Filtraggio di un processo aleatorio con un SLS

- Data la $f_X(x;t)$, cioè la ddp al primo ordine, non è in genere possibile calcolare la $f_Y(y;t)$
  → Limitiamoci al calcolo degli indici statistici di Y(t)

- Cerchiamo di ricavare la funzione valor medio e la funzione di autocorrelazione del processo *Y*(*t*), supponendo di conoscere le stesse statistiche di *X*(*t*):

$$\boxed{\eta_Y(t)} = E\{Y(t)\} = E\{X(t) \otimes h(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha \right\}.$$

valore costante

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{h(\alpha) X(t-\alpha)\}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, \eta_X(t-\alpha)\, d\alpha = \boxed{\eta_X(t) \otimes h(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \cdot E\{X(t-\alpha)\}\, d\alpha$$

- La funzione valor medio del processo di uscita è pari alla *convoluzione* della funzione valor medio del processo in ingresso con la risposta impulsiva del sistema
  → Se definiamo il processo a media nulla $X_0(t) = X(t) - \eta_X(t)$, possiamo pensare il processo d'ingresso *X*(*t*) come la somma di una componente puramente aleatoria a valor medio nullo $X_0(t)$ e di una componente *determinata* pari alla funzione valor medio (nota), che viene *filtrata* dal sistema come un qualunque segnale determinato

Filtraggio di un processo aleatorio con un SLS

Ricaviamo, adesso, la funzione di autocorrelazione $R_Y(t_1,t_2)$ di $Y(t)$:

$$R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{[X(t_1)\otimes h(t_1)]\cdot[X(t_2)\otimes h(t_2)]\} =$$

$$= E\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)h(t_1-\alpha)\,d\alpha}_{Y(t_1)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)h(t_2-\beta)\,d\beta}_{Y(t_2)}\right\}$$

Invertendo le operazioni di media statistica e di integrazione otteniamo

$$R_Y(t_1,t_2) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\int_{\beta=-\infty}^{+\infty} E\{X(\alpha)h(t_1-\alpha)X(\beta)h(t_2-\beta)\}\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[R_X(t_1,\beta)\otimes h(t_1)]h(t_2-\beta)\,d\beta = R_X(t_1,t_2)\otimes h(t_1)\otimes h(t_2)$$

L'integrale diventa quindi una *doppia convoluzione*: la prima operazione di convoluzione coinvolge solo la variabile t_1 e, nello svolgimento di essa, la variabile t_2 viene considerata come una *costante*. Nello svolgimento del secondo prodotto, invece, i ruoli delle variabili si scambiano.

Filtraggio di un processo aleatorio stazionario in senso lato

Esaminiamo ora il caso particolare in cui il processo d'ingresso al filtro X(t) è *stazionario in senso lato*

→ Per la **funzione valor medio** si ha:

$$\eta_X(t)\otimes h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\underbrace{\eta_X(t-\alpha)}_{\eta_X}\,d\alpha=\eta_X\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,d\alpha=\eta_X\,H(0)\equiv\eta_Y$$

per cui il processo di uscita Y(t) ha a sua volta valor medio costante

Risposta in frequenza del sistema: guadagno in continua

→ Per quanto riguarda la **funzione di autocorrelazione**, applicando le proprietà dei processi stazionari in senso lato, otteniamo

$$R_Y(t,t-\tau)=E\{Y(t)\cdot Y(t-\tau)\}=E\{[X(t)\otimes h(t)]\cdot[X(t)\otimes h(t-\tau)]\}=$$

$$=\int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta)\int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,R_X(\tau+\beta-\alpha)\,d\alpha\,d\beta$$

Già da questa espressione si nota che la funzione di autocorrelazione del processo di uscita non dipende dal tempo *t*, per cui il processo *Y(t) è stazionario in senso lato*

