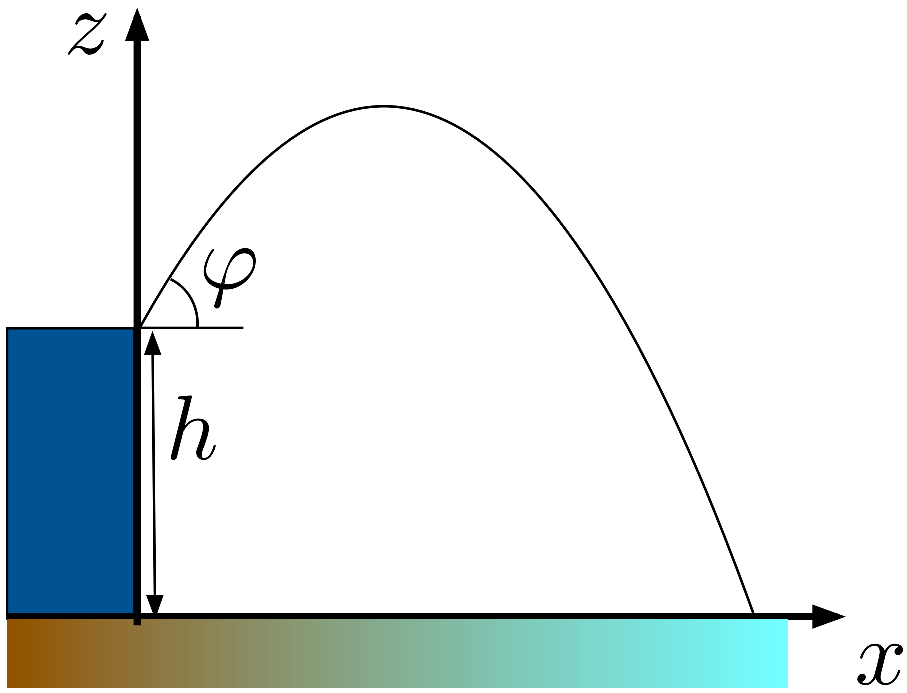
Esercizio

Un sasso di massa $m = 0.5\,\mathrm{Kg}$ viene lanciato dalla cima di una torre alta $h = 20\,\mathrm{m}$ con velocità iniziale di modulo $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$, ad un angolo $\varphi = 60^o$ rispetto all'orizzontale. La torre si trova in prossimità del mare, ed il sasso cade in acqua.

1. (a) scrivere la legge oraria $x(t)$ e $z(t)$ del sasso
   (b) calcolare l'energia cinetica del sasso e tracciare il suo andamento nel tempo;
   (c) calcolare l'energia potenziale del sasso e tracciare il suo andamento nel tempo;
   (d) mostrare che l'energia meccanica si conserva;
   (e) utilizzando la conservazione dell'energia calcolare l'altezza massima dal suolo;

2. Supponiamo ora di voler tener conto anche dell'effetto dell'attrito dell'aria, che può considerarsi come una forza viscosa $\vec{F}_{\text{aria}} = -\gamma\,\vec{v}$, dove $\gamma = 0.2\,\mathrm{Kg\,s^{-1}}$.
   (a) scrivere le equazioni del moto in presenza dell'attrito dell'aria
   (b) determinare la legge oraria $x(t)$ e $z(t)$ del sasso
   (c) calcolare l'energia cinetica del sasso e tracciare il suo andamento nel tempo;
   (d) calcolare l'energia potenziale del sasso e tracciare il suo andamento nel tempo;
   (e) mostrare l'andamento nel tempo dell'energia meccanica.



SOLUZIONE
Dati iniziali:

$$\begin{array}{rcl} h & = & 20\,\mathrm{m} \\ v_0 & = & |\vec{v}_0| = 12\,\mathrm{m/s} \\ \varphi & = & \pi/3 \end{array}$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani la cui origine è alla base della torre, con l'asse x diretto verso il mare e l'asse z è diretto verso l'alto. Scegliamo come origine dei tempi $t = 0$ l'istante in cui il sasso viene lanciato.

