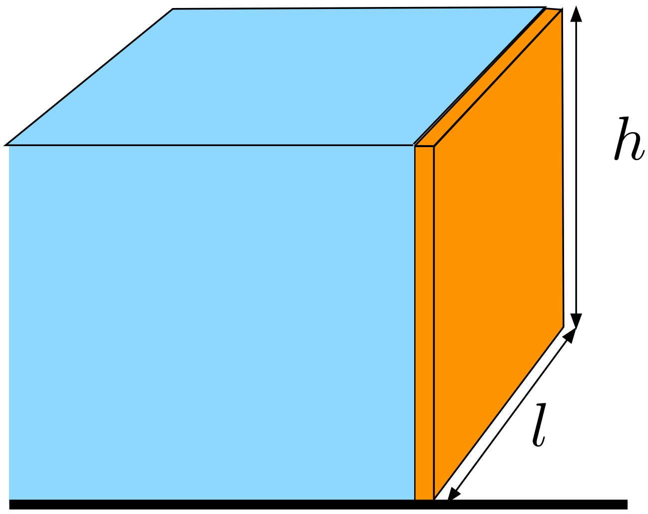
Esercizio (tratto dall'Esempio 9.8 del Mazzoldi 2)

Una parete larga $l = 5\,\mathrm{m}$ e alta $h = 3\,\mathrm{m}$ separa una massa d'acqua dall'ambiente.

1. Calcolare a quale forza è sottoposta la parete.
2. Le condizioni da applicare affinché la parte rimanga ferma



SOLUZIONE

1. Consideriamo le forze

   - Forza esercitata dall'acqua

   $$F^{\text{acqua}} = \int p(z)\, dS = \int_0^l dx \int_0^h dz\, p(z) \tag{1}$$

   Dalla legge di Stevino abbiamo che (se scegliamo l'asse z diretto verso il basso, con $z = 0$ corrispondente al pelo dell'acqua)

   $$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{2}$$

   Pertanto

   $$\begin{aligned} F^{\text{acqua}} &= \int_0^l dx \int_0^h dz\, (p_0 + \rho g z) = \\ &= l \int_0^h dz\, (p_0 + \rho g z) = \\ &= l \left(p_0\, h + \rho g \frac{h^2}{2} \right) \end{aligned}$$

   ossia

   $$F^{\text{acqua}} = p_0\, l h + \rho g l \frac{h^2}{2} \qquad \text{(diretta verso destra)} \tag{3}$$

   - Forza esercitata dall'aria

   $$F^{\text{aria}} = \int p_0\, dS = \int_0^l dx \int_0^h dz\, p_0 = p_0\, l h \qquad \text{(diretta verso sinistra)} \tag{4}$$

   - La forza totale esercitata sulla diga è a somma (algebrica) delle due componenti

   $$F^{\text{tot}} = F^{\text{acqua}} - F^{\text{aria}} = \rho g\, l \frac{h^2}{2} \tag{5}$$

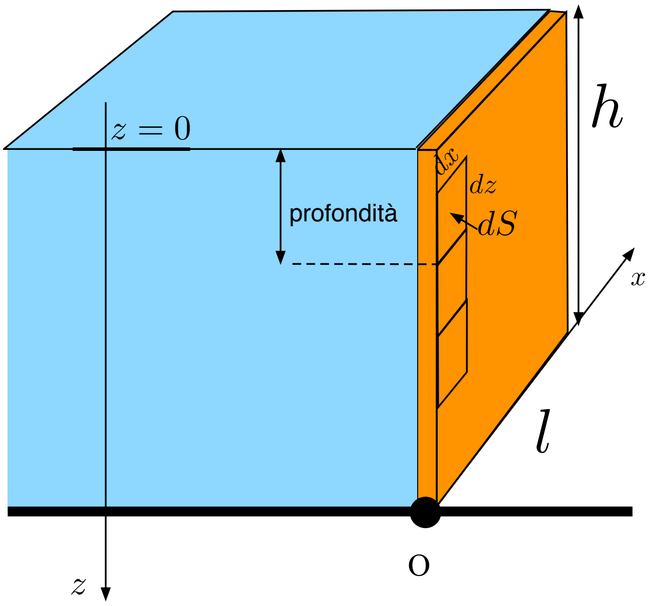
   Nota bene:
   la forza dipende in maniera *quadratica* dall'altezza h del volume d'acqua.

Sostituendo i dati, e ricordando che la densità dell'acqua è

$$\rho = 10^3\, \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \quad , \tag{6}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} F^{\text{tot}} &= 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, 5\text{m} \cdot \frac{9\text{m}^2}{2} = \\ &= 221 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}\,\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 221\, k\text{N} \end{aligned} \tag{7}$$



2. Affinché la parete rimanga fissa occorre esercitare una forza F^{ext} ed un momento M^{ext} totali esterni in modo che le conditioni di statica del corpo rigido siano soddisfatti, ossia

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F^{ext} + F^{tot} & = & 0 \\ & & \\ M^{ext} + M^{tot} & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} F^{ext} & = & -F^{tot} \\ & & \\ M^{ext} & = & -M^{tot} \end{array} \right. \tag{8}$$

Mentre al punto precedente abbiamo determinato F^{tot}, dobbiamo ora determinare il momento total esercitato sulla parete dall'acqua e dall'aria.

Consideriamo il momento rispetto al fondale come polo (non importa a quale posizione x si ponga il polo O perché il problema è invariante lungo x e, siccome la forza netta è perpendicolare alla parete, fissato un qualunque polo O lungo la lunghezza l, l'unica cosa che conta è la distanza verticale da O e non quella orizzontale). Anche qui dobbiamo valutare un integrale

$$M^{tot} = \int dM(z) = \int \underbrace{(h-z)}_{\text{braccio}} dF(z) \tag{9}$$

Su ogni elementino dS la forza $dF(z)$ *netta* è data dalla differenza tra la forza dell'acqua e quella dell'aria

$$dF(z) = (p_0 + \rho g z) dS \; - \; p_0 dS = \; \rho g z \, dS = \; \rho g z \, dx \, dz \tag{10}$$

Inserendo (10) in (9) otteniamo

$$\begin{aligned} M^{tot} &= \int dM(z) = \\ &= \int_0^l dx \int_0^h dz \, (h-z) \, \rho g z \; = \\ &= l \rho g \left(\int_0^h dz \, (h-z) \, z \right) = \\ &= l \rho g \left(h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

ossia

$$M^{tot} = l\rho g \frac{h^3}{6} \tag{12}$$

Nota bene: A differenza della forza $dF(z)$ che cresce linearmente al crescere della profondità z, il momento $dM(z)$ non ha un andamento monotono con z: infatti per z piccoli (=vicino alla superficie) il braccio è grande ma la forza è piccola, mentre per $z \lesssim h$ (=vicino al fondo) il braccio è piccolo ma la forza è grande. Infatti il massimo valore del momento $dM(z) = (h-z)\,\rho g\, z$ si ha a metà della diga, dove si ha un giusto compromesso tra intensità della forza e braccio.

Pertanto dalla seconda delle equazioni cardinali (8), il momento esterno da applicare è

$$M^{ext} = -M^{tot} \tag{13}$$

Dal momento che, per la prima delle equazioni (8) dobbiamo anche applicare una forza $F^{ext} = -F^{tot}$, possiamo realizzare un momento $-M^{tot}$ applicando $-F^{tot}$ ad un braccio d dato da

$$M^{tot} = F^{tot}\, d \tag{14}$$

ossia

$$\begin{aligned} d &= \frac{M^{tot}}{F^{tot}} = \\ &= \frac{l\rho g \frac{h^3}{6}}{\rho g\, l \frac{h^2}{2}} \\ &= \frac{h}{3} \qquad \text{(rispetto al polo)} \end{aligned} \tag{15}$$

Pertanto per evitare che la parete si muova, occorre applicare una forza uguale ed opposta $-F^{tot}$, ed occorre applicarla ad un'altezza di $h/3$ dal fondale, in modo che anche il momento si annulli.