Parte I, Numero Esame: 27

Problema 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La rimozione di quale colonna da A risulta in una matrice di rango 2? Scrivi qui e sulla copertina il numero della colonna (1-4). Scrivi l'insieme vuoto $\emptyset$ se nessuna colonna soddisfa questa condizione.

3

Problema 2. Ricordiamo che se $p(t)$ è il polinomio monico $t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$ allora la matrice compagna

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

ha un polinomio caratteristico $p(t)$. Quale dei seguenti polinomi p(t) ha una matrice compagna non invertibile?

(a) $p(t) = t^4 + 1$
(b) $p(t) = t^4 - 1$
(c) $p(t) = t^4 - t$
(d) $p(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$
(e) Le affermazioni (a), (b), (c), (d) sono false.

Devi annotare la tua risposta sia qui che sulla copertina.

γ **Problema 3.** Sia V uno spazio vettoriale reale. Se u e w sono vettori linearmente indipendenti in V allora $P = \{su + tv \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ è un parallelogramma. Ricordiamo che, rispetto ad un dato prodotto scalare su V, l'area di P è $|u||w|\sin(\theta)$, dove θ è l'angolo tra u e w.

Sia $P_2(x)$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Sia

$$\langle f, g \rangle = \int_0^3 f(x)g(x)\,dx$$

Qual è l'area del parallelogramma generata da $u = x$ e $w = x - 1$? Scrivi la risposta qui e sulla copertina. (Nessun credito parziale)

$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Problema 4. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? Se le affermazioni (a)-(e) sono vere, scegli (f).

(a) Una matrice normale è diagonalizzabile.
(b) L'algoritmo di eliminazione gaussiana può essere adattato per calcolare il determinante di una matrice.
(c) Ogni base di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha lo stesso numero di elementi
(d) Se S è un sottoinsieme dello spazio vettoriale V allora span(S) il pi piccolo sottospazio di V che contiene S.
(e) Ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base.
(f) Tutte le affermazioni di cui sopra sono vere.