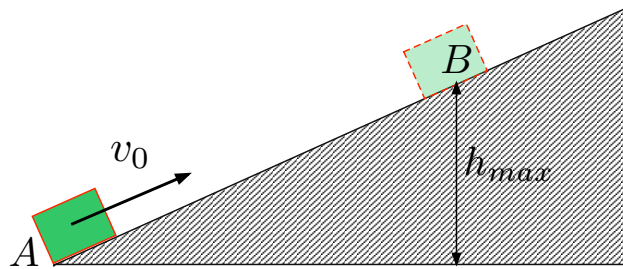


Esercizio

Un corpo di massa $m = 1.5 \text{ Kg}$ sale lungo un piano inclinato ($\theta = 30^\circ$) scabro ($\mu_D = 0.25$), partendo dalla base (punto A) con velocità $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e diretta parallelamente al piano inclinato. Si osserva che il corpo, dopo aver raggiunto un'altezza massima h_{max} (punto B), ridiscende indietro lungo il piano e ritorna in A.

1. Descrivere le forze che agiscono sul corpo, sia nel tratto $A \rightarrow B$ che nel tratto $B \rightarrow A$;
2. Calcolare il lavoro compiuto sul corpo
 - (a) dalla forza peso;
 - (b) dalla forza di attrito;
 - (c) dalla reazione vincolare del pianolungo il percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$;
3. Calcolare la differenza tra l'energia cinetica iniziale (in A alla partenza) e quella finale (in A al ritorno)



SOLUZIONE

1. Durante i due tratti del percorso agiscono:
 - forza peso
 - forza di attrito dinamico
 - reazione vincolare del piano
2. Calcoliamo ora il lavoro compiuto da ciascuna di tali forze nel percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$

(a) **Lavoro della forza peso:**

Nel primo tratto $A \rightarrow B$ lo spostamento $d\vec{s}$ è diretto da A ($s = 0$) a B ($s = d$) verso monte. La forza peso è diretta verso il basso e la sua componente nella direzione di $d\vec{s}$ è diretta verso valle (opposta al moto)

$$\begin{aligned}
 \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} &= \int_0^d (-mg \sin \theta) ds = \\
 &= -mg \sin \theta \int_0^d ds = -mg \underbrace{\sin \theta d}_{=h_{max}} = \\
 &= -mgh_{max} < 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Nella secondo tratto $B \rightarrow A$ lo spostamento $d\vec{s}$ è diretto da B ($s = 0$) a A ($s = d$) verso valle. La forza peso è diretta verso il basso e la sua componente nella direzione di $d\vec{s}$ è ancora diretta verso valle (concorde al moto)

$$\begin{aligned}
 \int_B^A m\vec{g} \cdot d\vec{s} &= \int_0^d (+mg \sin \theta) ds = \\
 &= mg \sin \theta \int_0^d ds = mg \underbrace{\sin \theta d}_{=h_{max}} = \\
 &= mgh_{max} > 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Quindi il lavoro nel percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$ vale

$$\begin{aligned}
 W_{peso} = \oint m\vec{g} \cdot d\vec{s} &= \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} + \int_B^A m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \\
 &= -mg \sin \theta d + mg \sin \theta d = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

(b) **Lavoro della forza di attrito:**

Nel primo tratto $A \rightarrow B$ lo spostamento $d\vec{s}$ è diretto da A ($s = 0$) a B ($s = d$)

verso monte e la forza di attrito è diretta verso valle (opposta al moto)

$$\begin{aligned}
 \int_A^B \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{s} &= \int_0^d (-\mu_D mg \cos \theta) ds = \\
 &= -\mu_D mg \cos \theta \int_0^d ds = -\mu_D mg \cos \theta \cdot \underbrace{d}_{=\frac{h_{\max}}{\sin \theta}} = \\
 &= -\mu_D mg \frac{h_{\max}}{\tan \theta}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Nella secondo tratto $B \rightarrow A$ lo spostamento $d\vec{s}$ è diretto da B ($s = 0$) a A ($s = d$) verso valle e la forza di attrito è diretta verso monte (opposta al moto)

