Laboratorio di Calcolo Numerico
Lezione 8

Fitting di dati

Si scarichi dalla pagina elearn.ing il file `dati.mat` e si digiti

```
load dati.mat
```

che restituisce una matrice 1000×2 di coppie $(x, f(x))$ di una funzione sconosciuta $f(x)$ che cercheremo di approssimare nel senso dei minimi quadrati.

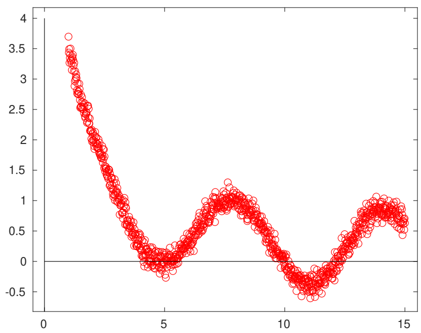

Figura 1: Dati contenuti nel file che trovate su e-learning

Esercizio 1. Si imposti il problema ai minimi quadrati corrispondente all'approssimazione di $f(x)$ con un polinomio di grado 6. Si risolva il problema tramite una delle funzioni implementate nella lezione di laboratorio 6 (`mq_qr` o `mq_normali`) e si mostri su un grafico la soluzione trovata insieme ai dati iniziali. Si ripeta l'esperimento considerando come approssimante una combinazione lineare delle seguenti funzioni modello

$$\exp(x), \qquad \frac{1}{x}, \qquad \sin(x).$$

Definire una funzione polinomiale a tratti

Dato un intervallo $[a, b]$ e $k + 1$ nodi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b,$$

siamo interessati a calcolare una funzione $F(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita come

$$F(x) = p_i(x), \quad \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i], \qquad i = 1, \ldots, k,$$

dove i polinomi $p_i(x)$ hanno tutti grado al massimo p e sono perciò identificati dai $p+1$ coefficienti:

$$p_i(x) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} x + \ldots, + c_p^{(i)} x^p.$$

Per rappresentare una tale funzione abbiamo bisogno del vettore contenente i nodi x_i e di una matrice $C \in \mathbb{R}^{k \times (p+1)}$ tale che sulla riga i di C troviamo i coefficienti del polinomio $p_i(x)$.

Esercizio 2. Si implementi una funzione

```
function y = piecewise_poly(x, C, z)
```

che dati in ingresso un vettore di $k + 1$ nodi, la matrice dei coefficienti $C \in \mathbb{R}^{k \times (p+1)}$ ed un vettore di lunghezza arbitraria z, restituisca il vettore $y = F(z)$ contenente le valutazioni di F nei punti z.

Suggerimenti: per valutare un polinomio descritto con il vettore dei suoi coefficienti su un insieme di punti si può far uso della funzione `polyval` (si digiti `help polyval` per vedere come funziona). Infine, per determinare l'intervallo di appartenenza di un determinato valore in z si possono usare operatori di confronto fra un vettore e uno scalare; ad esempio il comando

```
x > z(i)
```

restituisce un vettore di boolean della lunghezza di x avente come entrata 1 in corrispondenza degli elementi di x che sono maggiori di $z(i)$ e 0 altrove.

Interpolazione lineare a tratti

La funzione `piecewise_poly` può essere utilizzata per definire e valutare l'interpolante lineare a tratti di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. In ogni intervallo, l'interpolante lineare a tratti corrisponde a un polinomio della forma $p_i(x) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} x$ che verifica le condizioni $p_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $p_i(x_i) = f(x_i)$, per $i = 1, \ldots, k$. In particolare il polinomio $p_i(x)$ assume l'espressione

$$p_i(x) = (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + f(x_{i-1}).$$

Esercizio 3. Si implementi la funzione

```
function C = linear_interp(x, f)
```

che dato il vettore ordinato di nodi x e il vettore delle valutazioni di f nei nodi, restituisca la matrice $C \in \mathbb{R}^{k\times 2}$ contenente i coefficienti $c_j^{(i)}$ della funzione interpolante lineare a tratti di f sui nodi x_j.

Esercizio 4. Si consideri $k = 10, 20, \ldots, 100$ nodi equispaziati nell'intervallo $[-5, 5]$ e si calcoli l'interpolante lineare a tratti della funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per ciascun valore di n mostri il grafico di f e della funzione interpolante. Inoltre, sempre per ogni valore di n, si calcoli il massimo dell'errore assoluto in $[-5, 5]$ tra la funzione e l'interpolante e si produca un grafico che mostri l'andamento dell'errore. Con che ordine decresce l'errore (rispetto a k)?

Interpolazione con spline cubiche naturali

Abbiamo visto a lezione che un metodo molto popolare per fare approssimazione polinomiale a tratti consiste nell'usare polinomi di grado 3 che si "saldino" in maniera C^2 agli estremi degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$. Con la notazione usata precedentemente, questo equivale ad imporre le seguenti condizioni sui polinomi $p_i(x)$ (che in questo caso sono polinomi di terzo grado):

- $p_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, k$
- $p_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, k$
- $p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i), \quad i = 1, \ldots, k-1,$
- $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i), \quad i = 1, \ldots, k-1.$

Per determinare univocamente i $4k$ parametri che definiscono i $p_i(x)$, nel caso delle spline naturali, si impongono le condizioni al bordo

$$p_1''(x_0) = 0, \qquad p_k''(x_k) = 0.$$

Consideriamo il caso in cui i nodi siano equispaziati in $[a, b]$, ovvero $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k} = h$. Sotto queste condizioni, sappiamo che i polinomi $p_i(x)$ hanno la seguente espressione

$$\begin{aligned} p_i(x) = {} & [f(x_{i-1}) + \left(m_{i-1} + \frac{2f(x_{i-1})}{h}\right)(x - x_{i-1})] \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 \\ & + [f(x_i) + \left(m_i - \frac{2f(x_i)}{h}\right)(x - x_i)] \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2, \end{aligned} \tag{1}$$

dove i coefficienti $m_0, \dots, m_k$ sono determinati come la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{bmatrix} f(x_1) - f(x_0) \\ f(x_2) - f(x_0) \\ f(x_3) - f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_k) - f(x_{k-2}) \\ f(x_k) - f(x_{k-1}) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Esercizio 5. Si implementi la funzione

```
function C = spline_nat_equi(x, f)
```

che dato il vettore ordinato di nodi equispaziati x ed il vettore delle valutazioni di f nei nodi, restituisca la matrice $C \in \mathbb{R}^{k\times 4}$ contenente i coefficienti che definiscono la spline cubica naturale che interpola f.

Suggerimento: si calcolino i coefficienti m_j risolvendo il sistema lineare (2) e poi si ricavino le espressioni dei coefficienti polinomiali in funzione dei parametri $x_j, f(x_j), m_j$ da (1).

Esercizio 6. Si ripeta l'esperimento in Esercizio 4, utilizzando la spline cubica naturale.

Esercizio 7. (Teorico ma si può usare Matlab per controllare il risultato)
Si calcolino i due polinomi ($p_1(x)$ e $p_2(x)$) che che definiscono la spline naturale che interpola la seguente tabella di valori:

x	0	1	2
$f(x)$	a	$-a$	$2a$

per un parametro $a \in \mathbb{R}$. Per verificare la correttezza del risultato trovato, si scelga a in modo casuale (diciamo un paio di volte) e si controlli che la funzione trovata verifichi le proprietà richieste per essere una spline naturale.