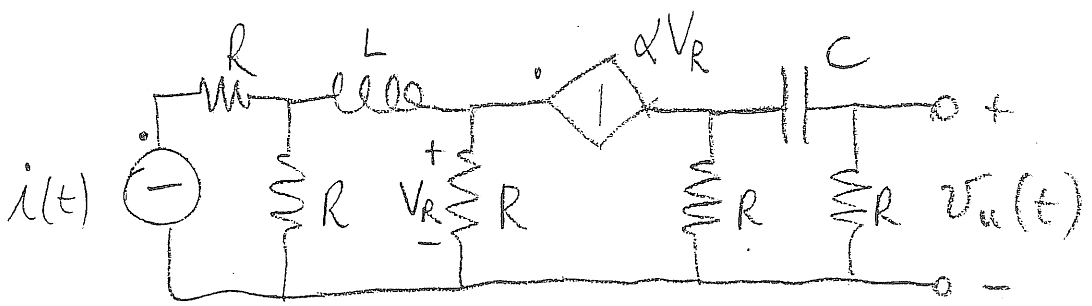
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova Scritta di Elettrotecnica
(12 cred.: 1, 3, 4, 5; 9 cred.: 1, 2 o 5, 3, 6; 6 cred.: 2, 5, 6)

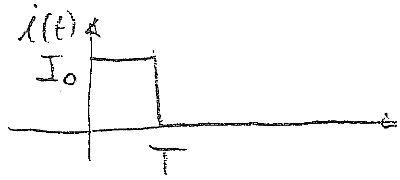
Pisa, 12 luglio 2002 Allievo ....

1. Il circuito di figura è in condizione di regime per t<0. Determinare l'evoluzione temporale della tensione Vu(t) per t>=0.

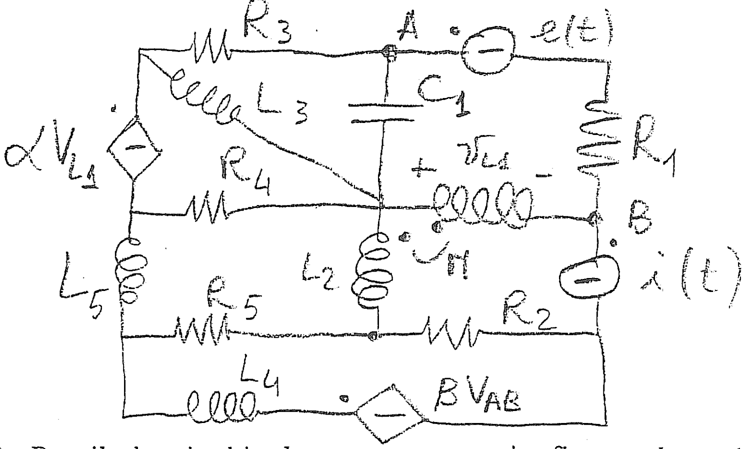


$R = 1\,\Omega$; $\alpha = 8$; $C = 50\,\mu F$; $L = 10\,mH$

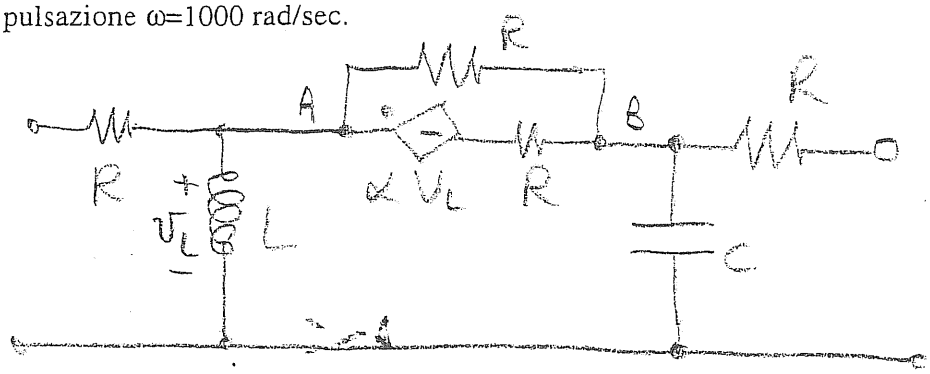
$I_0 = 2.5\,A$; $T = 50\,ms$



2. Per il circuito di figura scrivere un sistema di equazioni alle maglie, sufficiente per determinare l'equilibrio della rete ipotizzata in condizioni di equilibrio.



