PRESTAZIONI DEI SISTEMI DI COMUNICAZIONE NUMERICI IN BANDA BASE

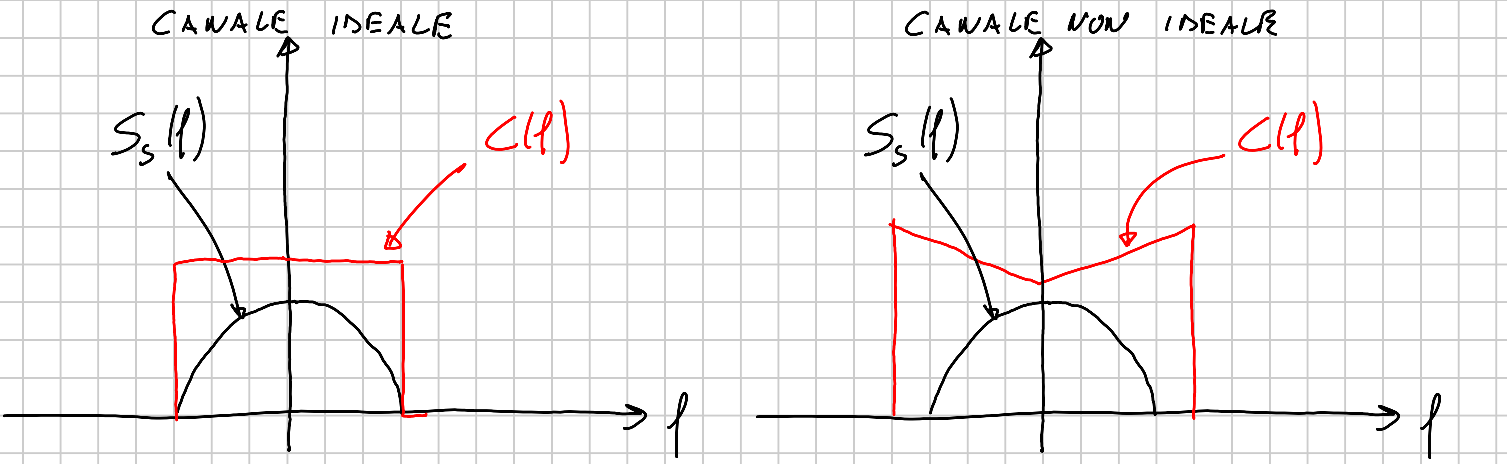
Nel valutare le prestazioni dei sistemi di comunicazioni numerici in banda base considereremo due fenomeni peggiorativi

1) INTERFERENZA INTER-SIMBOLO
2) PRESENZA DI RUMORE

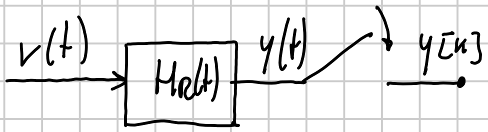
Per il momento ignoriamo il rumore e ci concentriamo sul primo problema.

INTERFERENZA INTER-SIMBOLICA (ISI)

Il primo fenomeno è causato dalla non perfetta risposta in frequenza del canale di trasmissione, e quindi dalle distorsioni lineari introdotte da questo.



Il risultato è che il campione estratto al ricevitore dal segnale ricevuto al k-esimo istante non dipende solo dal k-esimo simbolo.



ASSENZA DI ISI

$$y[n] = f\left(x[n]\right)$$

PRESENZA DI ISI

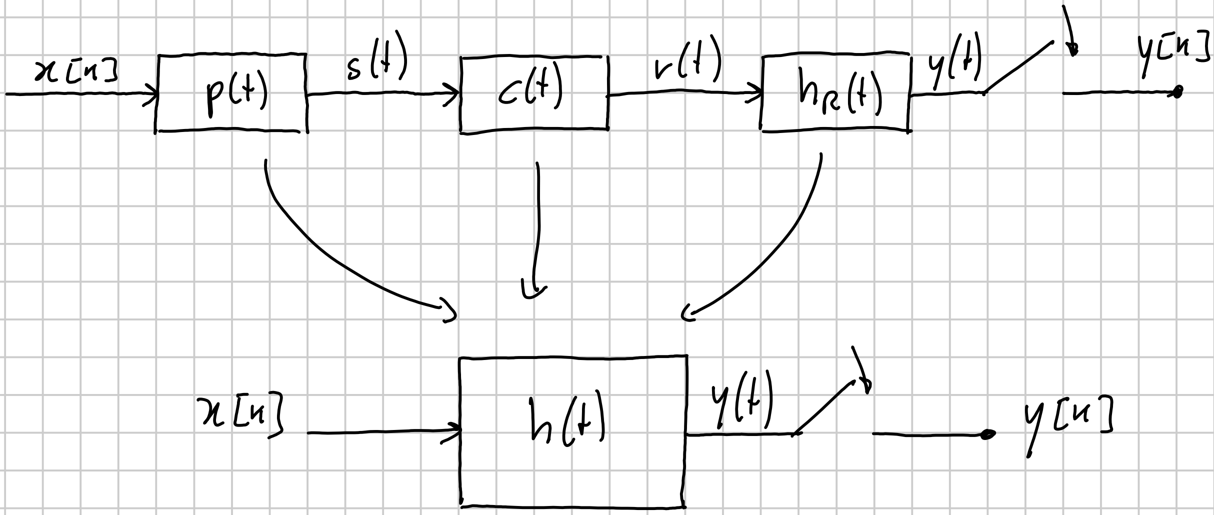
$$y[n] = f\left(\dots, x[n-1], x[n], x[n+1], \dots\right)$$

Per valutare gli effetti dell'ISI si devono considerare

·) il sagomatore in trasmissione $p(t)$

·) la risposta impulsiva del canale $c(t)$

·) il filtro in ricezione



$$h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

Dimostrazione:

$$Y(f) = R(f)\,H_R(f) = S(f)\,C(f)\,H_R(f) = \bar{X}(f)\,P(f)\,C(f)\,H_R(f)$$

$$= \bar{X}(f)\,H(f) \quad , \quad H(f) = P(f)\,C(f)\,H_R(f)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,h(t - nT_s)$$

$$y[n] = y(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,h((k-n)T_s) =$$

$$= \underbrace{x[k]\,h(0)}_{\text{componente utile}} + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} x[n]\,h((k-n)T_s)}_{\text{ISI}}$$

CANALE CON ISI

Un canale con Banda B_c in generale introduce ISI.

Ci sono due aspetti di cui ci occuperemo:

1) Determinazione del T_s minimo che può essere adottato al fine di ottenere una sequenza campionata priva di ISI

2) Determinare le condizioni sotto le quali è possibile trasmettere un segnale M-PAM attraverso un canale non ideale in modo che non vi sia ISI nella sequenza campionata.

Nel risolvere i due problemi riterremo la $c(t)$ fissata e $p(t)$ e $h_R(t)$ variabili, in quanto determinabili dal progettista.

UN APPROCCIO NON PERSEGUIBILE : IMPULSI DI DURATA FINITA

Trasmettere impulsi di durata finita crea un segnale trasmesso con banda illimitata. Questo è in contrasto con la limitatezza messa a disposizione dal canale di trasmissione $(B_c < \infty)$

$\Rightarrow$ Gli impulsi $p(t)$ devono avere <u>durata infinita</u>

I° CRITERIO DI NYQUIST PER LA TRASMISSIONE PRIVA DI ISI

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$ DOMINIO DEL TEMPO

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s \quad \forall f$$ DOMINIO DELLA FREQ.

