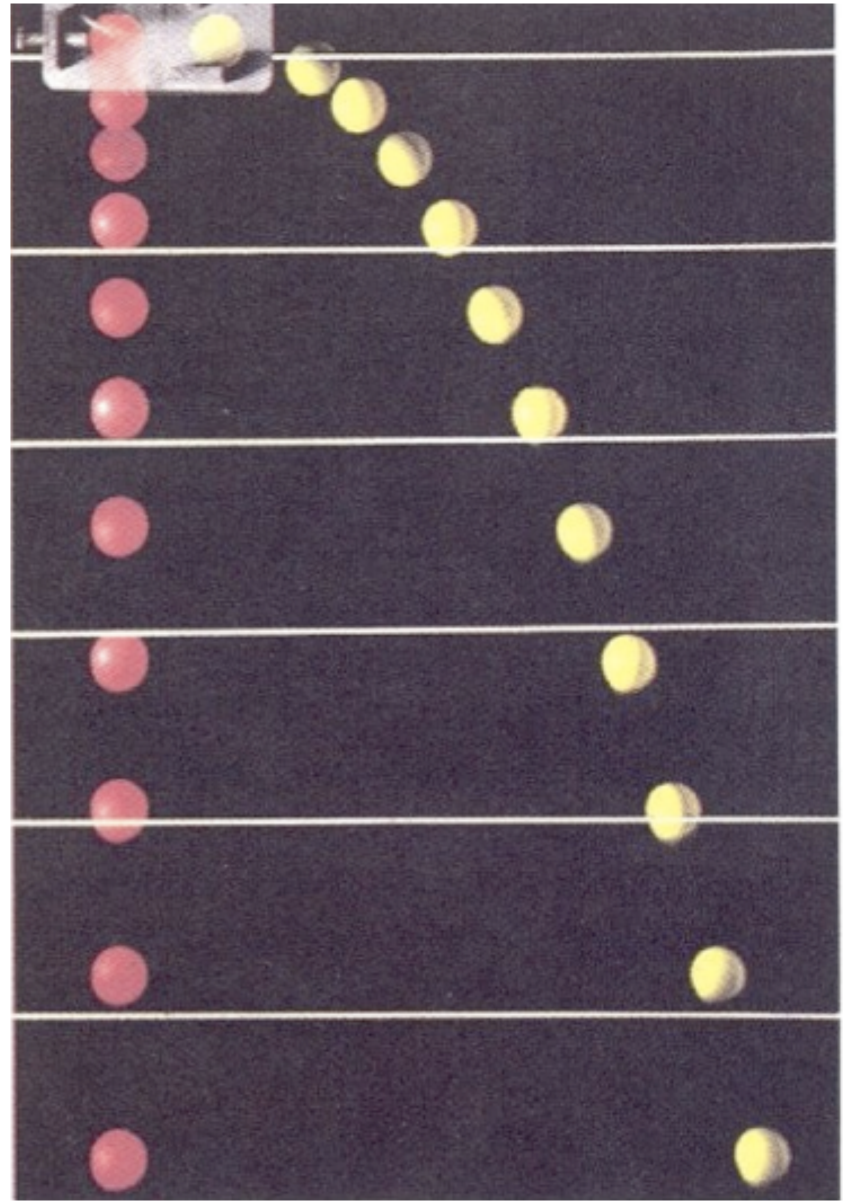
Moto dei proietti

- E' il moto di particelle che vengono lanciate con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e sono soggette alla sola accelerazione di gravità $\vec{g}$ supposta costante.

