Esercizio

Una particella si muove lungo l'asse x con una velocità descritta dalla seguente legge oraria

$$v(t) = A\,\frac{t\,(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2} \tag{1}$$

dove A e τ sono delle costanti positive.

1. Determinare le unità di misura di A e τ.

All'istante $t = \tau$ la particella parte dalla posizione $x = 1\,\mathrm{m}$. In seguito si osserva che, all'istante in cui la velocità si annulla, la particella si trova alla posizione $x = 3\,\mathrm{m}$.

2. Disegnare l'andamento della curva $v(t)$;

3. Determinare il valore della costante A;

4. Determinare dove si trova la particella all'istante $t = 3\tau$.

SOLUZIONE

1. • Per determinare l'unità di misura di τ osserviamo che, al numeratore dell'equazione (1), appare la combinazione

$$(2 - t/\tau)$$

da cui si vede che il rapporto t/τ deve essere un numero puro (perché è sottratto ad un numero puro). Pertanto τ ha le stesse dimensioni di t:

$$[\tau] = \mathrm{s} \tag{2}$$

• Per determinare l'unità di misura di A abbiamo

$$\begin{aligned} [v] &= [A]\,\frac{[t]\,[(2-t/\tau)]}{[t^2+\tau^2]} = \\ &= [A]\,\frac{[t]\;\cdot 1}{[t]^2} = \\ &= \frac{[A]}{[t]} \end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$[A] = [v][t] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{s} \;=\; \mathrm{m} \tag{4}$$

2. Per disegnare l'andamento della velocità in funzione del tempo osserviamo che

- Per $t \to 0$ abbiamo $v(t) \sim (2A/\tau^2)\,t$ (andamento lineare in t);
- Per $t = 2\tau$ abbiamo $v = 0$;
- Per $t \to \pm\infty$ abbiamo $v(t) \to -A/\tau$;
- Cerchiamo gli istanti di velocità massima e minima attraverso la relazione:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{5}$$

Dopo un po' di algebra otteniamo

$$\frac{dv}{dt} = -2A\frac{t^2 + t\,\tau - \tau^2}{(t^2+\tau^2)^2} = 0 \tag{6}$$

che ha due soluzioni

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t &=& \tau\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq -1.62\,\tau < 0 \\ \\ t &=& \tau\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq +0.62\,\tau > 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

da cui deduciamo che la derivata si annulla in due soli istanti, uno nel futuro ed uno nel passato.

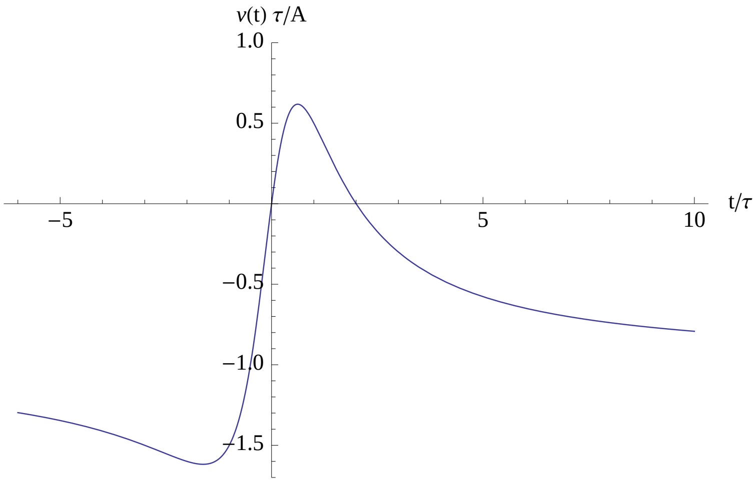

Figure 1: Andamento della legge oraria $v(t)$ della velocità [Eq.(1)].

In virtù di queste considerazioni, possiamo ora tracciare il grafico di $v(t)$, mostrato in Fig.1.

