Pillole per la risoluzione di integrali

Gabriele Frassi

11 dicembre 2021

Indice

Fonti

- Lezioni di Analisi matematica I di Carlo Luigi Berselli (A.A.2019-2020)
- *Bergamini, M., Barozzi, G. and Trifone, A., 2017. Matematica.blu 2.0. 5, Matematica e arte. Bologna: Zanichelli.*

1 Integrali indefiniti immediati

1.1 Integrale di una potenza

Vogliamo fare la seguente integrazione

$$\int x^{\alpha} dx$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobbiamo distinguere due casi in base al valore di α.

$\alpha \neq -1$

$$\boxed{\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \neq -1}$$

Si considerino i seguenti casi particolari:

- $\int dx = x + c$
- $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
- $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

$\alpha = -1$

$$\boxed{\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c}$$

Il valore assoluto è necessario per avere una regola valida su tutto il dominio di $\frac{1}{x}$, e quindi anche per valori di x negativi. Per avere la certezza di quanto fatto basta fare due derivate:

- con $x > 0$: $\mathrm{D}[\ln|x| + c] = \mathrm{D}[\ln x + c] = \frac{1}{x}$
- con $x < 0$: $\mathrm{D}[\ln|x| + c] = \mathrm{D}[\ln(-x) + c] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

Esercizi di esempio

$$\begin{aligned}
\int (x^3 - 3x^2 - 8) dx &= \int x^3 dx + \int -3x^2 dx + \int -8 dx = \\
&= \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx - 8 \int dx = \\
&= \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 8x + c = \boxed{\frac{x^4}{4} - x^3 - 8x + c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} \right) dx &= \int \frac{5}{x^4} dx - \int \frac{4}{x^3} dx + \int \frac{3}{x^2} dx = \\
&= 5 \int \frac{1}{x^4} dx - 4 \int \frac{1}{x^3} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx = \\
&= 5 \int x^{-1} dx - 4 \int x^{-3} dx + 3 \int x^{-2} dx = \\
&= 5\frac{x^{-3}}{-3} - 4\frac{x^{-2}}{-2} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + c = \boxed{-\frac{5}{3}x^{-3} + 2x^{-2} - 3x^{-1} + c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}) dx &= 3 \int \sqrt{x} \, dx + \int \sqrt[4]{x^3} \, dx = \\
&= 3 \int x^{\frac{1}{2}} + \int x^{\frac{3}{4}} = \\
&= 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \boxed{2x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\sqrt{x\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x-\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x - x^{\frac{3}{4}}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{4}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \boxed{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c}$$

$$\int \left(\frac{3x^2+2}{x}\right)dx = \int \frac{3x^2}{x}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx = 3\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x} = \boxed{\frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x| + c}$$

1.2 Integrale di funzioni esponenziali

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c}$$

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + c} \longleftarrow \text{Caso particolare, ricordare assonanza } \boxed{e^x \longrightarrow a^x}$$

La prima si dimostra facilmente ricordando la derivata $\mathrm{D}\left[a^x\right] = a^x \ln a$

$$\mathrm{D}\left[\frac{1}{\ln a}a^x\right] = \frac{1}{\ln a}a^x \ln a = a^x$$

Esercizi di esempio

$$\int e^{x+2}dx = e^{x+2} + c \qquad \text{Si tenga conto che } \int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int 4^{x-1}2^{-x+2}\,dx = \int 2^{2(x-1)}2^{-x+2}\,dx =$$

$$= \int 2^{2x-2}2^{-x+2}\,dx = \int 2^x dx = \boxed{\frac{1}{\ln 2}2^x + c}$$

$$\int \left(2^{2x}-1\right)^2 4^x\,dx = \int \left(2^{4x}+1-2\cdot 2^{2x}\right)2^{2x}dx =$$

