Soluzione Es 1 testo di esame del 10/01/2017

La funzione densità di probabilità della variabile aleatoria X è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{-x^2}{8}}$$

Dall'andamento della caratteristica g(x) si osserva che la variabile aleatoria Y potrà assumere solamente valori positivi o nulli, inoltre la probabilità che essa assuma i valori 0 e 2 è non nulla in quanto la g(x) assume tali valori in più di un punto.
Per questo motivo la funzione distribuzione cumulativa presenterà dei salti in corrispondenza di y=0 e di y=2, e l'ampiezza di tali salti coinciderà con la probabilità che Y sia uguale rispettivamente a 0 e 2. Calcoliamo pertanto tali probabilità:

$$\Pr(Y=0) = \Pr(X \le -1) = F_X(-1)$$

$$\Pr(Y=2) = \Pr(-1 < X \le 1) = \Pr(X \le 1) - \Pr(X \le -1) = F_X(1) - F_X(-1)$$

Per y > 2, invece, osservando che g(x) = x+1, si può calcolare immediatamente la funzione distribuzione cumulativa di Y dalla definizione:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr(X+1 \le y) = \Pr(X \le y-1) = F_X(y-1) \qquad per \quad y > 2$$

Pertanto:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & per \ \ y < 0 \\ F_X(-1) & per \ 0 \le y < 2 \\ F_X(y-1) & per \ \ y \ge 2 \end{cases}$$

Conseguentemente la densità di probabilità della variabile aleatoria Y risulta essere:

$$f_Y(y) = F_X(-1) \cdot \delta(y) + \left(F_X(1) - F_X(-1)\right) \cdot \delta(y-2) + f_X(y-1) \cdot u(y-2)$$

dove $F_X(-1) = \Phi(-1/2)$ e $F_X(1) = \Phi(1/2)$.