# Sistemi di coordinate

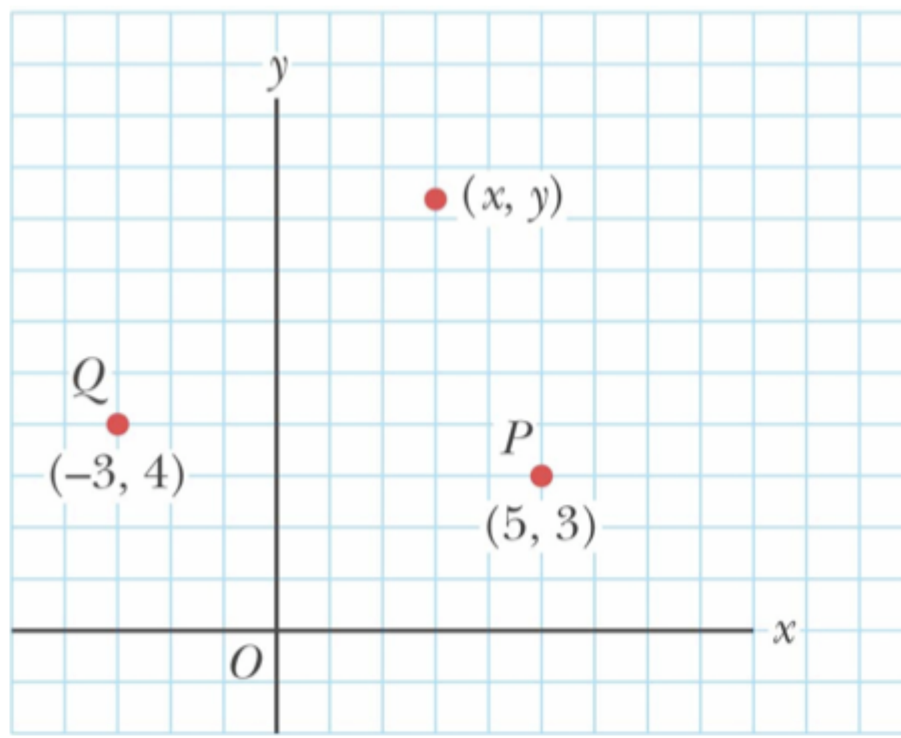
Servono a descrivere la posizione di un punto nello spazio. Un sistema di coordinate consiste in

- un punto fisso di riferimento chiamato *origine*;
- degli assi specifici con scale ed etichette;
- istruzioni su come individuare un punto rispetto all'origine e agli assi.

# Sistema di coordinate cartesiane

- Chiamato anche *sistema di cordinate rettangolari*.

- Per il caso a due dimensioni (l'esempio qui accanto):
  - Gli assi $x$ e $y$ si incrociano nell'origine
  - I punti sono individuati da $(x, y)$



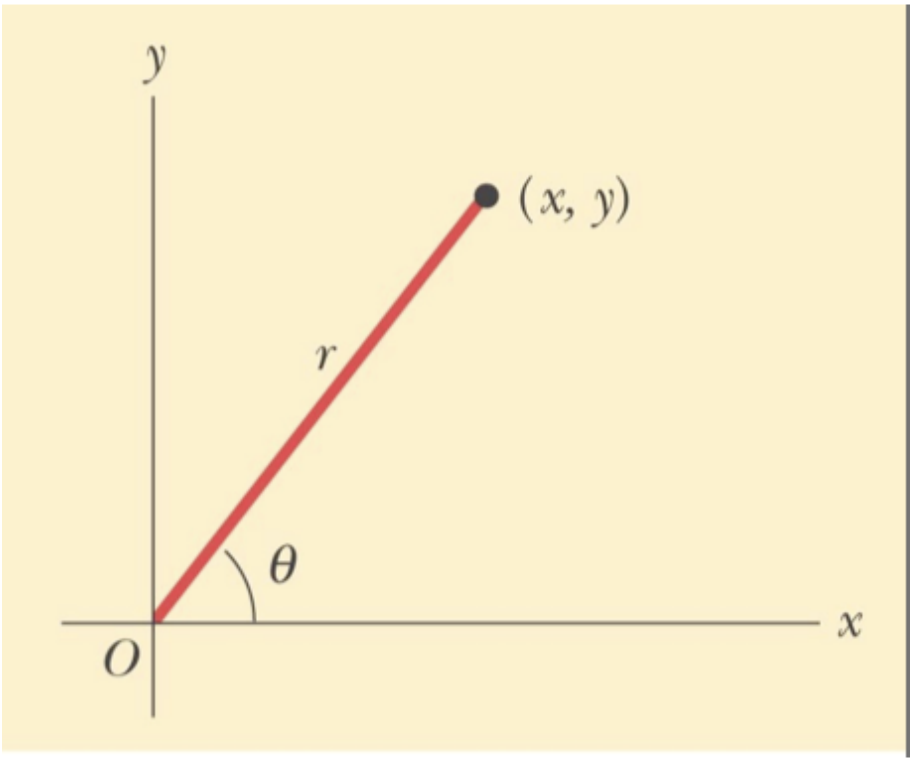

In tre dimensioni, 3 coordinate $(x, y, z)$ sono sufficienti per definire la posizione di una particella nello spazio

# Sistema di coordinate polari

- Esempio bidimensionale (qui accanto): prendiamo un'origine e una linea di riferimento

- Il punto è a distanza $r$ dall'origine nella direzione dell'angolo $\theta$, definito in senso antiorario dalla linea di riferimento

- Il punto è definito da $(r, \theta)$




Si estende a tre dimensioni introducendo due angoli $\theta$ e $\phi$.

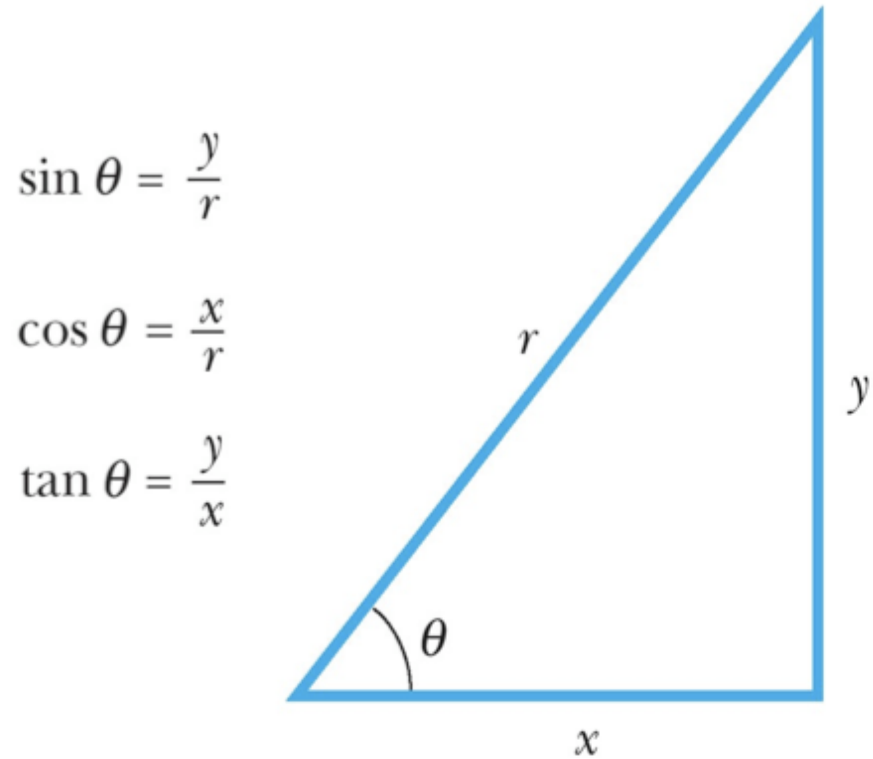
# Trasformazioni di coordinate

- *Da coordinate polari a cartesiane:* Formiamo un triangolo retto con $r$ e $\theta$ :

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

- *Da coordinate cartesiane a polari:* $r$ è l'ipotenusa e $\theta$ un angolo

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
r &= \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

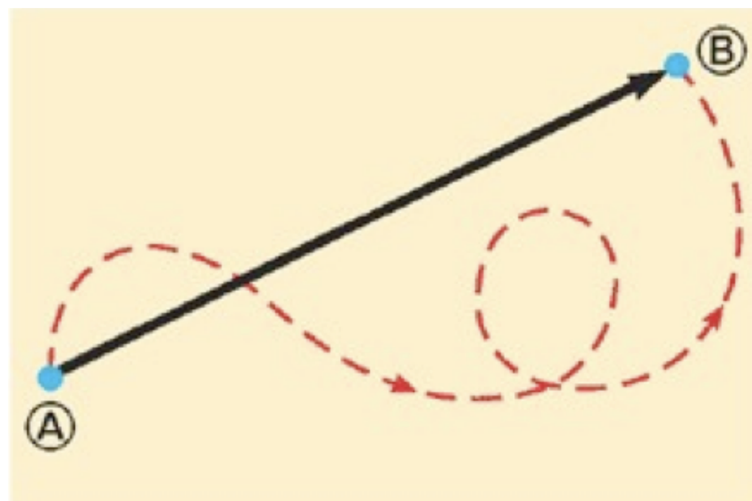


# Grandezze scalari e vettoriali

- Grandezze *scalari*: sono completamente specificate da un numero in unità appropriate.
  — Volume, massa, intervalli di tempo, etc., sono scalari.

