# Integrali tripli - Esercizi svolti

## Integrali tripli

Si calcolino gli integrali tripli seguenti riducendo per strati e per fili in coordinate cartesiane. Eventualmente fare cambiamenti di coordinate per il calcolo degli integrali doppi risultanti.

1. $\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ove $D$ è il cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

2. $\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove $D$ è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

3. $\int_D x^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove $D$ è la sfera unitaria di centro $(0,0,0)$.

4. $\int_D xyz\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ con $D=\{(x,y,z)\mid z^2\le x^2+y^2\,,\quad z\ge x^2+y^2\}$.

## Cambiamento di coordinate

5. Si calcoli, utilizzando le coordinate sferiche, $\int_D x^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove $D$ è la sfera unitaria di centro $(0,0,0)$.

6. Si calcoli, utilizzando le coordinate sferiche, $\int_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove
$$D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2-z\le 0\,,\ 0\le y\le \sqrt{3}x/3\}\,;$$

7. Si calcoli
$$\int_E \frac{x^2+4y^2z^2}{8y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
dove $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+4y^2(y^2+z^2-1)\le 0,\ y\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, utilizzando il cambiamento di variabili
$$\begin{cases} x &= 2uv\\ y &= v\\ z &= w.\end{cases}$$

## Ulteriori integrali tripli

8. $\displaystyle\int_D x^2 y \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z$ con $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq 1\}$;

9. $\displaystyle\int_D \frac{1}{3 - z} \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z,$

$$D = \{(x, y, z) \mid 9z \leq 1 + y^2 + 9x^2\,,\ 0 \leq z \leq \sqrt{9 - (y^2 + 9x^2)}\}\,;$$

10. $\displaystyle\int_D x \, \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z$, ove $D$ è l'insieme $\{(x, y, z) \mid 2x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

## Applicazioni

11. Calcolare il volume delle regioni seguenti:

    (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - x - y\}$;

    (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - z \leq x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{z^2}{9},\ 0 \leq z \leq 2\}$;

    (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - z \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ z \leq 3x^2 - y^2\}$;

    (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{5}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\}$;

12. Si consideri il tetraedro di vertici $A = (1, 0, 0),\ B = (0, 2, 0),\ C = (0, 0, 3),\ O = (0, 0, 0)$ e lo si suddivida in due mediante il piano di equazione $x = k$. Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che i due solidi ottenuti abbiano volumi uguali.

13. Calcolare i volumi dei seguenti solidi ottenuti ruotando il grafico della funzione $y = f(x)$ attorno all'asse delle ascisse:

    (a) $y = \frac{1}{x},\ x_0 < x < x_1$;

    (b) $y = (1 - x^{2/3})^{3/2},\ -1 \leq x \leq 1$ (*asteroide* );

    (c) $y = x^3,\ 0 < x < a$;

    (d) $y = \mathrm{e}^x,\ 0 < x < a$;

    (e) $y = \cosh x,\ 0 < x < a$.

14. Calcolare il volume degli insiemi delimitati dalle superfici:

    (a) $z = \sin x,\ x = 0,\ x = \pi,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0$;

    (b) $z = \sin x,\ x = -\pi,\ x = \pi,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0$.

15. I due paraboloidi $z + 10 = 5(x^2 + y^2)$ e $z - \frac{10}{3} = x^2 + y^2$ individuano una regione $E$ che si suppone omogenea. Verificare che il baricentro di $E$ cade nell'origine.

16. Calcolare i momenti di inerzia (rispetto all'asse di rotazione) dei corpi seguenti, supposti omogenei, con densità 1 e ruotanti rispetto alla retta indicata.

    (a) una sfera, ruotante intorno ad una retta tangente;

    (b) il volume interno all'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ruotante intorno all'asse delle ascisse;

    (c) un guscio sferico, di raggio interno $r$ ed esterno $R$, ruotante intorno ad un diametro.

## Integrali tripli

1. $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z, \qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}.$

Per fili: si proietta $D$ su uno dei piani coordinati, per esempio sul piano $z=0$, ottenendo il quadrato $Q=[0,1]\times[0,1]$, e

$$\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_Q \left[\int_{S_{xy}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con $S_{xy}=\{(z \mid (x,y,z)\in D\}=[0,1]$. Dunque

$$\begin{aligned}\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_Q \left[\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_Q (x^2+y^2)\left[z|_0^1\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_Q (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Per strati: si proietta $D$ su un asse, per esempio sull'asse $z$. Si ha

$$\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\int_{S_z} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}z,$$

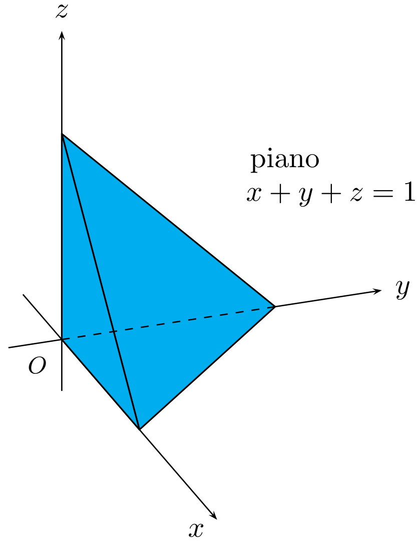
con $S_z=\{(x,y) \mid (x,y,z)\in D\}=[0,1]\times[0,1]$.

