Esercizio 1. Un'azienda produce due materiali diversi (A e B). Le materie prime disponibili consentono di produrre al massimo 2 tonnellate di A e 3 di B alla settimana. Ogni tonnellata prodotta di ogni materiale dá luogo a 2 quintali di materiale di scarto da trattare. In una settimana non si possono trattare più di 7 quintali di materiale di scarto. Il profitto dei materiali é 1000 euro per A e 3000 euro per B. Trovare la soluzione ottima eseguendo l'algoritmo del simplesso partendo dal vertice $(2, \frac{3}{2})$. Costruire un piano di taglio di Gomory per il problema in cui si possano produrre solo un numero intero di tonnellate.

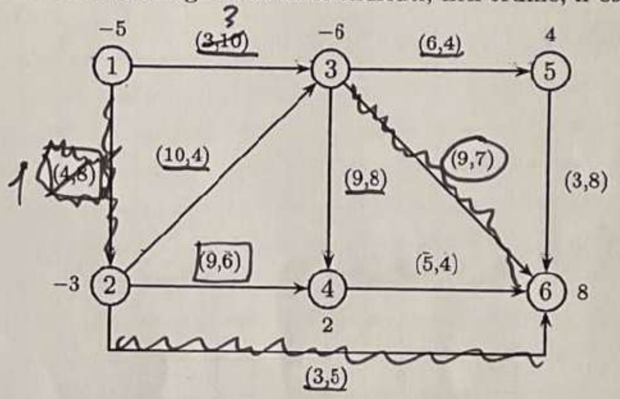
Esercizio 2.

Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{cases} \max\ 11\,x_1 + 52\,x_2 + 27\,x_3 + 50\,x_4 + 60\,x_5 + 31\,x_6 \\ \quad 14\,x_1 + 10\,x_2 + \ \ 6\,x_3 + 15\,x_4 + 22\,x_5 + 17\,x_6 \leq 39 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Determinare la valutazione data dal rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$, quella data dal rilassamento $x \geq 0$ e quella ottenuta aggiungendo un piano di taglio di Gomory. Risolvere poi il problema con il 'Branch and Bound' utilizzando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,3), (2,6), (3,4), (3,5), l'arco (3,6) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima.

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + x_2^2 - 12\,x_1 - 16\,x_2 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 \leq 12 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(1, 6)$. Trovare il massimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT. Quale é il minimo globale?

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(2, \frac{3}{2})$ con base $B = \{1,3\}$. La duale complementare é $(-2, 0, \frac{3}{2}, 0, 0)$. Indice uscente 1. $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. I rapporti valgono $r_2 = \frac{3}{2}$ e $r_4 = 2$. Indice entrante 1. Soluzione ottima $(\frac{1}{2}, 3)$. Base ottima $B = \{2,3\}$. La matrice per i tagli di Gomory é data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ che dá il taglio $x_4 \geq 1$, ovvero $x_1 + x_2 \leq 3$.

Esercizio 2. Le soluzioni ottime dei rilassati continui sono $x = (0, \frac{39}{10}, 0, 0, 0, 0)$ con v_S pari a 202, e $x = (0, 1, 1, 1, \frac{8}{22}, 0)$ con v_S pari a 150. La base ottima della prima é $B = \{2\}$. Il taglio di Gomory é dato da

$$4\,x_1 + 6\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 + 7\,x_6 + x_s \geq 9$$

La v_S con il taglio di Gomory é 196 data da $(0, 3, \frac{3}{2}, 0, 0, 0)$.

Esercizio 3.

		iterazione 1
Archi di T		(1,3) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5)
Archi di U		(3,6)
x		(0, 5, 2, 0, 1, 2, 4, 7, 0, 0)
π		(0, −7, 3, 12, 9, −4)
Arco entrante		(2,4)
ϑ^+, ϑ^-		6 , 2
Arco uscente		(2,3)

Il taglio é $N_s = \{1\}$ di capacitá 18. L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2), (1,3), (2,6), (3,4), (3,5)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (2, 3, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$(6,1)$	$(0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(10,0)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$(4,6)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(6,1)$	$-10x_1 - 4x_2$	(6,3)	$(5,-3)$	$\frac{19}{34}$	$\left(\frac{129}{34}, \frac{147}{34}\right)$

Massimo globale é $(0,0)$ con moltiplicatori $(0,0,0,-12,-16)$ mentre $(4,6)$ é minimo globale.