



## CRITERIO DI NYQUIST – STABILITA' RELATIVA

- Introduzione
- Criterio di Stabilità di Nyquist
- Stabilità in condizioni perturbate e Margini di Stabilità
- Casi Particolari
- Esempi ed Applicazioni



# Riferimenti



- Capitoli 10, 11 Testo di Bolzern
- Capitoli 4, 7, 9 Lewis (download)
- Capitolo 9 Murray (download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

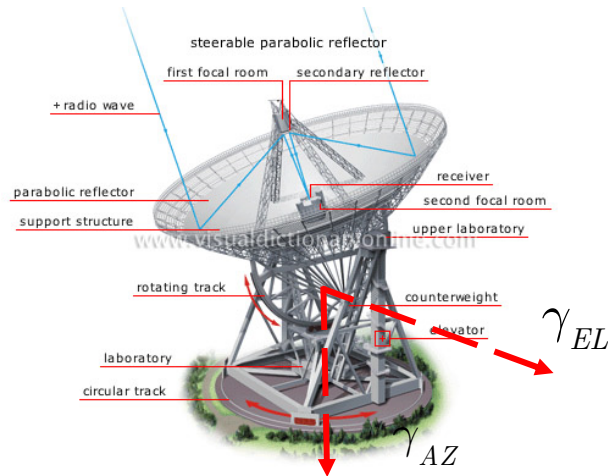
Con. Avanzati

Con. Standard





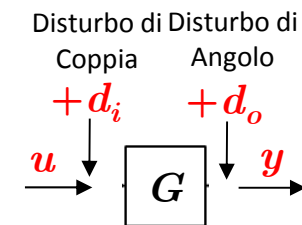
## Motivazione



□ Modello di corpo rigido  $I\ddot{\gamma} + C\dot{\gamma} = M$

$$\begin{bmatrix} \frac{J_{EL}}{0} & 0 \\ 0 & J_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_{EL} \\ \ddot{\gamma}_{AZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_{EL}}{0} & 0 \\ 0 & c_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{EL} \\ \dot{\gamma}_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{EL}}{0} & 0 \\ 0 & m_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{EL} \\ u_{AZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_{EL}}{d_{AZ}} \end{bmatrix}$$

▪ Il disturbo può essere inserito in forma diversa

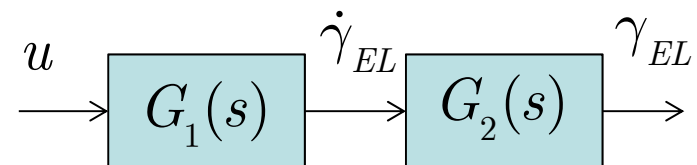


▪ Grado di Libertà di elevazione, senza disturbo

$$J_{EL}\ddot{\gamma}_{EL} + c_{EL}\dot{\gamma}_{EL} = m_{EL}u_{EL} \quad k_0 = \frac{m_{EL}}{J_{EL}}; p = \frac{c_{EL}}{J_{EL}}; k_s = \frac{m_{EL}}{c_{EL}}$$

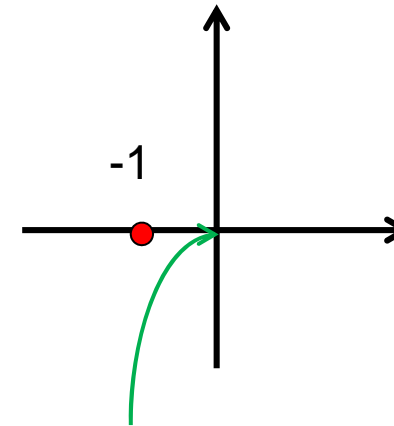
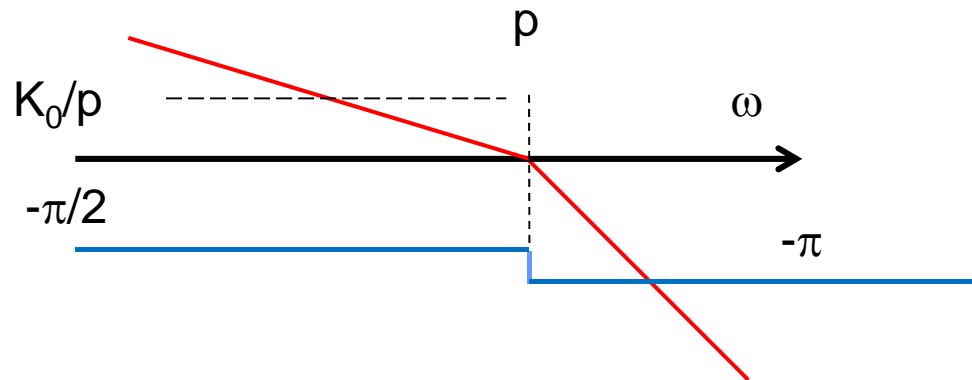
$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u_{EL}(s)} = \frac{m_{EL}}{s(J_{EL}s + c_{EL})} = \frac{k_0}{s(s + p)}$$

$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u_{EL}(s)} = G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k_0}{(s + p)} \cdot \frac{1}{s}$$





## Motivazione



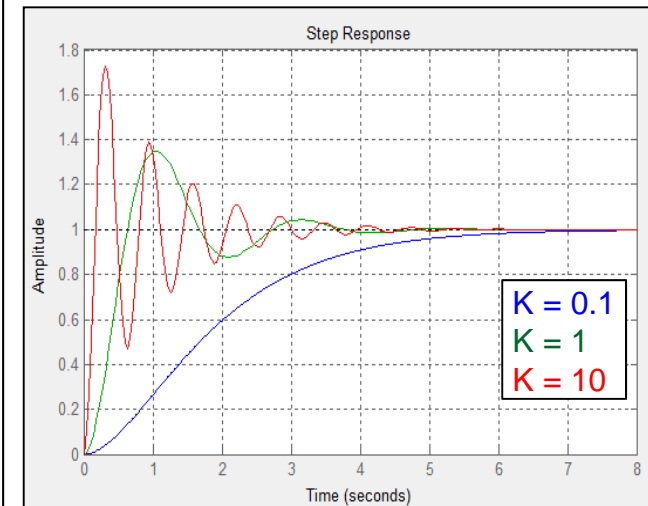
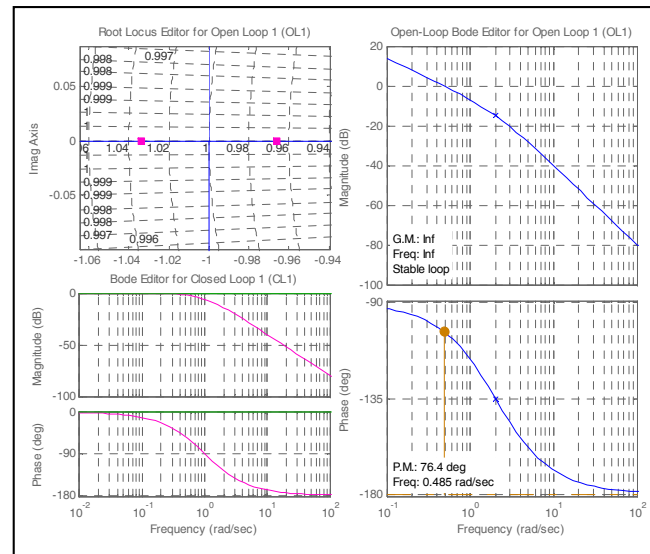
- Stabilità in ciclo chiuso, Errore nullo a regime in posizione, no overshoot

$$\left| y(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} u(s) \right| \leq \left| \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} \right| \cdot |u(s)| < \infty \Rightarrow \left| \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} \right| < \infty$$

$$\Rightarrow G_{ol}(s) \neq -1$$

$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u(s)} = \frac{10}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

- Controllore Prop.**  
Teoricamente il guadagno di anello può essere aumentato arbitrariamente per avere una maggiore velocità di risposta





## Motivazione

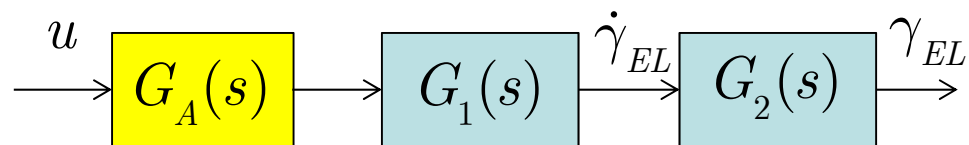


- ❑ Il sistema in ciclo chiuso è sempre asintoticamente stabile, nell'esempio numerico:

$$G_{CL}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, 1 = 10k_p$$

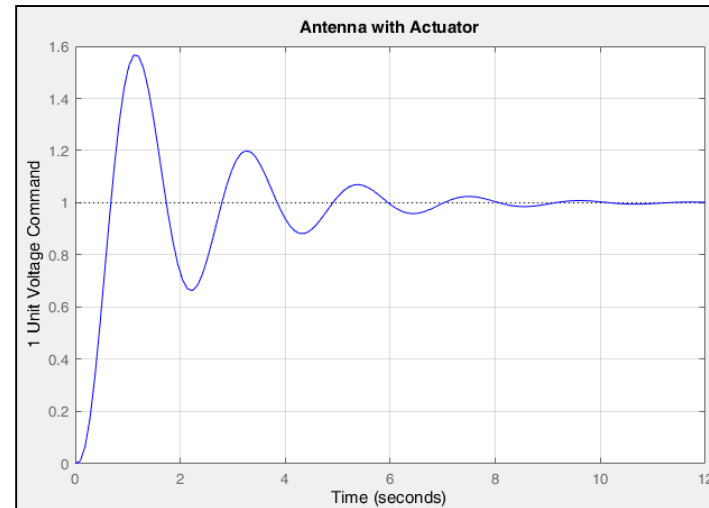
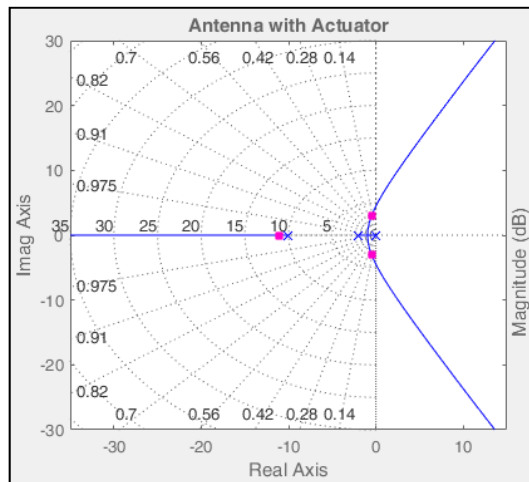
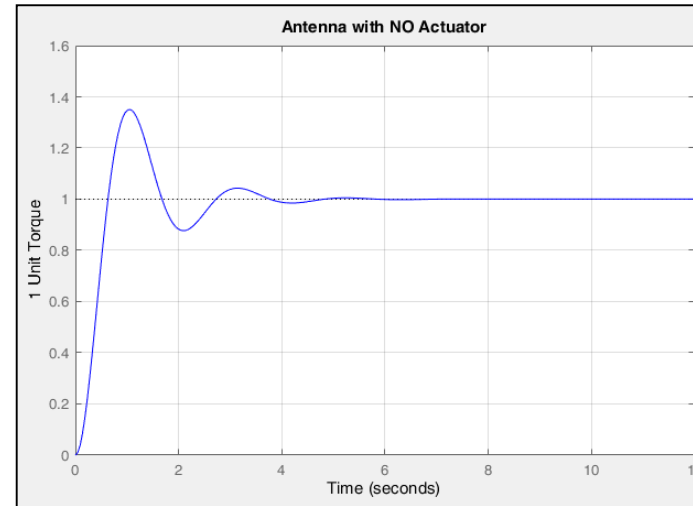
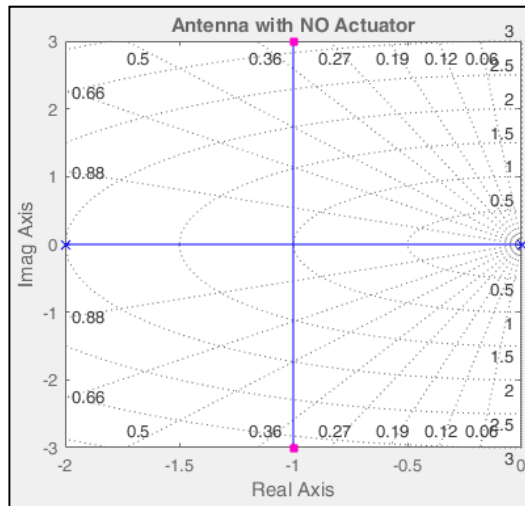
- ❑ Un modello più preciso include la dinamica dell'attuatore di potenza, ovvero Il motore elettrico che muove l'antenna (Si traslascia per adesso l'effetto della flessibilità, la dinamica del sensore di posizione ed altri errori parametrici relativi a dimensioni, materiali, ecc.):
  - Supponiamo che tutto il sistema di attuazione sia descritto da un comportamento non oscillatorio con costante di tempo di 0.1 secondi e guadagno statico unitario:

$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u(s)} = \frac{10}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \frac{10}{(s+10)}$$





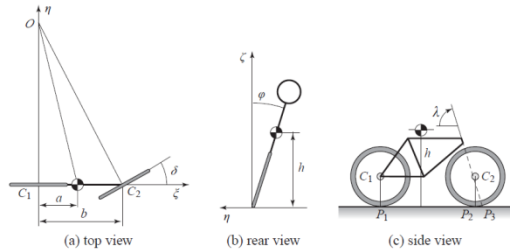
# Motivazione



❑ Domanda: è possibile prevedere a priori l'effetto sulla stabilità dovuto a dinamiche non modellate?



## Motivazione



$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

$$m = 80Kg$$

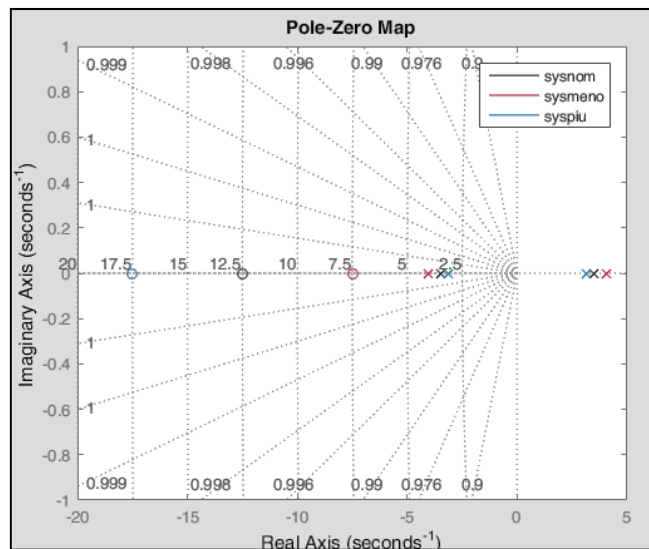
$$a = 0.4 m$$

$$b = 1.02 m$$

$$h = [0.6 - 0.8 - 1.0] m$$

$$v_0 = [3 - 5 - 7] m / sec$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \in \left\{ 1.9608 \frac{s + 7.5}{s^2 - 16.33} \quad 2.451 \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625} \quad 6.827 \frac{s + 17.5}{s^2 - 9.8} \right\}$$



- Il sistema nominale in anello chiuso richiede un guadagno di 0.41 per la stabilità asintotica.
- Che succede nel caso di variazioni di velocità e/o altri parametri fisici?

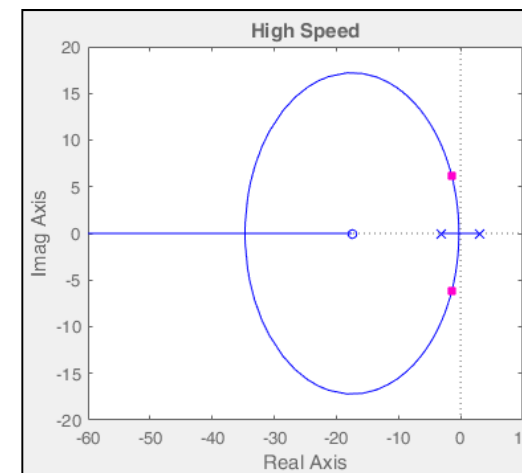
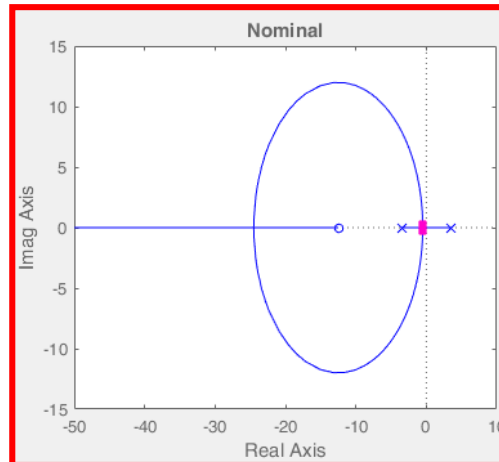
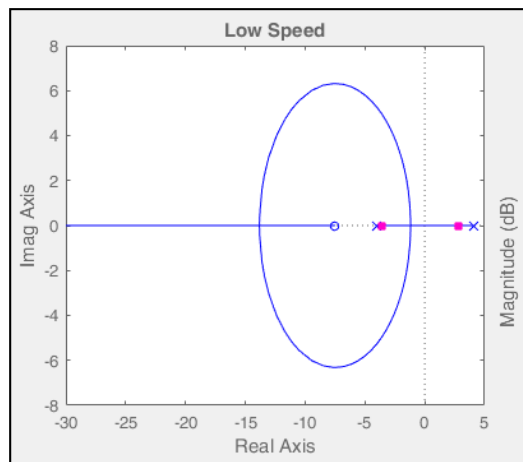


## Motivazione

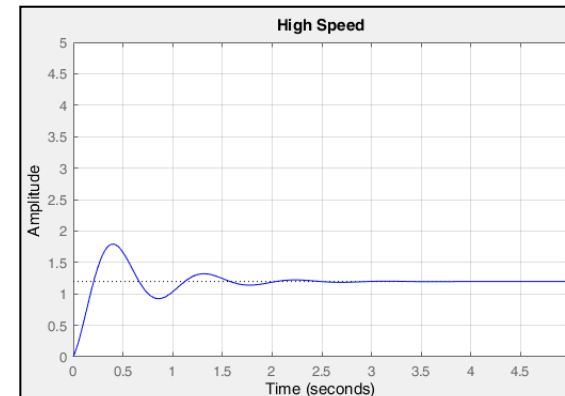
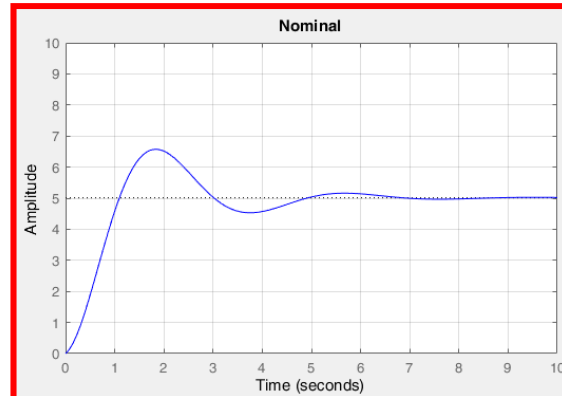
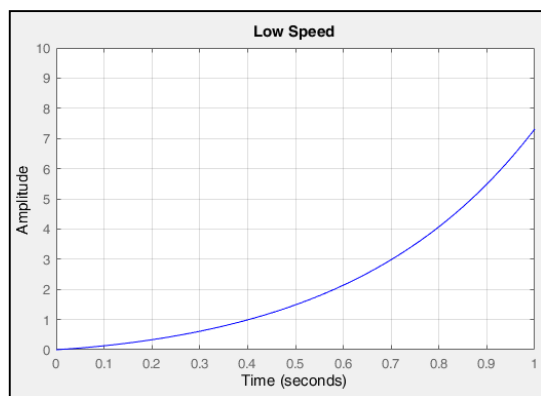


$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \in \left\{ 1.9608 \frac{s + 7.5}{s^2 - 16.33} \quad 2.451 \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625} \quad 6.827 \frac{s + 17.5}{s^2 - 9.8} \right\}$$

- Il sistema nominale in anello chiuso richiede un guadagno di 0.41 per la stabilità asintotica.



- Risposta al gradino nel caso di guadagno pari a 0.5.



**Domanda: è possibile prevedere a priori l'effetto sulla stabilità dovuto ad errori parametrici?**





## Introduzione



- ❑ Il Criterio di Nyquist (Bell Labs.) permette di calcolare la stabilità in anello chiuso di un sistema lineare dalla conoscenza della Risposta in Frequenza della FdT di Anello (derivata, in particolare mediante il diagramma polare).
- ❑ Il Criterio ha una descrizione grafica (per sistemi SISO) che può essere usata come strumento per la sintesi di controllori in anello chiuso.
- ❑ Per la valutazione della stabilità in anello chiuso vi sono anche altri metodi che forniscono la stessa informazione (Routh, Luogo delle Radici, Autovalori di  $A$ ,...)
- ❑ **Il Criterio ha una applicabilità anche a sistemi in condizioni perturbate, ovvero in presenza di incertezze ed errori di modello.**
- ❑ La derivazione del criterio è basata sul “Principio dell’Argomento di Cauchy” e sulle proprietà riguardanti funzioni analitiche di variabile complessa (olomorfe, mappe conformi).

▪ <https://www.youtube.com/watch?v=sof3meN96MA>



## Introduzione



- Consideriamo una funzione di variabile complessa  $F(s)$ , con  $s$  definita in un open set complesso  $\mathcal{D}$ :

$$s = \sigma + j\omega \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$

$$F(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$

- **Ipotesi:** sia  $F(s)$  continuamente differenziabile in  $\mathcal{D}$ , eccetto al massimo per un numero finito di singolarità (poli), ovvero sia  $F(s)$  analitica in  $\mathcal{D}$ . Questo implica che  $F(s)$  può essere rappresentata da una serie convergente di Taylor nel piano complesso eccetto per al massimo un numero finito di singolarità.

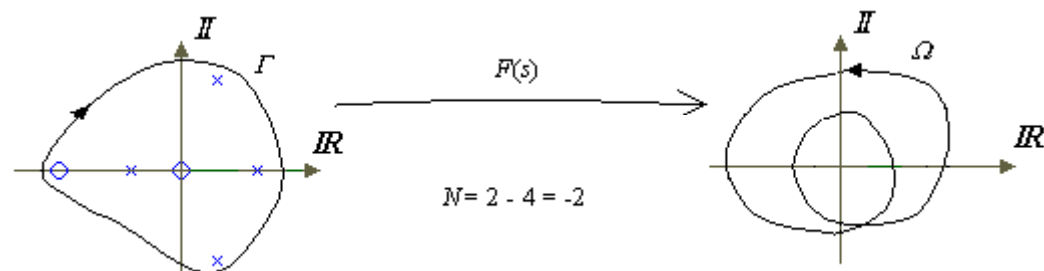
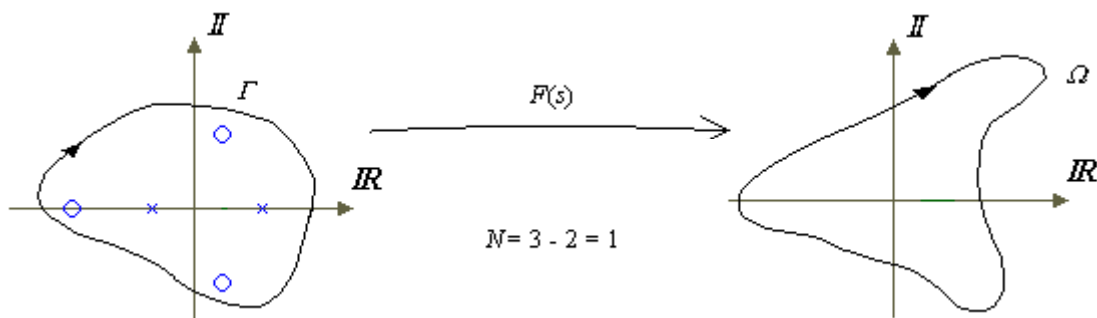
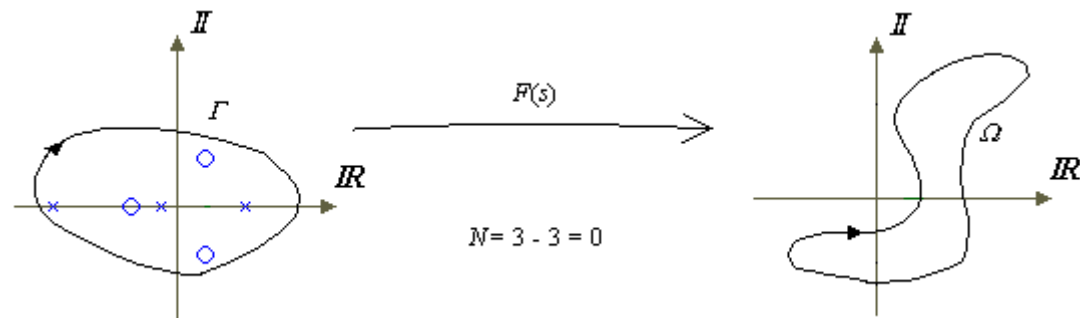
$$\frac{dF(s)}{ds} \Rightarrow \left[ \frac{\partial u}{\partial \sigma} \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} \quad \frac{\partial v}{\partial \sigma} \quad \frac{\partial v}{\partial \omega} \right]$$

- **Teorema di Cauchy (Principio dell'Argomento):** Si consideri una funzione razionale di variabile complessa  $F(s)$  avente  $m$  zeri ed  $n$  poli ed analitica. Si definisca un **contorno chiuso  $\Gamma$  arbitrario** che racchiuda l'insieme dei poli e degli zeri e all'interno del quale la  $F(s)$  sia analitica. Sotto queste ipotesi, percorrendo  $\Gamma$  in **senso orario**,  $F(s)$  mappa  $\Gamma$  in una **curva chiusa  $\Omega$**  che gira intorno all'origine in **senso orario** un numero di volte pari a  **$N = m - n$** .

$$F(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$



# Introduzione



- Il numero dei poli è uguale a quello degli zeri per cui la curva  $\Omega$  non circonda l'origine.
- In questo caso si ha una rotazione in senso orario intorno all'origine.
- Si hanno due rotazioni in senso antiorario.



# Introduzione



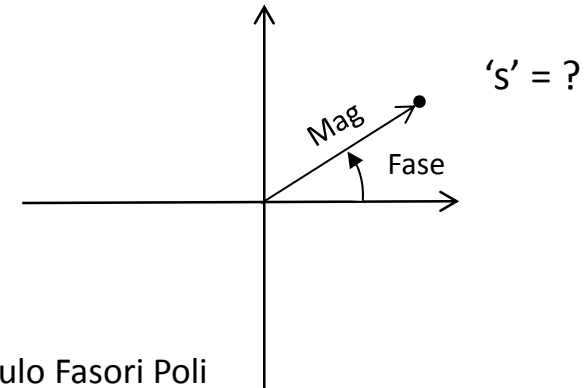
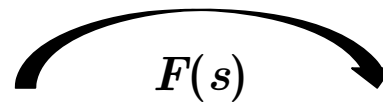
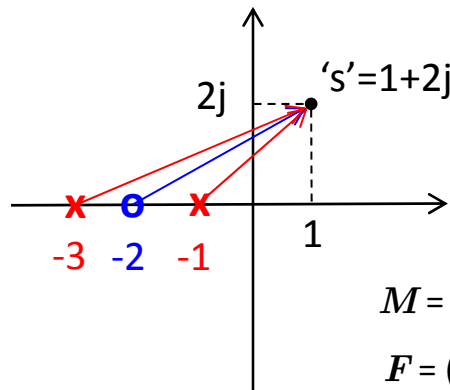
$$F(s) = k \frac{\prod_j^m (s + z_j)}{\prod_i^n (s + p_i)}$$

1. Zeri di  $F(s)$   $k \cdot \prod_j^m (s + z_j) = 0$

2. Poli di  $F(s)$   $\prod_i^n (s + p_i) = 0$

3. Zeri di  $1 + F(s)$   $\prod_i^n (s + p_i) + k \cdot \prod_j^m (s + z_j) = 0$

▪ Concetto di Fasore  $F(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)}$

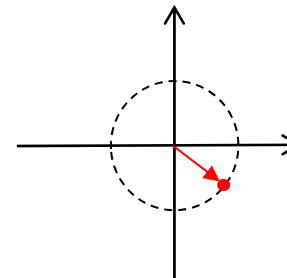


$M$  = Prodotto Modulo Fasori Zeri / Prodotto Modulo Fasori Poli

$F$  = (Somma Fase Fasori Zeri) – (Somma Fase Fasori Poli)

$$M = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{20}} = 0.285$$

$$F = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.5) = 33.7^\circ - 45^\circ - 26.56^\circ = -37.86^\circ$$

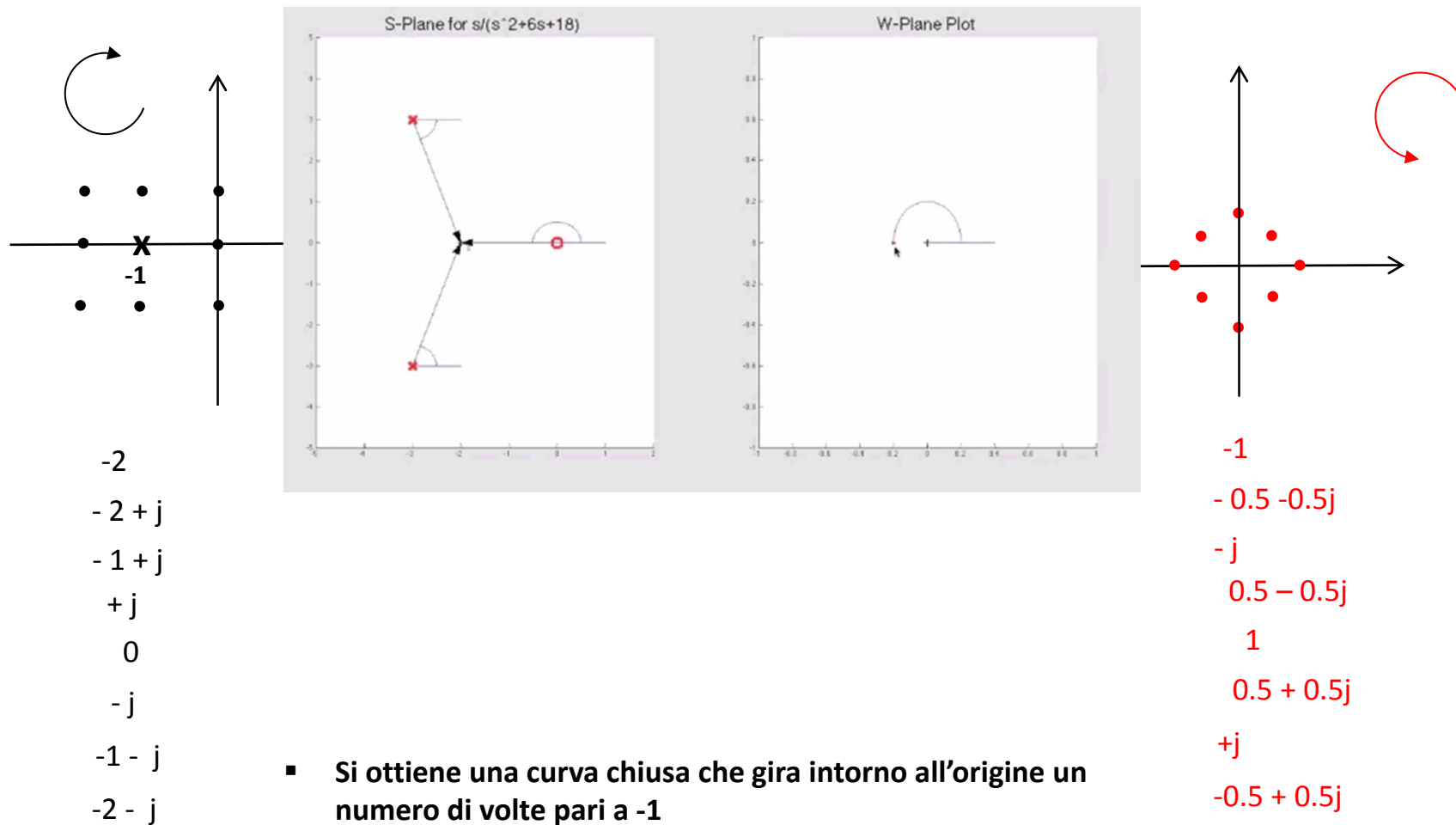




## Introduzione



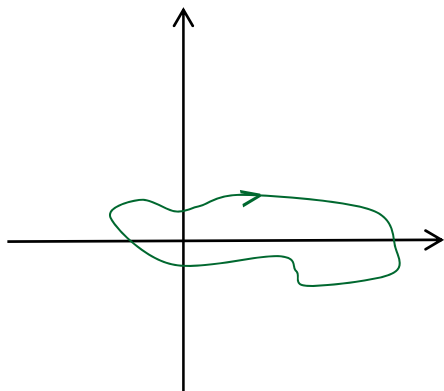
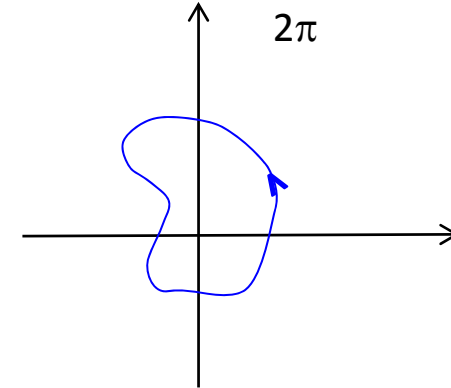
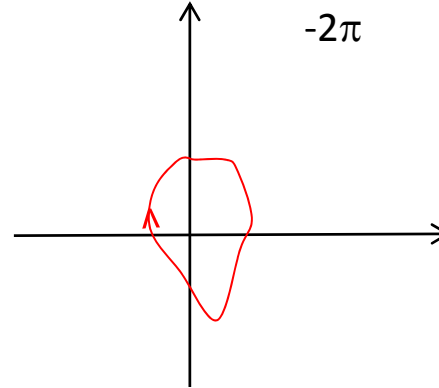
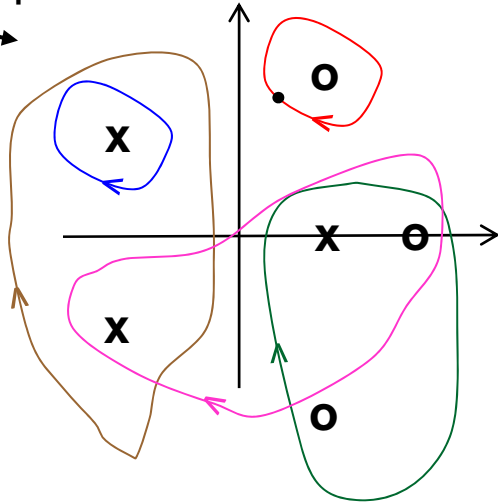
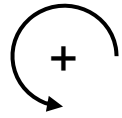
- Esempio  $F(s) = \frac{1}{(s+1)}$ 
  1. Creare un percorso chiuso in senso orario che racchiuda tutte le singolarità ( in questo caso il polo a -1 )
  2. Mappare tutti i punti del percorso sul piano complesso con  $F(s)$



