

Esercizio 6

1 Enunciato del Problema

Il rapporto tra il tempo impiegato da un corpo, che parte da fermo, per scendere un piano inclinato ruvido e il tempo impiegato dallo stesso corpo per scendere un identico piano inclinato ma liscio è $4/3$.

Determinare il coefficiente di attrito come funzione dell'angolo.

2 Soluzione

Si consideri un corpo che scende da fermo lungo un piano inclinato di lunghezza L e inclinazione θ . Due casi vengono confrontati:

- **Piano liscio (senza attrito):** l'accelerazione lungo il piano è

$$a_{\text{liscio}} = g \sin \theta,$$

e il tempo impiegato per percorrere la distanza L è

$$t_{\text{liscio}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}.$$

- **Piano ruvido (con attrito):** il corpo subisce una forza di attrito (di coefficiente μ). Quindi l'accelerazione è

$$a_{\text{ruvido}} = g \sin \theta - \mu g \cos \theta = g(\sin \theta - \mu \cos \theta),$$

e il tempo impiegato è

$$t_{\text{ruvido}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}}.$$

Si suppone che il rapporto tra il tempo di discesa sul piano ruvido e quello sul piano liscio sia:

$$\frac{t_{\text{ruvido}}}{t_{\text{liscio}}} = \frac{4}{3}.$$

Esprimiamo il rapporto dei tempi:

$$\frac{t_{\text{ruvido}}}{t_{\text{liscio}}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}} \bigg/ \frac{2L}{g \sin \theta} = \sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta}}.$$

Dunque, imponendo il rapporto dato:

$$\sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta}} = \frac{4}{3}.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} = \frac{16}{9}.$$

Da cui:

$$9 \sin \theta = 16(\sin \theta - \mu \cos \theta).$$

Espandendo e isolando il termine contenente μ :

$$9 \sin \theta = 16 \sin \theta - 16\mu \cos \theta \implies 16\mu \cos \theta = 16 \sin \theta - 9 \sin \theta = 7 \sin \theta.$$

Pertanto:

$$\mu = \frac{7 \sin \theta}{16 \cos \theta} = \frac{7}{16} \tan \theta.$$