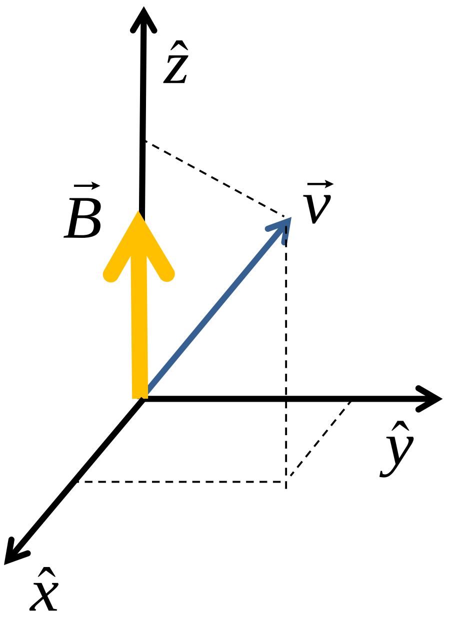
Problema

Un campo magnetico uniforme, d'intensità B = 0.5 T, è diretto lungo l'asse z; un protone (m = 1.7 × 10^{-27} Kg, q = 1.6 × 10^{-19} C) entra nel campo magnetico con velocità iniziale:

$$\vec{v} = 4\times10^{6}\,\frac{m}{s}\,\hat{x} + 6\times10^{6}\,\frac{m}{s}\,\hat{y} + 8\times10^{6}\,\frac{m}{s}\,\hat{z}$$



a) Calcolare le componenti lungo gli assi F_x, F_y , F_z e l'intensità F della forza di Lorentz che agisce sul protone
b) Calcolare il modulo dell'accelerazione centripeta a_c che agisce sul protone
c) Calcolare il raggio r dell'orbita circolare compiuta dal protone attorno al campo magnetico
d) Calcolare il passo p del moto elicoidale del protone
e) Calcolare l'energia cinetica K del protone

Ricordiamo che nel moto circolare uniforme: $a_c = \frac{v_\perp^2}{r}$

Soluzione

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = q\left(v_y B_z\right)\hat{x} - q\left(v_x B_z\right)\hat{y}$$

$$F_x = 1.6\times10^{-19}\,C\times6\times10^{6}\,\frac{m}{s}\times0.5\,T = 4.8\times10^{-13}\,N$$

$$F_y = -1.6\times10^{-19}\,C\times4\times10^{6}\,\frac{m}{s}\times0.5\,T = -3.2\times10^{-13}\,N$$

$$F_z = 0 \qquad F = 5.77\times10^{-13}\,N$$

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{5.77\times10^{-13}\,N}{1.7\times10^{-27}\,Kg} = 3.39\times10^{14}\,\frac{m}{s^2}$$

$$r = \frac{v_\perp^2}{a_c} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{a_c} = \frac{(16+36)\times10^{12}\,m^2/s^2}{3.39\times10^{14}\,\frac{m}{s^2}} = 15.34\times10^{-2}\,m$$

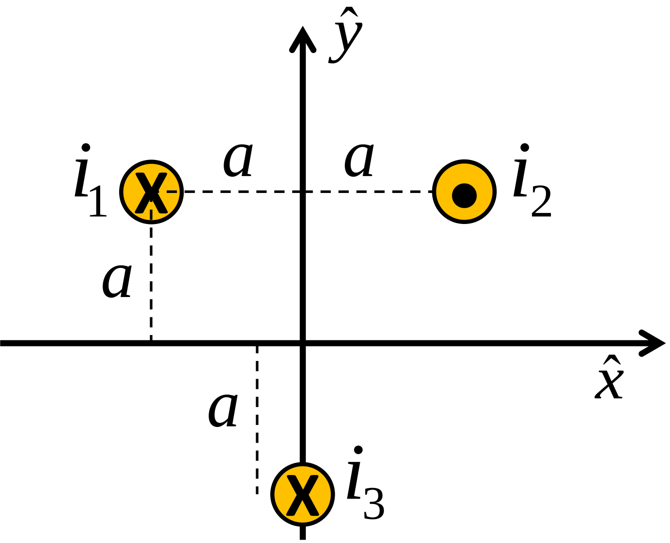
Soluzione

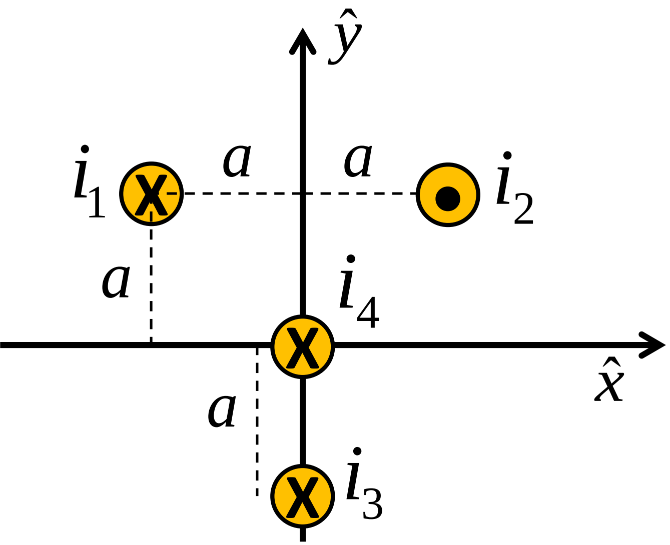
$$p = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2\pi r}{v_{\perp}} \qquad v_{\parallel} = v_z = 8\times 10^6 \frac{m}{s} \qquad v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7.21\times 10^6 \frac{m}{s} \qquad \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 1.11$$

$$p = 1.11\times 2\pi\times 15.34\, cm = 1.07\, m$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1.7\times 10^{-27}\, Kg}{2} \times (16+36+64)\times 10^{12} \frac{m^2}{s^2} = 98.6\times 10^{-15}\, J$$

Problema



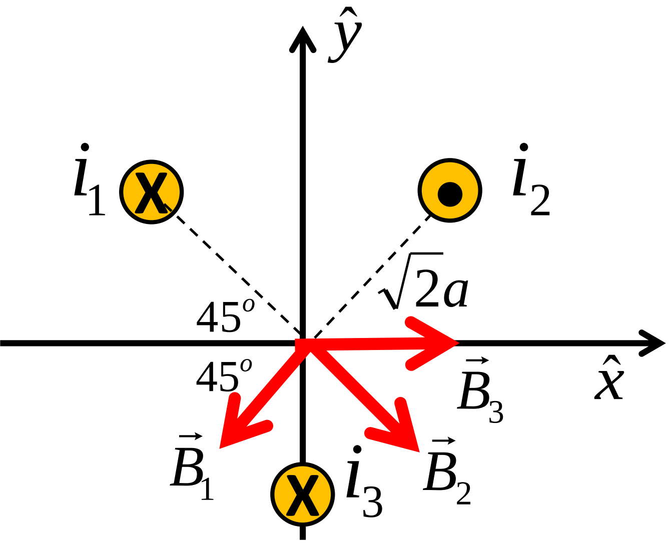


Consideriamo tre fili conduttori perpendicolari alla pagina con correnti i_1 = 5 A, i_2 = 10 A, i_3 = 5 A; sia a = 3 cm.

a) Calcolare le componenti cartesiane del campo magnetico totale generato dai 3 fili nell'origine del riferimento.
b) Disegnare il campo totale con una freccia in figura
c) Consideriamo un quarto filo, percorso da corrente i_4 = 12 A, posto nell'origine, di verso entrante (ovvero nel verso dell'asse z negativo). Calcolare le componenti cartesiane della forza che agisce su una sezione L= 1.5 m di questo filo
d) Disegnare la forza con una freccia in figura

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

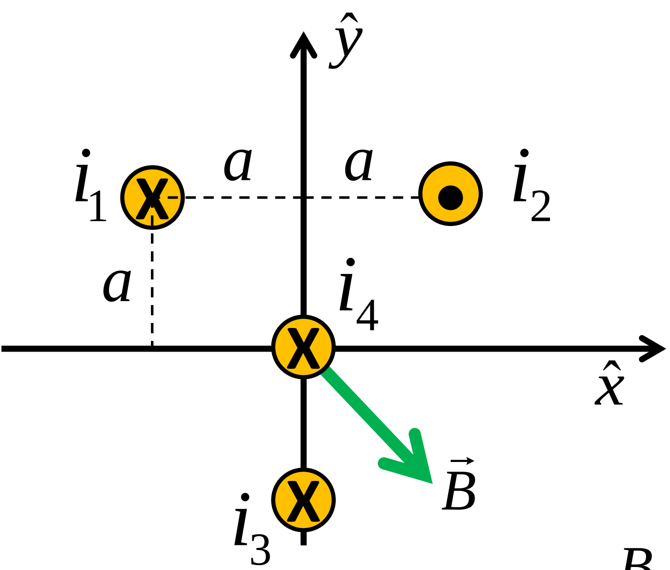
Soluzione



$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi\left(\sqrt{2}a\right)}\cos(45^0)\hat{x} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\left(\sqrt{2}a\right)}\sin(45^0)\hat{y}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\left(\sqrt{2}a\right)}\cos(45^0)\hat{x} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\left(\sqrt{2}a\right)}\sin(45^0)\hat{y}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i_3}{2\pi\, a}\hat{x} \qquad \cos(45^0) = \sin(45^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

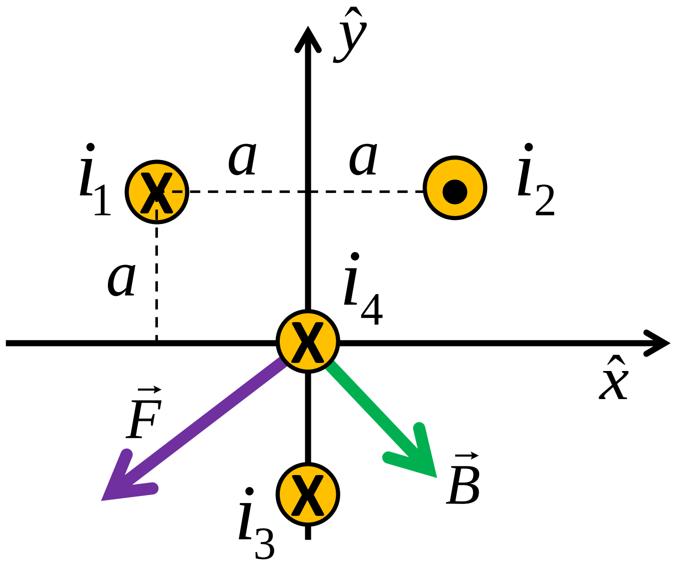


$$B_x = -\frac{\mu_0 i_1}{4\pi\, a} + \frac{\mu_0 i_2}{4\pi\, a} + \frac{\mu_0 i_3}{2\pi\, a} = \frac{\mu_0}{4\pi\, a}\left(-i_1 + i_2 + 2i_3\right) =$$

$$= \frac{\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 15A}{3cm} = 5\times 10^{-5}T$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 i_1}{4\pi\, a} - \frac{\mu_0 i_2}{4\pi\, a} = -\frac{\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 15A}{3cm} = -5\times 10^{-5}T$$

Soluzione

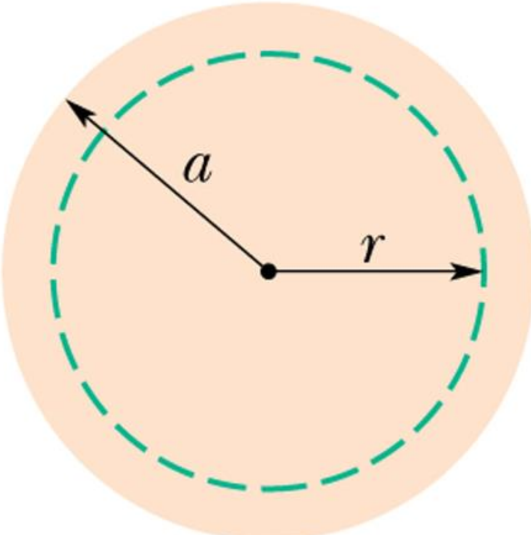


$$\vec{F} = i_4 \vec{L} \times \vec{B} = i_4 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -L \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = i_4 L B_y \, \hat{x} - i_4 L B_x \, \hat{y}$$

$$F_x = 12A \times 1.5\,m \times \left(-5 \times 10^{-5} T\right) = -0.9 \times 10^{-3}\,N$$

$$F_y = -12A \times 1.5\,m \times 5 \times 10^{-5} T = -0.9 \times 10^{-3}\,N$$

Problema



In figura è mostrata la sezione di un lungo conduttore cilindrico di raggio *a* = 2 cm, in cui scorre una corrente di densità uniforme *i*=170 A di verso uscente dalla pagina

a) Calcolare l'intensità del campo magnetico ***B*** generato dal cilindro nei punti: *r*=0, *r*=1 cm, *r*=2 cm, *r*=6 cm
b) Indicare con una freccia in figura sulla linea tratteggiata direzione e verso di ***B***

Dalla legge di Ampére, integrando in verso antiorario lungo una circonferenza di raggio *r* interna al cilindro:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 i_{\text{int}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_{\text{int}}}{r}$$

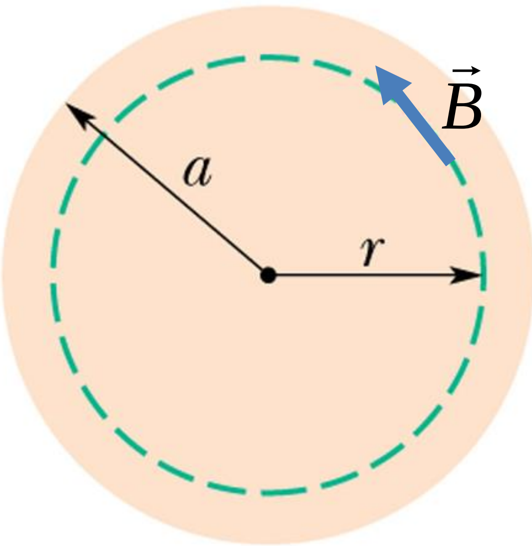
Ove i_{int} è la corrente interna al cilindro di raggio *r*; poiché la densità di corrente *J* è uniforme:

$$i = J\left(\pi a^2\right) \quad i_{\text{int}} = J\left(\pi r^2\right) \Rightarrow i_{\text{int}} = i\frac{r^2}{a^2} \qquad \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r$$

Per un raggio *r* esterno al cilindro:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

Soluzione



$$r \le a \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r$$

$$r \ge a \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

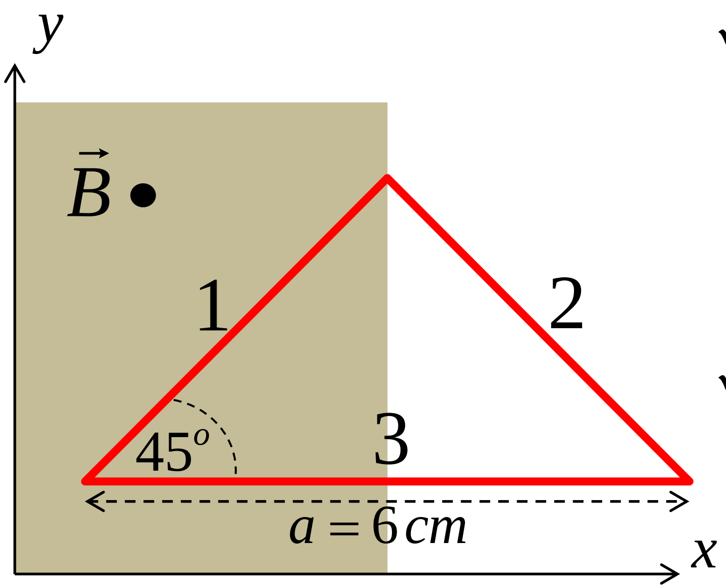
$$r = 0 \quad B = 0$$

$$r = 1cm \quad B = \frac{2\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 170A}{4\times 10^{-4} m^2} 1\times 10^{-2} m = 8.5\times 10^{-4} T$$

$$r = 2cm \quad B = 17\times 10^{-4} T$$

$$r = 6cm \quad B = \frac{2\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 170A}{6\times 10^{-2} m} = 5.66\times 10^{-4} T$$

Problema



- ✓ Una spira triangolare con resistenza R = 6 Ω e base a = 6 cm, è parzialmente immersa in una regione (area grigia) di campo magnetico uniforme perpendicolare al piano (x, y), di verso uscente; la spira è fissata nella posizione in figura e dunque immobile
- ✓ L'intensità del campo magnetico varia nel tempo con la legge:

$$B(t) = (e^{2t} - 4t)\,T$$

a) Calcolare intensità e verso (orario oppure antiorario) della corrente i_{in} indotta nella spira agli istanti t = 0.1 s, t = 1 s

b) Calcolare la potenza dissipata sulla spira agli istanti t=0.1 s, t= 1 s.

c) Calcolare in componenti cartesiane le forze $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ che il campo magnetico *B(t)* esercita sui lati 1, 2, 3 della spira all'istante t = 1 s

Soluzione

- ✓ L'altezza del triangolo isoscele con 2 angoli di 45º è uguale ad *a*/2 per cui l'area immersa nel campo magnetico è *A* = a²/8; per cui:

$$i_{in} = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{a^2}{8R}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{36\times 10^{-4}}{48}\left(2e^{2t}-4\right)\frac{m^2 T}{\Omega\, s} = -0.75\times 10^{-4}\left(2e^{2t}-4\right)A$$

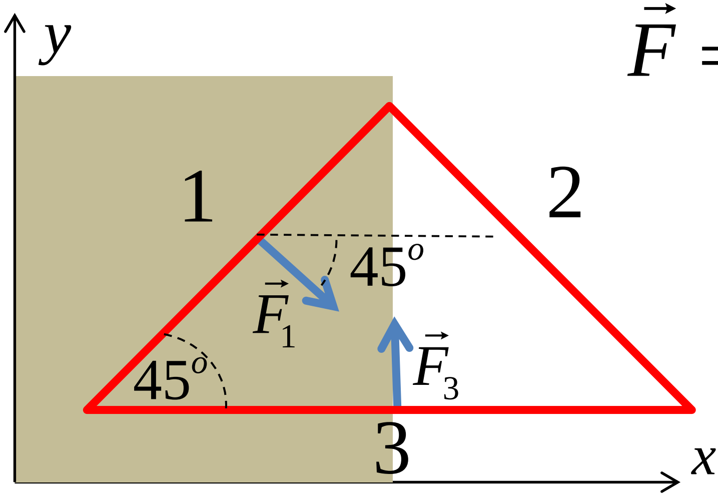
$$t = 0.1s: \quad i_{in} = 1.168\times 10^{-4}\,A \qquad \frac{dB}{dt} = \left(2e^{0.2}-4\right) = -1.56\frac{T}{s}$$

$$t = 1s: \quad i_{in} = -8.084\times 10^{-4}\,A \qquad \frac{dB}{dt} = \left(2e^{2}-4\right) = 10.78\frac{T}{s}$$

- ✓ *t* = 0.1 s: *B* diminuisce → i_{in} circola in senso **antiorario**, in modo da compensare con il campo indotto la riduzione di *B*
- ✓ *t* = 1 s: *B* aumenta → i_{in} circola in senso **orario**, in modo da opporre il campo indotto all'aumento di *B*

$$b)\quad \begin{cases} t = 0.1s: \quad P = R\,i_{in}^{\;2} = 6\ \Omega\times 1.364\times 10^{-8}A^2 = 8.185\times 10^{-8}W \\ \\ t = 1s: \quad P = R\,i_{in}^{\;2} = 6\ \Omega\times 65.35\times 10^{-8}A^2 = 3.92\ \mu W \end{cases}$$

Soluzione



$$\vec{F} = i_{in}\vec{L} \times \vec{B}$$

t=1 s → i_{in} in senso orario:

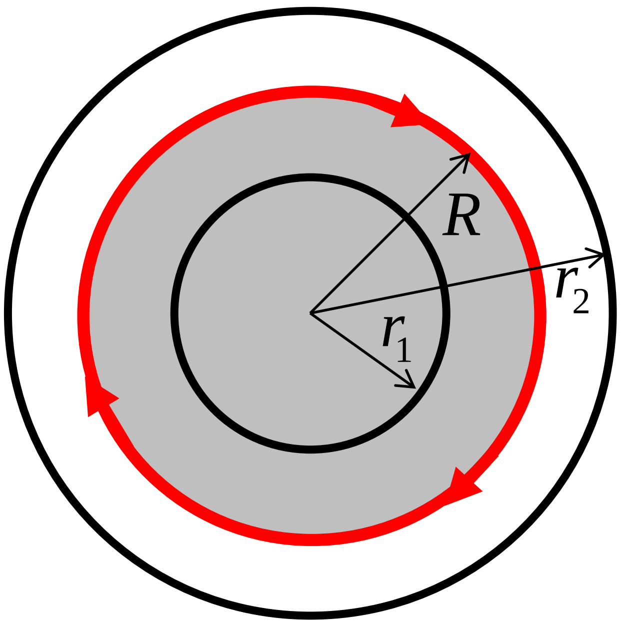
Le forze sono perpendicolari ai lati della spira; il lato 2 è esterno al campo, per cui $\boldsymbol{F_2}$=0; il lato 1 è inclinato di 45º rispetto agli assi cartesiani; dunque anche $\boldsymbol{F}_1$ è inclinata di 45º rispetto agli assi; $\boldsymbol{F}_3$ è diretta nel verso dell'asse y positivo

- ✓ Le porzioni dei 3 lati immersi nel campo sono: $L_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad L_2 = 0 \quad L_3 = \frac{a}{2}$
- ✓ Il module delle 3 forze: $F_1 = i_{in}\frac{a}{\sqrt{2}}B \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = i_{in}\frac{a}{2}B$
- ✓ In coordinate cartesiane:

$$\vec{F}_1 = F_1\cos(45^o)\hat{x} - F_1\sin(45^o)\hat{y} = \frac{a}{2}i_{in}B\,\hat{x} - \frac{a}{2}i_{in}B\,\hat{y} \qquad \vec{F}_2 = 0 \qquad \vec{F}_3 = i_{in}\frac{a}{2}B\,\hat{y}$$

$$\frac{a}{2}i_{in}B = 3\times10^{-2}\,m \times 8.084\times10^{-4}\,A \times \left(e^2 - 4\right)T = 82.2\times10^{-6}\,N$$

