Richiami e nuove nozioni di Algebra Lineare
I^a parte

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 3

Outline

Outline

Matrice

Con $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ si intende una **matrice** di m righe e n colonne formate da $m \times n$ numeri complessi a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, detti **elementi** di A

i e j sono, rispettivamente,l'indice di riga e l'indice di colonna dell'elemento

Comunemente si scrive

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Gli interi m ed n si dicono le **dimensioni** di A

Se $m = n$ la matrice A si dice **quadrata di ordine n**
In questo caso gli elementi a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, si dicono **elementi diagonali** o appartenenti alla **diagonale principale** di A

Se $m \neq n$ la matrice A dicesi **rettangolare**

Vettore

Con $a \in \mathbb{C}^m$ si intende un **vettore** con m componenti complesse indicate come a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$
I vettori sono particolari matrici con una sola colonna, potendosi identificare $\mathbb{C}^{m \times 1}$ con $\mathbb{C}^m$

Se A ha tutti gli elementi reali è detta matrice reale e si scrive $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Analogamente con $a \in \mathbb{R}^m$ si intende un vettore a componenti reali

Trasposta e Hermitiana

Data la matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, la matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ i cui elementi sono $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, si dice **matrice trasposta** della matrice A e si indica con A^T mentre si dice matrice **trasposta coniugata** di A la matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ i cui elementi sono $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ e si indica con A^H

La matrice A^H si legge **matrice hermitiana** di A o, più semplicemente, l'**hermitiana** di A

Matrice Identica

La matrice quadrata

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice identica**

Matrice diagonale

Si dice **matrice diagonale** una matrice quadrata D con gli elementi non diagonali nulli, cioè della forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Si scrive anche $D = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

Matrici triangolari

Le matrici quadrate del tipo

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

si dicono **matrici triangolari** e precisamente L si dice **triangolare inferiore** e R **triangolare superiore**

Operazioni tra matrici

Le operazioni tra matrici sono state definite nel modulo di **Algebra Lineare** per cui non stiamo a ridefinirle in questo contesto. Riportiamo solo alcune importanti osservazioni

Per l'addizione tra matrici valgono le proprietà associativa e commutativa

Per la moltiplicazione vale la proprietà associativa e la proprietà distributiva rispetto alla addizione

Operazioni tra matrici

Osservazione

Si osserva che la moltiplicazione non gode della proprietà commutativa e nemmeno della legge di annullamento del prodotto

In generale risulta $AB \neq BA$, mentre il prodotto AB può essere uguale alla matrice nulla senza che A o B siano nulle

Per questo motivo, quando si moltiplica una matrice A per una matrice B occorre distinguere tra **premoltiplicazione** quando B moltiplica A a sinistra (BA) e **postmoltiplicazione** quando B moltiplica A a destra (AB)

Operazioni tra matrici

Osservazione

Per la trasposta e la trasposta coniugata del prodotto di due matrici si ha

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (AB)^H = B^H A^H$$

Il prodotto

$$a^H b = \sum_{l=1}^{n} \overline{a}_l \, b_l$$

di due vettori $a, b \in \mathbb{C}^n$ è detto **prodotto scalare** e se $a^H b = 0$ i due vettori si dicono **ortogonali**

Vettori linearmente indipendenti

k vettori $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)} \in \mathbb{C}^m$ si dicono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha_1 \, v^{(1)} + \alpha_2 \, v^{(2)} + \cdots + \alpha_k \, v^{(k)} \; = \; 0$$

con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, implica

$$\alpha_1 \; = \; \alpha_2 \; = \; \cdots \; = \; \alpha_k \; = \; 0$$

Determinante

Determinante

Ad una matrice quadrata A si associa un numero complesso chiamato **determinante** ($\det(A)$) per la cui definizione ed alcune tecniche di calcolo (Teoremi di Laplace) si rimanda alle dispense o ad un qualunque testo di Algebra Lineare

Come è stato visto nel modulo di **Algebra Lineare**, ricorderemo più avanti come nessuna delle definizioni di determinante riportata sui testi sia utilizzabile con successo dal punto di vista numerico a causa del costo computazionale e della propagazione degli errori

Determinante

Se A è una matrice diagonale o triangolare si ha banalmente

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Se A è una matrice quadrata risulta

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice **singolare** (**non singolare**) se $\det(A) = 0$ ($\det(A) \neq 0$)

Minori

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ed un intero $k \leq \min\{m, n\}$ si dice **minore di ordine** k il determinante di una matrice ottenuta da A prendendo tutti gli elementi sulla intersezione di k righe e k colonne comunque fissate

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dicono **minori principali di ordine** k i determinanti delle sottomatrici di ordine k estratte da A e aventi diagonale principale composta da elementi della diagonale principale di A

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice **minore principale di testa di ordine** k il determinante della sottomatrice di ordine k formata dalle prime k righe e k colonne di A

