



# LUOGO DELLE RADICI



- Introduzione
- Regole di Tracciamento (LD)
- Applicazioni ed Esempi
- Luogo Inverso



## Riferimenti

- Capitolo 13 Testo di Bolzern
- Capitolo 11 Lewis (download)
- ....

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

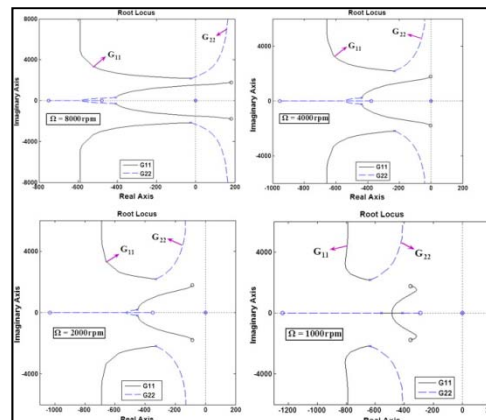
Con. Standard



# Introduzione



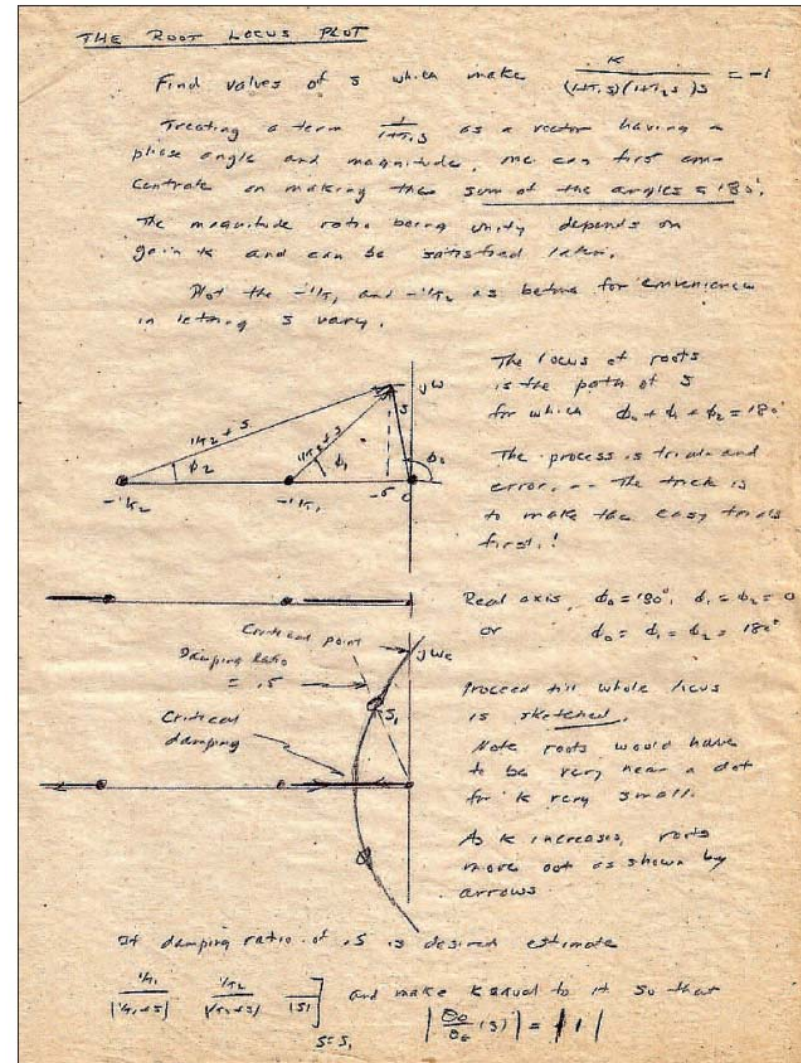
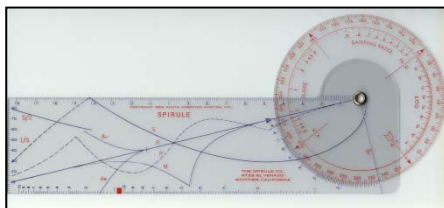
- ❑ Una delle tecniche disponibili per l'analisi e la sintesi dei sistemi di controllo in retroazione è quella del metodo del Luogo delle Radici; tale tecnica fornisce il luogo descritto nel piano complesso dai poli in ciclo chiuso in funzione del guadagno di anello.
- ❑ **Il Luogo delle Radici studia il comportamento dinamico del sistema in ciclo chiuso partendo dalle caratteristiche della FdT in anello aperto**
- ❑ Il Luogo delle Radici considera sistemi senza ritardo di anello.
- ❑ Il Metodo del Luogo delle Radici è tradizionalmente complementare alle altre tecniche (p.es. la risposta in Frequenza) e si applica nella sua versione più comune a sistemi SISO.
- ❑ Il Metodo del Luogo delle Radici è usato sia come **Analisi** dei sistemi di controllo, che di **Sintesi** del controllore in anello chiuso





# Introduzione

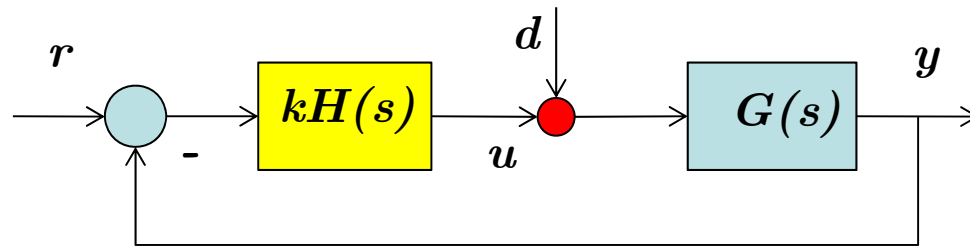
- In 1949 Evans showed how the characteristic equation could be solved by plotting **the locus of points “s” that have a simple relationship with other known points, that is, angles that sum to 180°**.
- Evans developed a simple, sequential process, which engineers used to generate sketches in seconds, and a specialized protractor, which supported high accuracy in minutes.
- First used by North American Aviation designers and taught at UCLA, the application and instruction of Evans' new method spread rapidly to other companies and universities.





## Definizioni

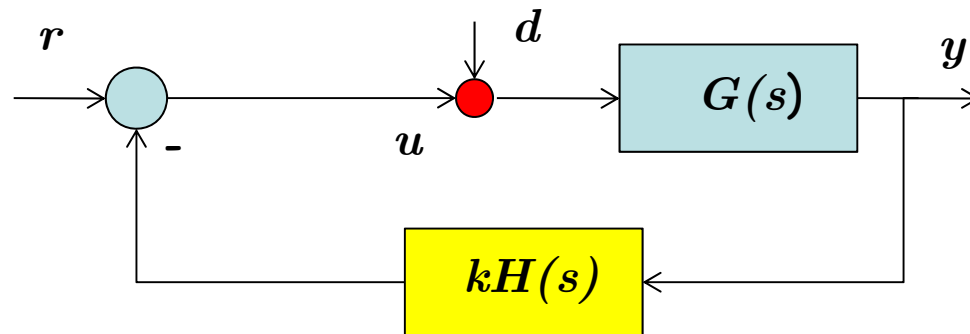
- Consideriamo un sistema lineare in retroazione:



$$K(s) = kH(s)$$

$$L(s) = K(s)G(s) = kH(s)G(s)$$

$$y(s) = \frac{kH(s)G(s)}{1 + kH(s)G(s)} r(s) + \frac{G(s)}{1 + kG(s)H(s)} d(s)$$



$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + kH(s)G(s)} [d(s) + r(s)]$$

- Equazione Caratteristica in Ciclo Chiuso:  $D(s) = 1 + kH(s)G(s) = 1 + L(s) = 0$
- Funzione di Trasferimento di Anello:  $L(s) = G_{OL}(s) = K(s)G(s) = kH(s)G(s)$



## Definizioni

- ❑ **Richiami:** un luogo geometrico, o più semplicemente un luogo, è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una determinata proprietà.
- ❑ **Definizione di Luogo delle Radici:** Per un sistema in retroazione si definisce **luogo delle radici**, il luogo descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica  $D(s) = 0$ , al variare del parametro reale  $k$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

$$D(s) = 1 + kH(s)G(s) = 1 + G_{OL}(s)(s) = 0$$

- Si definisce Luogo Diretto (LD) quando il guadagno varia da  $0 < k < \infty$
- Si definisce Luogo Inverso (LI) quando il guadagno varia da  $-\infty < k < 0$

Ovvero:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow \left\{ s \in \mathbb{C}^1 : \left[ 1 + G_{OL}(s) = 0 \right], G_{OL}(s) = kG(s)H(s) \right\}}$$

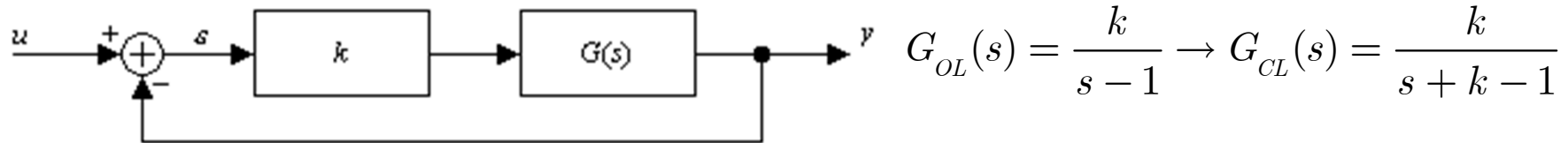
Il guadagno  $k$  non è necessariamente il guadagno statico del sistema, come quello usato tradizionalmente la risposta in frequenza

$$G_{OL}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_j^m (s + z_j)}{\prod_i^n (s + p_i)}, m \leq n; k_{STAT} = k \frac{\prod_j^m z_j}{\prod_i^n p_i}$$

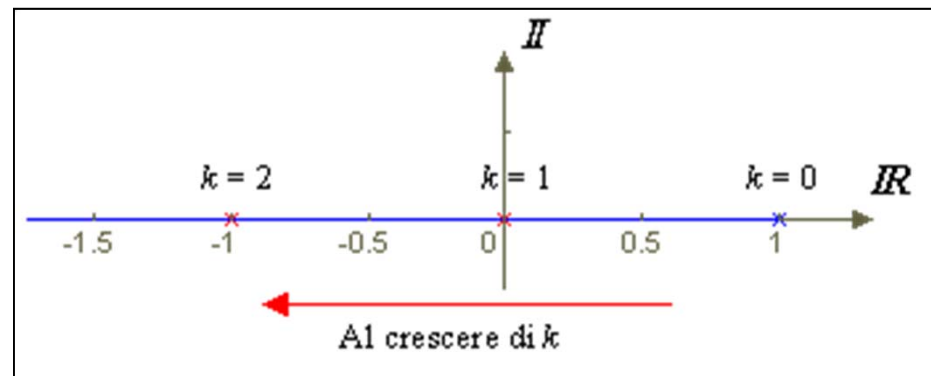


## Definizioni

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s-1}$   $0 < k < \infty$



- Il luogo delle radici (diretto) si calcola risolvendo per  $s$ , al variare di  $k$  da 0 a  $+\infty$ ,  $s + k - 1 = 0$
- Il polo in ciclo chiuso vale  $s = (1 - k)$  e il sistema è asintoticamente stabile per tutti i  $k \geq 1$ ;



$$\text{sys} = 1/(s-1)$$



## Definizioni



□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$   $G_{OL}(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)} \rightarrow G_{CL}(s) = \frac{k}{s^2 + s + k - 2}$

- Vogliamo trovare il luogo dei punti **s** del piano complesso (con  $0 < k < \infty$ ) per cui:

$$s^2 + s + k - 2 = 0$$

- Il luogo delle radici traccia sul piano complesso i poli in ciclo chiuso al variare del guadagno  $k$ , in questo caso:

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(k - 2)}, \forall k \in [0, \infty)$$

1.  $k = 0$

(non reazionato)  $\rightarrow s_1 = 1, s_2 = -2$

2.  $k = 2$

$s_1 = -1, s_2 = 0$

3.  $k = 9/4$

$s_1 = s_2 = -1/2$

4.  $k > 9/4$

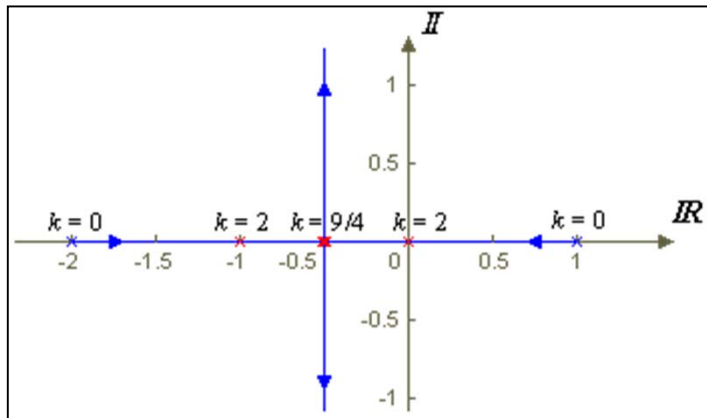
i poli di anello chiuso diventano complessi e coniugati con parte reale = -0.5 e parte immaginaria che  $\rightarrow \infty$

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j \sqrt{4k - 9}$$





## Definizioni



Si deduce così che per  $k > 2$  il sistema è asintoticamente Stabile

```
>> sys=tf(1,[1 1 -2])
```

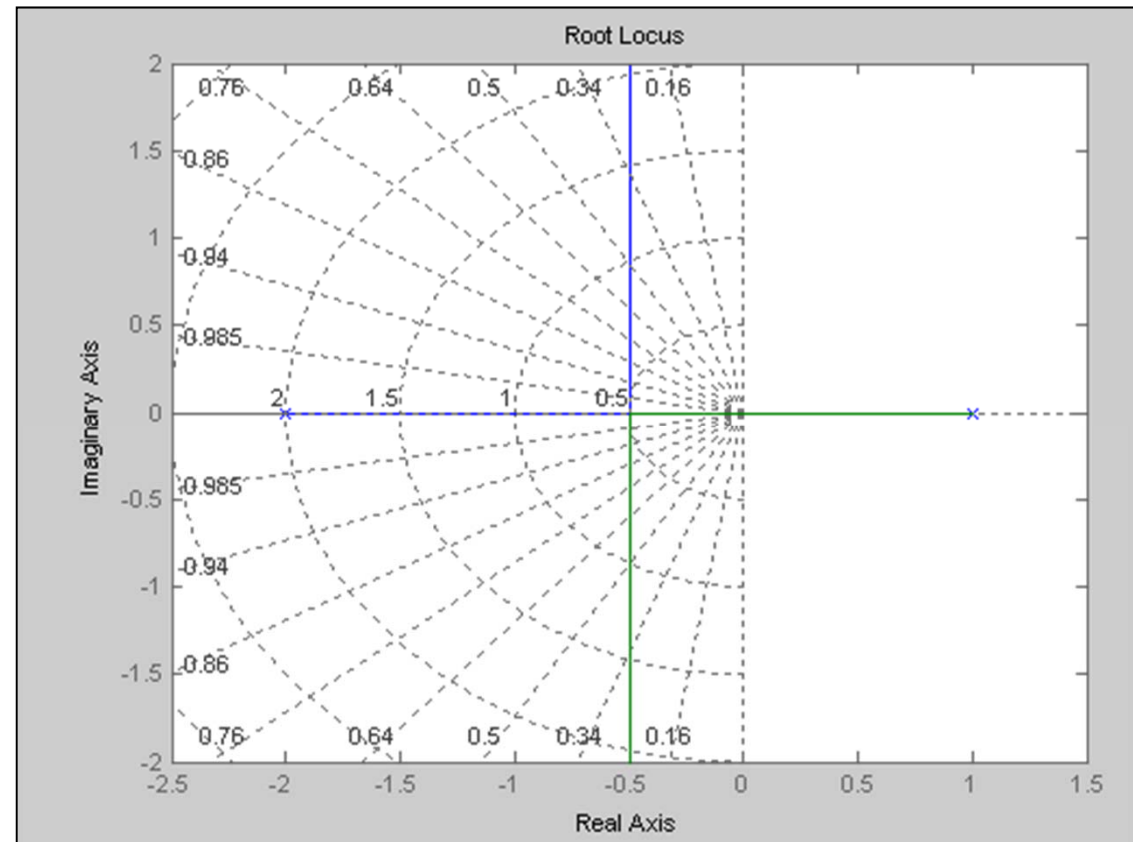
Transfer function:

1

-----

$s^2 + s - 2$

```
>> rlocus(sys)
```



$sys=1/(s^2+s-2)$

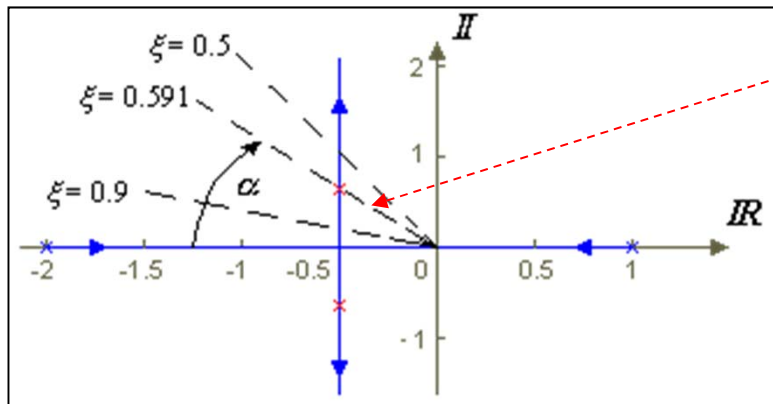


## Definizioni

### Commenti:

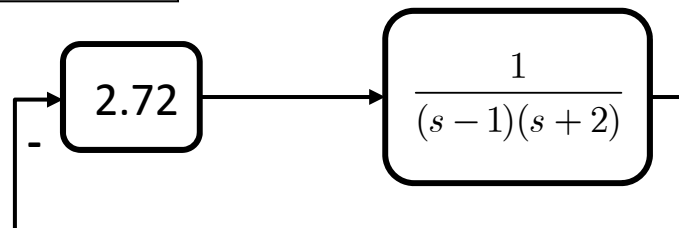
- Se si desidera una risposta in ciclo chiuso senza oscillazioni, deve essere:  $0 < k < 9/4$
- Se si desidera una risposta transitoria con una sovraelongazione del 10% si ha:

$$M_p = 0.1 = e^{(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})} \Rightarrow \xi = 0.591 \quad \xi \omega_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 0.846 \text{ rad/sec}$$