$$\begin{aligned}
 \int_B^A \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{s} &= \int_0^d (-\mu_D mg \cos \theta) ds = \\
 &= -\mu_D mg \cos \theta \int_0^d ds = -\mu_D mg \cos \theta \cdot \underbrace{d}_{=\frac{h_{\max}}{\sin \theta}} = \\
 &= -\mu_D mg \frac{h_{\max}}{\tan \theta}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Quindi il lavoro nel percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$ vale

$$W_{\text{att}} = \oint \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F}_{\text{att}} \cdot d\vec{s} = -\frac{2\mu_D mgh_{\max}}{\tan \theta} < 0 \tag{6}$$

(c) **Lavoro della reazione vincolare del piano:**

La reazione vincolare \vec{R} del piano è sempre diretta perpendicolarmente al piano, e dunque è ortogonale alla direzione dello spostamento $d\vec{s}$. Quindi il lavoro nel percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$ vale

$$W_R = \oint \vec{R} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \underbrace{\vec{R} \cdot d\vec{s}}_{=0} + \int_B^A \underbrace{\vec{R} \cdot d\vec{s}}_{=0} = 0 \tag{7}$$

Osservazione:

Si noti la differenza tra la forza peso (conservativa) e la forza di attrito (non conservativa). La forza peso è diretta sempre verso valle, e dunque il lavoro che compie è negativo da $A \rightarrow B$ (forza discorde al moto) e positivo da $B \rightarrow A$ (forza concorde al moto). Quindi nel percorso chiuso i due contributi si cancellano l'uno con l'altro (=il lavoro di una forza conservativa in un percorso chiuso è nullo).

Al contrario, la forza di attrito si oppone sempre al moto, e dunque il lavoro che compie è negativo sia da $A \rightarrow B$ che da $B \rightarrow A$, dando un lavoro totale non nullo sul percorso chiuso.

3. Per trovare la variazione di energia cinetica applichiamo il teorema dell'energia cinetica al percorso chiuso $A \rightarrow B \rightarrow A$

$$\underbrace{\Delta K}_{K(A')-K(A)} = \underbrace{W_{peso}}_{=0} + \underbrace{W_{att}}_{=-\frac{2\mu_D mgh_{max}}{\tan \theta}} + \underbrace{W_R}_{=0} \quad (8)$$

dove A' denota il punto A nell'istante in cui il corpo ci ritorna scendendo. Otteniamo dunque

$$K(A') - K(A) = -\frac{2\mu_D mgh_{max}}{\tan \theta} < 0 \quad (9)$$

Per valutare esplicitamente la variazione dobbiamo calcolare h_{max} . A tale scopo applichiamo il teorema dell'energia cinetica al primo tratto $A \rightarrow B$

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta K}_{K(B)-K(A)} &= \underbrace{W_{peso}}_{=-mgh_{max}} + \underbrace{W_{att}}_{=-\frac{\mu_D mgh_{max}}{\tan \theta}} + \underbrace{W_R}_{=0} \\ &\Downarrow \\ 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= -mgh_{max} \left(1 + \frac{\mu_D}{\tan \theta}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g \left(1 + \frac{\mu_D}{\tan \theta}\right)} \quad (10)$$

Sostituendo (10) in (9) otteniamo

$$K(A') - K(A) = -\frac{m\mu_D v_0^2}{\tan \theta + \mu_D} \quad (11)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned} K(A') - K(A) &= -\frac{1.5 \text{ Kg} \cdot 0.25 \cdot (10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{\tan \frac{\pi}{6} + 0.25} = \\ &= -\frac{1.5 \cdot 25}{0.577 + 0.25} \underbrace{\text{Kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}_{=\text{J}} = -45.3 \text{ J} \end{aligned} \quad (12)$$

Osservazione:

La variazione di energia cinetica è negativa: quando il corpo ritorna in A la sua energia cinetica è minore di quella con cui era partito da A, a causa del lavoro compiuto dalla forza di attrito durante il percorso chiuso, che ha sottratto energia meccanica al corpo.