Prova di Comunicazioni Numeriche 075II

26 Giugno 2023

1. Dimostrare che un qualsiasi codice di Hamming ha $d_{\min} = 3$ e che può correggere almeno 1 errore. (**2** punti)

2. Si consideri il polinomio $g(D) = D^4 + D^2 + D + 1$. (**4** punti)
   (a) Dimostrare che $g(D)$ può essere utilizzato come polinomio generatore per un codice ciclico con $n = 7$, e trovare il corrispondente valore di k.
   (b) Trovare la $d_{\min}$ del codice.
   (c) Data la parola ricevuta $y = x + e = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$, sfruttare le proprietà dei codici ciclici per trovare $\hat{e}$ e, successivamente, $\hat{x}$.

3. Il codice a blocco sistematico $\mathcal{C}$ con $n = 6$ e $k = 3$ ha la matrice generatrice $\mathbf{G}$: (**2.5** punti)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Determinare la matrice di controllo di parità $\mathbf{H}$.
   (b) Trovare la $d_{\min}$ del codice.
   (c) Decodificare la parola ricevuta $y = x+e = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

4. Dato il codice convoluzionale con polinomi generatori (in notazione ottale) $g_1 = 3$ e $g_2 = 6$, disegnare lo schema a blocchi, il diagramma di stato ed il diagramma a traliccio (partendo dallo stato $\sigma_0 = 00$ fino alla completa espansione dopo tre intervalli di segnalazione) del codificatore. (**1.5** punti)

5. Descrivere le operazioni necessarie per modulare e demodulare un segnale di banda $B = 10$ MHz su una frequenza portante di $f_c = 3$ GHz (**3** punti).

6. Enunciare e dimostrare il teorema del campionamento. (**4** punti)

7. Due scatole A e B contengono lampade prodotte da una certa fabbrica. A contiene 2000 lampade di cui il 2% sono difettose, B ne contiene 1000 di cui il 5% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa? (**2** punti)

8. La variabile aleatoria (v.a.) X ha una densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$. Tale v.a. viene sommata ad un'altra v.a. Y uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 2]$, indipendente da X. Sia $Z = X + Y$ la nuova variabile aleatoria ottenuta. Si chiede di calcolare: (**3** punti)

    (a) il valore medio di Z

    (b) la densità di probabilità della v.a. Z

    (c) la probabilità che risulti $Z \geq 2$.

9. Si abbia un impulso $g_T(t)$ di forma nota, immerso in rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Il segnale è inviato in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta impulsiva $g_R(t)$ e campionato ad un istante t_0, ottenendo il campione $x(t_0)$. (**4** punti)

    (a) Derivare l'espressione di $g_R(t)$ in modo tale che sia massimo il rapporto segnale/rumore sul campione $x(t_0)$.

    (b) Dimensionare $g_T(t)$ e $g_R(t)$ in modo tale che sia soddisfatta la condizione di Nyquist.

10. Si consideri un sistema di comunicazione $4-$QAM ed un sistema di comunicazione $4-$PAM. Entrambi i sistemi sono utilizzati per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 10$ Mbit/s, impiegano un codificatore di canale con rate $r = 2/3$ ed un filtro a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.4$. (**4** punti)

    (a) Determinare la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso da ciascun sistema.

    (b) Determinare la banda e l'efficienza spettrale dei due sistemi.

    (c) Calcolare la perdita (o il guadagno) del sistema $4-$QAM per garantire la stessa probabilità di errore sul simbolo del sistema $4-$PAM.