ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 17

Note Title 19/10/2018

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano V e W due spazi vettoriali.
Un'applicazione lineare da V in W è una funzione
$$f : V \longrightarrow W$$
tale che

(i) $f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{somma in } V}) = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{somma in } W}$ per ogni v_1, v_2 in V

(ii) $f(av) = a f(v)$ per ogni $v \in V$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$

Esempio a cui pensare: la derivata è un'appl. lineare
(la deriv. della somma è la somma delle derivate e "le costanti escono fuori")

Esempio 1 $V = W = \mathbb{R}$ Come sono fatte tutte le applic. lin.?

Basta la proprietà (ii). Posto $\lambda = f(1)$, allora
$$f(x) = f(x \cdot 1) \overset{(ii)}{=} x f(1) = \lambda x$$

Brutalmente: il grafico di $f(x)$ è una retta per l'origine.

Esempio 2 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$. Come sono fatte tutte le appl. lin.
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ?$$

Posto $a := f(1,0)$ e $b := (0,1)$, allora
$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) \overset{(i)}{=} f(x(1,0)) + f(y(0,1))$$
$$\overset{(ii)}{=} x f(1,0) + y f(0,1)$$
$$= ax + by$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (teorema di struttura delle applic. lineari)

Siano V e W due spazi vettoriali
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ dei vettori di W (non sono obbligati ad essere lin. indip. e/o generatori)
Allora esiste un' unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che

$$f(v_i) = w_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Brutalmente: gli elementi di una base di V li posso mandare dove mi pare, a questo punto gli altri sono vincolati, cioè sappiamo dove vanno

Dim. Ogni $v \in V$ lo posso scrivere come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Ma allora

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = f(c_1 v_1) + \dots + f(c_n v_n) \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \end{aligned}$$

Ho dimostrato più in generale che le combinazioni lineari "escono fuori dalla f":

$$f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Dovrei dimostrare che la f definita come sopra è davvero lineare.
Questo vuol dire fare 2 verifiche

Poniamo

$$f(v) = c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n$$

$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ $\qquad \hat{v} = \hat{c}_1 v_1 + \ldots + \hat{c}_n v_n$

$f(v+\hat{v}) = f(v) + f(\hat{v})$
$f(av) = a f(v)$.

— o — o —

<u>Esempio</u> Dimostrare che esiste unica funz. lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$f(1,0,0) = (2,3)$
$f(1,1,0) = (3,4)$
$f(-1,0,1) = (1,5)$

Calcolare $f(2,7,1)$

<u>Esistenza e unicità</u> Per il teo. di struttura è sufficiente mostrare che $\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_3}$ sono lin. indip.

$$a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(-1,0,1) = (0,0,0)$$

deve avere come unica sol. $a = b = c = 0$.

<u>Come calcolo $f(2,7,1)$</u>? Scrivo $(2,7,1)$ come comb. lin. di v_1, v_2, v_3 e poi uso la linearità

$$\begin{cases} a + b - c = 2 \\ b = 7 \\ c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow c = 1,\ b = 7,\ a = 2 + c - b = -4$$

$$f(2,7,1) = f(-4v_1 + 7v_2 + v_3)$$
$$= -4 \underbrace{f(v_1)}_{(2,3)} + 7 \underbrace{f(v_2)}_{(3,4)} + \underbrace{f(v_3)}_{(1,5)}$$
$$= -4(2,3) + 7(3,4) + (1,5) = (\ldots,\ldots)$$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLIC. LINEARE

Siano V e W spazi vettoriali
Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W
Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare
Allora si costruisce una matrice $m \times n$ in questo modo

$$f(v_1) = \boxed{a_{1,1}}\, w_1 + \boxed{a_{2,1}}\, w_2 + \dots + \boxed{a_{m,1}}\, w_m$$

