema controllato ha il seguente luogo delle radici:



In rosso sono riportati i poli del sistema a ciclo chiuso che si ottiene con il controllore realizzato; si noti che quelli complessi coniugati sono i poli dominanti che soddisfano le specifiche imposte.

15.2. Retroazione dello stato

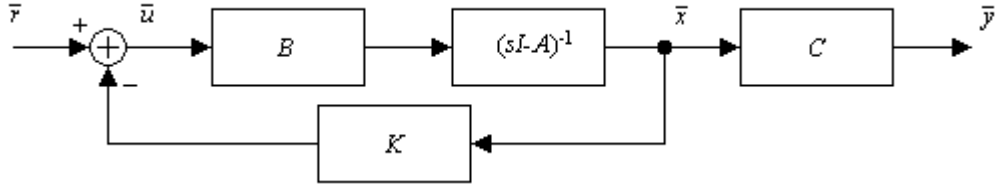
In questo caso si lavora sul sistema riportato nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (15.5)$$

Sotto le ipotesi di sistema controllabile e osservabile e considerando la legge di controllo:

$$\bar{u} = -K \cdot \bar{x} + \bar{r} \quad (15.6)$$

in cui K è una matrice di guadagno costante, il sistema in ciclo chiuso può essere schematizzato come segue:



In base a tale schema la (15.5.) diventa:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = (A - BK)\bar{x} + B\bar{r} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (15.7)$$

la cui soluzione, considerando la (5.10.), è data da:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = e^{(A-BK)t} \bar{x}_0 + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} B\bar{r}(\tau) d\tau \\ \bar{y}(t) = C e^{(A-BK)t} \bar{x}_0 + C \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} B\bar{r}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (15.8)$$

Tale schema di retroazione dello stato è valido indipendentemente dal numero di ingressi e/o uscite; nel caso di ingresso singolo, nell'ipotesi che (A, B) sia una coppia controllabile (si noti che essendo a ingresso singolo la B diventa un vettore colonna), è possibile, tramite un'opportuna trasformazione di similitudine T (Par. 1.4.), portare il sistema nella forma compagna controllabile (7.8.):

$$\bar{x} \Rightarrow \bar{z} = T^{-1}\bar{x}$$

$$(A, B) \Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adottando la legge di controllo (15.6.) si ha (K è, in questo caso, un vettore riga):

$$u = -K \cdot \bar{x} + r = -K \cdot T \cdot T^{-1} \cdot \bar{x} + r = -K \cdot T \cdot \bar{z} + r$$

e, posto:

$$\tilde{K} = K \cdot T$$

si ottiene:

$$u = -\tilde{K} \cdot \bar{z} + r = -[\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n] \bar{z} + r$$

e, infine:

$$\dot{\bar{z}} = (\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K}) \bar{z} + \tilde{B}r$$

dove:

$$\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & -a_2 - \tilde{k}_3 & \cdots & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico del sistema risulta così essere, banalmente:

$$s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + \tilde{k}_{n-1})s^{n-2} + \cdots + (a_0 + \tilde{k}_1) \quad (15.9)$$

I coefficienti di tale polinomio, cioè le sue radici, assumono valori arbitrari al variare dei parametri così introdotti e ciò implica (*Par. 4.1.*) che è possibile assegnare alla *FdT* del sistema i poli desiderati e quindi il rispetto delle specifiche di progetto (stabilità, velocità di risposta, sovralongazione...); la matrice di guadagno che deve essere utilizzata nella legge di controllo per il sistema di partenza risulta quindi:

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} \quad (15.10)$$

Teorema 15.1.

Dato un qualsiasi polinomio $p(s)$ di grado n esiste un'unica matrice $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tale che $p(s)$ sia il polinomio caratteristico della:

$$A - B \cdot K$$

matrice dinamica del sistema ottenuto retroazionando gli stati del sistema mediante la matrice K .

