

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022

Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3 \text{ m}$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1 \text{ m}$. All'estremità della molla è attaccata una pallina di massa $m = 1 \text{ kg}$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto d_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo T oscillerà la pallina?

$$d_e = \dots\dots\dots T = \dots\dots\dots$$

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento h_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza f oscillerà la pallina?

$$h_e = \dots\dots\dots f = \dots\dots\dots$$

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l'energia cinetica E_c della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$$E_c = \dots\dots\dots$$

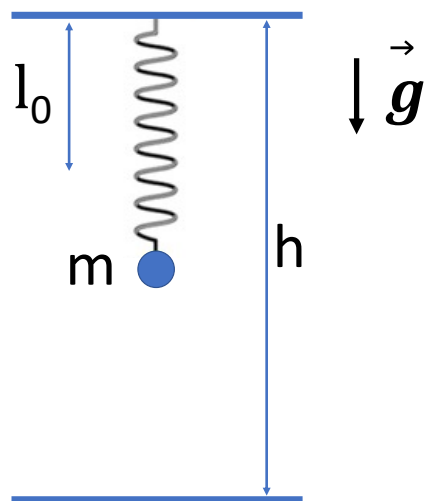
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto (E_{pf}) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento (E_{pi}).

$$E_{pf} - E_{pi} = \dots\dots\dots$$

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h' = 1 \text{ m}$ dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa E_{diss} nell'urto con il soffitto.

$$E_{diss} = \dots\dots\dots$$

Nota Bene: assumere per i calcoli $g = 10 \text{ m/s}^2$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5 \text{ ms}^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo l'asse x . All'istante $t = 0 \text{ s}$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1 \text{ cm}$, distanti $d = 1 \text{ mm}$ e parallele al piano xz (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

- 1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^\circ$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale ($V_A - V_B$) tra l'armatura inferiore (V_A) e l'armatura superiore (V_B).

$$t^* = \dots\dots\dots V_A - V_B = \dots\dots\dots$$

- 1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^\circ$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico \vec{E} nella regione tra le armature del condensatore.

$$t^* = \dots\dots\dots \vec{E} = \dots\dots\dots$$

- 2.a Determinare il campo magnetico $\vec{B} = B_z \hat{z}$ che è necessario applicare lungo z affinché il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

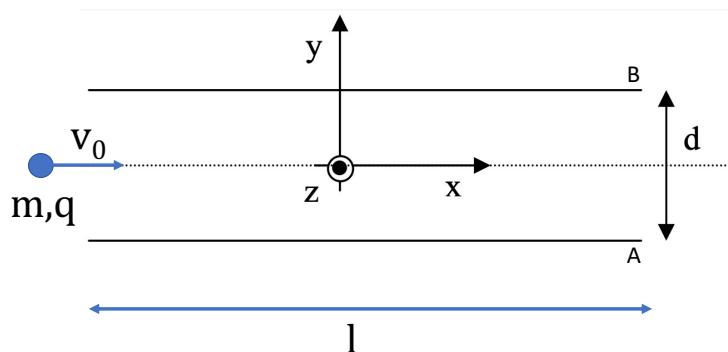
$$\vec{B} = \dots\dots\dots$$

- 3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la velocità \vec{v}_B all'uscita del condensatore

$$\beta = \dots\dots\dots \vec{v}_B = \dots\dots\dots$$

- 3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la lunghezza della traiettoria L percorsa dal protone all'interno del condensatore

$$\beta = \dots\dots\dots L = \dots\dots\dots$$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022

Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3 \text{ m}$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1 \text{ m}$. All'estremità della molla è attaccata una pallina di massa $m = 1 \text{ kg}$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto d_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo T oscillerà la pallina?

$$d_e = 1.25 \text{ m} \quad T = 9.93 \times 10^{-1} \text{ s}$$

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento h_e si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza f oscillerà la pallina?

