Esame di Ricerca Operativa del 09/06/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \le 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \le 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \le -3 \\ x_1 + x_2 \le -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \le 7 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{4, 5\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce due tipi di farinaccio per alimentazione animale (A-B), che si vendono a 38 e 41 euro al quintale rispettivamente, in due reparti (1-2). Di farinaccio di tipo A bisogna produrne tra il 50 ed il 70 per cento del totale. Nella seguente tabella sono indicati i tempi di lavorazione dei farinacci (in ore) , le capacità produttive (in ore) dei reparti ed il costo orario.

	A	B	Capacità	Costo
1	0.19	0.23	90	2.82
2	0.21	0.18	85	3.18

Si cerca la pianificazione della produzione che massimizzi il profitto.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB (DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

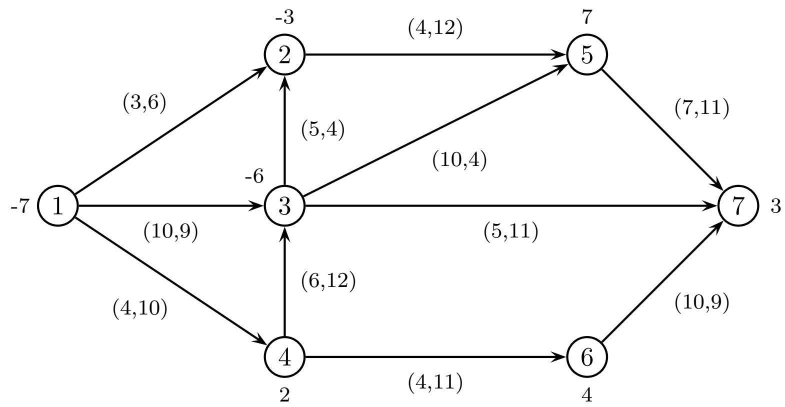
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

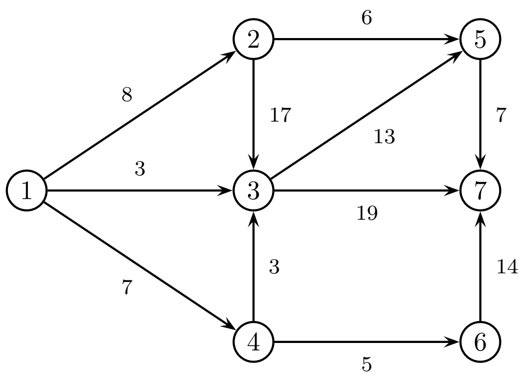


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

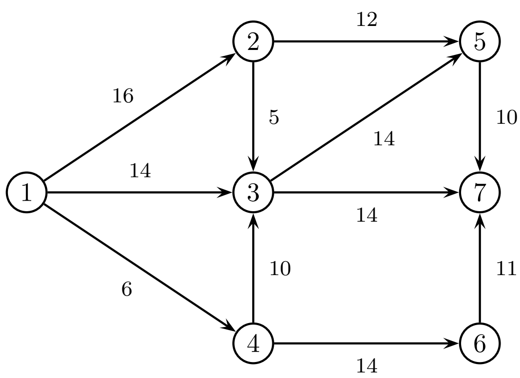
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 12\ x_2 \leq 53 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	87	61	41
2		24	53	55
3			8	9
4				12

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 25 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
	$\left(\frac{3}{2}, -18\right)$						
	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$						
	$\left(\frac{3}{10}, 0\right)$						
	$(0, -3))$						

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -1)$, $(-3, 2)$, $(-4, 4)$ e $(-1, 5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, \frac{14}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (-6,\ -3)$	SI	NO
$\{4, 5\}$	$y = \left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{4}{3},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4, 5\}$	$(-3,\ 2)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{4}{3},\ 0\right)$	4	$15,\ 3$	2
2° iterazione	$\{2, 5\}$	$(-5,\ 1)$	$\left(0,\ \frac{13}{7},\ 0,\ 0,\ -\frac{31}{7},\ 0\right)$	5	$7,\ \frac{98}{5}$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

