

Esercitazioni di Elettrotecnica

a cura dell'Ing. Antonio Maffucci

Parte II: Circuiti in regime sinusoidale

A.A. 2002/2003

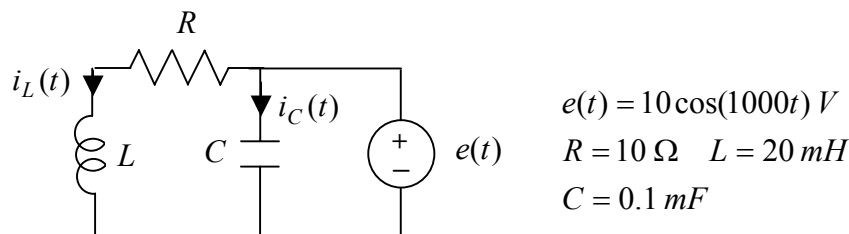
$$\arg(\dot{Z}) = \arg(\bar{V}) - \arg(\bar{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Z} = R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{I}|} = 4 \, \Omega.$$

ESERCITAZIONE N.8: Analisi di reti in regime sinusoidale

ESERCIZIO 8.1

Con riferimento al seguente circuito, valutare:

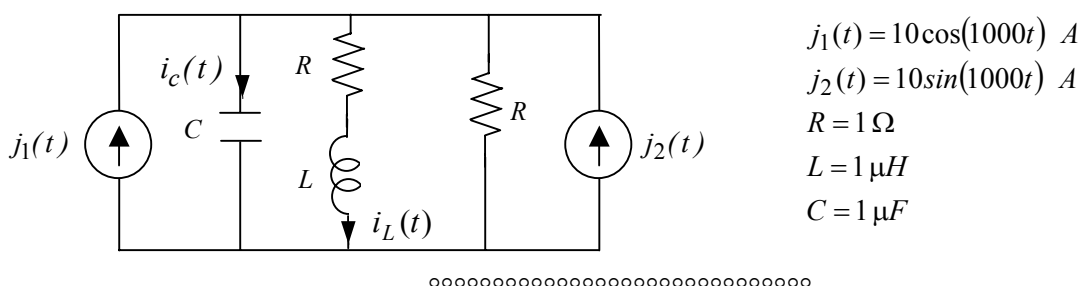
- l'impedenza \dot{Z}_{eq} vista ai capi del generatore;
- le correnti $i_L(t)$ e $i_C(t)$



Risultato: a) $\dot{Z}_{eq} = 5 - j15 \, \Omega$; b) $i_L(t) = 0.45 \cos(1000t - 1.11) \text{ A}$, $i_C(t) = -\sin(1000t) \text{ A}$.

ESERCIZIO 8.2

Con riferimento al seguente circuito valutare le correnti $i_L(t)$ ed $i_C(t)$.



Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di ammettenze:

$$\bar{J}_1 = 10 \text{ A}, \quad \bar{J}_2 = -10j \text{ A}, \quad \dot{Y}_C = j\omega C = j10^{-3} \text{ S}, \quad \dot{Y}_{RL} = \frac{1}{R + j\omega L} \approx 1 - j10^{-3} \text{ S}, \quad \dot{Y}_R = \frac{1}{R} = 1 \text{ S}.$$

Questa rete ha due nodi: preso come riferimento il nodo in basso in figura ed indicato con \bar{V}_A il potenziale del nodo in alto, il metodo dei potenziali nodali consente di scrivere immediatamente

$$\bar{V}_A(\dot{Y}_C + \dot{Y}_{RL} + \dot{Y}_R) = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 \Rightarrow \bar{V}_A = 5 - j5.$$

La corrente nel condensatore sarà data da

$$\bar{I}_C = \bar{V}_A \dot{Y}_C = 5 \cdot 10^{-3} (1 + j) = 7.07 \cdot 10^{-3} \exp(j\pi/4),$$

a cui corrisponde, nel tempo: $i_C(t) = 7.07 \cos(1000t + \pi/4) \text{ mA}$.

La corrente nell'induttore sarà invece

$$\bar{I}_L = \bar{V}_A \dot{Y}_{RL} \approx 5(1 - j) = 7.07 \exp(-j\pi/4),$$

per cui si ha, tornando nel tempo: $i_L(t) = 7.07 \cos(1000t - \pi/4) \text{ A}$.

