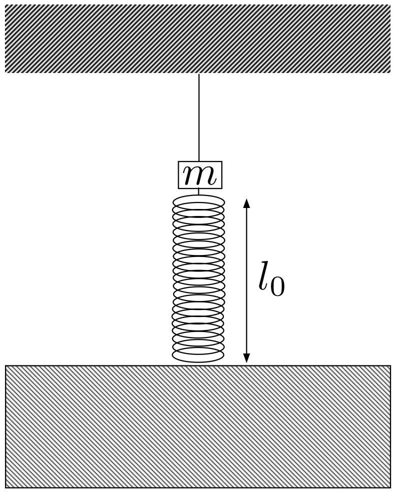
Esercizio (tratto dal Problema 4.7 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale di massa m è sospeso tramite un filo verticale ed è collegato al suolo da una molla, di costante elastica $k = 70\,\mathrm{N/m}$, che si trova alla lunghezza di riposo l_0. La tensione del filo è $T = 4.9\,\mathrm{N}$. Il filo viene ora tagliato.



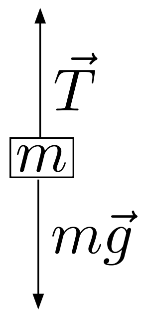
Calcolare:

1. la massima distanza percorsa dal punto;
2. la posizione in cui la velocità è massima;
3. il valore massimo della velocità.

SOLUZIONE:
Dati iniziali:

$$\begin{aligned} k &= 70\,\mathrm{N/m} \\ T &= 4.9\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Prima che il filo venga tagliato, la molla non esercita alcuna forza sul punto materiale (dato che la



molla è in condizioni di riposo). Il punto materiale è dunque fermo per l'equilibrio tra la forza peso e la tensione T del filo. Pertanto in modulo abbiamo

$$\begin{aligned} T &= mg \\ &\Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} \end{aligned} \tag{1}$$

Quando si taglia il filo, il punto materiale è soggetto alla forza peso e alla forza elastica della molla. Per trovare le quantità richieste possiamo procedere in due modi:

PRIMO MODO (Bilancio Energetico):
Le forze che agiscono sul sistema sono (lungo la direzione verticale, asse z verso l'alto)

$$\begin{cases} \text{forza peso} & F = -mg \\ \\ \text{forza elastica} & F = -k(z - l_0) \end{cases}$$

Siccome sono forze conservative, l'energia meccanica è conservata. L'energia meccanica in questo sistema è data da:

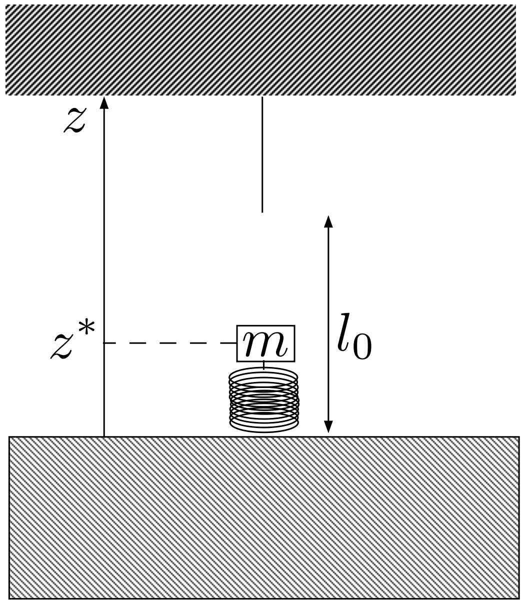
$$\underbrace{\text{energia cinetica}}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{\text{en. potenz. gravitazionale}}_{mgz} + \underbrace{\text{en. potenz. elastica}}_{\frac{k}{2}(z-l_0)^2}$$

1. Trovare la massima distanza percorsa dal punto materiale corrisponde a trovare di quanto si comprime la molla rispetto alla lunghezza iniziale (=lunghezza a riposo). All'istante iniziale la velocità è nulla e la molla si trova nella posizione di riposo ($z = l$):

$$E_m^{in} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=0} + mgl_0 + \underbrace{\frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2}_{=0} \tag{2}$$

