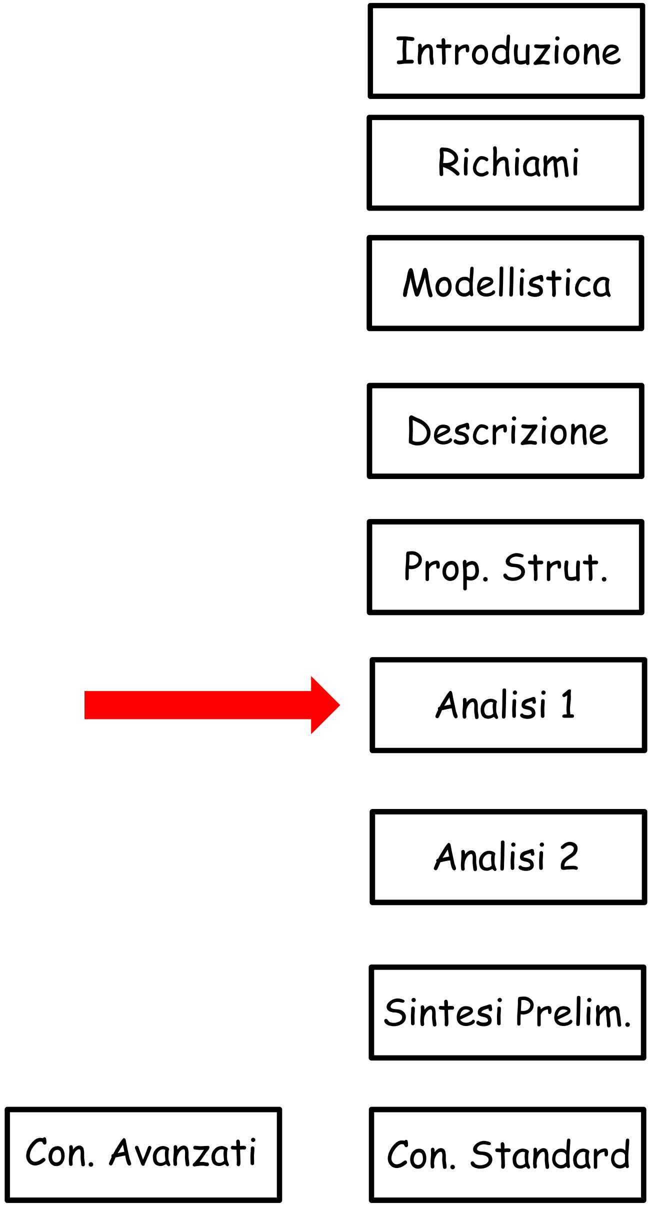
RISPOSTA TEMPORALE

- Introduzione
- Risposta a Regime
- Risposta Transitoria
- Effetto degli Zeri
- Poli Dominanti

Riferimenti

- Capitoli 5, 6 Testo di Bolzern (parte)
- Capitoli 5 8, testo di Murray (download)
- Capitoli 3, 8 Lewis (download)
- ....



Introduction

❑ **L'analisi di un sistema** è effettuata al fine di determinare le sue prestazioni, e la eventuale necessità di un sistema di controllo.

1. Stabilità
2. Controllabilità ed Osservabilità
3. Risposta ai comandi (precisione, accuratezza, velocità di risposta)
4. Reiezione dei disturbi e rumori
5. Risposta non nominale (ovvero in presenza di errori di modello)

❑ **Strumenti utilizzati** per lo studio delle prestazioni sono:

- ✓ Criterio di stabilità di Routh - Hurwitz, Teoria della stabilità di Lyapunov
- ✓ Matrici di Controllabilità, Osservabilità e Realizzazioni
- ❑ La Risposta Temporale
- ➢ La Risposta in Frequenza
- ➢ Criterio di Nyquist e Stabilità Relativa

❑ **Obiettivi**:

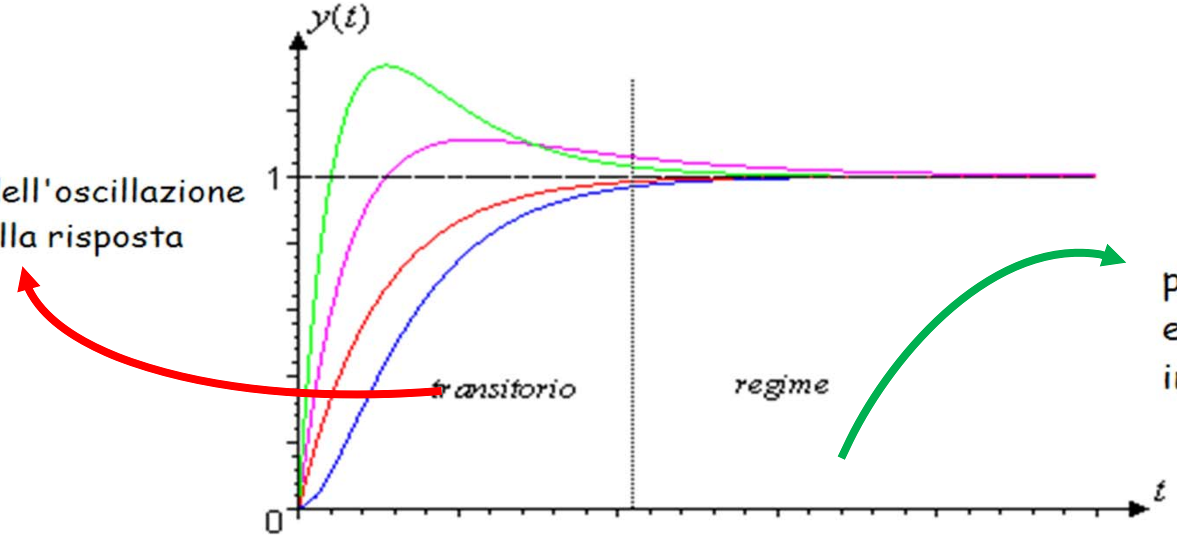
Identificazione di un set generale di parametri in modo da poter eseguire matematicamente l’analisi delle prestazioni e la sintesi di un sistema di controllo, se richiesto dai requisiti di progetto.

❑ **Nota: nel seguito consideriamo sistemi SISO controllabili ed osservabili, per cui la stabilità mediante FdT garantisce la stabilità sia esterna che interna**

Introduzione

- **La risposta temporale definisce l'andamento del segnale in uscita quando il sistema viene sottoposto a determinati segnali in ingresso**

- Sistemi Instabili: la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo tende asintoticamente all’infinito
- Sistemi Asintoticamente Stabili: la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo tende asintoticamente a zero



stabilità
ampiezza dell'oscillazione
velocità della risposta

precisione
errore a regime
insensitività al disturbo

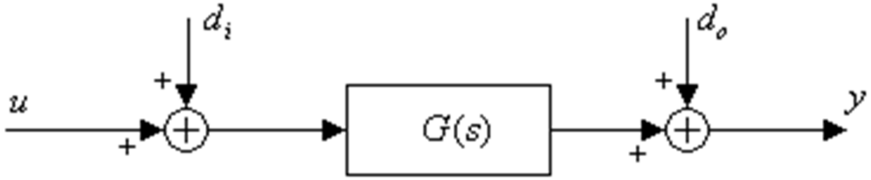
- In generale è possibile riconoscere due zone che individuano rispettivamente la parte transitoria e quella a regime; ognuna di esse fornisce specifiche proprietà del sistema in esame

Risposta a Regime

- La risposta a regime è la parte della risposta temporale che si ha una volta finito il transitorio

Nota: La risposta a regime ha senso soltanto per sistemi asintoticamente stabili, Altrimenti l'uscita è un segnale illimitato per ogni ingresso (a meno del caso di sistemi stabili con ingresso impulsivo).

- Lo studio della risposta a regime di un sistema non retroazionato è banale (nota che a livello di analisi il sistema potrebbe essere internamente controllato)



$$y = d_o + G(s)(u + d_i)$$

$$e = u - y = [1 - G(s)]u$$

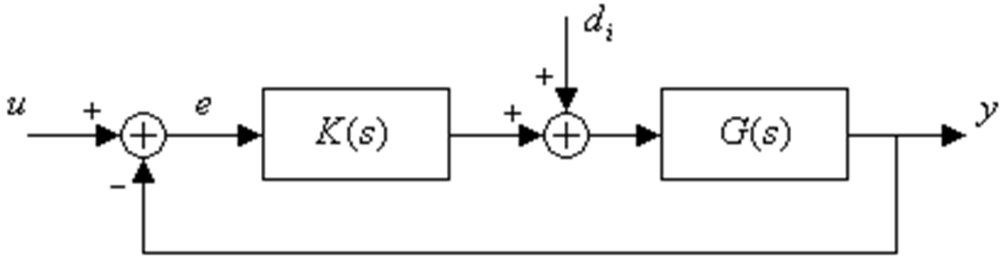
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)u(s) +$$

Contributo Disturbi

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot e(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot (1 - G(s))u(s)$$

Risposta a Regime

- ☐ Consideriamo un sistema SISO in Ciclo Chiuso con retroazione unitaria (per semplicità $d_o = 0$)



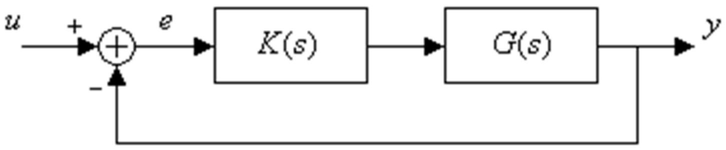
$$G_{CL}(s) = \frac{K(s)\cdot G(s)}{1+K(s)\cdot G(s)} = T(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$\boxed{G_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+K(s)\cdot G(s)} = S(s) = \frac{\varepsilon(s)}{u(s)}}$$

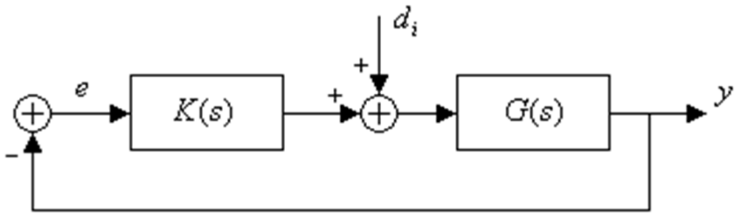
$$G_{d}(s) = \frac{G(s)}{1+K(s)\cdot G(s)} = G(s)S(s) = \frac{y(s)}{d_{i}(s)}$$

- In condizioni di Regime il <u>Comportamento desiderato</u> rispetto agli Ingressi

$t \to \infty \qquad y = u$



$t \to \infty \qquad y = 0 \qquad d_i \neq 0$

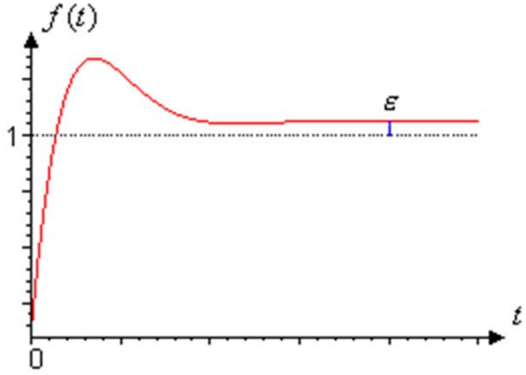


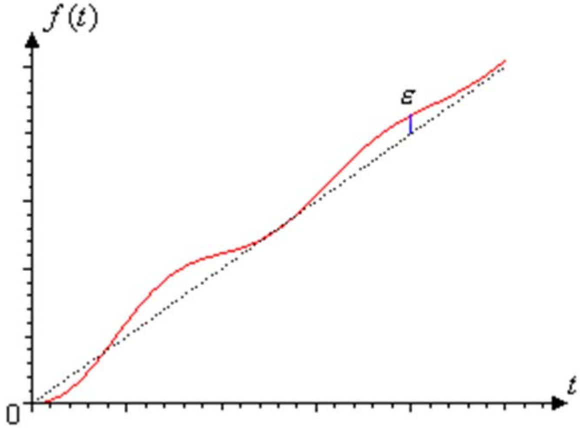
Risposta a Regime (ad un comando/riferimento)

- **Parametro di Progetto**: Errore a Regime (sia in anello aperto che anello chiuso)

- L'errore è il parametro base per la valutazione della risposta a regime; il requisito fondamentale per il calcolo dell'errore a regime è la stabilità (asintotica) del sistema e, in tal caso, si può calcolare mediante il ***Teorema del valore finale***

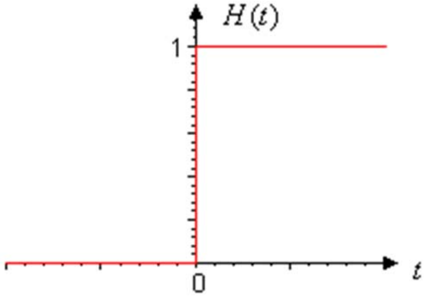
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \to 0} s\varepsilon(s)$$

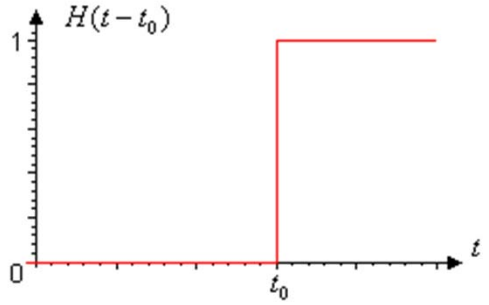




Risposta a Regime

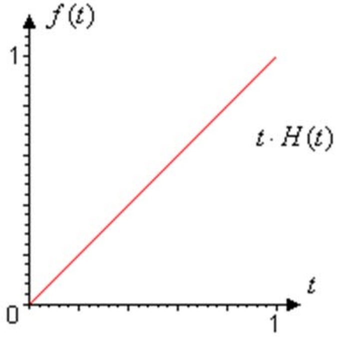
- **Segnali d'ingresso**: La valutazione dell'errore a regime è effettuata usando ingressi tipici di riferimento (segnali polinomiali)

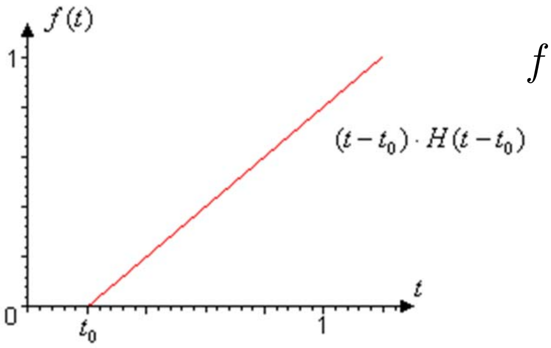




$$H(t), \quad H(t-t_0)$$

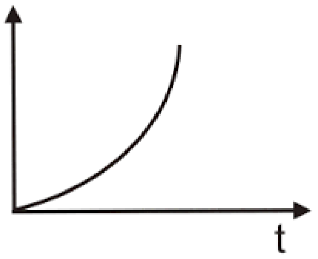
$$H(s)=\frac{1}{s}, \quad H(s)=\frac{1}{s}\cdot e^{-t_0 s}$$





$$f(t)=t\cdot H(t), f(t)=(t-t_0)\cdot H(t-t_0)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}, \quad F(s)=\frac{1}{s^2}\cdot e^{-t_0 s}$$



$$f(t)=t^2\cdot H(t), f(t)=(t-t_0)^2\cdot H(t-t_0)$$

$$F(s)=\frac{1}{s^3}, \quad F(s)=\frac{1}{s^3}\cdot e^{-t_0 s}$$

Risposta a Regime

- **Strumento di Calcolo**: FdT di Anello e/o Funzione di Sensitività

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + \boldsymbol{K(s)G(s)}} u(s) \qquad S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}$$

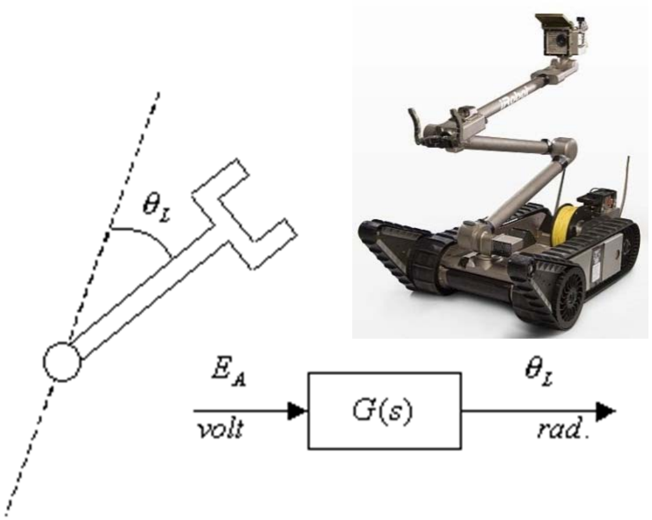
- Per il calcolo dell’errore a regime, la FdT in Anello Aperto è catalogata come tipo, ovvero come eccesso polo-zero all’origine. Riscrivendo la $K(s)G(s)$ in forma fattorizzata, si ha:

$$K(s)G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{s^j \prod_k (s + p_k)}$$

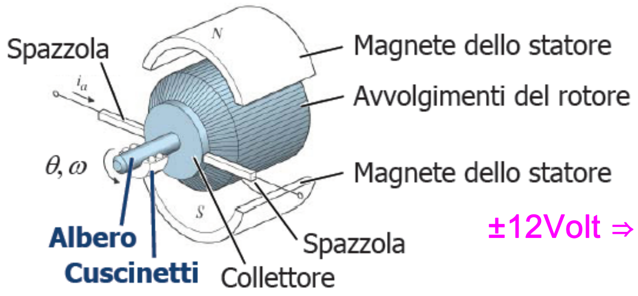
j = 0	tipo 0	$K(s)\cdot G(s) = \frac{N(s)}{(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 1	tipo 1	$K(s)\cdot G(s) = \frac{N(s)}{s(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 2	tipo 2	$K(s)\cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^2(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 3	tipo 3	$K(s)\cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^3(s+a)(s+b)\cdots}$

Risposta a Regime

❑ **Esempio**: Risposta di un Link robotico ad un Comando di Giunto



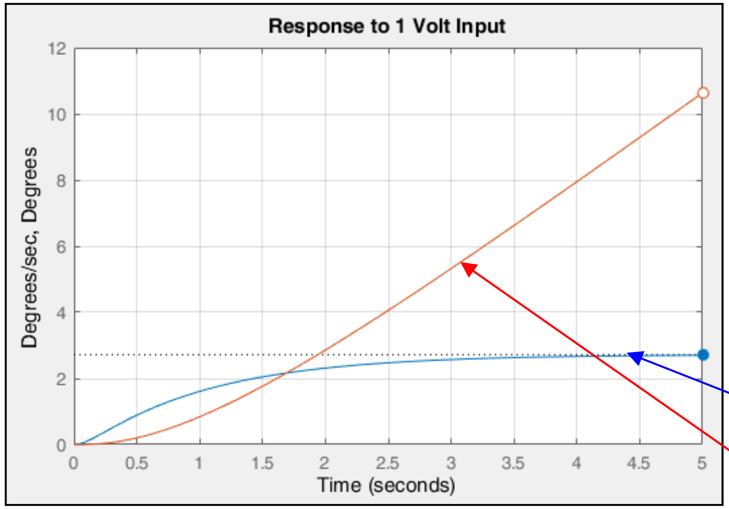
- **Il motore, ad una tensione costante, produce una Rotazione dell'albero a velocità angolare costante e l'angolo del Link aumenta linearmente nel tempo**



±12Volt ⇒ ± □RPM

$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_A(s)} = sG(s) = \frac{0.475}{(s+1)(s+10)} = \frac{[rad]}{[\sec volt]}$$

$$\frac{\theta_L(s)}{E_A(s)} = G(s) = \frac{0.475}{s(s+1)(s+10)} = \frac{[rad]}{[volt]}$$



- Risposta al gradino unitario (Es. 1 Volt)

$$E_A(t) = H(t), E_A(s) = \frac{1}{s}$$

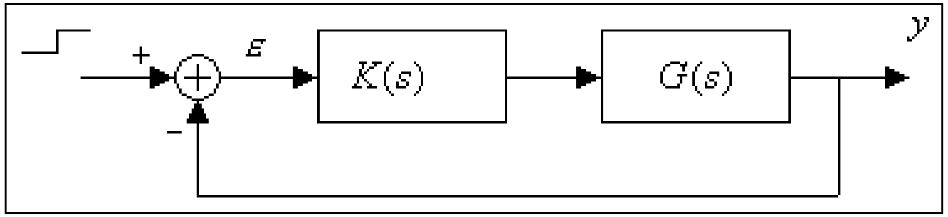
$$\dot{\theta}(t) = 0.0475 - 0.0528e^{-t} + 0.0053e^{-10t}$$

$$\theta(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{-10t}$$

Risposta a Regime

❑ **Problema:** E’ possibile progettare un sistema di controllo in modo che a Regime il braccio si sposti di 1 rad ad un comando di 1 Volt di tensione?