La fase φ dell'impedenza $\dot{Z}_{TOT} = \dot{Z}_x // \dot{Z}_{ea}$ è legata a P_{TOT}, Q_{TOT} dalla relazione

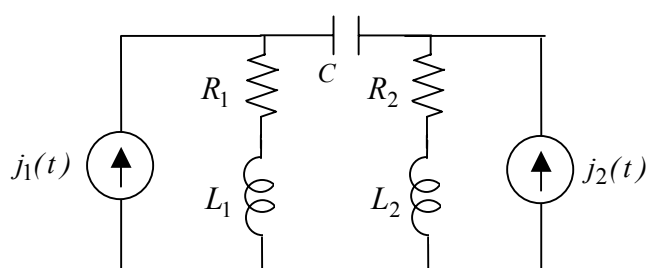
$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{Q_{TOT}}{P_{TOT}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{Q + Q_x}{P}\right) \Rightarrow Q_x = Ptg\varphi - Q.$$

Imponendo la condizione desiderata su φ si ottiene $Q_x = -0.10 \text{ VAr}$, il che significa che \dot{Z}_x è un'impedenza capacitiva. Ricordando l'espressione della potenza reattiva assorbita da una capacità ai capi della quale sia imposta la tensione si ha la condizione richiesta.

$$Q_x = -\omega C \frac{E^2}{2} = -0.10 \quad \Rightarrow \quad C = 20 \mu F.$$

ESERCIZIO 8.6

Calcolare la potenza attiva P_2 e la potenza reattiva Q_2 assorbita dalla serie $R_2 - L_2$.



$$\begin{aligned} j_1(t) &= 4 \cos(4t) \text{ A} \\ j_2(t) &= 2 \cos(4t - 2\pi/3) \text{ A} \\ R_1 &= R_2 = 2 \text{ } \Omega \\ L_1 &= L_2 = 1 \text{ H} \\ C &= 2 \text{ F} \end{aligned}$$

oo

Passando al dominio dei fasori si avrà la rete di impedenze:

$$\bar{J}_1 = 4, \quad \bar{J}_2 = 2e^{-j2\pi/3}, \quad \dot{Z}_C = -j/8 \Omega, \quad \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = 2 + 4j \Omega.$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti, valutiamo il contributo ad \bar{I}_j dovuti a \bar{J}_1 ed a \bar{J}_2

$$\bar{I}'_2 = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = 2.03 + j0.01 \text{ A},$$

$$\bar{I}_2'' = \bar{J}_2 \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1} = -0.50 - j0.85 \text{ A.}$$

Pertanto si ha

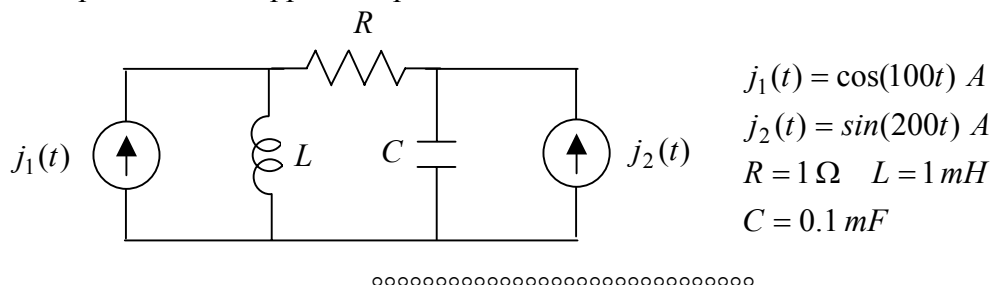
$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 + \bar{I}''_2 = 1.53 - j0.84 = 1.75 \exp(-j0.502) \text{ A},$$

quindi la potenza complessa assorbita da \dot{Z}_2 sarà

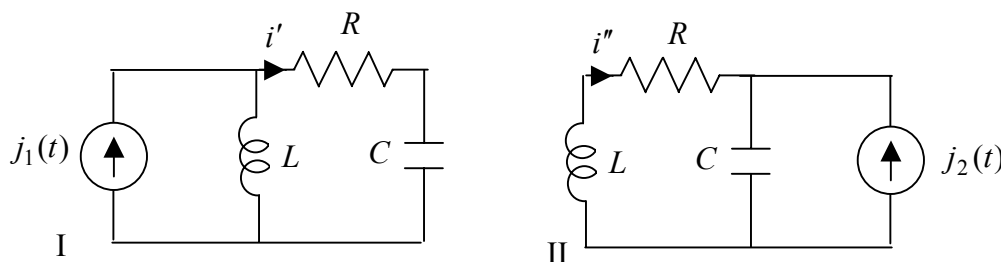
$$\dot{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \frac{1}{\gamma} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \frac{1}{\gamma} \dot{Z}_2 \bar{I}_2 \bar{I}_2^* = \frac{1}{\gamma} \dot{Z}_2 I_2^2 = \frac{2+4j}{\gamma} 1.75^2 = 3.06(1+2j).$$