Quindi, dal calcolo già fatto,

$$\int_{S_z} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}.$$

---

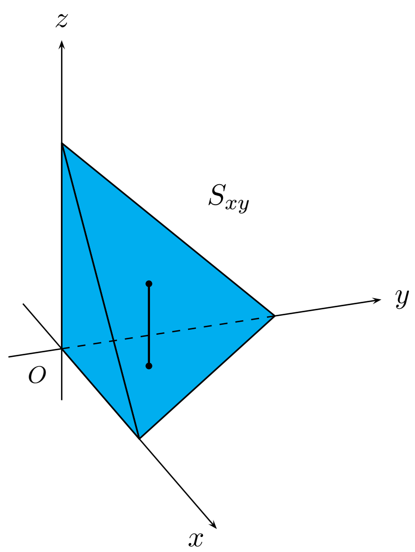
2. $\displaystyle\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}.$



Per fili: la proiezione di $D$ sul piano $z = 0$ è il triangolo $T$ delimitato dalla retta $x + y = 1$ e contenuto nel primo quadrante:

$$\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_T \left[\int_{S_{xy}} xy(y+z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

con $S_{xy} = \{z \mid (x, y, z) \in D\} = [0, 1 - x - y]$.




Quindi

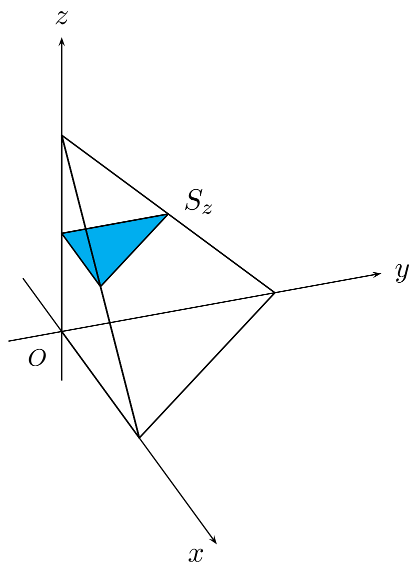
$$\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_T xy\left[\int_0^{1-x-y}(y+z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_T xy\left[yz + \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_T xy\left[y(1-x-y) + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_T xy\left[y - xy - y^2 + \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2xy)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_T xy\left[y - xy - y^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x - y - xy\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_T xy\left[-2xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - x\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^1\left[-\int_0^{1-x}\left(2x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x^3y + x^2y\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^1\left\{\frac{2}{3}x^2(1-x)^3 + \frac{1}{8}x(1-x)^4 - \frac{1}{4}x(1-x)^2 - \frac{1}{4}x^3(1-x)^2 + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\right\}\mathrm{d}x$$

si omette il calcolo dell'integrale semplice.

Per strati: si proietta sull'asse $z$ ottenendo il segmento $[0, 1]$ e quindi

$$\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1\left[\int_{S_z} xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z,$$

con $S_z = \{(x, y) \mid (x, y, z) \in D\} = \{(x, y) \mid x + y \le 1 - z,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.




Quindi

$$\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-z-x} xy(y+z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}z$$

si omette il calcolo degli integrali semplici.

---

3. $\displaystyle\int_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\qquad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$

Per fili: si proietti su $z=0$ ottenendo il disco $E = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Quindi

$$\int_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_E \left(\int_{S_{xy}} x^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad S_{xy} = [-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}]$$
$$= \int_E 2x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Conviene calcolare quest'integrale doppio passando a coordinate polari e integrando sul dominio $R = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Quindi

$$\int_E 2x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_R 2\rho^2\cos^2\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Si sostituisce prima $\rho^2 = u$ e quindi $1-u = s^2$:

$$2\pi\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^1 \rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \pi\int_0^1 u\sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u = 2\pi\int_0^1 (1-s^2)s^2\,\mathrm{d}s.$$

Si omette il calcolo dell'integrale semplice.

Per strati:

$$\int_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_{D_0} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \text{con } D_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z>0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$
$$= 2\int_0^1\left[\int_{S_z} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z \qquad \text{con } S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1-z^2\}.$$

Passo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 < \rho \le \sqrt{1-z^2}$$

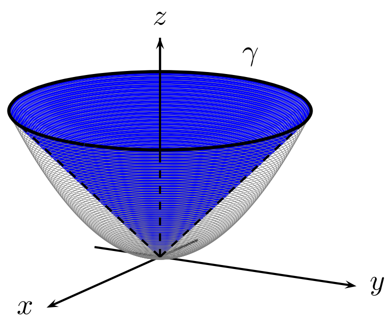
da cui

$$2\int_0^1 \left[\int_{S_z} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = 2\int_0^1 \left\{\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{1-z^2}} (\rho^2\cos^2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\right\}\mathrm{d}z$$
$$= 2\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_0^1(1-z^2)^2\,\mathrm{d}z.$$

Si omette il calcolo dell'integrale semplice.

