

Induzione magnetica

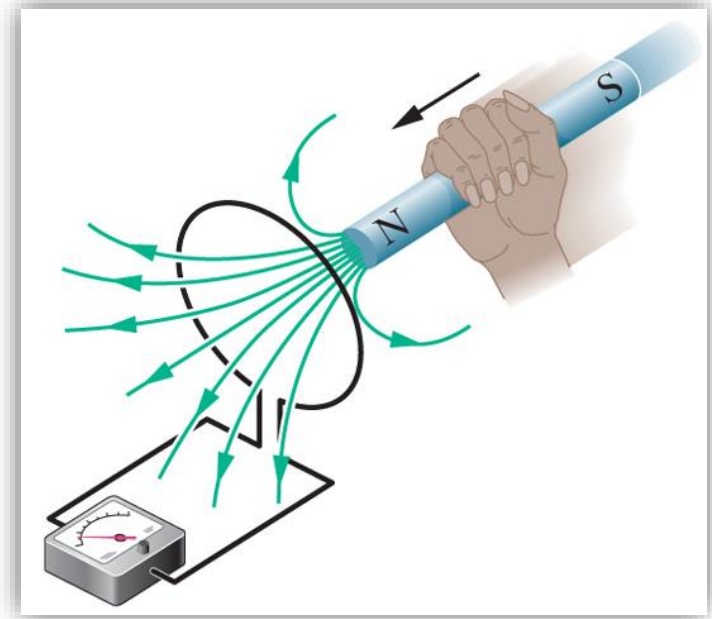


Michael Faraday
(Southwark, UK,
1791 – 1867)

- ✓ La scoperta di Oersted (1820) che correnti elettriche, e dunque campi elettrici, sono in grado di generare campi magnetici fu sbalorditiva
- ✓ altrettanto sorprendente fu scoprire che è vero anche il viceversa, ovvero che i **campi magnetici sono in grado di generare campi elettrici e quindi correnti elettriche**
- ✓ Il legame tra campo magnetico e campo elettrico da questo generato è descritto dalla **legge di Faraday sull'induzione magnetica o elettromagnetica** (1831)
- ✓ L'induzione magnetica è alla base di moltissime **applicazioni industriali**, e anche di molti **strumenti elettronici di uso comune**: dalla chitarra elettrica ai generatori elettrici, dalle piastre da cucina ai grandi forni ad induzione delle fonderie

Aspetti fenomenologici dell'induzione

- 1) Consideriamo una spira isolata, con un amperometro inserito per misurare corrente; non c'è generatore né corrente nella spira
 - 2) Avviciniamo un magnete in modo che le linee di campo del magnete entrino nella spira: l'amperometro segna una corrente nel circuito
 - 3) Manteniamo il magnete immobile vicino alla spira: la corrente cessa
 - 4) Allontaniamo il magnete dalla spira: compare una corrente di verso opposto.
- ✓ **si genera corrente solo se spira e magnete sono in moto relativo**, ovvero se uno dei due si muove rispetto all'altro; se sono fermi non succede nulla
 - ✓ un **moto più veloce produce corrente più intensa**
 - ✓ se ripetiamo l'esperimento invertendo il verso del magnete (col polo sud più vicino alla spira) la corrente nella spira si inverte
 - ✓ La corrente che compare nella spira è detta **corrente indotta**, la d.d.p. è detta **forza elettromotrice indotta**, e il fenomeno **induzione elettromagnetica**



Flusso del campo magnetico

- ✓ Faraday capì che la corrente indotta nella spira è generata dalla **variazione nel tempo dell'intensità del campo magnetico che attraversa la spira**, ovvero dalla **variazione nel tempo del numero di linee di forza che attraversano l'area della spira**
- ✓ Dunque, **non conta l'intensità del campo**, ma il **fatto che questo vari nel tempo**; quanto più rapida è questa variazione, tanto più forte la corrente indotta
- ✓ Il campo magnetico attraverso la spira è quantificato dal **FLUSSO**, che dà il numero di linee di campo che attraversano la superficie della spira:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{flusso del campo magnetico attraverso la superficie A}$$

- ✓ Nel caso più semplice di una spira piana di area A , e di un campo uniforme su tutti i punti della superficie e perpendicolare alla superficie:

$$\Phi_B = BA$$

- ✓ L'unità di misura del flusso magnetico è il Weber (Wb): $Wb = T m^2$

Legge di Faraday

- ✓ **La variazione nel tempo del flusso magnetico attraverso l'area della spira induce nella spira una forza elettromotrice uguale alla derivata del flusso rispetto al tempo, cambiata di segno**

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

- ✓ Generare una f.e.m. nel circuito chiuso equivale ad inserire nel circuito una batteria; è come se **la variazione del flusso facesse magicamente apparire una batteria** lungo la spira in grado di far circolare corrente !
- ✓ Il segno (-) nella legge di Faraday indica che la **corrente indotta si oppone all'aumento del flusso (legge di Lenz)**
- ✓ Se invece di una singola spira si ha una **bobina con N spire**, le f.e.m. indotte su ciascuna spira si sommano come N batterie collegate in serie; per cui **la f.e.m. totale indotta nella bobina è**

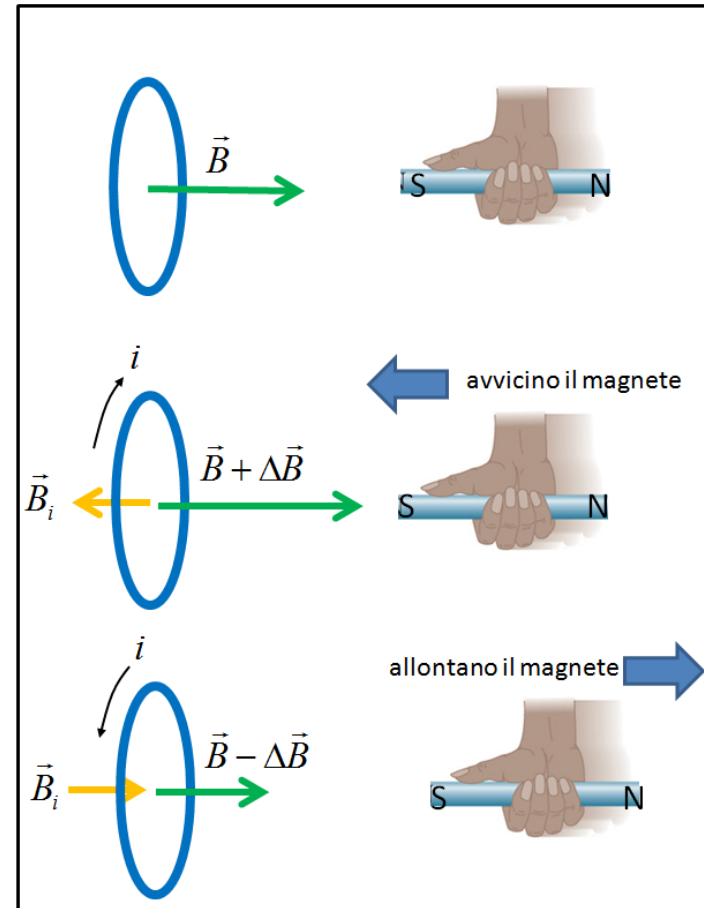
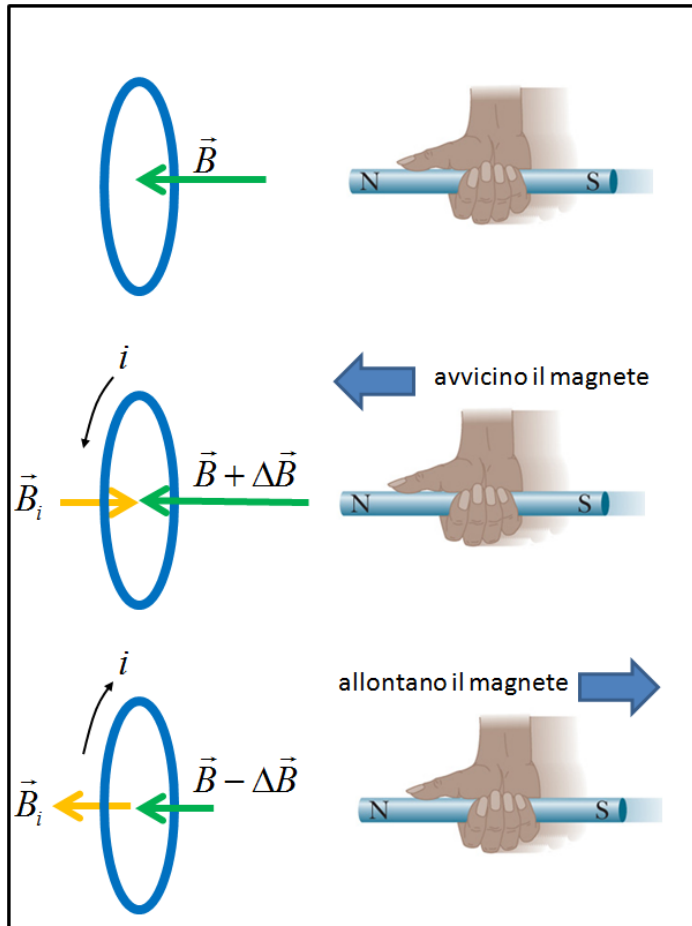
$$\mathcal{E} = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Si noti che vi sono diversi modi per far variare il flusso attraverso la spira:

- ✓ Utilizzando un campo **B** variabile nel tempo
- ✓ Variando l'area o deformando la spira se essa è deformabile
- ✓ Se **B** è non uniforme variando la posizione della spira rispetto al campo
- ✓ Ruotando la spira, in modo che cambi l'angolo tra **B** e **dA**

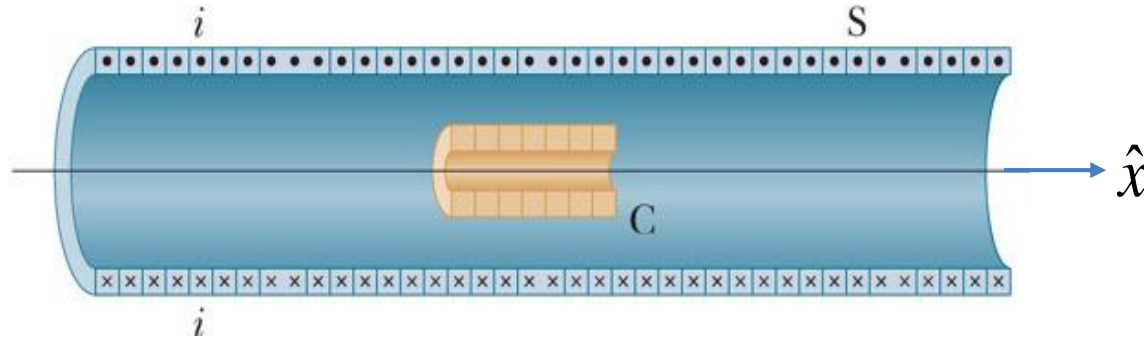
Legge di Lenz

- ✓ Avvicinandosi o allontanandosi dalla spira, il campo \vec{B} prodotto dal magnete nel piano della spira aumenta o diminuisce di una quantità che chiamiamo $\Delta\vec{B}$
- ✓ La legge di Lenz ci dice che la corrente i indotta nella spira ha verso tale che il campo magnetico \vec{B}_i generato dalla corrente è sempre opposto a $\Delta\vec{B}$ (Heinrich Friedrich Lenz, 1834)



Problema 30.1

- ✓ Consideriamo un **solenoido ideale** con $n=200$ spire/cm, percorso da corrente $i_0=5$ A, il cui verso è indicato in figura; la corrente nel solenoide viene diminuita linearmente nel tempo, fino a diventare nulla dopo un tempo $\Delta t=40$ ms; nel centro del solenoide è inserita una **bobina di sezione circolare** con $N=100$ spire, e diametro $d=2$ cm;
- ✓ calcolare la f.e.m. indotta nella bobina mentre la corrente del solenoide varia, ed il verso della corrente indotta nella bobina



Nel solenoide ideale il campo è (il verso è lungo l'asse x positivo):

$$\vec{B} = \mu_0 i n \hat{x}$$

La corrente del solenoide viene ridotta linearmente nel tempo, per cui varia secondo la legge:

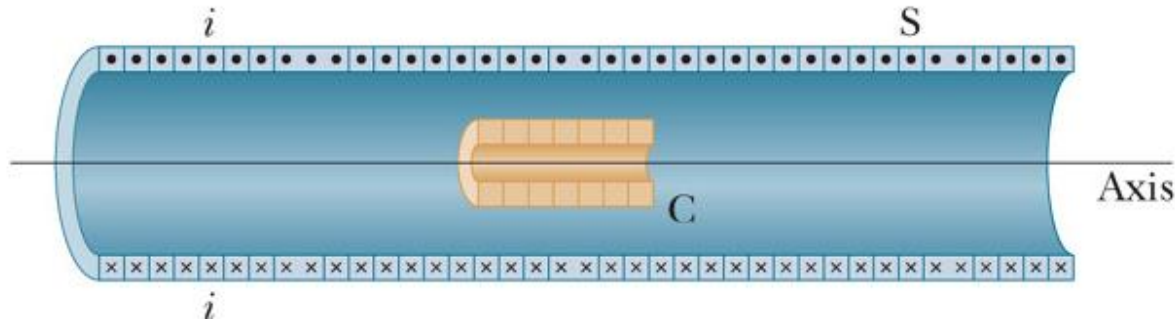
$$i(t) = i_0 - ct$$

La corrente deve annullarsi dopo un tempo Δt per cui:

$$c = \frac{i_0}{\Delta t} \Rightarrow i(t) = i_0 \left[1 - \frac{t}{\Delta t} \right]; \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{i_0}{\Delta t}$$

