591AA 21/22 – COMPITO 7

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

Problema 1. Trova un vettore non nullo che sia ortogonale a ciascuno dei seguenti vettori

$$(1,1,1,-1), \qquad (-1,1,1,1), \qquad (1,-1,1,1)$$

Problema 2. Sia $[a,b]=[0,1]$. Siano $f=x+x^2$, $g=1+x^3$.
(a) Trova l'angolo tra f e g. [Il coseno dell'angolo è sufficiente]
(b) Trova l'distanza tra f e g
(c) Verificare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per f e g.
(d) Verificare la disuguaglianza triangolare per f e g.

Problema 3. Verficare che

$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+4x_4y_4$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

Problema 4. Ricordiamo che se $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ sono nxm matrici allora

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$$

Siano

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(a) Trova l'angolo tra A e B. [Il coseno dell'angolo è sufficiente]
(b) Verificare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per A e B.
(c) Verificare la disuguaglianza triangolare per A e B.

Problema 5. Sia $A=(a_{ij})$ una matrice $n\times n$. Allora,

$$tr(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\in\mathbb{R}$$

Se $B=(b_{ij})$ è una matrice $n\times m$ allora $B^t=(\beta_{ij})$ è la matrice $m\times n$ data dalla formula $\beta_{ij}=b_{ji}$. In altre parole, scambiamo le righe e le colonne della matrice:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(a) Verficare che $A \mapsto tr(A)$ è una mappa lineare da matrici $n \times n$ a $\mathbb{R}$.
(b) Verificare che $A \mapsto A^t$ è una mappa lineare $M_{n\times m} \to M_{m\times n}$.
(c) Sia $\langle A, B\rangle$ il prodotto scalare sulle matrici del problema 4. Verificare per matrici 2x2 che

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$$

(vedi lezione 1 per il prodotto di matrici 2x2).

Problema 6. Sia A una matrice 2x2 tale che $A^t = A$. Allora A si dice una matrice definita positiva se (e sole se)

$$u \neq 0 \implies (u, Au) > 0$$

Teorema: Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Allora A è una matrice definita positiva se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte

(i) Sia $a > 0$ che $d > 0$;
(ii) $ad - b^2 > 0$.

Determinare quali delle seguenti matrici sono una matrice definita positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$