---

4. $\displaystyle\int_D xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2+y^2,\ z > x^2+y^2\}.$




Cono e paraboloide si intersecano in $(0,0,0)$ e nella circonferenza $\gamma$ di equazione

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Dunque la proiezione di $D$ sul piano $z=0$ è il disco

$$D_0 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

<u>Per fili</u>:

$$\int_{D_0}\left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{D_0} xy\left[z^2\Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{D_0} xy[x^2+y^2-(x^2+y^2)^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

passando a coordinate polari otteniamo

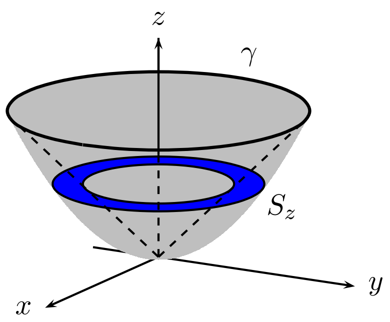
$$\tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\left\{(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)\left[\rho^2-\rho^4\right]\right\}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^1\left(\rho^5-\rho^7\right)\mathrm{d}\rho\right]\cdot\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = 0.$$

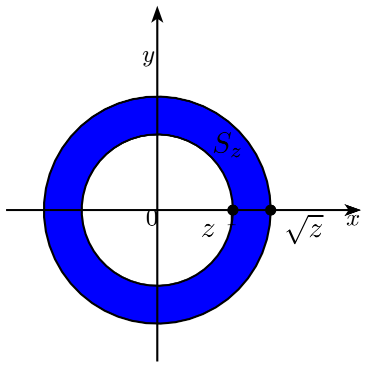
Si spieghi il risultato studiando le simmetrie del problema.

<u>Per strati</u>: possiamo scrivere

$$\int_D xyz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\int_{S_z} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z,$$

con $S_z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2+y^2 \le z\}$




Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\int_{S_z} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z &= \int_0^1 z\left[\int_{S_z} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^1 z\left\{\int_0^{2\pi}\left[\int_{z^2}^{z}\rho(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\right\} = 0.\end{aligned}$$

## Cambiamenti di coordinate

5. $\int_D x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Passando a coordinate sferiche

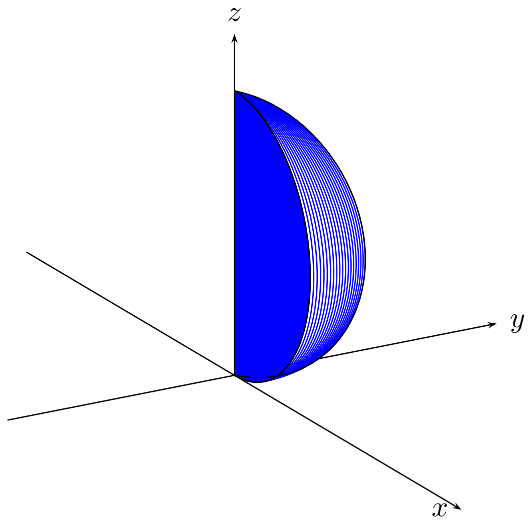
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{con} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

si ha che il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana è $r^2 \sin\varphi$ e dunque

$$\begin{aligned} &\int_D x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 (r\sin\varphi\cos\theta)^2 r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta \right\} \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^1 r^4 \,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \tfrac{1}{5} \cdot \int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta = \\ &= \tfrac{\pi}{5} \cdot \left[ -\cos\varphi + \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi \right]_0^{\pi} = \tfrac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

---

6. Notiamo che $0 = x^2+y^2+z^2-z = x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ è l'equazione di una sfera di centro $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$. Di questa si vuole la parte contenuta nel diedro delimitato dai piani $y=0$ e $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, in $y \geq 0$.




Passando a coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{con} \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq \cos\varphi \end{cases}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
&\int_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\varphi} \frac{1}{1+r}\sin\varphi\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\theta = \\
&= \tfrac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\int_0^{\cos\varphi} \frac{r^2-1+1}{1+r}\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\int_0^{\cos\varphi}\left(r-1+\frac{1}{1+r}\right)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = \\
&= \tfrac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left\{\frac{1}{2}r^2 - r + \log(1+r)\Big|_0^{\cos\varphi}\right\}\mathrm{d}\varphi = \\
&= -\tfrac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\cos^2\varphi - \cos\varphi + \log(1+\cos\varphi)\right]\mathrm{d}\cos\varphi = \\
&= -\tfrac{\pi}{12}\cdot\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \tfrac{\pi}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \tfrac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\cos\varphi)\,\mathrm{d}\cos\varphi = \\
&= -\tfrac{\pi}{36}\cdot(-1) + \tfrac{\pi}{12}\cdot(-1) - \tfrac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\cos\varphi)\,\mathrm{d}\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Integrando per parti

$$
\int \log(1+u)\,\mathrm{d}u = u\log(1+u) - \int \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u = u\log(1+u) - u - \log(1+u),
$$

e sostituendo nell'integrale precedente otteniamo

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{\pi}{18} - \tfrac{\pi}{6}\left\{\cos\varphi\cdot\log(1+\cos\varphi) - \cos\varphi - \log(1+\cos\varphi)|_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} = \\
&= -\tfrac{\pi}{18} - \tfrac{\pi}{6}\left[0-(2\log 2 - 1)\right] = -\tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{\pi}{3}\log 2.
\end{aligned}
$$

---

7. La matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate $\phi$ è

$$
J_\phi = \begin{pmatrix} 2v & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\det J_\phi| = 2v.
$$

Il dominio di integrazione $E$ diventa

$$
E' = \left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \le 1,\ v \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}
$$

e quindi

$$
I \;=\; \int_{E'} \frac{4u^2v^2+4v^2w^2}{8v^3} 2v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.
$$