Si noti, infatti, che i valori di k_n, k_{n-1}, \dots, k_1 nella (15.9.) sono univocamente determinati dalla scelta dei poli del sistema, dato che, se la scelta dei poli porta al polinomio:

$$(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

esiste un'unica matrice K (o meglio un unico vettore), tale che:

$$\begin{cases} a_{n-1} + k_n = \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + k_1 = \alpha_0 \end{cases}$$

Esempi:

1) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 0) \bar{x} \end{cases}$$

per il quale è:

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$

si vuole determinare l'opportuna legge di controllo (15.6.) che porti i poli del sistema retroazionato in $s = -1$ e $s = -10$ e quindi tale che il suo polinomio caratteristico risulti:

$$(s + 1)(s + 10) = s^2 + 11s + 10$$

In questo caso la matrice A è già in forma compagna controllabile, per cui si può scrivere:

$$\begin{aligned} A - B \cdot K &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 5k_1 & 3 - 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow sI - A + B \cdot K &= \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 + 5k_1 & s - 3 + 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |sI - A + B \cdot K| &= s(s - 3 + 5k_2) + 2 + 5k_1 = s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 \end{aligned}$$

e, poiché deve essere:

$$s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 = s^2 + 11s + 10$$

si ha:

$$\begin{cases} 5k_2 - 3 = 11 \\ 2 + 5k_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 14/5 \\ k_1 = 8/5 \end{cases}$$

e la legge di controllo da adottare è quindi:

$$u = -[8/5 \quad 14/5] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$

2) Dato il sistema caratterizzato dalla FdT :

$$G(s) = \frac{s+5}{(s^2+s+1)(s+1)(s+4)}$$

si vuole individuare la legge di controllo che permetta di ottenere un sistema retroazionato i cui poli dominanti siano quelli di un sistema del secondo ordine caratterizzato dai seguenti parametri:

- $M_P \cong 4.33 \%$
- $T_{a2} \leq 2 \text{ s.}$

Per la specifica sulla sovraelongazione si ha, dalla (8.13.):

$$\xi = \frac{\ln(100/M_P)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100/M_P)}} = \frac{\ln(100/4.33)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100/4.33)}} \cong 0.707$$

Per quella riguardante il tempo di assestamento si ha invece:

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} \Rightarrow \omega_n \cong \frac{4}{\xi T_{a2}} = \frac{4}{0.707 \cdot 2} = 2.8 \text{ rad./s.}$$

per cui i poli dominanti devono essere:

$$p_{1/2} = -2 \pm j2$$

Portando il sistema nella rappresentazione in variabili di stato si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & -10 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$

che risulta in forma compagna controllabile; il sistema risulta quindi, completamente controllabile (*Par. 7.3.*).

Poiché i polinomi a numeratore e denominatore della $G(s)$ sono primi fra loro, il sistema è anche osservabile; si può verificare la completa osservabilità anche notando che la matrice di osservabilità (7.6.) è di rango massimo.

Dato che le condizioni di controllabilità e osservabilità sono soddisfatte, si può procedere con la tecnica di assegnamento dei poli; il denominatore desiderato, tenendo conto che i poli dominanti devono essere nelle posizioni sopra viste, può essere scelto come:

$$(s^2 + 4s + 8)(s + 10)(s + 20) = s^4 + 34s^3 + 328s^2 + 1040s + 1600$$

Per l'applicazione della legge di controllo si deve calcolare

$$\begin{aligned}
A - B \cdot K &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4-k_1 & -9-k_2 & -10-k_3 & -6-k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow sI - A + B \cdot K &= \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 4+k_1 & 9+k_2 & 10+k_3 & s+6+k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
|sI - A + B \cdot K| &= s^4 + (6+k_4)s^3 + (10+k_3)s^2 + (9+k_2)s + 4+k_1
\end{aligned}$$

e, quindi:

$$s^4 + (6+k_4)s^3 + (10+k_3)s^2 + (9+k_2)s + 4+k_1 = s^4 + 34s^3 + 328s^2 + 1040s + 1600$$

da cui, infine:

$$\begin{cases} k_4 = 34 - 6 = 28 \\ k_3 = 328 - 10 = 314 \\ k_2 = 1040 - 9 = 1031 \\ k_1 = 1600 - 4 = 1596 \end{cases}$$