All'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza minima (la molla non è necessariamente compressa completamente!) la velocità è nuovamente nulla. Denotando con

$$z^* = \text{altezza minima raggiunta} \tag{3}$$



abbiamo

$$E_m^{fin} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=0} + mgz^* + \frac{1}{2}k(z^* - l_0)^2 \tag{4}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m^{fin} \\ mgl_0 &= mgz^* + \frac{1}{2}k(z^* - l_0)^2 \\ \Rightarrow & \quad \frac{1}{2}k(z^* - l_0)^2 + mg(z^* - l_0) = 0 \\ & \quad (z^* - l_0)\left(\frac{1}{2}k(z^* - l_0) + mg\right) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Abbiamo due soluzioni

(a) $z^* - l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^* = l$
(corrisponde all'istante iniziale, in cui infatti l'energia cinetica è nulla)

(b) $\frac{1}{2}k(z^* - l) + mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{z^* - l_0}_{\Delta z} = -\frac{2mg}{k}$

da cui $\Delta z = -\frac{2mg}{k}$ (negativo perché la molla è compressa verso il basso) Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta z &= -\frac{2mg}{k} = -\frac{2T}{k} = \\ & \quad -\frac{2 \cdot 4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= -0.14\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

2. Per determinare l'altezza $\bar{z}$ a cui il corpo raggiunge la velocità massima posso procedere in due modi

   - **Primo modo (sfrutto la conservazione dell'energia)**
     La conservazione dell'energia meccanica vale istante per istante. Ad un generico istante il punto materiale si trova ad un data altezza z e abbiamo

$$E_m(z) = mgz + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 \tag{7}$$

e per la conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} E_m^{in} &= E_m(z) \qquad \forall z \\ mgl &= mgz + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k(z-l_0^2 + mg(l_0 - z)$$

e dunque

$$v(z) = -\sqrt{-\frac{k}{m}(z-l_0)^2 + 2g(l_0 - z)} \tag{9}$$

(dove abbiamo scelto il segno $-$ davanti alla radice quadrata perché stiamo considerando la fase in cui il punto materiale scende).

Controllo dimensionale:

$$\left[\frac{k}{m}(z-l)^2\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m\,Kg}}\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{s^2\,Kg}}\ \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{10}$$

$$[2g(z-l)] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{11}$$

OK

Il punto $\bar{z}$ in cui la velocità è massima è dato dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= 0 \\ -\frac{-\frac{2k}{m}(\bar{z}-l_0) - 2g}{2\sqrt{-\frac{k}{m}(\bar{z}-l_0)^2 + 2g(l-\bar{z})}} &= 0 \\ \frac{2k}{m}(\bar{z}-l_0) + 2g &= 0 \\ &\Rightarrow \quad \bar{z} - l_0 = -\frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{12}$$

Lo scostamento vale dunque

$$\Delta z = -\frac{mg}{k} = -\frac{T}{k} \tag{13}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} \Delta z &= -\frac{mg}{k} = -\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= -0.07\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{14}$$

- **Secondo modo (sfrutto la dinamica)**
  La velocità è massima quando l'accelerazione è nulla, ossia quando la somma delle forze che agiscono sul corpo è nulla. Dunque l'altezza in cui la velocità è massima viene raggiunta all'altezza $\bar{z}$ (incognita) alla quale la forza elastica e la forza peso si bilanciano esattamente:

$$\underbrace{-k(\bar{z}-l_0)}_{\substack{\text{forza elastica} \\ \text{(verso l'alto)}}} \quad \underbrace{-mg}_{\substack{\text{forza peso} \\ \text{(verso il basso)}}} \quad = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{z}-l_0 = -\frac{mg}{k} \tag{15}$$

  Lo scostamento vale dunque

$$\Delta z = -\frac{mg}{k} = -\frac{T}{k} = -\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} - 0.07\,\mathrm{m} \tag{16}$$

