## 591AA 21/22 – ESAME INTERMEDIO

**Istruzioni:** Questo esame non sarà valutato. Questo esame copre gli argomenti contenuti nelle Lezioni 13-19 che sono pubblicati sulla classe di Google Classroom. Questo esame non copre tutti gli argomenti contenuti nelle Lezioni 13-19.

**Problema 1.** Esprimi la soluzione dell'equazione

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

simbolicamente tramite determinanti usando la regola di Cramer. [Scrivere la risposta usando i determinanti delle matrici 3x3, non  necessario espandere i determinanti in polinomi nei coefficienti]

**Problema 2.** Scrivi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -5 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

come prodotto $LU$ dove $U$ è una matrice triangolare superiore e $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ è una matrice triangolare inferiore che è un prodotto di matrici elementari.

**Problema 3.** Sia $A$ una matrice con polinomio caratteristico $p_A(t) = t^3 + t + 1$. Mostrare con i risultati che $A$ è diagonalizzabile (ha una base di autovettori).

**Problema 4.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Trova i dischi di Gershgorin di A.
(b) Spiega usando il teorema spettrale e i dischi della parte (a) perch $A$ è una matrice definita positiva.

**Problema 5.** Sia $A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Spiega usando il teorema spettrale perché $A$ deve avere una base unitaria di autovettori.
(b) Trova una base unitaria di autovettori per $A$. Uno degli autovalori di $A$ è zero.

**Problema 6.** Sia $P_2[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due con coefficienti reali. Consideriamo il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

su $P_2[x]$. Applicare il processo di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2\}$ di $P_2[x]$.