Soluzioni per HW2

Problema 1 :

Dobbiamo verificare che $\neg(P \wedge Q)$ e $(\neg P) \vee (\neg Q)$ abbiano le stesse tabelle di verità

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F

Questo può essere omesso — Le stesse tabelle di verità

Problema 2 :

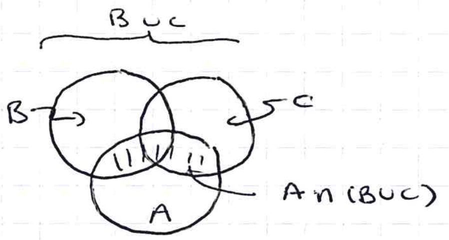
Usiamo lo stesso modo del problema 1

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V

Le stesse tabelle di verità

Problema 3

Diagramma



$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$*$ = qualsiasi valore

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in B \cup C$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cap C$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
F	*	*	*	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Può essere omesso — le stesse

$$\therefore \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Problema 4

Richiamo che se x è un numero naturale allora $x+1$ è un numero naturale.

Supponiamo che N sia un numero naturale con la proprietà se m è qualsiasi altro numero naturale allora

$$N \geq m$$

Sia $m = N+1$. Allora,

$$N \geq N+1 \quad \text{oppure} \quad 0 \geq 1$$

Supporre che questa affermazione sia vera implica un affermazione che si sia essere falsa

Ma questa e' una contraddizione

$\Longrightarrow$ Non esiste un numero naturale più grande di tutti.

Problema 5 :

Usiamo il Principio di Induzione

$$P(N): \sum_{k=1}^{N} (2k-1) = N^2$$

$$\underline{P(1)}: \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2 \quad \checkmark \text{ Vera}$$

$$P(N) \Longrightarrow P(N+1): \sum_{k=1}^{N+1} (2k-1) = [2(N+1)-1] + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (2k-1)}_{P(N)}$$

$$= 2N+1 + N^2$$

$$= (N+1)^2$$ che è l'affermazione $P(N+1)$.

Questo completa la dimostrazione per induzione

Problema 6a: Le funzione iniettiva hanno la proprietà di cancellazione

$$\gamma(x_1) = \gamma(x_2) \Rightarrow \cancel{\gamma}(x_1) = \cancel{\gamma}(x_2)$$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ iniettive

$h(x) = g(f(x))$ implica che

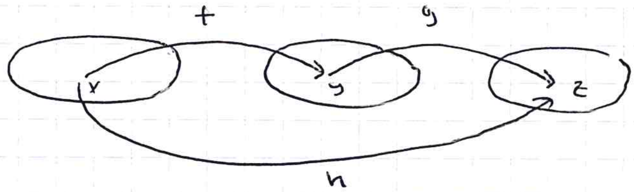
$$h(x_1) = h(x_2) \iff \cancel{g}(f(x_1)) = \cancel{g}(f(x_2))$$
$$\iff \cancel{f}(x_1) = \cancel{f}(x_2)$$
$$\iff x_1 = x_2.$$

$\therefore$ h è iniettiva

Problema 6b: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ surrettive

$h: X \to Z$, $h(x) = g(f(x))$.

h è surrettiva



Sia z un elemento di Z. Allora, per la surrettività di g, existe $y \in Y$ tali che

$$g(y) = z.$$

Allo stesso modo, per la surrettività di f, esiste $x \in X$ tali che

$$f(x) = y$$

$$\Longrightarrow h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Problem 6c: Biunivoca = iniettiva + surriettiva

$\therefore$ $6a + 6b \Longrightarrow 6c$

Problema 7 :

$$\{1,2,3,4,5\} = \underbrace{\{1,3,5\}}_{A} \cup \underbrace{\{2,4\}}_{B}$$

Sia $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ tali che

x dispari $\Rightarrow$ $f(x)$ dispari.

Allora $f : A \to A$ è una permutazione

(molto formalmente, la restrizione di f a una funzione $A \to A$ è una permutazione di A).

Poiché A ha 3 elementi, il numero di tali permutazione è 6. $\Big\}$ $\underline{\underline{3!}}$

Attenzione : $f : B \to B$ è anche una permutazione.

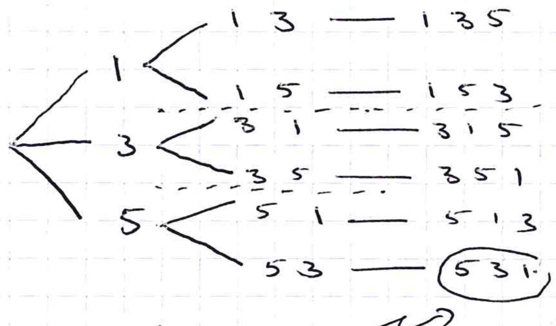
$\#$ permutazione $(B) = 2! = 2$

Per la regola del prodotto ci sono $(6)(2) = 12$ tali permutazione in totale.

$\left\{ \begin{array}{l} f : A \to A \\ f : B \to B \\ A \cap B = \emptyset \\ \Rightarrow f \text{ e' determinata dai suoi valori su } A \text{ e } B \end{array} \right.$

Il diagramma ad albero

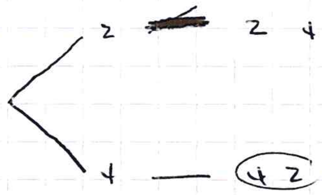
$f : A \to A$



Questa è la permutazione

$f(1) = 5$
$f(3) = 3$
$f(5) = 1$ $\Big|$ $A \to A$

$f : B \to B$



Questa è la perm

$f(2) = 4$
$f(4) = 2$

$B \to B$