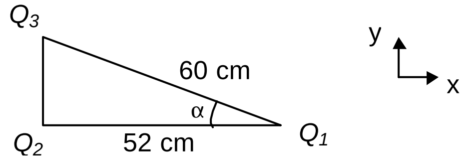
Esercizi svolti

Esercizio 1.1

Calcolare la forza che agisce sulla carica Q_1 = 100 μC, dovuta alle cariche Q_2 = -30 μC e Q_3 = 70 μC disposte come riportato in figura



Soluzione: La forza che agisce sulla carica Q_1 è data dalla composizione vettoriale delle forze dovute alle due cariche Q_3 e Q_3

$$|F_{12}| = \left| k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \right| = 99.9\ N$$

$$|F_{13}| = \left| k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2} \right| = 175\ N$$

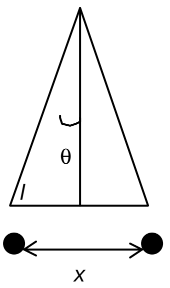
$$|F_{13x}| = |F_{13}|\cos\boldsymbol{a} - |F_{12}| = 51.7\ N$$

$$|F_{13y}| = -|F_{13}|\text{sen}\,\boldsymbol{a} = -87.5\ N$$

$$F_{13} = F_{13}\mathrm{i} + F_{13}\mathrm{j} = (51.7\mathrm{i} - 87.5\mathrm{j})\ N$$

Esercizio 1.2

Due palline, con uguale massa *m* e carica *q*, sono appese come mostrato in figura. Calcolare la distanza tra le due palline sapendo che $q = 2.4 \cdot 10^{-6}$ C, l =120 cm e m = 10 g.



Soluzione: Sulle palline agiscono la forza peso e la forza di Coulomb

$$F_e = k\frac{q^2}{x^2} \qquad F_p = mg$$

All'equilibrio la forza risultante che agisce sulle palline deve avere la stessa direzione del filo che le sostiene, quindi deve essere:

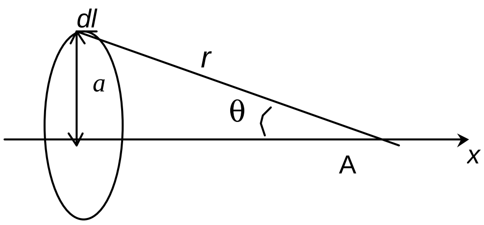
$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_p}$$

Facendo l'ipotesi che l'angolo θ sia piccolo $(\tan\theta \approx \mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{2l})$ si ottiene

$$x^3 = \frac{lq^2}{2\pi\varepsilon_0 mg}; \qquad x = 10.8\ cm$$

Esercizio 1.3

Un sottile anello di raggio *a* possiede una carica totale *Q* distribuita uniformemente su di esso. Calcolare il valore del campo elettrico per un generico punto A sull'asse dell'anello.



Soluzione: La carica presente su un segmentino d*l* dell'anello è

$$dQ = \frac{Q}{2\pi a} dl$$

e produce un campo elettrico

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a r^3} dl$$

Il campo totale è dato dall'integrazione su tutta la circonferenza, ma per ragioni di simmetria il campo risultante è diretto lungo *x*, quindi

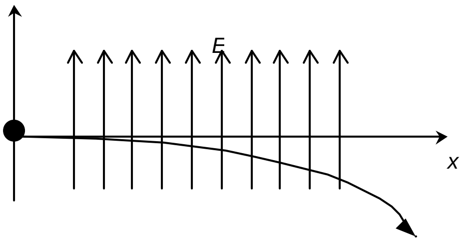
$$E = \int dE_x = \int \cos\theta \, dE$$

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a (x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Esercizio 1.4

Un elettrone che si muove lungo la direzione *x* con velocità $v_0 = 10^7$ m/s è sottoposto, per un tratto lungo d = 4 cm, ad un campo elettrico uniforme E = 10^4 N/C ortogonale alla sua velocità. Calcolare in quale direzione si muove l'elettrone dopo aver attraversato la regione in cui è presente il campo elettrico.



Soluzione: Il campo elettrico imprime all'elettrone un'accelerazione

$$a_y = \frac{F}{m} = -\frac{qE}{m}$$

che lo fa spostare nella direzione *y* secondo la legge

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

mentre lungo l'asse *x* si muove con moto uniforme

$$x = v_0 t$$

Eliminando la variabile *t* dalle equazioni si ottiene

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

Le componenti della velocità dell'elettrone all'uscita del campo sono

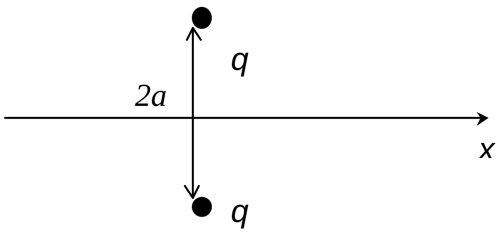
$$v_y = \sqrt{2a_y y} = \frac{qEd}{mv_0} \qquad v_x = v_0$$

da cui è possibile ricavare l'angolo che la direzione dell'elettrone forma con l'asse *x*

$$\tan \mathbf{q} = \frac{-v_y}{v_x} = \frac{qEx}{mv_0^2} = -0.7 \qquad \mathbf{q} = -35°$$

Esercizio 1.5

Su un piano orizzontale sono poste due cariche *q* ad una distanza 2*a* l'una dall'altra. Determinare il punto appartenente all'asse *x* (perpendicolare alla congiungente delle due cariche e passante per il suo punto medio) in cui il campo elettrico raggiunge il valore massimo.



Soluzione:

$$E = k\frac{q}{a^2 + x^2} \qquad E_x = E_1 \cos \mathbf{q} \qquad E_y = E_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}$$

$$\operatorname{sen} \mathbf{q} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \cos \mathbf{q} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_x = k\frac{q}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = kq\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = kq\frac{(a^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2\sqrt{a^2 + x^2}}{(a^2 + x^2)^3} = kq\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{(a^2 + x^2)^3}(a^2 + x^2 - 3x^2)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \qquad x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Esercizi proposti

Esercizio 1.6

Un dipolo elettrico di momento **p** è posto a distanza a= 1 m da una carica puntiforme $Q=+10^{-10}$ coulomb parallelamente al campo elettrico generato da quest'ultima.
Se sul dipolo agisce una forza di intensità F= 1 newton, quanto vale il momento di dipolo? Come deve essere orientato il dipolo affinché la forza sia attrattiva?
Risultato: p=0.55 coulomb m

Esercizio 1.7

Secondo il modello di Bohr nell'atomo di idrogeno non eccitato l'elettrone (carica –e=-1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=9.1 10^{-31} kg) descrive attorno al nucleo (carica +e=1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=1.67 10^{-27} kg) un orbita circolare di raggio r=5.3 10^{-11} m.
Nell'ipotesi che la massa sia indipendente dalla velocità determinare:

1) La forza di attrazione F che si esercita tra il nucleo e l'elettrone.
2) La velocità v dell'elettrone.
3) La frequenza í di rivoluzione dell'elettrone.
4) L'energia totale U dell'elettrone.

Risultato: F=3.6 10^{-47} newton , v= 2.2 10^{6} m/sec, í=6.5 10^{15} giri/sec, U= -13.7 eV

Esercizio 1.8

Un dipolo elettrico è costituito da due cariche opposte di modulo Q= 10^{-6} coulomb poste fra loro a distanza d=2 cm. Esso è immerso in un campo elettrico uniforme di intensità 10^{5} newton/coulomb. Determinare:
1) Il valore massimo del momento meccanico M che si esercita sul dipolo.
2) Il lavoro U che bisogna compiere per ruotare il dipolo di 180 º attorno al suo baricentro partendo dalla posizione di equilibrio.

Risultato: M=2.3 newton metro, U= 4 10^{-3} joule

Esercizio 1.9

Si abbiano due sferette conduttrici uguali, l'una A fissa e l'altra B mobile, di massa m=2.3 grammi, sospese nel vuoto mediante fili di lunghezza l=12 cm a un punto O. Inizialmente le due sferette si toccano. Se si porta su ciascuna sferetta la carica q, la sferetta B si allontana da A e nella nuova posizione di equilibrio il filo di sospensione di b forma un angolo á= 60 º con quello di A.
Calcolare il valore della carica q.

Risultato: q=1.8 10^{-8} coulomb

Esercizio 1.10

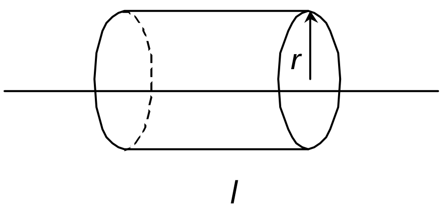
Un pendolo è costituito da un filo sottile di massa trascurabile di lunghezza l=0.9 metri al cui estremo libero è attaccata una sferetta di materiale conduttore di massa m=5 10^{-4} Kg. Si immagini di caricare la sferetta con una carica positiva q=10^{-7} coulomb e di fare oscillare il pendolo, nel vuoto, in un campo elettrico uniforme E diretto secondo la verticale; in un primo tempo il verso del campo elettrico sia dall'alto verso il basso ed in un secondo momento dal basso verso l'alto. Nel primo caso la durata di 50 piccole oscillazioni complete è di 86 secondi, mentre nel secondo caso è di 107 secondi. Calcolare l'equazione differenziale che descrive il moto del pendolo e integrarla. Calcolare l'intensità del campo elettrico E.

Risultato: $E=1.06\ 10^{4}$ volt/m

Esercizi svolti

Esercizio 2.1

Su di un filo di lunghezza infinita è distribuita una carica uniforme per unità di lunghezza λ = 25 nC/m. Calcolare il campo elettrico in un punto che dista 15 cm dal filo.



Soluzione: La direzione del campo elettrico, grazie alla simmetria del problema, è radiale rispetto al filo, quindi applicando il teorema di Gauss alla superficie riportata in figura si ottiene un contributo al flusso solo dalla superficie laterale del cilindro

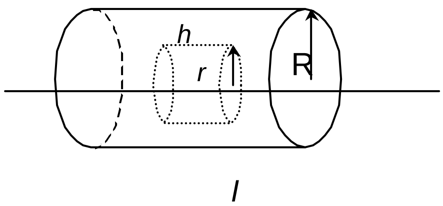
$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

da questa relazione si può ricavare il valore del campo elettrico in funzione *r*

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 3 \cdot 10^3 \ \ \mathrm{N/C}$$

Esercizio 2.2

Si consideri un cilindro di raggio R e lunghezza indefinita entro il quale vi siano delle cariche distribuite con densità di volume uniforme ρ. Determinare il campo elettrostatico in un generico punto P all'interno del cilindro e la differenza di potenziale tra l'asse del cilindro e le superfici laterali.



Soluzione: Consideriamo il cilindro, coassiale a quello dato, passante per il generico punto P distante *r* dall'asse. Il campo elettrico è radiale rispetto all'asse del cilindro, per cui contribuisce al calcolo del flusso solo la superficie laterale

$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

da cui si ricava il campo

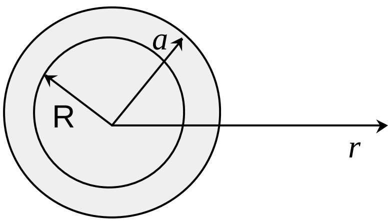
$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

La differenza di potenziale è

$$V_0 - V_R = \int_0^R E \cdot dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R r\, dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2$$

Esercizio 2.3

Una sfera di raggio *a* possiede una densità di carica $\rho = k / r^2$, dove *r* indica la distanza dal centro della sfera e k è una costante. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale all'interno della sfera considerando che all'esterno della sfera sia $\rho = 0$.



Soluzione: La simmetria sferica implica che il campo è radiale, quindi si può applicare il teorema di Gauss ad una sfera di raggio *R* concentrica a quella data. La carica contenuta all'interno di tale sfera è

$$q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi k R$$

Il campo su tale sfera vale

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{k}{\varepsilon_0 R}$$

Calcoliamo ora il potenziale della sfera di raggio *R*, supponendo di porre $V_\infty = V(r = \infty) = 0$,

$$V_R = \int_R^\infty E dr = \int_R^a E dr + \int_a^\infty E dr$$

il secondo integrale indica il potenziale sulla superficie della sfera di raggio *a* che contiene la carica totale $q = 4\pi k a$ e quindi vale

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{k}{\varepsilon_0}$$

si ottiene, infine,

$$V_R = \int_R^a E dr + V_a = \int_R^a \frac{k}{\varepsilon_0 r} dr + V_a = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\log\frac{a}{R} + 1\right)$$

Esercizio 2.4

Nel tubo catodico di un televisore gli elettroni vengono accelerati, partendo dalla condizione di riposo, da una tensione di 4000 V. Calcolare la velocità finale dell'elettrone.

Soluzione: La variazione di energia potenziale subita dall'elettrone in seguito all'effetto del potenziale è

$$\Delta U = qV = .6.4 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

La diminuzione di energia potenziale si trasforma in energia cinetica e ricordando che l'elettrone parte da fermo si ottiene

Esercizio 2.5

Con la stessa geometria dell'esercizio 1.3 calcolare il potenziale lungo l'asse e quindi ricavare il campo elettrico.

Soluzione: Ogni elemento dell'anello, che possiede una carica *dQ*, crea un potenziale che vale

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r}$$

Il potenziale totale si ottiene integrando tutti i contributi *dV*

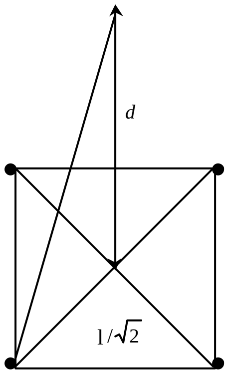
$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Il campo elettrico si ricava derivando il potenziale rispetto alla variabile *x*

$$E_0 = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Esercizio 2.6

Sui vertici di un quadrato di lato *l* = 5 · 10^{-9} m vi sono quattro protoni. Calcolare quale velocità deve avere un protone che si muove lungo la perpendicolare al quadrato passante per il suo centro ed inizialmente ad una distanza *d* = 5 · 10^{-9} m, affinché riesca a raggiungere il centro del quadrato.



Soluzione:

$$V=\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r_d=\sqrt{d^2+\frac{l^2}{2}}$$

$$r_0=\frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta U=\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_d}-\frac{1}{r_0}\right)=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{d^2+\frac{l^2}{2}}}\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{\frac{2q^2}{m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{d^2+\frac{l^2}{2}}}\right)}=1.15\cdot 10^4\ \ \mathrm{m/s}$$

Esercizi proposti

Esercizio 2.7

Un filo rettilineo indefinito è carico con densità lineare ë=8.85 10^{-8} coulomb/metro. Trovare il campo elettrico E a 10 metri di distanza dal filo.
Risultato: E=1.6 10^{2} newton/metro

Esercizio 2.8

Calcolare il lavoro L necessario per caricare una sfera conduttrice di raggio R= 10 cm e con una carica q=1 ìcoulomb.
Risultato: L=4.5 10^{-2} joule

Esercizio 2.9

Due armature metalliche piane e parallele si trovano alla distanza d=1 cm. Ciascuna delle armature ha un' area S=10 cm^{2}. Esse vengono caricate con cariche uguali e di segno contrario q=10^{-10} coulomb. Calcolare la differenza di potenziale fra le armature.
Risultato: ÄV=113 volt

Esercizio 2.10

Una carica positiva q è distribuita su tutto il volume di una sfera di raggio R. La densità di carica varia con il raggio secondo la legge: ñ=á r. Determinare á e il campo elettrico E all'interno della sfera.
Risultato: á=q/(ðR^{4}), E=q r^{2}/(4 ð å$_{0}$ R^{4})

Esercizio 2.11

Un cilindro circolare retto di altezza indefinita e raggio R è carico di segno negativo su tutto il volume con densità di carica ñ. Trovare il campo elettrico E all'interno del cilindro e successivamente la differenza di potenziale fra l'asse e le generatrici.
Risultato: E= ñ r/(2 å$_{0}$), ÄV=ñ R^{2}/(4 å$_{0}$)

Esercizi svolti

Esercizio 3.1

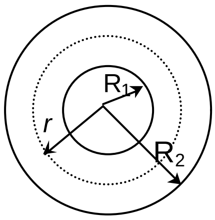
Calcolare le componenti cartesiane del campo elettrico generato da un dipolo *p* orientato lungo l'asse *x* in un punto lontano rispetto alle dimensioni del dipolo.

Soluzione:

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \qquad E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

Esercizio 3.2

Calcolare la capacità di un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche di raggio R_1 ed R_2 e caricate con una carica *Q*.



Soluzione: Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio $R_1 < r < R_2$. Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \qquad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

ricordando che $C = Q/\Delta V$ si ricava

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Si noti che

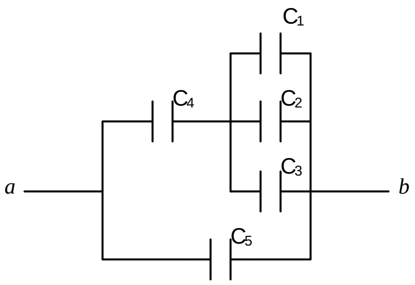
a) se $R_2 >> R_1$ allora $C=4\pi\varepsilon_0 R_1$
b) se $R_2 \approx R_1 \approx R$, con $d = R_2 - R_1$,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

che è il valore di un condensatore piano.

Esercizio 3.3

Determinare la capacità e l'energia totale del circuito in figura quando C_1 = 1pF, C_2 = 2 pF, C_3 = 3 pF, C_4 = 4 pF, C_5 = 5 pF e V_{ab} = 100 V. Calcolare, inoltre, la carica e la tensione di ciascun condensatore.



Soluzione: Applicando le regole sui condensatori in parallelo ed in serie si ottiene

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 6 \quad \text{pF}$$

$$C_{1234} = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} = 2.4 \quad \text{pF}$$

$$C_{tot} = C_{1234} + C_5 = 7.4 \quad \text{pF}$$

L'energia del sistema è

$$W_{tot} = \frac{1}{2} C_{tot} V_{ab}^2 = 3.7 \cdot 10^{-5} \quad \text{J}$$

Le cariche ed i potenziali di ogni condensatore sono rispettivamente

$V_5 = V_{ab} = 100\ \text{V}$ $\qquad q_5 = C_5 V_5 = 0.5\ \text{nC}$ $\qquad q_4 = C_{1234} V_{ab} = 0.24\ \text{nC}$ $\qquad V_5 = \frac{q_4}{C_4} = 60\ \text{V}$

$V_{123} = V_{ab} - V_4 = 40\ \text{V}$ $\qquad q_1 = C_1 V_{123} = 40\ \text{pC}$ $\qquad q_2 = C_2 V_{123} = 80\ \text{pC}$ $\qquad q_3 = C_3 V_{123} = 120\ \text{pC}$

Esercizio 3.4

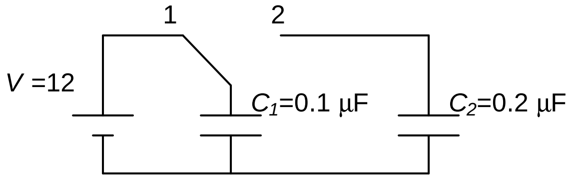
Sia dato un condensatore piano con armature di area A e distanti d (supporre d trascurabile rispetto alle dimensioni delle armature). Calcolare la forza che un'armatura esercita sull'altra quando il condensatore possiede una carica Q.

Soluzione: $E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ $\qquad F = QE \qquad$ $F = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$

Esercizio 3.5

Nel circuito di figura il deviatore è inizialmente nella posizione 1, quindi viene commutato sulla posizione 2. Calcolare:

a) l'energia fornita dal generatore quando siamo nella posizione 1;
b) la quantità di carica posseduta dai due condensatori nella posizione 2;
c) l'energia incamerata nei due condensatori nella posizione 2.



Soluzione: L'energia fornita dal generatore coincide con l'energia posseduta dal condensatore C_1 nella posizione 1

$$W = \frac{1}{2}C_1V^2 = 7.2\ \mu J$$

La carica posseduta C_1 in questa condizione è

$$Q = C_1V = 1.2\ \mu C$$

Quando si passa alla posizione 2 la carica che era posseduta solo da C_1 si distribuisce anche su C_2 in modo che la differenza di potenziale sui due condensatori sia uguale; possiamo, dunque, scrivere le due equazioni

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

da cui si ricava:

Autore: Giovanni Alberto Ummarino

$$Q_2 = \frac{Q}{\frac{C_1}{C_2}+1} = 0.8\,m\mathrm{C}$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = 0.4\,m\mathrm{C}$$

L'energia posseduta dai due condensatori nella posizione 2 è

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = 0.8\,m\mathrm{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_{21}^2}{C_2} = 1.6\,m\mathrm{J}$$

Si osserva che l'energia totale del sistema nella posizione 2 è minore di quella di partenza. Il motivo è da attribuire alle perdite che avvengono nel transitorio tra le due configurazioni.

Esercizi proposti

Esercizio 3.6

Un sottile conduttore rettilineo collega due sfere metalliche scariche, la cui lunghezza è grande rispetto ai raggi delle due sfere (R_1=10 cm, R_2=20 cm). La sfera di raggio minore è cava. Se a 4 cm dal suo centro viene posta una carica positiva q e il suo potenziale risulta in tal modo di 10 volt, quanto vale la carica q?

Risultato: q=3.32 10^{-10} coulomb

Esercizio 3.7

Una sfera metallica isolata di raggio R=30 cm porta una carica elettrica Q=23,5 coulomb. Si determini il raggio R' della sfera entro cui è contenuto il 90% dell'energia elettrostatica del sistema.

Risultato: R'=3 m

Esercizio 3.8

Un condensatore da 2 microfarad è carico a 10000 volt. Esso viene connesso in parallelo con un condensatore da 8 microfarad. Qual' è il potenziale V risultante? Qual è l'energia immagazzinata U e U' nei condensatori prima e dopo averli collegati?

Risultato: V=2 10^3 volt, U=100 joule, U'=10 joule

Esercizio 3.9

Una carica elettrica Q=2 coulomb può essere ripartita tra due conduttori sferici di raggi R_1=10 cm e R_2=20 cm rispettivamente. I due conduttori sono posti a distanza grande rispetto ad R_1 e R_2, cosicché i fenomeni di induzione elettrostatica possono essere trascurati.
Determinare:
Come deve essere ripartita la carica q tra i due conduttori affinché l'energia potenziale del sistema risulti minima?
Quale relazione sussiste tra i potenziali V_1 e V_2 delle due sfere quando si realizza la condizione di cui al punto 1).
Risultato: Q_1=1 coulomb , Q_2=2 coulomb, $V_1=V_2$

Esercizio 3.10

Una d.d.p. V=100 volt è applicata ha un condensatore piano. Lo spazio fra le armature è riempito con acqua a 20 ºC (å$_r$ =80.3). Successivamente il sistema viene portato alla temperatura di 60 ºC e si constata che la d.d.p. fra le armature è salita al valore V'=121 volt. Quanto vale la costante dielettrica dell'acqua å'$_r$ a 60 ºC? In quale percentuale varia l'energia elettrostatica U del sistema?
Risultato: å'$_r$=66.3, U/U=21/100

Quiz a risposta multipla

1) Un condensatore a facce piane e parallele viene riempito per metà del suo volume interno da un dielettrico con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$. Se C_0 era la capacità del condensatore quando tra le armature c'era solo l'aria, la sua nuova capacità è:
   a) minore della capacità C_0.
   b) esattamente uguale alla capacità C_0.
   c) maggiore della capacità C_0.
   d) maggiore o minore della capacità C_0 a seconda che la superficie di separazione tra dielettrico e aria sia parallela o perpendicolare alle armature.

2) In quale rapporto sta il raggio terrestre ($R \approx 6{\cdot}10^6$ m) con il raggio r di una sfera conduttrice avente la capacità di un Farad?
   a) $R/r \approx 10^{-2}$.
   b) $R/r \approx 10^{2}$.
   c) $R/r \approx 10^{4}$.
   d) $R/r \approx 1$.

3) Devo realizzare una capacità di 8 ± 1 nF ma dispongo solo di 3 condensatori di capacità $C_1=C_2= 10$ nF e $C_3= 50$ nF. Posso ottenere la capacità richiesta collegando:
   a) tutti e tre i condensatori in serie.
   b) C_1 e C_2 in parallelo tra loro e C_3 in serie al parallelo dei due.
   c) non posso ottenere in nessun modo la capacità richiesta.
   d) C_1 e C_3 in parallelo tra loro e C_2 in serie al parallelo dei due.

4) Un condensatore piano carico e isolato viene connesso in parallelo ad un condensatore identico ma scarico. Se W è l'energia immagazzinata nel primo condensatore, l'energia finale del sistema è:
   a) $W_1=W$.
   b) $W_1=2W$.
   c) $W_1=W/4$.
   d) $W_1=W/2$.

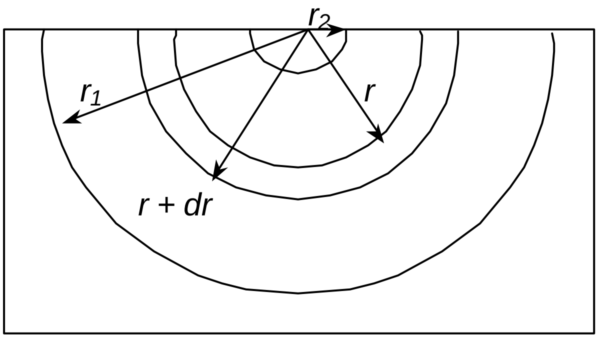
5) Se le armature di un condensatore piano, connesso con un generatore di f.e.m. costante, sono lasciate libere di muoversi, esse tendono ad avvicinarsi perché portatrici di cariche di segno opposto e:
   a) L'energia elettrostatica diminuisce, trasformandosi in energia cinetica delle armature.
   b) L'energia elettrostatica aumenta.
   c) L'energia elettrostatica rimane invariata.

d) La carica elettrica sulle armature diminuisce fino ad annullarsi quando le due armature giungono a contatto.

Esercizi svolti

Esercizio 4.1

In un materiale isolante si ricava una semisfera di raggio r_1 = 1 m, sulla cui superficie si deposita uno strato conduttore, che viene riempita di un liquido con $\rho = 5 \cdot 10^{10}$ Ωm. Nel liquido si immerge un elettrodo emisferico di raggio r_2 = 0.5 m e concentrico con l'altra emisfera. Determinare la corrente che circola nel liquido quando è applicata una tensione tra i due elettrodi V = 50 V.



Soluzione: Per motivi di simmetria le linee equipotenziali sono delle semisfere. Consideriamo la resistenza posseduta dal guscio delimitato dalle due semisfere di raggio *r* e *r + dr*

$$dR = \rho \frac{dr}{S} = \rho \frac{dr}{2\pi r^2}$$

La resistenza totale si ottiene integrando su *r*

$$R = \frac{\rho}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{2\pi} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = 80\,\mathrm{G\Omega}$$

La corrente che circola si ricava dalla legge di Ohm

$$I = \frac{V}{R} = 6.3\,\mathrm{pA}$$

Esercizio 4.2

Un'automobile elettrica ha dieci batterie da 12 V e 70 Ah. Calcolare la potenza richiesta per l'avanzamento e quanta strada riesce a percorrere il veicolo se viaggia ad una velocità media di 30 km/h e la forza di attrito con l'asfalto è di 180 N.

Autore: Giovanni Alberto Ummarino

Soluzione: La potenza richiesta è data dal prodotto della forza che si deve opporre all'attrito per la velocità desiderata

$$P = Fv = 1500 \text{ W}$$

L'energia potenziale accumulata nelle batterie (in cui si suppone che il potenziale sia costante ed indipendente dal valore della carica posseduta) è

$$dU = Vdq \qquad U = \int Vdq = V\int dq = QV$$

Le batterie riusciranno a fornire la potenza richiesta per un tempo

$$t = \frac{U}{P} = \frac{QV}{P} = 20160 \text{ s}$$

In tale tempo l'auto percorre uno spazio

$$s = vt = 168 \text{ km}$$

Esercizio 4.3

Calcolare il diametro di un filo di rame ($\boldsymbol{r}$ =168 · 10^{-8} Ωm) in cui circola una corrente di 40 A, affinché dissipi una potenza di 1.6 W per ogni metro di lunghezza.

Soluzione:

$$V = RI$$

$$P = IV = I^2 R = I^2 \frac{\boldsymbol{r}l}{s} = I^2 \frac{\boldsymbol{r}l}{\boldsymbol{p}r^2}$$

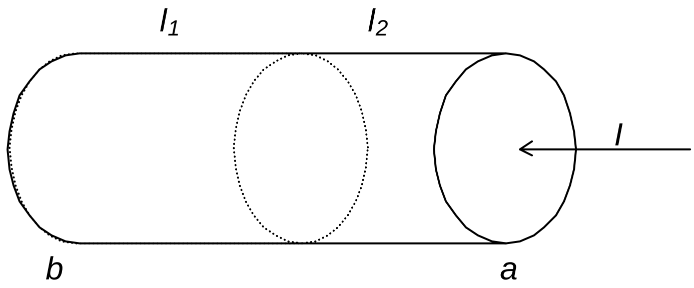
$$\frac{P}{l} = \frac{I^2 \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{p}r^2}$$

$$d = 2r = 2I\sqrt{\frac{\boldsymbol{r}l}{\boldsymbol{p}P}} = 4.6 \text{ mm}$$

Esercizio 4.4

Una resistenza filiforme di sezione S = 1 mm^2 è costituita dall'unione di un filo di lunghezza l_1 =10 mm e resistività $\boldsymbol{r}_1$ = 5 · 10^{-5} Ωm con un filo di lunghezza l_2 =5 mm e resistività $\boldsymbol{r}_2 = 3\boldsymbol{r}_1$. Quando la resistenza è attraversata da una corrente uniforme I = 5 A calcolare:

a) i campi elettrici nei due materiali
b) la differenza di potenziale ai capi della resistenza
c) la carica presente sulla superficie di separazione dei due materiali.



Soluzione:

$$E_1 = \rho_1 J = \rho_1 \frac{I}{S} = 250\ \text{V/m}$$

$$E_2 = \rho_2 J = \rho_2 \frac{I}{S} = 3E_1 = 750\ \text{V/m}$$

$$V_1 = IR_1 = I\,\frac{\rho_1 l_1}{S}$$

$$V_2 = I\,\frac{\rho_2 l_2}{S}$$

$$\Delta V = V_2 + V_1 = \frac{I}{S}\left[\rho_2 l_2 + \rho_1 l_1\right] = 6.25\ \text{V}$$

$$\Phi = (\mathrm{E}_2 - E_1)S = \frac{q_m}{\varepsilon_0} \qquad q_m = \varepsilon_0 (E_2 - E_1)S = 4.43 \cdot 10^{-15}\ \text{C}$$

Esercizio 4.5

Un motore è collegato alla batteria di alimentazione tramite un cavo di rame (ρ = 1.69·10^{-8} Ωm e n =8.49·10^{28} elettroni/m^3) di diametro d = 5 mm e lunghezza l = 1 m. Calcolare il tempo impiegato da un elettrone per andare dalla batteria al motore quando circola una corrente I = 100 A.

Soluzione: La densità di corrente che circola nel filo vale

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2} = 5.1\ \text{A/mm}^2$$

La velocità con cui si spostano gli elettroni nel filo è

$$v_d = \frac{j}{ne} = 0.38 \text{ mm/s}$$

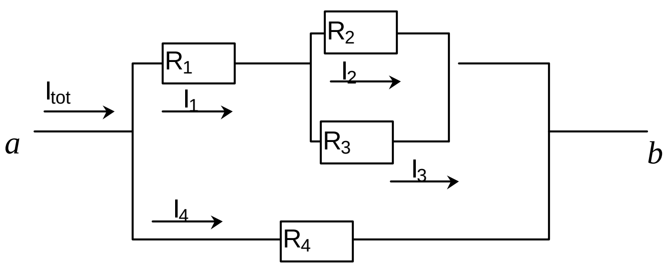
Infine, si può ottenere il tempo impiegato per percorrere la distanza *l* come

$$t = \frac{l}{v_d} = 44'\,23''$$

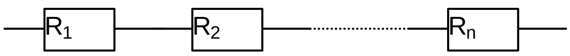
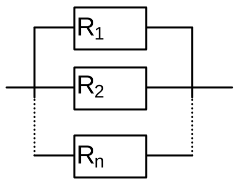
Occorre notare che nonostante questo tempo sia grande gli effetti delle variazioni di grandezze elettriche si trasmettono alla velocità della luce!.

Esercizio 4.6

Determinare la resistenza totale del circuito di figura, la corrente e la tensione in ciascuna resistenza.
NOTA: in tabella sono riportate le principali regole di calcolo di resistenze equivalenti delle reti resistive.



