Esercizio (tratto dal problema 6.16 del Mazzoldi 2)

Un proiettile di massa M viene sparato da terra all'istante $t = 0$ con velocità iniziale di modulo $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ ad un angolo $\theta = 60^o$ con l'orizzontale. Arrivato alla sommità della sua traiettoria il proiettile esplode in due frammenti di massa pari a $m_1 = 900\,\mathrm{gr}$ e $m_2 = 600\,\mathrm{gr}$ rispettivamente. I due frammenti arrivano al suolo contemporaneamente e la distanza di m_2 dal punto di lancio è $x_{2,cad} = 15\,\mathrm{m}$. Calcolare:

1. la posizione di caduta $x_{1,cad}$ del frammento m_1;
2. l'energia cinetica K_{CM} del centro di massa immediatamente prima dell'esplosione;
3. le velocità dei due frammenti immediatamente dopo l'esplosione.

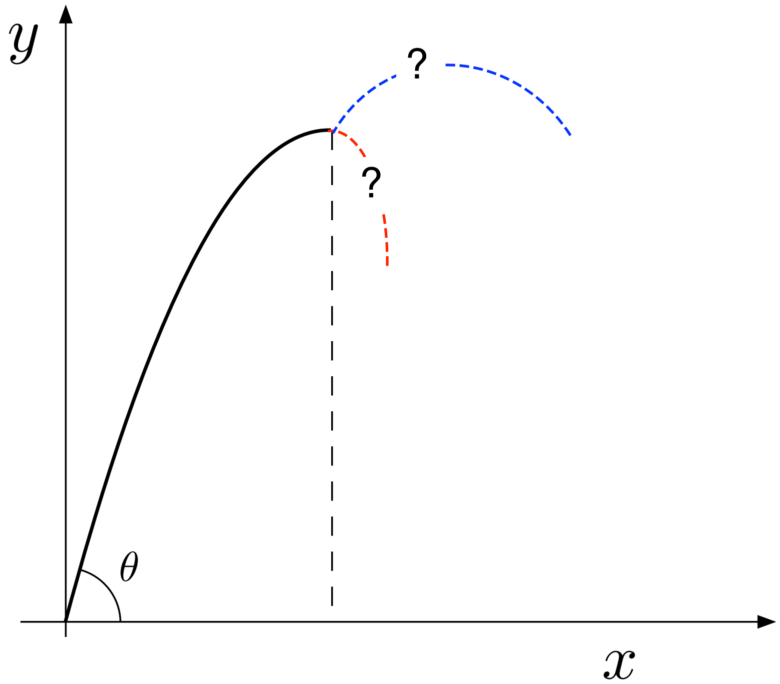

Figure 1: Esplosione del proiettile in due frammenti

SOLUZIONE

DATI INIZIALI
$v_0 = 12\text{m/s}$
$\theta = \pi/3$
$m_1 = 0.9\,\text{Kg}$
$m_2 = 0.6\,\text{Kg}$
$M = m_1 + m_2 = 1.5\,\text{Kg}$
$x_{2,cad} = 15\,\text{m}$

Consideriamo i due frammenti come un unico sistema di due punti materiali m_1 e m_2 che sono uniti prima dell'esplosione e separati dopo l'esplosione. Su ciascun frammento agiscono:

1. forze interne dovute all'altro frammento (forze di coesione prima dell'esplosione e forze di repulsione durante l'esplosione);

2. forza peso (esterna al sistema in quanto è dovuta alla terra).

NB: A causa della presenza di forze esterne (=forza peso) il sistema dei due frammenti *non è* isolato.

- La quantità di moto totale $\vec{P}$ del sistema è governato dall'equazione

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = (m_1 + m_2)\vec{g} \tag{1}$$

Ricordando che la velocità $\vec{v}_{CM}$ del centro di massa (C.M.) è legata a $\vec{P}$ tramite

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale del sistema, abbiamo

$$\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{M} = \vec{g} \tag{2}$$

ossia il moto del centro di massa, durante *tutta* la traiettoria (prima, durante e dopo l'esplosione), è determinato dalla sola forza peso. Di fatto il centro di massa non 'vede' l'esplosione, che è un fenomeno *interno* al sistema dei due frammenti.

