Energia e Lavoro

- Finora abbiamo descritto il moto dei corpi (puntiformi) usando le leggi di Newton, tramite le *forze*; abbiamo scritto l'equazione del moto, determinato spostamento e velocità *in funzione del tempo*.

- E' possibile trattare i problemi dinamici in modo differente, spesso più semplice e in ogni caso più potente, tramite il concetto di *Energia*.
  In pratica, si determina la dipendenza dallo spazio invece che dal tempo

- L'Energia è un concetto della massima importanza in Fisica. Appare sotto varie forme, come ad esempio:

  Energia Cinetica $\leftrightarrow$ velocità
  Energia Potenziale $\leftrightarrow$ posizione
  Energia Termica $\leftrightarrow$ temperatura

- Possiamo definire l'Energia come *capacità di compiere un lavoro*.

Trasferimento e Conservazione dell'Energia

- L'energia di un corpo può variare solo se avviene un *trasferimento di energia* dall'ambiente circostante al corpo stesso.

- Tale trasferimento può avvenire per esempio tramite
  - Forze: compimento di *lavoro meccanico*
  - Scambio di calore (termodinamica)
  - ...

- In un *sistema isolato* (in cui non avvengono scambi di energia con l'esterno), l'energia *si conserva* (ovvero rimane invariata).

Energia Cinetica

- Definizione : $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$ (per un punto materiale di massa m).

- L'energia cinetica (e non solo) si misura in *Joule*: 1 J $=$ 1 kg$\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.

- Se ci sono più particelle nel sistema, l'energia cinetica complessiva del sistema è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle.

- L'energia cinetica è l'energia dovuta al moto delle particelle ed è presente *anche a livello microscopico*: l'energia "termica" o "interna" della Termodinamica in un gas è energia cinetica di atomi o molecole!

Notare che $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v})$.

Energia Cinetica e Lavoro

Cosa fa variare l'energia cinetica? Se sulla particella agisce una forza $\vec{F}$, il *lavoro* L_{if} fatto da tale forza fra il punto iniziale i e finale f, definito come:

$$L_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

($d\vec{r}$ è lo spostamento infinitesimo della particella lungo la traiettoria) è responsabile della variazione di energia cinetica:

$$K_f - K_i = L_{if}$$

Questo importante risultato va sotto il nome di *Teorema dell'energia cinetica*. Se il lavoro è *positivo*, si ha *aumento* dell'energia cinetica; se è *negativo*, si ha *diminuzione* dell'energia cinetica.

Il lavoro, come l'energia cinetica e l'energia in generale, si misura in J.

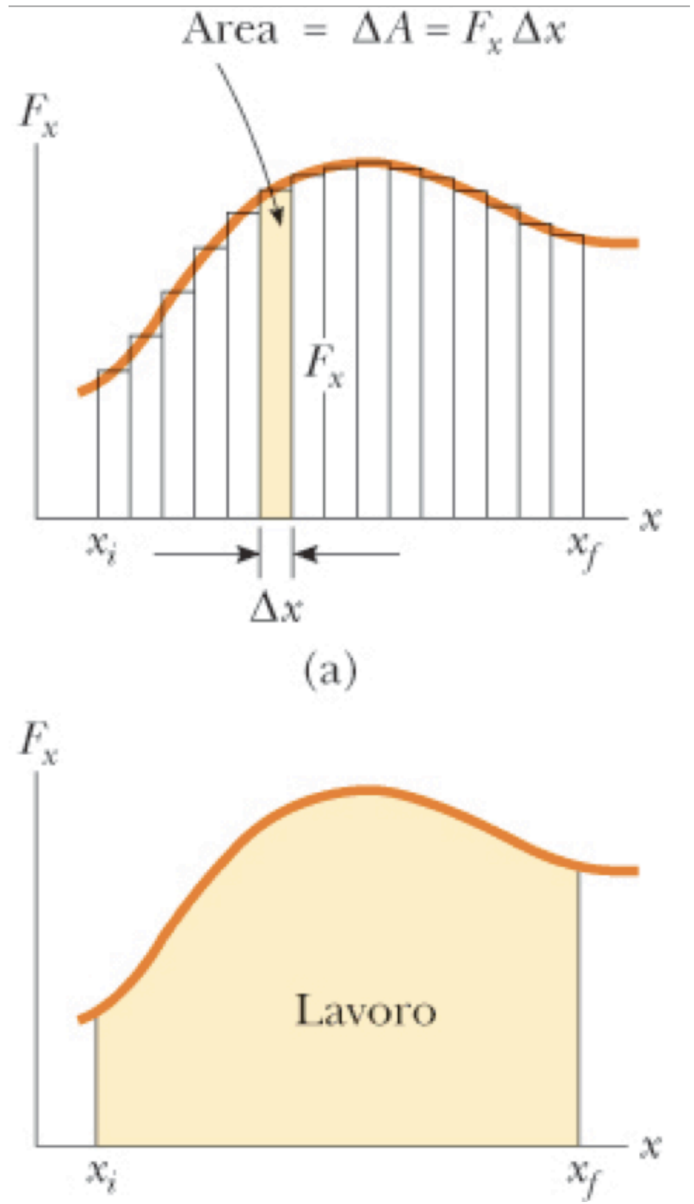
Nel seguito il lavoro sarà indicato semplicemente come L in tutti i casi non ambigui

