Il materiale che troverai in questo documento è completamente gratuito. Per quanto riguarda il contenuto, dato che non è stato rivisto da "esperti", mi preme precisare che NON garantisco in alcun modo la correttezza totale.

Il documento è rilasciato sotto i termini della licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia. Per visionare una copia completa della licenza, visita http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode.

Lo scopo di tutto ciò non è tanto arricchire il mio curriculum personale, bensì condividere le mie conoscenze con il maggiore numero di persone possibile. Considera questo documento anche come un invito a pubblicare e condividere i tuoi saperi, perché il fondamento di una vera formazione è il libero accesso al sapere in tutte le sue forme.

"Information is power. But like all power, there are those who want to keep it for themselves.

...

Those with access to these resources - students, librarians, scientists - you have been given a privilege.

...

Meanwhile, those who have been locked out are not standing idly by. You have been sneaking through holes and climbing over fences, liberating the information locked up by the publishers and sharing them with your friends. But all of this action goes on in the dark, hidden underground. ***It's called stealing or piracy, as if sharing a wealth of knowledge were the moral equivalent of plundering a ship and murdering its crew.*** *But sharing isn't immoral - it's a moral imperative. Only those blinded by greed would refuse to let a friend make a copy.*

...

There is no justice in following unjust laws. It's time to come into the light and, in the grand tradition of civil disobedience, declare our opposition to this private theft of public culture.

...

With enough of us, around the world, we'll not just send a strong message opposing the privatization of knowledge - we'll make it a thing of the past. Will you join us?"

Guerilla Open Access Manifesto
Aaron Swartz

Ricerca Operativa
Domande Esame Orale

Rambod Rahmani
rambodrahmani@autistici.org
Relentlessly pursue knowledge and selflessly share it with others.

November 23, 2017

Abstract

La presente dispensa contiene domande e relative risposte dell'esame orale di Ricerca Operativa del Prof. Massimo Pappalardo per il corso di Ingegneria Informatica dell'Università di Pisa.

Keywords: ricerca , operativa , esame , orale , prof , pappalardo , unipi , rambod , rahmani

Dedicato a mio fratello gemello Ramtin.

Indice

1 Introduzione

La presente dispensa contiene domande e relative risposte dell'esame orale di Ricerca Operativa del Prof. Massimo Pappalardo per il corso di Ingegneria Informatica dell'Universitaà di Pisa.

Le domande sono state prese da esami orali precedenti al 11/2017.

Le risposte sono state fornite facendo riferimento agli appunti delle lezioni e ai seguenti libri di testo:

- Ricerca Operativa - Massimo Pappalardo, Mauro Passacantando
- Fondamenti di Ricerca Operativa - Fabio Schoen
- Ricerca operativa - Paolo Serafini

Gli esempi sono stati verificati utilizzando Wolframalpha e Geogebra.

Tuttavia non mi assumo alcuna responsabilità per quanto riguarda la correttezza delle risposte presenti e scoraggio di utilizzare la presente come unico strumento per preparare l'esame.

Il contenuto è diviso in due blocchi: il primo blocco contiene domande raggruppate per argomento mentre il secondo blocco contiene domande raggruppate per esame.
Per ogni domanda è presente un esempio di risposta da fornire in sede di esame e, quando possibile, la relativa parte di teoria (più approfondita) dalla quale deriva la risposta fornita.

In cambio del tempo che ho dedicato io per la stesura del presente documento, ti prego di diffonderlo a coloro che potrebbero averne bisogno.

2 Domande per Argomento

Questa prima raccolta di domande è divisa per argomento in quattro sezioni:

- Programmazione Lineare
- Programmazione Lineare Su Reti
- Programmazione Lineare Intera
- Programmazione Non Lineare

2.1 Programmazione Lineare

2.1.1 Definizione di soluzione di base duale non ammissibile, non degenere e disegnarne una non ammissibile.

Risposta:
Dato un problema di PL in forma duale standard, presa una base B quindi una matrice di base A_B, indicato con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B, si definisce "soluzione di base duale" il vettore

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_N = 0. \tag{2}$$

Una soluzione di base duale è non ammissibile se

$$\exists i \in B : \bar{y}_i < 0 \tag{3}$$

mentre viene detta degenere se

$$\bar{y}_i \neq 0 \quad \forall i \in B. \tag{4}$$

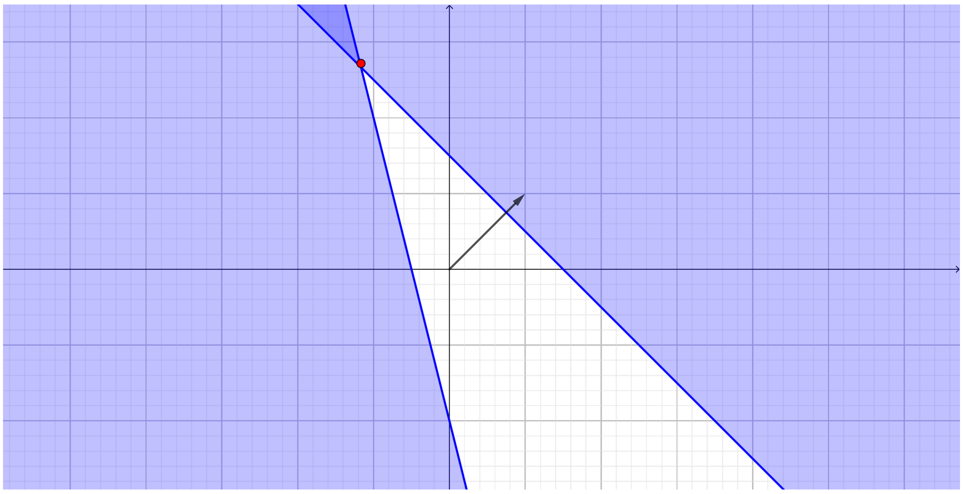


Figura 1: Soluzione di base duale non ammissibile

Teoria:
È possibile dare una caratterizzazione algebrica del concetto geometrico di vertice di un poliedro. Supponiamo di avere una coppia primale/duale di problemi di PL, $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$, dunque sono noti $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases}, \tag{5}$$

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T,\ y \geq 0\} \end{cases}. \tag{6}$$

Se il rango di A è minore di n, allora, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema lineare $Ax = 0$ ammette infinite soluzioni non nulle. Ciascuna di tali soluzioni è una direzione di linealità del poliedro primale $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Quindi se il rango di A è minore di n, si ha che $lineal(P) \neq \{0\}$, che equivale a dire che il poliedro P non contiene vertici.
Se invece il rango di A è uguale a n, allora l'unica soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$ è la soluzione nulla, ossia $lineal(P) = \{0\}$, che equivale a dire che il poliedro P contiene vertici. In tal caso, la matrice A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile.

Chiameremo *base* un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$, non necessariamente consecutivi, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A estraendo le righe A_i con $i \in B$, sia invertibile, cioè $det(A) \neq 0$. La matrice

A_B si chiamerà matrice di base, mentre indicheremo con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B.

Dalla partizione degli m indici di riga in B e N si ha l'analoga partizione per i vettori b e $y \in \mathbb{R}^m$ e per la matrice A:

$$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Data una base B, definiamo:
Soluzione di base prima:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \tag{8}$$

Soluzione di base duale:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \tag{9}$$

dove

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_N = 0. \tag{10}$$

Una soluzione di base (prima o duale) può essere ammissibile o non ammissibile, degenere o non degenere secondo il seguente schema:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Ammissibile	$A_i\bar{x} \leq b_i \ \forall i \in N$	$\bar{y}_i \geq 0 \ \forall i \in B$
Non Ammissibile	$\exists i \in N : A_i\bar{x} > b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$
Degenere	$\exists i \in B : A_i\bar{x} = b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$
Non Degenere	$A_i\bar{x} \neq b_i \ \forall i \in N$	$\bar{y}_i \neq 0 \ \forall i \in B$

2.1.2 Enunciare la condizione di ottimalità della PL.

Risposta:
Data una coppia primale/duale di problemi di PL, $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$, presa una base B e quindi una matrice di base A_B, indicato con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B, si genere una coppia di soluzioni di base, $\bar{x}$ e $\bar{y}$, dette complementari:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \; , \tag{1}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} , \tag{2}$$

dove

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_N = 0. \tag{3}$$

Data una coppia di soluzioni di base complementari, $\bar{x}$ e $\bar{y}$, si ha che

$$\begin{cases} \bar{x} \text{ è ammissibile per } (\mathcal{P}) \\ \bar{y} \text{ è ammissibile per } (\mathcal{D}) \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x} \text{ è ottimo per } (\mathcal{P}) \\ \bar{y} \text{ è ottimo per } (\mathcal{D}) \end{cases} \tag{4}$$

Teoria:
Supponiamo di avere una coppia primale/duale di problemi di PL, $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$, dunque sono noti $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \; , \end{cases} \tag{5}$$

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \left\{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \; y \geq 0\right\} . \end{cases} \tag{6}$$

In riferimento a questa coppia di problemi si può formulare il seguente:

Teorema 1 (Condizioni di ottimalità per la coppia primale/duale)**.** *Due punti (soluzioni di base) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime, rispettivamente, del problema $(\mathcal{P})$ e del problema $(\mathcal{D})$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

- $A_i \bar{x} \leq b_i \;\; \forall i \in N$ *(condizione di ammissibilità primale)*
- $\bar{y}_i \geq 0 \quad \forall i \in B$ *(condizione di ammissibilità duale)*
- $\bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0$ *(condizioni di complementarità)*

- $(\bar{y}^T A - c^T)\bar{x} = 0$

Le condizioni di complementarità seguono a loro volta dal seguente:

Teorema 2 (Scarti complementari)**.** *Supponiamo che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano ammissibili rispettivamente per i problemi $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$. Allora si ha:*

$$\bar{x}\,,\bar{y} \quad \textit{sono ottime} \iff \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0 \tag{7}$$

Quando $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ si dice che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono in scarti complementari.

Dimostrazione. Per il teorema della dualità forte due soluzioni ammissibili $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime se e solo se hanno lo stesso valore:

$$c^T\bar{x} = \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b \tag{8}$$

cioè

$$\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0. \tag{9}$$

QED

Essendo $\bar{y}$ e $b - A\bar{x}$ due vettori non negativi per l'ammissibilità di $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione (14) è equivalente alle condizioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Il teorema degli scarti complementari assume una forma espressiva nel caso di problemi in cosiddetta forma simmetrica. I problemi

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

sono uno il duale dell'altro e sono chiamati *coppia duale simmetrica*. Allora, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili, sono soluzioni ottime se e solo se:

$$\begin{cases} \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0 \\ (\bar{y}^T A - c^T)\bar{x} = 0 \;\; . \end{cases} \tag{12}$$

2.1.3 Enunciare il "Test di Ottimalità" per la PL. Nel caso degenere cambia qualcosa?

Risposta:
Data una coppia prima/duale di problemi di PL, $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \qquad (\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Presa una base B e quindi una matrice di base A_B, indicato con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B, si genera una coppia di soluzioni di base complementari $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \ , \tag{2}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \tag{3}$$

dove

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_N = 0. \tag{4}$$

Ora, calcolando le due funzioni obiettivo:

$$c^T \bar{x} = c^T (A_B^{-1} b_B) \tag{5}$$

$$\bar{y}^T b = \begin{pmatrix} \bar{y}_B & \bar{y}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} = \bar{y}^T b_B = (c^T A_B^{-1}) b_B \tag{6}$$

da cui $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b = c^T A_B^{-1} b_B$, da cui segue che:

1. per il teorema della dualità forte, due soluzioni di base ammissibili sono ottime se hanno lo stesso valore;
2. dato $\bar{x} \in P$ ammissibile, trovo $\bar{y}$ complementare e verifico che sia ammissibile: TEST: $c^T A_B^{-1} \geq 0$;
3. dato $\bar{y} \in D$ ammissibile, trovo $\bar{x}$ complementare e verifico che sia ammissibile: TEST: $A_N \bar{x} \leq b_N$;
4. nel caso degenere, dato che $\bar{y}$ degenere implica $c^T A_B^{-1} = 0$, allora $y^T b = c^T A_B^{-1} b_B = 0$, e dunque $c^T x = y^T b = 0$.

Teoria:
Dal punto di vista puramente formale, si può notare che il problema duale viene costruito a partire dal problema originale, che a questo punto viene chiamato *problema primale*, semplicemente trasponendo la matrice dei coefficienti dei vincoli e scambiando fra loro i coefficienti dell'obiettivo con quelli dei termini destri delle disequazioni. Inoltre quando in uno dei due problemi l'obiettivo è un massimo, nell'altro problema l'obiettivo è di minimo.
Fra le tante formulazioni in cui può presentarsi un problema di PL vengono dette *canoniche* quelle formulazioni in cui tutte le variabili sono non negative e non sono presenti equazioni e inoltre le disequazioni sono del tipo $\leq$ se l'obiettivo è un massimo mentre sono del tipo $\geq$ se l'obiettivo è un minimo.
Si noti che il duale del duale è il primale e quindi fra i due problemi c'è una perfetta relazione di **simmetria**.
Un coppia di problemi primale-duale in forma canonica si presenta quindi come

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq b_i & i \in I \\ x_j \geq 0 & j \in J \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{m} y_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_{ij} \geq c_j & j \in J \\ y_i \geq 0 & i \in I \end{cases} \tag{8}$$

(dove $I = \{1, \ldots, m\}$ e $J = \{1, \ldots, n\}$) oppure in sintetica notazione matriciale

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

2.1.4 Illustrare le regole anticiclo di Bland per i problemi di PL.

Risposta:
La finitezza del metodo del simplesso e la sua convergenza verso una soluzione di base ottima non è sempre garantita in presenza di soluzioni di base degeneri. È necessario accompagnare il metodo del simplesso con opportuni accorgimenti per evitare di ripetere la stessa sequenza di soluzioni di base degeneri. Un esempio di regole anticiclo sistematiche sono le regole anticiclo di Bland: tra tutte le variabili candidate al cambio base, scegliere sempre quella di indice minimo.
Pertanto, nel metodo del simplesso, trovata la base ammissibile B, calcolata la soluzione di base primale

$$\bar{x} := A_B^{-1} b_B \,, \tag{1}$$

e la soluzione di base duale

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T A_B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \,, \tag{2}$$

nel simplesso primale, calcolo l'indice uscente come

$$h := min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} \tag{3}$$

l'indice entrante invece come

$$\vartheta := min\left\{ \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} \;:\; i \in N,\;\; A_i W^h > 0 \right\} , \tag{4}$$

$$k := min\left\{ i \in N \;:\; A_i W^h > 0,\;\; \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\} . \tag{5}$$

Per il simplesso duale, calcolo l'indice entrante come

$$k := min\{i \in N : b_i - A_i\bar{x} < 0\} \,, \tag{6}$$

e l'indice uscente come

$$\vartheta := min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} : i \in B \,, A_k W^i < 0 \right\} , \tag{7}$$

$$h := min\left\{ i \in B \;:\; A_k W^i < 0 \,, \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\} . \tag{8}$$

Dove si è posto

$$W := -A_B^{-1} \,. \tag{9}$$

Teoria:
La finitezza del metodo del simplesso e la sua convergenza verso una soluzione ottima non è garantita in presenza di soluzioni di base degenere.

È possibile che, dopo alcune iterazioni "degeneri" si torni a rappresentare il vertice sul quale siamo bloccati con una delle basi già visitate e, quindi, si corre il rischio di ripetere ciclicamente, all'infinito, la stessa sequenza di basi degeneri legate allo stesso vertice. Pertanto, la finitezza del metodo del simplesso e la sua convergenza verso una soluzione ottima *non è garantita* in presenza di soluzioni di base degenere. La questione qui sollevata non è meramente teorica: il rischio di ciclare è concreto ed è necessario accompagnare il metodo del simplesso con accorgimenti che permettano di evitare di ripetere la stessa sequenza di basi degeneri.

Questa situazione indesiderata può essere risolta sfruttando la libertà esistente nel metodo nella scelta di h e k. È possibile definire opportune regole anti-ciclaggio per la selezione di questi indici quando ci sia più di una variabile candidata ad entrare o uscire. Utilizzando queste regole si può garantire *in ogni caso* che il metodo del simplesso converge in un numero finito di passi. È da notare, però, che spesso queste regole non vengono applicate in pratica, perchè eccessivamente onerose e il metodo del simplesso viene applicato senza accorgimenti aggiuntivi. La pratica mostra che i casi in cui, pur non applicando nessuna regola anti-ciclaggio, l'algoritmo non converge (cicla) sono rari. Inoltre, nel momento in cui ci si rende conto di trovarsi in una di queste rare situazioni è sempre possibile applicare le regole anti-ciclaggio (anche ad algoritmo già iniziato). La discussione della reale implementazione pratica del metodo del simplesso è però argomento molto complesso e non può essere qui trattata in dettaglio. Ci limitiamo a riportare una delle più famose e semplici regole anti-ciclaggio, *la regola di Bland*.

Regola anti ciclaggio di Bland: *Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad entrare in base si sceglie quella con indice h più piccolo. Ogni volta che c'è più di una variabile candidata ad uscire dalla base si sceglie quella con indice k più piccolo.*

valgono i seguenti teoremi, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 1. *Supponiamo di applicare il metodo del simplesso con la regola di Bland per la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti (cioè per la scelta di h e k). Allora non viene mai generata due volte la stessa base e quindi esiste un indice* $t \geq 1$ *tale che la base* B_t *nella sequenza generata dal metodo del simplesso soddisfa* *il criterio di ottimalità o quello di illimitatezza e il metodo converge quindi in un numero finito di passi.*

Teorema 2 (Convergenza del simplesso con la regola anticiclo di Bland)**.** *Utilizzandola regola di Bland per la scelta delle variabili per il cambio base, il metodo del simplesso converge sempre in al più* $\binom{n}{m}$ *iterazioni.*

2.1.5 Disegnare un poliedro senza vertici, uno con |E| = 1 e uno con |V| = 1 e |E| = 3.

Risposta:

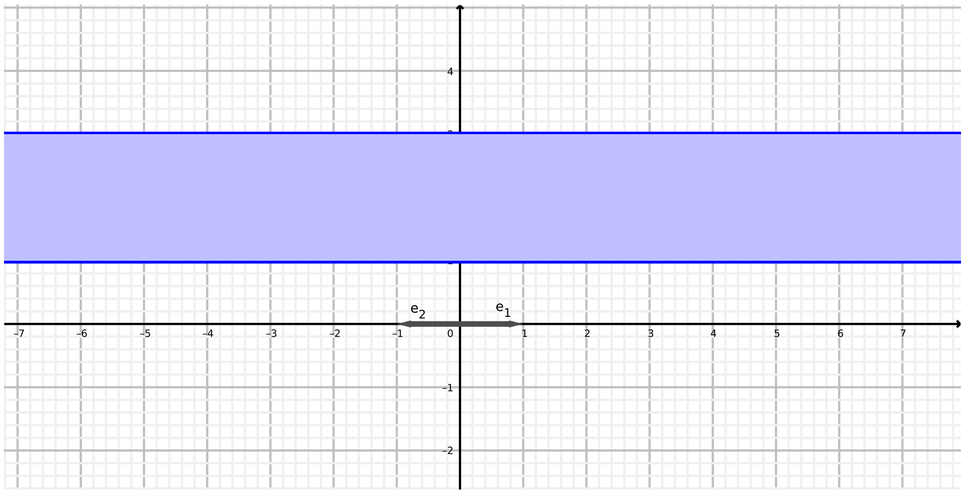


Figura 2: Poliedro senza vertici

Dato da

$$\begin{cases} x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \end{cases} \tag{1}$$

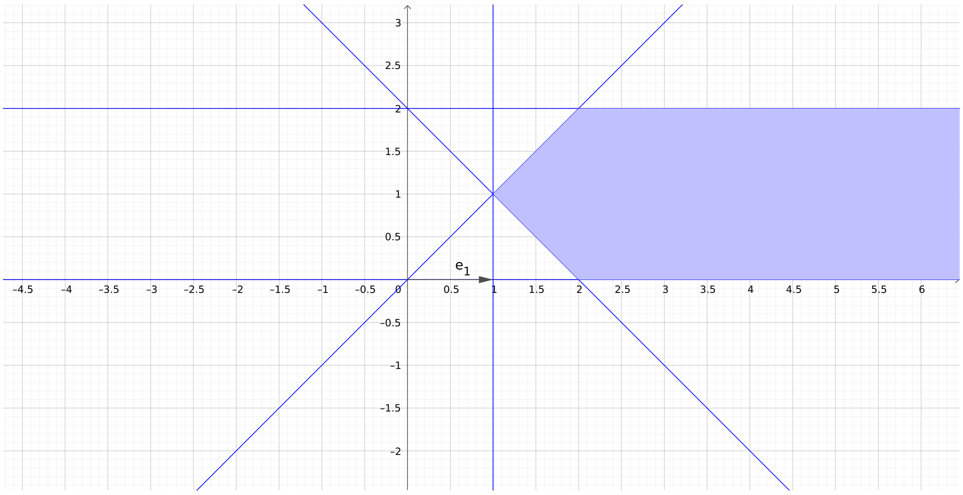


Figura 3: |E| = 1

Dato da

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

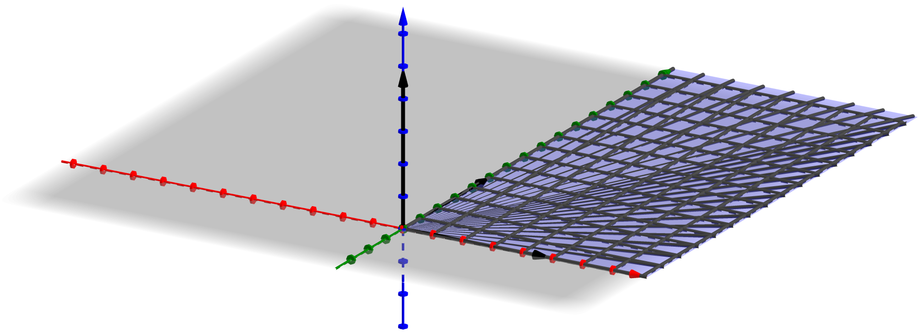


Figura 4: $|V| = 1$ e $|E| = 3$

Dato da

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Notare che una soluzione di questo tipo per il caso $|V| = 1$ ed $|E| = 3$ sarebbe errata:

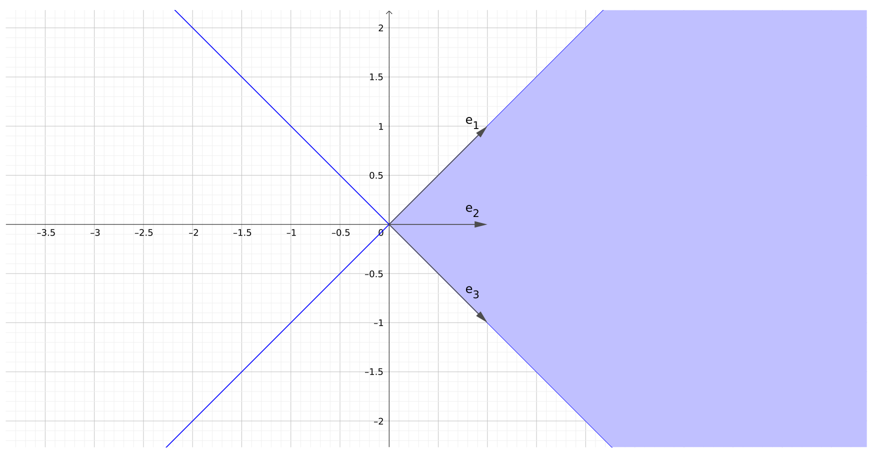


Figura 5: $|V| = 1$ e $|E| = 3$, Errato!

