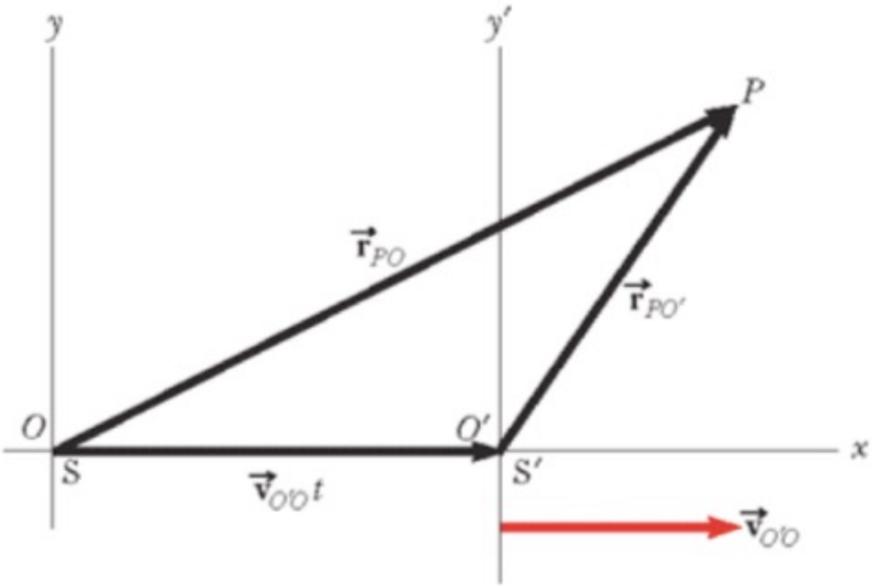
Sistemi di riferimento inerziali

- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ è *stazionario* o *di laboratorio*



- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) $\vec{v}_0$ *costante*

- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t}$

- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo*)

- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ perché $\vec{v}_0$ è costante

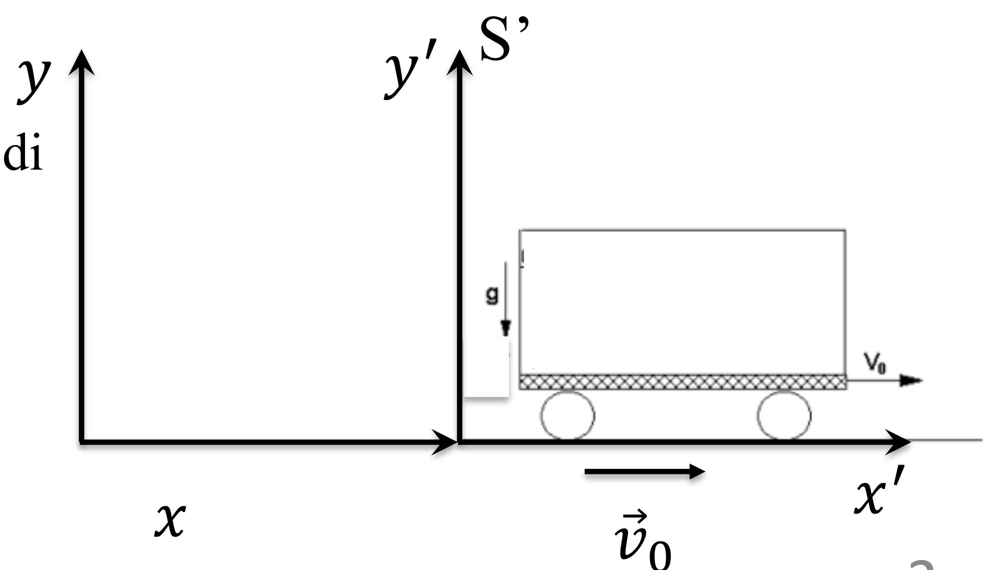
Sistemi di riferimento inerziali:Esempio treno in moto con velocità costante

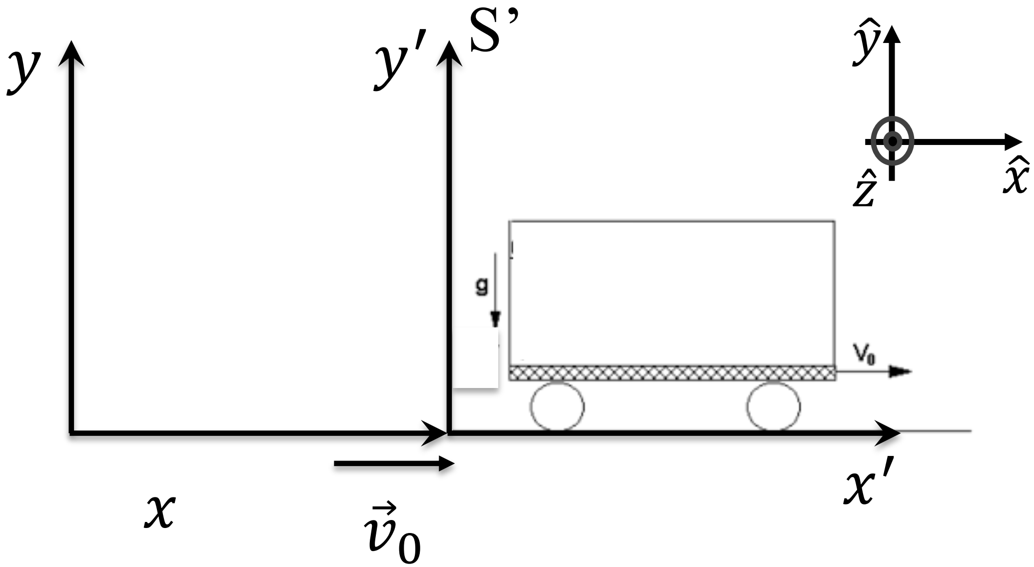
Un gesso è lasciato cadere da un passeggero solidale a un treno in moto con velocità costante v_0 come in figura. Sia S'= x'y'z' un sistema di riferimento solidale al treno. Cosa si osserva nel sistema solidale al treno in moto con velocità costante v_0 rispetto a un sistema S (vedi figura) solidale alla bachina della stazione nell'ipotesi che a t=0, l'istante in cui viene lasciato cadere il gesso le origini di S e S' coincidano?

In particolare

1. si descriva il tipo di moto nei due sistemi

2. Nell'ipotesi in cui nella direzione di caduta del gesso ci sia un foro si determini la velocità vettoriale di impatto al suolo nei due sistemi





Dati

$\vec{v}_0 = (v_0, 0)$

- Per t=0 le coordinate del gesso sono identiche nei due sistemi
  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = \vec{r}'_0$
- il gesso in S' viene "lasciato cadere" $\vec{v}'_0$=0

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 \mathrm{t}$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$

$\vec{a} = \vec{a}'$

$\vec{a}' = -\mathrm{g}\, \hat{y}$

$\vec{v}' = -\mathrm{gt}\, \hat{y}$

$\vec{r}' = (x_0, y_0 - \frac{1}{2} g t^2)$

$\vec{a} = -\mathrm{g}\, \hat{y}$

$\vec{v} = v_0 \hat{x} - \mathrm{gt}\, \hat{y}$

$\vec{r} = (x_0 + v_0 \mathrm{t}, y_0 - \frac{1}{2} g t^2)$

- La traiettoria in S è una parabola, il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $-\mathrm{g}\, \hat{y}$
- La traiettoria in S' è rettilinea (lungo y') il gesso cade in verticale. Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $-\mathrm{g}\, \hat{y}$
- il tempo impiegato ad arrivare a terra è lo stesso in S e S'

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \qquad \vec{a} = \vec{a}'$$

$$\vec{a}' = -\mathrm{g}\,\hat{y} \qquad \vec{v}' = -\mathrm{g}t\,\hat{y} \qquad \vec{r}' = \left(x_0, y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$\vec{a} = -\mathrm{g}\,\hat{y} \qquad \vec{v} = v_0\hat{x} - \mathrm{g}t\,\hat{y} \qquad \vec{r} = \left(x_0 + v_0 t, y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

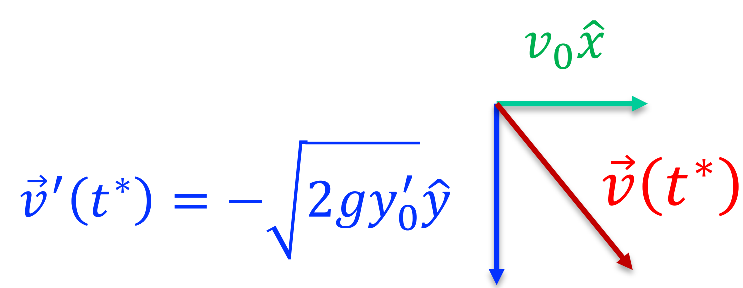
- Il tempo t^* impiegato ad arrivare a terra è lo stesso nei due SDR

$$t^* = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

- le velocità di impatto a terra in S e S' sono date da:

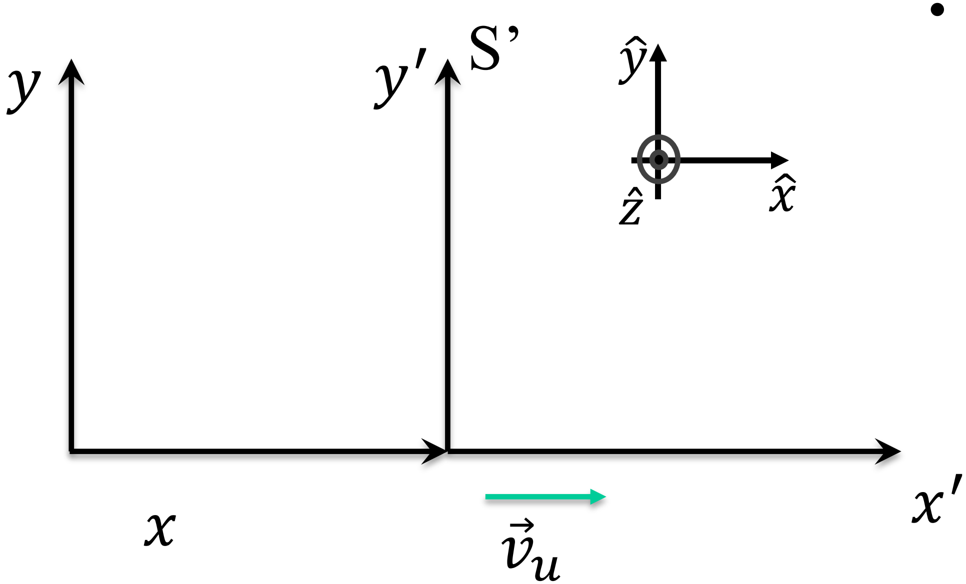
$$\vec{v}'(t^*) = -\sqrt{2gy_0}\,\hat{y}$$

$$\vec{v}(t^*) = v_0\hat{x} - \sqrt{2gy_0}\,\hat{y}$$



Sistemi di riferimento inerziali: come orientare l'ombrello...

