

# Ricerca Operativa

Massimo Pappalardo  
Dipartimento di Informatica  
Largo B. Pontecorvo 3, Pisa  
massimo.pappalardo@unipi.it

Laurea in Ingegneria Informatica  
Universita' di Pisa  
A.A. 2020/'21

## Riferimenti

Massimo Pappalardo

Dipartimento di Informatica

Largo B. Pontecorvo 3- Pisa

Edificio C - studio 289DE

tel. 050 2212750

e-mail: massimo.pappalardo@unipi.it

ricevimento:

### Orario del corso

- lunedì' 8.30-12.30
- martedì' 8.30-10.30
- mercoledì' 8.30-10.30
- venerdì' 8.30-10.30

# Materiale per il corso

## Pagina teams del corso

## Testi

- M.Pappalardo, M.Passacantando, Ricerca Operativa, Edizioni Plus, 2010.
- F.S.Hillier, G.J.Lieberman, Ricerca Operativa, McGraw Hill, 2010.

## Esame

Prova orale con risoluzione di problemi.

- Operazioni tra matrici: somma, moltiplicazione e prodotto per uno scalare.
- Matrice Inversa.
- Sistemi lineari.
- Autovalori di una matrice.
- Derivate parziali, derivate direzionali, gradiente, matrice hessiana.
- Insiemi del piano definiti da curve di livello.

## Obiettivo e argomenti del corso

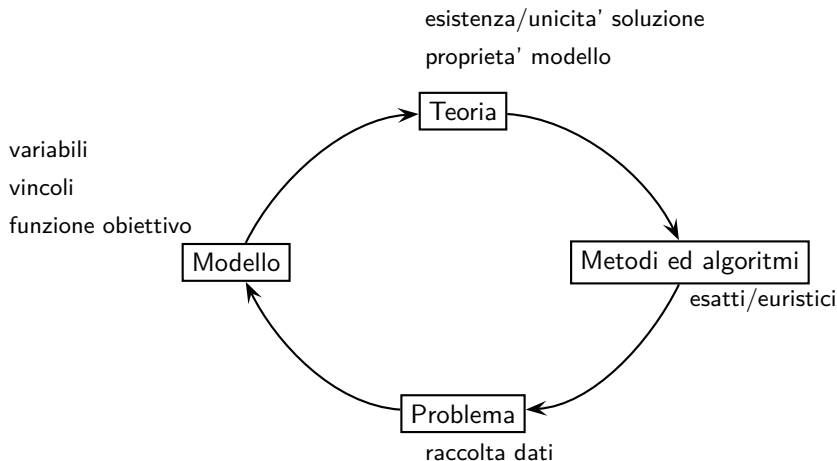
### Obiettivo

Fornire conoscenze e metodi per la formulazione e risoluzione di problemi di ottimizzazione.

### Argomenti

- Modelli matematici canonici di ottimizzazione per processi decisionali.
- Modelli matematici per la risoluzione di alcuni problemi di ottimizzazione: produzione, assegnamento, trasporto ottimo, localizzazione, caricamento, "bin packing", commesso viaggiatore, portafoglio.
- Elementi di teoria e metodi di Programmazione Matematica: Lineare (PL), Lineare Intera (PLI), Lineare su Reti e Non Lineare (PNL).
- MATLAB per la risoluzione di problemi di ottimizzazione.

## Il processo decisionale



# Modelli matematici di problemi decisionali

- Raccolta dati.
- Variabili decisionali, funzione obiettivo, vincoli.
- Costruzione del modello matematico.
- Teoria, metodi e algoritmi per la risoluzione del modello matematico.
- Software per la soluzione.
- Controllo della soluzione.

## Un esempio: il problema del contadino

Un contadino ha 12 ettari di terra per coltivare pomodori e/o patate.

Ha anche 70 kg di semi di pomodoro, 18 t di tuberi e 160 t di letame.

Il guadagno per ettaro e' 3000 euro per i pomodori e 5000 euro per le patate.

I pomodori necessitano di 7 kg di semi e 10 t di letame per ettaro, mentre le patate richiedono 3 t di tuberi e 20 t di letame per ettaro.

Per massimizzare il guadagno come dividere la terra tra pomodori e patate?



