1) $P\{\text{estrarre bianco}\} = 0.8 = p$

$P\{\text{estrarre nero}\} = 0.2 = 1-p$

a) $P\{\text{3 bianche su 5}\} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = \frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$

$= \frac{\cancel{5}^{1}\cdot 2\cdot 4^3}{5^{\cancel{5}\,4}} = \frac{2^7}{5^4} = 0{,}2048$

b) $P\{N \text{ bianche su } N\} = \binom{N}{N} p^N (1-p)^0 = p^N = 0{,}8^N < 0{,}1$

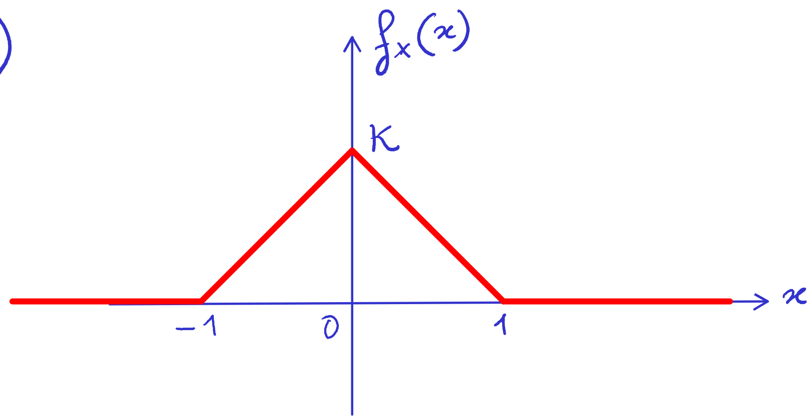
$\left(\frac{4}{5}\right)^N < \frac{1}{10}$; $\left(\frac{5}{4}\right)^N > 10$ $\quad N > \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5/4} = \frac{1}{0{,}0969}$

$N > 10{,}32 \longrightarrow N_{min} = 11$

c) I risultati non sarebbero variati perché p (e $1-p$) non sono cambiati.

---

2)



a) L'area sottesa dalla $f_X(x) = 1 = \frac{2\cdot K}{2} \Rightarrow K = 1$

b) $f_X(x) = \begin{cases} 1-|x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad Y = 3X + 2$

Uso teorema fondamentale per la trasformazione di v.a

$$f_Y(y) = \left. \frac{\sum_i f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \right|_{x_i = g^{-1}(y)}$$

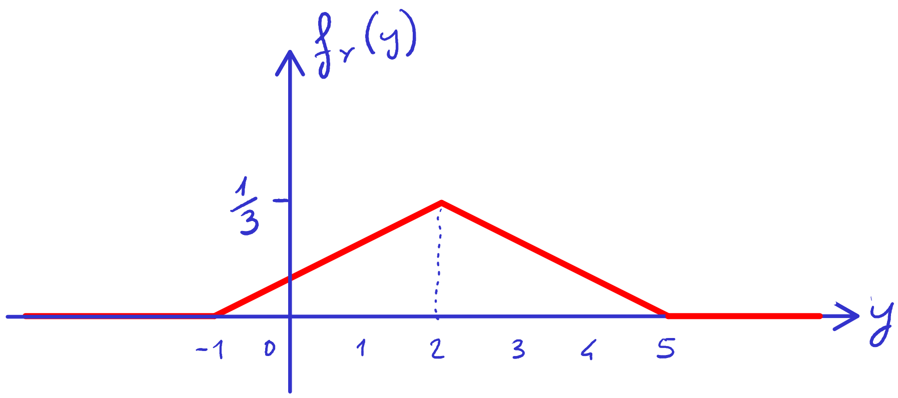
$y = g(x) = 3x + 2 \longrightarrow \forall y, \exists x_1$ tale che $y = 3x_1 + 2 \rightarrow x_1 = \dfrac{y-2}{3}$

$g'(x) = 3$

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-2}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left[1 - \frac{|y-2|}{3}\right], & -1 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

c) $\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{g(X)\} = 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$\mathbb{E}\{X\} = 0$



3) $N(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow X(t)$

$$S_x(f) = S_N(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1+4\pi^2 f^2 T^2}$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 T^2 \cdot f^2}\, df = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\nu^2}\, d\nu$$

