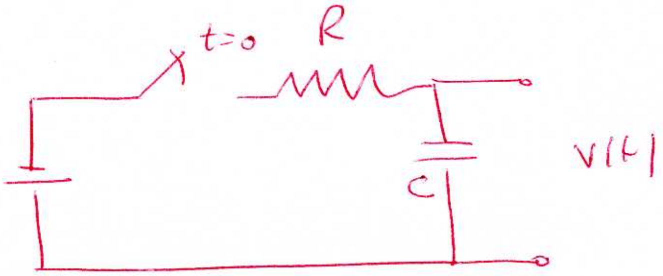
Esercizio 7.14



I valori di R e C sono 2 variabili aleatorie indipendenti con densità di probabilità uniforme tra 0 e $2k\Omega$ per il resistore e tra 0 e $2\mu F$ per il condensatore.

A $t=0$ è applicata al circuito una tensione $V_0 = 1V$.

Calcolare la probabilità che la tensione ai capi del condensatore C, all'istante $t_0 = 1ms$ sia inferiore a $\left(1 - \frac{1}{e}\right)V$.

La tensione ai capi del condensatore è

$$v(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right) u(t).$$

All'istante $t = t_0$, la tensione ai capi del condensatore è

$$v(t=t_0) = V_0 \left(1 - e^{-t_0/RC}\right)$$

Questa deve essere minore o uguale a $\left(1 - \frac{1}{e}\right)V$

$$V_0 \left(1 - e^{-t_0/RC}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$V_0 = 1V$, quindi

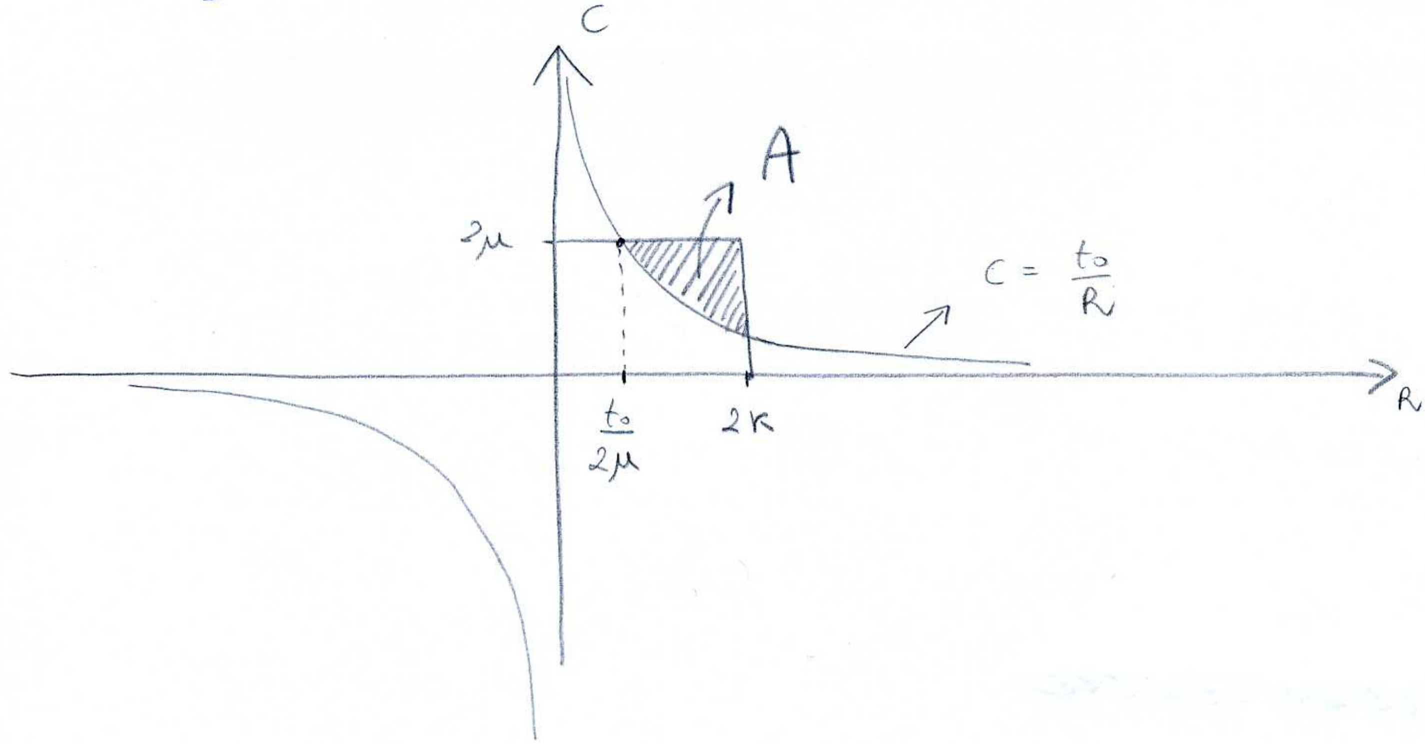
$$1 - e^{-t_0/RC} \leq 1 - e^{-1}$$

Quindi deve essere che

$$\frac{t_0}{RC} = 1 \qquad \text{quindi} \qquad RC \geq t_0$$

Quindi l'evento di cui abbiamo calcolare la probabilità è

$$A = \{RC \geq t_0\}$$



$$f_{RC}(r,c) = f_R(r)\cdot f_C(c)$$ perché indipendenti

In questo caso $\frac{t_0}{2\mu} < 2K$ infatti

$$\frac{10^{-3}}{2\,10^{-6}} = \frac{1}{2}10^{3} < 2\cdot 10^{3}.$$

$$\Pr\{A\} = \int_{\tau=\frac{t_0}{2\mu}}^{2K} \int_{c=\frac{t_0}{\tau}}^{2\mu} f_{RC}(\tau, c)\, d\tau\, dc =$$

$$= \int_{\frac{t_0}{2\mu}}^{2K} \int_{\frac{t_0}{\tau}}^{2\mu} \frac{1}{2000} \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}}\, d\tau\, dc =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \int_{\frac{t_0}{2\mu}}^{2K} c \Big|_{\frac{t_0}{\tau}}^{2\mu} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\, 10^{-3}} \int_{\frac{t_0}{2\mu}}^{2K} \left(2\, 10^{-6} - \frac{t_0}{\tau} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\, 10^{-3}} \Big[2\, 10^{-6} \cdot \tau - t_0 \log_e(\tau) \Big]_{\frac{t_0}{2\mu}}^{2K}$$

$$\frac{1}{4\,10^{-3}}\left[2\,10^{-6}\left(2000-\frac{t_0}{2\,10^{-6}}\right)-t_0\left[\log_e\left(2000\right)-\log_e\left(\frac{t_0}{2\,10^{-6}}\right)\right]\right]$$

$$=\frac{1}{2}10^{-3}\left(2000-\frac{t_0}{2\,10^{-6}}\right)-\frac{t_0}{4\,10^{-3}}\left(\log_e(2000)-\log_e\left(\frac{t_0}{2\,10^{-6}}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}10^{-3}\cdot\frac{10^{-3}}{2\cdot 10^{-6}}-\frac{1}{4}\left(\log_e(2000)-\log_e\left(\frac{10^{-3}}{2\,10^{-6}}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\log_e(2000)-\log_e\left(\frac{1}{2\,10^{-3}}\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\log_e(2000)-\log_e\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{3}\right)\right)$$