$$= 2^{4x}2^{2x}\,dx + \int 2^{2x}\,dx - 2\int 2^{2x}2^{2x}\,dx =$$

$$= \int 2^{6x}dx + \int 2^{2x}\,dx - 2\int 2^{4x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int 6\cdot 2^{6x}\,dx + \frac{1}{2}\int 2\cdot 2^{2x}\,dx - \frac{2}{4}\int 4\cdot 2^{4x}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\frac{1}{\ln 2}2^{6x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 2}2^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{\ln 2}2^{4x} + c}$$

$$\int 8^x \cdot 2^{-3x+4}\,dx = \int 2^{3x}\cdot 2^{-3x+4}\,dx =$$

$$= \int 2^4 dx = 2^4\int dx = 2^4(x+c) = \boxed{16x + c'}$$

1.3 Integrale delle funzioni goniometriche

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + c} \quad \boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + c} \longleftarrow \text{Non confondere derivate con integrali}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot\, x + c}$$

Per ricordarsi gli ulimi due integrali tenere conto dei seguenti calcoli

$$\mathrm{D}[\tan x] = \mathrm{D}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{D}[\cot\, x] = \mathrm{D}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] = \frac{-\sin x \sin x - \cos \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Esercizi di esempio

$$\int (\cos x - \sin x + 2e^x) dx = \int \cos x\, dx - \int \sin x\, dx + 2 \int e^x\, dx =$$
$$= \sin x - (-\cos x) + 2e^x + c = \boxed{\sin x + \cos x + 2e^x + c}$$

1.4 Integrale di funzioni goniometriche inverse

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c}$$

poichè $\mathrm{D}\left[\arcsin x\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\mathrm{D}\left[\arccos x\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c} \quad \boxed{\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\mathrm{arccot} x + c}$$

poichè $\mathrm{D}\left[\arctan x\right] = \frac{1}{1+x^2}$ e $\mathrm{D}\left[\mathrm{arccot} x\right] = -\frac{1}{1+x^2}$

Esercizi di esempio

$$\int \left(\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2}\right) dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{7}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 7 \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$= \boxed{\frac{1}{3} \arcsin x + 7 \arctan x + c}$$

1.5 Integrali di funzioni composte

Le formule precedenti, in presenza di funzioni composte, necessitano di un aggiustamento. In particolare, quello che dobbiamo avere è la funzione integranda moltiplicata per la derivata della funzione più interna nella composizione.

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c} \quad \boxed{\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c}$$

$$\boxed{\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c} \quad \boxed{\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c}$$

$$\boxed{\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \arcsin f(x) + c} \qquad \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = -\arccos f(x) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \arctan f(x) + c} \qquad \boxed{\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = -\mathrm{arccot} f(x) + c}$$

Esercizi di esempio

$$\int 2x(x^2-1)^3\,dx = \frac{(x^2-1)^4}{4} + c \qquad \text{Considero } f = x^2 - 1 \text{ ed } f' = 2x.$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

Considero $f = \cos x$, ed $f' = -\sin x$, aggiungo i segni per ottenere $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$$\int \mathrm{ctan}\ x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

Considero $f = \sin x$, ed $f' = \cos x$, abbiamo fin da subito la forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$$\int e^{2x}\sqrt{5+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}(5+e^{2x})^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(5+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = (5+e^{2x})^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{(5+e^{2x})^3} + c$$

Considero $f = e^{2x}$, ed $f' = 2e^{2x}$, aggiungo il 2 per ottenere la forma $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx$

$$\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x)^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+1)}{(x^3+3x)^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(x^2+1)(x^3+3x)^{-3}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x)^{-2}}{-2} + c$$

Considero $f = x^3 + 3x$, ed $f' = 3x^2 + 3$, aggiungo 3 per ottenere $\int f'(x)[f(x)]^\alpha\,dx$

$$\int 15\sqrt{6-5x}\,dx = -\int -3\cdot 5(6-5x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -3\int -5(6-5x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -3\frac{(6-5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= -2(6-5x)^{\frac{3}{2}} + c = -2\sqrt{(6-5x)^3} + c$$