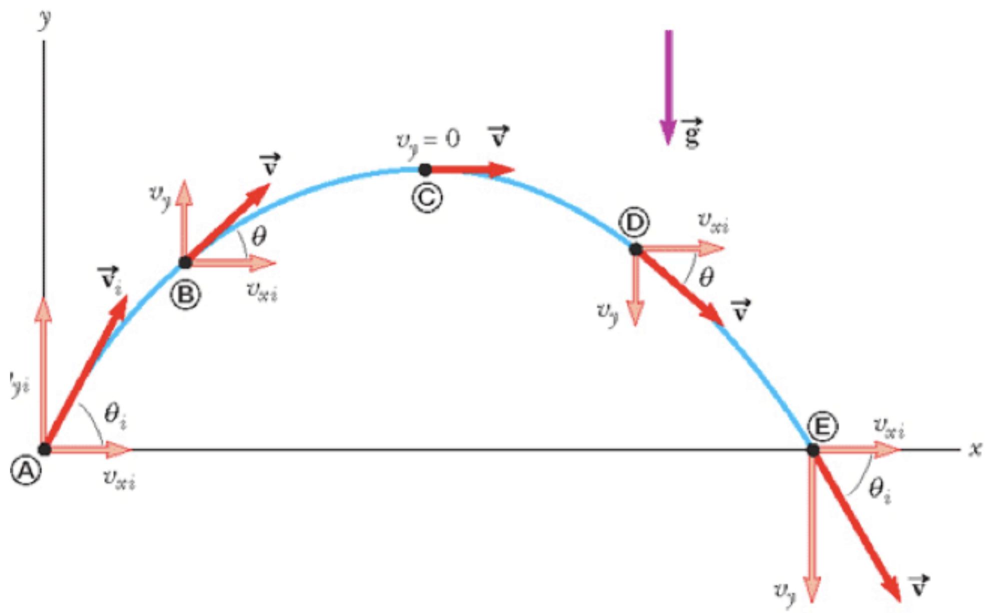
- La pallina rossa viene lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui l'altra è lanciata orizzontalmente verso destra con velocità $\vec{v}_0$.

- Osservazioni sperimentali:
  – gli spostamenti verticali delle due palline sono identici
  – Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti



Analisi del moto dei proietti

Il moto può essere analizzato separatamente nelle sue componenti:
– la componente orizzontale è descritta dalle relazioni cinematiche del moto rettilineo uniforme
– quella verticale dalle relazioni del moto uniformemente accelerato.



Il moto avviene nel piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{g}$: scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale orientando l'asse x orizzontalmente e l'asse y lungo la verticale.

Analisi del moto dei proietti

Analizziamo separatamente il moto *orizzontale*:

$$a_x = 0, \qquad v_x = v_{0x} = \text{cost}, \qquad x = x_0 + v_{0x} t$$

e il moto *verticale*:

$$a_y = -g, \qquad v_y = v_{0y} - gt, \qquad y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Determiniamo la *traiettoria*: il luogo geometrico dei punti occupati dal vettore posizione $\vec{r}(t)$ nel corso del tempo.

Equazione della traiettoria

Eliminiamo t fra le equazioni del moto per $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2}$$

Ponendo $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $x_0 = y_0 = 0$, otteniamo:

$$\boxed{y = x\tan\theta - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2}$$

Questa è l'equazione di una *parabola* nel piano xy, con la curvatura rivolta verso il basso. La traiettoria è quindi *parabolica*.