### Dati

- 12 ettari di terra.
- 160 t di letame, 70 Kg di semi, 18 t di tuberi.

	profitto/ett.	semi/ett.	letame/ett.	tuberi/ett.
• pomodori	3000	7 kg	10 t	
patate	5000		20 t	3 t

- Come decidere?  
Quanti ettari devono essere assegnati ai pomodori e quanti alle patate.
- Quale é il nostro **obiettivo**? Massimizzare il guadagno.
- Quali sono le **richieste** per avere una soluzione ammissibile?  
Limiti sulle risorse disponibili.

**Cosa si deve decidere? → variabili decisionali**

- $x_T$  = ettari di pomodori
- $x_P$  = ettari di patate

**Massimizzare il guadagno → funzione obiettivo**

$$\text{Guadagno} = 3000x_T + 5000x_P$$

$$\text{Massimizzare il guadagno} \rightarrow \max 3x_T + 5x_P$$

### Richieste e disponibilità di risorse → vincoli

- Disponibilità di terreno:  $x_T + x_P \leq 12$
- Semi di pomodoro disponibili:  $7x_T \leq 70 \rightarrow x_T \leq 10$
- Tuberi di patate disponibili:  $3x_P \leq 18 \rightarrow x_P \leq 6$
- Letame disponibile:  $10x_T + 20x_P \leq 160 \rightarrow x_T + 2x_P \leq 16$
- Variabili non negative:  $x_T \geq 0, x_P \geq 0$

## Forma matriciale

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_T + 5x_P \\ & x_T + x_P \leq 12 \\ & x_T \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_T + 2x_P \leq 16 \\ & -x_T \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$m$  = numero di vincoli

$n$  = numero di variabili

$A$  matrice  $m \times n$

$b$  vettore  $m$  componenti

$c$  vettore  $n$  componenti

## Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max 3x_T + 5x_P$$

$$x_T + x_P \leq 12$$

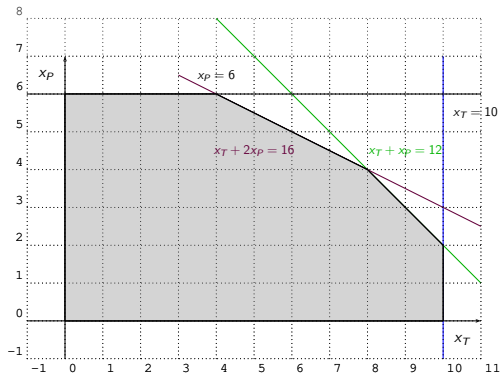
$$x_T \leq 10$$

$$x_P \leq 6$$

$$x_T + 2x_P \leq 16$$

$$-x_T \leq 0$$

$$-x_P \leq 0$$



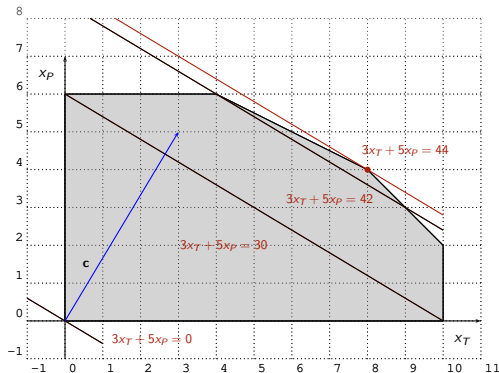
## Soluzione grafica della PL per n=2

Le linee di isocosto o isoguardagno sono

$$L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$$

dove  $v \in \mathbb{R}$  é un numero reale.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_T + 5x_P \\ & x_T + x_P \leq 12 \\ & x_T \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_T + 2x_P \leq 16 \\ & -x_T \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Soluzione ottima  $x_T = 8, x_P = 4$

## PL e la sua forma standard

### Definizione

Un problema di Programmazione Lineare (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare soggetta ad un insieme finito di vincoli lineari di disuguaglianza o di uguaglianza:

$$\begin{cases} \max(\min) c^T x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

### Definizione

Un problema nella forma

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

è detto problema di PL in formato primale standard.

## PL e formato primale standard

### Osservazione

Ogni problema di PL puo' essere equivalentemente scritto in formato primale standard.

**Dimostrazione.**  $\min c^T x = -\max (-c^T x)$

$a^T x \geq b$  e' equivalente a  $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$  e' equivalente a  $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$ .

### Definizione

Un poliedro  $P$  e' l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi o, equivalentemente, l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ .



### Definizione

Un punto  $x$  di un poliedro  $P$  è un **vertice** se non esistono due punti di  $P$  differenti da  $x$  tali che  $x$  appartenga al segmento generato da essi.

### Esempi.

Vertici di  $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4, \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}$  sono  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(4, 1)$  e  $(4, 3)$ .

Vertici di  $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 3\}$  sono  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$ .

$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \leq 1\}$  non ha vertici.

## Teorema fondamentale della PL

Consideriamo un problema di PL in forma primale standard:

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ x \in P = & \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

### Teorema fondamentale della PL

Se  $P$  è limitato e non vuoto, allora un vertice di  $P$  è ottimo.

**Esempio.** Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max & -2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \geq & 1 \\ x_2 \geq & 1 \\ x_1 + x_2 \geq & 3 \end{cases}$$

La soluzione ottima è  $(2, 1)$ .

## Scarti complementari

Come riconoscere una soluzione ottima?

### Teorema

Una soluzione  $\bar{x}$  e' ottima se e solo se esiste  $\bar{y} \in \mathbb{R}_+^m$  tale che

$$\begin{cases} \bar{y}^T A = c^T \\ \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \quad (\text{scarti complementari}) \end{cases}$$

**Esempio.** Consideriamo il problema di PL

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = (1, 1)$  e' ottima perche'  $\bar{y} = (2/3, 5/3, 0, 0)$  risolve il sistema.

$\bar{x} = (0, 0)$  non e' ottima perche' il sistema non ha soluzione.

## Caratterizzazione algebrica dei vertici

Sappiamo che se  $P \neq \emptyset$  e limitato, allora un vertice di  $P$  e' ottimo.

Come **trovare** un vertice ottimo? Servono proprieta' **algebriche** dei vertici

Consideriamo un problema

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

### Definizione

Una **base** e' un insieme  $B$  di  $n$  indici di riga tali che  $\det(A_B) \neq 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}$$

Data una base  $B$ , il vettore  $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$  e' detto **soluzione di base primale**.

$\bar{x}$  e' **ammissibile** se  $A_N \bar{x} \leq b_N$ .

## Caratterizzazione algebrica dei vertici

**Esempio.** Consideriamo

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ x_1 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 & \leq 3 \\ -x_1 & \leq 0 \\ -x_2 & \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2\}$  e' una base perche'  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e' invertibile.

La soluzione corrispondente e'  $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\bar{x}$  e' ammissibile perche'  $A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$ .

## Caratterizzazione algebrica dei vertici

$B = \{1, 3\}$  non e' una base perche'  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  non e' invertibile.

$B = \{2, 4\}$  e' una base e la corrispondente soluzione di base e' inammissibile:

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N.$$

## Soluzioni ottime

Perche' le soluzioni di base sono importanti?

### Teorema

$\bar{x}$  e' un vertice di  $P$  se e solo se  $\bar{x}$  e' una soluzione di base ammissibile.

**Esempio.** Consideriamo il precedente problema

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = (2, 1)$  e' una soluzione di base ammissibile corrispondente alla base  $B = \{1, 2\}$ .

Al problema primale in forma standard

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ x \in P = & \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

associamo il seguente problema di PL:

$$\begin{cases} \min & y^T b \\ y \in D = & \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, \quad y \geq 0\} \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

che sara' chiamato problema duale in forma standard.

Il valore ottimo del problema  $(\mathcal{D})$  verra' indicato con  $v(\mathcal{D})$ .

Poiche' ogni problema di PL si puo' trasformare in un problema primale standard di tipo  $(\mathcal{P})$ , allora ogni problema di PL ha un suo problema duale.



### Osservazione

Ogni problema di PL si può trasformare in un duale standard.

**Dimostrazione.** Una disuguaglianza

$$A_i^T x \leq b_i$$

si può trasformare nell'uguaglianza

$$A_i^T x + s_i = b_i,$$

aggiungendo i vincoli  $s_i \geq 0$ , dove le  $s_i$  sono dette variabili di scarto.

