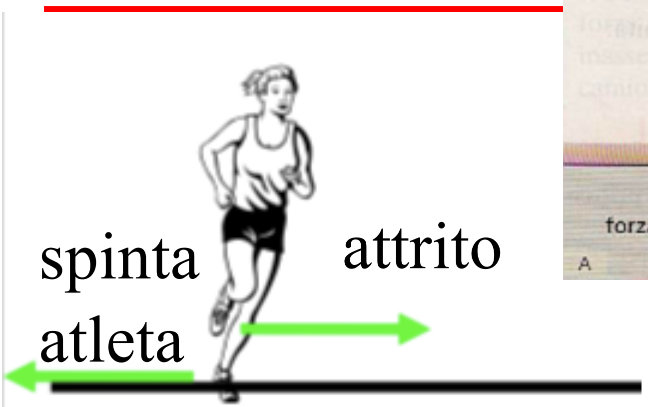
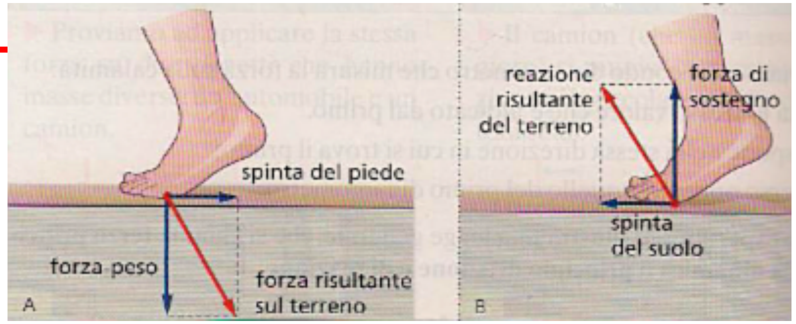
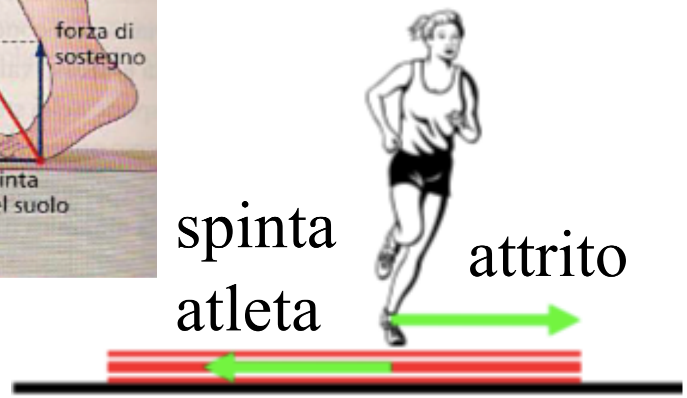
Es. Principio di azione e reazione







Massa atleta: $M = 60$ kg; l'atleta esercita una forza di modulo $F = 120$ N.

Attrito tra atleta e pavimento

a causa dell'attrito, l'atleta ha un'accelerazione:

$A = \frac{F}{M} = 2\ \mathrm{m/s^2}$ (rispetto a terra)

a causa della forza che l'atleta esercita sul pavimento la terra ha un'accelerazione

$A = -\frac{F}{\infty} = 0$

Attrito tra atleta e tappeto, nessun attrito tra tappeto-pavimento

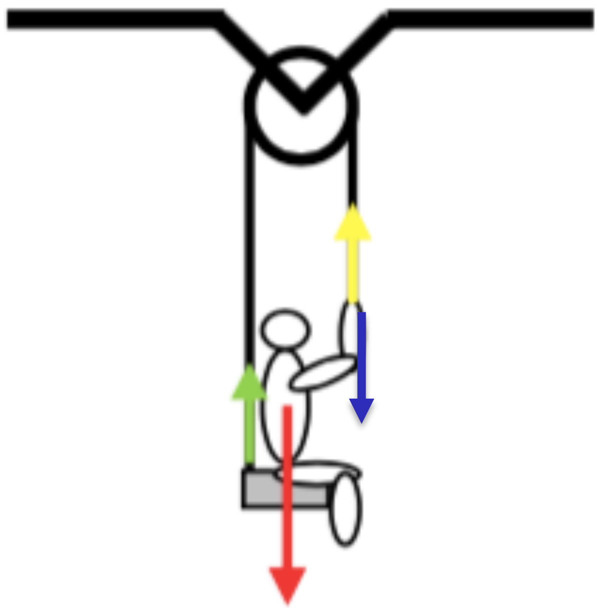
a causa dell'attrito, l'atleta ha un'accelerazione:

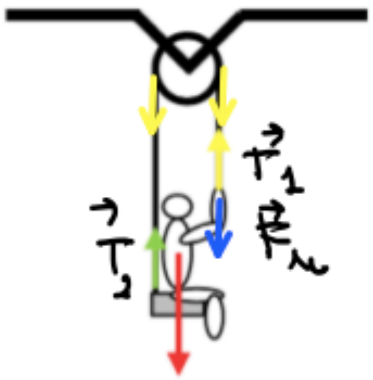
$A = \frac{F}{M} = 2\ \mathrm{m/s^2}$ (rispetto al tappeto)

Il tappeto ha un'accelerazione

$A = -\frac{F}{(2\ \mathrm{kg})} = -60\ \mathrm{m/s^2}$!!

Esercizio. Mostrare che un uomo, utilizzando una carrucola, può salire verticalmente applicando una forza inferiore al proprio peso. Calcolare la sua accelerazione in funzione della forza da lui esercitata.





L'uomo tira verso il basso con $|\vec{F}_u|$

Il filo tira verso l'alto ecc. $T_1 = T_2 = F_u$

Le forze applicate sul seggiolino + uomo all'equilibrio

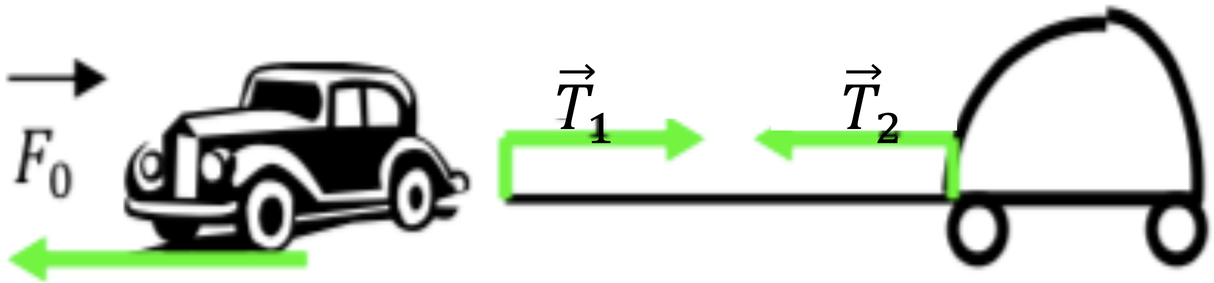
$$M\vec{g} + 2\vec{T} = 0$$

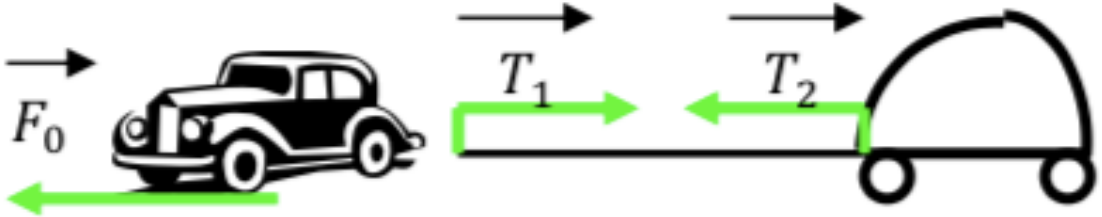
$$0 = -Mg + 2F_u \Rightarrow F_u = \frac{Mg}{2}$$

può salire verticalmente applicando una forza inferiore al proprio peso: basta che $F_u > \frac{Mg}{2}$!