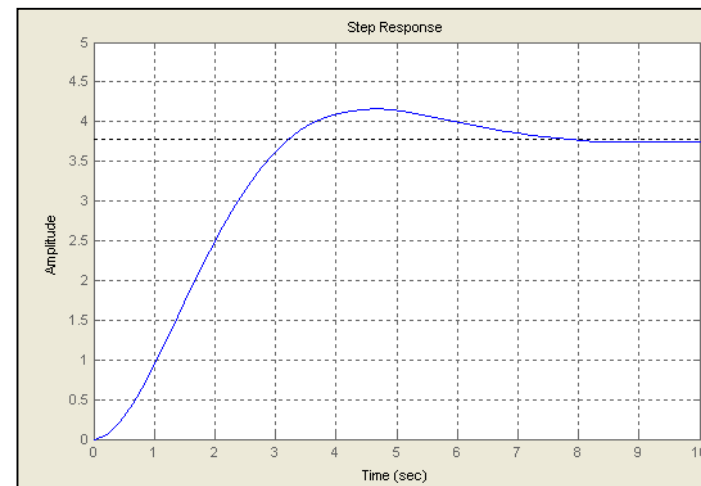
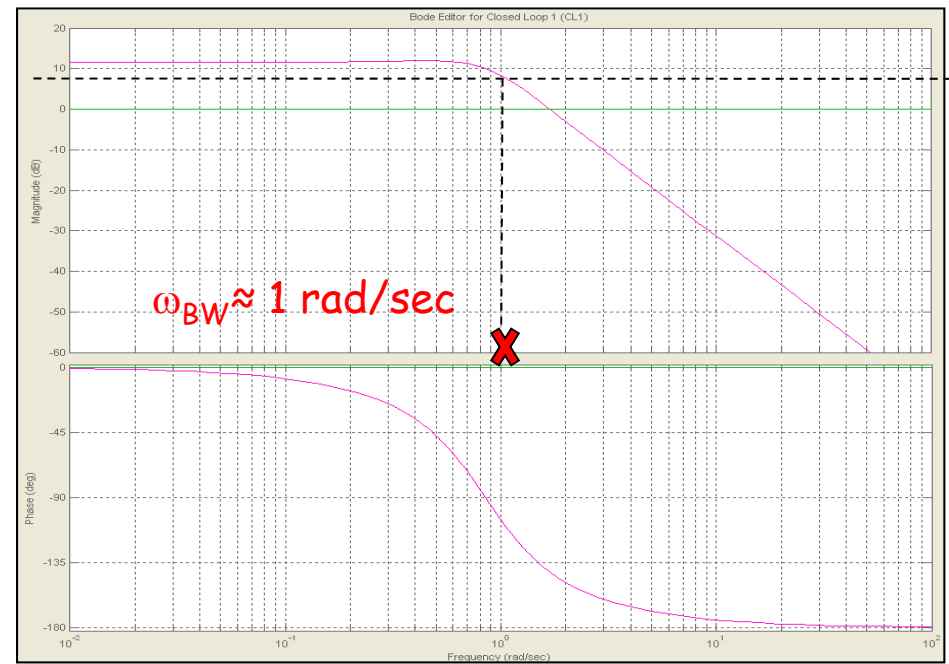
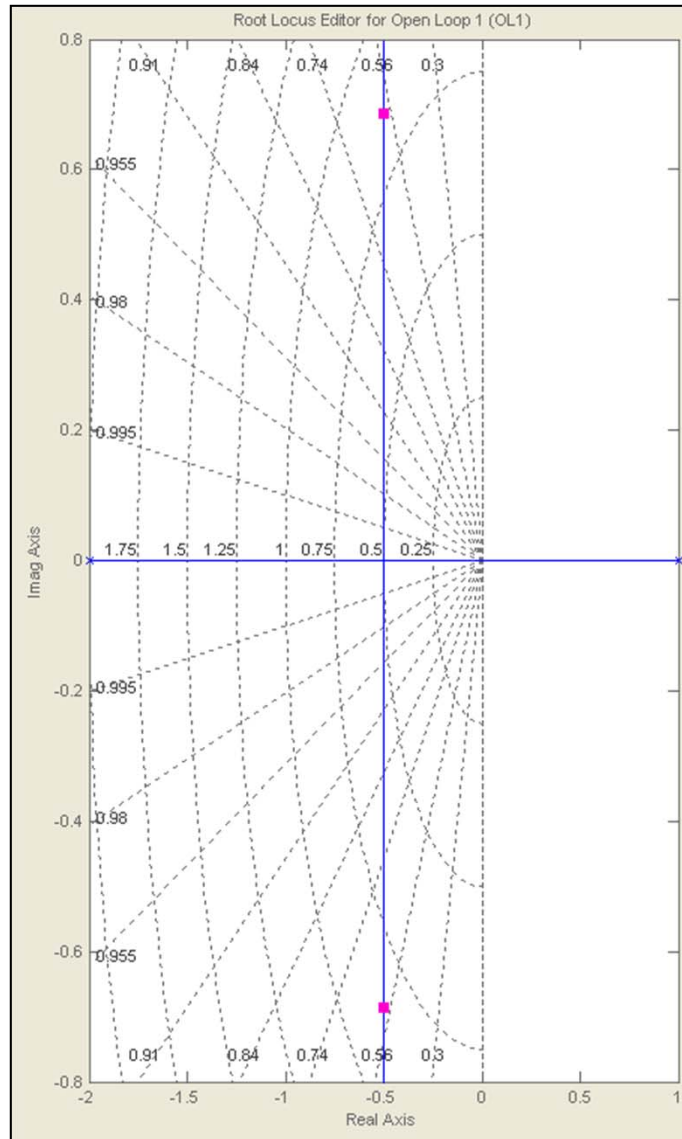
Essendo  $\cos \alpha = \xi$ , si ha:

$$\frac{1}{2} \sqrt{4k - 9} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0.682 \Rightarrow k = 2.72$$





# Definizioni



- Esempio con SISOTOOL



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- Il Luogo delle Radici è tracciabile mediante ausilio numerico, basato su un certo numero di regole, che ne permette anche il tracciamento grafico qualitativo

### □ Luogo Diretto ( $k > 0$ )

$$D(k, s) = 1 + kG(s)H(s) = 0 \quad 0 < k < \infty$$

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{k}$$

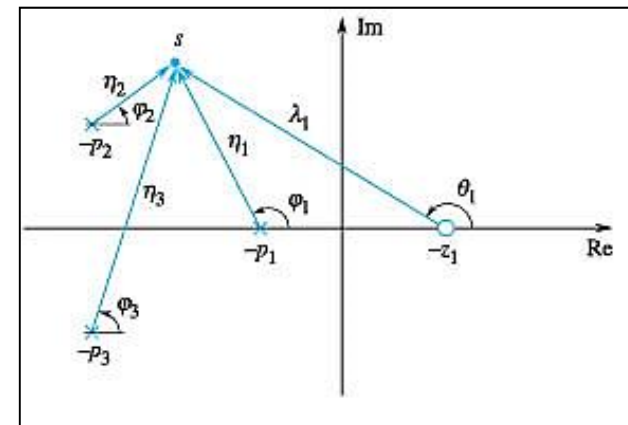
$$kG(s)H(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|$$

$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \sum_{j=1}^m \theta_j - \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

$$\angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

Un punto  $s$  appartiene al luogo se e solo se la somma algebrica degli angoli sottintesi dai poli e dagli zeri è un multiplo dispari di  $\pi$





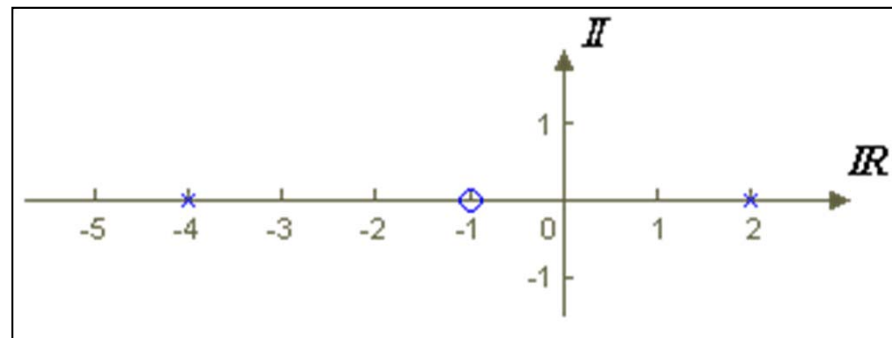
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

❑ **Regola No. 1:** Se  $k = 0$ , i poli in ciclo aperto e ciclo chiuso coincidono. Quindi il luogo parte dai poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

$$\left| G(s)H(s) \right| = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \left| -\frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{k} \right| \quad k \rightarrow 0 \Rightarrow \left| G(s)H(s) \right| = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \Rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow -p_i$$

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{(s - 2)(s + 4)}$$

$$\text{sys} = (s+1)/((s-2)*(s+4))$$



- **Il numero dei poli in ciclo chiuso è sempre uguale al numero dei poli in ciclo aperto quando il guadagno varia da 0 a  $+\infty$**

$$\frac{N_{ol}(s)}{D_{ol}(s)} \Rightarrow \frac{N_{ol}(s)}{N_{ol}(s) + D_{ol}(s)}$$



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

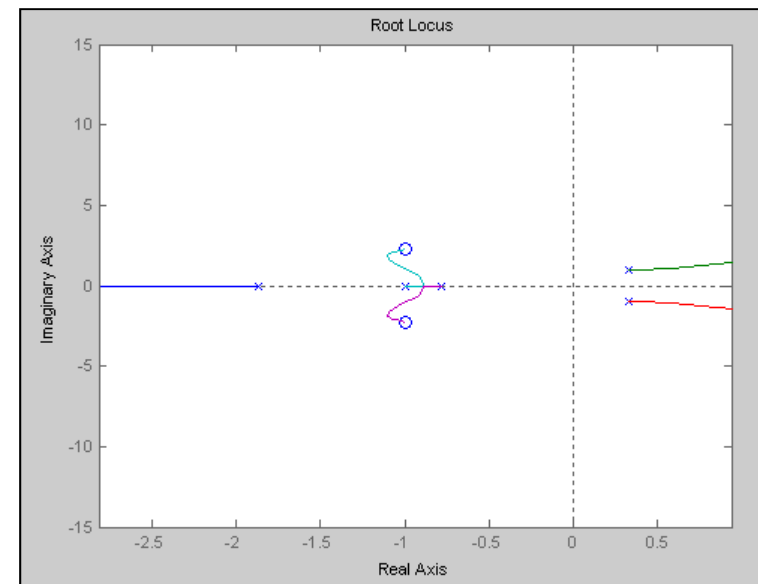
❑ **Regola No. 2:** Per  $k \Rightarrow \infty$ , i poli in ciclo chiuso tendono a:

- Gli zeri ad anello aperto
- infinito

$$\left| G(s)H(s) \right| = \left| -\frac{1}{k} \right| \quad k \rightarrow \infty \Rightarrow \left| G(s)H(s) \right| = \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} s \rightarrow -z_j \\ \infty \end{cases}$$

```
>> sys=tf([1 2 6],[4 12 11 10 13 6])  
  
Transfer function:  
      s^2 + 2 s + 6  
-----  
4 s^5 + 12 s^4 + 11 s^3 + 10 s^2 + 13 s + 6  
  
>> roots([1 2 6])  
  
ans =  
  
-1.0000 + 2.2361i  
-1.0000 - 2.2361i  
  
>> roots([4 12 11 10 13 6])  
  
ans =  
  
-1.8700  
0.3276 + 0.9561i  
0.3276 - 0.9561i  
-1.0000  
-0.7853  
  
>> rlocus(sys)  
>>
```

- Data una FdT in Anello Aperto con n poli e m zeri (con  $n \geq m$ ), se  $k \rightarrow \infty$ , m poli a ciclo chiuso tendono agli m zeri di anello aperto e i restanti n-m poli a ciclo chiuso  $\rightarrow \infty$



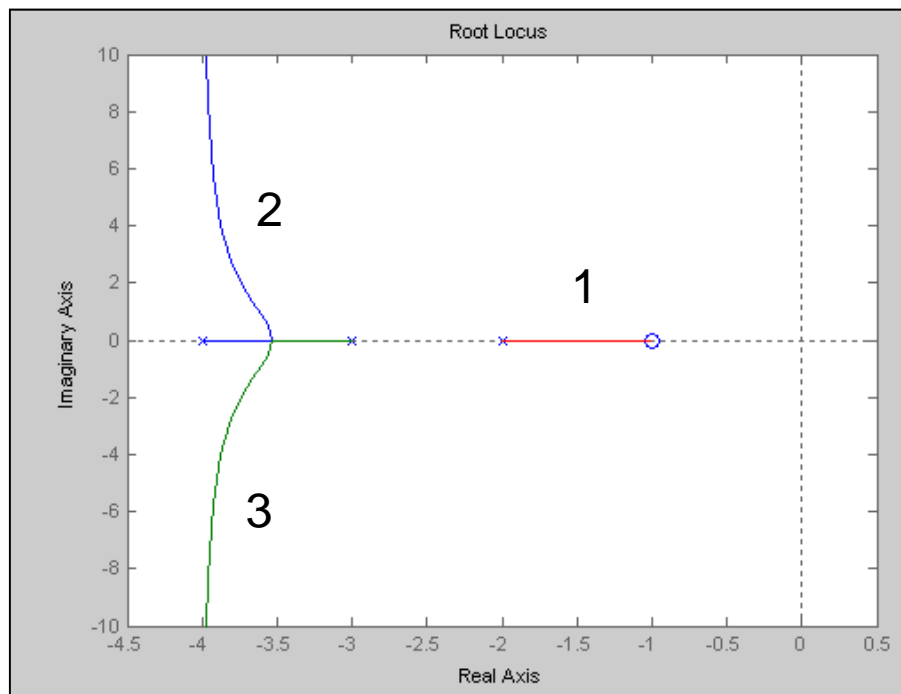
$$\text{sys} = (s^2 + 2s + 6) / (s^5 + 12s^4 + 11s^3 + 10s^2 + 13s + 6)$$



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- ❑ **Regola No. 3:** Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero  $n$  dei poli in anello aperto.

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$



- Il luogo delle radici presenta tre rami; per  $k = 0$  il luogo delle radici parte dai tre punti -2, -3, -4 (Regola 1); mentre per  $k \rightarrow \infty$  due rami vanno all'infinito e il terzo va a -1, dove si trova lo zero di anello aperto (Regola 2).

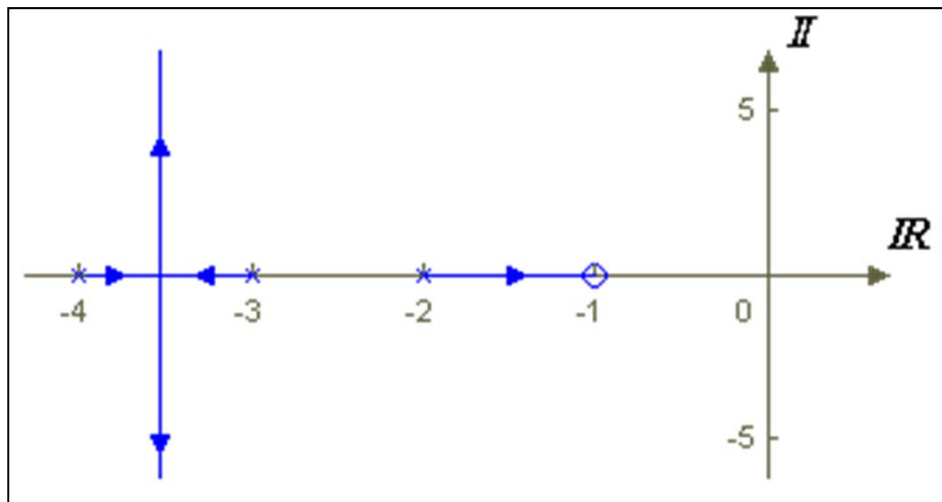
```
sys1=tf([1,1],[1,9,26,24])
```



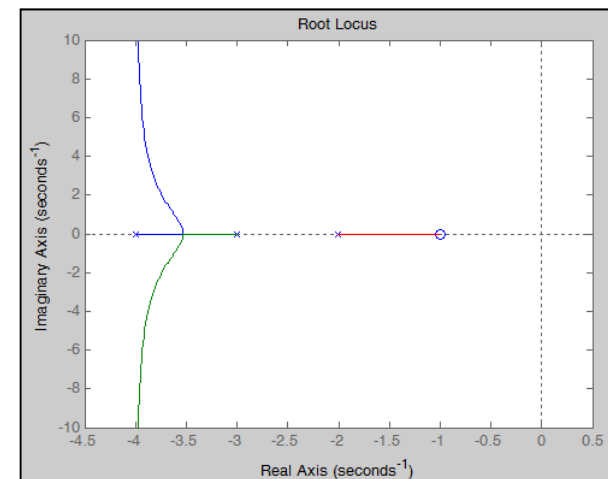
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 4:** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale, in quanto descrive l'andamento di un set di numeri autoconiugati

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$



- **Nota:** Tracciamento approssimato





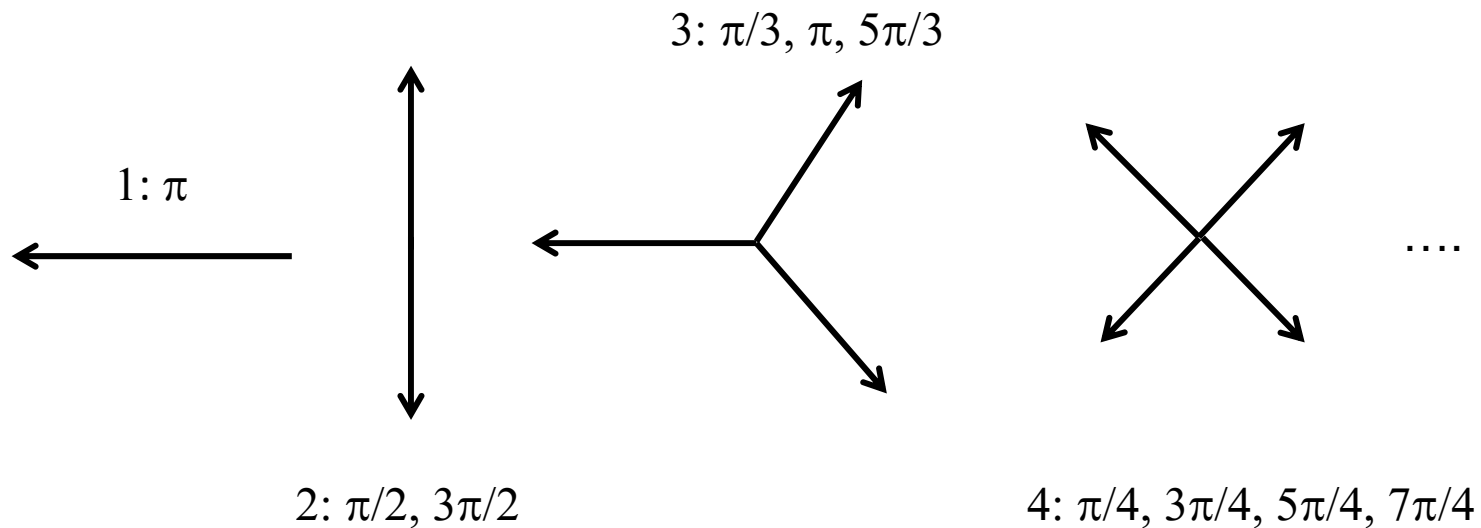


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

❑ **Regola No. 5:** I poli in ciclo chiuso ( $n - m$ ) che tendono all'infinito seguono direzioni asintotiche quando  $k \rightarrow \infty$ . Gli asintoti hanno l'origine in comune  $x_a$  e formano con l'asse reale un angolo pari a  $\psi_{ar}$ . La somma dei poli rimane costante all'aumentare di  $k$ .