Considero $f = -5x + 6$ ed $f' = 5$, scompongo 15 per ottenere $\int f'(x)[f(x)]^\alpha\,dx$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Considero $f = -x^2 + 1$ ed $f' = -2x$, aggiungo -2 per ottenere $\int f'(x)[f(x)]^\alpha\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Considero $f = 1 - x^2$ ed $f' = -2x$, aggiungo -2 per ottenere $\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\,dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \arctan e^x + c$$

Considero $f = e^x$ ed $f' = e^x$. Abbiamo la forma $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}\,dx$

2 Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione si basa sulla regola di derivazione di una funzione composta

$$\mathrm{D}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Ho il seguente integrale

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

dove F è una primitiva ($F' = f$). Sappiamo che

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C\left([a,b]\right) \qquad \gamma : [\alpha,\beta] \to [a,b], \gamma \in C^1\left([a,b]\right)$$

Svolgiamo i seguenti calcoli

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t)) - \gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Troveremo anche che

$$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(a)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ponendo $\gamma(\beta) = b$ e $\gamma(\alpha) = a$. Il risultato finale di questi calcoli è la **formula di integrazione per sostituzione**:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}$$

Generalmente poniamo $x = \gamma(t)$, quindi $dx = \gamma'(t)\,dt$. Cosa utile per ricordare il procedimento, ma illegale per un matematico, è trattare la notazione delle derivate, $\frac{dx}{dt}$, come una frazione. Ricordarsi degli estremi in caso di integrali definiti.

Esercizi di esempio

$$\int \frac{6}{\sqrt{8-3x}}\,dx = \int \frac{6}{t}(-\frac{2}{3}t)\,dt = -\frac{2}{3}6\int dt = -4t + c = -4\sqrt{8-3x} + c$$

$$t = \sqrt{8-3x} \longrightarrow t^2 = 8-3x \longrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{3}} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}t \longrightarrow \boxed{dx = -\frac{2}{3}t\,dt}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \int \frac{1}{t} - 3t^2\,dt = -3\int t\,dt = -3\frac{t^2}{2} + c = -\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1-x})^2 + c = -\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$t = \sqrt[3]{1-x} \longrightarrow t^3 = 1-x \longrightarrow \boxed{x = 1-t^3} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = -3t^2 \longrightarrow \boxed{dx = -3t^2\,dt}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{2t(1+t^2)}2t\,dt = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t + c = \arctan\sqrt{x} + c$$

$$t = \sqrt{x} \longrightarrow \boxed{t^2 = x} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \longrightarrow \boxed{dx = 2t\,dt}$$

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{t}{t-1}\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| + c = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| + c$$

$$t = e^{2x} \longrightarrow \ln t = \ln e \cdot 2x \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\ln t} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{t} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2t}dt}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}{t}t\,dt = \frac{1}{2}\int t^2\,dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{2x+1})^3}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + c$$

$$t = \sqrt{2x+1} \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = t \longrightarrow \boxed{dx = t\,dt}$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2-t}2t\,dt = 2\int \frac{1}{t-1}\,dt = 2\ln|t-1| + c = 2\ln|\sqrt{x}-1| + c$$

$$t = \sqrt{x} \longrightarrow \boxed{t^2 = x} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \longrightarrow \boxed{dx = 2t\,dt}$$

$$\int \frac{4\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{4t}{1+t^2}2t\,dt = 8\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = 8\left[\int dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] =$$

$$= 8t - 8\arctan t + c = 8\sqrt{x} - 8\arctan\sqrt{x} + c$$

$$t = \sqrt{x} \longrightarrow \boxed{t^2 = x} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \longrightarrow \boxed{dx = 2t\,dt}$$

3 Integrazione per parti

L'integrazione per parti si basa sulla regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$\mathrm{D}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integriamo

