1) $P\{\text{estrarre bianca}\} = 0.8 = p$

$P\{\text{estrarre nera}\} = 0.2 = 1-p$

a) $P\{2 \text{ bianche su } 5\} = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$

$= \frac{4^3}{2 \cdot 5^4} = \frac{2^5}{5^4} = 0{,}0512$

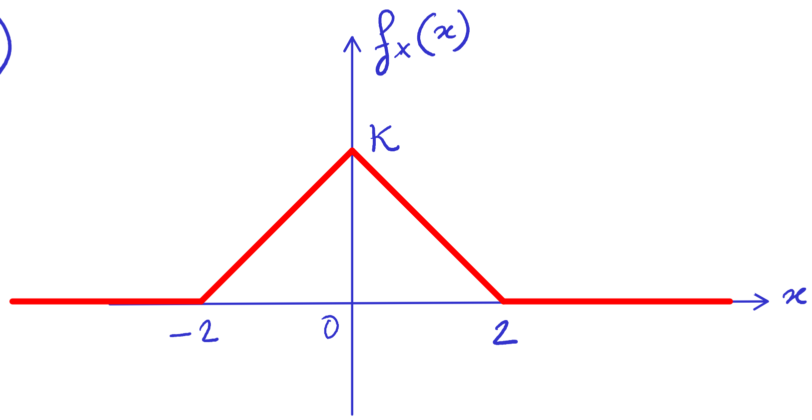
b) $P\{n \text{ nere su } N\} = P\{0 \text{ bianche su } N\} = \binom{0}{0} p^0 (1-p)^N = (1-p)^N < 0{,}01$

$\left(\frac{1}{5}\right)^N < \frac{1}{100}$; $\quad 5^N > 100 \longrightarrow N_{min} = 3$

c) I risultati non sarebbero variati perchè p (e $1-p$) non sono cambiati.

---

2)



a) L'area sottesa dalla $f_x(x) = 1 = \frac{4 \cdot K}{2} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

b) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & , -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad Y = -3X + 2$

Uso teorema fondamentale per la trasformazione di v.a

$$f_Y(y) = \left. \frac{\sum_i f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \right|_{x_i = g^{-1}(y)}$$

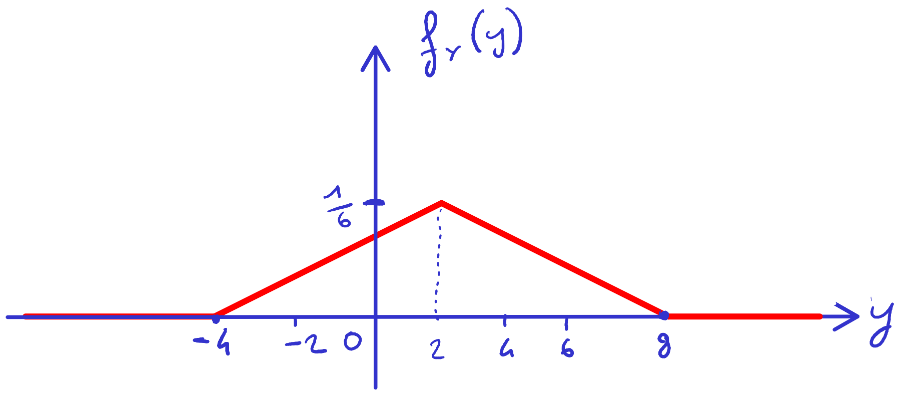
$y = g(x) = -3x + 2 \longrightarrow \forall y, \exists x_1$ tale che $y = -3x_1 + 2 \rightarrow x_1 = \frac{-y+2}{3}$

$g'(x) = -3$

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{2-y}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6}\left[1 - \frac{|2-y|}{6}\right], & -4 \le y \le 8 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

c) $\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{g(X)\} = -3 \cdot 0 + 2 = 2$

$\mathbb{E}\{X\} = 0$



3) $$N(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow X(t)$$

$$S_x(f) = S_N(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + f^2/f_0^2}$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + f^2/f_0^2}\, df = \frac{N_0}{2} f_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\nu^2}\, d\nu$$