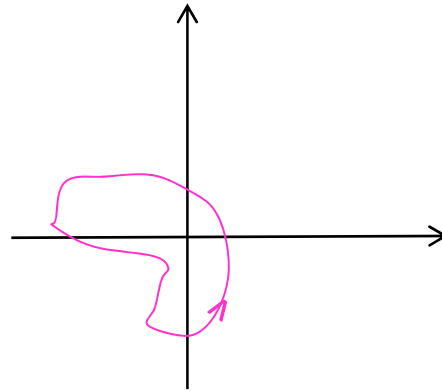
$$\begin{array}{l} 4.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 - 1.5000i \\ 0.2500 - 0.7500i \\ 0.4000 - 0.3000i \\ 0.5000 + 0.0000i \\ 0.5500 + 0.1500i \\ 0.4000 + 0.3000i \\ 0.2500 + 0.7500i \\ 1.0000 + 1.5000i \\ 2.5000 + 1.5000i \end{array}$$



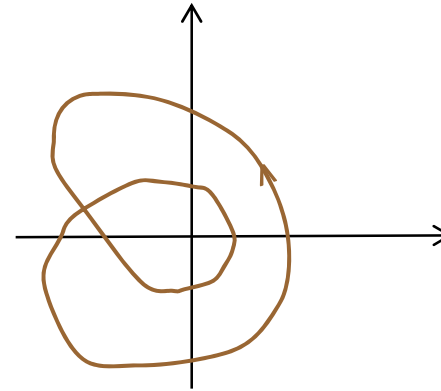
# Introduzione



$-2\pi - 2\pi + 2\pi$



$2\pi + 2\pi - 2\pi$



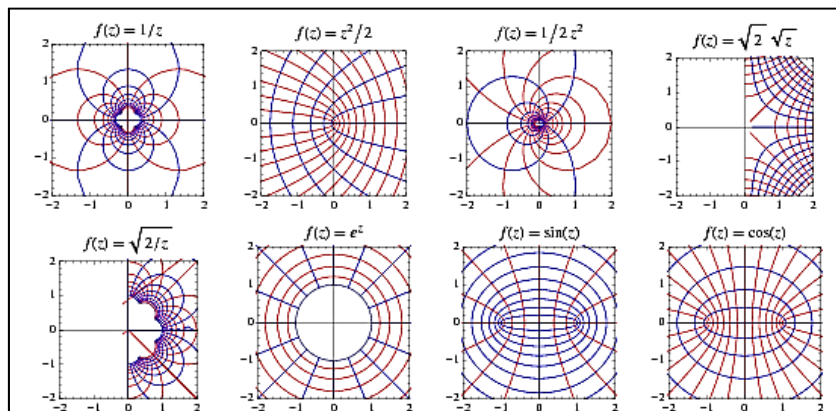
$2\pi + 2\pi$



# Introduzione




- Trasformazioni Conformi (Trasformazioni che mantengono gli angoli localmente), attraverso una mappatura mediante una funzione analitica con derivata non nulla nel contorno  $\Gamma$



$$z = \sigma + j\omega \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$

Conformal Map Projections



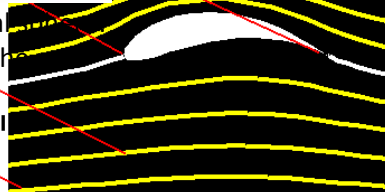


**ing ion**

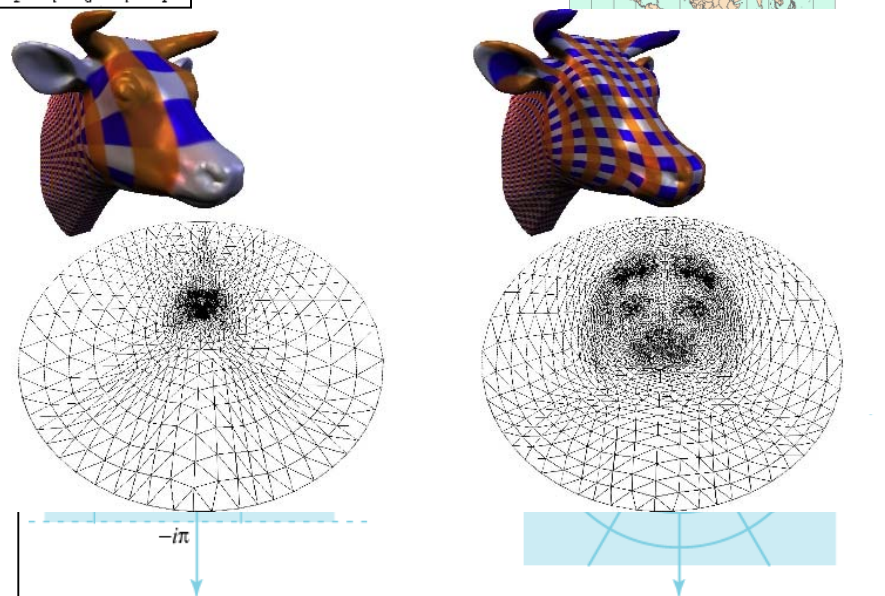
Glenn Research Center

$A = z + \frac{1}{z}$

$A = B + iC$



Spherical harmonic map for topological. The David head surface is mapped to the sphere, the mapping is conformal. Use **complex variables** to map from one geometry to another







## Criterio di Stabilità di Nyquist



- L'uso del teorema precedente ai fini dell'enunciato del criterio di Nyquist richiede una scelta opportuna di  $\Gamma$ , e  $F(s)$ , che producono una particolare  $\Omega$

### □ Scelta della Funzione Analitica $F(s)$

- Poiché lo scopo è quello di studiare la stabilità del sistema in ciclo chiuso, si sceglie come  $F(s)$ :

$$F(s) = 1 + K(s)G(s) = 1 + G_{OL}(s)$$

Nel caso di retroazione unitaria:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, G_{CL}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

Per cui:

$$F(s) = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$$

- **Gli zeri di  $F(s)$  sono i poli in ciclo chiuso mentre i poli di  $F(s)$  coincidono con i poli a ciclo aperto; per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso gli zeri di  $F(s)$  devono quindi essere a parte reale strettamente negativa**

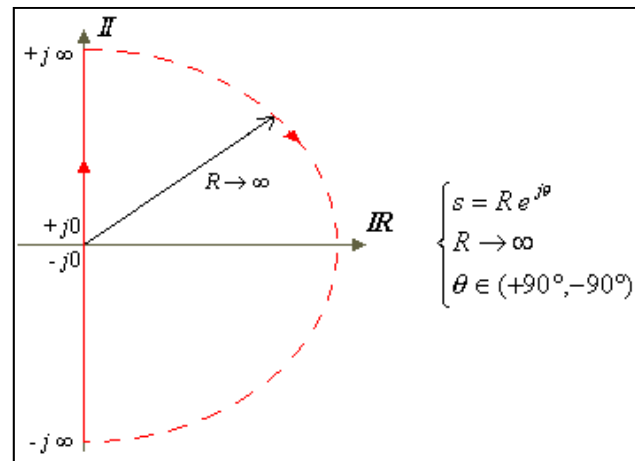


# Criterio di Stabilità di Nyquist

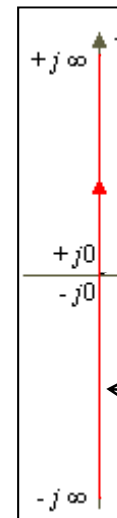


## □ Scelta del Contorno chiuso $\Gamma$

- Il contorno deve racchiudere la parte del piano complesso critica per la stabilità, quindi tutto il semipiano di parte reale positiva inclusivo dell'asse Immaginario



1. Posto  $s = j\omega$  con  $\omega$  che va da  $-\infty$  a  $+\infty$  si ha:



$$F(j\omega) \forall \omega \in [0^+, \infty)$$

$$F(j\omega) \forall \omega \in (-\infty, 0^-] \Rightarrow F(-j\omega)$$

$F(-j\omega)$  simmetrica di  $F(j\omega)$   
rispetto all'asse reale!

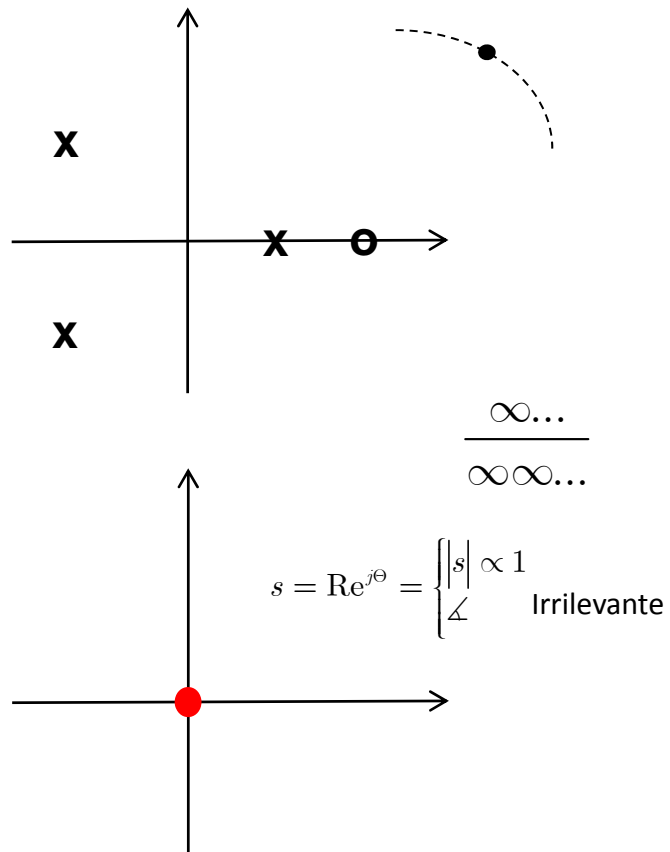


# Criterio di Stabilità di Nyquist

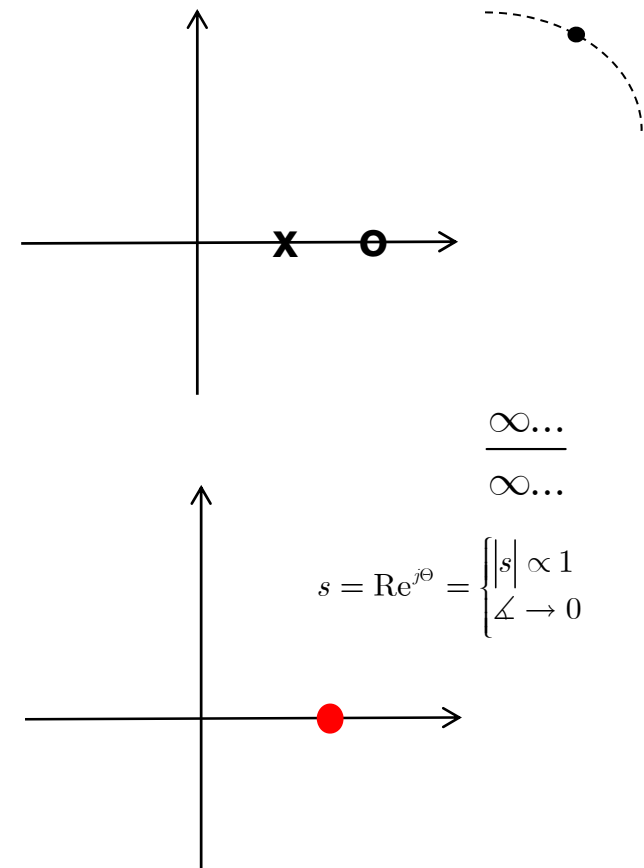


2. Quale è la mappa del punto all'infinito  $s = Re^{j\Theta}$  ? (sistemi strettamente propri e propri)

▪ Sistema strettamente proprio



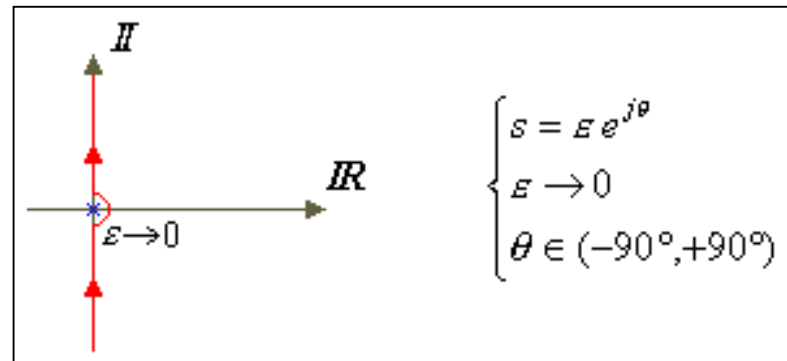
▪ Sistema proprio



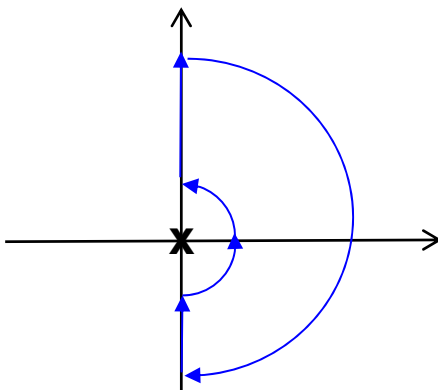


## Criterio di Stabilità di Nyquist

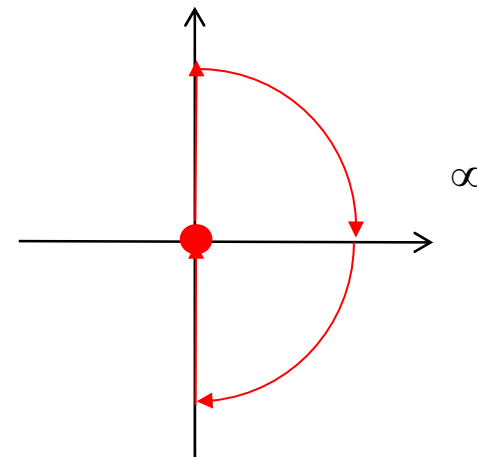
3. Nel caso di punti singolari sull'asse immaginario si considerano delle semicirconferenze di raggio  $\varepsilon$  e centro in poli e zeri immaginari della  $F(s)$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$



- La procedura vale anche se circondiamo la singolarità dalla sinistra (test con un singolo integratore)
- Nel caso di zeri sull'asse immaginario, il problema non si pone in quanto il modulo del fasore è zero!!



$$Z = N + P = 0$$





## Criterio di Stabilità di Nyquist



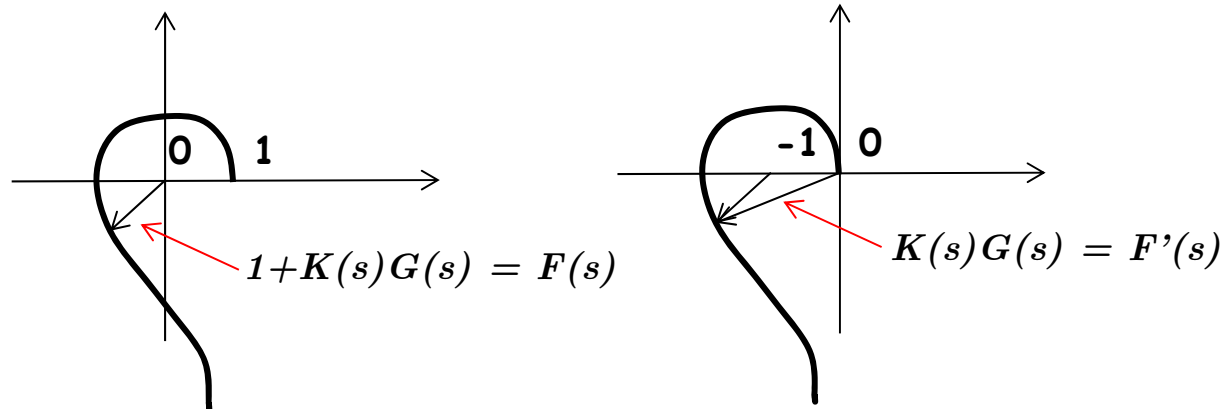
### Nota:

- se uno degli zeri di  $F(s) \in \Gamma$  il sistema è instabile in ciclo chiuso;
- se uno dei poli di  $F(s) \in \Gamma$  il sistema è instabile in ciclo aperto.

❑ Per l'applicazione del Criterio di Nyquist la funzione che viene mappata dal Principio dell'Argomento non è  $F(s)$  ma  $F'(s)$  data da uno shift dell'origine da  $(0, 0)$  a  $(-1, 0)$

$$F'(s) = F(s) - 1 = G(s)K(s) = G_{OL}(s)$$

❑ La mappatura di  $F'(s)$  su  $\Gamma$  produce quindi una curva chiusa  $\Omega$  che gira eventualmente intorno al punto  $(-1, 0)$ , chiamato punto critico e non intorno all'origine. Si ottiene semplicemente spostando l'origine al punto -1





## Criterio di Stabilità di Nyquist



### □ Enunciato del Criterio di Nyquist:

Data una funzione di variabile complessa  $F'(s)$  definita come:

$$F'(s) = F(s) - 1 = G(s)K(s) = G_{OL}(s)$$

Quando  $s$  segue la curva chiusa  $\Gamma_N$  (contorno di Nyquist) in senso orario per  $\omega = [-\infty, +\infty]$ ,  $F'(s)$  viene mappata in una curva chiusa  $\Omega_N$  che gira intorno al punto  $(-1, 0)$  un numero di volte  $N$  pari a  $N = Z - P$ , in senso orario.

Dove:

$Z$  è il numero di poli in ciclo chiuso raccolti dentro  $\Gamma_N$  (instabili)

$P$  è il numero di poli in ciclo aperto raccolti dentro  $\Gamma_N$  (instabili).

- La curva  $\Omega_N$  che si ricava con la scelta fatta per  $\Gamma_N$  e  $F'(s)$  è il diagramma polare per  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  della FdT in Anello Aperto (Diagramma di Nyquist). Dall'esame del comportamento di quest'ultimo rispetto al punto  $(-1, 0)$  si ricava il valore di  $N$  e, quindi, di  $Z$ .  $Z = N + P$  è quindi la relazione che fornisce se e quanti sono i poli instabili a ciclo chiuso.

### □ Enunciato Originale, (Nyquist 1932)

Un sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non gira intorno a  $(-1, 0)$  quando non sono presenti poli instabili in anello aperto, cioè:

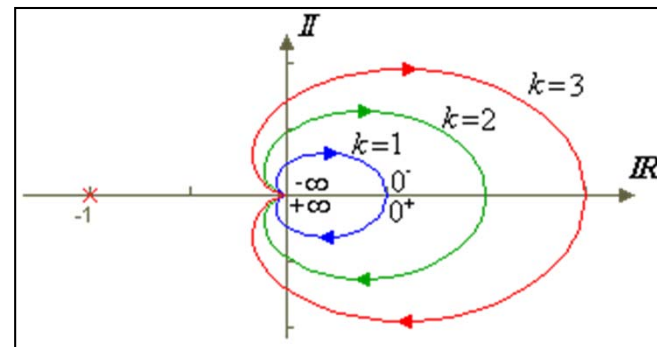
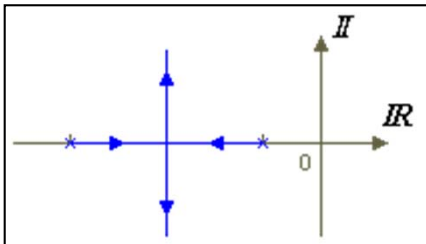
$$P = 0 \text{ e } Z = N + P = 0$$



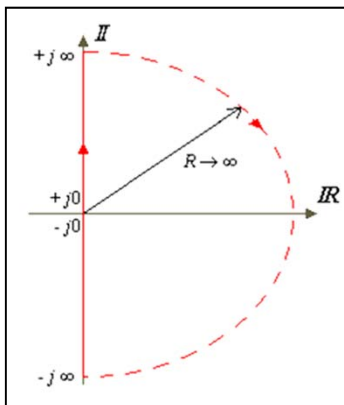
## Criterio di Stabilità di Nyquist

□ **Esempio:** Consideriamo un sistema asintoticamente stabile

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)}$$



▪ Essendo la FdT di anello asintoticamente stabile,  $P = 0$ .



▪ Percorrendo  $\Gamma$  per  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , anche al crescere di  $k$ ,  $N = 0$ , da cui  $Z = N + P = 0$  ed il sistema il ciclo chiuso ha 0 poli instabili, ovvero è asintoticamente stabile.



# Criterio di Stabilità di Nyquist



## Nyquist Stability Criterion Gui

Choose a system, L(s)

Built-in Systems

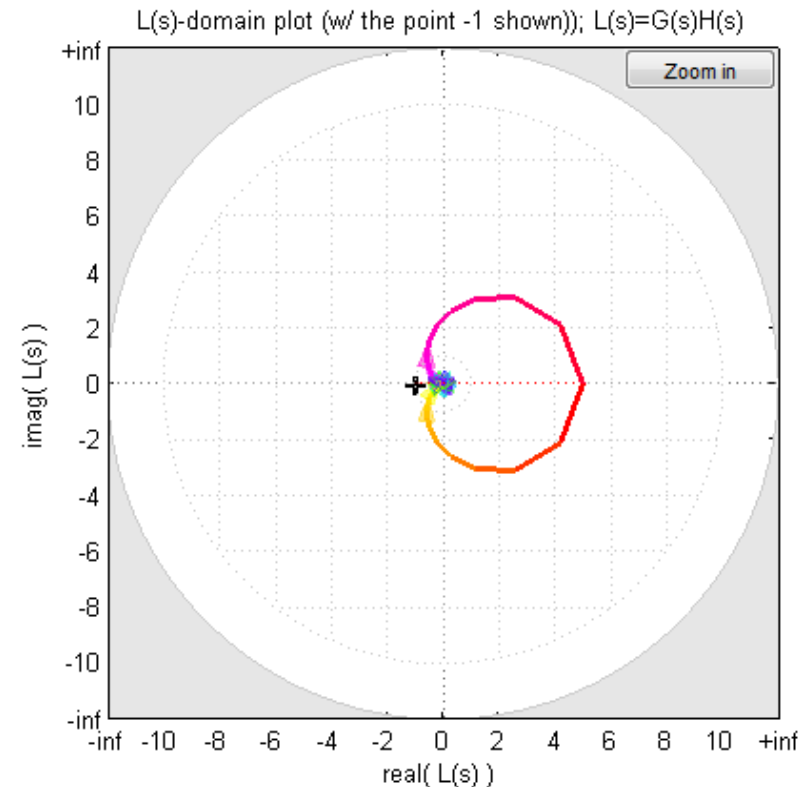
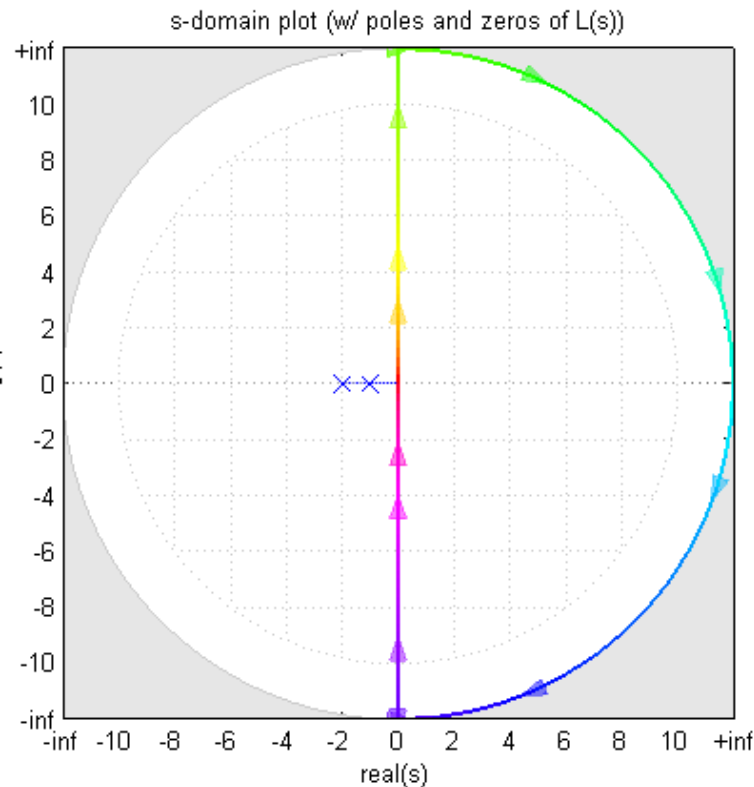
sys1

? Limitations ?

Web Resource

Transfer Function

$$L(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 2}$$



Path in s-domain

☐ Circle (r=5)

☒ Nyquist Path

Draw Path

Start

Slow

Pause

Clear

### Explanation

The open-loop transfer function, L(s), has P=0 pole(s) in the RHP.

The s-domain path encircles the origin N=0 time(s) in a CW direction.

Therefore the closed loop transfer function has Z=N+P=0 pole(s) in the RHP (0 zero(s) of c.e. in RHP)

The system is stable.



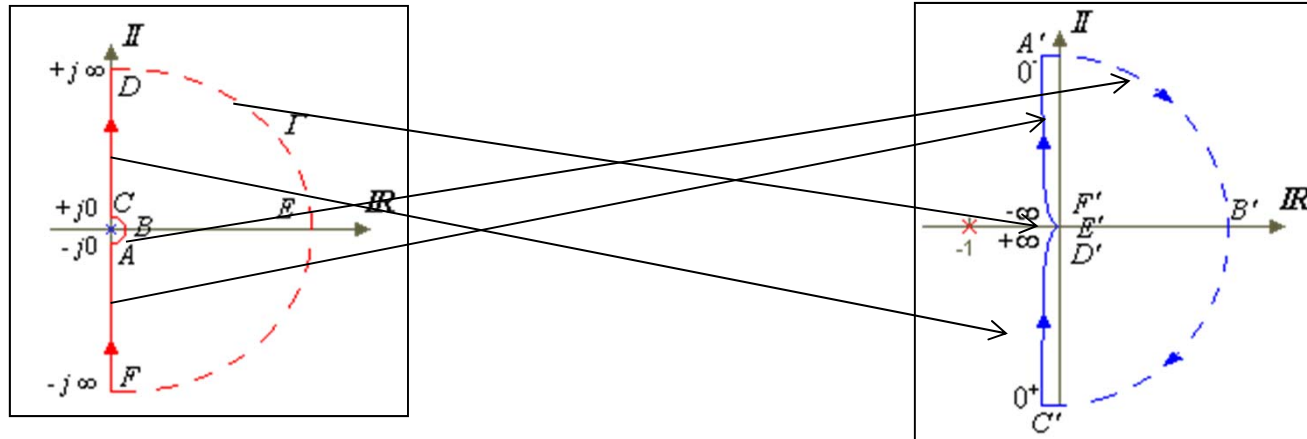


# Criterio di Stabilità di Nyquist



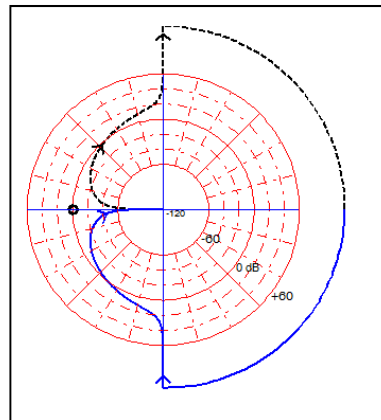
❑ **Esempio:**  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s + P)}$

Essendo la FdT di anello stabile,  $P = 0$ .



- $w = (0^+, +\infty)$ , diagramma polare
- $w = (-\infty, 0^-)$ , diagramma polare a frequenze negative
- $w = (0^-, 0^+)$ , Semicerchio
- $w = (+\infty, -\infty)$ , Semicerchio

$$\begin{cases} s = \varepsilon e^{j\theta} \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ \theta \in (-90^\circ, +90^\circ) \end{cases}$$



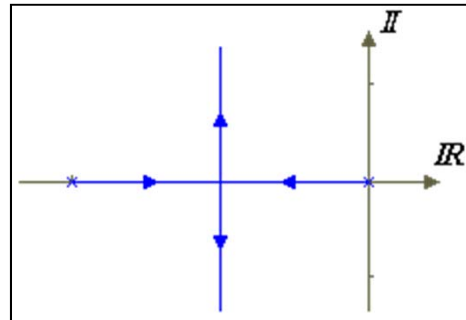
$$\begin{cases} s = R e^{j\theta} \\ R \rightarrow \infty \\ \theta \in (+90^\circ, -90^\circ) \end{cases}$$



# Criterio di Stabilità di Nyquist

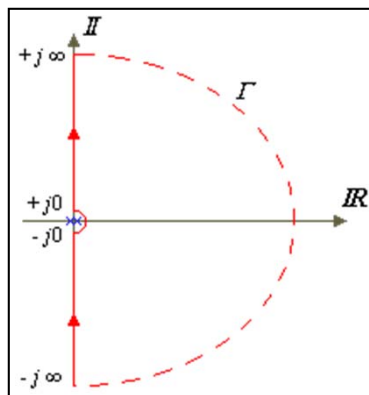


- Il sistema in ciclo chiuso è sempre asintoticamente stabile in quanto:

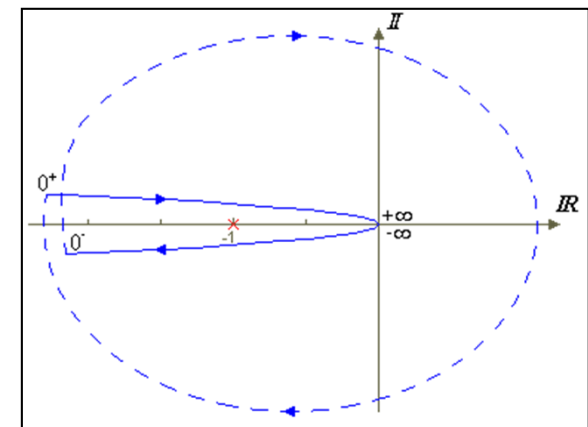


$$Z = N + P = 0 + 0$$

❑ **Esempio:**  $K(s)G(s) = \frac{k}{s^2(s + P)}$



$$\begin{aligned} |K(s)G(s)| &\rightarrow \infty \\ \angle(K(s)G(s)) &= \angle \frac{k}{\varepsilon^2 \cdot e^{j2\theta}} = \frac{k}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta} \\ \angle(K(s)G(s)) &\text{ va da } +180^\circ \text{ a } -180^\circ \end{aligned}$$





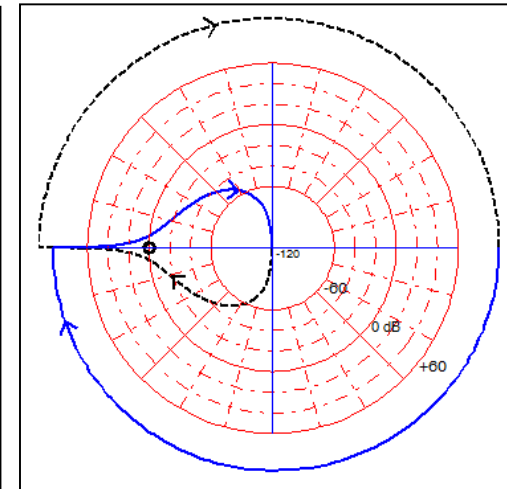
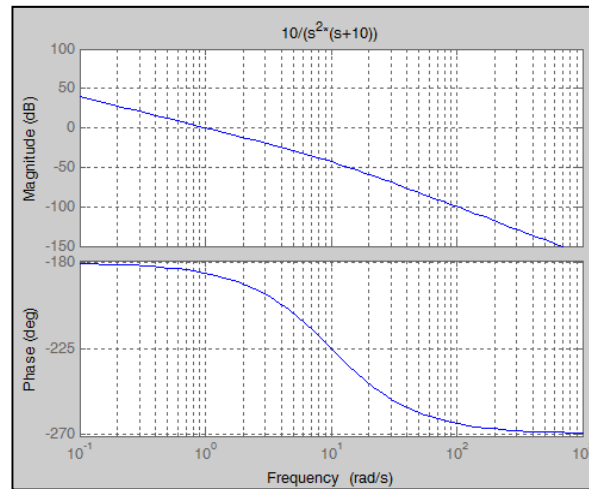
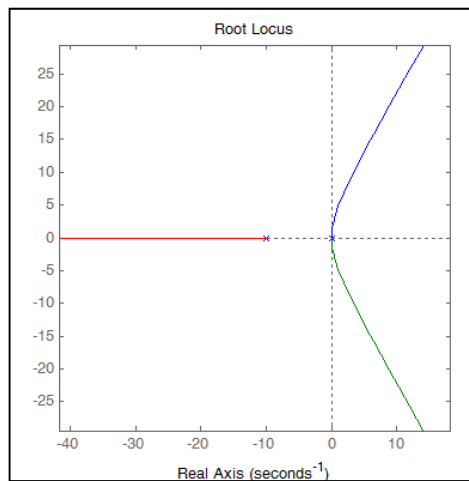
## Criterio di Stabilità di Nyquist



