

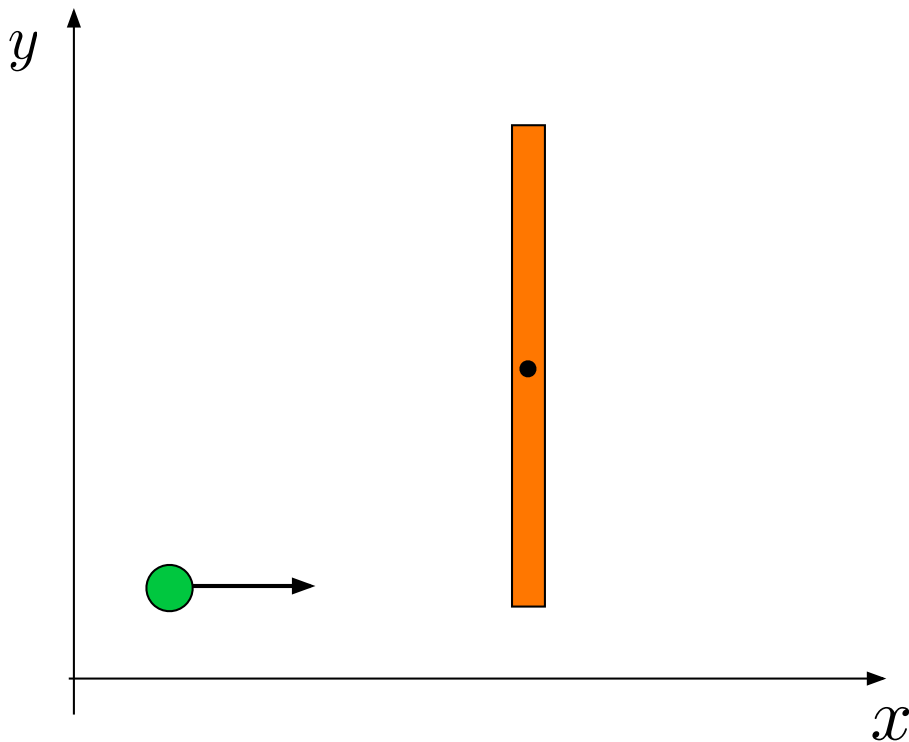
Esercizio (tratto dal Problema 8.21 del Mazzoldi 2)

Un'asta rigida di sezione trascurabile, lunga $l = 1$ m e di massa $M = 12$ Kg è imperniata nel centro ed è libera di ruotare in un piano orizzontale xy . Contro un suo estremo viene lanciato un oggetto di dimensioni trascurabili e di massa $m = 1$ Kg, con velocità $\vec{v} = 2\hat{i}$ m/s; l'asta è orientata secondo l'asse y . Dopo l'urto l'oggetto rimbalza con velocità $\vec{v}' = -0.5\hat{i}$ m/s. Calcolare

1. la velocità angolare ω dell'asta dopo l'urto;
2. le componenti dell'impulso \vec{J} comunicato al perno.

Si supponga ora che, con le stesse condizioni iniziali, l'urto avvenga elasticamente. Calcolare in questo caso:

3. ω' e \vec{J}' .



SOLUZIONE

Si tratta di un problema di **urto vincolato**, dato che nell'urto tra l'asta ed l'oggetto m l'asta è soggetta al vincolo del perno.

1. Consideriamo il primo tipo di urto

- L'energia non è conservata nell'urto, dato che il problema non precisa esplicitamente che si tratti di urto elastico. Al contrario, siccome il testo richiede nella seconda parte di fare il confronto col caso dell'urto elastico, sappiamo per certo che questo primo tipo di urto non è elastico, e dunque l'energia *non* si conserva;
- Consideriamo la quantità di moto del sistema asta + punto. Tale sistema *non* è un sistema isolato. Infatti l'asta è vincolata al perno. La reazione vincolare \vec{R} del perno è una forza esterna al sistema asta + punto. In conseguenza di ciò, la quantità di moto *non* è conservata.
- Consideriamo il momento angolare del sistema asta + punto rispetto al polo=perno. Il momento angolare totale varia nel tempo secondo la legge

