Esercizio

Una particella è attaccata ad una molla, e si osserva che il suo moto lungo l'asse x è descritto dalla seguente legge oraria

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t) \tag{1}$$

dove $x_0 = 20\,\mathrm{cm}$, $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ e A è una costante positiva $A < x_0$.

1. Determinare l'unità di misura della costante A;
2. Disegnare il grafico della legge oraria;
3. Il moto della particella risulta confinato tra due posizioni estremali. Quali ? (esprimerli in termini della costante A)
4. Calcolare l'andamento nel tempo della velocità della particella, e mostrare graficamente che anche la velocità varia tra due valori estremali. Esprimere tali valori in termini di A. In quali posizioni si trova la particella quando la velocità assume i valori massimo e minimo?
5. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (detta 'energia cinetica'); rappresentare graficamente come $E_k(t)$ varia allo scorrere del tempo;
6. Calcolare l'andamento nel tempo della quantità $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2$ (detta 'energia potenziale'), dove m è la massa della particella. Rappresentare graficamente come $E_p(t)$ varia allo scorrere del tempo;
7. Dimostrare che la quantità $E_m = E_p+E_k$ (detta 'energia meccanica') rimane costante nel tempo.

SOLUZIONE

1. Dato il coseno è un numero puro e la legge oraria (1) descrive una posizione, l'unità di misura della costante A è il m.

2. Il grafico della legge oraria (1) è semplicemente quello di un coseno, traslato in alto di x_0, come mostrato in Fig.1. Notiamo che il testo dice che $A < x_0$; pertanto $x_0 - A > 0$.

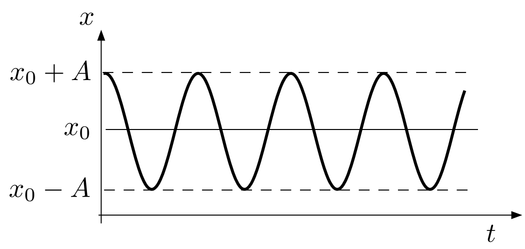

Figure 1: Andamento della legge oraria $x(t)$ [Eq.(1)]. La particella oscilla tra le due posizioni estremali $x_0 - A$ e $x_0 + A$.

3. Siccome il coseno varia tra -1 e 1, la particella oscilla attorno alla posizione x_0 con un'ampiezza A, raggiungendo le due posizioni estremali $x_0 - A$ e $x_0 + A$.

4. La velocità della particella è data dalla derivata rispetto al tempo della legge oraria

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) \tag{2}$$

Siccome il seno varia tra -1 e 1, la velocità della particella oscilla tra i due valori estremali (uguali ed opposti)

$$v_{min} = -A\omega \quad \text{negli istanti} \quad t_n^- = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}(n + \frac{1}{4}) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3}$$

$$v_{max} = +A\omega \quad \text{negli istanti} \quad t_n^+ = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}(n + \frac{3}{4}) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4}$$

come mostrato in Fig.2. In tali istanti la particella si trova nella posizione

$$x(t_n^-) = x_0 + A\cos(\omega t_n^-) = x_0 + A\cos\left(2\pi(n + \frac{1}{4})\right) = x_0 + 0 = x_0 \qquad \forall n = 0, 1, 2 \ldots \tag{5}$$

$$x(t_n^+) = x_0 + A\cos(\omega t_n^+) = x_0 + A\cos\left(2\pi(n + \frac{3}{4})\right) = x_0 + 0 = x_0 \qquad \forall n = 0, 1, 2 \ldots \tag{6}$$

ossia la particella raggiunge il massimo della velocità (in valore assoluto) quando passa per la posizione x_0, diretta verso destra ($v_{max} = +\omega A$) o verso sinistra ($v_{min} = -\omega A$) ad istanti alternati.

5. L'andamento nel tempo della quantità detta 'energia cinetica' è dato da

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \frac{1}{2}mv^2(t) = \\ &\quad \text{[uso (2)]} \\ &= \frac{1}{2}m\left(-A\omega \sin(\omega t)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

e mostra un comportamento oscillatorio nel tempo.

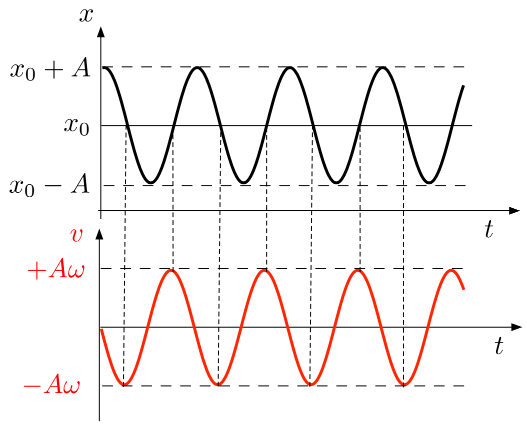

Figure 2: Andamento della velocità $v(t)$ [Eq.(2)]. I valori estremali della velocità vengono raggiunti quando la particella passa per la posizione x_0.

6. L'andamento nel tempo della quantità detta 'energia potenziale' è dato da

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \frac{1}{2} m\omega^2 (x(t) - x_0)^2 = \\ &\quad \text{[uso (1)]} \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 (A\cos(\omega t))^2 = \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) \end{aligned} \tag{8}$$

e mostra un comportamento oscillatorio nel tempo.

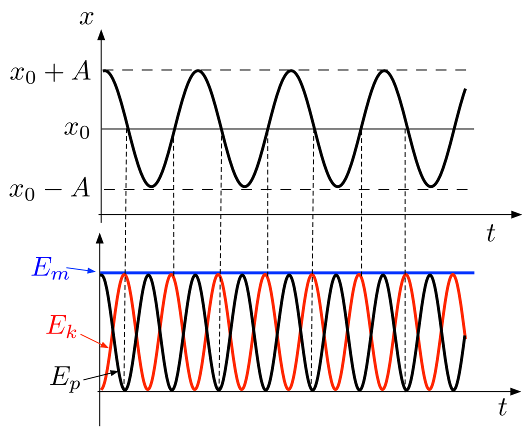

Figure 3: Andamento dell''energia cinetica' [Eq.(7), curva rossa], dell''energia potenziale' [Eq.(8), curva nera] e della loro somma [Eq.(10), curva blu].

7. La somma dell''energia cinetica' e della 'energia potenziale' risulta pertanto

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E_k(t) + E_p(t) = \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) \qquad (9) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad \text{(costante nel tempo!)} \qquad (10) \end{aligned}$$

ed è indipendente dal tempo (=rimane costante al trascorrere del tempo), come mostrato in Fig.3.