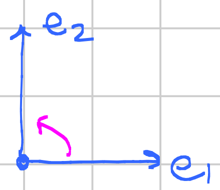
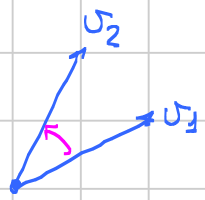
## Orientazione di una base

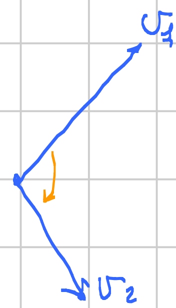
In $\mathbb{R}^2$




$e_1 = (1,0)$
$e_2 = (0,1)$




$v_1 = (2,1)$
$v_2 = (1,2)$

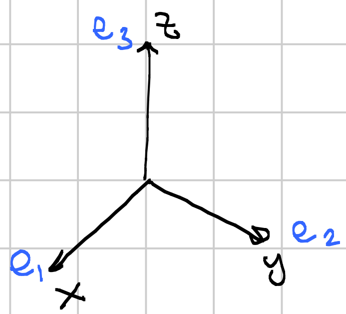



$v_1 = (2,2)$ $\quad v_2 = (1,-2)$

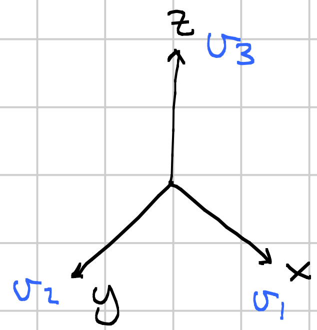
Idea: le prime 2 basi sono orientate allo stesso modo, la terza al contrario

Più rigorosamente: nelle prime 2 basi il vettore $v_1$ si sposta sul secondo con rot. ANTIORARIA di un angolo $< 180°$

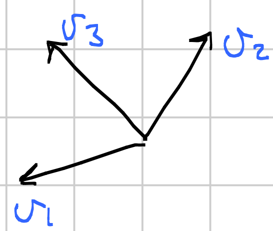
In $\mathbb{R}^3$:




Orientazione "positiva"




Orientazione "negativa"




Orientazione ?

Algebricamente basta guardare il Det della matrice di cambio base canonica $\rightsquigarrow$ strana e in base al segno del Det si decide l'orientazione.

Esempi

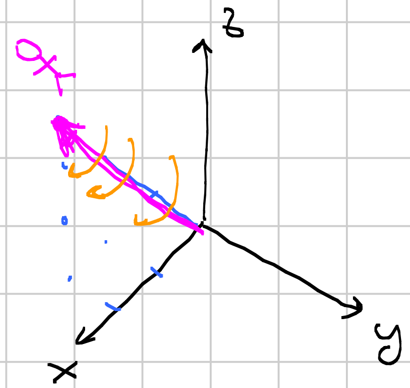
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad + \qquad\qquad -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \qquad\qquad -$$

Esempio 1 Scrivere la rotazione intorno all'asse generato da $(2,-1,3)$ di un angolo di $90°$ in senso orario per un omino messo in piedi nella direzione di $(2,-1,3)$




Scelgo una base $v_1, v_2, v_3$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$ in cui $v_3 = (2,-1,3)$ a meno di costanti positive

Scelgo $v_1 = (1,2,0)$ in modo da essere $\perp$ a $v_3$ e produco $v_2$ con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-6, 3, 5) = v_2 \qquad (\perp \text{ a } v_1 \text{ e } v_3)$$

Base ortogonale: $v_1 = (1,2,0)$

$v_2 = (-6,3,5)$

$v_3 = (2,-1,3)$

$$\begin{matrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{matrix}$$

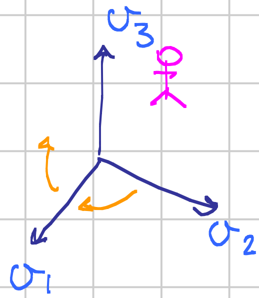
$\uparrow$

In questa base so scrivere la rotazione

Domandone: come metto i segni

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Per stabilire i segni devo capire l'orientazione della base $v_1, v_2, v_3$. Calcolo il determinante




