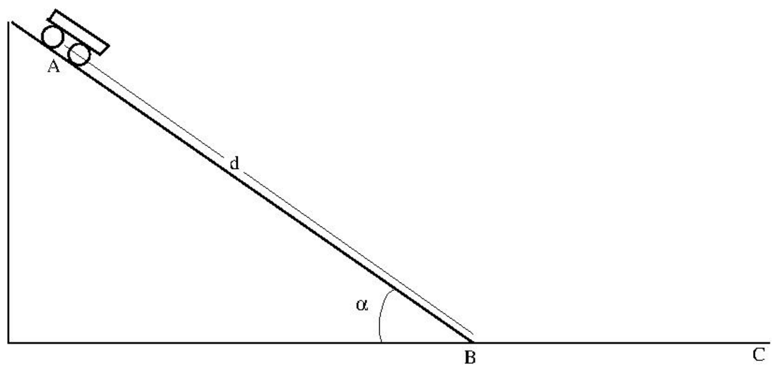
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 11/01/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa m/4 e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo α) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1. Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}.

   $v =$ .... $a =$ .... $a_{na} =$ ....

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.

   $M_f =$ ....

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.

   $L_{freno} =$ ....

Dati: g=10 m/s^2, m=10 Kg, R=15 cm, $\alpha = \pi/6$, d=10 m, Δt=5 s.

Soluzione Esercizio 1

1. Si può risolvere con la conservazione dell'energia, visto che, nel caso di puro rotolamento, l'attrito non fa lavoro. All'inizio l'energia è puramente potenziale, alla fine (base del piano inclinato, in cui fissiamo lo 0 dell'energia potenziale) si deve tener conto sia dell'energia cinetica di traslazione che di rotazione:

$$(m+4\frac{m}{4})gh = \frac{1}{2}(m+4\frac{m}{4})v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove $h = dsin(\alpha)$ e $I = 4\frac{1}{2}\frac{m}{4}R^2 = \frac{1}{2}mR^2$ il momento di inerzia totale delle ruote e ω è la velocitaà angolare con cui ruotano le ruote. La condizione di puro rotolamento implica che $\omega = -v/R$ e quindi, dalla precedente equazione, si può ricavare v:

$$v = \sqrt{\frac{8}{5}gdsin(\alpha)} = 8.9\ m/s$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando le due equazioni cardinali. La prima equazione cardinale si può scrivere come:

$$\vec{P} + 4\vec{f} + \vec{R}_N = (m+4\frac{m}{4})\vec{a}$$

dove $\vec{P}$ è il peso complessivo del carrello, $\vec{f}$ l'attrito tangenziale su ciascuna ruota e $\vec{R_N}$ la reazione normale. Proiettando la precedente equazione lungo la direzione del piano si ha:

$$2mgsin(\alpha) - 4f = 2ma$$

(dove con a si intende l'accelerazione lungo il piano). La seconda equazione cardinale :

$$-4fR = I\dot{\omega}$$

ovvero (considerando $\dot{\omega} = -a/r$):

$$4f = \frac{Ia}{R^2}$$

sostituendo nella proiezione della prima lungo il piano si può ricavare a:

$$a = \frac{2mgsin(\alpha)}{2m + I/R^2} = \frac{4gsin(\alpha)}{5} = 4m/s^2$$

In un moto uniformemente accelerato la relazione tra velocità e accelerazione può essere scritta come $v = \sqrt{2ad}$ e quindi $v = \sqrt{\frac{8}{5}gdsin(\alpha)}$, come nel metodo precedente.
Nello scivolamento senza attrito (in cui le ruote non girano) la velocità di arrivo alla fine del piano inclinato sarà $v_{na} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gdsin(\alpha)}$ e quindi, banalmente, $a_{na} = gsin(\alpha) = 5m/s^2$. Nel caso del rotolamente invece si è trovato $a = 4m/s^2$, per cui l'accelerazione risulta più bassa quando le ruote girano.

2. Limitandosi alla sola componente orizzontale la prima equazione cardinale si può scrivere come:

$$-4f = 2ma$$

visto che l'unica forza presente, in orizzontale, è l'attrito sulle ruote.
La seconda equazione cardinale fornisce:

$$M_f - 4fR = I\dot{\omega}$$

in quanto la forza di attrito agisce in direzione opposta rispetto al momento frenante. Dalle due equazioni cardinali (utilizzando la solita condizione di puro rotolamento):

$$a = -\frac{2M_f}{5mR}$$

Integrando rispetto al tempo, abbiamo:

$$v(t) = v_0 - |a|t$$

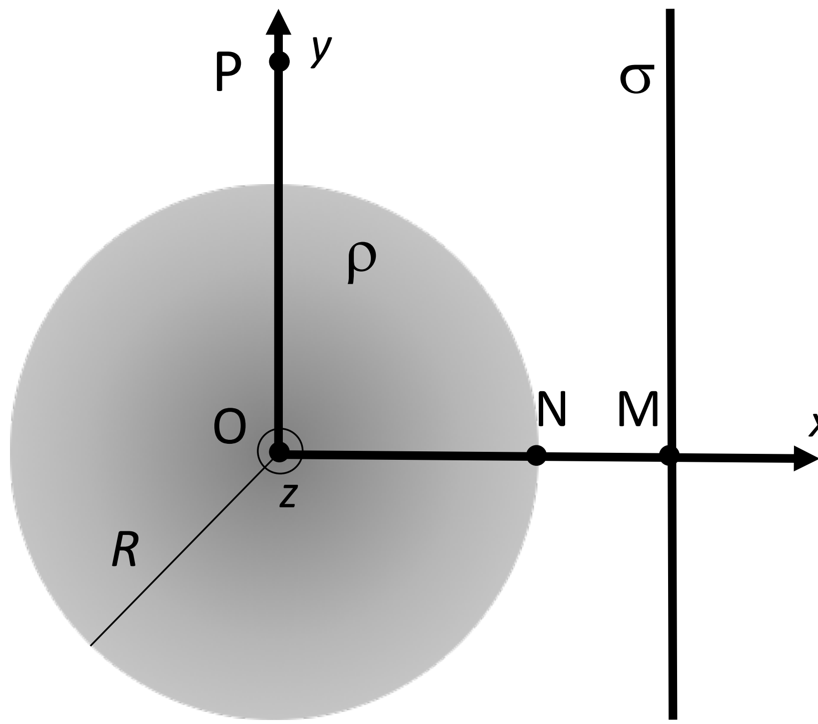
dove $v_0 = 8.9\ m/s$ è la velocità trovata al punto precedente (v). Dopo un tempo Δt, la velocità diventa nulla, per cui:

$$v_0 = |a|\Delta t \ \rightarrow \ M_f = \frac{5mRv_0}{2\Delta t} = 6.7\ Nm$$

3. Considerando che l'attrito non fa lavoro (moto di puro rotolamento), tutta l'energia disponibile iniziale, $2mgdsin(\alpha)$ che nel punto B è stata convertita in energia cinetica (T_B) di rotazione e traslazione viene dissipata dalla forza frenante, per cui, per il teorema della forze vive, il lavoro della forza frenante è pari a :

$$L_{freno} = T_C - T_B = -2mgdsin(\alpha) = -1000\ J$$

Esercizio 2



Una sfera di raggio R è carica. La carica è distribuita uniformente nel volume sfera, con densità $\rho > 0$. Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine O nel centro della sfera (vedi figura). Un piano indefinito, uniformemente carico con densità di carica superficiale $\sigma < 0$, è posto a distanza $d + \epsilon = OM$ dal centro della sfera (si assuma ϵ positivo e trascurabile).

1. Si determini l'espressione del campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$ per un generico punto dell'asse x nell'intervallo compreso tra O e M, $\overrightarrow{E}(x, 0, 0)$, e si calcoli nel punto di coordinate (d,0,0), $\overrightarrow{E}(d, 0, 0)$.
   $\overrightarrow{E}(x, 0, 0) =$ .... $\overrightarrow{E}(d, 0, 0) =$ ....

2. Si determini la differenza di potenziale tra i punti N (intersezione dell'asse x con la superficie sferica) e M, $V(N) - V(M)$
   $V(N) - V(M) =$ ....

3. Viene posta una carica puntiforme q nel punto P a distanza $l = OP$ dal centro della sfera. Determinare la forza $\overrightarrow{F}$ agente sulla carica.
   $\overrightarrow{F} =$ ....

Dati: $R = 10\ cm$, $d = 50\ cm$, $l = 30\ cm$, $\rho = 240\ \frac{\mu C}{m^3}$, $\sigma = -2.5\ \frac{\mu C}{m^2}$, $q = 1\ nC$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$.

Soluzione Esercizio 2

1. Il campo elettrostatico per il principio di sovrapposizione, è dato dalla somma vettoriale dei campi generati dalla sfera e dal piano.
   Indicando con $\overrightarrow{E}_1$ il campo generato dalla sfera, stante la simmetria sferica della sua distribuzione di carica, esso è radiale rispetto al centro O e dipende solo dalla distanza da O. Quindi, per il generico punto dell'asse x di coordinate $(x, 0, 0)$ con $0 \leq x \leq d$, $\overrightarrow{E}_1$ ha la sola componente lungo x, per cui $\overrightarrow{E}_1 = E_1\hat{x}$. Dove con E_1 abbiamo indicato il modulo di $\overrightarrow{E}_1$, essendo, per ogni punto sull'asse x appartente all'intervallo designato, il campo diretto come l'asse x. Per il teorema di Gauss, si ha:

$$E_1 = \begin{cases} \frac{\rho x}{3\epsilon_0} & 0 \leq x \leq R \\ \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} & x \geq R \end{cases}$$

   Indicando con $\overrightarrow{E}_2$, il campo generato dal piano carico, esso, in tutto il semispazio $x < d$, è perpendicolare al piano stesso (quindi parallelo all'asse x) e diretto nel verso delle x positive dato il segno della carica negativa del piano. Quindi $\overrightarrow{E}_2 = E_2\hat{x}$ con:

$$E_2 = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}, \ per \ x \leq d$$

   Per cui il campo complessivo per un punto qualsiasi sul segmento OM è dato da:

$$\overrightarrow{E}(x, 0, 0) = \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = E\hat{x}$$

   con E dato da:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho x}{3\epsilon_0} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} & 0 \leq x \leq R \\ \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} & R \leq x \leq d \end{cases}$$

   per cui

$$E(d, 0, 0) = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 d^2} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 1.77 \times 10^5 \ \frac{V}{m}$$

   con

$$\overrightarrow{E}(d, 0, 0) = E(d, 0, 0)\hat{x}$$

2. Per il calcolo della differenza di potenziale, noto il campo elettrico:

$$V(N) - V(M) = \int_R^d E(x)dx = \int_R^d \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2}dx + \int_R^d \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}dx = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right) + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\left(d - R\right) = 1.29 \times 10^5 \ V$$

3. La forza a cui è sottoposta la carica q nel punto P è $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = q\left(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2\right)$, con $\overrightarrow{E}_1$ stavolta diretto lungo l'asse y nel verso positivo e $\overrightarrow{E}_2$ sempre diretto lungo l'asse x. Usando l' espressione del campo elettrico per $OP = l$ otteniamo: $F_x = q\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 1.41 \times 10^{-4} \ N$, e $F_y = q\frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 l^2} = 1 \times 10^{-4} \ N$. Per cui:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0.17 \ mN$$

   Mentre l'angolo formato da $\overrightarrow{F}$ con il semiasse positivo delle x è

$$\alpha = arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 35.34^o$$