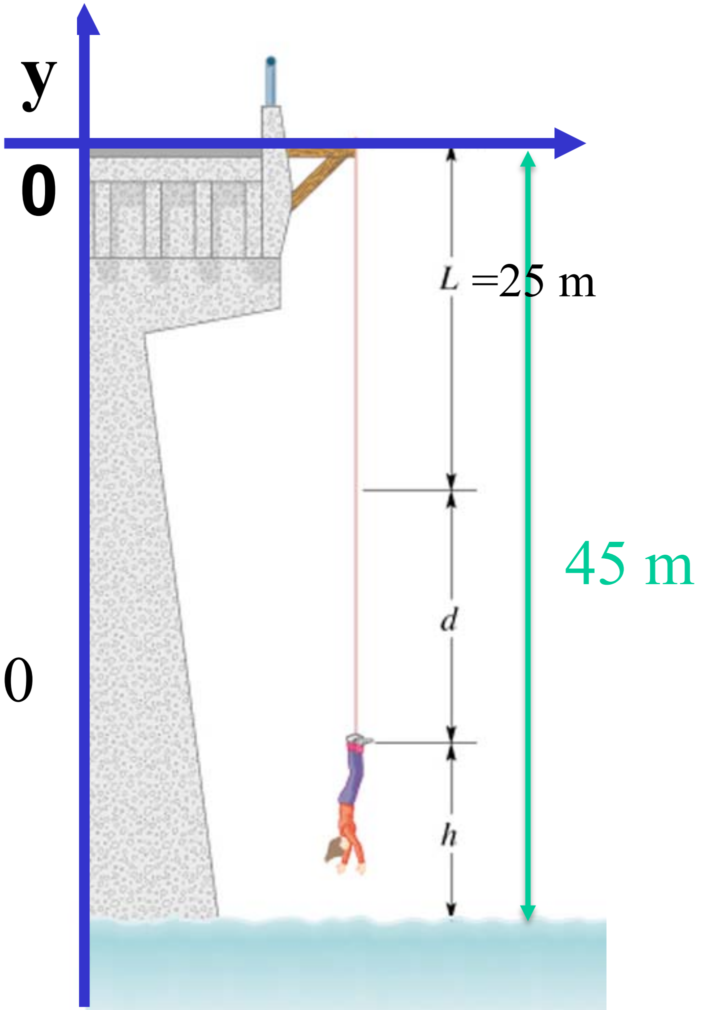
Una praticante di salto con l'elastico si trova su un ponte alto **45.0 m** sul livello del fiume. La ragazza ha una massa di **61.0 kg** . Allo stato di riposo la corda elastica ha una lunghezza di **25.0 m**. Supponiamo che la corda segua la legge di Hooke, con costante elastica **k = 160 N/m**. Se la saltatrice si arresta prima di avere raggiunto l'acqua, a quale quota **h** si trova al di sopra del livello del fiume ?

Idea chiave:

- applico il principio di conservazione dell'energia meccanica, valido per sistema isolato e forze conservative
-

sistema : **donna – elastico-Terra**
forza: **forza gravitazionale** e **forzaelastica** (entrambe conservative)



Non ci sono forze non conservative

$$\Delta E_{mecc,i} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 \qquad v_f = v_i = 0$$

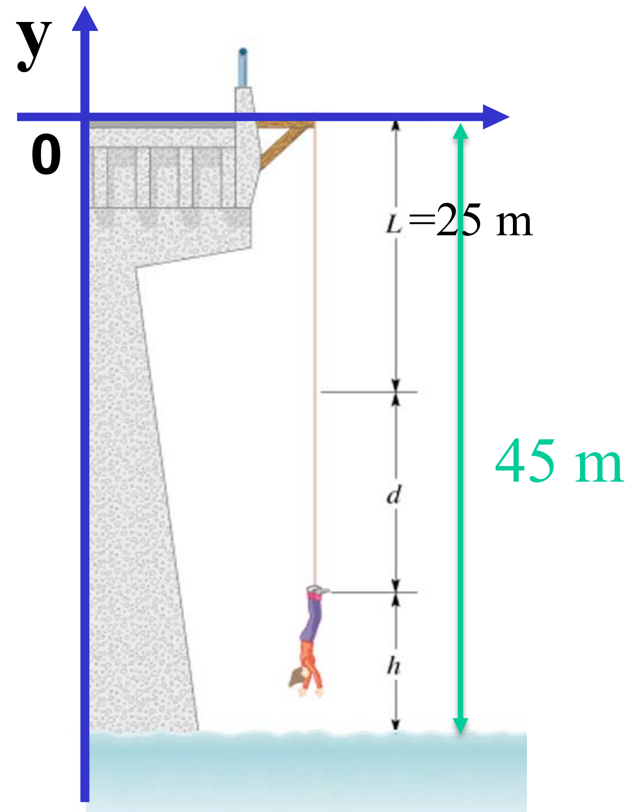
$$\Delta U_g = mg\Delta y = -mg(L+d)$$

$$\Delta E_{mecc,i} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} k d^2 \qquad d = allungamento\ molla$$

$$0 + \frac{1}{2} k d^2 - mg(L+d) = 0$$



$\frac{1}{2} k d^2 - mgd - mgL = 0$ equazione di secondo grado nella variabile d

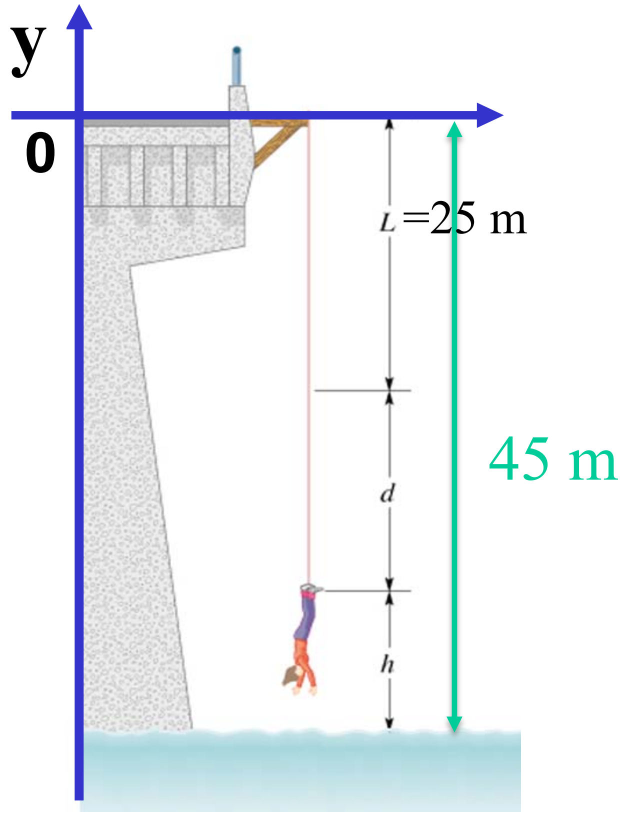
$$d = \frac{mg \pm \sqrt{(-mg)^2 + 4(\frac{1}{2}k)mgL}}{2(\frac{1}{2}k)} = \frac{597 \pm \sqrt{(597)^2 + 4.810^6}}{160} m = \frac{597 \pm 2271}{160} m = \begin{cases} 17.9\, m \\ \cancel{-10.5\, m} \end{cases}$$