$$h_e = 1.75 \text{ m} \quad f = 1.01 \text{ s}^{-1}$$

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l'energia cinetica E_c della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$$h > 2d_e \Rightarrow 3 \text{ m} > 2.5 \text{ m} \quad E_c = 30 \text{ J}$$

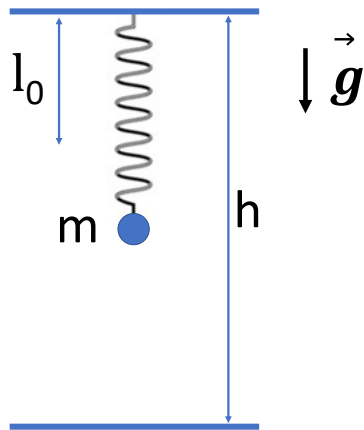
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto (E_{pf}) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento (E_{pi}).

$$h > 2d_e \Rightarrow 3 \text{ m} > 2.5 \text{ m} \quad E_{pf} - E_{pi} = -30 \text{ J}$$

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h' = 1 \text{ m}$ dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa E_{diss} nell'urto con il soffitto.

$$E_{diss} = 50 \text{ J}$$

Nota Bene: assumere per i calcoli $g = 10 \text{ m/s}^2$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5 \text{ ms}^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo l'asse x . All'istante $t = 0 \text{ s}$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1 \text{ cm}$, distanti $d = 1 \text{ mm}$ e parallele al piano xz (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

- 1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^\circ$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale ($V_A - V_B$) tra l'armatura inferiore (V_A) e l'armatura superiore (V_B).

$$t^* = 1 \times 10^{-7} \text{ s} \quad V_A - V_B = -1.01 \text{ V}$$

- 1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^\circ$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico \vec{E} nella regione tra le armature del condensatore.

$$t^* = 1 \times 10^{-7} \text{ s} \quad \vec{E} = (0, -1.01 \times 10^3, 0) \text{ Vm}^{-1}$$

- 2.a Determinare il campo magnetico $\vec{B} = B_z \hat{z}$ che è necessario applicare lungo z affinché il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

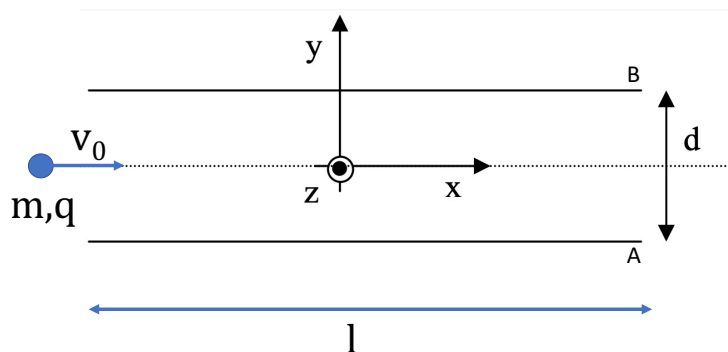
$$\vec{B} = -1.01 \times 10^{-2} \hat{z} \text{ T}$$

- 3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale e la velocità \vec{v}_B all'uscita del condensatore

$$\beta = 5.53^\circ \quad \vec{v}_B = (9.95 \times 10^4, 9.63 \times 10^3, 0) \text{ ms}^{-1}$$