Lavoro, in generale

- In generale il lavoro *dipende dalla traiettoria* seguita dal punto

- Matematicamente il lavoro è è un *integrale di linea*, ovvero il limite della somma di tanti contributi $\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ piccoli, calcolati lungo la traiettoria.

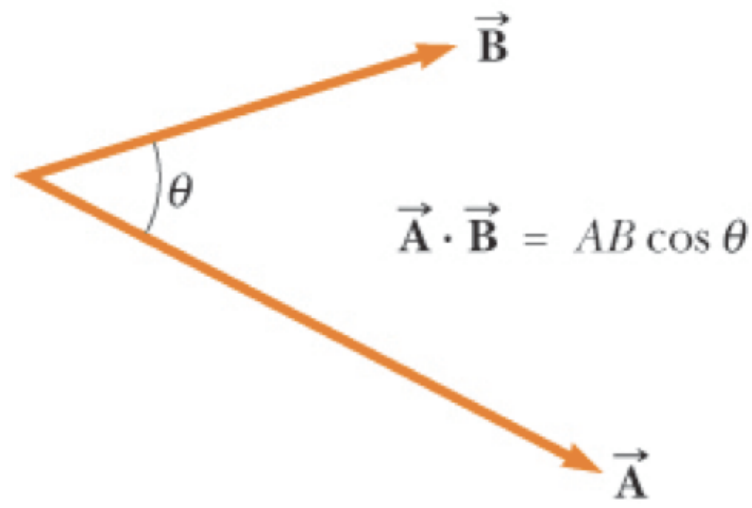
- Nell'esempio accanto, il calcolo e l'interpretazione geometrica del lavoro $L = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$ per una forza $F(x)$ in un caso unidimensionale.



Teorema dell'energia cinetica, dimostrazione

Richiamo:

- Il prodotto scalare è $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$.



- Il differenziale del prodotto scalare è $d(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (d\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot (d\vec{B})$.

Dimostrazione del Teorema dell'energia cinetica:

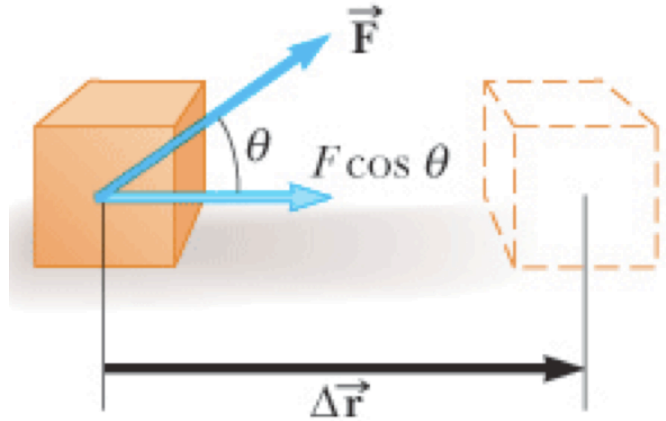
$$K_f - K_i = \int_i^f dK = \int_i^f d\left(\frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \int_i^f m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_i^f m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v}$$

ovvero

$$K_f - K_i = \int_i^f \left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot d\vec{r} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = L.$$

Lavoro di una forza costante

- Il lavoro di una forza costante è $L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, dove $\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento dalla posizione iniziale a quella finale.



