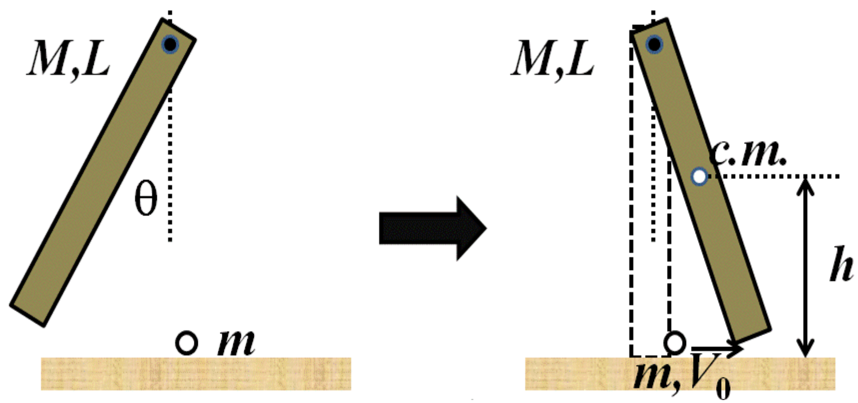
Es. del 8/5/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Prova scritta 01/07/2016 Esercizio 1. Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci

Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno ad un asse senza attrito passante per un suo estremo, come in Figura. La sbarra viene ruotata di un angolo $\theta = 30^{o}$ rispetto alla posizione di equilibrio e lasciata libera sotto l'azione della gravità con velocità iniziale nulla. Giunta in posizione verticale la sbarra colpisce una massa m ferma, che a seguito dell'urto inizia a muoversi su un piano orizzontale con attrito, di coefficiente d'attrito dinamico μ_D ignoto. La velocità iniziale (subito dopo l'urto) della massa m è $\vec{V}_0$ e la sbarra dopo l'urto continua a ruotare superando la verticale.

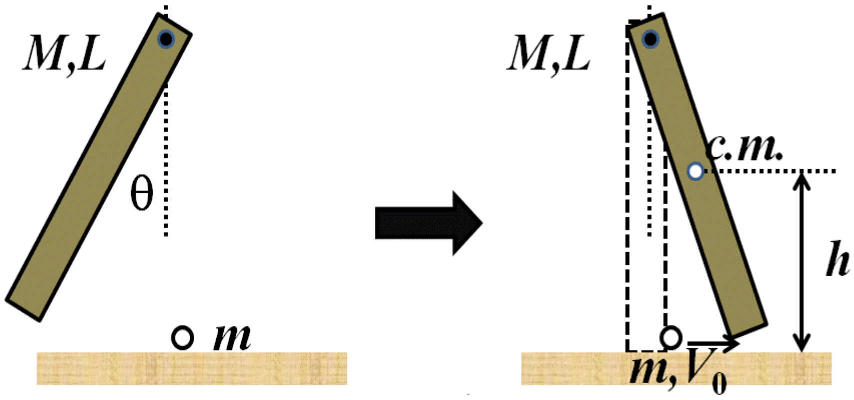


1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si conserva sicuramente durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano durante l'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi.

4) Per determinare il modulo della velocità iniziale V_0 si misura la velocità della massa m durante il suo moto sul piano con attrito in due punti: a distanza $l_1 = 1$ m dal punto dell'urto la velocità è $V_1 = 4\ \mathrm{m/s}$, mentre a distanza $l_2 = 2$ m la velocità è $V_2 = 1\ \mathrm{m/s}$. Si calcolino i valori numerici di V_0 e μ_D usando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



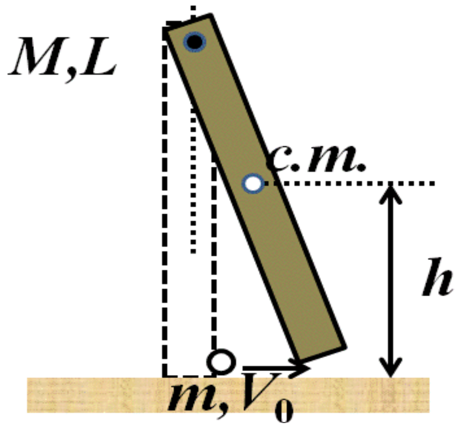
1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si <u>conserva sicuramente</u> durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

1) Nell'istante dell'urto si conserva sicuramente il momento angolare $\vec{L}$ rispetto all'asse di rotazione perché le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva e la cui direzione nel punto di equilibrio è a braccio nullo.

La quantità di moto totale $\vec{P}$ non si conserva a causa della forza impulsiva esercitata dall'asse di rotazione

L'energia totale E in generale può non conservarsi a causa delle forze interne che si sviluppano durante l'urto.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?



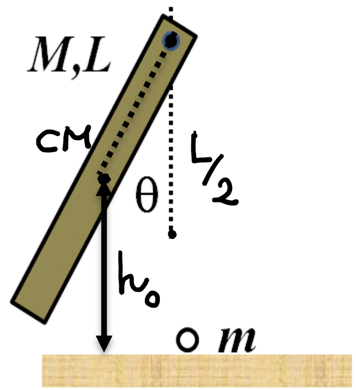
2) Applichiamo la legge di conservazione del momento angolare un istante prima dell'urto e un istante dopo l'urto: $\vec{L}_i = I\vec{\omega}_i = \vec{L}_f = I\vec{\omega}_f + mLV_0\hat{z}$

dove $I = ML^2/3$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, $\vec{\omega}_i$ e $\vec{\omega}_f$ sono le velocità angolari della sbarra prima e dopo l'urto e $\hat{z}$ è la direzione dell'asse di rotazione (uscente dallo schermo).