1. Il sistema in ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile
2. Per il sistema iniziale la velocità angolare di regime vale 0.475 rad/sec per Volt
3. Per il sistema iniziale vale ε→∞ per t→∞ in spostamento angolare $\theta(t)$



- Consideriamo un controllore proporzionale in retroazione unitaria $\boldsymbol{K(s) = k}$

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = \dfrac{1}{1+K(s)G(s)}E_A(s) = \dfrac{1}{1+\dfrac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}}E_A(s) \\ \theta_L(s) = G_{CL}(s)E_A(s) = \dfrac{K(s)\cdot G(s)}{1+K(s)G(s)}E_A(s) = \dfrac{0.475k}{s^3+11s^2+10s+0.475k}E_A(s) \end{cases}$$

❑ **Il controllore progettato deve garantire la stabilità asintotica del sistema in ciclo chiuso**

Risposta a Regime

- Analisi della Stabilità con il Criterio di Routh:

3	1	10	0
2	11	$0.475k$	0
1	$\frac{110 - 0.475k}{11}$	0	
0	$0.475k$		

$$0 < k < \frac{110}{0.475} = 231.5789$$

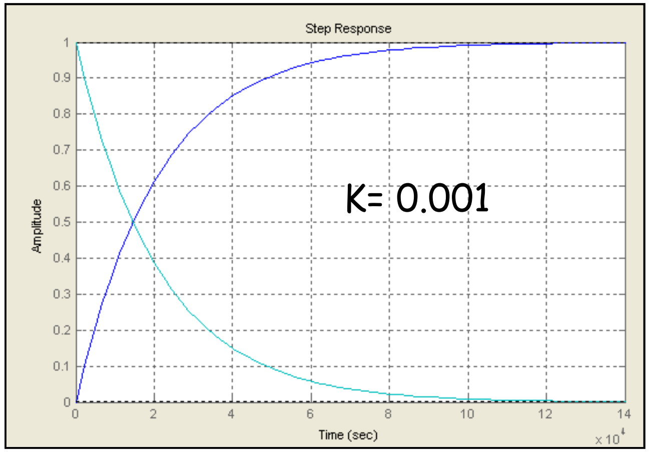
Valori ammissibili del controllore

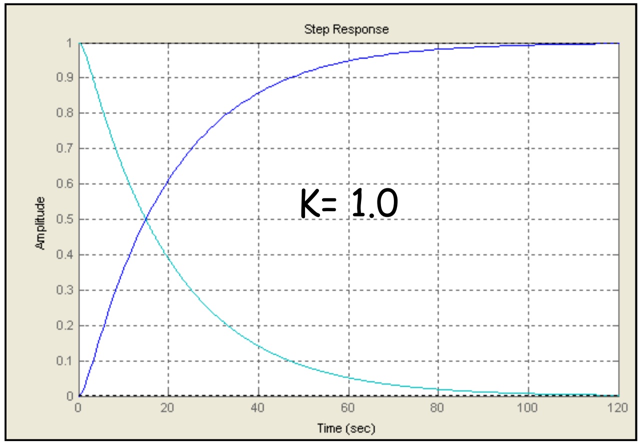
- Quanto vale l'errore a regime nel campo di stabilità del controllore?

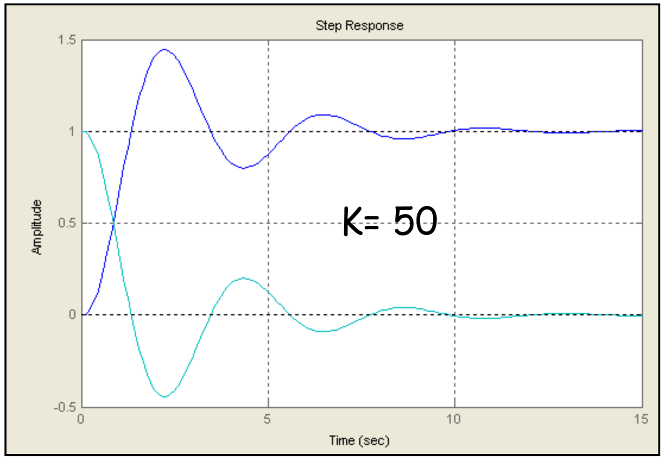
$$\lim_{s \to 0} s\varepsilon(s) = s \cdot \frac{1}{1 + K(s)G(s)} u(s) = s \frac{1}{1 + \frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} \cdot \frac{1}{s} = 0, 0 < k < 231.5789$$

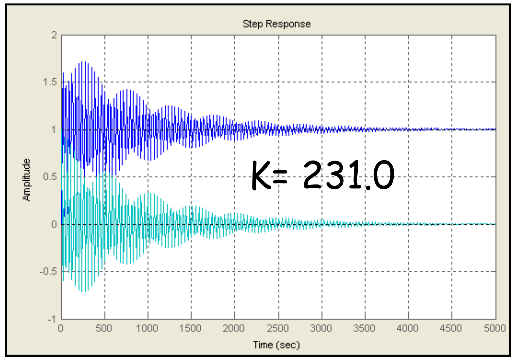
☐ Qualsiasi valore di k ammissibile, produce un errore a regime = 0.

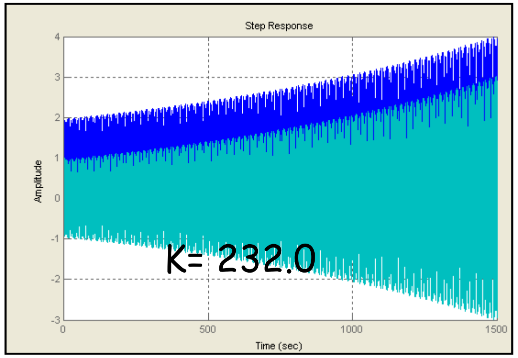
Risposta a Regime











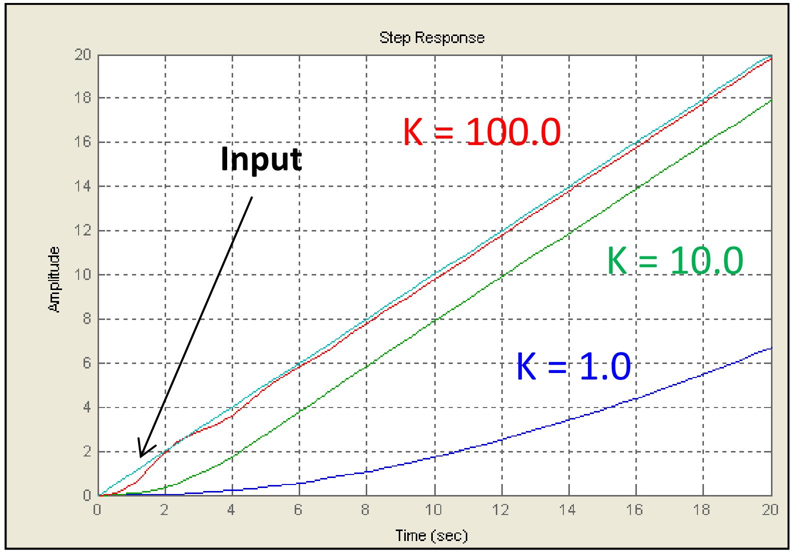
$$k < 231.5789$$

Risposta a Regime

- **Domanda:** Cosa succede all'errore a regime se il comando è una rampa? Ovvero se La tensione di ingresso cresce linearmente nel tempo? (1 Volt/sec)

  - Il sistema è asintoticamente stabile per k ammissibile $k < 231.5789$

$$\lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+\frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1+0.0475k}$$



- L'errore a regime alla Rampa è **sempre** limitato (finito) ed il suo valore numerico dipende dal guadagno k del controllore

- **Domanda:** Quale è il minimo errore alla rampa ammissibile?

$$k < 231.5789$$

$$\varepsilon_{MIN}^{RAMPA} = \frac{1}{1+(0.0475 \cdot 231.5789)} \approx 0.0835 = 8.35\%$$

Risposta a Regime

- ☐ L'esempio precedente permette di **generalizzare** il Calcolo dell'Errore a Regime in funzione di:

    1. Ingresso (Gradino, Rampa, Parabola, ecc.)
    2. "Tipo" di FdT di Anello

$$K(s)G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s+z_i)}{s^j \prod_k (s+p_k)} = k_0 P(s)$$

j = 0	tipo 0	$K(s)\cdot G(s) = \dfrac{N(s)}{(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 1	tipo 1	$K(s)\cdot G(s) = \dfrac{N(s)}{s(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 2	tipo 2	$K(s)\cdot G(s) = \dfrac{N(s)}{s^2(s+a)(s+b)\cdots}$
j = 3	tipo 3	$K(s)\cdot G(s) = \dfrac{N(s)}{s^3(s+a)(s+b)\cdots}$

- Ingresso a Gradino Unitario: $u(t)=H(t),\ u(s)=1/s$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+k_0 P(s)} = \frac{1}{1+k_0 \dfrac{\prod_i (z_i)}{\prod_k (p_k)}}$$

Tipo 0, Errore finito

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+k_0 P(s)} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

Tipo 1, 2, ecc., Errore nullo

Risposta a Regime

- Ingresso a Rampa Unitaria: $u(t)=tH(t)$, $\mathrm{u(s)=1/s^2}$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+K(s)G(s)}\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sK(s)G(s)}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{\prod_k (s+p_k)}{\prod_i (s+z_i)} = \infty$$

Tipo 0, Errore Infinito

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{s\cdot\prod_k (s+p_k)}{k_0\cdot\prod_i (s+z_i)} = \frac{1}{k_0}\frac{\prod_k (p_k)}{\prod_i (z_i)}$$

Tipo 1, Errore Finito

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{s^2\cdot\prod_k (s+p_k)}{k_0\cdot\prod_i (s+z_i)} = 0$$

Tipo 2, ecc., Errore nullo

Risposta a Regime

- Per altri ingressi polinomiali la regola può essere estesa facilmente

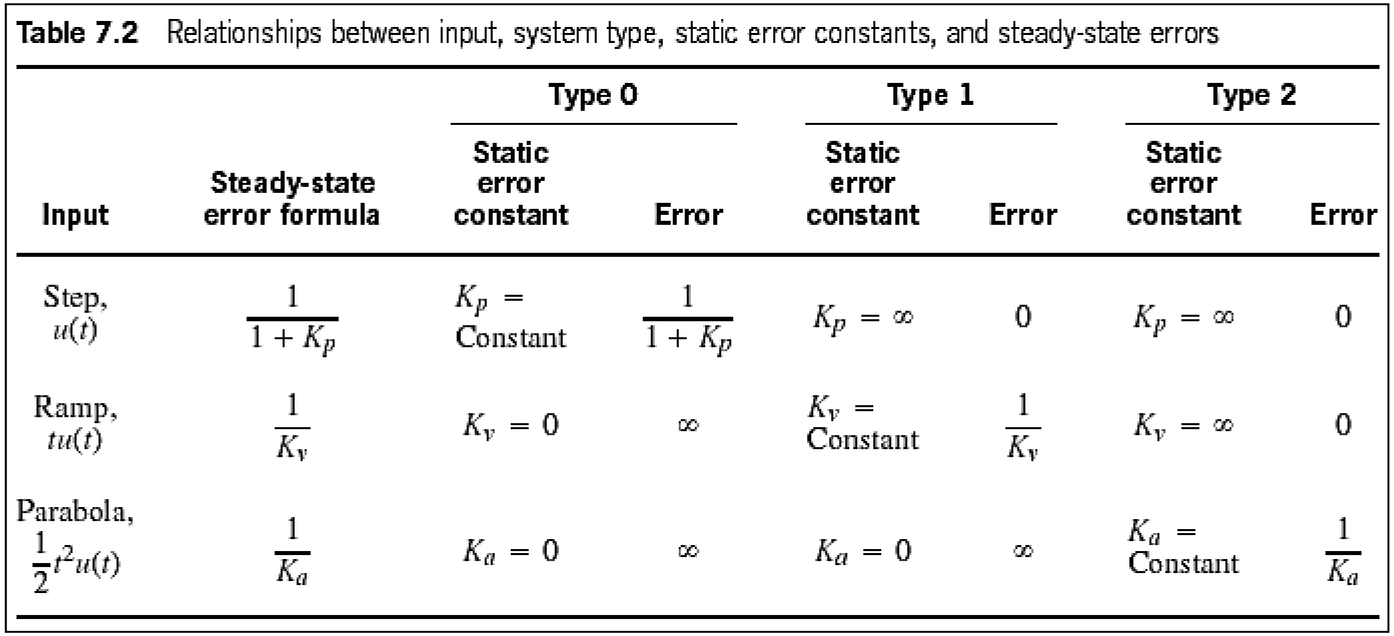


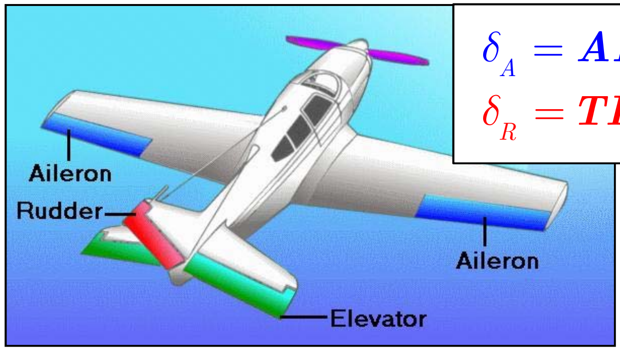
Table 7.2 Relationships between input, system type, static error constants, and steady-state errors

Input	Steady-state error formula	Type 0		Type 1		Type 2	
		Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p =$ Constant	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v =$ Constant	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a =$ Constant	$\frac{1}{K_a}$

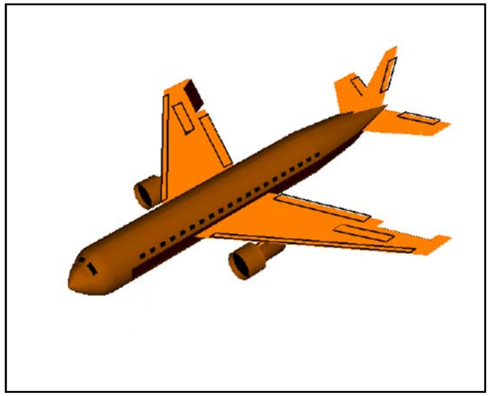
- **NOTA: il calcolo dell'errore a regime richiede la stabilità asintotica per poter applicare il teorema del valore finale**

Risposta a Regime

- **Esempio:** Moto linearizzato di Rollio di un Velivolo durante una virata



$$\delta_A = \boldsymbol{ALETTONE}$$
$$\delta_R = \boldsymbol{TIMONE}$$



Aereo Passeggeri in volo di crociera
Alt. = 33,000 ft, Speed = 0.84 Mach

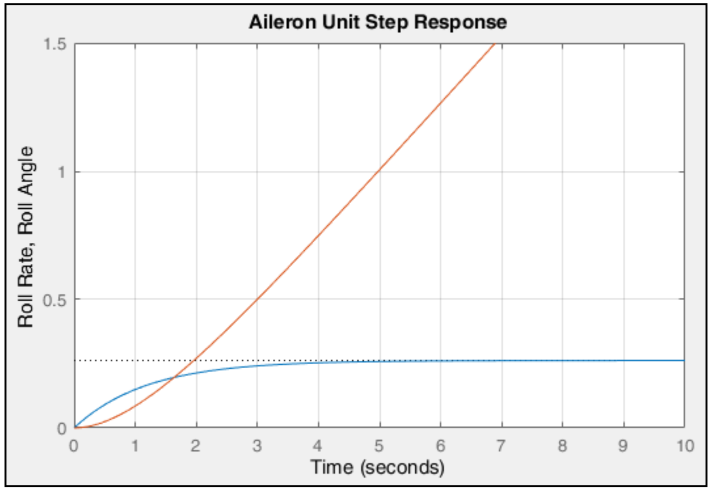
$$G(s) = \frac{\dot{\Phi}(s)}{\delta_A(s)} = \frac{L_{\delta A}}{s + L_P} = \frac{0.2214}{s + 0.8432} \,\mathrm{sec}^{-1}$$

$$G'(s) = \frac{\Phi(s)}{\delta_A(s)} = \frac{0.2214}{s(s+0.8432)}$$

$$y(t) = \dot{\Phi}(t) = 0.2626 \cdot \left(1 - e^{-0.8432 \cdot t}\right)$$

Virata Coordinata (zero sideslip)

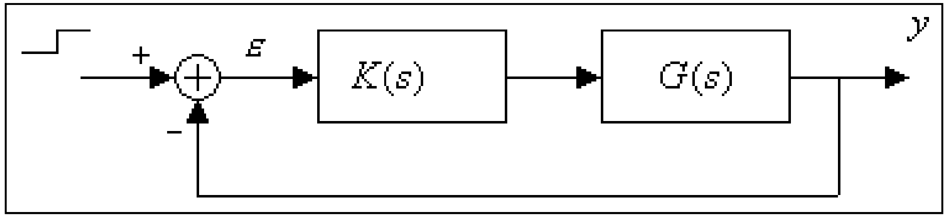
1. Alettone sinistro giù
2. Aumento portanza Semiala sinistra e **rollio** a destra (Senso Orario)
3. Aumento resistenza semiala sinistra e consequente momento di **imbardata** antiorario verso sinistra. Creazione di **sideslip** (derapata)
4. Spostamento timone verso destra per creazione di portanza sulla coda e consequente momento in senso orario che compensa l'imbardata e annulla il sideslip
5. Annullamento Alettone per mantenimento heading



