○ Trovare massimi e minimi di $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0 \quad , 1 - 4x_2^2 \le 0\}$$

x	λ	μ	ml	mA	Ml	MA	Sella
$\left(-\frac{\sqrt5}{5}, -\frac{4\sqrt5}{5}\right)$	$-\frac{\sqrt5}{8}, 0$	/	SI		NO	NO	NO
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac12\right)$	$-\frac{\sqrt{15}}{30}, \frac{\sqrt{15}-30}{120}$	/	NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac12\right)$		/					
$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac12\right)$		/					
$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac12\right)$		/					
$\left(\frac{\sqrt5}{5}, \frac{4\sqrt5}{5}\right)$		/					

R:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 8x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x(L) = \begin{pmatrix} 1 + 8\lambda_1 x_1 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 - 8\lambda_2 x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{xx}(L) = \begin{pmatrix} 8\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 - 8\lambda_2 \end{pmatrix}$$

◦ Troviamo i moltiplicatori

$$\nabla_x\left(-\frac{\sqrt5}{5}, -\frac{4\sqrt5}{5}\right) = \begin{cases} 1 + 8\lambda_1\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right) = 0 \\ 1 + 2\lambda_1\left(-\frac{4\sqrt5}{5}\right) - 8\lambda_2\left(-\frac{4\sqrt5}{5}\right) = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{\sqrt5}{8} \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

$$\nabla_{xx}\left(-\frac{\sqrt5}{8}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt5 - \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt5}{4} - \varphi \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \varphi_1 = -\sqrt5 \\ \varphi_2 = -\frac{\sqrt5}{4} \end{array}$$

Non è di Max, ma è Min

$$\nabla_x\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac12\right) = \begin{cases} 1 + 8\lambda_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 0 \\ 1 + 2\lambda_1\left(-\frac12\right) - 8\lambda_2\left(-\frac12\right) = 0 \end{cases} \to \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{30}$$

Sella perché $sign(\lambda_1) \ne sign(\lambda_2)$

$$\lambda_2 = \frac{-1 + \cancel{2}\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac12}{4} = \left(\frac{-60}{60} + \frac{\sqrt{15}}{60}\right)\frac14 = \dots$$

$$\nabla_{xx}\left(\frac{\sqrt{15}}{30}, \frac{\sqrt{15}-30}{120}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{15}}{30} - \varphi & 0 \\ 0 & 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{30} - 8\frac{\sqrt{15}-30}{120} - \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{15}}{15} - \varphi & 0 \\ 0 & 2 - \varphi \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \varphi = \frac{4\sqrt{15}}{15} \\ \varphi = 2 \end{array}$$

Non è di Max

Metodi Iterativi per casi vincolati

Consideriamo di avere un problema del tipo (*) con P poliedro limitato, e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non lineare (altrimenti sarebbe un problema di PL)

$$(*) \begin{cases} \max / \min f(x) \\ x \in P \end{cases} \qquad P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$$

(Per questo esempio, consideriamo un massimo, cioè $\max f(x)$)

Ragionamenti iniziali

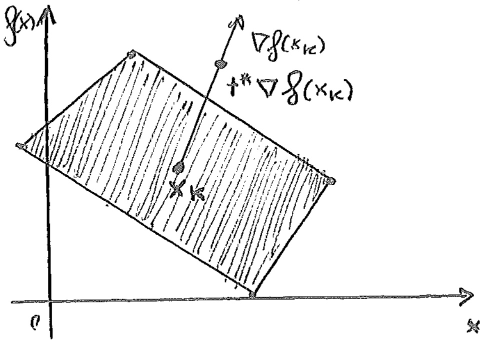
Ragioniamo come nel caso non vincolato, cercando i pt stazionari, ammettiamo di aver trovato un x_0 ammissibile e ipotizziamo di essere al passo k (aver trovato iterativamente x^k): Dobbiamo applicare la "successione minimizzante" come nel caso non vincolato

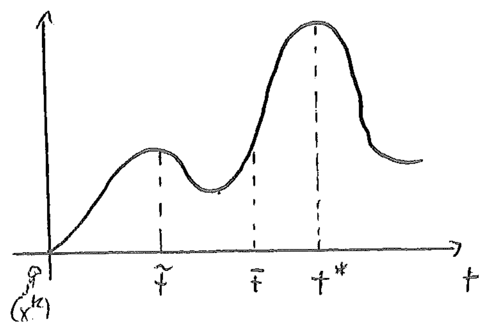
come scegliere x_{k+1}? (→

1) Dovendo ~~massimizzare~~ (/minimizzare) muoviamoci nella direzione del gradiente, con $d^k = (-) \nabla f(x^k)$ → Sarà senz'altro $\neq 0$ perché altrimenti x_k sarebbe pt stazionario

2) Determinazione dello step size t_k

Supponiamo di riuscire ad identificare la step size t^* (a cd passo esatto $t^* = \arg\max_{t \ge 0} f(x^k + t\nabla f(x^k))$) che ci fa arrivare al pt di massima quota in quella direzione di $f(x)$. → Esso potrebbe essere fuori dal poliedro e quindi non ammissibile! Ciò accade quando la f.o. ristretta alla direzione di $\nabla f(x_k)$ assume un comportamento di questo tipo: non appena esce dal pt x_k sale, ma al variare di t decresce e cresce irregolarmente.





↓

- Sicuramente ∃ un $\bar{t}$: $\forall t > \bar{t}$ il punto $x_k + t\nabla f(x_k)$ esce dal poliedro, dunque noi cerchiamo un $\hat{t}$ compreso fra 0 e $\bar{t}$ che ci permette di sfruttare al max la direzione di ascesa senza uscire dal poliedro.

↓

Nella pratica molto complicato applicare questo concetto perché la determinazione di $\bar{t}$ è molto complessa, specialmente in problemi con molti vincoli → Si dovrebbe:
1) determinare $(x_k + t\nabla f(x_k))$ fuori dal poligono per risalire al vincolo/i violato/i
2) successivamente si deve determinare $\bar{t}$ scegliendo il minimo tra i $\bar{t}_i$ dei vari vincoli violati

→ Allora si usa il METODO di Frank-Wolfe

• Metodo di Frank - Wolfe

Si applica per trovare un pt stazionario di un problema vincolato. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \le b \end{cases}$$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e supponiamo di partire da un pt ammissibile x_k. Calcoliamo $\nabla f(x_k)$ e "linearizziamo" il problema rispetto a x_k, cioè risolviamo il seguente problema di PL

$$\boxed{\begin{cases} \min \nabla f(x^k) \cdot x \\ Ax \le b \end{cases}}$$ → Indichiamo con y_k una soluzione di tale problema; se anche x_k risolve il problema linearizzato, cioè se $\nabla f(x_k) \cdot y_k = \nabla f(x_k) \cdot x_k$ allora il metodo si ferma, perché x_k è un pt stazionario del nostro problema iniziale

max se è max

Se invece ~~non~~ x_k non risolve il problema linearizzato, cioè se $\nabla f(x_k) y_k < \nabla f(x_k) x_k$, ciò significa che $\nabla f(x_k)(y_k - x_k) < 0$, che quindi $\boxed{y_k - x_k}$ è una direzione di discesa per f.

In tal caso il passo t_k è la sol. del seguente problema:

$$t_k \boxed{\begin{cases} \min f(x_k + t(y_k - x_k)) \\ t \in [0,1] \end{cases}}$$, e conseguentemente $x_{k+1} = x_k + t_k(y_k - x_k)$

→ Questa successione converge ad un valore (in un numero non finito di passi) grazie al th di Frank-Wolfe: "La successione costruita come descritto converge ad un pt stazionario x^* tale che soddisfi il sistema LKKT.

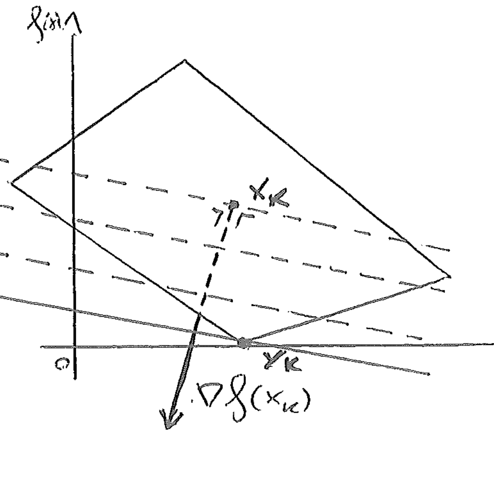
Nota: Tale algoritmo termina in un num finito di passi per le funzioni coercive quadratiche

→ Nota: Geometricamente parlando, risolvere il problema linearizzato in x_k equivale a trovare il vertice y_k: vedi figura. → Perchè?

R: Sviluppando il polinomio di Taylor di $f(x)$ arrestandoci al 1° ordine otteniamo

$$\boxed{f(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + O(\|x^k\|)}$$

Queste sono le rette tratteggiate nel disegno, normali a $\nabla f(x_k)$



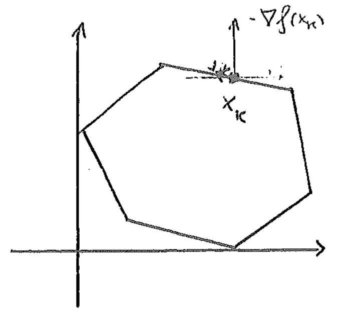
• Metodo del gradiente proiettato

Facciamo queste considerazioni su un problema di minimo (È una scelta arbitraria! Va bene anche di max) del tipo:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases}$$ // Poliedro limitato

, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e supponiamo di partire da un punto ammissibile x_k, quindi di essere al passo k-esimo, e supponiamo di trovarci su uno dei lati del poliedro.

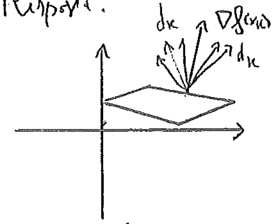
(Il metodo funziona anche per punti interni al poliedro, ma è banale).



Vogliamo trovare una direzione di discesa (ascesa se di max) per la f.o senza che esce dal poliedro.

Poiché tutte le direzioni di discesa della f.o sono le direzioni che formano un angolo acuto col vettore $-\nabla f(x_k)$, se il gradiente punta ad uscire dal poliedro questa non è ammissibile. Dunque?

Nota: Perché "che formano un angolo acuto?" Risposta:



Se $d_k \in$ alle spazio fuori dall'angolo acuto contenente $\pm\nabla f(x_k)$, allora sarebbe la dir. opposta! $\nabla f(x_k)$ è il "re delle d_k"

→ L'idea è quella di proiettare la direzione del vincolo (Da qui "gradiente proiettato"), e se tale proiezione non risulta essere ortogonale al vincolo stesso, allora si segue quella direzione (* pg 26)

Formalizziamo il tutto

Dato x_k, consideriamo i vincoli su cui x_k poggia, che per definizione sono i vincoli attivi. Il loro insieme definisce un sottospazio vettoriale del tipo $S = \{x : Mx = 0\}$, dove $M = \{A_i : i \in I(x_k)\}$

Se consideriamo una matrice $\boxed{H = I - M^T(MM^T)^{-1} \cdot M}$ allora ci risulterà che $\boxed{H \cdot y}$ è la proiezione ortogonale del vettore y su un $\boxed{\text{sottospazio } S = \{x : Mx = 0\}}$

// Nota: Se $M \in \mathbb{R}^{p \times n}$, con p numero di vincoli attivi sul pt x_k, allora $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$

→ det. d_k

→ Allora la direzione di spostamento coincide con la proiezione del gradiente sul sottospazio S, cioè coincide con:

$$\begin{cases} (-H \cdot (\nabla f(x_k)) = d_k & \text{per i problemi di min} \\ H \cdot (\nabla f(x_k)) = d_k & \text{per i problemi di max} \end{cases}$$

Da questo punto l'algoritmo determina un test su d_k. Se è $= 0$ allora ci fermiamo ~~~~ senza proseguire poiché d_k non è direzione di ascesa/discesa, e si tratta in un modo particolare, che illustro dopo.

