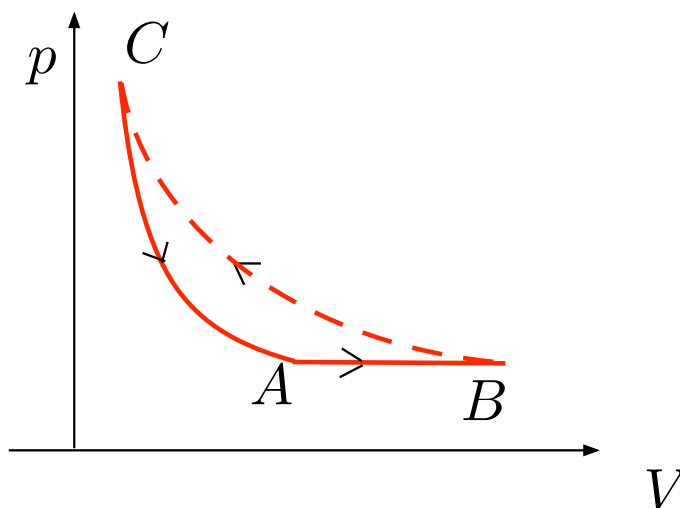


Esercizio (tratto dal Problema 13.34 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale monoatomico passa dallo stato A ($V_A = 3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, $p_A = 0.6 \text{ bar}$, $T_A = 286 \text{ K}$) allo stato B ($V_B = 6.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$) con un'espansione isobara reversibile. Il gas viene poi posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_C e si comprime fino al volume $V_C = 3.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, assorbendo dall'ambiente un lavoro $|W_{B \rightarrow C}| = 6 \text{ kJ}$. Dallo stato C il gas torna infine nello stato A con un'espansione adiabatica reversibile. Calcolare il calore ed il lavoro in ciascuna trasformazione del ciclo, e determinare l'effetto frigorifero $\varepsilon = Q_{\text{ass}}/|W|$ del ciclo.



SOLUZIONE

1. Dati iniziali:

Scriviamo i dati iniziali convertendo in unità del Sistema Internazionale

p_A	$=$	$0.6 \text{ bar} = 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	(1)
T_A	$=$	286 K	
V_A	$=$	$3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$	
V_B	$=$	$6.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$	
V_C	$=$	$3.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$	
$W_{B \rightarrow C}$	$=$	$-6 \cdot 10^3 \text{ J}$ (lavoro incamerato dal gas)	

Calcoliamo anzitutto il numero di moli del gas. Sfruttando l'equazione di stato nella stato A abbiamo:

$$p_A V_A = n R T_A$$

e dunque

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} \quad (2)$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} n &= \frac{0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} 286 \text{ K}} = \\ &= \frac{0.6 \cdot 10^5 \cdot 3.8 \cdot 10^{-2} \text{ Pa m}^3}{8.314 \cdot 286 \text{ K} \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = \\ &\quad [\text{uso } \text{J} = \text{N m} = \text{Pa m}^3] \\ &= 0.959 \text{ mol} \end{aligned} \quad (3)$$

2. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato B. Dato che la trasformazione A→B è isobara, abbiamo:

$$p_B = p_A \quad (4)$$

e dunque

$$p_B = 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Per quanto riguarda la temperatura, usiamo nuovamente l'equazione di stato

$$p_B V_B = n R T_B$$

e dunque

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{p_B V_B}{n R} = \\ &\quad [\text{uso (2)}] \\ &= \frac{p_B V_B}{\frac{p_A V_A}{R T_A} R} \\ &\quad [\text{uso (4)}] \\ &= T_A \frac{V_B}{V_A} \end{aligned} \quad (5)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 T_B &= T_A \frac{V_B}{V_A} = \\
 &= 286 \text{ K} \frac{6.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} = \\
 &= 452 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{6}$$

3. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato C . Siccome la trasformazione $C \rightarrow A$ è un'adiabatica, abbiamo che

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} \quad (\text{gas monoatomico}) \tag{7}$$

Pertanto

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{5/3} \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 p_C &= 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \left(\frac{3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{3.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \right)^{5/3} = \\
 &= 0.84 \cdot 10^5 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Per la temperatura usiamo nuovamente l'equazione della curva adiabatica, questa volta nella forma

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 T_C &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \\
 &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/3}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 T_C &= 286 \text{ K} \left(\frac{3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{3.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \right)^{2/3} = \\
 &= 328 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nel tratto $C \rightarrow A$ il calore

$$Q_{C \rightarrow A} = 0 \tag{12}$$

in quanto $C \rightarrow A$ è un'adiabatica.