$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Det}: \; 9 + 20 + 36 + 5 > 0$$

⇝ La base $v_1, v_2, v_3$ è messa come quella canonica

I segni corretti sono quelli che corrispondono a $-90°$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1$ va in $-v_2$ $\qquad$ $v_2$ va in $v_1$

La trasformazione richiesta è

$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Dove $M$ è la matrice di cambio base dalla $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla canonica

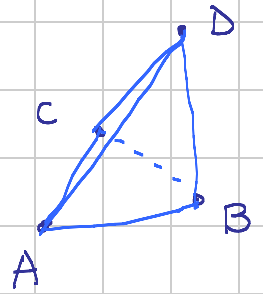
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$v_1$ normalizzato

— o — o —

# Volume del tetraedro

Dati 4 p.ti nello spazio, determinare il volume del tetraedro (piramide a base triangolare) che ha i 4 p.ti come vertici.




**1° modo** : $Vol = \frac{1}{3}$ Area base · altezza

Area base = area triangolo ABC
Altezza : distanza di D dal piano ABC

**2° modo** : $Vol = \frac{1}{6}$ Det. della matrice $3 \times 3$ che ha come righe o colonne i vettori

$B - A \qquad C - A \qquad D - A$

(posso sottrarre uno qualunque dei 4)
(se viene negativo si mette il valore assoluto)

[ Come esercizio provare in un caso specifico che vengano uguali ]

**3° modo** Costruiamo la matrice $4 \times 4$ usando i 4 vettori dati come righe e aggiungendo in fondo una colonna di 1

$$\begin{matrix} \boxed{\quad A \quad} & 1 \\ \boxed{\quad B \quad} & 1 \\ \boxed{\quad C \quad} & 1 \\ \boxed{\quad D \quad} & 1 \end{matrix} \qquad \frac{1}{6}\,|Det|$$

Perchè funziona? Se lavoro alla Gauss ortodosso sulla matrice il Det non cambia

Lavorando in questo modo la matrice diventa

$$\begin{array}{c c} \boxed{A} & 1 \\ \boxed{B-A} & 0 \\ \boxed{C-A} & 0 \\ \boxed{D-A} & 0 \end{array}$$

A meno del segno, il Det della matrice $4\times 4$ è uguale al Det della matrice $3\times 3$ in basso a sx, che è quella del 2º modo

<u>Esercizio</u> Consideriamo le 2 rette

$$(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1} \qquad (0,1,2)+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$$

① Determinare la pos. relativa

Poiché $v_1$ e $v_2$ sono lin. indip., possono essere solo incidenti o sghembe.
Per vedere se sono incidenti, impongo uguaglianza

$$(1,0,1)+t(2,3,1) = (0,1,2)+s(1,0,2)$$

$$t(2,3,1)-s(1,0,2) = (-1,1,1)$$

Quindi sono incid. se e solo se $(-1,1,1)$ è comb. lin. dei primi 2. Basta fare

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} \quad \begin{array}{l} =0 \rightsquigarrow \text{incidenti} \\ \neq 0 \rightsquigarrow \text{sghembe} \end{array}$$

② Determinare la distanza fra le 2 rette

1° modo : Scrivo distanza al $\square$ tra un p.to della 1ª ed un p.to della 2ª.
Viene un' espressione di 2° grado in $t$ ed $s$, che p.to a scrivere come somma di quadrati.
A quel p.to vedo quando è minimo.

2° modo : cerco p.to P sulla prima retta
" " Q sulla seconda retta

tali che

$P-Q$ è $\perp$ ai 2 vettori direzione

A quel p.to la distanza tra P e Q è la distanza richiesta.

— o — o —