Qualunque segnale T.D. può essere scritto come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)\,\delta(k-n)$$ SEQUENZA DI IMPULSI

Come calcolare la risposta di un sistema LTI ad un generico segnale d'ingresso

$$\{u(k)\} \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} u(m)\,\delta(k-m) = u(k)$$

← sist LTI ⇒ causale ⇒ $u(k)=0 \quad \forall k<0$

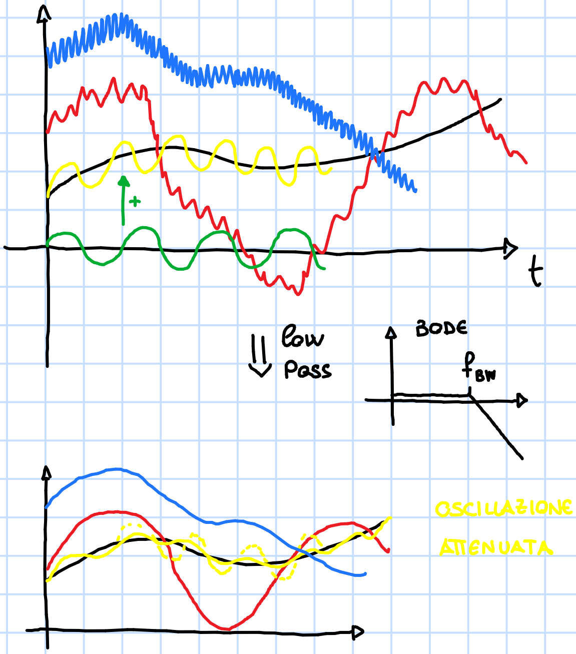
Se la risposta ad un impulso $u(k)=\delta(k)$ del sistema è $g_y(k)$ allora la risposta ad una certa somma di impulso è

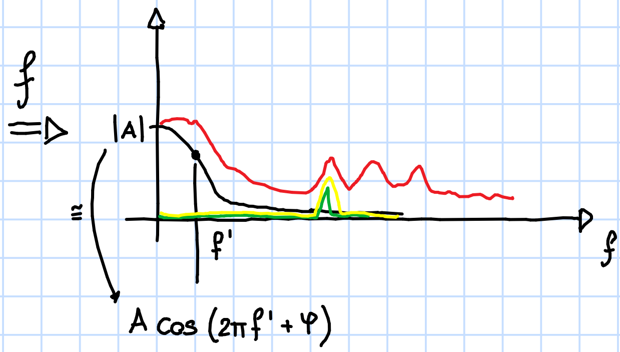
$$y(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} u(m)\,g_y(k-m) = \sum_{m=0}^{k} u(m)\,g_y(k-m)$$

← $g_y(k-m)=0 \quad \forall m>k$

Questa è l'espressione della "somma di convoluzione"

