591AA 21/22 – COMPITO, LEZIONI 13, 14 E 15

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

I problemi da 1 a 3 sono trascritti da "Schaum's Outlines, Linear Algebra, 3rd ed", che include anche le soluzioni e molti problemi simili.

Problema 1.

(a) [Schaum 3.39a, pg 109, pdf 117] Scrivi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

dove L è una matrice triangolare inferiore e U è una matrice triangolare superiore.

(b) [Schaum 3.41, pg 109, pdf 117] Scrivi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -10 & 2 \end{pmatrix} = LU$$

dove L è una matrice triangolare inferiore e U è una matrice triangolare superiore.

Nota: In generale, si pu scrivere $A = LU$ solo se A può essere ridotto a una matrice scalina senza scambiare le righe.

Problema 2.

(a) [Schaum 6.14, pg 220, pdf 228] Sia $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard (canonica) di $\mathbb{R}^3$. Sia S la base $\{(1,2,0),(1,3,2),(0,1,3)\}$. Trova il cambiamento della matrice di base da E a S e viceversa.

(b) Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la mappa lineare

$$L(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + (x_1 + x_2)e_2 + (x_1 + x_2 + x_3)e_3$$

Trova la matrice di L rispetto alla base S usando il cambiamento delle matrici di base dalla parte (a).

Problema 3.

(a) [Schaum 8.11, pg 294, pdf 301]. Trova il volume del paralellepipedo (scatola) generato dai vettori $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,3,-4)$, $u_3 = (1,2,5)$.

(b) [Schaum, 8.11, pg 294, pdf 301]. Trova il volume del paralellepipedo (scatola) generato dai vettori $u_1 = (1,2,4)$, $u_2 = (2,1,-3)$, $u_3 = (5,7,9)$.

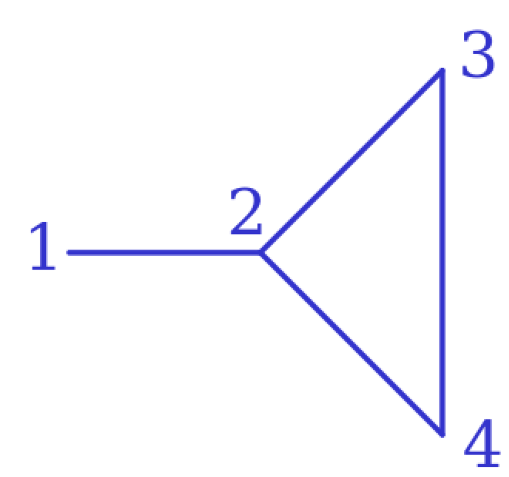
Problema 4.

(a) Trova il determinante della mappa lineare

$$L : P_2[x] \to P_2[x], \qquad L(p) = 2xp''(x) + (1-x)p'(x) + p(x)$$

(b) Verificare con la risultante che il polinomio $f(x) = x^3 + bx + c$ ha una radice multipla se e solo se $4b^3 + 27c^2 = 0$.

Problema 5. Trova l'inverso (se esiste) della matrice di adiacenza del grafico



Problema 6. Sia A la matrice di adiacenza del problema precedente.

(a) Calcolare A^4, A^3, A^2, A.

Per il teorema di Cayley-Hamilton, se A è una matrice $n \times n$, allora esiste un polinomio $p(t) = t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \cdots + p_0$ tale che

$$p(A) = A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1 A + p_0 I_n = 0$$

(b) Trova il polinomio $p(t) = t^4 + p_3 t^3 + \cdots + p_0$ tale che $p(A) = 0$, dove A è la matrice della parte (a).

Suggerimento: La voce (i, j) di $p(A)$ è una funzione lineare di $p_3, \ldots, p_0$. Quindi, è sufficiente trovare 4 voci di $p(A)$ che danno equazioni linearmente indipendenti da risolvere per $p_3, \ldots, p_0$. È possibile ottenere tre tali equazioni lineari dalla diagonale principale di $p(A)$.

Definizione Sia $p(t) = t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \cdots + p_0$ un polinomio di grado n tale che il coefficiente di t sia 1 (tali polinomi sono chiamati polinomi monici). Allora la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -p_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

è chiamata matrice compagna di p.

Problema 7. Verificare che se $p(t) = t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0$ allora

$$p(C) = C^3 + p_2 C^2 + p_1 C + p_0 I_3 = 0, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & -p_2 \end{pmatrix}$$

In generale, se C è la matrice compagna di un polinomio monico p allora $p(C) = 0$.

Problema 8. Verificare che se $p(t) = t^4 + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$ allora

$$\det(tI_4 - C) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & c_0 \\ -1 & t & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & t & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & c_3 + t \end{pmatrix} = p(t)$$

In generale, se C è la matrice compagna di un polinomio monico p di grado n allora $p(t) = \det(tI_n - C)$