ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 44

Note Title 27/11/2018

COME TROVARE LA SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Come trovare n_0, n_+, n_- ?

Come trovare s.sp. di dim. n_+ in cui $q(x) > 0$?

" " n_- in cui $q(x) < 0$?

Quattro metodi

1. Autovalori
2. Completamento dei quadrati
3. SYLVESTER
4. CARTESIO

1 $\boxed{\text{Autovalori}}$ La forma quadratica è rappresentata da una matrice A simmetrica.

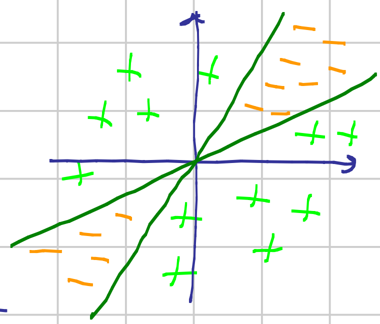
Essendo simmetrica, A ha n autovalori REALI

A questo p.to

- n_+ = numero autovalori positivi
- n_- = " " negativi
- n_0 = " " nulli

(Così è ovvio che $n_+ + n_- + n_0 = n$)

Grosso difetto: se il grado è alto, può essere impossibile trovare gli autovalori



Esempio $q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Det = −1 = prod. autovalori

⇝ autovalori: +, − ⇝ $n_0 = 0, n_+ = 1, n_- = 1$

Esempio $\quad 7x^2+6xy+4y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det} = 19 > 0$

$\rightsquigarrow$ Autovalori: $++$ oppure $--$

Essendo $\mathrm{Tr}(A) = 11$, di sicuro gli autovalori sono $++$, quindi

$n_+ = 2$, $n_- = 0$, $n_0 = 0$

Quindi la forma è definita positiva su tutto $\mathbb{R}^2$, cioè

$$q(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

— o — o —

$\boxed{2}$ Completamento dei quadrati

Idea: cercare di scrivere q come somma e/o differenza di quadrati di espressioni LINEARMENTE INDIP.

A questo punto:

- n_+ = numero di $\square$ con il segno $+$ davanti
- n_- = " " " $-$ "
- n_0 si ottiene per differenza.

Esempio $\quad q(x,y) = 2x^2+6xy+4y^2 = 2(x^2+3xy+2y^2)$

$$x^2+3xy+2y^2 = x^2 + \underbrace{2\cdot x\cdot \frac{3y}{2}}_{\text{cerco di vedere } 3xy \text{ come doppio prodotto}} + \underbrace{\frac{9y^2}{4} - \frac{9y^2}{4}}_{\text{aggiunti e tolti}} + 2y^2$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

Tenendo conto del 2 davanti a tutto abbiamo scritto

$$q(x,y) = 2\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Avendo un $\square$ con il $+$ avremo $n_+ = 1$
" " $\square$ con il $-$ " $n_- = 1$ $\Big\}$ $\rightsquigarrow$ $n_0 = 0$.

Questa scrittura dà più informazioni della sola segnatura.

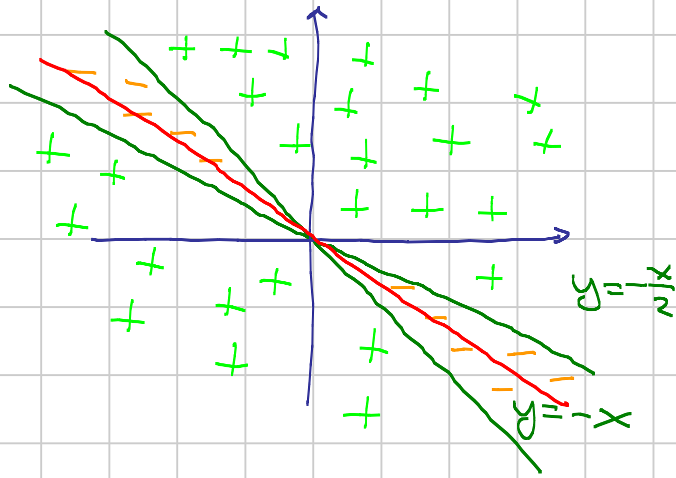
- Dove si annulla $q(x,y)$? Deve essere $\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 = \frac{1}{4}y^2$

cioè $\quad x+\frac{3}{2}y = \pm\frac{1}{2}y$, cioè

$$x+\frac{3}{2}y = \frac{1}{2}y \qquad\qquad x+\frac{3}{2}y = -\frac{1}{2}y$$

$$x+y=0 \qquad\qquad x+2y=0$$

Quindi graficamente la situazione è come in figura



- Trovare una retta (s.sp. di dim 1) su cui q è def negativa.