- In questo caso,  $N = 2$  (il diagramma gira intorno al punto  $(-1, 0)$  due volte in senso orario). Per cui:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

- il sistema in ciclo chiuso risulta instabile (due poli instabili in ciclo chiuso)



```
sys=10/s^2*(s+10);NyquistGui
```

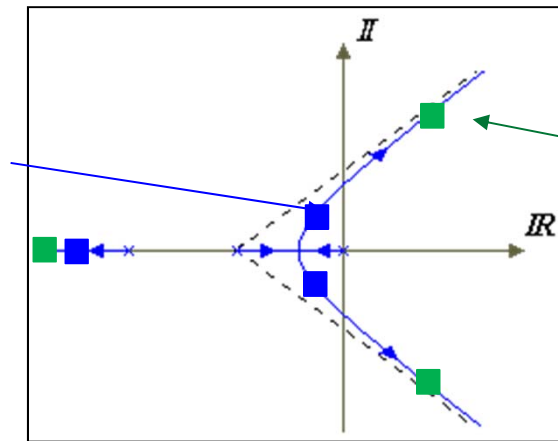


# Criterio di Stabilità di Nyquist

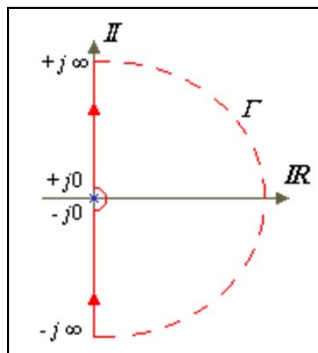


❑ Esempio:  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s + P_1)(s + P_2)}$   $K > 0$

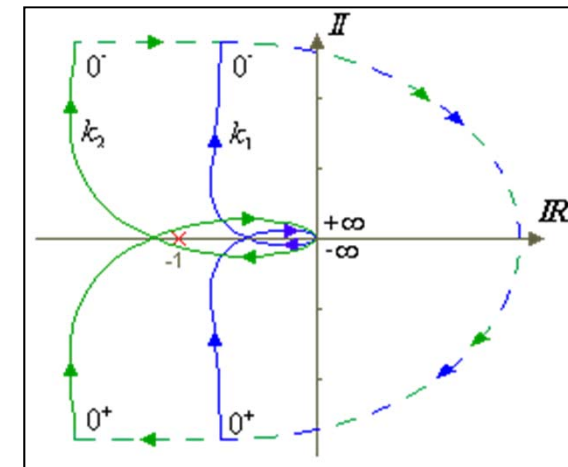
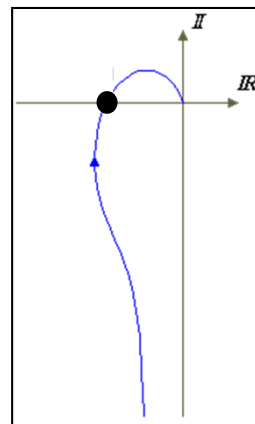
$k_1 < k_{CR}$ ,  $Z = N+P = 0+0 = 0$   
Sistema in Ciclo Chiuso  
asintoticamente stabile



$k_2 > k_{CR}$ ,  $Z = N+P = 2+0 = 2$   
Sistema in Ciclo Chiuso  
instabile



$$\begin{cases} \omega = P_1 P_2 \\ \text{Re}[G(jP_1 P_2)] = -k \end{cases}$$





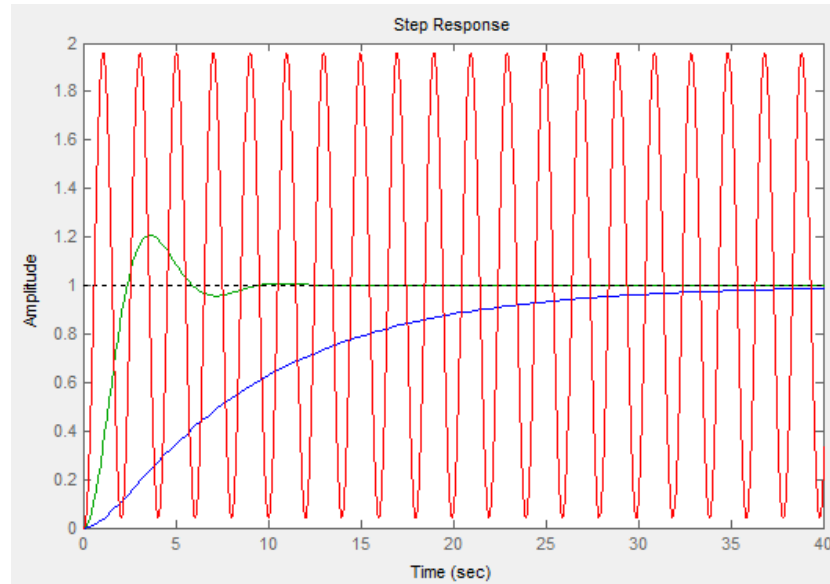
## Criterio di Stabilità di Nyquist



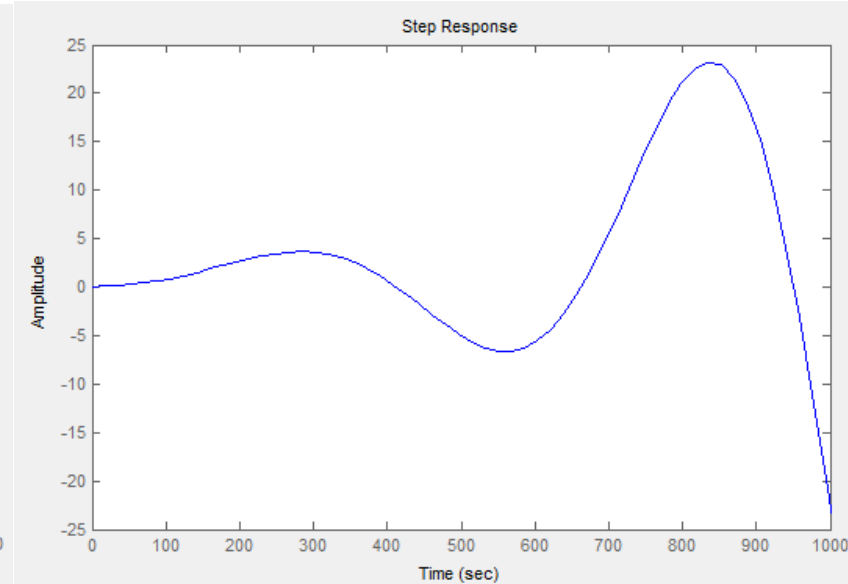
❑ **Esempio:**  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}$ ;  $\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k}{s^3 + 11s^2 + 10s + k}$

<b>1</b>	<b>10</b>	<b>0</b>
11	k	0
(110-k)/11	0	
k		

$$0 < k < 110$$



**K = 1, 10, 110**



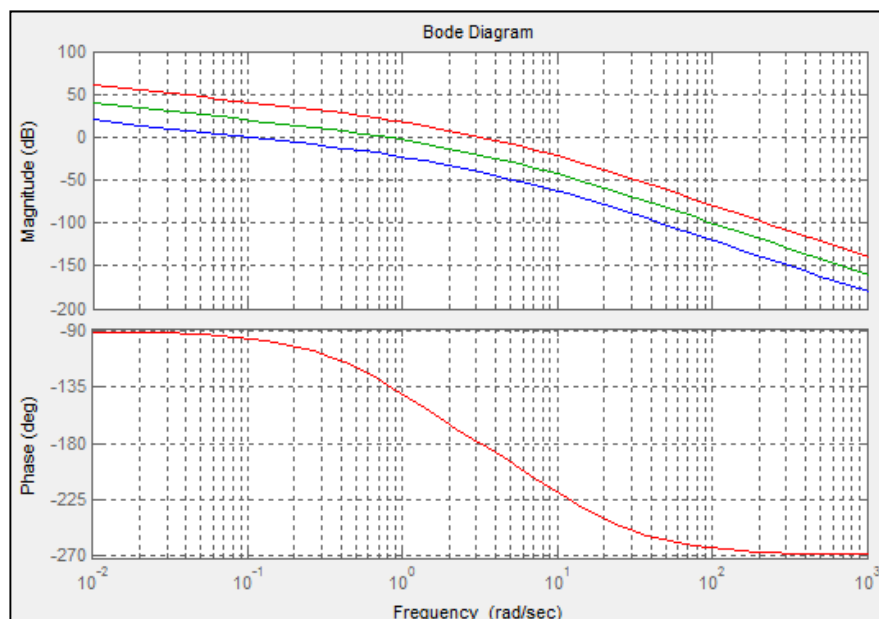
**K = 111**



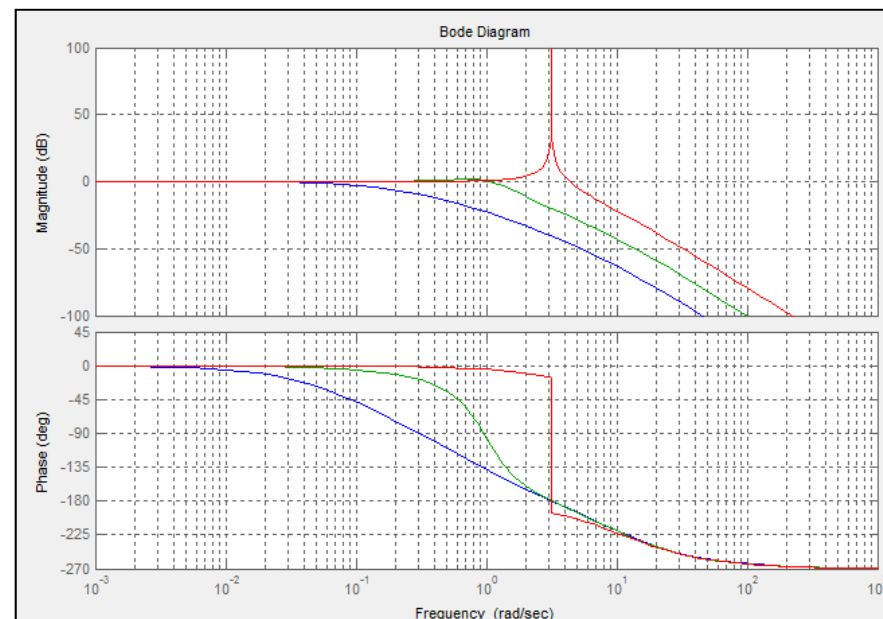
## Criterio di Stabilità di Nyquist



$$K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}; \quad \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k}{s^3 + 11s^2 + 10s + k}$$



Open Loop Frequency Response

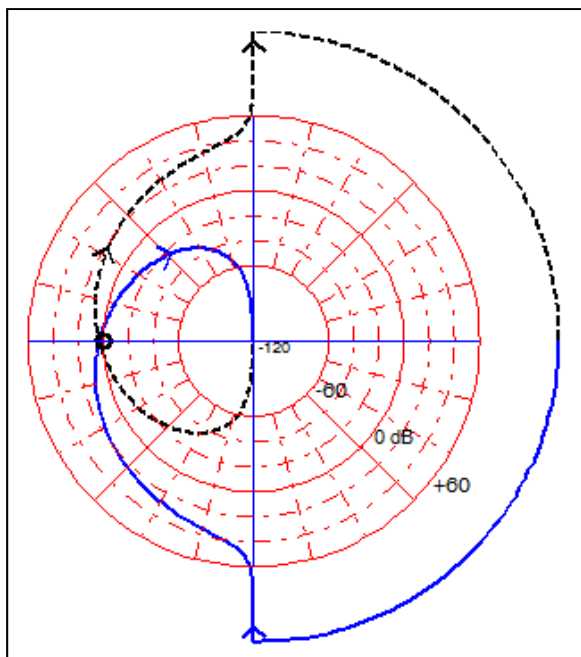
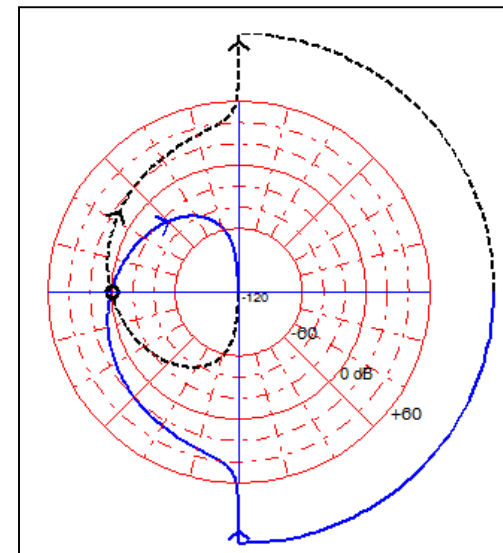
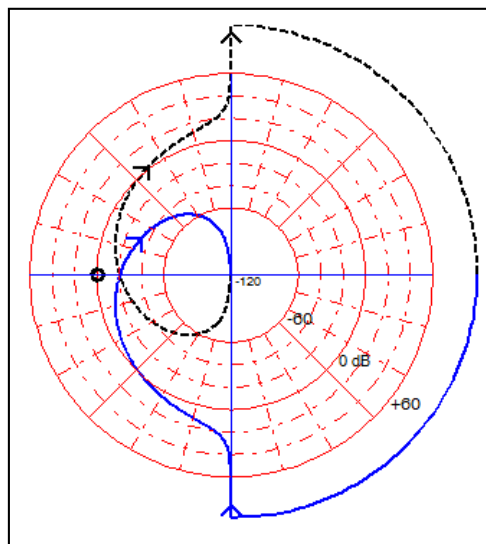
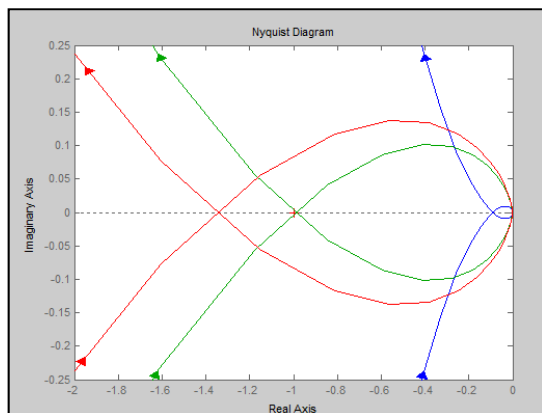


Closed Loop Frequency Response



# Criterio di Stabilità di Nyquist

**K = 10, 110, 150**

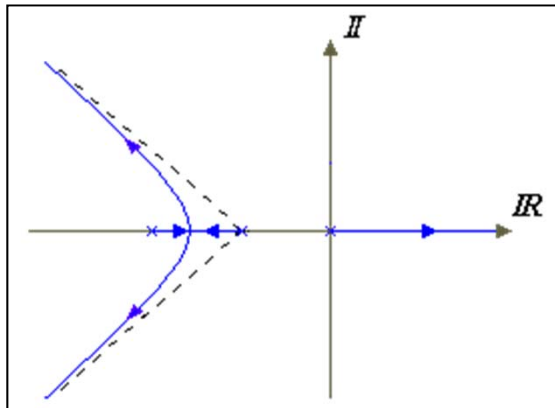




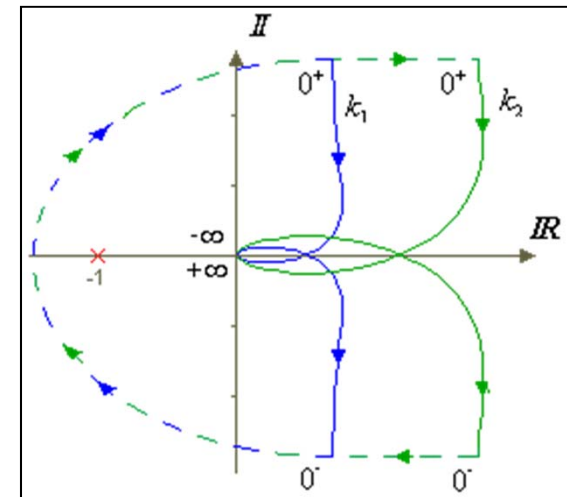
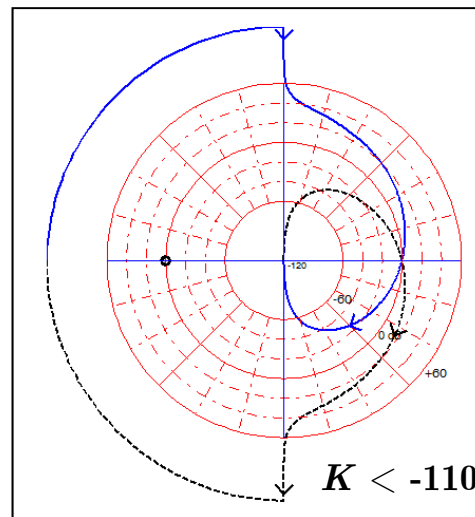
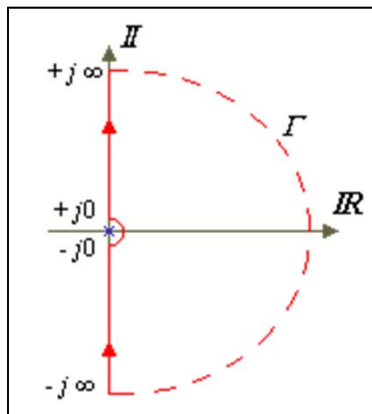
## Criterio di Stabilità di Nyquist

- Consideriamo adesso lo stesso sistema, ma chiuso in anello con retroazione positiva.

$$K < 0$$



- Per qualsiasi valore di  $k$ , il diagramma circonda sempre una volta il punto  $(-1, 0)$  in senso orario, per cui è  $N = 1$  e, essendo comunque  $P = 0$ , si ha  $Z = 1$ ; il sistema risulta quindi essere sempre instabile.



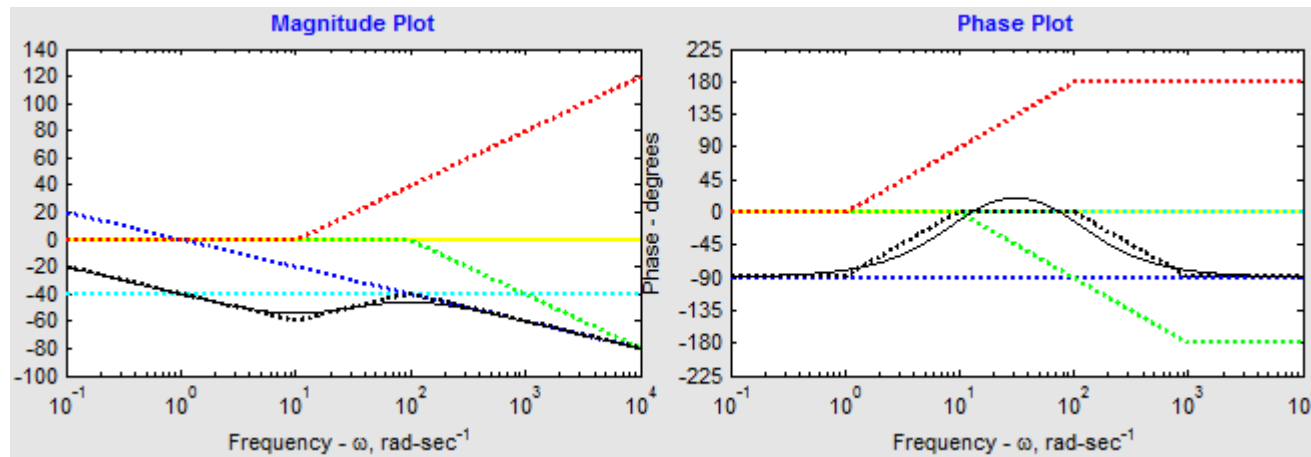




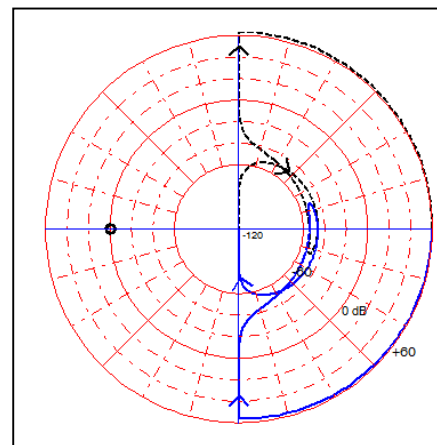
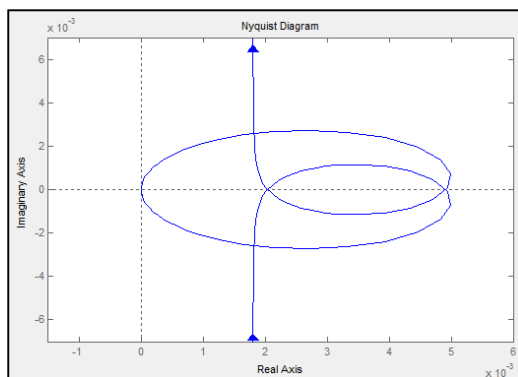
## Criterio di Stabilità di Nyquist

### □ Esempio

$$K(s)G(s) = \frac{k(s+10)^2}{s(s+100)^2} = \frac{1}{100} \frac{(\frac{s}{10} + 1)^2}{s(\frac{s}{100} + 1)^2}; k = 1$$



1. Tracciare Bode Open Loop
2. Tracciare Polare Open Loop
3. Tracciare Root Locus



- Non vi sono accerchiamenti del punto -1, quindi il sistema è sempre asintoticamente stabile in ciclo chiuso.



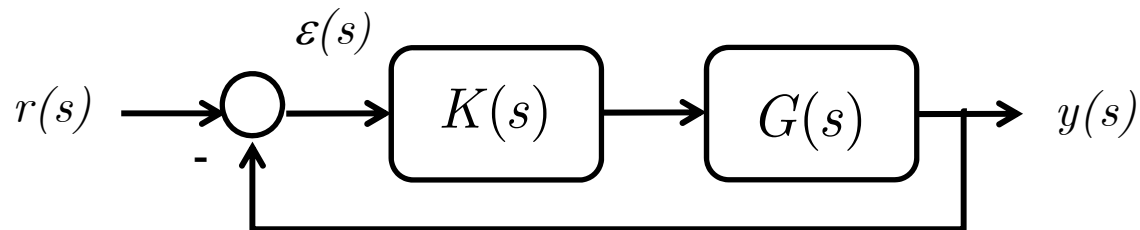
## Stabilità in Condizioni Non Nominali



- ❑ Il vero potenziale del Criterio di Nyquist si ha nello studio di sistemi soggetti ad errori e/o incertezze di modello. Tali sistemi vengono detti anche sistemi in condizioni non nominali o perturbate.

### ❑ Sistema in Condizioni Nominali

- In questo caso si ipotizza che la  $G(s)$  rappresenti fedelmente il comportamento dinamico del sistema



$$T(s) = G_{CL}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)},$$
$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}$$

#### 1. Stabilità in Ciclo Chiuso

2. Velocità di Risposta (Transitorio)
3. Precisione di Risposta (Errore a Regime)
4. Reiezione di Disturbi non desiderati
5. Adequata Banda Passante
6. ...



# Stabilità in Condizioni Non Nominali



## □ Sistema in Condizioni Non Nominali (Perturbate)

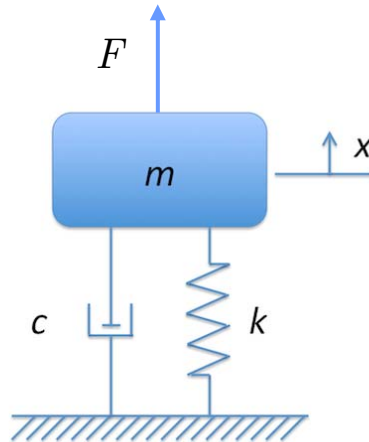
- la  $G(s)$  rappresenta un'approssimazione lineare tempo invariante del comportamento reale di un processo (oppure di un suo modello più complesso) a causa di:
  1. Non linearità senza memoria (Saturazioni, Isteresi, Zone morte, Relè, ...)
  2. Approssimazioni dovute a Linearizzazione
  3. Dinamiche non modellate perchè fuori Banda, ovvero per riduzione di modello
  4. Dinamiche trascurate per mancanza di capacità di misura (prevalentemente dinamiche ad alta frequenza) non modellata
  5. Variazioni di parametri (Guadagno statico, Poli, Zeri) per insufficiente conoscenza della struttura fisica del processo
  6. Presenza di ritardo dovuto ad implementazione software e/o dinamiche trascurate
  7. ...
  
- Il controllore  $K(s)$  deve essere in grado di mantenere, per quanto possibile, i requisiti di **Stabilità e Prestazioni** in presenza degli Errori ed Incertezze descritte, in modo da garantire il buon comportamento del sistema reale.



## Stabilità in Condizioni Non Nominali

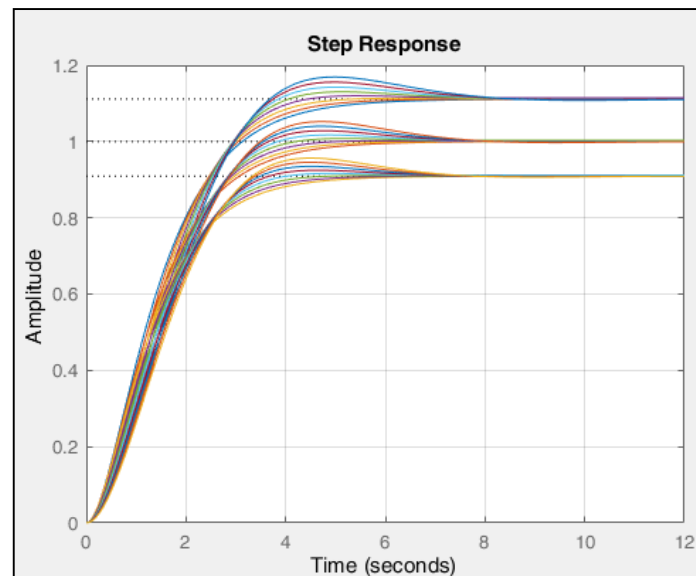


### □ Esempio



$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad c = \frac{F}{\dot{x}} = \frac{[N \cdot \text{sec}]}{[m]} \quad k = \frac{F}{x} = \frac{[N]}{[m]}$$

- Dati nominali forniti:  $m = 1$ ;  $k = 1$ .
- Requisito di progetto:  $\xi \geq 0.75 \Rightarrow c = 2\xi\omega_n = 1.5$
- A causa di imperfezioni in  $m$  e  $k$ , si ha in realtà:  
 $0.5 < m < 1.2 \text{ Kg}$ ;  $0.9 < k < 1.1 \text{ Kg/m}$



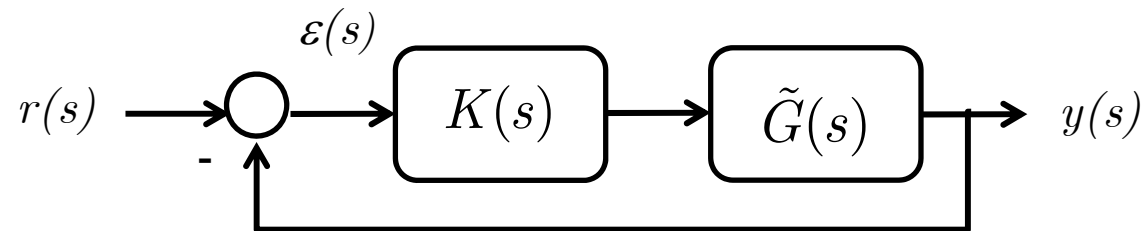


## Stabilità in Condizioni Non Nominali



- Una classe di incertezze che può essere trattata mediante il Criterio di Nyquist è quella delle Inceteezze non strutturate moltiplicative
- **IPOTESI:** L'incertezza è modellabile mediante una funzione stabile razionale fratta limitata superiormente secondo una qualche norma.

$$L(s) = L(j\omega) = |L(j\omega)| e^{j\angle L(j\omega)}; \|L(j\omega)\| < \Delta$$



$$\tilde{G}(s) = L(s) \cdot G(s)$$

$$\tilde{G}_{CL}(s) = \frac{K(s)\tilde{G}(s)}{1 + K(s)\tilde{G}(s)}$$



## Stabilità in Condizioni Non Nominali

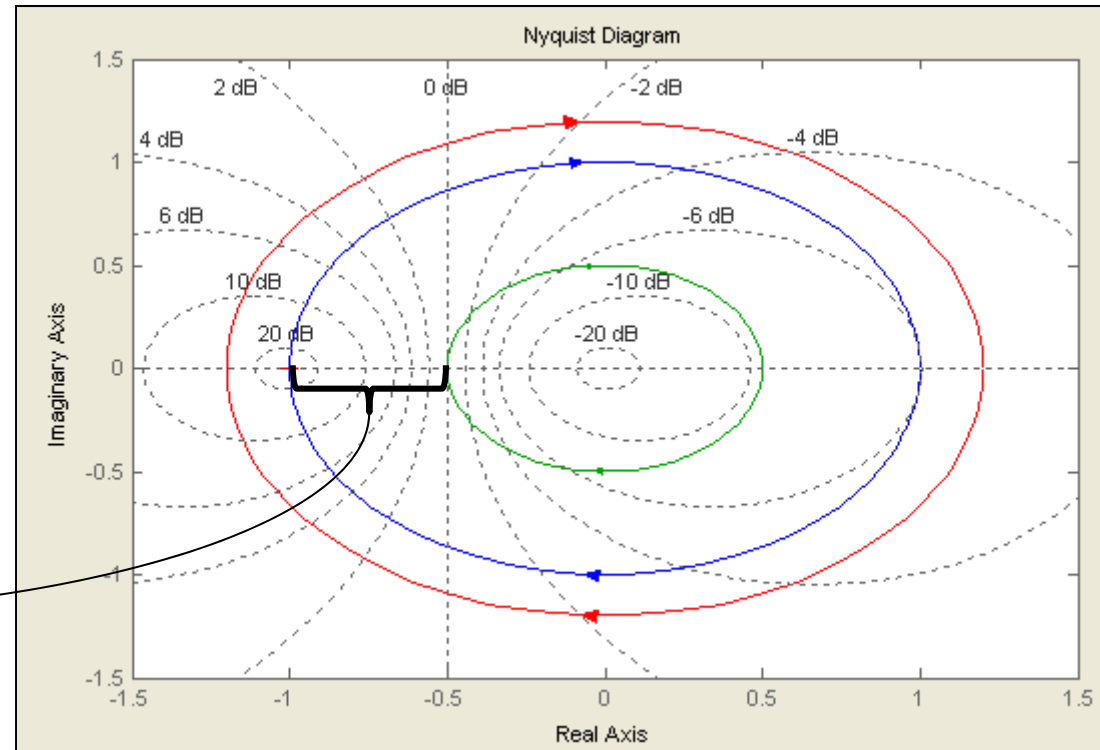
### ❑ Esempio

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow T(s) = \frac{k(s-1)}{s+ks+(1-k)}$$

- **Green:  $k=0.5$ ,  $P=0$ ,  $N=0$ ,  $Z=0$ , Ciclo Chiuso Asintoticamente Stabile**
- **Red:  $k=1.2$ ,  $P=0$ ,  $N=1$ ,  $Z=1$ , Ciclo Chiuso Instabile**
- **Blu:  $k=1$ , Condizioni critiche di stabilità marginale**

### ❑ Differente Lettura:

Dato un  $k$  nominale pari a 0.5,  
È possibile mantenere la  
Stabilità in Ciclo Chiuso per  
Tutte le incertezze di modello  
In modulo  $|L(j\omega)| < 0.5$

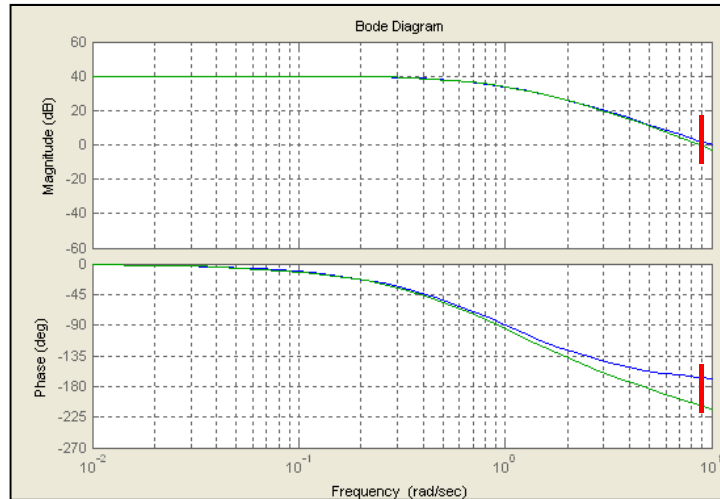




# Stabilità in Condizioni Non Nominali



## Esempio



Nella Banda di interesse i due Sistemi differiscono di un contributo di fase. Il modulo di entrambi i sistemi è praticamente lo stesso. Per  $\omega = 9$  rad/sec, ad esempio, la differenza di fase vale:

**Fase sistema Blu  $-157^\circ$**

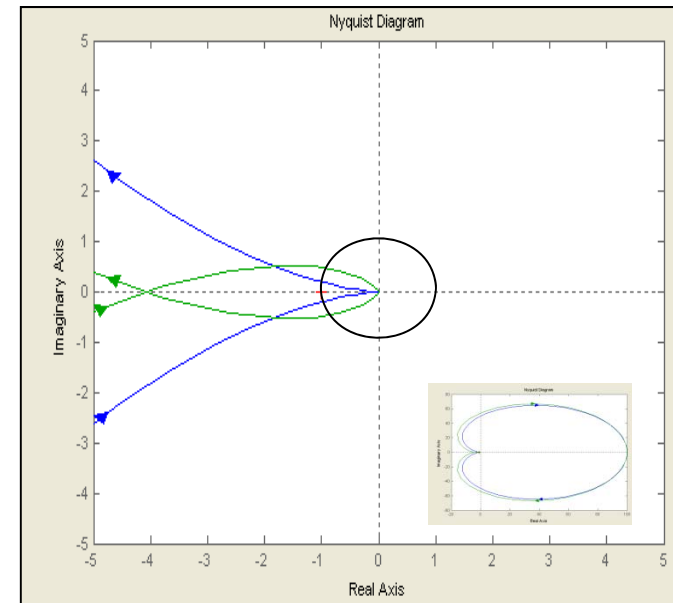
**Fase sistema Verde  $-210^\circ$**

- Dal Criterio di Nyquist:
- **Blu:  $P=0$ ,  $N=0$ ,  $Z=0$  Asint. Stabile in ciclo chiuso**
- **Verde:  $P=0$ ,  $N=2$ ,  $Z=2$ , Instabile in ciclo chiuso**

## Differente Lettura

E' possibile mantenere la stabilità in ciclo chiuso del sistema Blu, per tutte le incertezze di fase

$$\angle L(j\omega) < -180^\circ - (-157^\circ) = -23^\circ$$





## Stabilità in Condizioni Non Nominali



### 1) Errore di guadagno

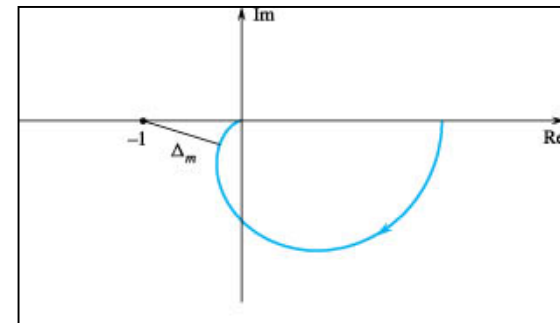
L'esempio sopra riportato mostra come, modificando la costante di guadagno  $k$ , si possa passare da una situazione di stabilità ad una di instabilità; se quindi, modellando il sistema, si introduce un errore dovuto a  $|L(j\omega)|$ , si può portare il sistema in una situazione critica.

