Quattordicesima Esercitazione

Esercizio 1. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$$

sull'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_2 = 0\}$.

Esercizio 2. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 - x_1\,x_2 - x_1 + 2\,x_2$$

sul poliedro di vertici $(-1, 0), (0, 2), (0, -2)$, $(3, 2)$ e $(4, -2)$, a partire dal punto $x^k = (1, 2)$.

Esercizio 3. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$.

Esercizio 4. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\,x_2^2$$

sul poliedro di vertici $(-3, 1), (0, 3), (3, 1)$, $(2, -2)$ e $(-2, -2)$, a partire dal punto $x^k = (1, -2)$.

Esercizio 5. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1\,x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 8\}$.

Esercizio 6. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2\,x_1^2 + 3\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 10\,x_1 - 6\,x_2$$

sul poliedro di vertici $(0, 0), (0, 3), (2, 5)$, $(4, 3)$ e $(4, 0)$, a partire dal punto $x^k = (1, 0)$.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4\,x_1 - 2\,x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 4\,x_2^2 - 4\,x_1 - 8\,x_2 + 4 \leq 0, \quad x_1 \leq 2\}$.

Esercizio 8. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

sul poliedro di vertici $(0, 0), (0, 2), (1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ e $(3, 0)$, a partire dal punto $x^k = (1, 2)$.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ 4\,x_1^2 + x_2^2 = 4\}$.

Esercizio 10. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2\,x_2 - 2\,x_1^2 + x_1 + x_2$$

sul poliedro di vertici $(-2, -2), (0, 2), (2, 1)$, $(2, -1)$, a partire dal punto $x^k = (0, 1)$.

Esercizio 11. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - x_2^2 = 1\}$.

Esercizio 12. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

sul poliedro di vertici $(-2, 0), (0, 2), (2, 0), \ (0, -2)$, a partire dal punto $x^k = (-1, -1)$.

Esercizio 13. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2\, x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Esercizio 14. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2\,(x_1 - 3)^2 - (x_2 + 1)^2$$

sul poliedro di vertici $(1, 1), (1, 2), (2, 3), \ (3, 3), \ (4, 1)$, a partire dal punto $x^k = (2, 3)$.

Esercizio 15. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 2\, x_2^2 - 4\, x_1 + 3 \leq 0\}$.

Esercizio 16. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5\, x_2^2 - 6\, x_1 + 4\, x_2$$

sul poliedro di vertici $(-2, 0), (-1, 2), (2, 3)$ e $(3, 0)$.

Esercizio 17. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Esercizio 18. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1\, x_2$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Esercizio 19. Determinare i punti della curva

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1 - x_1\, x_2\}$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_2 = 0\}$.

Il vincolo é regolare?	SI, il gradiente del vincolo non si annulla sull'insieme D
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0,0) \quad \mu = -\frac{1}{2} \qquad f(x) = 0$ $x = (0,-2) \quad \mu = \frac{1}{2} \qquad f(x) = -2$ $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \mu = 1 \qquad f(x) = -\frac{9}{4}$ $x = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \mu = 1 \qquad f(x) = -\frac{9}{4}$
Punti di massimo globale	$(0,0)$
Punti di minimo globale	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Esercizio 2. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 - x_1\,x_2 - x_1 + 2\,x_2$$

sul poliedro di vertici $(-1,0), (0,2), (0,-2)$, $(3,2)$ e $(4,-2)$, a partire dal punto $x^k = (1,2)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$3\,x_1 + x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(-1,0)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$8\,t^2 - 8\,t + 4$
Passo	$\frac{1}{2}$
x^{k+1}	$(0,1)$

Esercizio 3. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$.

I vincoli sono regolari?	SI, il gradiente di ogni vincolo non si annulla mai sull'insieme D
Soluzioni del sistema LKT	$x = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad \lambda = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$ $\quad f(x) = 2\sqrt{2}$ $x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $\quad \lambda = (\frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$ $\quad f(x) = -2\sqrt{2}$ $x = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad \lambda = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad f(x) = \sqrt{2}$ $x = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad \lambda = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\quad f(x) = -\sqrt{2}$
Punti di massimo globale	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Punti di minimo globale	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Esercizio 4. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\,x_2^2$$

sul poliedro di vertici $(-3, 1), (0, 3), (3, 1)$, $(2, -2)$ e $(-2, -2)$, a partire dal punto $x^k = (1, -2)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$\frac{1}{5}\ x_1 - \frac{4}{5}\ x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(0, 3)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$51\ t^2 - 42\ t$
Passo	$\frac{7}{17}$
x^{k+1}	$\left(\frac{10}{17}, \frac{1}{17}\right)$

Esercizio 5. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 \leq 8\}$.

