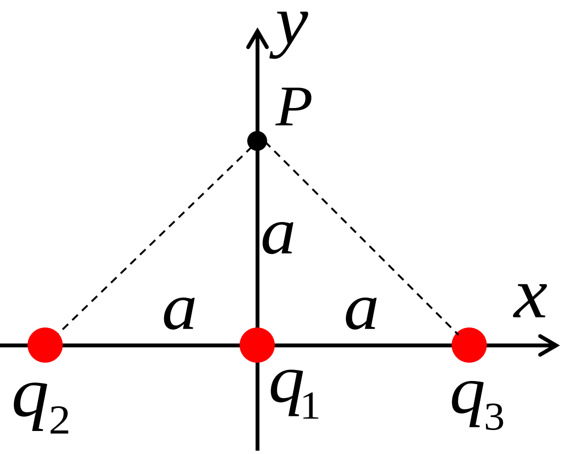
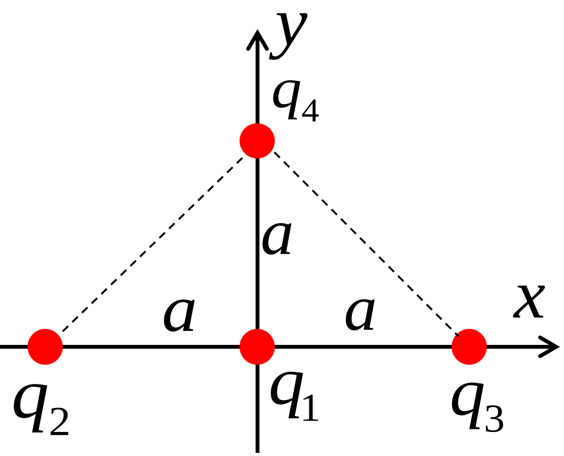
Problema 1



Consideriamo 3 cariche in figura con q_1=-q, q_2 = $2q$, q_3 =-$2q$, q=1 μC; sia a =3 cm; il punto P ha coordinate (x=0, y=a)

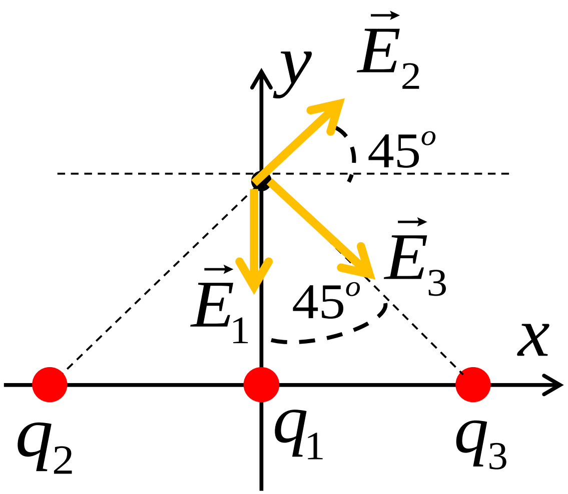
a) Calcolare le componenti lungo gli assi E_x, E_y del campo elettrico totale generato dalle 3 cariche nel punto P
b) Calcolare l'angolo α che la direzione del campo forma con l'asse x
c) Calcolare la d.d.p. $\Delta V = V_P - V_{P'}$ tra il punto P e il punto P' di coordinate (x = 0, y = 2a) dovuta al campo delle 3 cariche
d) Poniamo una quarta carica nel punto P, q_4= 3q; calcolare le componenti lungo gli assi F_x, F_y della forza esercitata dal campo elettrico sulla carica q_4
e) Calcolare il lavoro necessario per muovere la carica q_4 dal punto P al punto P' di coordinate (x=0, y=2a)



$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Problema 1

$$r_1 = a; \quad r_2 = \sqrt{2}a; \quad r_3 = \sqrt{2}a$$



$$\vec{E}_1 = -k\frac{q}{a^2}\hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = k\frac{2q}{2a^2}\cos(45^o)\hat{x} + k\frac{2q}{2a^2}\sin(45^o)\hat{y}$$

$$\vec{E}_3 = k\frac{2q}{2a^2}\cos(45^o)\hat{x} - k\frac{2q}{2a^2}\sin(45^o)\hat{y}$$

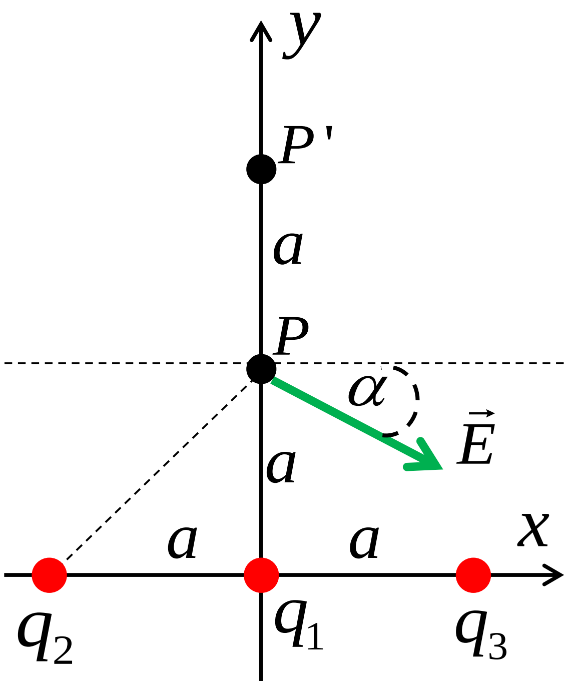
$$\vec{E}_P = k\frac{\sqrt{2}q}{a^2}\hat{x} - k\frac{q}{a^2}\hat{y}$$

$$\cos(45^o) = \sin(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E_x = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{\sqrt{2}\mu C}{(3cm)^2} = 1.41\times10^7\frac{N}{C}$$

$$E_y = -9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{(3cm)^2} = -1.0\times10^7\frac{N}{C}$$

Problema 1



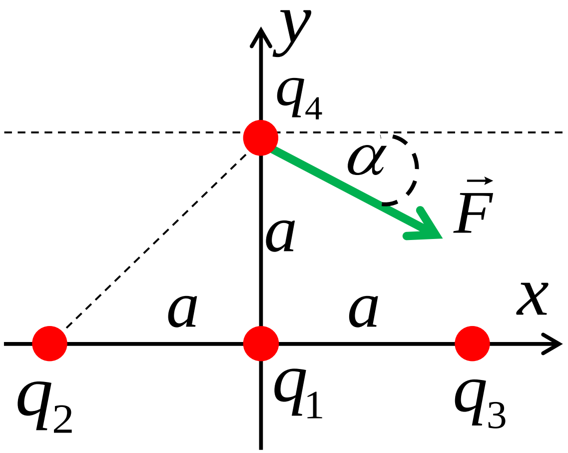
$$\tan(\alpha) = \frac{E_y}{E_x} = -0.71 \Rightarrow \alpha = -35.3^o$$

$$V_P = V_{P,1} + V_{P,2} + V_{P,3}$$

$$= -k\frac{q}{a} + k\frac{2q}{\sqrt{2}a} - k\frac{2q}{\sqrt{2}a} = -k\frac{q}{a}$$

$$V_{P'} = V_{P',1} = -k\frac{q}{2a}$$

$$V_P - V_{P'} = -k\frac{q}{2a} = -9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{6\times10^{-2}m} = -1.5\times10^5 V$$

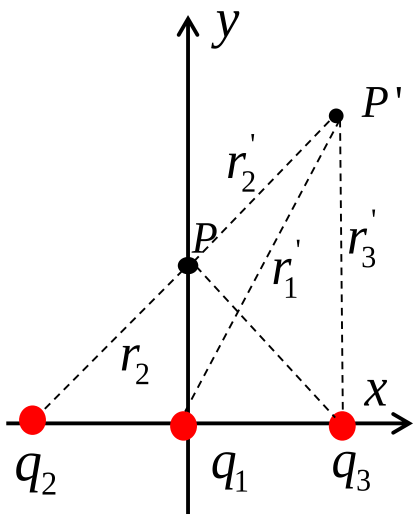


$$F_x = q_4 E_x = 3\mu C \times 1.41\times10^7\frac{N}{C} = 42.3N$$

$$F_y = q_4 E_y = -3\mu C \times 1.0\times10^7\frac{N}{C} = -30N$$

$$L = q_4\left(V_P - V_{P'}\right) = -3\mu C \times 1.5\times10^5 V = -0.45\ J$$

Problema 1



Supponiamo di spostare la carica da P ad un punto P' ($x = a$, $y = 2a$); ricalcoliamo la d.d.p. tra P e P'

$$V_P = -k\frac{q}{a} = -9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{3cm} = -3\times10^5\,V$$

Potenziale in *P'*:

$$V_1 = -k\frac{q}{\sqrt{5}a} \qquad V_2 = k\frac{2q}{2\sqrt{2}a} \qquad V_3 = -k\frac{2q}{2a}$$

$$r_1' = \sqrt{a^2+4a^2} = \sqrt{5}a$$

$$r_2' = \sqrt{2}(2a)$$

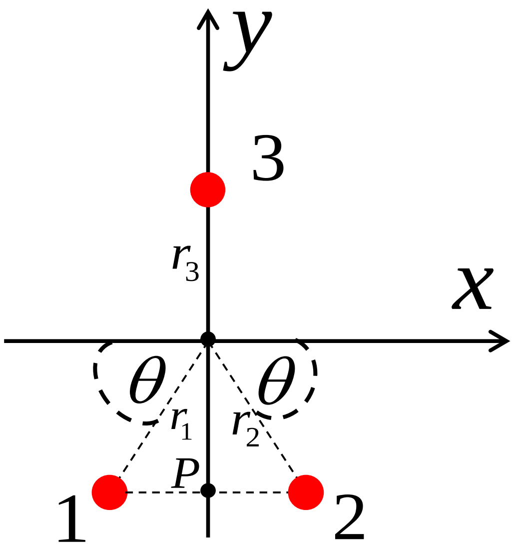
$$r_3' = 2a$$

$$V_P - V_{P'} = k\frac{q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{3cm}\times0.26 = -0.78\times10^5\,V$$

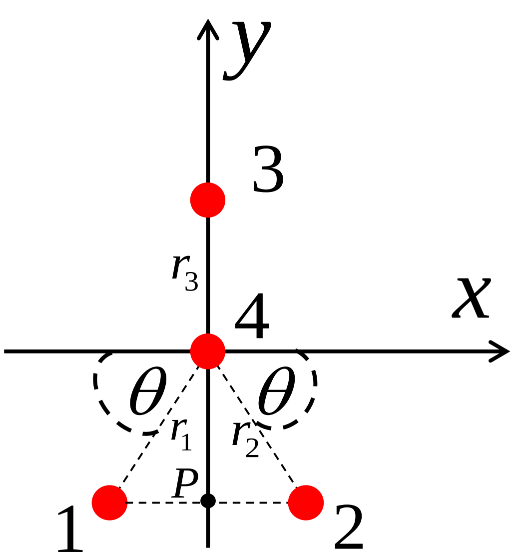
Notiamo che il potenziale in *P'* è maggiore del potenziale in *P*: vuol dire che per spostare la carica q_4 da *P* a *P'* bisogna compiere un lavoro negativo, ovvero lavorare CONTRO il campo generato dalle cariche q_1, q_2, q_3 ; il lavoro speso dal campo delle 3 cariche per spostare q_4 da *P* a *P'* è:

$$L = q_4\left(V_P - V_{P'}\right) = -3\mu C\times0.78\times10^5\,V = -0.234\,J$$

Problema 2

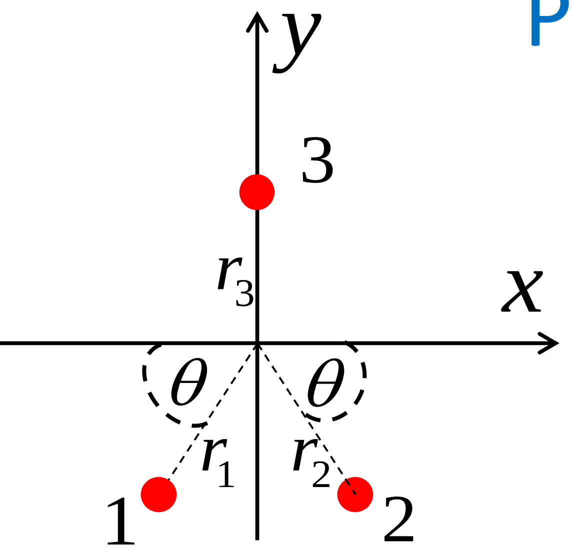


Consideriamo 3 cariche in figura con $q_1 = q$, $q_2 = -q$, $q_3 = -q$, q=1 μC; le loro distanze dall'origine sono $r_1 = r_2 = 4$ cm, $r_3 = 3$ cm, $\theta = 60°$



a) Calcolare le componenti lungo gli assi E_x, E_y del campo elettrico totale generato dalle 3 cariche nell'origine del riferimento cartesiano (x=0,y=0)
b) Poniamo una quarta carica $q_4 = 3q$ nell'origine; calcolare le componenti lungo gli assi F_x, F_y della forza esercitata dal campo elettrico sulla carica q_4.
c) Calcolare modulo F e angolo α che la forza forma con l'asse x
d) Disegnare con una freccia la forza in figura, indicando approssimativamente direzione e verso
e) Calcolare il lavoro necessario a spostare la carica q_4 dall'origine al punto P indicato in figura.

Problema 2: campo e forza



$$\vec{E}_3 = k\frac{q}{r_3^2}\hat{y} \qquad \vec{E}_1 = k\frac{q}{r_1^2}\cos(\theta)\hat{x} + k\frac{q}{r_1^2}\sin(\theta)\hat{y}$$

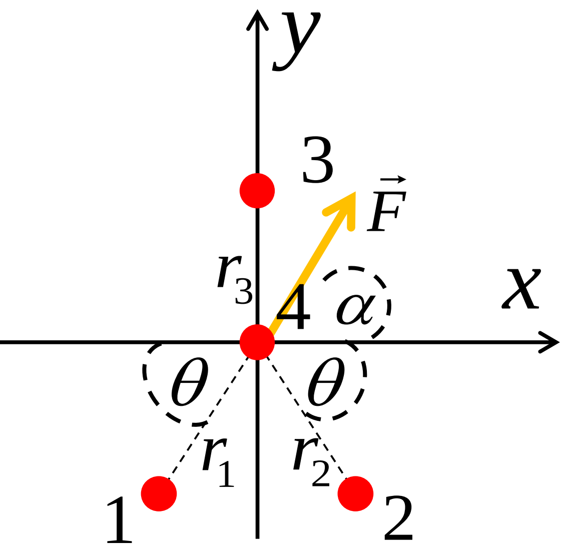
$$\vec{E}_2 = k\frac{q}{r_2^2}\cos(\theta)\hat{x} - k\frac{q}{r_2^2}\sin(\theta)\hat{y}$$

$$\vec{E} = k\frac{2q}{r_1^2}\cos(60)\hat{x} + k\frac{q}{r_3^2}\hat{y} = k\frac{q}{r_1^2}\hat{x} + k\frac{q}{r_3^2}\hat{y}$$

$$\cos(60) = \frac{1}{2}$$

$$E_x = 9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{1\mu C}{(4cm)^2} = 0.56\times10^7\,\frac{N}{C}$$

$$E_y = 9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{1\mu C}{(3cm)^2} = 1.0\times10^7\,\frac{N}{C}$$

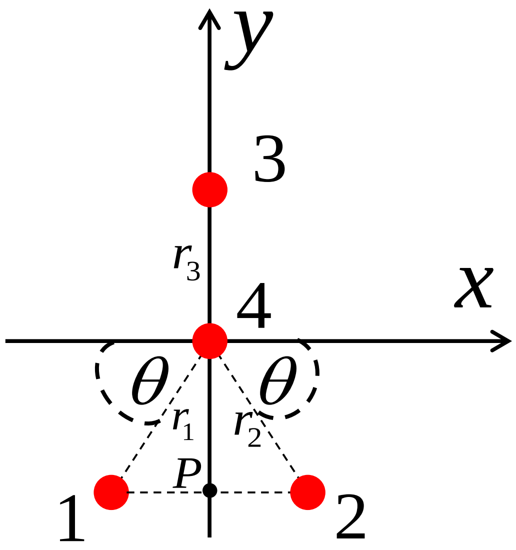


$$F_x = q_4 E_x = 3\mu C\times0.56\times10^7\,\frac{N}{C} = 16.8N$$

$$F_y = q_4 E_y = 3\mu C\times1.0\times10^7\,\frac{N}{C} = 30N$$

$$F = \sqrt{1.68^2 + 3^2}\times10N = 34.4N \qquad \tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x} = 1.785 \Rightarrow \alpha = 60.75^o$$

Problema 2: potenziale



Il potenziale generato da q_1, q_2, q_3 nell'origine è:

$$V_1 = k\frac{q}{r_1} \quad V_2 = -k\frac{q}{r_2} \quad V_3 = -k\frac{q}{r_3}$$

Il potenziale totale è quindi:

$$V_0 = -k\frac{q}{r_3} = -9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{3\,cm} = -3\times10^5\,V$$

Il potenziale generato da q_1, q_2, q_3 in P è:

$$V_1 = k\frac{q}{r_1\cos(\theta)} \quad V_2 = -k\frac{q}{r_2\cos(\theta)} \quad V_3 = -k\frac{q}{r_3 + r_1\sin(\theta)}$$

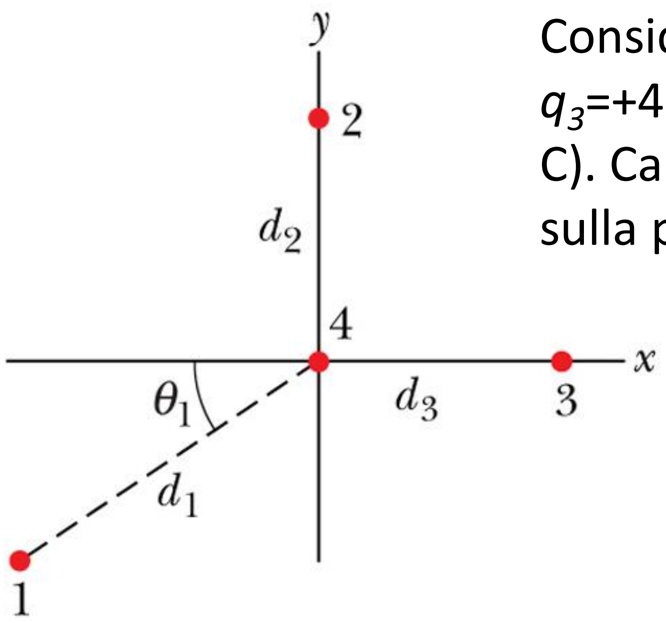
Il potenziale totale in P:

$$V_P = -k\frac{q}{r_3 + r_1\sin(\theta)} = -9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{6.464\,cm} = -1.39\times10^5\,V$$

$$L = q_4\left(V_0 - V_P\right) = -3\mu C\times(3-1.39)\times10^5\,V = -0.483\,J$$

Il potenziale in *P* è maggiore del potenziale in *(0,0)*; dunque per spostare la carica q_4 dall'origine a *P* bisogna compiere un lavoro negativo, ovvero effettuato CONTRO il campo generato dalle cariche q_1, q_2, q_3 ; ciò è facilmente intuibile dalla direzione della forza su q_4 posta nell'origine, che tende a spostare la carica verso l'asse y positivo, dunque in direzione opposta rispetto a P.