$V_{ab} = 10$ V
$R_1 = 5$ kΩ
$R_2 = 10$ kΩ
$R_3 = 10$ kΩ
$R_4 = 10$ kΩ

Serie	Parallelo
 $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots R_n$	 $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$

Soluzione:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5\ \mathrm{k\Omega}$$

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 10\ \mathrm{k\Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4} = 5\ \mathrm{k\Omega}$$

$$V_{R4} = V_{ab} \qquad I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = 1\,\mathrm{mA}$$

$$I_{R1} = I_{tot} - I_{R4} = 1\,\mathrm{mA} \qquad V_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 1\,\mathrm{mA} \cdot 5\,\mathrm{k\Omega} = 5\mathrm{V}$$

$$I_{tot} = \frac{V_{ab}}{R_{eq}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{5\,\mathrm{k\Omega}} = 2\ \mathrm{mA}$$

$$V_{R2} = V_{R3} = V_{ab} - V_{ac} = V_{ab} - V_{R1} = 10\ \mathrm{V} - 5\ \mathrm{V} = 5\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{I}_{R2} = \frac{V_{R2}}{R2} = \frac{5\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}} = 0.5\ \mathrm{mA}$$

$$\mathrm{I}_{R3} = \frac{V_{R3}}{R3} = \frac{5\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}} = 0.5\ \mathrm{mA}$$

Esercizi proposti

Esercizio 4.7

Qual è la lunghezza l del filo incandescente di tungsteno di una lampadina se essa assorbe la potenza W=40 watt a V=220 volt e il diametro del filo è d=25 micron? La resistenza specifica del tungsteno è approssimativamente proporzionale alla temperatura assoluta e a t_0= 18 ºC, essa vale $ñ_0$=5.6 10 ohm metro. La temperatura del filo incandescente è T_0=2500 ºK.
Risultato: l=1.2 m

Esercizio 4.8

Uno scaldabagno elettrico contenente 50 litri d'acqua, consuma 10^3 watt con una tensione di 110 volt.
Come deve essere modificata la sua resistenza R per poterlo utilizzare con una tensione di 220 volt, a parità di potenza? (Si trascuri l'effetto della temperatura sulla resistenza).
Se il rendimento dello scaldabagno è ç=80%, in quanto tempo t la temperatura dell'acqua passa da 20 a 60 gradi centigradi?
Risultato: R=48 ohm, t=2.85 ore

Esercizio 4.9

Una pila ha forza elettromotrice f=1.534 volt. Se si misura la differenza di potenziale ai capi della pila con un voltmetro avente resistenza interna R'=1000 ohm si trova V=1.498 volt.
Determinare la resistenza interna r della pila. Quando è massima la potenza dissipata su una resistenza di carico R.
Risultato: r=24.2 ohm, R=r

Esercizio 4.10

Un fornello da 500 watt e 220 volt viene usato per portare all'ebollizione 10 litri d'acqua, inizialmente alla temperatura di 20 ºC.
1) Se il rendimento del sistema di riscaldamento è del 70%, dopo quanto tempo t l'acqua incomincia a bollire a pressione ordinaria
2)Quanto vale la resistenza R del fornello?
Risultato: t=9.55 10^3 sec, R=96.8 ohm

Esercizio 4.11

Un condensatore è costituito da due armature A_1 e A_2 piane e parallele nel vuoto: l'armatura A_1 è fissa, mentre l'armatura A_2 si muove nel proprio piano con velocità costante in modo tale che l'area della porzione di A_2 che è affacciata ad A_1 aumenta di 2 m^2 al secondo. La distanza fra le armature è h=1 mm. A_1 e A_2 sono connesse ai poli di una batteria di f.e.m. f= 2 volt mediante due fili conduttori di resistenza totale R=10^7 ohm. Il circuito è percorso da una corrente elettrica di intensità i costante.
Determinare:
1) Qual è la d.d.p. V tra le armature del condensatore?
Qual è il valore dell'intensità di corrente i?
(Si immagini che i due fili conduttori rimangano fissi durante il movimento di A_2).
Risultato: V=1.7 volt, i=3 10^{-8} ampere

Esercizi svolti

Esercizio 5.1

Una particella α, di carica $q = 2|e|$ (e=-1.6 10^{-19} C è la carica dell'elettrone) e massa *m*=6.68 10^{-27} Kg, è in moto in un campo magnetico di intensità *B*=1 T con velocità pari a 1/15 della velocità della luce, ortogonale al campo. Calcolare il raggio della sua traiettoria e il periodo di rotazione.

Soluzione:

$$R = \frac{mv}{qB} \cong 42cm$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \cong 1.3 \cdot 10^{-7} \sec$$

Esercizio 5.2

Un elettrone è accelerato da una differenza di potenziale pari a 5000 V ed è diretto verso una regione in cui vi sono due elettrodi piani paralleli, distanti tra loro 5 cm, ai quali è applicata una differenza di potenziale pari a 1000 V. L'elettrone entra perpendicolarmente al campo $\vec{E}$ presente tra i due elettrodi. Determinare il campo $\vec{B}$ che deve essere presente tra gli elettrodi affinchè l'elettrone non venga deviato.

Soluzione: Inizialmente l'elettrone viene portato ad una velocità v_0 che si ottiene uguagliando la sua energia cinetica (supponiamo trascurabile la sua velocità iniziale) al lavoro compiuto dalla prima differenza di potenziale:

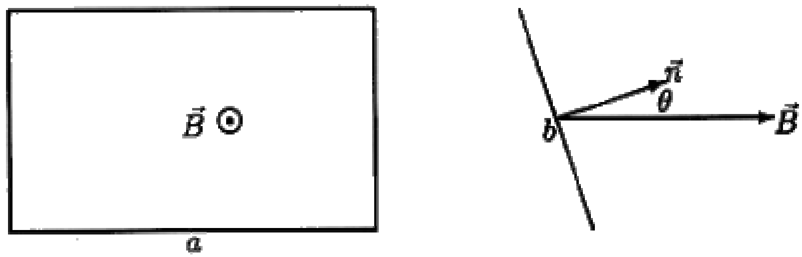
$$|e|V_1 = \frac{1}{2} m_e v_0 \;\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2|e|V_1}{m_e}} \cong 4.2 \cdot 10^7 \, m/\sec .$$

Quando si trova tra i due elettrodi è soggetto ad una forza di natura elettrostatica, diretta dall'elettrodo negativo verso quello positivo, di modulo $F_e = |e|E = |e| V^2 \!/ d$, dove *d* è la distanza tra i due elettrodi, e, se il campo $\vec{B}$ è ortogonale alla velocità e parallelo agli elettrodi, ad una forza di Lorentz di modulo $F_m = |e| v_0 B$. Ugualiando le due forze si ricava:

$$B = \frac{V_2}{v_0 d} \cong 4.8 \cdot 10^{-4} T.$$

Esercizio 5.3

Una spira rettangolare di lati a e b, percorsa da una corrente di intensità i, è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ che forma un angolo q con la normale al piano della spira (vedi figura). Determinare la forza e il momento meccanico risultanti sulla spira e la sua energia potenziale.



Soluzione: I due lati di lunghezza a sono soggetti a due forze di ugual modulo $F_a = iaB$, ugual direzione (ortogonale sia al campo, sia ai lati) e verso opposto. Lo stesso avviene per i lati di lunghezza b, sui quali agiscono forze di modulo $F_b = ibB\cos q$. La risultante delle forze agenti sulla spira è quindi nulla.
Per calcolare il momento meccanico si osservi che la coppia di forze agenti sui lati di lunghezza b ha braccio nullo, mentre quella delle forze agenti sui lati dilunghezza a ha braccio $bsinq$, e quindi il momento meccanico risultante ha modulo $t = iabBsinq$ e tende ad allontanare i lati di lunghezza b dalla direzione del campo: Introducendo il vettore momento di dipolo magnetico

$$\vec{m} = iA\vec{n},$$

dove A=ab è l'area della spira ed $\vec{n}$ il versore ad essa normale, si può scrivere la relazione vettoriale

$$\vec{t} = \vec{m} \wedge \vec{B}.$$

L'energia potenziale della spira può essere calcolata come il lavoro necessario per portare la spira da una posizione di riferimento (scegliamo $q_0 = p/2$) alla generica posizione caratterizzata dall'angolo q formato dai vettori $\vec{B}$ ed $\vec{n}$ .Si ha quindi:

$$U(q) = \int_{p/2}^{q} t dq = \int_{p/2}^{q} mBsinq dq = -mB\cos q = -\vec{m} \bullet \vec{B},$$

espressione analoga a quella già nota per un dipolo elettrico in campo uniforme (oppure per un pendolo semplice in campo gravitazionale, per cui la spira avrà la stessa dinamica e in particolare lo stesso periodo).

Esercizio 5.4

La bobina di un galvanometro è costituita da N spire piane di area A; essa ha un momento d'inerzia I ed è sospesa mediante un filo di torsione di costante elastica k in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$; in condizioni di riposo la normale alle spire è perpendicolare a $\vec{B}$.

A partire dall'istante t=0 nella bobina viene iniettata una corrente $i = i_0 sin\left(\frac{2p}{T}\right)t$ per un intervallo di tempo pari a T/2.

a) Supponendo che nell'intervallo di tempo in cui fluisce la corrente l'angolo di cui ruota la bobina sia molto piccolo, così che il momento torcente del filo sia trascurabile, calcolare la velocità angolare che la bobina possiede all'istante t= T/2.

b) Mostrare che l'ampiezza delle oscillazioni libere che la bobina compie una volta cessato il flusso di corrente è proporzionale alla carica elettrica totale fluita nella bobina. Si trascurino gli attriti ed il coefficiente di autoinduzione e si considerino le oscillazioni di piccola ampiezza.

Soluzione:

a) La corrente iniettata dall'istante t=0 determina un movimento della spira stessa soggetta ad un momento

$$\vec{t} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

dove

$$\vec{m} = NAi\vec{n}$$

Essendo $\vec{n} \perp \vec{B}$ si ha

$$|t| = NAiB$$

Per cui si trova

$$Ia = NAiB$$

Dove $a = \ddot{q}$ rappresenta l'accelerazione angolare. Integrandola tra 0 e T/2 si trova la velocità richiesta:

$$\dot{q} = \int_0^{T/2} \frac{NABi_0}{I} sin\left(\frac{2p}{T}\right)t dt = ... = \frac{NABi_0 T}{Ip}$$

b) Cessato il flusso di corrente la bobina è soggetta al momento torcente del filo, per cui si ha:

$$I\ddot{q} = -kq$$

la cui soluzione, dello stesso tipo di quella vista per una molla e per il pendolo, è

$$q = q_0 sin(wt)$$

dove $w = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Per cui $\dot{q} = q_0\sqrt{\frac{k}{I}}\cos(wt)$.
A t=0 (cioè quando si spegne la corrente) si sa, dal punto a), che

$$\dot{q} = \frac{NABi_0T}{Ip}.$$

Abbinando le due espressioni scritte per $\dot{q}$ si trova che l'ampiezza dell'oscillazione è:

$$q_0 = \frac{NABi_0T}{p\sqrt{kI}}$$

Essendo inoltre

$$Q = \int_0^{T/2} idt = ... = \frac{i_0T}{p}$$

si ottiene infine la proporzionalità tra q_0 e Q

$$\frac{q_0}{Q} = \frac{NAB}{\sqrt{kI}}$$

Esercizio 5.5

Un protone di massa **m** e carica **+e** ed una particella di massa **4m** e carica **+2e** si muovono in un campo magnetico uniforme descrivendo circonferenze di uguale raggio, con velocità non relativistica.

a) Calcolare il rapporto tra le velocità lineari, le velocità angolari e le energie cinetiche.
b) Qualora le particelle descrivessero eliche identiche, calcolare i rapporti tra le componenti parallela e perpendicolare all'asse dell'elica della velocità lineare.

Soluzione:

a) Il raggio R della circonferenza descritto da una particella di massa m e carica q che si muove in un campo magnetico B con velocità lineare v è dato da

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Nel presente problema le due particelle sono immerse nello stesso campo magnetico e descrivono circonferenza uguali, per cui imponendo $R_p = R_a$ si trova il rapporto tra le velocità lineari

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{q_p m_a}{q_a m_p} = \frac{4}{2} = 2$$

Essendo $v = wR$ si ha che il rapporto tra le velocità angolari è

$$\frac{w_p}{w_a} = 2$$

Infine essendo l'energia cinetica $E = \frac{mv^2}{2}$

$$\frac{E_p}{E_a} = 4$$

b) La componente perpendicolare all'asse dell'elica si ottiene considerando la componente del moto lungo la circonferenza, per cui:

$$\frac{v_{p\perp}}{v_{a\perp}} = \frac{q_p m_a}{q_a m_p} = 2$$

La componente parallela all'asse dell'elica è tale da fare percorrere alla particella un tratto L (passo dell'elica) in un tempo $T = \frac{2p}{w}$, pari cioè al periodo impiegato per percorrere la circonferenza.
Descrivendo eliche identiche, i due passi saranno uguali, per cui:

$$L_a = v_{a\,//} \frac{2p}{w_a} = L_{p\,//} \frac{2p}{w_p}$$

cioè:

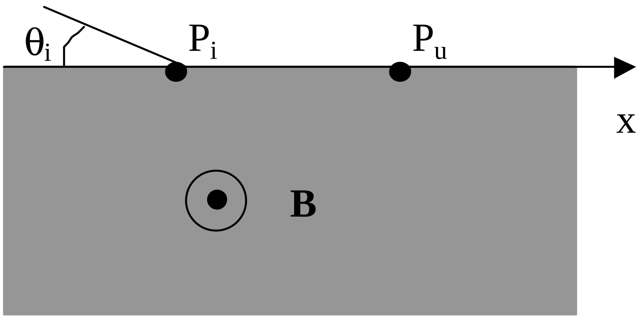
$$\frac{v_{p\,//}}{v_{a\,//}} = 2$$

Esercizi proposti

Esercizio 5.6

Un protone di carica $+q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ e massa $m = 1.6 \cdot 10^{-27} kg$ con energia cinetica $E = 5 \ \ MeV$ entra in direzione formante un angolo $q_i = 30°$ con l'asse x in una regione dove esiste un campo magnetico di induzione $B = 1 \ \ T$, perpendicolare al piano ed entrante. Calcolare:

a) l'angolo q_u tra la direzione lungo la quale il protone esce dal campo e l'asse x;
b) la distanza 2d tra il punto di uscita P_u ed il punto di ingresso P_i sull'asse x, illustrando in figura la traiettoria del protone;
c) dire se è variata l'energia del protone e spiegare il perché.



Risultato:

a) $q_u = 30°$; b) $2d = 0.3m$; c) *No…*

Esercizio 5.7

Un piccolo magnete con momento di dipolo $\vec{m}$ orientato lungo l'asse x è sospeso ad un filo con costante elastica torsionale k. Il momento d'inerzia del magnete rispetto all'asse del filo (asse z) sia J . Qual è il periodo T delle piccole oscillazioni torsionali del dipolo allorchè esso sia inserito in una regione di campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse y?

Risultato:

$$T = 2p\sqrt{\frac{J}{mB + k}}$$

Esercizio 5.8

Un filo metallico di massa m scivola senza attrito su due rotaie poste a distanza d. Il binario è posto in un campo di induzione magnetica B diretto perpendicolarmente al piano del binario.
Una corrente costante *i* circola dal generatore G lungo una rotaia, attraversa il filo e torna al generatore attraverso l'altra rotaia. Trovare la velocità (modulo, direzione e verso) del filo in funzione del tempo nell'ipotesi che esso sia fermo per t=0.

Risultato:

$$v = \frac{idBt}{m}$$

Esercizio 5.9

Una spira rettangolare di filo percorsa da una corrente di 2 A è sospesa verticalmente e attaccata al piatto destro di una bilancia. Quando il sistema è bilanciato, viene introdotto in un campo magnetico esterno. Il campo agisce solamente nella parte inferiore della spira in direzione perpendicolare al lato della spira. Sapendo che la spira è larga 20 cm ed è necessario aggiungere una massa di 13.5 g sul piatto sinistro della bilancia per equilibrare il sistema, determinare B.

Risultato:

B=0.33 T

Esercizio 5.10

Un filo rettilineo conduttore di sezione circolare costituito da un materiale di densità pari a 2.5 g/cm^3 è posto in un campo magnetico uniforme in modo che l'asse del filo sia perpendicolare alla direzione del campo. Nel filo si stabilisce una densità di corrente di 2.4x10^6 A/m^2 e si fa aumentare il campo magnetico fino a quando la forza magnetica agente sul filo bilancia esattamente quella gravitazionale. Calcolare il valore di B al raggiungimento di questa condizione.

Risultato:

B=1.1 x 10^{-4} T

Esercizi svolti

Esercizio 6.1

Una spira circolare di raggio *a* è percorsa da una corrente di intensità *i*. Determinare il campo $\vec{B}$ prodotto dalla spira in un punto P sul suo asse, a distanza *x* dal centro della spira.

Soluzione: un elemento infinitesimo di corrente di lunghezza *dl* produrrà un campo di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}, \qquad r^2 = x^2 + a^2$$

la cui direzione forma un angolo ϕ con l'asse della spira, tale che $\cos\phi = a/r$.
Considerando l'elemento di corrente *dl'*, simmetrico di *dl* rispetto al centro della spira, si vede che la somma vettoriale dei campi $d\vec{B}$ e $d\vec{B}'$ dovuti ai due elementi simmetrici è un vettore parallelo all'asse della spira, poiché le componenti ortogonali all'asse si eliminano.
Poiché la componente di $d\vec{B}$ parallela all'asse è:

$$dB_{//} = dB\cos\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{a}{r^3}dl\,,$$

il campo totale in P (diretto lungo l'asse della spira) avrà modulo

$$B = \oint dB_{//} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3}\,,$$

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\,.$$

Utilizzando l'espressione precedente è facile ottenere il campo al centro della spira (x=0)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a}\,,$$

e l'andamento del campo a grande distanza dalla spira (*x*>>*a*)

$$B \cong \frac{m_0 i a^2}{2x^3},$$

risultato analogo a quello già visto per il dipolo elettrico.

Esercizio 6.2

Determinare il campo $\vec{B}$ nel centro della semicirconferenza (vedi figura) supponendo che il conduttore ABDE sia percorso da una corrente di intensità *i*.

Soluzione:

Per i due tratti rettilinei $d\vec{l}$ è sempre parallelo ad $\vec{r}$ nella legge di Biot e Savart, quindi il loro contributo è nullo. Per il tratto semicircolare si osservi che il suo contributo è esattamente metà di quello di una spira circolare nel suo centro, e quindi (cfr. l'esercizio precedente)

$$B = \frac{m_0 i}{4R}$$

Esercizio 6.3

Una lamina conduttrice infinitamente estesa è percorsa da una corrente di densità lineare l. Determinare il campo $\vec{B}$ da essa generato.

Soluzione:

Per ragioni di simmetria, il campo deve essere parallelo alla lamina e ortogonale alla direzione della corrente, e può dipendere solo dalla distanza dalla lamina. Inoltre avrà versi opposti dai due lati della lamina. Il modo più semplice per calcolarne il modulo è usare la legge di Ampère, scegliendo come cammino di integrazione un rettangolo, giacente su un piano ortogonale alla direzione della corrente, e simmetrico rispetto alla lamina. Poiché i due lati ortogonali alla lamina non contribuiscono alla circuitazione, si avrà, scegliendo opportunamente il verso di percorrenza,

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2lB(x),$$

dove *l* è la lunghezza dei lati paralleli alla lamina e *x* la loro distanza dalla lamina stessa. La corrente concatenata con questo cammino ha intensità $i = ll$ e quindi il modulo del campo risulta essere

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 \lambda ,$$

indipendente da x.

Esercizio 6.4

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore interno (cilindro pieno di raggio c) e uno esterno (regione compresa tra due superfici cilindriche di raggi b e $a>b$). I due conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità i dirette in verso opposto, con densità di corrente uniforme. Determinare il campo magnetico in funzione della distanza dall'asse.

Soluzione:

Poiché la distribuzione di correnti ha simmetria cilindrica, le linee del campo $\vec{B}$ devono essere della circonferenze aventi centro sull'asse, orientate in verso antiorario, e il modulo di $\vec{B}$ può dipendere solo dalla distanza dall'asse, $B = B(r)$.
Per determinare $B(r)$ calcoliamo la circuitazione che compare al primo membro della

legge di Ampère pungo una linea di campo, ottenendo

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

- Per $r<c$ la corrente concatenata con il cammino di integrazione vale

$$i_c = i\,\frac{r^2}{c^2},$$

e quindi il modulo del campo è

$$B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi c^2}.$$

- Per $c<r<b$ si ha $i_c = i$ e quindi

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

- Per $b<r<a$ si ha

$$i_c = i - i\,\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} = i\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2},$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}.$$

- Infine per $r>a$ si ha $i_c = 0$ e quindi $B(r) \equiv 0$.

Esercizio 6.5

Un avvolgimento di corrente di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da n=100 spire percorse da una corrente i = 5 A. I raggi interno ed esterno sono rispettivamente r_1 = 5 cm ed r_2 = 6 cm, e la larghezza del toroide è a = 1 cm. Determinare il campo $\vec{B}$ all'interno del toroide e i suoi valori massimo e minimo.

Soluzione:

Si applica la legge di Ampère scegliendo come cammino di integrazione una circonferenza di raggio r, coassiale con il toroide e ad esso interna, ottenendo

$$2\pi r B(r) = \mu_0 n I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}.$$

Direzione e verso di $\vec{B}$ sono determinati dalle condizioni di simmetria.
Per i valori minimo e massimo si ottiene:

$$B_{\min} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_2} \cong 1.67 \cdot 10^{-3} \quad T$$

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_1} \cong 2.00 \cdot 10^{-3} \quad T.$$

Esercizi proposti

Esercizio 6.6

Un protone di massa $m = 1.6 \cdot 10^{-7} \quad kg$, di energia cinetica $E = 1.6 \cdot 10^{-17} \quad J$ e velocità diretta radialmente si trova sull'asse di un solenoide rettilineo indefinito di raggio R = 10 cm e costituito da n = 100 *spire/cm.* Quale valore deve avere la corrente elettrica per impedire al protone di uscire dal solenoide?

Risultato: $i \geq 1.15 \quad A$

Esercizio 6.7

Due fili rettilinei indefiniti sono posti verticalmente in posizione fissa e parallelamente a distanza d l'uno dall'altro; in essi fluiscono le correnti i_1 e i_2. Nel piano che li contiene e fra di essi è posto un terzo filo parallelo ai primi due, nel quale fluisce la corrente i_3; esso è libero di spostarsi lateralmente, mantenendosi parallelo a sé stesso, nel piano dei primi due. Determinare la posizione di equilibrio stabile o instabile.

Risultato: La posizione di equilibrio si trova a distanza $di_1/(i_1+i_2)$ dal filo 1; l'equilibrio è instabile se i_3 ha lo stesso verso di i_1 e i_2, stabile se ha verso opposto.

Esercizio 6.8

Sulla superficie di un disco di plastica di raggio a, è distribuita uniformemente una carica q. Se il disco è posto in rotazione uniforme attorno al suo asse, con velocità angolare w, determinare il campo magnetico al centro del disco e il momento di dipolo del disco.
Suggerimento: scomporre il disco in spire concentriche infinitesime.

Risultato:

$$B = \frac{m_0 w q}{2 p a}$$

$$m = \frac{w q a^2}{2}.$$

Esercizio 6.9

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone ruota intorno al nucleo ad una frequenza $n = 7 \cdot 10^{15} \quad \sec^{-1}$ e genera un campo magnetico B = 14 T al centro dell'orbita. Calcolare il raggio dell'orbita dell'elettrone.

Risultato:

$$a = 5 \cdot 10^{-11} \quad m.$$

Esercizio 6.10

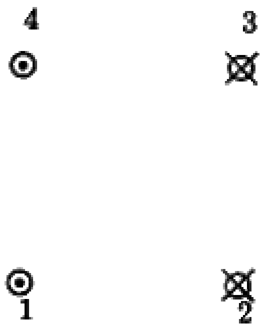
Una spira rettangolare di lati a e b, percorsa da una corrente di intensità i, so trova sullo stesso piano di un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente I, con i lati di lunghezza *a* paralleli al filo. Il più vicino dei due lati di lunghezza *a* dista *d* dal filo stesso e la corrente in esso ha lo stesso verso di quella nel filo. Determinare la forza risultante sulla spira.

Risultato:

$$F = \frac{m_0 liab}{2pd(d+b)}.$$

Esercizio 6.11

Quattro lunghi fili di rame sono fra loro paralleli e disposti ai vertici di un quadrato di lato *a=20 cm.* In ogni filo circola una corrente *i=20* A nel verso mostrato in figura. Determinare $\vec{B}$ al centro del quadrato.



Risultato: Il campo risultante è diretto verso l'alto e vale

$$B = 8 \cdot 10^{-5} \ \ T .$$

Esercizi svolti

Esercizio 7.1

Il campo magnetico che agisce perpendicolarmente ad un circuito costituito da 3 spire di 30 cm di diametro, passa da un valore di 0.4T a -–.65T in 180 msec. Calcolare la tensione indotta nelle spire, supponendo che la variazione del campo magnetico sia uniforme.

Soluzione:
Il flusso concatenato con il circuito vale

$$\Phi_B = 3B\pi r^2 ,$$

dove r = 15 cm è il raggio delle spire. La forza elettromotrice indotta sarà quindi, secondo la legge di Faraday,

$$\mathcal{E} = -3\pi r^2 \frac{dB}{dt} .$$

Poiché la variazione del campo è uniforme nel tempo possiamo scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cong -5.38 \quad T/\sec ,$$

e quindi $\mathcal{E} \cong 1.24 \quad V$.

Esercizio 7.2

Cento spire di filo di rame isolato sono avvolte in modo da formare una bobina la cui sezione ha un'area di 10^{-3} m^2 e sono collegate ad una resistenza. La resistenza totale del circuito è di $10 \ \Omega$. Se l'induzione magnetica nello spazio interno alla bobina cambia passando da 1.0 T in un verso a 1.0 T in verso opposto, quanta carica passa attraverso il circuito?

Soluzione:
L'intensità di corrente che attraversa il circuito sarà, usando le leggi di Ohm e di Faraday,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt} .$$

Integrando nel tempo si ottiene la carica q (l'equazione che risulta è nota come legge di Felici)

Autore: Giovanni Alberto Ummarino

$$q = \int i dt = -\frac{1}{R}\Delta\Phi_B$$

e quindi, in questo caso,

$$q = -\frac{100 A \Delta B}{R}.$$

Sostituendo i valori numerici si trova, in valore assoluto, q =0.02 C.

Esercizio 7.3

Una spira di forma qualunque giace su un piano orizzontale, in presenza di un campo magnetico diretto verticalmente dal basso verso l'alto. Determinare il verso della corrente indotta nella spira, visto da un osservatore che si trova al di sopra della spira (e che quind vede il campo puntare verso se stesso), nei seguenti casi: (a)la spira viene dilata meccanicamente; (b)il modulo del campo diminuisce nel tempo.

Soluzione: (a) Quando la spira si dilata il flusso ad essa concatenato aumenta. Per la legge di Lenz il verso della corrente indotta deve essere tale da opporsi a questo aumento, e quindi il campo generato dalla corrente indotta deve essere opposto al campo esterno. La regola della mano destra ci dice che il verso della corrente indotta è orario.
(b) In questo caso, per la legge di Lenz, il campo della corrente indotta deve avere lo stesso verso di quello esterno, per contrastare la diminuzione di quest'ultimo. Il verso della corrente indotta è quindi antiorario.

Esercizio 7.4

Nel filo indefinito dell'esercizio 6.10 la corrente I passa da 0 a 90 mA in 15 msec, con variazione uniforme. Supponendo a = 30 cm, b = 10 cm e d = 5 cm determinare la forza elettromotrice indotta nella spira.
Soluzione: Il flusso concatenato con la spira vale

$$\Phi_B = \int \vec{B} \bullet \vec{n} dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right),$$

e quindi la forza elettromotrice vale

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Numericamente e in valore assoluto $\mathcal{E} \cong 3.96 \cdot 10^{-7}\ V$.

Esercizio 7.5

Due esperienze di natura elettrica vengono compiute nello stesso laboratorio. In una, una corrente variabile nel tempo secondo la legge $I = I_0 sin(\omega t)$ con il massimo valore di I uguale ad 1 A passa in un lungo filo rettilineo. Nell'altra viene impiegata una bobina quadrata piana costituita da 50 spire sovrapposte di area media S = 0.25 m^2.

a) Calcolare a quale distanza d dal filo deve trovarsi il centro della bobina se la frequenza della corrente è di 1000 Hz e se si vuole che nella bobina venga a manifestarsi una f.e.m. minore 10^{-3} V.
b) Quali orientamenti della bobina garantiscono f.e.m.=0 per qualsiasi valore della distanza d?

Soluzione: Poiché la corrente nel filo è variabile, sarà pure variabile nel tempo il campo magnetico $|B|$ generato ad una generica distanza r dal filo. Di conseguenza sarà variabile il flusso del campo magnetico della bobina che sarà soggetta ad una f.e.m. indotta.
Dato che ogni fascia infinitesima, lunga $l = \sqrt{S}$, in cui si può pensare composta la spira quadrata, ha una diversa distanza dal filo, il flusso del campo magnetico è dato da

$$\phi = N \int_{d-l/2}^{d+l/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \dots = \frac{N\mu_0 I_0 l_0 \cos \omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right)$$

Per cui la f.e.m. è

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{N\mu_0 I_0 l \omega sin\omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right)$$

e raggiunge il suo massimo quando $sin\omega t = 1$. Affinché non si manifesti una f.e.m. maggiore di 10^{-3} V basta quindi imporre

$$f.e.m. < 10^{-3}$$

da cui, svolgendo i calcoli, si ricava d < 15.71 m.

Esercizi proposti

Esercizio 7.6

Nell'esercizio 6.10, uno dei due lati di lunghezza *b* trasla parallelamente a se stesso con velocità costante v. Determinare la forza elettromotrice indotta nella spira e, detta R la resistenza della spira, confrontare la potenza dissipata per effetto Joule con quella necessaria per mantenere costante la velocità del lato mobile.

Risultato: $e = -Bbv$; $P_J = \dfrac{(Bbv)^2}{R}$; $P_e = ibBv$

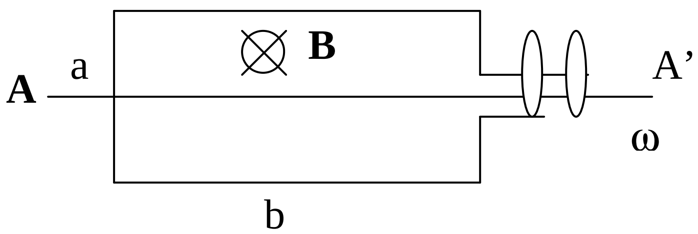
Esercizio 7.7

Un filo di lunghezza l, massa m e resistenza R scorre senza attrito su rotaie parallele di resistenza trascurabile. Il piano della rotaie forma un angolo θ con il piano orizzontale e all'estremità inferiore il circuito è chiuso da un filo, anch'esso di resistenza trascurabile, in modo da formare una spira rettangolare. In tutta la regione esiste un campo magnetico uniforme diretto verticalmente dal basso verso l'alto. Dimostrare che il filo raggiunge una velocità limite e calcolarla.

Risultato: $v = \dfrac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2 \cos^2\theta}$.

Esercizio 7.8

Una bobina rettangolare formata da N = 100 spire sovrapposte di lati a = 1 cm e b = 5 cm è collegata a dei collettori circolari e ruota intorno all'asse AA' con velocità angolare ω in un campo magnetico B = 0.4 T. Ricavare l'espressione del flusso quando la bobina si trova nella posizione di figura ($\vec{B}$ ortogonale al piano della spira) e della differenza di potenziale massima tra i collettori specificando la posizione della bobina rispetto al campo. Calcolare poi a quale velocità angolare la bobina deve ruotare per ottenere una differenza di potenziale massima pari a 100 V.



Risultato:

$\phi = 0.02\ Wb$ con $\vec{B} // \vec{n}$; $\varepsilon_{max} = NBab\omega$ con $\vec{B} \perp \vec{n}$; $\omega = 5000\ rad/\sec$

Esercizio 7.9

Una spira quadrata di lato L = l / 4 può traslare lungo l'asse x, parallelamente al piano (x,y). Essa è immersa in una regione in cui il campo magnetico è
$B = B_z = B_0 sin(kx)\cos(wt)$.

Calcolare:

a) la forza elettromotrice indotta in funzione del tempo quando la spira si trova con lo spigolo inferiore sinistro coincidente con l'origine O.

b) di quale tratto x si deve traslare la spira dalla posizione di cui al punto a) per avere il massimo valore del flusso del campo magnetico attraverso la spira all'istante t=0.

Risultato:

a) $f.e.m. = \frac{B_0 L w}{k}$

b) $x = l/8$

Esercizio 7.10

Una spira rettangolare di lati l_1 = 0.5 m e l_2 = 1 m viene rimossa con velocità costante v = 3 m/sec e parallela al lato maggiore della spia da una regione dove è presente un campo magnetico B =1T perpendicolare alla spira stessa. Sapendo che la resistenza elettrica nella spira è R = 1.5 Ω trovare la corrente che circola nella spira.