Poiché si potrebbe erroneamente pensare che

$$E = \{e_1,\ e_2,\ e_3\} = \{(1,1),(1,0),(1,-1)\}\ , \tag{4}$$

mentre risulta che

$$e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3\ . \tag{5}$$

Di conseguenza si avrebbe che $|E| = 2$.

Teoria:
Vedere la sezione teoria della domanda 2.1.6.

2.1.6 Disegnare un poliedro con $|V| = 3$ e $|E| = 2$.

Risposta:

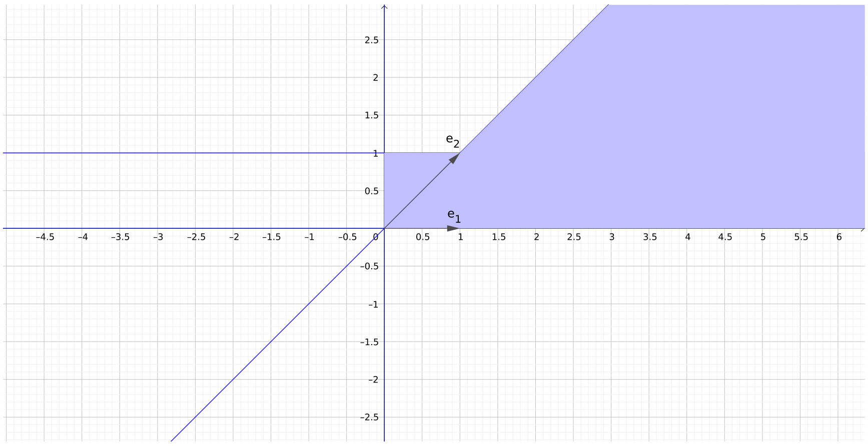


Figura 6: $|V| = 3$ e $|E| = 2$

Dato da

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Oppure:

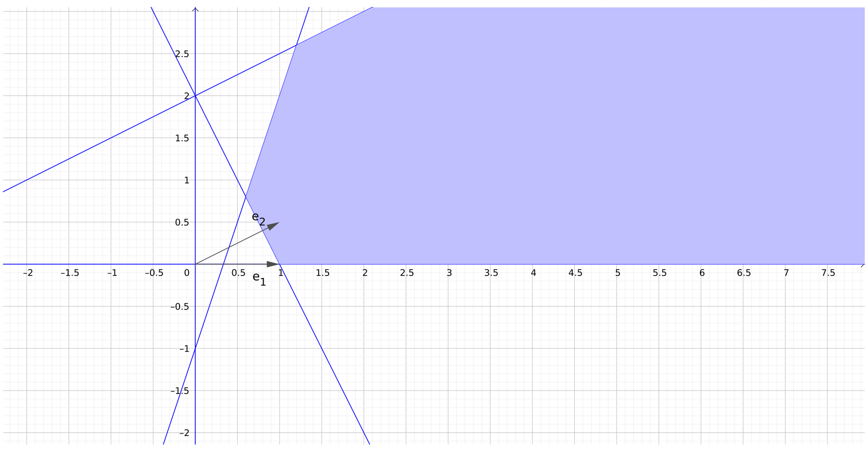


Figura 7: $|V| = 3$ e $|E| = 2$

Dato da

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 2y \geq -4 \\ 3x - y \geq 1 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

Teoria:
I concetti teorici riguardanti i poliedri rappresentati nelle risposte alle domande 2.1.5) e 2.1.6) sono di seguito illustrati.

Definizione 1 (Direzione di recessione)**.** *Una direzione di recessione per un poliedro P è un vettore d tale che*

$$x + \lambda d \in P \qquad \forall x \in P\,, \ \ \forall \lambda \geq 0\,. \tag{3}$$

Quindi d è una direzione di recessione se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti appartenente a P. L'insieme delle direzioni di recessione di P viene denotato con $rec(P)$.
Ovviamente $0 \in rec(P)$ e si osserva che se un poliedro P è limitato allora $rec(P) = \{0\}$.

Teorema 1. *Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$, allora*

$$rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq 0\}\,. \tag{4}$$

Definizione 2 (Direzione di linealità)**.** *Una direzione di linealità per un poliedro P è un vettore d tale che*

$$d \in rec(P), \quad -d \in rec(P)\,. \tag{5}$$

Ossia d è una direzione di linealità se P contiene tutte le rette di direzione d passanti per punti appartenenti a P. L'insieme delle direzioni di linealità di P viene denotato con $lineal(P)$.

Teorema 2. *Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$, allora*

$$lineal(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = 0\}\,. \tag{6}$$

Teorema 3. *L'involucro conico di un insieme finito di punti $\{e^1, \dots, e^p\}$ è un cono poliedrico, cioè esiste una matrice Q tale che*

$$cono(e^1, \dots, e^p) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Qx \leq 0\}\,. \tag{7}$$

Lemma 1. *Un cono poliedrico $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq 0\}$ è l'involucro conico di un insieme finito di suoi punti.*

Siamo ora in grado di dimostrare il risultato principale del paragrafo.

Teorema 4 (Rappresentazione dei poliedri)**.** *Dato un poliedro P, esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \ldots, v^m$ di P ed un insieme finito $E = \{e^1, \ldots, e^p$, eventualmente anche vuoti, tali che*

$$P = conv(V) \oplus cono(E) \; . \tag{8}$$

Teorema 5. *Dato un poliedro P, esiste un sottoinsieme finito V di P tale che*

$$P = conv(V) \oplus rec(P) \; . \tag{9}$$

2.1.7 Scrivere le formule dei rapporti del simplesso primale e del simplesso duale.

Risposta:
La formula dei rapporti del simplesso primale è

$$\vartheta := min\left\{ \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_iW^h} : i \in N, A_iW^h > 0 \right\}, \tag{1}$$

La formula dei rapporti del simplesso duale è

$$\vartheta := min\left\{ \frac{y_i}{-A_kW^i} : i \in B, A_kW^i < 0 \right\}, \tag{2}$$

dove si è posto

$$W := -A_B^{-1} . \tag{3}$$

Teoria:
Nel metodo del simplesso, trovata la base ammissibile B, calcolata la soluzione di base primale

$$\bar{x} := A_B^{-1}b_B , \tag{4}$$

e la soluzione di base duale

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T A_B^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{5}$$

nel simplesso primale, calcolato l'indice uscente come

$$h := min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} , \tag{6}$$

i rapporti vengono usati per determinare l'indice entrante come

$$\vartheta := min\left\{ \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_iW^h} \;:\; i \in N,\;\; A_iW^h > 0 \right\}, \tag{7}$$

$$k := min\left\{ i \in N \;:\;\; A_iW^h > 0,\;\; \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_iW^h} = \vartheta \right\}. \tag{8}$$

Per il simplesso duale, calcolato l'indice entrante come

$$k := min\{i \in N : b_i - A_i\bar{x} < 0\} , \tag{9}$$

i rapporti vengono usati per determinare l'indice uscente come

$$\vartheta := min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} : i \in B \, , A_k W^i < 0 \right\} , \tag{10}$$

$$h := min\left\{ i \in B : \ A_k W^i < 0 \, , \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\} . \tag{11}$$

Dove si è posto

$$W := -A_B^{-1} \, . \tag{12}$$

2.1.8 Illustrare l'algoritmo del simplesso primale.

Risposta:
L'algoritmo del simplesso primale è utilizzato per la risoluzione di problemi di PL in forma primale standard:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b\,. \end{cases} \tag{1}$$

L'algoritmo parte da una soluzione di base primale ammissibile (cioè un vertice), se la soluzione di base complementare è ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il primale e per il duale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base primale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo cresce, mentre se la nuova soluzione di base primale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare nuovamente sulle stesse basi con opportune regole anticiclo.

<u>Algoritmo del simplesso primale:</u>

1. Trovare una base B che genere una soluzione di base primale ammissibile.
2. Calcolare la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e la soluzione di base duale $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}$ e $\bar{y}_N = 0$.
3. **if** $y_B \geq 0$ **then STOP** ($\bar{x}$ è ottima per $(\mathcal{P})$ e $\bar{y}$ è ottima per (D))
   else calcolare l'indice uscente
   $$h := min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$$
   (regola anticiclo di Bland),

   porre $W = -A_B^{-1}$ ed indicare con W^h la h-esima colonna di W.
4. **if** $A_i W^h \leq 0 \;\; \forall i \in N$ **then STOP** ($(\mathcal{P})$ ha valore ottimo $+\infty$ e $(\mathcal{D})$ è vuoto)
   else calcolare
   $$\vartheta := min\left\{ \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} \; : \; i \in N, \;\; A_i W^h > 0 \right\},$$
   calcolare l'indice uscente
   $$k := min\left\{ i \in N \; : \; A_i W^h > 0, \;\; \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\},$$

(regola anticiclo di Bland),

aggiornare la base $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ e tornare al passo 2.

Teoria:
Il metodo del simplesso, inventato da Dantizig nel 1947, è uno degli algoritmi risolutivi della PL. Fino al 1979 è stato l'unico metodo risolutivo noto. È importante notare che il metodo del simplesso non è un algoritmo polinomiale. Tuttavia la complessità computazionale nel caso medio è polinomiale e questo spiega il grande successo pratico del metodo del simplesso. Il primo algoritmo polinomiale per la PL (dimostrando quindi l'appartenenza della PL alla classe **P**) è stato l'algoritmo dell'ellissoide, dovuto a Khacyan. Tuttavia tale algoritmo, pur essendo polinomiale ed avendo dei risolti teorici molto importanti, presenta grandi problemi implementativi e non è stato mai usato in pratica. Nel 1984 fu proposto da Karmarkar un nuovo algoritmo polinomiale che si dimostrò anche praticamente efficiente. Da tale algoritmo sono stati generati molti algoritmi analoghi, detti ai punti interni, perchè generano una successione di punti che tende all'ottimo, tutti all'interno del poliedro. Fra questi metodi si segnalano in modo particolare i metodi detti primali-duali, particolarmente efficienti.

I moderni pacchetti commerciali di PL usano entrambi i metodi cercando di sfruttare i rispettivi vantaggi. L'esposizione dei metodi ai punti interni richiederebbe uno spazio eccessivo, per cui ci si limita ad una trattazione sintetica del metodo del simplesso.

Il metodo del simplesso esplora i vertici cercando di migliorare ad ogni passo la funzione obiettivo: il criterio di base dell'algoritmo consiste nell'analizzare i vertici della regione ammissibile (cioè le soluizoni ammissibili di base) procedendo da un vertice ad un vertice adiacente: questo non garantisce all'algoritmo di sfuggire ad un'eventuale esplorazione di un numero esponenziale di vertici, però la probabilità che ciò avvenga è trascurabile.
Dovendo esplorare i vertici, bisogna trovare un metodo per rappresentarli computazionalmente. Siccome un vertice è determinato dall'intersezione di n piani, si tratta di specificare quali sono i piani, ovvero quali disequazioni sono attive. In altre parole un vertice può venire rappresentato dall'insieme degli indici delle n disequazioni attive. Tale insieme prende il nome di *base* (a dire il vero nel metodo del simplesso classico la base è l'insieme complementare, ma per questa breve esposizione la cosa è irrilevante). Quindi sembrerebbe che il passaggio da un vertice ad uno migliore possa essere riprodotto dal passaggio da una base ad una migliore.

Purtroppo le cose sono un pò più complicate. Se un vertice è degenere, si trova nell'intersezione di più di n indici, cioè diverse basi, che rappresentano lo stesso vertice. La conseguenza di questo fatto è che il passaggio da una base all'altra può avvenire fra basi che rappresentano lo stesso vertice. Quindi in realtà il metodo progredisce solo apparentemente e invece stazione per diverse iterazioni sul medesimo vertice.
C'è quindi il concreto rischio che la sequenza di basi cicli indefinitamente (mentre se si abbandona un vertice passando ad uno migliore, non si può mai ritornare ad un vertice già esplorato). Stranamente gli esempi di ciclaggio sono stati costruiti a tavolino e in pratica tale fenomeno non si è mai verificato. Ovviamente sono state elaborate delle tecniche che impediscono il ciclaggio, a scapito però di un certo aggravio computazionale.
Resta il fatto che la degenerazione provoca normalmente un sensibile rallentamento del calcolo. Non tragga in inganno la nostra immaginazione geometrica confinata nelle tre dimensioni. Il numero di basi diverse per lo stesso vertice può essere esponenzialmente elevato.
Il passaggio fra un vertice ed un altro avviene fra due vertici adiacenti, ovvero connessi da uno spigolo. Se non cè degenerazione le due basi corrispondenti differiscono solo per un indice. Quindi $n-1$ disequazioni rimangono attive (quelle che determinano lo spigolo), mentre una disequazione attiva della prima base diventa non attiva (si abbandona il vertice seguendo lo spigolo) e una disequazione non attiva diventa attiva (si è raggiunto l'altro vertice).

Il metodo del simplesso permette naturalmente anche di determinare quale disequazione eliminare dalla base per migliorare la funzione obiettivo e quale disequazione entrerà in base. Potrebbe avvenire che lo spigolo in questione sia illimitato e questo fatto segnala la presenza di un'istanza illimitata. Ad ogni iterazione del metodo è disponibile, oltre alla soluzione, anche la soluzione duale, che permette di verificare l'ottimalità della soluzione trovata.

Infine bisogna inizializzare il metodo, ovvero trovare un base iniziale da cui far partire l'iterazione. Una scelta arbitraria della base non produce in generale una soluzione ammissibile. Inoltre potrebbe avvenire che i vincoli siano tali da non ammettere nessuna soluzione ammissibile. Entrambi i problemi vengono risolti facendo ricorso ad un cosiddetto *problema artificiale*. Questo punto viene per il momento lasciato in sospeso e verrà trattato nelle domande successive: in generale, per determinare una soluzione ammissibile di base con cui iniziare il metodo del simplesso, occorrerà eseguire il metodo del simplesso stesso su un problema *ausiliario* e le soluzioni fornite dal metodo stesso per il problema ausiliario permetteranno di determinare se esista una base ammissibile per il problema in questione e come ottenerla a partire dalla base del problema ausiliario.

2.1.9 Disegnare una soluzione di base non ammissibile.

Risposta:

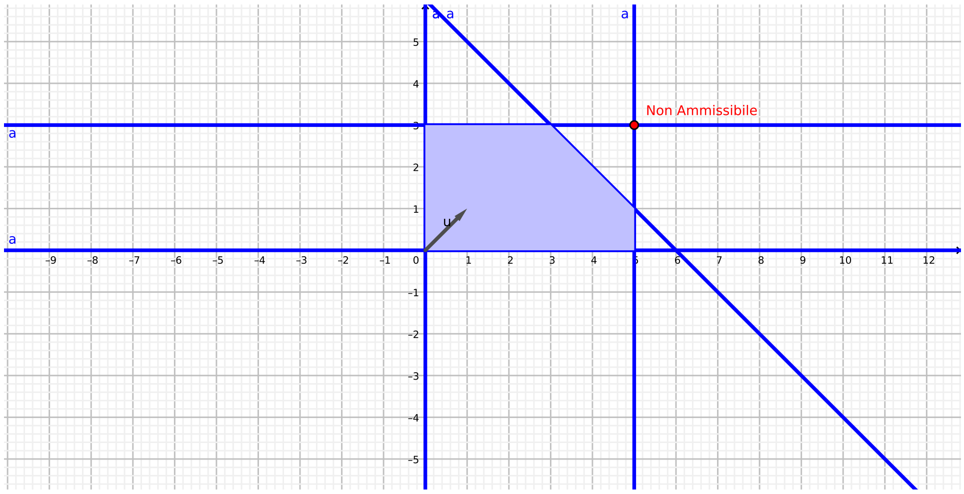


Figura 8: Soluzione di base non ammissibile

Dove l'insieme ammissibile è dato da

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \end{cases} \tag{1}$$

Teoria:
Programmazione Lineare
Si definiscono come problemi di Programmazione lineare (PL) tutti quei problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è lineare e i vincoli sono tutti espressi da disequazioni lineari ed anche, eventualmente, equazioni lineari. Per poter parlare di PL devono essere sempre presenti delle disequazioni mentre le equazioni possono mancare. Il motivo è dovuto al fatto che un problema con solo equazioni lineari ha una struttura molto particolare: la funzione obiettivo valutata sulle soluzioni ammissibili è illimitata oppure costante. È chiaro quindi che un modello lineare di un problema lineare presenta sempre disequazioni (ad esempio il vincolo di non negatività delle variabili).

Soluzioni ammissibili

I vincoli determinano la struttura dell' insieme ammissibile. Quando i vincoli sono disequazioni lineare la struttura è molto particolare e viene sfruttata dagli algoritmi risolutivi. Per rendersi conto di questa particolarità conviene analizzare un problema con due sole variabili x_1 e x_2, che permette una rappresentazione grafica. Un vincolo del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \tag{2}$$

rappresenta, come è noto, una retta in r che divide il piano in due semipiani. Un vincolo del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \tag{3}$$

rappresenta uno dei due semipiani, mentre il vincolo opposto

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \tag{4}$$

rappresenta l'altro semipiano. Si noti che la frontiera dell'insieme ammissibile è data dalla retta r. Su tali punti, per i quali la disequazione viene soddisfatta con il segno di uguaglianza, si dice che la disequazione è *attiva*. Ogni altro punto, che soddisfa la (3) come diseguaglianza stretta (disequazione non attiva), non può che essere un punto interno.

