ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 52

Note Title 07/12/2018

ISOMETRIE

Def. Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice $\boxed{\text{ISOMETRIA}}$ se
(conserva le distanze)

$$\mathrm{dist}(f(x), f(y)) = \mathrm{dist}(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Teorema (Caratterizzazione delle isometrie)
Una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una isometria se e solo se è del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice $n \times n$ ORTOGONALE $(AA^t = A^tA = Id)$

Dim.

Step 1 Tutte le affinità con A ortogonale sono ISOMETRIE
(metà facile del teorema)

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(f(x), f(y)) &= \| f(x) - f(y) \| \\ &= \| Ax - \cancel{b} - Ay + \cancel{b} \| \\ &= \| A(x-y) \| \\ \text{spero} \nearrow &= \| x - y \| \\ &= \mathrm{dist}(x,y) \end{aligned}$$

Controlliamo la speranza:

$$\begin{aligned} \| A(x-y) \|^2 &= \langle A(x-y), A(x-y) \rangle = [A(x-y)]^t A(x-y) \\ &= (x-y)^t \underbrace{A^t A}_{Id} (x-y) = (x-y)^t (x-y) = \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \| x-y \|^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Se f è un'isometria, e $f(0)=0$, allora f conserva le norme

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \text{dist}(f(x),0) \\ &= \text{dist}(f(x),f(0)) \qquad \text{ho usato che } f(0)=0 \\ &= \text{dist}(x,0) \qquad f \text{ conserva le distanze} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Step 3}}$ Se f è un'isometria, e $f(0)=0$, allora f conserva i prodotti scalari, cioè

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n \ \forall y\in\mathbb{R}^n$$

Sappiamo dallo step precedente che

$$\begin{aligned} \text{dist}(f(x),f(y))^2 &= \|f(x)-f(y)\|^2 \\ &= \|f(x)\|^2+\|f(y)\|^2-2\langle f(x),f(y)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(x,y)^2 &= \|x-y\|^2 \\ &= \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle \end{aligned}$$

Visto che f conserva le distanze i risultati devono essere $=$, cioè

$$\underbrace{\cancel{\|f(x)\|^2}}_{\|x\|^2} + \underbrace{\cancel{\|f(y)\|^2}}_{\|y\|^2} - 2\langle f(x),f(y)\rangle = \cancel{\|x\|^2}+\cancel{\|y\|^2}-2\langle x,y\rangle$$

(punto precedente)

da cui l'uguaglianza dei prodotti scalari.

$\boxed{\text{Step 4}}$ Se f è isometria, e $f(0)=0$, allora f è del tipo $f(x)=Ax$ con A matrice ortogonale.

Sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (base ortonormale) e poniamo $\hat{e}_i := f(e_i)$

Dico che $\hat{e}_i$ sono ancora una base ortonormale. Infatti

- $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_i \rangle = \langle f(e_i), f(e_i) \rangle \underset{\text{step 3}}{=} \langle e_i, e_i \rangle = 1$
- $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \underset{\text{step 3}}{=} \langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$

Prendiamo un qualunque $v \in \mathbb{R}^n$, lo scriviamo come

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

Questo andrà a finire in

$$f(v) = d_1 \hat{e}_1 + \dots + d_n \hat{e}_n$$

Se fosse che $d_i = c_i$ avremmo finito in quanto

$$f(v) = c_1 \hat{e}_1 + \dots + c_n \hat{e}_n = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$$

da cui la linearità. Per calcolare i coeff., visto che le basi sono ortonormali, basta fare i prodotti scalari

$$d_i = \langle f(v), \hat{e}_i \rangle = \langle f(v), f(e_i) \rangle \underset{\text{step 3}}{=} \langle v, e_i \rangle = c_i$$

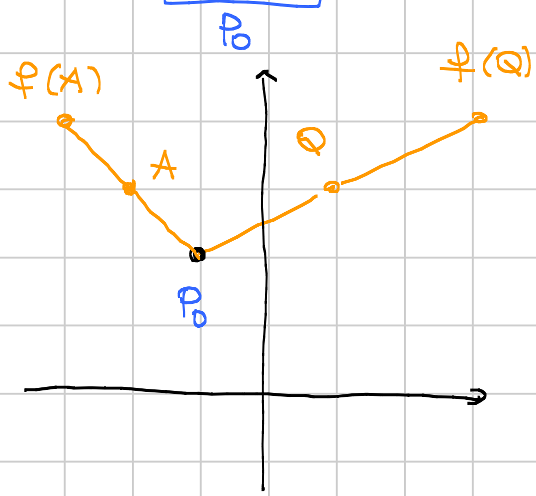
Quindi f è lineare! Cioè $f(x) = Ax$. Le colonne di A sono $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ e visto che sono ortonormali, la matrice A è ortogonale.