ESERCITAZIONE N.9: Analisi di reti in regime sinusoidale/2**ESERCIZIO 9.1**

Con riferimento al seguente circuito, valutare la potenza media P assorbita dal resistore R e verificare che è possibile sovrapporre le potenze medie.



Poiché i generatori non sono isofrequenziali, cioè $\omega_1 \neq \omega_2$, il circuito non ammette un regime sinusoidale e quindi non è possibile trasformare la rete in una rete di impedenze. Tuttavia, essendo la rete lineare, si può applicare la sovrapposizione degli effetti e ricavare la corrente che circola in R come $i = i' + i''$, dove i' si ricava dal circuito ausiliario I e i'' dal circuito ausiliario II.



Ciascuna di queste due reti può essere rappresentata da una rete di impedenze:

$$\text{rete I:} \quad \bar{J}_1 = 1, \quad \dot{Z}'_C = -100j, \quad \dot{Z}'_L = 0.1j, \quad \dot{Z}'_R = 1.$$

$$\text{rete II:} \quad \bar{J}_2 = 1, \quad \dot{Z}''_C = -50j, \quad \dot{Z}''_L = 0.2j, \quad \dot{Z}''_R = 1.$$

Applicando i partitori di corrente:

$$\bar{I}' = \bar{J}_1 \frac{\dot{Z}'_L}{\dot{Z}'_L + \dot{Z}'_C + \dot{Z}'_R} = 10^{-3} e^{j3.13} \Rightarrow i'(t) = \cos(100t + 3.13) \text{ mA}.$$

$$\bar{I}'' = -\bar{J}_2 \frac{\dot{Z}''_C}{\dot{Z}''_C + \dot{Z}''_L + \dot{Z}''_R} = e^{j3.12} \Rightarrow i''(t) = \sin(200t + 3.12) \text{ A}.$$

$$\text{Quindi} \quad i(t) = i'(t) + i''(t) = 10^{-3} \cos(100t + 3.13) + \sin(200t + 3.12) \text{ A}.$$

Nota la corrente si può calcolare la potenza istantanea assorbita da R e quindi la potenza media:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T i'^2(t) dt + \frac{R}{T} \int_0^T i''^2(t) dt + \frac{2R}{T} \int_0^T i'(t)i''(t) dt \quad T = \max\left(\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right).$$

I primi due contributi rappresentano le potenze medie dissipate nei circuiti I e II, quindi sono:

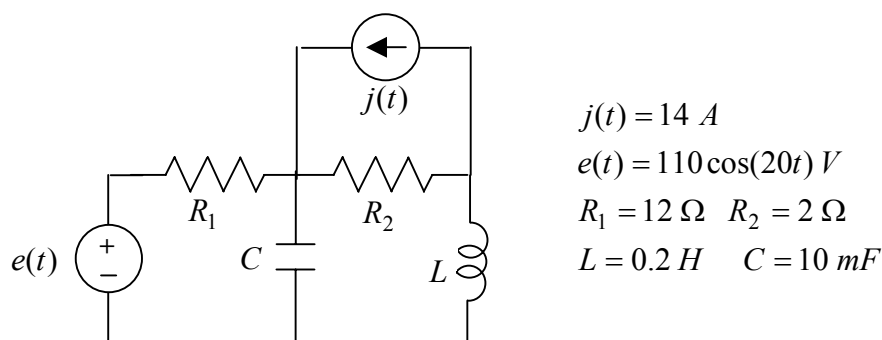
$$\frac{R}{T} \int_0^T i'^2(t) dt = \frac{R}{2} |\bar{I}'|^2 = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ W}, \quad \frac{R}{T} \int_0^T i''^2(t) dt = \frac{R}{2} |\bar{I}''|^2 = 0.5 \text{ W}.$$

L'ultimo contributo è nullo perché per $\omega_1 \neq \omega_2$ si ha: $\int_0^T \cos(\omega_1 t + \alpha) \sin(\omega_2 t + \beta) dt = 0 \quad \forall \alpha, \beta$.

