ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 20

Note Title 23/10/2018

BACK TO SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 3y - 6z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Interpretazione usando Span, generatori, lin. indip.

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}5\\-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$$

Potevo anche scrivere in riga

Risolvere il sistema equivale a scrivere la colonna dei termini noti (a dx) come comb. lin. delle colonne a sx (le colonne della matrice dei coeff.)

In generale un sistema si può pensare nella forma

$$\boxed{x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n = b}$$

colonne della matrice dei coeff., ciascuna lunga m

termini noti (colonna lunga m)

Le incognite sono i coeff. $x_1, \ldots, x_n$ della comb. lin.

Fatti generali

① Se il sistema è omogeneo (cioè $b=0$), allora c'è per forza la soluzione $x_1 = \ldots = x_n = 0$. La soluz. è unica se e solo se le colonne $C_1, \ldots, C_n$ sono $\boxed{\text{lin. indip.}}$

(2) Nel caso non omogeneo (cioè b qualunque)

- esiste almeno una soluzione se e solo se
  $b \in \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$
- quando la soluzione esiste, questa è unica se e solo se le colonne sono lin. indip.
- sono sicuro che una soluzione esiste per ogni b se e solo se $C_1, \dots, C_n$ sono generatori di $\mathbb{R}^m$, cioè dello spazio di tutti i possibili b.

Caso speciale Se m = numero eq. = 18
n = numero incognite = 16

allora esistono dei valori di b per cui il sistema non ha soluzione.

Abbiamo 16 colonne $C_1, \dots, C_{16}$ e queste non sono abbastanza per generare tutti i possibili termini noti $\in \mathbb{R}^{18}$

$$\begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 3y - 6z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow 0 = -14 \quad :($$

Dal momento che il sistema non ha sol., posso dedurre che le 3 colonne della matrice dei coeff. sono lin. dip. (se fossero lin. indip., essendo 3 sarebbero una base di $\mathbb{R}^3$, e quindi genererebbero tutti i possibili termini noti)

Per trovare esplicitamente una relazione di dip. lineare, risolvo lo stesso sistema con tutti 0 come termini noti

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x &= y - 5z = 2t - 5t = -3t \\ y &= 2z = 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

Quindi la sol. gen. è $t\,(-3,2,1)$

Quindi deve succedere che

$$-3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Verifica: Ok

Oss. La dimensione dello span delle colonne è uguale al numero di PIVOT della matrice "lavorata alla Gauss"

Conseguenza: Se ho 15 vettori in $\mathbb{R}^{15}$ e voglio sapere se sono una base, basta metterli a colonne in una matrice 15×15 e vedere se lavorando alla Gauss mi vengono 15 pivot.

Esempio: I polinomi $x^3 - 2x$, $x + 7$, $x^2 - 5x + 2$, $x^2 + 8$ sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Se lavorando ottengo 4 PIVOT, allora sono lin. indip., ma essendo 4 in uno sp. di dim. 4, allora sono una base!!

$$\begin{cases} x - y + 5z = 1 \\ 3y - 6z = 7 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

Interpretazione in termini di appl. lineari

Considero $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x,y,z) = (x-y+5z,\ 3y-6z,\ 2x+4y-2z)$$

Si verifica facilmente che è lineare.

sp. partenza

Risolvere il sistema vuol dire trovare gli $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(x,y,z) = (1,7,2)$$

Fatti generali

① Risolvere il sistema omogeneo vuol dire trovare $\ker(f)$

② Nel caso generale (b qualunque) la soluzione esiste se e solo se $b \in \operatorname{Im} f$

③ Nel caso generale
- se f è surgettiva, allora per ogni b esiste almeno una soluzione
- se f è iniettiva, allora per ogni b c'è al massimo una soluzione (possono essercene una o nessuna).

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ Sistema di 23 equazioni in 37 incognite

⇝ appl. lineare $\quad f : \mathbb{R}^{37} \longrightarrow \mathbb{R}^{23} \qquad \overset{37}{\longleftrightarrow} \quad \updownarrow 23$

⇝ di sicuro non può essere iniettiva
(analogamente: le 37 colonne della matrice non possono essere lin. indip.)

⇝ le soluzioni del sistema non possono essere uniche, quindi

- o non esistono
- oppure sono infinite, dipendenti da un numero di parametri uguale alla dimensione del ker (che è almeno 14, ma può benissimo essere di più se f non è surgettiva)

$$\dim(\ker) + \underset{\substack{\| \\ 23 \text{ o meno}}}{\dim(\mathrm{Im})} = \underset{\substack{\| \\ 37}}{\dim V}$$

Se f è surgettiva, allora le colonne della matrice sono generatori di $\mathbb{R}^{23}$ e $\dim(\ker) = 14$ e la matrice dei coeff. ha 23 pivot e il sistema ha soluzione per ogni b.

Se l'immagine ha dim 21, allora il sistema omogeneo ha sol. dipendenti da 16 parametri e la matrice dei coeff. ha 21 PIVOT.

— o — o —