Prova di Comunicazioni Numeriche 075II

08/01/2024

1. Si consideri il codice di Hamming sistematico $\mathcal{C}_H(3)$ con matrice di controllo di parità $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determinare la matrice generatrice $\mathbf{G}$;

   (b) Determinare la $d_{\min}$ per il codice;

   (c) Data la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]$, impiegare la decodifica a sindrome per trovare le parole di codice che minimizzano la distanza di Hamming da $\mathbf{y}$. (**3** punti)

2. Dimostrare che la strategia a massima verosimiglianza per la decodifica di un codice convoluzionale consiste nello scegliere la sequenza $\hat{\mathbf{x}}$ che tra tutte le possibili sequenze codificate $\tilde{\mathbf{x}}$ minimizza la distanza di Hamming dalla sequenza ricevuta $\mathbf{y}$, i.e., (**3.5** punti)

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\tilde{\mathbf{x}}} d_H(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}).$$

3. Sia $\mathcal{C}(k, n)$ un codice a blocco ciclico con polinomio generatore $g(D)$. Dimostrare che un polinomio $x(D)$ è in $\mathcal{C}(k, n) \iff x(D)$ è un multiplo di $g(D)$. (**3.5** punti)

4. Dato un sistema lineare e stazionario (**3** punti):

   (a) Derivare la relazione ingresso-uscita;

   (b) Derivare una condizione sufficiente per la stabilità in senso BIBO.

5. Descrivere le operazioni necessarie per campionare e ricostruire un segnale analogico di banda $B = 5$ MHz (**3** punti).

6. Un sistema di comunicazione utilizza simboli indipendenti ed equiprobabili che assumono valori in $\{-1 + \mathrm{j}, 0, 1 + \mathrm{j}\}$. (**4** punti)

   (a) Calcolare il valor medio dei simboli.

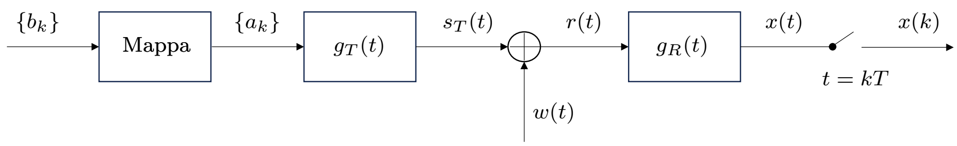
   (b) Calcolare la funzione di autocorrelazione dei simboli.

7. Un processo bianco Gaussiano $W(t)$ con densità spettrale di potenza pari a N_0 viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{rect}(t/T)$. (**3** punti)

(a) Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo in uscita $N(t)$.

(b) Dimostrare che i campioni $N(iT)$ and $N(kT)$ sono indipendenti per $i \neq k$.

8. Dato il sistema PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = 2B\text{sinc}^2(2Bt)$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. (**4** punti)



(a) Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$, nell'ipotesi in cui il filtro $g_R(t)$ sia adattato a quello in trasmissione.

9. Un sistema di comunicazione 16-QAM impiega un codice convoluzionale con tasso $r = 5/6$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.35$. (**3** punti)

(a) Determinare l'efficienza spettrale del sistema.

(b) Nell'ipotesi in cui la probabilità di errore sul bit in uscita dal codificatore convoluzionale sia pari a 10^{-4}, calcolare la probabilità di errore sul bit che si ottiene impiegando un (ulteriore) codice a ripetizione di ordine 3.