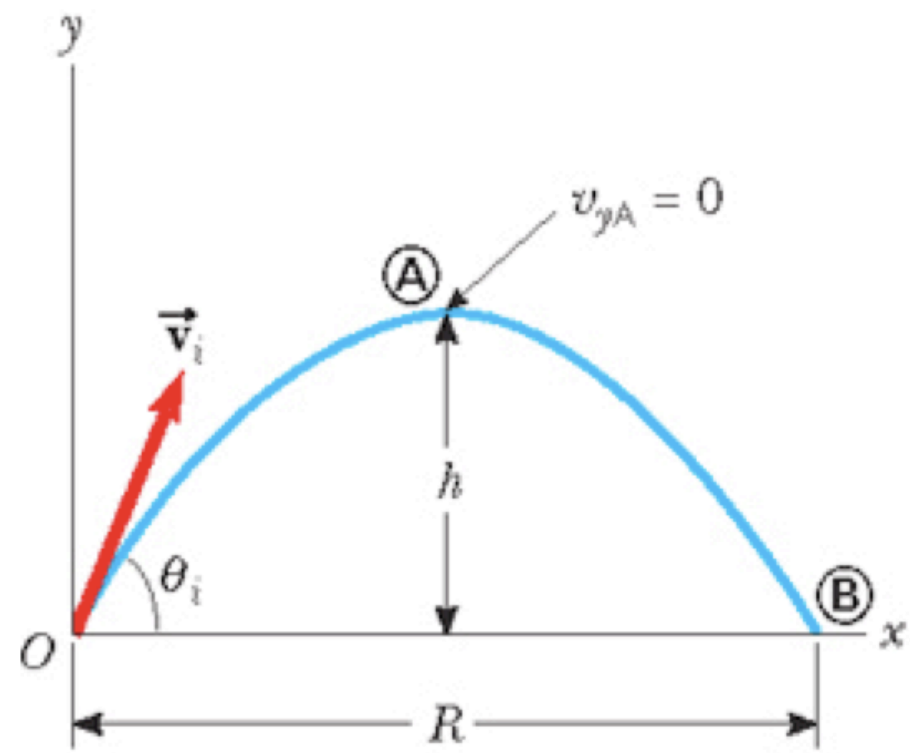
Gittata

Distanza orizzontale coperta dal proietto all'istante in cui tocca il suolo:

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Soluzioni: $t = 0$, oppure

$$t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$



Sostituendo quest'ultimo in $x(t) = x_0 + v_0(\cos\theta)t$ si trova la *gittata* R:

$$x - x_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \equiv R$$

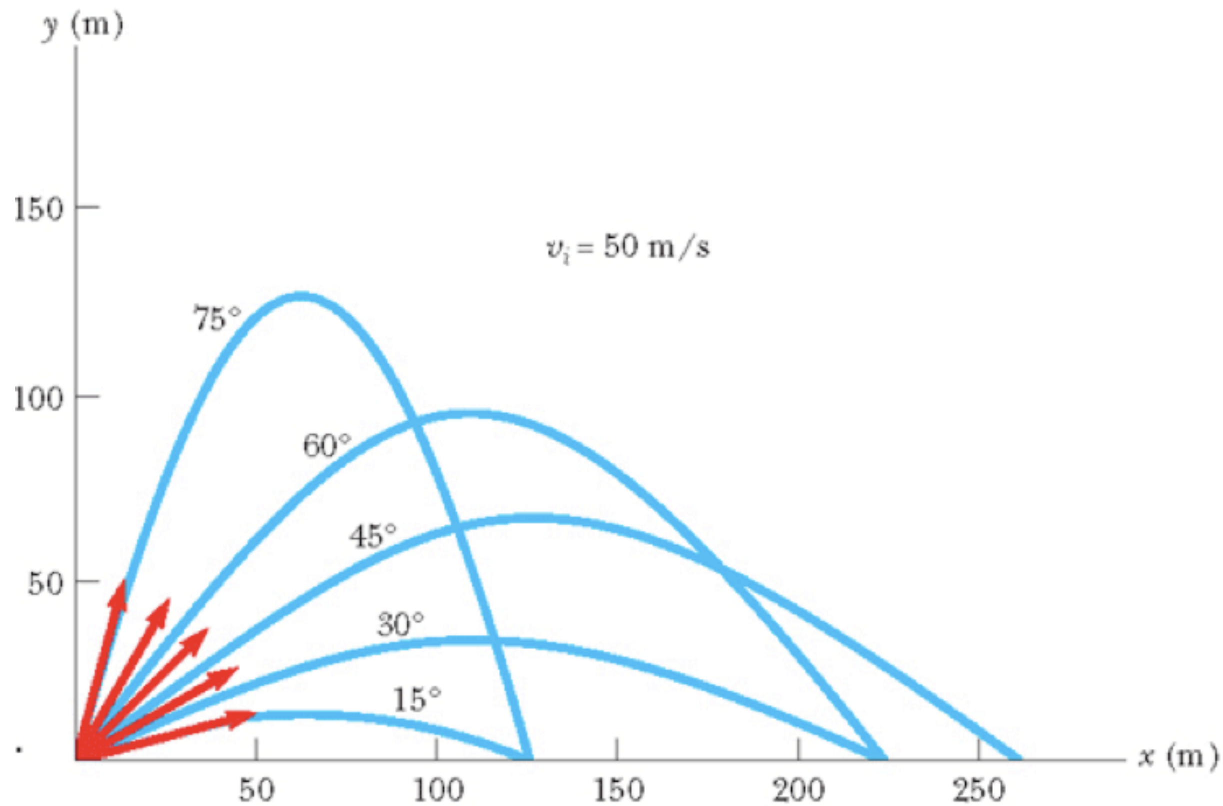
(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore di x per cui $y = 0$)