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

$$\psi_a = \frac{(2r + 1)\pi}{n - m}, r = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$$



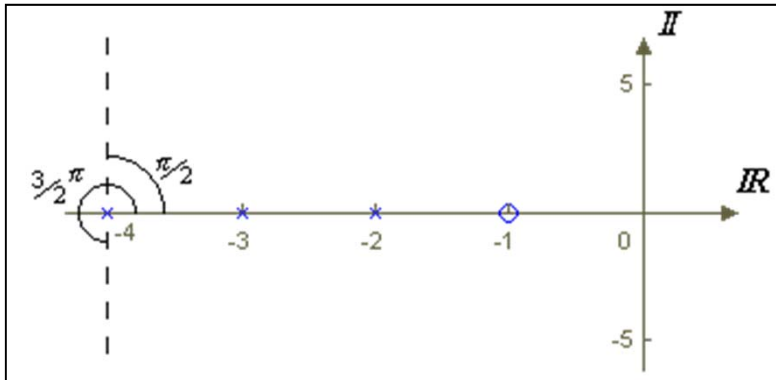


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2-3-4+1}{3-1} = -4$$

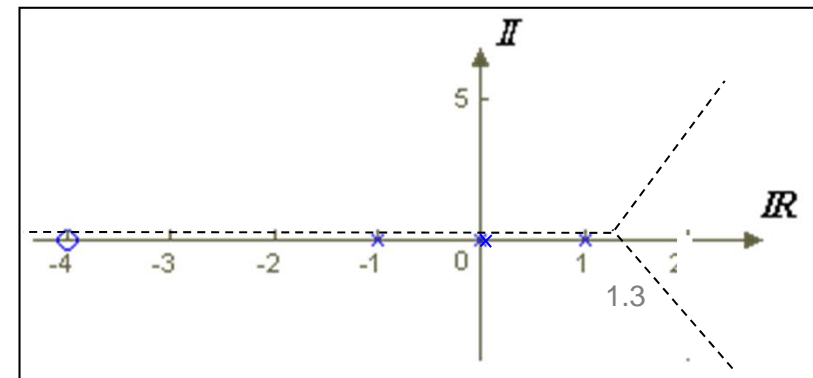
$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{2}\pi$$



$$kG(s)H(s) = k \frac{s+4}{s^2(s+1)(s-1)}$$

$$x_a = \frac{-0-0-1+1+4}{4-1} = \frac{4}{3},$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{3}\pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$

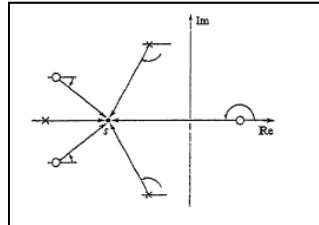


```
sys=tf([1,4],conv([1 1 0 0],[1 -1]))
```



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

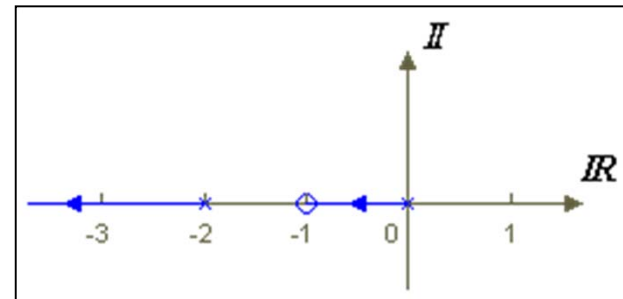
- ❑ **Regola No. 6:** Lungo l'asse reale, il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di singolarità (poli e zeri in anello aperto).



$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \sum_{j=1}^m \theta_j - \sum_{i=1}^n \varphi_i$$
$$\angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$

$$\text{sys} = (s+1)/(s^2+2*s)$$



- ❑ **Regola No. 7:** Il luogo lascia l'asse reale e/o rientra sull'asse reale con pendenza 90°, in punti predefiniti e calcolati mediante la relazione:

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

- ❑ **Nota:** Il calcolo di tale relazione può portare a diverse soluzioni, alcune anche non accettabili poiché i punti così ricavati non appartengono al luogo delle radici diretto (ma a quello inverso, vedi dopo).



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+4}{s(s+1)(s-1)}$$

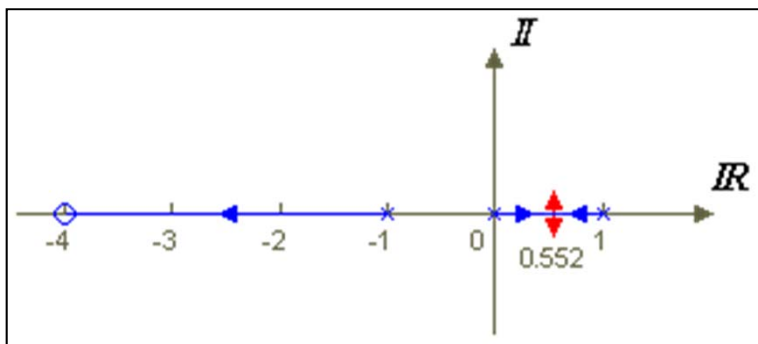
$$1 + kG(s)H(s) = 0 \Rightarrow$$

$$k = -\frac{s(s+1)(s-1)}{s+4} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{(3s^2-1)(s+4) - s^3 + s}{(s+4)^2} = -\frac{2s^3 + 12s^2 - 4}{(s+4)^2} = 0 \Rightarrow$$

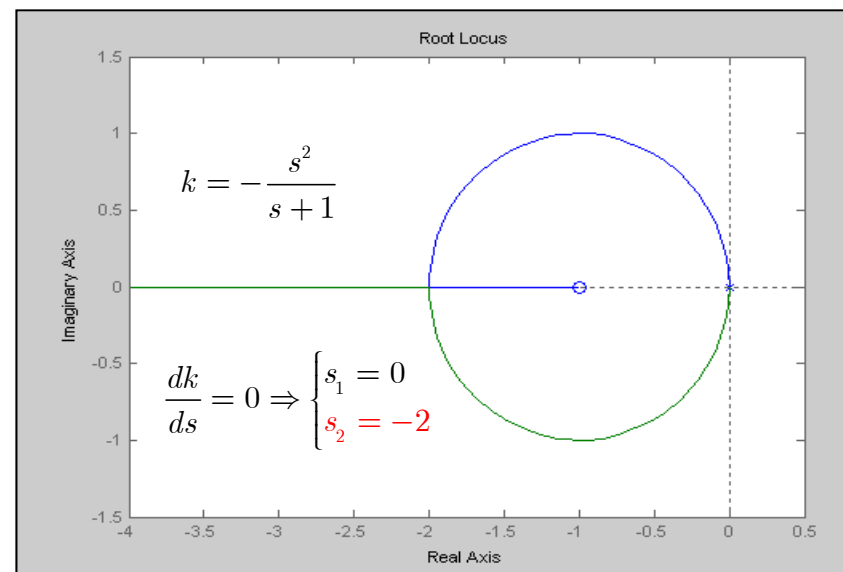
$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -5.943 \\ s_2 = -0.609 \\ s_3 = 0.552 \end{cases}$$

$$\text{sys} = (s+4)/(s^3-s^2)$$

- Per la regola 6 però, solo  $s_3$  appartiene al luogo delle radici e risulta essere un punto di uscita



$$\text{sys} = (s+1)/(s^2) \quad kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{s^2}$$





## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 8:** L'angolo di partenza da una coppia di poli complessi e coniugati e l'angolo di arrivo ad una coppia di zeri complessi e coniugati si calcolano mediante le seguenti espressioni:

$$\gamma_{p_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$
$$\gamma_{z_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

- I poli e gli zeri di anello aperto rappresentano punti di partenza e di arrivo dei rami del luogo delle radici; nel caso in cui tali singolarità siano reali, i rami vi partono o arrivano lungo l'asse reale ma se invece si è in presenza di poli o zeri complessi e coniugati, può essere importante conoscere l'angolo di partenza o arrivo.
- L' appartenenza al luogo delle radici richiede come è noto:

$$\angle H(s)G(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

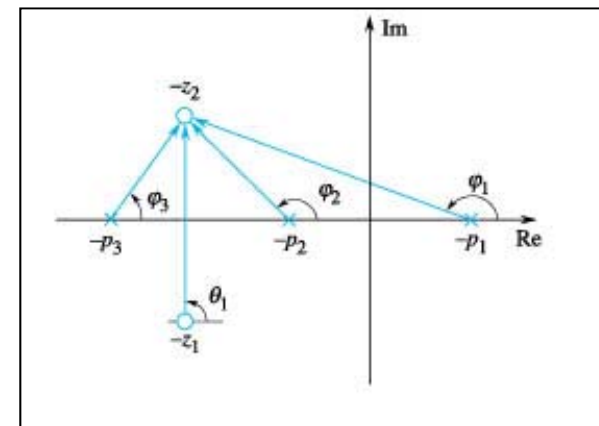
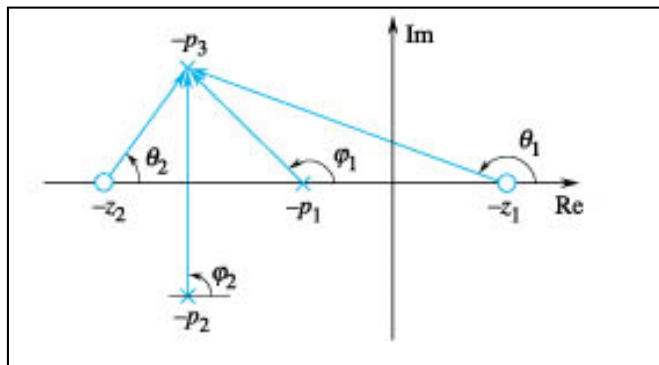
- Consideriamo un punto nell'intorno infinitesimo della singolarità (polo o zero) e appartenente al luogo delle radici, sfruttando la relazione di fase e tenendo presente che, sotto queste ipotesi, la tangente si può "confondere" con l'angolo, si ha:

- per i poli

l'angolo di partenza da un polo complesso è pari a  $(2\nu + 1)\pi$  meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri poli più gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli zeri.

- per gli zeri

l'angolo di arrivo a uno zero complesso è pari a  $(2\nu + 1)\pi$  meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri zeri più gli angoli dei segmenti che lo congiungono ai poli.

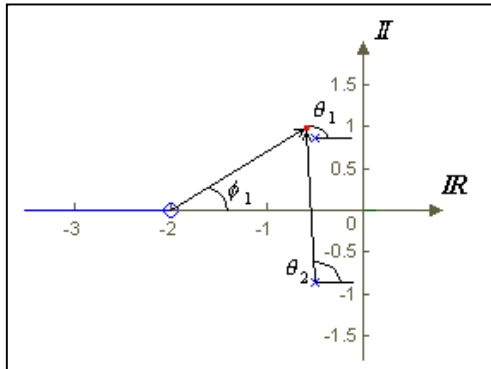




## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

$$p_{1,2}^{OL} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 \pm j0.866, \quad z_1^{OL} = -2$$



$$\theta_2 \cong \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 \cong \frac{\pi}{6}$$

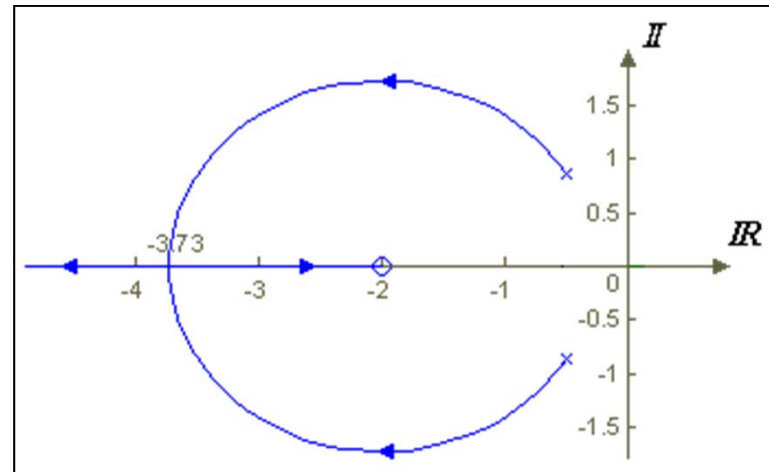
$$\begin{aligned} \gamma_{p_1} &\cong \theta_1 = \pi - \theta_2 + \varphi_1 \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ \end{aligned}$$

$$T(s) = \frac{k(s+2)}{s^2 + (k+1)s + 1 + 2k}$$

$$k = -\frac{s^2 + s + 1}{(s+2)} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 + 4s + 1}{(s+2)^2} = 0$$

$$s_1 = -3.73 \quad s_2 = -0.268$$

$$\text{sys} = (s+2)/(s^2+s+1)$$

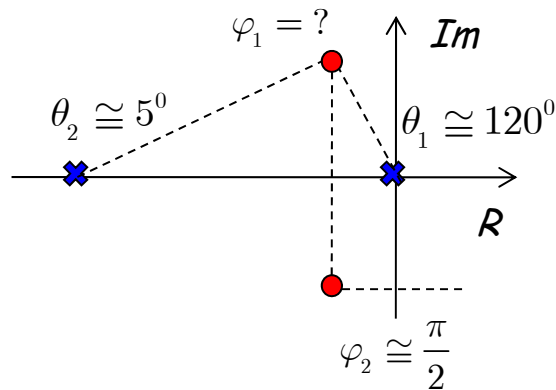




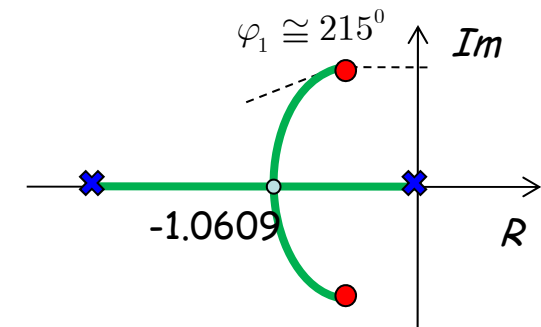
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s^2 + s + 1}{s(s + 10)}$$

$$z_{1,2}^{OL} = -0,5 \pm j0.866, \quad p_{1,2}^{OL} = 0, -10$$



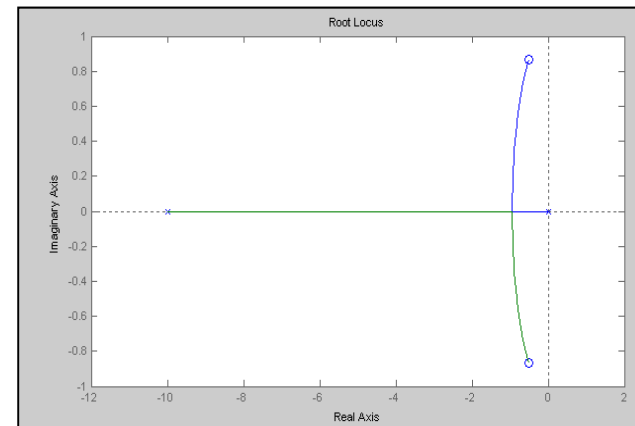
$$\gamma_{z_1} \cong \varphi_1 = \pi + \theta_1 + \theta_2 - \varphi_2 = \pi + 120^\circ + 5^\circ - 90^\circ = 215^\circ$$



$$k = -\frac{s(s+10)}{s^2+s+1} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0,$$

$$\begin{cases} s_1 = 1.3466 \\ s_2 = -1.0609 \end{cases}$$

$$T(s) = \frac{k(s^2 + s + 1)}{(1+k)s^2 + (10+k)s + k}$$







## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)



❑ **Regola No. 9:** Il valore del guadagno  $k$  per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova usando il criterio di Routh.

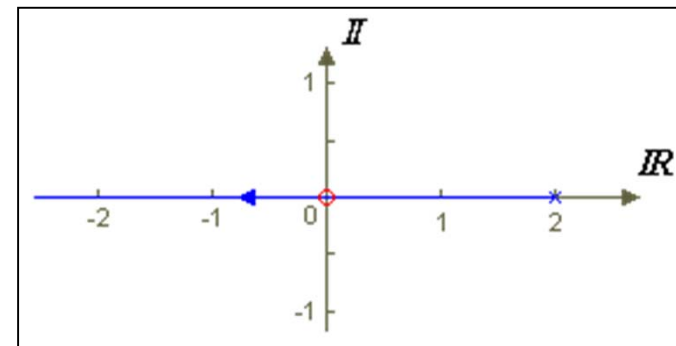
- Questa regola è di estrema importanza perché determina uno o più  $k$  critici, cioè i valori massimo/minimo del guadagno prima che il sistema divenga instabile o necessario per la stabilità del sistema stesso (a ciclo chiuso).

$$kG(s)H(s) = k \frac{1}{s-2}$$

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s - 2 + k = 0$$

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 1 \\ s^0 & k-2 \end{array}$$

$k_{CR} = 2$ , Sistema in Ciclo Chiuso  
Asintoticamente Stabile per  $k > k_{CR} = 2$



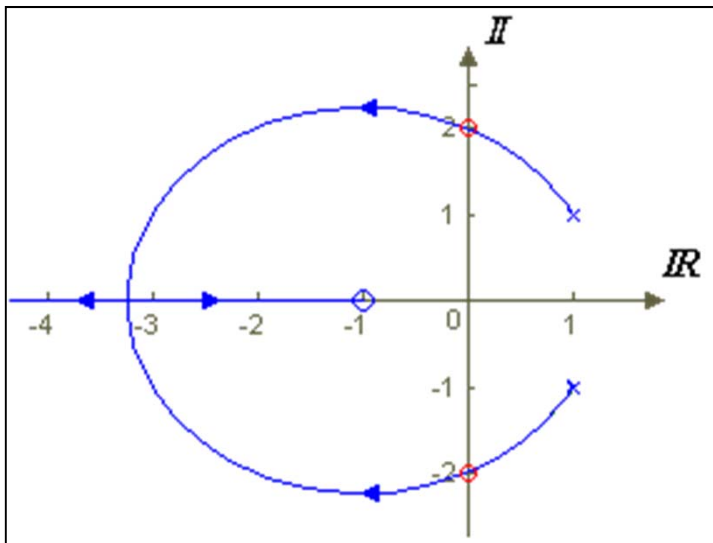


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$z^{OL} = -1, \quad p_{1,2}^{OL} = 1 \pm j$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = 1.236, s_2 = -3.236$$



$$1 + kG(s)H(s) = 0 \Rightarrow s^2 + (k-2)s + k+2 = 0$$

$s^2$	1	$k+2$
$s^1$	$k-2$	
$s^0$	$k+2$	

$$K_{CR} = 2$$

$$\text{sys} = (s+1)/(s^2-2*s+2)$$

▪ **sisotool**

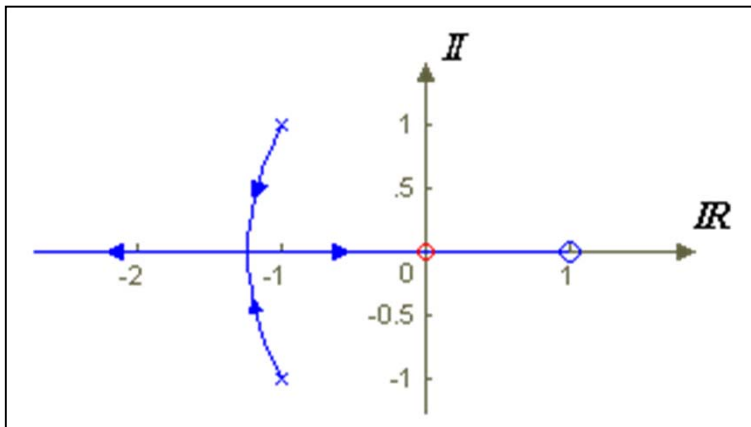


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s-1}{s^2+2s+2}$$

$$z^{OL} = 1, \quad p_{1,2}^{OL} = -1 \pm j$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -1.236, s_2 = 3.236$$



$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s^2 + (k+2)s + 2 - k = 0$$

$s^2$	1	$2 - k$
$s^1$	$k + 2$	
$s^0$	$2 - k$	

- $k_{CR} = 2$  ma, in questo caso, il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile per valori del guadagni inferiori a quello critico.