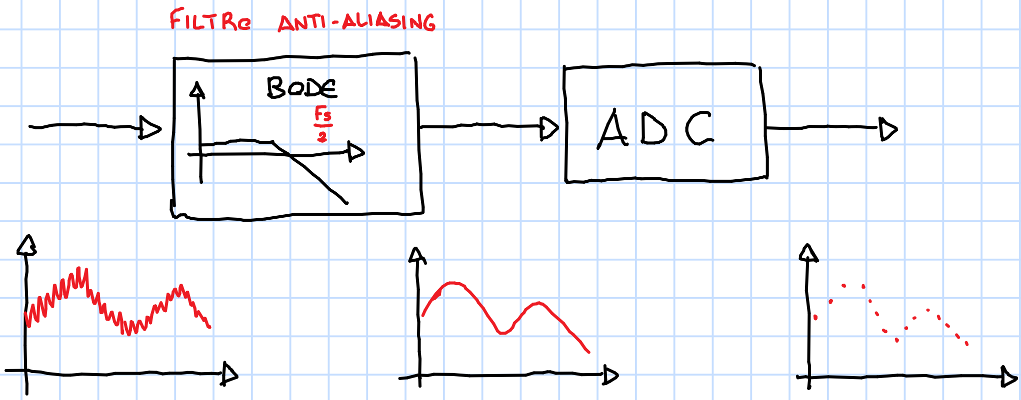
$$y(k) = u(k) * g_y(k)$$





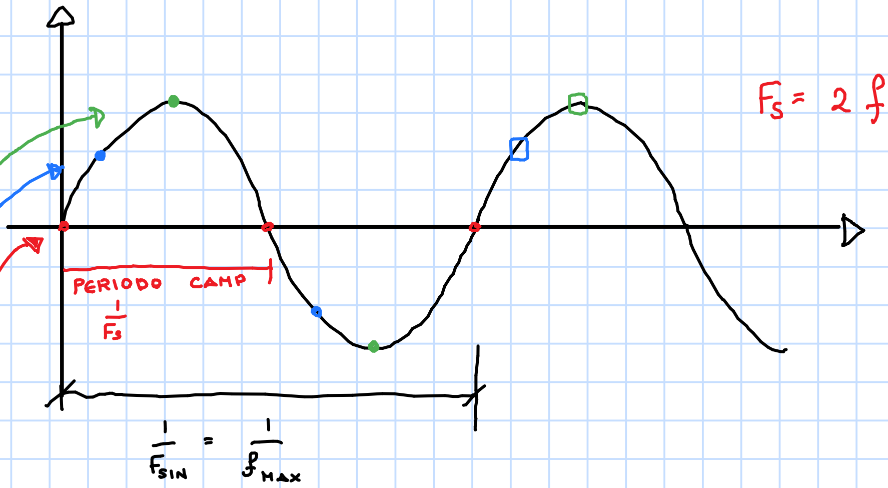
Al fine di evitare l'aliasing è NECESSARIO garantire che "il contenuto frequenziale del segnale sia nullo (o trascurabile) a frequenze maggiori di $\frac{F_s}{2}$" !

È possibile usare un filtro anti-aliasing



Ex: campionam di sinusoide a $freq = \frac{freq_{sin}}{2}$

$F_s = 2 f_{MAX}$



Conclusione, il limite $f_{MAX} = \frac{F_s}{2}$ è solo puramente TEORICO!

i campioni del segnale ∼ appaiono come segnale costante = 0

i campioni del segnale ∼ appaiono come un segn oscillat di ampiezza 1

〃 〃 di ampiezza $\frac{1}{2}$

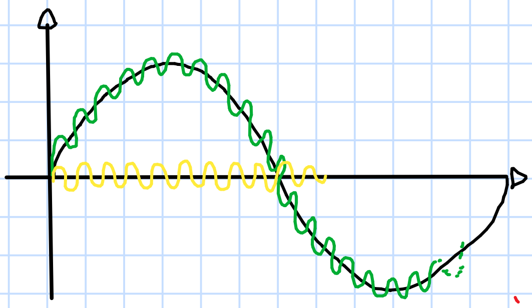
⇒ In conclusione F_s va scelta $\gg f_{MAX}$

con f_{MAX} rappresente la freq più alta dello spettro del segnale da campionare!

⇒ data f_{MAX} "utile" scelgo la BW del filtro antialiasing $f_{BW} \gg f_{MAX}$

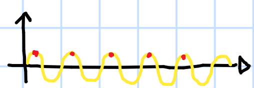
(non voglio attenuazione del contenuto frequenza "utile")

e poi scelgo $\frac{F_s}{2} \gg f_{BW}$ (non voglio aliasing)

