Esercizio

Una particella si muove lungo una retta seguendo la legge oraria

$$x(t) = u\,t\,(1 - 2\sin\omega t) \tag{1}$$

con $u = 3\,\mathrm{m/s}$ e $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$.

1. Determinare in quali istanti la particella si trova nell'origine;
2. Disegnare la legge oraria;
3. Determinare la velocità media nell'intervallo $[0.5\,\mathrm{s}; 1.0\,\mathrm{s}]$ e confrontarla con la velocità istantanea nel punto medio di tale intervallo;
4. Calcolare l'accelerazione istantanea nell'istante $t_1 > 0$ in cui la particella torna per la prima volta nell'origine;
5. Stabilire se si tratta di un moto armonico.

SOLUZIONE

1. Gli istanti t in cui la particella si trova nell'origine ($x = 0$) sono determinati dalle soluzioni dell'equazione:

$$x(t) = 0$$

Ricordando che

$$x(t) = u\,t\,(1 - 2\sin\omega t) \tag{2}$$

le soluzioni sono

$$\begin{array}{lll} i) & t = 0 & \\ ii) & 1 - 2\sin\omega t = 0 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \omega t_n & = & \frac{\pi}{6} + 2\pi n & n = 0,1,2\ldots \\ & & & \\ \omega t_m & = & \frac{5\pi}{6} + 2\pi m & m = 0,1,2\ldots \end{array} \right. \end{array} \tag{3}$$

Ordinando le soluzioni in maniera crescente (ci interessano solo tempi $t \geq 0$) abbiamo che la particella si trova nell'origine ai seguenti istanti

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_0 & = & 0 \\ & & \\ t_1 & = & \frac{\pi}{6}\frac{1}{\omega} \\ & & \\ t_2 & = & \frac{5\pi}{6}\frac{1}{\omega} \\ & & \\ t_3 & = & \frac{13\pi}{6}\frac{1}{\omega} \\ & & \\ t_4 & = & \frac{17\pi}{6}\frac{1}{\omega} \\ & & \\ & & \ldots \end{array} \right. \tag{4}$$

2. Per disegnare la legge oraria studiamo la funzione

$$x(t) = u\,t\,(1 - 2\sin\omega t)$$

per $t \geq 0$ (futuro). Al punto precedente abbiamo determinato gli zeri della funzione. Determiniamo ora il segno. Per tempi $t \geq 0$ il primo fattore ut è sempre positivo, per cui il segno di x è determinato dal segno del secondo fattore $1 - 2\sin\omega t$; i segni positivi si alternano a quelli negativi attraversando gli zeri determinati al punto precedente [Eq.(3)]:

$$1 - 2\sin\omega t \quad < \quad 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{6} + 2\pi n < \omega t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \tag{5}$$

$$1 - 2\sin\omega t \quad > \quad 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega t < \frac{\pi}{6} \\ \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < \omega t < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n \end{array} \right. \tag{6}$$

Osserviamo che la legge oraria è una funzione oscillante moltiplicata per un'ampiezza che cresce linearmente col tempo

$$x(t) \;=\; \underbrace{u\,t}_{\substack{\text{ampiezza che}\\ \text{cresce col tempo}}} \;\times\; \underbrace{(1-2\sin\omega t)}_{\text{funzione oscillante}}$$

Inoltre per i primi istanti del moto ($\omega t \ll 1$) abbiamo $\sin\omega t \simeq \omega t \ll 1$, e dunque

$$x(t) = u\,t\,(1-2\underbrace{\sin\omega t}_{\ll 1}) \simeq u\,t$$

L'andamento è lineare, ossia il moto è con buona approssimazione rettilineo uniforme con velocità u. Pertanto possiamo disegnare la legge oraria come in figura. Nello spazio reale la particella oscilla attorno all'origine con oscillazioni di ampiezza crescente col tempo.

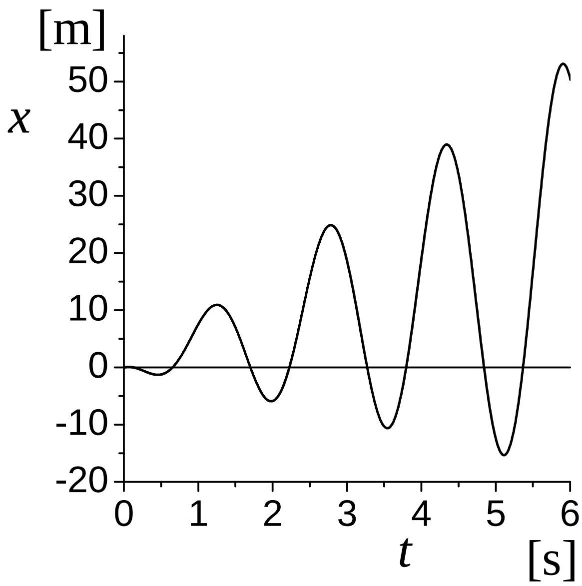

Figure 1: Grafico della legge oraria (1). La particella oscilla attorno all'origine, e l'ampiezza delle oscillazioni cresce nel tempo.

3. La velocità media nell'intervallo $[t_A; t_B]$ (con $t_A = 0.5\,\mathrm{s}$ e $t_B = 1.0\,\mathrm{s}$) è

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{x(t_B) - x(t_A)}{t_B - t_A} = \\
&= \frac{u\,t_B\,(1 - 2\sin\omega t_B) - u\,t_A\,(1 - 2\sin\omega t_A)}{t_B - t_A} = \\
&= u\left(1 - 2\,\frac{t_B\,\sin\omega t_B - \,t_A\,\sin\omega t_A}{t_B - t_A}\right) = \\
&= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(1 - 2\,\frac{1.0\,\mathrm{s}\,\sin(\frac{4}{\mathrm{s}}\,1.0\mathrm{s}) - \,0.5\,\mathrm{s}\,\sin(\frac{4}{\mathrm{s}}\,0.5\mathrm{s})}{1.0\,\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}}\right) = \\
&= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(1 - 4\,(\,1.0\;\sin(\,4.0) - \,0.5\;\sin(2.0))) = \\
&= 17.54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{7}$$

La velocità istantanea in un generico istante t è data dalla derivata della legge oraria

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{dx}{dt} = \\
&= \frac{d}{dt}\,(u\,t\,(1 - 2\sin\omega t)) = \\
&= u\,(1 - 2\sin\omega t - 2\omega t\cos\omega t)
\end{aligned} \tag{8}$$

Valutiamo ora la velocità istantanea nel punto $\bar{t} = 0.75\,\mathrm{s}$, ossia il punto medio dell'intervallo $[0.5\,\mathrm{s}; 1.0\,\mathrm{s}]$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
v(\bar{t}) &= u\,(1 - 2\sin\omega\bar{t} - 2\omega\bar{t}\cos\omega\bar{t}) = \\
&= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(1 - 2\;\sin(\frac{4}{\mathrm{s}}\,0.75\mathrm{s}) - 2\;\frac{4}{\mathrm{s}}\,0.75\mathrm{s}\;\cos(\frac{4}{\mathrm{s}}\,0.75\mathrm{s})\right) = \\
&= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(1 - 2\;\sin(3) - 6\;\cos(3)) = \\
&= 19.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned} \tag{9}$$

Confrontando la velocità media (7) con la velocità istantanea (9), osserviamo che l'errore commesso è

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{|\bar{v} - v(\bar{t})|}{v(\bar{t})} = \\
&= \frac{|17.54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 19.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}|}{19.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \\
&= 0.12
\end{aligned} \tag{10}$$

ossia pari al 12 %.

4. L'accelerazione istantanea è data dala derivata della velocità

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{dv}{dt} = \\
&= \frac{d}{dt}\,(u\,(1 - 2\sin\omega t - 2\omega t\cos\omega t)) = \\
&= u\left(-2\omega\cos\omega t - 2\omega\cos\omega t + 2\omega^2 t\sin\omega t\right) = \\
&= u\left(-4\omega\cos\omega t + 2\omega^2 t\sin\omega t\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

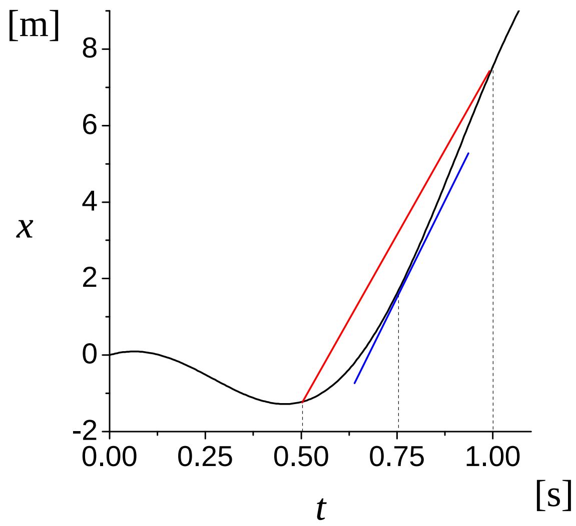

Figure 2: Zoom della figura precedente nell'intervallo $t \in [0.0\,\mathrm{s}; 1.0\,\mathrm{s}]$. La pendenza della retta rossa rappresenta la velocità media (7) nell'intervallo $[0.5\,\mathrm{s}; 1.0\,\mathrm{s}]$, mentre la pendenza della retta blu (tangente alla legge oraria) rappresenta la velocità istantanea (9) all'istante $\bar{t} = 0.75\,\mathrm{s}$.

Valutiamo ora l'accelerazione nell'istante $t_1 = (\pi/6)/\omega$ [vedi Eq.(4)] che rappresenta il primo istante in cui il punto materiale torna all'origine. Ricordando che

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin \omega t_1 & = & \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \\ \cos \omega t_1 & = & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{12}$$

e dunque

$$\begin{aligned} a(t_1) &= u \left(-4\omega \underbrace{\cos \omega t_1}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2\omega^2 t_1 \underbrace{\sin \omega t_1}_{=\frac{1}{2}} \right) \\ &= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \left(-8\sqrt{3}\,\frac{1}{\mathrm{s}} + 2 \cdot \frac{4}{\mathrm{s}} \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \left(-8\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -35.29\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{13}$$

5. Per stabilire se si tratta di un moto armonico occorre verificare se la legge oraria soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \qquad \forall t \tag{14}$$

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) &= a(t) + \omega^2 x(t) = \\ &= u \left(-4\omega \cos \omega t + 2\omega^2 t \sin \omega t \right) + \omega^2 u\, t\, (1 - 2 \sin \omega t) = \\ &= u \left(\omega^2 t - 4\omega \cos \omega t \right) \end{aligned} \tag{15}$$

Tale quantità non può essere uguale a zero per tutti i tempi. Ne deduciamo che il moto non è armonico.