Problema



L'area grigia in figura indica la sezione circolare di un solenoide ideale di raggio r_s=6 cm; il solenoide ha n=10 spire per cm
Il solenoide è attraversato da una corrente sinusoidale (si assuma orario il verso della corrente positiva):

$$i(t) = I\, sen(\omega t) \qquad I = 10\,A \qquad \omega = 20\,\frac{rad}{s}$$

Abbiamo inoltre due anelli conduttori, concentrici con l'asse del solenoide, uno interno al solenoide di raggio r_1 = 3 cm, ed uno esterno al solenoide di raggio r_2 = 9 cm; la resistenza degli anelli è R = 4 Ω

a) Calcolare l'intensità i_1 , i_2 delle correnti indotte negli anelli all'istante t = 2 s, e specificare il verso orario o antiorario
b) Calcolare l'intensità dei campi elettrici E_1 , E_2 indotti lungo gli anelli nello stesso istante t = 2 s.
c) Disegnare con una freccia in figura la direzione ed il verso del campo elettrico nei due anelli

$$\mathscr{E}_{ind} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Soluzione

Il campo magnetico nel solenoide è:

$$B(t) = \mu_0 n\, i(t) = \mu_0 n\, I \sin(\omega t)$$

Il flusso magnetico attraverso gli anelli 1 e 2:

$$\Phi_1(t) = B(t)\,\pi r_1^2 = \mu_0 n\, I\, \pi r_1^2 \sin(\omega t) \qquad \Phi_2(t) = B(t)\,\pi r_s^2 = \mu_0 n\, I\, \pi r_s^2 \sin(\omega t)$$

La corrente indotta generata negli anelli 1 e 2 a t= 2 s è:

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}_{ind,1}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\mu_0 n\, I\, \pi r_1^2 \omega}{R}\cos(40\, rad) \qquad \cos(40\, rad) = -0.667$$

$$i_2 = \frac{\mathscr{E}_{ind,2}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{\mu_0 n\, I\, \pi r_s^2 \omega}{R}\cos(40\, rad) \qquad \frac{Tm^2}{\Omega s} = A$$

$$i_1 = -\frac{4\pi^2}{4\Omega}\times 10^{-7}\frac{Tm}{A}\times\frac{10}{cm}\times 10A \times 9\,cm^2\,\frac{20}{s}\cos(40 rad) = -36\,\pi^2\times 10^{-6}\times(-0.67)A = 0.118\, mA$$

$$i_2 = -\frac{4\pi^2}{4\Omega}\times 10^{-7}\frac{Tm}{A}\times\frac{10}{cm}\times 10A \times 36\,cm^2\,\frac{20}{s}\cos(40 rad) = -216\,\pi^2\times 10^{-6}\times(-0.67)A = 0.477\, mA$$

Soluzione

- ✓ Al tempo t =2 s la corrente nel solenoide è positiva (sen(40rad)>0) per cui il verso è orario, ed il campo magnetico entrante nella pagina
- ✓ la derivata del flusso è negativa (cos(40rad)< 0) dunque il campo sta diminuendo
- ✓ la corrente indotta scorre quindi anch'essa in verso orario in modo da compensare la riduzione del flusso
- ✓ Il verso della corrente indotta è lo stesso nelle 2 bobine, poiché la variazione del campo magnetico è la stessa

Campi elettrici lungo gli anelli 1 e 2:

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = E_1(2\pi r_1) = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -\mu_0 n I \pi r_1^2 \omega \cos(40\, rad)$$

$$\Rightarrow E_1 = -\frac{\mu_0 n I r_1 \omega}{2} \cos(40\, rad)$$

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = E_2(2\pi r_2) = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\mu_0 n I \pi r_s^2 \omega \cos(40\, rad)$$

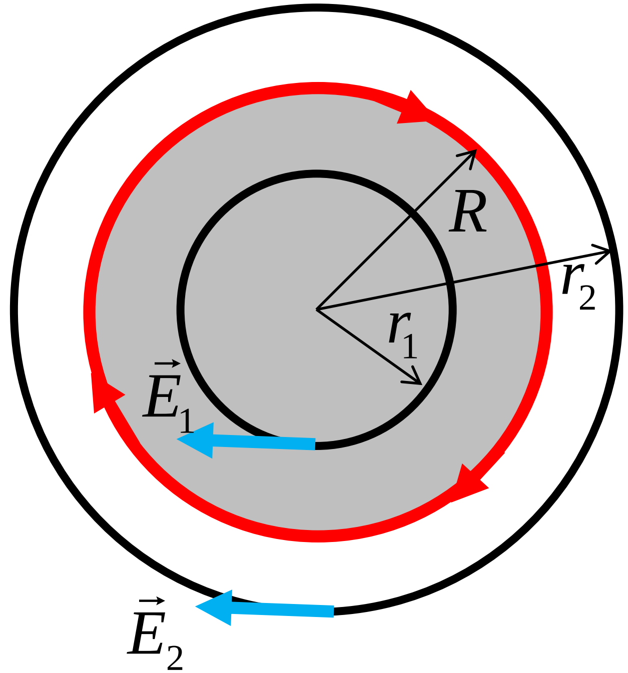
$$\Rightarrow E_2 = -\frac{\mu_0 n I r_s^2 \omega}{2 r_2} \cos(40\, rad)$$

Soluzione

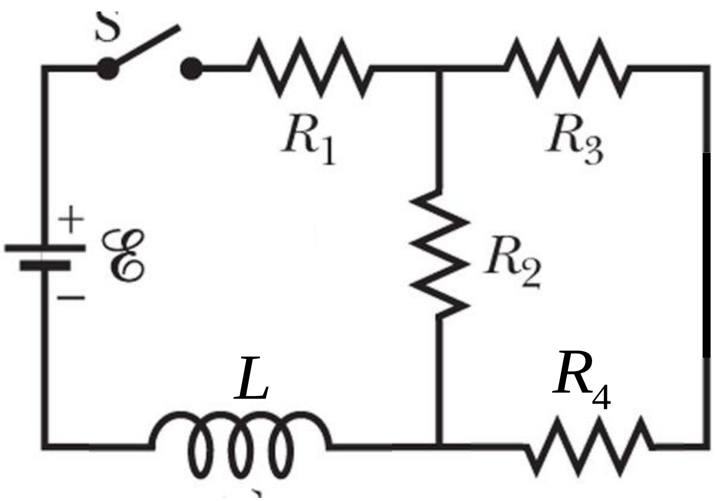
Campi elettrici lungo gli anelli 1 e 2:

$$E_1 = -2\pi \times 10^{-7}\,\frac{Tm}{A} \times \frac{10}{cm} \times 10A \times 3cm\,\frac{20}{s} \times (-0.667) = 2.51 \times 10^{-4}\,\frac{N}{C}$$

$$E_2 = -2\pi \times 10^{-7}\,\frac{Tm}{A} \times \frac{10}{cm} \times 10A \times \frac{36\,cm^2}{9cm}\,\frac{20}{s} \times (-0.667) = 3.35 \times 10^{-4}\,\frac{N}{C}$$



Problema



Consideriamo il circuito in figura con:

$$\mathcal{E} = 12V \quad L = 6\,H \quad R_1 = 10\,\Omega$$
$$R_2 = 8\,\Omega \quad R_3 = 12\,\Omega \quad R_4 = 15\,\Omega$$

a) Calcolare, nell'istante di chiusura del circuito, la corrente i_1 che attraversa la resistenze R_1, la corrente i_2 che attraversa la resistenza R_2, la corrente i_3 che attraversa la resistenza R_3 , la corrente i_4 che attraversa la resistenza R_4

b) Nello stesso istante calcolare ΔV_1 (d.d.p. ai capi della resistenza R_1), ΔV_2 (d.d.p. ai capi della resistenza R_2), ΔV_3 (d.d.p. ai capi della resistenza R_3), ΔV_4 (d.d.p. ai capi della resistenza R_4), ΔV_L (d.d.p. ai capi dell'induttanza)

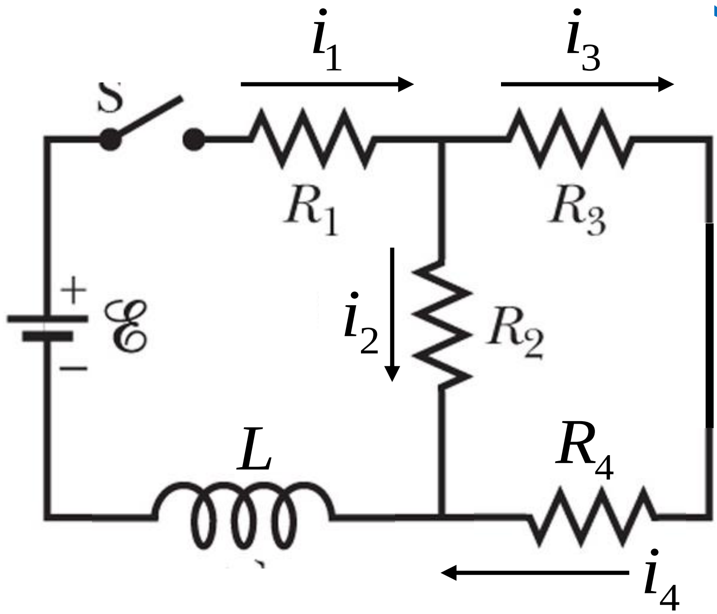
c) All'istante t = 1.2 s calcolare la corrente $i(t)$ nel ramo della batteria, la d.d.p. ai capi dell'induttanza ΔV_L(t), e l'energia immagazzinata $U(t)$

d) Ricalcolare le correnti i_1 , i_2 , i_3 , i_4 nel limite di tempo lungo.

e) Indicare con frecce in figura il verso delle correnti i_1 , i_2 , i_3 , i_4 calcolate nel limite di tempo lungo

f) Ricalcolare i potenziali nel limite di tempo lungo

Soluzione



$$\mathcal{E} = 12V \quad L = 6\,H \quad R_1 = 10\,\Omega$$

$$R_2 = 8\,\Omega \quad R_3 = 12\,\Omega \quad R_4 = 15\,\Omega$$

All'istante iniziale *L* si comporta come un circuito aperto, ovvero ΔV_L compensa la tensione della batteria; essendo il ramo della batteria aperto, la corrente è nulla ovunque:

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_4 = 0 \qquad \Delta V_L = \mathcal{E} = 12V$$

Nel tempo lungo *L* è un filo conduttore: ΔV_L=0; la resistenza equivalente è:

$$R_{34} = 27\,\Omega \quad R_{234} = \frac{216}{35}\Omega = 6.17\,\Omega; \quad R_{1234} = 16.17\,\Omega \qquad i_1 = i_{234} = \frac{\mathcal{E}}{R_{1234}} = 0.742A$$

$$\Delta V_1 = i_1 R_1 = 7.42V \qquad \Delta V_2 = \Delta V_{34} = \Delta V_{234} = i_1 R_{234} = 4.58V$$

Alternativamente, si può anche ottenere: $\Delta V_2 = 12V - 7.42V = 4.58V$

Soluzione

$$\mathscr{E} = 12V \quad L = 6H \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 8\Omega \quad R_3 = 12\Omega \quad R_4 = 15\Omega$$

$$i_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = 0.5725A \qquad i_3 = i_4 = \frac{\Delta V_2}{R_{34}} = 0.170A$$

Test: verifichiamo che

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\Delta V_3 = i_3 R_3 = 2.04V \qquad \Delta V_4 = i_4 R_4 = 2.55V$$

Nella fase transiente di accensione, l'equazione di Kirchoff è quella di una singola maglia con resistenza equivalente:

$$\mathscr{E} = R_{1234}\, i + \Delta V_L$$

La soluzione è:

$$i(t) = i_\infty \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \Delta V_L = L\frac{di(t)}{dt} = \mathscr{E}\, e^{-t/\tau_L} \qquad \tau_L = \frac{L}{R_{1234}} = 0.371s$$

La corrente nel tempo lungo è la i_1 precedentemente calcolata; per t=1.2 s:

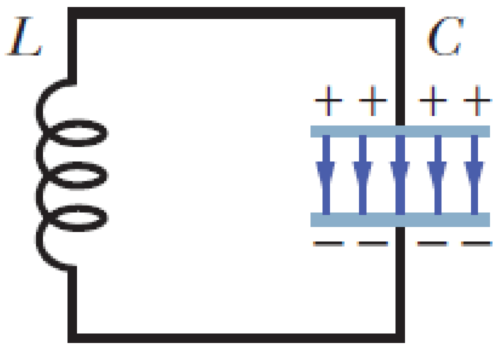
$$\frac{t}{\tau_L} = 3.234 \qquad i = 0.742\left(1 - e^{-3.234}\right)A = 0.713A \qquad \Delta V_L = 12V \times e^{-3.234} = 0.473V$$

$$U = 3H \times (0.713A)^2 = 1.525J$$

Test: ad ogni istante deve essere $R_{1234}\, i + \Delta V_L = 12V$

Si può verificare che l'equazione di Kirchoff a t=1.2 s è soddisfatta

Problema



Un condensatore con C = 6 μF viene caricato da una batteria con $\mathscr{E}$= 80 V; il condensatore carico viene connesso ad un induttore con *L* =15 mH, con la configurazione di carica sui piatti mostrata in figura; questa configurazione genera una carica oscillante sinusoidale *q(t)* = *Q cos*(ωt)

a) Calcolare la frequenza angolare caratteristica ω, la carica massima sul condensatore *Q*, la corrente massima nel circuito *I*, e l'energia immagazzinata nel circuito *U*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{15\,mH \times 6\,\mu F}} = \frac{1}{\sqrt{9 \times 10^{-8}\,s^2}} = 0.3333 \times 10^4\,Hz$$

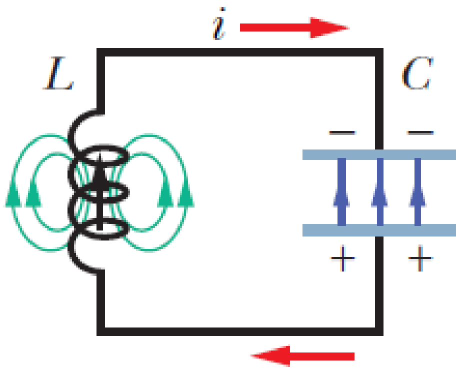
$$Q = C\,\mathscr{E} = 6\,\mu F \times 80\,V = 480\,\mu C$$

$$I = \omega Q = \frac{1}{3} \times 10^4\,Hz \times 480\,\mu C = 1.6\,A$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} L\,I^2 = 7.5\,mH \times (1.6\,A)^2 = 19.2\,mJ$$

$$H\,F = \left(\frac{Tm^2}{A}\right)\left(\frac{C}{V}\right) = s^2$$

Soluzione



b) Calcolare all'istante t = 5 ms la carica del condensatore q, l'intensità della corrente i, e la d.d.p. ai piatti del condensatore $\Delta V_C = V_a - V_b$

$$q(5\,ms) = 480\,\mu C\cos\left(0.333\times10^{4}\times5\times10^{-3}\,rad\right) = 480\,\mu C\cos(16.666\,rad)$$

$$= 480\,\mu C\times\left(-0.575\right) = -276\,\mu C$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega Q\sin(\omega t) = -I\sin(\omega t)$$

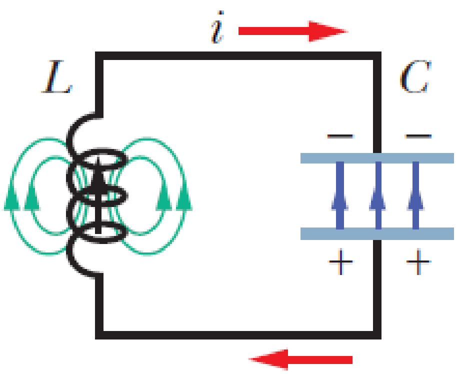
$$i(5\,ms) = -1.6A\times\sin(16.666\,rad) = -1.6A\times(-0.818) = 1.31A$$

$$\Delta V_C = \frac{Q}{C}\cos(\omega t) = \mathscr{E}\cos(\omega t) = -80V\times0.575 = -45.97V$$

a t = 5 ms siamo in una fase dell'oscillazione in cui la carica ai piatti è invertita (carica e d.d.p. ai piatti del condensatore negativi) e la corrente ha verso orario (corrente positiva); 16.666 rad/2π =2.65 giri; 0.65x2π = 1.3 π

Soluzione

c) Calcolare la f.e.m. autoindotta $\mathscr{E}_L$ all'istante t = 5 ms; indicare se in questo istante la corrente autoindotta è concorde o discorde con la corrente totale *i*



$$\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q \cos(\omega t) = -\omega^2 Q \times (-0.575) > 0$$

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{di}{dt} = \frac{Q}{C}\cos(\omega t) = 80V \times (-0.575) = -45.97V$$

A t = 5 ms la corrente *i(t)* e la sua derivata nel tempo sono entrambe positive, dunque l'intensità di *i(t)* sta crescendo; ne segue che la corrente autoindotta $i_{in}(t)$ deve essere negativa e discorde con *i(t)*

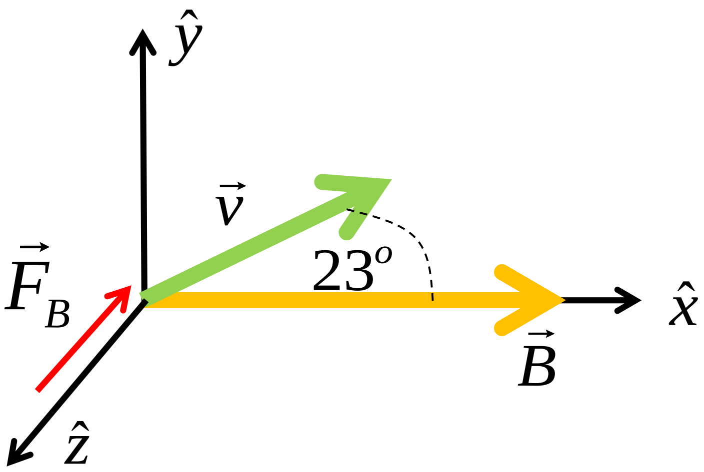
c) $\mathscr{E}_L = -45.97V$

i_{in} concorde con i_s	i_{in} discorde con i_s
☐	☒

Problema 28.1

Un protone (m = 1.67 × 10^{-27} Kg) entra in un campo magnetico d'intensità ***B*** =2.6 mT con velocità ***v*** orientata con angolo di 23° rispetto al campo magnetico; il protone subisce una forza F = 6.5×10^{-17} N.

1) Indicare direzione e verso della forza
2) Calcolare il modulo della velocità
3) Calcolare l'energia cinetica



Assumiamo un riferimento cartesiano, con ***B*** diretto lungo l'asse *x* e ***v*** nel piano (*x*,*y*). La forza è:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\sin\left(23^o\right)\hat{z}$$

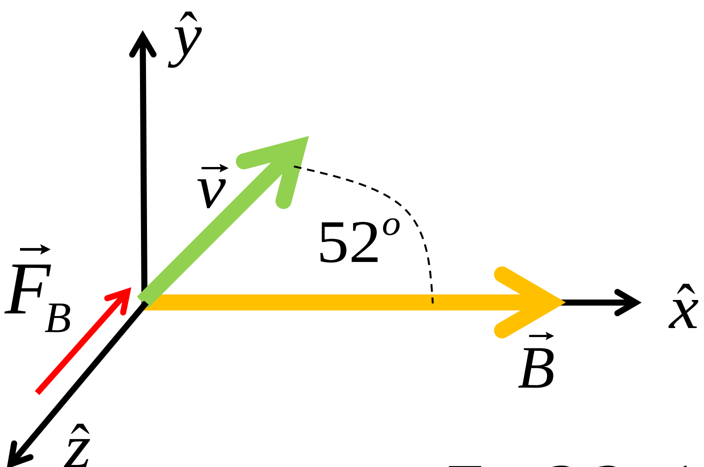
$$v = \frac{F}{qB\sin\left(23^o\right)} = \frac{6.5\times10^{-17}\,N}{1.6\times10^{-19}\,C\times2.6mT\times\sin\left(23^o\right)} = 4\times10^5\,\frac{m}{s}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(1.67\times10^{-27}\,Kg\right)\left(4\times10^5\,\frac{m}{s}\right)^2 = 13.36\times10^{-17}\,J = 8.3\times10^2\,eV$$

Problema 28.2

Una particella α (carica q=2e, massa m=6.67 $\times 10^{-27}$ Kg) attraversa con velocità di modulo *v* = 550 m/s un campo magnetico d'intensità *B* =0.045 T; velocità e campo magnetico formano un angolo di 52°.

1) Modulo, direzione e verso della forza di Lorentz
2) Calcolare l'accelerazione dovuta alla forza
3) Come varia il modulo della velocità nel campo magnetico?