Problema 30.1

$n=200$ spire/cm; $i_0=5$ A; $N=100$ spire; $d=2$ cm; $\Delta t=40$ ms



Essendo B perpendicolare all'area A della bobina, il flusso di B attraverso l'area è:

$$\Phi_B = BA = B \pi cm^2$$

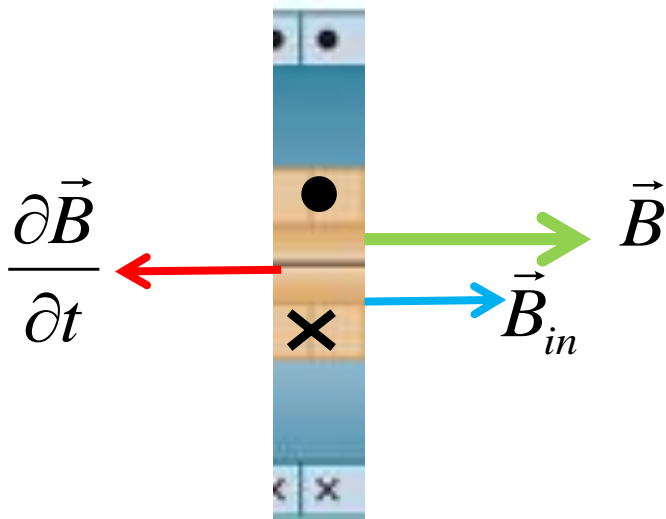
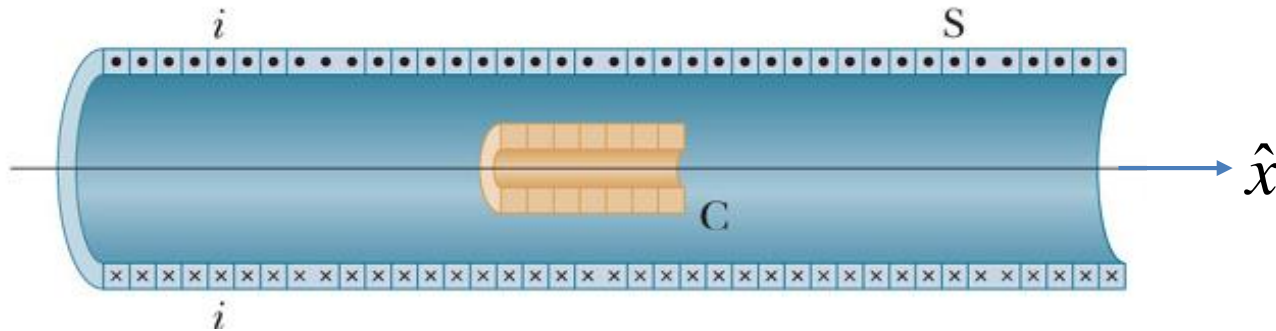
Dalla legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -NA \frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 n NA \frac{\partial i}{\partial t} = \mu_0 n NA \frac{i_0}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A} \frac{2 \times 10^4}{m} 100 \times \pi \times 10^{-4} m^2 \frac{5A}{40 \times 10^{-3} s} = \pi^2 \times 10^{-2} \frac{Tm^2}{s} = \pi^2 \times 10^{-2} V$$

$$T \frac{m^2}{s} = \frac{N}{Am} \frac{m^2}{s} = \frac{J}{As} = \frac{J}{C} = V$$

Problema 30.1



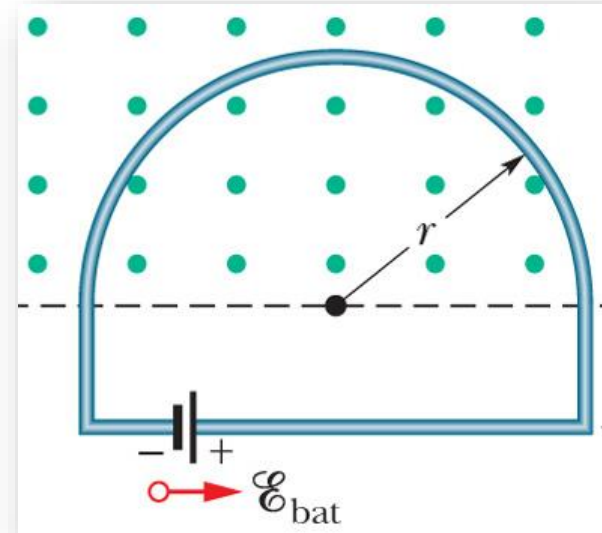
- ✓ \vec{B} è diretto verso l'asse x positivo, ma la corrente del solenoide decresce col tempo, dunque $d\vec{B}/dt$ è diretto in senso opposto; per la legge di Lenz, la corrente nella bobina deve scorrere in verso tale da generare un campo indotto \vec{B}_{in} che si opponga alla variazione del campo esterno; dunque \vec{B}_{in} è concorde con \vec{B} ed opposto a $d\vec{B}/dt$.
- ✓ Si noti un altro modo per leggere la legge di Lenz: poiché la **corrente del solenoide diminuisce nel tempo, la corrente indotta nella bobina fluisce nello stesso verso in modo da compensarne la riduzione**

Problema 30.2

In figura vediamo una spira di resistenza R connessa ad una batteria; la spira è formata da un semicerchio di raggio r e 3 tratti rettilinei; il semicerchio è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} variabile nel tempo, perpendicolare e uscente dal piano

$$\mathcal{E}_{bat} = 1V; R = 2\Omega; r = 10cm; B = (4t^2 + 2t + 3)T$$

a) Calcolare la f.e.m. indotta ed il verso della relativa corrente indotta nella spira all'istante $t=10$ s



Il flusso magnetico attraverso il semicerchio è: $\Phi_B = BA = B \frac{\pi r^2}{2}$

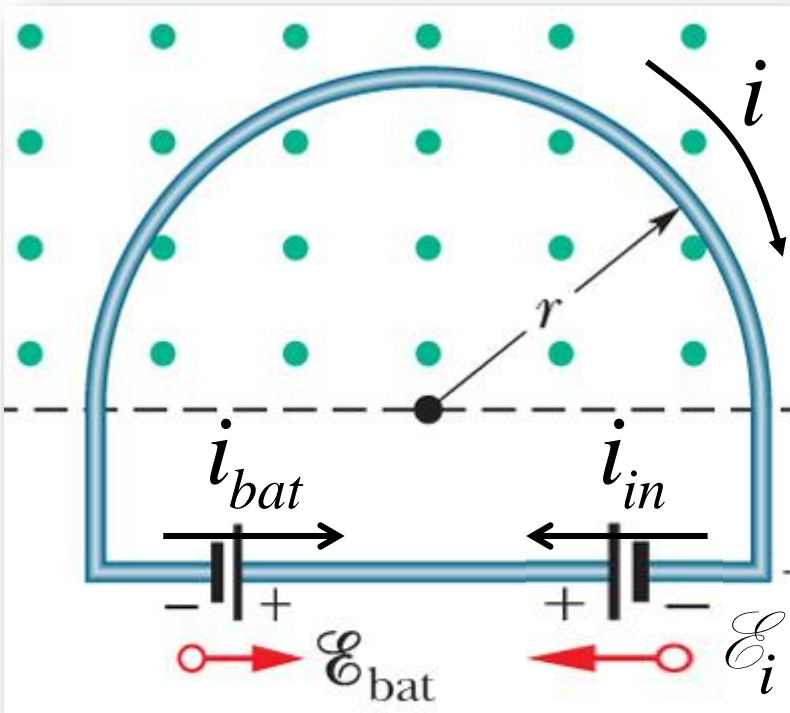
La f.e.m. indotta:
$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial B(t)}{\partial t} \frac{\pi r^2}{2} = -(8t + 2) \frac{T}{s} \frac{\pi r^2}{2}$$

All'istante $t=10$ s:
$$\mathcal{E}_i = -(80 + 2) \frac{T}{s} \frac{\pi \times 10^{-2} m^2}{2} = -0.41 \pi V = -1.29V$$

\mathbf{B} è uscente dalla pagina e la sua variazione $d\mathbf{B}/dt$ positiva; dunque i_{in} deve **circolare in senso orario**, in modo da generare un campo indotto che si opponga alla variazione di \mathbf{B}

Problema 30.2

b) Calcolare la corrente totale nella spira all'istante $t=10$ s



- ✓ La variazione del flusso magnetico genera quindi una f.e.m. indotta (e dunque una 'batteria indotta') il cui verso è opposto a quello della batteria reale inserita nel circuito
- ✓ Supponiamo il verso della corrente totale i orario, come indicato in figura, e risolviamo l'equazione di Kirchhoff:

$$\mathcal{E}_{in} - \mathcal{E}_{bat} = R i \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}_{in} - \mathcal{E}_{bat}}{R}$$

$$i = \frac{0.29V}{2\Omega} = 0.145A$$

$$\mathcal{E}_{bat} = 1V; \quad \mathcal{E}_i = 1.29V$$

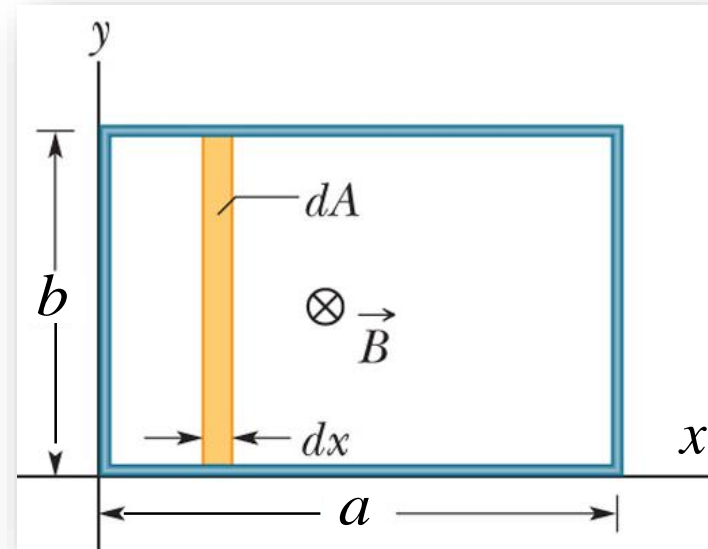
- ✓ la f.e.m. indotta è più forte di quella della batteria reale, per cui impone alla corrente il suo verso di percorrenza

Problema 30.3

La spira rettangolare in figura di lati a e b giace in un campo magnetico non uniforme e variabile nel tempo, perpendicolare alla pagina, di verso entrante

$$a = 3\text{ m} \quad b = 2\text{ m} \quad B = (4x^2t^2)\text{ T}$$

Calcolare la f.e.m. indotta ed il verso della corrente indotta nella spira all'istante $t = 0.1\text{ s}$



$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B dA = 4t^2 \int_0^a dx x^2 \int_0^b dy = \left(4t^2 \frac{a^3}{3} b \right) \text{ Tm}^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_i = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \frac{8}{3} t a^3 b \frac{\text{Tm}^2}{\text{s}} = - \frac{8}{3} t a^3 b \text{ V}$$

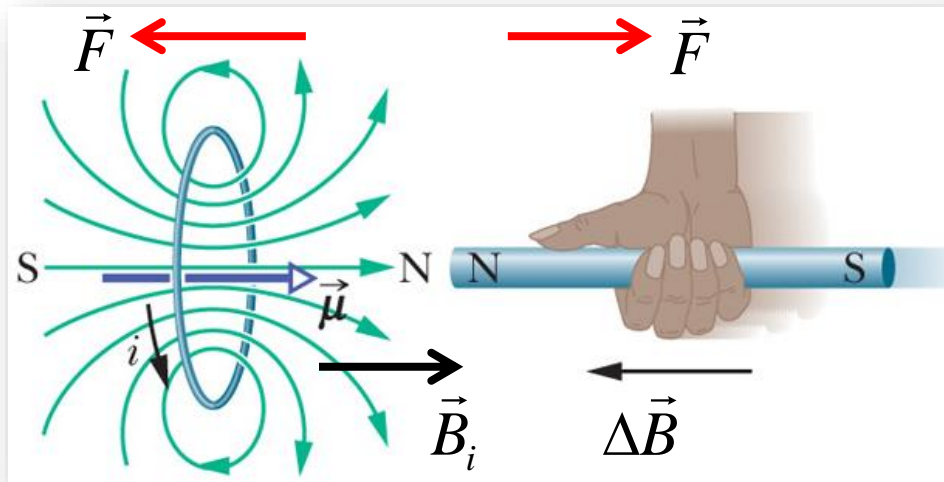
Per $t=0.1\text{ s}$ (tralasciamo il segno -): $\mathcal{E}_i = \left[(8/3) \times 0.1 \times 27 \times 2 \right] \text{ V} = 14.4 \text{ V}$

Poiché \vec{B} è entrante nella pagina e la sua variazione nel tempo positiva, anche $\Delta \vec{B}$ è entrante; dunque il campo indotto deve essere uscente dalla pagina, e la **corrente indotta deve circolare in senso antiorario**

Induzione e trasferimento di energia

- ✓ Se **avviciniamo** la barra magnetica alla spira sentiamo una **forza repulsiva** che tende a repellere la barra e la spira: dobbiamo **applicare una forza** e dunque **spendere una certa energia** per avvicinare spira e barra magnetica
- ✓ Se **allontaniamo** la barra magnetica dalla spira sentiamo una **forza attrattiva** che tende ad avvicinare la barra e la spira: dobbiamo **applicare una forza** e dunque **spendere energia** per allontanarle