### 2) Errore di fase

Realizzando il modello del sistema si può commettere un errore anche sulla fase, dovuto al termine  $\angle L(j\omega)$ ; un errore di questo tipo comporta un anticipo o un ritardo di fase che può rivelarsi anch'esso critico per il sistema stesso.

## ❑ In Condizioni non nominali, dobbiamo distinguere tra Stabilità Relativa e Robustezza (Grado di Stabilità)

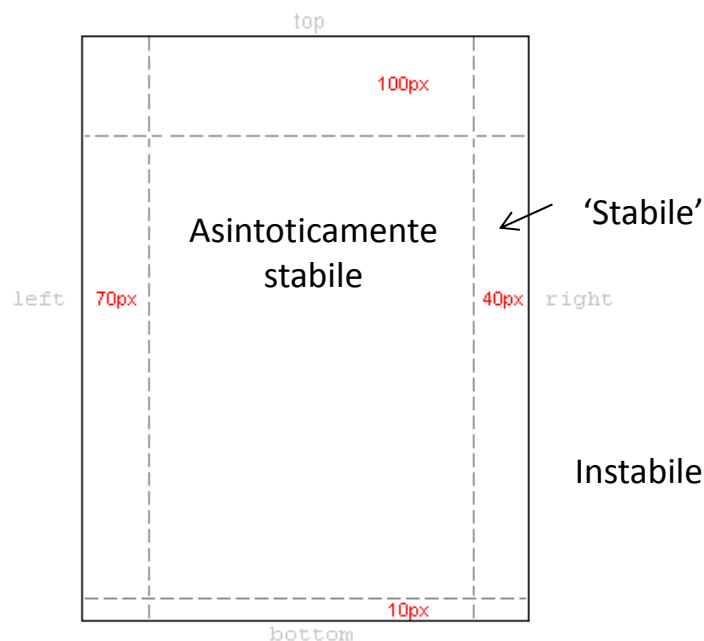
- **Definizione – Grado di stabilità:** Per un sistema stabile in anello aperto con  $FdT$  data da  $G_{OL}(s)$ , viene detto **grado di stabilità** la distanza vettoriale di  $G_{OL}(s)$  dal punto  $(-1, 0)$  poiché al variare di tale distanza può cambiare il valore di  $N$  nel criterio di Nyquist e, quindi, la stabilità a ciclo chiuso.







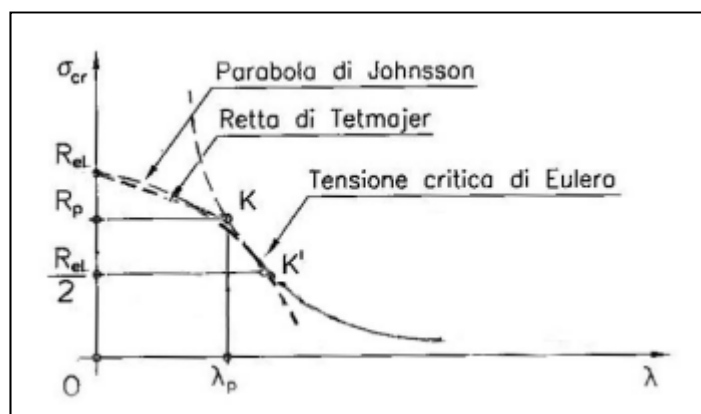
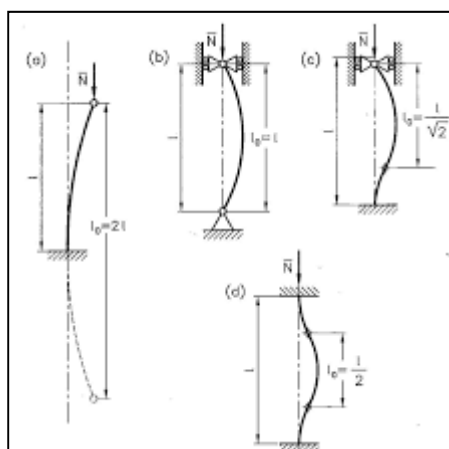
# Margini di Stabilità



Il coefficiente di sicurezza per gli acciai assume, in base alla normativa italiana, il valore  $g = 1,5$  per la sollecitazione di compressione semplice ( $\lambda = 0$ ) e aumenta al crescere della snellezza, assumendo, secondo la norma CNR-10011, il valore  $g = 2,5$  nel campo euleriano; il DM del 30.5.1972 stabilisce semplicemente che sia  $g \geq 1,5$ .

Instabile

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{k}$$



$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{k} = \frac{\pi^2 E}{k \lambda^2}$$

$$k = 1,5 + \frac{\lambda}{\lambda_p}$$



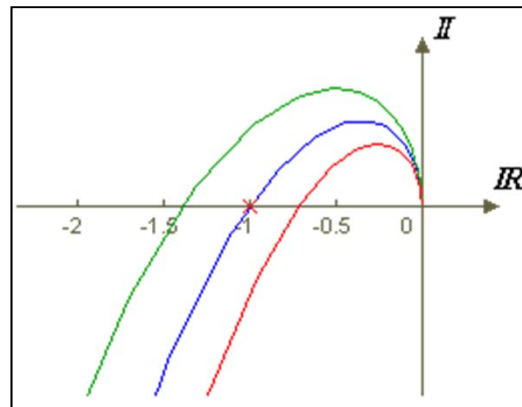
## Stabilità Relativa - Margini di Stabilità



- ❑ I *margini di stabilità* sono due parametri che misurano la *stabilità relativa*, dei sistemi in retroazione dalla risposta in frequenza in anello aperto e **permettono**:
- ❑ la valutazione dell'effetto di incertezze moltiplicative di anello sulla stabilità ciclo chiuso
- ❑ La possibilità di sintesi di un controllore che mantenga la stabilità del sistema in presenza di tali incertezze.

### ❑ Ipotesi iniziale (Criterio di Bode):

- Consideriamo un sistema la cui  $G_{ol}(s)$  sia stabile, con guadagno positivo ed un unico attraversamento dell'asse a 0 dB



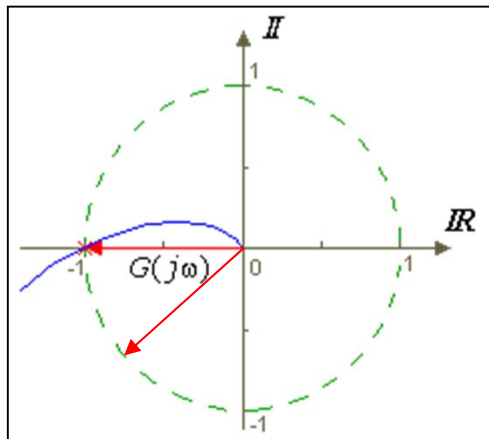


## Margini di Stabilità



- Il passaggio critico per la stabilità (ovvero quando il numero di giri intorno al punto critico  $N$  varia) si ottiene per:

$$1 + G(s)K(s) = 0 \Rightarrow G_{OL}(s) = -1$$



- L'uguaglianza si ha per 2 frequenze di attraversamento (Crossover Frequencies):

$\omega_c \Rightarrow$  Frequenza di attraversamento di Guadagno

$$G_{OL}(j\omega_c) = |-1| = 1$$

$\omega_\pi \Rightarrow$  Frequenza di attraversamento di Fase

$$G_{OL}(j\omega_\pi) = \angle -1 = -180^\circ$$

Nel caso in cui  $\omega_p = \omega_c = \omega^*$  si ha la completa identità  $G_{OL}(j\omega^*) = -1$



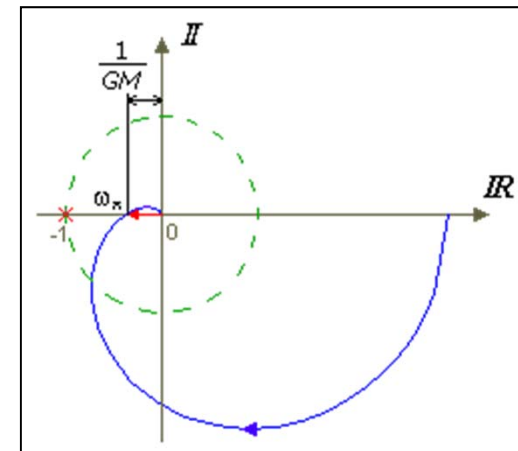
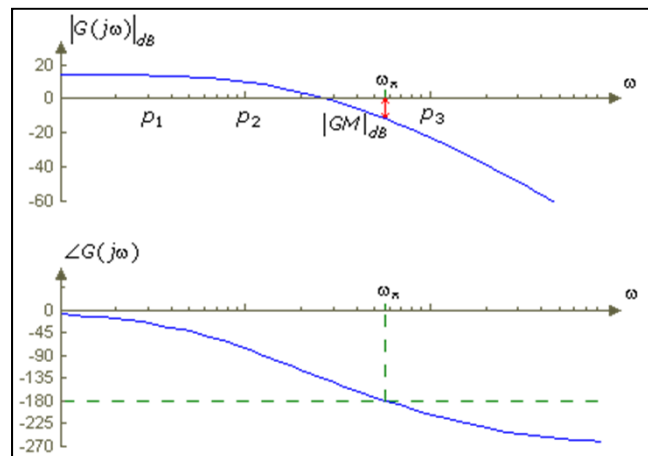
# Margini di Stabilità



□ **Margine di Guadagno:** Si definisce *margin* **di guadagno** del sistema il valore:

$$GM_{dB} = \frac{1}{|G(j\omega_{\pi})|} \quad |G(j\omega_{\pi})|_{dB} = \frac{1}{GM}$$

- Ovvero, l'inverso del modulo della *FdT* calcolata nel punto di intersezione con l'asse reale, in cui la pulsazione, indicata come  $\omega_{\pi}$ , è quindi tale che  $\angle G(j\omega_{\pi}) = -180^{\circ}$ . Vedi il diagramma di Nyquist.
- Il calcolo del margine di guadagno può essere fatto mediante i diagrammi di Bode di modulo e fase.





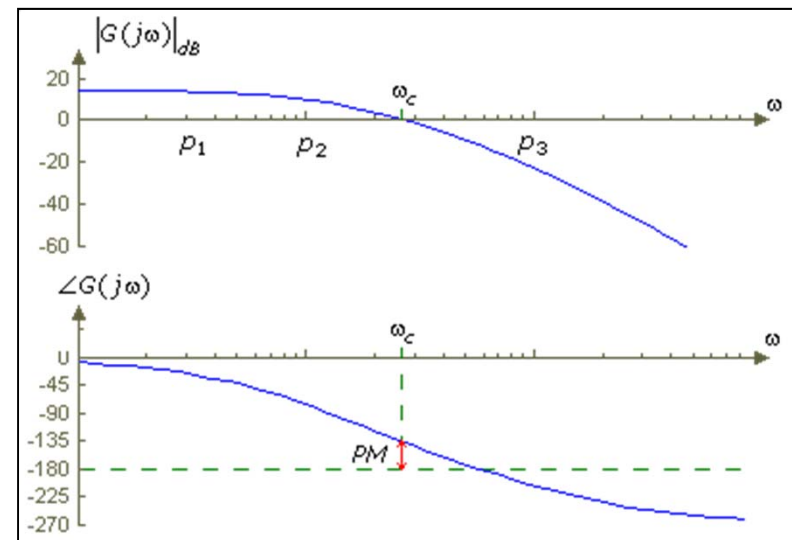
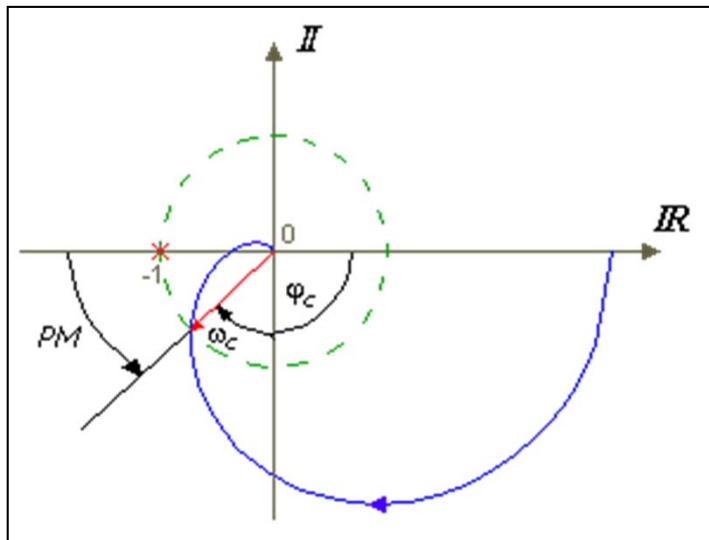
# Margini di Stabilità



□ **Margine di Fase:** Si definisce *margin* di fase del sistema il valore:

$$PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \varphi_c$$

- Il margine di fase è  $180^\circ$  più  $\varphi_c (= \angle G(j\omega_c))$ , detta *fase critica*, cioè la fase del sistema calcolata nel punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, in cui quindi la frequenza  $\omega_c$  è tale per cui  $|G(j\omega_c)| = 1$



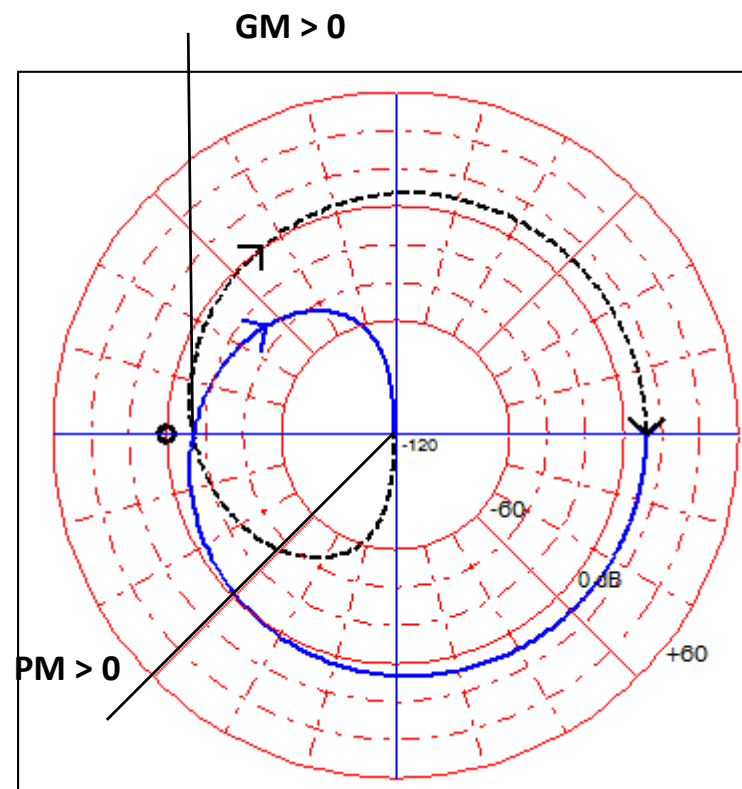
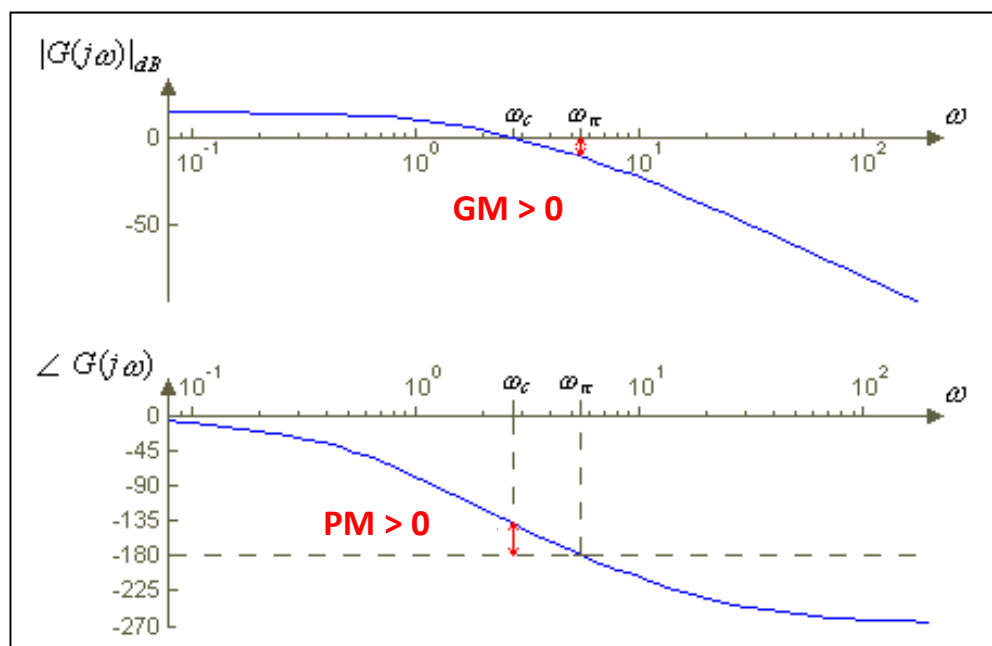


## Margini di Stabilità

- Per sistemi la cui FdT di anello soddisfi il Criterio di Bode, la stabilità in Ciclo Chiuso è garantita (C.N.S.) dall'avere **GM > 0** e **PM > 0**

- Valori tipici accettabili in pratica sono **GM ≈ (10-20) dB**, **PM > 40°-50°**

**GM > 0 e PM > 0, Sistema Stabile in ciclo chiuso**

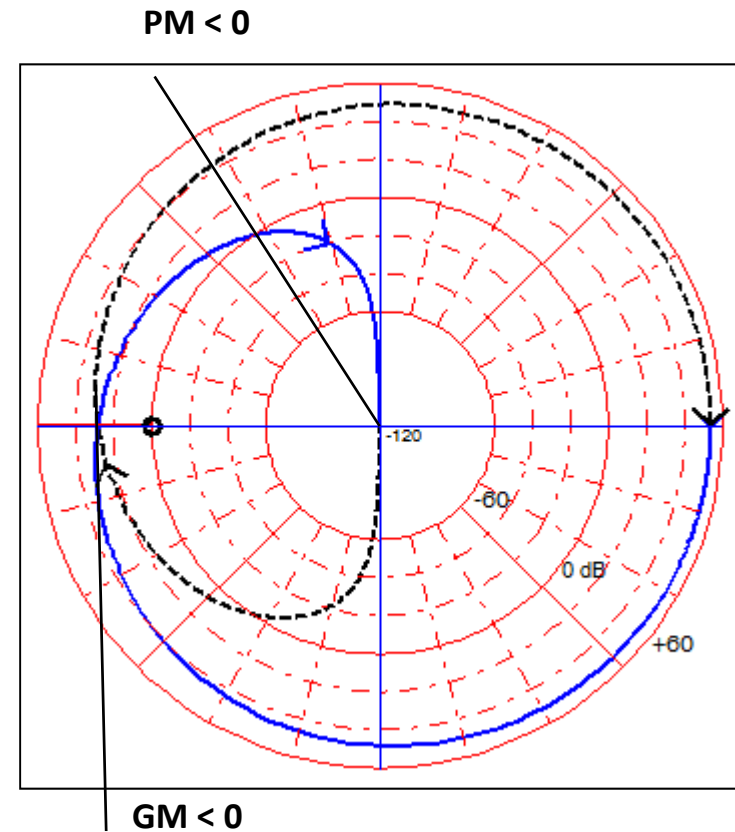
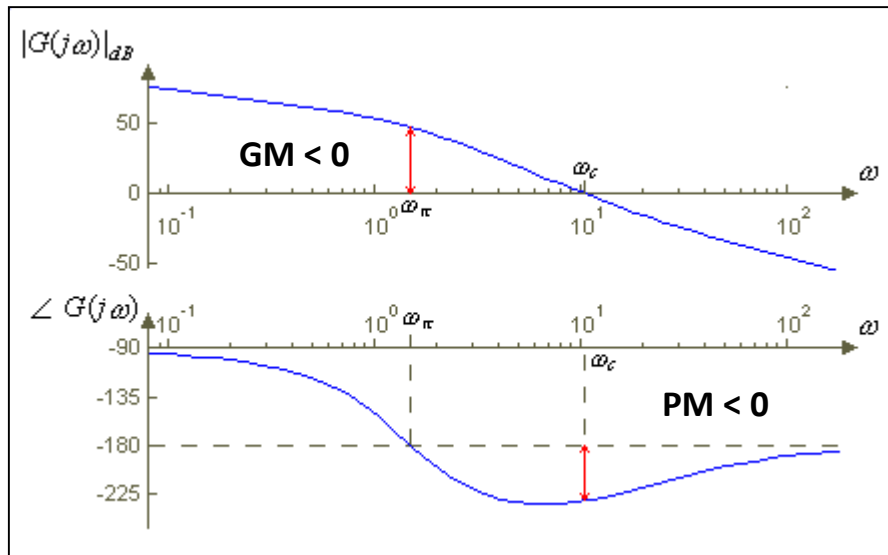




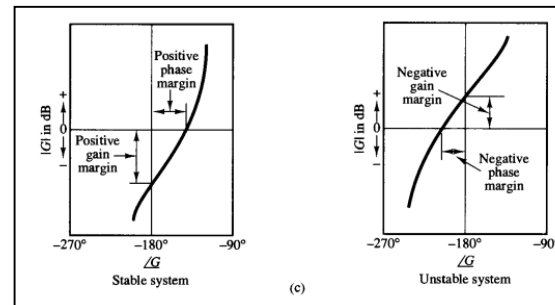
# Margini di Stabilità



**GM < 0 e PM < 0, Sistema Instabile in ciclo chiuso**



- ❑ Valutazione dei margini di stabilità mediante i diagrammi di Nichols



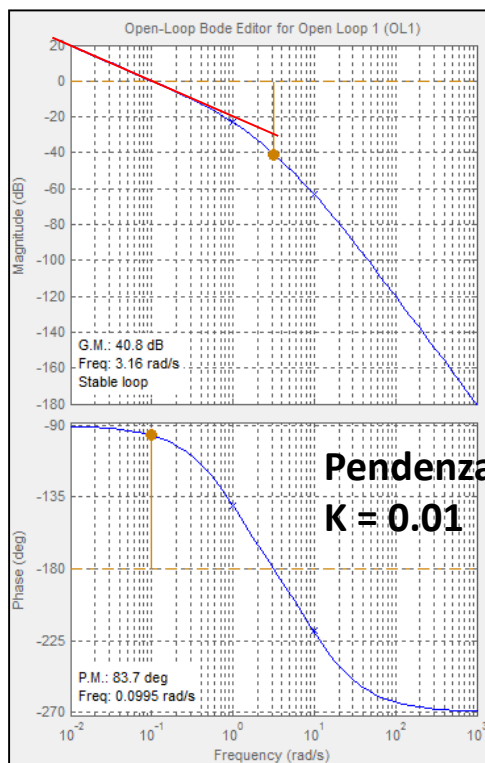


## Margini di Stabilità

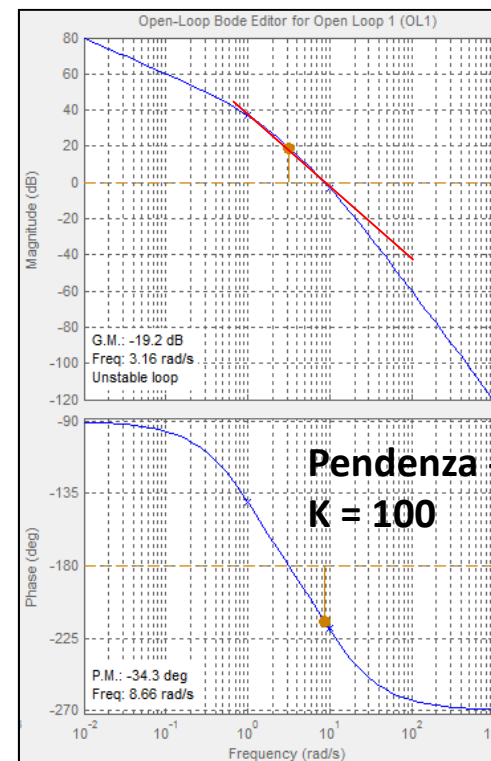


- ❑ **Nota pratica:** Dato un sistema lineare che soddisfa il criterio di Bode, fase minima, e senza ritardo in anello. La stabilità in ciclo chiuso è **'ragionevolmente'** garantita se la funzione di trasferimento di anello attraversa l'asse di 0 dB con pendenza -1 (-20 dB / dec). Ovvero se la funzione di trasferimento di anello si comporta come un integratore all'attraversamento. In tal caso, infatti, il margine di fase è quasi sicuramente positivo.

- **Esempio**  $G_{OL}(s) = k \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$ ;  $G_{CL}(s) = \frac{100k}{s^3 + 11s^2 + 10s + 100k}$



■ **sisotool**

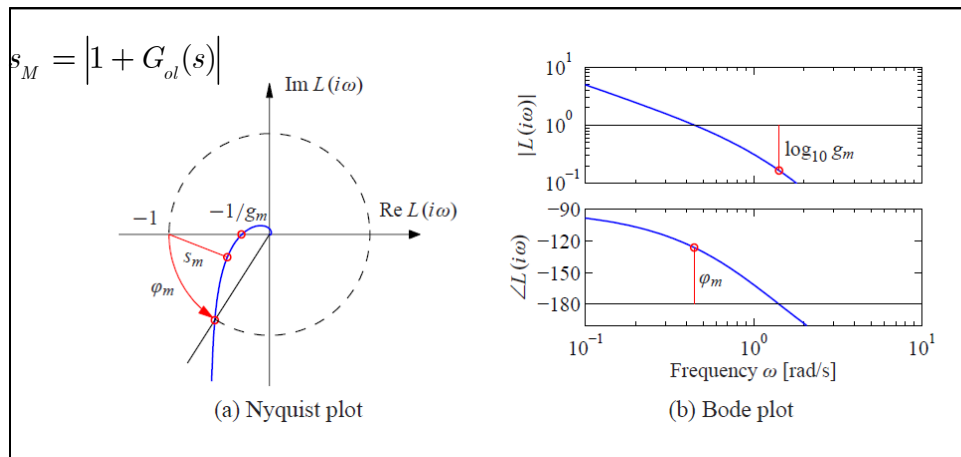






## Grado di Stabilità - Robustezza

- In alcuni casi, la 'robustezza' del sistema non è completamente garantita dai margini di guadagno e di fase ed il grado di stabilità  $s_M$  ( $\Delta_M$ ) fornisce una misura più corretta e complementare al calcolo dei margini di stabilità



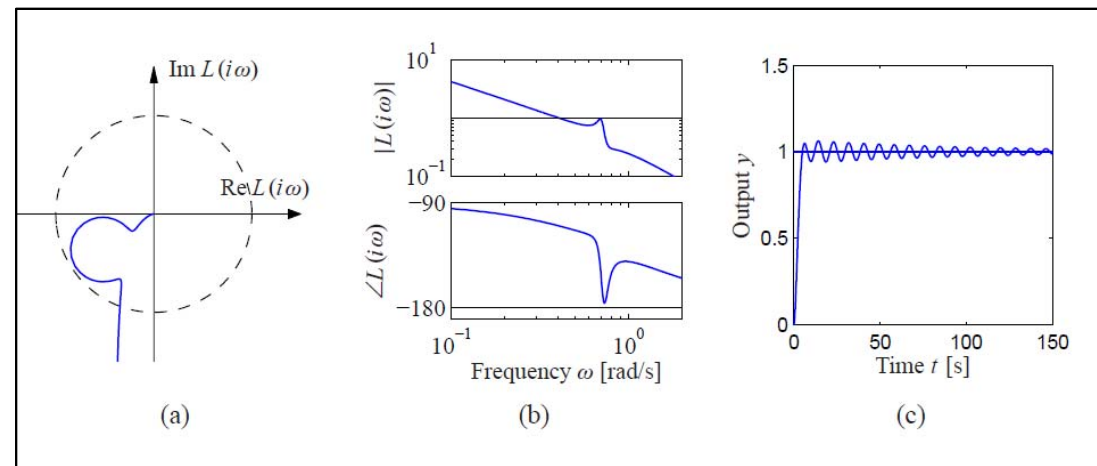
- Buoni Margini di Stabilità
- Sistema Robusto

$$s_M \uparrow \Leftrightarrow |S(s)| \downarrow$$

**Nota pratica:** Picco di sensitività tra 1.5 – 2.5

- Buoni Margini di Stabilità
- Sistema non Robusto
- Il grado di stabilità  $s_M$  è legato alla funzione di sensitività

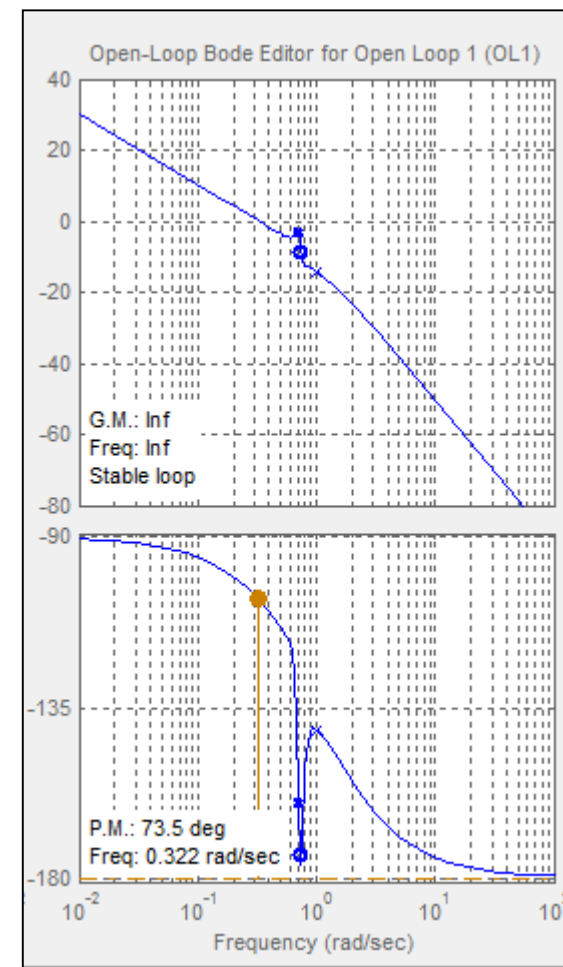
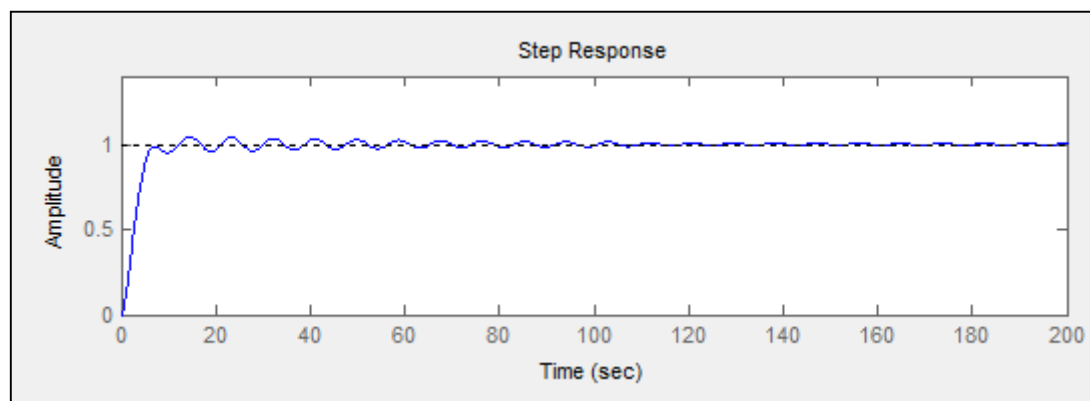
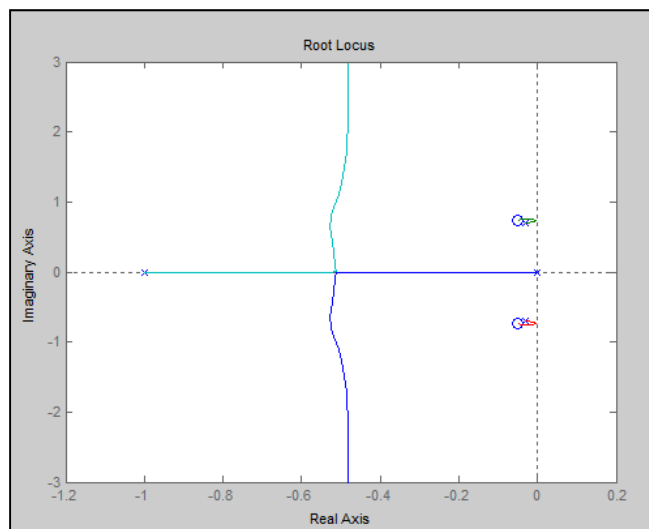
$$s_M = |1 + G_{ol}(s)| = \frac{1}{|S(s)|}$$