Guardo la scrittura

$$q(x,y) = 2\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

basta porre $\quad x+\frac{3}{2}y = 0 \quad\rightsquigarrow\quad y = -\frac{2}{3}x$

<u>Esempio</u> $\qquad q(x,y) = 3x^2 - 2y^2$

È evidente che $\quad n_+ = 1$ e $n_- = 1$

$$q(x,y) = \underbrace{x^2+x^2+x^2}_{\text{così non vale perché queste non sono lin. indip.}} - 2y^2$$

Esempio $q(x,y,z) = x^2+4xy-6yz-3z^2$

$$x^2+4xy-6yz-3z^2 = \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2y + 4y^2}-4y^2-6yz-3z^2$$

$$= (x+2y)^2-4y^2-6yz-3z^2$$ (non ho + x da sistemare)

$$= (x+2y)^2-[4y^2+6yz+3z^2]$$

$$(2y)^2+2\cdot 2y\cdot \frac{3}{2}z+\frac{9}{4}z^2-\frac{9}{4}z^2+3z^2$$

$$= \boxed{(x+2y)^2-\left(2y+\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{3}{4}z^2}$$

verifica: espandere tutto e verificare che venga $q(x,y,z)$

Da questa deduciamo che $n_+ = 1$ e $n_- = 2$ (e $n_0 = 0$)

- Come trovo un s.sp. di dim 2 su cui q è def. negativa?

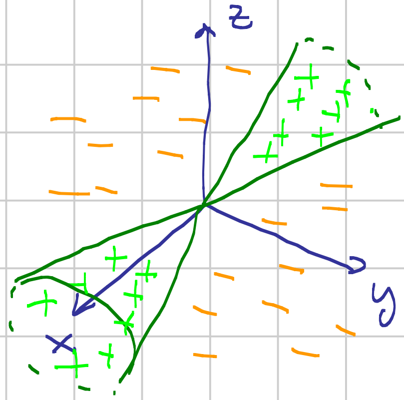
Impongo annullamento del primo termine: $x+2y=0$ pensata come equ. in 3 variabili.
Una base delle soluzioni è $(-2,1,0)$, $(0,0,1)$
Quindi un poss. sottospazio richiesto è
$\text{Span}\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$
Quindi: ogni vettore (x,y,z) che è comb. lin. di questi due rende $q(x,y,z)<0$.

- Come trovo un s.sp. di dim 1 su cui q è def. pos.?

Impongo
$2y+\frac{3}{2}z=0 \rightsquigarrow y=0$
$z=0 \rightsquigarrow z=0$

Quindi il sottosp. è $\text{Span}\{(1,0,0)\}$

Geometricamente, in $\mathbb{R}^3$ la situazione segni è quella rappresentata in figura



$q(x,y,z)$ è $+$ dentro il cono

$-$ fuori dal cono

0 sul cono

— o — o —

<u>Esempio</u> $\quad q(x,y,z) = xy + yz$

Come completo i quadrati?

$$xy + yz = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + yz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2}$$

così non va bene perché sono troppi

Bisognava fermarsi prima e seguire l'algoritmo

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 + yz = -\frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + yz$$

Ora posso provare a sistemare l'ultimo termine.

Altra alternativa: aggiungo e tolgo un $\square$ dall'inizio

$$\underbrace{xy} + \underbrace{yz} + \underbrace{\frac{1}{4}y^2} - \frac{1}{4}y^2 + \underbrace{x^2} - x^2 + \underbrace{z^2} - z^2$$

e quelli indicati sono quasi un $\square$.

— o — o —