Risultato: I = 1A

Esercizi svolti

Esercizio 8.1

Un avvolgimento di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da $N = 100$ spire; i raggi interno ed esterno sono rispettivamente $r_1 = 5\text{cm}$ e $r_2 = 6\text{cm}$ e la larghezza del toroide è $a = 1\text{cm}$.
Calcolare l'induttanza del toroide e l'energia magnetica in esso immagazzinata nell'ipotesi che nel circuito scorra una corrente $I = 5\text{A}$.

Soluzione:
Il campo magnetico all'interno dell'avvolgimento forma delle linee di forza circolari e il suo modulo, che per ragioni di simmetria dipende solo dalla distanza *r* dall'asse del toroide, si può calcolare tramite il teorema di Ampère e risulta essere

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Conseguentemente il flusso magnetico attraverso la sezione del toroide vale

$$\Phi_B = \int_{\text{sezione}} \vec{B}\cdot\hat{n}dS = a\int_{r_1}^{r_2} B(r)dr = a\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Essendo il flusso Φ_B concatenato a *N* spire, l'induttanza è dunque

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \approx 3.65\,\mu\text{H},$$

mentre l'energia magnetica è

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \approx 4.56\times 10^{-5}\ \text{J}.$$

Si può verificare che l'energia magnetica avrebbe potuto essere calcolata anche integrando la densità di energia all'interno del toroide, ottenendo il medesimo risultato

$$W = \int_{\text{volume}} w\,dV = \int_{\text{volume}} \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r_1}^{r_2} B^2(r)a2\pi r dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 8.2

Si consideri un cavo coassiale costituito da due superfici cilindriche di raggi r_1 e $r_2 > r_1$, percorse da correnti (uniformemente distribuite) di intensità I. Determinare l'energia magnetica immagazzinata (per unità di lunghezza) e l'induttanza (per unità di lunghezza) di tale cavo.

Soluzione:

Per ragioni di simmetria il campo magnetico forma linee di forza circolari centrate sull'asse del cavo e il suo modulo dipende solo dalla distanza da tale asse. Utilizzando il teorema di Ampère si dimostra che il campo magnetico è presente solo nella regione compresa tra i due conduttori e ha modulo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

dove r indica appunto la distanza dall'asse.
La densità di energia magnetica è quindi anch'essa funzione della distanza dall'asse e vale

$$w(r) = \frac{1}{2}\frac{B^2(r)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Per l'energia immagazzinata in un tratto di lunghezza l avremo pertanto

$$W = \int_{\text{volume}} w\,dV = \int_{r_1}^{r_2} w(r)\,l\,2\pi r\,dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

L'induttanza può poi essere calcolata facilmente osservando che

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Si vede facilmente che entrambe le grandezze calcolate su un generico tratto di cavo dipendono (linearmente) solo dalla lunghezza l del tratto e non dalla posizione assoluta di questo. Ha quindi senso definire le densità di energia magnetica e induttanza per unità di lunghezza nel seguente modo naturale

$$\mathrm{W} = \frac{W}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\mathrm{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 8.3

Una bobina di *N* spire è avvolta attorno ad un lungo solenoide di sezione circolare di raggio *R*, avente *n* spire per unità di lunghezza.
Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra bobina e solenoide.

Soluzione:

Detta *I* la corrente nel solenoide, il campo al suo interno ha modulo $B = \mu_0 nI$. Il flusso concatenato con la bobina è quindi

$$\Phi_B = NB\pi R^2 = N\mu_0 nI\pi R^2,$$

per cui il coefficiente di mutua induzione risulta essere

$$M = \frac{\Phi_B}{I} = N\mu_0 n\pi R^2 .$$

Esercizi proposti

Esercizio 8.4

Calcolare l'induttanza per unità di lunghezza di una linea di trasmissione a piattina, costituita da due conduttori cilindrici di raggio $a = 0.25$mm e posti a distanza (interasse) $d = 5$mm. Un filo viene usato come conduttore di andata e l'altro come conduttore di ritorno. Si ipotizzi che la corrente scorra interamente sulla superficie dei due conduttori. Che cosa succede se questa ipotesi viene rimossa e ad esempio la corrente risulta distribuita uniformemente nei conduttori?

Risultato:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \approx 1.18\,\mu\text{H}/\text{m}$$

Se la corrente è distribuita l'induttanza aumenta leggermente in conseguenza del flusso autoconcatenato a ciascun filo.

Esercizio 8.5

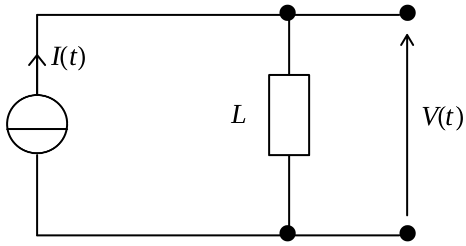
Nel centro di una spira di raggio *R* si trova una seconda spira molto piccola di area $A << R^2$; i piani delle due spire formano un angolo θ. Si calcoli la mutua induttanza *M* del sistema.

Risultato:

$$M \approx \frac{\mu_0 A \cos\theta}{2R}$$

Esercizio 8.6

Un generatore di corrente sinusoidale a frequenza f impone una corrente $I(t)$ di ampiezza I_0 in un avvolgimento di induttanza L. La tensione $V(t)$ ai capi dell'avvolgimento viene misurata da un oscilloscopio con la convenzione di segno mostrata in figura (convenzione degli utilizzatori). Mostrare che $V(t)$ è ancora sinusoidale con la stessa frequenza ma sfasata in anticipo di un quarto di periodo e determinarne l'ampiezza V_0.



Risultato:

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$$
$$V(t) = V_0 \cos(2\pi f t)$$
$$V_0 = 2\pi f L I_0$$

Esercizi con soluzione

Esercizio 9.1

Tre diverse onde sonore hanno frequenza ν rispettivamente 10 Hz, 1000 Hz e 50 Mhz. Determinare le lunghezze d'onda corrispondenti ed i periodi di oscillazione, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v=330 m/s.

SOLUZIONE Ricordando le relazioni $\lambda=v/\nu$ e $T=1/\nu$, , □ottengo $l_1=33$ m $T_1=.1$ s, $l_2=.33$m $T_2=1$ ms, $l_3=6.6\ 10^{-6}$ m $T_3=20$ ns.

Esercizio 9.2

Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale, di frequenza $\nu=100$ Khz, polarizzata linearmente, si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x.
a) Se il campo elettrico ha ampiezza $E_0=10$ V/m quanto vale l'ampiezza del campo magnetico?
b) Si determinino le espressioni in funzione del tempo del campo elettrico e di quello magnetico se all'istante $t_1= 7.5\ \mu s$ nel punto dell'asse x di ascissa $x_1=57$ m il campo elettrico ha componente $E_1=E_0=10$ V/m secondo l'asse y.

SOLUZIONE

a) $B_0= E_0 / c = 33.3$ nT.
b) Deve essere

$$E_0 \sin [k(x_1 - x_0) - \omega \cdot t_1] = E_0$$

quindi

$$k(x_1 - x_0) - \omega \cdot t = (2n\pi + \pi/2) \text{ rad}$$

con n intero positivo o negativo: si ottiene

$$x_0 = x_1 - ct_1 - (n + 1/4)\cdot\lambda = -2943 \text{ m} - n\cdot\lambda \qquad \text{essendo } \lambda= c/\nu= 3000 \text{ m}$$

a questo punto, il campo magnetico e quello elettrico si ottengono dalle equazioni armoniche

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \sin[k (x-x_0) - \omega \cdot t] \qquad \mathbf{B} = c\mathbf{E_0} \sin[k (x-x_0) - \omega \cdot t]$$

Esercizio 9.3

Il campo elettrico del segnale raccolto da un ricevitore radio ha un'ampiezza massima E_0 = 0.1 V/m; approssimando ad un'onda piana l'onda ricevuta, si calcoli:
a) l'intensità media dell'onda;

b) la potenza della stazione se questa irradia isotropicamente ed è posta a distanza d = 500 m dall'apparecchio ricevitore.

SOLUZIONE

a) l'intensità media è rappresentata dal valor medio del vettore di Poynting

$$I = \left|\vec{P}(t)\right| = \frac{1}{m_0}\left|\vec{E}(t)\right|\left|\vec{B}(t)\right| = \frac{1}{cm_0} E_0^2 sin^2 wt$$

b) $\bar{I}$ rappresenta l'energia che in media, nell'unità di tempo, attraversa l'unità di superficie; poiché la stazione irradia isotropicamente, la potenza media che attraversa la superficie sferica con centro nella stazione e raggio r risulta $4pr^2\bar{I}$ e coincide con la potenza media irradiata dalla stazione, quindi $W_{media\ staz.}$= $4pr^2\bar{I}$ = 41.7 Watt.

Esercizio 9.4

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza ν=250 Khz, si propaga nel vuoto e si riflette sopra una superficie piana perfettamente conduttrice, disposta perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione. A quale distanze dalla superficie si formano il primo massimo e minimo del campo elettrico?

SOLUZIONE

Si consideri un asse x perpendicolare alla superficie piana conduttrice, con l'origine O su questa. L'onda elettromagnetica piana con il campo elettrico costantemente polarizzato lungo l'asse y, può in generale scriversi come sovrapposizione di un'onda progressiva ed una regressiva, cioè

$$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega\cdot t) + E_1\sin(kx + \omega\cdot t + \phi)$$

la superficie è perfettamente conduttrice, quindi in tutti i suoi punti, quindi nel piano x=0 E=0 in qualunque istante t; da ciò segue che E_0=E_1 e ϕ =0 , per cui applicando la formula di prostaferesi

$$\sin a + \sin b = 2 \sin [(a + b)/2]\cos[(a + b)/2]$$

ottengo:

$$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega\cdot t) + E_0\sin(kx + \omega\cdot t)=2E_0\sin(kx)\cos(\omega\cdot t)$$

che è l'equazione di un'onda stazionaria, caratterizzata dall'avere una velocità di propagazione nulla. Nei punti di ascisse x=(2n + 1)π/(2k) = (2n + 1) λ/4 l'ampiezza elettrica è massima (ventri), i punti di ascisse x=n$\cdot\lambda$/2 sono invece i minimi (nodi). Nel nostro caso λ=c/ν, per cui si ha il primo ventre per l_{max}=300 m ed il primo nodo per x=0.

Esercizio 9.5

Il vettore di Poynting di un’onda elettromagnetica piana nel vuoto è dato da:

$$\vec{S}(x,t) = S_0 \cos^2(kx - w\,t)\overrightarrow{u_x}$$

ed è orientato quindi lungo il semiasse positivo delle ascisse in un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z). Il valore dell’ampiezza S_0 è 40 W/m^3, il numero d’onda k vale 20 m^{-1} e la pulsazione angolare w vale 3x10^9 s^{-1}.
Viene richiesto di calcolare la lunghezza d’onda l, la frequenza n dell’onda e il valore dei moduli del campo elettrico **E** e del campo magnetico **B.**

SOLUZIONE

Ricordando le relazioni k=2π/λ e ω=2πν posso scrivere:

$$\begin{cases} l = \dfrac{2p}{k} = \dfrac{6.28}{20} = 0.314 \text{ m} \\[2ex] n = \dfrac{w}{2p} = \dfrac{10^9}{6.28} = 1.592 \cdot 10^8 \text{ Hz} \end{cases}$$

per ciò che riguarda invece il valore assunto dai moduli dei campi elettrico e magnetico ricordiamo che $\vec{S} = \dfrac{1}{m_0}\vec{E} \times \vec{B}$ ed inoltre che B=E/c. Di conseguenza avremo che :

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{1}{m_0}\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| = \frac{1}{\text{c}\, m_0}\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \left|\vec{E}\right| = 122.8 \text{ V/m} \\[2ex] \left|\vec{B}\right| = 0.409 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{cases}$$

Esercizi con soluzione

Esercizio 9.6

Un'onda radio si propaga in un mezzo nel quale è ε_r =1.5 e μ_r=1.05 con una frequenza uguale a 100 KHz. Si calcoli la lunghezza d'onda.

SOLUZIONE λ=2390 m.

Esercizio 9.7

Un'onda elettromagnetica si propaga in un mezzo con velocità $1.5\cdot10^8$ m/s. Sapendo che la costante dielettrica relativa del mezzo è 3, si calcoli la permeabilità magnetica del mezzo.

SOLUZIONE μ_r=1.33.

Esercizio 9.8

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza f=$7.5\cdot10^{14}$ Hz si propaga lungo l'asse x. Essa è polarizzata rettilinearmente con il campo elettrico **E** che forma l'angolo θ=30° con il piano x,y ed ha ampiezza E_0 =10^3 V/m. Scrivere l'equazione di quest'onda e calcolare l'ampiezza del campo magnetico.

SOLUZIONE E_y=0.866 μ_r=1.33.

Esercizio 9.9

Le onde luminose nel vuoto hanno una lunghezza d'onda che varia da un massimo di circa 0.8 μm per il rosso ad un minimo di circa 0.4 μm per il violetto. Si determino i valori minimo e massimo della frequenza di vibrazione del loro campo elettromagnetico.

SOLUZIONE $3.75\cdot10^{14}$ Hz ; $7.5\cdot10^{14}$ Hz.

Esercizio 9.10

Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana ha un'ampiezza di 10^{-2} N/C. Si trovi la grandezza del campoi magnetico e l'energia per unità di volume.

SOLUZIONE B=$3.33\cdot10^{11}$ T; E = $8.85\cdot10^{16}$ J/m^3.

Domande a Test.

Domanda 9.1

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata si propaga nel vuoto con frequenza ν = 250 kHz. La sua lunghezza d'onda l e la sua velocità di propagazione *v* valgono:

1) λ = 1200 km ; v = 3 10^6 m/s
2) λ = 1200 m ; v = 3 10^8 m/s
3) λ = 1200 cm ; v = 3 10^8 m/s
4) λ = 1200 km ; v = 3 10^8 m/s

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 9.2

Si sovrappongono due onde piane monocromatiche descritte dalle equazioni $x_1 = 4\,\mathrm{sen}(3x - 2t)$ e $x_2 = 4\,\mathrm{sen}(3x + 2t)$. Se le lunghezze sono espresse in metri e i tempi in secondi, la velocità di gruppo della risultante vale:

1) 0,667 m/s
2) 0
3) 1,333 m/s
4) Non si può dire se non si specificano le proprietà del mezzo entro il quale avviene la propagazione.

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 9.3

La legge di Gauss nel vuoto si può esprimere mediante la formula

1) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
2) $\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_l dl = 0$
3) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = r / e_0$

RISPOSTA CORRETTA : 4

Domanda 9.4

Un'onda elettromagnetica di frequenza f=5·GHz si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n=2.5. La sua velocità di fase vale:

1) v=3·10^8 m/s
2) v=5·10^9 m/s

3) $v=1.2\cdot 10^{8}$ m/s
4) $v=2\cdot 10^{-10}$ m/s

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 9.5

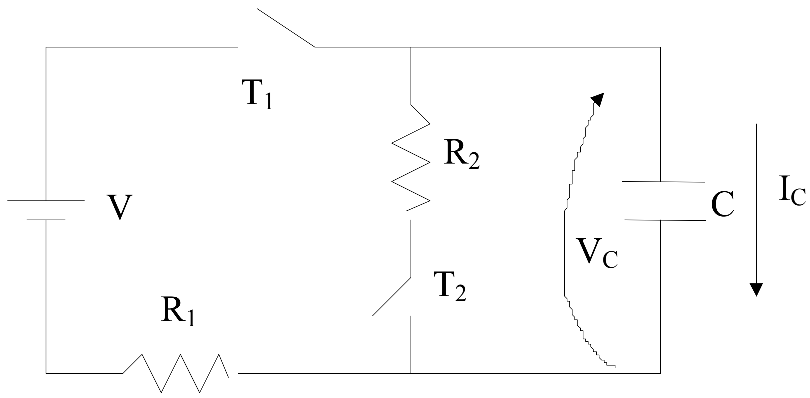
Un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente si propaga nel vuoto. Il modulo del campo magnetico vale $B=5\cdot 10^{-8}$ T. La densità volumica di energia vale:

1) $w=1.99\cdot 10^{-9}$ J/m^3
2) $w=3.5\cdot 10^{-9}$ J/m^3
3) $w=5\cdot 10^{3}$ J/m^3
4) $w=1.99\cdot 10^{9}$ J/m^3

RISPOSTA CORRETTA : 1

Esercizi con soluzione svolta

Esercizio 10.1
Si consideri il circuito

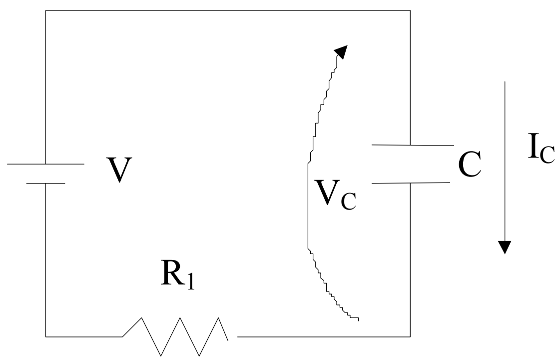


V = 10 Volts
R_1 = 5 Ω
R_2 = 10 Ω
C = 2 μF

sapendo che per t = 0 T_1 on T_2 off
t = 15 μs T_1 off T_2 on
determinare l'andamento di $I_C(t)$ e $V_C(t)$.

SOLUZIONE

per 0 < t < 15 μs il circuito risulta essere



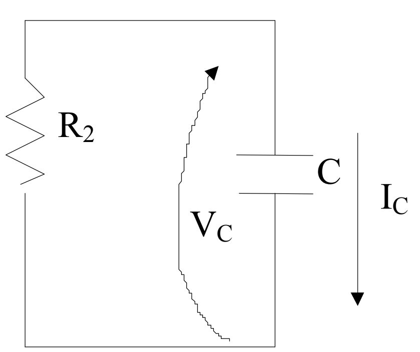
supponendo il condensatore inizialmente scarico

$$I_C(t) = \frac{V}{R_1}\exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$$

$$V_C(t) = V\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)\right]$$ (il condensatore si carica)

$V_C(15\ \mu s)$=7.8 V $I_C(15\ \mu s)$=0.45 A

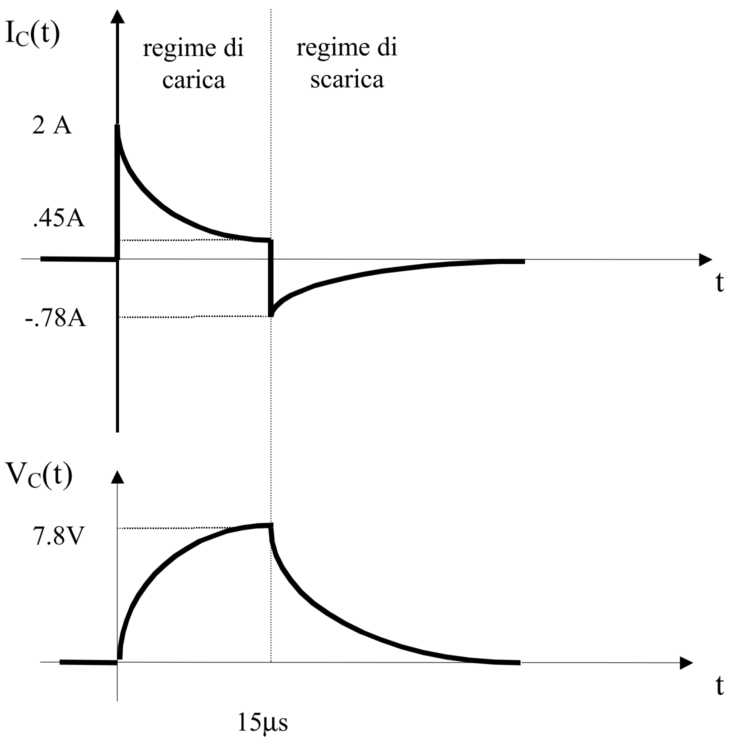
per t > 15 μs il circuito si modifica come



$$I_C(t) = -\frac{V_C(15ms)}{R_2}\exp\left(-\frac{t}{R\,C}\right)$$

$$V_C(t) = -I_C(t)\cdot R_2 = V_C(15ms)\exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)$$

(il condensatore si scarica)



Esercizio 10.2

Un induttore (L=4 10^{-4} H) ed una resistenza (R=5 ohm) sono posti in serie ad un generatore di tensione continua (V=200 Volts)

a) quanto tempo occorre affinchè la corrente che fluisce nella resistenza raggiunga il 60% della corrente finale?

b) quanta energia è accumulata nel campo magnetico dopo che la corrente ha raggiunto il suo valore massimo?

c) calcolare che valore raggiunge la corrente dopo un tempo pari a 3 costanti di tempo τ=L/R del circuito.

SOLUZIONE

a) $I(t) = \frac{V}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{(L/R)}\right)\right]$ I_{MAX} = V/R

quindi si impone $0.6 \cdot \frac{V}{R} = \frac{V}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{(L/R)}\right)\right]$ da cui $t = -\frac{L}{R}\ln(1-0.6) = 7.2 \cdot 10^{-6} s$

b) $E = \frac{1}{2}LI_{MAX}^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{V}{R}\right)^2 = 0.32J$

c) $I\left(3\frac{L}{R}\right) = \frac{V}{R}[1 - \exp(-3)] = 38A$

Esercizio 10.3

La corrente in un corto circuito RL passa da 1.16 A a 10.2 mA nei 1.5 s che seguono la rimozione della batteria del circuito. Supponendo che L valga 9.44 H, determinare la resistenza R del circuito.

SOLUZIONE

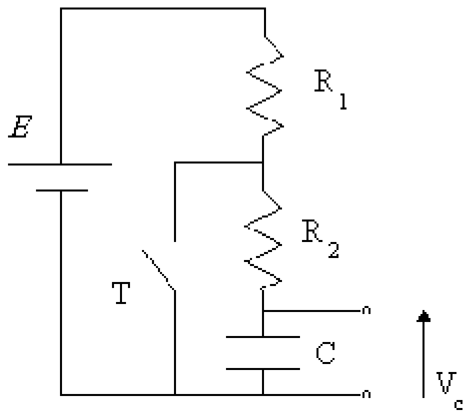
$$I(t) = I_{MAX}\exp\left(-\frac{t}{\left(L/R\right)}\right) \qquad I_{MAX} = 1.16A$$

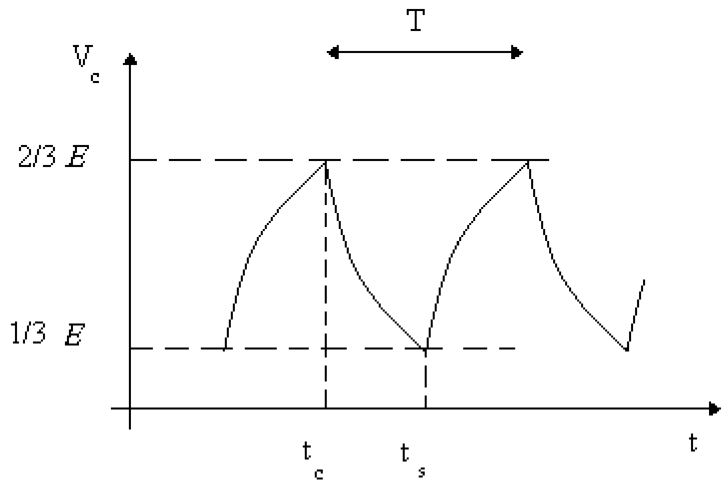
$$I(1.5s) = 10.2mA = I_{MAX}\exp\left(-\frac{1.5ms}{\left(9.44H/R\right)}\right)$$

da cui si ricava $R = \frac{L}{(1.5s)}\ln\left(\frac{1.16A}{10.2 \cdot 10^{-3}A}\right) = 29.8\Omega$

Esercizio 10.4

L'interrutore t del circuito in figura si chiude quando V_c=2/3 *E* e si apre quando V_c=1/3 *E.* Il risultato è che V_c ha l'andamento mostrato in figura.
Se R_1=40Ω, R_2=10Ω, C=$2\cdot10^{-6}$ F, calcolare quanto valgono il tempo di carica t_c, il tempo di scarica t_s e il periodo dell'oscillazione.





SOLUZIONE

Durante la fase di carica l'interruttore è aperto, di conseguenza la carica avviene attraverso le resistenze R_1 e R_2 che sono in serie. Si ha quindi che in un generico istante t_1 la tensione sulla capacità vale 1/3 *E*, mentre ad un generico istante t_1 la tensione sulla capacità vale 2/3 *E*.

Analiticamente la situazione è descritta dalle seguenti equazioni:

$$V_c = E \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E}{3} = E \cdot \left(1 - e^{-t_1/RC}\right) \\ \dfrac{2}{3}E = E \cdot \left(1 - e^{-t_2/RC}\right) \end{cases} \qquad \text{con } R = R_1 + R_2$$

$$\begin{cases} e^{-t_1/RC} = \dfrac{2}{3} \\ e^{-t_2/RC} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t_1}{RC} = -\ln\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{t_2}{RC} = -\ln\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = t \ln 2 \quad \text{con } t_c = 100 m\, s$$

dove il tempo di carica t_c vale t_2-t_1 ossia t_c=69.3 μs.

Durante la fase di scarica l'interruttore è chiuso, quindi il generatore di tensione e la resistenza R_1 sono esclusi dal circuito. Di conseguenza si avrà:

$$V_c = \frac{2}{3} E \cdot e^{-t/_{RC}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{3} E = E \cdot e^{-t_1/_{RC}} \\ \frac{1}{3} E = E \cdot e^{-t_2/_{RC}} \end{cases} \qquad \text{con } R = R_2$$

$$\begin{cases} e^{-t_1/_{RC}} = \frac{2}{3} \\ e^{-t_2/_{RC}} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{t_1}{RC} = -\ln\frac{2}{3} \\ \frac{t_2}{RC} = -\ln\frac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = t \ln 2 \quad \text{con } t_c = 20 m\, s$$

dove il tempo di scarica t_s vale t_2-t_1 ossia t_s=13.9 μs.
Il periodo con cui si ripete la forma d'onda è dato da

$T = t_c + t_s$ = 69.3μs+13.9μs=83.2μs.

Esercizio 10.5

Si determini il tempo necessario affinché in un circuito RLC, la massima energia presente sul condensatore durante un'oscillazione si riduca a metà del suo valore iniziale. Si assuma $q=q_{MAX}$ a t=0.

SOLUZIONE

$$q(t) = q_{MAX} \exp\left(-R/_{2L}\right)\cos(wt) \quad , \quad f = 0$$

$$E_{condensatore} = \frac{[q(t)]^2}{2C}$$ affinché $E=E_{MAX}/2$ $\quad q = \frac{q_{MAX}}{\sqrt{2}}$

quindi si impone $\exp\left(-\frac{R}{2L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

da cui $t = \frac{L}{R}\ln 2$

Esercizi con soluzione

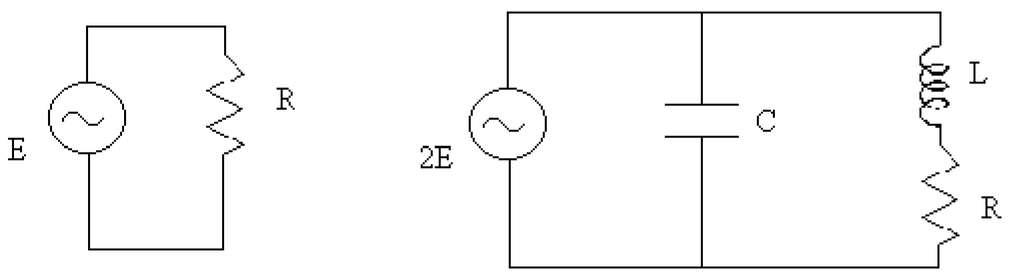
Esercizio 10.6

In un circuito oscillante LC, si determini qual è il valore della carica su un condensatore (espresso in funzione della carica massima) quando l'energia totale del circuito è suddivisa in parti uguali fra il campo magnetico ed il campo elettrico. Quanto tempo deve passare affinché si realizzi questa condizione, nel caso si assuma al tempo t=0 la carica $q=q_{MAX}$? (Si esprima tale valore in frazione di periodo e si utilizzino i valori di L=4 mH e C=6 nF)

RISULTATO [$q = \frac{q_{MAX}}{\sqrt{2}}$, t=T/8= 0.397 10^{-7} s]

Esercizio 10.7

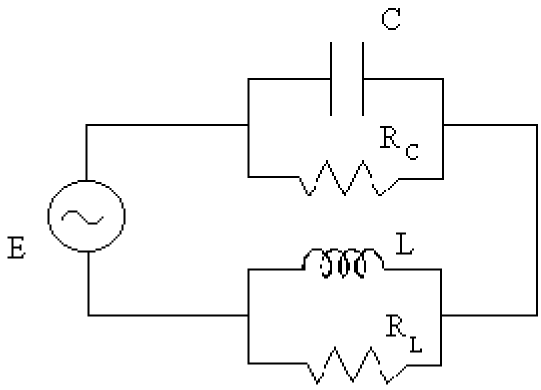
Un resistore con R=100Ω è connesso ad un generatore di forza elettromotrice alternata $E=E_0\cos\omega t$, con ω=314 rad/sec. Successivamente esso è connesso ad un generatore con 2 $E=E_0\cos\omega t$ secondo lo schema della figura. Si vuole che anche in questo secondo caso la corrente erogata dal generatore sia in fase con le f.e.m. e che la differenza di potenziale ai capi di R valga E. Calcolare i valori di L e C.



RISULTATO [L=0.55 H C=13.8μF]

Esercizio 10.8

Determinare per il circuito in figura l'espressione della pulsazione di risonanza e calcolarla in particolare per $R_L=R_C=1\Omega$, $L=10^{-3}$ H, $C=10^{-9}$ F. Se R_L e R_C pur restando uguali, assumono un qualunque valore diverso da 1 il risultato cambia?



RISULTATO [$\omega=10^6$ rad/s]

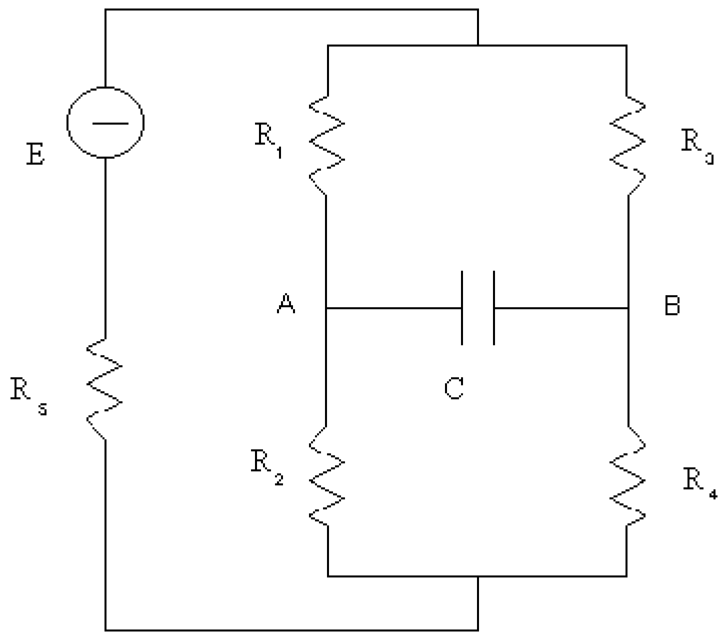
Esercizio 10.9

Con un consumo di energia uguale a 0.5 J, un condensatore viene caricato per mezzo di un generatore di forza elettromotrice costante di valore 1000 V. Raggiunto l'equilibrio il condensatore viene staccato dal generatore e collegato con un'induttanza uguale a 2 H. Si determini la frequenza delle oscillazioni nel circuito oscillante LC.

RISULTATO [f=113 Hz]

Esercizio 10.10

Nel circuito rappresentato in figura si ha che E=25 V, $R_1=1\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=8\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=5\Omega$, $C=3\mu F$. Calcolare la differenza di potenziale V_B-V_A in condizioni stazionarie e, se si sconnette il generatore, in quanto tempo la carica del condensatore si riduce a un decimo di quella iniziale.



RISULTATO [V_B-V_A =-6 V ; t=24.9μs]

Domande a Test.