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) = fg|_a^b$$

$$fg|_a^b = \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx$$

Spostando alcuni elementi otteniamo la **formula di integrazione per parti**

$$\boxed{\int_a^b \left(f'(x)g(x)\right)dx = fg|_a^b - \int_a^b \left(f(x)g'(x)\right)\,dx}$$

Procedimento Nell'integrazione per parti dobbiamo scegliere due componenti della funzione integranda:

- $f(x)$, detto *fattore finito*
- $g'(x)$, detto *fattore differenziale*

Dobbiamo scegliere gli elementi in modo tale da ottenere un integrale (sottraendo della differenza ottenuta con l'integrazione per parti) facile da calcolare.

Esercizi di esempio

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

Fattore finito $f(x) = \ln x$, fattore differenziale $g'(x) = x$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

Fattore finito $f(x) = x$, fattore differenziale $g'(x) = \sin x$.

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x + c$$

Fattore finito $f(x) = \ln x$, fattore differenziale $g'(x) = 1$

$$\int x\cdot 2^x\ln 2\,dx = x\cdot 2^x - \int 2^x\,dx = x\cdot 2^x - \frac{1}{\ln 2}2^x + c = 2^x\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + c$$

Fattore finito $f(x) = x$, fattore differenziale $g'(x) = 2^x\ln 2$

$$\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,dx = \int \ln x\cdot(2\sqrt{x})^{-1}\,dx = 2^{-1}\int \ln x\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln x\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{x}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[2\ln x\cdot x^{\frac{1}{2}} - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\right] = \ln x\cdot x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x}\,(\ln x - 2)$$

Fattore finito $f(x) = \ln x$, fattore differenziale $g'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

4 Integrazione di funzioni razionali

Supponiamo di voler calcolare un integrale simile al seguente

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

cioè l'integrale di un rapporto tra due polinomi. Per capire come procedere verifichiamo $\deg A$ e $\deg B$, rispettivamente grado del polinomio A e grado del polinomio B.

4.1 Denominatore con grado maggiore

$$\boxed{\deg A < \deg B}$$

Consideriamo una serie di casi: alcuni possono essere risolti in modo veloce, altri richiedono un procedimento un po' più lungo.

4.1.1 Caso particolare: numeratore derivata del denominatore

Il caso è semplice al di la del grado del denominatore. Se noi abbiamo una cosa del tipo $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$, dove $A(x) = B'(x)$, possiamo ricondurci al seguente integrale immediato

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Esempi

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-1}\,dx = \ln|3x^2-2x-1| + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = 3x^2-2x-1 \text{ ed } f'(x) = 6x-2$$

$$\int \frac{4x+12}{x^2+6x}\,dx = 2\int \frac{2x+6}{x^2+6x}\,dx = 2\ln|x^2+6x| + c = \ln(x^2+6x)^2 + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = x^2+6x \text{ ed } f'(x) = 2x+6.$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-3x+1| + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = x^3-3x+1 \text{ ed } f'(x) = 3x^2-3.$$

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}(3x+3)}{x^2+2x+9}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+9| + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = x^2+2x+9 \text{ ed } f'(x) = 2x+2.$$

4.1.2 Caso particolare: denominatore di primo grado e numeratore di grado zero

Anche questo caso è molto semplice. Se il denominatore è di primo grado allora la sua derivata sarà una costante. Il numeratore è una costante ($\deg A = 0$). Segue che in caso di derivata $\neq 1$ del denominatore basteranno semplici manipolazioni numeriche per ricondurci all'integrale immediato già visto prima...

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Esempio

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = 3x-2 \text{ ed } f'(x) = 3$$

$$\int \frac{5}{2x-3}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx = \frac{5}{2}\ln|2x-3| + c$$
$$\text{Poichè } f(x) = 2x-3 \text{ ed } f'(x) = 2.$$

4.1.3 Denominatore di secondo grado

Vogliamo calcolare un integrale simile al seguente

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Prendiamo in studio il denominatore e calcoliamo il discriminante Δ. In base al suo valore decidiamo come muoverci.