3. Il valore massimo della velocità è dato da

$$\begin{aligned} v_{max} &= v(\bar{z}) = \\ &= -\sqrt{-\frac{k}{m}(\bar{z}-l_0)^2 + 2g(l_0-\bar{z})} = \\ &\quad [\text{usiamo } \bar{z}-l_0 = -\tfrac{mg}{k}] \\ &= -\sqrt{-\frac{k}{m}\frac{(mg)^2}{k^2} + 2g\frac{mg}{k}} \\ &= -\sqrt{-\frac{mg^2}{k} + 2\frac{mg^2}{k}} \\ &= -\sqrt{\frac{mg^2}{k}} \\ &\quad [\text{usiamo } T = mg] \\ &= -\sqrt{\frac{Tg}{k}} \end{aligned} \tag{17}$$

   Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} v_{max} &= -\sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{9.81\,\cdot 4.9}{70}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \\ &= -0.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{18}$$

SECONDO MODO (Equazione del moto):
Si parte dalle equazioni della dinamica

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F_{peso} + F_{el} &= m\frac{d^2z}{dt^2} \\ -\,mg \underbrace{-k(z-l_0)}_{\text{forza elastica}} &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \tag{19}$$

Osserviamo che

se $z < l$ la forza elastica è pos $\rightarrow$ diretta verso l'alto
se $z > l$ la forza elastica è neg $\rightarrow$ diretta verso il basso

Pertanto abbiamo **l'equazione differenziale**

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z(t)-l_0) - mg} \tag{20}$$

Lo scopo è trovare la soluzione $z(t)$ di tale equazione, con le **condizioni iniziali**

$$\boxed{\begin{cases} z(t=0) = l & \text{(all'inizio il punto si trova a } z=l) \\ \frac{dz}{dt}(t=0) = 0 & \text{(parte con velocità nulla)} \end{cases}} \tag{21}$$

Per risolvere l'equazione differenziale (21) procediamo in questo modo

- Osserviamo che la (21) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} &= \underbrace{-k(z-l_0)}_{\text{forza elastica}} \underbrace{-mg}_{\text{peso}} = \\ &= -k\left(z - \underbrace{\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)}\right) = \\ &= -k(z-l_0') \end{aligned} \tag{22}$$

con

$$l_0' = l_0 - \frac{mg}{k} \tag{23}$$

In tal modo l'Eq.(21) acquista la forma

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -k(z-l_0') \tag{24}$$

che rappresenta l'equazione del moto per un punto materiale soggetto ad una molla efficace con la stessa costante elastica k, ma con una lunghezza a riposo l_0' anziché l_0.
Abbiamo pertanto ricondotto il problema a quello di una molla efficace che ingloba sia la molla originaria che la forza peso

Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo l_0	$+$	Forza costante $(= -mg)$	$\Leftrightarrow$	Forza elastica di una molla con lunghezza a riposo $l_0' = l_0 - mg/k$

- Osservando che l'_0 è una costante, possiamo introdurre una variabile z' traslata

$$\begin{aligned} z'(t) &= z(t) - l'_0 \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= \frac{d^2(z - l'_0)}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \tag{25}$$

e l'Eq.(25) acquista la forma

$$m\frac{d^2 z'}{dt^2} = -kz' \tag{26}$$

- Definendo ora

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{27}$$

l'equazione (27) diventa

$$\boxed{\frac{d^2 z'}{dt^2} + \omega^2 z' = 0} \tag{28}$$

che è l'equazione del moto armonico, le cui soluzioni sono ben note, e sono della forma

$$z'(t) = A\cos(\alpha + \omega t) \tag{29}$$

In conclusione, ricordando la relazione (26) e l'espressione (24) per l'_0, abbiamo

$$\boxed{z(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + A\cos(\alpha + \omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{30}$$

Questa è la soluzione generale dell'Equazione differenziale (21). E' generale nel senso che le costanti A e α possono essere arbitrarie.

