Esercizio

(tratto dagli esempi 5.3 e 5.4 del cap. V del Mazzoldi-Nigro-Voci)

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3\,\text{Kg}$ ruota attorno alla Terra descrivendo un'orbita circolare di raggio $r_1 = 6.6 \cdot 10^3\,\text{Km}$.

1. Calcolare il periodo T_1 dell'orbita del satellite

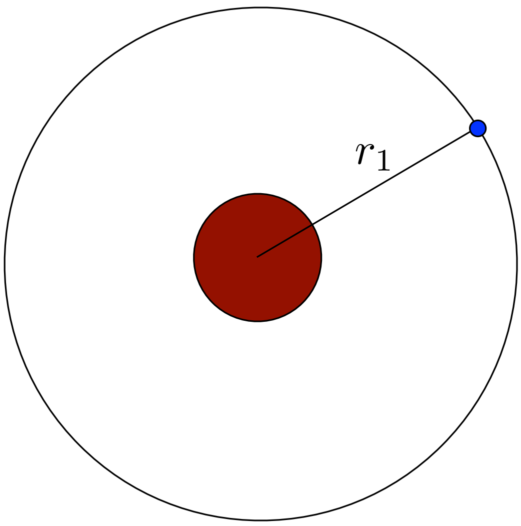
Per migliorare la trasmissione tra satellite e Terra, emerge la necessità di portare il satellite ad un'orbita circolare diversa.

La prima opzione è quella di portare il satellite su un'orbita circolare di raggio $r_2 = 7.1 \cdot 10^3\,\text{Km}$

2. calcolare di quanti minuti e secondi il periodo dell'orbita varia rispetto a quello originaria;
3. calcolare il lavoro che è necessario fornire per eseguire tale operazione;

Una seconda opzione è quella di portare il satellite a descrivere un'orbita circolare di raggio r_2' e di periodo T_2' più lungo di 4 minuti rispetto a T_1.

4. calcolare la differenza di raggio tra le due orbite;
5. calcolare il lavoro che è necessario fornire per eseguire tale operazione, e stabilire quale opzione è energeticamente più conveniente.



(costante di gravitazione $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{Kg}\,\text{s}^2}$; massa della Terra $M = 5.98 \cdot 10^{24}\,\text{Kg}$)

SOLUZIONE
Dati iniziali:

$$\begin{aligned} r_1 &= 6.6 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} = 6.6 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \\ r_2 &= 7.1 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} = 7.1 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \\ m &= 10^3\,\mathrm{Kg} \\ G &= 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2} \\ M &= 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg} \end{aligned}$$

Consideriamo un'orbita circolare generica di raggio r. Applicando le equazioni della dinamica al caso della forza gravitazionale, e indicando con $\vec{u}_r$ il versore radiale, otteniamo

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

dove:

- $\vec{F}$ è la forza di attrazione gravitazionale

$$\vec{F} = -G\frac{M\,m}{r^2}\,\vec{u}_r \tag{2}$$

- $\vec{a}$ è l'accelerazione che, essendo il moto orbitale del satellite circolare uniforme, ha solo componente radiale centripeta

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\,\vec{u}_r$$

Pertanto

$$G\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{3}$$

ossia

$$\boxed{G\frac{M}{r} = v^2} \tag{4}$$

Questa relazione vale per una qualunque orbita circolare, e lega la velocità tangenziale al raggio r di tale orbita.

Ricordando che nel moto circolare uniforme vale

$$v = \omega\, r = \frac{2\pi r}{T} \tag{5}$$

dove T è il periodo dell'orbita, e sostituendo nell'Eq.(4), si ricava

$$G\frac{M}{r} = (2\pi)^2\frac{r^2}{T^2} \tag{6}$$

e dunque

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}} \tag{7}$$

Anche questa relazione vale per una qualunque orbita circolare, e lega il periodo al raggio r di tale orbita.

1. Applicando la formula (7) al caso dell'orbita di raggio r_1 si ottiene

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{G\,M}} = \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(6.6\cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{6.67\ \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2}\,5.98\cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg}}} = \\ &= 5334\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{8}$$