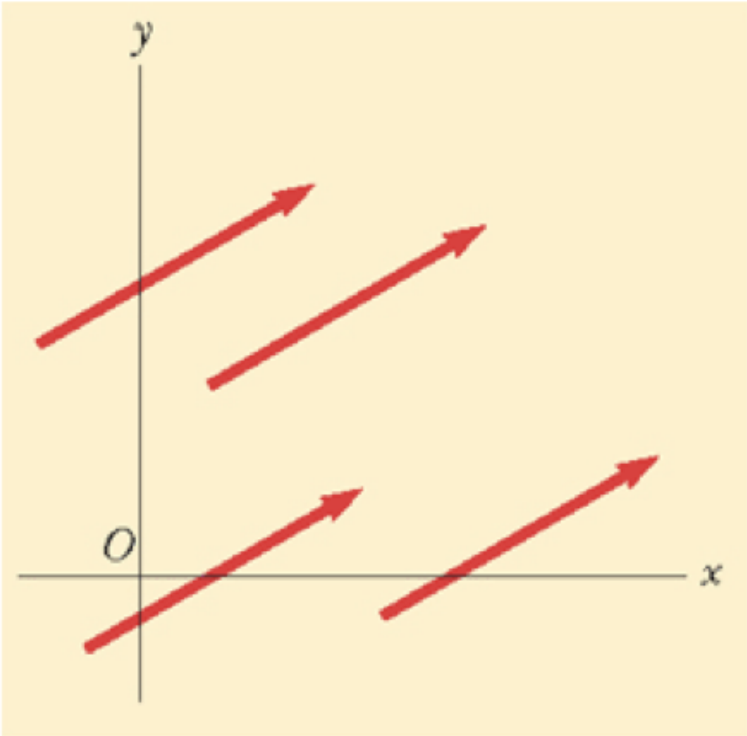
- Grandezze *vettoriali*: sono specificate da *modulo* (o intensità), *direzione*, *verso*.
  — Spostamento, velocità, forze, etc., sono vettori.

Esempio: vettore spostamento di un punto materiale da A a B. Il modulo è la distanza fra A e B (differisce dalla distanza percorsa!)



# Vettori

- Notazione: $\vec{A}$ o anche $\mathbf{A}$ o $\underline{A}$
- Modulo: $|\vec{A}|$ o semplicemente $A$ (sempre positivo!)
- I vettori possono essere "applicati" ad un punto
- Tutti i vettori sovrapponibili con una traslazione sono equivalenti allo stesso vettore "libero"

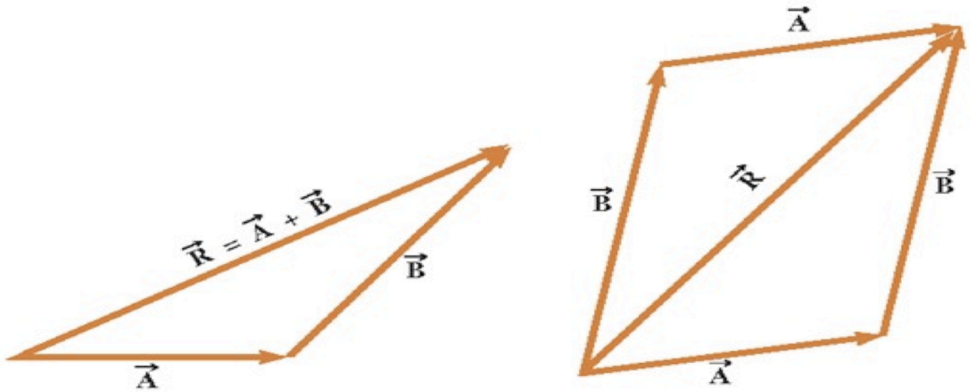



*Nota: i vettori hanno le stesse unità di misura della grandezza che rappresentano: un vettore spostamento è in metri, un vettore velocità in metri al secondo etc.*

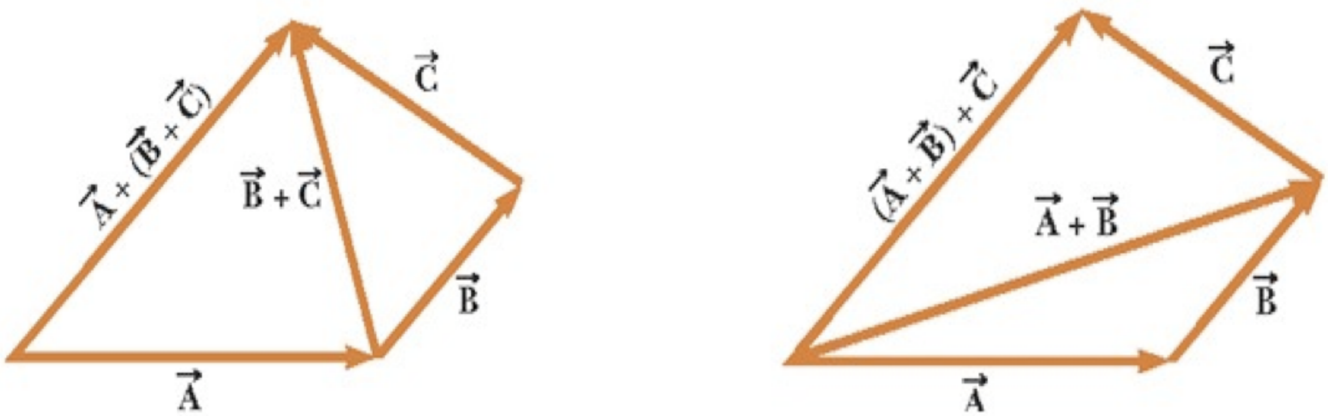
# Somma di Vettori

Regola del parallelogramma per la somma di vettori

**Attenzione:** somma vettoriale $\neq$ somma dei moduli!

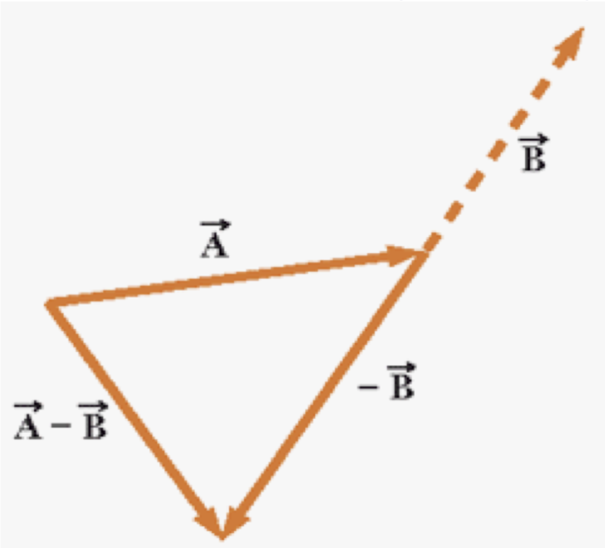



Vale la proprietà associativa $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$:

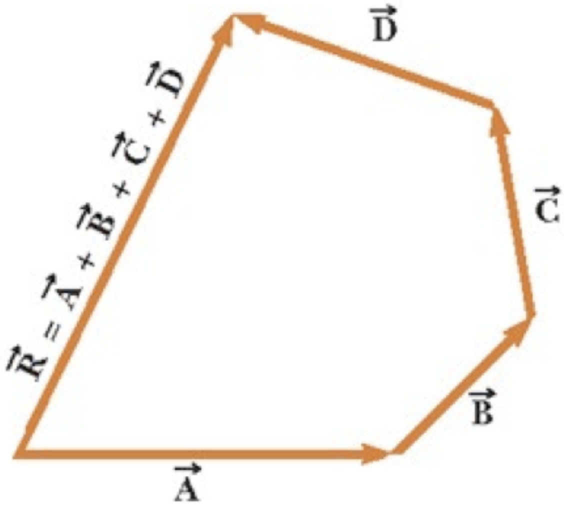


# Somma di Vettori 2

Vettori con segno negativo:

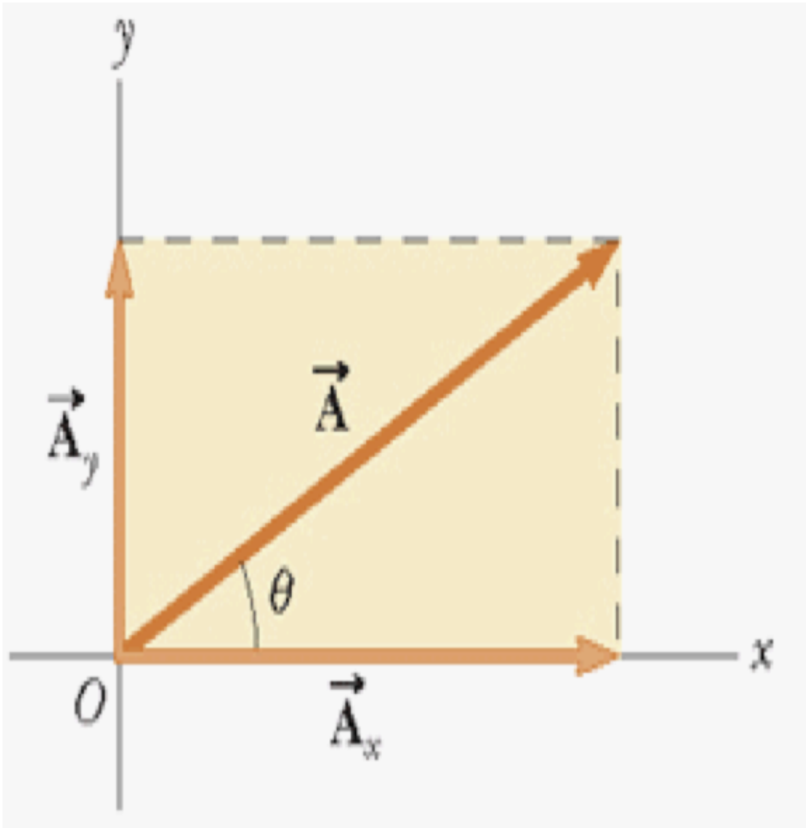


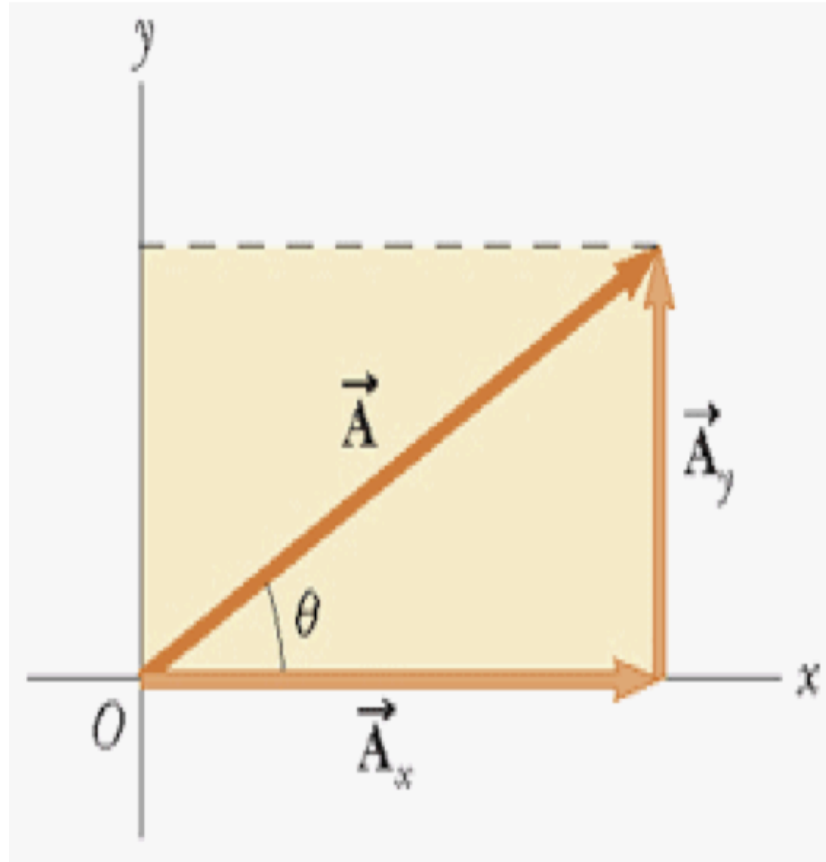

Somma di 4 vettori:




In generale, se $a$ è un numero, $|a\vec{A}| = |a|A$.

# Vettori in coordinate cartesiane



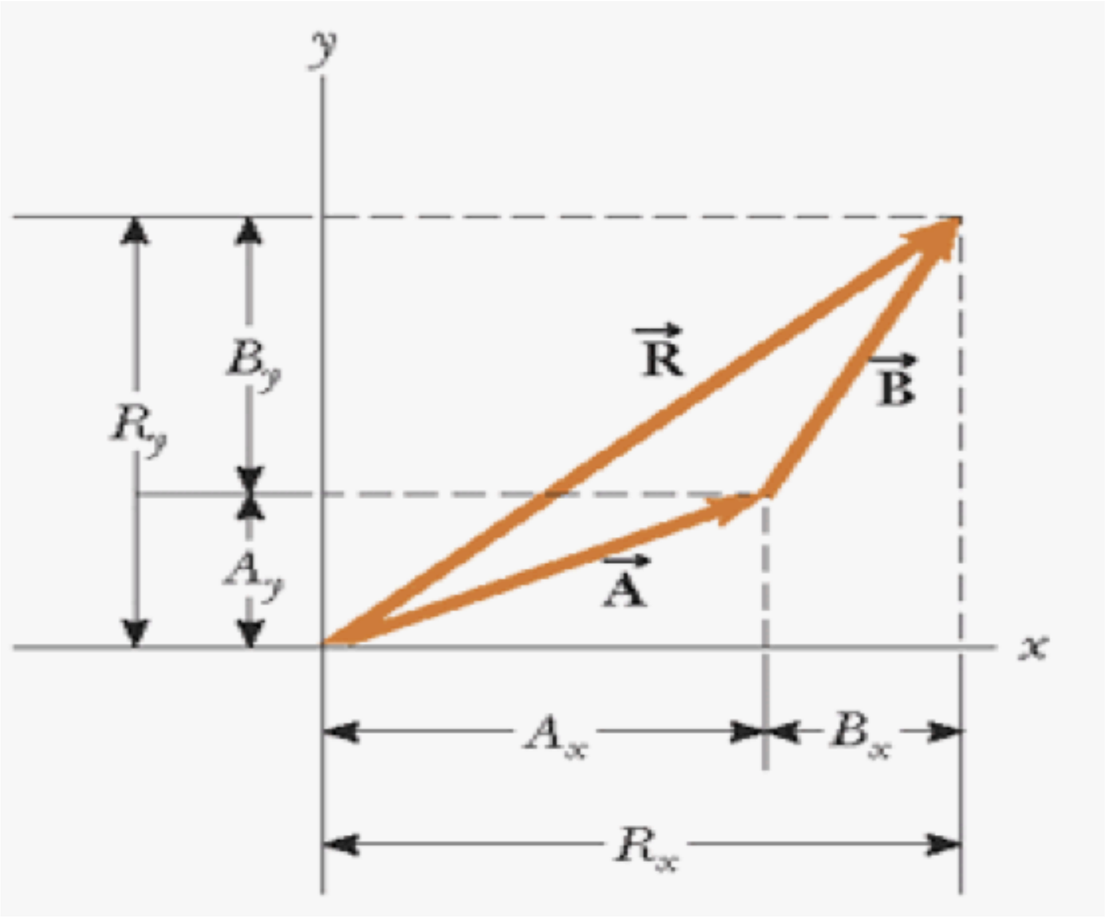




$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \equiv (A_x, A_y), \qquad A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

Notare che $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$.