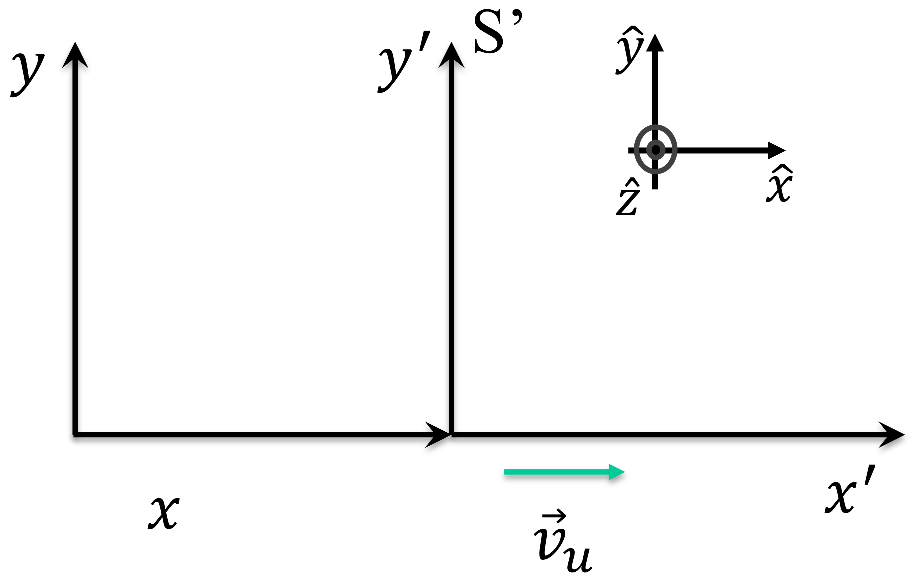
Un uomo cammina con un ombrello: se la pioggia cade verticalmente con v_p =8 m/s e l'uomo cammina con velocità costante v_u =3m/s, si determini l'angolo ottimale di inclinazione dell'ombrello (per esempio rispetto alla verticale) e con quale velocità le gocce d'acqua colpiscono l'ombrello in tale situazione.



sistema mobile in moto con velocità $\vec{v}_u$ S' solidale all'uomo

sistema solidale alla strada (inerziale) S

- Scegliamo 2 sistemi di riferimento
  - S solidale alla strada in cui cammina l'uomo con asse x con direzione e verso dell'uomo e asse y ortogonale e levogiro all'asse x.
  - S' solidale all'uomo con assi x'y' paralleli a xy in moto con velocità
  - $\vec{v}_u$



Dati

la pioggia cade verticalmente a terra con v_p =8 m/s

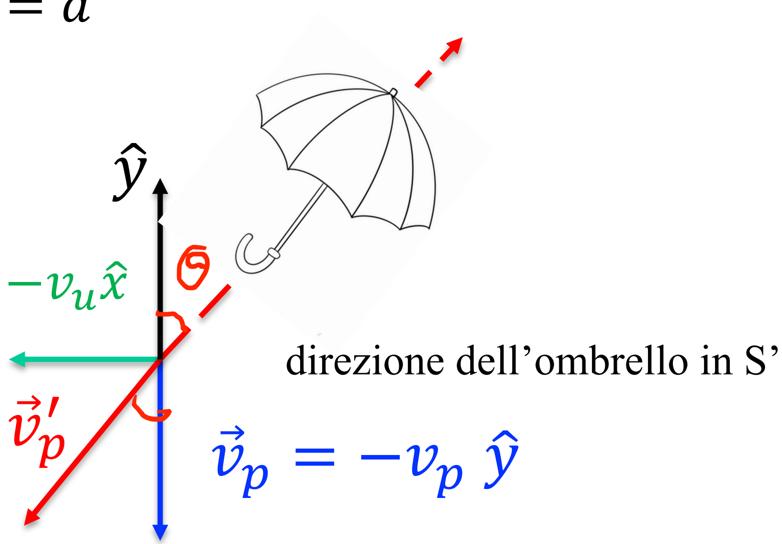
velocità dell'uomo v_u =3m/s

- Angolo ottimale di inclinazione dell'ombrello rispetto alla verticale?
- Con quale velocità le gocce colpiscono l'ombrello quando l'angolo è ottimale ?

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$
$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$\vec{v}_0 = v_u\,\hat{x}$

in S' le gocce hanno $\vec{v}_p' = \vec{v}_p - \vec{v}_0 = \vec{v}_p - v_u\,\hat{x}$



$$\text{tg}\theta = \frac{v_u}{v_p} \quad \Rightarrow \theta = \text{atg}\theta\left(\frac{v_u}{v_p}\right) = 20.55^0$$

$$v_p' = \sqrt{v_u^2 + v_p^2} = 8.54\ m/s$$

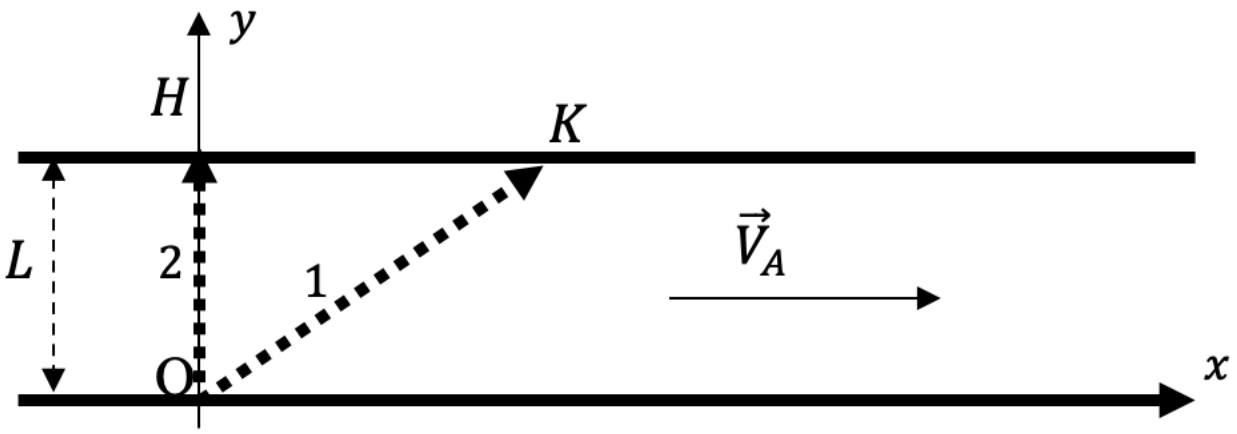
Sistemi di riferimento inerziali: esempio velocità relativa

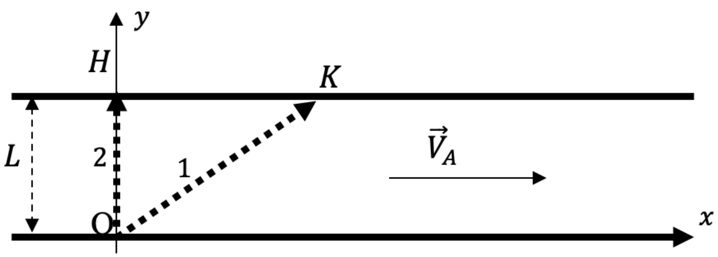
Una barca B parte dal punto O e si dirige verso la riva opposta di un fiume di larghezza $L = 200$ m ed in cui l'acqua scorre verso destra (come in Figura) con una velocità $V_A = 2$ m/s.

Si definisca un sistema Oxy come in figura solidale alle sponde.

La barca, <u>rispetto all'acqua</u>, si muove con velocità costante di modulo $V_B = 5$ m/s; la sua direzione può essere liberamente scelta dal pilota.

1) Calcolare la posizione del punto K in cui la barca arriva nel caso (1) in cui la prua viene diretta perpendicolarmente alla corrente ed il tempo impiegato per attraversare il fiume.





Dati L=200 m

$V_A = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \vec{V}_A = V_A\hat{x}$

V_B=5 m/s velocità della barca relativa all'acqua

1) Calcolare la posizione del punto K in cui la barca arriva nel caso in cui la prua viene diretta perpendicolarmente alla corrente ed il tempo t impiegato per attraversare il fiume.

- S' solidale all'acqua con assi y' e x' paralleli a y e x, la cui origine è in moto lungo x con la velocità della corrente CHE È COSTANTE

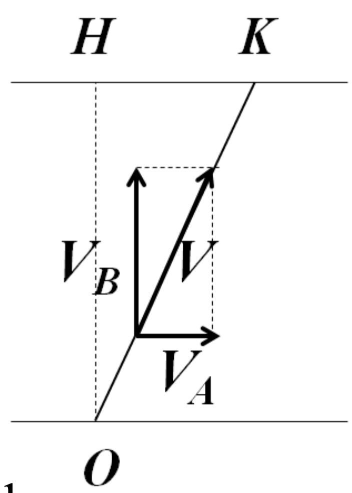
$\vec{v}_0 = V_A\hat{x}$ $\vec{v}' = V_B\hat{y}$

- Trasformazioni di Galileo

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \vec{v} = \vec{V} = (V_A, V_B)$

dove $\vec{V}$ è la velocità della barca nel sistema di riferimento xy solidale alle sponde

$t = \frac{L}{V_B} = \frac{200\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 40\text{ s}$

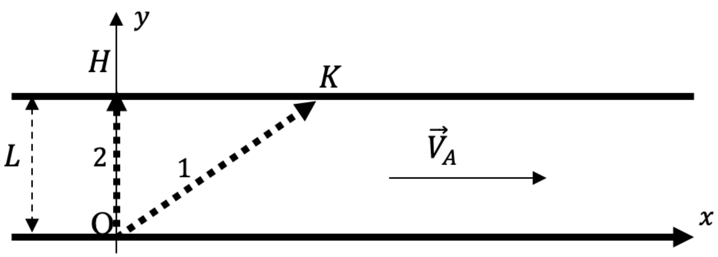


1)

Ma la velocità della barca rispetto al riferimento a terra (solidale alle sponde) è $\vec{V} = (V_A, V_B)$, per cui, come mostrato in Figura:

$\overline{HK} = V_A t \quad L = V_B t \qquad \frac{\overline{HK}}{L} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \overline{HK} = L\frac{V_A}{V_B} = 200\times\frac{2}{5}\text{m} = 80\text{ m}$

K=(80,200)m



Dati $\quad$ L=2 m

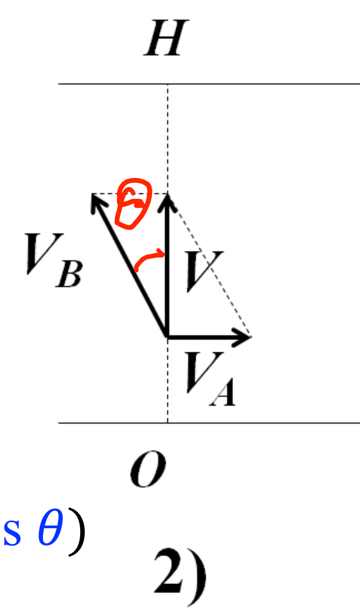
$$V_A = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \vec{V}_A = V_A\hat{x}$$

V_B=5 m/s velocità della barca relativa all'acqua

2) Calcolare la direzione in cui rivolgere la prua per raggiungere (caso 2) il punto H ed il tempo impiegato per attraversare il fiume.

In questo caso affinché la barca punti sempre verso l'approdo H è necessario che la velocità della barca rispetto alla corrente non sia perpendicolare, ma formi un angolo θ tale da compensare l'effetto della corrente. L'analisi della Figura 2) mostra che

$$\vec{v}' = \vec{V}_B = -V_B sin\theta\hat{x} + V_B\, cos\theta\hat{y}$$



- La velocità della barca nel sistema xy deve avere componenti

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_0 = V_A\hat{x}$$

$$\vec{v} = \vec{V} = (V_A - V_B\sin\theta, V_B\cos\theta) = (0, V_B\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{V_A}{V_B} = 0.4 \qquad \Rightarrow 23.57^0$$

$\Longrightarrow$ il tempo di attraversamento del fiume è:

$$t = \frac{L}{V_B\cos\theta} = \frac{L}{V_B\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{200}{5\times\sqrt{1-0.16}} = \frac{40}{0.9165} = 43.6\ \mathrm{s}$$

Velocita' relativa

Figure 4.22 (a) Observer A on a moving skateboard throws a ball upward and sees it rise and fall in a straight-line path. (b) Stationary observer B sees a parabolic path for the same ball

- In tutti i sistemi di riferimento inerziali valgono i tre principi della dinamica
- Tutti gli osservatori solidali a tale sistemi misurano la stessa accelerazione e la stessa forza

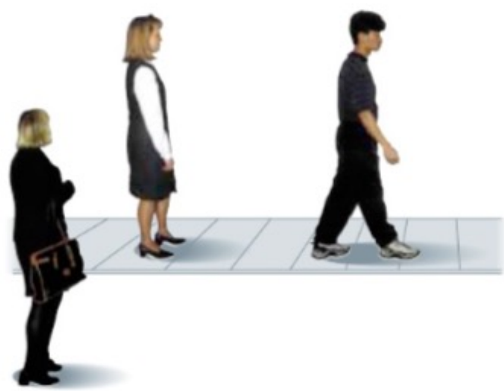
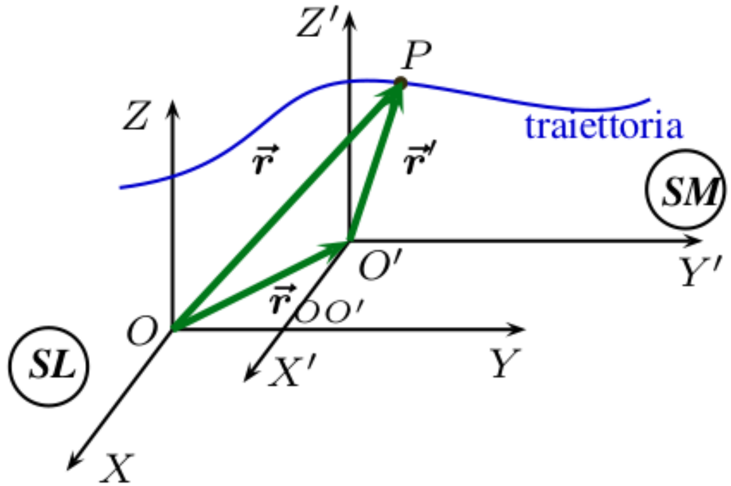


