Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \le 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \le 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{3, 5}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

	capacità di peso (tonn)	capacità di spazio (m^3)
A	22	6000
B	16	8500
C	12	5000

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

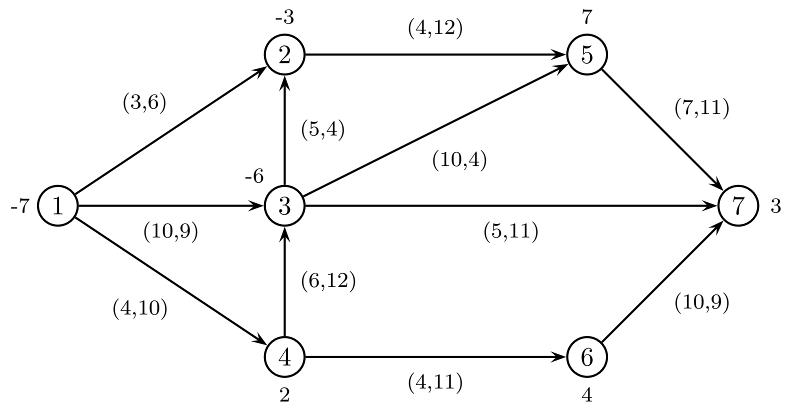
	peso (tonn)	volume occupato ($m^3/tonn$)
P1	20	200
P2	15	300
P3	12	250

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 350 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                         b=

Aeq=                                       beq=

lb=                                        ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

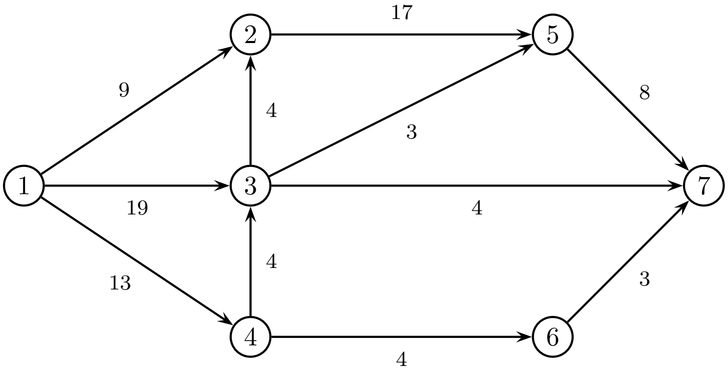


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

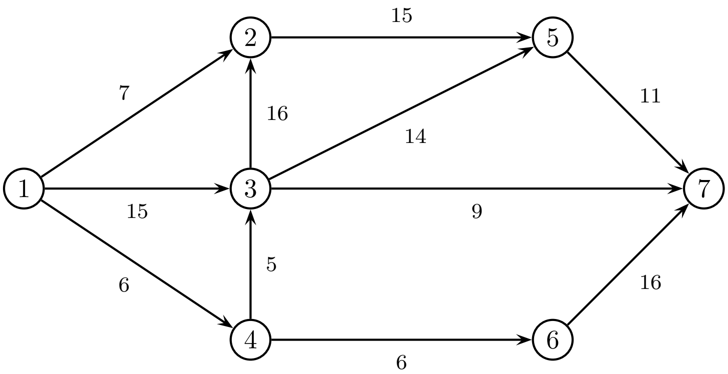
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 6\ x_2 \leq 60 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	21	50	21
2		11	50	25
3			8	29
4				21

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (1,\ 3)$	SI	NO
$\{3, 5\}$	$y = \left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{7}{8},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3, 4\}$	$(0,\ -6)$	$(0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0)$	4	$\frac{294}{11},\ 7,\ 56$	5
2° iterazione	$\{3, 5\}$	$(-2,\ -5)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{7}{8},\ 0\right)$	3	8	1

Esercizio 3.