- Solo la componente di $\vec{F}$ *lungo la direzione dello spostamento* $\Delta\vec{r}$, $F\cos\theta$, compie lavoro. Il lavoro $L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\cos\theta\Delta r$ è:
  - *positivo* se lo spostamento avviene *nella direzione della forza* $(\cos\theta > 0)$
  - *nullo* se lo spostamento è *perpendicolare alla forza* $(\cos\theta = 0)$
  - *negativo* se lo spostamento avviene *in direzione contraria alla forza* $(\cos\theta < 0)$.

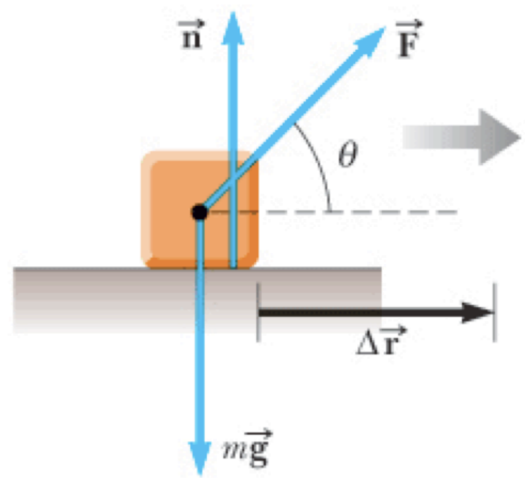
Lavoro eseguito da più forze

Se più forze agiscono su di una particella, la forza totale (o risultante) è $\vec{F} = \sum_n \vec{F}_n$ e il lavoro L fatto dalla forza $\vec{F}$:

$$L = \int_i^f \left(\sum_n \vec{F}_n \right) \cdot d\vec{r} = \sum_n \int_i^f \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \sum_n L_n$$

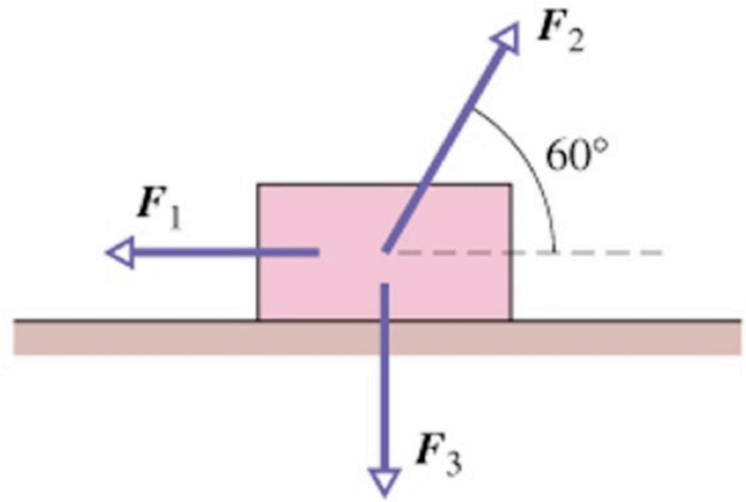
è uguale alla somma dei lavori fatti dalle singole forze, L_n.

Nell'esempio accanto, solo la forza $\vec{F}$ fa lavoro; la forza peso e la reazione vincolare non fanno lavoro.



Esempio

Supponiamo che le tre forze valgano: $F_1 = 5$ N, $F_2 = 9$ N, $F_3 = 7.8$ N. La cassa, di massa $M = 3$ kg, viene spostata di 3 m verso sinistra.



- Calcolare il lavoro totale fatto dalle tre forze sulla cassa.