$$Ma = -Mg + 2F_u \qquad a = \frac{2F_u}{M} - g$$

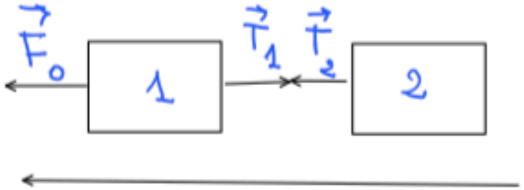
Esercizio. Un'automobile (massa $M_1 = 1500\,\text{kg}$) traina una roulotte (massa $M_2 = 500\,\text{kg}$) su una strada orizzontale. La forza esercitata dalle ruote dell'automobile parallelamente alla strada ha modulo $|\vec{F}_0| = 1000\,\text{N}$. (Poiché i pesi dei veicoli sono bilanciati dalla reazione sulle ruote, si possono considerare solo le forze parallele alla strada.) Si calcoli l'accelerazione dell'automobile (che è uguale a quella della roulotte) e la forza sul gancio fra auto e roulotte.





$$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2 \quad \Longrightarrow |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$$

per il principio di azione e reazione.



$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$

Sul corpo 1

I corpi hanno la stessa accelerazione (filo teso)

① $\vec{F}_0 + \vec{T}_1 = M_1 \vec{a}$

sul corpo 2

② $\vec{T}_2 = M_2 \vec{a}$

sostituendo $\vec{T}_2$ con $-\vec{T}_1$

e sommando la ① e la ②

$$\vec{F}_0 = (M_1 + M_2)\vec{a}$$

$$a = \frac{F_0}{M_1 + M_2}$$

Inoltre dalla ①

$$T_2 = M_2 a$$

Si calcoli l'accelerazione dell'automobile (che è uguale a quella della roulotte) e la forza sul gancio fra auto e roulotte.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{(M_1+M_2)} = \frac{1000}{1500+500} \frac{m}{s^2} \hat{x} = 0.5\hat{x} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\vec{T}_2 = M_2\vec{a} = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)\vec{F}_0$$

$$= \left(\frac{500}{1500 + 500}\right)\times 1000\mathrm{N} = 250\hat{x}\ \mathrm{N}$$

nota:

$$\vec{T}_1 = -\vec{T}_2 = -250\hat{x}\ \mathrm{N}$$

Piano e Piano inclinato con attrito

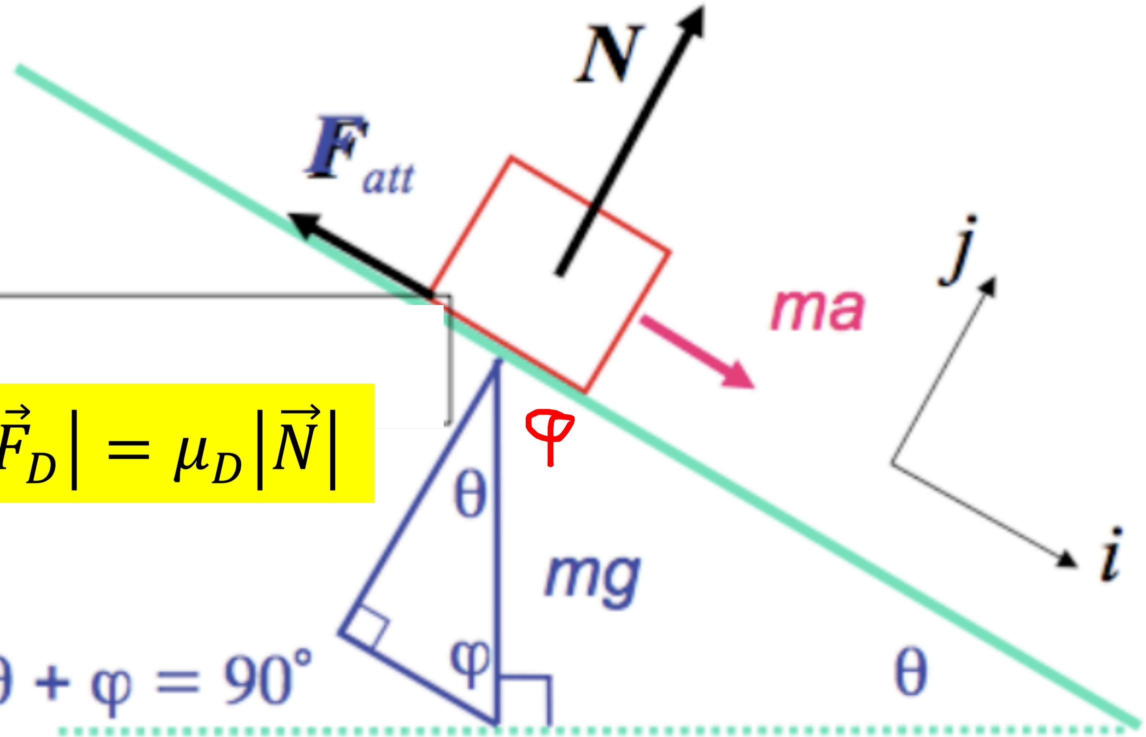
Attrito Dinamico

Se il corpo è in moto

$$\vec{F}_{\text{att}} = \vec{F}_D = -\mu_D|\vec{N}|\hat{V}$$

$\hat{V}$ versore della velocità

$$|\vec{F}_D| = \mu_D|\vec{N}|$$



Attrito Statico

Se **una superficie ruvida è ferma rispetto ad un'altra**: la forza è **opposta alla componente parallela della risultante di tutte le altre forze**:

$$\vec{F}_S = -\sum \vec{F}_{\parallel,\text{altre}}$$

Quindi **la forza di attrito statico è nulla se non ci sono altre forze con componente parallela alla superficie**. Inoltre **la forza di attrito statico ha un valore massimo**, al di sopra del quale il corpo si mette in movimento:

$$|\vec{F}_S| \leq \mu_S|\vec{N}|$$

dove μ_S è il **coefficiente di attrito statico.**

Esercizio . Al tempo $t = 0$ un corpo viene lanciato su un piano orizzontale con velocità di modulo V_0.
Calcolare l'istante e la posizione in cui si ferma, se il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è μ_D.

Dati e domande

$V(t=0)=V_0$

μ_D

t* arresto?

x(t*)?

Soluzione.
L'unica forza agente lungo l'asse x è la forza di attrito dinamico, per cui:

$$F_x = ma_x = -\mu_D mg \quad \Rightarrow a_x = -\mu_D g \quad \boxed{\Rightarrow V_x = V_0 + \int_0^t a_x(t')dt' = V_0 - \mu_D g t}$$

Integrando la velocità si ottiene lo spostamento del corpo in funzione del tempo t:

$$x = x_0 + \int_0^t V_x(t')dt' = 0 + V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2} = V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2}$$

Il blocco si ferma quando V_x diventa nullo, cioè al tempo:

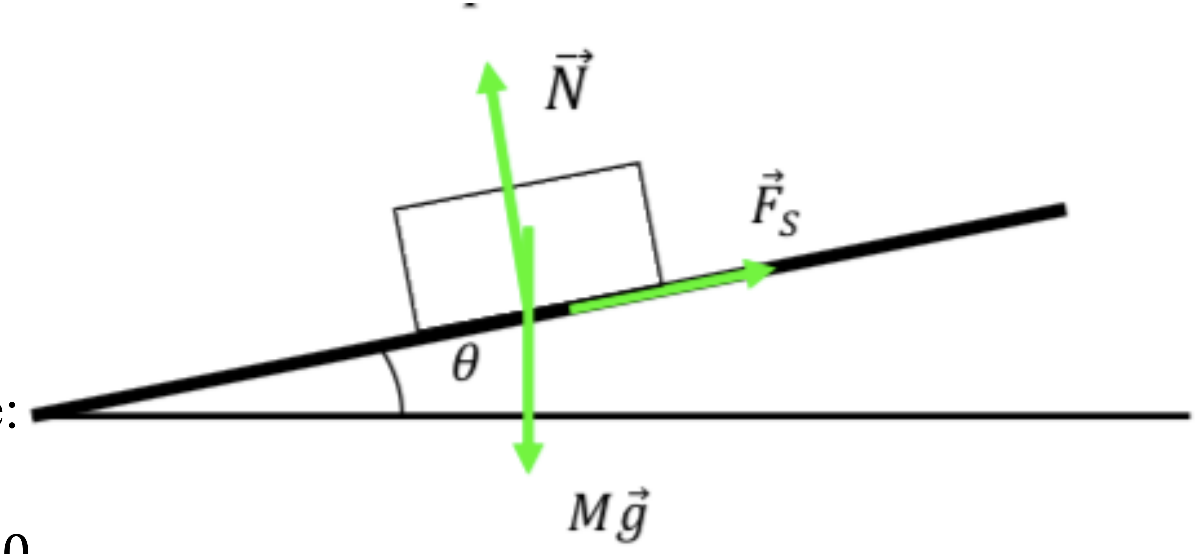
$$t^* = \frac{V_0}{\mu_D g}$$

La posizione in cui si arresta è quindi:

$$x(t^*) = V_0 t^* - \frac{\mu_D g t^{*2}}{2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g} - \frac{\mu_D g}{2}\left(\frac{V_0}{\mu_D g}\right)^2 = \frac{V_0^2}{2\mu_D g}$$

Esercizio. Calcolare μ_s se il corpo inizia a muoversi quando $\theta > 30^\circ$.

Soluzione.
Per l'equilibrio delle forze:



$$\vec{N} + \vec{F}_S + M\vec{g} = 0$$

e proiettando in direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato, poichè il corpo è fermo:

$$\begin{cases} N - Mg\ \cos\theta\ = 0 \\ -F_S + Mg \sin\theta = 0 \end{cases}$$

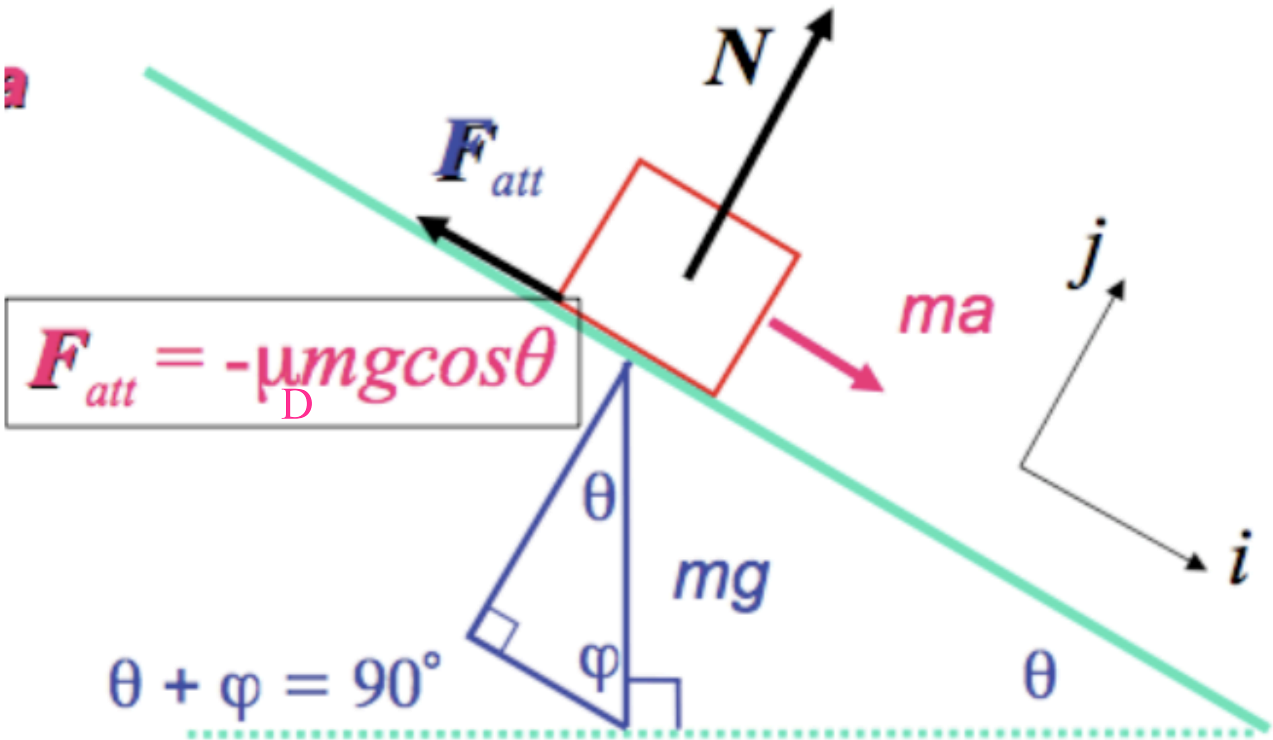
ed essendo:

$$F_S = Mg\sin\theta \leq \mu_S N = \ \mu_S Mg\cos\theta \qquad\qquad \mu_S Mg\cos\theta = \ Mg\sin\theta$$

dalla quale si ottiene:

$$\mu_S = \tan\theta\ = 0.577.$$

Esercizio. Un blocco di legno (massa $m = 10$ kg), inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto ad un piano orizzontale, viene lasciato libero di muoversi al tempo $t = 0$. Fra il blocco ed il piano è presente attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$. Si esprima la velocità del blocco in funzione del tempo. Si determini l'accelerazione



$F_{att} = -\mu_D mg\cos\theta$

Dati e domande

m=10 kg

$\theta=30^0$

$\vec{V}(0)=0$

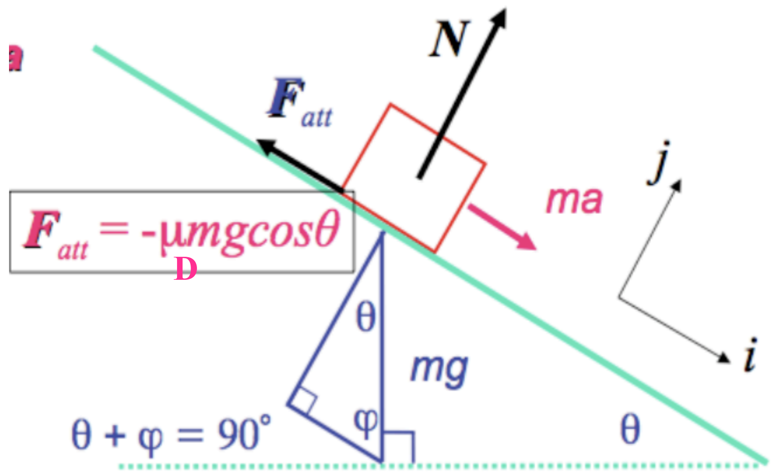
$\vec{V}(t)$?

$\vec{a}$?

Soluzione.

$\vec{V}(t)$? $\vec{a}$?

Le uniche forze esterne presenti sono la forza di attrito e la forza peso. La coordinata del centro di massa del blocco lungo y (j) è costante, di conseguenza la velocità lungo y è costante, V_y=costante=$V_y(0)$=0, per lo stesso motivo l'accelerazione lungo z a_z è nulla. Per cui il corpo è in moto lungo x (i) e fermo lungo y (j)



Proiezione delle forze

$$\begin{cases} \text{lungo y:} \quad N - mg\cos\theta = 0 = ma_y \\ \text{lungo x:} \quad mg\sin\theta - F_{att} = mg\sin\theta - \mu_D N = mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta = ma_x \end{cases}$$

Quindi l'accelerazione risultante lungo la direzione del piano è :

$$a_x = \left(\frac{mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta}{m}\right) = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$$

a_x =costante moto è uniformemente accelerato

Poiché il blocco parte da fermo ed il moto è uniformemente accelerato si ha:

$$1) V_x = V_x(0) + \int_0^t a_x(t')dt' = 0 + a_x t = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)t, V_y = 0, \; V_z = 0$$

Sostituendo i valori numerici delle funzioni trigonometriche si ricava:

$$2) \; a_x = 9.8\times(0.5 - 0.2\times0.866) = 3.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \; a_y = 0, \quad a_z = 0$$

Variazione: come cambia il risultato se il blocco è **lanciato in salita** al tempo $t = 0$ con una velocità $10\ \mathrm{m/s}$? Con quale velocità ripassa nel punto di partenza ?

Dati e domande

m=10 kg

$\theta=30^0$

In A $\vec{V}(0)$ =(-10,0,0)m/s

$\vec{V}(t^*)$ quando ripassa in A?

Soluzione.

