ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 08

Note Title 09/10/2018

MATRICI

Def.
- Una matrice è una tabella rettangolare di numeri
- Indichiamo con $M_{n\times m}$ l'insieme delle matrici con n righe ed m colonne
- Se $A \in M_{n\times m}$ (di solito indichiamo le matrici con lettere maiuscole), allora l'elemento che sta nella riga i e colonna j si indica con

$$A_{i,j} \qquad \text{oppure} \qquad a_{i,j}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$$

righe colonne

$$A_{1,2} = 5 \qquad A_{2,3} = 4 \qquad A_{3,2} \text{ NON HA SENSO}$$

Casi speciali di matrice

1. se $n=1$, c'è una sola riga, e la matrice si chiama VETTORE RIGA
2. Se $m=1$ si chiama VETTORE COLONNA
3. Se $n=m=1$, la matrice è un solo numero

$$(1 \ 5 \ 7 \ 9) \in M_{1\times 4} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}$$

vettore riga vettore colonna

Semplici operazioni con le matrici

- $\boxed{\text{SOMMA}}$ Se A e B sono matrici della $\boxed{\text{stessa dimensione}}$, allora somma e differenza si definiscono termine a termine

$$\boxed{(A \pm B)_{i,j} := A_{i,j} \pm B_{i,j}}$$

- $\boxed{\text{PRODOTTO MATRICE} \cdot \text{NUMERO}}$ Se $A \in M_{n \times m}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora λA si definisce moltiplicando tutto per λ

$$\boxed{(\lambda A)_{i,j} := \lambda A_{i,j}}$$

- $\boxed{\text{MATRICE TRASPOSTA}}$ Se $A \in M_{n \times m}$, allora la $\boxed{\text{trasposta}}$ è la matrice A^t ottenuta scambiando righe e colonne, dunque $A^t \in M_{m \times n}$

$$\boxed{(A^t)_{i,j} := A_{j,i}}$$

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Ad esempio $(A^t)_{1,2} = A_{2,1}$ e così via.

Esercizio Quando posso calcolare $A + A^t$?

Se e solo se A è quadrata, cioè $A \in M_{n \times n}$.
In caso contrario A e A^t hanno dim. diverse, e quindi non si possono sommare.

— o — o —

PRODOTTO DI MATRICI

Siano $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{m \times k}$ due matrici
(il numero di righe della seconda = numero di colonne della prima).
Allora posso definire il prodotto $AB \in M_{n \times k}$

tante righe come la prima — tante col. come la 2a

e si definisce "moltiplicando righe per colonne".

<u>Esempio</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 16 & 22 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}}_{AB}$$

Per ottenere l'elemento in posizione 1,1 ho moltiplicato, come fosse un prodotto scalare, la 1a riga con la 1a colonna

Formalmente, se $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{m \times k}$, allora

$$\boxed{(AB)_{i,j} := \sum_{r=1}^{m} A_{i,r} \cdot B_{r,j}} \qquad \begin{matrix} i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, k\} \end{matrix}$$

i-esima riga della 1a matrice — j-esima colonna della seconda matrice

<u>Buone notizie</u> Il prodotto ha molte proprietà attese.
Ad esempio, se le dimensioni sono compatibili

- è distributivo $(A+B)C = AC + BC$ (facile verifica)
  $A(B+C) = AB + AC$

- si distribuisce rispetto al prodotto per una costante

$$(\lambda A) B = \lambda (AB) = A (\lambda B)$$ (facile verifica)

- è associativo : $A(BC) = (AB)C$

[Dimostrazione fastidiosa, e segue dall'uguaglianza

$$(ABC)_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{k} A_{i,r} B_{r,s} C_{s,j}$$

in qualunque ordine io esegua le operazioni

se $A \in M_{n \times m}$, $B \in M_{m \times k}$, $C \in M_{k \times \ell}$]

$\boxed{\text{BRUTTA NOTIZIA}}$ Il prodotto di matrici NON è commutativo per due motivi

1 - Se posso calcolare AB, non è detto che possa calcolare BA

2 - Se anche potessi calcolarlo (ad esempio quando A e B sono matrici quadrate della stessa dim) può succedere che $AB \neq BA$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Domanda : quando posso fare $A \times A$

Se e solo se A è quadrata.

— o — o —

Caso speciale: se moltiplico una matrice per un vettore colonna ottengo un altro vettore colonna

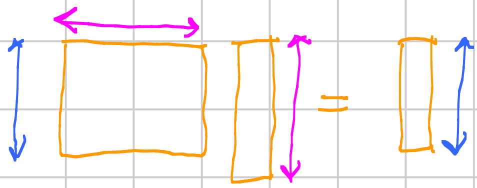
$A \in M_{n\times m} \qquad B \in M_{m\times 1} \quad \rightsquigarrow \quad AB \in M_{n\times 1}$

Esempio $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ 7x + y + 4z \end{pmatrix}$$

Fatto fondamentale

Ogni sistema lineare si può scrivere nella forma

$$\boxed{Ax = b}$$



dove

- $A \in M_{n\times m}$ è la matrice dei coefficienti
- $x \in M_{m\times 1}$ è il vettore colonna delle incognite
- $b \in M_{n\times 1}$ è il vettore colonna dei termini noti

Nota bene: il sistema ha n equazioni (cioè tante quante le righe di A e di b) ed m incognite (tante quante le colonne di A e le righe di x).

— o — o —

MATRICI SPECIALI

- Matrice nulla = matrice con tutti 0
- Matrice identità = matrice quadrata $n\times n$ con tutti 1 sulla diag. principale e 0 altrove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2

Proprietà della matrice identità

Se $I \in M_{n \times n}$ è la matrice identità, allora

$$\boxed{I \cdot A = A \cdot I = A \qquad \forall A \in M_{n \times n}}$$

— o — o —