591AA 21/22 – COMPITO, LEZIONI 16 E 17

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

Problema 2. [8.53, Schaum, pg 303, pdf 311]. Risolvi i seguenti sistemi lineari usando la regola di Cramer.

(a)

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 7 \\ x + 2y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y - 6z &= 5 \end{aligned}$$

La soluzione è x = 5 and y = 1 and z = 1

(b)

$$\begin{aligned} 2z + 3 &= y + 3x \\ x - 3z &= 2y + 1 \\ 3y + z &= 2 - 2x \end{aligned}$$

Usando l'eliminazione gaussiana, la soluzione è

$y = 1 - x, \quad z = x - 1$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi, questo sistema non può essere risolto utilizzando la regola di Cramer.

Problema 4. [9.3, Schaum, pg 321, pdf 329] Trova i polinomi caratteristici delle seguenti matrici:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 5. [9.4, Schaum, pg 321, pdf 329] Trova i polinomi caratteristici delle seguenti matrici:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det(tI - A) \implies \begin{cases} p_A(0) = \det(-A) \\ \qquad = (-1)^n \det(A), \\ A = n \times n \end{cases}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n) \implies p_A(0) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Quindi, il prodotto degli autovalori di una matrice (con molteplicità) è uguale al determinante della matrice.

9.2. Find the characteristic polynomial $\Delta(t)$ of each of the following matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, (*c*) $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

$\det(M)$

Use the formula $(t) = t^2 - \mathrm{tr}(M)\, t + |M|$ for a 2×2 matrix M:

$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

(*a*) $\mathrm{tr}(A) = 2 + 1 = 3,\quad |A| = 2 - 20 = -18,\quad$ so $\quad \Delta(t) = t^2 - 3t - 18$

(*b*) $\mathrm{tr}(B) = 7 - 2 = 5,\quad |B| = -14 + 15 = 1,\quad$ so $\quad \Delta(t) = t^2 - 5t + 1$

(*c*) $\mathrm{tr}(C) = 3 - 3 = 0,\quad |C| = -9 + 18 = 9,\quad$ so $\quad \Delta(t) = t^2 + 9$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} t-a & b \\ c & t-d \end{pmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + \underbrace{ad - bc}$

9.3. Find the characteristic polynomial $\Delta(t)$ of each of the following matrices:

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (*b*) $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

La formula per le matrici 2x2 in 9.2 e la formula per le matrici a blocchi è 9.4 sono utili. Per le matrici 3x3, è più semplice utilizzare lo sviluppo di Laplace in termini di sottomatrici 2x2.

Use the formula $\Delta(t) = t^3 - \mathrm{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A|$, where A_{ii} is the cofactor of a_{ii} in the 3×3 matrix $A = [a_{ij}]$.

(*a*) $\mathrm{tr}(A) = 1 + 0 + 5 = 6,$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -16, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -13, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = -35, \qquad \text{and} \qquad |A| = 48 + 36 - 16 - 30 = 38$$

Thus $$\Delta(t) = t^3 - 6t^2 - 35t - 38$$

(*b*) $\mathrm{tr}(B) = 1 + 2 - 4 = -1$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8, \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4, \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = 8, \qquad \text{and} \qquad |B| = -8 + 18 - 72 = -62$$

Thus $$\Delta(t) = t^3 + t^2 - 8t + 62$$

9.4. Find the characteristic polynomial $\Delta(t)$ of each of the following matrices:

(*a*) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$, (*b*) $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$

Se A_1 e A_2 sono matrici quadrate allora

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) = \det(A_1)\det(A_2)$$

$$p_{\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)}(t) = p_{A_1}(t)p_{A_2}(t)$$

(*a*) A is block diagonal with diagonal blocks

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Thus $$\Delta(t) = \Delta_{A_1}(t)\Delta_{A_2}(t) = (t^2 - 6t + 3)(t^2 - 9t + 28)$$

(*b*) Since B is triangular, $\Delta(t) = (t-1)(t-3)(t-5)(t-6)$.

Problema 1.

