

# Fondamenti di Automatica - I Parte

Antonio Bicchi

Università di Pisa

Versione del 24 Ottobre 2019.

Alcune parti della dispensa sono in corso di integrazione o  
riscrittura.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
1.1	Di che si tratta . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Sistemi Dinamici</b>	<b>17</b>
2.1	Modelli di Sistemi Dinamici . . . . .	17
2.1.1	Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Continuo . . . .	18
2.1.2	Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Discreto . . . .	21
2.1.3	Sistemi TD per la simulazione numerica. . . . .	25
2.2	Forma normale e forma di stato . . . . .	30
2.2.1	Sistemi di equazioni differenziali . . . . .	33
2.2.2	Stati, ingressi, uscite . . . . .	33
2.3	Proprietà dei Sistemi Dinamici . . . . .	36
2.3.1	Causalità . . . . .	36
2.3.2	Stazionarietà . . . . .	37
2.3.3	Linearità . . . . .	38
2.3.4	Forma Canonica di Controllo . . . . .	39
2.4	Soluzioni delle Equazioni Dinamiche . . . . .	45
2.4.1	Soluzioni di equilibrio . . . . .	46
2.5	Linearizzazione approssimata . . . . .	48
2.6	Cambiamenti di coordinate . . . . .	51
2.6.1	Cambiamenti di Coordinate Lineari . . . . .	51

<b>3 Soluzioni dei Sistemi Lineari</b>	<b>53</b>
3.1 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti Tempo-Continui . . . . .	53
3.2 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti Tempo-Discreti . . . . .	62
3.3 Analisi Modale . . . . .	66
3.3.1 Modi dei Sistemi LTITC . . . . .	66
3.3.2 Modi dei sistemi LTITD . . . . .	67

9.3.3 Contorno delle radici . . . . .	230
<b>A Richiami di Algebra Lineare</b>	<b>233</b>
A.0.4 Matrici simili e Diagonalizzazione . . . . .	233
A.0.5 Forma di Jordan . . . . .	235
A.0.6 Instabilità numerica della forma di Jordan . . . . .	239
A.0.7 Risposte dei sistemi lineari con Matlab . . . . .	240

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Di che si tratta

Si consideri il semplice problema di muovere un carrello di massa  $m$  su un binario senza attrito, da una posizione iniziale  $p = 0$  a una posizione assegnata  $p = \hat{p}$ , potendo scegliere la forza  $f$  di spinta fornita da un apposito attuatore. La massa nominale  $\bar{m}$  del carrello sia nota, ma tale valore differisca dal valore vero (non noto) entro una tolleranza (ad esempio del 10%). In tali condizioni, si chiede di stabilire una legge che definisca un valore  $f(t)$  della spinta in ogni istante, tale da garantire che il carrello raggiunga la posizione desiderata con precisione elevata (dell'ordine ad esempio dell'1%) in un tempo sufficientemente breve, senza mai superare il valore finale desiderato.

Un approccio razionale al problema inizierà dalla scrittura delle equazioni del moto del sistema, che sono in questo caso estremamente semplici:

$$a(t) = f(t)/m,$$

dove  $a(t)$  indica la accelerazione del carrello.

Una prima possibile soluzione potrebbe essere data calcolando una particolare legge oraria per  $f(t)$  che ottenga lo scopo nel caso nominale. Ad esempio, si pensi di applicare una forza costante  $F$  per un tempo  $T$ , seguita da una forza opposta  $-F$  per un tempo uguale,

$$f(t) = \begin{cases} F, & 0 < t \leq T \\ -F, & T < t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

e si imponga una condizione  $2 * \frac{FT^2}{2\bar{m}} = \hat{p}$ , da cui facilmente una soluzione per  $F$  fissato  $T$ , o viceversa.

Questa soluzione sarebbe in pratica soggetta a molti problemi:

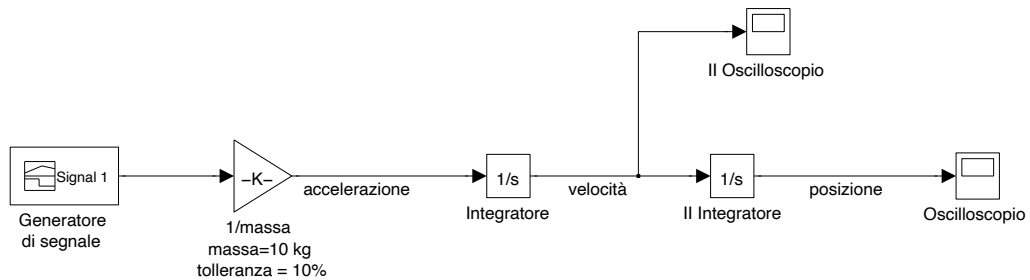


Figura 1.1: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio.

- la posizione finale raggiunta sarebbe pari a quella desiderata solo nel caso nominale, ma se ne discosterebbe in realtà di una quantità dello stesso ordine di grandezza della tolleranza sulla massa;
- se il sistema fisico differisse dal modello matematico in altri parametri, ad esempio se esistesse una resistenza di attrito al moto, la posizione finale non raggiungerebbe mai la posizione desiderata;
- se anche tutto il modello fosse noto esattamente, ma la posizione iniziale della massa non fosse esattamente quella attesa, la posizione raggiunta sarebbe diversa da quella desiderata. Nel caso poi che il carrello avesse inizialmente velocità non nulla, seppur piccola, esso si allontanerebbe indefinitamente dalla posizione desiderata;

Per verificare direttamente queste osservazioni, sono molto utili software di simulazione con interfaccia grafica come il pacchetto **Simulink** del programma **Matlab**. In questi programmi i componenti dei sistemi dinamici sono rappresentati da blocchetti con ingressi, uscite e parametri, che possono essere tra loro collegati con linee dirette che simboleggiano la trasmissione di segnali.

Ad esempio, mediante lo schema Simulink di fig. [1.1](#) si realizza lo schema sopra visto, e si verificano facilmente gli effetti degli errori nei parametri e nelle condizioni iniziali.

Questi problemi potrebbero essere affrontati se la forza da applicare istante per istante venisse decisa non sulla base di un piano preordinato e fisso, ma basandosi sull'attuale evolvere del sistema. Disponendo ad esempio di un

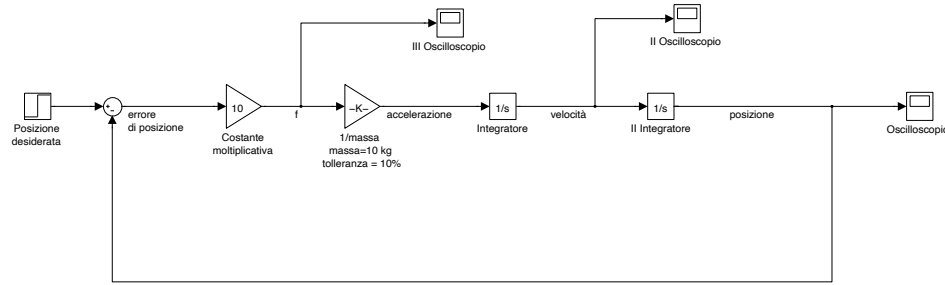


Figura 1.2: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con retroazione proporzionale all'errore di posizione.

senso di posizione, che metta a disposizione la misura della posizione istantanea del carrello  $p(t)$ , si potrebbe pensare di scrivere la legge di azionamento del carrello come funzione di tale misura:  $f(p(t))$ .

Un esempio elementare di una tale legge consiste nell'applicare una forza proporzionale alla distanza tra la posizione desiderata e quella attuale, cioè porre

$$f = k(\hat{p} - p), \quad (1.1)$$

con  $k$  una costante da scegliersi opportunamente.

•È interessante notare come questo tipo di legge, detta *in retroazione*, abbia bisogno di tre fondamentali elementi tecnologici per la realizzazione: oltre all'*attuatore* (in questo caso, il motore che genera la spinta  $f$ ), un *senso* che misura la posizione, ed un *elaboratore* di segnali, che utilizza la misura del sensore (ed il valore desiderato) per effettuare calcoli (nel caso specifico, una semplice moltiplicazione per una costante) e trasformarli in un valore di forza, che dovrà poi essere applicato dall'attuatore.

•È anche interessante notare che la equazione del sistema originale, con la legge di spinta descritta, diviene

$$ma + k(p - \hat{p}) = 0,$$

coincidendo quindi con la equazione di un sistema di pari massa collegato ad una molla di costante elastica  $k$ , a riposo nella posizione  $\hat{p}$  e inizialmente posto in  $p(t = 0) = 0$ . Ne segue che la evoluzione del sistema sarebbe una oscillazione attorno al punto desiderato  $\hat{p}$ , che non soddisferebbe le richieste sia perchè supererebbe la posizione desiderata, sia perchè non sarebbe mai in quiete in essa, come si può verificare con lo schema Simulink di fig. [1.2](#)

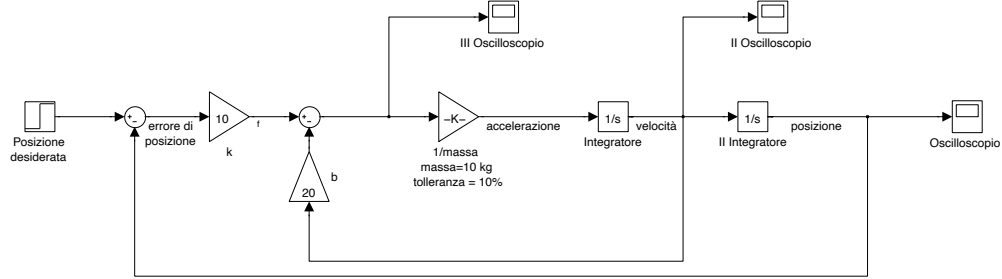


Figura 1.3: Schema per la simulazione del carrello con retroazione proporzionale all'errore di posizione e termine di smorzamento

• Per quanto una retroazione troppo semplice non risolva il problema, il principio della retroazione, se applicato con maggiore sagacia, permette la soluzione di questo problema, come di altri ben più difficili. Una legge che può ad esempio risolvere il problema in esempio, nel caso si disponga anche di un sensore di velocità del carrello, è data da

$$f = k(\hat{p} - p) - bv, \quad (1.2)$$

dove  $v$  è la velocità misurata del carrello, e  $b$  è una opportuna costante positiva. Le equazioni del sistema divengono in questo caso quelle di un sistema massa-molla-smorzatore, che, scegliendo opportunamente le costanti, possono essere tali da soddisfare le specifiche date.

Riesaminando il significato pratico dello scrivere una legge di retroazione come questa, possiamo individuare altri elementi di interesse. La legge (1.2) assume la disponibilità, oltre che di una misura della posizione del carrello, anche della sua velocità: quindi, di un ulteriore sensore (ad esempio una *dinamo tachimetrica*) o della capacità di effettuare una operazione differenziale sul segnale di posizione. Il funzionamento di questo sistema può essere osservato mediante lo schema Simulink di fig. 1.3)

Le operazioni sui segnali in (1.2) consistono in prodotti e somme. Operazioni di questo genere possono essere ottenute agevolmente con circuiti analogici (ad esempio elettronici o fluidici), che trattano cioè segnali continui. Sempre più spesso, peraltro, considerazioni economiche e/o la maggiore complessità delle operazioni da svolgere rendono preferibile adottare per la elaborazione dei segnali strumenti digitali programmabili. Questo implica che le grandezze misurate, che sono continue, vengano *discretizzate*, cioè *quantizzate* (per essere rappresentate da un numero finito di bit) e *campionate*, cioè



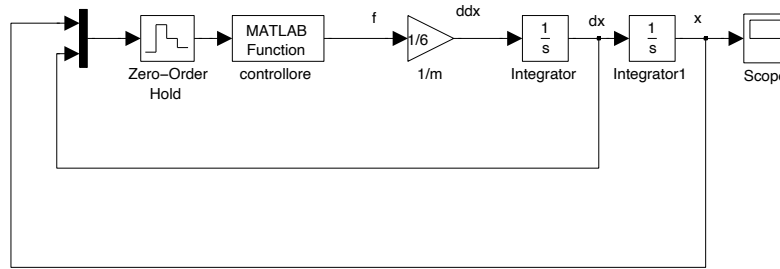


Figura 1.4: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con realizzazione digitale della retroazione

trasformate da funzioni continue del tempo in successioni ordinate di valori corrispondenti a intervalli di tempo prefissati: questa operazione si dice *conversione analogico/digitale*.

In un elaboratore digitale di segnali, le operazioni indicate dalla legge di feedback sono realizzate da una opportuna sequenza di istruzioni, programmabili in uno dei linguaggi disponibili sulla macchina, eseguite poi ciclicamente, producendo ad ogni ciclo un valore per l'azione dell'attuatore. Questo valore deve infine essere trasformato dalla forma digitale in cui è calcolato in forma di segnale continuo con caratteristiche opportune per comandare l'attuatore (*conversione digitale/analogica*).

Si veda ad esempio lo schema Simulink di fig. 1.4. Il blocco “Zero-Order Hold” è qui usato per campionare il segnale di ingresso al blocco con periodo  $T$  a scelta.

Il blocco Matlab Function contiene il programma “controllore.m” che è scritto come segue:

```
function out = Controllore(in)
rp = 1; % riferimento di posizione
% Ingressi del blocco
p = in(1); %misura di posizione
v = in(2); %misura di velocità
% Costanti del sistema
kp = 10; %moltiplicatore dell'errore di posizionamento
kv = 15; %moltiplicatore della misura della velocità
% legge di controllo
f = kp*(rp - p) - kv*v;
% Uscite del blocco
out(1) = f;
```

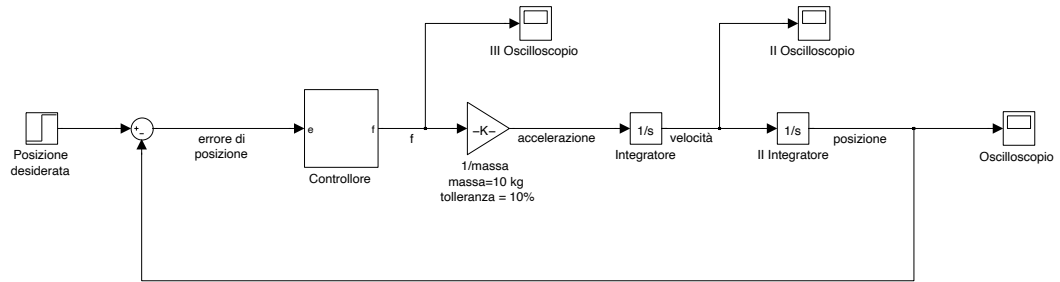


Figura 1.5: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con controllore che usa solo un sensore di posizione.

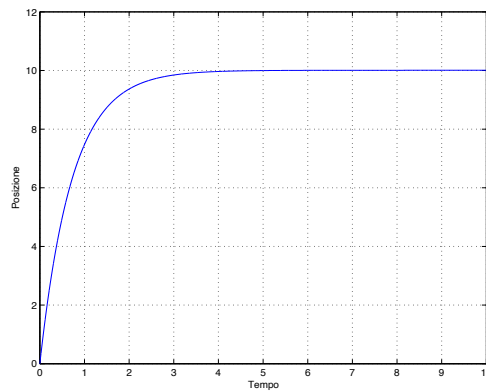


Figura 1.6: Risultati ottenuti dal controllore con l'uso del solo un sensore di posizione.

È importante osservare che, per valori del tempo di campionamento troppo elevati (campionamento troppo lento, ad esempio  $T = 1$ ), il sistema non si comporta affatto come desiderato, mentre questo avviene con un campionamento sufficientemente rapido (ad es.  $T \leq 0.1$ ).

Per la soluzione in assenza di misure di velocità, e di molti altri casi quotidianamente incontrati nella pratica della ingegneria dei sistemi meccanici dinamici, sono necessari strumenti più avanzati, che sono proprio l'oggetto di questo corso: si veda ad esempio lo schema di fig. 1.5, ed il risultato di posizione in fig. 1.6

# Capitolo 2

## Sistemi Dinamici

### 2.1 Modelli di Sistemi Dinamici

•Questo corso si occupa di studiare sistemi dinamici, che cioè evolvono la loro configurazione nel tempo, così come essi si trovano in natura o nei dispositivi ingegneristici.

•Oltre a studiare il modo in cui questi sistemi si comportano quando lasciati a sé stessi, ci interessa capire come è possibile influenzare il loro comportamento secondo le nostre finalità. Inoltre, vogliamo studiare come è possibile estrarre le migliori informazioni possibili sulle caratteristiche “interiori” di un sistema dinamico, quando solo alcuni fenomeni che lo riguardano possono essere misurati.