Caso $\Delta > 0$

1. Scompongo il denominatore individuando le soluzioni
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_1)$$
2. Scrivo la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado
$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}$$
3. Calcolo la somma delle due frazioni al secondo membro
$$\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+B\,(a(x-x_1))}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{x(A+Ba)-Ax_2-Bax_1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$
cioè
$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{x(A+Ba)-Ax_2-Bax_1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$
4. Sulla base dell'ultima uguaglianza creo un sistema di equazioni e individuo A e B
$$\begin{cases} p = A+Ba \\ q = -Ax_2-Bax_1 \end{cases}$$
5. Risolvo l'integrale utilizzando A e B trovati prima
$$\int \left(\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}\right) dx$$

Esempi

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx = \int \frac{6}{(x-3)(x+3)}\,dx = \int \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}\,dx = \int \frac{(A+B)x+3A-3B}{(x-3)(x+3)}\,dx =$$
$$= \int \frac{A}{x-3}\,dx + \int \frac{B}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx =$$
$$= \ln|x-3| - \ln|x+3| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$$

Poichè $\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=6 \end{cases} \longrightarrow A=1, B=-1$

$$\int \frac{1}{2x-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{(x-2)x}\,dx = \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x}\,dx = -\int \frac{Ax+B(x-2)}{(x-2)x}\,dx =$$
$$= -\int \frac{x(A+B)-2B}{(x-2)x}\,dx = -\left[\int \frac{1/2}{x-2}\,dx - \int \frac{1/2}{x}\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{-1}{2-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|2-x| + \frac{1}{2}\ln|x| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2-x}\right| + c$$

Poichè $\begin{cases} A+B=0 \\ -2B=1 \end{cases} \longrightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$

Caso $\Delta = 0$

1. Scompongo il denominatore individuando la soluzione

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

2. Scrivo la frazione data come somma di frazioni

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$$

3. Calcolo la somma delle due frazioni al secondo membro

$$\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2} = \frac{A(x-x_1)+Ba}{a(x-x_1)^2} = \frac{Ax-Ax_1+Ba}{a(x-x_1)^2}$$

cioè

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{Ax-Ax_1+Ba}{a(x-x_1)^2}$$

4. Sulla base dell'ultima uguaglianza creo un sistema di equazioni e individuo A e B

$$\begin{cases} p=A \\ q=-Ax_1+Ba \end{cases}$$

5. Risolvo l'integrale utilizzando A e B trovati prima

$$\int \left(\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}\right) dx$$

Esempi

$$\int \frac{x}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}\right)dx = \int \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{A(x)-2A+B}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + c$$

$$\text{Poichè } \begin{cases} A=1 \\ -2A+B=0 \end{cases} \longrightarrow A=1, B=2$$

Caso $\Delta < 0$ e $\deg A = 0$

- L'obiettivo dei seguenti calcoli è ricondursi al seguente integrale immediato

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}\,dx$$

- Il discriminante Δ è negativo, dunque dobbiamo far riferimento all'insieme $\mathbb{C}$. Scriviamo le soluzioni

$$a(x-p+iq)(x-p-iq) = a[(x-p)+iq][(x-p)-iq] = a[(x-p)^2+q^2]$$

  a sarà portato fuori dall'integrale

- L'integrale da calcolare è il seguente

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{q^2+(x-p)^2}\,dx$$

  raccolgo rispetto a q^2

$$\frac{1}{a}\int \frac{1}{q^2\left[1+\frac{(x-p)^2}{q^2}\right]}\,dx = \frac{1}{q^2a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-p}{q}\right)^2}\,dx$$