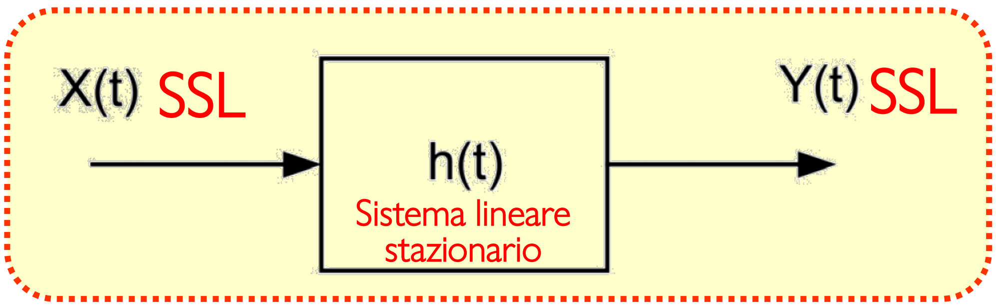
Filtraggio di un processo aleatorio stazionario in senso lato

Osserviamo che $\int\limits_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R_X(\tau+\beta-\alpha)\, d\alpha = h(\tau) \otimes R_X(\tau+\beta)$

per cui $R_Y(t, t-\tau) = R_Y(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\, [h(\tau) \otimes R_X(\tau+\beta)] d\beta$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = R_X(\tau) \otimes r_h(\tau)$$

dove $r_h(\tau) = h(\tau) \otimes h(-\tau)$ è la funzione di autocorrelazione della risposta impulsiva del filtro.



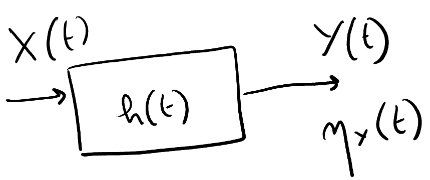
Filtraggio di un processo aleatorio stazionario in senso lato

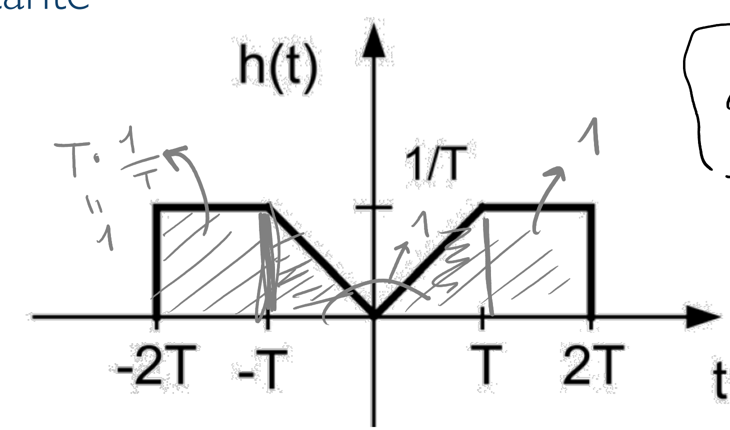
- **Esempio 9.10 – Libro LV**: Consideriamo il processo aleatorio parametrico

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT-\Theta)$$

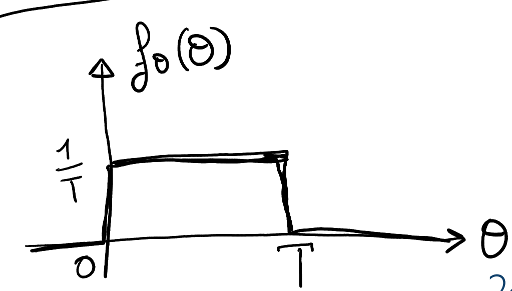
dove Θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in [0,*T*)

- Determinare la funzione valor medio $\eta_Y(t)$ del processo *Y*(*t*) ottenuto dal filtraggio di *X*(*t*) con un filtro la cui risposta impulsiva *h*(*t*) è rappresentata nella figura sottostante





$$\boxed{\eta_Y(t)=\eta_X(t)\otimes h(t)}$$



$$\eta_x(t) = \mathbb{E}\{X(t)\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT-\theta)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(\theta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT-\theta)\, d\theta = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \delta(t-kT-\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \delta(t-kT-\theta)\, d\theta = -\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-kT}^{t-(k+1)T} \delta(u)\, du$$

$u = t-kT-\theta$

$du = -d\theta$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} \delta(u)\, du = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\, du = \frac{1}{T} = \eta_x(t) = \eta_x$$

$$\eta_y = \eta_x \cdot H(0) = \eta_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \frac{1}{T}\cdot 3 = \frac{3}{T}$$

