Esame di Ricerca Operativa del 21/07/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 2\ y_1 - 7\ y_2 + 4\ y_3 + 15\ y_4 + 21\ y_5 + 6\ y_6 \\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -y_1 - y_2 + y_4 + 3\ y_5 - y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x =$		
$\{2,\,4\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{5{,}6\}$					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta di trasporti sta considerando l'acquisto di nuovi veicoli commerciali per trasporto merci, di capacità piccola, media e grande. Il prezzo d'acquisto è di 8700 Euro per ogni veicolo di capacità piccola, 13200 Euro per ogni veicolo di capacità media e 25600 Euro per ogni veicolo di capacità grande. La ditta ha a disposizione 325000 Euro per tali acquisti. E' stato valutato che il profitto annuale netto dovrebbe essere di 2000 Euro, 2800 Euro e 5600 Euro, per i veicoli di capacità piccola, media e grande, rispettivamente. E' stato inoltre previsto che vi sarà personale sufficiente per guidare 30 nuovi veicoli, ma solo 3 tra questi hanno la patente per guidare i veicoli di capacità grande. Determinare quanti veicoli commerciali di ciascun tipo si dovrebbero acquistare per massimizzare il profitto.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

(per il problema o per il rilassato?)

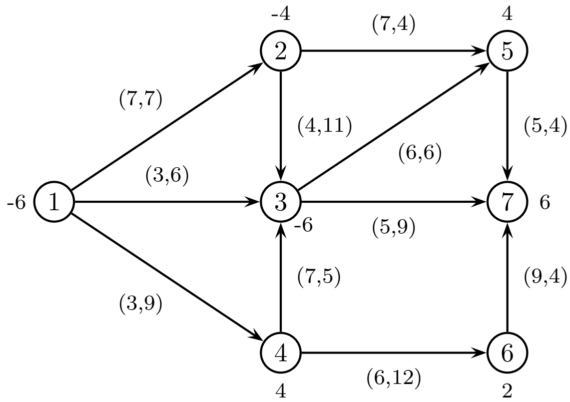
```
c=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

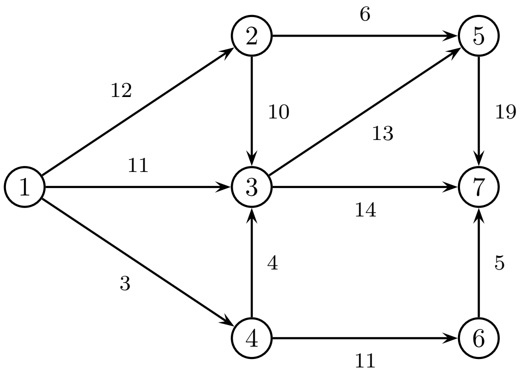


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (2,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x =$		
(1,2) (1,4) (2,3) (2,5) (3,7) (4,6)	(3,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

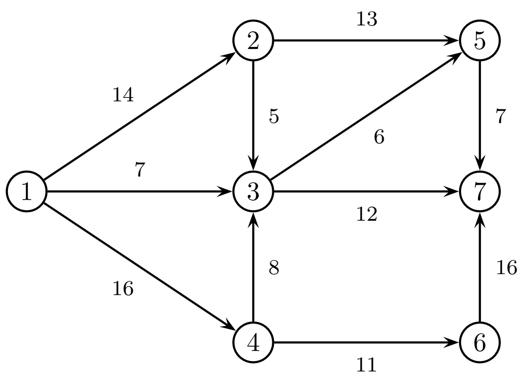
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \leq 45 \\ 8\ x_1 + 18\ x_2 \leq 47 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	6	14	21	8	9	22
Volumi	38	134	199	465	191	120	544

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(1,1)							
(4, -2)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 - 3\ x_1 - 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-1, 1)$, $(-5, -1)$, $(-2, 5)$ e $(2, 5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 2\ y_1 - 7\ y_2 + 4\ y_3 + 15\ y_4 + 21\ y_5 + 6\ y_6 \\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -y_1 - y_2 + y_4 + 3\ y_5 - y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (3,\ 1)$	SI	NO
$\{2, 4\}$	$y = (0,\ -17,\ 0,\ -9,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{5, 6\}$	$\left(\frac{39}{7},\ \frac{36}{7}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{23}{7},\ \frac{13}{7}\right)$	3	$23,\ \frac{13}{3}$	6
2° iterazione	$\{3, 5\}$	$\left(4,\ \frac{17}{3}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{13}{3},\ 0,\ \frac{8}{3},\ 0\right)$	4	$\frac{13}{8},\ 8$	3

Esercizio 3. Indichiamo con x_P, x_M ed x_G rispettivamente il numero di veicoli commerciali di capacità piccola, media e grande da acquistare.

COMANDI DI MATLAB

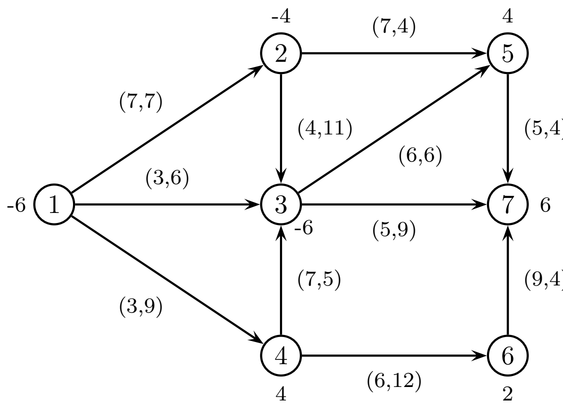
```
c=[ -2000 ; -2800 ; -5600 ]