Esercizio 21.27



Consideriamo le 4 cariche in figura con q_1=-2e, q_2 = +2e , q_3=+4e , q_4=+2e; θ_1=35° , d_1=3 cm, d_2=d_3=2 cm; (e=1.6 $\times 10^{-19}$ C). Calcolare modulo, direzione e verso della forza agente sulla particella 4 per effetto delle altre

$$\vec{F}_{24} = -k\frac{4e^2}{d_2^2}\hat{y}; \quad \vec{F}_{34} = -k\frac{8e^2}{d_3^2}\hat{x}$$

$$\vec{F}_{14} = -k\frac{4e^2}{d_1^2}\cos(\theta_1)\hat{x} - k\frac{4e^2}{d_1^2}\sin(\theta_1)\hat{y}$$

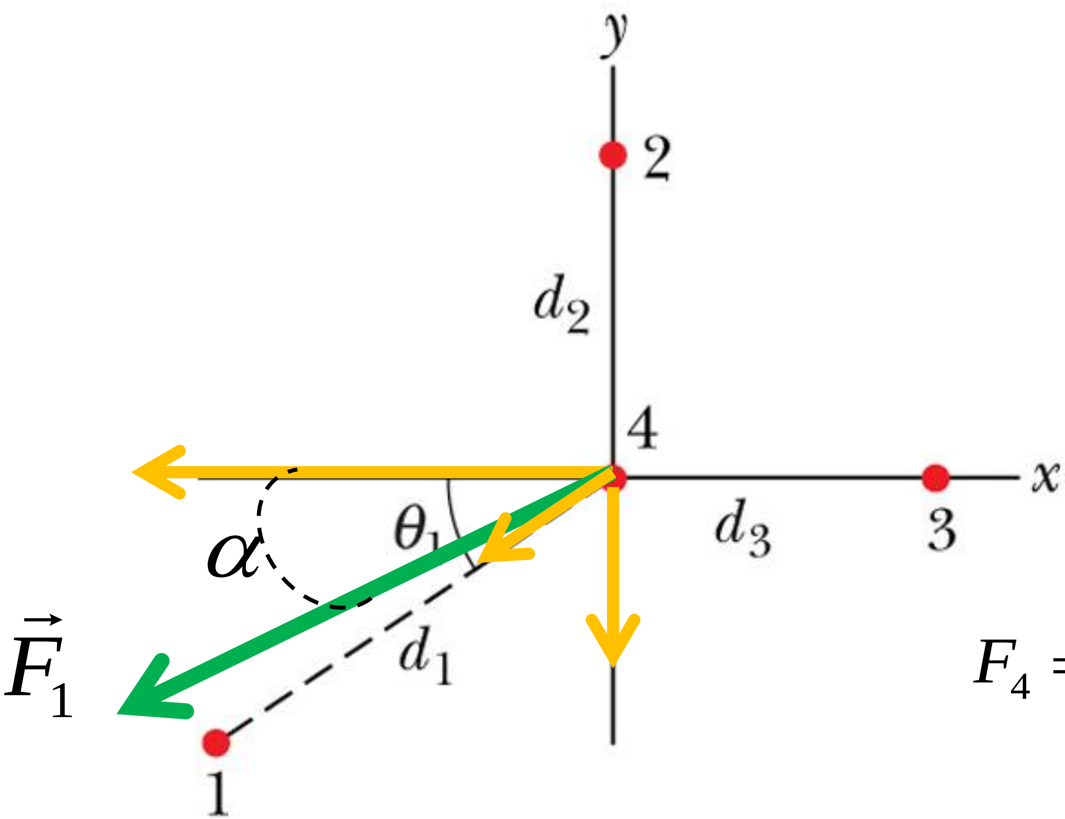
$$\vec{F}_4 = -4ke^2\left(\frac{2}{d_3^2} + \frac{1}{d_1^2}\cos(\theta_1)\right)\hat{x} - 4ke^2\left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_1^2}\sin(\theta_1)\right)\hat{y}$$

$$F_{4,x} = -4ke^2\left(\frac{2}{d_3^2} + \frac{1}{d_1^2}\cos(\theta_1)\right) = -0.54\times 10^{-23}\,N$$

$$F_{4,y} = -4ke^2\left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_1^2}\sin(\theta_1)\right) = -0.29\times 10^{-23}\,N$$

Esercizio 21.27

Consideriamo le 4 cariche in figura con q_1=-2e, q_2 = +2e , q_3=+4e , q_4=+2e; θ_1=35° , d_1=3 cm, d_2=d_3=2 cm; (e=1.6 $\times 10^{-19}$ C). Calcolare modulo, direzione e verso della forza agente sulla particella 4 per effetto delle altre



$$F_{4,x} = -0.54 \times 10^{-23} N$$

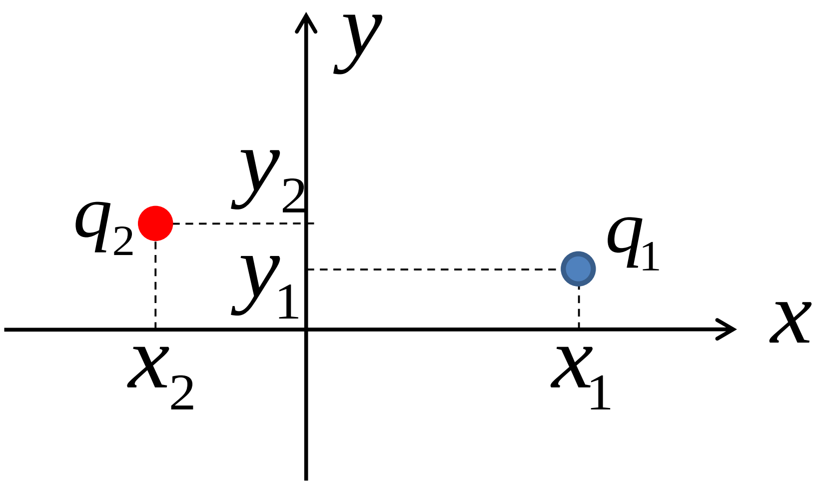
$$F_{4,y} = -0.29 \times 10^{-23} N$$

$$F_4 = \sqrt{F_{4,x}^2 + F_{4,y}^2} = 0.61 \times 10^{-23} N$$

$$\tan(\alpha) = \frac{F_{4,y}}{F_{4,x}} = 0.53 \Rightarrow \alpha = 28^o$$

Esercizio 21.11

Date due cariche q_1 e q_2 nel piano (x,y), si consideri una terza carica positiva q_3; calcolare le coordinate (x_3,y_3) del punto in cui che deve essere posta q_3 affinché la forza netta su di essa sia nulla



$$q_1 = 3\mu C; \quad x_1 = 3.5cm;\ y_1 = 0.5cm$$

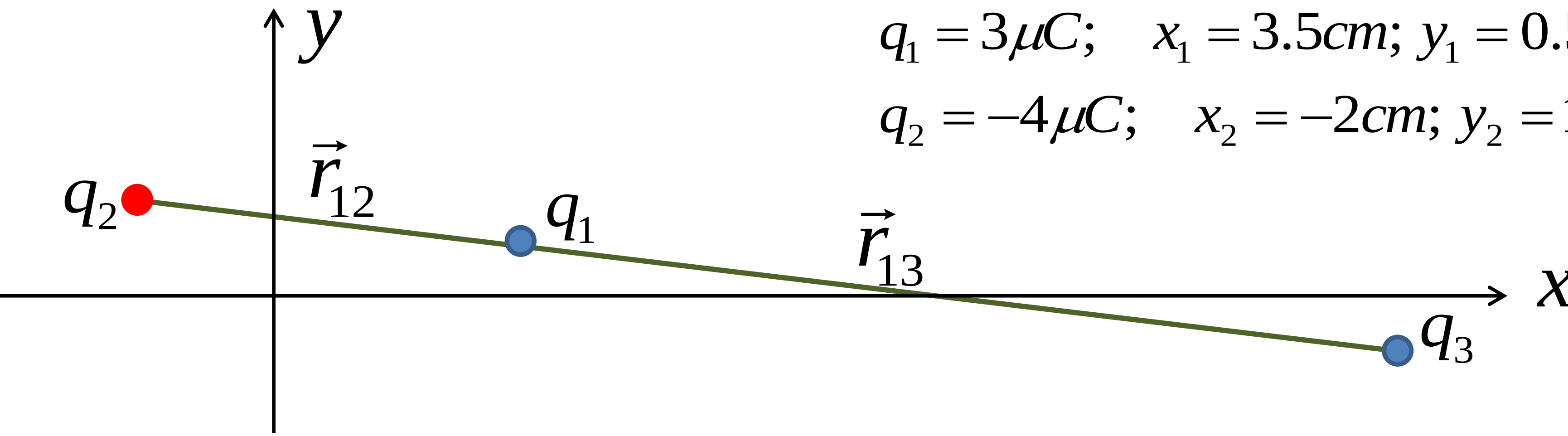
$$q_2 = -4\mu C; \quad x_2 = -2cm;\ y_2 = 1.5cm$$

- ✓ Essendo i campi generati da q_1 e q_2 radiali, gli unici punti in cui possono compensarsi sono lungo la direzione della retta congiungente le due cariche

- ✓ Nel segmento compreso tra q_1 e q_2 i campi sono CONCORDI, per cui non possono compensarsi

- ✓ Essendo $q_2 > q_1$, per compensarsi la carica q_1 deve necessariamente essere quella più vicina a q_3

Esercizio 21.11



$$q_1 = 3\mu C; \quad x_1 = 3.5cm;\ y_1 = 0.5cm$$
$$q_2 = -4\mu C; \quad x_2 = -2cm;\ y_2 = 1.5cm$$

Siano r_{12}, r_{13}, r_{23} le distanze tra la cariche. Affinché i campi generati da q_1 e q_2 si compensino deve essere:

$$\frac{q_1}{r_{13}^2} = \frac{q_2}{r_{23}^2}$$

La distanza r_{12} è nota; inoltre $r_{23} = r_{12} + r_{13}$, per cui possiamo risolvere l'equazione rispetto all'unica incognita r_{13}:

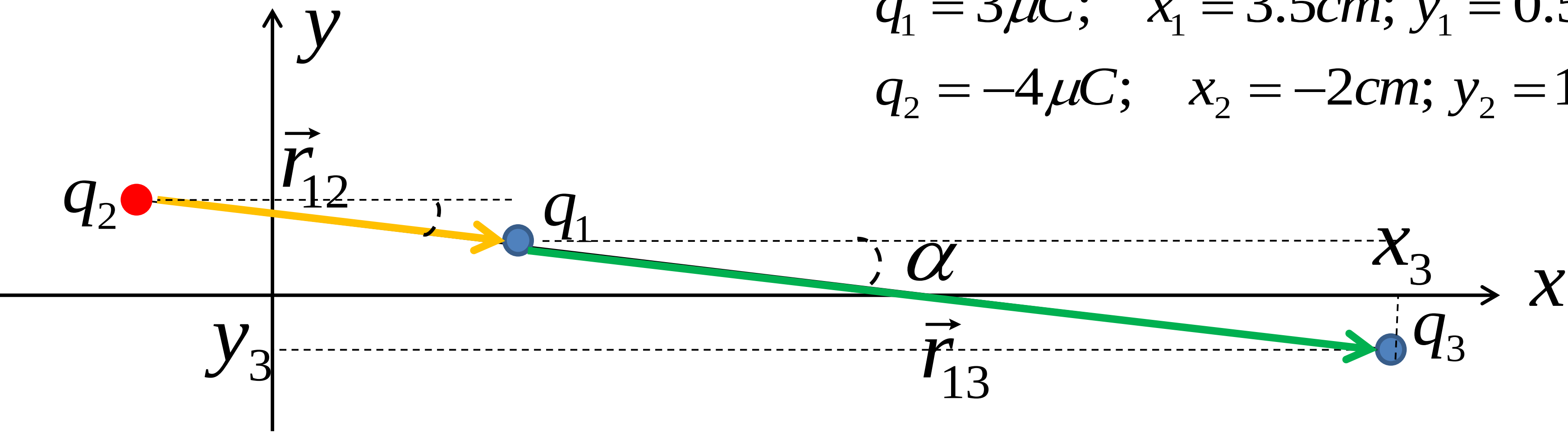
$$\frac{q_1}{r_{13}^2} = \frac{q_2}{\left(r_{12} + r_{13}\right)^2} \Rightarrow r_{13} = r_{12}\left(\frac{\sqrt{q_1/q_2}}{1-\sqrt{q_1/q_2}}\right)$$

$$r_{12} = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} = 5.6\,cm \qquad r_{13} = 5.6\,cm\left(\frac{0.866}{1-0.866}\right) = 36.2\,cm$$

Esercizio 21.11

$$q_1 = 3\mu C; \quad x_1 = 3.5cm; \; y_1 = 0.5cm$$

$$q_2 = -4\mu C; \quad x_2 = -2cm; \; y_2 = 1.5cm$$



Per calcolare le coordinate di q_3 abbiamo bisogno di conoscere l'angolo α che il vettore distanza r_{13} forma con l'asse x; ma questo angolo è lo stesso che il vettore r_{12} forma con x, per cui:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -0.1818 \Rightarrow \alpha = -10.3^o$$

Con l'angolo α calcoliamo x_3 e y_3 proiettando il vettore distanza r_{13} lungo gli assi:

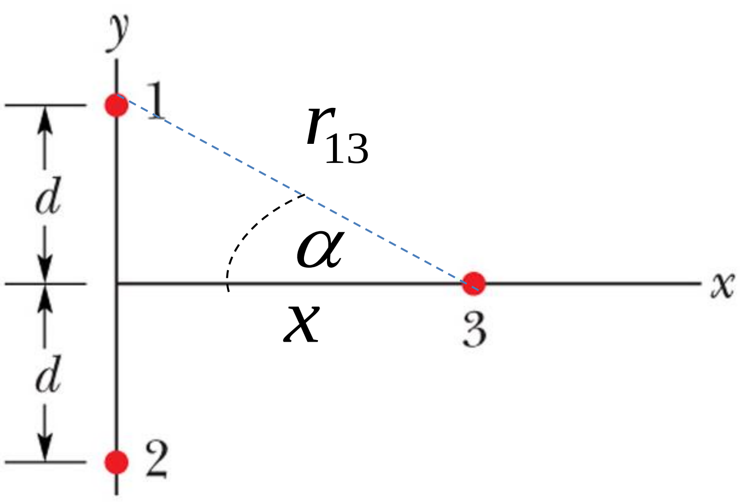
$$r_{13}\cos(\alpha) = x_3 - x_1 \Rightarrow x_3 = 39.1cm$$

$$r_{13}\sin(\alpha) = y_3 - y_1 \Rightarrow y_3 = -6\,cm$$

Esercizio 21.14

Date due cariche uguali q_1 e q_2 nel piano (x,y) a distanza 2d, si consideri una terza carica positiva q_3 posta sull'asse delle x; calcolare il valore della coordinata x per cui l'intensità della forza esercitata su q_3 è minima e massima

$$q_1 = q_2 = 2e; \quad d = 17\,cm; \quad q_3 = 4e$$



Siano r_{13}=r_{23} le distanze tra la cariche; lungo y i campi generati da q_1 e q_2 si compensano per ogni valore di x, per cui solo il campo lungo x agisce su q_3; la forza totale su q_3 è

$$F_{3,x} = 2k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\cos(\alpha)$$

$$r_{13}^2 = d^2 + x^2$$

$$r_{13}\cos(\alpha) = x$$

Sfruttando le relazioni geometriche, esprimiamo la forza in funzione della posizione x di q_3

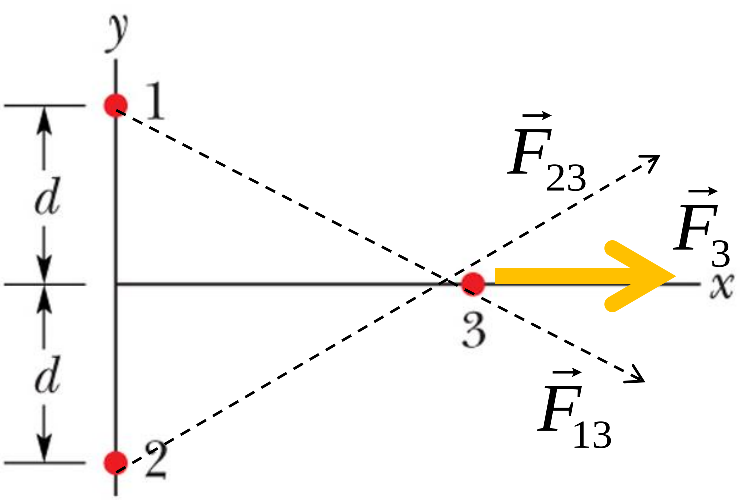
$$F_{3,x} = 2kq_1 q_3 \frac{x}{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