Dimostrazione:

Il I° criterio di Nyquist nel dominio del tempo garantisce l'assenza di ISI in quanto

$$y[k] = x[k]\,h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} x[n]\,h\big((n-k)T_s\big)}_{=0} = y[k] = h(0)\,x[k]$$

DIPENDENZA SOLO DAL SIMBOLO $x[k]$

La relazione in frequenza si ottiene come trasformazione

$$h[k] = \delta[k] \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{H}(f) = 1 \qquad \forall f$$

$$\bar{H}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1 \qquad \forall f$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s \qquad \forall f$$

TRASMISSIONE PRIVA DI ISI

Supponiamo sia assegnato un canale a banda rigorosamente limitata, con banda B_c.

$$C(f) = 0 \qquad |f| > B_c$$

e supponiamo che $B_T = B_c$, ovvero che il segnale trasmesso occupa tutta la banda messa a disposizione dal canale.

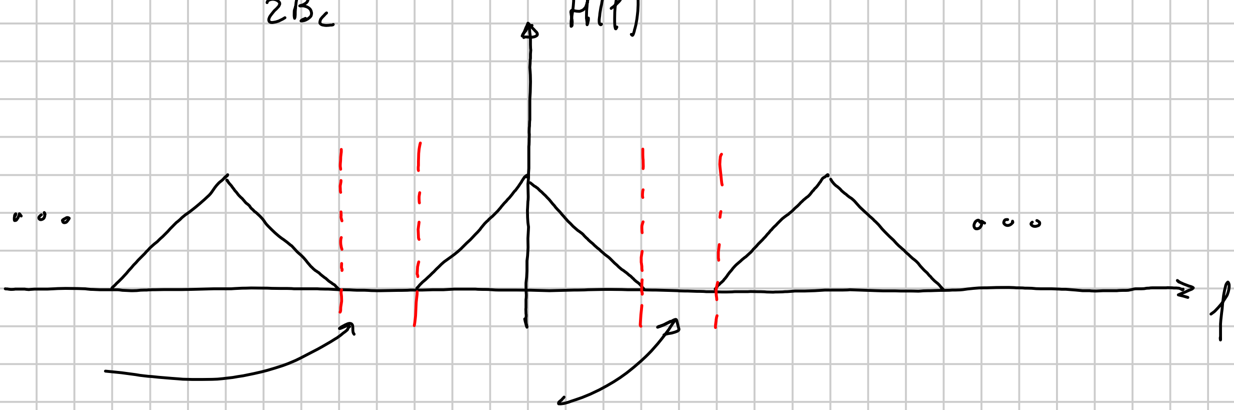
Allora si verificano le seguenti:

1) NON È POSSIBILE in alcun modo eliminare l'ISI quando

$$T_s < \frac{1}{2B_c}$$

Dim:

Quando $T_s < \frac{1}{2B_c}$



Esistono degli intervalli frequenziali dove $\tilde{H}(f) = 0$, per cui non può mai accadere che $\bar{H}(f) = 1 \quad \forall f$

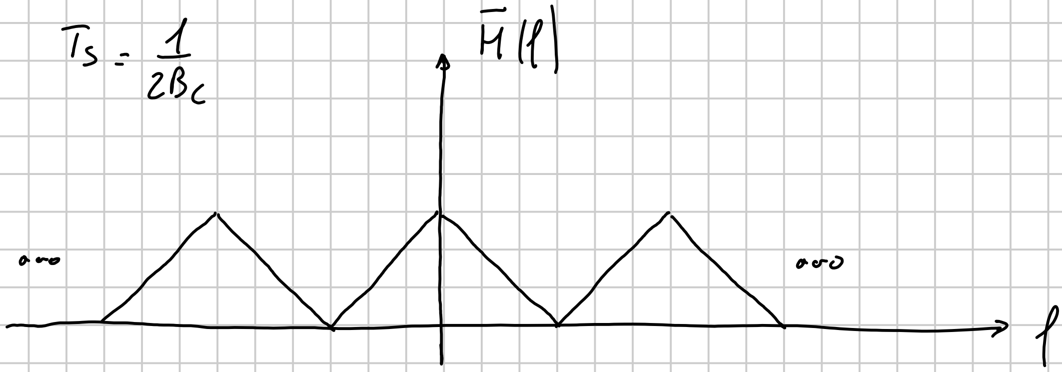
2) IL PIÙ PICCOLO VALORE DI T_s che permette di eliminare l'ISI è

$$T_s^{(min)} = \frac{1}{2B_c}$$

$$f_s^{(max)} = \frac{1}{T_s^{(min)}} = 2B_c = f_N \qquad \text{(frequenza di Nyquist)}$$

Dim:

Quando $T_s = \frac{1}{2B_c}$

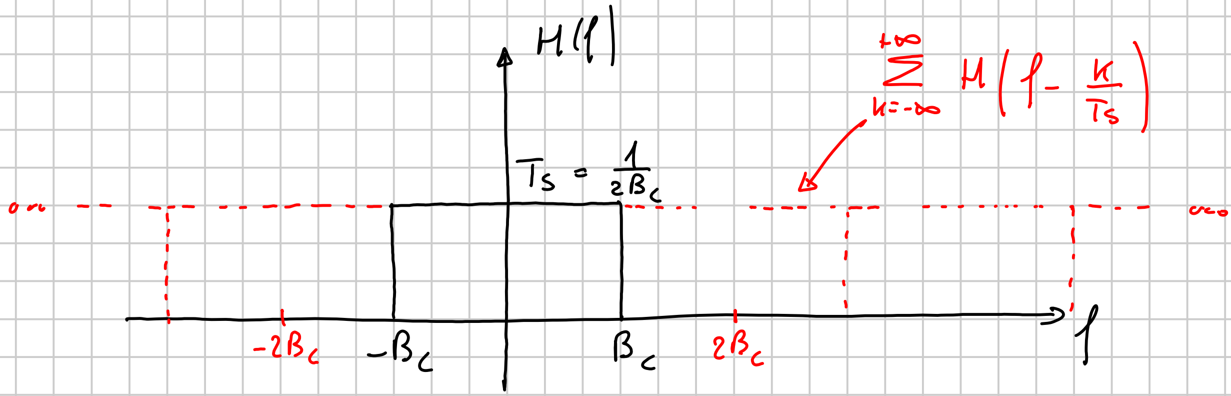


Non esistono intervalli di frequenze dove $\bar{H}(f) = 0$

3) Nel caso valga la condizione $T_s = \frac{1}{2B_c}$, allora l'unica funzione di trasferimento che permette di eliminare completamente l'ISI è

$$H(f) = \frac{1}{2B_c} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right) \Leftrightarrow h(t) = \operatorname{sinc}(2B_c t)$$

Dim:



Si nota anche che la funzione $\mathrm{sinc}(2B_c t)$ si annulla quando $t = \frac{K}{2B_c} = KT_s$ con $K \neq 0$

