ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 46

Titolo nota 30/11/2018

Riassunto: ad ogni forma quadratica è associata matrice A simmetrica $n \times n$ in modo tale

$$\boxed{q(x) = x^t A x = \langle Ax, x \rangle}$$

Essendo A simmetrica, ha n autovalori reali (contati con molteplicità), di cui
- n_+ positivi
- n_- negativi
- n_0 nulli

da cui ovviamente

$$\boxed{n = n_+ + n_- + n_0}$$

Caratterizzazione:
- n_+ è la massima dim. di un s.sp. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $q(x)$ è definita positiva in V, cioè
$$q(v) > 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{0\}$$
- n_- ... definita negativa.

Achtung! n_0 non è la max dim. di un s.sp. su cui $q(x)$ è nulla, ma comunque è la dim. del ker di A.

Dim. caratterizzazione

Passo 1 Per comodità, poniamo $n_+ = k$.
Voglio trovare s.sp. V di dim k su cui $q(x)$ è def. positiva.

Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori: $v_1, \dots, v_n$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Supponiamo che $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ siano positivi. Dico che posso usare $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Dico che $q(x)$ è def. pos. su V. Prendo il generico el.

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

e applico A:

$$\begin{aligned} Av &= A(c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \\ &= c_1 A v_1 + \dots + c_k A v_k \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_k \lambda v_k \end{aligned}$$

Ma allora

$$q(v) = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_k c_k v_k , c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \rangle$$

$$= \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_k c_k^2$$

usiamo che
$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$
$\langle v_i, v_i \rangle = 1$

$$> 0$$

perché $\lambda_i > 0$ per $i = 1, \dots, k$ e almeno uno dei $c_i \neq 0$ se $v \neq 0$.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Esiste s.sp. di dim n_- su cui q è def. neg.
(basta prendere s.sp. generato dagli autovett. con autovalori negativi).

$\boxed{\text{Passo 3}}$ Esiste s.sp. di dim. $n_+ + n_0$ su cui q è semidef. pos., cioè

$$q(v) \geq 0 \qquad \forall v \in V$$

(basta prendere quello generato dagli autovett. con autov. ≥ 0)

Analogamente esiste s.sp. di dim $n_- + n_0$ su cui q è semidef. neg.

$\boxed{\text{Passo 4}}$ Posto $n_+ = k$, resta da dim. che NON esistono s.sp. di dim. $\geq k+1$ su cui $q(x)$ è def.

Supponiamo che ci sia V di dim $k+1$ su cui V è def. positiva. Per il passo 3, esiste W di dim $n_- + n_0 = n-k$ su cui $q(x)$ è def. negativa.
Dico che V e W hanno intersezione $\neq \{0\}$ il che è un guaio perché q dovrebbe contemporaneamente essere >0 (essendo in V) e ≤ 0 (essendo in W).
Per Grassmann

$$\underbrace{\dim(V\cap W)}_{\substack{\text{almeno } 1, \text{ quindi} \\ \text{intersezione non banale}}} + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } n} = \underbrace{\dim V}_{\substack{= k+1 \\ \text{o più}}} + \underbrace{\dim W}_{= n-k}$$

— o — o —

Esempio Mettiamo di essere in $\mathbb{R}^{10}$ con $n_+ = 4$, $n_- = 3$, $n_0 = 3$

Per un passo della dim. sappiamo che esiste s.sp. W di dim 6 su cui q è semidef. neg. (≤ 0)
Se ci fosse uno sp. V di dim. 5 su cui $q>0$

$$\underbrace{\dim(V\cap W)}_{\text{almeno } 1} + \underbrace{\dim(V+W)}_{\text{al max è } 10} = \underbrace{\dim V}_{=5} + \underbrace{\dim W}_{=6}$$

— o — o —

Esercizio In $\mathbb{R}^{10}$ prendiamo V s.sp. di dim 5
W s.sp. di dim 6

Quali sono i possibili valori per $\dim(V+W)$?

Massimo : 10 Minimo : 6

Esempio in cui è 6 : $V = \{e_1, \dots, e_5\}$
$W = \{e_1, \dots, e_5, e_6\}$

In questo caso $V+W = W$

Esempio in cui è 8 : $V = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$W = \{e_6, e_7, e_8, \underbrace{e_2, e_3, e_4}_{}\}$
3 a caso di quelli già usati

Andava bene anche $W = \{e_6, e_7, e_8, e_1+e_2, e_1+e_4, e_4+e_5\}$

Se $\dim(V+W) = 8$, allora per forza $\dim(V \cap W) = 3$.

<u>Esempio</u> In $\mathbb{R}^{2018}$ abbiamo $\dim V = 1500$
$\dim W = 1700$

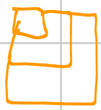
Cosa possiamo dire di $\dim(V \cap W)$?

Massimo: 1500

Minimo: $1500 + 1700 - 2018$
(si ha quando la somma è la massima possibile)

<u>Esercizio</u> Come cavarsela quando con Sylvester si trovano dei Det $= 0$ strada facendo.

Supponiamo di essere in dim 3 e troviamo $+ \; - \; 0$
Cosa possiamo dire ?



C'è un autov. +, un autov. −, $\underbrace{\text{un autov. nullo}}$
segue subito da $\text{Det}_{3\times3} = 0$

C'è un autov. + perchè $q(e_1) = q(1,0,0) > 0$, quindi c'è tutto un s.sp. di dim 1 su cui q è def. pos., quindi $n_+ \geq 1$

Se guardiamo il $\text{Det}_{2\times2}$, questo è come guardare la forma quadratica sul s.sp. Span(e_1, e_2). Ora su questo s.sp. il Det è < 0, quindi in questo s.sp. c'è uno sp. di dim. ≥ 1 su cui $q < 0$.

Esercizio 4×4 e i segni vengono $++0-$

Allora gli autovalori sono $+++-$

- Il $\mathrm{Det}_{4\times 4}$ è neg., quindi non ci sono autov. nulli e ci sono solo 2 possibilità
  - $\to +++-$
  - $\to +---$: se fosse questo caso avremmo un s.sp. di dim 3 su cui q è def. neg. d'altra parte sullo sp. generato da e_1, e_2 sappiamo che q è positiva per Sylvester "senza zeri" e questo è assurdo perché dovrebbero intersecarsi

Esercizio 4×4 con $++0+$

Dai primi 2 segni $+$ deduco che $q>0$ in $\mathrm{Span}(e_1,e_2)$
Dal det. 4×4 deduco che restano solo 2 possibilità

- $++++$
- $++--$

Ora $++++$ non è possibile, perché q sarebb. >0 sempre, quindi $q>0$ anche in $\mathrm{Span}(e_1,e_2,e_3)$ il che non è compatibile con $\mathrm{Det}_{3\times 3}=0$

Resta $++--$, ma pure questa non va bene, perché ci sarebbe s.sp. di dim 2 su cui $q<0$, e questo intersecherebbe $\mathrm{Span}(e_1,e_2,e_3)$ dove $q\geq 0$.
(abbiamo usato come sottorisultato che $++0$ in dim. 3 vuol dire che la forma è semidef. pos.)