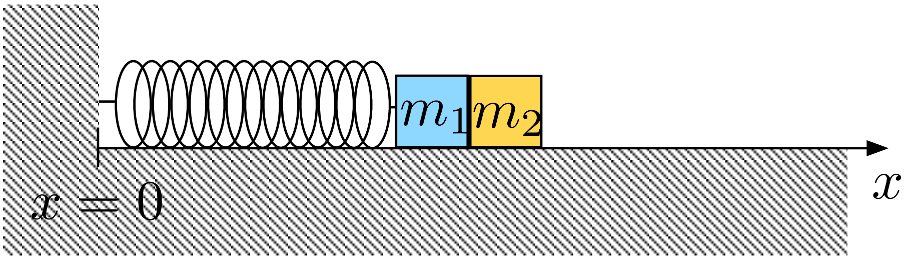
Esercizio (tratto dal problema 4.6 del Mazzoldi)

Sopra un piano orizzontale liscio sono posti due punti materiali di masse $m_1 = 0.15\,\mathrm{Kg}$ e $m_2 = 0.37\,\mathrm{Kg}$ a contatto tra loro. Il punto m_1 è attaccato ad una molla di costante elastica k, in condizioni di riposo. Il punto m_1 viene spostato verso sinistra, comprimendo la molla di $12\,\mathrm{cm}$ (mentre m_2 rimane fermo), e viene poi lasciato libero con velocità nulla. Il punto m_1 ritorna verso m_2 e lo urta in modo completamente anelastico. Calcolare lo spostamento massimo verso destra del sistema.



SOLUZIONE

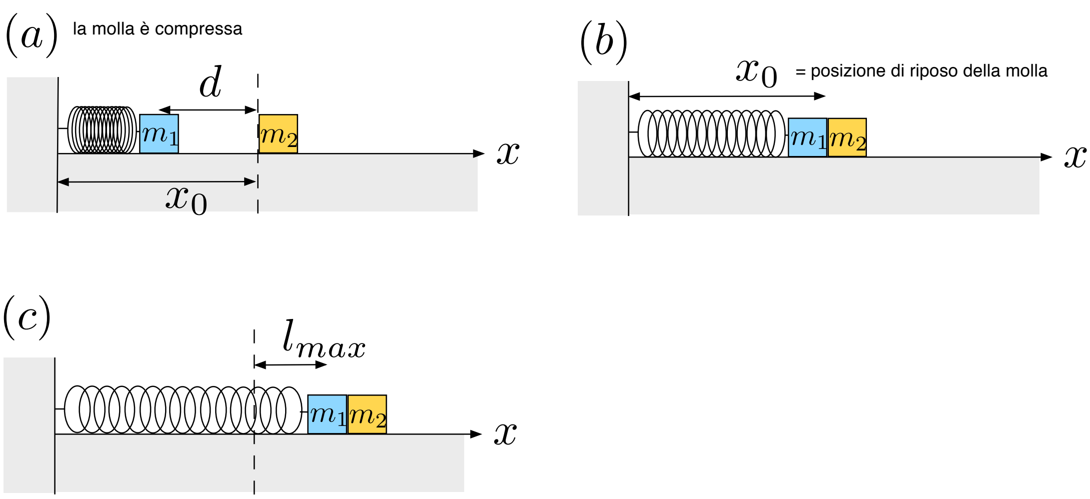
Riscriviamo innanzitutto i dati iniziali convertendo tutte le unità in quelle del Sistema Internazionale (quindi trasformando ad esempio i dati da cm in m).

Dati iniziali:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 0.15\,\mathrm{Kg} \\
m_2 &= 0.37\,\mathrm{Kg} \\
d &= 0.12\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Denotiamo con $t = 0$ l'istante iniziale in cui la molla viene compressa, con t_u l'istante in cui avviene l'urto, e con t_f l'istante in cui la molla ha il massimo allungamento verso destra. Conviene pensare il moto come scomposto in queste tre fasi:

-Fase 1: dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante immediatamente prima dell'urto;
-Fase 2: urto tra m_1 e m_2;
-Fase 3: dall'istante immediatamente dopo l'urto all'istante in cui la molla è massimamente elongata.