1ª colonna della matrice

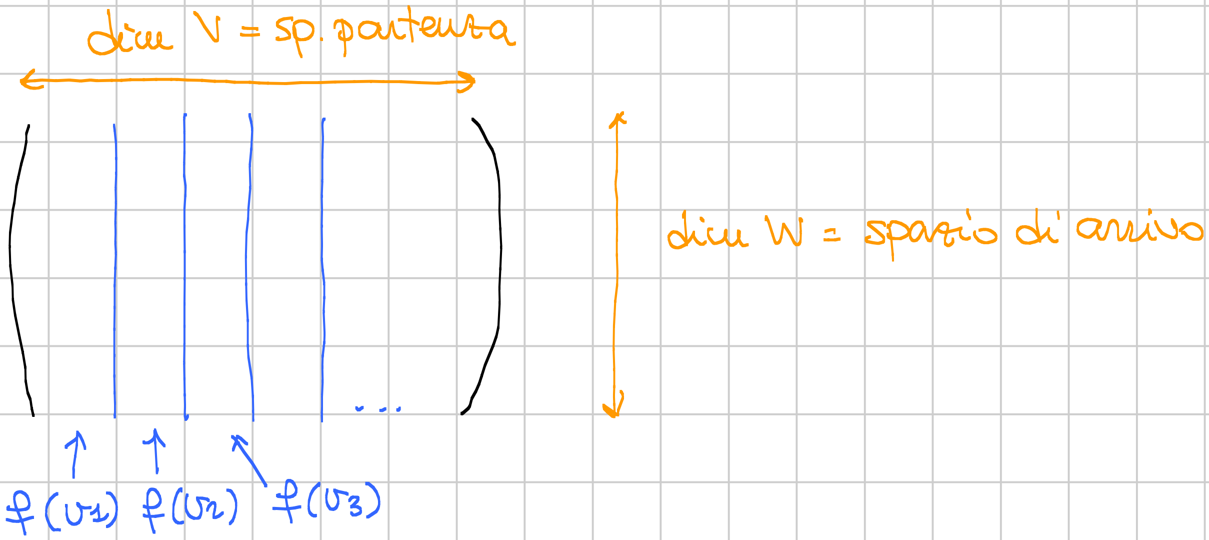
$$f(v_2) = \boxed{a_{1,2}}\, w_1 + \boxed{a_{2,2}}\, w_2 + \dots + \boxed{a_{m,2}}\, w_m$$

2ª colonna della matrice

[Indici invertiti dopo video, in modo che il primo sia la riga ed il secondo la colonna]

e così via ...

La matrice finale ha un aspetto di questo tipo



Si dice che quella così costruita è la matrice che rappresenta l'applicazione f usando le 2 basi date in partenza ed arrivo.

<u>Achtung!</u> Se cambio basi, cambio la matrice!

Esempio $V = W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

Come applicazione lineare considero la derivata

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c$$

Considero in partenza ed arrivo la base canonica

$$\{ \underset{\substack{v_1 \\ \| \\ w_1}}{x^3}, \underset{\substack{v_2 \\ \| \\ w_2}}{x^2}, x, 1 \}$$

Costruisco la matrice

$$f(v_1) = f(x^3) = 3x^2 = 3v_2 = 0\cdot v_1 + 3v_2 + 0\cdot v_3 + 0 \cdot v_4$$

$$f(v_2) = f(x^2) = 2x = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 2v_3 + 0\cdot v_4$$

$$f(v_3) = f(x) = 1 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 1\cdot v_4$$

$$f(v_4) = f(1) = 0 = \text{tutti zeri}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \uparrow & & & \\ f(v_1) & & & \end{array}$$

Proprietà fondamentale

Dati V e W con basi $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$

Data $f: V \to W$ lineare

Costruisco la matrice A come indicato prima

Quando voglio calcolare $f(v)$ con $v \in V$ dato, un scrivo v come comb. lineare

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

poi calcolo

$$m \; \overset{n}{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} m$$

Allora

$$f(v) = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$$

Nell' esempio, se voglio calcolare

$$f(2x^3 + 3x^2 + 7) = 6x^2 + 6x$$

basta fare

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 6x^2 + 6x$$

— o — o —