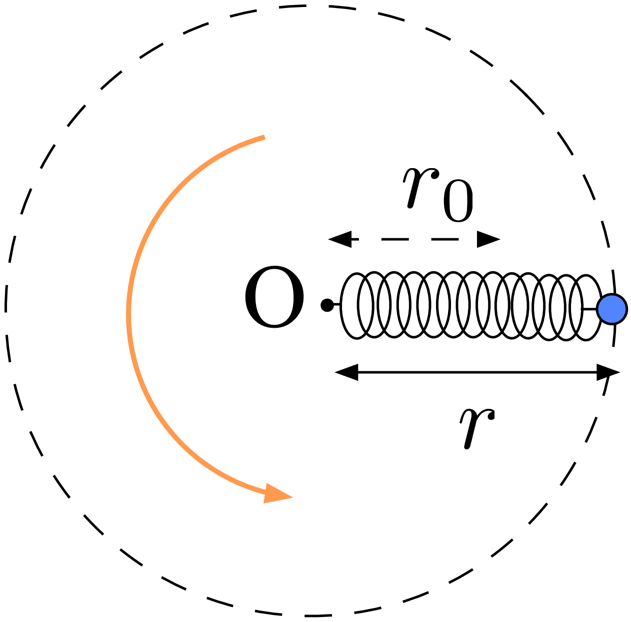
Esercizio (tratto dal Problema 4.15 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale di massa $m = 2.5\,\mathrm{Kg}$ è attaccato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 120\,\mathrm{Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $r_0 = 30\,\mathrm{cm}$; l'altro estremo della molla è fissato al punto O. Il sistema si trova su di un piano orizzontale e ruota con velocità angolare costante $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$ attorno a O. Calcolare il raggio r della circonferenza descritta da m.



SOLUZIONE
Dati iniziali:

$$
\begin{aligned}
m &= 2.5\,\mathrm{Kg} \\
k &= 120\,\mathrm{Nm^{-1}} \\
\omega &= 4\,\mathrm{s^{-1}} \\
r_0 &= 0.3\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

NB: riscrivere i dati iniziali in unità del S.I. !!! (ad es. convertire $r_0 = 30\mathrm{cm}$ in $r_0 = 0.3\,\mathrm{m}$)

- Dato che il punto materiale compie un'orbita circolare, la sua velocità $\vec{v}$ non è costante, ma cambia continuamente verso (pur mantenendo costante il modulo). Dunque il punto materiale possiede necessariamente un'accelerazione $\vec{a}$. Siccome il testo ci dice che si tratta di un moto circolare *uniforme*, tale accelerazione è puramente radiale centripeta, e vale dunque

$$\vec{a} = a_r \hat{u}_r = \underbrace{-\omega^2 r}_{=a_r}\,\hat{u}_r \tag{1}$$

  dove $\hat{u}_r$ è il versore che punta da O verso l'esterno.

- Dato che ha un'accelerazione, per la seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

  il punto materiale è soggetto ad una forza, anch'essa dunque centripeta. E' la molla che esercita tale forza, allungandosi verso l'esterno. Quindi

$$\vec{F} = -k(r - r_0)\,\hat{u}_r \tag{3}$$

  Sostituendo (1) e (3) in (2) si ottiene

$$
\begin{aligned}
-k(r - r_0)\,\hat{u}_r &= -m\omega^2 r\,\hat{u}_r && (4)\\
&\Downarrow \\
-k(r - r_0) &= -m\omega^2 r && (5)
\end{aligned}
$$

  da cui si ricava che

$$r = r_0 \frac{k}{k - m\omega^2} \tag{6}$$

  ossia

$$r = r_0 \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}}_{>1} \tag{7}$$

  Come si vede, si trova $r > r_0$ ossia che la molla è allungata, come ci aspettiamo che sia affinché la molla possa esercitare una forza centripeta.

- Sostituendo i valori numerici

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{r_0}{1-\frac{m\omega^2}{k}} = \\
&= \frac{0.3\,\mathrm{m}}{1-\frac{2.5\,\mathrm{Kg}(4\,\mathrm{s}^{-1})^2}{120\,\mathrm{Nm}^{-1}}} = \\
& \quad [\text{uso } \mathrm{N} = \mathrm{Kg\,m\,s^{-2}} \Rightarrow \mathrm{Kg\,s^{-2}} = \mathrm{N\,m^{-1}}] \\
&= 0.3\,\mathrm{m}\cdot\frac{120\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{(120\,-2.5\,\cdot 16)\mathrm{N\,m^{-1}}} = \\
&= 0.3\,\mathrm{m}\cdot\frac{120}{120\,-40} = \\
&= 0.3\,\mathrm{m}\cdot\frac{3}{2} = \\
&= 0.45\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

- **Osservazione**
  La legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ vale nel sistema inerziale del laboratorio, in cui vediamo la particella muoversi di moto circolare uniforme. In tale sistema, con $\vec{F}$ sono da intendersi tutte e sole le forze *reali*, dovute ad un agente fisico reale (in questo caso la molla).
  Potremmo anche pensare di risolvere il problema in un altro modo, mettendoci nel sistema di riferimento della particella. In tale sistema -per definizione- la particella è ferma ($\vec{a}' = 0$). Tuttavia, tale sistema di riferimento, accelerato rispetto al sistema inerziale del laboratorio, non è un sistema inerziale, e dunque le leggi della dinamica $\vec{F}' = m\vec{a}'$ strettamente parlando non valgono. Possiamo però scrivere delle leggi della dinamica 'modificate', in cui in $\vec{F}'$ includiamo, oltre alle forze reali, anche le forze *apparenti*, in questo caso la forza *centrifuga* $\vec{F}^{app} = +m\omega^2 r\,\vec{u}_r$. Possiamo cioè scrivere

$$
\begin{aligned}
\underbrace{-k(r-r_0)\,\hat{u}_r}_{\vec{F}^{reale}} + \underbrace{m\omega^2 r\,\vec{u}_r}_{\vec{F}^{app}} &= m\,\vec{a}' = 0 \\
&\Downarrow \\
-k(r-r_0)\,\hat{u}_r + m\omega^2 r\,\hat{u}_r &= 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

  Confrontando l'equazione (9) [ottenuta nel sistema di riferimento non inerziale della particella] e l'equazione (4) [ottenuta nel sistema inerziale del laboratorio], notiamo che il termine che in (4) compare a membro destro e che descrive l'accelerazione *centripeta*, in (9) è portato al membro sinistro, acquisendo l'aspetto apparente di una forza *centrifuga*.