Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 08/06/2023

Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e si assuma la relazione $B = S^{-1}AS$ per una certa matrice invertibile $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

V **F** Le matrici A e B si dicono *normali*.

V F Le matrici A e B si dicono *simili*.

V F Le matrici A e B hanno gli stessi autovalori.

V **F** Le matrici A e B hanno gli stessi autovettori.

V F Le matrici A e B hanno la stessa traccia.

V **F** Le matrici A e B hanno gli stessi cerchi di Gershgorin.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Nella seguente lista dire se sono (V) o non sono (F) formule di quadratura interpolatorie.

V F Formula dei trapezi.

V F Formula di Simpson.

V **F** Formula di integrazione per parti.

V **F** Formula di integrazione per sostituzione.

V F Formule di Newton-Cotes.

V F Formule Gaussiane.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi che non sono a risposta multipla.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e si indichi con $\mu(A)$ il numero di condizionamento della matrice rispetto alla norma 2.

V **F** La matrice A si dice ben condizionata se $|\mu(A)|$ è molto elevato.

V F La matrice A si dice ben condizionata se $\mu(A) = 1$ o vicino al valore 1.

V **F** La matrice A si dice ben condizionata se $\mu(A) = 0$ o vicino a zero.

V F Se A è una matrice unitaria allora è sicuramente ben condizionata.

V **F** In aritmetica floating point, il valore di $\mu(A)$ influenza l'accuratezza del calcolo dei prodotti matrice per vettore con la matrice A.

V F In aritmetica floating point, il valore di $\mu(A)$ influenza l'accuratezza della risoluzione dei sistemi lineari della forma $Ax = b$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri il metodo QR per il cacolo degli autovalori della matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$; in particolare sia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $A_0 = A$, la successione di matrici generata dal metodo.

V **F** La matrici A_k sono triangolari per $k > 0$.

V F Le matrici A_k sono tutte simili ad A.

V **F** Le matrici A_k sono normali per $k > 0$.

V F Presi $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, tali che $k_1 \neq k_2$, vale $\det(A_{k_1}) = \det(A_{k_2})$.

V F In ogni iterazione del metodo viene calcolata una sola fattorizzazione QR.

V F Per diminuire il costo computazionale è vantaggioso che A sia in forma di Hessenberg superiore.

Esercizio 2

Si consideri la risoluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = -15 \\ -3x + 8y + 2z = 17 \\ x - y + 4z = 4 \end{cases}$$

tramite metodi iterativi.

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si calcolino esplicitamente le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si scriva la formula per calcolare $v^{(k+1)}$ a partire da $v^{(k)}$. Considerando come punto iniziale il vettore

$$v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si calcoli $v^{(1)}$ per entrambi i metodi.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti per questo sistema lineare.

$\boxed{\text{(i)}}$ Le due matrici di iterazione sono

$$H_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & -\frac{7}{40} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{3}{32} \end{bmatrix}$$

ed applicando il passo dei due metodi si ottengono

$$v_J^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{17}{8} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_{GS}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Osservando che per il primo Teorema di Gershgorin entrambe le matrici di iterazione hanno raggio spettrale minore di 1 possiamo concludere che entrambi i metodi convergono.

Esercizio 3

Si consideri l'equazione $\log(\sqrt{x}) = \sqrt{\log(x)}$ che ha 2 soluzioni reali distinte: $0 < \alpha_1 < \alpha_2$.

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determinino α_1 ed α_2. **Suggerimento:** una possibile strada è considerare il cambio di variabile $y = \log(x)$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dica se l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = g_1(x_k) = \exp\left([\log(\sqrt{x_k})]^2\right)$ è localmente convergente per α_1 ed α_2.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dica se l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = g_2(x_k) = \exp\left(2\sqrt{\log(x_k)}\right)$ è localmente convergente per α_1 ed α_2.

$\boxed{\text{(i)}}$ L'equazione si può risolvere in modo esplicito e si ottengono $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = e^4$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Valutando $g_1'(x) = \frac{\log(\sqrt{x})}{x} \exp\left([\log(\sqrt{x_k})]^2\right)$ in α_1 ed α_2 si vede che il metodo converge per α_1 e non converge per α_2.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Valutando $g_2'(x) = \frac{\exp(2\sqrt{\log(x)})}{x\sqrt{\log(x)}}$ in α_2 si vede che il metodo converge. In α_1, $g_2(x)$ non è derivabile e il limite da destra di $g_2'(x)$ è $+\infty$; quindi il metodo non converge localmente per α_1.

Esercizio 4

Si consideri il problema di interpolazione polinomiale di una funzione $f(x)$ di cui sono noti alcuni valori puntuali.

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Data la tabella di valori

x	0	α	α^2
$f(x)$	1	2	-3

si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per cui il polinomio di interpolazione risulta avere grado minimo; qual'è il grado del polinomio di interpolazione per queste scelte di α?

(ii) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Data la tabella di valori

x	-2	0	1	2	3	4	6
$f(x)$	a	3	b	-5	c	-9	d

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e. Si determinino i valori di a, b, c, d che rendono minimo il grado del polinomio di interpolazione e si calcoli l'espressione esplicita del polinomio di interpolazione in questo caso.

$\boxed{\text{(i)}}$ Dal quadro delle differenze divise si ricava che la condizione che assicura il grado minimo del polinomio di interpolazione è $\frac{f(0)-f(\alpha)}{0-\alpha} = \frac{f(0)-f(\alpha^2)}{0-\alpha^2}$ da cui si ricava $\alpha = -4$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Imponendo che il polinomio interpoli i valori corrispondenti ai nodi $0, 2, 4$ si ottiene $p(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 3$; questo risulta essere il polinomio di interpolazione anche della tabella data quando $a = 15$, $b = -1.5$, $c = -7.5$, $d = -9$. Perciò il minimo grado del polinomio di interpolazione è 2, essendo $p(x)$ il polinomio interpolante di minimo grado.