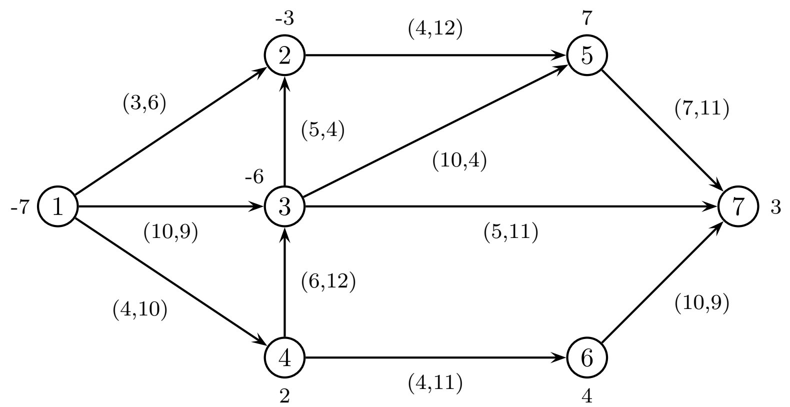
```
c=[-37.46; -40.35;-37.33;-40.43]

A=[0.19 0.23 0 0;0 0 0.21 0.18;-0.5 0.5 -0.5 0.5;0.3 -0.7 0.3 -0.7]        b=[90;85;0;0]

Aeq=[ ]                                                                      beq=[ ]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                            ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

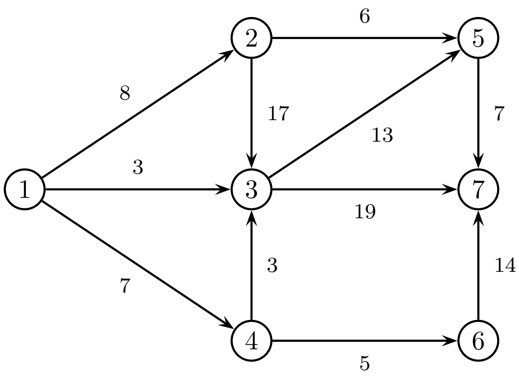


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

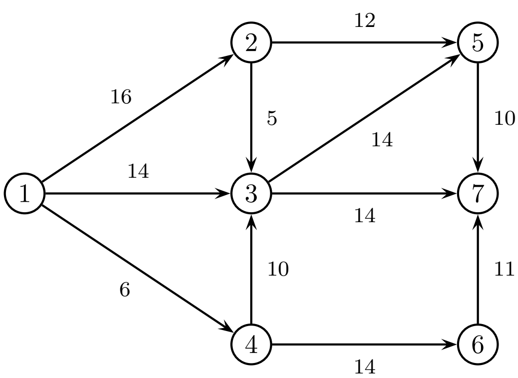
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1)	(0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 3, 13, 4, 7, 8, 18)	(0, 3, 10, 4, 7, 8, 15)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	6 , 1
Arco uscente	(6,7)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		4		2		6		5		7	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 4	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 5	$+\infty$	-1	16	3	16	3	14	2	14	2	14	2	14	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 7	$+\infty$	-1	22	3	22	3	22	3	22	3	21	5	21	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	14	(0, 14, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0, 0, 0)	14
1 - 2 - 5 - 7	10	(10, 14, 0, 0, 10, 0, 14, 0, 0, 10, 0)	24
1 - 4 - 6 - 7	6	(10, 14, 6, 0, 10, 0, 14, 0, 6, 10, 6)	30

