Prova di Comunicazioni Numeriche

06 Giugno 2017

Es. 1 - Sia U(t) un processo Gaussiano stazionario a valor medio nullo e funzione di autocorrelazione $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \text{sinc}(2B\tau)$.

1. Si estragga la variabile aleatoria $U = U(0)$. Si scriva la densità di probabilità di U.
2. Sia dato ora il processo $Y(t) = U(t) + 3U(t-T)$. Si calcolino la densità spettrale di potenza e la funzione di correlazione di $Y(t)$.

Es. 2 - Al ricevitore di Figura 1 è applicato il segnale in banda base $r(t) = s(t) + w(t)$, dove $s(t) = A_0 \sum_k x[k]p(t-kT)$ e' un segmale PAM in banda base con $x[k]$ simboli indipendenti ed equiprobabili appartenenti all'alfabeto $A = [-1, 1]$. Il rumore $w(t)$ introdotto dal canale è Gaussiano a media nulla con densità spettrale di potenza $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ e la risposta impulsiva del canale e' pari a $c(t) = \delta(t)$, l'impulso trasmesso e' definito dal segnale $p(t) = \frac{4}{T} sinc\left(t\frac{4}{T}\right)$ ed il filtro di ricezione ha risposta in frequenza pari a $H(f) = (1 - |fT|)\, rect\,(fT/2) + rect\,(fT/4)$. La strategia di decisione è $\hat{x}[k] = \begin{cases} -1 & y[k] \le \lambda \\ 1 & y[k] > \lambda \end{cases}$ con $\lambda = 0$. Calcolare:

1. L'energia media per simbolo trasmesso
2. La potenza di rumore in uscita al filtro
3. La Densità Spettrale di Potenza del segnale PAM trasmesso
4. Verificare l'assenza di interferenza intersimbolica mediante la condizione di Nyquist nel tempo
5. La probabilità di errore sul bit.

Soluzione ① :

U(t), essendo un processo Gaussiano, se si estrae una V.A. da esso quest'ultima sarà una V.A. Gaussiana.

$$m_U = E[U(t_0)] = 0$$

Inoltre sappiamo che $C_U(0) = \sigma_U^2$

$$C_u(\tau) = R_u(\tau) - m_u = R_u(\tau)$$

$$R_u(0) = \sigma_u^2$$

$$f_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}$$

Per il secondo punto possiamo procedere secondo questo ordine:

① $$H(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} = \frac{TCF[Y(t)]}{TCF[U(t)]} = \frac{TCF[U(t) + 3U(t-T)]}{TCF[U(t)]}$$

$$H(f) = \frac{U(f) + 3U(f)e^{-j2\pi fT}}{U(f)} = 1 + 3e^{-j2\pi fT}$$

$$S_u(f) = TCF[R_u(\tau)] = \frac{\sigma_u^2}{2B}\,\mathrm{rect}(f/2B) \Rightarrow S_y(f) = S_u(f)|H(f)|^2$$

$$|H(f)|^2 = \{1 + 3e^{-j2\pi fT}\}\{1 + 3e^{j2\pi fT}\} = 1 + 3e^{j2\pi fT} + 3e^{-j2\pi fT} + 3 = 4 + 3e^{j2\pi fT} + 3e^{-j2\pi fT}$$

$$S_y(f) = S_u(f)|H(f)|^2 = \frac{\sigma_u^2}{2B}\,\mathrm{rect}(f/2B)\cdot\{4 + 3e^{j2\pi fT} + 3e^{-j2\pi fT}\} =$$

$$= \frac{2\sigma_u^2}{B}\,\mathrm{rect}(f/2B) + \frac{3\sigma_u^2}{2B}\,\mathrm{rect}(f/2B)e^{j2\pi fT} + \frac{3\sigma_u^2}{2B}\,\mathrm{rect}(f/2B)e^{-j2\pi fT}$$

$$R_y(\tau) = ATCF[S_y(f)] = 4\sigma_u^2 B\,\mathrm{sinc}(2B\tau) + 3\sigma_u^2\,\mathrm{sinc}(2B\tau + 2BT) + 3\sigma_u^2\,\mathrm{sinc}(2B\tau - 2BT)$$

Soluzione 2 :

$E_s \triangleq$ Energia media per simbolo trasmesso.