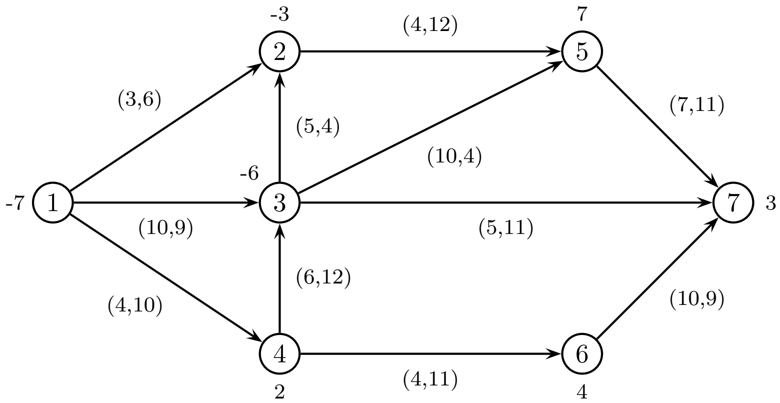
variabili decisionali	modello
$x_{i,j}$ = tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C	$\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +350\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 15 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 22 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 16 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 12 \\ 200\ x_{1A} + 300\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \leq 6000 \\ 200\ x_{1B} + 300\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \leq 8500 \\ 200\ x_{1C} + 300\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \leq 5000 \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$

```
c = -[ 300; 300; 300;350; 350; 350; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 300 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 300 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 300 0 0 250]

Aeq = []

lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
b = [ 20; 15; 12; 22; 16; 12;6000; 8500; 5000]

beq = []

ub = []
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

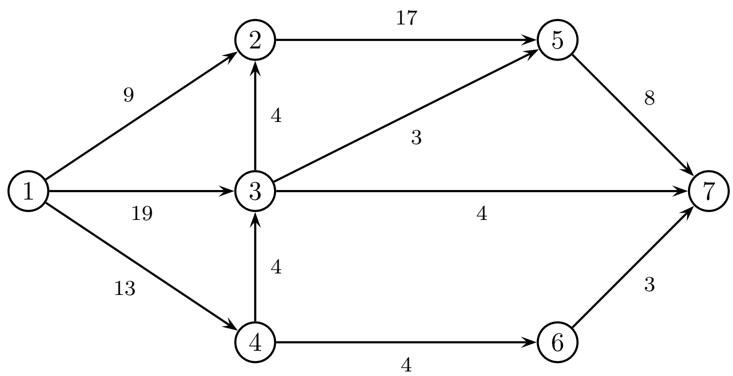


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

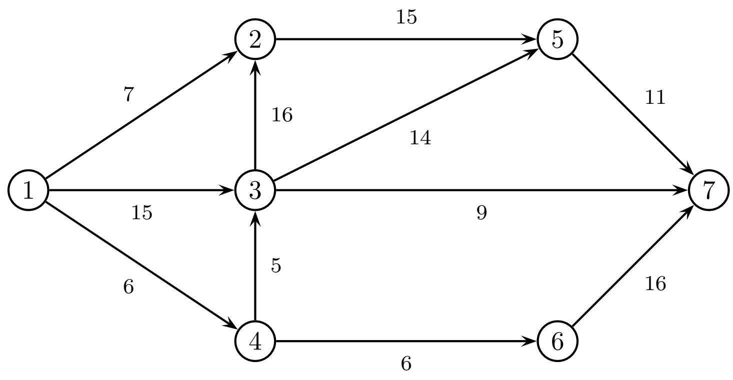
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1)	(0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 3, 13, 4, 7, 8, 18)	(0, 3, 10, 4, 7, 8, 15)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	6 , 1
Arco uscente	(6,7)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		3		6		5		7	