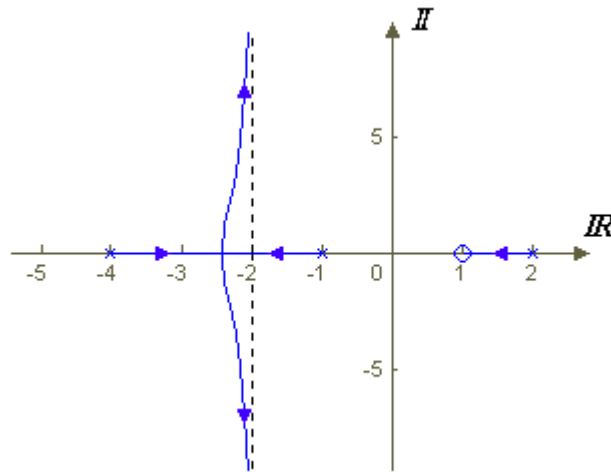
La legge di controllo da adottare è quindi:

$$u = -[1596 \quad 1031 \quad 314 \quad 28] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + r$$

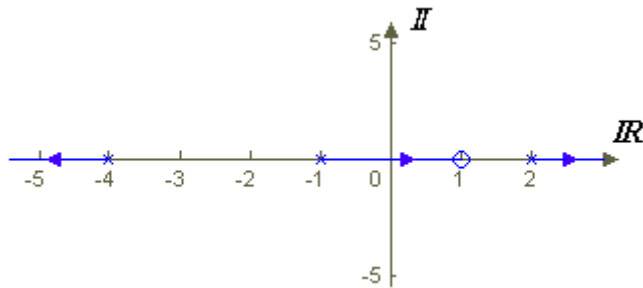
3) Il sistema la cui FdT è

$$G(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)(s+4)}$$

è instabile e ha il seguente luogo delle radici (per $k > 0$):



Si nota altresì che esso è instabile anche per $k < 0$, infatti il luogo delle radici inverso è:



Si vuole stabilizzare il sistema, facendo in modo che il sistema retroazionato abbia i poli in:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -10, \quad p_3 = -20$$

in cui, quindi, il polinomio al denominatore sia:

$$(s+1)(s+10)(s+20) = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$

Portando il sistema in variabili di stato, una possibile rappresentazione è:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.75 & 0.5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0.25 \quad -0.125], \quad D = [0]$$

La matrice di controllabilità:

$$\mathcal{B} = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0.5 & -1.5 & 7.5 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

è di rango pieno, così come quella di osservabilità:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & -0.125 \\ 2 & -0.25 & 0 \\ -8 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che le condizioni di controllabilità e osservabilità sono soddisfatte, si può utilizzare la tecnica di assegnamento dei poli; con il solito procedimento, per l'applicazione della legge di controllo si deve calcolare:

$$\begin{aligned} A - B \cdot K &= \begin{pmatrix} -3 - 0.5k_1 & 0.75 - 5k_2 & 0.5 - 0.5k_3 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow sI - A + B \cdot K &= \begin{pmatrix} s + 3 + 0.5k_1 & -0.75 + 5k_2 & -0.5 + 0.5k_3 \\ -8 & s & 0 \\ 0 & -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |sI - A + B \cdot K| &= s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 \end{aligned}$$

e, quindi:

$$s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$

da cui:

$$\begin{cases} k_1 = 2 \cdot (31 - 3) = 56 \\ k_2 = (230 + 6)/4 = 59 \\ k_3 = (200 + 8)/8 = 26 \end{cases}$$

Si noti, che per portare il sistema nella forma compagna controllabile, si dovrebbe utilizzare la matrice di trasformazione:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

così da avere:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [-1 \quad 1 \quad 0], \quad \tilde{D} = [0]$$