(Segue a pag successiva)

Altrimenti, se $d_k \neq 0$ va determinato lo step size t_k

- Determinazione di t_k

Possiamo usare il metodo di Armijo - Goldstein - Wolfe, ma lo calcoleremo col metodo della ricerca esatta.

Considerando che $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, va determinato t_k in modo tale che, fra tutti gli step size t, sia il massimo t che generi un pt ammissibile va verificato dunque che $\bar{A}(x_k + t d_k) \leq b$; cioè, va risolto il sistema:

$$\begin{cases} \max t \quad // \text{È indipendente dal problema iniziale} \\ A(x_k + t d_k) \leq b \end{cases} \rightarrow \text{La soluz. è } \hat{t}_k$$

La soluzione di tale sistema non corrisponde ancora al t_k cercato, bensì corrisponde allo step size per raggiungere il vertice x_{k+1}. Tale t lo denominiamo $\hat{t}_k$. → Non corrisponde ancora al t_k perché dobbiamo vedere la funzione in quella restrizione in quale pt raggiunge il minimo (o il massimo per i problemi di massimo)

Quindi:

$$\boxed{t_k = \arg \min_{0 \leq t_k \leq \hat{t}_k} f(x_k + t d_k)} \quad \text{se è un problema di minimo}$$

$$t_k = \arg \max_{0 \leq t_k \leq \hat{t}_k} f(x_k + t d_k) \quad \text{se è un problema di massimo}$$

Infine calcoliamo il nuovo punto $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ e iteriamo di nuovo.

- E se $d_k = 0$?

Se $d_k = 0$ vuol dire che c'è un vincolo che impedisce alla proiezione di essere valida. Quindi ~~rimuoviamo uno dei vincoli~~, e ~~~~ operiamo ottimizzando ulteriormente calcolando i moltiplicatori del sistema LKKT come:

$$\boxed{\lambda = -(MM^T) \cdot M \nabla f(x_k)} \quad \text{per problemi di min}$$

$$\lambda = (MM^T) \cdot M \cdot \nabla f(x_k) \quad \text{" " di max.}$$

e operiamo un controllo:

Se $\lambda \geq 0$ → l'algoritmo si interrompe e x_k è una soluzione del sistema LKKT

Altrimenti → prendiamo il min dei λ_i negativi, ~~cioè~~ $\boxed{\lambda_j = \min_{\lambda_i < 0} \lambda_i}$, e lo eliminiamo dai vincoli attivi. Quindi si reitera

Quindi, per d_k e λ:

1) Se $d_k \neq 0$ allora è una direzione di ascesa/discesa

2) Se $d_k = 0$ e $\lambda \geq 0$ il pt che li ha generati è soluzione dell'LKKT

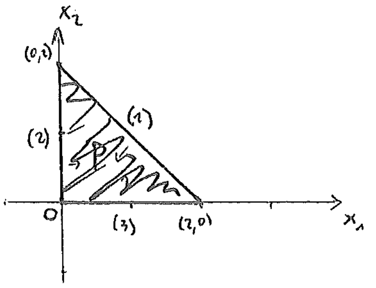
- Metodo del gradiente proiettato

Dato un problema del tipo $\begin{cases} \max/\min f(x) \\ x \in P \end{cases}$, con $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, e con f non lineare, procediamo così:

① Si disegna il poliedro P, e con la formula della retta passante per 2 punti otteniamo i vincoli che costituiscono $Ax \leq b$ ~~retta passante x 2 pt~~

Es: Dato il problema

$$\begin{cases} \min 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 \\ x \in P \end{cases}, \text{ con } P = (0,0)\ (2,0)\ \text{e}\ (0,2) \text{ procediamo così:}$$



$$[1] \begin{cases} \min 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 \\ (1)\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ (2)\ -x_1 \leq 0 \\ (3)\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad *$$

Consideriamo come punto $x^k = (0,0)$

② Calcoliamo il gradiente della funzione f nel punto x^k $\quad (\nabla f(x^k))$

③ Cerchiamo i vincoli attivi (il vincolo può essere anche uno solo), cioè il vincolo per cui la relazione risulti uguale col punto x^k. Tale relazione ci permette di costruire la matrice M

Es: Nel nostro caso, sostituendo il punto $(0,0)$ al nostro sistema [1], abbiamo che tale relazione è soddisfatta da

$$\begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Allora } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

④ Calcoliamo la matrice $H = I - M^T (M M^T)^{-1} M$, con M^T: trasposta di M, I = Identica

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⑤ Determiniamo la direzione spostamento d_k come:

$$d_k = \begin{cases} (-H) \cdot (\nabla f(x^k)) & \text{se è un problema di minimo} \\ (H)(\nabla f(x^k)) & \text{se è un problema di massimo} \end{cases}$$

Nel caso in cui $d_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ calcoliamo $\lambda = -(M M^T)^{-1} M \nabla f(x^k_k)$

Se $\lambda \geq 0$ allora STOP

Altrimenti calcola $\lambda_s = \min\limits_{i \in \text{coordinate } \lambda} \lambda_i$, elimina da M la riga s-esima e ritorna al passo ④, calcolando H con la "nuova" M.

⑥ Va determinato il massimo spostamento possibile, cioè quel t_{max} risolvendo

$$\begin{cases} \max t \\ A(x^k + t d^k) \leq b \end{cases} \rightarrow \text{otteniamo } t_{max}$$

Eq. retta passante per 2 pt

$A = (x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

⑦ Ora va determinato il passo t_K:

$$t_K = \arg \min_{0 \le t_K \le t_{max}} f(x^K + t d^K) \quad \text{(Se sono problemi di min)}$$

$$t_K = \arg \max_{0 \le t_K \le t_{max}} f(x^K + t d^K) \quad \text{(Se sono problemi di massimo)}$$

Trovata un'espressione in funzione di t, si sostituisca $t=0$ e $t=t_{max}$ e vediamo dove è rispettata la richiesta di min o max

⑧ Infine determiniamo il punto successivo come

$$x^{K+1} = x^K + t_K d^K$$

(*) Per la retta passante per 2 punti

Dati 2 punti $\alpha = (p, q)$ e $\beta = (r, s)$, definiamo la retta passante per 2 punti come

$$\frac{x_2 - q}{s - q} = \frac{x_1 - p}{r - p}$$

○ Metodo di Frank-Wolfe

Come il metodo del gradiente proiettato, il metodo di Frank-Wolfe si applica per trovare un punto stazionario di un problema vincolato.

Dato un problema del tipo

$$\begin{cases} \max \,\|\, \min f(x) & \text{// massimo o minimo di } f(x) \\ Ax \le b \end{cases}$$

, e x^K punto interessato, dobbiamo:

① Linearizzare il problema, risolvendo

$$\begin{cases} \max \nabla f(x^K) \cdot x & \text{// Se è un massimo} \\ x \in P \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \min \nabla f(x^K)\, x & \text{// Se è un minimo} \\ x \in P \end{cases}$$

NB: $x \in P \leftrightarrow Ax \le b$!!!

dove: • $\nabla f(x^K)\,x$ corrisponde alla funzione obiettivo del problema linearizzato

• y_K, la soluzione del sistema, è la soluzione ottima del problema linearizzato

② Determiniamo la direzione d_K come la differenza tra y_K e x^K, cioè $d_K = (y_K - x^K)$

③ Calcoliamo lo step size (il passo) t_K come

$$t_K = \max_{0 \le t \le 1} f(x^K + t d_K) \quad \text{se è un problema di massimo}$$

$$t_K = \min_{0 \le t \le 1} f(x^K + t d_K) \quad \text{se è un problema di minimo}$$

③ Infine il nuovo punto sarà dato da $x^{K+1} = x^K + t_K (y_K - x_K)$

Turbata per il metodo del gradiente proiettato

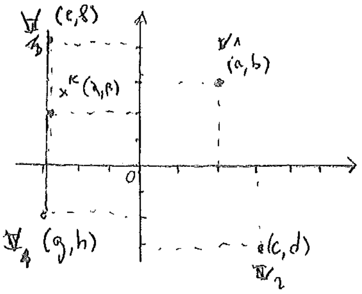
Dato un problema del tipo

$$\begin{cases} \max/\min f(x,y) \\ x,y \in P \end{cases}$$ con $P = \underset{V_1}{(a,b)}\ \underset{V_2}{(c,d)}\ \underset{V_3}{(e,f)}\ \underset{V_4}{(g,h)}$ e il punto $x^K = (\alpha, \beta)$

(il pt interessato, a inizio problema)

Procediamo così:

1) Graficamente disegnamo il poliedro P e il pt x^K, che apparterrà ad un segmento di P, e teniamo in considerazione la retta r passante per i 2 pt e contenente x^K



- retta r passante per (e,f) e (g,h), contenente x^K
- Per trovare il vettore che esprime r, si fa la differenza fra (e,f) e (g,h) [distanza fra 2 punti]

$$r = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \rightarrow$$ Per comodità, ora li esprimo con x, y

$$= \underset{V_{primo}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} - \underset{V_{secondo}}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso
$V_{primo} = V_3$
$V_{secondo} = V_4$

2) Ora creiamo il vettore c:

$$r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \rightarrow c = \begin{pmatrix} y_r \\ -x_r \end{pmatrix}$$ (componenti scambiate e cambio di segno sulla 1°)

3) Facciamo il prodotto scalare fra c e x^K

Se è > 0 $\rightarrow$ la matrice M è data da: $M = c$

Se è < 0 $\rightarrow$ la matrice M è data da: $M = -c$

Ottenuta M, la semplifichiamo al massimo:

Es:

$$M = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Per trovare ~~la~~ matrice H:

Se $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow H = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$

5) Per calcolare la direzione d:

- Calcolo $\nabla f(x^K)$
- $d = (H \cdot \nabla f(x^K))$

NB: Se è un problema di minimo, si cambia di segno!

6) Per il massimo spostamento possibile t_M:

- Graficamente, da x^K effettuiamo uno spostamento pari a d, e vediamo se va verso il vertice primo (V_{primo}) o vertice secondo ($V_{secondo}$). Il vertice verso cui va lo chiamiamo P_f, e per comodità chiamiamo $x^K = P_i$ (pt finale e iniziale)

(Pg successiva per il calcolo di t_M)

Allora $t_M = \frac{P_{gx} - P_{ix}}{d_x} = \frac{P_{gy} - P_{iy}}{d_y}$, con

t = max spostamento possibile

$P_{gx\ (y)}$ = coordinata x (o y) del punto P_g

$P_{ix\ (y)}$ = coordinata x (o y) del punto P_i

$d_{x\ (y)}$ = coordinata x (o y) della direzione

7) Determiniamo il passo Passo

- Studiamo $f(x^k + td)$, con t variabile-chiave in cui risolverlo, ne facciamo la derivata prima ponendola $= 0$ per cercare i pt stazionari, poi si pone > 0 per trovare in base al problema il pt di massimo (o di minimo).

