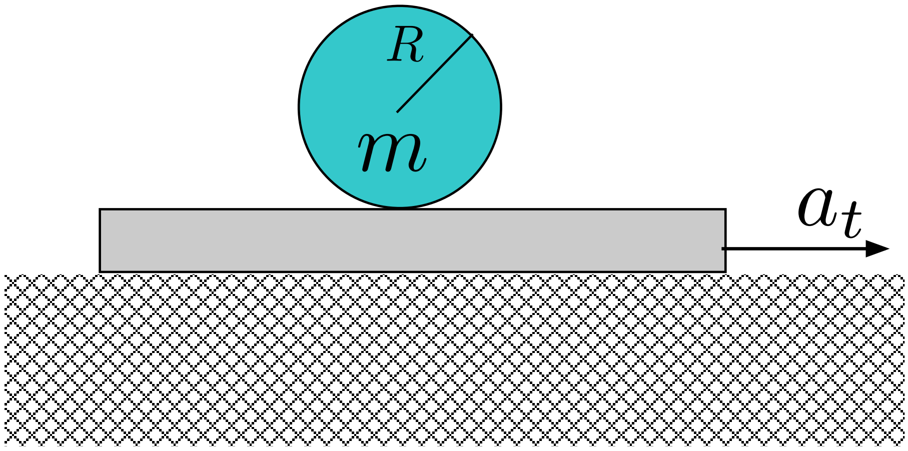
Esercizio (tratto dall'Esempio 7.43 del Mazzoldi 2)

Una piattaforma avanza con accelerazione $a_t = 3\,\mathrm{m/s}$. Su di essa è appoggiato un cilindro di massa m e raggio R. Nell'ipotesi che il cilindro rotoli senza strisciare sulla piattaforma, calcolare

1. l'accelerazione a del cilindro rispetto al suolo;
2. l'accelerazione a_r del cilindro rispetto alla piattaforma;
3. il valore minimo del coefficiente di attrito statico.



SUGGERIMENTO per la SOLUZIONE
Soluzione nel sistema del laboratorio
Di solito la condizione di puro rotolamento si esprime dicendo che

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

dove α è l'accelerazione angolare (rotazione attorno al CM) e a l'accelerazione del CM rispetto al laboratorio (moto traslatorio del CM).
Questo problema, tuttavia, è un po' diverso da quelli in cui un cilindro (o un disco, anello) rotola lungo un piano, in quanto qui il piano su cui si trova il cilindro è in movimento. Notiamo la cosa seguente: se il centro di massa del cilindro si muovesse (rispetto al laboratorio) con la stessa accelerazione della piattaforma ($a = a_t$), il cilindro non avrebbe alcuna ragione per rotolare. E' solo quando il CM del cilindro 'rimane indietro' rispetto alla piattaforma (ossia quando $a < a_t$) che il cilindro è costretto a rotolare. Pertanto il moto rotatorio del cilindro (e dunque l'accelerazione angolare α rispetto al CM) è legato *non* all'eccelerazione *assoluta* a del CM rispetto al laboratorio, ma all'accelerazione *relativa* $a_t - a$ tra centro di massa e piattaforma. Dunque la condizione di puro rotolamento si esprime come

$$\alpha = \frac{a_t - a}{R} \tag{1}$$

Da notare il segno: fisicamente se il CM viaggia più lentamente rispetto alla piattaforma ($a_t > a$), deve valere che il cilindro rotola in senso antiorario ($\alpha > 0$) rispetto al CM, e dunque α dev'essere legato a $a_t - a$ (e non a $a - a_t$). Più precisamente $a_t - a$ è l'accelerazione della piattaforma rispetto al cilindro e $a - a_t$ è l'accelerazione del cilindro rispetto alla piattaforma.

Occorre anche notare che qui la forza di attrito F_{att} è diretta lungo il moto (verso destra), perché è proprio la forza che la piattaforma esercita sul cilindro per trascinarselo. E' l'unica forza che agisce sul cilindro, e il CM si muove verso destra (rispetto al laboratorio) con la legge

$$F_{\text{att}} = ma \tag{2}$$

La direzione di F_{att} è consistente con la direzione di rotolamento (antiorario) del cilindro, in quanto una forza F_{att} esercita un momento M uscente dal foglio e fa dunque ruotare il cilindro in senso antiorario

$$F_{\text{att}}\, R = I\alpha \tag{3}$$

Combinando le equazioni (1), (2) e (3) si ottiene

$$a = \frac{\frac{I}{mR^2}}{1 + \frac{I}{mR^2}} a_t \tag{4}$$

****

Un altro modo equivalente per risolvere il problema è quello di mettersi nel **sistema della piattaforma**. Questo ha il vantaggio che ci si riconduce al caso più 'standard' in cui il piano su cui scorre il cilindro è fermo. Tuttavia occorre anche tener presente che la piattaforma si muove (rispetto al sistema inerziale del laboratorio) di moto uniformemente accelerato, e dunque il sistema della piattaforma *non* è un sistema inerziale. In tale sistema di riferimento, su qualunque corpo di massa m agisce, oltre alle forze reali, anche una forza *apparente* pari a $-ma_t$. Nel nostro caso, dunque, sul cilindro agisce una tensione $T' = -ma_t$ (applicata al suo CM); è importante notare che questa non è una tensione reale (non c'è nessuna fune che tira il cilindro) ma apparente, ossia dovuta al fatto che il sistema della piattaforma non è inerziale. Formalmente, però, tutto avviene come se tale tensione ci fosse e ci riconduciamo a risolvere il problema usuale di un cilindro che rotola su un piano fisso, tirato verso sinistra da una fune apparente, e su cui agisce una forza di attrito $F_{\rm att}$ verso destra. In tale situazione, scriveremo allora le equazioni

$$T' + F_{\rm att} = ma' \qquad \text{(moto traslatorio del CM)} \tag{5}$$

$$F_{\rm att} R = I\alpha = -I\frac{a'}{R} \qquad \text{(moto rotatorio attorno al CM)} \tag{6}$$

dove a' è l'accelerazione del CM del disco rispetto al sistema della piattaforma. Il segno '-' nella seconda equazione deriva semplicemente dalle convenzioni scelte per moto traslatorio e rotatorio. Qui abbiamo scelto che $a' > 0$ corrisponda al CM del cilindro che si muove verso destra, e che a $\alpha > 0$ corrisponda alla rotazione in senso antiorario. Quindi, siccome un cilindro che rotola in senso antiorario si muove verso sinistra, occorre aggiungere un segno '-' nel legame tra α e a'. Risolvendo (5) e (6) si ottiene

$$a' = -\frac{a_t}{1 + \frac{I}{mR^2}} \tag{7}$$

Avendo l'accelerazione (7) del CM del disco rispetto al sistema della piattaforma, possiamo ottenere ora l'accelerazione del cilindro rispetto al sistema del laboratorio attraverso la legge di composizione

$$\begin{aligned} a &= a' + a_t = \\ &= \frac{\frac{I}{mR^2}}{1 + \frac{I}{mR^2}} a_t \end{aligned} \tag{8}$$

che coincide con (4).