## Duale standard

Ogni numero reale  $e'$  la differenza di due numeri non negativi quindi si può sempre introdurre il vincolo di positività sulle variabili spezzando ogni variabile non vincolata in segno nella differenza di due variabili vincolate in segno e porre

$$x = x^+ - x^- \quad \text{con} \quad x^+ \geq 0, \quad \text{e} \quad x^- \geq 0.$$

### Teorema

(*Dualità forte*) Se i poliedri  $P$  e  $D$  sono non vuoti, allora

$$-\infty < v(P) = v(D) < +\infty$$

## Soluzioni di base duali

Data una base  $B$ , definiamo:

**Soluzione di base duale:**  $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$  dove  $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}$ ,  $\bar{y}_N = 0$ .

Una soluzione di base duale puo' essere:

	$\bar{y}$
ammissibile	per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \geq 0$
non ammissibile	esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i < 0$
degenere	esiste $i \in B$ tale che $\bar{y}_i = 0$
non degenere	per ogni $i \in B$ si ha $\bar{y}_i \neq 0$

## Teorema

Due soluzioni di base complementari  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono in scarti complementari.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\bar{y}^T(b - A\bar{x}) &= (\bar{y}_B^T, \bar{y}_N^T) \begin{pmatrix} b_B - A_B \bar{x} \\ b_N - A_N \bar{x} \end{pmatrix} \\ &= (c^T A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} b_B - A_B A_B^{-1} b_B \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix} \\ &= (c^T A_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ b_N - A_N A_B^{-1} b_B \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

Dal teorema precedente e dal teorema degli scarti complementari possiamo dedurre le seguenti condizioni sufficienti di ottimalita'.

### **Teorema**(*Condizioni sufficienti di ottimalita' per soluzioni di base*)

Date due soluzioni di base complementari  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , si ha:

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{x} \text{ e' ammissibile per } (\mathcal{P}) \\ \text{e} \\ \bar{y} \text{ e' ammissibile } (\mathcal{D}) \end{array} \right] \implies \left[ \begin{array}{c} \bar{x} \text{ e' ottima per } (\mathcal{P}) \\ \text{e} \\ \bar{y} \text{ e' ottima } (\mathcal{D}) \end{array} \right]$$

## Algoritmo del simplesso

- 1 Trova una base  $B$  tale che la corrispondente soluzione di base  $\bar{x} := A_B^{-1} b_B$  sia ammissibile.
- 2 Calcola

$$\bar{y} := \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

- 3 se  $\bar{y}_B \geq 0$  allora STOP ( $\bar{x}$  e' ottima) altrimenti trova l'indice uscente

$$h := \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$$

poniamo  $W := -A_B^{-1}$ , denotiamo  $W^h$  la  $h$ -ma colonna di  $W$ .

- 4 se  $A_i W^h \leq 0$  per tutti gli indici  $i \in N$  allora STOP (ottimo di  $(\mathcal{P})$  e'  $+\infty$ )

altrimenti calcola  $\vartheta := \min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} : i \in N, A_i W^h > 0 \right\},$

trova l'indice entrante

$$k := \min \left\{ i \in N : A_i W^h > 0, \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h} = \vartheta \right\},$$

aggiorna la base  $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$ , vai al passo 2.

# Algoritmo del simplesso

## Teorema

L'algoritmo del simplesso si ferma dopo un numero finito di iterazioni.

## Algoritmo del simplesso

**Esempio.** Partendo dalla base  $B = \{3, 4\}$ , risolviamo il problema:

$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Iterazione 1.**  $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e' ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2, -1)$ ,  $h = 3$ ,  $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $A_1 W^3 = 1$ ,  $A_2 W^3 = 1$ ,  
 $\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$ ,  $k = 1$ .

**Iterazione 2.**  $B = \{1, 4\}$ ,  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$\bar{y}_B^T = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2, -1)$ ,  $h = 4$ ,  $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $A_2 W^4 = 1$ ,  $A_3 W^4 = 0$ ,  $k = 2$ .

**Iterazione 3.**  $B = \{1, 2\}$ ,  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{y}_B^T = (1, 1) \geq 0$  stop  $\bar{x}$  e' ottima.



## Simpleso duale

Descriviamo l'algoritmo del simpleso duale per risolvere un problema in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

L'algoritmo e' analogo al simpleso primale con la differenza che ad ogni passo si mantiene ammissibile la soluzione di base duale e si controlla l'ammissibilita' di quella primale.

Se la soluzione di base primale e' ammissibile, allora abbiamo trovato una coppia primale/duale di soluzioni ottime.

