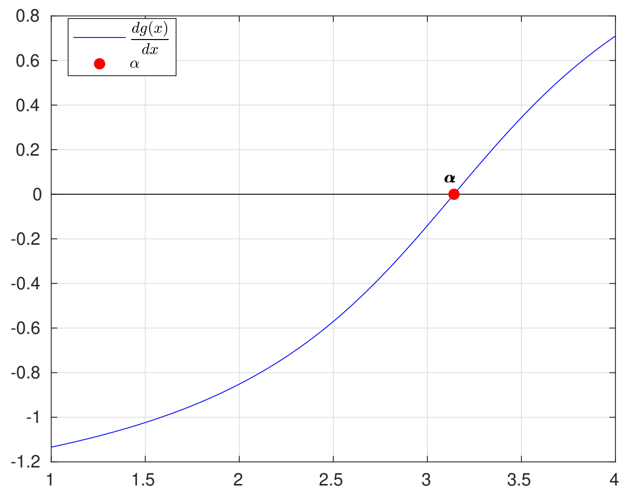
Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 12/01/2023

Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = g(\alpha)$, dove la funzione $g(x)$ è derivabile con derivata continua. Guardando alla seguente porzione del grafico della derivata di g



si può concludere che:

- [x] Per ogni $x_0 \in [2, 4]$ il metodo converge superlinearmente.
- [x] Per ogni $x_0 \in [\alpha, 3.5]$ il metodo converge in modo monotono.
- [ ] Per ogni $x_0 \in [1, \alpha]$ il metodo converge in modo monotono.
- [ ] Per ogni $x_0 \in [\alpha, 4]$ il metodo converge in modo alternato.
- [ ] Per ogni $x_0 \in [2, \alpha]$ il metodo converge in modo alternato.
- [ ] α è l'unico punto fisso di $g(x)$ su $\mathbb{R}$.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice triangolare inferiore e $b \in \mathbb{C}^n$ un vettore.

- [ ] Risolvere (nella maniera più efficiente) il sistema $Ax = b$ costa $\mathcal{O}(n)$ operazioni.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi che non sono a risposta multipla.

- [x] Risolvere (nella maniera più efficiente) il sistema $Ax = b$ costa $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni.
- [ ] Risolvere (nella maniera più efficiente) il sistema $Ax = b$ costa $\mathcal{O}(n^3)$ operazioni.
- [ ] Calcolare (nella maniera più efficiente) $A \cdot b$ costa $\mathcal{O}(n)$ operazioni.
- [x] Calcolare (nella maniera più efficiente) $A \cdot b$ costa $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni.
- [ ] Calcolare (nella maniera più efficiente) $A \cdot b$ costa $\mathcal{O}(n^3)$ operazioni.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $x \in \mathbb{R}$ e $\widetilde{x} = \mathrm{RN}(x)$ il numero floating point corrispondente ad x ottenuto con il metodo di arrotondamento *round-to-nearest*. Inoltre si denota con u la precisione di macchina e si assume che l'arrotondamento di x non generi overflow ed underflow. Da queste informazioni possiamo dedurre che:

- [ ] $|x - \widetilde{x}| \leq \frac{1}{2}u$.
- [x] Se $x \neq 0$ allora $\frac{|x-\widetilde{x}|}{|x|} \leq \frac{1}{2}u$.
- [x] x e $\widetilde{x}$ hanno lo stesso segno o sono entrambi nulli.
- [ ] $\mathrm{RN}(x^2) = (\widetilde{x})^2$.
- [x] $\mathrm{RN}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.
- [ ] Nessuna delle precedenti.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano dati 3 punti $(-1, y_1), (0, y_2), (1, y_3)$ in $\mathbb{R}^2$ per certi valori $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Sia $p(t) = p_0 + p_1 t$ l'appossimazione migliore, nel senso dei minimi quadrati, di questi punti con un polinomio di grado al più 1.

- [ ] p_0 non dipende da y_1.
- [ ] p_1 non dipende da y_1.
- [ ] p_0 non dipende da y_2.
- [x] p_1 non dipende da y_2.
- [ ] Esistono valori di y_1, y_2, y_3 per cui il polinomio di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati, di grado al più 1, non è unico.
- [x] Esistono infiniti valori di y_1, y_2, y_3 per cui il polinomio di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati ha grado 0.

Esercizio 2

Si consideri la matrice $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ definita come segue

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dimostri che A è riducibile.

Guardando il grafo orientato asosciato ad A si vede facilmente che non è fortemente connesso. Ad esempio partendo dal vertice 3 (ovvero associato alla terza riga) non si può raggiungere nessun altro vertice.

(ii) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si trovi una matrice di permutazione Π tale che $\Pi^T A \Pi$ è triangolare superiore (o inferiore) a blocchi.

Una possibile scelta (ma ce ne sono altre) è

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Pi^T A \Pi = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come segue

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} xy - \frac{1}{4} \\ \log(x+y) \end{bmatrix}.$$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini l'unica soluzione $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix}$ del sistema non lineare $f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini se il metodo di Newton-Raphson converge localmente in maniera superlineare ad α.

$$\det(Jf(\alpha)) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

quindi il metodo non converge in maniera superlineare.

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si scriva l'iterazione del metodo di Jacobi non lineare (anche detto Jacobi-Newton).

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - \frac{x_k y_k - 1/4}{y_k} \\ y_k - (x_k + y_k)\log(x_k + y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4y_k} \\ y_k - (x_k + y_k)\log(x_k + y_k) \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Si consideri l'integrale definito

$$\mathcal{I} = \int_e^{e^2} \frac{1}{\log(x)} dx.$$

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si calcoli l'approssimazione di $\mathcal{I}$ ottenuta con la formula dei trapezi e si dia una limitazione superiore al modulo del suo erroree. Si fornisca la soluzione di questo punto senza sostituire ad e la sua valutazione numerica.

La formula dei trapezi fornisce l'approssimazione

$$\mathcal{I} \approx \frac{3}{4}(e^2 - e),$$

il cui errore è limitato dall'alto dalla quantità

$$\frac{(e^2-e)^3}{12} \cdot \max_{x\in[e,e^2]} \left(\frac{1}{x^2 \log(x)^2} + \frac{2}{x^2 \log(x)^3} \right) = \frac{3(e^2-e)^3}{12e^2} = \frac{e(e-1)^3}{4}.$$

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dia una limitazione superiore al modulo dell'errore ottenuto con la formula generalizzata dei trapezi con 9 nodi (ovvero 8 sottointervalli). Si fornisca la soluzione di questo punto senza sostituire ad e la sua valutazione numerica.

Usando 8 sottointervalli la limitazione dall'alto sull'errore diventa

$$\frac{(e^2-e)^3}{12 \cdot 8^2} \cdot \max_{x\in[e,e^2]} \left(\frac{1}{x^2 \log(x)^2} + \frac{2}{x^2 \log(x)^3} \right) = \frac{e(e-1)^3}{256}.$$