Prova Facoltativa Com. Num. Parte I - Fila A

Es 1

1.1 Linearità

Il sistema non è lineare in quanto la sua descrizione $T[\cdot]$ può essere vista come la somma di due contributi $T[\cdot] = T_1[\cdot] + T_2[\cdot]$ dove $T_1[\cdot] = x^2(t)$ e $T_2[\cdot] = 2[x(t) - x(t-T)]$. È facile dimostrare che la trasformazione $T_1[\cdot]$ è non lineare:

$$T_1[a x_1(t) + b x_2(t)] = a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2ab\, x_1(t) x_2(t)$$
$$\neq a T_1[x_1(t)] + b T_1[x_2(t)] = a x_1^2(t) + b x_2^2(t)$$

per cui l'intero sistema non è lineare.

1.2 Stazionarietà

$$y'(t) = T[x(t-t_0)] = x^2(t-t_0) + 2[x(t-t_0) - x(t-T-t_0)]$$
$$= y(t-t_0) = x^2(t-t_0) + 2[x(t-t_0) - x(t-t_0-T)]$$

Il sistema è stazionario

1.3 Memoria

Il sistema ha memoria in quanto l'uscita all'istante t dipende anche dall'ingresso ad istanti di tempo diversi da t.

1.4 Stabilità

$$|y(t)| = \left| x^2(t) + 2[x(t) - x(t-T)] \right| \leq$$
$$\leq |x^2(t)| + 2|x(t) - x(t-T)| \leq M^2 + 2[M - (-M)] =$$
$$= M^2 + 4M = N < +\infty$$

Il sistema è stabile

1.5 Causalità

Essendo $T > 0$ l'uscita all'istante t dipende dall'ingresso ad istanti precedenti e uguali a t (ma non futuri). Per cui il sistema è causale.

Es 2

$$x(t) = 3A\left(1 - \frac{|t|}{3T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{6T}\right) - 2A\left(1 - \frac{|t|}{2T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4T}\right) +$$

$$- A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

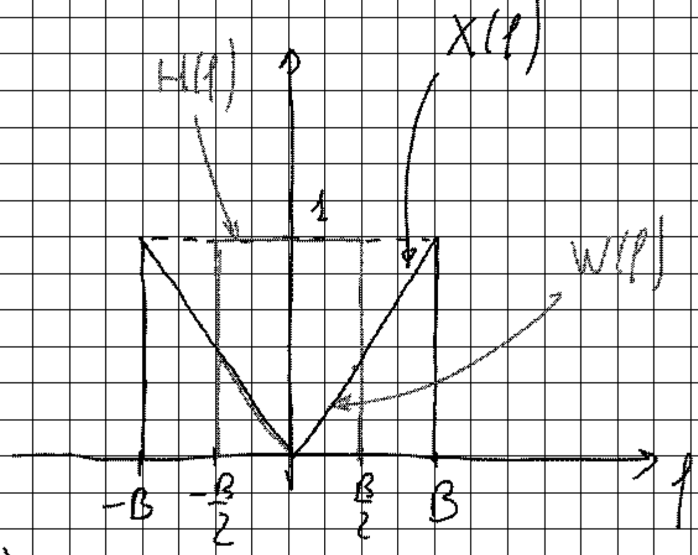
$$X(f) = 9AT\,\mathrm{sinc}^2(3Tf) - 4AT\,\mathrm{sinc}^2(2Tf) - 2AT\,\mathrm{sinc}(2Tf)$$

Es 3

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) - \left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$P(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



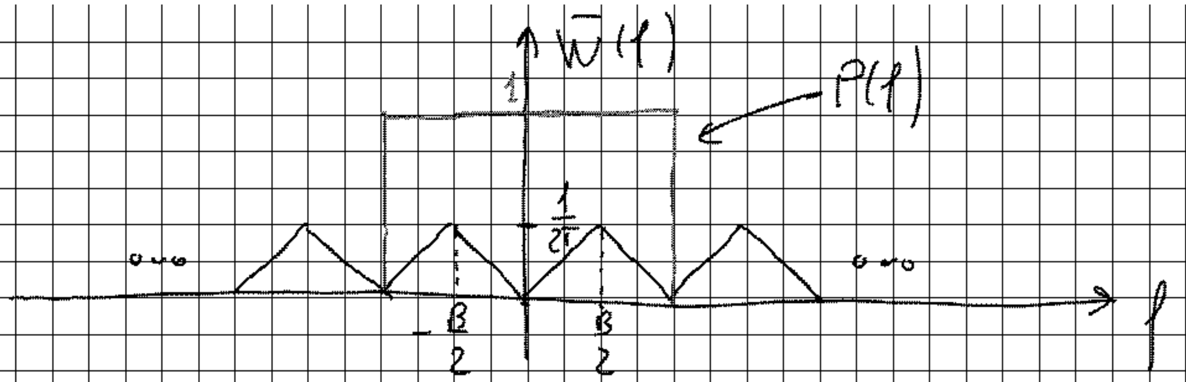
$$w_0(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$W_0(f) = X(f)\,H(f) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|f|}{B/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$w[n] = w_0(nT)$$

$$\bar{W}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_0\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



$$Y(f) = \bar{W}(f)\,P(f) = Y_0(f) \otimes \left[\delta\left(f-\frac{B}{2}\right) + \delta\left(f+\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$Y_0(f) = \frac{B}{2}\left(1 - \frac{|f|}{B/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$y(t) = 2\,y_0(t)\cos(\pi B t)$$

$$y_0(t) = \frac{B^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2\,df = \frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{B^2}{\cancel{4}}\cdot\frac{B}{2} = \frac{B^3}{6}$$

$$P_y = 0$$

Es 4

soluzione nelle note del corso su Moodle

Es 5

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j2\pi f nT}$$

$$\bar{X}\left(f+\frac{K}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j2\pi\left(f+\frac{K}{T}\right)nT} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j2\pi f nT}\cdot e^{-j2\pi Kn}$$

$e^{-j2\pi Kn}$ è $1 \quad \forall\, K,n \in \mathbb{Z}$