ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 10

Note Title 09/10/2018

Esercizio Rette per $(1,2)$ che formano angolo di $60°$ con la retta $x-2y=3$

Lavoro in cartesiana. Le rette richieste hanno eq. $y=mx+n$ (più eventualmente quella verticale).

Calcolo l'angolo tra le 2 rette

$$x-2y-3=0$$
$$-mx+y-n=0$$

Basta fare l'angolo tra $\underbrace{(1,-2) \text{ e } (-m,1)}_{\text{vettori } \perp \text{ alle direzioni}}$

$$\frac{\langle (1,-2),(-m,1)\rangle}{\|(1,-2)\|\cdot\|(-m,1)\|} = \frac{-m-2}{\sqrt{5}\,\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{2}$$

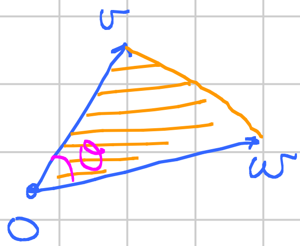
$$\rightsquigarrow 4(m+2)^2 = 5(m^2+1) \rightsquigarrow 4m^2+16m+16 = 5m^2+5$$

$$\rightsquigarrow m^2-16m-11=0 \rightsquigarrow m = 8 \pm \sqrt{75} = 8 \pm 5\sqrt{3}$$

— o — o —

$\boxed{\text{AREA DEL TRIANGOLO}}$ Direttamente nello spazio.

Calcolare l'area del triangolo passante per l'origine e per i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$



$\boxed{1° \text{ modo}}$ Uso formula trigonometrica

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\,\text{lato}\cdot\text{lato}\cdot\sin(\text{angolo compreso})$$

$$= \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Usando la formula per $\cos\theta$ otteniamo

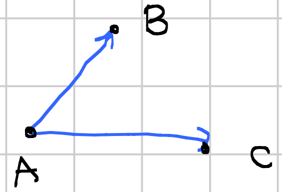
$$\text{Area} = \frac{1}{2}\|v\|\cdot\|w\|\sqrt{1-\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2\cdot\|w\|^2}}$$

Facendo il denominatore otteniamo

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{\|v\|^2\cdot\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2}}$$

Formula valida in ogni dimensione

Cosa succede voglio l'area del triangolo per 3 p.ti dati A, B, C



Basta applicare la formula con

$v = B - A$ e $w = C - A$

oppure con

$v = B - C$ e $w = A - C$

2° modo **FUNZIONA SOLO IN $\mathbb{R}^3$**

Partendo da v e w, calcolo il vettore $\perp$ usando la formula misteriosa.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1)$$

Ora succede miracolosamente che

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Area} &= \frac{1}{2}\|\text{vettore ottenuto}\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(v_2w_3-v_3w_2)^2+(\dots)^2+(\dots)^2}\end{aligned}}$$

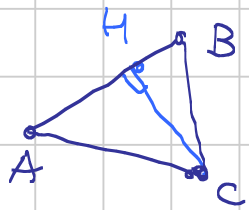
Verifiche bovine possibili

① Il vettore ottenuto con la formula è $\perp$ a v e w

② Sommando i quadrati ottengo quello che c'era sotto la radice nella 1ª formula, e cioè

$$(v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)-(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)^2$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Calcolo base ed altezza.

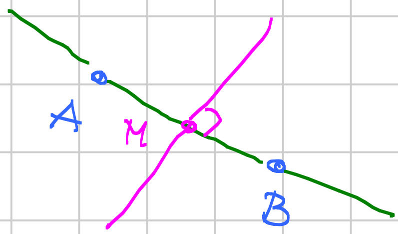


Se scelgo AB come base, allora

$AB = \|A-B\| = \|B-A\|$

Per calcolare l'altezza basta trovare la distanza di C dalla retta AB, problema che abbiamo già risolto

<u>Esercizio</u> Calcolare l'asse del segmento di estremi $(2,3)$ e $(12,17)$



$$M = \frac{(2,3)+(12,17)}{2} = (7,10)$$

Direzione retta AB : $B-A = (10,14)$

Direzione asse : $(-14,10)$

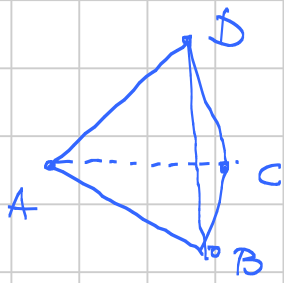
Asse : $(7,10)+t(-7,5)$ ⇝ se voglio passo in cartesiana

Se voglio il centro della circ. circoscritta ad un triangolo

Basta intersecare 2 assi qualunque

— o — o —

Esercizio In $\mathbb{R}^3$, calcolare il volume del tetraedro che ha 4 vertici A, B, C, D dati



Volume = $\frac{1}{3}$ Area base · altezza

Area base = area triangolo ABC ☺

altezza = distanza di D dal piano passante per A, B, C ☺

Esercizio Scrivere l'equazione della sfera con centro in $\underbrace{(1,3,2)}_{C}$ e passante per $\underbrace{(-1,1,3)}_{P}$

Il raggio è la distanza, cioè $\|C-P\|$

$$R = \|(2,2,-1)\| = 3$$

La sfera è costituita da tutti i p.ti (x,y,z) la cui distanza da C è $=3$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2} = 3$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 9$$

In generale $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2}$

dove R = raggio e (x_0,y_0,z_0) = centro

Nell' esercizio precedente, calcolare l'eq. del piano tangente alla sfera e passante per P

È il piano per P perpendicolare al raggio $C-P$

Sappiamo che $C-P = (2,2,-1)$ e $P = (-1,1,3)$

$2x+2y-z=d \rightsquigarrow$ sostituisco P : $-2+2-3=-3=d$

$$\boxed{2x+2y-z+3=0}$$

<u>Esercizio</u> Consideriamo la retta $(1,0,2)+t(1,1,-1) := r$

Scrivere l'eq. del piano che passa per $P=(5,1,4)$ e contiene la retta

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Trovo H sulla retta in modo che $PH \perp (1,1,-1)$ e poi uso i vettori $(1,1,-1)$ e $P-H$ per generare il piano

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Trovo 2 p.ti A e B sulla retta e poi faccio piano per A, B, P

$\underset{\uparrow\, t=0}{A = (1,0,2)}$ $\underset{\uparrow\, t=1}{B = (2,1,1)}$ $P = (5,1,4)$

In parametrica il piano è $\underset{P}{(5,1,4)} + t\underset{P-A}{(4,1,2)} + s\underset{P-B}{\overset{(1,0,1)}{(3,0,3)}}$

Per andare in cartesiana

$\rightsquigarrow$ trovo a, b, c a partire da $(4,1,2)$ e $(3,0,3)$ con la formula misteriosa

$\rightsquigarrow$ trovo d imponendo il passaggio per P (o per A o per B).

— o — o —