Quando sono presenti più vincoli si intende che l'insieme ammissibile è costituito da quelle soluzioni che soddisfano contemporaneamente tutti i vincoli. Se ad esempio fossero presente le seguenti disequazioni

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

l'insieme ammissibile è l'intersezione dei tre semipiani determinati dalle tre disequazioni. L'insieme ammissibile è dato dall'intersezione dei tre semipiani definiti dalle rispettive disequazioni ed è, nell'esempio, il triangolo in figura:

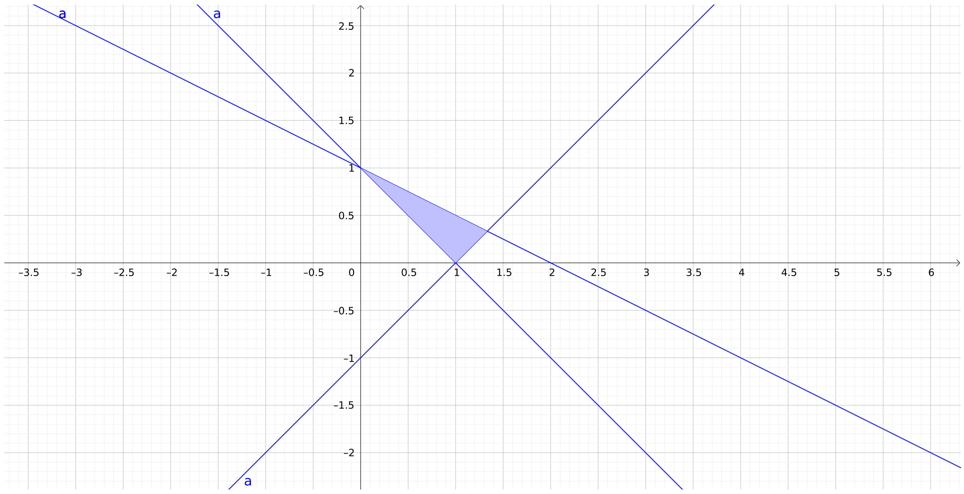


Figura 9: Insieme ammissibile limitato

Non necessariamente l'insieme ammissibile è limitato. Si consideri il seguente insieme di vincoli:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\geq 0 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

allora l'insieme sarebbe come nella seguente figura:

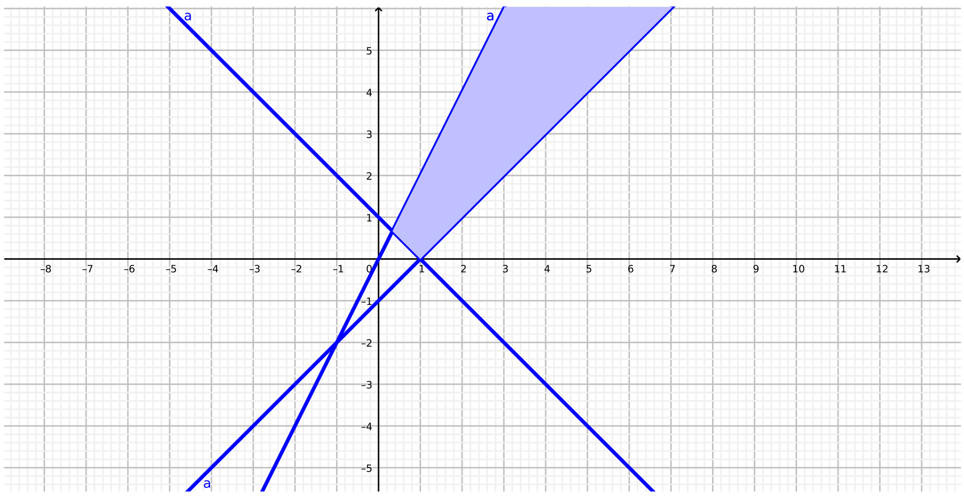


Figura 10: Insieme ammissibile illimitato

La frontiera è più complessa che nel caso di una singola disequazione. Comprende sia segmenti, detti *spigoli* dove è attiva solo una disequazione, che punti, detti *vertici*, dove sono attive due (o più nel caso si analizzi un problema in $\mathbb{R}^n$) disequazioni. Si noti che i vertici hanno la particolarità di non essere contenuti all'interno di nessun segmento interamente ammissibile.
Per calcolare i vertici, bisogna ovviamente calcolare i punti d'intersezione delle rette a due a due. In questo semplice esempio avviene che i tre vertici sono i punti calcolati risolvendo i tre sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

e cioè rispettivamente i punti

$$(0,\ 1), \qquad (\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}), \qquad (1,\ 0) \tag{8}$$

e sono tutti ammissibili rispetto alle disequazioni del sistema. Questa circostanza però è del tutto particolare. Se ad esempio in fatti il vincolo $x_1 + 2x_2 \leq 2$ venisse sostituito con $-2x_1 + x_2 \leq 0$ allora si vede che si avrebbe il vertice $(-1,\ -2)$ che è inammissibile rispetto alle rimanenti disequazioni.
Come si vede nell'esempio, l'insieme ammissibile in due dimensioni è un poligono (non necessariamente limitato). In generale, date m disequazioni in n variabili l'insieme ammissibile è un *poliedro*. Se $n \leq m$ (che è il caso tipico), ogni insieme di n disequazioni attive linearmente indipendenti determina un punto. Se inoltre questo punto è ammissibile anche rispetto alle altre $m - n$ disequazioni, costituisce un vertice del poliedro. Come già detto, un vertice ha l'importante proprietà che non può essere espresso come combinazione convessa stretta di altri punti ammissibili. Questa proprietà permette di caratterizzare e identificare i vertici di un poliedro.

Punti ammissibili determinati da $n - 1$ disequazioni attive formano gli spigoli mentre punti ammissibili determinati da un'unica disequazione attiva formano le *faccette* (in due dimensioni faccette e spigoli coincidono). Punti ammissibili per i quali nessuna disequazione è attiva sono detti *punti interni*. Affinchè esistano punti interni nessun vincolo può essere un'equazione, necessariamente sempre attiva, ma neppure possono esistere disequazioni sempre attive per tutti i punti ammissibili. In questo caso i ivncoli possono essere riformulati con equazioni al posto di tali disequazoini. Se una disequazione non è mai attiva per nessun punti ammissibile, allora è ovviamente ridondante e può essere rimossa dai vincoli senza alterare l'insieme ammissibile. In un modello ben formulato nessuna disequazione dovrebbe essere ridondante.

Può succedere inoltre che in un vertice sono attive più di n disequazioni (non ridondanti). Tali vertici vengono detti *degeneri*. Si veda nella seguente figura un esempio di vertice degenere in $\mathbb{R}^3$:

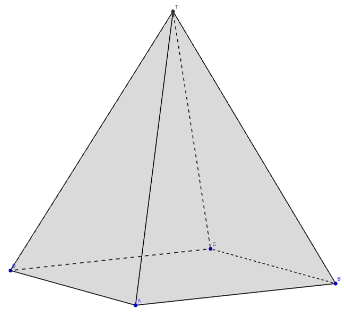


Figura 11: Esempio vertice degenere

Questa circostanza potrebbe sembrare rara in quanto la probabilità $n+1$ piani casuali passino per uno stesso punto è zero. Invece vi sono molti problemi la cui struttura stessa fa sì che ogni vertice sia altamente degenere. Questo fatto ha purtroppo dei pesanti effetti computazionali.

2.1.10 Il simplesso duale trova tutte le y positive.

Risposta:

La domanda risulta ambigua, probabilmente è stata riportata male, ho comunque tentato di fornire una risposta.

L'algoritmo del simplesso duale parte con una base B che genera una soluzione di base duale ammissibile e ad ogni iterazione la mantiene ammissibile (il che implica che $\bar{y}_B \geq 0$ ad ogni iterazione del metodo sino a che non termina) e si controlla l'ammissibilità di quella primale (test di ammissibilità primale $b_N - A_N\bar{x} \geq 0$). Se la soluzione di base primale è ammissibile, allora abbiamo trovato una coppia primale/duale di soluzioni ottime, altrimenti si cambia base. Poichè ogni soluzione duale ammissibile deve soddisfare la condizione $\bar{y}_B \geq 0$, è evidente che il simplesso duale trova tutte le y positive.

Teoria:
Si veda come controprova il seguente esempio: risolviamo con il metodo del simplesso duale il seguente problema:

$$\begin{cases} \min 13y_3 + 9y_4 + 7y_5 \\ -y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\ -y_2 + 2y_3 + y_4 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

partendo dalla base $B = \{2,\ 3\}$.
1° **iterazione.** La matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = (3,\ -4)A_B^{-1} = (10,\ 3), \qquad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^T, \tag{3}$$

e quella primale è

$$\bar{x} = (13, 0)^T \tag{4}$$

che non è ammissibile perchè

$$b_1 - A_1\bar{x} = 13, \qquad b_4 - A_4\bar{x} = -4, \qquad b_5 - A_5\bar{x} = -6, \tag{5}$$

quindi l'indice che entra in base è 4. Calcoliamo i prodotti

$$A_4 W^2 = -1, \quad A_4 W^3 = -1, \tag{6}$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4 W^2} = 10, \quad \frac{\bar{y}_3}{-A_4 W^3} = 3, \tag{7}$$

quindi l'indice uscente dalla base è 3.

2° **iterazione.** La nuova base è $B = \{2, 4\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)^T, \tag{9}$$

e quella primale è

$$\bar{x} = (9, 0)^T \tag{10}$$

che non è ammissibile perchè

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 9, \qquad b_3 - A_3 \bar{x} = 9, \qquad b_5 - A_5 \bar{x} = -2, \tag{11}$$

quindi l'indice che entra in base è 5. Calcoliamo i prodotti

$$A_5 W^2 = -1, \quad A_5 W^4 = -1, \tag{12}$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_5 W^2} = 7, \quad \frac{\bar{y}_4}{-A_5 W^4} = 3, \tag{13}$$

quindi l'indice uscente dalla base è 4.

3° **iterazione.** La nuova base è $B = \{2, 5\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)^T, \tag{15}$$

e quella primale è

$$\bar{x} = (7, 0)^T \tag{16}$$

che non è ammissibile perchè

$$b_1 - A_1\bar{x} = 7, b_3 - A_3\bar{x} = 6, b_5 - A_5\bar{x} = 2, \tag{17}$$

quindi $(0, 4, 0, 0, 3)$ è ottima del problema (1).

Come possiamo vedere dai risultati ottenuti nelle varie iterazioni del metodo del simplesso duale, sono stati trovati tutti e soli vettori $\bar{y}$ tali che $\bar{y}_i \geq 0 \;\; \forall i \in B$.

Queste conclusioni non possono certo rimpiazzare una dimostrazione rigorosa della faccenda.

2.1.11 In un poliedro, data una base, qualè l'indice entrante e quello uscente. Come ci si accorge che non ci sarà un indice entrante?

Risposta:

La domanda risulta ambigua, probabilmente è stata riportata male, gli indici entranti e uscenti sono relativi al metodo del simplesso.
Una possibile risposta potrebbe essere che gli indici entranti ed uscenti sono i primi, secondo la regola anticiclo di Bland, che violano il test di ammissibilità.

2.1.12 Disegnare un poliedro in R^2 illimitato. Ci sono soluzioni di base ammissibili e degeneri? Dati diversi c dire se il problema da come soluzione $-\infty$, $+\infty$ o soluzione a seconda che il problema sia di massimo o minimo.

Risposta:
I seguenti sono tutti esempi di poliedri illimitati in R^2:

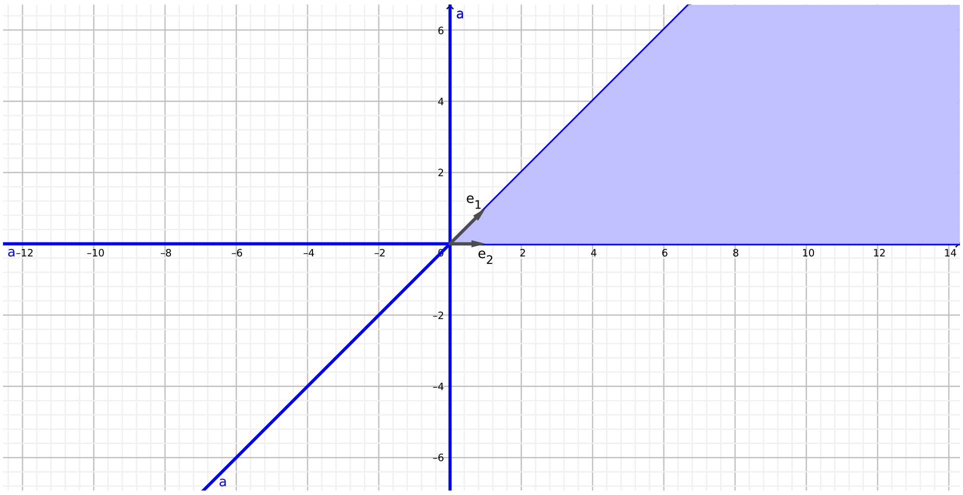


Figura 12: Esempio poliedro illimitato in $\mathbb{R}^2$

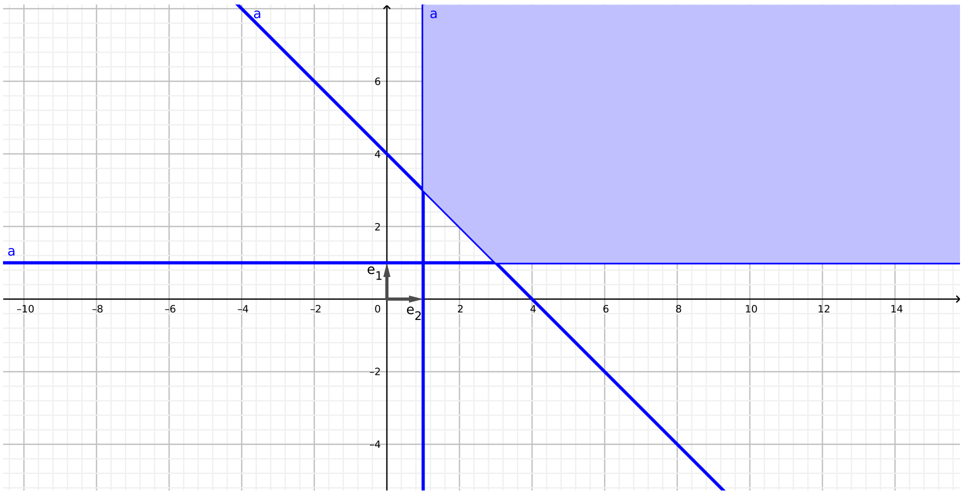


Figura 13: Esempio poliedro illimitato in $\mathbb{R}^2$

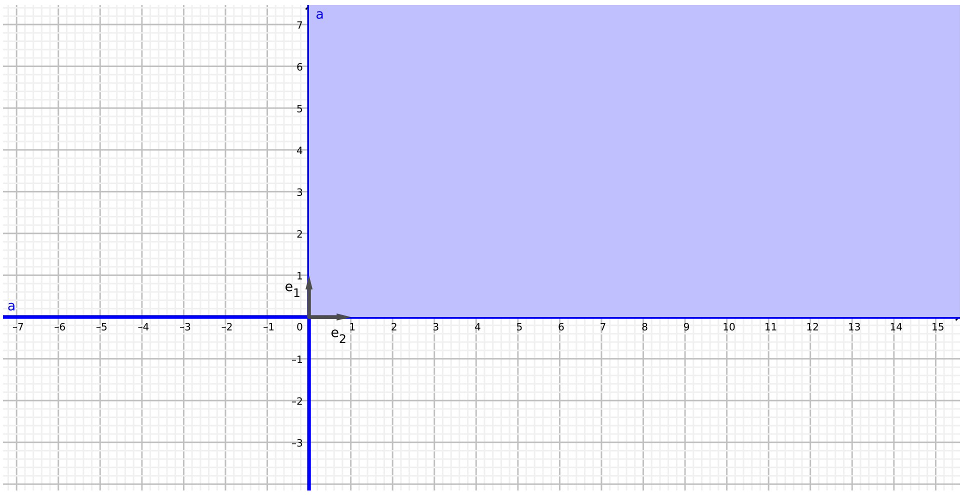


Figura 14: Esempio poliedro illimitato in $\mathbb{R}^2$

Dato un problema di PL con poliedro associato illimitato, ci sono soluzioni di base ammissibili, si consideri infatti il problema

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

dove il vertice $(0,\ 0)$ è soluzione ammissibile (ed anche ottima in questo caso).
Dato un problema di PL con poliedro associato illimitato, ci sono soluzioni di base anche degeneri, come mostra il seguente esempio:

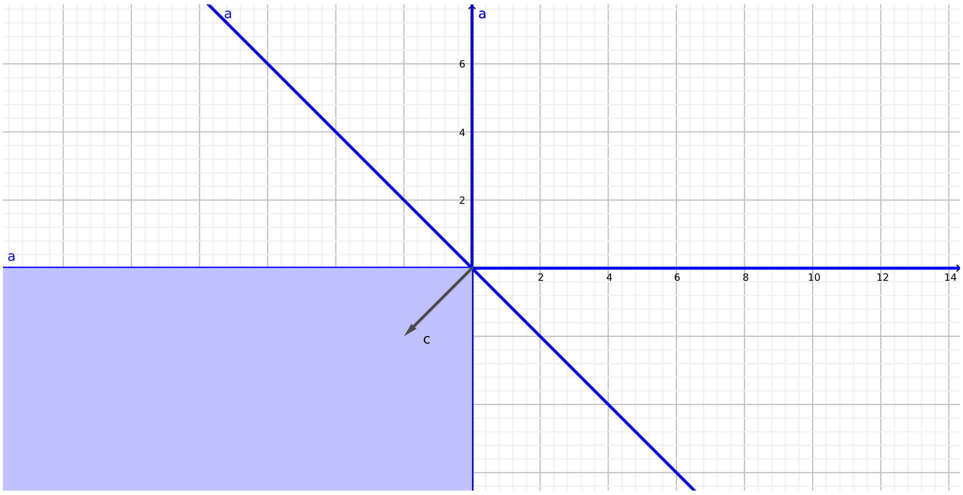


Figura 15: Esempio poliedro illimitato in $\mathbb{R}^2$ con soluzione ammissibile degenere

in cui il vertice $(0, 0)$ è soluzione ammissibile degenere.

Per quanto riguarda la domanda sui diversi c, si considerino i seguenti esempi:

$$\begin{cases} \min\ x_1 + x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad c = (1, 1), \quad Sol_{ottima} = (0, 0) \tag{2}$$

$$\begin{cases} \min\ -x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad c = (-1,\ -1), \quad Sol_{ottima} = (+\infty) \tag{3}$$

$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad c = (1, 1), \quad Sol_{ottima} = (+\infty) \tag{4}$$

$$\begin{cases} \max\ -x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad c = (-1,\ -1), \quad Sol_{ottima} = (0, 0) \tag{5}$$

I quattro esempi precedenti ci mostrano che, uno stesso problema di PL di minimo o massimo, può avere soluzione diversa se viene modificato il vettore c, ma anche che uno stesso problema di PL (stesso vettore c) ha soluzione differente a seconda che sia di massimo o di minimo.

È evidente quindi che la soluzione di un problema di PL dipende sia (tanto) dal vettore c che (quanto) dal fatto che si tratti di un problema di massimo o di minimo.

2.1.13 Dato un c dire se una base può essere di partenza.

Risposta:
Dato un problema di PL, affinchè una base possa essere di partenza per il simplesso primale/duale, la soluzione di base primale/duale deve essere ammissibile per il problema primale/duale.
Quindi, data la coppia

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \ , \end{cases} \tag{1}$$

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \left\{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \ y \geq 0\right\} \ . \end{cases} \tag{2}$$

Presa una base B, l'ammissibilità della soluzione di base primale è data da

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \quad : \quad A_i \bar{x} \leq b_i \quad \forall i \in N \tag{3}$$

mentre l'ammissibilità della soluzione di base duale è data da

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad : \quad \bar{y}_i = c_i^T A_{Bi}^{-1} \geq 0 \tag{4}$$

da cui si ricava la seguente condizione di ammissibilità sul vettore c:

$$c^T A_B^{-1} \geq 0. \tag{5}$$

2.1.14 Scrivere il problema del duale ausiliario e dire a cosa serve. Enunciare il relativo Teorema e indicare la base di partenza del duale ausiliario.

Risposta:
Consideriamo il problema in forma duale standard:

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Senza ledere la generalità della trattazione possiamo supporre che $c \geq 0$, cambiando eventualmente segno alle colonne di A relative alle componenti negative di c. Inoltre possiamo supporre che nel sistemi $y^T A = c^T$ non ci siano equazioni ridondanti. Per trovare una base ammissibile di $(\mathcal{D})$, al passo 1 del simplesso duale, si costruire il problema ausiliario duale:

$$(\mathcal{D}_{aux}) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \\ y^T A + \epsilon^T = c^T \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

La base formata dagli indici relativi alle variabili ausiliarie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, con la matrice identità come matrice di base, è una base ammissibile per il problema ausiliario, infatti la corrispondente soluzione di base è

$$\begin{cases} \bar{y} = 0 \\ \bar{\epsilon} = c \geq 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

A parte da tale base ammissibile, possiamo applicare il simplesso duale per risolvere il problema ausiliario. Il valore ottimo del problema ausiliario (che è compreso tra 0 e $\sum_{i=1}^{n} c_i$) stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema $(\mathcal{D})$ secondo il seguente teorema:

Teorema 1.

1. *Se il valore ottimo di* $(\mathcal{D}_{aux})$ *è* > 0 *allora* $(\mathcal{D})$ *non ha soluzioni ammissibili.*
2. *Se il valore ottimo di* $(\mathcal{D}_{aux})$ *è* $= 0$ *allora c'è una base ammissibile per* $(\mathcal{D})$ *che si costruisce a partire da una base ottima per* $(\mathcal{D}_{aux})$.

Teoria:
Di seguito un esempio che mostra come utilizzare il problema ausiliario

duale ed il relativo teorema per trovare una base ammissibile di partenza per il simplesso duale.