Tale punto sarà il passo Passo $\text{Passo} = \max/\min\left(f(x^k + td)\right)$

Se $\text{Passo} > t_M \rightarrow$ Si impone $\text{Passo} = t_M$

(Se il passo è maggiore del massimo spostamento possibile, per ragioni ovvie il passo assumerà il valore del max spostamento possibile)

8) Determinare il nuovo pt x^{k+1}

$x^{k+1} = (x^k + t_M d)$

(*)

Se x_k è pt interno a P_f allora la direzione è pari a $\pm \nabla f(x_k)$

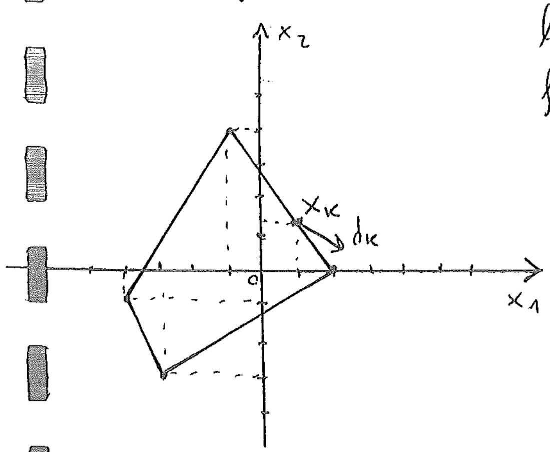
Se x_k invece $\in$ frontiera della regione ammissibile, si sceglie d_k uguale alla proiezione ortogonale di $\pm \nabla f(x_k)$ sul sottospazio vettoriale definito dai vincoli attivi nel pt x_k

• Metodo del gradiente proiettato

1 $\begin{cases} \min \; -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1 + 2x_2 \\ x \in P \end{cases}$, $P = \{(-1,4), (-4,-1), (2,0), (-3,-3)\}$

x_k	Matrice M	Matrice H	Direzione d_k	Max spostamento possibile $\hat{t}_k$	Passo t_k	Punto x_{k+1}
$(1, \frac{4}{3})$	$(4,3)$	$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$	$(\frac{1}{5}, -\frac{4}{15})$	$\hat{t}_k = 5$	$t_k = 5$	$(2,0)$

Dapprima disegnamo il poliedro e troviamo su quali vincoli attivi giace x_k → Per farlo calcoliamo la retta passante per i 2 pt dove giace x_k, e la mettiamo nella forma $A_i x \leq b_i$. I coefficienti di x ci daranno la matrice M



Eq. retta per 2 pt: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

R: I 2 pt sono $(2,0)$ e $(-1,4)$

$$\frac{x_2+0}{4} = \frac{x_1-2}{-1-2} \to 3\frac{x_2}{\cancel{4}} = \frac{(-x_1+2)\cdot 4}{\cancel{-3}} \to 3x_2 + 4x_1 = 8$$

$$\downarrow$$

$$3x_2 + 4x_1 \leq 8$$

$M = (4,3)$

Ora calcoliamo $M \cdot M^T$, $M^T(MM^T)^{-1} \cdot M$

$M \cdot M^T = (4,3)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 25 \to (MM^T)^{-1} = \frac{1}{25}$

$M^T \cdot \frac{1}{25} \cdot M = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}(4,3) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

$$\to H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo adesso la direzione $d_k = \pm H \cdot \nabla f(x_k)$ (+ se max, − se min)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -4x_1 - 2x_2 - 1 \\ -4x_2 - 2x_1 + 2 \end{pmatrix} \to \nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} -\frac{23}{3} \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$d_k = -\begin{pmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{23}{3} \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{15}\right)$$

• Va calcolato il max spostamento possibile $\hat{t}_k$. Per farlo, consideriamo l'altro vincolo attivo il punto "puntato" da d_k, nel nostro caso $(-3,-3)$, e calcoliamo la retta passante per 2 pt $(-3,-3)$ $(2,0)$, e calcoliamo in funzione di t nel pt $x_k + t d_k$

$$\frac{x_2+3}{3} = \frac{x_1+3}{2+3} \to 5x_2 + 15 = 3x_1 + 9 \to -3x_1 + 5x_2 = -6 \to 3x_1 - 5x_2 = 6$$

$$x_k + t d_k = \left(1 + \frac{1}{5}t, \frac{4}{3} - \frac{4}{15}t\right)$$

$$3\left(1 + \frac{1}{5}t\right) - 5\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{15}t\right) = 6 \to 3 + \frac{3}{5}t - \frac{20}{3} + \frac{20}{15}t = 6 \to \frac{29}{15}t = 3 + \frac{20}{3} \to t = 5 \to \hat{t}_k = 5$$

- Calcolo di t_k $\qquad t_k \in \arg\min_{0\le t\le \hat{t}_k} f(x_k+td_k)$ // max se è un problema di massimo

Dapprima calcoliamo $f(x_k+td_k)$,
successivamente ne calcoliamo la derivata prima e la poniamo ≥ 0 per trovare un pt stazionario (max o min). Se è ciò che ci interessa ed è compreso fra $0\le t\le t_k$, si pone t_k = pt trovato
Se invece "sfora" si testa sugli estremi 0 e $\hat{t}_k$ il comportamento di $f(x_k+td_k)$, e si sceglie t_k fra i 2.

$$f(x_k+td_k) = -2\left(1+\frac{1}{5}t\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{5}t\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{15}t\right) - 2\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{15}t\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{15}t\right) - \left(1+\frac{1}{5}t\right) = \dots =$$

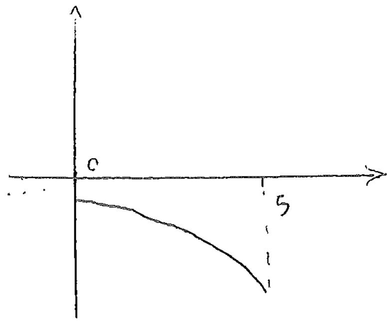
$$= -\frac{10}{225}t^2 - \frac{305}{225}t - \frac{1475}{225} \simeq 0.04t^2 - 1.35t - 6.5 \quad \text{// È una parabola!}$$

$$f'(x_k+td_k) = -\frac{20}{225}t - \frac{305}{225} \geq 0$$

$$\frac{20}{225}t + \frac{305}{225} \leq 0 \;\rightarrow\; \frac{20}{225}t \leq -\frac{305}{225} \;\rightarrow\; t \leq -\frac{61}{4}$$

È un pt di massimo (vertice della parabola!)

$-\frac{61}{4}$ + | −



$$t_k = \hat{t}_k = 5$$

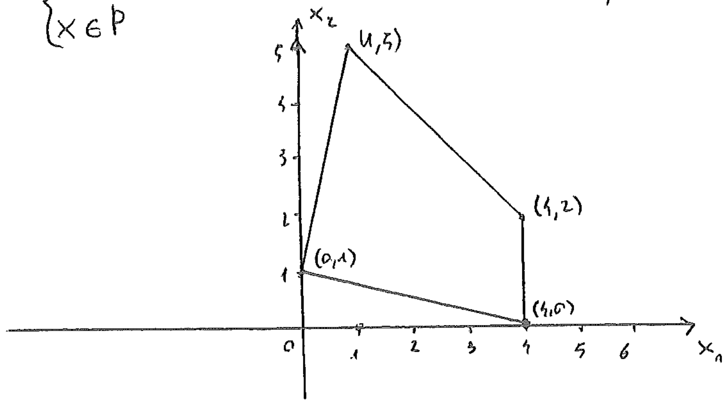
- Calcolo x_{k+1} $\rightarrow$ $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Metodo di Frank - Wolfe

1] Dato il seguente problema, fare un passo del metodo di Frank-Wolfe

$$\begin{cases} \min \; 4x_1^2+8x_1x_2-4x_2^2-10x_1+3x_2 \\ x \in P \end{cases}, \quad P = (4,2),(4,0),(1,5),(0,1)$$



$x_k = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

- Calcolo di x_{k+1} noti t_k e d_k

$x_{k+1} = x_k + t_k d_k = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) + \frac{47}{56}\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) =$

$= \left(\frac{3}{14}, \frac{53}{56}\right)$

- Calcolo della f.o → f.o linearizzata: $\nabla f(x_k)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x_1+8x_2-10 \\ 8x_1-8x_2+3 \end{pmatrix} \to \nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} 8\cdot\frac{4}{3}+8\cdot\frac{2}{3}-10 \\ 8\cdot\frac{4}{3}-8\cdot\frac{2}{3}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{25}{3} \end{pmatrix}$$

f.o linearizzata $= \nabla f(x_k)\cdot x = 6x_1 + \frac{25}{3}x_2$

- Calcolo della sol. ottima y_k del problema:

$$\begin{cases} \min (\text{se è di min}) / \max (\text{se è di max}) \;\; \nabla f(x_k)\cdot x \\ x \in P \end{cases}$$

Nota: I punti del poliedro P sono le soluzioni! Quindi basterà sostituire alla f.o linearizzata i pt dati e vedere quale minimizza/massimizza

$f.o(1,5) = \frac{143}{3}$ $\qquad f(4,0) = 24$

$f.o(4,2) = \frac{122}{3}$ $\qquad f.o(0,1) = \frac{25}{3}$ $\Big] \to y_k = (0,1)$

- Calcolo della direzione d_k

$$d_k = y_k - x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Calcolo dello step size t_k

$t_k \in \arg\min_{0\le t\le 1} f(x_k + t d_k)$ → Se ne studia la derivata 1° per trovare ~~un pt stazionario~~ il valore di t: $f'(t)=0$ (lo chiamiamo $\hat{t}$)

→ Si sostituiscono $\hat{t}$, 0, 1 a $f(t)$ e vediamo chi minimizza

$$f(x_k+td_k) = f\left(\tfrac{4}{3}(1-t), \tfrac{1}{3}(2+t)\right) =$$

$$= 4\left(\tfrac{4}{3}(1-t)\right)^2 + 8\left(\tfrac{4}{3}(1-t)\right)\left(\tfrac{1}{3}(2+t)\right) - 4\left(\tfrac{1}{3}(2+t)\right)^2 - 10\left(\tfrac{4}{3}(1-t)\right) + 3\left(\tfrac{1}{3}(2+t)\right) =$$

$$= \frac{28}{9}t^2 - \frac{47}{9}t + \frac{10}{9}$$

$f' = \frac{56}{9}t - \frac{47}{9} = 0 \to \hat{t} = \frac{47}{56}$

$f(0) = \frac{10}{9}$

$f(1) = -1.0$

$\boxed{f(\hat{t}) = -1.08}$

$t_k = \hat{t} = \frac{47}{56}$

- Funzione linprog

```
>> linprog(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)
```

Risolve problemi del tipo

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax \leq b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

- Es:

① $$\begin{cases} \max\ 5x_1 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min\ -5x_1 - x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq +2 \end{cases}$$

$c = [-5\ 0\ -1]$

$A = [-2\ \ -3\ \ 0;]$ $\qquad b = [2]$ $\qquad Aeq = [\ ]$, $beq = [\ ]$, $LB = [0\ 0\ 0]$, $UB = [\ ]$

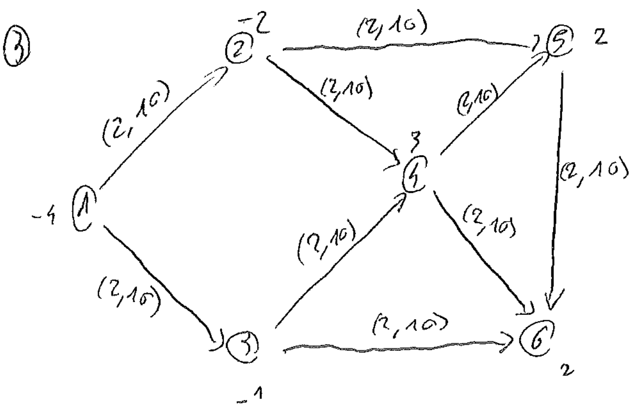
② $$\begin{cases} \max\ x_1 + 2x_2 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 15x_2 \leq 45 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min\ -x_1 - 2x_2 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 48 \\ 3x_1 + 15x_2 \leq 45 \\ +x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$c = [-1\ -2]$ $\qquad A = [12\ 5;\ 3\ 15]$ $\qquad b = [48;45]$ $\qquad Aeq = [\ ]$ $\qquad beq = [\ ]$, $UB = [\ ]$

$LB = [0\ 0]$

3

MATLAB e Flusso di costo min



	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)	
1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	
3	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	-> E
4	0	0	1	0	1	0	-1	-1	0	
5	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	
6	0	0	0	0	0	1	0	1	1	

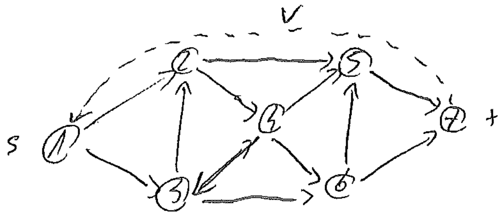
$A = [\ ]$, $c = [2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2]$, $b_{eq} = [-4\ \ -2\ \ -1\ \ 3\ \ 2\ \ 2]$,

$A_{eq} = [-1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0;\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 1\ 0\ 0\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0;$
$0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1;\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1]$

$LB = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ $\quad$ $UB = [10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10]$

6) 1

Il modello è:



$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ 0 \le x \le U \end{cases}$$

ma poiché $b_i = \begin{cases} +v & i = s \\ 0 & i \neq t, s \\ -v & i = t \end{cases}$ allora possiamo definire:

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} E_{1\,riga} & 1 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 \\ E_{n\,riga} & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a Blocchi?

per $\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ 0 \le x \le U \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min -v \\ Ex = b \\ 0 \le x \le U \\ v \ge 0 \end{cases}$$

$c = [0, \ldots, 0, -1]$ // MATLAB risolve i problemi di minimo!