$$h = 45.0\, m - (L + d) = 45.0\, m - 25.0\, m - 17.9\, m = 2.1\, m$$

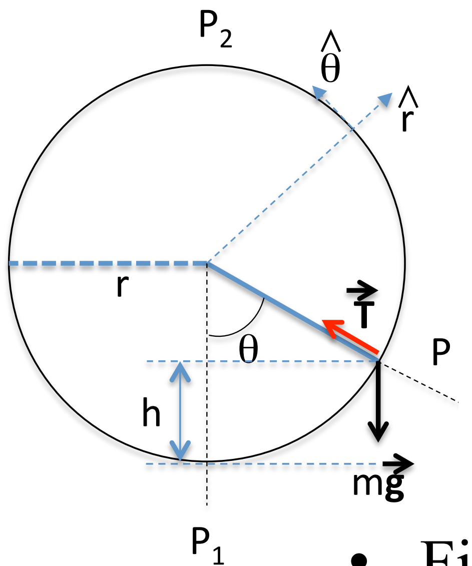
in alternativa: $\Delta K = L_g + L_e$ **teorema forze vive**

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg\int_0^{-(L+d)} dy + \int_0^d -k_e(y-L)d(y-L)$$

Stessa equazione di secondo grado



Pendolo su piano verticale in assenza di attrito



Noti r e m, qual'è la velocità minima che deve avere il punto materiale in P_1 per arrivare in P_2?

- Filo sempre esteso implica $T = mg \cos\theta + m\, v^2/r \geq 0$

$\Rightarrow$Condizione sulla velocità scalare nella traiettoria

$$mg \cos\theta + m\, v^2/r \geq 0 \quad \Rightarrow v^2/r \geq -\, g \cos\theta$$

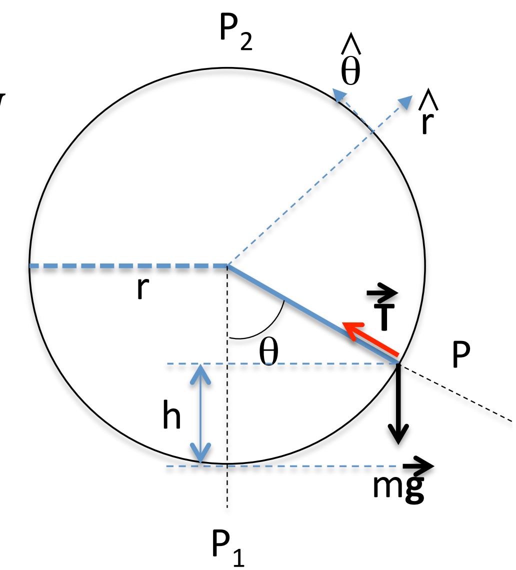
Il punto materiale per arrivare sulla verticale, $\theta = \pi$, deve avere almeno

$$v(P_2)_{min} = \sqrt[2]{gr}$$

$v(P_2)_{min} = \sqrt[2]{gr} \quad = v(P_2)$ velocità con cui deve arrivare in P_2 per avere il filo teso

- Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro (la tensione è ortogonale allo spostamento di P)
  - possiamo applicare la conservazione dell'energia per determinare $v(P_1)_{min}$

$$E(P) = cost = E(P_1) = E(P_2) \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$



- Origine dell'energia potenziale nel punto di equilibrio stabile del pendolo

$\Rightarrow$ A una posizione corrispondente ad un angolo θ:

$$U(P)=mgr(1-\cos\theta)$$

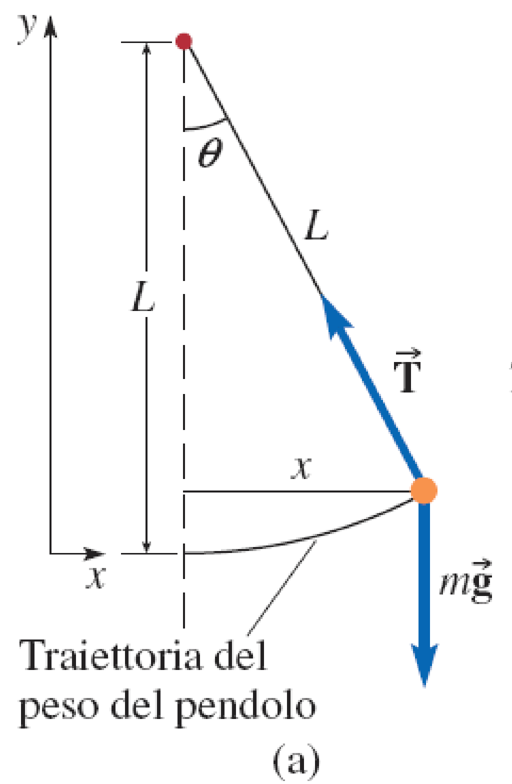
- $\Delta K = -\Delta U$

$$\frac{1}{2}mv_{P2}^2 - \frac{1}{2}mv_{P1}^2 = \frac{1}{2}mgr - \frac{1}{2}mv_{P1}^2 = 0 - 2mgr$$

$$\Rightarrow v(P_1) = \sqrt[2]{5gr}$$

Pendolo in assenza di attrito

Dato un pendolo costituito da un filo inestensibile di lunghezza L e da una massa m attaccato ad esso, determinare la velocità della massa m per $\theta=0$ *se il pendolo è lasciato libero di oscillare da* $\theta=\theta_0$



- Le forze che agiscono sul pendolo sono la tensione del filo **T** e la forza peso **P**
- Lo spostamento è tangente alla traiettoria circolare che compie la massa m durante la sua oscillazione
  - La tensione del filo quindi non compie lavoro in quanto istante per istante è perpendicolare allo spostamento.
- Poichè l'"unica forza che compie lavoro è una forza conservativa l'energia meccanica si conserva