Troviamo una base ammissibile per il problema in forma duale:

$$\begin{cases} \min 8y_1 - y_2 - 5y_3 + 8y_4 \\ -y_3 - 2y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + 3y_4 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Costruiamo il problema ausiliario:

$$\begin{cases} \min \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ -y_3 - 2y_4 + \epsilon_1 = 0 \\ y_1 - y_2 + 3y_4 + \epsilon_2 = 1 \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

calcoliamo il primale associato dato che ne avremo bisogno durante i calcoli che seguono:

$$\begin{cases} \max x_1 \\ x_2 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

Applichiamo il simplesso duale al problema ausiliario scegliendo come base iniziale $\{5, 6\}$, con matrice di base

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

e soluzione associata

$$\begin{cases} \bar{y} = (0, 0, 0, 0)^T \quad \textit{(indici non di base)} \\ \epsilon = c^T A_B^{-1} = (0, 1)^T \end{cases} \tag{8}$$

La soluzione di base complementare è

$$\bar{x} = A_B b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1)^T \tag{9}$$

che non è ammissibile:

$$b_1 - A_1\bar{x} = 0 - 1 = -1 < 0 \tag{10}$$

dunque l'indice entrante è $k = 1$.

Inoltre $A_1 W^5 = 0$, mentre

$$\frac{\bar{\epsilon}_2}{-A_1 W^6} = \frac{1}{-1} = -1 < 0 \tag{11}$$

dunque l'indice uscente è $h = 6$. La nuova base $\{1, 5\}$ corrisponde alla soluzione di base

$$\begin{cases} \bar{y} = (1, 0, 0, 0)^T \\ \epsilon = c^T A_B^{-1} = (0, 0)^T \end{cases} \tag{12}$$

che è ottima per il problema ausiliario con valore 0.

2.1.15 Dare la definizione di poliedro.

Risposta:
Geometricamente parlando, un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$.
Dal punto di vista algebrico, ogni poliedro P di $\mathbb{R}^n$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n incognite:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\} \tag{1}$$

dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
Un poliedro è un insieme convesso dato che i semispazi convessi di $\mathbb{R}^n$ sono insiemi convessi e l'intersezione di insiemi convessi è ancora un insieme convesso.

2.1.16 Disegnare un poliedro con una funzione obiettivo per cui il minimo valore è $-\infty$.

Risposta:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max/\min \; x_1 - x_2 \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Il problema $(\mathcal{P})$ ha un vertice in $(0, 0)$, il poliedro è illimitato, e ha massimo $+\infty$ e minimo $-\infty$.

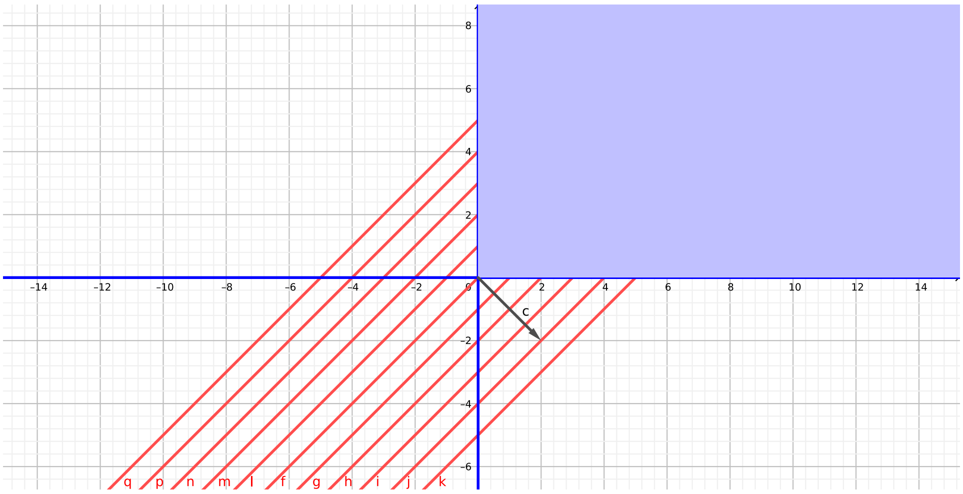


Figura 16: Rappresentazione grafica del problema (P)

Teoria:
Dal punto di vista teorico, credo che sia necessario spiegare l'esempio proposto in quanto potrebbe non sembrare ovvio a prima vista.

Le linee tracciate in rosso sono dette *linee di isoguadagno* per problemi di massimo o *di isocosto* se il problema è di minimo.
Dalla figura è evidente che nel caso si tratti di un problema di massimo, muovendoci l'ungo la direzione del vettore c le intersezioni tra le linee di isoguadagno e l'asse x_1 vanno a $+\infty$. Mentre se consideriamo il problema di minimo, seguendo la direzione del vettore c le intersezioni tra le linee di isocosto e l'asse x_2 vanno a $-\infty$.

2.1.17 Scrivere i comandi Linprog per un problema

Risposta:
Supponiamo di dover risolvere il problema di PL

$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \\ 8x_1 \geq 2 \\ 0 \leq x_1 \geq 5 \\ 0 \leq x_2 \geq 7 \\ 0 \leq x_3 \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

Lo riscriviamo come problema di minimo nella forma richiesta da `linprog`:

$$\begin{cases} -\min\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_3 \leq 5 \\ -8x_1 \leq -2 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \\ 0 \leq x_1 \geq 5 \\ 0 \leq x_2 \geq 7 \\ 0 \leq x_3 \geq 3 \end{cases} \tag{2}$$

e scriviamo i comandi

$$\begin{gathered} c = [-1;\ -2;\ 3] \\ A = [3,\ 1,\ 0;\ -8,\ 0,\ 0] \\ b = [5;\ -2] \\ D = [5,\ 1,\ 0] \\ e = 7 \\ l = [0;\ 0;\ 0] \\ u = [5;\ 7;\ 3] \end{gathered} \tag{3}$$

Teoria:
Nell'optimization toolbox di Matlab, la funzione `linprog` risolve un problema di programmazione lineare della forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b \\ Dx = e \\ l \leq x \leq u \end{cases} \tag{4}$$

dove c, x, b, e, l, u sono vettori mentre A, D sono matrici. Se, ad esempio, non ci sono vincoli di uguaglianza, si pongono $D = []$ ed $e = []$.

La sintassi completa della funzione è la seguente

$$[x,\ v,\ exitflag,\ lambda] = linprog(c,\ A,\ b,\ D,\ e,\ l,\ u)\ , \tag{5}$$

dove gli input

$$c,\ A,\ b,\ D,\ e,\ l,\ u\ , \tag{6}$$

definiscono il problema da risolvere, mentre gli output sono:

- x è una soluzione ottima del problema (4);
- v è il valore ottimo del problema (4);
- $exitflag$ descrive la condizione di uscita della funzione `linprog`;
- $output$ è una struttura contenente informazioni sull'algoritmo usato da Matlab;
- $lambda$ è una struttura i cui campi contengono le variabili duali ottime corrispondenti ai vincoli del problema (4).

2.1.18 Spiegare il significato di vertice degenere.

Risposta:
Dato un problema di PL, supponiamo ad esempio in forma primale standard

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b\,, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{cases} \tag{1}$$

e si disegna graficamente il poliedro ammissibile

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\} \tag{2}$$

può succedere che in un certo vertice di P siano attive più di n disequazioni (non ridondanti). Tali vertici vengono detti degeneri.

Questa circostanza potrebbe sembrare rara, invece vi sono molti problemi la cui struttura stessa fa si che ogni vertice sia altamente degenere. Questo fatto ha purtroppo pesanti svantaggi computazionali.

Esempi di vertici degeneri.

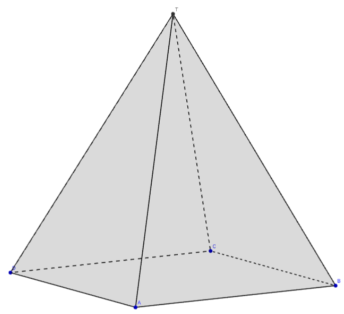


Figura 17: Esempio vertice degenere in $\mathbb{R}^3$

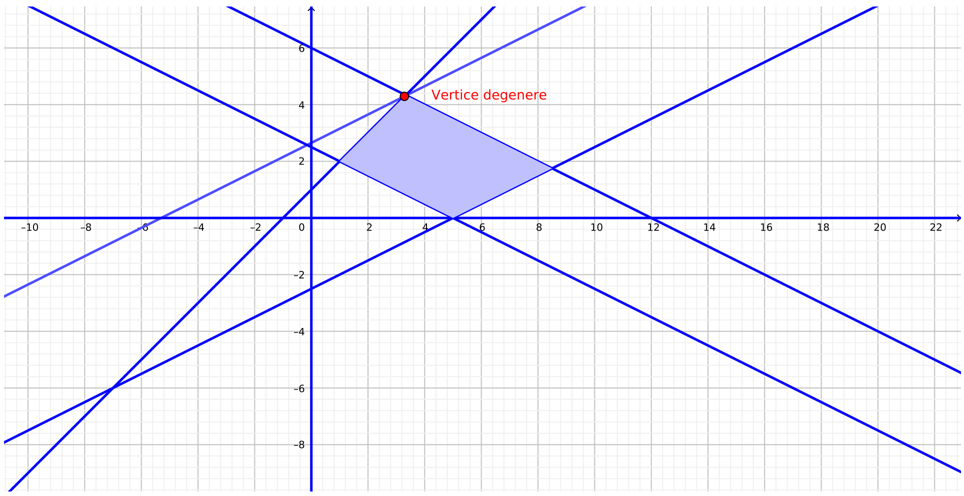


Figura 18: Esempio vertice degenere in $\mathbb{R}^2$

2.1.19 Trovare un c e una base che sia duale ammissibile, dato un poliedro grafico. Come deve essere c per essere duale ammissibile?

Risposta:
Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min 13y_3 + 9y_4 + 7y_5 \\ -y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\ -y_2 + 2y_3 + y_4 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove

$$c = (3, \ -4)^T. \tag{2}$$

Ora, la base $B = \{2, 3\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

risulta duale ammissibile. Infatti

$$\bar{y}_B^T = (3, \ -4)A_B^{-1} = (10, 3), \quad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^T \tag{4}$$

quindi $\bar{y}$ risulta ammissibile per il problema (1).

Dato un problema di PL, affinchè una base possa essere di partenza, per il simplesso primale/duale la soluzione di base primale/duale deve essere ammissibile per il problema primale/duale.
Quindi, data la coppia

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \ , \end{cases} \tag{5}$$

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \left\{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \ y \geq 0\right\} \ . \end{cases} \tag{6}$$

L'ammissibilità primale è data da

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \quad : \quad A_i \bar{x} \leq b_i \quad \forall i \in N \tag{7}$$

mentre l'ammissibilità duale è data da

$$\bar{y} = c^T A_B^{-1} \quad : \quad \bar{y}_i = c_i^T A_{Bi}^{-1} \geq 0 \tag{8}$$

da cui si ricava la seguente condizione di ammissibilità sul vettore c:

$$c^T A_B^{-1} \geq 0. \tag{9}$$

Teoria:
Per comprendere appieno l'esempio proposto, sarà utile fare riferimento al problema primale associato al problema duale proposto:

$$\begin{cases} \max 3x_1 - 4x_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 7 \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

2.1.20 Scrivere la coppia di problemi primale/duale ed enunciare i teoremi della Dualità Forte e della Dualità Debole.

Risposta:
Al problema primale in forma standard

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \tag{1}$$

associamo il seguente problema di PL

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

che sarà chiamato problema duale in forma standard.
Poichè ogni problema di PL si può trasformare in un problema primale standard di tipo $(\mathcal{P})$, allora ogni problema di PL ha un suo duale standard.

Teorema 1 (Dualità Debole). *Se i poliedri primale P e duale D sono non vuoti, allora*

$$c^T x \leq y^T b \quad \forall x \in P, \ \forall y \in D\,. \tag{3}$$

Dimostrazione.

$$c^T x = y^T A \Rightarrow c^T x = y^T Ax. \tag{4}$$

e dato che

$$y^T \geq 0 \ \text{ e } \ Ax \leq b\,, \tag{5}$$

possiamo scrivere

$$c^T x = y^T Ax \leq y^T b \ \ \Rightarrow \ \ c^T x \leq y^T b \quad \forall x \in P, \ \forall y \in D\,. \tag{6}$$

QED

Il teorema della dualità debole ci dice quindi che il valore della funzione obiettivo del duale calcolato in qualsiasi punto ammissibile del poliedro duale, costituisce un confine superiore per l'ottimo del primale.

Teorema 2 (Dualità Forte). *Se i poliedri primale P e duale D sono non vuoti, allora*

$$-\infty < \mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{D}) < +\infty \tag{7}$$

Data una coppia di problemi primale $(\mathcal{P})$ e duale $(\mathcal{D})$, se uno dei due problemi ammette una soluzione ottima finita, allora anche l'altro problema ammette una soluzione ottima finita ed i valori ottimi delle funzioni obiettivo coincidono.

Teoria:
Introduzione alla dualità
Per introdurre l'idea fondamentale della dualità, si immagini di dover risolvere un problema di PL e di non avere un controllo diretto sull'algoritmo risolutivo, cosa che avviene in pratica molto di frequente, ma di poter semplicemente osservare una sequenza di soluzioni proposte da un meccanismo di generazione. Tale meccanismo può essere lo stesso metodo del simplesso, ma si potrebbe anche pensare che esso sia un "oracolo" in grado di fornire delle soluzioni ammissibili (non necessariamente di base) per il problema, oppure un generatore casuale di soluzioni ammissibili. Sia che si tratti di un generatore casuale di soluzioni, sia che si stia utilizzando un prodotto software commerciale, è sensato porsi il problema di determinare se le soluzioni generate sono, secondo qualche criterio, vicine a quella ottimale; nel caso di un algoritmo che termina, ci si può anche porre il problema di verificare, a posteriori, se la soluzione prodotta è effettivamente una soluzione ottimale, o per lo meno una una buona approssimazione di tale soluzione. Inoltre non è detto che un algoritmo generico produca, sia nel corso delle iterazioni che al termine, soluzioni di base. gli algoritmi di programmazione lineare di concezione più recente, i cosiddetti metodi a un punti interno, generano soluzioni strettamente ammissibili, interne al poliedro delle soluzioni ammissibili del problema di PL. Per questi algoritmi occorre quindi un metodo di verifica della qualità della soluzione trovata, un metodo, tra l'altro, che possa essere utilizzato come criterio d'arresto dell'algoritmo stesso.

Il molti metodi di approssimazione numerica viene utilizzata una tecnica di controllo della qualità dell'approssimazione consistente nell'aggiornare, ad ogni iterazione k, due valori l_k e u_k che costituiscono rispettivamente una limitazione inferiore ed una superiore superiore per il valore della quantità cercata. Nel caso dei metodi di ottimizzazione, indicato con z^* il valore dell'ottimo, si cercano quantità tali che

$$z^* \in [l_k \quad ,u_k] \quad k = 0,1,\ldots \tag{8}$$

Inizialmente si pone in genere $l_0 = -\infty$ e $u_k = +\infty$ (a meno che non si disponga di qualche informazione a priori sul problema che permetta di iniziare con stime più precise di una o entrambe le limitazioni); l'intervallo $[l_k \quad ,u_k]$ rappresenta un intervallo di incertezza sul valore dell'ottimo e, naturalmente, si desidera rendere minima la quantità $u_k - l_k$. La speranza è di

giungere ad un'iterazione in cui $l_k = u_k$, che è garanzia di ottimalità.
In altri termini, u_k è il migliore valore osservato fino alla k-esima iterazione.
Più complesso è determinare delle buone limitazioni inferiori.
Uno degli scopi della teoria della dualità è quello di fornire delle buone limitazioni inferiori al valore dell'ottimo del problema di PL. Anche se sono molti gli aspetti interessanti ed utili della dualità, si inizierà da questo tema per presentarne le idee fondamentali. Ci occuperemo fondamentalmente di dualità lineare.

Dualità lineare
Per un generico problema di PL, si può osservare che la definizione di problema duale non è prova di ambiguità. Infatti non esiste un metodo unico per trasformare un problema in un equivalente problema standard e, di conseguenza, non esiste un unico problema duale di un problema dato.
A tale proposito, vale il seguente teorema:

Teorema 3. *Il duale del duale di un problema di PL è equivalente al problema di PL stesso.*

Parlando di problemi di programmazione lineare e dei rispettivi duali, siamo pertanto autorizzati ad usare il termine di *coppia* di problemi, l'uno duale dell'altro, senza distinzione tra un primale ed il duale; resta soltanto il fatto che uno dei due problemi consiste nella minimizzazione di un obiettivo lineare, l'altro nella massimizzazione di un altro obiettivo lineare.

Teoremi di Dualità
La proprietà che ha permesso l'introduzione del problema duale è comunemente nota con il nome di dualità debole. Formalmente vale il seguente

Teorema 4 (Dualità debole)**.** *Data una coppia di problemi, uno duale dell'altro, che ammettono soluzioni ammissibili, il valore di ogni soluzione ammissibile del problema di minimo è limitato inferiormente dal valore di ogni soluzione ammissibile del problema di massimo.*

Date due soluzioni ammissibili, $\bar{y}$ per il problema di minimo (ad esempio standard) e $\bar{x}$ per il suo duale, l'intervallo $\left[\bar{x}^T b, c^T \bar{y}\right]$ si dice *intervallo di dualità* e la quantità $c^T \bar{y} - \bar{x}^T b$ si dice *gap di dualità*. Se il gap di dualità si riduce a 0, allora è dimostrata l'ottimalità della soluzione del primale e del duale:

Corollario 1. *Data una coppia di problemi, uno duale dell'altro, se per ciascuno dei due problemi è nota una soluzione ammissibile e le due soluzioni nei rispettivi problemi, hanno lo stesso costo, allora esse sono ottimali.*

Si è quindi visti che il metodo presentato per la determinazione di limitazioni inferiori al valore dell'ottimo in un problema di PL di minimo è corretto e permette di fornire una dimostrazione di ottimalità. Non è ancora chiaro però se tale dimostrazione possa essere sempre ottenuta con il metodo proposto. La risposta è affermativa ed è contenuta, in forma rafforzata, nel teorema seguente.

Teorema 5 (Dualità forte)**.** *Se un problema di programmazione lineare ammette ottimo, anche il suo duale ammette ottimo; inoltre il valore di ogni soluzione ottimale del primale coincide con quello del duale.*

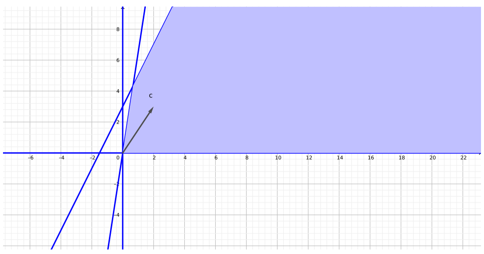
Il sistema individuato per la determinazione di limitazioni inferiori per i problemi di PL di minimo è pertanto in grado di fornire un certificato di ottimalità per qualsiasi problema di PL che ammetta ottimo.

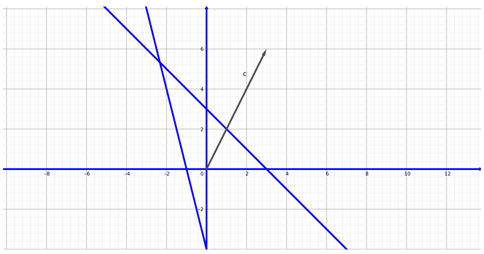
Se un problema non ammette ottimo, la situazione deve ancora essere analizzata. Si ricava molti facilmente la proprietà seguente:

Teorema 6. *Se un problema di PL è illimitato, il suo duale è privo di soluzioni ammissibili.*

Come esempio banale, si consideri la seguente coppia di problemi di PL:

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min 3y_1 + 6y_2 \\ -2y_1 - \frac{1}{2}y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$





2.1.21 Dimostrare la correttezza dell'algoritmo del simplesso primale.

Risposta:
Dato un problema di PL in forma prima standard

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \tag{1}$$

vale il seguente teorema:

Teorema 1. *Il simplesso primale risolve $(\mathcal{P})$ in un numero finito di iterazioni.*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che cambio di indici di base eseguito all'ultimo passo del simplesso primale, $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$, genera un effettivamente un cambio di base. Nella matrice di base A_B si cambia la riga r-esima corrispondente all'indice h con la riga della matrice A corrispondente all'indice k e si ottiene $A_{B'}$. Osserviamo che $A_{B'}$ è invertibile se e solo se $A_{B'} A_B^{-1}$ è invertibile. Ma

$$A_{B'} A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \\ a_{K1} & & a_{KK} \end{bmatrix} \tag{2}$$

QED

Teoria:
Vedere la sezione teoria della domanda 2.1.22.

2.1.22 Dimostrare la correttezza dell'algoritmo del simplesso duale.

Risposta:

Teoria:
I concetti teorici che seguono, indicati come riferimento anche per la domanda 2.1.21, non sono strettamente correlati alle risposte fornite (che sono solamente due dimostrazioni), ma riguardano in generale l'argomento del metodo del simplesso.

