Determinazione del Raggio di Curvatura della Traiettoria di un Proiettile (si consiglia di leggere prima le note sul prodotto vettoriale e sul raggio di curvatura)

1 Descrizione del Problema

Si consideri un corpo lanciato orizzontalmente da un certo punto. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x in orizzontale nello stesso verso del vettore velocità iniziale e l'asse y verticale orientato verso l'alto. In assenza di resistenze, la traiettoria segue il moto parabolico

$$x(t) = v_0\, t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2,$$

con x coordinata orizzontale e y verticale. La velocità e l'accelerazione sono date da:

$$\vec{v}(t) = (v_0,\ -g\, t)\,, \qquad \vec{a}(t) = (0,\ -g)\,.$$

L'obiettivo è determinare il raggio di curvatura ρ della traiettoria in un istante arbitrario.

2 Soluzione Generale

Il raggio di curvatura ρ di una traiettoria piana, in funzione della velocità $\vec{v}(t)$ e dell'accelerazione $\vec{a}(t)$, si ottiene dalla formula

$$\rho(t) = \frac{\|\vec{v}(t)\|^3}{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}\,.$$

Nel nostro caso:

$$\vec{v}(t) = (v_0,\ -g\,t), \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Estendendo le velocità e accelerazioni al piano (inserendole come vettori tridimensionali con componente $z = 0$):

$$\vec{v}(t) = (v_0,\ -g\,t,\ 0), \qquad \vec{a}(t) = (0,\ -g,\ 0).$$

Il prodotto vettoriale $\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)$ è:

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_0 & -g\,t & 0 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix} = \Big(0,\ 0,\ v_0(-g) - (-g\,t)(0)\Big) = (0,\ 0,\ -g\,v_0).$$

Pertanto, la sua norma è:

$$\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\| = g\,v_0.$$

Sostituendo nella formula del raggio di curvatura:

$$\rho(t) = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2}}{g\,v_0}.$$