Assumiamo un riferimento cartesiano, con ***B*** diretto lungo l'asse *x* e ***v*** nel piano (*x*,*y*). La forza è:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\sin\left(52^o\right)\hat{z}$$

$$F = 3.2\times10^{-19}C \times 550\frac{m}{s}\times 0.045T \times \sin\left(52^o\right) = 0.62\times10^{-17}N$$

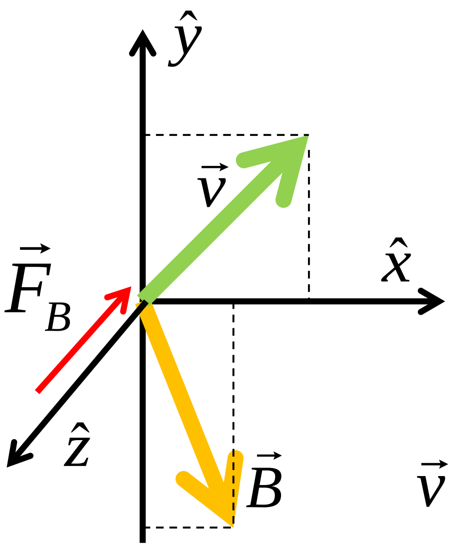
$$a = \frac{F}{m} = \frac{0.62\times10^{-17}N}{6.67\times10^{-27}Kg} = 9.3\times10^{8}\frac{m}{s^2}$$

Il modulo della velocità non varia a causa della forza di Lorentz

Problema 28.3

Un elettrone attraversa un campo magnetico

$$\vec{v} = 2\times10^6 \frac{m}{s}\hat{x} + 3\times10^6 \frac{m}{s}\hat{y} \qquad \vec{B} = 0.03T\hat{x} - 0.15T\hat{y}$$



1) Calcolare modulo, direzione e verso della forza di Lorentz
2) Ricalcolare la forza in caso di un protone

Essendo date le componenti, conviene calcolare la forza dalla formula generale del prodotto vettore:

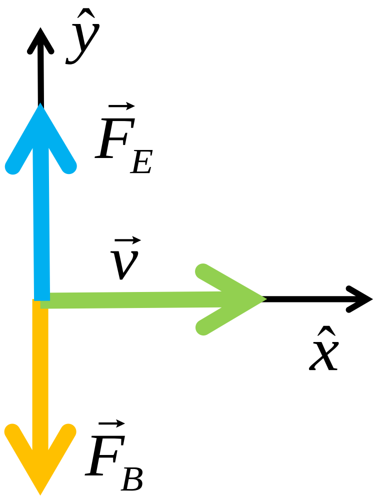
$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \left(v_x B_y - v_y B_x\right)\hat{z} = -0.39\times10^6 \frac{m}{s} T\,\hat{z}$$

$$\vec{F} = -e\left(v_x B_y - v_y B_x\right)\hat{z} = 1.6\times10^{-19} C \times 0.39\times10^6 \frac{m}{s} T\hat{z} = 0.624\times10^{-13} N\hat{z}$$

La direzione della forza è perpendicolare alla pagina con verso entrante.
Nel caso di un protone al posto dell'elettrone, cambia il segno della carica, per cui la forza è uguale in modulo e direzione ma il verso è entrante nella pagina

Problema 28.4

Un campo elettrico ed un campo magnetico agiscono su un elettrone in moto; le due forze si annullano reciprocamente. Calcolare la velocità minima dell'elettrone compatibile con la condizione di forza totale nulla.



$$E = 1.5\frac{kV}{m}; \quad B = 0.4T$$

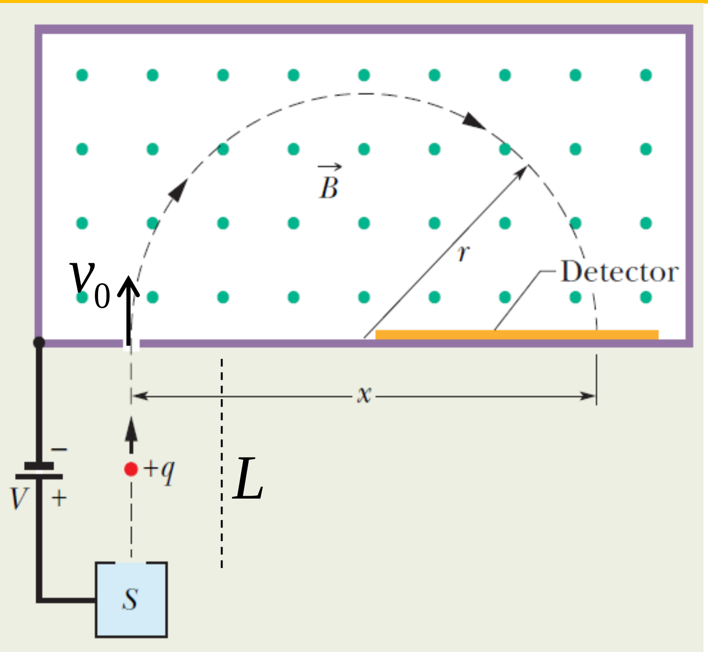
La forza magnetica è perpendicolare alla velocità; la forza elettrica deve avere stessa direzione e verso opposto. La condizione di forza totale nulla è:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -vB\sin(\alpha)\hat{y}$$

La velocità minima che soddisfa l'annullamento della forza è per sin(α)=1, per cui:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1.5kV}{0.4Tm} = 3.75 \times 10^3 \frac{m}{s}$$

Problema 28.10



Un elettrone fermo (m =9.11× 10^{-31} Kg, q = -1.6 × 10^{-19} C) è accelerato da una d.d.p. V=350 V, e dopo un tratto L entra in un campo magnetico uniforme B = 200 mT, perpendicolare al moto dell'elettrone.

Calcolare la velocità dell'elettrone ed il raggio della traiettoria circolare nella regione del campo magnetico.

Il raggio della traiettoria nel campo magnetico è:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

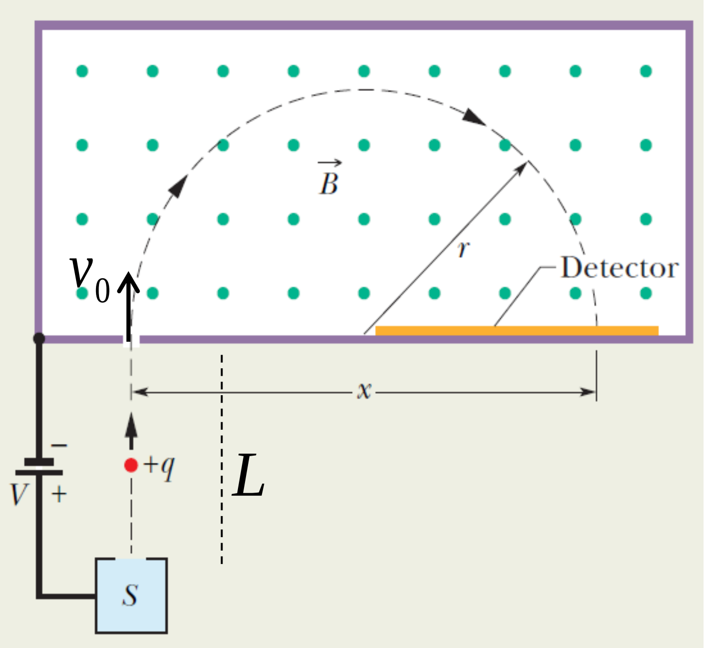
Di questa formula ci manca la velocità d'ingresso dell'elettrone nel campo magnetico. Dobbiamo calcolare la cinematica dell'elettrone nella regione in cui è accelerato dal potenziale elettrico. Eguagliando le formula di Newton e di Coulomb si ha:

$$ma = qE = q\frac{V}{L} \Rightarrow L\,a = \frac{qV}{m}$$

Nel tratto L l'elettrone subisce un'accelerazione costante, per cui velocità e spostamento sono date da:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \qquad\qquad v = at = \sqrt{2xa}$$

Problema 28.10



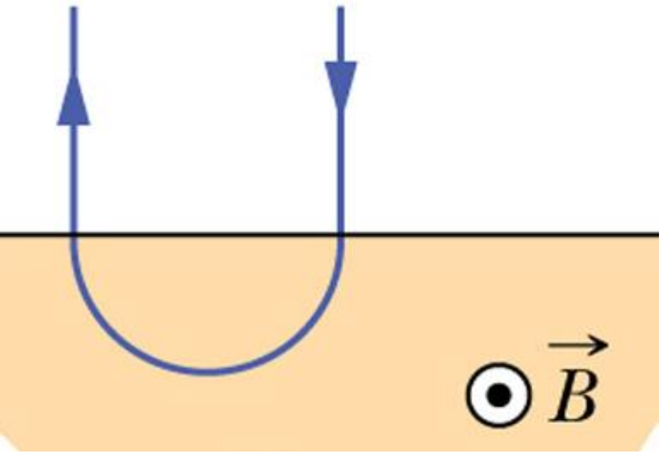
Un elettrone fermo (m =9.11× 10^{-31} Kg, q = -1.6 × 10^{-19} C) è accelerato da una d.d.p. V=350 V, e dopo un tratto L entra in un campo magnetico uniforme B = 200 mT, perpendicolare al moto dell'elettrone. Calcolare la velocità dell'elettrone ed il raggio della traiettoria circolare nella regione del campo magnetico.

Nel punto d'ingresso al campo magnetico (x=L):

$$v = \sqrt{2La} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} sC \times 350V}{9.11 \times 10^{-31} Kg}} = 1.11 \times 10^{7} \frac{m}{s}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{9.11 \times 10^{-31} Kg \times 1.11 \times 10^{7} \frac{m}{s}}{1.6 \times 10^{-19} C \times 200\, mT} = 0.31 \times 10^{-3} m$$

Problema 28.16



Una particella (un protone $m = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg o un elettrone $m = 9.11\times 10^{-31}$ Kg) entra in una regione di campo magnetico diretto perpendicolarmente alla pagina in verso uscente. Il tempo di transito nel campo è di 130 ns; $q = \pm 1.6 \times 10^{-19}$ C.

a) Determinare di quale particella si tratta.

b) Determinare l'intensità del campo

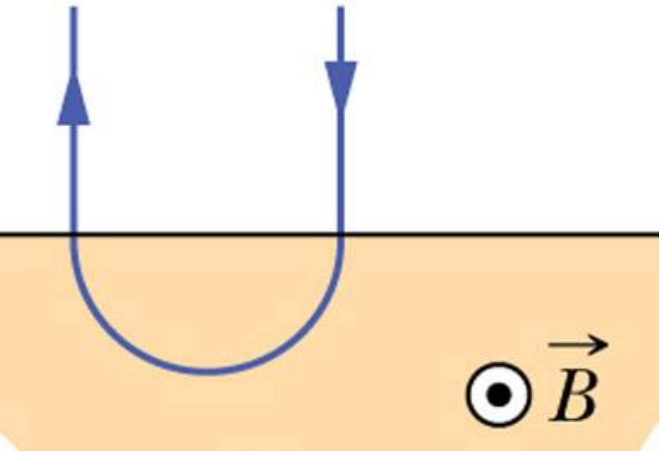
a) Dalla regola della mano destra risulta che la particella è un protone

b) La particella compie un semicerchi nella regione del campo, dunque il tempo di transito equivale alla metà del periodo. Dal moto circolare uniforme abbiamo:

$$\frac{r}{v} = \frac{m}{|q|B} \qquad v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{|q|B}{m} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow B = \frac{2\pi m}{|q|T} = \frac{2\pi \times 1.67 \times 10^{-27}\, Kg}{1.6\times 10^{-19}\, C \times (2\times 130\, ns)} = 0.25 T$$

Problema 28.16



Una particella (un protone m = 1.67 × 10^{-27} Kg o un elettrone m = 9.11× 10^{-31} Kg) entra in una regione di campo magnetico diretto perpendicolarmente alla pagina in verso uscente. Il tempo di transito nel campo è di 130 ns; q = ±1.6 × 10^{-19} C.

c) Se l'energia cinetica della particella entrante nel campo viene raddoppiata, quale sarà il tempo di percorrenza?

Dalla formula dell'energia cinetica si vede che raddoppiano l'energia cinetica, il modulo della velocità aumenta di un fattore √2; Ma il rapporto tra raggio e velocità rimane costante, per cui anche il raggio deve aumentare della stessa quantità:

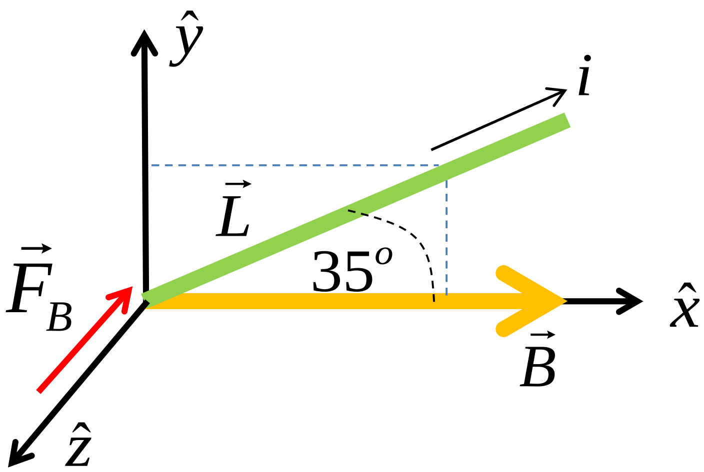
$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \Rightarrow v' = \sqrt{2}\,v \qquad \frac{r'}{v'} = \frac{r}{v} = \frac{m}{|q|B}$$

Poiché $$\frac{r}{v} = \frac{T}{2\pi} = \frac{m}{|q|B}$$

Concludiamo che il periodo non cambia col modulo della velocità,e dunque non cambia neppure il tempo di percorrenza t=130 ns

Problema 28.20

Un filo rettilineo lungo *L* =1.8 m conduce una corrente i = 13 A, e forma un angolo di *35°* con la direzione di un campo magnetico uniforme d'intensità *B* = 1.5 T. Calcolare modulo, direzione, e verso della forza magnetica agente sul filo



$$\vec{F}_B = i\,\vec{L} \times \vec{B}$$

Se disponiamo ***L*** e ***B*** nel piano (*x*,*y*) la forza è diretta lungo *z*, nel verso negativo. In modulo:

$$F_B = i\,L\,B\sin(35^o)$$

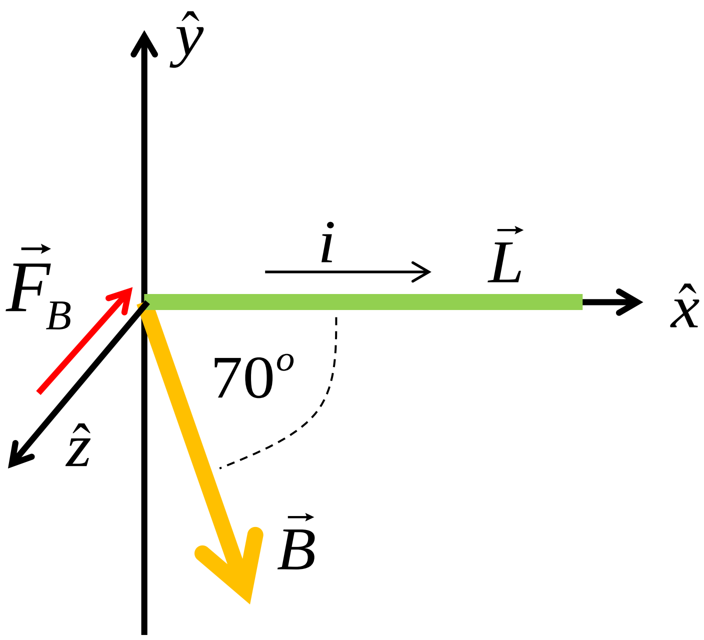
$$= 13A \times 1.8\,m \times 1.5\,T \times 0.57 = 20\,N$$

In alternativa, disponendo i vettori in una terna di assi cartesiani, possiamo sempre calcolare la forza dalla formula generale del prodotto vettore. Per esempio, prendendo il campo magnetico parallelo ad x si ottiene:

$$\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B} = i\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_x & L_y & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -i\left(L_y B_x\right)\hat{z} = -i\,L\,B\sin(35^o)\,\hat{z}$$

Problema 28.21

Un cavo conduttore orizzontale di una linea elettrica è percorso da una corrente *i* = 5000 A; il campo magnetico terrestre nelle vicinanze della linea vale B = 60 μT, ed è inclinato di 70° verso il basso rispetto al filo. Si determini direzione, verso, ed intensità della forza magnetica che agisce su 100 m di cavo



Orientiamo il cavo lungo l'asse *x*, ed il campo magnetico nel piano (*x*,*y*), inclinato di 70° rispetto ad x; la forza è quindi orientata verso l'asse z negativo

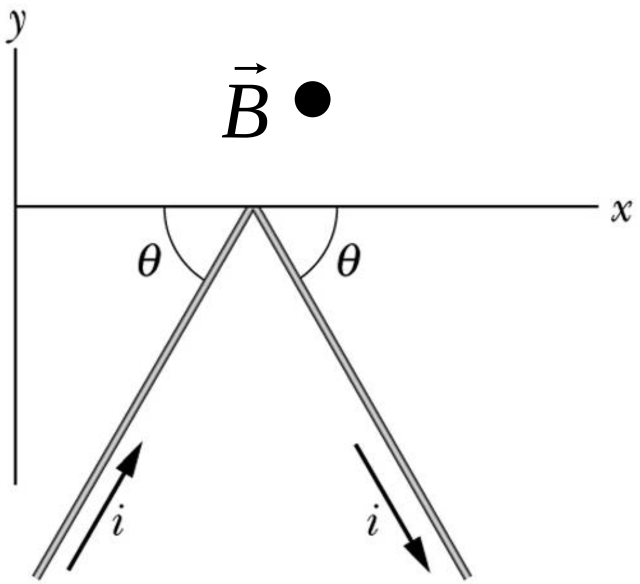
$$F_B = i\,LB\sin(70^o)$$

$$= 5000\,A \times 100m \times 60\,\mu T \times 0.94 = 28.2\,N$$

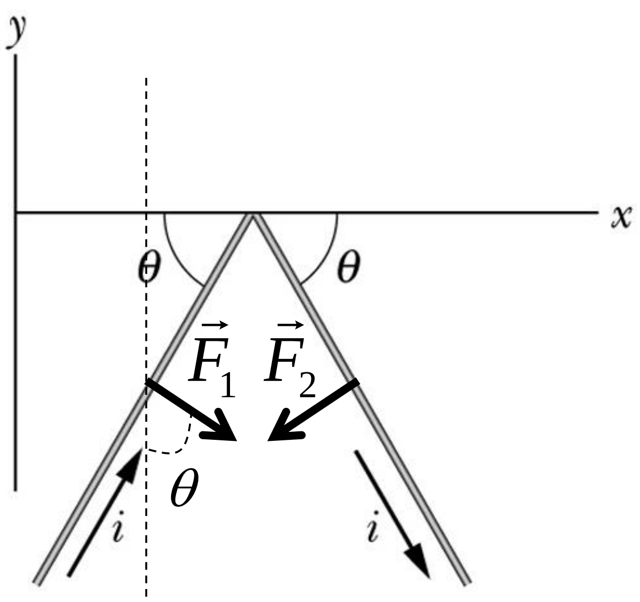
In alternativa si calcolo il prodotto vettore:

$$\vec{L} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \left(L_x B_y\right)\hat{z} = -LB\sin(70^o)\,\hat{z}$$

Problema 28.22



Il filo in figura è percorso da una corrente di 2 A, e giace in un campo magnetico uniforme B = 4 T, orientato perpendicolarmente alla pagina in verso uscente. Ciascuna sezione retta del filo è lunga *L* =2 m, e forma un angolo di 60° con l'asse x. Calcolare la forza magnetica agente sul filo in notazione vettoriale ***F***=(F_x, F_y, F_z)



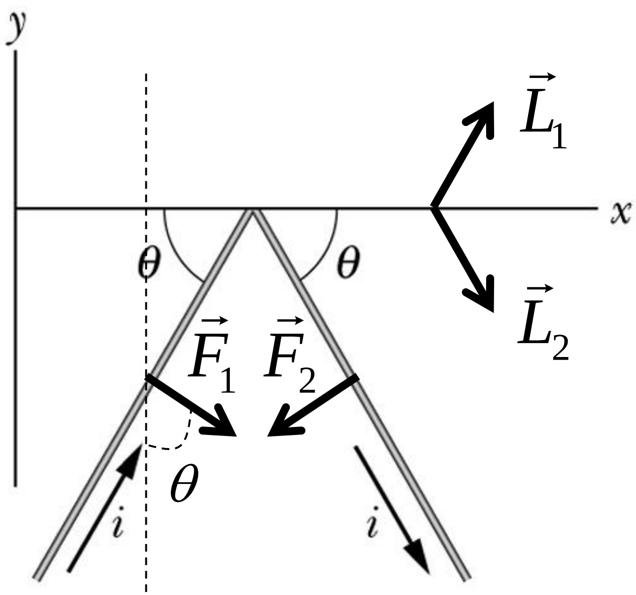
<u>Metodo 1, analisi geometrica</u>: Le forze di Lorentz su ciascun segmento di filo giacciono nel piano (x,y), sono perpendicolari alla direzione del filo ed orientate come in figura. Essendo anche uguali in modulo, è evidente che la loro somma ha solo la componente lungo l'asse y diversa da zero:

Modulo: $F_1 = F_2 = i\,LB$

Componenti lungo y: $F_{1y} = F_{2y} = -iLB\cos(\theta)$

Forza totale: $\vec{F} = -2iLB\cos(\theta)\,\hat{y} = -16N\,\hat{y}$

Problema 28.22



Metodo 2, prodotto vettore:

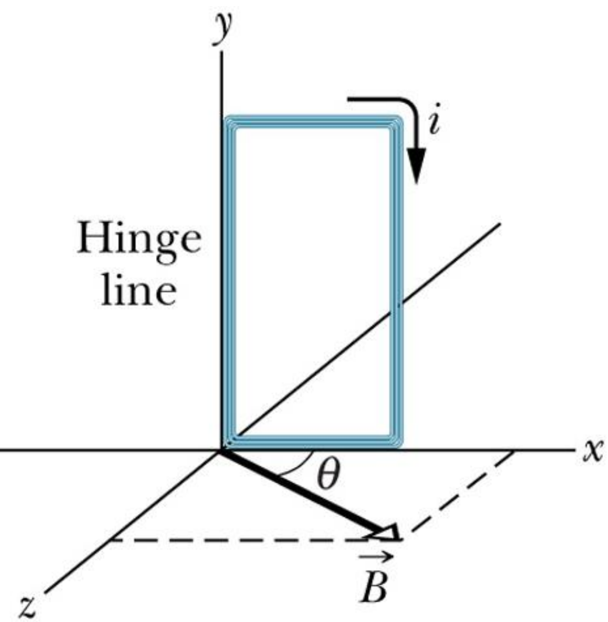
$$\vec{F}_1 = i\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_{1x} & L_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = i\left(L_{1y}B\right)\hat{x} - i\left(L_{1x}B\right)\hat{y}$$

$$\vec{F}_2 = i\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ L_{2x} & L_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = i\left(L_{2y}B\right)\hat{x} - i\left(L_{2x}B\right)\hat{y}$$

$$L_{1y} = -L_{2y}; \quad L_{1x} = L_{2x} = L\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -2iLB\cos(\theta)\hat{y} = -16N\,\hat{y}$$

Problema 28.26



In figura vediamo una bobina rettangolare , incernierata lungo l'asse *y*, con N = 20 spire, lati lunghi 10 cm e 5 cm, percorsa da corrente *i* =0.1 A il cui verso è indicato in figura; il piano della bobina forma un angolo di 30° con un campo magnetico *B* = 0.5 T. Calcolare il momento torcente esercitato dal campo sulla bobina, in notazione vettoriale