Densità spettrale di potenza di un p.a. stazionario

- Ogni volta che si ha a che fare con questioni di filtraggio è conveniente cercare una *descrizione frequenziale* del problema
  → *Analisi di Fourier dei segnali aleatori*

- Prendiamo in esame il caso di processi stazionari in senso lato
  – Le funzioni campione di un processo stazionario *non possono essere segnali a energia finita* → I segnali a energia finita, infatti, tendono a zero quando $t \rightarrow \infty$
  – Se tutte le funzioni campione del processo tendessero a zero, necessariamente tenderebbe a zero anche la funzione valor medio del processo → Non potrebbe risultare in generale costante (eccetto che per processi a media nulla)

- In generale le funzioni campione di un processo stazionario sono *segnali a potenza finita* → Il segnale aleatorio stesso ammetterà una *densità spettrale di potenza*

Densità spettrale di potenza di un p.a. stazionario

- La definizione di *funzione densità spettrale di potenza* $S_X(f)$ per un segnale aleatorio è molto simile a quella relativa a un segnale determinato a potenza finita

- Per un processo aleatorio, si deve pensare di eseguire l'operazione di troncamento temporale su *ciascuna funzione campione*, ottenendo quindi una quantità aleatoria variabile da funzione campione a funzione campione, ovvero con il risultato dell'esperimento:

$$\tilde{S}_X(\omega; f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|\tilde{X}_T(\omega; f)\right|^2}{T}$$

dove

$$\tilde{X}_T(\omega; f) = \mathcal{F}\left[x(\omega; t)\,\mathrm{rect}(t/T)\right]$$

Teorema di Wiener-Khintchine

- Per ottenere la densità spettrale del *processo*, indipendente dalla particolare funzione campione, bisogna aggiungere un'operazione di *valor medio*
  → Mediare l'andamento delle varie funzioni campione:

$$S_X(f) = E\{\tilde{S}_X(\omega; f)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{\left|\tilde{X}_T(\omega; f)\right|^2\right\}}{T}$$

- Questa definizione è una diretta estensione di quella per segnali determinati, ed è utilizzabile anche per processi *non stazionari* → Tuttavia è quasi sempre di difficile applicazione pratica

- Per i processi stazionari, si usa allora una *diversa* definizione di densità spettrale di potenza → *Teorema di Wiener-Khintchine*: la densità spettrale di potenza per segnali determinati è calcolabile come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$
- Questo teorema vale anche nel caso di processi aleatori stazionari

$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$

Teorema di Wiener-Khintchine

$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{0}^{\infty} R_x(-\tau')\, e^{j2\pi f\tau'} d\tau' + \int_{0}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

$\tau' = -\tau$

$= \int_{0}^{\infty} R_x(\tau) \cdot \left[e^{j2\pi f\tau} + e^{-j2\pi f\tau}\right] d\tau$

$= 2 \cdot \cos(2\pi f\tau)$

Possiamo allora definire la funzione densità spettrale di potenza di un processo aleatorio $S_X(f)$ come la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\}$:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} R_X(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau$$

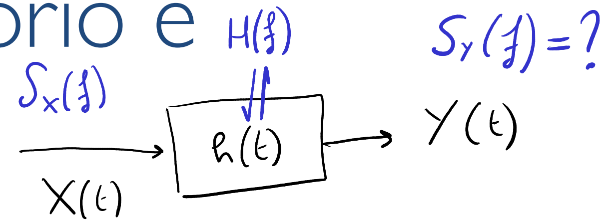
- La densità spettrale di potenza $S_X(f)$ è una funzione *reale e pari* (perché $R_X(\tau)$ è una funzione reale e pari)

- La potenza media statistica P_X del processo $X(t)$ può essere calcolata integrando $S_X(f)$ su tutto l'asse delle frequenze

$$P_X = E\{X^2(t)\} = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(f) df$$

- La densità spettrale di potenza $S_X(f)$ è una funzione *non negativa*

Filtraggio di un processo aleatorio e densità spettrale di potenza



Cerchiamo di mettere in relazione le caratteristiche spettrali dei processi di ingresso $X(t)$ e di uscita $Y(t)$, entrambi *stazionari in senso lato*

$$S_Y(f) = \mathrm{F}[R_Y(\tau)] = \mathrm{F}[R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)] = S_X(f)H(f)H(-f)$$