- In componenti l'Eq.(2) si scrive

$$\begin{cases} \dfrac{dv^x_{CM}}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{dv^y_{CM}}{dt} = -g \end{cases} \tag{3}$$

da cui si ricava subito la legge oraria per le componenti della velocità del centro di massa

$$\begin{cases} v^x_{CM}(t) = \text{const} = v^x_{0,CM} = v_0 \cos\theta \qquad \text{(moto rettilineo uniforme)} \\ \\ v^y_{CM}(t) = v^y_{0,CM} - g\,t = v_0 \sin\theta - g\,t \qquad \text{(moto rettilineo unif. accelerato)} \end{cases} \tag{4}$$

Tenendo conto che il proiettile parte da $(x, y) = (0, 0)$, la legge oraria delle coordinate del centro di massa si ricava dalle (4)

$$\begin{cases} x_{CM}(t) = v_0 \cos\theta\, t \quad \text{(moto rettilineo uniforme)} \\ \\ y_{CM}(t) = v^y_{0,CM}\, t - \dfrac{1}{2} g\, t^2 = v_0 \sin\theta\, t - \dfrac{1}{2} g\, t^2 \quad \text{(moto rettilineo unif. accelerato)} \end{cases} \tag{5}$$

Pertanto il C.M. si muove di un moto parabolico, completamente insensibile all'esplosione.

- L'istante t_{cad} caduta del C.M. si determina dal moto lungo la verticale y. Dalla seconda delle Eq.(4) è facile ricavare che
$$t_{cad} = 2 \times \frac{v^y_{0,CM}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{6}$$
dove il fattore 2 indica che t_{cad} è il doppio del tempo di ascesa da terra fino all'altezza massima.

- La posizione orizzontale di caduta $x_{CM,cad}$ del C.M. si calcola valutando la prima delle (5) all'istante $t = t_{cad}$
$$x_{CM,cad} = x_{CM}(t_{cad}) = v_0 \cos\theta\, t_{cad} = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \tag{7}$$

1. Per definizione di C.M. abbiamo che, istante per istante,
$$x_{CM}(t) = \frac{x_1(t)\, m_1 + x_2(t)\, m_2}{M} \tag{8}$$
Siccome sappiamo che i due frammenti atterrano allo stesso istante, abbiamo che in particolare all'istante di caduta
$$x_{CM,cad} = \frac{x_{1,cad}\, m_1 + x_{2,cad}\, m_2}{M} \tag{9}$$
da cui ricaviamo
$$x_{1,cad} = \frac{M\, x_{CM,cad} - x_{2,cad}\, m_2}{m_1} \tag{10}$$
e, utilizzando la (7), si ottiene
$$x_{1,cad} = \frac{1}{m_1} \left(M\, \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} - x_{2,cad}\, m_2 \right) \tag{11}$$
Sostituendo i valori si trova
$$\begin{aligned} x_{1,cad} &= \frac{1}{0.9\,\text{K}\cancel{g}} \left(1.5\,\text{K}\cancel{g}\, \frac{\cancel{2}\, (12\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2\, \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \frac{1}{2}}{9.81\,\frac{\text{m}}{s^2}} - 15\,\text{m} \cdot 0.6\,\text{K}\cancel{g} \right) = \\ &= \frac{1}{0.9} \left(\frac{1.5 \cdot 144\sqrt{3}}{19.62} - 15 \cdot 0.6 \right) \text{m} = \\ &= 11.2\,\text{m} \end{aligned} \tag{12}$$

2. L'energia cinetica del C.M. immediatamente prima dell'esplosione è data da
$$K_{CM}(t_{exp} - \varepsilon) = \frac{1}{2} M((\underbrace{v^x_{CM}}_{=v^x_{0,CM}})^2 + (\underbrace{v^y_{CM}(t_{exp} - \varepsilon)}_{=0})^2) = \frac{1}{2} M v_0^2 \cos^2\theta \tag{13}$$

dove

$v^x_{CM,exp} = v^x_{0,CM} = v_0 \cos\theta$, dato che il moto del C.M. lungo x è rettilineo uniforme;

$v^y_{CM}(t_{exp} - \varepsilon) = 0$ perché l'esplosione avviene quando il proiettile ha raggiunto l'altezza massima.

Sostituendo i valori si trova

$$\begin{aligned} K_{CM,exp} &= \frac{1}{2}\, 1.5\,\mathrm{Kg}\,(12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2\,\frac{1}{4} = \\ &= \frac{1.5\cdot 144}{8}\,\frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = \\ &= 27\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{14}$$

3. **Velocità dei due frammenti immediatamente dopo l'esplosione**

- *Moto dei due frammenti lungo* y:
  Osserviamo che il tempo di caduta di ciascuno dei due frammenti è determinato dal loro moto verticale lungo y. Siccome all'istante t_{exp} essi partono dalla stessa altezza, e siccome dopo l'esplosione sono soggetti alla stessa accelerazione $-g$, dall'informazione che essi arrivano al suolo contemporaneamente deduciamo che subito dopo l'esplosione le loro velocità (lungo y) sono uguali
  $$v_1^{y\prime} = v_2^{y\prime} \tag{15}$$
  (in caso contrario infatti non atterrerebbero allo stesso istante).