$A = [\,]$ $\quad b = [\,]$ $\quad A_{eq} = [\bar{E}]$ $\quad b_{eq} = [0, \ldots, 0]$ $\quad LB = [0, \ldots, 0]$

$UB = [U \,\|\, 10^{10}]$

→ Indica $U = +\infty$ → $\sum c$

→ Il vettore delle capacità

- Esercizio sui modelli

① Una ditta produce 4 tipi di cocktail A, B, C, D usando spumante, rhum, succo d'arancia e il cocktail D con la seguente tabella di miscelazione.

	A	B	C	D
Spumante	30%	40%	80%	40%
rhum	20%	10%	5%	15%
D	30%	20%		

1 l

Mensilmente la ditta ha a disposizione 200 l di spumante e 300 l di rhum. La produzione deve essere di almeno 20 l di A, 10 l di B, 30 l di C.

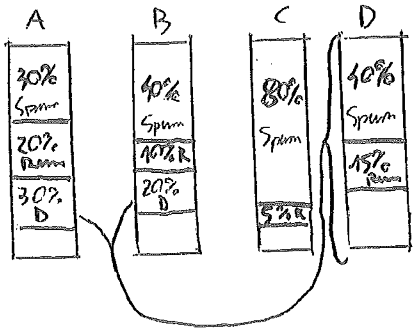
Sapendo che il profitto ricavato dalla vendita dei 4 cocktails è rispettivamente 3, 5, 4 e 2.5 euro, determinare la prod. giornaliera che massimizza il profitto

R:

- Cerchiamo le variabili decisionali. In questo caso saranno X_A, X_B, X_C e X_D, con X_i $\forall i = \{A, B, C, D\}$ litro di cocktail i
- Poi ci chiediamo: cosa vogliamo in uscita? Vogliamo la prod. giornaliera che massimizza il profitto, dunque:

$$\max\ 3 \cdot X_A + 5X_B + 4X_C + 2.5X_D$$

- Adesso consideriamo i vincoli sul materiale; o



→ ~~Spumante 0.3 X_A~~

→ Spumante

30% su 1l di A
40% su 1l di B, ecc..

$$\left.\begin{array}{l} 0.3X_A + 0.4X_B + 0.8X_C + 0.4X_D + \\ (0.3 \cdot 0.4X_A) + (0.4 \cdot 0.2X_B) \leq 200 \end{array}\right\} \rightarrow \text{deve essere} \leq \text{alla capacità mensile di spum.}$$

(Composto D, il 30% del 40% di spumante in 1l di D)

→ Rhum (Come sopra)

$$0.2X_A + 0.1X_B + 0.05X_C + 0.15X_D + (0.15 \cdot 0.3X_A) + (0.15 \cdot 0.2X_B) \leq 300$$

- Vincoli di produzione:

$X_A \geq 20$ // La prod deve essere di almeno 20 l di A, ecc

$X_B \geq 10$

$X_C \geq 30$

$X_D \geq 0.3X_A + 0.2X_B$ // Quando c'è un componente che fa da ingrediente, X_D deve soddisfare la richiesta di X_A e X_B

- In conclusione, il modello:

$$
\begin{cases}
\max\ 3X_A + 5X_B + 4X_C + 2.5X_D \\
0.32X_A + 0.3X_B + 0.8X_C + 0.4X_D \leq 200 \\
0.245X_A + 0.13X_B + 0.05X_C + 0.15X_D \leq 300 \\
X_A \geq 20 \\
X_B \geq 10 \\
X_C \geq 30 \\
X_D \geq 0.3X_A + 0.2X_B
\end{cases}
$$

- In MATLAB:

Problemi di PL

① **Produzione**

Si devono produrre n oggetti composti ognuno da m diverse materie, il tutto contenuto in $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Quindi ogni elemento a_{ij} rappresenta la quantità di materie prima i che serve per produrre l'oggetto j

Sia c_j il guadagno ottenuto vendendo l'oggetto j $(j=1,\dots,n)$ e b_i la disponibilità della materia prima i $(i=1,\dots,m)$

$x_j \to$ Var. decisionali che rappresentano la quantità prodotta dell'oggetto j

Formulaz. del problema:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i=1,\dots,m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j=1,\dots,n \end{cases} \to \begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^m \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

② **Dieta**

Come il modello precedente, però dobbiamo minimizzare il costo totale e rispettare il minimo fabbisogno giornaliero b_i. $\to x_{ij}$ rappresenta la quantità di cibo j da introdurre giornalmente nella dieta

Formulaz:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq b_i \quad \forall i=1,\dots,m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j=1,\dots,n \end{cases} \to \begin{cases} \min cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

③ Miscelazione

prodotti vendibili	miscelazione	costo (€/Kg)	profitto (€/Kg)		guadagno
A	mat 1 ≤ 30% mat 2 ≥ 40% mat 3 ≤ 50% mat 4 = 20%	3	8.5	→	5.5
B	mat 1 ≤ 50% mat 2 ≥ 10% mat 4 = 10%	2.5	7		4.5
C	mat 1 ≤ 70%	2	5.5		3.5

materiale	disponibilità (Kg)	costo di trattamento (€/Kg)
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

Almeno la metà di ogni materiale deve essere usata ; budget totale per il trattamento: 30000 euro

x_{is} = num. Kg del materiale s usati nella prod del prodotto i , con $i = A, B, C$, $s = 1,2,3,4$

mod. finale

$$\max\ 5.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}) + 4.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}) + 3.5(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4})$$

→ Vincoli di miscelazione

$$x_{A1} \le 0.3(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})$$
$$x_{A2} \ge 0.4(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})$$
$$x_{A3} \le 0.5(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})$$
$$x_{A4} = 0.2(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4})$$
$$x_{B1} \le 0.5(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4})$$
$$x_{B2} \ge 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4})$$
$$x_{B4} = 0.1(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4})$$
$$x_{C1} \le 0.7(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4})$$

→ Vincoli disponibilità

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \le 3000$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \le 2000$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \le 4000$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \le 1000$$

→ Vincoli sui materiali trattati

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1} \ge 1500$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2} \ge 1000$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3} \ge 2000$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{C4} \ge 500$$

→ Costo di trattamento

$$3(x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}) + 6(x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}) + 4(x_{A3}+x_{B3}+x_{C3})$$
$$+5(x_{A4}+x_{B4}+x_{C4}) \le 30000$$

$$x_{is} \ge 0 \quad \forall i = A,B,C \quad \forall s = 1,\dots,4$$

Problemi di PL su reti

Oltre a quelli già mostrati, importanti sono i seguenti metodi:

① Trasporto

Dati m luoghi di produzione collegati con n luoghi di raccolta, le capacità produttive o_i, $i=1,\dots,m$ e le domande d_s, $s=1,\dots,n$, e il costo di trasporto da ogni luogo di produzione ad ogni luogo di destinazione c_{is} del trasporto da i a s

Si vuole determinare un piano di trasporto compatibile con la produzione e con la richiesta che minimizzi il costo totale di trasporto.

$x_{is} \to$ Quantità merce da trasportare da i a s

Modello

$$\boxed{\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} c_{is} x_{is} \\ \sum_{s=1}^{n} x_{is} \leq o_i & \forall i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{is} \geq d_s & \forall s=1,\dots,n \\ x \geq 0 \end{cases}}$$

= se domanda eguaglia offerta

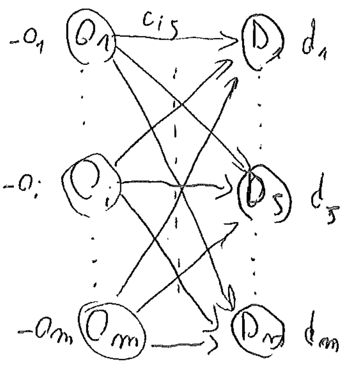
Note:

① Il problema non ha sol amm. se la domanda supera l'offerta ($\sum_{s=1}^{n} d_s > \sum_{i=1}^{m} o_i$)

② Se c'è un eccesso di produzione, cioè se ($\sum_{s=1}^{n} d_s < \sum_{i=1}^{m} o_i$) si aggiunge un ~~nodo~~ luogo di raccolta fittizio a cui spedire a costo nullo l'eccesso di prod.

③ Se i beni fossero indivisibili andrebbe aggiunto il vincolo d'interezza.

→ tale problema può essere formulato come un problema di flusso di costo min su un grafo bipartito, avente i nodi $O_1,\dots,O_m$ a bilancio $-o_1,\dots,-o_m$ // luoghi di prod. e $D_1,\dots,D_n$, con bilanci $d_1,\dots,d_n$ // luoghi di raccolta; ad ogni arco (i,s) è associato il costo c_{is} e capacità $u=+\infty$. Ogni arco collega un nodo O_i con un nodo D_s.



~~ABEke~~

② Assegnamento di costo minimo !!!

Dobbiamo eseguire n lavori avendo a disposizione n lavoratori, ciascuno dei quali sappia fare tutti i lavori. Conosciamo la tabella dei costi c_{ij} per far svolgere il lavoro j al lavoratore i.

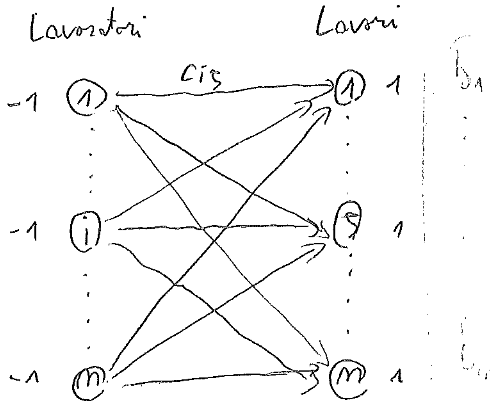
Dobbiamo assegnare ad ogni lavoratore un solo lavoro e minimizzare il costo totale.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoratore } i \text{ svolge il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulaz. del problema

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall \text{ lavoro } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall \text{ lavoratore } i = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

→ Tale problema equivale al seguente problema di flusso di costo min dove gli archi, che sono n^2, connettono ogni lavoratore ad ogni lavoro con costo c_{ij}



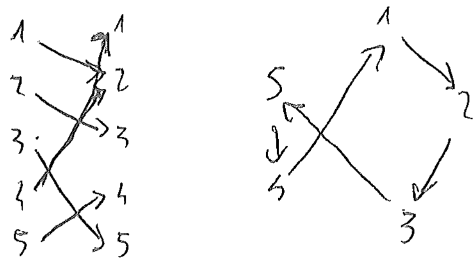
// Addestramento di costo min

n impiegati, m mansioni, ogni mansione j deve essere impartita ad un num b_j di impiegati, e ~~ad~~ 1 sola mansione per impiegato; costo per addestrare l'impiegato i al lavoro j -> c_{ij}

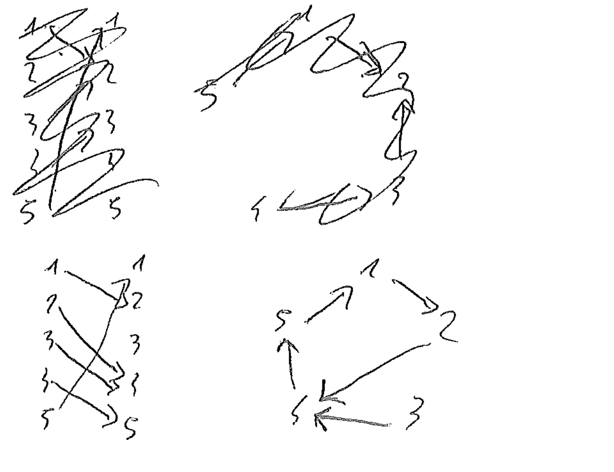
$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \\ x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

NOTA! : Assegnamento e Ciclo Hamiltoniano

Esempio di Ciclo Hamiltoniano che è un assegnamento



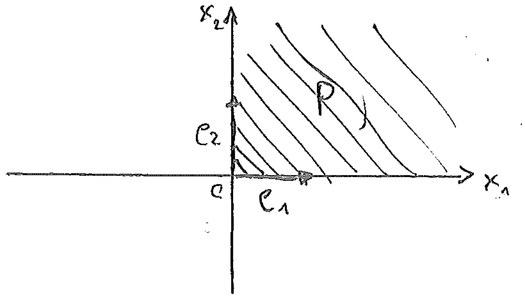
Es. di un assegnamento che non è un ciclo Hamilt.



