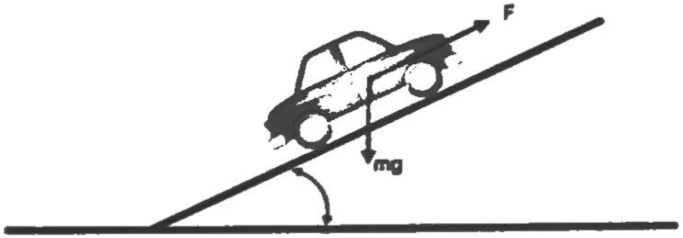
Raggiungibilità - esempio, velocità di crociera

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\beta}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



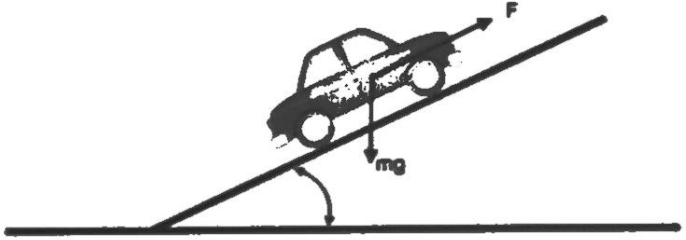
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\gamma}{m} & -g \\ \left(-\dfrac{\beta}{m}\right)\dfrac{\gamma}{m} & g\dfrac{\beta}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{AB}} \cdots$$

Sistema raggiungibile

Raggiungibilità - esempio, velocità di crociera

$$\dot{\mathbf{x}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\beta}{m} \end{bmatrix}} \mathbf{x} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}} \mathbf{u}$$

$A_{n \times n}$



$$y = \underset{C}{[0 \quad 1]}\mathbf{x}$$

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \qquad n = 2$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{m} & -g \end{matrix}}_{B} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \dfrac{\gamma}{m} & -g \\ \left(-\dfrac{\beta}{m}\right)\dfrac{\gamma}{m} & g\dfrac{\beta}{m} \end{matrix}}_{AB}\right] = \Pi_R$$

Sistema raggiungibile

Esempio: Ritorniamo al circuito

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\mathcal{M}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\mathcal{M}_R) = 1$$

Sistema non raggiungibile

Esempio: Ritorniamo al circuito

Quali parti sono raggiungibili?

$$\mathcal{M}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\mathcal{M}_R) = 1$$

$$T_R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Scelti linearmente indipendenti

Multipli scalari di 1/RC

$$T_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Esempio: Ritorniamo al circuito

Da cui

raggiungibile

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1+\hat{x}_2 - u)\\ \dot{\hat{x}}_2 = 0\end{cases} \longrightarrow \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = TAT^{-1}$$

non raggiungibile

$$y = \frac{1}{2}(\hat{x}_1+\hat{x}_2)$$

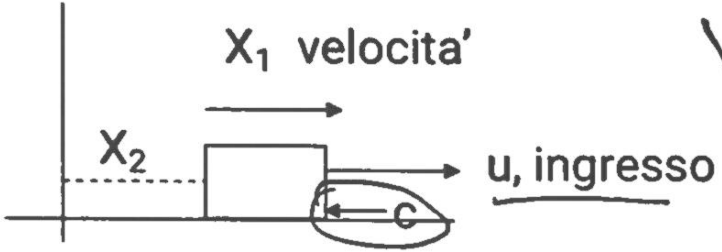
Considerazioni

Per sistemi LTI raggiungibilità coincide con controllabilità (portare il sistema da uno stato qualsiasi nell'origine)

Se la parte non controllabile di un sistema e' asintoticamente stabile (Re(autovalori)<0) il sistema si dice **stabilizzabile**

Per un sistema completamente controllabile esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di spostarsi da uno stato X_A a uno stato X_B (Per esempio: X_A -> 0 -> X_B)

Osservabilità



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Osservabilità

Prendiamo il sistema dinamico di ordine n, con m ingressi, e *p* uscite

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Definizione

Uno stato $\tilde{x} \neq 0$ di un sistema LTI si dice **non osservabile** se, qualunque sia $\tilde{t} > 0$ finito, detto $\tilde{y}_l(t)$, $t \geq 0$, il movimento libero dell'uscita generato da $\tilde{x}$ risulta $\tilde{y}_l(t) = 0$, $0 \leq t \leq \tilde{t}$.
Un sistema privo di stati non osservabili si dice **completamente osservabile**.

