ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 26

Note Title 02/11/2018

SVILUPPI DI LEIBNITZ (Descrizione)

Esempio 3x3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

$$\mathrm{Det}(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Oss. Ogni fattore della somma è il prod. di 3 el. della matrice con la proprietà che ce n'è uno per riga e uno per colonna

Sviluppo di Leibnitz: Per ogni matrice A di dim. $n \times n$ il det è la somma di prodotti di n termini tali che per ogni riga e per ogni colonna ce n'è esattamente uno.

Con quale segno compare un certo prodotto? Si usa la regola degli scambi

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$\{e_2, e_3, e_1\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3\}$

nella 1a riga il 2o

nella 2a riga il 3o

Il segno è $(-1)^{\text{numero di scambi}}$ $\rightsquigarrow$ nel caso sopra 2

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix}$$

Nel det c'è il termine $celr$ con segno

$\{e_3, e_1, e_2, e_4\} \rightsquigarrow \{e_1, e_3, e_2, e_4\} \rightsquigarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

2 scambi $\rightsquigarrow$ segno $+$

Importanza sviluppi di Leibnitz

→ dal punto di vista del calcolo del Det, sono poco utili

→ dal punto di vista teorico, se uno scrive per bene la formula, questo è un modo di dim. che esiste una funzione che verifica (Det 1), ..., (Det 4).

<u>Oss.</u> Se una matrice ha una riga o una colonna di zeri, allora Det = 0 per forza (sono tutti nulli i prodotti che lo compongono).

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema di BINET}}$ Se A e B sono matrici $n \times n$, allora

$$\boxed{\operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B)}$$

$\boxed{\text{Conseguenza}}$ (Determinante dell'inversa)

Sia A matrice $n \times n$.

Allora

- A è invertibile se e solo se $\operatorname{Det}(A) \neq 0$

- se esiste l'inversa, allora

$$\boxed{\operatorname{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se esiste l'inversa, allora $AA^{-1} = Id$, quindi

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Det}(AA^{-1}) & = & \operatorname{Det}(Id) \\ \text{BINET} \Rightarrow \| & & \| \\ \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(A^{-1}) & = & 1 \end{array}$$

Ricavo $\operatorname{Det}(A^{-1})$. Andrebbe dim. a parte che $\operatorname{Det}(A) \neq 0 \Rightarrow$ esiste matrice inversa.

— o — o —

Dim. BINET

Caso 1 : $\det(B) \neq 0$ Fissata B, per ogni A matrice $n \times n$ pongo

$$f(A) := \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(AB)$$

Se dimostro che $f(A) = \det(A)$ allora ho BINET.
Per questo basta verificare che $f(A)$ soddisfa (Det 1), ..., (Det 4).

(Det 1) $f(Id) = 1$ ⇝ ovvio, viene $\frac{\det(B)}{\det(B)}$

(Det 2) Se A ha 2 righe uguali, allora $f(A)$ deve essere 0.

Osservo che se le righe i e j di A sono uguali, allora anche le righe i e j di AB sono uguali (prod. righe per colonne), ma allora $\det(AB) = 0$ e quindi $f(A) = 0$.

(Det 3) Se moltiplico per $\lambda \in \mathbb{R}$ la i-esima riga di A, allora anche la i-esima riga di AB viene molt. per λ, e quindi $\det(AB)$ risulta molt. per λ, e quindi idem per $f(A)$.

(Det 4) Se sostituisco una riga di A con la somma di 2 vettori, allora lo stesso vale per la corrispondente riga di AB. Detto meglio, se A_1 e A_2 sono due matrici che differiscono solo in una riga, allora

$$f(A_1 + A_2) = \frac{1}{\det(B)} \cdot \det((A_1 + A_2)B)$$

$$= \frac{1}{\det(B)} \det(\underbrace{A_1B + A_2B}_{\text{Differiscono solo per una riga}}) = \frac{1}{\det(B)} \{\det(A_1B) + \det(A_2B)\}$$

$$= f(A_1) + f(A_2).$$

$\boxed{\text{ACHTUNG!}}$ NON è vero in generale che

$$\boxed{\mathrm{Det}(A_1+A_2) = \mathrm{Det}(A_1) + \mathrm{Det}(A_2)} \quad \text{FALSO !!!}$$

Questo è VERO solo se A_1 e A_2 sono uguali ovunque tranne in una riga.

[(Det 4) $\mathrm{Det}(\underset{\uparrow}{\ldots}, v_i+\hat{v}_i, \underset{\uparrow}{\ldots}) = \mathrm{Det}(\underset{\uparrow}{\ldots}, v_i, \underset{\uparrow}{\ldots}) + \mathrm{Det}(\underset{\uparrow}{\ldots}, \hat{v}_i, \underset{\uparrow}{\ldots})$

il resto è la stessa roba]

$\boxed{\text{Caso 2: } \mathrm{Det}\, B = 0}$ Qui voglio dim. che anche $\mathrm{Det}(AB) = 0$.

Giro perverso: $\mathrm{Det}(B) = 0 \iff B$ ridotta scala ha riga finale nulla

$\iff$ le colonne di B sono lin. dip.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ le colonne di AB sono lin. dip.

$\iff$ AB ridotta a scala ha riga finale nulla

$\iff \mathrm{Det}(AB) = 0$

Resta da verificare: se le colonne di B sono lin. dip., allora le colonne di AB sono lin. dip.

$$B = \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \ldots \middle| C_m \right) \Longrightarrow AB = \left(AC_1 \middle| AC_2 \middle| \ldots \middle| AC_m \right)$$

le colonne di AB si ottengono moltiplicando A per le colonne di B

Se $x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_mC_m = 0$, allora

$$A(x_1C_1 + \ldots + x_mC_m) = x_1AC_1 + \ldots + x_mAC_m = 0$$

e quindi anche le colonne di AB sono lin. dip.

— o — o —

Esempio 1 Dimostrare che $\{(1,0,1), (2,-1,1), (0,2,0)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Modo preistorico}}$ Verifico che

→ sono generatori (sist. NON omogeneo)

→ sono lin. indip. (sistema omogeneo)

$\boxed{\text{Modo antico}}$ Essendo in numero uguale alla dimensione, basta una a caso delle due verifiche prec.

$\boxed{\text{Modo post-Det}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -2 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot -1$$

$$= 2 \neq 0.$$

Esempio 2 Dimostrare che

$$\underset{M_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{M_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

sono una base di $M_{2\times 2}$

↑ corretto dopo video

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \\ \leftarrow M_4 \end{array}$$

$\text{Det} = 1 \cdot \text{Sarrus sul resto}$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

⇝ sono una base ☺

— o — o —