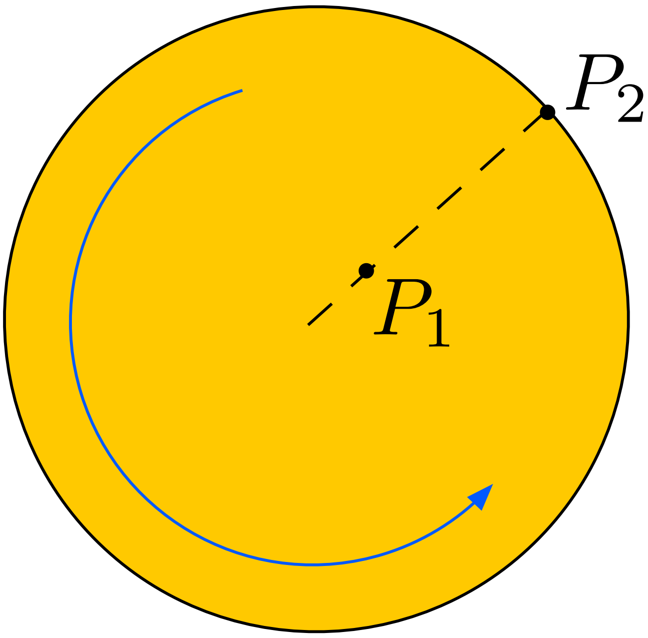
Esercizio (tratto dal Problema 2.4 del Mazzoldi 2)

Un disco di raggio R ruota con velocità angolare costante ω rispetto ad un asse verticale passante per il centro.
Un punto P_1, distante $r_1 < R$ dal centro, ruota insieme al disco; un secondo punto P_2 si trova lungo lo stesso raggio di P_1, ma è situato sul bordo del disco. Calcolare:

1. le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dei due punti e la loro velocità relativa;
2. le accelerazioni $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ dei due punti e la loro accelerazione relativa.



SOLUZIONE:
Ciascuno dei due punti si muove lungo una circonferenza: il punto 1 lungo una circonferenza di raggio r_1 e il punto 2 lungo una circonferenza di raggio R. Dunque le loro coordinate radiali rimangono costanti nel tempo

$$\begin{aligned} r(t) &= r_1 = \text{const} \qquad \text{per il punto 1} && (1)\\ r(t) &= R = \text{const} \qquad \text{per il punto 2} && (2) \end{aligned}$$

Le espressioni per la velocità e l'accelerazione in un moto circolare, espresse in coordinate polari, valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta && (3)\\ \vec{a} &= \underbrace{-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{accel. radiale (centripeta) } a_r}\vec{u}_r + \underbrace{r\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{accel. tangenziale } a_\theta}\vec{u}_\theta && (4) \end{aligned}$$

dove $r = r_1$ per il punto 1 e $r = R$ per il punto 2.

Sappiamo inoltre che il disco si muove con velocità angolare costante ω. Siccome tutti i punti del disco hanno la stessa velocità angolare, abbiamo

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{const} \qquad (5)$$

e dunque

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad (6)$$

Sostituendo (5) e (6) in (4) otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{v} &= r\,\omega\,\vec{u}_\theta && (7)\\ \vec{a} &= -r\,\omega^2\vec{u}_r && (8) \end{aligned}$$

dove $r = r_1$ per il punto 1 e $r = R$ per il punto 2. Notiamo che *per il moto circolare uniforme* le velocità hanno solo componente tangenziale e le accelerazioni hanno solo componente radiale.
Le velocità dei due punti valgono:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= r_1\,\omega\,\vec{u}_\theta && (9)\\ \vec{v}_2 &= R\,\omega\,\vec{u}_\theta && (10)\\ & && (11) \end{aligned}$$

e dunque la velocità relativa (ossia la velocità di 2 vista da 1) vale

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (R - r_1)\,\omega\,\vec{u}_\theta \qquad (12)$$

Analogamente, per le accelerazioni abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= -r_1\,\omega^2\,\vec{u}_r && (13)\\ \vec{a}_2 &= -R\,\omega^2\,\vec{u}_r && (14)\\ & && (15) \end{aligned}$$

e dunque l'accelerazione relativa (ossia l'accelerazione di 2 vista da 1) vale

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -(R - r_1)\,\omega^2\,\vec{u}_r \qquad (16)$$