Sommario: campo elettrico

✓ **Campo elettrico:** una distribuzione di cariche **genera un campo elettrico** nello spazio circostante, ovvero modifica le proprietà dello spazio conferendo ad esso la **potenzialità di interagire con altre cariche** nel momento in cui queste entrano nel campo suddetto

✓ **Linee di campo**: il campo si rappresenta figurativamente mediante le sue linee di campo: in ogni punto il campo è sempre tangente alla linea; la densità delle linee indica l'intensità del campo. Le linee escono dalle cariche positive che generano il campo, ed entrano in quelle negative

Campo generato da una carica puntiforme Q:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

All'interno del campo elettrico una carica q_0 subisce una forza:

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

Campo generato da un dipolo di momento ***P*** = *q**d***: lungo l'asse del dipolo:

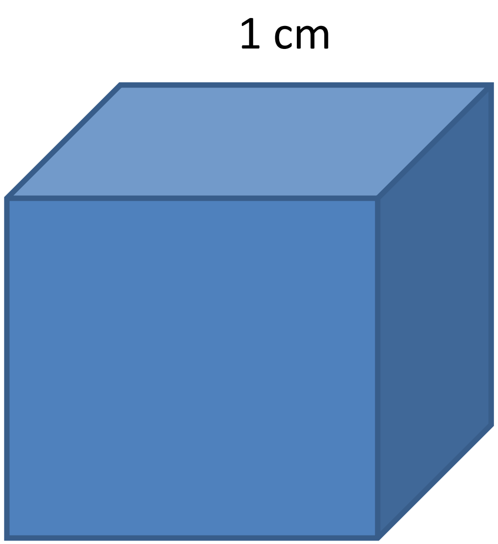
$$\vec{E} = \frac{2k}{z^3}\vec{P}$$

All'interno del campo elettrico un dipolo ***P*** subisce una torsione:

$$\vec{\tau} = \vec{P}\times\vec{E}$$

Distribuzioni continue di cariche

Finora abbiamo considerato distribuzioni di cariche **discrete**, ovvero un **insieme di cariche puntiformi** in punti specifici dello spazio. Quando si ha a che fare con **moltissime cariche,** la descrizione in termini di cariche puntiformi è poco utile

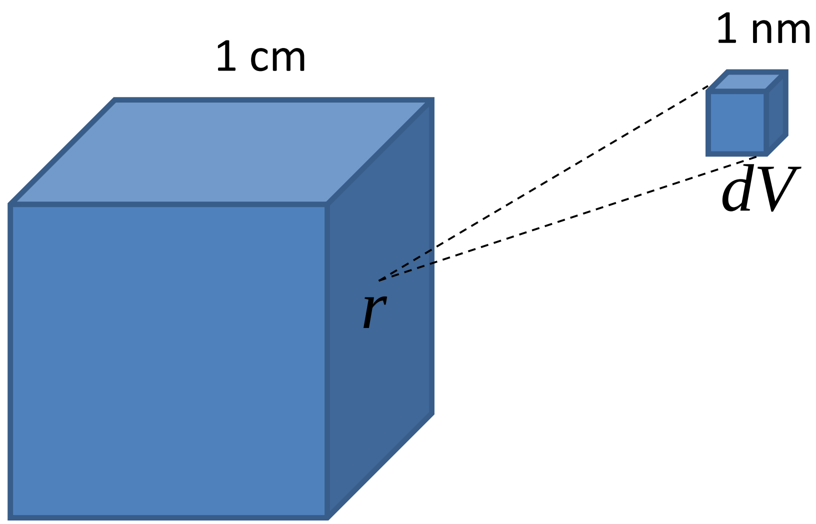


In un cubo di materia di lato 1 cm vi è circa una **mole di sostanza**; una mole corrisponde a $N_A = 6\times10^{23}$ atomi (N_A è detto **numero di Avogadro**).
Immaginiamo quanto tempo occorrerebbe per sommare i campi elettrici dovuti a tutti gli atomi carichi nel cubo…
Per così tante particelle, il calcolo del campo elettrico mediante la formula di Coulomb sarebbe improponibile anche per un computer estremamente potente…

Distribuzioni continue di cariche

In molti casi pratici, le cariche non sono **distribuite nello spazio casualmente (disordinatamente), ma secondo una certa simmetria**: in questi casi è conveniente **passare dal formalismo discreto al formalismo del continuo**. Ciò comporta:

- ✓ *l'utilizzo del calcolo infinitesimale*
- ✓ *l'utilizzo del concetto di densità di carica al posto della carica totale*



In un punto *r* interno al cubo, immaginiamo di considerare un volumetto *dV* così piccolo (ad esempio 1 nm di lato) che la carica contenuta in esso (dq_r) sia uniforme; definiamo la densità di carica nel punto *r*:

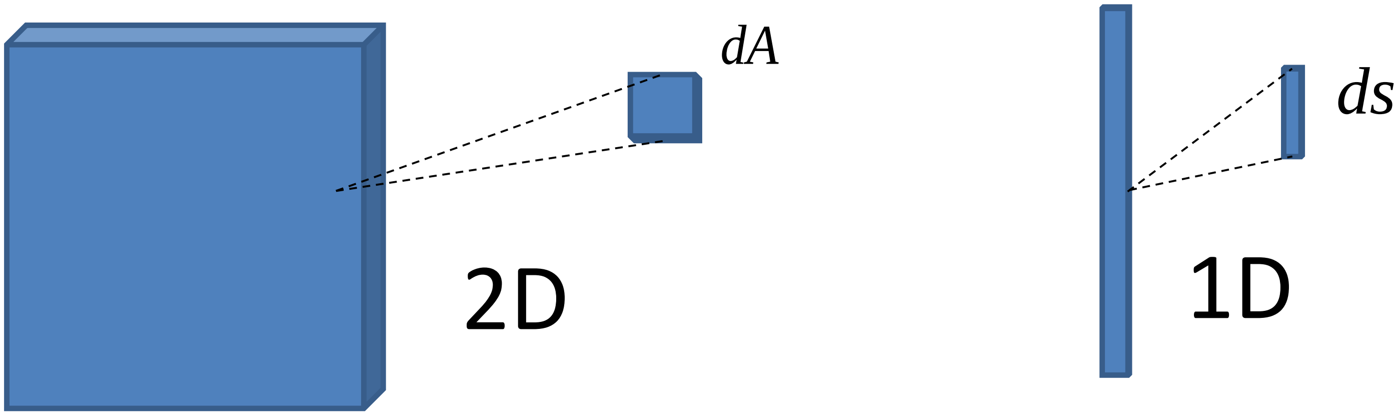
$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq_r}{dV} \quad \Rightarrow dq_r = \rho(\vec{r})\, dV$$

La carica totale è ottenuta sommando su tutti i volumi infinitesimi, ovvero integrando:

$$q = \int dq_r = \int \rho(\vec{r})\, dV$$

Distribuzioni continue di cariche

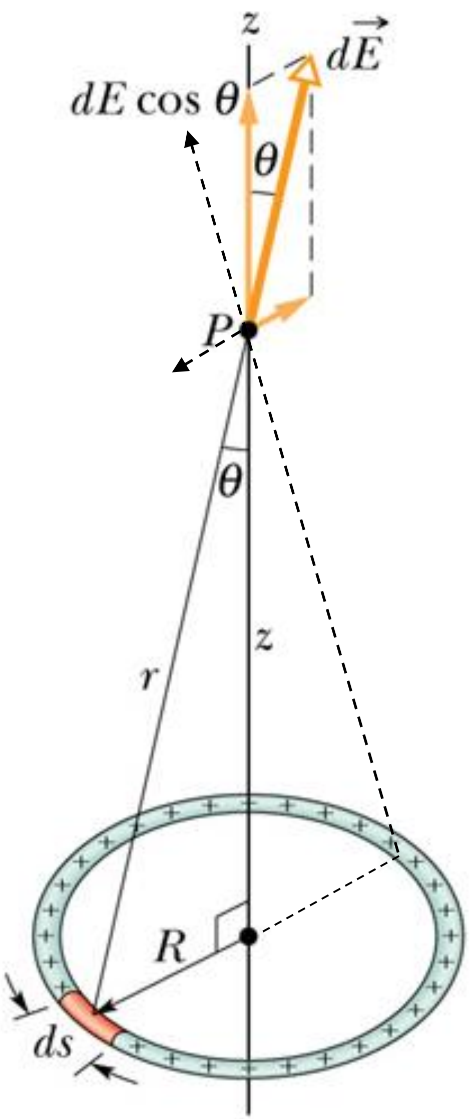
In molti casi pratici abbiamo a che fare con **distribuzioni bi-dimensionali** (ad esempio un foglio di carica o un piatto sottile di carica) o **mono-dimensionali** (un filo carica o un cilindro sottile); in questi casi utilizziamo il concetto di **densità di carica superficiale (o planare) e densità di carica lineare**:



- ✓ **3D - densità di carica di volume:** $\rho(\vec{r}) = \dfrac{dq_r}{dV}\left[\dfrac{C}{m^3}\right]$ $\quad \vec{r} = (x, y, z)$
- ✓ **2D - densità di carica superficiale:** $\sigma(\vec{r}) = \dfrac{dq_r}{dA}\left[\dfrac{C}{m^2}\right]$ $\quad \vec{r} = (x, y)$
- ✓ **1-D - densità di carica lineare**: $\lambda(x) = \dfrac{dq_x}{ds}\left[\dfrac{C}{m}\right]$

Campo di un anello carico

Calcoliamo il **campo elettrico lungo l'asse dell'anello**. Sia *dq* la carica contenuta nel segmento infinitesimale *ds*



$$dq = \lambda\, ds$$

Nel punto P *ds* genera un campo:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda ds}{r^2} = k\frac{\lambda ds}{z^2 + R^2}$$

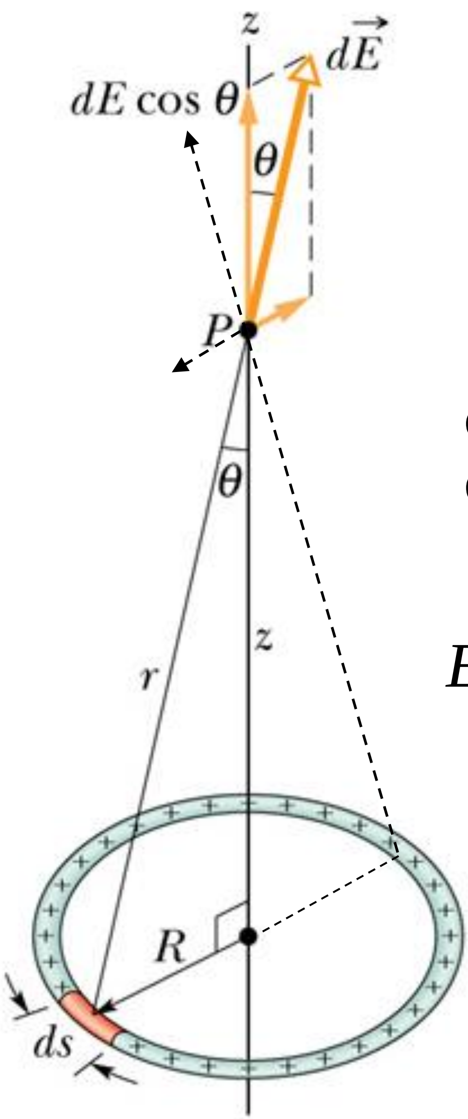
Sommando i contributi di tutti i *ds* si vede che la componente perpendicolare all'asse z è nulla poiché il contributo di ogni segmento *ds* è controbilanciato dal *ds* collocato dalla parte opposta dell'anello; dunque **soltanto la componente E_z parallela all'asse dell'anello è non nulla**. Si ha:

$$dE_z = dE\cos(\theta)$$

Campo di un anello carico

La geometria ci dice che:

$$r\cos(\theta) = z \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$



$$\Rightarrow dE_z = dE\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = k\frac{z\lambda}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}ds$$

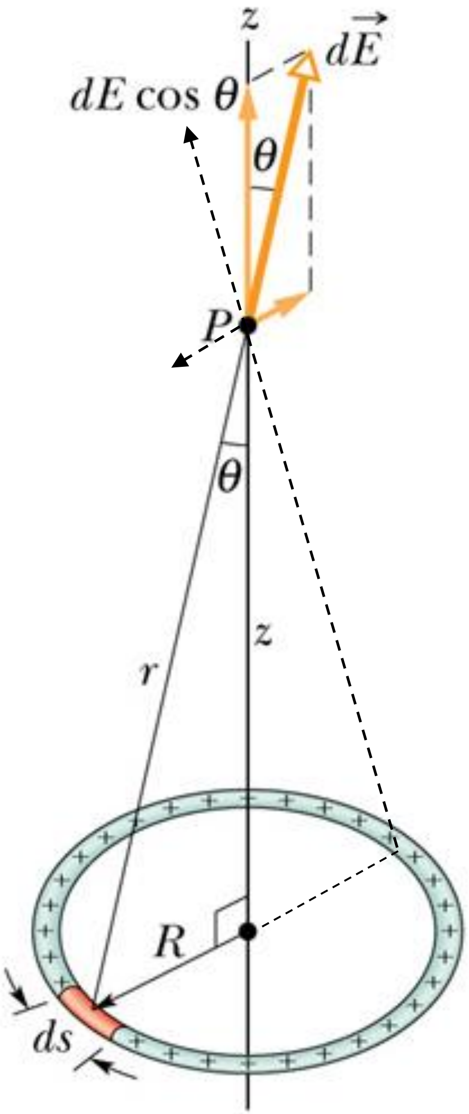
Per calcolare il campo totale basta integrare il campo infinitesimale lungo la circonferenza dell'anello, ovvero integrare in *ds* da *s*=0 a *s*=2π*R*

$$E_z = \oint_C dE_z = k\frac{z\lambda}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\oint_C dS = k\frac{z\lambda}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}(2\pi R)$$

Se *q* è la carica totale dell'anello, si ha:

$$E_z = k\frac{zq}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Campo di un anello carico



$$E_z = k\frac{zq}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Quiz:

✓ Com'è il campo nel punto z=0?

✓ Se la carica dell'anello fosse negativa cosa cambierebbe?

✓ Per un punto P lontanissimo dall'anello (z >> R), come diviene il campo lungo l'asse ??

Legge di Gauss

✓ Si deve al fisico e matematico tedesco Carl Friedrich Gauss la scoperta di una legge che rappresenta un formidabile strumento per l'analisi dei problemi elettrostatici.

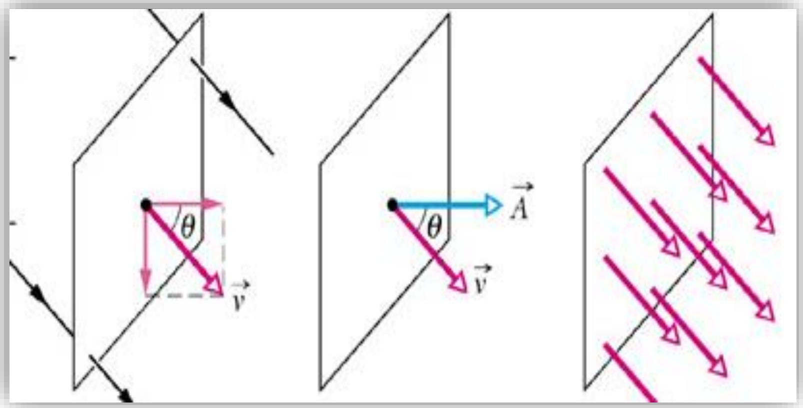
✓ Sfruttando la **simmetria della distribuzione di carica**, la legge di Gauss permette la **formulazione analitica dei campi elettrici generati da distribuzioni continue di carica**

✓ La legge di Gauss si fonda su un concetto matematico estremamente importante non soltanto in elettromagnetismo, ma nelle Scienze in generale: il concetto di **FLUSSO di un campo vettoriale**

Johann Friedrich Carl Gauss (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23 febbraio 1855). Matematico, astronomo e fisico. Definito "il Principe dei matematici", è annoverato fra i più importanti scienziati della storia avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali.

