Laboratorio di Calcolo Numerico
Lezione 7

Malcondizionamento della matrice di Vandermonde

Dati $k+1$ punti in $\mathbb{R}$, si definisce la matrice di Vandemonde V associata a tali punti come la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^k \end{bmatrix}. \tag{1}$$

che sappiamo giocare un ruolo fondamentale nel problema di interpolazione sui nodi $x_0, \dots, x_k$.

Per costruire la matrice di Vandermonde esiste il comando `vander` che però restituisce le colonne in ordine diverso da quello in (1); per ottenere la matrice usuale usare

```
% x vettore di lunghezza k+1 contenenete x0,...,xk
V = vander(x);
V = V(:,end:-1:1);
```

Esercizio 1. Prendere n nodi di interpolazione equispaziati nell'intervallo $[-2, 2]$, con n che varia da 2 a 20. Per ciascun n costruire la matrice di Vandermonde e salvarne il numero di condizionamento in un vettore. Fare un grafico `loglog` che riporti il numero di condizionamento della matrice in corrispondenza della quantità di nodi di interpolazione usati. Com'è la crescita del numero di condizionamento? (cioè quadratica, cubica, ... , esponenziale o altro ?). **Suggerimento:** Per capire da un grafico in che modo cresce/decresce una quantità, si possono plottare nella stessa finestra delle curve di riferimento e vedere quale ha la crescita più simile. Ad esempio si può provare con le funzioni x, x^2, x^6, e^x.

Interpolazione nella base di Lagrange

Dati $k+1$ punti di interpolazione

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad \dots \quad (x_k, y_k),$$

il polinomio interpolante di Lagrange è definito come

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \cdot \ell_j(x),$$

dove

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0,\ i \neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Esercizio 2. Si implementi una funzione Matlab

```
function w = valuta_lagrange(x, y, v)
```

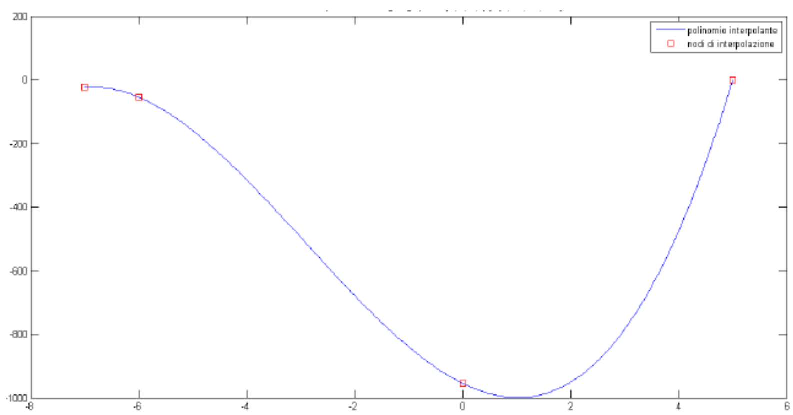
che prende in ingresso

- due vettori x ed y, di lunghezza $k+1$, rappresentanti i nodi dell'interpolazione ed i valori della funzione interpolata,
- un vettore v di lunghezza arbitraria, contenente i punti dove si vuole valutare il polinomio di interpolazione,

e restituisce il vettore w, di lunghezza uguale a quella di v, contenente le valutazioni del polinomio interpolante, di grado al più k, sui punti contenuti in v.
Per testare la correttezza dell'implementazione si utilizzi `valuta_lagrange` per valutare graficamente il polinomio interpolante di Lagrange $L_3(x)$ nei punti:

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

Più precisamente, al fine di costruire il grafico di $L_3(x)$ e verificare che sia interpolante, si valuti su 1000 equispaziati nell'intervallo $[-7, 5]$ e si evidenzino sul grafico i nodi dell'interpolazione con un marcatore diverso. Si dovrebbe ottenere un grafico del tipo:



Errore di interpolazione

Data una funzione f e il suo polinomio interpolante P_k di grado al più k, costruito a partire dai nodi di interpolazione $x_0, x_1, \ldots, x_k$, si può dimostrare che l'errore d'interpolazione che viene commesso in un certo punto x è pari a

$$E_k(x) = f(x) - P_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k} (x - x_j),$$

con c_x appartenente ad un intervallo contenente x ed i nodi di interpolazione. In particolare, se si vuole stimare l'errore d'interpolazione commesso su un intervallo $[a, b]$ contenente i nodi di interpolazione si può usare la seguente formula

$$\max_{x \in [a,b]} |E_k(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a,b]} |f^{(k+1)}(x)|}{(k+1)!} \cdot \max_{x \in [a,b]} \prod_{j=0}^{k} |x - x_j|. \tag{2}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(2 + x), \qquad x \in [-1, 1],$$

ed i polinomi di interpolazione $P_k(x)$ su nodi equispaziati, per $k = 3, 4$. Si calcolino numericamente le quantità (2) per $k = 3, 4$ (ad esempio per trovare i massimi della derivata e della produttoria si possono valutare su una griglia di punti su $[-1, 1]$ e poi prendere il massimo valore trovato). Infine si formino dei grafici in cui si verifica che $|E_k(x)|$ rimane sempre sotto le stime della quantità (2), trovate in precedenza.

Il fenomeno di Runge

Se si ha una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ ed in tale intervallo si calcolano polinomi di interpolazione di grado via via maggiore sembrerebbe naturale aspettarsi che la successione di tali polinomi converga uniformemente ad $f(x)$ in $[a, b]$. Ma nella realtà, per la maggior parte delle funzioni continue, ciò non è vero. Un esempio è fornito dalla funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

nell'intervallo $[-5, 5]$.

Esercizio 4. Costruire il grafico del polinomio interpolante, usando $n = 6, 7, \ldots, 12$ nodi di interpolazione equispaziati nell'intervallo $[-5, 5]$, ottenuti valutando la funzione di Runge (usare la funzione `valuta_lagrange`). Riportare il grafico della funzione e dei polinomi interpolanti per alcuni valori di n. Cosa succede al crescere di n?

Il fenomeno di Runge può essere evitato cambiando la scelta dei punti di interpolazione. Verifichiamo cosa succede se si sostituiscono i nodi equispaziati con i cosidetti nodi di Chebyshev sull'intervallo $[a, b]$, definiti come:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k}\right), \quad j = 0, \ldots k - 1.$$

Esercizio 5. Si ripeta l'esercizio precendente (costruzione del grafico dei polinomi interpolanti alla funzione di Runge), sostituendo gli n nodi equispaziati in $[-5, 5]$ con gli n nodi di Chebyshev associati allo stesso intervallo (si mantengano invece i nodi equispaziati per la costruzione del grafico).