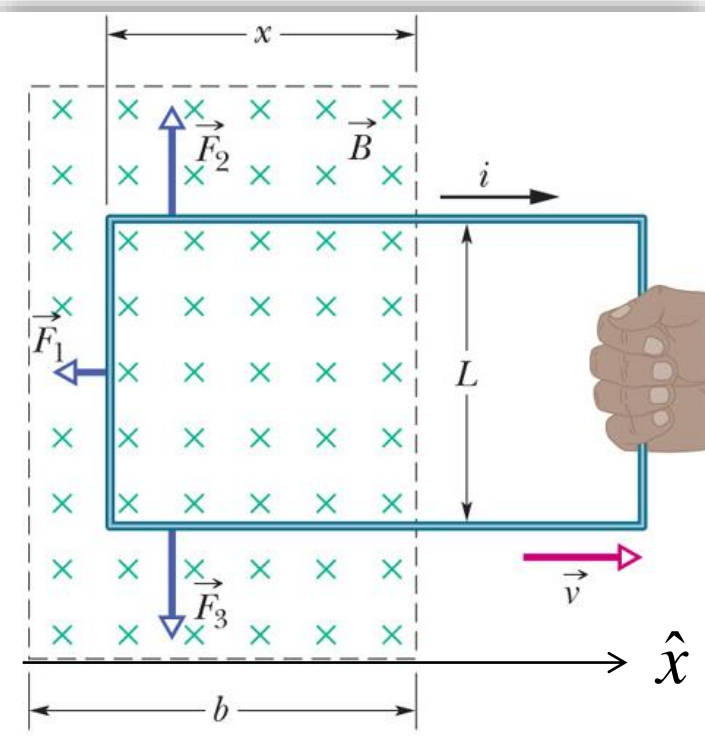
A cosa è dovuta questa necessità di esercitare forza dall'esterno e spendere energia per spostare il magnete ?



- ✓ **la spira** (se non superconduttiva) **ha una propria resistenza**, dunque far circolare corrente indotta richiede un'**energia termica (effetto Joule)** da **spendere nel circuito**
- ✓ una corrispondente quantità di **energia meccanica** deve dunque essere fornita dall'esterno

Calcolare questa energia nel caso in figura, in cui è presente un campo magnetico non uniforme, è complicato; consideriamo un caso più semplice

Induzione e trasferimento di energia



- ✓ consideriamo un campo \mathbf{B} uniforme entrante nella pagina all'interno della regione tratteggiata, ed una spira rettangolare immersa nel campo, di resistenza R
- ✓ estraiamo la spira dal campo muovendola con velocità v costante; durante l'estrazione, il flusso magnetico attraverso la spira ovviamente diminuisce
- ✓ se x è la porzione di lato orizzontale della spira immersa nel campo, si ha:

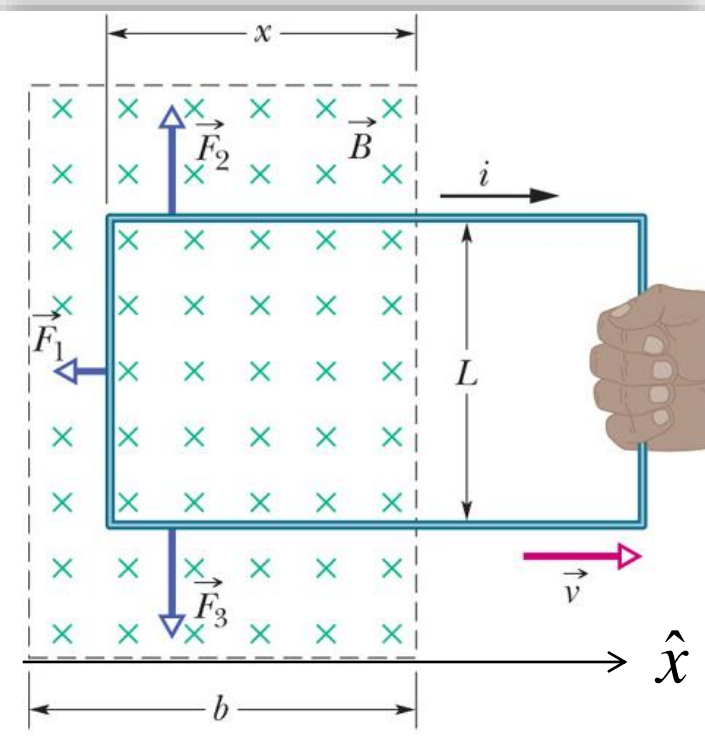
$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B dA = BLx$$

Per v costante: $x = b - vt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -BLv$

la corrente indotta deve generare un campo \mathbf{B}_i che compensa la diminuzione del flusso, dunque concorde con \mathbf{B} ; ne segue che i circola in senso orario, come in figura

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = BLv; \quad i = \frac{BLv}{R}$$

Induzione e trasferimento di energia



- ✓ A seguito della corrente indotta, sui lati della spira immersi nel campo si generano forze di Lorentz; sui lati orizzontali le forze sono uguali ed opposte in verso, dunque possiamo limitarci a considerare soltanto la forza sul lato verticale \mathbf{F}_1 :

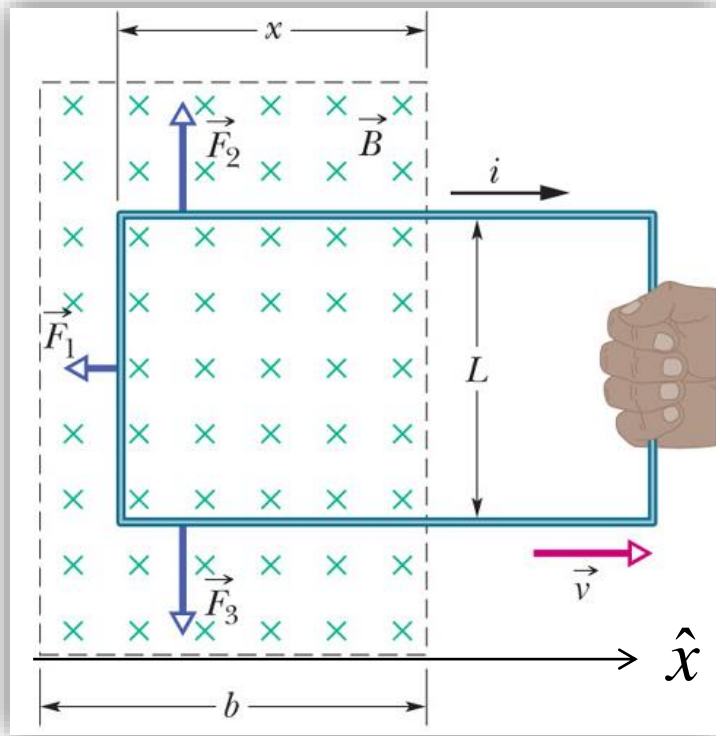
$$\vec{F}_1 = -iLB \hat{x} = -\frac{L^2 B^2 v}{R} \hat{x}$$

- ✓ Dunque, appena iniziamo ad estrarre la spira, si genera la forza \mathbf{F}_1 che cerca di risucchiare la spira all'interno del campo (si noti che \mathbf{F}_1 è costante, essendo v costante)

- ✓ Per estrarre la spira dal campo è necessario applicare una forza uguale in modulo ed opposta in verso ad \mathbf{F}_1 ; il lavoro meccanico necessario ad estrarre un tratto dx della spira è:

$$dL = F_1 dx$$

Induzione e trasferimento di energia



- ✓ Calcoliamo quindi la potenza meccanica necessaria ad estrarre la spira (sfruttiamo il fatto che \mathbf{F}_1 non varia nel tempo):

$$P = \frac{dL}{dt} = F_1 \frac{dx}{dt} = F_1 v = \frac{L^2 B^2 v^2}{R}$$

- ✓ Calcoliamo la potenza dissipata sulla spira in energia termica:

$$P = i^2 R = \frac{L^2 B^2 v^2}{R}$$

- ✓ Come volevasi dimostrare: la **potenza dissipata in energia termica dalla corrente indotta è uguale alla potenza meccanica che si deve spendere per estrarre la spira dal campo magnetico**
- ✓ Se invece di essere estratta dalla regione di campo la **spira viene inserita**, il flusso del campo aumenta e la corrente cambia verso, così come \mathbf{F}_1 , per cui la **spira viene respinta dalla forza di Lorentz**; i valori assoluti della forza e la potenza ovviamente restano invariati

Il campo elettrico indotto

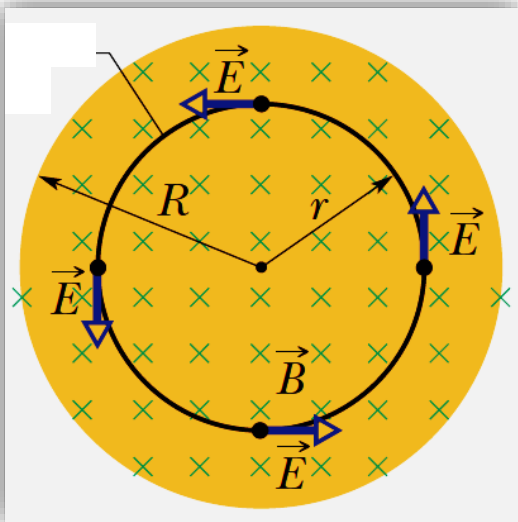
- ✓ Se un campo magnetico variabile nel tempo genera una f.e.m. in un circuito conduttore attraversato dal flusso, **deve anche esistere un campo elettrico indotto \vec{E}** che muove le cariche nel circuito
- ✓ La **f.e.m. indotta nel circuito** non è altro che **il lavoro del campo elettrico indotto, necessario a far circolare la carica unitaria**
- ✓ se V_+ e V_- sono i poli della '**batteria indotta**', la f.e.m. è:

$$\mathcal{E} = V_+ - V_- = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- ✓ La legge di Faraday si può quindi riscrivere*: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$
- ✓ Ovvero **un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico indotto la cui circuitazione** attorno ad un qualsiasi circuito chiuso attraversato dal flusso magnetico **è uguale a meno la derivata rispetto al tempo del flusso magnetico che attraversa il circuito**
- ✓ Il campo elettrico indotto **esiste a prescindere dalla presenza di un conduttore**: nello spazio vuoto o in assenza di cariche mobili non ci può essere corrente indotta, ma il **campo elettrico generato per induzione magnetica esiste comunque !**

*se la variazione di flusso è dovuta allo spostamento della spira, anche la forza di Lorentz compie lavoro e contribuisce alla f.e.m., per cui le formule diventano più complesse

Il campo elettrico indotto dal campo magnetico uniforme in simmetria cilindrica



- ✓ Calcoliamo il campo elettrico indotto in un caso semplice di alta simmetria: il **solenoido ideale**
- ✓ nel **volume cilindrico di raggio R** (la cui sezione è disegnata in giallo) è presente un **campo magnetico uniforme** perpendicolare alla pagina di verso entrante; sia $B(t)$ variabile nel tempo
- ✓ Consideriamo un cerchio di raggio r **interno al cilindro**; la variazione del campo genera una f.e.m. lungo il cerchio; supponendo $dB/dt > 0$, per Lenz la f.e.m. indotta deve avere verso antiorario

- ✓ In queste condizioni, possiamo ipotizzare che il **campo elettrico abbia simmetria cilindrica**, ovvero giaccia nel piano perpendicolare al campo e **dipenda unicamente da r**
- ✓ Inoltre deve essere **tangenziale al cerchio in ogni punto***, ed avere verso concorde con la f.e.m. indotta; dalla legge di Faraday si ricava (tralasciamo il segno -):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r) = \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} r$$

*per simmetria, il campo elettrico potrebbe anche essere tangenziale al raggio, ma in tal caso dovrebbero esserci cariche lungo l'asse del solenoide, come conseguenza della legge di Gauss

Il campo elettrico indotto dal campo magnetico uniforme in simmetria cilindrica

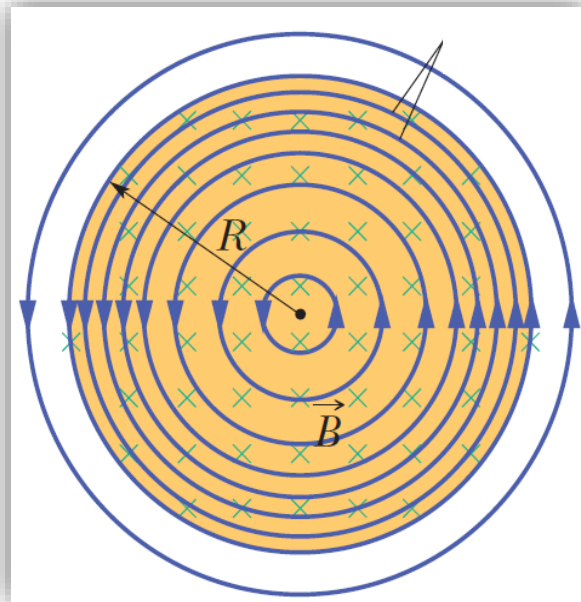
- ✓ Essendo B uniforme, si ricava che all'interno del solenoide **l'intensità del campo elettrico indotto cresce linearmente con r**
- ✓ Le linee di flusso di \mathbf{E} sono **cerchi concentrici con l'asse del cilindro**, ed il verso delle linee è dettato dalla legge di Lenz
- ✓ poiché l'intensità del campo indotto cresce con r , i **cerchi si addensano** allontanandosi dal centro
- ✓ Applichiamo la legge di Faraday al calcolo del campo elettrico indotto in un punto r **esterno al volume cilindrico** (tralasciando il segno -):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r) = \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$$