3. Per il doppio bipolo rappresentato in figura, determinare la matrice dei parametri Z alla pulsazione ω=1000 rad/sec.



$R = 10\,\Omega$

$C = 100\,\mu F$

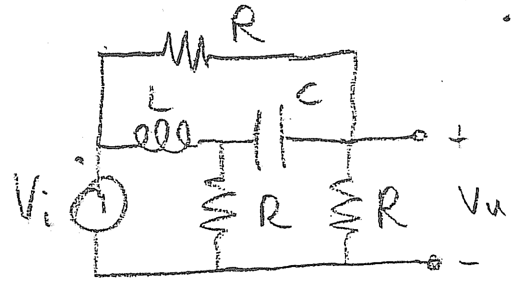
$L = 10\,mH$

$\alpha = 2$

* suggerimento:

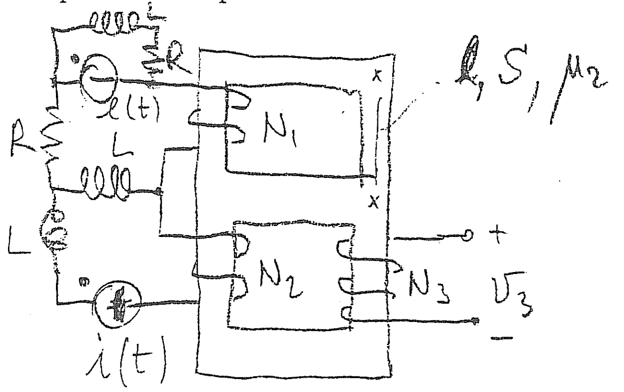
13/7/02

4. Per la rete di figura determinare la funzione di trasferimento Vu/Vi e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase della relativa risposta in frequenza.



$R = 5\,\Omega$
$L = 20\,mH$
$C = 100\,\mu F$

5. Considerando in condizioni di regime periodico la rete di figura determinare l'energia elettromagnetica media immagazzinata negli induttori mutuamente accoppiati e l'espressione temporale della tensione ai morsetti dell'avvolgimento 3.



$S = 5\,cm^2$
$l = 20\,cm$
$\mu_2 = 1000$
$N_1 = 100$
$N_2 = 150$
$N_3 = 50$

$R = 10\,\Omega$
$L = 10\,mH$

$$e(t) = 100 \sin\left(500t + \frac{\pi}{3}\right) V; \quad i(t) = 10 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) A$$

6. Un trasformatore trifase alimenta una macchina asincrona ad una coppia di poli che funziona a scorrimento pari a 0.5. Determinare le perdite nel ferro del trasformatore e della macchina asincrona e la potenza meccanica all'asse quando il trasformatore è alimentato alla tensione nominale.

TRASFORMATORE
Prova a vuoto:
$V_{10} = 3800V; \quad I_{10} = 2A \quad P_{10} = 2.5kW$

Prova in corto circuito:
$V_{1cc} = 300V; \quad I_{1cc} = 10A \quad P_{1cc} = 3kW$

MACCHINA ASINCRONA
Prova a vuoto:
$V_{10} = 380V; \quad I_{10} = 38.3A \quad P_{10} = 2kW$

Prova in corto circuito:
$V_{1cc} = 85V; \quad I_{1cc} = 176A \quad P_{1cc} = 6.12kW$; R1s=0.0485 Ohm; X1s=0.120 Ohm; k=0.75; (E1=kE2).

12/07/02

Esercizio n°1

1

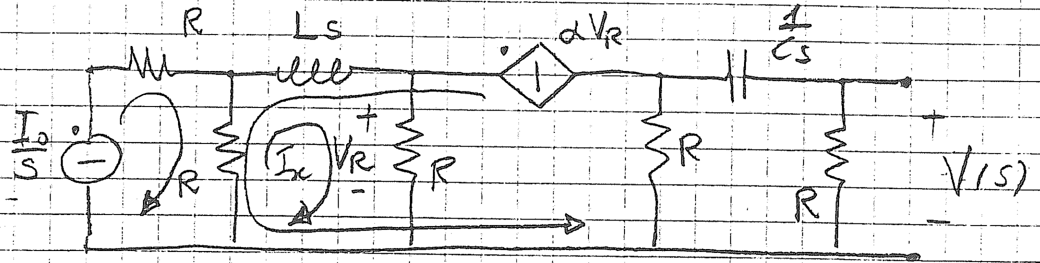
La forma d'onda della $i(t)$ può essere riscritta come:

$$i(t) = I_0 u(t) - I_0 u(t-T)$$

Detta $v(t)$ la risposta del circuito inizialmente scarico all'ingresso $I_0 u(t)$, la $v_u(t)$ richiesta può essere scritta come

$$v_u(t) = v(t) - v(t-T)$$

Determinazione della $v(t)$.



$$0 = (2R + Ls) I_x - R\frac{I_0}{s} - (R + Ls)\alpha V_R$$

$$V_R = R I_x$$

$$R\frac{I_0}{s} = (2R + Ls - \alpha R^2 - \alpha R L s) I_x$$

$$I_x = \frac{R\frac{I_0}{s}}{R(2-\alpha R) + Ls(1-\alpha R)}$$

$$V(s) = -\alpha V_R \frac{R}{2R+\frac{1}{Cs}} R = -\alpha R \frac{R\frac{I_0}{s}}{R(2-\alpha R)+Ls(1-\alpha R)} \frac{R^2}{2R+\frac{1}{Cs}} =$$

$$= -\alpha \frac{R^2 I_0}{\cancel{s}[R(2-\alpha R)+Ls(1-\alpha R)]}\frac{R^2 C\cancel{s}}{2RCs+1} =$$

$$= -\frac{\alpha R^4 C I_0}{L(1-\alpha R)2RC\left(s+\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}\right)\left(s+\frac{1}{2RC}\right)} =$$

