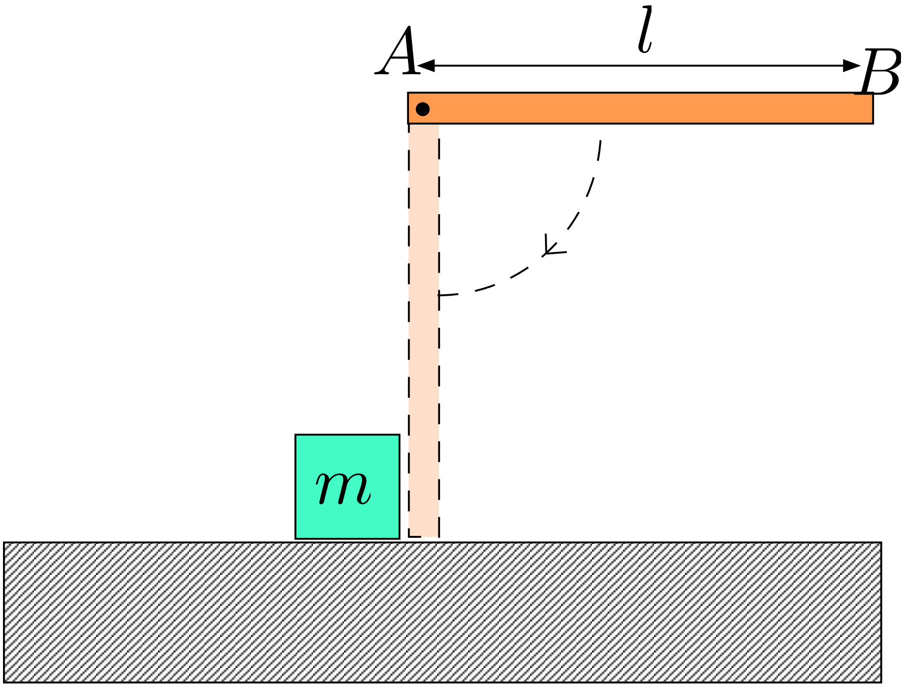
Esercizio (tratto dal Problema 8.29 del Mazzoldi 2)

Un'asta di lunghezza $l = 1.2\,\text{m}$ e massa $M = 0.5\,\text{Kg}$ è incernierata nel suo estremo A ad un perno fisso e può oscillare senza attrito in un piano verticale. All'istante $t = 0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare. Raggiunta la posizione verticale l'asta urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa $m = 0.25\,\text{Kg}$, che parte con velocità orizzontale v_0, mentre l'asta si ferma. Calcolare:

1. la velocità angolare dell'asta un istante prima dell'urto;
2. la velocità v_0;
3. l'energia cinetica dissipata nell'urto;
4. l'impulso durante l'urto.



SOLUZIONE

Si tratta di un problema di **urto vincolato**, dato che nell'urto tra l'asta ed il corpo m l'asta è soggetta al vincolo del perno. Dividiamo schematicamente il moto in tre fasi:

a) prima dell'urto;
b) urto;
c) dopo l'urto

1. Consideriamo la fase a) del moto. In tale fase il punto materiale m è fermo, mentre l'asta è in movimento.

   - Le forze che agiscono sull'asta sono:
     - forza peso (conservativa);
     - reazione vincolare $\vec{R}$ del perno (applicata all'estremo A dell'asta che rimane fermo, quindi $\vec{R}$ *non* compie lavoro e, *per quanto riguarda il bilancio energetico*, è come se non ci fosse

     $$\Delta E_m = W_{\vec{R}} = \int \vec{R} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{=0} = 0$$

   Pertanto ne concludiamo che, in questa prima fase del moto, l'energia meccanica si conserva.

   $$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{1}$$

   - Tale energia meccanica consiste dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.
     - L'energia potenziale si valuta immaginando tutta la massa dell'asta concentrata nel suo baricentro (il centro dell'asta stessa)

       $$E_p = Mgz_{CM} \tag{2}$$

       Se consideriamo come altezza $z = 0$ di riferimento quella del piano in cui giace il punto materiale m abbiamo

       $$\begin{aligned} E_p^{in} &= Mgz_{CM}^{in} = Mgl & (3) \\ E_p^{fin} &= Mgz_{CM}^{fin} = Mg\frac{l}{2} & (4) \end{aligned}$$

     - Energia cinetica si può valutare procedendo in due modi equivalenti.

