Esame di Ricerca Operativa del 18/7/22

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produce ogni giorno impermeabili e cappotti utilizzando lana e cotone. Per ogni impermeabile servono 2 kg di lana e 3 kg di cotone, mentre per ogni cappotto ne servono, rispettivamente, 5 e 2. Sapendo che ogni giorno si hanno a disposizione 17 kg di lana e 10 kg di cotone e che il prezzo di vendita é 2000 euro per ogni impermeabile e 1000 euro per ogni cappotto scrivere il modello che massimizza il guadagno giornaliero.

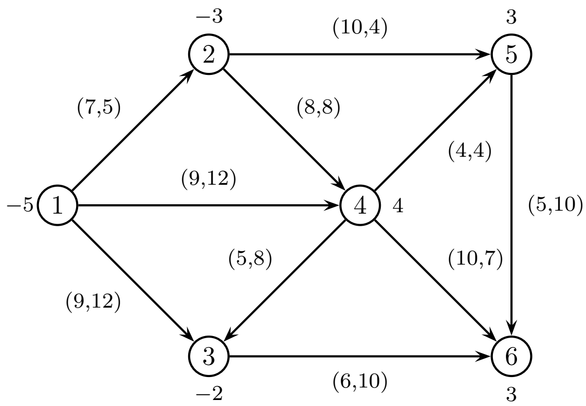
Trovare la soluzione ottima del rilassato continuo tramite il simplesso partendo da $(0,0)$. Calcolare valutazione inferiore e superiore del problema. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{cases} \max\ 36\,x_1 + 38\,x_2 + 40\,x_3 + 42\,x_4 + 44\,x_5 \\ \quad\ \ 7\,x_1 + \ \ 9\,x_2 + 11\,x_3 + 13\,x_4 + 15\,x_5 \leq 31 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{P}$$

Determinare la valutazione data dal rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$, quella data dal rilassamento $x \geq 0$ e quella ottenuta aggiungendo un piano di taglio di Gomory. Risolvere poi il problema con il "Branch and Bound" utilizzando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,3), (2,4), (3,6) e (5,6) e l'arco (2,5) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima e la soluzione ottima del problema del flusso massimo.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ x_1^2 + x_2^2 - 8\,x_1 - 6\,x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(\frac{3}{2}, 2)$. Trovare il minimo globale ed il massimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 2000\,x_1 + 1000\,x_2 \\ 2x_1 + 5\,x_2 \le 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \le 0 \\ x_2 \le 0 \end{cases}$$

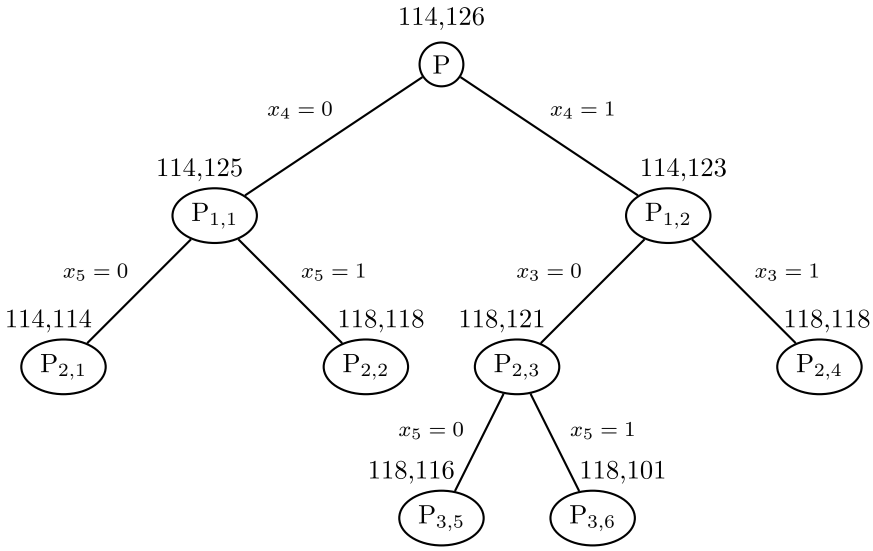
Punto di partenza del simplesso $(0,0)$ con base $B = \{3,4\}$. La duale complementare é $(0,0,-2000,-1000)$. Indice uscente 3, rapporti $\frac{17}{2}$, $\frac{10}{3}$, indice entrante 2. Soluzione ottima $(\frac{10}{3},0)$. Base ottima $B = \{2,4\}$. Valutazione inferiore 6000, valutazione superiore 6666. La matrice per costruire il taglio é $A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, mentre $A_N = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Taglio $x_1 \le 3$.

Esercizio 2. Le soluzioni ottime dei rilassati continui sono $x = (\frac{31}{7},0,0,0,0)$ con v_S pari a 159, e $x = (1,1,1,\frac{4}{13},0)$ con v_S pari a 126. La v_I del binario é data da $x = (1,1,1,0,0)$ di valore 114. La base ottima del primo rilassato continuo é $B = \{1\}$. Il taglio di Gomory é dato da

$$2\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 + x_5 + x_6 \ge 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2\,x_5 \le 4$$

.



Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6)	
Archi di U	(2,5)	
x	(5, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 0, 0, 1)	
π	(0, 7, 9, 15, 10, 15)	
Arco entrante	(1,4)	
ϑ^+, ϑ^-	12 , 4	
Arco uscente	(2,4)	

Il taglio é $N_t = \{1,2,3,4\}$ di capacitá 25 ed il flusso massimo é $x = (4,10,11,0,4,10,0,4,7,8)$.
L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2),(1,3),(1,4),(3,6),(4,5)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (1,2,2,0,0,1,0,1,0,0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{3}{2},2\right)$	$(0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(-5,0)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$(1,2)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{3}{2},2\right)$	$-5\,x_1 - 2\,x_2$	(0,1)	$\left(-\frac{3}{2},-1\right)$	1	(0,1)

Massimo globale é $(0,1)$ con moltiplicatori $\lambda = (-6,0,0,0,0,-2)$, mentre $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ é minimo globale con moltiplicatori $\lambda = (0,0,0,3,0,0)$.