Si ottiene quindi: $\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i - \frac{mLV_0}{M\,L^2/3}\hat{z} = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$

La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0 \quad \Longrightarrow V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i.$

Il modulo della velocità angolare della sbarra prima dell'urto si ricava utilizzando la conservazione dell'energia durante la fase di discesa della sbarra, il cui centro di massa parte da un'altezza $h_0 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$



e scende fino a $h_i = L/2$ dove abbiamo usato l'indice "0" per l'istante di partenza della sbarra e mantenuto l'indice "i" per la sbarra in posizione verticale subito prima dell'urto.

Applicando la conservazione dell'energia e considerando che alla quota h_0, ω è nulla:

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + Mg\frac{L}{2}[1 + (1 - \cos\theta)] = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mg\frac{L}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\omega_i^2 = 2\frac{Mg}{M\,L^2/3}\frac{L}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{3g}{L}(1 - \cos\theta) \quad \Longrightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}}$$

da punto 2):

$$\vec{\omega}_f = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$$

otteniamo : $\vec{\omega}_f = \left(\sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}} - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$

L'altezza massima raggiunta dal centro di massa della sbarra si può calcolare utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto. Infatti:

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega_f^2 + \frac{MgL}{2} = E_f = K_f + U_f = 0 + Mgh \quad \Longrightarrow h = \frac{L}{2}\left(\frac{L\omega_f^2}{3g} + 1\right)$$

Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

Avevamo ottenuto:

La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0$

$$\Longrightarrow V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i$$

Poichè $\omega_i = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$

il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro è

$$V_{0-max} = \frac{ML}{3m}\omega_i = \frac{ML}{3m}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

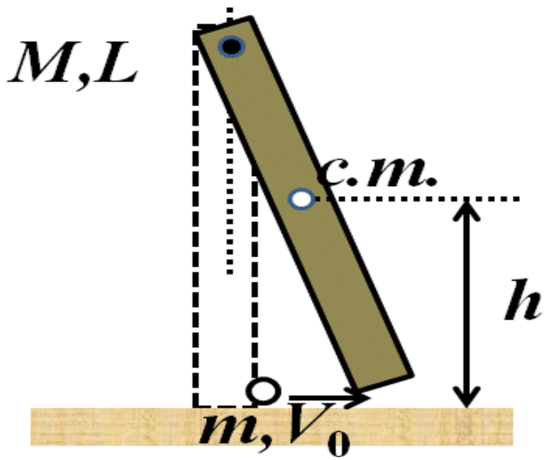
3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano durante l'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi. ($\vec{L}$, $\vec{P}, E_{totale}$)

3)

La variazione del momento angolare è nulla in quanto si conserva.

La quantità di moto prima dell'urto è dovuta solo alla sbarra: $\vec{P}_i = M\vec{V}_{c.m.,i} = M\frac{L}{2}\omega_i\hat{x}$

dove $\hat{x}$ è l'asse orizzontale, parallelo al piano in cui si muove la massa m.



Dopo l'urto la quantità di moto comprende sia quella della sbarra, sia quella della massa m, per cui:

$$\vec{P}_f = M\vec{V}_{c.m.,f} = \left(M\frac{L}{2}\omega_f + mV_0\right)\hat{x} = \left(M\frac{L}{2}\left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right) + mV_0\right)\hat{x}$$

$$= \left(M\frac{L}{2}\omega_i - \frac{3mV_0}{2} + mV_0\right)\hat{x} = \vec{P}_i - \frac{mV_0}{2}\hat{x} \quad \Longrightarrow \Delta\vec{P} \equiv \vec{P}_f - \vec{P}_i = -\frac{mV_0}{2}\hat{x}$$

La quantità di moto non si può mai conservare.

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano durante l'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi. ($\vec{L}$, $\vec{P}$, E_{totale})

Per quanto riguarda l'energia è ovviamente sufficiente considerare la variazione di energia cinetica, perché quella potenziale non cambia durante l'urto.

L'energia cinetica iniziale è dovuta solo al moto della sbarra:

$$E_i = K_i = \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \frac{ML^2}{6} \omega_i^2$$

mentre quella finale comprende anche il contributo della massa m:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{m}{2} V_0^2 = \frac{ML^2}{6} \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML} \right)^2 + \frac{m}{2} V_0^2$$

$$= \frac{ML^2}{6} \left(\omega_i^2 + \frac{9m^2 V_0^2}{M^2 L^2} - 6 \frac{\omega_i m V_0}{ML} \right) + \frac{m}{2} V_0^2 = K_i + \frac{3m^2 V_0^2}{2M} - \omega_i m V_0 L + \frac{m}{2} V_0^2$$

$$= K_i + \frac{mV_0^2}{2} \left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1 \right) \Longrightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{mV_0^2}{2} \left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1 \right)$$

A parte il caso $V_0 = 0$, che è ovviamente privo di senso, l'energia si può conservare se:

$$\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow V_0 = \frac{2\omega_i LM}{(3m + M)}$$

4) Per determinare il modulo della velocità iniziale V_0 si misura la velocità della massa m durante il suo moto sul piano con attrito in due punti: a distanza $l_1 = 1$ m dal punto dell'urto la velocità è $V_1 = 4$ m/s, mentre a distanza $l_2 = 2$ m la velocità è $V_2 = 1$ m/s. Si calcolino i valori numerici di V_0 e μ_D usando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

4) Per determinare il coefficiente di attrito dinamico μ_D possiamo immediatamente notare che, applicando il teorema dell'energia cinetica nel tratto fra l_1 e l_2, si ha:

$$\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{m}{2}V_2^2 = \mu_D m g (l_2 - l_1) \quad \Longrightarrow \mu_D = \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g(l_2 - l_1)}\right) = 0.75$$