13/7/02

2

$$= -\alpha \frac{R^3 I_0}{2L(1-\alpha R)\left(s+\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}\right)\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}$$

Espansione in fratti semplici di:

$$\frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}\right)\left(s+\frac{1}{2RC}\right)} = \frac{A}{s+\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}} + \frac{B}{s+\frac{1}{2RC}}$$

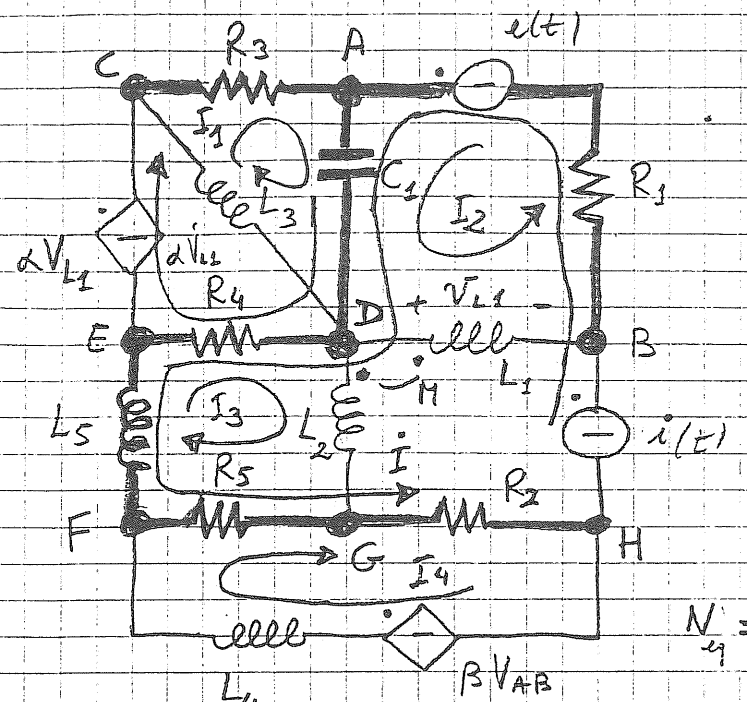
$$A = \frac{1}{\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}} =$$

$$B = \frac{1}{\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R} - \frac{1}{2RC}} =$$

$$v(t) = -\frac{\alpha R^3 I_0}{2L(1-\alpha R)}\left[A e^{-\frac{R}{L}\frac{2-\alpha R}{1-\alpha R}t} + B e^{-\frac{1}{2RC}t}\right]u(t) =$$

$$=$$

Esercizio n° 2 13/7/02 3



$N_{nodi} = 8$

$N_{rami} = 13$

$N_{gen.corr} = 2$

$N_{eq} = N_{rami} - N_{nodi} + 1 - N_{gen.corr} =$

$= 13 - 8 + 1 - 2 = 4$

Con riferimento alla figura (i rami marcati sono quelli dell'albero) si possono scrivere le seguenti equazioni di equilibrio.

$$0 = \left(R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_2 + \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\alpha\dot{V}_{L1} + \frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}$$

$$\dot{E} = \frac{1}{j\omega C_1}\dot{I}_1 + \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\alpha\dot{V}_{L1} + \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\dot{I}$$

$$0 = +j\omega M\dot{I}_2 + (j\omega L_5 + R_4 + j\omega L_2 + R_5)\dot{I}_3 - R_5\dot{I}_4 - R_4\alpha\dot{V}_{L1} - (R_4 + j\omega L_5 + R_5)\dot{I}$$

$$\beta\dot{V}_{AB} = -R_5\dot{I}_3 + (j\omega L_4 + R_5 + R_2)\dot{I}_4 + (R_5 + R_2)\dot{I}$$

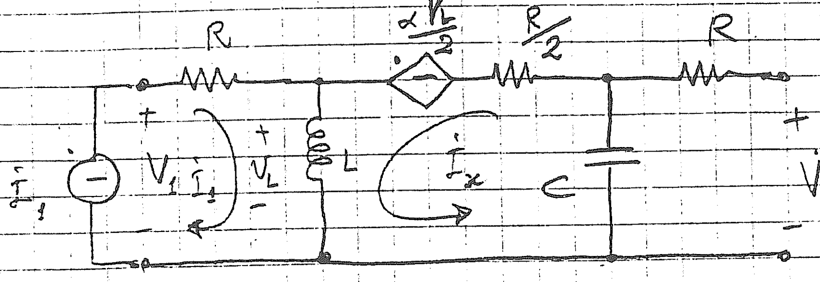
$$\dot{V}_{L1} = j\omega L_1\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_3 \quad ; \quad \dot{V}_{AB} = \dot{E} - R_1(\dot{I}_2 + \dot{I})$$

