$(1,0,1) + t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1}$ $\qquad$ $(0,1,2) + s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$

Applichiamo il 2° modo

$P = (1+2t,\ 3t,\ 1+t)$ $\qquad$ $Q = (s,\ 1,\ 2+2s)$

$P-Q = (1+2t-s,\ 3t-1,\ -1+t-2s)$

$P-Q \perp v_1 \rightsquigarrow 2(1+2t-s) + 3(3t-1) + (-1+t-2s) = 0$

$P-Q \perp v_2 \rightsquigarrow (1+2t-s) + 2(-1+t-2s) = 0$

Risolvendo trovo univocamente t ed s, e quindi i p.ti P e Q.

Applicare il 1° modo voleva dire

$\text{dist}(P,Q)^2 = \|P-Q\|^2 = (1+2t-s)^2 + (3t-1)^2 + (-1+t-2s)^2$

NO

Posso espandere tutto: $1 + \cancel{4t^2} + \cancel{s^2} + \cancel{4t} \cancel{-2s} + \cancel{4ts} + \cancel{9t^2} \cancel{-6t} + 1$
$+ 1 + \cancel{t^2} + \cancel{4s^2} \cancel{-2t} + \cancel{4s} - \cancel{4ts}$

[Aggiunto dopo video: c'è un errore di segno che compromette il seguito]

$= 14t^2 + 5s^2 - 4t + 2s + 3$

Devo trovare il minimo di questa. Punto a scriverla come somma di quadrati

$$14\left(t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{49} - \frac{1}{49}\right) + 5s^2 + 2s + 3$$

$$= 14\left(t - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{2}{7} + 5s^2 + 2s + 3$$

$$= 14\left(t-\frac{1}{7}\right)^2 + 5\left(s^2+\frac{2}{5}s+\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\right)-\frac{2}{7}+3$$

$$= 14\left(t-\frac{1}{7}\right)^2 + 5\left(s+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}-\frac{2}{7}+3$$

Il minimo di questa espressione si ottiene quando

$t=\frac{1}{7}$ e $s=-\frac{1}{5}$ e il minimo vale $-\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+3$

[Verifica: controllare che questa sia la soluzione del sistema del 2° modo]

Domanda: trovare un piano che contiene la prima retta e non interseca la 2ª retta.

$$\underbrace{(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1}}_{\text{prima retta}} \qquad \underbrace{(0,1,2)+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}}_{\text{seconda retta}}$$

Il piano è $(1,0,1)+t\underbrace{(2,3,1)}_{v_1}+s\underbrace{(1,0,2)}_{v_2}$

È il piano che passa per $(1,0,1)$ ed è generato dalle due direzioni v_1 e v_2

Se volessi la cartesiana?

Cerco vett. $\perp$ a v_1 e v_2

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (6,-3,-3) \rightsquigarrow (2,-1,-1)$$

$$2x-y-z=1 \leftarrow \text{deve passare per } (1,0,1)$$

Verifico che il piano non interseca la 2ª retta
$(s, 1, 2+2s)$

$\cancel{2s} - 1 - 2 - \cancel{2s} = 1$ ⇝ impossibile

La distanza di ogni p.to della 2ª retta dal piano è la stessa, ed è uguale alla minima distanza tra le 2 rette

P.to sulla 2ª retta: $(0,1,2)$

Distanza dal piano

$$\frac{|-1-2|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

[Corretto dopo video: manca il d al num.: il conto giusto è $\frac{|-1-2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$]

Verificare che venga corrente con gli altri metodi

— o — o —

Esercizio Capire cosa rappresenta l'insieme dei p.ti (x, y) del piano tali che

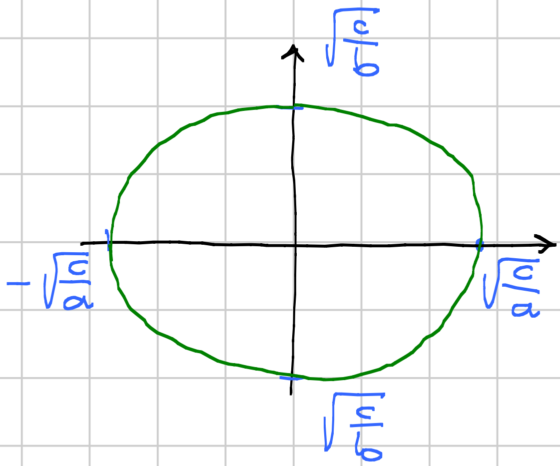
$$2x^2 + 3y^2 - 2xy = 10$$

Passo indietro: cosa rappresenta

$$ax^2 + by^2 = c \qquad \text{con } a, b, c > 0$$

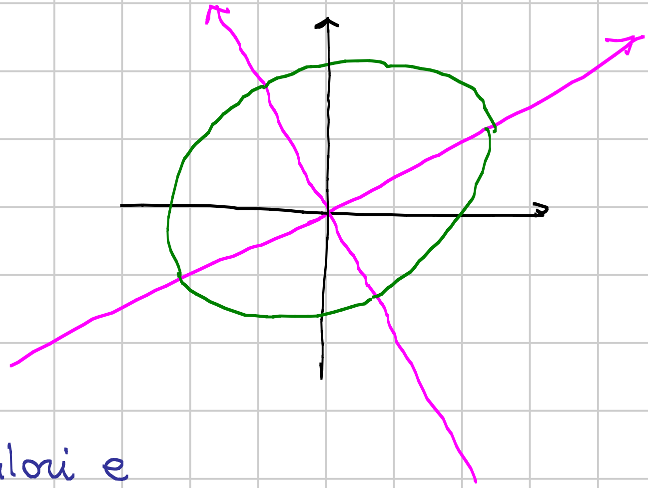
Rappresenta un'ellisse con semiassi $\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{\frac{c}{b}}$

Idea: quella originaria è un'ellisse ma orientata secondo una base diversa dalla base canonica.



