ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 42

Note Title 23/11/2018

Esempio 1 $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$p(x) \to p'(x)$

Calcolare la forma canonica di f.

Costruisco la matrice associata ad f in qualche base

$f(1) = 0$

$f(x) = 1$

$f(x^2) = 2x$

$f(x^3) = 3x^2$

Quindi nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$ la matrice di f è

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} & \end{array} = A$$

Non serve, ma per esercizio calcoliamo la matrice di f nella base $\{x, x^2, 1, x^3\}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(x) & f(x^2) & f(1) & f(x^3) \end{array} & \end{array} = B$$

(simile ad A: per esercizio trovare una possibile M di passaggio)

Tornati ad A, calcoliamo la forma di Jordan:

L'unico autovalore è $\lambda = 0$ con $m_a(0) = 4$

Si vede che $m_g(0) = \dim(\ker(A - 0\,\mathrm{Id})) = 4 - \text{rango}(A) = 1$

Quindi esiste un unico blocco di Jordan 4×4 con 0 sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

Trovare una matrice M che realizza la similitudine

$$J = M^{-1} A M \qquad (M \text{ invertibile})$$

Superbovino : $MJ = AM$ e diventa un sistema di 16 eq. in 16 incognite.

Guardo cosa deve accadere :

$$\begin{array}{cccccl} 0 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow & v_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \leftarrow & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow & v_4 \\ \uparrow & \uparrow & & & & \\ f(v_1) & f(v_2) & \cdots & & & \end{array}$$

$f(v_1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1 \in \ker$

$f(v_2) = v_1$

$f(v_3) = v_2$

$f(v_4) = v_3$

v_1 posso prendere

$f(v_2) = v_1$

$f(v_3) = v_2$

$f(v_4) = v_3$

$v_1 = 1$

$v_2 = x$

$v_3 = \dfrac{x^2}{2}$

$v_4 = \dfrac{x^3}{6}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = M$$

La matrice M è quella che ha come colonne v_1, v_2, v_3, v_4 :

Verifica : $J = M^{-1} A M$.

— o — o —

Esempio 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Trovare J reale e complessa e matrici M di passaggio

$\boxed{\text{Calcolo autovalori}}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad (1-\lambda)(3-\lambda)+10=0$$
$$\lambda^2-4\lambda+13=0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

$\boxed{\text{Jordan complessa}}$

$$J = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

Come trovo la M di passaggio? Le colonne sono gli autovettori (complessi di A)

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+3i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x-5y &= (2+3i)x \\ 2x+3y &= (2+3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1-3i)x \quad - 5y &= 0 \\ 2x \quad + (1-3i)y &= 0 \end{aligned}$$

Una sol. comoda della prima eq. è: $x=5 \quad y=-1-3i$

Verifico che risolva la 2ª: $10-(1-3i)(1+3i) = 10-10=0$ ☺

Un autovettore relativo a $(2+3i)$ è $(5, -1-3i)$

Si verifica abbastanza facilmente che $(5, -1+3i)$ è un autovettore relativo a $(2-3i)$. [Fare la verifica!]
Quindi la M di passaggio è

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1-3i & -1+3i \end{pmatrix} = M$$

Verifico che $J = M^{-1}AM$

$\boxed{\text{Jordan reale}}$ Si ricava da quella complessa

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$ (ricavata guardando quella complessa)

Cerco la matrice M di passaggio, cioè cerco la base $\{v_1, v_2\}$ in cui la matrice ha la forma J.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} & \end{array}$$

Deve succedere che
$$f(v_1) = 2v_1 - 3v_2$$
$$f(v_2) = 3v_1 + 2v_2$$

Come trovo v_1 e v_2 ?

Torniamo alla forma complessa. Chiamiamo w l'autovettore relativo a $(2+3i)$. Allora

$$f(w) = (2+3i)\,w$$
$$f(\bar{w}) = (2-3i)\,\bar{w}$$

Scrivo w nella forma $\underset{\text{complesso}}{w} = \underset{\text{reali}}{w_1 + i\,w_2}$

$$f(w_1) + i\,f(w_2) = (2+3i)(w_1 + i\,w_2) = 2w_1 - 3w_2 + i(3w_1 + 2w_2)$$
$$f(w_1) - i\,f(w_2) = (2-3i)(w_1 - i\,w_2) = 2w_1 - 3w_2 + i(-3w_1 - 2w_2)$$

Sommando ottengo $\quad f(w_1) = 2w_1 - 3w_2$

Sottraendo ottengo $\quad f(w_2) = 3w_1 + 2w_2$

Morale: Il v_1 e v_2 che cercavo sono parte reale e immaginaria degli autovalori complessi trovati prima

$$w = (5, -1-3i) = \underbrace{(5,-1)}_{v_1} + i\,\underbrace{(0,-3)}_{v_2}$$

Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Verifica: $J = M^{-1} A M$

$$-\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -30 & -45 \\ 45 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare la forma canonica

- Rango $= 2 \Rightarrow \dim \ker = 2 \Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con $m_g = 2$ (l'algebrica per ora non la so)
- Se moltiplico per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ottengo 8 volte lui stesso, quindi $\lambda = 8$ è autovalore con $m_g(8) \geq 1$.
- La somma degli autovalori è 12 e 3 autovalori sono di sicuro 0, 0, 8. Per forza il quarto è 4.
- Conclusione: gli autovalori sono 0, 0, 8, 4, quindi $m_a(0) = m_g(0)$

Quindi A è diagonalizzabile con forma canonica

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come trovo una M di passaggio

v_1: autovettore di 8 : $(1,1,1,1)$

v_2: autovettore di 4 : lo ottengo risolvendo $Av = 4v$

volendo si vede ad occhio che è $(1,-1,1,-1)$

v_3, v_4 : base del ker : $(1,0,-1,0)$

$(0,1,0,-1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Verifica!]

Oss. A era simmetrica, quindi posso trovare M che sia ortogonale !!!

Quindi mi serve base con v_1, v_2, v_3, v_4 ortonormali

Dico che v_1, v_2, v_3 sono ortogonali (sono autovettori con autovalori distinti), quindi basta aggiustare v_4 con GS e poi rendere la base ortonormale dividendo per le norme.

— o — o —