per cui

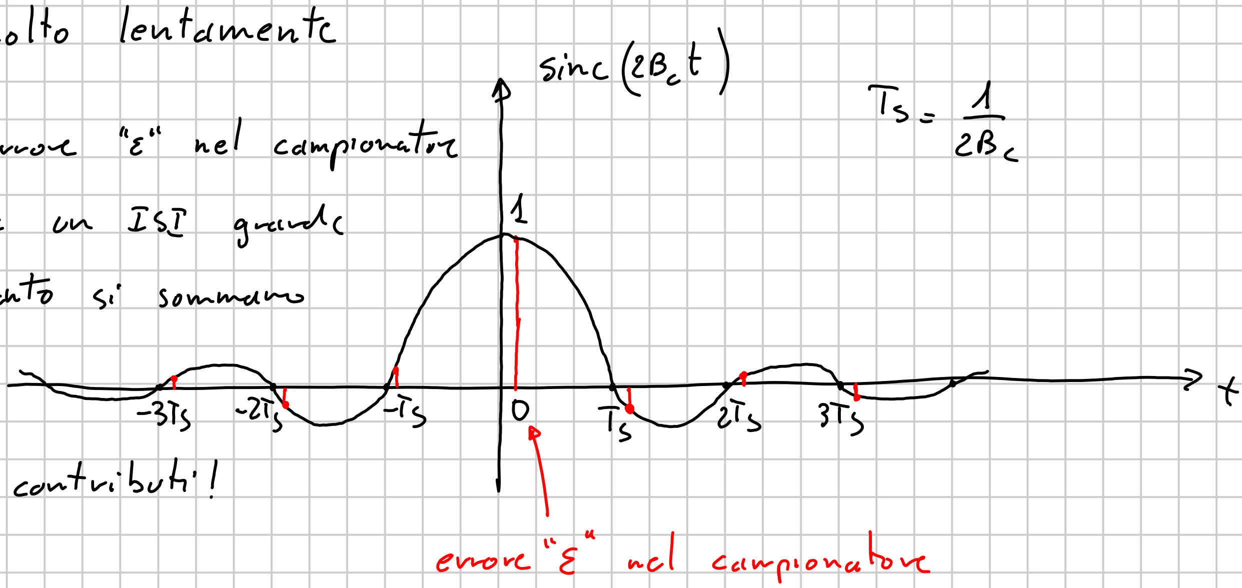
$$h[kT_s] = \mathrm{sinc}\left(2B_c \frac{K}{2B_c}\right) = \mathrm{sinc}(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

LIMITI DI APPLICABILITÀ DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO RETTANGOLARE

1) Realizzabilità di una funzione di trasferimento rettangolare
Risposte in frequenza ideali come quella rettangolare non sono fisicamente realizzabili (Criterio di Paley-Wiener).

2) Piccoli errori di campionamento provocano un ISI molto grande poiché la funzione $\mathrm{sinc}(2B_c t)$ decresce molto lentamente

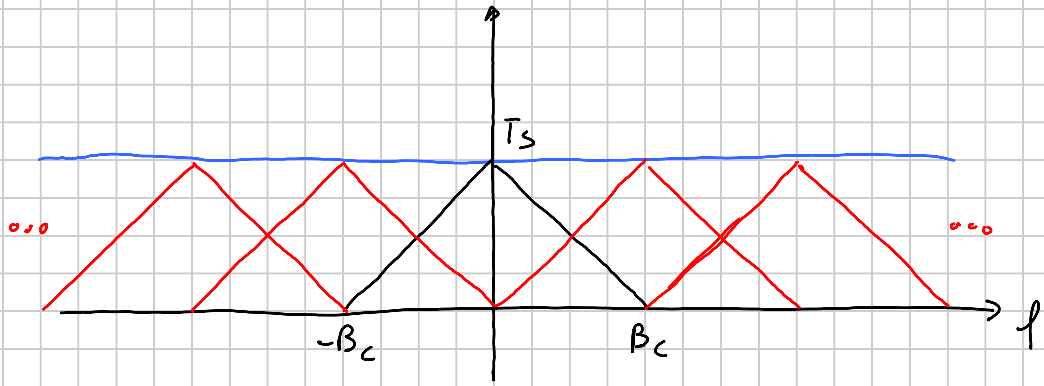
Un errore "ε" nel campionatore induce un ISI grande in quanto si sommano molti contributi!



Rilassando la condizione $T_S = \frac{1}{2B_C}$, ovvero ammettendo

$$T_S > \frac{1}{2B_C}$$

si ottiene il seguente effetto:



La sovrapposizione permette di definire una classe di infinite funzioni di trasferimento che soddisfano il I° criterio di Nyquist.

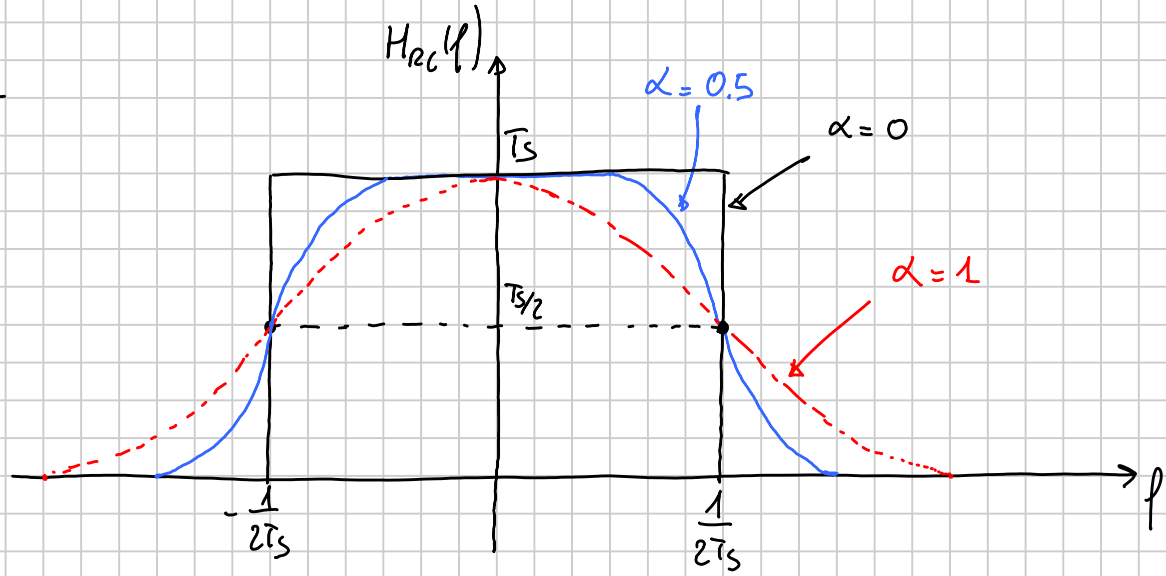
In questo caso però $B_C > \frac{1}{2T_S}$, per cui, a parità di T_S, c'è bisogno di una banda disponibile nel canale che è maggiore di quella che occorre con la funzione di trasferimento rettangolare.

FILTRO A COSENO RIALZATO (Raised Cosine - RC)

$$\boxed{H_{RC}(f) = \begin{cases} T_S & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_S} \\ \frac{T_S}{2}\left[1 - \sin\left(\frac{\pi T_S}{\alpha}\left(|f| - \frac{1}{2T_S}\right)\right)\right] & \frac{1-\alpha}{2T_S} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_S} \\ 0 & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T_S} \end{cases}}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$0 \leq \alpha \leq 1$



α = coefficiente di roll-off

Proprietà

- Quando $\alpha = 0$ il coseno rialzato coincide con la funzione di trasferimento rettangolare
- La banda B_H è direttamente ottenibile

$$B_H = \frac{1+\alpha}{2T_S}$$

La $h_{RC}(t)$ è calcolabile in forma chiusa:

$$h_{RC}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_S}\right) \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T_S}\right)}{\left(1 - \frac{2\alpha t}{T_S}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$h_{RC}(kT_S) = \delta[k]$$

- soddisfa il I° criterio di Nyquist nel tempo, per cui garantisce assenza di ISI
- decresce per $|t| \to \infty$ come $1/|t|^3$ per $\alpha > 0$, quindi molto più velocemente del caso $\alpha = 0$ (rettangolare)

ECCESSO DI BANDA E EFFICIENZA SPETTRALE DEI SISTEMI M-PAM CON COSENO RIALZATO

$$p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t) = h_{RC}(t)$$

sagomatore in tx

risposta impuls. del canale

filtro in ricezione

risposta impulsiva del tipo a coseno rialzato

Efficienza spettrale del canale di comunicazione numerico

$$\eta_B = \frac{\log_2 M}{B_T T_S} = \frac{\log_2 M}{B_H T_S} = \boxed{\frac{2\log_2 M}{1+\alpha}}$$