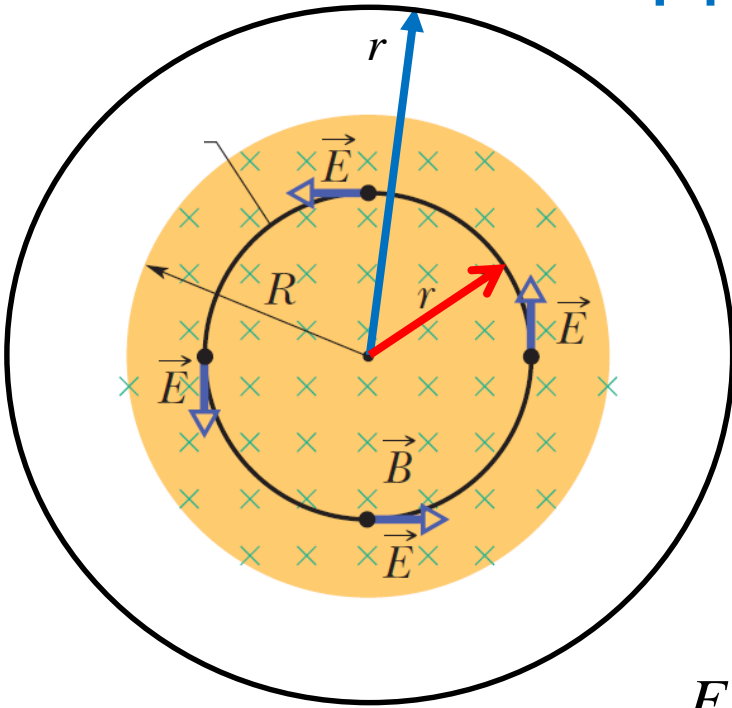
L'intensità del campo è quindi:

$$E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{r}$$

- ✓ benché il campo magnetico sia nullo, il **campo elettrico indotto esiste anche al di fuori del solenoide**, ma **l'intensità decresce** in modo inversamente proporzionale ad r



Problema 30.4

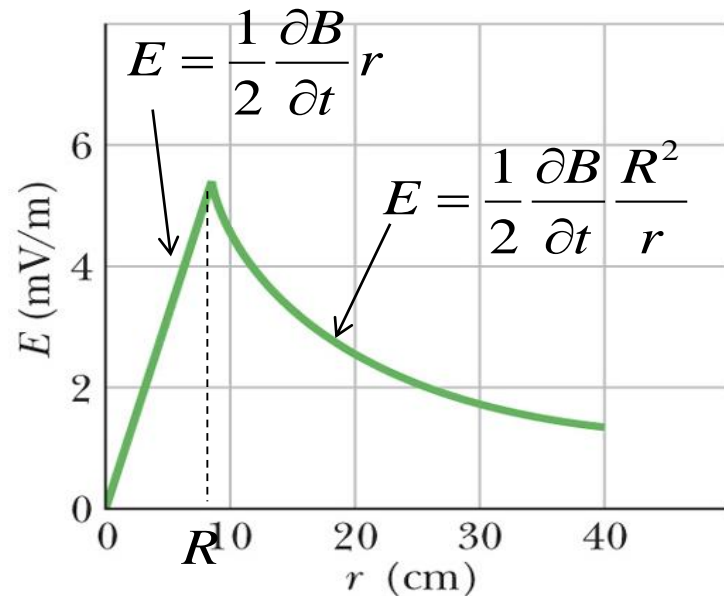


- ✓ Consideriamo un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}(t)$ variabile nel tempo all'interno di un solenoide ideale di raggio $R = 8 \text{ cm}$, perpendicolare alla pagina, di verso entrante; sia $d\mathbf{B}(t)/dt = 0.1 \text{ T/s}$

- ✓ Calcolare il campo elettrico per $r = 5 \text{ cm}$

Essendo \mathbf{B} uniforme ed r interno al volume cilindrico (freccia rossa):

$$E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} r = \frac{1}{2} 0.1 \frac{\text{T}}{\text{s}} \times 5 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.5 \times 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



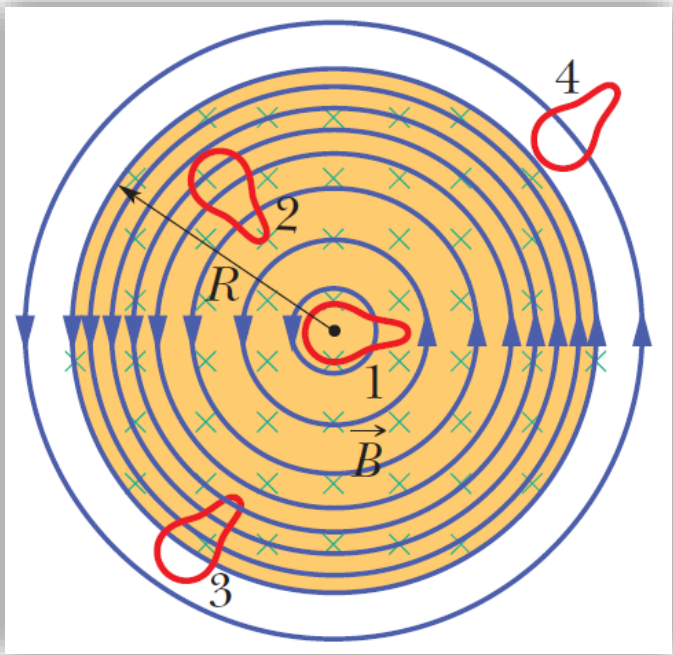
- ✓ Calcolare il campo elettrico in $r = 12 \text{ cm}$ (fuori dal cilindro, freccia blu)

$$E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{r} = \frac{1}{2} 0.1 \frac{\text{T}}{\text{s}} \frac{64 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{12 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$= 2.7 \times 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Problema

Consideriamo la circuitazione del campo elettrico indotto attorno ai 4 cammini chiusi disegnati in rosso in figura, tutti aventi la stessa area; supponiamo al solito il campo magnetico uniforme nel volume cilindrico; disporre in ordine di grandezza crescente la f.e.m. relativa ai 4 cammini



$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_4 = 0$$

- ✓ I cammini 1 e 2, interamente interni al campo magnetico, **devono avere uguale f.e.m.** poiché il flusso magnetico è uniforme in tutti i punti e la loro area è la stessa; dunque, benché il campo elettrico sia differente lungo i due cammini, le circuitazioni devono essere uguali
- ✓ La f.e.m. del cammino 3 è inferiore a quella di 1, 2, poiché, essendo parzialmente fuori dal campo magnetico, il corrispondente flusso magnetico sarà minore
- ✓ La f.e.m. del cammino 4 è nulla, poiché il cammino è interamente al di fuori della regione di campo magnetico; dunque, benché il campo elettrico sia diverso da zero, il flusso di campo magnetico è dunque la circuitazione del campo elettrico è nulla

Campo elettrico indotto e campo elettrico di Coulomb

- ✓ **Il campo elettrico indotto, generato dalla variazione di flusso magnetico, è tanto reale quanto quello Coulombiano generato dalle cariche elettriche**; entrambi possono esistere nel vuoto o all'interno della materia; ci sono però due differenze importanti:
 - 1) le linee di flusso del campo elettrico di Coulomb hanno sempre un inizio (sgorgano dalla carica positiva) ed una fine (muoiono nella carica negativa); al contrario, le linee del campo indotto sono sempre **linee chiuse, non possono né iniziare né finire** in alcun punto dello spazio
 - 2) Il campo elettrico di Coulomb è conservativo, per cui il lavoro compiuto dal campo lungo un tragitto chiuso è sempre NULLO; al contrario, il **campo elettrico generato dal flusso magnetico è non conservativo**, come si evince dalla relazione:

$$\mathcal{E} = V_+ - V_- = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- ✓ Essendo il percorso chiuso, i potenziali V_+ e V_- sono riferiti allo stesso punto dello spazio, dunque se il campo fosse conservativo dovrebbero essere uguali, e l'integrale sarebbe nullo

Induttori e induttanze



- ✓ L'**induttore** è un **dispositivo in grado di generare un campo magnetico di forma specifica**; è dunque l'analogo magnetico del condensatore
- ✓ Tipici induttori sono **solenoidi, toroidi, e bobine**
- ✓ Come i condensatori sono caratterizzati dalla capacità, **gli induttori sono caratterizzati dall'INDUTTANZA**: dato un induttore con N spire, corrente i , e flusso magnetico Φ_B , si definisce **induttanza**:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$



- ✓ Il prodotto $N\Phi_B$ si definisce **flusso concatenato**, e rappresenta il flusso totale del campo magnetico generato dall'induttore attraverso l'intera sezione dell'induttore
- ✓ l'induttanza è quindi il **flusso concatenato per unità di corrente**

Analogia tra capacità e induttanza

- ✓ Vi è una chiara **analogia concettuale tra capacità e induttanza**:
- ✓ la **capacità** è il rapporto tra carica q ai piatti del condensatore e la d.d.p. ΔV necessaria per caricare le armature con carica q
- ✓ l'**induttanza** è il rapporto tra flusso magnetico totale nell'induttore e corrente nel filo necessaria per generare quel flusso magnetico

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

- ✓ Dunque, per una data tensione o corrente di input, capacità ed induttanza danno una **misura dell'intensità dei campi elettrici e magnetici generati dallo strumento**, e di conseguenza dell'**energia elettrica e magnetica** da essi immagazzinata
- ✓ C ed L sono entrambe dipendenti da soli fattori costitutivi dello strumento

Unità di misura dell'induttanza

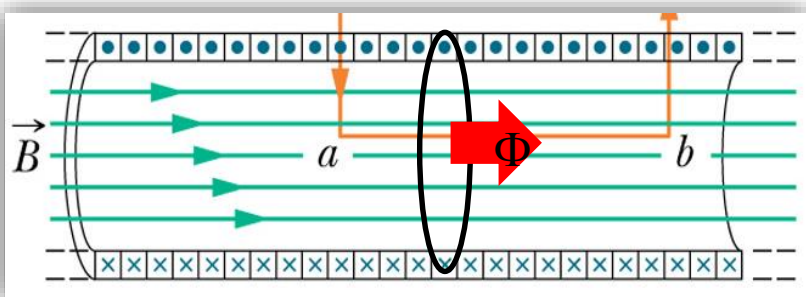
- ✓ **L'unità di misura dell'induttanza è l'Henry (H)**, dal nome di Joseph Henry
- ✓ Americano, contemporaneo di Faraday, Henry scoprì l'induzione magnetica nello stesso anno di Faraday (1831) ma non ebbe modo di rendere pubbliche le sue ricerche
- ✓ sempre nel 1831 Henry costruì il **primo prototipo di motore elettrico**, facendo ruotare un magnete nel campo magnetico generato da una bobina percorsa da corrente
- ✓ un **Henry è uguale a un Weber su un Ampère**:

$$[L] = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Wb}{A} = H$$



Joseph Henry
(Albany, 1797 –
Washington, 1878)

Induttanza del solenoide



Consideriamo un solenoide ideale lungo l , densità di spire n , e corrente i ; il campo magnetico al suo interno è

$$B = \mu_0 i n$$

il flusso magnetico attraverso l'intera sezione di area A è:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 i n A$$

l'induttanza del solenoide è:

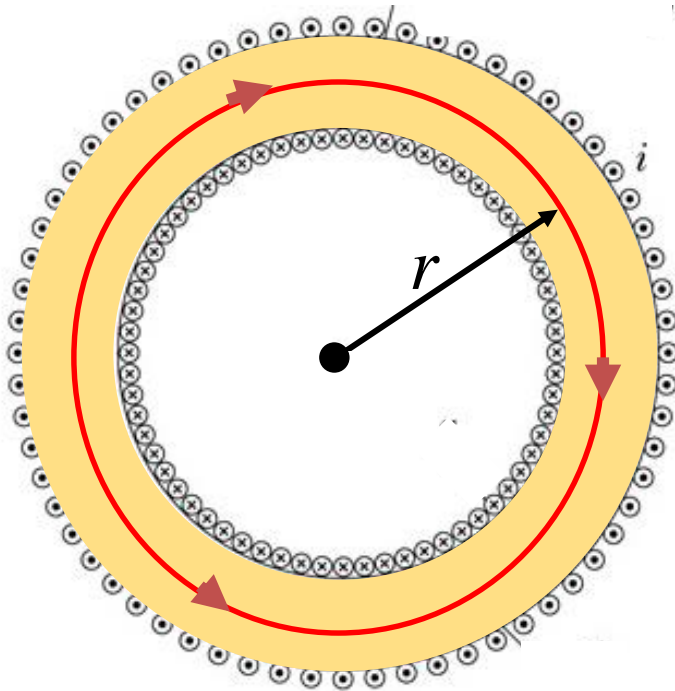
$$L = \frac{N \Phi_B}{i} = \frac{n l \Phi_B}{i} = \mu_0 n^2 l A$$

l'induttanza per unità di lunghezza:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$

✓ Analogamente alla capacità, anche **l'induttanza dipende unicamente da fattori geometrici**