## Grado di Stabilità

$$G_{OL}(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{s(s + 1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}$$





## Stabilità Relativa - Esempi



- **Esempio:** Dato il sistema  $G(s)$ , determinare un controllore tale che l'errore a regime alla rampa sia finito.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

- Il controllore deve avere un comportamento integrale, con guadagno variabile a seconda dell'entità dell'errore a regime desiderato

$$K(s) = \frac{k}{s}, G(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+5)}, G_{CL}(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 5s + k}$$

- Dal Criterio di Routh:  $k < k_{CR} = 30$

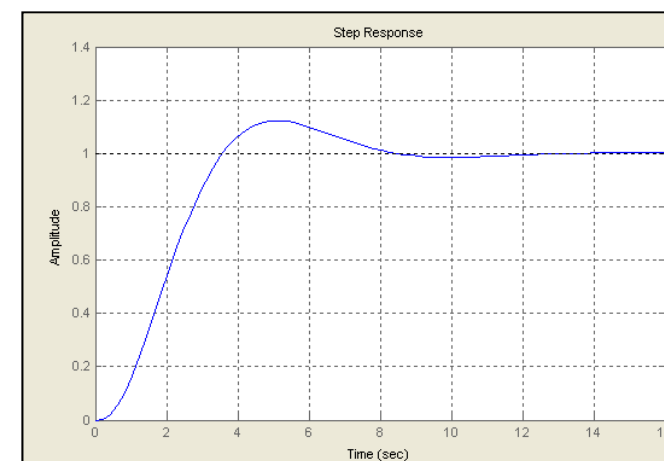
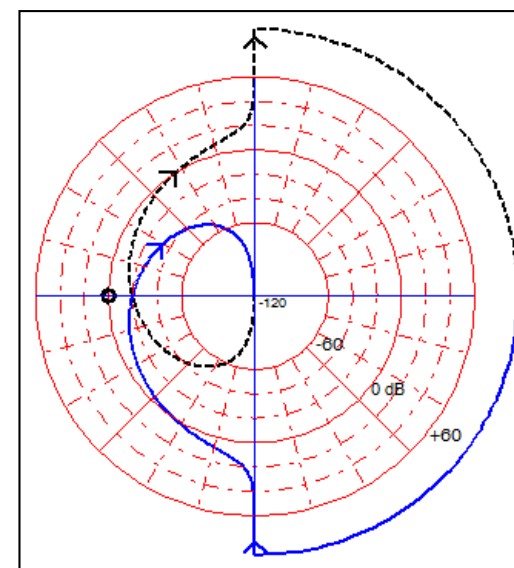
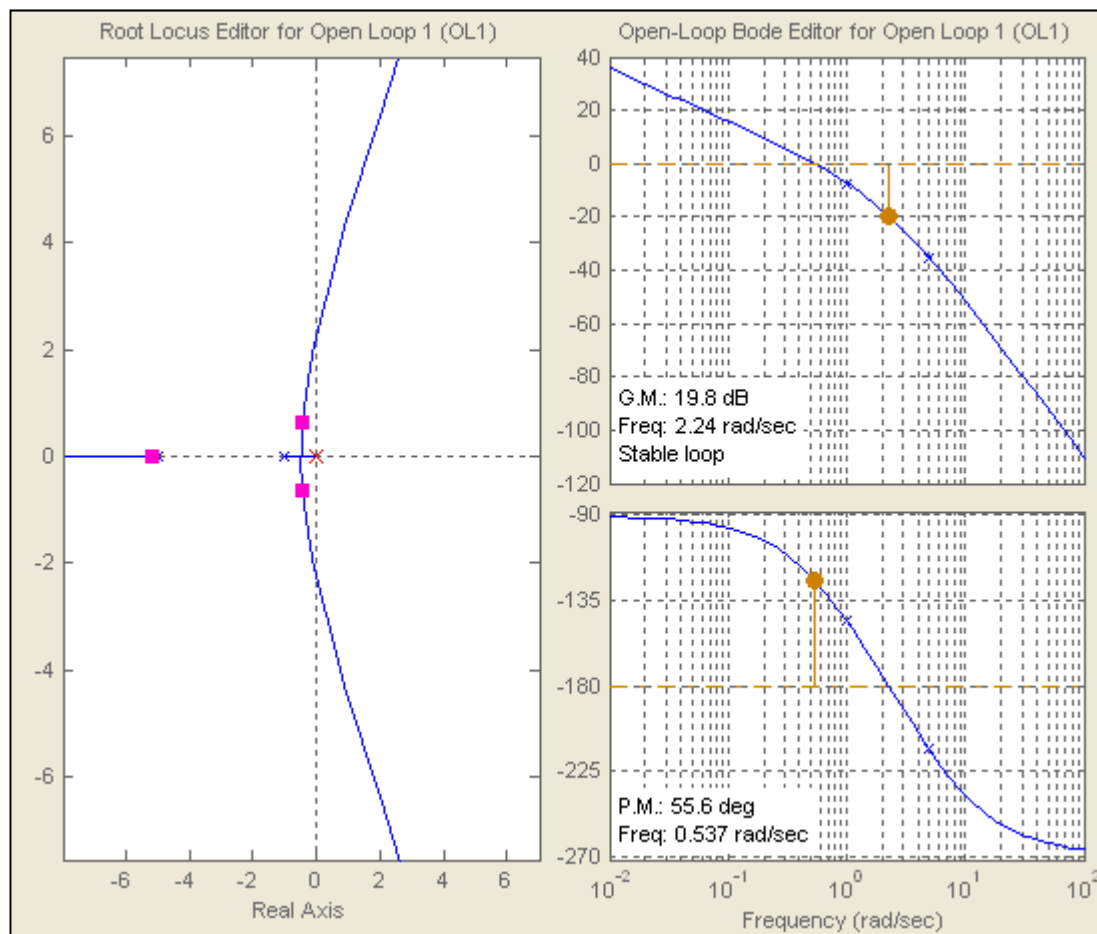
- **Il minimo valore di errore alla rampa possibile si può calcolare dal TVF assumendo  $k < k_{CR}$**

- Dal Criterio di Nyquist possiamo calcolare i margini di Stabilità per valori del guadagno  $K$  minori e maggiori del Guadagno critico.



## Stabilità Relativa - Esempi

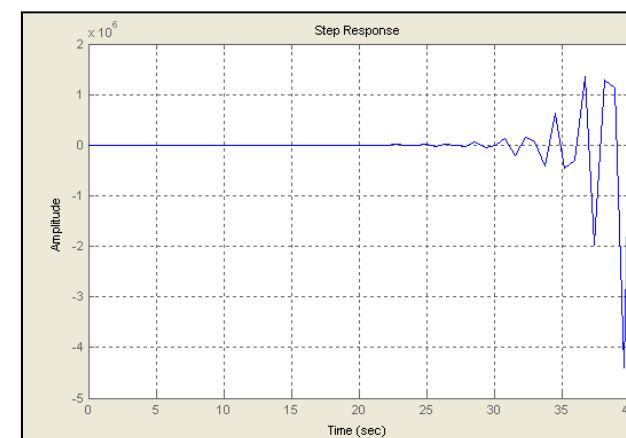
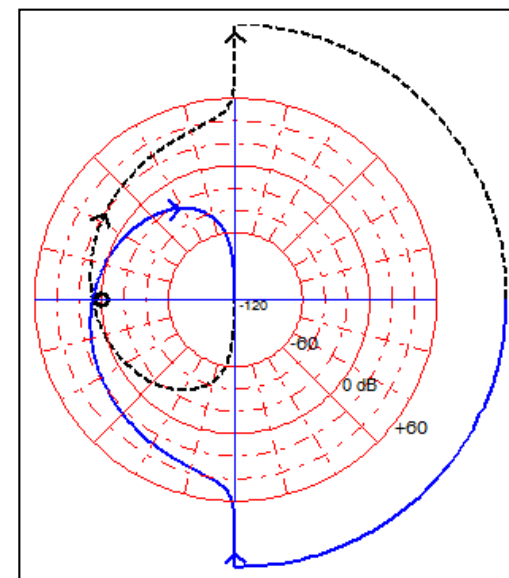
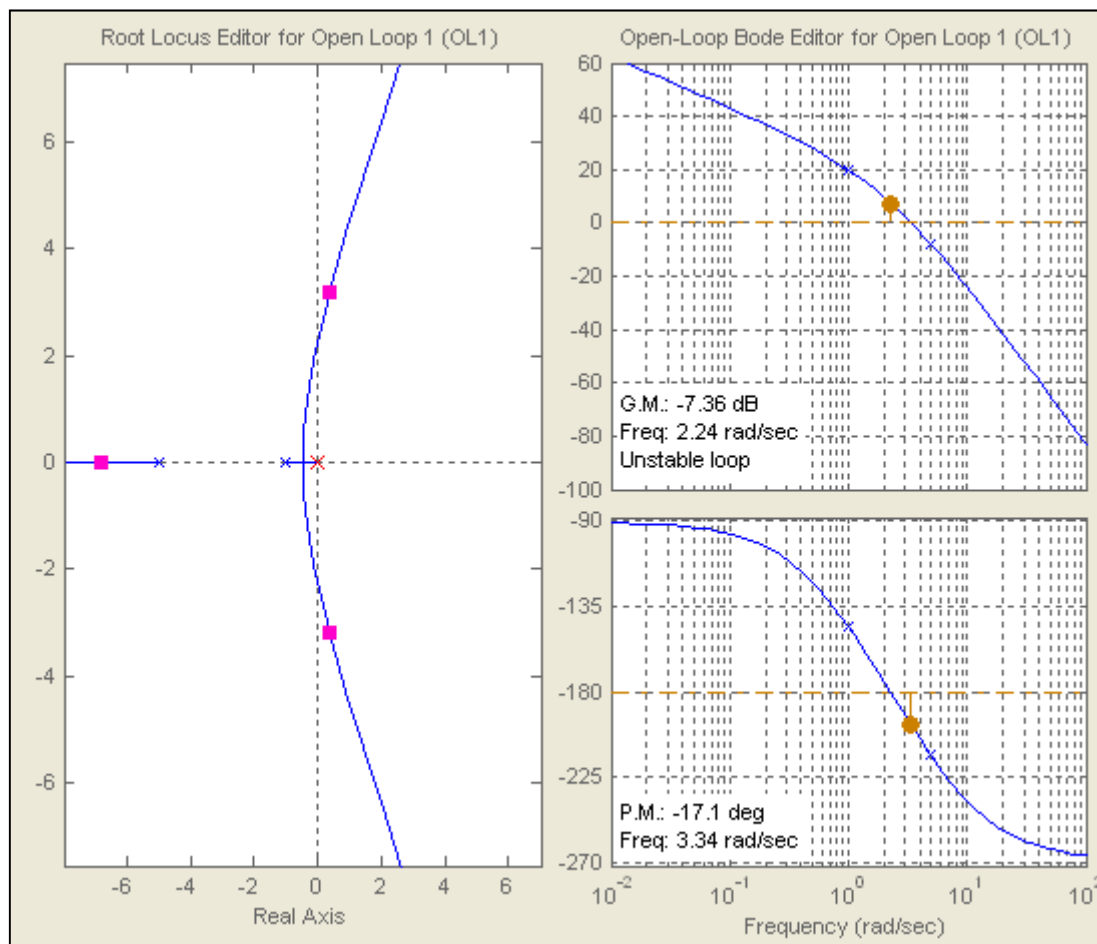
$$K = 3.08$$





## Stabilità Relativa - Esempi

$$K = 70$$

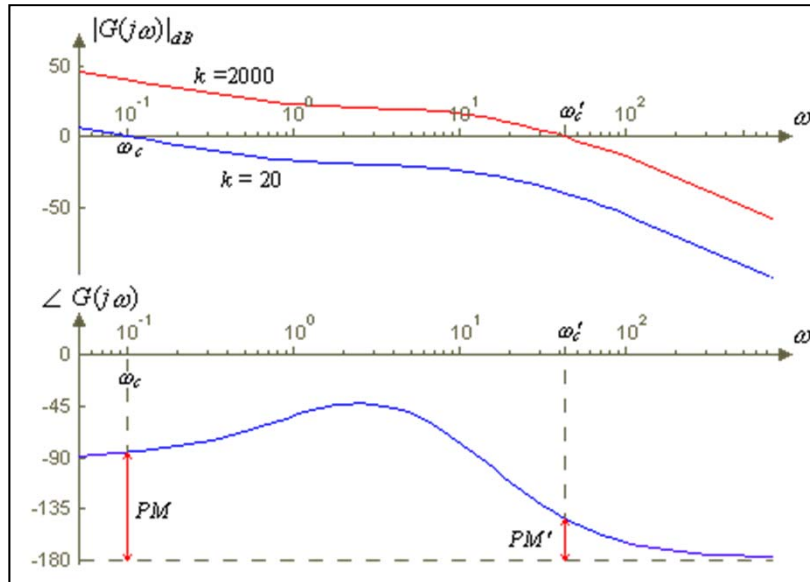




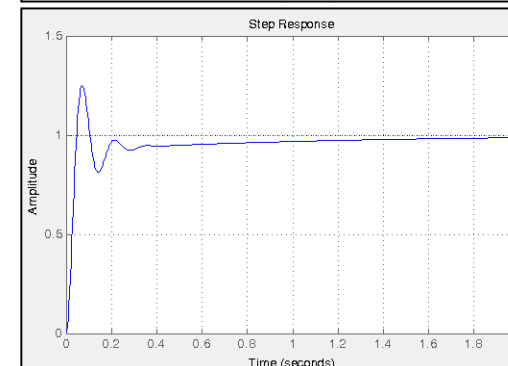
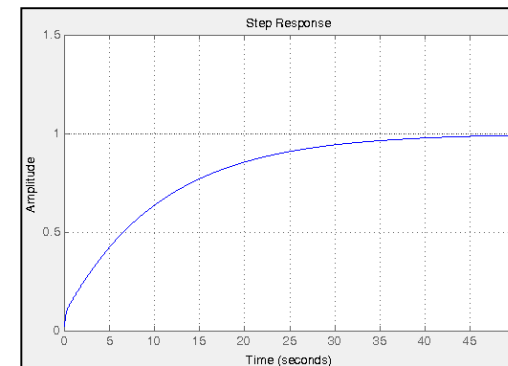
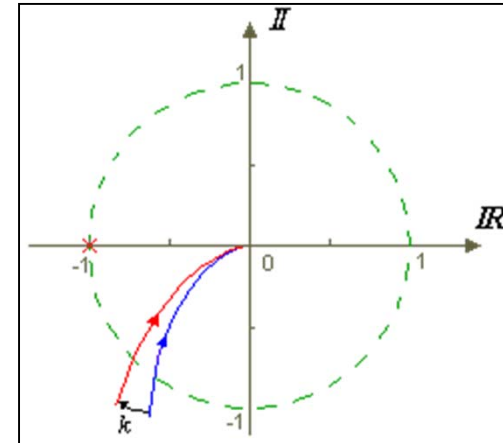
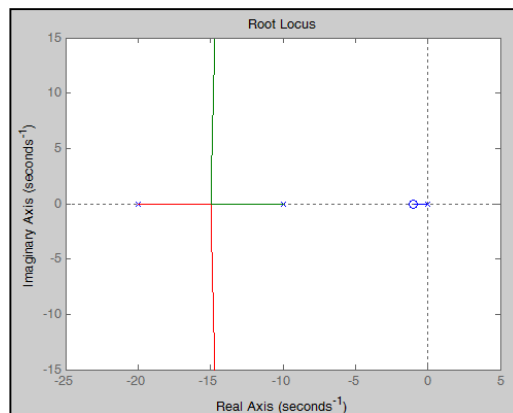
# Stabilità Relativa - Esempi



□ **Esempio:**  $K(s)G(s) = k \frac{s+1}{s(s+10)(s+20)}$



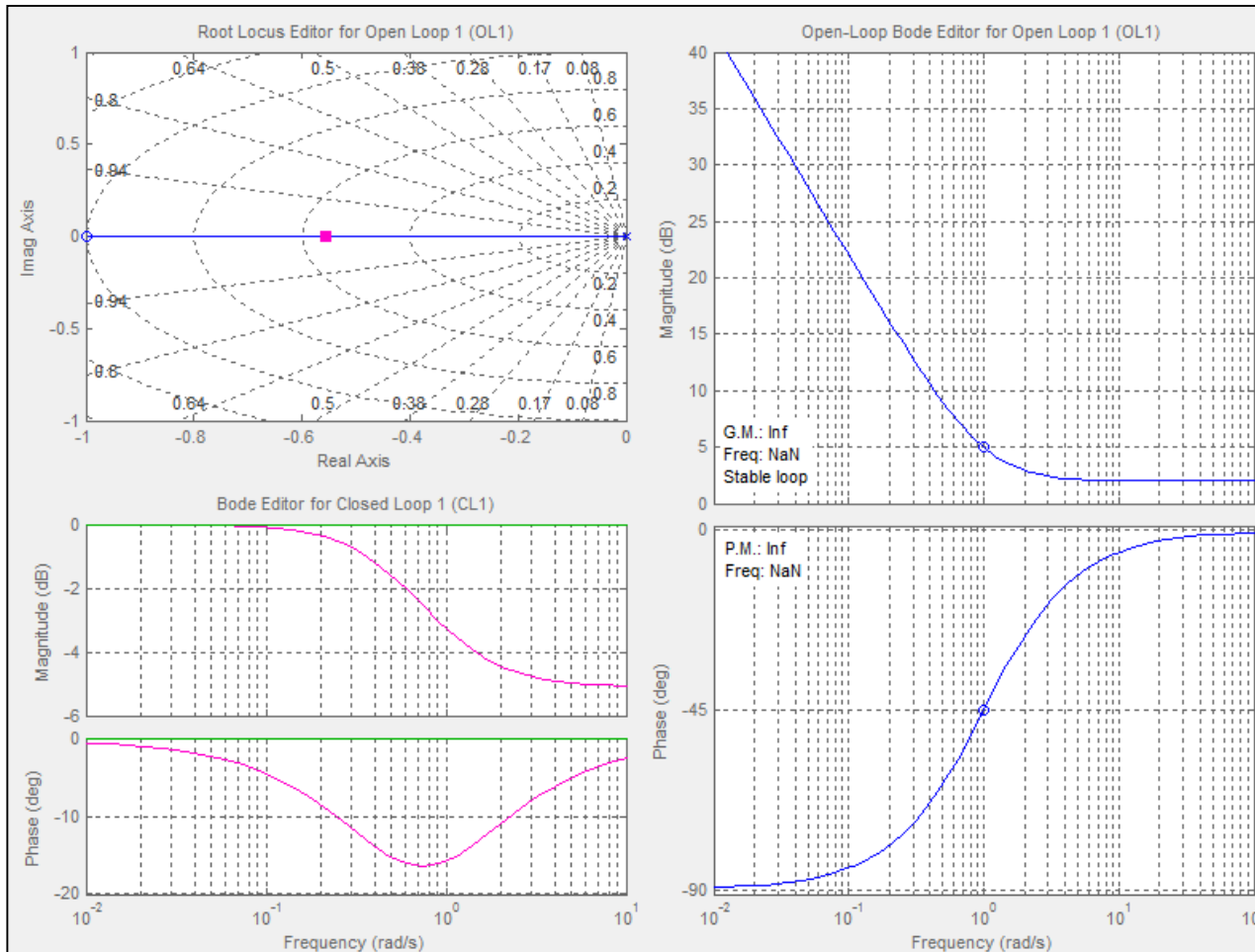
$GM = \infty$   $PM > 0$  ma varia con  $k$



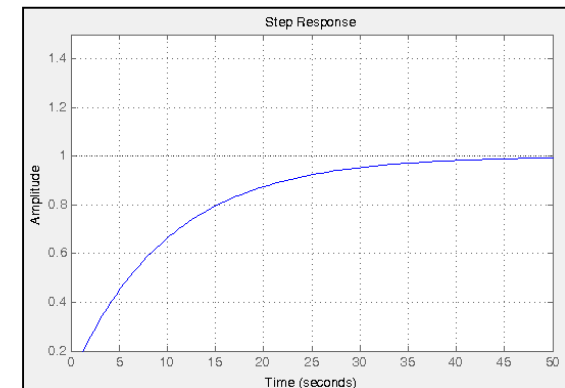


## Stabilità Relativa - Esempi

- **Approssimazione a poli dominanti:**  $K(s)G(s) \approx \frac{k}{200} \frac{s+1}{s} = \frac{k'(s+1)}{s}$



$$k' = 0.10956$$





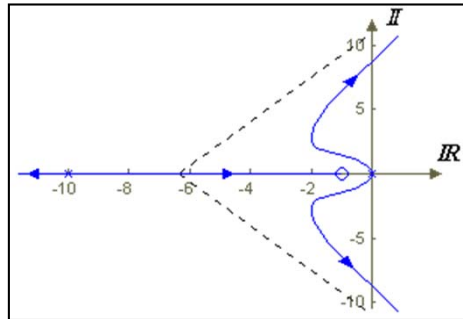
## Stabilità Relativa - Esempi



□ Esempio:

$$K(s)G(s) = k \frac{s+1}{s^2(s+10)^2}$$

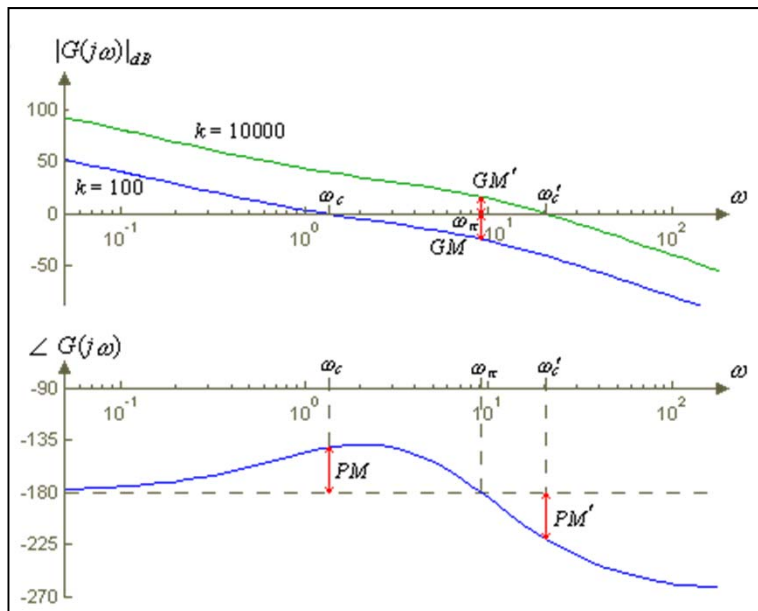
$$\text{sys} = (s+1)/(s^2*(s+10)^2)$$



$s^4$	1	100	$k$
$s^3$	20	$k$	0
$s^2$	$\frac{2000 - k}{20}$	$k$	0
$s^1$	$\frac{1600k - k^2}{2000 - k}$	0	
$s^0$	$k$		

$$k_{CR} = 1600$$

- $k < k_{CR} \Rightarrow \text{GM} > 0, \text{PM} > 0$
- $k > k_{CR} \Rightarrow \text{GM} < 0, \text{PM} < 0$





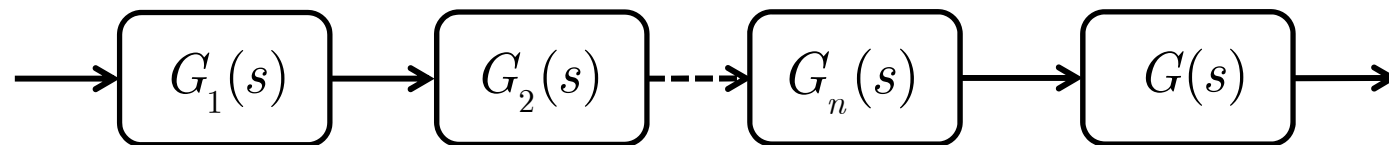


## Casi Particolari

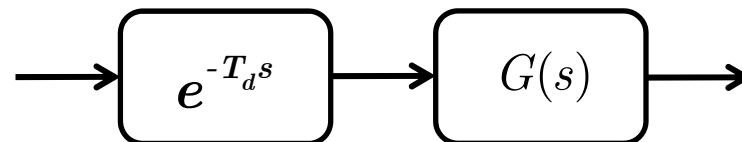


### □ Influenza del Ritardo sulla Stabilità in Anello Chiuso

- La presenza di ritardo in anello, dovuta a fattori quali dinamiche di attuazione e di misura non modellate, tempi di calcolo finiti, ecc..
- Ogni sistema strettamente proprio aggiunge un ritardo che aumenta fino a -90 gradi a frequenza infinita, per ogni eccesso polo-zero nella propria FdT

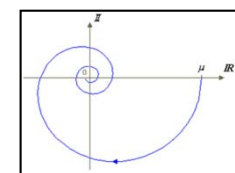
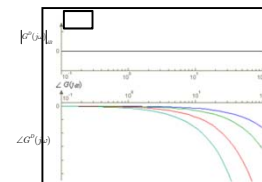


- Ogni tempo di calcolo e/o di trasmissione di segnale creano un ritardo nella FdT globale



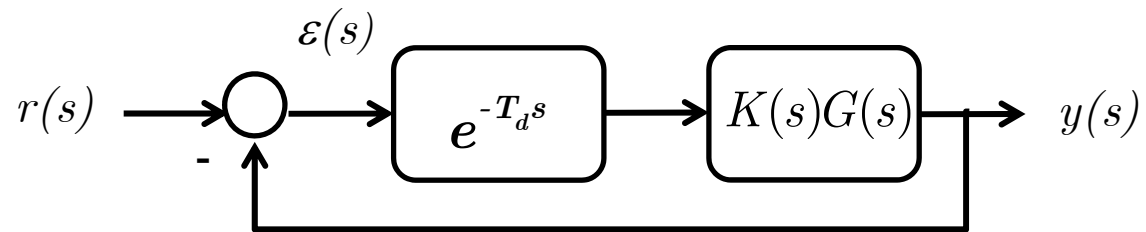
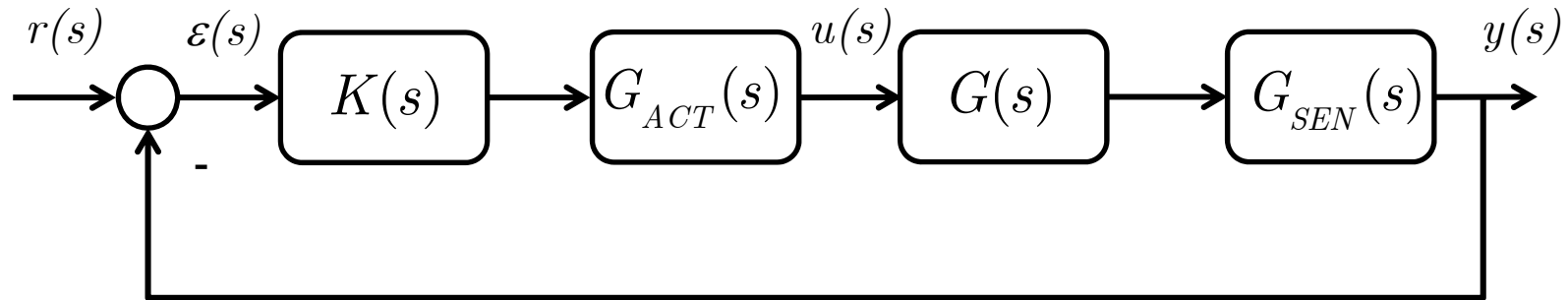
- Il ritardo può essere descritto analiticamente mediante un aumento di perdita di fase, all'aumentare della frequenza

$$\left| e^{-T_d s} \right| = 1 = 0 \text{ dB} \quad \angle e^{-T_d s} = -T_d \omega$$





## Casi Particolari

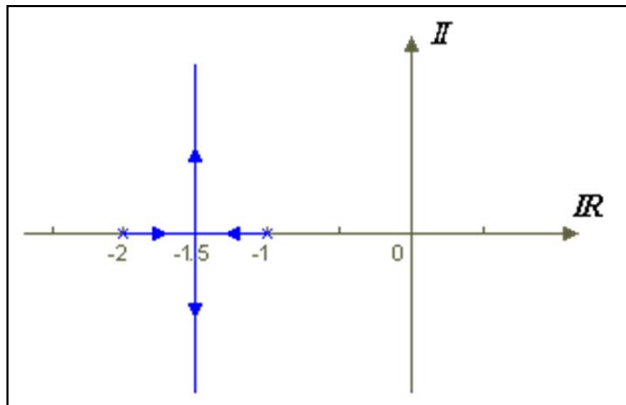


- Il ritardo di anello introdotto crea una perdita di fase, che può portare all'instabilità in ciclo chiuso



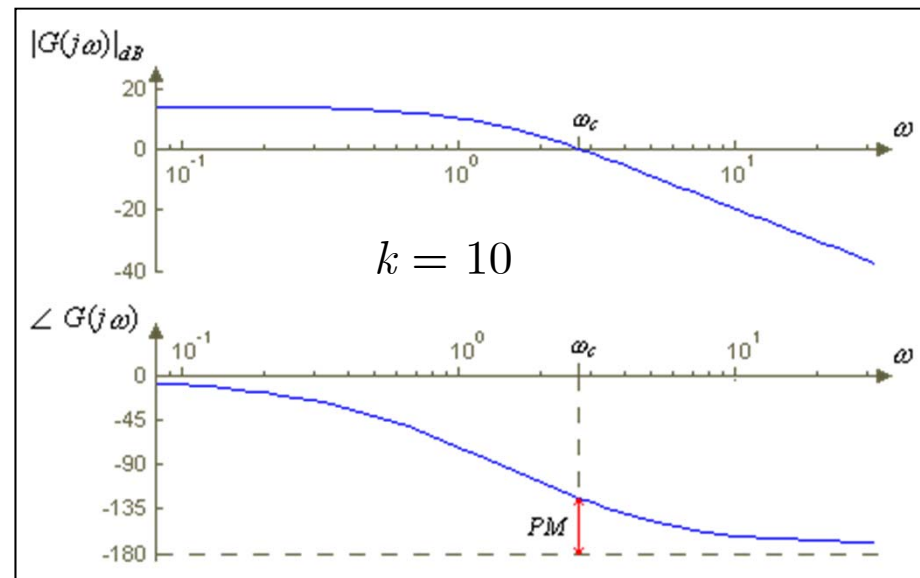
## Casi Particolari

□ **Esempio:**  $K(s)G(s) = k \frac{1}{(s+1)(s+2)}$



- Analisi della stabilità in anello chiuso in presenza di un ritardo di anello:

- In condizioni nominali (senza ritardo), il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile per ogni valore di  $k > 0$  essendo  $GM = \infty$  e  $PM > 0$ .