Determinare la velocità della massa m per $\theta=0$ ***se il pendolo è lasciato libero di oscillare da*** $\theta=\theta_0$

- Prendiamo l'origine dell'energia potenziale nella posizione di equilibrio stabile del pendolo ($\theta=0$)

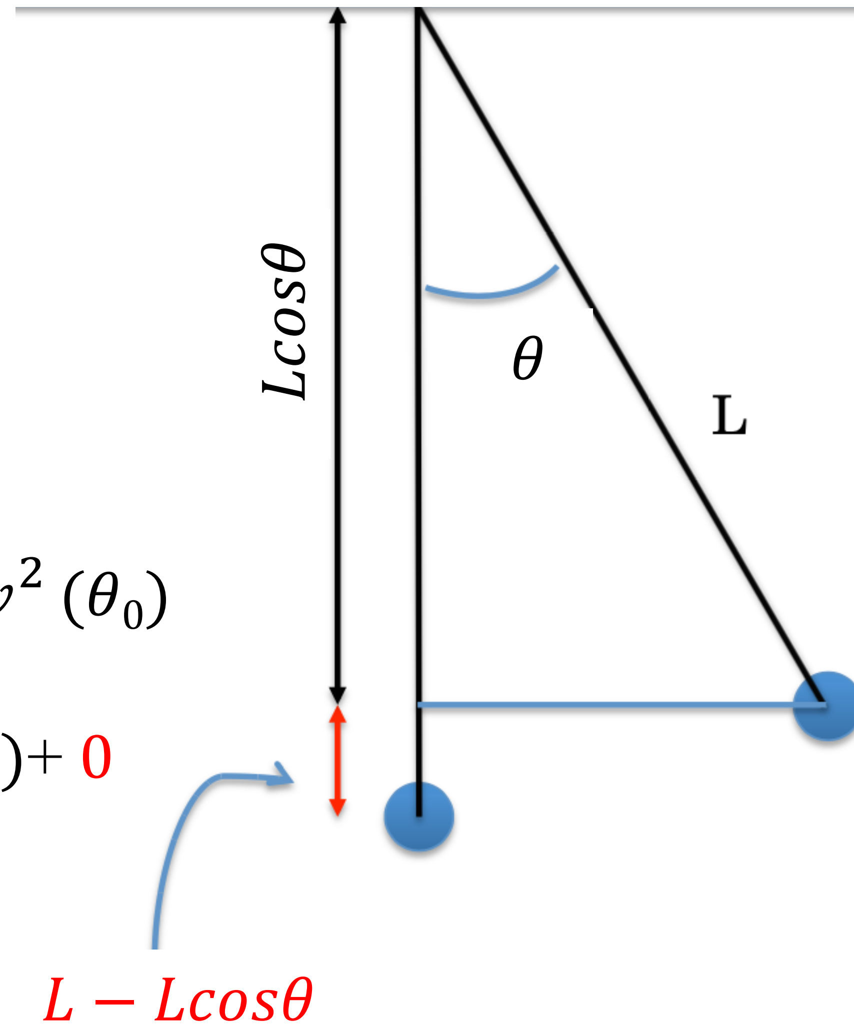
$$U(\theta) = mgL(1-cos\theta)$$

- Dalla conservazione dell'energia

$$U(0)+\frac{1}{2}mv^2\,(\theta=0) = U(\theta_0)+\frac{1}{2}mv^2\,(\theta_0)$$

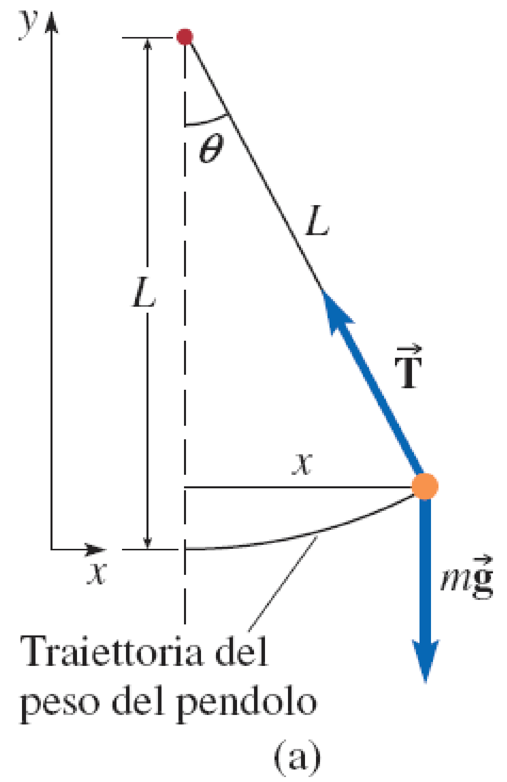
$$0+\frac{1}{2}mv^2\,(\theta=0) = mgL(1-cos\theta_0)+0$$

$$\Rightarrow v(\theta=0) = \sqrt{2gL(1-cos\theta_0)}$$



Pendolo ed oscillazioni

- **Punto materiale di massa inerziale *m* legata alla estremità di una corda tesa, inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza L.**

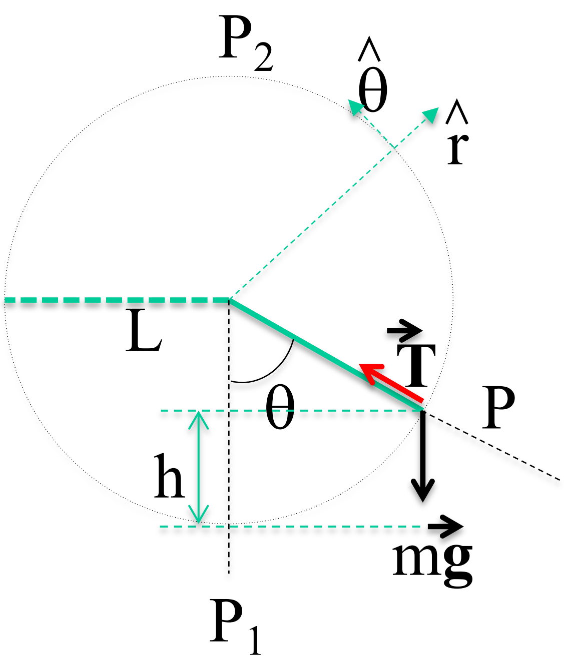


- Il moto avviene su un piano verticale ed ovviamente la traiettoria è rappresentata da un arco di circonferenza