1. Nella Fase 1 il moto riguarda di fatto solo il punto materiale m_1, dato che m_2 rimane fermo in $x = x_0$. In questa fase m_1 è soggetto alla sola forza elastica della molla; non c'è forza di attrito perché il piano è liscio.

   - Dato che la forza elastica della molla è una forza conservativa, l'energia meccanica

     $$E_m = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^2}_{\text{cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2} k (x - x_0)^2}_{\text{potenziale elastica}}$$

     si conserva, ossia è costante nel tempo per tutta la Fase 1.
     Pertanto ricordando che

     $$t_u = \text{istante in cui avviene l'urto}$$

     abbiamo che

     $$E_m(t) = \text{cost} \qquad \forall t \in [0; t_u - \varepsilon] \tag{1}$$

     dove $t_u - \varepsilon$ indica l'istante immediatamente precedente l'urto.

- Calcoliamo l'energia meccanica all'istante iniziale $t = 0$.
  (a) Energia Cinetica: Il punto m_1 parte da fermo, per cui l'energia cinetica è nulla
  $$K(t = 0) = 0 \tag{2}$$
  (b) Energia Potenziale Elastica: Il punto m_1 comprime la molla di una lunghezza d rispetto alla posizione di equilibrio, per cui possiede un'energia potenziale elastica
  $$U(t = 0) = \frac{1}{2}kd^2 \tag{3}$$

  L'energia meccanica iniziale vale allora
  $$E_m(t = 0) = K(t = 0) + U(t = 0) = \frac{1}{2}kd^2 \tag{4}$$

  NB: L'espressione dell'energia potenziale elastica per un punto materiale attaccato ad una molla di costante k e lunghezza a riposo x_0 vale
  $$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \qquad \text{e NON} \qquad U = -\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$
  Infatti è la forza $F_{el}(x) = -k(x - x_0)$ ad avere un segno '-' (che fisicamente caratterizza il richiamo della molla) e dunque l'energia potenziale, che è legata alla forza tramite la relazione
  $$F_{el} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ,$$
  non presenta alcun segno '-'. All'istante $t = 0$ il punto m_1 si trova alla coordinata $x = x_0 - d$ (Fig(a)) che, sostituita nell'espressione di $U(x)$, dà la (3).

- Valutiamo ora l'energia meccanica all'istante immediatamente prima dell'urto.
  (a) Energia Cinetica: m_1 ha una certa velocità (incognita) v_- e dunque un'energia cinetica (incognita)
  $$K(t_u - \varepsilon) = \frac{1}{2}mv_-^2 \tag{5}$$
  (b) Energia Potenziale Elastica: osserviamo che al momento t_u dell'urto m_1 si trova nella posizione x_0 di riposo della molla; quindi
  $$x(t_u - \varepsilon) = x_0 - \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{6}$$
  e l'energia potenziale elastica vale
  $$U(t_u - \varepsilon) = \frac{1}{2}(x(t_u - \varepsilon) - x_0)^2 = \frac{1}{2}(x_0 - \mathcal{O}(\varepsilon) - x_0)^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \to 0 \tag{7}$$

  Pertanto immediatamente prima dell'urto l'energia meccanica di m_1 vale
  $$E_m(t_u - \varepsilon) = K(t_u - \varepsilon) + U(t_u - \varepsilon) = \frac{1}{2}mv_-^2 \tag{8}$$