Figure 4.21 Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

Sistema mobile in moto con assi paralleli a quelli del SI con $\vec{a}_T$ costante

- Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento SM (sistema mobile) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento SL del laboratorio
- il moto di OO' è puramente traslatorio e gli assi del sistema mobile non ruotano



SL= sistema del laboratorio: INERZIALE

- La relazione fra le posizioni diventa

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t)$$

- Derivando tale relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \qquad \text{con } \vec{v}_t = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

- Derivando nuovamente

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t \qquad \text{con } \vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

Nel sistema accelerato non vale la legge di inerzia

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T$$

- In un sistema inerziale, vale la legge di inerzia

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad = m(\vec{a}' + \vec{a}_T)$$

- nel sistema accelerato non vale la legge di inerzia

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_T$$

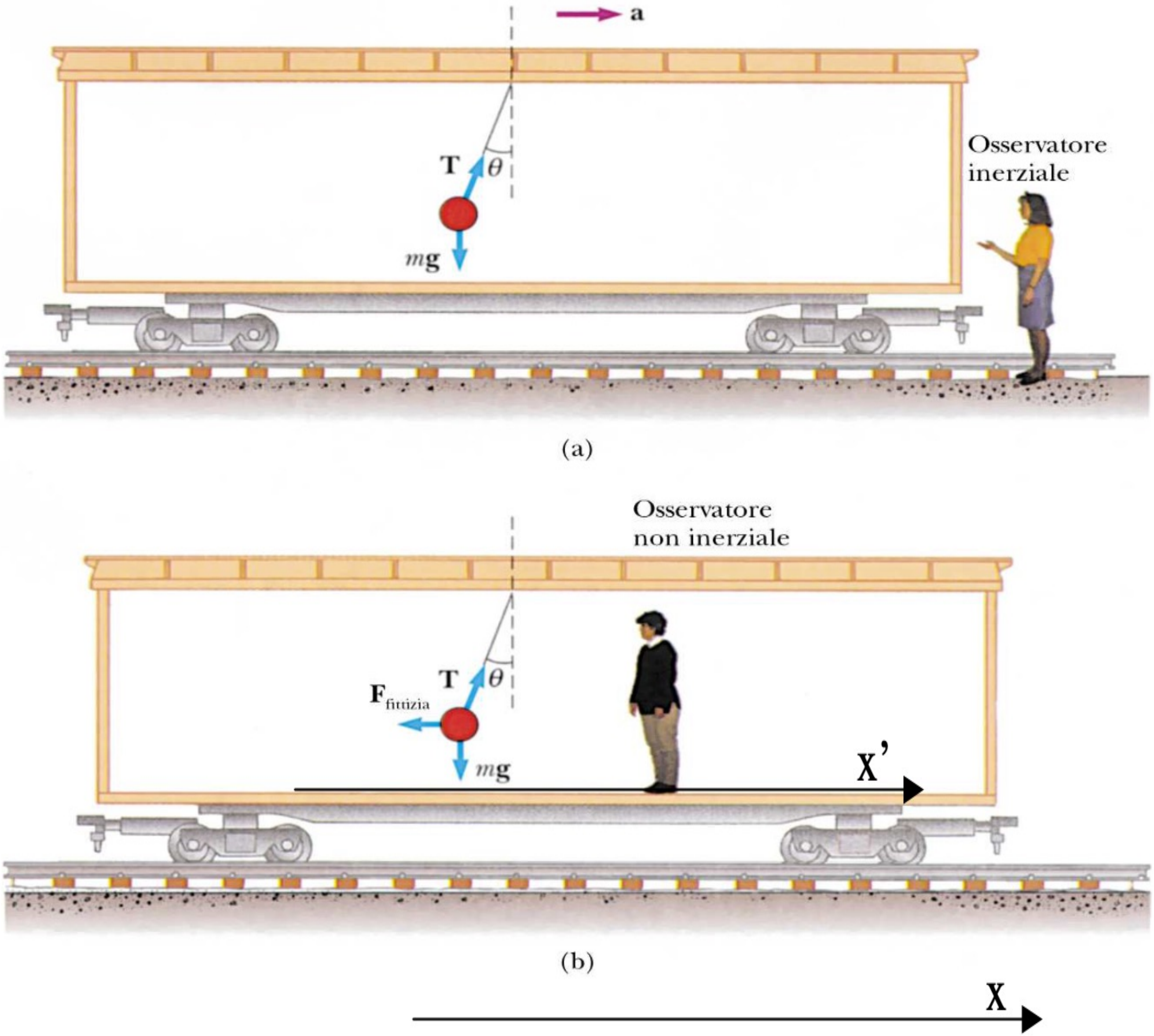
- **Definendo forza apparente** la grandezza $-m\vec{a}_T$
  - in un sistema **qualunque** (inerziale e non inerziale) la massa per l'accelerazione misurata è uguale alla somma delle forze reali $\left(\sum \vec{F}\right)$ e delle forze apparenti $(-m\vec{a}_T)$

$$\sum \vec{F} - m\vec{a}_T = \sum\left(\vec{F} + \vec{F}_{app}\right)$$

Infatti in un sistema inerziale $m\vec{a}_T = 0 \Rightarrow \vec{F}_{app}=0$ $\quad m\vec{a} = \sum \vec{F}$

In altre parole in un sistema non inerziale possiamo utilizzare le leggi di Newton se teniamo conto della presenza delle forze fittizie.

Esempio 1



Punto di vista dell'osservatore inerziale

La sferetta sta accelerando verso destra e la componente della forza T lungo x genera l'accelerazione a.

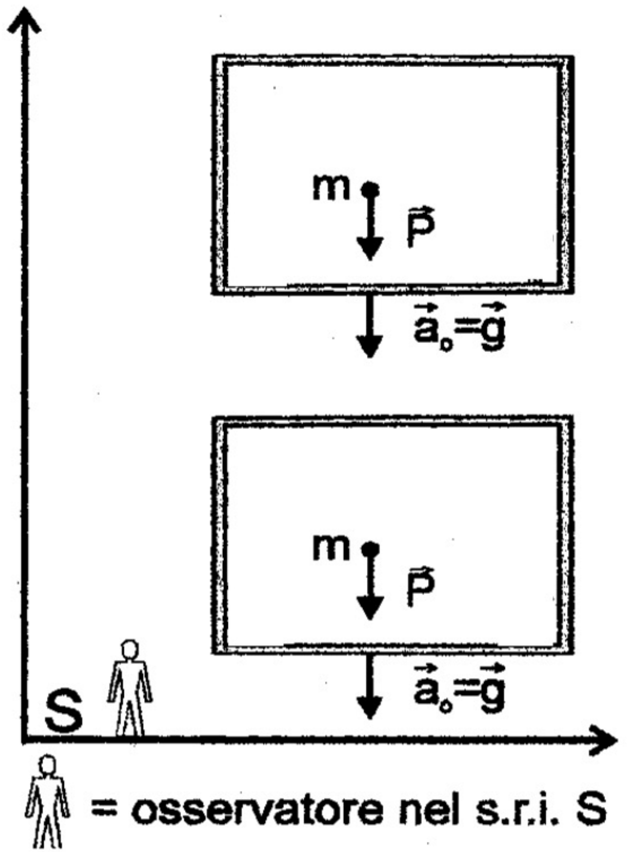
$$T\sin\theta = ma$$

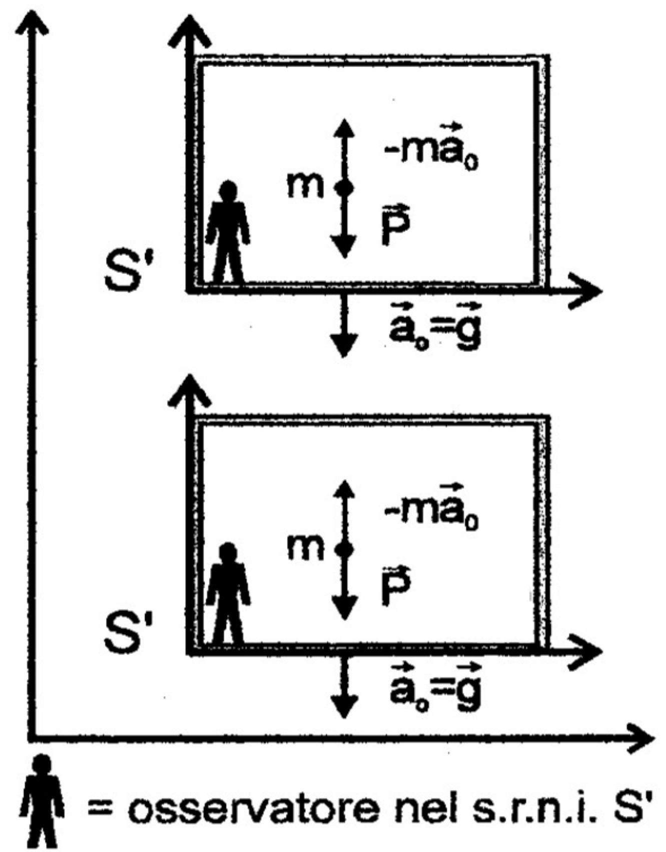
Punto di vista dell'osservatore non inerziale.

La sferetta è in quiete ed è soggetta ad una forza apparente lungo x $F_{App} = -m\,a$

$$T\sin\theta - ma = 0$$

Esempio 2: Un corpo di massa m è lasciato cadere all'interno di un ascensore che precipita in caduta libera (-g $\hat{y}$)





a) Punto di vista dell'osservatore inerziale.

Il corpo di massa m cade con accelerazione

-g $\hat{y}$

$$\Rightarrow -P = ma = -mg$$

b) Punto di vista dell' osservatore non inerziale.

Il corpo di massa m è in quiete ed è soggetto ad una forza fittizia tale che

$$\Rightarrow -P + F_{App} = 0 \qquad \Rightarrow F_{App} = mg$$

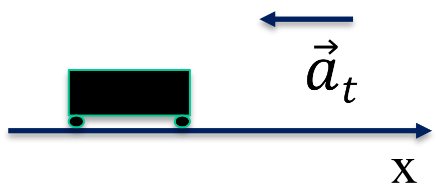
- Le forze apparenti “appaiono” solo e sempre nei SDR non inerziali
  - infatti non nascono da interazioni fra corpi, ma sono un effetto (per l’appunto “apparente”) dovuto al moto accelerato del sistema per cui sono nulle in un SDR in moto rettilineo uniforme (inerziale)

- Criterio per distinguere una forza apparente da una reale
  - una forza apparente non è una forza fra due corpi, **per essa NON vale il terzo principio** (azione e reazione)

Esempio: Un treno si muove in linea retta a $108\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = |\vec{v}_0|$, poi inizia a frenare con accelerazione costante e si ferma in 30 s. Calcolare nel sistema di riferimento del treno le forze reali e quelle apparenti su un passeggero di massa $m = 50$ kg che resta seduto al suo posto durante la frenata.

Soluzione.

- Il moto del treno è uniformemente decelerato
- l'accelerazione di trascinamento è diretta in verso opposto alla velocità del treno (che sta rallentando)



$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \qquad a_x = -\frac{v_{0x}}{t^*}$$

$$a_x = -1\ \text{m/s}^2 \qquad \vec{a}_t = -1\ \text{m/s}^2\ \hat{V}$$

- per cui la forza apparente è $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t = +50\ \text{N}\ \hat{V}$

  dove $\hat{V}$ è il versore della velocità del treno; la forza apparente quindi è diretta in avanti, nel verso della velocità.