5. Calcoliamo ora il calore $Q_{A \rightarrow B}$. Siccome si tratta di una trasformazione isobara, possiamo utilizzare la formula

$$\begin{aligned}
Q_{A \rightarrow B} &= n c_p (T_B - T_A) = \\
&= n \frac{5}{2} R (T_B - T_A) = \\
&\quad [\text{uso (5) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali}] = \\
&= n \frac{5}{2} R \left(T_A \frac{V_B}{V_A} - T_A \right) = \\
&= [\text{uso (2) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali}] = \\
&= \frac{p_A V_A}{R T_A} \frac{5}{2} R T_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) = \\
&= \frac{5}{2} p_A V_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) = \\
&= \frac{5}{2} p_A (V_B - V_A) = \\
&= 2.5 \cdot 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} (6.0 - 3.8) 10^{-2} \text{ m}^3 = \\
&= 3300 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito dal gas})
\end{aligned} \tag{13}$$

6. Calcoliamo ora il calore $Q_{B \rightarrow C}$. Utilizziamo il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q - W$) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
Q_{B \rightarrow C} &= \Delta U_{B \rightarrow C} + W_{B \rightarrow C} = \\
&= n c_V (T_C - T_B) + W_{B \rightarrow C} = \\
&= n \frac{3}{2} R (T_C - T_B) + W_{B \rightarrow C} = \\
&\quad [\text{uso (2), (5) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali}] = \\
&= \frac{p_A V_A}{R T_A} \frac{3}{2} R \left(T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/3} - T_A \frac{V_B}{V_A} \right) + W_{B \rightarrow C} = \\
&= \frac{3}{2} p_A V_A \left(\left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/3} - \frac{V_B}{V_A} \right) + W_{B \rightarrow C} = \\
&= 1.5 \cdot 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \left(\left(\frac{3.8}{3.1} \right)^{2/3} - \frac{6.0}{3.8} \right) - 6000 \text{ J} = \\
&= -7483 \text{ J} \quad (\text{calore ceduto dal gas})
\end{aligned} \tag{14}$$

7. Calcoliamo ora il lavoro $W_{A \rightarrow B}$:

$$\begin{aligned}
W_{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\
&= p_A (V_B - V_A) = \\
&= 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} (6.0 - 3.8) \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \\
&= 1.32 \cdot 10^3 \text{ Pa m}^3 = \\
&= 1320 \text{ J} \quad (\text{lavoro eseguito dal gas})
\end{aligned} \tag{15}$$

8. Calcoliamo ora il lavoro $W_{C \rightarrow A}$ lungo l'adiabatica. Per il primo principio applicato

al caso di un'adiabatica si ha

$$\begin{aligned}
 W_{C \rightarrow A} &= -\Delta U_{C \rightarrow A} = U(C) - U(A) = \\
 &= nc_V(T_C - T_A) = \\
 &= n \frac{3}{2} R(T_C - T_A) = \\
 &\quad [\text{uso (2) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali}] \\
 &= \frac{p_A V_A}{RT_A} \frac{3}{2} R \left(T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/3} - T_A \right) \\
 &= \frac{3}{2} p_A V_A \left(\left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/3} - 1 \right) \\
 &= 1.5 \cdot 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 3.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \left(\left(\frac{3.8}{3.1} \right)^{2/3} - 1 \right) = \\
 &= 497 \text{ J}
 \end{aligned} \tag{16}$$

9. L'effetto frigorifero del ciclo è definito come

$$\varepsilon = \frac{Q_{ass}}{|Q_{ass} + Q_{ced}|} \tag{17}$$

Per quanto calcolato in precedenza

$$\begin{aligned}
 Q_{ced} &= Q_{B \rightarrow C} = -7483 \text{ J} \\
 Q_{ass} &= Q_{A \rightarrow B} = 3300 \text{ J}
 \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{3300 \text{ J}}{|3300 \text{ J} - 7483 \text{ J}|} = \\
 &= 0.79
 \end{aligned} \tag{18}$$

Controlliamo che l'effetto frigorifero del ciclo si poteva valutare anche come

$$\varepsilon = \frac{Q_{ass}}{|W|} \tag{19}$$

Per quanto calcolato in precedenza, abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
 W &= W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} = \\
 &= 1320 \text{ J} - 6000 \text{ J} + 497 \text{ J} = \\
 &= -4183 \text{ J}
 \end{aligned} \tag{20}$$

mentre

$$Q_{ass} = Q_{A \rightarrow B} = 3300 \text{ J} \tag{21}$$

e dunque

$$\varepsilon = \frac{Q_{ass}}{|W|} = \frac{3300 \text{ J}}{4183 \text{ J}} = 0.79 \tag{22}$$

che coincide con (18).