Domanda 10.1
Un condensatore di capacità *C* viene scaricato su un cavo coassiale di resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione L_0.
Le energie immagazzinate nel condensatore e nel cavo coassiale:
1) tendono a zero per tempi tendenti ad infinito;
2) variano nel tempo con legge sinusoidale;
3) hanno somma costante nel tempo.
4) crescono al crescere del tempo

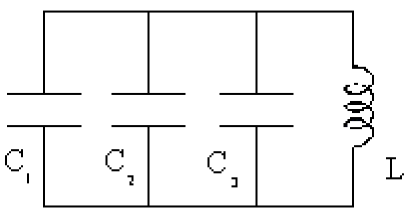
RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 10.2
Un condensatore, a facce circolari piane e parallele di raggio a e distanti h<<a, è caricato ad una differenza di potenziale V_0 ed in seguito viene fatto scaricare su una resistenza R. La corrente nel circuito vale:
1) $i(t)=(V_0/R)\cdot \exp[(-ht)/\varepsilon_0 RS)]$
2) $i(t)=(V_0/R)$
3) $i(t)=(V_0/R)\cdot \exp[(-ht)]$
4) $i(t)=(V_0/R)\cdot t$

RISPOSTA CORRETTA: 1

Domanda 10.3
Dato il circuito in figura la frequenza di risonanza del circuito vale:

1) $$\omega = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_2 + C_3)}}$$



2) $$\omega = \sqrt{\frac{L}{(C_1 + C_2 + C_3)}}$$

3) $$\omega = \sqrt{\frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_2}{L(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3)}}$$

4) $$\omega = \sqrt{\frac{(C_1 + C_2 + C_3)}{L}}$$

RISPOSTA CORRETTA: 1

Domanda 10.4
Nel circuito di utilizzazione di una corrente alternata la tensione V ai capi del circuito e l'intensità della corrente che lo percorre sono sfasati:
1) se il circuito è puramente ohmico
2) se il circuito ha un sensibile coefficiente di autoinduzione L
3) se nel circuito sono inserite delle capacità
4) sempre

RISPOSTA CORRETTA: 2 - 3

Domanda 10.5
Nel circuito di utilizzazione di una forza elettromotrice alternata l'intensità della corrente:
1) è sempre in fase con la f.e.m.
2) non è mai in fase con le f.e.m,
3) è in fase con la f.e.m. solo se il circuito è puramente ohmico
4) è in fase con le f.e.m. solo se

$$i = \frac{E \cdot \sin(\omega t)}{R} = I\sin(\omega t)$$

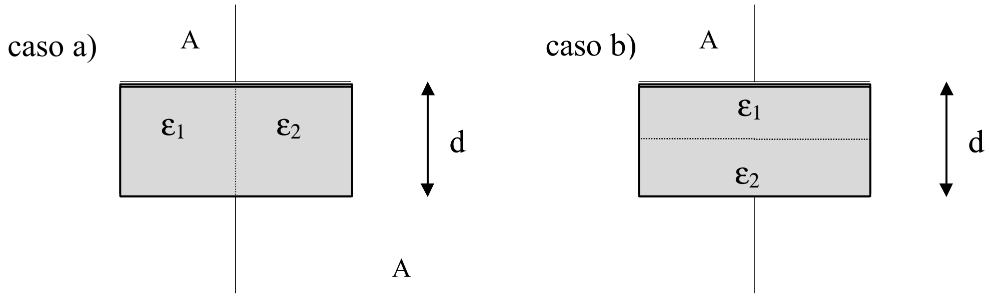
dove R è la resistenza totale del circuito di utilizzazione.

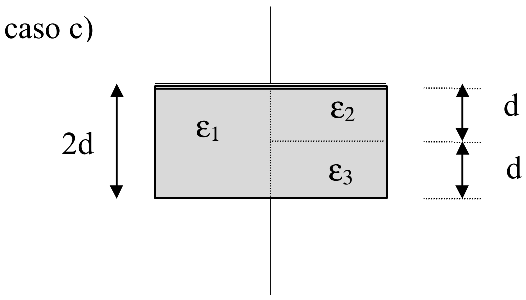
RISPOSTA CORRETTA: 3 - 4

Esercizi con soluzione svolti

Esercizio 11.1

Si calcoli la capacità dei condensatori a piatti paralleli riempiti da diversi dielettrici come in figura





SOLUZIONE

a) Il condensatore è equivalente alla serie di due condensatori con le rispettive costanti dielettriche relative ε_1 ed ε_2 , superfici delle armature dimezzate rispetto a quelle del condensatore complessivo (A) e distanze tra le armature d. Ne consegue che

$$C = \frac{e_0 A}{2d}(e_1 + e_2).$$

b) Il condensatore è equivalente al parallelo di due condensatori con le rispettive ε_1 ed ε_2 , stesse superfici A e distanze tra le armature d/2. Ne segue che $C = \frac{2e_0 A}{d}\left(\frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2}\right)$.

c) Il condensatore è equivalente al parallelo di C_1 con la serie C_2 + C_3, in cui le superfici e le distanze tra le armature sono rispettivamente per C_1 :A/2 e 2d, per C_2 e C_3 :A/2 e d. Quindi

$$C = \frac{e_0 A}{2d}\left(\frac{e_1}{2} + \frac{e_2 \cdot e_3}{e_2 + e_3}\right)$$

Esercizio 11.2

Si consideri un condensatore a facce piane parallele con piatti di area A distanti d l'uno dall'altro. Una differenza di potenziale V_0 viene applicata sui piatti. La batteria viene, poi, staccata e una piastra dielettrica di spessore b e costante dielettrica ε_r viene inserita tra i piatti. Si assuma che A=115 cm^2, d=1.24 cm, b=0.78cm, ε_r=2.61, V_0=85.5 V.

a) Qual è la capacità C_0 prima che la piastra venga inserita?
b) Quale carica libera appare sui piatti?
c) Qual è il campo elettrico E_0 nelle zone vuote tra i piatti e la piastra dielettrica?
d) Si calcoli il campo elettrico E nella piastra dielettrica.
e) Qual è la differenza di potenziale tra i piatti, dopo che la piastra dielettrica è stata introdotta?
f) Qual è la capacità quando la piastra è posizionata?

SOLUZIONE

a) $C_0 = \dfrac{e_0 A}{d} = 8.21 pF$

b) La carica libera presente sulle armature è $q = C_0 V_0 = 7.02 \cdot 10^{-10} C$ poiché la batteria viene staccata prima che la piastra venga inserita, la carica libera rimane invariata quando la piastra viene posizionata all'interno del condensatore.

c) Si applica la legge di Gauss considerando una superficie S che racchiude solo l'armatura su cui si accumulano cariche libere positive. Si ha che

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{u}_N dS = e_0 E_0 A = q \quad , \quad E_0 = \frac{q}{e_0 A} = 6900 \ V/m$$

Si noti che il valore E_0 resta invariato quando la piastra è introdotta. Esso dipende solo dalla carica libera sui piatti.

d) Si applica nuovamente la legge di Gauss, questa volta su una superficie $S^|$ che racchiude l'armatura su cui si accumulano cariche libere positive e penetra (parzialmente in profondità) nella piastra dielettrica. Si trova che

$$\oint_{S^|} \vec{D} \cdot \vec{u}_N dS = -e_0 e_r E A = -q \quad , \quad E = \frac{q}{e_0 e_r A} = \frac{E_0}{e_r} = 2640 \ V/m$$

Il segno meno compare quando si calcola il prodotto interno **E·u$_N$** poichè **E** ed **u$_N$** (versore normale uscente dalla superficie $S^|$) hanno versi opposti.

e) La differenza di potenziale risulta $\int E dl = E_0 (d - b) + Eb = 52.3 \ V$.

f) La capacità con piastra posizionata è $C = \dfrac{q}{V} = 13.4 pF$.

Esercizio 11.3

Un condensatore piano, le cui armature hanno area S=200 cm^2 e distano d=4 mm, è immerso in un olio di costante dielettrica relativa ε_r=4; le armature sono collegate ai poli di un generatore e la loro differenza di potenziale è V=300 Volt.

a) Qual è l'intensità della forza F agente sopra un'armatura?

b) Le armature vengono portate ad una distanza d_1=2 mm (la loro differenza di potenziale viene mantenuta costante): qual è l'energia erogata dal generatore?

SOLUZIONE

a) Le armature si attraggono l'una verso l'altra. Per calcolare il modulo di F si può immaginare di staccare il condensatore dal generatore e di variare di dx la distanza x tra le armature: il lavoro eseguito risulta dL=Fdx ed equivale alla variazione dU dell'energia U immagazzinata dal condensatore

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon S}\,, \qquad dU = \frac{Q^2 dx}{2\varepsilon S} \qquad F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S V^2}{x^2} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

cosicché per x=d risulta F=2 10^{-3} N.

Va osservato che nel processo precedente il condensatore è stato staccato dal generatore per evitare che quest'ultimo contribuisse a variarne l'energia elettrostatica.

b) Quando la distanza tra le armature viene variata dal valore d a d_1 , la carica del condensatore collegato al generatore subisce la variazione

$$Q_1 - Q = (C_1 - C)V = \varepsilon S\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d}\right)V = 53nC$$

l'energia erogata nel processo dal generatore è

E=(Q_1 - Q) V = (C_1 - C) V^2 = 16 10^{-6} J.

Si può osservare che la variazione di energia elettrostatica del condensatore è ΔU=(1/2)(C_1 - C) V^2, mentre il lavoro delle forze esterne, con F ricavata precedentemente, risulta $L = \int_d^{d_1} F dx = \frac{1}{2}(C - C_1)V^2$ per cui è rispettato il principio di conservazione dell'energia E + L = ΔU.

Esercizio 11.4

Una sfera metallica di raggio R_1 si trova all'interno di un guscio sferico conduttore di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 , concentrico alla sfera metallica. Lo spazio compreso tra i due conduttori è riempito da un dielettrico omogeneo ed isotropo. Se il guscio è a potenziale V_0 mentre il potenziale della sfera interna è nullo, si calcoli il potenziale elettrostatico a distanza r ($0 \le r < \infty$) dal centro della sfera.

SOLUZIONE

Siano Q_1 , Q_2 , Q_3 le cariche distribuite sopra le tre superfici metalliche: nel guscio metallico il campo è nullo, quindi $Q_2 = - Q_1$. Per $r \le R_1$ risulta V=0; per $R_1 \le r < R_2$ è $D=Q_1 / (4\pi r^2)$, $E= Q_1 / (4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2)$, quindi $V= - [Q_1 / (4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)] (1/R_1 - 1/r)$; ma per $r=R_2$ deve essere $V=V_0$, quindi $Q_1=-4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r V_0R_1R_2 / (R_2 - R_1)$. Per $r > R_3$ è $V = V_0 + [Q_3 / (4\pi\varepsilon_0)] (1/r - 1/R_3)$.

Esercizio 11.5

Dopo aver caricato due condensatori di capacità C_1=5 μF e C_2=4 μF alle differenza di potenziali di V_1=300V e V_2=250V, si collegano fra loro le armature negative e viene posto in parallelo ai primi due un terzo condensatore, scarico, di capacità C=1 μF. Determinare la carica presente alla fine su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo.

SOLUZIONE

Sui due condensatori avremo le seguenti carica

$$q_1 = V_1 \cdot C_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}\,C \qquad e \qquad q_2 = V_2 \cdot C_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}\,C$$

Perciò la carica totale è data da $q=q_1+ q_1=2.5\cdot 10^{-3}$ C. L'energia iniziale vale perciò $U=q^2/2C=0.350$ J.

Alla fine si ha:

$$V_{in}=q/(C_1+ C_2+ C_3)=250\ V$$

Di conseguenza le cariche accumulate sui condensatori saranno:

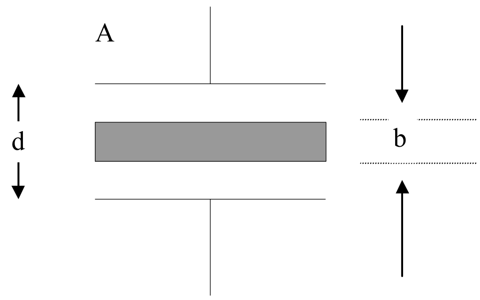
$$q_1^{'} = V_1 \cdot C_1 = 1.25 \cdot 10^{-3}\,C \qquad q_2^{'} = V_2 \cdot C_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}\,C \qquad q_3^{'} = V_3 \cdot C_3 = 0.25 \cdot 10^{-3}\,C$$

L'energia elettrostatica finale del processo sarà data da $U=q^2/2C=0.313$ J con una conseguente variazione di –0.037 J.

Esercizi con soluzione

Esercizio 11.6

Una piastra di rame di spessore b viene inserita in un condensatore a piatti paralleli



a) Quale sarà la capacità dopo che la lastra è stata introdotta?

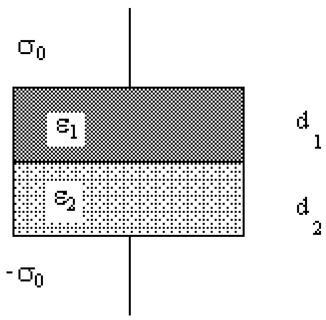
b) Se una carica q viene mantenuta sui piatti, si trovi il rapporto tra l'energia immagazzinata prima e quella immagazzinata dopo che la piastra viene inserita.

c) Quale lavoro viene compiuto sulla lastra, mentre viene inserita?

RISULTATO [a) $\dfrac{e_0 A}{(d-b)}$, b) $\dfrac{d}{(d-b)}$, c) $\dfrac{q^2 b}{2Ae_0}$]

Esercizio 11.7

Un condensatore piano con armature di area S distanti h è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 e costante dielettrica relativa ε_1, l'altra di spessore d_2 e costante dielettrica relativa ε_2. Ai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale V.
Calcolare i valori E_1 e E_2 del campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione tra i due dielettrici.



RISULTATO [$E_1 = \dfrac{s_0}{e_0 e_1}$; $E_2 = \dfrac{s_0}{e_0 e_2}$; $s_p = \dfrac{e_0(e_1 - e_2)}{e_1 d_1 + e_2 d_2}$]

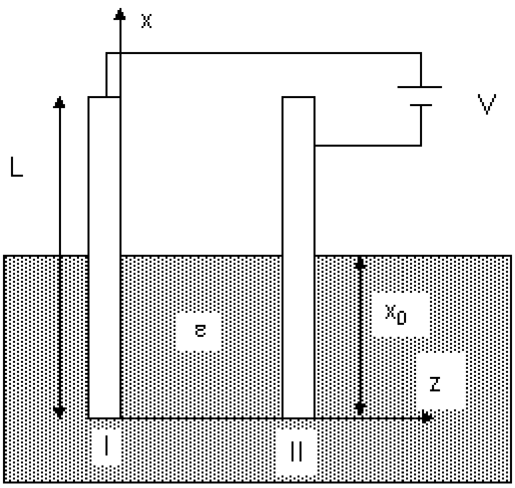
Esercizio 11.8

Due condensatori di capacità C_1=200 pF e C_2=1000 pF sono connessi in parallelo e caricati a un differenza di potenziale di 400V. Successivamente lo spazio tra le armature di C_1 viene completamente riempito di acqua distillata (con ε_r=80). Calcolare la variazione della differenza ΔV di potenziale ai capi di C_2, la carica di polarizzazione q_p sulle facce del dielettrico, la variazione di energia elettrostatica del sistema ΔU.

RISULTATO [ΔV = -371.8V ; $q_p=44.46\cdot10^{-8}$ C ; $\Delta U=-8.92\cdot10^{-5}$ J]

Esercizio 11.9

Un condensatore piano è costituito da due piastre piane e parallele di forma quadrata di lato L mantenute a distanza d (con d molto più piccolo di L). il condensatore è parzialmente immerso in un liquido dielettrico isotropo, lineare ed omogeneo di costante dielettrica ε e densità di massa ρ. Le due piastre sono inizialmente scariche e la parte sommersa delle piastre ha altezza x_0 come mostrato nella figura. Ad un certo istante t=0 le due piastre sono collegate ad un generatore di forza elettromotrice V. In queste condizioni si osserva che il liquido contenuto fra le piastre si solleva finché raggiunge una altezza x dall'estremità inferiore delle piastre. All'istante t=0 immediatamente successivo all'applicazione della forza elettromotrice, cioè quando $x=x_0$, si calcoli la carica elettrica presente sulle armature I e II e la forza agente sull'armatura II in direzione, modulo e verso.



RISULTATO

Q_I=[ε (Lx_0/d)+ε_0 (L^2 –Lx_0)/d]   ; Q_{II}=-[ε (Lx_0/d)+ε_0 (L^2 –Lx_0)/d]

La forza agente sulla piastra II è attrattiva, ossia è diretta in verso opposto all'asse z e vale in modulo:

$$F_{II} = \left\{ \frac{e}{2} \frac{V^2}{d^2} Lx_0 + \frac{e_0}{2} \frac{V^2}{d^2} (L^2 - Lx_0) \right\}$$

Esercizio 11.10

In una sfera di raggio di raggio R uniformemente carica con densità ρ viene praticata una cavità sferica tale da avere la superficie tangente alla superficie esterna della sfera di raggio R e al centro della sfera stessa. Dentro la cavità c'è il vuoto.
Determinare l'espressione della forza F esercitata su di una carica puntiforme q posta in un punto P esterno alla sfera ad una distanza l e su di una carica q posta nel centro della cavità.

RISULTATO

$$E_1 = \frac{r \cdot R^3}{3e_0 l^2} \qquad E_2 = \frac{r \cdot R}{6e_0}$$

Domande a Test.

Domanda 11.1

Nel caso di molecole non polari, la polarizzazione causata da un campo elettrico esterno è dovuta essenzialmente

1. Alla deformazione della molecola indotta dall'interazione tra campo esterno e cariche della molecola stessa
2. Al fatto di non essere nel vuoto
3. Al momento meccanico applicato dal campo sulla molecola
4. All'interazione con le molecole circostanti

RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 11.2

Per "polarizzazione" elettrica di un materiale si intende

1. Il momento di dipolo elettrico in esso indotto da un campo esterno
2. Il momento di dipolo presente in ogni singola molecola
3. Il momento di dipolo indotto per unità di volume
4. La densità di carica superficiale sul dielettrico

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 11.3

Il vettore spostamento elettrico a parità di distribuzione di cariche

1. Ha un valore che dipende dal materiale in cui ci si trova
2. Ha lo stesso valore qualunque sia il materiale in cui ci si trova
3. Ha un valore che dipende dalla densità di carica di polarizzazione presente nel materiale
4. Ha un valore che di pende dal materiale e dalla forma del dielettrico

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 11.4

In un dielettrico anisotropo la polarizzazione è in generale

1. Parallela al campo elettrico totale
2. Parallela al campo elettrico che ci sarebbe nel vuoto
3. Sghemba tanto rispetto al campo elettrico nel vuoto che a quello totale
4. Indefinibile

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 11.5

Nel caso di due piastre piane conduttrici cariche affaciate con densità superficiale di carica σ e poste nel vuoto, i campi elettrici interno ed esterno alle due piastre valgono:

1. $E_{int}=0$ $E_{ext}=\sigma/\varepsilon_0$
2. $E_{int}=2\sigma/\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$
3. $E_{int}=\sigma/2\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$
4. $E_{int}=\sigma/\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$

RISPOSTA CORRETTA : 4

Esercizi con soluzione svolti

Esercizio 12.1

Un filo rettilineo, indefinito, percorso da una corrente di intensità i=4 A, è immerso in un mezzo omogeneo, isotropo, indefinito e di permeabilità magnetica relativa μ_r=1.02. Si calcolino i campi **H** e **B**, e la densità di energia magnetica w in un punto distante d=5 cm dal filo.

SOLUZIONE

Se il filo si trovasse nel vuoto si avrebbe

$$H_0 = \frac{i}{2pd} = 12.7\ A/m \quad , \quad \mathrm{B}_0 = m_0 H = \frac{m_0 i}{2pd} = 16 \cdot 10^{-6}\ Wb/m^2$$

poiché il filo è immerso in un mezzo indefinito, omogeneo ed isotropo

$$H = H_0 = 12.7\ \mathrm{A/m} \quad , \quad B = m_0 m_r H = \frac{m_0 m_r i}{2pd} = 16.3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$$w = \frac{B^2}{2\, m_0 m_r} = 1.04 \cdot 10^{-4}\ J/m^3$$

Esercizio 12.2

Un solenoide di lunghezza l=60 cm e raggio r=5 cm, è formato da n=700 spire/metro ed è percorso da una corrente di intensità i=3 A. Un cilindro di ferro, di raggio r=2 cm e della stessa lunghezza del solenoide, è tenuto fermo con il suo asse coincidente con quello del solenoide e si trova per metà della lunghezza all'interno del solenoide stesso. Si calcoli la forza agente sul cilindro di ferro assumendo il valore μ_r=800 per la permeabilità magnetica del ferro.

SOLUZIONE

Un metodo semplice per calcolare la forza in questione può basarsi su considerazioni energetiche. Se la sbarra si sposta di un tratto Δx verso l'interno del solenoide l'energia del sistema subisce una variazione ΔU: va però osservato che la situazione del campo magnetico nelle vicinanze delle estremità del solenoide e di quelle del cilindro non cambia. In punti non troppo vicini alle estremità si ha H=ni. La variazione di energia magnetica del solenoide ΔU_{sol} è quindi:

$$\Delta U_{sol} = \frac{1}{2} m_0 m_r H^2 S \Delta x - \frac{1}{2} m_0 H^2 S \Delta x = \frac{1}{2} m_0 \left(m_r - 1 \right) n^2 i^2 p r^2 \Delta x$$

poiché il flusso di campo magnetico nel solenoide cambia se il cilindro penetra in esso, vi saràuna forza elettromotrice autoindotta che provoca una corrente opposta ad i (corrente erogata dal generatore); affinché la corrente totale che percorre il solenoide resti costante, il generatore dovrà fornire una potenza e quindi un'energia maggiori rispettivamente di ΔP_{gen} e ΔE_{gen}

$$\Delta P_{gen} = V \cdot i = \frac{\partial f}{\partial t} i = \frac{\partial (Li)}{\partial t} \cdot i = i^2 \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\Delta E_{gen} = \Delta P dt = i^2 \Delta L = i^2 [\mu_0 n^2 (l - \Delta x) S + \mu_0 \mu_r n^2 \Delta x S - \mu_0 n^2 l S] = \mu_0 (\mu_r - 1) n^2 i^2 \pi r^2 \Delta x$$

si noti che la variazione di energia fornita dal generatore è doppia rispetto alla variazione di energia magnetica relativa al solenoide. Ora, essendo $\Delta E_{gen} - F \Delta x = \Delta E_{sol}$ si può ricavare la forza che tende a risucchiare il cilindro di ferro $F = \frac{\Delta E_{gen} - \Delta E_{sol}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\mu_r - 1 \right) n^2 i^2 \pi r^2 = 2.78\ N$

Esercizio 12.3

Un anello di ferro, di sezione S=5 cm^2, ha un piccolo intraferro di spessore δ=4 mm e la circonferenza media dell'anello (compreso l'intraferro) è $2\pi r_0$=40 cm; intorno all'anello sono avvolte N=500 spire percorse da una corrente di intensità i e nell'anello il campo magnetico è **B**=1 T. Si calcoli i, l'intensitàdel vettore **H** e la magnetizzazione **M** all'interno del ferro usando il valore χ_m=5400.

SOLUZIONE

Per il teorema di Ampère si ha $\oint \vec{H} \cdot \vec{u}_T dS = (2\pi r_0 - \delta) H_{Fe} + \delta H_a = Ni$. La componente di **B** perpendicolare alla superficie di separazione tra due materiali diversi è continua nel passaggio da un materiale all'altro, quindi **B** ha lo stesso valore nel ferro e nell'aria dell'intraferro, di conseguenza è $\mu_{Fe} H_{Fe} = \mu_0 H_a$. Si ricava

$$i = \left[\frac{\left(2\pi r_0 - \delta\right)}{\left(\chi_m + 1\right)} + \delta \right] \cdot \frac{B}{N\mu_0} = 6.5\ \mathrm{A}$$

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_{Fe}} = 147\ \mathrm{A/m}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.96 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m}$$

Esercizio 12.4

Una sbarra di volume V=500 cm^3 è magnetizzata uniformemente, possiede un momento magnetico μ =200 Am^2 ed il campo **B** al suo interno vale 0.1 T. Si calcoli:
a) l'intensità del campo magnetico **H** all'interno della sbarra;
b) il valore massimo M_{max} del momento delle forze risentite dalla sbarra se posta in un campo magnetico esterno uniforme $\mathbf{B}_e$= 1 T.

SOLUZIONE

a) Il vettore **M** è il momento magnetico per unità di volume, di conseguenza il suo modulo risulta M=μ / V= 4 10^5 A/m. I vettori magnetici **B**, **H** ed **M** sono legati dalla relazione **B**=μ_0(**H** + **M**), poichè **H** ed **M** sono paralleli, si ricava: $H = \left| \frac{B}{m_0} - M \right| = 3.2 \cdot 10^5 \text{ A / m.}$

b) Sotto l'azione del campo magnetico esterno la sbarra magnetizzata risente delle forze di momento risultante **M** = μ ^ $\mathbf{B}_e$: il valore massimo del modulo del momento meccanico è M_{max}=m B_e=200 Nm.

Esercizio 12.5

Due anelli toroidali eguali sono formati dallo stesso materiale ferromagnetico magnetizzato uniformemente; la lunghezza media è d=20 cm. Il primo anello C è continuo, il secondo anello D ha un interferro di spessore h=5mm. Il campo magnetico nel primo anello è B_C=0.314 T. Calcolare il campo H_C nel primo anello e quanto valgono nel secondo anello il campo magnetico B_D, il campo H_D nell'interferro e il campo H_D nel ferro.

SOLUZIONE

Per ciò che riguarda il primo anello si ha che $B_C=\mu_0 M$.
e quindi il vettore magnetizzazione M assume il seguente valore : $M=2.5\cdot 10^5$ A/m.
Mentre il vettore H_C è nullo.
Per ciò che riguarda il secondo anello si avrà che

$$B_D d=\mu_0\, i_m=\mu_0\, M\,(d-h) \quad \text{e quindi} \quad B_D=\mu_0\, M\,(1-h/d)=0.306 \text{ T}$$

A questo punto il vettore H nell'intraferro dell'anello D varrà $H_0=B_D/\mu_0=2.44\cdot 10^5$ A/m, mentre all'interno del ferro
$H_D=-H_0 h/(d-h)=-6.26\cdot 10^3$ A/m.

Esercizi con soluzione

Esercizio 12.6

Calcolare l'intensità di corrente che percorre un filo rettilineo molto lungo affinche in un punto a distanza pari a 20 cm dal filo l'intensità magnetica sia H=7.96 A spira / m.

SOLUZIONE [i=10A]

Esercizio 12.7

Un solenoide molto lungo piegato a forma di toroidale viene riempito con un nucleo di ferro. Sapendo che la corrente che percorre l'avvolgimento è i=2A, che il numero delle spire per unità di lunghezza è 10 spire/cm e che il valore di B è pari a $1W/m^2$, calcolare:

1. l'intensità magnetica H_1 in presenza del nucleo di ferro;
2. l'intensità magnetica H_2 in assenza del nucleo di ferro;
3. l'intensità M_1 di magnetizzazione in presenza del nucleo di ferro;
4. l'intensità M_2 di magnetizzazione in assenza del nucleo di ferro.

SOLUZIONE [$H_1 = 2\cdot10^3$ A/m ; $H_2 = 2\cdot10^3$ A/m ; $M_1 = 7.9\cdot10^5$ A/m ; $H_1 = 0$]

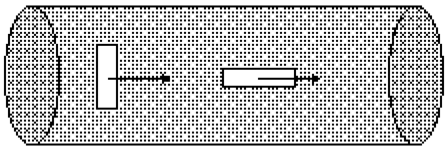
Esercizio 12.8

Un solenoide toroidale è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa μ_m. Calcolare i campi H e B al suo interno.

SOLUZIONE [$H = \frac{N\,i}{2p\ r}$ $B = \frac{m_0 m_m N\,i}{2p\ r}$]

Esercizio 12.9

In una materiale ferromagnetico contenuto all'interno di un solenoide molto lungo sono praticate due piccole cavità cilindriche, entrambi coassiali al solenoide. Nella prima larga è piatta, si misura $B_2=7.54\cdot10^{-2}$ T, nella seconda, sottile e allungata, si misura $B_1=1.26\cdot10^{-3}$ T. Calcolare la suscettività magnetica del materiale e la sua magnetizzazione.



SOLUZIONE [χ_m=58.8 M=5.9·10^4 A/m]

Esercizio 12.10

Due guaine cilindriche conduttrici, indefinite, coassiali, di spessore trascurabile, sono percorse entrambe e nello stesso verso da una corrente i. I raggi delle due guaine sono a=2cm e B=4cm. L'intercapedine tra di esse, inizialmente vuota, viene completamente riempita con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_m e l'energia magnetica aumenta di ΔU=1.73·10^{-3} J/m. Sapendo che la circuitazione di B lungo una circonferenza di raggio r>b, concentrica al sistema, vale 2π·10^{-5} Tm, calcolare i valori della corrente i e della permeabilitàμ_m.

SOLUZIONE [i=25A μ_m=40.9]

Domande a Test

Domanda 12.1

Il potenziale vettore è
1. Parallelo al campo magnetico
2. Perpendicolare al campo magnetico
3. In generale non è né parallelo né perpendicolare al campo magnetico
4. Dipende dalla presenza o meno di un campo elettrico

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 12.2

L'intensità magnetica H può essere misurata in :
1. Ampere/m
2. Volt/m
3. Ohm/m
4. Weber/m

RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 12.3

La permeabilità delle sostanza paramagnetiche :
1. è sempre minore dell'unità
2. rappresenta un parametro dipendente dal campo magnetico esterno
3. è una grandezza strettamente legata alla geometria del corpo immerso nel campo magnetico
4. nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

RISPOSTA CORRETTA : 4

Domanda 12.4

Possiamo affermare che la permeabilità relativa delle sostanze ferromagnetiche:
1. è una costante che caratterizza la sostanza considerata
2. varia al variare dello stato di magnetizzazione della materia

3. è indipendente dalla temperatura
4. aumenta linearmente con l'aumentare del campo magnetico esterno

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 12.5

Un materiale ferromagnetico è caratterizzato :

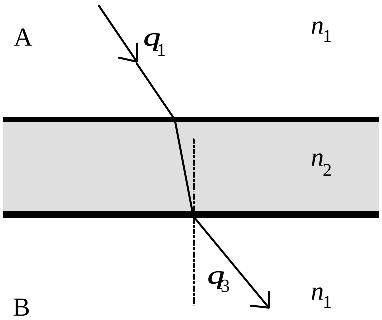
1. dall'esistenza di tanti piccoli elementi di volume aventi ognuno un momento magnetico proprio
2. dal fatto che si magnetizza in modo che l'induzione B è direttamente proporzionale all'intensità del campo H
3. dalla proprietà di attrarre sempre, anche allo stato naturale, la limatura di ferro
4. dal fatto di non poter essere più smagnetizzato una volta magnetizzato

RISPOSTA CORRETTA : 1

Esercizi svolti

Esercizio 13.1

Un fascio di luce passa dalla regione A alla regione B di un mezzo con indice di rifrazione n_1 attraverso una spessa lastra di materiale il cui indice di rifrazione è n_2. Di quale angolo viene deviato il fascio emergente rispetto al fascio incidente?



Soluzione:
Utilizzando la legge di Snell per l'interfaccia superiore si ha

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1 ,$$

mentre per l'interfaccia inferiore si ha

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}\theta_2 .$$

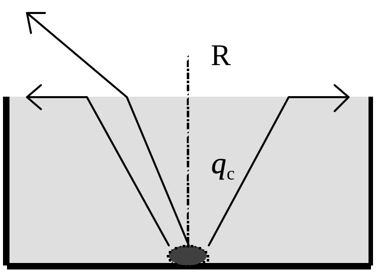
Sostituendo la prima espressione nella seconda, si ottiene dunque

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_1\right) = \operatorname{sen}\theta_1 ,$$

cioè $\theta_3 = \theta_1$ e lo strato non altera la direzione del fascio.

Esercizio 13.2

Un piccolo corpo luminoso posto sul fondo di un largo recipiente colmo d'acqua ($n_{acqua} \approx 4/3$) e profondo 100cm emette raggi di luce verso l'alto in tutte le direzioni (vedi figura). Sulla supeficie dell'acqua si forma un cerchio di luce causato dai raggi che vengono rifratti passando nell'aria ($n_{aria} \approx 1$). All'esterno del cerchio i raggi vengono totalmente riflessi e rimangono nell'acqua. Determinare il raggio *R* di questo cerchio.



Soluzione:
La riflessione totale ha luogo quando l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo critico θ_c, che si può ricavare facilmente dalla legge di Snell, imponendo che l'angolo formato dal raggio con la normale in aria sia retto:

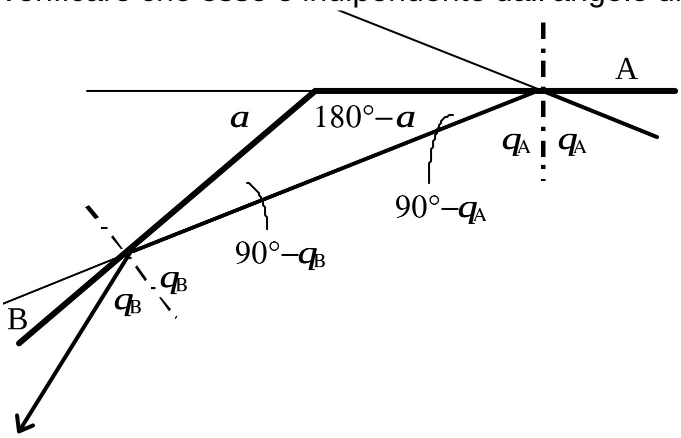
$$n_{\text{acqua}} \,\text{sen}\,\theta_c = n_{\text{aria}} \,\text{sen}\; 90^{\circ} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta_c = \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 0.75\,.$$

Si ricava quindi facilmente $\theta_c \approx 48.6°$. Per ragioni geometriche il valore *R* del raggio del cerchio è infine dato da

$$R = 100\text{cm} \times \tan\theta_c \approx 100\,\text{cm} \times 1.13 = 113\text{cm}\,.$$

Esercizio 13.3
Due specchi (A e B) formano un angolo α. Un raggio di luce viene riflesso da A e successivamente da B. Determinare l'angolo γ di deflessione del raggio in funzione di α e verificare che esso è indipendente dall'angolo di incidenza del raggio su A. Determinare poi l'angolo α in modo che il raggio incidente venga deflesso, dal sistema formato dai due specchi, di $\gamma = 180°$.