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e \quad (1)$$

dove \vec{M}^e è il momento delle forze esterne al sistema. In questo caso l'unica forza esterna al sistema asta + punto è la reazione vincolare \vec{R} . Tuttavia essa non esercita alcun momento perchè ha braccio nullo rispetto al polo=perno

$$\vec{M}^e = \vec{M}_{\vec{R}} = \underbrace{\vec{r}}_{=0} \times \vec{R} = 0$$

Pertanto abbiamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}(t) = \text{cost} \quad (2)$$

ossia il momento angolare \vec{L} del sistema asta + punto (calcolato rispetto al perno!) è costante nel tempo. Dunque, in particolare, si conserva attraverso l'urto:

$$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \quad (3)$$

- Consideriamo il momento angolare prima dell'urto. Esso è dovuto al solo oggetto di massa m , dato che l'asta è ferma.

$$\vec{L}_{prima} = \vec{L}_{prima}^{punto} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4)$$

- Tale momento angolare è diretto lungo l'asse ortogonale al foglio, nel verso uscente. Denotiamo

$$\hat{k} = \text{versore uscente} \quad (5)$$

- Notiamo che $\vec{r} = \vec{r}(t)$ varia nel tempo (l'oggetto m si sposta nel tempo) mentre \vec{v} è costante nel tempo (l'oggetto si muove di moto rettilineo uniforme). Tuttavia il prodotto vettoriale (4) *non* dipende dal tempo, dato che il braccio $b = |\vec{r}| \sin \alpha$ rimane costante nel tempo [vedi Fig.1]

$$\vec{L}_{prima} = \frac{l}{2} m v \hat{k} \quad (6)$$

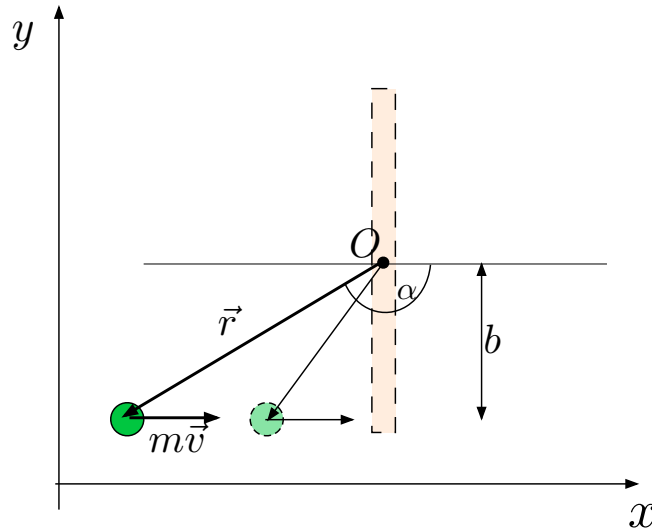


Figure 1:

- Consideriamo ora il momento angolare dopo l'urto. Mentre il punto materiale rimbalza con velocità di modulo $v' = 0.5 \text{ m/s}$ in direzione opposta a quella incidente, l'asta viene posta in rotazione [vedi Fig.2]. Denotando con ω la sua velocità angolare e ricordando che \hat{k} denota il versore ortogonale al foglio nel verso uscente, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{dopo} &= \vec{L}_{dopo}^{punto} + \vec{L}_{dopo}^{asta} = \\
 &= \vec{r} \times m\vec{v}' + I\omega\hat{k} = \\
 &= -mv'\frac{l}{2}\hat{k} + I\omega\hat{k}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Il momento d'inerzia di una sbarra rispetto all'asse passante per il suo centro vale

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 \tag{8}$$

e dunque

$$\vec{L}_{dopo} = \left(-mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega \right) \hat{k} \tag{9}$$

- Uguagliando (6) e (9) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{l}{2}mv\hat{k} &= \left(-mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega \right) \hat{k} \\
 &\Downarrow \\
 \frac{l}{2}mv &= -mv'\frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega \\
 &\Downarrow \\
 \frac{l}{2}m(v+v') &= \frac{1}{12}Ml^2\omega \\
 &\Downarrow \\
 \omega &= 6 \frac{m}{M} \frac{v+v'}{l}
 \end{aligned} \tag{10}$$