  $L_1 = 15$ J, $L_2 = -13.5$ J, $L_3 = 0$

- L'energia cinetica della cassa cresce o diminuisce?

  cresce perché $L = L_1 + L_2 + L_3 = 1.5$ J > 0

- Assumendo che parta da ferma, quale sarà la sua velocità finale?

  $Mv^2/2 = 1.5$ J $\rightarrow v = 1.0$ m/s

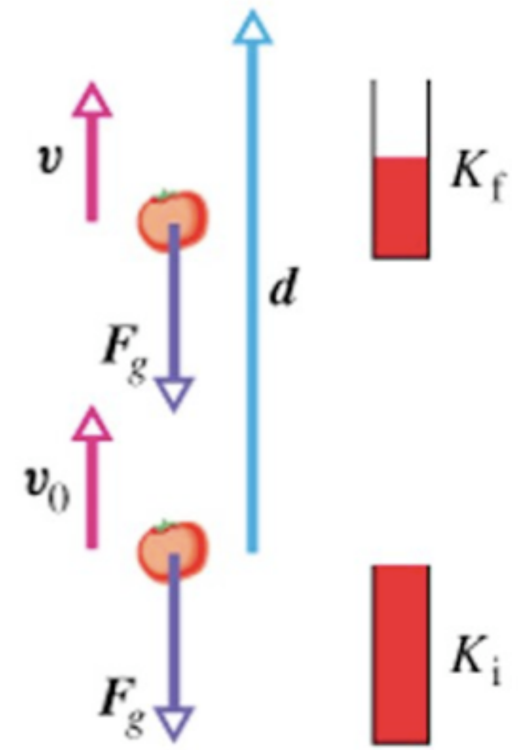
Lavoro fatto dalla forza peso

- Un oggetto viene lanciato in aria con velocità iniziale v_i. Lavoro fatto dalla forza peso sul corpo quando è arrivato all'altezza d:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mgd < 0$$

(negativo perché $\vec{F}$ e $d\vec{r}$ sono opposti) da cui

$$L = K_f - K_i \rightarrow v_f < v_i$$

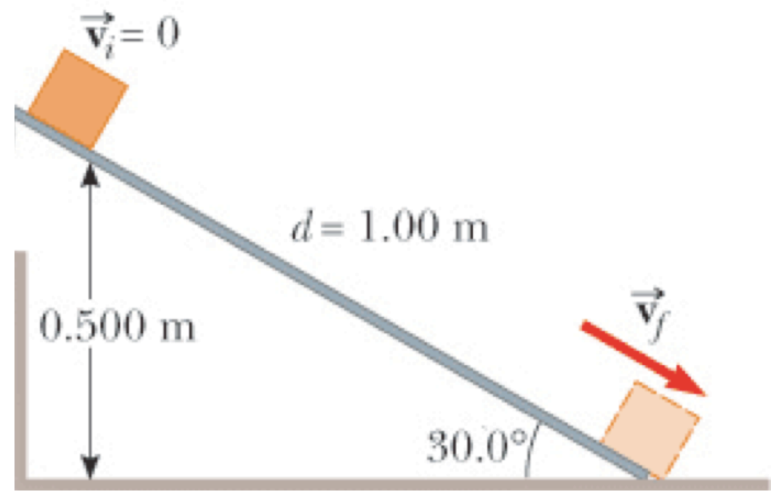


- Una volta raggiunta la massima altezza, l'oggetto ricade, $L > 0$, e l'energia cinetica aumenta.

Esempio (con attrito)

- In assenza di attrito, con quale velocità arriva in fondo la massa m?

