Ricerca Operativa 9/1/25

Esercizio 1. Un'azienda produce settimanalmente fino a 500 litri di olio (O) e fino a 600 litri di vino (V) che vengono venduti all'ingrosso (I) e al dettaglio (D) ai seguenti prezzi di vendita in euro al litro:

	I	D
O	3	4
V	2	3

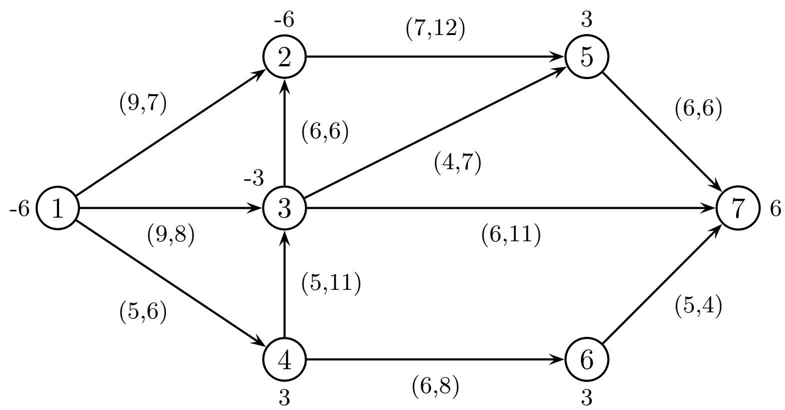
La quantità di olio venduta al dettaglio non puo' superare il 90% della quantità complessiva di vino ed olio venduta all'ingrosso mentre la quantità di vino venduta al dettaglio non puo' superare il 50% della quantità complessiva di vino ed olio venduta all'ingrosso. La vendita al dettaglio comporta la presenza di personale per 0.01 ore per ogni litro di prodotto venduto. Sapendo che il personale addetto alla vendita e' disponibile al più per 30 ore la settimana al costo di 8 euro l'ora, si massimizzi il profitto. Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione con la sola produzione di olio e vino all'ingrosso. Calcolare il primo taglio di Gomory.

Esercizio 2. Trovare il ciclo di costo minimo sulla rete:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	91	62	43
2		25	54	57
3			11	9
4				13

Calcolare le valutazioni date da assegnamento di costo minimo, 5–albero di costo minimo, algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5 e algoritmo delle toppe sull'assegnamento trovato. Scrivere esplicitamente l'equazione di un vincolo del TSP violato dall'assegnamento ed uno dal 5–albero. Applicare il *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero ed istanziando x_{35}, x_{34}, x_{13}.

Esercizio 3. Su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerare il flusso dato dall'albero di copertura formato dagli archi (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) e l'arco (5,7) come arco di U. Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 tramite l'algoritmo di Dijkstra e la soluzione ottima in termini di flusso su reti. Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 7 di capacitá minima.

Esercizio 4. Sia $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ su $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 - 1 \leq 0, \quad x_1^2 + 4\,x_2^2 - 4 = 0\}$. I punti stazionari sono $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $\left(-1,\ \sqrt{3}/2\right)$, $\left(-1,\ -\sqrt{3}/2\right)$ e $\left(\sqrt{63}/4,\ -1/8\right)$. Catalogarli calcolando i moltiplicatori.

Sia da massimizzare $f(x_1, x_2) = -2\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 - 9\,x_2$ sul poliedro di vertici $(2,0)$, $(5,3)$, $(1,5)$ e $(-1,1)$. Fare un passo del gradiente proiettato ed uno di Frank-Wolfe a partire da $(0, \frac{2}{3})$.