- Applichiamo ora la conservazione dell'energia meccanica nella Fase 1

$$\begin{aligned} E_m(t=0) &= E_m(t_u-\varepsilon) \\ \underbrace{\frac{1}{2}kd^2}_{\substack{\text{en. mecc a } t=0 \\ \text{(solo pot. elastica)}}} &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_-^2}_{\substack{\text{en. mecc a } t=t_u-\varepsilon \\ \text{(solo cinetica)}}} \end{aligned} \tag{9}$$

e otteniamo la velocità di m_1 immediatamente prima dell'urto:

$$v_- = d\sqrt{\frac{k}{m_1}} \tag{10}$$

- Osserviamo che, negli istanti della Fase 1 successivi a $t=0$, il punto materiale m_1 inizia a muoversi verso destra, rilassando sempre di più la molla. Esso aumenta dunque la sua energia cinetica a discapito dell'energia potenziale elastica. L'energia meccanica totale rimane costante nel tempo, ma si ha un 'travaso' di energia da potenziale a cinetica. Dato che la velocità di m_1 varia (=aumenta) nel tempo, la sua quantità di moto

$$p = m_1 v$$

varia pure nel tempo e dunque non si conserva. Analogamente, siccome la posizione $x(t)$ del punto materiale m_1 varia nel tempo, variano nel tempo anche le quantità che dipendono dalla posizione stessa, quali la forza elastica

$$F_{el}(t) = -k(x(t)-x_0) \tag{11}$$

e l'energia potenziale

$$U(t) = \frac{1}{2}k(x(t)-x_0)^2 \tag{12}$$

che dunque non si conserva.

2. Consideriamo ora la Fase 2 dell'urto. Dal testo sappiamo che l'urto è anelastico, quindi certamente l'energia cinetica e meccanica del sistema m_1 e m_2 non si conservano.

- Urtando, m_1 e m_2 interagiscono tra loro con le mutue forze che, per definizione, sono forze interne al sistema m_1+m_2 (e che tipicamente danno luogo ad una deformazione) . Inoltre il sistema è connesso alla molla attraverso m_1. Tale forza elastica rappresenta una forza *esterna* al sistema m_1+m_2, che quindi in generale *non* è isolato. Tuttavia, notiamo che l'urto tra m_1 e m_2 avviene quando le due masse si trovano alla posizione x_0, che è proprio la posizione di equilibrio della molla. In tale particolare circostanza, la forza elastica è per definizione nulla

$$F_{el}(x=x_0) = -k(x_0-x_0) = 0$$

e dunque al momento dell'urto è come se la molla non ci fosse. Nell'urto il sistema è pertanto istantaneamente isolato, e la quantità di moto P del sistema m_1+m_2 istantaneamente si conserva, ossia

$$\underbrace{P(t_u-\varepsilon)}_{\substack{\text{quantità di moto} \\ \text{immediatamente prima dell'urto}}} = \underbrace{P(t_u+\varepsilon)}_{\substack{\text{quantità di moto} \\ \text{immediatamente dopo l'urto}}} \tag{13}$$

Ricordando che prima dell'urto m_2 è fermo, mentre dopo l'urto m_1+m_2 si muovono insieme solidalmente (urto completamente anelastico), abbiamo

$$m_1 v_- + 0 = (m_1 + m_2) v_+ \tag{14}$$

da cui

$$v_+ = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_- \tag{15}$$

Osserviamo che $v_+ < v_-$ perché dopo l'urto la massa è più grande.

Sostituendo (10) in (15) otteniamo

$$v_+ = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \sqrt{\frac{k}{m_1}} \tag{16}$$

- Calcoliamo l'energia cinetica

$$\begin{aligned}
K(t_u - \varepsilon) &= \frac{1}{2} m_1 v_-^2 && \text{(immediatamente prima dell'urto)} \\
K(t_u + \varepsilon) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_+^2 = && \text{(immediatamente dopo l'urto)} \\
& \text{[usiamo la (15)]} \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_- \right)^2 = \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_-^2}_{= K(t_u - \varepsilon)} \; \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{< 1} && (17)
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$K(t_u + \varepsilon) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K(t_u - \varepsilon) \tag{18}$$

ossia

$$\underbrace{K(t_u + \varepsilon)}_{\text{immediatamente dopo l'urto}} < \underbrace{K(t_u - \varepsilon)}_{\text{immediatamente prima dell'urto}} \tag{19}$$

Nell'urto l'energia cinetica dunque non si conserva, ma diminuisce. Si noti la differenza con la quantità di moto Eq.(13). Matematicamente parlando, $P(t)$ è una funzione continua del tempo, mentre $K(t)$ non lo è. Ha invece una discontinuità con un salto che dipende dalle masse dei due punti materiali.

