Definizioni della PL

Definizione di *Problema di programmazione lineare*.

Un problema di *Programmazione Lineare* (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare, soggetta ad un insieme finito di vincoli lineari di uguaglianza e/o di disuguaglianza:

$$\begin{cases} \min / \max c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ B \cdot x \geq d \\ D \cdot x = e \end{cases}$$

Definizione di *Variabile di scarto*.

Una variabile all'interno di un problema di PL è detta *variabile di scarto* se rispetta le seguenti condizioni:

1. non è presente nella funzione obiettivo;
2. è presente in un solo vincolo;
3. è ≥ 0.

Definizione di *Forma standard di PL*.

La forma standard è una forma a cui possiamo ricondurre tutti i problemi di PL. Abbiamo come esempi il formato primale standard e il formato duale standard.

Definizione di *Problema di PL in formato primale standard*.

Un problema di PL nella seguente forma

$$\begin{cases} \max c^T \cdot x \\ A \cdot x \leq b \end{cases}$$

è detto *problema di programmazione lineare in formato primale standard.* Esso presenta una funzione obiettivo con max e disuguaglianze col minore o uguale.

Definizione di *Regione ammissibile*.

La regione ammissibile di un problema P consiste nell'insieme delle soluzioni ammissibili. La regione ammissibile è un poliedro, definito dai vincoli.

Definizione di *Soluzione ammissibile*.

$\overline{x}$ è *soluzione ammissibile* per un problema P se rispetta tutti i vincoli (e quindi appartiene alla regione ammissibile), cioè $A \cdot \overline{x} \leq b$.

Definizione di *Soluzione ottima*.

$\overline{x}$ è detta *soluzione ottima* per un problema P se ottimizza la funzione obiettivo.

Definizione di *Poliedro*.

Dicesi poliedro l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. Precisamente:

- *intersezione* in quanto tutti i vincoli devono essere rispettati
- *numero finito* in quanto il numero di vincoli deve essere finito
- *semispazi chiusi*, cioè vincoli di minore (semispazio) o uguale (semispazio chiuso, cioè semispazio a cui appartiene pure la sua frontiera)

Il poliedro costituisce la regione ammissibile del mio problema di PL. Nel caso dell'insieme $\mathbb{R}^2$ si ha un poligono: in quel caso possiamo risolvere geometricamente.

Definizione di *Poliedro (def. equivalente)*.

In modo equivalente possiamo definire il poliedro come il seguente insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x \leq b\}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ (ricordiamo che m consiste nel numero di vincoli, mentre n è il numero di variabili). Fornire la coppia $< A, b >$ significa fornire un poliedro.

Definizione di *Linee di isocosto / isoguadagno*.

Insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ (nei casi di risoluzione geometrica poniamo $n = 2$) in cui la funzione obiettivo $c \cdot x$ assume lo stesso valore (*iso*).

$$L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = v\}$$

dove $v \in \mathbb{R}$ rappresenta il costo / guadagno.

Definizione di *Combinazione convessa*.

Dato un insieme di punti $x^1, \dots, x^k$ appartenenti a $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa dei punti la seguente combinazione lineare

$$y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \qquad \text{dove } \lambda_j \in [0,1]\, \forall j \text{ e } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Otteniamo $y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione di *Involucro convesso*.

Dato l'insieme dei punti $x^1, \dots, x^k$ definiamo involucro convesso l'insieme delle possibili combinazioni convesse. Lo denotiamo nel seguente modo

$$\text{conv}(V)$$

dove $V = \{x^1, \dots, x^k\}$. Rappresentiamo con questa notazione la più piccola figura convessa contenente i punti dell'insieme V.

Definizione di *Combinazione conica*.

Dato un insieme di punti $x^1, \dots, x^k$ appartenenti a $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica dei punti la seguente combinazione lineare

$$y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \qquad \text{dove } \lambda j \geq 0 \forall j$$

Otteniamo $y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione di *Involucro conico*.

Dato l'insieme dei punti $x^1, \dots, x^k$ definiamo involucro conico l'insieme delle possibili combinazioni coniche. Lo denotiamo nel seguente modo

$$\text{cono}(V)$$

dove $V = \{x^1, \dots, x^k\}$. Rappresentiamo con questa notazione il più piccolo convesso contenente i punti dell'insieme E (per esempio con un punto avrò una semiretta, con due punti un cono).

Definizione di *Vertice*.

Un vertice $\overline{x}$ è un punto del poliedro che non si può esprimere come combinazione convessa di altri punti del poliedro diversi da $\overline{x}$. Seguono alla definizione i seguenti corollari.

1. Se il poliedro ha vertici V è l'insieme dei vertici.
2. Se il poliedro è limitato questo ha sempre vertici.
3. Se il poliedro è limitato allora $E = \{\}$.

Definizione di *Base*.

Dato un poliedro $P =< A, b >$ definiamo base l'insieme di indici di riga $B = \{1, \ldots, n\}$ (dove n è il numero di decisioni) tali che la sottomatrice A_B, ottenuta dall'estrazione delle righe indicate in B, abbia $\det(A_B) \neq 0$. Il determinante non nullo assicura che

- non siamo stati scelti vincoli paralleli, e
- l'unicità della soluzione per Rouchè-Capelli.