Esercizio n° 3

4

$$\dot V_1 = \bar Z_{11} \dot I_1 + \bar Z_{12} \dot I_2$$
$$\dot V_2 = \bar Z_{21} \dot I_1 + \bar Z_{22} \dot I_2$$

Sfruttando il suggerimento del testo il circuito per la valutazione di $\bar Z_{11}$ e $\bar Z_{21}$ è:



$$\bar Z_{11} = \left.\frac{\dot V_1}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2 = 0}$$

$$\bar Z_{21} = \left.\frac{\dot V_2}{\dot I_1}\right|_{\dot I_2 = 0}$$

$$\frac{\alpha V_L}{2} = \left(\frac{R}{2} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot I_x + j\omega L \dot I_1$$

$$V_L = j\omega L(\dot I_1 + \dot I_x)$$

$$\frac{\alpha}{2} j\omega L \dot I_1 - j\omega L \dot I_1 = \left(\frac{R}{2} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} - \frac{\alpha}{2} j\omega L\right)\dot I_x$$

$$\dot I_x = \frac{j\omega L\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}\dot I_1$$

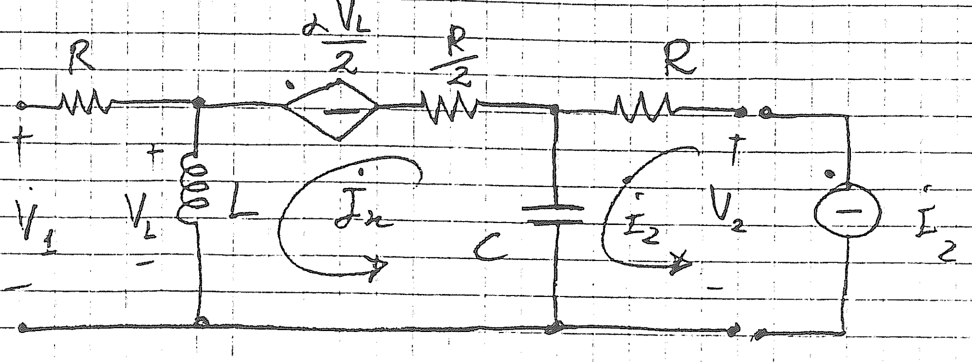
$$\dot V_1 = (R + j\omega L)\dot I_1 + j\omega L \dot I_x$$

$$\bar Z_{11} = R + j\omega L + j\omega L\frac{j\omega L\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$\dot V_2 = -\frac{1}{j\omega C}\dot I_x$$

$$\bar Z_{21} = -\frac{1}{j\omega C}\frac{j\omega L\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

13/7/02



5

$$\frac{\alpha V_L}{2} = \left(\frac{R}{2} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot I_x - \frac{1}{j\omega C}\dot I_2$$

$$V_L = j\omega L\, \dot I_x$$

$$\left(\frac{R}{2} + j\omega L - \frac{\alpha}{2} j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot I_x = \frac{1}{j\omega C}\dot I_2$$

$$\dot I_x = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{R}{2} + j\omega L\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{j\omega C}}\,\dot I_2$$

$$\dot V_1 = j\omega L\,\dot I_x = j\omega L\,\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{R}{2} + j\omega L\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{j\omega C}}\,\dot I_2$$

$$\dot V_2 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot I_2 - \frac{1}{j\omega C}\dot I_x =$$

$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{R}{2} + j\omega L\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{j\omega C}}\right)\dot I_2$$

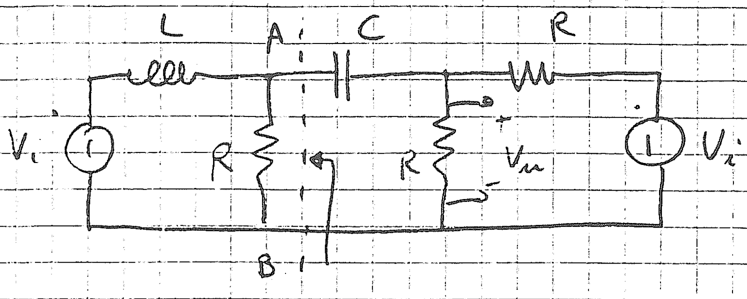
$$\bar Z_{12} = \frac{L}{C}\,\frac{1}{\frac{R}{2} + j\omega L\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$\bar Z_{22} = R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{\frac{1}{\omega^2 C^2}}{\frac{R}{2} + j\omega L\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{j\omega C}} =$$