$\boxed{\text{Step 5}}$ Conclusione nel caso generale.

Sia f isometria qualunque. Poniamo $g(x) = f(x) - f(0)$. Si verifica facilmente che g è isometria e $g(0) = 0$. Quindi per lo step 4 abbiamo $g(x) = Ax$ con A matrice ortogonale. Quindi $f(x) = Ax + \underbrace{f(0)}_{b \text{ cercato}}$

Esempi di affinità ed isometrie nel piano

Esempio 1 Scrivere l'omotetia con centro in $\underbrace{(-1,2)}_{P_0}$ e fattore 2



Se fosse rispetto all'origine, sarebbe immediato

$$f(x,y) = (2x, 2y)$$

Se invece il centro è P_0 generico

$$P \rightsquigarrow P - P_0 \rightsquigarrow 2(P-P_0) \rightsquigarrow 2(P-P_0) + P_0$$

metto il p.to di applicazione in P_0 — omotetia di fattore 2 — traslo nuovamente di P_0

$$P \rightsquigarrow 2P - P_0$$

$$(x,y) \longrightarrow (2x,2y) - (-1,2) = \boxed{(2x+1, 2y-2)}$$

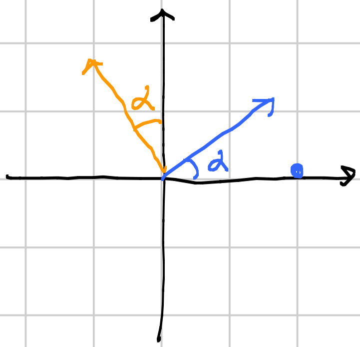
Qualche verifica: $Q = (1,3)$ $\quad f(Q) = (3,4)$

$A = (-2,3)$ $\quad f(A) = (-3,4)$

$P_0 = (-1,2)$ $\quad f(P_0) = (-1,2)$ ☺

Esempio 2 Scrivere la rotazione in verso $\boxed{\text{antiorario}}$ di un angolo α rispetto all'origine

$$f(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$f(0,1) = \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$$
$$= (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$



Quindi in generale $f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ ↑ matrice ortogonale: verificare !!!

Esempio 3 Scrivere la rotazione rispetto all'origine di $90°$ in verso ORARIO

È come fare rotazione antioraria di $-90°$, quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = (-y, x)$$

Verifica: $f(1,0) = (0,1)$
$f(0,1) = (-1,0)$

ROTAZIONE ANTIORARIA DI $90°$

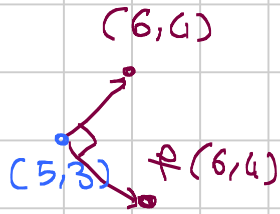
Esempio 4 Scrivere rotazione di $90°$ in verso ORARIO rispetto al punto $\underbrace{(5,3)}_{P_0}$

$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow$ ruoto $P-P_0 \rightsquigarrow$ aggiungo di nuovo P_0

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-5, y-3) \rightsquigarrow (-y+3, x-5) \rightsquigarrow (-y+8, x-2)$$

↑↑ uso formula precedente

Quindi mettendo insieme troviamo
$$f(x,y) = (-y+8, x-2)$$



Verifica: $(5,3) \rightsquigarrow (5,3)$ ok
$(6,4) \rightsquigarrow (\quad)$ ok

<u>Achtung</u>! Nell'esempio 3 dovevo mettere $-90°$

$$\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

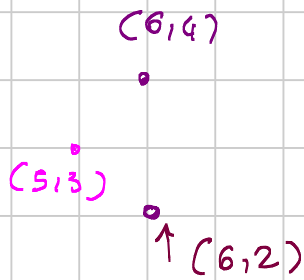
Quindi la vera risposta dell'esercizio 3 è

$$f(x,y) = (y, -x)$$

da cui la vera risposta dell'esercizio 4 è

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-5, y-3) \rightsquigarrow (y-3, -x+5) \rightsquigarrow (y+2, -x+8)$$

da cui $\quad f(x,y) = (y+2, -x+8)$



Verifiche: $(5,3) \rightsquigarrow (5,3)$ ☺

$(6,4) \rightsquigarrow (6,2)$ ok.

Morale: qualche verifica può salvare il risultato !!!