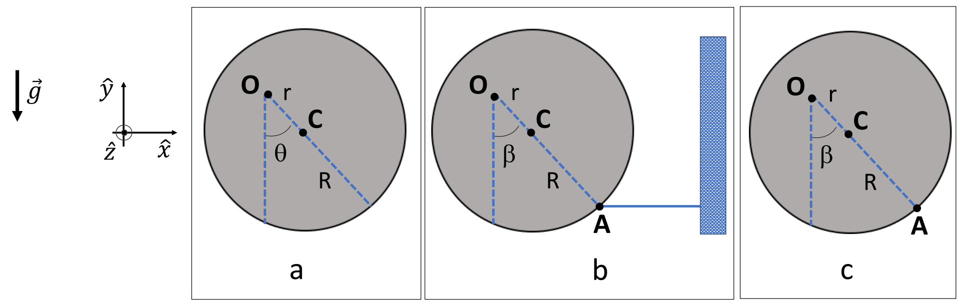
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 29/06/2022

Nome: **Matricola:**

Cognome: **Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Un disco rigido omogeneo di raggio $R = 30\ cm$ e massa $M = 150\ g$ è disposto su un piano verticale. Esso può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso perpendicolare al disco e passante per un punto O ad esso appartenente, posto a distanza $r = 6\ cm$ dal centro (vedi figura a).

1 Determinare, giustificando il procedimento, la frequenza f delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio

f= ....

Il disco viene poi collegato nel punto A tramite un filo inestensibile e privo di massa a una parete verticale. Si osserva che il sistema è in equilibrio quando il filo è in posizione orizzontale e il segmento OC forma un angolo $\beta = 20^0$ con la verticale (vedi figura b).

2 Determinare in questa configurazione il modulo della tensione $\overrightarrow{T}$ del filo e la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dall'asse di rotazione, quando il sistema è in equilibrio, utilizzando ove necessario la terna di versori indicata (figura b)

$|\overrightarrow{T}|$= .... $\vec{N}$ = ...

Con riferimento alla figura c, supponiamo ora che il filo venga rimosso e il sistema in esame è costituito, come nella Domanda 1, dal solo disco libero di ruotare attorno ad O. Al sistema viene impartita una velocità angolare iniziale ω_i attorno ad O con $\vec{\omega}_i = -\omega_i \hat{z}$ quando il segmento OC forma l' angolo $\beta = 20^0$ con la verticale (posizione di equilibrio della Domanda 2).

3 Determinare il valore minimo ω_{imin} della velocità angolare iniziale ω_i affinchè il disco compia un giro completo tornando nella posizione di partenza

ω_{imin}= ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s^2

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Si consideri il circuito rettangolare mostrato in figura, con un lato mobile costituito da una sbarra conduttrice indeformabile, libera di muoversi senza attrito sui due binari conduttori tra di loro paralleli, ed ortogonali alla sbarra, chiuso da un lato di lunghezza a. Il lato opposto alla sbarretta ha resistenza $R = 8\ \Omega$ ed è mantenuto a una distanza fissa pari a $x_0 = 5\ cm$ da un filo che giace nello stesso piano del circuito. Il filo è percorso da una corrente $i = 12\ A$ che scorre nel verso indicato.

All'istante t_0 si osserva che il lato mobile del circuito è posizionato in modo da formare un rettangolo di lati $a = 10\ cm$ e $b = 20\ cm$ ed ha una velocità di modulo $v_0 = 5\ m/s$ in direzione ad esso ortogonale nel verso indicato in figura.

Con riferimento alla figura:

1 Scrivere l'espressione del flusso $\phi(x)$ in funzione della posizione x della sbarretta mobile per $x \geq x_0$ e calcolare il valore del flusso ϕ_0 corrispondente all'istante t_0 in cui la sbarretta si trova alla distanza b da x_0

$\phi(x)$= .... ϕ_0 = ...

