# Integrazione numerica
# I$^a$ parte

## Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 16

# Outline

In questo capitolo si studiano alcuni metodi per il calcolo approssimato di integrali definiti

Alcuni motivi che consigliano l'uso di metodi approssimati in luogo di metodi analitici ("esatti") sono i seguenti:

1. di molte funzioni integrabili non si conosce una funzione primitiva esprimibile con funzioni elementari (per esempio, $f(x) = e^{\cos x}$, $f(x) = x^x$)
2. in molti casi, funzioni semplici hanno funzioni primitive tanto complicate che spesso le formule approssimate sono più facilmente calcolabili di quelle esatte e con maggiore precisione (per esempio, una primitiva di $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ è $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\log\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right]$)
3. spesso della funzione integranda è nota solo una restrizione a un insieme discreto.

# Outline

Sia $f(x)$ sufficientemente regolare sull'intervallo $[a, b]$ dell'asse reale

Sia $\rho(x)$ una **funzione peso** non negativa in $[a, b]$ e tale che esistano finiti i momenti

$$m_k = I(x^k \rho) = \int_a^b x^k \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Si pone il problema di approssimare

$$I(\rho f) = \int_a^b \rho(x) f(x)\, dx$$

con una **formula di quadratura** della forma

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

dove i numeri $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, detti **pesi** o **coefficienti**, sono reali mentre i punti $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sono detti **nodi** e di solito appartengono all'intervallo $[a, b]$

L'errore è perciò formalmente dato da

$$E_n(f) \;=\; I(\rho f) - J_n(f)$$

Si considera la base $1, x, x^2, \ldots, x^m, x^{m+1}$, dello spazio vettoriale dei polinomi algebrici di grado al più $m+1$

## Definizione

La formula $J_n(f)$ ha **grado di precisone** (algebrico) $m \in \mathbb{N}$ se si verifica

$$E_n(1) = E_n(x) = \cdots = E_n(x^m) = 0, \quad E_n(x^{m+1}) \neq 0$$

# Esempio 1

Consideriamo l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

Si vuole determinare i pesi reali $a_0$ e $a_1$ della formula

$$J_1(f) \;=\; a_0\, f(-1) \;+\; a_1\, f(1)$$

in modo tale da ottenere il massimo grado di precisione

# Esempio 1

Si impone che la formula dia $E_1(1) = 0$ e $E_1(x) = 0$

Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcl} a_0 & + & a_1 & = & 2 \\ -a_0 & + & a_1 & = & 0 \end{array}$$

La soluzione è

$$a_0 = a_1 = 1$$

# Esempio 1

Si ottiene la formula di quadratura

$$J_1(f) \, = \, f(-1) \, + \, f(1)$$

Per determinare il grado di precisione, risultando la formula esatta per $f(x) = 1, x$, si calcola $E_1(x^2)$

Se questo errore risulta diverso da zero significa che il grado di precisione è $m = 1$ altrimenti si deve procedere col calcolo di $E_1(x^3)$

# Esempio 1

Si ha

$$E_1(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - J_1(x^2) = \frac{2}{3} - 2 \neq 0$$

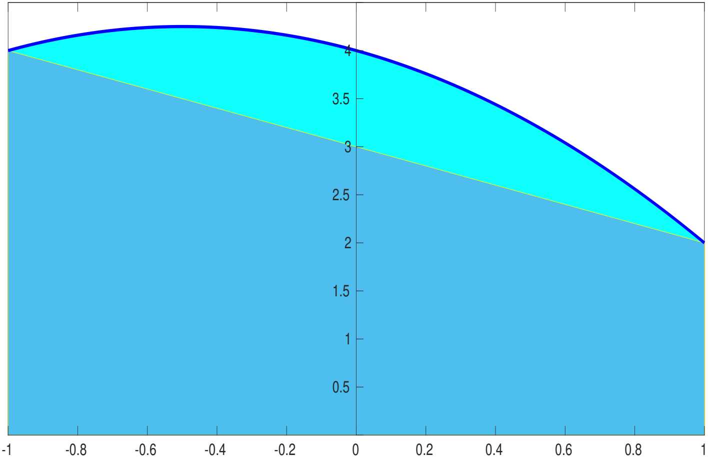
Si deduce che la formula $J_1(f)$ ha grado di precisione $m = 1$

**Osservazione**

Si osservi che la formula trovata risulta esatta per qualunque potenza dispari di $x$

Nella slide che segue si evidenzia l'interpretazione grafica della formula che è stata ricavata