- Quando il treno si ferma

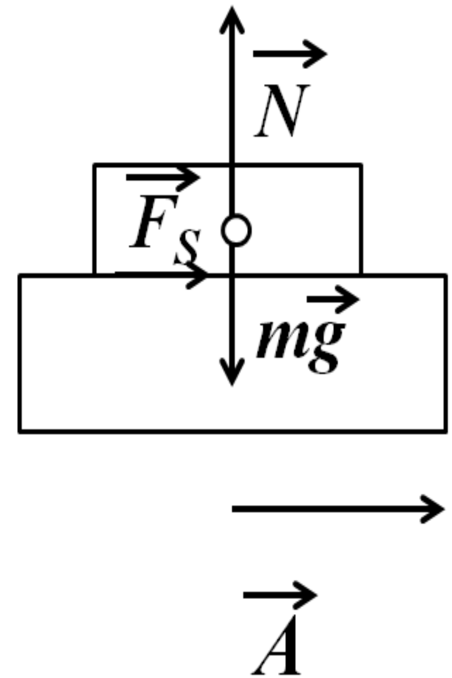
\- Rispetto al treno il viaggiatore è fermo per ipotesi (rimane al suo posto), per cui: $|\vec{a}'| = 0$

Pertanto:

$$m\vec{a}' = 0 = \sum(\vec{F} + \vec{F}_{app}) \quad \Rightarrow \sum \vec{F} = -\sum \vec{F}_{app} = +\,m\vec{a}_t = -50\ \text{N}\ \hat{V}$$

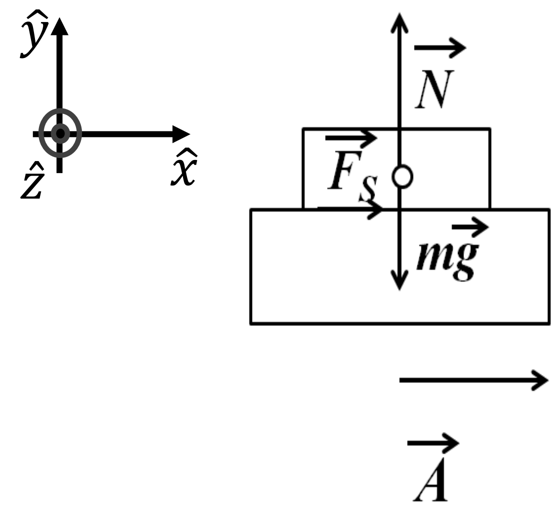
Esercizio. Un veicolo, con una cartellina appoggiata sul suo tetto, sta accelerando su una strada orizzontale e rettilinea con accelerazione $\vec{A}$ di modulo $2\ \mathrm{m/s^2}$.

1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via.
2) Determinare, il moto della cartellina rispetto a terra e rispetto al veicolo quando il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15.



D1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via

Soluzione.



- Siccome la cartellina non scivola via, nel riferimento del veicolo $\vec{a}' = 0$
- Nel riferimento a terra

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t = \vec{a}_t = \vec{A}.$$

Nel sistema in moto dove la cartellina è ferma:

$$m\vec{a}' = 0 = \sum(\vec{F} + \vec{F}_{app}) = \sum(\vec{F} - m\vec{a}_t)$$

Proiettando lungo y
Proiettando lungo x

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ F_S - mA = 0 \end{cases} \quad mA = F_S \le \mu_S\, mg \quad \Longrightarrow \mu_S^{min} = \frac{A}{g} = 0.204$$

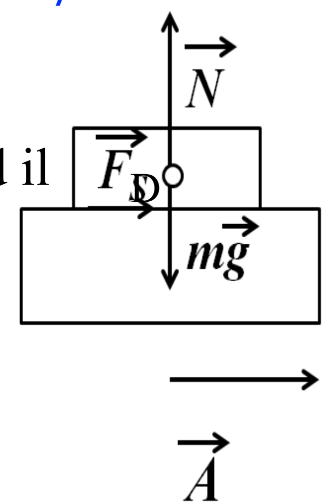
- Si noti che
  - l'accelerazione nel riferimento del veicolo è nulla
  - mentre nel riferimento a terra è $|\vec{A}| = 2\ m/s^2$

D2.1) Determinare il moto della cartellina rispetto a terra se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15

- Se $\mu_S < 0.204$, la cartellina scivola. L'accelerazione rispetto al riferimento a terra è determinata unicamente da $\vec{F}_D$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_D \qquad \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_D}{m} = \frac{\mu_D m g \hat{x}}{m} = 0.15 \times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{x} = 1.47\ \mathrm{m/s^2}\hat{x}$$

D2.2) Determinare il moto della cartellina rispetto al veicolo se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15



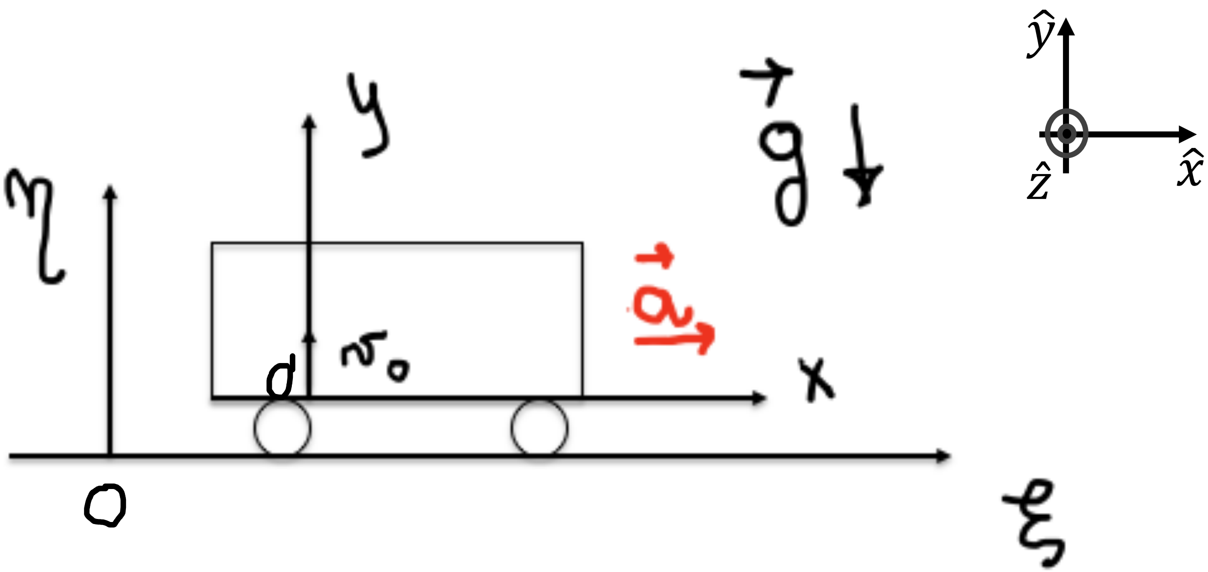
- Rispetto al riferimento del veicolo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} = (1.47 - 2)\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{x} = -0.53\ \mathrm{m/s^2}\hat{x}$$

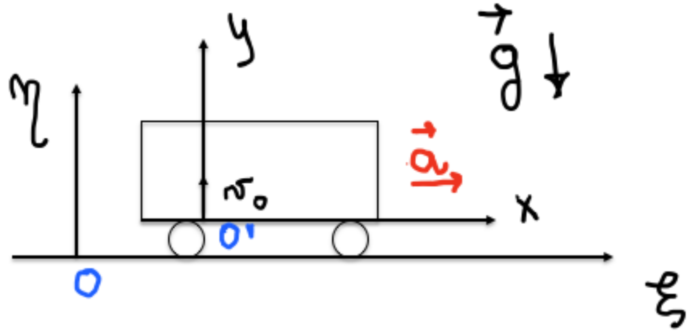
R2.2

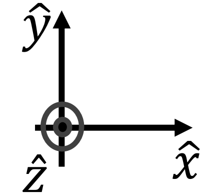
- rispetto a terra il moto è *uniformemente accelerato con accelerazione, in avanti, di modulo* $1.47\ m/s^2$
- rispetto al veicolo *è uniformemente accelerato con accelerazione, all'indietro (decelerato), di modulo* $0.53\ m/s^2$

Su un treno che si muove di moto rettilineo con accelerazione costante $a = 0.25\ m/\ s^2$ (rispetto alla terra) un chiodo, che si trova sul pavimento, viene lanciato con velocità $v_0 = 6\ m/\ s$ diretta verticalmente (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento. (14- 7. 77)



Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il chiodo sul pavimento del treno





$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t)$$
$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$$
$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$$

Dati

$$\vec{V}'(0) = \vec{v}_0 = v_0\hat{y}$$
$$\vec{R}'(0) = (0{,}0)$$
$$\vec{A}_t = \vec{a} = a\hat{x}$$

- SDR non inerziale solidale al treno come in figura

  da $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$

  $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{A}_t \; = -\,\mathrm{g}\,\hat{y} - a\hat{x}$

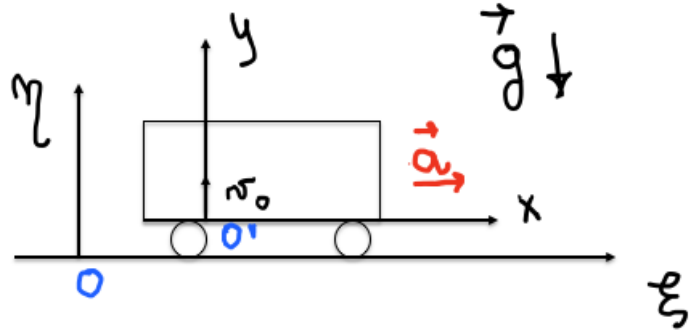
  - il moto è uniformemente accelerato sia in x che in y

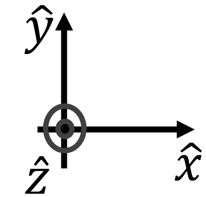
- da $\vec{A}' = -\,\mathrm{g}\,\hat{y} - a\hat{x}$

  $$\vec{V}' = -at\,\hat{x} + (v_0 - gt)\hat{y}$$

  $$\vec{R}' = (x', y') = -\frac{at^2}{2}\,\hat{x} + \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{y}$$

Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il chiodo sul pavimento del treno





$$\vec{R}' = (x', y') = -\frac{at^2}{2}\,\hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right)\hat{y}$$

sul pavimento del treno $\quad y'=0$

$$\Rightarrow t\left(-\frac{gt}{2} + v_0\right) = 0 \qquad \Rightarrow t^* = \frac{2v_0}{g}$$

t=0 scartata perchè corrisponde al lancio

$$x'(t^*) = -\frac{a{t^*}^2}{2} = -18.7\ \text{cm} \qquad \Rightarrow d = 18.7\ cm$$

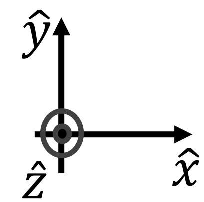
Determinare la traiettoria del chiodo come vista dalla terra

- SDR inerziale

  la traiettoria descritta da chiodo è una parabola infatti

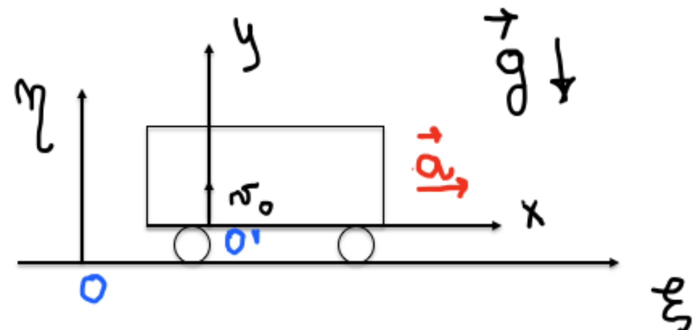
$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t) \qquad \vec{R}_{OO'}(t) = \vec{R}_{OO'}(0) + \vec{V}_{OO'}(0)t + \frac{at^2}{2}\,\hat{x}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= -\frac{at^2}{2}\,\hat{x} + \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right)\hat{y} + \frac{at^2}{2}\,\hat{x} + \vec{R}_{OO'}(0) + \vec{V}_{OO'}(0)t \\ &= \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right)\hat{y} + \xi(0)_{OO'}\,\hat{x} + \eta_{OO'}(0)\hat{y} + V_{xOO'}(0)t\hat{x} \\ &= (\xi(0)_{OO'} + V_{xOO'}(0)t)\hat{x} + \left(\eta_{OO'}(0) - \frac{gt^2}{2} + v_0 t\right)\hat{y}\end{aligned}$$



La traiettoria è quella di un grave lanciato al tempo t=0

- con velocità pari a $(V_{xOO'}(0), v_0)$
- da $(\xi(0)_{OO'}, \eta_{OO'}(0))$



Come deve essere: una volta lanciato il chiodo ha un accelerazione pari a $\vec{g}$

di conseguenza anche se non conosciamo

$\xi_{O'}(0)$ $v_{O'}^{\xi}(0)$ e $\eta(O')$

la traiettoria in η, ξ è parabolica!