•Evitando per il momento di dare una definizione formale di Sistemi Dinamici, ci richiamiamo alla nozione comune di “Sistema Dinamico” come insieme di elementi variabili, che evolvono in modo interdipendente secondo date leggi. Il concetto di S.D. è sviluppato induttivamente a partire dagli innumerevoli esempi di esperienza comune, tra cui si citano di solito la dinamica di un sistema meccanico massa–molla–smorzatore, o quella di un circuito elettrico RLC; la crescita/diminuzione delle popolazioni di specie animali in competizione, o le iterazioni di un algoritmo iterativo; il sistema di riscaldamento/condizionamento di un edificio, o il meccanismo di funzionamento di un riconoscitore di codici a barre.

•Lo strumento fondamentale a nostra disposizione sarà il modello matematico di questi sistemi. Non tutti i problemi che coinvolgono sistemi sono matematizzabili in modo soddisfacente: d'altronde, la matematica è l'unico strumento che consente ad un ingegnere di valutare quantitativamente e obiettivamente le proprietà di un sistema.

•Ci troveremo spesso perciò di fronte a *modelli matematici approssimati*

di sistemi reali: sarà in questo caso necessario tenere conto di quanto i risultati del nostro studio approssimato permangano validi anche rispetto al vero sistema.

• Tra tutti i sistemi dinamici, quelli di forse più immediata comprensione sono quelli descritti mediante *equazioni differenziali* o *equazioni alle differenze*, concetti già noti dalla analisi matematica e numerica. Nel primo caso si parla di sistemi che evolvono in *tempo continuo*, mentre nel secondo si parla di *tempo discreto*

### 2.1.1 Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Continuo

• Nella modellazione di sistemi fisici sottoposti a leggi che legano tra loro grandezze variabili in modo continuo in funzione di una sola variabile, tipicamente il tempo, lo strumento matematico fondamentale sono le Equazioni Differenziali Ordinarie (“O.D.E.”, in sigla). Vediamo rapidamente alcuni semplicissimi esempi di come tali O.D.E. modellino le leggi fisiche in alcuni domini fisici di uso comune nell’ingegneria.

•

**Esempio: Meccanica: Leggi di Newton, Hooke, Rayleigh** La legge del moto di un corpo di massa  $m$  in posizione  $x$  sottoposto a una forza esterna variabile  $u(t)$  è data da una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$u(t) = m\ddot{y}$$

Se il corpo è collegato ad una molla di costante elastica (di Hooke)  $k$ , a riposo in posizione  $\hat{y}$ , si ha

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}(y - \hat{y}) + \frac{1}{m}u(t).$$

Se inoltre il corpo è collegato ad uno smorzatore viscoso di costante dissipativa (di Rayleigh)  $b$ , si ha

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}(y - \hat{y}) + \frac{1}{m}u(t).$$

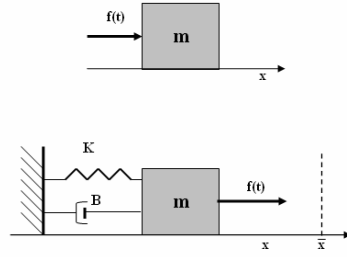


Figura 2.1: Esempi di sistemi dinamici meccanici.

**Esempio: Modello Semplificato di Sospensione Meccanica**

Sia  $m$  la massa sospesa di un veicolo che insiste su una singola ruota, e siano  $k$  e  $b$  coefficienti di elasticità e di smorzamento della sospensione. Sia  $y$  la posizione (in un riferimento assoluto) della massa sospesa e  $u$  indichi la posizione del punto cui è riferita la sospensione. Assegnato il moto del veicolo ed il profilo della strada, l'altezza dal suolo della sospensione è determinata dalla legge  $u(t)$ , che interpretiamo come un ingresso di disturbo. Si desidera studiare il moto della massa sospesa.

Le equazioni del moto sono (immaginando un moto orizzontale)

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u) = 0$$

ovvero

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

**Esempio: Modello Disaccoppiato di Sospensione Attiva di un Veicolo** Sia  $m_v$  la massa di un veicolo che insiste su una singola ruota, e siano  $k_s$  e  $b_s$  le costanti della sospensione. Sia inoltre  $m_r$  la massa della ruota,  $k_r$  e  $b_r$  i coefficienti di elasticità e di smorzamento caratteristici del pneumatico. Siano infine  $y_v$  la posizione verticale (in un riferimento assoluto) del veicolo e  $y_r$  quella della ruota, e  $u_d$  indichi l'altezza assoluta del manto stradale incontrato dal veicolo nel suo moto, e  $u_a$  la forza che un attuatore posto tra cassa e ruota può esercitare al fine di modificare il comportamento della sospensione.

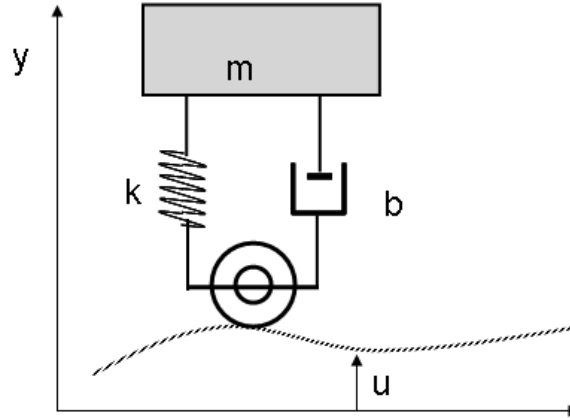


Figura 2.2: Semplice modello di sospensione con un solo elemento inerziale

Le equazioni del moto sono in questo caso

$$\begin{aligned} m_v \ddot{y}_v + b_s (\dot{y}_v - \dot{y}_r) + k_s (y_v - y_r) &= u_a \\ m_r \ddot{y}_r + b_s (\dot{y}_r - \dot{y}_v) + k_s (y_r - y_v) + b_r (\dot{y}_r - \dot{u}_d) + k_r (y_r - u_d) &= -u_a \end{aligned}$$

•

### Esempio: Circuiti elettrici: Leggi di Ohm, Faraday, Henry

La relazione tra la caduta di tensione ai capi di una resistenza di  $R$  e la corrente  $i$ ,

$$v(t) = i(t)R,$$

è una semplice relazione algebrica che non richiede equazioni differenziali. Invece la relazione tra la corrente tra le armature di un condensatore di capacità  $C$  e la tensione  $v$ ,

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt},$$

e la relazione tra la tensione ai capi di una induttanza  $L$  e la corrente,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

sono descritte da equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

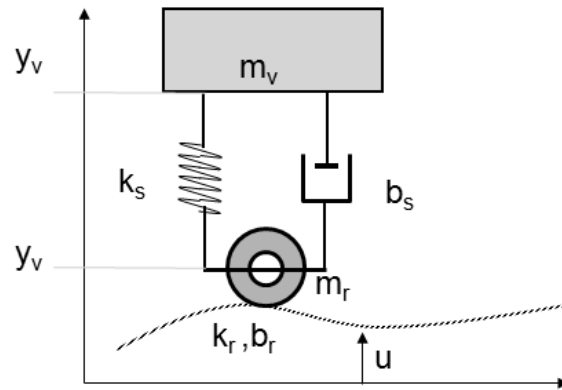


Figura 2.3: Modello di sospensione con due elementi inerziali

La legge di Kirchhoff (bilancio delle cadute di potenziale lungo le maglie, o delle correnti ai nodi) ci permette di scrivere le equazioni di un circuito. Ad esempio su un parallelo di  $R, C, L$ , con corrente totale  $i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$  e tensione  $v(t)$  si ottiene

$$\frac{di(t)}{dt} = \ddot{v}C + \frac{\dot{v}}{R} + \frac{v}{L},$$

cioè una O.D.E. del secondo ordine.

**Esempio: Leggi di scambio del calore**

Un modello elementare di uno scambiatore di calore alla temperatura  $T$ , cui viene fornito calore proporzionalmente al valore di controllo  $u$ , e che scambia con un ambiente esterno a temperatura costante (fig. 2.5), è dato dalla O.D.E. di primo ordine  $\dot{T} = \alpha u - \beta T$ .

## 2.2 Forma normale e forma di stato

•Rivolgeremo il nostro studio a sistemi rappresentati da equazioni differenziali o alle differenze ordinarie di ordine  $n$  del tipo

$$F(y(t), \mathbb{D}y(t), \dots, \mathbb{D}^n y(t), u(t), \mathbb{D}u(t), \dots, \mathbb{D}^p u(t), t) = 0,$$

dove:

- nel caso delle ODE,  $t$  è la variabile indipendente che assume valori reali continui ( $t \in \mathbb{R}$ ), e  $\mathbb{D}$  è l'operatore differenziale totale rispetto a  $t$ , cioè  $\mathbb{D}^k y(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$ . Questi sistemi si dicono “a tempo continuo”;
- per le eq. alle differenze, la variabile indipendente  $t$  assume valori discreti, tipicamente interi  $t \in \mathbb{Z}$ , e  $\mathbb{D}$  è l'operatore di scorrimento in avanti (*shift*)  $\mathbb{D}^k y(t) = y(t + k)$ . Talvolta si usa anche la scrittura



compatta  $y^+$  per indicare  $\mathbb{D}y(t) = y(t+1)$  quando l'istante di riferimento è chiaro dal contesto. Sistemi di questo tipo sono detti “a tempo discreto”;

- Il termine forzante  $u(t)$  è rispettivamente una funzione (continua a tratti)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero una successione  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

• Ricordiamo che, se il modello è ben posto, è sempre possibile riscriverlo in forma *normale*, cioè

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, \mathbb{D}u, \dots, \mathbb{D}^p u, t). \quad (2.1)$$

Sotto opportune ipotesi, tra cui quella fondamentale  $n \geq p$ , è possibile ricondurre questa equazione di ordine  $n$  ad un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.2)$$

dove si usa la notazione vettoriale

$$f(\cdot) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}; \quad x(t) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si noti che in questa equazione appaiono solo le funzioni (successioni)  $x_i(t)$ ,  $u(t)$  e la derivata (shift) prima delle  $x_i(t)$ .

• Una equazione differenziale o alle differenze (ben posta) individua tutta l'evoluzione delle grandezze coinvolte quando ne siano date le *condizioni iniziali*. Queste sono specificate, nel caso della (2.1) in T.C., dai valori ad un istante  $t_0$  di  $y$  e delle sue prime  $n-1$  derivate, e di  $u$  e delle sue prime  $p-1$  derivate; ovvero dai valori di  $y(t_0)$ ,  $y(t_0+1)$ ,  $\dots$ ,  $y(t_0+n-1)$  e delle  $u(t_0)$ ,  $u(t_0+1)$ ,  $\dots$ ,  $u(t_0+p-1)$  in T.D..

Nel caso della (2.2), le condizioni iniziali sono date dai valori dello stato al tempo  $t_0$ , ad es.  $x(t_0) = x_0$ .

• Una soluzione del sistema (2.2) è una funzione  $x(t)$  che verifica (2.2) per ogni  $t$ , quindi

$$x(t_0) = x_0$$

e

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad \forall t.$$

Per sottolineare la dipendenza di questa soluzione dalle condizioni iniziali e dalle funzioni di ingresso, scriveremo talvolta  $x(t, x_0, u)$ .

•Nota che sia la soluzione  $x(t)$  della (2.2), è possibile trovare la soluzione  $y(t)$  della (2.1) attraverso una relazione algebrica

$$y(t) = h(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) = h(x, u, t). \quad (2.3)$$

•La descrizione di un sistema dinamico data da (2.2) e (2.3) è molto conveniente per il nostro studio. Una parte del nostro studio sarà quindi rivolta alla rappresentazione dei sistemi in forma di stato, che, ove si ometta la dipendenza di  $x$  e  $u$  da  $t$ , sono sinteticamente descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

•La tecnica per passare dalla forma (2.1) alla forma (2.2) è molto semplice nel caso  $p = 0$

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, t).$$

Basta infatti porre

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \mathbb{D}y \\ \vdots \\ \mathbb{D}^{n-1}y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

così che si ottiene

$$\mathbb{D}x = \begin{bmatrix} \mathbb{D}x_1 \\ \mathbb{D}x_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}x_{n-1} \\ \mathbb{D}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = f(x, u, t),$$

cioè la forma voluta. Le condizioni iniziali della forma (2.1) si traducono immediatamente in condizioni iniziali sulle  $x$  della forma (2.2). Inoltre, la variabile  $y$  è banalmente ottenuta dalla conoscenza di una soluzione  $x(t)$ :

$$y(t) = h(x, u, t) = x_1$$

•Nel caso più generale in cui sia  $0 < p \leq n$ , il passaggio nella forma di sistema di  $n$  equazioni del primo ordine è più complesso. Vedremo più avanti come procedere a scrivere sistemi con  $0 < p \leq n$  nella forma di stato con soli  $n$  stati, nel caso che l'equazione differenziale abbia una particolare, notevolissima proprietà detta di linearità.

### 2.2.1 Sistemi di equazioni differenziali

Quanto sopra detto nel caso di una equazione in forma normale con un termine forzante si generalizza al caso di  $l$  equazioni con  $m$  termini forzanti:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{n_i} y_i &= \hat{F}_1(y_1, \dots, \mathbb{D}^{n_1-1} y_1, \dots, y_l, \dots, \mathbb{D}^{n_l-1} y_l, \\ &\quad u_1, \dots, \mathbb{D}^{p_{i1}} u_1, \dots, u_m, \dots, \mathbb{D}^{p_{im}} u_m, t); \end{aligned} \quad (2.6)$$

che si riporta, sotto opportune ipotesi, ad un sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = \sum_{i=1}^l n_i$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , e  $y \in \mathbb{R}^l$ . Ad illustrazione, si veda

l'esempio di due masse mobili vincolate riportato poco sotto.

### 2.2.2 Stati, ingressi, uscite

• Nella forma

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned}$$

si individuano alcuni degli elementi fondamentali dei Sistemi Dinamici, cui si danno particolari denominazioni:

**Stato** Il vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  è detto vettore di stato (o brevemente “stato”) del sistema;

**Ingressi** I termini (funzioni o successioni) forzanti raccolti nel vettore  $u(t)$  sono detti ingressi del sistema;

**Uscite** Le funzioni (o successioni)  $y(t)$  sono dette uscite del sistema.

• Lo stato del sistema è un insieme di variabili, la cui conoscenza ad un generico istante  $t_0$ , assieme alla conoscenza degli ingressi  $u(t)$  per ogni  $t \geq t_0$  e delle equazioni del modello (2.7), è sufficiente a determinare univocamente i valori dello stato stesso  $x(t)$  e delle uscite  $y(t)$  per ogni tempo successivo a  $t_0$ . Questa proprietà dei modelli a spazio di stato viene detta di “separazione tra passato e futuro”.

• Un ingresso  $u_i(t)$  rappresenta tipicamente l'azione che un agente esterno al sistema può esercitare su di esso, forzandone la sua evoluzione. Dal punto di vista dell'ingegnere, sarà importante distinguere

- ingressi manipolabili a piacere dal progettista, detti anche “controlli”, che potranno essere scelti in modo da influenzare il comportamento del sistema in modo da rispondere a prestabilite specifiche;
- ingressi incontrollabili, o “disturbi”, che invece possono alterare i comportamenti del sistema in senso negativo.

• Una uscita  $y_i(t)$  del sistema rappresenta una grandezza variabile in termini della quale è “riassunto” il comportamento del sistema. A seconda dei casi, una uscita si può caratterizzare come

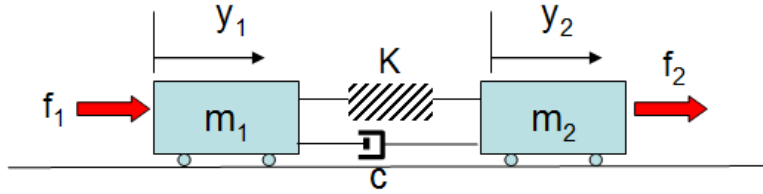
- una grandezza indicatrice del comportamento del sistema, il cui andamento nel tempo è soggetto a specifiche di progetto ed è l’obiettivo primario delle scelte di controllo (uscita primaria o “controllata”);
- una grandezza disponibile per la misurazione (a differenza degli stati, che in generale possono non esserlo), la cui conoscenza, assieme eventualmente alla conoscenza del modello (2.7) e/o a quella dell’ingresso  $u(t)$ , può essere utilizzata per acquisire maggiori informazioni sul sistema (uscita secondaria o “misurata”);

• Si noti che, mentre gli ingressi sono alternativamente di controllo o di disturbo, le uscite controllate sono anche tipicamente misurate.

