Rango e sistemi lineari

TEOREMA DI ROUCHÉ–CAPELLI

Consideriamo un sistema lineare con m equazioni in n incognite. Lo possiamo scrivere come

$$\underbrace{A}_{\text{matrice } m\times n}\ \underbrace{x}_{\text{vettore lungo } n} = \underbrace{b}_{\text{vettore lungo } m}$$

Chiamiamo A = matrice incompleta (solo coeff.)

$A' = (A \mid b)$ = matrice completa (ho aggiunto la colonna dei termini noti)

Oss. $\operatorname{rango}(A) \leq \operatorname{rango}(A') \leq \operatorname{rango}(A) + 1$

se aggiungo una colonna, il C-rango può aumentare al max di 1

Teorema di Rouché–Capelli Il sistema ha soluzione se e solo se $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A')$

Se ci sono soluzioni, queste dipendono da un numero di parametri uguali a

$$\boxed{n - \operatorname{rango}(A)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Il sistema ha soluzione $\iff$ b è comb. lin. delle colonne di A, quindi

$$\begin{aligned} \text{rango}(A') &= \dim \operatorname{Span}(C_1, \dots, C_n, \cancel{b}) \\ &= \dim \operatorname{Span}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \text{rango}(A) \end{aligned}$$

lo elimino perché è lin. dip. dal resto

Una volta che ci sono soluzioni, tutte le soluzioni si scrivono come

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{sol. speciale}} + v$$

generico elemento del ker (sol. sistema omogeneo)

e $\dim(\ker(A)) = n - \dim(\operatorname{Im}(A)) = n - \text{rango}(A)$.

<u>Esercizio</u> Data una matrice A, cosa succede al rango

- se aggiungo 2 colonne?
  Diminuire non può, e o resta uguale o aumenta di 1 o 2
- se aggiungo 2 righe?
  Stessa cosa
- se aggiungo 1 riga e 1 colonna?
  Diminuire NO, aumentare di 1 SI, aumentare di 2 SI!!

Esempio in cui aumenta di 2:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 0} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 1} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 2}$$

Esercizio 1

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

Studiare il numero di soluzioni al variare del parametro a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Subito: rank$(A') = 2$ perché la sottomatrice 2×2 indicata ha det $\neq 0$ quindi D-rango $(A') \geq 2$, ma R-rango $(A') \leq 2$ quindi rank$(A') = 2$.

Per R-C il sistema ha soluzione $\iff$ rank $(A) = 2$, il che accade se e solo se Det $(A) \neq 0$, cioè se e solo se

$$-3 - 2a \neq 0 \iff a \neq -\frac{3}{2}$$

Conclusione:
- $a \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ soluzione UNICA $(\overset{\rightsquigarrow}{2} - \overset{\text{rank}}{2} = 0)$
- $a = -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ nessuna soluzione.

Esercizio 2

$$\begin{cases} 2x + 3y = b \\ x - ay = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & -a & 7 \end{array}\right)$$

Se Det $(A) \neq 0$, allora per forza esiste una soluzione e questa è unica
(se Det $(A) \neq 0$, allora rank $(A) = 2$, ma allora rank $(A') = 2$ (può essere solo 2 o 3, ma 3 non è possibile perché non ha 3 righe) quindi rank (A) = rank (A'), quindi per R-C esiste una soluz. che è unica per il conto dei parametri)

$\text{Det } A \neq 0 \iff -2a-3 \neq 0 \iff a \neq -\frac{3}{2}$

Se $a = -\frac{3}{2}$ vediamo che succede

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b \\ 1 & +\frac{3}{2} & 7 \end{array}\right)$$

In questo rango $(A) = 1$, quindi c'è soluzione $\iff$ rank $(A') = 1 \iff b = 14$

(la 3ª colonna deve essere multiplo della 1ª, o della 2ª)

Nota bene: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 1 & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$ tutte le sottomatrici 2×2 hanno Det $= 0$

<u>Esercizio 3</u>

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = a \\ x + by = 3 \end{cases}$$

Studiare le soluzioni al variare di a e b

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & b & 3 \end{pmatrix}$$

Fatto 1: per ogni a e b si ha che rank $(A') \geq 2$

Fatto 2: per ogni a e b si ha che rank $(A) = 2$

(più di 2 non può essere, e almeno 2 lo è perché esiste smatrice 2×2 con det $\neq 0$)

Quindi avremo soluzioni se e solo se rank $(A') = 2$, il che in questo caso accade se e solo se Det $(A') = 0$

(se fosse $\neq 0$, per forza D-rango ≥ 3 e quindi 3 in questo)

Quando esiste, la soluzione è unica

$n - \text{rank}(A) = 2 - 2 = 0.$

Il sistema ha sol. $\iff$ Det $(A') = 0$

Esercizio 4

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Il solo blocco 2×2 a sx basta per concludere che

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = 2$$

Ora la soluz. esiste sempre e dipende da $3-2=1$ param.

Esempio 5

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ ax + by + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ a & b & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Subito: $\text{Rank}(A') = 2$ (2×2 a dx)

Il sistema ha soluz. $\Leftrightarrow \text{Rank}(A) = 2$

Basta trovare sottomatrice 2×2 di A con det $\neq 0$.

$3 + 2b \neq 0 \qquad b \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ ok

$3 + 2a \neq 0 \qquad a \neq -\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ ok

Il caso in cui le cose possono andare male è $a = b = -\frac{3}{2}$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{matrix}} \quad \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix}\right)$$

rango 1 perché $R_2 = -\frac{3}{2} R_1$

In questo caso il sistema NON ha soluzioni.