Nel moto di salita sia la forza di attrito dinamico che la forza di gravità si oppongono alla salita

Proiezione delle forze

lungo y: $N-mg\cos\theta=0=ma_y$

lungo x: $mg\sin\theta+F_{att}=mg\sin\theta+\mu_D N=mg\sin\theta+\mu_D mg\cos\theta=ma_x$

Quindi l'accelerazione risultante durante la salita è

$$a_x=a_S=g(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)$$

mentre nel moto di discesa la situazione è analoga al caso precedente, per cui

$$a_x=a_D=g(\sin\theta-\mu_D\cos\theta)$$

Nota $V_x(0)=-V_0$

1) $V_x=V_x(0)+\int_0^t a_x(t')dt'=-V_0+a_x t\Longrightarrow$

$$V_x^S=-V_0+g(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)t.$$

Quando raggiunge la quota massima la velocità si annulla, per cui il tempo di salita è

$$t_S=\frac{V_0}{g(\sin\theta+\mu_D\cos\theta)}$$

$$t_S = \frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

$$x(t_s) = x_A - V_0\, t_s + \frac{1}{2} g\, (\sin\theta + \mu_D \cos\theta)\, t_s^2 =$$

$$= x_A - V_0 \frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} + \frac{1}{2} g\, (\sin\theta + \mu_D \cos\theta) \left(\frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}\right)^2$$

lo spazio percorso in salita è

$$S_S = |x(t_s) - x_A| = -\frac{-V_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

poichè nel moto di discesa il corpo percorre lo stesso spazio che nella salita

$$S_D = S_S = \frac{V_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

Il moto di discesa è uniformemente accelerato con velocità iniziale *nulla*:

$$a_D = g(\sin\theta - \mu_D \cos\theta) \qquad V_D = a_D t_D$$

per cui

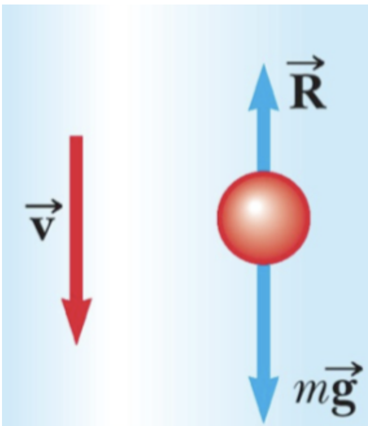
$$S_D = \frac{1}{2} a_D t_D^2 \Longrightarrow t_D = \sqrt{\frac{2S_D}{a_D}}$$

$$V_D = a_D t_D = \sqrt{2 S_S a_D} = V_0 \sqrt{\frac{\sin\theta - \mu_D \cos\theta}{\sin\theta + \mu_D \cos\theta}}$$

Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità

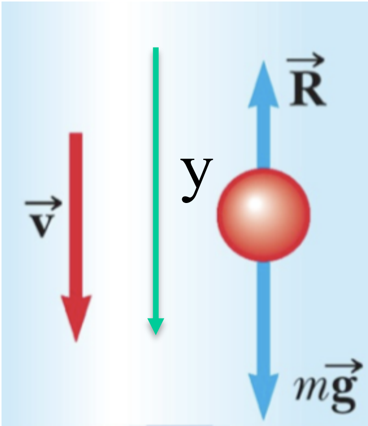
Esercizio Al tempo $t = 0$ un corpo sferico di massa $M = 100$ g e raggio $R = 10$ cm viene lasciato libero da fermo in aria. La forza fra corpo ed aria è di tipo viscoso con una costante $\beta = 0.1$ kg/s.

1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta. In questa domanda si trascuri la spinta di Archimede.



1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta.

Soluzione.



Con un asse y rivolto verso il basso l'equazione del moto è:

$$M\frac{dV}{dt} = -\beta V + Mg \implies \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{M}V + g$$

La soluzione dell'omogenea associata è:

$$\frac{dV}{V} = -\beta/_M \, dt$$

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t}$$

La soluzione della non omogenea si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante):

$$\frac{dV}{dt} = 0 = -\beta V_{lim} + Mg \implies \boxed{R1.2\ V_{lim} = \frac{Mg}{\beta}} \implies \text{soluzione globale:}$$

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}$$

Con la condizione iniziale di partenza da fermo si ha:

$$V(0) = A + \frac{Mg}{\beta} = 0 \implies A = -\frac{Mg}{\beta} \implies \boxed{R1.1: V(t) = \frac{Mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right)}$$