Induttanza del toroide



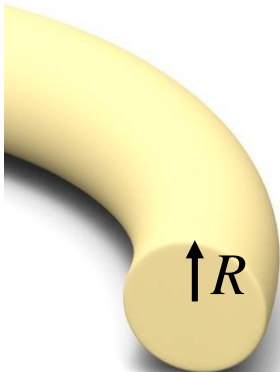
- ✓ Consideriamo un toroide con N spire, raggio di curvatura r , corrente i , e sezione interna di raggio R
- ✓ per semplicità assumiamo lo spessore del toroide piccolo rispetto alla lunghezza, ovvero $r \gg R$; in questo modo possiamo supporre il campo magnetico all'interno uniforme:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N i}{r}$$

il flusso concatenato è quindi:

$$N\Phi_B = N B A = N B \pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 i R^2}{2r}$$

$$\Rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 R^2}{2r}$$



Autoinduzione magnetica

- ✓ Un campo magnetico variabile nel tempo genera una f.e.m. ed una corrente indotta in un qualsiasi circuito immerso nel campo
- ✓ Se il campo magnetico è a sua volta generato da una bobina o da un circuito qualsiasi, una **f.e.m. indotta verrà generata dal campo magnetico anche nella bobina generatrice del campo**: in tal caso si dice che la **f.e.m. è autoindotta**
- ✓ Proprio come una qualsiasi f.e.m. indotta, anche la f.e.m. autoindotta obbedisce alla legge di Faraday-Lenz
- ✓ Consideriamo un induttore qualsiasi, caratterizzato da N spire, corrente i , e flusso magnetico Φ_B ; per definizione, flusso e corrente sono legate dalla relazione:

$$iL = N\Phi_B$$

- ✓ Deriviamo rispetto al tempo questa uguaglianza, considerando che negli induttori L è tipicamente costante, per cui il flusso varia esclusivamente attraverso la variazione di corrente

$$L \frac{\partial i}{\partial t} = N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

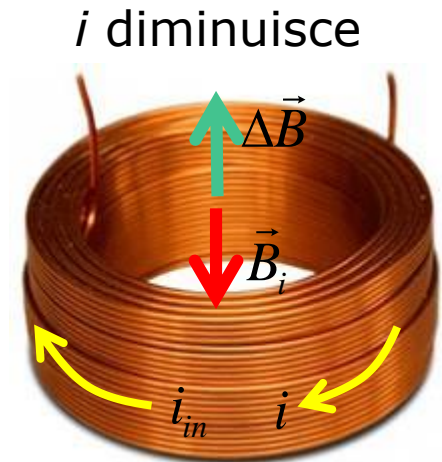
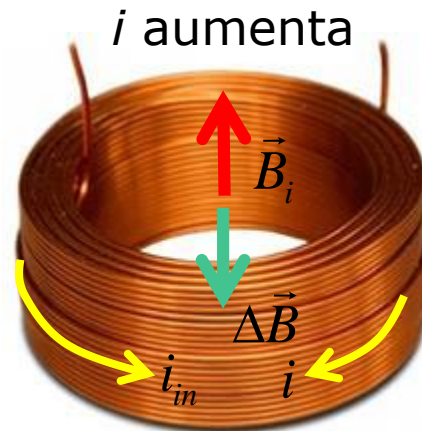
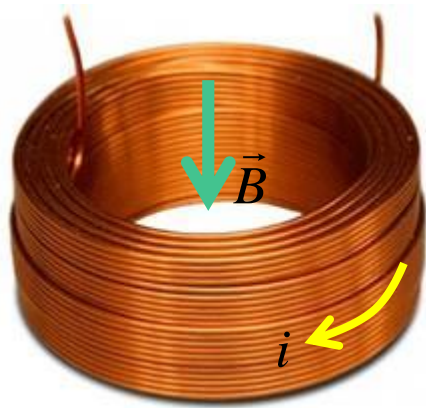
- ✓ Sostituendo questo risultato nella legge di Farady, otteniamo la **legge dell'autoinduzione magnetica**:

Autoinduzione magnetica

- ✓ Se la corrente dell'induttore varia nel tempo, **nell'induttore si genera una f.e.m. autoindotta** data da:

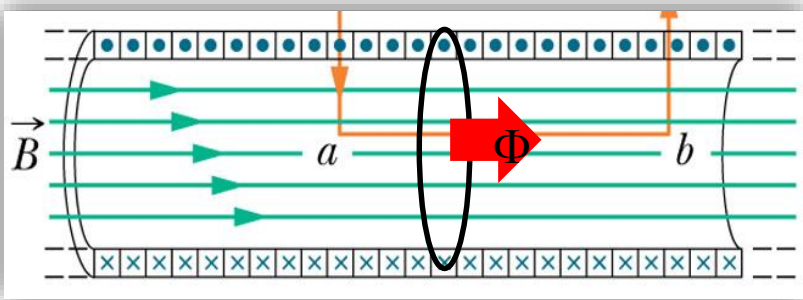
$$\mathcal{E}_L = -N \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

- ✓ Si noti che **la f.e.m. autoindotta NON DIPENDE dall'intensità della corrente $i(t)$** , ma dalla sua **derivata nel tempo di/dt** , ovvero da quanto rapidamente la corrente varia nel tempo
- ✓ Legge di Lenz: il **verso della corrente autoindotta è sempre tale da opporsi alla variazione di $i(t)$** ; consideriamo la bobina in figura, e assumiamo per $i(t)$ il verso dato dalla freccia gialla



- ✓ Se $i(t)$ cresce la corrente autoindotta si oppone all'incremento, per cui scorre in verso opposto ad $i(t)$; se $i(t)$ decresce, la corrente indotta è concorde con $i(t)$ in modo da compensarne il decremento

Problema



Consideriamo un solenoide ideale lungo $l = 10$ cm, densità di spire $n = 10/\text{cm}$, raggio $R = 1$ cm; supponiamo che la corrente nel solenoide i vari nel tempo con legge sinusoidale; il verso della corrente positiva è quello indicato in figura

$$i = i_0 \sin(\omega t) \quad i_0 = 1\text{A} \quad \omega = 100(\text{rad} / \text{s})$$

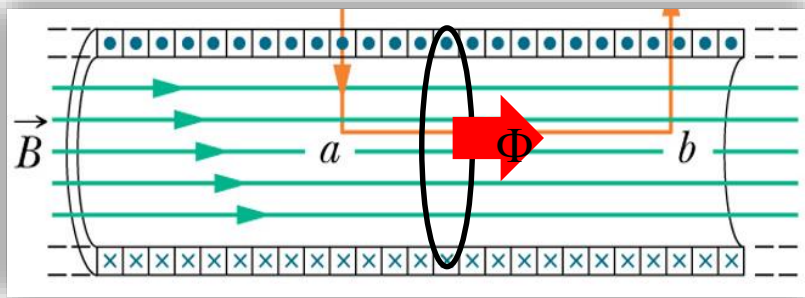
- ✓ Calcolare l'induttanza del solenoide
- ✓ Calcolare la f.e.m. autoindotta agli istanti $t = 5$ ms, $t = 100$ ms, $t = 1$ s
- ✓ specificare per ciascun istante se la f.e.m. è concorde o discorde col verso della corrente positiva

$$L = \mu_0 n^2 l A = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \times \frac{10^2}{\text{cm}^2} \times 10^{-1} \text{m} \times \pi \text{cm}^2 = 4\pi^2 \mu\text{H} = 39.5 \mu\text{H}$$

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\partial i}{\partial t} = -L i_0 \omega \cos(\omega t) = -39.5 \mu\text{H} \text{ A} \times 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cos\left(100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right)$$

$$= -3.95 \text{ mV} \cos\left(100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right)$$

Problema



verso della corrente positiva

$$i = i_0 \sin(\omega t) \quad i_0 = 1A \quad \omega = 100(rad / s)$$

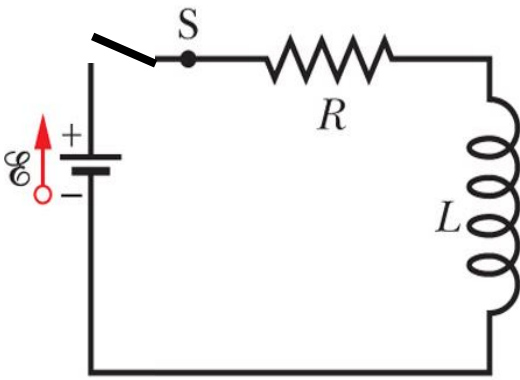
$$5ms: \quad \mathcal{E}_L = -3.95mV \cos(0.5rad) = -3.95mV \times 0.88 = -3.47mV$$

$$100ms: \quad \mathcal{E}_L = -3.95mV \cos(10rad) = -3.95mV \times -0.84 = 3.31mV$$

$$1s: \quad \mathcal{E}_L = -3.95mV \cos(100rad) = -3.95mV \times 0.86 = -3.41mV$$

Il segno di Lenz indica il verso della corrente autoindotta rispetto a quello della corrente positiva, per cui agli istanti $t = 5\text{ m}$ e $t = 1\text{ s}$ la f.e.m. spinge la corrente in verso opposto a quello indicato in figura, mentre per $t = 100\text{ ms}$ essa è concorde col verso indicato in figura

Circuito RL: fase di accensione



- ✓ Si dicono *RL* i **circuiti contenenti resistenze e induttanze**; analogamente agli *RC*, sono **caratterizzati da un regime transiente in cui corrente e d.d.p. variano nel tempo**
- ✓ in figura, quando l'interruttore chiude il circuito la corrente inizia a circolare; in assenza di induttore la corrente raggiunge immediatamente il suo valore stazionario:

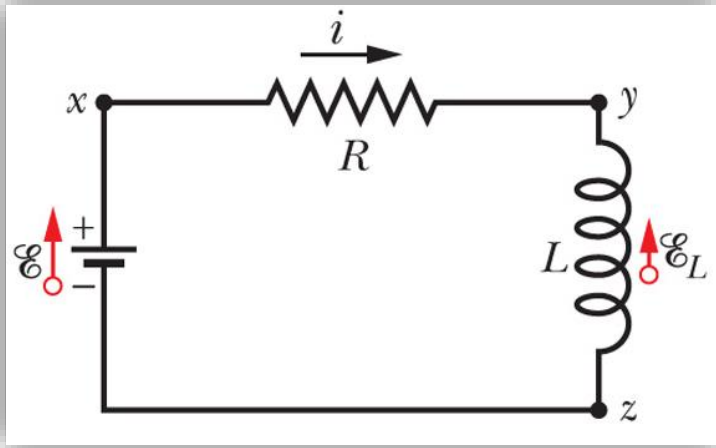
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

- ✓ Di contro, in presenza di *L*, durante il periodo transiente il campo ***B*(*t*)** nell'induttore aumenta nel tempo con la corrente *i*(*t*), generando una f.e.m. autoindotta

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

- ✓ che genera una **corrente autoindotta di verso opposto a quella della batteria**; l'effetto netto della contrapposizione tra f.e.m. costante della batteria e f.e.m. autoindotta è una **corrente che cresce esponenzialmente** e raggiunge il valore stazionario nel limite asintotico
- ✓ Una volta raggiunto il **regime stazionario**, ***B*** è costante nel tempo, f.e.m. e corrente autoindotta si annullano; da quel momento l'induttanza si comporta come un ordinario segmento di filo conduttore

Circuito RL: fase di accensione



- ✓ Nel circuito RL in figura abbiamo due f.e.m.: quella della batteria, e quella autoindotta nell'induttore
- ✓ assumiamo come verso della corrente quello concorde con la batteria, e scriviamo la legge di Kirchhoff:

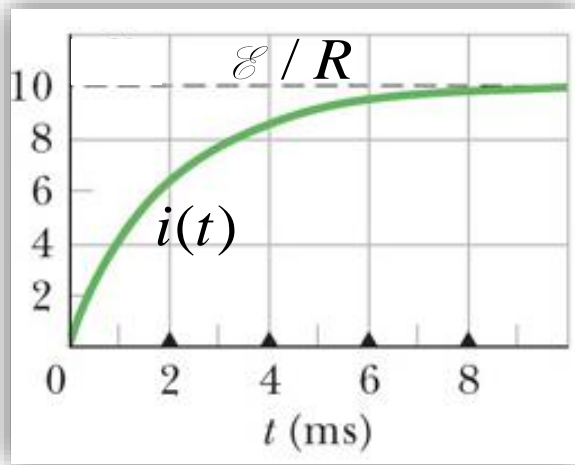
$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri$$

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} - L \frac{\partial i}{\partial t} = Ri$$

- ✓ Il segno $-$ della f.e.m. autoindotta indica che, essendo in fase di accensione $di(t)/dt > 0$, la **f.e.m. autoindotta è in opposizione di fase alla f.e.m. alla batteria**
- ✓ l'equazione di Kirchhoff del circuito RL è quindi **un'equazione differenziale del 1° ordine** nella corrente, con condizione iniziale $i(0)=0$ del tutto analoga a quella già vista per la carica $q(t)$ nel circuito RC

$$\mathcal{E} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Circuito RL: fase di accensione

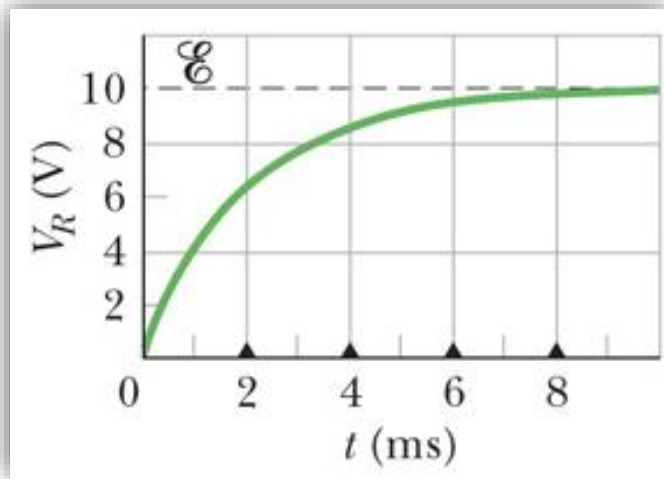


✓ è facile dimostrare che questa equazione è soddisfatta dalla soluzione:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right) \quad \tau_L = \frac{L}{R}$$

