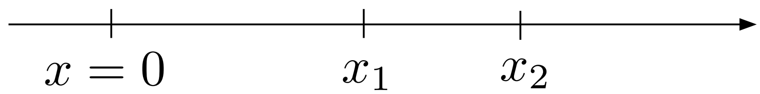
Esercizio (tratto dal Problema 1.4 del Mazzoldi)

Un punto materiale si muove con moto uniformemente accelerato lungo l'asse x. Passa per la posizione x_1 con velocità $v_1 = 1.9\,\mathrm{m/s}$, e per la posizione $x_2 = x_1 + \Delta x$ con velocità $v_2 = 8.2\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che $\Delta x = 10\,\mathrm{m}$, calcolare:

1. l'accelerazione;
2. il tempo che il punto impiega a percorrere il tratto Δx.



SOLUZIONE
Dati Iniziali

$$\boxed{\begin{array}{rcl} v_1 &=& 1.9\,\mathrm{m/s} \\ v_2 &=& 8.2\,\mathrm{m/s} \\ \Delta x &=& 10\,\mathrm{m} \end{array}}$$

Siccome il testo precisa che si tratta di un moto uniformemente accelerato, possiamo applicare le formule relative a questo tipo di moto.

Scegliamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante in cui il punto materiale passa per la posizione x_1 (e sappiamo che in tale istante ha velocità v_1). Pertanto la legge oraria si scrive come:

$$x(t) = x_1 + v_1\,t + \frac{1}{2}a\,t^2 \tag{1}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = v_1 + a\,t \tag{2}$$

CHECK: Siccome esistono varie espressioni per la legge oraria di un moto uniformemente accelerato, controlliamo che la formula (1) usata sia corretta. Deve valere che all'istante $t = 0$ il punto materiale si trovi alla posizione x_1 con velocità v_1, ossia deve valere che $x(t = 0) = x_1$ e che $v(t = 0) = v_1$. Controllando

$$x(t=0) = x_1 + v_1 \cdot 0 + \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = x_1 \qquad \text{OK} \tag{3}$$

$$v(t=0) = v_1 + a \cdot 0 = v_1 \qquad \text{OK} \tag{4}$$

Possiamo procedere ora in due modi:

Primo modo:
Utilizziamo l'informazione che il punto materiale passa per x_2 con velocità v_2. Non sappiamo a quale istante ci passa.

- Indichiamo

$$t^* = \text{istante in cui il punto materiale passa per } x_2$$

  Allora per definizione avremo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 &=& x(t^*) = x_1 + v_1 t^* + \frac{1}{2}a t^{*2} \\ \\ v_2 &=& v(t^*) = v_1 + a t^* \end{array} \right. \tag{5}$$

ossia

$$\begin{cases} x_2 - x_1 &= v_1 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} \\ v_2 - v_1 &= a t^* \end{cases} \tag{6}$$

Ricordando che

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \Delta x &= v_1 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2} \\ v_2 - v_1 &= a\, t^* \end{cases} \tag{7}$$

dove Δx, v_1 e v_2 sono parametri noti dal testo, mentre a e t^* sono due incognite.

- Abbiamo dunque un sistema di due equazioni in due incognite, che possiamo risolvere con semplici passaggi

$$\begin{cases} \Delta x &= t^* \left(v_1 + \frac{1}{2} a t^* \right) \\ a\, t^* &= v_2 - v_1 \end{cases} \tag{8}$$

Sostituendo la seconda nella prima

$$\begin{cases} \Delta x &= t^* \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} \right) = t^* \, \frac{v_2 + v_1}{2} \\ a t^* &= v_2 - v_1 \end{cases} \tag{9}$$

da cui

$$\begin{cases} t^* &= \frac{\Delta x}{\frac{v_2 + v_1}{2}} \\ a &= \frac{v_2 - v_1}{t^*} \end{cases} \tag{10}$$

ossia

$$\begin{cases} t^* &= \frac{2\Delta x}{v_2 + v_1} \\ \Rightarrow a &= \frac{v_2 - v_1}{\frac{2\Delta x}{v_2 + v_1}} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} \end{cases} \tag{11}$$

- Sostituisco (solo ora !) i dati numerici

$$\begin{cases} t^* &= \frac{2\Delta x}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 10\, \cancel{\mathrm{m}}}{8.2\, \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}} + 1.9\, \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}} = \frac{20}{10.1\, \frac{1}{\mathrm{s}}} = 1.98\, \mathrm{s} \\ a &= \frac{8.2^2\, \frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^2} - 1.9^2\, \frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 10\, \cancel{\mathrm{m}}} = \frac{(67.24 - 3.61)\, \mathrm{m}}{20\, \mathrm{s}^2} = 3.18\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{cases} \tag{12}$$

Controllo dimensionale: controllo che i risultati ottenuti abbiano la dimensione giusta. In effetti t^* (che deve essere un tempo) risulta avere le dimensioni del s, mentre a (che dev'essere un'accelerazione) risulta avere le dimensioni di $\mathrm{m/s^2}$.