Disegni

1]

1) Disegnare un poliedro con 2 vettori di recessione e

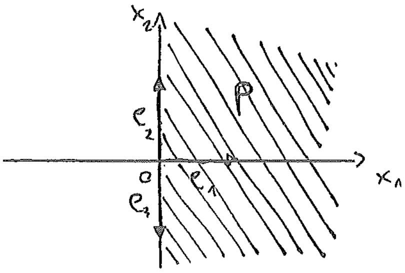


$P = conv(V) + cone(E)$

$P = \cancel{\ldots}$

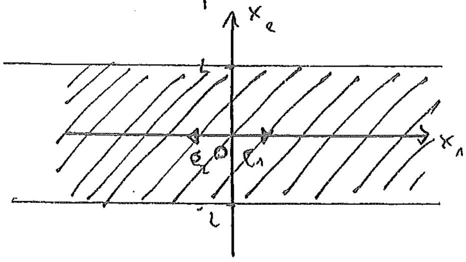
$conv\{\ \} + cone\{(1,0)(0,1)\}$

2) Disegnare un poliedro con 3 vettori di recessione e



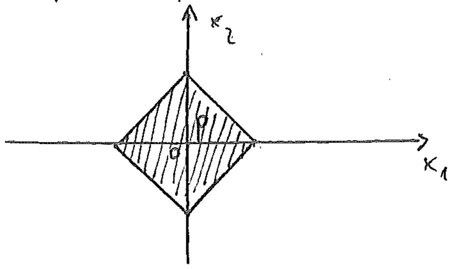
$P = conv\{\ \} + cone\{(1,0)(0,1)(0,-1)\}$

3) Disegnare un poliedro non limitato ma anche limitato



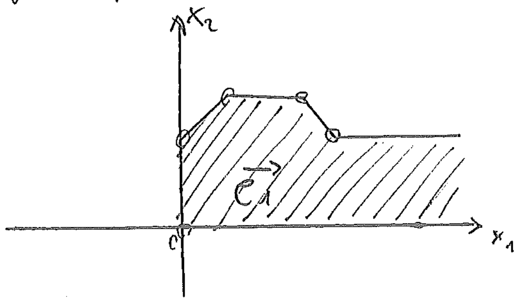
$P = conv\{(0,2)(0,-2)\} + cone\{(1,0)(-1,0)\}$

4) Disegnare un poliedro limitato

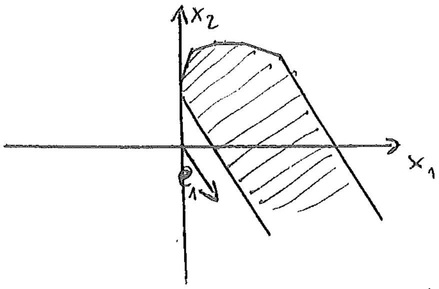


$P = conv\{(1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)\} + cone\{\ \}$

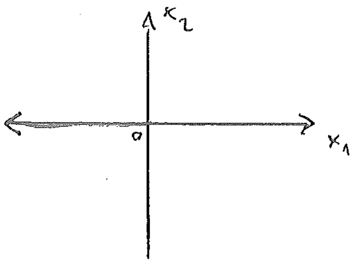
1) Disegna un poliedro con 5 vertici e una direzione di recessione



2) Direzione di recessione di



3) Qual'è la matrice che descrive questo poliedro?

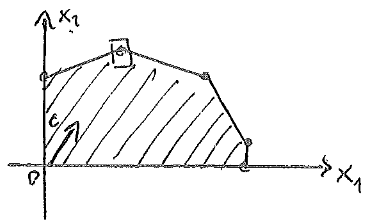


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

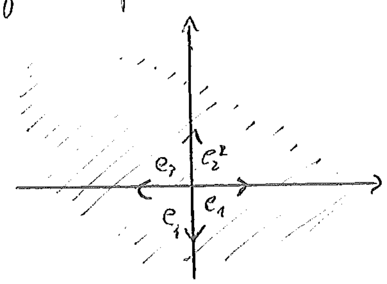
$Ax \leq b$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

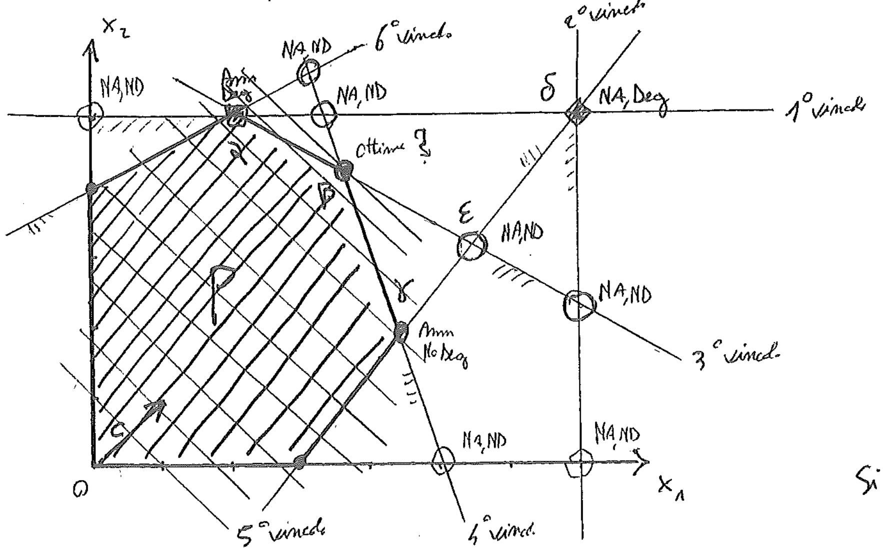
4) Trovare il vertice ottimo



5) Disegna un poliedro con 4 direzioni di recessione



⑥ Disegna una soluzione primale di base: ① Ammissibile e Non Deg; ② Amm e Deg; ③ NA e ND; ④ NA e Deg
⑤ Ottimo



$\alpha \to B = \{3,6\}$ (Deg)

$\beta \to B = \{3,4\}$

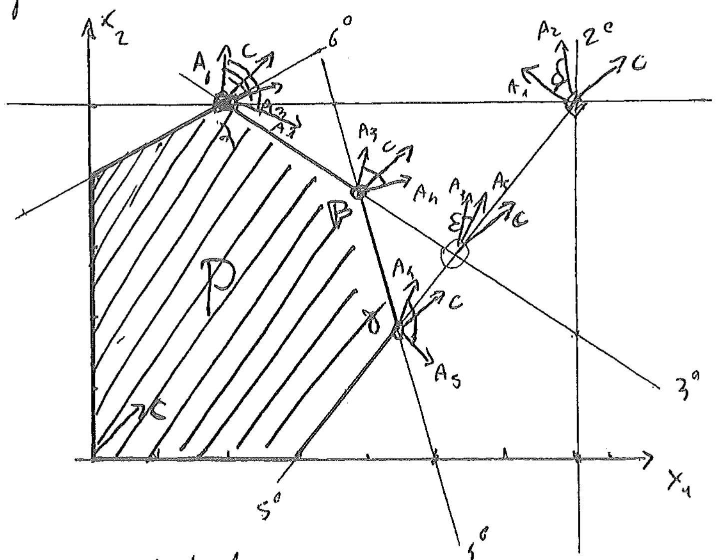
$\gamma \to B = \{4,5\}$

$\delta \to B = \{1,2\}$

$\varepsilon \to B = \{3,5\}$

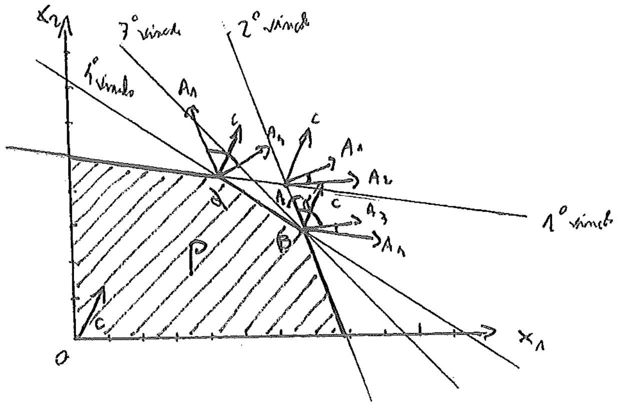
Si vede che β è ottimo dalle linee di isocosto $\perp$ a c.

⑦ Disegna una sol. duale di base: ① Amm e ND, ② Amm e Deg, ③ NA e ND, ④ NA e Deg



- Disegni il vettore c uscente da ogni pt
- Affinché il pt sia amm. è necessario che $c \in cono(A_1, \dots, A_m)$ con $A_1, \dots, A_m \in B$

⑧ Disegna una sol duale amm.

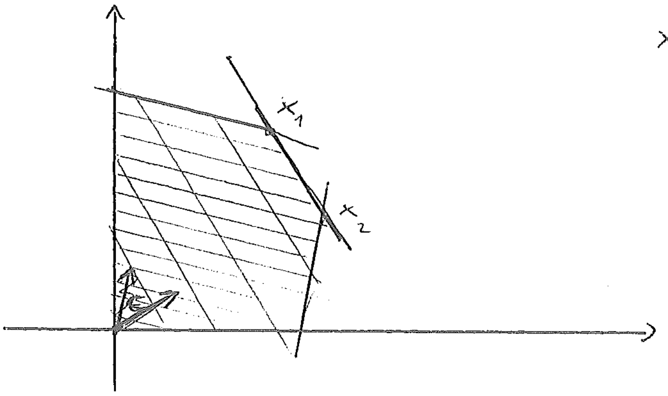


$\alpha \in B\{1,4\}$

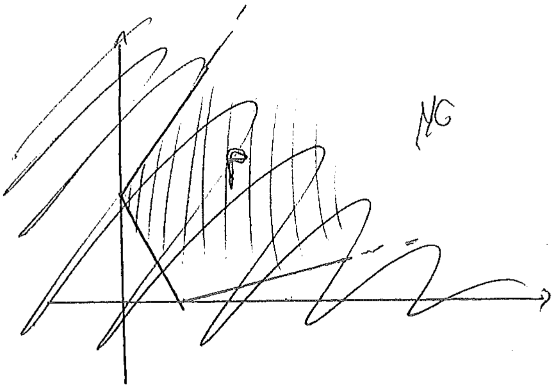
$\beta \in B\{2,4\}$ Deg

$\gamma \in B\{1,2\}$ NA

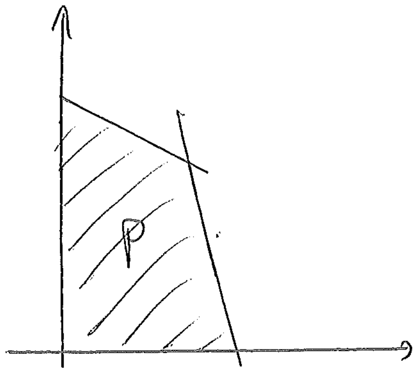
9 Disegna un poliedro con ∞ sol. ottime

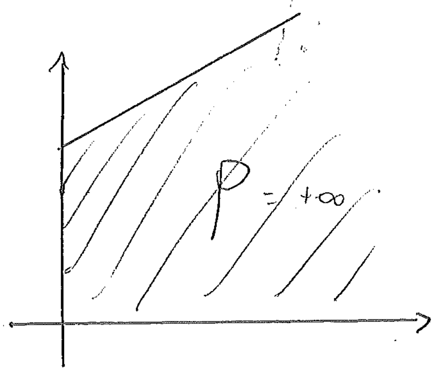


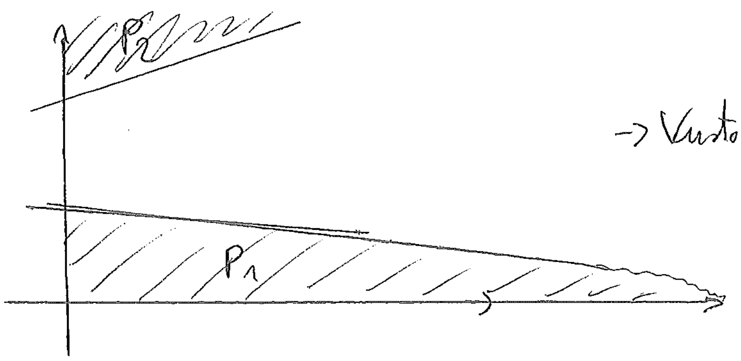
x_1 e x_2 ottimi!