  Integro per sostituzione

$$t = \frac{x-p}{q} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \longrightarrow \boxed{x = qt+p} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = q \longrightarrow \boxed{dx = qdt}$$

$$\frac{1}{q^2a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-p}{q}\right)^2}\,dx = \frac{1}{q^2a}\int \frac{1}{1+(t)^2}\,q\,dt = \frac{1}{qa}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \boxed{\frac{1}{qa}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)}$$

Esempi

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+2-1+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \arctan(x+1)+c$$

$$\int \frac{-1}{4x^2+4x+5}\,dx = -\int \frac{1}{(2x+1)^2+4}\,dx = -\int \frac{1}{4\left(\frac{(2x+1)^2}{4}+1\right)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = -\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right)+c$$

Caso $\Delta < 0$ **e** $\deg A > 0$

- Se $\deg A > 0$ significa che avremo un polinomio di primo grado. Se il denominatore è di secondo grado allora è possibile manipolare il numeratore in modo tale da ottenere la derivata. Il risultato sarà la scrittura dell'integrale come somma di due integrali

$$r \int \frac{2ax+b}{ax^2+bc+c}\,dx + s \int \frac{1}{ax^2+bc+c}\,dx$$

- Risolvo il primo integrale in modo agile

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

per quanto riguarda il secondo, invece, utilizzo il metodo visto prima con $\Delta < 0, \deg A = 0$.

Esempi

$$\int \frac{x+2}{4x^2+9}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2+9}\,dx + \int \frac{2}{4x^2+9}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2+9}\,dx + 2\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2+9}\,dx + 2\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{8}\ln|4x^2+9| + \frac{2}{9}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

4.2 Numeratore con grado maggiore o uguale rispetto al denominatore

$$\boxed{\deg A \geq \deg B}$$

Se la condizione è rispettata è possibile svolgere una divisione tra numeratore e denominatore: il risultato è un quoziente Q e un resto R, che può essere nullo. Segue la seguente uguaglianza

$$\boxed{A = B \cdot Q + R \longrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}}$$

dunque

$$\boxed{\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx}$$

L'integrale del quoziente è facilmente calcolabile, poichè un semplice polinomio. Il secondo integrale, rapporto tra resto e quoziente, si risolve con le metodologie introdotte nelle pagine precedenti: oserviamo che

$$\boxed{0 \leq \deg R < \deg Q}$$

cioè il grado del numeratore (il resto) è minore del grado del denominatore (il quoziente).

Esempi

$$\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{2x^2-3x+4}{2x-3}\,dx = \int x\,dx + 4\int \frac{1}{2x-3}\,dx = \int x\,dx + \frac{4}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|2x-3| + c$$

$$\int \frac{x^3+4x+4}{x^2+4}\,dx = \int x\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int x\,dx + 4\int \frac{1}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]} =$$
$$= \int x\,dx + 2\int \frac{1/2}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]} = \frac{x^2}{2} + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

4.2.1 Caso particolare: numeratore e denominatore dello stesso grado

Se abbiamo un rapporto tra i polinomi A e B dove $\deg A = \deg B$ allora possiamo risolvere manipolando il numeratore. Vogliamo ottenere come numeratore la somma tra una costante e un multiplo del polinomio B.

$$\int \frac{A(x)}{B(x)} = \int \frac{cB(x)+k}{B(x)} = c\int dx + k\int \frac{1}{B(x)}\,dx$$

Esempi

$$\int \frac{2x-5}{x+4}\,dx = \int \frac{3x-5+13-13}{x+4}\,dx = \int \frac{2(x+4)}{x+4}\,dx - 13\int \frac{1}{x+4}\,dx =$$
$$= 2\int dx - 13\frac{1}{x+4}\,dx = 2x - 13\ln|x+4| + c$$

$$\int \frac{4x+1}{2x-1}\,dx = \int \frac{4x+1-3+3}{2x-1}\,dx = \int \frac{2(2x-1)+3}{2x-1}\,dx =$$
$$= 2\int dx + \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = 2x + \frac{3}{2}\ln|2x-1| + c$$