coincide con la traiettoria di un grave

lanciato con velocità $\vec{v} = v_{O'}^{\xi}(0)\hat{\xi} + v_0\hat{\eta}$

da $\eta_{O'}(0)$ $\xi_{O'}(0)$

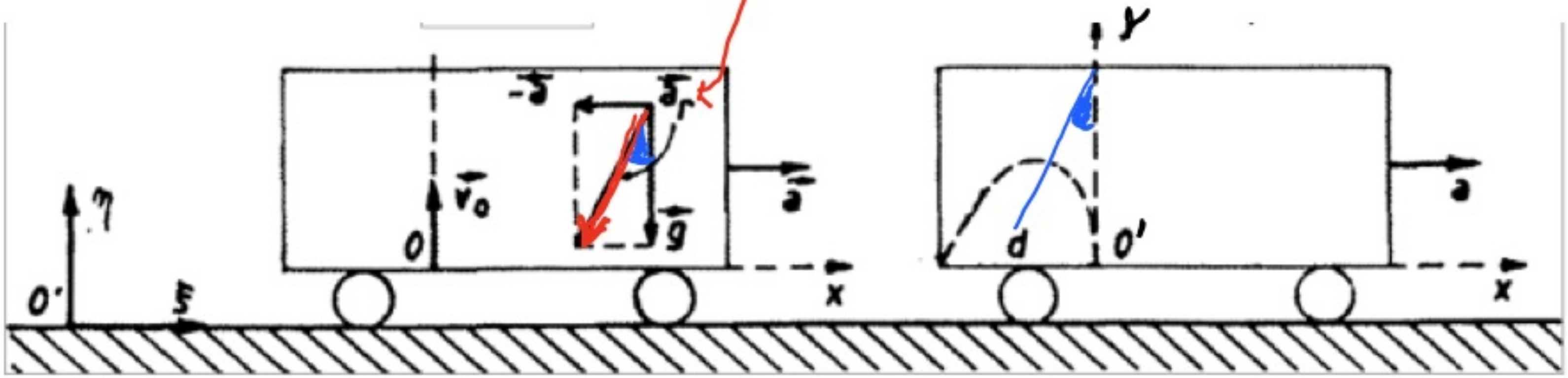
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$

nel nostro caso

$$\underset{\text{lab}}{\vec{g}} = \underset{\text{rel al treno}}{\vec{a}'} + \underset{\text{Treno}}{\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}}$$

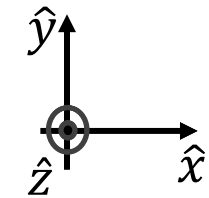
$$\boxed{\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}}$$



Determinare la traiettoria del chiodo come vista sul treno (O’xy)

La traiettoria in O’xy è ancora una parabola ma non è simmetrica rispetto all'asse y. Ciò risulta evidente se si considera che in O’xy (treno in moto accelerato) tutto va come se l'accelerazione di gravità cambi passando da $\vec{g}$ a $\vec{g} - \vec{a}$, di modulo pari a $\sqrt{g^2 + a^2}$ e ruotata di α= arctg(a/g) rispetto a g). La traiettoria parabolica sarà simmetrica rispetto all'asse indicato nella figura sopra a destra

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'e' la traiettoria vista da un osservatore sul treno?



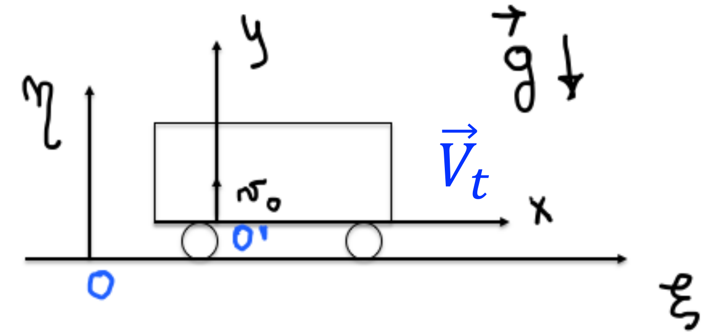
$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t)$

$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$

$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t$

Indichiamo con V_t la velocità del treno

$\vec{V}_t = V_t \, \hat{x}$



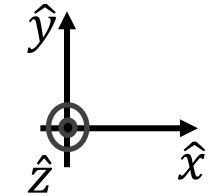
- $\vec{A} = \vec{g} = -g\hat{y} = \vec{A}'$
  - Nel sistema solidale al treno

$\vec{R}'(0) = (0{,}0) \qquad \vec{V}'(0) = (0, v_0) \qquad \vec{R}'(t) = (0, v_0 t - \frac{gt^2}{2})$

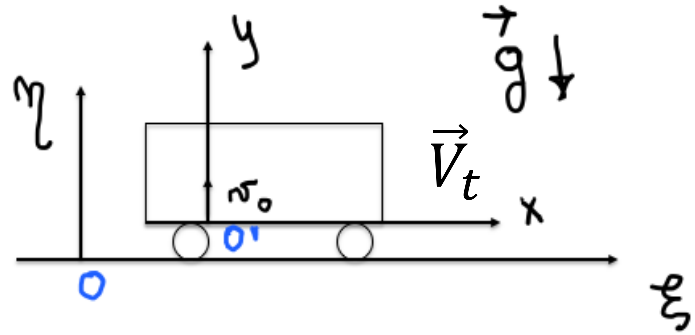
Moto rettilineo uniformemente accelerato il chiodo sale in verticale e ricade nel punto di partenza

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'e' la traiettoria vista da un osservatore a terra?

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_{OO'}(t)$$
$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_t$$
$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_t \qquad \Rightarrow \vec{A}_t = 0$$



$$\vec{V}_t = V_t\,\hat{x}$$
$$\vec{A} = \vec{g} = -\mathrm{g}\hat{y} = \vec{A}'$$



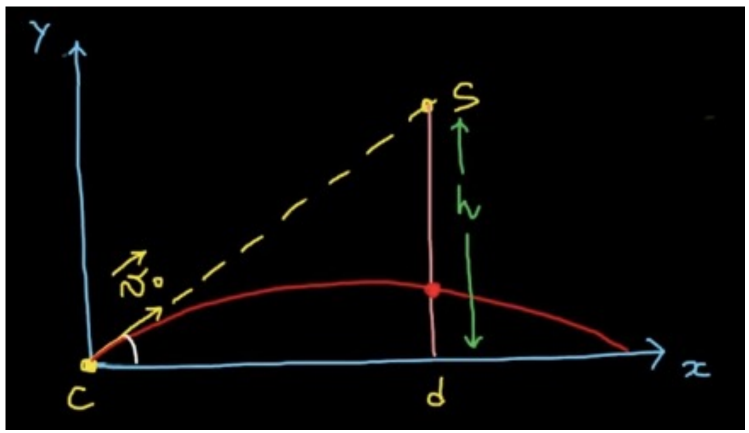
$$\vec{V}(0) = \vec{V}'(0) + \vec{V}_t = (V_t, v_0)$$
$$\vec{R}(0) = \vec{R}_{OO'}(0) = (x_0, y_0)$$
$$\vec{R}(\mathrm{t}) = (x_0 + V_t\mathrm{t}, y_0 + v_0\mathrm{t} - \frac{gt^2}{2})$$

La traiettoria è una parabola!

Il problema della scimmia e del cacciatore

Un cacciatore si trova nel punto (0,0) di un sistema di assi cartesiani ed intende sparare con un fucile ad una scimmia, che è appesa al ramo di un albero. Le coordinate della scimmia nel sistema di assi cartesiani sono (d, h).

La scimmia ha una prontezza di riflessi infinita, per cui si lascia cadere dal ramo (in caduta libera verticale) nell'istante in cui vede il lampo dello sparo.

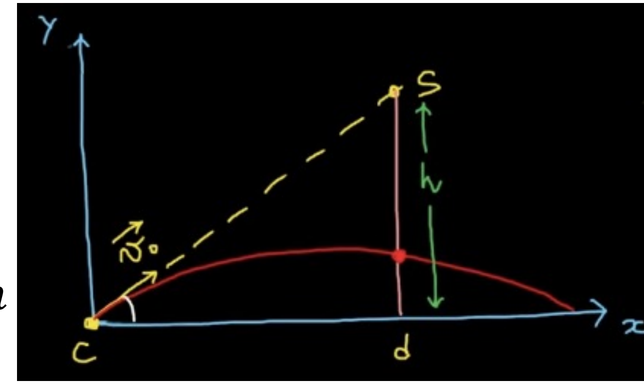


Trascurando la resistenza dell'aria e trattando sia il proiettile del fucile sia (soprattutto !) la scimmia come punti materiali, si determini l'angolo di sparo necessario al cacciatore per colpire la scimmia. Si esegua il calcolo prima nel SISTEMA INERZIALE DEL CACCIATORE e poi nel sistema NON INERZIALE DELLA SCIMMIA

Soluzione.

- Unica forza agente sia sul proiettile che sulla scimmia è la forza di gravità
- NEL SISTEMA INERZIALE le equazioni del moto per il proiettile e la scimmia sono:

$$m_P\vec{a}_P = m_P\vec{g};\ m_S\vec{a}_S = m_S\vec{g} \quad \Longrightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_S = \vec{g}$$



- condizioni iniziali

Proiettile

$$\begin{cases} x_P(0) = 0,\ y_P(0) = 0 \\ \vec{V}_P(0) = \vec{V}_0 = (V_0\cos\theta, V_0\sin\theta) \end{cases}$$

Scimmia

$$\begin{cases} x_S(0) = d,\ y_S(0) = h \\ \vec{V}_S(0) = (0,0) \end{cases}$$

$\vec{V}_0$,velocità iniziale del proiettile

θ, angolo formato dalla direzione di $\vec{V}_0$ con l'orizzontale

- Equazioni del moto

$$\begin{cases} x_P = V_0\cos\theta\, t \\ y_P = V_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

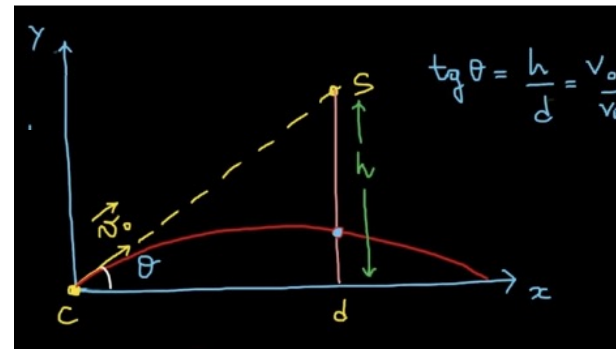
- Nell'istante t^* in cui il il proiettile colpisce la scimmia, la scimmia ed il proiettile hanno le stesse coordinate
  - Eguagliando x_P e x_S si determina t^*

$$t^* = \frac{d}{V_0\cos\theta}$$

$$\begin{cases} x_P = V_0 \cos\theta\, t \\ y_P = V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- Anche le coordinate y_P e y_S se la scimmia viene colpita sono le stesse
- l'istante t^{**} (che deve essere uguale a t^*) in cui le coordinate verticali sono eguali è

$$t^{**} = \frac{h}{V_0 \sin\theta} = t^* = \frac{d}{V_0 \cos\theta}$$



Imponendo l'eguaglianza fra t^*e t^{**} si determina θ :

$$\tan\theta = \frac{h}{d}$$

ovvero <u>la direzione di sparo è proprio quella definita dalla posizione iniziale della scimmia rispetto al cacciatore</u>. Si noti che il risultato è indipendente da $|\overrightarrow{V_0}|$ e conseguentemente anche dall'istante in cui il proiettile colpisce la scimmia.

