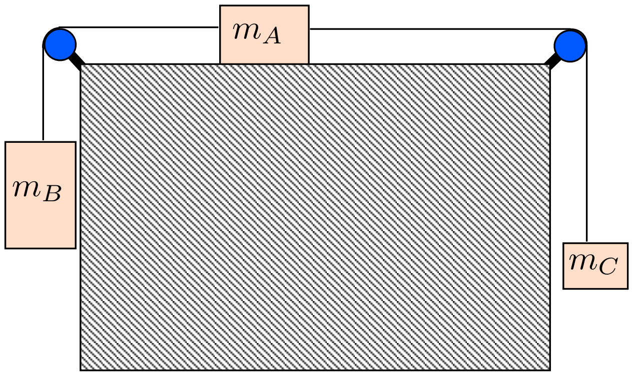
Esercizio (tratto dal Problema 3.27 del Mazzoldi 2)

Un corpo di massa $m_A = 2\,\text{Kg}$ è posto su un piano orizzontale liscio. Esso è collegato tramite due fili a due corpi di masse $m_B = 4\,\text{Kg}$ e $m_C = 1\,\text{Kg}$. Calcolare:

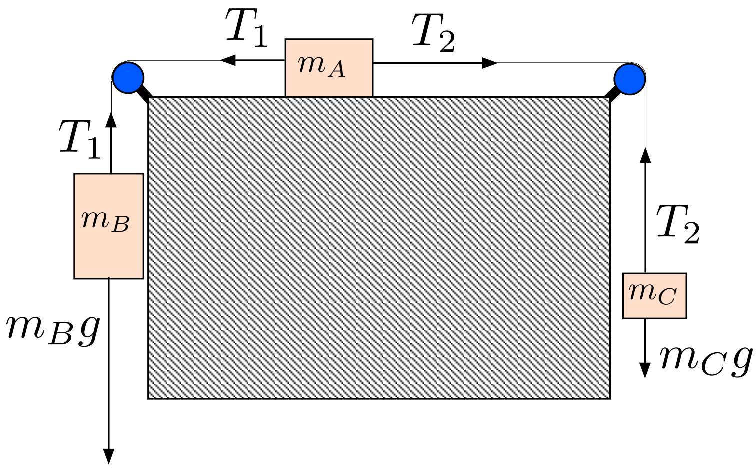
1. l'accelerazione del sistema delle tre masse
2. le tensioni dei due fili



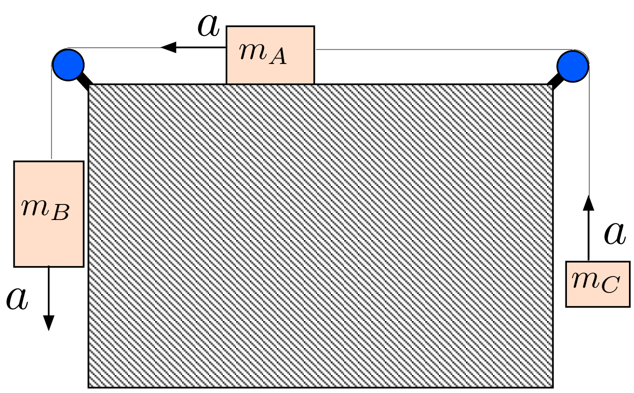
SOLUZIONE
Dati Iniziali

$$\begin{aligned} m_A &= 2\,\mathrm{Kg} \\ m_B &= 4\,\mathrm{Kg} \\ m_C &= 1\,\mathrm{Kg} \end{aligned}$$

- Disegniamo anzitutto le forze che agiscono su ciascun corpo. Si tratta di forza peso e tensione dei fili, come mostrato in figura.



- Osserviamo che, siccome i fili sono supposti inestensibili, l'accelerazione è la stessa in modulo per tutte le parti del sistema. Indichiamo con a tale accelerazione e scegliamo un verso convenzionale, che è arbitrario ma deve essere consistente per tutte le parti del sistema.



- Scriviamo par per ciascun corpo del sistema la seconda legge della dinamica

$$F = ma \tag{1}$$

tenendo conto del verso convenzionale scelto. Abbiamo

$$\begin{cases} m_B a &= m_B g - T_1 \quad (I) \\ -m_A a &= T_2 - T_1 \quad (II) \\ -m_C a &= m_C g - T_2 \quad (III) \end{cases} \tag{2}$$

Abbiamo dunque un sistema di tre equazione in tre incognite T_1, T_2 e a.

- Risolviamo il sistema. Dalla combinazione $(I)-(II)-(III)$ otteniamo

$$\begin{aligned}(m_B+m_A+m_C)a &= m_Bg-T_1-(T_2-T_1)-(m_Cg-T_2)= \\ &= m_Bg-m_Cg \end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$\boxed{a=\frac{(m_B-m_C)\,g}{m_A+m_B+m_C}} \tag{4}$$

Sostituendo ora i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{(4\,\mathrm{Kg}-1\,\mathrm{Kg})\,9.81\,\mathrm{m/s^2}}{(2+4+1)\,\mathrm{Kg}}= \\ &= \frac{3}{7}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}= \\ &= 4.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{5}$$

- Sostituiamo ora il risultato (4) nell'Eq.(I) del sistema (2), ed otteniamo

$$\begin{aligned} m_Ba &= m_Bg-T_1 \\ &\Downarrow \\ T_1 &= m_Bg-m_Ba=m_B(g-a)= \\ &= m_B\left(g-\frac{(m_B-m_C)g}{m_A+m_B+m_C}\right)= \\ &= m_Bg\left(1-\frac{m_B-m_C}{m_A+m_B+m_C}\right)= \\ &= m_B\left(\frac{m_A+2m_C}{m_A+m_B+m_C}\right)g \end{aligned} \tag{6}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\boxed{T_1=m_B\left(\frac{m_A+2m_C}{m_A+m_B+m_C}\right)g} \tag{7}$$

mentre per T_1 otteniamo

$$\begin{aligned} T_1 &= m_B\left(\frac{m_A+2m_C}{m_A+m_B+m_C}\right)g= \\ &= 4\,\mathrm{Kg}\,\frac{(2\,\mathrm{Kg}+2\cdot\,1\mathrm{Kg})}{(2+4+1)\,\mathrm{Kg}}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}= \\ &= 4\,\mathrm{Kg}\cdot\frac{4}{7}\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}= \\ &= 22.4\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}= \\ &= 22.4\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{8}$$

- Sostituiamo infine (4) e (7) nella (III) del sistema (2)

$$\begin{aligned} -m_C a &= m_C g - T_2 \\ &\Downarrow \\ T_2 &= m_C g + m_C a = m_C(g+a) = \\ &= m_C \left(g + \frac{(m_B - m_C)g}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_C g \left(1 + \frac{m_B - m_C}{m_A + m_B + m_C} \right) = \\ &= m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g \qquad (9) \end{aligned}$$

ossia

$$\boxed{T_2 = m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g} \qquad (10)$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned} T_2 &= m_C \left(\frac{m_A + 2m_B}{m_A + m_B + m_C} \right) g = \\ &= 1\,\mathrm{Kg}\, \frac{2\,\mathrm{Kg} + 2 \cdot 4\mathrm{Kg}}{(2+4+1)\,\mathrm{Kg}} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= \frac{10}{7} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 14.0\,\mathrm{Kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 14.0\,\mathrm{N} \qquad (11) \end{aligned}$$