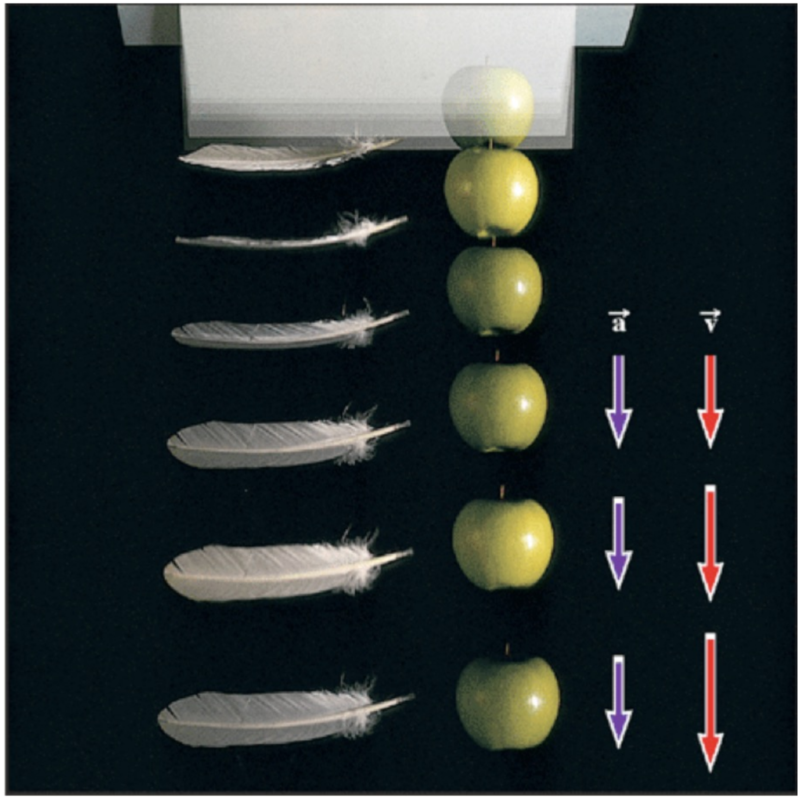
Accelerazione di gravità

Un oggetto lasciato libero cade verso terra per effetto della forza di gravità.

L'accelerazione causata dalla gravità è la stessa per qualunque oggetto: in assenza di altre forze (per esempio, resistenza dell'aria) tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione.



L'accelerazione di gravità si indica per convenzione con la lettera g.

- Alle nostre latitudini, alla superficie terrestre: $g = 9.81\ m/s^2$
- All'equatore, $g = 9.78\ m/s^2$
- Al polo nord, $g = 9.83\ m/s^2$

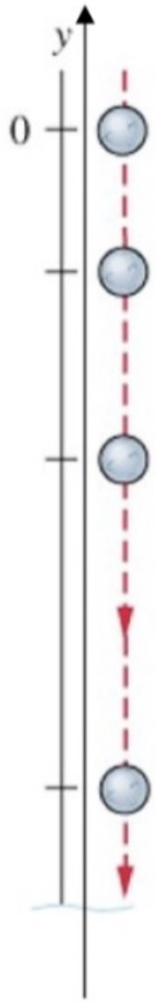
Caduta libera dei gravi

Nell'esempio a lato,

$$y_0 = y(t = 0) = 0$$
$$v_0 = v_{0y}(t = 0) = 0$$
$$a_y = -g$$

Il segno dell'accelerazione è dovuto alla scelta del verso dell'asse y (positivo verso l'alto, supponiamo di essere in cima ad un edificio)

$$v(t) = -gt \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s^2)
0	0	0	–9.8
1	–4.9	–9.8	–9.8
2	–19.6	–19.6	–9.8
3	–44.1	–29.4	–9.8
	–48.0		–9.8

