17 MAGGIO 2023 LTI

RAGGIUNGIBILITÀ : $\tilde{x}$ RAGGIUNGIBILE

$$M_r = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,|\, A^{n-1} B \right]$$

$$\downarrow T_r$$

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$

$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}$

ESEMPIO CIRCUITO CON CONDENSATORI

PER LTI - TC RAGGIUNGIBILITÀ $\equiv$ CONTROLLABILITÀ

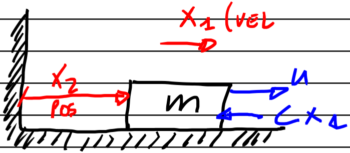
(PORTARE LO STATO DI UN SISTEMA DA $x(0) = \tilde{x}$ IN $x = 0$ IN UN TEMPO FINITO CON INGRESSO LIMITATO)

SE PARTE NON CONTROLLABILE È ASINTOTICAM. STABILE

(TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON CONTR. HANNO $Re<0$) IL SISTEMA SI DICE STABILIZZABILE.

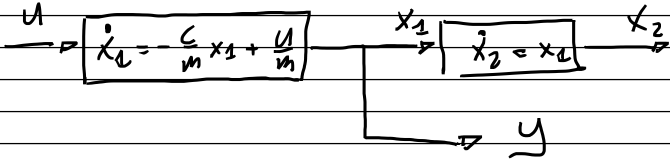
- PER UN SISTEMA COMPLET. CONTROLLABILE ESISTE SEMPRE ALMENO UN INGRESSO CHE PERMETTE A SISTEMA DI SPOSTARSI DA UNO STATO x_A AD UNO STATO x_B

OSSERVABILITÀ



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{m}\left(u - c x_1\right)$$

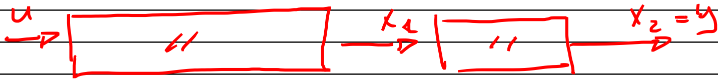
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{c}{m} x_1 + \dfrac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad y = x_1$$



SFRUTTANDO L'USCITA NON SI PUÒ RISALIRE IN NESSUN MODO A CONSIDERAZ. SU x_2

x_2 È UNA "PARTE" NON OSSERVABILE DEL SISTEMA

SE L'USCITA DEL SISTEMA FOSSE $y = x_2$

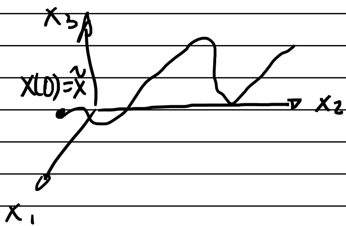


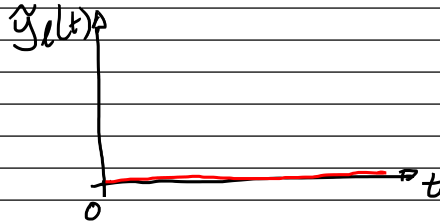
CI POSSIAMO ASPETTARE CHE QUESTO SISTEMA SIA COMPL. OSSERVABILE

PIÙ FORMALMENTE:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$\tilde{x} \neq 0$ STATO DEL SISTEMA È **NON OSSERVABILE** SE, QUALUNQUE SIA $\tilde{t} > 0$ FINITO, DETTO $\tilde{y}_\ell(t)$, $t \geq 0$, IL MOVIMENTO LIBERO DELL'USCITA GENERATO DA $\tilde{x}$, RISULTA $\tilde{y}_\ell(t) = 0$ $\quad 0 \leq t \leq \tilde{t}$





$\tilde{x}$ NON OSSERVABILE PER IL SISTEMA

UN SISTEMA PRIVO DI STATI NON OSSERV. SI DICE COMPLETAMENTE OSSERVABILE

$\tilde{x}$ È STATO N. O. SE ANALIZZANDO UN QUALSIASI TRATTO DELL' USCITA LIBERA CORRISP. NON SI RIESCE A DISTINGUERE DA $x = 0$

$$y_l(t) = C e^{At} x_0$$

CI RENDIAMO CONTO CHE B E D NON HANNO ALCUN RUOLO RISPETTO ALL' OSSERVABILITÀ.

$\to$ SI PARLA DI OSSERVABILITÀ DELLA COPPIA (A, C)

X_{NO} INSIEME DEGLI STATI NON OSSERV.