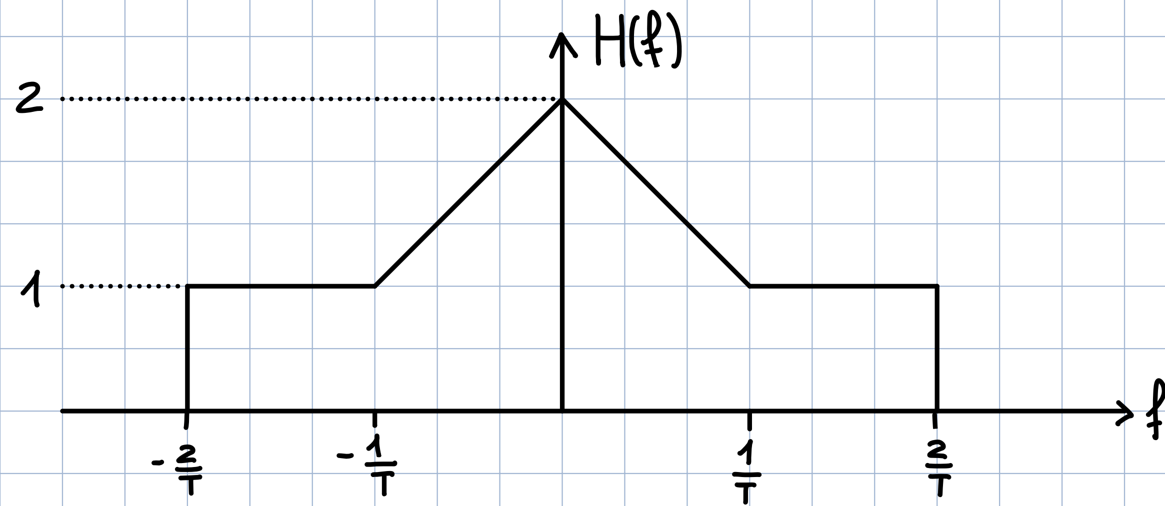
$$E_s = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(A_0\,x[m]\,p(t-mT_s))^2 dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2\, E[x^2[m]]\, p^2(t-mT_s)\,dt = A_0^2\, E[x^2[m]]\, E_p$$

$$E[x^2[m]] = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = 1 \qquad E_p = \int_{-\infty}^{+\infty}|P(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4/T}\right)\right|^2 df = \frac{4}{T}$$

$$\boxed{E_s = A_o^2 \frac{4}{T}}$$

$$P_{W_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{w_u}(f)\, df$$

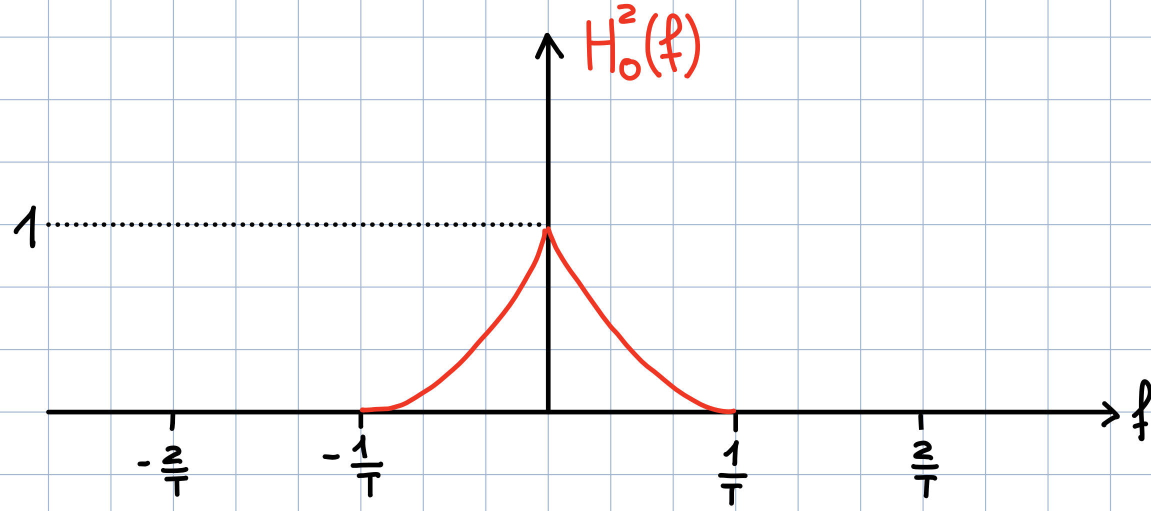
$$S_{W_u}(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad \Rightarrow \quad P_{W_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$