La risposta impulsiva $h(t)$ del sistema è un segnale reale → La sua trasformata di Fourier gode della proprietà di simmetria Hermitiana: $H(-f) = H^*(f)$

$$S_Y(f) = S_X(f)H(f)H^*(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

- La stessa «relazione del filtraggio» vale per i segnali *determinati*
- Lo spettro di potenza del processo di uscita può essere ricavato da quello del processo d'ingresso una volta note le caratteristiche di selettività in frequenza del sistema, che sono riassunte nella *risposta in ampiezza al quadrato*
- La risposta in fase del sistema *non* influenza la potenza del processo di uscita

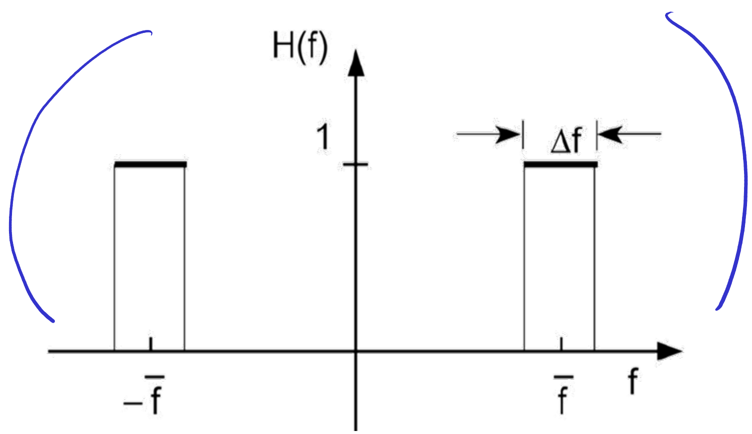
Interpretazione della densità spettrale di potenza

La relazione del filtraggio permette di dimostrare che la funzione $S_X(f)$, definita come trasformata di Fourier della $R_X(\tau)$, è **non negativa** e descrive la **distribuzione della potenza sulle varie componenti frequenziali** nello spettro del segnale aleatorio $X(t)$

H(f)

→ Se filtriamo $X(t)$ con un *filtro passa-banda ideale*, la potenza del processo di uscita $Y(t)$ può essere calcolata come

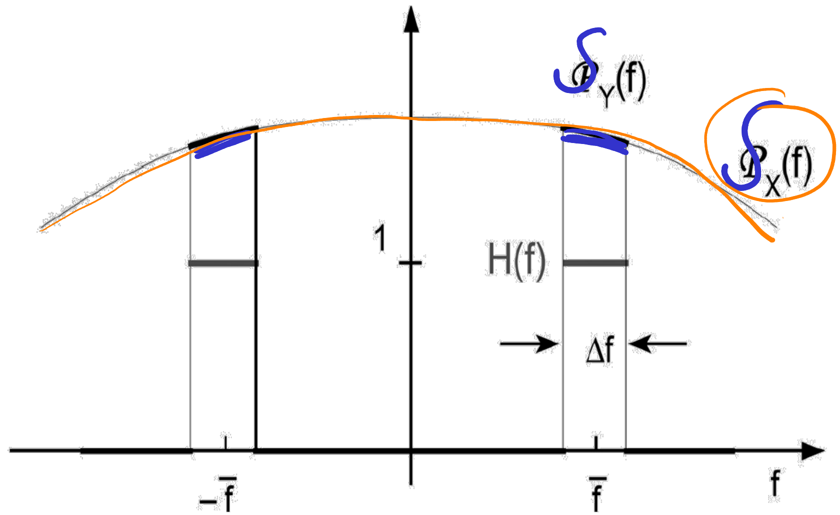
$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, |H(f)|^2\, df = 2 \int_{\bar{f}-\Delta f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2} S_X(f)\, df$$



Interpretazione della densità spettrale di potenza

Se si riduce progressivamente la banda passante Δf del filtro (cioè si considera un filtro estremamente selettivo), si può approssimare $S_X(f)$ all'interno della banda stessa con una *costante* → La potenza del segnale d'uscita può essere approssimata da:

$$P_Y \cong 2\Delta f \cdot S_X(\bar{f})$$



- P_Y rappresenta il *contributo* alla potenza totale P_X delle sole componenti del segnale $X(t)$ con frequenze appartenenti alla banda passante del filtro