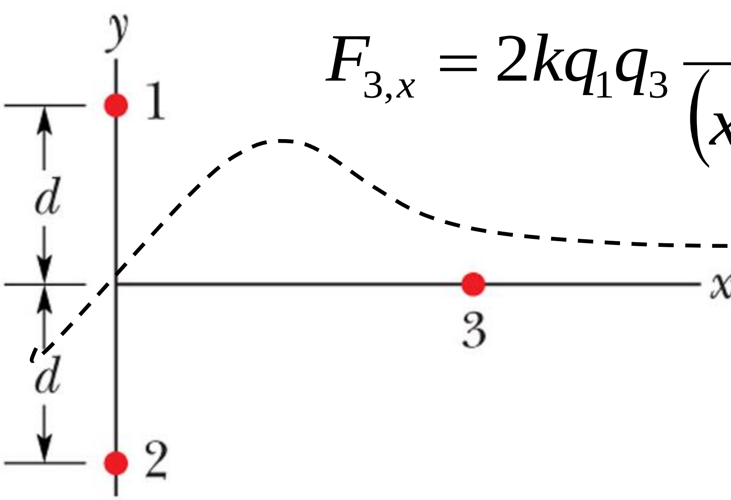
Esercizio 21.14

Date due cariche uguali q_1 e q_2 nel piano (x,y) a distanza 2d, si consideri una terza carica positiva q_3 posta sull'asse delle x; calcolare il valore della coordinata x per cui l'intensità della forza esercitata su q_3 è minima e massima

$$r_{12}^2 = d^2 + x^2 \qquad r_{12}\cos(\alpha) = x$$

$$q_1 = q_2 = 2e; \quad d = 17\,cm; \quad q_3 = 4e$$



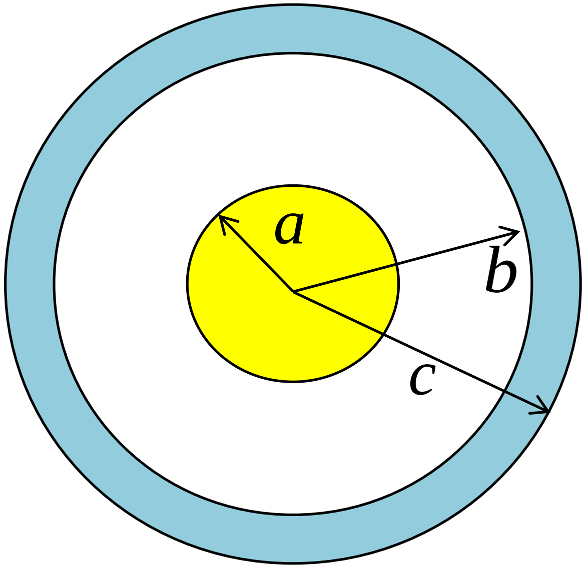


$$F_{3,x} = 2kq_1q_3 \frac{x}{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Il minimo è chiaramente ad x=0: per il massimo dobbiamo utilizzare la condizione di derivata nulla rispetto alla coordinata x

$$\frac{\partial F_{3,x}}{\partial x} = 0 = 2kq_1q_3 \frac{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2} - 3x^2\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}}{\left(x^2 + d^2\right)^3} \quad \Rightarrow \left(x^2 + d^2\right) = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Problema 2



Una sfera isolante uniformemente carica (in giallo) di carica q_s = 4 μC e raggio *a* =4 cm, è posta al centro di un guscio conduttore sferico (in azzurro) con raggio interno *b*=9 cm ed esterno c=10 cm; sul guscio è presente una carica q_c = *-1* μC

a) Determinare la carica Q accumulata sulla superficie interna ed esterna del guscio conduttore

b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti r =2 cm, r=4 cm, r=7 cm, r=9.5 cm, r=12 cm

Sup. interna Q = -4 μC

Sup. esterna Q = 3 μC

$$r = 2\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C\times 2\,cm}{(4\,cm)^3} = 1.125\times10^7 (N/C)$$

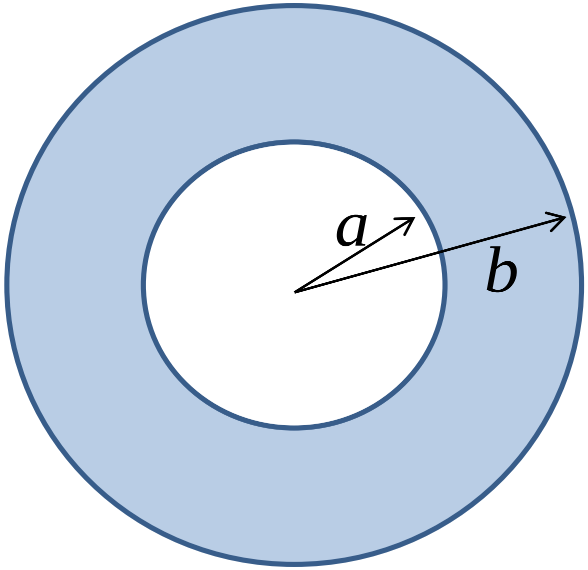
$$r = 4\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C}{16\times10^{-4}\,m^2} = 2.25\times10^7 (N/C)$$

$$r = 7\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C}{49\times10^{-4}\,m^2} = 0.735\times10^7 (N/C)$$

$$r = 9.5\,cm \quad E = 0$$

$$r = 12\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C}{12^2\times10^{-4}\,m^2} = 0.1875\times10^7 (N/C)$$

Problema 2



Sia dato un guscio sferico isolante carico, con carica distribuita uniformemente q_s =3 μC, raggio interno *a*=5 cm ed esterno *b*=10 cm

a) Scrivere l'espressione del campo elettrico *E(r)* in funzione della distanza *r* per *r* < *a* (nella cavità), per *a* > *r* > *b* (nel guscio), per *r* > *b* (esterno al guscio)

b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti *r* = 2 cm, *r* =7 cm, *r* =10 cm

$$a)\begin{cases} r < a & E(r) = 0 \\ a < r < b & E(r) = k\dfrac{q(r)}{r^2} = k\dfrac{q_s}{r^2}\left(\dfrac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}\right) \\ r > b & E(r) = k\dfrac{q_s}{r^2} \end{cases}$$

Problema 2

In un punto a distanza *r* interna al guscio il campo elettrico è dato da:

$$E(r) = k\frac{q(r)}{r^2}$$

q(r) è la sola carica contenuta all'interno del raggio r; poiché la densità di carica 3D ρ è uniforme, si ha:

$$q(r) = \rho V(r) \qquad\qquad q_s = \rho V$$

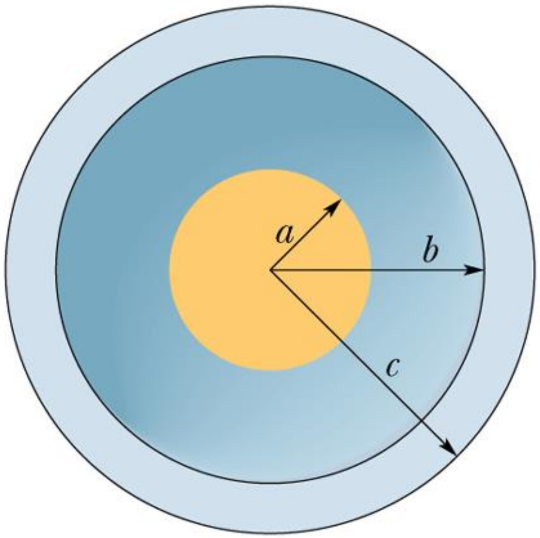
V è il volume del guscio, *V(r)* il volume del guscio di raggio esterno *r*:

$$\frac{q(r)}{q_s} = \frac{V(r)}{V} = \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \Rightarrow E(r) = k\frac{q_s}{r^2}\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

$$b)\begin{cases} r = 2\,cm \quad E = 0 \\ r = 7cm \quad E = 9\times 10^9\dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{49\times 10^{-4}m^2}\left(\dfrac{7^3 - 5^3}{10^3 - 5^3}\right) = 0.137\times 10^7 (N/C) \\ r = 10\,cm \quad E = 9\times 10^9\dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{10^{-2}m^2} = 0.27\times 10^7 (N/C) \end{cases}$$

Esercizio 23.29

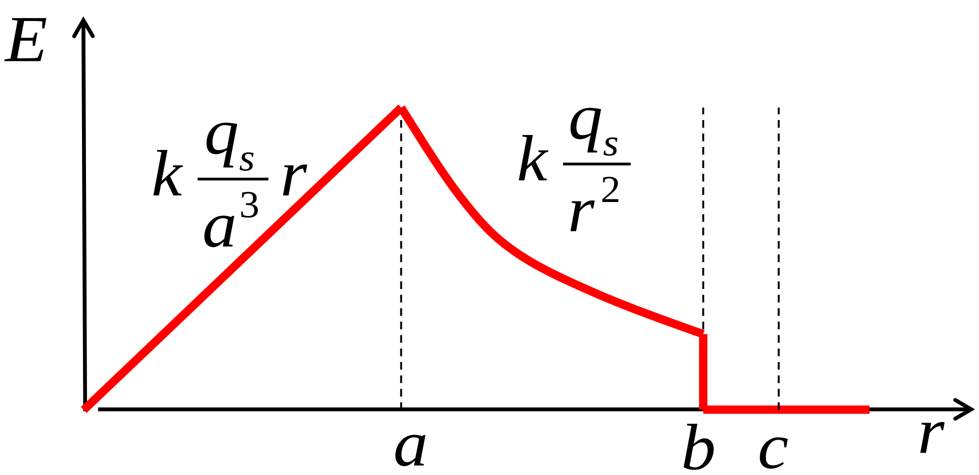
Una sfera isolante uniformemente carica con q_s =5 μC di raggio a=2 cm, è posta al centro di un guscio conduttore sferico con raggio interno b=4 cm ed esterno c=5 cm; sul guscio è presente una carica q_C = -5 μC



1) calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti: r=0, r = 1 *cm*, r = 2 *cm*, r =3 cm; r =4.6 *cm*; r = 7 cm

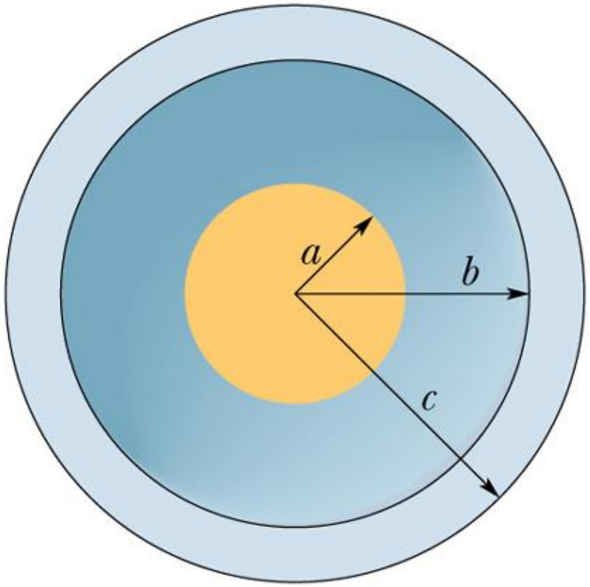
2) Quale carica appare sulla superficie interna ed esterna del guscio ?

- il guscio sferico non contribuisce ad E nella cavità
- $r < a$: E lineare in r
- $a < r < b$: campo della carica puntuale q_s nel centro

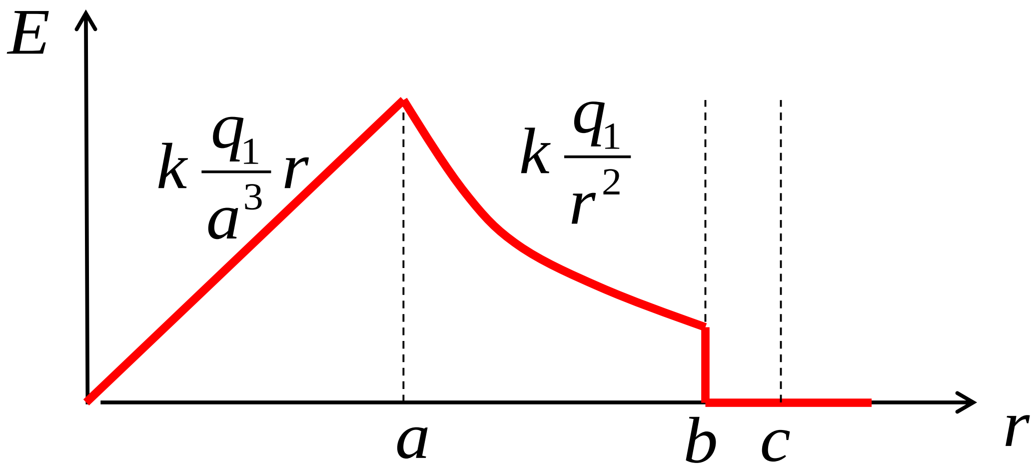


- $b < r < c$: all'interno del conduttore deve essere E=0, per cui tutta la carica q_C deve essere sulla superficie interna del guscio, per compensare esattamente q_s
- $r > c$: sfera isolante e guscio conduttore equivalgono entrambe a due cariche puntuali q_s e q_C poste nel centro; essendo uguali ed opposte in segno, i rispettivi campi si compensano: E=0

Esercizio 23.29



q_s =5 μC *a*=2 cm; *b*=4 cm



$$r = 0 \quad E = 0$$

$$r = 1cm \quad E = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{5\mu C}{(2cm)^3}1cm = 5.625\times10^7(N/C)$$

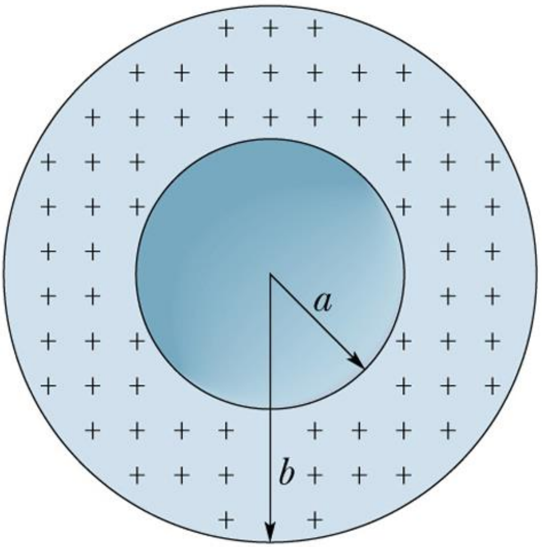
$$r = 2\,cm \quad E = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{5\mu C}{(2cm)^2} = 11.25\times10^7(N/C)$$

$$r = 3\,cm \quad E = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{5\mu C}{(3cm)^2} = 5\times10^7(N/C)$$

$$r = 4.6\,cm \quad E = 0$$

$$r = 7\,cm \quad E = 0$$

Esercizio 23.30

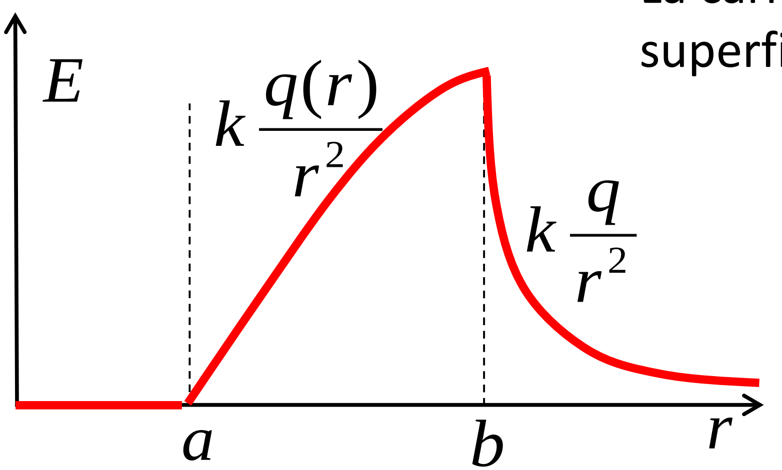


Un guscio sferico uniformemente carico ha densità di carica ρ=1.84 nC/m^3, raggio interno *a*=10 cm ed esterno *b*=2*a*. Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti: *r*=0; *r*=*a*/2; *r*=*a*; *r=1.5a; r=b; r=3b*.

- ❑ *r* < *a* : *E* =0 il campo del guscio sferico è zero nella cavità
- ❑ *a* < *r* < *b* : Applichiamo Gauss ad una superficie di raggio *r*. Attenzione: la cavità NON contribuisce alla carica.
- ❑ *r* > *b*: *E* equivale al campo di una carica puntiforme centrata nell'origine

La carica totale del guscio è $q = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)\rho$

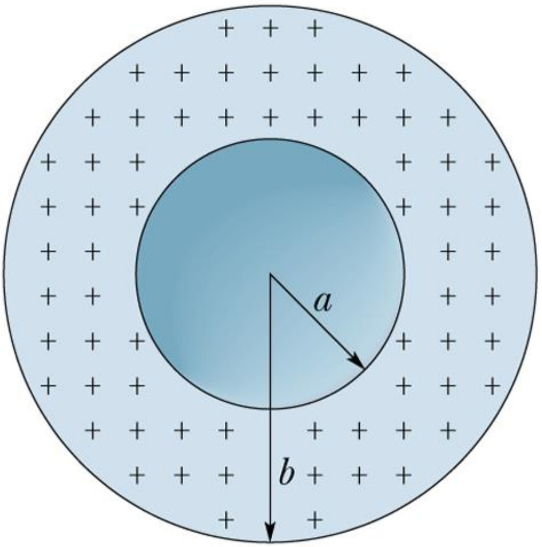
La carica interna ad una superficie di raggio r: $q(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - a^3\right)\rho$



All'interno del guscio:

$$E = k\frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)$$

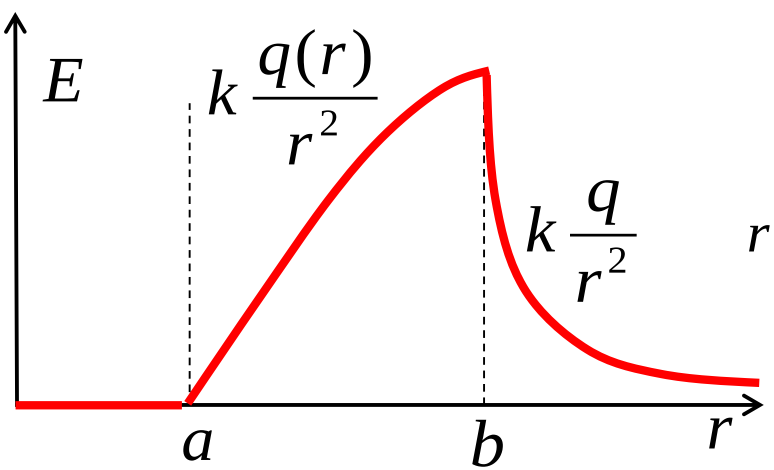
Esercizio 23.30



Un guscio sferico uniformemente carico ha densità di carica ρ=1.84 nC/m³, raggio interno *a*=10 cm ed esterno *b*=2*a*. Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti: *r*=0; *r*=*a*/2; *r*=*a*; *r*=1.5*a*; *r*=*b*; *r*=3*b*.