Risposta a Regime

❑ **Obiettivo:** Annullare l’errore a regime in velocità di rollio ad un comando a gradino

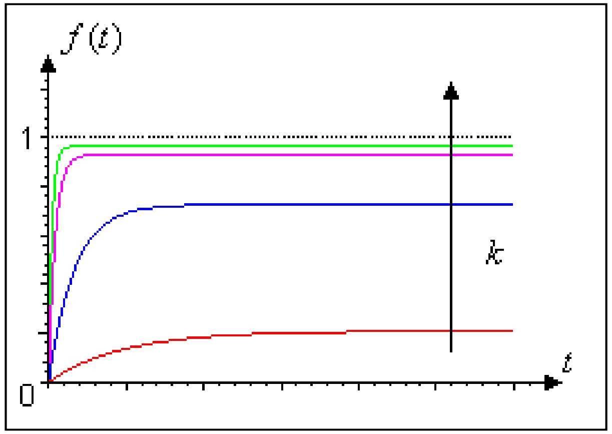
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t\to\infty}(1 - y(t)) = 1 - 0.2626 \cong 74\%$$



$$G(s) = \frac{\dot{\Phi}(s)}{\delta_A(s)} = \frac{0.2214}{s + 0.8432}$$

- Qualsiasi Controllore Proporzionale $K(s) = k$ **stabilizzante** produce un errore a regime finito in quanto La FdT di Anello è di Tipo 0

$$\boxed{K(s)G(s) = \frac{0.2214k}{s + 0.8432}}$$



$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0}\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + k \cdot 0.2626}$$

K	$\varepsilon_{ss}\%$
1	79,2
10	27,6
50	7,1
100	3,7

Risposta a Regime

- Affinchè l'errore a regime al gradino sia nullo, la FdT di anello deve essere di Tipo 1

$$K(s)G(s) = k_0 \frac{N_K(s)}{sD_K(s)} \frac{0.2214}{(s+0.8432)} \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{k_0}{s}$$

- Il controllore selezionato è di tipo ***Integrale***

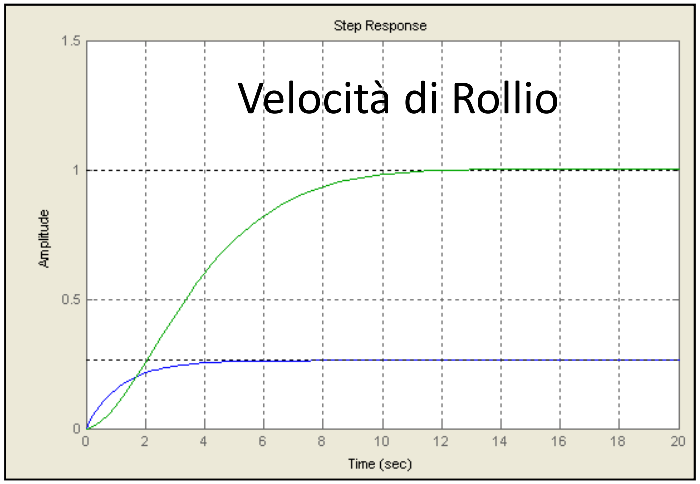
❑ Il Controllore è accettabile **se e solo se** il sistema in anello chiuso è **Asintoticamente Stabile**

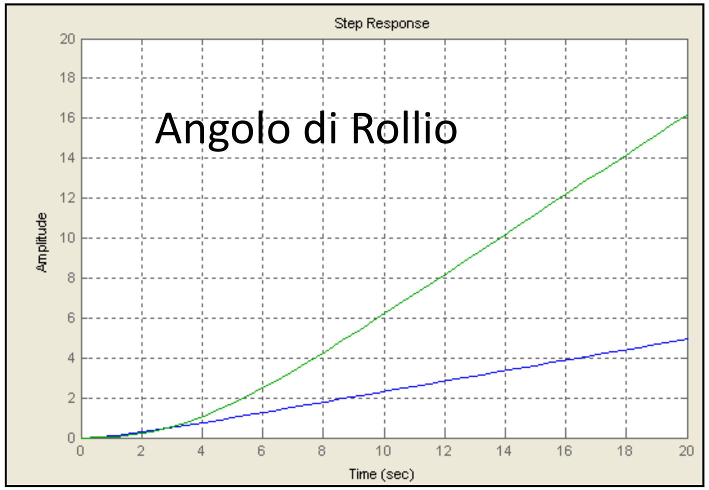
$$G_{CL}(s) = \frac{K(s)\cdot G(s)}{1+K(s)\cdot G(s)} = \frac{0.2214\cdot k_0}{s^2+0.8432\cdot s+0.2214\cdot k_0}$$

$K_0 > 0$

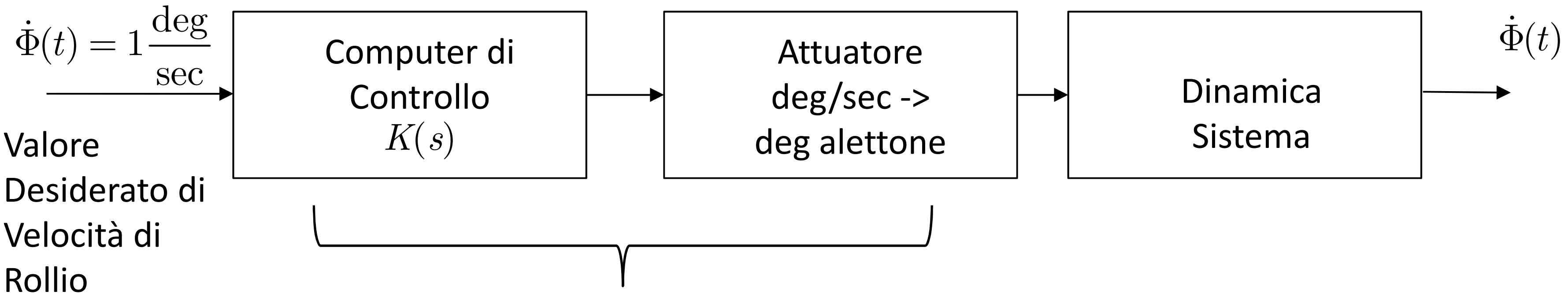
- 1 Grado di Alettone → 1 Grado al secondo di velocità di Rollio

Risposta a Regime





- Quale è adesso il comportamento fisico ingresso – uscita?



$\dot{\Phi}(t) = 1\frac{\text{deg}}{\text{sec}}$

Valore Desiderato di Velocità di Rollio

Computer di Controllo $K(s)$

Attuatore deg/sec -> deg alettone

Dinamica Sistema

$\dot{\Phi}(t)$

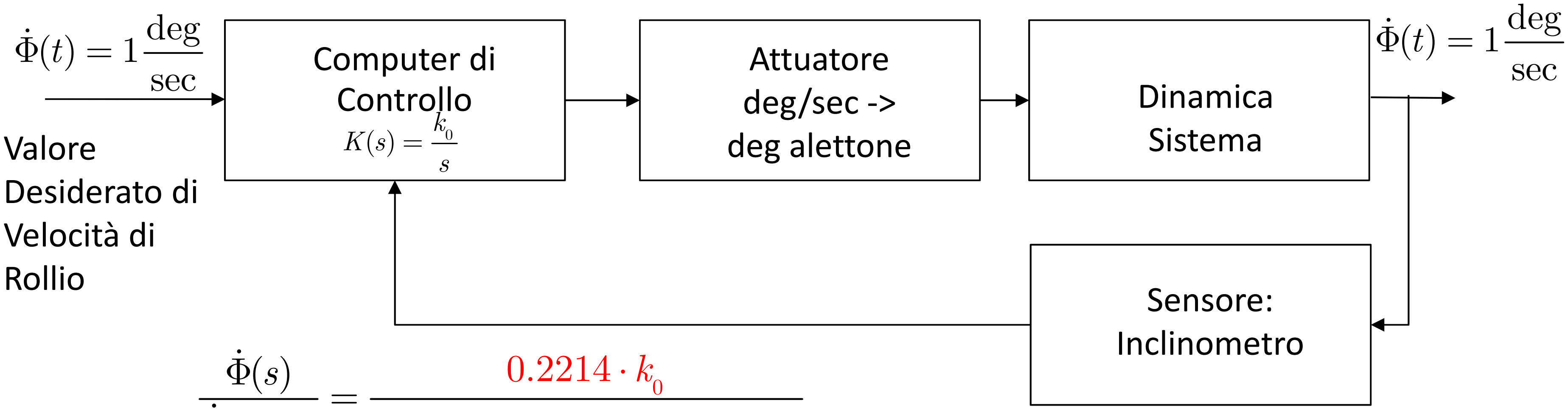
$K(\text{s}) = k$ produce un errore finito diverso da zero; per esempio $k = 10$ da un errore di circa 27.6 %

Risposta a Regime

- Un sistema di controllo integrale non retroazionato produce un errore infinito al gradino

$$\dot{\Phi}(s) = \frac{k_0}{s} \cdot \frac{0.2214}{s + 0.8432} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \dot{\Phi}(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-0.8432t}$$

- Un sistema di controllo integrale in retroazione unitaria soddisfa i requisiti richiesti



$\dot{\Phi}(t) = 1\frac{\deg}{\sec}$

Valore Desiderato di Velocità di Rollio

Computer di Controllo

$K(s) = \frac{k_0}{s}$

Attuatore deg/sec -> deg alettone

Dinamica Sistema

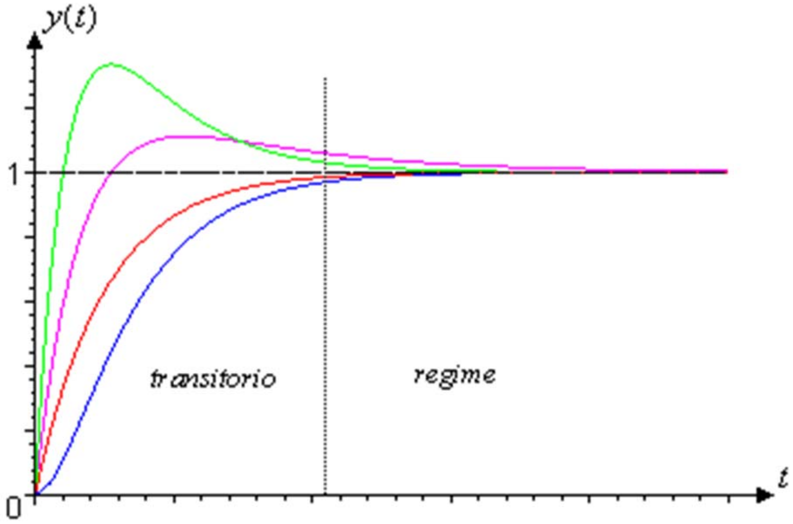
$\dot{\Phi}(t) = 1\frac{\deg}{\sec}$

Sensore: Inclinometro

$$\frac{\dot{\Phi}(s)}{\dot{\Phi}_{DES}(s)} = \frac{0.2214 \cdot k_0}{s^2 + 0.8432 \cdot s + 0.2214 \cdot k_0}$$

- **Esercizio:** E’ possibile progettare un controllore tale che vi sia un errore a Regime nullo tra comando di alettone ed angolo di Rollio?

Risposta Transitoria



- ❑ Lo studio della risposta transitoria di un sistema permette di studiare i seguenti requisiti principali:

  1. Stabilità
  2. Ampiezza massima delle componenti oscillatorie
  3. Velocità di Risposta

- ❑ In termini di *FdT* , gli elementi che influenzano la risposta transitoria sono:

  1. I poli, che determinano l'andamento temporale
  2. Gli zeri ed il guadagno che determinano l’ampiezza ed il valore di regime

Risposta Transitoria

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

- In entrambi i casi, la risposta ad un impulso ha la forma:

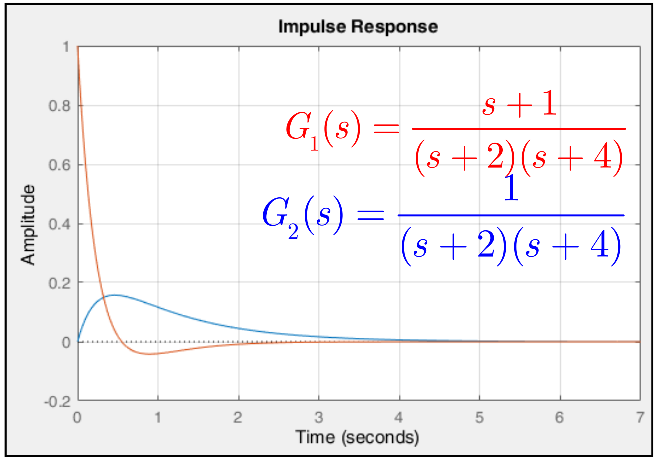
$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

- Le costanti sono diverse e sono date dai residui della scomposizione in fratti semplici. Nota che i residui dipendono dagli zeri del sistema e (in modo equivalente) dagli autovettori associati alla matrice A.

$$(c_1, c_2) = f(z_i, \boldsymbol{x}_0)$$

$$G_1(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases} \quad G_2(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$y_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{3}{2} e^{-4t} \qquad y_2(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t}$$

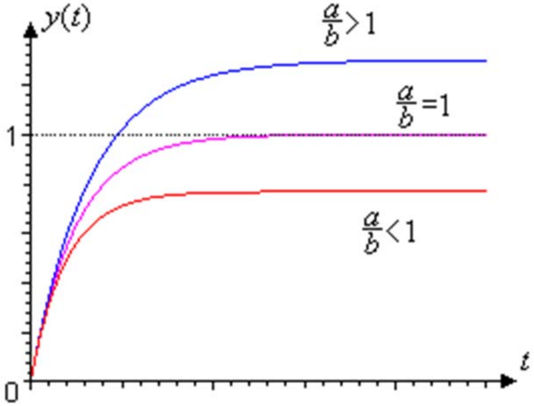


Risposta Transitoria

- ❑ L'analisi della risposta transitoria si basa tradizionalmente su un ingresso a gradino e sulla valutazione del sistema in base all'ordine

- ❑ Risposta transitoria per sistemi del 1° ordine

$$G(s) = \frac{a}{s+b} \qquad y(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$



- ❑ **Definizione** – Costante di tempo: Si definisce **costante di tempo** il parametro τ = 1/b. Tale parametro fornisce informazioni su quanto velocemente il sistema tende al suo valore di regime

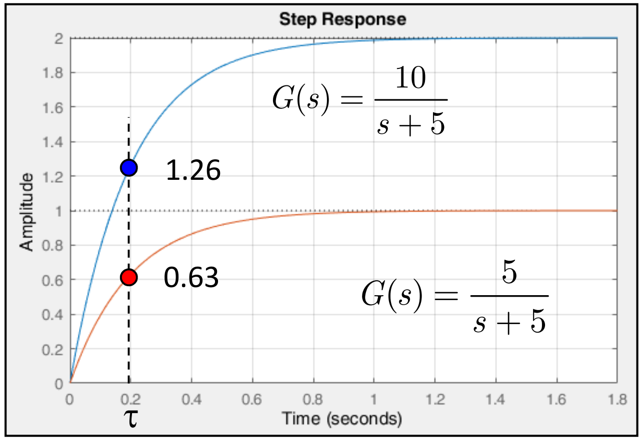
$$y(\tau) = 63\% y_{\infty} \qquad \text{dove } y_{\infty} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

$$t = \tau = \frac{1}{b} \qquad \Rightarrow \qquad y(\tau) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-b\tau}\right) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}632 \cdot \frac{a}{b} \cong 63\% \frac{a}{b}$$

- Un'altra definizione è che la costante di tempo sia pari a 3/*b*, ovvero tale che $y(\tau)$ = 95% del valore finale.

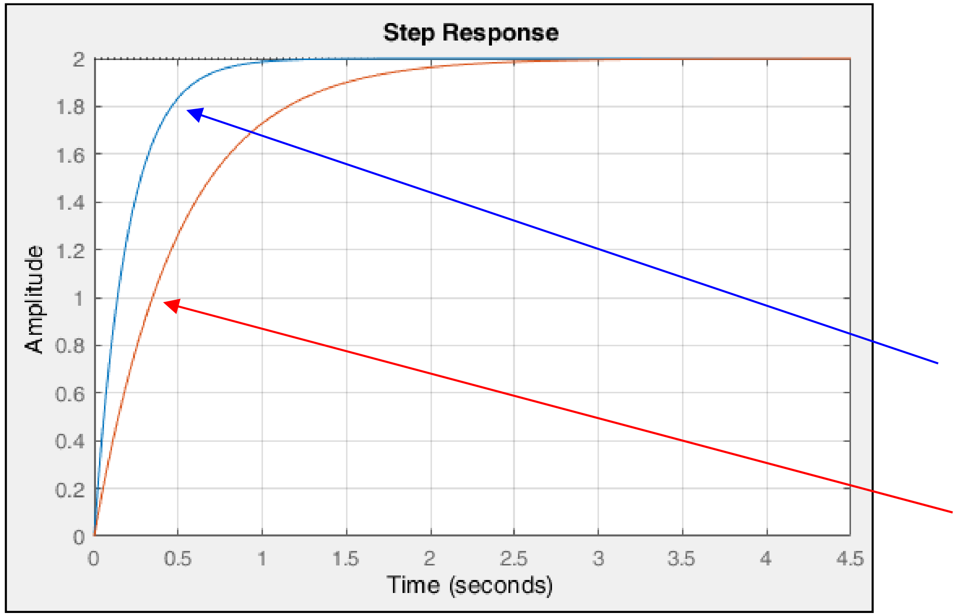
Risposta Transitoria

❑ Esempio



- I due sistemi hanno la stessa costante di tempo avendo lo stesso polo -5

$$\tau = \frac{1}{5}\sec$$



- Quanto <u>minore</u> è la costante di tempo, tanto <u>maggiore</u> è la velocità di risposta del sistema

$$G_1(s) = \frac{10}{s+5}, \tau = 0.2\sec, y_\infty = 2, \varepsilon_{ss} = 100\%$$

$$G_2(s) = \frac{4}{s+2}, \tau = 0.5\sec, y_\infty = 2, \varepsilon_{ss} = 100\%$$

Risposta Transitoria

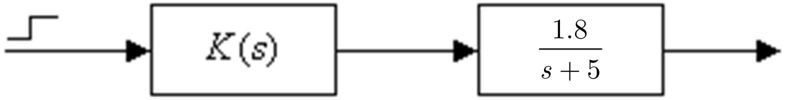
- **Problema:** Dato il sistema $G(s) = \dfrac{1.8}{s+5}$

  si desiderano i seguenti requisiti di risposta temporale:
  - Costante di tempo τ = 0.1 sec
  - Errore a regime al gradino non superiore al 2%