- ✓ all'istante iniziale ($t=0$) la corrente è nulla; nel tempo lungo la corrente torna al valore stazionario in cui L non agisce: $i(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R}$
- ✓ τ_L è detta **costante di tempo caratteristica del circuito RL** (ricordiamo che per l'RC $\tau_C = RC$); come τ_C nel circuito RC, τ_L esprime l'ordine di grandezza del **tempo necessario alla corrente per raggiungere il suo valore stazionario**
- ✓ come τ_C anche τ_L ha dimensione fisica del tempo; infatti dalla formula dell'autoinduttanza si vede che $1 \text{ H} = 1 \text{ V s/A}$, per cui $\text{H}/\Omega = \text{Vs}/(\text{A } \Omega) = \text{s}$

Circuito RL: fase di accensione

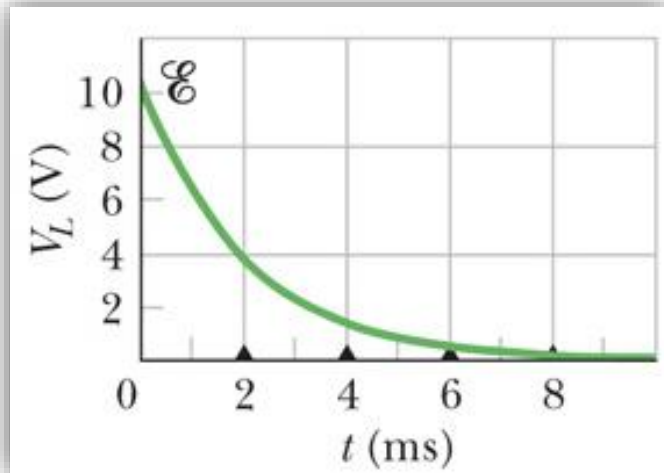


✓ la **caduta di tensione ai capi di R** è:

$$\Delta V_R = R i(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$$

ΔV_R è nulla a $t=0$ e nel tempo lungo tende esponenzialmente alla f.e.m. della batteria

Dopo un tempo $t = \tau_L$: $\Delta V_R(\tau_L) = 0.63 \mathcal{E}$



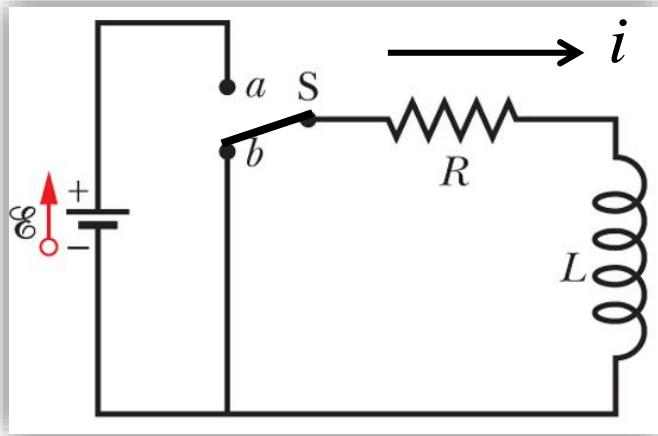
✓ la **caduta di tensione ai capi di L** è:

$$\Delta V_L = L \frac{\partial i}{\partial t} = \mathcal{E} e^{-t/\tau_L}$$

✓ per $t=0$, ΔV_L è uguale (ed opposta in verso) alla f.e.m. della batteria, cosicché la corrente iniziale è nulla: a $t=0$ **l'induttore si comporta come un circuito aperto**

✓ Nel regime stazionario ΔV_L si annulla, ovvero **l'induttore diventa un cortocircuito**

Circuito RL: fase di spegnimento

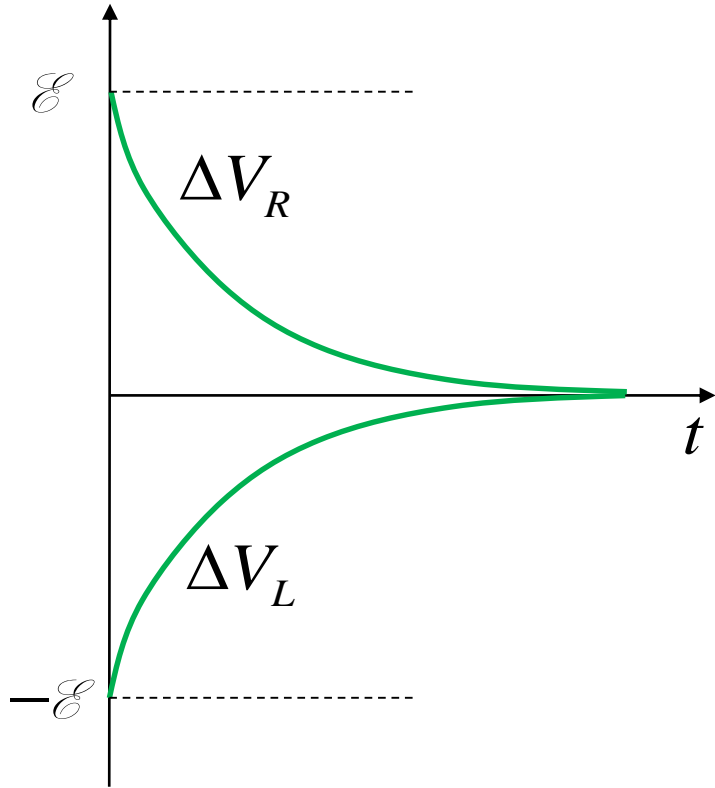


- ✓ Una volta raggiunta la condizione di regime stazionario, spostiamo l'interruttore sul punto b , in modo da escludere la batteria e spegnere il circuito
- ✓ la **corrente non svanisce all'istante** poiché **l'induttanza compensa la riduzione di corrente con la corrente autoindotta**
- ✓ Assumiamo il verso della corrente come in figura e scriviamo la legge di Kirchhoff:

$$Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

- ✓ La soluzione di questa equazione è: $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} \quad \tau_L = \frac{L}{R}$
- ✓ a $t = 0$ la corrente è uguale a quella di regime stazionario: $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$
- ✓ Nel tempo lungo la corrente decade esponenzialmente

Circuito RL: fase di spegnimento



La d.d.p. ai capi di L :

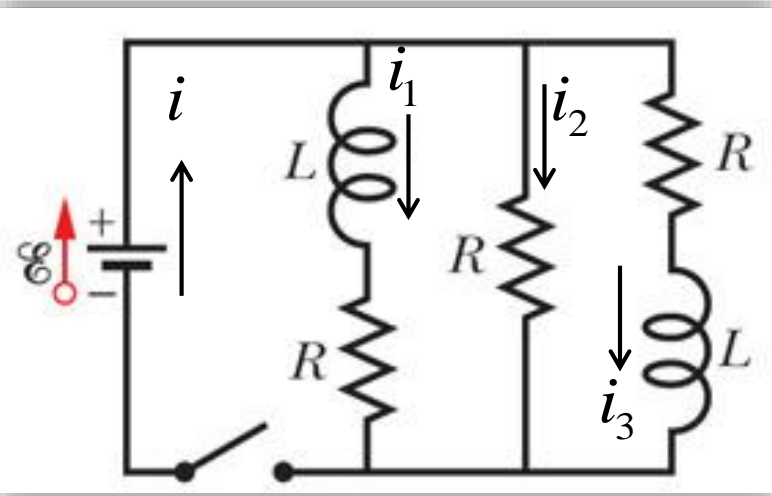
$$\Delta V_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-t/\tau_L}$$

La d.d.p. ai capi di R :

$$\Delta V_R(t) = Ri(t) = \mathcal{E} e^{-t/\tau_L}$$

L'equazione di Kirchhoff impone che ad ogni istante di tempo la tensione ai capi di L compensi la tensione ai capi di R , diminuendo entrambe esponenzialmente nel tempo

Problema 30.5



Il circuito in figura contiene tre resistenze uguali, due induttanze uguali, ed una batteria:

$$R = 9\Omega; \quad L = 2mH; \quad \mathcal{E} = 18V$$

a) Calcolare la corrente i che attraversa il ramo della batteria e le correnti lungo i 3 rami del circuito all'istante iniziale, subito dopo la chiusura del circuito

La corrente scorre in 3 rami paralleli, ai cui capi c'è la stessa d.d.p, uguale alla f.e.m. della batteria; ipotizzando i versi delle correnti come in figura, le equazioni per i 3 rami sono:

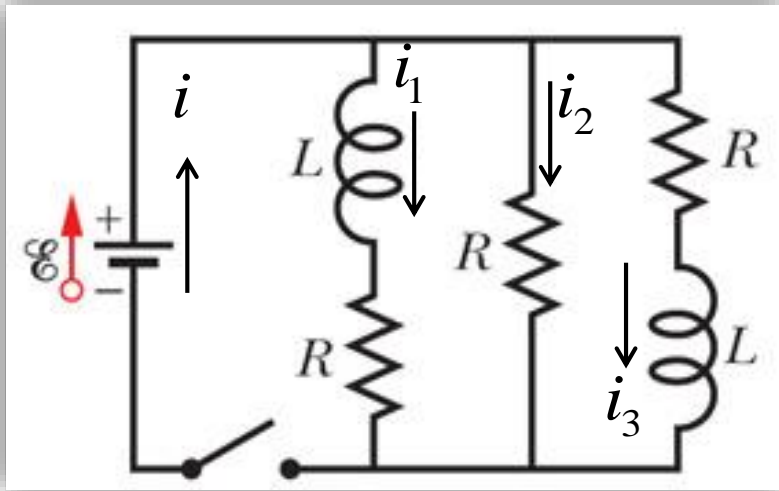
$$\mathcal{E} = Ri_1 + L\frac{\partial i_1}{\partial t} \quad \mathcal{E} = Ri_2 \quad \mathcal{E} = Ri_3 + L\frac{\partial i_3}{\partial t}$$

Chiaramente, primo e terzo ramo sono identici per cui: $i_1 = i_3$ $i = 2i_1 + i_2$

All'istante iniziale sappiamo che l'induttanza si comporta come un circuito aperto, dunque:

$$i_1 = i_3 = 0 \quad i = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18V}{9\Omega} = 2A$$

Problema 30.5



b) Ricalcolare le correnti nel regime stazionario, ovvero nel tempo lungo

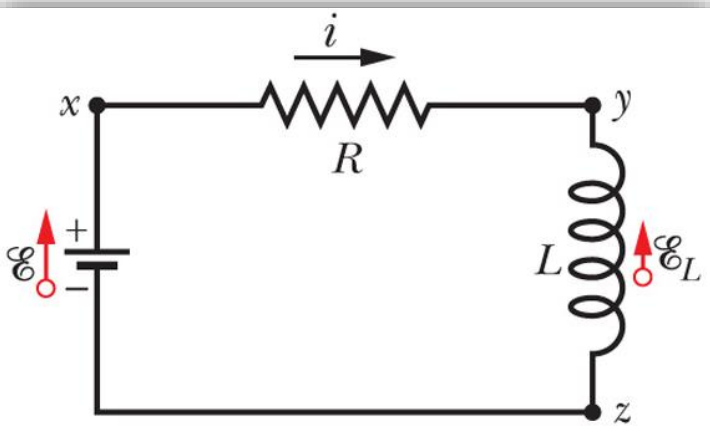
Nel regime stazionario le induttanze diventano fili conduttori, per cui:

$$\mathcal{E} = Ri_1 = Ri_2 = Ri_3$$

$$\Rightarrow i_1 = i_2 = i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18V}{9\Omega} = 2A$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 6A$$

Problema 30.6



Consideriamo il circuito in figura con:

$$R = 0.25 \Omega; \quad L = 50 \text{ mH};$$

Calcolare il tempo necessario alla corrente per raggiungere metà del suo valore stazionario di equilibrio

Nel tempo lungo l'induttore è un cortocircuito, per cui: $i(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Dobbiamo determinare l'istante t' per cui: $i(t') = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t'/\tau_L}) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\Rightarrow e^{-t'/\tau_L} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{t'}{\tau_L} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t' = -\tau_L \ln \frac{1}{2} = \tau_L \times 0.69$$

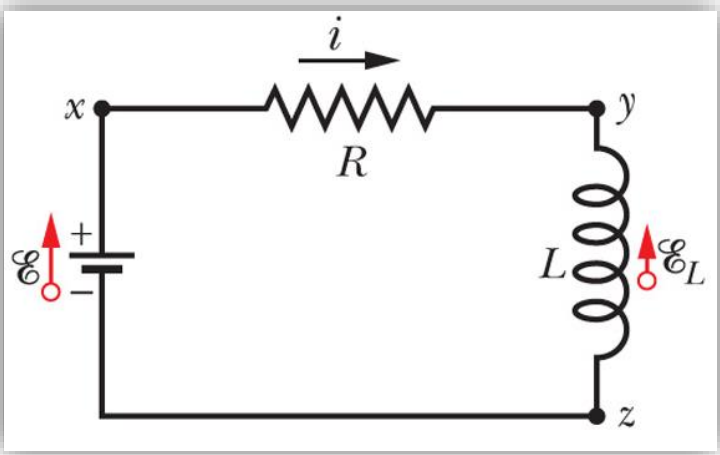
$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{50 \text{ mH}}{0.25 \Omega} = 0.2 \text{ s} \Rightarrow t' = 0.69 \times \tau_L \approx 0.14 \text{ s}$$

$$H = \frac{Tm^2}{A}$$

$$V = \frac{Tm^2}{s}$$

$$\frac{H}{\Omega} = s$$

Energia immagazzinata nell'induttore



- ✓ Nella fase di accensione del circuito RL una porzione dell'**energia erogata dal generatore** è spesa per **caricare l'induttore**, ovvero generare il campo magnetico
- ✓ a regime (corrente stazionaria) questa **energia magnetica** resta **immagazzinata nell'induttore**, e **rilasciata nel circuito durante lo spegnimento**