$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$

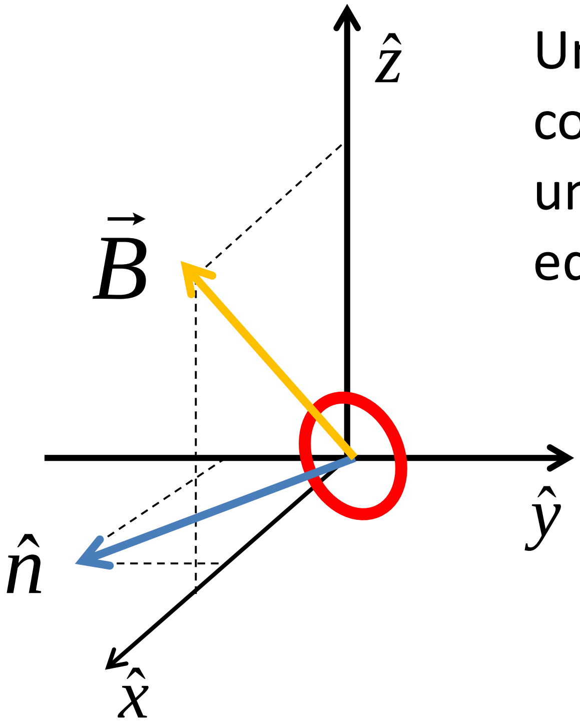
Dalla regola della mano destra, segue che il versore normale al piano della spira è orientato lungo l'asse *z* negativo, per cui il momento di dipolo della bobina è:

$$\vec{\mu} = iNA\hat{n} = -iNA\,\hat{z} \qquad \mu_z = -iNA \qquad B_x = B\cos\left(30^o\right)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \mu_z \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = \mu_z B_x\,\hat{y} = -iNAB_x\,\hat{y} = -iNAB\cos(30^o)\,\hat{y}$$

$$\tau_y = -0.1A \times 20 \times 50 \times 10^{-4}\,m^2 \times 0.5T \times 0.866 = -4.3 \times 10^{-3}\ J$$

Problema 28.35



Una spira circolare di raggio r=8 cm è percorsa da una corrente *i* = 0.2 A, e immersa in un campo magnetico uniforme. Il versore perpendicolare al piano della spira ed il campo magnetico sono:

$$\hat{n} = 0.6\hat{x} - 0.8\hat{y} \qquad \vec{B} = 0.25T\,\hat{x} + 0.3T\,\hat{z}$$

a) calcolare il momento torcente esercitato sulla spira, in notazione vettoriale $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$

$$\vec{\mu} = iA\hat{n}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = i\,A \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ n_x & n_y & 0 \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = i\,An_yB_z\,\hat{x} - i\,An_xB_z\,\hat{y} - i\,An_yB_x\,\hat{z}$$

$$\tau_x = iAn_yB_z = -0.2A \times (\pi r^2) \times 0.8 \times 0.3T = -9.65 \times 10^{-4}\,J$$

$$\tau_y = -iAn_xB_z = -0.2A \times (\pi r^2) \times 0.6 \times 0.3T = -7.24 \times 10^{-4}\,J$$

$$\tau_z = -iAn_yB_x = 0.2A \times (\pi r^2) \times 0.8 \times 0.25T = 8.04 \times 10^{-4}\,J$$

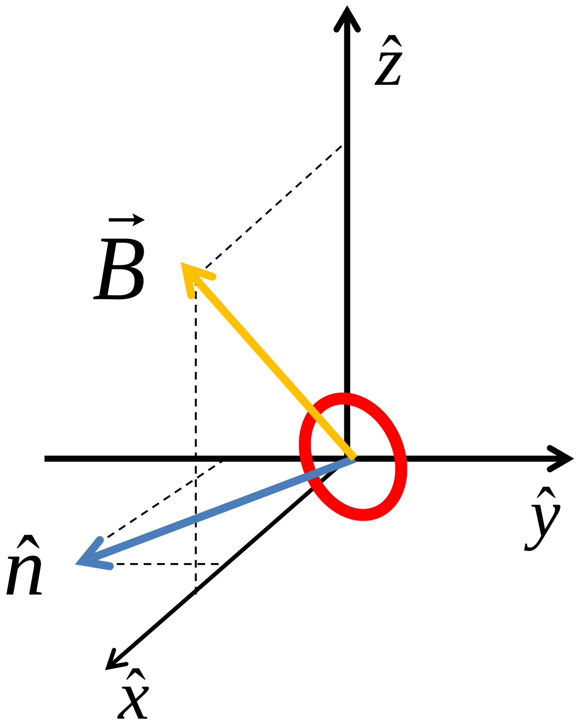
Problema 28.35

$$\tau_x = iAn_yB_z = -0.2A\times(\pi r^2)\times 0.8\times 0.3T = -9.65\times 10^{-4}\,J$$

$$\tau_y = -iAn_xB_z = -0.2A\times(\pi r^2)\times 0.6\times 0.3T = -7.24\times 10^{-4}\,J$$

$$\tau_z = -iAn_yB_x = 0.2A\times(\pi r^2)\times 0.8\times 0.25T = 8.04\times 10^{-4}\,J$$

b) calcolare l'energia potenziale magnetica della spira

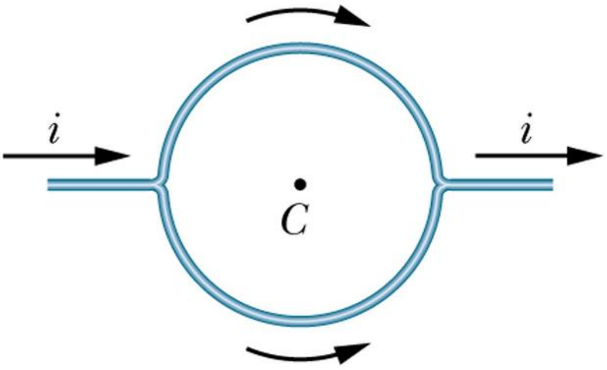


$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\left(\mu_xB_x + \mu_yB_y + \mu_zB_z\right)$$

$$= -\mu_xB_x = -iAn_xB_x$$

$$U = -0.2A\times(\pi r^2)\times 0.6\times 0.25T = -6.03\times 10^{-4}\,J$$

Problema 29.2



Un conduttore rettilineo percorso da corrente si divide in 2 rami semicircolari come mostrato in figura. Calcolare il campo magnetico nel centro del cerchio.

Applichiamo il principio di sovrapposizione, e calcoliamo separatamente il campo generato da 4 elementi di circuito: i 2 tratti rettilinei, e i 2 semicerchi che compongono il cerchio.

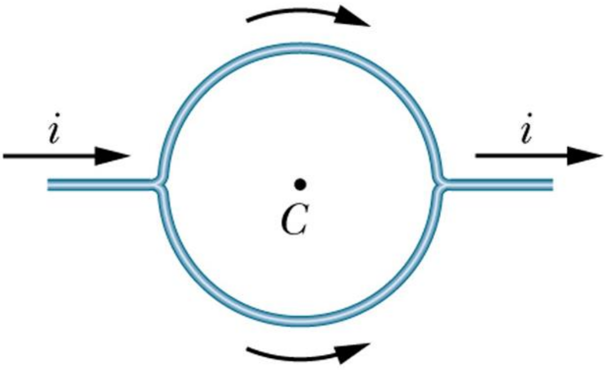
I due tratti rettilinei danno contributo nullo; infatti per la legge di Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\, d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

Ma nel punto C evidentemente è sempre:

$$d\vec{s} \times \vec{r} = 0$$

Problema 29.2



Un conduttore rettilineo percorso da corrente si divide in 2 rami semicircolari come mostrato in figura. Calcolare il campo magnetico nel centro del cerchio.

Ricordiamo la formula del campo generato nel centro di curvatura da una arco di angolo sotteso ϕ:

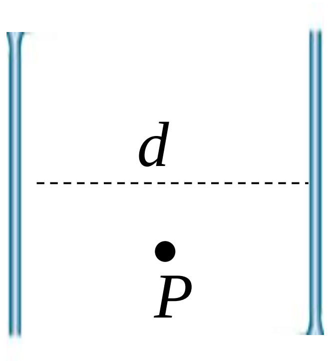
$$B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}$$

Chiamiamo sc1 e sc2 i semicerchi superiore ed inferiore. La corrente si divide in parti uguali nei due semicerchi (essendo identici), per cui se R è il raggio, Il campo generato da ciascun semicerchio è dato da (supponiamo che l'asse z sia perpendicolare alla pagina):

$$\vec{B}_{sc1} = -\frac{\mu_0 (i/2)}{4R}\hat{z}; \quad \vec{B}_{sc2} = \frac{\mu_0 (i/2)}{4R}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{sc1} + \vec{B}_{sc2} = 0$$

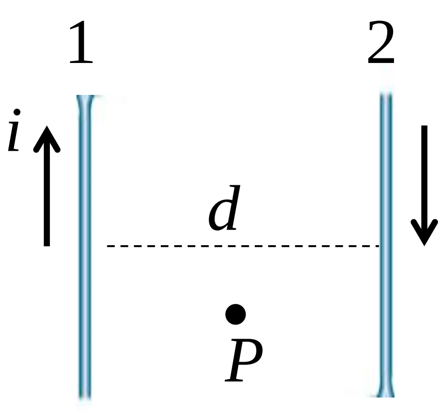
Problema 29.5



Due fili rettilinei paralleli distano *d* = 8 cm, e sono percorsi da una corrente di uguale intensità;
a) calcolare intensità e verso della corrente necessaria a generare un campo magnetico ***B*** = 300 μT in un punto *P* equidistante tra i fili.

Per la regola della mano destra, la corrente nei due fili deve scorrere in senso opposto, altrimenti i campi generati dai fili sarebbero uguali e discordi ed il campo totale nullo. Ipotizziamo quindi che le correnti scorrano come in figura.

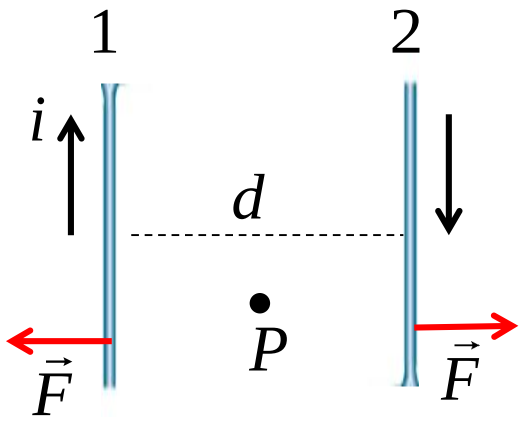
Il campo generato da ciascun filo in *P* è perpendicolare alla pagina ed entrante in verso; a distanza *d*/2 il modulo del campo generato dai fili 1 e 2 è dato da:



$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{(d/2)} = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \quad \Rightarrow B = 2\frac{\mu_0 i}{\pi d}$$

$$\Rightarrow i = \frac{B\,d}{8\left(\dfrac{\mu_0}{4\pi}\right)\mu_0} = \frac{300\,\mu T \times 8\times 10^{-2}\,m}{8\times 10^{-7}\,\dfrac{Tm}{A}} = 30\,A$$

Problema 29.5



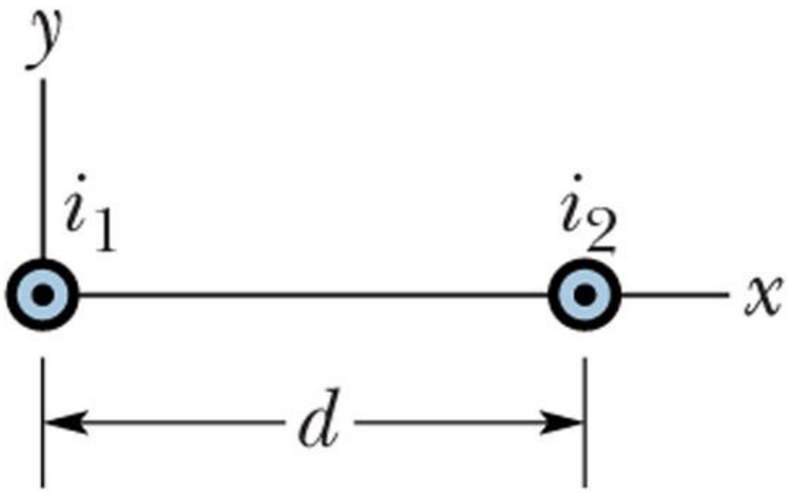
b) calcolare la forza che agisce tra due segmenti di filo lunghi *L* = 1 m e indicare se è attrattiva o repulsiva

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} L \frac{i^2}{d} = 2\times10^{-7}\,\frac{Tm}{A} 1m \,\frac{9\times10^2\,A^2}{8\times10^{-2}\,m} = 2.25\times10^{-3}\,TmA = 2.25\times10^{-3}\,N$$

Quando le correnti sono di verso opposto la forza è repulsiva; infatti entrambe i campi magnetici generati da uno dei fili nei punti dove giace l'altro filo sono perpendicolari ed entranti nella pagina; la forza relativa forza di Lorentz tende chiaramente ad allontanare i fili.

$$TmA = \frac{Tm^2}{s}\frac{C}{m} = V\frac{C}{m} = \frac{J}{m} = N$$

Problema 29.5



Due fili rettilinei paralleli distano d = 16 cm, e sono percorsi da correnti concordi ed uscenti dalla pagina i_1=3.61 mA, $i_2=3\times i_1$;
Stabilire in quale punto dell'asse x il campo magnetico totale è nullo.

Chiamiamo x_1 ed x_2 le posizioni dei due fili lungo *x*; consideriamo 3 regioni distinte:
$x > x_1$: i campi generati dai 2 fili sono concordi in direzione e verso:

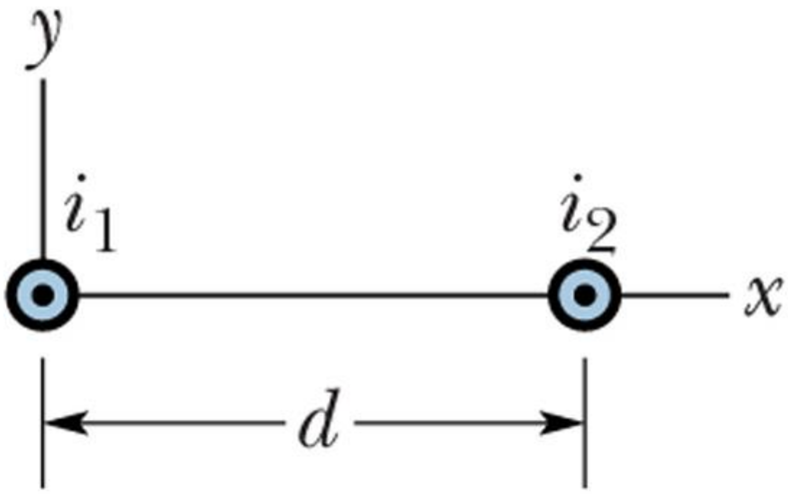
$x > x_2$: i campi generati dai 2 fili sono concordi in verso:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(x-x_1)}\hat{y} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(x-x_2)}\hat{y} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_1}{x-x_1} + \frac{i_2}{x-x_2}\right]\hat{y}$$

$x < x_1$: i campi generati dai 2 fili sono concordi in verso:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi|x-x_1|}\hat{y} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi|x-x_2|}\hat{y} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_1}{|x-x_1|} + \frac{i_2}{|x-x_2|}\right]\hat{y}$$

Problema 29.5



Due fili rettilinei paralleli distano d = 16 cm, e sono percorsi da correnti concordi ed uscenti dalla pagina i_1=3.61 mA, i_2=3×i_1;
Stabilire in quale punto dell'asse x il campo magnetico totale è nullo.

$x_1 > x > x_2$: i campi generati dai 2 fili sono discordi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi|x - x_1|}\hat{y} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi|x - x_2|}\hat{y} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_1}{|x - x_1|} - \frac{i_2}{|x - x_2|}\right]\hat{y}$$

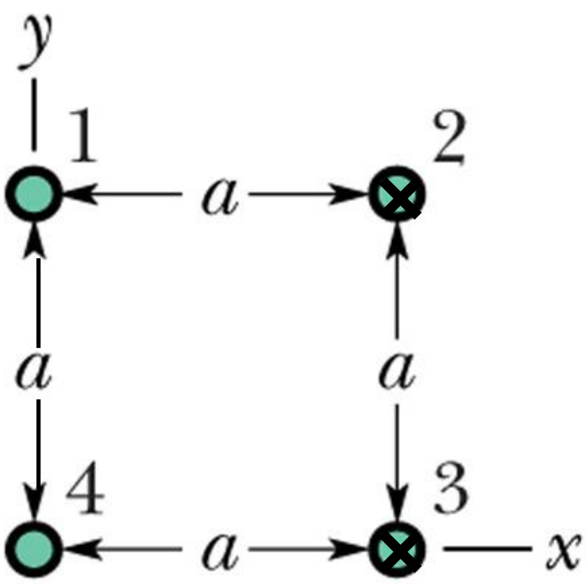
La condizione di annullamento del campo è:

$$\frac{i_1}{|x - x_1|} = \frac{i_2}{|x - x_2|}$$

Possiamo porre x_1 = 0, |x-x_2| = d-x:

$$\frac{x}{i_1} = \frac{d - x}{i_2} \Rightarrow x\left(1 + \frac{i_1}{i_2}\right) = d\,\frac{i_1}{i_2} \Rightarrow x = d\,\frac{i_1}{i_1 + i_2} = 16\,cm \times \frac{1}{4} = 4\,cm$$

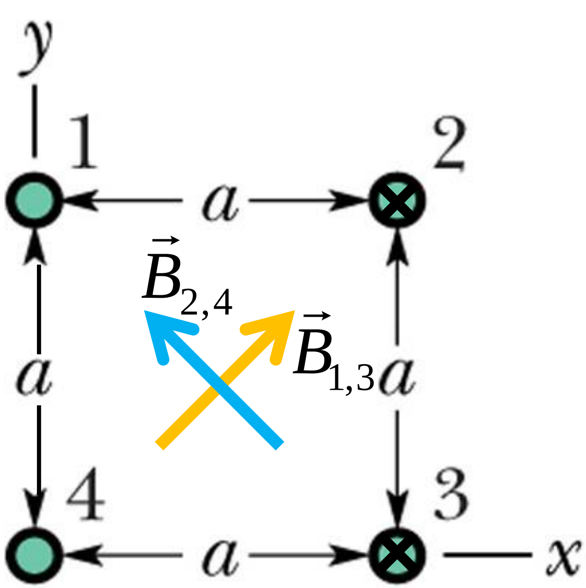
Problema 29.8



4 fili rettilinei perpendicolari al piano, distanti a = 20 cm, sono percorsi da uguale corrente i = 20 A di verso uscente per i fili 1 e 4, entrante nella pagina per 2 e 3. Calcolare in notazione vettoriale il campo totale nel centro del quadrato.

Essendo correnti e distanze dal centro uguali per i 4 fili, anche i moduli dei campi sono tutti uguali:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}; \quad r = a/\sqrt{2}$$

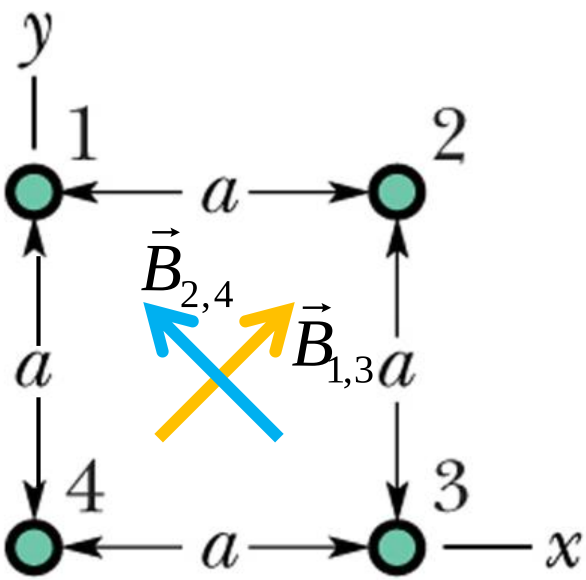


La direzione dei 4 campi è sempre perpendicolare al vettore distanza dal filo, e dunque parallela alle diagonali del quadrato; il verso è dato dalla regola della mano destra:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_3 = B\cos(45^o)\hat{x} + B\cos(45^o)\hat{y}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_4 = -B\cos(45^o)\hat{x} + B\cos(45^o)\hat{y}$$

Problema 29.8



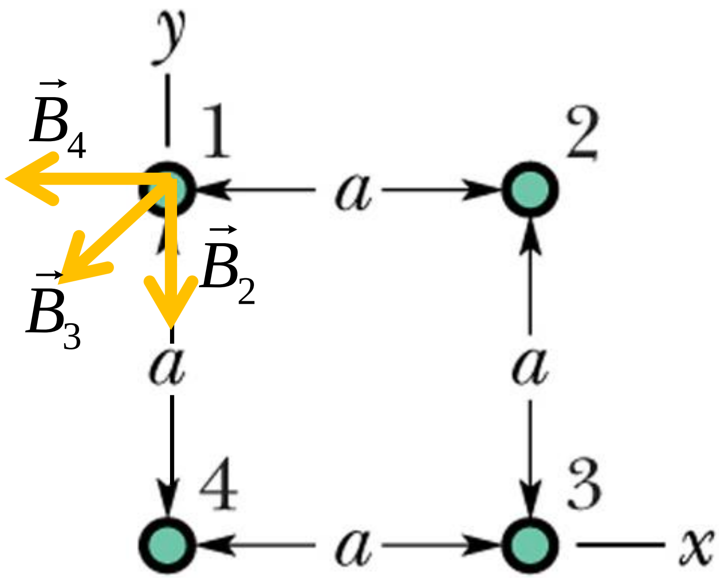
La componente del campo totale lungo *x* si annulla; dunque il campo totale è:

$$\vec{B}_{tot} = 2\vec{B}_1 + 2\vec{B}_2 = 4B\cos(45^o)\hat{y} =$$

$$= 4\frac{\mu_0 i}{2\pi a}\sqrt{2}\cos(45^o)\hat{y} =$$

$$= 8\times10^{-7}\frac{Tm}{A}\times\frac{20A}{20\,cm}\hat{y} = 8\times10^{-5}T\,\hat{y}$$

Problema 29.16



4 fili rettilinei perpendicolari al piano, distanti *a* = 8.5 cm, sono percorsi da correnti *i*=15 A, tutte di verso uscente. Calcolare in notazione vettoriale:

a) il campo totale generato dai fili 2,3,4 nel punto del piano su cui giace il filo 1;

b) La forza con cui il campo generato da 2,3,4 agisce su un tratto lungo L_1 =1 m del filo 1.