• Ad esempio, nel sistema massa–molla–smorzamento sopra visto, le variabili di stato scelte coincidono con posizione e velocità del punto materiale; l’ingresso con la forza esterna agente sulla massa, e l’uscita con la posizione. In un modello più completo, possiamo pensare che sia presente oltre alla forza intenzionalmente controllata  $f$  una forza di disturbo  $f_{dist}$ ; e che, sebbene si desideri primariamente trovare una legge per  $f$  che faccia in modo che la posizione della massa sia quella desiderata ad ogni istante (uscita primaria), sia disponibile a questo scopo non solo la misura della posizione stessa, ma anche quella della velocità ad ogni istante (si vedrà più avanti che questa uscita misurata potrà essere molto utile nel migliorare le caratteristiche del sistema).

• Un sistema con singolo ingresso viene indicato con la sigla SI, mentre per ingressi multipli si usa MI. Analogamente le sigle SO e MO sono usate per singole e multiple uscite. Si parla poi di sistemi SISO, SIMO, MISO, e MIMO, con ovvio significato.

**Esempio: Masse mobili vincolate.** Si consideri il sistema descritto in figura



che è retto dal sistema di due equazioni differenziali di secondo ordine

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) &= f_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) &= f_2, \end{aligned}$$

ovvero in forma normale

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} (-c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k(y_1 - y_2) + f_1) \\ \frac{1}{m_2} (-c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k(y_2 - y_1) + f_2) \end{bmatrix}.$$

Ponendo  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \dot{y}_1, x_4 = \dot{y}_2$ , si ottiene la forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1} (-c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2) + f_1) \\ \frac{1}{m_2} (-c(x_4 - x_3) - k(x_2 - x_1) + f_2) \end{bmatrix}; \\ y &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

che può essere riscritta in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

## 2.3 Proprietà dei Sistemi Dinamici

### 2.3.1 Causalità

• Un sistema si dice “causale” (o “proprio”) se per esso la evoluzione della uscita  $y(t)$  dipende (oltre che dalle condizioni iniziali) solo dai valori dell’ingresso  $u(\tau)$  per  $\tau \leq t$ . Se questo vale per  $\tau < t$ , il sistema si dice “strettamente” causale (o proprio).

• In un sistema causale, la uscita  $y(t)$  non dipende quindi dalla intera funzione di ingresso  $u(\cdot)$ , ma solo dal suo andamento nel passato (se strettamente proprio) o nel passato e nel presente (se non strettamente proprio).

• Un sistema dinamico rappresentato da una equazione in forma normale

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, \mathbb{D}u, \dots, \mathbb{D}^p u, t)$$

è causale tra l’uscita  $y$  e l’ingresso  $u$  se  $n \geq p$ , e strettamente causale se  $n > p$ .

• Se un sistema è non causale tra  $u$  e  $y$ , esso diviene strettamente causale qualora si inverta il ruolo di ingresso e uscita. Questa osservazione spiega la scelta, indicata in precedenza, di identificare come “uscita” la grandezza che appare con derivata o differenza di ordine più alto nella equazione del sistema.

• Se un sistema non è causale tra  $u$  e  $y$ , esso si dice anche *non fisicamente realizzabile*. Questo è particolarmente evidente per i sistemi a tempo discreto, nei quali per valutare la  $y$  in un istante  $t$ , sarebbe necessario conoscere la  $u$  in istanti successivi a  $t$ , cioè nel futuro.

• In alcuni casi particolari, in cui tutta la evoluzione della  $u(\cdot)$  sia fissa e nota a priori, sistemi non causali possono in effetti essere implementati e usati nella pratica (si pensi ad esempio ai lettori di CD che leggono anticipatamente tratti della traccia da eseguire per ottenere migliore filtraggio e robustezza). Tali sistemi non sono però di interesse per questo corso, dove la conoscenza delle variabili correnti deve essere sempre pensata come disponibile solo *al momento* (o addirittura con ritardo), cioè in tempo reale.

• Si consideri ora un sistema in forma di stato (2.7), e si consideri la interpretazione grafica di tale scrittura rappresentata in fig. ??

• Lo schema suggerisce un rapporto causa–effetto tra gli ingressi e le uscite, mediato dagli stati.

• Un sistema dinamico rappresentato in forma di stato è sempre causale, a causa della definizione stessa di vettore di stato. In altri termini, un sistema con equazione in forma normale non causale non può essere posto in forma di stato (a meno di non scambiare il ruolo di ingressi e uscite).

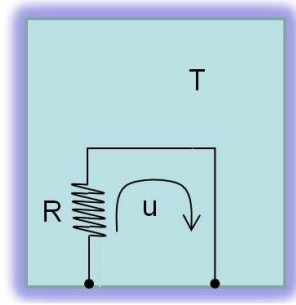


Figura 2.5: Modello elementare di ambiente riscaldato

•La forma di stato di un sistema strettamente causale evidenzia la mancanza di una dipendenza immediata, algebrica, tra l'uscita e l'ingresso, che non appare nella equazione di uscita se non attraverso l'effetto che esso ha sugli stati:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, t)\end{aligned}$$

### 2.3.2 Stazionarietà

•Un sistema nelle cui equazioni non appare esplicitamente il tempo, si dice “stazionario” o “tempo-invariante”. Un sistema in forma normale (2.1) è stazionario se  $\frac{\partial \hat{F}(\cdot)}{\partial t} = 0$ . Un sistema in forma di stato (2.2) è tempo-invariante se  $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial h(\cdot)}{\partial t} = 0$ , e semplicemente si scrive

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

•Le soluzioni di un sistema tempo-invariante non dipendono dall'istante iniziale. In altri termini, la soluzione

$$x_1(t) = x(t, x(t_0) = x_0, u(t - t_0))$$

corrispondente a condizioni iniziali  $x_0$  al tempo  $t_0$  e all'ingresso  $u(\tau)$  applicato a partire da  $\tau = t_0$ , differisce dalla soluzione

$$x_2(t) = x(t, x(t - t_1) = x_0, u(t - t_1))$$

che invece corrisponde a condizioni iniziali  $x_0$  al tempo  $t_1$  e allo stesso ingresso  $u(\tau)$  applicato però a partire da  $t_1$ , solo per una traslazione nel tempo:  $x_1(t - t_0) = x_2(t - t_1)$ . Si può verificare questo per semplice sostituzione e calcolo.

### 2.3.3 Linearità

• Un sistema in forma normale (2.1) nel quale la funzione  $\hat{F}(\cdot)$  sia lineare rispetto alle  $\mathbb{D}^i y, i = 1, \dots, n-1$  e alle  $\mathbb{D}^j u, j = 1, \dots, p$ , cioè un sistema nella forma

$$\mathbb{D}^n y = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i(t) \mathbb{D}^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) \mathbb{D}^j u, \quad (2.8)$$

si dice un **sistema lineare**. I coefficienti  $a_i, b_j$  della combinazione lineare sono in generale funzioni del tempo. Se il sistema lineare è anche stazionario, i coefficienti sono costanti.

Si ricordano dalla analisi le seguenti proprietà delle equazioni lineari differenziali e alle differenze in forma normale

- Ogni soluzione della equazione lineare (2.8) è data dalla somma di un integrale omogeneo (ottenuto per  $u \equiv 0$ ) e di un integrale particolare (ottenuto ignorando le condizioni iniziali);
- Se  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sono  $n$  soluzioni omogenee indipendenti, ogni soluzione omogenea è una combinazione lineare delle  $y_i(t)$ ;
- Le  $n$  costanti della combinazione lineare sono univocamente determinate date le  $n$  condizioni iniziali del sistema. Pertanto, e per la linearità del sistema, se  $y_a(t)$  è la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali  $y(t_0) = y_{a0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1} y(t_0) = y_{a0}^{(n-1)}$ , e  $y_b(t)$  quella corrispondente a  $y(t_0) = y_{b0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1} y(t_0) = y_{b0}^{(n-1)}$ , la soluzione corrispondente a  $y(t_0) = \alpha y_{a0} + \beta y_{b0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1} y(t_0) = \alpha y_{a0}^{(n-1)} + \beta y_{b0}^{(n-1)}$  è data da  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$  (sovrapposizione degli effetti delle condizioni iniziali).
- La sovrapposizione degli effetti vale anche per le funzioni (successioni) di ingresso: se  $y_{pi}(t)$  è l'integrale particolare di (2.8) per  $u(t) = u_i(t)$ , allora la soluzione corrispondente a  $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots$  è data da  $\alpha_1 y_{p1}(t) + \alpha_2 y_{p2}(t) + \dots$ ;
- Se  $y_p(t)$  è un integrale particolare di (2.8) per  $u(t)$ , allora  $\mathbb{D} y_p(t)$  è un integrale particolare corrispondente a  $Du(t)$  (si derivi una volta — o si trasli avanti di un passo — la equazione (2.8)).



• Un sistema in forma di stato (2.7) nel quale le funzioni  $f(x, u, t)$  e  $h(x, u, t)$  siano lineari rispetto sia ad  $x$  che a  $u$ , è un sistema lineare. In altri termini, in un sistema lineare si ha

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= A(t)x + B(t)u \\ h(x, u, t) &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

dove  $A, B, C, D$  sono matrici rispettivamente di dimensioni  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ , e  $l \times m$ , i cui elementi sono in generale funzioni del tempo (ma non dello stato).

• Un sistema lineare e stazionario in forma di stato è scritto poi

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax + Bu; \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{2.9}$$

con matrici a elementi costanti, delle stesse dimensioni.

### 2.3.4 Forma Canonica di Controllo

• Come già visto, quando un sistema SISO è dato in termini della sua equazione normale (come spesso avviene derivando un modello fisico da equazioni differenziali o incrementali di ordine superiore) del tipo

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + u(t),$$

il metodo più diretto per riscrivere il sistema nello spazio di stato consiste nel porre  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \mathbb{D}y$ , etc.. Si ottiene così una equazione di stato nella quale le matrici hanno una forma particolare:

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right]; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [1 \mid 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]; \quad D_c = 0$$

La forma di  $A_c$  si dice *compagna orizzontale inferiore* (il motivo di tale denominazione è nel fatto che questa matrice ha autovalori coincidenti con le radici del polinomio  $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$  che ad essa si accompagna).

• Nel caso più generale in cui appaiano nella forma normale anche le derivate (differenze) di ordine più elevato dell'ingresso, cioè

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j u(t)$$

si può scrivere ancora il sistema in forma simile, utilizzando le proprietà dei sistemi lineari di sovrapposizione degli effetti degli ingressi e di risposta alla derivata di un segnale come derivata della risposta.

• Infatti, detta  $z(t)$  la soluzione particolare della equazione “ausiliaria”

$$\mathbb{D}^n z(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i z(t) + u(t), \quad (2.10)$$

si consideri ancora la realizzazione nello spazio di stato data poco sopra, con stato  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \mathbb{D}z$ , ...,  $x_n = \mathbb{D}^{n-1}z$ . La soluzione particolare corrispondente a un diverso ingresso  $v(t)$  che sia combinazione lineare di  $u(t)$  e delle sue derivate,  $v(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j u(t)$  è data da

$$y(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j z(t). \quad (2.11)$$

Per dimostrarlo, basta osservare (moltiplicando entrambe i termini della (2.10) per una costante  $\alpha$ ) che la soluzione particolare corrispondente a  $\alpha u(t)$  è data da  $\alpha z(t)$ . D'altronde, applicando ad entrambe i termini della equazione l'operatore  $\mathbb{D}$ , si osserva anche che la soluzione particolare corrispondente a  $v(t) = \mathbb{D}u(t)$  è data da  $y(t) = \mathbb{D}z(t)$  ( $y(0) = \mathbb{D}z(0)$ ). Il resto segue dal principio di sovrapposizione degli effetti reiterando queste osservazioni. Si osservi esplicitamente che la soluzione omogenea di queste equazioni dipende dalle condizioni iniziali, che devono essere correttamente specificate per le nuove soluzioni (vedi più avanti).

• Sulla base di quanto detto, si può quindi ottenere una forma di stato (detta *canonica di controllo* per motivi che saranno chiari in corsi più avanzati) che utilizza le stesse matrici  $A, B$  corrispondenti alla equazione ausiliare, ma modifica le matrici  $C$  (ed eventualmente  $D$ ) per ottenere le opportune combinazioni della soluzione ausiliare descritte dalla (2.11).

Infatti, nel caso di sistemi strettamente propri ( $p < n$ ), si può scrivere

$$y(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j z(t) = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i$$

quindi

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_m & -a_{m+1} & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right], \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [ \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad ], \quad D_c = 0.$$

• Nel caso di sistemi non strettamente propri ( $p = n$ ), usando la (2.10), si può invece scrivere

$$y(t) = \sum_{j=0}^n b_j \mathbb{D}^j z(t) = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i + b_n \mathbb{D}^n z = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i - b_n \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} + b_n u$$

quindi la forma canonica ha le stesse matrici  $A_c$  e  $B_c$  ma

$$C_c = [ \quad b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad b_2 - b_n a_2 \quad \cdots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1} \quad ]; \quad D_c = [b_n].$$

**Esempio:** Data l'equazione  $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$ , un sistema in forma di stato che la realizza (in forma canonica di controllo) è

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C_c &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0. \end{aligned}$$

• La realizzazione di un algoritmo numerico che simuli un sistema LTITC dato nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x + D_c u \end{aligned}$$

è resa immediata dalla forma di stato. Usando ancora il metodo di Eulero in avanti, cioè ponendo  $\dot{x}(kT) \approx \frac{1}{T}(x(kT+T) - x(kT))$ , si ottiene il sistema LTITD

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \hat{A}_c x(k) + \hat{B}_c u(k) \\ y(k) &= C_c x(k) + D_c u(k) \end{aligned}$$

con  $\hat{A}_c = I + A_c T$  e  $\hat{B}_c = T B_c$ .

**Esempio:** Il codice che realizza una simulazione del sistema dell'esempio più recente può essere scritto in un linguaggio che permette le operazioni tra matrici come Matlab in modo semplicissimo:

```
m = 2; b = 2; K = 3; % Assegnazione Costanti
T = 0.1; % Tempo di Campionamento
T_fin = 10; % Durata Simulazione
% Valori iniziali di posizione e velocità
y_0 = .2; Dy_0=0;
%Generazione di segnali
t_vec=0:T:T_fin; % Vettore dei tempi
f_in=10*cos(2*t_vec); % Vettore delle forze di ingresso
y_out=zeros(1,length(t_vec)); % Allocazione vettore
                                % delle posizioni in uscita
% Calcolo delle matrici (A,B,C,D) del modello discretizzato
A = [1 0;0 1] + [0 1;-K/m -b/m]*T;
B = [0; 1/m]*T;
C = [1 0];
D = 0;
% Assegnazione delle condizioni iniziali alle variabili di stato.
x_1 = y_0; x_2 = Dy_0;
x = [x_1 x_2]';
for k=1:length(t_vec)
    F=f_in(k);
    y_out(k)= C*x + D*F;
    x = A*x + B*F;
end
% Grafica
plot(t_vec,y_out,'-b',t_vec,f_in,'-r');
```

Si osservi che l'introduzione dello stato nell'algoritmo permette di non usare le variabili di buffer: in effetti, il numero delle variabili di buffer indispensabili a scrivere un programma che realizza un sistema corrisponde al numero di stati necessario ad una sua realizzazione.

### Interpretazione degli stati della forma canonica di controllo

Si è sinora fornito un metodo per scrivere nello spazio di stato un sistema le cui soluzioni particolari coincidono con le soluzioni particolari del

sistema originalmente dato in forma normale. Per avere perfetta uguaglianza delle soluzioni della stessa equazione in forma normale per assegnate condizioni iniziali (che considereremo per comodità riunite nel vettore  $Y_0 = [y(0) \ \mathbb{D}y(0) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}y(0)]^T$ ), è però necessario poter scegliere opportunamente le condizioni iniziali dello stato  $x(0)$ .

Si osservi innanzitutto che, nel caso della equazione ausiliare (2.10), per le posizioni fatte si ha immediatamente che deve essere  $x(0) = Y_0$ .