- ✓ Torniamo all'equazione di Kirchhoff per il circuito RL in fase di accensione, e moltiplichiamo ambo i membri per i :

$$\mathcal{E} i = Ri^2 + i L \frac{\partial i}{\partial t}$$

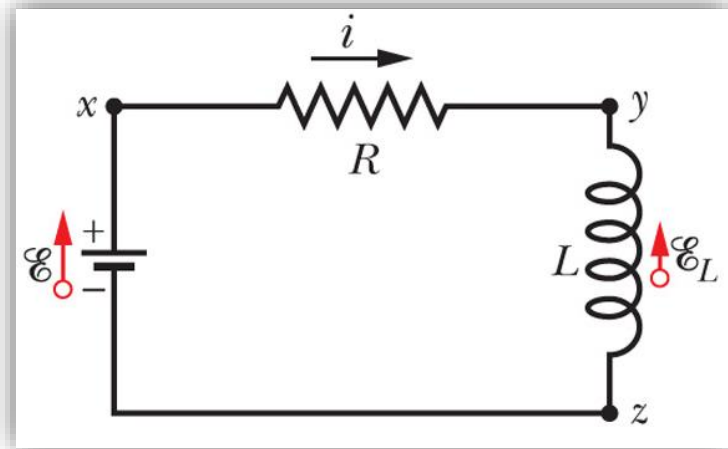
- ✓ Questa equazione esprime la **conservazione dell'energia**:

$$P_B = \mathcal{E} i \quad \text{potenza erogata nel circuito dalla batteria}$$

$$P_R = Ri^2 \quad \text{potenza dissipata in energia termica sulla resistenza } R$$

$$P_L = i L \frac{\partial i}{\partial t} = i \Delta V_L \quad \text{potenza immagazzinata nell'induttore, spesa dalla batteria durante la fase transiente per generare il campo magnetico}$$

Energia immagazzinata nell'induttore



- ✓ Dall'espressione della potenza, calcoliamo **l'energia potenziale U immagazzinata nell'induttore** ad un generico istante t :

$$P_L = \frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow U(t) = L \int_0^t i \, di = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

- ✓ Nel tempo lungo, al termine della fase transiente, l'energia immagazzinata è:

$$U = \frac{1}{2} Li^2(\infty)$$

- ✓ Unità di misura: dalla legge dell'autoinduzione deve essere $V = H \, A/s$, per cui $HA^2 = VsA = VC = J$
- ✓ Notiamo l'analogia con l'energia accumulata nel campo elettrico del condensatore:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Densità di energia del campo magnetico

- ✓ Consideriamo un solenoide ideale di lunghezza l ed area A ; poiché il campo magnetico nel solenoide (ideale) è uniforme, anche l'energia deve essere distribuita uniformemente
- ✓ La **densità di energia del solenoide** è quindi:

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{1}{2Al} L i^2 = \frac{L}{l} \frac{i^2}{2A}$$

Nel solenoide l'induttanza per unità di lunghezza è: $\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$

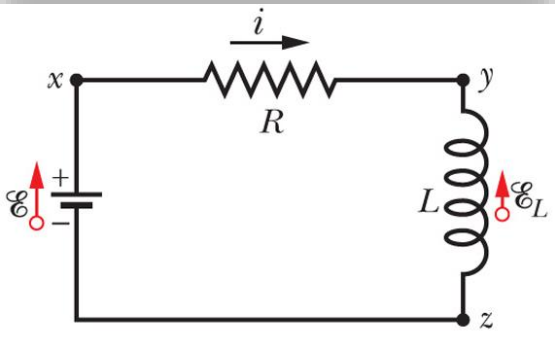
$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 n^2 i^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

NB: benché ottenuta nel caso molto semplice del solenoide ideale, questa espressione è **valida in generale per qualunque campo magnetico**

Notiamo l'analogia con la densità di energia del campo elettrico (valida in generale per qualunque campo):

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Problema 30.7



Consideriamo il circuito in figura:

$$R = 0.6 \, \Omega; \quad L = 50 \, \text{mH}; \quad \mathcal{E} = 12 \, \text{V}$$

a) Calcolare l'energia nell'induttore all'equilibrio

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12 \, \text{V}}{0.6 \, \Omega} = 20 \, \text{A} \quad U(\infty) = \frac{1}{2} L i^2 = 25 \, \text{mH} (20 \, \text{A})^2 = 10 \, \text{HA}^2 = 10 \, \text{J}$$

b) Calcolare il tempo necessario ad immagazzinare metà dell'energia totale di equilibrio; dobbiamo calcolare l'istante t' in cui $U(t')$ è metà di quella totale:

$$U(t') = \frac{1}{2} U(\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} L \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 (1 - e^{-t'/\tau_L})^2 = \frac{1}{4} L \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2$$

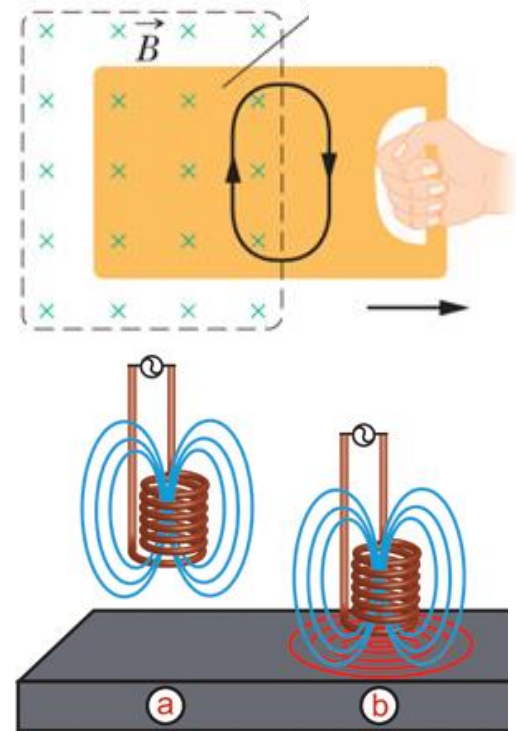
$$(1 - e^{-t'/\tau_L})^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{-t'/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{t'}{\tau_L} = \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1.23$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{50 \, \text{mH}}{0.6 \, \Omega} = 83.3 \, \text{ms} \quad \Rightarrow \quad t' = \tau_L \times 1.23 = 102.5 \, \text{ms}$$

L'induttore raggiunge metà del carico totale 102 ms dopo l'accensione

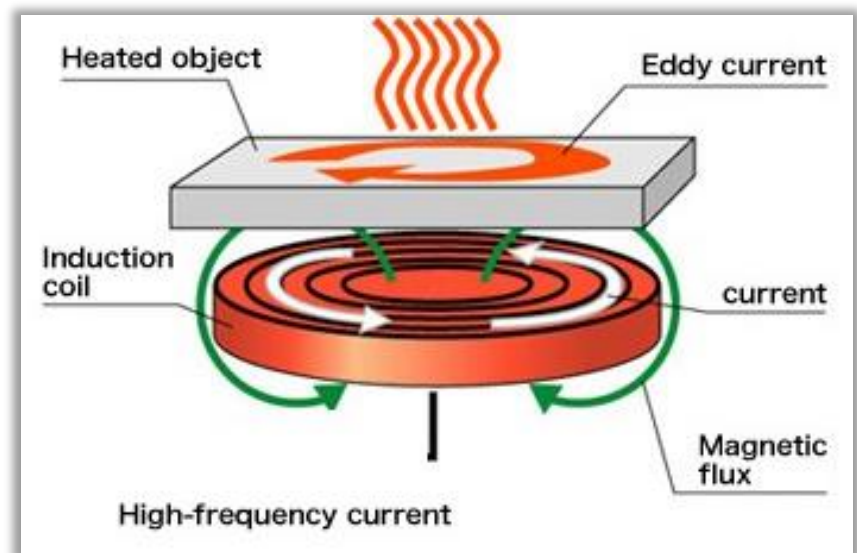
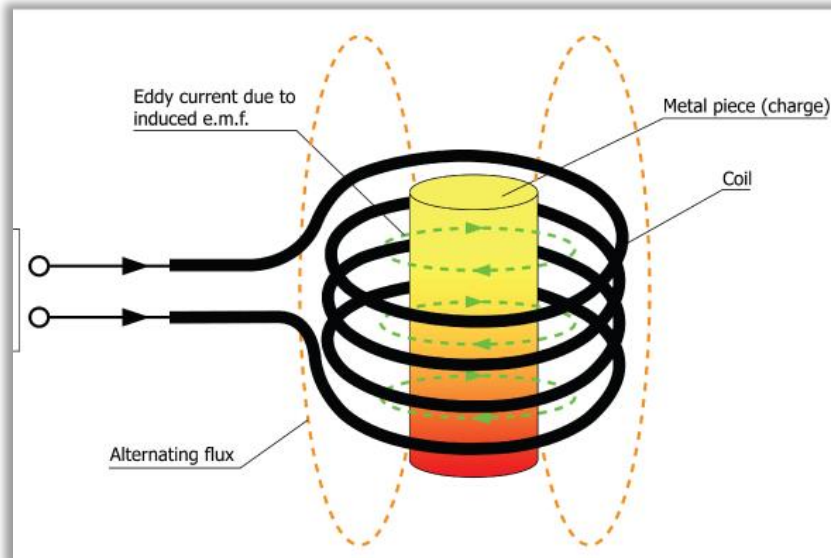
Correnti di Focault o parassite

- ✓ Le correnti indotte dalla variazione del flusso magnetico non si generano soltanto all'interno di spire conduttive, ma anche in qualsiasi materiale conduttore: **cariche mobili generano mulinelli di corrente lungo le linee di flusso del campo elettrico indotto**
- ✓ se inseriamo (o estraiamo) rapidamente una lastra conduttiva in una regione di campo magnetico, sulla lastra **si generano vortici di corrente** (in inglese '*eddy currents*'), dette anche **correnti di Focault o correnti parassite**
- ✓ lo stesso accade se avviciniamo ad una superficie metallica un campo magnetico variabile nel tempo (come quello prodotto da una bobina percorsa da corrente alternata)
- ✓ Le **correnti di Focault possono essere molto grandi**: notiamo che il flusso magnetico può essere anche piccolo, ma se varia rapidissimamente nel tempo (ad esempio mediante un campo magnetico prodotto da una corrente alternata di altissima frequenza) la derivata del flusso, e dunque la f.e.m. indotta, può essere enorme



Riscaldamento per induzione

- ✓ La generazione di forti correnti di Foucault nei metalli è alla base di alcune importanti applicazioni industriali, come i **forni ad induzione per la fusione dei metalli, il riscaldamento rapido dell'acqua, i fornelli da cucina ad induzione**
- ✓ in tutti questi casi vengono generate nei metalli per induzione magnetica correnti di Foucault molto elevate, che a loro volta generano **grande quantità di calore nel materiale per effetto Joule**

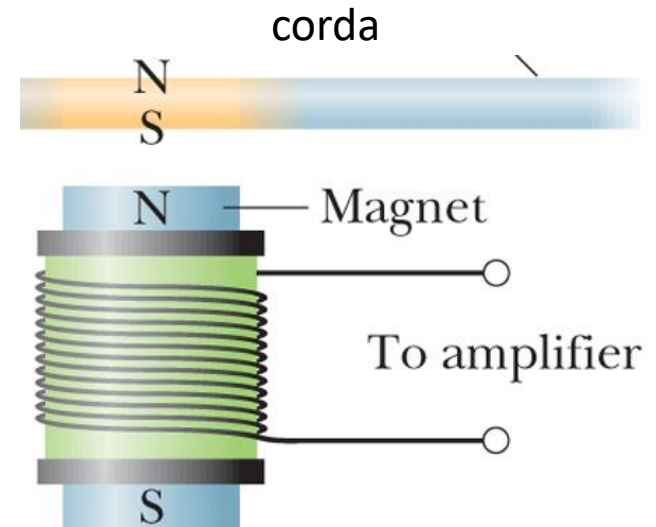


I microfoni della chitarra elettrica

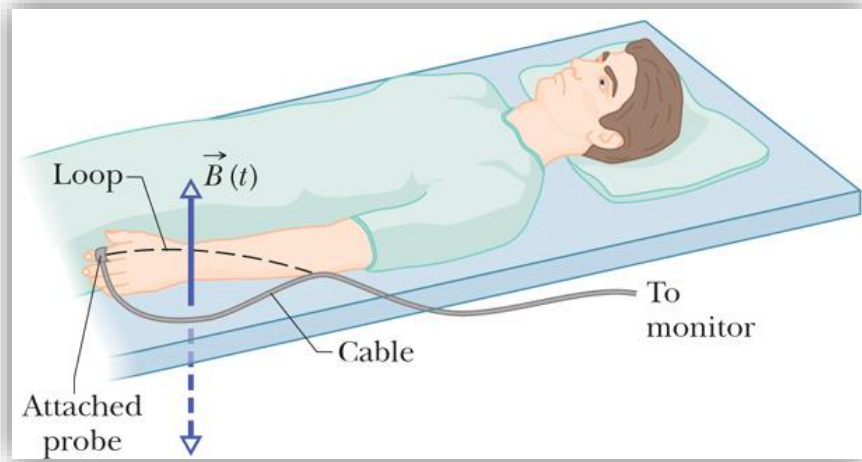
La **Fender Stratocaster** (prodotta da Leo Fender nel 1954) ha 3 gruppi di 6 microfoni elettrici (uno per corda) che catturano le vibrazioni delle corde, rispettivamente per frequenze alte, medie, e basse.