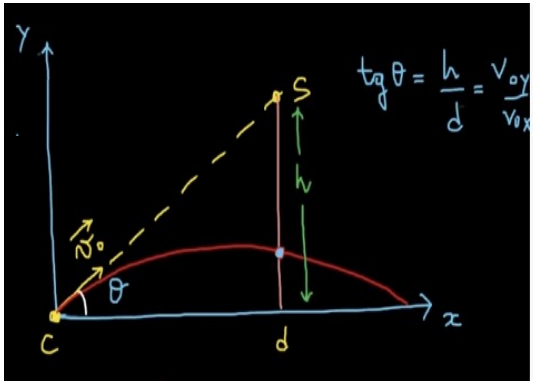
«se un cacciatore spara in direzione di una scimmia appesa ad un albero la quale per la paura si lascia cadere nell'istante in cui parte il colpo, questa verrà colpita in pieno dal proiettile»

SISTEMA NON INERZIALE

- l'osservatore "solidale con la scimmia" misura sul proiettile anche una forza apparente, dovuta alla caduta libera della scimmia.
- Applicando la seconda legge di Newton generalizzata questo osservatore scrive:

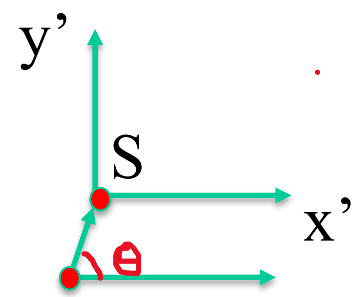
$$m_P \vec{a}'_P = \vec{F} + \vec{F}_{app} = m_P \vec{g} - m_P \vec{a}_t = m_P(\vec{g} - \vec{g}) = 0$$

in quanto, a causa della caduta libera della scimmia, <u>l'accelerazione di trascinamento del sistema non inerziale è proprio $\vec{g}$</u>



- il proiettile si muove quindi di moto rettilineo uniforme
- la scimmia?   è ferma!

per cui la direzione del proiettile è costante e può essere calcolata in un istante qualunque



- All'istante $t = 0$ nel sistema di riferimento della scimmia:
  coordinate del proiettile $(-d, -h)$
  coordinate della scimmia $(0,0)$
- la direzione con cui il cacciatore punta la scimmia è definita da un angolo θ tale che:

$$\tan\theta = \frac{(0-(-h))}{(0-(-d))} = \frac{h}{d}$$

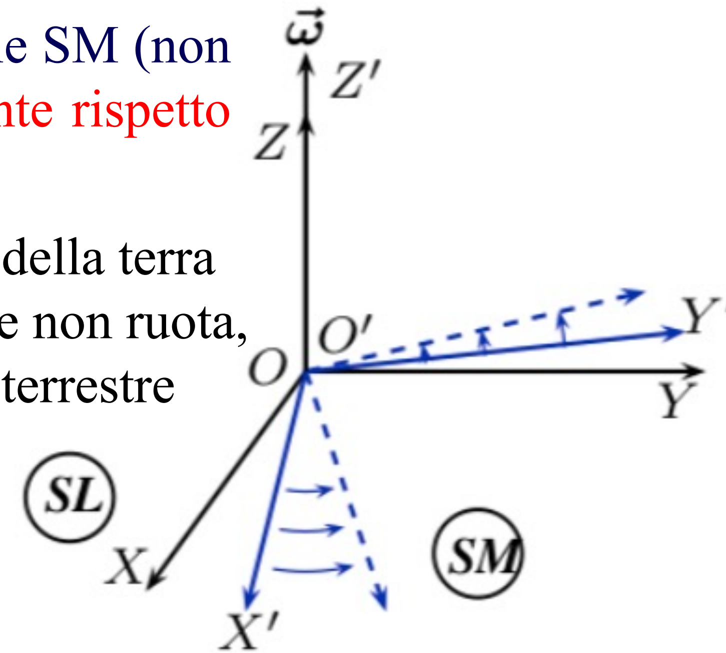
- come nel calcolo precedente

Si noti che <u>il calcolo nel sistema non inerziale è molto più semplice ed immediato a causa della cancellazione (non accidentale !) fra l'accelerazione dovuta alla forza di gravità e l'accelerazione di trascinamento</u>.

Sistemi di riferimento rotanti

- Consideriamo ora il caso in cui il sistema mobile SM (non inerziale) ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante rispetto al sistema inerziale SL come in figura:

Es. SL terna levogira con asse Zdiretto dal centro della terra verso il polo nord origine nel centro della terra che non ruota, SM solidale alla terra che ruota attorno all'asse Z terrestre

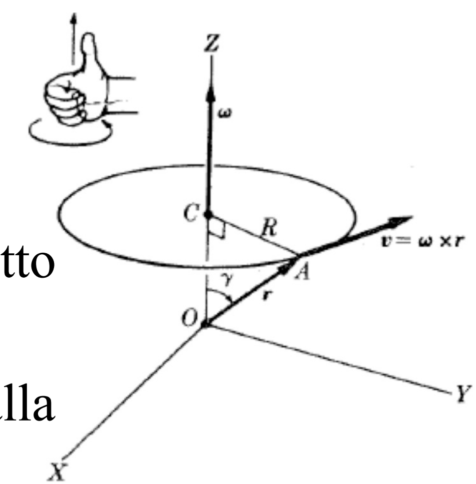


- Si può ricavare (senza dimostrazione) che **l'accelerazione di trascinamento** $\vec{a}_t$ assume una forma <u>inaspettata e non banale</u>:

$$\vec{a}_t = +2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' - \vec{\omega}\,\Lambda\,(\vec{\omega}\,\Lambda\vec{r}) = +2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' - \omega^2\vec{R}$$

- Per cui la relazione tra $\vec{a}$ e $\vec{a}'$ diviene

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t \quad = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' - \omega^2\vec{R}$$



- $-\omega^2\vec{R}$ è dovuto all'accelerazione (centripeta) di un oggetto solidale con SM e a distanza R dall'asse di rotazione
- $2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}'$(noto come accelerazione di Coriolis) dipende dalla velocità del punto PM nel sistema rotante !

Forze apparenti in un sistema rotante

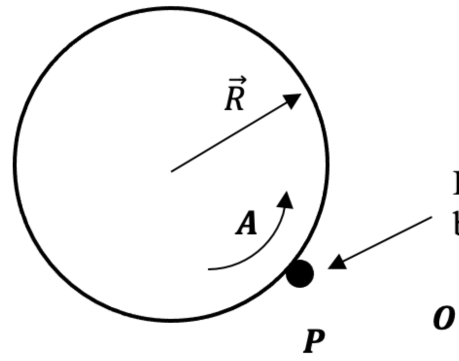
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t \quad = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' - \omega^2\vec{R}$$

- Nel sistema rotante dell'esempio per un corpo di massa m varrà

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_t \; = \sum \vec{F} + \vec{F}_{App} \quad \Rightarrow \vec{F}_{App} = \mathrm{m}(-2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' + \omega^2\vec{R})$$

La forza apparente sul punto materiale nel sistema mobile si manifesta come dovuta a due contributi una forza centrifuga e la forza di Coriolis

Esempio

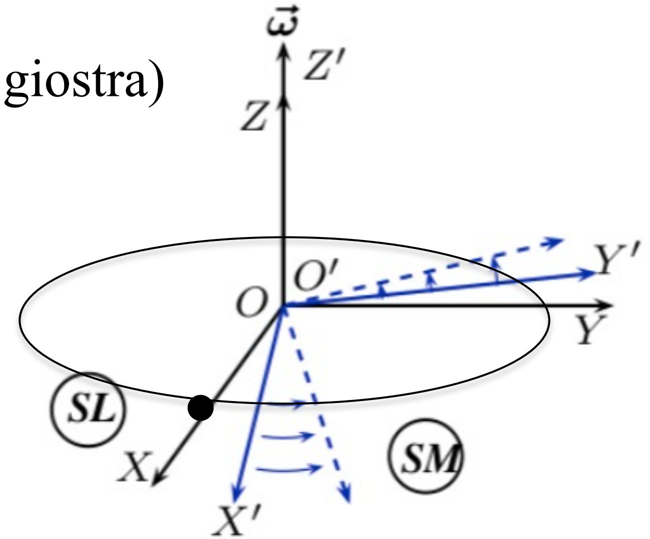


- Sistema O è ancorato al suolo $\Longrightarrow$ sistema inerziale SL
- Sistema A è solidale alla giostra $\Longrightarrow$ sistema NON inerziale SM

Le origini dei due sistemi sono coincidenti (centro della giostra)

- Persona P ferma a terra solidale a SL
- Persona P rispetto alla giostra (SM) compie un moto circolare uniforme

$$\Longrightarrow \vec{a}' = -\omega^2 \vec{R} \qquad \vec{v}' = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$$



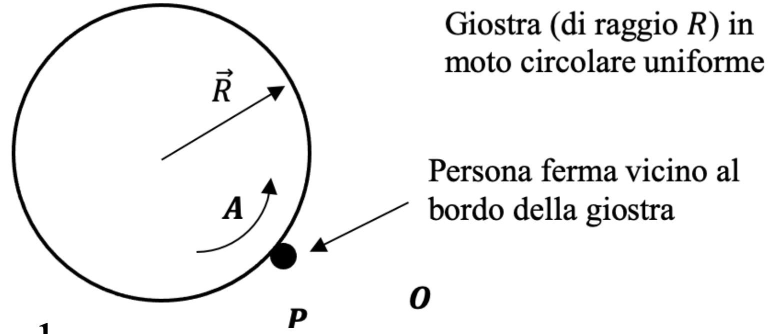
- rispetto SL P è sempre fermo, per cui

$$\vec{v} = 0 \qquad \vec{a} = 0$$

Verifichiamo la consistenza di queste osservazioni con la legge di composizione delle accelerazioni:

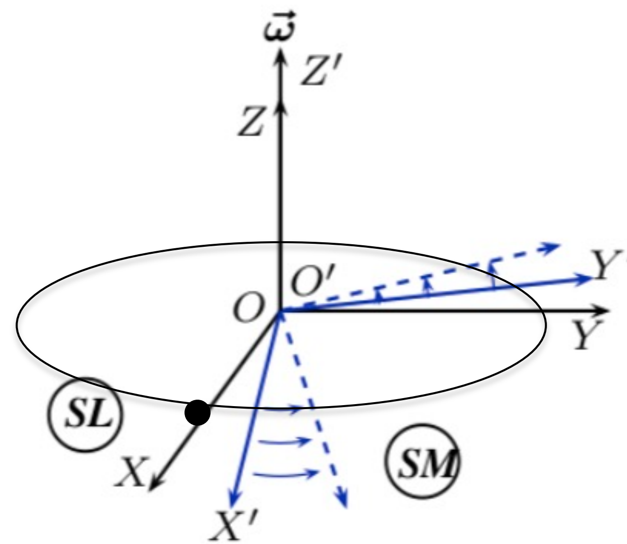
$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2\vec{R} = 0 - 2\vec{\omega} \wedge \left(-\vec{\omega} \wedge \vec{R}\right) + \omega^2\vec{R}$$
$$= -2\omega^2\vec{R} + \omega^2\vec{R} = -\omega^2\vec{R}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{a}' &= \vec{a} - 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}' + \omega^2\vec{R} \\
&= 0 - 2\vec{\omega}\,\Lambda\left(-\,\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{R}\right) + \omega^2\vec{R} \\
&= -2\omega^2\vec{R} + \omega^2\vec{R} = -\omega^2\vec{R}
\end{aligned}
$$



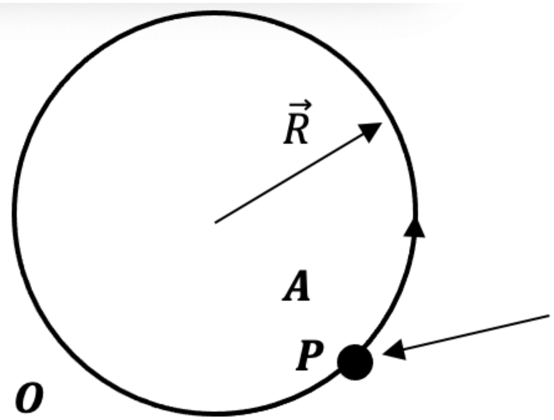
Infatti un osservatore che si trova sulla giostra vede la persona P muoversi di moto circolare uniforme e la sua accelerazione deve essere centripeta

- solo inserendo l'accelerazione di Coriolis si ottiene il risultato giusto

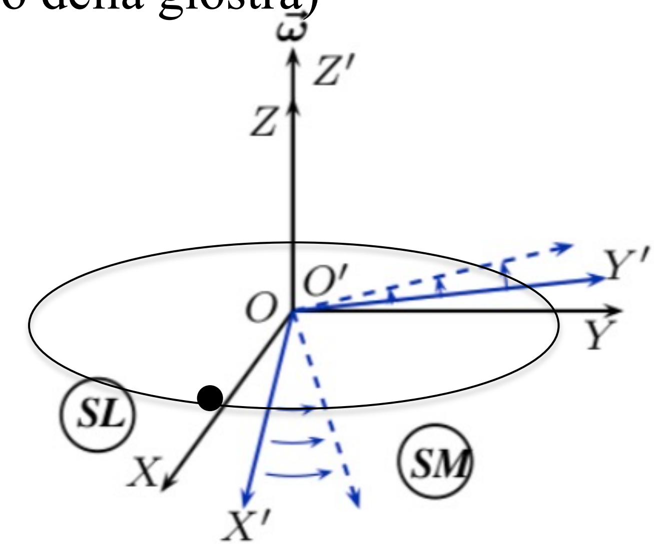


Esempio

- Sistema O è ancorato al suolo $\Longrightarrow$ sistema inerziale SL
- Sistema A è solidale alla giostra $\Longrightarrow$ sistema NON inerziale SM



- Le origini dei due sistemi sono coincidenti (centro della giostra)
- Persona P ferma sulla giostra solidale a SM
- Persona P rispetto SL compie un moto circolare uniforme



$$\Longrightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{R} \qquad\qquad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

- rispetto SM P è sempre fermo, per cui

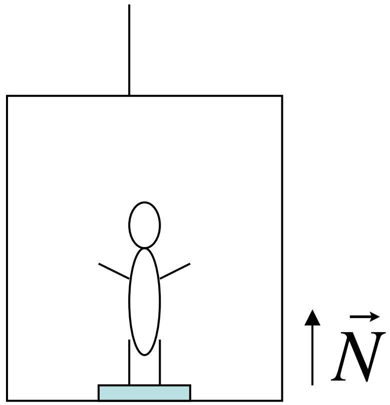
$$\vec{v}' = 0 \qquad\qquad \vec{a}' = 0$$

- Verifichiamo la consistenza di queste osservazioni con la legge di composizione delle accelerazioni:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega^2 \vec{R} \;\; = -\omega^2 \vec{R} + \vec{0} + \omega^2 \vec{R} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \text{OK !}$$

Esercizio quanto segna una bilancia su un ascensore accelerato ? Supponiamo che in un ascensore sia montata una bilancia, su cui è appoggiato un corpo di massa m. Se l'ascensore è fermo o in moto rettilineo uniforme, la bilancia "segna" un peso mg, corrispondente al modulo della reazione $\vec{N}$ della bilancia stessa che tiene il corpo in quiete: ma cosa succede se l'ascensore è accelerato con accelerazione $\vec{a}$? (non è precisato se il verso di $\vec{a}$ sia verso l'alto o verso il basso, cioè se l'ascensore stia salendo o scendendo). Risolvere l'esercizio sia in un sistema di riferimento inerziale a terra, sia in un sistema di riferimento non inerziale solidale all'ascensore.