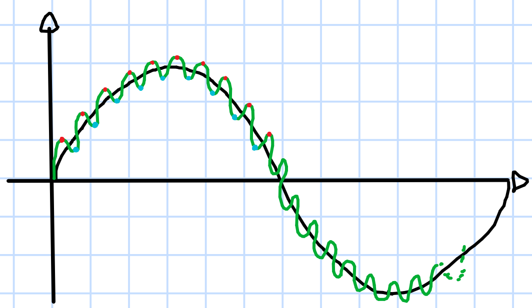


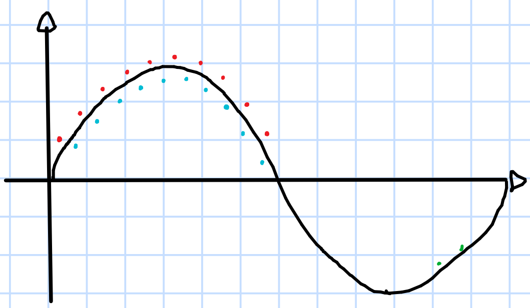
DISTURBO! ∿∿ + ∼ = ∼

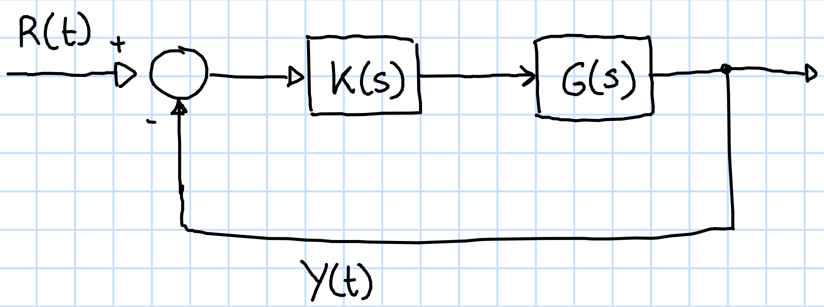
Se campiono a F_s vicino alla freq ∼ può succedere che



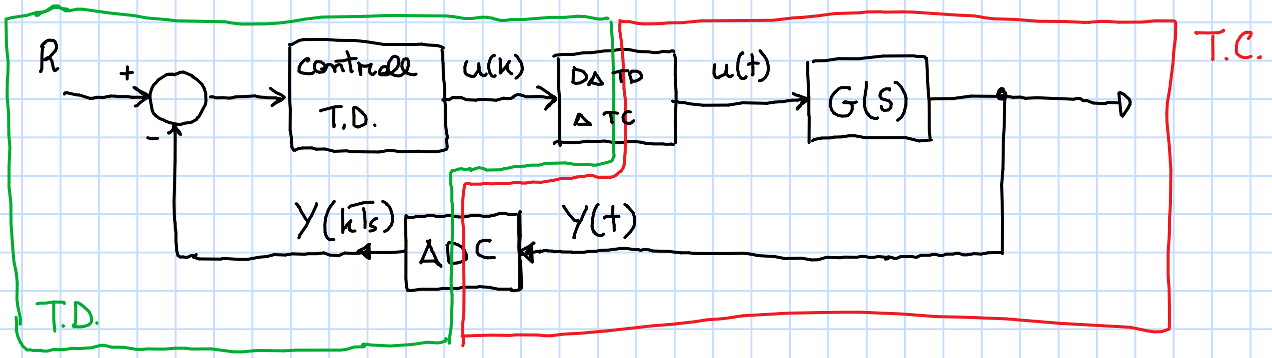
CIÒ CHE PUÒ SUCCEDERE SENZA FILTRO ANTI-ALIASING

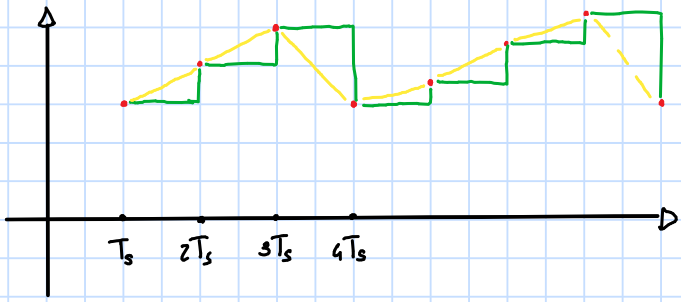






Se devo implementare il controllore come un sist T.D.

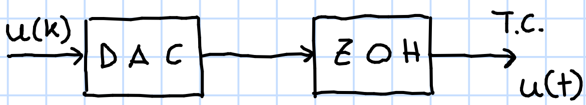




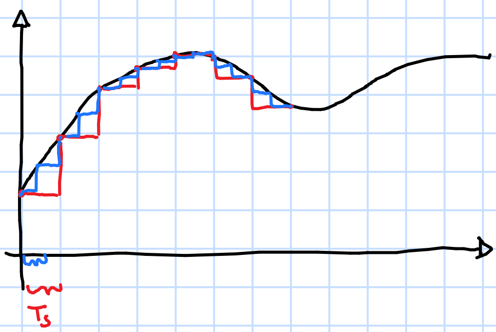
u(k) segn T.D.