Considerazioni:

·) L'efficienza spettrale, a parità di M, decresce al crescere del coefficiente di roll-off (α)

·) La robustezza del sistema di comunicazione numerico all'ISI aumenta al crescere di α

$\Rightarrow$ TRADE-OFF tra robustezza all'ISI e eff. spettrale

VALORI OTTIMALI in corrispondenza di $\alpha \simeq 0.4$

Eccesso di banda richiesto dall'adozione del coseno rialzato

$$\Delta B_H = B_H - \frac{1}{2T_S} = \frac{\alpha}{2T_S}$$

PRESTAZIONI DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE NUMERICO IN BANDA BASE IN PRESENZA DI RUMORE

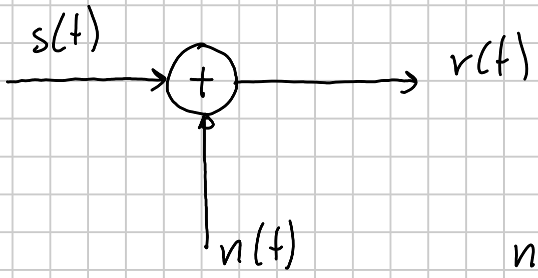
Capacità di canale

La capacità C di un canale di comunicazione è definita come il massimo valore che può assumere il tasso binario di segnalazione $R_b = \frac{1}{T_b}$ al variare di tutte le possibili coppie MODULATORE / DEMODULATORE sotto il vincolo che la Probabilità di errore sia esattamente nulla

$$\begin{cases} C \triangleq \max \{ R_b \} \\ P_E(b) = P\{ \hat{b}[n] \neq b[n] \} = 0 \end{cases}$$

La Capacità di canale C si misura in bit/s ed è un numero non-negativo.
Ovviamente, più è grande la capacità del canale e migliori sono le sue prestazioni.

CAPACITÀ DI CANALE CON RUMORE GAUSSIANO BIANCO ADDITIVO (AWGN)



$n(t)$ Gaussiano Bianco

In questo caso la capacità di canale può essere espressa in forma chiusa ed in dipendenza dei parametri caratteristici del segnale trasmesso e del rumore

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{N_0 B_T} \right) \qquad \text{(Shannon)}$$

dove

B_T = banda del segnale $s(t)$

P_S = potenza media di $s(t)$

$\frac{N_0}{2}$ = DSP del rumore $n(t)$ (costante essendo bianco)

Considerazioni

·) Fissata B_T

$$\lim_{P_S/N_0 \to 0} C = 0$$

$$\lim_{P_S/N_0 \to \infty} C = +\infty$$

·) Fissato P_S/N_0

$$\lim_{B_T \to 0} C = 0$$

$$\lim_{B_T \to \infty} C = \log_2 e \cdot \frac{P_S}{N_0}$$

·) Riscrivendo la formula di Shannon utilizzando $P_S = E_b R_b$

$$\frac{C}{B_T} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{B_T}\right)$$

E_b = energia per bit

$R_b \leq C$ (data la definizione di C come max valore di R_b)

SISTEMA DI COMUNICAZIONE NUMERICO IDEALE

Un sistema di comunicazione numerico è detto ideale se soddisfa le seguenti condizioni

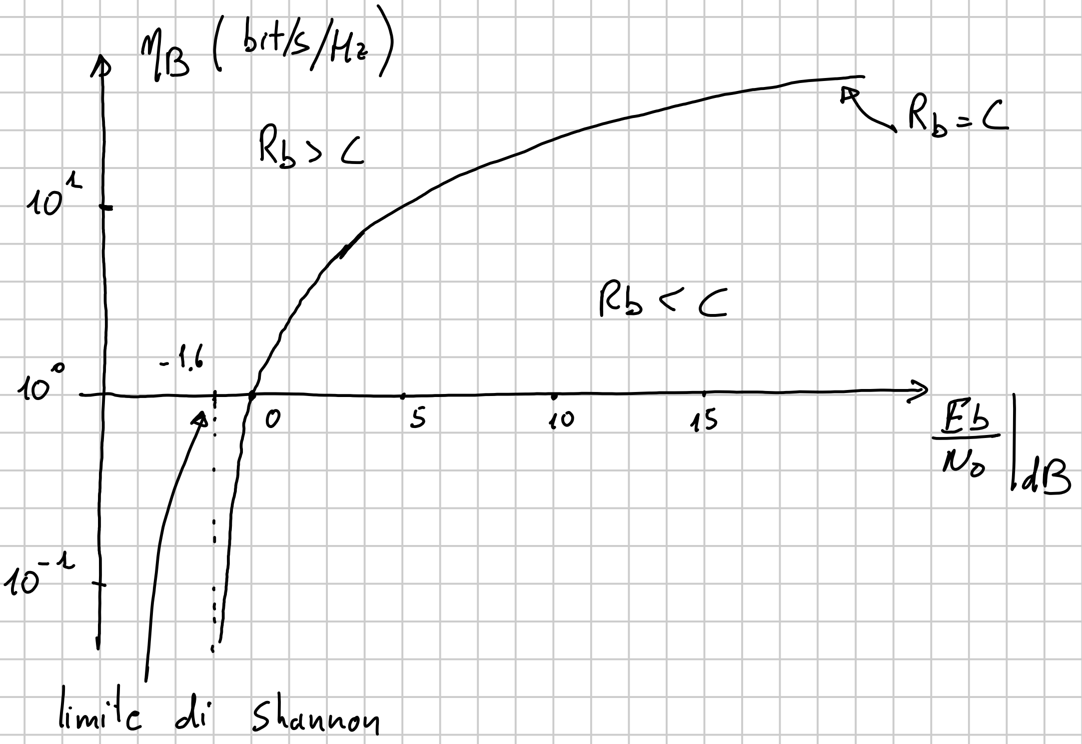
1) $R_b = C$
2) $P_E(b) = 0$

In queste condizioni è possibile mettere in relazione la efficienza spettrale con il rapporto E_b/N_0 (legato alla efficienza in potenza)

$$\Rightarrow \quad \eta_B = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\eta_B\right) \qquad , \quad \eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{C}{B_T}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{\eta_B} = 1 + \frac{E_b}{N_0}\eta_B$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B}} \qquad , \quad \eta_B \geq 0$$



$\Rightarrow$ La zona sotto la curva $R_c = C$ è la zona ove è possibile avere trasmissioni con probabilità di errore nulla

Considerazioni

- $\displaystyle\lim_{\eta_B \to +\infty} \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B} = +\infty$

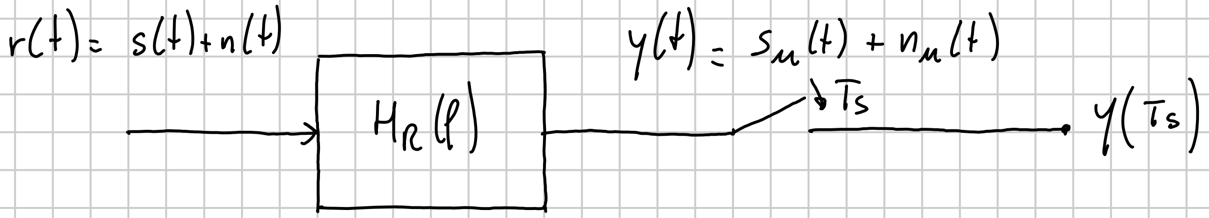
- $\displaystyle\lim_{\eta_B \to 0} \frac{2^{\eta_B} - 1}{\eta_B} = \log_e 2 \quad (-1.6\ dB)$

Una modulazione è efficiente in potenza se, operando al limite di Shannon $\Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \log_e 2$ (con $\eta_B = 0$), si ottiene una

$P_E(b) = 0$

RICEZIONE OTTIMA IN PRESENZA DI RUMORE BIANCO

Per il momento consideriamo solo gli effetti relativi al rumore



Dove $s(t)$ è un segnale di forma nota e $n(t)$ è un rumore additivo bianco

$$s_u(t) = s(t) \otimes h_R(t) \quad , \quad n_u(t) = n(t) \otimes h_R(t)$$

$$y(T_s) = s_u(T_s) + n_u(T_s)$$

Si definisce il rapporto segnale-rumore in uscita al filtro $h_R(t)$ all'istante $t = T_s$ come

$$SNR \triangleq \frac{s_u^2(T_s)}{E[n_u^2(T_s)]}$$

Si definisce ricevitore ottimo il filtro $h_R(t)$ che massimizza il SNR in uscita al filtro.