In generale, data una equazione differenziale lineare in forma normale ed una sua realizzazione nello spazio di stato

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

consideriamo la funzione di uscita  $y(t)$ , e calcoliamo le sue derivate/differenze fino all'ordine  $(n-1)$ :

$$\begin{aligned}y &= Cx + Du \\ \mathbb{D}y &= C\mathbb{D}x + D\mathbb{D}u = CAx + CBu + D\mathbb{D}u \\ \mathbb{D}^2y &= CA\mathbb{D}x + CB\mathbb{D}u + D\mathbb{D}^2u = CA^2x + CABu + CB\mathbb{D}u + D\mathbb{D}^2u \\ &\vdots \\ \mathbb{D}^{(n-1)}y &= CA^{n-1}x + CA^{n-2}Bu + \dots + CB\mathbb{D}^{(n-2)}u + D\mathbb{D}^{(n-1)}u.\end{aligned}$$

Ponendo in notazione più compatta

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & D & 0 \\ CA^{n-2}B & \dots & \dots & \dots & CB & D \end{bmatrix};$$

e introducendo i vettori

$$\begin{aligned}Y_t &= [y(t) \ \mathbb{D}y(t) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}y(t)]^T, \\ U_t &= [u(t) \ \mathbb{D}u(t) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}u(t)]^T,\end{aligned}$$

si ha in forma matriciale

$$Y_t = \mathcal{O}x(t) + \mathcal{H}U_t. \quad (2.12)$$

Nella ipotesi che la matrice  $\mathcal{O}$  che moltiplica lo stato  $x(t)$  sia invertibile, e valutando questa equazione al tempo  $t = 0$ , si ottiene il valore desiderato per lo stato iniziale

$$x(0) = \mathcal{O}^{-1}(Y_0 - \mathcal{H}U_0).$$

Come è possibile osservare da quest'ultima espressione, le condizioni da assegnare allo stato iniziale  $x(0)$  dipendono da quelle della forma normale  $Y_0$  nonché dai valori dell'ingresso e delle sue prime  $n - 1$  derivate al tempo zero (ovvero, in T.D., dai suoi primi valori al tempo  $0, 1, \dots, n - 1$ ).

È inoltre evidente da questa relazione che il significato fisico dello stato scelto per la forma canonica di controllo differisce da quello inizialmente posto (e valido per le equazioni ausiliarie), che ricordiamo era una catena di derivate o differenze (nella notazione recentemente introdotta, lo stato della forma canonica di controllo per l'equazione ausiliare coincide con  $Y_t$ ).

Come è evidente, affinché sia possibile nel caso generale determinare condizioni iniziali dello stato che diano evoluzione della uscita congruente a quella assegnata nella forma normale con condizioni iniziali, è necessario che la matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

sia invertibile. Tale matrice prende il nome di matrice di osservabilità, e verrà studiata in corsi più avanzati: si vedrà che  $\mathcal{O}$  non risulterà invertibile solo qualora esista una equazione differenziale di ordine inferiore ad  $n$  che produce la stessa evoluzione in corrispondenza agli stessi ingressi (quindi, quando la equazione differenziale da cui si parte non sia la minima possibile per descrivere il sistema dato).

È infine possibile facilmente ottenere la forma normale a partire dalla forma di stato. A tal fine, si iteri la procedura di derivazione/differenza ancora una volta, ottenendo

$$\mathbb{D}^{(n)}y = CA^n x + CA^{n-1}Bu + \dots + CB \mathbb{D}^{(n-1)}u + D \mathbb{D}^{(n)}u,$$

e si sostituisca lo stato  $x$  con la soluzione della (2.12). Si noti che sarà  $D = 0$  se il sistema è strettamente causale. Inoltre, come è facile verificare direttamente dalle matrici della forma canonica, si ha che  $CB = CAB = \dots = CA^{n-p-2}B = 0$ , e che il primo termine non nullo è  $CA^{n-p-1}B$ , che moltiplica  $\mathbb{D}^p u$ . La differenza  $n - p$  tra l'ordine massimo delle derivate delle uscite  $n$  e degli ingressi  $p$  che appaiono nella equazione dinamica del sistema viene detto *grado relativo* del sistema<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Un sistema proprio ha quindi grado relativo non negativo; un sistema strettamente proprio ha grado relativo positivo

## 2.4 Soluzioni delle Equazioni Dinamiche

Per un sistema ingresso–stati nella forma

$$\mathbb{D}x = f(x, u(t), t) \quad x(0) = x_0,$$

l'esistenza di soluzioni, cioè di funzioni o successioni  $\hat{x}(\cdot)$  tali per cui valga

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(x_0, u(t), t) : \quad \mathbb{D}\hat{x} = f(\hat{x}, u(t), t), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

non è in generale garantita; né peraltro, laddove esistano, ne è garantita l'unicità. Ad esempio, la semplice equazione in tempo-continuo

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}, \quad x(0) = 0$$

ha due soluzioni  $x(t) = \pm\sqrt{t}$  entrambe valide; l'equazione

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

ha soluzione  $x(t) = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}$  definita solo per  $0 \leq t < 1/x_0$  (quindi ha soluzione localmente, e non globalmente per ogni  $t$  (si dice che questo sistema ha “tempo di fuga finito”).

•Ricordiamo dallo studio delle equazioni differenziali in Analisi che i Teoremi di Peano e Lipschitz assicurano rispettivamente l'esistenza e la unicità delle soluzioni in particolari ipotesi (in particolare, si ricorda che la continua differenziabilità di  $f(x, u(t), t)$  rispetto a  $x$  e  $t$  è sufficiente a garantire la esistenza e unicità delle soluzioni).

•Anche nel caso in cui si possa dimostrare che una soluzione esiste, il calcolo esplicito della soluzione di una equazione differenziale o alle differenze è in genere proibitivo: solo di pochissime equazioni differenziali nonlineari si conosce la soluzione esplicita. Peraltro, questa conoscenza non è affatto l'oggetto dello studio che faremo dei sistemi dinamici e dei sistemi per il loro controllo: quello che ci interesserà è una caratterizzazione qualitativa delle soluzioni, in termini ad esempio di stabilità e instabilità, di sensibilità alle condizioni iniziali o alle variazioni dei parametri che descrivono il modello, etc.

Vi sono peraltro alcune soluzioni che sono di importanza fondamentale per lo studio ed il controllo dei sistemi dinamici, perché tipicamente rappresentano le condizioni nominali di funzionamento del sistema, cioè quelle in prossimità delle quali si è progettato il sistema per il suo funzionamento normale.

### 2.4.1 Soluzioni di equilibrio

•Consideriamo il sistema tempo-continuo nonlineare stazionario autonomo (senza ingressi)

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.13)$$

•Uno stato  $\bar{x}$  si dice “stato di equilibrio” se il sistema, trovandosi in  $\bar{x}$  in un qualsiasi istante  $\bar{t}$ , vi rimane  $\forall t \geq \bar{t}$ . Condizione necessaria e sufficiente perchè  $\bar{x}$  sia di equilibrio è che  $f(\bar{x}) = 0$ .

•Più in generale, per il sistema  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , la coppia  $(\bar{x}, \bar{u})$ , con  $\bar{u}$  costante, è una coppia di stati e ingressi di equilibrio se  $f(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0, \forall t$ .

•Per un sistema tempo-discreto senza ingressi  $x^+ = f(x)$ , i punti di equilibrio (definiti ancora come sopra) sono tutti e soli gli  $\bar{x}$  tali che  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Analogamente per le coppie di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  di un sistema  $x^+ = f(x, u, t)$ , che sono tali se  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}, t), \forall t$ .

**Esempio: Equilibri di un Pendolo** Si consideri l'equazione di un pendolo di massa  $m$  e lunghezza  $L$  soggetto alla sua forza peso, ad un attrito viscoso proporzionale alla sua velocità di rotazione, e ad un momento motore  $u$  applicato all'asse:

$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL \sin \theta = u.$$

Il sistema è facilmente descritto in uno spazio di stato bidimensionale in cui  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{c}{mL^2}x_2 + \frac{1}{mL^2}u \end{bmatrix}.$$

Gli equilibri sono pertanto dati da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 &\Rightarrow \bar{x}_2 = 0; \\ \dot{x}_2 = 0 &\Rightarrow \sin \bar{x}_1 = \frac{1}{mgL}\bar{u} \end{aligned}$$

Per ogni valore di  $\bar{u}$  con  $|\bar{u}| \leq mgl$  si hanno quindi due posizioni di equilibrio simmetriche rispetto all'asse orizzontale. Nel caso  $\bar{u} = 0$ , si hanno i due equilibri in posizione verticale inferiore e superiore. Naturalmente, sono equilibri anche tutte le configurazioni con angolo  $\theta$  aumentato di multipli di  $2\pi$ .



**Equilibri di sistemi lineari T.C.** Per un sistema LTITC soggetto ad un ingresso costante  $\bar{u}$ , gli equilibri sono caratterizzati dalla equazione

$$A\bar{x} = -B\bar{u}.$$

Quindi:

- se la matrice dinamica è invertibile (se quindi non ha autovalori nell'origine), in corrispondenza ad ogni ingresso  $\bar{u}$  esiste un solo punto di equilibrio. Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è l'unico possibile equilibrio.
- se la matrice dinamica ha uno o più autovalori nell'origine, non è detto che un equilibrio esista per ogni  $\bar{u}$ , ma se esiste un tale  $\bar{x}$ , allora ogni punto  $x' = \bar{x} + x_n$  con  $x_n \in \ker A$  è un punto di equilibrio corrispondente a  $\bar{u}$ . Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è un equilibrio non isolato, in quanto tutto lo spazio nullo di  $A$  è di equilibrio.

Per il sistema massa-molla-smorzatore di fig. 2.1, per il quale, ponendo  $x = [y - \hat{y}, \dot{y}]^T$  e  $u = f$ , si ha

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u,$$

gli equilibri sono isolati se  $K \neq 0$ :  $\bar{x}_1 = \frac{1}{K}\bar{u}$ ,  $\bar{x}_2 = 0$ . Se  $K = 0$ , si ha invece che un equilibrio è possibile solo se  $\bar{u} = 0$ , ed in quel caso, esiste una infinità di possibili equilibri, con  $\bar{x}_1$  qualsiasi e  $\bar{x}_2 = 0$ .

## 2.5 Linearizzazione approssimata

Nella prima parte del corso di Fondamenti di Automatica si studierà prevalentemente l'importante classe dei sistemi dinamici lineari. Tale studio, grazie alle forti proprietà valide per i sistemi lineari, riesce ad essere abbastanza completo e semplice. L'importanza pratica dei sistemi lineari è peraltro enorme, in particolare come *approssimazioni locali* di sistemi più in generale non lineari, in prossimità di *condizioni di funzionamento nominali*. Descriviamo adesso gli strumenti con i quali un sistema nonlineare può venire approssimato linearmente.

• Molto spesso la condizione di funzionamento nominale attorno alla quale si vuole approssimare il comportamento di un sistema dinamico coincide con un equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Consideriamo innanzitutto sistemi tempo-invarianti  $\mathbb{D}x = f(x, u)$ . Sviluppando in serie di Taylor e troncando al primo ordine, si ha

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} (u - \bar{u})$$

• Definendo

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} \quad e \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} ,$$

si osserva che  $A$  e  $B$  sono matrici rispettivamente  $n \times n$  e  $n \times m$  a valori costanti. Introducendo nuove variabili di stato  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ , e nuovi ingressi  $\tilde{u} = u - \bar{u}$  come differenza rispetto ai valori nominali, si osserva facilmente che vale

$$\mathbb{D}\tilde{x} = \mathbb{D}x - \mathbb{D}\bar{x} \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + A\tilde{x} + B\tilde{u} - \mathbb{D}\bar{x}.$$

Pertanto, dalle condizioni di equilibrio in T.C. ( $\mathbb{D}\bar{x} = \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ ) o in T.D. ( $\mathbb{D}\bar{x} = \bar{x}^+ = f(\bar{x}, \bar{u})$ ), il sistema

$$\mathbb{D}\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

risulta una approssimazione al primo ordine (cioè lineare) del sistema dato.

•Se vi è una mappa di uscita  $y = h(x, u)$ , si potrà linearizzare anch'essa in modo simile, ponendo  $\tilde{y} = y(x, u) - y(\bar{x}, \bar{u}) = C\tilde{x} + D\tilde{u}$ , dove

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} ; \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} .$$

**Esempio: Linearizzazione delle equazioni di un pendolo**

Per il modello di pendolo visto in precedenza, si ha

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix} .$$

Valutando queste matrici nei due equilibri corrispondenti a un dato  $\bar{u} \geq 0$ , si ottiene per l'equilibrio con  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{m^2 g^2 L^2 - \bar{u}^2}}{mL^2} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} ,$$

mentre per l'equilibrio con  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{m^2 g^2 L^2 - \bar{u}^2}}{mL^2} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix} .$$

•Si noti che, partendo da un sistema  $\mathbb{D}x = f(x, u, t)$  tempo-variante, in generale anche il linearizzato corrispondente risulta non stazionario. I sistemi lineari tempo-varianti sono molto più difficili da analizzare e controllare che quelli stazionari.

•Alcune volte linearizzare un sistema attorno a valori di equilibrio non è sufficiente, o perché il funzionamento nominale del sistema non consiste in un equilibrio, o perché la reale evoluzione del sistema comporta variazioni in grande. Si può in questi casi ricorrere ad una *linearizzazione attorno ad*

una traiettoria. Sia dunque  $\bar{x}(x_0, \bar{u}, t)$  la soluzione della eq. nonlineare del sistema corrispondente ad un ingresso nominale  $\bar{u}(t)$ . Si può procedere alla linearizzazione in modo del tutto analogo ai casi precedenti, con la unica accortezza che adesso il punto  $\bar{x}$  in cui calcolare le matrici Jacobiane di  $f$  e  $h$  rispetto a  $x$  e  $u$ , non è costante ma una funzione del tempo. Anche nel caso che il sistema originario fosse stazionario, si può ottenere quindi in generale un sistema approssimato che è lineare, ma non stazionario, cioè in cui

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x}(t) \\ u = \bar{u}(t)}} = A(t) \quad e \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x}(t) \\ u = \bar{u}(t)}} = B(t),$$

e analogamente per  $C(t)$  e  $D(t)$ . Il trattamento di sistemi tempo-varianti, anche se lineari, non è facile.

Anche se la linearizzazione attorno ad una traiettoria in generale può dare tempo varianza del modello, questo non è sempre il caso. Nella pratica dei sistemi ingegneristici, anzi, è frequente che questo non avvenga, come nell'esempio seguente.

**Esempio: Linearizzazione approssimata della dinamica longitudinale di un veicolo** Consideriamo un veicolo di massa  $m$  sottoposto ad attrito aerodinamico quadratico nella velocità e spinta del propulsore pari a  $u$ :

$$m\ddot{y} + c\dot{y}^2 = u.$$

Nello spazio di stato, posto  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ , si ha

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_2^2 + \frac{1}{m}u, \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2c}{m}x_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

In questo caso, il regime di funzionamento di interesse non è l'equilibrio (in cui il veicolo è fermo), ma piuttosto la traiettoria data dalla soluzione particolare  $\dot{y} = v$  costante,  $u = \bar{u} = cv^2$ , e  $y(t) = vt$ . Si ha dunque in questo caso  $\bar{x}_1(t) = vt$  e  $\bar{x}_2(t) = v$ , e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2c}{m}v \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix},$$

da cui si nota che, in questo caso particolare, il sistema linearizzato attorno ad una traiettoria risulta comunque stazionario.

## 2.6 Cambiamenti di coordinate

•La forma di stato di un sistema dinamico mette in luce come esso sia da intendersi come una relazione dinamica tra tre insiemi di grandezze, gli ingressi, gli stati, e le uscite, definite su spazi di dimensioni diverse.

•Quando si sono derivate le forme di stato dei sistemi, si sono descritti come ingressi  $u$  ed uscite  $y$  le grandezze che apparivano nella forma normale. Abbiamo anche visto come in alcuni casi gli stati potevano essere individuati con le uscite e le loro derivate. Talvolta però non è possibile scegliere così gli stati; altre volte questa scelta non è la più conveniente.

•Mentre le uscite e gli ingressi di un sistema in forma di stato sono in certo modo fissati dalla equazione in forma normale (anche se vedremo più avanti che talvolta sarà opportuno manipolare queste definizioni), la scelta degli stati stessi è in certa misura arbitraria. In particolare, dato un sistema in forma di stato descritto da un vettore  $x$ , è possibile pensare ad un cambiamento di coordinate sullo spazio in cui è definito lo stato, in generale introducendo una nuova variabile di stato definita in termini della precedente come

$$z = \Phi(x)$$

•Perchè  $z$  e  $x$  siano corrette rappresentazioni di uno stesso stato, pur se diverse, sarà necessario che la mappa  $\Phi(\cdot)$  sia biiettiva (su tutto l'insieme delle variabili di stato di interesse): cioè, ad ogni  $x$  corrisponda uno ed un solo  $z$ . Di conseguenza, deve esistere la applicazione inversa di  $\Phi$ , e scriveremo  $x = \Phi^{-1}(z)$ .