$$\text{sys} = (s-1)/(s^2-2*s+2)$$

- **sisotool**



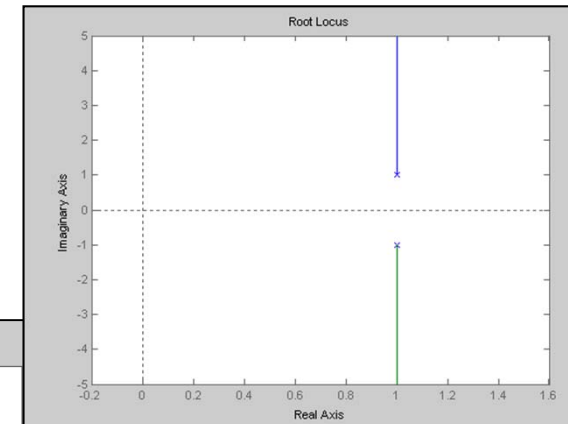
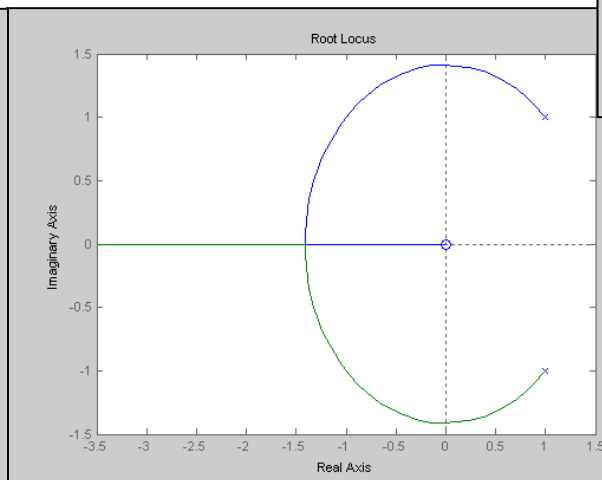
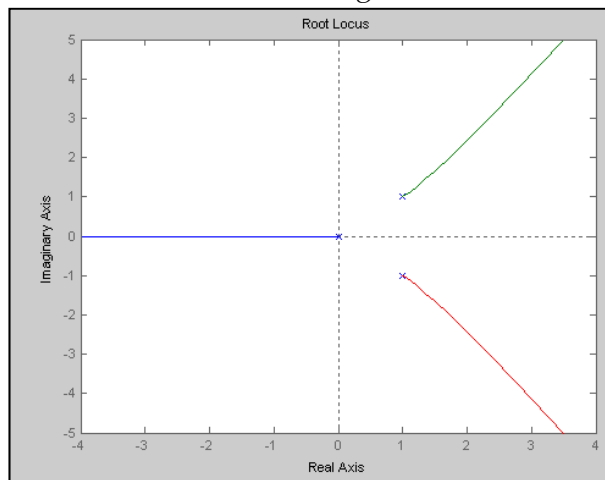
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 10:** Gli zeri in anello aperto attraggono i rami del luogo, i poli in anello aperto respingono i rami del luogo.
- Questa regola risulta fondamentale nel progetto e nella fase di sintesi in quanto fornisce indicazioni sul numero e locazione delle singolarità del controllore  $K(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}, kH(s) = k \Rightarrow kG(s)H(s) = \frac{k}{s^2 - 2s + 2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = s$$





## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)



### □ Sommario, $k > 0$ .

- 1) Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.
- 2) I poli a ciclo chiuso tendono agli zeri di anello aperto o all'infinito.
- 3) Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero di poli della  $FdT$  di anello aperto.
- 4) Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- 5) Gli asintoti sono tali che:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}, \quad \psi_{ar} = \frac{(2r+1)\pi}{n - m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- 6) Il luogo delle radici sull'asse reale lascia alla sua destra un numero dispari di singolarità.
- 7) I punti di uscita e di ingresso si trovano dalla soluzione della:

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

- 8) L'angolo di partenza o di arrivo per singolarità complesse è dato da:

$$\gamma_{p_k} = (2\nu+1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$

$$\gamma_{z_k} = (2\nu+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

- 9) Il  $k$  critico si calcola tramite il metodo di Routh.
- 10) Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.

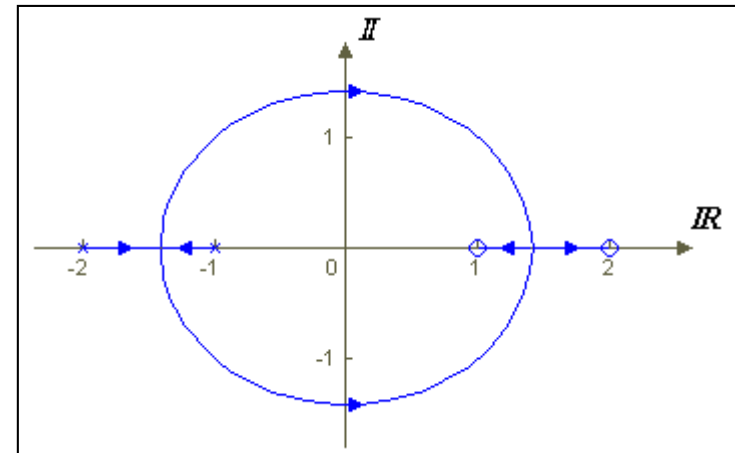
□ **Nota:** per il tracciamento del Luogo delle Radici, non fa differenza la natura di  $k$ ,  $G(s)$ ,  $H(s)$ . Ovvero possono essere parte del processo, parte del controllore, in catena diretta, oppure in catena di retroazione



## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

1. Singolarità: Zeri +1, +2; Poli -1, -2
2. Non vi sono Asintoti
3. Vi sono 2 rami che si distaccano dall'asse Reale e poi rientrano



$$\frac{dk}{ds} = -6 \frac{s^2 - 2}{(s^2 - 3s + 2)^2} = 0 \Rightarrow s^2 - 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

4. Esiste un  $k_{CR}$ , calcolabile con il Criterio di Routh

$$D(s) = (1+k)s^2 + 3(1-k)s + 2(1+k) = 0$$

$s^2$	$1+k$	$2(1+k)$
$s^1$	$3(1-k)$	
$s^0$	$2(1+k)$	

$$k_{CR} = 1; k < k_{CR}$$

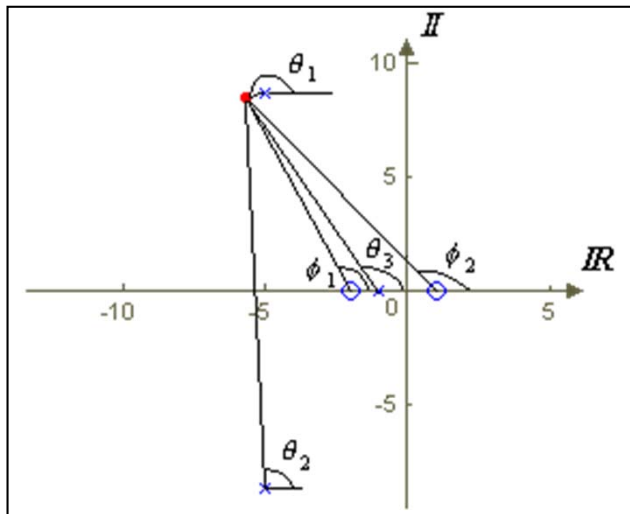
$$\text{sys} = ((s-1)*(s-2))/(s^2+3*s+2)$$



## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s^2+10s+100)}$$

1. Singolarità: Zeri +1, -2; Poli -1, -0.5+-j8.66, ci sono 3 rami
2. No. Asintoti = 1
3. Calcolo Angolo di partenza dai poli complessi e coniugati



$$\theta_1 \cong \pi - \theta_2 - \theta_3 + \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &\cong \pi - 90^\circ - 114.79^\circ + 109.11^\circ + 124.72^\circ \\ &\cong 209.04^\circ\end{aligned}$$



## Esempi e Applicazioni



### 4. Calcolo Punti di Ingresso/Uscita

$$1 + G_{OL}(s) = 0 \Rightarrow k = \frac{(s+1)(s^2 + 10s + 100)}{(s-1)(s+2)}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -10.23, \quad s_2 = 10.5$$

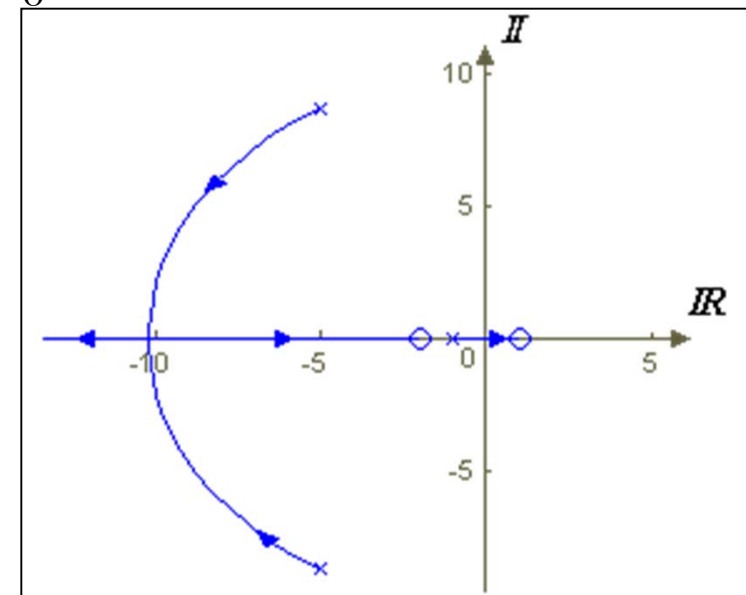
### 5. Calcolo $k$ critico, $k < k_{CR}$ per la stabilità asintotica in anello chiuso

$$D(s) = s^3 + (11+k)s^2 + (110+k)s + 100 - 2k = 0$$

$s^3$	1	$110 + k$
$s^2$	$11 + k$	$100 - 2k$
$s^1$	$\frac{1110 + 123k + k^2}{11 + k}$	0
$s^0$	$100 - 2k$	

$$k < k_{CR} = 50$$

$$\text{sys} = ((s-1)*(s+2))/((s^2+10*s+100)*(s+1))$$







## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{s + 5}{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}$$

1. Zeri: -5; Poli: 0, +1, -7, -1.5+j0.866,  
Il Luogo ha 4 rami

2. No. Asintoti = 4

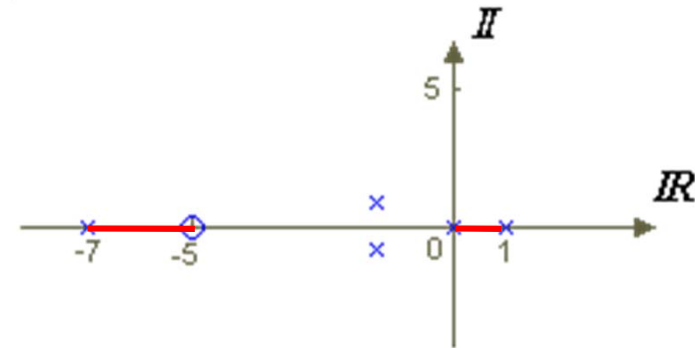
$$x_a = \frac{0 + 1 - 7 - 1.5 - 1.5 + 5}{5 - 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{4}, \psi_{a1} = \frac{3}{4}\pi, \psi_{a2} = \frac{5}{4}\pi, \psi_{a3} = \frac{7}{4}\pi$$

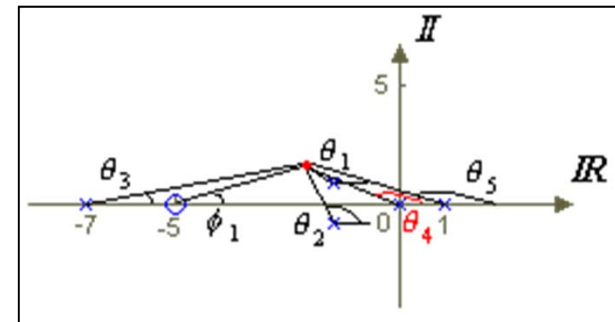
3. Esiste 1 punto di uscita

$$k = \frac{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}{s + 5},$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s = 0.59$$



4. Angolo di Uscita dai Poli Complessi



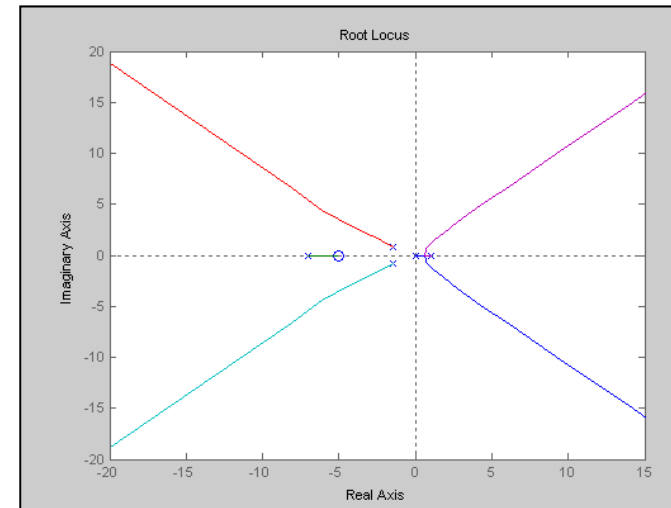
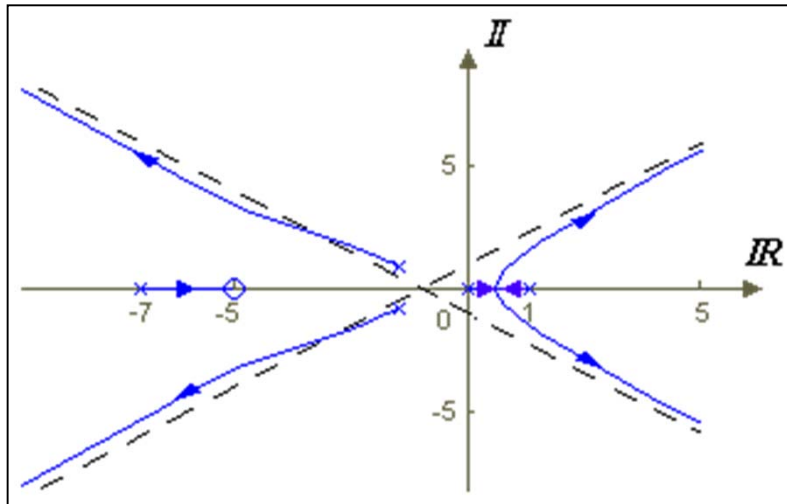
$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong 3\pi - 90^\circ - 8.95^\circ - 150^\circ - 160.89^\circ + 13.9^\circ \cong 144.06^\circ$$



## Esempi e Applicazioni

- ❑ Il sistema in ciclo chiuso è sempre INSTABILE



$$\text{sys} = (s+5) / ((s^2-s)*(s+7)*(s^2+3*s+3))$$



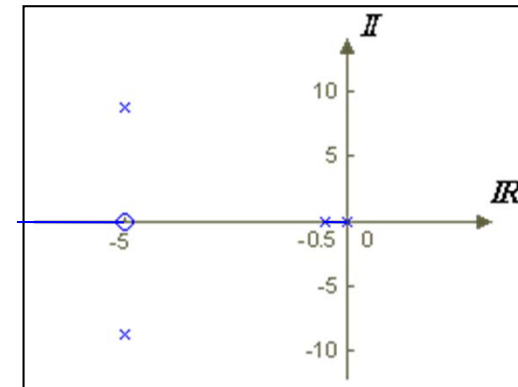
## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = \frac{s + 5}{s(s + 0.5)(s^2 + 10s + 100)}$$

1. Zeri: -5; Poli: 0, -0.5, -5+-j8.66: Il Luogo ha 4 rami

2. No. Asintoti = 3

$$x_a = \frac{0 - 0.5 - 5 - 5 + 5}{4 - 1} = \frac{-5.5}{3} = -1.83$$
$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$



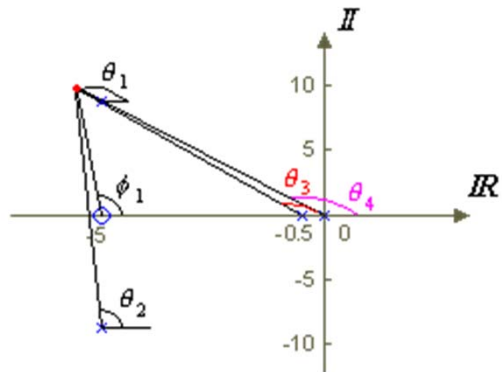
3. Esistono 1 punto di uscita ed 1 punto di ingresso

$$k = \frac{s(s + 0.5)(s^2 + 10s + 100)}{s + 5}$$
$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -8.04, s_2 = -0.25$$



## Esempi e Applicazioni

### 4. Angolo di Uscita dai Poli Complessi



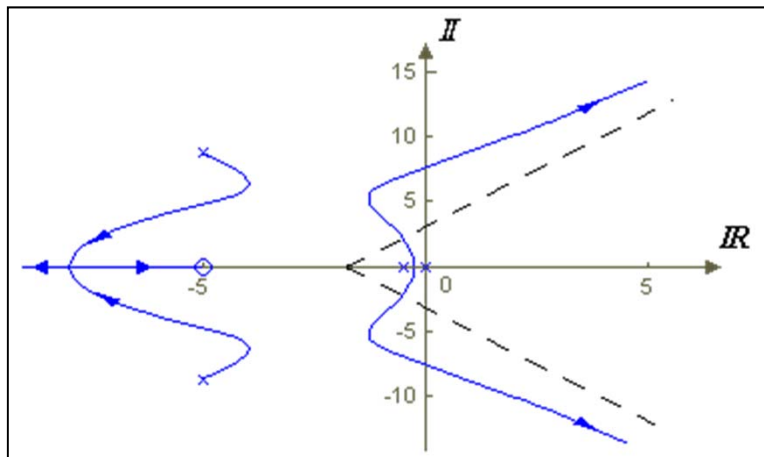
$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 117.46^\circ - 120^\circ + 90^\circ \cong -57.46^\circ$$