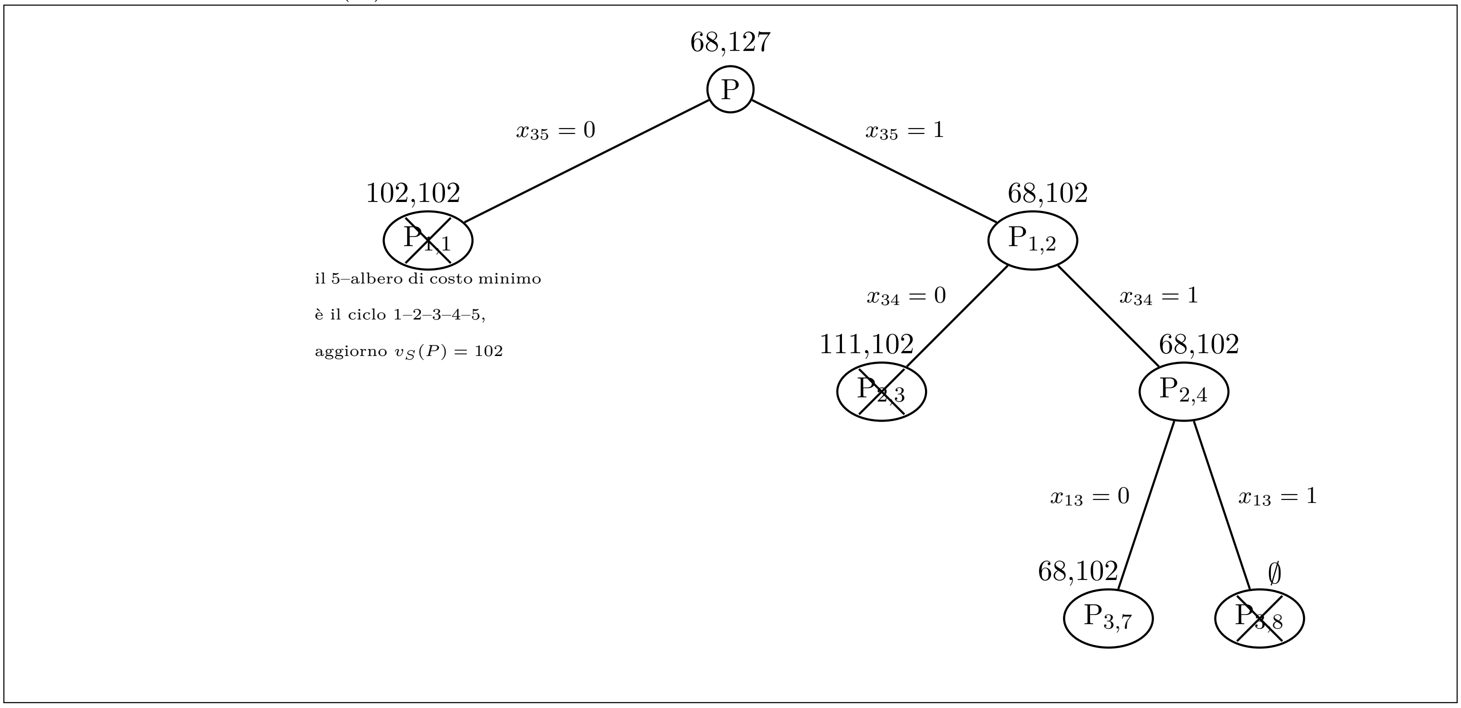
SOLUZIONI

Esercizio 1. Si indichino con $i = 1,2$, l'olio ed il vino rispettivamente, con $j = 1,2$, la vendita all'ingrosso e al dettaglio e con x_{ij} = la quantitá (in litri) di prodotto i da vendere mensilmente

$$\begin{cases} \max\ (3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{21} + 3x_{22} - 0.08(x_{12} + x_{22})) \\ x_{11} + x_{12} \leq 500 \\ x_{21} + x_{22} \leq 600 \\ x_{12} \leq 0.9(x_{11} + x_{21}) \\ x_{22} \leq 0.5(x_{11} + x_{21}) \\ 0.01(x_{12} + x_{22}) \leq 30 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Vertice di partenza: $(500, 0, 600, 0)$ con base $B = \{1, 2, 7, 9\}$. $y = (3, 2, 0, 0, 0, 0, -0.92, 0, -0.92)$, $h = 7$, e $W^7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $r = (9900/19, 1100, 3000, 500)$, $k = 6$. L'ottimo del rilassato continuo è $(175/2, 825/2, 2225/6, 1375/6)$. per calcolare il piano di taglio $r = 1$ la prima riga della matrice $\tilde{A}$ è $(5/8, -3/8, -5/8, 3/8)$ ed il taglio è $5x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 3x_8 \geq 4$.

Esercizio 2. L'assegnamento di costo minimo è $1-2-1$ e $3-4-5-3$ che dà $v_I(P) = 53$.
5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 68$
ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 $v_S(P) = 127$



Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x	(0, 0, 6, 6, 0, 3, 0, 0, 3, 6, 0)	
π	(0, 9, 12, 5, 16, 11, 18)	
Arco entrante	(1,3)	
ϑ^+, ϑ^-	4 , 0	
Arco uscente	(1,2)	

L'albero dei cammini minimi come flusso è $x = (1, 3, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. I cammini aumentanti sono 1-3-7; 1-2-5-7; 1-4-3-7; 1-4-6-7 con $\delta = (8, 6, 3, 3)$ con flusso ottimo $x = (6, 8, 6, 6, 0, 11, 3, 3, 6, 3)$, $N_s = \{1, 2, 5\}$.

Esercizio 4.

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 1)$	0	$1/8$	NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ -1)$	0	$-1/8$	NO	NO	NO	SI	NO
$\left(-1,\ \sqrt{3}/2\right)$	$-2-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/12$	NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-1,\ -\sqrt{3}/2\right)$	$-2+\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/12$	NO	SI	NO	NO	NO
$\left(\sqrt{63}/4,\ -1/8\right)$	0	-1	SI	SI	NO	NO	NO

matrice M	$(-1,-3)$
matrice H	$\begin{pmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$
direzione	$\left(\frac{31}{10},-\frac{31}{30}\right)$
max spostamento possibile lungo la direzione	$\frac{20}{31}$
passo	$\frac{5}{16}$
x^1	$\left(\frac{31}{32},\frac{11}{32}\right)$

linearizzato	$-\frac{4}{3}x_1 - \frac{43}{3}x_2$
ottimo linearizzato	(2,0)
direzione	$\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$
restrizione	$-\dfrac{64}{9}t^2 + \dfrac{62}{9}t$
passo	$\dfrac{31}{64}$
x^1	$\left(\dfrac{31}{32}, \dfrac{11}{32}\right)$