nodo 2	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 3	19	1	19	1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 4	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 5	$+\infty$	-1	26	2	26	2	20	3	20	3	20	3	20	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	17	4	17	4	17	4	17	4	17	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	3	20	6	20	6	20	6
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 9, 0, 7, 0, 0, 9, 0, 0, 7, 0)	16
1 - 3 - 5 - 7	4	(7, 13, 0, 7, 0, 4, 9, 0, 0, 11, 0)	20
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 13, 6, 7, 0, 4, 9, 0, 6, 11, 6)	26

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 14\,x_2 \\ 17\,x_1 + 6\,x_2 \leq 60 \\ 7\,x_1 + 14\,x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{51}{14}\right)$ $\qquad v_S(P) = 51$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\qquad v_I(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 3$
$r = 3$ $\qquad 4\,x_1 + 8\,x_2 \leq 29$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	44	21	50	21
2		11	50	25
3			8	29
4				21

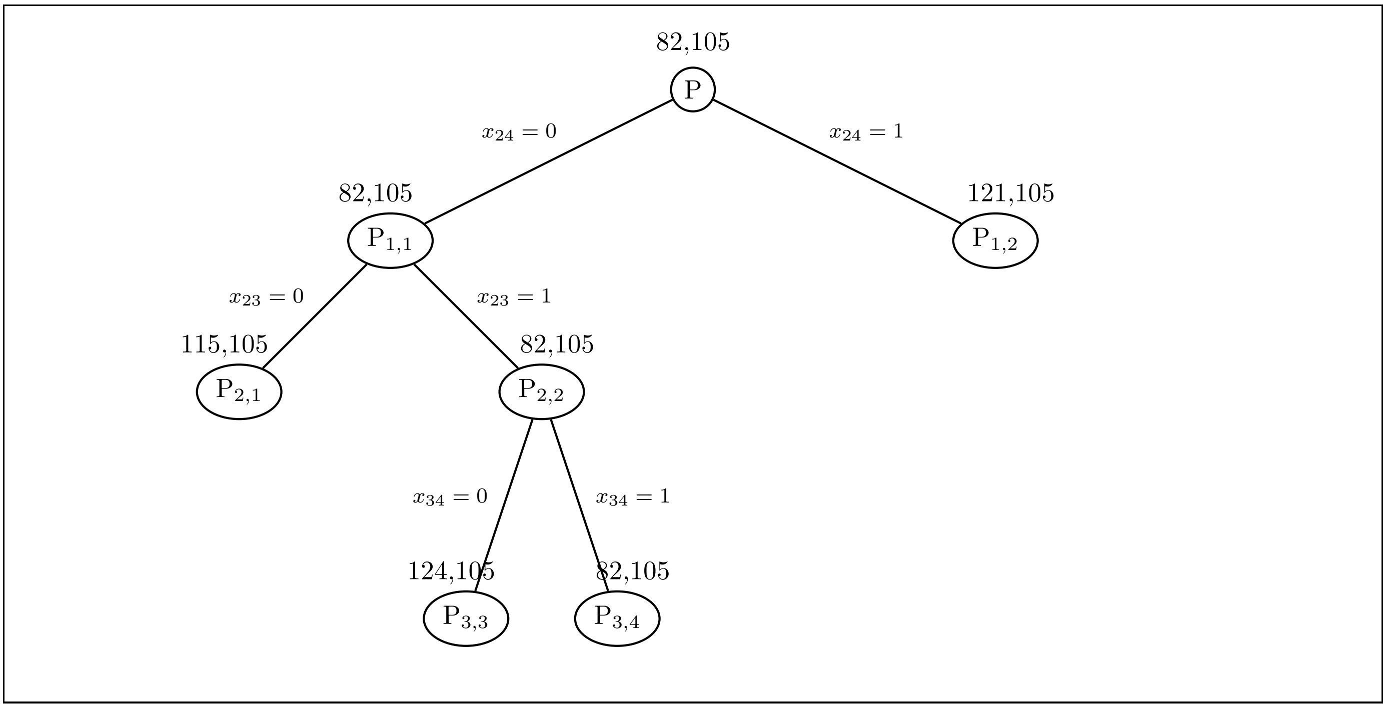
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 82$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ $\qquad v_S(P) = 105$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{23}, x_{34}.



82,105
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
82,105
$P_{1,1}$
121,105
$P_{1,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
115,105
$P_{2,1}$
82,105
$P_{2,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
124,105
$P_{3,3}$
82,105
$P_{3,4}$