- Il vettore posizione iniziale
$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = x_0\,\hat{i} \, + \, z_0\,\hat{k} \tag{1}$$
ha componenti
$$\left\{ \begin{array}{l} x(t=0) = x_0 = 0 \\ z(t=0) = z_0 = h \end{array} \right. \tag{2}$$

- Il vettore velocità iniziale
$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} \, + \, v_{0z}\,\hat{k} \tag{3}$$
ha componenti
$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(t=0) = v_{0x} = v_0\cos\varphi \\ v_z(t=0) = v_{0z} = v_0\sin\varphi \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Iniziamo trascurando l'effetto dell'attrito dell'aria. L'unica forza che agisce sul sasso è pertanto la forza peso diretta lungo z verso il basso, $\vec{F} = -m\vec{g}\hat{k}$

   - La legge oraria $(x(t), z(t))$ si determina risolvendo le equazioni della dinamica
   $$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}}_{=-m\vec{g}\,\hat{k}} \tag{5}$$
   Scomponendo i vettori $\vec{a}$ e $\vec{F}$ nelle componenti x e z,
   $$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_z\hat{k} \qquad\qquad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_z\hat{k}$$
   e uguagliando componente per componente si ottengono
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} ma_x & = & F_x = 0 \\ ma_z & = & F_z = -mg \end{array} \right. \tag{6}$$
   ossia
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} m\dfrac{d^2x}{dt^2} & = & 0 \\ \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} & = & -mg \end{array} \right. \tag{7}$$

Dividendo per m

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases} \tag{8}$$

La prima equazione stabilisce che il moto lungo x ha accelerazione nulla, e la seconda che il moto lungo z ha accelerazione costante. Da quanto abbiamo visto nella cinematica, questo significa che il moto lungo x è un moto rettilineo uniforme, mentre quello lungo z è un moto uniformemente accelerato. Quindi intuitivamente ci aspettiamo che la legge oraria sia

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x}t = v_0 \cos\varphi\, t} \tag{9}$$

$$\boxed{z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - v_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2}gt^2} \tag{10}$$

Ora mostriamo che tale legge oraria non è altro che la soluzione delle equazioni fondamentale della dinamica. Infatti

– La prima equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{11}$$

si può riscrivere (ricordando che $v_x = \frac{dx}{dt}$) come

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{12}$$

ed implica che

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(t=0) = \\ &\quad [\text{uso la (4)}] \\ &= v_0 \cos\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

Integrando ora la (13) nel tempo abbiamo (dal teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t=0) + \int_0^t \frac{dx}{dt'}\, dt' = \\ &= x(t=0) + \int_0^t v_x(t')\, dt' = \\ &\quad [\text{uso la (2) e la (13)}] \\ &= x_0 + \int_0^t v_0 \cos\varphi\, dt' = \\ &= v_0 \cos\varphi\, t \end{aligned} \tag{14}$$

che è appunto la (9).

– La seconda equazione

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \tag{15}$$

si può riscrivere come

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \tag{16}$$

ed implica che (dal teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} v_z(t) &= v_z(t=0) + \int_0^t \frac{dv_z}{dt'}\, dt' = \\ & \quad [\text{uso la (4) e la (16)}] \\ &= v_0 \sin\varphi + \int_0^t (-g)\, dt' = \\ &= v_0 \sin\varphi - g\, t \end{aligned} \tag{17}$$

Integrando ora la (17) nel tempo abbiamo (dal teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t=0) + \int_0^t \frac{dz}{dt'}\, dt' = \\ &= z(t=0) + \int_0^t v_z(t')\, dt' = \\ & \quad [\text{uso la (2) e la (17)}] \\ &= h + \int_0^t (v_0 \sin\varphi - g\, t')\, dt' = \\ &= h + v_0 \sin\varphi t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{aligned} \tag{18}$$

che è appunto la (10)