2. OPZIONE 1: La nuova orbita ha un raggio r_2. Applicando la formula (7) al caso dell'orbita di raggio r_2 si ottiene

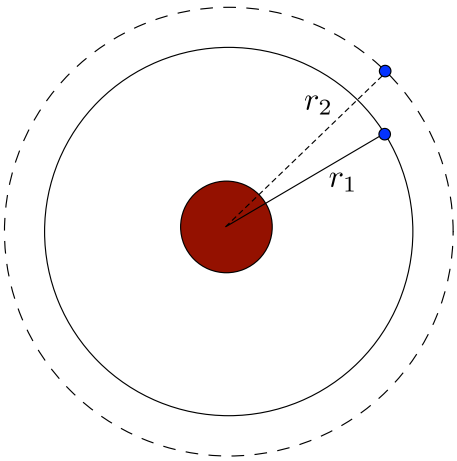
$$\begin{aligned} T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{G\,M}} = \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(7.1\cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{6.67\,10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2}\,5.98\cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg}}} = \\ &= 5952\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{9}$$

e quindi la differenza tra i periodi è

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 5952\,\mathrm{s} - 5334\,\mathrm{s} = 618\,\mathrm{s} \tag{10}$$

ossia

$$\Delta T = 10\,\mathrm{min}\ 18\mathrm{s} \tag{11}$$



3. L'energia meccanica di un corpo m su un'orbita di raggio r è

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{cinetica } K}\ \underbrace{-G\frac{Mm}{r}}_{\text{pot. gravit. } U} \tag{12}$$

Ricordando l'Eq.(4) abbiamo che

$$v^2 = G\frac{M}{r} \qquad \to \qquad K = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \tag{13}$$

ossia l'energia cinetica del satellite dipende dal raggio dell'orbita. L'energia meccanica totale relativa ad un satellite su orbita di raggio r vale dunque

$$K = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \qquad U = -G\frac{Mm}{r} \qquad \to \qquad E_m = K + U = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \tag{14}$$

NOTA BENE:
Dalla (14) si nota che:

- in un'orbita circolare l'energia cinetica K (positiva) è in valore assoluto la metà dell'energia potenziale U (negativa). Pertanto l'energia meccanica E_m (data dalla somma algebrica delle due) è negativa e pari alla metà di U.

- L'energia meccanica (14) dipende dal raggio r dell'orbita. Per cambiare orbita è duqnue necessario variare l'energia meccanica del satellite.

Infatti, per il teorema dell'energia cinetica il lavoro W è pari alla variazione dell'energia *cinetica* (non meccanica). Tuttavia tale lavoro W si riferisce alle forze *totali*, che comprendono sia le forze esterne che quelle gravitazionali. Dato che queste ultime sono conservative, il lavoro W_{grav} dovuto ad esse è pari alla variazione dell'energia potenziale gravitazionale (con un segno -). Esplicitamente

$$W = \Delta K \tag{15}$$

ossia

$$W_{ext} + W_{grav} = K_2 - K_1 \tag{16}$$

con

$$W_{grav} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) \tag{17}$$

da cui

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} \tag{18}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} W_{ext} &= E_2 - E_1 = \\ &= -G\frac{Mm}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \\ &= -6.67\,10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg} \cdot 10^3\,\mathrm{Kg}}{2}\left(\frac{1}{7.1 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} - \frac{1}{6.6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}\right) = \\ &= 2.13 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 2.13 \cdot 10^9\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{19}$$

4. OPZIONE 2: la nuova orbita ha un periodo più lungo. Invertendo la formula (7) in favore del raggio si ottiene

$$r = \left(\frac{GMT^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \tag{20}$$

Un'orbita con un periodo di 4 minuti più lungo,

$$T_2' = T_1 + 4 \times 60\,\mathrm{s} = 5574\,\mathrm{s} \tag{21}$$

ha dunque un raggio

$$\begin{aligned} r_2' &= \left(\frac{6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2}\,5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg}\,(5574\,\mathrm{s})^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = \\ &= 6.8 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = \\ &= 6.8 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} \end{aligned} \tag{22}$$

e dunque la differenza tra i raggi è

$$\begin{aligned}
\Delta r &= r_2' - r_1 = \\
&= 6.8 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} - 6.6 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} = \\
&= 0.2 \cdot 10^3\,\mathrm{Km} \qquad (23)
\end{aligned}$$

5. Calcoliamo il lavoro come differenza tra le energie meccaniche che competono alle due orbite, utilizzando l'Eq.(14),

$$\begin{aligned}
W'_{ext} &= E_2' - E_1 = \\
&= -G\frac{Mm}{2}\left(\frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_1}\right) = \\
&= -6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\,s}^2} \cdot \frac{5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{Kg} \cdot 10^3\,\mathrm{Kg}}{2}\left(\frac{1}{6.8 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} - \frac{1}{6.6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}\right) = \\
&= 0.89 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = \\
&= 0.89 \cdot 10^9\,\mathrm{J} \qquad (24)
\end{aligned}$$

Questa seconda opzione è energeticamente più conveniente.