       * PRIMO MODO
         Il primo modo consiste nel pensare all'asta che ruota come un corpo rigido che ruota attorno ad un estremo (perno). Pertanto l'energia cinetica è data dalla *sola* energia cinetica di rotazione *attorno all'estremo*

         $$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \tag{5}$$

         dove I_p è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al foglio e passante per il perno, e vale

         $$I_p = \frac{1}{3} Ml^2 \tag{6}$$

         mentre ω è la velocità angolare dell'asta (che varia nel tempo).

* SECONDO MODO
  Il secondo modo consiste nel guardare all'asta come un corpo rigido il cui moto è caratterizzato dal moto traslatorio del centro di massa (in tal caso il centro di massa descrive un cerchio) e dal moto rotatorio dell'asta attorno al suo centro di massa (mentre il CM scende l'asta deve ruotare attorno ad esso, proprio per far sì che l'estremo in alto rimanga fisso)

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{7}$$

  dove I_{CM} è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al foglio e passante per il suo centro di massa, e vale

$$I_{CM} = \frac{1}{12}Ml^2 \tag{8}$$

  Si noti che siccome il CM compie esso stesso un moto rotatorio, la velocità v_{CM} del CM è data da

$$v_{CM} = \omega\frac{l}{2} \tag{9}$$

  Inserendo tale espressione in (10) otteniamo

$$K = \frac{1}{2}\left(M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I_{CM}\right)\omega^2 \tag{10}$$

* E' facile vedere che il risultato (10) coincide con (5). Osserviamo infatti che, per il teorema di Huygens-Steiner riguardante i momenti d'inerzia, abbiamo

$$I_p = M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I_{CM} \tag{11}$$

  dato che $l/2$ è la distanza tra il perno ed il centro di massa.

Pertanto abbiamo

$$K^{in} = 0 \tag{12}$$

$$K^{fin} = \frac{1}{2}I_p\omega_-^2 \tag{13}$$

dove con ω_- abbiamo indicato la velocità angolare immediatamente prima dell'urto, ossia la velocità angolare finale per questa prima fase.

Applicando dunque la conservazione dell'energia meccanica (1) abbiamo

$$E_m^{in} = E_m^{fin} \tag{14}$$

$$Mgl = Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I_p\omega_-^2 \tag{15}$$

$$Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I_p\omega_-^2 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{Mgl}{I_p}} \tag{17}$$

Utilizzando la (6) otteniamo

$$\begin{aligned}\omega_- &= \sqrt{\frac{Mgl}{I_p}} = \\ &= \sqrt{\frac{Mgl}{\frac{1}{3}Ml^2}}\end{aligned} \tag{18}$$

e dunque

$$\omega_- = \sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{19}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned}\omega_- &= \sqrt{\frac{3 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1.2\,\mathrm{m}}} = \\ &= 4.95\,\mathrm{s}^{-1}\end{aligned} \tag{20}$$

2. Consideriamo ora l'urto.

   - L'energia non è conservata nell'urto, dato che il problema non precisa esplicitamente che si tratti di urto elastico. Al contrario, al punto 3., il problema chiede di calcolare l'energia cinetica dissipata;

   - Consideriamo la quantità di moto del sistema asta + punto. Tale sistema *non* è un sistema isolato. Infatti l'asta è vincolata al perno, ed è anche soggetta alla forza peso. La reazione vincolare $\vec{R}$ del perno e la forza peso $M\vec{g}$ sono forze esterne al sistema asta + punto. In conseguenza di ciò, la quantità di moto *non* è conservata.

