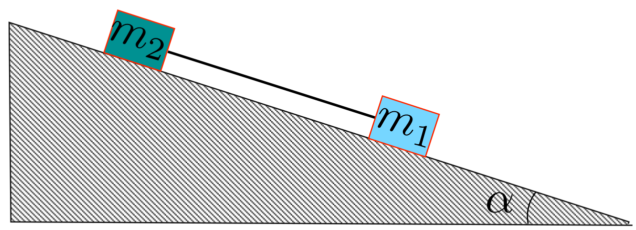
Esercizio (tratto dal Problema 3.31 del Mazzoldi 2)

Due corpi di masse $m_1 = 480\,\mathrm{gr}$ e $m_2 = 760\,\mathrm{gr}$, collegati da un filo, scendono lungo un piano, inclinato di un angolo $\alpha = 15^o$ rispetto all'orizzontale. Tra m_1 e il piano non c'è attrito, mentre tra m_2 ed il piano c'è un coefficiente di attrito dinamico μ_D.

1. Determinare il valore della tensione del filo e dell'accelerazione del sistema nel caso in cui $\mu_D = 0.4$;

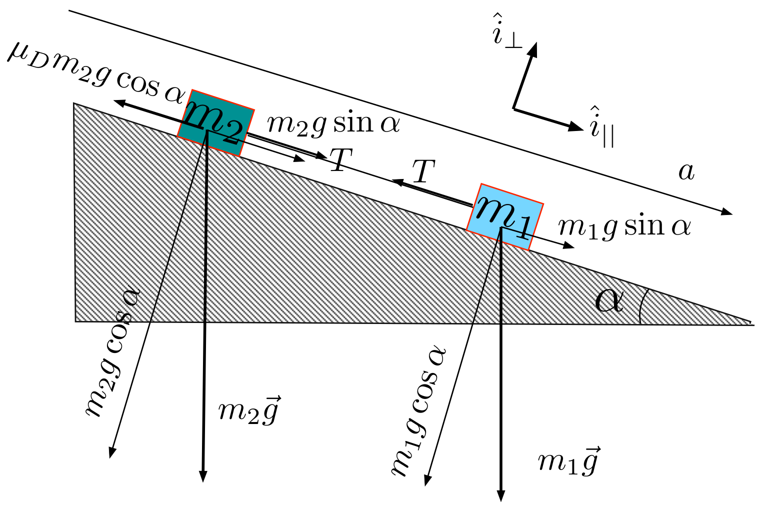
2. Se si desidera che il moto del sistema lungo il piano sia uniforme, quale valore dovrebbe avere il coefficiente di attrito μ_D ?



SOLUZIONE
DATI INIZIALI:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.48\,\text{Kg} \\ m_2 &= 0.76\,\text{Kg} \\ \alpha &= \tfrac{\pi}{12} \\ \mu_D &= 0.4 \end{aligned}$$

1.
   - Siccome il filo è inestensibile, il sistema dei due corpi si muove solidalmente, ossia la velocità e l'accelerazione dei due corpi (ciascuno nella direzione in cui si muove) sono uguali. Scegliamo anzitutto un verso convenzionale per l'accelerazione. Data la configurazione appare naturale scegliere come verso convenzionale quello lungo il piano inclinato in basso.
   - Disegniamo ora le forze che agiscono su ciascun corpo, scomponendo nelle direzioni longitudinale al piano $\hat{i}_{||}$ ed ortogonale al piano $\hat{i}_{\perp}$:



   – **sul corpo m_1 agiscono:**
   -forza peso : $m_1\vec{g} = \underbrace{m_1\ g\sin\alpha}_{\text{comp. lungitudinale}}\ \hat{i}_{||}\ \underbrace{-m_1\ g\cos\alpha}_{\text{comp. ortogonale}}\hat{i}_{\perp}$
   -tensione del filo su m_1 : $\vec{T}_1 = -T\,\hat{i}_{||}$
   -reazione vincolare del piano su m_1 : $\vec{R}_1 = R_1\,\hat{i}_{\perp}$