Soluzione:
Supponiamo che il raggio incidente giunga sul primo specchio A secondo un angolo di incidenza θ_A. La direzione del raggio riflesso sarà ruotata, rispetto alla direzione del raggio incidente, di un angolo $\gamma_A = 180°-2\theta_A$ (il che è evidente dalla figura considerando il prolungamento del raggio oltre lo specchio). Analogamente la seconda riflessione apporterà una ulteriore rotazione antioraria di un angolo $\gamma_B = 180°-2\theta_B$, dove θ_B è l'angolo di incidenza sullo specchio B. L'angolo di rotazione totale si può scrivere dunque come

$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B = 360°-2(\theta_A + \theta_B).$$

L'angolo θ_B può poi essere determinato con considerazioni geometriche sul triangolo formato dai due specchi e dal raggio intermedio. Imponendo infatti che la somma degli angoli interni di tale triangolo valga $180°$ si ottiene facilmente

$$\theta_A + \theta_B = 180° - \alpha ,$$

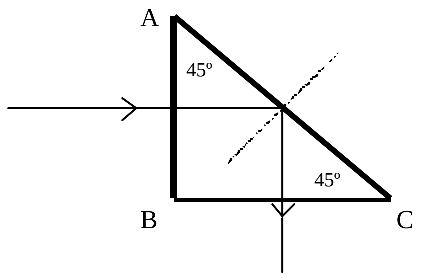
da cui

$$\gamma = 2\alpha .$$

Si osserva cioè che la deviazione totale è sempre doppia dell'angolo α ed è indipendente dall'angolo di incidenza θ_A. A questo punto, se si vuole una deflessione totale $\gamma = 180°$ basta porre $\alpha = 90°$. Osserviamo che in questo modo si costruisce un sistema che riflette i raggi luminosi in direzione uguale a quella di partenza indipendentemente da quale sia questa direzione e su un principio simile si basano i catarifrangenti delle autovetture.

Esercizio 13.4

Qual è il minimo valore dell'indice di rifrazione di un prisma di 45° impiegato per deviare un fascio di luce ad angolo retto mediante riflessione totale?



Soluzione:

Il raggio entra nel prisma perpendicolarmente alla faccia AB e quindi non subisce deviazioni. Forma poi un angolo di incidenza di $45°$ con la normale alla faccia AC. Perchè il fascio venga riflesso totalmente da AC occorre che l'angolo critico sia $\theta_c < 90°$. Dopo questa riflessione totale il fascio luminoso attraversa la faccia BC senza ulteriori deformazioni ed emerge dal prisma deviato ad angolo retto rispetto al raggio incidente. Pertanto il valore minimo dell'indice di rifrazione è dato dalla condizione di riflessione totale sulla faccia AC

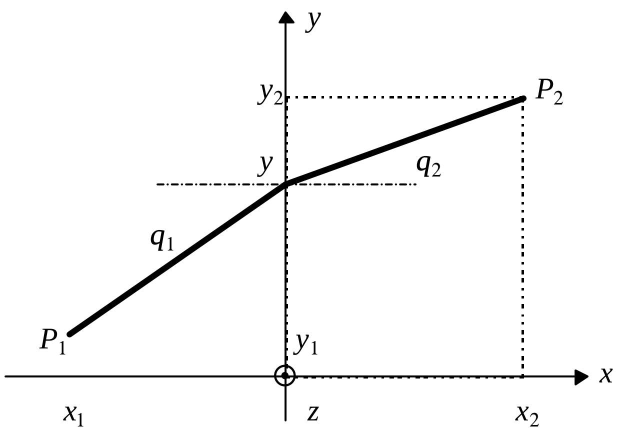
$$n_{\text{prisma}} \,\text{sen}\, 45° = n_{\text{aria}} \,\text{sen}\, 90° .$$

Tenendo conto che $n_{\text{aria}} \approx 1$ abbiamo dunque

$$n_{\text{prisma}} \approx \frac{1}{\text{sen}\, 45°} \approx 1.414 .$$

Esercizio 13.5

Si definisce cammino ottico di un raggio luminoso il prodotto della lunghezza del cammino geometrico l percorso dal raggio per l'indice di rifrazione n del mezzo (è un oggetto proporzionale al tempo che la luce impiega a fare il percorso). Si dimostra che le leggi dell'ottica geometrica si possono ricavare imponendo che il cammino ottico di un raggio per andare da un punto P_1 a un punto P_2 fissati sia stazionario, ovvero minimo o massimo (principio di Fermat). Da questo principio deriva in particolare il fatto che in un mezzo con indice di rifrazione uniforme il percorso dei raggi luminosi sia rettilineo (minimo).
Derivare la legge della rifrazione di Snell a partire dal principio di Fermat, ipotizzando che il punto P_1 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_1 e che il punto P_2 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_2.



Soluzione:

Dallo schema di figura si vede che il piano y–z (asse z supposto uscente dalla pagina) viene assunto come separatore dei due mezzi omogenei con indici di rifrazione n_1 e n_2 rispettivamente. Fissati il punto di partenza P_1 nel mezzo 1, con coordinate $(x_1,y_1,0)$, e il punto di arrivo P_2 nel mezzo 2, con coordinate $(x_2,y_2,0)$, per quanto detto nel testo, il percorso del raggio nei mezzi omogenei deve essere rettilineo e quindi le uniche due variabili rispetto a cui si può rendere stazionario il cammino ottico sono l'ordinata y e la quota z del raggio alla separazione dei due mezzi. Calcolando le lunghezze l_1 e l_2 del raggio nei due mezzi, il cammino ottico si può scrivere come

$$f(y,z) = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1\sqrt{x_1^2 + (y-y_1)^2 + z^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + (y-y_2)^2 + z^2} \;.$$

Per cercare il punto stazionario calcoliamo poi le derivate rispetto a y e z e imponiamo che siano uguali a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = n_1 \frac{y-y_1}{\sqrt{x_1^2+(y-y_1)^2+z^2}} + n_2 \frac{y-y_2}{\sqrt{x_2^2+(y-y_2)^2+z^2}} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(y,z) = n_1 \frac{z}{\sqrt{x_1^2+(y-y_1)^2+z^2}} + n_2 \frac{z}{\sqrt{x_2^2+(y-y_2)^2+z^2}} = 0 .$$

La seconda condizione implica che sia $z = 0$, ovvero che il punto di intersezione del raggio con il piano di separazione dei due mezzi sia complanare con P_1 e P_2. Inoltre è facile vedere dalla figura che nella prima equazione le quantità che moltiplicano gli indici di rifrazione corrispondono rispettivamente ai seni degli angoli θ_1 e $-\theta_2$, da cui

$$n_1 \mathrm{sen}\theta_1 - n_2 \mathrm{sen}\theta_2 = 0,$$

che è proprio la legge di Snell della rifrazione.

Esercizi proposti

Esercizio 13.6

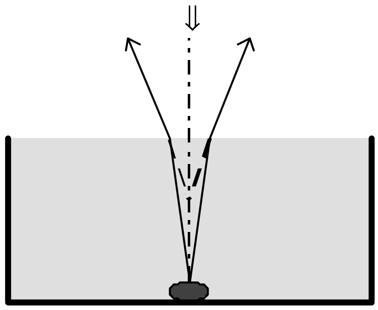
Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.1. Si è dimostrato che il raggio entrante e il raggio uscente dalla lastra di indice di rifrazione n_2 sono paralleli. Determinarne la distanza d in funzione dello spessore t della lastra e dell'angolo di incidenza θ_1, nell'ipotesi che quest'ultimo sia piccolo.

Risultato:

$$d \approx t\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\theta_1$$

Esercizio 13.7

Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.2 e riportato qui a fianco, con un osservatore posto nel punto indicato dal simbolo $\Downarrow$. A causa della rifrazione l'osservatore vede il corpo luminoso a una profondità inferiore a quella reale. Determinare tale profondità nelle stesse ipotesi dell'esercizio 13.2 (profondità del recipiente = 100cm, $n_{acqua} \approx 4/3$, $n_{aria} \approx 1$).



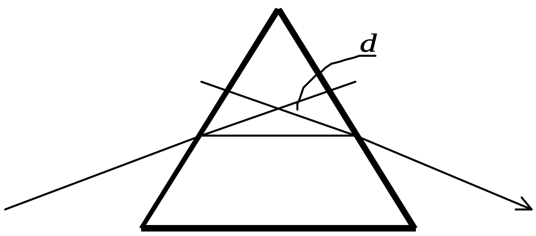
Suggerimento: l'immagine apparente (virtuale) dell'oggetto luminoso si deve trovare nel punto di incontro dei prolungamenti in acqua (tratteggiati in figura) dei due raggi uscenti in aria. Infatti l'osservatore percepisce la profondità di un punto tramite l'angolo formato dai due raggi provenienti dal punto e incidenti sui suoi occhi e tale angolo deve essere piccolo. Verificare che se l'angolo è piccolo la profondità apparente non dipende dall'angolo stesso.

Risultato:

$$h_{\text{apparente}} = h_{\text{reale}} \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 100\text{cm} \times 0.75 = 75\text{cm}\,.$$

Esercizio 13.8

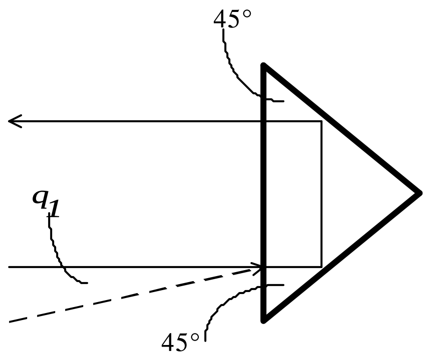
Si consideri un raggio luminoso che attraversa un prisma triangolare equilatero, di indice di rifrazione $n = 1.5$, parallelamente a una faccia, così come indicato nella figura qui a fianco. Determinare l'angolo di deflessione d tra il raggio entrante e il raggio uscente dal prisma.



Risultato: $d \approx 37.18°$

Esercizio 13.9

Si consideri un prisma a $45°$ di indice di rifrazione $n = 1.5$ e utilizzato in riflessione totale, come indicato nello schema qui a fianco. Determinare l'angolo critico q_c e verificare che la condizione di riflessione totale è verificata per il raggio disegnato in figura come linea intera. Se ora si fa incidere un raggio non perpendicolare ma con un angolo di incidenza q_1 (linea tratteggiata), determinare l'angolo di incidenza massimo $q_{1\max}$ per cui si ha ancora riflessione totale e verificare che quando questa è soddisfatta il raggio uscente è sempre parallelo a quello entrante.



Risultato:

$$q_c = \operatorname{arcsen}\frac{1}{n} \approx 41.81°$$

$$q_{1\max} = \operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen}(45° - q_c)}{\operatorname{sen} q_c} \approx 4.79°$$

Esercizio 13.10

Utilizzando il principio di Fermat, introdotto nell'esercizio 13.5, derivare la legge della riflessione, ipotizzando che un raggio luminoso parta da un punto P_1 e arrivi a un punto P_1', entrambi nel mezzo con indice di rifrazione n_1, passando per un punto della superficie riflettente di coordinate da determinarsi.

Esercizi svolti

Esercizio 14.1

La lunghezza d'onda in aria della luce gialla del sodio è $l_0 = 589\text{nm}$. Determinare:
a) la sua frequenza *f*;
b) la sua lunghezza d'onda l in un vetro il cui indice di rifrazione è $n = 1.52$;
c) la sua velocità *v* in questo vetro.

Soluzione:

a) La frequenza è data dall'espressione

$$f = \frac{c}{l_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}}{5.89 \cdot 10^{-7}\text{m}} \approx 5.09 \cdot 10^{14} \text{ Hz} .$$

b) La lunghezza d'onda in un mezzo è legata all'indice di rifrazione del mezzo stesso dalla relazione

$$l = \frac{l_0}{n} = \frac{589\text{nm}}{1.52} = 387.5\text{nm} .$$

c) La velocità nel vetro si ricava infine utilizzando la definizione di indice di rifrazione

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}}{1.52} \approx 1.97 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} .$$

Osserviamo che sia la lunghezza d'onda che la velocità sono riscalate dello stesso fattore, che è l'indice di rifrazione. I valori di entrambe queste grandezze sono inferiori ai corrispondenti valori nel vuoto.

Esercizio 14.2

Uno schermo dista $D = 1.20\text{m}$ da una sorgente a doppia fenditura. La distanza tra le due fenditure è di $d = 0.03\text{mm}$. La frangia chiara del secondo ordine si trova a $y_2 = 4.5\text{cm}$ dalla linea centrale. Determinare:
a) la lunghezza d'onda della luce;
b) la distanza tra frange chiare adiacenti.

Soluzione:

a) Poiché la distanza del massimo di ordine *m* dalla linea centrale è data, nell'ipotesi $D >> y_m$ (che risulta verificata), dalla relazione

$$y_m = m\, l \frac{D}{d} ,$$

si ottiene, per la lunghezza d'onda, nel caso $m = 2$

$$l = \frac{y_m d}{mD} = \frac{y_2 d}{2D} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\text{m } 4.5 \cdot 10^{-2}\text{m}}{2 \cdot 1.2\text{m}} = 562.5\text{nm} .$$

b) Secondo la relazione introdotta al punto (a) le frange risultano equispaziate, per cui è facile vedere che la distanza tra frange adiacenti deve essere

$$\Delta y = \frac{y_m}{m} = \frac{y_2}{2} = 2.25\text{cm}\ .$$

Esercizio 14.3

Una sorgente emette luce di due lunghezze d'onda nella regione del visibile, date da $\lambda = 430\text{nm}$ e $\lambda' = 510\text{nm}$. La sorgente è usata in un esperimento di interferenza da doppia fenditura in cui le fenditure distano $d = 0.025\text{mm}$ e lo schermo è posto a $D = 1.50\text{m}$. Trovare la separazione tra le frange chiare del terzo ordine corrispondenti alle due lunghezze d'onda.

Soluzione:

I valori delle posizioni delle frange chiare del terzo ordine per le due lunghezze d'onda sono dati da

$$y_3 = 3\lambda\frac{D}{d} = 7.74\text{cm}$$

$$y_3' = 3\lambda'\frac{D}{d} = 9.18\text{cm}\ .$$

Quindi la separazione tra le frange risulta essere

$$\Delta y = y_3' - y_3 = 3(\lambda' - \lambda)\frac{D}{d} = 1.44\text{cm}\ .$$

Esercizio 14.4

Calcolare lo spessore minimo della pellicola di una bolla di sapone ($n = 1.46$) tale che si abbia interferenza costruttiva nella luce riflessa quando la pellicola è illuminata con luce di lunghezza d'onda nel vuoto pari a $\lambda_0 = 600\text{nm}$.

Soluzione:

La condizione di intereferenza costruttiva è data dalla relazione

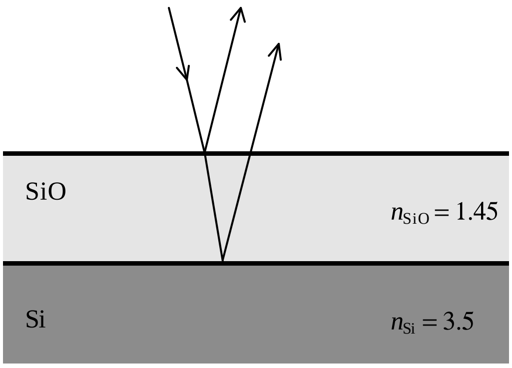
$$2ns = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda_0\ ,$$

dove s è lo spessore della pellicola e m un numero naturale qualsiasi. Lo spessore minimo si ha ovviamente per $m = 0$, quindi

$$s = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{600\text{nm}}{4 \cdot 1.46} \approx 102.7\text{nm}\ .$$

Esercizio 14.5

Una cella solare di silicio ($n_{Si} = 3.5$) è ricoperta da un sottile strato di monossido di silicio ($n_{SiO} = 1.45$). Determinare lo spessore minimo dello strato in grado di produrre riflessione minima ad una lunghezza d'onda di $\lambda_0 = 550$nm, cioè al centro dello spettro solare.



Soluzione:
La luce riflessa è minima quando i due raggi soddisfano la condizione di interferenza distruttiva. Occorre però notare che la situazione è differente rispetto al caso di una lamina immersa in aria. Infatti entrambi i raggi subiscono uno sfasamento di π, in quanto vengono riflessi da un mezzo con indice di rifrazione maggiore di quello del mezzo in cui si propagano. In questo caso la condizione di interferenza distruttiva è dunque

$$2s = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \,,$$

dove s è lo spessore dello strato, m un generico numero naturale e λ la lunghezza d'onda della luce nell'ossido. Il minimo spessore si ha per $m = 0$, da cui

$$s = \frac{\lambda}{4}$$

(si parla tecnicamente di strati antiriflesso a lambda-quarti). Conoscendo la lunghezza d'onda λ_0 nel vuoto e l'indice di rifrazione dell'ossido possiamo infine scrivere

$$s = \frac{\lambda_0}{4n_{SiO}} = \frac{550\text{nm}}{4 \cdot 1.45} \approx 94.8\text{nm}$$

Esercizio 14.6

Una fenditura di larghezza $b = 0.1$mm viene illuminata da raggi paralleli di lunghezza d'onda $\lambda = 600$nm e si osservano le bande di diffrazione prodotte su uno schermo distante $D = 40$cm dalla fenditura. Quanto dista la terza banda scura dalla banda luminosa centrale?

Soluzione:
Per una fenditura singola la m-esima banda scura viene individuata dalla relazione b sen$\theta = m\lambda$, per cui

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{b} = \frac{3 \cdot 6 \times 10^{-7}\text{m}}{10^{-4}\text{m}} = 0.018\,.$$

Poichè θ è piccolo è possibile approssimare la funzione senθ con tg$\theta = y_m/D$, dove y_m è la distanza tra il la m-esima banda scura ed il centro dello schermo e D è la distanza tra la fenditura e lo schermo. Si ottiene:

$$y_3 = D\,tg\theta \approx 40\text{cm} \cdot 0.018 = 0.72\text{cm}$$

Esercizio 14.7

In una figura di diffrazione la distanza fra il primo minimo di destra e il primo minimo di sinistra è di 5.2mm. Lo schermo sul quale si forma la figura dista $D = 80\text{cm}$ dalla fenditura e la lunghezza d'onda della luce è $\lambda = 546\text{nm}$. Calcolare la larghezza della fenditura.

Soluzione:

La distanza della prima banda scura dal centro dello schermo è

$$y_1 = \frac{5.2\text{mm}}{2} = 2.6\text{mm}$$

(i minimi laterali sono simmetrici).

Poiché $y_1 << D$ si considerano angoli piccoli ed è quindi possibile scrivere

$$\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta = \frac{y_1}{D} = \frac{2.6\times10^{-3}\text{m}}{80\times10^{-2}\text{m}} = 3.25\times10^{-3},$$

dove θ è come al solito l'angolo formato dai raggi interferenti con la normale allo schermo. Dalla legge della diffrazione è ora possibile ricavare la larghezza *b* della fenditura nel seguente modo:

$$b = \frac{\lambda}{\text{sen}\,\theta} = \frac{546\times10^{-9}\text{m}}{3.25\times10^{-3}} = 0.168\text{mm}\,.$$

Esercizi proposti

Esercizio 14.8

L'esperimento di Young (interferenza da due fenditure) viene compiuto con la luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 514.5\text{nm}$ fornita da un laser ad argon. Se la distanza tra le due fenditure è $d = 1\text{mm}$, determinare la separazione Δy tra due frange successive su uno schermo posto a distanza $D = 3\text{m}$ dalle fenditure. Questa separazione dipende dal numero d'ordine delle frange?

Risultato:

$\Delta y \approx 1.54\text{mm}$

La spaziatura dipende a rigore dal numero d'ordine della frangia, ma è circa costante per le frange più vicine al centro dello schermo.

Esercizio 14.9

Un fascio di luce monocromatica con lunghezza d'onda (nel vuoto) $\lambda_0 = 500\text{nm}$ incide normalmente sopra una pellicola di spessore $d = 1\mu\text{m}$ ed indice di rifrazione $n = 1.4$. Una parte della luce che entra nella pellicola viene poi riflessa dalla seconda superficie. Si calcoli:

a) il numero *N* di lunghezze d'onda contenute nel cammino percorso dalla luce nella pellicola, dal punto di incidenza al punto di uscita;

b) lo sfasamento ϕ tra le onde che entrano e quelle che escono.

Data ultima revisione 30/06/00
Autore: Marco Pretti

Risultato:
a) $N = 5.6$
b) $f = 1.2p$

Esercizio 14.10

La superficie di una lastra di vetro è resa invisibile per la luce gialla del mercurio (lunghezza d'onda nel vuoto $l_0 = 578$nm) in condizioni di incidenza normale, facendo depositare sulla superficie stessa una sottile pellicola avente indice di rifrazione $n = 1.55$. L'indice di rifrazione del vetro vale circa 1.5. Si calcoli il minimo spessore s che deve avere la pellicola.

Risultato:
$s \approx 0.186\mu$m

Esercizio 14.11

Si consideri un esperimento di diffrazione da una fenditura investita da luce bianca incidente normalmente. Si determini la lunghezza d'onda l' della componente il cui terzo minimo di intensità coincide con il secondo minimo della luce rossa di lunghezza d'onda $l = 650$nm.

Risultato:
$l' \approx 433$nm

VOL. 3 – Elettromagnetismo - CAP. 1
La carica elettrica e la legge di Coulomb

1) *Si hanno quattro sfere conduttrici identiche, una delle quali ha carica Q mentre le altre sono scariche. Potendo mettere a contatto le sfere solo due alla volta, come devi operare per distribuire la carica in parti eguali tra le sfere?*

2) *Una sfera conduttrice A possiede una carica Q; due sfere identiche alla prima (B,C) sono messe a contatto con la sfera A: prima B con A, poi C con A. La terza sfera viene tenuta sempre lontana dalle due che si mettono, volta a volta, in contatto. Determina la carica che si trova alla fine su ciascuna sfera.*

3) *Ripetendo le stesse operazioni descritte nell'esercizio precedente un gran numero di volte, quali cariche si troveranno alla fine sulle tre sfere?*

4) *Determina quanti elettroni occorrono per avere una carica Q = -1,00 C.*

5) *In un fulmine può scorrere una quantità di carica di 20 C. Quante cariche elementari partecipano alla scarica?*

6) *Calcola la carica totale di un nucleo di uranio, sapendo che questo è costituito da 92 protoni e 146 neutroni.*

7) *Su una sferetta conduttrice (per esempio il rame) di 1 cm di raggio, non si riesce sperimentalmente ad accumulare una carica superiore a un valore massimo dell'ordine di 10 nC. Dopo aver trovato i dati necessari nelle opportune tabelle, calcola quale frazione di elettroni in tale condizione, deve essere tolta alla sferetta nell'ipotesi che essa:*

a) sia piena;
b) sia cava con uno spessore 0,5 mm.

8) *Nella stessa situazione dell'esercizio precedente, facendo riferimento ai soli elettroni di conduzione, pensi che sia possibile rimuovere «soltanto» un elettrone di conduzione per ogni miliardo di elettroni di conduzione presenti? (Tieni presente che per ogni atomo di rame c'è un solo elettrone di conduzione.)*

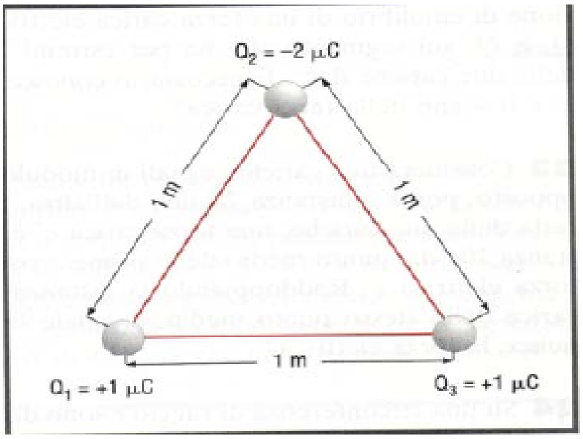
9) *Durante un temporale, le correnti d'aria provocano elettrizzazione per strofinio delle varie parti costituenti una nube. Supponi che a un certo istante la nube abbia una carica complessiva di 12 C, che la pioggia che cade trasporti via una carica di - 0,3 C/min e non ci siano altri scambi di carica con l'esterno della nube. Dopo 10 minuti si valuta che la base della nube abbia complessivamente una carica di -10 C. Che carica si trova nello stesso istante nella restante parte della nube?*

10) *Con quale forza si respingono due cariche, rispettivamente di 31,4 μC e 44,3 μC, poste nel vuoto alla distanza di 4,0 m una dall'altra?*

11) *A quale distanza una dall'altra bisogna porre nel vuoto due cariche ($Q_1 = 3 \times 10^{-5}$ C e $Q_2 = 4 \times 10^{-5}$ C) perché esse esercitino una sull'altra la forza di 200 N?*

12) *Due cariche elettriche, poste nel vuoto alla distanza di 10 cm una dall'altra, si respingono con una forza di 1,8 N. Quali sono i valori delle due cariche, se una è il doppio dell'altra?*

13) *Traccia con un righello i vettori forza che agiscono sulle tre cariche rappresentate nella figura seguente (dopo aver fissato una scala opportuna per la rappresentazione dei vettori).*



14) *Calcola la forza risultante che agisce sulla carica Q_2 dell'esercizio precedente.*

15) *A che distanza un protone potrebbe tenere sollevato un elettrone contro la forza di gravità?*

16) *Scambiando i ruoli delle due particelle dell'esercizio precedente si ottiene lo stesso risultato?*

17) *Nel modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno l'elettrone ruota attorno al nucleo alla distanza di circa 4 x 10-2 nm. Qual è la frequenza della rotazione?*

18) *Due sferette metalliche di massa 3,20 g sono appese, mediante due fili isolanti lunghi 20,0 cm, a uno stesso punto. Tenendo separate le sferette si pone una carica Q su una delle due che poi si lascia libera. La sferetta tocca l'altra e, a equilibrio raggiunto, i fili formano un angolo di 12,0°. Calcola il valore della carica Q.*

19) *Due cariche puntiformi eguali di carica $q = 5$ μC sono fissate agli estremi di un segmento AB di lunghezza pari a 12 cm. Una particella di massa $m = 9$ mg e carica $q' = -4$ μC è vincolata al piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio M. A che distanza da M deve ruotare la carica q' se la frequenza di rotazione è $f = 1$ kHz ?*

20) *Tre cariche eguali di valore 1,2 μC sono poste ai vertici di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano entrambi 5,0 cm. Calcola la forza totale che agisce sulla carica posta nel vertice dell'angolo retto.*

21) *Tre cariche di egual segno sono disposte ai vertici di un triangolo rettangolo. Mostra che se le cariche poste ai vertici degli angoli acuti sono proporzionali alle lunghezze dei cateti adiacenti agli stessi angoli, allora la forza sulla terza carica è diretta perpendicolarmente all'ipotenusa.*

22) *Due cariche $Q_1 = 4$ μC e $Q_2 = 16$ μC sono poste alla distanza di 9 cm l'una dall'altra. Determina la posizione di equilibrio di una terza carica elettrica posta tra Q_1 e Q_2 sul segmento che ha per estremi le posizioni delle due cariche date. È necessario conoscere il modulo e il segno della terza carica?*

23) *Considera due cariche, eguali in modulo e di segno opposto, poste a distanza 2a una dall'altra. Sulla stessa retta delle due cariche, una terza carica q' è posta a distanza 10a dal punto medio delle prime e risente di una forza elettrica F. Raddoppiandola distanza della terza carica dallo stesso punto medio, di quale fattore diminuisce la forza elettrica?*

24) *Su una circonferenza di raggio r sono disposte n cariche positive eguali e n cariche negative di modulo q eguale alle altre; le cariche sono equidistanti e alternate in segno. Calcola la forza che le cariche esercitano su un'ulteriore carica q posta al centro della circonferenza, per ogni n.*

25) *Una sfera metallica A, che ha una carica pari a 76,0 μC, viene messa a contatto con una sfera identica B inizialmente scarica, che poi viene posta alla distanza di 2,00 m. Una terza sfera C – scarica e identica alle precedenti – è messa a contatto con la prima e successivamente allontanata alla distanza di 1,50 m dalla prima. Al termine delle operazioni le tre sfere risultano allineate. Determina la forza che agisce su ciascuna sfera.*

26) *Due cariche $Q_1 = 2{,}0 \times 10^{-10}$ C e $Q_2 = -4{,}0 \times 10^{-10}$ C si trovano alla distanza di $1{,}5 \times 10^{-5}$ m e sono immerse in acqua. Determina la forza agente su ciascuna carica.*

27) *La forza esercitata su una carica $Q_1 = 0{,}95 \times 10^{-15}$ C quando una seconda carica $Q_2 = 3{,}25 \times 10^{-14}$ C è posta a $0{,}84 \times 10^{-3}$ m di distanza, risulta di $16{,}4 \times 10^{-15}$ N. Qual è il valore della costante dielettrica relativa del mezzo in cui sono immerse le cariche?*

28) *Considera due cariche puntiformi $Q_1 = q$ e $Q_2 = -4q$, poste a distanza d una dall'altra e immerse in un liquido di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3{,}5$. Tenendo conto solo della forza elettrostatica, esiste un punto di equilibrio per una terza carica Q_3 ?*

29) *In un ambiente vuoto e in assenza di gravità, due sferette conduttrici (A e B) poste a distanza a = 80 cm sono collegate con un sottile filo conduttore. Si avvicina un corpo carico negativamente alla sferetta A e si osserva (con un'opportuna strumentazione) un passaggio di cariche lungo il filo per un totale di 3,5 μC, per un tempo brevissimo, dopo il quale il filo viene staccato e il corpo carico allontanato. Con quale accelerazione inizia a muoversi la sferetta B, se la sua massa è di 60 g?*

30) *Due sferette uguali, poste a una distanza tra i centri molto maggiore del loro raggio e caricate rispettivamente con una carica q e –q, si attraggono con una forza F. Le sferette si comportano come cariche puntiformi: infatti, dimezzando la distanza tra i cerchi la forza aumenta di un fattore 4, finché la precedente condizione rimane verificata. Quando la distanza è confrontabile con il raggio delle sferette, la forza è maggiore o minore di quella di due cariche puntiformi eguali? Perché?*

31) *Avvicinando un corpo carico positivamente a una sfera di materiale isolante e scarica si osserva che un quarto della sua superficie si carica negativamente e che la carica totale negativa è pari a q = 12 pC. Quanto vale la carica positiva che si trova sul resto della superficie della sfera?*

32) *A un sottile cilindro isolante, la cui altezza h è molto maggiore del diametro di base d, viene avvicinata una carica positiva Q; il cilindro è sospeso orizzontalmente e la carica è posta lungo l'asse del cilindro a una distanza h/2 da una base. Il cilindro è allora attratto dalla carica con forza F. Ipotizzando che le cariche di polarizzazione siano localizzate solo sulle basi del cilindro, determina la carica di polarizzazione.*

33) *Due cariche del valore di 40,0 μC sono poste agli estremi di una molla orizzontale di materiale plastico, di costante elastica pari a 540 N/m, la cui lunghezza d'equilibrio è così di 75,0 cm. L'apparato è immerso quindi in una bacinella, che viene lentamente riempita con un olio isolante di costante dielettrica relativa pari a 2,20. Determinala nuova lunghezza della molla.*

34) *Due sferette conduttrici eguali, poste a contatto, vengono caricate con una carica complessiva $Q_0 > 0$ e successivamente separate finché alla distanza d = 30,0 cm la forza necessaria per mantenerle ferme (nel vuoto) è in modulo $F_0 = 5{,}30 \times 10^{-2}$ N. Supponi che le sferette possano essere trattate con cariche puntiformi.*

a) quanto vale la carica Q_0?

b) Mostra che, spostando da una sferetta all'altra una qualunque frazione della carica Q presente su ciascuna di esse, la forza necessaria a tenere ferme le sfere in ogni caso diminuisce.

c) Mantenendo eguale a Q_0 la carica totale sulle sferette, è possibile che la forza necessaria per mantenerle ferme abbia intensità maggiore di F_0?