- Calcoliamo ora l'energia cinetica. A tale scopo serve la velocità, che abbiamo già ricavato in (13) e (17), o che possiamo ottenere semplicemente derivando rispetto al tempo t la legge oraria

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\varphi\, t \\ z(t) = h + v_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{19}$$

In ogni caso si ottiene

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi \\ v_z(t) = \dfrac{dz}{dt} = v_0 \sin\varphi - g t \end{cases} \tag{20}$$

Dunque l'energia cinetica vale

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2(t) = \\ &= \frac{1}{2} m (v_x^2(t) + v_z^2(t)) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \sin\varphi - g t)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 \cos^2\varphi + v_0^2 \sin^2\varphi + g^2 t^2 - 2 v_0 \sin\varphi\, g t \right) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 \sin\varphi g t \right) = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m g^2 t^2 - m v_0 \sin\varphi\, g t \end{aligned} \tag{21}$$

Pertanto l'energia cinetica varia nel tempo come

$$\boxed{K(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0 \sin\varphi\, gt} \tag{22}$$

E' un andamento parabolico nel tempo, con una concavità verso l'alto, che ha un minimo all'istante dato dall'equazione

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \quad & mg^2t - mv_0 \sin\varphi\, g = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

ossia

$$t^* = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \tag{24}$$

All'istante iniziale $t = 0$ abbiamo invece

$$K(t = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{25}$$

- Calcoliamo ora l'energia potenziale

$$\begin{aligned} E_p &= mgz(t) = \\ &= mg\left(h + v_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \\ &= mgh + mgv_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2}mg^2t^2 \end{aligned} \tag{26}$$

Pertanto l'energia potenziale varia nel tempo come

$$\boxed{E_p(t) = mgh + mgv_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2}mg^2t^2} \tag{27}$$

E' un andamento parabolico nel tempo, con una concavità verso il basso, che ha un massimo all'istante dato dall'equazione

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \quad & mv_0 \sin\varphi\, g - mg^2t = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Semplificando mg si ottiene

$$t^* = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \tag{29}$$

che è lo stesso istante in cui l'enrgia cinetica K ha un minimo.
All'istante iniziale $t = 0$ abbiamo invece

$$E_p(t = 0) = mgz(t = 0) = mgh \tag{30}$$

- Calcoliamo ora l'energia meccanica

$$\begin{aligned} E_m &= K + E_p = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0 \sin\varphi\, gt + mgh + mgv_0 \sin\varphi\, t - \frac{1}{2}mg^2t^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \end{aligned} \tag{31}$$

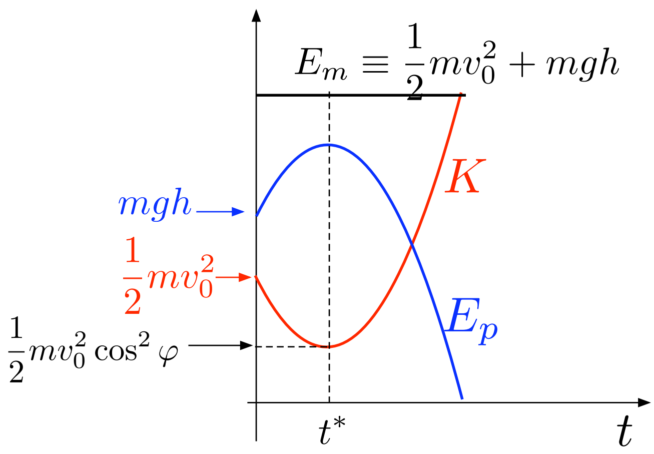


Figure 1: Andamento dell'energia cientic, potentiale e meccanica nel tempo

ossia

$$\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh} \qquad \text{(costante nel tempo)} \tag{32}$$