### 5. Calcolo $k$ critico con Routh

$$D(s) = k(s + 5) + s(s + 0.5)(s^2 + 10s + 100) = 0$$

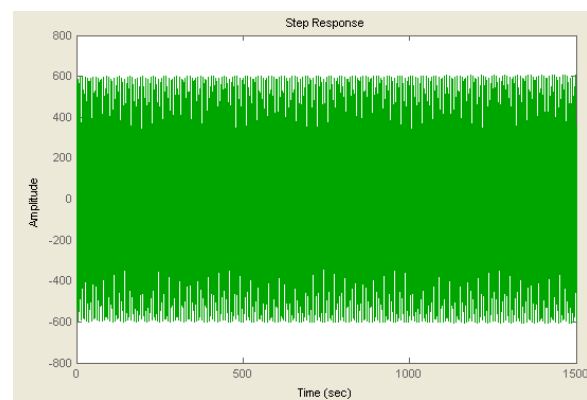
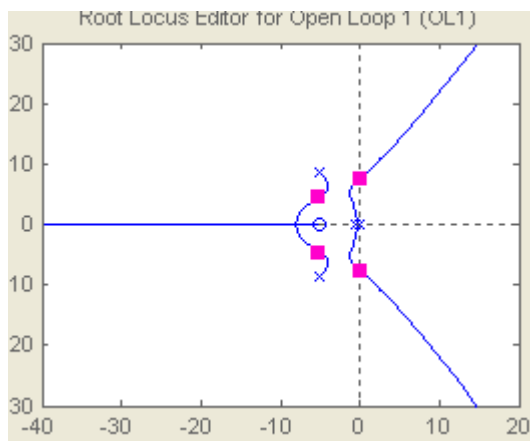
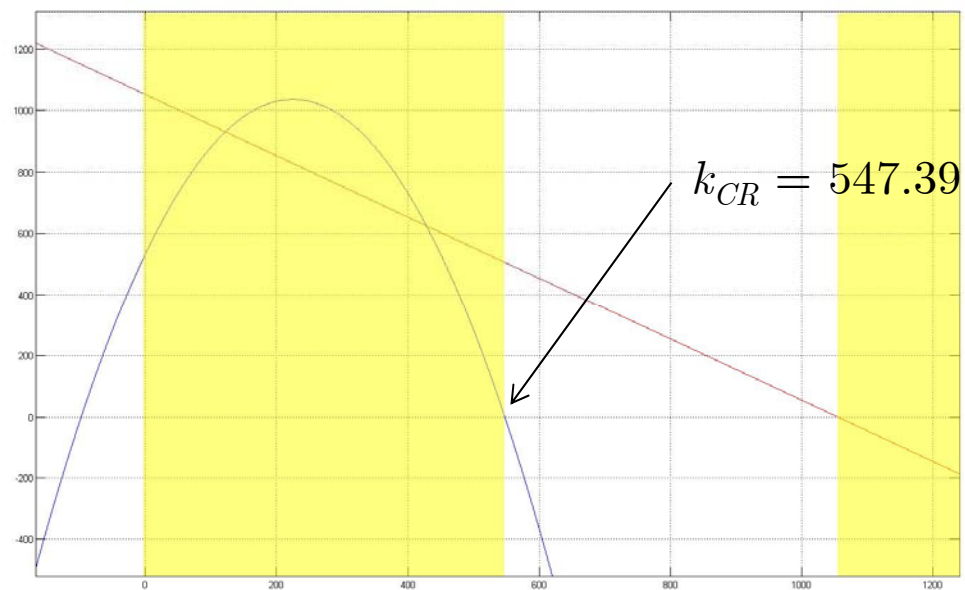
$$D(s) = s^4 + 10.5s^3 + 105s^2 + (50 + k)s + 5k = 0$$



$s^4$	1	105	$5k$
$s^3$	10.5	$50 + k$	
$s^2$	$\frac{1052.5 - k}{10.5}$	$5k$	0
$s^1$	$\frac{(1052.5 - k)(50 + k) - 551.25k}{(1052.5 - k)}$	0	
$s^0$	$5k$		

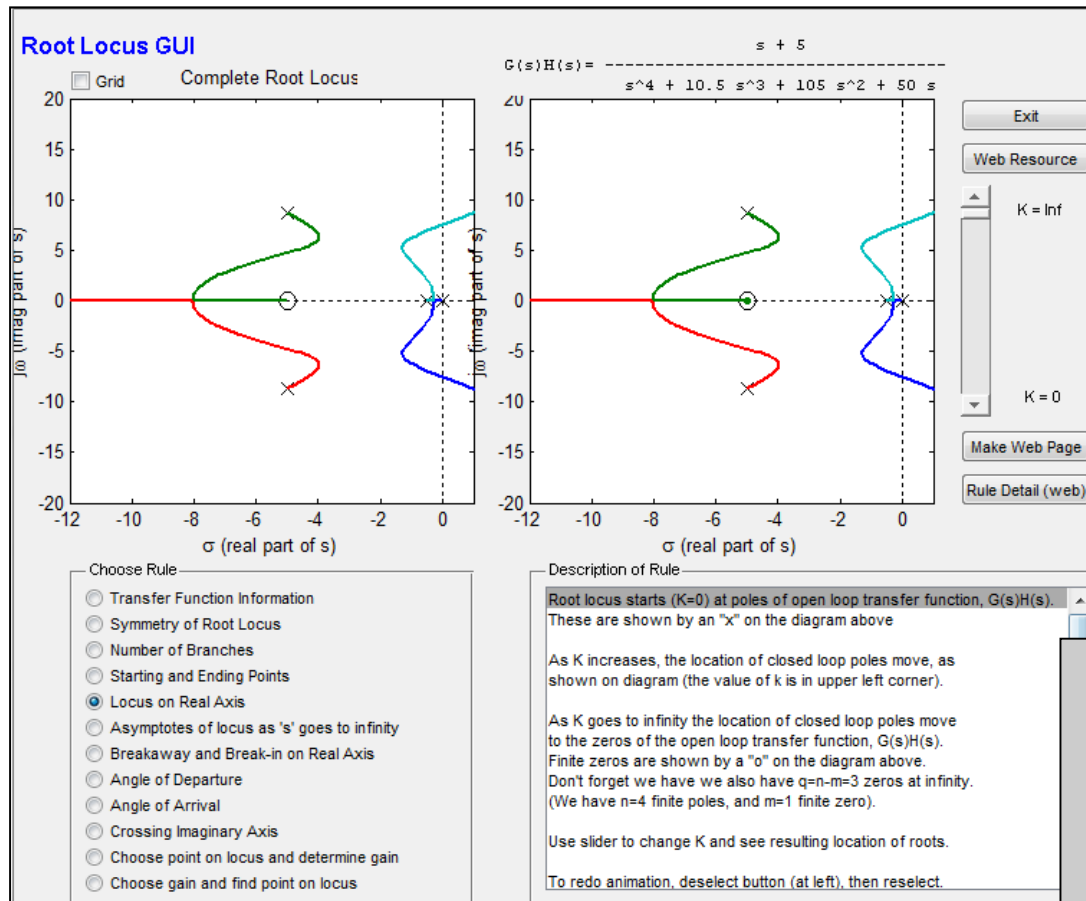


## Esempi e Applicazioni

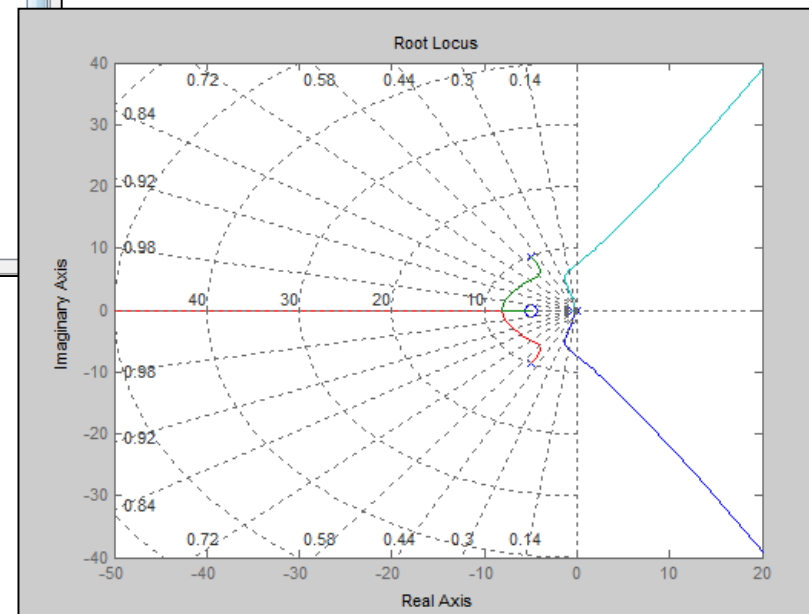




## Esempi e Applicazioni



$$\text{sys} = (s+5)/(s^4+10.5*s^3+105*s^2+50*s)$$





## Esempi ed Applicazioni

### □ Esempio di Sintesi

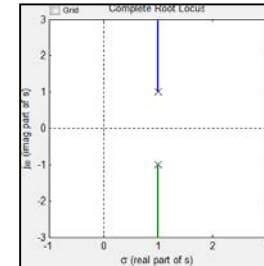
Dato il sistema  $G(s)$ , progettare un controllore tale che:

1. Il sistema sia asintoticamente stabile
2. L'errore a regime al gradino unitario sia = 0

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}; p_{1,2} = +1 \pm j$$

- Consideriamo una variazione di guadagno. Il luogo delle Radici per  $k > 0$  è dato da:

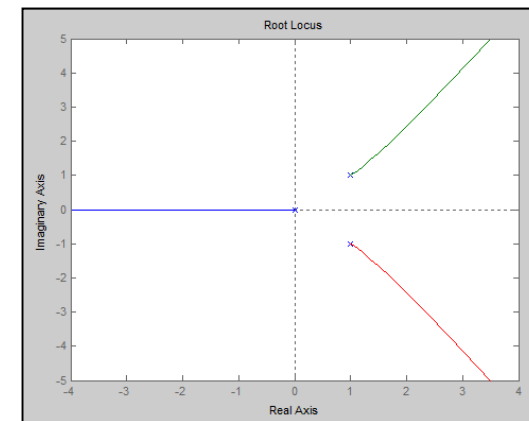
$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{k}{s^2 - 2s + 2}$$



- E' necessario introdurre un polo all'origine per soddisfare il requisito di risposta a regime. Un controllore possibile è quindi:

$$K(s) = \frac{k}{s}$$

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{k}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$





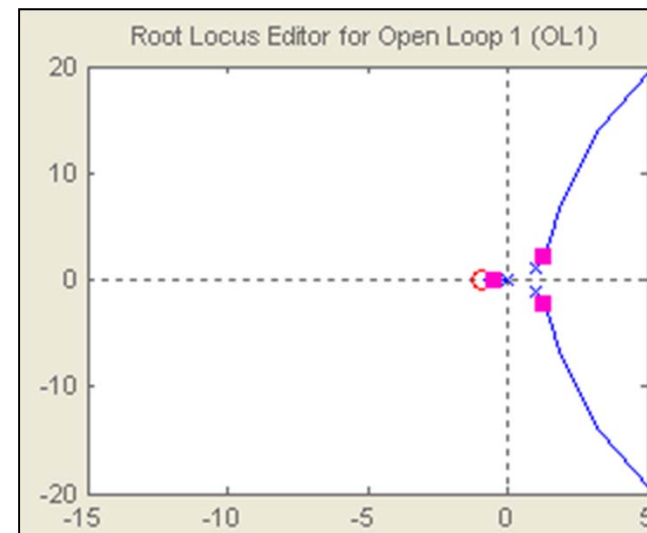
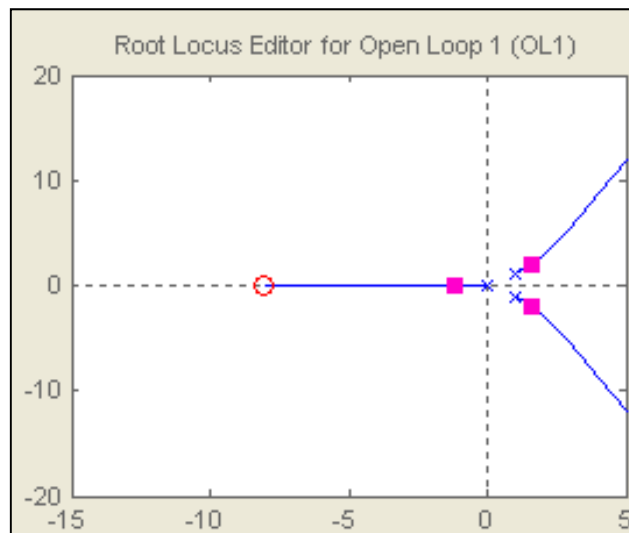
## Esempi ed Applicazioni

- Per attirare i rami instabili nel semipiano di parte reale negativa, occorre introdurre uno ZERO (regola 10). Consideriamo un controllore P – I:

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)}{s} \quad G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s + z_1)}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$D(s) = s(s^2 - 2s + 2) + k(s + z_1) = 0 \quad D(s) = s^3 - 2s^2 + (2 + k)s + kz_1 = 0$$

❑ CN di Routh non è soddisfatta ed il sistema in ciclo chiuso è sempre instabile







## Esempi ed Applicazioni



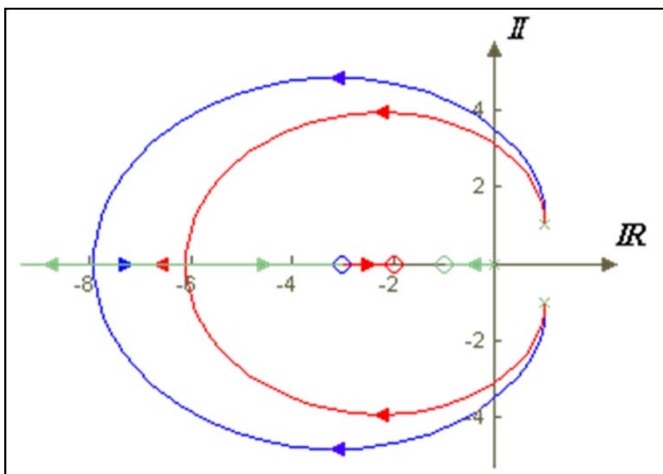
- La regola 10 suggerisce l'inserimento di almeno un ulteriore zero per "attrarre" il luogo delle radici nel semipiano di parte reale negativa
- Un possibile controllore è un Controllore industriale di nome P-I-D ed ha la forma generale (formalmente non causale):

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}$$

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$D(s) = s(s^2 - 2s + 2) + k(s + z_1)(s + z_2) =$$

$$= s^3 + (k - 2)s^2 + [2 + k(z_1 + z_2)]s + kz_1z_2 = 0$$



1	$2 + k(z_1 + z_2)$	0
$k - 2$	$kz_1z_2$	
(*)	0	
$kz_1z_2$		

$$(*) = \frac{(k - 2)[2 + k(z_1 + z_2)] - kz_1z_2}{(k - 2)}$$



## Esempi ed Applicazioni

- Il controllore scelto, stabilizza il sistema in ciclo chiuso per valori del guadagno maggiori del  $k_{cr}$ , ma è un controllore non causale (due zeri ed un polo).
  - Risulta necessario aggiungere almeno un polo, “Fuori Banda”, in modo da influenzare il meno possibile la stabilità in ciclo chiuso del sistema.
- **L’aggiunta di poli fuori dalla banda passante ovvero a frequenza molto maggiore di  $w_{BW}$ , non influenza in modo sostanziale la risposta in frequenza**

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + P)}$$

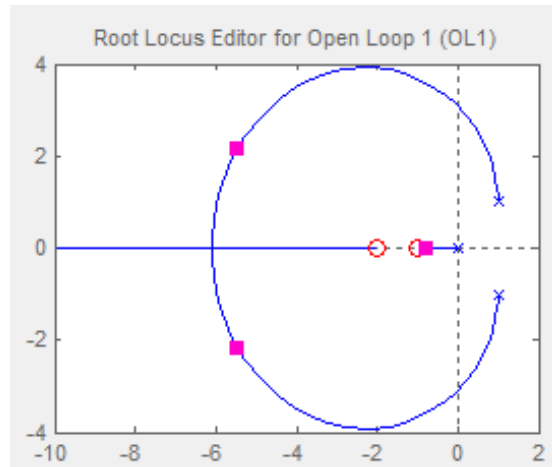
$$K(s) = k \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s + P)} \Rightarrow K(s)G(s) = k \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s + P)(s^2 - 2s + 2)}$$

□ **Uso di SISOTOOL**

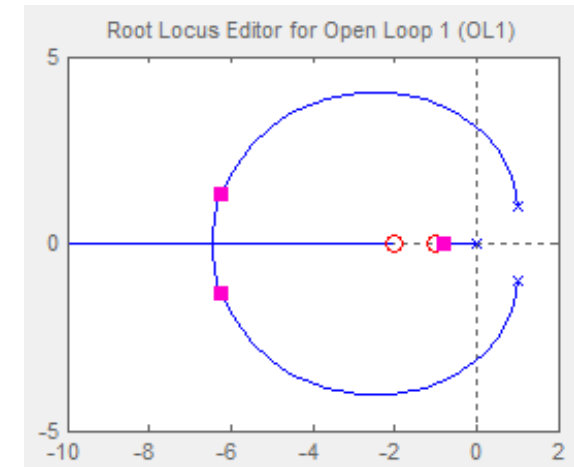
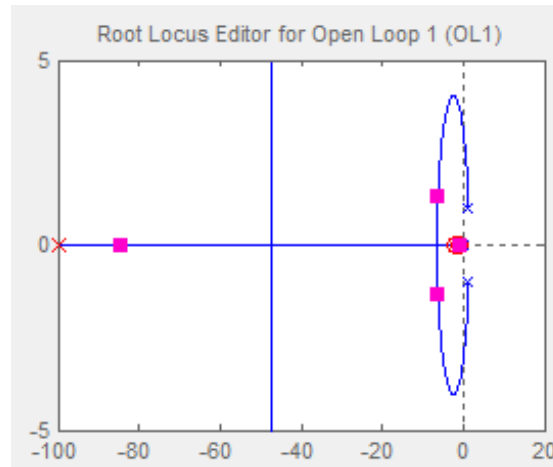


## Esempi ed Applicazioni

No Pole

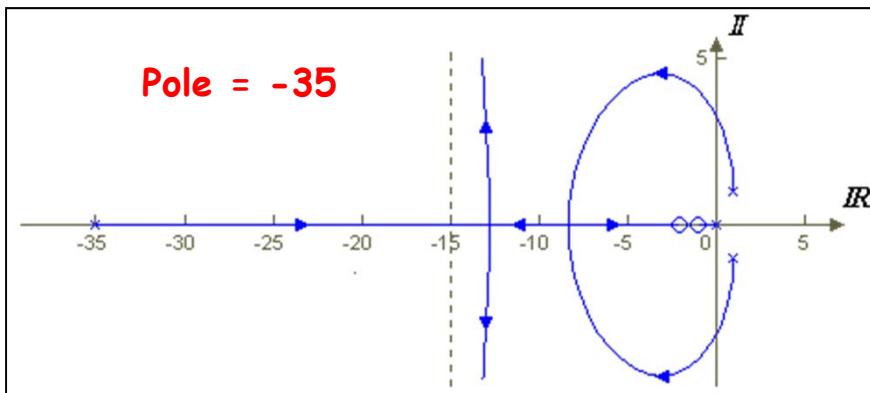


Pole = -100

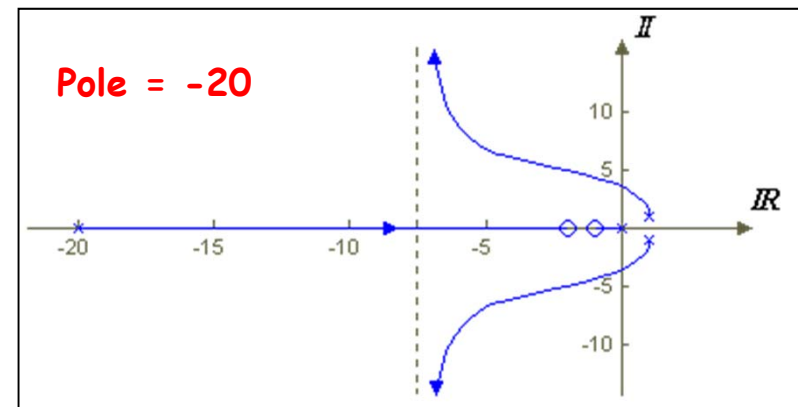


$$\text{sys} = 1/(s^2 - 2s + 2)$$

Pole = -35



Pole = -20





## Luogo delle Radici Inverso

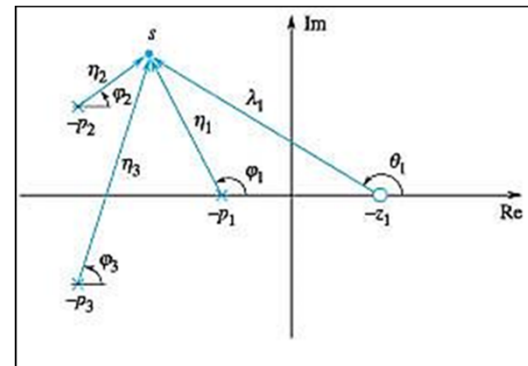


- Il luogo delle radici inverso fornisce l'andamento dei poli a ciclo chiuso quando la costante di guadagno  $k$  è negativa o quando, pur essendo  $k$  positiva, si è in presenza di retroazione positiva.
- Il tracciamento del Luogo segue le stesse regole, con variazioni riguardanti la componente di fase dell'equazione caratteristica.