Integrando per strati paralleli al piano $uw$ e passando a coordinate polari $u=\rho\cos\varphi,\ v=\rho\sin\varphi$

$$
I \;=\; \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{1-v^2}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}v = \pi\left(\frac{4}{15} - \frac{49}{320}\sqrt{3}\right).
$$

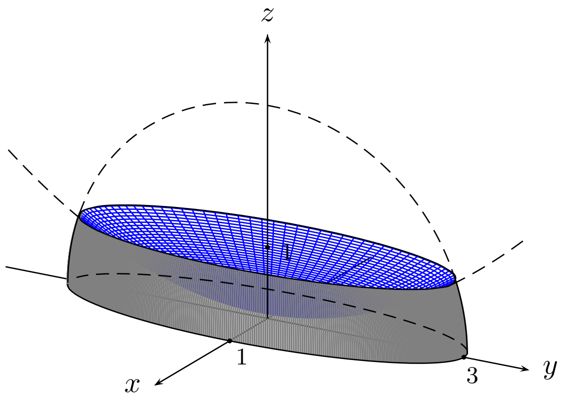
## Ulteriori integrali tripli

8. $\displaystyle\int_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$

$$\int_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 r^2 \cos^2\theta y \,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\theta \right\} \mathrm{d}y =$$
$$\int_0^1 y \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

---

9. $\displaystyle\int_D \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 9z \le 1 + y^2 + 9x^2,\ 0 \le z \le \sqrt{9-(y^2+9x^2)}\}.$




L'equazione $z = \frac{1}{9} + \frac{y^2}{9} + x^2$ rappresenta un paraboloide ellittico di vertice $\left(0,0,\frac{1}{9}\right)$ mentre $z^2+y^2+9x^2 = 9$ è un'ellissoide di centro l'origine e semiassi $1,3$ e $3$. Il dominio di integrazione è l'ellissoide, tolta la parte superiore del paraboloide. Diciamo $D = D_1 - D_2$, con $D_1$ ellissoide e $D_2$ intersezione dell'ellissoide e del paraboloide.

Dunque sembra naturale

$$\int_D = \int_{D_1} - \int_{D_2}.$$

La funzione da integrare è costante rispetto ad $x$ ed $y$. Quindi conviene integrare per strati paralleli al piano $xy$.

$$\int_{D_1} \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \left[ \int_{S_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right] \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}z,$$

ove $S_z$ è l'ellisse $y^2 + 9x^2 = 9 - z^2$, ossia

$$\frac{y^2}{9-z^2} + \frac{x^2}{1-\frac{z^2}{9}} = 1,$$

la cui area è

$$\pi \cdot (9-z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{z^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3} \cdot (9-z^2).$$

Dunque

$$\int_{D_1} \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \int_0^3 \frac{9-z^2}{3-z} \,\mathrm{d}z.$$

Notare: questo metodo non funziona perché si è incontrato un integrale improprio divergente. Si noti però che il punto $(0,0,3)$ non appartiene al dominio d'integrazione.

Procediamo allora in un altro modo. Chiamiamo $D_1$ e $D_2$ i due insiemi in figura e notiamo che

$$D = D_1 \cup D_2 \quad \Rightarrow \quad \int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2}.$$

Per $z$ fissato, $z \in \left[0, \frac{1}{9}\right]$ va calcolato $\displaystyle\int_{S_z} \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, con $S_z$ ellisse di area $\frac{\pi}{3} \cdot (9-z^2)$, come visto sopra, e quindi

$$\int_{D_1} \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{3-z}(9-z^2) \,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{1}{9}} (3+z) \,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{162}\right) = \frac{55}{486}\pi.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{D_2}$, ancora per strati perpendicolari all'asse $z$.

In questo caso la sezione è la corona ellittica

$$S_z = \{(x,y,z) \mid 9z-1 \leq y^2 + 9x^2 \leq 9 - z^2\}.$$

Inoltre abbiamo

$$\frac{1}{9} \leq z \leq ?$$

cioè va capito a che quota si intersecano l'ellissoide ed il paraboloide. Si impone quindi l'uguaglianza

$$z = \frac{1}{9} + \left(\frac{y^2}{9} + x^2\right) = 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{9} + x^2\right)} \quad \text{ossia} \quad z = 3 \cdot \sqrt{1 - z + \frac{1}{9}} \quad \Rightarrow \quad z^2 + 9z - 10 = 0,$$

le cui radici sono $z = 1,\ z = -11$ e di cui va presa la positiva. Dunque $\frac{1}{9} \leq z \leq 1$ ed abbiamo

$$\int_{D_2} \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\frac{1}{9}}^1 \frac{1}{3-z} \left[\int_{S_z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}z = \text{Area}\, S_z \cdot \int_{\frac{1}{9}}^1 \frac{1}{3-z} \,\mathrm{d}z.$$