Flusso della velocità

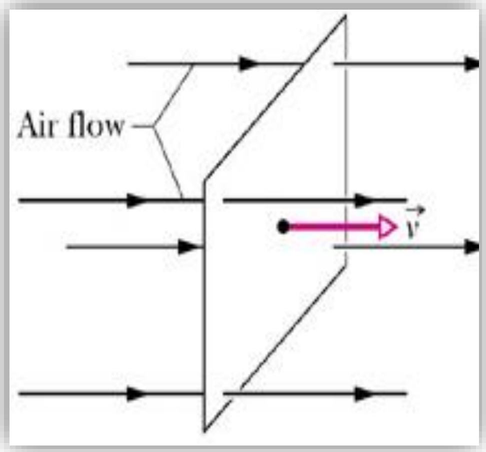
Consideriamo un campo di velocità ***v***, ad esempio la velocità di una corrente d'aria o di un liquido che scorre attraverso una sezione di area *A*; sia ***v*** uniforme in tutti i punti dell'area *A*; definiamo **FLUSSO** la **quantità d'aria (o di liquido) che attraversa l'area *A* nell'unità di tempo**; poiché la velocità è uguale alla lunghezza percorsa dall'aria (o dal liquido) nell'unità di tempo, il flusso è dato:



$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A} = v\,A\cos(\theta)$$

Il FLUSSO è il prodotto scalare di **v** e del vettore areale ***A*** perpendicolare al piano della finestra, di modulo uguale ad *A;* si noti che il flusso cambia segno se ***v*** inverte la direzione, ovvero se $\theta > 90^{o}$

Per una velocità perpendicolare all'area: $\Phi = v\,A$



Per una velocità parallela all'area: $\Phi = 0$

in idrodinamica il flusso si definisce anche portata di una conduttura; in tal caso ***v*** è la velocità dell'acqua, ed ***A*** l'area della conduttura

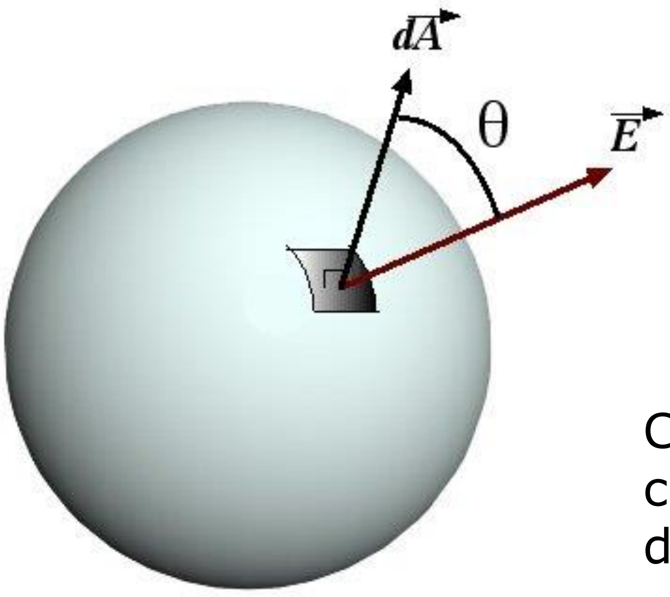
Flusso del campo elettrico

Il concetto di **flusso di un campo vettoriale** può essere applicato a qualsiasi grandezza vettoriale, per esempio al campo elettrico:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie è il **prodotto scalare del campo per il vettore areale della superficie**; se la superficie non è piana, possiamo scomporla in quadratini infinitesimi di area *dA* così piccoli da poter essere considerati piani; il flusso infinitesimale associato ad un singolo quadratino è:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

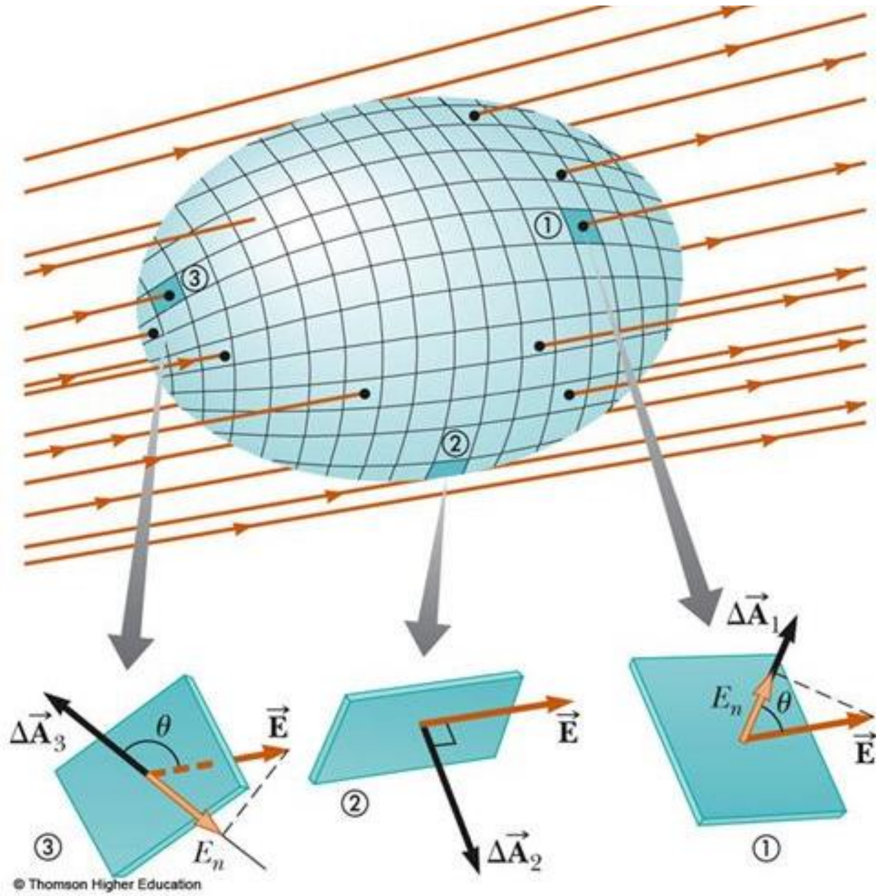


Il flusso totale si ottiene integrando sulla superficie:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad [\Phi] = \frac{N\,m^2}{C}$$

Chiaramente il calcolo del flusso richiede la conoscenza del campo elettrico su ogni punto della superficie considerata

Flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa



E entrante: $\Phi < 0$

E tangente: $\Phi = 0$

E uscente: $\Phi > 0$

Se la superficie è chiusa il flusso si indica con un cerchietto sull'integrale:

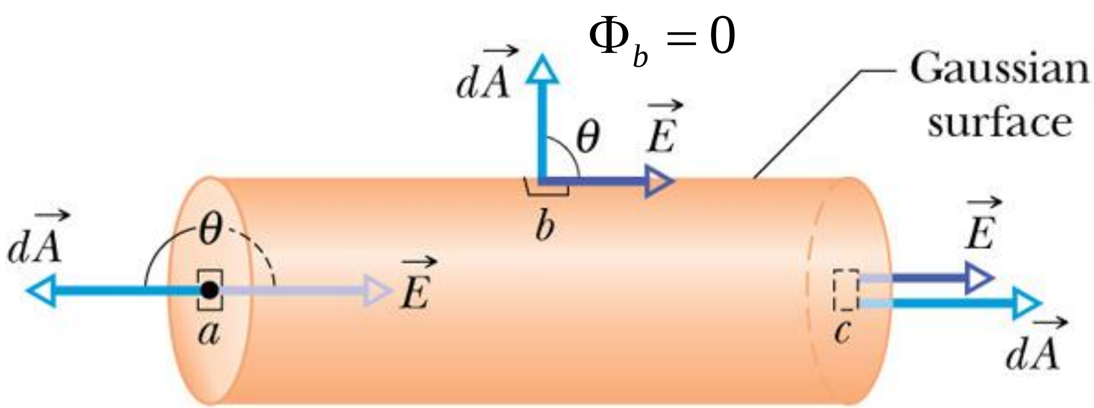
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Una superficie chiusa è anche detta **'gaussiana'**; per convenzione, il vettore areale su una superficie chiusa è preso con verso uscente dalla superficie; ne segue che **se il campo è uscente dalla superficie il flusso è positivo, se il campo è entrante nella superficie il flusso è negativo**

Una **linea di campo che entra ed esce dalla superficie chiusa non contribuisce al flusso**; **se il numero di linee di campo che entrano ed escono è lo stesso**, **il flusso totale attraverso la superficie chiusa è NULLO**

Problema 23.1

Sia dato un campo elettrico uniforme; calcolare il **flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa cilindrica** in figura; l'asse del cilindro è parallelo al campo

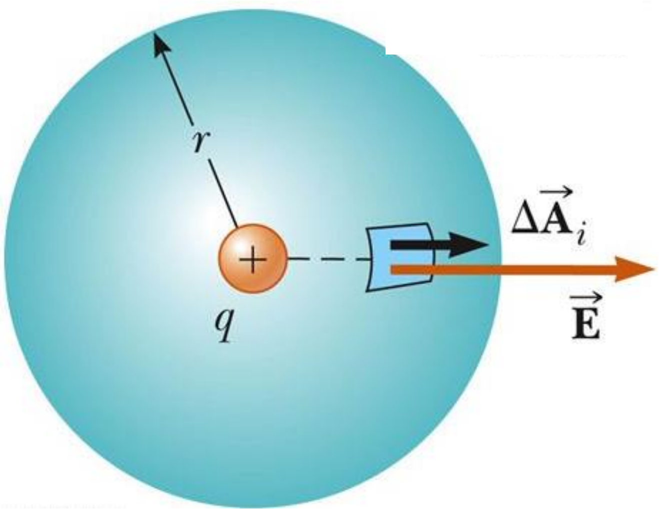


Ovviamente il flusso attraverso la superficie laterale *b* del cilindro è nullo, dunque dobbiamo considerare soltanto il flusso attraverso le aree di base *a* e *c*; poiché il campo è uniforme in tutti i punti, si ottiene:

$$\Phi_a = -EA \qquad \Phi_c = EA \qquad \Rightarrow \Phi = \Phi_a + \Phi_b = 0$$

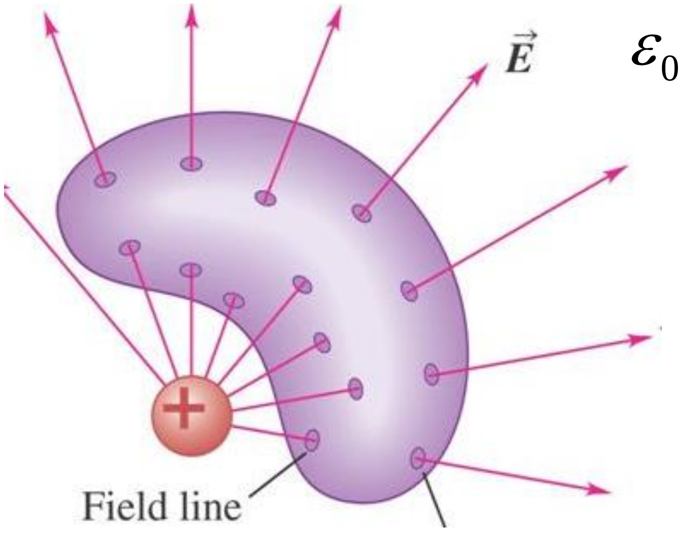
Questo risultato non vale soltanto per la superficie cilindrica: **per un campo uniforme, il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo, indipendentemente dalla forma della superficie**

Legge di Gauss



Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica contenuta nella superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto ε_0 (detta anche permittività dielettrica del vuoto)

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

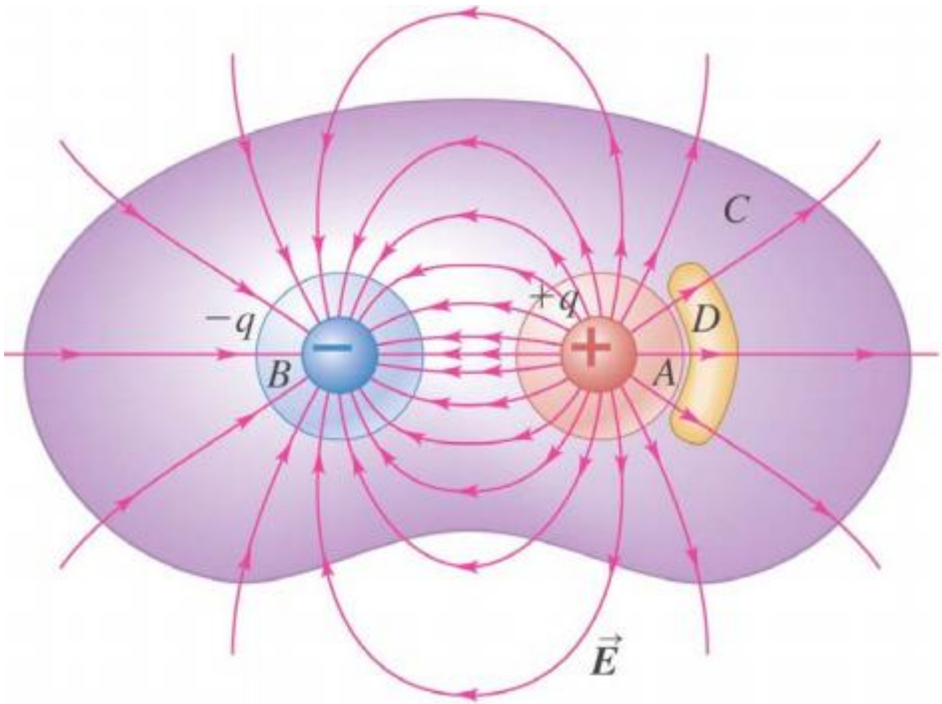
✓ Eventuali cariche **esterne alla superficie,** non importa quanto grandi, **non danno alcun contributo al flusso**

✓ **Non ha importanza la distribuzione o la posizione delle cariche interne, né la forma della superficie**

Esempio: il dipolo elettrico

Consideriamo un campo di dipolo di carica q, e calcoliamo il flusso attraverso le 4 superfici chiuse in figura:

- ✓ La superficie *A* contiene la carica positiva del dipolo
- ✓ La superficie *B* contiene la carica negativa del dipolo
- ✓ La superficie *C* racchiude entrambe le cariche, per cui la carica netta è nulla
- ✓ La superficie *D* non ha carica al suo interno