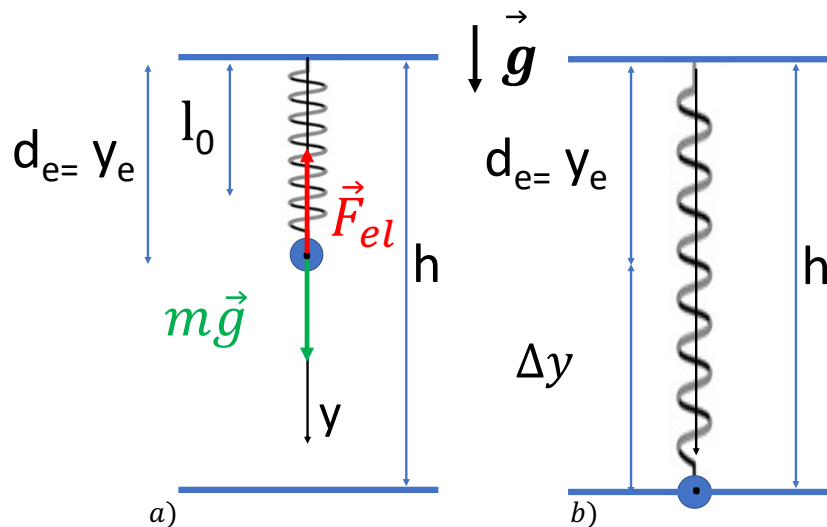
- 3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione β rispetto all'orizzontale in radianti e la lunghezza della traiettoria L percorsa dal protone all'interno del condensatore

$$\beta = 5.53^\circ \quad L = 0.01 \text{ m}$$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Soluzione Esercizio 1



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

Domanda.1

Le forze agenti sulla pallina sono la forza peso e la forza di richiamo della molla. All'equilibrio la somma di tali forze è nulla per cui, nel sistema di riferimento indicato in figura a):

$$-K(y_e - l_0) + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad d_e = y_e = l_0 + \frac{mg}{K}$$

dove abbiamo indicato con y_e la posizione di equilibrio della pallina e del sistema (pallina più molla) nel sistema di riferimento indicato, che corrisponde alla distanza d_e dal soffitto. Mentre la distanza dal pavimento è pari a $h_e = h - d_e$. Quando il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, l'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico:

$$m\ddot{y} = -K(y - l_0) + mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{K}{m} \left(y - l_0 - \frac{mg}{K} \right) = 0$$

la cui pulsazione è $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, e $l_0 + \frac{mg}{K}$ è la lunghezza della molla in condizioni di equilibrio. Per cui:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Il sistema se spostato dalla posizione di equilibrio di $|\Delta y|$, oscillerà attorno alla posizione di equilibrio con:

$$y(t) \in [y_e - |\Delta y|, y_e + |\Delta y|]$$

L'ampiezza dell'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio dipende dall'allungamento (o dalla compressione) rispetto alla posizione di equilibrio.

Domanda.2

Quando la molla viene allungata fino a portare la pallina sul pavimento, (vedi figura b), l'allungamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio è $\Delta y = h - (l_0 + \frac{mg}{K})$. Affinchè la pallina arrivi a colpire il soffitto è necessario che $\Delta y = h - (l_0 + \frac{mg}{K}) > (l_0 + \frac{mg}{K})$, per cui $h > 2(l_0 + \frac{mg}{K})$. I dati del problema verificano questa relazione.

Prima dell'urto con il soffitto, poichè le forze in gioco, forza gravitazionale e forza elastica, sono forze conservative, si conserva l'energia meccanica. Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, dalla conservazione dell'energia, indicando con E_i ed E_f l'energia iniziale e finale del sistema molla-pallina, possiamo scrivere:

$$E_i = \frac{1}{2}K(h - l_0)^2 \quad E_f = \frac{1}{2}K(l_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Per cui l'energia cinetica della pallina quando arriva sul soffitto è data da:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kh(h - 2l_0) - mgh$$

Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, l'energia potenziale iniziale e finale sono date rispettivamente da:

$$E_{pi} = \frac{1}{2}K(h - l_0)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{pf} = \frac{1}{2}K(l_0)^2 + mgh \text{ dalle quali } E_{pf} - E_{pi} = -\frac{1}{2}Kh(h - 2l_0) + mgh$$

