ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 40

Note Title 20/11/2018

<u>Lemma 1</u> (Non serve, ma è istruttivo)
Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applic. lin. simmetrica.
Siano v e w autovettori con autovalori diversi.
Allora v e w sono ortogonali.

$\boxed{\text{Dim}}$ Supponiamo che

$$f(v) = \lambda v$$
$$f(w) = \mu w$$

con $\lambda \neq \mu$.
Allora

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle \overset{f \text{ è simm.}}{=} \langle v, f(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

Facendo la diff. viene

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v, w \rangle = 0.$$

<u>Lemma 2</u> Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrica.
Sia $V \leq \mathbb{R}^n$ un sottospazio invariante, cioè

$$f(v) \in V \qquad \forall v \in V$$

Allora anche $V^\perp$ è invariante, cioè

$$f(w) \in V^\perp \qquad \forall w \in V^\perp$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $w \in V^\perp$. Allora per ogni $v \in V$ vale

$$\langle f(w), v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ simm}}}{=} \langle \underset{\in V^\perp}{w}, \overbrace{f(v)}^{\in V} \rangle = 0$$

Essendo questa vera per ogni $v \in V$, per forza $f(w) \in V^\perp$.

—o—o—

Lemma 3 (Gli autovalori sono reali)

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrica (e lineare).
Allora tutti gli autovalori di f sono reali.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che λ sia un autovalore (magari complesso) di f, e sia v un corrispondente autovettore (magari pure lui complesso).
Quindi

$$f(v) = \lambda v$$

Facendo il coniugato a dx e sx otteniamo

$$f(\bar{v}) = \overline{f(v)} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v}$$

qui uso che f è rappresentata da una matrice reale.

Scoperta: se λ è autovalore con autovettore v, allora
$\bar{\lambda}$ " " " " $\bar{v}$.

Ma allora come nel Lemma 1

$$\lambda \langle v, \bar{v} \rangle = \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle = \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle$$
$$= \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle$$

da cui $\quad (\lambda-\bar{\lambda}) <v,\bar{v}> = 0$

Ora se $v = (x_1, \dots, x_n)$, allora $\bar{v} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e quindi

$$<v,\bar{v}> = x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\text{numero reale } \neq 0 \text{ perché le componenti non sono tutte nulle}} \neq 0$$

Quindi l'unica possibilità è $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, cioè $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

— o — o —

Teo spettr. (versione applic.), freccia "vera"

Ipotesi: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ applic. simmetrica
Tesi : esiste base ortonormale di autovettori

Si dimostra volendo per induzione sulla dimensione.
Per il lemma 3 sappiamo che esiste almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia v_1 un corrisp. autovettore, cioè

$$f(v_1) = \lambda v_1$$

A meno di molt. per una costante, posso supporre $\|v_1\| = 1$
Quindi almeno siamo partiti.
Pongo $\quad V := \operatorname{Span}(v_1)$ e osservo che V è invariante
Ma allora per il lemma 2 anche $V^\perp$ è invariante.
Quindi

$$f : V^\perp \to V^\perp$$

ed è simmetrica anche quando ristretta a $V^\perp$.
Quindi posso ripetere il ragionamento su $V^\perp$, che ha una dimensione in meno. Quindi esiste base ortonormale $\{v_2, \dots, v_n\}$ di $V^\perp$ fatta da autovett. ortonormali. Basta aggiungere v_1 ed abbiamo finito.

— o — o —

Esempio 1 Diagonalizzare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vediamo chi sono gli autovalori

Det = 8 Traccia = 6

$\uparrow$ Prod. autov. $\uparrow$ somma autovalori

Autovalori : 2 e 4

Bovinamente
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

pol. caratteristico : $(1-\lambda)(5-\lambda)+3=0$

$\lambda^2-6\lambda+8=0$

Risolvendo eq. di 2° grado trovo 2 e 4.

Due autov. distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ simile a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Devo trovare la M che diagonalizza, cioè realizza

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} M$$

Come la trovo ?

$\boxed{\text{1° modo: super-bovino}}$ Deve succedere

$$M\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} M$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Viene un sistema di 4 equazioni in 4 incognite

$\boxed{2^\circ \text{ modo: seguendo la teoria}}$ Calcolo gli autovettori di A e li uso come colonne di M

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 2x \\ -3x+5y=2y \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{possibile autovettore relativo a } \lambda=2}}{(1,+1)} = v_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = 4x \\ -3x+5y=4y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x+y=0 \\ -3x+y=0 \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda=4}}{(1,3)} = v_2$$

Quindi $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ cambia base dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Oss. Vedere cosa succedeva a risolvere il sistema 4×4 del metodo super-bovino

Oss. M è tutt'altro che unica! Ad esempio, posso moltiplicare tutte le colonne per numeri diversi, tanto rimangono autovettori.

Oss. Mai dimenticare la verifica finale che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonale}}}{D} = M^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice iniziale}}}{A} M \leftarrow \text{matrice cambio base trovata}$$

Esempio 2 Trovare la forma canonica di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Servono gli autovalori, quindi il $p_A(\lambda)$.
Tolgo λ dalla diagonale, e sviluppo il determinante
oppure...

→ osservo che rango $= 1$
→ quindi dim (ker) $= 3$
→ ker = autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$
→ quindi $\lambda = 0$ è autovalore con $m_g = 3$ e quindi $m_a \geq 3$
→ quindi 0 compare 3 o 4 volte nella lista degli autovalori
→ ma $Tr = 4$, quindi per forza c'è un autovalore $= 4$ e 3 autovalori coincidenti nulli.
→ Conclusione: gli autovalori sono

$\lambda = 0$ con $m_a = m_g = 3$
$\lambda = 4$ con $m_a = m_g = 1$

e quindi A è diagonalizzabile con forma canonica

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chi è una M che realizza la similitudine

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

va in 4 volte se stesso

autovettori di 0, cioè elementi del ker

Posso trovare M ortogonale?
Sì, perché matrice iniziale è simmetrica.