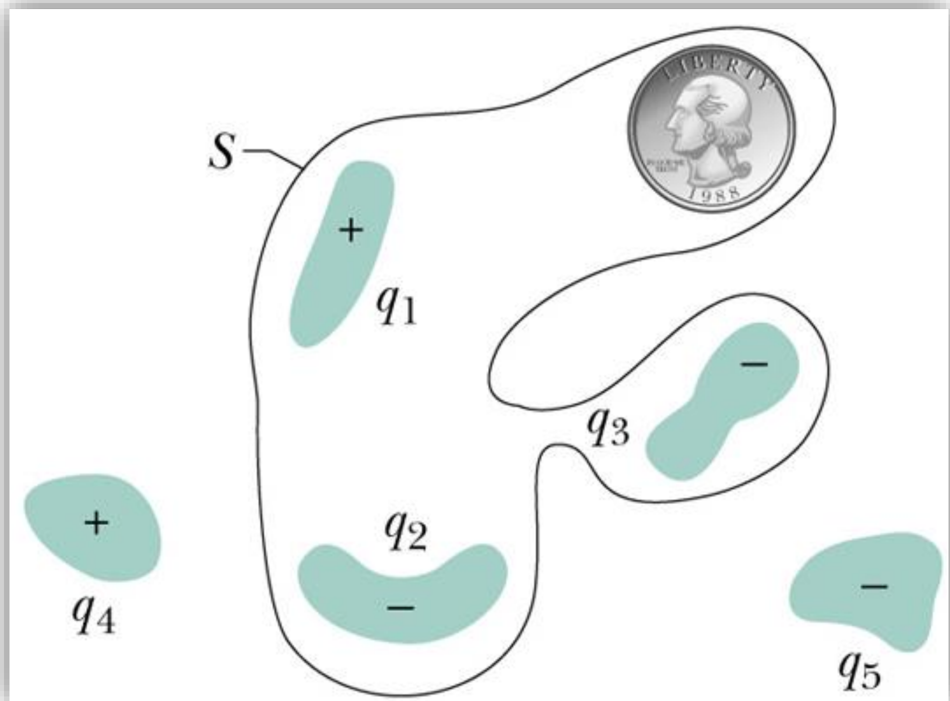


$$\Phi_A = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_B = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_C = 0 \qquad \Phi_D = 0$$

Problema 23.3

Consideriamo la superficie S in figura; le aree verdi rappresentano alcune distribuzioni di carica; la moneta è neutra. Calcoliamo il flusso elettrico attraverso S



$$q_1 = q_4 = 3.1 \text{ nC}$$

$$q_2 = q_5 = -5.9 \text{ nC}$$

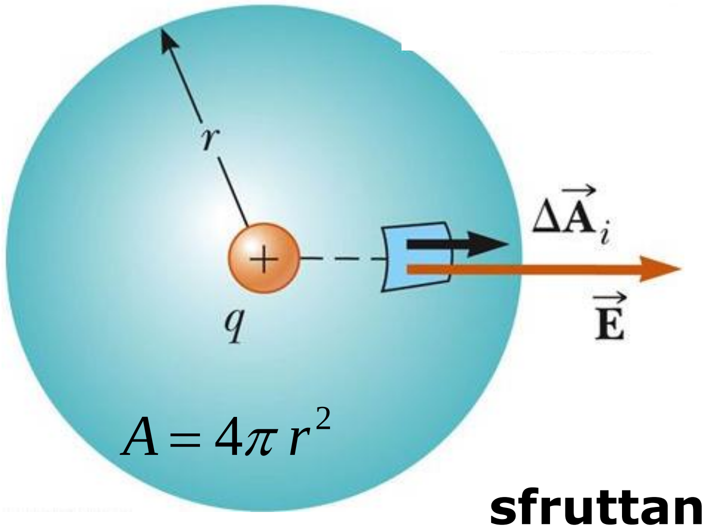
$$q_3 = -3.1 \text{ nC}$$

q_1, q_2, q_3 contribuiscono al flusso; la moneta essendo neutra non contribuisce, anche se polarizzata per induzione

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0} = -\frac{5.9\,nC}{8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}} = -0.66\times10^3\,\frac{N\,m^2}{C}$$

Utilità della legge di Gauss

- ✓ In alcuni casi la legge di Gauss permette di **determinare l'espressione analitica del campo elettrico**
- ✓ Ciò si verifica quando il **campo elettrico possiede una specifica simmetria spaziale:** in questo caso, calcolando il flusso attraverso una superficie che rispecchia la simmetria del campo, si ottiene facilmente l'espressione del campo elettrico
- ✓ Esempio: **campo elettrico generato da una carica puntiforme** positiva q; sappiamo che il campo ha **simmetria radiale**, ed è uscente dalla carica; scegliamo quindi come superficie chiusa una sfera di raggio r centrata su q, e calcoliamo il flusso del campo; su ciascun punto della sfera il campo è uniforme e parallelo al vettore areale, per cui:



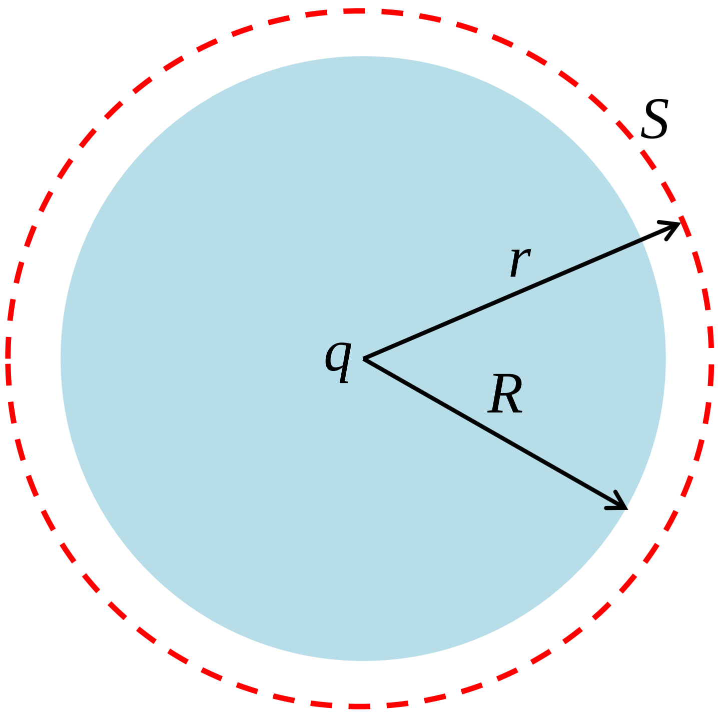
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E\,A = E\left(4\pi r^2\right)$$

Dalla legge di Gauss ricaviamo:

$$E\,A = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = k\frac{q}{r^2}$$

sfruttando la simmetria sferica del campo elettrico abbiamo ritrovato la legge di Coulomb !!

Sfera isolante uniformemente carica

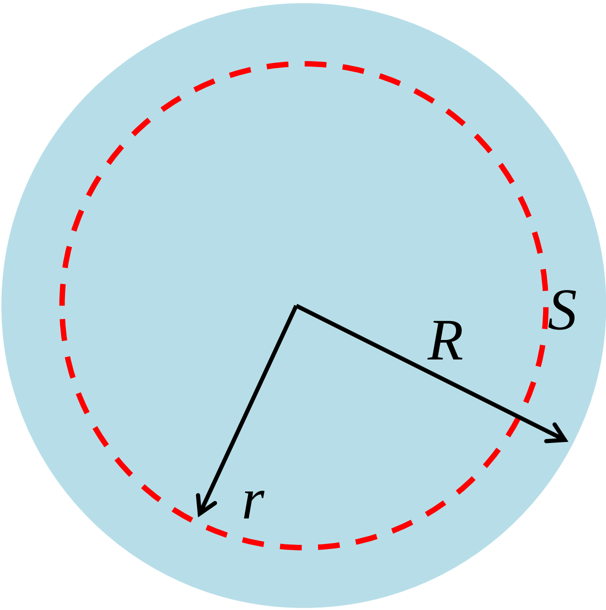


Consideriamo una sfera isolante di carica totale *q* e raggio *R*; supponiamo la **carica distribuita uniformemente** in tutti i punti interni alla sfera (ρ costante); calcoliamo il **campo elettrico generato dalla sfera in un punto esterno alla sfera**; partiamo dall'assunto che il campo elettrico abbia **simmetria radiale**, ovvero sia uniforme in modulo in tutti i punti della superficie chiusa sferica S (tratteggiata in rosso) di raggio *r* > *R* :

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = k\frac{q}{r^2}$$

Il campo generato dalla sfera uniformemente carica in un punto esterno alla sfera è uguale al campo generato da una carica puntiforme *q* corrispondente alla carica totale della sfera, posta nel centro della sfera

Sfera isolante uniformemente carica



Vogliamo adesso determinare il **campo elettrico in un punto *r* all'interno della sfera**; per simmetria il campo è radiale, dunque costante in modulo in tutti i punti della superficie sferica S (in rosso) di raggio *r*, con *r* < *R*; calcoliamo il flusso attraverso S ed applichiamo Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

Attenzione: adesso *q'* è la **carica interna alla porzione di sfera contenuta in S**, NON la carica totale *q* della sfera !

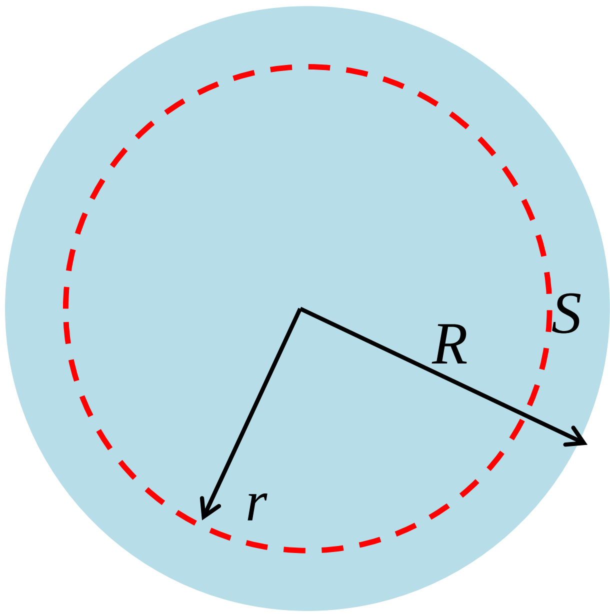
Il campo in un punto *r* interno alla sfera è uguale al campo generato da una carica puntiforme *q'* posta nel centro, corrispondente alla carica contenuta nella sfera di raggio *r*

Come determino *q'* ? Sappiamo che la densità è costante, dunque la carica totale si ottiene moltiplicando densità per volume:

$$q = \rho\frac{4\pi R^3}{3} \qquad q' = \rho\frac{4\pi r^3}{3} \qquad \Rightarrow q' = q\frac{r^3}{R^3}$$

Chiaramente ***q'* è funzione di *r*,** mentre *q* ed *R* sono costanti

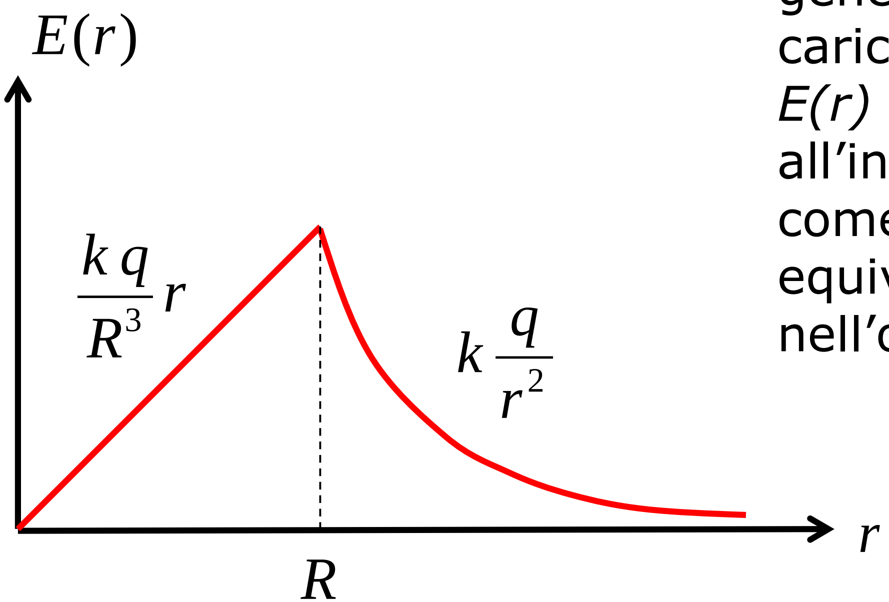
Sfera isolante uniformemente carica



Sostituendo q' con q si ottiene:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r = \frac{k\,q}{R^3}r$$

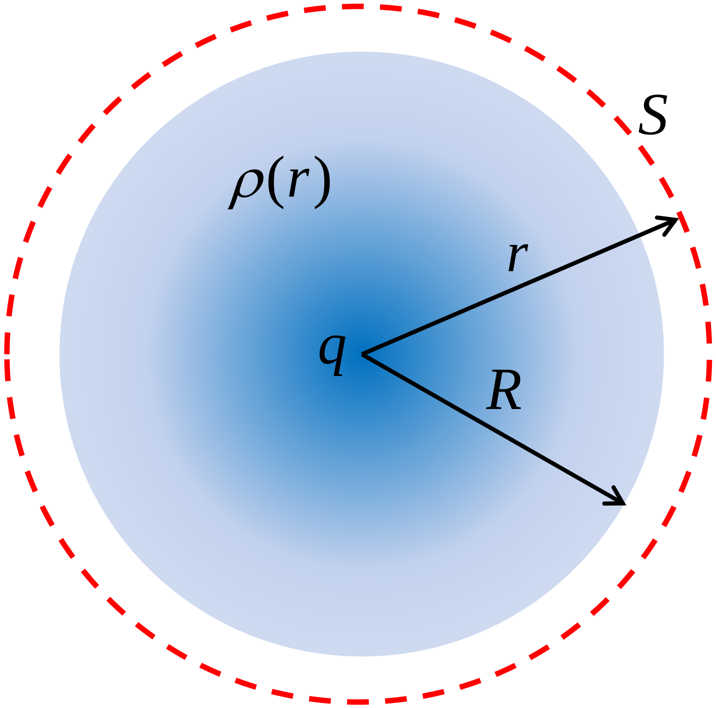
Dunque il campo in un punto *r* interno ad una sfera uniformemente carica **cresce linearmente con la distanza dall'origine**



Riepilogo: intensità del campo elettrico generato da una sfera uniformemente carica in funzione di *r* (distanza dal centro): *E(r)* cresce proporzionalmente ad *r* all'interno della sfera, mentre decresce come $1/r^2$ all'esterno della sfera, in modo equivalente ad una carica puntiforme posta nell'origine

NB: le due formule coincidono per $r = R$ (bordo della sfera)

Sfera isolante con densità di carica radiale

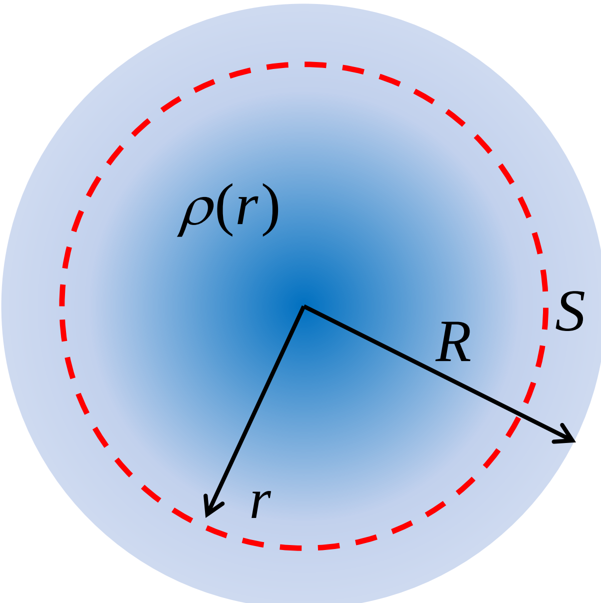


Consideriamo il caso in cui la carica q della sfera non sia distribuita uniformemente, ma secondo una distribuzione radiale $\rho(r)$, ovvero una distribuzione che varia con la distanza dal centro: il **campo elettrico generato dalla sfera ha ancora simmetria radiale**, esattamente come nel caso della sfera uniformemente carica; dunque ripetendo il ragionamento fatto per la distribuzione uniforme si ottiene che il campo elettrico esterno alla sfera è dato da:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = k\frac{q}{r^2}$$