10 Disegna un poliedro limitato, uno illimitato e uno vuoto

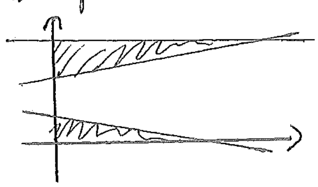




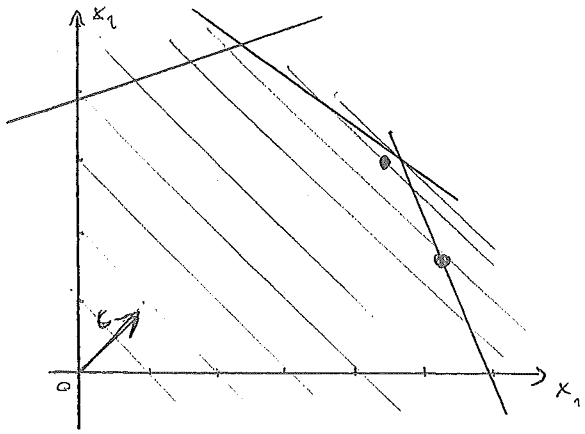


→ Vuoto : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

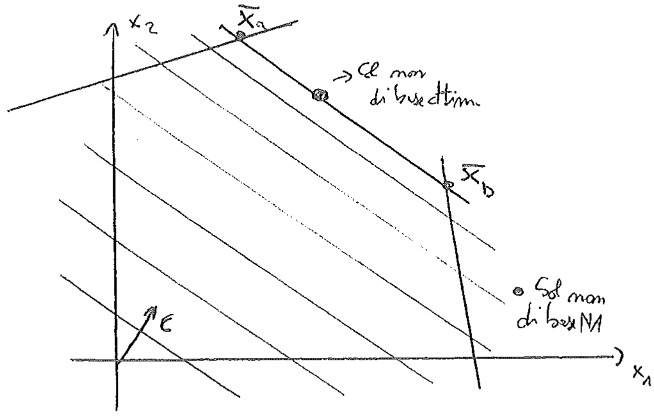
11 Disegna un altro poliedro vuoto



O Disegna una (o più) sol. ~~di base~~ ~~di~~ base ammissibili



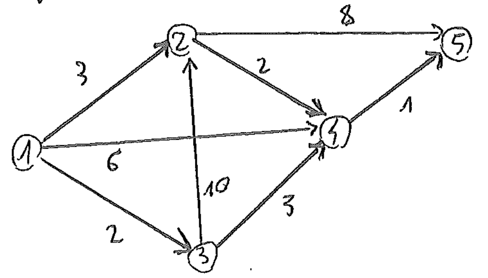
O Disegna una soluzione non di base ottima e una N.A



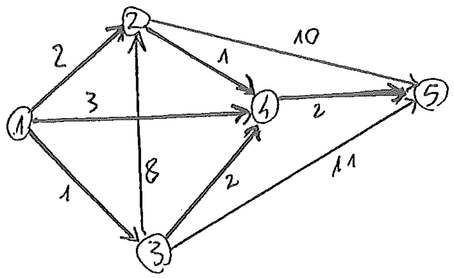
2] PL su Reti

① Disegna una rete con 2 cammini minimi possibili

Dijkstra

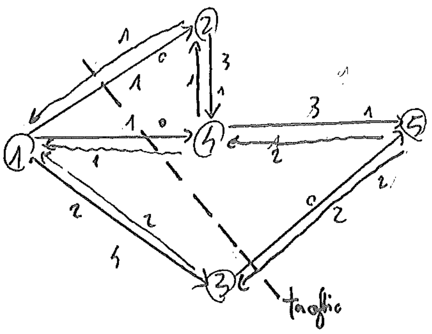


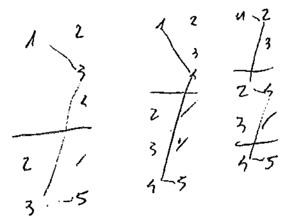
② Disegna una rete con 3 cammini minimi possibili



FFEK

③ Disegna una rete con (flusso massimo) e taglio di capacità min

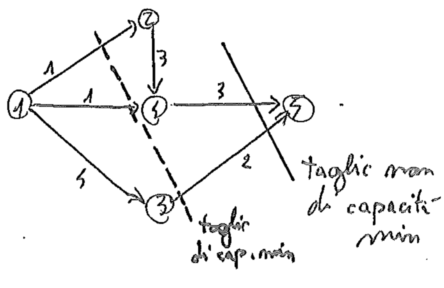




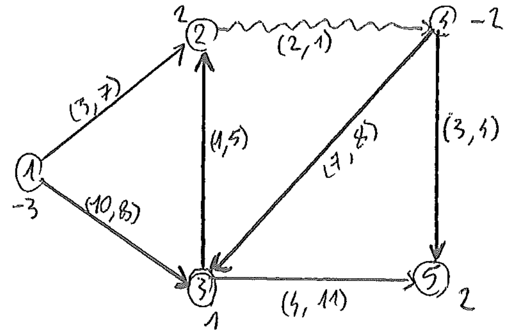
$N_s = \{1,3\}$ $N_t = \{2,4,5\}$

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{24}	x_{35}	x_{45}
1	2	1	1	2	2

④ Disegna una rete con taglio di capacità non min

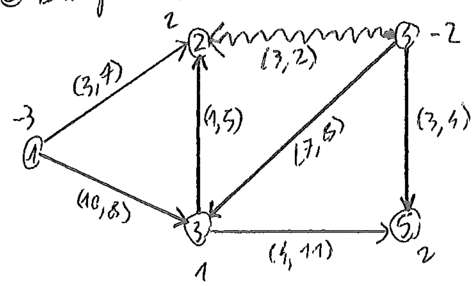


⑤ Disegna una rete capacitata che abbia sol di base ~~ottimissibile~~ Flussi :



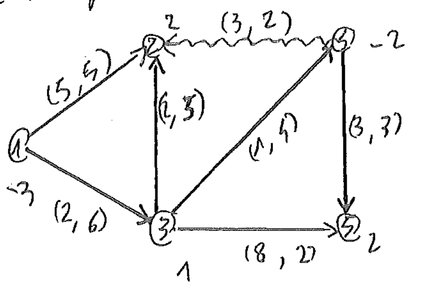
L		U		L		
x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{35}	x_{43}	x_{45}
0	3	1	1	0	1	2

⑥ Disegna una rete con soluzione di base non amm. e degenere



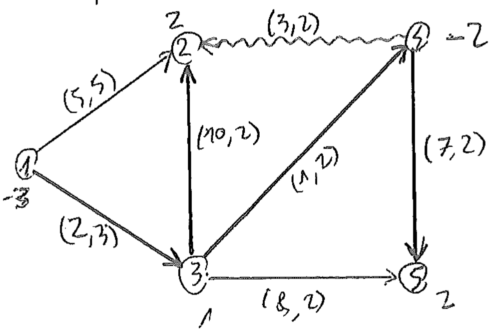
L		U		L			
x_{12}	x_{13}	~~x_{24}~~	x_{32}	x_{35}	x_{42}	x_{43}	x_{45}
0	3	~~2~~	0	0	2	-2	2

⑦ Disegna una rete con soluzione di base ~~N~~. Amm e Deg



x_{12}	x_{13}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}
0	3	0	2	0	2	2

⑧ Disegna una rete con soluzione di base degenere in ogni componente ~~e ... d'albero di capacitanza sia costituito da archi di U.~~

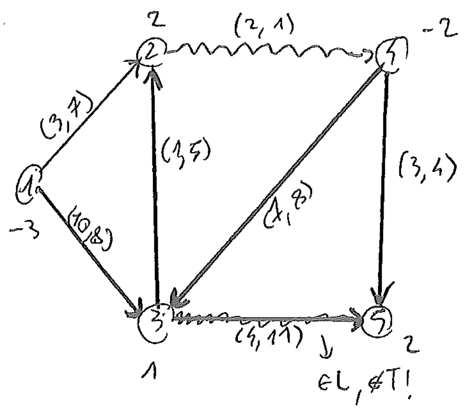


L				L	U	
x_{12}	x_{13}	x_{32}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}
0	3	0	2	0	2	2

$x_{ij} = U_{ij}$

$x_{ij} = 0$

⑨ Disegna una rete ~~X~~ con flusso ottimo ~~non ottimo~~ ~~non~~



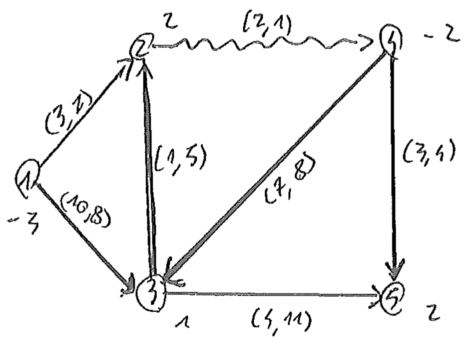
x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{32}	x_{35}	x_{43}	~~x_{45}~~
0	3	1	1	0	1	2

$\pi = (0, -9, 10, 3, 6)$

$\left.\begin{array}{l} c_{12}^{\pi} = 3+10+9 \text{ ok} \\ c_{35}^{\pi} = 4+10-6 \text{ ok} \end{array}\right\} \in L$

$c_{24}^{\pi} = 2-9+3$ ok $\in U$

⑩ Disegna una rete con potenziale ammissibile



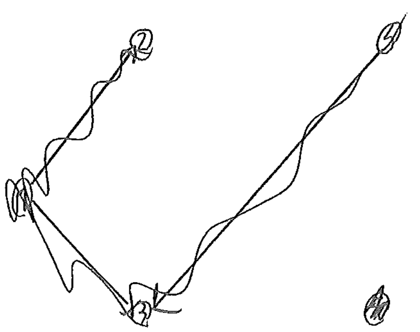
$\pi = (0, -9, 10, 3, 6)$

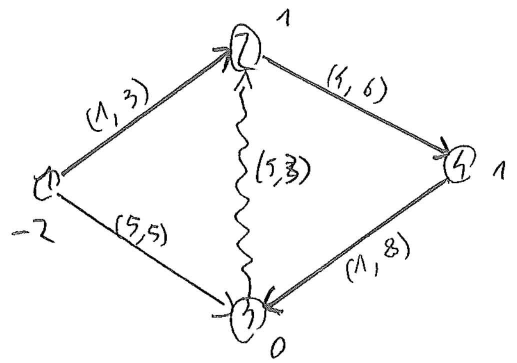
$c_{12}^{\pi} = 3+10-9$

$c_{35}^{\pi} = 4+10-6$

$c_{24}^{\pi} = 2-9+3$

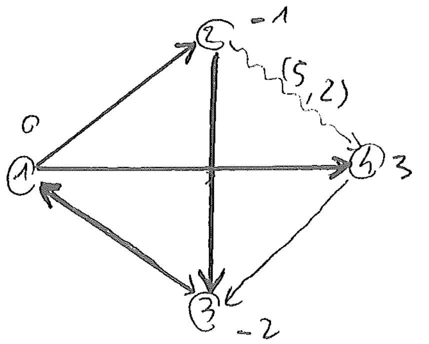
⑪ Disegna un flusso ~~non~~ di base ammissibile





