ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 16

Note Title 19/10/2018

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Due possibili descrizioni
- → cartesiana (mediante equazioni)
- → parametrica (mediante Span)

Domande:
1. Passare da una descrizione all'altra
2. Calcolare una base
3. Calcolare dim
4. Calcolare intersezioni, somme, proiezioni

__Esempio 1__ Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \quad x+2y-w=0, \quad z+w=x+y\}$$

$$W = \mathrm{Span}\{(1,0,2,0), (1,1,-1,1)\}$$

Sono sottospazi? Per W è ovvio (ogni Span lo è)
Per V andrebbe verificato

Dovrei prendere (x_1,y_1,z_1,w_1) e (x_2,y_2,z_2,w_2) che verificano le equazioni, e mostrare che $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2)$ verifica ancora le stesse eq.
Stessa cosa per (ax_1, ay_1, az_1, aw_1)

Calcolare base e dimensione: → per W è semplice: i due vettori dati sono lin. indip. e generano, quindi sono una base, quindi $\dim(W) = 2$

Per V risolvo il sistema $\begin{cases} x+2y-w=0 \\ x+y-z-w=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

variabili libere

$w = t \qquad y+z=0 \rightsquigarrow y=-s$

$z = s \qquad x+2y-w=0 \rightsquigarrow x=-2y+w = 2s+t$

Quindi la soluzione del sistema è

$$(2s+t, -s, s, t) = t(1,0,0,1) + s(2,-1,1,0)$$

Quindi $V = \mathrm{Span}\{(1,0,0,1), (2,-1,1,0)\}$ da cui $\dim V = 2$

Oss. Volendo potevo usare anche y, w come variabili libere. Ottenevo

$y = t \qquad y+z=0 \rightsquigarrow z=-y=-t$

$w = s \qquad x+2y-w=0 \rightsquigarrow x=-2y+w = -2t+s$

$$(-2t+s, t, -t, s) = t(-2,1,-1,0) + s(1,0,0,1)$$

Calcolare $V \cap W$ e $V+W$

Per calcolare $\cap$, è comodo avere entrambi in cartesiana, ma qui non è così

Per calcolare $V+W$, è comodo averli entrambi in parametrica.

Nel nostro caso

$$V+W = \mathrm{Span}\{\underbrace{(-2,1,-1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,0,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,2,0)}_{v_3}, \underbrace{(1,1,-1,1)}_{v_4}\}$$

Questo NON basta per dire che Span ha dim 4, perché non so ancora che sono lin. indip.
Per vedere se lo sono, imposto il sistema

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = 0$$

$$\begin{cases} -2a + b + c + d = 0 & 1^a \text{ componente} \\ a + d = 0 & 2^a \text{ "} \\ -a + 2c - d = 0 & 3^a \text{ "} \\ b + d = 0 & 4^a \text{ "} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 PIVOT $\rightsquigarrow$ l'unica sol. è $a=b=c=d=0$
$\rightsquigarrow$ $v_1, \dots, v_4$ sono lin. indip.
$\rightsquigarrow$ $\dim(V+W) = 4$ $\rightsquigarrow$ $V+W = \mathbb{R}^4$

Dalla formula di Grassmann

$$\underset{4}{\dim(V+W)} + \underset{0}{\dim(V \cap W)} = \underset{2}{\dim V} + \underset{2}{\dim W}$$

Quindi per forza $V \cap W = \{0\}$

— o — o —

Esempio 2 Spazio vettoriale: matrici 2×2 (spazio di dim 4)

$$V := \{ A \in M_{2\times 2} : A = A^t \} = \text{matrici simmetriche}$$

Verificare che è un sottospazio:

$\rightarrow$ se $A_1 = A_1^t$ e $A_2 = A_2^t$, allora $(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)^t$

$\rightarrow$ se $A = A^t$ e $a \in \mathbb{R}$, allora $(aA) = (aA)^t$

Calcolare una base e la dimensione

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = A^t \iff \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \iff b = c \iff b - c = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ a & & c & d \end{array}$$

Abbiamo a, c, d variabili libere, e poi $b = c$

Sono tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La verifica che sono lin. indip. è molto semplice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = c = d = 0 \rightsquigarrow \dim V = 3$$

Esempio 3 Spazio vettoriale = polinomi di grado ≤ 2 $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : p(3) = p'(2) \}$$

↑ derivata

Verificare che è un sottospazio ⇝ solite verifiche

Base e dimensione

$p(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad p'(x) = 2ax + b$

$p(3) = 9a + 3b + c$ $\qquad p'(2) = 4a + b$

$9a + 3b + c = 4a + b$ $\qquad 5a + 2b + c = 0$

$c = -5a - 2b$

V = polinomi del tipo $ax^2 + bx - 5a - 2b$

$$= a(x^2 - 5) + b(x - 2) = \mathrm{Span}(\underbrace{x^2 - 5, x - 2}_{\text{base di } V})$$

Nello stesso spazio considero $W = \mathrm{Span}\{x^2, x^2 + x + 1\}$

$\dim W = 2$.

Cosa posso dire di $V \cap W$? Per la formula di Grassmann ha dimensione almeno 1, anzi esattamente 1 se io so che $V + W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Per calcolare l'intersezione posso prendere il generico elemento di W e imporre di stare in V

$$a x^2 + b(x^2+x+1) = (a+b)x^2 + bx + b = \text{generico el. di } W$$

Impongo $p(3) = p'(2)$:

$$9(a+b) + 3b + b = 4(a+b) + b$$

$$5a + 8b = 0 \qquad a = -\frac{8}{5}b$$

Quindi gli el. di $V \cap W$ sono del tipo

$$-\frac{8}{5}b\, x^2 + b(x^2+x+1) = b\left(-\frac{3}{5}x^2 + x + 1\right)$$

$$V \cap W = \mathrm{Span}\left(-3x^2 + 5x + 5\right)$$