L'area di $S_z$ è

$$\frac{\pi}{3} \cdot (9-z^2) - \frac{\pi}{3} \cdot (9z-1) = -\frac{\pi}{3} \cdot (z^2 + 9z - 10),$$

dunque

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_2} \frac{1}{3-z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{3}\cdot\int_{\frac{1}{9}}^{2} \frac{z^2+9z-10}{3-z}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\cdot\int_{\frac{1}{9}}^{2}\left(z+12+\frac{26}{z-3}\right)\mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{z^2}{2}+12z+26\log|z-3|\right]_{\frac{1}{9}}^{2} = \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{4}{2}+12\cdot 2+26\log|-1| - \left(\frac{1}{181}\cdot\frac{1}{2}+\frac{12}{9}+26\log\left|\frac{1}{9}-3\right|\right)\right] = \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\left(26-\frac{1}{162}-\frac{4}{3}-26\log\frac{26}{9}\right) = \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{3995}{162}-26\log\frac{26}{9}\right).
\end{aligned}
$$

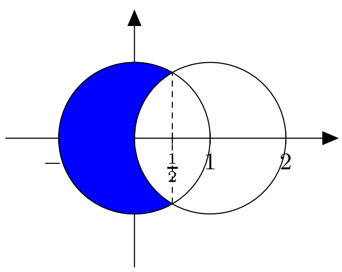
Concludendo,

$$
\int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2} = \frac{55}{486}\pi + \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{3995}{162}-26\log\frac{26}{9}\right) = \frac{25\pi}{3} - \frac{26\pi}{3}\log\frac{26}{9}.
$$

---

10. $\displaystyle\int_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\qquad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$

$2x = x^2+y^2+z^2$ è come scrivere $(x-1)^2+y^2+z^2=1$, dunque il dominio di integrazione è la zona interna alla sfera $x^2+y^2+z^2=1$, meno l'intersezione con la sfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. La sezione del dominio con piano $y=0$ è




Se poniamo $D_1 = D\cap\{x\le 0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\le 0\}$ e $D_2 = D\cap\{x>0\}$, possiamo scrivere

$$
\int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2}
$$

e, dal momento che la funzione integranda è costante rispetto ad $y$ e $z$, conviene calcolare i due integrali per strati paralleli al piano $(y,z)$.

Per quanto riguarda $D_1$, le sezioni con piani perpendicolari all'asse $x$ sono cerchi $S_x$, di raggio $\sqrt{1-x^2}$, quindi

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_1} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{0}\left(\int_{S_x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\cdot\operatorname{Area} S_x\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-1}^{0} x\cdot\pi\cdot(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{0}(x-x^3)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda $D_2$, le sezioni $T_x$ sono corone circolari di raggi $\sqrt{2x - x^2}$ e $\sqrt{1 - x^2}$, e quindi

$$\int_{D_2} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_{T_x} x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \mathrm{Area}\, T_x \,\mathrm{d}x =$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \pi \cdot [1 - x^2 - (2x - x^2)] \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x - 2x^2) \,\mathrm{d}x = \pi \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{24}.$$

Concludendo
$$\int_D = \int_{D_1} + \int_{D_2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24} = -\frac{5\pi}{24}.$$

## Applicazioni

11. (a) La regione $A$ è delimitata dalle superfici $z = x^2+y^2-2$ e $z = 4-x-y$ e la sua proiezione sul piano $xy$ è il dominio $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Indichiamo con $V$ il volume di $A$ ed integriamo per fili paralleli all'asse $z$:

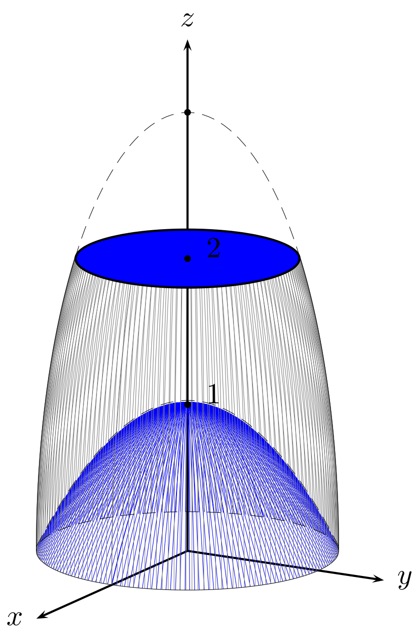
$$V = \int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_D \left( \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D (6 - x - y - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Passando a coordinate polari

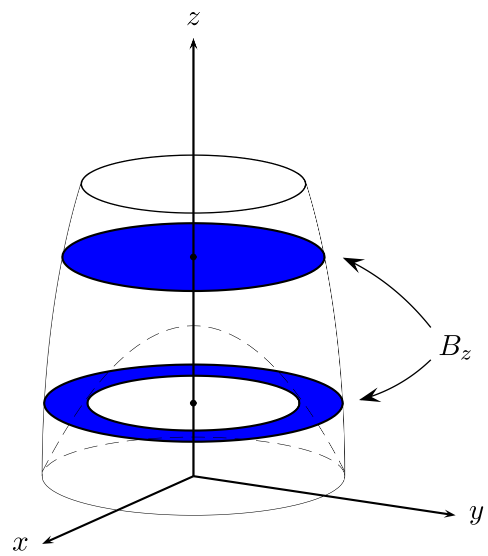
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (6 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta - \rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ 3\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}(\cos\theta + \sin\theta) - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{11}{4} - \frac{1}{3}(\cos\theta + \sin\theta) \right] \mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{11}{2}\pi. \end{aligned}$$

---

(b) La superficie $z = 1 - (x^2 + y^2)$ è un paraboloide di rotazione di vertice $U = (0, 0, 1)$, mentre $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ è un ellissoide di semiassi $1, 1, 3$ e centro $(0, 0, 0)$.