13/7/02

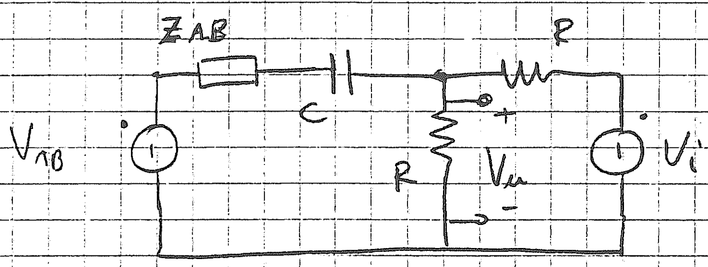
Esercizio n° 4

Sdoppiando il generatore ideale di tensione si ha: 6



Utilizzando il teorema di Thevenin alla sezione A-B si ha

$$V_{AB} = V_i \frac{R}{R+Ls} \qquad Z_{AB} = \frac{RLs}{R+Ls}$$



Infine il teorema di Millman permette di scrivere:

$$V_u(s) = \frac{\dfrac{V_{AB}}{Z_{AB}+\dfrac{1}{Cs}} + \dfrac{V_i}{R}}{\dfrac{1}{Z_{AB}+\dfrac{1}{Cs}} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R}} =$$

$$= \frac{\dfrac{V_i \dfrac{R}{R+Ls}}{\dfrac{RLs}{R+Ls}+\dfrac{1}{Cs}} + \dfrac{V_i}{R}}{\dfrac{1}{\dfrac{RLs}{R+Ls}+\dfrac{1}{Cs}} + \dfrac{2}{R}} = \frac{\dfrac{\dfrac{V_i R}{R+Ls}}{\dfrac{LRCs^2+R+Ls}{(R+Ls)Cs}} + \dfrac{V_i}{R}}{\dfrac{1}{\dfrac{LRCs^2+R+Ls}{RCs+LCs^2}} + \dfrac{2}{R}} =$$

$$= \frac{\dfrac{RV_i}{\cancel{R+Ls}} \, \dfrac{\cancel{(R+Ls)}Cs}{LRCs^2+R+Ls} + \dfrac{V_i}{R}}{\dfrac{RCs+LCs^2}{LRCs^2+R+Ls} + \dfrac{2}{R}} =$$

13/7/02

$$V_u = V_i \frac{\dfrac{R^2Cs + LRCs^2 + Ls + R}{\cancel{R(RLCs^2 + Ls + R)}}}{\dfrac{R^2Cs + LCRs^2 + 2LRCs^2 + 2R + 2Ls}{\cancel{R(LRCs^2 + Ls + R)}}} =$$

