591AA 21/22 – ESAME INTERMEDIO

Instruzioni: Questo esame non verrà valutato. Questa prova copre alcuni, ma non tutti gli argomenti delle Lezioni 1-12.

Problema 1. Siano

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}, \qquad P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\},$$
$$P_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

(a) Trovare le rette $L_1 = P_1 \cap P_2$ e $L_2 = P_2 \cap P_3$;
(b) Trovare l'angolo (acuto) che formano le rette L_1 e L_2;
(c) Trovare la distanza tra i punti di intersezione di L_1 e L_2 ed il piano $x + y + z = 1$.

[Nota: Al posto di questo problema ci potrebbe essere un problema diverso con iper-piani, prodotto interno tra polinomi e interpolazione di Lagrange.

(a) Metodo 1 $\quad P_1 \cap P_2 \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow y = 0, \quad x - z = 0 \Rightarrow L_1$ è $t \to (t, 0, t) = t(1,0,1)$

$P_2 \cap P_3 \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow z = 0, \quad -x + y = 0 \Rightarrow L_2$ è $t \to (t, t, 0) = t(1,1,0)$

(1,0,1) e (2,0,2) hanno la stessa direzione

Metodo 2 : $\quad 0 \in P_1 \cap P_2, \quad (1,1,-1) \times (-1,1,1) = (2,0,2)$
L_1 è $t \to t(2,0,2)$

$0 \in P_2 \cap P_3, \quad (-1,1,1) \times (1,-1,1) = (2,2,0)$
L_2 è $t \to t(2,2,0)$

(b) 

$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{|u|\,|v|} = \frac{((1,0,1),(1,1,0))}{|(1,0,1)|\;|(1,1,0)|}$$

$u = (1,0,1)$
$v = (1,1,0)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

[Spazio extra per il problema 1]

(c) $L_1 \cap (x+y+z=1)$ $\quad\Big|\quad x(t)=t,\ y(t)=0,\ z(t)=t$

$\Rightarrow x(t)+y(t)+z(t)=1$

$\therefore t+t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow L_1 \cap (x+y+z=1) = \frac{1}{2}(1,0,1)$

$L_2 \cap (x+y+z=1)$ $\quad\Big|\quad x(t)=t,\ y(t)=t,\ z(t)=0$

$\Rightarrow x(t)+y(t)+z(t)=1$

$\Rightarrow t+t+0=1$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow L_2 \cap (x+y+z=1) = \frac{1}{2}(1,1,0)$

$d\left(\frac{1}{2}(1,0,1), \frac{1}{2}(1,1,0)\right) = \left|\frac{1}{2}(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(0,-1,1)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Problema 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la forma echelon ridotta di A;
(b) Trovare una base per lo spazio generato dalle righe di A.
(c) Trovare un sottoinsieme (proprio) B delle colonne di A che sia una base per lo spazio delle colonne di A. Scrivere le colonne di A non appartenenti a B tramite questa base.
(d) La matrice A è equivalente (per righe) alla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

cioè ottenuta tramite combinazioni lineari di righe?

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Non appena si ottiene una matrice scalina, le righe che contengono i pivot formano una base dello spazio delle righe.
$\therefore$ tutte le matrice dopo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ danno una base per lo spazio delle righe

Esempio
$((1\ 0\ 1\ 0), (0\ 1\ 1\ 0), (0\ 0\ 0\ 1))$

(d) No. Le matrice M_1 e M_2 sono equivalenti (per righe) se e solo se hanno la stessa forma echelon ridotta.
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è forma echelon ridotta
$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ A, C non sono equivalenti

[Spazio extra per il problema 2]

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

base per lo spazio delle colonne di A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le operazioni sulle righe possono cambiare lo span della colonna, ma le operazioni sulle righe non cambiano le relazioni tra le colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>Alt</u>: $$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 6 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow c = 0,\ b = 1,\ a = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Sia $M_{2\times 2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 con coefficienti in $\mathbb{R}$.