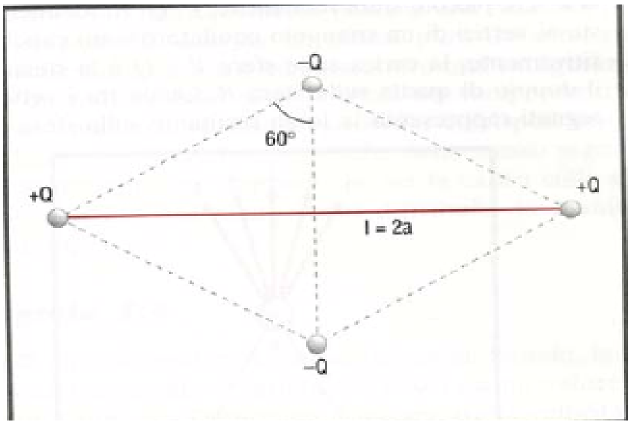
35) *Una goccia di pioggia (di massa m = 1,8 mg) durante un temporale acquista una carica di -0,45 nC. A un certo istante, la goccia si divide in due parti, l'una di raggio doppio rispetto all'altra. Fai l'ipotesi che la carica si divida in modo proporzionale al raggio e determina:*

a) la carica delle due parti;

b) la forza elettrica che agisce su ciascuna delle due parti quando si trovano alla distanza di 0,50 cm una dall'altra;

c) l'accelerazione (in modulo, direzione e verso) su ciascuna delle due parti alla distanza data sopra, nell'ipotesi che si trovino alla stessa altezza del suolo.

36) *Una barretta isolante di lunghezza 2a, avente ai suoi estremi due cariche puntiformi e eguali Q, è posta su un piano orizzontale. La sbarretta può ruotare attorno a un asse verticale passante per il suo punto centrale. Sullo stesso piano, da parti opposte rispetto alla sbarretta, sono collocate altre due cariche isolate, di valore – Q, in modo da formare un triangolo equilatero con ciascuna delle precedenti, come mostrato nella figura.*
a) Determina le forze necessarie (come reazioni vincolari) per mantenere le cariche nella posizione data.
b) Determina il momento meccanico che serve a mantenere la sbarretta nella posizione data.
Le due cariche negative vengono ora fissate nelle rispettive posizioni
c) Se la sbarretta è leggermente ruotata e poi lasciata libera, in quale posizione di equilibrio tende a disporsi?
d) Raggiunta questa posizione di equilibrio, che forza occorre per mantenere ferma ciascuna delle cariche isolate?

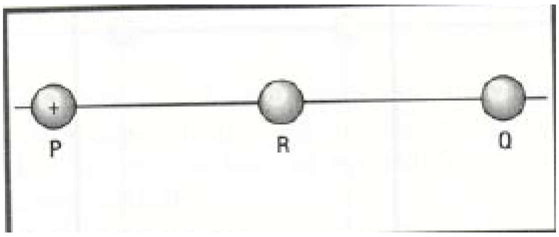


37) *Infinite cariche, tutte eguali in modulo a 1 nC, ma alternate in segno (…,+q, - q, +q, - q,…), sono fissate lungo una retta a distanza d = 5 cm una dall'altra.*
a) Prova a stimare, con l'aiuto di una calcolatrice, la forza necessaria a mantenere ferma un' ulteriore carica q (eguale alle altre), nel punto medio tra due cariche consecutive.
b) Se si volesse verificare sperimentalmente la stima fatta entro lo 0,5%, quante cariche sarebbe sufficiente considerare?
(Suggerimento: riporta in un grafico, in funzione di n, i valori della forza che si ottiene considerando solo le n cariche più vicine da ogni lato)

Quesiti

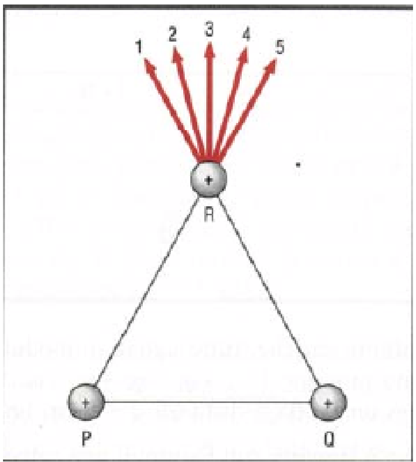
Scegli la risposta corretta.

38) Si hanno tre piccole sfere metalliche *P*, *Q*, *R*, identiche. La sfera *P* è caricata positivamente, la sfera *Q* viene posta a contatto con la precedente e poi fissata alla distanza di 0,20 m da *P*. La sfera *R*, dopo aver toccato la sfera *Q*, è posta a metà sulla retta congiungente le altre due. Quale sarà il rapporto tra la forza esercitata sulla sfera *R* della sfera *P* e la forza esercitata su *R* da *Q*?



A) 4.
B) 2.
C) 1.
D) ½.
E) ¼.

39) Tre piccole sfere metalliche, *P*, *Q*, *R*, identiche, poste ai vertici di un triangolo equilatero sono cariche positivamente; la carica sulle sfere *P* e *Q* è la stessa ed è il doppio di quella sulla sfera *R*. Quale tra i vettori disegnati rappresenta la forza risultante sulla sfera *R*?

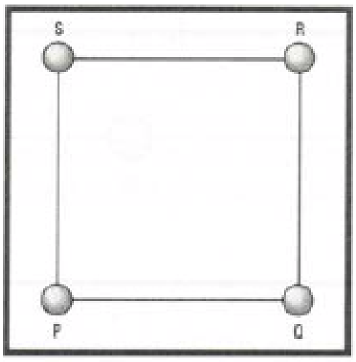


A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

40) Ai vertici *P*, *Q*, *R*, *S* del quadrato sono collocate quattro sfere metalliche cariche, identiche. La tabella sottostante riporta tre possibili distribuzioni della carica (in unità arbitrarie) sulle sfere.

	P	*Q*	*R*	*S*
a	−2	+1	+1	+1
b	+2	−1	−2	−1
c	+1	+2	−1	+2

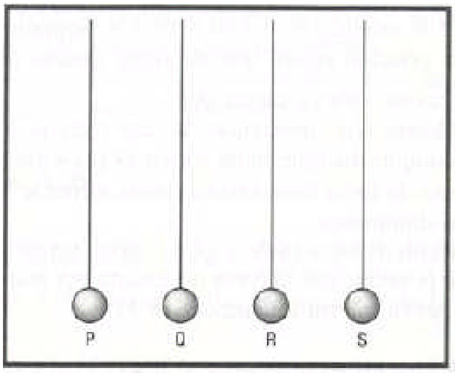
In quale caso la risultante delle forze elettrostatiche sulla sfera posta in *R* è nulla?



A) Solo a.
B) Solo b.
C) Solo c.
D) In tutti i tre casi.
E) In nessun caso.

41) Quattro sfere metalliche identiche *P*, *Q*, *R*, *S* sono sospese a fili isolanti (vedi figura che segue). Vengono avvicinare a due a due senza contatto e si osserva che *P* e *R* si respingono, *Q* e *R* si attraggono, mentre tra *Q* e *S* non si manifesta alcuna interazione elettrostatica. Quale stato elettrico delle sfere giustifica quanto è stato osservato?

A) *P* positivo; *Q* negativo; *R* positivo; *S* negativo.
B) *P* positivo; *Q* positivo; *R* positivo; *S* neutro.
C) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* positivo.
D) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* negativo.
E) *P* positivo; *Q* neutro; *R* positivo; *S* neutro.



42) Il limite della funzione $F(r)$, che esprime matematicamente l'andamento della forza coulumbiana tra due cariche Q_0 e Q_1, collocate nel vuoto a distanza r, per $r \to +\infty$ *è:*

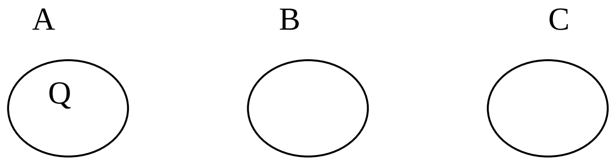
A) 0.
B) 1.
C) $k_0\, Q_0\, Q_1$.
D) $+\infty$.
E) Non esiste.

Soluzioni

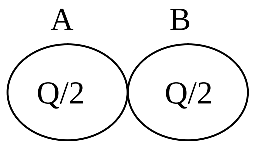
1)

A è la sfera carica mentre B,C e D sono scariche. La risposta è:
A con B;   A con C   e B con D
Ad esempio si abbia A carica con un valore simbolico di +8, mettendola in contatto con B si ha che A e B ora avranno carica +4. Ora mettiamo in contatto A con C e B con D ed avremo cos' tutte e quattro le sfere cariche con valore +2.

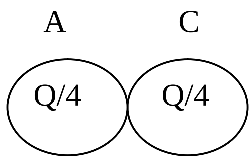
2)



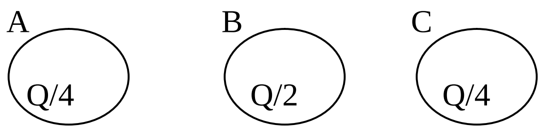
Mettiamo in contatto A e B



ed ora A con C



ed alle fine abbiamo quindi la seguente situazione



3)

La situazione finale è ovviamente di equipartizione: $Q_A = Q_B = Q_C = Q/3$

4)

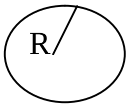
Q = - 1.00 C
Il Coulomb è definito come quella carica formata da un aggregato di $6 \cdot 10^{18}$ cariche elementari ossia di elettroni (con due cifre decimale è $6.25 \cdot 10^{18}$).

5)
$N = 20 \cdot 6.25 \cdot 10^{18} = 125 \cdot 10^{18}$ elettroni $= 1.2 \cdot 10^{20}$ elettroni

6)

Carica nucleo Uranio = n° cariche del nucleo/n° di cariche in 1 C = $92/(6.25 \cdot 10^{8}) = 1.47 \cdot 10^{-17}$ C

7)

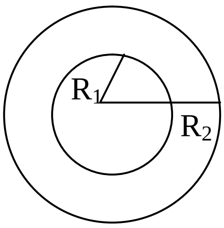


$R = 0.01$ m $\rho = 8960$ kg/m^3 $C_{max} = 10$ nC

a)

Sfera piena: occorre determinare il n° di elettroni presenti in essa
Determiniamo dapprima il n° di atomi presenti nella sfera:
n° atomi = massa della sfera / massa di un atomo = $\rho V/m_{Cu} = 8960(4/3)\,\pi\,(0.01^3 / (64\cdot 1.66\cdot 10^{-27}) =$
$= 3.53\cdot 10^{23}$ atomi
Ora considerando che in un atomo di rame di sono 29 elettroni (onfatti il suo numero atomico è 29) si ha n° elettroni nella sfera di rame = $3.53\cdot 10^{23}\cdot 29 = 102\cdot 10^{23}$ elettroni
In 10 n ci sono $10\cdot 10^{-9}\cdot 6.25\cdot 10^{8} = 62.5\cdot 10^{9}$ elettroni
Dunque la frazione richiesta è $f = 62.5\cdot 10^{9}/(102\cdot 10^{3}) = 6\cdot 10^{-15}$

b)



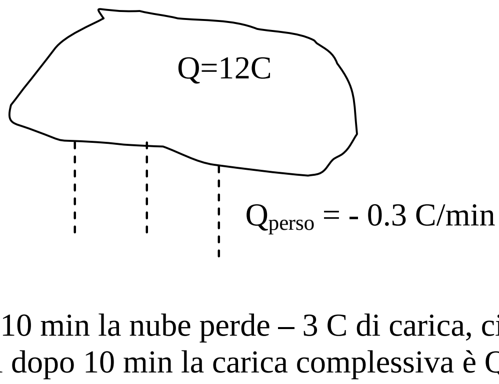
$V = (4/3)\,\pi\,R_1^3 - (4/3)\,\pi\,R_2^3 = (4/3)\,\pi\,(0.01)^3 - (4/3)\,\pi\,(0.0095)^3$
$= 42\cdot 10^{-7} - 36\cdot 10^{-7} = 6\cdot 10^{-7}$ m^3

$m = \rho V = 8960\cdot 6\cdot 10^{-7} = 0.00537$ kg $= 5.38$ g
n° atomi $= 0.005376/(64\cdot 1.66\cdot 10^{-27}) = 51\cdot 10^{21}$
n° elettroni $= 51\cdot 10^{21}\cdot 29 = 1480\cdot 10^{21}$ elettroni
$f = 62.5\cdot 10^{9}/(1480\cdot 10^{21}) = 4\cdot 10^{-14}$

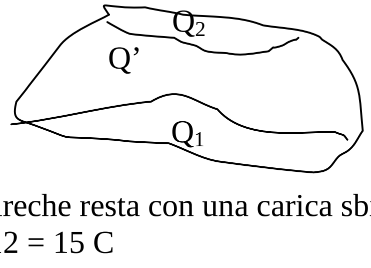
8)

n° elettroni di conduzione = n° atomi = $3\cdot 10^{23}$
Rimuovendo “soltanto” un elettrone per ogni 10^9 elettroni si avrebbe un numero di cariche di
$n = 3.5\cdot 10^{23}/10^{9} = 3.5\cdot 10^{14}$ cariche
mentr il n° max di cariche è $62\cdot 10^{9}$ quindi la risposta è negativa.

9)

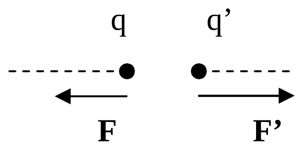


Dopo 10 min: $Q_1 = -10$C
$Q' = Q_1 + Q_2$



Dopo 10 min la nube perde – 3 C di carica, ciò vuol direche resta con una carica sbilanciata di +3 C, quindi dopo 10 min la carica complessiva è Q’ = 3 + 12 = 15 C
$Q_2 = Q' - Q_1 = 15 - (-10) = 25$ C

10)



In modulo le due forze sono uguali: $F = F'$

La legge di Coulomb è:

$F = k\, q\, q'/R^2 = 9\cdot10^9\ 31.4\cdot10^{-6}\cdot44.3\cdot10^{-6} / 4^2 = 0.78$ N

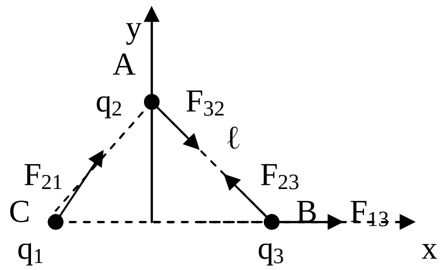
11)

$R = (9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-5}\cdot4\cdot10^{-5}/200)^{1/2} = 0.23$ m

12)

$F = k\, q\cdot2q / R^2$ da cui $q = (1.8\cdot0.1^2/2\cdot9\cdot10^9)^{1/2} = 10^{-6}$ C

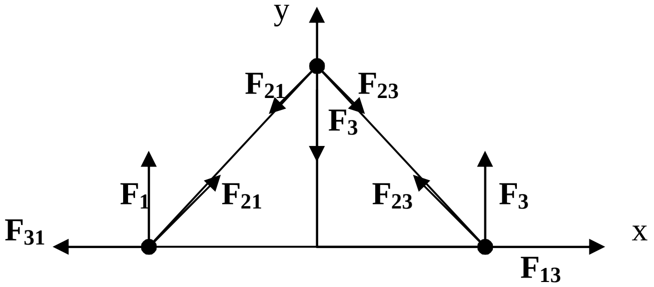
13)



Il triangolo è equilatero: angoli di 60°
Su ogni carica agiscono due forze

Ribadiamo che i pedici indicano i numeri delle due cariche che danno origine alla forza di Coulomb, ad es. F_{21} significa: la forza che la carica 1 sente a causa della carica 2, quindi il secondo numero indica il punto di applicazione del vettore **F**.

$\mathbf{F_{13}} = k\, q_1q_2/\ \ell^2 = 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\cdot10^{-6} / 1^2 = 9\cdot10^{-3}\ \mathbf{i}$ N
$\mathbf{F_{23}} = k\, q_2q_3 / \ell^2\ \ \mathbf{u_{AB}} = 9\cdot10^9\ (-2\cdot10^{-16})\cdot10^{-6}/1^2 = 18\cdot10^{-3}\ \mathbf{u_{AB}}$ N
Adesso occorre valutare il versore $\mathbf{u_{AB}}$
$\mathbf{u_{AB}} = \mathbf{AB}/AB = ((AB)_x\ \mathbf{i} + (AB)_y\ \mathbf{j}) / 1 = -0.5\ \mathbf{i} + (1\cdot\sin60°)\ \mathbf{j} = -0.5\ \mathbf{i} + 0.866\ \mathbf{j}$
$\mathbf{F_{23}} = -9\cdot10^{-3}\ \mathbf{i} + 15.6\cdot10^{-3}\ \mathbf{j}$
$F_{23} = ((9\cdot10^{-3})^2 + (15.6\cdot10^{-3})^2)^{1/2} = 18\cdot10^{-3}$ N
Per simmetria è $F_{23} = F_{32} = F_{12} = F_{21}$
$F_2 = (F_{32}^2 + F_{12}^2 + 2F_{32}F_{12}\cdot\cos\theta)^{1/2} =$
$((18\cdot10^{-3})^2 + (18\cdot10^{-3})^2 + 2\cdot18\cdot10^{-3}\cdot18\cdot10^{-3}\cdot\cos60°))^{1/2} = 31\cdot10^{-3}$ N
ed è diretta ovviamente lungo y.
Facciamo uno schizzo conclusivo:

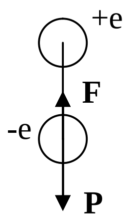


Quindi concludendo si può affermare che le forze risultanti su q_1 e q_3 sono dirette lungo y.

14)

Come già visto, la forza risultante su q_2 è $31 \cdot 10^{-3}$ N

15)



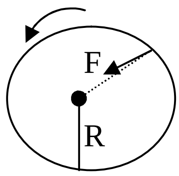
$F = k\, e^2/r^2 = P \qquad P = m_e\, g = 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 9.8 = 89.3 \cdot 10^{-31}$ N

$r = (k\, e^2/P)^{1/2} = (9 \cdot 10^9\, (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / (89.3 \cdot 10^{-31}))^{1/2} = 5.1$ m

16)

Ovviamente NO.
Ora i dati sono: $P = m_p\, g = 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 9.8 = 16.37 \cdot 10^{-27}$ N
$r = (9 \cdot 10^9\, (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / (16.37 \cdot 10^{-27}))^{1/2} = 0.12$ m

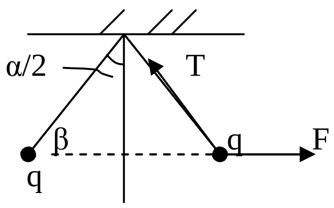
17)



$F = m_e\, \omega^2 R = k\, q_1 q_2 / R^2 \qquad (q_1 = q_2 = e)$

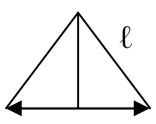
$\omega = (ke^2/m_e R^3)^{1/2} = \ldots = 6.3 \cdot 10^{16}$ rad/s
$\nu = \omega/2\pi = 10^{16}$ Hz

18)



Dopo il contatto le cariche sulle palline sono ambedue di Q/2
poniamo per semplicità di scrittura $Q/2 \equiv q$

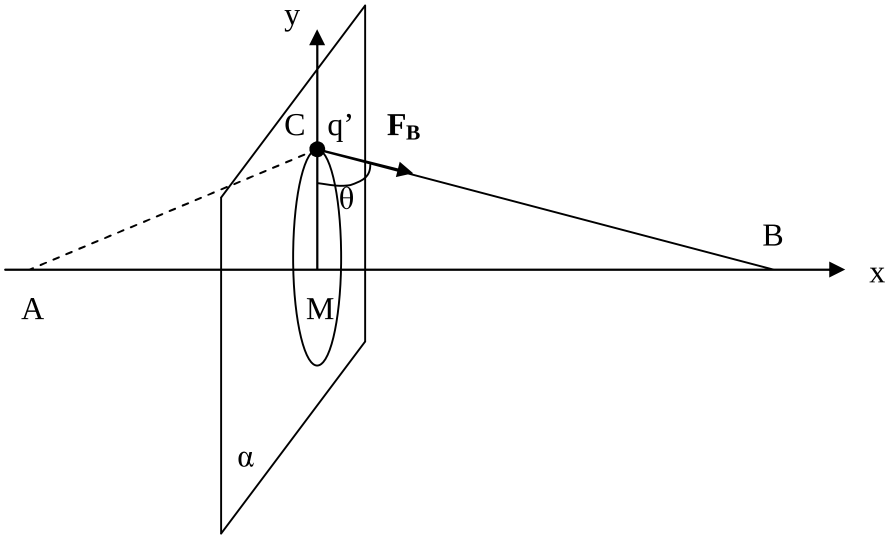
All'equilibrio F deve controbilanciare $T_x = T \cos\beta$
$= T \cos(90° - \alpha/2)$
$= T \sin \alpha/2$
$= T \sin 6° = 0.1\, T$



$R/2 = \ell \sin \alpha/2$
$R = 2 \cdot 0.2 \cdot \sin 6° = 4.2$ cm

$F = T_x \qquad F = k\, q^2/R^2$
$T_x = 0.1T = 0.1\, (F^2 + P^2)^{1/2} = 0.1(k^2 q^2 q^2/R^4 + m^2 g^2)^{1/2} = 0.1\, (\ldots.)^{1/2} = k\, q^2/R^2$
quadrando si ha: $k^2\, q^4/r^4 + m^2 g^2 = (k^2/0.1^2)\, (q^4/R^4)$
$k^2 q^4 + R^4 m^2 g^2 = 100 k^2 q^4$
$q = (R^2 mg / (99)^{1/2}\, k\,)^{1/2}\,)\, (0.042^2 \cdot 3.2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8/((99)^{1/2} \cdot 9 \cdot 10^9)^{1/2} = 2.5 \cdot 10^{-8}$ C
$Q = 2q = 50$ nC

19)



Essendo la situazione simmetrica, analizziamola solo considerando il lato destro: la componente della forza di attrazione elettrostatica (forza di Coulomb) fra q e q' lungo y (sul piano α) è metà (l'altra metà è data dal contributo dell'altra forza F_A) la forza centripeta che mantiene il moto circolare, pertanto possiamo scrivere:

$F_c = 2\ F_B \cos\theta = m\ \omega^2\ R$

Ora si noti che $R = CB \cos\theta$ cioè $\cos\theta = R/CB$ e che $CB = (R^2 + MB^2)^{1/2}$

per cui si ha $2k\ (q\ q' / CB^2) \cos\theta = m\ \omega^2\ R$

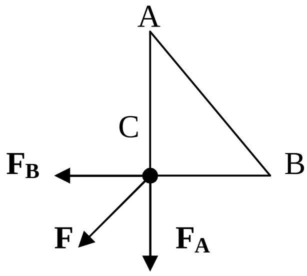
$2kqq'/(R^2+MB^2)\ (R/CB) = m\ \omega^2\ R$

$2k\ qq' / m\ \omega^2 = (R^2+MB^2)^{3/2}$

Calcoliamo il primo membro: $2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}/(9\cdot 10^{-6}\ (6.28\cdot 10^3)^2) = 10^{-3}$ quindi:

$(10^{-3})^{2/3} = ((R^2 + 0.06^2)^{3/2})^{2/3}$ da cui $R^2 + 0.0036 = 0.01$ infine $R = 0.08$ m

20)



$q_A = q_B = q_C = q = 1.2\ \mu C$

$AC = CB = 5$ cm

$F_A = k\ qq'/AC^2 = 9\cdot 10^9\ (1.2\cdot 10^{-6})^2/0.05^2 = 5.18$ N

$F = \sqrt{2}\cdot 5.18 = 7.3$ N

(si ricordi che la diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}\ \ell$)

21)

Rifacendoci al disegno precedente dobbiamo ora far vedere che risulta $\mathbf{F}\cdot\mathbf{AB} = 0$

ossia $F_x(AB)_x + F_y(AB)_y = 0$ essendo $(AB)_x = -CB$ e $(AB)_y = AC$ si ha

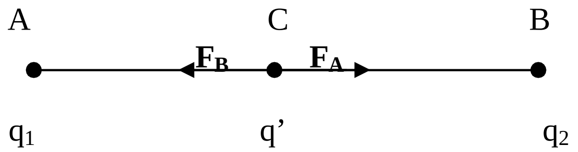
$F_x\ (-CB) + F_y\ (AC) = 0$ cioè dobbiamo far vedere che $F_x\ (CB) = F_y\ (CA)$ mettiamo le espressioni delle forze:

$k\ (q_C q_B / (CB)^2)\ (CB) = k\ (q_C\ q_A / (AC)^2)\ (AC)$ $q_A/AC = q_B/CB$

che si può anche scrivere così

$q_B : CB = q_A : AC$ c. v. d.

22)



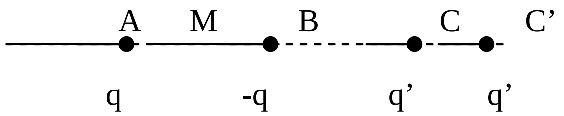
All'equilibrio deve essere $F_A = F_B$

$k\,q'\,q_1 / (AC)^2 = k\,q'\,q_2 / (CB)^2$ $q_2/q_1 = (CB)^2/(AC)^2$ ma $AC = AB - CB$ dunque
$16/4 = (CB)^2 / ((AB)^2 + (CB)^2 - 2(AB)(CB))$ ora poniamo $CB = x$ si ha
$x^2 = 4(0.09^2 + 4x^2 - 8\cdot 0.09\,x$ cioè $3x^2 - 0.72\,x + 0.0324 = 0$ da cui

$$x = \begin{cases} 0.18 \text{ m (non accettabile)} \\ 0.06 \text{ m} \end{cases}$$

CB = 6 cm e AC = 3 cm (il segno ed il valore della carica sono ininfluenti).

23)

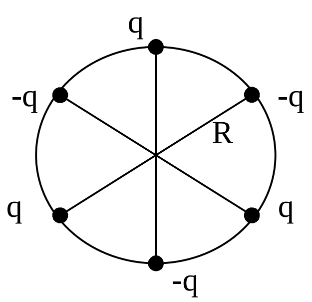


AB = 2a
MC = 10 a
MC' = 20 a

$F_1 = -k\,qq'/(BC)^2 + k\,qq'/(AC)^2 = A\,(-1/(9a)^2 + 1/(11a)^2) = -\,0.004\,A$ $(A \equiv kqq')$
$F_2 = -k\,qq'/(BC')^2 + k\,qq'/(AC')^2 = A\,(-1/(19a)^2 + 1/(21a)^2) = -\,0.005\,A$

$F_1/F_2 = 8$

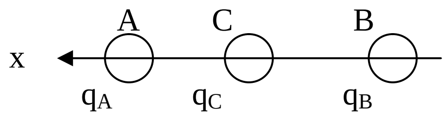
24)



Per $n = 1$ è $F = k\,q^2/R^2$
Per $n > 1$ è $F = 0$
perché al cento contribuiscono sempre due forze uguali ed opposte per ragioni di simmetria.

25)

Poiché ogni volta che una sfera carica è in contatto con un'altra identica la carica si equipartisce si ha la seguente situazione finale:

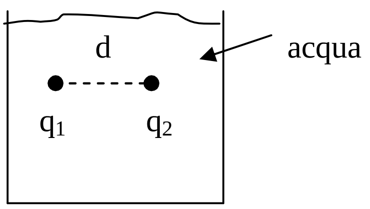


$q_A = q_C = 19\ \mu C$
$q_B = 38\ \mu C$
$AB = 2$ m
$AC = 1.5$ m

$F_A = F_{CA} + F_{BA} = k\ q_A^2/(AC)^2 + k\ q_A q_B\ /\ (AB)^2 = \ldots = 3.07$ N
$F_C = F_{BC} - F_{AC} = k\ q_B q_C/(CB)^2 - k\ q_A q_C/(AC)^2 = \ldots = 24.5$ N
$F_B = F_{AB} + F_{CB} = \ldots = -\ 27.6$ N

26)

$(\varepsilon_r)_{acqua} = 80$



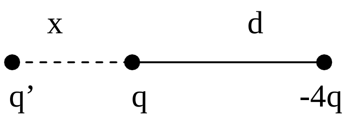
$F = (1/4\ \pi\varepsilon_0)\ (1/\varepsilon_r)\ q_1 q_2/d^2 = \ldots = 4.0 \cdot 10^{-2}$ N

Le forze colombiane fra le cariche in acqua si riducono di un fattore (1/80) rispetto al vuoto.

27)

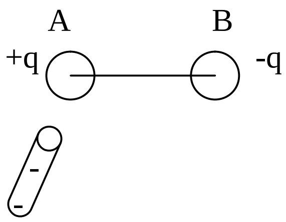
$F = (k/\varepsilon_r)\ q_1 q_2/d^2$ da cui $\varepsilon_r = (k/F)\ q_1 q_2/d^2 = \ldots = 2.4$

28)



$(k/\varepsilon_r)\ qq'/x^2 = -\ (k/\varepsilon_r)\ q'(-4q)/(x+d)^2$
da cui $(x+d)^2 = 4x^2$ che risulta vera per $x = d$
D'altro canto q' non può stare sul lato destro di B
in quanto si avrebbe $(k/\varepsilon_r)\ qq'/(x+d)^2 = -\ (k/\varepsilon_r)\ q'(-4q)/x^2$
cioè $3x^2 + 8dx + 4d^2 = 0$ con sol. $x_1=-0.66d$ e $x_2=-6d$
che sono ambedue non accettabili in quanto x non può essere negativo.

29)



Si ha $k\ qq'/d^2 = ma$ $a = (1/m)\ k\ qq'/d^2$
$a = (9 \cdot 10^9/(60 \cdot 10^{-3}))\ (\ (3.5 \cdot 10^{-6})^2/0.8^2) = 2.9\ m/s^2$

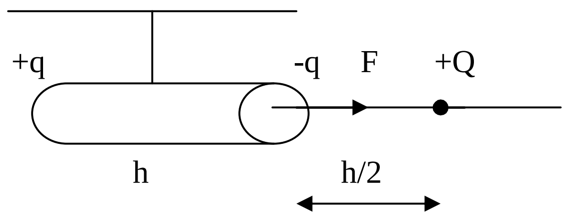
30)

Quando d>>R la forza di interazione fra le sfere è semplicemente la forza di Coulomb
F = k q(-q)/R   ma quando d ≈ R allora a causa della induzione elettrostatica le cariche si dispongono sulla calotta sferica in modo che avvenga uno sbilanciamento di cariche che si dispongono in modo che sulla faccia destra della prima sfera ci siano cariche di segno contrario a quelle della faccia sinistra della seconda sfera in tal modo aumentando la forza di interazione.

31)

Se la carica indotta è (-q) dovendo essere la carica totale nulla, la carica positiva sarà semplicemente +q.

32)

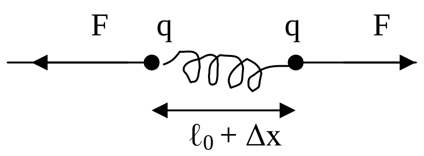


$F = k\,Q(-q)/(h/2)^2 + k\,qQ/(h+h/2)^2 =$

$= \ldots = -32k\,qQ/9h^2$ da cui
$1/q = -(32/9)\,k\,qQ/h^2$ ossia

$q = 9Fh^2/32kQ$

33)



$\ell \equiv \ell_0 + \Delta x = 75.0$ cm
$k_m = 540$ N/m
$q = 40.0\ \mu$C

Occorre determinare il valore della lunghezza della molla (a riposo) ossia ℓ_0

La forza totale che produce l'allungamento della molla è 2F per cui possiamo scrivere (in modulo) : $2F = k_m \Delta x$ essendo F la forza di interazione coulombiana abbiamo
$2\,k\,q^2/(\ell_0 + \Delta x)^2 = k_m \Delta x$ $2\,k\,q^2/k_m = \ell^2(\ell - \ell_0)$
calcoliamo numericamente il primo membro: $2\cdot 9\cdot 10^9\,(40\cdot 10^{-6})^2/540 = 0.053$
$0.053 = \ell^3 - \ell\,\ell_0$ da cui
$\ell_0 = (\ell^3 - 0.053)/\ell^2 = (0.75^3 - 0.053)/0.75^2 = 66$ cm

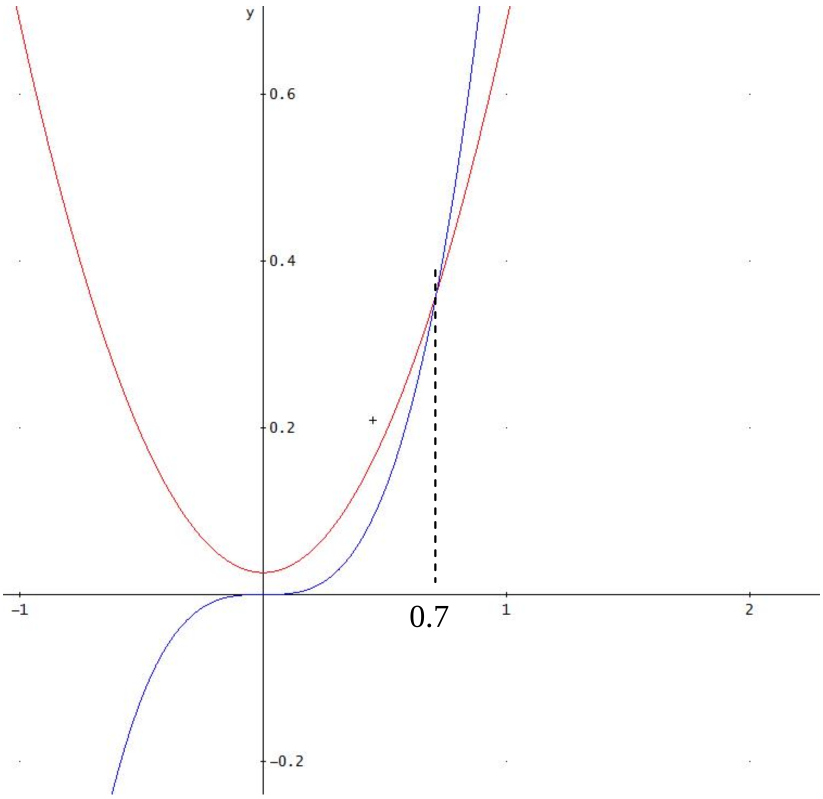
In olio quello che cambia è la forza colombiana che viene ridotta di un fattore $1/\varepsilon_r$:
$(1/\varepsilon_r)\,2\,k\,q^2/(\ell_0 + \Delta x')^2 = k_m \Delta x'$ $0.053/2.2 = \ell'^3 - \ell_0\,\ell'^2$ vien fuori una semplice equazione di terzo grado: $\ell'^3 - 0.66\,\ell'^2 - 0.0265 = 0$ la cui soluzione è (1)
$\ell' = 72$ cm
Quindi in olio l'allungamento della molla passa da 75 cm a 72 cm a causa dell'indebolimento della forza di Coulomb fra le cariche.

