Esercizio

La velocità di una particella che si muove lungo l'asse x segue la seguente legge oraria

$$v(t) = v_0 + a\,t \tag{1}$$

con $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ e $a = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Sapendo che all'istante iniziale $t = 0$ la particella si trova alla posizione $x = 2\,\mathrm{m}$, determinare

1. dove si trova la particella all'istante $t = 1\,\mathrm{s}$;
2. quando la particella raggiunge la posizione $x = 4\,\mathrm{m}$.

SOLUZIONE

1. Integriamo la legge oraria della velocità tra

   - l'istante $t = 0\text{s}$ in cui sappiamo che la particella si trova in $x(0) = 2\text{m}$, e

   - l'istante $t = 1\text{s}$ in cui vogliamo sapere dove si trova

   e applichiamo la definizione di velocità

$$\begin{aligned}\int_{t=0\text{s}}^{t=1\text{s}} v(t)dt &= \int_{t=0\text{s}}^{t=1\text{s}} \frac{dx}{dt}(t)dt = \\ &\quad \text{[applico teorema fondamentale del calcolo integrale]} \\ &= x(t=1\text{s}) - \underbrace{x(t=0\text{s})}_{=2\text{m}} \qquad (2)\end{aligned}$$

   Pertanto

$$\begin{aligned}x(t=1\text{s}) &= 2\text{m} + \int_{t=0\text{s}}^{t=1\text{s}} v(t)dt = \\ &\quad \text{[uso Eq.(1)]} \\ &= 2\text{m} + \int_{t=0\text{s}}^{t=1\text{s}} (v_0 + a\,t)dt = \\ &= 2\text{m} + \left[v_0 t + \frac{a}{2}\,t^2\right]_{t=0\text{s}}^{t=1\text{s}} = \\ &\quad \text{[sostituisco i dati con le loro unità di misura]} \\ &= 2\text{m} + \left(\underbrace{2\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}}_{=v_0} \cdot 1\cancel{\text{s}} + \underbrace{\frac{9.81}{2}\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}}_{=\frac{a}{2}} \cdot (1\cancel{\text{s}})^2\right) - \underbrace{\left(\underbrace{2\frac{\text{m}}{\text{s}}}_{=v_0} \cdot 0\text{s} + \underbrace{\frac{9.81}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}_{=\frac{a}{2}} \cdot (0\text{s})^2\right)}_{=0} = \\ &= 2\text{m} + 2\text{m} + 4.905\text{m} = \\ &= 8.91\,\text{m} \qquad (3)\end{aligned}$$

2. Analogamente, possiamo ora integrare tra

   - l'istante $t = 0\text{s}$ in cui sappiamo che la particella si trova in $x(0) = 2\text{m}$, e

   - l'istante t^* (incognito) in cui sappiamo che la particella si trova in $x(t^*) = 4\text{m}$

$$\int_{t=0\text{s}}^{t^*} v(t)dt = \int_{t=0\text{s}}^{t^*} \frac{dx}{dt}(t)dt = \underbrace{x(t^*)}_{=4\text{m}} - \underbrace{x(t=0\text{s})}_{=2\text{m}} = 2\,\text{m} \qquad (4)$$

E d'altra parte

$$
\begin{aligned}
\int_{t=0\mathrm{s}}^{t^*} v(t)dt &= \int_{t=0\mathrm{s}}^{t^*} (v_0 + a\,t)dt = \\
&= \left[v_0 t + \frac{a}{2}\,t^2\right]_{t=0\mathrm{s}}^{t=t^*} = \\
&= v_0 t^* + \frac{a}{2}\,t^{*2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Uguagliando (4) e (5) si ottiene

$$
\frac{a}{2}\,t^{*2} + v_0 t^* = 2\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad a\,t^{*2} + 2 v_0 t^* - 4\,\mathrm{m} = 0 \qquad (6)
$$

che ha per soluzioni

$$
t^* = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4\,\mathrm{m}\cdot\, a}}{a} \qquad (7)
$$

Scartiamo la soluzione col segno $'-'$ perché dà un tempo negativo (passato), e non ci interessa. Pertanto

$$
\begin{aligned}
t^* &= \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4\,\mathrm{m}\,a}}{a} = \\
&= \frac{-2\,\frac{\mathrm{m}}{s} + \sqrt{4\,\frac{\mathrm{m}^2}{s^2} + 4\,\mathrm{m}\cdot\, 9.81\frac{\mathrm{m}}{s^2}}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\
&= \frac{-2\,\frac{\mathrm{m}}{s} + \sqrt{43.24\,\frac{\mathrm{m}^2}{s^2}}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{s^2}} = \\
&= \frac{-2\,\frac{\mathrm{m}}{s} + 6.58\,\frac{\mathrm{m}}{s}}{9.81\frac{\mathrm{m}}{s^2}} = \\
&= \frac{4.58\,\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{s}}{9.81\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{s^2}} = \\
&= 0.47\mathrm{s} \qquad (8)
\end{aligned}
$$