- Abbiamo già visto questo sistema e concluso che in presenza della forza peso ***mg*** e della tensione del filo ***T*** si conserva l'energia meccanica totale

Pendolo su piano verticale

$$E(P) = K(P) + U(P) = \text{cost} = K(P_1) + U(P_1)$$



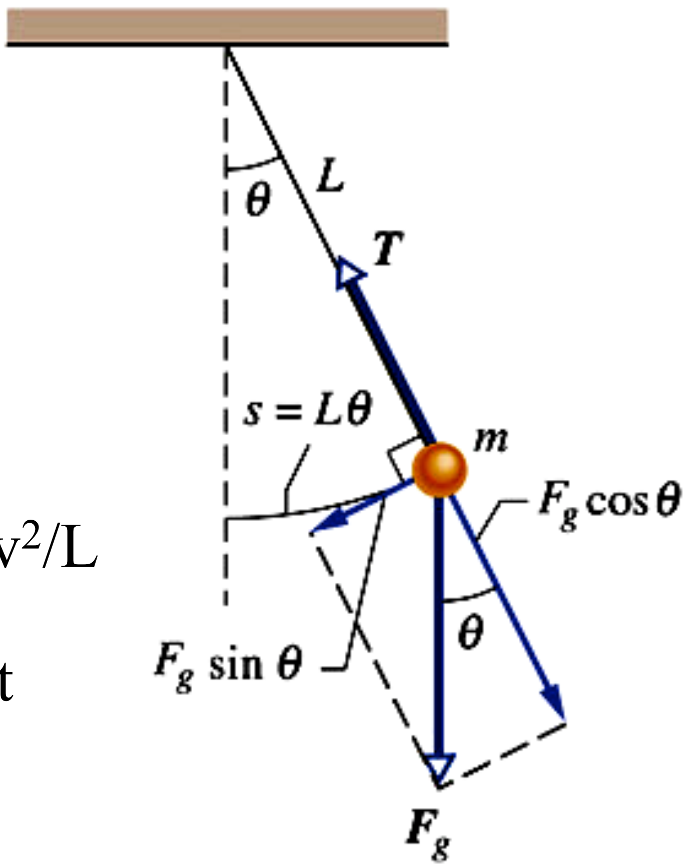
- Supponiamo di conoscere lo stato di moto del punto materiale in una posizione particolare (P), possiamo quindi prevedere quale sarà lo stato di moto in un generico punto P_1.

$$K(P_1) – K(P) = - (U(P_1) – U(P))$$

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{P1}^2 - \frac{1}{2}\, m v_P^2 \;= mgh = mgL\,(1 - \cos\theta)$$

Pendolo su piano verticale (2)

- Il moto del punto materiale è un moto circolare vario
  - accelerazione tangenziale oltre all` accelerazione centripeta



- In coordinate polari:

Lungo l'asse r : $-T + mg\cos\theta = m\,a_r = -\,m\,v^2/L$

Lungo l'asse θ : $-mg \,\mathrm{sen}\,\theta = m\,a_\theta = m\,dv/dt$

$F_g = mg$

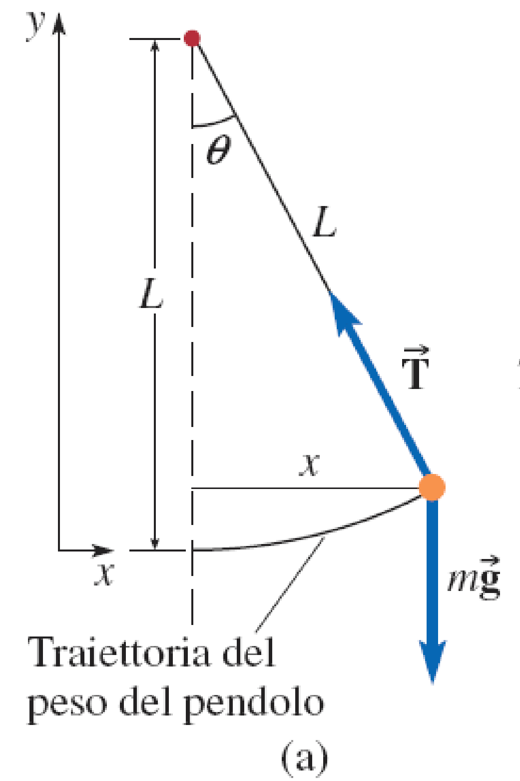
Pendolo su piano verticale(3)

- Esiste un ovvio legame tra arco, che rappresenta la traiettoria, ed angolo

  s= L θ

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(L\theta)}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega(t)$$

$$a_\theta(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(L\omega)}{dt} = L\frac{d\omega}{dt} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



componente radiale: $-T + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{L}$

componente tangenziale: $-mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Pendolo su piano verticale (4)

$$ma_\theta(t) = -mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Per la componente tangenziale, posso scrivere: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

per piccoli angoli per cui vale l'espansione in serie di Taylor arrestata al primo termine $$\sin\theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0 \qquad \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Questa rappresenta l'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea che descrive il moto della massa inerziale *m*
  - Stessa equazione della molla: il nostro sistema si muoverà eseguendo delle oscillazioni periodiche intorno alla posizione di equilibrio stabile corrispondente all'angolo $\theta = 0$
  - <u>Valida per il pendolo SOLO</u> <u>per piccoli angoli</u>: $\sin\theta \sim \theta$ ($\theta_{max} \sim 5°$)

Pendolo su piano verticale (5)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0 \qquad \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè quando $\sin\theta \cong \theta$) sarà del tipo sinusoidale:

$\theta(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$ con pulsazione Ω e periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