- Nel sistema di riferimento INERZIALE



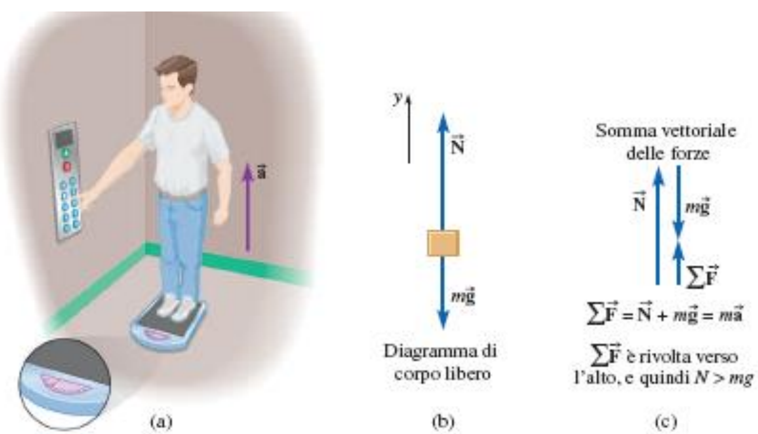
Il peso apparente è la forza
A cui si oppone la bilancia con la sua forza normale

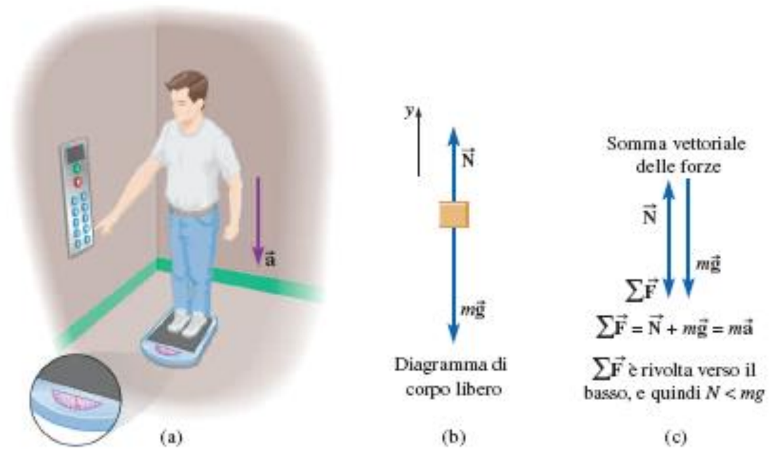
Peso apparente $P' = |\vec{N}| = N$

$$\sum F_y = N - mg = ma_y \Rightarrow N = mg + ma_y$$

$$P' = N = m(g + a_y)$$

Se l'ascensore accelera verso l'alto, il peso apparente è maggiore
Se verso il basso (a_y<0), peso apparente è minore
Se si rompe cavo $\Rightarrow a_y=-g \Rightarrow$ il peso apparente è nullo





- Nel sistema di riferimento NON INERZIALE

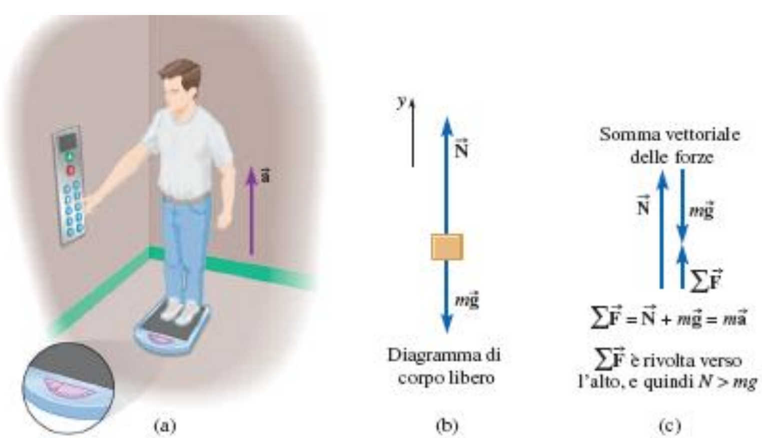
un osservatore solidale all'ascensore osserva il corpo di massa m fermo per cui, applicando la seconda legge di Newton in forma generalizzata, scrive l'equazione del moto del corpo come:

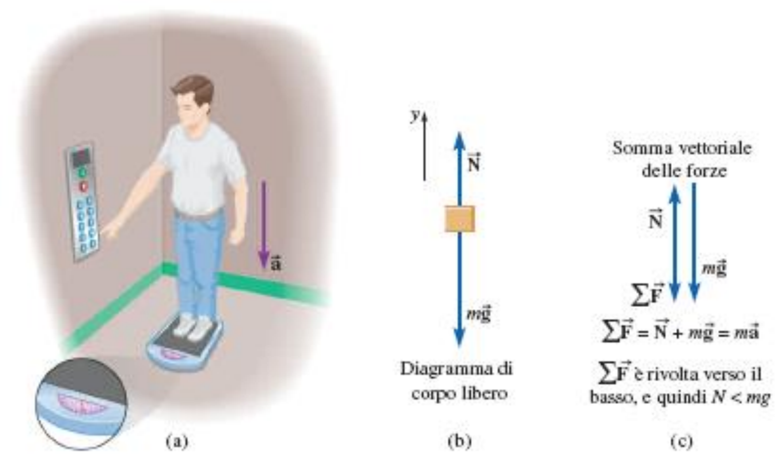
$$m\vec{a}' = 0 = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_t = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$$

$$N = mg + ma_y$$

esattamente come l'osservatore inerziale

Se l'ascensore accelera verso l'alto, il peso apparente è maggiore
Se verso il basso (a_y<0), peso apparente è minore
Se si rompe cavo ⇒ a_y=-g ⇒ il peso apparente è nullo





Sistema Rotante solidale alla Terra: quando può essere considerato inerziale?

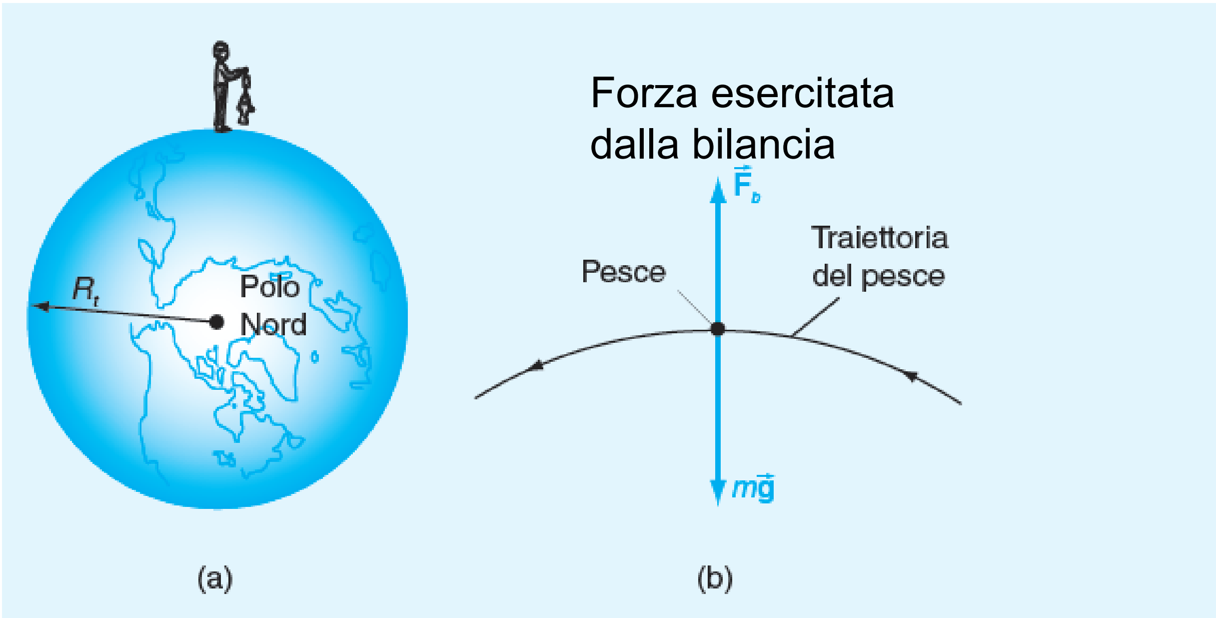


Figura 6.16
Diagramma di corpo libero per il pesce dell'Esempio 6.9 in un riferimento terrestre. L'intensità F_{app} della forza apparente è stata esagerata a scopo illustrativo.

In un sistema di riferimento inerziale solidale alla terra MA CHE NON RUOTA

$$\left(\sum_i F_{ri}\right) = +F_b - mg = ma_r = -m\frac{v^2}{R} = -m\omega^2 R = -mR\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$+F_b = mg - m\frac{v^2}{R} = m\left(g - \frac{4\pi^2 R}{T^2}\right) = mg\left(1 - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}\right) \cong mg\,0.9965$$

R=6372 km; T=86400 s $\Rightarrow$ $ma_R = m \cdot 0.0337$ N

La terra in generale non è un sistema di riferimento inerziale

$a_c = 4.4\ 10^{-3}\ m/s^2$

accelerazione **centripeta**
verso il Sole [moto attorno al sole]

$a_c = 3.37\ 10^{-2}\ m/s^2$

accelerazione **centripeta**
verso il centro della terra
[moto attorno all'asse terrestre]

sono **accelerazioni piccole** rispetto a **$g = 9.8\ m/s^2$**

- Può essere considerata un sistema inerziale quando

  le misure sono effettuate in tempi brevi tali da trascurare la rotazione terrestre e nelle vicinanze della superficie terrestre

$$\Rightarrow \vec{F}_{App} = \mathrm{m}(-2\vec{\omega}\,\Lambda\vec{v}' + \omega^2\vec{R}) \qquad \omega = 7.27\times10^{-5}\,rad/s$$

Stazione Spaziale Internazionale

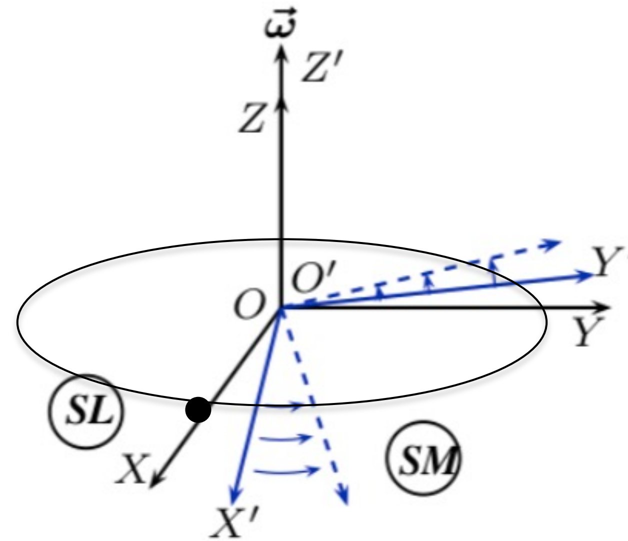
- Viaggia a una velocità media di 27600 km/h
- 15,5 orbite al giorno
- Mantenuta in orbita a un'altitudine compresa tra 330 e 410 km dal livello del mare.
- Abitata dal 2 novembre 2000, da un equipaggio variabile tra 2 e 6 astronauti.

