18 MAGGIO 2023

SCOMPOSIZ. CANONICA (KALMAN)

G(s) f.d.t. HA COME POLI IL SOTTOINSIEME DEGLI AUTOV. DELLA MATRICE A APPARTENENTI ALLA PARTE COMPL. OSS. E RAGG.

STABILITÀ INTERNA & ESTERNA

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AUTOV. -1, -2

STAB. INTERNA

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

AS. STABILE

$$M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det(M_r) = 0 \qquad \rho(M_r) = 1$$ NON

COMPL. RAGGIUNGIBILE

BASE DEL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ?

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ DIMENSIONE 1

$$M_o = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(M_o) = 0 \qquad \rho(M_o) = 1$$ NON

COMPL. OSSERVABILE

BASE DEL SOTTOSPAZIO DI NON OSS.?

$$M_o \, \xi_i = 0 \qquad \xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = 0 \qquad C(sI - A)^{-1} B + D = 0$$

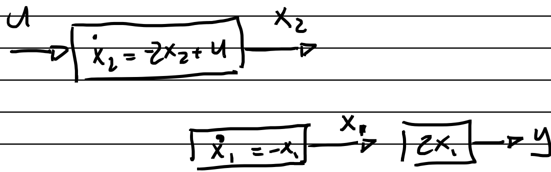
$$y = \cancel{Cx} + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases}$$

$$y = 2x_1$$



ALCUNI CASI IN CUI LA COMPLETA RAGG. PUÒ ESSERE VALUTATA PER ISPEZIONE DIRETTA DELLE MATRICI A, B

CASO S.I. CON A DIAGONALE

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \qquad m = 1$$

MATRICE RAGG.

$$M_r = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B_1 & \lambda_1 B_1 & \lambda_1^2 B_1 & & \lambda_1^{n-1} B_1 \\ B_2 & \lambda_2 B_2 & \lambda_2^2 B_2 & & \lambda_2^{n-1} B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_n & \lambda_n B_n & \lambda_n^2 B_n & & \lambda_n^{n-1} B_n \end{array}\right]$$

PER COMPL. RAGG. M_r DEVE AVERE RANGO PIENO

PER RANGO PIENO:

- B NON PUÒ AVERE ELEMENTI NULLI (ELEMENTI NULLI COMPORTANO RIGHE NULLE)
- TUTTI GLI AUTOVALORI λ_i DISTINTI

  (AUTOV. COINCIDENTI $\rightarrow$ RIGHE PROPORZIONALI)

GENERALIZZIAMO AL CASO M.I. $\rightarrow$ A IN FORMA DI J

SFRUTTIAMO IL LEMMA PBH

LA COPPIA (A, B) È COMPLETAM. RAGGIUNGIBILE

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{P(\lambda)}_{n \times (n+m)} := [\underbrace{\lambda I - A}_{n \times n} \vdots \underbrace{B}_{n \times m}] \quad \text{HA RANGO PIENO } \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- PER λ NON AUTOVALORE DI A, $\lambda I - A$ HA RANGO PIENO

$\det(\lambda I - A) = 0$ SOLO PER λ AUTOVAL. DI A

- PER λ_i AUTOVALORE DI A, $\lambda I - A$ **NON** HA RANGO PIENO

$P(\lambda_i)$ POTREBBE NON AVERE RANGO PIENO

CONSIDERO UN λ_i t.c. $\rho(P(\lambda_i)) < n$

$$\exists\ q \neq 0 \quad \text{t.c.} \quad q^T P(\lambda_i) = 0$$

$$q^T [\underbrace{\lambda_i I - A}_{2} \; \vdots \; \underbrace{B}_{1}] = 0$$

$$\underbrace{q^T B = 0}_{1} \qquad \underbrace{q^T A = \lambda_i q^T}_{2}$$

POST-MOLTIPLICO 2 PER B $\qquad q^T A B = \lambda_i \underbrace{\cancel{q^T B}}_{=0}$ DALLA 1

POST MOLTIPLICO 2 PER AB $\qquad q^T A^2 B = \lambda_i \underbrace{\cancel{q^T AB}}_{=0}$ DALLA PRECEDENTE

$\vdots$

$A^{n-1} B$

$$q^T \underbrace{\left[B \; \vdots \; AB \; \vdots \; \dots \; \vdots \; A^{n-1} B \right]}_{} = 0$$

$\Rightarrow$ M_r NON HA RANGO n $(< n)$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA È NON COMPL. RAGG.