Nella cavità: $r=0; \quad r=a/2; \quad r=a: E=0$

Nel guscio $$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)$$



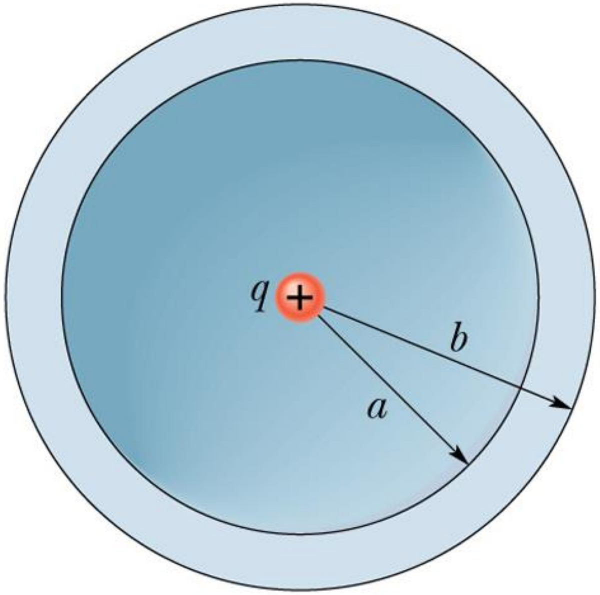
$$r=1.5a \quad E=\frac{1.84nC}{3\times 8.85\,pFm^2}(10.5cm)=7.3\frac{V}{m}$$

$$r=b=2a \quad E=\frac{1.84nC}{3\times 8.85\,pFm^2}(17.5cm)=12.1\frac{V}{m}$$

Oltre il guscio: $$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{b^3-a^3}{r^2}\right)$$

$$r=6a \quad E=\frac{1.84nC}{3\times 8.85\,pFm^2}(1.94cm)=1.35\frac{V}{m}$$

Esercizio 23.28



Un guscio sferico isolante di raggio interno *a*=2 cm ed esterno b=2.4cm ha densità di carica volumica ρ=A/r, ove A è una costante ed r la distanza dal centro del guscio; nel centro è presente una carica puntiforme q=45 fC; Calcolare il valore di A per cui all'interno del guscio (a < *r* < *b*) il campo è costante, ovvero non dipende da *r*

Il campo generato da q è: $$E = k\frac{q}{r^2}$$

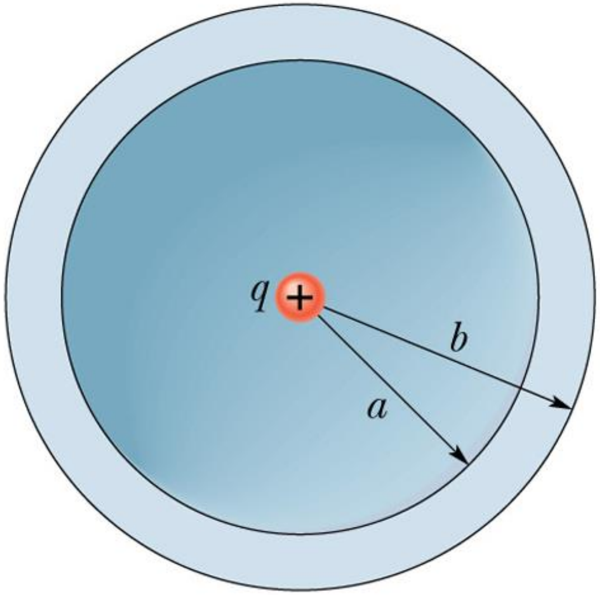
Il campo del guscio: $$E = k\frac{q(r)}{r^2}$$

La carica del guscio è: $$q(r) = \int_a^r \rho(r')4\pi r'^2\,dr' = 4\pi A\int_a^r r'\,dr' = 2\pi A\left(r^2 - a^2\right)$$

Il campo totale all'interno del guscio: $$E = k\frac{q}{r^2} + 2\pi kA\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = 2\pi kA + \frac{k}{r^2}\left(q - 2\pi Aa^2\right)$$

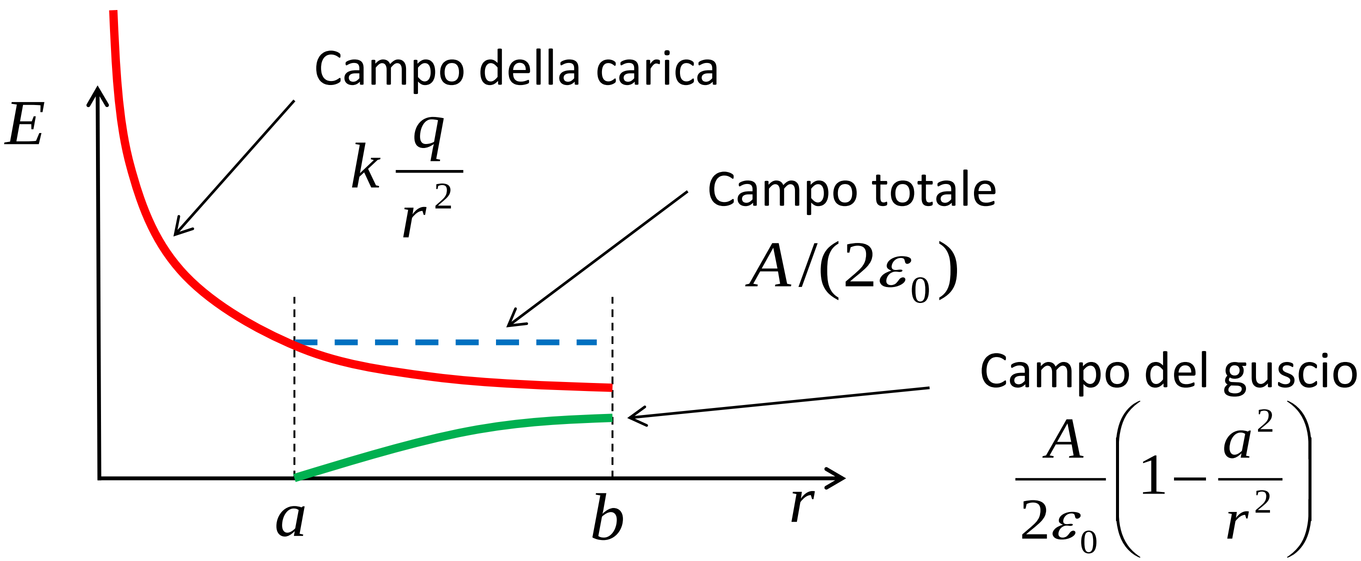
Affinché E sia costante deve annullarsi il 2° termine, ovvero: $$q = 2\pi Aa^2 \Rightarrow A = \frac{q}{2\pi a^2} = 0.018\frac{nC}{m^2}$$

Esercizio 23.28



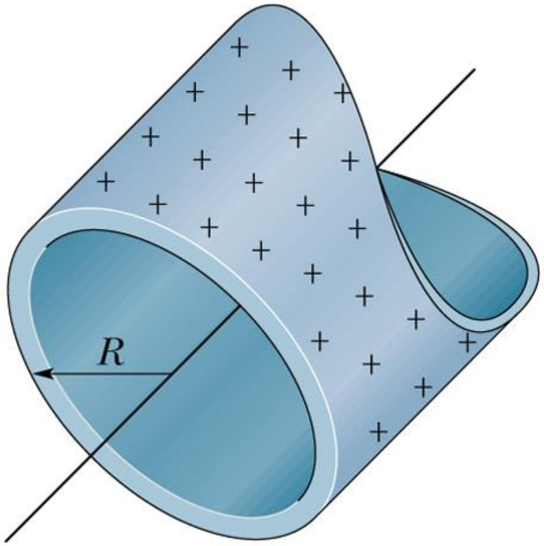
Un guscio sferico isolante di raggio interno a=2 cm ed esterno b=2.4cm ha densità di carica volumica ρ=A/r, ove A è una costante ed r la distanza dal centro del guscio; nel centro è presente una carica puntiforme q=45 fC; Calcolare il valore di A per cui all'interno del guscio (a < r < b) il campo è costante, ovvero non dipende da r

$$E = k\frac{q}{r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$



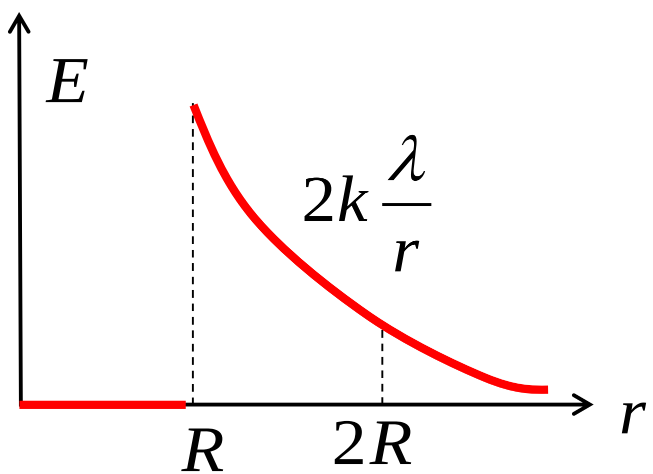
$$2\pi A = \frac{q}{a^2}$$

Esercizio 23.12



Consideriamo un lungo tubo metallico di raggio R = 3 cm, parete sottile trascurabile, e densità di carica lineare λ=20 nC/m;

a) calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti: $r = R/2$; $r=2R$
b) tracciare in un grafico $E(r)$ tra $r=0$ ed $r=2R$
c) calcolare la d.d.p. tra i punti $r_1=2R$ ed $r_2=4R$
d) calcolare il lavoro necessario a spostare una carica puntuale q_0 = 1 μC da r_1 ad r_2



✓ Nella cavità il campo è nullo

✓ All'esterno del cilindro il campo è quello di un filo carico posto lungo l'asse del tubo:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

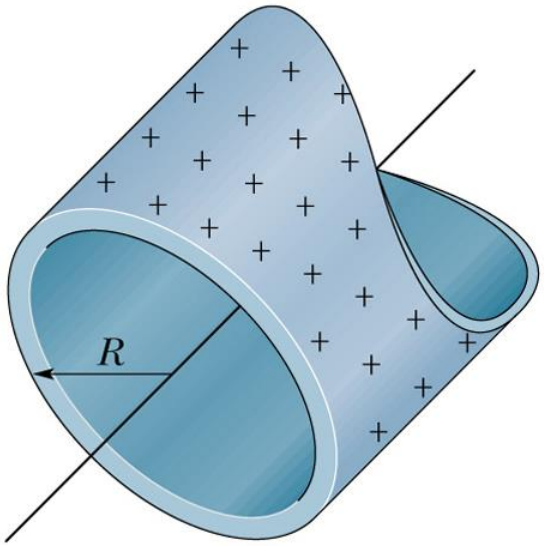
$$a)\, r = 2R \qquad E = 18\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{20\,nC}{6\times10^{-2}\,m^2} = 6\times10^3\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 23.12

Calcoliamo la caduta di potenziale tra $r_1=2R$ ed $r_2=4R$

$$V(r_1)-V(r_2)=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=2k\lambda\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr=2k\lambda\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=2k\lambda\ln(2)$$

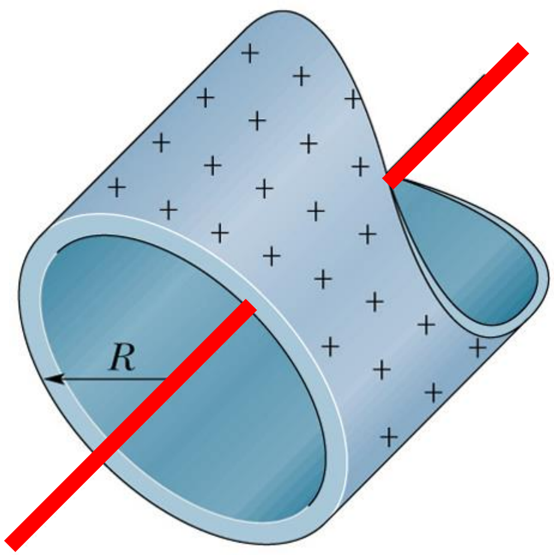
$$V(r_1)-V(r_2)=18\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{20\,nC}{m}\times0.69=249V$$



$$L=q_0\left[V(r_1)-V(r_2)\right]=1\mu C\times249V=249\mu J$$

il potenziale diminuisce allontanandosi dal tubo, per cui il lavoro speso per allontanare la carica positiva q_0 è positivo; dunque è lavoro compiuto dal campo elettrico

Esercizio 23.17



Un lungo filo carico (rosso) con densità lineare λ_F = -3.6 nC/m, è racchiuso da un tubo cavo di spessore trascurabile, coassiale col filo, di raggio R=1.5 cm, con densità uniforme bidimensionale σ_T; si calcoli il valore di σ_T che rende nullo il campo totale al di fuori del cilindro

Il campo del filo è $E_F = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\lambda_F}{r}\right)$

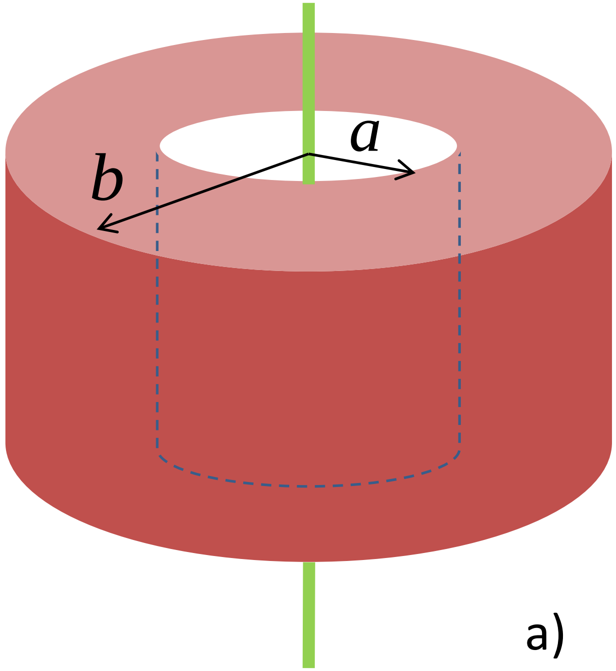
Il campo del cilindro, per $r > R$ è $E_T = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\lambda_T}{r}\right)$

Per il cilindro, la relazione tra densità lineare e di superficie si trova dalla conservazione della carica: $\lambda_T L = 2\pi RL\sigma_T$

Affinché i due campi si compensino deve essere:

$$\lambda_T = 2\pi R\sigma_T = -\lambda_F \Rightarrow \sigma_T = -\frac{\lambda_F}{2\pi R} = \frac{3.6nC}{2\pi \times 1.5 \times 10^{-2} m^2} = 38\frac{nC}{m^2}$$

Problema 2



In figura è mostrata la sezione di un guscio cilindrico conduttore di lunghezza L=2 m, raggio interno *a*=4 cm ed esterno *b*=8 cm, su cui è presente una carica Q_c = 3 μC; al centro del guscio scorre un filo carico coassiale col guscio cilindrico, con densità di carica lineare λ_f = 1 μC/m; supponendo di poter trascurare gli effetti di bordo:

a) Determinare la densità di carica lineare presente sulla superficie interna λ_{int} e sulla superficie esterna λ_{ext} del cilindro
b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti r=3 cm, r=6 cm, r=10 cm

a) λ_{int} = λ_{ext} =

Problema 2

$$\lambda_{\text{int}} = -1\frac{\mu C}{m} \quad \lambda_{ext} = 2.5\frac{\mu C}{m} \qquad \lambda_g = \lambda_{\text{int}} + \lambda_{ext} = 1.5\frac{\mu C}{m}$$

$$\lambda_f + \lambda_g = \lambda_{ext} = 2.5\frac{\mu C}{m}$$

$$r < a \qquad E(r) = 2k\frac{\lambda_f}{r}$$

$$a < r < b \quad E(r) = 0$$

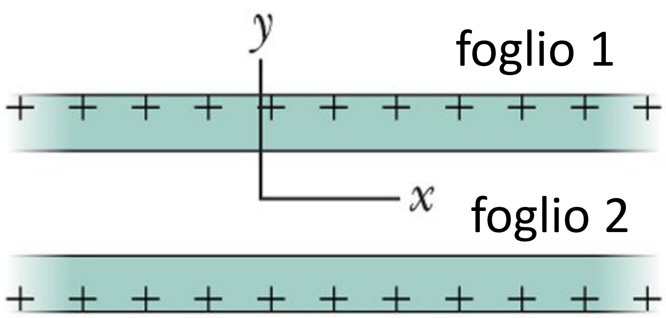
$$r > b \qquad E(r) = 2k\frac{\lambda_f + \lambda_g}{r}$$

$$r = 3cm \quad E = 18\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{1\mu C}{3\times10^{-2}m^2} = 6\times10^5 (N/C)$$

$$r = 6cm \quad E = 0$$

$$r = 10cm \quad E = 18\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{2.5\mu C}{10\times10^{-2}m^2} = 4.5\times10^5 (N/C)$$

Esercizio 23.20



Due fogli grandi isolanti paralleli hanno identica densità di carica σ=1.77×10^{-22} C/m^2; trascurando effetti di bordo, calcolare il campo in modulo, direzione e verso, nelle tre zone: sopra, sotto, ed in mezzo ai fogli

Il campo è perpendicolare ai piani, dunque E_x=0

Sopra i fogli:

$$\vec{E}_{1,y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{2,y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{tot,y} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y} = \left(0.2\times10^{-10}\frac{V}{m}\right)\hat{y}$$