Le sezioni $B_z$ di $B$ con piani $z = cost$, per $0 \leq z \leq 1$ sono corone circolari di raggi $r_1 = \sqrt{1-z}$ ed $r_2 = \sqrt{1 - \frac{z^2}{9}}$, mentre per $1 \leq z \leq 2$ sono cerchi di raggio $r_2$.

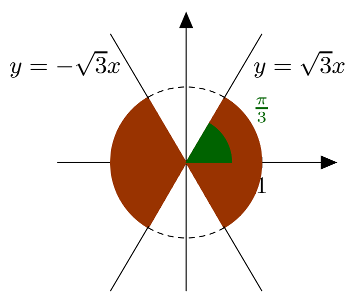



Quindi

$$
\begin{aligned}
V &= \int_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_{B_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z + \int_1^2 \left(\int_{B_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{z^2}{9} - 1 + z\right)\mathrm{d}z + \pi \int_1^2 \left(1 - \frac{z^2}{9}\right)\mathrm{d}z = \\
&= \pi \left[\tfrac{z^2}{2} - \tfrac{z^3}{27}\right]_0^1 + \pi \left[z - \tfrac{z^3}{27}\right]_1^2 = \\
&= \tfrac{65}{54}\pi.
\end{aligned}
$$

---

(c) La proiezione $D$ di $C$ sul piano $xy$ è




Integrando per fili paralleli all'asse $z$

$$V = \int_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_D \left(\int_0^{3x^2 - y^2} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D (3x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dots$$

passando a coordinate polari

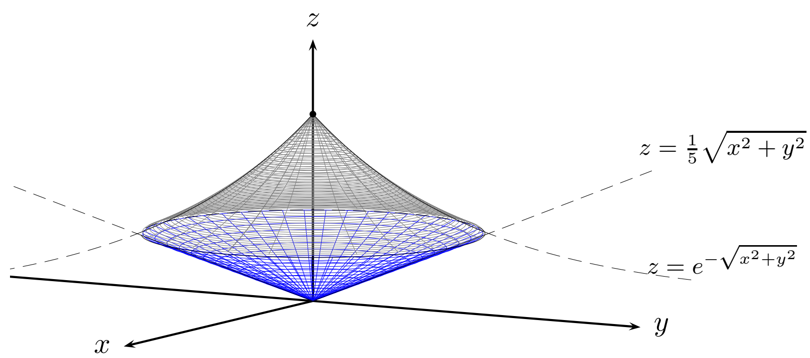
$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^1 (3\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left[\int_0^1 (3\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \\
&= \tfrac{1}{4}\left[\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 + 2\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] = \\
&= \tfrac{1}{4}\left\{[\theta + \sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + [\theta + \sin 2\theta]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\right\} = \\
&= \tfrac{1}{4}\left\{\left[\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \left[\left(\tfrac{4\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\} = \\
&= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

---

(d) La proiezione $D$ di $E$ sul piano $xy$ è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le \alpha\},$$

dove $1 < \alpha < 2$ è la radice dell'equazione $\mathrm{e}^{-\alpha} = \frac{1}{5}\alpha$.

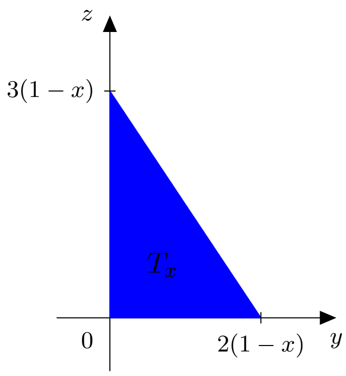



Integrando per fili paralleli all'asse $z$:

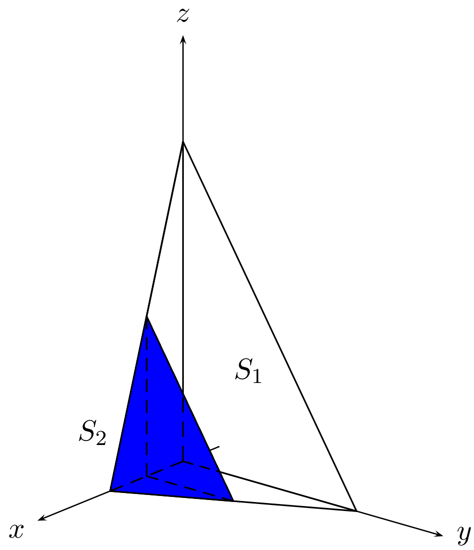
$$\begin{aligned}
V &= \int_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_D \left(\int_{\frac{1}{5}\sqrt{x^2+y^2}}^{\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \left(\mathrm{e}^{\rho} - \frac{1}{5}\rho\right)\rho\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 2\pi\left(1 - \alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} - \tfrac{1}{15}\alpha^3\right).
\end{aligned}$$

---

12. La sezione del tetraedro $ABCD$ mediante i piani $x = cost$ è




Denotiamo con $V_1$ e $V_2$ i volumi di $S_1$ ed $S_2$ rispettivamente.




