Trasformata di Laplace inversa: scomposizione parziale di frazioni

Per trovare la trasformata di Laplace inversa di una funzione complicata, possiamo convertire la funzione in una somma di termini più semplici di cui conosciamo la trasformata di Laplace di ciascun termine. Il risultato è chiamato espansione di frazioni parziali.

Dato:

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{N(s)}{D(s)}R(s)$$

dove l'ordine di $N(s)$ è inferiore all'ordine di $D(s)$, è possibile effettuare un'espansione per frazione parziale.

Se l'ordine di $N(s)$ è maggiore o uguale all'ordine di $D(s)$, allora $N(s)$ deve essere diviso per $D(s)$ in successione finché il risultato non ha resto il cui numeratore è di ordine inferiore al denominatore.

Vogliamo espandere $G(s)$ nella somma delle funzioni di cui conosciamo già la trasformata inversa, poi grazie alla linearità potremo semplicemente sommarle tutte per ottenere l'inversa dell'intera funzione.

Caso 1. Le radici del denominatore di F(s) sono reali e distinte

Supponiamo di avere tutti **poli distinti**:

$$D(s) = \prod_{k=1}^{n}(s - p_k)$$

vogliamo trovare il coefficiente P_k tale che:

$$\frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{s - p_k}$$

Moltiplicando per $(s - p_i)$:

$$(s - p_i)\frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s - p_k)} = (s - p_i)\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{s - p_k}$$

possiamo ottenere:

$$P_i = [(s - p_i)G(s)]\big|_{s=p_i}$$

e infine:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n} fracP_k s - p_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P_k e^{p_k t}$$

Per esempio:

$$G(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$$

$$P_1 = (s+2)\frac{s-10}{(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=-2} = -\frac{12}{3} = -4$$

$$P_2 = (s+5)\frac{s-10}{(s+2)(s+5)}\bigg|_{s=-5} = \frac{-15}{-3} = 5$$

che significa che:

$$G(s) = \frac{-4}{(s+2)} + \frac{5}{(s+5)}$$

e infine:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = -4e^{-2t} + 5e^{-5t}$$

Caso 2. Le radici del denominatore di F(s) sono reali e ripetute

Se abbiamo **poli multipli** la scomposizione è simile.

Consideriamo, ad esempio

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Le radici di $(s+2)^2$ nel denominatore vengono ripetute, poiché il fattore viene elevato a una potenza intera maggiore di 1. In questo caso, la radice del denominatore in -2 è una radice multipla di molteplicità 2 .

Possiamo scrivere l'espansione delle frazioni parziali come una somma di termini, dove ciascun fattore del denominatore forma il denominatore di ciascun termine.

Inoltre, ciascuna radice multipla genera termini aggiuntivi costituiti da fattori denominatori di molteplicità ridotta.

Nel nostro caso

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

- Otteniamo K_1 come prima. In questo caso $K_1 = 2$
- Otteniamo K_2 moltiplicando l'equazione precedente per $(s+2)^2$:

$$\frac{2}{(s+1)} = \frac{K_1(s+2)^2}{(s+1)} + K_2 + K_3(s+2)$$

Quando $s \to -2, K_2 = -2$

- Otteniamo K_3 differenziando l'equazione precedente rispetto a s:

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{2(s+2)K_1}{(s+1)^2} + K_3$$

Da cui K_3 può essere isolato e trovato se lasciamo $s \to -2$. Quindi, $K_3 = -2$.

In questo caso quindi:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{-2}{(s+2)}$$

e la trasformata inversa è:

$$y(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Se la radice del denominatore ha molteplicità maggiore di 2, la differenziazione successiva isolerebbe ciascun residuo nell'espansione della radice multipla.

In generale, dato un $H(s)$ il cui denominatore ha radici reali e ripetitive:

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

Possiamo trovare l'espressione generale per K_1 (il coefficiente delle radici con molteplicità maggiore di 1):

$$K_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}(F(s)(s+p_1)^r)}{ds^{i-1}}\Big|_{s\to -p_1} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Caso 3. Le radici del denominatore di F(s) sono complesse o immaginarie

La tecnica utilizzata per l'espansione in frazioni parziali di $F(s)$ con radici reali al denominatore può essere utilizzata per radici complesse e immaginarie.

Tuttavia, i residui delle radici complesse e immaginarie sono essi stessi coniugati complessi.

In questo caso i termini risultanti possono essere identificati come:

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta$$

E

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta$$

Per esempio:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2}$$

K_1 viene trovato come al solito e trovato $K_1 = 3/5$.

Per trovare K_2:

$$K_2 = \frac{3}{s(s+1-j2)}\Big|_{s\to -1-j2} = \frac{-3}{20}(2+j1)$$

Risulta che K_3 è il complesso coniugato di K_2.

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20}\Big(\frac{2+j1}{s+1+2j} + \frac{2-j1}{s+1-2j}\Big)$$

che possiamo trasformare in senso inverso per ottenere:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}\Big[(2+j1)e^{-(1+j2)t} + (2-j1)e^{-(1-j2)t}\Big]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}e^{-t}\Big[4\Big(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\Big) + 2\Big(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\Big)\Big]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\Big(cos(2t) + \frac{1}{2}sin(2t)\Big) = 0,6 - 0,671e^{t}cos(2t-\phi)$$

dove $\phi = arctan 0.5 = 26.57^o$

Report an issue