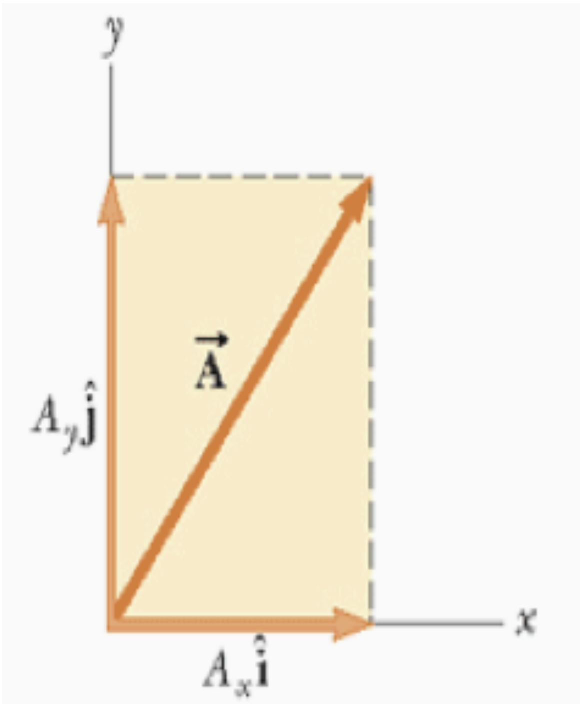
# Somma di vettori in coordinate cartesiane

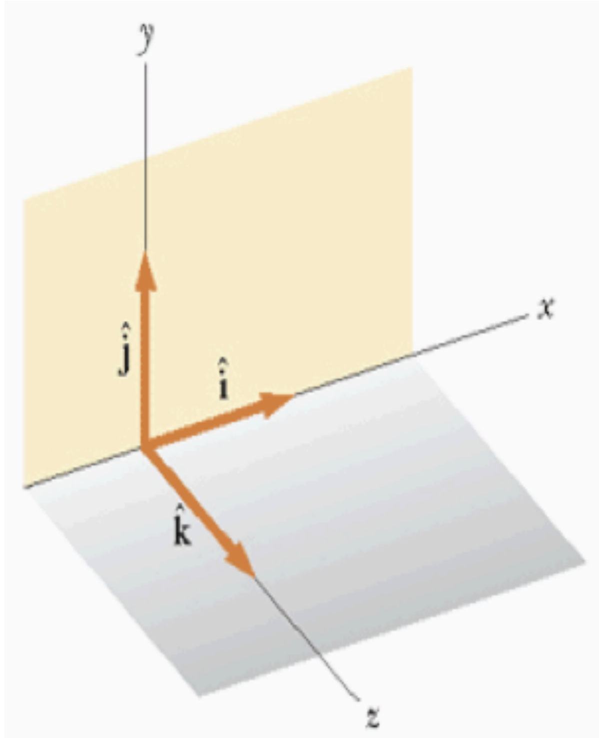
$$\vec{A} + \vec{B} \equiv (A_x + B_x, A_y + B_y)$$



# Versori (vettori di modulo unitario)

Fra i *versori*, cioè vettori di modulo unitario, sono particolarmente importanti e utili i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ lungo i tre assi cartesiani:




$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

# Prodotto Scalare

Il *prodotto scalare* di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica come $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ed è dato da $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta,}$ dove $\theta$ è l'angolo fra i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. E' il prodotto del modulo del primo vettore ($A$) per la proiezione del secondo vettore sul primo ($B\cos\theta$), o viceversa. Proprietà:

- $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$; $(a\vec{A})\cdot(b\vec{B}) = (ab)(\vec{B}\cdot\vec{A})$; $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$
- Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al modulo del vettore al quadrato: $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2}$
- Sfruttiamo $\vec{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$: troviamo

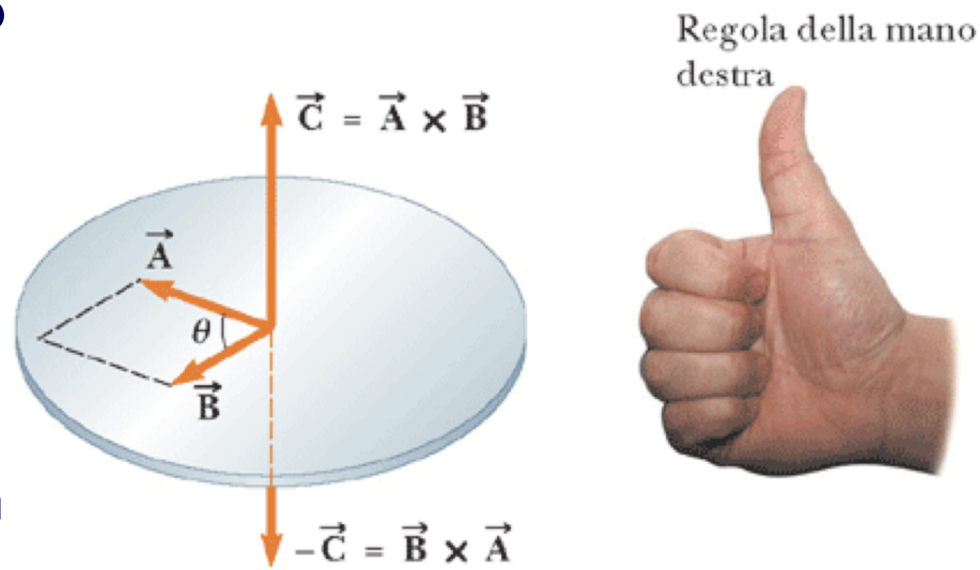
$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

  perché $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$; $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$

# Prodotto Vettore

Come possiamo formare un vettore da altri due vettori? Il *prodotto vettore*: $\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$ è definito come segue:

- $|\vec{C}| = AB \sin\theta$, dove $\theta$ è l'angolo compreso fra i due vettori;
- $\vec{C}$ è un vettore perpendicolare al piano formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- il verso di $\vec{C}$ è determinato dalla *regola della mano destra*




Da notare che $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$, e che $\vec{A} \times \vec{A} = 0$. In generale, il prodotto vettore di due vettori paralleli è nullo. Il modulo del prodotto vettore è uguale alla superficie del parallelogramma formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

# Prodotto Vettore in coordinate cartesiane

Sfruttiamo la decomposizione dei vettori come somma sui versori:

$$\vec{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

Troviamo

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right) \\
&= \hat{\mathbf{i}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{j}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{k}}(A_xB_y - A_yB_x)
\end{aligned}$$

perché

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0, & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \\
\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, & \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, & \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}
\end{array}$$

*Nota curiosa: mentre il prodotto scalare è ben definito in qualunque spazio vettoriale, il prodotto vettore è definito solo in 3 o 7 dimensioni*

# Prodotto Vettore come determinante

Un modo semplice per ricordarsi l'espressione del prodotto vettore è usare le regole per il calcolo del determinante di una matrice:

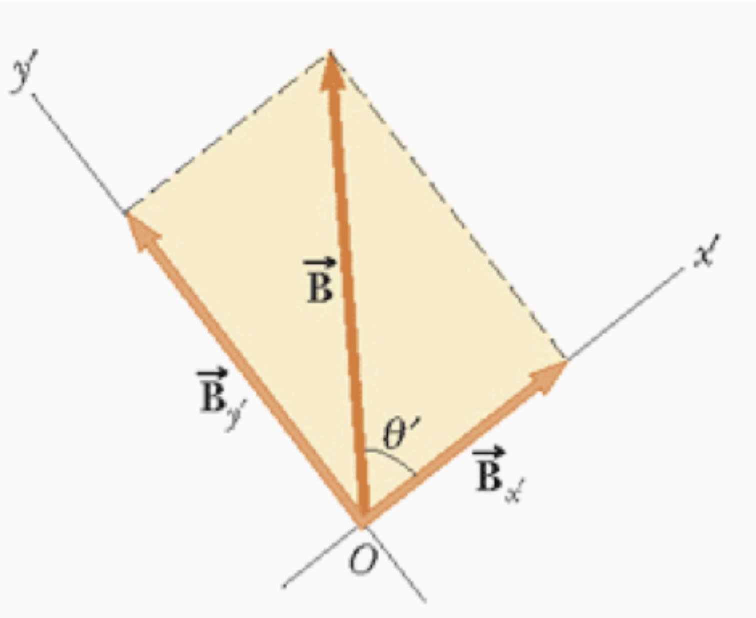
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{\mathbf{j}}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{\mathbf{k}}(A_xB_y - A_yB_x)\end{aligned}$$

*E' utile introdurre il tensore di Ricci-Levi Civita* $\epsilon_{ijk}$ *che vale* $+1$ *se* $ijk = xyz$ *e permutazioni cicliche;* $-1$ *se* $ijk = yxz$ *e permutazioni cicliche;* $0$ *altrimenti. Usando la convenzione di Einstein: indici ripetuti sono sommati, si può scrivere*

$$(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k.$$

*Notare la seguente formula utile:* $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$*, dove* $\delta_{ij}$ *è la delta di Kronecker, che vale 1 se* $i = j$*, 0 altrimenti.*

# Vettore in sistema di coordinate ruotato




Le coordinate di un vettore dipendono dal sistema di coordinate: se ruotiamo o trasliamo il sistema di riferimento, le coordinate di tutti i vettori cambiano seguendo una stessa *legge di trasformazione*.