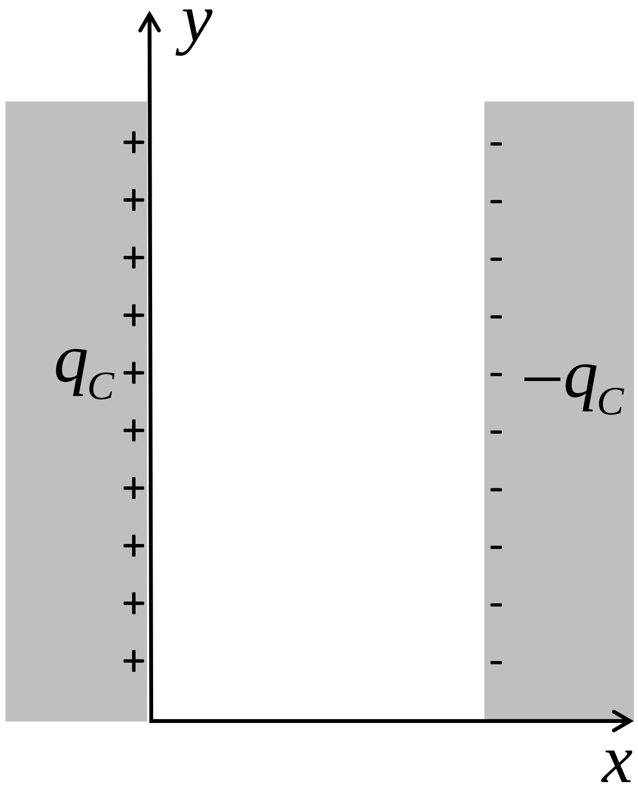
Sotto i fogli:

$$\vec{E}_{1,y} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{2,y} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{tot,y} = -\left(0.2\times10^{-10}\frac{V}{m}\right)\hat{y}$$

In mezzo ai fogli:

$$\vec{E}_{1,y} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{2,y} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{y}; \quad \vec{E}_{tot,y} = 0$$

Esercizio



$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}$$

$$= 8.85\,\frac{pF}{m}$$

Consideriamo un condensatore vuoto carico, con carica q_C = 5 pC; sia A = 1 cm^2 l'area dei piatti, e d = 1 mm la distanza tra i piatti; sia x=0 la posizione del piatto positivo; trascurando gli effetti di bordo,

a) calcolare il campo elettrico nei punti x_1 = 0.4 mm, x_2 = 0.8 mm
b) calcolare l'energia immagazzinata nel condensatore
c) calcolare il lavoro necessario a spostare una carica puntuale q_0 = 1 pC da x_1 ad x_2

Mantenendo il condensatore carico ed isolato dal circuito, si riempie lo spazio tra i piatti di acqua distillata (ε_r = 80);

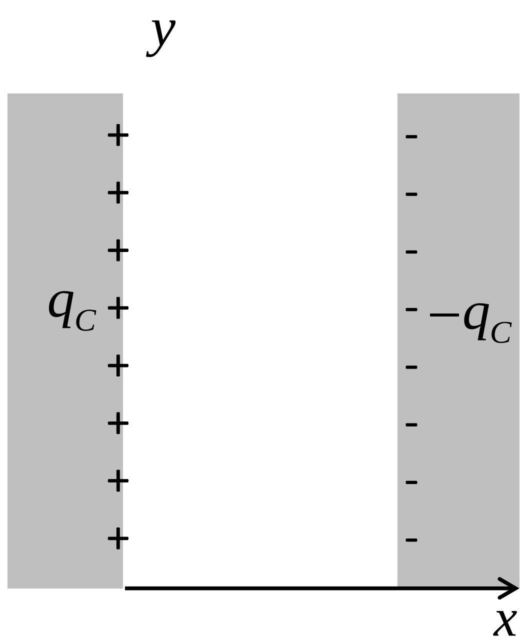
d) Ricalcolare le quantità ai punti a), b), c) con dielettrico inserito

Esercizio

Condensatore vuoto:

$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q_C}{\varepsilon_0 A} = \frac{5\,pC}{8.85\times10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}\times10^{-4}\,m^2} = 0.56\times10^{4}\,\frac{N}{C}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q_C^2}{C} = \frac{q_C^2}{2\varepsilon_0 (A/d)} = \frac{12.5\times10^{-24}\,C^2}{8.85\times10^{-12}\,\dfrac{C^2}{N\,m^2}\times10^{-1}\,m} = 1.41\times10^{-11}\,J$$



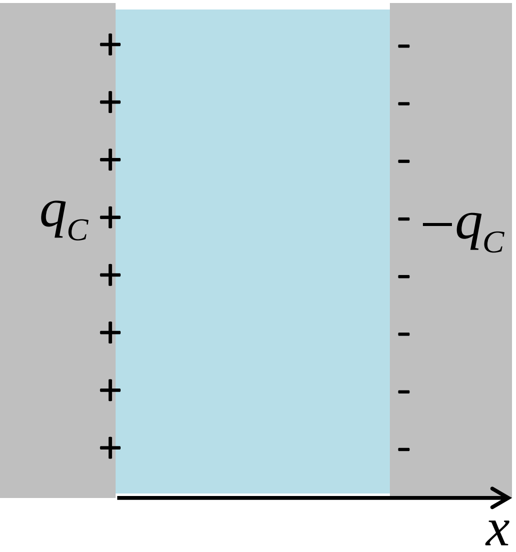
$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E\,dx = E(x_2 - x_1) =$$

$$0.56\times10^{4}\,\frac{N}{C}\times0.4\times10^{-3}\,m = 2.24V$$

$$L = q_0\left[V(x_1) - V(x_2)\right] = 1pC\times2.24V = 2.24\,pJ$$

Esercizio

Condensatore pieno: essendo il condensatore isolato, la carica ai piatti resta la stessa; dunque campo elettrico ed energia del condensatore si riducono



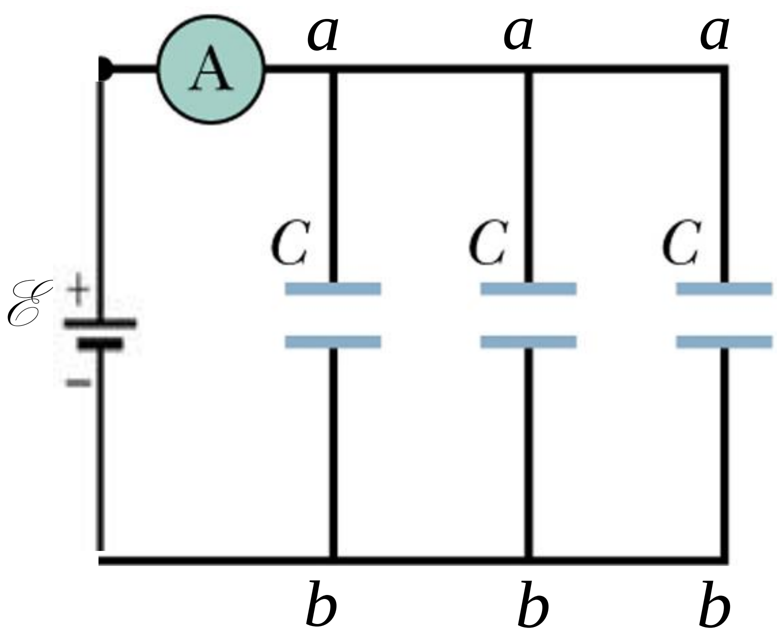
$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{1}{80} 0.56 \times 10^4 \frac{N}{C} = 70 \frac{N}{C}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{q_C^2}{\varepsilon_r C} = \frac{1}{80} 1.41 \times 10^{-11} J = 1.76 \times 10^{-13} J$$

$$V(x_1) - V(x_2) = E(x_2 - x_1) = 70 \frac{N}{C} \times 0.4 \times 10^{-3} m = 28\, mV$$

$$L = q_0 \left[V(x_1) - V(x_2) \right] = 1 pC \times 28\, mV = 28 \times 10^{-15} J$$

Esercizio 25.10



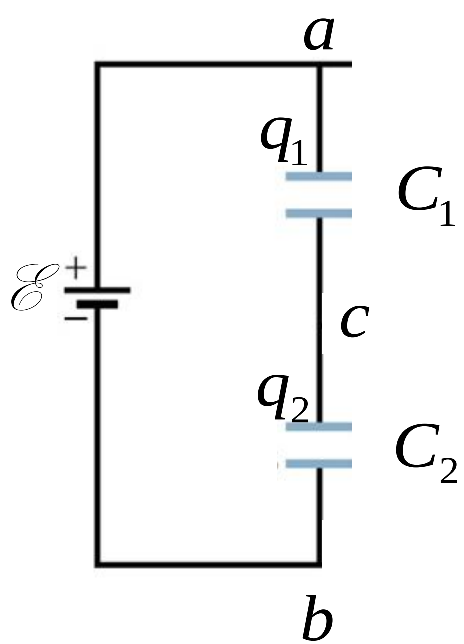
3 condensatori uguali hanno capacità C=25 μF; si chiude il circuito su una una batteria di f.e.m. ℰ = 4200 V; all'equilibrio i condensatori saranno carichi; calcolare quanta carica totale ha attraversato l'amperometro

La carica totale è la somma delle cariche depositate sui piatti dei 3 condensatori, ovvero la carica depositata sui piatti del condensatore di capacità equivalente data dalla somma delle singole capacità; dunque:

$$C_{eq} = 75\mu F;$$

$$q = C_{eq}\mathscr{E} = 75\mu F \times 4200V = 0.315\,C$$

Esercizio



Una d.d.p. $\mathscr{E}$ = 200 V viene applicata su una coppia di condensatori C_1=6.0 μF e C_2=4.0 μF in serie.

a) Calcolare la capacita equivalente

b) Calcolare carica e d.d.p. su ciascun condensatore

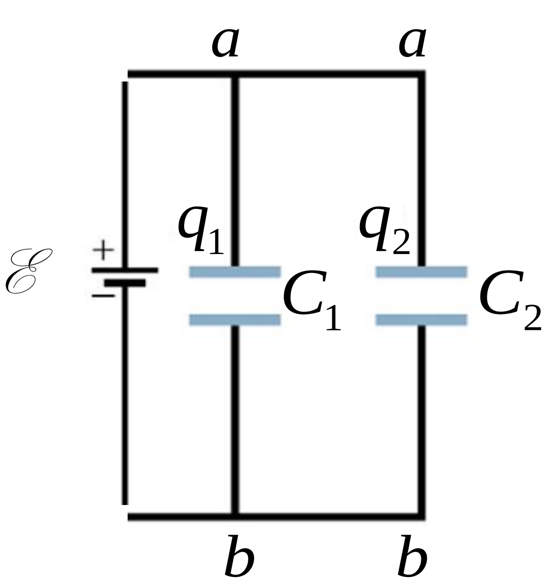
c) Si ripeta l'esercizio con i condensatori in parallelo.

SERIE:

$$C_{eq} = C_1 C_2 / \left(C_1 + C_2\right) = 2.4\mu F$$

$$q_1 = q_2 = C_{eq}\mathscr{E} = 2.4\mu F \times 200V = 4.8\times 10^{-4} C$$

$$V_{ac} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{4.8\times 10^{-4} C}{6\mu F} = 80V; \quad V_{cb} = \frac{q_2}{C_2} = 120V$$



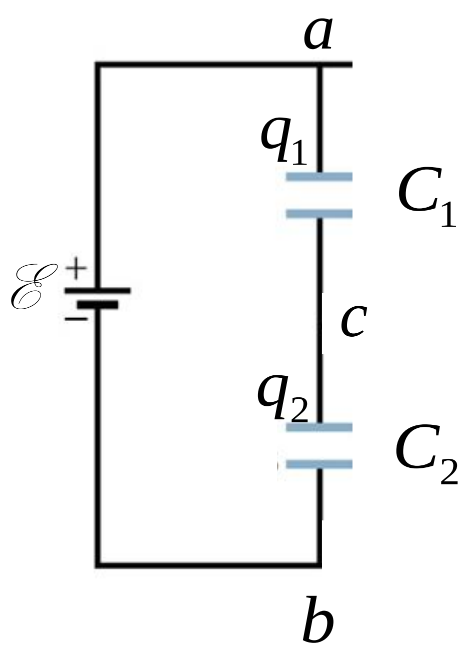
PARALLELO:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 10\mu F; \quad V_{ab} = V$$

$$q_1 = C_1\mathscr{E} = 6\mu F \times 200V = 12\times 10^{-4} C$$

$$q_2 = C_2\mathscr{E} = 4\mu F \times 200V = 8\times 10^{-4} C$$

Esercizio



Una batteria con f.e.m. $\mathscr{E}$ = 20 V viene connessa ad una coppia di condensatori con C_1=3 pF e C_2=7 pF in serie; i piatti di C_1 hanno superficie A=30 mm^2; all'equilibrio, calcolare:

1) Le cariche q_1 e q_2 sui condensatori
2) La distanza d tra le armature di C_1
3) L'energia immagazzinata in C_2

$$C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 2.1 pF$$

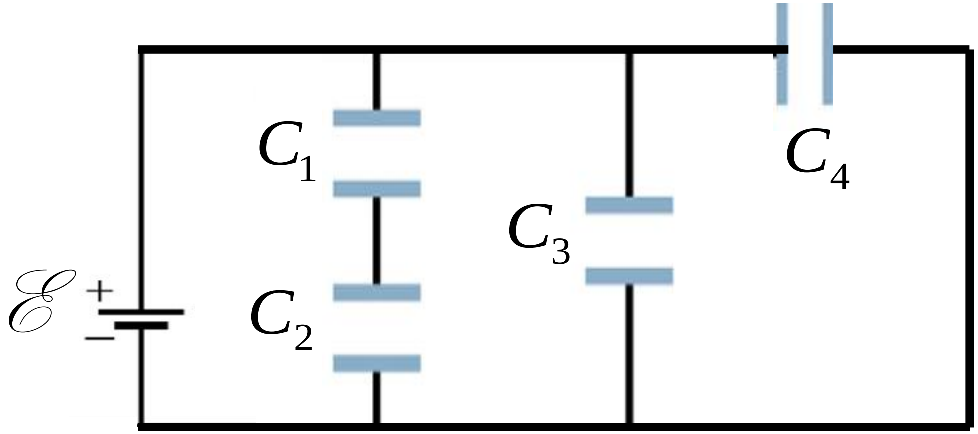
$$1)\ q_1 = q_2 = q_{eq} = C_{eq}\mathscr{E} = 2.1 pF \times 20V = 4.2\times 10^{-11} C$$

$$2)\ d = \varepsilon_0 \frac{A}{C_1} = \frac{8.85\, pF}{m} \frac{30\times 10^{-6} m^2}{3\, pF} = 0.088\, mm$$

$$3)\ \Delta U_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{\left(4.2\times 10^{-11} C\right)^2}{7\, pF} = 1.26\times 10^{-22}\frac{C^2}{pF} = 1.26\times 10^{-10}\, J$$

Problema 3

Dato il circuito in figura, con 4 condensatori con capacità $C_1 = 5\ \mu F$, $C_2 = 8\ \mu F$, $C_3 = 4\ \mu F$, $C_4 = 10\ \mu F$, ed una batteria con f.e.m. = 12 V



a) Calcolare le cariche q_1, q_2 , q_3 , q_4 presenti sui condensatori
b) Calcolare le d.d.p. ΔV_1, ΔV_2, ΔV_3 , ΔV_4 presenti ai piatti dei condensatori
c) Calcolare l'energia elettrostatica U_1, U_2, U_3 , U_4 immagazzinata nei 3 condensatori
d) Ricalcolare le cariche q_1, q_2 , q_3 , q_4 dopo che C_2 è stato interamente riempito di una sostanza di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2} = 4$, e C_4 riempito di una sostanza con $\varepsilon_{r4} = 6$.
e) Ricalcolare i potenziali ΔV_1, ΔV_2, ΔV_3 , ΔV_4 dopo l'inserimento dei due dielettrici
f) Ricalcolare l'energia elettrostatica U_1, U_2, U_3 , U_4 dopo l'inserimento dei due dielettrici

Problema 3

Dato il circuito in figura, con 4 condensatori con capacità $C_1 = 5\ \mu F$, $C_2 = 8\ \mu F$, $C_3 = 4\ \mu F$, $C_4 = 10\ \mu F$, ed una batteria con f.e.m. = 12 V

$$C_{12} = \frac{40}{13}\,\mu F = 3.077\,\mu F; \qquad C_{1234} = 17.077\,\mu F$$

$$q_{12} = q_1 = q_2 = C_{12}\,\mathscr{E} = 36.923\,\mu C \qquad q_3 = C_3\,\mathscr{E} = 48\,\mu C \qquad q_4 = C_4\,\mathscr{E} = 120\,\mu C$$

$$q_{1234} = C_{1234}\,\mathscr{E} = 204.923\,\mu C$$

$$\Delta V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{36.923\mu C}{5\mu F} = 7.385V \qquad \Delta V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{36.923\mu C}{8\mu F} = 4.615V$$

$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = 12V$$

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1\Delta V_1^{\,2} = 2.5\mu F \times (7.385V)^2 = 136.345\,\mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2}C_2\Delta V_2^{\,2} = 4\,\mu F \times (4.615V)^2 = 85.19\,\mu J$$

$$U_3 = \frac{1}{2}C_3\Delta V_3^{\,2} = 2\,\mu F \times (12V)^2 = 288\,\mu J \qquad U_4 = \frac{1}{2}C_4\Delta V_4^{\,2} = 5\,\mu F \times (12V)^2 = 720\,\mu J$$

Problema 3

C_1 = 5 μF, C_2 = 8 μF, C_3 = 4 μF, C_4 = 10 μF, f.e.m. = 12 V ε_{r2} = 4, ε_{r4} = 6.

$$\tilde{C}_{12} = 4.324\,\mu F \quad \tilde{C}_{1234} = 68.324\,\mu F$$

$$q_{12} = q_1 = q_2 = \tilde{C}_{12}\,\mathscr{E} = 51.89\,\mu C \quad q_3 = C_3\,\mathscr{E} = 48\,\mu C \quad q_4 = \tilde{C}_4\,\mathscr{E} = 720\,\mu C$$

$$q_{1234} = \tilde{C}_{1234}\,\mathscr{E} = 819.89\,\mu C$$

$$\Delta V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{51.89\mu C}{5\,\mu F} = 10.378V \qquad \Delta V_2 = \frac{q_2}{\tilde{C}_2} = \frac{51.89\mu C}{32\mu F} = 1.622V$$

