Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

A

calcoliamo il valore nel punto di rottura $\omega = \omega_0$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{4\xi^2}} = -20\log(2\xi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \xi = 0 \\ 0\ dB & \xi = 1/2 \\ -3\ dB & \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -6\ dB & \xi = 1 \end{cases}$$

caso limite: equivale a due poli reali (avevamo visto che l'errore in questo caso era -6dB)

REGOLA PRATICA

Considerare il diagramma asintotico solo se lo smorzamento è > 0.3

se smorzamento è piccolo, l'approssimazione asintotica non va bene

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

calcoliamo il valore nel punto di rottura $\underline{\omega = \omega_0}$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{4\xi^2}} = -20\log(2\xi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \xi = 0 \\ 0\ dB & \xi = 1/2 \\ -3\ dB & \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -6\ dB & \xi = 1 \end{cases}$$

caso limite: equivale a due poli reali (avevamo visto che l'errore in questo caso era -6dB)

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \xRightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = -\operatorname{atan2}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

arcotangente definita su quattro quadranti

Diagramma asintotico

IF $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow |G(j\omega)| = 0$ dB

IF $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$

$$|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} =$$

$$= 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega)$$

pendenza di -40 dB/dec (-12 dB ottava)

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \overset{s = j\omega}{\Longrightarrow} G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \xRightarrow{s = j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Il massimo dell'ampiezza corrisponde al minimo della funzione:

Posto $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\qquad f(u) = (1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2$

Derivando e uguagliando a zero:

$$\frac{df(u)}{du} = 0 = -4u(1-u^2) + 8\xi^2 u \longrightarrow u_{MAX} = \frac{\omega_{MAX}}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

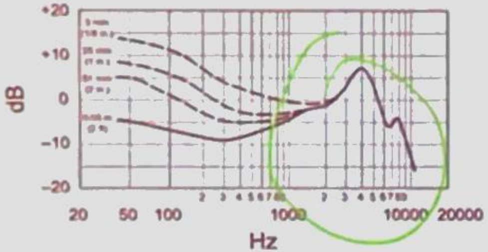
con $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Diagrammi di Bode

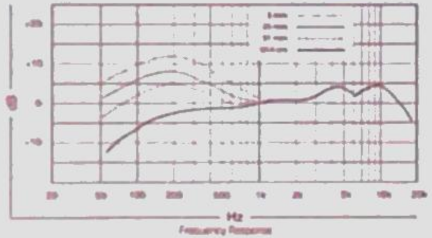
Microfono

Frequenze udibili dall'orecchio umano tra: 20Hz e 20kHz

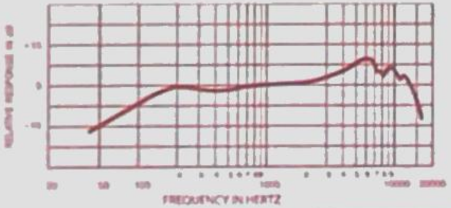
Microfoni specializzati per esaltare determinati campi di frequenza



Risposta in frequenza microfono per grancassa (amplifica le basse frequenze)