*Relazione fra le componenti* $(A_x, A_y)$ *e* $(A'_x, A'_y)$ *nel sistema originario e ruotato di* $\alpha$*:*

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha \\ A'_y &= -A_x \sin\alpha + A_y \cos\alpha \end{aligned}$$

*In forma matriciale, con i vettori rappresentati come "colonne":*

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \equiv U(\alpha) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

*Notare che la matrice di trasformazione è unitaria:* $U(-\alpha) = U^T(\alpha) = U^{-1}(\alpha)$

# Scalari, Vettori, leggi fisiche, sistemi di coordinate

- Le leggi fisiche non possono dipendere dal sistema di coordinate!
- Il prodotto scalare di due vettori *non* dipende dal sistema di coordinate: è *invariante* rispetto a rotazioni del sistema di coordinate.
- Una legge fisica espressa come relazione tra quantità vettoriali è *covariante*: per esempio, nella legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, entrambe i membri si trasformano allo stesso modo

Spesso avremo a che fare con *funzioni vettoriali*: ad esempio, $\vec{r}(t)$, posizioni di un punto al tempo $t$, equivalente a una terna di funzioni: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

# Esercizi

1. Consideriamo due vettori spostamento $\vec{A} = (1.0m)\hat{\mathbf{j}} - (4.0m)\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{B} = -(3.0m)\hat{\mathbf{j}} + (2.0m)\hat{\mathbf{k}}$. Calcolare:
   - il vettore spostamento totale;
   - il vettore differenza;
   - il prodotto scalare e il prodotto vettore dei due vettori.

2. Trovare l'area della superficie del triangolo di vertici $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$.

3. Determinare l'angolo tra i due vettori $(-2,-2\sqrt{3},0)$ e $(2,-2\sqrt{3},0)$.

4. Individuare il versore della direzione nello spazio che forma angoli uguali con gli assi coordinati.

# Soluzioni

1. *Vettore spostamento totale:* $\vec{A}+\vec{B} = -(2.0m)\hat{\mathbf{j}}-(2.0m)\hat{\mathbf{k}}$. *Vettore differenza:* $\vec{A}-\vec{B} = (4.0m)\hat{\mathbf{j}}-(6.0m)\hat{\mathbf{k}}$. *Prodotto scalare:* $\vec{A}\cdot\vec{B} = -(3.0m^2)-(8.0m^2) = -11m^2$. *Questo è anche uguale a* $|A||B|\cos\theta$. *Dato che* $|A| = \sqrt{1.0m^2+16.0m^2} = \sqrt{17}m$ *e* $|B| = \sqrt{9.0m^2+4.0m^2} = \sqrt{13}m$, *ne consegue che* $\cos\theta = -11/\sqrt{13}/\sqrt{17}$, *ovvero* $\theta = 137.73°$.

   *Prodotto vettore:* $\vec{A}\times\vec{B} = (2.0m^2)\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} + (12.0m^2)\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}} = -10m^2\hat{\mathbf{i}}$. $|\vec{A}\times\vec{B}| = 10m^2$ *è anche uguale a* $|A||B|\sin\theta$. *Dato che* $\sin\theta = 0.6726725 = 10/\sqrt{13}/\sqrt{17}$, *il valore di* $\theta$ *è consistente con il caso precedente.*

2. *Si sfrutta una proprietà del prodotto vettore: il suo modulo è uguale all'area del parallelogramma formato dai due vettori, ovvero il doppio dell'area del triangolo formato dai due vettori. Considerate i vettori* $\vec{X} = \vec{B}-\vec{A}$ *e* $\vec{Y} = \vec{C}-\vec{A}$: *l'area della superficie del triangolo ABC è data da* $|\vec{X}\times\vec{Y}|/2$. *Dato che* $\vec{X} = (-1,2,0)$, $\vec{Y} = (-1,0,3)$, *abbiamo* $\vec{X}\times\vec{Y} = (6,3,2)$ *il cui modulo vale* $\sqrt{6^2+3^2+2^2} = 7$, *da cui il risultato: area del triangolo = 3.5.*

3. *I due vettori hanno prodotto scalare* $(-2,-2\sqrt{3},0)\cdot(2,-2\sqrt{3},0) = -4+4\cdot 3 = 8$. *Quest'ultimo è anche uguale a* $|(-2,-2\sqrt{3},0)||(2,-2\sqrt{3},0)|\cos\theta$. *Il modulo dei*

due vettori è lo stesso: $|(\pm 2, -2\sqrt{3}, 0)| = \sqrt{(\pm 2)^2 + 2^2 \cdot 3} = 4$ da cui $\cos\theta = 1/2$ e $\theta = 60°$.

4. Scriviamo il generico versore come $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$, con $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$. Il prodotto scalare con i versori degli assi dà $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_x = \cos\alpha$, $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_y = \cos\beta$, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = n_z = \cos\gamma$, dove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sono i tre angoli formati con i tre assi (secondo la notazione tradizionale). Dato che si richiede $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, si ha $n_x = n_y = n_z = 1/\sqrt{3}$, corrispondente ad angoli $\alpha = \beta = \gamma = 54.73°$.

# Cinematica in due o più dimensioni

- Le grandezze cinematiche fondamentali:
  - *posizione*,
  - *velocità*,
  - *accelerazione*,

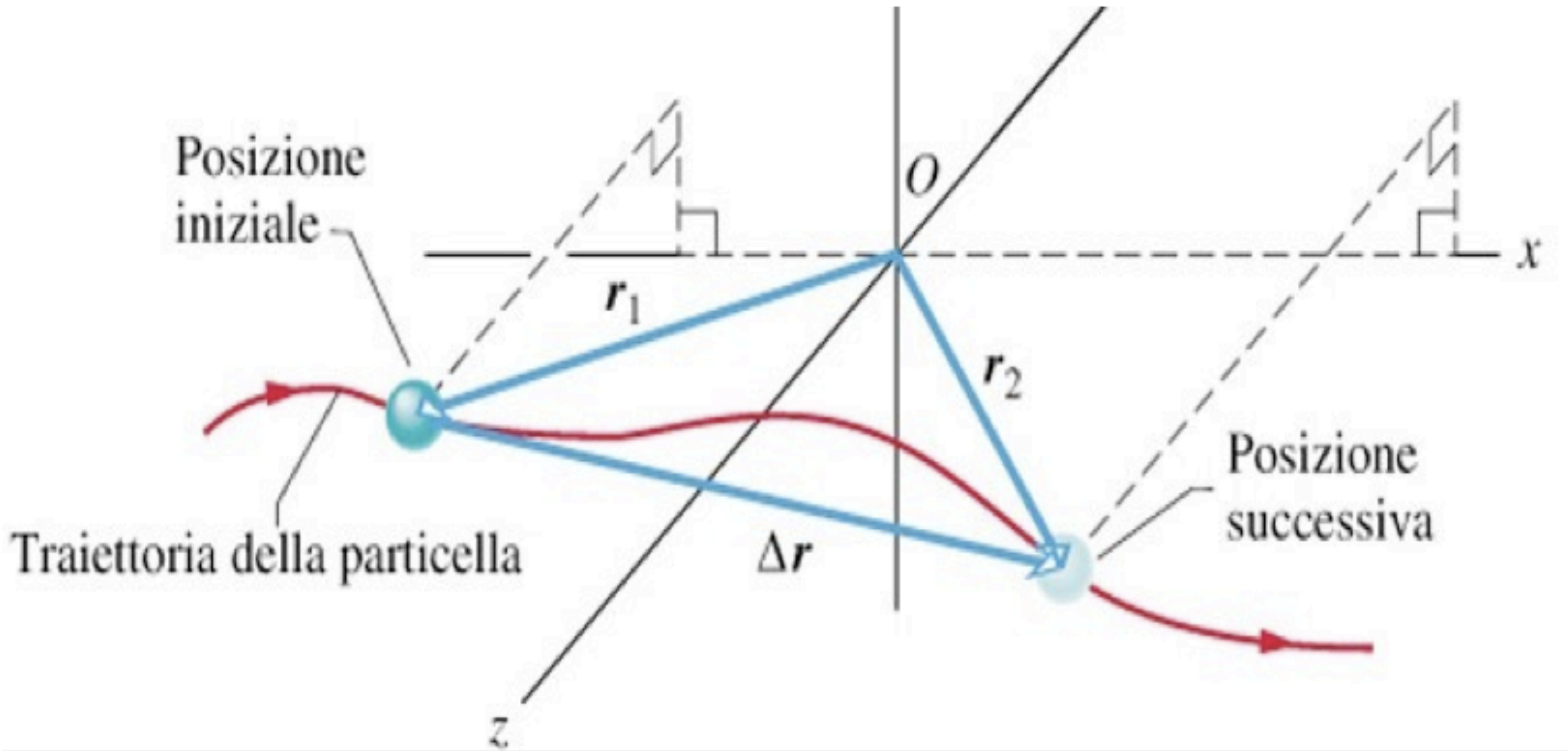
  sono dei *vettori* nello spazio a due o tre dimensioni, dotati di *modulo, direzione, verso*.