### 2.6.1 Cambiamenti di Coordinate Lineari

•Particolari cambiamenti di coordinate sono quelli lineari, cioè quelli per cui vale

$$\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \Phi(x_1) + \beta \Phi(x_2).$$

Ricordiamo che una applicazione lineare da uno spazio a  $p$  dimensioni a uno spazio a  $q$  dimensioni è sempre rappresentabile mediante una matrice  $q \times p$ . Nel nostro caso, un cambiamento di coordinate lineare e stazionario è pertanto espresso in generale da

$$x = Tz$$

dove  $T$  è una matrice  $n \times n$  costante e invertibile, cioè  $\det(T) \neq 0$ .

• Un cambiamento di variabili lineare stazionario applicato ad un sistema dinamico anch'esso lineare e stazionario agisce nello stesso modo per sistemi a tempo continuo e discreto, lasciandone inalterata la natura lineare e stazionaria:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}z &= \hat{A}z + \hat{B}u, \\ y &= \hat{C}z + Du\end{aligned}$$

con  $\hat{A} = T^{-1}AT$ ,  $\hat{B} = T^{-1}B$ ,  $\hat{C} = CT$ .

• Si osservi esplicitamente che tutte le descrizioni del sistema dinamico che differiscono solo per un cambiamento di coordinate sono del tutto equivalenti, e che quindi non esistono coordinate privilegiate o “naturali” in cui descrivere il sistema.

• Inoltre, le matrici dinamiche di tutte le rappresentazioni equivalenti di un sistema LS (lineare stazionario), sono trasformazioni per “similitudine” (o “contragredienza”) delle altre.

**Esempio: Masse mobili vincolate in coordinate baricentriche.**

Riconsiderando l'esempio sopra visto, una descrizione alternativa può essere data in termini delle variabili  $y_g = (m_1y_1 + m_2y_2)/(m_1 + m_2)$  (posizione del baricentro) e  $y_d = y_2 - y_1$  (configurazione interna del sistema). Definendo lo stato come  $z^T = (y_g, y_d, \dot{y}_g, \dot{y}_d)^T$ , si avrebbe

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{m_1+m_2}(f_1 + f_2) \\ \dot{z}_4 &= -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}(kz_2 + cz_4) - \frac{1}{m_1}f_1 + \frac{1}{m_2}f_2\end{aligned}$$

ovvero  $\dot{z} = A_z z + B_z F$  con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} & 0 & -c\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Tra le due rappresentazioni di stato del sistema esiste una relazione lineare  $x = Tz$ , dove

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Capitolo 3

# Soluzioni dei Sistemi Lineari

Per i sistemi lineari è possibile caratterizzare le soluzioni in modo molto più articolato: per i sistemi lineari e stazionari è addirittura possibile risolverle esplicitamente.

### 3.1 Sistemi Lineari Tempo–Invarianti Tempo–Continui

Ricordiamo dalla analisi che la soluzione della equazione lineare a coeff. costanti con forzamento  $u(t)$

$$\dot{x} = ax + bu(t),$$

con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ , è data dalla somma di un integrale omogeneo e di un integrale particolare, esplicitamente

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Nel caso di un sistema di  $n$  equazioni differenziali che rappresentano un sistema lineare stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.1}$$

con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ , la soluzione può essere scritta in forma del tutto analoga:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

**Esempio: Esponenziale di Matrici**

Naturalmente, l'esponenziale di una matrice necessita di una definizione appropriata. Daremo tale definizione in termini della serie di potenze

$$e^M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + 1/2M^2 + 1/6M^3 + \dots$$

che generalizza la definizione dell'esponenziale di uno scalare

$$e^m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = I + m + 1/2m^2 + 1/6m^3 + \dots$$

Sulla base della definizione, è immediato verificare che  $e^{M_1}e^{M_2} = e^{M_2}e^{M_1} = e^{(M_1+M_2)t}$  se e solo se  $M_1M_2 = M_2M_1$ . Prova: applica la definizione e l'identità delle serie di potenze.

Segue anche che  $(e^M)^{-1} = e^{-M}$ . Infatti, se  $e^M e^{-M} = e^{M-M} = e^0 = I$ . Nota bene:  $e^M$  è sempre invertibile, qualsiasi sia  $M$ .

- L'esponenziale di una matrice ha altre importanti proprietà:
- Se  $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , allora  $e^M\mathbf{v} = e^\lambda\mathbf{v}$ . Prova: applica la definizione e ricorda  $M^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ .
- $e^{T^{-1}MT} = T^{-1}e^MT$ . Prova: applica la definizione e osserva che  $(T^{-1}MT)^k = T^{-1}M^kT$ .
- Sono possibili altre definizioni dell'esponenziale, tutte equivalenti. Ad esempio:  $e^M = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{M}{m}\right)^m$ .

Ponendo  $M = At$ , si ottiene un esponenziale di matrice funzione del tempo

$$e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = I + At + 1/2A^2t^2 + 1/6A^3t^3 + \dots$$

da cui è facile verificare che

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Dalle relazioni viste è quindi facile anche verificare che [3.2](#) è effettivamente una soluzione della [3.1](#). Infatti, valendo  $e^{A0} = I$ , si ha  $x(0, x_0, u) = Ix_0$ , e



inoltre, derivando la prima delle [3.2](#),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t, x_0, u) &= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt}\left(e^{At}\int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right) \\ &= Ax + Bu\end{aligned}$$

•È opportuno guardare con attenzione alla struttura della soluzione stessa. Nella soluzione si distinguono due termini. Il primo, che dipende dagli stati iniziali e non dagli ingressi, si dice **evoluzione libera** del sistema; il secondo, che invece dipende dagli ingressi ma non dallo stato iniziale, si dice **evoluzione forzata**.

•Per quanto riguarda l'evoluzione libera, si noti che gli stati iniziali  $x_0$  vengono trasformati in quelli ad un dato istante  $t$  attraverso il prodotto per la matrice  $e^{At}$ , quindi in modo lineare.

•Si dice traiettoria libera di un sistema l'insieme degli stati  $x$  raggiunti per qualche  $t$  da una evoluzione libera  $x(t)$ . Essendo l'esponenziale di una matrice sempre invertibile, due traiettorie libere di un sistema o coincidono o non si intersecano mai. Infatti, se le evoluzioni libere a partire da  $x_0$  e  $x'_0$  si intersecano in un qualsiasi punto  $x$ , devono esistere  $t$  e  $t'$  tali che  $x = e^{At}x_0 = e^{At'}x'_0$ , quindi  $x'_0 = e^{A(t-t')}x_0$  ovvero  $x'_0$  deve appartenere alla traiettoria libera che passa da  $x_0$  stessa, quindi le traiettorie coincidono.

•Si ricordi infine che il determinante di una matrice  $\det(A)$  è il prodotto dei suoi autovalori, e inoltre è pari al volume (con segno) del parallelepipedo i cui lati sono le colonne di  $A$ . Inoltre, la traccia di una matrice,  $\text{Tr}(A)$  è la somma degli autovalori. Si ha che

$$\det(e^{At}) = e^{\text{Tr}(A)t}$$

quindi che il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione  $e^{At}$  a seconda che  $\text{Tr}(At)$  sia maggiore, uguale, o minore di zero.

•Per quanto riguarda l'evoluzione forzata, si noti che anche l'operatore integrale che agisce sulla funzione di ingresso è lineare (l'integrale di una somma è la somma degli integrali, e l'integrale del prodotto di una funzione per una costante è pari al prodotto della costante per l'integrale della funzione). È quindi immediato, nella soluzione della eq. di stato di un sistema lineare stazionario, verificare il *principio di sovrapposizione degli effetti* degli stati e degli ingressi.

•L'integrale che appare nella evoluzione forzata è detto *di convoluzione*. Più in generale, date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  definite per  $-\infty < t < \infty$ , si definisce il loro prodotto di convoluzione come la funzione

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Per funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  che si annullano identicamente per ogni  $t < 0$  (quali sono i segnali nei sistemi causali che considereremo), la convoluzione diviene

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Il termine forzato può quindi essere scritto  $e^{At} * Bu(t)$ , dove si estenda in modo banale al prodotto tra matrici la definizione di convoluzione.

### Esponenziale di Matrici Diagonalizzabili

• L'espressione della definizione dell'esponenziale di una matrice non è in generale adatta al calcolo esplicito del valore della soluzione. Nel caso di una matrice  $A$  diagonalizzabile, per cui valga  $\Lambda = T^{-1}AT$  con  $\Lambda$  diagonale, il calcolo è comunque semplice. Infatti se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si ha

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

cioè

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

quindi si ha

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

**Matrici Diagonalizzabili con Autovalori Complessi – Forma Reale**

• Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, il risultato precedente comprende ovviamente esponenziali complessi, così come colonne complesse nella matrice degli autovettori  $T$ . Se  $A$  è a valori reali (come sarà sempre il caso per le matrici dinamiche dei sistemi che studieremo), gli autovalori e autovettori complessi appaiono sempre assieme al loro coniugato, e questo fa sì che la matrice  $e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$  sia comunque a valori reali.

• È possibile e utile in questi casi, usare un cambiamento di coordinate reale, che trasforma per similitudine la matrice diagonalizzabile (sui complessi)  $A$  in una matrice reale diagonale a blocchi, con blocchi al più di dimensione 2, e con un numero di blocchi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati della matrice. Consideriamo ad esempio una matrice  $2 \times 2$ , diagonalizzata nella forma  $A = Q \Lambda Q^{-1}$ , e siano<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Lambda(1,1) &= \sigma + j\omega \\ \Lambda(2,2) &= \sigma - j\omega \\ Q(:,1) &= q_r + jq_i \\ Q(:,2) &= q_r - jq_i\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}A \begin{bmatrix} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}e^{At} \begin{bmatrix} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{bmatrix} e^{\sigma t} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ricordando le eguaglianze  $e^{\alpha+j\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + j \sin \beta)$  e  $e^{\alpha-j\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta - j \sin \beta)$ , introduciamo la matrice complessa  $E$  e la sua inversa

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}; \quad E^{-1} = -j \begin{bmatrix} j & j \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scrivendo  $AQE = Q\Lambda E = QE E^{-1}\Lambda E$ , si ottiene

$$A \begin{bmatrix} q_r & q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_r & q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

e

$$e^{At} \begin{bmatrix} q_r & q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_r & q_i \end{bmatrix} e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>per comodità di notazione si usa qui il simbolo  $Q$  invece che  $T$  per la matrice di cambiamento di coordinate

### Esponenziale di Matrici Difettive

• Per matrici difettive, il calcolo dell'esponenziale si può fare con la forma di Jordan. Si ricordi<sup>2</sup> che qualsiasi matrice quadrata  $A$  quadrata di dimensione  $n$  può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan,  $A = QJQ^{-1}$ . Una matrice  $J$  in forma di Jordan è una matrice diagonale a blocchi,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_N \end{bmatrix}$$

dove ogni blocco  $J_i$  è un *miniblocco di Jordan* di dimensione  $q_i$  ed autovalore  $\lambda_i$ , ovvero una matrice quadrata con tutti gli elementi sulla diagonale uguali a  $\lambda_i$ , tutti gli elementi della prima sopradiagonale pari a 1, e con ogni altro elemento zero, ovvero

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}.$$

Si noti innanzitutto che l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi può essere calcolato per blocchi. Infatti, essendo

$$\left( \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right)^k = \begin{bmatrix} (A_1 t)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (A_N t)^k \end{bmatrix}$$

si ha ovviamente

$$\exp \left( \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{A_N t} \end{bmatrix}$$

• È quindi necessario solo calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan  $J$  di dimensione generica  $q$ . Si ha

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \exp \left( \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} t \right) = \\ &= e^{(\lambda I + J_0)t} = e^{\lambda t} e^{J_0 t} \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>si vedano al proposito i richiami di algebra lineare in appendice

(infatti  $\lambda I t$  commuta con ogni matrice). Si noti che  $J_0$  è un miniblocco di Jordan con autovalore 0, perciò nilpotente di ordine  $q$  ( $J_0^q = 0$ , ma  $J_0^k \neq 0, \forall k < q$ ). Avendosi

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + J_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

si ottiene infine

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{(q-2)}}{(q-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Matrici Difettive con Autovalori Complessi – Forma Reale

• Nel caso che  $A$  abbia miniblocchi di Jordan di dimensione  $q > 1$  corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e per il suo esponenziale una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili.

• Sia ad esempio  $AQ = QJ$ , con

$$J = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

e con

$$Q = \begin{bmatrix} q_r^{(1)} + jq_i^{(1)} & q_r^{(2)} + jq_i^{(2)} & q_r^{(1)} - jq_i^{(1)} & q_r^{(2)} - jq_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 1 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix}; E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ j & 0 & -j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & j & 0 & -j \end{bmatrix},$$

si ha una base reale

$$QE = \begin{bmatrix} q_r^{(1)} & q_i^{(1)} & q_r^{(2)} & q_i^{(2)} \end{bmatrix}$$

rispetto alla quale, la forma reale di Jordan è

$$J_r = E^{-1}JE = \left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} M & I \\ 0 & M \end{array} \right]$$

• Per miniblocchi di dimensioni maggiori, si può generalizzare facilmente (per esercizio) a:

$$J_r = \left[ \begin{array}{ccccc} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{array} \right]$$

• Per quanto riguarda l'esponenziale, si considerino le potenze

$$J_r^k = \left[ \begin{array}{cc} M^k & kM^{k-1} \\ 0 & M^k \end{array} \right],$$

e, applicando la definizione di esponenziale, si ha

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{I + Mt + M^2t^2/2 + \cdots}{0} & \frac{0 + It + 2M\frac{t^2}{2} + 3M^2\frac{t^3}{3!} + \cdots}{I + Mt + M^2t^2/2 + \cdots} \end{array} \right]$$

cioè

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{cc} e^{Mt} & te^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} \end{array} \right]$$

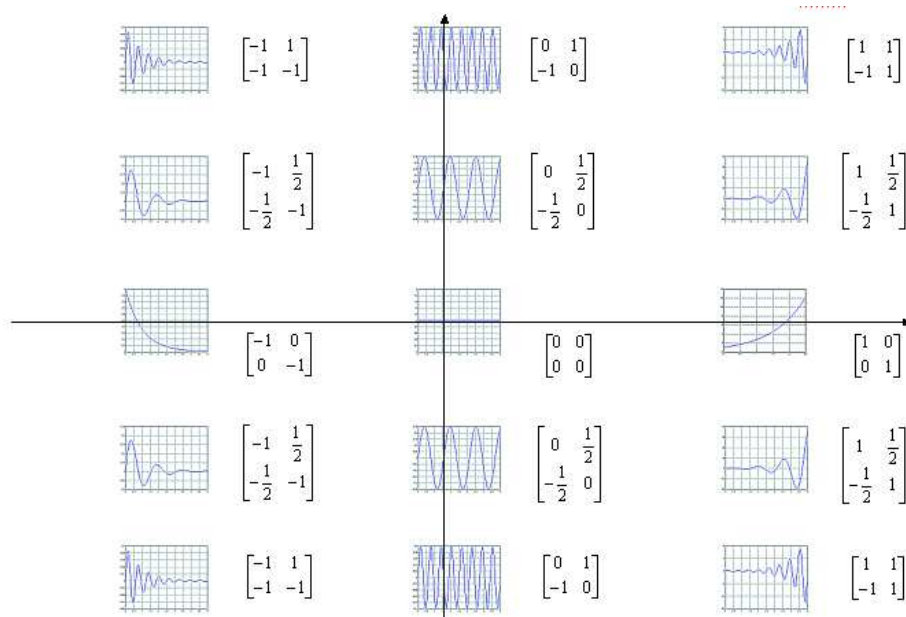
dove ricordiamo dalla forma reale delle matrici diagonalizzabili

$$e^{Mt} = e^{\sigma t} \left[ \begin{array}{cc} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{array} \right]$$

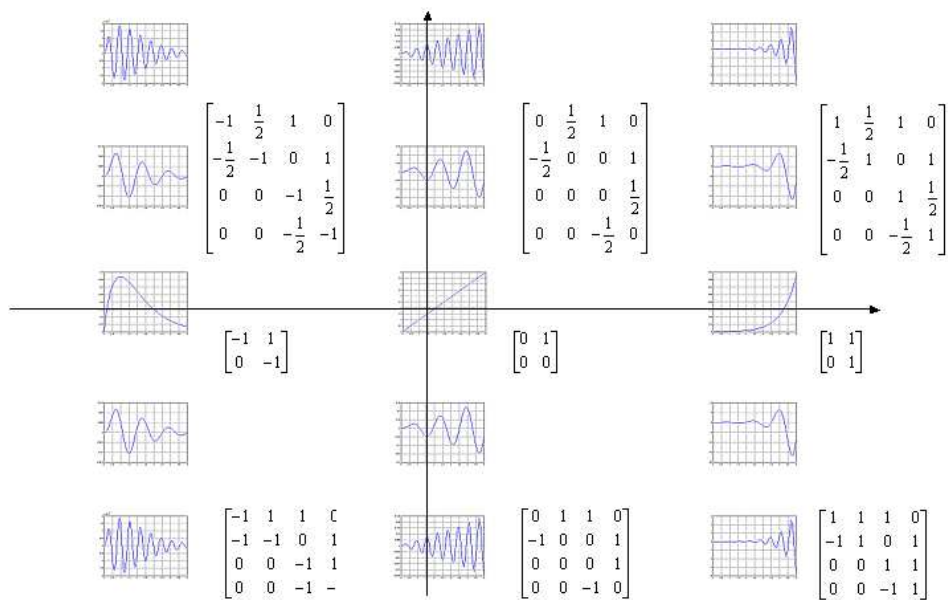
In generale, dunque, se  $J_r$  ha  $q$  blocchi diagonali

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{ccccc} e^{Mt} & te^{Mt} & \frac{t^2}{2!}e^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}e^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} & te^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-2}}{(q-2)!}e^{Mt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{Mt} \end{array} \right]$$

### 3.1. SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI TEMPO-CONTINUI 61



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione uno.