  - Analisi:
    - Sistema asintoticamente stabile

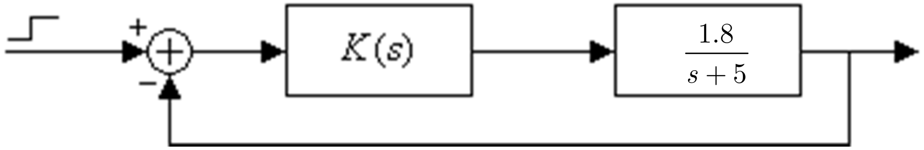
$$\begin{cases} \tau = 0.2\,\text{sec} \\ \varepsilon_{STEP} = 64\% \end{cases}$$

- Sebbene sconsigliabile, data la stabilità del sistema è possibile verificare la sintesi di un controllore in ciclo aperto



$$K(s) = K\frac{s+5}{s+10}, \frac{1.8K}{10} < 0.02 \Rightarrow K > 0.1111$$

Risposta Transitoria

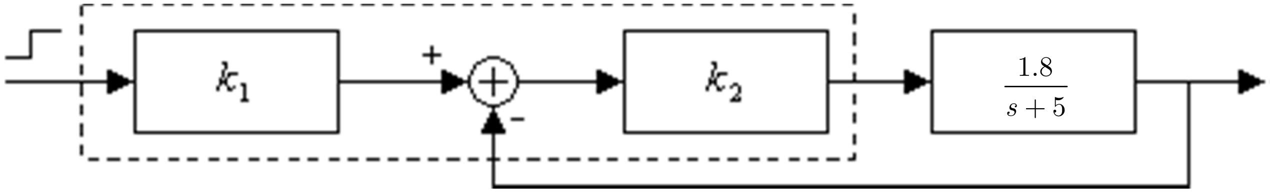


Scegliendo un controllore Proporzionale (cioè $K(s) = k$ = cost.), si ha un errore a regime finito e non nullo

$$G_{CL}(s) = \frac{1.8k}{s+5+1.8k}$$

- Per K = 2.7778, la costante di tempo è τ = 0.1 sec, ma ε = 50%
- Per K < 0.068, ε < 2%, ma la costante di tempo è τ = 0.1952 sec

❑ **Vi sono 2 Specifiche di progetto Linearmente Indipendenti e dobbiamo usare 2 parametri Indipendenti nel controllore**

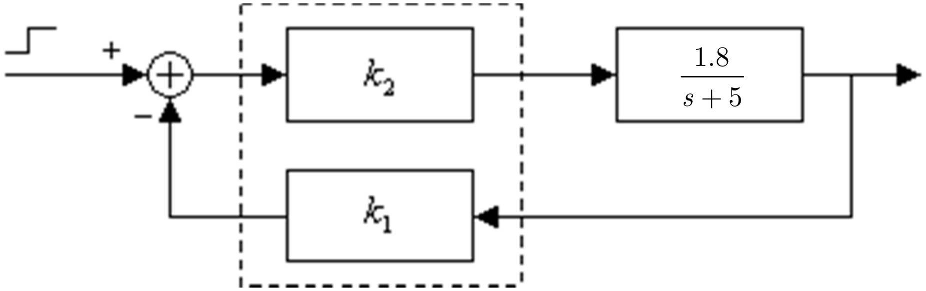


$$G_{CL}(s) = \frac{1.8k_1k_2}{s+5+1.8k_2}$$

Risposta Transitoria

- Costante di tempo $b = \frac{1}{\tau} = 10 \quad \Rightarrow \quad 5 + 1.8k_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2.7778$

- Errore a Regime $\frac{4k_1k_2}{2+4k_2} = \frac{5k_1}{10} = 0.5k_1 = 0.98 \quad (1.02) \Rightarrow k_1 = \ 1.96 \ \ (2.04)$



- Costante di tempo

$$b = \frac{1}{\tau} = 10 \quad \Rightarrow \quad 5 + 1.8k_1k_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad k_1k_2 = 2.7778$$

- Errore a Regime

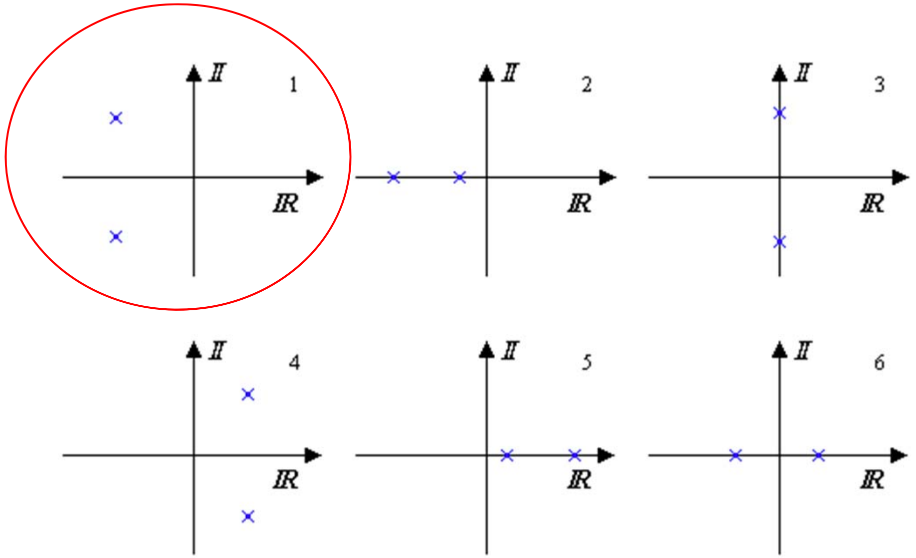
$$\frac{1.8k_2}{5+1.8k_1k_2} = \frac{1.8k_2}{10} = 0.18k_2 = 0.98 \quad (1.02) \Rightarrow k_2 = \ 5.44 \ \ (5.6667)$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5106 \\ k_2 = 5.44 \end{cases} , \qquad \begin{cases} k_1 = 0.4902 \\ k_2 = 5.6667 \end{cases}$$

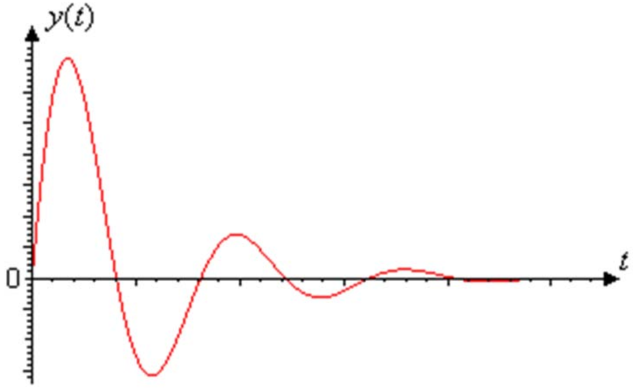
Risposta Transitoria

❑ Risposta transitoria per sistemi del 2° ordine

Le possibili disposizioni, nel piano complesso, dei poli di un sistema del secondo ordine sono:



Risposta impulsiva di un sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati asintoticamente stabile

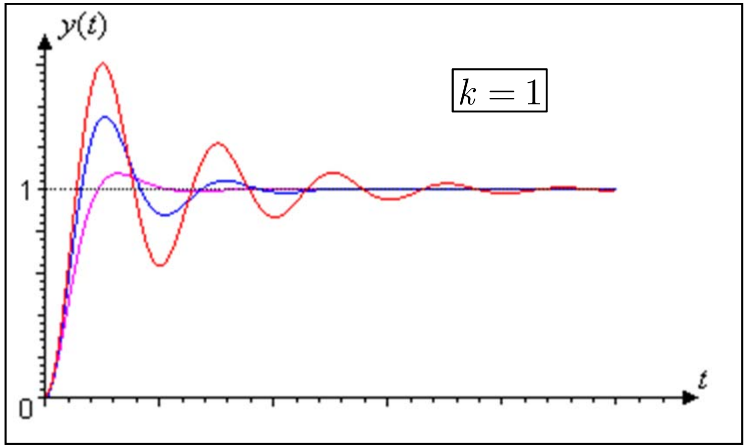


- L'unica situazione di interesse è data dal sistema 1; infatti, per gi altri si può notare che:
- sistema 2 : può essere visto come composizione di due sistemi del primo ordine,
- sistema 3 : è la rappresentazione di un'oscillazione autosostenuta; l'interesse su di esso è marginale dato che, per segnali non impulsivi, la risposta è illimitata,
- sistemi 4, 5 e 6 : sono sistemi instabili che richiedono, se devono essere studiati, una stabilizzazione.

Risposta Transitoria

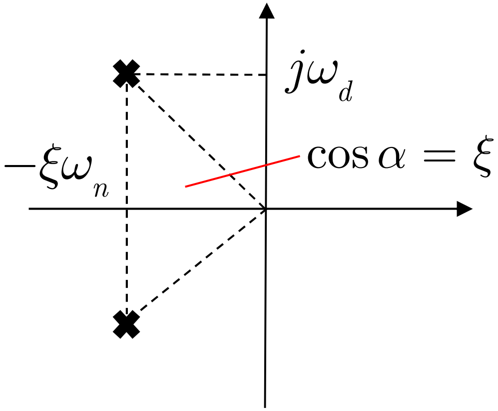
- La FdT di un sistema del secondo ordine ha la forma:

$$G(s) = k\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = k\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$



- I poli del sistema sono dati da:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d \qquad \begin{aligned}\omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \alpha &= \cos^{-1}(\xi)\end{aligned}$$

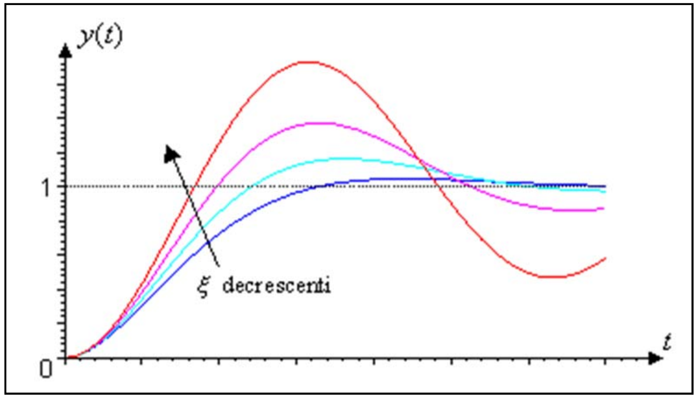


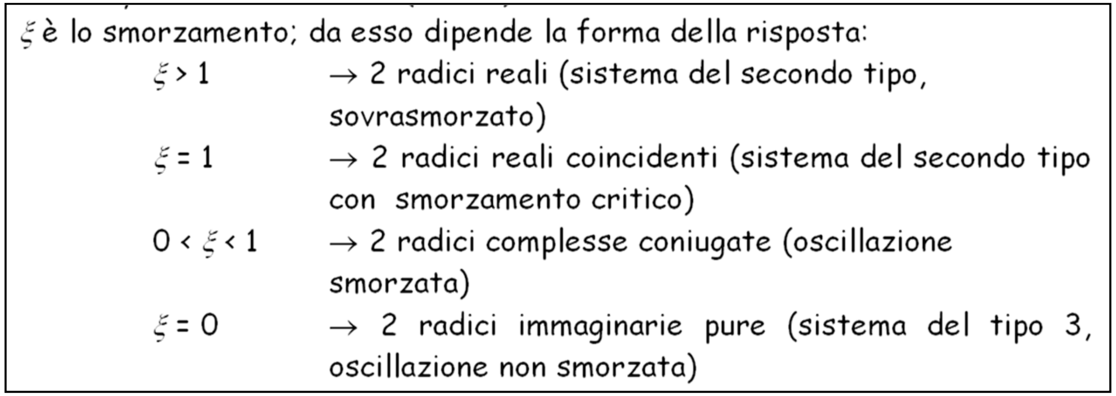
- ω_n = pulsazione propria non smorzata
- ω_d = pulsazione propria smorzata
- ξ = coefficiente di smorzamento

$$y(t) = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}(\xi)\right)\right]$$

Risposta Transitoria

- Effetto del Coefficiente di Smorzamento (k = 1)





ξ è lo smorzamento; da esso dipende la forma della risposta:

$\xi > 1$ → 2 radici reali (sistema del secondo tipo, sovrasmorzato)

$\xi = 1$ → 2 radici reali coincidenti (sistema del secondo tipo con smorzamento critico)

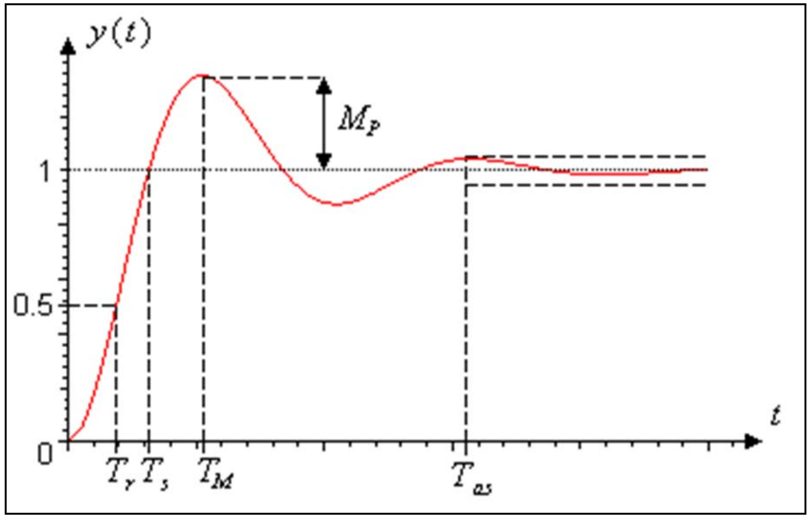
$0 < \xi < 1$ → 2 radici complesse coniugate (oscillazione smorzata)

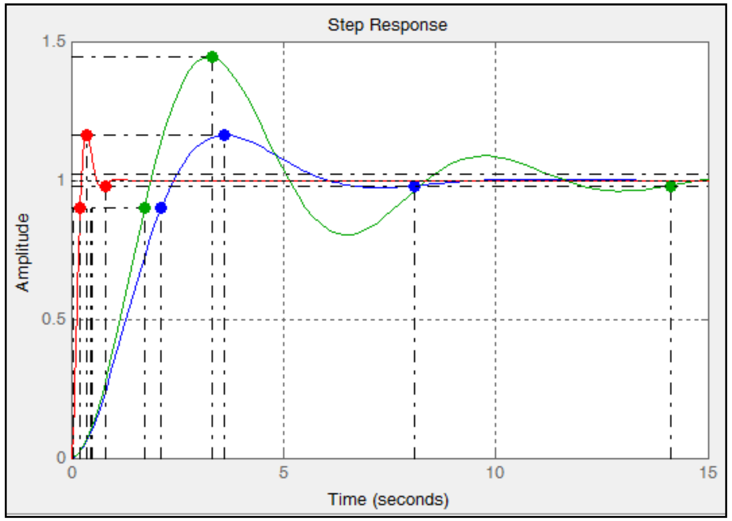
$\xi = 0$ → 2 radici immaginarie pure (sistema del tipo 3, oscillazione non smorzata)

- A differenza di un sistema del primo ordine, in questo caso vi sono due parametri che influenzano la risposta transitoria:
    - ω_n = pulsazione propria non smorzata
    - ξ = coefficiente di smorzamento

Risposta Transitoria

❑ Parametri Caratteristici della risposta transitoria





1) <u>Sovraelongazione Massima</u>: indica la massima ampiezza di Oscillazione

2) <u>Tempo di Salita</u>: indica la velocità di risposta

3) <u>Tempo di Assestamento</u>: indica il raggiungimento della condizione di Regime

Risposta Transitoria

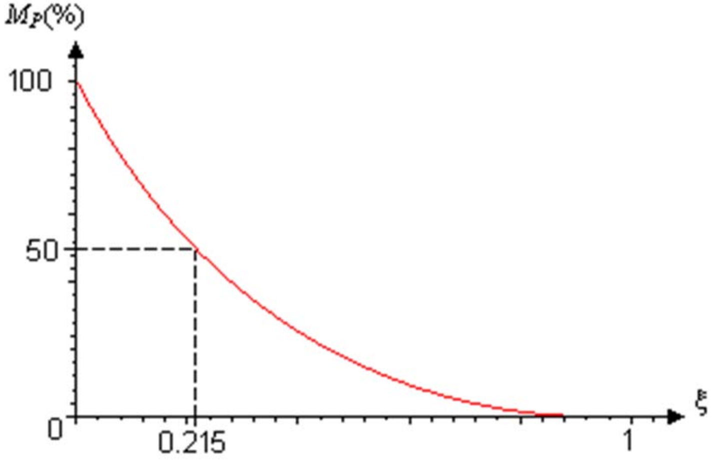
❑ Sovraelongazione Massima M_p

Indicando con y_∞ il valore di regime e con $y_{\max}$ il valore massimo, la sovraelongazione massima percentuale risulta essere:

$$\boxed{M_p = 100 \cdot \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty} = 100 \cdot e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}}$$

$$y_{\max} = 1 + e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$



- La sovraelongazione massima fornisce anche una misura della "stabilità" del sistema; come visto, più il valore di ξ è basso più il sistema oscilla prima di raggiungere il valore di regime
- La sovraelongazione dipende soltanto dallo Smorzamento e non da altri parametri

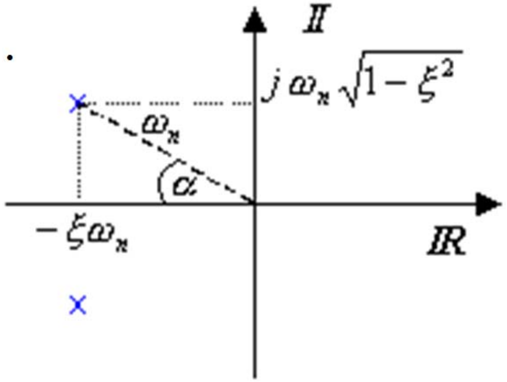
Risposta Transitoria

❑ Tempo di Salita T$_s$

È definito come il tempo necessario affinchè il sistema arrivi, la prima volta, al valore di regime (sebbene esistano nei testi altre definizioni simili).

$$y(T_s) = 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n T_s} \sin\left(\omega_d T_s + \cos^{-1}(\xi)\right) = \ldots$$

$$\ldots = 1 - e^{-\xi\omega_n T_s}\left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_d T_s\right) + \cos\left(\omega_d T_s\right)\right]$$



Da cui:

$$T_s = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{-\omega_n\xi}\right)$$

$$\boxed{T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$T_s \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1, T_s \cong \frac{1 + 1.1\xi + 1.4\xi^2}{\omega_n} \quad 1 < \xi$$

Risposta Transitoria

❑ Tempo di Assestamento T_{as}

Tempo oltre il quale la differenza fra valore di regime e valore effettivo dell'uscita rimane al di sotto di un valore ε calcolato come percentuale del valore di regime stesso (es. ε = 5% o 3% o 2% di y_∞); superato il tempo di assestamento il sistema viene considerato a regime.

$$T_{a\varepsilon} = -\frac{1}{\xi\omega_n}\cdot\ln\varepsilon \qquad \varepsilon = 2\% \rightarrow T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \qquad \varepsilon = 5\% \rightarrow T_{a5} \cong \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Quanto detto è valido anche nel caso in cui il valore a regime dell'uscita sia diverso da 1; in tal caso è sufficiente assumere tutti i parametri normalizzati al valore di regime.