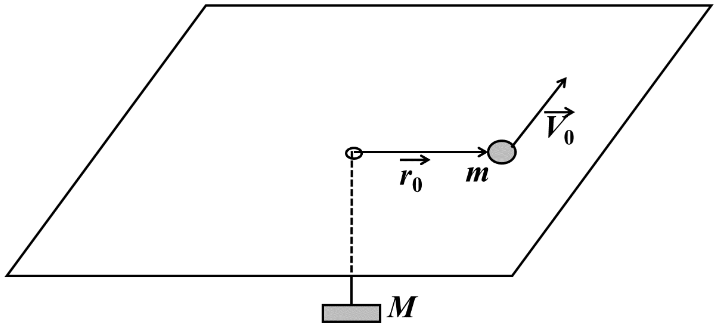
Se ora applichiamo nuovamente lo stesso teorema al tratto fra il punto dell'urto e l_1 otteniamo:

$$\frac{m}{2}V_0^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = \mu_D m g l_1 \quad \Longrightarrow V_0 = \sqrt{V_1^2 + 2\mu_D g l_1} = 5.57\ \mathrm{m/s}$$

Prova scritta 08/06/2018 Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci

Esercizio 1

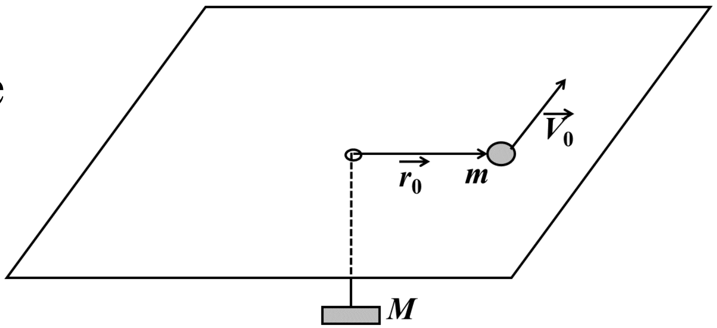
Su un tavolo senza attrito di dimensioni illimitate è appoggiato un disco di massa m, assimilabile ad un punto materiale. Il disco è connesso, tramite una corda inestensibile di lunghezza l e di massa trascurabile passante per un piccolissimo foro praticato sulla superficie del tavolo, ad un corpo di massa M sospeso sotto al piano del tavolo, come in Figura.



All'istante $t = 0$ il disco si trova ad una distanza r_0 dal foro ed ha una velocità $\vec{V}_0$ la cui direzione forma un angolo di 90° con la parte della corda distesa sul tavolo compresa fra il disco ed il foro (schematizzabile come in Figura con un vettore $\vec{r}_0$). Tutti gli attriti sono trascurabili.

1) Si dica quali delle seguenti quantità si conservano sicuramente durante il moto e perché: a) quantità di moto del disco; b) quantità di moto del corpo di massa M; c) energia totale del sistema (disco + corpo + fune); d) momento angolare del disco rispetto al foro.

1) Le forze agenti sul sistema sono la forza di gravità sul corpo di massa M e sul disco di massa m, la reazione perpendicolare del piano del tavolo sul disco e la forza di tensione della fune, che è una forza interna ed è applicata sul disco e su M.



La reazione perpendicolare compensa $m\vec{g}$, ma la forza di tensione $\vec{T}$ della fune non è compensata, per cui il disco è accelerato con accelerazione data da $\vec{T}/m$.

Anche il corpo di massa M si muove in generale di moto accelerato, perché su di esso agiscono $M\vec{g}$ e $\vec{T}$ che non sono eguali ed opposte, tranne che nel caso particolare del punto 2), come vedremo.

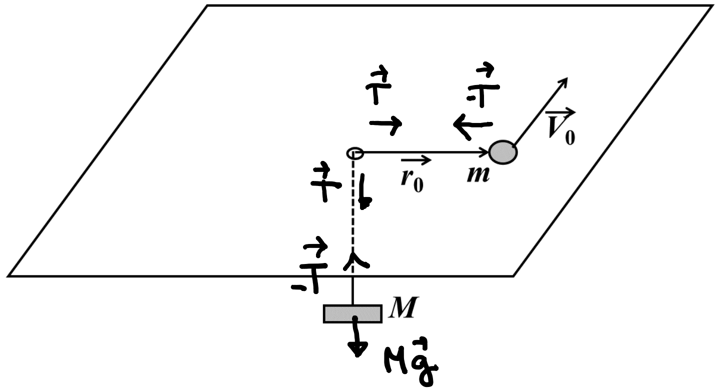
Pertanto le quantità di moto del disco e del corpo di massa M non si conservano.

L'unica forza non compensata agente su m, cioè la tensione $\vec{T}$, segue la direzione istantanea della corda per cui è una forza centrale, diretta in ogni istante dal disco al foro. Tale forza non ha quindi momento rispetto al foro, per cui $\vec{L}_m$ il momento angolare del disco rispetto al foro si conserva.

L'unica forza presente potenzialmente non conservativa è la tensione $\vec{T}$, il cui lavoro è nullo a causa della inestensibilità della corda

Di conseguenza si conserva l'energia totale del sistema (disco + corpo + fune).

2) Si calcoli in funzione di r_0 il valore di V_0 necessario affinché il disco compia un moto circolare uniforme.



2) Affinché il disco possa compiere un moto circolare uniforme sul tavolo è necessario che la forza di tensione $\vec{T}$ imprima al disco stesso l'accelerazione centripeta necessaria per mantenersi su una traiettoria circolare di raggio r_0.

