ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 43

Note Title 27/11/2018

FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di termini di 2° grado nelle n variabili

Esempi $\boxed{n=2}$ Una forma quadratica generica è del tipo

$$q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

dove a, b, c sono numeri dati

$\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = \underbrace{ax^2+by^2+cz^2}_{\text{potenze pure}} + \underbrace{dxy+exz+fyz}_{\text{termini misti}}$

Fatto generale Una forma quadratica in n variabili si può sempre rappresentare con una matrice $n \times n$ $\boxed{\text{SIMMETRICA}}$

Esempio $\boxed{n=2}$ $q(x,y) = 5x^2 + 4xy - 3y^2$

$$(x \;\; y)\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 5x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix} = 5x^2+2xy+2yx-3y^2$$

$$= 5x^2+4xy-3y^2 = q(x,y)$$

La matrice della forma è $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

In generale, la matrice di una forma si costruisce
- mettendo sulla diagonale i coeff. dei quadrati puri
- " fuori dalla diagonale i coeff. dei termini misti DIVISI PER 2

A quel punto, detta A la matrice ottenuta, si avrà

$$\boxed{\underset{\text{vettore}}{q(x)} = x^t A x}$$

pensando x come vettore colonna

La stessa formula si può pensare anche come

$$\boxed{q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle}$$

rappresentazione di q come prod. scalare

Esempio 1 $\quad q(x,y,z) = x^2 + 2z^2 - 7xy + 8yz$

Trovare la matrice (simmetrica) che rappresenta $q(x)$

$$\begin{array}{c} x \to \\ y \to \\ z \to \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

Verificare per esercizio che $q(x,y,z) = (x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Esempio 2

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & z & w \\ \hline x & 2 & 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 3 & 7 & 2 \\ z & 0 & 7 & 0 & 5 \\ w & 0 & 2 & 5 & -1 \end{array}$$

Trovare la forma quadratica associata.

$$q(x,y,z,w) = 2x^2 + 3y^2 - w^2 + 2xy + 14yz + 4yw + 10zw$$

PROBLEMA: stabilire il segno, anzi la $\boxed{\text{SEGNATURA}}$, di una forma quadratica.

<u>Def.</u> Sia q una forma quadratica in n variabili
Si dice che q è
- DEFINITA POSITIVA se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- SEMIDEFINITA POSITIVA " $q(x) \geq 0$ per ogni x
  (può essere $q(x) = 0$ anche per $x \neq 0$)
- DEFINITA NEGATIVA se $q(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$
- SEMIDEFINITA NEGATIVA se $q(x) \leq 0$ per ogni x

- INDEFINITA se non ricade in nessuna delle tipologie precedenti, cioè
  → esiste x_1 t.c. $q(x_1) > 0$
  → esiste x_2 t.c. $q(x_2) < 0$

<u>Esempi</u> $q(x,y) = x^2 + 3y^2$

Si vede che $q(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $q(x,y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$.
Quindi $q(x,y)$ è DEFINITA POSITIVA, e pure SEMIDEF. POS.

$q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

$q(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ sempre e $q(x,y) = 0 \iff y = -x$
quindi per esempio $q(7,-7) = 0$,
quindi è SEMIDEFINITA POSITIVA, ma non DEFINITA POSITIVA

$q(x,y) = x^2 + 5xy + 3y^2$

$$\left.\begin{array}{l} q(1,0) = 1 > 0 \\ q(1,-1) = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q(x,y) \text{ è INDEFINITA}$$

Fatto generale: se trovo un punto in cui $q(x) > 0$ e un p.to in cui $q(x) < 0$, allora di sicuro $q(x)$ è INDEFINITA.

Domanda: come trovo i punti?