- Possiamo valutare anche l'energia potenziale. Ricordando che in prossimità dell'urto (poco prima o poco dopo) si ha

$$x(t_u \pm \varepsilon) = x_0 \pm \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{20}$$

deduciamo che l'energia potenziale elastica vale

$$
\begin{aligned}
U(t_u-\varepsilon) &= \frac{1}{2}(x(t_u-\varepsilon)-x_0)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(x_0-\mathcal{O}(\varepsilon)-x_0)^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \to 0 \qquad \text{(immediatamente prima dell'urto)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(t_u+\varepsilon) &= \frac{1}{2}(x(t_u+\varepsilon)-x_0)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(x_0+\mathcal{O}(\varepsilon)-x_0)^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \to 0 \qquad \text{(immediatamente dopo l'urto)}
\end{aligned}
$$

Pertanto l'energia potenziale elastica è nulla in prossimità dell'urto, e l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica. Tenendo conto della (19) vale anche che

$$
E_m(t_u+\varepsilon) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, E_m(t_u-\varepsilon) \tag{21}
$$

ossia

$$
\underbrace{E_m(t_u+\varepsilon)}_{\text{immediatamente dopo l'urto}} \quad < \quad \underbrace{E_m(t_u-\varepsilon)}_{\text{immediatamente prima dell'urto}} \tag{22}
$$

l'energia meccanica non si conserva.

3. Consideriamo ora la Fase 3.

   - In questa fase sul sistema m_1+m_2 agisce la forza della molla che, come osservato in precedenza, è conservativa. L'energia meccanica

     $$
     E_m = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2}_{\text{cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(x-x_0)^2}_{\text{potenziale elastica}}
     $$

     si conserva, ossia è costante nel tempo per tutta la Fase 3.
     Pertanto se indichiamo con

     t_f = l'istante in cui la molla ha il massimo allungamento, ossia in cui il sistema m_1+m_2 si arresta istantaneamente

     abbiamo che

     $$
     E_m(t) = \text{cost} \qquad \forall t \in [t_u+\varepsilon; t_f] \tag{23}
     $$

     dove $t_u+\varepsilon$ indica l'istante immediatamente dopo l'urto.

     Quindi possiamo applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica

     $$
     \Delta E_m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_m(t_f) = E_m(t_u+\varepsilon) \tag{24}
     $$

   - Nell'istante $t_u+\varepsilon$ (immediatamente dopo l'urto) abbiamo

     $$
     \begin{aligned}
     E_m(t_u+\varepsilon) &= K(t_u+\varepsilon)+U(t_u+\varepsilon) = \\
     &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_+^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\
     &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_+^2
     \end{aligned} \tag{25}
     $$

- Nell'istante t_f di massimo allungamento abbiamo

$$E_m(t_f) = 0 + \frac{1}{2}kl_{max}^2 \tag{26}$$

(in t_f l'energia cinetica è nulla perché è l'istante di massimo allungamento, in cui $m_1 + m_2$ si fermano istantaneamente prima della ricontrazione della molla verso sinistra).

