ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 38

Note Title 20/11/2018

Cond. nec. e suff. per diagonalizzazione:
una matrice/applicazione è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se
- tutti gli autovalori sono reali
- molt. alg. = molt. geom. per ogni autovalore

$\boxed{\Rightarrow}$ Implicazione facile (basta guardare nella sua forma diagonale) In questo molt. alg. = molt. geom. = numero di volte che un dato autovalore compare sulla diagonale

$\boxed{\Leftarrow}$ Implicazione meno facile.
Sia n la dimensione dello spazio
Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti, con molteplicità $m_1, \dots, m_k$
Allora deve accadere che

$$m_1 + \dots + m_k = n$$

(il polinomio caratt. ha grado n, dunque ha esattamente n radici, se contate con molteplicità)
Poichè per ipotesi molt. alg. = molt. geom per tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ deve succedere che

λ_1 ha autosp. di dim. m_1
λ_2 " " " m_2
$\vdots$
λ_k ha " " m_k

Prendendo una base per ciascuno degli autospazi troviamo n vettori che sono autovalori della matrice/applicazione.
Per concludere basta mostrare che sono lin. indip.
Supponiamo che non lo siano.
Se li chiamiamo $v_1, \dots, v_n$, esiste una comb.

lin. nulla ma con qualche coeff. $\neq 0$:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

Li raggruppiamo a seconda del loro autovalore ed otteniamo una nuova scrittura

$$\hat{c}_1 w_1 + \hat{c}_2 w_2 + \dots + \hat{c}_k w_k = 0$$

dove $f(w_1) = \lambda_1 w_1$

$f(w_2) = \lambda_2 w_2$

$\vdots$

$f(w_k) = \lambda_k w_k$

Adesso basta mostrare che autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono lin. indip.

Se mostriamo questo, allora

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = \dots = \hat{c}_k = 0$$

e avremo concluso.

<u>Lemma</u> Autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono lin. indip.

<u>Dim.</u> Siano $w_1, \dots, w_k$ autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con i λ_i tutti diversi tra di loro.

Supponiamo che non siano lin. indip.

Allora esistono comb. lin. non banali che fanno 0.

Tra tutte queste, ve ne sarà una che ha il minimo numero di coeff. $\neq 0$. Supponiamo, a meno di cambiare i nomi, che sia

(1) $\quad c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = 0 \qquad$ con $m \leq k$

tutti i coeff. sono $\neq 0$

Applico f alla combin. lineare

$$f(c_1 w_1 + \dots + c_m w_m) = 0$$
$$\parallel$$
$$c_1 f(w_1) + \dots + c_m f(w_m) = 0$$
$$\parallel$$
$$(2) \quad c_1 \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m c_m w_m = 0$$

Abbiamo quindi 2 comb. lineari che fanno 0
Ma allora

$$\lambda_1 (1) - (2) = \cancel{\lambda_1 c_1 w_1} + \dots + \lambda_1 c_m w_m - \cancel{\lambda_1 c_1 w_1} - \dots - \lambda_m c_m w_m$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) c_2 w_2 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_m) c_m w_m = 0$$

Questa è una comb. lineare più corta con tutti i coeff. diversi da 0, perchè i c_i erano $\neq 0$ e gli autovalori sono tutti distinti.

Oss. Perchè la comb. iniziale ha almeno 2 coeff. $\neq 0$?
(Se così non fosse vorrebbe dire che $c_1 w_1 = 0$, il che non è possibile essendo $c_1 \neq 0$ e $w_1 \neq 0$ in quanto autovettore).

— o — o —

Precisazione sulla dim. della freccia $\boxed{\Rightarrow}$

I passi sono i seguenti
- prendo $v_1, \dots, v_n$ autovettori di f (ogni autovalore è rappresentato da tanti vettori quanta è la sua molteplicità)
- suppongo che $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$
- raggruppo per "autovalore": ottengo $w_1 + \dots + w_k = 0$
- grazie al lemma deve essere per forza $w_1 = \dots = w_k = 0$
- essendo indipendenti ad autovalore fisso ottengo che $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

<u>Esempio</u> Supponiamo che $n=6$ e che gli autovalori siano

$7 \rightsquigarrow$ molt. 1 $\rightsquigarrow v_1$

$5 \rightsquigarrow$ mol. 2 $\rightsquigarrow v_2, v_3$

$-8 \rightsquigarrow$ molt. 3 $\rightsquigarrow v_4, v_5, v_6$

$$\underbrace{c_1 v_1}_{w_1} + \underbrace{c_2 v_2 + c_3 v_3}_{w_2} + \underbrace{c_4 v_4 + c_5 v_5 + c_6 v_6}_{w_3} = 0$$

w_1 sta nell'autospazio di 7, cioè $f(w_1) = 7 w_1$

w_2 " " " " 5 $f(w_2) = 5 w_2$

w_3 " " " " -8 " $f(w_3) = -8 w_3$

Per il lemma abbiamo che $w_1 = w_2 = w_3 = 0$

$w_1 = 0 \rightsquigarrow c_1 = 0$

$w_2 = 0 \rightsquigarrow c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow c_2 = c_3 = 0$

$w_3 = 0 \rightsquigarrow \quad \dots \quad \Rightarrow c_4 = c_5 = c_6 = 0$

— o — o —

<u>Esercizio 1</u> $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} = B$$ Sono simili?

Le due matrici della prima riga sono simili, in quanto entrambe sono diagonalizzabili con autovalori 1, 2, 5.
Perchè sono diagonalizzabili? Perchè gli autovalori sono reali e DISTINTI (cond. suff.)

Nel secondo esempio non è immediato che sono diagonalizzabili (perchè $\lambda = 2$ ha molt. alg. $= 2$). Devo calcolare la molteplicità geometrica, cioè

$$\dim(\ker(A - 2\,Id))$$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango $= 2 \Rightarrow \dim(\ker) = 1$, quindi $m_g(2) = 1$
$\Rightarrow$ A NON è diagonalizzabile

$$B - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango dipende da a:

- Se $a \neq 0$, allora rango $= 2$, quindi $\dim(\ker) = 1$, quindi B non è diagonalizzabile, e per ora non abbiamo strumenti per decidere se è simile ad A
- Se $a = 0$, allora rango $= 1$, quindi $\dim(\ker) = 2$, quindi B è diag., quindi di sicuro in questo caso NON è simile ad A.

Risposta (vedi tra qualche lezione): per $a \neq 0$ in effetti sono simili.

— o — o —