Zero Order Hold

First Order Hold unione con segm



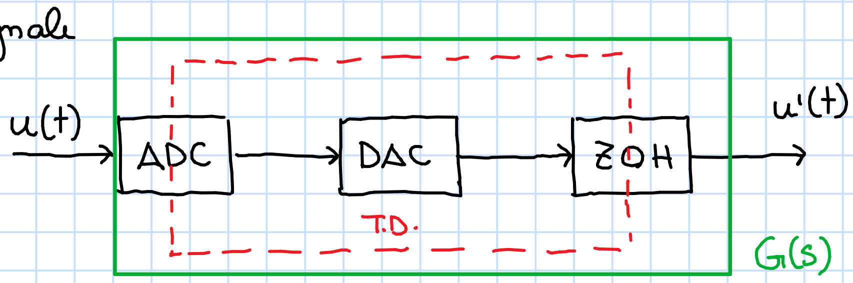
Supponendo che il segnale da "generare" sia :



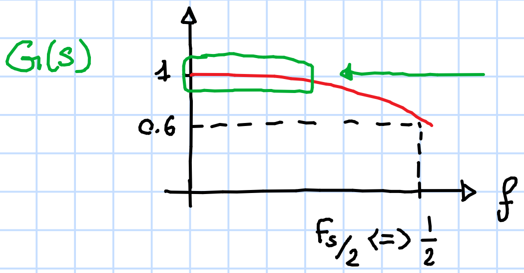
la scelta di T_s influisce sulla "generazione"

⇒ devo scegliere T_s non solo in base al contenuto frequenziale del segnale che campiono ma anche in base a quello del segnale che voglio generare

Un problema spesso affrontato è: campionamento e ricostruzione di un segnale

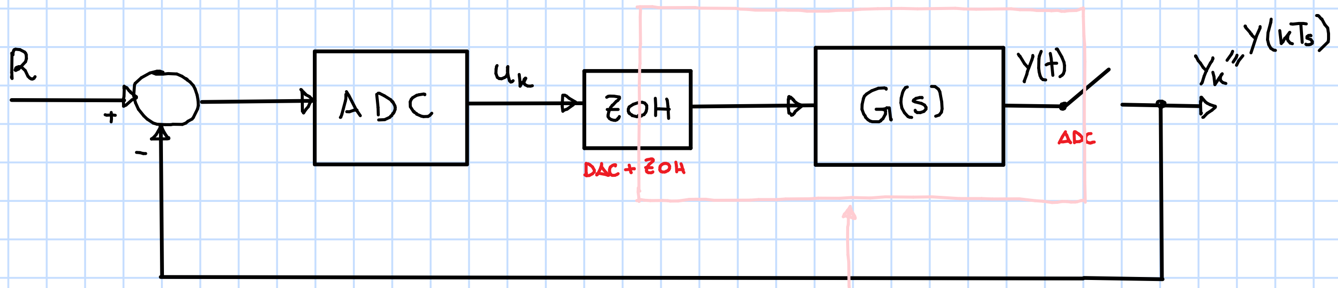


quanto è diverso u'(t) da u(t)?

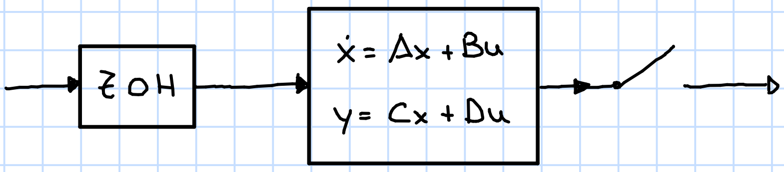


il contenuto freq a queste frequenze di u(t) non esce "distorto"

Rappresentazione T.D. di un sist T.C.



questo appare all'ext come un sist T.D.