Nel caso di rumore bianco in ingresso il filtro ottimo prende il nome di FILTRO ADATTATO.

Problema:

1) Derivare il filtro $h_R(t)$ che massimizza l'SNR all'uscita

2) Determinare il valore massimo del SNR all'uscita.

Derivazione del filtro adattato

$$SNR = \frac{s_u^2(T_s)}{E[n_u^2(T_s)]}$$

$$s_u^2(T_s) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, h_R(T_s-\tau)\, d\tau\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, H_R(f)\, e^{j2\pi f T_s}\, df\right]^2$$

$$E[n_u^2(T_s)] = R_{n_u}(0)$$

$$R_{n_u}(\tau) = R_n(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

$$S_{n_u}(f) = S_n(f)\,|H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,|H_R(f)|^2$$

$$R_{n_u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_u}(f)\, df$$

$$SNR = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, H_R(f)\, e^{j2\pi f T_s}\, df\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2\, df} = \frac{2}{N_0 E_{h_R}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, H_R(f)\, e^{j2\pi f T_s}\, df\right]^2$$

Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz si può dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, H_R(f)\, e^{j2\pi f T_s}\, df \quad \text{raggiunge il massimo valore}$$

quando

$$H_R(f)\, e^{j2\pi f T_s} = S^*(f)$$

Quindi

$$\boxed{H_R(f) = S^*(f)\, e^{-j2\pi f T_s}} \iff \boxed{h_R(t) = s(T_s - t)}$$

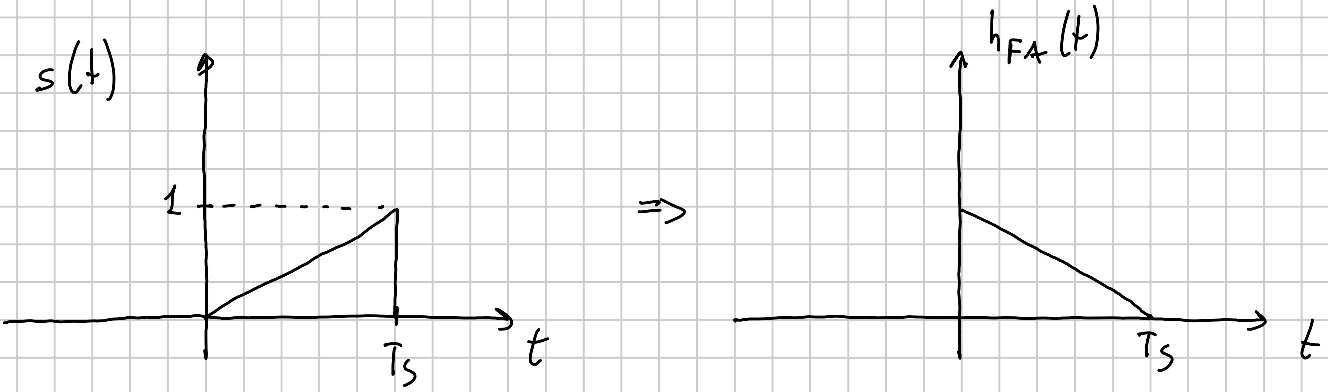
Dalla espressione della risposta impulsiva $h_R(t)$ si deduce il nome di FILTRO ADATTATO, in quanto la sua risp. imp. è adattata al segnale in ingresso al filtro stesso.

Studiando il modulo della risposta in frequenza $H_R(f)$ si deduce che il filtro tende ad amplificare le componenti frequenziali dove è presente il segnale e ad attenuare (o anche eliminare) le componenti frequenziali dove il contributo di segnale è scarso (o addirittura assente).

$$|H_R(f)| = |S(f)|$$

La simbologia per indicare un filtro adattato è $h_{FA}(t)$ o $H_{FA}(f)$

Esempio:



Calcolo del SNR_{MAX}

Il valore del SNR_{MAX} si ottiene per definizione quando si utilizza il F.A.

$$SNR = \frac{2}{N_0 E_s} \cdot E_s^2 = \boxed{\frac{2E_s}{N_0}}$$

N.B. Il SNR non dipende dalla forma del segnale ma solo dalla sua energia. Questo da spazio alla progettazione della forma del segnale indipendentemente dai risultati in termini di SNR.

N.B. C'è inoltre da notare che il massimo del SNR lo si ottiene per qualunque $h_{FA}(t) = K\, s(T_s - t)$, $K \in \mathbb{R}$

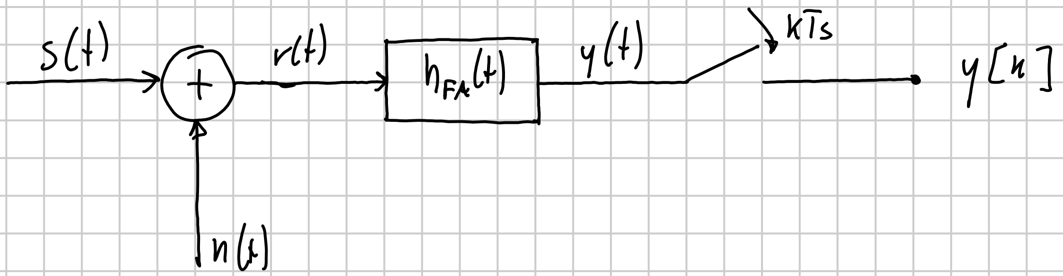
Infatti basta calcolare il SNR

$$SNR = \frac{2}{N_0 \cancel{K^2} E_s} \cancel{K^2} E_s^2 = \frac{2 E_s}{N_0}$$

Quindi, fattori di amplificazione e/o attenuazione non cambiano il risultato. Questo è abbastanza intuitivo, in quanto un fattore costante di amplificazione opera allo stesso modo sul segnale utile e sul rumore, per cui, nel rapporto, i contributi si elidono.