Le equazioni del moto per il disco e la massa M sono quindi:

$$\begin{cases} -\vec{T} = m\vec{a}_c = -m\dfrac{V_0^2}{r_0}\hat{r}_0 \\ -\vec{T} + M\vec{g} = 0 \end{cases}$$

Pertanto si può sostituire nella prima equazione del sistema il modulo della tensione ricavandolo dalla seconda e determinare V_0:

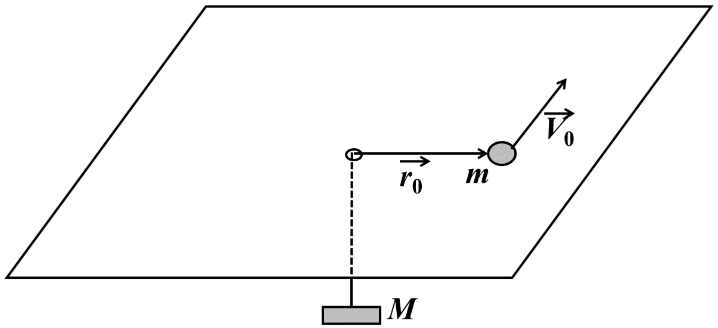
$$\left|-m\frac{V_0^2}{r_0}\hat{r}_0\right| = m\frac{V_0^2}{r_0} = |\vec{T}| = Mg \qquad \Longrightarrow V_0^2 = \frac{Mgr_0}{m} \qquad \Longrightarrow V_0 = \sqrt{\frac{Mgr_0}{m}}$$

D'altra parte, essendo la corda inestensibile, il corpo di massa M deve mantenersi ad una quota fissa di valore $-(l - r_0)$ rispetto alla superficie del tavolo, cioè deve rimanere fermo nella posizione in cui è stato inizialmente sospeso, sotto l'azione della sua forza peso e della tensione della corda.

Notiamo che in questo caso particolare si conserva anche la quantità di moto del corpo di massa M che rimane sempre fermo.

3) Si supponga ora che V_0 sia diverso dal valore calcolato nel punto 2), per cui la distanza del disco dal foro non è più fissa. Indicando con r questa distanza e con $\omega(r)$ la velocità angolare del disco quando è a distanza r dal foro si usi una della quantità conservate determinate nel punto 1) per ricavare la relazione fra ω e r.

3) si conserva $\vec{L}_m$,momento angolare del disco rispetto al foro e l'energia totale del sistema



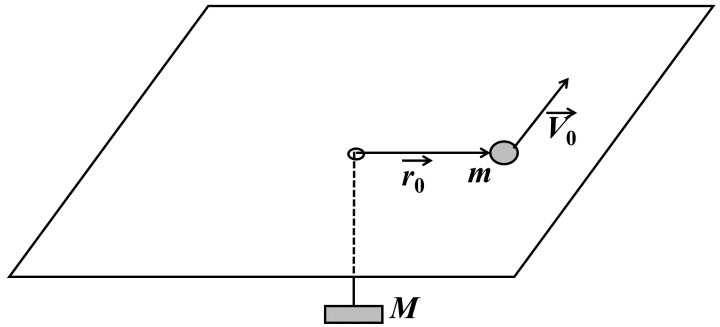
Poiché il momento angolare del disco rispetto al foro si conserva possiamo scrivere:

$$\vec{L}(r) = \vec{r} \wedge m\vec{V}(r) = m\,\vec{r} \wedge (\dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} = \vec{L}(r_0) = \vec{r}_0 \wedge m\vec{V}_0 = mr_0V_0\hat{z}$$

dove si è sfruttata l'ortogonalità fra $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$ e si è introdotto l'asse $\hat{z}$ perpendicolare al piano del tavolo. Per definizione la velocità angolare $\vec{\omega}$ è parallela a $\hat{z}$. Si ottiene quindi:

$$mr^2\vec{\omega} = mr_0V_0\hat{z} \qquad \Longrightarrow \vec{\omega} = \frac{r_0V_0}{r^2}\hat{z} \qquad \Longrightarrow \omega = \frac{r_0V_0}{r^2}$$

4) (**Difficile.**) Si utilizzi un'altra delle grandezze conservate determinate nel punto 1) per dimostrare che la distanza del disco dal foro è compresa fra un minimo r_{min} ed un massimo r_{max} (senza calcolarli !) e quindi in particolare che il disco non può precipitare nel foro.



L'altra grandezza fisica conservata è l'energia totale del sistema, che si compone dell'energia cinetica del disco e della massa M e dell'energia potenziale di M.

L'energia potenziale del disco è irrilevante perché il disco è sempre appoggiato sul tavolo, per cui la sua quota non può cambiare. Scegliendo quindi lo zero dell'energia potenziale sulla superficie del tavolo, l'energia totale del sistema quando il disco si trova a distanza r dal foro prende la forma:

$$E = K_m + K_M + U_M = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} - Mg(l - r)$$

in quanto $(l - r)$ è la lunghezza del tratto di corda che sporge al di sotto del tavolo. Notiamo innanzitutto che il termine $-Mgl$ è una costante additiva che può essere omessa per l'arbitrarietà della scala dell'energia potenziale. Inoltre la velocità $\vec{V}_M$, diretta verticalmente, è proprio la derivata rispetto al tempo della quota della massa M rispetto al tavolo, cioè:

$$E = K_m + K_M + U_M = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} - Mg(l-r)$$

in quanto $(l-r)$ è la lunghezza del tratto di corda che sporge al di sotto del tavolo. Notiamo innanzitutto che il termine $-Mgl$ è una costante additiva che può essere omessa per l'arbitrarietà della scala dell'energia potenziale. Inoltre la velocità $\vec{V}_M$, diretta verticalmente, è proprio la derivata rispetto al tempo della quota della massa M rispetto al tavolo, cioè:

$$\vec{V}_M = -\frac{d}{dt}\big((l-r)\hat{z}\big) = \dot{r}\hat{z} \qquad \Longrightarrow V_M^2 = \dot{r}^2$$

Infine la velocità $\vec{V}_m$ ha, come nella (4), sia la componente radiale $\dot{r}\hat{r}$ sia la componente tangenziale $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega r \hat{\theta}$ dove $\hat{\theta}$ è il versore tangenziale ortogonale a $\hat{r}$.