Osservabilità

Uno stato iniziale **x** si dice *osservabile* se è possibile determinare **x** sulla base della misura delle uscite **y**

Un sistema è osservabile se tutti gli stati sono osservabili

La osservabilità è legata alle proprietà della risposta libera e dell'equazione di uscita

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la osservabilità:

$$rank\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Osservabilità

Questa proprieta' divide gli stati in:

Osservabili x_O

Non Osservabili x_{NO}

Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile, si può isolare la sua parte osservabile

Osservabilità

Eseguo un cambio di variabili tramite la matrice T_o

$$\hat{x}(t) = T_o x(t) \longrightarrow \begin{array}{c} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{array}$$

Tale per cui le nuove matrici hanno la forma seguente:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in R^{n_o \times n_o} \qquad n_o = rank(\mathcal{O}), \;\; n_o < n$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_a \in R^{p \times n_o}$$

Osservabilità

Eseguo un cambio di variabili tramite la matrice T_o

$$\hat{x}(t) = T_o x(t) \longrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Tale per cui le nuove matrici hanno la forma seguente:

$$\begin{cases} \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in R^{n_o \times n_o} \\ \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_a \in R^{p \times n_o} \end{cases}$$

$$n_o = rank(\mathcal{O}), \quad n_o < n$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Osservabilità

Per costruire la matrice T_O si selezionano n-n_o vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{O}\xi_i = 0 \qquad \mathrm{span}(\{\xi_i\}) = \mathcal{X}_{no}$$

Compongono una base del $\ker(\mathcal{O})$, ovvero ogni vettore rappresenta uno stato non osservabile

Si selezionano n_o vettori linearmente indipendenti per completare la matrice tali che

$$\det(T_o^{-1}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T_o \text{ è invertibile}$$

Osservabilità

Posso quindi partizionare lo stato

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_a(t) &= \hat{A}_a \hat{x}_a(t)\\ \dot{\hat{x}}_b(t) &= \hat{A}_{ba}\hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t)\\ y(t) &= \hat{C}_a \hat{x}_a(t)\end{aligned} \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix}\hat{x}_a\\ \hat{x}_b\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{aut}(\hat{A}) = \mathbf{aut}(A) = \mathbf{aut}(\hat{A}_o) + \mathbf{aut}(\hat{A}_b)$$

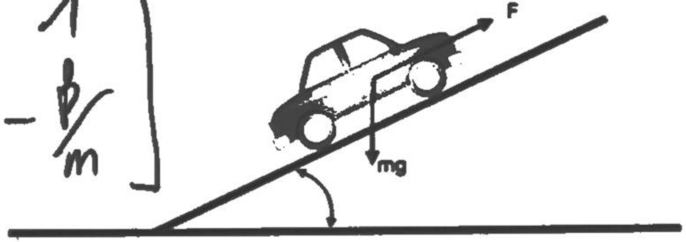
Parte osservabile   Parte non osservabile

Osservabilità ' - esempio, velocità di crociera

A B

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta/m \end{bmatrix}$$



$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$

C

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{posizione} \\ \text{velocità} \end{matrix}$$

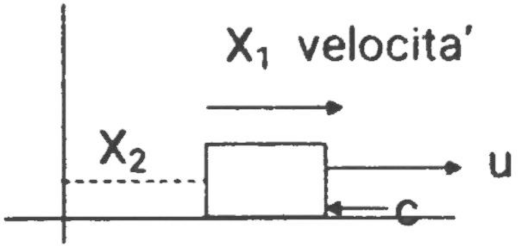
Matrice di test per la osservabilità:

$$\mathcal{O} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{array}$$

Sistema non osservabile!

E' impossibile ricostruire la posizione iniziale misurando solo la velocità

Osservabilità: esempio della massa



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-c}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$

Scomposizione canonica

Un sistema può essere sia non completamente osservabile che non completamente raggiungibile.

E' possibile dimostrare che esiste sempre una scomposizione che porta il sistema in una forma che ne evidenzia la varie parti: la sua **forma canonica**

Scomposizione canonica

Cambio di variabili

$$\hat{x} = T_K x \longrightarrow \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{aligned}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \end{matrix}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

raggiungibile

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\hat{C}_b} & 0 & \boxed{\hat{C}_d} \end{bmatrix}$$

osservabile

Scomposizione canonica

Cambio di variabili

$$\hat{x} = T_K x \longrightarrow \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{aligned}$$

RAGG NON OSS

RAGG OSS

NON RAGG NON OSS

NON RAGG OSS

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\hat{B}_a} \\ \boxed{\hat{B}_b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

raggiungibile

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\hat{C}_b} & 0 & \boxed{\hat{C}_d} \end{bmatrix}$$

osservabile

Scomposizione canonica

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t)$$

raggiungibile

osservabile

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \end{matrix}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\hat{C}_b} & 0 & \boxed{\hat{C}_d} \end{bmatrix}$$

Triangolare a blocchi

Gli autovalori sono l'unione degli autovalori dei singoli sottosistemi

Scomposizione canonica

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$