Si ha

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_{S_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^k \left(\int_{T_x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x = \int_0^k \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1-x)\cdot 3\cdot(1-x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^k 3\cdot(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \left[-(1-x)^3\right]_0^k = 1-(1-k)^3, \\
V_2 &= \int_{S_2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_k^1 \left(\int_{T_x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x = \int_k^1 3\cdot(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[-(1-x)^3\right]_k^1 = (1-k)^3.
\end{aligned}$$

Dunque la condizione affinché si abbia $V_1 = V_2$ è

$$1-(1-k)^3 = (1-k)^3 \quad \Rightarrow \quad k = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

13. Ricordiamo che se $f(x)$, $x \in [a, b]$, è una funzione continua, il volume del solido ottenuto ruotandone il grafico intorno all'asse delle ascisse è dato da

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) $V = \pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right]$. Notare che il volume rimane finito al tendere di $x_1$ a $+\infty$.

---

(b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^{2/3})^3\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 3x^{2/3} + 3x^{4/3} - x^2)\,\mathrm{d}x = \\ &= \pi \left[x - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x^3\right]_{-1}^{1} = \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{9}{5} + \frac{9}{7} - \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{32\pi}{105}. \end{aligned}$$

---

(c) $V = \pi \int_0^a x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{7} a^7$.

---

(d) $V = \pi \int_0^a \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{2a} - 1\right)$.

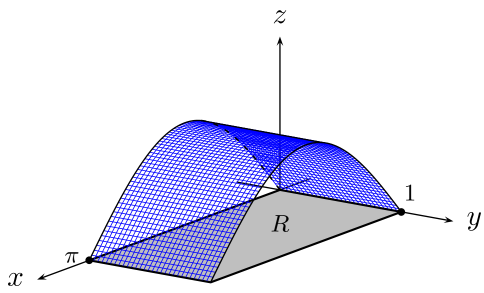
---

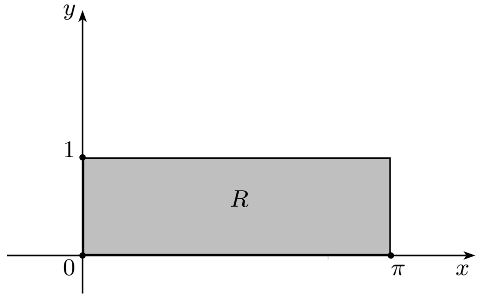
(e)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^a \left(\frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2a} - 1\right) + 2a - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2a} - 1\right)\right] = \\ &= \frac{\pi}{4}(2a + \sinh 2a). \end{aligned}$$

---

14. (a) Si tratta del volume di un cilindro la cui proiezione sul piano $z = 0$ è il rettangolo $R = [0, \pi] \times [0, 1]$.



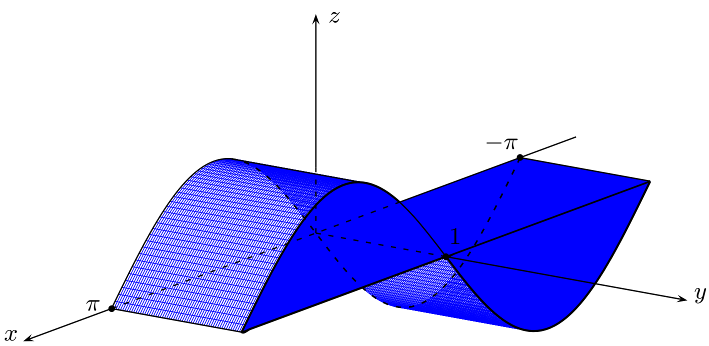




Conviene quindi integrare per fili:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_R \left[ \int_0^{\sin x} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_R \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1 \left[ \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.
\end{aligned}
$$

---

(b) Si tratta ancora di calcolare il volume di un cilindro, ma ora il grafico di $z = \sin x$ è in parte sopra e in parte sotto il piano $z = 0$.



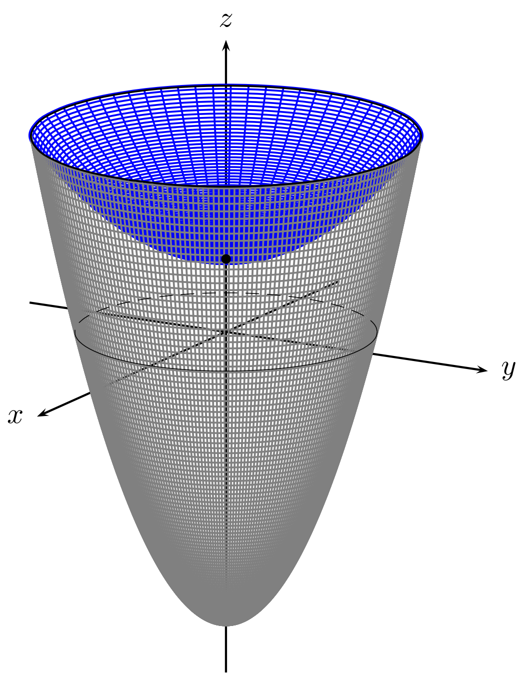

Quindi vanno calcolati due integrali: quello relativo alla parte di solido nel semispazio $z \geq 0$ e quello relativo alla parte di solido in $z < 0$, che dà non il volume ma l'opposto del volume. I due numeri vanno quindi sottratti.

Usando la simmetria della figura ed il calcolo precedente, si vede che il volume vale 4.