Efficienza del metodo del simplesso
Esiste un'importante teoria, detta *teoria della complessità computazionale* i cui scopi sono l'analisi e la classificazione dei problemi in classi di difficoltà differente. Non ci vogliamo addentrare qui in una discussione specialistica sull'argomento. Con molta approssimazione si può dire che una classe di problemi è considerata computazionalmente facile se esiste un algoritmo in grado di risolvere qualsiasi esempio di tale classe compiendo un numero di operazioni elementari che è asintoticamente limitato da un polinomio di grado finito nella dimensione di tale esempio.

La definizione di "dimensione" di un problema non è banale: per la programmazione lineare dimensioni naturali sono m ed n, ma questo non basta a caratterizzare in modo soddisfacente la reale dimensione del problema. Esistono, ad esempio, molte implementazioni del metodo del simplesso che sfruttano la sparsità della matrice dei coefficienti. È ragionevole pensare quindi che i problemi di PL siano in genere tanto più difficili quanto meno sparsa è la matrice dei coefficienti.
La definizione comunemente accettata di dimensione di un problema corrisponde alla lunghezza di una codifica efficiente dell'intero insieme dei coefficienti

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

del problema di PL. Ad esempio, volendo memorizzare i dati di un problema di PL (con coefficienti interi o razionali) in forma binaria, ed utilizzando il minimo numero possibile di bit per ogni dato ed un separatore tra un dato e l'altro, si vede che occorreranno

$$L = \mathcal{O}\left(mn + \sum_{i,j:\ \widetilde{A}_{ij} \neq 0} \log(|\widetilde{A}_{ij}|) \right) \tag{2}$$

bit; si ricorda che il simbolo $\mathcal{O}(f(k))$ indica una funzione f tale che

$$\lim_{k\to\infty} sup \frac{\mathcal{O}(f(k))}{f(k)} \leq \infty \, . \tag{3}$$

Un algoritmo polinomiale per la PL dovrebbe poter risolvere qualsiasi problema di PL in un tempo (o in un numero di operazioni elementari) $\mathcal{O}(L^r)$, con r costante opportuna.

La questione se la PL fosse o meno una classe di problemi risolvibili in modo teoricamente efficiente, al di là della notevole efficienza pratica del metodo del simplesso, è rimasta aperta fino agli anni ′80, quando è stato definitivamente dimostrato da Leonid Kachiyan, col suo metodo degli ellissoidi, che esistono algoritmi polinomiali per la PL. Curiosamente, il metodo del simplesso non è un algoritmo polinomiale. Per tutte le implementazioni note del metodo si è potuta trovare una successione di problemi particolari, a dimensione crescente, per la quale il metodo richiede un numero esponenziale di passi di pivot. Il metodo degli ellissoidi, grazie al quale si è dimostrata la polinomialità della PL, è un algoritmo estremamente inefficiente in pratica (mentre il simplesso, inefficiente in teoria, ha un comportamento eccellente nella pratica). Solo negli anni ′90 si sono sviluppati algoritmi innovativi, detti "a punto interno", che hanno complessità polinomiale e che, almeno per problemi di grande dimensione, sono competitivi rispetto al metodo del simplesso.

L'algoritmo del simplesso ha rappresentato, e rappresenta tutt'ora, un campo di ricerca estremamente ricco ed aperto. Non è ancora stata fornita, ad esempio, una soddisfacente giustificazione teorica del fatto che, nonostante i risultati fortemente negativi della teoria della complessità, l'algoritmo del simplesso sia *in pratica*, un metodo estremamente efficiente, utilizzato per risolvere problemi con centinaia di migliaia di variabili. Esistono studi sulla complessità media del metodo, ma in genere i modelli stocastici su cui sono basati non sono sufficientemente vicini ai problemi reali. Studi sia empirici che teorici tendono a sostenere che il metodo del simplesso termina con numero di passi di pivot $\mathcal{O}(m)$, in genere compresi tra $3m$ e $4m$.

Un'altra questione tuttora aperta è la seguente: per ogni tipo di strategia di pivoting finora tentata, si è potuto determinare un controesempio per il quale il metodo richiede un numero esponenziale di pivot. Ma questo non è sufficiente per concludere che non può esistere una strategia di pivoting che renda il metodo polinomiale. A tutti'oggi non è ancora chiaro se tale strategia possa esistere o meno.

Questo problema, tutt'ora aperto ed oggetto di intesa ricerca, è in qualche modo legato alla cosiddetta *congettura di Hirsch* secondo la quale un poliedro in $\mathbb{R}^n$ con d facce massimali (cioè a dimensione $n-1$) ha "diametro" non maggiore di $d-n$, dove per *diametro di un poliedro* si intende la massima distanza fra due vertici e per *distanza fra due vertici* si intende il minimo numero di spigoli che è necessario percorrere in un cammino da un vertice ad un altro. ad esempio dato un pentagono in $\mathbb{R}^2$, è evidente che nessuna coppia di nodi dista più di $5-2=3$ spigoli. La congettura ha a che fare con il metodo del simplesso, poichè il diametro di un poliedro è un limite inferiore al numero di passi di pivot che una qualunque implementazione dell'algoritmo dovrà effettuare nel caso peggiore. Quindi se si dimostrasse, ad esempio, che esistono poliedri per i quali il diametro è esponenziale nel numero, ad esempio, di vincoli o variabili, si sarebbe dimostrato che è impossibile costruire una regola di pivoting per il simplesso che garantisca la terminazione in un numero polinomiale di iterazioni. La congettura è stata recentemente rifiutata; tuttavia si è solo dimostrato che esistono poliedri per i quali il diametro è maggiore di $d-n$. La congettura è vera in tutti i politopi ottenuti come chiusura convessa di punti a coordinate intere limitati (ad esempio, se tutti i vertici del politopo sono binari, la congettura vale). In generale, il controesempio di Santos dimostra che la congettura di Hirsch è falsa, ma è ancora aperta la questione se il diametro di un generico politopo sia o meno limitato da una funzione polinomiale di $d-n$ (addirittura, una funzione lineare). Fino alla chiusura, in un senso o nell'altro, di questa ipotesi, la ricerca di una strategia efficiente di pivoting sarà ancora molto attiva.

2.1.23 Dimostrare che la funzione obiettivo di un problema di PL di massimo cresce lungo opportuni spigoli.

Risposta:
Supponiamo di avere un problema primale standard (problema di massimo) di PL.
Supponiamo di avere la soluzione di base primale ammissibile $\bar{x} \in P$. Se la soluzione di base complementare $\bar{y}$ è duale ammissibile, allora, per la condizione sufficiente di ottimalità per soluzioni di base, $\bar{x}$ è ottima per il primale e $\bar{y}$ è ottima per il duale. Se, invece, $\bar{y}$ non è duale ammissibile, dobbiamo cambiare base. Posto $W = -A_B^{-1}$ ed indicato con W^h la h-esima colonna di W, allora consideriamo ora la semiretta uscente da $\bar{x}$ di direzione W^h, cioè

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda W^h, \qquad \lambda \geq 0. \tag{1}$$

Al variare di λ positivo, $x(\lambda)$ sono le equazioni degli spigoli uscenti da $\bar{x}$, con h indice di base.
Dobbiamo decidere quale spigolo percorrere e per fare ciò calcoliamo la funzione obiettivo lungo gli spigoli:

$$c^T x(\lambda) = c^T(\bar{x} + \lambda W^h) = c^T\bar{x} + \lambda c^T W^h, \quad \forall \lambda > 0. \tag{2}$$

La funzione obiettivo quindi cresce o decresce in base al valore di $c^T W^h$, se $c^T W^h > 0$ la funzione obiettivo cresce, mentre se $c^T W^h < 0$ il valore della funzione obiettivo decresce.

Ricordando ora come abbiamo definito W, possiamo anche ottenere la condizione che permette di determinare lo spigolo lungo il quale la funzione obiettivo cresce:

$$c^T\bar{x} + \lambda c^T W^h = c^T\bar{x} + \lambda c^T((-A_B^{-1})^h) = c^T\bar{x} - \lambda \bar{y}_h, \quad \forall \lambda > 0, \tag{3}$$

Dobbiamo quindi scegliere $\bar{y}_h < 0$ tale che

$$c^T\bar{x} - \lambda \bar{y}_h > c^T\bar{x}, \quad \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

Teoria:
La risposta fornita segue dalla dimostrazione di correttezza dell'algoritmo del simplesso primale.

2.1.24 Dire quante soluzioni ottime può avere un problema di PL.

Risposta:
Il numero di soluzioni ottime di un problema di PL può essere:

1. 0, se la regione ammissibile è vuota oppure se è illimitata e la funzione obiettivo non raggiunge mai l'ottimo;
2. 1, se esiste un solo vertice della regione ammissibile che massimizza-/minimizza il valore della funzione obiettivo;
3. ∞, se la ragione ammissibile contiene due vertici ottimi allora ogni punto compreso tra i due vertici è anch'esso di ottimo per il problema.

2.1.25 Dire dove sono le soluzioni ottime e le soluzioni di base e perchè.

Risposta:
Consideriamo un problema di PL in forma primale standard

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Le soluzioni ammissibili di base associate ad esso si ottengono risolvendo un sistema di equazioni univocamente determinato e che corrisponde, secondo l'interpretazione geometrica, all'intersezione di un numero opportuno di iperpiani $\mathbb{R}^n$.
Si ha infatti la seguente importante proprietà nota come caratterizzazione algebrica dei vertici di un poliedro:

Teorema 1. *Dato un problema di PL max*$\{c^T x\colon Ax \leq b, x \geq 0\}$ *e il corrispondente poliedro della regione ammissibile* $P = \{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leq b, x \geq 0\}$*, se* $\bar{x}$ *è soluzione ammissibile di base del sistema* $Ax = b$ *allora* $\bar{x}$ *è un vertice di P:*

$$A\bar{x} = b \Longleftrightarrow \bar{x} \in vert(P) \tag{2}$$

Questo teorema garantisce quindi corrispondenza tra vertici della regione ammissibile e soluzioni di base.

Per il teorema fondamentale della PL inoltre: la soluzione ottima del problema considerato si troverà su uno dei vertici della regione ammissibile. Possiamo dare una motivazione qualitativa di questo fatto, senza alcuna pretesa di fornire una dimostrazione formale: un punto della regione ammissibile sarà di ottimo se le direzioni ammissibili (quelle lungo le quali possiamo muoverci rimanendo sempre all'interno del poliedro) e il gradiente della funzione obiettivo (direzione lungo la quale la si migliora il valore della funzione obiettivo) sono da parti opposte. Una situazione del genere si verifica solo per i vertici.

2.1.26 Dire quando un poliedro è vuoto e quando è illimitato e se si può usare Weirstress.

Risposta:
Un poliedro vuoto è dato dall'insieme di soluzioni di un sistema di equazioni inconsistente (problema di PL con un numero eccessivamente alto di vincoli o semplicemente con vincoli incompatibili).
Un poliedro viene invece definito illimitato se ammette almeno una direzione di recessione.
Il teorema di Weierstrass può essere utilizzato nel caso in cui la regione ammissibile (il poliedro) sia chiusa e limitata, e garantisce in tal caso l'esistenza di un punto di massimo o di minimo.

2.1.27 Definizione di soluzione di base e disegnarne una degenere e non ammissibile.

Risposta:
È possibile dare una caratterizzazione algebrica del concetto geometrico di vertice di un poliedro. Supponiamo di avere una coppia primale/duale di problemi di PL, $(\mathcal{P})$ e $(\mathcal{D})$, dunque sono noti $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \ , \end{cases} \tag{1}$$

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y \in D = \left\{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T,\ y \geq 0\right\} \ . \end{cases} \tag{2}$$

Se il rango di A è minore di n, allora, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema lineare $Ax = 0$ ammette infinite soluzioni non nulle. Ciascuna di tali soluzioni è una direzione di linealità del poliedro primale $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Quindi se il rango di A è minore di n, si ha che $lineal(P) \neq \{0\}$, che equivale a dire che il poliedro P non contiene vertici. Se invece il rango di A è uguale a n, allora l'unica soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$ è la soluzione nulla, ossia $lineal(P) = \{0\}$, che equivale a dire che il poliedro P contiene vertici. In tal caso, la matrice A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile.

Chiameremo *base* un insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$, non necessariamente consecutivi, tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A estraendo le righe A_i con $i \in B$, sia invertibile, cioè $det(A) \neq 0$. La matrice A_B si chiamerà matrice di base, mentre indicheremo con N l'insieme degli indici di riga che non appartengono a B.

Dalla partizione degli m indici di riga in B e N si ha l'analoga partizione per i vettori b e $y \in \mathbb{R}^m$ e per la matrice A:

$$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Data una base B, definiamo:
Soluzione di base prima:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \tag{4}$$

Soluzione di base duale:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \\ \bar{y}_N \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} \quad \text{e} \quad \bar{y}_N = 0. \tag{6}$$

Una soluzione di base (prima o duale) può essere ammissibile o non ammissibile, degenere o non degenere secondo il seguente schema:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Ammissibile	$A_i\bar{x} \leq b_i \;\; \forall i \in N$	$\bar{y}_i \geq 0 \;\; \forall i \in B$
Non Ammissibile	$\exists i \in N : A_i\bar{x} > b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$
Degenere	$\exists i \in B : A_i\bar{x} = b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$
Non Degenere	$A_i\bar{x} \neq b_i \;\; \forall i \in N$	$\bar{y}_i \neq 0 \;\; \forall i \in B$

Soluzioni di base degenere

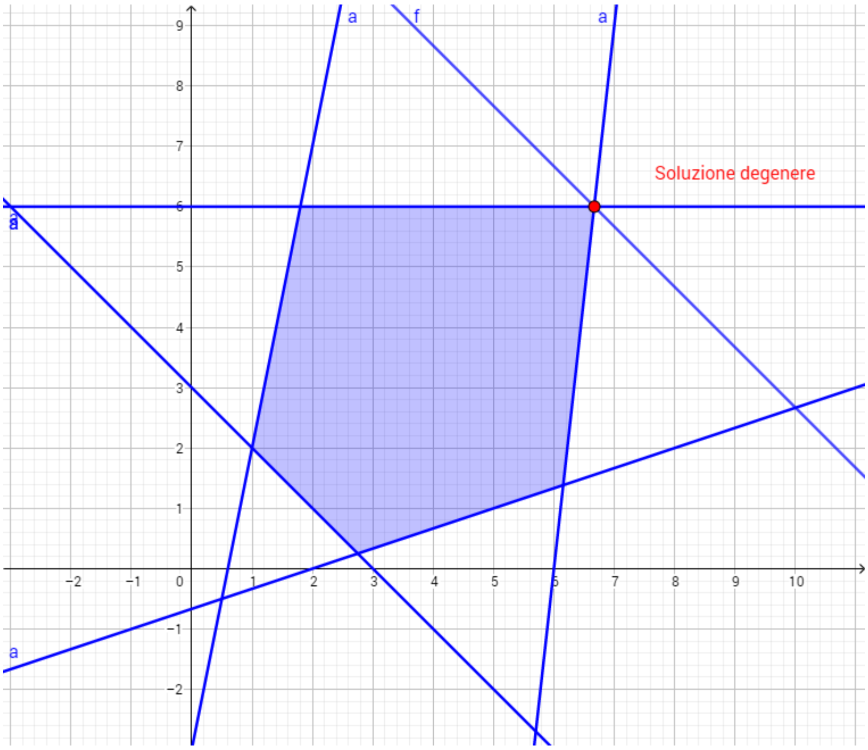


Figura 19: Soluzione di base degenere

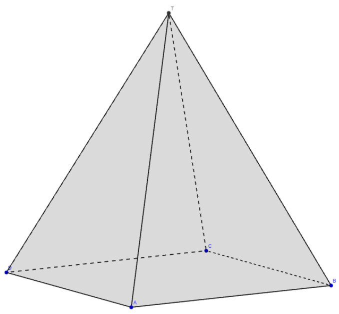


Figura 20: Soluzione di base degenere

Soluzioni di base non ammissibile

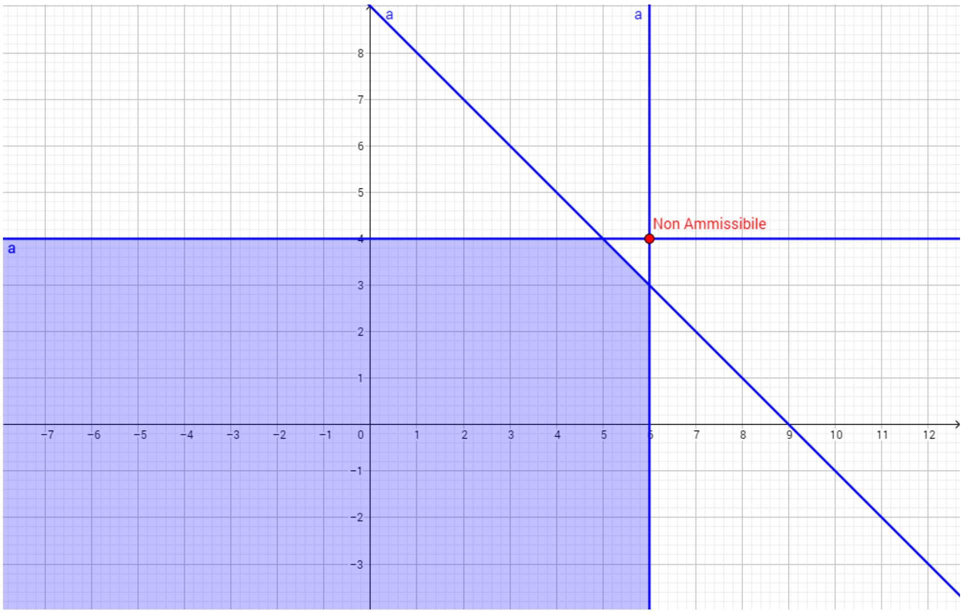


Figura 21: Soluzione di base non ammissibile

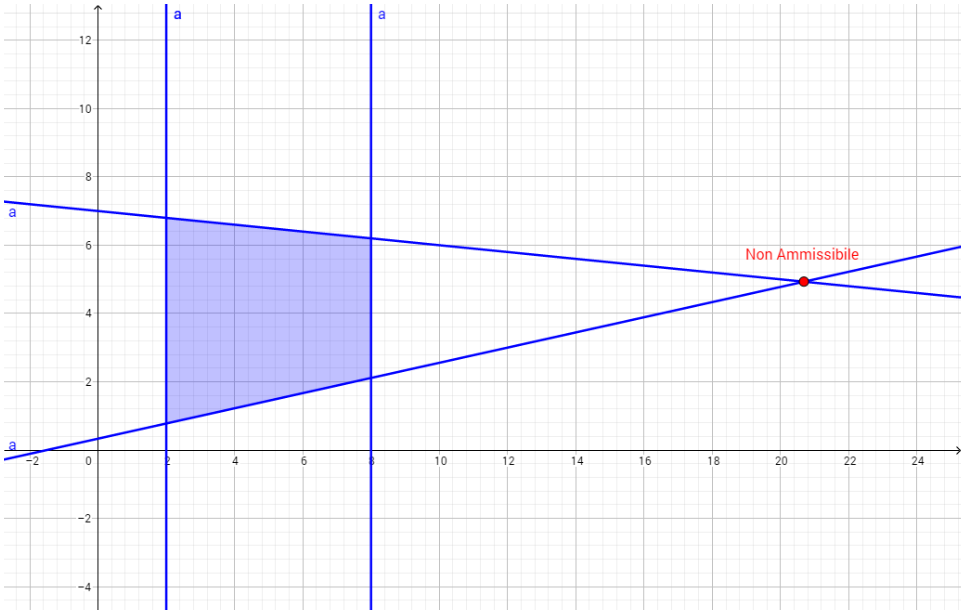


Figura 22: Soluzione di base non ammissibile

Soluzioni di base degenere non ammissibile

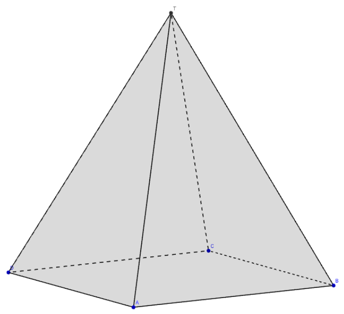


Figura 23: Si ottiene una soluzione di base degenere non ammissibile se si immagina di posizionare un piano trasversale nella piramide ad una certa altezza. In questo modo la punta della piramide risulta non ammissibile e degenere.

