Esame di Ricerca Operativa del 09/01/14

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\ y_1 + 12\ y_2 + y_3 + y_4 + 4\ y_5 + 4\ y_6 \\ -y_1 - 4\ y_2 + y_4 + 4\ y_5 = 1 \\ y_1 - 3\ y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 = 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-3,\ 0)$	SI	NO
$\{3,\ 4\}$	$y = (0,\ 0,\ 5,\ 1,\ 0,\ 0)$	SI	NO

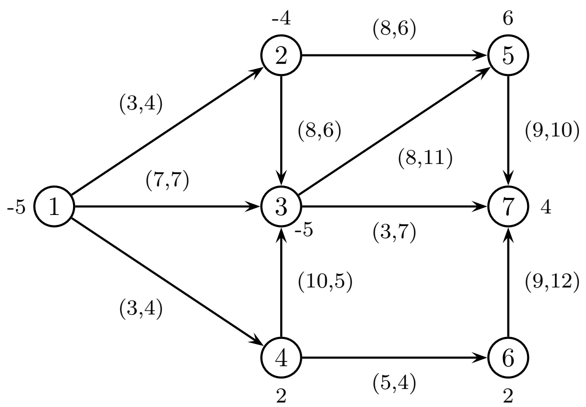
Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,\ 5\}$	$\left(\frac{7}{3},\ \frac{16}{3}\right)$	$\left(\frac{25}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$	3	$\frac{25}{4},\ 7$	1
2° iterazione	$\{3,\ 5\}$	$\left(\frac{5}{4},\ 1\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{25}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0\right)$	4	$5,\ 1$	5

Esercizio 3.

variabili decisionali	modello
x_1 = milioni di Euro investiti in fondi azionari x_2 = milioni di Euro investiti in fondi bilanciati x_3 = milioni di Euro investiti in fondi monetari x_4 = milioni di Euro investiti in fondi obbligazionari	$\begin{cases} \max\ 0.3\ x_1 + 0.11\ x_2 + 0.2\ x_3 + 0.08\ x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 14 \\ x_2 + x_4 \geq 0.35 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 0.5 * (x_1 + x_3) \\ 0.1\, x_1 + 0.08\, x_2 + 0.15\, x_3 + 0.02\, x_4 \leq \\ \quad 0.1\, (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

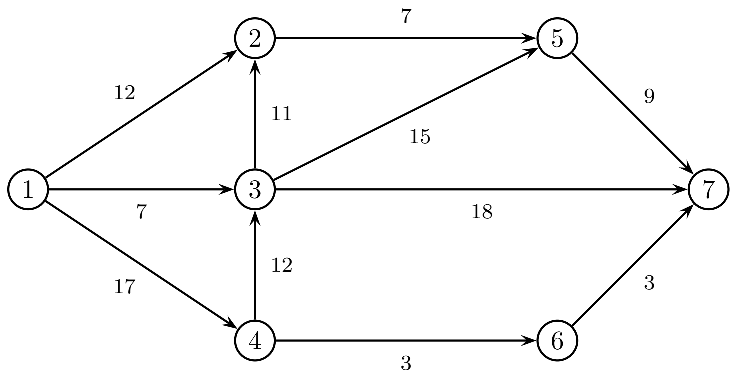


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,3) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(2,5)	$x = (0,\ 0,\ 5,\ -2,\ 6,\ 6,\ 0,\ 3,\ 0,\ 6,\ -2)$	NO	NO
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (6,7)	(5,7)	$\pi = (0,\ 7,\ 7,\ 3,\ 15,\ 1,\ 10)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

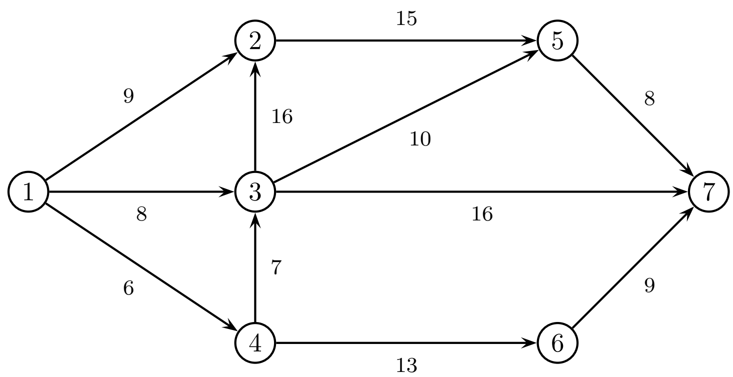
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)
Archi di U	(1,4)	(1,4)
x	(0, 1, 4, 0, 4, 6, 0, 0, 2, 4, 0)	(1, 0, 4, 0, 5, 5, 0, 0, 2, 4, 0)
π	(0, 7, 7, −3, 15, 2, 24)	(0, 3, 3, −7, 11, −2, 20)
Arco entrante	(1,2)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 1	1 , 0
Arco uscente	(1,3)	(4,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		6		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 4	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1
nodo 5	$+\infty$	-1	22	3	19	2	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	25	3	25	3	25	3	25	3	23	6	23	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 8, 0, 8, 0, 0, 8, 0, 0, 8, 0)	16
1 - 4 - 3 - 7	6	(8, 8, 6, 8, 0, 0, 14, 6, 0, 8, 0)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 13\ x_2 \\ 12\ x_1 + 6\ x_2 \leq 41 \\ 11\ x_1 + 15\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{18}{5}\right)$ $\qquad v_S(P) = 46$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\qquad v_I(P) = 39$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 3$