SCHEMA DEL RICEVITORE CON FILTRO ADATTATO

Considerano la trasmissione di un simbolo



$$s(t) = \alpha\, p(t - nT_s)$$

$$h_{FA}(t) = K\, p(T_s - t)$$

$$y(t) = s_u(t) + n_u(t)$$

Caratteristiche di $s_u(t)$ e $n_u(t)$

·) $s_u(t) = s(t) \otimes h_{FA}(t) = k\alpha\, p(t) \otimes p(T_s - t)$

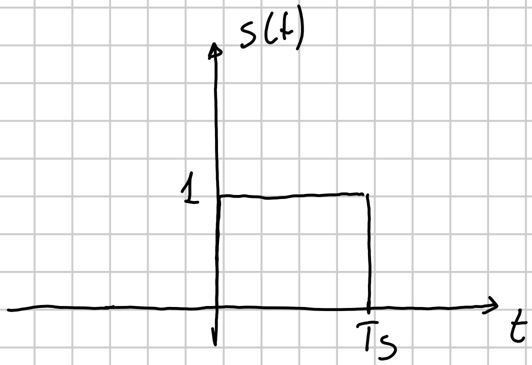
$$= k\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\, p(\tau - (t - T_s))\, d\tau = k\alpha\, C_p(t - T_s)$$

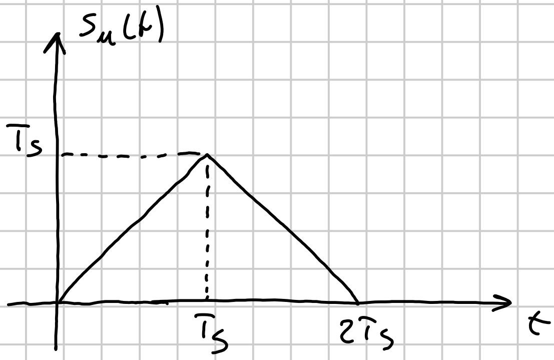
$$C_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\, p(\tau - t)\, d\tau$$ autocorrelazione dell'impulso sagomatore

Esempio:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$s_u(t) = C_s(t - T_s) = T_s\left(1 - \frac{|t - T_s|}{T_s}\right)\text{rect}\left(\frac{t - T_s}{2T_s}\right)$$





·) $n_u(t) = n(t) \otimes h_{FA}(t)$

$n(t)$ = rumore bianco, Gaussiano, additivo (AWGN)

$E[n(t)] = 0$

N.B. un rumore bianco è per definizione SSL ed essendo anche Gaussiano è anche SSS.

$$R_n(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

$$n(\bar{t}) = \text{v.a. con ddp} \quad f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}}$$

Essendo il filtro in ricezione un filtro lineare e stazionario $n_u(t)$ è un rumore Gaussiano, additivo e stazionario

$$E[n_u(t)] = 0$$

$$R_{n_u}(\tau) = R_n(\tau) \otimes h_{FA}(\tau) \otimes h_{FA}(-\tau) = \frac{N_0}{2} C_{h_{FA}}(\tau)$$

$C_{h_{FA}}(\tau)$ = autocorrelazione di $h_{FA}(t)$

$$S_{n_u}(f) = \frac{N_0}{2}|H_{FA}(f)|^2 = K^2 \frac{N_0}{2}|P(f)|^2$$

$$P_{n_u} = \frac{N_0}{2} E_{H_{FA}} = \frac{N_0}{2} E_p K^2$$

È importante capire se i campioni di rumore sono tra loro correlati o meno.

$$E\left[n_u[k]\, n_u[n] \right] = 0 \qquad \forall\, k \neq n \qquad \text{(INCORRELAZIONE)}$$

N.B. la si può scrivere così poiché $E[n_u[k]] = 0$!!

Questo vuol dire che $R_{n_u}[kT_s] = 0 \quad \forall\, k \neq 0$

$$R_{n_u}[kT_s] = K^2 \frac{N_0}{2} C_p[kT_s] = 0$$

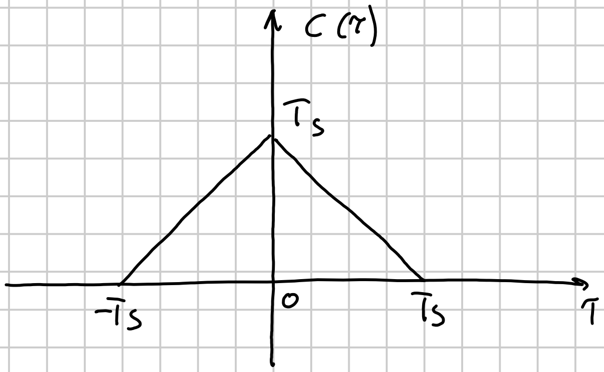
$$\Rightarrow C_p[kT_s] = 0$$

Dobbiamo ricordare che il segnale utile in ingresso al filtro adattato è ottenuto tramite il modulatore in trasmissione per cui è la funzione $p(t)$ che determina la sagoma (forma) del segnale $s(t)$

·) IMPULSO RETTANGOLARE

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$$c_p(\tau) = T_s\left(1 - \frac{|t|}{T_s}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T_s}\right)$$



$$R_{n_u}(\tau) = K^2 \frac{N_0}{2} C_p(\tau)$$

$$R_{n_u}(nT_s) = \begin{cases} K^2 \frac{N_0}{2} T_s & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

campioni di rumore incorrelati
⇓
indipendenti (Gaussiani)

·) IMPULSO A RADICE DI COSENO RIALZATO

$$P(f) = \text{radice di coseno rialzato} \quad \left(\sqrt{H_{RC}(f)}\right)$$

$$S_{n_u}(f) = K^2 \frac{N_0}{2} |P(f)|^2 = K^2 \frac{N_0}{2} H_{RC}(f)$$

$$R_{n_u}(\tau) = K^2 \frac{N_0}{2} h_{RC}(\tau)$$

$$R_{n_u}(nT_s) = \begin{cases} K^2 \frac{N_0}{2} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

N.B. la $h_{RC}(\tau)$ ha la $\mathrm{sinc}(\cdot)$ che si annulla in multipli di T_s

SNR per bit all'ingresso del ricevitore

Il SNR per bit è un parametro utile per determinare le prestazioni di un ricevitore in quanto tiene in considerazion quantità energetiche sia del segnale utile che del rumore.

$$SNR_b = \frac{E_b}{N_0}$$

$$E_b \triangleq P_s T_b = E\left[x^2[n]\right] T_b \qquad \text{Energia per bit}$$

$$\frac{N_0}{2} = S_n(f)$$

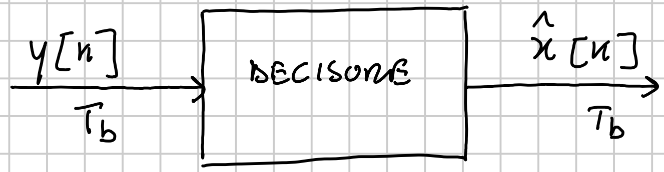
$$\Rightarrow \boxed{SNR_b = \frac{E\left[x^2[n]\right]}{N_0 R_b}} \quad , \quad R_b = \frac{1}{T_b}$$

DECISORE OTTIMO E CRITERIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Il decisore deve mappare i campioni $y[n]$ in simboli dell'alfabeto
I campioni $y[k]$ sono statisticamente indipendenti l'uno dall'altro.
Questo è dimostrato dal fatto che

$$y[n] = s_u[n] + n_u[n]$$

dove sia $s_u[n]$ che $n_u[n]$ sono indipendenti.



$$y[n] = s_u[n] + n_u[n] \qquad \hat{x}[n] \in A_s$$

Quindi si può concludere che $\hat{x}[n]$ può essere deciso in base alla sola conoscenza di $y[n]$. Questa decisione si dice di tipo "ad un sol colpo" (one-shot detector).

DECISIONE A MINIMA PROBABILITÀ DI ERRORE

- Probabilità di errore sul simbolo

$$P_E(M) \triangleq P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$$

- Criterio di ottimalità: minimizzazione della $P_E(M)$

Derivazione del decisore ottimo

$$x \triangleq x[n], \quad y \triangleq y[n], \quad n_u \triangleq n_u[n], \quad \hat{x} = \hat{x}[n]$$

CRITERIO A MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI E MINIMA PROBABILITÀ DI ERRORE

MAP = Maximum A-posteriori Probability

$$\hat{x} = \max_{i=1,\dots,M} \{P(x = \alpha_i \mid y)\}$$

Viene associato ad un osservato y il simbolo dell'alfabeto $\hat{x}$ tale che sia massima la probabilità a posteriori (condizionata) che quel simbolo sia stato trasmesso.