  In realtà anche nel moto rettilineo tali grandezze sono dei vettori, ma ... in una dimensione! Hanno un segno e un modulo ma la direzione è fissata.

- Il corpo percorre una *traiettoria* nello spazio

# Posizione e spostamento

- Vettore *posizione:* $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$
- *Spostamento:* $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}$

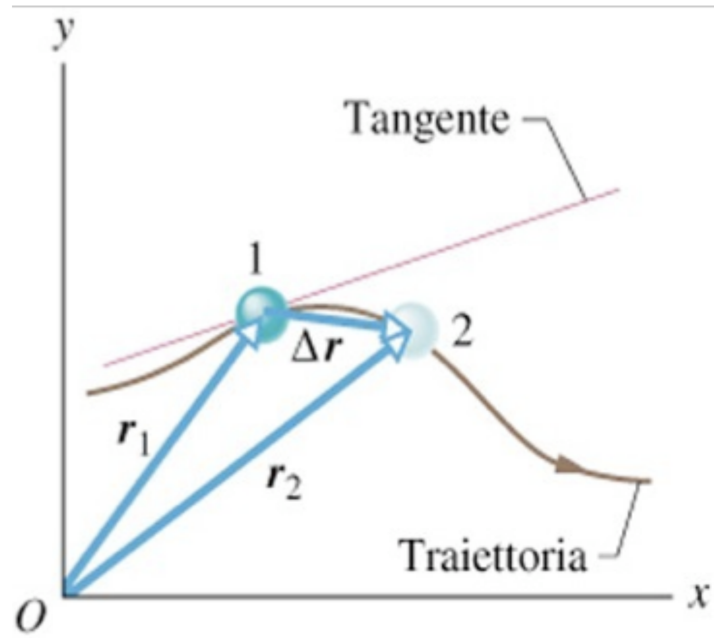


# Velocità

Velocità media: $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

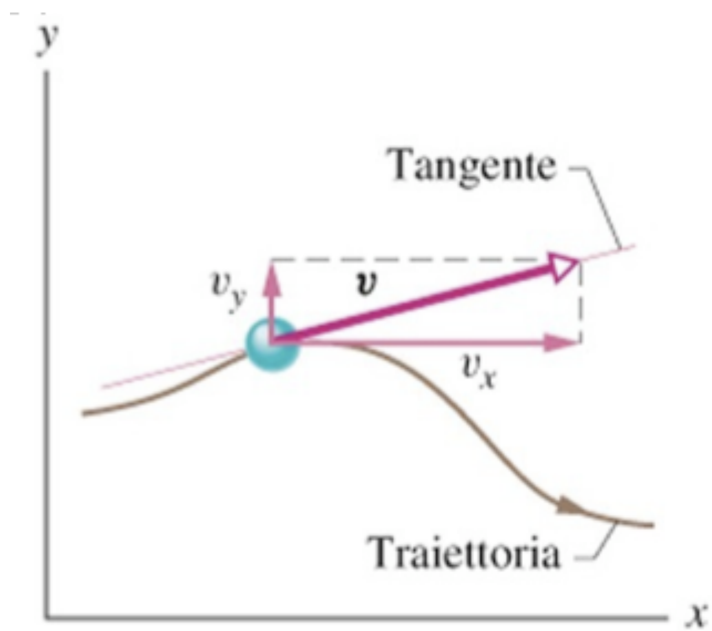
Velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$




La velocità istantanea:

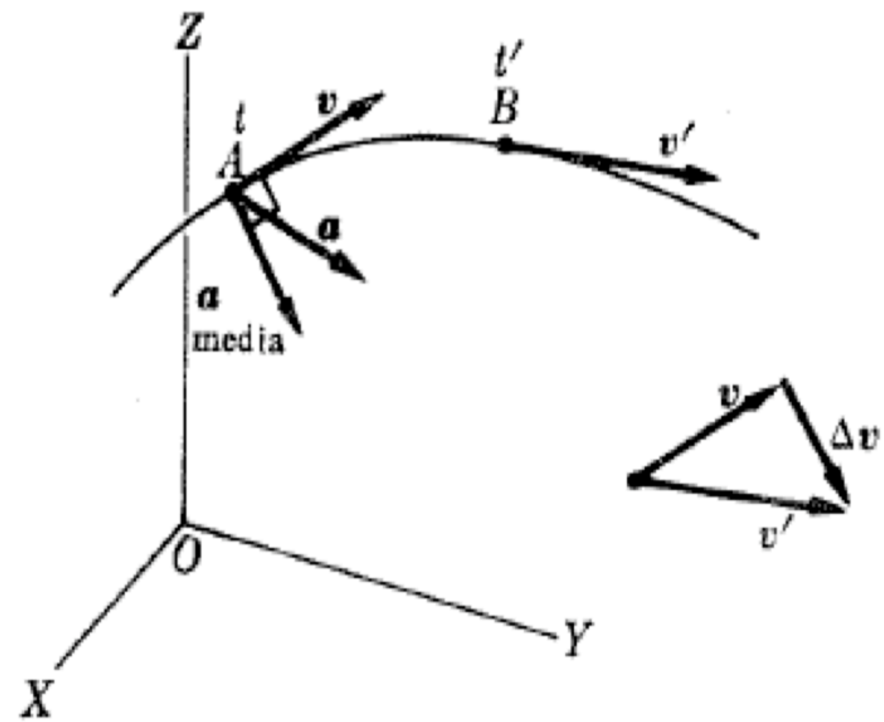
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$




è sempre *tangente* alla traiettoria

# Accelerazione

Accelerazione media: $\vec{\bar{a}} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$




Accelerazione istantanea:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

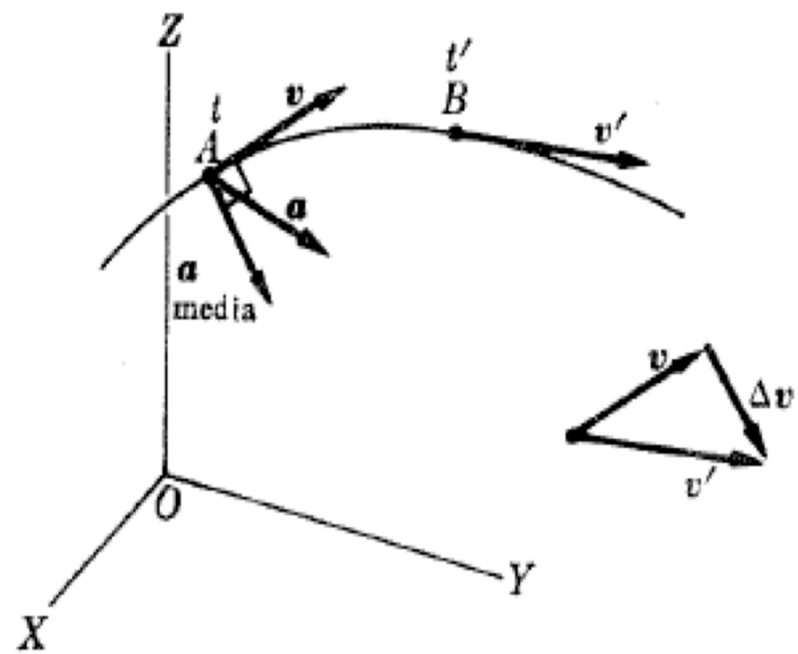
In componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= a_x(t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\hat{\mathbf{k}} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

# Accelerazione (2)

- In generale, in un moto curvilineo, la velocità cambia *sia in modulo che in direzione*: l'accelerazione può essere non nulla anche se il modulo della velocità non cambia.