❑ Tempo di Ritardo T_r

Tempo affinchè l'uscita raggiunga il 50% del valore di regime

$$y(T_r) = \frac{1}{2}y_\infty$$

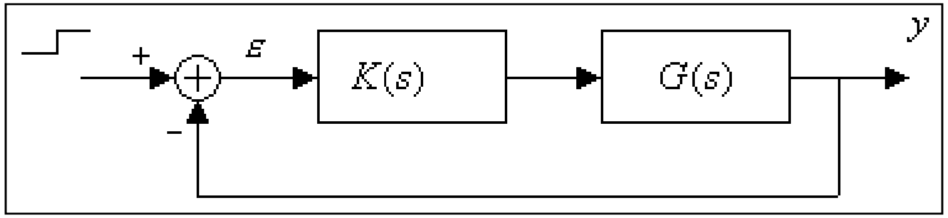
$$T_r \cong \frac{1+0.7\xi}{\omega_n} \qquad 0<\xi<1$$

$$T_r \cong \frac{1+0.6\xi+0.15\xi^2}{\omega_n} \qquad 1<\xi$$

Risposta Transitoria

- ☐ **Esempio**: Dato il sistema instabile $G(s) = \dfrac{16}{(s+5)(s-1)}$ Progettare un controllore tale che

$$\begin{cases} \varepsilon_{step} = 0 \\ M_P \leq 10\% \\ T_{as} \leq 10\text{sec} \end{cases}$$



$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s+z_i)}{\color{red}{s} \prod_k (s+p_k)} = k_0 P(s)$$

- Requisito di Regime

- **NOTA:** La struttura del controllore che soddisfi il requisito di regime deve essere impostata come primo step

$$\begin{cases} M_p = e^{-\left(\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 0.1 \\ T_{as} \cong \dfrac{4}{\xi\omega_n} \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \geq 0.5916 \\ \omega_n \leq 0.68 \end{cases}$$

- Requisito di Risposta Transitoria

Risposta Transitoria

- Il controllore deve garantire la stabilità asintotica in ciclo chiuso e deve avere almeno un integratore per il requisito di regime.
  - <u>Prima scelta di tentativo:</u>
    Controllore P-I
    (Proporzionale-Integrale)

$$K(s) = k\frac{s+z}{s} \qquad G(s)K(s) = \frac{16k(s+z)}{s(s+5)(s-1)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{16k(s+z)}{s^3 + 4s^2 + (16k-5)s + 16kz}$$

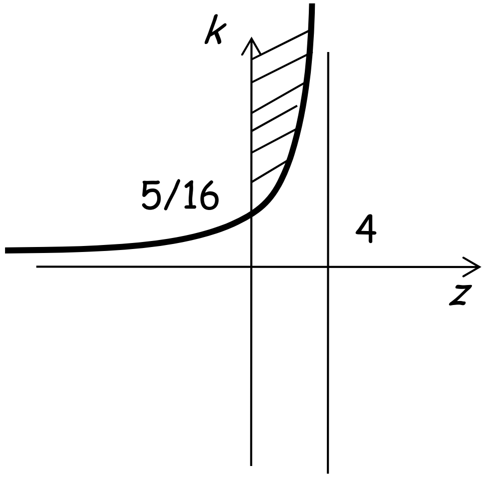
  - Criterio di Routh

$$\begin{cases} 16k - 5 > 0 \Rightarrow k > \dfrac{5}{16} > 0 \\ 16kz > 0 \Rightarrow z > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{|lll} \hline 1 & 16k-5 & 0 \\ 4 & 16kz & 0 \\ 16k-5-4kz & 0 & \\ 16kz & & \end{array}$$

$$k > \frac{5}{4(4-z)}$$

$$4 > z > 0$$



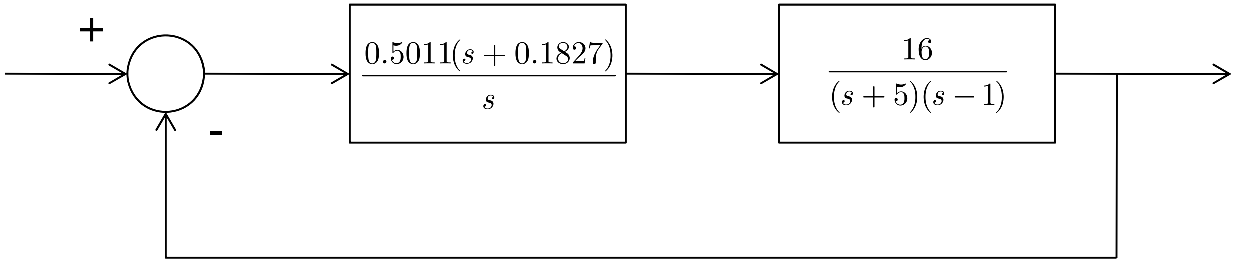
Risposta Transitoria

- Dai requisiti di Risposta Transitoria:

$$G_{CL}(s) = \frac{16k(s+z)}{s^3 + 4s^2 + (16k-5)s + 16kz} \cong \frac{16k(s+z)}{(s^2 + 0.8001s + 0.4578)(s+P)} =$$

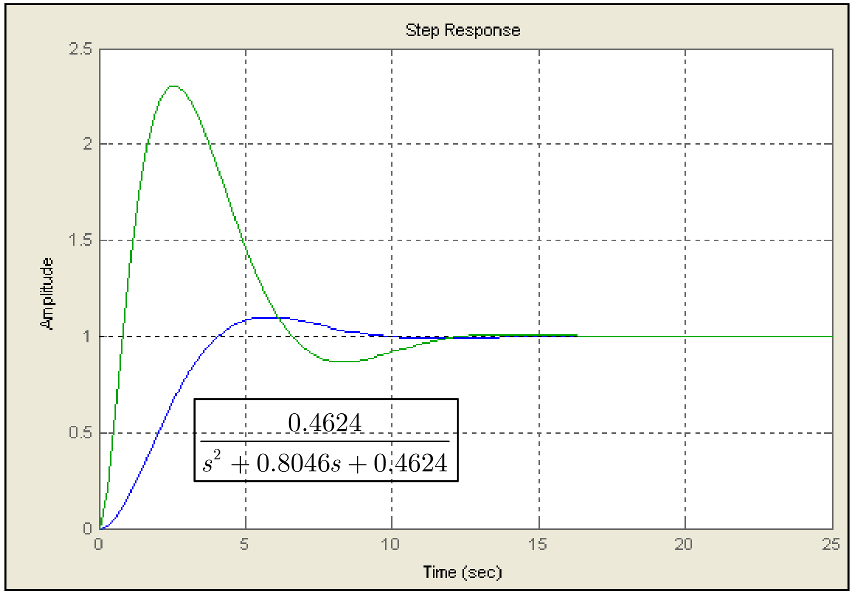
$$= \frac{16k(s+z)}{s^3 + (0.8001+P)s^2 + (0.4578 + 0.8001P)s + 0.4587P}$$

$$\begin{cases} 0.8001 + P = 4 \\ 0.4578 + 0.8001P = 16k - 5 \\ 0.4587P = 16kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 3.1999 \\ k = 0.5011 \\ z = 0.1827 \end{cases}$$



Risposta Transitoria

- **Commenti:** $$G_{CL}(s) = \frac{8.0176(s+0.1827)}{s^3+4s^2+3.0176s+1.4678}$$



1. Errore a Regime ☺
2. Tempo di Assestamento 😐
3. Sovraelongazione ☹

- **Possibili Cause?**

Rispetto ad un sistema del 2^0 ordine puro si ha:

- Il sistema ha uno Zero a -0.1827
- Il sistema è del 3^0 ordine e vi è un Polo a -3.1999

Effetto degli Zeri

- ☐ **Definizione 1:** Radice del numeratore della FdT (per sistemi SISO)

$$G(s) = \frac{s+4}{s+10}$$

z = -4, è uno zero del sistema

- ☐ **Definizione** 2: Frequenza bloccante del segnale d’ingresso

$$G(s) = \frac{s+4}{s+10}, u(t) = e^{-4t}, y(t) = e^{-10t}$$

z = -4, è uno zero del sistema in quanto u(t) non appare nell’uscita

- La presenza degli zeri nella *FdT* di un sistema influenza la risposta in termini di Ampiezza

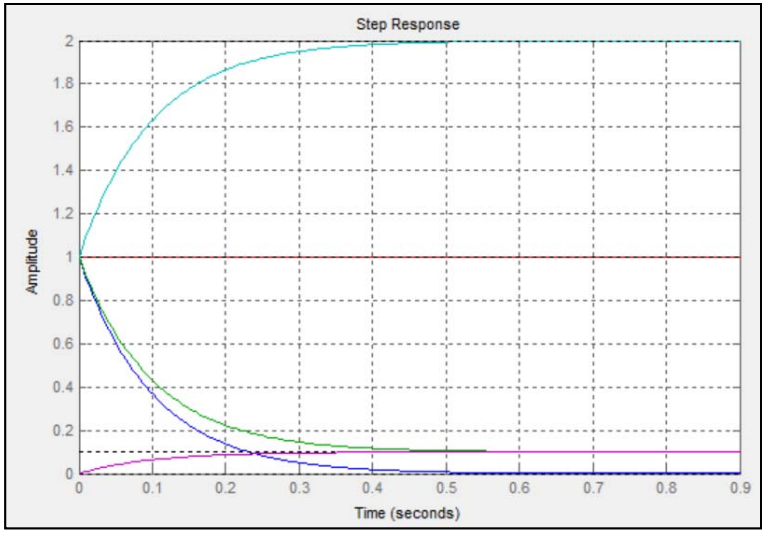
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}; G_{CL}(s) = \frac{N(s)}{N(s)+D(s)}$$

Effetto degli Zeri

- **Sistemi del 1^0 Ordine (risposta al gradino)**

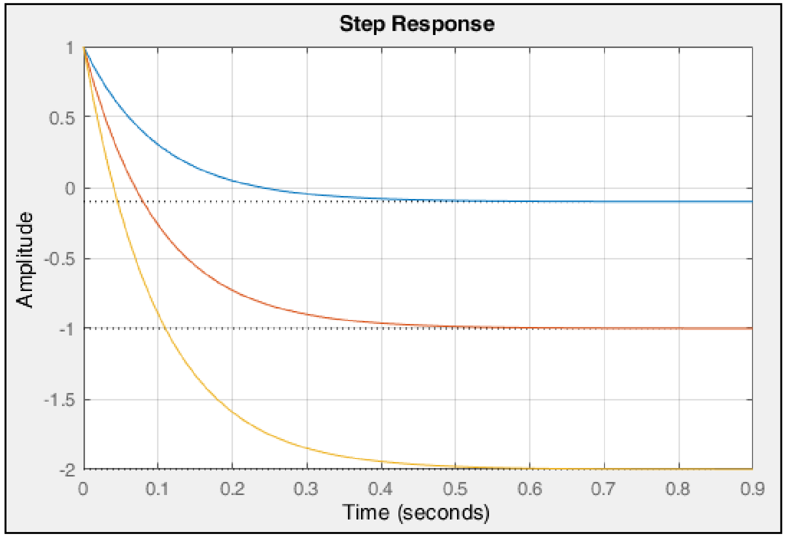
$$G(s) = \frac{s+z}{s+10}$$

- Zero di parte reale negativa



--- No zeri
--- zero = 0
--- zero = -1
--- zero = -10
--- zero = -20

- Zero di parte reale positiva



--- zero = +1
--- zero = +10
--- zero = +20

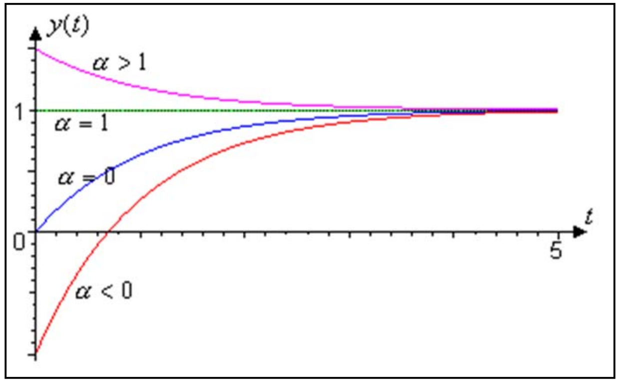
Effetto degli Zeri

- La risposta al gradino in forma generale vale:

$$G(s) = k \cdot \frac{s+z}{s+p} = \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \qquad T = \frac{1}{p},\ \alpha = \frac{p}{z}$$

- µ prende il nome di Guadagno Statico, ovvero guadagno della funzione: $G(0) = \lim_{s \to 0} G(s)$

- Risposta al Gradino



$$y(t) = \mu \left[1 + (\alpha - 1) e^{-\frac{1}{T}t} \right] \qquad t \geq 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{s(1+Ts)} = \mu$$

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \mu \cdot \frac{1+\alpha Ts}{s(1+Ts)} = \mu\alpha$$

1. Nella simulazione si è supposto T = 1 e μ =1 (dal parametro T dipende la velocità di risposta, da μ invece il valore finale del guadagno)

2. L'uscita presenta una discontinuità analitica in 0 (escludendo ovviamente α = 0)

3. **Per valori negativi di α, cioè in caso di zeri a parte reale positiva, il sistema risponde in maniera opposta rispetto al comando e risulta molto più lento nel raggiungere il valore di regime**

4. Per valori di α > 1 (cioè lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'asse immaginario rispetto al polo) l'uscita assume, inizialmente, un valore maggiore del valore di regime.

5. L'andamento di $y(t)$ è sempre comunque esponenziale e dipende dalla costante di tempo associata al polo.

Effetto degli Zeri

☐ Sistemi del 2^0 Ordine (risposta al gradino)

L'influenza di uno zero in un sistema del secondo ordine dipende dalla sua posizione sul piano complesso relativa a quella dei due poli

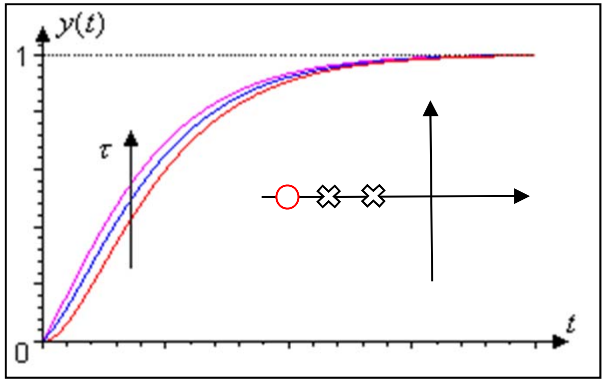
- **Sistema con poli reali**

$$G(s) = k\frac{(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)} = \mu\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad \mu = \frac{kz}{p_1 p_2}, \tau = \frac{1}{z}, T_1 = \frac{1}{p_1}, T_2 = \frac{1}{p_2}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2}e^{-t/T_1} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2}e^{-t/T_2}\right), \qquad t \geq 0$$

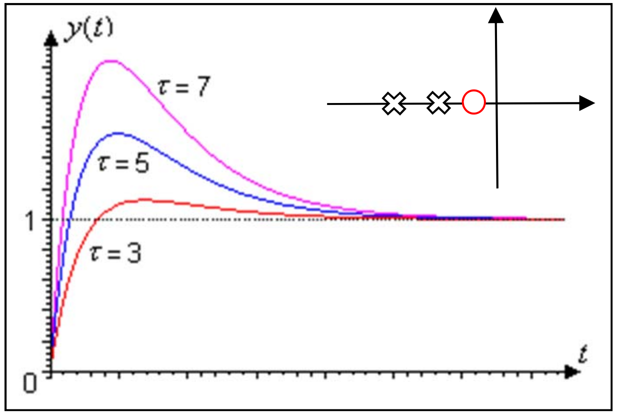
μ = 1 per semplicità

- $T_1 > T_2 > \tau$ - lo zero è più lontano dall'origine rispetto ai poli; più lo zero si allontana dall'origine, più la risposta del sistema si avvicina a quella del sistema privo di zeri (in rosso il sistema privo di zeri)

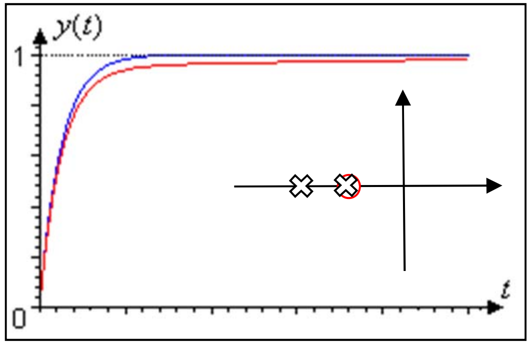


Effetto degli Zeri

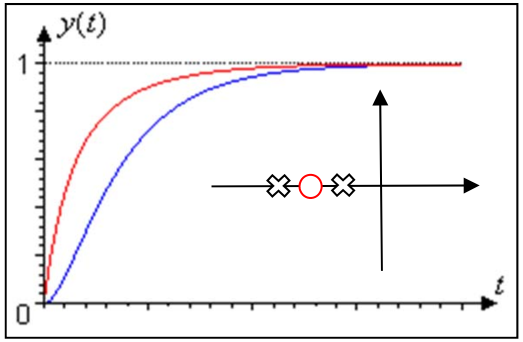
- $\tau >> T_1 > T_2$ - lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'origine rispetto ai poli; la risposta presenta una sovraelongazione tanto più elevata quanto più lo zero è vicino all'origine



- $\tau \cong T_1 >> T_2$ - lo zero è molto vicino al polo più "lento"; il polo vicino allo zero può essere trascurato e il sistema può essere considerato del primo ordine (la rossa è del sistema del secondo ordine, la blu quella del sistema del primo ordine ottenuto dalla approssimazione)

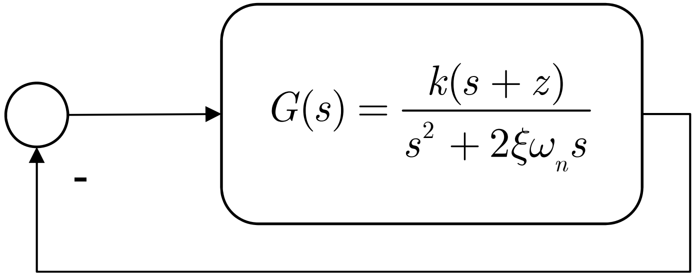


- $T_1 > \tau > T_2$ - lo zero è in mezzo ai due poli; lo zero tende a velocizzare la risposta rispetto al caso di sistema senza zeri (in rosso il sistema con lo zero, in blu quello senza)