Osserviamo dunque che, mentre energia cinetica K e energia potenziale E_p dipendono dal tempo, la loro somma E_m (energia meccanica) è indipendente dal tempo, ossia si conserva (vedi Fig.1). Allo scorrere del tempo l'energia meccanica si ripartisce dunque in maniera diversa tra componente cinetica e componente potenziale, mantenendosi però sempre costante costante nel tempo, e pari all'energia meccanica all'istante iniziale $t = 0$. La conservazione dell'energia meccanica si può esprimere equivalentemente dicendo

$$E_m \text{ si conserva} \tag{33}$$
$$\Updownarrow$$
$$E_m \text{ è costante nel tempo} \tag{34}$$
$$\Updownarrow$$
$$\Delta E_m = 0 \qquad \text{(la variazione di } E_m \text{ è nulla)} \tag{35}$$

- Sfruttiamo ora la conservazione dell'energia meccanica per calcolare l'altezza massima raggiunta dal sasso. Tale altezza corrisponde al punto in cui la velocità verticale si annulla. Denotando con t^* tale istante, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} K(t^*) &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2(t^*) = \\ &= \frac{1}{2}m\,(\underbrace{v_x^2(t^*)}_{=v_0^2\cos^2\varphi} + \underbrace{v_z^2(t^*)}_{=0}) = \\ &\quad \text{[dove abbiamo sfruttato il fatto che la velocità lungo } x \text{ è costante]} \\ &= \frac{1}{2}m\,v_0^2\cos^2\varphi \end{aligned} \tag{36}$$

mentre, denotando con h_{max} tale altezza massima abbiamo

$$\begin{aligned} E_p(t^*) &= mgz(t^*) = \\ &= mgh_{max} \end{aligned} \tag{37}$$

Sfruttando la conservazione dell'energia abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = K(t^*) + E_p(t^*) = \frac{1}{2}m\,v_0^2\cos^2\varphi + mgh_{max} \tag{38}$$

da cui, semplificando m, si ottiene

$$\begin{aligned} h_{max} &= \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}\,v_0^2\cos^2\varphi + gh\right) = \\ &= \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2}v_0^2\sin^2\varphi + gh\right) = \\ &= h + \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g} \end{aligned} \tag{39}$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned} h_{max} &= 20\,\mathrm{m} + \frac{(12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2\sin^2\frac{\pi}{3}}{2\cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 20\,\mathrm{m} + \frac{144\cdot\frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{s}^2}}}{19.62\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}} = \\ &= 20\,\mathrm{m} + 5.5\mathrm{m} = \\ &= 25.5\mathrm{m} \end{aligned} \tag{40}$$

2. Consideriamo ora il caso in cui c'è anche la forza di attrito dell'aria.

   - La legge oraria $(x(t), z(t))$ si determina sempre risolvendo le equazioni della dinamica, dove ora entra però anche la forza di attrito dell'aria $\vec{F}_{aria} = -\gamma\vec{v}$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{aria} \tag{41}$$

Scomponendo i vettori nelle componenti x e z,

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_z\hat{k} \qquad\qquad \vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_z\hat{k}$$

e uguagliando componente per componente, l'equazione della dinamica si scrive

$$\left\{\begin{array}{lcl} ma_x &=& F_x = -\gamma v_x \\ ma_z &=& F_z = -mg - \gamma v_z \end{array}\right. \tag{42}$$

ossia

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\dfrac{d^2x}{dt^2} &=& -\gamma\dfrac{dx}{dt} \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} &=& -mg - \gamma\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right. \tag{43}$$

Dividendo per la massa:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2x}{dt^2} &=& -\dfrac{\gamma}{m}\dfrac{dx}{dt} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} &=& -g - \dfrac{\gamma}{m}\dfrac{dz}{dt} \end{array}\right. \tag{44}$$