$\overset{}{x_{12}}$	$\overset{L}{x_{13}}$	x_{24}	$\overset{U}{x_{32}}$	x_{43}
2	0	2	3	2

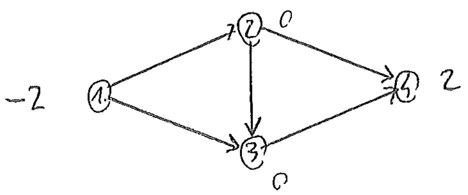
(11) Disegna una rete con flusso NON DI BASE ammissibile



x_{12}	x_{13}	x_{23}	$\overset{U}{x_{21}}$	x_{31}	$\overset{L}{x_{43}}$
1	1	?=	2	2+?	0

NO

(12) Disegna un flusso NON DI BASE ammissibile



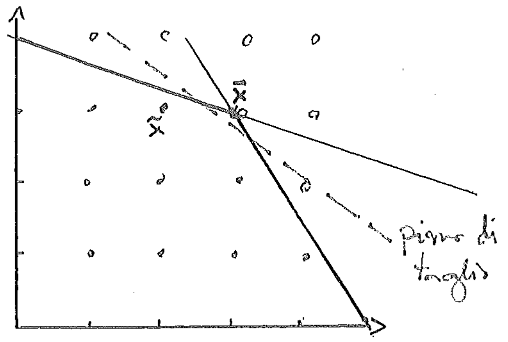
x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{34}
1	1	0	1	1

NB: Rete non capacitata

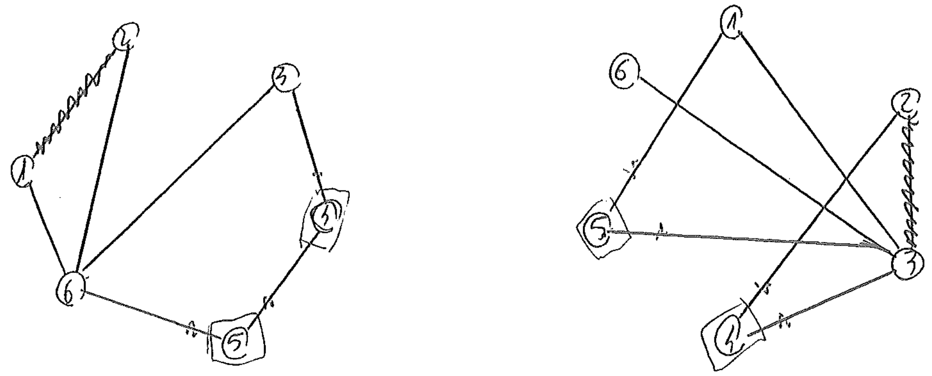
3 PLI

Gomory

① Disegna un piano di taglio

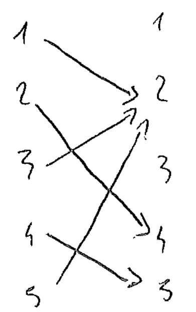


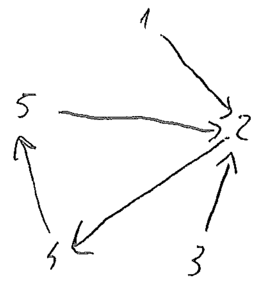
② Disegna un ~~4~~-albero che sia anche un 5-albero ma non un 6-albero TSP



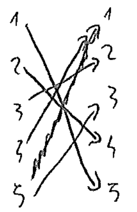
③ Disegna un 3-albero che sia anche un ciclo hamiltoniano

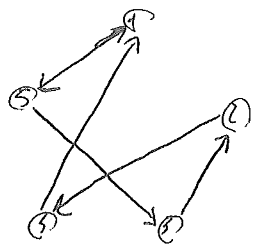
4 Disegna un assegnamento 5 × 5 che non sia un ciclo hamiltoniano





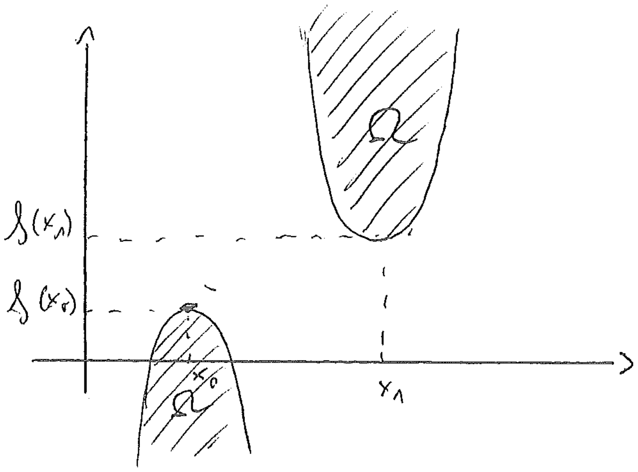
5 Disegna un assegnamento 5×5 che sia un ciclo hamiltoniano





5] PNL

① Disegna una regione ammissibile Ω non limitata con minimo e massimo finito.

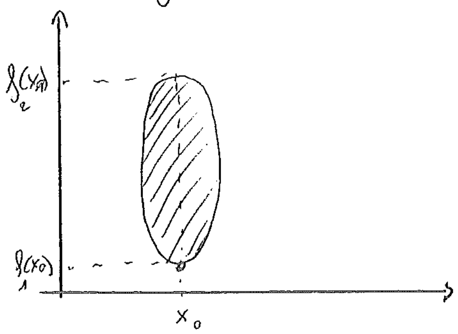


Ω = Unione di 2 parabole

$(x_0, f(x_0))$ pt di max finito

$(x_1, f(x_1))$ pt di min finito

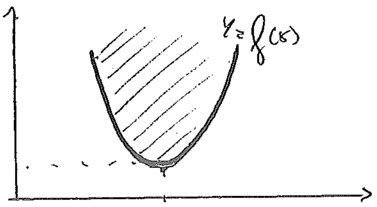
② Disegna una regione ammissibile Ω limitata con min e max ~~finito~~

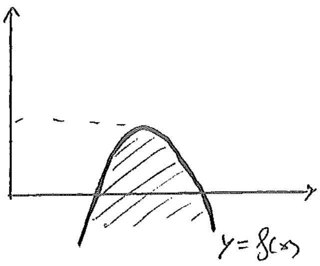


$(x_0, f_1(x_0))$ pt min

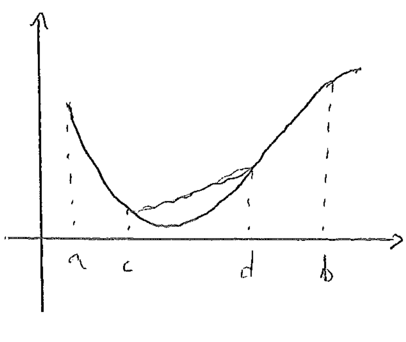
$(x_0, f_2(x_0))$ pt max

③ Disegna una funzione coerciva e una anticoerciva



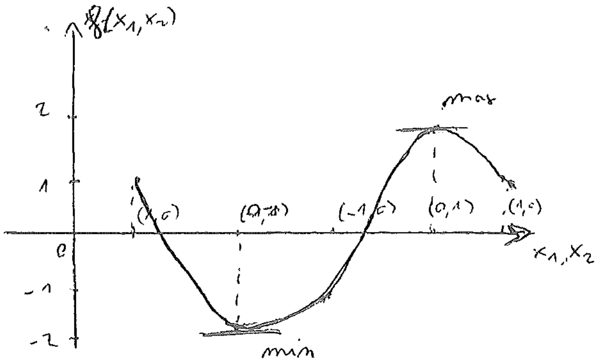


④ Disegna una funzione convessa



⑤ Disegna un max e un min locale di $f(x)$ in un problema di PNL

1] Considero $f(x_1,x_2)$ su Ω, con $\Omega = \{h(x_1,x_2)=0\}$. In questo modo f è una funzione definita su una curva, e la posso tranquillamente studiare come fosse in $\mathbb{R}^2$



$f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$

$\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ // Cerchio

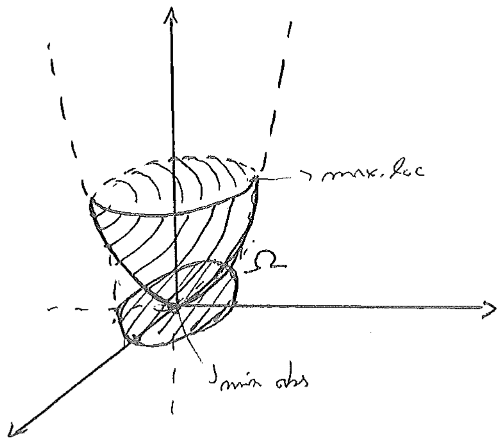
(1,0)

(0,1)

(-1,0)

(0,-1)

2]