Il campo generato dalla sfera con distribuzione di carica radiale in un punto esterno alla sfera è uguale a quello generato dalla carica puntiforme *q* uguale alla carica totale della sfera, posta nel centro della sfera

Sfera isolante con densità di carica radiale



Consideriamo ancora una distribuzione radiale $\rho(r)$; vogliamo adesso determinare il **campo elettrico all'interno della sfera**; per simmetria il campo è radiale, dunque costante in modulo in tutti i punti della superficie S (in rosso) di raggio r, con $r < R$; calcoliamo il flusso attraverso S ed applichiamo Gauss:

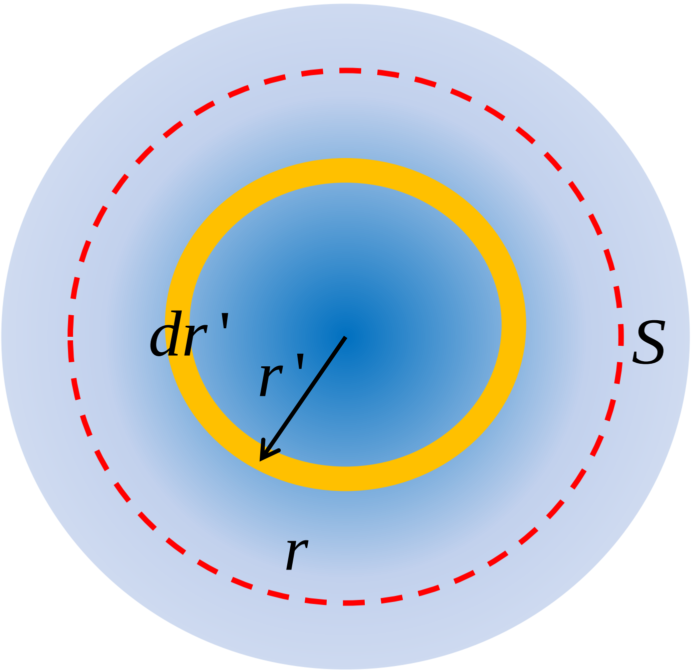
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}$$

Come per la sfera uniformemente carica, q' è la **carica interna ad S**, non la carica totale q della sfera ! Chiaramente q' dipende da r, dunque $q'=q'(r)$

Il campo in un punto *r* interno alla sfera è uguale a quello generato da una carica puntiforme *q′* posta nel centro e uguale alla carica contenuta nella sfera di raggio *r*

Integrazione della densità radiale



Problema: calcolare la carica q' interna alla superficie gaussiana S di raggio r, indicata dalla linea rossa tratteggiata; consideriamo il guscio sferico arancione in figura, di raggio r' e spessore infinitesimo dr'; il volume del guscio arancione è:

$$dV = 4\pi r'^2 \, dr'$$

Essendo lo spessore del guscio infinitesimo, la densità in tutti i punti del guscio è costante ed uguale a $\rho(r')$; dunque la carica infinitesima contenuta nel guscio è:

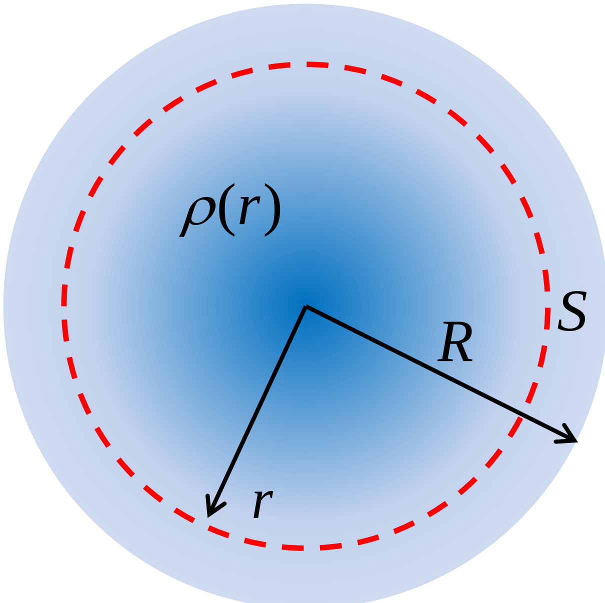
$$dq' = \rho(r')\, dV = \rho(r')\, 4\pi r'^2 \, dr'$$

Per calcolare tutta la carica q' dobbiamo infine sommare la carica di tutti i gusci infinitesimi di raggio r' compreso tra r'=0 e r'=r, ovvero integrare:

$$q'(r) = \int_0^r dq' = 4\pi \int_0^r dr' \, r'^2 \, \rho(r')$$

Ovviamente il valore di q' dipende dalla specifica espressione di $\rho(r)$

Esercizio



Consideriamo una sfera isolante carica di raggio R= 4 cm e densità radiale $\rho(r) = A/r$, A = 1 μC/m^2; determinare il campo elettrico per distanze dal centro r = 2 cm, r = 4 cm, r = 8 cm

All'interno della sfera ($r < R$) si ha:

$$E(r) = k\,\frac{q'(r)}{r^2}$$

$q'(r)$ è la carica interna alla porzione di sfera di raggio r:

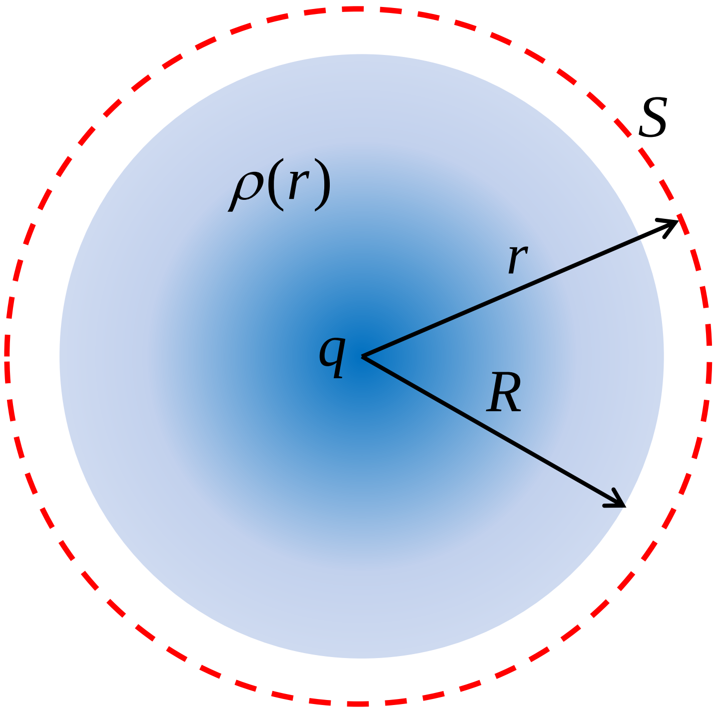
$$q'(r) = 4\pi\int_0^r dr'\,r'^2\,\rho(r') = 4\pi A\int_0^r dr'\,r' = 2\pi A r^2$$

Dunque all'interno della sfera $E(r) = k\,2\pi A$

Il campo all'interno della sfera è uniforme; per r = 2 cm ed r = 4 cm il risultato è lo stesso:

$$E = 9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\,\frac{2\pi\ \mu C}{m^2} = 56.5\times10^3\,\frac{N}{C}$$

Esercizio



Consideriamo una sfera isolante carica di raggio R= 4 cm e densità radiale $\rho(r)$ = A/r, A = 1 C/m²; determiniamo il campo elettrico per distanze dal centro r = 2 cm, r = 4 cm, r = 8 cm

All'esterno della sfera ($r > R$) si ha:

$$E(r) = k\frac{q}{r^2}$$

la carica totale della sfera q si calcola facilmente, poiché ovviamente:

$$q = q'(R) = 2\pi A R^2$$

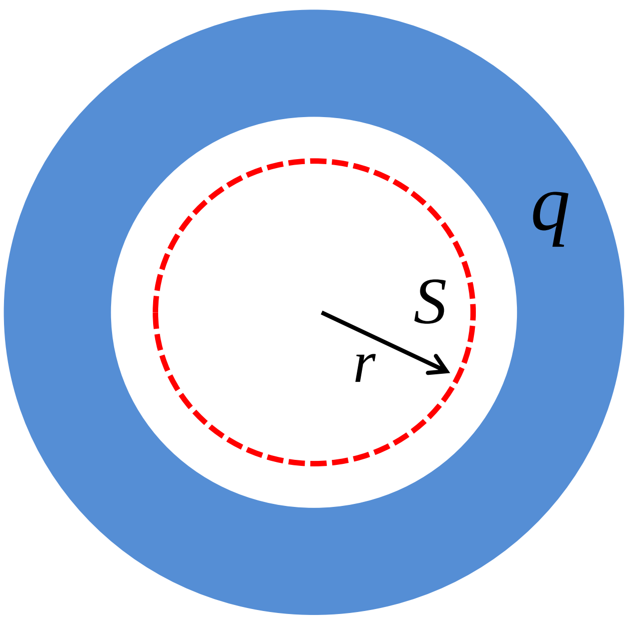
Dunque all'esterno della sfera $$E(r) = k\frac{2\pi A R^2}{r^2}$$

Per r = 8 cm $$E = 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{2\pi\ \mu C}{m^2}\left(\frac{4\,cm}{8\,cm}\right)^2 = 14.1\times10^3\frac{N}{C}$$

Gusci isolanti a simmetria sferica

Definiamo **guscio** sferico una sfera cava, con cavità anch'essa di simmetria sferica; supponiamo che il guscio sia **uniformemente carico** (ρ costante) o con **carica radiale** ($\rho=\rho(r)$); sia q la carica totale del guscio; dimostriamo, utilizzando la legge di Gauss, le seguenti regole fondamentali:

1. **Il campo elettrico generato dal guscio sferico in qualsiasi punto interno alla cavità è nullo**

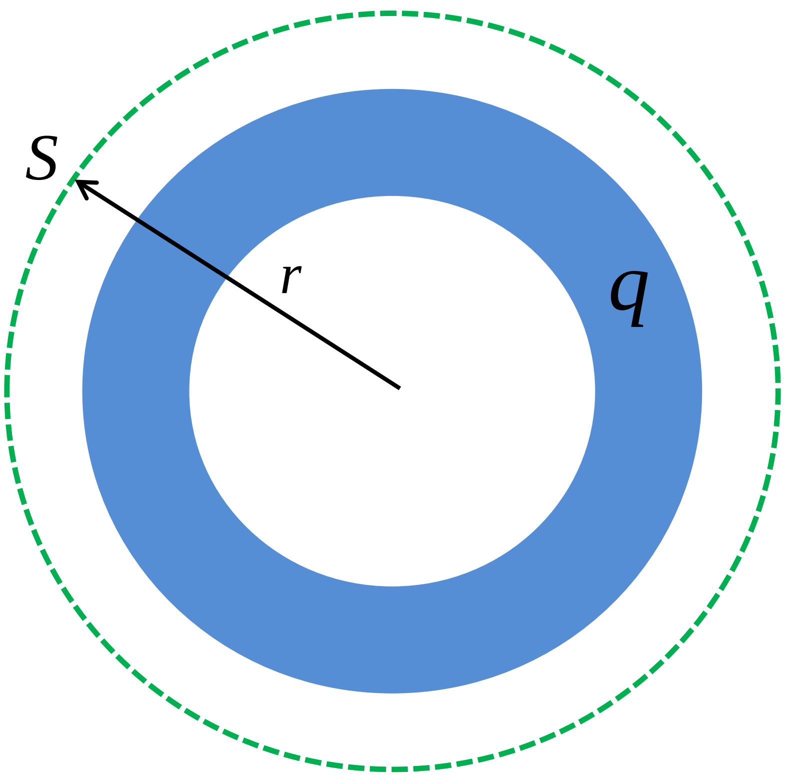


Partiamo dal presupposto che il campo elettrico abbia **simmetria radiale**, ovvero sia uniforme in modulo in tutti i punti distanti r dal centro del guscio. Calcoliamo il flusso attraverso la superficie S in rosso tratteggiato, ed applichiamo la legge di Gauss:

$$\Phi = E\left(4\pi r^2\right) = 0 \Rightarrow E = 0$$

Gusci isolanti a simmetria sferica

2. Il campo elettrico generato dal guscio sferico in qualsiasi punto esterno al guscio è uguale al campo elettrico generato da una carica puntiforme *q* posta nel centro del guscio.

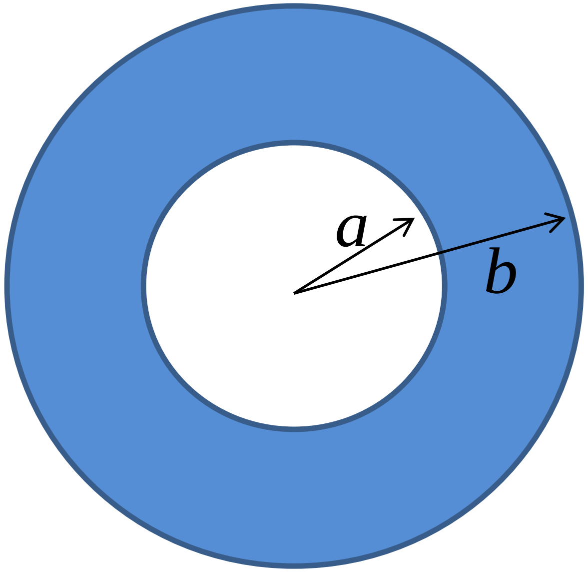


Partiamo dal presupposto che il campo elettrico abbia **simmetria radiale**, ovvero sia uniforme in modulo in tutti i punti distanti r dal centro del guscio. Calcoliamo il flusso attraverso la superficie S in verde tratteggiato ed applichiamo Gauss:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

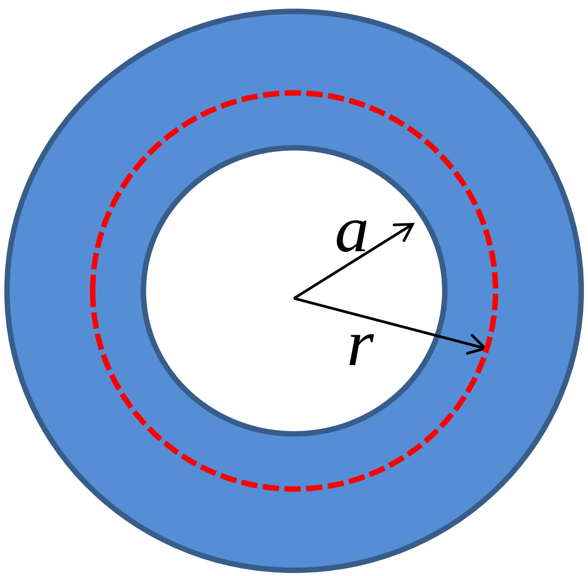
$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Problema



Sia dato un guscio sferico isolante carico, con carica distribuita uniformemente q_s =3 μC, raggio interno *a*=5 cm ed esterno *b*=10 cm

a) Scrivere l'espressione del campo elettrico *E(r)* in funzione della distanza *r* per *r* < *a* (nella cavità), per *a* > *r* > *b* (nel guscio), per *r* > *b* (esterno al guscio)
b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti *r* = 2 cm, *r* =7 cm, *r* =10 cm



Applicando le due regole dei gusci isolanti si ottiene immediatamente:

$$r < a \quad E(r) = 0 \qquad\qquad r > b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$

In un punto a distanza *r* dal centro interno al guscio il campo elettrico è dato da:

$$E(r) = k\frac{q'(r)}{r^2}$$

q'(r) è la sola carica contenuta all'interno della sfera di raggio *r*

Problema

Calcoliamo *q'(r)* sfruttando il fatto che la densità di carica ρ è uniforme:

$$\rho = \frac{q'(r)}{V(r)} = \frac{q_s}{V_{TOT}} \quad \Rightarrow q'(r) = q_s \frac{V(r)}{V_{TOT}}$$

