Esercizio (tratto dal Problema 2.7 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale si muove con moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio $R = 40\,\mathrm{cm}$. Ad un certo istante, quando si ha $\theta = 0$ e $\omega = \omega_0 = 5\,\mathrm{s}^{-1}$, il punto inizia a frenare con decelerazione costante, e si ferma dopo aver percorso un giro completo. Calcolare:

1. il tempo t_f impiegato a compiere il giro;
2. dove si trova il punto al tempo $t_f/2$;
3. il modulo dell'accelerazione del punto materiale al tempo $t_f/2$.

SOLUZIONE

- Indichiamo come istante iniziale $t = 0$ quello in cui il punto materiale inizia a decelerare. Il suo moto è circolare uniformemente accelerato con accelerazione negativa $-\alpha$ (per ora ignota). Sappiamo che

$$\begin{array}{rcl} \theta(t=0) & = & 0 \\ \omega(t=0) & = & \omega_0 \end{array} \tag{1}$$

e dunque la legge oraria si scrive

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \qquad\qquad \alpha > 0 \tag{2}$$

e la velocità angolare varia nel tempo come

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha\, t \tag{3}$$

1. Sappiamo ora che, in un tempo t_f compie un giro completo e si ferma, ossia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \theta(t_f) & = & 2\pi \\ \omega(t_f) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Sostituendo t_f nelle (2) e (3) Dalla seconda equazione otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \omega_0 t_f - \dfrac{1}{2}\alpha\, t_f^2 & = & 2\pi & \\ & & & \\ \omega_0 - \alpha\, t_f & = & 0 & \Rightarrow t_f = \dfrac{\omega_0}{\alpha} \end{array} \right.$$

Sostituiamo il t_f ricavato dalla seconda nella prima equazione

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega_0 \dfrac{\omega_0}{\alpha} - \dfrac{1}{2}\alpha\, \dfrac{\omega_0^2}{\alpha^2} & = & 2\pi \\ & & \\ t_f & = & \dfrac{\omega_0}{\alpha} \end{array} \right. \tag{5}$$

e dunque ricaviamo l'accelerazione angolare

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_0^2}{\alpha} & = & 2\pi \\ & \Downarrow & \\ \alpha & = & \dfrac{\omega_0^2}{4\pi} \end{array} \tag{6}$$

Sostituendo il valore di ω_0, otteniamo

$$\alpha = \frac{(5\,\mathrm{s}^{-1})^2}{4\pi} = 1.99\,\mathrm{s}^{-2} \tag{7}$$

Sostituendo ora α nella seconda delle Eq.(5) troviamo anche il tempo finale

$$t_f \;=\; \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{4\pi}{\omega_0} \tag{8}$$

Sostituendo il valore di ω_0, otteniamo

$$t_f = \frac{4\pi}{5\,\mathrm{s}^{-1}} = 2.51\,\mathrm{s} \tag{9}$$

2. Considerando ora il tempo
$$\frac{t_f}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (10)$$
e sostituendo tale tempo nella (2) otteniamo
$$\begin{aligned} \theta(\frac{t_f}{2}) &= \omega_0 \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\alpha}_{=\omega_0^2/4\pi} (\frac{t_f}{2})^2 = \\ &= \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{8\pi} (\frac{2\pi}{\omega_0})^2 = \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned} \quad (11)$$

3. Per trovare il modulo dell'accelerazione ricordiamo che le componenti radiale e tangenziale dell'accelerazione $\vec{a}$ sono date da
$$\begin{cases} a_r &= -R\omega^2 \\ a_\theta &= R\alpha \end{cases} \quad (12)$$
Sostituendo nell'Eq.(3) per la velocità angolare il tempo $t_f/2$ dato da (10), otteniamo
$$\begin{aligned} \omega(\frac{t_f}{2}) &= \omega_0 - \alpha \frac{t_f}{2} = \\ &= \omega_0 - \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{2\pi}{\omega_0} = \\ &= \frac{\omega_0}{2} \end{aligned} \quad (13)$$
e dunque le componenti dell'accelerazione al tempo $t_f/2$ valgono
$$\begin{cases} a_r(\frac{t_f}{2}) &= -R\,\omega^2(\frac{t_f}{2}) = -R\,\frac{\omega_0^2}{4} \\ a_\theta(\frac{t_f}{2}) &= R\,\frac{\omega_0^2}{4\pi} \end{cases} \quad (14)$$
Sostituendo i valori si ricava
$$\begin{cases} a_r(\frac{t_f}{2}) &= -0.4\,\mathrm{m}\,\frac{(5\,\mathrm{s}^{-1})^2}{4} = 2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ \\ a_\theta(\frac{t_f}{2}) &= 0.4\,\mathrm{m}\,\frac{(5\,\mathrm{s}^{-1})^2}{4\pi} = 0.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{cases} \quad (15)$$
Il modulo dell'accelerazione vale pertanto
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(2.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2 + \left(0.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2} = 2.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad (16)$$