(a) Verificare che $|z-3|+|z+3|=10$ definisce l'equazione di un'ellisse.
(b) Usa la formula di de Movier per verificare che

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$$

Soluzioni:

(a) Sia $z = x+iy$, x, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2=-1$. Allora

$$\begin{aligned}
|z-3|+|z-5|=10 &\implies |z-5|^2 = (10-|z-3|)^2 \\
&\implies (x-5)^2+y^2 = 100-20|z-3|+(x-3)^2+y^2 \\
&\implies 20|z-3| = 100+(x-3)^2-(x-5)^2 \\
&\implies 20|z-3| = 100-6x+9+10x-25 = 84+4x \\
&\implies 5|z-3| = 21+x \\
&\implies 25(x-3)^2+25y^2 = 21^2+42x+x^2 \\
&\implies 25x^2-150x+15^2+25y^2 = 21^2+42x+x^2 \\
&\implies 24x^2-108x+25y^2 = 21^2-15^2 \\
&\implies \frac{3}{2}(4x-9)^2-\frac{243}{2}+25y^2 = 216 \\
&\implies 3(4x-9)^2+50y^2 = 216+243 = 459 \\
&\implies \left(\frac{4x-9}{\sqrt{50}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{459}{150}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta)+i\sin(5\theta) &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5 \\
&= \cos^5(\theta)+5i\cos(\theta)^4\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\
&\quad -10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)+i\sin^5(\theta)
\end{aligned}$$

Considerando la parte reale di questa equazione, si ottiene:

$$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)$$

Sostituendo $\sin^2(\theta)$ con $1-\cos^2(\theta)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)(1-\cos^2(\theta))+5\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2 \\
&= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)+10\cos^5(\theta)) \\
&\quad +5\cos(\theta)-10\cos^3(\theta)+5\cos^5(\theta) \\
&= 16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Problema 3. Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^t = -A$.

(a) Verificare che se n dispari allora $det(A) = 0$.

Se $n = 2m$ è pari, risulta che

$$\det(A) = (pf(A))^2$$

dove $pf(A)$ è chiamato il pfaffiano di A. Se $A = (a_{ij})$ allora il segno di $pf(A)$ è selezionato in modo che $a_{12}a_{34} \cdots a_{2m-1,2m}$ abbia un segno $+1$.

(b) Verificare che

$$pf \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + dc$$

Soluzioni:

(a) $\det(A) = \det(A^t)$ e $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Quindi,

$$A^t = -A \implies \det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

Se n è dispari, questo implica $\det(A) = 0$.

(b) Calcola usando lo sviluppo di Laplace.

Problema 6. Trova i dischi di Gershgorin per le matrici nella parte (a) dei 2 problemi precedenti.

Soluzione: Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

I centri dei dischi sono le entrate diagonali della matrice. I raggi sono la somma dei valori assoluti degli elementi non diagonali delle righe.

— Per la matrice A, si ottiene

$$D_1 = \{\, z \mid |z-1| \le 5 \,\}, \qquad D_2 = \{\, z \mid |z| \le 7 \,\}, \qquad D_3 = \{\, z \mid |z-5| \le 10 \,\}$$

— Per la matrice B, si ottiene

$$D_1 = \{\, z \mid |z-2| \le 7 \,\}, \qquad D_2 = \{\, z \mid |z-4| \le 5 \,\},$$
$$D_3 = \{\, z \mid |z-6| \le 5 \,\}, D_3 = \{\, z \mid |z-3| \le 2 \,\}$$

Problema 7. Trova il polinomio caratteristico della mappa lineare $L : P_3[x] \to P_3[x]$,

$$(L(f))(x) = f(x+1)$$

Soluzione: La matrice di L relativa alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi,

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & t-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & t-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^4$$

Problema 8. Sia A una matrice $n \times n$ (con voci complesse). Verificare che

$$\langle Az, w \rangle = \langle z, A^* w \rangle$$

relativo il prodotto hermitiano standard

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

su $\mathbb{C}^n$. [Ricorda che $A^* = (\bar{A})^t$.]

Soluzione: Siano

$$Az = \sum_{\ell=1}^{n} (Az)_\ell e_\ell, \qquad A^* w = \sum_{\ell=1}^{n} (A^* w)_\ell e_\ell$$

rispetto alla base standard di $\mathbb{C}^n$. Allora,

$$\langle Az, w \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} (Az)_\ell \bar{w}_\ell, \qquad \langle z, A^* w \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell \overline{(A^* w)_\ell}$$

Siano $A = (a_{ij})$ e $A^* = (a^*_{ij})$. Si calcola che

$$(Az)_\ell = \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} z_k, \qquad (A^* w)_\ell = \sum_{k=1}^{n} a^*_{\ell k} w_k$$

dove $a^*_{\ell k} = \bar{a}_{k\ell}$. Quindi,

$$\langle Az, w \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} z_k \right) \bar{w}_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} z_k \bar{w}_\ell$$

e

$$\langle z, A^* w \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{k\ell} w_k \right)} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} z_\ell a_{k\ell} \bar{w}_k$$

In particolare, poiché sia ℓ che k vanno da 1 a n, invertiamo i ruoli di ℓ e k nell'ultima equazione per ottenere

$$\langle z, A^* w \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} z_k \bar{w}_\ell = \langle Az, w \rangle$$