- Sostituendo (25) e (26) in (24) otteniamo

$$\begin{aligned} E_m(t_f) &= E_m(t_u + \varepsilon) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}kl_{max}^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_+^2 \end{aligned} \tag{27}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} l_{max} &= v_+ \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \\ & \quad [\text{sostituendo (16)}] \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} d \sqrt{\frac{k}{m_1}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \\ &= \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}\, d \end{aligned} \tag{28}$$

- Osserviamo che

$$l_{max} < d$$

Fisicamente è ragionavole che $l_{max} < d$ perchè rispetto alla Fase 1 (dove solo m_1 è legata alla molla) nella Fase 3 l'energia meccanica a disposizione del sistema è minore, come osservato nella (22). Siccome l'energia meccanica di un oscillatore è legata all'ampiezza dell'elongazione massima, un'energia meccanica minore rispetto alla Fase 1 comporta un'elongazione massima minore, ossia $l_{max} < d$.

- Sostituiamo ora i valori numerici

$$\begin{aligned} l_{max} &= \sqrt{\frac{0.15\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{0.15\,\cancel{\mathrm{Kg}} + 0.37\,\cancel{\mathrm{Kg}}}}\; 0.12\,\mathrm{m} = \\ &= 0.537 \;\; 0.12\,\mathrm{m} = \\ &= 6.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{29}$$

4. **Osservazione:** Abbiamo visto che l'energia meccanica si conserva durante la Fase 1 e durante la Fase 2, ma che non si conserva durante l'urto (Fase 2). L'andamento nel tempo dell'energia meccanica presenta una discontinuità a salto al momento dell'urto, come mostrato in figura, dove

   -in A E_m è solo dovuta all'energia potenziale elastica di m_1 (no cinetica);
   -tra A e B E_m è in parte cinetica e in parte potenziale elastica di m_1;
   -in B E_m è solo dovuta all'energia cinetica di m_1 (no potenziale elastica);
   -in C E_m è solo dovuta all'energia cinetica di $m_1 + m_2$ (no potenziale elastica);
   -tra C e D E_m è in parte cinetica e in parte potenziale elastica di $m_1 + m_2$;
   -in D E_m è solo dovuta all'energia potenziale elastica di $m_1 + m_2$ (no cinetica).

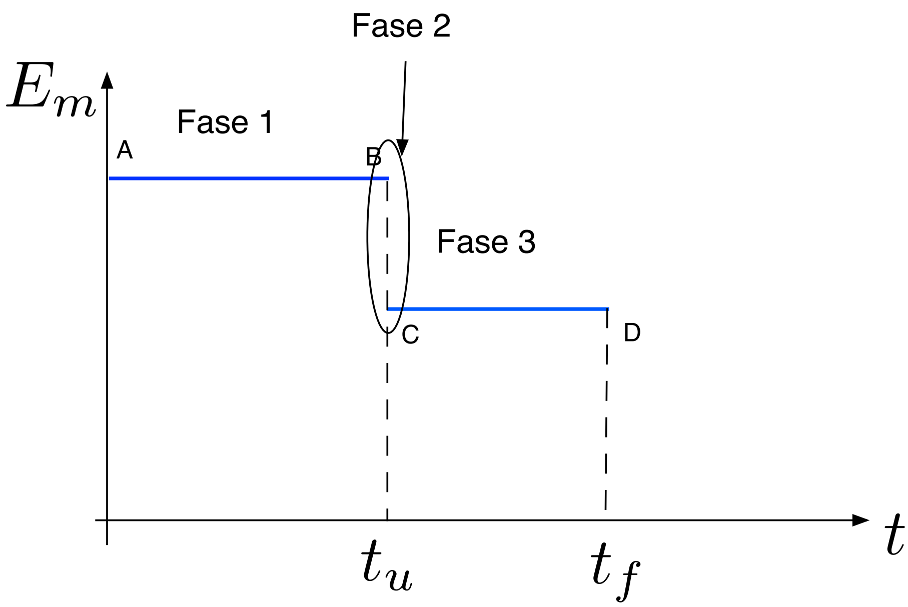


Figure 1: Andamento nel tempo dell'energia meccanica E_m del sistema. Nella Fase 1 e nella Fase 3 l'energia si conserva (ossia è costante nel tempo), mentre nella Fase 2 dell'urto ha un salto, che dipende dalle masse m_1 e m_2 [vedi (21)].