In definitiva se $\omega_1 \neq \omega_2$ è possibile sovrapporre le potenze medie: $P \approx 0.5 \text{ W}$.

ESERCIZIO 9.2

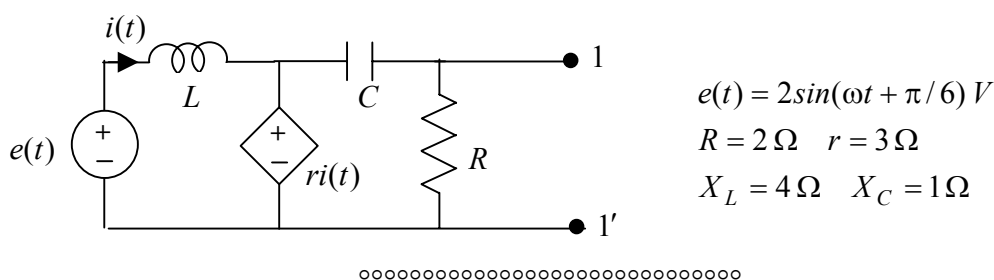
Con riferimento al seguente circuito, valutare la potenza media P assorbita dal resistore R_2 e verificare che è possibile sovrapporre le potenze medie.



Risultato: $P = 0.41 \text{ kW}$.

ESERCIZIO 9.3

Valutare l'equivalente di Thévenin ai capi dei morsetti 1-1'.



Passando alla rete di impedenze si avrà:

$$\bar{E} = 2e^{j\pi/6}, \quad \dot{Z}_C = -j, \quad \dot{Z}_L = 4j, \quad \dot{Z}_R = 2.$$

Per calcolare \bar{V}_0 basta applicare la LKT alla maglia di sinistra della rete:

$$\bar{E} = \dot{Z}_L \bar{I} + r \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_L + r} = 0.368 - j0.157.$$

Applicando un partitore di tensione si ha, quindi:

$$\bar{V}_0 = r \bar{I} \frac{\dot{Z}_R}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 1.070 + j0.064 = 1.07e^{j0.06} \text{ V}.$$

Per calcolare \dot{Z}_{eq} occorre spegnere tutti (e soli) i generatori indipendenti, cioè \bar{E} . Applicando ancora la LKT alla maglia di sinistra della rete:

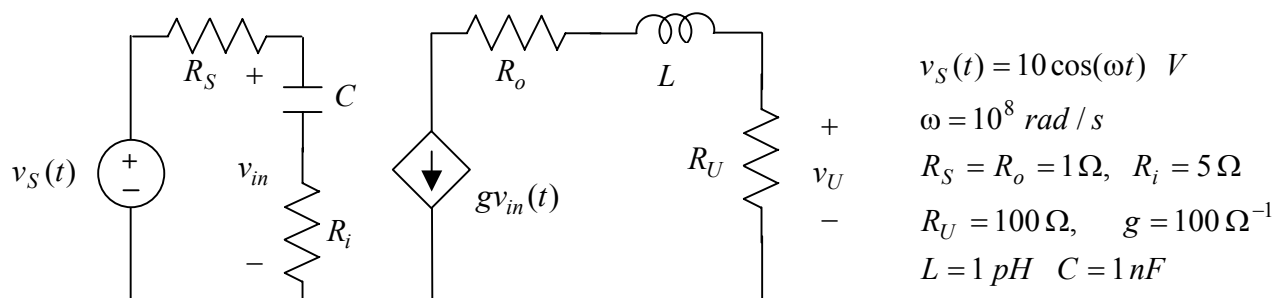
$$0 = \dot{Z}_L \bar{I} + r \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = 0$$

quindi nella rete per il calcolo di \dot{Z}_{eq} risulta spento anche il generatore controllato, visto che la sua variabile di controllo è nulla, per cui in definitiva:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_C}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C} = 0.4(1 - 2j) \Omega.$$