• IL TEOREMA SI PUÒ DIMOSTRARE ANCHE NEL VERSO OPPOSTO

LA COPPIA (A, B) È COMPLETAM. RAGGIUNGIBILE

$\iff$ $\underbrace{P(\lambda)}_{n\times(n+m)} := [\underbrace{\lambda I - A}_{n\times n} \vdots \underbrace{B}_{n\times m}]$ HA RANGO PIENO $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

APPLICHIAMO PBH AL CASO DI (A, B) CON A IN FORMA DI JORDAN (CON p BLOCCHI)

$$A = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_p & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_p \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad B = \underset{n\times m}{\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1,m_1} \\ \hline \vdots \\ \hline B_{p1} \\ \vdots \\ B_{p\,m_p} \end{bmatrix}}$$

SONO m_i CHE (M_I)

- PER λ NON AUTOVALORE, OK RANGO PIENO

- PER λ_i AUTOVALORE

$[\lambda_i I - A]$ HA TANTE RIGHE NULLE QUANTI SONO I BLOCCHI DI JORDAN CORRISP. A λ_i (PARI ALLA MOL. GEOMETRICA DI λ_i)

LE RIGHE DI B CORRISP. ALLE RIGHE NULLE DI $\lambda_i I - A$ SONO B_{i,m_i}

AFFINCHÈ LA MATRICE $P(\lambda_i) = [\lambda_i I - A \; B]$ MANTENGA RANGO PIENO PER TUTTI GLI AUTOV. DI A, TUTTE LE ULTIME RIGHE B_{i,m_i} DEI BLOCCHI

CORRISPONDENTI ALLO STESSO AUTOVALORE λ_i DEVONO ESSERE LIN. INDIPENDENTI.

ESEMPIO

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} -1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & \\ \hline & & & -1 & 1 & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ \hline & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \boxed{0 \; 1} \\ 0 & 0 \\ \boxed{1 \; 0} \\ 0 & 0 \\ \boxed{1 \; 1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \boxed{1 \; 3} \\ 0 & 0 \\ \boxed{2 \; 6} \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

LIN. INDIP.

$\neq 0$

COMPL. RAGG.

NON COMPL. RAGG. SINGOLO INGRESSO 2 BLOCCHI DI J CORRISP. ALLO STESSO AUTOV.

NON COMPL. RAGG. RIGHE MULTIPLE

- PER UN SISTEMA S.I. (A IN FORMA DI J) PER LA COMPL. RAGGIUNGIBILITÀ È NECESSARIO CHE LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI OGNI AUTOVALORE SIA 1

↳ B DEVE INOLTRE AVERE TANTI ELEMENTI DIVERSI DA ZERO QUANTI SONO GLI AUTOVALORI DISTINTI DI A

(IN CORRISP. DELLE ULTIME RIGHE DEI RELATIVI BLOCCHI DI JORDAN)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

NON COMP. RAGG. $\quad M_r = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

COMPL. RAGG. $\quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$

$\det(M_r) \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

COMPL. RAGG.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

NON COMPL. RAGG.

$\lambda_i = -1 \quad m.g. > 1$

S.I.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{bmatrix}$$

COMPL. RAGG.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 0} \end{bmatrix}$$

NON COMPL. RAGG.

- UN SISTEMA CON μ_i BLOCCHI ASSOCIATI ALLO STESSO AUTOV. λ_i PUÓ ESSERE COMPL. RAGG. CON ALMENO μ_i INGRESSI (NEC. NON SUFF.)

IN MANIERA ANALOGA LEMMA PBH PER OSSERVABILITÀ

LTI CON (A, C) È COMPL. OSSERVABILE $\iff$

$$P_o(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix}$$ HA RANGO PIENO $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & 1 & & & & & & 0 & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 0 & & \lambda_2 & & & & \\ \hline & & & & & & \ddots & & & \\ \hline & 0 & & & & & & \lambda_p & 1 & 0 \\ & & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 & & \lambda_p \end{array}\right]$$

LE PRIME COLONNE DI C CORRISPONDENTI AD OGNI BLOCCO RELATIVO AD AUTOVALORI COINCIDENTI DEVONO ESSERE LIN. INDIP. (PER COMPLETA OSSERVABILITÀ)

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1,m_1} & \dots & C_{p1} & \dots & C_{p,m_p} \end{array}\right]$$

COLONNE DI C

S.O.: MOLTEPLICITÀ GEOM. DI TUTTI GLI AUTOV. = 1

E C DEVE AVERE TANTI ELEMENTI DIVERSI DA

ZERO QUANTI SONO GLI AUTOVALORI DISTINTI

(IN CORRISP. DELLE PRIME COLONNE DEI BLOCCHI DI J)

$\Downarrow$

UN SISTEMA CON μ_i BLOCCHI ASSOCIATI ALL'AUTOV.

λ_i PUÒ ESSERE OSSERVABILE SOLO CON ALMENO

μ_i USCITE (COND. NEC. NON SUFF.)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

NON COMPLET. OSS.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

COMPLETAM. OSS.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

NON COMPL. OSS.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

COMPL. OSS.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FORMA MINIMA

UN SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE ED OSSERVABILE SI DICE IN FORMA MINIMA (NON È POSSIBILE UTILIZZARE UN NUMERO INFERIORE DI VARIABILI DI STATO PER DESCRIVERE LA STESSA RELAZIONE TRA INGRESSO ED USCITA)

LE PARTI NON OSS. E/O NON RAGG. SONO SOVRABBONDANTI NELLO STUDIO DELLA RELAZ. INGRESSO USCITA

NOTA:

NON LO SONO NELLO STUDIO DELL'EVOLUZIONE LIBERA DELL'USCITA O DEL MOVIMENTO DELLO STATO