$$G_{CL}(s) = \frac{ke^{-T_d s}}{s^2 + 3s + 2 + ke^{-T_d s}}$$





## Casi Particolari

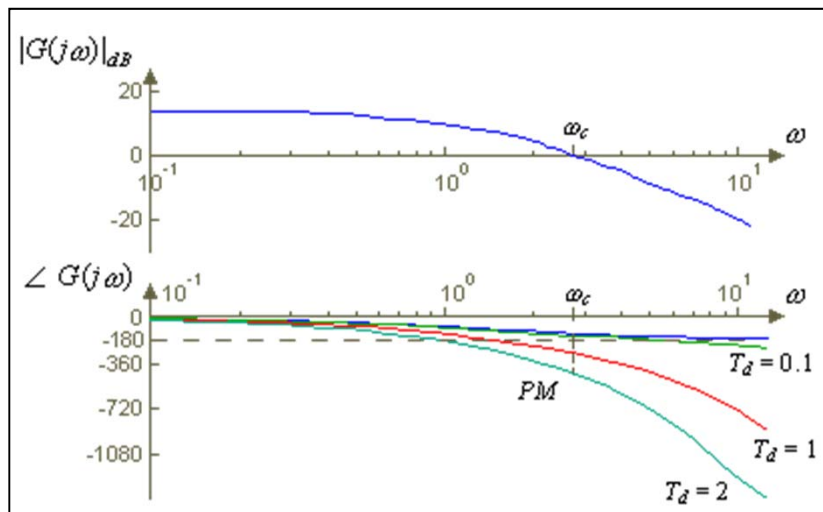


- Uso del Criterio di Nyquist e calcolo dei margini di stabilità

$\omega$ $T_d$	0.1	1	10
0.1	$-0.0573^\circ$	$-0.573^\circ$	$-5.73^\circ$
1	$-0.573^\circ$	$-5.73^\circ$	$-57.3^\circ$
2	$-1.146^\circ$	$-11.46^\circ$	$-114.6^\circ$

$$\tilde{G}(s) = k \frac{e^{-T_d s}}{(s+1)(s+2)}$$

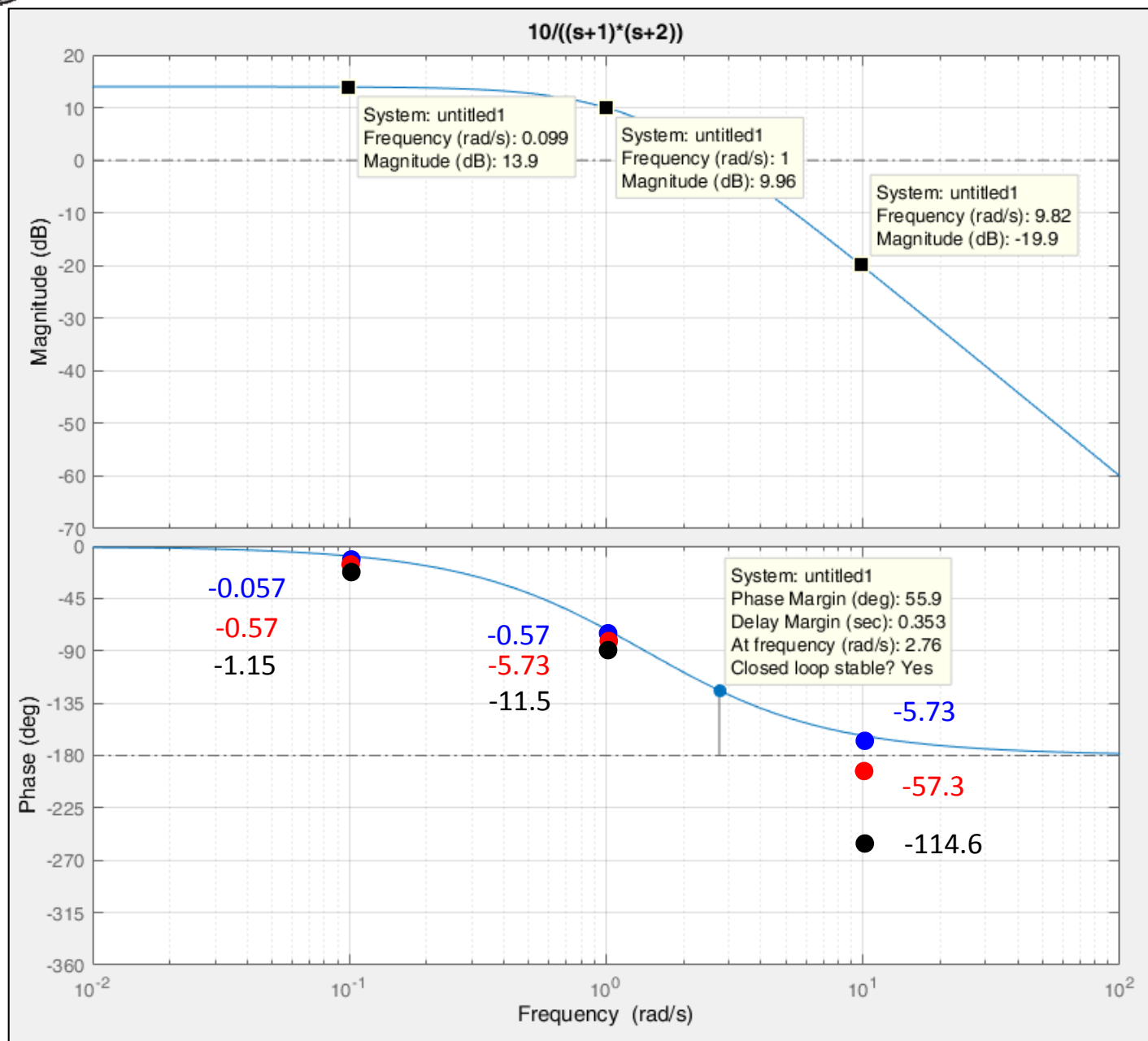
$$\angle \tilde{G}(s) = \angle G(s) + \angle e^{-T_d s}$$



- Nel sistema privo di ritardo il margine di fase, essendo  $\omega_c = 2.76 \text{ (rad/s)}$ , risulta essere  $PM \cong 56^\circ$ ;
- il sistema diventa quindi instabile quando, per  $\omega_c = 2.76 \text{ (rad/s)}$ , il ritardo è tale da portare  $PM$  a 0 (ritardo critico  $T_{cr}$ )



## Casi Particolari



$$T_d = 0.1, 1, 2 \text{ sec}$$



## Casi Particolari



- Dato un sistema, possiamo quindi calcolare il massimo ritardo che l'anello può sopportare, prima di diventare instabile in ciclo chiuso

$$\omega_c T_{cr} = PM = 56^\circ = 0.977 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad T_{cr} = \frac{PM}{\omega_c} = \frac{0.977}{2.76} \cong 0.354s.$$

### □ Margini di Stabilità e Sistemi a fase non minima

- Gli zeri di parte reale positiva introducono una perdita (ritardo) di fase e quindi hanno influenza sui margini di stabilità di un sistema

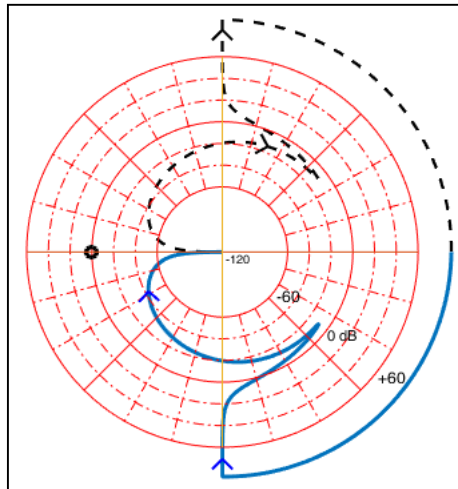
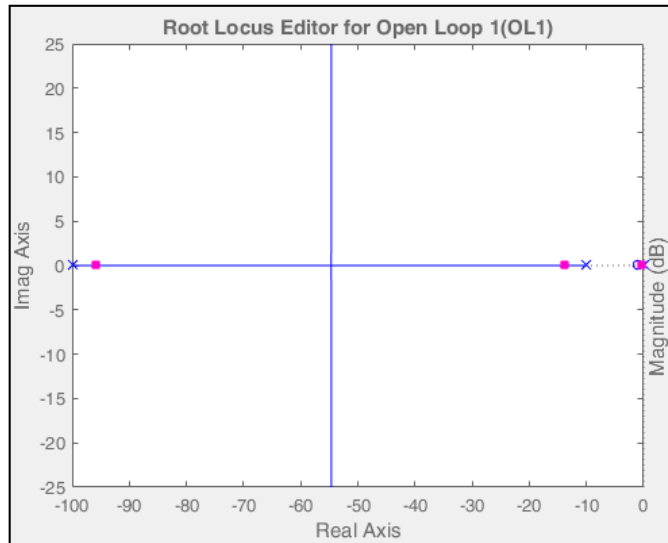
□ **Esempio:**  $K(s)G(s) = k \frac{s+1}{s(s+10)(s+100)}$

- Il sistema è sempre asintoticamente stabile in ciclo chiuso, con margine di guadagno infinito.
- Il sistema in ciclo chiuso ha un errore al gradino nullo

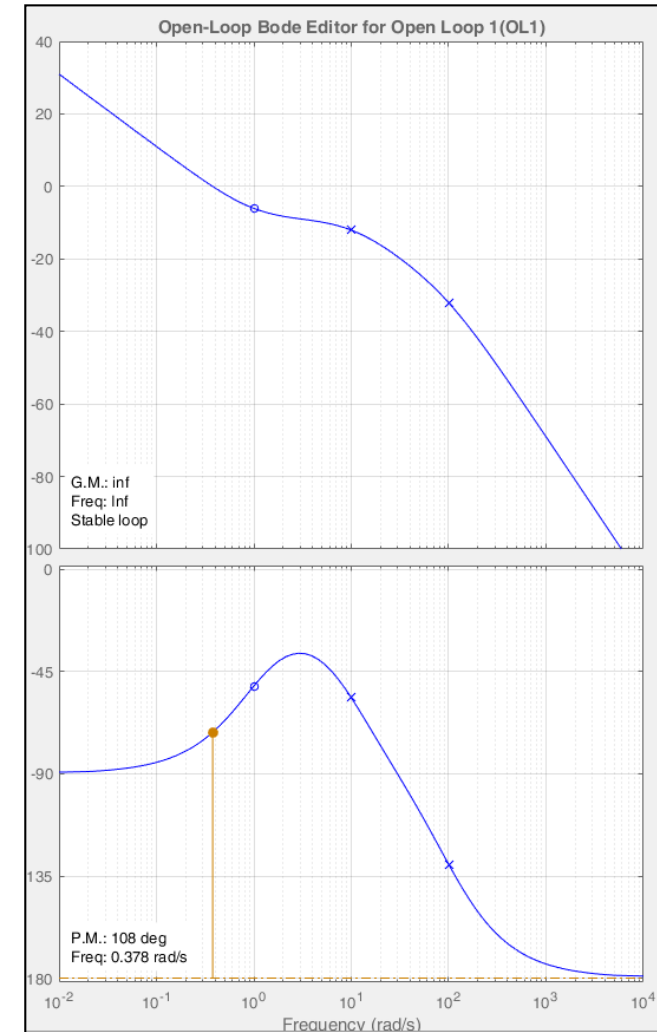


## Casi Particolari

$GM = \infty, k \approx 340 \Rightarrow PM \approx 108^\circ$  ad una frequenza di circa  $\omega_c \cong 0.38 \text{ rad/s}$



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 0 - 0 = 0$

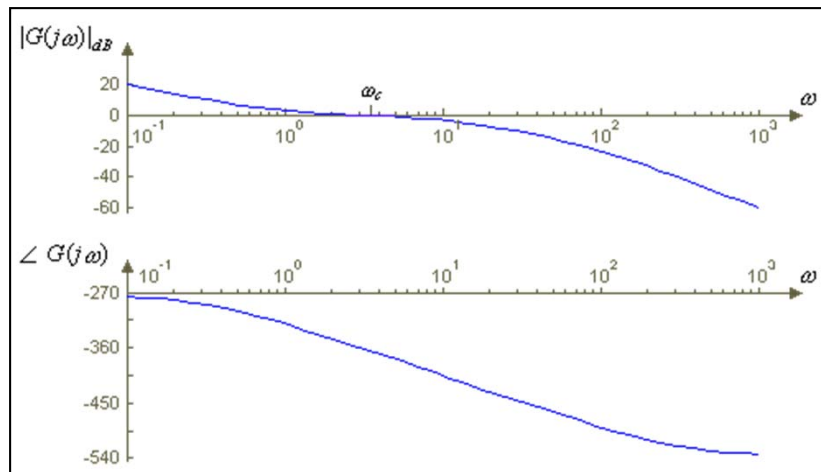




## Casi Particolari

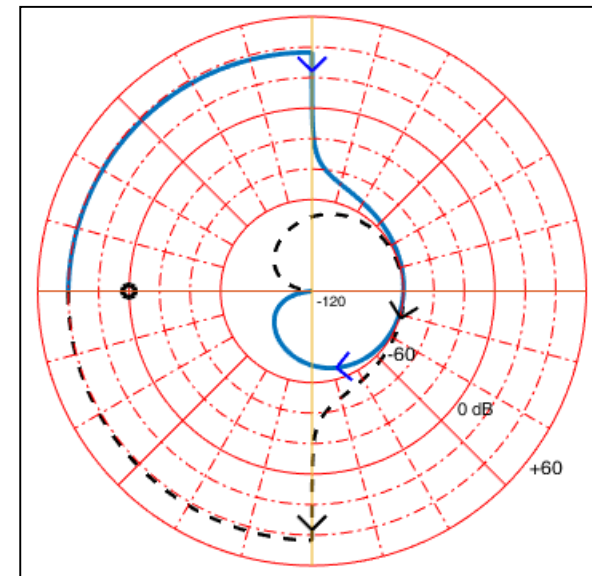
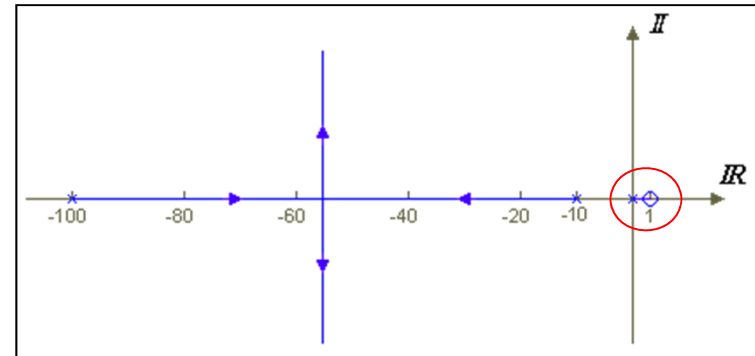
$$K(s)G(s) = k \frac{s - 1}{s(s + 10)(s + 100)}$$

- Il Margine di Fase è sempre  $< 0$



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 1 - 0 = 1$

- Il sistema in ciclo chiuso è sempre instabile in ciclo chiuso, con guadagni positivi, a causa dello zero a +1







## Casi Particolari



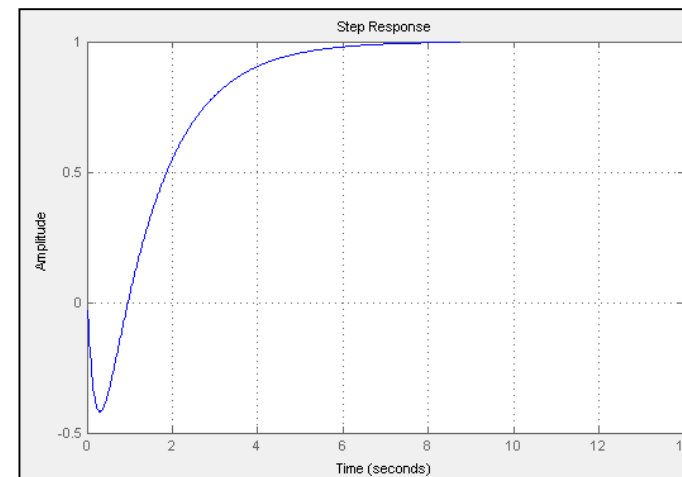
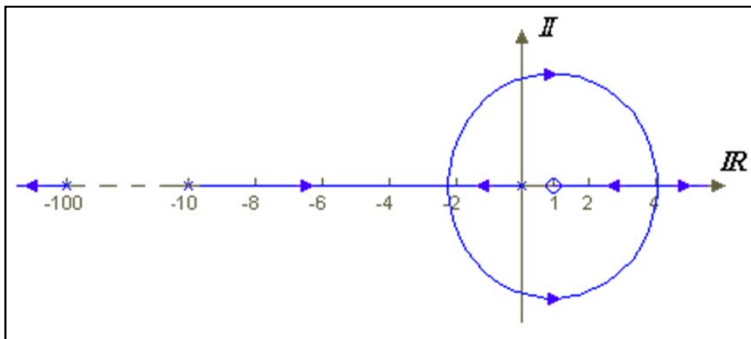
□ **Nota:** La stabilità in ciclo chiuso si può ottenere mediante retroazione positiva, oppure con guadagno negativo ( $k < 0$ ).

$$1 + K(s)G(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 110s^2 + (1000 + k)s - k = 0 \quad k_{CR} \cong -991$$

$s^3$	1	$1000 + k$
$s^2$	110	$-k$
$s^1$	$\frac{110(1000 + k) + k}{110}$	0
$s^0$	$-k$	

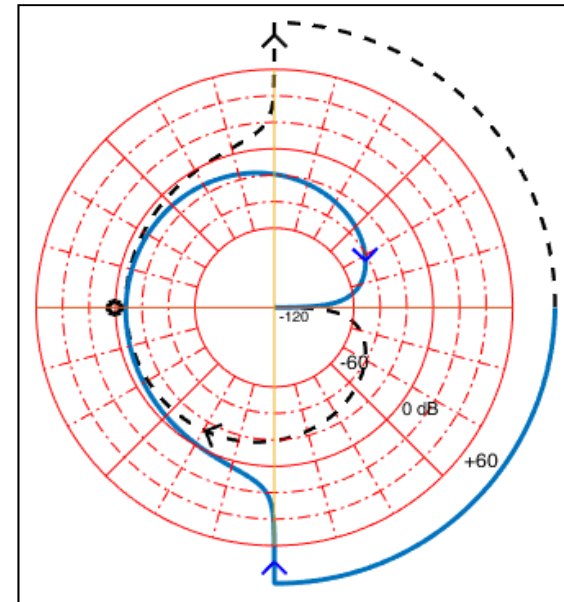
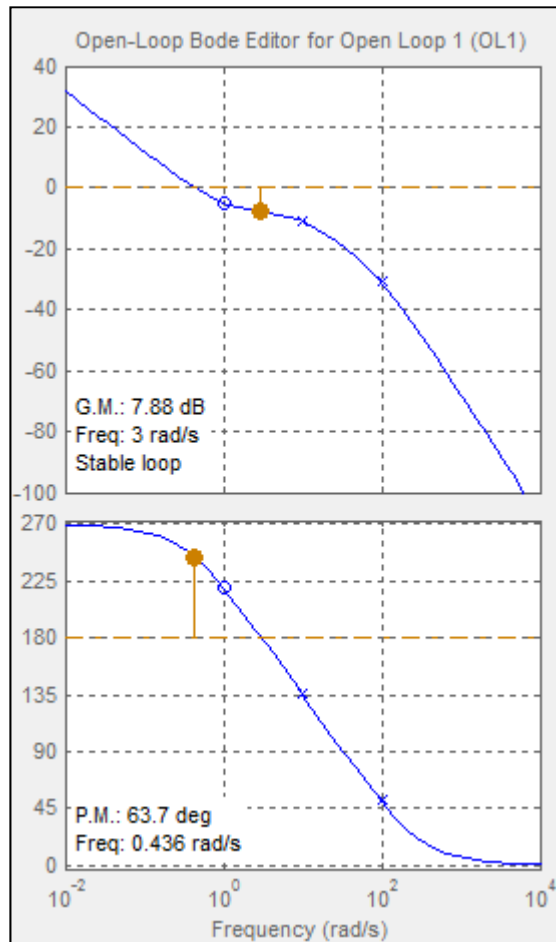
$$k = -400$$

$$p_1 = -0.78, \quad p_2 = -4.93, \quad p_3 = -104.28,$$





## Casi Particolari



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 0 - 0 = 0$

- per  $\omega_c \cong 0.437 \text{ rad/s}$  si ha  $PM \cong 64^\circ$  mentre per  $\omega_\pi (\cong 3.02 \text{ rad/s})$  si ha  $GM \cong 7.7 \text{ dB}$ ;
- entrambi i margini sono quindi positivi, il sistema è asintoticamente stabile in Ciclo Chiuso.



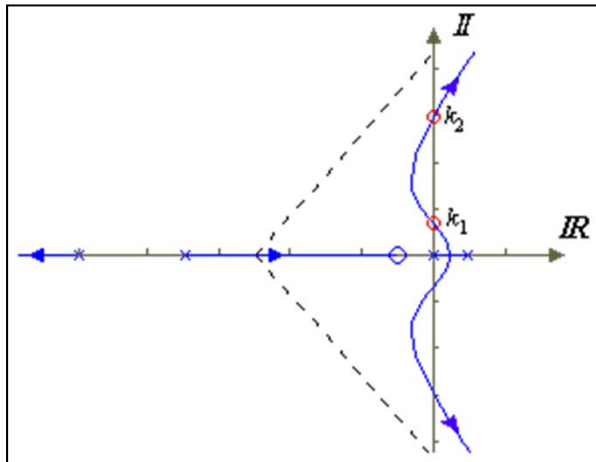
## Casi Particolari



### ❑ Margini di Stabilità per Sistemi a Stabilità Condizionata

- **Definizione:** Un sistema la cui stabilità in anello chiuso può variare sia per una attenuazione che per una amplificazione di anello si dice a stabilità condizionata

$$G(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s + p_2)(s + p_3)} \quad K(s) = k \frac{s + z}{s}$$



- Con una opportuna scelta dei poli e dello zero, il sistema risulta asintoticamente Stabile per  $k_1 < k < k_2$
  - Il sistema **NON** soddisfa il Criterio di Bode. La stabilità in ciclo chiuso non è garantita dai margini entrambi positivi. Deve essere applicato il criterio di Nyquist.
- 
- **Esempio di progetto di un controllore P-I che stabilizzi un sistema del terzo ordine e mandi a zero l'errore a regime al gradino unitario**



## Casi Particolari



□ **Esempio numerico**  $K(s)G(s) = k \frac{s + 0.1}{s(s - 0.5)(s + 2)(s + 10)}$

$$G_{CL}(s) = \frac{k(s + 0.1)}{s^4 + 11.5s^3 + 14s^2 + (k - 10)s + 0.1k}$$

- **Condizione necessaria del Criterio di Routh:**  
 $k > 0; k > 10$

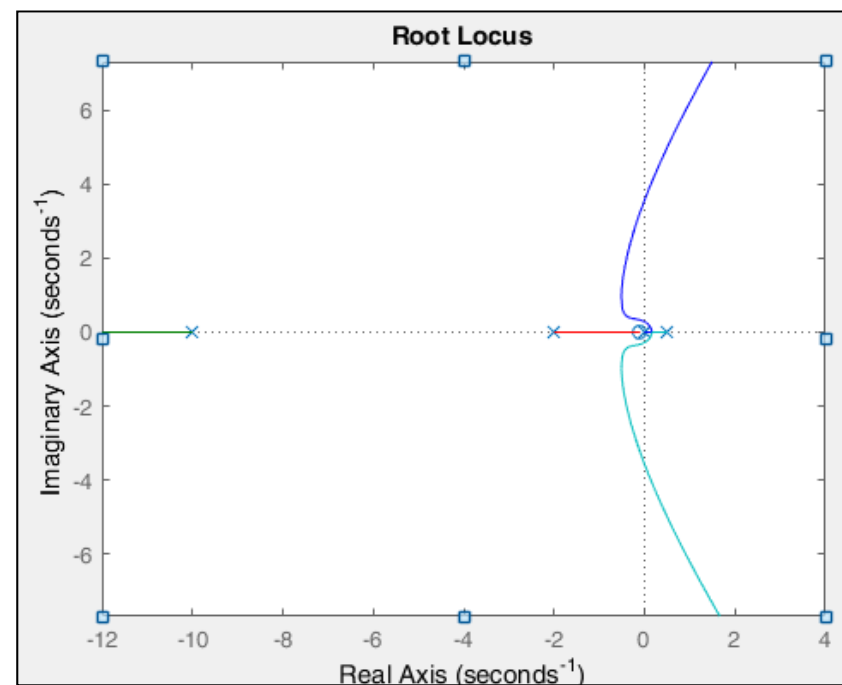
4	1	14	0.1k
3	11.5	k - 10	0
2	$\frac{171 - k}{11.5}$	0.1k	0
1	$\frac{-k^2 + 167.78k - 1710}{171 - k}$	0	
0	0.1k		

- **Tabella di Routh:**

$$k < 171$$

$$10.9 < k < 156.88$$

$$\Rightarrow 10.9 = k_1^{CR} < k < k_2^{CR} = 156.88$$

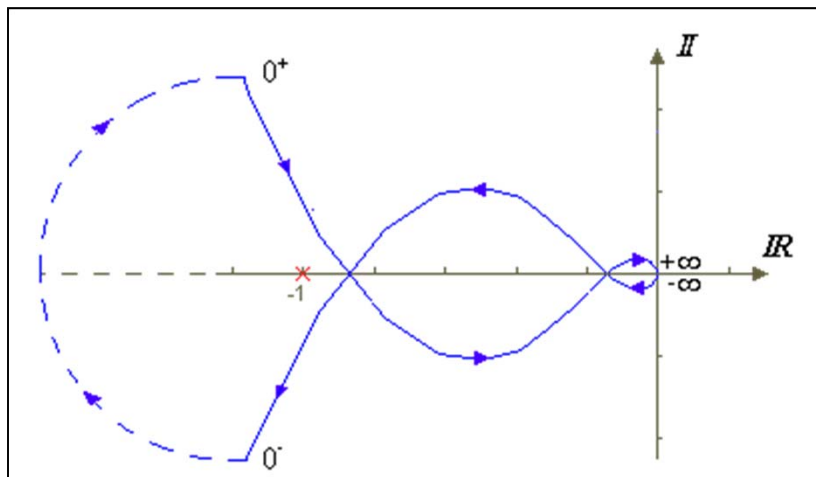




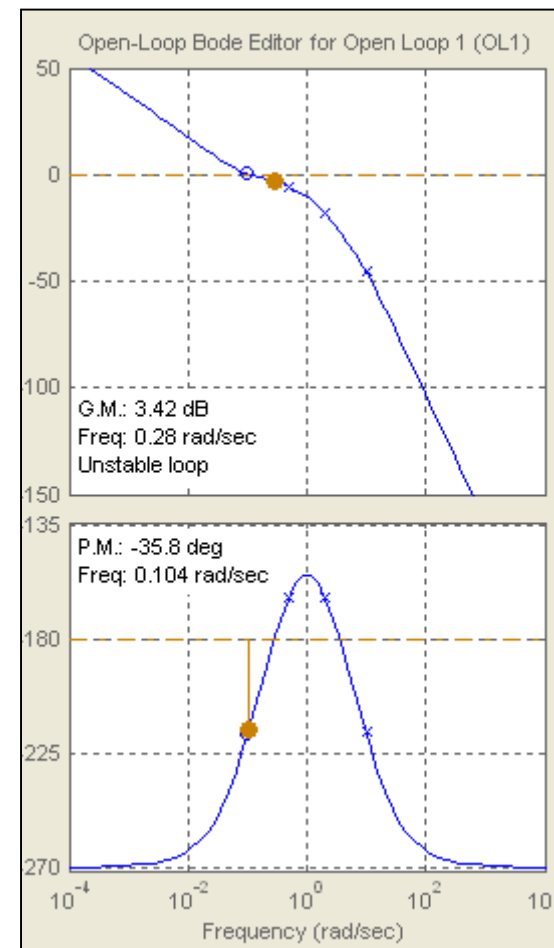
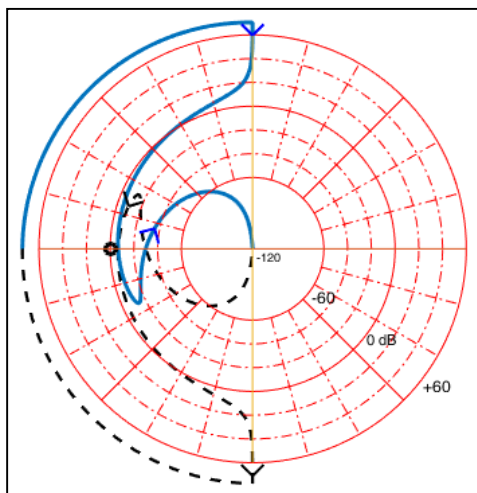
## Casi Particolari

### □ Applicazione del Criterio di Nyquist nei 3 casi limite

- Il sistema in anello chiuso è instabile per  $k < k_{1cr} = 10.9$



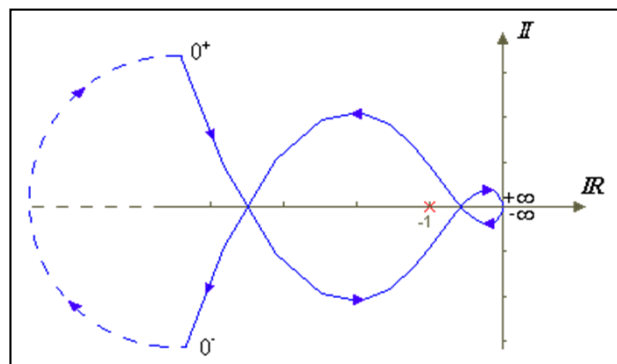
$$\begin{cases} P = 1 \\ N = 1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$



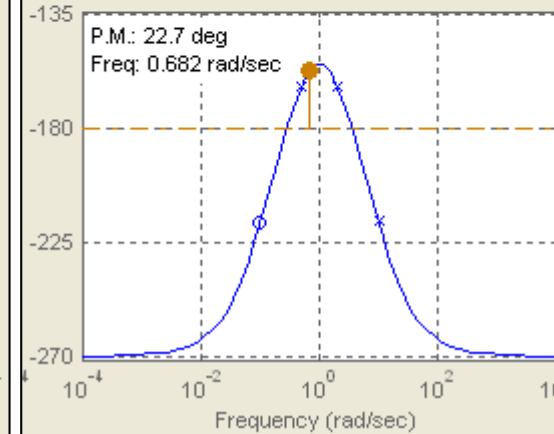
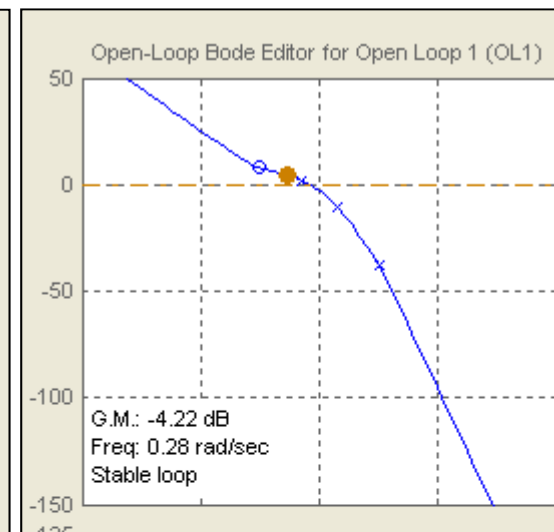
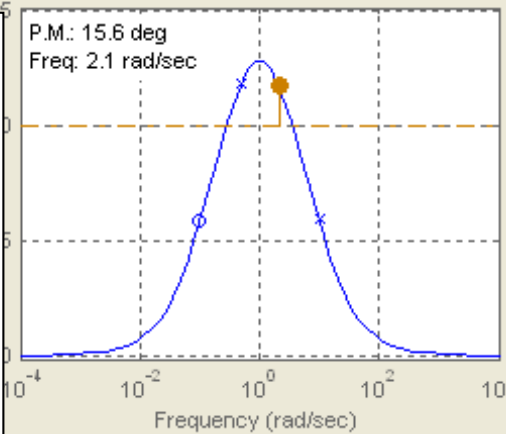
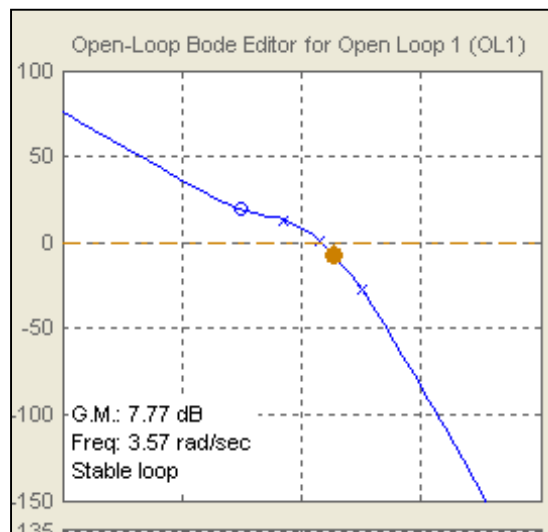
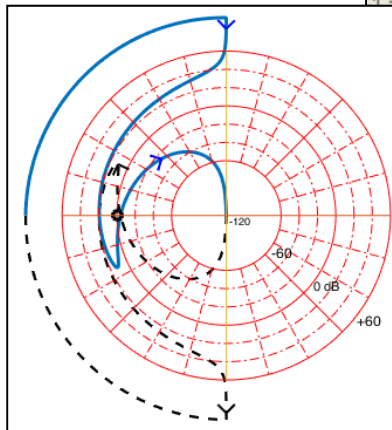
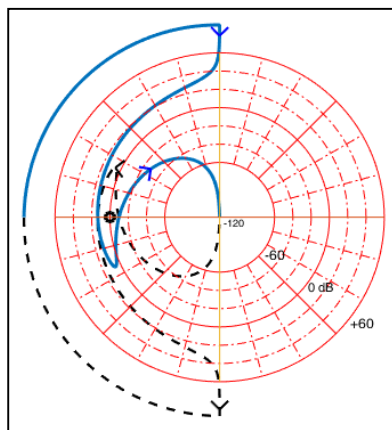


## Casi Particolari

- Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per  $10.9 = k_{1cr} < k < k_{2cr} = 156.88$



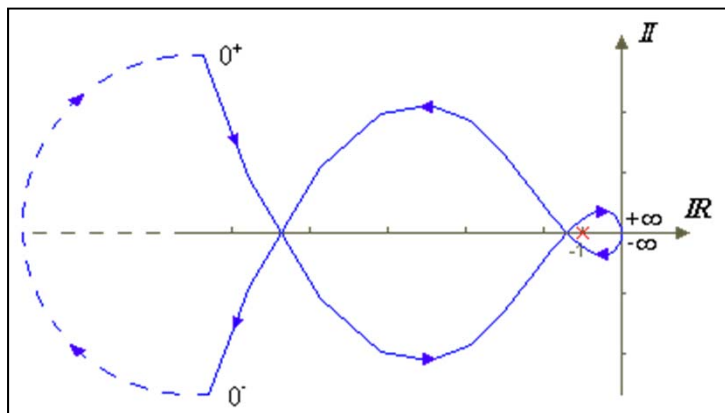
$$\begin{cases} P = 1 \\ N = -1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 0$$