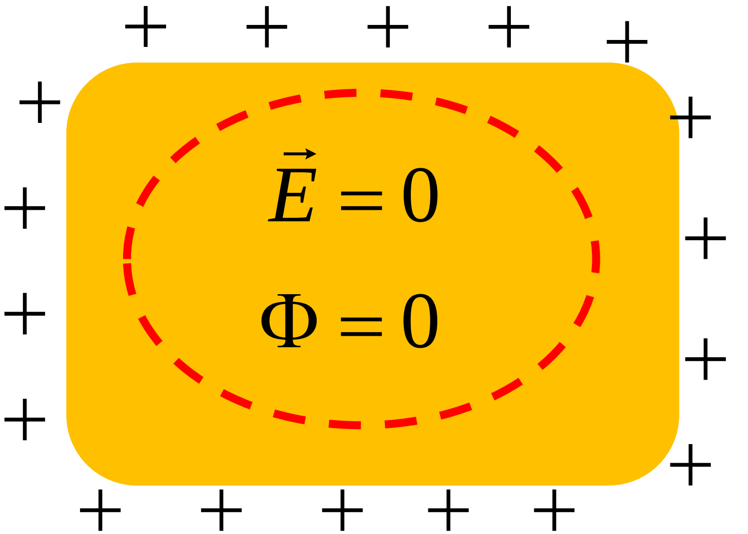
Chiaramente V_{TOT} è il volume totale del guscio, $V(r)$ il volume della porzione di guscio interna alla sfera di raggio r:

$$V_{TOT} = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right) \qquad V(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - a^3\right)$$

$$\frac{V(r)}{V_{TOT}} = \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \quad \Rightarrow E(r) = k\frac{q_s}{r^2}\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

$$\begin{cases} r = 7\,cm \quad E = 9\times 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{49\times 10^{-4}m^2}\left(\dfrac{7^3 - 5^3}{10^3 - 5^3}\right) = 0.137\times 10^7 (N/C) \\ r = 10\;cm \quad E = 9\times 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{10^{-2}m^2} = 0.27\times 10^7 (N/C) \end{cases}$$

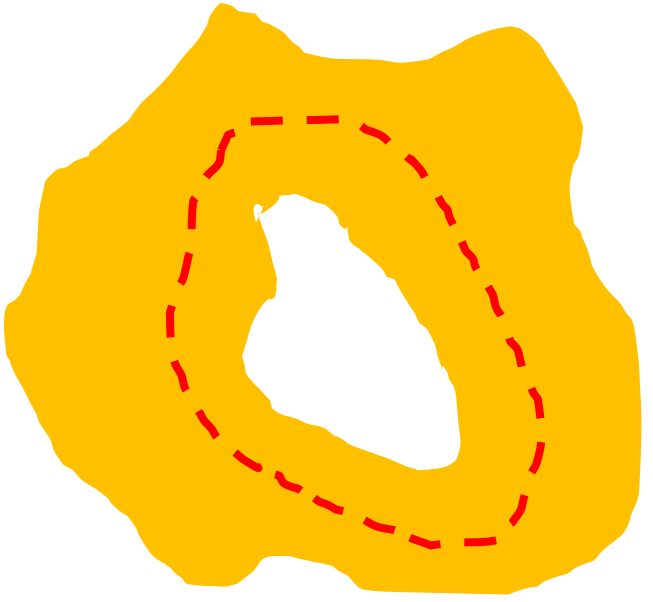
Legge di Gauss nei materiali conduttori



In un **conduttore carico la carica si ridistribuisce sulla superficie: non ci sono cariche all'interno del materiale**. Ciò sembra ragionevole considerando che le cariche, potendo muoversi, tendono ad allontanarsi il più possibile. Il teorema di Gauss ci fornisce una prova di questo comportamento.

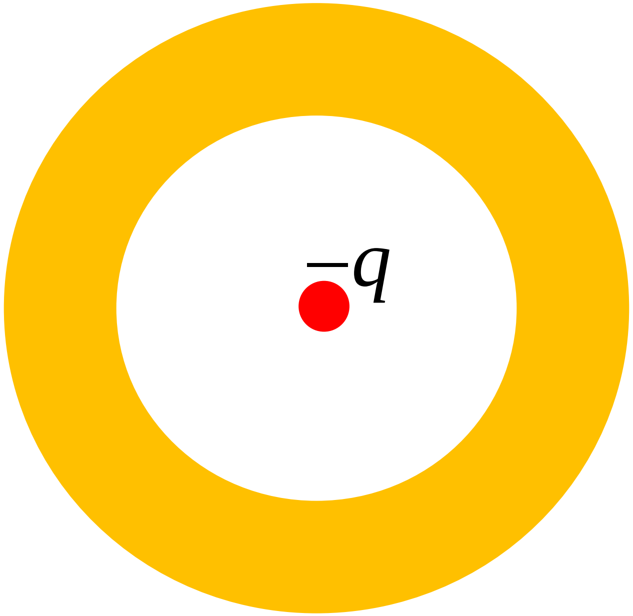
- ✓ Consideriamo un **conduttore carico isolato nello spazio**; il **campo elettrico in ogni punto interno al conduttore deve essere nullo**, altrimenti si genererebbero correnti che violano la **condizione di equilibrio elettrostatico.**
- ✓ Dunque, sui punti di una qualunque superficie chiusa all'interno del materiale (ad esempio la superficie indicata dalla linea tratteggiata) **il campo è sempre nullo**, e di conseguenza il **flusso attraverso la superficie è nullo**.
- ✓ Per la legge di Gauss, concludiamo che **non può esistere carica al suo interno**. Il flusso è diverso da zero solo se la superficie di gauss include la superficie del materiale.

Materiali conduttori con cavità interna

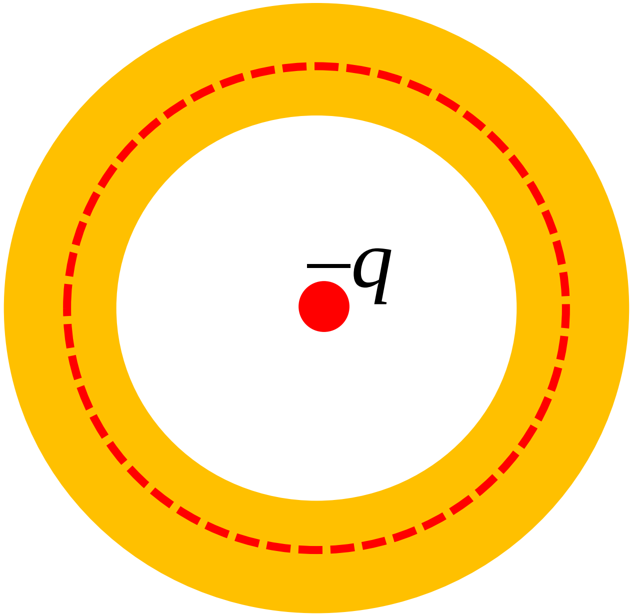


- ✓ Consideriamo un conduttore di forma qualsiasi, contenente al suo interno una cavità di forma qualsiasi; ci chiediamo se sulla superficie interna alla cavità possa esserci carica
- ✓ Consideriamo una superficie gaussiana (linea rossa tratteggiata) interna al materiale, che racchiuda totalmente la cavità
- ✓ Essendo il campo nullo in tutti i punti interni al materiale conduttore, il flusso attraverso la superficie gaussiana è nullo
- ✓ Per la legge di Gauss, la carica netta interna alla superficie gaussiana deve essere nulla
- ✓ Dunque, **non può esserci carica sulla superficie interna**; **la carica può distribuirsi soltanto sulla superficie esterna del conduttore, non su una superficie interna.**
- ✓ NB: la situazione cambia se introduciamo altre cariche all'interno della cavità !

Guscio conduttore con carica puntiforme



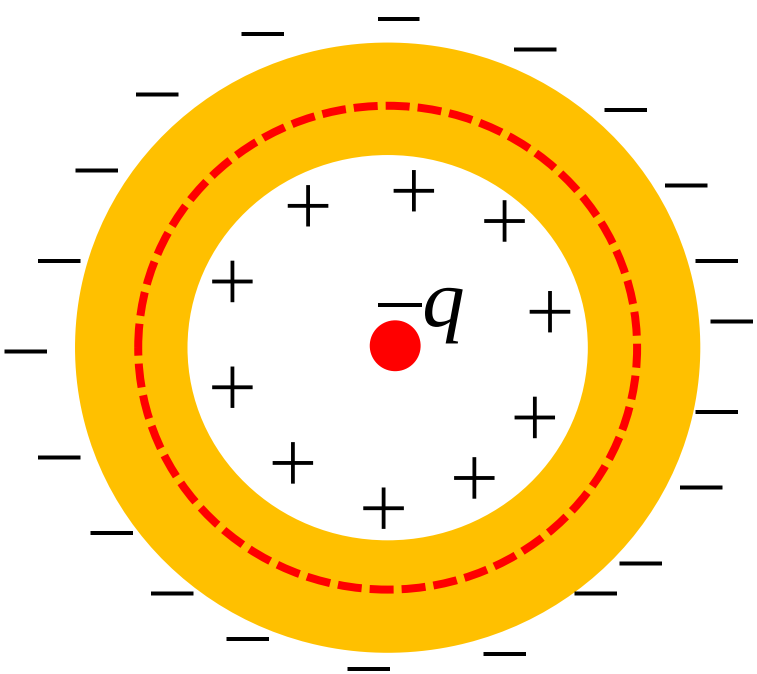
Consideriamo un guscio **conduttore neutro** con una carica puntuale $-q$ posta nel centro della cavità. **Quali cariche compaiono per induzione nel conduttore ? Come sono distribuite ?**



✓ all'equilibrio elettrostatico **il campo all'interno del conduttore deve essere nullo in tutti i punti**: E=0; dunque, il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa (ad esempio quella tratteggiata in giallo) deve essere nullo: $\Phi = 0$

✓ Per la legge di gauss, se $\Phi = 0$ deve essere NULLA anche tutta la carica Q interna alla superficie chiusa.

Guscio conduttore con carica puntiforme



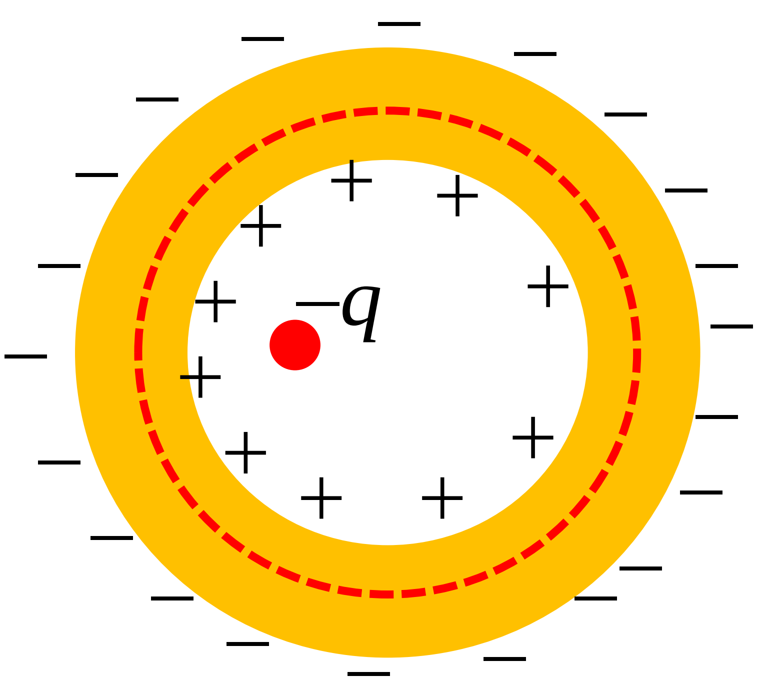
✓ Dunque, sulla parete interna della cavità deve **generarsi per induzione una carica +*q* che compensa la carica puntuale** –q, cosicché la carica totale q_{int} interna alla superficie gaussiana sia NULLA:

$$q_{\text{int}} = +q - q = 0$$

✓ A causa della simmetria radiale, la carica positiva generata sulla parete della cavità deve essere **distribuita uniformemente su ciascun punto della superficie**

✓ Poiché il **conduttore è complessivamente neutro**, sulla superficie esterna deve essere presente una carica $-q$ che compensi la carica +q sulla superficie interna. Per simmetria, **anche questa carica è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera**

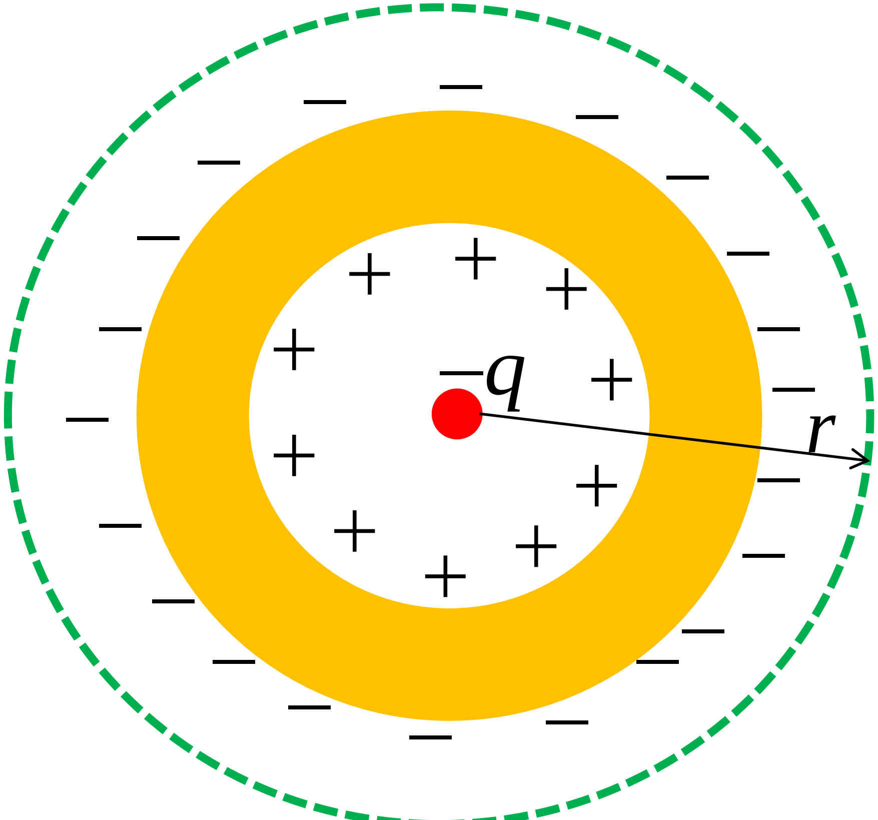
Guscio conduttore con carica puntiforme



✓ Cosa cambia se la carica puntiforme non è nel centro della sfera ?
✓ Il flusso attraverso la superficie chiusa è sempre nullo, per cui q_{int} =0 e la carica indotta sulla superficie interna deve essere ancora uguale a $+q$
✓ L'unica differenza è che adesso $+q$ **non è più uniforme sulla superficie interna**, ma si accumula maggiormente sul lato della carica puntiforme, per compensarne il campo

✓ La carica $-q$ sulla superficie esterna resta invece distribuita uniformemente, poiché il campo della carica puntiforme negativa e quello della carica indotta positiva si compensano, dunque la carica sulla superficie esterna non risente delle posizione delle altre cariche.