I campi generati da 2,3,4 nel punto 1 sono:

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a}\hat{y}; \quad \vec{B}_4 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a}\hat{x}$$

Consideriamo che:

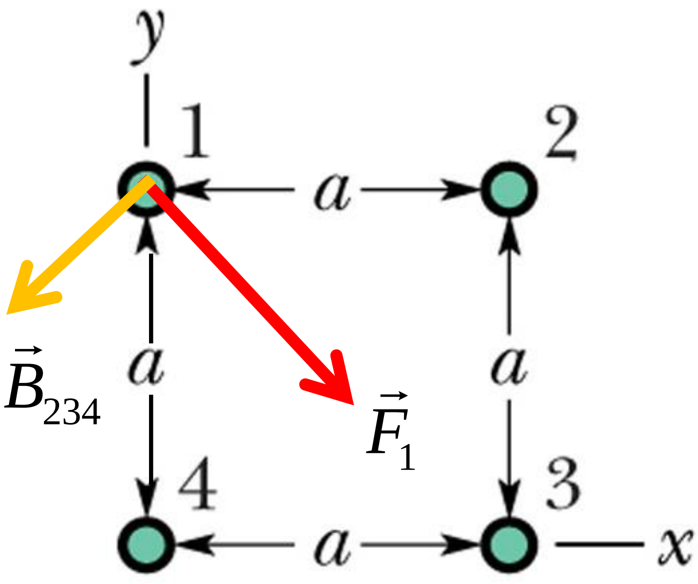
$$d = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\cos(45^o)}{d} = \frac{1}{2a}$$

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cos(45^o)\hat{x} - \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cos(45^o)\hat{y}$$

Il campo totale generato da 2,3,4:

$$\vec{B}_{234} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{x} - \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{y} = -\frac{3\mu_0 i}{4\pi a}(\hat{x}+\hat{y})$$

Problema 29.16



4 fili rettilinei perpendicolari al piano, distanti *a* = 8.5 cm, sono percorsi da correnti *i*=15 A, tutte di verso uscente. Calcolare in notazione vettoriale:

a) il campo totale generato dai fili 2,3,4 nel punto del piano su cui giace il filo 1;

b) La forza con cui il campo generato da 2,3,4 agisce su un tratto lungo L_1 =1 m del filo 1.

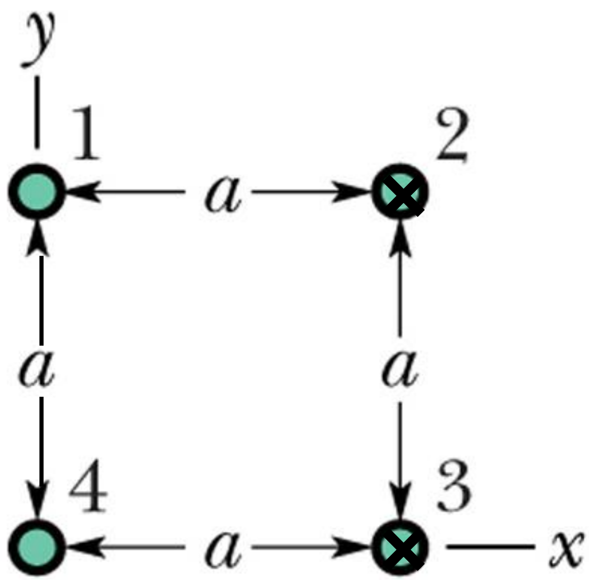
$$\vec{F}_1 = i\,\vec{L}_1 \times \vec{B}_{234} = iL_1B_{234}$$

La forza è diretta lungo la diagonale del quadrato, verso il filo 3; in modulo:

$$B_{234} = \frac{3\mu_0 i}{4\pi\, a}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{3L_1\mu_0 i^2}{2\sqrt{2}\pi\, a} = \frac{3\times 1m\times\left(4\pi\times 10^{-7}\,Tm\right)\left(15A\right)^2}{2\sqrt{2}\pi\, 8.5\times 10^{-2}\,m\,A} = 1.12\times 10^{-3}\,N$$

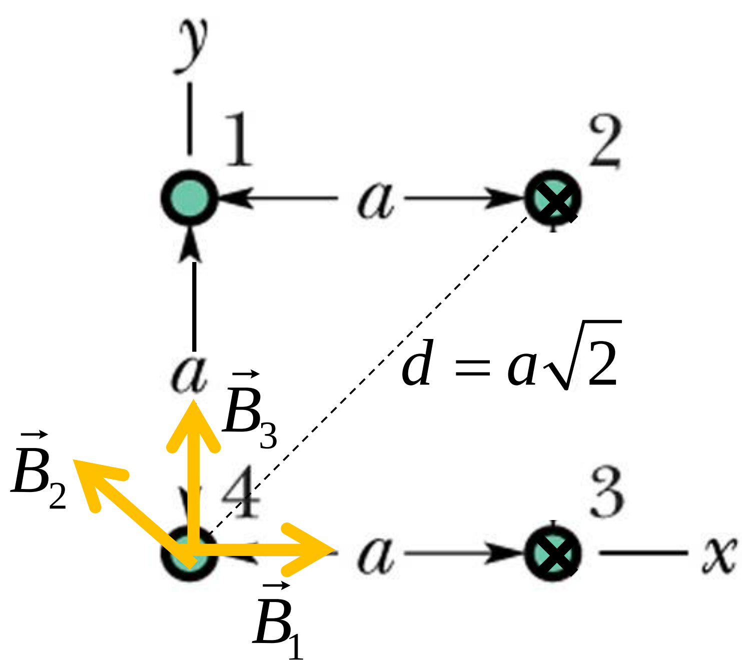
Problema 29.17



4 fili rettilinei perpendicolari al piano, distanti *a* = 14 cm, sono percorsi da correnti *i* = 7 A, di cui 1 e 4 di verso uscente, 2 e 3 di verso entrante nella pagina. Calcolare in notazione vettoriale:

a) Calcolare in coordinate cartesiane il campo totale generato dai fili 1,2,3 nel punto del piano su cui giace il filo 4

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\hat{x} \qquad \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\hat{y}$$



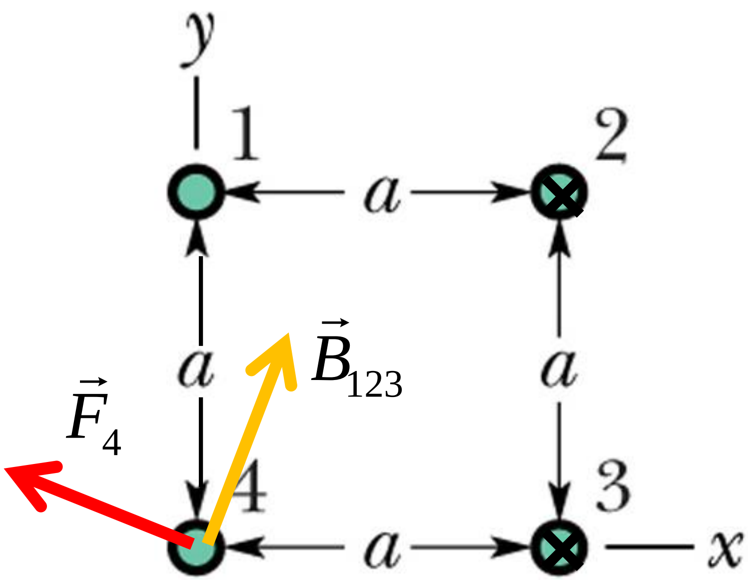
$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cos(45^o)\hat{x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\cos(45^o)\hat{y}$$

Il campo totale generato dai fili 1,2,3 è:

$$\vec{B}_{123} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\hat{x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{y} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\hat{x} + \frac{3\mu_0 i}{4\pi a}\hat{y}$$

Problema 29.17



$$B_{123,x} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} = 10^{-7}\frac{Tm}{A}\times\frac{7A}{14\,cm} = 0.5\times10^{-5}T$$

$$B_{123,y} = \frac{3\mu_0 i}{4\pi a} = 3\times10^{-7}\frac{Tm}{A}\times\frac{7A}{14\,cm} = 1.5\times10^{-5}T$$

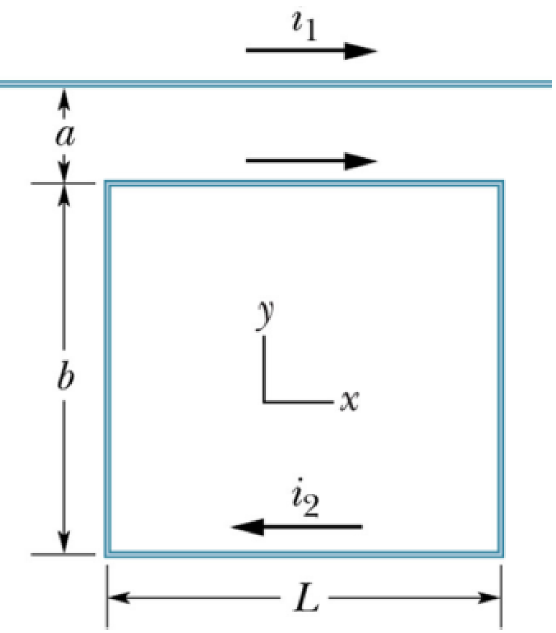
b) Calcolare le componenti cartesiane della forza di Lorentz esercitata dal campo generato dai fili 1,2,3 su un tratto lungo *L* =1 m del filo 4.

$$\vec{F}_4 = i\vec{L}\times\vec{B}_{123} = i\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 0 & L\\ B_{123,x} & B_{123,y} & 0\end{vmatrix} = -i\left(LB_{123,y}\right)\hat{x} - i\left(-LB_{123,x}\right)\hat{y}$$

$$F_{4x} = -7A\times1m\times1.5\times10^{-5}T = -10.5\times10^{-5}N$$

$$F_{4y} = 7A\times1m\times0.5\times10^{-5}T = 3.5\times10^{-5}N$$

Esercizio 1

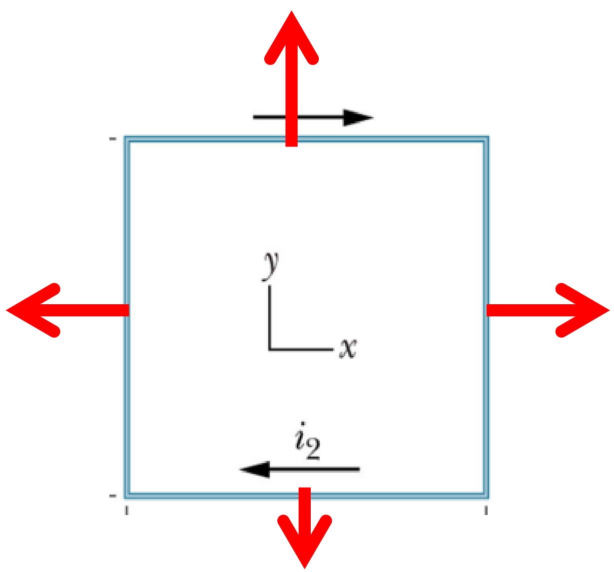


Consideriamo un filo rettilineo in cui scorre corrente i_1 = 30 A e una spira rettangolare percorsa da una corrente i_2 = 20 A; sia a = 1 cm, b = 8 cm, L = 30 cm.

1) Disegnare con frecce in figura le forze agenti sui 4 lati della spira

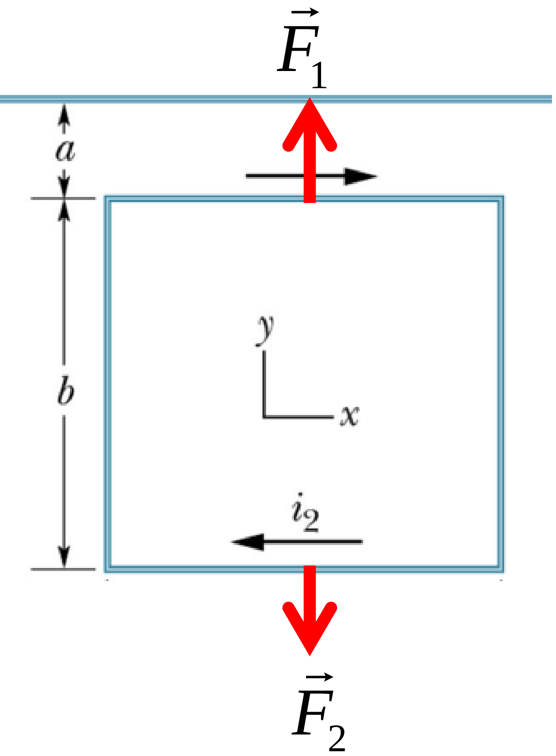
Il campo generato dal filo su un punto qualunque della spira è perpendicolare ed entrante nella pagina; in un qualsiasi punto distante r dal filo il suo modulo è dato da:

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$



Le forze sui lati della spira sono dirette come in figura: sui lati verticali sono uguali in modulo ed opposte in verso, per cui la loro risultante sulla spira è nulla; le forze sui lati orizzontali sono opposte in verso ma diverse in modulo, poiché i lati hanno distanze diverse dal filo. Ci sarà quindi una forza risultante in direzione delle y positive

Esercizio 1



2) Calcolare in componenti cartesiane la risultante delle forze che agisce sulla spira.

Siano 1 e 2 i lati orizzontali della spira; le forze agenti sui due lati sono:

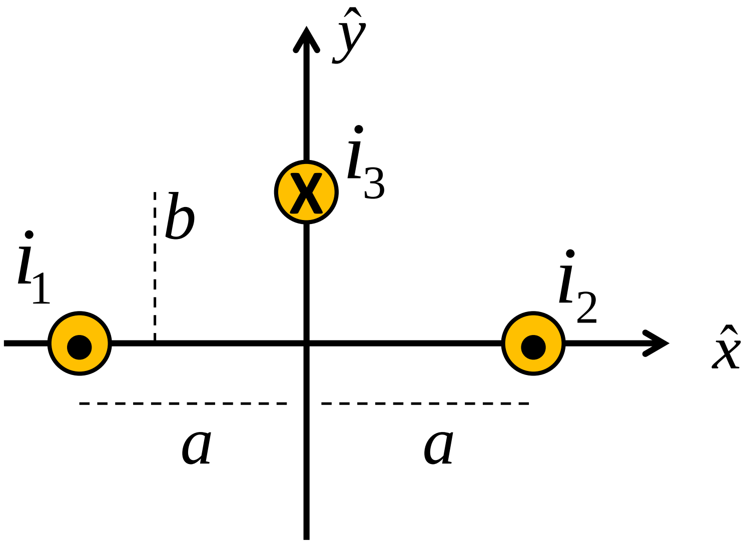
$$\vec{F}_1 = i_2 L B_1 \hat{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 L}{a} \hat{y}$$

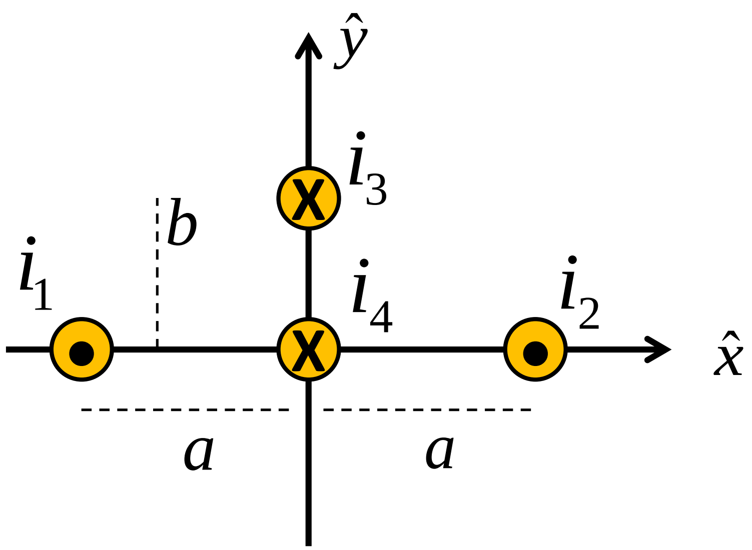
$$\vec{F}_2 = -i_2 L B_2 \hat{y} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 L}{(a+b)} \hat{y}$$

Dunque, la forza risultante è:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi a}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)\hat{y} = \frac{2\left(10^{-7}\,Tm\right)\times 30\,cm \times 6\times 10^2\,A^2}{cm\,A}\,\frac{8}{9}\,\hat{y} = 32\times 10^{-4}\,N\,\hat{y}$$

Esercizio 2





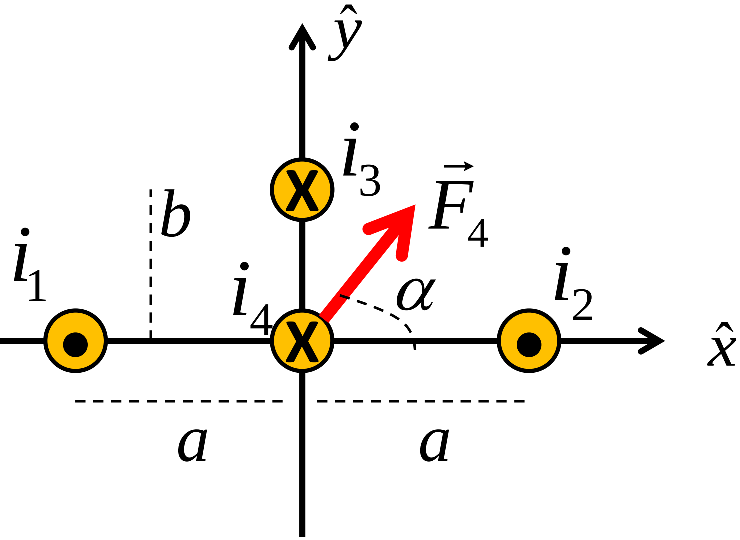
Consideriamo tre fili conduttori perpendicolari alla pagina con correnti i_1 = 30 A, i_2 = 20 A, i_3 = 15 A, il cui verso è indicato in figura; sia a = 3 cm, b = 2 cm.

a) Calcolare le componenti del campo magnetico generato dai 3 fili nell'origine del riferimento.

b) Consideriamo un quarto filo, percorso da corrente i_4 = 30 A, posto nell'origine. Calcolare le componenti della forza che agisce su una sezione L= 2 m di questo filo

c) Della stessa forza, calcolare l'angolo che la forza forma con l'asse x.

Esercizio 2



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a}\hat{y}; \quad \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi a}\hat{y}; \quad \vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 i_3}{2\pi b}\hat{x}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i_3}{2\pi b}\hat{x} + \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi a}\hat{y}$$

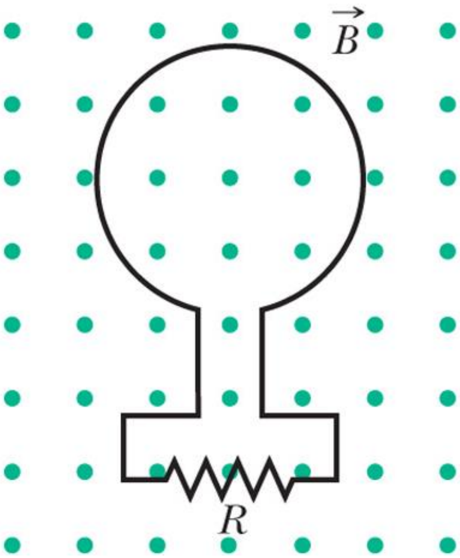
$$B_x = -\frac{2\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 15A}{2cm} = -1.5\times 10^{-4}T \qquad B_y = \frac{2\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 15A}{3cm} = 10^{-4}T$$

$$\vec{F}_4 = i_4\vec{L}\times\vec{B} = i_4\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -L \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = i_4(LB_y)\hat{x} - i_4(LB_x)\hat{y}$$

$$F_{4x} = 30A\times 2m\times 10^{-4}T = 6\times 10^{-3}N \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{F_{4y}}{F_{4x}}\right) = 56.3^o$$

$$F_{4y} = 30A\times 2m\times 1.5\times 10^{-4}T = 9\times 10^{-3}N$$

Problema 30.2



Consideriamo una spira immersa in un campo magnetico uniforme, perpendicolare ed uscente dal foglio. Il flusso magnetico varia nel tempo secondo la legge Φ_B = ($6t^2$+7t) mWb;

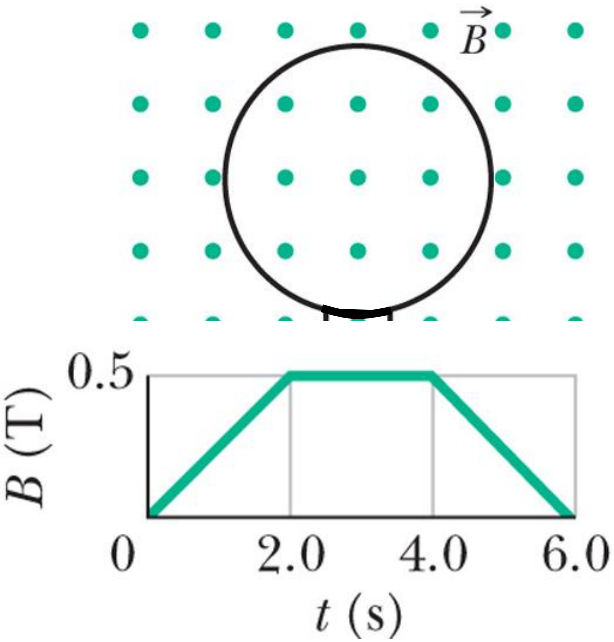
a) Calcolare l'intensità della f.e.m. nella spira all'istante t=2 s.

b) Determinare il verso della corrente che scorre attraverso R

$$\mathscr{E}_i = \frac{d\Phi_B}{dt} = (12t+7)10^{-3}\frac{Wb}{s} = 31mV$$

Il campo magnetico è uscente dalla pagina, e la sua variazione nel tempo è positiva: dunque *dB* è uscente dalla pagina; dalla legge di Lenz segue che la risposta della corrente indotta deve essere generare un campo indotto perpendicolare entrante nella pagina, dunque la corrente indotta percorre la spira in senso orario.

