Prova Facoltativa di Comunicazioni Numeriche - Parte II - Fila A

30 Maggio 2012

Es. 1 - Sia il segnale 4-PAM $s(t) = \sum_k a_k p(t-kT)$ il segnale all'ingresso del sistema di comunicazione numerico in figura 1. I simboli $\{a_k\}$ appartengono all'alfabeto $\{-3,-1,1,3\}$ sono indipendenti ed equiprobabili. Siano

$P(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

$C(f) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{|f|}{B}\right) rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

$G_R(f) = P(f)$

$w(t)$ un processo di rumore Gaussiano bianco additivo con DSP $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ e $B = 1/T$, si determini:

1) L'energia media per intervallo di segnalazione di $s(t)$

2) La DSP del segnale $s(t)$

3) Varificare la condizione di Nyquist

4) Calcolare la probabilità di errore nel caso in cui la strategia di decisione sia $\hat{a_k} = \begin{cases} -3 & y[k] < -2 \\ -1 & 0 > y[k] \geq -2 \\ 1 & 2 > y[k] \geq 0 \\ 3 & y[k] \geq 2 \end{cases}$

5) Esprimere la probabilità di errore in funzione del rapporto segnale rumore (SNR) calcolato dopo il campionatore.

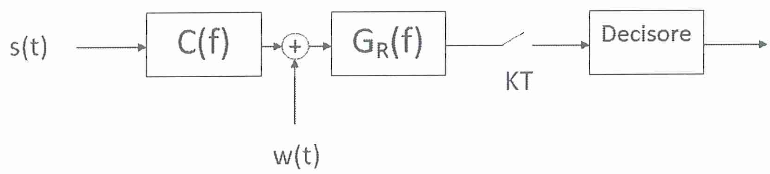

Fig. 1

Es. 2 - Il processo causale stazionario $X(t)$ è noto statisticamente. Definire la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di potenza del processo causale $Y(t) = X(t) - X(t-t_0)$. Se il processo $X(t)$ è Gaussiano con valor medio η_x e densità spettrale di potenza $S_x(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right) + \eta_x^2\delta(f)$, determinare la densità di probabilità di primo ordine del processo $Y(t)$ essendo $t_0 = 0.25 sec$.

Es. 3 - Formulare il criterio di Nyquist nel tempo e dimostrare che se la condizione nel tempo è soddisfatta si ha assenza di ISI.

Es. 4 - Dimostrare che se un processo Gaussiano è SSL questo è anche SSS.

ESERCIZIO 1 <u>30 MAGGIO 2011</u>

$s(t) = \sum_k a_k \, p(t - kT)$

$a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ indipendenti equiprobabili

$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2B}\right)$

$c(t) = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{|t|}{B}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2B}\right)$

$g_R(t) = p(t)$

$w(t)$ gaussiano bianco $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$

$B = \frac{1}{T}$

1) E_s ?

2) $S_s(f)$?

3) Verificare cond. Nyquist

4) $P_E(b)$

$$\hat{a}_k = \begin{cases} -3 & y[k] < -2 \\ -1 & 0 > y[k] \geq -2 \\ 1 & 2 > y[k] \geq 0 \\ 3 & y[k] \geq 2 \end{cases}$$

5) Esprimere la $P_E(b)$ in funzione dello SNR

$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |P(f)|^2$

$$R_a[m] = E\{a_i a_{i+m}\} = \begin{cases} E\{a_i^2\} = \frac{1}{4} 9 + \frac{1}{4} 9 + \frac{1}{4} 1 + \frac{1}{4} 1 = 5 & m = 0 \\ E^2\{a_i\} = 0 & m \neq 0 \end{cases} =$$

$= 5 \delta[m]$

$S_a(f) = 5$

$S_s(f) = \frac{5}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$E_s = 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) df = 10 B$

$H(f) = P^2(f) \, C(f) = \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(1 - \frac{|f|}{B}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$\sum_k H\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{B} \Rightarrow \begin{array}{l} h[0] = 1 \\ h[m] = 0 \quad \forall m \neq 0 \end{array}$

$y(t) = r(t) + n(t)$

$S_n(f) = S_w(f) |G_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) df = \frac{N_0}{2} 2B = N_0 B$

$$P_E(b) = \frac{1}{4} P(e \mid a_k = -3) + \frac{1}{4} P_E(e \mid a_k = 1) +$$

$$+ \frac{1}{4} P(e \mid a_k = -1) + \frac{1}{4} P_E(e \mid a_k = 3)$$

$$P(e \mid a_k = -3) = P(e \mid a_k = 3) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0B}}\right)$$

$$P(e \mid a_k = -1) = P(e \mid a_k = 1) = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0B}}\right)$$

$$P(e) = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0B}}\right)$$

$$E\{s(k)^2\} = 5\, h^2(0) = 5$$

$$SNR = \frac{5}{N_0B}$$

$$P(e) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{SNR}{5}}\right)$$

$\boxed{\text{FSFRC12192}}$

$$Y(t) = x(t) - x(t - t_0)$$

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t)\,Y(t+\tau)\} =$$

$$= E\{[x(t) - x(t - t_0)][x(t+\tau) - x(t - t_0 + \tau)]\} =$$

$$= E\{x(t)\,x(t+\tau)\} - E\{x(t)\,x(t - t_0 + \tau)\}$$

$$- E\{x(t - t_0)\,x(t+\tau)\} + E\{x(t - t_0)\,x(t - t_0 + \tau)\} =$$

$$= 2R_x(\tau) - R_x(\tau - t_0) - R_x(\tau + t_0) = R_Y(\tau)$$

$$S_Y(f) = 2S_x(f) - 2\,S_x(f)\cos(2\pi f t_0)$$

$$R_x(\tau) = \eta_x^2 + \mathrm{sinc}(4\tau)$$

$$R_Y(\tau) = \cancel{2\eta_x^2} + 8\,\mathrm{sinc}(4\tau) - \cancel{\eta_x^2} - 8\,\mathrm{sinc}\left(4\left(\tau - \tfrac{1}{4}\right)\right) - \cancel{\eta_x^2} -$$

$$- 8\,\mathrm{sinc}\left(4\left(\tau + \tfrac{1}{4}\right)\right)$$

$$R_Y(0) = 8 = P_Y \qquad p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{16\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{16}}$$