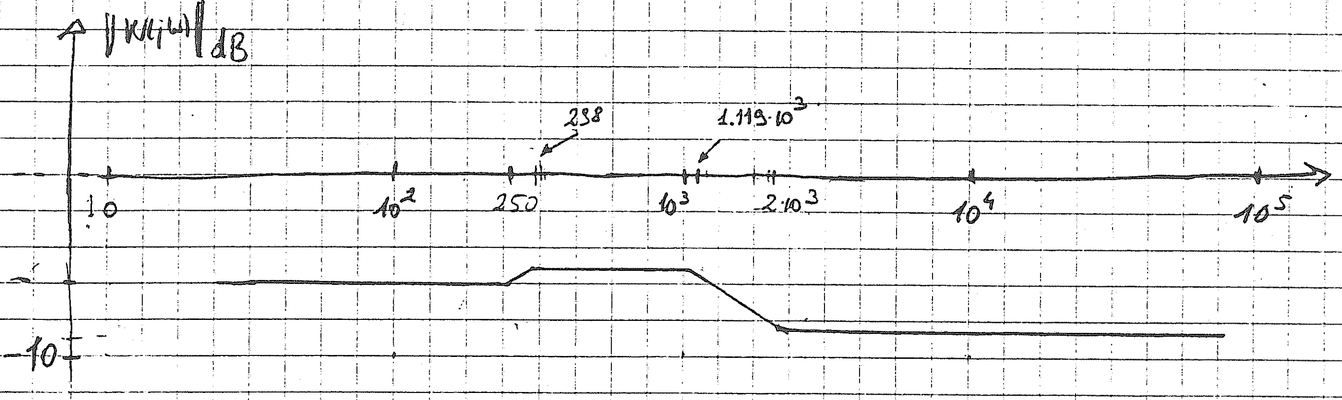
7

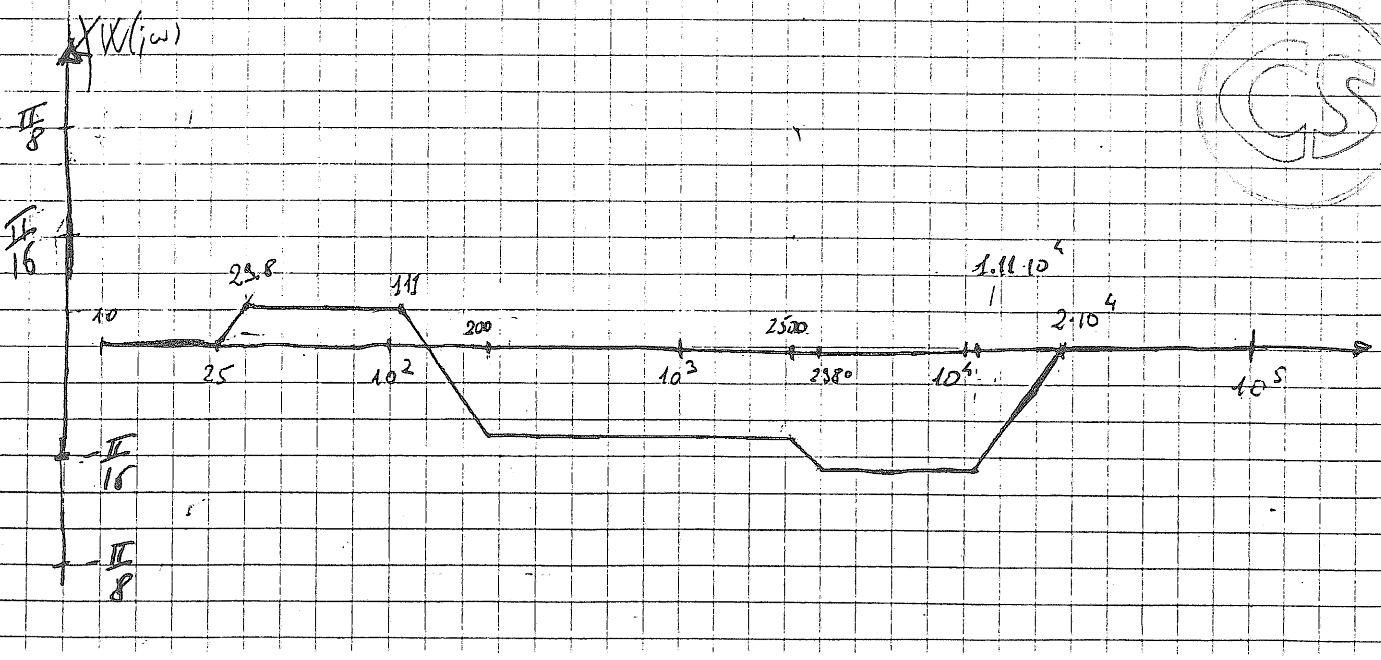
$$= V_i \frac{LRCs^2 + (L + R^2C)s + R}{3LRCs^2 + (R^2C + 2L)s + 2R}$$

$$W(s) = \frac{V_u}{V_i} = \frac{1}{3} \frac{s^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{R}{3L} + \frac{2}{3RC}\right)s + \frac{2}{3LC}} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{s^2 + 2250s + 5 \cdot 10^5}{s^2 + 1416.7s + 3.33 \cdot 10^5} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(s+250)(s+2000)}{(s+298)(s+1119)}$$

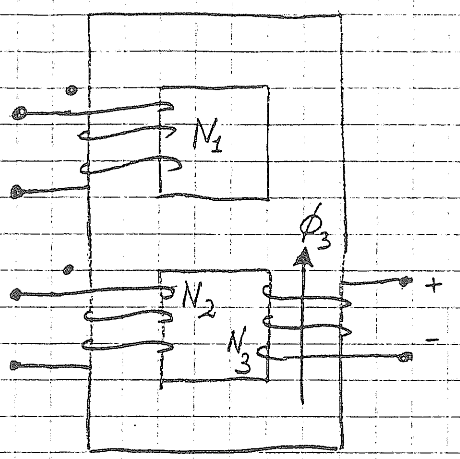




Esercizio n° 5

(8)

Calcolo dei coefficienti di auto e mutua induzione.



$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = 3.18 \cdot 10^4$$

$$\mathcal{R}_{V_1} = \mathcal{R}_{V_2} = 3\mathcal{R} + \frac{3}{4}\mathcal{R} = 1.19 \cdot 10^5$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{V_1}} = 83.8\,mH$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{V_2}} = 188.5\,mH$$

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{V_1}} \cdot \frac{1}{4} = 31.4\,mH$$

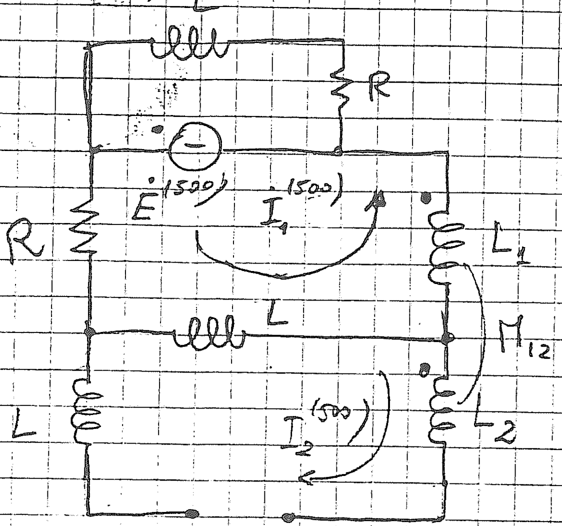
L'avvolgimento n° 3 non è percorso da corrente perché aperto; la sua presenza non influenza pertanto le correnti che scorrono negli altri due avvolgimenti.
La tensione indotta ai morsetti dell'avvolgimento n° 3 può essere calcolata a partire dalla conoscenza del flusso concatenato con esso. Il verso di riferimento di tale flusso è quello del flusso prodotto dall'avvolgimento n° 3 quando una corrente continua percorre l'avvolgimento entrando dal morsetto contrassegnato con il segno +.