- Il valore delle costanti A e α si determina imponendo che la soluzione generale soddisfi le particolari condizioni iniziali (22). Dunque abbiamo

$$\begin{cases} z(t=0) &= l_0 - \frac{mg}{k} + A\cos\alpha = 0 \\ \\ \frac{dz}{dt}(t=0) &= -A\sin(\alpha + \omega t)|_{t=0} = -A\sin\ \alpha = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Dalla seconda equazione abbiamo

$$\alpha = 0 \tag{32}$$

e sostituendo nella prima otteniamo

$$\begin{aligned} z(t=0) &= l_0 - \frac{mg}{k} + A\underbrace{\cos 0}_{=-1} = l_0 \\ &\Rightarrow\ A = \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{33}$$

Sostituendo nell'Eq.(31) i valori (33) e (34) trovati per le costanti, otteniamo la soluzione dell'equazione (21) che soddisfa le particolari condizioni iniziali (22)

$$\boxed{z(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos(\omega t)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{34}$$

La velocità del punto materiale è data da

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -\omega\frac{mg}{k}\sin(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{35}$$

Avendo trovato la legge oraria del punto materiale possiamo ora rispondere ai vari quesiti del problema:

1. La massima distanza percorsa corrisponde all'altezza minima raggiunta dal punto materiale; denotiamo con z^* tale altezza (ancora ignota) e con t^* il tempo impiegato a raggiungerla (anch'esso ignoto). Dopo che il punto è sceso e ha compresso la molla fino all'altezza z^*, la molla si estende e il punto materiale viene proiettato verso l'alto. All'altezza z^* la velocità si annulla e dunque il punto z^* è determinato dalla condizione

$$v(t^*) = 0 \tag{36}$$

Sostituendo nell'espressione (36) otteniamo

$$0 = v(t^*) = -\frac{mg}{k} \sin \omega t^* \tag{37}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{aligned} i)\ t &= 0 \text{ (corrisponde all'istante iniziale, in cui infatti la vel. è nulla)} \\ ii)\ \omega t^* &= \pi \to t^* = \tfrac{\pi}{\omega} \text{ (corrisponde all'altezza minima)} \end{aligned} \tag{38}$$

Pertanto l'altezza minima vale

$$\begin{aligned} z^* &= z(t^*) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \underbrace{\cos(\omega t^*)}_{=-1, \text{vedi Eq.(39)}} = \\ &= l_0 - \frac{2mg}{k} \end{aligned} \tag{39}$$

E dunque la deviazione massima dalla posizione iniziale di equilibrio vale

$$\Delta z = -\frac{2mg}{k} \tag{40}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta z &= -\frac{2mg}{k} = -\frac{2T}{k} = \\ & -\frac{2 \cdot 4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= -0.14\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{41}$$

2. Il punto materiale parte inizialmente con velocità nulla, e poi si ferma istantanemente all'altezza z^* trovata al punto precedente. Quindi durante la discesa la velocità cresce fino ad un certo valore massimo, per poi decrescere fino ad annullarsi nuovamente. Denotiamo con $\bar{t}$ l'istante in cui la velocità è massima. Dall'espressione (36) per la velocità possiamo vedere l'istante $\bar{t}$ è determinato dalla condizione

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{42}$$

ossia

$$-\frac{mg}{k}\omega^2 \cos(\omega \bar{t}) = 0 \qquad \Rightarrow \omega \bar{t} = \frac{\pi}{2} \tag{43}$$

Denotando con $\bar{z}$ la posizione corrispondente al massimo della velocità, abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z(\bar{t}) = l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \underbrace{\cos \omega \bar{t}}_{=0} = \\ &= l_0 - \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{44}$$

che devia dalla posizione iniziale di equilibrio di una quantità

$$\Delta z = -\frac{mg}{k} \tag{45}$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned}\Delta z &= -\frac{mg}{k} = -\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = \\ &= -0.07\,\mathrm{m}\end{aligned} \tag{46}$$

3. Il valore della velocità massima è (per definizione di istante $\bar{t}$)

$$\begin{aligned}v_{max} &= v(\bar{t}) = \\ &= -\frac{mg\omega}{k}\sin\omega\bar{t} = \\ &= -\frac{mg\omega}{k} = \\ &\quad [\text{uso } \omega = \sqrt{\tfrac{k}{m}}] \\ &= -\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = \\ &= -\sqrt{\frac{mg^2}{k}} = \\ &\quad [\text{uso } mg = T] \\ &= -\sqrt{\frac{Tg}{k}}\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}v_{max} &= -\sqrt{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{4.9\,\mathrm{N}}{70\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{9.81\cdot 4.9}{70}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = \\ &= -0.83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\end{aligned} \tag{48}$$