Un altro esempio moto 1D

$\downarrow \vec{g}$

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$$

$$v = v(t) = at + v_0$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

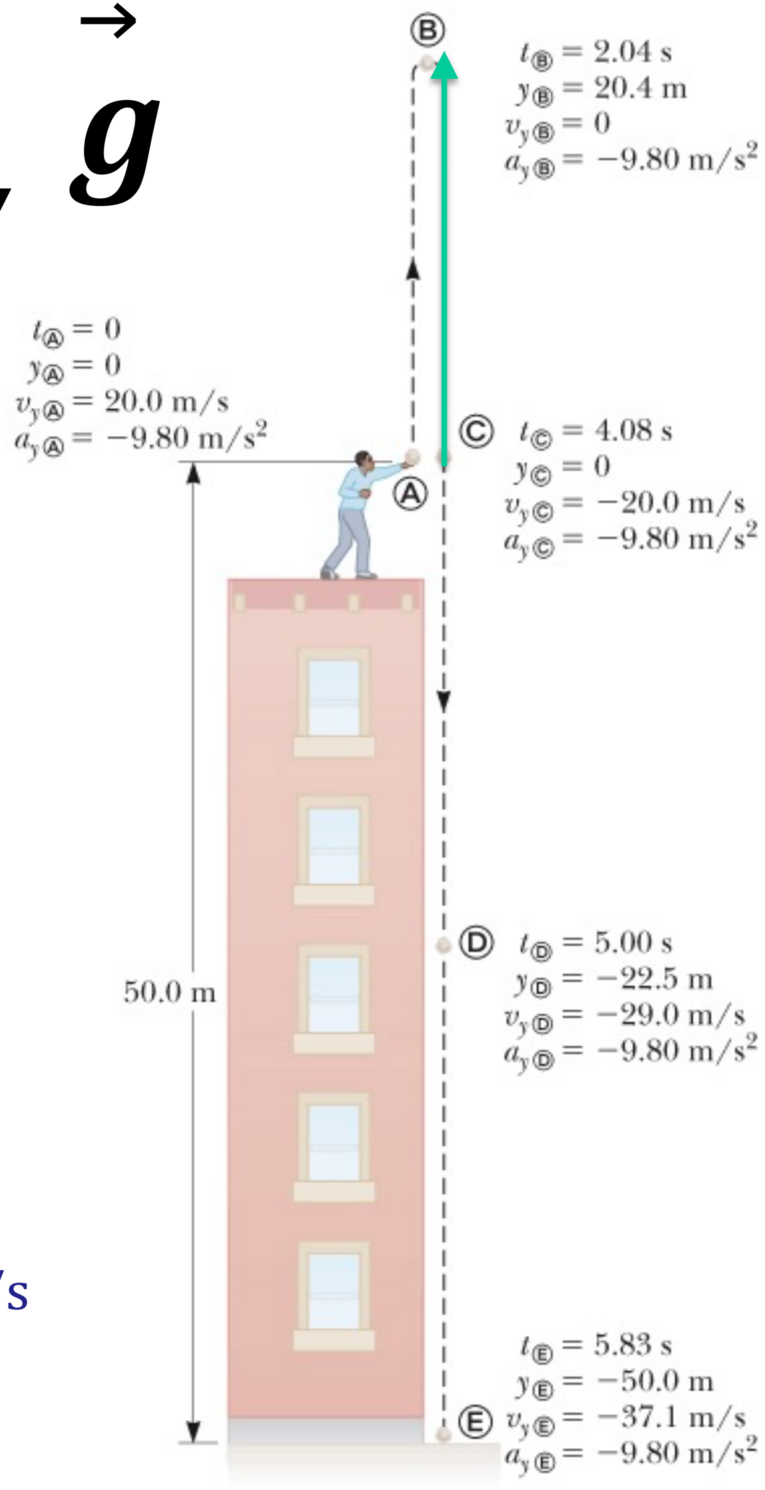
$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$$