N.B.

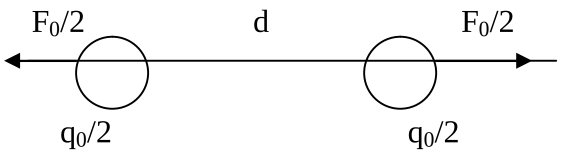
Si noti come appendice che se si considera come distanza fra le cariche non ℓ ma ℓ_0 scrivendo così $2\,kq^2/\ell_0^2 = k_m\,\Delta x$ si sarebbe commesso un errore cospicuo trovando per la lunghezza a riposo della molla non più 66 ma 61 cm (ed in olio 68 cm invece di 72), la distanza corretta da inserire nell'espressione della forza elettrostatica è quindi quella finale ossia quella che è presente all'equilibrio e che in effetti provoca l'allungamento dato.

(1)

Per la soluzione di un'equazione di terzo grado occorre ricorrere al metodo grafico (quello analitico lo si studia nei corsi Universitari), basta scrivere l'eq. in questo modo: $x^3 = 0.66x^2+0.0265$ e costruirsi a mano in grafico delle due curve, l'ascissa del punto di intersezione è las soluzione cercata (se esiste). In questo caso il compito è piuttosto banale in quanto le due curve sono di quelle il cui grafico è immediato e alla fine risulta che il punto di intersezione è circa 0.7 (cioè 70 cm).



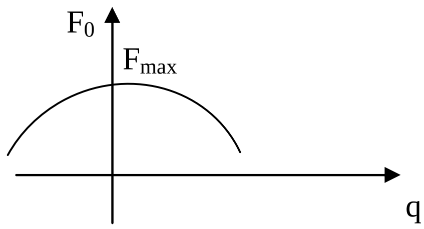
34)



a) $F = F_0/2 = k\,(q_0/2)\,(q_0/2) / d^2$ $\quad q_0 = 2\,((F_0/2)\,d^2/k)^{1/2} = \ldots = 1.46\ \mu$

b) Supponiamo di trasferire una certa quantità di carica da A e portarla a B, avremo q_0/m su A e q_0/n su B pertanto la forza sarà: $F = 2k\,(q_0/m)\,(q_0/n) / d^2$ cioè F_0 dipende dal prodotto $(1/m)(1/n)$ con la condizione che $(1/m) + (1/n) = 1$, riscriviamo F_0 in questo modo
$F_0 = 2k\, mq_0nq_0 / d^2$
Ora il problema è di trovare i due numeri m ed n tali che la loro somma sia uno e che il loro prodotto sia massimo
$m + n = 1 \qquad m = 1 - n \qquad \ldots.$
$m\, n = p \qquad (1-n)\, n = p \qquad n^2 - n + p = 0 \qquad n = 1 \pm (1-4p)^{1/2} / 2$
La condizione di realtà del radicando impone che sia $1 - 4p \geq 0$ ossia $p \leq ¼$
quindi $p_{max} = ¼$ nel qual caso di ha $m = ½$ e $n = ½$

Quindi il prodotto massimo si ha per $m = n = ½$ in tutti gli altri casi p è minore e di conseguenza F_0 minore
$F_{0,max} = 2k\,(q_0/2)\,(q_0/2) / d^2$
Oppure indicando con q la quantità di carica trasferita si ha:
$F_0 = k\,(q_0/2 + q)\,(q_0/2 - q) / d^2 = (k/d^2)\,(q_0^2/4 - q^2) = A - Bq^2$ (con $A = 0.053$ e $B = 10^{11}$)
Riportiamolo in grafico



Come si vede F_0 assume il valore massimo per $q = 0$
Quindi qualunque spostamento di carica fa diminuire F_0.

c) Facciamo un piccolo cambio di simboli ed indichiamo ora con Q_0 la carica totale sulle sfere. Ora la condizione da imporre è diversa: la carica totale resta q_0 anche aggiungendo alle due sfere due cariche opposte q e – q

Ora può essere $q' < 0$ oppure $q' > Q_0/2$ $\qquad$ per semplicità indichiamo $Q_0/2 \equiv Q$

$F' = (k/d^2)\,(Q^2 - q'^2)$ con $q'^2 > Q^2$
quindi F sarà negativa, ma a noi interessa trovare il modulo, Vogliamo che sia $F' > F$
$(k/d^2)\,(Q^2 - q'^2) > (k/d^2)\,(Q^2 - q^2)$

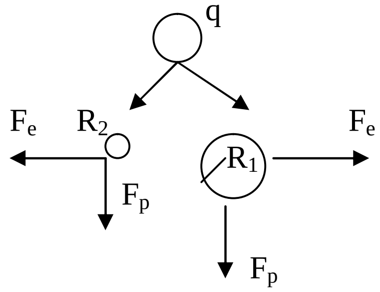
$|Q^2 - q'^2| > Q^2 - q^2$
$Q^2 - q'^2 > Q^2 - q^2$ $\quad$ se $Q^2 - q'^2 > 0$ $\quad$ non è il nostro caso
$-Q^2 + q'^2 > Q^2 - q^2$ $\quad$ se $Q^2 - q'^2 < 0$ $\quad$ è il nostro caso

$q = 0$ infatti vogliamo $F' > F_{max}\,(q=0)$

quindi $q'^2 > 2Q^2$

$q' > \sqrt{2}\, Q = Q_0/\sqrt{2}$

35)

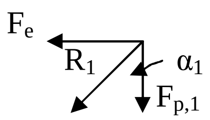


$R_1 = 2R_2$

a) $q_1 = 2q_2$ …….. $q_1 = -0.30$ nC
$q_1+q_2 = q$ $3q_2 = q$ $q_2 = -0.15$ C

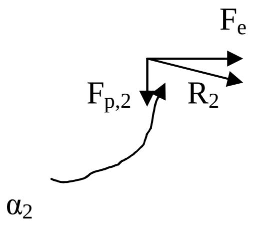
b) $d = 0.50$ cm $F_e = k\, q_1q_2/d^2 = \ldots = 1.6\cdot10^{-5}$ N

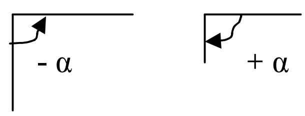
c) $\mathbf{F_1} = \mathbf{F_{p,1}} + \mathbf{F_e} = m_1g\,\mathbf{j} + 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} = 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} + 15.7\cdot10^{-6}\,\mathbf{j}$
$F_1 = ((1.6\cdot10^{-5})^2 + (15.7\cdot10^{-6})^2)^{1/2} = 22.56\cdot10^{-6}$ N
$\mathbf{F_2} = \mathbf{F_{p,2}} + \mathbf{F_e} = m_2g\,\mathbf{j} - 1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} = -1.6\cdot10^{-5}\,\mathbf{i} + 1.96\cdot10^{-6}\,\mathbf{j}$
$F_2 = ((-1.6\cdot10^{-5}) + (1.96\cdot10^{-6})^2)^{1/2} = 16.32\cdot10^{-6}$ N
Pertanto le accelerazioni sono: $a_1 = F_1/m_1$ e $a_2 = F_2/m_2$ e quindi dobbiamo calcolare le masse.
$m = m_1+m_2 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_1^3 + \rho\,(4/3)\,\pi\,R_2^3$
$m / \rho\,(4/3)\,\pi = (2R_2)^3 + R_2^3$
$R_2 = ((1.8\cdot10^{-6})/(9\cdot10^3(4/3)\,\pi))^{1/3} = 0.363\cdot10^{-3}$ m
$R_1 = 0.726\cdot10^{-3}$ m
$m_1 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_1^3 = \ldots = 1.6$ mg
$m_2 = \rho\,(4/3)\,\pi\,R_2^3 = \ldots = 0.2$ mg
$a_1 = F_1/m_1 = 22.56\cdot10^{-6}/(1.6\cdot10^{-6}) = 14$ m/s^2
$a_2 = F_2/m_2 = 16.32\cdot10^{-6}/(0.2\cdot10^{-6}) = 81$ m/s^2
Le direzione e verso delle accelerazioni sono quelle felle forze:



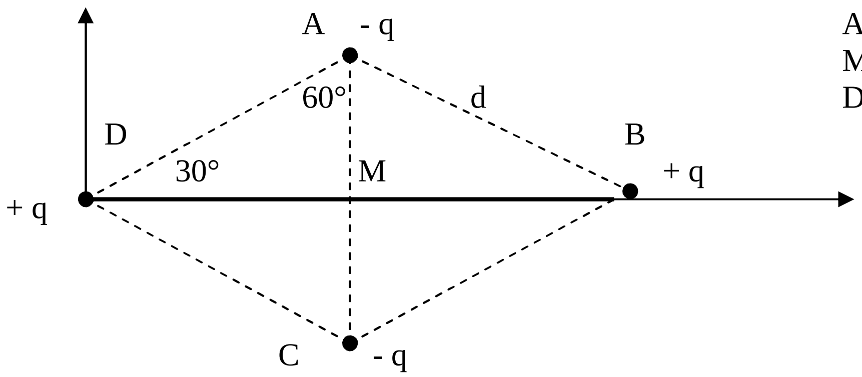
$\alpha_1 = \arctan F_{1,x}/F_{1,y} = \arctan (16.2\cdot10^{-6})/(15.7\cdot10^{-6}) = 46°$

$\alpha_2 = \arctan F_{2,x}/F_{2,y} = \arctan (-16.2\cdot10^{-6})/(1.96\cdot10^{-6}) = -83°$



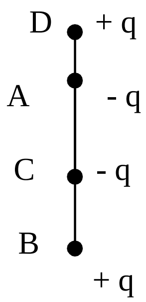


36)



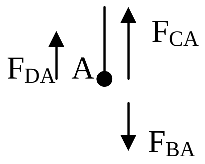
ABC e ADC sono equilateri
AB = BC = AC = d
MB = a = d sin 60°
DB = 2a

a)
La risultante delle forze su D è $\mathbf{F_D} = \mathbf{F_{AD}} + \mathbf{F_{BD}} + \mathbf{F_{CD}}$
La componente lungo x di F_D è “assorbita” dalla rigidità della sbarretta.
Calcoliamo la componente lungo y:
$F_{D,y} = F_{AD,y} + F_{CD,y} = - k (q^2/d^2) \sin 30° + k (q^2/d^2) \sin 30° = 0$
Dunque su D, e per simmetria su B, non occorrono forze vincolari.
Vediamo cosa succede al punto A (e per simmetria al punto C):
$F_A = F_{BA} + F_{CA} + F_{DA} = 0$
$\mathbf{F_{BA}} = - k (q^2/d^2) \sin 60° \, \mathbf{i} + k (q^2/d^2) \cos 60° \, \mathbf{j}$
$\mathbf{F_{DA}} = k (q^2/d^2) \sin 60° \, \mathbf{i} + k (q^2/d^2) \cos 60° \, \mathbf{j}$
$\mathbf{F_{BA}} + \mathbf{F_{DA}} = 2k (q^2/d^2) \cos 60° \, \mathbf{j}$
$\mathbf{F_{CA}} = - k(q^2/d^2) \, \mathbf{j}$
$\mathbf{F_A} = (2k(q^2/d^2) \cos 60° - k (q^2/d^2)) \, \mathbf{j} = 0$ (essendo $2 \cos 60° = 2 \cdot ½ = 1$)
Dunque neanche su A e C occorrono forze vincolari.
b)
$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ essendo F sulla stessa direzione di r.
c)
Osserviamo innanzitutto che ora il momento non è più nullo, le componenti verticali ad esempio di F_{AB} e F_{CB} non sono più uguali (ed opposte) ma c’è uno sbilanciamento in favore di $F_{AB,y}$ per cui il momento è diretto in alto e provoca una rotazione antioraria riportando l’asta in posizione iniziale o poi continuando a ruotare fino all’allineamento dell’asta con le altre due cariche. Posizione finale di equilibrio:



d)

Riferendoci alla figura precedente sulla carica –q in alto intervengono tre forze:

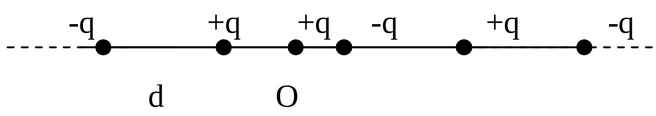


$F_A = F_{DA} + F_{CA} + F_{BA}$ possiamo usare le forme scalari perché ora il problema è unidimensionale
Inoltre abbiamo che $F_A = F_C$ e che su D e B non occorrono forze perché esse sono su una sbarra.
Dunque $F_{DA} = - k\, q^2/(DA)^2 = - k\, q^2/(0.179\, a^2)$ (essendo DA = a – a/tan60° = 0.423 a)
$F_{CA} = k\, q^2/(CA)^2 = k\, q^2/(1.32\, a^2)$ (essendo AC = AB = d = a/sin60° = 1.15 a)
$F_{BA} = - k\, q^2/(BA)^2 = - kq^2/(2.47\, a^2)$ (essendo AB = AC+CB= AC + DA = 1.15 a + 0.423 a =
= 1.573 a)

$F_A = F_{DA} + F_{CA} - F_{BA} = k\, (q^2/a^2)\, (1/0.179 + 1/1.32 – ½.47) = 5.94\, k\, (q^2/a^2)$

37)

d = 5 cm
q = 1 nC

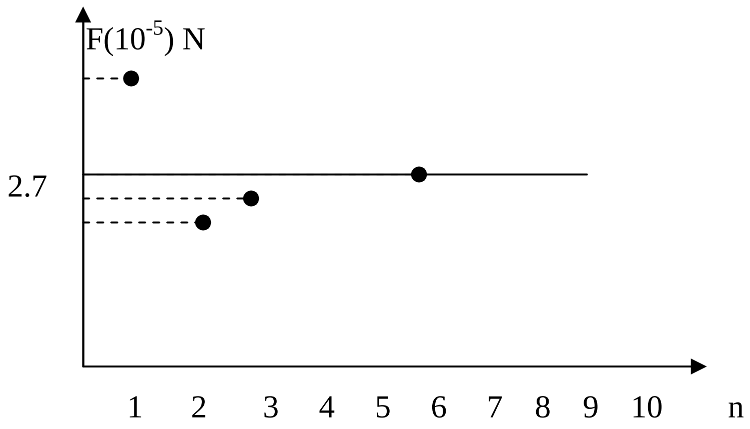


Rispetto al punto considerato O, le cariche sono disposte simmetricamente, ogni coppia è costituita da due cariche di segno opposto che danno un campo doppio di quello di una singola carica. Basta allora calcolare il contributo delle cariche poste da un aparta e poi moltiplicare per due.

$F_0 = F_{2,0} + F_{1,0} = 2\, F_{2,0}$ per   n = 1   (con n = numero di cariche da una parte)
$F_0 = 2\, (F_{2,0} + F_{3,0} + F_{4,0} + \ \dots)$
$F_{2,0} = k\, q^2/(d/2)^2 = 9 \cdot 10^9\, (10^{-9})^2/(2.5 \cdot 10^{-2})^2 = 1.44 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=1} = 2F_{2,0} = 2.88 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{3,0} = k\, q(-q)\, /(d+d/2)^2 = - 0.16 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=2} = 2\, (F_{2,0} + F_{3,0}) = 2.56 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{4,0} = kq^2/(2s+d/2)^2 = 0.058 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=3} = 2(F_{2,0} + F_{3,0} + F_{4,0}) = 2\, (2.88 \cdot 10^{-5} – 0.16 \cdot 10^{-5} + 0.058 \cdot 10^{-5}) = 2.676 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{5,0}\ k\, –q^2/(3d+d/2)^2 = - 0.03 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=4} = 2.616 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=5} = 2.65 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=6} = 2.63 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=7} = 2.65 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=8} = 2.67 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=9} = 2.66 \cdot 10^{-5}$ N
$F_{0,n=10} = 2.67 \cdot 10^{-5}$ N

riportiamo questi dati in una tabella

n	$F_{0,n}$ (10^{-5}) N
1	2.88
2	2.56
3	2.68
4	2.62
5	2.63
6	2.63
7	2.65
8	2.67
9	2.66
10	2.67



dopo n = 10 cioè 10 cariche per parte, il valore della forza su O si stabilisce intorno a $2.66\cdot10^{-5}$ N

b) Vediamo ad esempio l'errore fra F_{10} e F_9 $F_9/F_{10} = 2.66/2.67 = 0.996$ cioè un errore del 0.4% quindi con n=8 si ha l'approssimazione richiesta.

Quesiti

38)
$F_{PR}/F_{QR} = k\ q_P\ q_R/(d/2)^2 \ /\ k\ q_Q\ q_R\ /\ (d/2)^2 = q½q\ /\ ((½q)\ (½q)) = 2$ (con q_P=q e q_R=q_Q=½q)
RISP. B

39)
Per la legge della composizione vettoriale la risposta evidentemente esatta è la C

40)

a) $F_{SQ} = F_{QR} = kq^2/\ \ell^2$ $F_{risultante\ (S+Q)} = \sqrt{2}\ k\ q^2/\ \ell^2$
$F_{PR} = -\ k\ 2q^2(\sqrt{2}\ \ell)^2 = -k\ q^2/\ \ell^2$ non è questo il caso

b) $F_{SR} = F_{QR} = k\ q^2/\ \ell^2$ $F_{R+S} = \sqrt{2}\ k\ q^2/\ \ell^2$
$F_{PR} = -\ 2k\ q^2/\ \ell^2$ non è questo il caso

c) $F_{SQ} = F_{QR} = 2\ 2k\ q^2/\ \ell^2$ Fris $= 2\sqrt{2}\ k\ q^2/\ \ell^2$
$F_{PR} = k\ \ q^2/\ 2\ell^2$ non è questo il caso
Quindi la risposta esatta è la E

41)
La considerazione che Q ed S non si attraggono è sufficiente per scegliere:
la risposta giusta che è la E
42)

$F(R) = k/R_2$ per $R \longrightarrow \infty$ $F(R) \longrightarrow 0$

Risp. A

ESERCIZIO 1

La forza agente fra due cariche elettriche puntiformi, $q_1 = 2{,}9\cdot10^{-9}C$ e $q_2 = 4{,}5\cdot10^{-8}C$, è di $5{,}62\cdot10^{-5}N$. Determinare la distanza tra le due cariche

Usando la relazione ch esprime la legge di Coulomb:

$$F = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}$$

dove d è la distanza fra i due corpi e $k = 8{,}99\cdot10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}$,

otteniamo:

$$d^2 = k\cdot\frac{2{,}9\cdot10^{-9}C\cdot4{,}5\cdot10^{-8}C}{5{,}62\cdot10^{-5}N} = 0{,}0209m^2$$

da cui

$$d = 0{,}144m$$

ESERCIZIO 2

Una sfera metallica possiede una carica elettrica di $-6{,}4\cdot10^{-9}C$. Quanti elettroni in eccesso possiede la sfera? Se poi la sfer viene messa in contatto con insieme ad altre due sfere metalliche identiche e neutre, quanti elettroni in eccesso possiede alla fine la prima sfera?

Dividiamo la carica elettrica per il valore della carica elementare

$$e^- = \frac{6{,}4\cdot10^{-9}C}{1{,}6\cdot10^{-19}C} = 4\cdot10^{10}$$

Se poniamo a contatto la sfera con altre due sfere identiche la sfera avrà un terzo degli elettroni presenti all'inizio

ESERCIZIO 3

Due cariche elettriche puntiformi positive, poste alla distanza di 18 cm, si respingono con una forza di $1{,}8\cdot10^{-4}N$. Sapendo che la prima carica è il doppio della seconda, determinare il valore di ciascuna carica

poichè sapiamo che $q_1 = 2q_2$ possiamo scrivere:

$$F = K\cdot\frac{2q_2\cdot q_2}{d^2}$$

e successivamente:

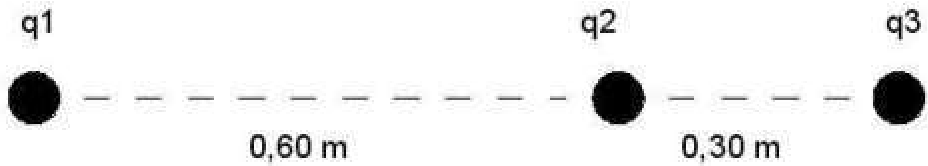
$$q_2^2 = \frac{Fd^2}{2k}$$

ottenendo così

$$q_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}C \,;\, q_1 = 1{,}25 \cdot 10^{-8}C$$

ESERCIZIO 4
Tre cariche eletriche puntiformi sono allineate come in figura. Calcola la forza risultante che agisce sulla carica q_1 e sulla carica q_2

$q_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-6}C$
$q_2 = -2{,}8 \cdot 10^{-7}C$
$q_3 = 5{,}4 \cdot 10^{-6}C$



usando la formula utilizzata nell'esecizio 1 abbiamo:

Forze agenti su q_1:

$$F_1 = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-6}C \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-7}C(0{,}06m)^2 = 0{,}025N$$

con forza attrattiva poichè le due cariche hanno segno opposto

Con lo stesso calcolo misuriamo la forza agente sulla carica 1 da parte della carica 3 e otteniamo:

$$F_2 = 0{,}216N$$

con forza repulsiva poichè hanno stesso segno

La forza complessiva agente sulla carica 1 è data dalla sottrazione dei due valori ottenuti:

$$F_{tot} = 0{,}216N - 0{,}025N = 0{,}191N$$

La carica si allontna, poichè laa forza repulsiva esercitata dalla carica 3 è maggiore della forza attrattiva esercitata dalla carica 2

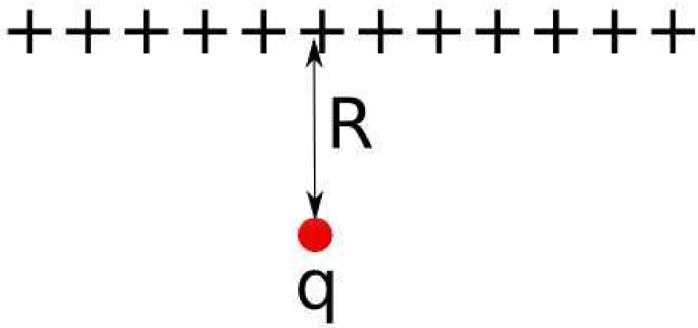
Forze agenti su q_2
Utilizziamo lo stesso identico procedimento e otteniamo che sulla carica 2 agisce una forza attrattiva di modulo 0,025 N da parte della carica 1, e anche la carica 3 esercita una forza attrativa di modulo 0,151N
La forza totale sarà data dalla sottrazione delle due forze:

$$F_{tot} = 0{,}151N - 0{,}025N = 0{,}126N$$

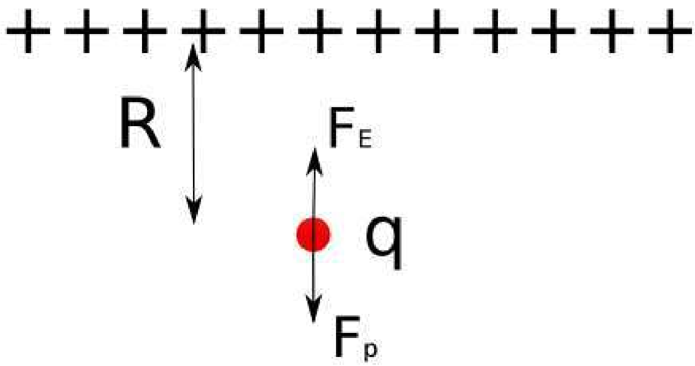
La carica 2 si muove verso la carica 3, che esercita un forza attrattiva maggiore rispetto alla carica 1

ESERCIZIO 1

Data la distribuzione di carica lineare indefinita rappresentata in figura, con una densità lineare $\lambda = 10^{-8}\frac{C}{m}$ e data una sferetta di massa $m = 0{,}01g$ e carica $q = -10^{-8}C$ posta sotto di essa, determinare a quale distanza dalla distribuzione la sferetta si troverà in equilibrio.



La sferetta di massa m e carica q è sottoposta alla forza peso F_p e alla forza attrattiva elettrica F_E. Entrambe le forze sono dirette verticalmente, ma hanno verso opposto.



La condizione di equilibrio è quindi:

$$F_E = F_p.$$

Poichè $F_E = qE$ (per la 2) e $F_p = mg$ otteniamo:

$$qE = mg.$$

Utilizzando la (9), che esprime l'intensità del vettore campo elettrico generato da una distribuzione lineare di carica su un'altra carica posta a una distanza R, si ottiene:

$$q \cdot \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0} = mg.$$

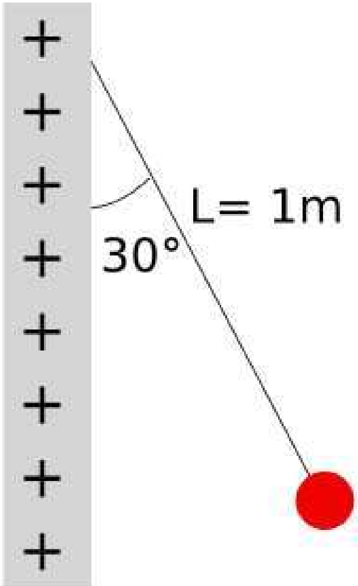
Isolando R otteniamo:

$$R = \frac{q\lambda}{2\pi mg\varepsilon_0}$$

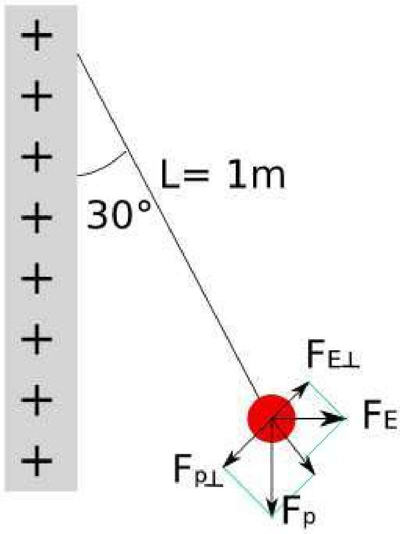
e sostituendo i dati del testo otteniamo:

$$R = 1{,}83 \cdot 10^{-2} m.$$

ESERCIZIO 2
Su una lastra non conduttrice indefinita è disposta della carica. Una sferetta di carica $q = 4 \cdot 10^{-8} C$ viene spinta dalla lastra e il filo, all'equilibrio, forma un angolo di 30° come rappresentato in figura. Determinare la densità superficiale della carica della lastra.



Se consideriamo il vettore della forza elettrica F_E e il vettore della forza peso F_p e tracciamo i vettori componenti di entrambe le forze otteniamo una situazione come quella rappresentata in fugira:



I vettori componenti che sono paralleli al filo sono equilibrati dalla tensione del filo stesso. La condizione di equilibrio si riduce quindi all'eguaglianza tra le sole componenti ortogonali delle forze:

$$F_{p\perp} = F_{E\perp}$$

e quindi:

$$F_p \sin 30^\circ = F_E \cos 30^\circ$$

Siccome $F_E = q \cdot E$ se sostituiamo al campo elettrico la formula (8) otteniamo:

$$F_E = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il vettore componente della forza peso è invece:

$$F_{p\perp} = mg \sin 30^\circ$$

Quindi:

$$mg \sin 30^\circ = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \cos 30^\circ$$

possiamo ora calcolare σ ottenendo come valore:

$$\sigma = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^2}$$

ESERCIZIO 3

Una superficie piana di area $10 cm^2$ è immersa in un campo elettrico uniforme di intensità $1000 \frac{N}{C}$ orientato orizzontalmente da sinistra a destra. La perpendicolare alla superficie forma con la linea di campo $\vec{E}$ un angolo di 60°. Determinare il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie.

Applicando la formula (8) calcoliamo il flusso:

$$\phi_S(\vec{E}) = 1000 \frac{N}{C} \cdot 10^{-3} m^2 \cdot \cos 60^\circ = 0{,}5 \frac{Nm^2}{C}$$

ESERCIZIO 4

Tre cariche elettriche sono disposte nel centro di una sfera di raggio $20 cm$. Il loro valore è $q_1 = 10^{-10} C$, $q_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-10} C, q_3 = -1{,}1 \cdot 10^{-10} C$. Determinare il flusso del campo elettrico uscente dalla sfera e il valore del campo $\vec{E}$ sulla sua superficie.

Applicando l'equazione (9) otteniamo:

$$\phi_S(\vec{E}) = \frac{(10^{-10} + 2{,}1 \cdot 10^{-10} + 1{,}1 \cdot 10^{-10})C}{8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{c^2}{Nm^2}} = 22{,}6 \frac{Nm^2}{C}$$

calcoliamo ora il modulo del campo elettrico utilizzando la (4)

$$E = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{(0{,}20m)^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = 45 \frac{N}{c}$$

ESERCIZIO 1

Una carica elettrica Q di valore $10^{-8}C$ è posta in un punto P dello spazio. Alla distanza di 20 cm da essa si colloca una seconda carica q il cui valore è $-10^{-11}C$. Calcolare il lavoro che si deve compiere per portare la carica q a grandissima distanza dalla carica Q.

La carica puntiforme Q genera un campo elettrico che agisce sulla carica q. Per allontanare la carica q, dalla distanza iniziale r a distanza *infinita* (in pratica, *molto grande*) si deve compiere un lavoro L espresso dalla (13) :

$$L = k_0 \cdot \frac{Qq}{r}$$

dove r indica la distanza della carica dalla sorgente del campo. Otteniamo quindi:

$$L = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-8} \cdot (-10^{-11}) C^2}{0{,}20m} = -4{,}5 \cdot 10^{-9} J.$$

Il lavoro risulta negativo proprio perchè, per spostare la carica q come richiesto, deve essere svolto *contro* la forza del campo elettrico: spontaneamente, infatti, la carica q tende ad avvicinarsi alla sorgente Q.

Un altro modo per descrivere il risultato ottenuto è il seguente: la carica q, per il solo fatto di trovarsi a distanza r dalla sorgente Q del campo elettrico, possiede una propria energia potenziale (di natura elettrostatica) pari a $4{,}5 \cdot 10^{-9} J$.

ESERCIZIO 2
Un elettrone, inizialmente fermo, si trova in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10^3 \frac{V}{m}$. Determinare la sua velocità dopo un volo di 10 cm eseguito sotto l'azione delle sole forze del campo.

Siccome l'elettrone è immerso in un campo elettrico uniforme, dalla (14) possiamo facilmente calcolare la differenza di potenziale a cui è sottoposto nel suo tragitto di 10 cm:

$$\Delta V = E \cdot z = 10^3 \frac{V}{m} \cdot 0{,}10m = 100V.$$

Nella configurazione iniziale A l'elettrone è fermo: ha quindi energia cinetica nulla, e tutta la sua energia si riduce alla sola energia potenziale E_{P_A}. Nella configurazione finale B l'elettrone ha sia energia cinetica, sia energia potenziale diverse da zero. Dal principio di conservazione dell'energia abbiamo:

$$E_A = E_B$$

$$E_{P_A} = E_{P_B} + E_{C_f}$$

ossia

$$E_{P_A} - E_{P_B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2$$

Ricordando il legame che intercorre tra l'energia potenziale in un certo punto e il potenziale elettrico in quello stesso punto (ossia $U_P = V_P \cdot q$), otteniamo:

$$V_A \cdot q - V_B \cdot q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2$$

$$(V_A - V_B) \cdot q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2,$$

e poichè $V_A - V_B = 100V$, alla fine abbiamo:

$$100V \cdot q = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2.$$

Il valore di q è quello della carica dell'elettrone, che vale $1{,}6 \cdot 10^{-9} C$. Otteniamo così il valore dell'energia cinetica finale:

$$E_{Cf} = 1{,}6 \cdot 10^{-9} C \cdot 100V = 1{,}6 \cdot 10^{-17} J$$

Ricaviamo infine il valore della velocità finale richiesta

$$V_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = 5{,}93 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO 3
Una carica elettrica q si trova in quiete a 10 cm da una carica Q di segno opposto. Il valore di Q e di q è identico, e pari a $10^{-5} C$. Calcolare l'energia che si deve fornire alla carica q per portarla molto lontano da Q in modo che, in quel luogo, abbia una velocità di $100 \frac{m}{s}$. La massa di q è di 1 g.