In tale rappresentazione si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 - \tilde{k}_1 & 6 - \tilde{k}_2 & -3 - \tilde{k}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow sI - \tilde{A} + \tilde{B} \cdot \tilde{K} &= \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ s - 8 + \tilde{k}_1 & s - 6 + \tilde{k}_2 & s + 3 + \tilde{k}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |sI - \tilde{A} + \tilde{B} \cdot \tilde{K}| &= s^3 + (3 + \tilde{k}_3)s^2 + (-6 + \tilde{k}_2)s - 8 + \tilde{k}_1\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}s^3 + (3 + \tilde{k}_3)s^2 + (-6 + \tilde{k}_2)s - 8 + \tilde{k}_1 &= s^3 + 31s^2 + 230s + 200 \\ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_1 = 200 + 8 = 208 \\ \tilde{k}_2 = 230 + 6 = 236 \\ \tilde{k}_3 = 31 - 3 = 28 \end{cases}\end{aligned}$$

e si può verificare che, come indica la (15.10.), si ha:

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 208 & 236 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & 59 & 26 \end{bmatrix}$$

15.2.1. Retroazione dello stato con controllo integrale

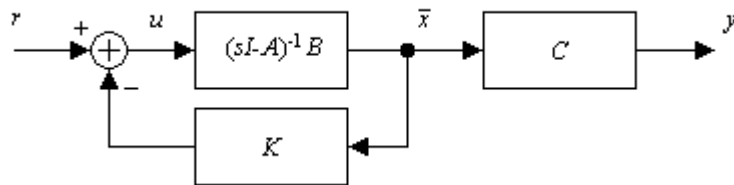
L'introduzione della matrice di guadagno K che porta il sistema nella forma (15.7.), produce, come visto, una modifica nell'andamento del transitorio del sistema; ovviamente tale influenza si viene a ripercuotere anche nell'andamento della risposta a regime del sistema, dato che il guadagno statico sarà dato, ricordando il *Teorema del valore finale* (3.9.), da:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A + B \cdot K)^{-1} B = -C(A - B \cdot K)^{-1} B$$

L'errore a regime può quindi essere non nullo ed è dipendente dalla tipologia della FdT di anello aperto; considerando la legge di controllo (15.6.):

$$u = -K \cdot \bar{x} + r$$

e uno schema del tipo:



si verifica facilmente che se la matrice A ha un autovalore nullo, grazie alla retroazione, oltre al transitorio desiderato è possibile anche avere errore nullo in risposta al segnale gradino in ingresso; se, al contrario, A non ha autovalori nulli, per poter avere un errore nullo in risposta al gradino è necessario inserire un integratore.

Volendo che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (r - y) = 0$$

oltre allo stato si retroaziona anche l'integrale dell'errore, si pone cioè:

$$u = -K \cdot \bar{x} + r - K_I \int \varepsilon \cdot dt = -K \cdot \bar{x} - K_I \int (r - y) \cdot dt + r$$

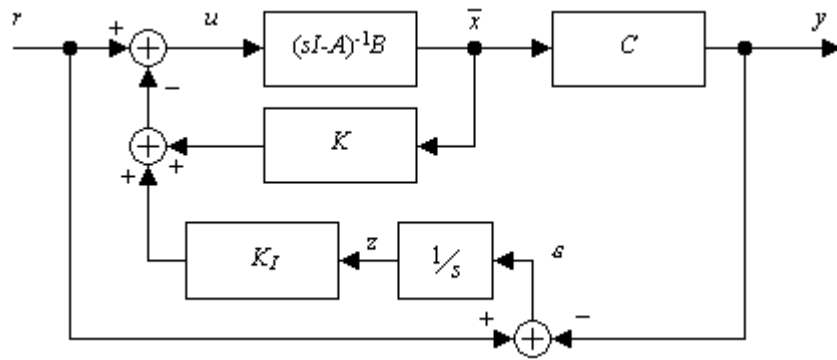
e, posto:

$$z = \int (r - y) \cdot dt \quad (15.11)$$

si ha:

$$u = -K \cdot \bar{x} - K_I z + r \quad (15.12)$$

e lo schema del sistema così ottenuto è:



Il sistema che si ottiene in tal modo è detto *sistema aumentato* in considerazione della variabile aggiuntiva z ; tenendo presente le (15.5) e (15.12.) si ha:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu = (A - BK)\bar{x} - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - C\bar{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{\bar{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (15.13)$$

in cui, ovviamente:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15.3. Stimatori o osservatori dello stato

Per assegnare un valore prestabilito a tutti i poli della matrice di trasferimento in retroazione è necessario disporre dell'intero vettore di stato ma non sempre è possibile o conveniente (per i costi elevati) misurare tutte le variabili di stato; bisogna perciò stimare le variabili di stato non direttamente accessibili alla misura.

