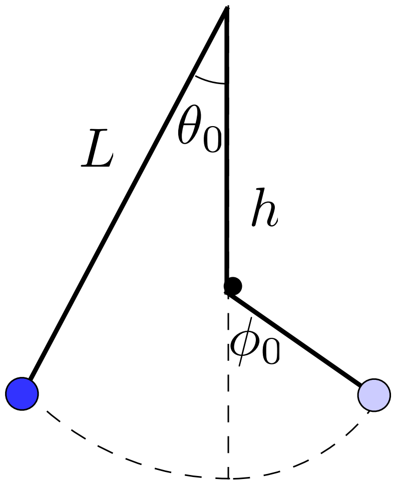
Esercizio (tratto dal Problema 4.33 del Mazzoldi 2)

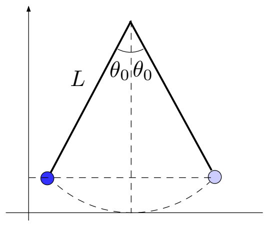
Un pendolo semplice di lunghezza L viene lasciato cadere con velocità nulla da un angolo iniziale θ_0 rispetto alla verticale. Quando passa per la posizione verticale ($\theta = 0$), il filo urta un piolo distante h dal punto di sospensione.

1. Dimostrare che la massa del pendolo raggiunge la stessa altezza che avrebbe raggiunto in assenza del piolo;

2. Calcolare l'angolo ϕ_0.



SOLUZIONE



1. Se il piolo non ci fosse, la massa del pendolo raggiungerebbe la stessa altezza iniziale, caratterizzata dallo stesso angolo θ_0.

   Consideriamo ora la presenza del piolo e denotiamo ora con A la posizione iniziale e con B la posizione finale, ossia quella in cui la massa raggiunge l'altezza massima (caratterizzata da velocità nulla). Applichiamo il teorema dell'energia cinetica

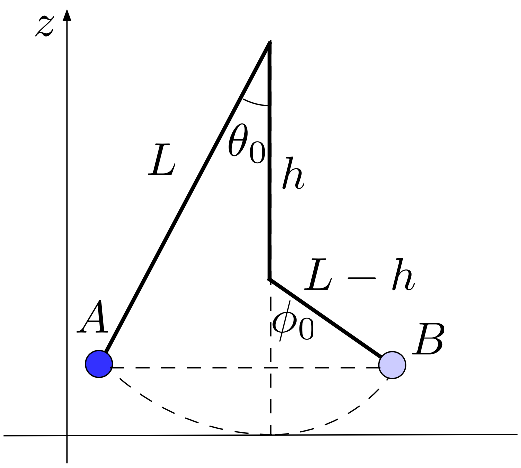
$$\Delta K^{A \to B} = W^{A \to B} \tag{1}$$

   dove $\Delta K^{A \to B}$ è la variazione di energia cinetica e $W^{A \to B}$ è il lavoro delle forze che agiscono sulla massa del pendolo nel tragitto $A \to B$. Le forze in gioco sono

   - forza peso $m\vec{g}$
   - tensione $\vec{T}$ del filo

   e dunque

$$\Delta K^{A \to B} = W_{peso}^{A \to B} + W_T^{A \to B} \tag{2}$$



   Osserviamo che

   - $\Delta K^{A \to B} = K^B - K^A = 0$ dato che l'energia cinetica nei punti A e B è nulla ($K^A = K^B = 0$).
   - il lavoro $W_{peso}^{A \to B}$ fatto dalla forza peso è pari a (meno) la variazione dell'energia potenziale gravitazionale

$$W_{peso}^{A \to B} = -\Delta E_p^{A \to B} = mgz_A - mgz_B \tag{3}$$

- il lavoro $W_T^{A\to B}$ della tensione $\vec{T}$ del filo è per definizione

$$W_T^{A\to B} = \int_A^B \vec{T}\cdot d\vec{s} \tag{4}$$

Tuttavia, dato che lo spostamento è, istante per istante, ortogonale alla direzione della tensione ($\vec{T}\cdot d\vec{s}=0$), $\vec{T}$ non compie lavoro. Questo vale sia prima che dopo l'urto col piolo. Pertanto $W_T^{A\to B}=0$

In conclusione l'Eq.(2) si riduce a

$$0 = mgz_A - mgz_B + 0 \tag{5}$$

da cui otteniamo

$$z_A = z_B \tag{6}$$

2. Per determinare l'angolo ϕ_0 osserviamo che possiamo scrivere

$$\begin{cases} z_A = L - L\cos\theta_0 \\ \\ z_B = L - h - (L-h)\cos\phi_0 \end{cases} \tag{7}$$

e dunque

$$\begin{aligned} L(1-\cos\theta_0) &= (L-h)(1-\cos\phi_0) \\ \Rightarrow \cos\phi_0 &= \frac{L\cos\theta_0 - h}{L-h} \\ \Rightarrow \phi_0 &= \arccos\left(\frac{L\cos\theta_0 - h}{L-h}\right) \end{aligned} \tag{8}$$