Quindi: $V_m^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2$

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)}{2} + \frac{M\dot{r}^2}{2} + Mgr + \text{cost} = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + Mgr + \text{cost}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E} = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{m r_0^2 V_0^2}{2r^2} + Mgr + \text{cost}$$

dove abbiamo usato $\omega = \frac{r_0 V_0}{r^2}$ come determinato dalla conservazione del momento angolare

$$\Rightarrow \mathrm{E} = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{m r_0^2 V_0^2}{2r^2} + Mgr + \text{cost}$$

Poiché l'energia totale è costante, la variabile r non può assumere qualsiasi valore: infatti il secondo termine diverge per $r \to 0$, mentre il terzo diverge per $r \to \infty$. Quindi il disco non può allontanarsi arbitrariamente dal foro (ovvero esiste un r_{max}) e non può neanche avvicinarsi arbitrariamente ad esso (ovvero esiste un r_{min}).

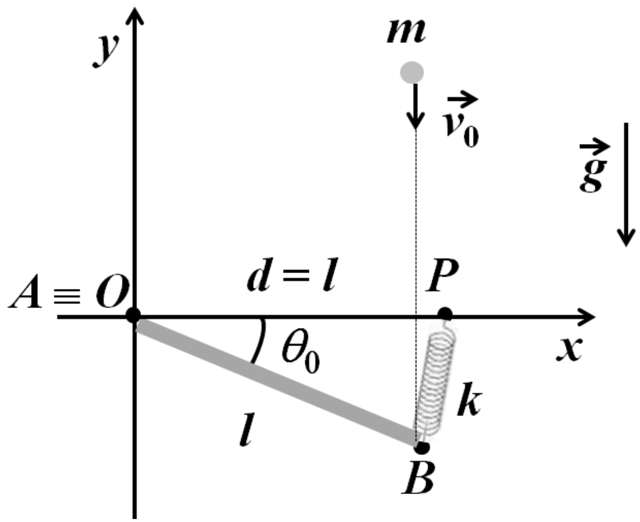
La determinazione di r_{min} e r_{max} si effettua notando che nei punti estremali della variabile r (funzione del tempo) la sua derivata temporale deve essere nulla, per cui nell'ultima equazione $\dot{r} = 0$ per $r = r_{min}$ e $r = r_{max}$.

Poichè r_0 e $\vec{V}_0$ sono noti, i valori estremi r_{min} e r_{max} sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$E = \frac{m r_0^2 V_0^2}{2r^2} + Mgr = E_0 = \frac{m V_0^2}{2} + Mgr_0$$

in cui la costante (comune a E e E_0) è stata ovviamente omessa.

Prova scritta 30/06/2017: Esercizio 1 **Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci**



Una sbarra omogenea AB di lunghezza $l = 1$ m, massa $M = 2$ kg e sezione di dimensioni trascurabili è incernierata con il suo estremo A nel punto O, origine del sistema di riferimento mostrato in Figura.

La sbarra può ruotare senza attrito intorno ad A in un piano verticale. L'estremità B è collegata ad un punto P dell'asse x, fisso ad una distanza $d = l$ dall'origine O, tramite una molla di costante elastica $k = 9.81$ N/m e lunghezza a riposo nulla.

L'asta è inizialmente in condizione di equilibrio.

1) Si calcoli l'angolo θ_0 formato dall'asta con l'asse x quando il sistema è fermo.

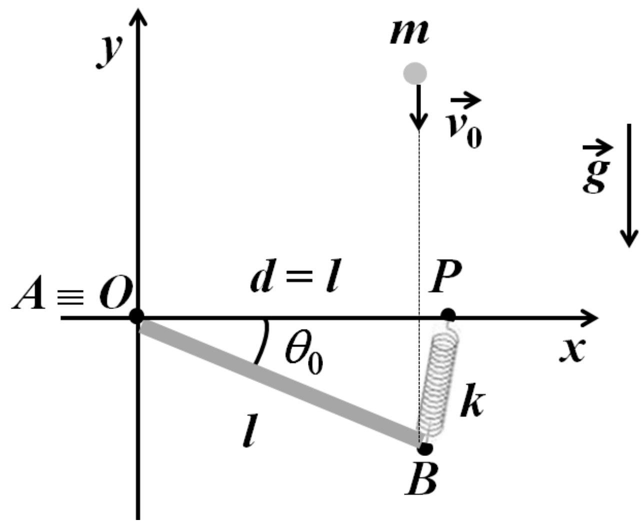
Una sferetta di massa $m = M/3$ e dimensioni trascurabili urta nel punto B di congiunzione fra l'asta e la molla con velocità iniziale $v_0 = 2$ m/s diretta nel verso negativo dell'asse y. L'urto è completamente anelastico, per cui la sferetta rimane attaccata all'asta.

2) Si dica se e quali delle seguenti grandezze fisiche si conservano durante l'urto e perché: a) quantità di moto totale; b) momento angolare totale rispetto al perno A; c) energia meccanica totale.

3) Utilizzando la legge di conservazione opportuna si determini la velocità angolare ω_0 dell'asta subito dopo l'urto.

4) Si calcoli l'impulso sviluppato dalla reazione del perno A durante l'urto.