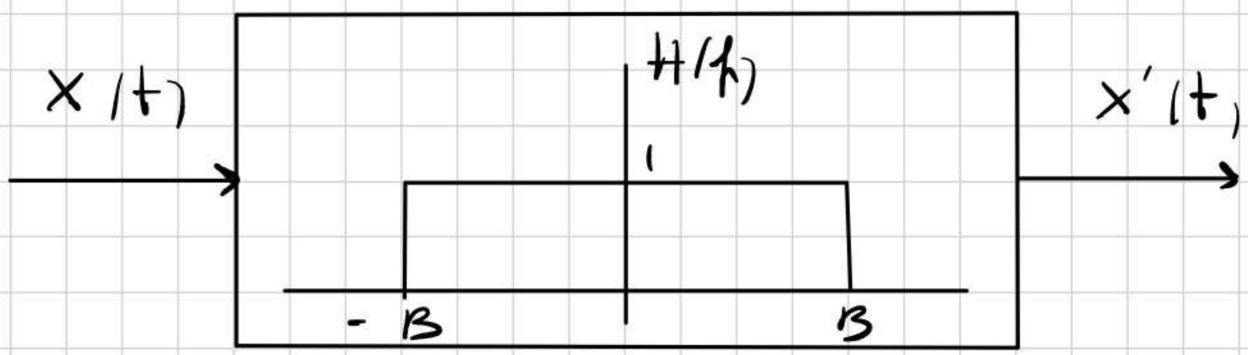
$$\nu = 2\pi T \cdot f$$

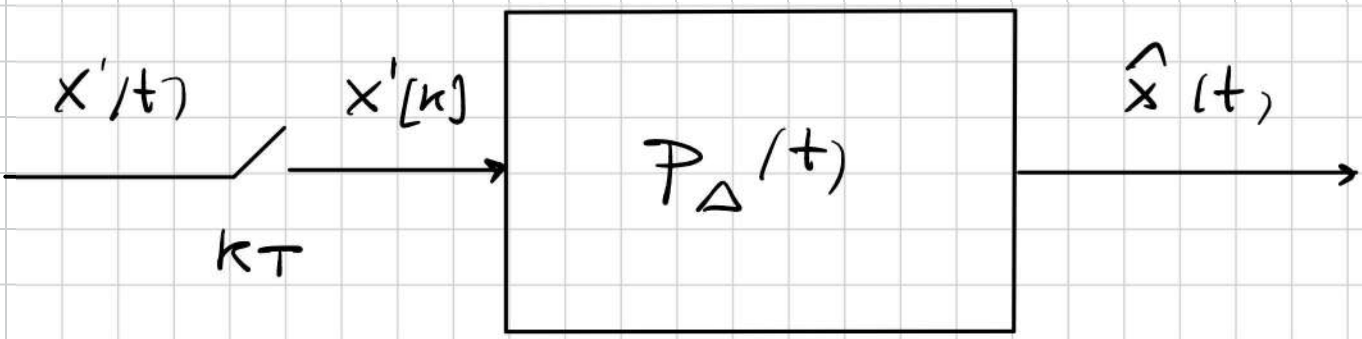
$$df = \frac{d\nu}{2\pi T}$$

$$= \frac{N_0}{4\pi T} \cdot \arctan(\nu) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N_0}{4\pi T} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{N_0}{4T}$$

Esercizio 4

Un segnale di durata limitata ha una banda non limitata. Al fine di applicare il teorema del campionamento devo limitarlo in banda con un filtro passa-basso. Essendo un segnale audio uso un filtro passa-basso di banda $B = 20\ kHz$





L'intervallo di campionamento deve essere

$$\frac{1}{T} \geq 2B$$

$$\boxed{\text{Scelgo } \frac{1}{T} = 2B = 40 \text{ kHz}}$$

Per operare in tempo reale non posso utilizzare un interpolatore cardinale poiché non causale. Per renderlo causale, devo prima troncarlo e dopo ritardarlo.

Interpolatore cardinale:

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \mathrm{sinc}(2Bt)$$

Applico una funzione rettangolare nel tempo di durata Δ :

$$p_\Delta(t) = p(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

Il segnale ricostruito $\hat{x}(t)$ è pari a

$$\hat{x}(t) = \sum_k x'[k]\, p_\Delta\left(t - kT - \frac{\Delta}{2}\right)$$

traslazione per causalità

Scelgo ad esempio

$$\Delta = 40T = \frac{40}{2f_s} = \frac{40}{40}10^{-3} = 1\ ms$$

Il ritardo di riproduzione è pari a

$$\boxed{\frac{\Delta}{2} = 0.5\ ms}$$

ESERCIZIO 5

Sapendo che

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

Sostituendo $x(t) = e^{j2\pi f t}$ si ottiene

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{j2\pi f(t-\alpha)}\, d\alpha$$

$$= \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha}_{H(f)}$$

Segue che:

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

DA RIPETERE PER OGNI FREQUENZA f DI INTERESSE

ESERCIZIO 6

Le parole di codice si ottengono sapendo che

$$\underline{c} = \underline{m}\,\underline{\underline{G}} \qquad \underline{\underline{G}} = \left[\underline{\underline{I}}_3 \,,\, \underline{\underline{P}}\right]$$

$\underline{m}$			$\underline{c}$						d_H
0	0	0	0	0	0	0	0	0	/
0	0	1	0	0	1	1	1	0	3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	3
1	0	0	1	0	0	1	0	1	3
0	1	1	0	1	1	1	0	1	4
1	0	1	1	0	1	0	1	1	4
1	1	0	1	1	0	1	1	0	4
1	1	1	1	1	1	0	0	0	3

La distanza minima e': 3

La matrice controllo di parità è:

$$\underline{\underline{H}} = [\underline{\underline{P}}^T, \underline{\underline{I}}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sindrome è pari a:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{y}\, \underline{\underline{H}}^T = [0\ 0\ 1]}$$