Gittata 2

La gittata R:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)}$$

è massima se $\theta = 45°$.



L'altezza massima h si raggiunge quando $v_y = v_0 \sin\theta - gt = 0$, ovvero per $t = \frac{g}{v_0 \sin\theta}$, da cui $h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$

(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore x_{max} per cui $dy/dx = 0$, trovare poi $y(x_{max})$)

Esempio 1

Nel 1996 C. Lewis vinse la medaglia d'oro nel salto in lungo con un salto di 8.50 m. Se l'angolo con cui spiccò il salto fu $\theta = 23^\circ$, calcolare, assumendo il moto parabolico, il modulo v_0 della velocità iniziale.

Esempio 1

Nel 1996 C. Lewis vinse la medaglia d'oro nel salto in lungo con un salto di 8.50 m. Se l'angolo con cui spiccò il salto fu $\theta = 23°$, calcolare, assumendo il moto parabolico, il modulo v_0 della velocità iniziale.

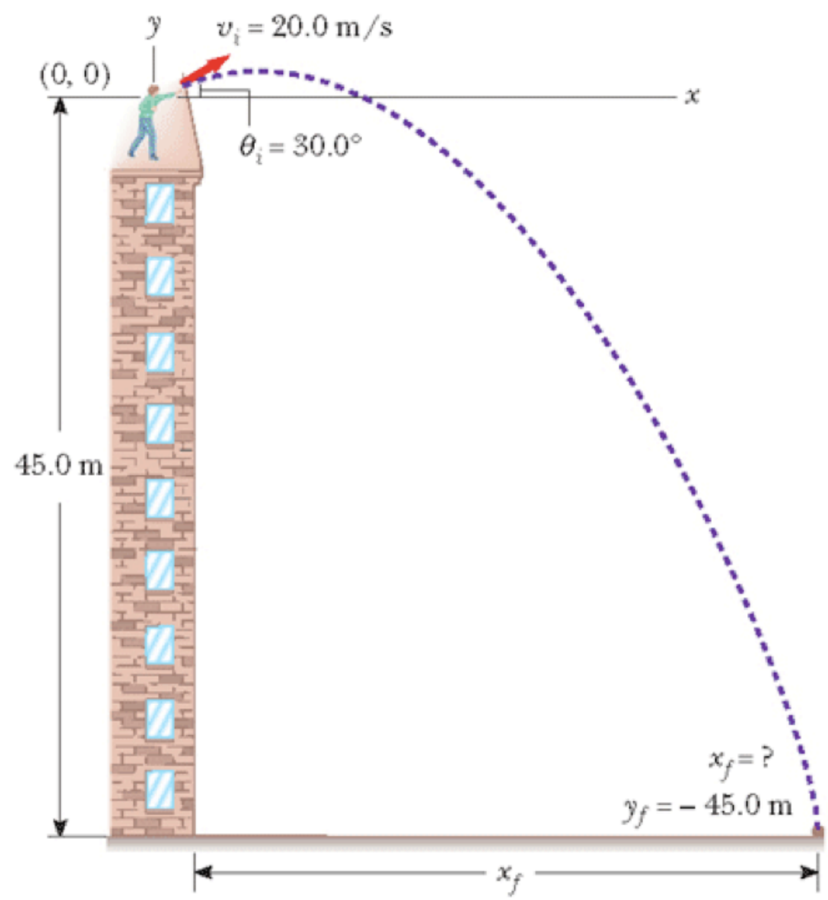
$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta) \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta)}} = \sqrt{\frac{8.50 \cdot 9.81}{0.72}} m/s = 10.8 m/s$$

Vi sembra un valore ragionevole?

Esempi 2 e 3

Dal tetto di un edificio di altezza h viene lanciata una pallina con velocità $v_0 = 10$ m/s e inclinazione $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Calcolare l'altezza h dell'edificio, sapendo che la pallina arriva al suolo ad una distanza $d = 18$ m dalla base dello stesso.

Variante (un po' più complicata):
Dal tetto di un edificio di altezza $h = 45$ m viene lanciata una pallina con velocità $v_0 = 20$ m/s e inclinazione $\theta = 30°$ rispetto all'orizzonte. Calcolare a che distanza dall'edificio la pallina tocca il suolo.



Nota Bene

- E' necessario specificare sempre *in quale sistema di riferimento si descrive il moto*: le componenti di $\vec{r}$, di $\vec{v}$ e di $\vec{a}$, l'espressione analitica della traiettoria, dipendono dal sistema di riferimento.

- Le relazioni generali tra le grandezze cinematiche sono invece relazioni *vettoriali* e in quanto tali non dipendono (sono *covarianti*) dalla scelta del sistema di riferimento.

Soluzioni

Soluzione del primo problema: usiamo l'equazione della traiettoria (valida se $x_0 = y_0 = 0!$):

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

Vogliamo trovare la y corrispondente a $x = d$. Con i nostri dati

$$y = d \tan 30^\circ - \frac{g}{2(v_0 \cos 30^\circ)^2} d^2, \qquad h = -y = 10.8\text{m}$$

Soluzione della variante: dobbiamo trovare il valore di x_f tale per cui la traiettoria passa per il punto (x_f, y_f), con $y_f = -45$ m. Quindi:

$$y_f = x_f \tan\theta - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x_f^2$$

Dobbiamo risolvere un'equazione di secondo grado per x_f:

$$-\frac{a}{2}x_f^2 + bx_f - y_f = 0$$

dove

$$a = \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} = 0.0372\text{m}^{-1}, \quad b = \tan\theta = 0.57735$$

Si trova

$$x_f = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 2ay_f}}{a}$$

ovvero $x_f = 73$ m

(la soluzione negativa $x_f = -37.7$ m è spuria e corrisponde ad un'ipotetica traiettoria prima dello sparo)