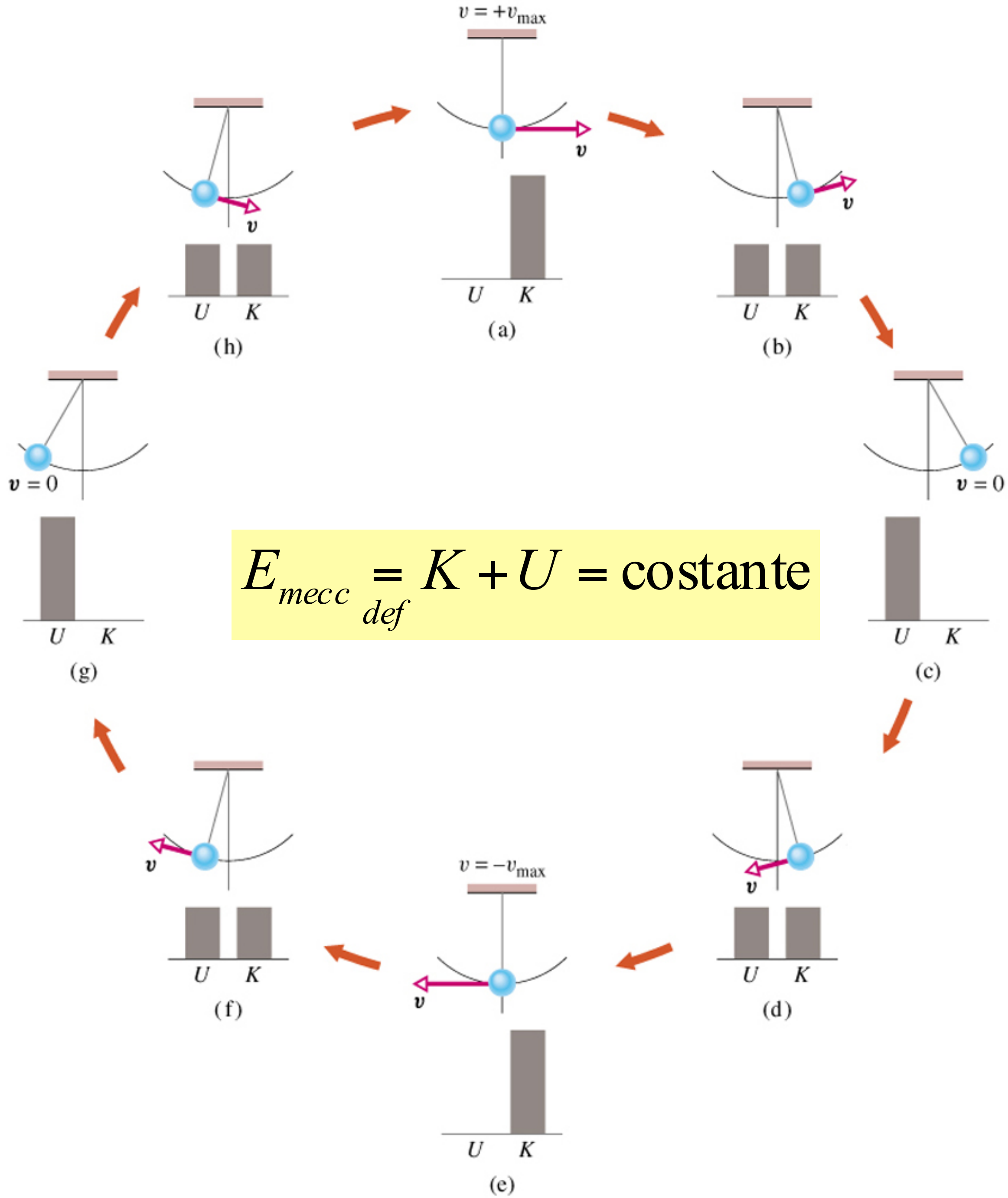
(NON dipendente dalla massa m ma solo dalla lunghezza del pendolo).

La velocità angolare istante per istante vale: $\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = -\Omega A\sin(\Omega t + \phi)$

Le costanti arbitrarie si determinano dalle condizioni iniziali:

$$\theta(0) = A\cos(\varphi)$$

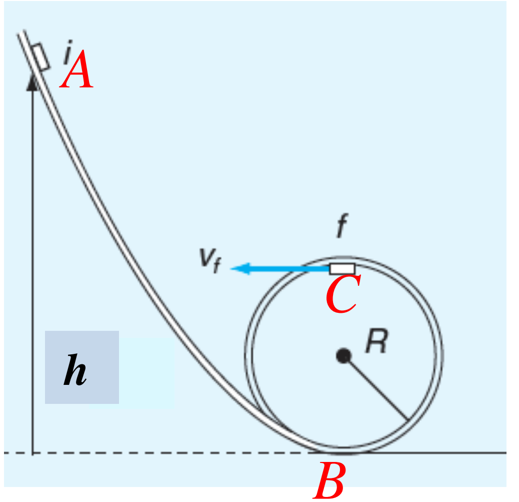
$$\frac{d\theta(0)}{dt} = \omega(0) = -\Omega A\sin(\phi)$$



$$E_{mecc} \underset{def}{=} K + U = \text{costante}$$

Ottovolante senza attrito

Ottovolante: un corpo di massa m parte da fermo dall'estremità di una rampa alla fine della quale c'è un anello circolare di raggio R. Da che altezza deve partire per poter percorrere l'anello senza staccarsi?



- Le forze o sono conservative (forza peso) o non compiono lavoro (reazione normale ortogonale allo spostamento)

  - Quindi l'energia si conserva

$$\Delta E = \Delta(U + K) = 0 \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f \quad = \text{costante}$$

- Prendiamo l'origine dell'energia potenziale a terra

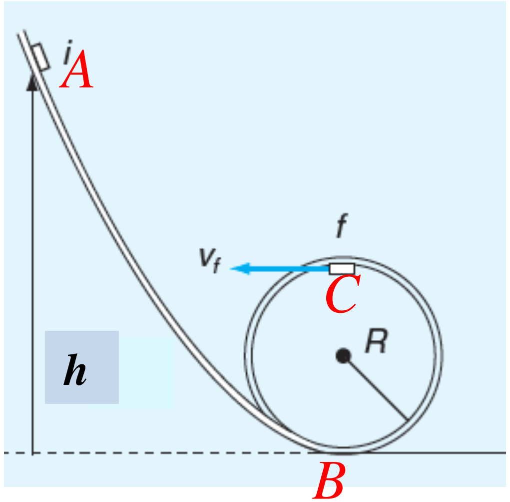
Dalla conservazione dell'energia

$$E(P) = cost = E(A) = E(B) = E(C)$$

$$\Rightarrow \; mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + mg(2R)$$