Guscio conduttore con carica puntiforme



$$S = 4\pi r^2$$

✓ Cosa succede **all'esterno del conduttore** ? Applichiamo la legge di Gauss ad una superficie gaussiana sferica (verde tratteggiata) di raggio *r*, centrata sulla carica puntuale.

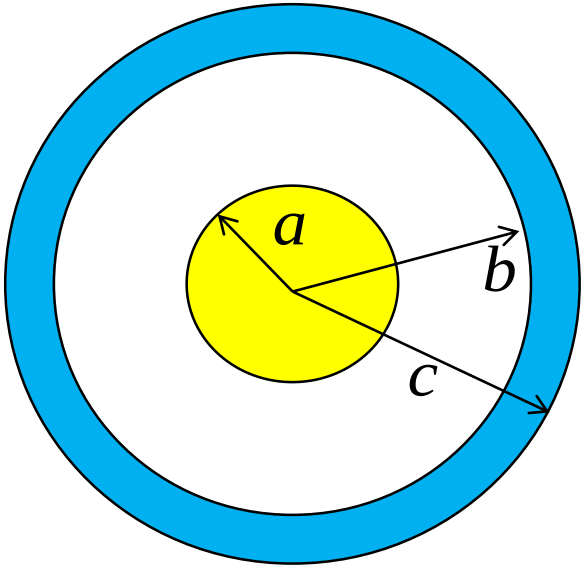
✓ Per simmetria, il campo elettrico deve essere radiale e quindi uniforme su tutti i punti della superficie gaussiana; dunque:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = ES = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = -k \frac{q}{r^2}$$

ritroviamo il campo generato dalla carica puntiforme ! all'esterno del conduttore è come se il conduttore neutro non esistesse

Problema



La sfera gialla isolante con carica uniforme q_s = 3 μC e raggio a=2 cm è posta al centro di un guscio conduttore sferico con raggio interno b = 6 cm e raggio esterno c =7 cm; sul guscio è presente una carica q_c = -7 μC.

1) scrivere l'espressione $E(r)$ del campo elettrico in funzione della distanza dal centro, nella regione interna alla sfera ($r < a$), interna alla cavità ($a < r < b$), interna al guscio ($b < r < c$), ed esterna al guscio ($r > c$)
2) Determinare la carica Q accumulata sulla superficie interna ed esterna del guscio
3) Calcolare l'intensità del campo nei punti r=1 cm, r=5 cm, r=10 cm

$$r < a \quad E(r) = k\frac{q_s}{a^3}r$$

$$a < r < b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$

$$b < r < c \quad E(r) = 0$$

$$r > c \quad E(r) = k\frac{(q_s + q_c)}{r^2}$$

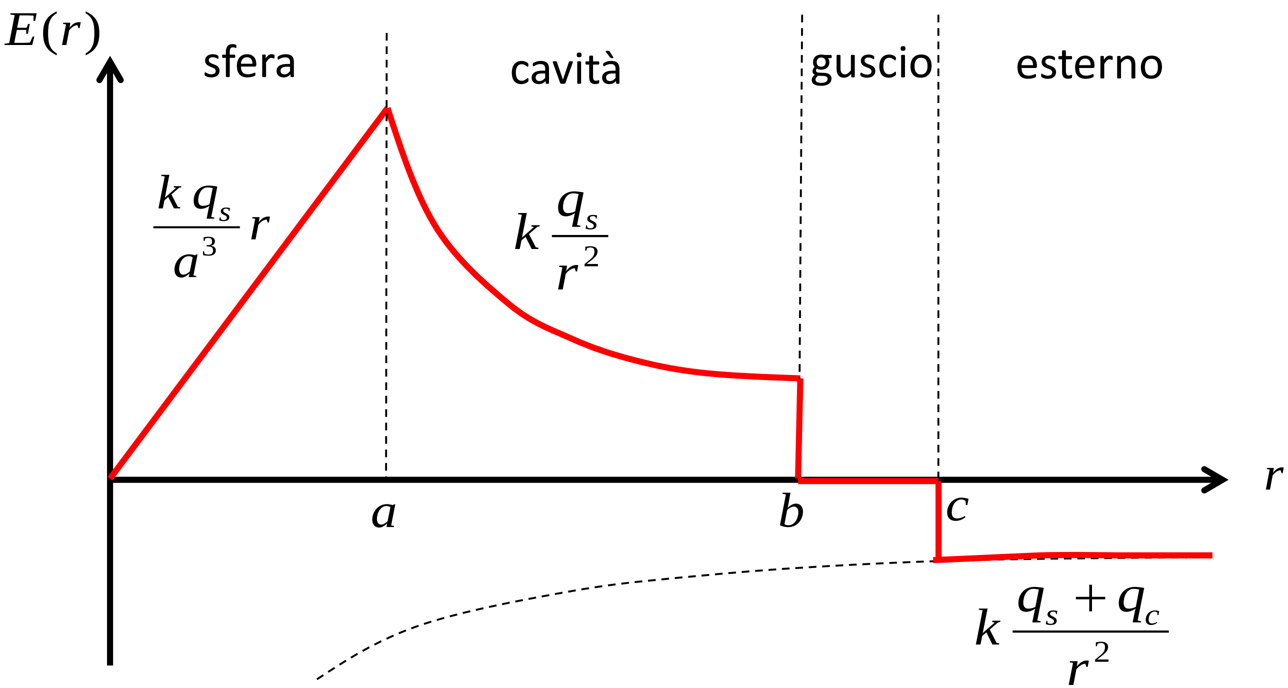
Sup. interna Q = -3 μC   Sup. esterna Q = -4 μC

Problema

$$r = 1cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C\times 1cm}{(2cm)^3} = 3.375\times10^7 (N/C)$$

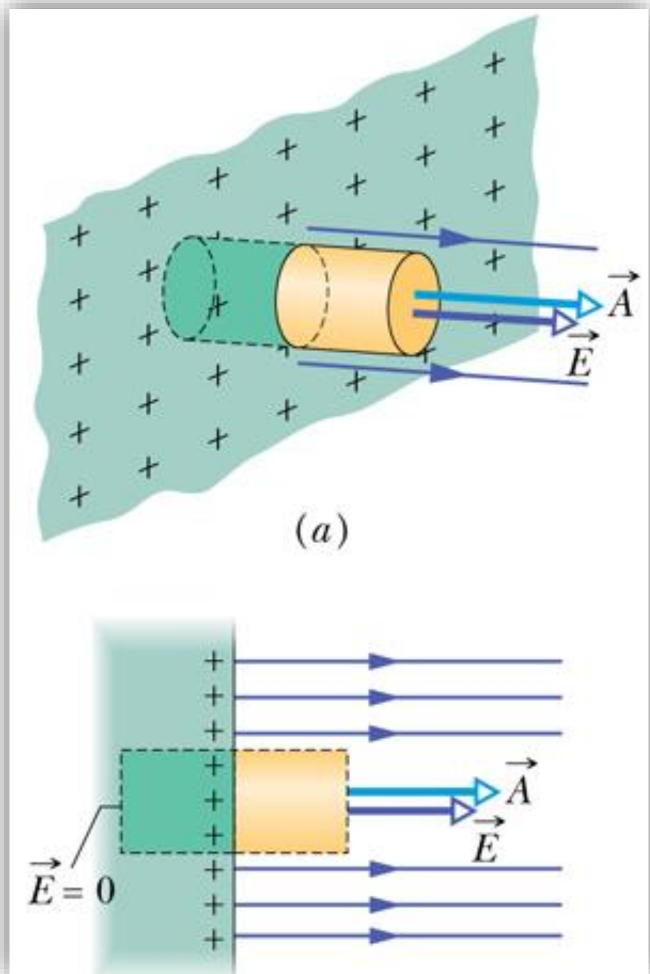
$$r = 5cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C}{25\times10^{-4}m^2} = 1.08\times10^7 (N/C)$$

$$r = 10cm \quad E = -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C}{100\times10^{-4}m^2} = -0.36\times10^7 (N/C)$$



Il campo elettrico presenta discontinuità in corrispondenza di pareti cariche

Campo elettrico esterno alla superficie piana di un conduttore carico



✓ Consideriamo una **superficie piana infinita** (oppure supponiamo di essere abbastanza vicini alla superficie da poter trascurare la curvatura e la distanza dal bordo)

✓ essendo la superficie piana, in assenza di altri campi la distribuzione di carica avrà **densità σ uniforme.** Calcoliamo il campo elettrico esterno alla superficie

✓ In equilibrio elettrostatico il **campo** generato dalla carica deve essere **perpendicolare alla superficie**, altrimenti le cariche si muoverebbero sulla superficie; inoltre una componente planare non può esistere per ragioni di simmetria planare.

✓ Calcoliamo il flusso attraverso il cilindretto, contenente una porzione *A* di superficie

Campo elettrico esterno alla superficie piana di un conduttore carico

✓ il flusso attraverso la parete laterale del cilindretto è nullo, poiché il campo è perpendicolare al vettore areale
✓ il flusso attraverso la base interna al conduttore è nullo poiché il campo interno al conduttore è nullo
✓ Al flusso totale contribuisce soltanto la base esterna al conduttore; consideriamo una base *dA* infinitesimale; il flusso attraverso il cilindro è:

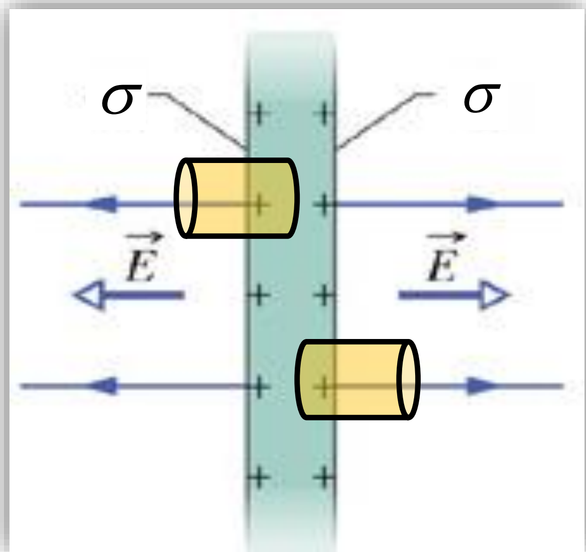
$$d\Phi = E\,dA = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

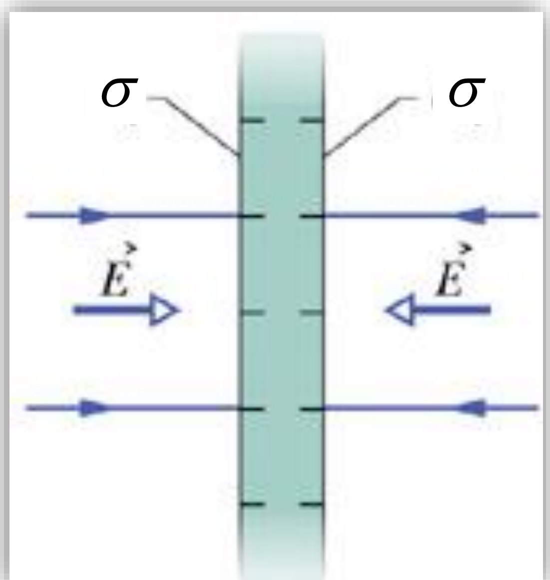
✓ Poiché dq $=\sigma$ dA è la carica del conduttore contenuta nel cilindretto, dalla legge di Gauss si ottiene:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Dunque, **il campo esterno al conduttore è uniforme e proporzionale alla densità di carica planare**; il fatto che il campo sia uniforme lo si capisce considerando cilindri di lunghezza e posizione differente: il risultato finale non dipende dalla lunghezza, né dal posizionamento sul piatto del cilindretto, ma solo dal fatto che σ è uniforme. **L'unica assunzione è che il campo sia perpendicolare alla superficie**

Campo elettrico esterno ad una lamina conduttiva carica



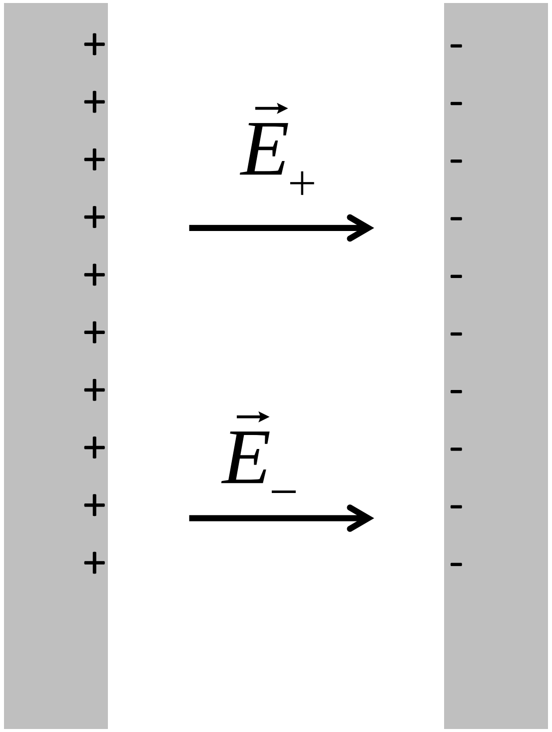


- ✓ Consideriamo una **piastra (lamina) conduttiva di dimensione infinita** con carica positiva in eccesso; al solito, il campo interno al conduttore è nullo e la carica si ridistribuisce soltanto sulle due superfici.
- ✓ Sia σ la densità di carica uniforme su ciascuna superficie; ripetendo il calcolo del flusso attraverso i volumetti cilindrici in figura, ritroviamo lo stesso risultato su entrambe le superfici: il campo elettrico all'esterno della superficie è:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- ✓ **Il campo elettrico è uniforme e proporzionale alla densità di carica presente su una singola faccia.** Per σ positiva il campo ai due lati della piastra è uscente dalla piastra; per σ negativa il campo è lo stesso in modulo ma entrante nella piastra

Campo elettrico di una doppia piastra conduttiva



- Il doppio strato conduttivo è il fondamento di uno dei dispositivi elettronici più importanti: **il condensatore**.
- Consideriamo due piastre conduttive infinite con **densità di carica σ uguali in modulo ma opposte in segno**, poste una di fronte all'altra.
- Poiché le cariche si attraggono, esse si **depositano sulle superfici interne** al doppio strato.
- Siano E_+ ad E_- i campi elettrici generati dalle due distribuzioni di carica. Assumiamo al solito che i campi siano **perpendicolari alle piastre**.
- Il verso dei campi è uscente dalla piastra positiva ed entrante in quella negativa