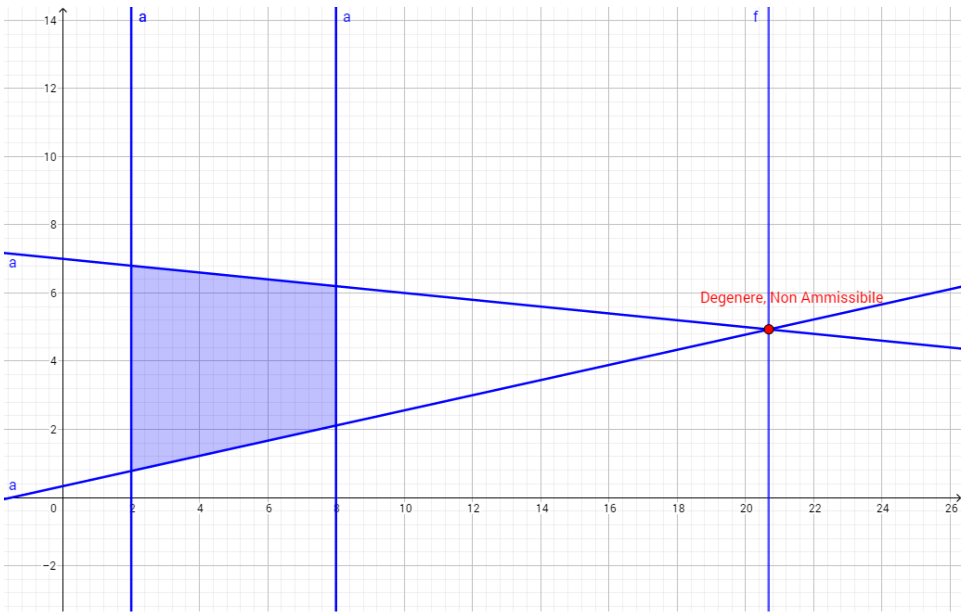


Figura 24: Soluzione di base degenere non ammissibile

2.1.28 Definizione di regione ammissibile.

Risposta:
Un modello matematico di ottimizzazione è un problema di massimo o minimo di una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ristretta ad una regione Ω dello spazio definita da vincoli espressi tramite intersezioni di insiemi di livello di funzioni a valori reali:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \tag{1}$$

dove $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
La funzione f è chiamata *funzione obiettivo*, l'insieme Ω *regione ammissibile*, e ciascuna delle disequazioni $g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m$ ed equazioni $h_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, p$, che descrivono Ω è detta vincolo.

Teoria:
Alcune definizioni che potrebbero essere necessarie.

Definizione 1 (Iperpiano). *La nozione di iperpiano è nata in geometria come generalizzazione della nozione di piano e successivamente ha avuto una riformulazione nella combinatoria, più precisamente nella teoria delle matroidi, volta a cogliere solo alcuni aspetti insiemistici della geometrica.*

Si tratta essenzialmente di un sottospazio di dimensione inferiore di uno $(n1)$ rispetto allo spazio in cui è contenuto (n). Se lo spazio ha dimensione 3, i suoi iperpiani sono i piani.

Definizione 2 (Insieme di livello). *Data una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ ed un numero reale c, si chiama insieme di livello di f associato al livello c l'insieme*

$$f^{-1}(c) = \{x \in A \colon f(x) = c\} \tag{2}$$

dato dalla controimmagine di c rispetto ad f.

Se il dominio A è un insieme aperto dello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, la funzione f è differenziabile e non ha punti critici in $f^{-1}(c)$, allora l'insieme di livello è una varietà differenziale di dimensione $n - 1$ immersa in $\mathbb{R}^n$, cioè una ipersuperficie. Questo fatto è una conseguenza del teorema delle funzioni implicite.

Nel caso in cui f sia una funzione di due variabili che non è costante su un insieme aperto gli insiemi di livello sono delle curve dette curve di livello. Le curve di livello di una funzione di due variabili sono dunque curve lungo le quali la funzione assume sempre lo stesso valore $f(x, y) = c$. L'analisi delle curve di livello di una funzione può essere uno strumento utile allo studio del comportamento della stessa.

2.1.29 Definizione di soluzione ottima.

Risposta:
Dato un problema di Programmazione Lineare, una soluzione ottima è una soluzione ammissibile che ottimizza (massimizza o minimizza) il valore della funzione obiettivo tra tutte le soluzioni ammissibili.

Teoria:
Dato un problema di Programmazione Lineare, problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo e tutti i vincoli sono lineari della variabile x:

$$\begin{cases} \min/\max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \tag{1}$$

allora

- una soluzione ammissibile del problema di PL è un vettore $\bar{x}$ che soddisfa tutti i vincoli ($A\bar{x} \leq b$);
- l'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice *regione ammissibile*;
- una soluzione ottima è una soluzione ammissibile che ottimizza (massimizza o minimizza) il valore della funzione obiettivo tra tutte le soluzioni ammissibili.

Non sempre un problema di PL ammette una soluzione ottima. Infatti ogni problema di PL soddisfa sempre e solo una dei 3 casi seguenti:

1. il problema è inammissibile: l'insieme delle soluzioni ammissibili è vuoto;
2. il problema è illimitato: è possibile trovare delle soluzioni ammissibili che fanno diminuire (o aumentare per problemi di massimo) il valore della funzione obiettivo a piacere;
3. il problema ammette soluzione ottima: esiste almeno una soluzione ammissibile che ottimizza la funzione obiettivo (e il valore ottimo della funzione obiettivo è limitato).

2.1.30 Come si calcolano i vertici del poliedro di un problema di PL?

Risposta:

Teoria:

2.1.31 Enunciare il teorema di Weyl e dire a cosa serve.

Risposta:
Il teorema di Weyl è un importantissimo teorema di programmazione lineare, noto anche come teorema di rappresentazione dei poliedri, che ci permette di definire un poliedro tramite i concetti di involucro convesso e involucro conico di due sottoinsiemi di punti.

Teorema 1 (Teorema di Weyl). *Dato un poliedro P, esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $E = \{e^1, \dots, e^p\}$, eventualmente anche vuoti, tali che*

$$P = conv(V) \bigoplus cono(E) \tag{1}$$

A parole povere, quello che fa il teorema è "scaricare" la struttura del poliedro in una combinazione finita di punti appartenenti a due insiemi distinti.
Bisogna prestare molta attenzione alla somma che viene definita tra i due insiemi $conv(V)$ ed $cono(E)$: si tratta infatti di una somma diretta, cioè una somma in senso insiemistico, che è fatta da tutte le possibili somme di due elementi, uno di $conv(V)$ ed uno di $cono(E)$.
Quindi, graficamente, i punti del poliedro saranno quelli risultanti da tutte le possibili somme tra le combinazioni convesse dei punti di V e le combinazioni coniche degli elementi di E.

Teoria:
Le seguenti definizioni risultano sicuramente indispensabili per la comprensione del risposta fornita.

Definizione 1 (Combinazione convessa). *Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono dei coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i, \quad \lambda \in [0, 1] \ \forall i, \quad : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1. \tag{2}$$

La combinazione convessa si dice propria se $0 < \lambda_i < 1 \ \ \forall i$.
In matematica, una combinazione convessa è quindi una combinazione lineare di elementi (vettori, numeri o punti) fatta con coefficienti non negativia somma 1.

Definizione 2 (Involucro convesso). *L'involucro convesso di un insieme K, denotato con $conv(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K.*

Si può dimostrare che $conv(K)$ è il più piccolo (nel senso della inclusione) insieme convesso che contiene K e quindi un insieme convesso coincide con il suo involucro convesso.

Definizione 3 (Cono)**.** *Una sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice cono se per ogni punti x in K e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$.*

In altre parole, se K contiene un punti x diverso dall'origine, allora contiene anche tutta la semiretta uscente dall'origine passante per x. Oppure, equivalentemente, un cono è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi.

Definizione 4 (Combinazione conica)**.** *Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tali che*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i, \qquad \lambda_i \geq 0 \ \forall i. \tag{3}$$

La combinazione conica si dice propria se $\lambda_i > 0 \ \forall i$

Definizione 5 (Involucro conico)**.** *L'involucro conico di un insieme K, denotato con $cono(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K.*

Si può dimostrare che $cono(K)$ è il più piccolo (nel senso della inclusione) cono convesso che contiene K e che un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo involucro conico.

2.1.32 Definizione di vertice di un poliedro.

Risposta:
Un vertice di un poliedro è un punto del poliedro che non si può esprimere come combinazione convessa propria di altr punti del poliedro stesso. L'insieme dei vertici di un poliedro viene denotato con $vert(P)$.

2.1.33 Enunciare il teorema fondamentale della PL.

Risposta:

Teorema 1 (Teorema fondamentale della PL). *Sia dato un problema d PL in forma primale standard*

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} max\ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \ , \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo che il poliedro P sia rappresentato come

$$P = conv\{v^1, \ldots, v^m\} \bigoplus cono\{e^1, \ldots, e^n\}. \tag{2}$$

Supponendo inoltre che $P \neq \emptyset$, se il problema $(\mathcal{P})$ ha valore ottimo finito ($\mathcal{V}(\mathcal{P}) < +\infty$), allora esiste $k \in \{1, \ldots, m\}$ tale che v^k è un vertice ottimo di $(\mathcal{P})$:

$$\exists k \in \{1, \ldots, m\} \ : \ max\ c^T x = c^T v^k, \quad \forall x \in P. \tag{3}$$

A parole, "la soluzione ottima del problema considerato si trova su uno dei vertici della regione ammissibile".

Teoria:
Possiamo dare una motivazione qualitativa di questo teorema: un punto della regione ammissibile sarà di ottimo se le direzioni ammissibili (quelle lungo le quali possiamo muoverci rimanendo sempre all'interno del poliedro) e il gradiente della funzione obiettivo sono parti opposte. Cioè quei punti nei quali per rimanere nella regione ammissibile dovrei andare da una parte e per migliorare la funzione obiettivo dall'altra.
Una situazione del genere si verifica solo per i vertici. In tutti gli altri punti possiamo spostarci migliorando la funzione obiettivo rimanendo allo stesso tempo all'interno della regione ammissibile.

2.1.34 Disegnare un problema in $\mathbb{R}^2$ con un solo vertice ottimo e una soluzione non di base ottima.

Risposta:

Teoria:

2.2 Programmazione Lineare Su Reti

2.2.1 Costruire una rete capacitata con 4 nodi con un potenziale ottimo e uno non ammissibile.

Risposta:

Teoria:

2.2.2 Costruire una rete a 4 nodi con un flusso di base ottimo e uno non ammissibile degenere.

Risposta:

Teoria:

2.2.3 Definizione di flusso di base.

Risposta:
Se consideriamo, ad esempio, una problema di flusso di costo minimo, formulato semplicemente come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

che è già in forma duale standard, in questo caso le basi coincidono con gli alberi di copertura del grafo, ossia:

$$B \text{ è una base } \iff B \text{ è un albero di copertura,} \tag{2}$$

il relativo flusso di base $\bar{x}$ è dato da

$$\bar{x}^T = E_T^{-1} b \,, \qquad \bar{x}_L = 0. \tag{3}$$

2.2.4 Costruire un flusso di base non ammissibile.

Risposta:

Teoria:

2.2.5 Costruire un flusso di base degenere non ottimo su una rete non capacitata.

Risposta:

Teoria:

2.2.6 Costruire un flusso di base degenere ottimo su una rete non capacitata.

Risposta:

Teoria:

2.2.7 Scrivere il modello del flusso di costo minimo non capacitato.

Risposta:
Consideriamo un grafo $G = (N, A)$ e supponiamo che su ogni arco (i, j) siano definiti un costo c_{ij} per unità di flusso, una capacità inferiore $l_{i,j}$ ed una superiore $u_{i,j}$ del flusso. Sui nodi siano assegnati dei bilanci b_i con la convenzione che $b_i > 0$ significa che il nodo i è un pozzo (destinazione) e che $b_i < 0$ significa che il nodo i è una sorgente (origine). Introduciamo le variabili $x_{i,j}$ ognuna delle quali rappresenta il flusso sull'arco (i, j). Si vuole determinare il flusso di costo minimo che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi.
Il problema del flusso di costo minimo non capacitato è un caso particolare del problema di flusso di costo minimo in cui la capacità superiore sugli arch u_{ij} sono illimitate, ovvero $u_{ij} = +\infty$. In questo caso il problema si può formulare semplicemente come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

che è già in forma duale standard.

Teoria:
La forma compatta

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \min c_{ij} x_{ij} \\ \sum\limits_{(p,\, i) \in A} x_{pi} - \sum\limits_{(i,\, q) \in A} x_{iq} = b_i \quad \forall i \in N \quad \textit{(Vincoli di bilancio)} \\ x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall (i, j) \in A \quad \textit{(Vincoli di capacità)} \end{cases} \tag{3}$$

Le basi coincidono con gli alberi di copertura del grafo, ossia:

$$B \text{ è una base} \iff B \text{ è un albero di copertura} \tag{4}$$

Quindi per trovare una base è sufficiente fare una partizione degli archi in due sottoinsiemi $(T,\ L)$ dove T è un albero di copertura. Il relativo flusso di base $\bar{x}$ è dato da

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} b\,, \qquad \bar{x}_L = 0\,. \tag{5}$$

Tale flusso è ammissibile se e solo se $\bar{x} \geq 0$ ed è degenere se e solo se esiste un arco $(i,\ j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$.

2.2.8 Scrivere il modello del flusso di costo minimo capacitato.

Consideriamo un grafo $G = (N, A)$ e supponiamo che su ogni arco (i, j) siano definiti un costo c_{ij} per unità di flusso, una capacità inferiore $l_{i,\,j}$ ed una superiore $u_{i,\,j}$ del flusso. Sui nodi siano assegnati dei bilanci b_i con la convenzione che $b_i > 0$ significa che il nodo i è un pozzo (destinazione) e che $b_i < 0$ significa che il nodo i è una sorgente (origine). Introduciamo le variabili $x_{i,\,j}$ ognuna delle quali rappresenta il flusso sull'arco (i, j). Si vuole determinare il flusso di costo minimo che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi.
Il problema si può formulare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min c_{ij}x_{ij} \\ \sum\limits_{(p,\,i)\in A} x_{pi} - \sum\limits_{(i,\,q)\in A} x_{iq} = b_i \quad \forall i \in N \quad \textit{(Vincoli di bilancio)} \\ l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad\qquad \forall (i, j) \in A \quad \textit{(Vincoli di capacità)} \end{cases} \tag{1}$$

oppure nella forma compatta

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ l \le x \le u \end{cases} \tag{2}$$

Dove la matrice E, di dimensione $|N| \times |A|$, è la matrice di incidenza del grafo in cui l'elemento di riga $p \in N$ e colonna $(i,\ j) \in A$ è:

$$E_{p,\ (i,\ j)} = \begin{cases} -1 & \text{se p = i (sorgente)} \\ 1 & \text{se p = j (destinazione)} \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases} \tag{3}$$

Senza ledere di generalità possiamo supporre che $l = 0$, allora

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ 0 \le x \le u \end{cases} \tag{4}$$

2.2.9 Scrivere il modello dei potenziali su reti capacitate.

Risposta:
Il duale del problema di flusso di costo minimo capacitato, è detto problema dei potenziali ai nodi ed è dato da:

$$\begin{cases} \max\ (b, u)^T \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \tag{1}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \max\ \pi^T b + \mu^T u \\ \pi^T E + \mu^T \leq c^T \\ \mu \leq 0 \end{cases}. \tag{2}$$

2.2.10 Disegnare un rete che non ha soluzioni ammissibili.

2.2.11 Dare la definizione di potenziale degenere e costruire un potenziale non ottimo con 4 nodi

2.2.12 Scrivere il modello dei potenziali su reti non capacitate.

Risposta:
Il duale del problema di flusso di costo minimo non capacitato (in cui le capacità superiori sugli archi sono illimitate, ovvero $u_{i,\ j}$), è il seguente:

$$\begin{cases} \max \pi^T b \\ \pi^T E \leq c^T \end{cases} \tag{1}$$

ed è chiamato problema dei potenziali ai nodi della rete. Il potenziale di base relativo alla base T è la soluzione del sistema

$$\pi^T E_T = c^T. \tag{2}$$

Teoria:
Tale sistema è di facile risoluzione perchè E_T è triangolare inferiore. Inoltre si pone $\pi_1 = 0$ in quanto il sistema è sottodeterminato, cioè ha $n-1$ equazioni e n incognite. Perciò il potenziale di base è

$$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}. \tag{3}$$

2.2.13 Dire cosa è un algoritmo greedy.

Risposta:
Un algoritmo *greedy* è un algoritmo che cerca di ottenere una soluzione ottima da un punto di vista globale attraverso la scelta della soluzione più golosa (aggressiva o avida, a seconda della traduzione preferita del termine greedy dall'inglese) ad ogni passo locale. Questa tecnica consente, dove applicabile (infatti non sempre si arriva ad una soluzione ottima), di trovare soluzioni ottimali per determinati problemi in un tempo polinomiale.

Il problema "Dai il minor numero di monete di resto utilizzando monete da 100, 10, 1 eurocent è un problema risolvibile tramite un algoritmo di tipo greedy: ad ogni passo viene controllato il resto ancora da dare e si aggiunge la moneta con il maggior valore possibile. Quindi per dare un resto di 112 eurocent la macchina farà cadere in sequenza una moneta da 100, poi 10, poi 1, e infine ancora 1 eurocent (per un totale di 4 monete).
Tramite questo esempio è possibile capire come un algoritmo greedy non fornisca sempre una soluzione ottima ma comunque una soluzione ammissibile: questo esempio, che possiamo chiamare "Minor monete di resto", è risolvibile grazie ad un algoritmo greedy con una soluzione ottima solo per quell'insieme di valori di monete: se infatti avessimo anche monete da 105 eurocent (valori monete: 105, 100, 10, 1), l'algoritmo greedy darebbe un totale di 8 monete (una da 105 e 7 da 1), quando posso trovare una soluzione ottima con 4 monete (100 + 10 + 1 + 1).

2.2.14 Definizione di taglio di una rete.

Risposta:
Un taglio (N_s, N_t) è una partizione dell'insieme N dei nodi in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t \ , \quad \text{e} \quad N_s \cap N_t = \emptyset \, . \tag{1}$$

Un taglio (N_s, N_t) si dice ammissibile se N_s contiene almeno l'origine s e N_t contiene almeno la destinazione t. Gli archi diretti e inversi del taglio (N_s, N_t) sono così definiti:

$$A^+ = \{(i, j) \in A \colon i \in N_s, j \in N_t\} \quad \text{archi diretti,} \tag{2}$$

$$A^- = \{(i, j) \in A \colon i \in N_t, j \in N_s\} \quad \text{archi inversi.} \tag{3}$$

La capacità del taglio (N_s, N_t) è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio

$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij} \, . \tag{4}$$

2.2.15 Definizione di taglio di capacità minima.

Risposta:
Il problema duale del flusso massimo viene chiamato problema del taglio di capacità minima ed è dato da

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\mu_{ij} \\ \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \\ \pi_t - \pi_s = 1 \\ \mu \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

2.2.16 Enunciare il teorema "Max flow/Min cut".

Risposta:

Teorema 1 (Max flow - min cut). *Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_s, N_t) tali che*

$$x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t) \ , \tag{1}$$

allora x è un flusso di valore massimo e (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima.

2.2.17 Definizione di cammino aumentante e di portata di un cammino aumentante.

Risposta:

Definizione 1 (Grafo residuo). *Dato un flusso x ammissibile, il grafo residuo (relativo a x) è un grafo $G(x) = (N, A(x))$ con gli stessi nodi del grafo G, mentre gli archi e le loro capacità r_{ij}, dette residue, sono così definiti:*

$$(i, j) \in A \,, \quad x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i, j) \in A(x) \,, \quad r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} \,, \tag{1}$$

$$(i, j) \in A \,, \quad x_{ij} > 0 \Rightarrow (i, j) \in A(x) \,, \quad r_{ij} = x_{ij} \,, \tag{2}$$

Definizione 2 (Cammino aumentante). *Dato un flusso x ammissibile, un cammino aumentante (rispetto ad x) è un cammino orientato da s a t nel grafo residuo G.*

2.3 Programmazione Lineare Intera

2.3.1 Enunciare il teorema di equivalenza tra PL e PLI.

Risposta:

2.3.2 Scrivere il modello matematico dello Zaino

Risposta:
Dato un contenitore di volume b e n oggetti aventi ciascuno un valore c_i ed un volume a_i, con $i = 1, \dots, n$, dobbiamo scegliere quali oggetti inserire nel contenitore in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti caricati. In tale schema rientrano anche alcuni problemi di gestione di missioni scientifiche (spaziali, al Polo, ecc ...). Tale problema è noto in letteratura come problema dello zaino (*knapsack problem*). Se ad ogni oggetto i associamo una variabile binaria x_i:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene caricato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

allora tale problema può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{2}$$

A parole, *massimizzare il valore contenuto nello zaino rispettando il vincolo di capacità dello stesso.*

2.3.3 Descrivere l'algoritmo di caricamento per lo Zaino Binario e per lo Zaino Intero

Risposta:
Definiamo il rendimento di una variabile x_i come il rapporto $\frac{c_i}{a_i}$ tra il suo valore e il suo volume, e supponiamo che le variabili siano poste in ordine decrescente di rendimento, cioè

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}. \tag{1}$$

Per problemi a variabili binarie, per trovare una valutazione superiore del valore ottimo consideriamo il rilassamento continuo, sostituendo i vincoli binari $x_i \in \{0, 1\}$ con vincoli continui $0 \leq x_i \leq 1$:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Se indichiamo con h l'indice per cui nel contenitore possono essere inseriti i primi h oggetti ma non i primi $h+1$ oggetti, cioè

$$\sum_{i=1}^{h} a_i \leq b \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{h+1} a_i > b\,, \tag{3}$$

allora la soluzione ottima del problema è

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots, x_h = 1, x_{h+1} = \frac{b - \displaystyle\sum_{i=1}^{h} a_i}{a_{h+1}}, x_{h+2} = 0, \ldots, x_n = 0. \tag{4}$$

Quindi una valutazione superiore del valore ottimo del problema è data da

$$v_S(P) = \left\lfloor c_1 + \cdots + c_h + \frac{c_{h+1}(b - \sum_{i=1}^{h} a_i)}{a_{h+1}} \right\rfloor. \tag{5}$$

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo consideriamo il seguente algoritmo greedy: inseriamo gli oggetti nel contenitore seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Quando un oggetto non entra per intero nello zaino, si passa in ordine di rendimento a quello successivo, fino alla fine degli oggetti. Tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

Per problemi a variabili intere, utilizziamo sempre il rilassamento continuo per trovare una valutazione superiore del valore ottimo:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{6}$$

La soluzione ottima di tale problema si calcola facilmente sfruttando la dualità lineare; infatti il duale è

$$\begin{cases} \min yb \\ y \geq \frac{c_1}{a_1} \\ \vdots \\ y \geq \frac{c_n}{a_n} \end{cases} \tag{7}$$

la cui soluzione ottima è $y = \frac{c_1}{a_1}$ con valore ottimo $\frac{bc_1}{a_1}$. Pertanto, la soluzione ottima del primale è:

$$x = \left(\frac{b}{a_1}, 0, \ldots, 0 \right) \tag{8}$$

ossia si satura il contenitore solo con l'oggetto di massimo rendimento e otteniamo come valutazione superiore

$$v_S(P) = \left\lfloor \frac{bc_1}{a_1} \right\rfloor. \tag{9}$$

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo applichiamo un algoritmo greedy simile a quello usato per i problemi a variabili binarie: seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti, inseriamo gli oggetti nel contenitore nella massima quantità possibile controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Come nel caso precedente tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

2.4 Programmazione Non Lineare

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3 Domande per Esame

Questa seconda raccolta di domande è divisa per prova di esame: contiene 8 prove di esame orale date dal Prof. Pappalardo nelle sessioni d'esame precedenti.