- Ciò corrisponde alla classica definizione di densità di una grandezza fisica (la potenza) rispetto a una misura di estensione (l'ampiezza di una banda) → Giustifica il nome con il quale si designa la funzione $S_X(f)$: *densità spettrale* di potenza del segnale

Esercizio: densità spettrale di potenza

- Esempio 9.11 – Libro LV: Calcoliamo la densità spettrale di potenza del processo parametrico

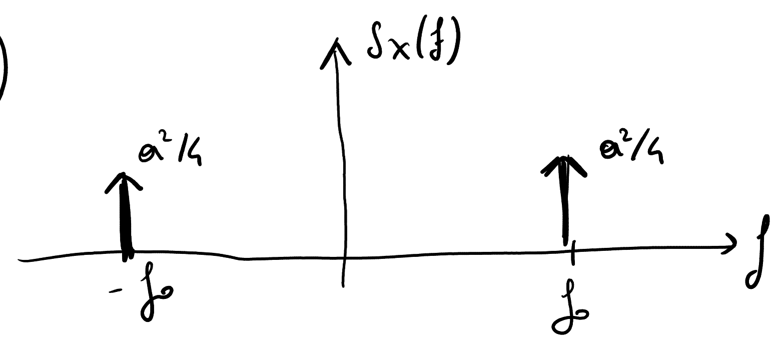
$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$$

dove Θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0,2\pi]$.

Dall'esercizio 2 della lezione precedente sappiamo che: $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

$$S_x(f) = \mathcal{F}(R_x(\tau)) = \frac{a^2}{2} \cdot \mathcal{F}(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{a^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)\right]$$

$$= \frac{a^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{a^2}{4}\delta(f+f_0)$$

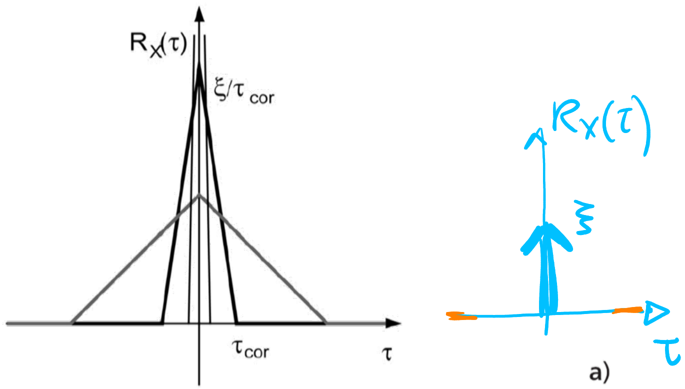


Processo di rumore bianco a tempo continuo

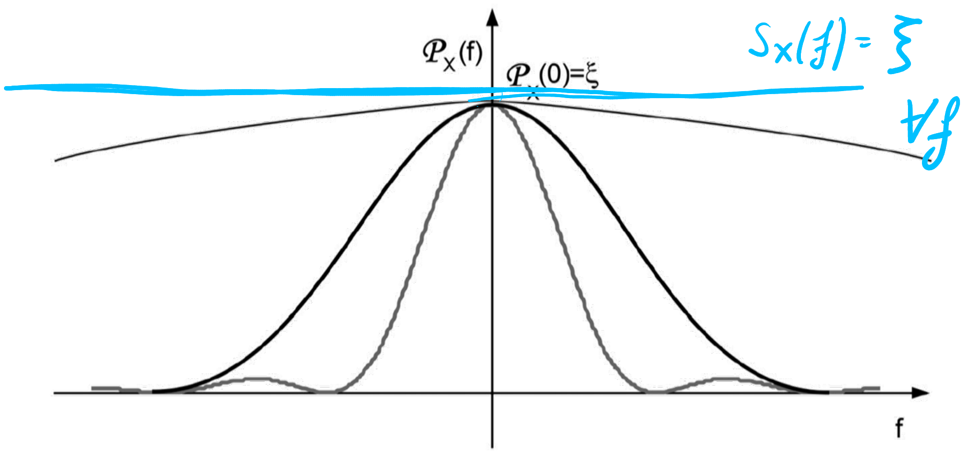
- La grandezza corrispondente al *tempo di correlazione* in ambito frequenziale è naturalmente la *banda dello spettro di potenza* del processo