Definizione di *Matrice di base*.

La sottomatrice A_B, estratta dalla matrice A mantenendo solo le righe indicate in B, è detta *matrice di base*. Gli indici di riga non considerati nella base B sono solitamente posti nel vettore N.

Definizione di *Soluzione di base (primale)*.

Data la base B e la sottomatrice A_B definiamo *soluzione di base* il seguente calcolo

$$\overline{x} = A_B^{-1} b_B$$

Definizione di *Soluzione di base ammissibile (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *ammissibile* se

$$A_i \overline{x} \cdot \leq b_i \quad \forall i \in N$$

Tutti i vincoli sono soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base non ammissibile (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *non ammissibile* se

$$\exists i \in N : A_i\overline{x} > b_i$$

Esistono vincoli del poliedro non soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base degenere (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *degenere* se

$$\exists i \in N : A_i\overline{x} = b_i$$

La soluzione di base è generata da una sola base (B).

Definizione di *Soluzione di base non degenere (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *non degenere* se

$$A_i\overline{x} \neq b_i \;\; \forall i \in N$$

La soluzione di base è generata da più basi.

Definizione di *Problema di PL in formato duale standard*.

Un problema di PL nella seguente forma è detto *problema in formato duale standard.*

$$\begin{cases} \min c^T \cdot x \\ A \cdot x = c \\ x_k \geq 0 \qquad \forall k \end{cases}$$

Definizione di *Soluzione di base (duale)*.

Data la base B (e l'insieme complementare N) e la sottomatrice A_B definiamo *soluzione di base* il seguente calcolo

$$\overline{y} = (y_B, y_N) = \left(cA_B^{-1}, 0\right)$$

dove $y_i = 0$, $\forall i \in N$

Definizione di *Soluzione di base ammissibile (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *ammissibile* se

$$y_i \geq 0 \; \forall i \in B$$

Tutti i vincoli del poliedro duale (i $\geq$) sono soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base non ammissibile (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *non ammissibile* se

$$\exists i \in B : y_i < 0$$

Almeno un vincolo del problema duale non è rispettato.

Definizione di *Soluzione di base degenere (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *degenere* se

$$\exists i \in B : y_i = 0$$

Si ha almeno una componente nulla in y_B.

Definizione di *Soluzione di base non degenere (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *non degenere* se

$$y_i \neq 0 \;\; \forall i \in B$$

Non si hanno componenti nulle in y_B.

Definizione di *Poliedro duale ausiliario*.

Dato un poliedro duale (D) definiamo il seguente *poliedro duale ausiliario*

$$(DA) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \\ y^T A + \epsilon^T = c^T \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases}$$

Teoremi della PL

Teorema (1) di Weyl per la rappresentazione dei poliedri.

Dato un qualunque poliedro P esisterà sempre un insieme di punti V e un insieme di vettori E tali che

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

dove $V \subseteq P$. E può essere vuoto (per vuoto si intende porre l'origine), mentre V non può essere vuoto. Si parla di CNS, cioè:

- dato un poliedro $P =< A, b >$ è possibile individuare $< V, E >$;
- data la coppia $< V, E >$ è possibile individuare $P =< A, b >$.

Teorema (2) fondamentale della PL.

Dato un problema di PL, se

- il poliedro è non vuoto,
- il poliedro ha vertici e
- la funzione obiettivo non va a infinito

allora esiste un valore k tale che il vertice v^k è soluzione ottima.

Teorema (3) della caratterizzazione dei vertici (primale).

Un punto $x \in P$ è un vertice di poliedro primale se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile (primale).

Teorema (3bis) della caratterizzazione dei vertici (bis, duale).

Un punto $x \in D$ è un vertice di poliedro duale se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile (duale).

Teorema (4) della dualità.

Sia $(P) \neq \emptyset$, $(D) \neq \emptyset$, allora

$$\max_{x \in P} c \cdot x = \min_{y \in D} y \cdot b$$

Teorema (5) su poliedro del trasporto e del vertice.

Siano o_i e d_i numeri interi (richieste e disponibilità). Il poliedro del trasporto e il poliedro dell'assegnamento hanno vertici a componenti intere. Il discorso è: esiste almeno una soluzione a componenti intere. In presenza di questo teorema possiamo risolvere il trasporto di problemi indivisibili e di assegnamento cooperativo con *linprog*.

Teorema (6) sul numero di step finiti del simplesso.

L'algoritmo del simplesso è corretto e termina in un numero finito di passi.

Teorema (7) sul numero di soluzioni del poliedro duale.

Dato il poliedro duale (D) e il corrispondente poliedro ausiliario (DA):

- se la soluzione ottima $v_{DA} = 0$ allora (D) è non vuoto
- se v_{DA} è strettamente positivo allora (D) è vuoto.

La raccolta tiene conto dei suggerimenti del prof. Pappalardo.