ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 41

Note Title 23/11/2018

FORMA CANONICA DI JORDAN

Def. (Forma di Jordan)

- Dato un intero k ed un numero reale λ, si dice **BLOCCO DI JORDAN** $k \times k$ con autovalore λ una matrice $k \times k$ con
  - → tutti λ sulla diagonale
  - → tutti 1 subito sopra la diagonale
  - → tutti 0 altrove

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \Big\updownarrow k$$

- Si dice **MATRICE DI JORDAN** una matrice quadrata ottenuta allineando lungo la diagonale dei blocchi di Jordan

Esempio Esempi di blocco di Jordan

$$\underset{1\times 1}{\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}} \quad \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} \quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}} \quad \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

Osserviamo che λ può a sua volta essere 0 oppure 1

Esempi di matrici di Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & 0 & \\ & & 3 & 1 & \\ & 0 & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

È consentito che blocchi diversi abbiano lo stesso λ sulla diagonale

Oss. Una matrice diagonale è una matrice di Jordan con tutti blocchi da 1×1.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (versione sui complessi)

Sia A una matrice $n \times n$ con elementi complessi (se sono reali, ancora meglio).
Allora esiste una matrice J di Jordan complessa (cioè i λ sulla diagonale possono essere complessi) che è simile ad A cioè esiste M matrice $n \times n$ invertibile con el. complessi tale che

$$J = M^{-1} A M$$

Inoltre
- i λ che compaiono sulla diagonale sono gli autovalori di A
- ogni λ compare m_a volte (molt. algebrica)
- per ogni λ il numero di blocchi è dato da $m_g(\lambda)$
  (quindi se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, allora per quel λ tutti i blocchi sono per forza da 1)
  quindi il numero di blocchi totale è

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda Id)) \qquad (= m_g(\lambda))$$

- per ogni λ il numero di blocchi di dimensione $\geq k$ è dato da

$$\dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda Id)^k) - \dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda Id)^{k-1})$$

[Aggiunto dopo video]

FORMA CANONICA DI JORDAN REALE

<u>Def</u>. Un blocco di JORDAN reale $2k \times 2k$ (dimensione pari) è una matrice ottenuta

- allineando lungo la diagonale dei blocchi 2×2 del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

tutti con gli stessi valori di a e b

- aggiungendo sopra questi dei blocchi di identità 2×2

<u>Esempi</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & 0 & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>. Una matrice di Jordan reale è una matrice ottenuta allineando lungo la diagonale dei blocchi di Jordan reali, oppure dei blocchi come nel caso complesso con un λ reale sulla diagonale

<u>Esempi</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & 0 \\ & 0 & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & & \\ -4 & 3 & & \\ & & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Due blocchi 2×2 reali

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & \\ -4 & 3 & & 1 \\ & & 3 & 4 \\ & & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Blocco 4×4 reale

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ (Forma di JORDAN reale)

Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi reali
Allora A è simile ad una matrice J di Jordan reale, cioè esiste M matrice $n \times n$ reale tale che

$$J = M^{-1} A M$$

Inoltre la J reale si costruisce a partire dalla J complessa in questo modo

- tutti i blocchi di Jordan che hanno sulla diagonale un λ reale si copiano e basta
- tutti i blocchi di Jordan 1×1 complessi con λ sulla diagonale hanno per un fatto misterioso un numero uguale di corrispondenti blocchi con $\bar{\lambda}$ sulla diagonale (fatto vero se A ha coeff. reali).
  Al posto di questi due blocchi si mette $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
  dove $\lambda = a \pm i b$
- i blocchi con λ davvero complesso sulla diagonale e degli 1 sopra hanno dei corr. blocchi con $\bar{\lambda}$ e questi producono blocchi reali di dimensione doppia

— o — o —

<u>Esempi</u> (di passaggio da Jordan complesso a reale)

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3+i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3-i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & 3 & 1 \\ & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5+2i & & & 0 \\ & 5-2i & & \\ & & 4+i & \\ 0 & & & 4-i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1+2i & 1 \\ 0 & 1+2i \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1-2i & 1 \\ & 1-2i \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}} \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

se c'è allora c'è anche

Coppia di blocchi 2×2 con $a \pm ib$ sulla diagonale produce blocco 4×4 reale

— o — o —

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Trovare la forma canonica di Jordan reale e complessa

Trovo prima la forma complessa cercando gli autovalori

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Pol. caratt. $= (2-\lambda)(4-\lambda)+5 = 0$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2i$$

Autovalori distinti $\Rightarrow$ sui complessi è diagonalizzabile

Jordan complessa $\begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix}$

La Jordan reale si ricava da quella con l'algoritmo appena descritto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(volendo posso invertire 2 e −2)

— o — o —

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono: $\lambda = 3$ con $m_a(3) = m_g(3) = 1$

$\lambda = 2$ con $m_a(2) = 2$

Calcola $m_g(2)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango $= 2 \Rightarrow \dim(\ker) = 1$

$\rightsquigarrow m_g(2) = 1 \rightsquigarrow A$ non è diagonalizzabile

$\Downarrow$

con l'autovalore $\lambda = 2$ c'è un solo blocco

Quindi la forma di Jordan (sia reale sia complessa) è

$$\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

— o — o —