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 12\ x_2 \leq 53 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{53}{18}, 0\right)$ $v_S(P) = 32$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 0)$ $v_I(P) = 22$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 2$
$r = 4$ $7\,x_1 + 4\,x_2 \leq 20$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	87	61	41
2		24	53	55
3			8	9
4				12

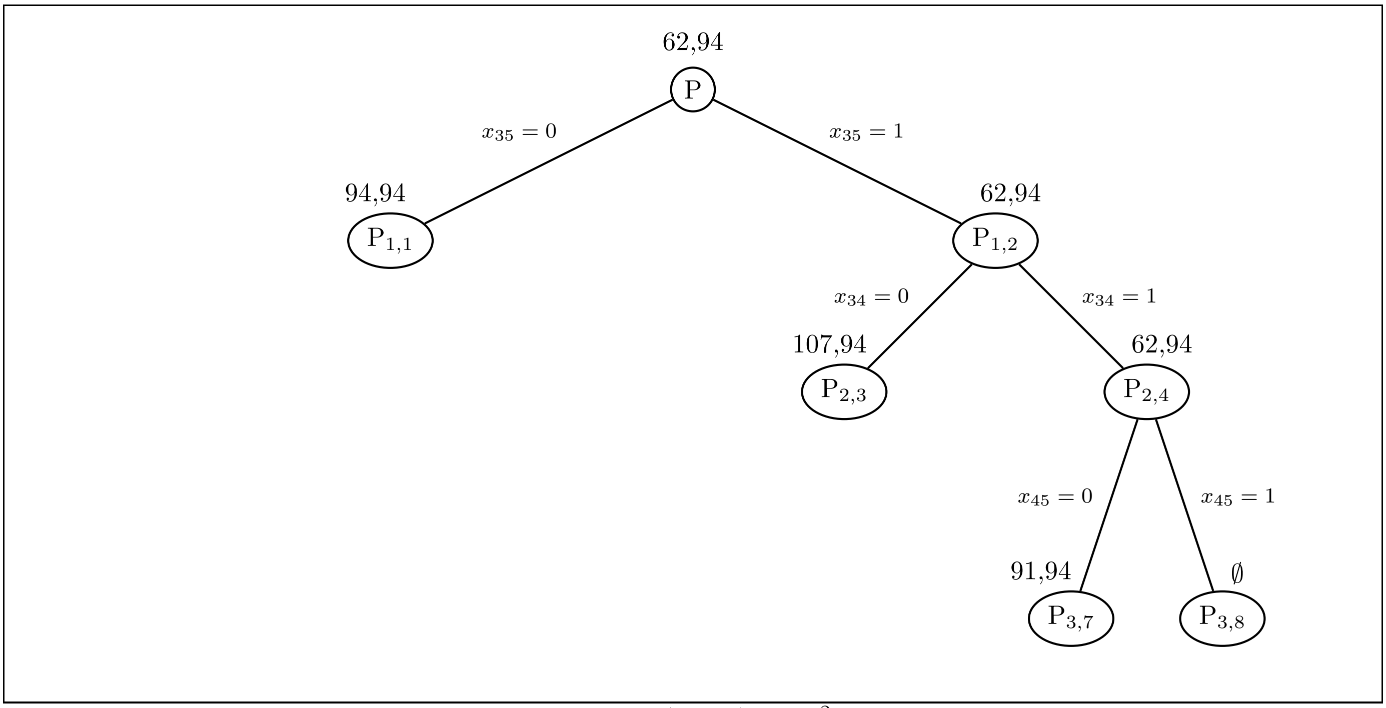
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 62$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $v_S(P) = 94$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 25 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(5,\ 9)$	$\left(\frac{3}{2}, -18\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-5,\ -1)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(-5,\ 0)$	$\left(\frac{3}{10}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$	$(0, -3)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 + 4\, x_1 - 6\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4, -1)$, $(-3, 2)$, $(-4, 4)$ e $(-1, 5)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, \frac{14}{3}\right)$	$(-1, 3)$	$\begin{pmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$	$\left(-13, -\frac{13}{3}\right)$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$(-4, 4)$