591AA 21/22 – ELENCO DEI PROBLEMI 2

Problema 1. Usa una tabella di verità per verificare che

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$(\neg P) \wedge (\neg Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$\neg(P \vee Q) \iff$
F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	V

Problema 2. Usa una tabella di verità per verificare che

$$(P \iff Q) \iff ((\neg Q) \iff (\neg P))$$

P	Q	α: $P \iff Q$	β: $(\neg Q) \iff (\neg P)$	$\alpha \iff \beta$
F	F	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Problema 3. Verificare che

$$A = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \setminus B)}_{C}$$

Illustrare con un diagramma.

① $A \subseteq C$, ② $C \subseteq A$

$s \in A$	$s \in B$	$s \in A-B$	$s \in A \cap B$	$s \in C$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Problema 4. Verificare che

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Illustrare con un diagramma.

$\emptyset \subseteq A$

Problema 5. Elencare tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3\}$

$\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\emptyset$

3 2 1 0

$1 + 3 + 3 + 1 = 8$

$S = \{A, B\}$ $\{A,B\}$ $\{A\}$, $\{B\}$, $\emptyset$ $\emptyset$

Problema 6. Se T è un sottoinsieme di S sia

$$\chi_T : S \to \{V, F\}, \qquad \chi_T(s) = \begin{cases} V & s \in T \\ F & s \notin T \end{cases}$$

S

Contando il numero di possibili funzioni T, dimostrare che se S ha n elementi allora X ha 2^n sottoinsiemi.

$S = \{1,2,3\}$

$T = \{1,3\}$

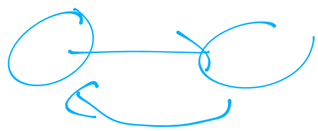
S	χ_T
1	V
2	F
3	V

S	χ
1	V o F
2	V o F
⋮	
N	V o F

$2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^N$

Problema 7. Un algoritmo di compressione senza perdite se i dati originali possono essere perfettamente ricostruiti dal file compresso.

Mostrare per contraddizione che non esiste un algoritmo di compressione senza perdita che riduca la dimensione di ogni file di un bit.



$\{N\} \longrightarrow \{N-1\} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \{1\}$

$\{N\}$ — - - —

Problema 8. Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$2(N+1)+1$

$= 2N+3$

$P(1)$: $\sum_{k=1}^{1} n^2 = 1$, $\frac{(1)(1+1)(2+1)}{6} = 1$

$P(N) \Rightarrow P(N+1)$: $\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 + (N+1)^2$

$= \frac{(N)(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2$

$= \frac{N(N+1)(2N+1) + 6(N+1)^2}{6}$

$= \frac{(N+1)\{N(2N+1) + 6(N+1)\}}{6}$

$(2N+3)(N+2)$ $= \frac{(N+1)\{2N^2 + N + 6N + 6\}}{6}$

$= \frac{(N+1)(2N^2 + 7N + 6)}{6} = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$