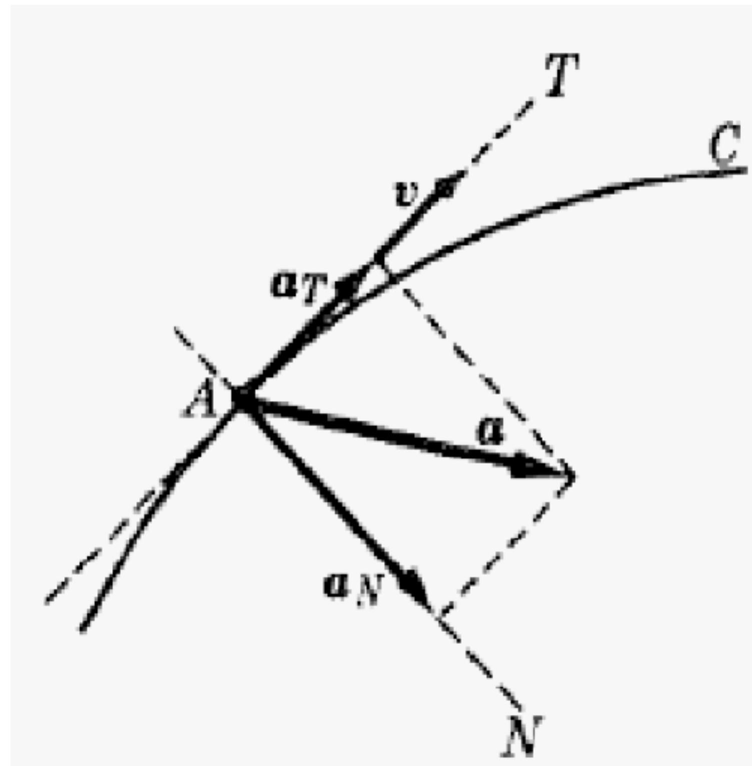
- L'accelerazione è un vettore *nella direzione della variazione della velocità*. Poiché la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria s'incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la *concavità* della traiettoria



# Accelerazione (3)

Scomponiamo velocità e accelerazione in parte *tangenziale* (lungo la tangente) e parte *radiale* (lungo la normale alla curva):

Introducendo i versori $\hat{\mathbf{u}}_T$ e $a_N \hat{\mathbf{u}}_N$,




$$\vec{v} = v_T \hat{\mathbf{u}}_T, \quad \vec{a} = a_T \hat{\mathbf{u}}_T + a_N \hat{\mathbf{u}}_N$$

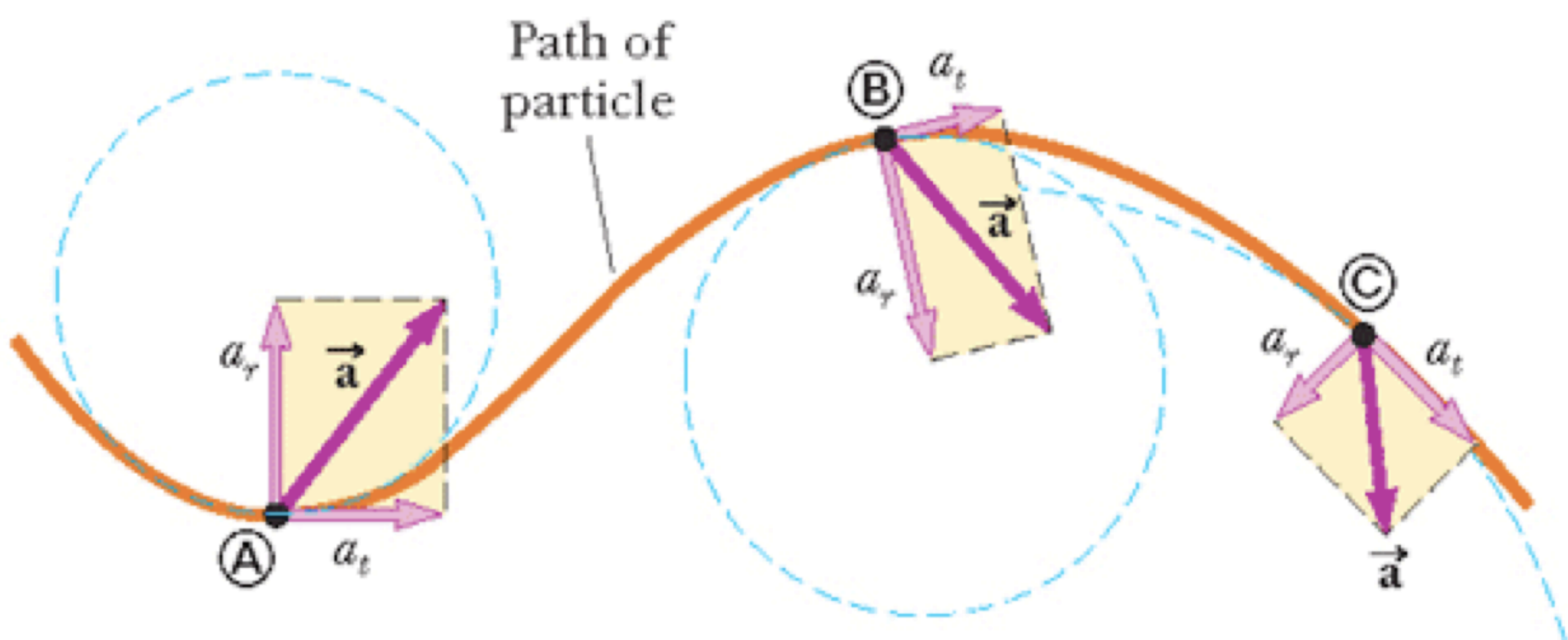
(la velocità è solo tangenziale) da cui

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_T}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v_T \frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$$

($\hat{\mathbf{u}}_T$ dipende dal tempo, ma $\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{u}}_T \cdot \hat{\mathbf{u}}_T) = 0$ da cui $\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_T = 0$).

- Da qui si vede che $a_T$ è legata alla variazione del *modulo*, $v_T$, di $\vec{v}$; $a_N$ alla variazione della *direzione* di $\vec{v}$.

# Accelerazione in moto curvilineo




- L'accelerazione *tangenziale* causa il cambiamento nella velocità *scalare* della particella;

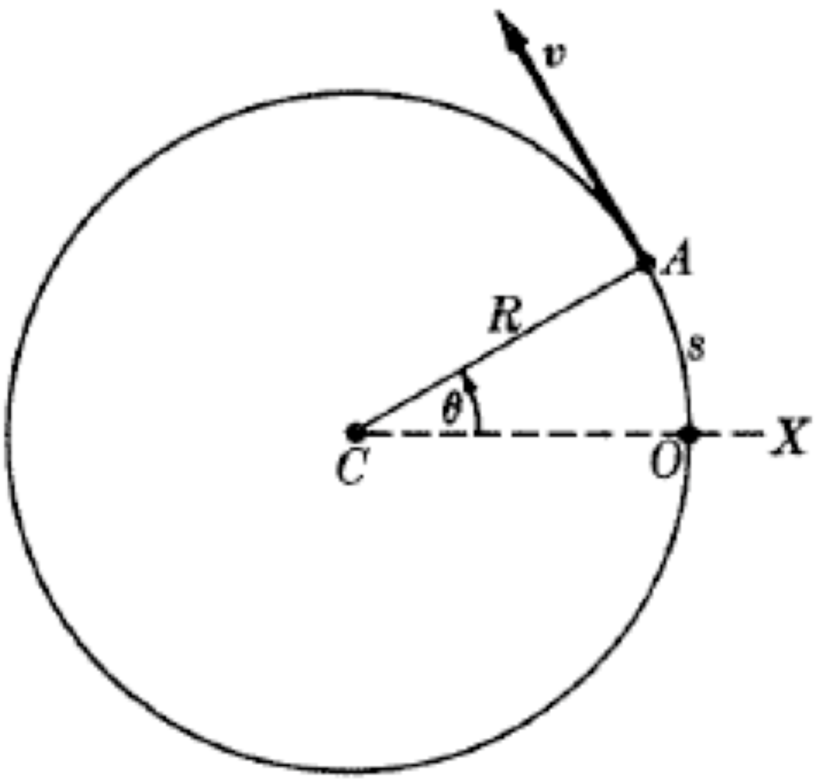
- L'accelerazione *radiale* causa il cambiamento della *direzione* del vettore velocità.