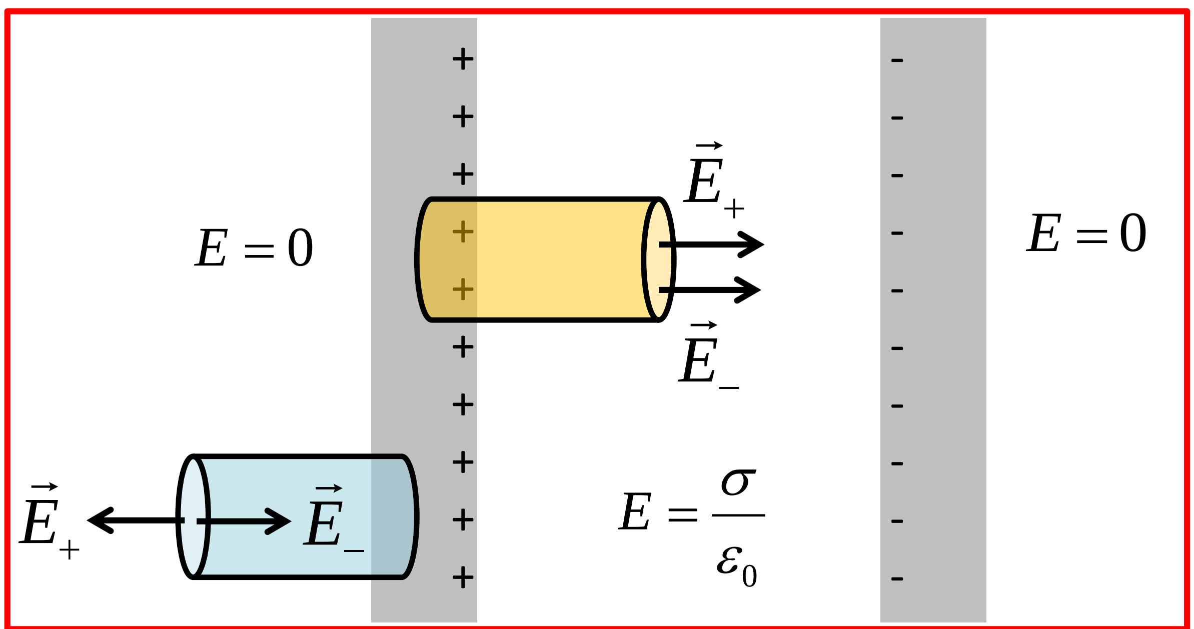
Campo elettrico di una doppia piastra conduttiva

Per calcolare il **campo tra le due piastre,** applichiamo Gauss al cilindretto arancione. Solo la base del cilindro tra le piastre contribuisce al flusso:

$$d\Phi = \left(E_{+} + E_{-}\right) dA = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E = E_{+} + E_{-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il campo tra le piastre è uniforme e proporzionale alla densità

Per calcolare il **campo esterno alle piastre** applichiamo Gauss al cilindretto azzurro Adesso i campi sono discordi, poiché E_- e è antiparallelo al vettore areale; inoltre la carica interna al cilindro è nulla; dunque il flusso totale è:



$$d\Phi = \left(E_{+} - E_{-}\right) dA = 0$$

$$\Rightarrow E_{+} = E_{-} \qquad E = 0$$

il campo esterno alle piastre è sempre NULLO, poiché i campi generati dalle due piastre sono sempre uguali in modulo ed opposti in verso

Campo elettrico di una doppia piastra conduttiva

Quesito: se **avessimo applicato la legge di Gauss a ciascuna piastra separatamente** per ottenere E_+ ed E_- per poi sommare i campi ottenuti, avremmo trovato lo stesso risultato?

NO, avremmo ottenuto un risultato sbagliato. Infatti, in presenza della sola piastra positiva avremmo ottenuto:

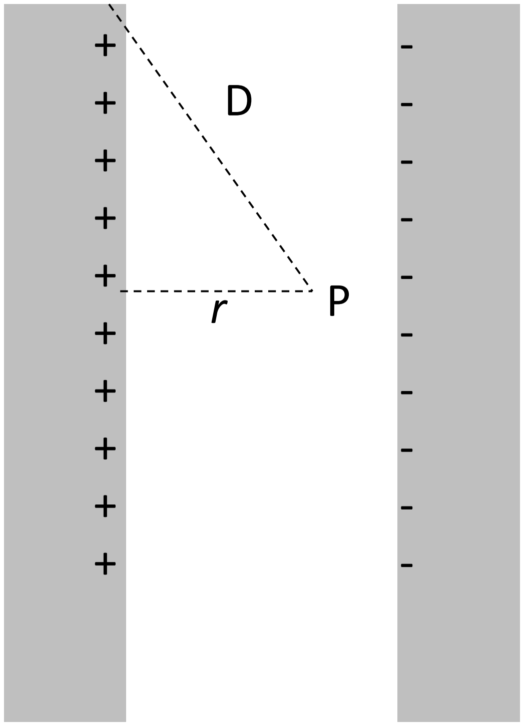
$$E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

In presenza della sola piastra negativa: $$E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il campo totale sarebbe stato: $$E = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$$

La ragione di questa discrasia è che mentre **per gli isolanti vige il principio di sovrapposizione**, per i conduttori le cariche possono muoversi e si verifica il fenomeno dell'induzione elettrica; dunque, **la distribuzione di carica della doppia piastra NON è uguale alla sovrapposizione delle cariche in due piastre isolate**.

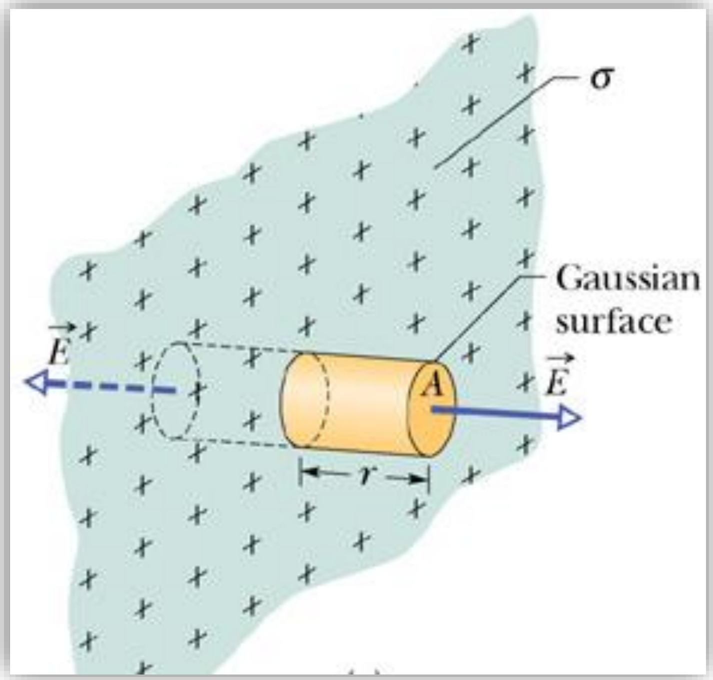
Campo elettrico di una doppia piastra conduttiva



Nel calcolare il campo abbiamo assunto che le piastre siano infinite; in pratica qualsiasi superficie è FINITA, e si potrebbe pensare che i risultati ottenuti non siano applicabili nella realtà.
Al contrario, i risultati sono significativi anche per piastre finite, a patto che il punto *P* in cui si valuta il campo sia molto più lontano dal bordo della piastra che dalla perpendicolare alla superficie, ovvero a patto che $r << D$; in questo modo si assume che i cosiddetti ***effetti di bordo*** siano **trascurabili**

Per ridurre al minimo gli effetti di bordo, nei condensatori piani effettivamente utilizzati le superfici sono sempre molto maggiori della distanza tra i piatti

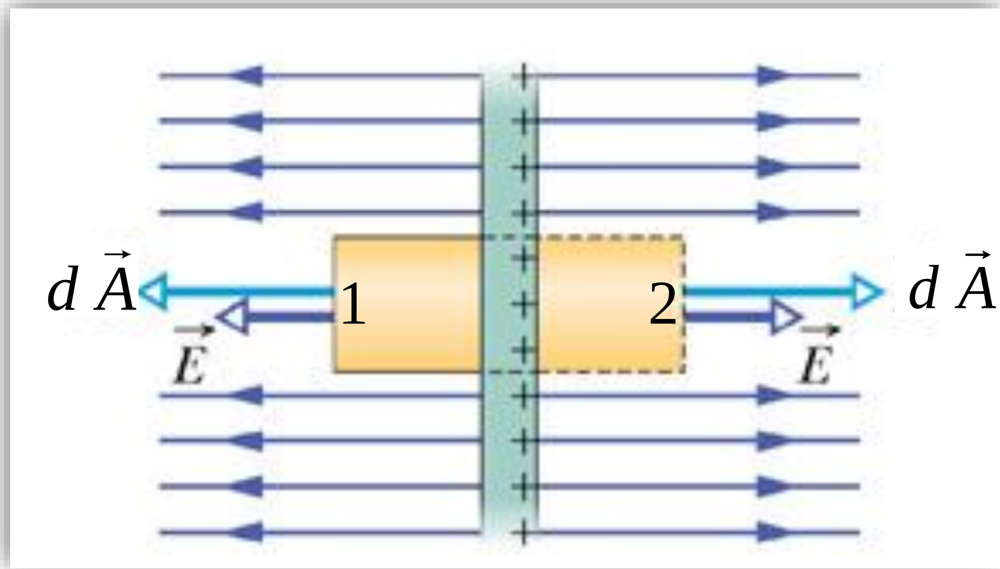
Campo elettrico esterno ad una lamina isolante



Consideriamo una lamina isolante infinita (ad esempio un foglio di plastica) carico positivamente su una faccia, con densità di carica uniforme σ; calcoliamo il campo da essa generato a distanza *r* dalla superficie.

Per simmetria, essendo la densità di carica superficiale uniforme, **non può esserci una componente del campo parallela al foglio**, ovvero il **campo deve essere perpendicolare alla superficie**. Consideriamo il cilindretto il Figura, e valutiamo il flusso attraverso il cilindretto.

Campo elettrico esterno ad una lamina isolante



✓ Posizioniamo il cilindro in modo che le basi siano equidistanti dallo strato carico, cosicché il campo è uguale in modulo ma opposto in verso sulle due basi

✓ chiaramente, il flusso attraverso le basi 1 e 2 è lo stesso, per cui il flusso totale è dato da:

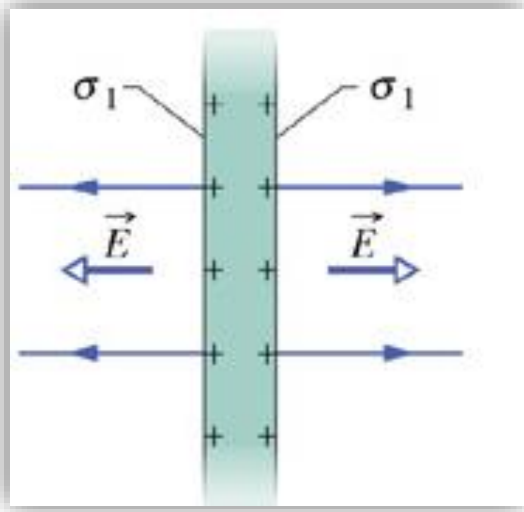
$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 2E\,dA$$

Dalla legge di Gauss segue che: $$2E\,dA = \frac{\sigma\,dA}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il campo elettrico generato da una lamina isolante è uniforme e proporzionale alla densità di carica

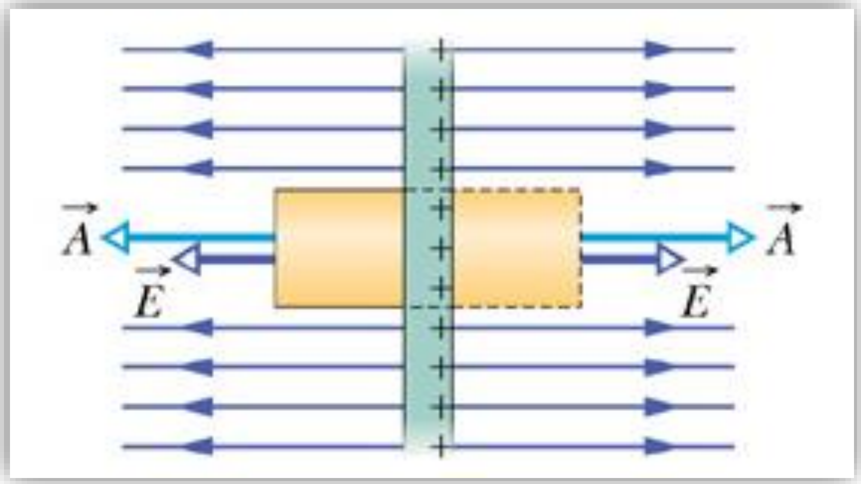
Confronto: lamina conduttiva ed isolante

lamina conduttiva:



$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

lamina isolante:

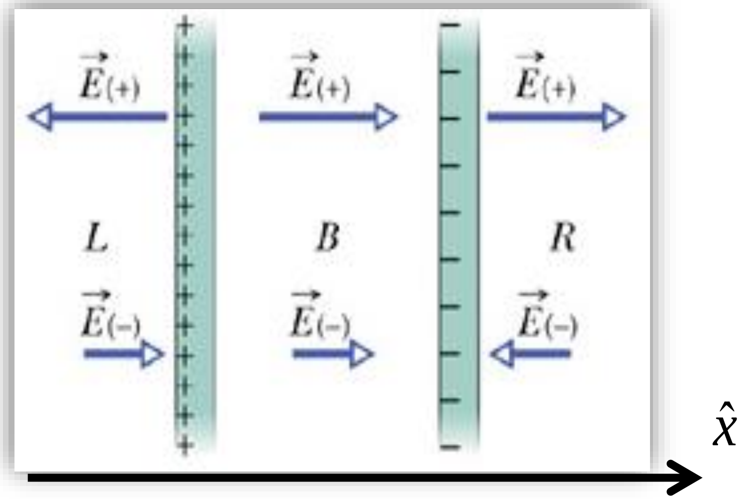


$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Nel caso del conduttore, la carica si distribuisce sulle due superfici, mentre nell'isolante la carica resta confinata nei punti in cui è stata generata; dunque, se la carica totale è la stessa nei due casi, ne segue che σ_1 sulle superfici del conduttore deve essere metà della σ nell'isolante; dunque, **a parità di carica, il campo all'esterno è lo stesso nei due casi**

Problema 23.6

Consideriamo due **lamine isolanti parallele** con densità $\sigma_+ = 6\sigma$, $\sigma_- = -4\sigma$, $\sigma = 1$ mC/m^2; calcolare il campo tra le lamine e nelle regioni esterne. Essendo le lamine isolanti, il campo totale è la somma dei campi di ciascuna piastra; sia *x* l'asse perpendicolare alle piastre.