Esempio $\quad q(x,y) = x^2 - 4y^2$

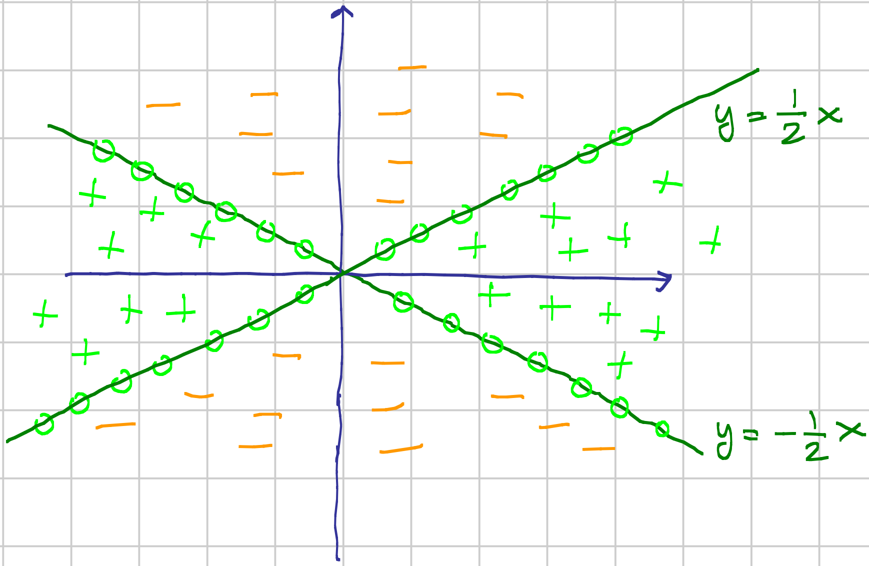
Si vede che è indefinita perché $q(1,0) = 1 > 0$, $q(0,1) = -4 < 0$

Come è fatto l'insieme degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $q(x,y) > 0$?

" $\quad q(x,y) < 0$?

" $\quad q(x,y) = 0$?

$$q(x,y) = x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$$



$q(x,y) > 0$ in due casi

- $x + 2y > 0$, $x - 2y > 0$

  $y > -\frac{x}{2}$ $\quad y < \frac{x}{2}$

  (triangola a destra)

- $x + 2y < 0$, $x - 2y < 0$

  $y < -\frac{x}{2}$, $\quad y > \frac{x}{2}$

  (triangola a sinistra)

[Studiare analogamente il caso $q(x,y) < 0$]

Oss. Se x è un vettore e $\lambda \neq 0$ è un numero, allora

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

(tutti i termini si moltiplicano per λ^2)

In particolare, se $q(x) > 0$, allora $q(\lambda x) > 0$ per ogni $\lambda \neq 0$
Quindi le zone di + e di − sono dei coni con vertice nell'origine

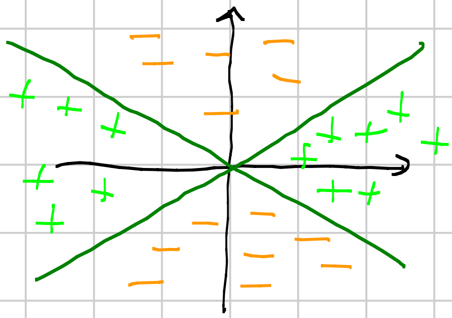
Def. (Segnatura di una forma quadratica)
Ad ogni forma quadratica sono associati 3 numeri n_0, n_+, n_-, talvolta detti INDICI DI INERZIA, tali che

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero variabili}}}{n} = n_0 + n_+ + n_-}$$

dove

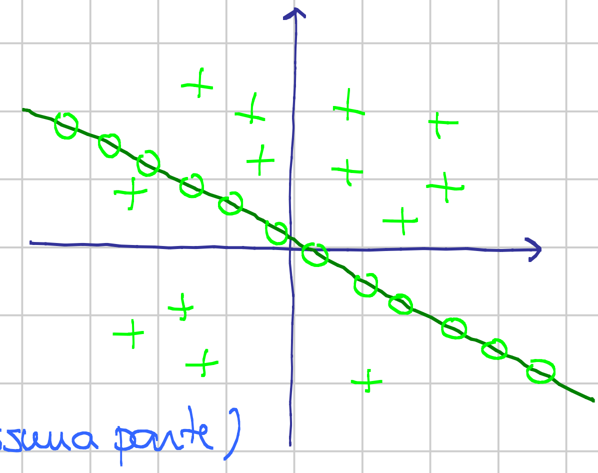
- n_+ è la massima dimensione di un sottospazio vettoriale su cui la restrizione di q è def. pos.
- n_- è la massima dim ..... è def. negativa
- n_0 si ottiene per differenza dalla formula di sopra

Esempio 1 $\quad q(x,y) = x^2 - 4y^2$



In questo caso
- $n_+ = 1$ (ci sono dei s.sp. di dim 1 su cui $q>0$: una qualunque retta che passa per l'origine e ha coeff. ang. in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; NON ci sono sottospazi di dim. 2 su cui $q>0$, perché dovrebbe essere tutto il piano)
- $n_- = 1$ (stesso motivo con zona $-$)
- Per differenza $n_0 = 0$

Esempio 2 $\quad q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$



$q(x,y) = (x+2y)^2$
In questo caso
- $n_+ = 1$ (va bene una qualunque retta diversa da $y = -\frac{x}{2}$)
- $n_- = 0$ (non è negativa da nessuna parte)
- Per differenza $n_0 = 1$