Domanda.3

In questo caso, se la pallina non arriva a terra ma si ferma vuol dire che l'urto è anelastico e l'energia non si conserva. L'energia dissipata è data da $E_i - E'_f$, dove E_i è stata determinata nella Domanda 2 e E'_f si ottiene da:

$$E'_f = \frac{1}{2}K(h - l_0 - h')^2 + mgh'$$

Per cui l'energia dissipata è data da:

$$E_{diss} = \frac{1}{2}K(h - l_0)^2 - \frac{1}{2}K(h - l_0 - h')^2 - mgh'$$

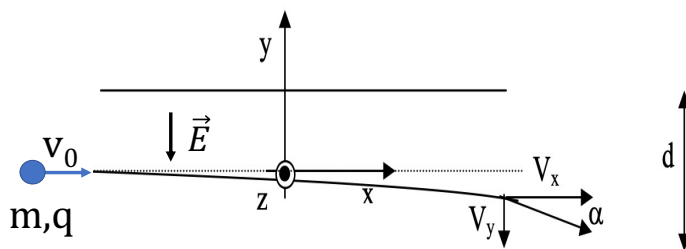
Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y per cui $\vec{E} = E_y \hat{y}$. La forza \vec{F} agente sulla massa m quando questa è all'interno del condensatore è $\vec{F} = (0, qE_y, 0)$. Per cui, lungo x il moto è rettilineo ed uniforme con $v_x = v_0$. Usando il sistema di coordinate assegnato, $x(t) = -\frac{l}{2} + v_0 t$. Da $x(t^*) = \frac{l}{2}$ si ottiene che il tempo impiegato ad attraversare il condensatore è pari a $t^* = \frac{l}{v_0}$. Lungo y , il moto è uniformemente accelerato con $a_y = \frac{qE_y}{m}$ dalla quale $v_y(t^*) = a_y t^* = \frac{qE_y}{m} \frac{l}{v_0}$. Dalle quali:

$$\frac{v_y(t^*)}{v_x} = \frac{qE_y}{m} \frac{l}{v_0^2} = -tg(\alpha) \Rightarrow E_y = -\frac{m}{q} \frac{v_0^2}{l} tg\alpha \Rightarrow \vec{E} = \left(0, -\frac{m}{q} \frac{v_0^2}{l} tg\alpha, 0\right)$$

$$V_A - V_B = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_y dy = E_y d = -\frac{m}{q} \frac{v_0^2}{l} dtg\alpha$$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

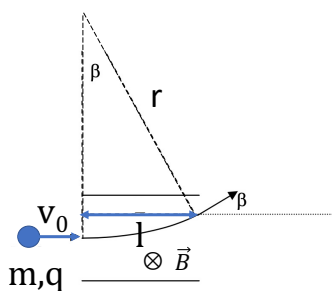
Domanda 2

Affinchè il protone non venga deflesso la risultante delle forze elettriche (\vec{F}_{el}) e magnetiche (\vec{F}_m) agenti sul protone deve essere nulla:

$$\vec{F}_{el} + \vec{F}_m \Rightarrow qE_y \hat{y} = -q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qv_0 \hat{x} \wedge B_z \hat{z} = qv_0 B_z \hat{y} = qE_y \hat{y} \Rightarrow B_z = \frac{E_y}{v_0} = -\frac{m}{q} \frac{v_0}{l} tg\alpha$$

Domanda 3

Se nello spazio occupato dal condensatore è presente solo il campo magnetico uniforme determinato nella domanda 2, il protone compie un moto circolare uniforme nel piano xy fino a quando è all'interno del condensatore.



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

L'unica forza agente è infatti la forza magnetica e vale $\frac{mv_0^2}{r} = qv_0 B$, per cui il raggio di curvatura del moto è $r = \frac{mv_0}{qB}$. Pertanto, all'uscita del condensatore (vedi figura) l'angolo di deflessione si ottiene dalle seguenti relazioni:

$$\sin\beta = \frac{l}{r} = \frac{lqB}{mv_0} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{lqB}{mv_0}\right)$$

Con riferimento alla figura, la lunghezza della traiettoria L e la velocità \vec{v}_B all'uscita del condensatore sono rispettivamente date da:

$$L = r\beta \quad \vec{v}_B = (v_0 \cos\beta, v_0 \sin\beta)$$