075II 23/24 - COMUNICAZIONI NUMERICHE
Esercizi per prova scritta e orale

1. Dati due eventi A e B tali che $A \subset$ B, si dimostri che $P(A) \leq P(B)$.

2. Si consideri un contenitore con 8 palline bianche e 4 palline nere. Si estraggano a caso due palline. Si calcoli:
   a. la probabilità che entrambe le palline siano nere;
   b. la probabilità che entrambe le palline siano bianche.

3. Un arciere ha la probabilità $p = 1/3$ di centrare il bersaglio con una freccia. Quante frecce deve tirare affinché la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio superi l'80%?

4. Dato un mazzo di 40 carte, si calcoli la probabilità di ottenere 3 assi in 3 estrazioni successive nell'ipotesi di:
   a. estrazione con reimmissione;
   b. estrazione senza reimmissione.

5. Si estraggano 5 carte da un mazzo di 40. Qual è la probabilità di ottenere un tris di assi, il 7 di bastoni e il 4 di denari?

6. La percentuale di studenti del corso che porta la calcolatrice a lezione è pari al 75%. Selezionando casualmente sei studenti, qual è la probabilità che non più di due abbiano con sé la calcolatrice?

7. Si enunci e si dimostri il teorema della probabilità totale.

8. In una certa popolazione, l'1% dei soggetti è affetto da COVID-19. Il test disponibile ha una sensibilità (probabilità che un soggetto infetto risulti positivo al test) ed una specificità (probabilità un soggetto non infetto risulti negativo al test) entrambe pari all'80%.
   a. Una persona scelta casualmente tra la popolazione effettua il test e risulta positiva: qual è la probabilità che sia effettivamente affetta da COVID-19?
   b. Si adotta un nuovo test con la medesima sensibilità del precedente ma con specificità del 99,9%. Se una persona scelta casualmente effettua il nuovo test e risulta positiva, qual è la probabilità che sia affetta da COVID-19?

9. Tre macchine A, B e C producono rispettivamente il 50%, il 30% ed il 20% dei pezzi realizzati dalla fabbrica. Ciascuna macchina produce il 2%, il 3% e il 4% di pezzi difettosi. Viene estratto un pezzo a caso: determinare la probabilità che esso sia difettoso.

10. Un lampadario è composto di due lampadine identiche collegate in parallelo. Ognuna ha una probabilità $p = 0.2$ di guastarsi entro 5000 ore di funzionamento. Le due lampadine si guastano in modo indipendente. Quale è la probabilità che dopo 5000 ore il lampadario sia almeno parzialmente acceso?

11. Data la funzione distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X e due numeri reali x_1 e x_2 con $x_1 < x_2$, si mostri come calcolare la probabilità $P(x_1 < X \leq x_2)$.

12. Si descriva come misurare sperimentalmente la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X utilizzando la frequenza relativa.

13. Il tempo di attesa X per sedersi ad un ristorante si può modellare attraverso una v.a. esponenziale monolatera (densità di probabilità $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) u(x)$) con parametro $\lambda = 10$ minuti. Si calcoli l'istante x_0 tale che la probabilità che l'attesa superi x_0 sia pari al 5%.

14. Il peso dei pacchi di pasta di una marca segue una distribuzione gaussiana con media η 502 grammi e deviazione standard σ 5 grammi.

a. Qual è la probabilità che un pacco pesi meno di 495 grammi?
b. Si scelgano casualmente dagli scaffali 20 pacchi di questa pasta: qual è la probabilità di trovarne almeno uno che pesa meno di 495 grammi?

15. Si enunci e si dimostri il teorema dell'aspettazione per v.a. discrete.

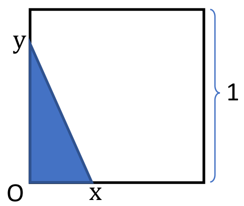
16. Una v.a. X ha una densità di probabilità del tipo: $f_X(x) = kx\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$, con *k* costante reale.

a. Determinare *k* in modo che $f_X(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità.
b. Sia data ora la variabile $Y = X^2$. Calcolare la densità di probabilità della nuova variabile Y e valutarne il valor medio.

17. Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita sull'intervallo [2,4].

a. Scrivere l'espressione della densità di probabilità di X, rappresentarla graficamente e calcolare valor medio e varianza di X.
b. Ricavare l'espressione della densità di probabilità $f_Y(y)$ della variabile aleatoria $Y = 3X - 1$ e rappresentarla graficamente.

18. La giornata di lavoro di un operatore in un centralino intasato di richieste prevede di rispondere a 100 telefonate che arrivano senza sosta e modellabili attraverso una v.a. esponenziale monolatera (densità di probabilità $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) u(x)$) con parametro $\lambda = 3$ minuti. Calcolare la probabilità che l'operatore lavori più di 6 ore.



19. Sia dato un quadrato di lato unitario come in figura. Si utilizzino due variabili aleatorie X e Y uniformemente distribuite ed indipendenti per fissare due punti x e y sui due lati adiacenti al vertice O.

a. Calcolare la densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$ del sistema di due v.a. X,Y.
b. Calcolare la probabilità che l'area del triangolo xOy sia minore di 1/8.

20. Di una variabile aleatoria X sono noti il valor medio η_x e la varianza σ_X^2. Sia data la v.a. $Y = 2X - 3$.

a. Calcolare η_Y e σ_Y^2 in funzione di η_X e σ_X^2.
b. Calcolare correlazione, covarianza e coefficiente di correlazione del sistema di v.a. X,Y sempre in funzione di η_X e σ_X^2.