Esame di Ricerca Operativa del 30/06/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_1 + 7\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 45, 35 e 50 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

Stabilimento	costo giornaliero (euro)	produzione (tonnellate/giorno)		
		bassa	media	alta
1	350	5	3	2
2	450	1	2	4

Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

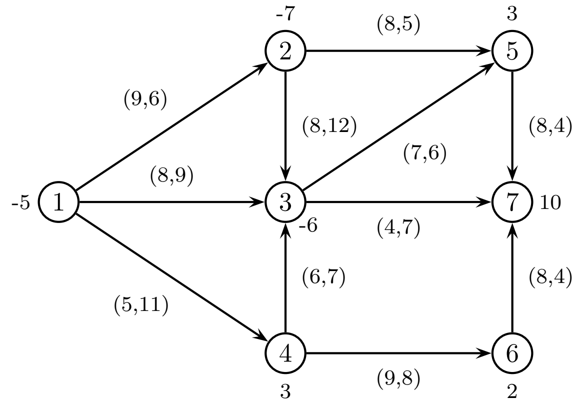
```
c=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

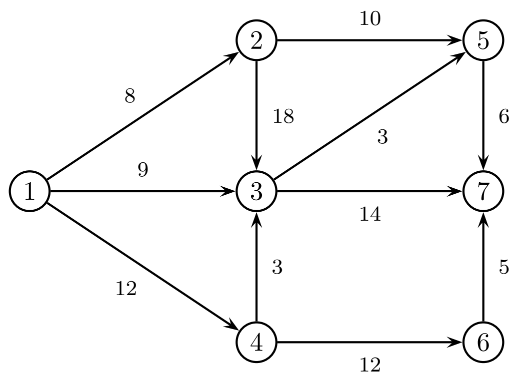


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

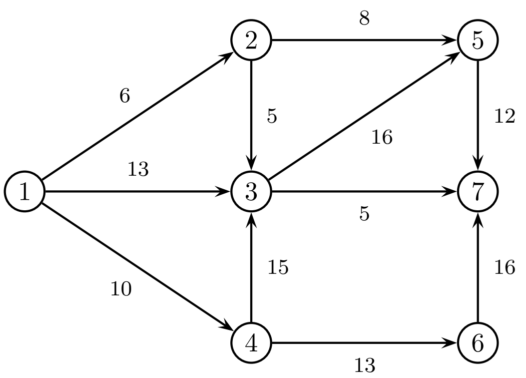
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 42 \\ 8\ x_1 + 15\ x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	19	5	9	14	15	23	20
Volumi	105	10	163	333	369	34	30

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	(0,0)						
	(,0)						
	(0,-10)						
$\left(5, \sqrt{5}\right)$							
$\left(5, -\sqrt{5}\right)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\, x_1^2 - 4\, x_2^2 + 4\, x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, 4)$, $(-2, -5)$, $(3, 3)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_1 + 7\ x_2 \le 7 \\ -x_1 - 4\ x_2 \le 7 \\ x_1 + 5\ x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ -x_2 \le 1 \\ x_1 + 4\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-7,\ 0)$	SI	NO
$\{2,\ 3\}$	$y = (0,\ 13,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(4,\ -1)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -4,\ 11,\ 0)$	4	$18,\ 7$	2
2° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(-3,\ -1)$	$(0,\ 4,\ 0,\ 0,\ -9,\ 0)$	5	$1,\ 13$	1

Esercizio 3.

variabili decisionali:
x_1 = giorni di lavoro nello stabilimento 1
x_2 = giorni di lavoro nello stabilimento 2

modello:
$$\begin{cases} \min 350\, x_1 + 450\, x_2 \\ 5\, x_1 + x_2 \ge 45 \\ 3\, x_1 + 2\, x_2 \ge 35 \\ 2\, x_1 + 4\, x_2 \ge 50 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

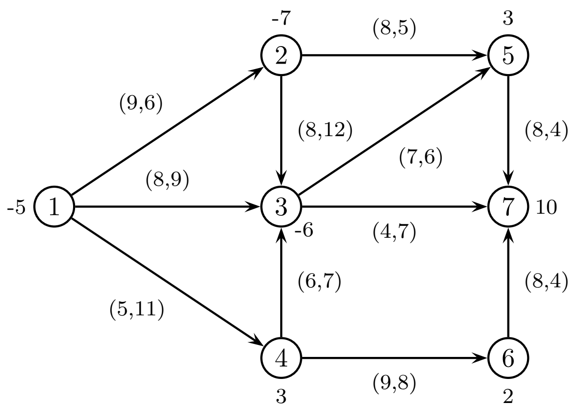
```
c=[ 350 ; 450]