La possibilità di tale stima, a partire dalla conoscenza di ingresso ed uscita del sistema, è assicurata dall'osservabilità del vettore di stato che viene sfruttata dagli *stimatori* (o *osservatori*) dello stato; lo stimatore è un sistema dinamico capace di fornire una stima del vettore di stato della parte osservabile del sistema.

Si definisce asintotico lo stimatore tale che, pur avendo stato iniziale diverso dallo stato del sistema soggetto a stima, in assenza di disturbi, tende asintoticamente ad esso in modo che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\xi} - \bar{x}) = 0 \quad (15.14)$$

dove:

- \bar{x} è il vettore delle variabili di stato
- $\bar{\xi}$ è il vettore di stato stimato

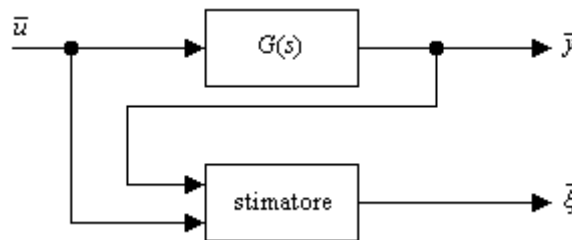
Gli stimatori si dividono in due categorie:

- 1 *di ordine intero*: lo stimatore fornisce l'intero vettore dello stato;
- 2 *di ordine ridotto*: sfruttando il legame esistente fra uscite e variabili di stato, si ottiene "staticamente" dalle uscite la maggior informazione possibile sullo stato; lo stimatore deve fornire le informazioni mancanti;

In entrambe i casi lo stimatore può essere realizzato se e solo se il sistema è osservabile.

15.3.1. L'osservatore di Luenberger

L'*osservatore di Luenberger* è uno stimatore di ordine intero che utilizzando i vettori di ingresso e di uscita riesce a fornire la stima asintotica dello stato:



Lo stimatore può essere visto come un sistema i cui ingressi sono dati dall'ingresso e dall'uscita del sistema in esame e l'uscita coincide con il suo vettore di stato; riportando il suo andamento nella forma (15.5.) si può scrivere:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = F\bar{\xi} + (G \ H) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ \bar{\hat{y}} = \bar{\xi} \end{cases} \quad \bar{\xi}(0) = \bar{\xi}_0 \quad (15.15)$$

in cui, ovviamente:

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

Riportando anche la $G(s)$ nella forma (15.5):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} \end{cases}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

e definendo l'errore di stima come:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\xi} - \bar{x} \quad (15.16)$$

per verificare la (15.14.) si deve verificare che, per qualsiasi ingresso e per:

$$\bar{\varepsilon}(0) = \bar{\varepsilon}_0$$

si abbia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon} = 0 \quad (15.17)$$

La dinamica dell'errore è:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \dot{\bar{\xi}} - \dot{\bar{x}} = F\bar{\xi} + G\bar{u} + H\bar{y} - A\bar{x} - B\bar{u} = \\ &= F(\bar{\varepsilon} + \bar{x}) + G\bar{u} + HC\bar{x} - A\bar{x} - B\bar{u} = \\ &= F\bar{\varepsilon} + (F - A + HC)\bar{x} + (G - B)\bar{u} \end{aligned}$$

e quindi, per la (15.17.) lo stimatore deve essere costruito rispettando le seguenti condizioni:

- 1) $G = B$
- 2) $F = A - HC$
- 3) Gli autovalori di F devono essere a parte reale negativa

Sotto tali condizioni si ha che:

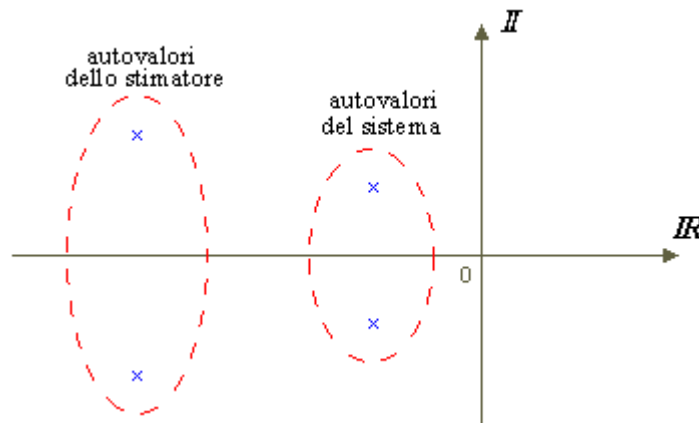
$$\dot{\bar{\varepsilon}} = (A - HC)\bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\varepsilon}(t) = e^{(A-HC)t} \bar{\varepsilon}_0 \quad (15.18)$$

e, se gli autovalori della matrice $(A-HC)$ sono a parte reale negativa, l'errore tende a zero per qualunque suo valore iniziale; bisogna quindi scegliere la matrice H in maniera opportuna.

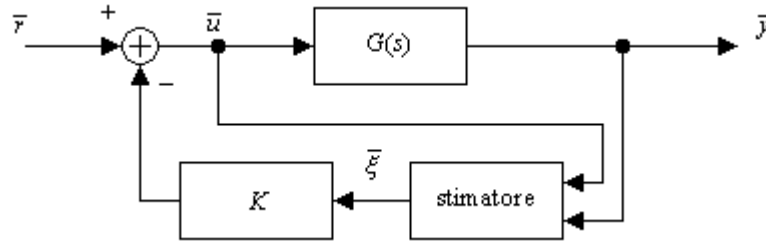
Si noti che:

- gli autovalori di $(A-HC)$ sono gli stessi di $(A-HC)^T$
- se la coppia (A, C) è osservabile, come da ipotesi, la coppia (A^T, C^T) è controllabile per cui, l'opportuna scelta della matrice H permette di soddisfare tutte le specifiche richieste

Una delle specifiche dello stimatore è che la sua dinamica sia più veloce di quella del sistema dato che la sua uscita viene utilizzata per controllare il sistema stesso; i suoi poli devono quindi essere in modulo maggiori di quelli del sistema:



Lo schema completo del sistema con l'osservatore di Luenberger è quindi:



in cui si possono distinguere le relazioni relative a:

- l'impianto da controllare

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

- l'osservatore di Luenberger

$$\dot{\bar{\xi}} = F\bar{\xi} + G\bar{u} + H\bar{y}$$

- l'errore di stima

$$\dot{\bar{\epsilon}} = (A - HC)\bar{\epsilon}$$

- la retroazione dello stato stimato

$$\bar{u} = \bar{r} - K\bar{\xi}$$

Considerando il sistema così ottenuto si può ricavare che:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} = A\bar{x} + B(\bar{r} - K\bar{\xi}) = A\bar{x} + B\bar{r} - BK(\bar{\epsilon} + \bar{x}) = (A - BK)\bar{x} - BK\bar{\epsilon} + B\bar{r}$$

Il sistema ha un vettore di stato di dimensione pari a $2n$ e scegliendo come vettore di stato:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\epsilon} \end{bmatrix}$$

si ha che:

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \bar{q} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{y} = [C \quad 0] \bar{q} \end{cases}$$

Si deve notare che la matrice dinamica del sistema così ottenuto, essendo triangolare superiore a blocchi, ha gli autovalori che coincidono con quelli delle due sottomatrici che si trovano sulla diagonale, cioè di $(A - BK)$ e $(A - HC)$; questa caratteristica è detta **proprietà di separazione degli autovalori**, dato che gli autovalori del sistema di partenza e quelli dello stimatore sono separati, indicando che i progetti dei due blocchi sono indipendenti fra loro.

Nel caso in cui alcune variabili di stato possano essere ottenute come combinazione lineare delle variabili di uscita, si può sintetizzare un *osservatore di ordine ridotto*, che permetta di ricavare le variabili ancora sconosciute.