(a) Mostrare che
$$L(A) = A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$$
è una applicazione lineare di $M_{2\times 2}$ in $M_{2\times 2}$;

(b) Trovare la matrice di L rispetto alla base
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Trovare una base di $\ker(L)$;

(d) Determinare la soluzione generale di
$$L(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$L(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -a_{12} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -a_{21} - a_{12} & a_{11} - a_{22} \\ -a_{22} + a_{11} & a_{21} + a_{12} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} -(a_{12}+a_{21}) & a_{11}-a_{22} \\ +(a_{11}-a_{22}) & a_{21}+a_{12} \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$L(B) = \begin{pmatrix} -(b_{12}+b_{21}) & b_{11}-b_{22} \\ b_{11}-b_{22} & b_{12}+b_{21} \end{pmatrix}$$

- $$L(A+B) = L\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -(a_{12}+b_{12}+a_{21}+b_{21}) & a_{11}+b_{11}-a_{22}-b_{22} \\ a_{11}+b_{11}-a_{22}-b_{22} & a_{12}+b_{12}+a_{21}+b_{21} \end{pmatrix}$$
$$= L(A) + L(B)$$

- $$L\Big(\underbrace{c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{cA}\Big) = L\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ca_{12}-ca_{12} & ca_{11}-ca_{22} \\ ca_{11}-ca_{22} & ca_{12}+ca_{2} \end{pmatrix}$$
$$= c\,L(A)$$

$\Longrightarrow$ L è lineare.

[Spazio extra per il problema 3]

(b) $L(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21}$

$L(E_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{22}$

$L(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{22}$

$L(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{12} - E_{21}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{11} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{12} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{21} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_{22} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $Ker(m) : \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = -x_3, \quad x_1 = +x_4$

$\therefore$ Base Ker (m): $x_3 = 1, x_4 = 0 \quad -E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x_4 = 1, x_3 = 0 \quad +E_{11} + E_{22} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Base Ker $(m) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $L(-E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ E_{12} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

è la soluzione generale

Problema 4. sia $P_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 (includendo lo 0).

(a) Mostrare che $U = \{p \in P_3[x] \mid p(1) = p(2) = 0\}$ ed $W = \{p \in P_3[x] \mid p(x) = p(-x)\}$ sono sottospazi vettoriali di $P_3[x]$.

(b) Calcolare la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$.

(a) $\underline{U}$: $p, q \in U \Rightarrow p(1) = p(2) = 0, \quad q(1) = q(2) = 0$

$\Rightarrow (p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0$
$(p+q)(2) = p(2) + q(2) = 0$

$p \in U, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cp)(1) = c\,p(1) = 0$
$(cp)(2) = c\,p(2) = 0$

$\Rightarrow (p, q \in U, c \in \mathbb{R} \Rightarrow p+q \in U, cp \in U)$

$\therefore$ U è un sottospazio di $P_3[x]$

$\underline{W}$: $p, q \in W \Rightarrow p(x) = p(-x), \quad q(x) = q(-x)$

$\Rightarrow (p+q)(x) = p(x) + q(x) = p(-x) + q(-x) = (p+q)(-x)$

$p \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (cp)(x) = c\,p(x) = c\,p(-x) = (cp)(-x)$

$\therefore$ W è un sottospazio di $P_3[x]$

(b) $p \in U \Rightarrow p(x) = (x-1)(x-2)q(x), \quad q(x) \in P_1[x]$

$q \in W \Rightarrow q$ è pari

Base di $U = \{(x-1)(x-2), (x-1)(x-2)x\}$

Base di $W = \{1, x^2\}$

$x^j \Rightarrow e_j \in \mathbb{R}^4$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{elim}}$$

$\Rightarrow rk(M) = 4 \Rightarrow U + W = P_3[x], \quad \dim U + W = 4$

$$\underbrace{\dim U+W}_{4} = \underbrace{\dim U}_{2} + \underbrace{\dim W}_{2} - \dim U \cap W$$

$\Rightarrow \dim U \cap W = 0.$

Problema 5. Enunciare uno dei seguenti risultati:

(a) Il teorema del rango.
(b) La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.
(c) La diseguaglianza triangiolare.

(a) Siano U e V spazi vettoriali, dove U è di dimensione finita. Sia $T: U \to V$ una mappa lineare. Allora

$$\mathrm{rk}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T) = \dim U.$$

(b) Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(-,-)$. Siano u e v elementi non nulli di V. Allora

$$|(u,v)| \leq |u|\,|v|$$

Accetterei la risposta senza questa parte

(Inoltre, i due lati sono uguali se e solo se u e v linearmente dipendenti)

(b) Sia V uno spazi vettoriale con prodotto scalare $(-,-)$. Se $v \in V$ sia $|v| = \sqrt{(v,v)} \geq 0$. Siano $x, y \in V$. Allora

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

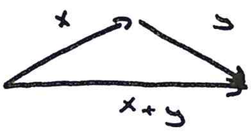

Illustrazione della disuguaglianza del triangolo (non richiesta)