Secondo modo:

- Ricordiamo che, in generale, disegnando la curva $v(t)$ lo spazio percorso è l'area sottesa da tale grafico (vedi Fig.1) Questo risultato è una conseguenza della definizione stessa

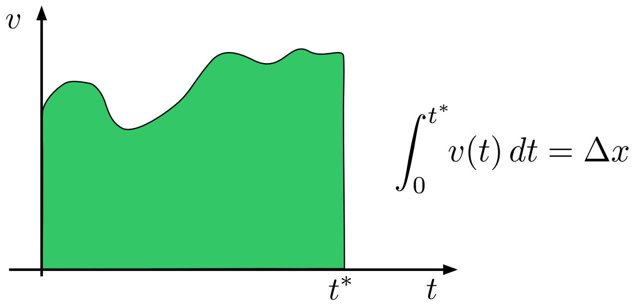


Figure 1:

di derivata

$$\int_0^{t^*} v(t)dt = \int_0^{t^*} \frac{dx}{dt}\, dt = \; x(t^*) - x(0) = x_2 - x_1 = \Delta x \tag{13}$$

- Nel nostro caso particolare di moto rettilineo uniformemente accelerato, il grafico di $v(t)$ è una retta, come mostrato in Fig.2, e dunque il grafico da essa sotteso non è nient'altro che un trapezio, la cui area è base x semi-somma delle altezze, ossia

$$\Delta x = t^* \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} \tag{14}$$

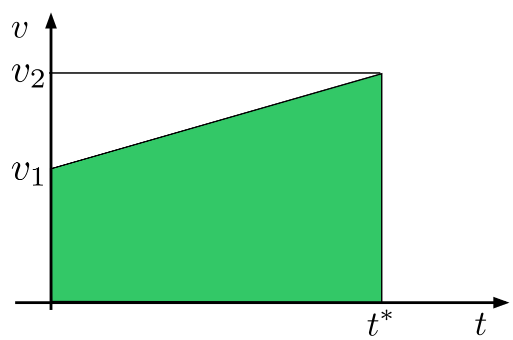


Figure 2:

- D'altra parte, nel grafico $v(t)$, l'accelerazione è proprio la pendenza dell'andamento lineare, che si può scrivere come

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t^*} \tag{15}$$

da cui

$$t^* = \frac{v_2 - v_1}{a} \tag{16}$$

- Combinando (14) e (16) otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta x &= t^* \cdot \frac{v_1+v_2}{2} = \\ &= \frac{v_2-v_1}{a}\,\frac{v_1+v_2}{2} = \\ &= \frac{v_2^2-v_1^2}{2a} \end{aligned} \tag{17}$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{v_2^2-v_1^2}{2\Delta x} \tag{18}$$

che coincide con la prima delle (11).

- Sostituisco (solo ora !) i dati numerici

$$a = \frac{8.2^2\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^2} - 1.9^2\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 10\,\cancel{\mathrm{m}}} = \frac{(67.24-3.61)\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}^2} = 3.18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{19}$$

- Dalla (16) abbiamo poi

$$t^* = \frac{v_2-v_1}{a} = \frac{8.2\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}} - 1.9\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}}}}{3.18\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}}} = 1.98\,\mathrm{s} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

$$\tag{22}$$

che coincide con la seconda delle (11).

Commento: La seconda formula ottenuta in (11)

$$a = \frac{v_2^2-v_1^2}{2\Delta x} \tag{23}$$

è una delle note formule del moto rettilineo uniformemente accelerato

- Quando si usa una formula occorre ricordarsi le condizioni in cui tale formula vale: la (23) non vale per qualsiasi moto, ma solo per uno uniformemente accelerato.

- supponiamo di non ricordare se la formula corretta sia

$$a = \frac{v_2^2-v_1^2}{2\Delta x} \qquad \text{oppure} \qquad a = \frac{v_2-v_1}{2\Delta x} \qquad ?$$

Possiamo ritrovare la formula giusta tramite il controllo dimensionale. E' infatti facile vedere che la seconda formula è dimensionalmente sbagliata (e pertanto priva di senso), e dunque quella corretta è la prima.