$f(x,y)$ = paraboloide ∞ // x^2+y^2

$\Omega = \{g(x) \leq 0,\ h(x)=0\}$ // $x^2+y^2-1 \leq 0$

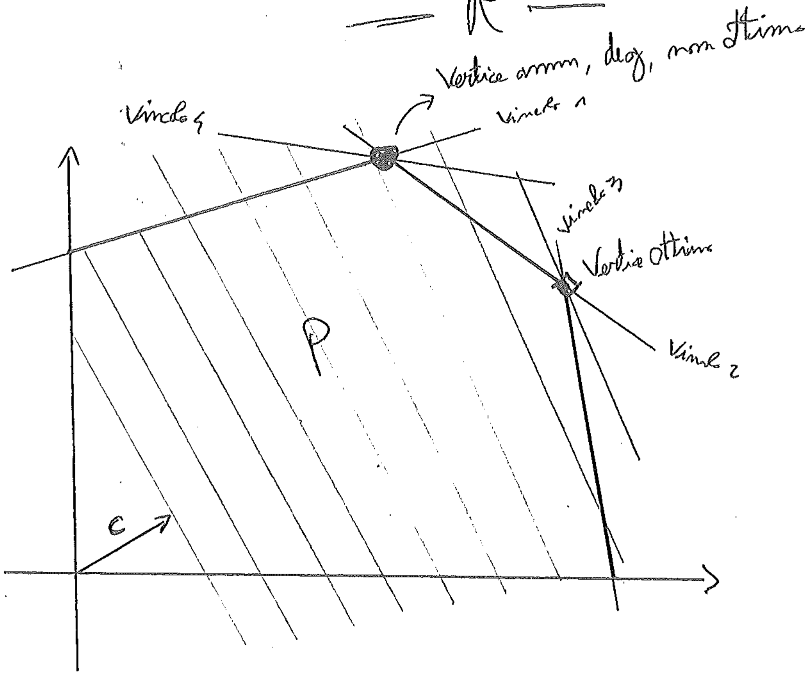
FERRARO FRANCESCO   Matr 470818

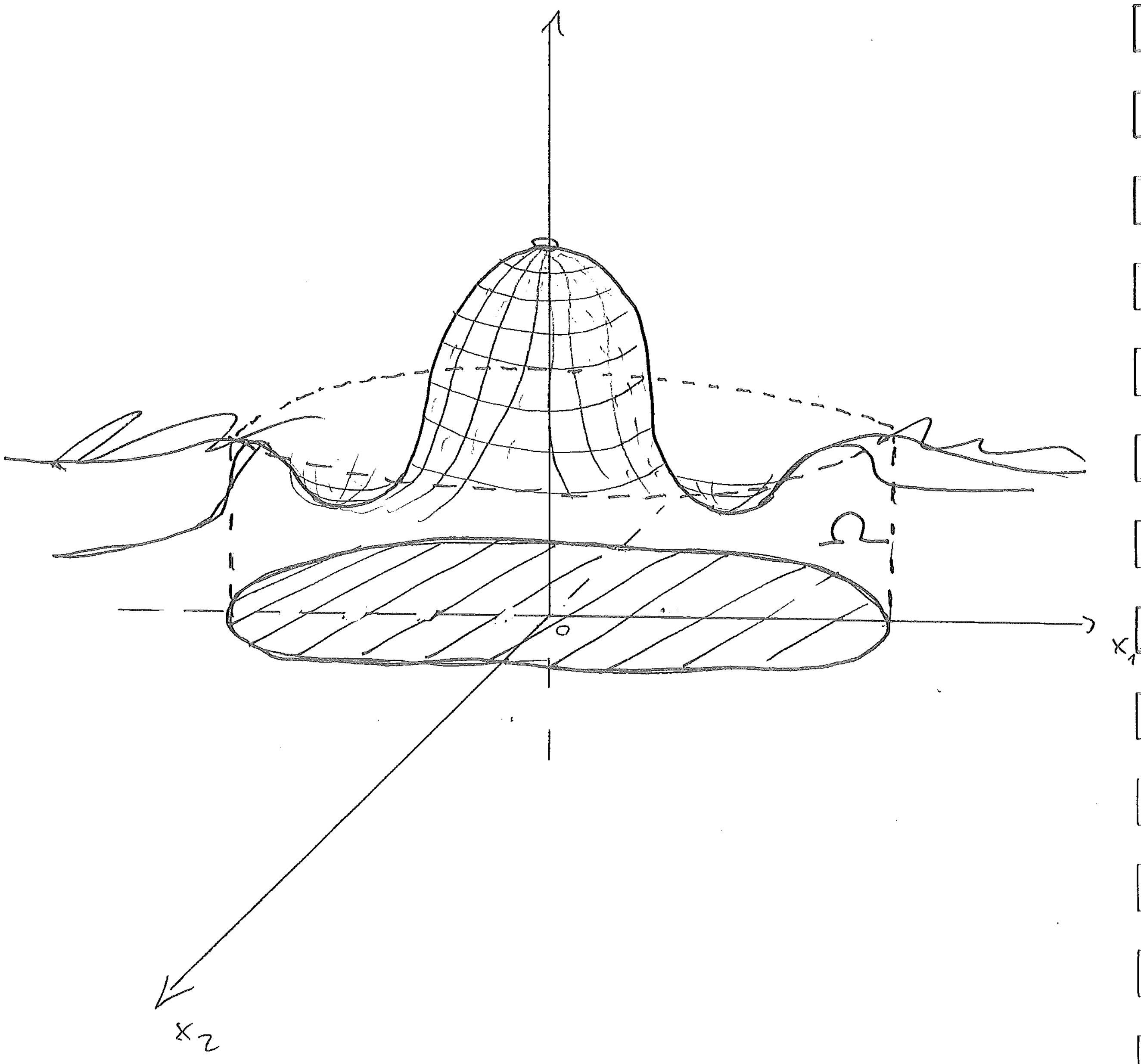
1) Disegnare un problema di PNL che abbia max assoluto, non abbia min assoluto ma locale

2) Disegna una base primale degenere non ottima

3) Scrivere un programma che in input abbia una rete e flusso x.
In output: E' un flusso di base? R: SI, NO

— R —




Ω
0
x_1
x_2

① Una fabbrica produce 3 tipi di materassi: A, B, C, usando lattice e fibre sintetiche

Materiali:

Disponibilità 1000 Kg lattice / settimana
800 Kg fibre / settimana

costo: 15 €/Kg lattice
5 €/Kg fibre

Composizione dei materassi:

	A	B	C
lattice	10 Kg	16 Kg	12 Kg
fibre	5 Kg	1 Kg	3 Kg

Prezzi: A → 200 €
B → 500 €
C → 350 €

Produzione settimanale che massimizza il profitto

Almeno 15 materassi A
12 // B
16 // C

Variabili decisionali

$x_{A,B,C}$ = Quantità prodotta del materasso A, B, C

$$\begin{cases} \max\ 200x_A + 500x_B + 350x_C - 15(10x_A + 16x_B + 12x_C) - 5(5x_A + x_B + 3x_C) \\ 10x_A + 16x_B + 12x_C \leq 1000 \\ 5x_A + x_B + 3x_C \leq 800 \\ x_A \geq 15 \\ x_B \geq 12 \\ x_C \geq 16 \end{cases}$$

MATLAB

$c = [-25\ -255\ -155]$ $b = [1000\ \ 800]$ $UB = [\ ]$

$A = [10\ \ 16\ \ 12;\ \ 5\ \ 1\ \ 3]$ $A_{eq} = [\ ]$ $b_{eq} = [\ ]$ $LB = [15\ \ 12\ \ 16]$

② Un caseificio produce mozzarella, pecorino, scamorza

Disponibilità materiale

600 Kg latte
80 Kg caglio

Costo materiale

0.3 €/Kg latte
0.1 €/Kg caglio

Produzione

20 Kg mozz.
5 Kg pecorino
10 Kg scamorza

Composizione:

	Mozz. 1Kg	Pecorino 1Kg	Scamorza 1Kg
latte	2 Kg	6 Kg	3.5 Kg
Caglio	0.5 Kg	1 Kg	0.5 Kg

Vendite

5 €/Kg mozz
15 €/Kg pecorino
8 €/Kg scamorza

· Modello $x_{A,B,C}$ → Quantità prodotte di A, B, C al Kg

$$\begin{cases} \max \; 5x_A + 15x_B + 8x_C - 0.3(2x_A + 6x_B + 3.5x_C) - 0.1(0.5x_A + x_B + 0.5x_C) \\ 2x_A + 6x_B + 3.5x_C \leq 600 \\ 0.5x_A + x_B + 0.5x_C \leq 80 \\ x_A \geq 20 \\ x_B \geq 5 \\ x_C \geq 10 \end{cases}$$

MATLAB

$c = [-4.35 \;\; -13.1 \;\; -6.9]$

$A = [2 \;\; 6 \;\; 3.5; \; 0.5 \;\; 1 \;\; 0.5]$

$b = [600 \;\; 80]$

$LB = [20 \;\; 5 \;\; 10]$

$UB = [\,]$ $\quad A_{eq} = [\,]$ $\quad b_{eq} = [\,]$

⑥ Vengono prodotti 3 tipi di carburante A, B, C usando (x) con le seguenti percentuali

	A	B	C
benzina	15	20	30
(*) etanolo	75	80	70
C	10	0	0

20000 L benzina
50000 L etanolo

profitto
1.15€/L A
1.17€/L B
1.3€/L C

$$\begin{cases} \max\ 1.15x_A + 1.17x_B + 1.3x_C - 0.13x_A \\ 0.15x_A + 0.2x_B + 0.3x_C + 0.03x_A \leq 20000 \\ .75x_A + 0.8x_B + 0.7x_C + 0.07x_A \leq 50000 \\ 1x_A - x_C \leq 0 \\ x_{A,B,C} \geq 0 \end{cases}$$

MATLAB

= [−1.02 −1.17 −1.3]   b = [20000 50000 0]   LB = [0, 0, 0]   UB = []

= [0.18 0.2 0.3; 0.82 0.8 0.7; 0.1 0 −1] A_{eq} = [] b_{eq} = []

⑦ Vengono prodotti 3 tipi di fertilizzanti A, B, C usando Azoto Fosforo e i fertilizzanti

	A	B	C
Azoto	5	10	12
Fosforo	8	12	15
B	10		
C	10		

200 Kg Azoto
300 Kg Fosforo

50€/100Kg A
35€/100Kg B
40€/100Kg C

$$\begin{cases} \max\ 0.5x_A + 0.35x_B + 0.4x_C - 0.035x_A - 0.04x_B & \text{// − 10\% del 35€/100kg − 10\% del 40€/100kg} \\ 0.05x_A + 0.1x_B + 0.12x_C + 0.01x_A + 0.012x_A \leq 200 \\ 0.08x_A + 0.12x_B + 0.15x_C + 0.012x_A + 0.015x_A \leq 300 \\ 0.2x_A - x_C - x_B \leq 0 & \text{// → meglio } 0.1x_A - x_C \leq 0,\ 0.1x_A - x_B \leq 0 \\ x_{A,B,C} \geq 0 \end{cases}$$

MATLAB:

= [−0.425 −0.35 −0.4]   b = [200 300 0]   LB = [0 0 0]   UB = []

= [0.072 0.1 0.12; 0.107 0.12 0.15; 0.2 −1 −1] A_{eq} = [] b_{eq} = []

⑤ Una ditta produce 3 diversi tipi di idropitture: A, B, C, usando con la seguente tabella di miscelazione

- Agenti chimici (AgCh)
- Stabilizzatori (St)
- Addensanti (Ad)

	AgCh	St	Ad	C
A	15%	35%	10%	10%
B	20%	20%	15%	10%
C	30%	30%	20%	

Disponibilità:

200L AgCh
250L St
150L Ad

Profitto:

5€ A
4€ B
6€ C

R: $x_{A,B,C} \rightarrow$ Quantità di idropitture A, B, C

$$
\begin{cases}
\max\ 5x_A + 4x_B + 6x_C + 0.1 \cdot 6x_A - 0.1 \cdot 6x_B \\
0.15x_A + 0.2x_B + 0.3x_C + 0.03x_A + 0.03x_B \leq 200 \\
0.35x_A + 0.2x_B + 0.3x_C + 0.03x_A + 0.03x_B \leq 250 \\
0.1x_A + 0.15x_B + 0.2x_C + 0.02x_A + 0.02x_B \leq 150 \\
-0.1x_A - 0.1x_B + x_C \geq 0 \\
x_{A,B,C} \geq 0
\end{cases}
$$

// } Va sommato il 10% del 30% di C
//

// -10% del 10% di C presente in A e B + $\cancel{x}_C$ deve essere > 0!!

$C = [-4.4\ \ -3.4\ \ -6]$ $b = [200\ \ 250\ \ 150\ \ 0]$

$A = [0.18\ \ 0.23\ \ 0.3;\ \ 0.38\ \ 0.23\ \ 0.3;\ \ 0.12\ \ 0.17\ \ 0.2;\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ -1]$

$A_{eq} = [\,]$ $b_{eq} = [\,]$ $LB = [0, 0\ 0\ 0]$ $UB = [\,]$

③ Una ditta produce palloni da calcio e da pallavolo, che vende a 20 e 18 €.
Per la prod. viene usato cuoio: ∀ pallone da calcio serve $15\,dm^2$, mentre per quello da pallavolo $14\,dm^2$. Quantità tot: $330\,m^2$

La prod. di un pallone da calcio richiede 12'' e mentre quello di pallavolo 8''

Avendo 8 h al giorno per 5 giorni di produzione, determina il max profitto

$x_{A,B}$ → Quantità palloni da calcio (A) e di pallavolo (B)

$$\begin{cases} \max\ 20x_A + 18x_B \\ 15x_A + 14x_B \le 3300 & \text{\} Vincolo sul materiale} \\ 12x_A + 8x_B \le 8\cdot 5\cdot 60'' & \text{\} Vincolo sul tempo (espresso in minuti)} \\ x_A \ge 1000 \\ x_B \ge 800 \end{cases}$$

MATLAB

c = [-20, -18]   b = [3300 2400]   UB = [ ]

A = [15 14; 12 8]   LB = [1000, 800] A_{eq} = [ ] b_{eq} = [ ]

Note sulla T.I. 82

- Salvare un valore   numero $\boxed{STO\triangleright}$ $\boxed{ALPHA}$ lettera
- Invertire una matrice $\boxed{MATRIX}$ Edit (Scrivi la matrice)
  Nome $\boxed{Enter}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{MATH}$ $\boxed{Frac}$
- Derivata numerica   nDeriv (f(x), x, valore n)
- fmin (expr, variabile, LB, UB)
- Definire le funzioni