Velocita' relativa

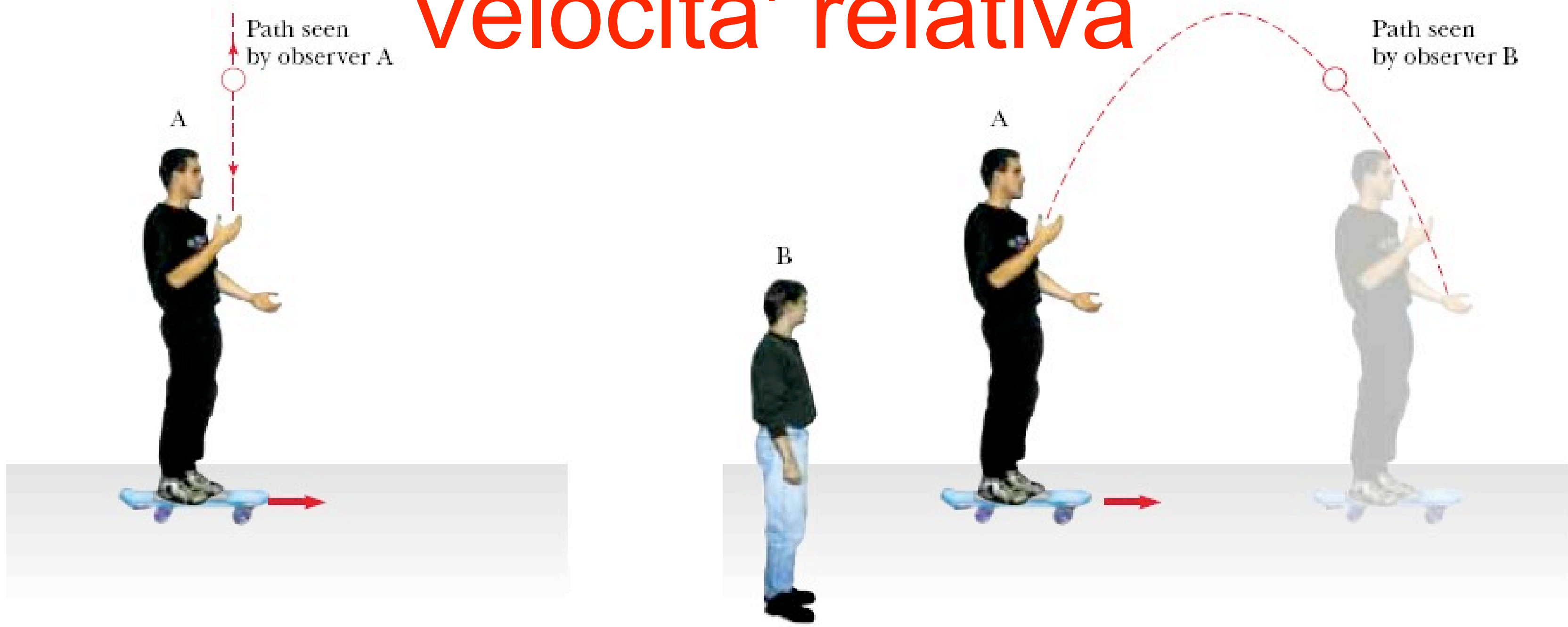


Figure 4.22 (a) Observer A on a moving skateboard throws a ball upward and sees it rise and fall in a straight-line path. (b) Stationary observer B sees a parabolic path for the same ball

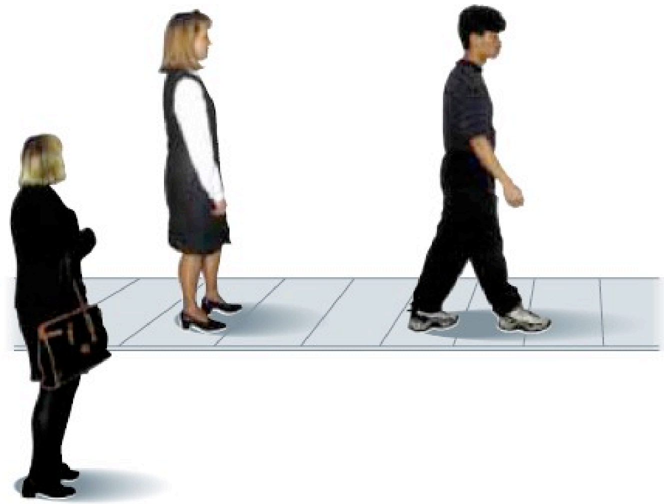


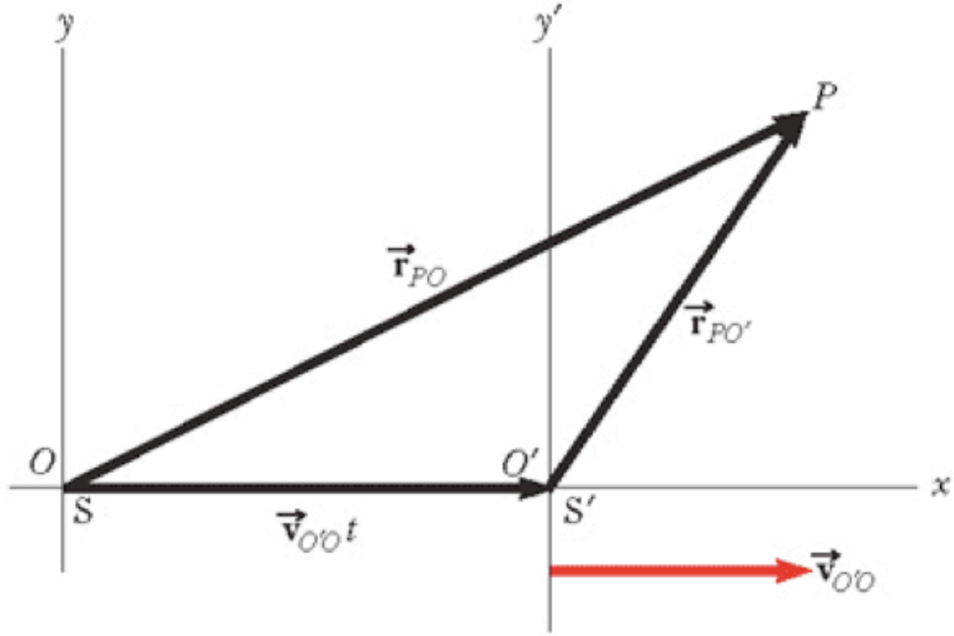
Figure 4.21 Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

Relatività galileiana

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

Velocità relativa 2

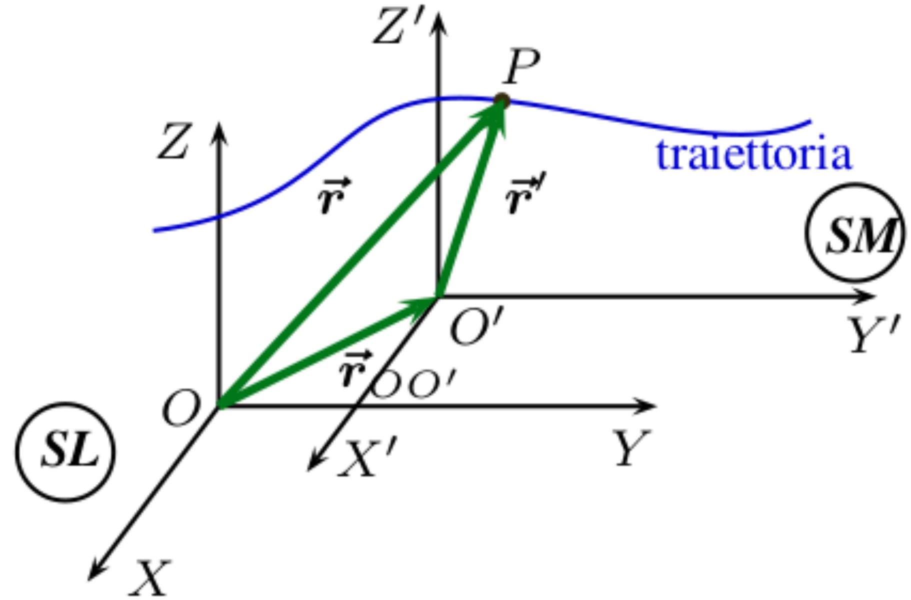
- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ è *stazionario* o *di laboratorio*
- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) $\vec{v}_0$ *costante*



- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo*)
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ perché $\vec{v}_0$ è costante

Velocità e accelerazione di trascinamento

Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento $\mathcal{SM}$ (*sistema mobile*) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio

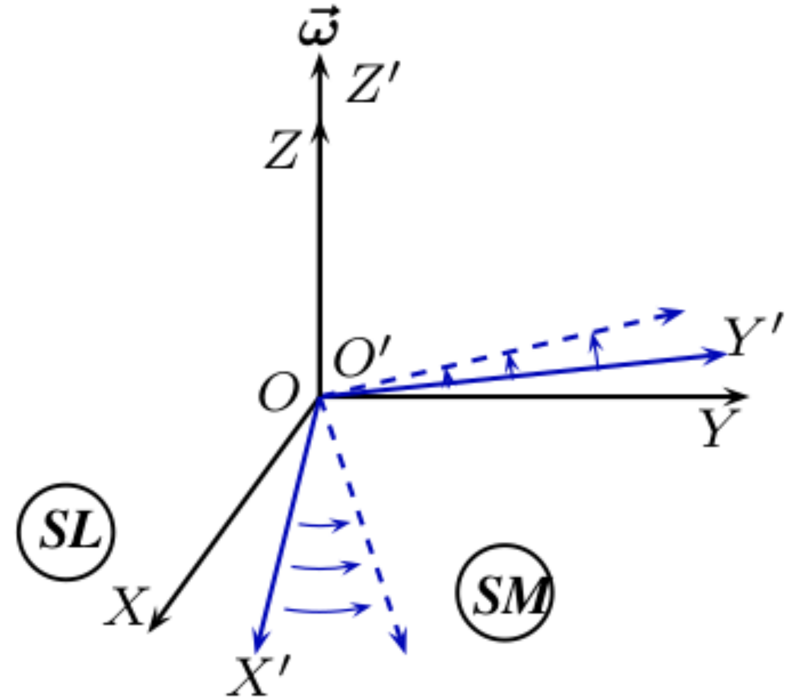


- La relazione fra le posizioni diventa $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}(t)}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t,}$ con $\vec{v}_t = \dfrac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t}$ dove $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}_t}{dt}$

a_t è detta *accelerazione di trascinamento*. Se $\vec{a} = 0$, $\vec{a}\,' = -\vec{a}_t$.

Sistemi di riferimento rotanti

Consideriamo ora il caso in figura: il sistema mobile $\mathcal{SM}$ (*ruota*) con velocità angolare $\vec{\omega}$ (assunta costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio



- La rotazione di $\mathcal{SM}$ conferisce ai suoi punti una velocità di trascinamento $\boxed{\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ che dipende dalla posizione

- L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$ per i punti del $\mathcal{SM}$ diventa
$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{v}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}_\perp} \quad (*)$$
dove $\vec{r}_\perp$ è la proiezione di $\vec{r}$ sul piano di rotazione
(non è altro che l'accelerazione centripeta del moto rotatorio).

Sistemi di riferimento rotanti (2)

- Relazione fra velocità $\vec{v}$ di un punto materiale nel sistema $\mathcal{SL}$ e $\vec{v}\,'$ nel sistema $\mathcal{SM}$: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t$ ovvero $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}.}$

- La relazione fra accelerazioni richiede un po' di attenzione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

ma $\vec{v}\,'$ varia nel tempo sia per effetto del moto nel $\mathcal{SM}$ che per effetto della rotazione rispetto al $\mathcal{SL}$. Scrivendo $\vec{v}\,' = \hat{\mathbf{i}}'v'_x + \hat{\mathbf{j}}'v'_y + \hat{\mathbf{k}}'v'_z$ si trova che $\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$, con $\vec{a}\,' = \hat{\mathbf{i}}'\frac{dv'_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}}'\frac{dv'_y}{dt} + \hat{\mathbf{k}}'\frac{dv'_z}{dt}$, da cui ricordando la (*) si trova infine

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' - \omega^2\vec{r}_\perp + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'.}$$

Se $\vec{a} = 0$ nel $\mathcal{SL}$, nel $\mathcal{SM}$ $\vec{a}\,' = \omega^2\vec{r}_\perp - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$.

Il termine $\omega^2\vec{r}_\perp$ è detto *accelerazione centrifuga*.
Il termine $-2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ è noto come *accelerazione di Coriolis*.