Esercizio 2

All'ingresso del ricevitore di Fig.1 viene applicato un segnale PAM in banda passante del tipo $r(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)\cos(2\pi f_0 t)+w(t)$ con a_i simboli equiprobabili, indipendenti ed appartenenti all'alfabeto $A\equiv(\pm 1)$. La risposta impulsiva del filtro in trasmissione è $g_T(t)=\left(1-\frac{|t|}{T}\right)rect(t/2T)$ e $w(t)$ rumore Gaussiano passa banda bianco con densità spettrale di potenza (d.s.p.) $S_W(f)=\frac{N_0}{2}\left[rect((f-f_0)/B)+rect((f+f_0)/B)\right]$ con B la banda dell'impulso $g_T(t)$. Il filtro in ricezione è $g_R(t)=A\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$. Si determini:

1) L'energia media dei simboli ricevuti;
2) La costante A affinche la risposta impulsiva del sistema $g(t)$ sia 1 per t=0.
3) La potenza media di rumore all'uscita del filtro $g_R(t)$.
4) I coefficienti dell'equalizzatore ZF a tre prese (N=1).

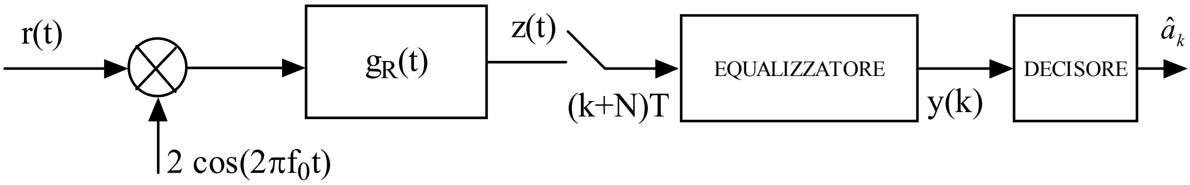
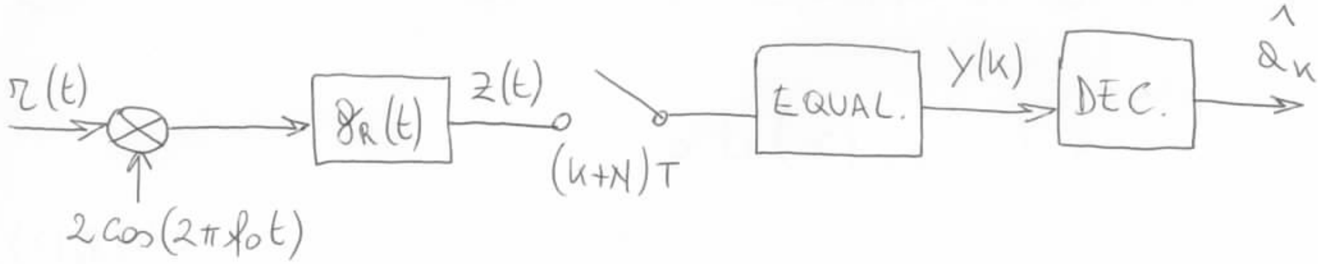


Fig. 1

COMPITO 30/6/08 (ES2)