Sovrapposizione degli effetti.

Agiscono i generatori a pulsazione $\omega_1 = 500$ rad/sec.

13/7/02

B

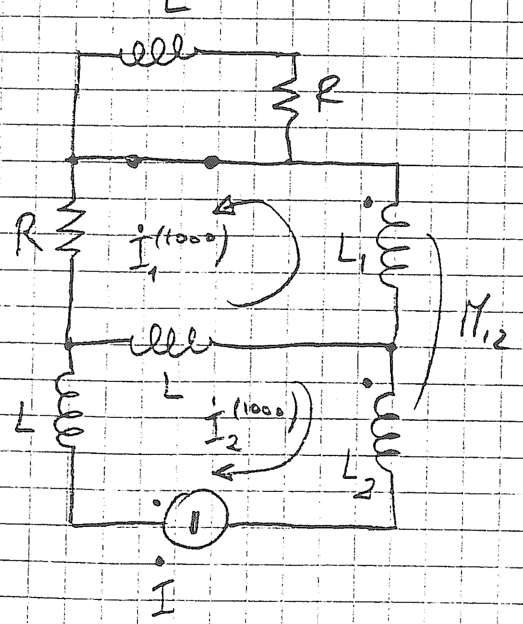


$$\dot{E}^{(500)} = 100\, e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\dot{I}_1^{(500)} = \frac{\dot{E}^{(500)}}{R + j\omega_1 (L + L_1)} = 1.0025\, e^{-j0.42}$$

$$I_2^{(500)} = 0$$

Agiscono i generatori a pulsazione $\omega_2 = 1000 \frac{rad}{sec}$



$$\dot{I}_2^{(1000)} = 10\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$0 = \left(R + j\omega_2 L + j\omega_2 L_1\right)\dot{I}_1^{(1000)} - j\omega_2 M_{12} \dot{I}_2^{(1000)} + j\omega_2 L \dot{I}_2^{(1000)}$$

$$\dot{I}_1^{(1000)} = j\omega_2 \frac{M_{12} - L}{R + j\omega_2 (L + L_1)} \dot{I}_2^{(1000)} = 1.08\, e^{j0.83}\ A$$

Il flusso $\phi_3(t)$ può essere valutato utilizzando la sovrapposizione degli effetti. Valutiamo $\dot{\phi}_3^{(500)}$ e $\dot{\phi}_3^{(1000)}$

13/7/02

10

$$\dot{\phi}_3^{(500)} = \frac{N_1 \dot{I}_1^{(500)}}{\mathcal{R}_{V_1}} \cdot \frac{1}{4} = 2.1 \cdot 10^{-4} e^{-j0.42} \ \text{Wb}$$

$-j0.42$

$$\dot{\phi}_3^{(1000)} = \frac{N_1 \dot{I}_1^{(1000)}}{\mathcal{R}_{V_1}} \cdot \frac{1}{4} - \frac{N_2 \dot{I}_2^{(1000)}}{\mathcal{R}_{V_2}} = 12 \cdot 10^{-3} e^{-j2.36} \ \text{Wb}$$

$$\dot{V}_3^{(500)} = j\omega_1 N_3 \dot{\phi}_3^{(500)} = 5.25 e^{j1.15} \ \text{V}$$

$$\dot{V}_3^{(1000)} = j\omega_2 N_3 \dot{\phi}_3^{(1000)} = 617 e^{-j0.79} \ \text{V}$$

$$v_3(t) = 5.25 \sin(500t + 1.15) + 617 \sin(1000t - 0.79) \ \text{V}$$

L'energia magnetica media nel sistema di induttori mutuamente accoppiati è:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 \frac{I_1^{(500)^2}}{2} + \frac{1}{2} L_1 \frac{I_1^{(1000)^2}}{2} + \frac{1}{2} L_2 \frac{I_2^{(1000)^2}}{2} +$$

(1000)

$$- \frac{M}{2} I_1^{(1000)} I_2^{(1000)} \cos\left(\varphi_1^{(1000)} - \varphi_2^{(1000)}\right) = 4.64 \ \text{J}$$

