Esame di Ricerca Operativa del 12/9/22

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda deve produrre (in una settimana) almeno 11 ton di cemento e almeno 9 ton di malta. Per il processo produttivo adopera due tipi di macchinari che costano, rispettivamente, 1000 e 2000 euro a settimana. Il primo macchinario produce ogni settimana una ton di cemento e 2 di malta, mentre il secondo 3 ton di cemento e una di malta. Quanti macchinari del primo tipo e quanti del secondosi usano per minimizzare la spesa settimanale?

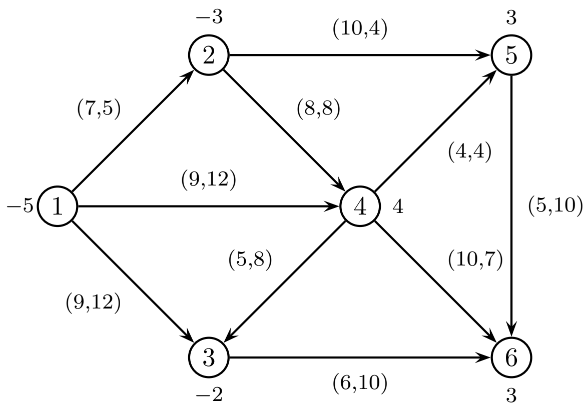
Svolgere il simplesso partendo da un vertice non ottimo per trovare l'ottimo del rilassato continuo. Costruire il piano di taglio di Gomory generato da tale ottimo. Se si usa tale taglio si trova l'ottimo del problema dato?

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

	2	**3**	**4**	**5**
1	14	16	34	18
2		20	35	21
3			22	19
4				17

Trovare una valutazione calcolando il 5–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 3. Applicare il metodo del *Branch and Bound* utilizzando il 5–albero e istanziando le variabili x_{12}, x_{14} e x_{45}. Siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,3), (2,4), (3,6) e (5,6) e l'arco (2,5) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima. Quale é la soluzione ottima del problema del flusso massimo?

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 + 2\,x_2^2 - 14\,x_1 - 24\,x_2 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \geq 12 \\ 3\,x_1 - 4\,x_2 \leq 9 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 37 \\ -3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(5, \frac{3}{2})$. Trovare il minimo globale ed il massimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT.

SOLUZIONI

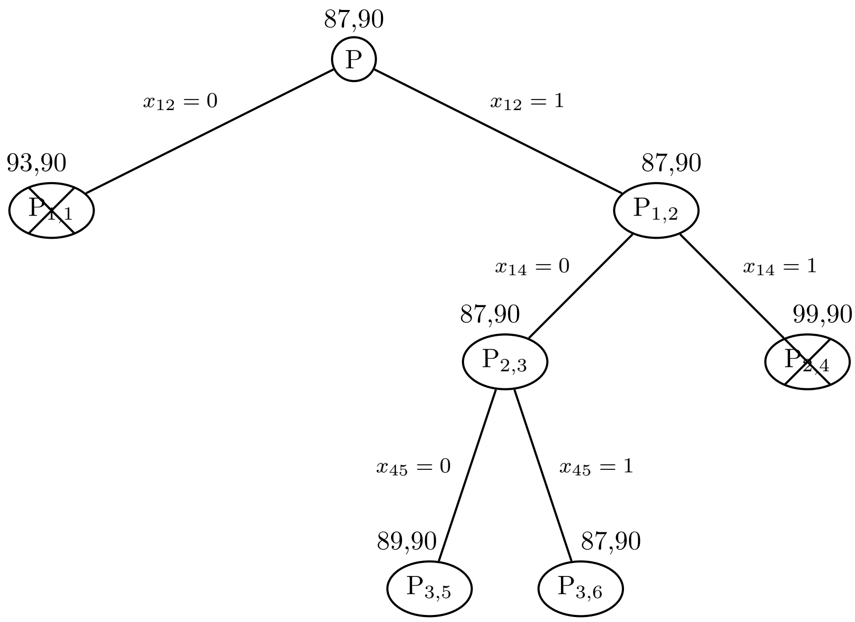
Esercizio 1.

$$\begin{cases} \min\ x_1 + 3\ x_2 \\ x_1 + 3\ x_2 \geq 11 \\ 2\ x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(0, 9)$ con base $B = \{2, 3\}$. La duale complementare é $(0, 2000, -3000, 0)$. Indice uscente 3; rapporti $\frac{16}{5}$, $\frac{9}{2}$; indice entrante 2. Soluzione ottima $(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$. Base ottima $B = \{1, 2\}$. Soluzione ottima PLI $(3, 3)$. Taglio $x_3 + 2\ x_4 \geq 1$ ovvero $x_1 + x_2 \geq 6$.

Esercizio 2.

5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 5) (3 , 4) (4 , 5) $v_I(P) = 87$
ciclo: 3 – 1 – 2 – 5 – 4 $v_S(P) = 90$
L'assegnamento di costo minimo é $(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ di costo 84 e quindi peggiore.
I vincoli violati sono 2; quelli di grado relativi ai nodi 1 e 2.



Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,6) (5,6)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(5, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 0, 0, 1)	(1, 0, 4, 0, 4, 2, 0, 0, 0, 1)
π	(0, 7, 9, 15, 10, 15)	(0, 7, 9, 9, 10, 15)
Arco entrante	(1,4)	
ϑ^+, ϑ^-	12 , 4	
Arco uscente	(2,4)	

Il taglio é $N_t = \{6, 7\}$ di capacitá 25 ed il flusso massimo é $x = (4, 10, 11, 0, 4, 10, 0, 4, 7, 8)$ L'albero dei cammini minimi é $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 5)\}$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spost.	Passo	Nuovo punto
$(5, \frac{3}{2})$	$(3, -4)$	$\begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$	$\left(\frac{56}{5}, \frac{42}{5}\right)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$(7, 3)$

Punto	F.O. PL	S.O. PL	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(5, \frac{3}{2})$	$-4x_1 - 18x_2$	(4,7)	$(-1, \frac{11}{2})$	$\frac{95}{123}$	$\left(\frac{520}{123}, \frac{707}{123}\right)$

Minimo globale é $(\frac{215}{41}, \frac{219}{41})$ con moltiplicatori $(-\frac{104}{25}, \frac{72}{25}, 0, 0)$ mentre $(3, 0)$ é massimo globale con moltiplicator $(0, 0, \frac{36}{41}, 0)$.