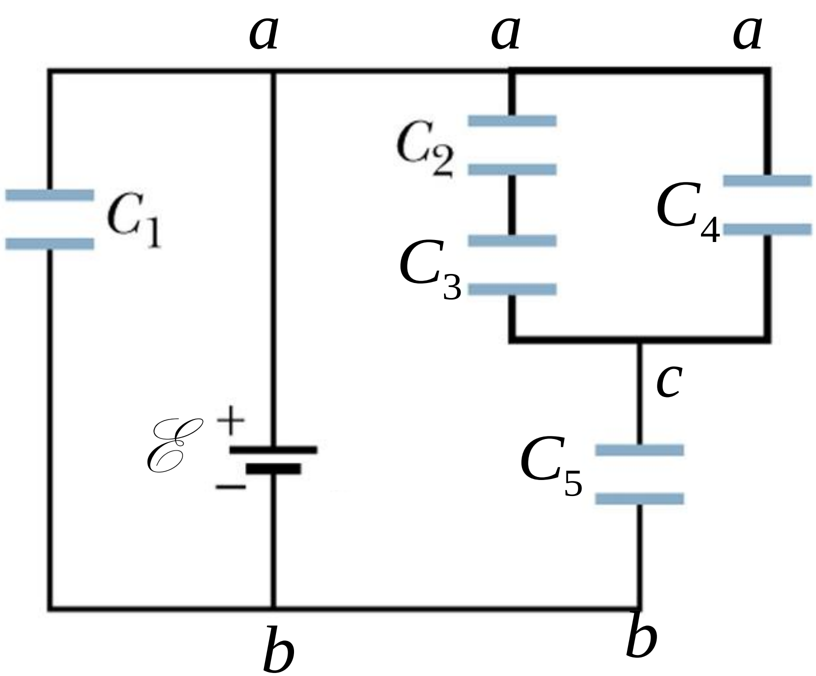
$$\Delta V_3 = \Delta V_4 = 12V$$

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1\Delta V_1^{\;2} = 2.5\mu F \times (10.378V)^2 = 269.257\,\mu J$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\tilde{C}_2\Delta V_2^{\;2} = 16\,\mu F \times (1.622V)^2 = 42.094\,\mu J$$

$$U_3 = \frac{1}{2}C_3\Delta V_3^{\;2} = 2\,\mu F \times (12V)^2 = 288\,\mu J \quad U_4 = \frac{1}{2}\tilde{C}_4\Delta V_4^{\;2} = 30\,\mu F \times (12V)^2 = 4320\,\mu J$$

Esercizio 25.12



Dato il circuito in figura, con cinque condensatori uguali con capacità 10 μF, ed una batteria con $\mathscr{E}$ = 10 V, calcolare le cariche e le d.d.p. ai piatti di ciascun condensatore

$$C_{23} = 5\mu F\,;\, C_{234} = 15\mu F\,;\, C_{2345} = 6\mu F$$

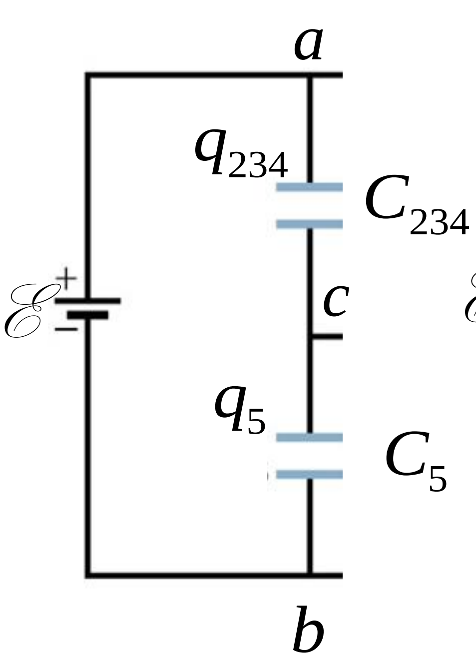
$$q_1 = C_1\mathscr{E} = 100\mu C$$

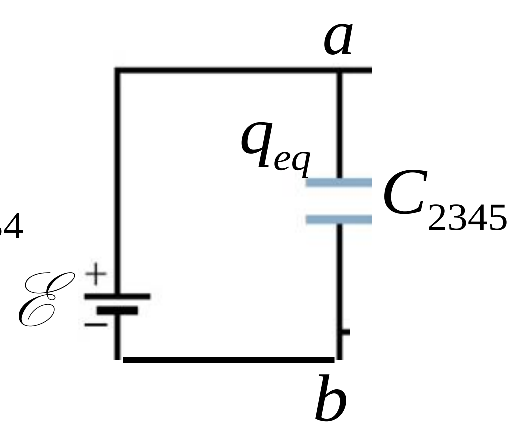
$$q_{eq} = q_{234} = q_5 = C_{2345}\mathscr{E} = 60\mu C$$

$$\Delta V_{ac} = \Delta V_4 = q_{234} / C_{234} = 4V$$

$$q_4 = C_4 \Delta V_{ac} = 40\mu C$$

$$q_2 = q_3 = C_{23}\Delta V_{ac} = 20\mu C$$

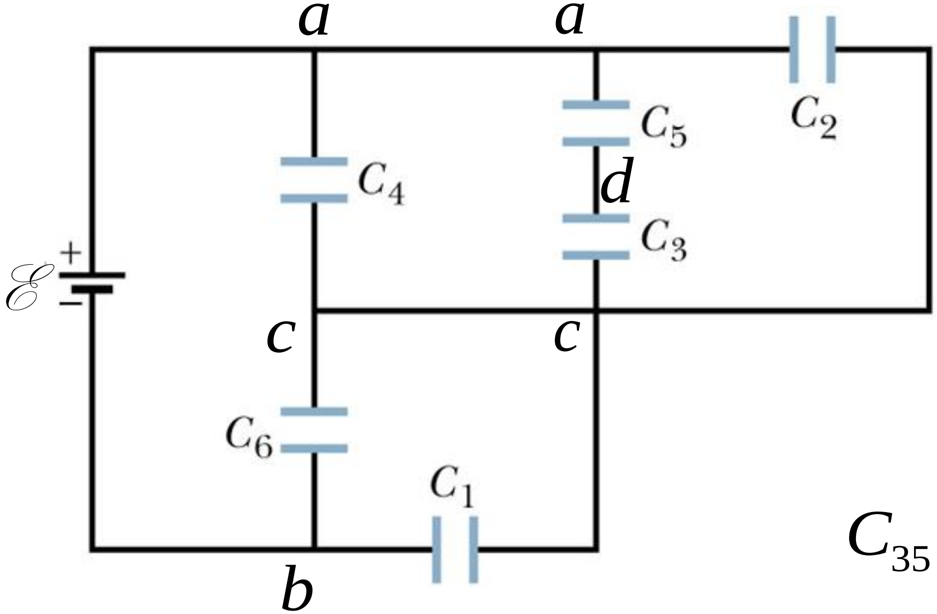




$$\Delta V_{ab} = \Delta V_1 = \mathscr{E} = 10V \qquad \Delta V_2 = q_2 / C_2 = 2V$$

$$\Delta V_{cb} = \Delta V_5 = q_5 / C_5 = 6V \qquad \Delta V_3 = q_3 / C_3 = 2V$$

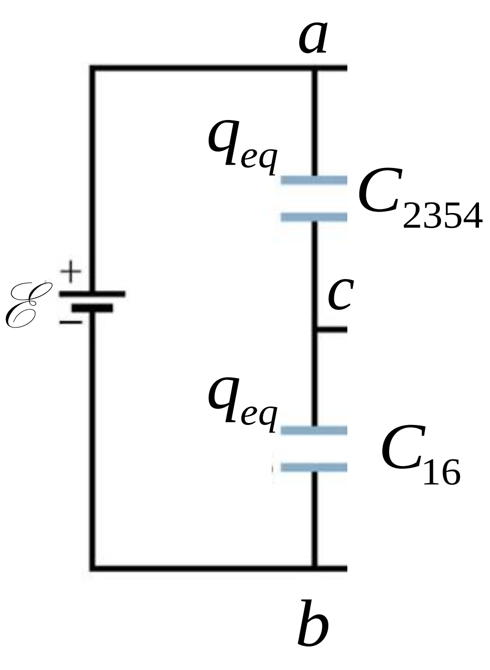
Esercizio 25.14



$$\mathscr{E} = 20V; \quad C_1 = C_6 = 3\mu F$$

$$C_2 = C_4 = 2\mu F; \quad C_3 = C_5 = 4\mu F$$

Dato il circuito in figura, calcolare cariche e d.d.p. ai piatti dei 6 condensatori



$$C_{35} = 2\mu F; \quad C_{2354} = 6\mu F; \quad C_{16} = 6\mu F$$

$$C_{eq} = C_{2354} C_{16} / \left(C_{2354} + C_{16}\right) = 3\mu F$$

$$q_{eq} = C_{eq}\mathscr{E} = 60\,\mu C$$

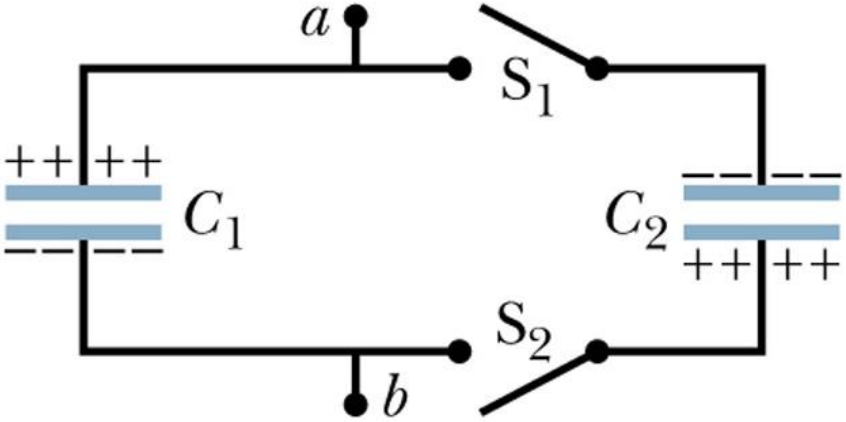
$$\Delta V_{cb} = q_{eq} / C_{16} = 10V \Rightarrow q_1 = q_6 = C_1 V_{cb} = 30\mu C$$

$$\Delta V_{ac} = q_{eq} / C_{2354} = 10V \Rightarrow q_2 = q_4 = C_2 V_{ac} = 20\mu C$$

$$q_3 = q_5 = q_{35} = C_{35} V_{ac} = 20\mu C$$

$$\Delta V_{ad} = \Delta V_{dc} = q_5 / C_5 = q_3 / C_3 = 5V$$

Esercizio 25.10



2 condensatori con capacità C_1=1 μF, C_2=3 μF vengono separatamente caricati con una batteria $\mathscr{E}$ = 100 V; una volta carichi, vengono connessi come in figura, connettendo i piatti di segno opposto: la corrente fluirà fino al raggiungimento dell'equilibrio; calcolare le cariche q_1, q_2 e la differenza di potenziale tra *a* e *b* all'equilibrio

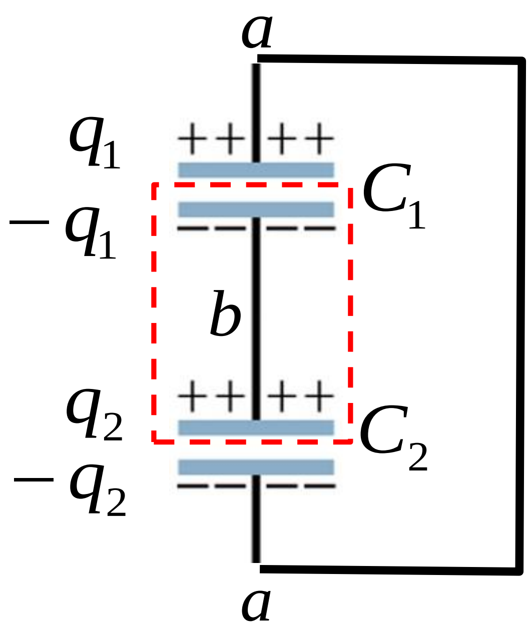
Prima di essere connessi, i 2 condensatori hanno carica:

$$q_{01} = C_1\mathscr{E} = 100\,\mu C; \quad q_{02} = C_2\mathscr{E} = 300\,\mu C$$

A circuito chiuso, in equilibrio, applichiamo la legge di Kirchoff:

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_a) = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = 0 \qquad \Rightarrow q_1 = -\frac{C_1}{C_2} q_2$$

Esercizio 25.10



la carica totale sui piatti dei condensatori deve conservarsi: consideriamo la carica netta presente sul piatto negativo di C_1 e sul piatto positivo di C_2

prima della chiusura del circuito:

$$q_{02} - q_{01} = 200\mu C$$

dopo la chiusura del circuito questa carica (racchiusa dall'area rossa) deve essere la stessa, per cui:

$$q_2 - q_1 = 200\mu C \Rightarrow q_2 = q_1 + 200\mu C$$

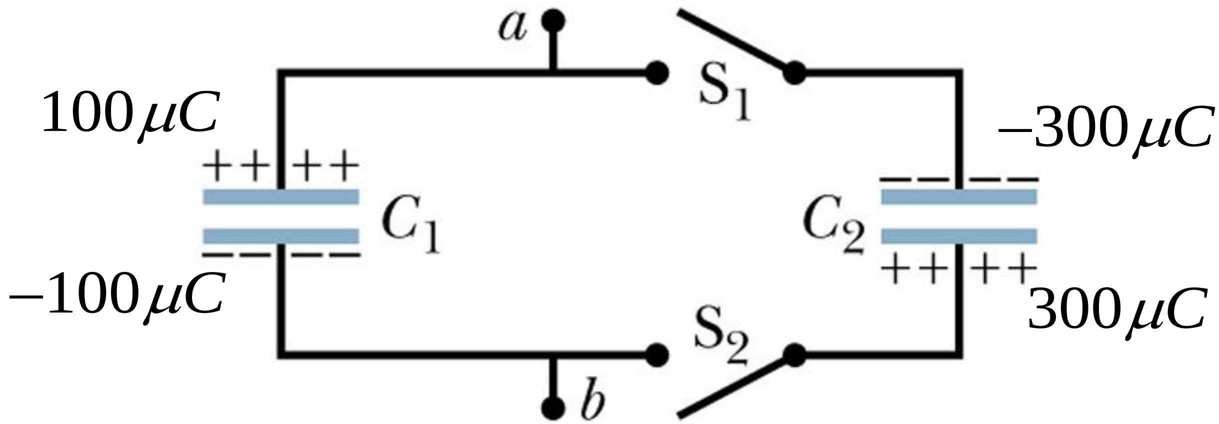
Sostituendo l'espressione precedente:

$$q_2 = -\frac{C_1}{C_2} q_2 + 200\mu C \Rightarrow q_2 = 150\mu C \qquad q_1 = -\frac{1}{3} q_2 = -50\mu C$$

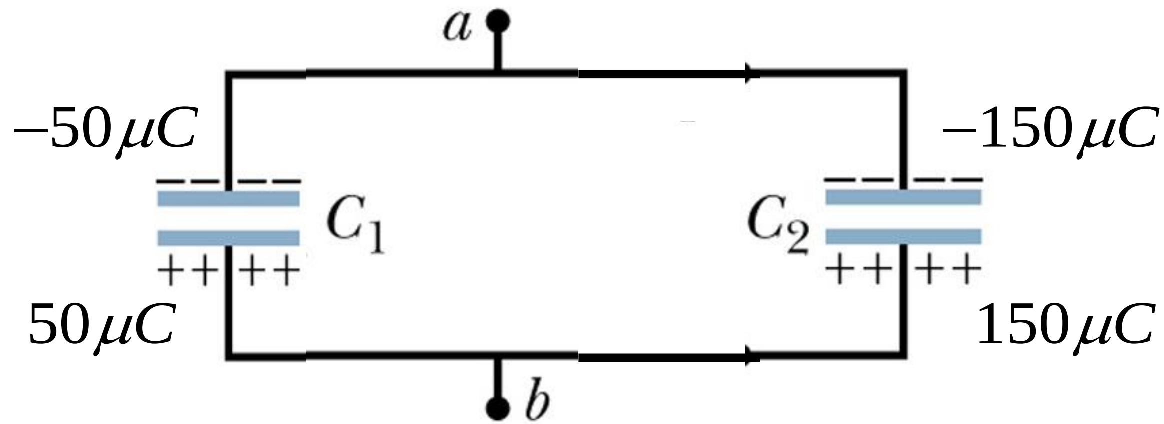
$$V_b - V_a = \frac{q_2}{C_2} = \frac{150\mu C}{3\mu F} = 50V = -\frac{q_1}{C_1}$$

Esercizio 25.10

Condensatori isolati:

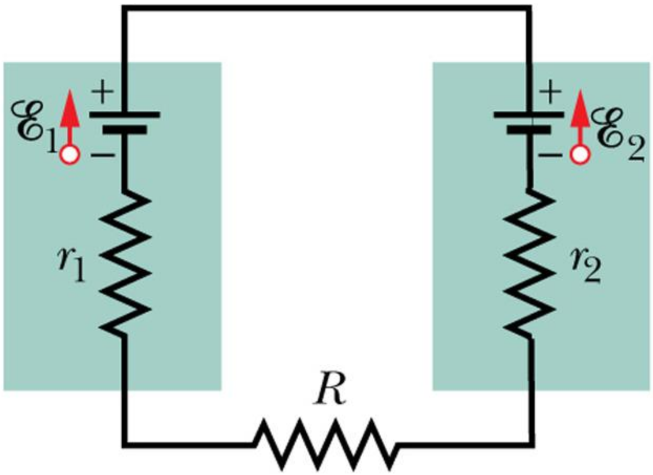


Condensatori congiunti:



Si noti che poiché la capacità di C_2 è il triplo di quella di C_1, a circuito chiuso C_2 deve avere il triplo della carica di C_1; inoltre la carica totale sui piatti connessi dal filo deve conservarsi; ne segue che a circuito chiuso la polarità di C_1 deve invertirsi

Esercizio 27.6



Nel circuito in figura scorre una corrente i=1 mA; inoltre:

$$\mathscr{E}_1 = 2V \quad \mathscr{E}_2 = 3V \quad r_1 = r_2 = 3\Omega$$

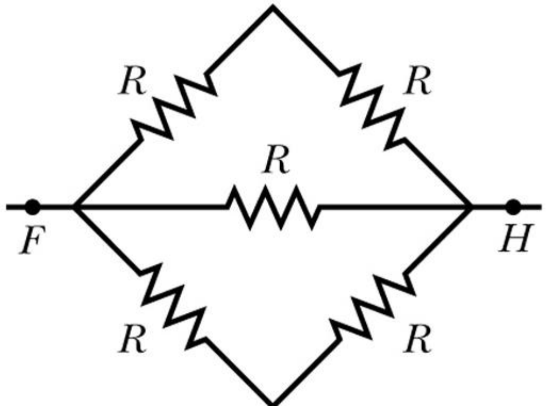
Calcolare il valore di R e la potenza termica dissipata su R

Essendo il generatore 2 più potente, è evidente che la corrente deve circolare in senso antiorario; dalla legge di Kirchhoff:

$$\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = i\left(r_1 + r_2 + R\right) \qquad \Rightarrow R = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{i} - \left(r_1 + r_2\right) = 994\Omega$$

$$P = i^2 R = (1mA)^2 \times 994\Omega = 0.994\,mW$$

Esercizio 27.12

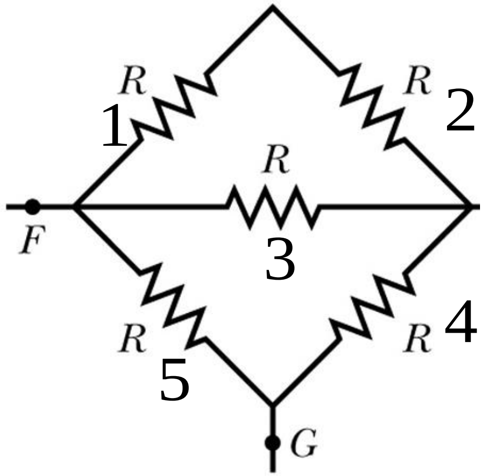


Nel circuito in figura tutte le resistenze valgono $R = 5\Omega$

1) Calcolare la resistenza equivalente tra i punti F ed H

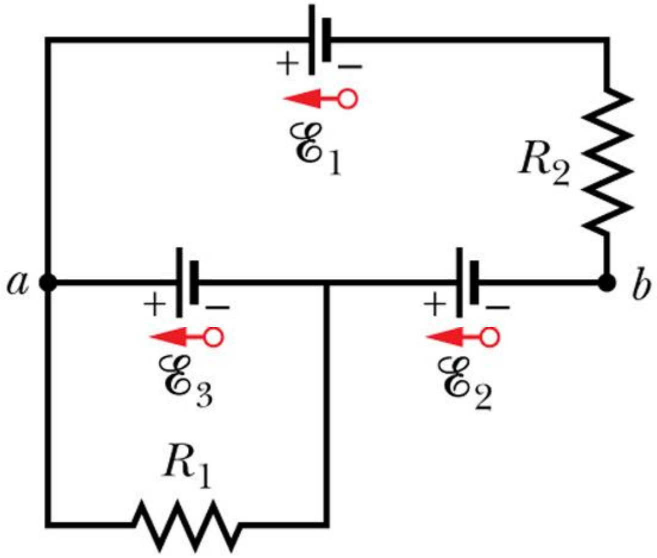
$$\frac{1}{R_{FH}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_{FH} = \frac{R}{2} = 2.5\Omega$$

2) Calcolare la resistenza equivalente tra i punti F e G



a) R_1 ed R_2 in serie: $R_{12} = 2R$
b) R_{12} in parallelo con R_3: $R_{123} = (2/3)R$
c) R_{123} in serie con R_4: $R_{1234} = (5/3)R$
d) R_{1234} in parallelo con R_5:
$R_{eq} = R_{1234} \times R_5 / (R_{1234} + R_5) = (5/3) / (8/3)\ R = (5/8)\ R = 3.13\ \Omega$

Esercizio 27.13



Consideriamo il circuito in figura con 3 batterie; sia:

$$\mathscr{E}_1 = 4V \quad \mathscr{E}_2 = 2V \quad \mathscr{E}_3 = 7V$$

$$R_1 = 5\Omega \quad R_2 = 10\Omega$$

a) Calcolare la corrente i_1 che attraversa la resistenze R_1, la corrente i_2 che attraversa la resistenza R_2, la corrente i_3 che attraversa il ramo della batteria 3.

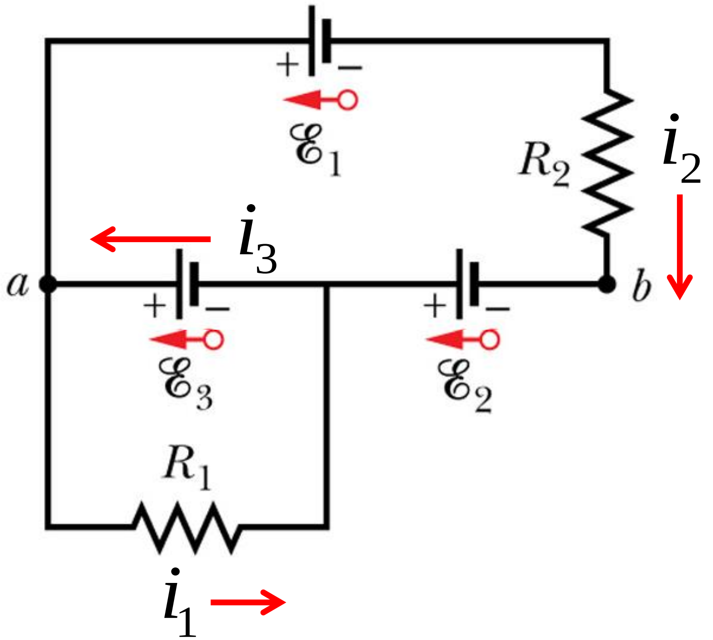
b) Calcolare la differenza di potenziale ΔV_1 ai capi di R_1, la differenza di potenziale ΔV_2 ai capi di R_2, la differenza di potenziale ΔV_{ab} tra i punti *a* e *b*

c) Indicare con frecce in figura il verso delle correnti positive i_1 i_2 i_3

d) Calcolare la potenza P_{B1} , P_{B2} , P_{B3} erogata dalle batterie 1, 2, 3

e) Calcolare la potenza P_{R1} , P_{R2} dissipata dalle resistenze R_1, R_2,

Esercizio 27.13



Ipotizziamo un verso di percorrenza per le correnti positive, come indicato in figura, e risolviamo le equazioni di Kirchoff per le due maglie chiuse

per la maglia superiore:

$$\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_1 = i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = \frac{5V}{10\Omega} = 0.5A$$

per la maglia inferiore:

$$\mathscr{E}_3 = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{7V}{5\Omega} = 1.4A$$

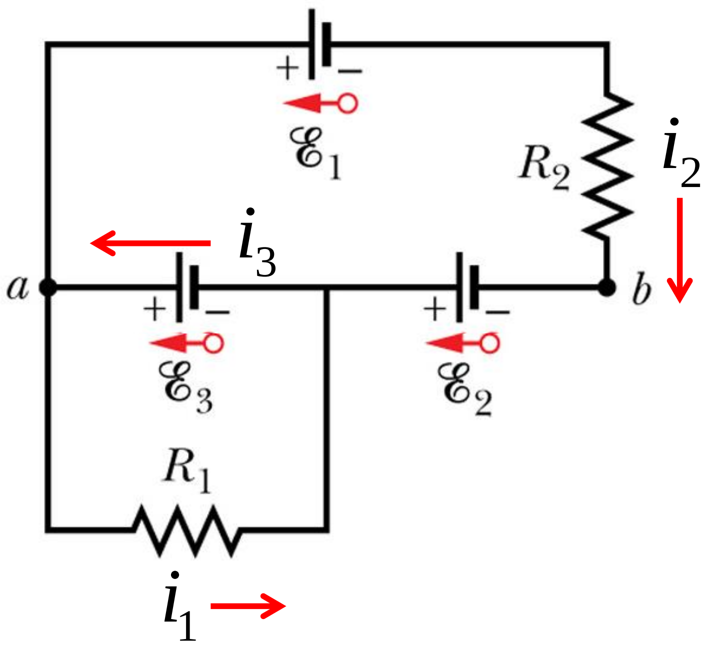
Equazione dei nodi in *a*:

$$i_3 = i_1 + i_2 = 1.9A$$

le correnti sono tutte positive, dunque i versi ipotizzati sono effettivamente quelli delle correnti positive; calcoliamo le d.d.p.: ΔV_1 non è altro che la d.d.p. ai poli della batteria 3, e Δv_{ab} la somma delle d.d.p. ai poli delle batterie 2 e 3:

$$\Delta V_1 = \mathscr{E}_3 = 7V; \qquad \Delta V_2 = i_2 R_2 = 5V; \qquad V_a - V_b = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = 9V$$

Esercizio 27.13



Potenza dissipata sulle resistenze:

$$P_{R1} = i_1^2 R_1 = 1.4^2 A^2 \times 5\Omega = 9.8W$$

$$P_{R2} = i_2^2 R_2 = 0.5^2 A^2 \times 10\Omega = 2.5W$$

Potenza erogata dalle batterie:

$$P_{B1} = i_2 \mathscr{E}_1 = 0.5A \times 4V = 2W$$

$$P_{B2} = i_2 \mathscr{E}_2 = 0.5A \times 2V = 1W$$

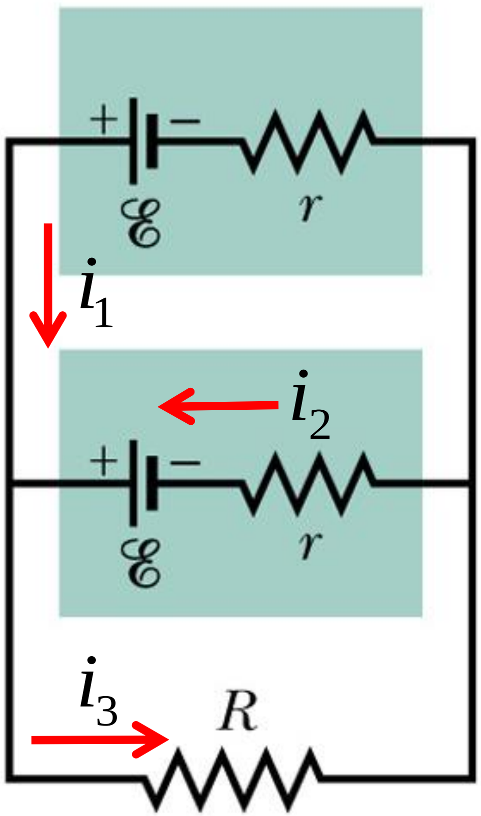
$$P_{B3} = i_3 \mathscr{E}_3 = 1.9A \times 7V = 13.3W$$

Notiamo che mentre la polarità delle batterie 2 e 3 è concorde col verso positivo delle correnti che attraversano i relativi rami, la polarità della batteria 1 è opposta al verso della corrente i_2 , dunque la potenza P_{B1} è ASSORBITA, non erogata; la conservazione dell'energia impone quindi che:

$$P_{B2} + P_{B3} = P_{R1} + P_{R2} + P_{B1}$$

Inserendo i valori calcolati si può verificare che questa equazione è soddisfatta

Esercizio 27.21



Consideriamo il circuito in figura, con due batterie identiche con valori: $\mathscr{E} = 12V \quad r = 0.3\Omega \quad R = 10\ \Omega$

a) Calcolare la correnti i_1 , i_2 , i_3 che attraversano i tre rami orizzontali del circuito

b) Calcolare la differenza di potenziale ΔV ai capi di *R*, e la differenza di potenziale ΔV_1 e ΔV_2 ai capi di *r* del ramo superiore ed inferiore

c) Indicare con frecce in figura il verso delle correnti i_1 i_2 i_3

Ipotizziamo che il verso delle correnti siano quelli indicati dalle linee rosse e applichiamo Kirchhoff alle maglie chiuse:

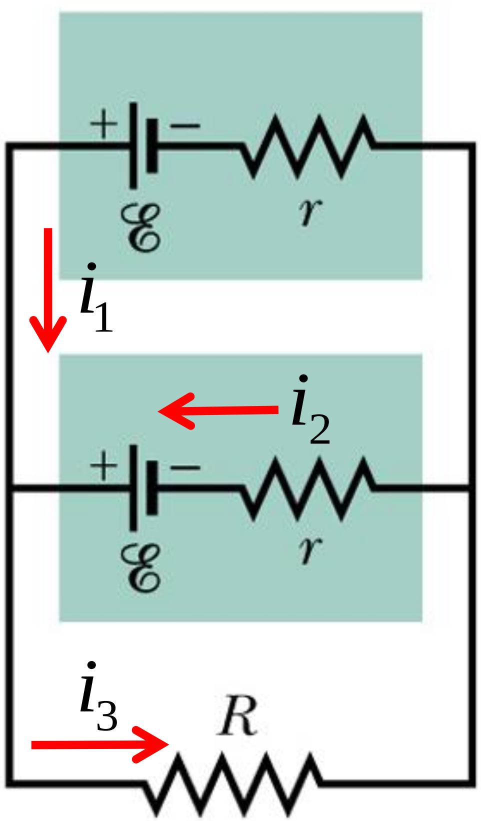
Maglia inferiore: $\mathscr{E} = i_2 r + i_3 R$

Giro largo: $\mathscr{E} = i_1 r + i_3 R$

Da cui segue che deve essere $i_1 = i_2$; inoltre dalla legge dei nodi:

$$i_1 + i_2 = i_3 \Rightarrow i_3 = 2i_1$$

Esercizio 27.21



Consideriamo il circuito in figura, con due batterie identiche con valori: $\mathscr{E} = 12V \quad r = 0.3\Omega \quad R = 10\ \Omega$

$$\mathscr{E} = i_1 r + i_3 R = i_1 (r + 2R)$$

$$\Rightarrow i_1 = i_2 = \frac{\mathscr{E}}{(r + 2R)} = \frac{12V}{20.3\Omega} = 0.59A$$

$$i_3 = 1.18A$$

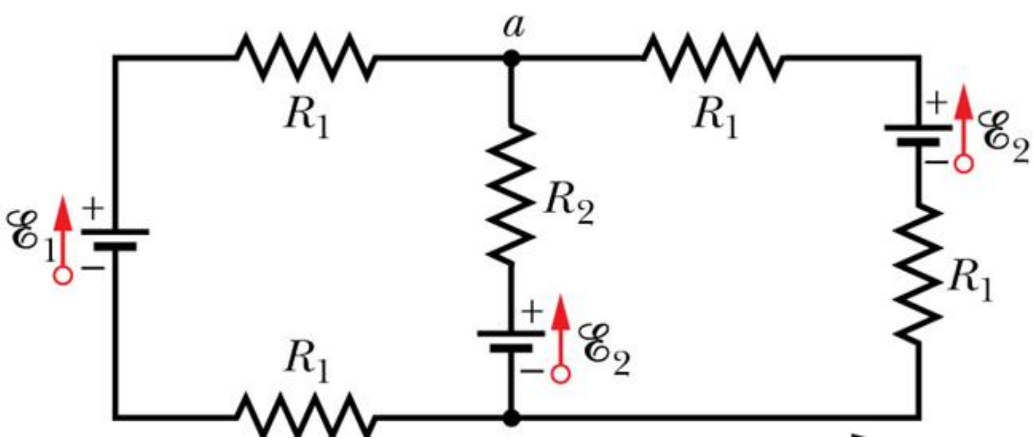
$$\Delta V = i_3 R = 1.18A \times 10\Omega = 11.8V$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = i_1 r = 0.59A \times 0.3\Omega = 0.2V$$

La d.d.p. ai capi dei rami orizzontali è uguale alla f.e.m. delle batterie meno la caduta di tensione dovuta alla resistenza interna delle batterie

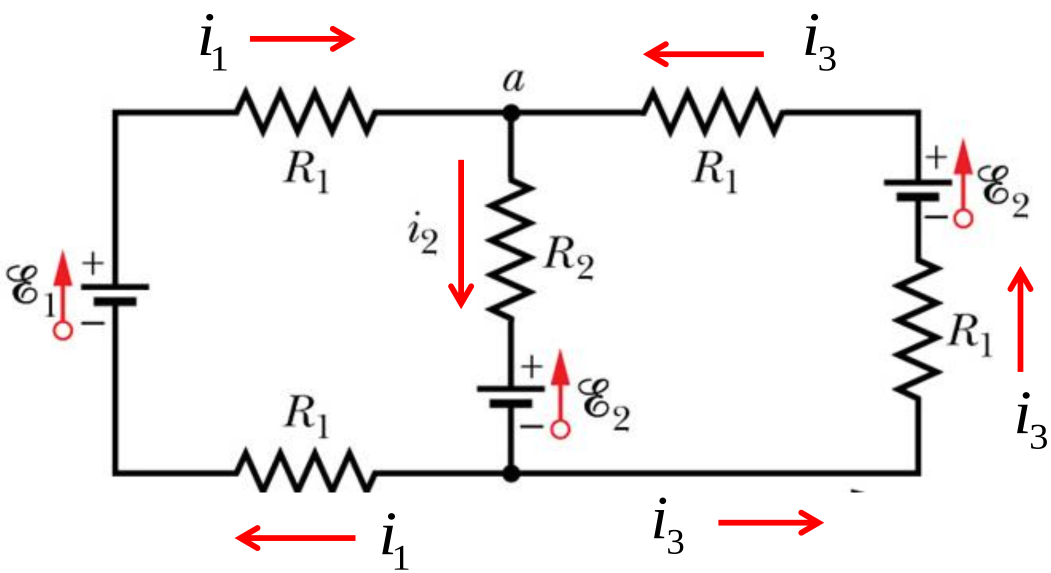
Problema 27.3

La figura mostra un circuito a 2 maglie; date le f.e.m. e le resistenze, trovare i valori delle correnti in ogni ramo del circuito



$$\mathscr{E}_1 = 3V \quad \mathscr{E}_2 = 6V$$

$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 4\Omega$$



Ipotizziamo un verso per le correnti e scriviamo la 2° legge di Kirchoff per ciascuna maglia chiusa e la legge dei nodi in *a*:

Problema 27.3

Maglia di sinistra: $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = 2 i_1 R_1 + i_2 R_2 \quad (1)$

Maglia di destra: $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_2 = i_3 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_1 = 0 \Rightarrow i_3 = -i_2 \left(R_2 / 2R_1 \right) \quad (2)$

Legge dei nodi: $i_2 = i_1 + i_3 \quad (3)$

Abbiamo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite; sostituendo l'eq. (2) nella (3) ricaviamo la relazione tra i_2 ed i_1

$$i_2 = i_1 - i_2 \frac{R_2}{2R_1} \Rightarrow i_2 = i_1 \frac{2R_1}{2R_1 + R_2} \quad (4)$$