Al ricevitore di figura è applicato un segnale

$$r(t) = \sum_i a_i\, g_T(t - iT)\cos(2\pi f_0 t) + w(t)$$

a_i sono indip. ed equiprob. con $a_i \in [\pm 1]$

$$g_T(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

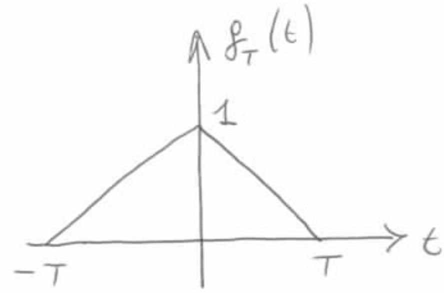
$w(t)$ è Gaussiano, passa-banda con

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + f_0}{B}\right)\right]$$

con B = banda di $g_T(t)$

$$g_R(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

1. Energia media dei simboli ricevuti



$$\bar{E}_R = P(1)E_1 + P(-1)E_{-1}$$

$$S_1(t) = g_T(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

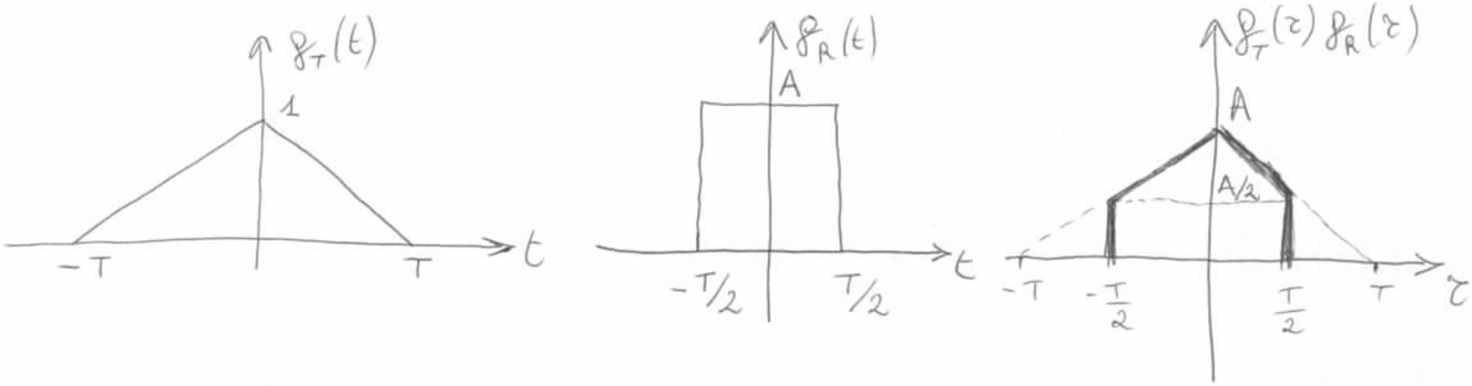
$$S_{-1}(t) = -g_T(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$E_1 = E_{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t)\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t)\left[1 + \cos(4\pi f_0 t)\right]dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^T \frac{t^2}{T^2}\,dt = \frac{t^3}{3T^2}\Big|_0^T = \frac{T}{3} = \bar{E}_R$$

2. La costante A affinché $g(0) = 1$:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\tau)\, g_R(\tau)\, d\tau$$

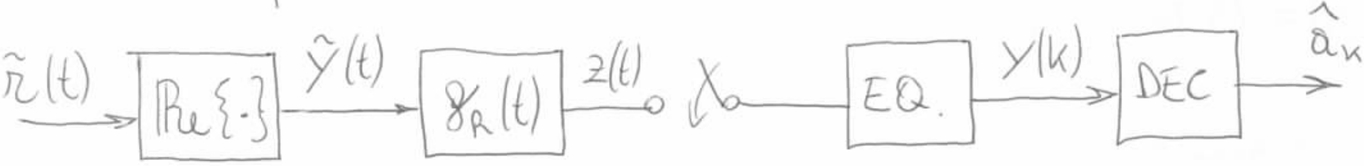


$$\Rightarrow g(0) = T \cdot \frac{A}{2} + T \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2TA + TA}{4} =$$

$$= \frac{3AT}{4} = 1 \quad \Rightarrow A = \frac{4}{3T}$$

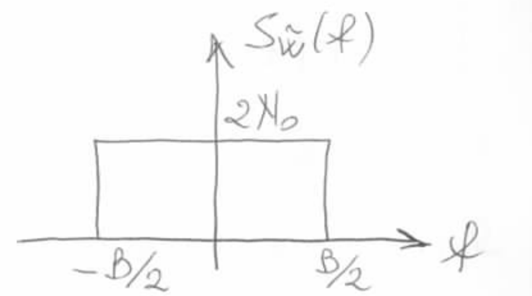
3. La potenza media di rumore all'uscita di $g_R(t)$

Schema equivalente in banda base:

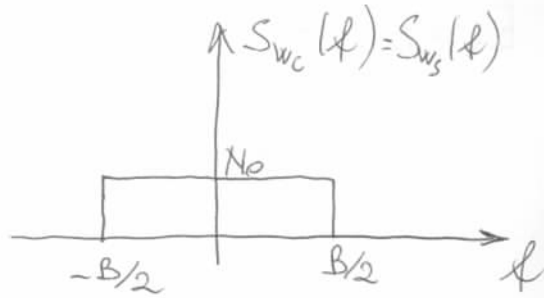


$$\tilde{r}(t) = \sum_i a_i\, g_T(t - iT) + \tilde{w}(t)$$

dove $\tilde{w}(t) = w_c(t) + j\, w_s(t)$



$$\Rightarrow \tilde{y}(t) = \sum_i a_i\, g_T(t - iT) + w_c(t)$$

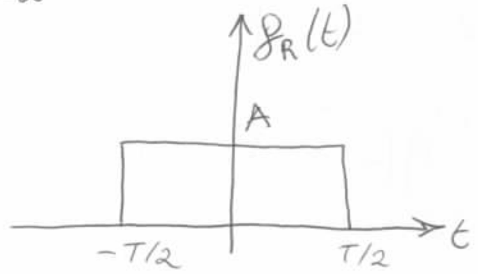


(3) $\Rightarrow n_c(t) = w_c(t) \otimes g_R(t)$

$$S_{n_c}(f) = S_{w_c}(f)\,|G_R(f)|^2 = N_0\,|G_R(f)|^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{n_c}^2 = P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_c}(f)\,df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G_R(f)|^2 df =$$

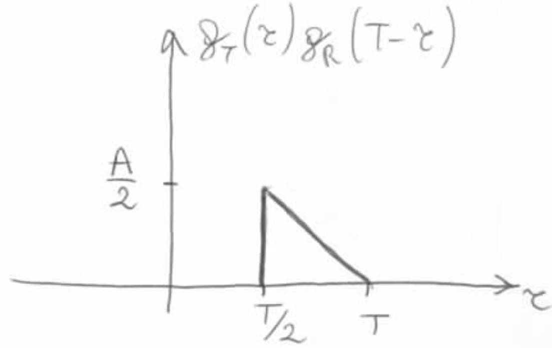
$$= N_0 E_{g_R} = N_0 A^2 T$$



4. I coefficienti dell'eq. ZF a tre prese ($N=1$)

$$g(T) = g(-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\tau)\, g_R(T-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow g(T) = \frac{A}{2} \cdot \frac{T}{4} = \frac{AT}{8} = \frac{1}{6}$$



Di conseguenza:

$$g(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 1/6 & k = \pm T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Devo valutare il valore della distorsione di picco in IN:

$$D_{IN} = \frac{\sum_{J\neq 0} |g(J)|}{g(0)} = \frac{1/6 + 1/6}{1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{Teorema di Lucky}$$

$$q(k) = g(k) \otimes p_\ell = \sum_{\ell=-1}^{1} p_\ell\, g(k-\ell) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=\pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(0) = p_{-1}\, g(1) + p_0\, g(0) + p_1\, g(-1) = \frac{1}{6} p_{-1} + p_0 + \frac{1}{6} p_1 = 1 \\ q(1) = p_{-1}\, g(2) + p_0\, g(1) + p_1\, g(0) = \frac{1}{6} p_0 + p_1 = 0 \\ q(-1) = p_{-1}\, g(0) + p_0\, g(-1) + p_1\, g(-2) = p_{-1} + \frac{1}{6} p_0 = 0 \end{cases}$$

Sottraggo la 2ª alla 3ª:

$$p_1 = p_{-1} \triangleq p$$

Nella 1ª eq:

$$p_0 + \frac{1}{3} p = 1 \implies p_0 = 1 - \frac{1}{3} p$$

Dalla 2ª eq:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{18} p + p = 0 \implies \frac{3 - p + 18p}{18} = 0 \implies p = -\frac{3}{17} = p_1 = p_{-1}$$

$$p_0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{17} = \frac{18}{17}$$