- Massa 419455 kg
- Volume abitabile 425 m^3
- Lunghezza 72,8 m
- Altezza 20 m
- Larghezza 108,5 m

Esercizio (assenza di peso sulla stazione spaziale).

Un astronauta all'interno dell'ISS (International Space Station), in orbita circolare intorno alla Terra, sale su una bilancia e mentre è fermo sulla bilancia verifica che essa segna zero. Come mai ? È rilevante la quota a cui orbita la stazione spaziale ? E la sua velocità ?

Soluzione



- l'ISS si muove lungo una traiettoria circolare
  - xyz SRI, origine in (0,0,0) piano dell'orbita su xy
  - $y'\,z'$ SRM, sistema rotante solidale ISS origine coincidente con origine SL, rotante attorno all'asse z = z' con T=T_{orbita}
- Accelerazione di trascinamento:

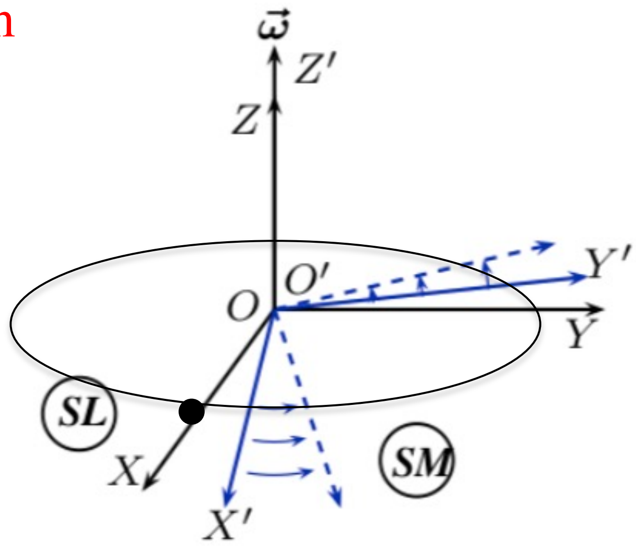
$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}' - \omega^2\vec{R}$$

dove

- $\vec{\omega}$ è la velocità angolare di rotazione dell'ISS solidale al sistema rotante
- $\vec{v}'$ è la velocità dei corpi all'interno dell'ISS misurati nel sistema mobile
- $\vec{R}$ è il raggio vettore dal centro della Terra all'ISS

l'astronauta sale su una bilancia e mentre è fermo sulla bilancia verifica che essa segna zero. Come mai ?

- L'astronauta è fermo sulla bilancia in SM e ha massa m



$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}' - \omega^2\vec{R} \qquad \Longrightarrow \vec{a}_t = -\omega^2\vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

- l'equazione del moto nel sistema di riferimento non inerziale dell'ISS, dove l'astronauta è fermo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$m\vec{a}' = 0 = m\vec{g}(R) + \vec{N} - m\vec{a}_t$$

$$\Longrightarrow \vec{N} = m\left(\vec{a}_t - \vec{g}(R)\right) = m\left(-\omega^2\vec{R} - \vec{g}(R)\right)$$

- $\vec{g}(R)$ è l'accelerazione di gravità a distanza R dalla Terra

$$\vec{g}(R) = -\frac{GM}{R^2}\hat{R}$$

$$\Longrightarrow \vec{N} = m\left(-\omega^2\vec{R} + \frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = m\left(-\omega^2\vec{R} + \frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = 0!$$

in quanto l'ultimo termine è nullo per la condizione di esistenza dell'orbita circolare dell'ISS

$$-m\omega^2\vec{R} = -m\omega^2\,\mathrm{R}\hat{R} \quad = -\frac{GmM}{R^2}\hat{R}$$

$$\Longrightarrow \vec{N} = m\left(-\omega^2\vec{R} + \frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = m\left(-\omega^2\vec{R} + \frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = 0!$$

- Essendo la reazione vincolare nulla non c'è forza peso!
- La bilancia segna 0 ($\vec{N} = 0$) indipendentemente dalla quota orbitale e dalla velocità dell'ISS
- Nel sistema del laboratorio, come deve essere:

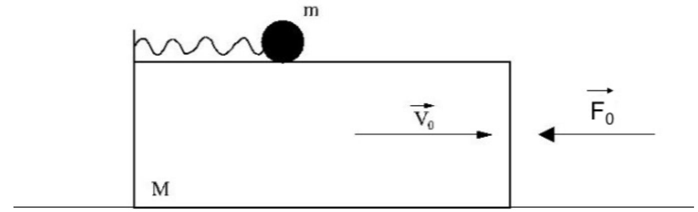
$$\vec{a}_t = 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}' - \omega^2\vec{R} \qquad \Longrightarrow \vec{a}_t = -\omega^2\vec{R}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$

$$m\vec{g}(R) + \vec{N} = 0 + m\vec{a}_t = 0 + \left(-\mathrm{m}\frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = -m\omega^2\vec{R} = m\vec{a}$$

$$\Longrightarrow \vec{N} = 0$$

Es 1 Esame del 19/2/2019



Un blocco di massa M è appoggiato su un piano orizzontale, dove può muoversi senza attrito. Una pallina di massa m, assimilabile ad un punto materiale, è collegata ad un estremo del blocco tramite una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0, come in figura. La pallina può muoversi senza attrito sul blocco. All'inizio il sistema trasla con velocità costante v_0. Da un certo istante (t=0) una forza opportuna F_0, non necessariamente costante, fa frenare il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante. Sapendo che nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, che nello stesso istante la molla ha lunghezza $2l_0$, e che da quel momento (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo, calcolare:

1. La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0

   $v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....

2. Il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

   $L_{frenante} =$ ....

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$l_{min} =$ ....

Dati: $M = 0.4$ Kg, $m = 0.1$ Kg, $k = 2$ N/m, $l_0 = 40$ cm

- blocco massa M su un piano orizzontale, senza attrito.
- pallina di massa m (p.m), collegata tramite molla ideale (k e l_0), al blocco come in figura. No attrito tra blocco e pallina.
- All'inizio il sistema trasla con velocità v_0 =costante.
- Da un certo istante (t=0) una forza opportuna F_0, non necessariamente costante, frena il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante.
- nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, nello stesso istante, la molla ha lunghezza $2l_0$,

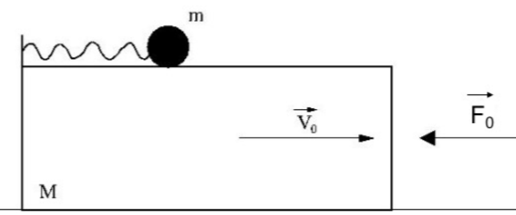
(per $t > \tau$) il blocco rimane fermo.

Calcolare

- La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0

$v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....

Dati



- M =0.4 kg
- m=0.1 kg
- k=2N/m
- l_0 =40 cm=0.4 m
- per t = 0,
  - la velocità relativa della pallina rispetto al blocco $\vec{v}_{rel}(0) = 0$
  - lunghezza della molla l_0

$$\vec{a}(0) = \vec{a}'(0) + \vec{a}_T(0)$$

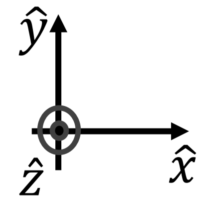
$$\vec{a}_T(0) = 0 \Longrightarrow \vec{a}(0) = \vec{a}'(0) = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{v}'(0) = \vec{v}_{rel}(0)$$

$$\vec{v}_{rel}(0) = 0 = \vec{v}(0) - \vec{v}_T(0) = 0$$

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - velocità relativa della pallina rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

- Calcolare La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0 : $v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....



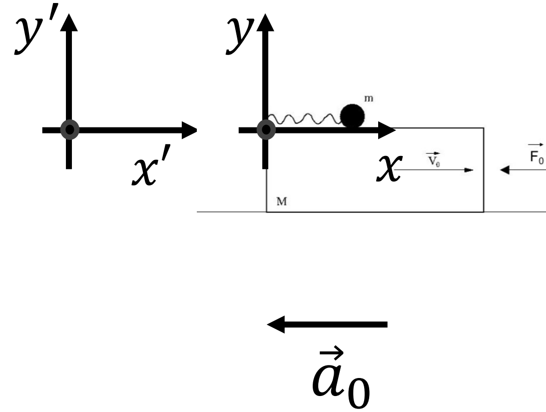
- Indichiamo con xy il sistema di riferimento mobile (SM) solidale alla molla e con x'y' quello solidale al piano (SI)

L'equazione della molla in SM

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\mathrm{x} - l_0) + \mathrm{m}a_0$$

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\mathrm{x} - l_0) + \mathrm{m}a_0 = -k\left(\mathrm{x} - l_0 - \frac{\mathrm{m}a_0}{k}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2\left(\mathrm{x} - (l_0 + \frac{ma_0}{k})\right) \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



- Cambio di variabile: $y = \mathrm{x} - (l_0 + \frac{ma_0}{k})$

$$\dot{y} = \dot{x} \qquad \ddot{y} = \ddot{x}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\,\omega^2 y \qquad \rightarrow \mathrm{y(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Longrightarrow x(t) = y(t) + l_0 + \frac{ma_0}{k} = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{ma_0}{k}$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{ma_0}{k}$

- Condizioni iniziali:
  - per t = 0,
    - la velocità relativa della pallina rispetto al blocco $\vec{v}_{rel}(0) = 0$
    - lunghezza della molla l_0

$\dot{x}(0) = 0 \qquad \Rightarrow -\omega A\sin(\phi) = 0 \qquad \Rightarrow \phi = 0$

$x(0) = l_0 \qquad = A\cos\,(\phi = 0) + l_0 + \frac{ma_0}{k} \qquad \Rightarrow A = -\frac{ma_0}{k}$

$$\Longrightarrow\ x(t) = -\frac{ma_0}{k}\cos(\omega t) + l_0 + \frac{ma_0}{k} = \frac{ma_0}{k}(1 - \cos(\omega t)) + l_0$$

nota: la massa oscilla attorno $l_0 + \frac{ma_0}{k}$ e l'ampiezza dell'oscillazione è $\frac{ma_0}{k}$

$$\Longrightarrow \; x(t) = \frac{m a_0}{k}(1-\cos(\omega t)) + l_0$$

- Calcolare La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0 :

$v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - velocità relativa della pallina rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

$$\dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow \frac{m a_0}{k}\omega \sin(\omega\tau) = 0$$

$$\dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow \sin(\omega\tau) = 0 \Rightarrow \omega\tau = \pi$$

$$x(\tau) = 2l_0 \Rightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{m a_0}{k}(1-\cos\omega\tau)$$

poichè $\quad \omega T = 2\pi \qquad \Rightarrow \tau = T/2 \quad = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$x(\tau) = 2l_0 \Rightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{m a_0}{k}(1-\cos\pi)$$

$$\Rightarrow l_0 = 2\frac{m a_0}{k}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{k l_0}{2m}$$

$a_0 = \text{cost}!$ per cui per il blocco

$$v(t) = v_0 - a_0 t \Rightarrow \text{per } t = \tau \quad v(\tau) = 0 \Rightarrow v_0 = a_0\tau$$

$\tau = 0.7$ s, $a_0 = 4$ m/s², $v_0 = 2.8$ m/s

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

$L_{frenante} =$ ....

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - velocità relativa della pallina rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

dal teorema delle forze vive

$$T_f - T_i = L_C + L_{NC}$$

$$T_f - T_i = U_i - U_f + L_{frenante} \Rightarrow L_{frenante} = T_f - T_i + U_f - U_i$$

$$T_f = 0 \quad , \quad T_i = \frac{1}{2}(m+M)v_0^2$$

$$U_i = \frac{1}{2}K(l_0 - l_0)^2 \quad , \quad U_f = \frac{1}{2}K(2l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2}Kl_0^2$$

$$L_{frenante} = -\frac{1}{2}(m+M)v_0^2 + \frac{1}{2}Kl_0^2 = -18\,J$$

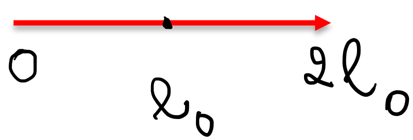
nota $\quad v_f^{pallina} = v_{rel}^{palla} + v_{blocco} = 0 \quad$ per $t = \tau$!

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$l_{min} =$ ....

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - velocità relativa della pallina rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

$t = \tau$



Se il blocco da $t = \tau$ è fermo (è tenuto fermo) la molla inizia ad oscillare attorno a l_0 per cui

$l_{min} = 0$