3.1 Esame 1

3.1.1 Dare la definizione di vertice e mostrare poi un problema di PL, con poliedro dotato di vertici, che sia illimitato sia inferiormente che superiormente.

Un vertice di un poliedro è un punto del poliedro che non può essere espresso come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro. L'insieme dei vertici di un poliedro viene denotato con $vert(P)$.

Il poliedro del problema

$$\begin{cases} \max/\min x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

ha un vertice in $(0, 0)$, ma ha massimo $+\infty$ e minimo $-\infty$.

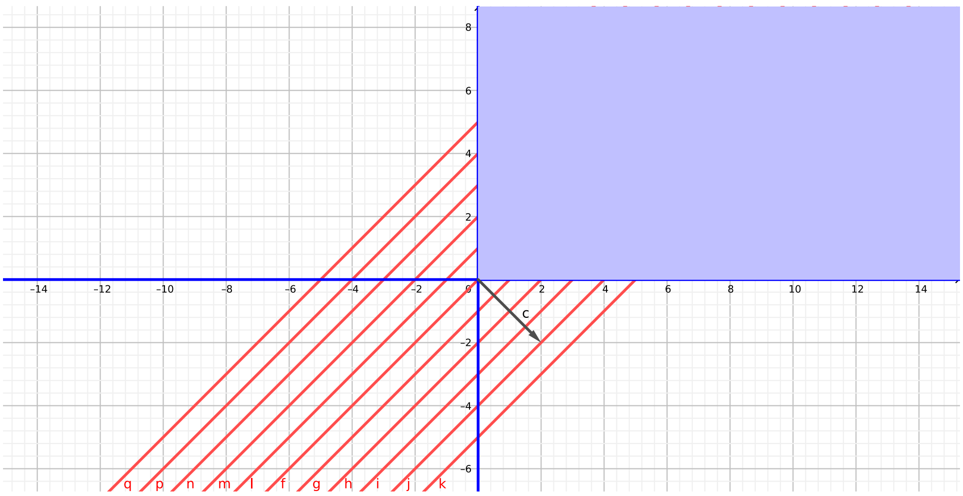


Figura 25: Rappresentazione grafica del problema esempio

3.1.2 Illustrare il simplesso duale. Quante e quali regole anticiclo ci sono?

L'algoritmo del simplesso duale è utilizzato per la risoluzione di problemi di PL in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'algoritmo parte da una soluzione di base duale ammissibile (cioè un vertice), se la soluzione di base complementare (primale) è ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il duale e per il primale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base duale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo decresce (il problema è minimo), mentre se la nuova soluzione di base duale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare nuovamente sulle stesse basi con opportune regole anticiclo.

Algoritmo del simplesso duale:

1. Trovare una base B che genere una soluzione di base duale ammissibile.
2. Calcolare la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e la soluzione di base duale $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}$ e $\bar{y}_N = 0$.
3. **if** $b_N - A_N \bar{x} \geq 0$ **then STOP** ($\bar{y}$ è ottima per (D) e $\bar{x}$ è ottima per $(\mathcal{P})$)
else calcolare l'indice entrante

$$k := min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\}$$

(regola anticiclo di Bland),

porre $W = -A_B^{-1}$ ed indicare con W^i la i-esima colonna di W.

4. **if** $A_k W^i \geq 0 \;\; \forall i \in B$ **then STOP** ($(\mathcal{D})$ ha valore ottimo $-\infty$ e $(\mathcal{P})$ è vuoto)
else calcolare

$$\vartheta := min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} \; : \; i \in B, \;\; A_k W^i < 0 \right\},$$

calcolare l'indice uscente

$$h := min\left\{ i \in B : \;\; A_k W^i < 0, \;\; \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\}$$

(regola anticiclo di Bland),

aggiornare la base $B := B \backslash \{h\} \cup \{k\}$ e tornare al passo 2.

La regola anticiclo utilizzata è la regola anticiclo di Bland: *tra tutte le variabili candidate al cambio base, scegliere sempre quella di indice minimo.*

3.1.3 Dare la definizione di potenziale di base, spiegando cosa vuol dire non ammissibile e cosa vuol dire degenere e costruirne poi uno su una rete a 4 nodi e 5 archi che sia ottimo.

Dato un problema dei potenziali ai nodi

$$\begin{cases} \max\,(b,u)^T \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \tag{1}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \max\,\pi^T b + \mu^T u \\ \pi^T E + \mu^T \leq c^T \\ \mu \leq 0 \end{cases}, \tag{2}$$

e una base

$$\begin{cases} B = T \cup U \cup T' \cup L, \end{cases} \tag{3}$$

si definisce potenziale di base il vettore π che lo risolve.
Ponendo $\pi_1 = 0$, otteniamo il potenziale di base

$$\pi^T = c_T^T E_T^{-1}, \tag{4}$$

che equivalentemente possiamo costruire ponendo il potenziale di un nodo a 0 e ottenendo quello dei rimanenti nodi sommando/sottraendo (a seconda del verso dell'arco che si percorre) il costo dell'arco che li congiunge a quello di partenza, usando solamente gli archi dell'albero di copertura T della base.
Se definiamo il costo ridotto dell'arco (i,j) relativo al potenziale $\bar{\pi}$ come

$$c_{i,j}^{\pi} = c_{i,j} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j, \tag{5}$$

allora il potenziale di base $\bar{\pi}$ è ammissibile se e solo se i costi ridotti degli archi in L sono non negativi ed i costi ridotti degli archi in U sono non positivi. Quindi affinchè sia non ammissibile è sufficiente che un arco in L abbia costo ridotto negativo o che un arco in U abbia costo ridotto positivo.
Il potenziale di base $\bar{\pi}$ è degenere se e solo se un arco di L oppure un arco di U ha costo ridotto nullo.
Se le condizioni di Bellman sono soddisfatte, cioè

$$c_{i,j}^{\bar{\pi}} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in L, \tag{6}$$

$$c_{i,j}^{\bar{\pi}} \leq 0 \quad \forall (i,j) \in U, \tag{7}$$

$\bar{\pi}$ è un potenziale ottimo:

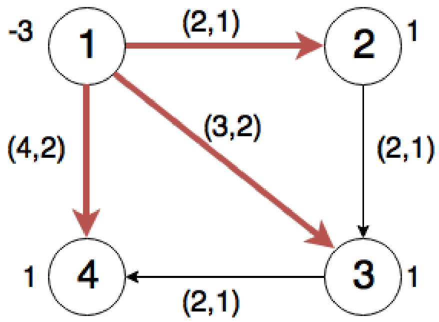


Figura 26: Esempio potenziale ottimo

$$\begin{aligned} T &= \{(1,2),(1,3),(1,4)\} \\ L &= \{(2,3),(3,4)\} \\ U &= \{\} \\ \bar{x} &= (1,1,1,0,0) \\ \bar{\pi} &= (0,2,3,4) \\ c^{\bar{\pi}}_{2,3} &= c_{2,3} + \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = 2+2-3 = 1 \\ c^{\bar{\pi}}_{3,4} &= c_{3,4} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = 2+3-4 = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

3.1.4 Scrivere il modello matematico del problema del flusso massimo e disegnare poi una rete che ha due vettori di flusso massimo distinti.

Il problema del flusso massimo richiede di spedire da un nodo origine s ad un nodo destinazione t il massimo flusso possibile compatibilmente con le capacità superiori definite sugli archi, supponendo che il grafo sia orientato, con capacità superiori intere, contenente almeno un cammino orientato da s a t.
Può essere formulato così:

$$\begin{cases} \max \ v \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \tag{1}$$

dove

$$b_i = \begin{cases} -v & \text{se} \quad i = s \\ 0 & \text{se} \quad i \neq s, t \\ v & \text{se} \quad i = t \end{cases} \tag{2}$$

dove la variabile v rappresenta il flusso totale spedito da s a t.

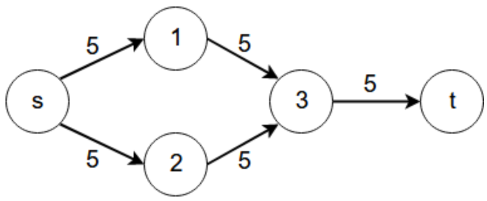


Figura 27: Rete con due vettori di flusso massimo distinti

Il flusso massimo è 5 e può essere distribuito a piacere sugli archi $\{(s,1),(1,3)\}$ e sugli archi $\{(s,2),(2,3)\}$.

3.1.5 Illustrare gli algoritmi che forniscono le valutazioni inferiori e superiori dei problemi dello zaino 0-1 e dello zaino intero.

Definiamo il rendimento di una variabile x_i come il rapporto $\frac{c_i}{a_i}$ tra il suo valore e il suo volume, e supponiamo che le variabili siano poste in ordine decrescente di rendimento, cioè

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}. \tag{1}$$

Per problemi a variabili binarie, per trovare una valutazione superiore del valore ottimo consideriamo il rilassamento continuo, sostituendo i vincoli binari $x_i \in \{0, 1\}$ con vincoli continui $0 \leq x_i \leq 1$:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Se indichiamo con h l'indice per cui nel contenitore possono essere inseriti i primi h oggetti ma non i primi $h + 1$ oggetti, cioè

$$\sum_{i=1}^{h} a_i \leq b \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{h+1} a_i > b\,, \tag{3}$$

allora la soluzione ottima del problema è

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots, x_h = 1, x_{h+1} = \frac{b - \sum_{i=1}^{h} a_i}{a_{h+1}}, x_{h+2} = 0, \ldots, x_n = 0. \tag{4}$$

Quindi una valutazione superiore del valore ottimo del problema è data da

$$v_S(P) = \left\lfloor c_1 + \cdots + c_h + \frac{c_{h+1}(b - \sum_{i=1}^{h} a_i)}{a_{h+1}} \right\rfloor. \tag{5}$$

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo consideriamo il seguente algoritmo greedy: inseriamo gli oggetti nel contenitore seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Quando un oggetto non entra per intero nello zaino, si passa in ordine di rendimento a quello successivo, fino alla fine degli oggetti. Tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

Per problemi a variabili intere, utilizziamo sempre il rilassamento continuo per trovare una valutazione superiore del valore ottimo:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{6}$$

La soluzione ottima di tale problema si calcola facilmente sfruttando la dualità lineare; infatti il duale è

$$\begin{cases} \min yb \\ y \geq \frac{c_1}{a_1} \\ \vdots \\ y \geq \frac{c_n}{a_n} \end{cases} \tag{7}$$

la cui soluzione ottima è $y = \frac{c_1}{a_1}$ con valore ottimo $\frac{bc_1}{a_1}$. Pertanto, la soluzione ottima del primale è:

$$x = \left(\frac{b}{a_1}, 0, \ldots, 0 \right) \tag{8}$$

ossia si satura il contenitore solo con l'oggetto di massimo rendimento e otteniamo come valutazione superiore

$$v_S(P) = \left\lfloor \frac{bc_1}{a_1} \right\rfloor. \tag{9}$$

Per trovare una valutazione inferiore del valore ottimo applichiamo un algoritmo greedy simile a quello usato per i problemi a variabili binarie: seguendo l'ordine decrescente dei rendimenti, inseriamo gli oggetti nel contenitore nella massima quantità possibile controllando che venga rispettato il vincolo di capacità. Come nel caso precedente tale algoritmo fornisce una soluzione ammissibile, ma non necessariamente una soluzione ottima.

3.1.6 Dare la definizione di Disuguaglianza Valida e di Piano di Taglio e scrivere poi l'equazione del piano di taglio di Gomory.

La disequazione $\pi^T x \leq \pi_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme Ω se

$$\pi^T x \leq \pi_0 \quad \forall x \in \Omega\,. \tag{1}$$

Sia $\bar{x}$ l'ottimo del rilassamento continuo. Una disuguaglianza valida $\pi^T x \leq \pi_0$ per Ω tale che $\pi^T \bar{x} > \pi_0$ si dice piano di taglio.

Un insieme classico di piani di taglio è quello dei piani di taglio di Gomory. Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{2}$$

e che B sia una base ottima del rilassamento continuo del problema di PLI, poniamo:

$$A = (A_B\,, A_N) \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Poniamo:

$$\widetilde{b} = \bar{x}_B \quad \text{e} \quad \widetilde{A} = A_B^{-1} A_N. \tag{4}$$

Allora, se $\widetilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$, la disuguaglianza:

$$\sum_{j \in N} \{\widetilde{a}_{rj} x_j\} \geq \{\widetilde{b}_r\} \tag{5}$$

dove $\{\}$ indica la parte frazionaria, è un piano di taglio per il problema dato.

3.1.7 Scrivere l'enunciato del teorema LKKT e dire poi come viene usato nella PNL.

Se x^* è un minimo locale di f su Ω ed i vincoli sono regolari in x^*, allora esistono due vettori $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tali che (x^*, λ^*, μ^*) soddisfa il sistema di Lagrange-Karush-Kuhn-Tucker (LKKT):

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ \lambda^* \geq 0 \\ g(x^*) \leq 0 \\ h(x^*) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Nella PNL, il teorema fornisce solo condizioni necessarie per minimi locali, ma non sufficienti.
I due teoremi che ne permettono l'utilizzo sono i seguenti:

1. Se (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione del sistema LKKT, allora x^* è chiamato punto stazionario.
2. Supponiamo che f sia convessa, i vincoli g_i siano convessi per ogni $i = 1, \ldots, m$ ed i vincoli h_j siano lineari per ogni $j = 1, \ldots, p$. Se (x^*, λ^*, μ^*) è una soluzione del sistema LKKT, allora x^* è un minimo globale di f su Ω.

3.1.8 Dare la definizione di matrice di proiezione, dire a cosa serve illustrando l'algoritmo del gradiente proiettato.

La proiezione ortogonale di un vettore $y \in R^n$ sul sottospazio $S = \{x \in R^n : Mx = 0\}$ è data dal vettore Hy, dove la matrice $H = I - M^T(MM^T)^{-1}M$ è detta matrice di proiezione.
Il metodo del gradiente proiettato si applica per trovare un punto stazionario per un problema di PNL vincolato del tipo

$$\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \leq b \end{cases} \tag{1}$$

Alla k-esima iterazione se il punto corrente x_k è interno alla regione ammissibile, si sceglie la direzione $d_k = -\nabla f(x_k)$; se invece x_k appartiene alla frontiera della regione ammissibile, si sceglie d_k uguale alla proiezione ortogonale di $-\nabla f(x_k)$ sul sottospazio vettoriale definito dai vincoli attivi nel punto x_k.
L'algoritmo definisce M come la sottomatrice di A con le righe relative ai vincoli attivi nel punto. Si calcola la matrice $H = I - M^T(MM^T)^{-1}M$ e la direzione $d_k = -H\nabla f(x_k)$.
Per calcolare il massimo spostamento t_{max}, basta risolvere il problema di PL

$$\begin{cases} \max t \\ A(x^k + td^k) \leq b \end{cases} \tag{2}$$

E successivamente trovare, per $t \in [0, tmax]$, il t per cui $f(x + td)$ è massimo (minimo).

3.2 Esame 2

3.2.1 Scrivere il modello del duale ausiliario e dire a cosa serve.

Consideriamo il problema in forma duale standard:

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Senza ledere la generalità della trattazione possiamo supporre che $c \geq 0$, cambiando eventualmente segno alle colonne di A relative alle componenti negative di c. Inoltre possiamo supporre che nel sistemi $y^T A = c^T$ non ci siano equazioni ridondanti. Per trovare una base ammissibile di $(\mathcal{D})$, al passo 1 del simplesso duale, si costruire il problema ausiliario duale:

$$(\mathcal{D}_{aux}) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \\ y^T A + \epsilon^T = c^T \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

La base formata dagli indici relativi alle variabili ausiliarie $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, con la matrice identità come matrice di base, è una base ammissibile per il problema ausiliario, infatti la corrispondente soluzione di base è

$$\begin{cases} \bar{y} = 0 \\ \bar{\epsilon} = c \geq 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

A parte da tale base ammissibile, possiamo applicare il simplesso duale per risolvere il problema ausiliario. Il valore ottimo del problema ausiliario (che è compreso tra 0 e $\sum_{i=1}^{n} c_i$) stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema $(\mathcal{D})$ secondo il seguente teorema:

Teorema 1.

1. *Se il valore ottimo di* $(\mathcal{D}_{aux})$ *è* > 0 *allora* $(\mathcal{D})$ *non ha soluzioni ammissibili.*
2. *Se il valore ottimo di* $(\mathcal{D}_{aux})$ *è* $= 0$ *allora c'è una base ammissibile per* $(\mathcal{D})$ *che si costruisce a partire da una base ottima per* $(\mathcal{D}_{aux})$*.*

3.2.2 Descrivere il metodo del gradiente libero aggiungendo anche i criteri di stop dell'algoritmo.

Il metodo del gradiente libero si applica per trovare un punto stazionario di un problema di PNL non vincolato. Supponiamo di partire da un punto ammissibile x_k e consideriamo la restrizione della funzione f ad una semiretta di direzione d_k uscente dal punto x_k:

$$\varphi(t) = f(x_k + td_k), \quad \text{con } t \geq 0. \tag{1}$$

Nel metodo del gradiente libero, come direzione di ricerca si sceglie quella opposta al gradiente, ossia $d_k = -\nabla f(x_k)$. Tale direzione è detta direzione di massima discesa nel punto x_k perchè è la direzione che minimizza il valore $\varphi'(0)$: infatti per una generica direzione d con $||d|| = 1$ si ha che

$$\varphi'(0) = d^T \nabla f(x_k) = ||\nabla f(x_k)|| cos\theta_k \,, \tag{2}$$

dove θ_k è l'angolo compreso tra i vettori $\nabla f(x_k)$ e d. Quindi $\varphi'(0)$ è minimo quando $cos\theta_k = -1$, cioè quando la direzione d è opposta a $\nabla f(x_k)$.
Il passo t_k può essere scelto effettuando una ricerca monodimensionale esatta o inesatta. Nel caso si utilizzi una ricerca esatta, il passo t_k è una soluzione del problema

$$\min{}_{t>0} f(x_k - t\nabla f(x_k)) \,, \tag{3}$$

e il metodo del gradiente libero è il seguente:

Scegli $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e poni $k := 0$
while $\nabla f(x_k) \neq 0$ **do**
Calcola una soluzione t_k del problema

$$\min{}_{t>0} f(x_k - t\nabla f(x_k)) \,, \tag{4}$$

$x_{k+1} := x_k - t_k \nabla f(x_k)$, $k := k + 1$.