Effetto degli Zeri

- **Sistema con poli complessi e coniugati**

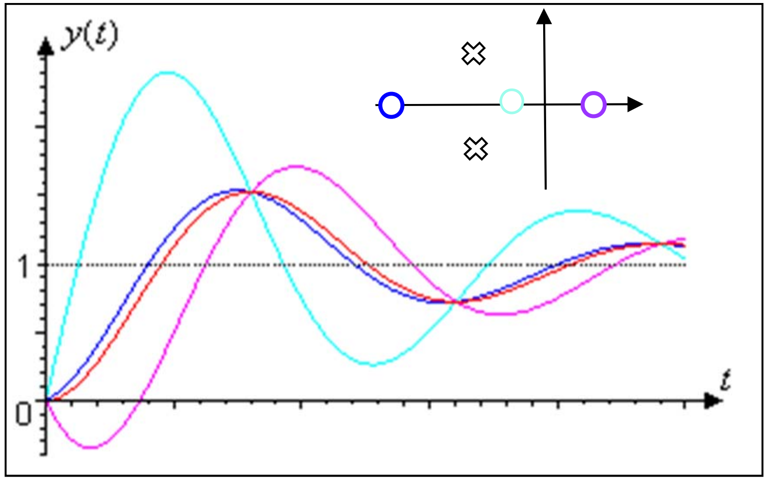


$$G(s) = \frac{k(s+z)}{s^2 + 2\xi\omega_n s}$$

$$G^{CL}(s) = \frac{k(s+z)}{s^2 + \left(2\xi\omega_n + k\right)s + kz}$$

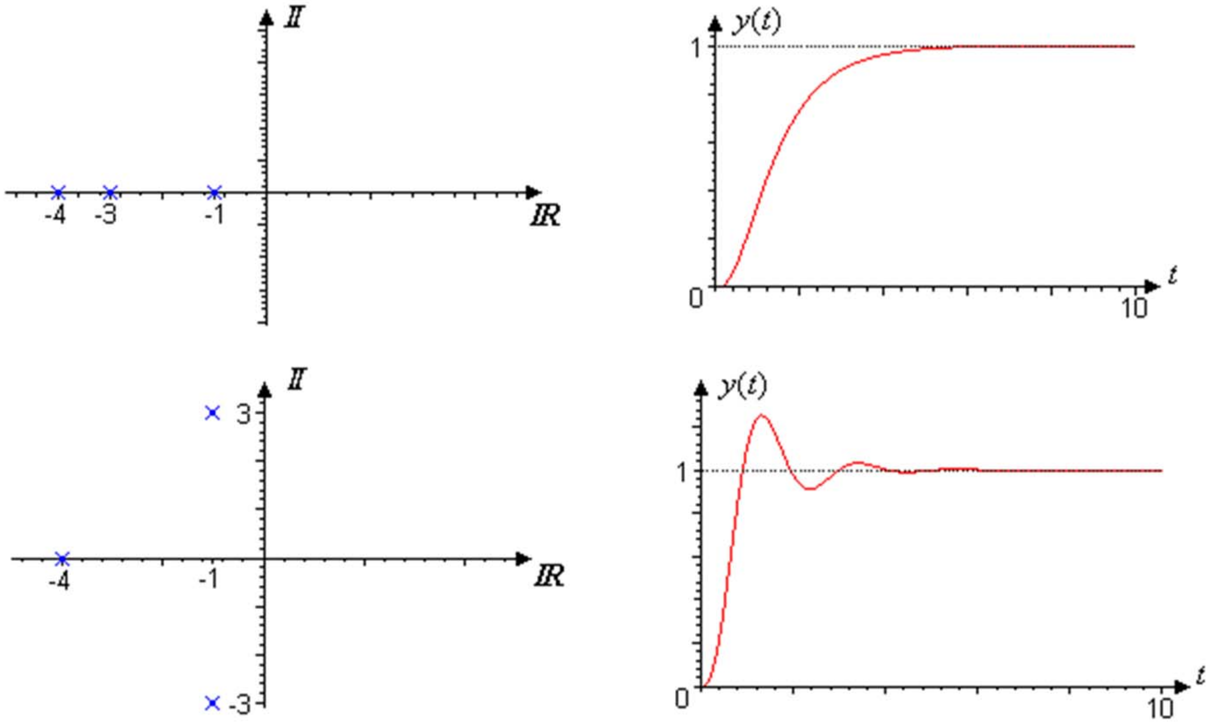
- Supponiamo che i parametri della $G^{CL}(s)$ siano tali che il sistema sia asintoticamente stabile.

- La curva in rosso rappresenta il caso in assenza di zeri
- la curva in viola si ricava per zeri a parte reale positiva ed ha una *sottoelongazione*;
- la curva in blu, che rappresenta il caso con lo zero lontano dall'origine, risulta assimilabile al caso senza zeri;
- la curva in azzurro, zero vicino all'origine, amplifica la sovraelongazione e velocizza la risposta.



Poli Dominanti

- ❑ Per i sistemi di ordine superiore al secondo non esistono espressioni analitiche per il calcolo dei parametri della risposta transitoria anche se questa mantiene le stesse proprietà dei sistemi del secondo ordine e viene caratterizzata attraverso gli stessi parametri

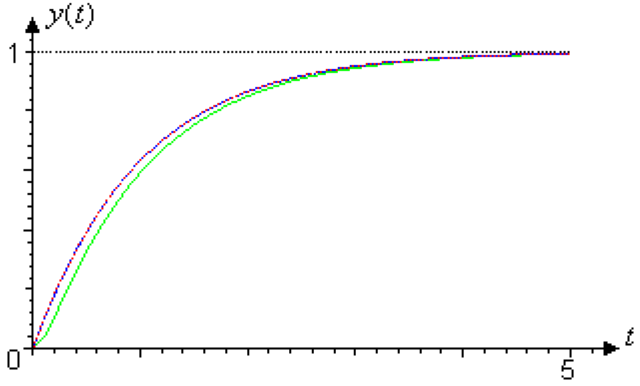


Poli Dominanti

- Lo studio dei sistemi di ordine superiore può essere fatto mediante una approssimazione tramite il concetto dei ***poli dominanti***.

- **Definizione:** I *poli dominanti* di un sistema sono quelli, reali o complessi, molto più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri poli e sono i più critici per la stabilità del sistema stesso.
- È importante tenere presente che un polo viene considerato dominante in funzione della sua posizione in relazione agli altri poli e non in funzione della sua posizione "assoluta".

- Di solito si usa una approssimazione a poli dominanti del primo o del secondo ordine, per cui possono essere usate le espressioni analitiche dei parametri di risposta transitoria



$$G_1(s) = \frac{1000}{(s+1000)(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$$y_1(t) = c_1 e^{-1000\cdot t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-1000\cdot t} + e^{-t}$$

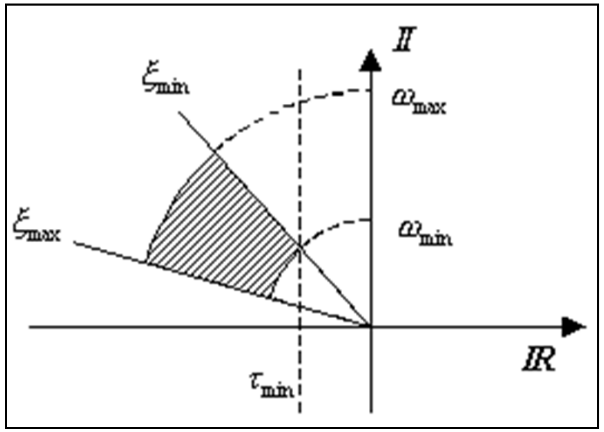
$$y_2(t) = c_1 e^{-10\cdot t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-10\cdot t} + e^{-t}$$

$$y_3(t) = e^{-t}$$

G_3 è una buona approssimazione di G_1 ma non di G_2

Poli Dominanti

- La "zona" dei poli dominanti dipende dalla particolare applicazione; è chiaro che se i poli dominanti sono complessi coniugati, rivestono ugual importanza sia la parte reale che quella immaginaria.



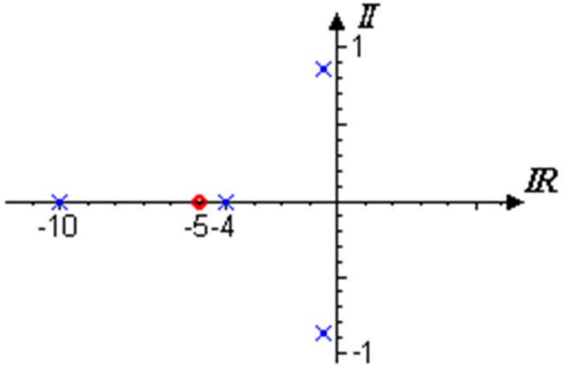
- In molti casi, le specifiche di Risposta Transitoria possono essere fornite in termini di Poli dominanti complessi e coniugati, oppure reali

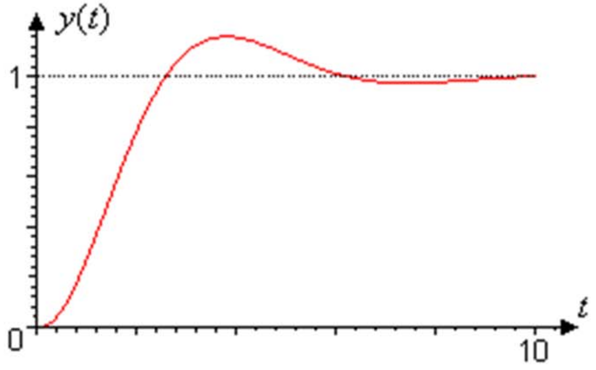
- Esistono diverse tecniche per l'approssimazione di sistemi di ordine superiore con sistemi del secondo ordine, come quella della tangente, la tecnica delle aree, gli approssimanti di Padè o la *Trasformazione bilanciata* che tiene conto di controllabilità e osservabilità del sistema.

- Una rappresentazione con poli dominanti può essere anche usata per stabilire un **modello desiderato** di comportamento nel transitorio

Poli Dominanti

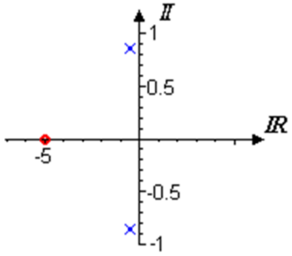
- **Esempio:** $$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2+s+1)(s+4)(s+10)}$$

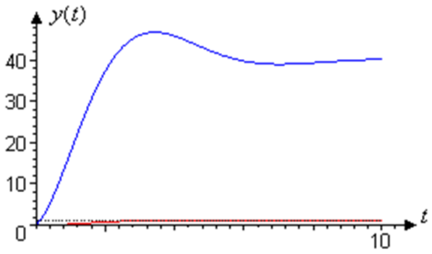




- Se non è richiesta una precisione estrema il sistema può essere approssimato prendendo in considerazione solo i poli dominanti, cioè quelli con parte reale più vicina all’origine, che hanno una dinamica più lenta; è però necessario **mantenere** quelle che sono le caratteristiche del sistema a regime e quindi anche al numeratore della *FdT* .

$$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2+s+1)}$$



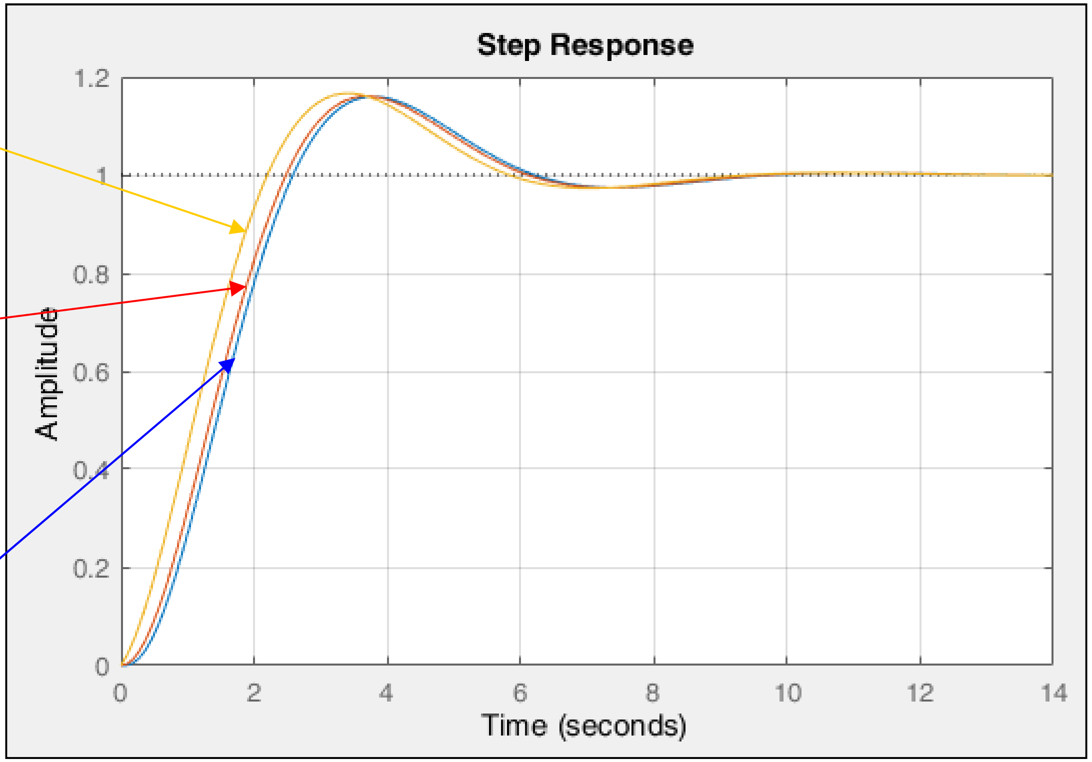


Poli Dominanti

$$G(s) = \frac{0.2(s+5)}{(s^2+s+1)}$$

$$G(s) = \frac{0.8(s+5)}{(s^2+s+1)(s+4)}$$

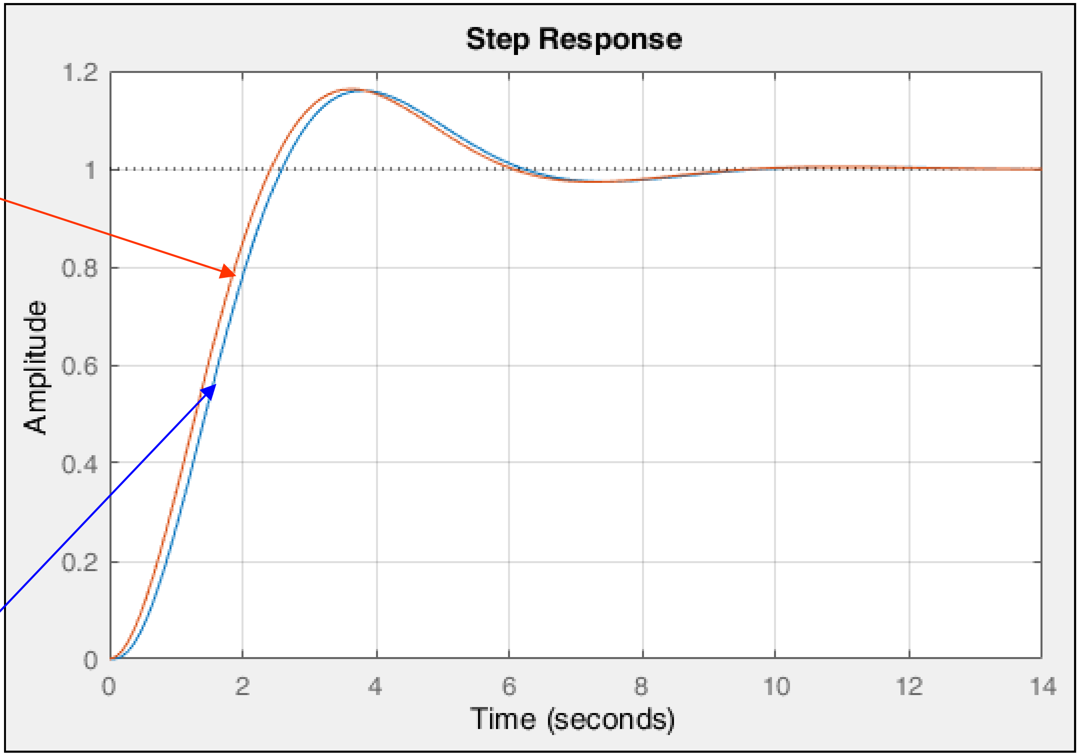
$$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2+s+1)(s+4)(s+10)}$$



Poli Dominanti

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{8(s+5)}{(s^2 + s + 1)(s+4)(s+10)}$$



- Nel caso in cui l’approssimazione sia soddisfacente, il sistema del secondo ordine può essere usato come dinamica reale, riducendo la complessità del problema.