   - Consideriamo il momento angolare del sistema asta + punto rispetto al polo=punto A. Il momento angolare varia secondo la legge

     $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e \tag{21}$$

     dove $\vec{M}^e$ è il momento delle forze esterne al sistema, che nel nostro caso sono la reazione vincolare $\vec{R}$ e la forza peso $m\vec{g}$.

     La reazione vincolare $\vec{R}$ non esercita alcun momento (perchè ha braccio nullo rispetto a tale polo)

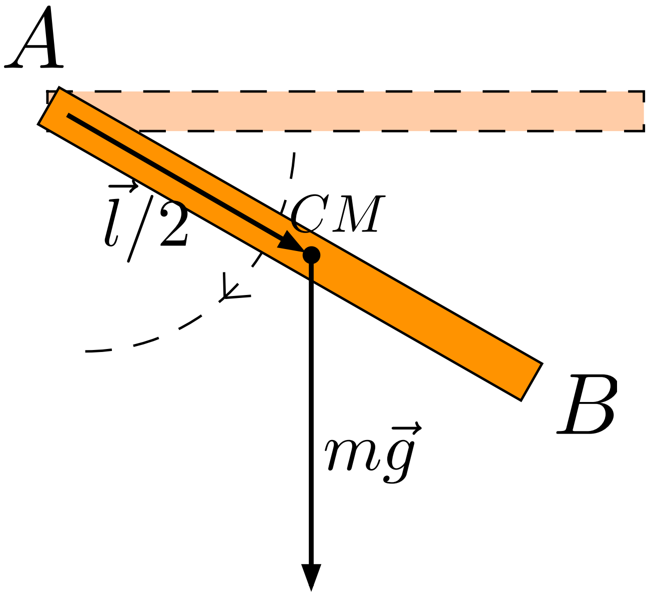
     $$\vec{M}_{perno} = \underbrace{\vec{r}}_{=0} \times \vec{R} = 0$$

     e dunque non influisce sul momento angolare.

     Tuttavia la forza peso, che è applicata al baricentro dell'asta, situato a $\vec{l}/2$ rispetto al polo A, esercita un momento sull'asta, e dunque cambia in generale il momento angolare

     $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{peso} = \frac{\vec{l}}{2} \times m\vec{g}$$

     Pertanto, *in generale* il momento angolare $\vec{L}$ del sistema asta + punto varia nel tempo e dunque *non* si conserva.



Osserviamo tuttavia che l'urto avviene quando l'asta si trova in posizione verticale. Precisamente in questa particolare posizione il momento $\vec{M}_{peso}$ della forza peso si annulla, dato che il braccio $\vec{l}/2$ e la forza peso $m\vec{g}$ sono paralleli (entrambi diretti verso il basso). Pertanto, all'istante dell'urto (e solo in tale istante) il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema è nullo, e dunque il momento angolare $\vec{L}$ si conserva istantaneamente nell'urto, ossia

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{t=t_{\rm urto}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_{prima} = \vec{L}_{dopo} \tag{22}$$

Utilizziamo dunque questa legge di conservazione per determinare la velocità del punto materiale dopo l'urto.

- Dato che il moto (sia dell'asta che del punto materiale) avviene lungo il piano verticale, il momento angolare $\vec{L}$ è diretto nella direzione perpendicolare al foglio. Denotiamo con $\hat{k}$ il versore entrante nel foglio. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{prima} &= \vec{L}_{dopo} && (23)\\
&\Downarrow \\
\vec{L}^{asta}_{prima} + \vec{L}^{punto}_{prima} &= \vec{L}^{asta}_{dopo} + \vec{L}^{punto}_{dopo} && (24)\\
&\Downarrow \\
I_p\omega_-\,\hat{k} \;+\; 0 &= 0 \;+\; lmv_0\hat{k} && (25)\\
&\Downarrow \\
I_p\omega_- &= lmv_0 && (26)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{I_p\omega_-}{ml} = \\
&= \frac{1}{3}\frac{Ml^2\sqrt{\frac{3g}{l}}}{ml} = \\
&= \frac{M}{3m}l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \\
&= \frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}} && (27)
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{0.5\,\mathrm{\cancel{K}g}}{0.25\,\mathrm{\cancel{K}g}}\sqrt{\frac{9.81\,\cdot\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,1.2\,\mathrm{m}}{3}} = \\ &= 3.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{28}$$