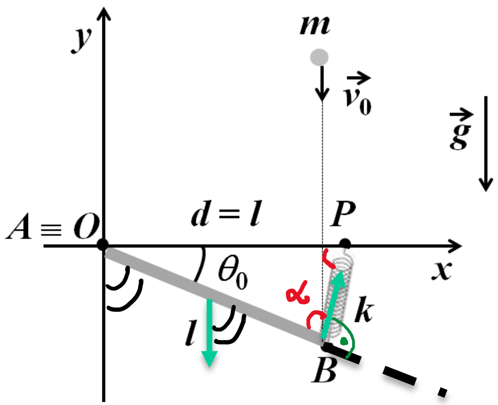
Dati
Asta: Massa M e lunghezza l
Molla : k cost. elas. e lunghezza a riposo nulla
1) Sistema in equilibrio: Si calcoli l'angolo θ_0 formato dall'asta con l'asse x quando il sistema è fermo.



1)Poiché la sbarra può ruotare intorno al perno A, rispetto a cui sono non nulli i momenti della forza peso M$\vec{g}$ e della forza elastica $\vec{F}_{el}$, è sufficiente imporre che il momento risultante rispetto ad A sia zero per garantire l'equilibrio.

Il vantaggio di utilizzare l'equazione del momento rispetto ad A rispetto al centro di massa (CM) è che al momento rispetto al CM contribuisce anche la reazione del perno A.

La condizione di equilibrio rispetto al perno A è data da :



$\angle = \frac{\pi}{2} - \theta_0$

$\angle = \pi - \alpha$

$2\alpha + \theta_0 = \pi$

$\alpha = \pi/2 - \frac{\theta_0}{2}$

$$\vec{\tau}_{M\vec{g}} + \vec{\tau}_{\vec{F}_{el}} = 0 = \vec{R}_{OCM-Asta} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_{el}$$

$$0 = -\frac{Mgl}{2}(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0)\,\hat{z} + l\,F_{el}\sin(\pi\text{-}\,\alpha)\,\hat{z} =$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0)\,\hat{z} + l\,F_{el}\sin(\alpha)\,\hat{z}$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\cos(\,\theta_0)\,\hat{z} + l\,F_{el}\sin(\alpha)\,\hat{z}$$

Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi, per cui se indichiamo con α uno dei due angoli alla base BP otteniamo:

$$2\alpha + \theta_0 = \pi \quad \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \quad \Longrightarrow \sin\alpha = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right); \;\; \cos\alpha = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

L'allungamento della molla L si ricava sfruttando il fatto che il triangolo è isoscele:

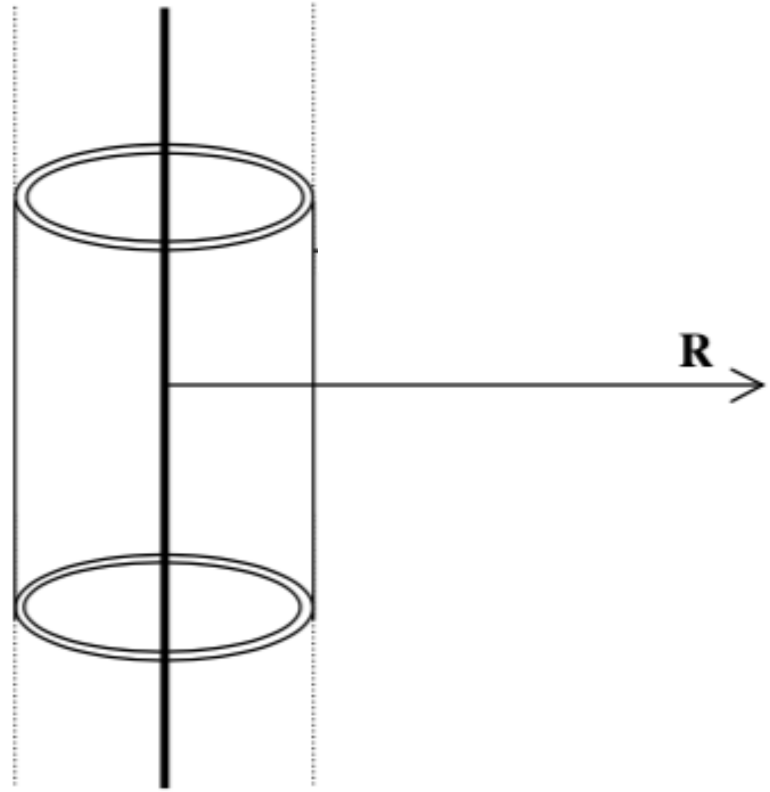
$$\Longrightarrow L = 2l\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\cos(\,\theta_0)\,\hat{z} + l\;2kl\;\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\;\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\;\hat{z} = -\frac{Mgl}{2}(\cos(\,\theta_0)\,\hat{z} + \;l\,kl\;\sin(\theta_0)\;\hat{z}=0$$