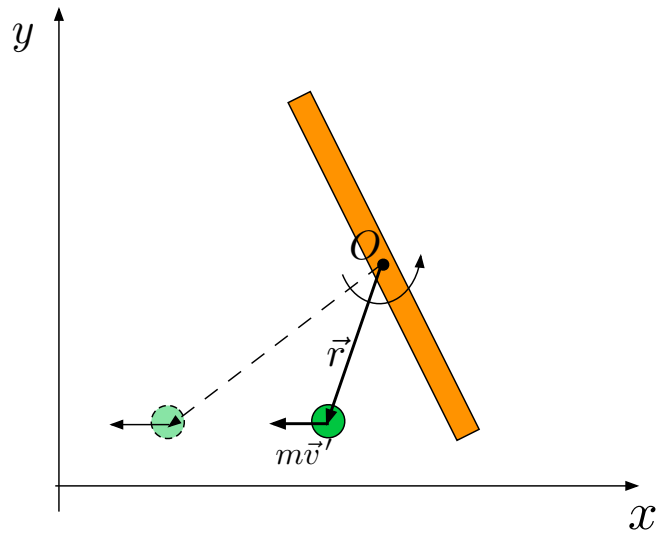


Figure 2:

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{aligned}
 \omega &= 6 \frac{1 \text{ Kg}}{12 \text{ Kg}} \frac{(2 + 0.5) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ m}} \\
 &= \frac{2.5}{2} \frac{1}{\text{s}} \\
 &= 1.25 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

2. L'impulso comunicato al perno è per definizione

$$\vec{J} = \vec{p}_{dopo} - \vec{p}_{prima} \tag{12}$$

Notiamo che

- Prima dell'urto la quantità di moto è portata solo dal punto materiale, dato che l'asta è ferma, e dunque

$$\vec{p}_{prima} = \vec{p}_{prima}^{punto} = m\vec{v} \tag{13}$$

- Dopo l'urto la quantità di moto del punto materiale vale

$$\vec{p}_{prima}^{punto} = m\vec{v}' \tag{14}$$

mentre la quantità di moto dell'asta in rotazione rimane nulla,

$$\vec{p}_{dopo}^{asta} = M\vec{v}_{CM} = 0 \tag{15}$$

in quanto, anche se l'asta ruota, il suo centro di massa (che coincide col perno) rimane fisso.

- Pertanto l'impulso vale

$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \vec{p}_{dopo} - \vec{p}_{prima} = \\
 &= m\vec{v}' - m\vec{v} = \\
 &= m(-v' \hat{i} - v \hat{i}) = \\
 &= -m(v' + v) \hat{i}
 \end{aligned} \tag{16}$$

E' diretto lungo sinistra e vale in modulo

$$\begin{aligned} J &= 1 \text{ Kg} \left(0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = \\ &= 2.5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (17)$$

3. Passiamo ora a considerare il caso dell'urto elastico. Mentre nel caso del primo tipo di urto il testo ci dava esplicitamente il valore della velocità \vec{v}' del punto materiale dopo l'urto, in questo secondo tipo di urto non conosciamo tale velocità. Tuttavia sappiamo che l'energia in un urto elastico si conserva. Pertanto abbiamo due relazioni

$$\begin{cases} \vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} & (\text{continua a valere per le stesse ragioni di prima}) \\ K_{prima} = K_{dopo} & (\text{vale perché il testo ci dice che l'urto è elastico}) \end{cases} \quad (18)$$

ossia

$$\begin{cases} \frac{l}{2}mv = -mv''\frac{l}{2} + I\omega' \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv''^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 \end{cases} \quad (19)$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite

v'' = velocità del punto materiale dopo l'urto

ω' = velocità angolare dell'asta dopo l'urto

Elementari calcoli permettono di ottenere la soluzione

$$\begin{cases} \omega' = \frac{ml}{I + \frac{ml^2}{4}} v \\ v'' = \frac{I - \frac{ml^2}{4}}{I + \frac{ml^2}{4}} v \end{cases} \quad (20)$$

Ricordando che

$$\frac{1}{12}Ml^2$$

si ottiene

$$\begin{cases} \omega' = \frac{v}{l} \frac{m}{M + 3m} \\ v'' = \frac{M - 3m}{M + 3m} v \end{cases} \quad (21)$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$\begin{cases} \omega' = 1.6 \text{ s}^{-1} \\ v'' = 1.2 \text{ m/s} \end{cases} \quad (22)$$

Per quanto riguarda il caso dell'impulso in questo secondo tipo di urto abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{J}' &= \vec{p}'_{dopo} - \vec{p}_{prima} = \\ &= m\vec{v}'' - m\vec{v} = \\ &= m(-v''\hat{i} - v\hat{i}) = \\ &= -m(v'' + v)\hat{i} \end{aligned} \quad (23)$$

E' diretto lungo sinistra e vale in modulo

$$\begin{aligned} J' &= 1 \text{ Kg} \left(1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = \\ &= 3.2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \tag{24}$$