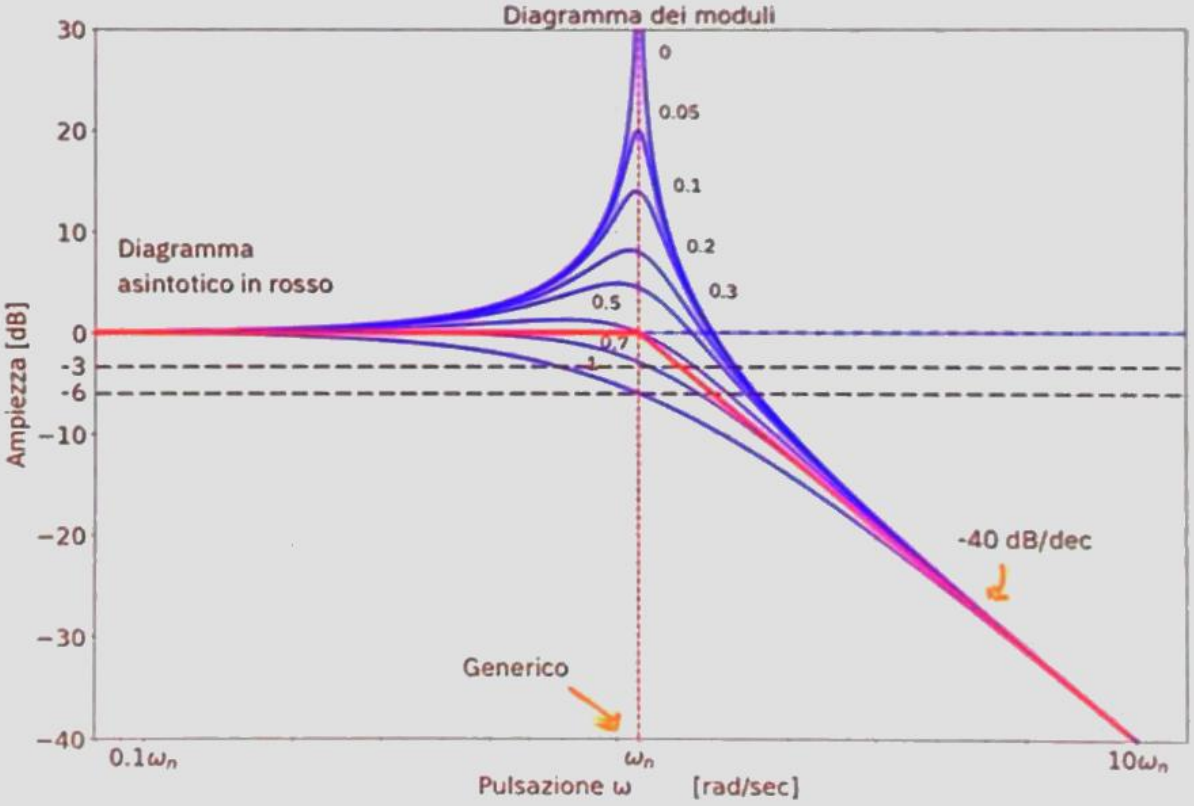
Risposta in frequenza microfono per la voce (leggera amplificazione delle frequenze del parlato)



Risposta in frequenza microfono per chitarra elettrica

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI



Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \overset{s = j\omega}{\Longrightarrow} G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Smorzamento $\xi > 0$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx 0$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -180$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -90$$

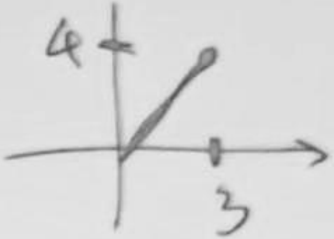
REGOLA PRATICA

Considerare la fase nulla una decade prima del punto di rottura;
Pari a -180 gradi una decade dopo il punto di rottura;
Raccordare linearmente i valori passando esattamente per la fase -90 gradi nel punto di rottura.

La regola ha senso solo se il fattore di smorzamento è > 0.3

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

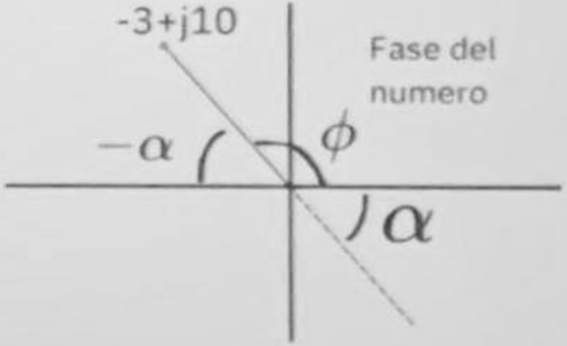


Esempio

$$z = x + jy = 3 + j4$$

$$|z|^2 = r^2 = x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow |z| = 5$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \arctan(1.25) = 51.34°$$



$$z = -3 + j10$$

$$|z|^2 = 9 + 100 = 109 \rightarrow |z| = 10.44$$

$$\phi = \mathrm{atan}\left(\frac{10}{-3}\right) = -73.28$$

$$\rightarrow \mathrm{atan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi = 180 - 73.28 = 106.72$$

Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fase:

$$\angle G(j\omega) = -\mathrm{atan2}\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

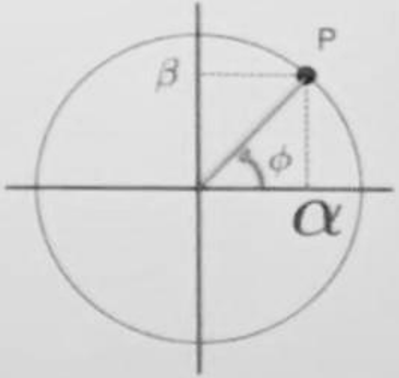
Fase di numeri complessi:

$$\phi = a\tan\frac{\beta}{\alpha} \qquad \alpha > 0$$

$$\phi = a\tan\frac{\beta}{\alpha} + \pi \qquad \alpha < 0, \beta \geqslant 0$$

$$\phi = a\tan\frac{\beta}{\alpha} - \pi \qquad \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} sign(\beta) \qquad \alpha = 0, \beta \neq 0$$



Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20\log \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \rightarrow \boxed{20\log \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Valore del modulo al variare dello smorzamento

Il massimo dell'ampiezza corrisponde al minimo della funzione:

Posto $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\qquad f(u) = (1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2$

Derivando e uguagliando a zero:

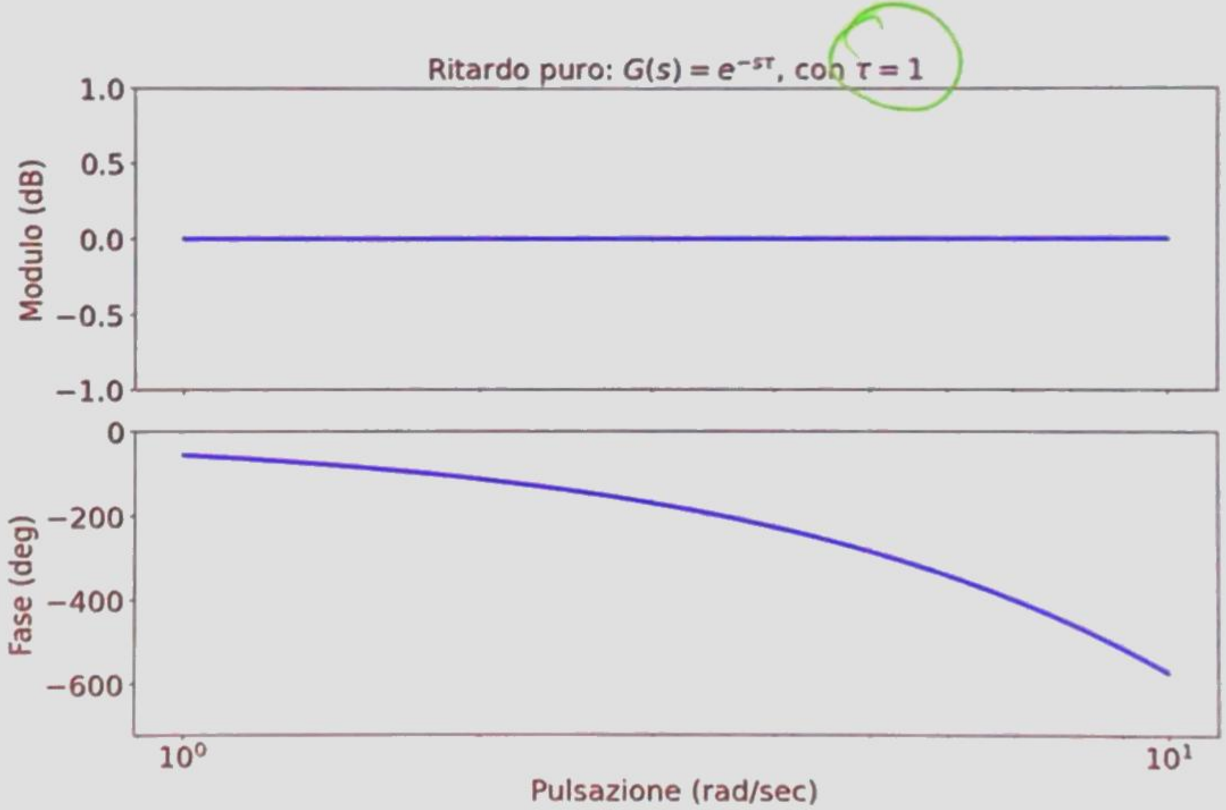
$$\frac{df(u)}{du} = 0 = -4u(1-u^2) + 8\xi^2 u \longrightarrow u_{MAX} = \frac{\omega_{MAX}}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