X_O " " " OSSERV

$$X_{NO} \cup X_O = \mathbb{R}^n$$

CRITERIO:

BASATO SULLA MATRICE M_o DI OSSERVABILITÀ:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R}^{pn \times n} \qquad p \text{ USCITE}$$

IL SISTEMA È COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\Leftrightarrow$ IL RANGO DI M_o È PARI AD n $\quad \rho(M_o) = n$

SE IL SISTEMA HA UNA SOLA USCITA $(p = 1)$

M_o È QUADRATA $\Rightarrow$ È EQUIVAL. A DIRE $\det(M_o) \neq 0$

- SE IL SISTEMA NON È COMPL. OSSERV. SI PUÒ "ISOLARE" LA SUA PARTE NON OSSERVABILE

$n_o = \rho(M_o)$ $\quad n_o < n$ NON COMPL. OSSERV.

OPPORTUNO CAMBIO DI VARIABILE:

$$\hat{x} = T_o\, x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\,\hat{x} \\ y = \hat{C}\,\hat{x} \end{cases}$$

FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ

CON $\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_a & 0 \\ \hline \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{array}\right]$ $\qquad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$

$\hat{C} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_a & 0 \end{array}\right]$ $\qquad \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$

COME SI COSTRUISCE T_o?

SI SELEZIONANO $n - n_o$ VETTORI LIN. INDIP. z_i t.c.

$M_o z_i = 0$ LO SPAZIO GENERATO DA TALI VETTORI È LO SPAZIO DEGLI STATI NON OSSERVABILI

IN T_o^{-1} VENGONO POSTI MULTIPLI DEI VARI z_i PRECEDUTI DA n_o COLONNE LIN. IND. ARBITRARIE

$$\underbrace{T_o^{-1} = \begin{array}{cc} n_o & n-n_o \\ \left[\begin{array}{c|c} \text{VETTORI LIN. INDIP.} & \text{MULTIPLI DI } z_i \end{array}\right] \end{array}}_{n \times n}$$

$\det(T_o^{-1}) \neq 0$ $\Downarrow$ ESISTE T_o

PARTIZIONIAMO IL VETTORE $\hat{x}$ IN MANIERA CONSEGUENTE

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \qquad \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_o}$$

$$\left(\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right)$$

EQUIVALENTE

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_a &= \hat{A}_a \hat{x}_a \\ \dot{\hat{x}}_b &= \hat{A}_{ab} \hat{x}_a + \hat{A}_b \hat{x}_b \\ y &= \hat{C}_a \hat{x}_a \end{aligned}$$

$$\dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a$$ PARTE OSS.

$$\dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_{ab} \hat{x}_a + \hat{A}_b \hat{x}_b$$ PARTE NON OSS.

$$y = \hat{C}_a \hat{x}_a$$

$\hat{x}_b$ NON INFLUISCE NÈ DIRETTAMENTE NÈ INDIRETTAMENTE SULL'EVOLUZ. DELL'USCITA

AUTOVALORI DI A SONO AUTOV $\hat{A}_a$ $\cup$ AUTOV. $\hat{A}_b$

AUTOV. PARTE OSSERVABILE

AUTOV. PARTE NON OSS.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{c}{m} x_1 + \dfrac{1}{m} u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -\dfrac{c}{m} & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \tilde{A}_a \\ \tilde{A}_{ab} \quad \tilde{A}_b \end{array}$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \tilde{C}_a$$

$n_o = 1$

- AUTOV. DELLA PARTE OSSERV. È $-\frac{c}{m}$
- AUTOV. DELLE PARTE NON OSS. È 0

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{c}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

$p = 1 \rightarrow M_o \; n \times n$

RANGO $= 1$

det $= 0$

SIST. NON COMPLETAM. OSSERVABILE

UN SISTEMA PUÒ ESSERE SIA NON COMPLETAM. OSSERVABILE SIA NON COMPLET. RAGG.

SI PUÒ SCOMPORRE DI CONSEGUENZA:

$$\hat{x} = T_k x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

CON $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & \hat{A}_{bc} & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

- $\hat{x}_b$ PARTE COMPLETAMENTE OSS. E RAGG.

AUTOV. $\hat{A}_b$ DELLA PARTE COMPL. OSS. E RAGG.

$\begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}$ PARTE RAGGIUNGIBILE dim n_r

$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ PARTE OSSERVABILE dim n_o

$\dot{\hat{x}}_a = \dots$ RAGG. & NON OSS.

$\dot{\hat{x}}_b = \dots$ RAGG & OSS.

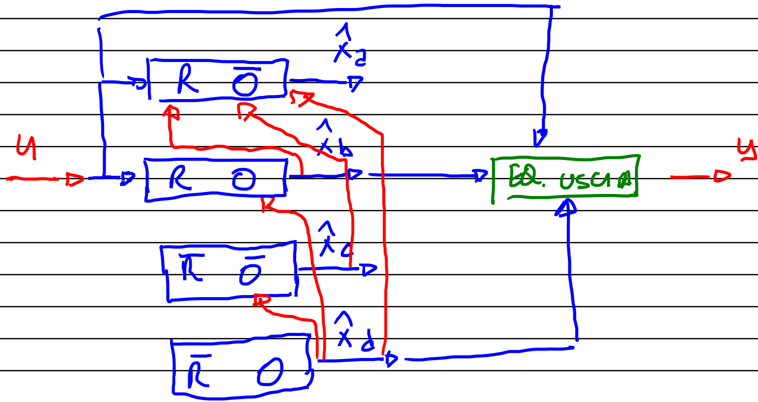
$\dot{\hat{x}}_c = \dots$ NON RAGG & NON OSS.

$\dot{\hat{x}}_d = \dots$ NON RAGG. & OSS.

SCOMPOS. CANONICA O SCOMPOSIZ. DI KALMAN

GLI AUTOV. DI $\hat{A}$ (E QUINDI DI A) SONO UNIONE DI AUTOV. DELLE VARIE PARTI

SI PARLA DI STABILITÀ INTERNA DELLA SINGOLA PARTE



$\dot{x} = Ax + Bu$ $\quad$ $y = Cx + Du$

M PRENDIAMO

$$y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{x}_0 + \int_0^t \underbrace{\hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B}}\, u(\tau)\, d\tau + D\, u(t)$$

TRASF. SECONDO LAPLACE

$$Y(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{x}_0 + \underbrace{\left[\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} + D\right]}_{\text{FUNZ DI TRASFERIM. } G(s)} U(s)$$

$$\hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} =$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
e^{\hat{A}_a(t-\tau)} & * & * & * \\
0 & e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & * & * \\
0 & 0 & e^{\hat{A}_c(t-\tau)} & * \\
0 & 0 & 0 & e^{\hat{A}_d(t-\tau)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & * & * \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
= \hat{C}_b \, e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \, \hat{B}_b
$$

DIPENDE SOLO DALLA PARTE b

COMPLETAM.

OSS. E COMPL.

RAGG.

$$y(t) = \hat{C} e^{\hat{A} t} \hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C}_b \, e^{\hat{A}_b (t-\tau)} \hat{B}_b \, u(\tau) \, d\tau + D u(t)$$

TRASF. SECONDO LAPLACE

$$G(s) = \hat{C}_b \left(sI - \hat{A}_b \right)^{-1} \hat{B}_b + D$$

LA f.d.t. DIPENDE <u>SOLO</u> DALLA PARTE

COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE ED OSSERV.

$$G(s) = \frac{C \, \mathrm{adj}(sI - A) B + D \, \pi_A(s)}{\pi_A(s)} = \frac{n(s)}{d(s)}$$

I POLI DI $G(s)$ COINCIDONO CON GLI AUTOV. DI A APPARTENENTI ALLA SOLA PARTE COMPL. RAGGIUNGIBILE ED OSSERVABILE

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

PROPRIETÀ DEL SISTEMA

STABILITÀ INTERNA: AS. STABILE

RAGGIUNGIBILITÀ ?

$$M_r = [B \,\vdots\, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(M_r) = 1$ NON COMPL. RAGG.

$\det(M_r) = 0$

-1 AUTOV. PARTE RAGG.

-2 " " NON RAGG.

OSSERVABILITÀ?

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ \hdashline CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(M_o) \neq 0$

$\rho(M_o) = 2$

SIST. COMPLETAM. OSSERVABILE

- - - - - -

$G(s) = ?$

GRADO DEN = 1

IL DEN È $s+1$

GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DEN

STRETTAM. PROPRIO $= 0$

$(D = 0)$

BIBO STABILITÀ? (STABILITÀ ESTERNA)

STABILE ESTERNAMENTE

SISTEMA BIBOSTABILE

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + \cancel{D}^{\,D=0}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{cof}(sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\operatorname{cof}^T(sI-A)}_{\operatorname{adj}(sI-A)} = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \qquad \det(sI-A) = (s+1)(s+2)$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{2}{s+1}$$

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

STABILITÀ INTERNA

INSTABILE

(AUTOV. -3, 1)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 1$$

STABILITÀ ESTERNA?

ANCORA NON SI PUÒ DIRE

RAGGIUNGIBILITÀ?

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(M_r) \neq 0$

$\rho(M_r) = 2$

COMPL. RAGGIUNGIB.

OSSERVABILITÀ?

1 AUTOV. PARTE NON OSSERV.

-3 " " OSSERV.

STABILITÀ ESTERNA?

-3 È L'AUTOV. DELLA PARTE COMPL. RAGG. E OSS.

↳ SISTEMA È BIBO-STABILE

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+3)(s-1)$$

$$\mathrm{cof}(sI-A) = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0}$$

$$\mathrm{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{-2}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{2}{s+3}$$

$$C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{2}{s+3} + 1 = \frac{2+s+3}{s+3} = \frac{s+5}{s+3}$$