# Esempio 1



# Esempio 1

La formula di integrazione numerica ottenuta, vista la sua interpretazione grafica, è nota come **formula trapezoidale**

La versione generale della formula trapezoidale per approssimare $\int_a^b f(x)dx$ è

$$J_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

# Esempio 2

Consideriamo ancora l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

Si vuole determinare i pesi reali $a_0$, $a_1$ e $a_2$ della formula

$$J_2(f) \;=\; a_0\, f(-1) \;+\; a_1\, f(0) \;+\; a_2\, f(1)$$

in modo tale da ottenere il massimo grado di precisione

# Esempio 2

Si impone che la formula dia $E_2(1) = 0$, $E_2(x) = 0$ e $E_2(x^2) = 0$

Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcccccl} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 2 \\ -a_0 & & & + & a_2 & = & 0 \\ a_0 & & & + & a_2 & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

La soluzione è

$$a_0 = a_2 = \frac{1}{3}, \qquad a_1 = \frac{4}{3}$$

# Esempio 2

Si ottiene la formula di quadratura

$$J_2(f) = \frac{1}{3}(f(-1) + 4\,f(0) + f(1))$$

Per determinare il grado di precisione, risultando la formula esatta per $f(x) = 1, x, x^2$, si calcola $E_2(x^3)$

Se questo errore risulta diverso da zero significa che il grado di precisione è $m = 2$ altrimenti si deve procedere col calcolo di $E_2(x^4)$

# Esempio 2

Si ha

$$E_2(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx - J_2(x^3) = 0 - 0 = 0$$

e successivamente

$$E_2(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4 \, dx - J_2(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \neq 0$$

Si deduce che la formula $J_2(f)$ ha grado di precisione $m = 3$

## Osservazione

Si osservi che, anche in questo caso, la formula trovata risulta esatta per qualunque potenza dispari di $x$

# Esempio 2

La formula di integrazione numerica ottenuta è nota come **formula di Simpson**

La versione generale della formula di Simpson per approssimare $\int_a^b f(x)dx$ è

$$J_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

# Esempio 3

Consideriamo ancora l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

Si vogliono determinare i pesi reali $a_0$, $a_1$ e i nodi $x_0$, $x_1$ della formula

$$J_1(f) \;=\; a_0\, f(x_0) \;+\; a_1\, f(x_1)$$

in modo tale da ottenere il massimo grado di precisione

# Esempio 3

Si impone che la formula dia $E_1(1) = 0$, $E_1(x) = 0$, $E_1(x^2) = 0$ e $E_1(x^3) = 0$

Si ottiene il sistema non lineare

$$\begin{aligned} a_0 &+ a_1 &= 2 \\ a_0 x_0 &+ a_1 x_1 &= 0 \\ a_0 x_0^2 &+ a_1 x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ a_0 x_0^3 &+ a_1 x_1^3 &= 0 \end{aligned}$$

# Esempio 3

Il sistema risulta completamente risolto se

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad x_0 = -x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(la risoluzione del sistema viene esposta durante la lezione)

Si ottiene la formula di quadratura

$$J_1(f) \; = \; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \; + \; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

# Esempio 3

Per determinare il grado di precisione, risultando la formula esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, si calcola $E_1(x^4)$

$$E_1(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4 \, dx - J_1(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \neq 0$$

Si deduce che la formula $J_1(f)$ ha grado di precisione $m = 3$

## Osservazione

Si osservi che, anche in questo caso, la formula trovata risulta esatta per qualunque potenza dispari di $x$

Una formula del tipo

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

è individuata una volta che lo siano i nodi e i pesi

Per determinare gli $2n+2$ parametri si impone che sia

$$E_n(1) = E_n(x) = \cdots = E_n(x^{2n+1}) = 0$$

Si ottiene il sistema non lineare

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_0 & + & a_1 & + & \cdots & + & a_n & = & m_0 \\
a_0 x_0 & + & a_1 x_1 & + & \cdots & + & a_n x_n & = & m_1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
a_0 x_0^{2n+1} & + & a_1 x_1^{2n+1} & + & \cdots & + & a_n x_n^{2n+1} & = & m_{2n+1}
\end{array}
$$

dove i termini noti $m_k$, $k = 0, 1, \dots, 2n+1$, sono dati dai momenti

Si può dimostrare che la soluzione $(a_0, \dots, a_n, x_0, \dots, x_n)^T$ del sistema non lineare è univocamente determinata

La soluzione del sistema fornisce una formula di quadratura con grado di precisione almeno $2n+1$

All'errore $E_n(f)$ si dare una rappresentazione generale: sussiste infatti il seguente teorema, enunciato, per semplicità, nel caso di una formula $J_n(f)$ con $\rho(x) = 1$ e $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

## Teorema di Peano

Sia $f(x) \in C^{m+1}([a, b])$ e $J_n(f)$ di grado di precisione $m$, allora risulta

$$E_n(f) \; = \; \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) G(t) \, dt$$

essendo $G(t) = E_n(s_m(x - t))$ e

$$s_m(x - t) = \begin{cases} (x - t)^m \, , & t < x, \\ 0 \, , & t \geq x. \end{cases}$$

(La funzione $G(t)$ si chiama nucleo di Peano)

Nel caso in cui $G(t)$ non cambi segno in $[a, b]$, usando il teorema della media integrale, si ottiene

$$E_n(f) = \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(\theta) \int_a^b G(t)dt \,, \qquad \theta \in ]a, b[$$

Dalla precedente relazione si può ricavare $\int_a^b G(t)dt$ (che non dipende da $f$) ponendo, per esempio, $f(x) = x^{m+1}$ per cui si ha

$$E_n(f) = \frac{f^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} E_n(x^{m+1}) \,, \qquad \theta \in ]a, b[$$

# Esempio 1 - bis

Determiniamo l'espressione dell'errore commesso applicando la formula ricavata nell'Esempio 1 con

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1) + f(1) + E_1(f)$$

Si può dimostrare che la formula trapezoidale ha il nucleo di Peano di segno costante per cui è possibile utilizzare l'espressione dell'errore ricavata nella slide precedente

# Esempio 1 - bis

La formula ha grado di precisione $m = 1$ e $E_1(x^2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

Segue

$$E_1(f) \; = \; -\frac{4}{3}\frac{f^{(2)}(\theta)}{2} \; = \; -\frac{2}{3}f^{(2)}(\theta)$$

Per la formula trapezoidale per approssiamare un integrale su un intervallo $[a, b]$ si ha

$$E_1(f) \; = \; -\frac{(b-a)^3}{12}f^{(2)}(\theta)$$

# Esempio 2 - bis

Determiniamo l'espressione dell'errore commesso applicando la formula ricavata nell'Esempio 2 con

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) + E_2(f)$$

Si può dimostrare che la formula di Simpson ha il nucleo di Peano di segno costante per cui è possibile utilizzare l'espressione dell'errore

# Esempio 2 - bis

La formula ha grado di precisione $m = 3$ e $E_2(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}$

Segue

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\frac{f^{(4)}(\theta)}{24} = -\frac{1}{90}f^{(4)}(\theta)$$

Per la formula di Simpson per approssiamare un integrale su un intervallo $[a, b]$ si ha

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\theta)$$

# Outline

1. Grado di precisione ed errore
   - Teorema di Peano

2. Formule di tipo interpolatorio

Per approssimare $I(\rho f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$ prendiamo in esame la formula di quadratura $J_n(f)$ dove sono stati fissati i nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Dall'interpolazione parabolica abbiamo visto che possiamo scrivere

$$f(x) = L_n(x) + E_n(x)$$

Sostituendo nell'integrale esatto, ricordando la forma del polinomio di interpolazione di Lagrange, si ha

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x) f(x) dx &= \int_a^b \rho(x) \left( L_n(x) + E_n(x) \right) dx \\
&= \int_a^b \rho(x) L_n(x) dx + \int_a^b \rho(x) E_n(x) dx \\
&= \int_a^b \rho(x) \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) f(x_i) dx + \int_a^b \rho(x) E_n(x) dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \rho(x) \ell_i(x) f(x_i) dx + \int_a^b \rho(x) E_n(x) dx \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \rho(x) \ell_i(x) dx}_{J_n(f)} + \underbrace{\int_a^b \rho(x) E_n(x) dx}_{E_n(f)}
\end{aligned}
$$

Si dicono **formule di quadratura di tipo interpolatorio** le formule del tipo

$$J_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, f(x_i)$$

dove, fissati i nodi $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, i pesi sono

$$a_i = \int_a^b \rho(x) \, \ell_i(x) \, dx \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

### Osservazione

Le formule di quadratura di tipo interpolatorio approssimano l'integrale dato con l'integrale del polinomio di interpolazione costruito su $n$ punti

Le formule interpolatorie si differenziano una dall'altra per il criterio con cui sono fissati i nodi e cioè i punti in cui si valuta la funzione integranda

Nel seguito introdurremo le due classi di formule di quadratura di tipo interpolatorio generalmente più utilizzate:

1. Formule di Newton-Cotes
2. Formule gaussiane