[redacted]

Prova di Comunicazioni Numeriche

7 Febbraio 2013

Es. 1 - Si consideri lo schema a blocchi in Fig.1 e siano i segnali e le risposte impulsive in gioco così definite:

- $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\left(1 - \frac{4|t-nT_0|}{T_0}\right) rect\left(\frac{2(t-nT_0)}{T_0}\right)$
- $x_2(t) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{3t}{T_0}\right)$
- $h(t) = \frac{3}{T_0} sinc\left(\frac{3t}{T_0}\right)$.
- Si calcoli l'espressione analitica del segnale in uscita $y(t)$ insieme alla sua potenza media ed alla sua energia.

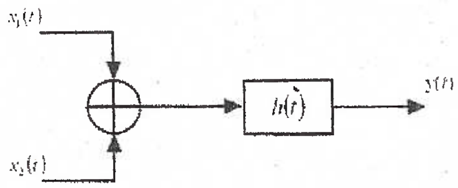


Fig. 1

Es. 2 - In un sistema di comunicazione numerico PAM in banda passante il segnale trasmesso è $s(t) = \sum_k x[k]\, p(t-kT) \cdot cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{3}\right)$, dove i simboli $x[k] \in A_s = \{-2, 1\}$ sono indipendenti ed equiprobabili. L'impulso sagomatore è $p(t) = 2Bsinc(2Bt) + Bsinc\left(2B\left(t - \frac{1}{2B}\right)\right) + Bsinc\left(2B\left(t + \frac{1}{2B}\right)\right)$, $f_0 \gg B$, $T = \frac{1}{B}$. Il canale di propagazione è ideale, quindi $c(t) = \delta(t)$ e la DSP del rumore in ingresso al ricevitore è $S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left[rect\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$. Il filtro in ricezione $h_R(t)$ è un filtro passa basso ideale di banda B. La soglia di decisione è $\lambda = 0$.

Calcolare:

1) L'energia media per intervallo di segnalazione del segnale trasmesso, E_s
2) Calcolare la potenza di rumore in uscita al filtro in ricezione, P_{n_u}
3) Calcolare la probabilità di errore sul bit, $P_E(b)$

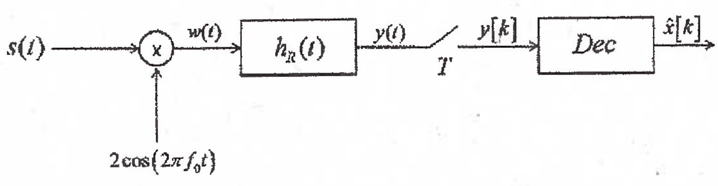


Fig. 2

Esercizio 1

$$x_1(t) = \sum_N x_0(t - NT_0)$$

$$X_1(f) = \sum_k X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$X_k = X_0\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$X_1(f) = \sum_k X_k \quad \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

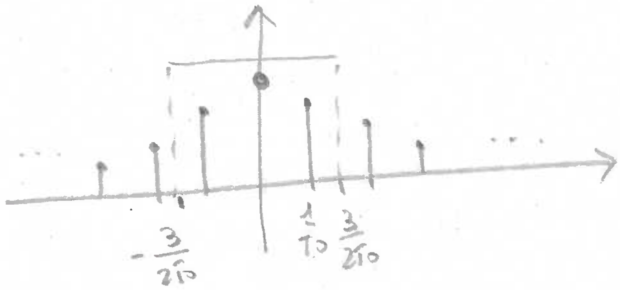
$$X_k = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$x_0(t) = A\left(1 - \frac{4|t|}{T_0}\right) \text{rect}\left(\frac{2t}{T_0}\right)$$

$$X_0(f) = A\frac{T_0}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right)$$

$$X_k = \frac{A}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)$$

$$X_1(f) = \frac{A}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \quad \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



$$X_2(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{3/T_0}\right) = H(f)$$

$$z(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$Z(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$Y(f) = \left[X_1(f) + X_2(f)\right] \cdot H(f)$$

$$Y(f) = \frac{A}{4}\,\delta(f) + \frac{A}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)\left[\delta\left(f-\frac{1}{T_0}\right) + \delta\left(f+\frac{1}{T_0}\right)\right] +$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3/T_0}\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{4} + \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) + \frac{3}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3t}{T_0}\right)$$

$$y_1(t) = \frac{A}{4} + \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)$$

$$y_2(t) = \frac{3}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3t}{T_0}\right)$$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

L'energia di $y_1(t)$ e' infinita perché $y_1(t)$ e' un segnale periodico quindi

$E_y = \infty$ $\quad E_{y_1} = \infty \quad E_{y_2} < +\infty \quad \Rightarrow \quad E_y = +\infty$

La potenza di $y_1(t)$ e' finita mentre la potenza di $y_2(t)$ e' nulla perché $y_2(t)$ e' un segnale ad energia finita. Quindi

$$P_y = P_{y_1} = \frac{A^2}{16} + \frac{A^2}{8}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$P_{y_1} < +\infty \quad P_{y_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_y = P_{y_1}$

Esercizio 2

1) $a_1(t) = 1 \cdot p(t) \cdot \cos(2\pi \beta t - \pi/3)$

$a_{-2}(t) = (-2) \cdot p(t) \cdot \cos(2\pi\beta t - \pi/3)$

$$E_a = \frac{1}{2} \cdot E_{a1} + \frac{1}{2} E_{a2}$$

$$E_{a1} = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) \cdot \cos^2(2\pi\beta t - \pi/3)\, dt =$$