$$D_{CL}(s) = 1 + kG(s)H(s) = 1 + G_{OL}(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|, k < 0$$



$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = 2\nu\pi \quad (\nu \text{ intero})$$



# Tracciamento del Luogo Inverso



## Regola 1

*Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.*

## Regola 2

*Dato un sistema con FdT con  $n$  poli e  $m$  zeri (con  $n \geq m$ ), se  $k \rightarrow -\infty$ ,  $m$  poli a ciclo chiuso tendono agli  $m$  zeri di anello aperto e i restanti  $n-m$  poli a ciclo chiuso tendono all'infinito.*

## Regola 3

*Il luogo delle radici ha un numero di rami pari a  $n$ , numero di poli della FdT di anello aperto.*

## Regola 4

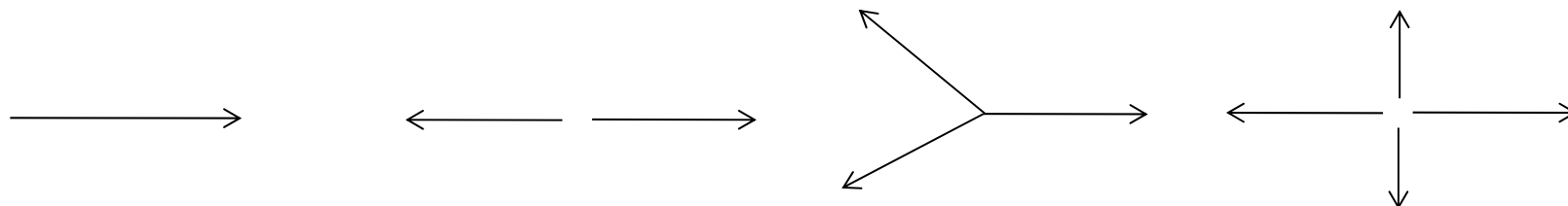
*Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.*

## ✖ Regola 5

*I rami che individuano lo spostamento dei poli che tendono all'infinito ( $n-m$ ), seguono asintoti che si individuano tenendo conto che:*

- *si intersecano sull'asse reale, come nel luogo diretto,*
- *formano, con l'asse reale, angoli pari a:*

$$\psi_{ar} = \frac{2r\pi}{n-m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$$





## Tracciamento del Luogo Inverso

### ✖ Regola 6

*Lungo l'asse reale il luogo delle radici lascia alla sua destra un numero pari di singolarità, cioè di poli e zeri a ciclo aperto.*

### Regola 7

*I punti di uscita e di ingresso si trovano risolvendo l'equazione:  $\frac{dk}{ds} = 0$*

### ✖ Regola 8

*L'angolo di partenza da un polo complesso e di arrivo a uno zero complesso si determinano utilizzando, rispettivamente, le seguenti relazioni:*

$$\gamma_{p_k} = 2\nu\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$
$$\gamma_{z_k} = 2\nu\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

### Regola 9

*Il valore del parametro  $k$  per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova utilizzando il metodo di Routh.*

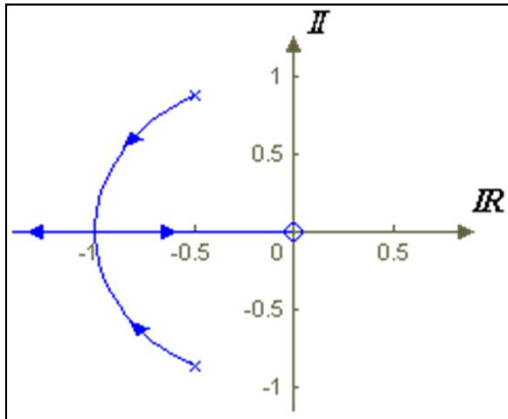
### Regola 10

*Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.*

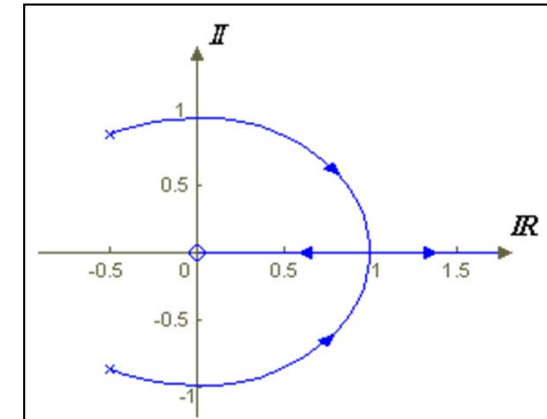


## Esempi e Applicazioni (LI)

$$G_{OL}(s) = k \frac{s}{s^2 + s + 1}$$



$$sys = s/(s^2+s+1)$$



$$\theta_1 = \pi - \theta_2 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ + 120^\circ \cong 210^\circ$$

$$\theta_1 = 0 - \theta_2 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong -90^\circ + 120^\circ \cong 30^\circ$$

- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k$  positivi

$$1 + G_{OL}(s)H(s) = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2 + s + 1}{s}$$
$$\frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 - 1}{s^2} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1$$

- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k < k_{cr}$

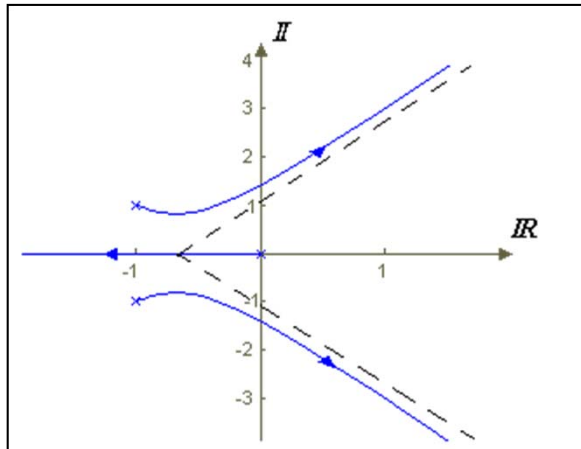


## Esempi e Applicazioni (LI)

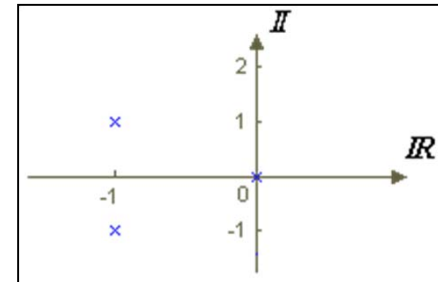
$$G_{OL}(s) = k \cdot \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\text{sys} = 1/(s^3 + 2s^2 + 2s)$$

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 135^\circ \cong -45^\circ$$

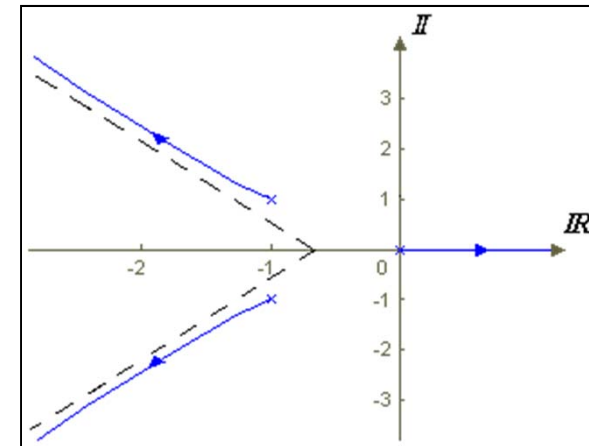


- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k < k_{cr}$   
 $k_{cr} < 4$   
 $0 < k < k_{cr}$



$$\theta_1 \cong 2\pi - 90^\circ - 135^\circ \cong 135^\circ$$

$$x_a = \frac{0 - 1 - 1}{3 - 0} = -\frac{2}{3}$$



- Instabile in ciclo chiuso per tutti i  $k$





## Esempi

### □ Esempio di Sintesi:

Dato il sistema  $G(s)$ , determinare un controllore  $K(s)$  tale che l'errore a regime al gradino unitario sia  $= 0$

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{sys1}=(s-1)/(s^2+3s+2)$$

- Il controllore deve introdurre un integratore in modo che la FdT in anello aperto sia di tipo 1.
- Il sistema in ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile
- Scelta iniziale del controllore in modo che la FdT di anello sia di tipo 1:

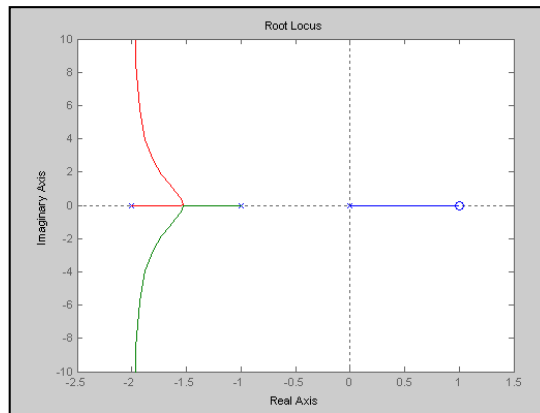
$$K(s) = \frac{k}{s}$$

$$G_{OL}(s) = \frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)} \quad G_{CL}(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1+G_{OL}(s)} = \frac{k(s-1)}{s^3 + 3s^2 + (2+k)s - k}$$

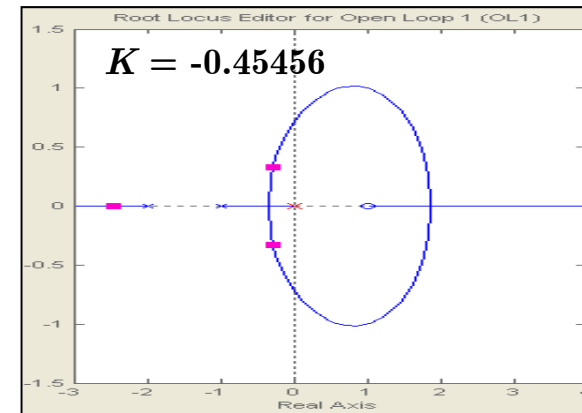
- **Il Luogo delle Radici Diretto,  $K > 0$  mostra che il sistema in anello chiuso è sempre instabile (La CN del Criterio di Routh non è infatti soddisfatta).**



## Esempi



- Luogo delle Radici Diretto,  $K > 0$



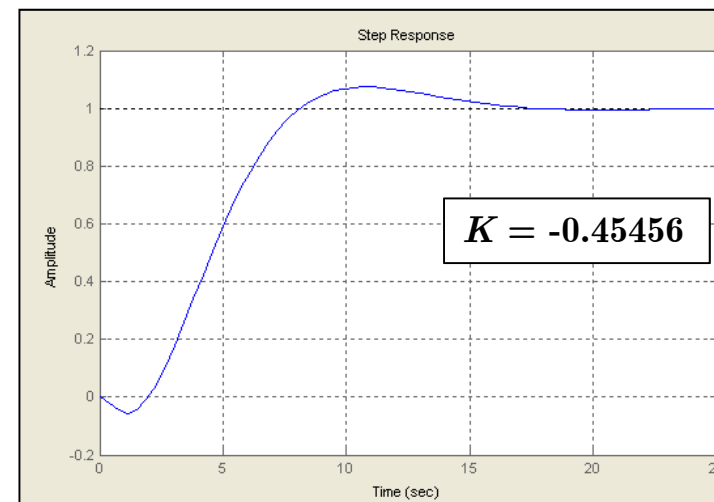
- Luogo delle Radici Inverso,  $K < 0$

Esiste un Intervallo di Stabilità per il guadagno

$$0 > k > -\frac{3}{2}$$

- **Esercizio:**

1. Calcolare il minimo valore dell'errore a regime ad una rampa unitaria
2. Determinare un controllore tale che l'errore alla rampa sia zero.

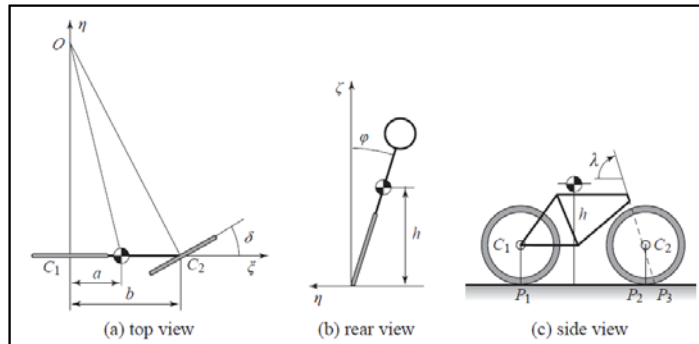




## Esempi



### □ Dinamica biciclo (Steering)



$$\text{sysdeltaphi1} = (2.451 \cdot (s + 12.5)) / (s^2 - 12.2625)$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{Dv_0}{b}s + \frac{mv_0^2 h}{b}}{Js^2 - mgh} \quad \begin{matrix} J \approx mh^2 \\ D \approx mah \end{matrix}$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

$$m = 80 \text{ Kg}$$

$$a = 0.4 \text{ m}$$

$$b = 1.02 \text{ m}$$

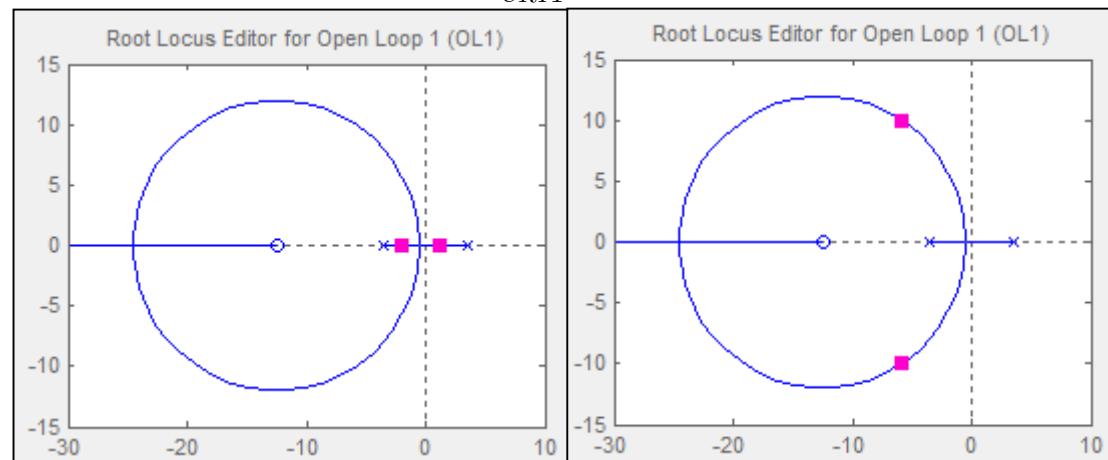
$$h = 0.8 \text{ m}$$

$$v_0 = 5 \text{ m / sec}$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx 2.4510 \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625}$$

$$\text{Retroazione Proporzionale} \quad \delta(s) = -k \cdot \varphi(s)$$

$$k_{\text{CRIT}} = 0.4$$





## Esempi



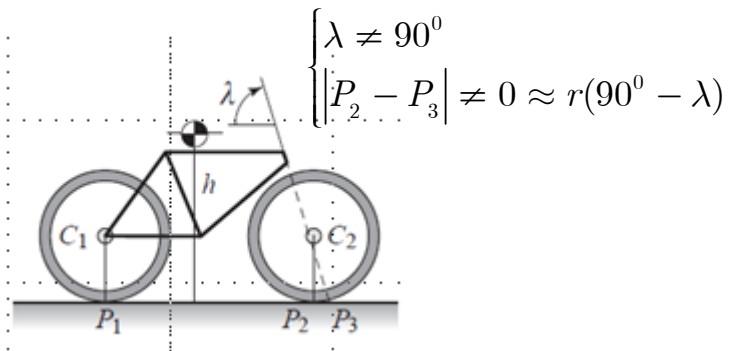
### □ Significato del guadagno nel luogo delle radici

$$J\ddot{\varphi}(t) + \frac{Dhv_0}{b}k\dot{\varphi}(t) + \left[ \frac{mhv_0^2}{b}k - mgh \right] \varphi(t) = 0$$

$$k_{CR} > \frac{gb}{v_0^2}$$

- Al diminuire della velocità, occorre un guadagno maggiore per la stabilità in ciclo chiuso.
- Per valori inferiori al guadagno critico il sistema in ciclo chiuso è instabile

### □ Importanza del manubrio nella dinamica e nella stabilità



$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

$$k_1(v_0) = \frac{b^2}{(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)mac \sin \lambda}$$

$$k_2(v_0) = \frac{bg}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda}$$

- Gli angoli  $\phi$  e  $\delta$  cambiano a causa della presenza del manubrio in funzione di  $\lambda$
- Velocità di autoallineamento
- Velocità critica per la stabilità

$$v_C = \sqrt{bg \cot \lambda}$$

$$v_0 > v_C$$



## Esempi

$$\begin{bmatrix} Ms^2 + Cv_0s + (K_0 + K_2v_0^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$\ddot{\varphi} + A_1\dot{\varphi} + A_2\varphi = B_1\dot{T} + B_2T$$