Esercizio n°6

13/7/02

11

Circuito equivalente monofase del trasformatore

$$G_{m,t} = \frac{P_{10,t}}{V_{10,t}^2} = 1.73 \cdot 10^{-4}\ \mho \qquad m_t = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3800}{380} = 10$$

$$Y_{m,t} = \frac{\sqrt{3}\, I_{10,t}}{V_{10,t}} = 9.11 \cdot 10^{-4}\ \mho$$

$$B_{m,t} = \sqrt{Y_{m,t}^2 - G_{m,t}^2} = 8.95 \cdot 10^{-4}\ \mho$$

$$\bar{Z}_{m,t} = \frac{1}{\bar{Y}_{m,t}} = \frac{1}{G_{m,t} - j\,B_{m,t}} = 208 + j\,1077\ \Omega$$

$$\cos\varphi_{cc,t} = \frac{P_{1cc,t}}{\sqrt{3}\, V_{1cc,t}\, I_{1cc,t}} = 0.577$$

$$\bar{Z}_{cc,t} = \frac{V_{1cc,t}}{\sqrt{3}\, I_{1cc,t}} \left(\cos\varphi_{cc,t} + j \operatorname{sen}\varphi_{cc,t} \right) = 10 + j\,14.14\ \Omega$$

Circuito equivalente monofase della macchina asincrona

Utilizzando le stesse relazioni scritte in precedenza sostituendo il pedice t con a e riferendosi ai dati della macchina asincrona si ottiene:

$G_{m,a} = 0.014\ \mho$ $\qquad B_{m,a} = 0.174\ \mho$

$Y_{m,a} = 0.17\ \mho$ $\qquad \bar{Z}_{m,a} = 0.45 + j\,5.71\ \Omega$

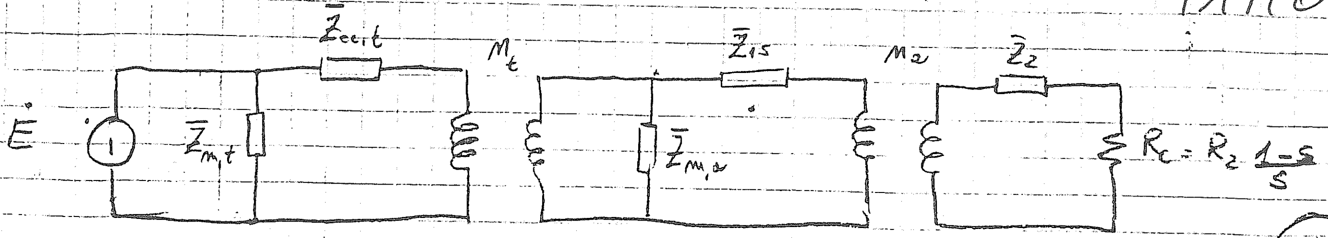
$$\cos\varphi_{cc,a} = 0.236$$

$$\bar{Z}_{cc,a} = 0.0659 + j\,0.271\ \Omega$$

$$\bar{Z}_{cc,a} = R_{1s} + j X_{1s} + k^2 R_2 + j k^2 X_2$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{cc,a} - (R_{1s} + j X_{1s})}{k^2} = 0.031 + j\,0.27\ \Omega$$

Il circuito equivalente (monofase) del sistema complessivo è: 13/7/02



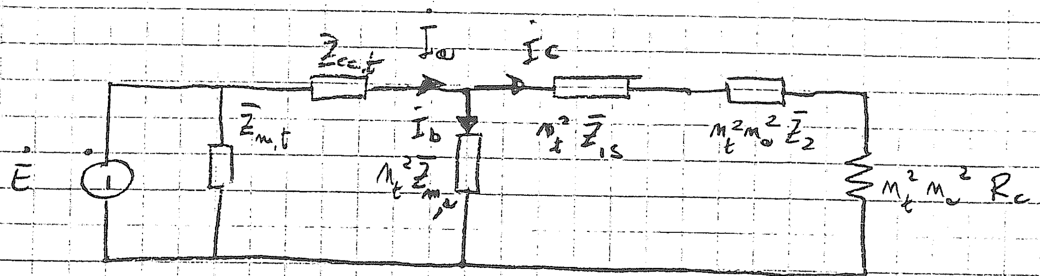
12

$$R_c = R_2 \frac{1-s}{s} = 0.031\ \Omega$$

$$E = \frac{3800}{\sqrt{3}} = 2200\ V$$

$$P_{fe,t} = 3 G_{m,t} E^2 = 2.5\ kW \qquad m_t = 10\ ; \quad m_a = 0.75$$

Per il calcolo delle altre grandezze conviene riportare tutto al primario del trasformatore



$$\dot{E} = E e^{j0}$$

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_{cc,t} + m_t^2 \left[\frac{\bar{Z}_{ma}(\bar{Z}_{1s} + m_a^2(\bar{Z}_2 + R_c))}{\bar{Z}_{ma} + \bar{Z}_{1s} + m_a^2(\bar{Z}_2 + R_c)}\right]} = 50 e^{-j1.156}$$

$$I_c = \frac{\bar{Z}_{ma}}{\bar{Z}_{ma} + \bar{Z}_{1s} + m_a^2(\bar{Z}_2 + R_c)} I_a = 48.9 e^{-j1.149}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_a - \dot{I}_c = 1.144 e^{-j1.445}$$

$$P_{fe,a} = 3 \cdot m_t^2 R_{m,a} I_b^2 = 176.8\ W$$

$$P'_{mecc} = 3 m_t^2 m_a^2 R_c I_c^2 = 12.51\ kW$$