  D'altra parte, siccome l'esplosione avviene quando il proiettile è arrivato alla sommità, abbiamo
  $$v^y_{CM}(t_{exp}) = 0 \tag{16}$$
  Pertanto, dalla (30), abbiamo che
  $$0 = m_1 v_1^{y\prime} + m_2 v_2^{y\prime} = (m_1 + m_2)\, v_1^{y\prime}$$
  $$\rightarrow v_1^{y\prime} = v_2^{y\prime} = 0 \tag{17}$$
  Pertanto l'esplosione non intacca il moto lungo y dei due frammenti, e l'andamento nel tempo delle componenti y delle quantità di moto è disegnato in Fig.2.

- *Moto dei due frammenti lungo* x:
  Determiniamo ora le componenti $v_1^{x\prime}$ e $v_2^{x\prime}$ delle velocità dopo l'esplosione. Esse rimarranno costanti nel tempo, dato che i moti lungo x sono rettilinei uniformi.

  – Consideriamo anzitutto il moto del frammento 2. La sua legge oraria dopo l'esplosione
  $$x_2(t) = \underbrace{v^x_{0,CM}\, t_{exp}}_{\text{posiz. all'istante dell'esplosione}} + v_2^{x\prime}(t - t_{exp}) \tag{18}$$

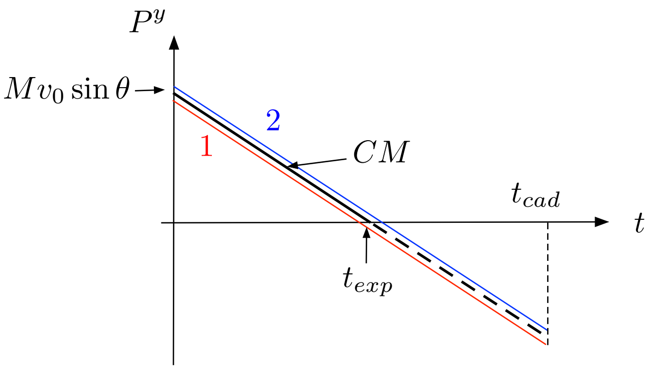

Figure 2: La componente y della quantità di moto totale (curva nera) non si conserva nel tempo perchè la sua componente P^y decresce nel tempo. Tuttavia si conserva attraverso l'esplosione perché varia con continuità in $t = t_{exp}$. In questo caso anche le quantità di moto dei due singoli frammenti (curve rossa e blu) si conservano attraverso l'esplosione.

In particolare, al tempo t_{cad} di caduta, si ha

$$x_{2,cad} = x_2(t_{cad}) = v^x_{0,CM}\, t_{exp} + v_2^{x\prime}(t_{cad} - t_{exp}) \tag{19}$$

Siccome l'esplosione avviene alla sommità della traiettoria, abbiamo

$$t_{exp} = \frac{t_{cad}}{2} \tag{20}$$

Dalla (19) otteniamo dunque

$$x_{2,cad} = (v^x_{0,CM} + v_2^{x\prime})\frac{t_{cad}}{2} \tag{21}$$

da cui

$$\begin{aligned} v_2^{x\prime} &= \frac{2\,x_{2,cad}}{t_{cad}} - v^x_{0,CM} = \\ &= \frac{g\,x_{2,cad}}{v_0 \sin\theta} - v_0\cos\theta \end{aligned} \tag{22}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} v_2^{x\prime} &= \frac{9.81\frac{\cancel{m}}{s^2}\,15\,\mathrm{m}}{12\frac{\cancel{m}}{s}\frac{\sqrt{3}}{2}} - 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\frac{1}{2} = \\ &= \left(\frac{9.81\cdot 5}{2\sqrt{3}} - 6\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8.16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{23}$$

– Per il frammento 1 osserviamo che, dalla (29),

$$v_1^{x\prime} = \frac{1}{m_1}(Mv^x_{0,CM} - m_2 v_2^{x\prime}) \tag{24}$$

Sostituendo la (22) in (24) otteniamo

$$\begin{aligned} v_1^{x\prime} &= \frac{1}{m_1}(Mv^x_{0,CM} - m_2 v_2^{x\prime}) = \\ &= \frac{1}{m_1}\left(Mv_0\cos\theta - m_2\left(\frac{g\,x_{2,cad}}{v_0\sin\theta} - v_0\cos\theta\right)\right) = \\ &= (1 + \frac{2m_2}{m_1})v_0\cos\theta - \frac{m_2}{m_1}\frac{g\,x_{2,cad}}{v_0\sin\theta} \end{aligned} \tag{25}$$

Sostituendo i dati

$$\begin{aligned} v_1^{x\prime} &= \left(1+\frac{2\cdot 0.6\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{0.9\,\cancel{\mathrm{Kg}}}\right)12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{1}{2}-\frac{0.6\,\cancel{\mathrm{Kg}}}{0.9\,\cancel{\mathrm{Kg}}}\frac{9.81\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2}\,15\,\mathrm{m}}{12\frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \left(\frac{7}{3}\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot\frac{9.81\cdot 5}{2\sqrt{3}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{26}$$

La traiettoria dei due frammenti è pertanto quella disegnata in Fig.3.