ESERCIZIO 9.4

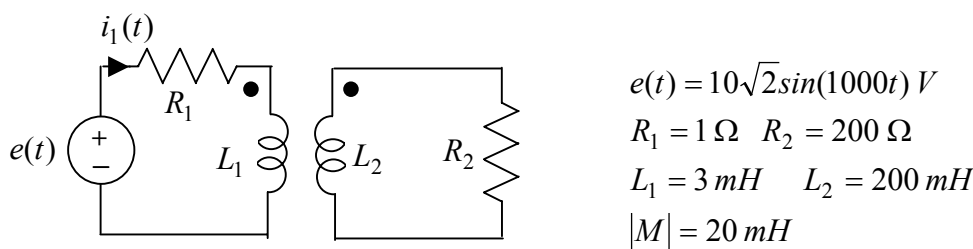
Il circuito seguente riproduce lo schema equivalente di un amplificatore a transistor per alta frequenza. Determinare la tensione ai capi del resistore di carico



Risultato: $v_U(t) = 95.9 \cos(\omega t + 3.06) \text{ kV}$.

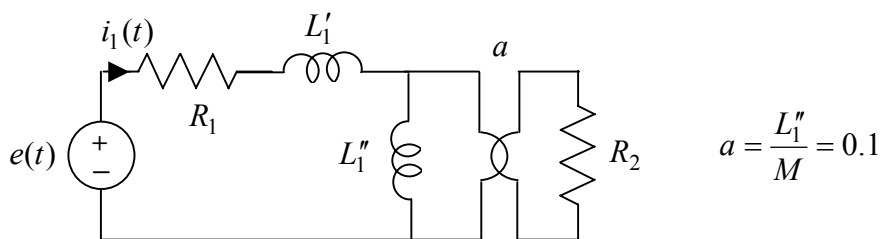
ESERCIZIO 9.5

Con riferimento al seguente circuito valutare la corrente $i_1(t)$ nel circuito primario.

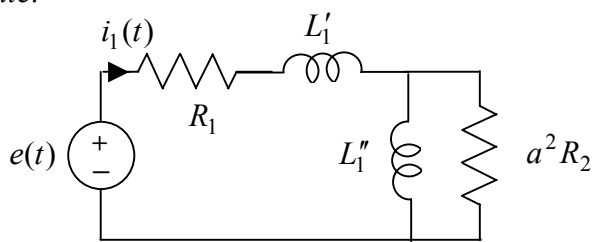


oooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Poiché $L_1 L_2 \neq M^2$ l'accoppiamento non è perfetto. Posto $L_1 = L_1' + L_1''$, possiamo scegliere L_1'' in modo che l'aliquota L_1'' verifichi le condizioni di accoppiamento perfetto: $L_1'' L_2 = M^2 \Rightarrow L_1'' = M^2 / L_2 = 2 \text{ mH}$. A questo punto il circuito equivalente sarà il seguente



Per la formula del trasporto dell'impedenza in un trasformatore ideale, il circuito è anche equivalente al seguente:



Trasformato il circuito in una rete di impedenze, nella quale si è introdotto il fasore $\bar{E} = 10 \text{ V}$, l'impedenza equivalente vista dal generatore è:

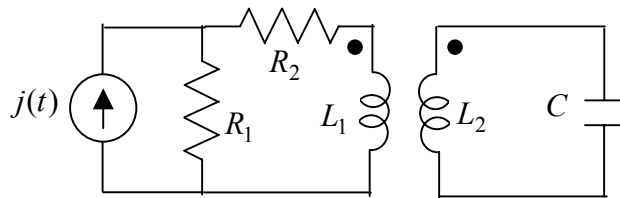
$$\dot{Z}_{eq} = R_1 + j\omega L'_1 + \frac{a^2 R_2 j\omega L''_1}{a^2 R_2 + j\omega L''} = 2 + 2j \Omega$$

da cui

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{5}{2}(1 - j) = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i_1(t) = 5 \sin(1000t - \pi/4) \text{ A}.$$

ESERCIZIO 9.6

Con riferimento al seguente circuito valutare la potenza complessa \dot{S} assorbita dal condensatore.



$$j(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t) \text{ A}$$

$$R_1 = R_2 = 5 \Omega$$

$$L_1 = 1 \text{ mH}, \quad L_2 = 4 \text{ mH}$$

$$|M| = 2 \text{ mH}, \quad C = 12.5 \text{ mF}$$

Risultato: $\dot{S} = -j5 \text{ VAr}$.