Poli Dominanti

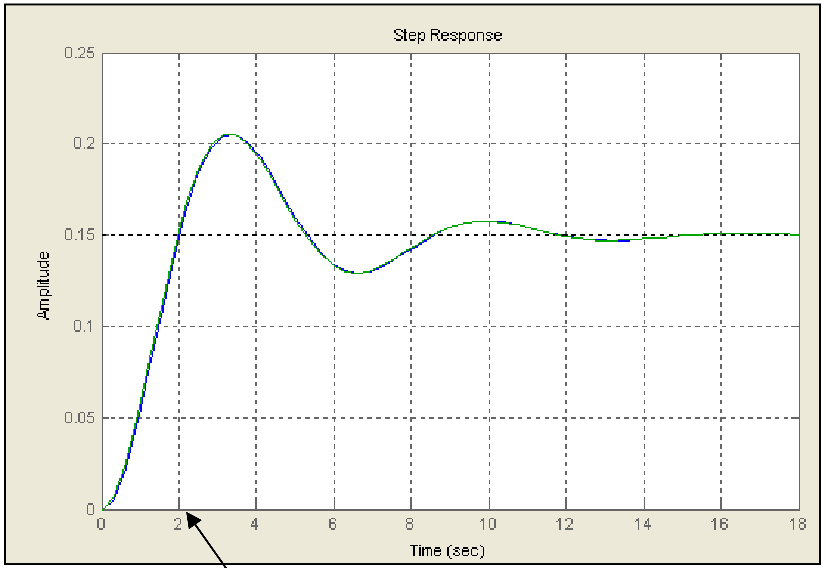
❑ Esempio:

```
Transfer function:
               10 s + 150
-----------------------------------------
s^4 + 110.6 s^3 + 1067 s^2 + 710 s + 1000

>> ltiview
>> sys2=tf(0.15,[1 0.6 1])

Transfer function:
     0.15
---------------
s^2 + 0.6 s + 1
```

```
-100.0000
 -10.0000
  -0.3000 + 0.9539i
  -0.3000 - 0.9539i
```



- Usando l'approssimazione a poli dominanti possiamo progettare un controllore per diminuire il tempo di salita (adesso circa 2 sec).

$$\boxed{T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- Questo può essere fatto con un controllore Proporzionale in retroazione unitaria

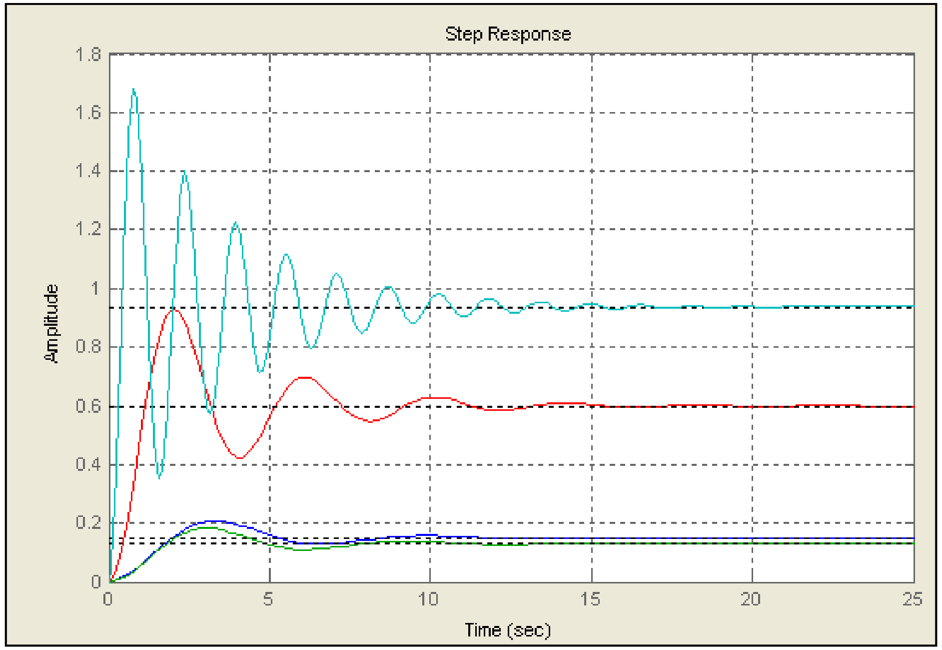
Poli Dominanti

$$G^{CL}(s) = \frac{0.15k}{s^2 + 0.6s + (1+0.15k)}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{(1+0.15k)} \\ \xi = \dfrac{0.3}{\sqrt{(1+0.15k)}} \end{cases}$$

- Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per -$6.667 < k < \infty$

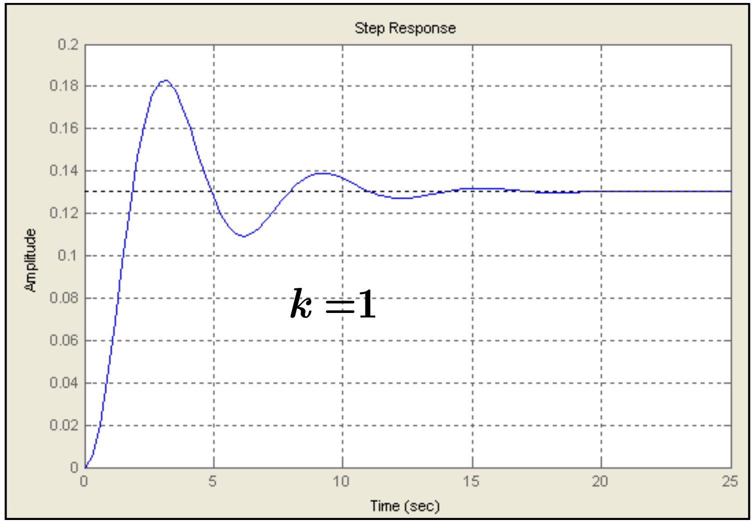
- Consideriamo valori positivi del guadagno: $k = 0,\ 1,\ 10,\ 100$

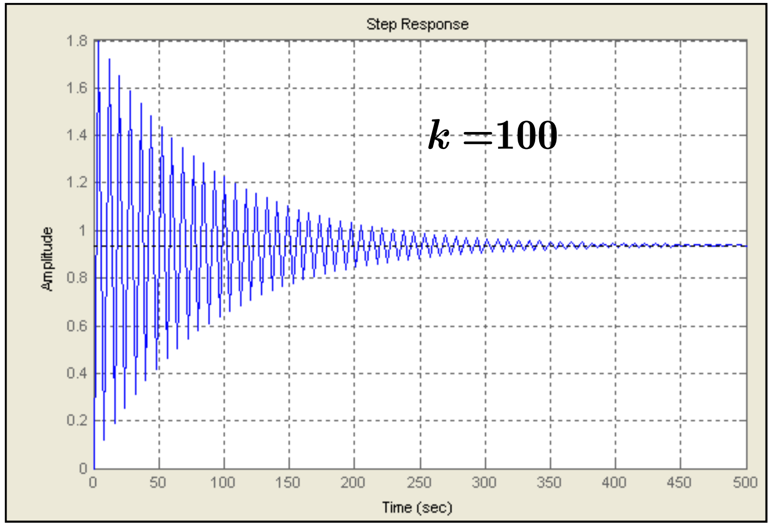


- Maggiore è il guadagno e minore è il tempo di salita

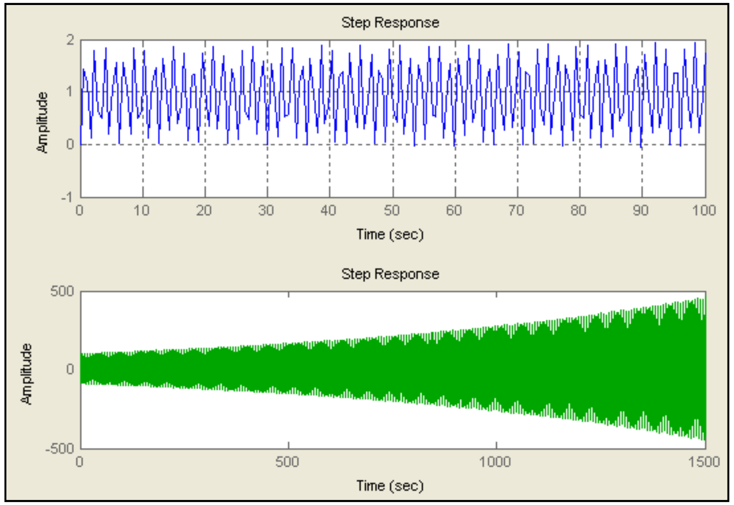
Poli Dominanti

- Sostituiamo il controllore nel sistema originale:





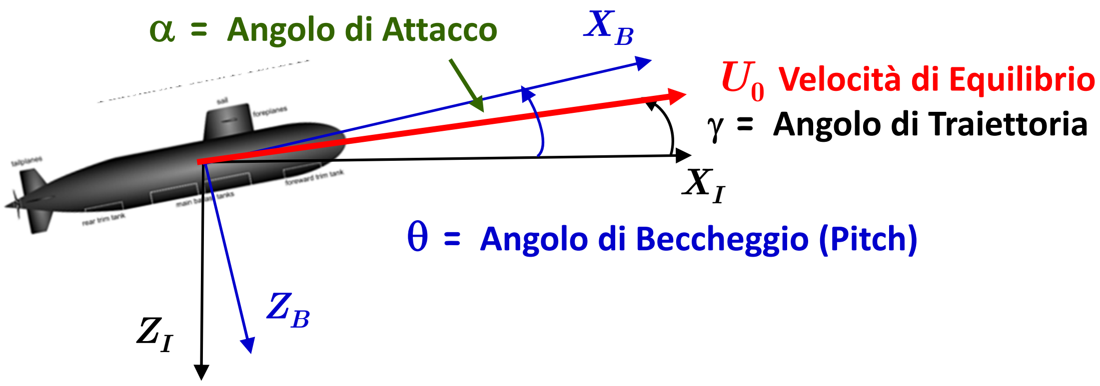
$k = 105$



- **NOTA:** L’approssimazione può essere usata ma il controllore va verificato sul sistema originale !!

Esempio

- ❑ **Esempio**: Dinamica e Controllo attivo di Profondità (Depth)



α = Angolo di Attacco

U_0 Velocità di Equilibrio

γ = Angolo di Traiettoria

θ = Angolo di Beccheggio (Pitch)

- Il veicolo può essere modellato in prima approssimazione come un corpo rigido la cui dinamica di riferimento comprende i gradi di libertà longitudinali:
  - Surge = traslazione lungo l'asse x
  - Heave = traslazione lungo l'asse z
  - Pitch = rotazione rispetto all'asse y

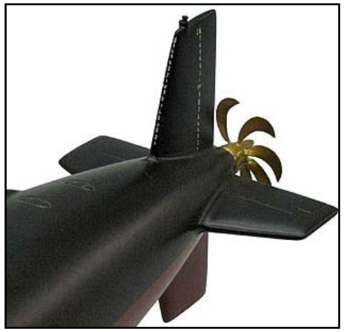
$$m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q})]$$
$$= \sum X_{ext}$$

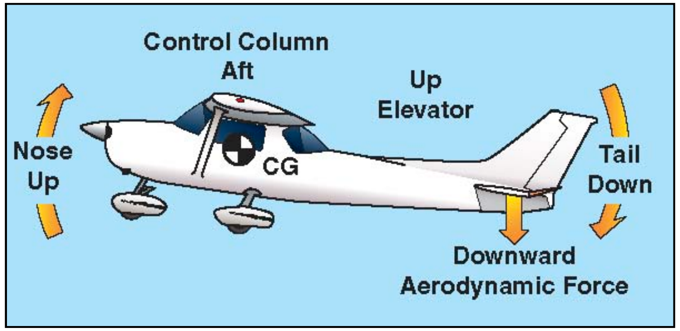
$$m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p})]$$
$$= \sum Z_{ext}$$

$$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp - m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)]$$
$$= \sum M_{ext}$$

- Gli ingressi tipici di controllo sono
  - Propulsione usata prevalentemente per il mantenimento della condizione di equilibrio (Elica)
  - Interazione idrodinamica mediante piani di coda orizzontali usata per moto di manovra

Esempio





- Moto longitudinale linearizzato, rispetto ad una velocità di Equilibrio costante U_0 ottenuta ponendo la spinta uguale alla resistenza idrodinamica

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}(t) + B\delta_{STERN}(t)$$

- u = velocità longitudinale lungo XB
- w = velocità verticale lungo ZB
- q = velocità angolare di beccheggio rispetto a YB
- θ = angolo di beccheggio rispetto a YB
- δ_e = angolo di comando a poppa (stern)

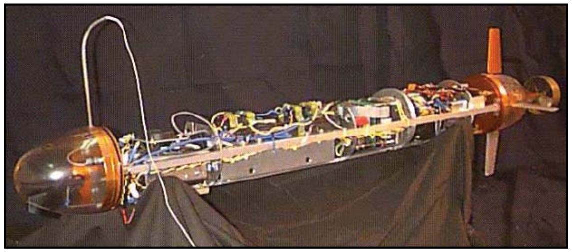
- Variabili cinematiche di interesse:
  - $\gamma = \theta - \alpha$ angolo di traiettoria
  - $\alpha = w/\,U_0$ angolo di attacco
  - Variazione di profondità (Nota segno)

$$\dot{h} = w - U_0\theta$$

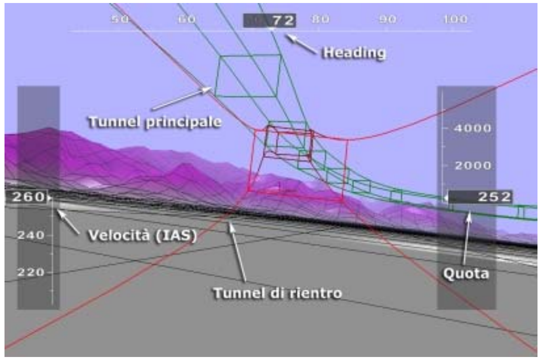
- Accelerazione del centro di massa:

$$a_{Zcg} = \dot{w} - U_0 q = U_0(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) = -U_0\dot{\gamma}$$

Esempio



Sistema Multiplo di Attuazione Idrodinamica



- Dinamica linearizzata in Pitch

$$G_{SUB}(s) = \frac{\dot{\theta}(s) \approx q(s)}{\delta_{STERN}(s)} = \frac{-0.467(s+0.12)}{s^2 + 0.8s + .25}$$

- Dinamica linearizzata in Accelerazione

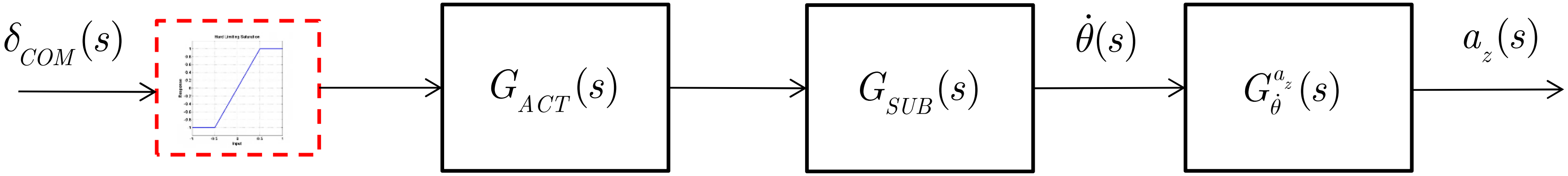
$$G_{\dot{\theta}}^{a_z}(s) = \frac{a_z(s)}{\dot{\theta}(s)} = \frac{2.0642(s+1.4)(s-1.4)}{s+0.12}$$

$$G_3(s) = \frac{a_z(s)}{\delta_{STERN}(s)} = -\frac{0.964(s+1.4)(s-1.4)}{s^2 + 0.8s + 0.25}$$

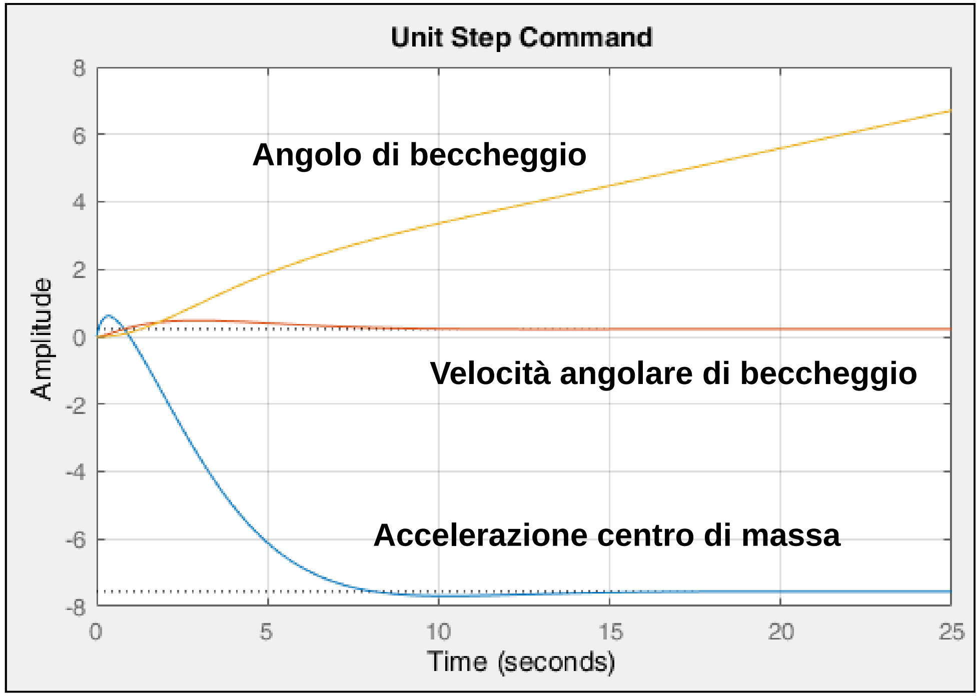
Esempio

- Dinamica del sistema di attuazione (comando operatore -> movimento piani di coda)

$$G_{ACT}(s) = \frac{\delta_{STERN}(s)}{\delta_{COM}(s)} = -\frac{5}{s+5}$$

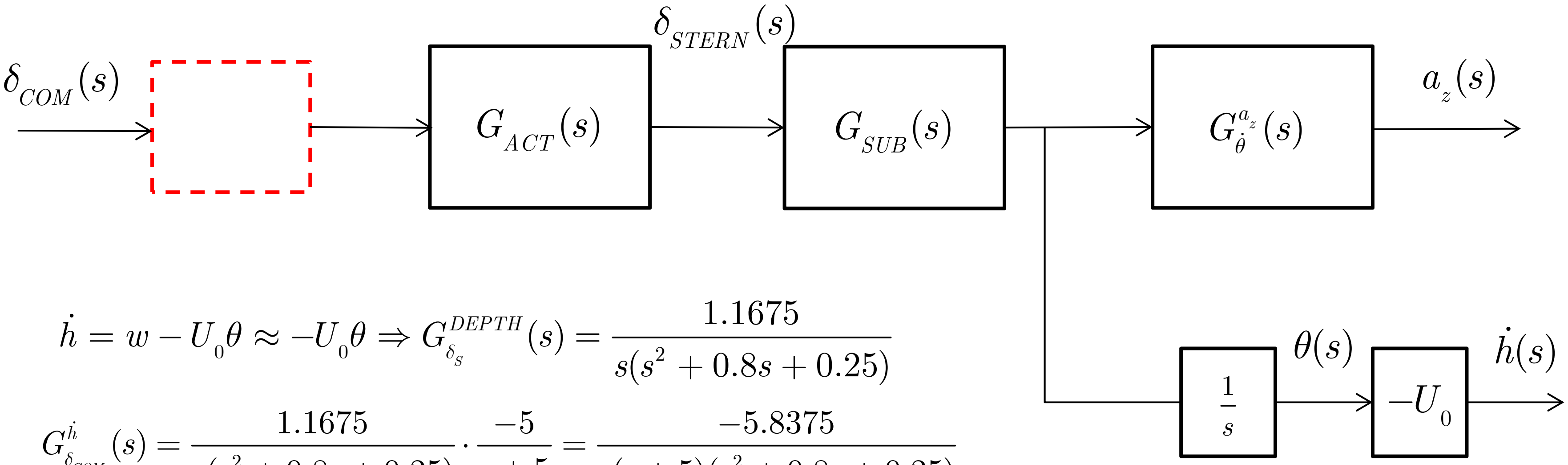


$$G(s) = \frac{a_z(s)}{\delta_{COM}(s)} = \frac{4.82(s+1.4)(s-1.4)}{(s^2+0.8s+0.25)(s+5)}$$