  $K_f - K_i = L = mgd\sin 30° = mgh$ (dove h è l'altezza) da cui $mv_f^2/2 = mgh$ ovvero $v_f = \sqrt{2gh} = 3.13$ m/s



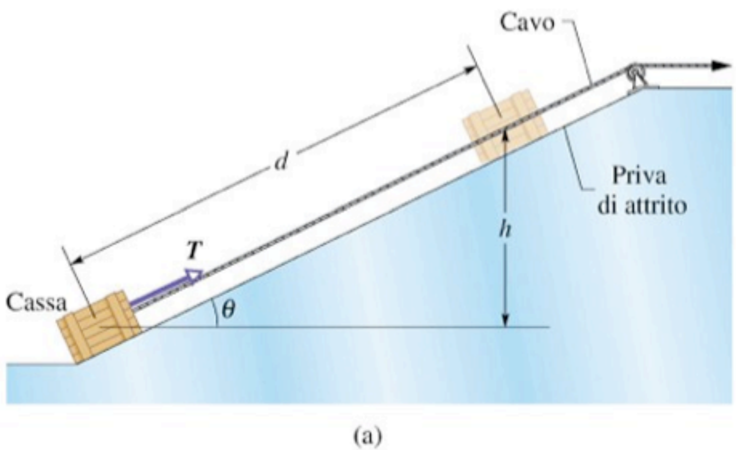
- E quanto vale v_f in presenza di attrito dinamico con coefficiente $\mu_d = 0.2$?

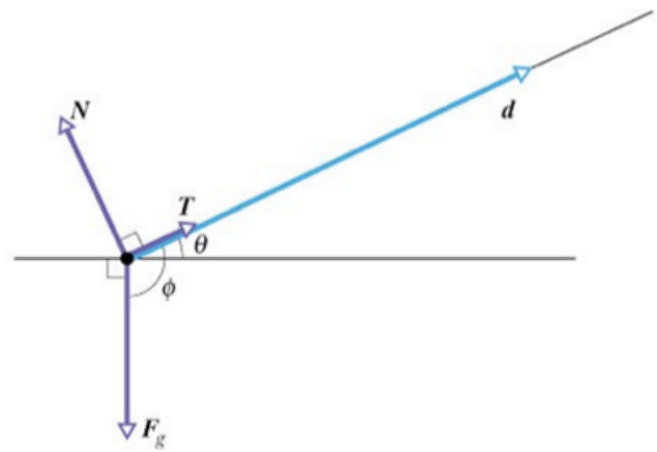
  Il lavoro della forza peso è lo stesso di prima; in più c'è il lavoro negativo della forza di attrito, $L_a = -m\mu_d g d\cos 30°$, da cui $mv_f^2/2 = mgh - mgd\mu_d\cos 30°$ ovvero $v_f = \sqrt{2g(h - d\mu_d\cos 30°)} = 2.53$ m/s

Il lavoro fatto dalle forze di attrito è sempre negativo!

Altro esempio

Una cassa di massa $m = 15$ kg è trascinata in salita su di un piano inclinato per $d = 5.7$ m *a velocità costante*, fino ad un'altezza $h = 2.5$m





- Calcolare il lavoro fatto dalla tensione del filo e dalla forza peso

  $T = mg\sin\theta$ perché la velocità è costante; $L_T = -L_g = mgd\sin\theta = mgh = 368$J

- In presenza di attrito dinamico (coefficiente $\mu_d = 0.1$) cosa cambia?