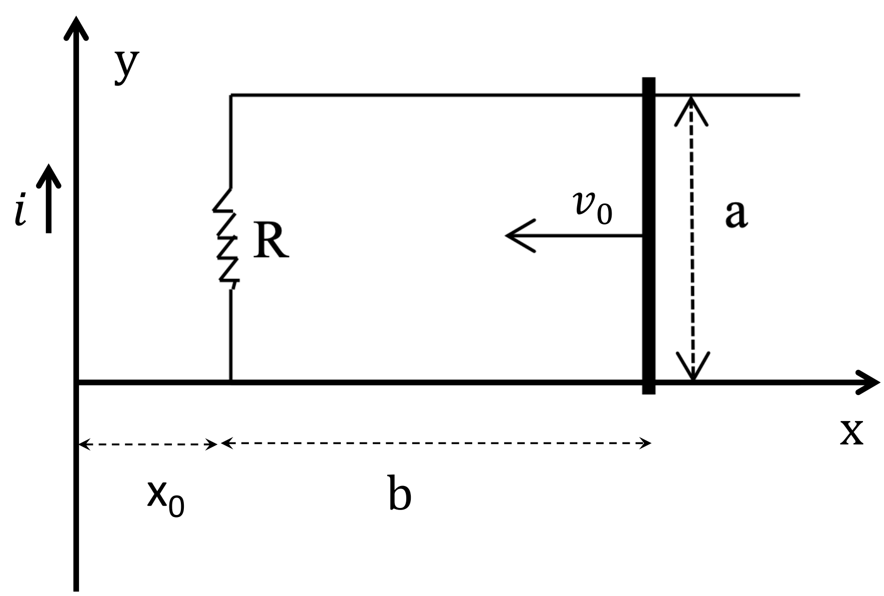
2 Calcolare la forza elettromotrice $fem(t_0)$ indotta nel circuito all'istante t_0 e indicare con un disegno il verso della corrente indotta motivando la risposta.

$fem(t_0)$= ....

3 Deteminare la forza $\overrightarrow{F}$ che agisce sul lato mobile al tempo t_0

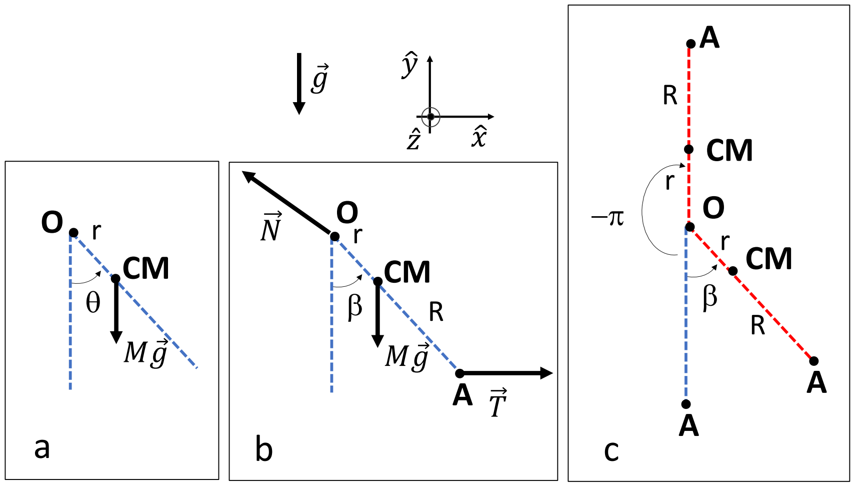
$\overrightarrow{F}$= ....

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A\ = 1.26 \times 10^{-6}\ Tm/A$



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Domanda.1

Il sistema costituisce un pendolo fisico con il centro di massa (CM) nel centro del disco (vedi figura a). Il momento di inerzia del disco rispetto ad un'asse parallelo a $\hat{z}$ passante per O (usando il teorema di Huygens-Steiner) è dato da:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + Mr^2 = \frac{1}{2}M\left(R^2 + 2r^2\right)$$

dove il primo termine è il momento di inerzia del disco rispetto ad un'asse parallelo a $\hat{z}$ passante per il centro di massa.

Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema può essere ricavato in questo caso utilizzando la conservazione dell'energia o il momento delle forze.

L'energia si conserva in quanto non ci sono forze non conservative che compiono lavoro (la reazione vincolare ha un punto di applicazione che è fisso). Con riferimento alla figura l'energia del sistema E può essere espressa in funzione dell'angolo θ, dove θ indica l'angolo formato dalla congiungente O e la posizione del CM, che coincide con C, in un istante arbitrario, con la congiungente O e il CM nella posizione in cui l'energia potenziale è minima ($\theta = 0$):

$$E(\theta) = costante = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + Mgr(1 - cos(\theta))$$

l'origine dell'energia potenziale corrisponde a $\theta = 0$ e il primo termine indica l'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido e il secondo termine l'energia potenziale del CM. Derivando rispetto al tempo entrambi i membri, e poichè vale la relazione $\omega = \dot{\theta}$, otteniamo :

$$0 = \frac{1}{2}2I_O\omega\dot{\omega} + Mgrsin(\theta)\dot{\theta} = I_O\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgrsin(\theta)\dot{\theta}$$

dividendo per $I_O\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgr}{I_O}sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$) fornisce:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgr}{I_O}\theta = 0$$

L'equazione ottenuta per le piccole oscillazioni è quella di un moto armonico che ha pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgr}{I_O}}$$

In alternativa alla conservazione dell'energia, si può utilizzare la seconda equazione cardinale. Utilizzando come polo il centro O, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}$ che tende a riportare il CM nella posizione di equilibrio ($\theta = 0$). Tale momento ha componente non nulla lungo l'asse ortogonale al piano (M_z). Al momento rispetto a tale polo contribuisce solo la forza peso essendo la reazione vincolare a braccio nullo rispetto a tale polo (vedi figura a, dove è indicata solo la forza peso):

$$M_z = I_O\alpha_z = -rMgsin(\theta)$$

Dalla quale:

$$I_O\ddot{\theta} + Mgrsin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ($sin(\theta) \approx \theta$), fornisce lo stesso risultato per Ω. Di conseguenza, la frequenza delle piccole oscillazioni f è data in entrambi i casi da:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgr}{I_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gr}{R^2+2r^2}} = 0.55\ Hz$$

Domanda.2

Nella nuova configurazione all'equilibrio la risultante delle forze che agiscono disco è nulla. Le forze che agiscono sul disco (vedi figura b) sono la forza peso $M\vec{g}$, la tensione del filo di modulo T e la reazione vincolare $\overrightarrow{N}$ in O. Pertanto la prima equazione cardinale fornisce:

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = 0$$

Inoltre all'equilibrio risulta nullo anche il momento delle forze esterne. Scegliendo il punto O come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, ci permette di determinare il modulo della tensione del filo $|\overrightarrow{T}| = T$:

$$\vec{OC} \wedge M\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{T} = I_O\vec{\alpha} = 0 = -Mgrsin\beta\hat{z} + (r+R)\,Tsin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\hat{z} \quad \Rightarrow \quad T = |\overrightarrow{T}| = \frac{Mgrsin\beta}{(r+R)\,cos\beta} = 8.93 \times 10^{-2}\ N$$

dove I_O è il momento di inerzia rispetto a O che dista r dal CM (vedi risposta Domanda 1) e dove (vedi figura b) $T_x = T$ e $T_y = 0$. Proiettando la I cardinale lungo $\hat{x}$ e lungo $\hat{y}$, possiamo scrivere la prima equazione cardinale per componenti e quindi, sostituendo il modulo della tensione T ottenuto dalla seconda equazione cardinale, determinare le componenti della reazione vincolare in O:

$$\begin{cases} \mathrm{N}_x + T = 0 \\ \mathrm{N}_y - Mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{N}_x = -T = -8.93 \times 10^{-2}\ N \\ \mathrm{N}_y = Mg = 1.47\ N \end{cases}$$

Domanda.3

Il sistema è uguale a quello considerato nella Domanda 1, dove il disco parte dalla posizione individuata dall'angolo $\beta = 20^0$ determinato nella Domanda 2, con una velocità angolare iniziale pari a ω_i. Per le stesse considerazioni della Domanda 1 vale la conservazione dell'energia. Per $\omega_i \geq \omega_{imin}$ il disco descrive delle rotazioni complete durante ciascuna delle quali il valore della velocità angolare massima finale si ottiene quando il punto A passa per la verticale in O e si trova nel punto più basso, mentre il valore minimo della velocità angolare finale si ottiene quando il punto A passa sempre per la verticale ma si trova nel punto più alto (vedi figura b). Chiaramente il valore più basso della velocità angolare finale permesso per $\theta = -\pi$ è $\omega_f(-\pi) = 0$.

Dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$E(\beta) = \frac{1}{2}I_O\omega_i^2 + Mgr(1 - cos(\beta)) = E(-\pi) = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 + Mgr(1 - cos(-\pi)) \quad \Rightarrow \quad \omega_i^2 = \omega_f^2 - Mgr(1 - cos(\beta))\frac{2}{I_O} + 2Mgr\frac{2}{I_O}$$

$$\omega_i^2 = \omega_f^2 + Mgr(1 + cos(\beta))\frac{2}{I_O}$$

Poichè il secondo termine dell'ultima equazione è positivo e $\omega_f^2 \geq 0$, il valore minimo di ω_i si ottiene per $\omega_f = 0$ per cui

$$\omega_{imin} = \sqrt{\frac{4Mgr(1 + cos(\beta))}{M\,(R^2 + 2r^2)}} = 2\sqrt{\frac{gr(1 + cos(\beta))}{(R^2 + 2r^2)}} = 6.85\ rads^{-1}$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 1

Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico generato dal filo sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse y.

L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie del circuito si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$

$$B(x') = \frac{\mu_0 i}{2\pi x'}$$

Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito in movimento varia con il tempo. Infatti poichè il campo magnetico dipende da x', il contributo al flusso nella regione $x' > 0$, scegliendo la normale al circuito orientata come $\overrightarrow{B}$, è dato da $d\phi(x) = B(x')adx'$, per cui il flusso attraverso il circuito è dato da:

$$\phi(x) = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n} dS = \int_{x_0}^{x(t)} B(x')adx' = \frac{\mu_0 ia}{2\pi} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{x'} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi} ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)$$

Dove x(t) indica la posizione della sbarra lungo l'asse x in funzione del tempo, abbiamo assunto il versore normale al circuito $\hat{n} = -\hat{z}$ e (per la regola della mano destra) per $x' > 0$, $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x'}\hat{z}$

Per $t = t_0$, $x(t) = x_0 + b$, pertanto:

$$\phi_0 = \phi(x_0 + b) = \frac{\mu_0 ia}{2\pi} ln\left(\frac{x_0 + b}{x_0}\right) = 3.86 \times 10^{-7}\ Tm^2 = 3.86 \times 10^{-7}\ Wb$$

Domanda 2

La forza elettromotrice indotta al tempo t, è data dalla legge di Faraday Neuman Lenz:

$$fem(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)$$

Per $t = t_0$, $x(t_0) = x_0 + b$ e $\dot{x}(t_0) = -v_0$ per cui:

$$fem(t_0) = -\frac{d\phi}{dt}|_{t_0} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{-v_0}{x_0 + b}\right) = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right) = 4.8\ \mu V$$

e la corrente circola in verso orario (vedi anche figura) in modo da opporsi alla variazione di flusso che la ha generata.

Domanda 3

La forza agente sulla sbarretta è la forza di Laplace al tempo $t = t_0$ esercitata dal campo magnetico generato dal filo sul circuito percorso dalla corrente indotta I_c:

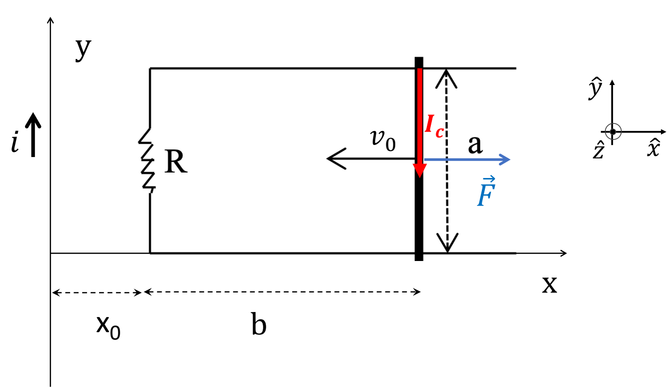
$$\overrightarrow{F} = I_c a(-\hat{y}) \wedge B(x_0 + b)(-\hat{z}) = I_c aB(x_0 + b)\hat{x}$$

dove con I_c abbiamo indicato la corrente nel circuito al tempo $t = t_0$ e con $B(x_0 + b)$ il modulo del campo magnetico agente sul lato mobile sempre al tempo t_0 le cui espressioni sono rispettivamente

$$I_c = \frac{fem(t_0)}{R} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi R}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right) \qquad B(x_0 + b) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)}$$

per cui:

$$I_c aB(x_0+b) = \frac{\mu_0 ia^2}{2\pi R}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right)\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)}\right)^2 \frac{a^2 v_0}{R} = (B(x_0 + b))^2\,\frac{a^2 v_0}{R} = 5.76\times 10^{-13}\ N \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F} = 5.76\times 10^{-13}\hat{x}\ N$$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)