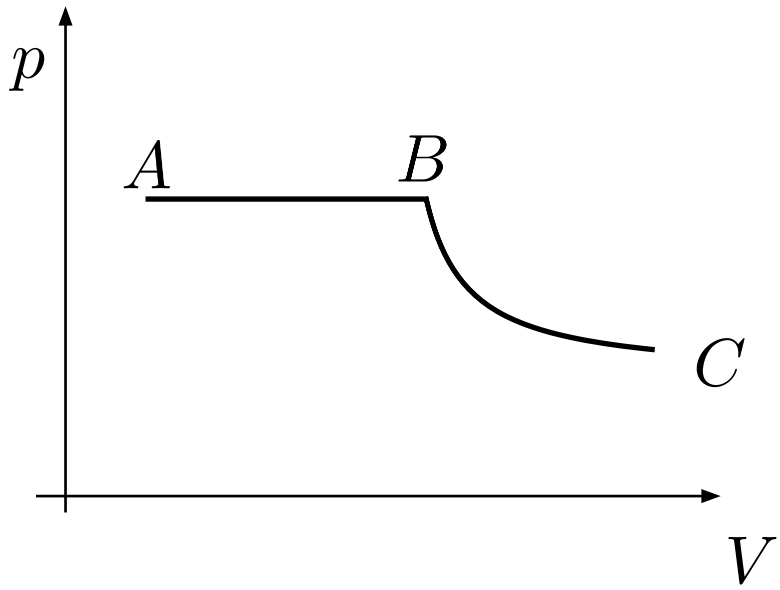
Esercizio (tratto dal Problema 13.6 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale ($n = 0.45$ moli) passa con un'isobara reversibile dallo stato A ($p_A = 2\,\mathrm{bar}$) allo stato B, compiendo un lavoro $W_{A\to B} = 640\,\mathrm{J}$. Successivamente il gas passa dallo stato B allo stato C ($T_C = 459.7\,\mathrm{K}$) con un'isoterma reversibile, compiendo un lavoro $W_{B\to C} = 454\,\mathrm{J}$.

1. Calcolare i volumi V_A, V_B e V_C;

2. Si può tornare da C ad A con un'adiabatica reversibile ?



SOLUZIONE
Riscriviamo i dati iniziali, in modo che tutti i dati siano espressi in unità del Sistema Internazionale.

DATI INIZIALI:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} n & = & 0.45\,\mathrm{mol} \\ p_A & = & 2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ T_C & = & 459.7\,\mathrm{K} \\ W_{A\to B} & = & 640\,\mathrm{J} \\ W_{B\to C} & = & 454\,\mathrm{J} \end{array}}$$

1. Per calcolare i volumi negli stati A, B e C procediamo sfruttando l'equazione di stato e l'espressione delle varie trasformazioni

   - Dall'equazione di stato dei gas perfetti, applicata allo stato B, abbiamo

     $$p_B V_B = nRT_B \qquad \Rightarrow \qquad V_B = \frac{nRT_B}{p_B} \tag{1}$$

     D'altra parte sappiamo che

     $$\begin{cases} T_B = T_C & \text{(perché B}\rightarrow\text{C è un'isoterma)} \\ \\ p_B = p_A & \text{(perché A}\rightarrow\text{B è un'isobara)} \end{cases} \tag{2}$$

     Sostituendo in (**??**) otteniamo:

     $$V_B = \frac{nRT_C}{p_A} \tag{3}$$

     Sostituendo i dati

     $$\begin{aligned} V_B &= \frac{0.45\mathrm{mol}\cdot 8.314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,459.7\,\mathrm{K}}{2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} = \\ &= 8.60\,\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Pa}} = \\ &\quad [\text{uso J= Nm e Pa=N/m}^2] \\ &= 8.60\,\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{4}$$

   - Dall'espressione del lavoro, applicata alla trasformazione A→B, abbiamo

     $$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \\ &= [\text{A}\rightarrow\text{B è un'isobara} \Rightarrow \ \ p \text{ non dipende dal volume, è costante}] \\ &= \underbrace{p}_{=p_A=p_B} \int_{V_A}^{V_B} dV = \\ &= p_A\,(V_B - V_A) \end{aligned} \tag{5}$$

     da cui

     $$V_A = V_B - \frac{W_{A\to B}}{p_A} \tag{6}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} V_A &= V_B - \frac{W_{A\to B}}{p_A} = \\ &= 8.60\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 - \frac{640\,\mathrm{J}}{2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}} \\ &\quad [\text{uso J= Nm e Pa=N/m}^2] \\ &= 5.40\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{7}$$