### 3.3 Analisi Modale

• Nella evoluzione libera di un sistema LTITC descritto dalle matrici  $(A, B, C, D)$ , si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le funzioni che possono apparire nell'esponenziale di una matrice in forma di Jordan reale. Queste funzioni sono dette “modi” del sistema.

#### 3.3.1 Modi dei Sistemi LTITC

• Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITC possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

- 1) Esponenziali semplici del tipo  $e^{\lambda t}$ , corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore  $\lambda$  reale; questi modi sono convergenti a zero, costanti, o divergenti a seconda che  $\lambda$  sia minore, uguale, o maggiore di zero;
- 2) Quasi-polinomi di tipo  $t^k e^{\lambda t}$ ,  $0 \leq k \leq q - 1$ , corrispondenti a miniblocchi di dimensione  $q > 1$  con autovalore reale  $\lambda$ ; questi modi sono conver-



genti a zero se  $\lambda < 0$ , polinomialmente divergenti se  $\lambda = 0$  e  $k > 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\lambda > 0$ ;

- 3) Funzioni oscillanti del tipo  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ ,  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ , corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\sigma \pm j\omega$  (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se la parte reale degli autovalori  $\sigma$  è minore di 0, limitati ma non convergenti se  $\sigma = 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\sigma > 0$ ;
- 4) Funzioni oscillanti del tipo  $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ ,  $t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ ,  $0 \leq k \leq q - 1$ , corrispondenti a due miniblocchi di dimensione  $q$  associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\sigma \pm j\omega$  (ovvero ad un miniblocco reale costituito da  $q \times q$  blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se  $\sigma < 0$ , polinomialmente divergenti se  $\sigma = 0$  e  $k > 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\sigma > 0$ ;

# Capitolo 4

## Stabilità dei Sistemi Lineari

•Nello studio delle soluzioni libere dei sistemi LTI in forma di stato,  $\mathbb{D}x = Ax$ , abbiamo osservato modi di tipi diversi, ed in particolare modi convergenti a zero, esponenzialmente divergenti, polinomialmente divergenti, e non convergenti né divergenti. Nella discussione di questi modi, si è fatto osservare come questi siano associati alla posizione degli autovalori della matrice dinamica  $A$  rispetto ad una regione del piano complesso (che diremo *Regione Stabile* - RS), rappresentata dal semipiano sinistro per sistemi LTITC, e dal cerchio unitario per i sistemi LTITD.

### 4.1 Definizioni di stabilità

A seconda di quali modi possiede, un sistema LTI si dice:

**Asintoticamente Stabile** (AS) se tutti i suoi modi sono convergenti (si ricordi che, se convergenti, i modi di un sistema LTI sono esponenzialmente convergenti). La evoluzione libera dello stato di un sistema LTI asintoticamente stabile a partire da qualsiasi condizione iniziale tende quindi, per tempi sufficientemente lunghi, a zero ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ). Un sistema LTI è AS se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  appartengono alla parte interna della RS.

**Marginalmente Stabile** (MS) se non possiede alcun modo divergente, ma possiede almeno un modo non convergente. La evoluzione libera dello stato di un sistema LTI marginalmente stabile, a partire da qualsiasi condizione iniziale, non converge a zero né diverge, ma si mantiene limitata. Si noti che, se si desidera che tutta la evoluzione libera dello stato resti limitata in un intorno di raggio arbitrariamente piccolo della origine (ad esempio, se si vuole che  $\|x(t)\| < \epsilon$ ,  $\forall t$ , per un  $\epsilon > 0$ ), è

sufficiente che le condizioni iniziali siano sufficientemente vicine a zero ( $\|x(0)\| < \delta$ , con  $0 < \delta \leq \epsilon$ ). Un sistema LTI è MS se e solo se valgono tutte le seguenti condizioni:

- a) nessun autovalore di  $A$  è al di fuori della RS;
- b) almeno un autovalore di  $A$  appartiene al bordo della RS;
- c) nessun autovalore di  $A$  sul bordo della RS ha molteplicità algebrica maggiore della geometrica.

In altri termini, per la stabilità marginale, agli autovalori sul bordo della Regione Stabile possono essere associati solo miniblocchi di Jordan di dimensione uno.

**Instabile** se non è AS né MS. Un sistema instabile si dice poi più precisamente

— **Esponenzialmente Divergente** (ED) se possiede almeno un modo esponenzialmente divergente. Un sistema LTI è ED se e solo se almeno un autovalore di  $A$  è al di fuori della RS

— **Polinomialmente Divergente** (PD) se non è ED e se possiede almeno un modo polinomialmente divergente. Un sistema LTI è PD se e solo se nessun autovalore di  $A$  è al di fuori della RS, ma almeno un autovalore di  $A$  è sul bordo della RS ed ha molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica (cioè, è associato ad un miniblocco di Jordan di dimensione maggiore di uno).



# Appendice A

## Richiami di Algebra Lineare

•È opportuno qui richiamare dal corso di Algebra delle matrici alcune proprietà delle matrici simili.

### A.0.4 Matrici simili e Diagonalizzazione

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è simile a  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se esiste una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile tale che  $A = T^{-1}\hat{A}T$ ;
- Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, mentre gli autovettori sono trasformati secondo  $T$ : se  $Ax = \lambda_1 x$ ,  $\hat{A}y = \lambda_2 y \Rightarrow TAT^{-1}y = \lambda_2 y$ ; posto  $z = T^{-1}y$ , premoltiplicando per  $T^{-1}$  si ha  $Az = \lambda_2 z$ , quindi  $\lambda_2 = \lambda_1$  e  $z = x \Rightarrow y = Tx$ .
- Per una matrice  $A$  che ha  $n$  autovettori indipendenti, esiste una  $Q$  che trasforma  $A$  per similitudine in una matrice  $\Lambda$  diagonale,  $Q^{-1}AQ = \Lambda$ .  $\Lambda$  può essere ordinata in modo da avere l' $i$ -esimo autovalore più grande di  $A$ ,  $\lambda_i$ , nella posizione diagonale  $\Lambda(i, i)$ , nel qual caso la  $i$ -esima colonna  $Q(:, i)$  di  $Q$  è l'autovettore di  $A$  corrispondente a  $\lambda_i$ .
- La  $i$ -esima riga  $Q^{-1}(i, :)$  di  $Q^{-1}$  soddisfa alla equazione  $Q^{-1}(i, :)A = \lambda_i Q^{-1}(i, :)$ , e viene pertanto detta autovettore destro di  $A$ . Si noti che, trasponendo questa relazione e poichè gli autovalori di una matrice e della sua trasposta coincidono, risulta che gli autovettori destri di  $A$  sono i trasposti degli autovettori comuni, o sinistri, di  $A^T$ .
- Un altro modo di scrivere  $A = Q\Lambda Q^{-1}$  è pertanto

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(:, i) Q^{-1}(i, :),$$

cioè come somma pesata di matrici diadiche (prodotto colonna per riga).

- Caso particolare: una matrice simmetrica  $A = A^T$  ha sempre  $n$  autovettori indipendenti, che possono sempre essere scelti ortogonali tra loro, e di norma unitaria. Pertanto esiste una matrice  $Q$  che diagonalizza  $A$  per similitudine, ed è ortonormale:  $Q^T Q = I \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$ . Autovettori destri e sinistri in questo caso coincidono, a meno di una trasposizione.
- Non tutte le matrici  $n \times n$  sono in generale diagonalizzabili per similitudine, in quanto possono non possedere  $n$  autovettori indipendenti con cui costruire la matrice  $Q$ . Questo caso è escluso per matrici  $A$  che abbiano tutti gli autovalori diversi: infatti, autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono certamente indipendenti (se  $Ax_1 = \lambda_1 x_1$  e  $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ , posto per assurdo  $x_2 = \gamma x_1$  si ottiene  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).
- La non-diagonalizzabilità (o difettività) può darsi solo se la matrice ha qualche autovalore multiplo, cioè se il *polinomio caratteristico* della matrice, ottenuto ponendo  $\det(A - \lambda I) = 0$ , contiene almeno una soluzione con molteplicità algebrica doppia o superiore. In altri termini, il polinomio caratteristico  $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ , deve essere fattorizzabile nella forma  $(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_q)^{\mu_q}$ , dove  $\lambda_i, i = 1, \dots, q$  sono i  $q$  autovalori distinti ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ ), e  $\mu_i$  le loro rispettive molteplicità algebriche, tali che  $\sum_{i=1}^q \mu_i = n$ , con almeno uno dei  $\mu_i$  maggiore di uno.
- Non tutte le matrici con autovalori multipli sono difettive: esempio lampante di matrice con autovalore multiplo ma diagonalizzabile è la matrice identica di ordine  $n$  (che ha un solo autovalore  $\lambda = 1$  con molteplicità algebrica  $n$ ); esempi meno banali sono tutte le matrici simili ad una matrice diagonale  $D$ , possibilmente con alcuni elementi della diagonale ripetuti (cioè del tipo  $PDP^{-1}$ ). In questi casi, nonostante la presenza di autovalori  $\lambda_i$  a molteplicità algebrica  $\mu_i > 1$ , è ancora possibile trovare un numero di autovettori corrispondenti pari ad  $\mu_i$ . In altri termini, l'equazione  $(A - \lambda_i I)x = 0$  può ammettere  $\mu_i$  soluzioni  $x_1, \dots, x_{\mu_i}$  indipendenti, o ancora, equivalentemente, lo spazio nullo (kernel) della matrice  $(A - \lambda_i I)$  ha dimensione  $\mu_i$ . Questi  $\mu_i$  autovettori indipendenti possono essere usati quindi come colonne della matrice diagonalizzante  $Q$ .

- Il numero  $\nu_i$  di autovettori indipendenti corrispondenti allo stesso autovalore  $\lambda_i$ , cioè la dimensione dello spazio nullo di  $(A - \lambda_i I)$ , viene detta “molteplicità geometrica” dell’autovalore. Una condizione necessaria e sufficiente alla diagonalizzabilità di una matrice è quindi che i suoi autovalori abbiano molteplicità geometrica pari a quella algebrica.
- Uno degli esempi più semplici di difettività è offerto dalla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

al cui unico autovalore  $\lambda_1 = 0$ , di molteplicità algebrica 2, corrisponde un solo autovettore,  $x = [1, 0]^T$ .

### A.0.5 Forma di Jordan

• Un risultato assai utile dell’algebra lineare, che generalizza la diagonalizzazione per similitudine delle matrici, è quello che afferma che *ogni* matrice  $A$  quadrata di dimensione  $n$  può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan,  $A = QJQ^{-1}$ . Una matrice in forma di Jordan  $J$  è diagonale ( $J_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ ), eccetto al più per elementi non nulli sulla prima sopradiagonale ( $J_{i+1,i}$ ). Di questi elementi sopradiagonali non nulli ve ne sono tanti quanti la differenza tra la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di  $A$  (cioè  $n$ ), e la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori stessi. Pertanto, la diagonalizzazione di una matrice è un caso particolare della sua jordanizzazione.

- Più precisamente, la forma di Jordan di  $A$  è una matrice diagonale a blocchi di dimensioni diverse, i cui blocchi sono tanti quanti gli autovettori indipendenti di  $A$ . Ogni blocco ha sulla diagonale l’autovalore corrispondente al suo autovettore, e sulla sopradiagonale tutti 1. Ad esempio la matrice di Jordan

$$J = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

corrisponde (al variare di  $Q$ ) a matrici  $A 6 \times 6$  con tre soli autovalori distinti (1.3 con molteplicità algebrica 1; 2 con  $\mu = 2$ ; e 3.5 con  $\mu = 3$ ), ognuno dei quali ha molteplicità geometrica uno.

- Invece, nel caso

$$J = \left[ \begin{array}{c|cc|cc|c} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

si hanno gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche dell'esempio precedente, ma l'autovalore in 3.5 ha ora molteplicità geometrica doppia. Esistono altre quattro possibili strutture non equivalenti per una matrice con gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche di quelle sopra riportate.

- Si deve notare che conoscere la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di una matrice non è sufficiente a stabilire la struttura della sua forma di Jordan: ad esempio, nel caso di un autovalore  $\lambda$  con  $\mu = 4$  e  $\nu = 2$ , si possono avere i due casi

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

- Consideriamo ad esempio il caso di una matrice  $A$   $n \times n$  con un autovalore  $\lambda$  a molteplicità algebrica  $\mu = n$  e geometrica  $\nu = 1$ . Sia  $x_1$  un autovettore corrispondente; per ottenere una matrice  $Q$  che rappresenti un legittimo cambiamento di coordinate, possiamo utilizzare  $x_1$  come prima colonna di  $Q$ , ma abbiamo bisogno di altri  $n - 1$  vettori indipendenti da questo per completare le colonne di  $Q$ . Se vogliamo che la trasformata per similitudine di  $A$  sia in forma di Jordan, dovrà essere

$$AQ = QJ$$

quindi (ponendo per semplicità  $n = 3$ )

$$A[q_1, q_2, q_3] = [q_1, q_2, q_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$



da cui si ricava

$$\begin{aligned} Aq_1 &= \lambda q_1 \\ Aq_2 &= q_1 + \lambda q_2 \\ Aq_3 &= q_2 + \lambda q_3 \end{aligned}$$

ovvero ancora

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)q_1 &= 0 \\ (A - \lambda I)q_2 &= q_1 \\ (A - \lambda I)q_3 &= q_2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

• Da queste relazioni risulta chiaramente che, mentre come ovvio  $q_1 \in \text{kernel}(A - \lambda I)$  essendo un autovettore,  $q_2 \in \text{kernel}(A - \lambda I)^2$  e  $q_3 \in \text{kernel}(A - \lambda I)^3$ . Da questo esempio si capisce il ruolo che, nella jordanizzazione di una matrice, viene svolto dallo spazio nullo delle potenze successive di  $(A - \lambda I)$ , quando lo spazio nullo di  $(A - \lambda I)$  stessa non offra una dimensione pari alla molteplicità algebrica di  $\lambda$ . Per questo motivo, lo spazio nullo di  $(A - \lambda I)^k$  viene definito “autospazio generalizzato di ordine  $k$  associato a  $\lambda$ ”.

• Torniamo al caso generale di una matrice  $A$   $n \times n$  con autovalori  $\lambda_i$  a molteplicità algebrica  $\mu_i$  e geometrica  $\nu_i$ , e consideriamo la matrice  $A_p = A - pI$  e le sue potenze  $A_p^k$ . Definiamo  $d_k = \dim \text{kernel} A_p^k$ : è facile vedere che  $d_k \leq d_{k+1}$ . Inoltre  $d_k \leq n$  per ovvi motivi. È possibile dimostrare che, se  $d_k = d_{k+1}$ , allora  $d_{k+p} = d_k, \forall p \geq 1$ . Questo significa che la successione dei  $d_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  è strettamente crescente sino ad un valore  $k = \bar{k}$ , per il quale la successione si stabilizza al valore  $d_{\bar{k}}$ .

• Per  $p \neq \lambda_i$ , si ha  $d_0 = d_1 = 0$ , per cui  $d_k = 0, \forall k$ .

• Per  $p = \lambda_i$  si ha invece  $d_0 = 0$  e  $d_1 = \nu_i$ ; poniamo che sia  $s_i$  il valore a cui si stabilizza la successione dei  $d_k$ . Si dimostra che  $s_i = \mu_i$ , in altre parole: La dimensione dello spazio nullo di  $(A - \lambda_i I)^k$ , cioè dell’autospazio di ordine  $k$  associato a  $\lambda$ , per  $k$  sufficientemente alto è pari alla molteplicità algebrica di  $\lambda_i$ .