$$\nu = f/f_0$$

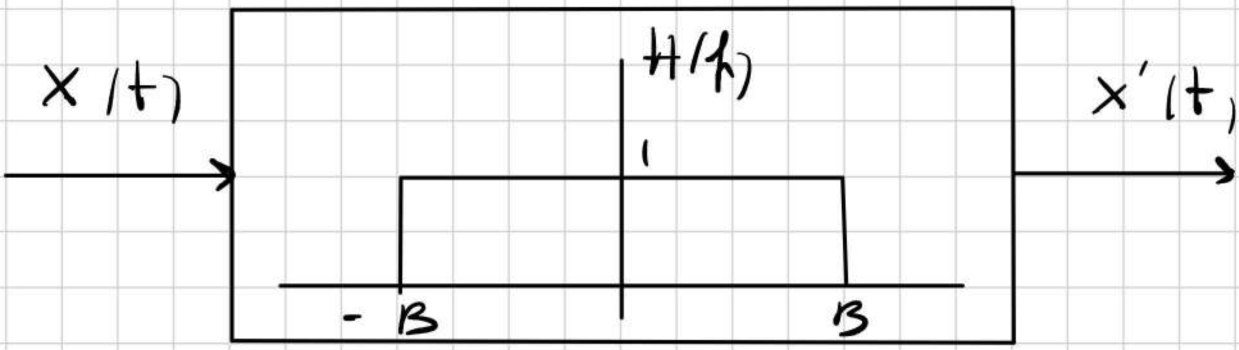
$$df = f_0 \cdot d\nu$$

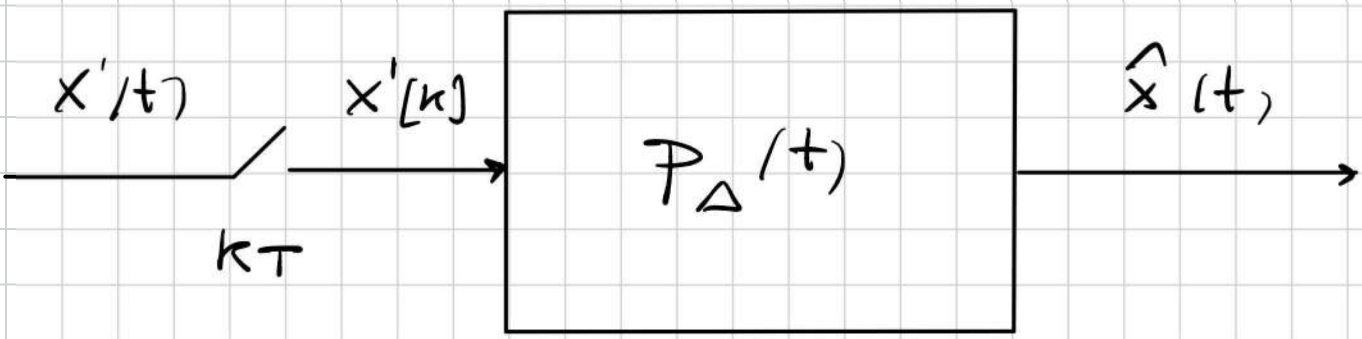
$$= \frac{N_0 f_0}{2} \cdot \arctan(\nu) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N_0 f_0}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{N_0 f_0 \pi}{2}$$

Esercizio 4

Un segnale di durata limitata ha una banda non limitata. Al fine di applicare il teorema del campionamento devo limitarlo in banda con un filtro passa-basso.

Essendo un segnale audio scelgo un filtro passa-basso di banda $B = 20\ kHz$





L'intervallo di campionamento deve essere

$$\frac{1}{T} \geq 2B$$

$$\boxed{\text{Scelgo } \frac{1}{T} = 2B = 40\,\text{kHz}}$$

Per operare in tempo reale non posso utilizzare un interpolatore cardinale poiche' non causale. Per renderlo causale, devo prima troncarlo e dopo ritardarlo.

Interpolatore cardinale:

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \mathrm{sinc}(2Bt)$$

Applico una funzione rettangolare nel tempo di durata Δ:

$$p_\Delta(t) = p(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

Il segnale ricostruito $\hat{x}(t)$ è pari a

$$\hat{x}(t) = \sum_k x'[k]\, p_\Delta\left(t - kT - \frac{\Delta}{2}\right)$$

traslazione per causalità

Scelgo ad esempio

$$\Delta = 40T = \frac{40}{2B} = \frac{40}{40} 10^{-3} = 1\,ms$$

Il ritardo di riproduzione è pari a

$$\boxed{\frac{\Delta}{2} = 0.5\,ms}$$

ESERCIZIO 5

Sapendo che

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

Sostituendo $x(t) = e^{j2\pi f t}$ si ottiene

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{j2\pi f(t-\alpha)}\, d\alpha$$

$$= \underbrace{e^{j2\pi f t}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha}_{H(f)}$$

Segue che:

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

DA RIPETERE PER OGNI FREQUENZA f DI INTERESSE

ESERCIZIO 6

Le parole di codice si ottengono sapendo che

$$\underline{c} = \underline{m}\,\underline{\underline{G}} \qquad \underline{\underline{G}} = [\,\underline{\underline{I}}_3 \, , \, \underline{\underline{P}}\,]$$

$\underline{m}$			$\underline{c}$						d_H
0	0	0	0	0	0	0	0	0	/
0	0	1	0	0	1	1	1	0	3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	3
1	0	0	1	0	0	1	0	1	3
0	1	1	0	1	1	1	0	1	4
1	0	1	1	0	1	0	1	1	4
1	1	0	1	1	0	1	1	0	4
1	1	1	1	1	1	0	0	0	3

La distanza minima e': 3

La matrice controllo di parita' e':

$$\underline{\underline{H}} = \left[\underline{\underline{P}}^T, \underline{\underline{I}}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sindrome e' pari a:

$$\boxed{\underline{s} = \underline{y}\,\underline{\underline{H}}^T = [0\ 0\ 1]}$$