Problema 30.3



Una spira circolare di raggio r = 12 cm è immersa in un campo magnetico uniforme perpendicolare ed uscente dalla pagina; il campo varia nel tempo come mostrato in figura; si calcoli la f.e.m. ed il verso della corrente indotta nella spira nei 4 intervalli:

a) t < 2 s
b) 2 s < t < 4 s
c) 4 s < t < 6 s
d) t > 6 s

a) B lineare crescente nel tempo:

$$\mathscr{E}_i = \frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt} = \pi r^2 \frac{0.5T}{2s} = \frac{\pi(0.12m)^2 T}{4s} = 11.3mV$$

La corrente indotta scorre in verso orario

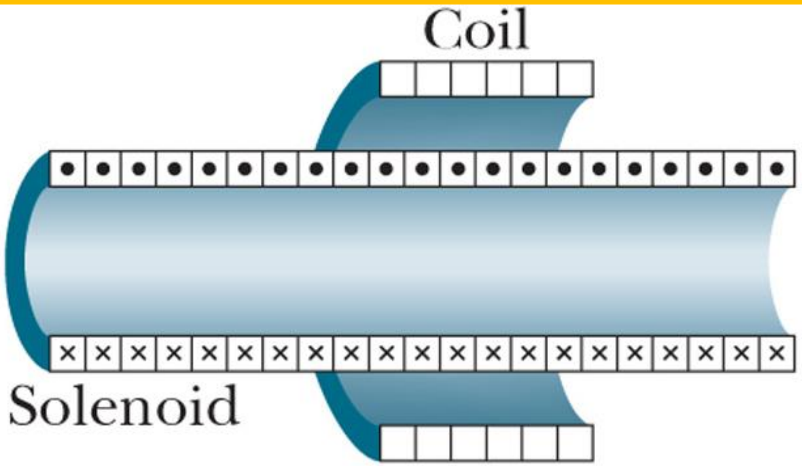
b) e d) B costante nel tempo: $\mathscr{E}_i = 0$

c) B lineare decrescente nel tempo:

$$\mathscr{E}_i = \frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{0.5T}{2s} = -11.3mV$$

La corrente indotta scorre in verso antiorario

Problema 30.5



Una bobina di raggio r=1.8 cm è formata da N=120 avvolgimenti, con resistenza complessiva R =5.3 Ω; la bobina circonda un solenoide coassiale avente *n*=220 spire/cm, percorso da corrente i_0=1.5 A, di diametro d=3.2 cm; la corrente nel solenoide viene diminuita con progressione costante fino a diventare nulla dopo un tempo Δt=25 ms. Calcolare modulo e verso della corrente indotta nella bobina.

$$i(t) = i_0 - ct \qquad c = \frac{i_0}{\Delta t}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{i_0}{\Delta t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 n i\, \hat{x} \qquad \Phi_B = BA; \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = 8.04\, cm^2$$

B è diverso da zero solo all'interno del solenoide, per cui A è l'area della sezione del solenoide.

$$\mathscr{E}_i = N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 N n A \frac{i_0}{\Delta t} = \frac{4\pi \times \left(10^{-7}(Tm/A)\right) \times 1.2 \times 2.2 \times 8.04 m^2 \times 1.5 A}{10^{-2} m\, 25 \times 10^{-3} s} = 0.16 V$$

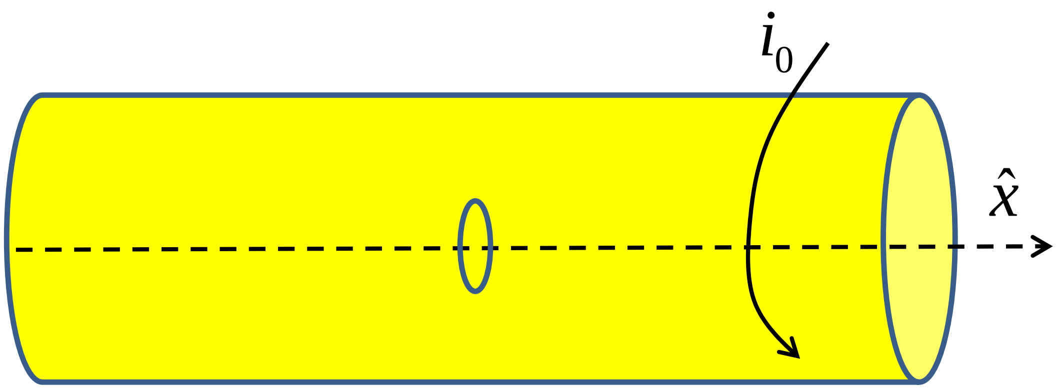
$$i_{in} = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{0.16V}{5.3\Omega} = 30\, mA$$

La corrente nel solenoide decresce col tempo, per cui la corrente indotta nella bobina ha lo stesso verso, in modo da compensarne la riduzione.

Problema 30.1

Una piccola spira di area A=10 mm^2 è inserita all'interno di un solenoide, con l'asse coincidente con quello del solenoide; il solenoide ha *n*=100 spire/cm, e corrente $i=i_0 \sin(\omega t)$, con $\omega = 200$ rad/s, ed i_0=1 A; il verso di i_0 è indicato in figura; calcolare l'ampiezza massima della f.e.m. indotta nella spira.

$$\vec{B} = \mu_0 n i \,\hat{x} = \mu_0 n \, i_0 \sin(\omega t)\hat{x}$$

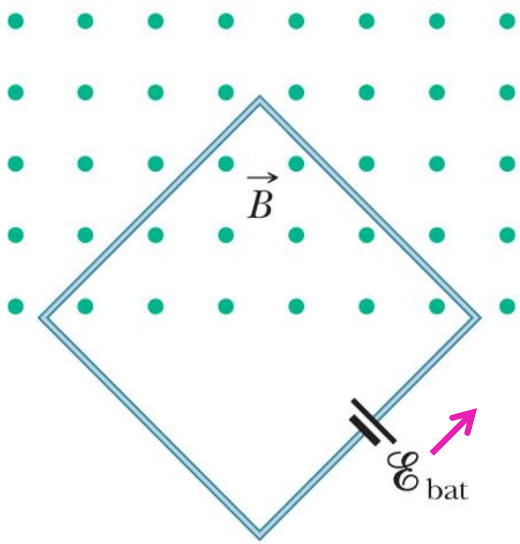


$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \, A i_0 \omega \cos(\omega t) = -\mathscr{E}_m \cos(\omega t)$$

$$\mathscr{E}_m = \mu_0 n \, A i_0 \omega = \frac{4\pi \times \left(10^{-7}(Tm/A)\right) \times 100 \times 10 \times 10^{-6} m^2 \times 1A \times 200}{10^{-2} m \, s} = 25.1 \times 10^{-6} V$$

Problema 30.7



Consideriamo una spira quadrata di lato *a* = 2 m parzialmente immersa in un campo magnetico uniforme, perpendicolare uscente dalla pagina. La spira contiene una batteria con f.e.m. uguale a 20 V. Il campo magnetico varia nel tempo secondo la legge B = (0.042 – 0.87t)T.

a) Calcolare la f.e.m. totale del circuito

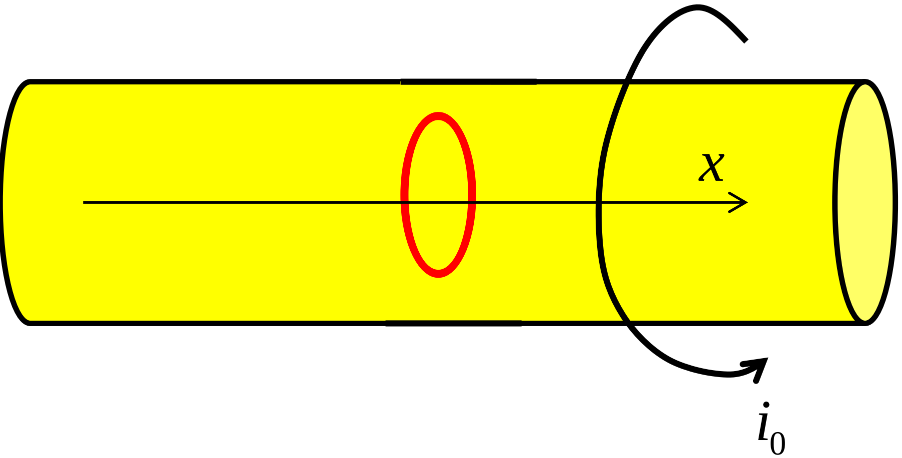
b) Calcolare la direzione della corrente totale

$$\Phi_B = B\frac{a^2}{2}; \quad \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{a^2}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{4m^2}{2}0.87\frac{T}{s} = 1.74V$$

Poiché B decresce nel tempo, la f.e.m. indotta genera una corrente che compensa questa riduzione, dunque di verso antiorario; la f.e.m. è anch’essa antioraria.

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{bat} + \mathcal{E}_i = 21.74V$$

Problema 5



Una spira (in rosso) con resistenza R = 5 Ω e raggio r=4 cm si trova all'interno di un solenoide ideale (in giallo); spira e solenoide sono coassiali (sia *x* l'asse comune ai due conduttori); il solenoide ha *n*=50 spire/cm e raggio r'=6 cm; nel solenoide scorre una corrente i_s alternata sinusoidale $i_s=i_0 \cos(\omega t)$, con $\omega = 200$ rad/s, ed i_0=2 A.

il verso di i_0 è indicato in figura

1) Calcolare il campo magnetico generato dal solenoide agli istanti t=2s; t= 6s, t= 10s
2) Calcolare l'intensità della corrente indotta i_{in} nella spira agli istanti t=2s; t= 6s, t= 10s; indicare per ciascun istante se i versi di i_{in} ed i_s sono concordi o discordi.

$$a)\begin{cases} t=2\,s: \quad B_x = \\ t=6\,s: \quad B_x = \\ t=10\,s: \quad B_x = \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} t=2\,s: \quad i_{in} = \\ t=6\,s: \quad i_{in} = \\ t=10\,s: \quad i_{in} = \end{cases}$$

	concorde con i_s	discorde con i_s
$t=2\,s$	☐	☐
$t=6\,s$	☐	☐
$t=10\,s$	☐	☐

Problema 5

$$B_x = \mu_0 n i_s = \mu_0 n\, i_0 \cos(\omega t)$$

$$\mu_0 n\, i_0 = 4\pi \times \left(10^{-7}\,(Tm\,/\,A)\right)\frac{50}{10^{-2}\,m}\,2A = 4\pi \times 10^{-3}\,T$$

$$t = 2s: \quad B_x = 4\pi\cos(400)\,mT = -6.6\,mT$$

$$t = 6s: \quad B_x = 4\pi\cos(1200)\,mT = 12.4\,mT$$

$$t = 10s: \quad B_x = 4\pi\cos(2000)\,mT = -4.6\,mT$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \pi\, r^2 \mu_0 n\, i_0 \omega \sin(\omega t) \qquad i_{in} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\pi\, r^2 \mu_0 n\, i_0}{R}\,\omega \sin(\omega t)$$

$$i_{in} = \frac{64\pi^2 cm^2 \left(10^{-7}\,(Tm\,/\,A)\right)50 \times 400\,A \sin(200\,t)}{5\Omega\, cm\, s} = 2.53 \times 10^{-3} \sin(200\,t)\,A$$

$$t = 2\,s: \quad i_{in} = 2.53 \times 10^{-3} \sin(400)\,A = -2.15 \times 10^{-3}\,A$$

$$t = 6\,s: \quad i_{in} = 2.53 \times 10^{-3} \sin(1200)\,A = -0.19 \times 10^{-3}\,A$$

$$t = 10\,s: \quad i_{in} = 2.53 \times 10^{-3} \sin(2000)\,A = 2.35 \times 10^{-3}\,A$$

$$\frac{Tm^2}{\Omega\, A} = s$$

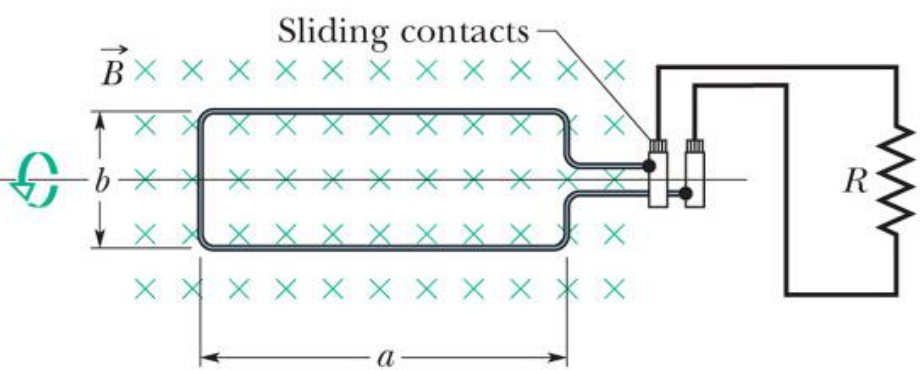
Problema 5

	i_{in} concorde con i_s	i_{in} discorde con i_s
$t = 2s \quad i_s < 0 \quad \dfrac{di_s}{dt} = -i_0 \omega \sin(400) > 0$	☒	☐
$t = 6s \quad i_s > 0 \quad \dfrac{di_s}{dt} = -i_0 \omega \sin(1200) > 0$	☐	☒
$t = 10s \quad i_s < 0 \quad \dfrac{di_s}{dt} = -i_0 \omega \sin(2000) < 0$	☐	☒

t=2s: B è diretto verso le x negative e i_s in senso opposto ad i_0; la derivata positiva di i_s significa che B sta DIMINUENDO in valore assoluto; nella spira si genera una corrente che compensa questa diminuzione, diretta nel verso di i_s e opposto ad i_0
t=6s: B è diretto verso le x positive e i_s in senso concorde ad i_0; la derivata positiva di i_s significa che B sta AUMENTANDO in valore assoluto; nella spira si genera una corrente che compensa questo aumento, diretta in verso opposto ad i_s e i_0
t=10s: B è diretto verso le x negative e i_s in senso opposto ad i_0; la derivata negativa di i_s significa che B sta AUMENTANDO in valore assoluto; nella spira si genera una corrente diretta in verso opposto ad i_s e concorde con i_0

Problema 30.13

Un generatore di corrente alternata è composto da una bobina rettangolare con N=100 spire, di lati *a* = 50 cm e *b* = 30 cm, immersa in un campo magnetico uniforme di intensità *B*=3.5 T, perpendicolare uscente dalla pagina; inizialmente il sistema è in equilibrio, col campo magnetico parallelo alla normale del piano della spira. La spira viene poi messa in rotazione attorno all'asse orizzontale con frequenza ν = 1000 giri al minuto. Calcolare la massima f.e.m. indotta nella bobina.



Durante la rotazione, il flusso magnetico attraverso l'area della bobina è dato da:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA\cos(\theta)$$

Una rotazione con velocità angolare costante implica che: $\theta = \omega t = 2\pi\nu\, t$

$$\Rightarrow \quad \Phi_B = BA\cos(\omega t)$$

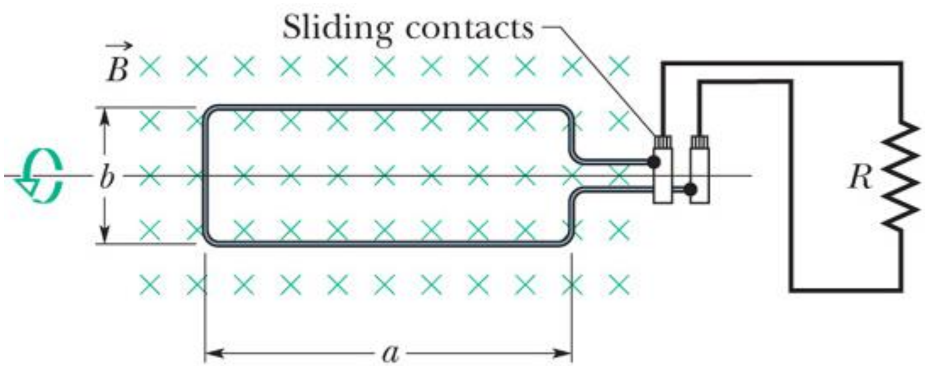
Problema 30.13

Calcoliamo la f.e.m. indotta nella bobina a causa della variazione del flusso concatenato:

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = NabB\omega\sin(\omega t) = \mathscr{E}_m \sin(\omega t)$$

Dunque l'ampiezza massima della f.e.m. indotta è:

$$\mathscr{E}_m = NabB\omega = 100\times 0.15\,m^2 \times 3.5\,T \times 2\pi\frac{1000}{60\,s} = 5.5\,kV$$

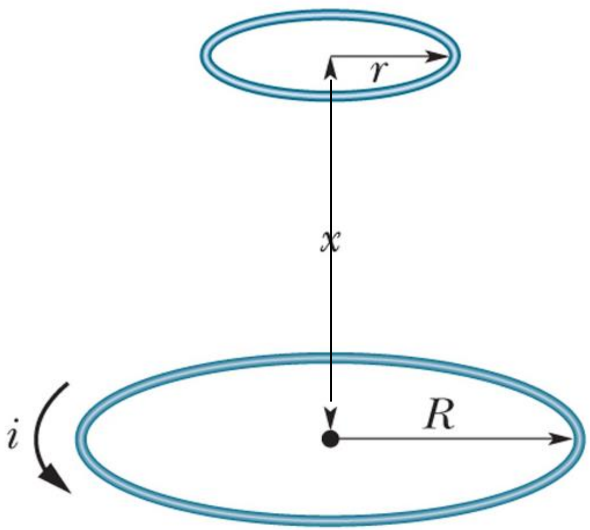


Notiamo che la f.e.m. massima si ha per sin(θ)=±1, ovvero quando θ = ± π/2 , ovvero quando la normale al piano della spira ed il campo magnetico sono perpendicolari

Problema 30.15

Consideriamo 2 spire parallele coassiali, di cui una molto più piccola dell'altra, cosicché il campo generato dalla spira grande possa essere considerato uniforme in tutti i punti dell'area della piccola; le due spire sono a distanza $x >> R$; supponiamo di allontanare le due spire con velocità v costante, in modo che x vari linearmente nel tempo ($x = vt$).

a) Determinare il flusso attraverso la spira piccola in funzione di x
b) Calcolare la f.e.m. ed il verso della corrente indotta nella spira piccola



Nelle ipotesi date possiamo approssimare il campo generato dalla spira grande come il campo di un dipolo magnetico lungo l'asse:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{\mu}}{x^3}; \quad \vec{\mu} = iA\hat{x}$$

$$\Phi_B = \int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 i\pi R^2 r^2}{2x^3} = \frac{c}{x^3}$$

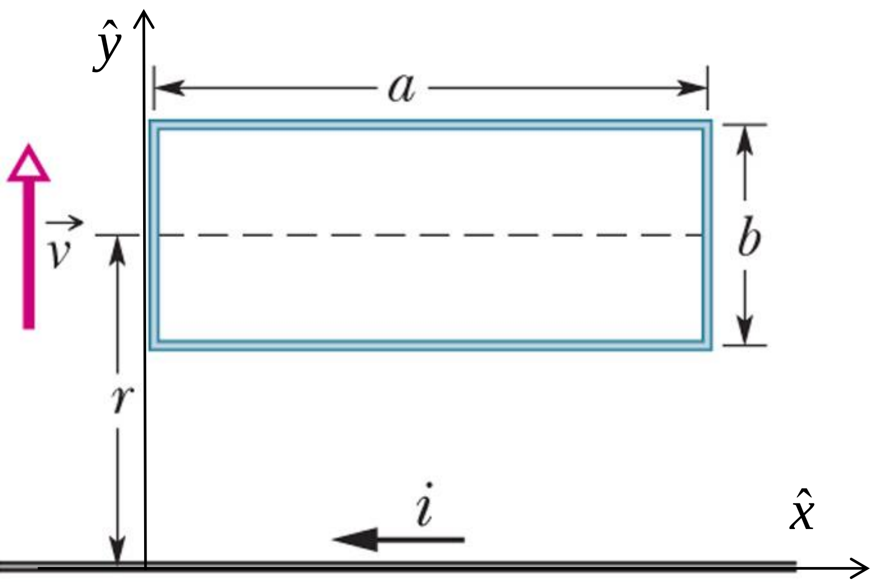
$$\Rightarrow \mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{c}{v^3}\frac{d}{dt}t^{-3} = \frac{3c}{v^3}t^{-4} = \frac{3\pi\mu_0 iR^2r^2}{2v^3t^4} = \frac{3\pi\mu_0 iR^2r^2v}{2x^4}$$

Poiché le spire si allontanano, il flusso magnetico diminuisce, per cui la corrente indotta nella spira piccola ha lo stesso verso della corrente nella grande

Problema 30.20

Consideriamo una spira rettangolare di lati *a* = 2.2 cm e *b* = 0.8 cm e resistenza *R* = 0.4 mΩ, posta vicino ad un lungo filo conduttore in cui scorre una corrente *i* = 4.7 A; *r* = 1.5*b*

a) Calcolare l'intensità del flusso magnetico attraverso la spira
b) Calcolare la corrente indotta nella spira quando questa si allontana dal filo con velocità *v* = 3.2 mm/s



il campo generato dal filo è perpendicolare entrante nella pagina; poiché il filo giace lungo l'asse y=0, il modulo del campo è:

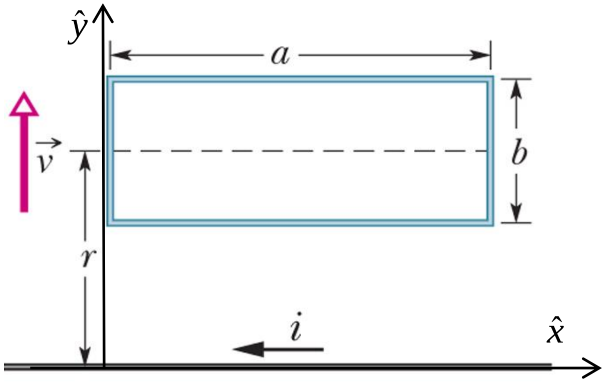
$$B(y) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{y}$$

Il flusso di B attraverso la spira è:

$$\Phi_B = \int B\,dA = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int \frac{1}{y}\,dA$$

Per un'area rettangolare: $dA = dx\,dy$

Problema 30.20



$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^a dx \int_{r-b/2}^{r+b/2} \frac{1}{y}\,dy = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{r+b/2}{r-b/2}\right)$$

Per r = 1.5b:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln(2) = 2\left(10^{-7}(Tm/A)\right)\times 4.7A \times 2.2\times 10^{-2} m \times 0.69 = 1.427\times 10^{-8} Wb$$

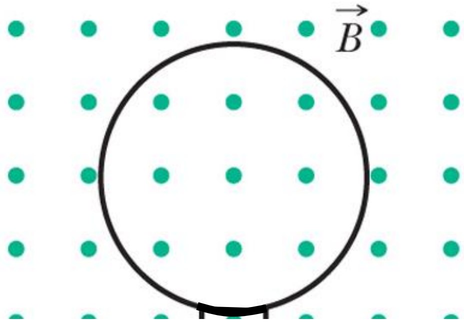
Per r che aumenta con velocità v costante:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = c\frac{d}{dt}\left[\ln\left(r+b/2\right) - \ln\left(r-b/2\right)\right] = cv\left[\frac{1}{r+b/2} - \frac{1}{r-b/2}\right] = -\frac{cvb}{r^2-(b/2)^2}$$

La corrente indotta nella spira è quindi: $$i_{in} = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{\mu_0 ivab}{2\pi R}\frac{1}{r^2-(b/2)^2}$$

Per r = 1.5b: $$i_{in} = 10^{-5} A$$

Problema 30.21



Calcolare la potenza termica dissipata in 50 cm di filo di rame, di diametro d = 1 mm, immersa in un campo magnetico uniforme che aumenta nel tempo di 10 mT/s. La resistività del rame è 1.69×10^{-8} Ω/m

$$l = 2\pi r = 50\,cm \qquad A = \pi \frac{d^2}{4} = 0.78\,mm^2$$

$$\mathscr{E}_i = \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \frac{l^2}{4\pi} \frac{10mT}{s} = \frac{m^2}{16\pi} \frac{10^{-2}T}{s} = 2 \times 10^{-4} V$$

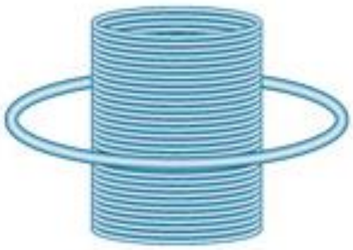
Calcoliamo la resistenza dalla resistività del rame:

$$R = \rho \frac{l}{A} = 1.69 \times 10^{-8} \Omega m \times \frac{0.5\,m}{0.78 \times 10^{-6} m^2} = 1.08 \times 10^{-2} \Omega$$

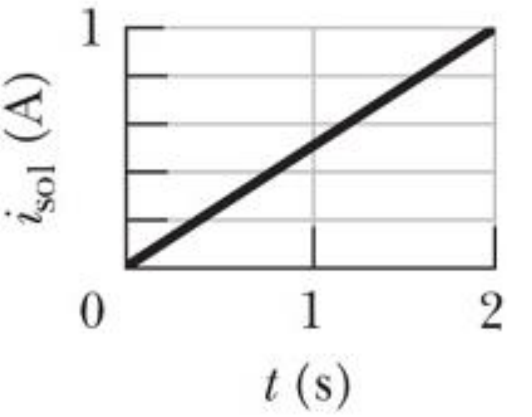
$$i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{2 \times 10^{-4} V}{1.08 \times 10^{-2} \Omega} = 1.85 \times 10^{-2} A$$

$$P = i\mathscr{E}_i = 1.85 \times 10^{-2} A \times 2 \times 10^{-4} V = 3.70 \times 10^{-6} W$$

Problema 30.22



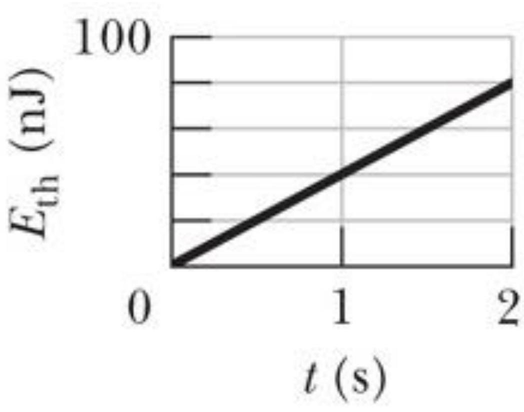
In figura vediamo una spira di raggio a = 6 cm, concentrica e coassiale con un solenoide di raggio b = 2 cm con n = 8000 spire/m; La corrente nel solenoide varia nel tempo come riportato nel grafico; l'energia termica dissipata nella spira varia nel tempo come mostrato nel grafico. Calcolare la resistenza della spira.