- Dall'espressione del lavoro per l'isoterma da B a C, otteniamo:

$$\begin{aligned} W_{B\to C} &= \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = \\ &\quad [\text{lungo un'isoterma } p \text{ non è costante, ma dipende da } V, \\ &\quad \text{quindi non possiamo portarla fuori dall'integrale. Uso} \\ &\quad \text{allora l'equazione di stato.}] \\ &= \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = \\ &= [\text{lungo un'isoterma } T \text{ è costante}] \\ &= nR \underbrace{T}_{=T_B=T_C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = \\ &= nRT_C \ln\frac{V_C}{V_B} \end{aligned} \tag{8}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} W_{B\to C} &= nRT_C \ln\frac{V_C}{V_B} \\ &\Downarrow \\ \frac{W_{B\to C}}{nRT_C} &= \ln\frac{V_C}{V_B} \\ &\Downarrow \\ &\quad (\text{prendo l'esponenziale di ambo i membri}) \\ e^{\frac{W_{B\to C}}{nRT_C}} &= \frac{V_C}{V_B} \end{aligned} \tag{9}$$

Pertanto

$$V_C = V_B\, e^{\frac{W_{B\to C}}{nRT_C}} \tag{10}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} V_C &= 8.60\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \exp\left(\frac{454\,\mathrm{J}}{0.45\mathrm{mol}\cdot 8.314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\,459.7\,\mathrm{K}}\right) = \\ &\quad [\textbf{Controllo dimensionale:} \text{ l'argomento di un exp deve essere adimensionale,} \\ &\quad \text{semplifico le unità di misura}] \\ &= 8.60\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \exp\underbrace{\left(\frac{454}{0.45\cdot 8.314\cdot\ 459.7}\right)}_{\text{adimensionale: OK}} = \\ &= 8.60\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ \cdot 1.302 \\ &= 11.20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{11}$$

2. Le trasformazioni adiabatiche (reversibili) sono caratterizzate da equazioni

$$pV^\gamma = \text{cost} \qquad \text{(adiabatiche rev.)}$$

Siccome $\gamma = c_p/c_V > 1$, nel piano p-V le curve delle trasformazioni adiabatiche hanno una pendenza maggiore rispetto alle curve isoterme, che sono invece caratterizzate da equazioni

$$pV = \text{cost} \qquad \text{(isoterme)}$$

Osservo che lo stato A, rispetto allo stato C, è caratterizzato da:

$$\begin{cases} V_A < V_C \\ \\ T_A < T_C \end{cases} \tag{12}$$

Partendo dal punto che identifica lo stato C nel piano p-V (vedi Fig.**??**), l'adiabatica che passa per C ha pendenza maggiore dell'isoterma BC. Di conseguenza, se ci si muove da C lungo tale adiabatica diminuendo il volume, la temperatura del gas aumenta; e se ci si muove lungo tale adiabatica verso temperature piú basse (zona azzurra) il volume aumenta.
In nessun caso si può dunque tornare allo stato A muovendosi lungo un'adiabatica reversibile che parte da C.

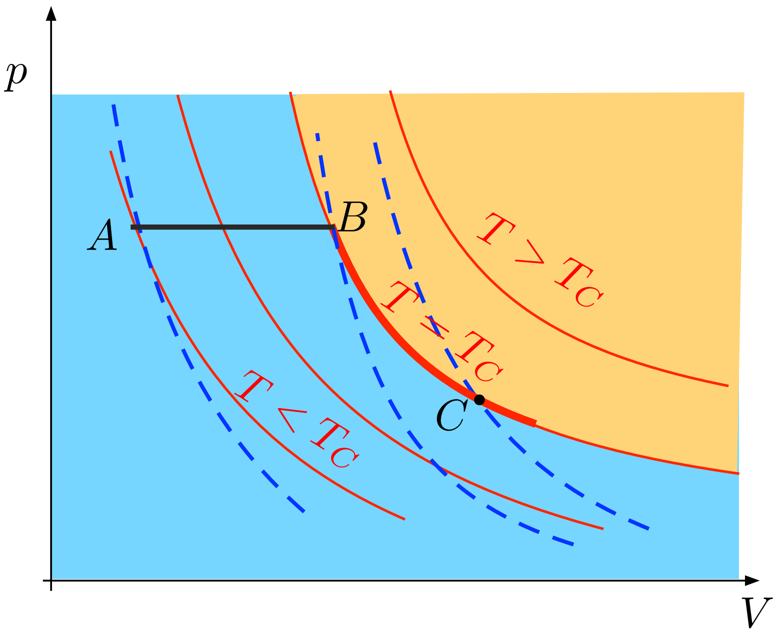


Figure 1: Nel piano p-V le adiabatiche reversibili (pV^γ = const, curve blu tratteggiate) hanno pendenza maggiore rispetto alle isoterme (pV = const, curve rosse continue). L'isoterma BC divide il piano p-V in due regioni: quella delle basse temperature $T < T_C$ (regione azzurra in basso a sinistra) e quella delle alte temperature $T > T_C$ (regione arancio in alto a destra).