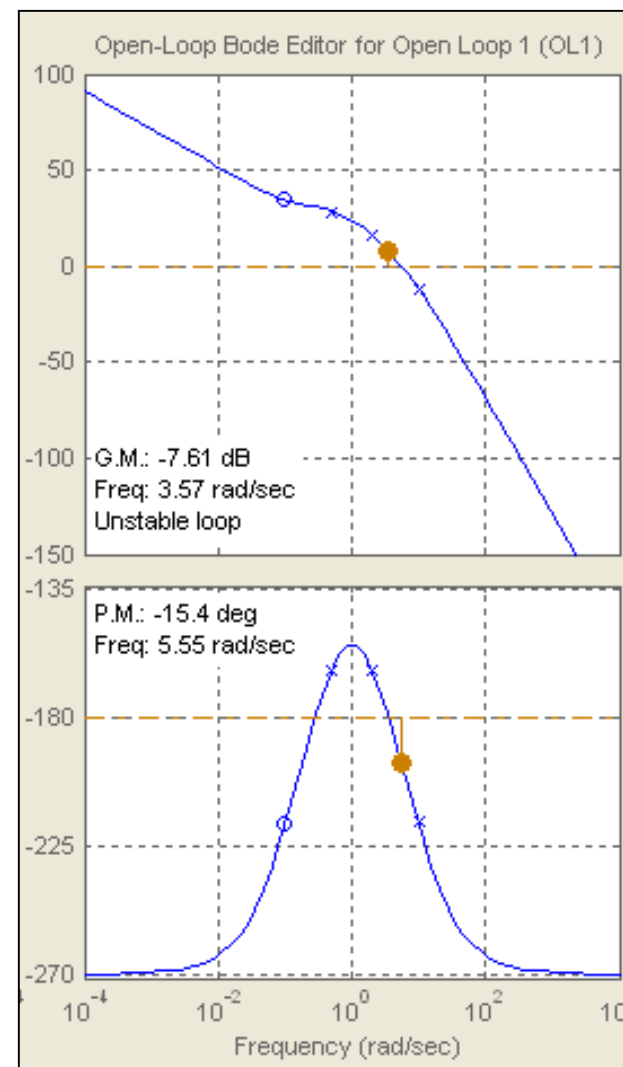
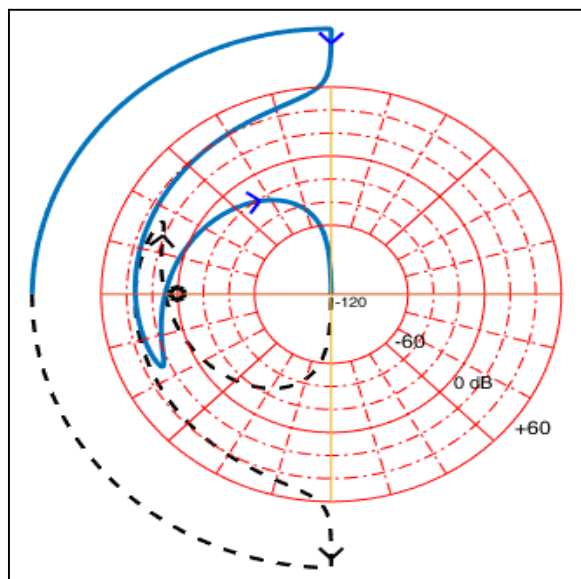


## Casi Particolari

- Il sistema in anello chiuso è instabile per  $156.88 = k_{2cr} < k$



$$\begin{cases} P = 1 \\ N = 1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$

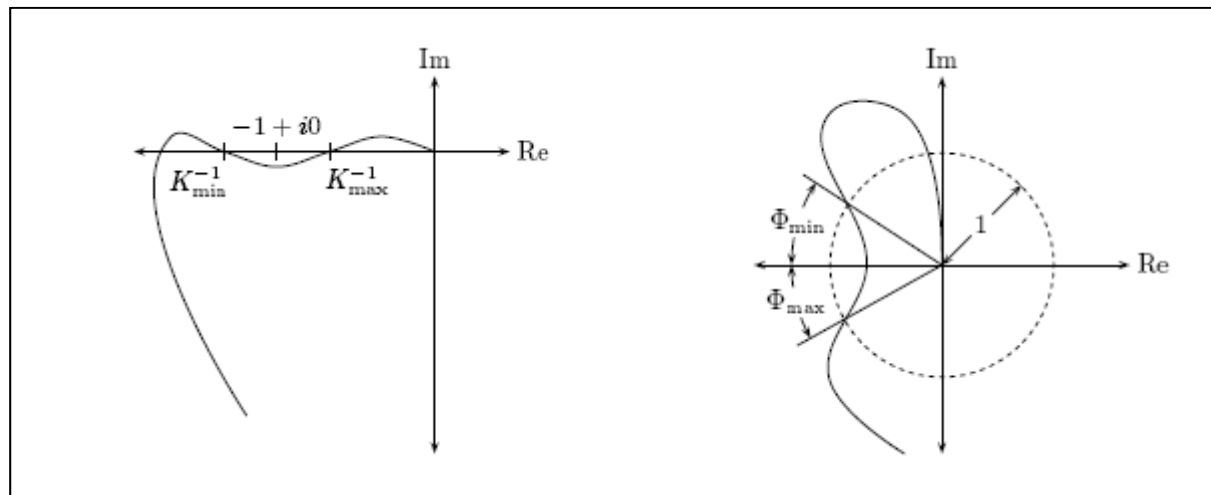




## Casi Particolari

- **Nota:** In generale quindi, si possono avere situazioni in cui GM e PM sono limitati sia Inferiormente, che superiormente. Ovvero:

$$GM \in [GM_{\min}, GM_{\max}], PM \in [\Phi_{\min}, \Phi_{\max}]$$







## Casi Particolari

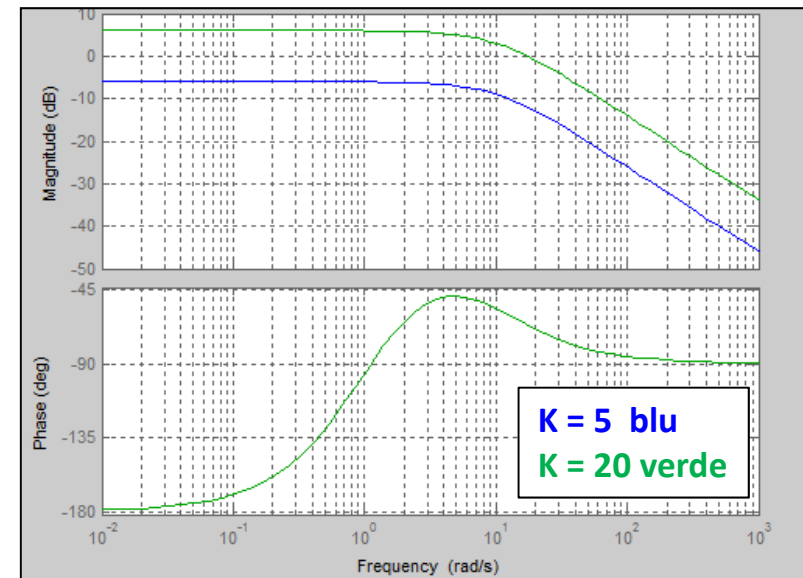
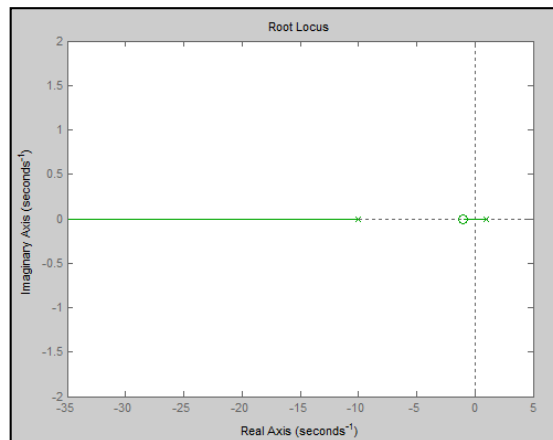


### ❑ Nota: Margini di Stabilità per sistemi che non soddisfano il teorema di Bode

- In questo caso margini di stabilità entrambi positivi non garantiscono la stabilità asintotica in ciclo chiuso
- La verifica va fatta applicando il criterio di Nyquist (  $Z = N+P$  )

❑ Esempio: 
$$G_{OL}(s) = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+10)} = -\frac{k}{10} \cdot \frac{(1+s)}{(1-s)(1+\frac{s}{10})}$$

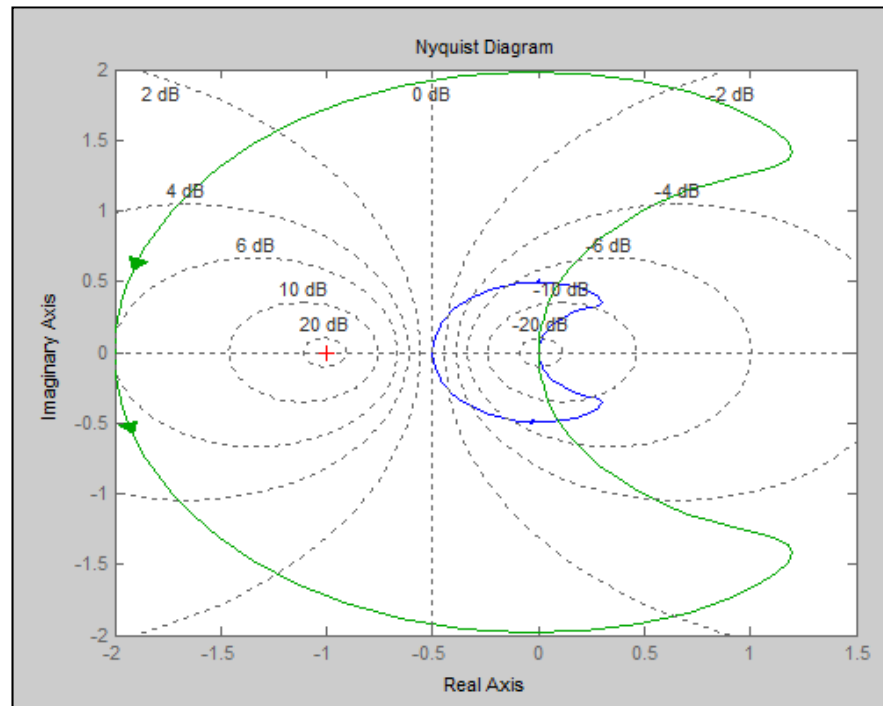
- $k > 10$  per la stabilità in ciclo chiuso





## Casi Particolari

□ **Nota: Margini di Stabilità per sistemi che non soddisfano il teorema di Bode**



- Nel caso di  $k = 5$  (blu),  $N = 0 \Rightarrow Z = N + P = 0 + 1 = 1$ : sistema instabile in anello chiuso, ma  $GM > 0$
- Nel caso di  $k = 20$  (verde),  $N = -1 \Rightarrow Z = N + P = -1 + 1 = 0$ : sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, ma  $GM < 0$

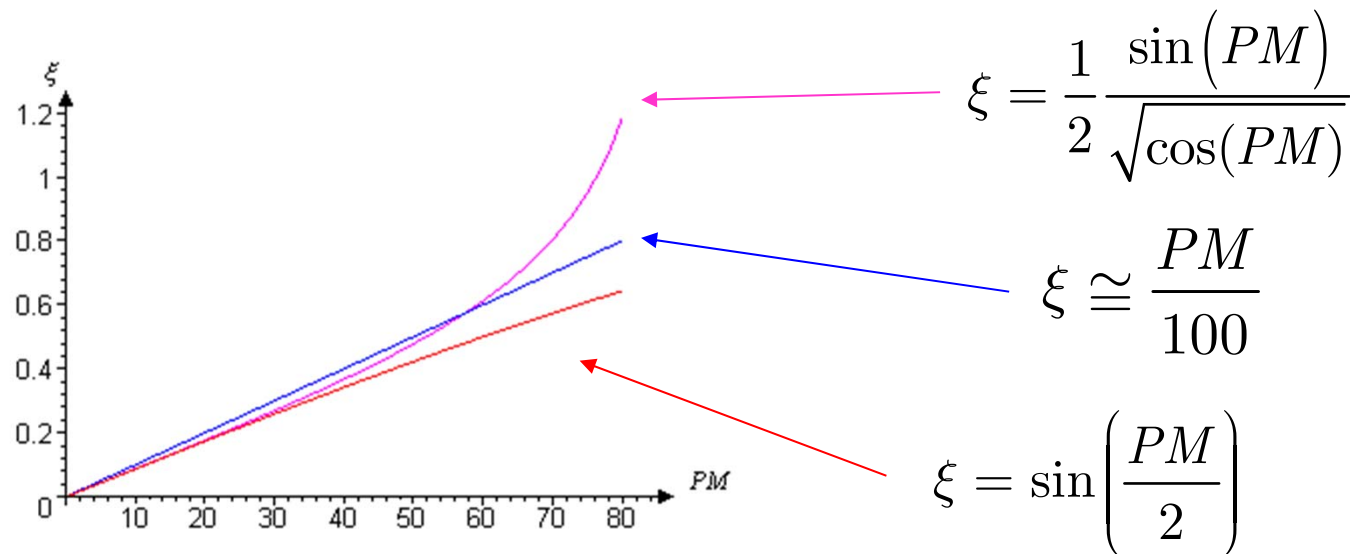


# Margini di Stabilità e Parametri Temporal



## □ Margini di Stabilità e Smorzamento

- Il margine di fase è legato da una relazione di proporzionalità al coefficiente di smorzamento  $\xi$  dei poli dominanti complessi coniugati di un sistema; esistono diverse relazioni approssimate fra i due parametri:



- La richiesta di  $PM$  può quindi essere legata non solo ad incertezze di modello, ma anche alla richiesta di uno specifico smorzamento del transitorio



# Margini di Stabilità e Parametri Temporal



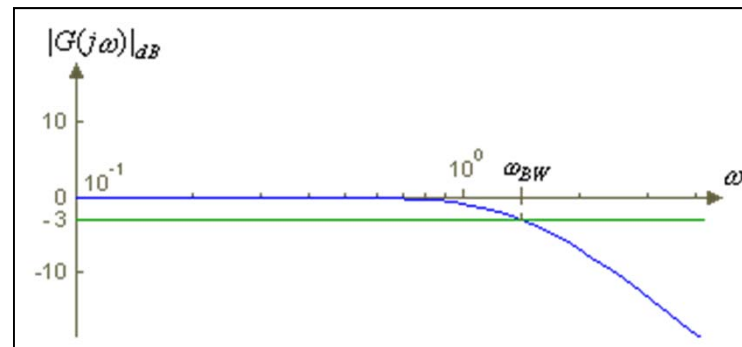
## □ Margini di Stabilità e Banda Passante

- Consideriamo come esempio un filtro passa-basso del 2<sup>o</sup> ordine a guadagno unitario

$$G_{OL}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \Rightarrow G_{CL}(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1 + G_{OL}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Dalla definizione di Banda Passante:

$$|G_{CL}(j\omega_{BW})| = \frac{|G_{OL}(j\omega_{BW})|}{|1 + G_{OL}(j\omega_{BW})|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$





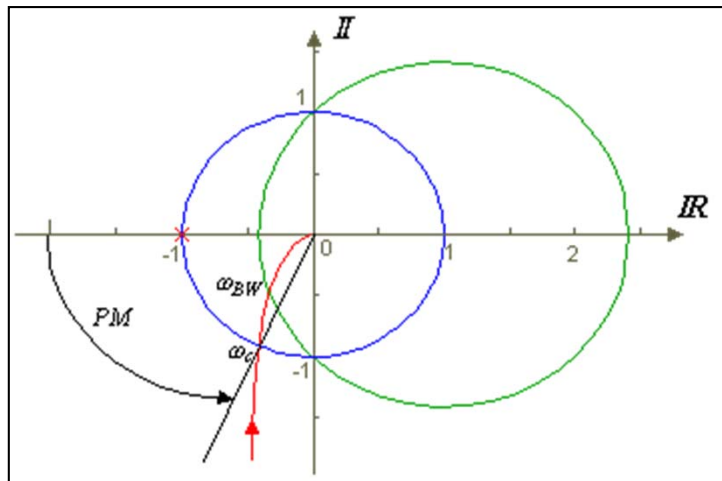
## Margini di Stabilità e Parametri Temporal



- La circonferenza di centro 1 e raggio  $\sqrt{2}$  è l'insieme dei punti del piano complesso che soddisfa la relazione:

$$\frac{|s|}{|1+s|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- I valori di  $\omega$  per cui il segnale non viene "tagliato" dalla caratteristica passa-basso del sistema a ciclo chiuso sono quelli per cui il diagramma polare del sistema di anello aperto ricade all'esterno della circonferenza dove



$$|G_{CL}(j\omega_{BW})| = \frac{|G_{OL}(j\omega_{BW})|}{|1 + G_{OL}(j\omega_{BW})|} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

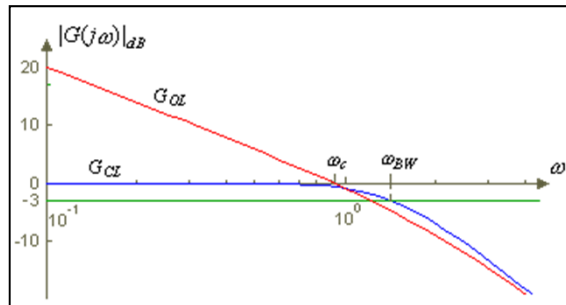
- Si nota che per valori del margine di fase prossimi ai  $90^\circ$  è possibile approssimare il limite di banda del sistema a ciclo chiuso  $\omega_{BW}$  con la pulsazione di attraversamento del sistema di anello aperto  $\omega_c$



## Margini di Stabilità e Parametri Temporal



- Confronto tra i diagrammi di Bode (anello aperto e chiuso)



$$\omega_{BW} \cong \omega_c \quad \text{con} \quad \omega_{BW} > \omega_c$$

- **Commenti:** Informazioni ottenibili dalla risposta in frequenza in anello, riguardo al comportamento del sistema in ciclo chiuso

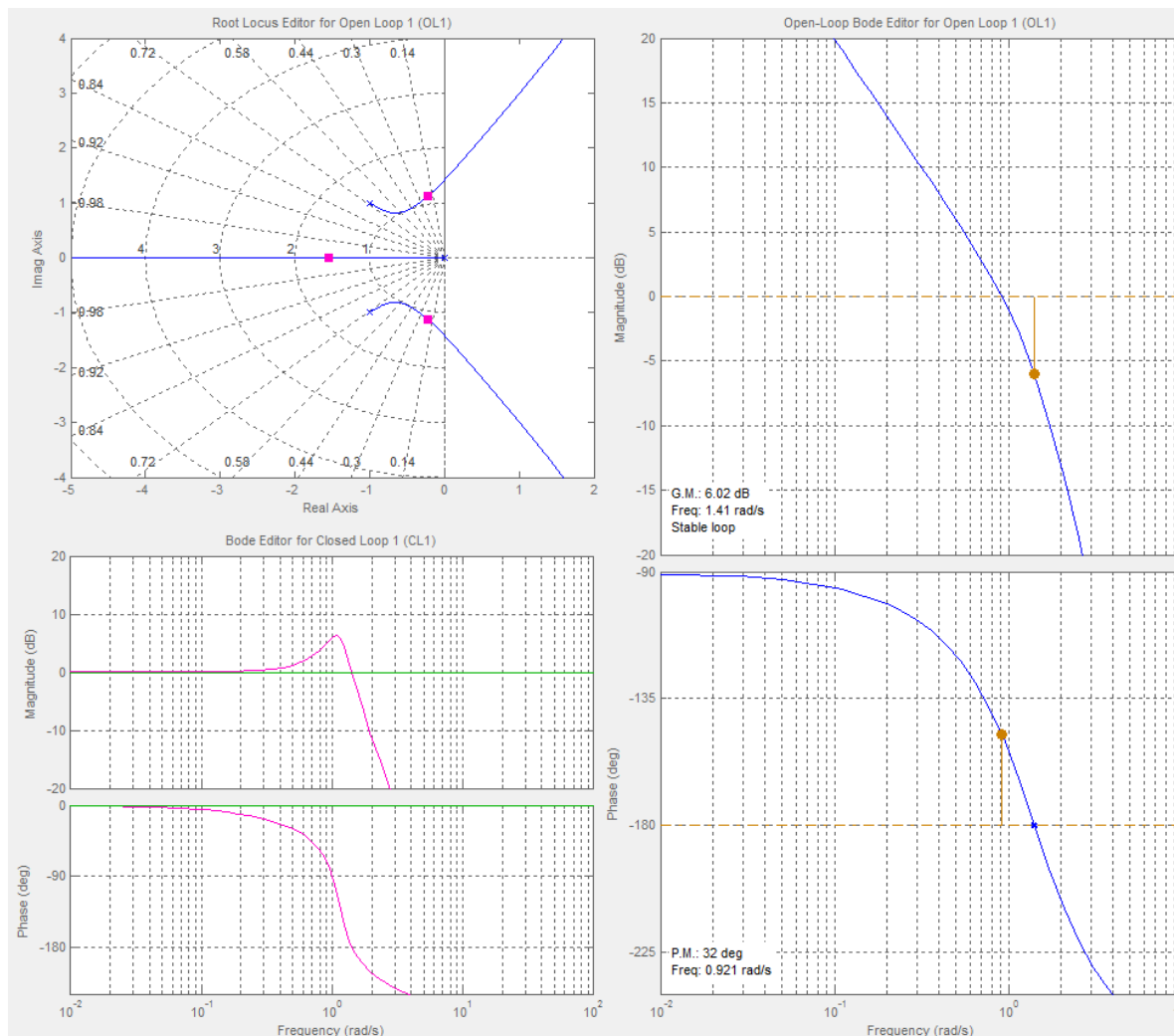
- Stabilità in anello chiuso attraverso i margini di stabilità e la pendenza all'attraversamento ( $\omega = \omega_c$ )
- Banda passante in anello chiuso dalla frequenza di attraversamento ( $\omega = \omega_c$ )
- Picco di risonanza in anello chiuso e quindi smorzamento dei poli dominanti
- Frequenza di risonanza in anello chiuso
- Errore a regime in anello chiuso
- Limiti di stabilità in presenza di incertezze di anello



# Margini di Stabilità e Parametri Temporal

## Esempio

$$G_{OL}(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.5s+1)}; k=1$$

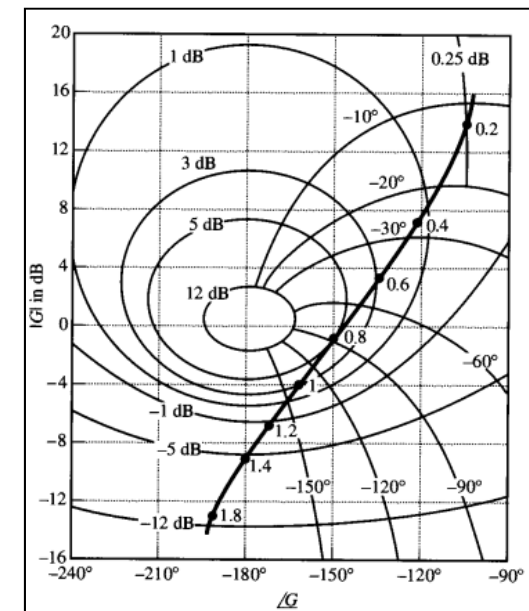
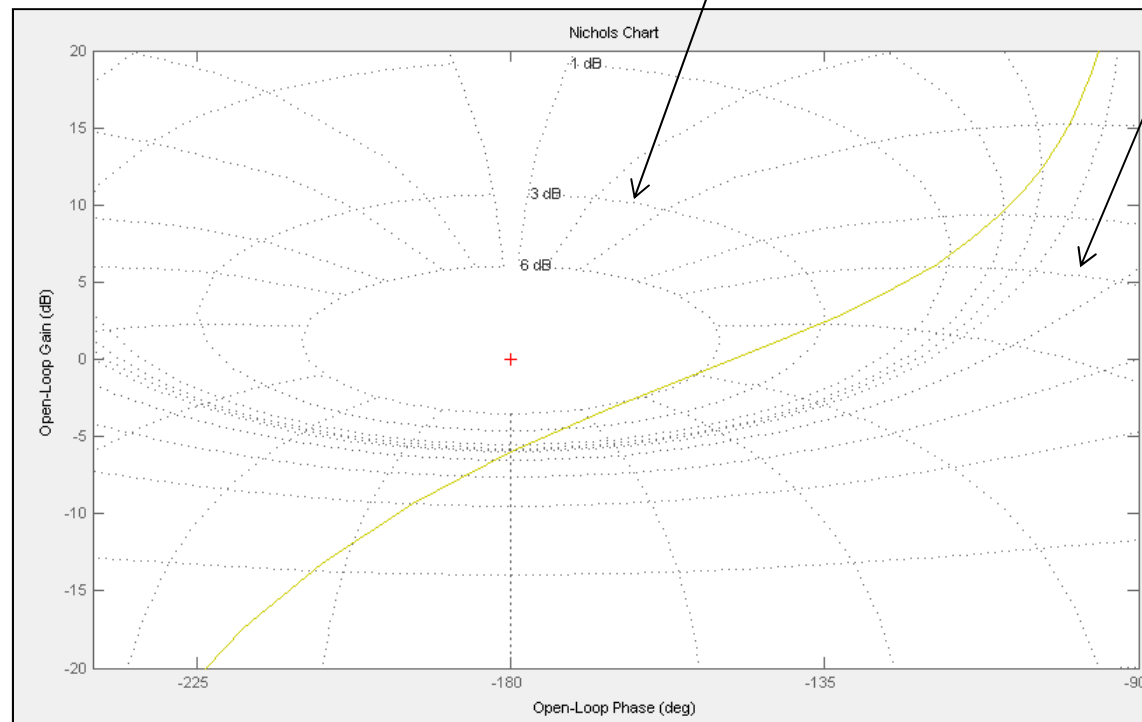




## Margini di Stabilità e Parametri Temporal

- Tradizionalmente, mediante le carte di Nichols, la risposta in frequenza di anello è tracciata sui luoghi di modulo costante (M) e fase costante (N) della funzione di trasferimento in anello chiuso

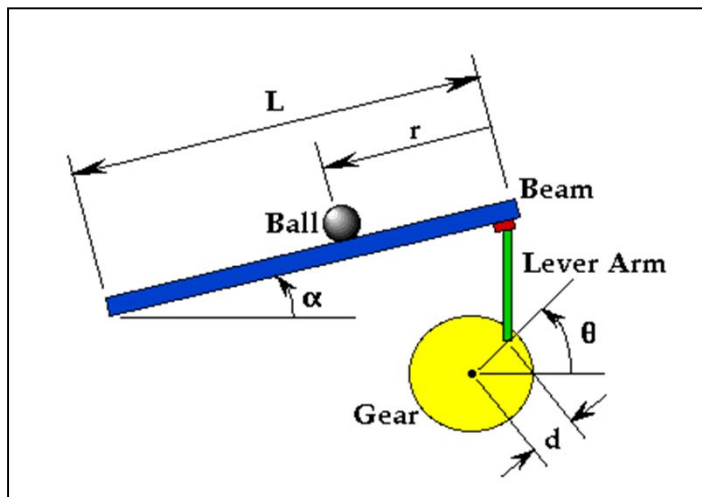
$$G_{CL}(s) = \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \quad M(s) = \left| \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \right|_{dB} \quad N(s) = \angle \left[ \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \right]$$







## Applicazioni: Ball - Beam



$m = 0.111;$   
 $R = 0.015;$   
 $g = -9.8;$   
 $L = 1.0;$   
 $d = 0.03;$   
 $J = 9.99e-6;$

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{0.21}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right]$$

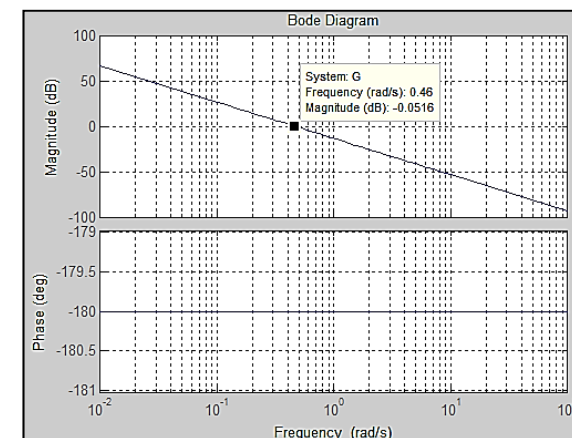
### □ Considerazioni sulla fisica del problema ed ipotesi di base

1. Sistema costituito da elementi rigidi e non deformabili, per cui i parametri dimensionali non variano (lunghezza trave, massa sfera, offset camma, gravità, ecc.)
2. Misura posizione sfera ed azionamento motore sono considerati perfetti, quindi con FdT unitaria
3. Definizione dell'origine del riferimento per la sfera
4. Piccoli spostamenti per garantire l'applicabilità della linearizzazione

### □ Analisi del comportamento del sistema (modello nominale)

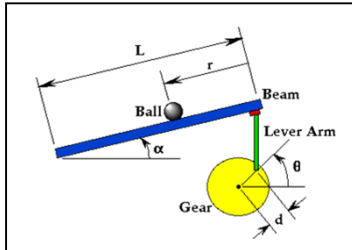
1. Cosa succede alla sfera quando diamo un comando di camma, per esempio  $10^0$ ?  
$$r(s) = \frac{0.21}{s^2} \theta(s) = \frac{0.21}{s^2} \cdot \frac{0.1745}{s} = \frac{3.66}{s^3} [cm \cdot deg]$$
2. Quale è la risposta in frequenza  
$$r(t) = 3.66t^2$$

▪ Dopo 5.27 secondi la sfera ha percorso 100 cm





## Applicazioni: Ball - Beam



$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{0.21}{s^2}$$

□ **Problema:** Si vuole completo controllo sulla posizione della sfera, mediante opportuno movimento della camma

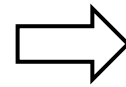
□ **Requisiti di Progetto:**

- Tempo di Assestamento < 3 Sec
- Sovraelongazione < 5%
- Stabilità asintotica

- **Nota:** Nel caso di stabilità, il sistema in ciclo chiuso ha un errore nullo sia al gradino che alla rampa (tipo 2)

$$M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 0.05$$

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 3$$



$$\xi \geq 0.69$$

$$\omega_n \geq 1.9315 \text{ rad / sec}$$

- Dai requisiti di risposta transitoria, il valore desiderato dei poli in anello chiuso (ovvero dei poli dominanti) è dato da:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1.3328 \pm j1.398$$
$$(s^2 + 2.6656s + 3.7307)$$

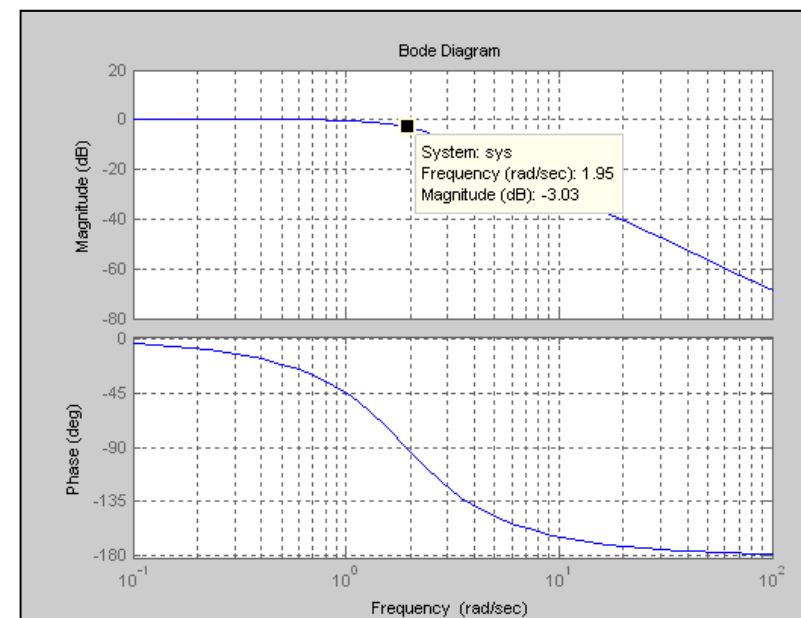
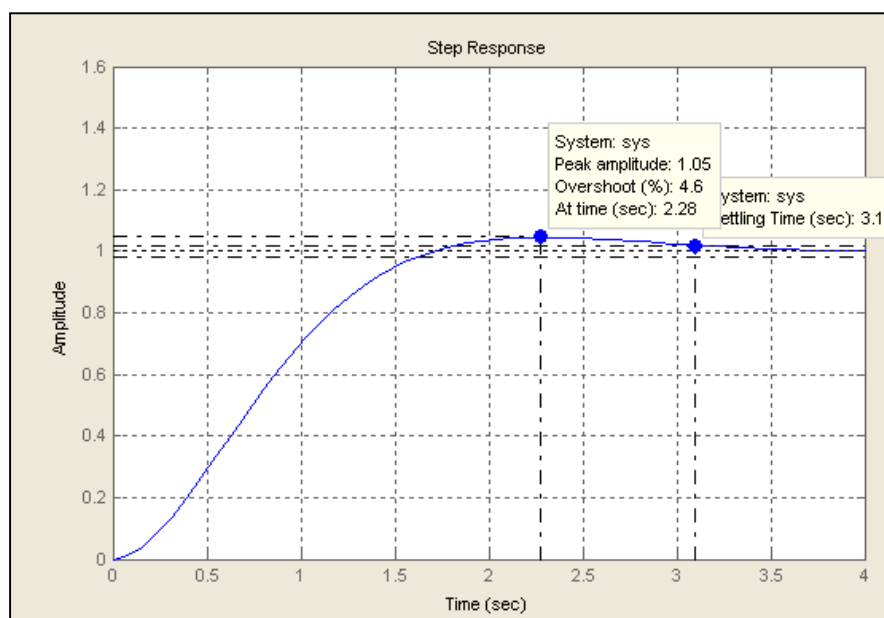