- Ricavare la legge oraria $(x(t), z(t))$ significa trovare le funzioni che soddisfano le equazioni del moto (44)
  - La prima equazione delle (44)
  $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} \tag{45}$$
  si può anche scrivere come
  $$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v_x \tag{46}$$
  che ha la facile soluzione
  $$v_x(t) = v_{0_x}\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{47}$$
  Dove $v_{0_x} = v_x(t=0)$ rappresenta il valore della componente x della velocità iniziale. Ricordando la condizione iniziale (4) otteniamo
  $$\boxed{v_x(t) = v_0 \cos\varphi\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}} \tag{48}$$
  Integrando ora la (48) nel tempo
  $$\begin{aligned} x(t) &= x(t=0) + \int_0^t \frac{dx}{dt}\, dt' = \\ & \quad [\text{usiamo la condizione iniziale (2) abbiamo } x(t=0)=0] \\ &= \int_0^t v_x(t')\, dt' = \\ &= \int_0^t v_0\cos\varphi\, e^{-\frac{\gamma}{m}t'}\, dt' = \\ &= -v_0\cos\varphi\frac{m}{\gamma}\left[e^{-\frac{\gamma}{m}t'}\right]_0^t dt' = \\ &= \frac{mv_0\cos\varphi}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \end{aligned} \tag{49}$$
  e dunque
  $$\boxed{x(t) = \frac{mv_0\cos\varphi}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)} \tag{50}$$
  - La seconda equazione delle (44)
  $$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{\gamma}{m}\frac{dz}{dt} \tag{51}$$
  possiamo riscriverla come
  $$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\gamma}{m}(v_z + \frac{mg}{\gamma}) \tag{52}$$
  Siccome $\frac{g}{\gamma}$ è costante possiamo anche scrivere
  $$\frac{d(v_z + \frac{mg}{\gamma})}{dt} = -\frac{\gamma}{m}(v_z + \frac{mg}{\gamma}) \tag{53}$$
  Pertanto, per la funzione $v_z(t) + \frac{mg}{\gamma}$ obbedisce alla stessa equazione (46) trovata per $v_x(t)$. La soluzione è dunque
  $$v_z(t) + \frac{mg}{\gamma} = (v_z(0) + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} \tag{54}$$

Ricordando le condizioni iniziali (4) per la velocità e portando a membro destro il secondo addendo del memebro sinistro otteniamo

$$\boxed{v_z(t) = (v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma}} \tag{55}$$

Integrando ora la (55) nel tempo otteniamo

$$\begin{aligned}
z(t) &= z(t=0) + \int_0^t \frac{dz}{dt'}\, dt' = \\
&\quad \text{[uso la condizione iniziale (2) e inserisco la (55)]} \\
&= h + \int_0^t \left[(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t'} - \frac{mg}{\gamma} \right] dt' = \\
&= h + \left\{ -\frac{m}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma}) \left[e^{-\frac{\gamma}{m}t'} \right]_0^t - \frac{mg}{\gamma} t \right\} = \\
&= h + \left\{ \frac{m}{\gamma} \left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma} \right) \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) - \frac{mg}{\gamma} t \right\}
\end{aligned} \tag{56}$$

e dunque la legge oraria lungo z vale

$$\boxed{z(t) = h - \left\{ \frac{mg}{\gamma} t + \frac{m}{\gamma} \left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma} \right) \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1 \right) \right\}} \tag{57}$$

- Sfruttando la legge oraria (48) e (55) possiamo ora calcolare l'energia cinetica Dunque l'energia cinetica vale

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2(t) = \\
&= \frac{1}{2} m (v_x^2(t) + v_z^2(t)) = \\
&= \frac{1}{2} m \left[v_0^2 \cos^2\varphi\, e^{-\frac{2\gamma}{m}t} + \left((v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{mg}{\gamma} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} m \left[v_0^2 \cos^2\varphi\, e^{-\frac{2\gamma}{m}t} + (v_0^2 \sin^2\varphi + \frac{m^2 g^2}{\gamma^2} + 2 v_0 \sin\varphi \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{2\gamma}{m}t} + \frac{m^2 g^2}{\gamma^2} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{2mg}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right] = \\
&= \frac{1}{2} m \left[\left(v_0^2 + \frac{m^2 g^2}{\gamma^2} + 2 v_0 \sin\varphi \frac{mg}{\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - \frac{2mg}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m^2 g^2}{\gamma^2} \right] \\
&= \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m^3 g^2}{\gamma^2} + v_0 \sin\varphi \frac{m^2 g}{\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - \frac{m^2 g}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m^3 g^2}{2\gamma^2}
\end{aligned}$$

