Prova di Comunicazioni Numeriche

27 Giugno 2016

Es. 1 - Sia dato un processo Gaussiano $W(t)$ bianco in banda B, cioè con densità spettrale di potenza pari a $S_W(f) = \frac{N_0}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$.

1. Si estragga la variabile aleatoria $W = W(t_0)$, dove t_0 è un generico istante di tempo. Se ne scriva la densità di probabilità.
2. Il processo $W(t)$ viene quindi filtrato da un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \delta(t) + 0.5\,\delta(t-T)$ e poi inviato in un quadratore. Quanto vale il valor medio del processo Y(t) all'uscita del quadratore, sapendo che $B = \frac{3}{4T}$.

Es. 2 - In un sistema di comunicazione numerico QAM (Vedi Fig. 1 per la parte ricevente) il segnale trasmesso è $s(t) = \sum_k x_c[k]\,p(t-kT)\cdot cos(2\pi f_0 t) - \sum_k x_s[k]\,p(t-kT)\cdot sin(2\pi f_0 t)$, dove i simboli $x_c[k] \in A_s^c = \{-2, 2\}$ e $x_s[k] \in A_s^s = \{-1, 1\}$ sono indipendenti ed con probabilita' $P(x_c = -2) = 2/3$, $P(x_c = 2) = 1/3$, $P(x_s = -1) = 1/2$ e $P(x_c = 1) = 1/2$. L'impulso sagomatore $p(t)$ ha TCF pari a $P(f) = \sqrt{1 - |fT|}rect\left(\frac{fT}{2}\right)$, $f_0 \gg \frac{1}{T}$. Il canale di propagazione e' ideale e la DSP del rumore in ingresso al ricevitore e' bianco nella banda del segnale trasmesso con DSP pari a $\frac{N_0}{2}$. Il filtro in ricezione $h_r(t) = p(t)$. Sia per il ramo in fase che per il ramo in quadratura la soglia di decisione e' $\lambda = 0$. Calcolare:

1. L'energia media per simbolo trasmesso,
2. La potenza di rumore in uscita ai filtri in ricezione su entrambi i rami (in fase e quadratura, $P_{n_{uc}}$ e $P_{n_{us}}$)
3. La probabilità di errore sul simbolo.

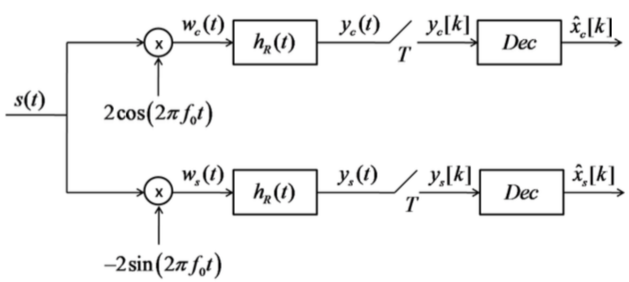


Fig.1

SOLUZIONE ESERCIZIO 1:

$W(t)$ è GAUSSIANO $\Rightarrow$ $W(t_0)$ è una V.A. GAUSSIANA.

$E[W(t_0)] = 0$ perchè è una V.A. Gaussiana BIANCA

$$\sigma_W^2 = P_W - E[W(t_0)] = P_W$$

$$E[W(t_0)] \downarrow 0$$

$$P_W = \int_{-\infty}^{+\infty} S_W(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-B}^{B} df = $$

$$= N_0 B$$

$$\Rightarrow f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 B}}\, e^{-\frac{w^2}{2N_0 B}}$$

Sapendo che $h(t)$ è LTI = SLS allora possiamo dire che

$$E[w(t) \otimes h(t)] = E[w(t)] \otimes E[h(t)] = m_w(t) \otimes h(t) = \emptyset$$

$$w(t) \otimes h(t) \Rightarrow \tilde{Y}(f) = W(f)H(f) = W(f) + \frac{1}{2}W(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$\tilde{y}(t) = \text{ATCF}[\tilde{Y}(f)] = w(t) + \frac{1}{2}w(t-T)$$

$$E[(w(t) + \frac{1}{2}w(t-T))^2] = E[w^2(t) + \frac{1}{4}w^2(t-T) + w(t)w(t-T)]$$