> Se il decisore adotta il criterio MAP allora la probabilità di errore sul simbolo è minima

Dimostrazione

Definiamo $R(i) \triangleq \{ y \in \mathbb{R} : \hat{x} = \alpha_i \}$, $i = 1, \dots, M$

come la "zona di decisione" del simbolo α_i, ovvero l'insieme dei valori di y per cui si decide per il simbolo α_i.

$$P\{x = \alpha_i | y\} = \frac{f_Y(y | x = \alpha_i) \, P\{x = \alpha_i\}}{f_Y(y)} \qquad \text{(BAYES)}$$

$$P_E(M) = P\{\hat{x} \neq x\} = 1 - P\{\hat{x} = x\} = 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_i\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i | x = \alpha_i\} P\{x = \alpha_i\} =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{x = \alpha_i\} \, P\{y \in R(i) | x = \alpha_i\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{x = \alpha_i\} \int_{y \in R(i)} f_Y(y | x = \alpha_i) \, dy =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} \int_{y \in R(i)} P\{x = \alpha_i\} \, f_Y(y | x = \alpha_i) \, dy =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} \int_{y \in R(i)} f_Y(y) \, P\{x = \alpha_i | y\} \, dy$$

Per minimizzare la $P_E(M)$ devo scegliere le $R(i)$ in modo tale che, osservato y, sia massima la probabilità a posteriori relativa al simbolo i-esimo.

Si osserva che, se le probabilità a priori sono identiche

$$P\{x = \alpha_i\} = \frac{1}{M} \qquad i = 1, \dots, M$$

allora, dato che $f_Y(y)$ non dipende da "i":

$$\hat{x} = \max_{i=1,\dots,M} \left[\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{f_Y(y)} \cdot f_Y(y | x = \alpha_i) \right] = \max_{i=1,\dots,M} \left[f_Y(y | x = \alpha_i) \right]$$

La funzione $f_Y(y|x=\alpha_i)$ viene detta anche

"FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA"

Infatti il criterio a minima probabilità di errore (o massima probabilità a posteriori) coincide con il criterio a MASSIMA VEROSIMIGLIANZA quando le probabilità a priori $P\{x=\alpha_i\}$ sono identiche.

Nel caso di AGWN

$$y = s_u + n_u = \alpha_i + n_u \quad , \quad n_u \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_u}^2)$$

$$f_Y(y|x=\alpha_i) = f_{n_u}(y-\alpha_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{(y-\alpha_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} \qquad i = 1, \dots, M$$

$$\hat{x} = \max_{i=1,\dots,M} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{(y-\alpha_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} \right] = \min_{i=1,\dots,M} \left\{ (y-\alpha_i)^2 \right\}$$

$$\boxed{\hat{x} = \min_{i=1,\dots,M} \left\{ |y-\alpha_i| \right\} \qquad \text{minimo della distanza Euclidea}}$$

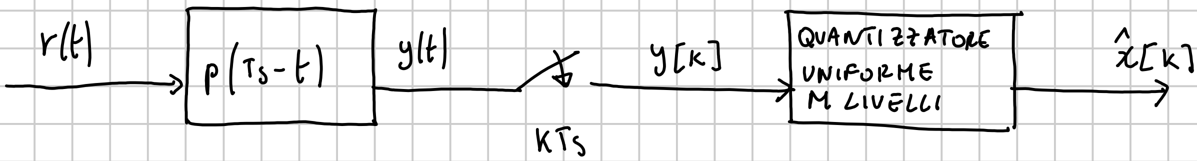
Il decisore ottimo coincide con la scelta del simbolo a distanza Euclidea minima dall'osservato

Le zone di decisione sono quindi stabilite dalla regola di quantizzazione uniforme.

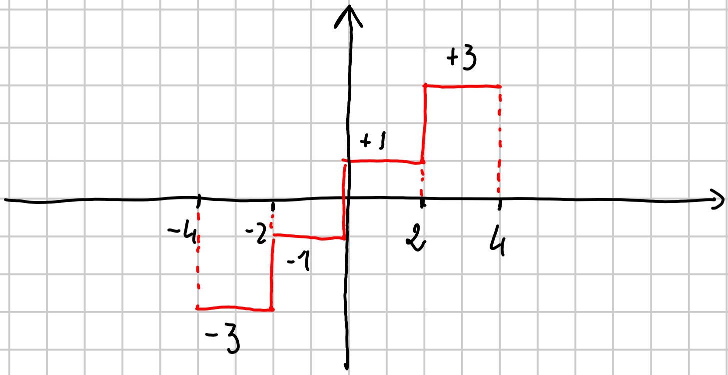
Questo significa che il decisore può essere realizzato con un quantizzatore uniforme

RICEVITORE OTTIMO PER UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE PAM

Per un sistema di comunicazione PAM con simboli equiprobabili, il ricevitore ottimo secondo il criterio a minima probabilità di errore è il seguente



Esempio : 4-PAM



QUANTIZZATORE UNIFORME 4 LIVELLI

PROBABILITÀ DI ERRORE DI BIT E DI SIMBOLO

$$P_E(b) = P_r\left\{ \hat{b}[k] \neq b[k] \right\}$$ bit

$$P_E(M) = P_r\left\{ \hat{x}[k] \neq x[k] \right\}$$ simbolo

$P_E(M) = P_E(b)$ solo quando l'alfabeto A_s è composto da soli due simboli

Vale però sempre che:

$$\frac{P_E(M)}{\log_2 M} \leq P_E(b) \leq \frac{M/2}{M-1} P_E(M)$$

CODIFICA DI GRAY

$$A_S \triangleq \{ \alpha_1, \dots, \alpha_M \}$$

$$\alpha_i = 2i - M - 1 \qquad i = 1, \dots, M$$

La codifica di Gray associa stringhe di bit a simboli dell'alfabeto in modo che le stringhe di bit relative a due simboli adiacenti α_i e α_{i+1} differiscono al più per 1 bit.

Nel caso di SNR sufficientemente elevato (> 10 dB), l'evento errore consiste generalmente nel decidere per uno dei simboli dell'alfabeto adiacenti a quello trasmesso.

Utilizzando quindi la codifica di Gray e in condizioni di SNR elevato, un errore su un simbolo M-ario ogni N simboli M-ari, si traduce in un errore su una sola cifra binaria ogni N simboli M-ari, cioè ogni $N \log_2 M$ cifre binarie, quindi:

$$P_E(b) \simeq \frac{P_E(M)}{\log_2 M}$$

Esempi:

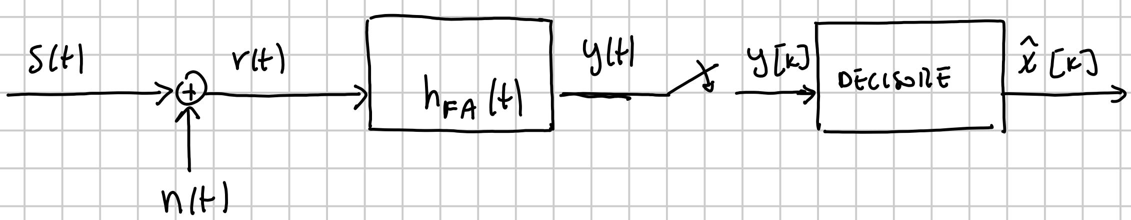
1) 4 - PAM

-3	-1	1	3
↓	↓	↓	↓
00	01	11	10

2) 8 - PAM

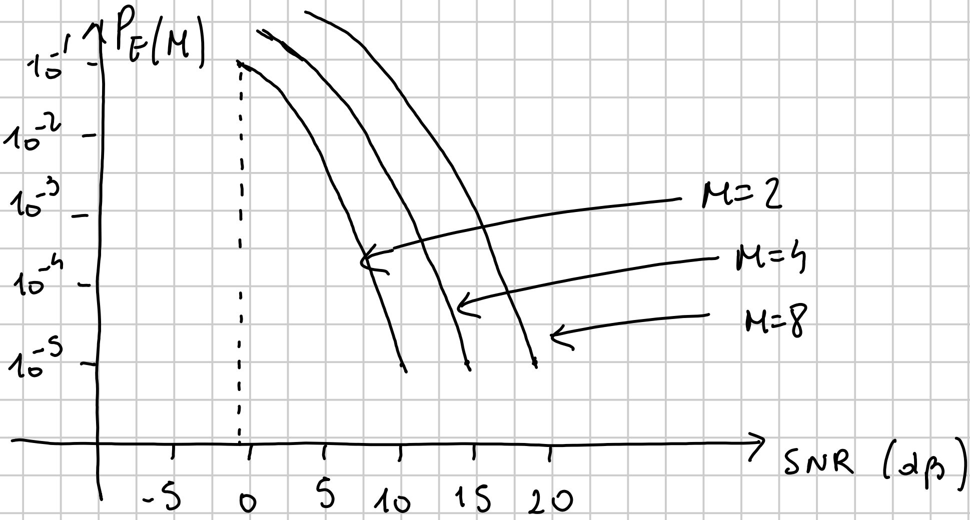
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
000	001	011	010	110	111	101	100

PRESTAZIONI DI UN M-PAM IN PRESENZA DI RUMORE



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t - kT_s)$$

$$\boxed{P_E(M) = \left(\frac{M-1}{M}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M \; SNR}{(M^2-1)}}\right)}$$



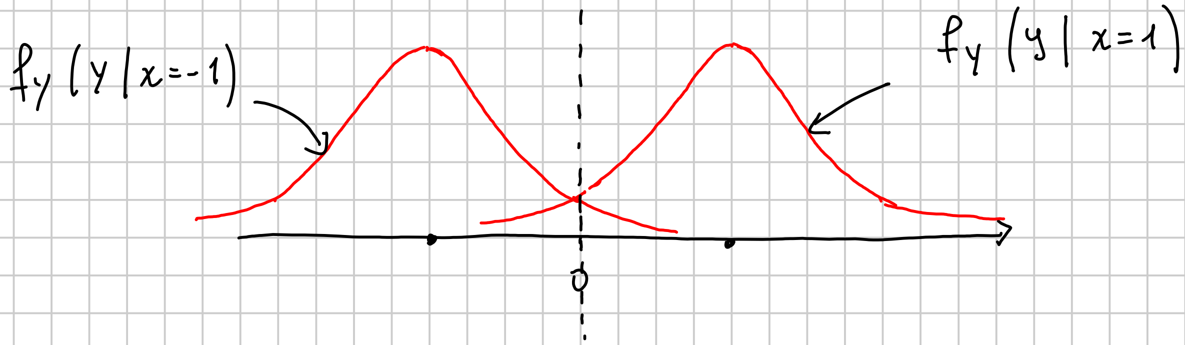
Per SNR > 10 dB ed utilizzando la codifica di Gray

$$\boxed{P_E(b) \cong \frac{P_E(M)}{\log_2 M}}$$

Per una BPSK (2-PAM)

$$P_E(M) = P_E(b) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

Dimostrazione



$$P_E(b) = P_r\{x=+1\}\cdot P_r\{\hat{x}=-1 \mid x=1\} + P_r\{x=-1\}\cdot P_r\{\hat{x}=1 \mid x=-1\}$$

$$\Pr\{\hat{x} = -1 \mid x = 1\} = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y \mid x = 1)\, dy$$

$$f_Y(y \mid x = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_{n_u}^2}} \, e^{-\frac{(y - h(0)\,x)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} \Bigg|_{x = 1}$$

Dopo il campionatore

$$y[k] = x[k]\, h(0) + n_u[k]$$

$$\sigma_{n_u}^2 = \frac{N_0}{2} E_{h_R} = \frac{N_0}{2} h(0)$$

$S_W(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow$ DSP del processo di rumore in ingresso al filtro in ricezione $h_R(t)$

$$SNR = \frac{h^2(0)}{\frac{N_0}{2} h(0)} = \frac{2\,h(0)}{N_0}$$

$$\Pr\{\hat{x} = -1 \mid x = 1\} = 1 - Q\left(\frac{0 - h(0)}{\sqrt{\frac{N_0}{2} h(0)}}\right) =$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2\,h(0)}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

Si può dimostrare per simmetria che

$$\Pr\{\hat{x} = 1 \mid x = -1\} = \Pr\{\hat{x} = -1 \mid x = 1\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

Quindi

$$P_E(b) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{SNR}\right)$$

PRESENZA DI ISI E RUMORE

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h(t-kT_s) + n_u(t)$$

$$h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

$$n_u(t) = n(t) \otimes h_R(t)$$

$$y[k] = x[k]\, h(0) + I[k] + n_u[k]$$

$$I[k] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} x[n]\, h\left((k-n)T_s\right)$$

L'approccio da seguire è il seguente:

Il filtro $h_R(t)$ deve essere allo stesso tempo quello che elimina l'ISI e che massimizza il SNR

Questo problema può essere risolto progettando opportunamente $p(t)$ e $h_R(t)$

EQUALIZZATORE ZERO-FORCING

Massimizza il SNR vincolando $I(k) = 0 \quad \forall k$

N.B. = È un problema di massimizzazione vincolata per cui la soluzione NON porta alla realizzazione del filtro adattato.

Soluzione:

·) $I[k] = 0$ quando $h(t) = h_{RC}(t)$, Allora

$$P(f)\,C(f)\,H_R(f) = H(f) = H_{RC}(f)\,\underbrace{e^{-j2\pi f T_s}}_{\text{CAUSALITÀ}}$$

Si pone quindi il problema di massimizzare le SNR con il vincolo

$$P(f)\,C(f)\,H_R(f) = H_{RC}(f)\,e^{-j2\pi f T_s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |P(f)| &= |H_R(f)| = \sqrt{\frac{H_{RC}(f)}{|C(f)|}} \\ \angle P(f) &= \angle H_R(f) = -2\pi f T_s - \angle C(f) \end{aligned}}$$

N.B. = Se $C(f) = 1$ (CANALE IDEALE) Allora

$$P(f) = H_R(f) = \sqrt{H_{RC}(f)}\;e^{-j2\pi f T_s}$$

Il valore di SNR in tal caso è:

$$\boxed{SNR = \frac{\dfrac{2 E_s h^2(0)}{N_0}}{\left[\displaystyle\int_{-B_c}^{B_c} \frac{H_{RC}(f)}{|C(f)|}\, df\right]^2}}$$

B_c = banda del canale $C(f)$

$$E_s = P_s T_s = T_s \frac{(M^2-1)}{3}$$

Se $C(f) = 1 \Rightarrow SNR = \frac{2E_s}{N_0}$ FILTRO ADATTATO

CANALE IDEALE

ZERO - FORCING $\Rightarrow$ FILTRO ADATTATO

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t - kT_s) + n(t)$$

$n(t) \to$ AWGN

$$h_R(t) = k\, p(T_s - t)$$

$$H_R(f) = P(f)\, e^{-j2\pi f T_s}$$

$$H(f) = P^2(f)\, e^{-j2\pi f T_s} = H_{RC}(f)\, e^{-j2\pi f T_s}$$

Riassumendo, il problema di eliminare l'ISI e massimizzare il SNR lo si risolve utilizzando il filtro sagomatore $p(t)$ e quello di ricezione, $h_R(t)$, realizzati con la RADICE DI COSENO RIALZATO

Nel caso di canale ideale, la soluzione coincide con il filtro adattato.