3. Calcoliamo ora l'energia cinetica dissipata nell'urto, ossia

$$\Delta K = K_{dopo} - K_{prima} \tag{29}$$

dove

- L'energia cinetica prima dell'urto è solo dovuta all'asta (dato che il punto materiale è fermo)

$$K_{prima} = \frac{1}{2} I_p \omega_-^2 \tag{30}$$

- L'energia cinetica dopo l'urto è solo dovuta al punto materiale (dato che l'asta rimane ferma in verticale)

$$K_{dopo} = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{31}$$

Pertanto l'energia dissipata vale

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_{dopo} - K_{prima} = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} I_p \omega_-^2 = \\ & \quad [\text{uso ora (27) e (19)}] \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M l^2 \cdot \frac{3g}{l} = \\ &= \frac{1}{6} M \cdot \frac{M}{m} g l - \frac{1}{2} \cdot M g l = \\ &= \frac{1}{2} M g l \left(\frac{M}{3m} - 1 \right) \end{aligned} \tag{32}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} 0.5\,\mathrm{Kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.2\,\mathrm{m} \left(\frac{0.5\,\mathrm{Kg}}{3 \cdot 0.25\,\mathrm{Kg}} - 1 \right) = \\ &= -0.98\,\mathrm{Kg\,m^2/s^2} = \\ &= -0.98\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{33}$$

Tale variazione *negativa* di energia implica che l'energia cinetica dopo l'urto è minore di quella prima dell'urto, ossia l'energia si è dissipata nell'urto.
Si noti anche che l'energia potenziale rimane inaltertata attraverso l'urto.

4. L'impulso sviluppato nell'urto è pari alla variazione della quantità di moto

$$J = p_{dopo} - p_{prima} \tag{34}$$

dove

- L'impulso prima dell'urto è dovuto alla sola asta, ed è data dalla quantità di moto del centro di massa dell'asta. E' diretto verso sinistra, ed in modulo è pari a

$$\begin{aligned} p_{prima} &= Mv_{CM} = M\omega_{-}\frac{l}{2} = \\ &\quad \text{uso (19)} \\ &= M\sqrt{\frac{3g}{l}}\frac{l}{2} = \\ &= \frac{M}{2}\sqrt{3gl} \end{aligned} \tag{35}$$

- L'impulso dopo l'urto è dovuto al solo punto materiale. E' diretto verso sinistra e in modulo vale

$$\begin{aligned} p_{dopo} &= mv_0 = \\ &\quad [\text{uso (27)}] \\ &= m\frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}} = \\ &= \frac{M}{3}\sqrt{3gl} \end{aligned} \tag{36}$$

Pertanto l'impulso vale

$$\begin{aligned} J &= p_{dopo} - p_{prima} = \\ &= \frac{M}{3}\sqrt{3gl} - \frac{M}{2}\sqrt{3gl} = \\ &= -\frac{M}{6}\sqrt{3gl} \end{aligned} \tag{37}$$

Sostituendo i valori, vale

$$\begin{aligned} J &= -\frac{0.5\,\mathrm{Kg}}{6}\sqrt{3 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.2\,\mathrm{m}} = \\ &= -0.50\,\mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{38}$$

E' dunque diretto nella direzione opposta a quella di p_{prima} e p_{dopo}, ossia è diretto verso destra. Tale impulso è quella parte di quantità di moto iniziale che viene assorbita dal perno.