Possiamo calcolare la f.e.m. indotta nella spira, e dalla derivata dell'energia termica, la potenza dissipata nella spira; da queste poi si ricava facilmente la resistenza

$$B = \mu_0 n i \qquad \Phi_B = BA; \quad A = 4\pi\, cm^2$$

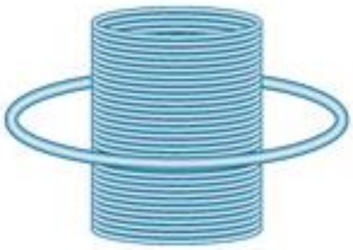
La corrente cresce linearmente nel tempo, con una derivata uguale a 0.5 A/s



$$\frac{di}{dt} = \frac{1A}{2s} = 0.5\frac{A}{s}$$

$$P = \frac{dE_{th}}{dt} = \frac{80\, nJ}{2s} = 40\, nW$$

Problema 30.22



In figura vediamo una spira di raggio a = 6 cm, concentrica e coassiale con un solenoide di raggio b = 2 cm con n = 8000 spire/m; La corrente nel solenoide varia nel tempo come riportato nel grafico; l'energia termica dissipata nella spira varia nel tempo come mostrato nel grafico. Calcolare la resistenza della spira.

$$\mathscr{E}_i = \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n A \frac{di}{dt} = \frac{(4\pi)^2 \times \left(10^{-7} (Tm/A)\right) \times 8 \times 10^3 \times 10^{-4} m^2 \times 0.5 A}{m\, s} = 0.631 \times 10^{-5} V$$

$$P = \frac{\mathscr{E}_i^2}{R} \Rightarrow R = \frac{0.631^2 \times 10^{-10} V^2}{40\, nW} = 10^{-3} \Omega$$

Problema 30.30

Si consideri una bobina di raggio r = 30 cm, con N= 30 spire; perpendicolarmente al piano della bobina vi è un campo magnetico esterno uniforme B=2.6 mT;

a) Calcolare il flusso concatenato con la bobina.
b) Se facciamo circolare una corrente uguale ad *i* = 3.8 A, otteniamo che il flusso magnetico totale attraverso la bobina si annulla; calcolare l'induttanza della bobina

Il flusso concatenato dovuto al campo esterno è:

$$N\Phi_B = NB\left(\pi r^2\right) = 2.45\,mWb$$

L'induttanza è il rapporto tra flusso magnetico generato dall'induttore e corrente nell'induttore; se per la corrente data il flusso si annulla, significa che il flusso generato dalla bobina è uguale e contrario a quello esterno; dunque deve essere:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{2.45\,mWb}{3.8A} = 0.64\,mH$$

Problema 30.31

Consideriamo una bobina con N= 400 spire, e induttanza L = 8 mH; calcolare il flusso magnetico attraverso la bobina quando nella bobina scorre una corrente di 5 mA.

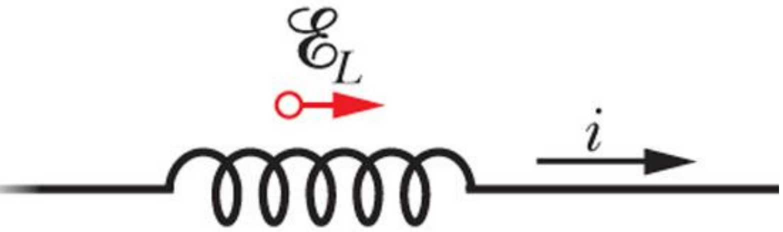
$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \Rightarrow \Phi_B = \frac{Li}{N} = \frac{8\,mH \times 5mA}{400} = 10^{-7}\,Wb$$

Problema 30.34

Consideriamo un’induttanza in cui f.e.m. e corrente sono orientate come in figura.

a) La corrente sta aumentando o diminuendo ?

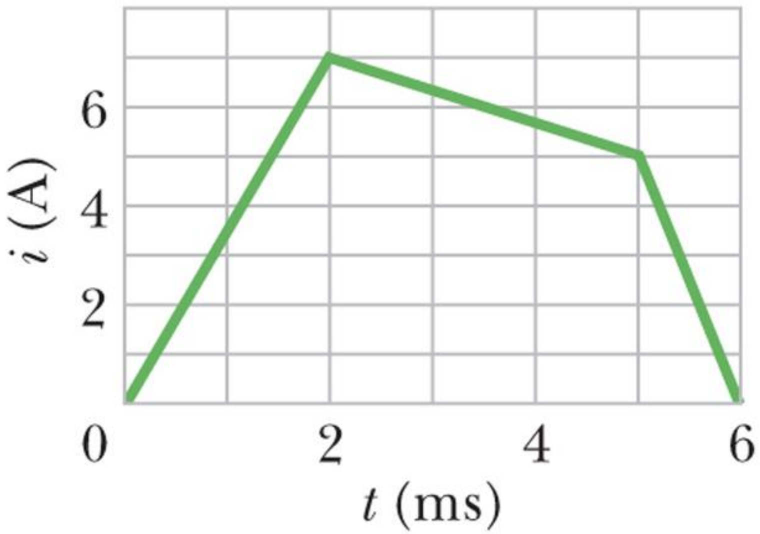
b) La f.e.m. è di 17 V e la corrente varia di 25 kA/s; calcolare l’induttanza



La f.e.m. è orientata in modo tale da generare una corrente concorde con *i*, compensando così il decremento di *i*; dunque *i* decresce.

$$\mathscr{E}_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow L = \frac{\mathscr{E}_L}{(di/dt)} = \frac{17Vs}{25kA} = 0.68\,mH$$

Problema 30.36



La corrente che scorre in un'induttanza di L = 4.6 H varia nel tempo come mostrato in figura. L'induttanza ha una resistenza R=12 Ω. Calcolare la f.e.m. indotta negli intervalli:

a) 0 < t < 2 ms

b) 2 ms < t < 5 ms

c) 5 ms < t < 6 ms

0 < t < 2 ms

$$\frac{di}{dt} = \frac{7A}{2ms} = 3.5\times10^3 \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{E}_L = L\frac{di}{dt} = 4.6H \times 3.5\times10^3 \frac{A}{s} = 1.6\times10^4 V$$

2 ms < t < 5 ms

$$\frac{di}{dt} = -\frac{2A}{3ms} = -0.66\times10^3 \frac{A}{s}$$

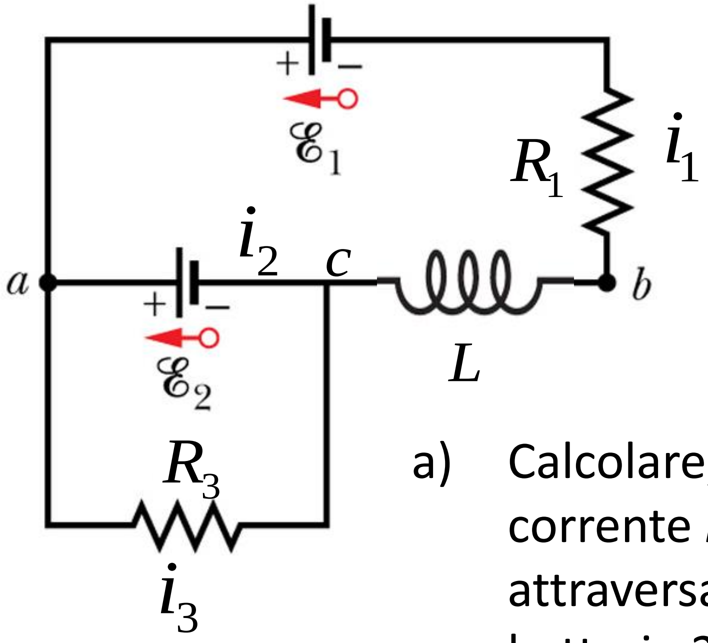
$$\mathcal{E}_L = -4.6H \times 0.66\times10^3 \frac{A}{s} = -3.04\times10^3 V$$

5 ms < t < 6 ms

$$\frac{di}{dt} = -\frac{5A}{1ms} = -5\times10^3 \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{E}_L = -4.6H \times 5\times10^3 \frac{A}{s} = -2.3\times10^4 V$$

Problema 6



Consideriamo il circuito in figura con 2 batterie, 2 resistenze e un'induttanza:

$$\mathscr{E}_1 = 10V \quad \mathscr{E}_2 = 5V \quad L = 4\,H \quad R_1 = 5\Omega \quad R_3 = 10\Omega$$

a) Calcolare, nell'istante iniziale di chiusura del circuito, la corrente i_1 che attraversa la resistenze R_1, la corrente i_3 che attraversa la resistenza R_3, la corrente i_2 che attraversa la batteria 2.

b) Nello stesso istante calcolare ΔV_1 (d.d.p. ai capi della resistenza R_1), ΔV_3 (d.d.p. ai capi della resistenza R_3), ΔV_L (d.d.p. ai capi dell'induttanza). Nello stesso istante calcolare l'energia magnetica U immagazzinata nell'induttore.

c) Ricalcolare le correnti i_1 i_2 i_3 nel limite di tempo lungo.

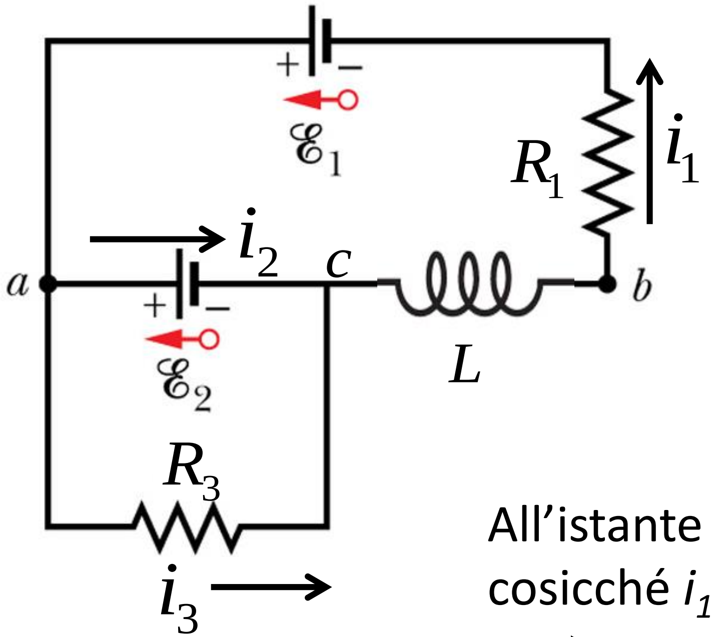
d) Indicare con frecce in figura il verso delle correnti i_1 i_2 i_3 calcolate nel limite di tempo lungo

e) Ricalcolare i potenziali e l'energia dell'induttore nel limite di tempo lungo

f) Nel limite di tempo lungo, calcolare la potenza P_1, P_2 erogata dalle batterie 1, 2.

g) Nel limite di tempo lungo, calcolare P_1, P_3 dissipata sulle resistenze R_1, R_3

Problema 6: soluzione



$$\mathscr{E}_1 = 10V \quad \mathscr{E}_2 = 5V \quad L = 4H \quad R_1 = 5\Omega \quad R_3 = 10\Omega$$

Ipotizziamo un verso per le correnti, e applichiamo la legge di Kirchoff alle maglie superiore e inferiore:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = i_1 R_1 + \Delta V_L; \quad \Delta V_L = L\frac{di_1}{dt}$$

$$\mathscr{E}_2 = i_3 R_3 \qquad i_1 = i_2 + i_3$$

All'istante iniziale ΔV_L compensa la tensione della batteria, cosicché i_1 è nulla:

$$a)\, i_1 = 0 \qquad i_2 = -0.5A \qquad i_3 = 0.5A$$

$$b)\, \Delta V_1 = 0 \qquad \Delta V_3 = 5V \qquad \Delta V_L = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = 5V \qquad U = 0$$

Nel regime stazionario $\Delta V_L = 0$, per cui: $i_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1} = \dfrac{5V}{5\Omega} = 1A$

Inoltre i_3 e ΔV_3 restano invariate poiché la tensione tra *a* e *c* è fissata dalla batteria 2

$$c)\, i_1 = 1A \qquad i_2 = 0.5A \qquad i_3 = 0.5A$$

$$e)\, \Delta V_1 = i_1 R_1 = 5V \qquad \Delta V_3 = 5V \qquad \Delta V_L = 0 \qquad U = 2J$$

Problema 6: soluzione

$$\mathscr{E}_1 = 10V \quad \mathscr{E}_2 = 5V \quad L = 4H \quad R_1 = 5\Omega \quad R_3 = 10\Omega$$

Potenza erogata dalle batterie a regime:

$$f)\, P_1 = i_1 \mathscr{E}_1 = 10W; \qquad P_2 = i_2 \mathscr{E}_2 = 2.5W$$

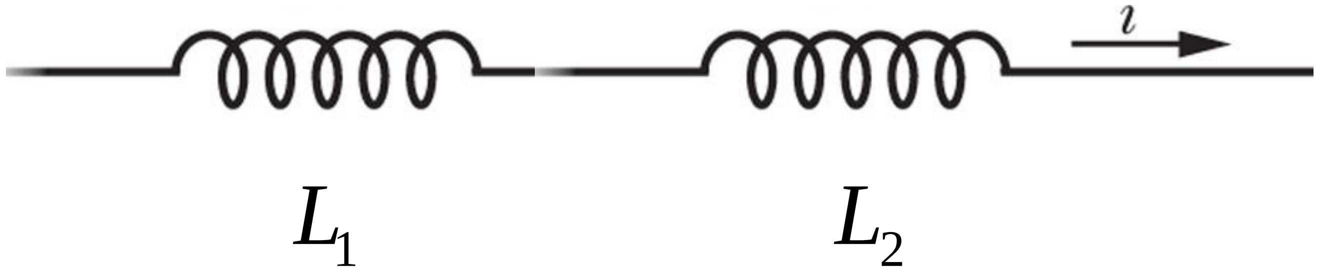
NB: il verso di i_2 è opposto alla polarità della batteria 2, dunque la batteria 2 sta assorbendo energia (ovvero si ricarica)

$$g)\, P_1 = i_1 \Delta V_1 = 5W; \qquad P_3 = i_3 \Delta V_3 = 2.5W$$

Notiamo che la potenza totale dissipata a regime sulle resistenze R_1 ed R_3 è P = 5 W+2.5 W=7.5 W; per la conservazione dell'energia questa deve essere uguale alla potenza erogata dalle batterie, ed infatti 10 – 2.5 = 7.5 W

Problema 30.37

Due induttanze L1 e L2 sono collegate in serie. Dimostrare che l'induttanza equivalente è la somma delle singole induttanze.

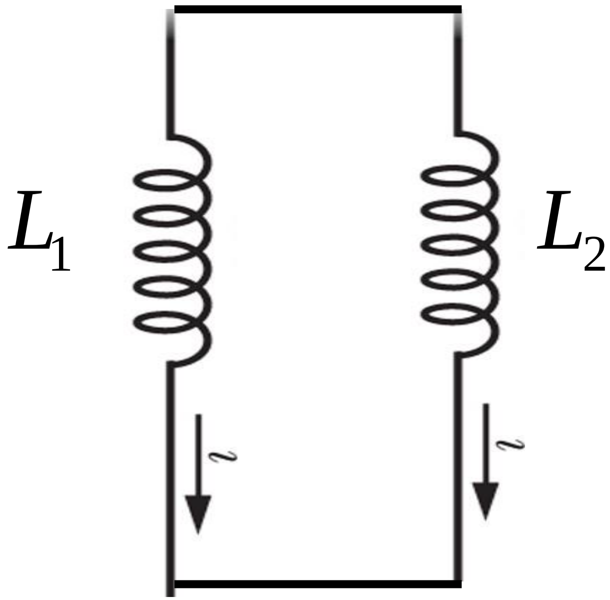


La d.d.p. ai capi della serie è ovviamente la somma elle due d.d.p. ai capi delle singole induttanze; dunque:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \left(L_1 + L_2\right)\frac{di}{dt} \Rightarrow L_{eq} = L_1 + L_2$$

Problema 30.38

Due induttanze L1 e L2 sono collegate in parallelo. Calcolare l'induttanza equivalente.