## Applicazioni: Ball - Beam



- Dinamica Target per i requisiti di risposta transitoria:

$$G_{DES}(s) = \frac{3.7307}{(s^2 + 2.6656s + 3.7307)}$$



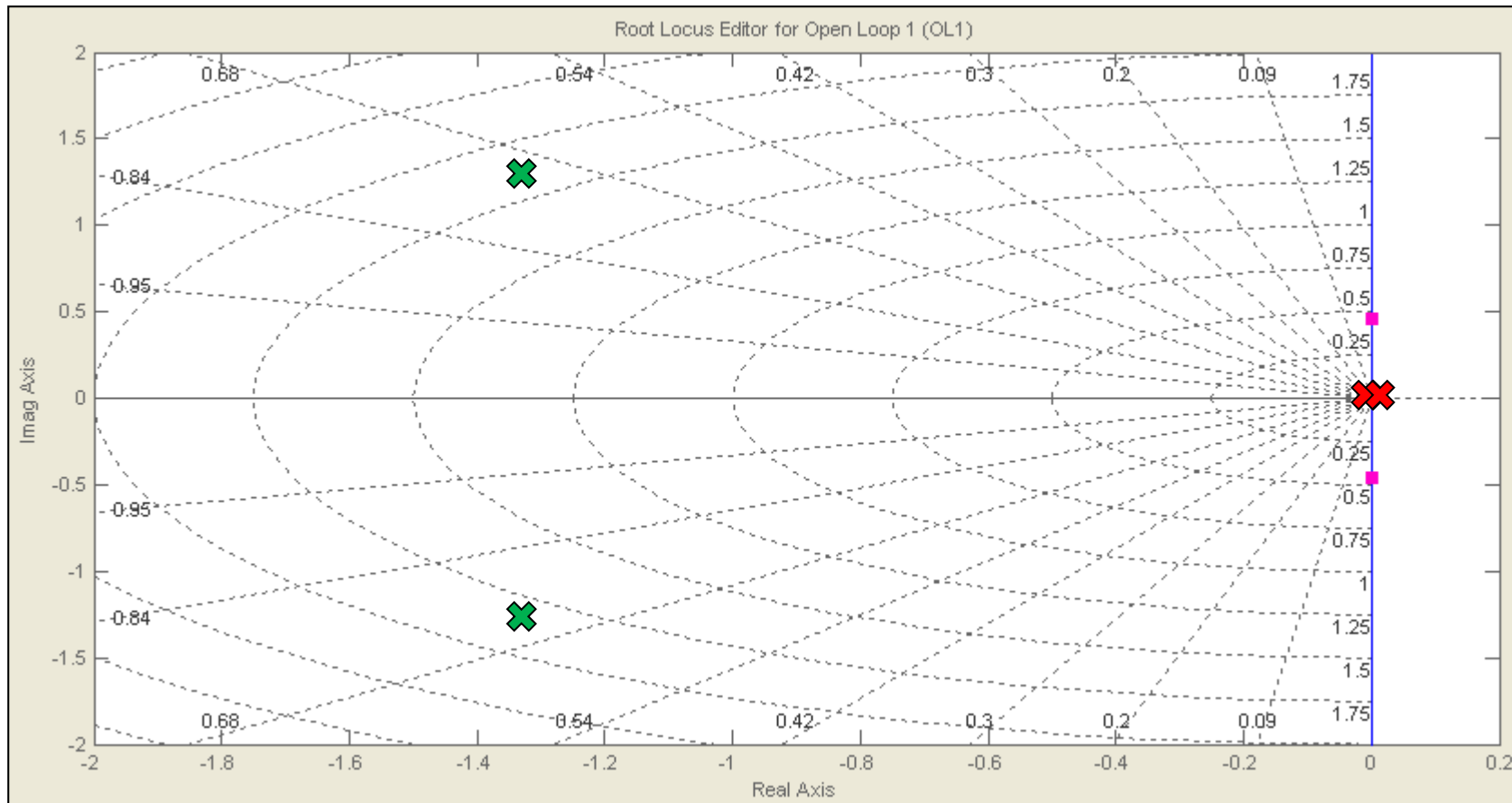
- Procedura No. 1: Uso del Luogo delle Radici



## Applicazioni: Ball - Beam

- Locazione Poli desiderati in ciclo chiuso (**verde**), e poli del modello (**rosso**)

$$p_{1,2} = -1.3328 \pm j1.398$$

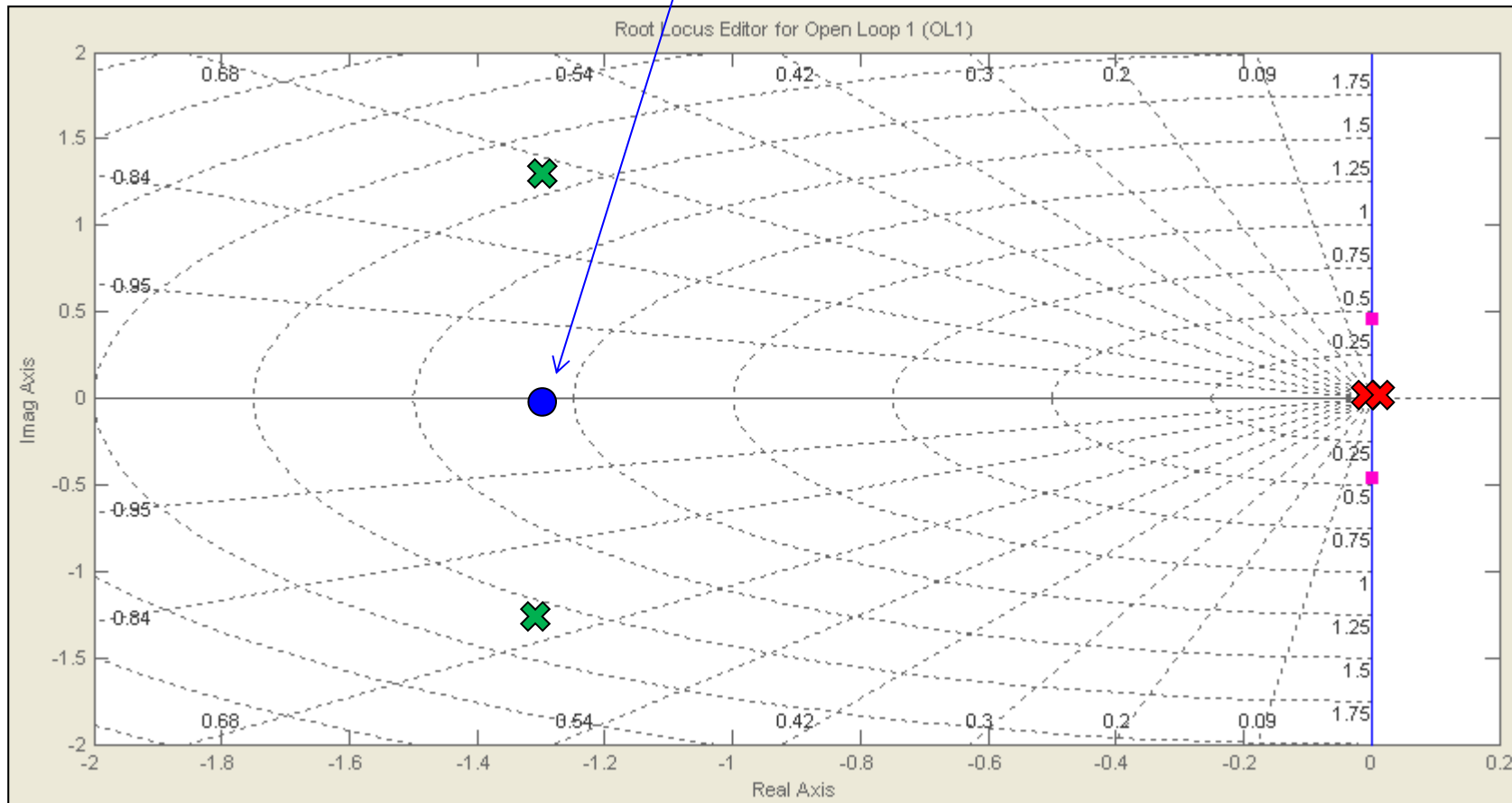




## Applicazioni: Ball - Beam

- Il Controllore deve avere un contenuto primario di anticipo di fase, è necessario almeno uno zero per attrarre i rami del luogo delle radici nel semipiano di parte reale negativa. Prima scelta di sintesi al valore della parte reale dei poli desiderati

$$K(s) = k(s + Z)$$

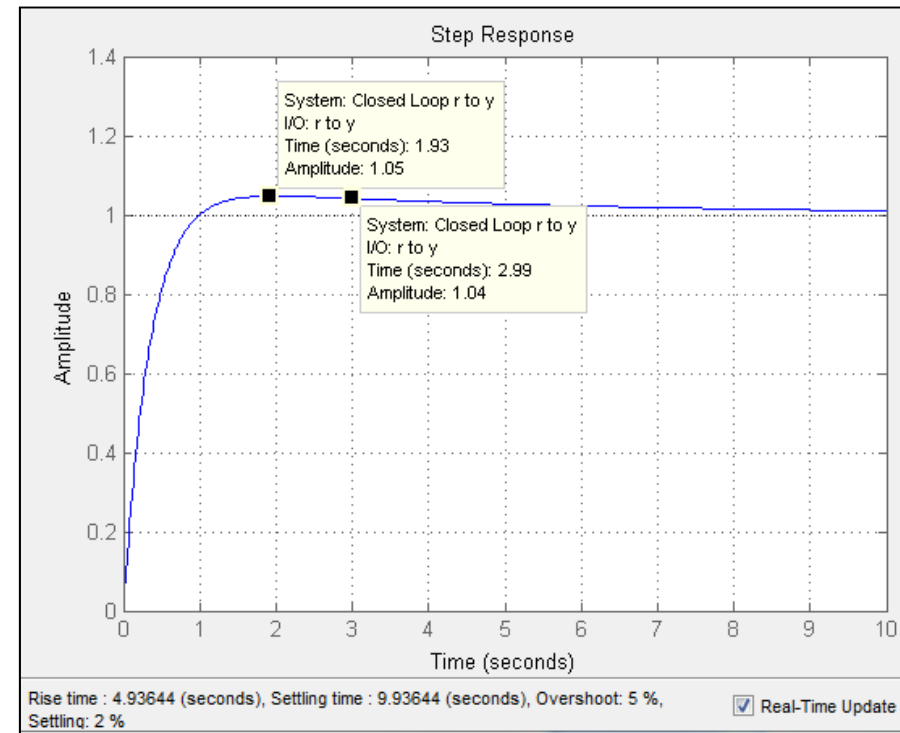
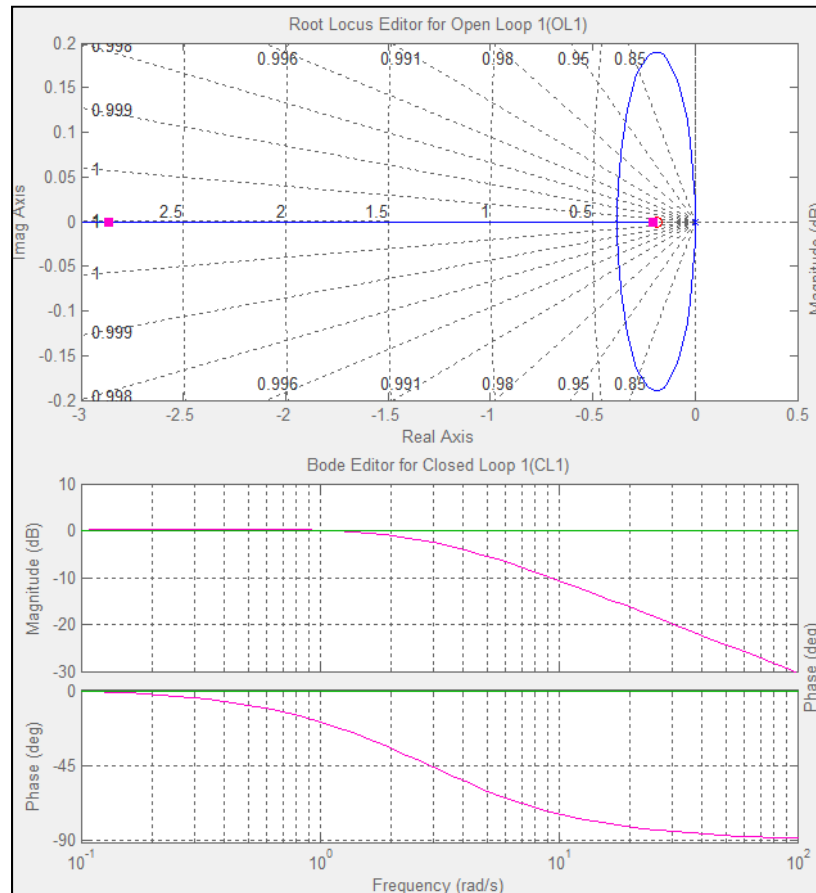




## Applicazioni: Ball - Beam



- Tuning può essere necessario (vedi sisotool)



$$K(s) = 14.621(s + 0.19)$$

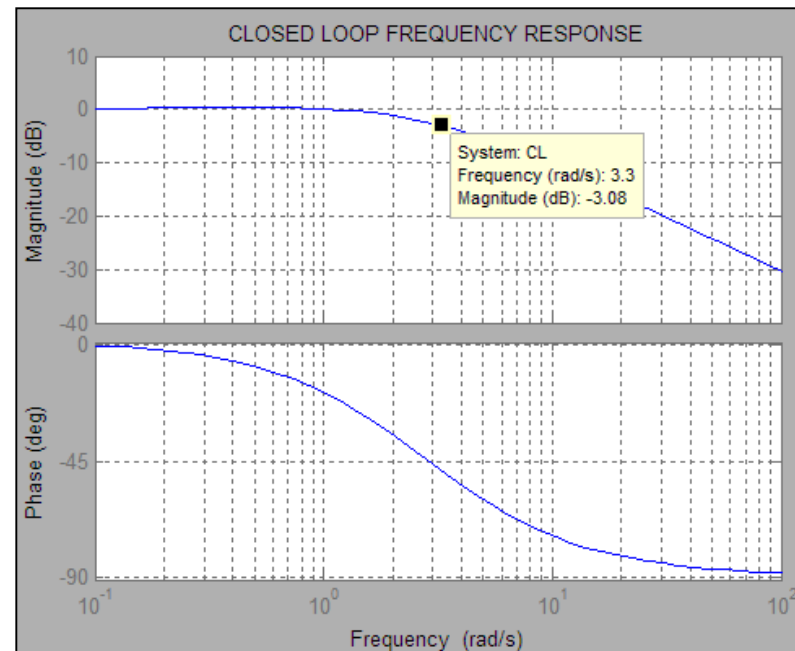
- La FdT in anello aperto è quindi:  $G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{3.07(s + 0.19)}{s^2}$



## Applicazioni: Ball - Beam



- Il controllore progettato è **NON CAUSALE** (1 zero e nessun polo).
- Per rendere il controllore causale, si deve introdurre almeno un Polo. La scelta del polo deve essere “Fuori Banda”, ovvero a frequenza molto più elevata della Banda Passante del sistema.



- Il polo va selezionato almeno una decade al di là della banda passante.
- Scelta di progetto: polo a frequenza di 40 rad/sec, con guadagno statico unitario.

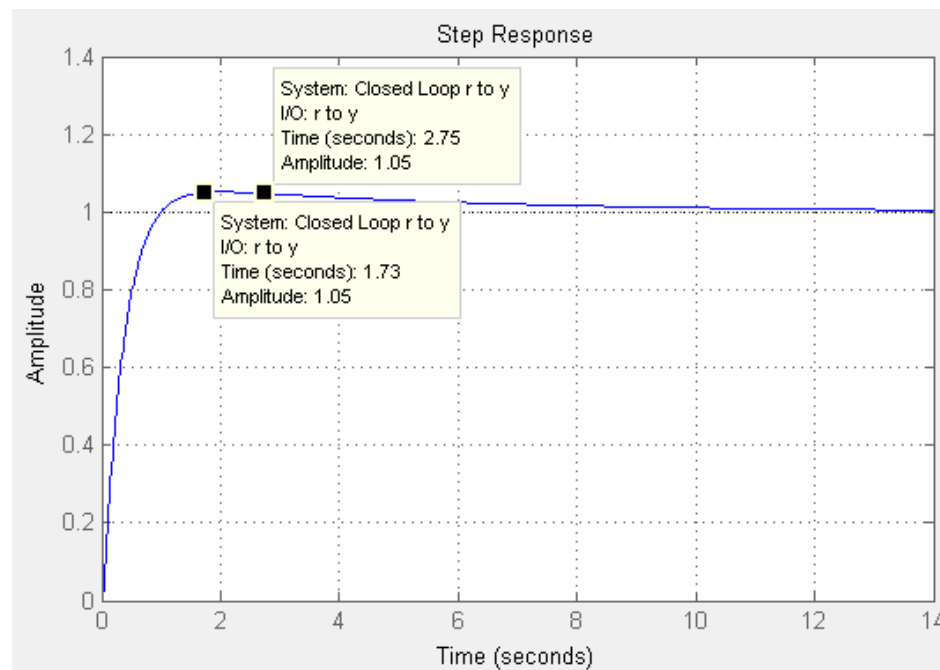
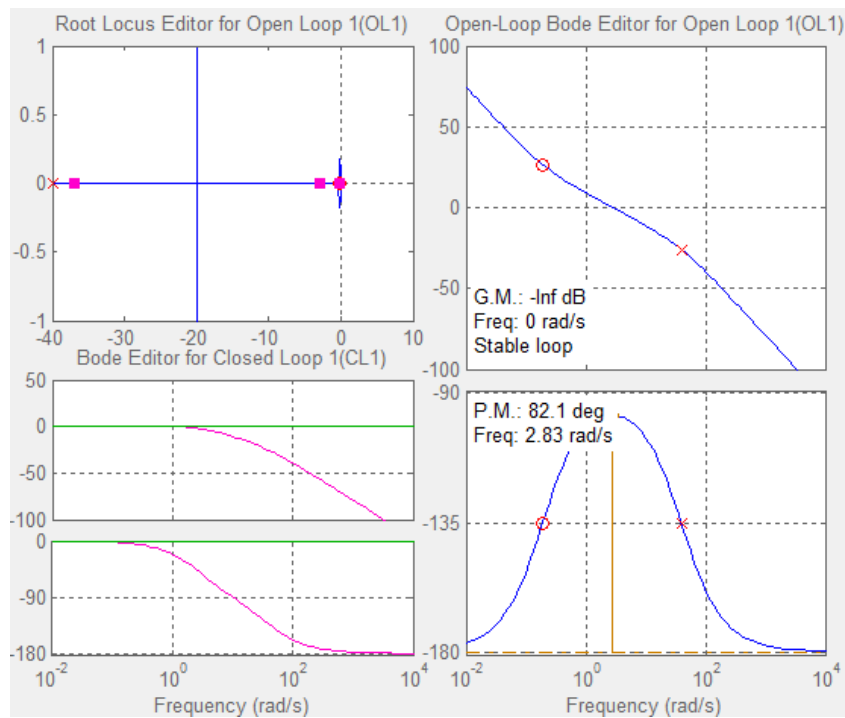
$$\frac{40}{(s + 40)}$$



## Applicazioni: Ball - Beam



$$K(s) = \frac{584.80(s + 0.19)}{(s + 40)}$$







## Applicazioni: Ball - Beam

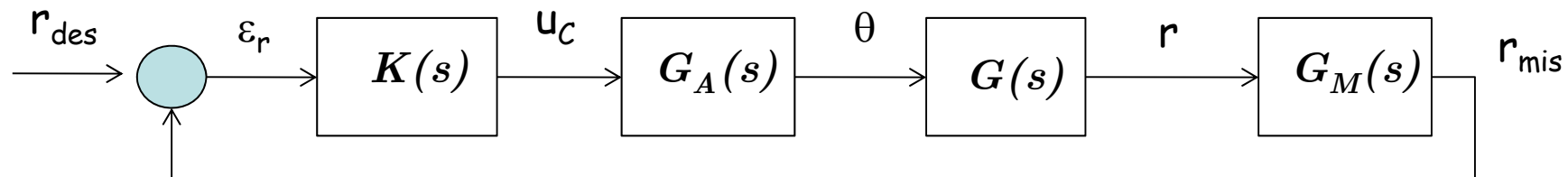


□ **Condizioni non nominali:** Incertezze non strutturate dovute a:

- Dinamica di attuazione: Motore Elettrico e trasmissione,  $G_A(s)$
- Dinamica del Sensore: Trasduttore Ottico a resistenza variabile  $G_M(s)$

$$G_A(s) = 261.8 \frac{100}{s(s+100)}, 261.8 = \frac{1000rpm}{24Volt}$$

$$G_M(s) = 24 \frac{1000}{(s+1000)}, 24 = \frac{Volt}{metro}$$

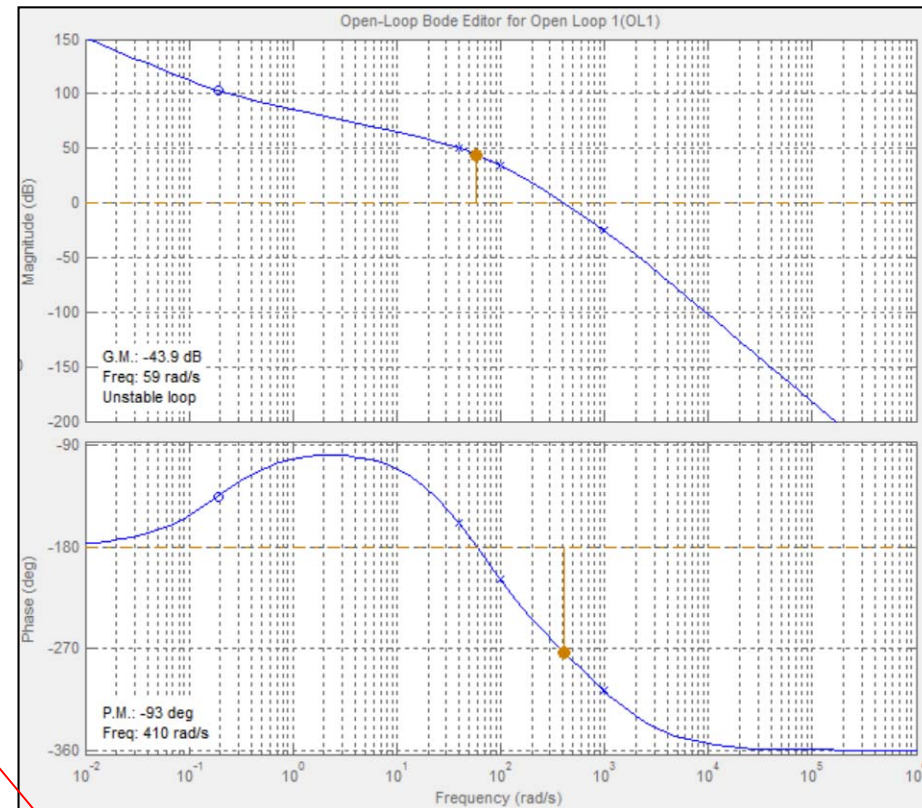
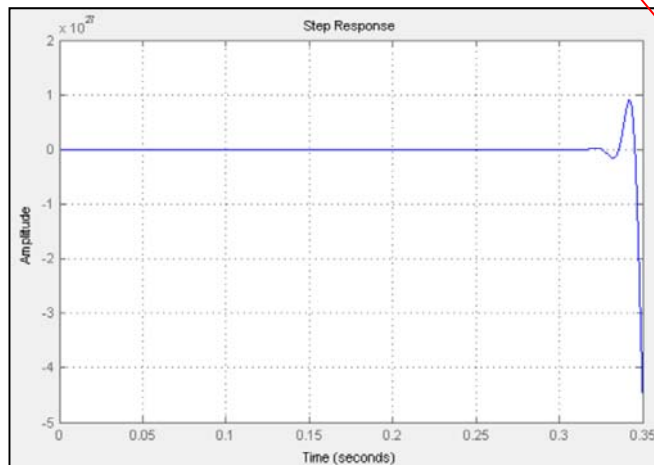
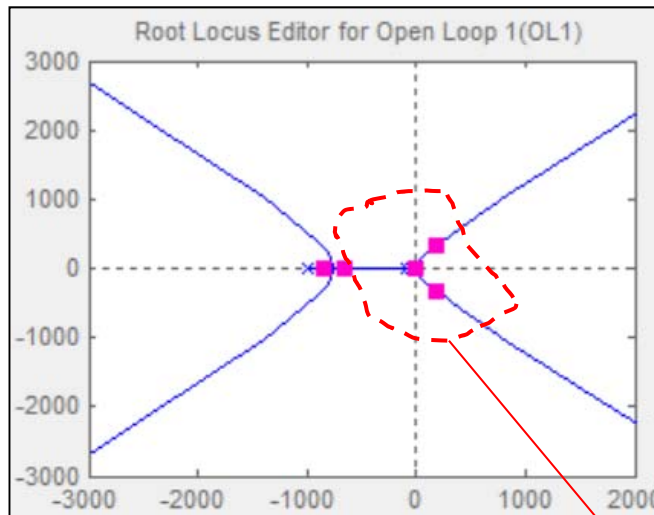


- Stabilità e le prestazioni rimangono inalterate in presenza delle dinamiche di attuazione e misura?
- La dinamica di attuazione introduce un ritardo di fase minimo di  $-\pi/2$  a tutte le frequenze, per cui in PM originale non è sufficiente ( $\approx 88^\circ$ ).



## Applicazioni: Ball - Beam

- Comportamento in ciclo chiuso con il controllore originale (Sistema Instabile con guadagno unitario)

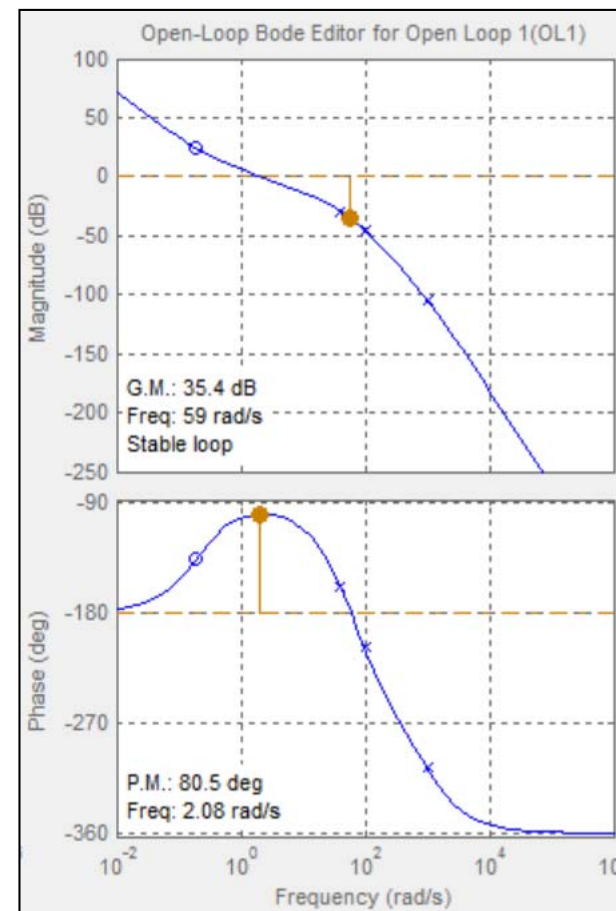
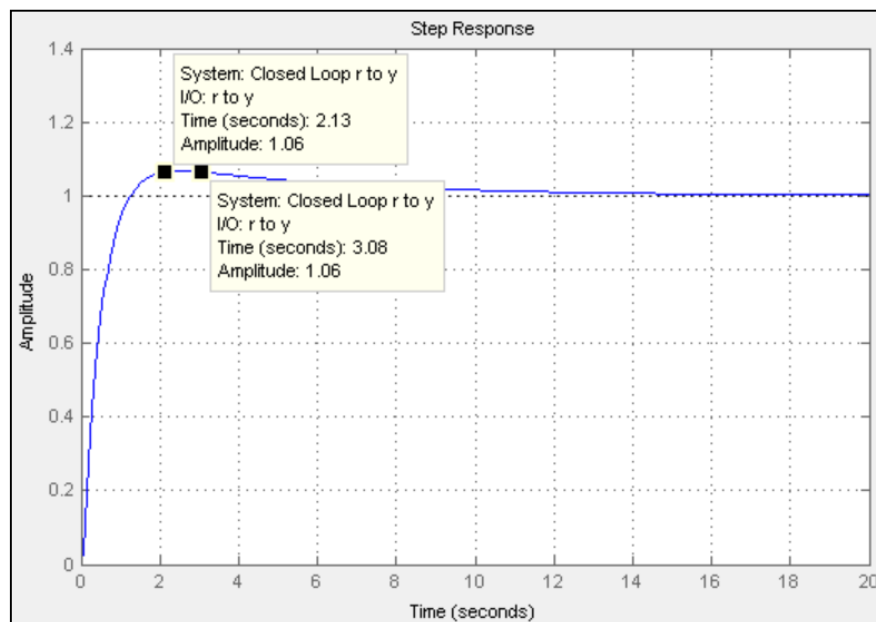
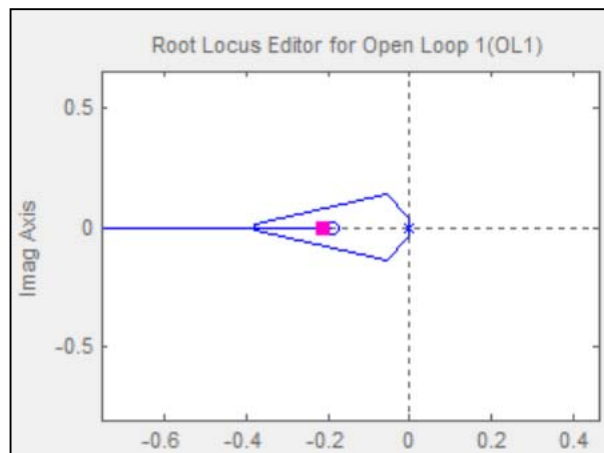


- Verifica dettaglio Luogo Radici



## Applicazioni: Ball - Beam

- Consideriamo un guadagno pari a: 0.00001789

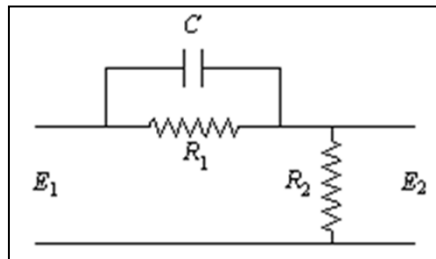
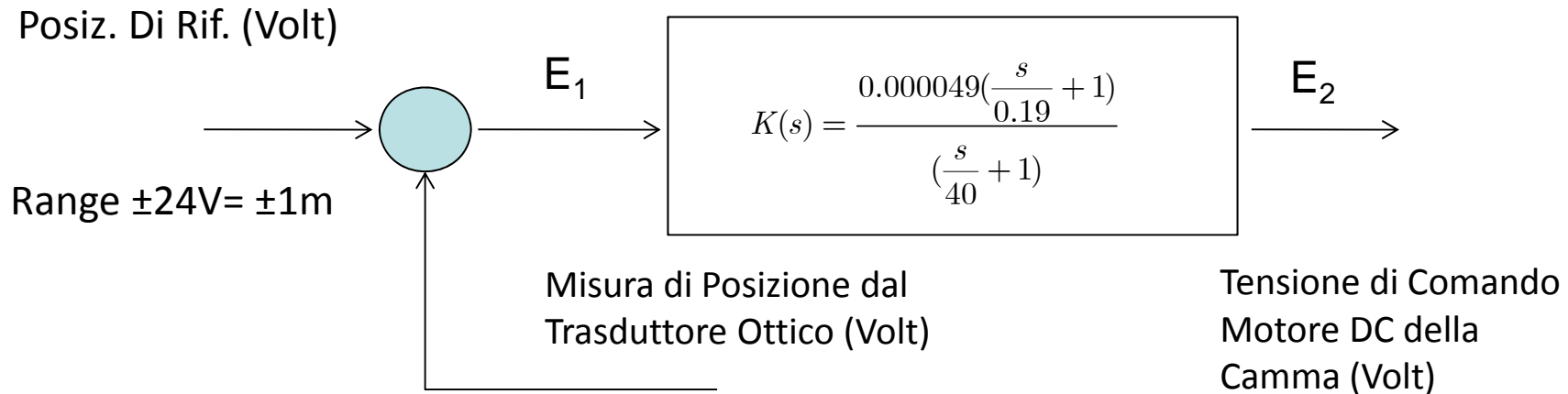




## Applicazioni: Ball - Beam



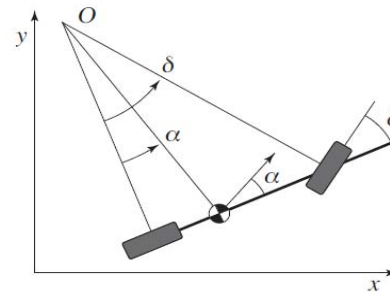
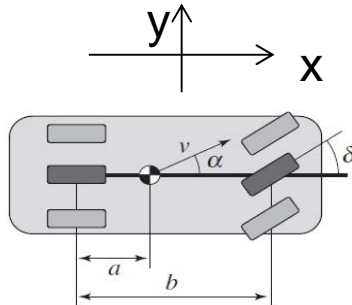
- Implementazione analogica del controllore sviluppato.



$$K(s) = \frac{0.000049(\frac{s}{0.19} + 1)}{(\frac{s}{40} + 1)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 C s + 1)}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1\right)} = \frac{E_2(s)}{E_1(s)}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata



- Controllo della posizione laterale mediante angolo di sterzata
- Il modello usato è quello del biciclo con le ruote che ruotano senza scivolamento.

$$\theta = \theta_e = 0$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

$$u = \delta = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$

$$y = I\mathbf{x}$$

$$G(s) = I(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -v_0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{v_0}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{av_0s + v_0^2}{bs^2}; G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{v_0}{bs} \quad a = 1.375m, b = 2.56m, \\ |v_0| = (25, 50, 75)km / h = (6.94, 13.09, 20.83)m / sec$$

- Il modello cambia a seconda che il veicolo si muova in avanti oppure all'indietro e a seconda del modulo della velocità di riferimento

	25	50	75	-25	-50	-75
K	3.7275	7.03	11.18	-3.7275	-7.03	-11.18
Z	-5.047	-9.52	-15.15	5.047	9.52	15.15
K <sub>s</sub>	18.81	66.93	169.38	18.81	66.93	169.38

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{av_0s + v_0^2}{bs^2} = \frac{7.03(s + 9.52)}{s^2} = \frac{[m]}{[rad]} \quad G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{v_0}{bs} = \frac{5.11}{s} = \frac{[rad]}{[rad]}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata

$$G_y(s) = \frac{av_0s + v_0^2}{bs^2} = \frac{7.03(s + 9.52)}{s^2} = \frac{[m]}{[rad]}$$

$$G_\delta(s) = \frac{v_0}{bs} = \frac{5.11}{s} = \frac{[rad]}{[rad]}$$

□ **Requisiti:** si vuole inseguire un riferimento in distanza  $y_{REF}$  con:

- overshoot massimo del 20%
- Errore nullo al gradino unitario ed alla rampa
- Banda passante di circa 20 rad/sec
- Margini di stabilità di circa [ 20 dB, 45°]