Il cambio di base e' definito in modo che, se la nuova soluzione di base duale e' diversa da quella vecchia, il valore della funzione obiettivo diminuisce.

## ALGORITMO DEL SIMPLESSO DUALE

- 1 Trova una base  $B$  che genera una soluzione di base duale ammissibile.
- 2 Calcola la soluzione di base primale  $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$  e la soluzione di base duale

$$\bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N), \quad \text{con} \quad \bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1}, \quad \bar{y}_N = 0.$$

- 3 Se  $b_N - A_N \bar{x} \geq 0$  allora STOP ( $\bar{y}$  e' ottima per  $(\mathcal{D})$  e  $\bar{x}$  e' ottima per  $(\mathcal{P})$ ).  
altrimenti calcola l'indice entrante

$$k = \min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland})$$

poni  $W = -A_B^{-1}$  ed indica con  $W^i$  la  $i$ -esima colonna di  $W$ .

- 4 Se  $A_k W^i \geq 0$  per ogni  $i \in B$  allora STOP ( $(\mathcal{D})$  ha valore  $-\infty$ ).  
altrimenti calcola

$$\vartheta = \min \left\{ \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} : i \in B, A_k W^i < 0 \right\},$$

calcola l'indice uscente

$$h = \min \left\{ i \in B : A_k W^i < 0, \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} = \vartheta \right\} \quad (\text{regola anticiclo di Bland}),$$

aggiorna la base  $B := B \setminus \{h\} \cup \{k\}$  e torna al passo 2.

## Algoritmo del simplesso duale

### Teorema

Il simplesso duale risolve  $(\mathcal{D})$  in un numero finito di iterazioni.

Illustriamo ora una risoluzione di un problema di PL applicando il simplesso duale.

**Esempio.** Risolviamo il seguente problema

$$\begin{cases} \min & 13y_3 + 9y_4 + 7y_5 \\ & -y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\ & -y_2 + 2y_3 + y_4 = -4 \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

con il simplesso duale partendo dalla base  $B = \{2, 3\}$ .

## Iterazione 1.

La matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la soluzione di base duale e'

$$\bar{y}_B^T = (3, -4)A_B^{-1} = (10, 3), \quad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^T,$$

e quella primale e'  $\bar{x} = (13, 0)^T$  che non e' ammissibile perche'

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 13, \quad b_4 - A_4 \bar{x} = -4, \quad b_5 - A_5 \bar{x} = -6,$$

quindi l'indice che entra in base e' 4. Calcoliamo i prodotti

$$A_4 W^2 = -1, \quad A_4 W^3 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4 W^2} = 10, \quad \frac{\bar{y}_3}{-A_4 W^3} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base e' 3.

## Iterazione 2.

La nuova base e'  $B = \{2, 4\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale e'

$$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)^T,$$

e quella primale e'  $\bar{x} = (9, 0)^T$  che non e' ammissibile perche'

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 9, \quad b_3 - A_3 \bar{x} = 4, \quad b_5 - A_5 \bar{x} = -2,$$

quindi l'indice che entra in base e' 5. Calcoliamo i prodotti

$$A_5 W^2 = -1, \quad A_5 W^4 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_5 W^2} = 7, \quad \frac{\bar{y}_4}{-A_5 W^4} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base e' 4.

### Iterazione 3.

La nuova base è  $B = \{2, 5\}$ , la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale è

$$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)^T,$$

e quella primale è  $\bar{x} = (7, 0)^T$  che è ammissibile perché

$$b_1 - A_1 \bar{x} = 7, \quad b_3 - A_3 \bar{x} = 6, \quad b_4 - A_4 \bar{x} = 2,$$

quindi  $(0, 4, 0, 0, 3)$  è la soluzione ottima del problema.

## Problema ausiliario duale

Consideriamo il problema in forma duale standard:

$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D})$$

Senza ledere la generalita' della trattazione possiamo supporre che  $c \geq 0$ , cambiando eventualmente segno alle equazioni.

Per trovare una base ammissibile di  $(\mathcal{D})$  che sia la base di partenza del simplesso duale si costruisce il problema ausiliario duale:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \epsilon_i \\ y^T A + \epsilon^T = c^T \\ y \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{aux})$$

La base formata dagli indici relativi alle variabili ausiliarie  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ , con la matrice identità come matrice di base, è una base ammissibile per il problema ausiliario, infatti la corrispondente soluzione di base è  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{\epsilon} = c \geq 0$ .