• I vettori che appartengono ad un autospazio generalizzato associato all’autovalore  $\lambda_i$  di ordine  $k$ , ma non a quello di ordine  $k-1$ , si dicono “autovettori generalizzati” di ordine  $k$  associati a  $\lambda_i$ . A ogni autovettore generalizzato di ordine  $k$  associato a  $\lambda_i$ , designato ad esempio con  $q_i^{(k)}$ , si associano altri  $k-1$  vettori mediante una “catena” definita da

$$\begin{aligned}
q_i^{(k-1)} &= (A - \lambda_i I) q_i^{(k)} \\
&\vdots \\
q_i^{(1)} &= (A - \lambda_i I) q_i^{(2)}
\end{aligned}$$

• Se si prendessero tutte le catene di autovettori generalizzati si potrebbe avere un numero di vettori maggiore di  $n$ , quindi certamente dipendenti tra loro. Per costruire una base di  $n$  vettori giustapponendo catene prive di vettori in comune, si procede dunque in questo modo:

1. Si prendono al livello  $\bar{k}$   $d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}$  autovettori generalizzati di ordine  $\bar{k}$ ,  $q_1^{(\bar{k})}, \dots, q_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k})}$  e se ne costruiscono le catene lunghe  $\bar{k}$ .
  2. Al livello  $\bar{k} - 1$  è necessario avere  $d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}$  vettori indipendenti. Se tale numero è uguale al numero di vettori generati a questo livello dalle catene iniziate a livello superiore, si prendono questi e si procede. Altrimenti (cioè se  $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) > (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$ ), si aggiungono al livello  $\bar{k} - 1$  tutti gli autovettori generalizzati di ordine  $\bar{k} - 1$  che sono linearmente indipendenti dai vettori  $q_1^{(\bar{k}-1)}, \dots, q_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k}-1)}$ , e se ne generano le catene corrispondenti. Risulteranno in questo caso  $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) - (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$  nuove catene, lunghe  $\bar{k} - 1$ ;
  3. si procede così sino ad avere generato un totale di  $d_1 = \nu$  catene, il che avviene quando sono stati generati  $n$  vettori indipendenti.
- Si procede ora a costruire la matrice  $Q$  ponendo nelle sue colonne tutti le catene generate dagli autovettori generalizzati, con l'accortezza di porre a sinistra l'ultimo elemento della catena  $q_i^{(1)}$ , poi  $q_i^{(2)}$ , sino a  $q_i^{(k)}$ . Se si invertisse questo ordine, la matrice  $Q^{-1}AQ$  avrebbe non nulla la sottodiagonale, anzichè la sopradiagonale.
  - Ad ogni catena di vettori corrisponde nella forma di Jordan un mini-blocco di dimensioni pari alla lunghezza della catena.
  - Si noti che, data una forma di Jordan  $A = QJQ^{-1}$ , è possibile ottenere un'altra forma con scambi dell'ordine dei blocchi di Jordan, semplicemente scambiando l'ordine delle corrispondenti catene in  $Q$ . A meno di questi inessenziali scambi, la forma di Jordan di una matrice è peraltro unica, ed è perciò chiamata "canonica". Invece, date una coppia di matrici simili  $A$  e  $J$  (questa in forma di Jordan), esistono infinite possibili matrici  $Q$ .

### A.0.6 Instabilità numerica della forma di Jordan

La forma di Jordan, sia reale che complessa, è numericamente molto instabile. Ciò significa che, data una matrice  $A$  difettiva, esiste sempre una matrice  $A'$  ad essa arbitrariamente vicina (cioè, con norma  $\|A - A'\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ ), che è diagonalizzabile.

Esempio:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

•Potrebbe apparire che, in qualsiasi modello realistico di un sistema, che dovrà tener conto di inevitabili approssimazioni, la rilevanza della forma di Jordan sia scarsa, e che, ad esempio, i modi di tipo  $t^k e^{\lambda t}$ , o  $C_i^k \lambda^k$ , non debbano apparire nelle risposte dei sistemi reali. In effetti non è così, poichè la risposta associata ad una forma di Jordan può essere vista come il limite a cui tende la risposta associata ad una matrice diagonalizzabile quando si avvicina alla difettività.

•Si considerino due sistemi LTITC con matrici dinamiche  $A$  e  $A'$  dall'esempio precedente. Nel primo caso si hanno modi  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ . Nel secondo caso (matrice diagonalizzabile) si ha

$$\begin{aligned} e^{A't} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & -1/\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & \frac{1}{\epsilon}(e^{-(1+\epsilon)t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quindi una combinazione di modi che, per  $\epsilon$  piccoli, tende a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}(e^{-t} - e^{-(1+\epsilon)t}) = e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t}\epsilon) = te^{-t}$$

•Nel caso LTITD si ha

$$A^t = \begin{bmatrix} (-1 + \epsilon)^t & \frac{1}{\epsilon}((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}$$

dove

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) = t(-1)^{t-1}.$$

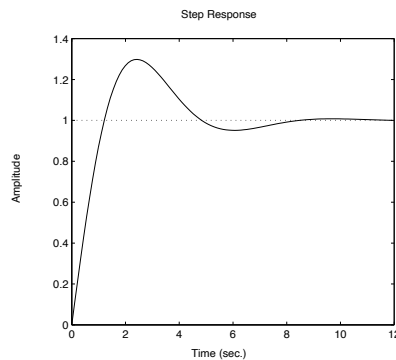
### A.0.7 Risposte dei sistemi lineari con Matlab

```
% Risposta al gradino
>>help step
```

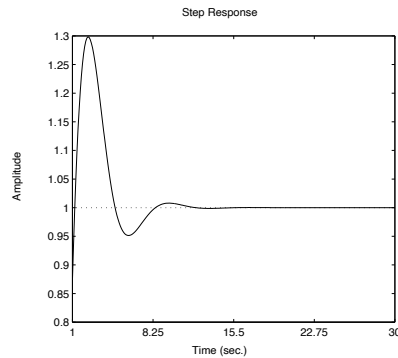
STEP Step response of continuous-time linear systems.

STEP(A,B,C,D,IU) plots the time response of the linear system:  $\dot{x} = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  to a step applied to the input IU. The time vector is automatically determined. STEP(A,B,C,D,IU,T) allows the specification of a regularly spaced time vector T. [Y,X] = STEP(A,B,C,D,IU,T) or [Y,X,T] = STEP(A,B,C,D,IU) returns the output and state time response in the matrices Y and X respectively. No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as there are outputs, and LENGTH(T) rows. The matrix X has as many columns as there are states. If the time vector is not specified, then the automatically determined time vector is returned in T. [Y,X] = STEP(NUM,DEN,T) or [Y,X,T] = STEP(NUM,DEN) calculates the step response from the transfer function description  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. See also: INITIAL, IMPULSE, LSIM and DSTEP.

```
% Descrizione nello spazio di stato (ISU)
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
>>step(A,B,C,D)
>>print -deps step1.eps
```



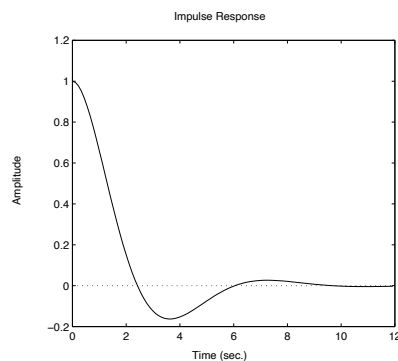
```
>>t=1:0.1:30;
>>step(A,B,C,D,1,t)
```



```
%Risposta impulsiva
>>help impulse
```

IMPULSE Impulse response of continuous-time linear systems. `IMPULSE(A,B,C,D,IU)` plots the time response of the linear system  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  to an impulse applied to the single input `IU`. The time vector is automatically determined. `IMPULSE(NUM,DEN)` plots the impulse response of the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where `NUM` and `DEN` contain the polynomial coefficients in descending powers of  $s$ . `IMPULSE(A,B,C,D,IU,T)` or `IMPULSE(NUM,DEN,T)` uses the user-supplied time vector `T` which must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments, `[Y,X,T] = IMPULSE(A,B,C,D,...)` `[Y,X,T] = IMPULSE(NUM,DEN,...)` returns the output and state time history in the matrices `Y` and `X`. No plot is drawn on the screen. `Y` has as many columns as there are outputs and `length(T)` rows. `X` has as many columns as there are states. See also: `STEP`, `INITIAL`, `LSIM` and `DIMPULSE`.

```
>>impulse(A,B,C,D)
```

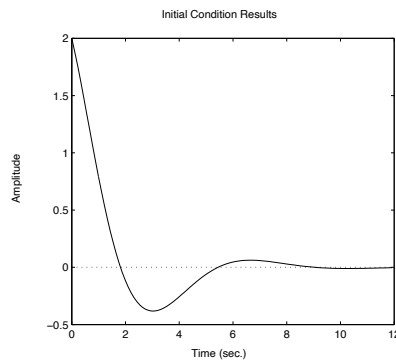


```
% Evoluzione libera
>>help initial
```

INITIAL Initial condition response of continuous-time linear systems.

INITIAL(A,B,C,D,X0) plots the time response of the linear system  $\dot{x} = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  due to an initial condition on the states. The time vector is automatically determined based on the system poles and zeros. INITIAL(A,B,C,D,X0,T) plots the initial condition response for the times specified in the vector T. The time vector must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments: [Y,X,T] = INITIAL(A,B,C,D,X0,...) returns the output and state responses (Y and X), and the time vector (T). No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as outputs and one row for element in T. Similarly, the matrix X has as many columns as states and length(T) rows. See also: IMPULSE,STEP,LSIM, and DINITIAL.

```
>>initial(A,B,C,D,[1,1])
```



```
%Ingresso generico
>>help lsim
```

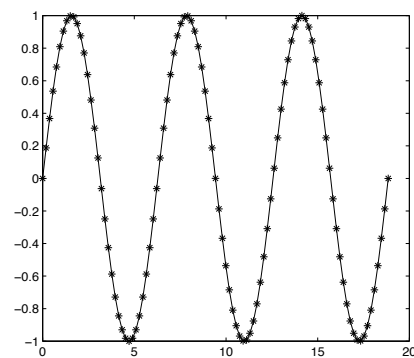
LSIM Simulation of continuous-time linear systems to arbitrary inputs.

LSIM(A,B,C,D,U,T) plots the time response of the linear system:  $\dot{x} = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  to the input time history U. Matrix U must have as many columns as there are inputs, U. Each row of U corresponds to a new time point, and U must have LENGTH(T) rows. The time vector T must be regularly spaced. LSIM(A,B,C,D,U,T,X0) can be used if initial conditions exist. LSIM(NUM,DEN,U,T) plots the time response of the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. When invoked with left hand arguments, [Y,X] =

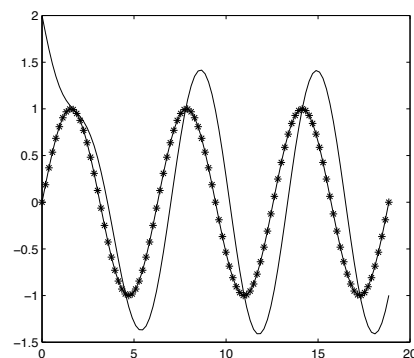
`LSIM(A,B,C,D,U,T) [Y,X] = LSIM(NUM,DEN,U,T)` returns the output and state time history in the matrices `Y` and `X`. No plot is drawn on the screen. `Y` has as many columns as there are outputs, `y`, and with `LENGTH(T)` rows. `X` has as many columns as there are states. See also: `STEP`, `IMPULSE`, `INITIAL` and `DLSIM`.

```
>>t=0:0.01*6*pi:6*pi;
>>u=sin(t);
```

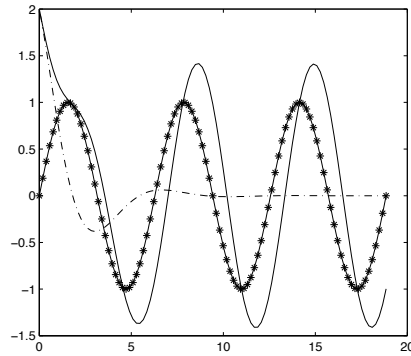
```
>>plot(t,u,'r',t,u,'r*')
```



```
>>Y0=lsim(A,B,C,D,u,t,[1,1]);
>>hold on;
>>plot(t,Y0,'g')
```



```
>>Y1=lsim(A,B,C,D,0*u,t,[1,1]);
>>plot(t,Y1,'c:')
```



```
% Per mettere in evidenza il transitorio,
% calcoliamo la risposta a regime
% Passiamo alla fdt
>>help ss2tf
```

SS2TF State-space to transfer function conversion.

[NUM,DEN] = SS2TF(A,B,C,D,iu) calculates the transfer function:

$$H(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

of the system:

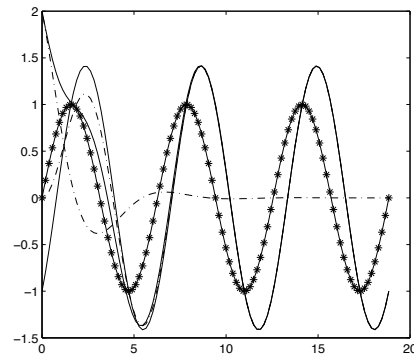
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

from the iu'th input. Vector DEN contains the coefficients of the denominator in descending powers of s. The numerator coefficients are returned in matrix NUM with as many rows as there are outputs y. See also: TF2SS.

```
>>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
num =
    0    1    1
den =
    1.0000    1.0000    1.0000
>>omega=1; j=sqrt(-1);
>>Gomega=polyval(num,j*omega)/polyval(den,j*omega)
Gomega =
    1.0000 - 1.0000i
>>abs(Gomega)
ans =
    1.4142
>>angle(Gomega)
ans =
   -0.7854
```

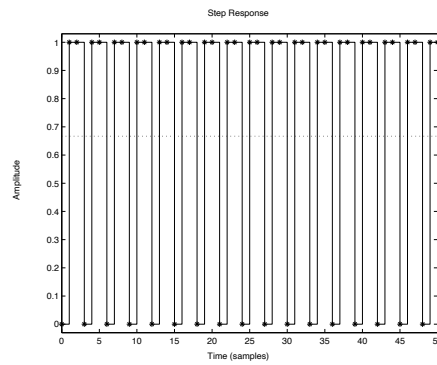


```
>>Yr=abs(Gomega)*sin(t+angle(Gomega));
>>plot(t,Yr,'k-')
% risposta forzata
>>Yf=lsim(A,B,C,D,u,t,[0,0]);
>>plot(t,Yf,'y-.'
```

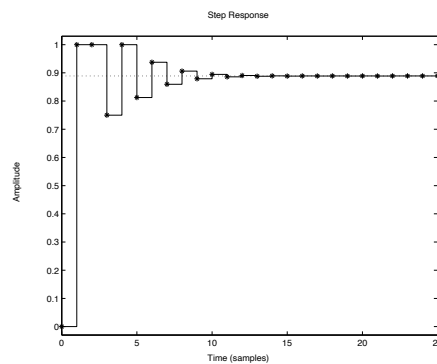


```
%% Risposte dei sistemi lineari TD
%% Descrizione ISU TD:
%% attenzione al diverso significato!
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
eig(A)
ans =
    -0.5000 + 0.8660i
    -0.5000 - 0.8660i
>>abs(ans)
ans =
     1
     1
```

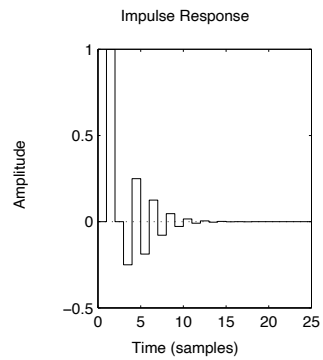
```
%Non e' asintoticamente stabile. Infatti
>>dstep(A,B,C,D,1)
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r*')
```



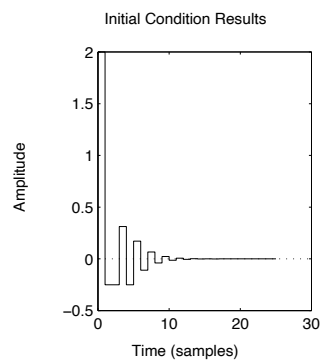
```
%%Scegliamo allora
>>A=[0 1; -1/4 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
>>abs(eig(A))
ans =
    0.5000
    0.5000
>>dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on;
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>plot(0:length(y)-1,y,'r*'); hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r')
```



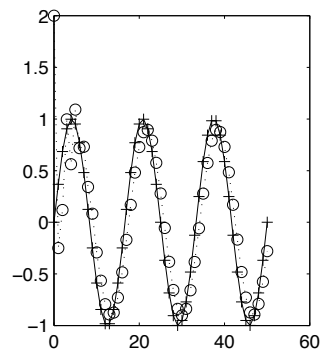
```
>>hold off;
>>dimpulse(A,B,C,D)
```



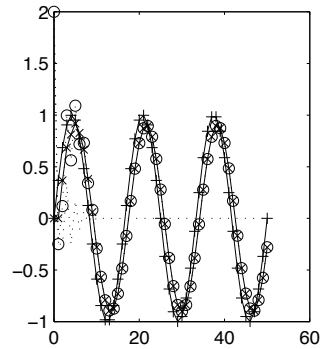
```
>>dinitial(A,B,C,D,[1,1])
```



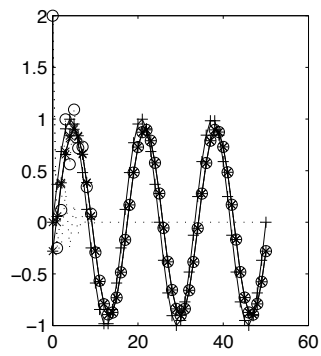
```
%% Risposta ad una sinusoide
>>t=0:50;
>>u=sin(0.12*pi*t);
>>plot(t,u,'r+')
>>hold on; plot(t,u,'r')
%% Risposta totale
>>Y0=dlsim(A,B,C,D,u,[1,1]);
>>plot(t,Y0,'go',t,Y0,':')
```



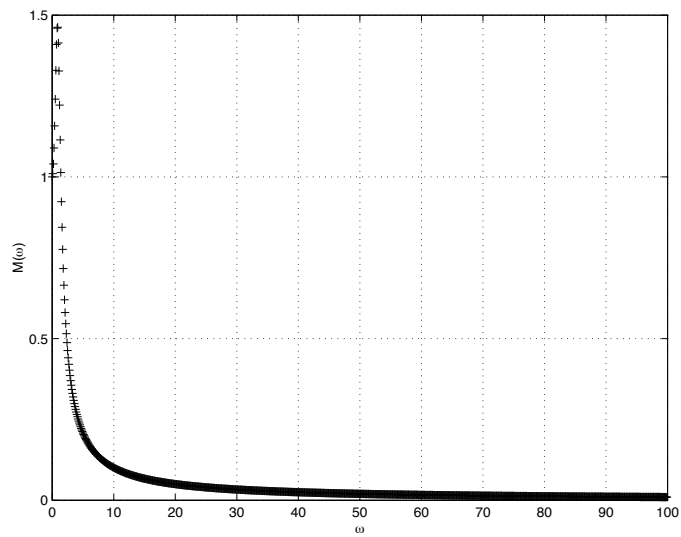
```
%% Risposta libera
>> Yl=dlsim(A,B,C,D,0*u,[1,1]);
>> plot(t,Yl,'k:')
%% Risposta forzata
>> Yf=dlsim(A,B,C,D,u,0*[1,1]);
>> plot(t,Yf,'cx',t,Yf,'c-')
```



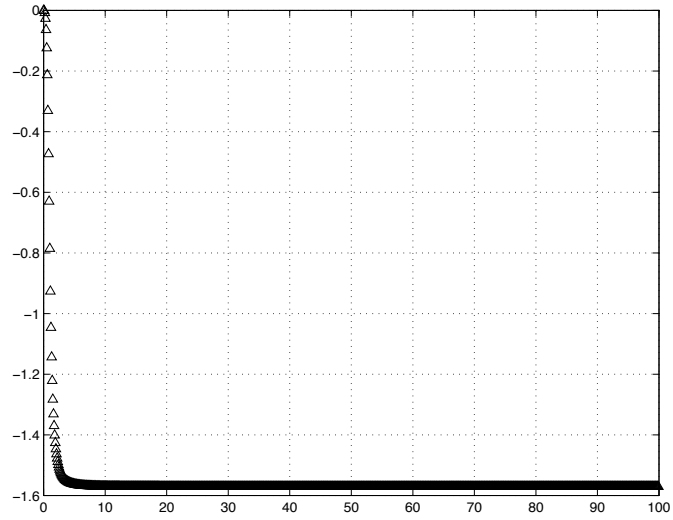
```
%% Risposta di regime
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
>> theta=0.12*pi; etheta=exp(sqrt(-1)*theta);
>> Getheta=polyval(num,etheta)/polyval(den,etheta);
>> Yr=abs(Getheta)*sin(0.12*pi*t+angle(Getheta));
>> plot(t,Yr,'g*',t,Yr,'g-')
```



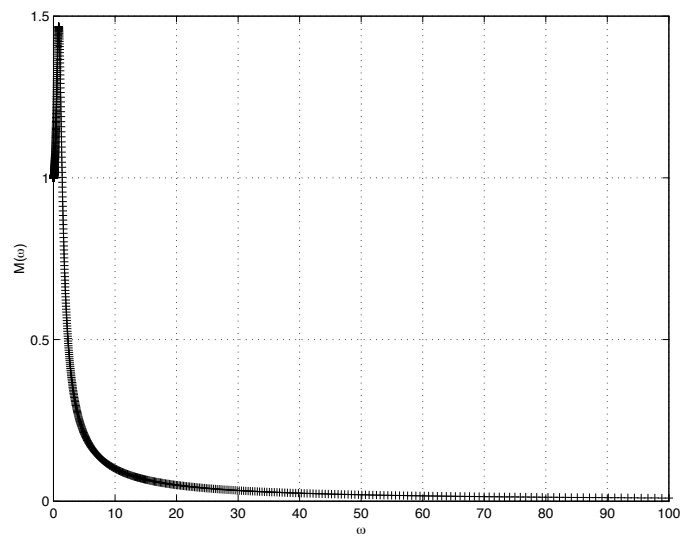
```
%% Risposta armonica TC
>>omega=0.0001:100/1000:100;
>>Gomega=polyval(num,j*omega)./polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega);
>>phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M,'r+'); grid
```



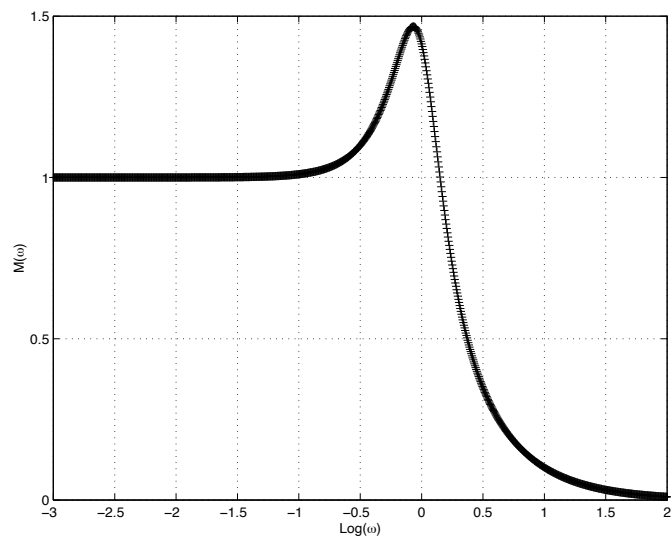
```
>>plot(omega, phi,'r^'); grid
```



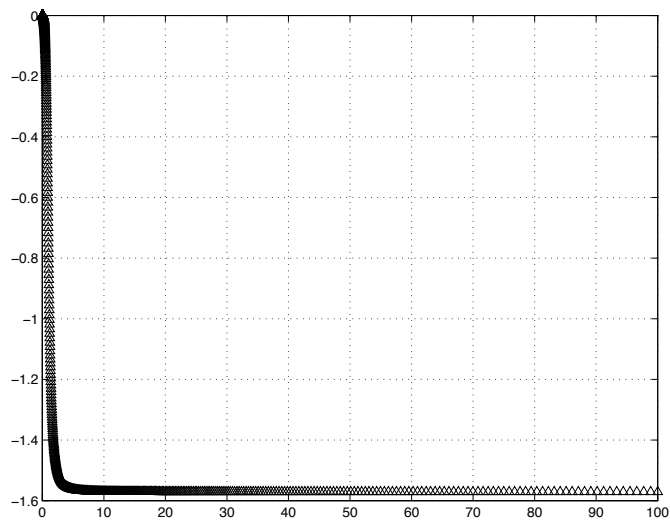
```
>>%Scala logaritmica
>>eomega=-3:5/1000:2;
>>omega=10.^(eomega);
>>Gomega=polyval(num,j*omega)./polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega); phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M,'r+');grid;
>>xlabel('\omega'); ylabel('M(\omega)')
```



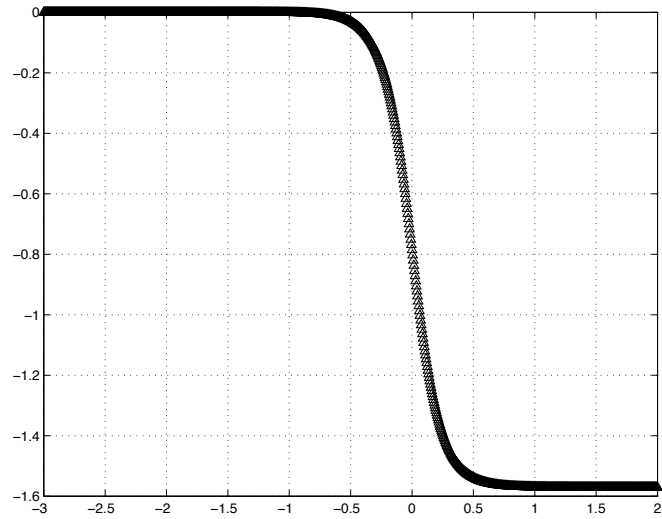
```
>>plot(eomega, M,'r+');grid;
```



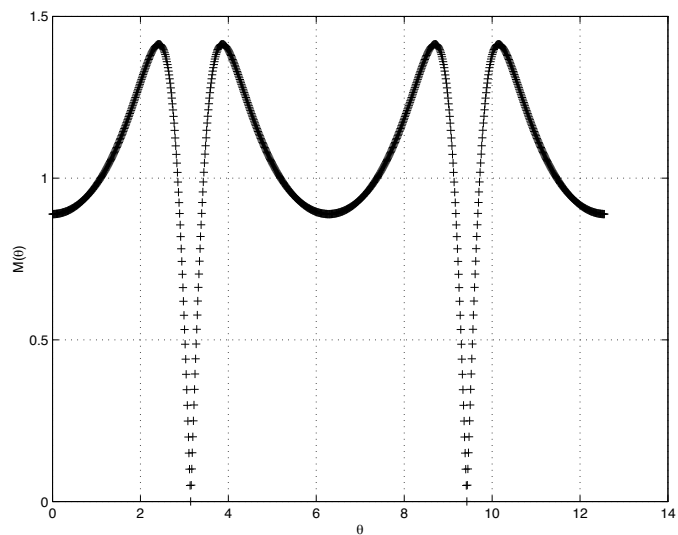
```
>>plot(omega, phi,'r^'); grid
```



```
>>plot(eomega, phi,'r^'); grid
```

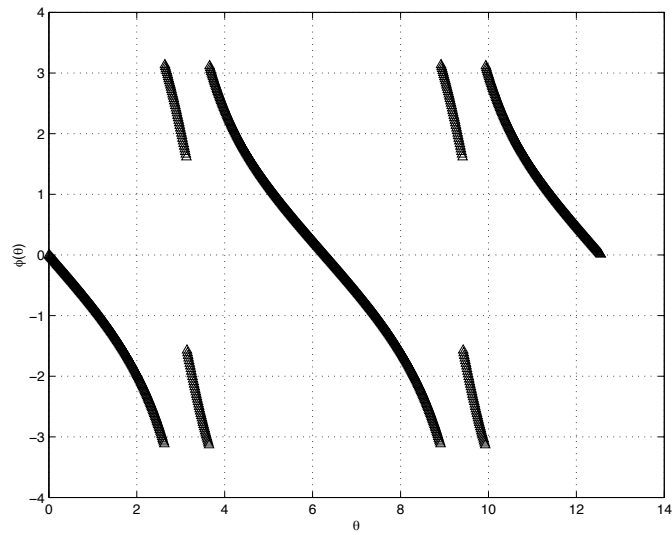


```
>> %% Risposta armonica TD
>>theta=0.0001:4*pi/1000:4*pi;
>>etheta=exp(j*theta);
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);
>>plot(theta, M,'r+'); grid
```

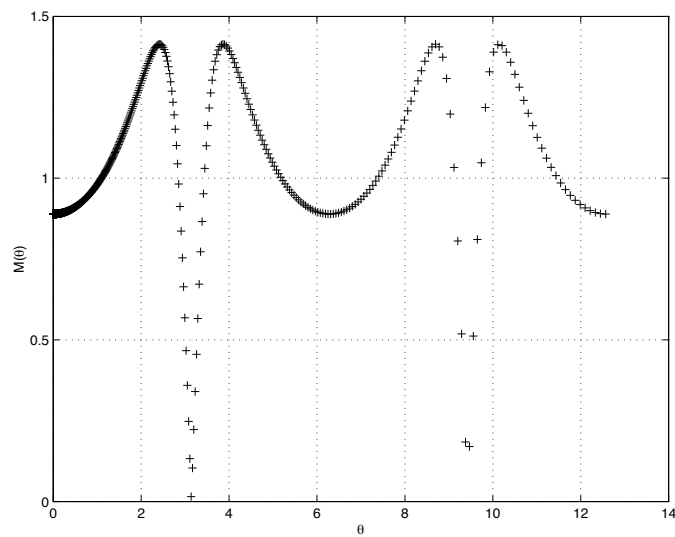


```
>>plot(theta, phi,'r^'); grid
```

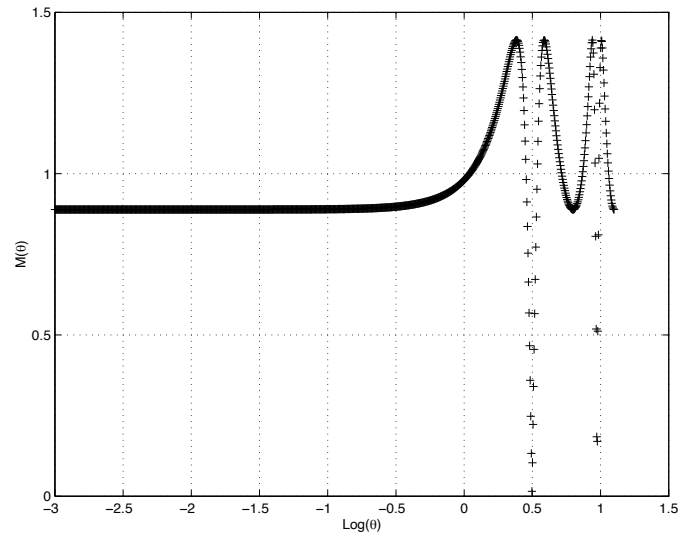




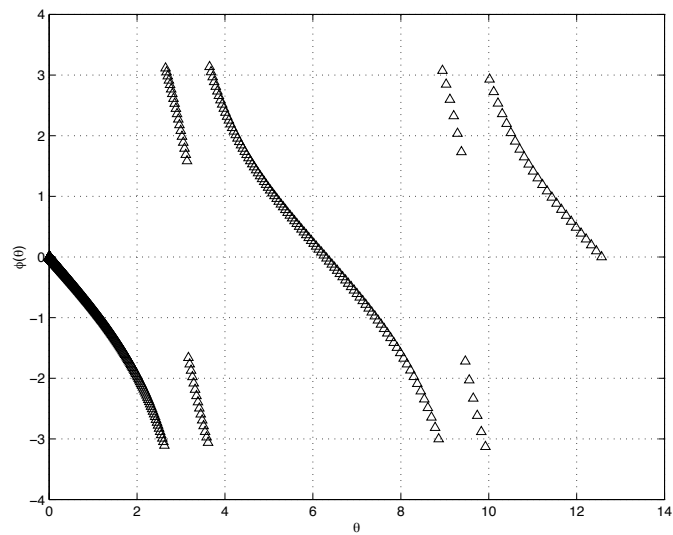
```
>>% Scala logaritmica
>>ltheta=-3:(log10(4*pi)+3)/1000:log10(4*pi);
>>theta=10.^(ltheta); etheta=exp(j*theta);
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);
>>plot(theta, M, 'r+'); grid
```



```
>>plot(ltheta, M, 'r+'); grid
```



```
>>plot(theta, phi,'r'); grid
```



```
>>plot(ltheta, phi,'r'); grid
```

