Ricerca Operativa 27/1/25

Esercizio 1. Un'azienda produce due tipi di piastrelle A e B che vende rispettivamente a 0.5 e 0.6 euro l'una. Per la produzione di ognuna di esse servono argilla (in grammi), tempo macchina (in minuti) e tempo umano (in minuti) secondo la seguente tabella che fornisce anche la disponibilità giornaliera dell'azienda:

	Disponibilitá	A	B
Argilla	20000	500	300
Minuti uomo	300	6	5
Minuti macchina	210	3	5

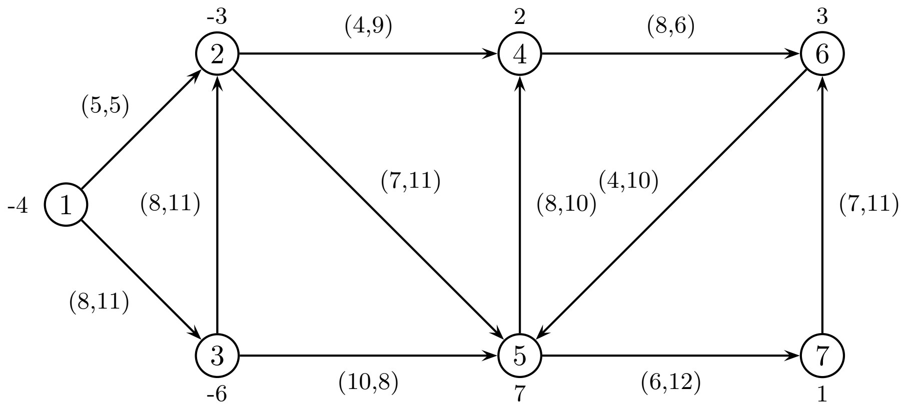
Effettuare un passo del simplesso, per risolvere il rilassato continuo, partendo dalla soluzione con la sola produzione di piastrelle di tipo A. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 2. Sia dato il seguente problema dello zaino:

$$\begin{cases} \max\ 36\,x_1 + 38\,x_2 + 40\,x_3 + 42\,x_4 + 44\,x_5 \\ \qquad 7\,x_1 + \ 9\,x_2 + 11\,x_3 + 13\,x_4 + 15\,x_5 \leq 31 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

Calcolare le valutazioni e risolvere mediante l'algoritmo del "Branch and Bound". Trovare poi le valutazioni nel caso fosse zaino intero. Se avessi un problema di zaino binario con 20 oggetti e si potessero portare 4 o 6 oggetti quale sarebbe il modello matematico di PLI?

Esercizio 3. Su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerare il flusso dato dall'albero di copertura formato dagli archi (1,2) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5) e l'arco (7,6) come arco di U. Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 tramite l'algoritmo di Dijkstra e la soluzione ottima in termini di flusso su reti. Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 6 di capacitá minima.

Esercizio 4. Sia $f(x_1, x_2) = x_1$ su $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4\,x_1 + 3 \leq 0, \quad -x_1 - x_2^2 + 2 \leq 0\}$. I punti stazionari sono $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$, $(2,0)$, $(3,0)$. Catalogarli calcolando i moltiplicatori.

Sia da minimizzare $f(x_1, x_2, x_3) = 4\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_3^2 + 3\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + x_2\,x_3 - 20\,x_1 - 19\,x_2 - 18\,x_3$ sul poliedro $\{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2,\ 0 \leq x_3 \leq 3\}$.

Fare un passo del gradiente proiettato ed uno di Frank-Wolfe a partire da $(0, 0, 2)$.