Pertanto l'energia cinetica varia nel tempo come

$$\boxed{K(t) = \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m^3 g^2}{\gamma^2} + v_0 \sin\varphi \frac{m^2 g}{\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - \frac{m^2 g}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m^3 g^2}{2\gamma^2}} \tag{58}$$

- Sfruttando la legge oraria (57) possiamo calcolare l'energia potenziale

$$\begin{aligned}
E_p &= mgz(t) = \\
&= mg \left\{ h - \left[\frac{mg}{\gamma} t + \frac{m}{\gamma} \left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma} \right) \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1 \right) \right] \right\} = \\
&= mgh - \frac{m^2 g^2}{\gamma} t - \frac{m^2 g}{\gamma} \left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma} \right) \left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1 \right)
\end{aligned}$$

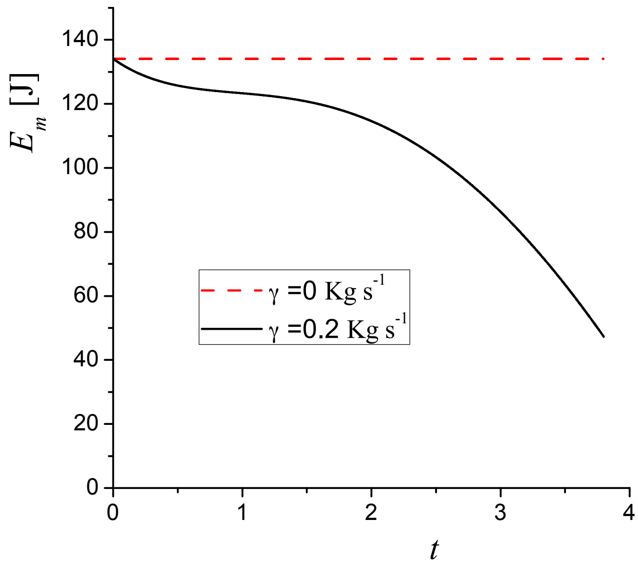


Figure 2: Andamento dell'energia meccanica nel tempo in presenza della forza di attrito dell'aria ($\gamma \neq 0$, curva solida nera); per confronto viene mostrato anche il caso $\gamma = 0$ senza attrito dell'aria (curva tratteggiata rossa). A causa dell'attrito dell'aria l'energia meccanica *non* si conserva.

e dunque

$$\boxed{E_p(t) = mgh - \frac{m^2g^2}{\gamma}t - \frac{m^2g}{\gamma}\left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma}\right)\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right)} \tag{59}$$

- L'energia meccanica si ottiene sommando (58) e (59)

$$\begin{aligned} E_m &= K(t) + E_p(t) = \\ &= \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{m^3g^2}{\gamma^2} + v_0 \sin\varphi \frac{m^2g}{\gamma}\right) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - \frac{m^2g}{\gamma}(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma})\, e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m^3g^2}{2\gamma^2} + \\ &\quad + mgh - \frac{m^2g^2}{\gamma}t - \frac{m^2g}{\gamma}\left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma}\right)\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{m^3g^2}{\gamma^2} + v_0 \sin\varphi \frac{m^2g}{\gamma}\right) e^{-\frac{2\gamma}{m}t} - \frac{m^2g}{\gamma}\left(v_0 \sin\varphi + \frac{mg}{\gamma}\right)\left(2e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right) + \\ &\quad + mgh - \frac{m^2g^2}{\gamma}t + \frac{m^3g^2}{2\gamma^2} \end{aligned} \tag{60}$$

e viene mostrata in Fig.2.