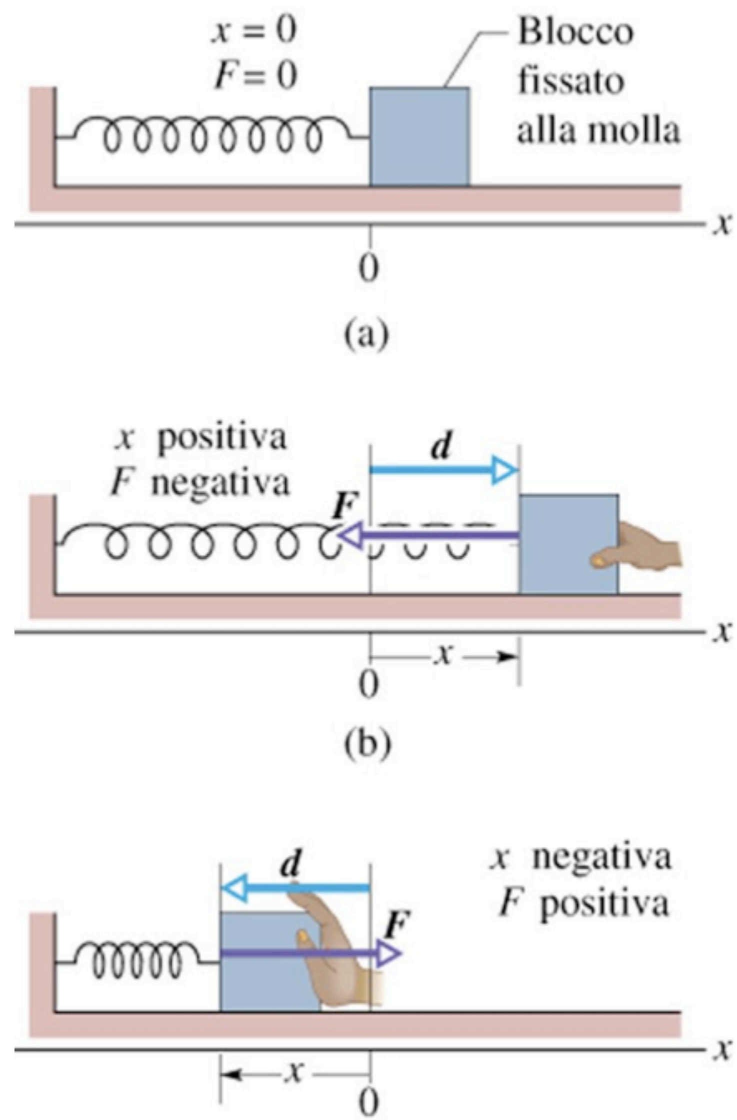
  $L_a = -\mu_d mgd\cos\theta = -75.5$J; L_g invariato, $L_T = -L_a - L_g = 443.5$J

Lavoro fatto da una forza elastica

- *Forza elastica*: forza variabile il cui modulo è proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione a riposo

- Legge di Hooke: $\boxed{F(x) = -kx}$
  k è detta costante della molla e si misura in N/m.

- $L > 0$ o $L < 0$ a seconda che la massa si avvicini o si allontani dalla posizione di riposo



Forza Elastica: lavoro

Il lavoro fatto dalla forza elastica dipende solo dall'allungamento della molla nel punto iniziale e finale.

Calcoliamo esplicitamente il lavoro fatto fra x_i e x_f:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

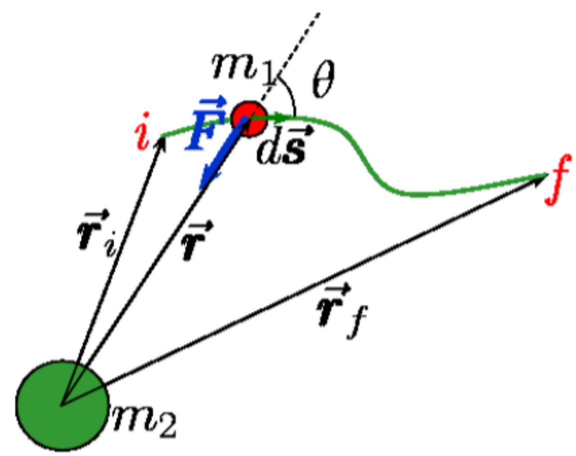
(assumiamo una molla ideale e senza massa!)

Forza $\propto 1/r^2$: lavoro

Un tipo di forza particolarmente importante è una forza *centrale* (diretta verso un punto fisso) *proporzionale all'inverso del quadrato della distanza*. Il lavoro fatto da tale forza dipende solo dalla distanza iniziale e finale dal centro. Scriviamo la forza nel modo seguente:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

attrattiva se $k > 0$, repulsiva altrimenti, diretta dalla particella 2, assunta fissa, verso la particella 1.



Il lavoro fatto dalla forza sulla particella 1 sarà

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -k \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = k \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right]$$

Potenza

Rapidità con cui viene svolta una certa quantità di lavoro.

- Potenza media: $P = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$ (ΔL è il lavoro fatto in un tempo Δt)

- Potenza istantanea: $\boxed{P = \dfrac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

  Dimostrazione: basta osservare che $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Unità di misura: 1 joule / 1 s $=$ 1 watt (W)