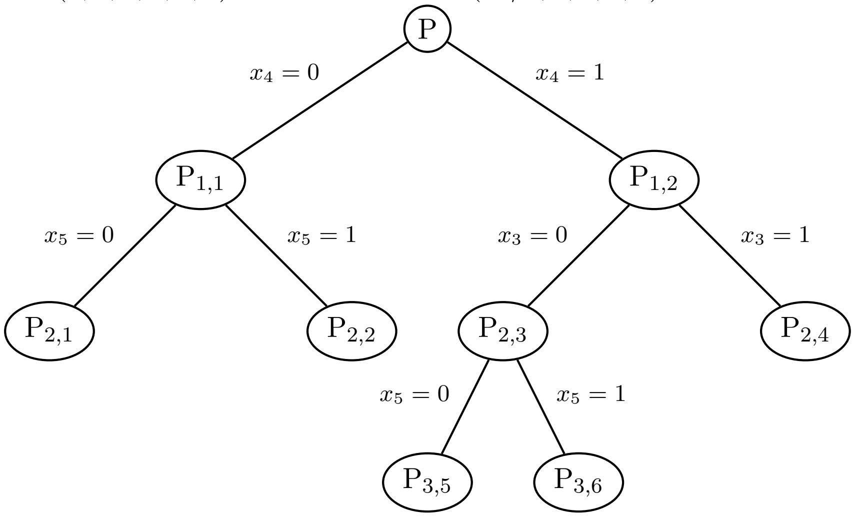
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max 0.5\,x_A + 0.6\,x_B \\ 500\,x_A + 300\,x_B \leq 20000 \\ 6\,x_A + 5\,x_B \leq 300 \\ 3\,x_A + 5\,x_B \leq 210 \\ x_A, x_B \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del rilassato continuo é: $(x_A, x_B) = (23.125, 28.125)$, é un vertice e la sua base é $\{1, 3\}$. La soluzione ottima del problema é $(x_A, x_B) = (23, 28)$. Vertice di partenza: $(40, 0)$ con base $B = \{1, 5\}$. $y = (1/1000, 0, 0, 0, -3/10)$, $h = 5$, e $W^5 = \begin{pmatrix} -3/5 & 1 \end{pmatrix}^T$, $r = (300/7, 225/8, 200/3)$, $k = 3$. Per calcolare il piano di taglio $r = 1$ la prima riga di $\tilde{A}$ è $(1/320, -3/16)$ ed il taglio è $1/320\ x_3 + 13/16 x_5 \geq 1/8$.

Esercizio 2. Per lo zaino binario si ha: $x_A = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ e $v_I = 114$. $x_{rc} = (1, 1, 1, 4/13, 0, 0)$ e $v_S = 126$. Per lo zaino intero si ha: $x_A = (4, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $v_I = 144$. $x_{rc} = (31/7, 0, 0, 0, 0)$ e $v_S = 159$.



Problema	Rilassamento usato	v_S	Sol. ammissibili	$v_I(P)$	Taglio (SI/NO)
P	$0 \leq x \leq 1$	126	$(1, 1, 1, 0, 0)$	114	NO
$P_{1,1}$	$0 \leq x \leq 1$	125	$(1, 1, 1, 0, 0)$	114	NO
$P_{1,2}$	$0 \leq x \leq 1$	123	$(1, 1, 1, 0, 0)$	114	NO
$P_{2,1}$	$0 \leq x \leq 1$	114	$(1, 1, 1, 0, 0)$	114	SI
$P_{2,2}$	$0 \leq x \leq 1$	118	$(1, 1, 0, 0, 1)$	118	SI
$P_{2,3}$	$0 \leq x \leq 1$	121	$(1, 1, 0, 0, 1)$	118	NO
$P_{2,4}$	$0 \leq x \leq 1$	118	$(1, 0, 1, 1, 0)$	118	SI
$P_{3,5}$	$0 \leq x \leq 1$	116	$(1, 0, 1, 1, 0)$	118	SI
$P_{3,6}$	$0 \leq x \leq 1$	101	$(1, 0, 1, 1, 0)$	118	SI

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(7,6)	
x	(4, 0, 0, 7, 0, 6, 0, 2, 12, 8, 11)	
π	(0, 5, 2, 20, 12, 8, 18)	
Arco entrante	(2,4)	
ϑ^+, ϑ^-	9 , 2	
Arco uscente	(5,4)	

L'albero dei cammini minimi come flusso è $x = (5, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$. I cammini aumentanti sono 1-3-7; 1-2-5-7; 1-4-3-7; 1-4-6-7 con $\delta = (8, 6, 3, 3)$ con flusso ottimo $v = 16$, $N_s = \{1\}$.

Esercizio 4.

Soluzioni del sistema LKKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ_1	λ_2	globale	locale	globale	locale	
$(2,\ 0)$	0	1	NO	NO	NO	NO	SI
$(3,\ 0)$	$-1/2$	0	SI	SI	NO	NO	NO
$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$	$\sqrt{5}/5$	$\sqrt{5}/5$	NO	NO	SI	SI	NO
$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$	$\sqrt{5}/5$	$\sqrt{5}/5$	NO	NO	SI	SI	NO

matrice M	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
matrice H	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
direzione	$(0, 0, 10)$
max spostamento possibile lungo la direzione	$\frac{1}{10}$
passo	1
x^1	$(0, 0, 3)$

Linearizzato	$-16x_1 - 17x_2 - 10x_3$
ottimo linearizzato	(1,2,3)
direzione	$(1, 2, 1)$
restrizione	$28t^2 - 60t$
passo	1
x^1	$(1, 2, 3)$