$\Rightarrow$ $E[w^2(t)] = P_w$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{4}E[w^2(t-T)] \Rightarrow$ visto che $T = \frac{4}{3}B$ allora abbiamo la seguente situazione $\Rightarrow$ $P_w(t - \frac{4}{3}B) = P_w(t) = N_0B$

$$\frac{1}{4}E[w^2(t-T)] = \frac{1}{4}P_w(t) = \frac{N_0B}{4} = \frac{P_w}{4}$$

$\Rightarrow$ $E[w(t)w(t-T)] \Rightarrow t = t_1, T = t_1 - t_2 \Rightarrow E[w(t_1)w(t_2)] = R_w(t_1, t_2)$

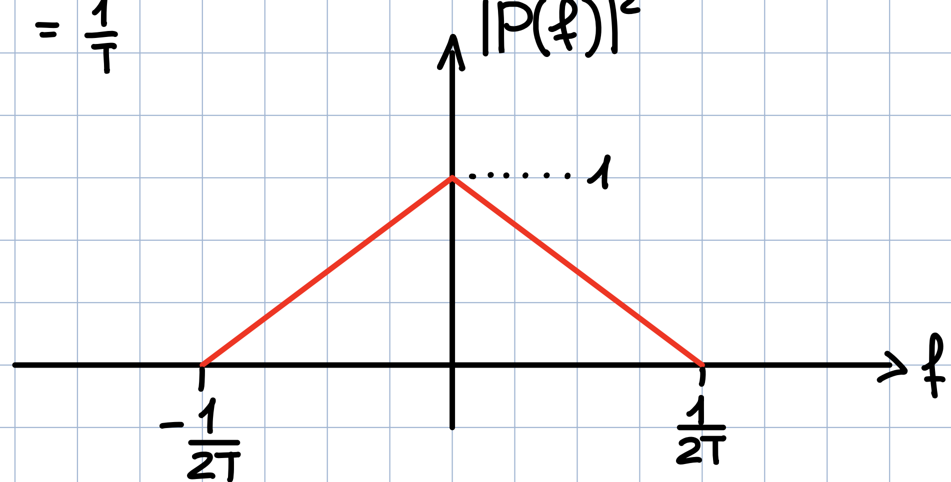
Soluzione Esercizio 2 :

$$E_s = \frac{1}{2}\left(E[x_c^2[m]] + E[x_s^2[m]]\right) E_P$$

$$E[x_c^2[m]] = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 P(X=\alpha_i) = \frac{2}{3}(-2)^2 + \frac{1}{3}(2)^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$E[x_s^2[m]] = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = 1$$

$$E_P = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{1}{T}$$



$$E_s = \frac{5}{2T}$$

$$P_{n_{u_c}} = P_{n_{u_s}} = N_0 E_{h_r} = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{T}$$

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_r(t) \Rightarrow h(t) = p(t) \otimes h_r(t) \Rightarrow H(f) = P(f)H_r(f) = P(f)P(f) = \left(1 - \frac{|f|}{1/T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2/T}\right)$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}^2\left(t \cdot \frac{1}{T}\right) \Rightarrow h(kT) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}^2\left(kT \cdot \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T}\,\delta[k] \Rightarrow \text{NO ISI}$$

$$P_E(b) = P_{E_c}(b)(1 - P_{E_s}(b)) + P_{E_s}(b)(1 - P_{E_c}(b)) + P_{E_s}(b)P_{E_c}(b))$$

$P_{E_c}(b) \triangleq$ PROBABILITÀ DI ERRORE SUL RAMO IN FASE

$P_{E_s}(b) \triangleq$ PROBABILITÀ DI ERRORE SUL RAMO IN QUADRATURA