ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 06

Note Title 05/10/2018

MUTUA POSIZIONI DI DUE RETTE NEL PIANO

Date due rette r_1 ed r_2 nel piano, ci sono 3 possibità

- r_1 ed r_2 coincidono (l'intersezione sono ∞ punti)
- r_1 parallela ad r_2 (" è l'insieme $\emptyset$)
- r_1 ed r_2 incidenti (" è un unico p.to)

Nel 3° caso vorremmo : → trovare il p.to di intersezione
→ trovare gli angoli formati dalle rette

Stabilire mutua posizione = trovare le intersezioni
= risolvere sistema lineare

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Se di r_1 ed r_2 conosco la forma cartesiana, allora per intersecarle metto a sistema

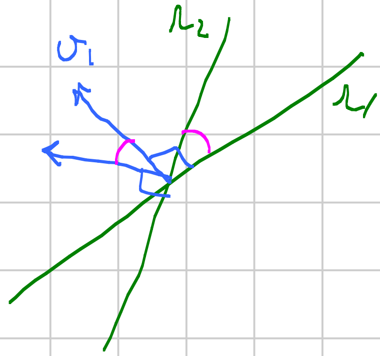
<u>Esempio</u> $r_1 : \; 2x+3y+5=0$
$r_2 : \; y=-x+2$

$$\begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y+5=0 \\ -y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=11 \\ y=-9 \end{matrix}$$

Le rette sono incidenti e si intersecano in $(11,-9)$

Se voglio l'angolo tra le 2 rette, sarebbe comodo averle in forma parametrica (a quel punto calcolo angolo tra le direzioni)

Oss. Angolo tra 2 rette = angolo tra i vettori $\perp$ alle due direzioni



Ora un vettore perpendicolare alla direzione di una retta è il vettore (a,b) nella scrittura

$$ax+by+c=0$$

Nell'esempio le 2 equazioni sono

$$2x+3y+5=0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1=(2,3)$$
$$x+y-2=0 \quad \rightsquigarrow \quad v_2=(1,1)$$

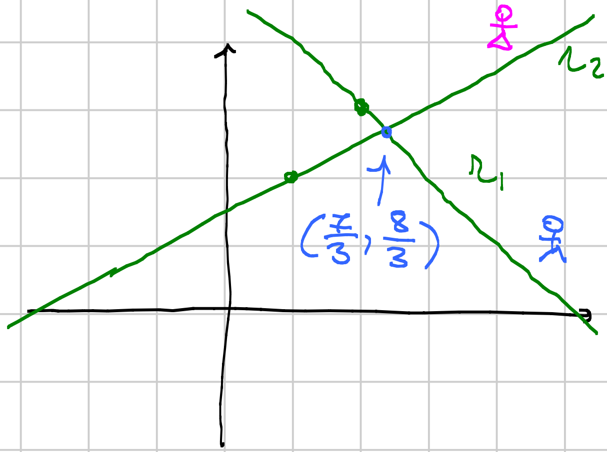
$$\cos(\text{angolo compreso}) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Mi è data la forma parametrica di r_1 ed r_2

$$r_1 = (2,3)+t(-1,1) \qquad\qquad r_2=(1,2)+t(2,1)$$

1° modo: porto in cartesiana e lavoro lì

2° modo: scrivo le due rette usando parametri diversi



$r_1: (2-t, 3+t)$ $\qquad$ $r_2: (1+2t, 2+t)$ $\qquad$ $(1+2s, 2+s)$

$2-t = 1+2s$ prime componenti $\qquad 2s+t=1$

$3+t = 2+s$ seconde componenti $\qquad -s+t=-1$

$2s+t=1 \qquad 2s = 1-t = \frac{4}{3} \qquad s=\frac{2}{3}$

$3t=-1 \qquad t=-\frac{1}{3}$

Sostituendo i valori di t ed s nelle 2 param. trovo l'intersezione

$r_1 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ $\qquad$ $r_2 : \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$

<u>Oss.</u> Risolvere quel sistema vuol dire trovare due istanti di tempo t ed s, eventualm. diversi in cui e si trovano a passare per lo stesso punto.