A=[ -5 -1 ; -3 -2 ; -2 -4 ]          b=[ -45 ; -35 ; -50 ]

Aeq=[]                               beq=[]

lb=[0; 0]                            ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

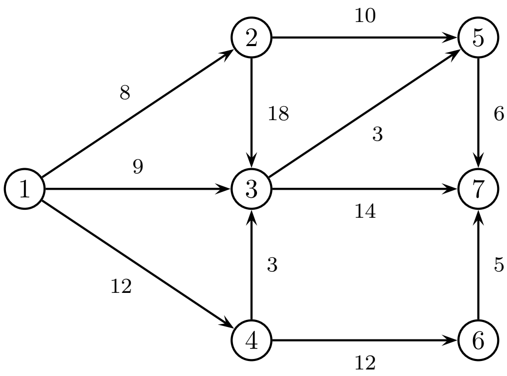


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

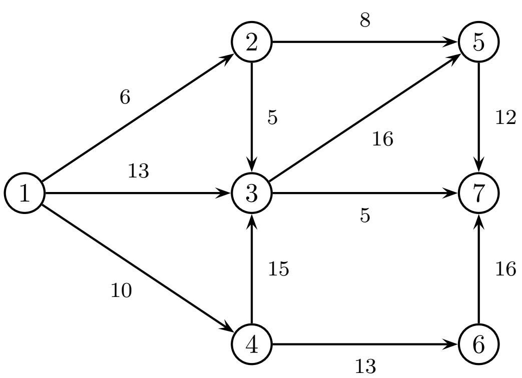
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 3, 11, 5, 7, 14, 15)	(0, 0, 8, 5, 4, 14, 12)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 0	0 , 3
Arco uscente	(4,3)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		5		7		6	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	18	2	12	3	12	3	12	3	12	3	12	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	4	24	4	24	4	24	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	23	3	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 5, 0, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 6, 0)	11
1 - 3 - 5 - 7	6	(6, 11, 0, 0, 6, 6, 5, 0, 0, 12, 0)	17
1 - 4 - 6 - 7	10	(6, 11, 10, 0, 6, 6, 5, 0, 10, 12, 10)	27

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 42 \\ 8\ x_1 + 15\ x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{95}{61}, \frac{112}{61}\right)$ $\qquad v_I(P) = 46$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 2)$ $\qquad v_S(P) = 54$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 13\, x_1 + 11\, x_2 \geq 41$
$r = 2$ $\qquad 8\, x_1 + 14\, x_2 \geq 39$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	19	5	9	14	15	23	20
Volumi	105	10	163	333	369	34	30

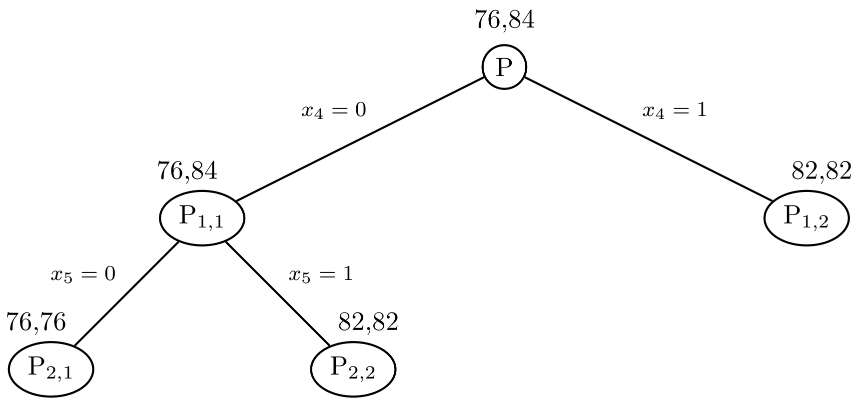
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 76$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 1, \frac{206}{333}, 0, 1, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 84$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ valore ottimo $= 82$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 6)$	$(0, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(1.76,\ 1.32)$	$(-3.52, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(5,\ 6)$	$(0, -10)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(5,\ \sqrt{5}\right)$	$\left(1 - \frac{6\sqrt{5}}{5}, -11 + \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(5,\ -\sqrt{5}\right)$	$\left(1 + \frac{6\sqrt{5}}{5}, -11 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 4\ x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, 4)$, $(-2, -5)$, $(3, 3)$ e $(-4, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$	$(1, 2)$	$\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{62}{3}, \frac{31}{3}\right)$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{31}$	$(1, 4)$