Rango o Caratteristica

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, si dice **rango** o **caratteristica** della matrice A il numero $r(A)$ dato dall'ordine più alto dei suoi minori diversi da zero

Teorema di Binet-Cauchy

Teorema

Date due matrici $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, il determinante della matrice prodotto $C = AB \in \mathbb{C}^{m \times m}$ è **nullo** se $m > n$ mentre è dato dalla somma dei prodotti di tutti i possibili minori di ordine massimo di A per i corrispondenti minori di B

Corollario

Dal Teorema di Binet-Cauchy segue che nel caso di A e B

quadrate di ordine n (cioè $m = n$) si ha

$$\det(A\,B) \;=\; \det(A)\;\det(B)$$

Matrice Inversa

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non singolare ($\det(A) \neq 0$) ha la cosiddetta **matrice inversa** A^{-1} che verifiva la relazione

$$A\,A^{-1} \;=\; A^{-1}\,A \;=\; I$$

Dal Corollario del Teorema di Binet-Cauchy segue

$$\det(A)\;\det(A^{-1}) \;=\; \det(A\,A^{-1}) \;=\; \det(I) \;=\; 1$$

per cui risulta

$$det(A^{-1}) \;=\; \frac{1}{\det(A)}$$

Alcune Classi di Matrici

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice

hermitiana	se	$A = A^H$
antihermitiana	se	$A = -A^H$
unitaria	se	$A^H A = AA^H = I$
normale	se	$A^H A = AA^H$
simmetrica	se	$A = A^T$
antisimmetrica	se	$A = -A^T$

Se A è reale e hermitiana è anche simmetrica, mentre una matrice reale e unitaria è detta anche **ortogonale**.

Dalle definizioni date segue che le matrici unitarie hanno come inversa la loro trasposta coniugata
Le matrici ortogonali hanno come inversa la loro trasposta

Data una matrice hermitiana A ed un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, lo scalare $x^H A x \in \mathbb{R}$ poiché

$$(x^H A x)^H = x^H A^H x = x^H A x$$

Una matrice quadrata A si dice **definita positiva** (**negativa**) se $x^H A x > 0$ (< 0) per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ con $x \neq 0$, mentre è detta **semidefinita positiva** (**negativa**) se $x^H A x \geq 0$ (≤ 0)

Matrici di Permutazione

Definizione

Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta matrice di **permutazione** se è ottenuta dalla matrice identica operando su di essa una permutazione delle colonne (o delle righe)

Una matrice di permutazione è una matrice ortogonale poiché risulta

$$P^T P = P P^T = I$$

Matrici di Permutazione

Il prodotto di una matrice A per una matrice di permutazione P produce su A una permutazione delle colonne o delle righe
In particolare, si ha

$A\,P$ presenta, rispetto ad A, la stessa permutazione si colonne che si è operata su I per ottenere P

$P\,A$ presenta, rispetto ad A, la stessa permutazione di righe che si è operata su I per ottenere P.

Osservazione

Se P si ottiene permutando le colonne di I, allora P^T si ottiene con la stessa permutazione delle righe di I

Matrici a Predominanza Diagonale

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice a **predominanza diagonale forte** se

$$| a_{ii} | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3i & -1 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 2i & -3 & 7+3i \end{pmatrix}$$

Matrici a Predominanza Diagonale

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice a **predominanza diagonale debole** se

$$| a_{ii} | \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

e per almeno un indice r, $1 \leq r \leq n$, si ha

$$| a_{rr} | > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} | a_{rj} |$$

Matrici a Predominanza Diagonale

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -2i & 4i & 8i \end{pmatrix}$$

Matrice Convergente

Definizione

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice **convergente** se

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \mathbf{O}$$

dove $\mathbf{O}$ è la matrice nulla

Esempio (molto particolare)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^3 = \mathbf{O}$$

Outline

Definizione

Dati una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{C}^n$, un sistema di n equazioni lineari in n incognite si rappresenta nella forma

$$A\,x \;=\; b$$

dove $x \in \mathbb{C}^n$ è il vettore delle incognite

Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione **se e solo se**

$$r(A) \;=\; r(A \mid b)$$

dove con $(A \mid b)$ è indicata la matrice completa del sistema costituita da n righe ed $n+1$ colonne.
Se $r(A) = n$ la soluzione è unica mentre se $r(A) < n$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $n - r(A)$

Se $\det(A) \neq 0$, il sistema $Ax = b$ si dice **normale**
In questo caso la soluzione è data formalmente da $x = A^{-1}b$ e può essere espressa mediante la **regola di Cramer**

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

essendo A_i la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con il vettore b.

Nel caso particolare $b = 0$ il sistema Ax=b si dice **omogeneo** ed ha sicuramente soluzioni poiché $r(A) = r(A \mid b)$
Se risulta anche $\det(A) \neq 0$ l'unica soluzione è $x = 0$
Segue che un sistema omogeneo ha soluzioni non nulle se e solo se si ha $\det(A) = 0$