<u>Esercizio</u> Vedere che viene uguale passando in cartesiane.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ Conosco r_1 in cartesiana e r_2 in parametrica

<u>1° modo</u> : le porto entrambe nella stessa forma

<u>2° modo</u> $\quad r_1 : x - 2y + 3 = 0 \qquad r_2 = (5,1) + t(-3,2)$

$$r_2 : (\underset{x}{\underbrace{5-3t}}, \underset{y}{\underbrace{1+2t}})$$

Sostituisco nella 1ª eq. e trovo

$$(5-3t) - 2(1+2t) + 3 = 0$$

$$5 - 3t - 2 - 4t + 3 = 0 \qquad 7t = 6 \qquad t = \frac{6}{7}$$

Sostituisco t nella r_2 e trovo x e y $\rightsquigarrow$ verifico che risolvano r_1

—o—o—

<u>Esercizio</u> Trovare b in modo che

$r_1 : x - y + 3 = 0$

$r_2 : (-1,3) + t(1,b) \rightsquigarrow (-1+t, 3+bt)$

siano parallele

$$-1+t-(3+bt)+3=0 \rightsquigarrow -1+t-\cancel{3}-bt+\cancel{3}=0 \rightsquigarrow \boxed{b=1}$$

Altro modo di fare lo stesso esercizio:

→ direzione di r_2 : $(1, b)$

→ direzione di r_1 : $(1, 1)$ (dedotto dalla implicita: vedi lezione 3?)

Due rette sono // in forma parametrica se e solo se le loro direzioni sono l'una multipla dell'altra.

—o—o—

RETTE NELLO SPAZIO ⇝ Si trattano bene in parametrica

- Retta per l'origine: sono tutti i multipli di 1 vettore dato

$$\boxed{t\vec{v}} \quad \text{con } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Esempio $t(5, 1, -2) = (5t, t, -2t)$

- Retta per un p.to qualunque: basta cambiare il p.to di partenza

Esempio $(1, 0, 2) + t(5, -1, 6) = (1 + 5t, -t, 2 + 6t)$

In generale sarà del tipo

$$\boxed{\underbrace{\vec{w}}_{\text{p.to partenza}} + t\underbrace{\vec{v}}_{\text{Direzione}}} \qquad \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Esercizio Scrivere la retta dello spazio passante per $\underset{P}{(5, 1, -3)}$ e $\underset{Q}{(2, 4, -3)}$

$$P + t(Q - P) = (5, 1, -3) + t(-3, 3, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l}(5, 1, -3) + t(-1, 1, 0) \\ (2, 4, -3) + t(-1, 1, 0)\end{array}\right\} \text{ vanno bene uguale}$$

Mutua posizione di 2 rette nello spazio

Due rette r_1 ed r_2 possono essere
- coincidenti (infinite intersezioni)
- incidenti (intersezione unica)
- parallele (nessuna intersezione, direzioni "multiple")
- SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni completamente diverse)

Esempio $(2+t, -1, 3-t)$ $\qquad$ $(2,1,-1)+t(5,1,3)$

$(2,-1,3)+t(1,0,-1)$ $\qquad$ $(2+5t, 1+t, -1+3t)$

$$\begin{array}{lll} 2+t = 2+5s & 5s-t=0 & t=-10 \\ -1 = 1+s & s=-2 & \leadsto s=-2 \\ 3-t = -1+3s & 3s+t=4 & t=10 \end{array}$$

NO: il sistema non ha soluzione

Le due rette sono sghembe

Esempio $r_1: (5-t, 2t, 1+3t)$ $\qquad$ $r_2: (t, -t, at)$

↓ passa per l'origine

Trovare (se esistono) i valori di a per cui risultano incidenti

$$\begin{cases} 5-t = s \\ 2t = -s \\ 1+3t = as \end{cases} \qquad \begin{array}{l} s+t=5 \\ s+2t=0 \\ as-3t=1 \end{array}$$

$R_2 - R_1$: $\underbrace{t=-5 \qquad s=10}$

↓

sostituisco nella 3ª e trovo

$$10a+15=1$$

$$\leadsto 10a=-14 \leadsto a=-\frac{7}{5}$$

— o — o —