$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

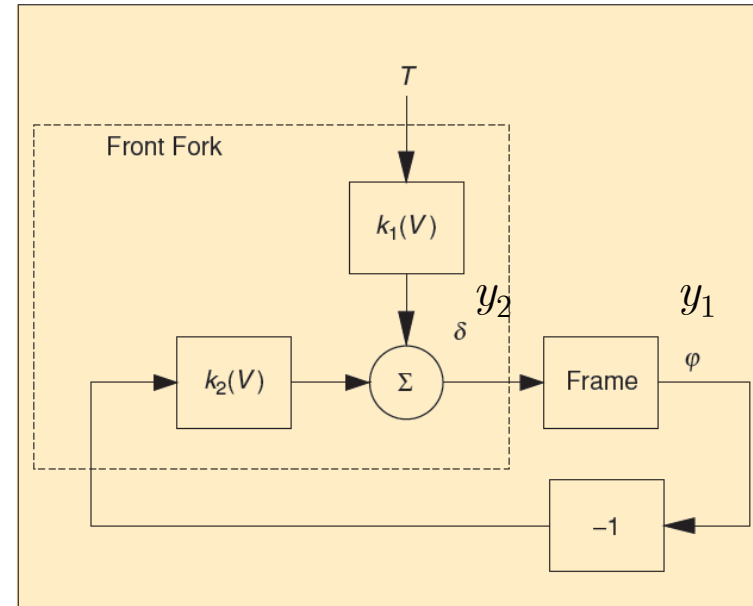
$$G_T^\varphi(s) = B_1 \frac{s + \frac{B_2}{B_1}}{s^2 + A_1s + A_2}$$

$$A_1 = \frac{Dv_0g}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$A_2 = \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_1 = \frac{Dv_0b}{macJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_2 = \frac{b(hv_0^2 - acg)}{acJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$



ans =

```
13.3161 + 3.6949i
13.3161 - 3.6949i
-4.7448
0.3081
```

Transfer function:

$$-1.869 s^2 - 123.9 s - 1870$$

$$13.2 s^4 - 293.1 s^3 + 942.1 s^2 + 1.17e004 s - 3686$$

Transfer function:

$$69.86 s^2 - 771.1$$

$$13.2 s^4 - 293.1 s^3 + 942.1 s^2 + 1.17e004 s - 3686$$



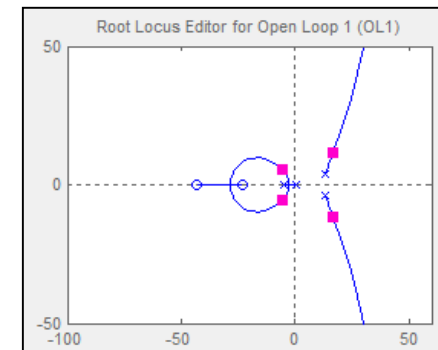
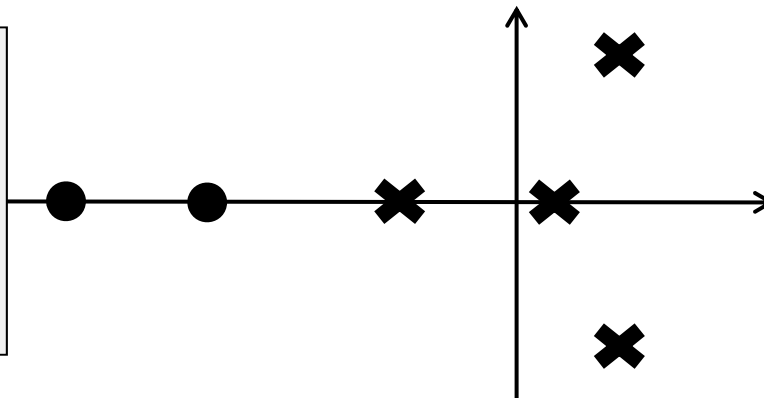
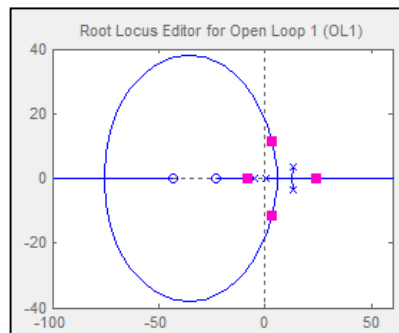
# Esempi



$$\frac{\varphi(s)}{T(s)} = \frac{-0.1416 s^2 - 9.387 s - 141.7}{s^4 - 22.2 s^3 + 71.37 s^2 + 886.4 s - 279.2}$$

13.3204 + 3.6858i  
13.3204 - 3.6858i  
-4.7444  
0.3081

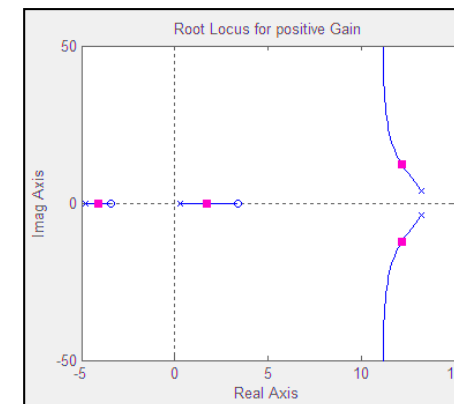
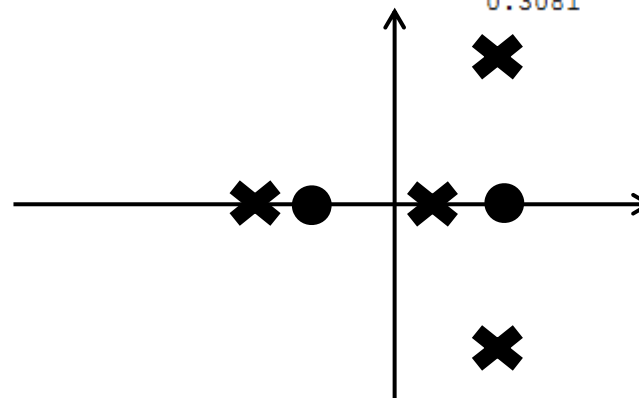
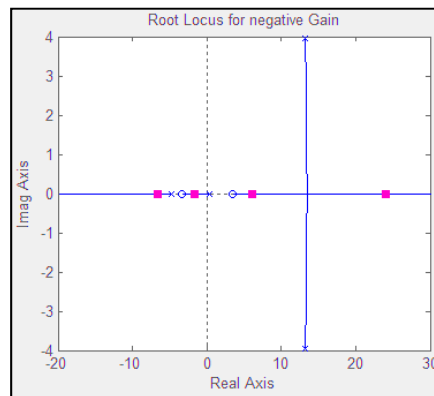
-43.0491  
-23.2409



$$\frac{\delta(s)}{T(s)} = \frac{5.065 s^2 - 58.42}{s^4 - 22.2 s^3 + 71.37 s^2 + 886.4 s - 279.2}$$

13.3204 + 3.6858i  
13.3204 - 3.6858i  
-4.7444  
0.3081

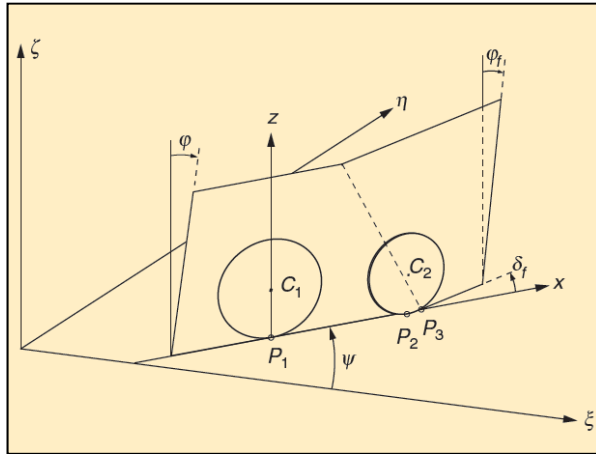
3.3962  
-3.3962





## Esempi

### □ Dinamica biciclo (maneuvering, track following)



$$m = 80Kg$$

$$a = 0.4 m$$

$$b = 1.02 m$$

$$h = 0.8 m$$

$$v_0 = 5 m / sec = 18 Km / h$$

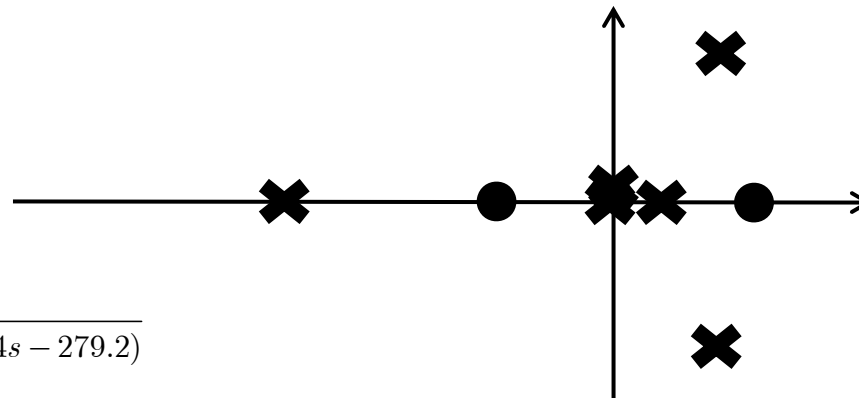
$$\frac{\eta(s)}{T(s)} = 124.14 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{s^2(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)}$$

□ La dinamica di manovra riguarda lo scostamento da una traiettoria rettilinea lungo l'asse  $\xi$ .

□ Per piccoli movimenti tali per cui il modello lineare è valido, si ha:

$$\eta(s) = \frac{v_0}{s} \psi(s)$$

$$\psi(s) = \frac{v_0}{bs} \delta(s)$$





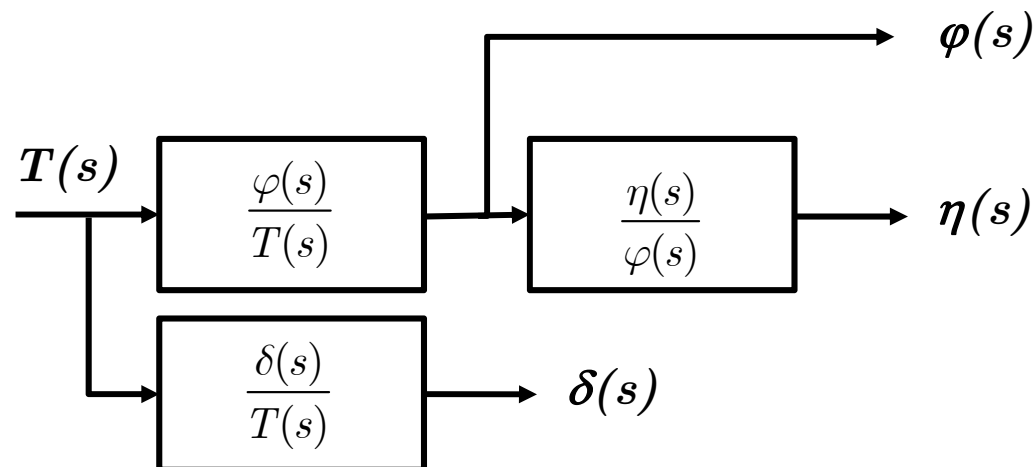
## Esempi

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)}{T(s)} &= -0.416 \frac{(s^2 + 22.565s + 340.63)}{(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)} \\ &= -0.416 \frac{(s + 43.049)(s + 23.409)}{(s - 0.3081)(s + 4.744)(s^2 - 26.408s + 187.93)}\end{aligned}$$

$$\frac{\delta(s)}{T(s)} = \frac{5.065s^2 - 58.42}{(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)}$$

$$\frac{\eta(s)}{\varphi(s)} = -298.41 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{(s^2 + 22.565s + 340.63)} = -298.41 \cdot \frac{(s - 3.3962)(s + 3.3962)}{(s + 43.049)(s + 23.409)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta(s)}{T(s)} &= 124.14 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{s^2(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)} \\ &= 124.14 \cdot \frac{(s - 3.3962)(s + 3.3962)}{s^2(s - 0.3081)(s + 4.744)(s^2 - 26.408s + 187.93)}\end{aligned}$$



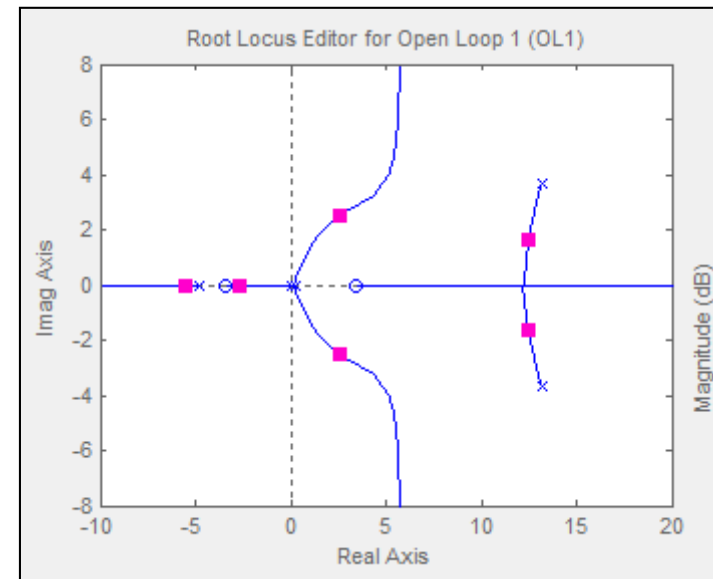
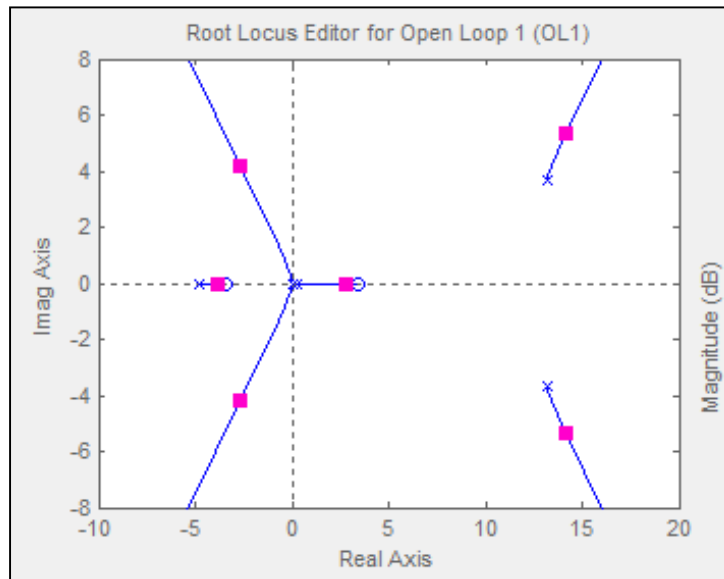




## Esempi

### Forma di Bode

$$\frac{\eta(s)}{T(s)} = 5.2127 \cdot \frac{(1 + 0.2944s)(1 - 0.2944s)}{s^2(1 - 3.2457s)(1 + 0.2108s)(1 - 0.1409s + .0053s^2)}$$





## Esempi



$$\text{sysdeltaphi1} = (2.451 * (s + 12.5)) / (s^2 - 12.2625)$$

$$\text{sysTphi} = (-0.1416 * s^2 - 9.387 * s - 141.7) / (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2)$$

$$\text{sysTdelta} = (5.065 * s^2 - 58.42) / (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2)$$

$$\text{sysTeta} = (124.14 * (5.065 * s^2 - 58.42)) / (s^2 * (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2))$$



## Esempi

### ☐ Commenti

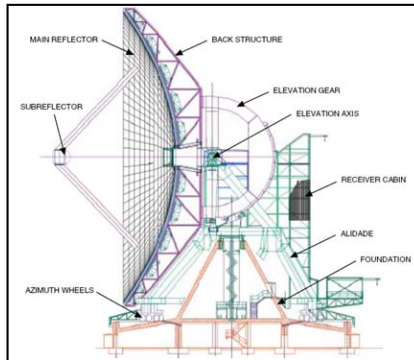
- ☐ Sistema altamente instabile
- ☐ Controllo manuale relativamente semplice con training minimo
- ☐ Implementazione automatica/robotica richiede una sintesi complessa





## Esempi

- ❑ Analisi Modello Antenna (Esempio 70 m radio telescopio, Goldstone, Mojave desert, California)



- **Caratteristiche Generali:**

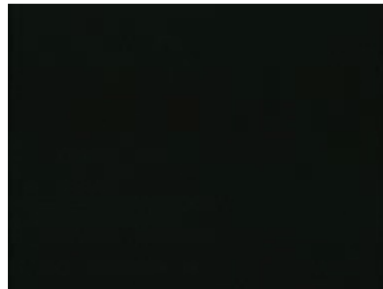
1. La precisione di forma del riflettore di 70 m di diametro deve essere di 1 cm su tutta la superficie di 3,850 metri quadrati.
2. Antenna e struttura di controllo per i due canali di azimut ed elevazione ha un peso 2,700 tonnellate metriche.
3. Frequenza di operazione Ka-Band = 32 GHz

- **Precisioni richieste (approx.):**

1. Azimut  $< 0.5 \text{ arcsec} = 1.38 \cdot 10^{-4} \text{ gradi}$
2. Elevazione  $< 1.5 \text{ arcsec} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ gradi}$

- Modello generato per il controllo (tra encoder di motore e velocità di rotazione): 18 stati, 1 ingresso, 1 uscita

$$A = (18, 18), B = (18, 1), C = (1, 18)$$





# Esempi



$$G(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{u(s)} =$$

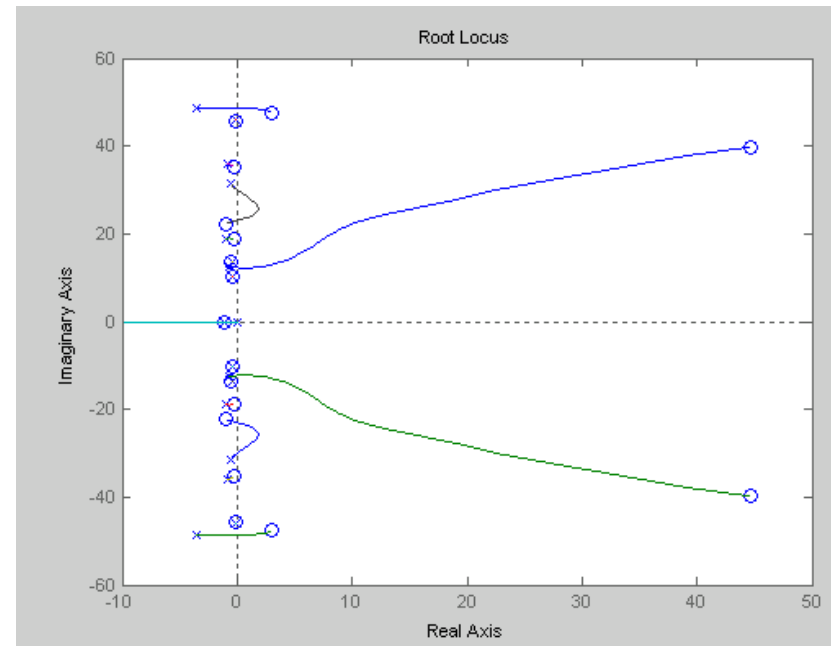
$$\frac{-0.1037 s^{17} + 9.279 s^{16} - 1070 s^{15} + 6.132e004 s^{14} - 4.161e006 s^{13} + 1.487e008 s^{12} - 7.958e009 s^{11} + 1.626e011 s^{10} - 8.067e012 s^9 + 8.148e013 s^8 - 4.345e015 s^7 + 1.75e016 s^6 - 1.203e018 s^5 + 9.864e017 s^4 - 1.556e020 s^3 - 9.712e019 s^2 - 7.202e021 s - 7.724e021}{s^{18} + 16.01 s^{17} + 7661 s^{16} + 9.978e004 s^{15} + 2.268e007 s^{14} + 2.374e008 s^{13} + 3.298e010 s^{12} + 2.731e011 s^{11} + 2.501e013 s^{10} + 1.601e014 s^9 + 9.858e015 s^8 + 4.717e016 s^7 + 1.993e018 s^6 + 6.768e018 s^5 + 1.943e020 s^4 + 4.214e020 s^3 + 7.164e021 s^2 + 7.65e021 s}$$

zeros18 =

```
44.6612 +39.8118i
44.6612 -39.8118i
 2.9652 +47.6003i
 2.9652 -47.6003i
-0.1125 +45.7714i
-0.1125 -45.7714i
-0.1948 +35.2556i
-0.1948 -35.2556i
-0.9408 +22.3040i
-0.9408 -22.3040i
-0.2790 +18.6838i
-0.2790 -18.6838i
-0.4894 +13.6233i
-0.4894 -13.6233i
-0.3481 +10.1103i
-0.3481 -10.1103i
-1.0613
```