A partire da tale base ammissibile, possiamo applicare il semplice duale per risolvere il problema ausiliario.

Il valore ottimo del problema ausiliario stabilisce se esiste una base ammissibile per il problema  $(\mathcal{D})$ .

### Teorema

- 1 Se il valore ottimo di  $(\mathcal{D}_{aux})$  è  $> 0$  allora  $(\mathcal{D})$  non ha soluzioni ammissibili.
- 2 Se il valore ottimo di  $(\mathcal{D}_{aux})$  è  $= 0$  allora c'è una base ammissibile per  $(\mathcal{D})$  che si costruisce a partire da una base ottima per  $(\mathcal{D}_{aux})$ .



## 1. Problema di produzione

**DATI:** Un'azienda deve produrre due tipi di tessuto.

Per produrre un quintale del primo tessuto servono 28 kg di lana e 7 kg di cotone.

Per il secondo tipo servono 7 kg di lana e 14 kg di cotone.

Per produrre i tessuti servono 3 ore di lavoro di un operaio specializzato per ogni quintale da produrre.

Ogni settimana sono disponibili 168 kg di lana, 84 kg di cotone e 42 ore di lavoro.

Siano 20 e 10 euro i guadagni (per quintale) per il tessuto 1 e per il tessuto 2.

**VARIABILI:** Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  i quintali prodotti del primo e del secondo tessuto.

## Problema di produzione

$$\begin{cases} \max 20x_1 + 10x_2 \\ 28x_1 + 7x_2 \leq 168 \\ 7x_1 + 14x_2 \leq 84 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima é:  $(36/7, 24/7)$  per un guadagno di 137,14 euro.

Qualora il bene da produrre fosse stato un vestito anziché un chilogrammo di tessuto, la soluzione trovata non era ammissibile e si sarebbe dovuto aggiungere il vincolo di interezza.

In tal caso la soluzione ottima sarebbe stata  $(5,3)$  con un guadagno di 130 euro.

## Problema di produzione

Supponiamo che si debbano produrre  $n$  oggetti, ognuno composto da  $m$  diverse materie prime.

Sia data una matrice di composizione  $A$ . In tale matrice l'elemento  $a_{ij}$  rappresenta la quantita' di materia prima  $i$  che serve per produrre l'oggetto  $j$ .

Sia dato il guadagno  $c_j$  ottenuto vendendo l'oggetto  $j$  e la disponibilita'  $b_i$  della materia prima  $i$ .

Introducendo le variabili  $x_j$ , che rappresentano le quantita' prodotta dell'oggetto  $j$ , il problema viene formulato nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & \text{per ogni } i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \text{per ogni } j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

## 2. Problema di assegnamento

- Date  $n$  persone e  $n$  lavori.
- Ogni lavoro deve essere fatto da *esattamente una* persona.
- Ogni persona può fare *al più* un lavoro.
- Il *costo* della persona  $j = 1, \dots, n$  che fa il lavoro  $i = 1, \dots, n$  è  $c_{ij}$ .
- Vogliamo trovare un *assegnamento di costo minimo*.
- Possiamo associare una variabile 0-1  $x_{ij}$  ad ogni possibile assegnamento (vale 1 se lavoro  $i$  assegnato alla persona  $j$ , 0 altrimenti).

## Problema di assegnamento

Assegnamento non cooperativo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Assegnamento cooperativo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ & x_{ij} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

## Problema di assegnamento

Un assegnamento non cooperativo é una permutazione.

Un problema di assegnamento non cooperativo é un problema di PLI.

Un problema di assegnamento cooperativo é un problema di PL.

### **Teorema**

I vertici del poliedro dell'assegnamento cooperativo hanno componenti intere.

Quindi anche il problema dell'assegnamento non cooperativo é un problema di PL.

## Problema di assegnamento generalizzato

Ogni persona  $j = 1, \dots, n$  ha una capacità  $b_j$  (per esempio ore di lavoro).

Ogni lavoro  $i = 1, \dots, m$  assegnato alla persona  $j$  usa  $w_{ij}$  della capacità  $b_j$ .

Ogni lavoro deve essere assegnato ad una persona e ogni persona non può superare la propria capacità.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \\ & \sum_{i=1}^m w_{ij} x_{ij} \leq b_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$