$$P_y = R_y(0) = 2BN_0 + N_0B\frac{\sin[2B(0-1/2B)\pi]}{2B(0-1/2B)\pi} + N_0B\frac{\sin[2B(0-1/2B)\pi]}{2B(0-1/2B)\pi} = \boxed{2BN_0}$$

29 Gennaio 2018

Es. 1 - Il processo $X(t) = 1 + 9\cos(2\pi f_0 t + 2\theta_0)$, dove θ_0 è una variabile uniformente distribuita in $[-\pi, \pi]$, alimenta un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data da $h(t) = \exp(-t)\,u(t-2)$. Si calcolino valor medio e densità spettrale di potenza del processo all'ingresso e all'uscita del sistema.

SOLUZIONE:

Possiamo vedere il processo parametrico $X(t)$ come una trasformazione della V.A. θ_0 $\Rightarrow$ Applichiamo il th. del VALOR MEDIO:

$$\eta_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + 9\cos(2\pi f_0 t + 2\theta_0))\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right) d\theta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_0 + \frac{9}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\pi f_0 t + 2\theta_0)\,d\theta_0}_{=\,0} =$$

$$= 1$$

perchè integriamo il coseno in un multiplo del suo periodo!

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t-2)e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{2}^{+\infty} e^{-(1+j2\pi f)t}\,dt = \frac{-1}{1+j2\pi f}e^{-(1+j2\pi f)t}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-2(1+j2\pi f)}$$

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = \eta_X H(0) = e^{-2}$$

Proviamo a dimostrare che $X(t)$ è SSL:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E\left[\{1 + 9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)\}\{1 + 9\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)\}\right] =$$

$$= E[\, 1 + 9\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0) + 9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0) + 81\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)\,] =$$

$$= E[1] + \underbrace{E[9\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)]}_{1} + \underbrace{E[9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)]}_{2} + \underbrace{E[81\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)]}_{3} =$$

$$= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} 9\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)d\theta_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} 9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)d\theta_0 +$$

$$+ \frac{81}{2}E[\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 4\theta_0)] + \frac{81}{2}E[\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))]$$

1. Supponiamo di definire la V.A. $Y = g(\theta_0) = 9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)$. Se vogliamo calcolare $E[Y]$ allora possiamo invocare il th. del VALOR MEDIO:

$$E[Y] = E[g(\theta_0)] = E[9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)]$$

2. Stessa considerazione fatta al punto 1.

③ $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 9\cos(2\pi f_0 t_2 + 2\theta_0)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)d\theta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} 9\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\theta_0)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)d\theta_0 = 0$$ perchè

entrambi i coseni sono integrati in un multiplo del periodo (lo stesso integrale è stato risolto per calcolare $\eta_x(t)$).

$$E[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2) + 4\theta_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0[t_1+t_2] + 4\theta_0)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)d\theta_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0[t_1+t_2] + 4\theta_0)\,d\theta_0 = 0$$ perchè integriamo il coseno in un multiplo del suo periodo

$R_X(\tau) = 1 + \frac{81}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ dove $\tau = t_1 - t_2$ $\Rightarrow$ $X(t)$ è SSL !

$S_X(f) = \mathrm{TCF}[R_X(\tau)] = \delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)$

$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)\right]\left[\frac{e^{-4}}{1+4\pi^2 f^2}\right]$