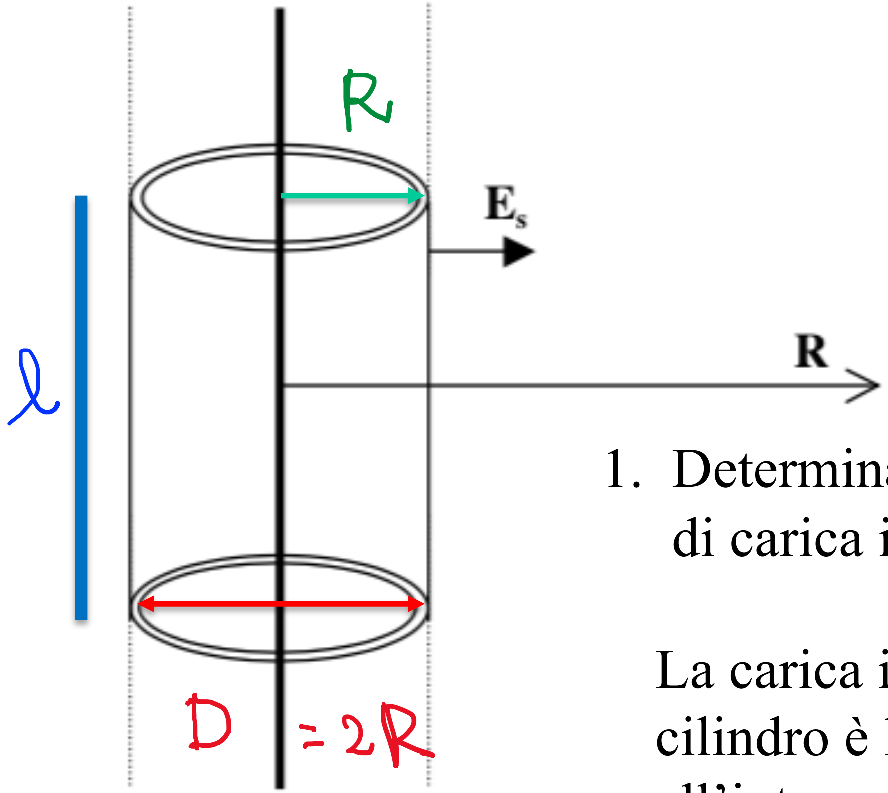
$$\Longrightarrow \text{tg}(\theta_0) = \frac{Mg}{2kl} = \frac{2\text{ kg} \times 9.81\text{ m/s}^2}{2 \times 9.81\text{ N/m} \times 1\text{ m}} = 1 \quad \Longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

Problema 6.

Un cilindro conduttore ha diametro esterno D e lunghezza infinita. Sull'asse del cilindro è posto un filo con densità di carica lineare $\lambda=6.67*10^{-10}$C/m. Sapendo che il campo elettrico misurato sulla superficie esterna del cilindro è $E_s = 120 V/m$, determinare:



1. Il diametro esterno D del cilindro e la densità di carica indotta sulla sua superficie esterna
2. La forza che agisce su una carica di prova $q=10^{-4}$C posta all'esterno del cilindro, ad una distanza R=88 cm dall'asse.



Cilindro conduttore infinito.

Filo conduttore
densità di carica lineare λ=6.67*10^-10 C/m

$$E_s = 120\, V/m$$

1. Determinare il diametro esterno D del cilindro e la densità di carica indotta sulla sua superficie esterna

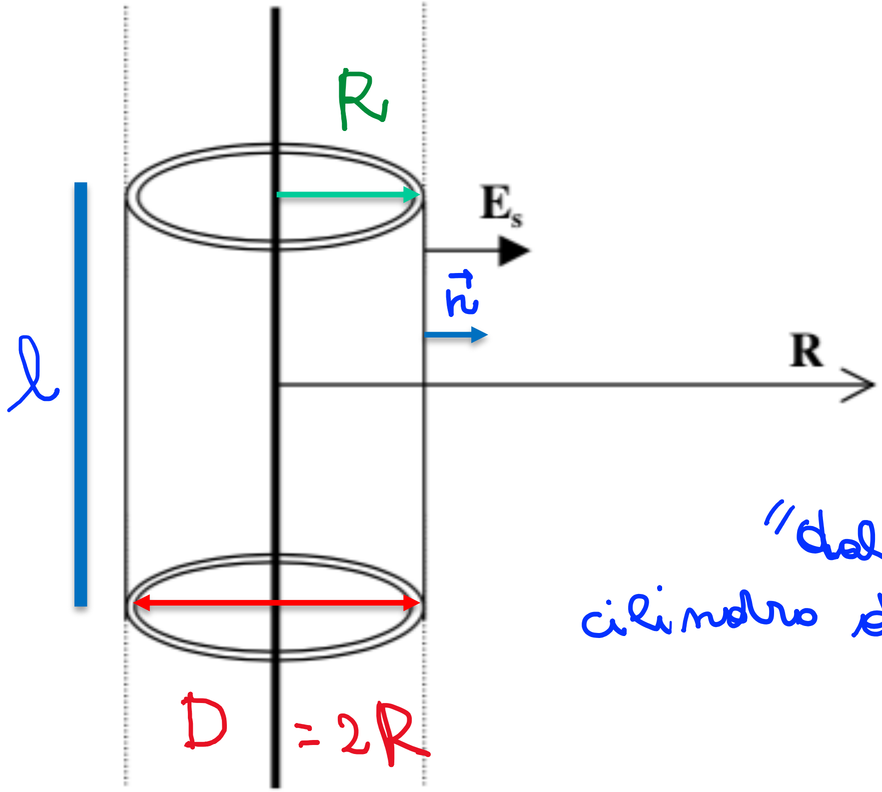
La carica indotta sulla superficie esterna di un tratto di cilindro è la stessa che c'è nella sezione di filo all'interno

$$Q = \lambda l = \sigma \pi D l$$

dalle quale 1) $\sigma = \dfrac{\lambda}{\pi D}$ ma D e σ sono entrambi incogniti!

Il modulo di $\vec{E}_s$ è noto inoltre dal Teo. di Gauss prendendo un cilindro di Gauss di Roggio R e lunghezza l