Regione interna:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{5\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{5\mu C/m^2}{8.85\times 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.56\times 10^6\,\frac{N}{C}\,\hat{x}$$

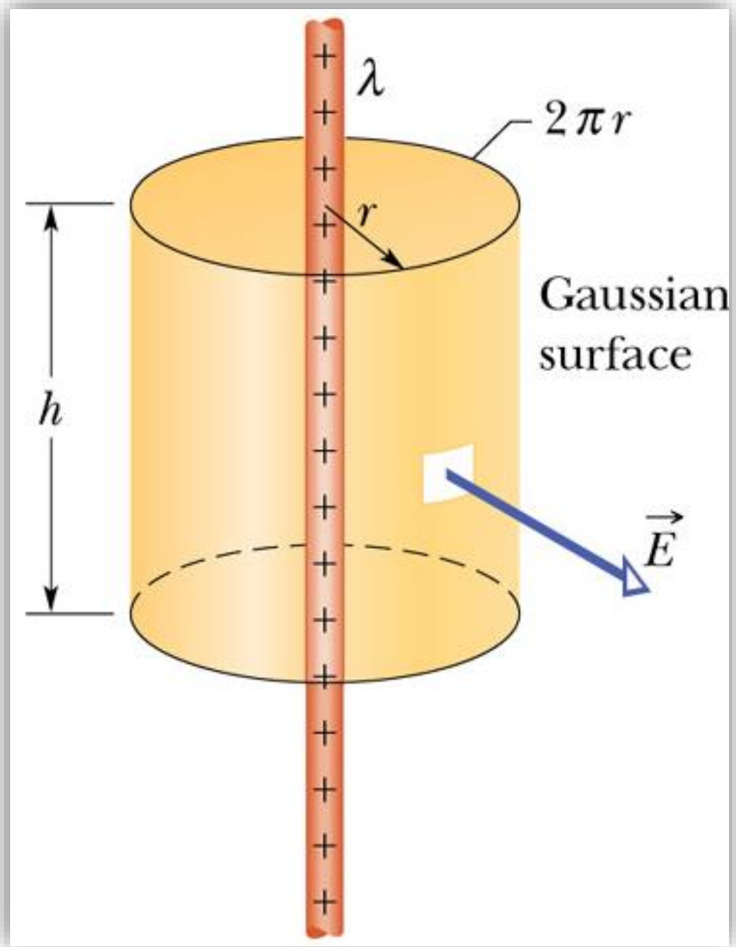
Regione esterna destra:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{1\mu C/m^2}{8.85\times 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.11\times 10^6\,\frac{N}{C}\,\hat{x}$$

Regione esterna sinistra:

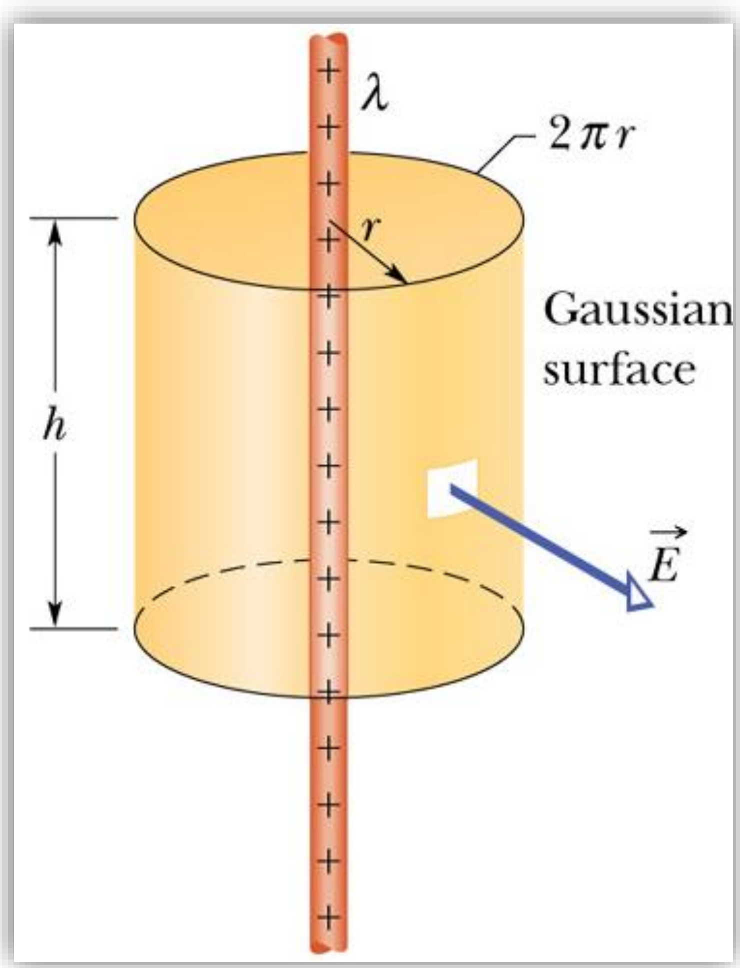
$$\vec{E} = \left(-\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = -0.11\times 10^6\,\frac{N}{C}\,\hat{x}$$

Campo elettrico generato da un filo carico



- ✓ Consideriamo un filo (o una bacchetta) di lunghezza infinita, con densità di carica lineare uniforme λ (non importa se conduttore o isolante)
- ✓ Sfruttiamo la legge di Gauss per calcolare il campo generato dalla bacchetta in un punto *r* esterno al filo
- ✓ consideriamo la superficie cilindrica gialla in figura, di altezza *h* e raggio *r*
- ✓ essendo la bacchetta infinita, possiamo ipotizzare che il campo abbia il **simmetria cilindrica**, ovvero sia **perpendicolare alla superficie del cilindro e uniforme in tutti i punti della superficie**

Campo elettrico generato da un filo carico



Il flusso attraverso le basi del cilindro è evidentemente nullo; conta soltanto il flusso attraverso la superficie laterale (la superficie laterale del cilindro è $2\pi r h$); dunque:

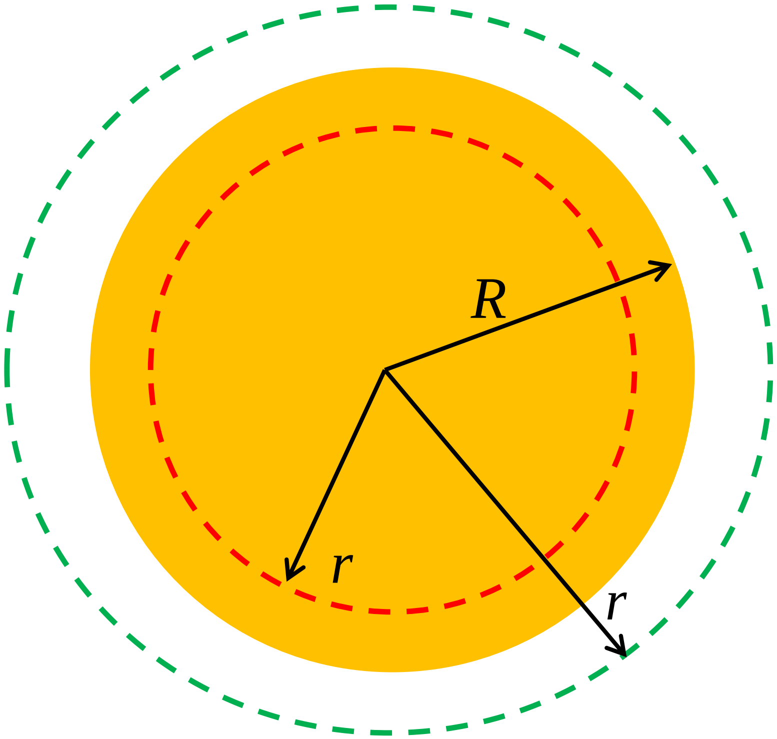
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(2\pi r h\right)$$

$q = \lambda h$ è la carica interna al cilindro; dalla legge di Gauss:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

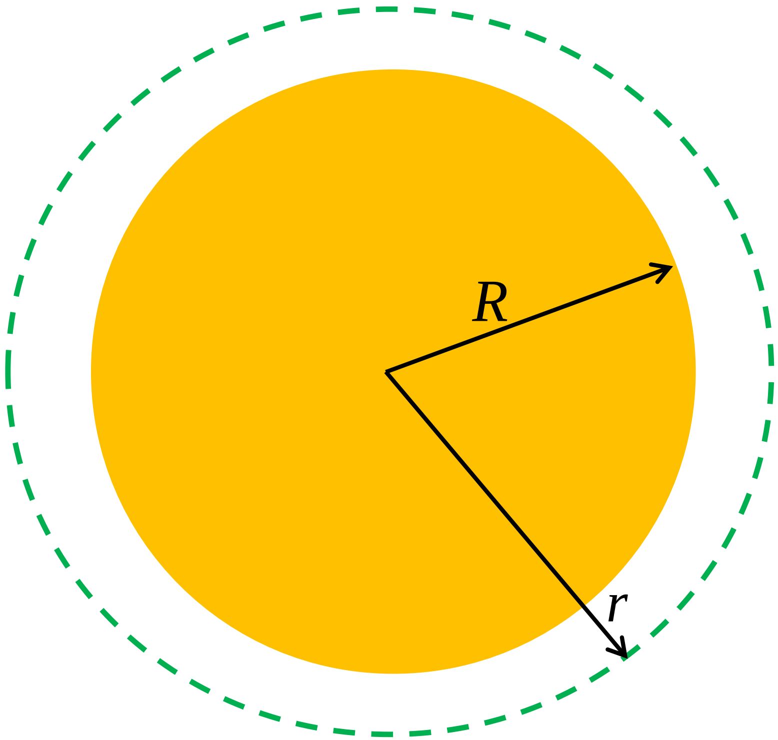
Questa espressione resta valida anche per una bacchetta di dimensioni finite, a patto che la lunghezza della bacchetta sia grande rispetto alla distanza r, in modo da **poter trascurare gli effetti di bordo**

Campo generato da un cilindro isolante uniformemente carico



- ✓ Consideriamo un lungo cilindro carico di raggio *R*, la cui sezione è disegnata in giallo in figura
- ✓ la **carica all'interno del cilindro è uniforme**; dunque, le densità di carica lineare λ e di volume ρ sono entrambe uniformi
- ✓ vogliamo calcolare il campo elettrico ad una generica distanza *r* dal centro del cilindro, sfruttando la **simmetria cilindrica del campo,** ovvero il fatto che il **campo è uniforme** in tutti i punti della circonferenza di raggio *r*, sia essa esterna al cilindro (ad esempio la linea verde tratteggiata) o interna al cilindro (linea rossa tratteggiata).

Campo generato da un cilindro isolante uniformemente carico



Caso *r* > *R*: **campo al di fuori del cilindro carico**; applichiamo Gauss ad una superficie cilindrica di raggio *r* (linea verde tratteggiata) ed altezza *h*:

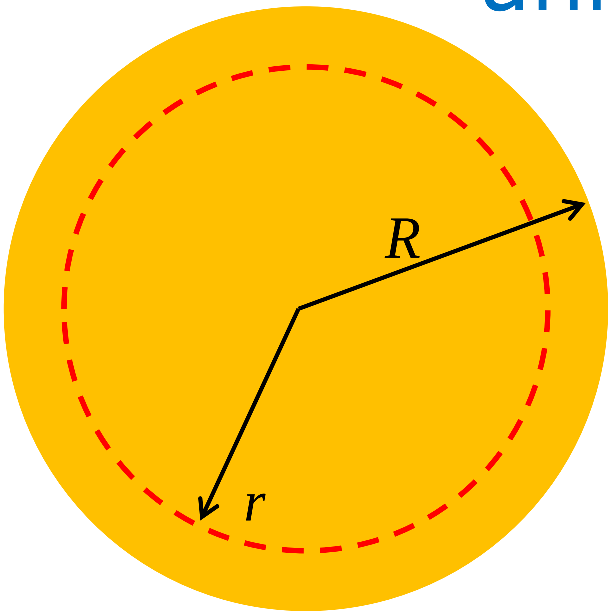
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rh) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$q = \lambda h$ è la carica interna alla superficie gaussiana, per cui:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{rh} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} = 2k\frac{\lambda}{r}$$

Ritroviamo la formula del campo per il filo infinito con densità di carica lineare λ: il **campo elettrico esterno ad un cilindro carico è uguale a quello generato da un filo di uguale carica passante per l'asse del cilindro**; ovvero, è come se tutta la carica fosse concentrata lungo l'asse.

Campo generato da un cilindro isolante uniformemente carico



Caso $r < R$: **campo all'interno del cilindro carico**; applichiamo Gauss ad una superficie cilindrica di raggio r (linea rossa tratteggiata) ed altezza h:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(2\pi r h\right) = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

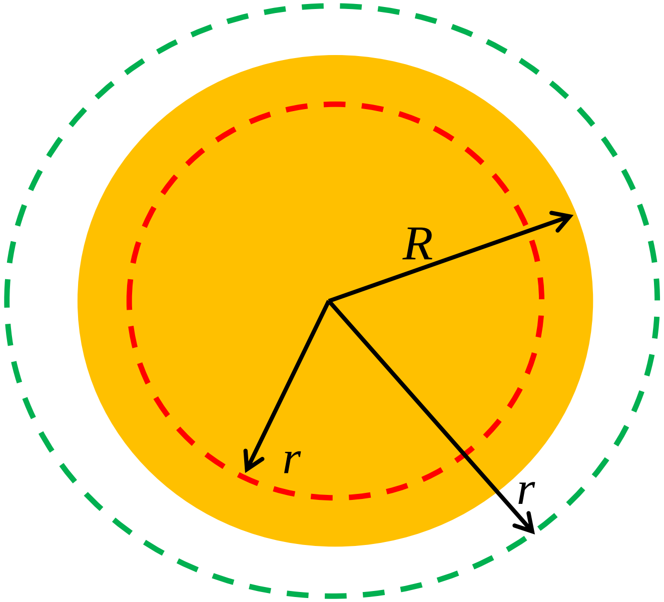
$$\Rightarrow E = 2k\frac{\lambda'}{r}$$

Attenzione: adesso λ' non include TUTTA la carica della sezione cilindrica, ma **solo quella INTERNA alla superficie cilindrica gaussiana;** dalla densità di carica 3D ρ uniforme nel cilindro, calcoliamo la carica q' contenuta all'interno della superficie cilindrica gaussiana di altezza h e raggio r:

$$q' = \rho(\pi r^2 h) \Rightarrow \lambda'(r) = \frac{q'(r)}{h} = \rho\,\pi\, r^2$$

Chiaramente λ' dipende da r

Campo generato da un cilindro isolante uniformemente carico

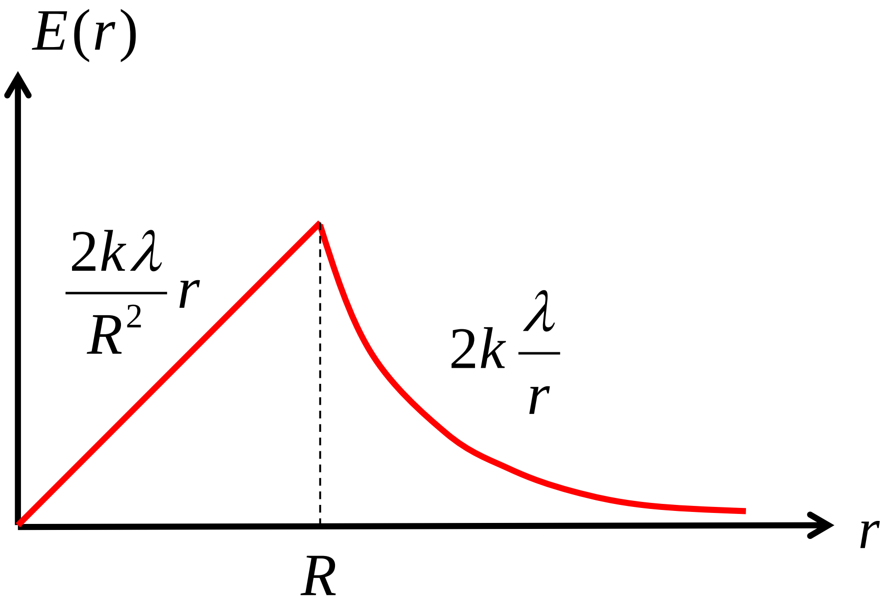


Possiamo esprimere λ' in termini di λ, essendo :

$$\lambda'(r) = \rho\pi r^2 \qquad \lambda = \rho\pi R^2$$

$$\Rightarrow \lambda' = \lambda\frac{r^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow E(r) = 2k\frac{\lambda'}{r} = 2k\frac{\lambda}{R^2}r$$



- ✓ L'intensità del campo elettrico *E(r)* generato da un cilindro uniformemente carico cresce proporzionalmente ad *r* all'interno del cilindro, decresce come 1/*r* all'esterno del cilindro
- ✓ Come dobbiamo aspettarci (essendo entrambe corrette), le due formule coincidono per *r* = *R*

Esercizio

Consideriamo una **sfera conduttiva carica**, con carica q_C = 8 μC, cava al suo interno; una carica puntuale negativa q = -5 μC è posta in un punto interno alla cavità. Determinare quanta carica deve essere distribuita sulle superficie interna (q_{int}) ed esterna (q_{est}) del conduttore

Per la legge di Gauss, la **carica sulla superficie interna** deve compensare la carica puntuale, per cui:

$$q_{\text{int}} = 5\,\mu C$$

Poiché la carica totale sul conduttore è:

$$q_C = q_{\text{int}} + q_{est} = 8\,\mu C$$

ne deriva che sulla superficie esterna deve essere distribuita una carica:

$$q_{est} = 3\,\mu C$$