Il vincolo é regolare?	SI, valgono le condizioni di Slater
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0,0)$ $\quad \lambda = 0$ $\quad f(x) = 0$ $x = (-2,-2)$ $\quad \lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 4$ $x = (2,2)$ $\quad \lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 4$ $x = (-2,2)$ $\quad \lambda = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = -4$ $x = (2,-2)$ $\quad \lambda = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = -4$
Punti di massimo globale	$(-2,-2) \quad (2,2)$
Punti di minimo globale	$(-2,2) \quad (2,-2)$

Esercizio 6. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2\, x_1^2 + 3\, x_1\, x_2 + x_2^2 - 10\, x_1 - 6\, x_2$$

sul poliedro di vertici $(0,0), (0,3), (2,5)$, $(4,3)$ e $(4,0)$, a partire dal punto $x^k = (1,0)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$-6\, x_1 - 3\, x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(4,3)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$54\, t^2 - 27\, t - 8$
Passo	$\frac{1}{4}$
x^{k+1}	$\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4\,x_1 - 2\,x_2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + 4\,x_2^2 - 4\,x_1 - 8\,x_2 + 4 \leq 0, \quad x_1 \leq 2\}$.

Esistono massimi e minimi globali?	SI, la funzione obiettivo é continua e l'insieme D é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0,1) \quad \lambda = (-1, 0) \quad f(x) = -1$ $x = (2,0) \quad \lambda = (-\frac{1}{4}, 0) \quad f(x) = -4$ $x = (2,2) \quad \lambda = (-\frac{1}{4}, 0) \quad f(x) = -4$ $x = (2,1) \quad \lambda = (0, 0) \quad f(x) = -5$
Punti di massimo globale	$(0,1)$
Punti di minimo globale	$(2,1)$

Esercizio 8. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

sul poliedro di vertici $(0,0), (0,2), (1,3)$, $(2,3)$, $(3,2)$ e $(3,0)$, a partire dal punto $x^k = (1,2)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$-x_1 + x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(3,0)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$16\ t^2 - 8\ t$
Passo	$\frac{1}{4}$
x^{k+1}	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; 4\,x_1^2 + x_2^2 = 4\}$.

Esistono massimi e minimi globali?	SI, la funzione obiettivo é continua e l'insieme D é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1, 0)$ $\quad \mu = -\frac{1}{8}$ $\quad f(x) = 1$ $x = (-1, 0)$ $\quad \mu = \frac{1}{8}$ $\quad f(x) = -1$ $x = \left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right)$ $\quad \mu = 1$ $\quad f(x) = -\frac{65}{16}$ $x = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$ $\quad \mu = 1$ $\quad f(x) = -\frac{65}{16}$
Punti di massimo globale	$(1, 0)$
Punti di minimo globale	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right), \quad \left(-\frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$

Esercizio 10. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2\,x_2 - 2\,x_1^2 + x_1 + x_2$$

sul poliedro di vertici $(-2, -2), (0, 2), (2, 1)$, $(2, -1)$, a partire dal punto $x^k = (0, 1)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$x_1 + x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(2, 1)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$-4\,t^2 + 2\,t + 1$
Passo	$\frac{1}{4}$
x^{k+1}	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Esercizio 11. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - x_2^2 = 1\}$.

Esistono massimi e minimi globali?	Il minimo globale non esiste perché $\lim_{t \to +\infty} f(t, \sqrt{t^2 - 1}) = -\infty$ Il massimo globale esiste perché $-f$ é coerciva
Soluzioni del sistema LKT	$x = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{3}{2}$ $x = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{3}{2}$
Punti di massimo globale	$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Punti di minimo globale	non esistono

Esercizio 12. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

sul poliedro di vertici $(-2, 0), (0, 2), (2, 0), (0, -2)$, a partire dal punto $x^k = (-1, -1)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$2\,x_1 - 6\,x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(0, 2)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$10\,t^2 - 16\,t + 10$
Passo	$\frac{4}{5}$
x^{k+1}	$\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

Esercizio 13. Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2\,x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Esistono massimi e minimi globali?	SI perché f é continua e D é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1, 0)$ $\quad \mu = 0$ $\quad f(x) = 0$ $x = (-1, 0)$ $\quad \mu = -2$ $\quad f(x) = 4$
Punti di massimo globale	$(-1, 0)$
Punti di minimo globale	(1,0)

Esercizio 14. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2\,(x_1 - 3)^2 - (x_2 + 1)^2$$

sul poliedro di vertici $(1, 1), (1, 2), (2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$, a partire dal punto $x^k = (2, 3)$.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$-4\,x_1 - 8\,x_2$
y^k (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(1, 1)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$-2\,t^2 + 20\,t - 14$
Passo	1
x^{k+1}	(1, 1)

Esercizio 15. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

sull'insieme $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 2\,x_2^2 - 4\,x_1 + 3 \leq 0\}$.

Esistono massimi e minimi globali?	SI perché f é continua e D é compatto
Il vincolo é regolare?	SI perché $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$ (oppure perché é soddisfatta la condizione di Slater)
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1,0) \quad \lambda = 1 \quad f(x) = 1$ $x = (3,0) \quad \lambda = -3 \quad f(x) = 9$
Punti di massimo globale	$(3,0)$
Punti di minimo globale	$(1,0)$

Esercizio 16. Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5\,x_2^2 - 6\,x_1 + 4\,x_2$$

sul poliedro di vertici $(-2,0), (-1,2), (2,3)$ e $(3,0)$.

$x^k =$	(2,0)
Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$-2\,x_1 + 4\,x_2$
$y^k =$	$(-1,2)$
Passo	$\frac{7}{11}$
$x^{k+1} =$	$\left(\frac{1}{11}, \frac{14}{11}\right)$

Esercizio 17. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	SI perché f é continua e D é compatto
Il vincolo é regolare?	SI perché valgono le condizioni di Slater
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0, \pm 1), \quad \mu = -2 \qquad f(x) = 1$ $x = (\pm 1, 0), \quad \mu = -2 \qquad f(x) = 1$ $x = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mu = -1 \qquad f(x) = \frac{1}{2}$ $x = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mu = -1 \qquad f(x) = \frac{1}{2}$
Punti di massimo globale	$(1,0) \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad (0,-1)$
Punti di minimo globale	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Esercizio 18. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \, x_2$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	SI perché f é continua e D é compatto
I vincoli sono regolari?	SI perché sono funzioni affini
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1,0) \quad \lambda = (0, -3, -2) \quad f(x) = 1$ $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \lambda = (0, 0, \frac{1}{4}) \quad f(x) = -\frac{1}{8}$ $x = (0, a)$ con $0 \leq a \leq 1 \quad \lambda = (-a, 0, 0) \quad f(x) = 0$
Punti di massimo globale	$(1,0)$
Punti di minimo globale	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Esercizio 19. Il problema equivale a cercare i punti di massimo e di minimo globale della funzione $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sull'insieme

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1 - x_1\, x_2\}.$$

Poiché sulla curva γ si ha $x_1^2 + x_2^2 = 1$ e la variabile x_3 é scritta esplicitamente in funzione delle variabili x_1 e x_2, cioé $x_3 = 1 - x_1\, x_2$, il problema si riduce a cercare i massimi e minimi della funzione $f(x) = 1 + (1 - x_1\, x_2)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

La funzione obiettivo é continua e la regione ammissibile é compatta, quindi esistono massimi e minimi globali. Inoltre il vincolo é regolare perché valgono le condizioni di Slater. Le soluzioni del sistema LKT sono:

$$\begin{array}{lll}
x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu = \frac{1}{2} & f(x) = \frac{1}{4} \\
x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu = \frac{1}{2} & f(x) = \frac{1}{4} \\
x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu = -\frac{3}{2} & f(x) = \frac{9}{4} \\
x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu = -\frac{3}{2} & f(x) = \frac{9}{4}
\end{array}$$

Quindi i punti di massimo globale sono $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, mentre i punti di minimo globale sono $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Concludendo, i punti della curva γ con la massima distanza dall'origine sono

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right),$$

mentre i punti della curva γ con la minima distanza dall'origine sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right).$$