Analizzo come si comporta il sistema T.C. quando il tempo passa da t_k (generico istante) a t_{k+1}

$t_k = kT_s$, $t_{k+1} = (k+1)T_s$

Se conosco $x(t_k)$ posso calcolare $x(t_{k+1})$:

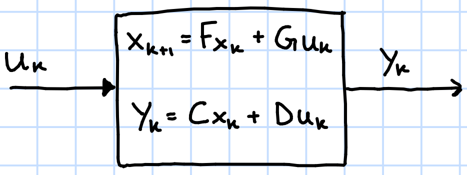
$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \cdot x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$u(\tau)$ per $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ è costante (ZOH) e pari u_k

$$= e^{AT_s} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B\, d\tau \cdot u_k \qquad \Rightarrow \tau' = t_{k+1} - \tau$$

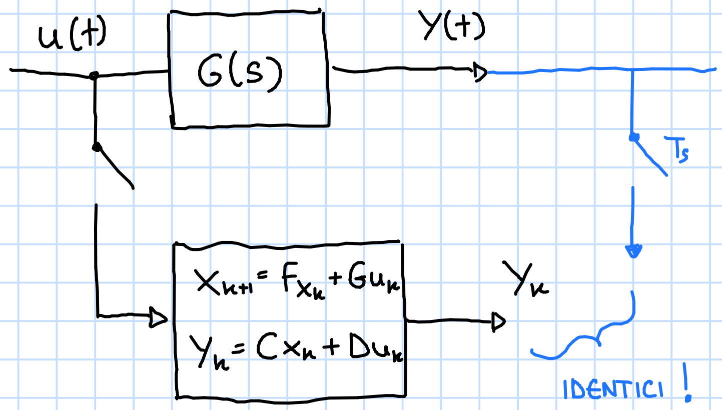
$$= e^{AT_s} x(t_k) + \int_{T_s}^{0} e^{A\tau'} B \, -d\tau' \cdot u_k =$$

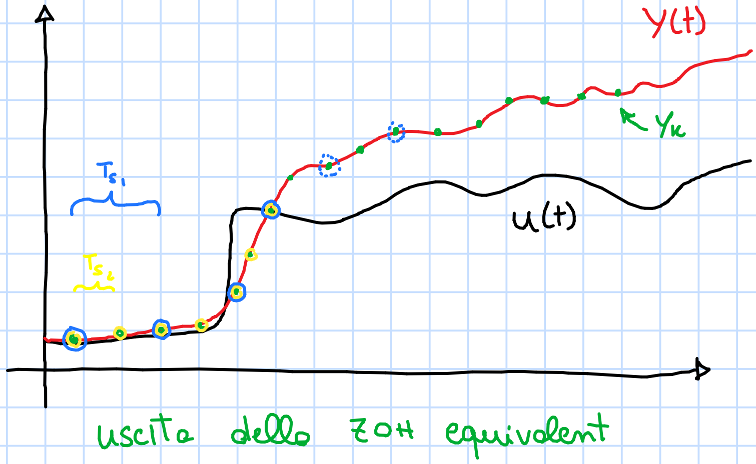
$$= \underbrace{e^{AT_s}}_{\text{indipend da } t_k} x(t_k) + \underbrace{\int_0^{T_s} e^{A\tau'} B\, d\tau'}_{\text{DIPENDE SOLO DA } T_s} u_k =$$



ZOH equivalent

$$\boxed{F = e^{AT_s} \qquad G = \int_0^{T_s} e^{A\tau'} B\, d\tau'}$$





Quindi posso pensare di progettare un controllore T.D. che controlli lo ZOH equiv del sistema T.C. e il sist T.C. controllato con tale controllore T.D. (con ZOH sampler) si comporterà NEGLI ISTANTI DI CAMPIONAMENTO come quello T.D. su cui è stato progettato il controllore

È anche possibile una "conversione approssimata":

Concetto:
$$\dot{x}(t_k) \cong \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{T_s}$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{T_s} = Ax(t_k) + Bu(t_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = AT_s\, x_k + BT_s\, u_k \Rightarrow x_{k+1} = \underbrace{(I + AT_s)}_{F} x_k + \underbrace{BT_s}_{G} u_k$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

Noto che:
$$e^{AT_s} = \left| = I + AT_s + \frac{1}{2}A^2T_s^2 \dots \right.$$ serie di Taylor $\Rightarrow F = I + AT_s$ è come approx di primo grado di e^{AT_s}

ed anche:
$$G = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau = A^{-1} e^{A\tau} B \Big|_0^{T_s} = A^{-1}\left[e^{AT_s} - \overbrace{e^{A0}}^{I}\right] \cdot B =$$
$$= A^{-1}\left[I + AT_s + \dots - I\right] B = A^{-1} AT_s B = BT_s \; !$$

- $F = I + AT_s$
- $G = BT_s$