ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 25

Titolo nota 30/10/2018

SOTTOMATRICI

Def. Sia A una qualunque matrice $m \times n$.
Una sottomatrice $\ell \times k$ è una qualunque matrice ottenuta da A cancellando $m-\ell$ righe e $n-k$ colonne (si intende che $m \geq \ell$ e $n \geq k$)

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Caso speciale Se A è una matrice $n \times n$ indico con A_{ij} la sottomatrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

SVILUPPI DI LAPLACE (rispetto alle righe o alle colonne)

Rispetto alla 1ª colonna Sia A matrice $n \times n$

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, a_{i,1} \cdot \operatorname{Det} A_{i,1}}$$

elemento riga i colonna 1

sottomatrice ottenuta eliminando riga i e colonna 1

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

La formula precedente ci dice che

$$\operatorname{Det}(A) = a \operatorname{Det}\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d \operatorname{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g \operatorname{Det}\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Vantaggio: permette di calcolare determinanti $n \times n$ posto di saper calcolare det $(n-1) \times (n-1)$.

Teorema (misterioso) La formula di LAPLACE rispetto alla prima colonna verifica le proprietà (Det 1), ..., (Det 4)

(e questo sistemerebbe la parte di esistenza del teo. mist. iniziale)

Rispetto alla j-esima colonna

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \operatorname{Det}(A_{i,j})}$$

I segni sono presi "a scacchiera"

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Rispetto alla i-esima riga

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \operatorname{Det}(A_{i,j})}$$

Esempio
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = A$$

Sviluppo rispetto alla 2ª riga

$$Det(A) = -d\,Det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + e\,Det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}$$

Esempio
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 7 & 11 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Come calcolo il Det ?

1º modo Sviluppo Det $(3e_1 + e_2 + 2e_3 \ldots)$
⇝ vengono solo 5^5 termini ☹

2º modo Lavoro alla Gauss, e questo di solito è il modo migliore

3º modo Osservo che ci sono molti zeri, quindi provo alla Laplace

$$Det(A) \underset{\substack{\uparrow \\ 4^a \text{ colonna}}}{=} -1 \cdot Det(\text{che resta}) \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \text{ riga} \\ \text{di quello che} \\ \text{resta}}}{=} -1 \cdot 4 \cdot Det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(segno - aggiunto dopo video)

$$= -1 \cdot 4 \cdot 3\,Det\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (55-48) = -84$$

In generale, per il calcolo di un Det
→ SARRUS nei casi 2×2 e 3×3
→ Laplace con righe/colonne astute se ci sono tanti 0
→ Gauss altrimenti.

<u>Conseguenza degli sviluppi</u> Posto che gli sviluppi per riga e per colonna forniscono proprio il det, allora

$$\boxed{Det(A) = Det(A^t)}$$

<u>Dim</u>: fare Det(A) per colonne è come fare Det(A^t) per la corrispondente riga.

— o — o —

Dimostrazione che gli sviluppi per riga danno lo stesso risultato di quelli per colonna.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Sulla riga i-esima c'è un 1 e tutti 0

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} * & & * \\ 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ * & & * \end{pmatrix} & \leftarrow \text{riga } i\text{-esima} \\ \quad\quad \text{colonna } j & \end{array}$$

Quando sviluppo per riga trovo un solo termine che è

$$(-1)^{i+j} \cdot 1 \cdot Det\, A_{i,j}$$

Quando sviluppo rispetto alla colonna j, trovo che i determinanti di $A_{i,j}$ sono tutti nulli perché hanno una riga di zeri, tranne quello in cui elimino l'1, caso in cui viene uguale al precedente (e uguale al Determinante di tutta la matrice)

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Sulla riga i-esima c'è un λ e gli altri sono 0

Sostanzialmente uguale al precedente.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ Sulla riga i-esima c'è di tutto

$$\begin{pmatrix} & * & \\ \lambda_1 & \lambda_2 \dots & \lambda_n \\ & * & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ & * & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & * & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots & 0 \\ & & * & \end{pmatrix} + \dots$$

Det (Matrice iniziale) = somma Det (matrici a destra)

le comb. lin escono fuori

I determinanti delle matrici a destra sono

$$\underbrace{(-1)^{i+1} \lambda_1 \, \mathrm{Det}(A_{i,1}) + (-1)^{i+2} \lambda_2 \, \mathrm{Det}(A_{i,2}) + \dots}_{\text{sviluppo alla Laplace per riga}}$$

Termine a termine coincide con i rispettivi sviluppi per colonna.

Idea essenziale: ogni matrice si scompone come somma di matrici in cui una riga ha un solo elemento non nullo.

Oss. Cosa succede se sviluppo la matrice dello step 1 rispetto alla 1ª colonna

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & * & & \\ 0 \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & * & & \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i \\ \uparrow \\ \text{colonna } j \end{array}$$

Tutte le volte resta una matrice che ha una riga con tutti zero meno un termine, ma di questa non posso dire nulla.

— o — o —