ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 23

Note Title 30/10/2018

Domande:

① Dati n vettori, come capisco se sono lin. indip? DETERMINANTE

② " , come calcolo la dim. dello Span? RANGO

DETERMINANTE

→ Funzione che prende in INPUT n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce in OUTPUT un numero: questo numero viene 0 se e solo se i vettori sono lin. dip.

→ Funzione che prende in INPUT una matrice $\boxed{n \times n}$ (quadrata) e restituisce un numero

<u>Collegamento</u>: la matrice usa gli n vettori come righe.

<u>Indice</u>:

1 – Definizione
2 – Prime conseguenze
3 – Caso 2×2 e 3×3
4 – Determinante e algoritmo di Gauss
5 – Sviluppi di LAPLACE
6 – Sviluppi di LEIBNITZ
7 – Teorema di BINET
8 – Applicazioni: → formula misteriosa per vettori ortogonali
→ formula per la matrice INVERSA
→ formula di CRAMER per sistemi lineari

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ Def. assiomatica: elenco le proprietà che voglio che il det. abbia.

Det: (n vettori in $\mathbb{R}^n$) $\rightsquigarrow$ numero

Chiediamo 4 proprietà

(Det 1) $\text{Det}(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_n}) = 1$

base canonica $\rightsquigarrow$ come matrice sarebbe quella identica

(Det 2) Se tra gli n vettori ce ne sono 2 uguali, allora Det $= 0$

(Det 3) $\text{Det}(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \, \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$

(Se moltiplico per λ uno dei vettori, allora il Det si moltiplica per λ)

(Det 4) Le somme escono fuori

$$\text{Det}(v_1, \dots, \underbrace{v_i + \hat{v}_i}, \dots, v_n)$$

invece che 1 vett., c'è la somma di 2 vett.

$$= \text{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

<u>Oss.</u> Le proprietà (Det 3) e (Det 4) si possono riassumere dicendo che Det è una funzione lineare di ognuno degli n vettori.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Esiste un'unica funzione che ha queste 4 proprietà.

PRIME CONSEGUENZE

(Det 5) Se scambio due vettori tra di loro, il det. cambia segno

$$\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Dim. $\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i+v_j, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n) \underset{\text{(Det 2)}}{=} 0$

la prima somma esce

$$= \mathrm{Det}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n) + \mathrm{Det}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i+v_j, \dots, v_n)$$

$$= \underbrace{\mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)}_{0 \text{ (2 volte } v_i)} + \mathrm{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) +$$

$$\mathrm{Det}(\dots v_j \dots v_i \dots) + \underbrace{\mathrm{Det}(\dots v_j, \dots, v_j \dots)}_{0 \text{ (2 volte } v_j)}$$

Gli altri 2 hanno somma nulla, da cui la tesi.

(Det 6) Le combinazioni lineari "escono fuori"

$$\mathrm{Det}(v_1, \dots, \underset{\text{i-esima pos}}{c_1 w_1 + \dots + c_n w_n}, \dots, v_n)$$

$$= c_1 \mathrm{Det}(\dots, w_1, \dots) + \dots + c_n \mathrm{Det}(\dots, w_n, \dots)$$

Dim Uso (Det 4) per fare uscire le somme e uso (Det 3) per fare uscire le costanti

— o — o —

(Det 7) Se uno degli n vettori è comb. lineare dei restanti, allora $\mathrm{Det} = 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che v_1 sia comb. lin. degli altri, cioè

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Allora

$$\mathrm{Det}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Det}(c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_2, \dots, v_n)$$

$$= c_2 \underbrace{\mathrm{Det}(v_2, v_2, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + c_3 \underbrace{\mathrm{Det}(v_3, v_2, \dots, v_n)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dots$$

= i termini sono tutti nulli per colpa di (Det 2)

(Det 8) Se $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. DIP., allora per forza $\mathrm{Det} = 0$
(Metà della richiesta iniziale LIN. DIP. $\Rightarrow \mathrm{Det} = 0$, manca ancora LIN. INDIP $\Rightarrow \mathrm{Det} \neq 0$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se sono LIN. DIP., allora almeno uno si può scrivere come comb. lineare dei restanti, e a quel punto applichiamo (Det 7).

— o — o —

$\boxed{\text{CASO SPECIALE } 2\times 2}$

$$v_1 = (a, b) = a e_1 + b e_2$$
$$v_2 = (c, d) = c e_1 + d e_2$$

$\mathrm{Det}(a e_1 + b e_2, c e_1 + d e_2) =$ (tiro fuori 1ª comb. lin.)

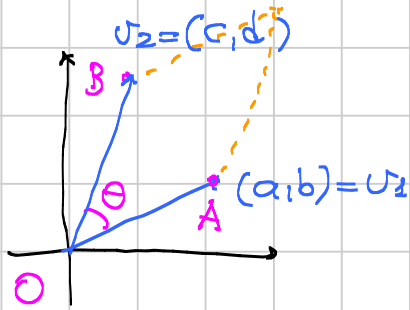
$= a\,\mathrm{Det}(e_1, c e_1 + d e_2) + b\,\mathrm{Det}(e_2, c e_1 + d e_2) =$ (tiro fuori la 2ª)

$$= ac\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1, e_1)}_{0 \text{ (Det 2)}} + ad\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_1, e_2)}_{1 \text{ (Det 1)}} + bc\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2, e_1)}_{-\mathrm{Det}(e_1, e_2) = -1 \text{ (Det 5)}} + bd\,\underbrace{\mathrm{Det}(e_2, e_2)}_{\text{(Det 2) } 0}$$

Conclusione $\boxed{\mathrm{Det} = ad - bc}$

In termini di matrice $\boxed{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$

Interpretazione geometrica Pensiamo ai vettori nel piano



a meno del segno

Det = "area" del parallelogramma generato da v_1 e v_2

Area positiva: ruoto v_1 su v_2 facendo l'angolo piccolo se vado in senso antiorario

Questo rende evidente che $\boxed{\mathrm{Det} = 0 \iff v_1 \text{ e } v_2 \text{ sono LIN. DIP.}}$

Come dimostro che Det = "Area" ?

1° modo Ultra bovino: scompongo tutto in rettangoli e triangoli (ma ci sono probl. con i segni)

2° modo Area parallelogramma $= 2$ Area (OAB)

$$= 2\,\frac{1}{2}\,OA \cdot OB \cdot \sin\theta = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

formula trigonometrica

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle^2}{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \underset{\text{conto}}{=} \sqrt{(ad-bc)^2} = |\mathrm{Det}|$$

— o — o —