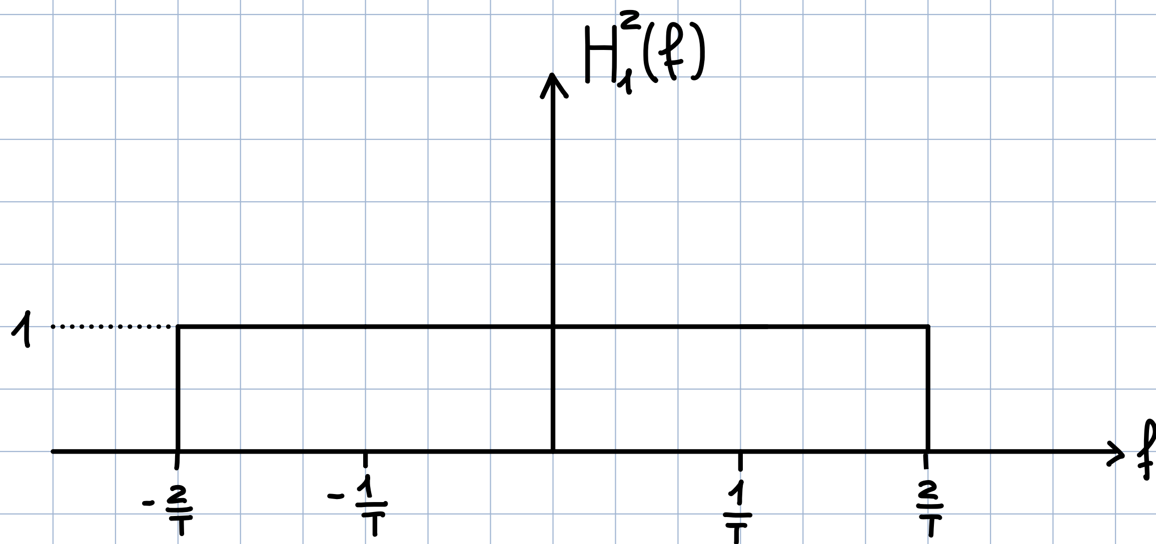
$$H(f) = H_0(f) + H_1(f) \quad \Rightarrow \quad |H(f)|^2 = H_0(f)^2 + H_1^2(f) + 2H_0(f)H_1(f)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(f)^2 df + \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(f)^2 df + \int_{-\infty}^{+\infty} 2H_0(f)H_1(f)\, df$$

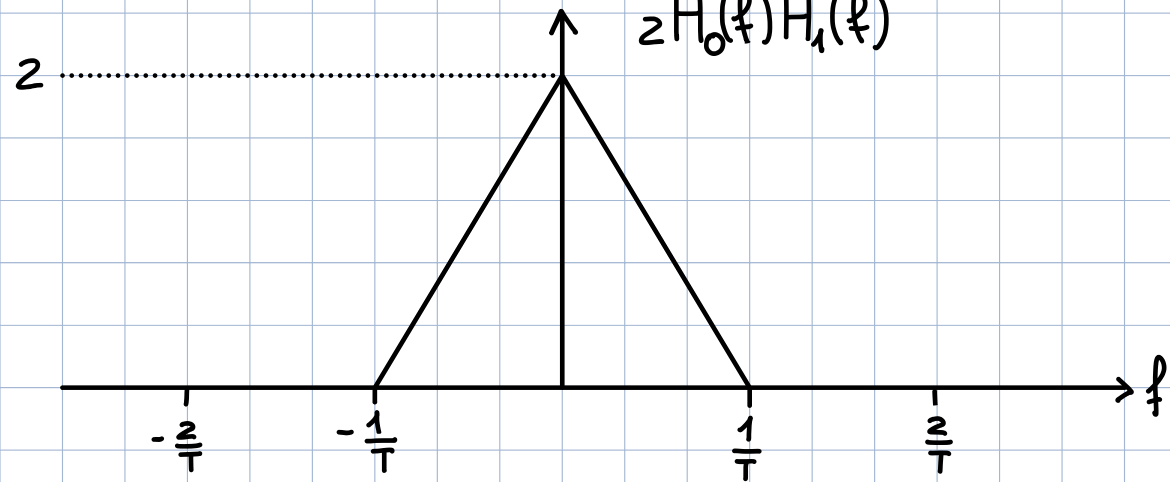
dove $H_0(f) = \left(1 - \frac{|f|}{1/T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2/T}\right)$ e $H_1(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{4/T}\right)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(f)^2\,df = \frac{2}{3T}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(f)^2\,df = \frac{4}{T}$$