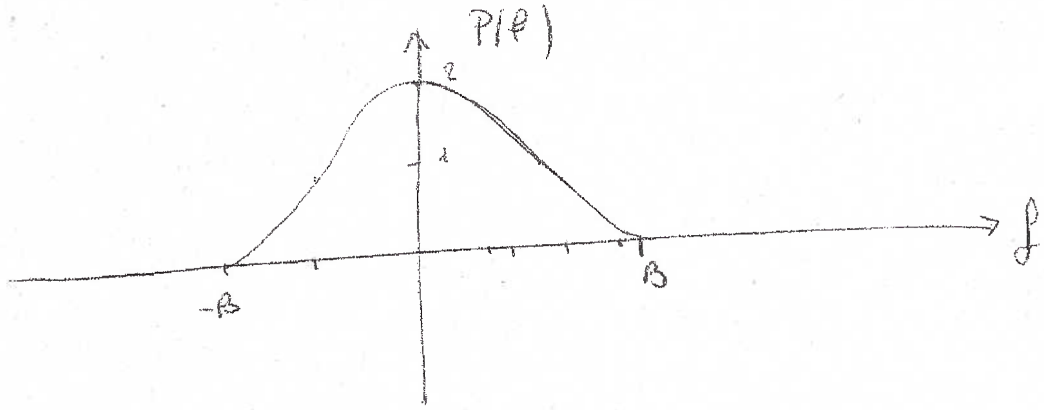
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) \cdot \frac{1}{2}\left[1 + \cos(4\pi\beta t - 2\pi/3)\right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi\beta t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\beta t) \cdot \sin(2\pi/3)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{+\infty} p^2(t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot E_p$$

$$P(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-i2\pi f/2B} + \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{+i2\pi f/2B}$$

$$= \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{B}\right)$$



$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)^2 \, df = 3B$$

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \frac{E_p}{2} + \frac{1}{2} (-2)^2 \cdot \frac{E_p}{2} = \frac{3B}{4} + 3B = \frac{15B}{4}$$

2) $w(t) = w_s(t) + w_n(t)$

$w_s(t)$ e' la componente di segnale utile e

$w_n(t)$ e' la componente di rumore.

$$w_n(t) = n(t) \cdot 2\cos(2\pi f t)$$

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

$$S_{w_n}(f) = S_N(f) \otimes \left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \right]$$

$$= \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_0}{B}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_0}{B}\right)\right]$$

$$w_u(t) = w_n(t) \otimes h_R(t)$$

$$S_{w_u}(f) = S_{w_n}(f) \cdot H_R(f) = N_0 \, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$P_{w_u} = \sigma^2_{w_u} = N_0 B$$

3) $w_n(t) = n(t) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t) =$

$$= 2 \sum_k x[k]\, p(t-kT) \cos\left(2\pi f_0 t - \pi/3\right) \cos\left(2\pi f_0 t\right) =$$

$$= 2 \sum_k x[k]\, p(t-kT) \left[\cos(\pi/3) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right) + \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t) \cdot \sin(\pi/3) \right]$$

$$\cos^2(2\pi f t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f t)$$

$$y(t) = \sum_k x[k]\, h(t-kT) \cdot \cos(\pi/3)$$

la risposta impulsiva del sistema è

$$h(t) = p(t) \otimes h_R(t)$$

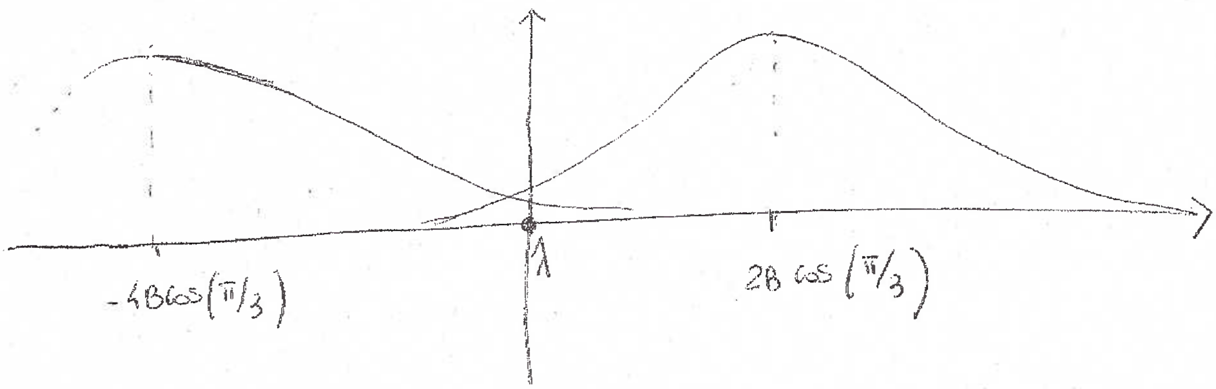
$$H(f) = P(f)\, H_R(f) = P(f)$$

$H(f)$ soddisfa il criterio di Nyquist e

$$h(0) = 2B$$

quindi all'uscita del campionatore

$$y[k] = 2B \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) x[k]$$



$$P_E(b) = \frac{1}{2}\, Q\left(\frac{2B\cos(\pi/3)}{\sqrt{N_0 B}}\right) + \frac{1}{2}\, Q\left(\frac{4B\cos(\pi/3)}{\sqrt{N_0 B}}\right)$$