$$E(P) = cost = E(A) = E(B) = E(C)$$

$$\Rightarrow \; mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R)$$



- In C

Perché non si stacchi deve valere la relazione del moto circolare

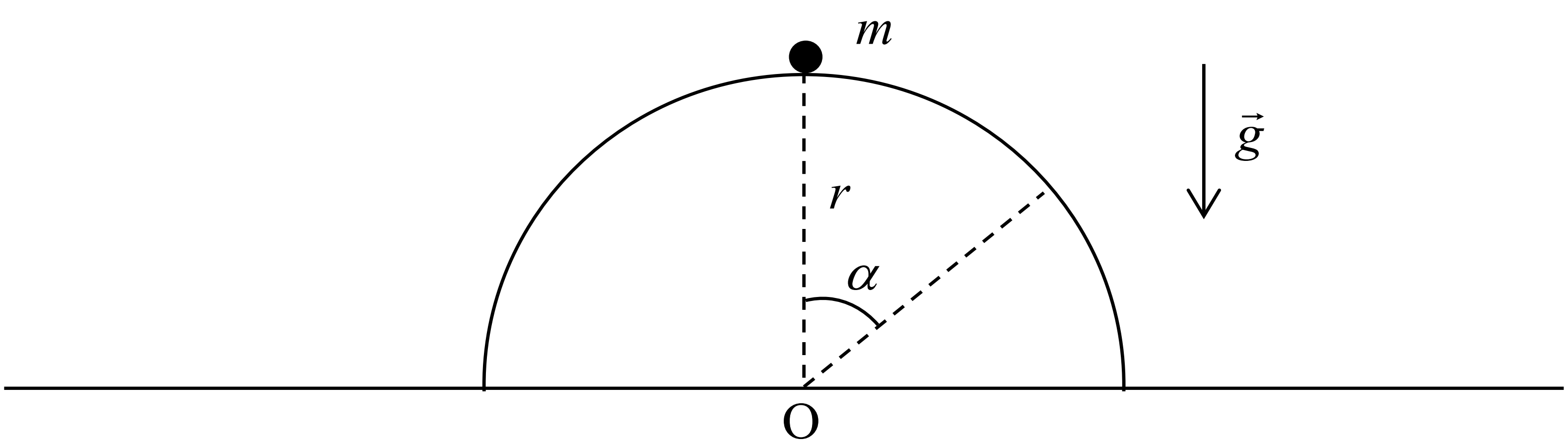
$$ma_R = -m\frac{v_C^2}{R} = -N - mg \Rightarrow \frac{v_C^2}{R} = \frac{N}{m} + g$$

e poichè il distacco avviene per N=0 vale $v_C^2 > gR$

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 > 2mgR + \frac{1}{2}mRg = \frac{5}{2}mgR$$

$$\Rightarrow h_{min} > \frac{5}{2}R$$

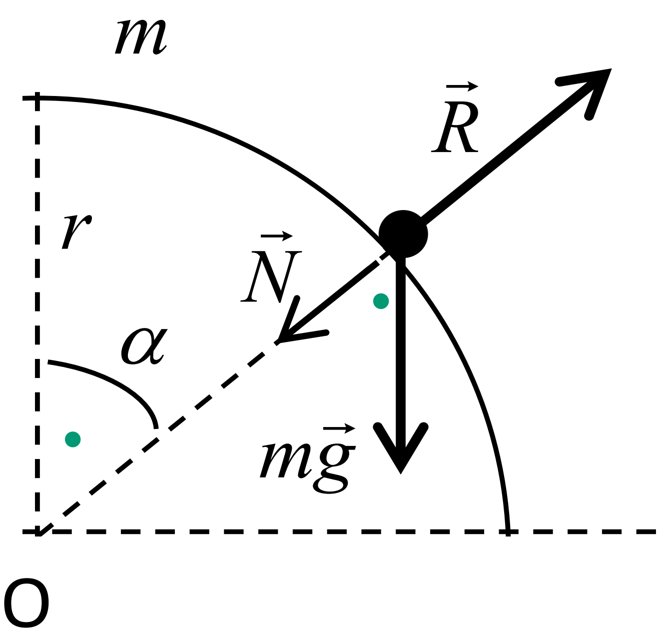
Un punto materiale di massa m, appoggiato sulla sommità di una guida circolare ed inizialmente in quiete, inizia a scivolare senza attrito lungo la guida .
A quale angolo α^* avviene il distacco del punto dalla guida?



Soluzione A quale angolo α^* avviene il distacco del punto materiale?

Durante il moto della pallina a contatto con la guida si ha (componente normale dell'equazione di Newton):

$$-R + mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{r}$$



- Origine dell'energia potenziale a terra

Dalla conservazione dell'energia meccanica segue:

$$mgr = mgr\cos\alpha + \frac{1}{2}mv^2$$

Il distacco della pallina dalla guida avviene nell'istante in cui $R = 0$ *cioè per* $\alpha = \alpha^*$ *tale che* $g\cos\alpha^* = \frac{v^2}{r}$. *Inserendo tale vincolo nel bilancio energetico si ottiene:*

$$mgr = mgr\cos\alpha^* + \frac{1}{2}mgr\cos\alpha^* \quad \rightarrow \quad 1 = \cos\alpha^* + \frac{1}{2}\cos\alpha^*$$

$$\rightarrow \quad 3\cos\alpha^* = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

4. La cabina di un ascensore di massa **m = 500 kg** sta scendendo alla velocità **v_i = 4.0 m/s,** quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandolo cadere con accelerazione cotante **a = g**/5.

a) determinare il lavoro **L_g** svolto dalla forza peso durante la caduta di un tratto **d = 12 m**;

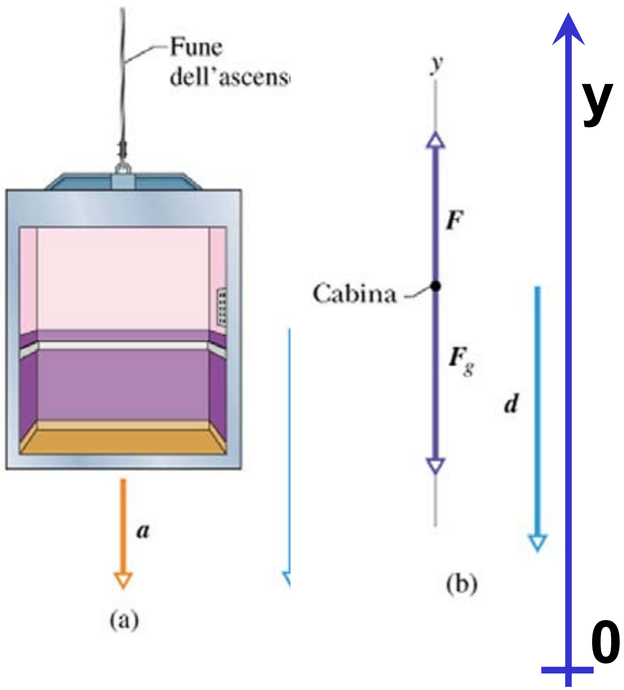
b) determinare, lungo il medesimo tratto, il lavoro **L_T** svolto dalla forza di trazione **T.**

c) determinare il lavoro totale sviluppato sulla cabina durante la caduta di 12 m.

d) calcolare la variazione di energia cinetica della cabina alla fine della caduta di 12 m.