poles18 =

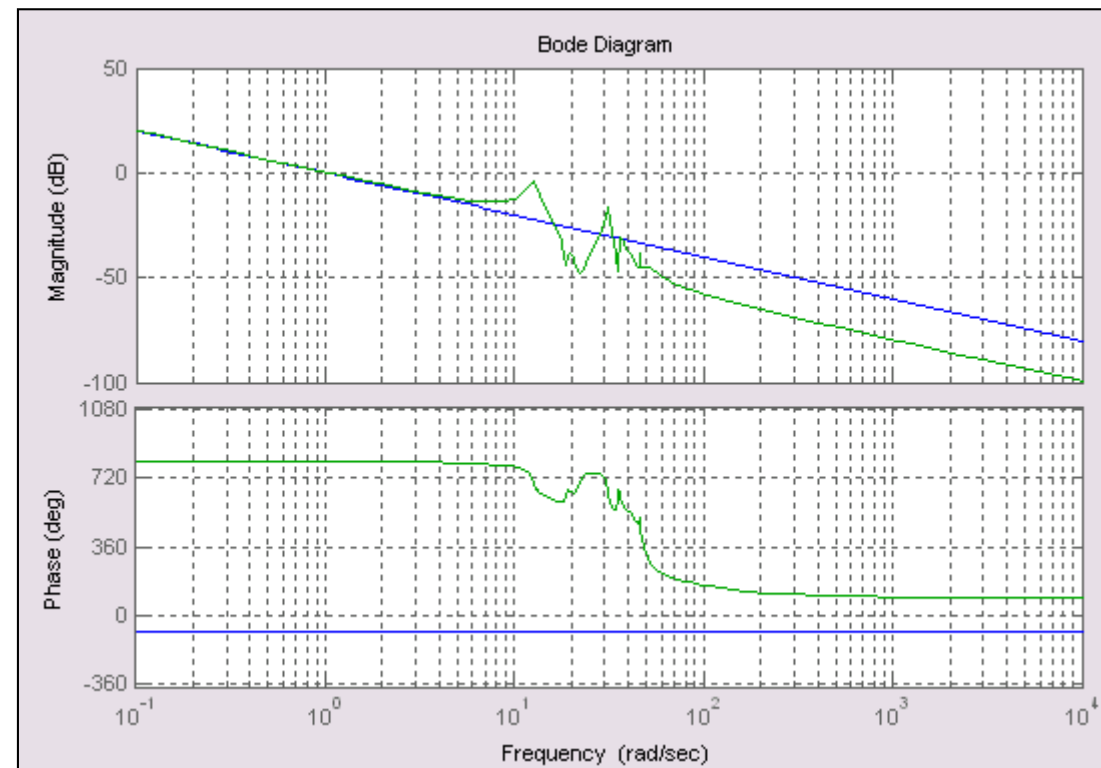
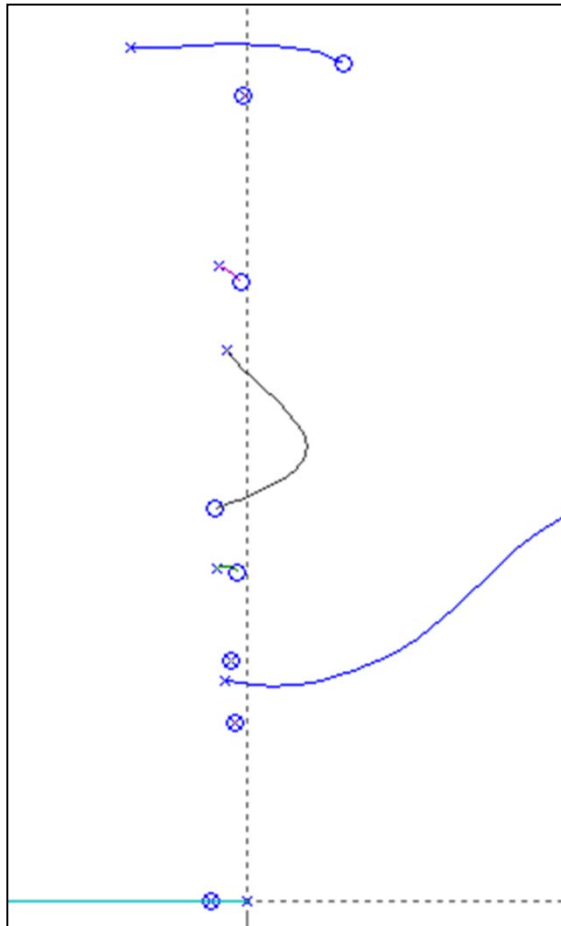
```
0
-3.5695 +48.5082i
-3.5695 -48.5082i
-0.0735 +45.8622i
-0.0735 -45.8622i
-0.8428 +36.1405i
-0.8428 -36.1405i
-0.5803 +31.3313i
-0.5803 -31.3313i
-0.9349 +18.9374i
-0.9349 -18.9374i
-0.4593 +13.6604i
-0.4593 -13.6604i
-0.6459 +12.5613i
-0.6459 -12.5613i
-0.3483 +10.0998i
-0.3483 -10.0998i
-1.1041
```





## Esempi

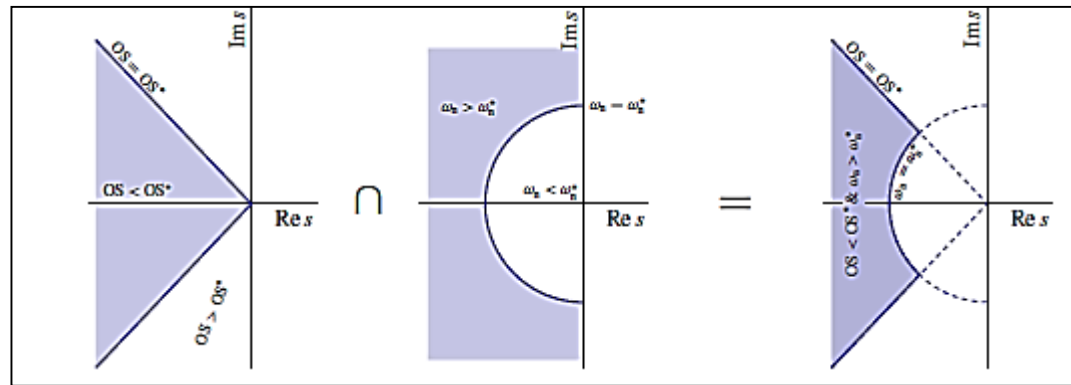
- Approssimazione Singolo Integratore (modello in velocità)  $G(s) = \frac{\dot{\gamma}(s)}{u(s)} \simeq \frac{k}{s}$





## Criteri Generali di Sintesi

- ❑ Il Luogo delle Radici, nella Sintesi, fa riferimento a requisiti di progetto sulla risposta transitoria generata dai poli dominanti in anello chiuso.



- I requisiti di risposta transitoria si traslano naturalmente nella locazione appropriata dei poli in ciclo chiuso
- La locazione dei poli dominanti può essere definita in base a specifiche dei progetto



## Luogo delle Radici non - Standard

- ❑ Cosa succede nel caso in cui si vuole tracciare l'andamento dei poli in anello chiuso al variare di un parametro che non è il guadagno di anello?

▪ **Esempio:**

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + ks + 1}$$

- Come variano i poli del sistema  $G(s)$  al variare di  $k$  ?

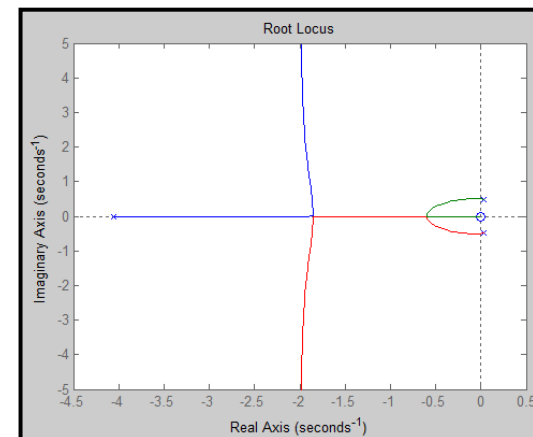
$$s^3 + 4s^2 + ks + 1 = 0 \quad (s^3 + 4s^2 + 1) + ks = 0 \quad \frac{(s^3 + 4s^2 + 1)}{(s^3 + 4s^2 + 1)} + \frac{ks}{(s^3 + 4s^2 + 1)} = 0$$

$$1 + \frac{ks}{(s^3 + 4s^2 + 1)} = 0$$

- Tracciare il luogo delle radici per il nuovo sistema

$$1 + kG_{ol}^{Eq}(s) = 0$$

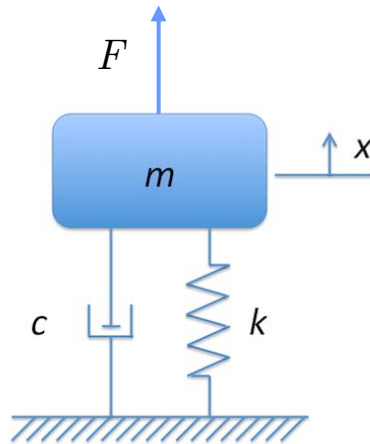
$$G_{ol}^{Eq}(s) = \frac{s}{(s^3 + 4s^2 + 1)}$$







## Luogo delle Radici non - Standard



$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad c = \frac{F}{\dot{x}} = \frac{[N \cdot \text{sec}]}{[m]} \quad k = \frac{F}{x} = \frac{[N]}{[m]}$$

- Dati forniti:  $m = 1$ ;  $k = 1$ .
- Requisito di progetto:  $\exists c \mid \xi \geq 0.75$

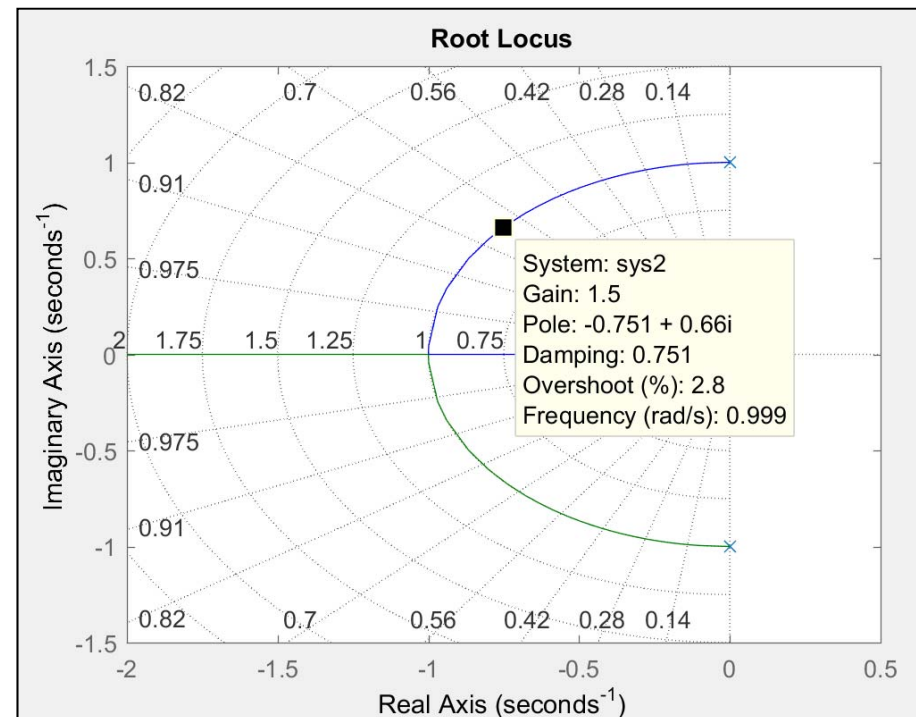
$$s^2 + cs + 1 = 0 \quad (s^2 + 1) + cs = 0$$

$$\frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)} + \frac{cs}{(s^2 + 1)} = 1 + cG(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)}$$

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$\xi \geq 0.75 \Rightarrow c \geq 1.5$$





## Luogo delle Radici non - Standard

- Supplier della molla dichiara che il materiale è soggetto a variazioni dovute alla temperatura. In particolare si ha che:

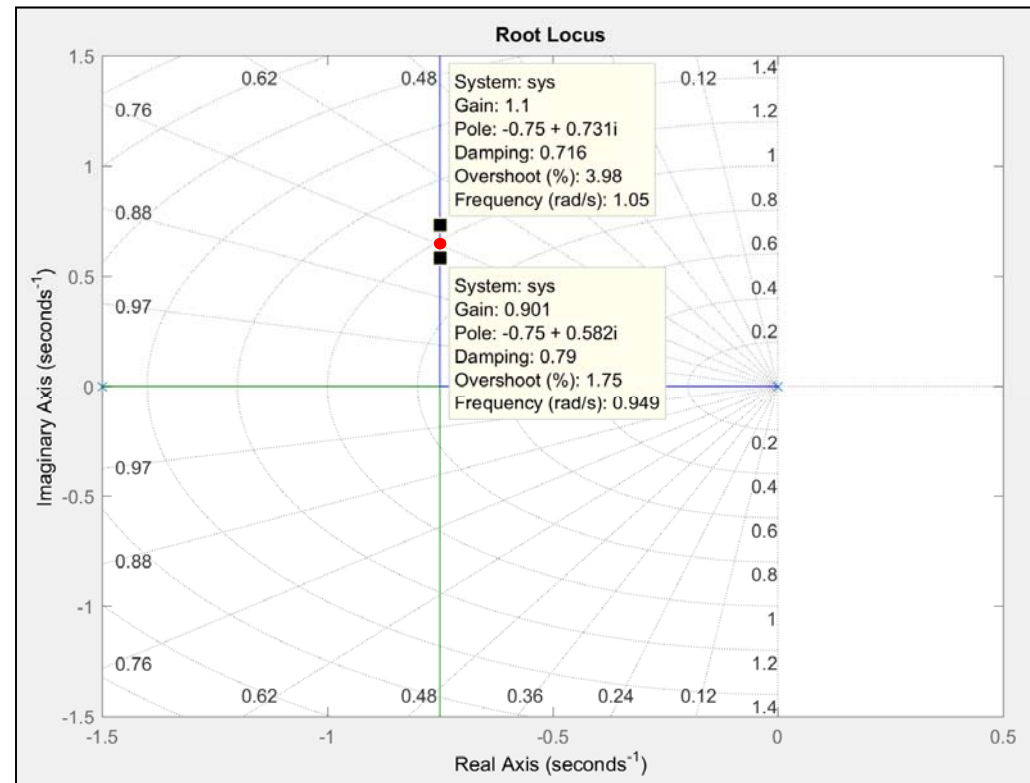
$$\Delta T \uparrow \Rightarrow 0.9k_{nom}, \Delta T \downarrow \Rightarrow 1.1k_{nom}$$

- Possiamo usare il Luogo delle Radici per valutare il progetto dello smorzatore?

$$s^2 + 1.5s + k = 0$$

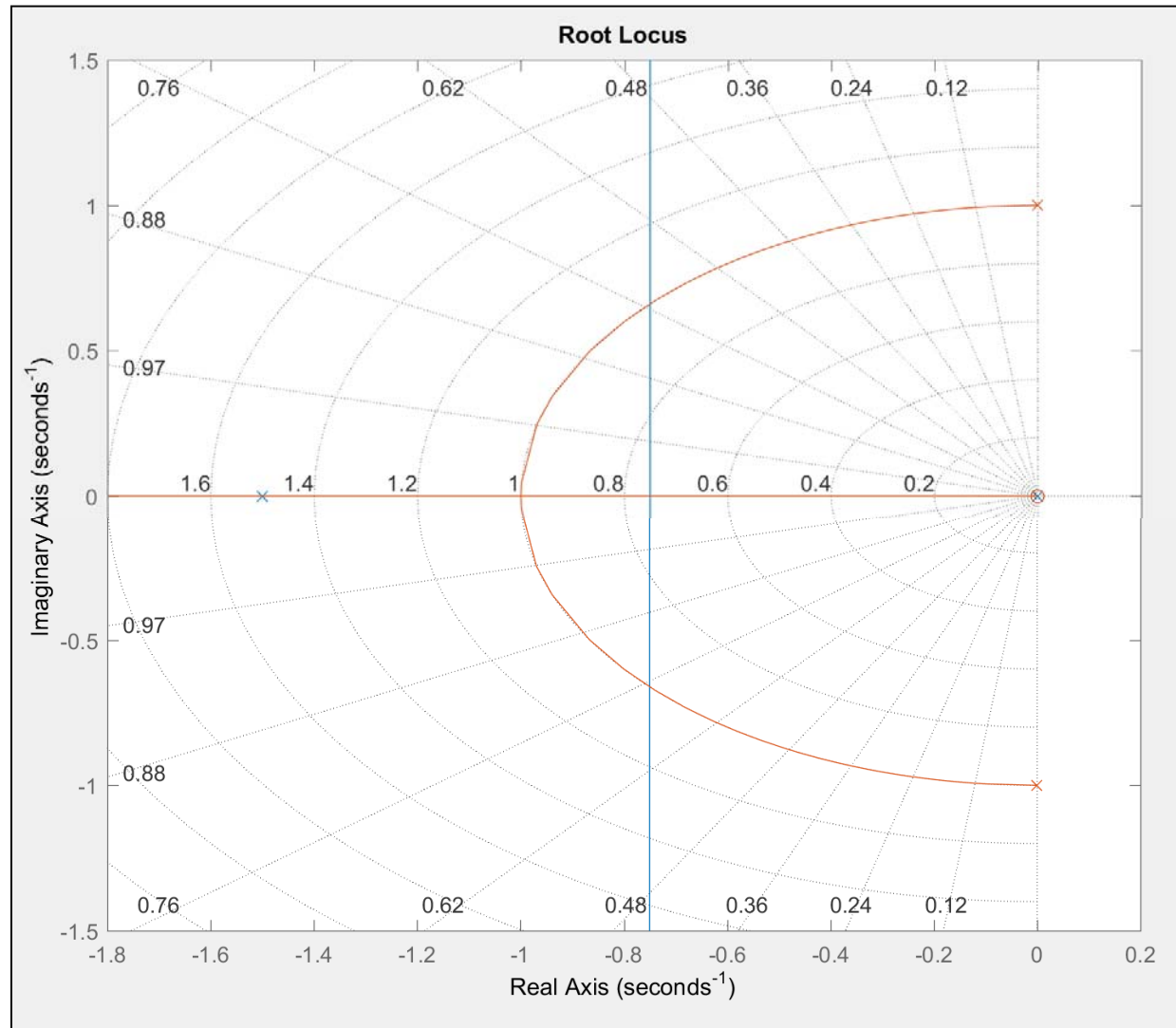
$$1 + kG(s) = 1 + \frac{k}{s^2 + 1.5s} = 0$$

- Il riscaldamento della molla garantisce le prestazioni dello smorzatore. Il raffreddamento no.
- Soluzione:
  1. Restrizione uso in funzione della temperatura
  2. Uso normale ma prestazioni degradate alla diminzione della temperatura
  3. Riprogettazione completa





## Luogo delle Radici non - Standard





## Luogo delle Radici Videos



- <https://www.youtube.com/watch?v=CRvVDoQJYI&list=PLUMWjy5jgHK0iUaExESSY5-PYpTcoHE9z&index=7>
- <https://www.youtube.com/watch?v=eTVddYCeIKI&list=PLUMWjy5jgHK0iUaExESSY5-PYpTcoHE9z&index=8>
- [https://www.youtube.com/watch?v=jb\\_FiP5tKig](https://www.youtube.com/watch?v=jb_FiP5tKig)
- [https://www.youtube.com/watch?v=pG3\\_b7wuweQ&index=7&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f](https://www.youtube.com/watch?v=pG3_b7wuweQ&index=7&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f)
- <https://www.youtube.com/watch?v=WLBszzT0jp4&index=6&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f>