3. Ci sono due istanti per cui conosciamo la posizione della particella:

- Uno è l'istante $t = \tau$:
$$x(t = \tau) = 1\,\mathrm{m} \tag{8}$$

- L'altro istante è quello in cui sia annulla la velocità, ossia
$$v(t) = A\,\frac{t\,(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 2\tau$$
E dal testo sappiamo che
$$x(t = 2\tau) = 3\,\mathrm{m} \tag{9}$$

- Possiamo ora applicare il teorema generale
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = x(t_2) - x(t_1) \tag{10}$$
al caso particolare in cui $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$ e $v(t)$ è data dalla (1). Otteniamo
$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{2\tau} v(t)\,dt &= x(2\tau) - x(\tau) \\ &\Downarrow \\ \int_{\tau}^{2\tau} A\,\frac{t\,(2 - t/\tau)}{t^2 + \tau^2}dt &= 3\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{11}$$

Per calcolare l'integrale al membro sinistro osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau}^{2\tau} A\,\frac{t\,(2-t/\tau)}{t^2+\tau^2}dt &= A\int_{\tau}^{2\tau}\left(\frac{2t}{t^2+\tau^2}-\frac{1}{\tau}\frac{t^2}{t^2+\tau^2}\right)dt = \\
&= A\int_{\tau}^{2\tau}\left(\frac{2t}{t^2+\tau^2}-\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{\tau^2}{t^2+\tau^2}\right)\right)dt = \\
&= A\int_{\tau}^{2\tau}\left(\frac{2t}{t^2+\tau^2}-\frac{1}{\tau}+\frac{\tau}{t^2+\tau^2}\right)dt = \\
&= A\left[\ln(t^2+\tau^2)-\frac{t}{\tau}+\arctan\frac{t}{\tau}\right]_{t=\tau}^{t=2\tau} = \qquad (12) \\
&= A\left(\ln(5\tau^2)-2+\arctan 2-\ln(2\tau^2)+1-\underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}\right) = \\
&= A\left(\ln\frac{5}{2}-1+\arctan 2-\pi/4\right) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Sostituendo (13) in (11) si ottiene

$$
A\left(\ln\frac{5}{2}-1+\arctan 2-\pi/4\right) = 2\,\mathrm{m} \qquad (14)
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2\,\mathrm{m}}{\ln\frac{5}{2}-1+\arctan 2-\pi/4} = \\
&= \frac{2\,\mathrm{m}}{0.238} = \\
&= 8.40\,\mathrm{m} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

4. Ora che la costante A è stata determinata, conosciamo esplicitamente la legge oraria della velocità. Per determinare la posizione della particella all'istante $t = 3\tau$ possiamo allora applicare nuovamente il teorema (10). Questa volta, però, lo utilizziamo tra gli istanti $t = \tau$ (in cui la posizione della particella è nota) e l'istante $t = 3\tau$ (in cui vogliamo determinare la posizione). Avremo

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau}^{3\tau} v(t)\,dt &= x(3\tau)-x(\tau) \\
&\Downarrow \\
x(3\tau) &= x(\tau)+\int_{\tau}^{3\tau} v(t)\,dt \\
&\Downarrow \\
x(3\tau) &= x(\tau)+A\int_{\tau}^{3\tau}\frac{t\,(2-t/\tau)}{t^2+\tau^2}dt \qquad (16)
\end{aligned}
$$

La primitiva della funzione integranda è stata determinata in (12), e dunque possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
x(3\tau) &= \underbrace{x(\tau)}_{=1\,\mathrm{m}} + \underbrace{A}_{=8.40\,\mathrm{m}} \left[\ln(t^2+\tau^2) - \frac{t}{\tau} + \arctan\frac{t}{\tau} \right]_{t=\tau}^{t=3\tau} = \\
&= 1\,\mathrm{m} + 8.40\,\mathrm{m} \left(\ln(10\tau^2) - 3 + \arctan 3 - \ln(2\tau^2) + 1 - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4} \right) = \\
&= 1\,\mathrm{m} + 8.40\,\mathrm{m} \underbrace{(\ln 5 - 2 + \arctan 3 - \pi/4)}_{=0.073} = \\
&= 1.61\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{17}
$$