- Se la funzione di autocorrelazione di un processo decresce rapidamente, cioè il tempo di correlazione è piccolo, la densità spettrale corrispondente ha una banda grande, viceversa se il tempo di correlazione è grande

- Quindi, quanto maggiore è la rapidità di variazione delle realizzazioni di un processo, tanto più grande è la banda del suo spettro di potenza



a)



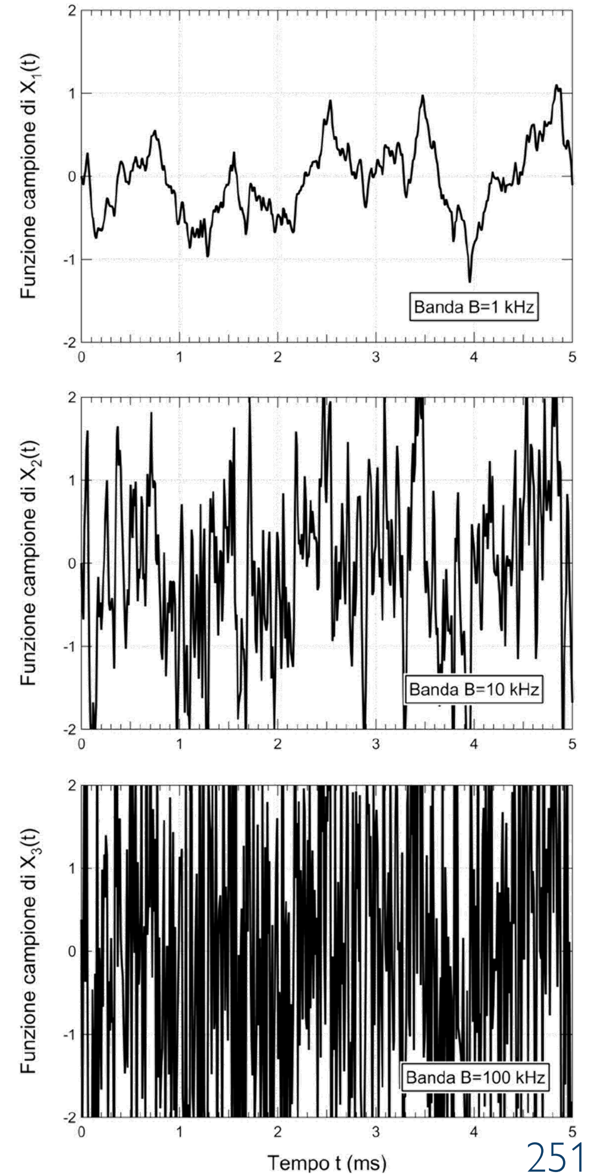
b)

Processo di rumore bianco a tempo continuo

- Questo fenomeno è ancora più chiaro nella figura a fianco, che mostra tre funzioni campione di tre processi aleatori $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ con banda progressivamente crescente → La *rapidità di variazione* cresce, così come l'*ampiezza delle escursioni* del segnale (per effetto dell'incremento della potenza del segnale stesso)

- Cosa succede se consideriamo una situazione in cui la banda dello spettro di potenza tende a crescere *illimitatamente*, mantenendo sempre il medesimo valore per f=0 ? $S_X(0) = \xi$

- La densità spettrale di potenza $S_X(f)$ del processo $X(t)$ tende a diventare costante ($S_X(0) = \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, d\tau$) mentre il tempo di correlazione τ_{cor} tende a ridursi sempre più



Processo di rumore bianco a tempo continuo

Al limite, si arriva a una situazione in cui la funzione di autocorrelazione è *impulsiva*:

$$S_X(f) = S_X(0) = \xi \iff R_X(\tau) = \xi\delta(\tau)$$

Un processo aleatorio stazionario (almeno) in senso lato che presenta queste caratteristiche statistiche viene chiamato δ-*correlato* o più comunemente *processo di rumore bianco*

- L'appellativo *bianco* deriva dall'analogia dello spettro di potenza di questo processo con quello della *luce bianca* → Il rumore bianco contiene componenti a tutte le frequenze, da $-\infty$ a $+\infty$, con la stessa intensità, così come la luce bianca "contiene tutti i colori"

- Osserviamo inoltre che un processo bianco ha sempre valor medio nullo