- ✓ Ciascun microfono è costituito da una **bobina** connessa all'amplificatore, arrotolata attorno ad un piccolo magnete
- ✓ La funzione del magnete è **polarizzare il segmento di corda al di sopra del magnete**
- ✓ Far vibrare la corda equivale a far oscillare avanti e indietro una barra magnetica puntata verso la bobina: **nella bobina si genera una variazione di flusso magnetico e dunque una corrente indotta il cui verso oscilla con la stessa frequenza della corda** che vibra
- ✓ La frequenza viene quindi trasmessa all'amplificatore e poi alle casse che la traducono in onda sonora



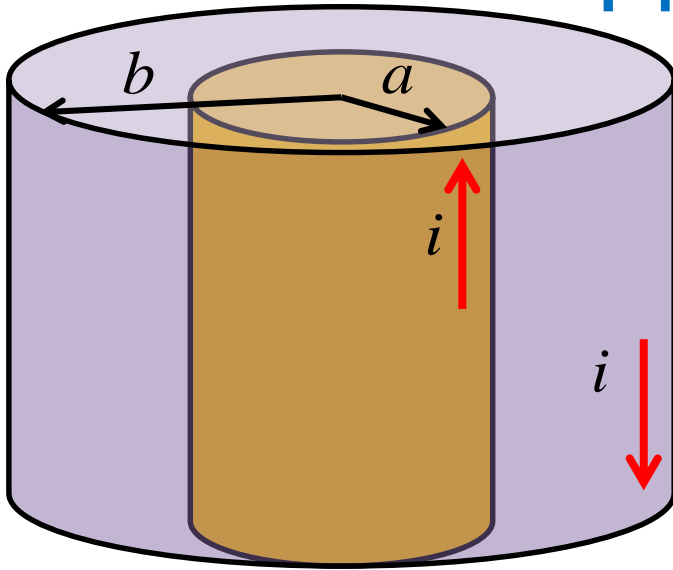
Risonanza magnetica nucleare (RMN)



- ✓ Nella RMN il paziente è sottoposto a due campi magnetici: un intenso campo statico \mathbf{B}_{stat} ed un debole campo $\mathbf{B}(t)$ sinusoidale
- ✓ Al dito del paziente è applicato un sensore (*pulsossimetro*) che misura la pressione di ossigeno nel sangue, connesso al rilevatore esterno mediante un cavo conduttore

- ✓ E' accaduto che il cavo, toccando il braccio del paziente, creasse un loop conduttivo col braccio: la variazione di flusso nel loop dovuta a $\mathbf{B}(t)$ ha così generato una **corrente indotta tale da ustionare il braccio del paziente**, nonostante il rivestimento isolante del filo
- ✓ Anche se $\mathbf{B}(t)$ è debole, se la frequenza di oscillazione di $\mathbf{B}(t)$ è molto elevata (come nel caso della RMN), la sua variazione nel tempo, e quindi **la f.e.m. indotta nel loop, può essere grandissima !**
- ✓ Nelle apparecchiature medicali, in presenza di campi magnetici variabili nel tempo, è quindi imperativo accertarsi che i fili elettrici non tocchino in alcun modo il corpo del paziente, onde evitare possibili ustioni dovute all'induzione magnetica di Faraday.

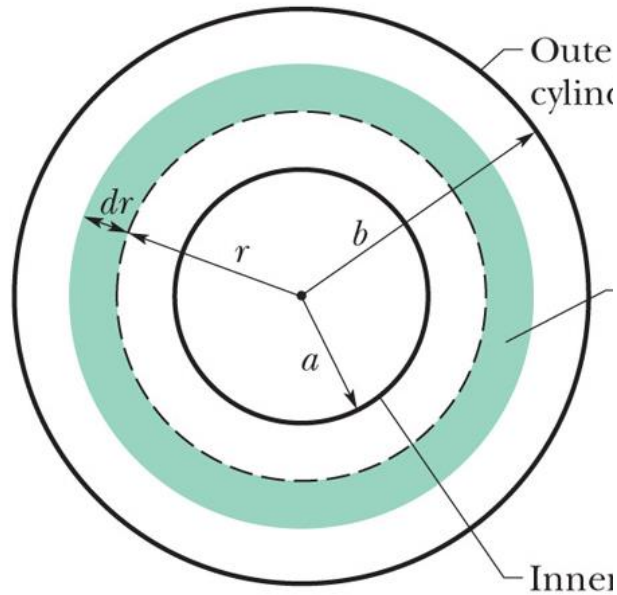
Problema 30.8



Consideriamo un lungo cavo coassiale costituito da due cilindri conduttori molto sottili; il cilindro interno ha raggio $a = 1.2$ mm, quello esterno raggio $b = 3.6$ mm; la corrente $i = 2$ A scorre lungo il cilindro interno in un verso e lungo quello esterno (che funge da conduttore di ritorno) nel verso opposto. Calcolare l'energia immagazzinata nel campo magnetico in un tratto $l = 1$ m di cavo.

- ✓ **Ciascun cavo genera al suo esterno un campo magnetico uguale a quello del filo rettilineo infinito**, mentre al suo interno il campo è nullo
- ✓ **il campo totale è la somma dei campi di ciascun cilindro**; applicando la legge di Ampère, si vede facilmente che:
- ✓ $B = 0$ in qualsiasi punto interno al cilindro piccolo, poiché non vi sono correnti che intersecano l'area delimitata dal circuito amperiano;
- ✓ $B = 0$ in qualsiasi punto esterno al cilindro grande, poiché la corrente dei due cilindri si compensa
- ✓ **soltanto nell'intercapedine tra i due cilindri B è diverso da zero**
- ✓ **Il campo magnetico generato dal cilindro non è uniforme**: per calcolare l'energia immagazzinata nell'intercapedine, dobbiamo utilizzare la **formula generale della densità di energia**, ed integrarla sul volume in cui è presente il campo

Problema 30.8



$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \Rightarrow u(r) = \frac{(B(r))^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2(2\pi)^2} \frac{i^2}{r^2}$$

B ed u non sono uniformi nel piano; dunque per calcolare l'energia in una sezione finita di cavo è necessario integrare:

$$U = l \int_a^b u(r) dA$$

per integrare nel piano una funzione dipendente dal raggio prendiamo come area infinitesima una coroncina di raggio r e spessore dr :

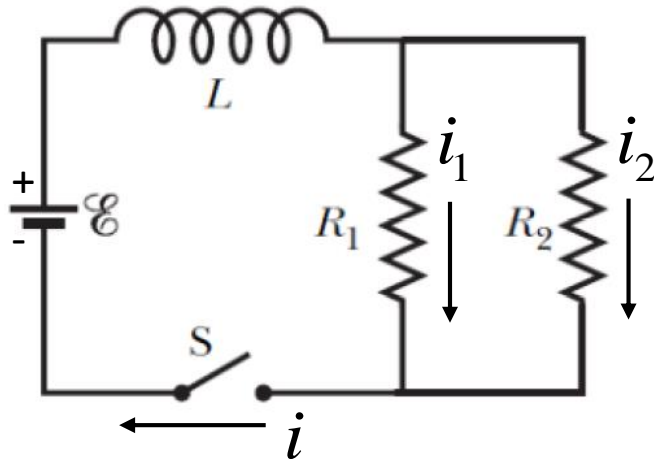
$$dA = 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow U = 2\pi l \int_a^b u(r) r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} l i^2 \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0}{4\pi} l i^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$U = 10^{-7} \frac{Tm}{A} \times 1m \times 4A^2 \times \ln 3 = 4.4 \times 10^{-7} J \quad H = \frac{Tm^2}{A} \Rightarrow Tm^2 A = HA^2 = J$$

Problema

Consideriamo il circuito in figura, con $\mathcal{E} = 12V$; $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 6\Omega$; $L = 2H$



- Calcolare i , i_1 , i_2 appena dopo la chiusura dell'interruttore S .
- Calcolare ΔV_1 (d.d.p. ai capi di R_1), ΔV_2 (d.d.p. ai capi di R_2), ΔV_L (d.d.p. ai capi di L), e l'energia magnetica dell'induttore U appena dopo la chiusura dell'interruttore
- All'istante $t = 2$ s calcolare la corrente $i(t)$ nel ramo della batteria, la d.d.p. ai capi dell'induttanza $\Delta V_L(t)$, e l'energia immagazzinata $U(t)$
- Ricalcolare le correnti nel limite di tempo lungo
- Ricalcolare le d.d.p. e l'energia dell'induttore U nel limite di tempo lungo

Formule: $\mathcal{E} = R_{12} i + \Delta V_L$

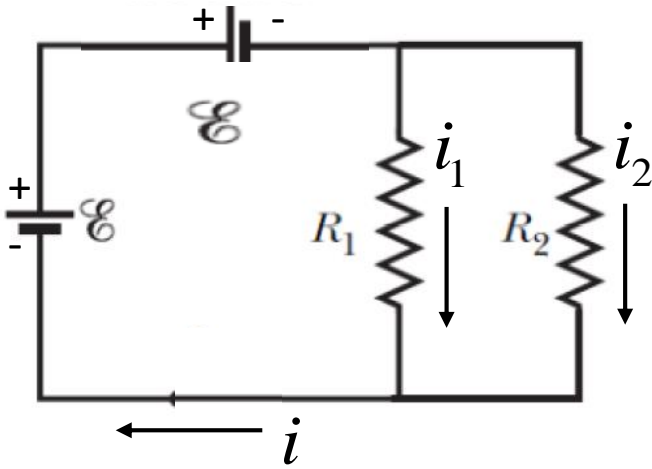
$$i = i_1 + i_2$$

$$i(t) = i_{\infty} \left(1 - e^{-t/\tau_L} \right) \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{i_{\infty}}{\tau_L} e^{-t/\tau_L} \quad \Delta V_L = \mathcal{E} e^{-t/\tau_L} \quad i_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}}$$

Problema

$$\mathcal{E} = 12V; \quad R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 6\Omega; \quad L = 2H$$

Istante iniziale: la tensione ai capi dell'induttanza compensa la batteria: la corrente nel ramo della batteria è nulla; la d.d.p. ai capi delle resistenze è nulla:



$$i = 0 \quad \mathcal{E} = \Delta V_L$$

$$a) i = 0 \quad i_1 = 0 \quad i_2 = 0$$

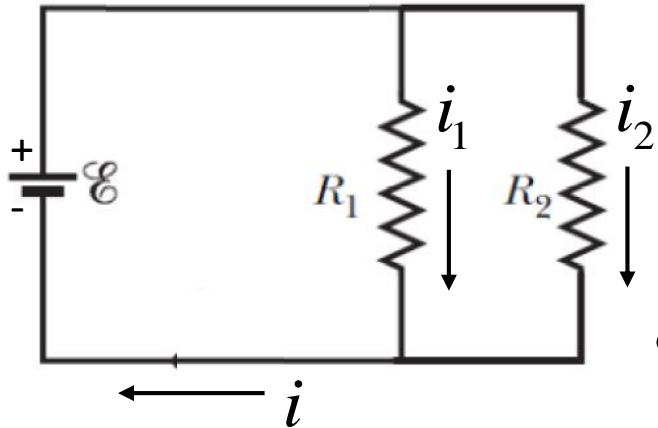
$$b) \Delta V_1 = 0 \quad \Delta V_2 = 0 \quad \Delta V_L = 12V \quad U = 0$$

Tempo lungo: l'induttanza è un cortocircuito

$$R_{12} = 1.5\Omega \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}} = \frac{12V}{1.5\Omega} = 8A$$

$$d) i = 8A \quad i_1 = \frac{12V}{2\Omega} = 6A \quad i_2 = \frac{12V}{6\Omega} = 2A$$

$$e) \Delta V_1 = 12V \quad \Delta V_2 = 12V \quad \Delta V_L = 0 \quad U = 64J$$



Problema

Consideriamo il circuito in figura, con $\mathcal{E} = 12V$; $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 6\Omega$; $L = 2H$

$$\tau_L = \frac{L}{R_{12}} = \frac{2H}{1.5\Omega} = 1.333s \quad \frac{t}{\tau_L} = \frac{2}{1.333} = 1.50$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_{12}} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) = 8A \left(1 - e^{-1.5}\right) = 8 \times 0.777A = 6.21A$$

$$\Delta V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 12V \times e^{-1.5} = 12V \times 0.223 = 2.68V$$

$$U(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = 1H \times (6.21A)^2 = 38.56J$$

Notiamo che $L = 2H$ è un'induttanza molto grande, e corrisponde ad un tempo caratteristico dell'ordine dei secondi; dunque dopo $t=2s$ il sistema non è ancora a regime: la corrente è sensibilmente inferiore al valore limite e la tensione ai capi dell'induttanza ancora maggiore di zero