---

15. I due paraboloidi si intersecano lungo la circonferenza

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}, \ z = \frac{20}{3}.$$




Per simmetria $x_a = y_a = 0$. Verifichiamo che anche $z_a = 0$, cioè che

$$\int_E z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0,$$

dove

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -10 + 5(x^2 + y^2) \leq z \leq \frac{10}{3} + x^2 + y^2 \right\}.$$

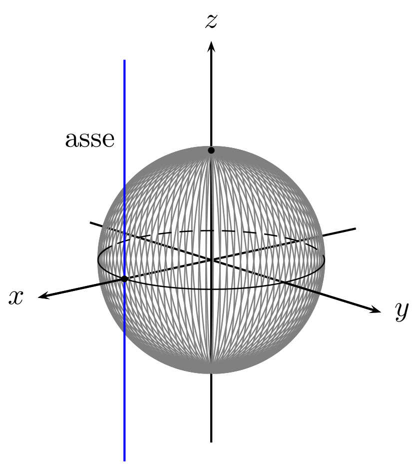
La proiezione di $E$ sul piano $xy$ è

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{10}{3} \right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse $z$:

$$\begin{aligned} \int_E z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_D \left( \int_{-10+5(x^2+y^2)}^{\frac{10}{3}+x^2+y^2} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{10}}{3}} \rho \left[ \left( \frac{10}{3} + \rho^2 \right)^2 - (5\rho^2 - 10)^2 \right] \mathrm{d}\rho = 0. \end{aligned}$$

16. (a) Prendiamo come asse di rotazione la retta tangente di equazioni $x = R,\ y = 0$. La distanza del punto $(x, y, z)$ da tale retta è data da $\sqrt{(R-x)^2 + y^2}$.




Dunque il momento d'inerzia è

$$I = \int_D [(R-x)^2 + y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Se passiamo a coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & r \le \rho \le R, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = \rho\cos\varphi, & -\pi \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

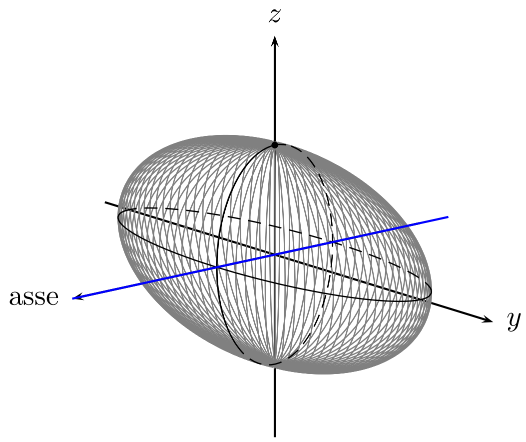
abbiamo che il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana della trasformazione è

$$|\det J| = \rho^2 \sin\varphi,$$

e dunque il momento d'inerzia diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \rho^2 \sin\varphi (R^2 - 2R\rho\cos\theta\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta \right\} \mathrm{d}\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \cdot \frac{R^3}{3} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi} 2R \cdot \frac{R^4}{4} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta + 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R^5}{5} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{2\pi R^5}{3}[-\cos\varphi]_0^{\pi} + \frac{R^5}{2} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot [\sin\theta]_0^{2\pi} + \frac{2\pi R^5}{5} \left[ -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{4\pi R^5}{3} + 0 + \frac{2\pi R^5}{5} \left[ 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{4\pi R^5}{3} + \frac{8\pi R^5}{15} = \\ &= \frac{28\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

(b) L'asse di rotazione sia quello delle ascisse.




La distanza di $(x, y, z)$ da tale asse è $\sqrt{z^2 + y^2}$. Il momento d'inerzia è

$$I = \int_D (z^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Passando a coordinate polari ellittiche

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi & 0 \le \rho \le 1, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = c\rho\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

si trova che il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana della trasformazione è

$$|\det J| = abc\rho^2 \sin\varphi,$$

e dunque il momento d'inerzia diventa

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^1\left(c^2\rho^2\cos^2\varphi + b^2\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)abc\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\theta = \\
&= abc\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^1\rho^4\left(c^2\cos^2\varphi\sin\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^3\varphi\right)\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{abc}{5}\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}c^2\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}b^2\sin^2\theta\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta\right] = \\
&= \frac{abc}{5}\left\{2\pi c^2\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} + b^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta)}{2}\right)\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right\} = \\
&= \frac{abc}{5}\left\{2\pi c^2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] + \pi b^2\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}\right\} = \\
&= \frac{abc}{5}\left[\frac{4\pi c^2}{3} + \pi b^2\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)\right] = \\
&= \frac{abc}{5}\left[\frac{4\pi c^2}{3} + \frac{4\pi b^2}{3}\right] = \\
&= \frac{4\pi abc}{15}(b^2+c^2).
\end{aligned}$$

---

(c) L'asse di rotazione sia l'asse $z$. La distanza di $(x, y, z)$ da tale asse è $\sqrt{x^2+y^2}$. Va quindi calcolato

$$I = \int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Passando a coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & r \le \rho \le R, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = \rho\cos\varphi, & -\pi \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

si trova che il momento d'inerzia è

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\int_r^R\left(\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta\right\}\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\int_0^{\pi}\left(\int_r^R\rho^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\cdot\frac{(R^5-r^5)}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{2\pi(R^5-r^5)}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{2\pi(R^5-r^5)}{5}\cdot\frac{4}{3} = \\
&= \frac{8\pi(R^5-r^5)}{15}.
\end{aligned}$$