Esercizio 2

Al sistema di Fig.1 viene applicato il segnale $r(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)\cos(2\pi f_0 t)-\sum_i b_i\, g_T(t-iT)\sin(2\pi f_0 t)+w(t)$ in cui a_i, b_i, indipendenti tra loro, sono rispettivamente la parte reale ed immaginaria dei simboli complessi c_i indipendenti, equiprobabili ed appartenenti alla costellazione C di Fig.2. Nell'ipotesi che :
1) $g_T(t)=rect(t/T)$, con T intervallo di segnalazione dei simboli.; 2) La risposta impulsiva del filtro in ricezione sia $g_R(t)=A\cdot\frac{|t|}{T}\cdot rect(t/T)$; 4) Il rumore w(t) introdotto dal canale sia Gaussiano, a media nulla con densità spettrale di potenza $S_W(f)=\frac{N_0}{2}\left[rect\left((f-f_0)/B\right)+rect\left((f+f_0)/B\right)\right]$, con f_0 la frequenza portante e B la banda dell'impulso ricevuto;
si risponda alle seguenti domande:

1) Calcolare l'energia media trasmessa per simbolo;
2) Disegnare l'equivalente in banda base del sistema e determinare il valore di A del filtro in ricezione affinchè la risposta impulsiva complessiva del sistema sia di Nyquist;
3) Calcolare la potenza media delle componenti di rumore $n_R(t)$ e $n_I(t)$ all'uscita dei filtri in ricezione del canale in fase e quadratura.

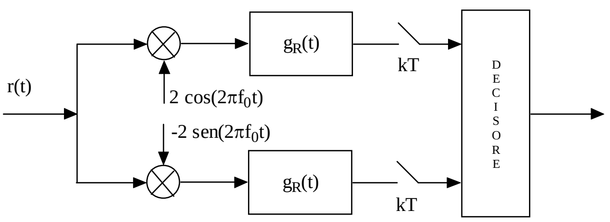


Fig. 1

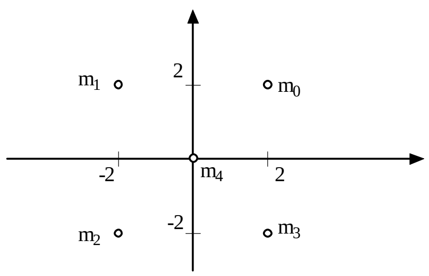
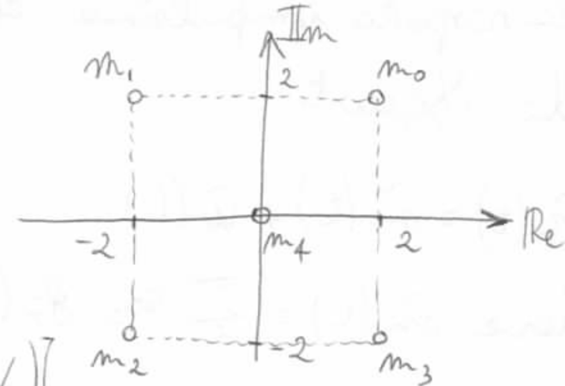


Fig.2

COMPITO 18/9/03 - ES 2

$$r(t) = \sum_i a_i\, g_T(t-iT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_i b_i\, g_T(t-iT)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) + w(t)$$

a_i e b_i indip. tra loro



$$g_T(t) = \mathrm{rect}(t/T)$$

$$g_R(t) = A\cdot\frac{|t|}{T}\,\mathrm{rect}(t/T)$$

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left((f-f_0)/B\right) + \mathrm{rect}\left((f+f_0)/B\right)\right]$$

B = banda di g_R

1. Calcolare l'energia media trasmessa per simbolo

$$\bar{E}_T = \sum_{K=0}^{M-1} P_K E_K \qquad \text{con} \qquad P_K = \frac{1}{M} \quad \text{(simboli equiprobabili)}$$

E_K = energia associata alla trasmissione del simbolo K-esimo

$$\bar{E}_T = \frac{1}{5}E_{2,2} + \frac{1}{5}E_{-2,2} + \frac{1}{5}E_{2,-2} + \frac{1}{5}E_{-2,-2} + \frac{1}{5}E_{0,0}$$

Si osserva che:

$$E_{2,2} = E_{-2,2} = E_{2,-2} = E_{-2,-2} \qquad \text{e} \qquad E_{0,0} = 0$$

$$E_{2,2} = E_{T_c} + E_{T_s} = 4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}g_T^2(t)\,dt + 4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}g_T^2(t)\,dt = 4T$$

$$\Rightarrow \bar{E}_T = \frac{4}{5}\cdot 4T = \frac{16}{5}T$$

2. Disegnare l'eq. in B.B. del sistema e determinare il valore di A nel filtro in ricezione affinché la risposta impulsiva complessiva del sistema sia di Nyquist

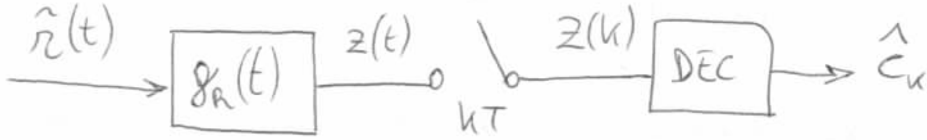
$$\tilde{r}(t) = \tilde{m}(t) + \tilde{w}(t)$$

dove $\tilde{m}(t) = \sum_i a_i\, g_T(t - iT) + j \sum_i b_i\, g_T(t - iT)$

e $S_{\tilde{w}}(f) = 2N_0 \operatorname{rect}(f/B)$

$$S_{w_c}(f) = S_{w_s}(f) = N_0 \operatorname{rect}(f/B)$$

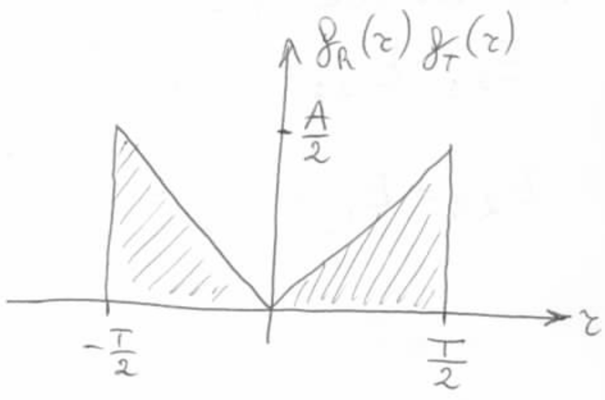
$$z(t) = \tilde{r}(t) \otimes g_R(t)$$



Verifica della 1° cond di progetto:

$g(t) = g_R(t) \otimes g_T(t)$ è definita in $[-T, T]$

Impongo $g(0) = 1$:



$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_R(\tau)\, g_T(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \frac{T}{2} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{T}$$

$$g(T) = g(-T) = 0$$

3. Calcolare la potenza media delle componenti di rumore $n_R(t)$ e $n_I(t)$ all'uscita dei filtri in ricezione del canale in fase e quadratura

$$\sigma_{n_c}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_c}(f) \, |G_R(f)|^2 \, df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G_R(f)|^2 df =$$

$$= N_0 \int_0^{T/2} 2 A^2 \frac{t^2}{T^2} dt = 2 \frac{N_0 A^2}{T^2} \frac{t^3}{3}\Big|_0^{T/2} =$$

$$= 2 N_0 \frac{A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{24} = \frac{N_0 A^2 T}{12} = \frac{16}{T^2} \cdot \frac{N_0 T}{12} =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{N_0}{T}$$