Soluzioni prova scritta
Ingegneria Informatica 15/02/2024

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da un punto ciascuno. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ una matrice Hermitiana con autovalori

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda_4 = 6, \qquad \lambda_5 = -2.$$

Il numero di condizionamento di A rispetto alla norma 2 è $\boxed{12}$

Sia $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ una matrice normale con autovalori

$$\lambda_1 = -100, \qquad \lambda_2 = 1 + 1\mathbf{i}, \qquad \lambda_3 = -2 + 4\mathbf{i}, \qquad \lambda_4 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathbf{i}, \qquad \lambda_5 = -\mathbf{i}.$$

Il numero di condizionamento di A rispetto alla norma 2 è $\boxed{100}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}([a, b])$ e si considerino $k + 1$ nodi per l'interpolazione $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_k \le b$ di $f(x)$. Infine si indichino con $L_k(x)$ e $N_k(x)$ i polinomi di interpolazione nella base di Lagrange e Newton, nei nodi x_j.

V **F** Può succedere che $L_k(x)$ ha grado k ed $N_k(x)$ ha grado minore di k.

V **F** Può succedere che $N_k(x)$ ha grado k ed $L_k(x)$ ha grado minore di k.

V F $L_k(x)$ può avere grado minore di k.

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V **F** Si può avere $L_k(x) \neq N_k(x)$ per un $x \notin \{x_j, j = 0, \dots, k\}$.

V **F** Dato $x \in [a,b]$, l'errore associato a $L_k(x)$ è $\prod_{j=0}^{k}(x - x_j) \cdot \frac{f(\zeta)}{(k+1)!}$, per un certo $\zeta \in [a,b]$.

V **F** Dato $x \in [a,b]$, l'errore associato a $N_k(x)$ è $\prod_{j=0}^{k}(x - x_j) \cdot \frac{f(\zeta)}{(k+1)!}$, per un certo $\zeta \in [a,b]$.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile due volte ed $\alpha \in (a,b)$ radice semplice di f (quindi $f(\alpha) = 0$) e si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione di α. Dire quali tra le seguenti condizioni assicurano la **convergenza globale**, ovvero per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in [a,b]$, del metodo di Newton ad α.

V F f convessa crescente su $[a,b]$.

V F f convessa decrescente su $[a,b]$.

V **F** $|f'(x)| \leq 1 \; \forall x \in [a,b]$.

V F f concava crescente su $[a,b]$.

V F f concava decrescente su $[a,b]$.

V **F** $f''(\alpha) = 0$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$. Indicare quale dei seguenti compiti può essere svolto, in ipotesi generali, con una complessitá computazionale $\mathcal{O}(n^2)$ o inferiore.

V F Calcolo di $y^T Ax$

V F Calcolo di Ax.

V **F** Calcolo di $A \cdot B$

V **F** Calcolo degli autovalori di A

V **F** Calcolo degli autovalori di $A \cdot B$

V **F** Calcolo della fattorizzazione QR di A.

Esercizio 2

Dato un parametro **complesso** $\alpha \in \mathbb{C}$ diverso da 0, si consideri la matrice 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha - \alpha^{-1} & -2\alpha + 2\alpha^{-1} \\ \alpha - \alpha^{-1} & -\alpha + 2\alpha^{-1} \end{bmatrix}.$$

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si calcoli la fattorizzazione spettrale di A, ovvero gli autovalori λ_1, λ_2, una matrice $V \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ (contenente gli autovettori) e la sua inversa V^{-1}, tali che

$$A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} V^{-1}.$$

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Dire per quali valori di α il metodo delle potenze, con vettore di partenza

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

converge all'autovettore corrispondente all'autovalore di modulo massimo.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Sia $x_k = Ax_{k-1}$ la successione del metodo delle potenze senza normalizzazione, dove x_0 è scelto come sopra. Nel caso $\alpha = \mathbf{i}$ si calcoli x_{100}.

$\boxed{\text{(i)}}$ Si ha $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = \alpha^{-1}$; una possibile scelta per V è

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Il metodo converge quando $|\alpha| \neq 1$.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Sfruttando la decomposizione spettrale di A si ottiene:

$$x_{100} = A^{100}x_0 = V \begin{bmatrix} \mathbf{i}^{100} & \\ & \mathbf{i}^{-100} \end{bmatrix} V^{-1}x_0 = x_0.$$

Esercizio 3

Sia $f(x) = \log(x+2) - e^{-\frac{x}{4}}$.

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dimostri che $f(x)$ ha esattamente una radice α nell'intervallo $[-1, 1]$.

(ii) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si dica se i metodi di punto fisso

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = \exp\left(e^{-\frac{x_k}{4}}\right) - 2,$$
$$x_{k+1} = g_2(x_k) = \log(x_k + 2) - e^{-\frac{x}{4}} + x_k,$$

convergono localmente ad α.

$\boxed{\text{(i)}}$ Studiando la derivata di f si vede che quest'ultima è una funzione crescente in $[-1, 1]$ e unito al fatto che $f(-1)f(1) < 0$ implica l'esistenza di un'unica radice nell'intervallo.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Il primo metodo converge localmente mentre il secondo no.

Esercizio 4

Per approssimare l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} f(x_1).$$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Determinare il peso a_0 e il nodo x_1 in modo da ottenere il massimo grado di precisione algebrico. Indicare il grado di precisione ottenuto.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Per $t \in [-1, 1]$, si calcoli l'espressione esplicita del nucleo di Peano $G(t)$ della formula J_1, definito come

$$G(t) = \int_{-1}^{1} s_m(x-t)dx - J_1(s_m(x-t))$$

dove m è il grado di precisione della formula e

$$s_m(x-t) = \begin{cases} (x-t)^m & t < x \\ 0 & t \geq x \end{cases}.$$

$\boxed{\text{(i)}}$ Imponendo l'esattezza della formula di quadratura per le funzioni $1, x$ si ottiene $a_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{6}$. La formula non è esatta per x^2 quindi il grado di precisione è 1.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Il nucleo di Peano per J_1 è

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2} & t \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2} & t \geq \frac{1}{6} \end{cases}.$$