3.2.3 Disegnare un problema di PL (di minimo) illimitato inferiormente e dire come il simplesso lo certifica.

3.2.4 Disegnare un rete con due alberi distinti di cammini minimi e scrivere il vettore ottimo x di entrambi.

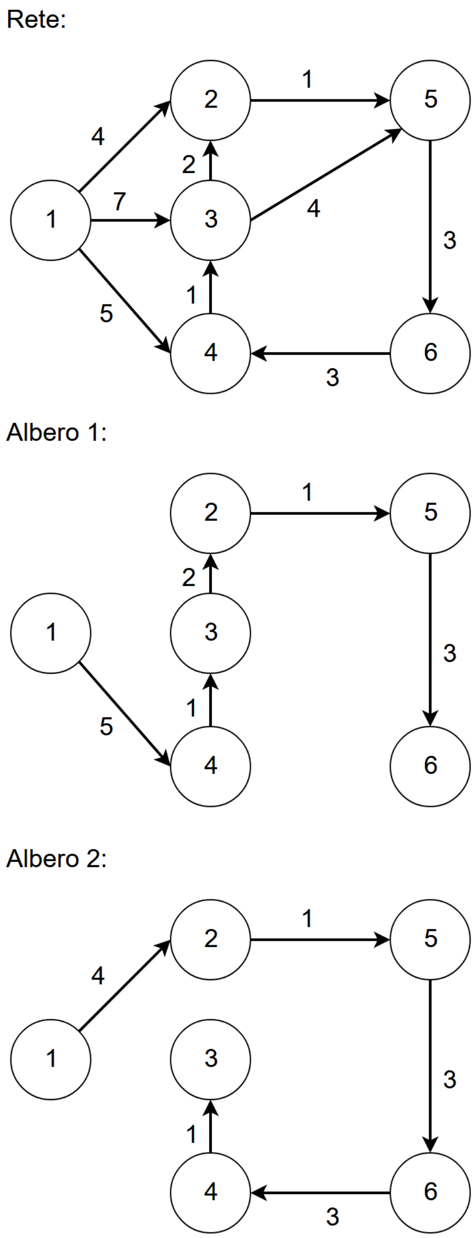


Figura 28: Rete con due alberi di cammini minimi distinti

3.2.5 Scrivere il modello matematico del problema del flusso massimo e dare poi la definizione di capacità di un taglio della rete.

Il problema del flusso massimo richiede di spedire da un nodo origine s ad un nodo destinazione t il massimo flusso possibile compatibilmente con le capacità superiori definite sugli archi, supponendo che il grafo sia orientato, con capacità superiori intere, contenente almeno un cammino orientato da s a t.
Può essere formulato così:

$$\begin{cases} \max \ v \\ Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \tag{1}$$

dove

$$b_i = \begin{cases} -v & \text{se} \quad i = s \\ 0 & \text{se} \quad i \neq s, t \\ v & \text{se} \quad i = t \end{cases} \tag{2}$$

dove la variabile v rappresenta il flusso totale spedito da s a t.

Un taglio (N_s, N_t) è una partizione dell'insieme N dei nodi in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t \ , \quad \text{e} \quad N_s \cap N_t = \emptyset \, . \tag{3}$$

Un taglio (N_s, N_t) si dice ammissibile se N_s contiene almeno l'origine s e N_t contiene almeno la destinazione t. Gli archi diretti e inversi del taglio (N_s, N_t) sono così definiti:

$$A^+ = \{(i, j) \in A \colon i \in N_s, j \in N_t\} \quad \text{archi diretti,} \tag{4}$$

$$A^- = \{(i, j) \in A \colon i \in N_t, j \in N_s\} \quad \text{archi inversi.} \tag{5}$$

La capacità del taglio (N_s, N_t) è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio

$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij} \, . \tag{6}$$

3.2.6 Costruire un potenziale di base ammissibile ed uno non ottimo su una rete capacitata a 4 nodi e 5 archi.

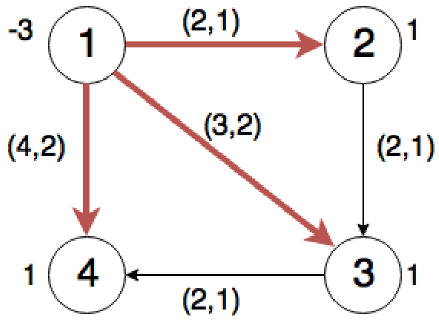


Figura 29: Esempio potenziale ammissibile

$$\begin{aligned}
T &= \{(1,2),(1,3),(1,4)\} \\
L &= \{(2,3),(3,4)\} \\
U &= \{\} \\
\bar{x} &= (1,1,1,0,0) \\
\bar{\pi} &= (0,2,3,4) \\
c^{\bar{\pi}}_{2,3} &= c_{2,3} + \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = 2+2-3 = 1 \\
c^{\bar{\pi}}_{3,4} &= c_{3,4} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = 2+3-4 = 1
\end{aligned} \tag{1}$$

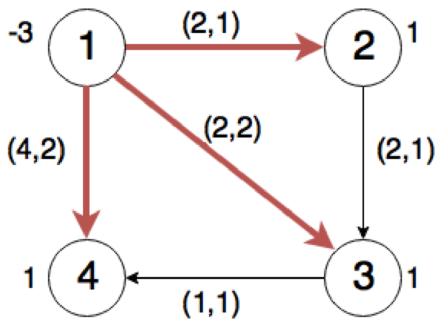


Figura 30: Esempio potenziale non ottimo

$$
\begin{aligned}
T &= \{(1,2), (1,3), (1,4)\} \\
L &= \{(2,3), (3,4)\} \\
U &= \{\} \\
\bar{x} &= (1,1,1,0,0) \\
\bar{\pi} &= (0,2,2,4) \\
c^{\bar{\pi}}_{2,3} &= c_{2,3} + \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = 2 + 2 - 2 = 2 \\
c^{\bar{\pi}}_{3,4} &= c_{3,4} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = 1 + 2 - 4 = -1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Il costo ridotto $c^{\bar{\pi}}_{3,4}$ viola Bellman.

3.2.7 Dopo aver dato le definizioni descrivere la relazione tra k-alberi e cicli hamiltoniani.

Ho prolungato la risposta alla presente domanda per fornire una trattazione completa dell'argomento

Consideriamo un grafo orientato completo $G = (N, A)$ in cui sia definito un costo c_{ij} per ogni $(i, j) \in A$. Un ciclo orientato che passa per tutti i nodi del grafo una ed una sola volta è detto *ciclo hamiltoniano* e il suo costo è definito come la somma dei costi degli archi da cui è formato. Il problema di trovare un ciclo hamiltoniano di costo minimo viene chiamato problema del commesso viaggiatore o in breve TSP (Travelling Salesman Problem), perchè un esempio tipico di tale situazione si può avere nel problema che ha un commesso viaggiatore che deve visitare un numero fissato di città (oppure uffici, edifici) una ed una sola volta per mostrare il proprio prodotto. Rappresentiamo un ciclo hamiltoniano $\mathcal{C}$ mediante le variabili binarie x_{ij}, dove

$$x_ij = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (i, j) \in \mathcal{C} \\ 0 & altrimenti. \end{cases} \tag{1}$$

Se per ogni arco $(i, j) \in A$ si ha $c_{ij} = c_{ji}$, allora il problema è detto *simmetrico*, altrimenti viene detto *asimmetrico*.

Una possibile formulazione del TSP asimmetrico è la seguente:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ \sum\limits_{i\in N, i\neq j} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \\ \sum\limits_{j\in N, j\neq i} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \\ \sum\limits_{i\in S} \sum\limits_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in A. \end{cases} \tag{2}$$

Nella risoluzione del TSP asimmetrico mediante il metodo del Branch and Bound, è importante avere a disposizione "buone" valutazioni inferiori del valore ottimo. A tale scopo, eliminando dal problema il terzo insieme di vincoli, si ottiene un problema rilassato, che equivale al seguente problema di assegnamento di costo minimo

$$\begin{cases} \min \sum_{i,j \in N} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \\ \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A. \end{cases} \tag{3}$$

Uno dei metodi euristici per trovare una soluzione ammissibile per il TSP asimmetrico che ha uno scostamento, in termini di funzione obiettivo, di pochi punti percentuali dalla soluzione ottima. Il metodo viene detto *algoritmo delle toppe* perchè genera un ciclo hamiltoniano attraverso successive fusioni dei cicli disgiunti che costituiscono la soluzione ottima del problema rilassato.

Algoritmo delle toppe

1. Sia $C = \{C_1, \dots, C_p\}$ l'insieme dei cicli orientati corrispondenti alla soluzione ottima del problema rilassato.
2. Per ogni coppia di cicli $C_h, C_k \in C$, valuta l'incremento di costo γ_{hk} corrispondente alla fusione di C_h e C_k nel modo più conveniente possibile.
3. Effettua la fusione dei due cicli C_h e C_k ai quali corrisponde il minimo valore di γ_{hk}. Aggiorna C e poni $p = p - 1$.
4. **if** $p = 1$ **then STOP** (C è un ciclo hamiltoniano),
   else torna al passo 2.

Il TSP simmetrico potrebbe essere trattato come un caos particolare del TSP asimmetrico, tuttavia è preferibile formularlo in una maniera più efficiente. Essendo simmetrica la matrice dei costi, possiamo supporre che gli archi non siano orientati e che l'arco che collega due nodi i e j, con $i < j$, sia indicato con (i, j). Per individuare un ciclo hamiltoniano C usiamo come prima le variabili binarie X_{ij}:

$$x_i j = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad (i,j) \in \mathcal{C} \\ 0 \quad altrimenti. \end{cases} \tag{4}$$

La formulazione del TSP simmetrico è la seguente

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{(h,i)\in A} x_{hi} + \sum_{(i,k)\in A} x_{ik} = 2 \quad \forall i \in N \\ \sum_{(i,j)\in A, i\in S, j\notin S} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A, i\notin S, j\in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset N, \quad 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A. \end{cases} \tag{5}$$

Descriviamo ora un metodo euristico per trovare un ciclo hamiltoniano: *l'algoritmo del nodo più vicino*, che ci fornirà quindi una valutazione superiore del problema del TSP simmetrico. Tale algoritmo parte da un nodo s_1 e lo collega al nodo più vicino s_2 secondo le distanze c_{ij}, poi collega quest'ultimo al nodo più vicino s_3 escludendo quelli già raggiunti, e così via fino a collegare tutti i nodi. Il ciclo hamiltoniano è individuato dalla sequenza di nodi $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Algoritmo del nodo più vicino

1. Scegli un nodo $i \in N$, poni $s_1 := i$, $N := N \setminus \{i\}$, $k := 1$.
2. **while** $N \neq \emptyset$ **do**
   Trova un nodo $j \in N$ con la minima distanza dal nodo s_k
   poni $s_{k+1} := j$, $N := N \setminus \{j\}$, $k := k + 1$.

Un rilassamento del TSP simmetrico che fornisce buone valutazioni inferiori si ottiene eliminando tutti i vincoli sul grado dei nodi tranne uno che supporremo essere il nodo r:

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{(h,r)\in A} x_{hi} + \sum_{(r,k)\in A} x_{ik} = 2 \\ \sum_{(i,j)\in A, i\in S, j\notin S} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A, i\notin S, j\in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset N\setminus\{r\}, \quad 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A. \end{cases} \tag{6}$$

Tale rilassamento corrisponde al problema del k-albero di costo minimo: un k-albero è un insieme di n archi di cui:

- $n - 2$ archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi N $\setminus\{r\}$,
- 2 archi sono incidenti sul nodo r.

3.2.8 Dare le definizioni di funzione convessa e di funzione coerciva e illustrare il loro ruolo nell'ottimizzazione.

Definizione 1 (Funzione convessa)**.** *Dato un insieme convesso $X \subseteq \mathbb{R}^n$, una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni $x, y \in X$ e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1}$$

La funzione f si dice *concava* se $-f$ è convessa.

Definizione 2 (Funzione coerciva)**.** *Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta coerciva se per ogni successione $\{x_k\}$ tale che $||x_k|| \to \infty$ si ha che $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$.*

A parole povere una funzione coerciva è una funzione che "cresce rapidamente" agli estremi dello spazio su cui è definita.
Un ovvio esempio di funzione coerciva è $f(x) = ||x||^2$.

3.3 Esame 3

3.3.1 Dare la definizione di poliedro e disegnarne uno che abbia 4 elementi in V e 2 elementi in E.

Geometricamente parlando, un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$.
Dal punto di vista algebrico, ogni poliedro P di $\mathbb{R}^n$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n incognite:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \tag{1}$$

dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
Un poliedro è un insieme convesso dato che i semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono insiemi convessi e l'intersezione di insiemi convessi è ancora un insieme convesso.

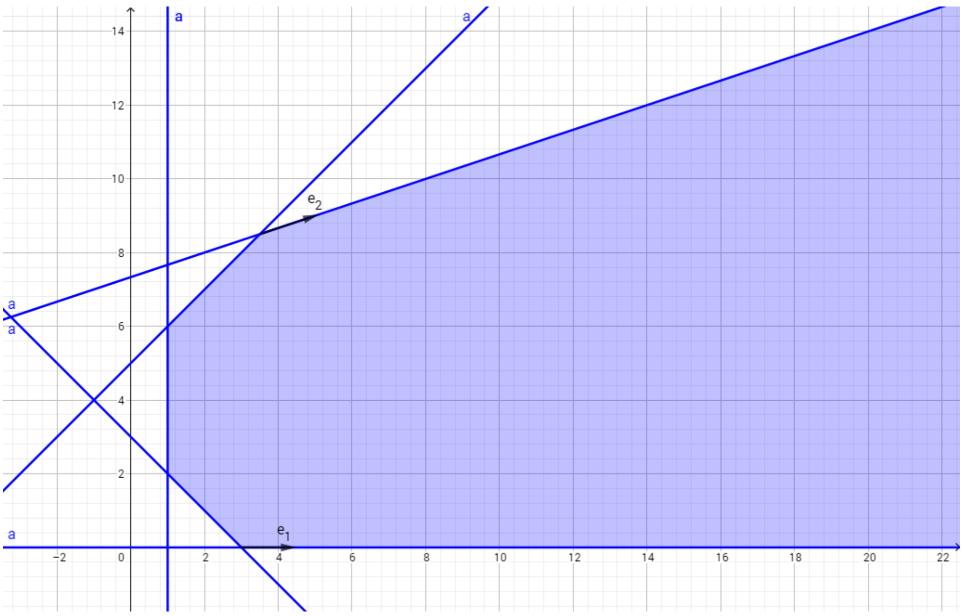


Figura 31: Poliedro con $|V| = 4$ e $|E| = 2$

3.3.2 Illustrare l'algoritmo del simplesso duale.

L'algoritmo del simplesso duale è utilizzato per la risoluzione di problemi di PL in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

L'algoritmo parte da una soluzione di base duale ammissibile (cioè un vertice), se la soluzione di base complementare (primale) è ammissibile, allora esse sono ottime rispettivamente per il duale e per il primale, altrimenti si cambia base. Il cambio di base è definito in modo che se la nuova soluzione di base duale è diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo decresce (il problema è minimo), mentre se la nuova soluzione di base duale coincide con quella vecchia, si evita di ciclare nuovamente sulle stesse basi con opportune regole anticiclo.

Algoritmo del simplesso duale:

1. Trovare una base B che genere una soluzione di base duale ammissibile.
2. Calcolare la soluzione di base primale $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e la soluzione di base duale $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$ dove $\bar{y}_B = c^T A_B^{-1}$ e $\bar{y}_N = 0$.
3. **if** $b_N - A_N \bar{x} \geq 0$ **then STOP** ($\bar{y}$ è ottima per (D) e $\bar{x}$ è ottima per $(\mathcal{P})$)
   else calcolare l'indice entrante

$$k := min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\}$$

(regola anticiclo di Bland),

   porre $W = -A_B^{-1}$ ed indicare con W^i la i-esima colonna di W.
4. **if** $A_k W^i \geq 0 \;\; \forall i \in B$ **then STOP** ($(\mathcal{D})$ ha valore ottimo $-\infty$ e $(\mathcal{P})$ è vuoto)
   else calcolare

$$\vartheta := min\left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} \; : \; i \in B, \;\; A_k W^i < 0 \right\},$$

   calcolare l'indice uscente

$$h := min\left\{ i \in B : \; A_k W^i < 0, \;\; \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\}$$

(regola anticiclo di Bland),

aggiornare la base $B := B \backslash \{h\} \cup \{k\}$ e tornare al passo 2.

3.3.3 Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale della PL.

Teorema 1 (Teorema fondamentale della PL)**.** *Sia dato un problema d PL in forma primale standard*

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} max\ c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}\ . \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo che il poliedro P sia rappresentato come

$$P = conv\{v^1, \dots, v^m\} \bigoplus cono\{e^1, \dots, e^p\}. \tag{2}$$

Supponendo inoltre che $P \neq \varnothing$, se il problema $(\mathcal{P})$ ha valore ottimo finito ($\mathcal{V}(\mathcal{P}) < +\infty$), allora esiste $k \in \{1, \dots, m\}$ tale che v^k è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$:

$$\exists\, k \in \{1, \dots, m\}\ :\ max\ c^T x = c^T v^k, \quad \forall x \in P. \tag{3}$$

A parole, "la soluzione ottima del problema considerato si trova su uno dei vertici della regione ammissibile".

Dimostrazione. Data la rappresentazione del poliedro (P), abbiamo che il problema $(\mathcal{P})$ è equivalente al seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \max\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Poichè $(\mathcal{P})$ ha ottimo finito e poichè il problema precedente ha le variabili λ e μ separate nella funzione obiettivo si ha

$$c^T e^j \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, p, \tag{5}$$

altrimenti, se $c^T e^j > 0$, si potrebbe far tendere μ_j a $+\infty$ e la funzione obiettivo tenderebbe a $+\infty$ (contro l'ipotesi che $\mathcal{V}(\mathcal{P}) < +\infty$). Indichiamo con v^k l'elemento di $\{v^1, \dots, v^m\}$ in cui la funzione obiettivo assume il valore massimo. Allora per ogni $x \in P$ otteniamo:

$$\begin{aligned} c^T x = & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j \\ & \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i \\ & \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \max{}_{1 \leq i \leq m} \; c^T v^i \\ & = \left(\max{}_{1 \leq i \leq m} \; c^T v^i\right) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \\ & = \max{}_{1 \leq i \leq m} \; c^T v^i \\ & = c^T v^k \end{aligned} \tag{6}$$

e quindi $\max_{x \in P} \; c^T x \leq c^T v^k$. Poichè v^k appartiene al poliedro P, si ottiene anche che

$$c^T v^k \leq \max{}_{x \in P} \; c^T x \tag{7}$$

e dunque che v^k è una soluzione ottima di $(\mathcal{P})$. *QED*

3.3.4 Scrivere il modello matematico dell'albero dei cammini minimi e disegnare un albero ammissibile non ottimo.

Il problema dei cammini minimi di radice r consiste nel determinare, se esiste, un cammino orientato di costo minimo dal nodo r verso ogni altro nodo del grafo.
Tale problema può essere formulato come un problema di flusso di costo minimo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se} \quad i = r \\ 1 & \text{se} \quad i \neq r \end{cases} \tag{1}$$

Ciò equivale a supporre che $(n-1)$ unità di flusso si debbano dirigere dal nodo r ognuna verso un nodo $i \neq r$ minimizzando il costo complessivo $c^T x$.

3.3.5 Dare la definizione di taglio di una rete, di capacità del taglio e scrivere un flusso ottimo per il problema max-flow.

3.3.6 Dare la definizione di potenziale di base e costruire un potenziale ottimo degenere su una rete con almeno 4 nodi ed almeno 5 archi.

3.3.7 Descrivere l’algoritmo del gradiente proiettato.

3.3.8 Dare la definizione di piano di taglio e scrivere l'equazione del piano di taglio di Gomory.

3.4 Esame 4

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3.4.1 1.

3.4.2 2.

3.4.3 3.

3.4.4 4.

3.4.5 5.

3.4.6 6.

3.4.7 7.

3.4.8 8.

3.5 Esame 5

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3.5.1 1.

3.5.2 2.

3.5.3 3.

3.5.4 4.

3.5.5 5.

3.5.6 6.

3.5.7 7.

3.5.8 8.

3.6 Esame 6

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3.6.1 1.

3.6.2 2.

3.6.3 3.

3.6.4 4.

3.6.5 5.

3.6.6 6.

3.6.7 7.

3.6.8 8.

3.7 Esame 7

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3.7.1 1.

3.7.2 2.

3.7.3 3.

3.7.4 4.

3.7.5 5.

3.7.6 6.

3.7.7 7.

3.7.8 8.

3.8 Esame 8

Donec luctus tincidunt mauris, non ultrices.

3.8.1 1.

3.8.2 2.

3.8.3 3.

3.8.4 4.

3.8.5 5.

3.8.6 6.

3.8.7 7.

3.8.8 8.

Glossario

Ricerca Operativa La ricerca operativa (nota anche come teoria delle decisioni, scienza della gestione o, in inglese, operations research ("Operational Research" in Europa) e indicata con le sigle RO o OR) è la branca della matematica applicata in cui problemi decisionali complessi vengono analizzati e risolti mediante modelli matematici e metodi quantitativi avanzati (ottimizzazione, simulazione, ecc.). L'obiettivo è quello di fornire un supporto alla presa di decisioni. Per giungere a questo scopo, la ricerca operativa fornisce strumenti matematici di supporto alle attività decisionali in cui occorre gestire e coordinare attività e risorse limitate al fine di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo. 5

Bibliografia

1. M. Pappalardo and M. Passacantando. *Ricerca Operativa*. Pisa University Press, 2nd edition, 2014.
2. P. Serafini. *Ricerca Operativa*. Springer Verlag, 2nd edition, 2009.
3. F. Schoen. *Fondamenti di Ricerca Operativa*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2nd edition, 2014.