Idea chiave:

- tratto la cabina come corpo puntiforme



a) Il lavoro svolto dalla forza peso durante la caduta è pari a:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mg\,d\cos 0^0 = mgd$$

$$= (500kg)(9.8m/s^2)(12m)$$

$$= 5.88 \times 10^4 J \approx 59kJ$$

b) Per calcolare il lavoro svolto dalla tensione T della fune devo ricavare una espressione per T. Utilizzo la seconda legge di Newton:

proietto tale equazione su y:

$$-mg + T = ma \quad \Rightarrow \quad T = ma + mg = m(a+g)$$

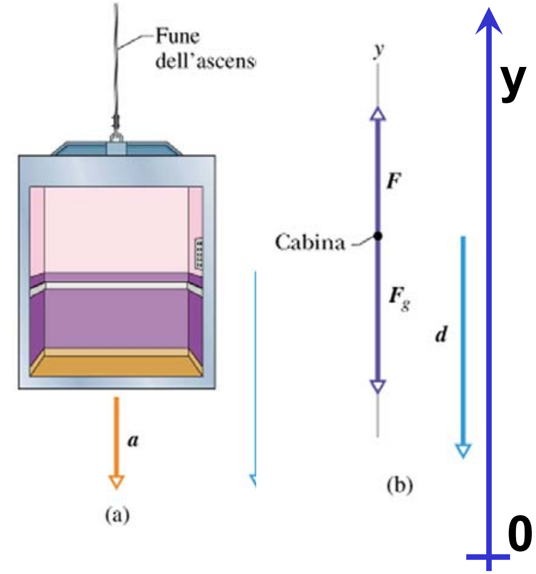
da cui ricavo il lavoro della tensione:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = Td\cos(180^0)$$

b) Per calcolare il lavoro svolto dalla tensione T nel tratto d della fune devo ricavare una espressione per T.
Utilizzo la seconda legge di Newton:

proietto tale equazione su y:

$$-mg + T = ma \quad \Rightarrow \quad T = ma + mg = m(a+g)$$



da cui ricavo il lavoro della tensione:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = Td\cos(180^0)$$

$$= -m(a+g)d \qquad \text{sapendo che a = -g/5 (verso il **basso**)}$$

$$= -m(-g/5+g)d = -4/5mgd = -4/5(500kg)(9.8m/s^2)(12m) = 47kJ$$

c) Il lavoro e una quantità scalare, quindi additiva
per cui il lavoro complessivo fatto nella discesa di un tratto d è dato da

$$L = L_g + L_T = 59kJ - 47kJ = 12kJ$$

d) Applico il teorema dell'energia cinetica:
la variazione di K è pari al lavoro svolto sulla cabina

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = L + \frac{1}{2}mv_i^2 = 12kJ + 1/2(500kg)(4.0m/s)^2 \approx 16kJ$$

Un punto materiale di massa m è vincolato a scorrere lungo una guida liscia. La guida ha la forma di una semicirconferenza di centro O e di raggio r.
Il punto materiale è collegato al punto A mediante una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile (vedi figura).

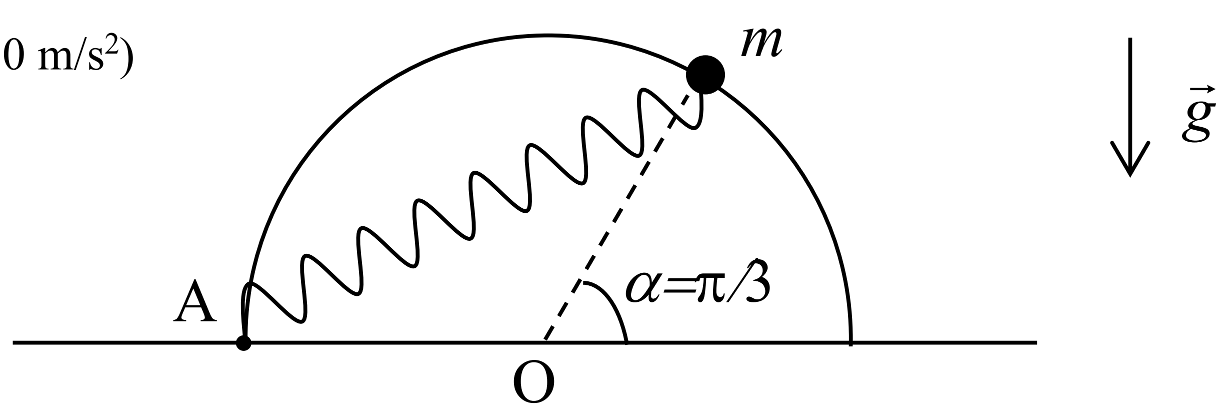
Sono noti: $r = 60$ cm, $k = 2$ N/m.

1) Calcolare la massa m affinché il punto sia in equilibrio nella configurazione di figura con $\alpha = \pi/3$.

2) Per tale valore di m calcolare la reazione esercitata dalla guida su m nella posizione di equilibrio.

3) Se la massa fosse doppia di quella calcolata precedentemente quale sarebbe l'accelerazione iniziale del punto materiale se venisse abbandonato nella posizione di figura con velocità nulla?

(assumiamo $g = 10$ m/s^2)