$E_s = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E_s = \lambda/\pi D$ $\quad D = \lambda/\pi \varepsilon_0 E_s$



$$D = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0 E_S} = \frac{6.67 \cdot 10^{-10}}{\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 120} = 0.2m$$

$$\Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E_S$$

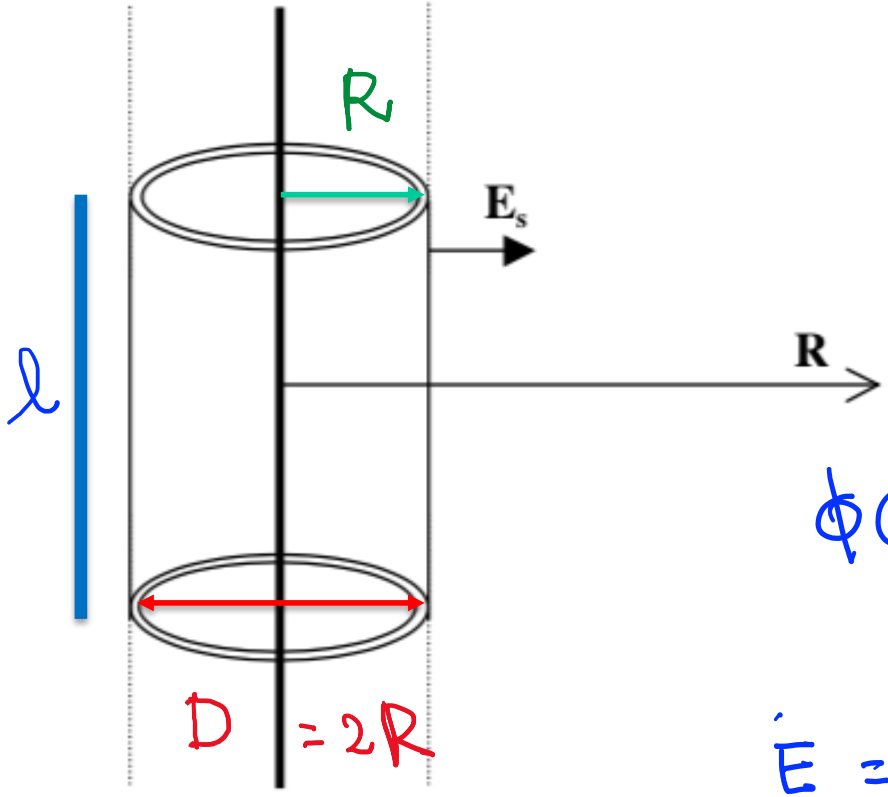
"dal Teo. di Gauss prendendo un cilindro di Gauss di Raggio R e lunghezza l $E_S = \sigma / \varepsilon_0$" infatti

$$\underset{S_{cil}}{\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds} = E_S \int_{S_{lat}} ds = \frac{\sigma \overbrace{\pi D l}^{S_{lat}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_S \cdot \pi D l = \frac{\sigma D l \pi}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{cvd}$$

2. Calcolare la forza che agisce su una carica di prova $q=10^{-4}$ C posta all'esterno del cilindro, ad una distanza R=88 cm dall'asse.

Il campo elettrico all'esterno del cilindro conduttore (fino alla superficie esterna) è uguale a quello del filo rettilineo infinito:



Infatti prendendo come sup. di Gauss un cilindro coassiale a quello indicato ma di raggio $r > R$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_{cil\, r>R}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, ds = E\int_{sup\ lat} ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{int}}{2\pi r \ell \varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{2\pi r \ell \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Pertanto la forza su una carica di prova vale:

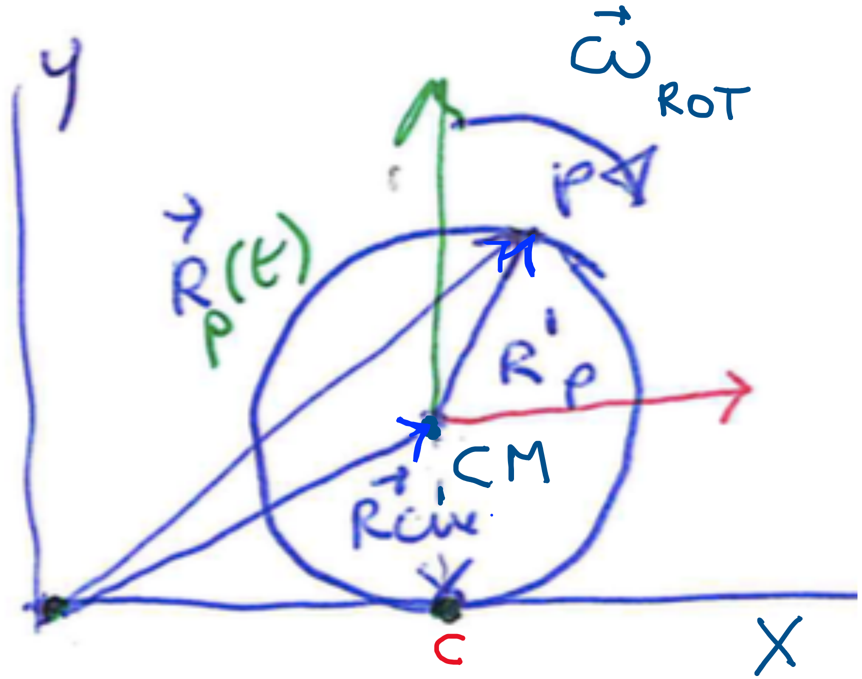
$$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{10^{-4}\times 6.67\times 10^{-10}}{2\pi\times 0.88\times 8.85\times 10^{-12}} = 1.36\times 10^{-3}\ N$$

backup

$$\vec{R}_P(t) = \vec{R}_{cm} + \vec{R}'_P(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega}_{ROT} \wedge \vec{R}'_P$$



$\vec{\omega}_{Rot} = +\omega\hat{z}$ $\qquad$ $\omega > 0$ ↺ $\qquad$ $\omega < 0$ ↻

per P = al punto di contatto = C

$$\vec{v}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega}_{Rot} \wedge \vec{R}'_{CM} = -\omega\hat{z} \wedge R'_{CM}(-\hat{y})$$

$$\vec{v}_{CM} = \omega R\, \hat{z} \wedge \hat{y}$$

$\vec{v}_{CM} = -\omega R\, \hat{x}$ $\qquad$ nell'es $\omega < 0$