La d.d.p. ai capi di ciascuna induttanza è ovviamente la stessa, mentre la corrente è diversa, per cui:

$$\Delta V = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

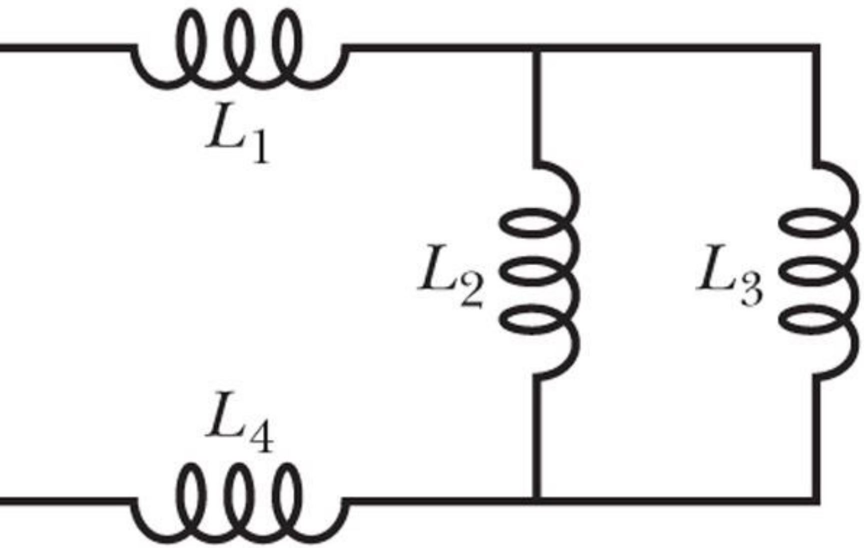
$$\Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta V}{L_1}; \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{\Delta V}{L_2}$$

$$\Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = \frac{di}{dt} = \Delta V \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Problema 30.39

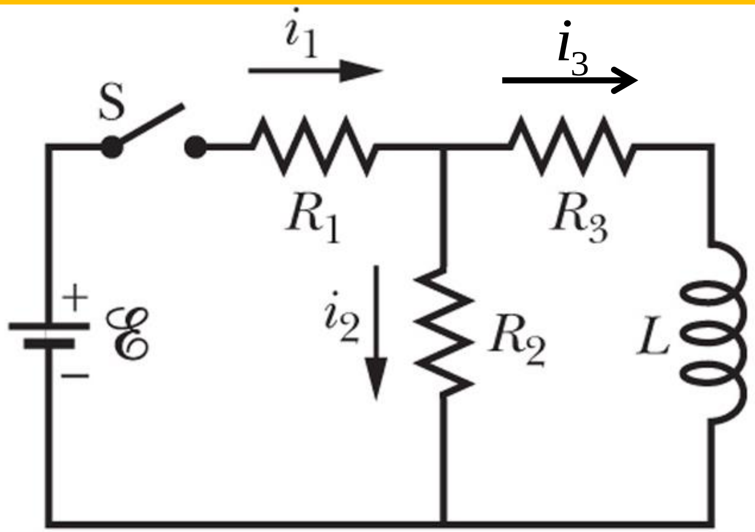
Sia L_1 = 30 mH, L_2 = 50 mH, L_3 = 20 mH, L_4 = 15 mH; calcolare l'induttanza equivalente del circuito.



$$L_{23} = \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_{23} + L_4$$

Problema 30.42



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathcal{E} = 100V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega \quad L = 2H$$

Calcolare:

a) i_1 e i_2 subito dopo la chiusura del circuito
b) i_1 e i_2 nel regime stazionario
c) i_1 e i_2 subito dopo la riapertura del circuito
d) i_1 e i_2 molto dopo la riapertura del circuito

Equazioni generali delle 3 maglie:

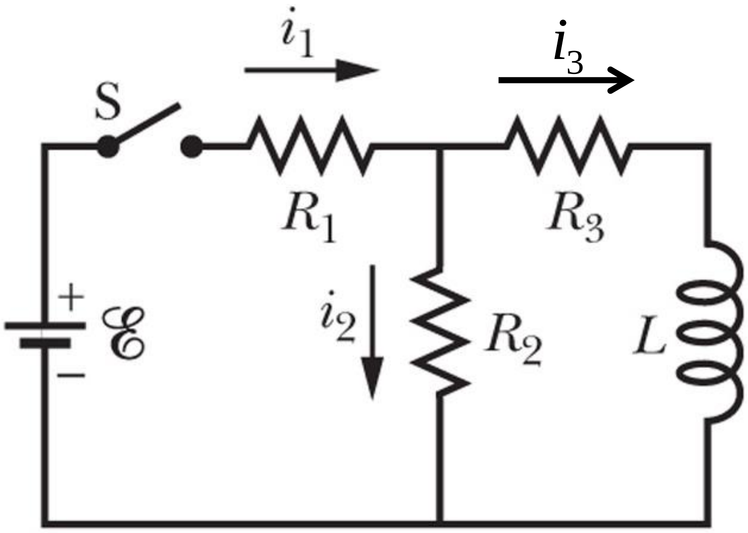
$$i_1 = i_2 + i_3; \quad \mathcal{E} = i_1 R_1 + i_2 R_2; \quad \mathcal{E} = i_1 R_1 + i_3 R_3 + L\frac{di_3}{dt}; \quad i_3 R_3 + L\frac{di_3}{dt} - i_2 R_2 = 0$$

Dopo varie sostituzioni si ricava una singola equazioni per la corrente i_3:

$$\tilde{\mathcal{E}} = i_3 R_{12,3} + L\frac{di_3}{dt}; \quad \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{12,3} = R_{12} + R_3$$

$$i_3(t) = i_{3,\infty}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right); \quad i_{3,\infty} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{R_{12,3}}; \quad \tau_L = \frac{L}{R_{12,3}} \qquad V_L = L\frac{\partial i_3}{\partial t} = \tilde{\mathcal{E}} e^{-t/\tau_L}$$

Problema 30.42



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathcal{E} = 100V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega \quad L = 2H$$

Calcolare:

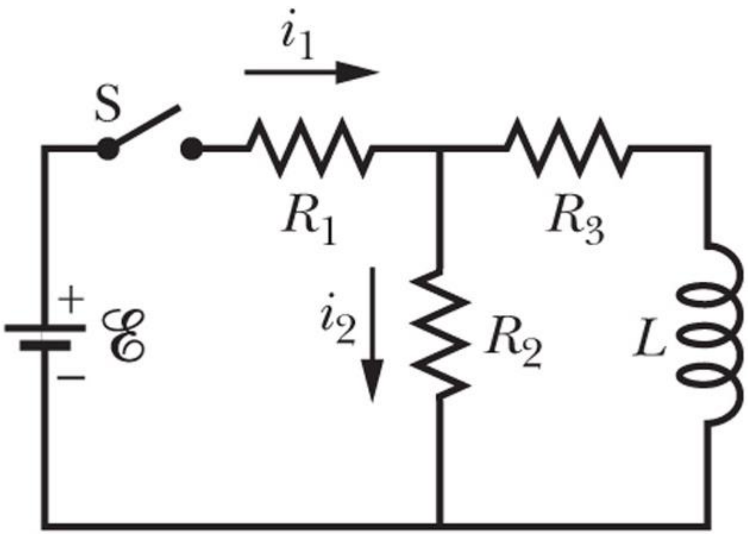
a) i_1 e i_2 subito dopo la chiusura del circuito

b) i_1 e i_2 nel regime stazionario

Subito dopo la chiusura, L è un circuito aperto:

$$i_1 = i_2; \quad \mathcal{E} = i_1(R_1 + R_2) \Rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100V}{30\Omega} = 3.33A$$

Problema 30.42



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathcal{E} = 100V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega \quad L = 2H$$

Calcolare:

a) i_1 e i_2 subito dopo la chiusura del circuito

b) i_1 e i_2 nel regime stazionario

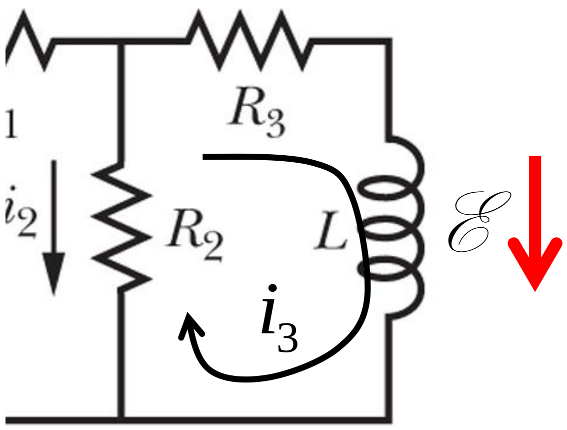
Nel regime stazionario L è un circuito chiuso:

$$R_{23} = \frac{20 \times 30}{50}\Omega = 12\Omega; \quad R_{123} = 22\Omega$$

$$\mathcal{E} = i_1 R_{123} \Rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{123}} = \frac{100V}{22\Omega} = 4.54A$$

$$i_2 R_2 = i_1 R_{23} \Rightarrow i_2 = 4.54 \frac{12}{20} A = 2.72A \qquad i_3 = i_1 - i_2 = 1.82A$$

Problema 30.42



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathscr{E} = 100V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega$$
$$R_3 = 30\Omega \quad L = 2H$$

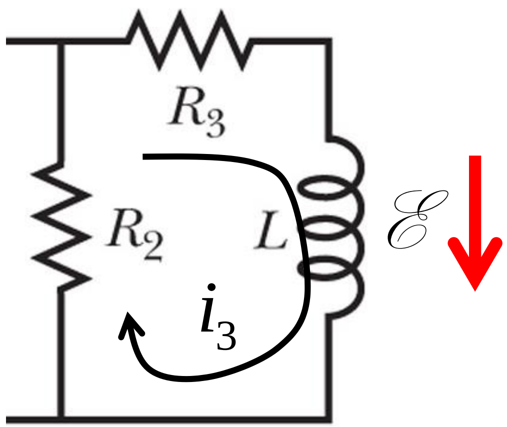
Calcolare:

a) i_1 e i_2 subito dopo la chiusura del circuito
b) i_1 e i_2 nel regime stazionario
c) i_1 e i_2 subito dopo la riapertura del circuito
d) i_1 e i_2 molto dopo la riapertura del circuito

Subito dopo l'apertura i_1 =0 ed i_2 si estinguerebbe immediatamente sulla resistenza R_2 se non fosse che i_3 attraversando l'induttore, riceve un contributo compensativo tale da generare un decadimento esponenziale. In particolare all'istante iniziale i_3 è esattamente uguale al suo valore stazionario; per la legge di continuità della corrente nella maglia deve quindi esserci la stessa corrente attraverso R_2; dunque:

$$i_1 = 0; \quad i_3 = i_3(0) = 1.82A; \quad i_2 = -i_3 = -1.82A$$

Problema 30.42



Consideriamo il circuito in figura, con:

$$\mathscr{E} = 100V \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega$$
$$R_3 = 30\Omega \quad L = 2H$$

Calcolare:

a) i_1 e i_2 subito dopo la chiusura del circuito
b) i_1 e i_2 nel regime stazionario
c) i_1 e i_2 subito dopo la riapertura del circuito
d) i_1 e i_2 molto dopo la riapertura del circuito

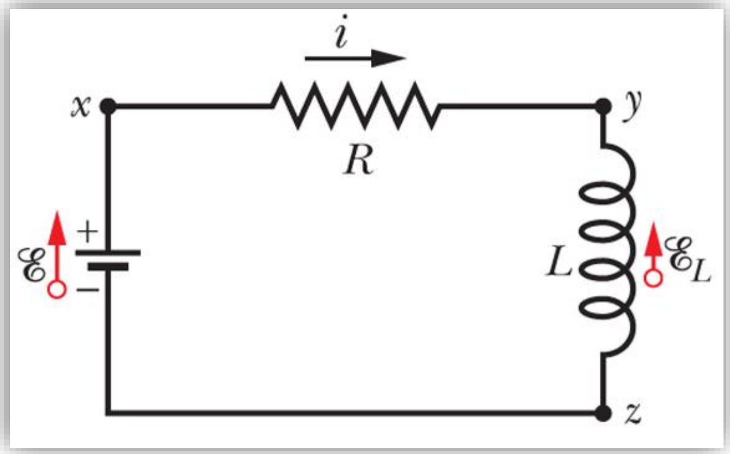
In seguito, corrente e potenziale ai capi dell'induttanza proseguiranno verso l'estinzione con andamento esponenziale:

$$i_3(t) = i_3(0)e^{-t/\tau_L} \qquad v_L(t) = -i_3(0)(R_2 + R_3)e^{-t/\tau_L}$$

Per tempi lunghi rispetto alla costante di tempo caratteristica:

$$i_1 = 0; \quad i_3 = 0; \quad i_2 = 0$$

Problema 30.44



Consideriamo il circuito in figura, con una batteria che fornisce una f.e.m. variabile nel tempo che genera una corrente nel circuito variabile nel tempo di forma nota. Calcolare la f.e.m. della batteria in funzione del tempo

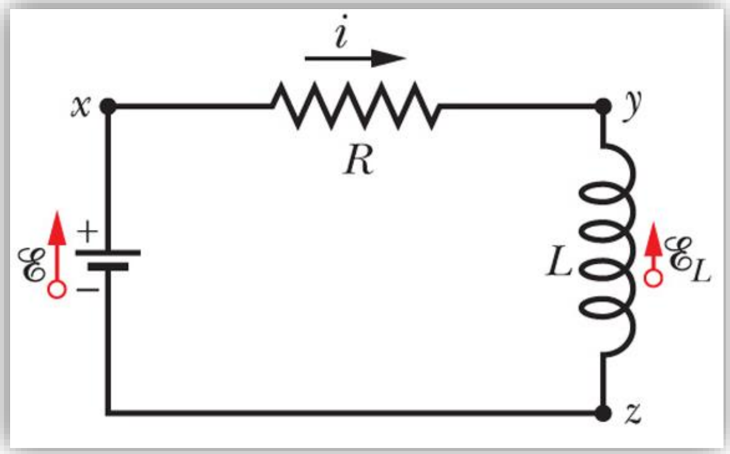
$$i = (3+5t)A; \quad R = 4\Omega \quad L = 6H$$

Applicando Kirchoff: $$\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt}$$

Poiché la corrente cresce, il potenziale dell'induttanza deve opporsi al verso della batteria.

$$\mathscr{E} = (3+5t)A \times 4\Omega + 6H \times 5\frac{A}{s} = (12+20t)V + 30V = (42+20t)V$$

Problema 30.48



Consideriamo il circuito in figura, con

$$\mathscr{E} = 10V; \quad R = 6.7\Omega \quad L = 5.5H$$

a) Calcolare l'energia fornita dalla batteria durante i primi 2 s

b) Determinare quanta di questa energia è immagazzinata nell'induttanza e quanta dissipata nella resistenza.

Per questo circuito semplice la corrente a regime è il rapporto tra f.e.m. della batteria e resistenza:

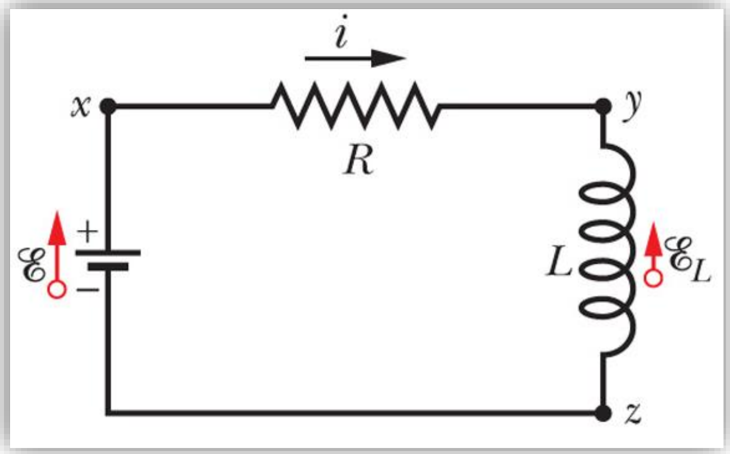
$$\mathscr{E} = iR + L\frac{di}{dt} \qquad i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \tau_L = \frac{L}{R} = 0.82s$$

La potenza istantanea erogata dalla batteria è: $P(t) = \mathscr{E}\, i(t) = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$

Poiché questa per definizione è la derivata dell'energia erogata rispetto al tempo, per passare dalla potenza all'energia è necessario integrare:

$$E(t) = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\int_0^t \left(1 - e^{-t'/\tau_L}\right)dt' = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\left[t + \tau_L\left(e^{-t/\tau_L} - 1\right)\right]$$

Problema 30.48



Consideriamo il circuito in figura, con

$$\mathscr{E} = 10V; \quad R = 6.7\Omega \quad L = 5.5H$$

a) Calcolare l'energia fornita dalla batteria durante i primi 2 s
b) Determinare quanta di questa energia è immagazzinata nell'induttanza e quanta dissipata nella resistenza.

Dopo un tempo t=2 s l'energia erogata è quindi:

$$E = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\left[t + \tau_L\left(e^{-t/\tau_L} - 1\right)\right] = \frac{100V^2}{6.7\Omega}\left[2s + 0.82s\left(e^{-2/0.82} - 1\right)\right] = 18.67J$$

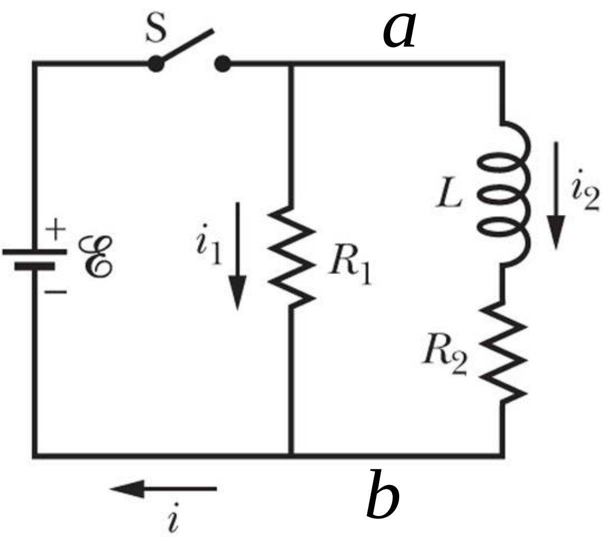
L'energia immagazzinata nell'induttanza è:

$$U_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}L\left(\frac{\mathscr{E}}{R}\right)^2\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)^2 = 5.1J$$

La differenza delle due dà l'energia dissipata sulla resistenza:

$$U_R(t) = E_g(t) - \frac{1}{2}Li^2(t) = 13.57J$$

Problema 30.65



Consideriamo il circuito in figura, con

$$\mathscr{E} = 10V; \quad R_1 = 5\Omega \quad R_2 = 10\Omega; \quad L = 5H$$

a) Nel caso di circuito appena chiuso, calcolare i_1, i_2, i_S (corrente attraverso l'interruttore), V_2, V_L, di_2/dt.
b) Ricalcolare le stesse quantità nel tempo lungo

La batteria applica una tensione parallela tra i punti *a* e *b* ai due rami resistivi del circuito; le equazioni dei due rami sono:

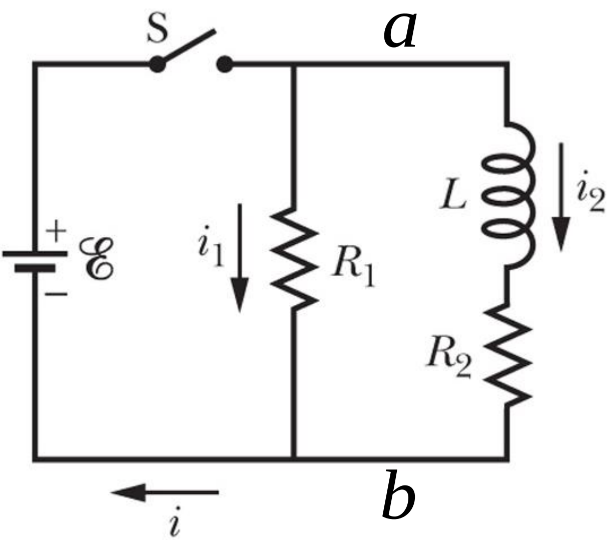
$$\mathscr{E} = i_1 R_1; \quad \mathscr{E} = i_2 R_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

Dunque, nel primo ramo scorre una corrente costante: $i_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1}$

Il secondo ramo è una singola maglia con induttanza, la cui soluzione è nota:

$$i_2(t) = i_{2,\infty}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \quad i_{2,\infty} = \frac{\mathscr{E}}{R_2}; \quad \tau_L = \frac{L}{R_2} \qquad \frac{di_2}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L}e^{-t/\tau_L}; \quad V_L(t) = \mathscr{E}e^{-t/\tau_L}$$

Problema 30.65



$$\mathscr{E} = 10V; \quad R_1 = 5\Omega \quad R_2 = 10\Omega; \quad L = 5H$$

a) Nel caso di circuito appena chiuso, calcolare i_1, i_2, i_S (corrente attraverso l'interruttore), V_2, V_L, di_2/dt.

b) Ricalcolare le stesse quantità nel tempo lungo

Risultati:

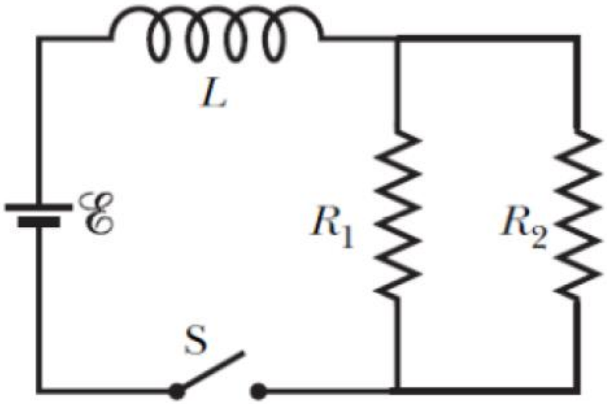
a) $$\mathscr{E} = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = 2A; \quad i_2 = 0; \quad i_S = i_1 = 2A \qquad \frac{di_2}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L} = \frac{10V}{5H} = 2\frac{A}{s}$$

$$V_L = \mathscr{E} = 10V \qquad V_2 = i_2 R_2 = 0$$

b) $$\mathscr{E} = i_1 R_1 \Rightarrow i_1 = 2A; \quad \mathscr{E} = i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = 1A; \quad i_S = i_1 + i_2 = 3A$$

$$V_2 = i_2 R_2 = 10V \qquad V_L = 0 \qquad \frac{di_2}{dt} = 0$$

Problema 30.90



Consideriamo il circuito in figura, con

$$\mathscr{E} = 40V; \quad R_1 = 20\,k\Omega \quad R_2 = 20\,k\Omega; \quad L = 50\,mH$$

a) Determinare la corrente i_S che scorre attraverso l'interruttore e la derivata di_s/dt immediatamente dopo la chiusura del circuito.

b) Determinare i_S e di_s/dt all'istante t = 3 µs.

c) Determinare i_S e di_s/dt molto tempo dopo la chiusura del circuito

In chiusura di circuito (formule generali)

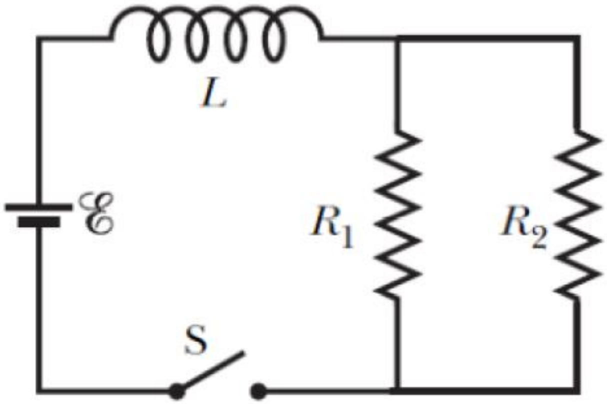
$$i_s(t) = i_{s,\infty}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \frac{di_s(t)}{dt} = \frac{i_{s,\infty}}{\tau_L} e^{-t/\tau_L} \qquad V_L = V_L(0)\, e^{-t/\tau_L} = \frac{L i_{s,\infty}}{\tau_L} e^{-t/\tau_L}$$

a regime L è un cortocircuito, per cui $i_{s,\infty} = \dfrac{\mathscr{E}}{R_{12}}$

A t=0 l'induttanza deve fornire una d.d.p. che compensa esattamente la d.d.p. della batteria: $V_L(0) = \mathscr{E} = \dfrac{L i_{s,\infty}}{\tau_L} \Rightarrow \tau_L = \dfrac{L}{R_{12}}$

$$\Rightarrow i_s(t) = \frac{\mathscr{E}}{R_{12}}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \frac{di_s(t)}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L} e^{-t/\tau_L}$$

Problema 30.90



$$\mathcal{E} = 40V; \quad R_1 = 20\,k\Omega \quad R_2 = 20\,k\Omega; \quad L = 50\,mH$$

$$i_s(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \frac{di_s}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-t/\tau_L}$$

$$R_{12} = 10\,k\Omega; \quad \tau_L = \frac{50mH}{10k\Omega} = 5\mu s$$

Risultati:

$$t = 0: \quad i_s(t) = 0; \qquad \frac{di_s}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{40V}{50mH} = 0.8\times10^3\,\frac{A}{s}$$

$$t = 3\mu s: \quad i_s = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}}\left(1 - e^{-3/5}\right) = 1.8\,mA \qquad \frac{di_s}{dt} = 0.8\times10^3\,\frac{A}{s}e^{-3/5} = 0.44\times10^3\,\frac{A}{s}$$

$$t = \infty: \quad i_s = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}} = \frac{40V}{10k\Omega} = 4\times10^{-3}\,A \qquad \frac{di_s}{dt} = 0$$