# Moto circolare e circolare uniforme

Moto caratterizzato da $\vec{v} \perp \vec{R}$, con $R$ costante. Introduciamo la distanza percorsa lungo la circonferenza, $s = R\theta$:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

La grandezza $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ è detta *velocità angolare*, si misura in radianti/s o in s$^{-1}$.




Moto circolare *uniforme:* caratterizzato da velocità angolare $\omega$ costante.

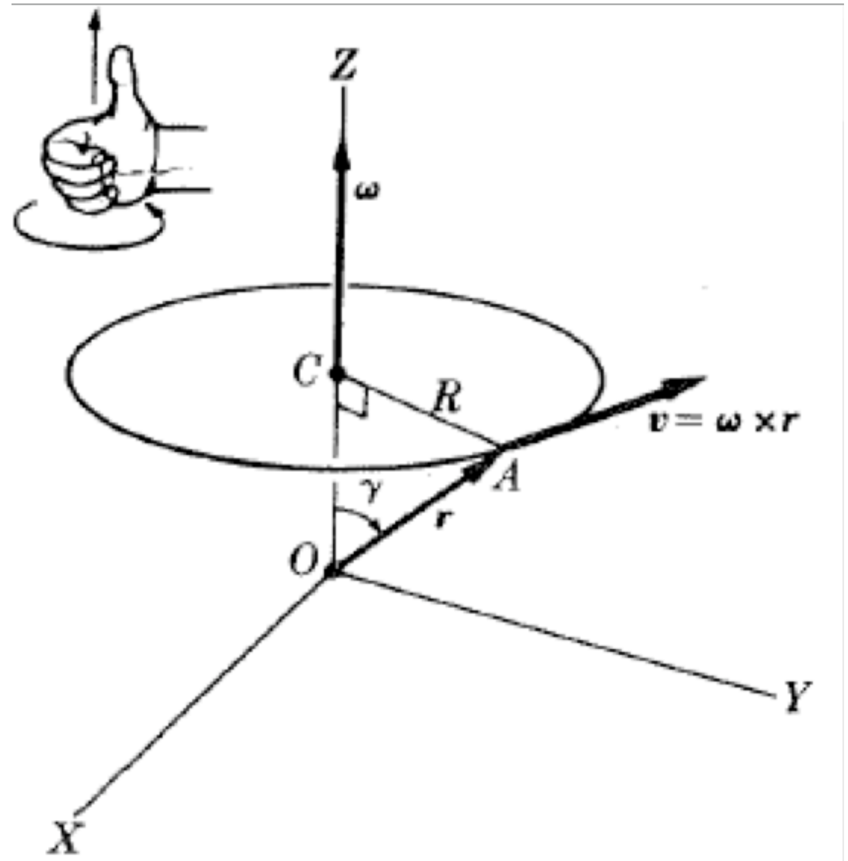
*Periodo:* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, tempo necessario per fare un giro completo.

*Frequenza:* $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, numero di giri per unità di tempo.

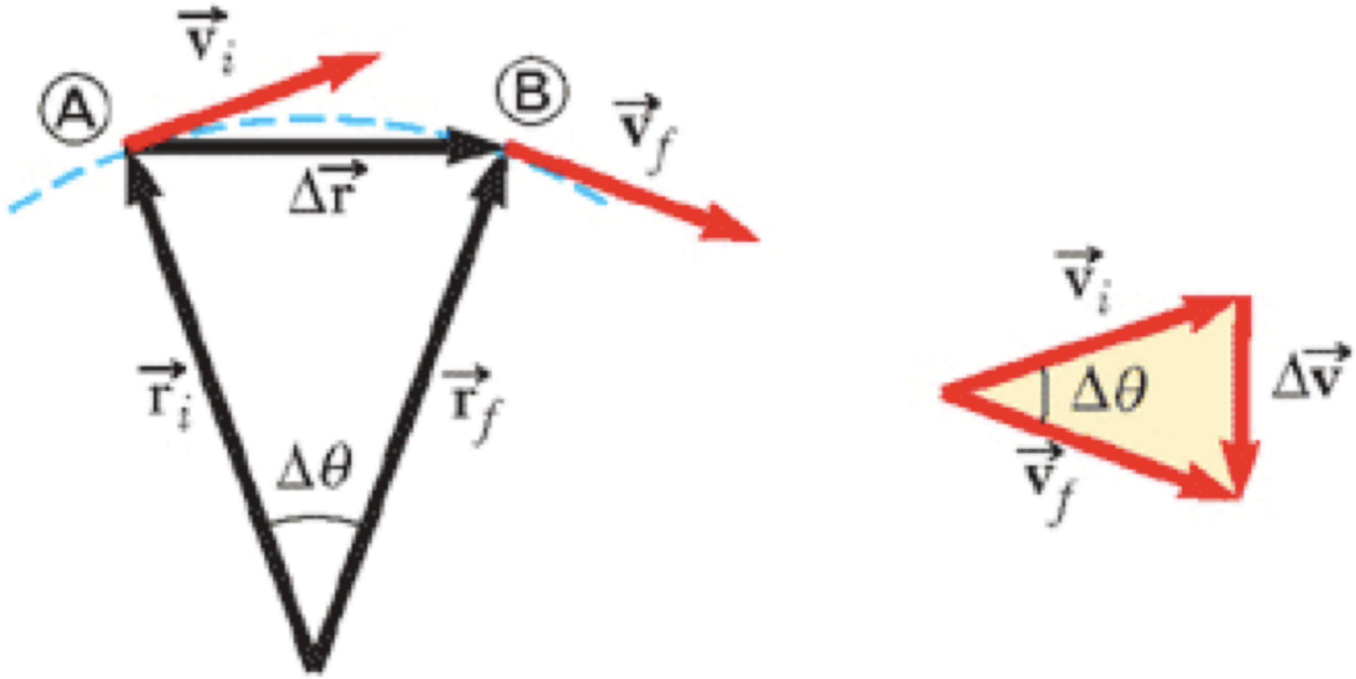
# Velocità angolare come vettore

La velocità angolare può essere definita come un vettore di modulo $\omega$, direzione perpendicolare al piano del moto, verso secondo la regola della mano destra. Con queste convenzioni:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



# Velocità e accelerazione nel moto circolare uniforme




- Dal disegno sopra si vede che $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ tende ad un vettore di modulo $v\Delta\theta = v\omega\Delta t = (v^2/r)\Delta t$, diretto verso il centro

- l'accelerazione è quindi *centripeta* e di modulo $\boxed{a_C = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$.

# Esempio

*Determinare la velocità angolare della terra attorno al proprio asse.*

Attenzione: non è semplicemente $\omega = 2\pi/T$, dove $T = 86400$ s è la lunghezza del giorno solare medio! Il periodo $T'$ di rotazione della terra, o giorno *sidereo*, vale $T' = 86160$ s, perché la terra deve ancora ruotare di un angolo $\gamma \simeq 1^\circ$ affinchè il sole torni nella stessa posizione.

Da qui:

$$\omega = \frac{2\pi}{T'} = 7.292 \times 10^{-3} \text{rad s}^{-1}.$$

La differenza $t = T - T' = 240$ s può essere stimata come $t = \gamma/\omega$. Usando $\gamma \simeq 2\pi/360$ rad si trova $t = 239$ s.