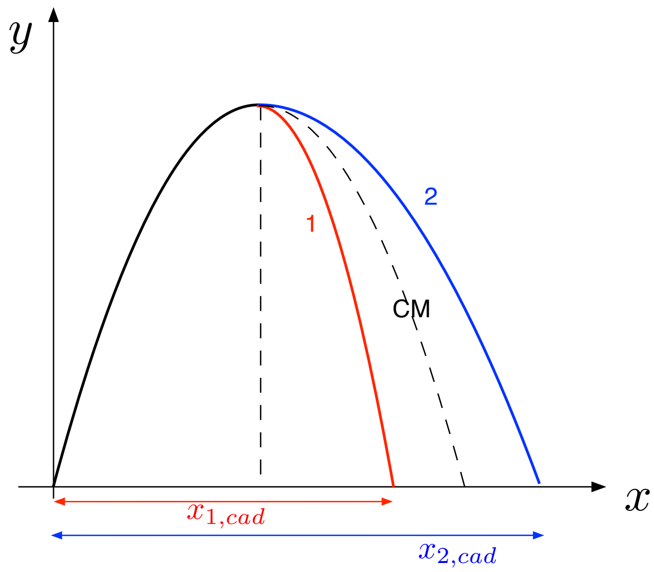

Figure 3: Il moto del centro di massa e dei due frammenti.

4. L'andamento nel tempo delle quantità di moto lungo x è quello in Fig.4. Sia p_1^x che p_2^x subiscono un salto all'istante dell'esplosione e dunque non si conservano attraverso l'urto.

   Se guardiamo invece alla quantità di moto totale $\vec{P}$, essa *non si conserva nel tempo* [come si vede dalla (1)], a causa della forza peso che fa variare nel tempo la componente $P^y(t) = Mv^y_{CM}(t)$ secondo

$$P^y(t) = Mv^y_{CM}(t) = M(v_0\sin\theta - gt) \qquad (P^y \text{ decresce linearmente nel tempo}) \tag{27}$$

   Tuttavia $\vec{P}$ *si conserva attraverso l'esplosione*, nel senso che varia con continuità senza subire salti all'istante dell'esplosione (il C.M. non 'vede' l'esplosione), ossia

$$\underbrace{\vec{P}(t_{exp}-\varepsilon)}_{\text{immediatam. prima}} = \underbrace{\vec{P}(t_{exp}+\varepsilon)}_{\text{immediatam. dopo}} \tag{28}$$

   Indicando con $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$ le velocità dei due frammenti immediatamente *dopo* l'esplosione, l'Eq.(28) in componenti diventa

$$\underbrace{P^x(t_{exp}-\varepsilon)}_{=Mv^x_{0,CM}} = \underbrace{P^x(t_{exp}+\varepsilon)}_{=m_1v_1^{x\prime}+m_2v_2^{x\prime}} \tag{29}$$

$$\underbrace{P^y(t_{exp}-\varepsilon)}_{=Mv^y_{CM}(t_{exp})} = \underbrace{P^y(t_{exp}+\varepsilon)}_{=m_1v_1^{y\prime}+m_2v_2^{y\prime}} \tag{30}$$

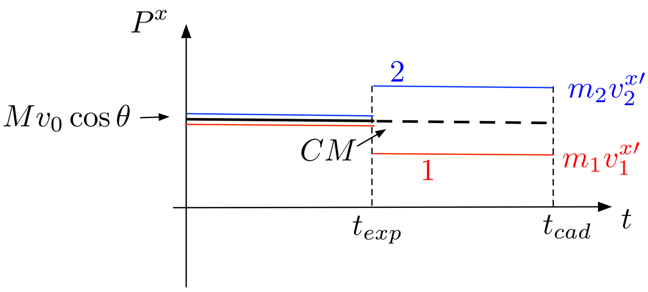

Figure 4: La componente x della quantità di moto totale (curva nera) si conserva nel tempo perchè la forza esterna di gravità non agisce lungo tale direzione. In particolare si conserva attraverso l'esplosione. Al contrario, le quantità di moto dei due singoli frammenti (curve rossa e blu) non si conservano attraverso l'esplosione (in quanto le loro componenti x subiscono un salto al momento dell'esplosione).