Nella configurazione iniziale A l'energia totale della carica q si riduce alla sola energia potenziale, perchè l'energia cinetica è zero (essendo la carica ferma):

$$E_{tot_A} = U_A = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{-10^{-5} C \cdot 10^{-5} C}{0{,}1m} = -9J$$

Nella configurazione finale P, invece, l'energia totale è data dalla somma dell'energia potenziale nel punto P considerato con l'energia cinetica corrispondente alla velocità di $100 \frac{m}{s}$:

$$E_{tot_P} = U_P + \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 Kg \cdot \left(100 \frac{m}{s}\right)^2 = U_P + 5J$$

Dal principio di conservazione dell'energia:

$$E_{tot_A} = E_{tot_P}$$

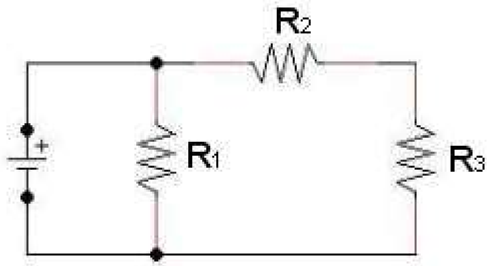
$$-9J = U_P + 5J$$

$$U_P = -9J - 5J = -14J$$

In base alla definizione stessa di energia potenziale, occorre dunque spendere un lavoro (ossia, un'energia) di 14 J per portare la carica nella configurazione finale P.
Il testo del problema parla di una posizione finale P *molto lontana* dalla sorgente del campo. Questa indicazione sembra non solo inutile, ma anche causa di confusione, perchè normalmente si associa a una configurazione P *molto lontana* l'idea di una energia potenziale nulla, cosa che invece non è nel nostro caso.

Esercizio 1

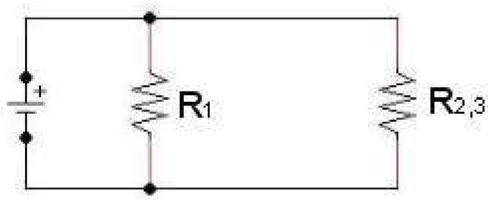
Dato il circuito in figura, ricavare l'intensità di corrente di ciascuna resistenza e la differenza di potenziale ai capi delle resistenze $R_2 R_3$. Il generatore crea una differenza di potenziale ΔV di 40 V. I valori delle resistenze sono: $R_1 = 24\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$.



Troviamo innanzitutto il valore che dovrebbe avere una resistenza equivalente alle resistenze $R_2 R_3$:

$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 90\Omega$$

Il circuito che otteniamo è ora costituito da due resistenze in parallelo.



Ciascuna sarà attraversata da una diversa intensità di corrente, calcolabile mediante la legge di Ohm:

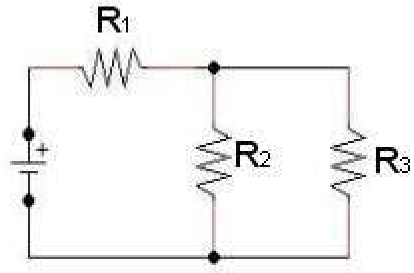
$$i_1 = \frac{40V}{24\Omega} = 1{,}67A$$

$$i_{2,3} = \frac{40V}{90\Omega} = 0{,}44A$$

siccome le due resistenze $R_2 R_3$ sono in serie, in esse circolerà la stessa intensità di corrente, uguale a quella che circola nella resistenza eqivalente che le sostituisce. calcoliamo ora la differenza di potenziale ai loro capi:

$$\Delta V_2 = 0{,}44A \cdot 40\Omega = 17{,}6V$$
$$\Delta V_2 = 0{,}44A \cdot 50\Omega = 22{,}0V$$

Esercizio 2
Dato il circuito in figura, ricavare l'intensità di corrente di ciascuna resistenza. Il generatore crea una differenza di potenziale ΔV di 20 V. I valori delle resistenze sono: $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 60\Omega$.



Iniziamo sostituendo le resistenze 2 e 3 con un resistenza ad esse equivalenti:

$$R_{2,3} = 15\Omega$$

Calcoliamo ora la resistenza equivalente che può sostituire R_1 e $R_{2,3}$:

$$R_{eq} = 40\Omega$$

Calcoliamo ora l'intensità di corrente all'interno del circuito:

$$i = \frac{20V}{40\Omega} = 0{,}5A$$

La corrente che circola nella resistenza 1 ha quindi un valore di 0,5 A. Anche nella resistenza $R_{2,3}$ circola una corente di intensià 0,5 A. Possiamo quindi calcolare la differenza di potenziale ai capi delle due resistenze R_2,R_3:

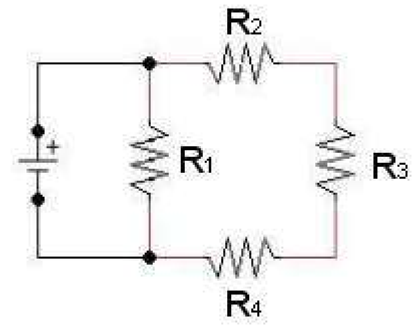
$$\Delta V_{2,3} = 0{,}5A \cdot 15\Omega = 7{,}5V$$

Calcoliamo ora l'intensità di corrente delle due resistenze in parallelo:

$$i_2 = \frac{7{,}5V}{20\Omega} = 0{,}38A$$

$$i_3 = \frac{7{,}5V}{60\Omega} = 0{,}13A$$

Esercizio 3
Dato il circuito in figura, ricavare l'intensità di corrente di ciascuna resistenza, e la differenza di potensiale ai capi delle resistenze 2,3,4. Il generatore crea una differenza di potenziale ΔV di 40 V. I valori delle resistenze sono: $R_1 = 24\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_3 = 30\Omega$.



Iniziamo calcolando il valore delle resistenza equivalente alle resistenze in serie 2,3,4:

$$R_{2,3,4} = 120\Omega$$

Possiamo or ricavare il valore della resistenza equivalente di tutto il circuito:

$R_{eq} = 20\Omega$

Ricaviamo il valore dell'intensità di corrente del circuito:

$$i = \frac{40V}{20\Omega} = 2,0A$$

e successivamente la corrente circolante nella resistenza 1 e nella resistenza equivalente $R_{2,3,4}$

$$i_1 = 1,7A$$
$$i_{2,3,4} = 0,3A$$

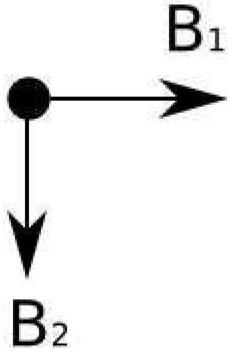
Siccome le tre resistenze sono in serie l'intensità di corrente che circola nelle tre resistenze è la stessa, e vale 0,3 A.
Possiamo ora ricavare la differenza di potenziale ai capai di ciascuna resistenza:

$$\Delta V_2 = 0,3a \cdot 40\Omega = 13,2V$$
$$\Delta V_3 = 0,3a \cdot 50\Omega = 16,5V$$
$$\Delta V_4 = 0,3a \cdot 30\Omega = 9,9V$$

ESERCIZIO 1

Due fili rettilinei sono disposti l'uno verticalmente l'altro orizzontalmente. I loro punti più vicini A e B sono ad una distanza di 0,2 m. Entrambi sono percorsi da una corrente di 10 A. Determinare il modulo del campo $\vec{B}$ nel punto medio del segmento congiungente AB

Il testo non specifica il verso di percorrenza della corrente, ma ciò è ininfluente: qualunque sia il verso di percorrenza i due fili produrranno due campi magnetici con direzioni perpendicolari tra loro, come rappresentato in figura:



Il campo totale agente sul punto si otterrà quindi mediante il teorema di pitagora applicato a B_1 e B_2.

Il modulo dei duecampi sarà:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{10A}{0.10m} = 2 \cdot 10^{-5} T$$
$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{10A}{0.10m} = 2 \cdot 10^{-5} T$$

e quindi il campo totale agente sul punto:

$$B_{tot} = \sqrt{4+4} \cdot 10^{-5} T = 2{,}82 \cdot 10^{-5} T$$

Esercizio 2

Due spire S_1 e S_2 sono disposte nel medesimo piano, con i loro centri coincidenti. La prima ha raggio 20 cm ed è percorsa da corrente i_1 in verso orario. La seconda ha raggio 30 cm ed è percorsa da una corrente i_2 in senso antiorario. Determinare il valore del rapporto $\frac{i_1}{i_2}$ che genera un campo B nullo nel centro delle spire.

Affinchè il campo sia nullo deve essere:

$$B_1 = B_2$$

E quindi:

$$\frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{i_1}{20cm} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{i_2}{30cm}$$

Da cui, semplificando $\frac{\mu_0}{2}$ otteniamo

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3

Determinare il modulo del campo magnetico $\vec{B}$ generato da due spire di raggio 5 cm disposte in due piani perprendicolari e con un diametro in comune nel punto medio di tale diametro. La corrente che fluisce nelle spire vale rispettivamente 1 A e 2 A

Prima di tutto calcoliamo il campo magnetico generato nel punto da ciascuna spira.

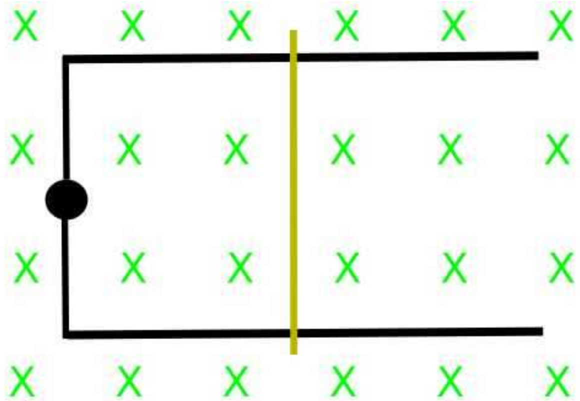
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{1A}{0{,}05m} = 1{,}26 \cdot 10^{-5} T$$
$$B_2 = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{2A}{0{,}05m} = 2{,}51 \cdot 10^{-5} T$$

A questo punto calcoliamo il campo magnetico totale, sapendo che i due vettori sono perpendicolari, essendo perpendicolari le spire. Applichiamo qundi il Teorema di Pitagora:

$$B_{TOT} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 2{,}81 \cdot 10^5 T$$

ESERCIZIO 1

Su una forcella metallica a U è appoggiata una sbarretta conduttrice di massa m disposta come in figura. Il sistema è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare al piano del sistema. Fra la sbarretta e la forcella esiste un attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito pari a K. Determinare il valore minimo della corrente che deve circolare affinché la sbarretta possa muoversi sotto l'azione dell'interazione campo magnetico-corrente.



Affinché il filo possa muoversi, deve risultare:

$$F_{Filo} = F_{Attrito}$$

Quindi

$$F_{Attrito} = Bil$$

sapendo che

$$F_{Attrito} = mgK$$

otteniamo:

$$Bil = mgK$$

$$i = \frac{mgK}{Bl}$$

ESERCIZIO 2
Un fascio di protoni viene accelerato da due elettrodi tra i quali esiste una differenza di potenziale di $10^4 V$.
Con la velocità acquisita i protoni entrano in un campo magnetico con direzione perpendicolare alla loro velocità e di modulo B= 0,2 T. determinare il raggio della traiettoria descritta dai protoni.

Sui protoni che entrano nel campo magnetico agisce la forza di Lorentz. La facile equazione

$r = \frac{mV}{qB}$ ci permetterebbe di trovare facilmente il raggio. Rimane solo da trovare la velocità V.

Siccome sappiamo che

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot mV^2$$

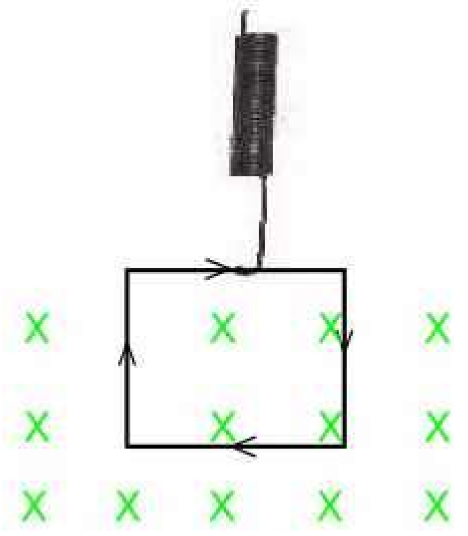
possiamo ricavare facilmente la velocità.

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^4 V}{1{,}67 \cdot 10^{-27} kg}} = 1{,}38 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$$

Ora che conosciamo la velocità, possiamo ricavare il raggio della traiettoria con l'equazione espressa qui sopra.

$$r = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} Kg \cdot 1{,}38 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}{1{,}60 \cdot 10^{-19} C \cdot 0{,}2T} = 7{,}20 \cdot 10^{-2} m$$

ESERCIZIO 3
Nel telaietto metallico rappresentato in figura viene fatta circolare una corrente di 2A. Il valore del campo B vale 0,1 T. Stabilire di quanto si allunga la molla che sorregge il telaio sapendo che la costante elastica vale $1 \frac{N}{m}$



Come si può notare solo tre dei quattro lati del telaietto sono immersi nel campo magnetico. Le forze agenti sui due lati si compensano poiché sono uguale in modulo ma con versi opposti. solo il lato inferiore è sottoposto ad una forza di modulo Bil che lo spinge verso il basso. Calcoliamone il modulo:

$$F_{Filo} = 0{,}1T \cdot 2A \cdot 0{,}1m = 0{,}02N$$

Bisogna ora ricordare la Legge di Hooke: $F = K \cdot \Delta l$ Possiamo quindi calcolare l'allungamento della molla sapendo che essa è sottoposta ad una forza di 0,02 N.

$$\Delta l = \frac{0{,}02N}{1\frac{N}{m}} = 0{,}02m$$

ESERCIZIO 4
Due fili rettilinei disposti l'uno parallelo all'altro, sono immersi in un campo magnetico B perpendicolare ad essi. Nei due fili circola una corrente di 50 A. A quale distanza devono essere messi i due fili affinché sul filo 1 di sinistra non si produca alcuna forza?

Sul filo 1 agiscono due forze: una dovuta al campo magnetico, e una dovuta alla presenza del secondo filo percorso da corrente. I rispettivi moduli saranno:

$$F = Bil \text{ e } F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 \cdot i_2 \cdot l}{d}$$

Poiché le due forze hanno versi opposti, devono essere uguali in modulo per fare in modo che il filo 1 resti fermo. E quindi:

$$Bil = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 \cdot i_2 \cdot l}{d}$$

Otteniamo quindi:

$$d = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_2}{d} = 0{,}1m$$

ESERCIZIO DI FISICA

SULL'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DI UN SISTEMA DI 2 CARICHE

TRATTO DA "FISICA: IDEE ED ESPERIMENTI" 3^ VOL, PAG. 317, N.3

Determina il lavoro che dovrebbe compiere la forza esterna quando due cariche di 1,00μC dall'infinito vengano disposte alla distanza di 1,00m fra loro, nell'ipotesi che:

a) abbiano lo stesso segno; b) abbiano segno opposto. Qual è, il valore dell'energia potenziale del sistema, in ognuno dei due casi? $[9\cdot 10^{-3}J\,;-9\cdot 10^{-3}J\,]$

Dati del problema	Formule	Incognite da determinare
$q_1 = q_2 = 1\cdot 10^{-6}C$ $r = 1{,}00m$	$L(est)_{\infty\to P} = L(ele)_{P\to\infty} = U$ $L(est)_{\infty\to P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r}$ (Lavoro svolto dalla forza esterna opposta a quella elettrica, quando la carica q_2 si sposta dall'infinito in un punto P posto alla distanza r da q_1)	$U = ?$

Svolgimento

Il lavoro $L(est)_{\infty\to P}$ che la forza esterna (opposta a quella elettrica generata da q_1 su q_2) compie su q_2, quando la carica q_2 si sposta dall'infinito in un punto P a distanza r da q_1, è uguale al lavoro $L(ele)_{P\to\infty}$ che la forza elettrica generata da q_1 su q_2 compie su q_2, quando la carica q_2 si sposta da un punto P posto a distanza r da q_1 fino all'infinito (in pratica q_2 si sposta fino ad un punto così lontano da q_1 per cui la forza elettrica esercitata da q_1 si possa considerare trascurabile). Questo lavoro è per definizione l'energia potenziale U della carica q_2 posta a distanza r dalla carica q_1 che genera il campo elettrico, la quale energia viene anche chiamata energia potenziale del sistema di cariche q_1 e q_2. Per quanto detto vale la relazione:

$L(est)_{\infty\to P} = L(ele)_{P\to\infty} = U$

L'energia potenziale U della carica q_2 posta nel vuoto nel campo generato da q_1, si dimostra (per la dimostrazione vedere la dispensa sull'energia potenziale elettrica pubblicata nella pagina web in cui si trova il presente esercizio) che vale:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r}$$

Pertanto:

Caso a) $L(est)_{\infty\to P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r} = 9\cdot 10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{(1\cdot 10^{-6}C)\cdot(1\cdot 10^{-6}C)}{1{,}00m} = 9\cdot 10^{-3}Nm = \boxed{9\cdot 10^{-3}J}$

Caso b) $L(est)_{\infty\to P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r} = 9\cdot 10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{(1\cdot 10^{-6}C)\cdot(-1\cdot 10^{-6}C)}{1{,}00m} = -9\cdot 10^{-3}Nm = \boxed{-9\cdot 10^{-3}J}$

ESERCIZIO DI FISICA

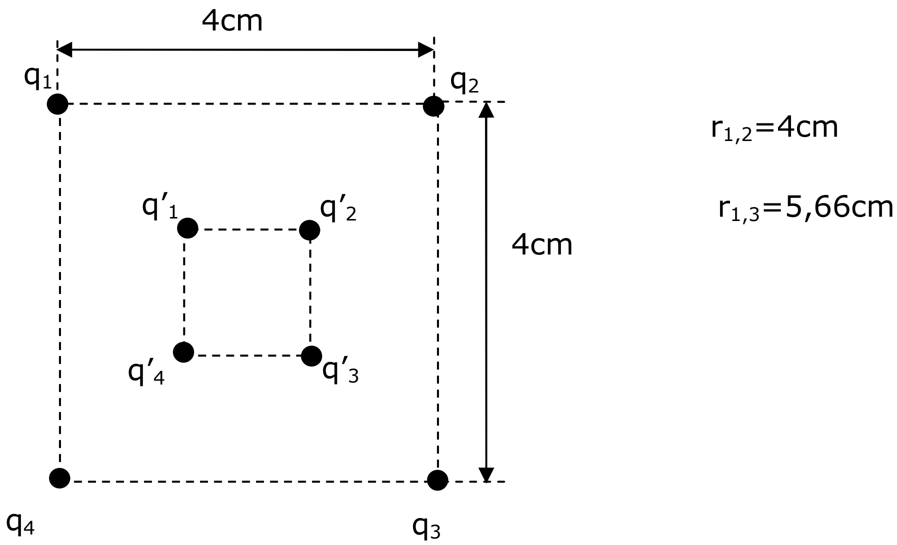
SULL'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DI UN SISTEMA DI 4 CARICHE

TRATTO DA "FISICA: IDEE ED ESPERIMENTI" 3^ VOL, PAG. 317, N.7

Quattro cariche uguali di valore assoluto $q = 6{,}00\mu C$ sono disposte ai vertici di un quadrato di lato l=4,00cm.

a) Determina l'energia potenziale del sistema. b) Quanto lavoro è necessario compiere per avvicinare le cariche in modo che il lato del quadrato risulti diviso per tre? $[\,43{,}8\,J\,;87{,}6\,J\,]$

Dati del problema	Formule	Incognite
$q=q_1=q_2=q_3=q_4= 6\cdot 10^{-6}C$ $l = 4{,}00\cdot 10^{-2}m$ d= $\sqrt{2}l = 5{,}66\cdot 10^{-2}m$ d= diagonale del quadrato di lato *l*. $l' = \frac{1}{3}l$, $d' = \frac{1}{3}d$ l' e d' sono rispettivamente il lato e la diagonale del quadrato minore	$L(est)_{\infty\to P} = L(ele)_{P\to\infty} = U_{1,2}$ $L(est)_{\infty\to P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r}$ (Energia potenziale delle cariche q_1 e q_1, uguale al lavoro svolto dalla forza esterna opposta a quella elettrica, quando la carica q_2 si sposta dall'infinito in un punto P posto alla distanza r da q_1) $U_{tot} = u_{1,2}+u_{1,3}+u_{1,4}+u_{2,3}+u_{2,4}+u_{3,4}$ (L'energia potenziale di un sistema di cariche è uguale alla somma delle energie potenziali di tutte le possibili coppie di cariche del sistema)	$U_{tot} = ?$ L=?



Svolgimento

Quesito (a)

L'energia potenziale del sistema di quattro cariche è uguale al lavoro che la forza esterna opposta a quella elettrica deve svolgere quando il sistema di cariche, inizialmente all'infinito, si spostano fino a formare la configurazione considerata, in questo caso le cariche sono ai vertici di un quadrato di lato 4 cm. Immaginiamo allora di costituire la nostra distribuzione di carica a partire da q_4 già nella posizione finale. Quando q_3 si porta nella sua posizione finale la forza esterna compie un lavoro pari a $U_{3,4}$. Quando q_2 si porta nella sua posizione finale la forza esterna, opposta alla somma delle forze elettriche generate su q_2 da q_4 e q_3 compie un lavoro uguale a $U_{2,3} + U_{2,4}$. Quando infine, q_1 si porta nella sua posizione finale la forza esterna, opposta alla somma delle forze elettriche su q_1 generate dalle cariche q_2, q_3, q_4 è uguale $U_{1,2} + U_{1,3} + U_{1,4}$. Pertanto il lavoro complessivamente svolto dalla forza esterna quando si viene a costituire il quadrato di cariche è uguale alla somma dei lavori suddetti, ossia:

$U_{tot} = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{1,4} + U_{2,3} + U_{2,4} + U_{3,4}$

Poiché, come è noto, l'energia potenziale di un sistema di due cariche q_i e q_j poste nel vuoto è uguale a:

$$U_{i,j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{i,j}}$$

Dove: $r_{i,j}$ è la distanza che separa le due cariche q_i e q_j, mentre $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

si ha:

$$U_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_4}{r_{1,4}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_4}{r_{2,4}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_3 q_4}{r_{3,4}}$$

$$U_{tot} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{1,3}} + \frac{1}{r_{1,4}} + \frac{1}{r_{2,3}} + \frac{1}{r_{2,4}} + \frac{1}{r_{3,4}} \right)$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$U_{tot} = (6 \cdot 10^{-6} C)^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-2} m} + \frac{1}{5{,}66 \cdot 10^{-2} m} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-2} m} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-2} m} + \frac{1}{5{,}66 \cdot 10^{-2} m} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-2} m} \right)$$

$$= 36 \cdot 10^{-12} C^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(25\frac{1}{m} + 17{,}7\frac{1}{m} + 25\frac{1}{m} + 25\frac{1}{m} + 17{,}7\frac{1}{m} + 25\frac{1}{m} \right)$$

$$= 324 \cdot 10^{-3} Nm^2 \cdot \left(135{,}4 \frac{1}{m} \right)$$

$$\boxed{U_{tot} = 43{,}8 \text{ Nm} = 43{,}8 \text{ J}}$$

Quesito (b)

Se dividiamo per tre il lato del quadrato, risulta divisa per tre anche la diagonale, di conseguenza le energie potenziali di ciascuna coppia di cariche risulta moltiplicata per 3 e pertanto anche l'energia potenziale della nuova configurazione di carica è 3 volte quella iniziale. Se indichiamo con U'_{tot} l'energia potenziale della nuova distribuzione di carica risulta valida la relazione: $U'_{tot} = 3U_{tot}$. Se consideriamo che la configurazione di carica finale relativa al quadrato più piccolo può essere ottenuta portando le cariche dall'infinito prima nella configurazione relativa al quadrato più grande e poi portandole nella configurazione relativa al quadrato più piccolo, in termini di lavoro della forza esterna vale la seguente relazione:

$U'_{tot} = U_{tot} + L$ con L il lavoro cercato, da cui si ha:

$L = U'_{tot} - U_{tot} = 3\, U_{tot} - U_{tot} = 2\, U_{tot} = 2 \cdot 43{,}8 J = 87{,}6$ J.

$$\boxed{L = 87{,}6 \text{ J}}$$

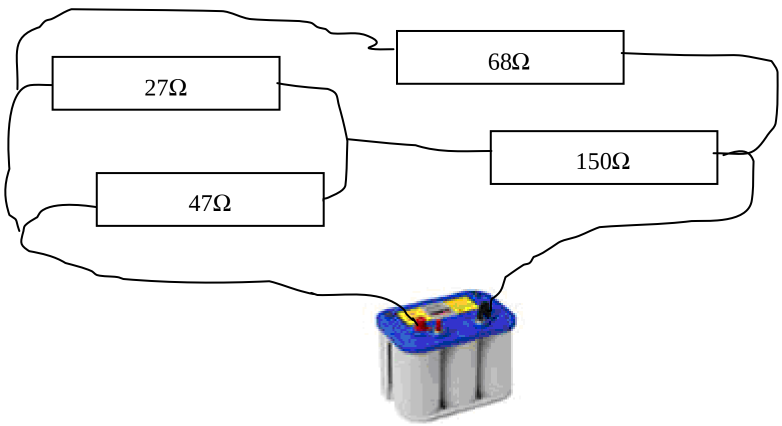
ESERCIZIO SULLA CORRENTE ELETTRICA CONTINUA

TRATTO DA "FISICA: IDEE ED ESPERIMENTI" 3^ VOL, PAG. 335, N.4

In figura è mostrato un circuito formato da una batteria e da alcuni resistori. Si può ritenere che i fili di collegamento abbiano resistenza nulla.

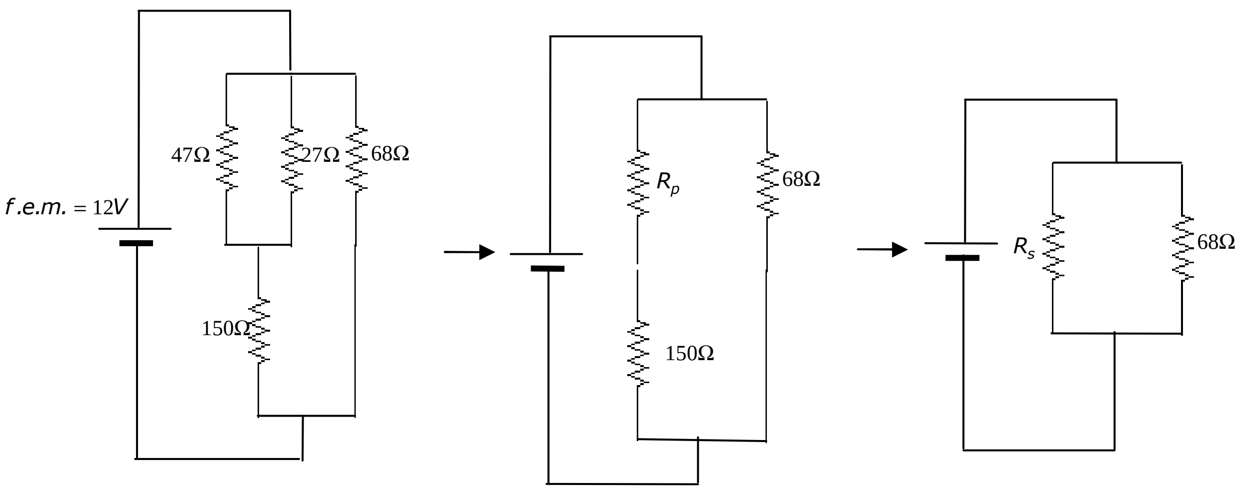
a) Disegna lo schema elettrico del circuito, utilizzando simboli per i componenti.

b) Individua le possibili combinazioni di resistori in serie e in parallelo.



Svolgimento

a) Schema elettrico del circuito



b)

I resistori in parallelo sono (vedere la figura): 47 Ω con 27 Ω. La loro resistenza equivalente R_p è in serie con 150 Ω. La resistenza equivalente a questa ultima serie, R_s è in parallelo con 68 Ω.

ESERCIZIO SULLA CORRENTE ELETTRICA CONTINUA

TRATTO DA "FISICA: IDEE ED ESPERIMENTI" 3^ VOL, PAG. 335, N.14

Considera il seguente circuito. Calcola le correnti che circolano nei tre rami e la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_3, utilizzando le leggi di Kirchhoff.

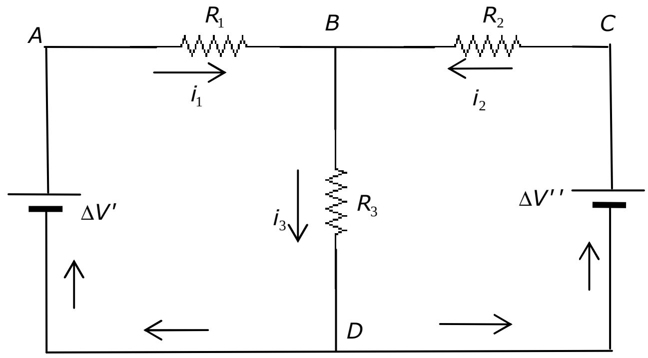
$\Delta V' = 18V$

$\Delta V'' = 12V$

$R_1 = 330\Omega$

$R_2 = 220\Omega$

$R_3 = 180\Omega$



Svolgimento

Applicando le leggi di Kirchhoff al nodo B e alle maglie ABDA e BCDB percorse nel verso indicato dalle lettere, si ha:

Nodo B: $i_1 + i_2 = i_3$;

Maglia ABDA: $-i_1R_1 - i_3R_3 + \Delta v' = 0$;

Maglia BCDB: $i_2R_2 - \Delta V'' + i_3R_3 = 0$.

Si risolve ora il sistema delle tre equazioni nelle incognite i_1, i_2, i_3.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_3 \\ -i_1R_1 - i_3R_3 + \Delta v' = 0 \\ i_2R_2 - \Delta V'' + i_3R_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} i_3 = i_1 + i_2 \\ -i_1R_1 - (i_1 + i_2)R_3 + \Delta v' = 0 \\ i_2R_2 - \Delta V'' + (i_1 + i_2)R_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ -i_1R_1 - i_1R_3 - i_2R_3 + \Delta v' = 0 \\ i_2R_2 - \Delta V'' + i_1R_3 + i_2R_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ -i_1(R_1 + R_3) - i_2R_3 = -\Delta v' \\ i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3) = \Delta V'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -i_1(R_1 + R_3) = i_2R_3 - \Delta v' \\ i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3) = \Delta V'' \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ i_1 = -\dfrac{i_2R_3 - \Delta v'}{R_1 + R_3} \\ i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3) = \Delta V'' \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ \dots \\ -\dfrac{i_2R_3 - \Delta v'}{R_1 + R_3} R_3 + i_2(R_2 + R_3) = \Delta V'' \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ -i_2R_3^2 + \Delta V' R_3 + i_2(R_2 + R_3)(R_1 + R_3) = \Delta V''(R_1 + R_3) \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ \dots \\ i_2\left[-R_3^2 + (R_2 + R_3)(R_1 + R_3)\right] + \Delta V' R_3 = \Delta V''(R_1 + R_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ i_2 = \dfrac{\Delta V''(R_1 + R_3) - \Delta V' R_3}{-R_3^2 + (R_2 + R_3)(R_1 + R_3)} \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ \dots \\ i_2 = \dfrac{12(330 + 180) - 18 \cdot 180}{-180^2 + (220 + 180)(330 + 180)} \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ \dots \\ i_2 = \dfrac{2880}{171600} \end{cases} ; \begin{cases} \dots \\ i_1 = -\dfrac{0{,}017 \cdot 180 - 18}{330 + 180} \\ i_2 = 0{,}017 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \dots \\ i_1 = 0{,}029 \\ i_2 = 0{,}017 \end{cases} ; \begin{cases} i_3 = 0{,}046A \\ i_1 = 0{,}029A \\ i_2 = 0{,}017A \end{cases}$$

La differenza di potenziale ai capi della resistenza R_3 è data da: $i_3R_3 = 0{,}046 \cdot 180 = 8{,}3V$.