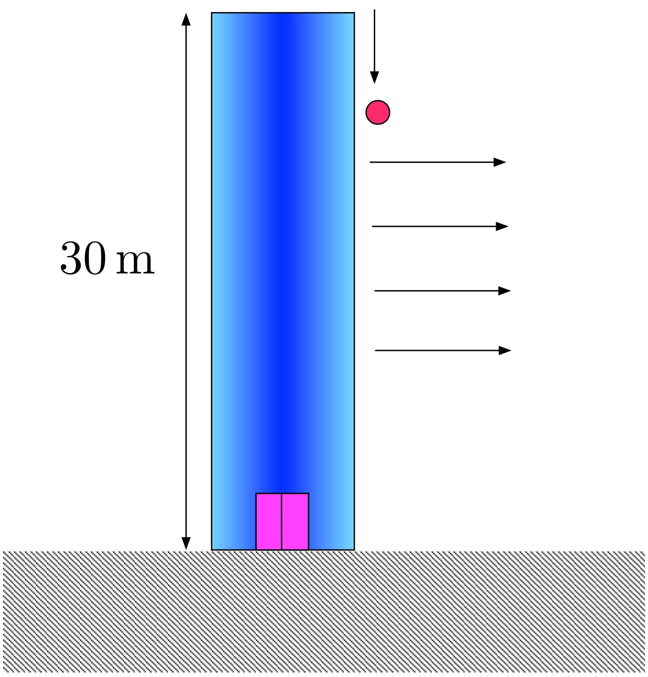
Esercizio (tratto dal Problema 2.19 del Mazzoldi-2)

Un oggetto viene lasciato cadere da una torre alta $h = 30$m. Durante la caduta, a causa di un forte vento, l'oggetto subisce un'accelerazione costante orizzontale $a = 15\,\mathrm{m/s^2}$. Calcolare, all'istante in cui l'oggetto arriva al suolo:

1. il tempo τ di caduta;
2. la distanza d del punto di caduta dalla base della torre;
3. le componenti del vettore velocità ed il suo modulo;
4. l'angolo θ di incidenza al suolo, rispetto all'orizzontale;
5. l'equazione $y(x)$ della traiettoria



SOLUZIONE:

Scegliamo il sistema di riferimento spaziale quello con origine alla base della torre, come indicato in figura.
Scegliamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante in cui l'oggetto viene lasciato cadere dalla torre.
Scomponiamo il moto nelle componenti x e y

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \tag{1}$$

- il moto lungo y è un moto di caduta libera, dunque un moto uniformemente accelerato in cui
  - l'altezza iniziale è $h = 30\,\mathrm{m}$;
  - la componente iniziale della velocità lungo y vale $v_{0y} = 0$ perché l'oggetto viene lasciato cadere (non viene spinto);
  - la componente y dell'accelerazione è costante nel tempo, pari a $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ in modulo, e diretta verso il basso.

  Pertanto abbiamo la legge oraria lungo y vale

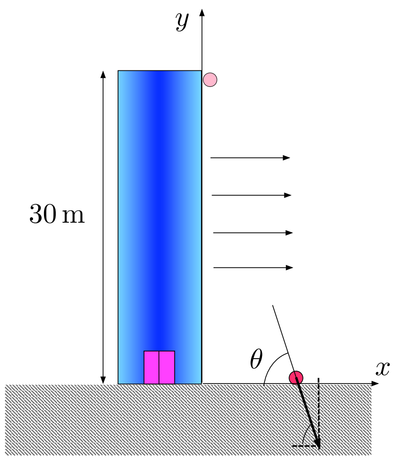
$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

- Il moto lungo x è anch'esso un moto uniformemente accelerato, perché dal testo del problema sappiamo che il vento imprime un'accelerazione orizzontale costante nel tempo. Inoltre sappiamo che

  - la coordinata x iniziale vale $x = 0$;
  - la componente iniziale della velocità lungo x vale $v_{0x} = 0$ perché l'oggetto viene lasciato cadere (non viene spinto);
  - la componente x dell'accelerazione è costante nel tempo, pari a $a = 15\,\mathrm{m/s^2}$;

  Pertanto abbiamo la legge oraria lungo x vale

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \tag{3}$$



Quindi abbiamo

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 \\[2ex] y(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{4}$$

e la legge oraria del moto vale

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}at^2}_{x(t)}\ \vec{i} + \underbrace{(h - \frac{1}{2}gt^2)}_{y(t)}\ \vec{j} \tag{5}$$

Ora abbiamo

1. Il tempo τ di caduta è il tempo che l'oggetto impiega affinche la sua coordinata y verticale diventi nulla, ossia il tempo tale che

$$y(\tau) = 0 \tag{6}$$

Sostituendo l'espressione della legge oraria lungo y abbiamo

$$y(\tau) = h - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0 \tag{7}$$

da cui

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{8}$$

Sostituendo i valori troviamo

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{2 \cdot 30\,\cancel{\mathrm{m}}}{9.81\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 2.47\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{9}$$

2. La distanza del punto di caduta dai piedi della torre non è altro che la coordinata x calcolata all'istante di caduta τ. Calcolando la legge oraria $x(t)$ a tale istante abbiamo

$$\begin{aligned} d &= x(t = \tau) = \frac{1}{2}\,a\tau^2 = \\ & \quad [\text{uso } (8)] \\ &= \frac{1}{2}\,a \cdot \frac{2h}{g} = \frac{a}{g}\,h \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori troviamo

$$d = \frac{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\,30\,\mathrm{m} = 45.88\,\mathrm{m} \tag{11}$$

3. Il vettore velocità è dato da

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\ \vec{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\ \vec{j} \tag{12}$$

le cui componenti si ricavano derivando le (4) rispetto al tempo

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = a\,t \\ \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = -g\,t \end{cases} \tag{13}$$

che aumentano linearmente allo scorrere del tempo. Il modulo del vettore velocità vale

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \\ &= \sqrt{a^2\,t^2 + g^2\,t^2} = \\ &= \sqrt{a^2\, +\, g^2}\,t \end{aligned} \tag{14}$$

4. Il vettore velocità è tangente alla traiettoria. Pertanto, per determinare l'angolo di caduta, basta determinare l'angolo del vettore velocità al tempo $t = \tau$ di caduta. Dalle (13) abbiamo

$$\begin{cases} v_x(t=\tau) & = & a\,\tau \\ \\ v_y(t=\tau) & = & -g\,\tau \end{cases} \tag{15}$$

e l'angolo vale

$$\tan\theta = \frac{|v_y(t=\tau)|}{|v_x(t=\tau)|} = \frac{g}{a} \tag{16}$$

ossia

$$\theta = \arctan\frac{g}{a} \tag{17}$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$\theta \quad = \quad \arctan\frac{9.81\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{15\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = 0.58 \tag{18}$$

5. Per ricavare la traiettoria $y(x)$ osserviamo che le (4) costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria, in cui il parametro è il tempo t. Per trovare la rappresentazione cartesiana $y(x)$ della traiettoria, dobbiamo eliminare il tempo t nelle (4). Ad esempio, ricavo t^2 dalla $x(t)$ e lo sostituisco nella $y(t)$

$$\begin{cases} x(t) & = & \frac{1}{2}at^2 \\ \\ y(t) & = & h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t^2 & = & \frac{2x}{a} \\ & \downarrow & \\ y & = & h - \frac{1}{2}g \cdot \frac{2x}{a} \end{cases} \tag{19}$$

ossia

$$y(x) = h - \frac{g}{a}x \tag{20}$$

che è una retta con pendenza $-g/a$.