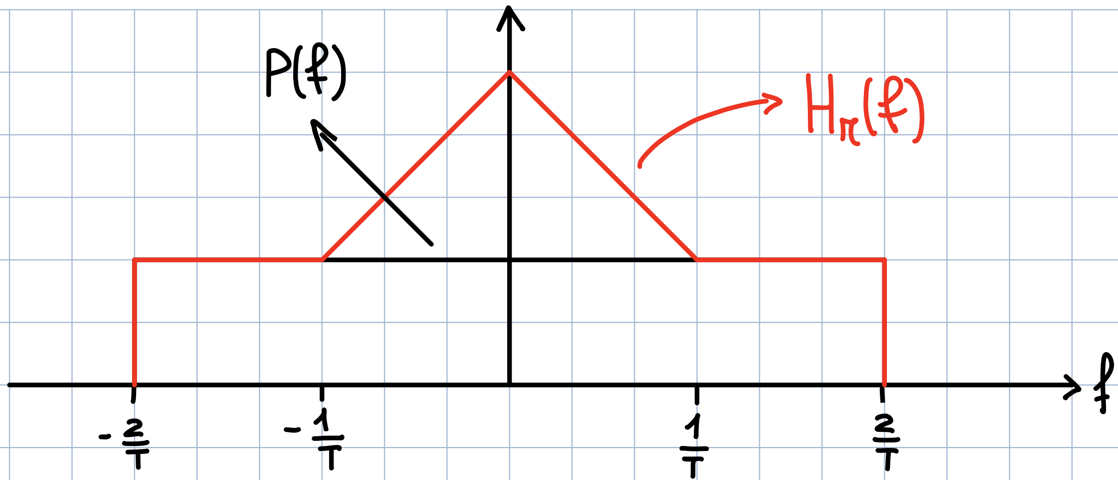


$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2H_0(f)H_1(f)\,df = 2\cdot\frac{1}{T} = \frac{2}{T}$$

$$\boxed{P_{w_u} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\left(\frac{2}{3T} + \frac{4}{T} + \frac{2}{T}\right) = \frac{N_0}{2}\,\frac{2+12+6}{3T} = \frac{20N_0}{6T} = \frac{10N_0}{3T}}$$

$\Rightarrow$ Assenza di ISI

$$h(t) = p(t)\otimes c(t)\otimes h_r(t) = p(t)\otimes h_r(t) \quad\Rightarrow\quad H(f) = P(f)H_r(f)$$



$$\Rightarrow \quad H(f) = H_\pi(f) \qquad \Rightarrow \quad h(t) = h_\pi(t)$$

$$\Rightarrow \quad h(kT) = h_\pi(kT) = \frac{4}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{4}{T}\cdot kT\right) + \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{T}\cdot kT\right) = \frac{4}{T}\,\mathrm{sinc}(4k) + \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}(k)$$

$$= \frac{4}{T}\delta[k] + \frac{1}{T}\delta[k] = \frac{5}{T}\delta[k]$$

Condizione di Nyquist ok!

$$P_E(b) = Q\left(\frac{5/T}{\sqrt{\frac{10 N_0}{3T}}}\right)$$