Siccome $\underline{s} = \underline{y}\,\underline{\underline{H}}^T = \underline{e}\,\underline{\underline{H}}^T$ si trova

$$\boxed{\underline{e} = [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]}$$

da cui segue $\underline{y} + \underline{e} = \underbrace{[\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ ]}_{\text{parola trasmessa}}$

Esercizio 7

Sappiamo che:

$$x(k) = c_k\, g(0) + \sum_{m \neq 0} c_{k-m}\, g(mT) + n(k)$$

con

$$g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$$

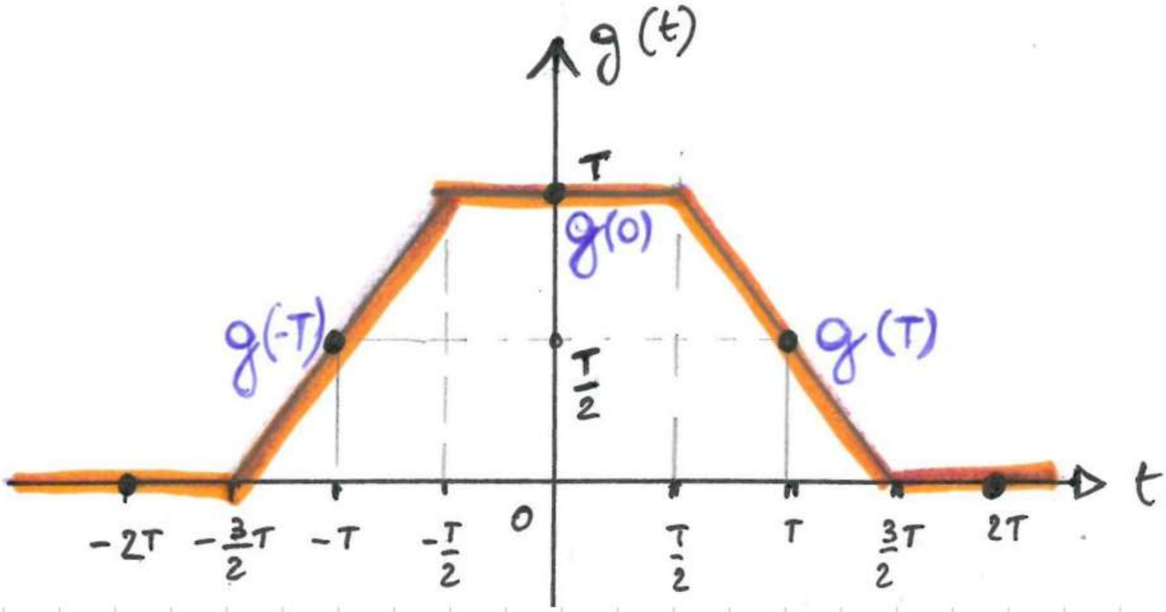
$$n(k) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2} E_{g_R}\right)$$

Energia del filtro $g_R(t)$

Calcoliamo la varianza del rumore:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \frac{N_0}{2} E_{g_R} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_R^2(t)\, dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-T}^{T} 1\, dt = N_0 T\end{aligned}}$$

Calcoliamo $g(mT)$. Dal momento che:



si ottiene quindi

$$x(k) = c_k\, g(0) + c_{k-1}\, g(T) + c_{k+1}\, g(-T) + n(k)$$

Esercizio 8

Sappiamo che:

$$B_{RF} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 n} R_b$$

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_{RF}} = \frac{r \log_2 n}{1+\alpha}$$

Tenendo conto che $r = \frac{1}{2}$, $n = 4$, $\alpha = 0.5$

si ottiene:

$$\boxed{B_{RF} = \frac{1.5}{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}} 100 \text{ Mbit/s} = 150 \text{ MHz}}$$

$$\boxed{\eta_{sp} = \frac{100 \text{ Mbit/s}}{150 \text{ MHz}} = \frac{2}{3} \text{ bit/s/Hz}}$$

La probabilità nel bit si approssima:

$$\boxed{P_{bit}(e) = \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}}$$

con $t = \dfrac{d_{min} - 1}{2} = 1$

Segue che:

$$P_{bit}(e) = \frac{3}{6} \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4$$

$$\simeq \frac{1}{2} \frac{6!}{4!\,2!} p^2 = \frac{15}{2} p^2$$

In un sistema 4-QAM:

$$p \simeq Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

Dal momento che:

$$E_s = \log_2 M \, E_d = r \log_2 M \, E_b$$

si ottiene $E_s = E_b$. Quindi:

$$\boxed{p \simeq Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

Imponendo $P_{bit}(e) = 10^{-5}$ si ottiene

$$P_{bit}(e) = \frac{15}{2} p^2 = 10^{-5}$$

$$p = \sqrt{\frac{2}{15} 10^{-5}} \simeq 10^{-3}$$

Quindi $Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3}$. Dal grafico,

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} \simeq 9 \simeq 9.6 \text{ dB}}$$