A=[8700 13200 25600; 1 1 1 ]          b=[ 325000 ; 30 ]

Aeq=[]                                beq=[]

lb=[0; 0; 0]                          ub=[ ; ; 3]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

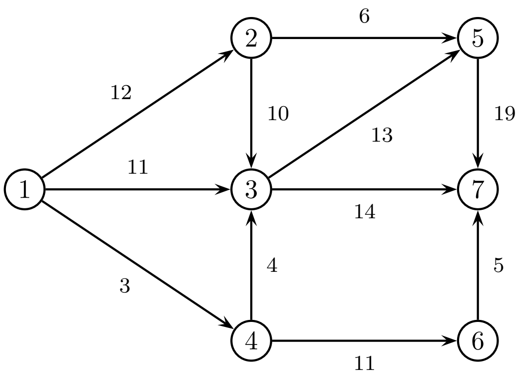


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (2,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x = (0,\ 6,\ 0,\ -3,\ 7,\ 0,\ 9,\ 0,\ -4,\ 3,\ -6)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (2,3) (2,5) (3,7) (4,6)	(3,5)	$\pi = (0,\ 7,\ 11,\ 3,\ 14,\ 9,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

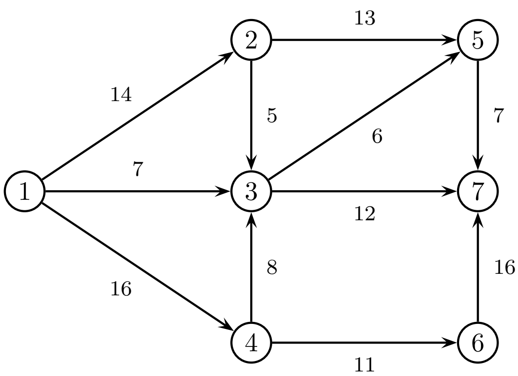
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	(0, 0, 6, 0, 4, 0, 6, 0, 2, 0, 0)	(0, 0, 6, 0, 4, 0, 6, 0, 2, 0, 0)
π	(0, 9, 13, 3, 19, 9, 18)	(0, 7, 11, 3, 17, 9, 16)
Arco entrante	(1,2)	(1,3)
ϑ^+, ϑ^-	3 , 0	6 , 0
Arco uscente	(6,7)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	11	1	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	3	18	2	18	2	18	2	18	2
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	21	3	21	3	19	6	19	6	19	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0)	7
1 - 2 - 3 - 7	5	(5, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0)	12
1 - 2 - 5 - 7	7	(12, 7, 0, 5, 7, 0, 12, 0, 0, 7, 0)	19
1 - 4 - 6 - 7	11	(12, 7, 11, 5, 7, 0, 12, 0, 11, 7, 11)	30

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \leq 45 \\ 8\ x_1 + 18\ x_2 \leq 47 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{45}{8}, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 56$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\quad v_I(P) = 50$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\quad x_1 \leq 5$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	6	14	21	8	9	22
Volumi	38	134	199	465	191	120	544

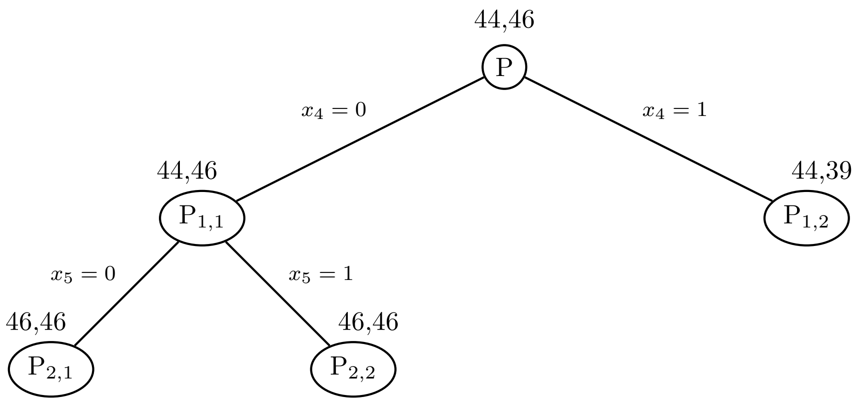
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$ $\quad v_I(P) = 44$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 0, 1, \frac{191}{465}, 0, 1, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 46$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima = $(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ valore ottimo = 46

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 \le 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(1,\ 1)$	$(5,7)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(4,\ -2)$	$(-65,257)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 - 3\ x_1 - 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-1,1)$, $(-5,-1)$, $(-2,5)$ e $(2,5)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$	$(0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(-17,0)$	$\dfrac{4}{51}$	$\dfrac{4}{51}$	$(-2,5)$