Unit Step Command

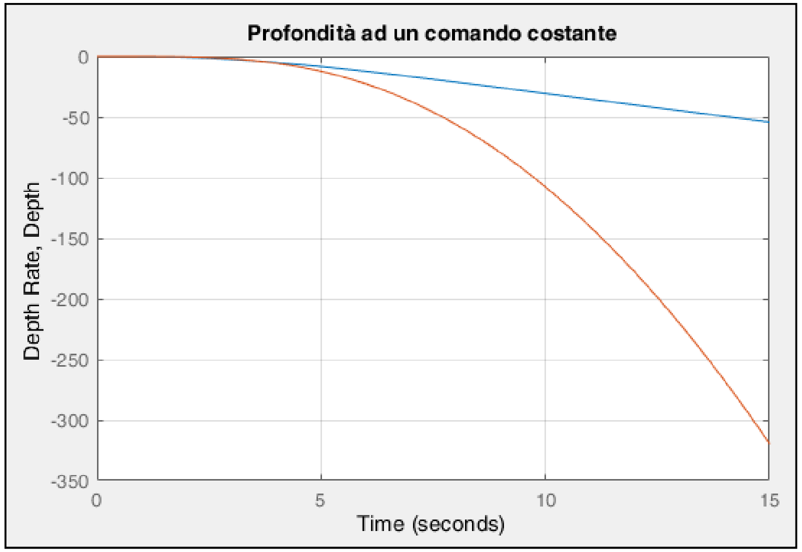
Esempio

- Dinamica approssimata di profondità (Velocità di equilibrio U_0 = 0.5 m/sec)



$$\dot h = w - U_0\theta \approx -U_0\theta \Rightarrow G_{\delta_S}^{DEPTH}(s) = \frac{1.1675}{s(s^2+0.8s+0.25)}$$

$$G_{\delta_{COM}}^{\dot h}(s) = \frac{1.1675}{s(s^2+0.8s+0.25)}\cdot\frac{-5}{s+5} = \frac{-5.8375}{s(s+5)(s^2+0.8s+0.25)}$$



Esempio

❑ Specifiche di progetto:

- Errore a regime nullo per un comando a gradino in profondità
- No Overshoot
- $T_A = 8$ sec

1. Si può operare in profondità

$$G^{h}_{\delta_{COM}}(s) = -\frac{5.8375}{s^2(s+5)(s^2+0.8s+0.25)}, \frac{[m]}{[rad]}$$

- Il sistema è del quarto ordine con poli: $0,\ 0,\ \text{-}5,\ \text{-}0.4 \pm \mathrm{j}0.3$
- Il sistema è instabile
- La risposta al gradino vale: $h(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 e^{-5t} + C_5 e^{-0.4t}\sin(0.3t + C_5)$

2. Si può operare in accelerazione e poi integrare due volte. Il sistema è ovviamente instabile

$$a_{Zcg} = \dot{w} - U_0 q = U_0(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) = -U_0\dot{\gamma} = \ddot{h}$$

$$\dot{h} = w - U_0\theta$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) - U_0\theta(\tau) d\tau$$

Esempio

- **Specifiche di progetto:**
  - Errore a regime nullo per un comando a gradino in profondità
  - No Overshoot
  - T_A = 8 sec

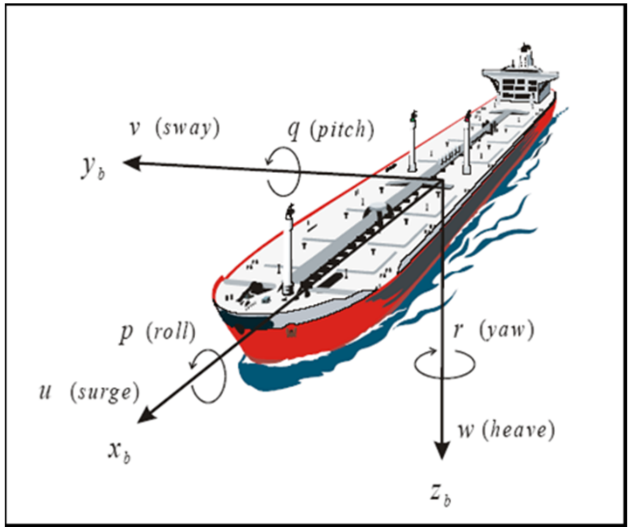
$$G^{h}_{\delta_{COM}}(s) = \frac{5.8375}{s^2(s+5)(s^2+0.8s+0.25)}, \frac{[m]}{[rad]}$$

Esempio

- **Specifiche di progetto:**
  - Errore a regime nullo per un comando a gradino in profondità
  - No Overshoot
  - T_A = 8 sec

$$G^{h}_{\delta_{COM}}(s) = \frac{5.8375}{s^2(s+5)(s^2+0.8s+0.25)}, \frac{[m]}{[rad]}$$

Esempio



- **Moto in Rollio:** prevalentemente un problema di reiezione del disturbo. Il rollio dovuto ad agenti atmosferici (vento, moto ondoso, correnti) deve essere ridotto al minimo per il conforto e operatività dei passeggeri ed equipaggio e per il mantenimento della stabilità del carico.

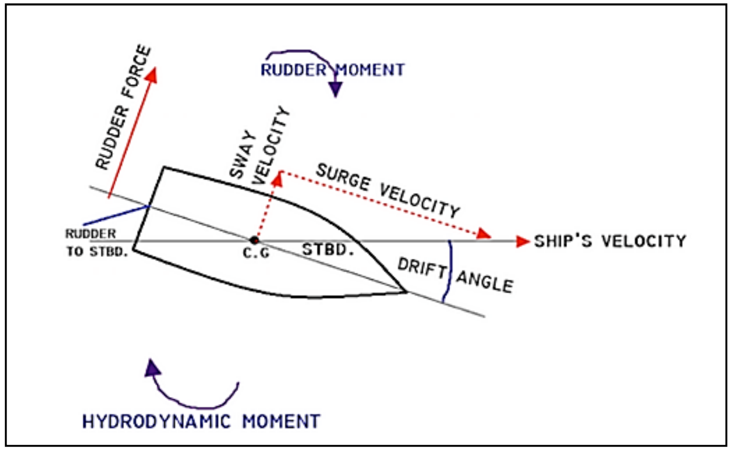
- **Moto in Imbardata :** prevalentemente un problema di accuratezza e precisione nel seguire una rotta specifica e nel cambio di rotta da una direzione all'altra.

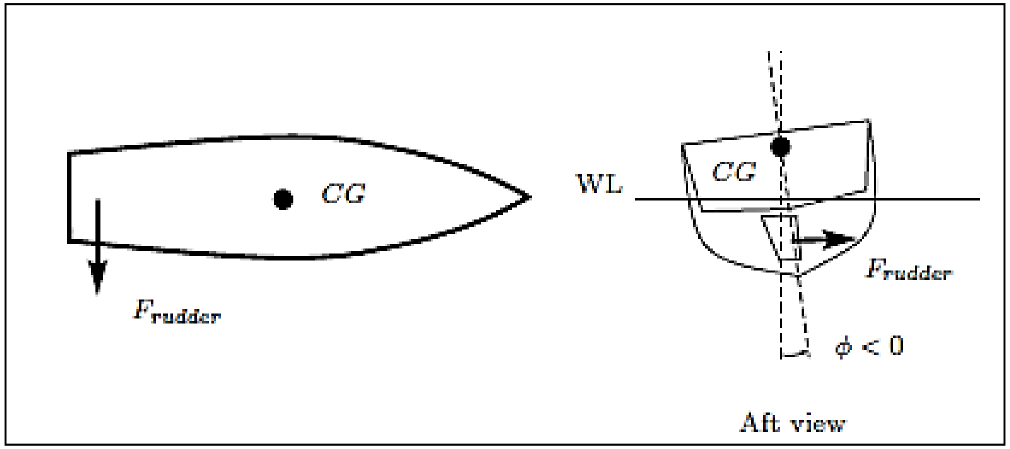
Direzione Vettore Velocità => Angolo di imbardata = Angolo di direzione

Esempio

❑ **Modello linearizzato Roll – Sway – Yaw** (Fossen Marine Systems Control, 2002)

- **Ipotesi #1:** Il timone è l'unico attuatore. Produce movimento sui 3 gradi di libertà





- **Ipotesi #2:** Il moto si considera linearizzato intorno ad una condizione di equilibrio a velocità (surge) costante, moto rettilineo uniforme e mare calmo.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \hline \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{13} & 0 & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & 0 & a_{32} & a_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & a_{23} & 0 & a_{22} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \\ \hline p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{31} \\ 0 \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_\psi \\ \dot{\boldsymbol{x}}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\psi\psi} & \boldsymbol{A}_{\psi\phi} \\ \boldsymbol{A}_{\phi\psi} & \boldsymbol{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\psi \\ \boldsymbol{x}_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\psi \\ \boldsymbol{B}_\phi \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}_\psi = [v, r, \psi]^\top \qquad \boldsymbol{x}_\phi = [p, \phi]^\top$$

- Nelle ipotesi che vi sia limitato accoppiamento tra rollio ed imbardata si possono studiare i due sottosistemi separatamente:

$$\boldsymbol{A}_{\psi\phi} = \boldsymbol{A}_{\phi\psi} = \boldsymbol{0},$$

- Modello di Rollio (Son e Nomoto, 1981)

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

- Modello di Traslazione laterale e imbardata (Son e Nomoto, 1981)

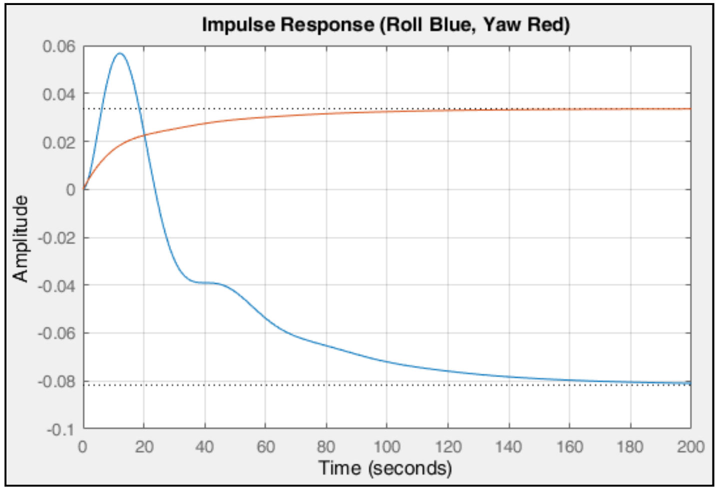
$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

Esempio

- Nave container di lunghezza = 175 m, volume = 21.22 m^3, velocità di riferimento U$_0$ = 7 m/s = 13.6 Knots = 25.2 Km/h

$$\frac{\phi}{\delta}(s) = \frac{0.0032(s - 0.036)(s + 0.077)}{s(s + 0.026)(s + 0.116)(s^2 + 0.136s + 0.036)}$$

$$\frac{\psi}{\delta}(s) = \frac{0.0024(s + 0.0436)(s^2 + 0.162s + 0.035)}{s(s + 0.0261)(s + 0.116)(s^2 + 0.136s + 0.036)}$$



- **Poli del sistema:**

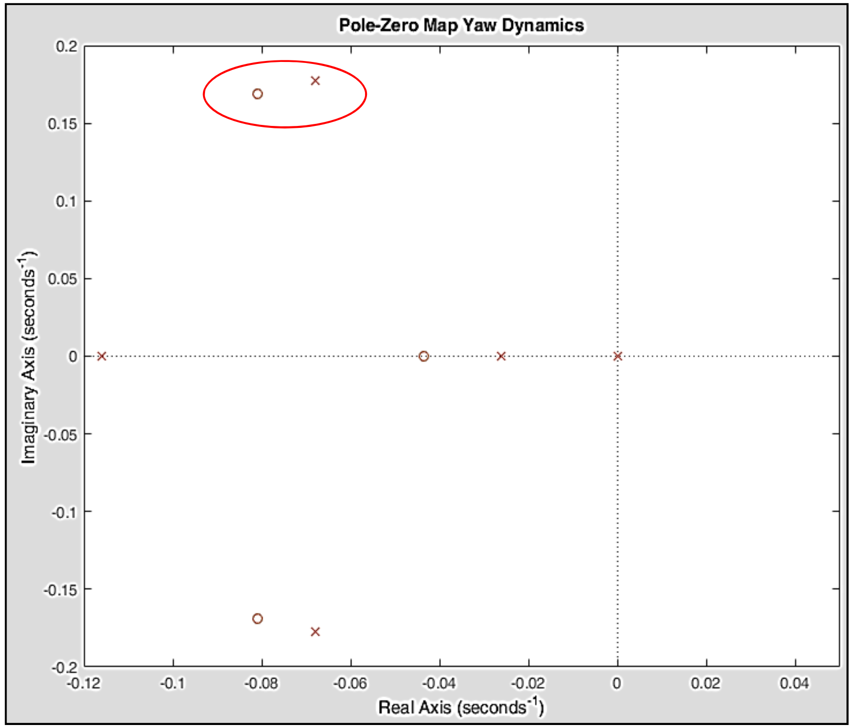
0, -0.026, -0.116, -0.068±j0.1771

- **Zeri di Rollio:**

+0.036, -0.077

- **Zeri di Imbardata:**

-0.0436, -0.068±j0.1743



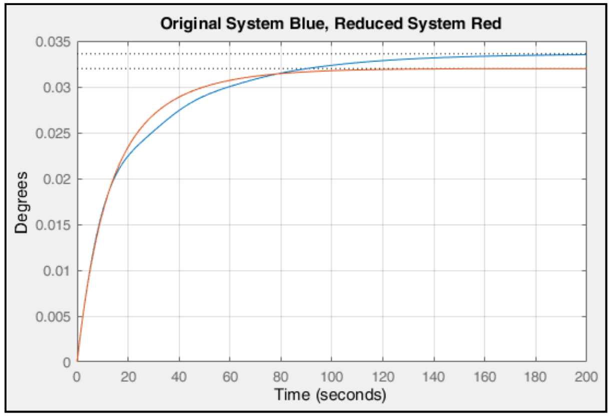
- Approssimazione Nomoto per la dinamica di imbardata

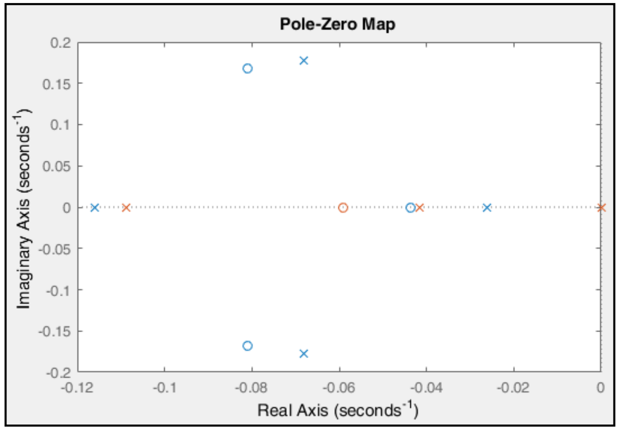
$$\frac{\psi}{\delta}(s \approx \frac{0.032(1 + 16.9s)}{s(1 + 24.0s)(1 + 9.2s)}$$

- **Zeri:** -0.0592, **Poli:** 0, -0.0417, -0.1087

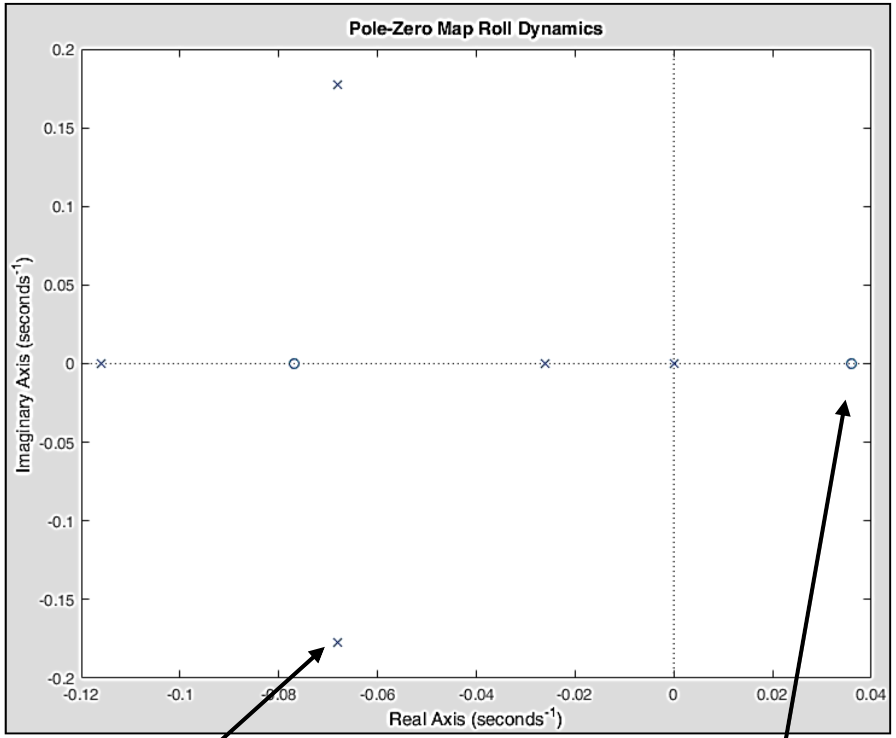
Esempio

- Analisi dinamica di imbardata





- Analisi dinamica di Rollio

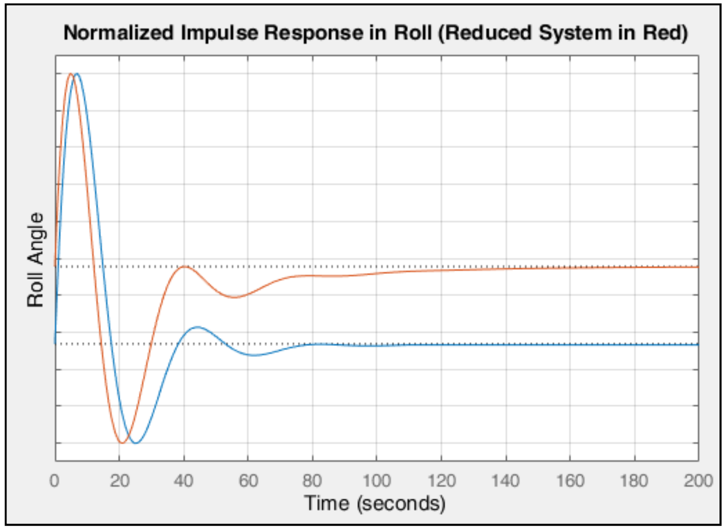


1. Oscillazione a basso smorzamento, z ≈ 0.36
2. Zero instabile (Fase non minima)

Esempio

Oscillazione a basso smorzamento

- Approssimazione moto di Rollio



Zero instabile (Fase non minima)

$$\frac{\phi}{\delta}(s) \approx \frac{0.083(1+\cancel{49}.1s)}{(1+\cancel{31}.5s)(s^2+0.134s+0.033)}$$

- Requisiti di Controllo: Il sistema è **sottoattuato**, il solo timone deve smorzare l'oscillazione di rollio e mantenere l'accuratezza in angolo di imbardata.
- Si sfrutta la separazione a poli dominanti

Sommario

- Le specifiche di progetto nel dominio del tempo riguardano:
- Stabilità
- Errore a regime a seguito di un comando da inseguire
- Andamento transitorio (velocità di risposta, presenza di oscillazioni, Tempo di assestamento,...)
- Insensitività a disturbi in anello (reiezione del disturbo)
- Le specifiche sono analizzate in base ad un set di parametri, Calcolabili analiticamente per sistemi fino al secondo ordine.
- Per sistemi di ordine superiore le formule forniscono dati approssimati
- I poli dominanti costituiscono una possibile soluzione al problema