Morale: la base è la base ortonormale di autovettori della matrice simmetrica
le lungh. dei semiassi dipendono dagli autovalori

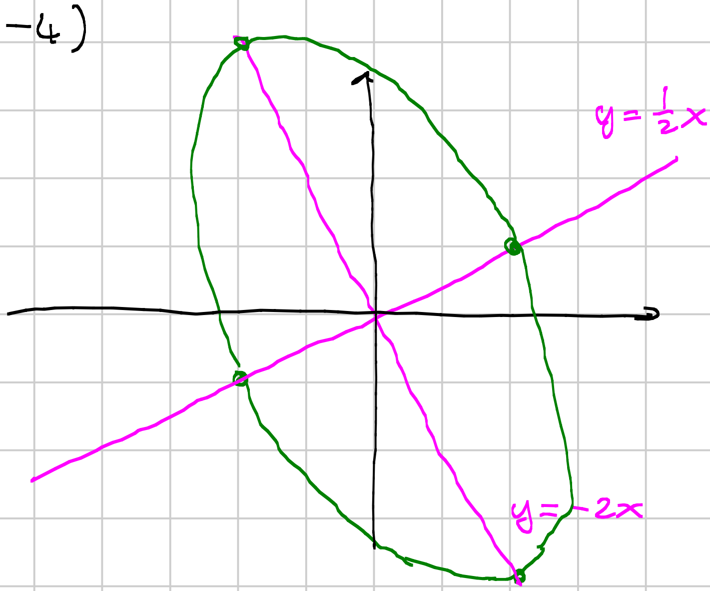
Volendo: esiste una rotazione del piano che manda l'ellisse strana in una messa in posizione "canonica".



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{calcolo autovalori e autovettori}$$

<u>Esempio</u> (in cui i numeri vengono meglio)

Scrivere l'ellisse che ha come assi le rette
$y = +\frac{1}{2}x$ e $y = -2x$
e passa per i p.ti $(2,1)$ e $(2,-4)$



Costruisco una base ortonormale secondo le direzioni delle 2 rette
ortogonale: $(2,1)$, $(-1,2)$
ortonormale:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}_{v_1} \qquad \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_{v_2}$$

In questa base, l'ellisse si rappresenta come

$$a z^2 + b w^2 = c$$ dove (z,w) sono le componenti rispetto a questa base

e a, b, c sono scelti in modo che l'ellisse passi per i p.ti dati.

Scegliamo $c = 1$, e a quel p.to

$(2,1)$ ha componenti $(\sqrt{5}, 0) \rightsquigarrow a = \frac{1}{5}$

$(2,-4)$ " " $(0, -2\sqrt{5}) \rightsquigarrow b = \frac{1}{20}$

Nella base strana l'ellisse è $\frac{1}{5} z^2 + \frac{1}{20} w^2 = 1$,
oppure

$$\boxed{4z^2 + w^2 = 20}$$

Dato un p.to $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (x e y sono le comp. rispetto alla base canonica), chi sono z e w ?

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dalla canonica alla} \\ v_1, v_2}}{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'eq. è $\quad 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}} x + \frac{1}{\sqrt{5}} y\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} x + \frac{2}{\sqrt{5}} y\right)^2 = 20$

— o — o —

Cosa succede se ci sono termini di primo grado

$$\boxed{2x^2 + 5y^2 + 4xy + 6x - 7y = 28}$$

Idea: con una traslazione posso "eliminare" i termini di primo grado.

Poniamo

$$z = x+a \qquad\qquad w = y+b$$

(traslazione che sposta l'origine)

$$2(x+a)^2 + 5(y+b)^2 + 4(x+a)(y+b) + 6(x+a) - 7(y+b) = 28$$

Guardando solo i termini di 1° grado:

$$4ax + 10by + 4bx + 4ay + 6x - 7y$$

$4a + 4b + 6 = 0$ (coeff. di x)
$10b + 4a - 7 = 0$ (coeff. di y)

Risolvendo il sistema trova a e b.
In un nuovo sistema di assi con origine in $(-a,-b)$, quello che resta ha solo termini di 2° grado, e quindi posso procedere come prima.

Tolti i casi "degeneri" le possibilità sono

- ellisse $ax^2+by^2=c$ $\quad a,b,c>0$
- iperbole $ax^2-by^2=c$ $\quad$ "
- insieme $\emptyset$: $ax^2+by^2=c$ $\quad a,b>0$ e $c<0$.

Volendo: le ellissi diventano circonferenze usando matrici diagonali con coeff. diversi sulla diagonale

$$4x^2+9y^2=1 \rightsquigarrow \underbrace{2x=z, \quad 3y=w}_{\text{dilata in modo diverso sui 2 assi}} \rightsquigarrow z^2+w^2=1$$

— o — o —