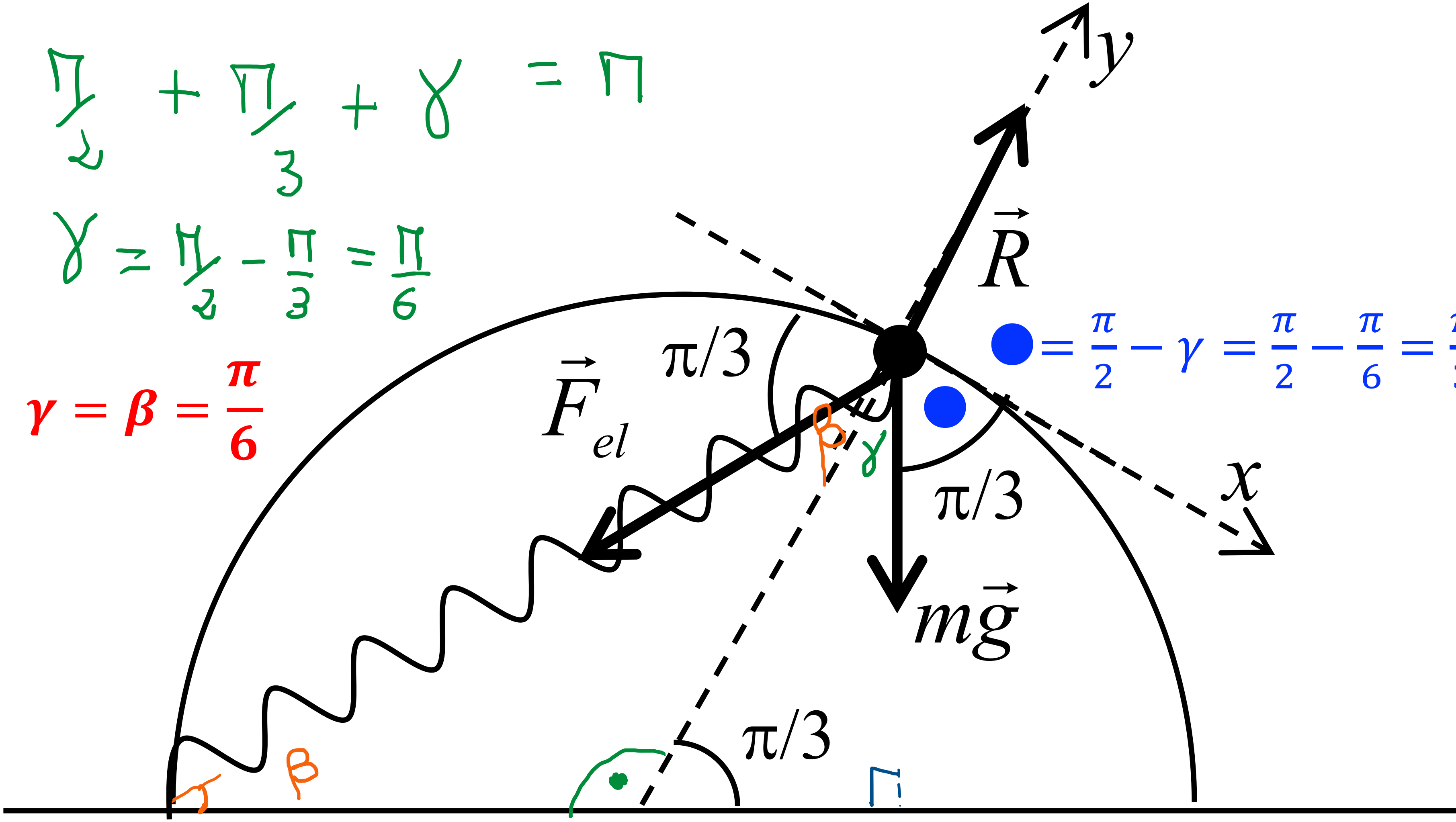


$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \gamma = \pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\gamma = \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet = \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

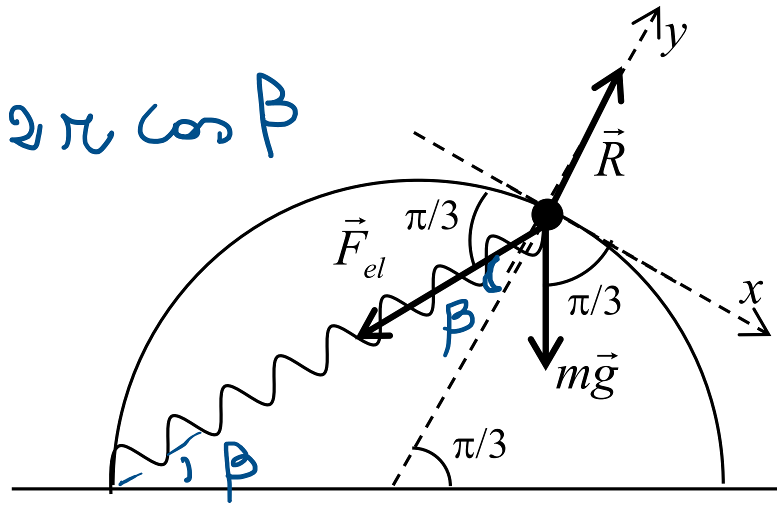


$$\bullet = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$2\beta + \frac{2}{3}\pi = \pi \Rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \qquad \beta = \frac{\pi}{6}$$

1) Calcolare la massa m affinché il punto sia in equilibrio nella configurazione di figura con $\alpha = \pi/3$.

$\ell = 2r\cos\beta$



$\beta = \pi/6$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta = \frac{1}{2}$

Osserviamo che, nella configurazione di figura la lunghezza della molla è $\ell = \sqrt{3}r$.

Nella posizione di equilibrio l'equazione di Newton ha la forma: $\vec{F}_{el} + \vec{R} + m\vec{g} = 0$.

Scegliendo un sistema di assi come in figura e passando alle componenti si ha:

$$\begin{cases} x)\quad \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}kr = 0 \quad \rightarrow \quad mg = \sqrt{3}kr \quad \rightarrow \quad m \approx 0{,}2kg \\ y)\quad R - \frac{3}{2}kr - \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0 \end{cases}$$

2) Per tale valore di m calcolare la reazione esercitata dalla guida su m nella posizione di equilibrio.

2) *Dalla componente y otteniamo* $R = 3kr \approx 3{,}6N$

3) Se la massa fosse doppia di quella calcolata precedentemente quale sarebbe l'accelerazione iniziale del punto materiale se venisse abbandonato nella posizione di figura con velocità nulla?

Nota nel moto successivo varierà anche θ e quindi l'accelerazione.Qui chiede di calcolare l'accelerazione un'istante dopo che il pm viene abbandonato

3) *Indichiamo con* $m^* = 2m = \dfrac{2\sqrt{3}}{g} kr$ *la nuova massa del punto.*

L'equazione di Newton in questo caso ha la forma $\vec{F}_{el} + \vec{R} + m^* \vec{g} = m^* \vec{a}$ *e cioè, in componenti,*

$$\begin{cases} x) \quad \dfrac{1}{2} m^* g - \dfrac{\sqrt{3}}{2} kr = m^* a_x \\ y) \quad R - \dfrac{3}{2} kr - \dfrac{\sqrt{3}}{2} m^* g = 0 \end{cases}$$

Si osservi che al tempo iniziale l'accelerazione del punto, che ha velocità nulla, è solo tangenziale, e cioè ha solo componente x.

Dalla componente x dell'equazione di Newton si ricava $a_x = \dfrac{g}{4} = 2{,}5 m/s^2$