Siccome $\underline{S} = \underline{y}\, \underline{\underline{H}}^T = \underline{e}\, \underline{\underline{H}}^T$ si trova

$$\boxed{\underline{e} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]}$$

da cui segue $\underline{y} + \underline{e} = \underbrace{[\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ ]}_{\text{parola trasmessa}}$

Esercizio 7

Sappiamo che:

$$x(k) = c_k\, g(0) + \sum_{m \neq 0} c_{k-m}\, g(mT) + n(k)$$

con

$$g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$$

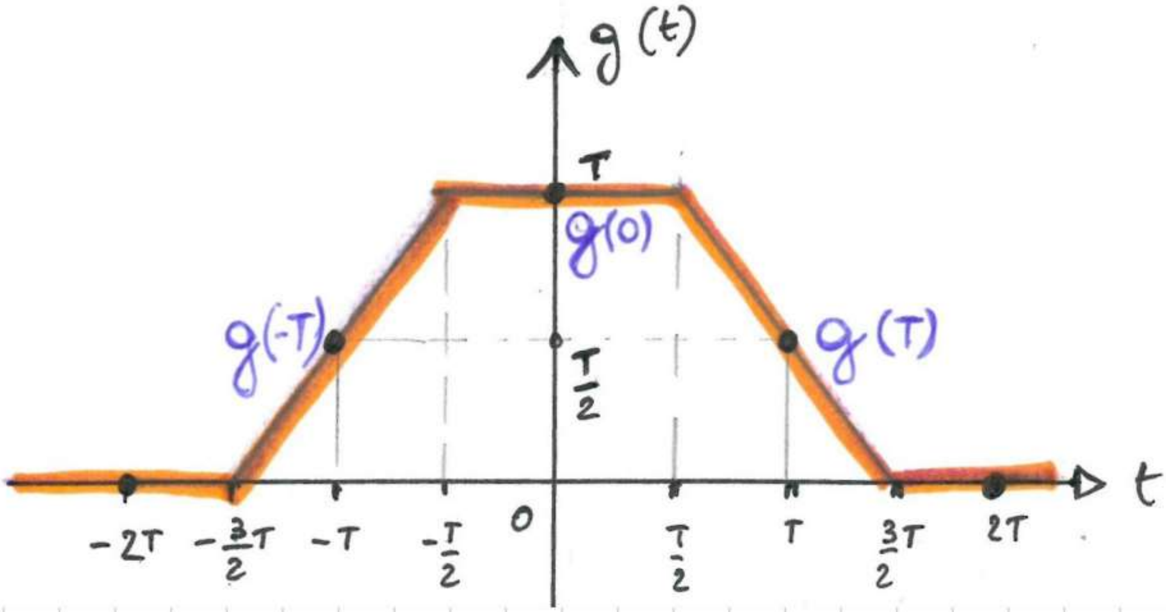
$$n(k) \sim N\left(0, \frac{N_0}{2} E_{g_R}\right)$$

Energia del filtro $g_R(t)$

Calcoliamo la varianza del rumore:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{N_0}{2} E_{g_R} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_R^2(t)\, dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-T}^{T} 1\, dt = N_0 T \end{aligned}}$$

Calcoliamo $g(mT)$. Dal momento che:



si ottiene quindi

$$X(k) = c_k\, g(0) + c_{k-1}\, g(T) + c_{k+1}\, g(-T) + n(k)$$

Esercizio 8

Sappiamo che :

$$B_{RF} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M} R_b$$

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_{RF}} = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha}$$

Tenendo conto che $r = \frac{1}{2}$, $M = 4$, $\alpha = 0.5$

si ottiene :

$$\boxed{\begin{aligned} B_{RF} &= \frac{1.5}{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}} \, 100 \, Mbit/s = 150 \, MHz \\ \eta_{sp} &= \frac{100 \, Mbit/s}{150 \, MHz} = \frac{2}{3} \, bit/s/Hz \end{aligned}}$$

La probabilità nel bit si approssima:

$$\boxed{P_{bit}(e) = \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}}$$

con $t = \dfrac{d_{min} - 1}{2} = 1$

Segue che:

$$P_{bit}(e) = \frac{3}{6} \binom{6}{2} p^{2} (1-p)^{4}$$

$$\cong \frac{1}{2} \, \frac{6!}{4!\,2!} \, p^{2} = \frac{15}{2} p^{2}$$

In un sistema 4-QAM:

$$p \cong Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Dal momento che:

$$E_S = \log_2 M \, E_d = r \log_2 M \, E_b$$

si ottiene $E_S = E_b$. Quindi:

$$\boxed{p \simeq Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

Imponendo $P_{bit}(e) = 10^{-5}$ si ottiene

$$P_{bit}(e) = \frac{15}{2} p^2 = 10^{-5}$$

$$p = \sqrt{\frac{2}{15} 10^{-5}} \simeq 10^{-3}$$

Quindi $Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3}$. Dal grafico,

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} \simeq 9 \simeq 9.6 \, dB}$$