Sostituisco questo risultato nell'Eq. (1) e risolviamo rispetto ad i_1

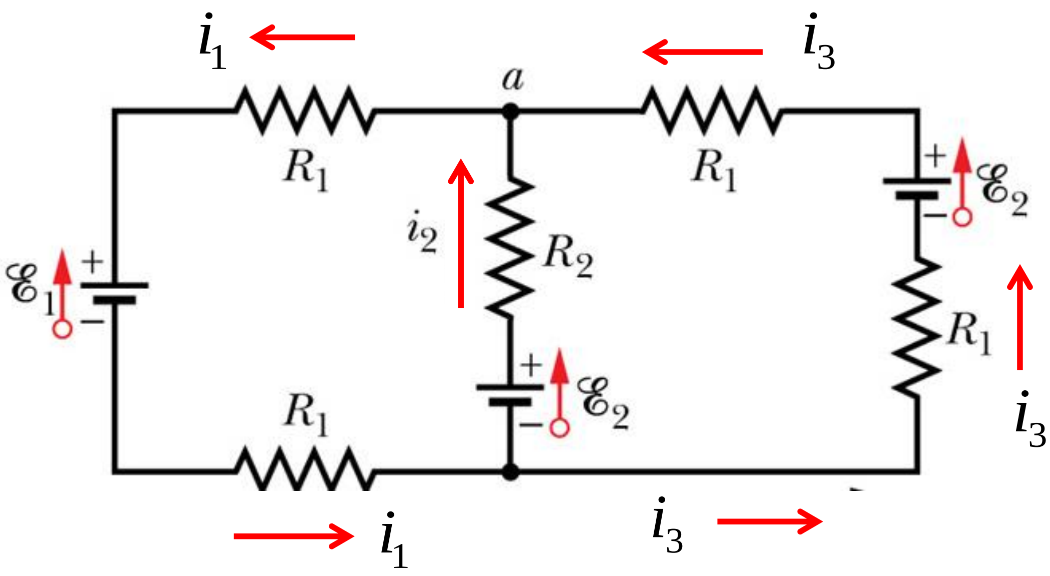
$$i_1 = \left(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \right) \frac{2R_1 + R_2}{4R_1^{\,2} + 4R_1 R_2} = -0.5A$$

Conoscendo i_1 è facile calcolare i_2 dall'eq. (4) e poi i_3 dalla (3)

$$i_2 = -0.25A \qquad\qquad i_3 = 0.25A$$

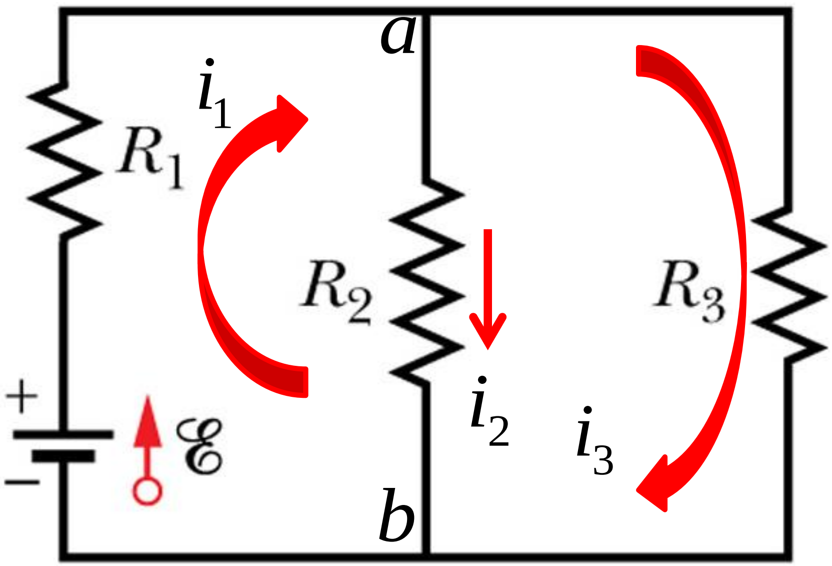
Problema 27.3

Dai valori calcolati risulta che il verso delle correnti positive i_1 e i_2 è opposto a quanto ipotizzato; era preventivabile considerando che la batteria più potente è la 2, e dunque tende ad imporre il proprio verso di percorrenza stabilito dai suoi poli



Il giusto verso delle correnti positive è quindi quello disegnato in figura

Esercizio



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 5\Omega$$

Calcolare il valore di R_3 che rende massima la potenza dissipata su questa resistenza

Dobbiamo determinare la corrente nel circuito in funzione di R_3

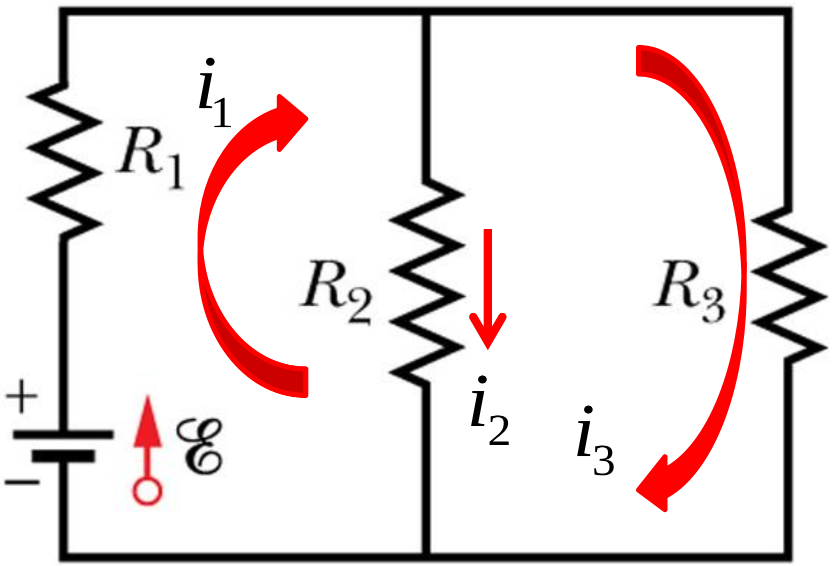
$$V_a - V_b = i_1 R_{23} = i_2 R_2 = i_3 R_3$$

$$\mathscr{E} = i_1 (R_1 + R_{23}) \Rightarrow i_1 = \frac{\mathscr{E}}{(R_1 + R_{23})}$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = i_3 \left(\frac{R_3}{R_2} + 1 \right) = i_3 \left(\frac{R_2 + R_3}{R_2} \right) = \frac{\mathscr{E}}{(R_1 + R_{23})}$$

$$\Rightarrow i_3 = \left(\frac{1}{R_2 + R_3} \right) \frac{R_2 \mathscr{E}}{\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)} = \frac{R_2 \mathscr{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Esercizio



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 5\Omega$$

Calcolare il valore di R_3 che rende massima la potenza dissipata su questa resistenza

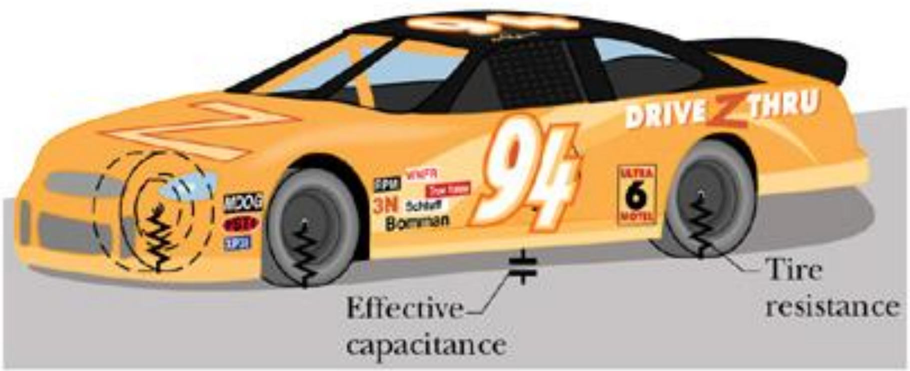
$$P = i_3^2 R_3 \qquad \frac{\partial P}{\partial R_3} = 2 i_3 \frac{\partial i_3}{\partial R_3} R_3 + i_3^2 = 0$$

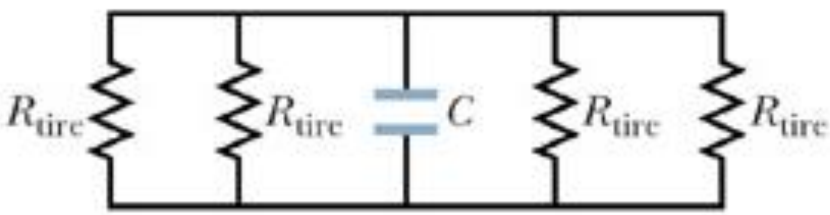
$$\frac{\partial i_3}{\partial R_3} = -\frac{(R_1 + R_2) R_2 \mathscr{E}}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)^2} = -\frac{(R_1 + R_2)}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} i_3$$

Sostituisco la derivata nell'equazione precedente ed ottengo:

$$\frac{2(R_1 + R_2)R_3}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)} = 1 \Rightarrow R_3 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10\Omega^2}{7\Omega} = 1.43\Omega$$

Problema 27.5: scarica dell'automobile



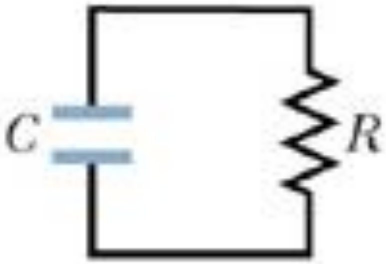


Durante il moto, una quantità di elettroni si trasferiscono dal suolo alla carrozzeria attraverso i pneumatici. Una volta che l'auto è ferma, carrozzeria e suolo rappresentano i 'piatti' di un condensatore cortocircuitato dalla resistenza dei pneumatici; al sistema serve del tempo per scaricare attraverso le gomme l'energia accumulata durante il moto

Il sistema è equivalente ad un condensatore con le 4 resistenze dei pneumatici in parallelo; sia R_{pn}= 100 GΩ la resistenza di ciascun pneumatico; siano C=500 pF e ΔV_0 = 30 kV capacità e potenziale del condensatore auto/suolo; immaginiamo di dover fare benzina: quanto tempo dobbiamo attendere prima di inserire la pistola nel serbatoio, affinché l'energia del condensatore cali al di sotto del valore di innesco della scintilla U_{inc} = 50 mJ ?

Problema 27.5: scarica dell'automobile

Il sistema può ridursi ad un RC equivalente con: $\frac{1}{R} = \frac{4}{R_{pn}} \rightarrow R = 25G\Omega$



Il tempo caratteristico dei questo circuito RC è:

$$\tau = RC = 25G\Omega \times 500\,pF = 12.5\,s$$

È un tempo piuttosto lungo, a causa dell'altissima resistenza dei pneumatici (la gomma è isolante)

Carica e d.d.p. ai piatti del condensatore durante il processo di scarica variano secondo la legge:

$$\Delta V(t) = V_0 e^{-t/\tau} \qquad q(t) = CV_0 e^{-t/\tau}$$

La corrispondente variazione di energia immagazzinata nel condensatore durante la scarica è:

$$\Delta U(t) = \frac{1}{2} C\left(\Delta V(t)\right)^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 e^{-2t/\tau}$$

Possiamo invertire l'equazione e ricavare il tempo in funzione dell'energia:

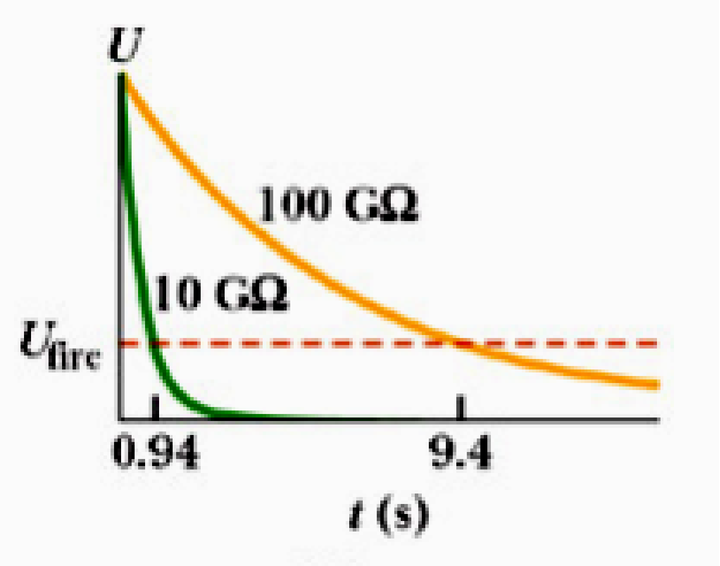
$$\frac{2\Delta U}{CV_0^2} = e^{-2t/\tau} \Rightarrow t = -\frac{\tau}{2} \ln \frac{2\Delta U}{CV_0^2}$$

Problema 27.5: scarica dell'automobile

Calcoliamo il tempo necessario a far sì che l'energia del condensatore arrivi all'energia di soglia per l'innesco, ovvero il tempo corrispondente all'energia ΔU = U_{inc} = 50 mJ:

$$t = -\frac{\tau}{2}\ln\frac{2\Delta U}{CV_0^2} = -\frac{12.5}{2}s\ln\frac{2\times 50mJ}{500\,pF\left(30kV\right)^2} = -6.25\times\ln\frac{10}{45}s = 9.4s$$

E' un tempo considerevole: mai arrivare alla pompa e fare benzina al volo! Nelle gare automobilistiche, tipicamente i pneumatici inglobano granuli di materiale conduttore (ad es. carbonio) per ridurre il tempo di scarica.



L'andamento dell'energia è prevalentemente stabilito dal tempo caratteristico, ovvero da *RC*; dal grafico vediamo che se la resistività dei pneumatici si riduce da 100 GΩ a 10 GΩ il tempo di soglia necessario a scongiurare l'innesco diventa inferiore al secondo

Esercizio 27.3: batteria auto

Le caratteristiche più importanti di una batteria per auto sono: carica totale (*q* = 60 Ah) e la f.e.m. (voltaggio) $\mathscr{E}$ =12 V

$$60\,Ah = 60\,A \times 3600\,s = 2.16 \times 10^5\,C$$

Immaginiamo di lasciare le luci dell'auto accese, e che queste consumino una potenza P = 100 W; in quanto tempo si scarica la batteria?

La potenza erogata dalla batteria è: $P = i\,\mathscr{E}$

Se la potenza erogata è costante nel tempo, ed il voltaggio resta costante nel tempo, ovviamente anche la corrente è costante; si ha quindi:

$$q = \int_0^t i\,dt = i\,t \Rightarrow t = \frac{q}{i} = \frac{q}{P}\mathscr{E} = \frac{60\,Ah \times 12\,V}{100\,W} = 7.2\,h = 7h, 12\,\min$$

Esercizio: stufa elettrica

Una stufa elettrica della potenza di 1250 W viene alimentata con una d.d.p. di 220 V.

a) Qual'e la corrente nella stufa?
b) Qual'e la resistenza della spirale riscaldante?
c) Quanta energia termica viene prodotta in un'ora dalla stufa?

$$a)\ P = iV \Rightarrow i = \frac{P}{V} = \frac{1250W}{220V} = 5.68A$$

$$b)\ P = i^2 R \Rightarrow R = \frac{P}{i^2} = \frac{1250W}{(5.68\,A)^2} = 38.74\Omega$$

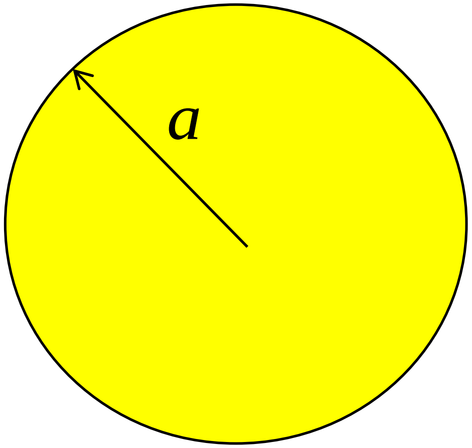
Se potenza erogata, voltaggio e corrente sono costanti nel tempo, la quantità di carica che attraversa la stufa in 1 ora è:

$$q = i\,t = 5.68A \times 3600\,s = 2.04 \times 10^4\,C$$

L'energia associata all'erogazione di una carica *q* spinta da una differenza di potenziale ΔV costante è data da:

$$c)\ \Delta U = q\Delta V = 2.04 \times 10^4\,C \times 220V = 4.5 \times 10^6\,J$$

Problema 3



Consideriamo una sfera isolante uniformemente carica di carica q_s = 5 μC e raggio a=4 cm

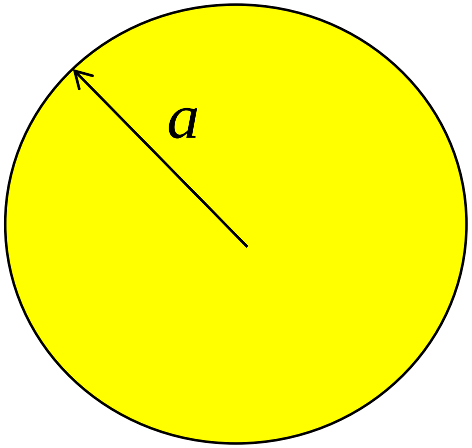
a) scrivere l'espressione del modulo campo elettrico $E(r)$ e del potenziale corrispondente $V(r)$ in funzione della distanza dal centro, nella regione interna alla sfera ($r < a$) Per il calcolo del potenziale si assuma nullo il potenziale nel centro della sfera, ovvero V(0) = 0

$$a) \quad r < a \quad E(r) = k\frac{q_s}{a^3}r \qquad V(r) = -k\frac{q_s}{2a^3}r^2$$

b) scrivere l'espressione $E(r)$ del modulo campo elettrico $E(r)$ e del potenziale corrispondente $V(r)$ in funzione della distanza dal centro, nella regione esterna alla sfera ($r > a$). Per il calcolo del potenziale, si assuma nullo il potenziale all'infinito, ovvero V(∞) = 0

$$b) \quad r > a \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2} \qquad V(r) = k\frac{q_s}{r}$$

Problema 3



c) Calcolare l'intensità del campo elettrico e del potenziale nei punti r=2 cm, r=6 cm

$$r = 2cm \quad E = 9\times10^{9}\frac{Nm^{2}}{C^{2}}\frac{5\mu C\times 2cm}{(4cm)^{3}} = 1.41\times10^{7}(N/C)$$

$$r = 6cm \quad E = 9\times10^{9}\frac{Nm^{2}}{C^{2}}\frac{5\mu C}{36\times10^{-4}m^{2}} = 1.25\times10^{7}(N/C)$$

$$r = 2cm \quad V = -9\times10^{9}\frac{Nm^{2}}{C^{2}}\frac{5\mu C\times 4cm^{2}}{2(4cm)^{3}} = -1.41\times10^{5}V$$

$$r = 6cm \quad E = 9\times10^{9}\frac{Nm^{2}}{C^{2}}\frac{5\mu C}{6\times10^{-2}m} = 7.5\times10^{5}V$$