$r = 3$ $\qquad 6\,x_1 + 9\,x_2 \leq 32$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	22	51	21
2		13	52	25
3			10	29
4				22

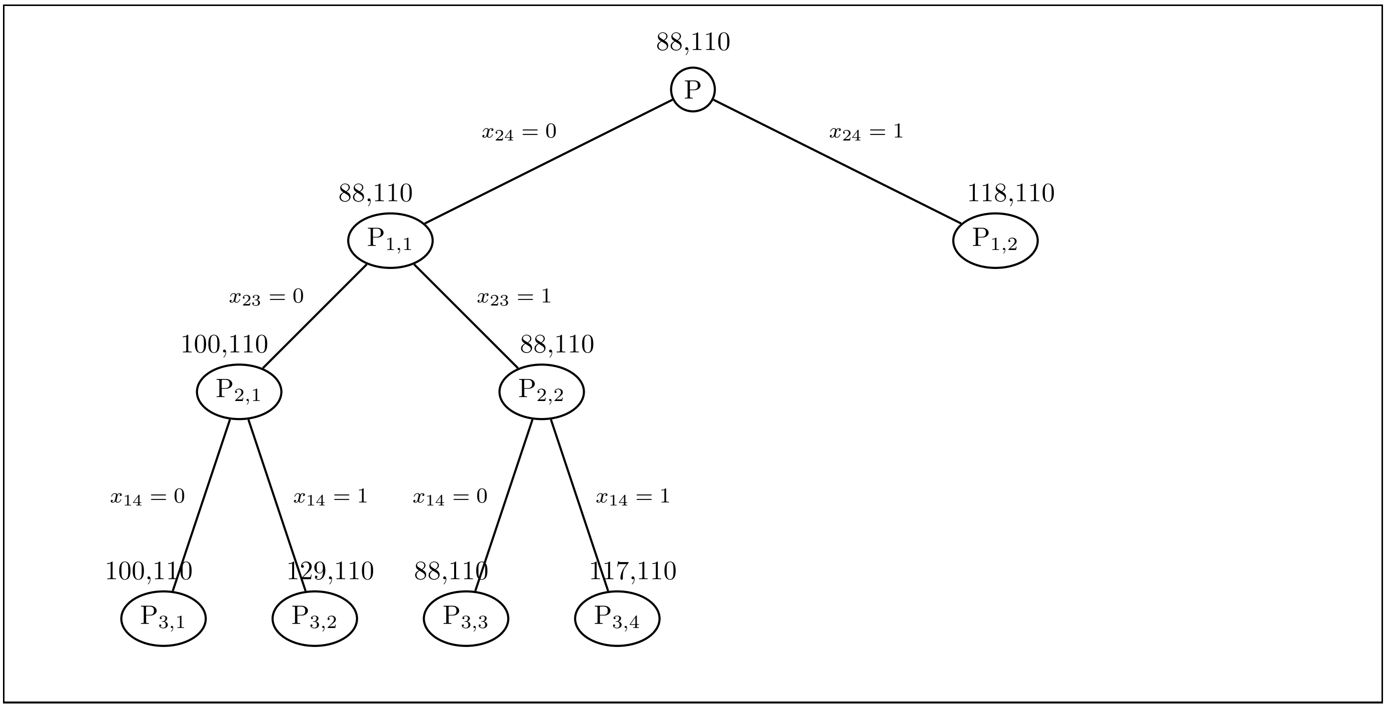
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 88$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{14}.


88,110
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
88,110
$P_{1,1}$
118,110
$P_{1,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
100,110
$P_{2,1}$
88,110
$P_{2,2}$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
100,110
$P_{3,1}$
129,110
$P_{3,2}$
88,110
$P_{3,3}$
117,110
$P_{3,4}$