con $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Diagrammi di Bode

RITARDO PURO

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$



Diagrammi di Bode

RITARDO PURO

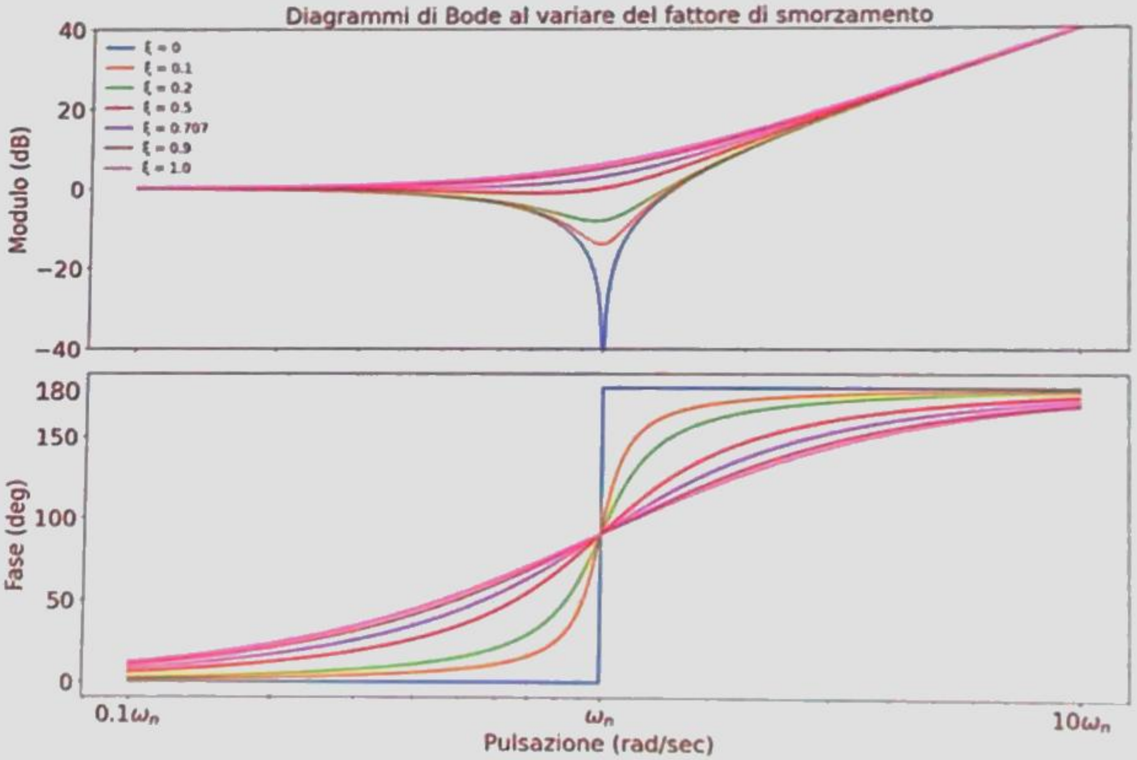
$$G(s) = e^{-s\tau} \xRightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = e^{\overbrace{-j\omega\tau}^{\text{Fase } -\omega\tau}}$$

modulo 1 (ovvero 0 dB)

Diagrammi di Bode

ZERI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$



Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI