Prova di Comunicazioni Numeriche 075II

17 Luglio 2023

1. Si consideri il polinomio $g(D) = D^3 + D^2 + 1$.

   (a) Dimostrare che $g(D)$ può essere utilizzato come polinomio generatore per un codice ciclico con $n = 7$ e trovare il corrispondente valore di k;

   (b) Trovare la matrice generatrice *sistematica* del codice.

   (c) Sapendo che $d_{min} = 3$ e data la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]$, *sfruttare le proprietà dei codici ciclici* per trovare $\hat{\mathbf{e}}$ e, successivamente, $\hat{\mathbf{x}}$. (**4** punti)

2. Dato il codice convoluzionale con polinomi generatori (in notazione ottale) $g_1 = 6$ e $g_2 = 7$, disegnare lo schema a blocchi ed il diagramma di stato del codificatore. Assumendo che il codificatore parta dallo stato 00 e vi torni dopo 5 intervalli di segnalazione, data la sequenza ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$, trovare la sequenza $\hat{\mathbf{x}}$ secondo il criterio di decodifica a massima verosimiglianza. (**4** punti).

3. Il codice a blocco $\mathcal{C}$ con $n = 4$ e $k = 2$ ha le seguenti parole di codice:

   $$\mathcal{C} = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$$

   (a) Trovare una matrice generatrice del codice;

   (b) Determinare i coset del codice;

   (c) Decodificare la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [0, 1, 0, 0]$, utilizzando i coset leader. La parola decodificata è univoca? Motivare la risposta. (**2** punti)

4. Enunciare ed applicare ad un problema a scelta il teorema di integrazione. (**3** punti)

5. Enunciare ed applicare ad un problema a scelta la prima formula di Poisson. (**3** punti)

6. Si lanciano due dadi. Calcolare la probabilità di ottenere: (**3** punti)

   (a) due numeri superiori a 3;

   (b) due numeri la cui somma è 6;

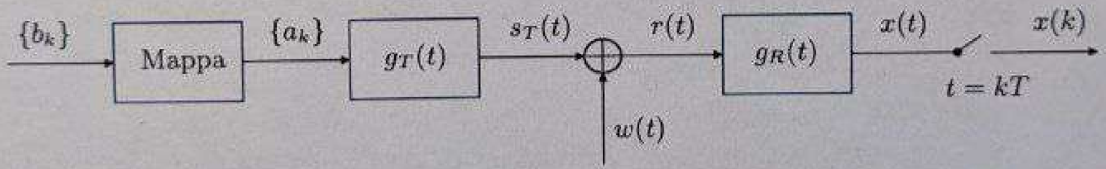
(c) due numeri la cui somma non supera il 6.

7. Le variabile aleatorie X, Y, Z sono indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $[-1,1]$, $[-2,2]$ e $[-4,4]$. Sia $N = X + 0.5Y + 0.25Z$ una variabile aleatoria con valor medio μ_n e varianza σ_n^2. (**3** punti)

   (a) Calcolare $\Pr(-3 \leq N \leq 3)$;

   (b) Calcolare un bound superiore per $\Pr(|N - \mu_n| \geq \sqrt{7})$.

8. Dato il sistema di comunicazione numerico PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = g_R(t) = \mathrm{rect}(t/T)$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. (**4** punti)



   (a) Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$;

   (b) Dimostrare che i campioni di rumore ottenuti a diversi istanti di campionamento sono indipendenti.

9. Calcolare (a partire dal campione $\tilde{x}(k) = c_k + \tilde{n}(k)$ in uscita dal filtro di ricezione) la probabilità di errore sul simbolo di un sistema di comunicazione numerico 4-QAM in funzione del rapporto E_s/N_0 (**4** punti)