   – **sul corpo m_2 agiscono:**
   -forza peso : $m_2\vec{g} = \underbrace{m_2\ g\sin\alpha}_{\text{comp. lungitudinale}}\ \hat{i}_{||}\ \underbrace{-m_2\ g\cos\alpha}_{\text{comp. ortogonale}}\hat{i}_{\perp}$
   -tensione del filo su m_2 : $\vec{T}_2 = T\,\hat{i}_{||}$
   -forza d'attrito dinamico : $\vec{F}_{\text{att}} = -\mu_D|\vec{P}_\perp|\hat{i}_{||} = -\mu_D\,m_2\ g\cos\alpha\,\hat{i}_{||}$
   -reazione vincolare del piano su m_2 : $\vec{R}_2 = R_2\,\hat{i}_{\perp}$

- Scriviamo ora, per ciascuno dei due corpi, la legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, scomposta nelle componenti lungo il piano $\hat{i}_{||}$ ed ortogonale al piano $\hat{i}_{\perp}$.

$$m_1) \qquad m_1\, g \sin\alpha\, \hat{i}_{||} \; - m_1\, g\cos\alpha\, \hat{i}_{\perp} - T\, \hat{i}_{||} + R_1\, \hat{i}_{\perp} = m_1\, a\, \hat{i}_{||} \tag{1}$$

$$m_2) \qquad m_2\, g \sin\alpha\, \hat{i}_{||} \; - m_2\, g\cos\alpha\, \hat{i}_{\perp} + T\, \hat{i}_{||} - \mu_D m_2 g\cos\alpha\, \hat{i}_{||} + R_2\, \hat{i}_{\perp} = m_2\, a\, \hat{i}_{||} \tag{2}$$

Uguagliando in ciascuna equazione le componenti dei due membri otteniamo

  - dalle componenti di $\hat{i}_{\perp}$

$$\begin{cases} R_1 - m_1\, g\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \qquad R_1 = m_1\, g\cos\alpha \\ R_2 - m_2\, g\cos\alpha = 0 & \Rightarrow \qquad R_2 = m_2\, g\cos\alpha \end{cases} \tag{3}$$

    otteniamo che le reazioni vincolati cancellano esattamente le componenti ortogonali della forza peso;

  - dalle componenti di $\hat{i}_{||}$

$$\begin{cases} m_1\, g\sin\alpha - T = m_1\, a \\ \\ m_2\, g\sin\alpha \; + T \; - \mu_D m_2 g\cos\alpha = m_2\, a \end{cases} \tag{4}$$

    otteniamo un sistema di due equazioni per le due incognite a e T, che sono da determinarsi in funzione dei parametri m_1, m_2 e μ_D. Sommando le equazioni si ottiene

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - T & = \quad m_1 a \\ \\ (m_1 + m_2) g\sin\alpha - \mu_D m_2 g\cos\alpha & = \quad (m_1 + m_2) a \end{cases} \tag{5}$$

    da cui

$$\begin{cases} T & = \quad m_1(g\sin\alpha - a) \\ \\ a & = \quad g\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2} g\cos\alpha \end{cases} \tag{6}$$

    Sostituendo la seconda nella prima otteniamo

$$\begin{cases} T & = \quad \frac{\mu_D m_1 m_2}{m_1+m_2} g\cos\alpha \\ \\ a & = \quad g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha\right) \end{cases} \tag{7}$$

- Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} T \quad &= \quad \frac{0.4 \cdot 0.48\,\mathrm{Kg} \cdot 0.76\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{(0.48 + 0.76)\,\cancel{\mathrm{Kg}}} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cos\frac{\pi}{12} = \\ &= \quad 1.12 \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = 1.12\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{8}$$

e

$$
\begin{aligned}
a &= 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\sin\frac{\pi}{12} - \frac{0.4\cdot 0.76\,\cancel{\mathrm{K}}\mathrm{g}}{(0.48+0.76)\,\cancel{\mathrm{K}}\mathrm{g}}\cos\frac{\pi}{12}\right) = \\
&= 0.13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

2. Per avere un moto rettilineo uniforme occorre che l'accelerazione a sia nulla. Dalla formula ottenuta in (7) per l'accelerazione abbiamo

$$
\begin{aligned}
a &= g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_D m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha\right) = 0 \\
&\Rightarrow\ \mu_D = \frac{m_1+m_2}{m_2}\ \tan\alpha \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Sostituendo i dati

$$
\begin{aligned}
\mu_D &= \frac{(0.48+0.76)\,\cancel{\mathrm{K}}\mathrm{g}}{0.76\,\cancel{\mathrm{K}}\mathrm{g}}\cdot\tan\frac{\pi}{12} = \\
&= 0.44 \qquad (11)
\end{aligned}
$$