$a = a_y = -g$

$v = v_y$

$v_0 = v_{0y}$

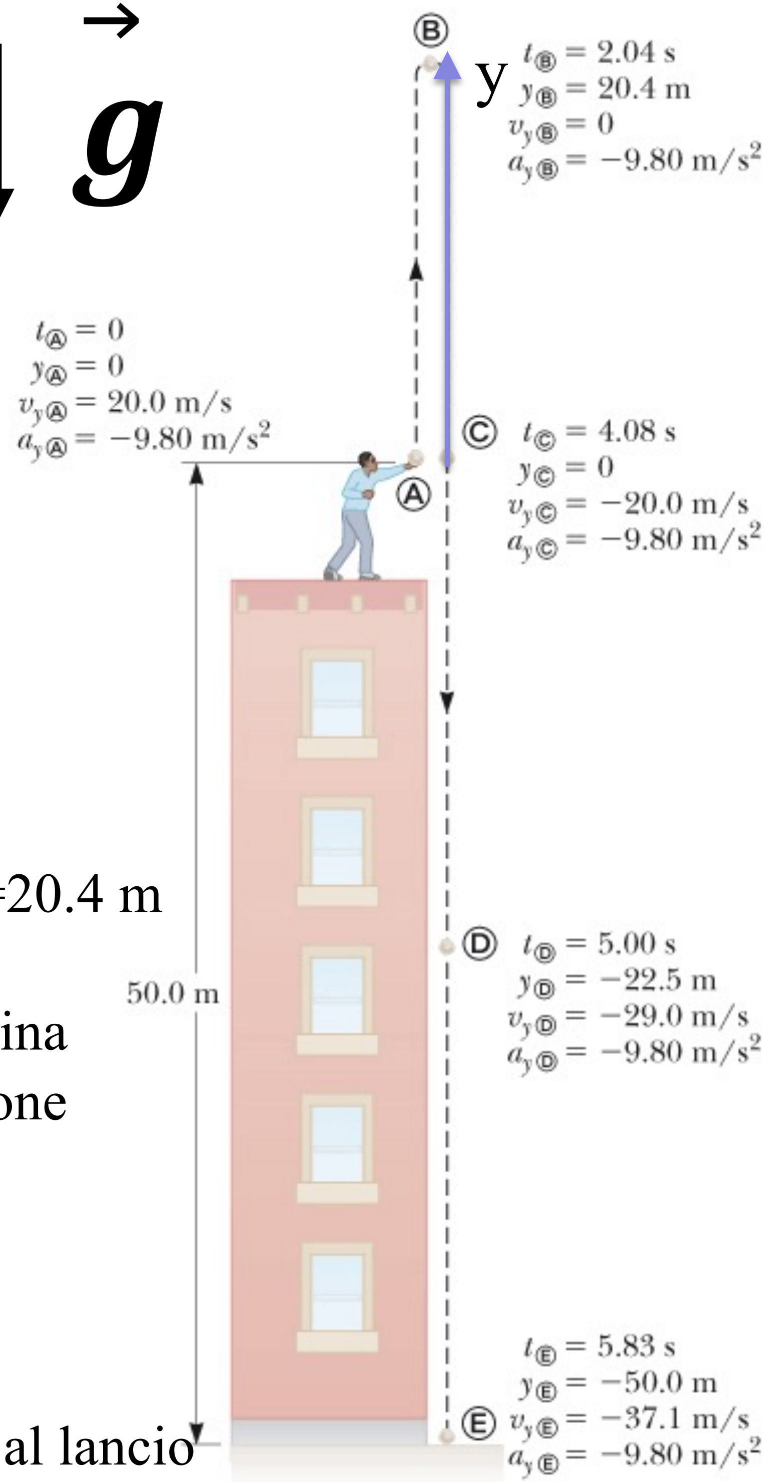
$$v_{yi} = v_y(t = 0) = v_0 = 20\ \mathrm{m/s}$$
$$y_{yi} = y(t = 0) = y_0 = 0\ \mathrm{m}$$



$v_0 = 20\ \mathrm{m/s}$ $\qquad a = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$

$y_0 = 0\ \mathrm{m}$

$\downarrow \vec{g}$



D.1 In quale istante t* la palla raggiunge la quota massima?

R.1 Quando raggiunge la quota massima la velocità si annulla, per cui:

v= at+v₀ $\quad \Rightarrow t^* = -\dfrac{v_0}{a}$ =2.04s

D.2 A che quota y_{max} arriva la pallina (usare il sistema di riferimento indicato)?

R.2 y_{max} viene raggiunta a $t = t^*$, pertanto:

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0 \Rightarrow \quad y_{max} = v_0 t^* + \frac{1}{2} a t^{*2}$ =20.4 m

D.3 Determinare il tempo t' che impiega la pallina una volta lanciata a ritornare nella stessa posizione

R.2 per $t = t'$, $y(t') = 0$ pertanto:

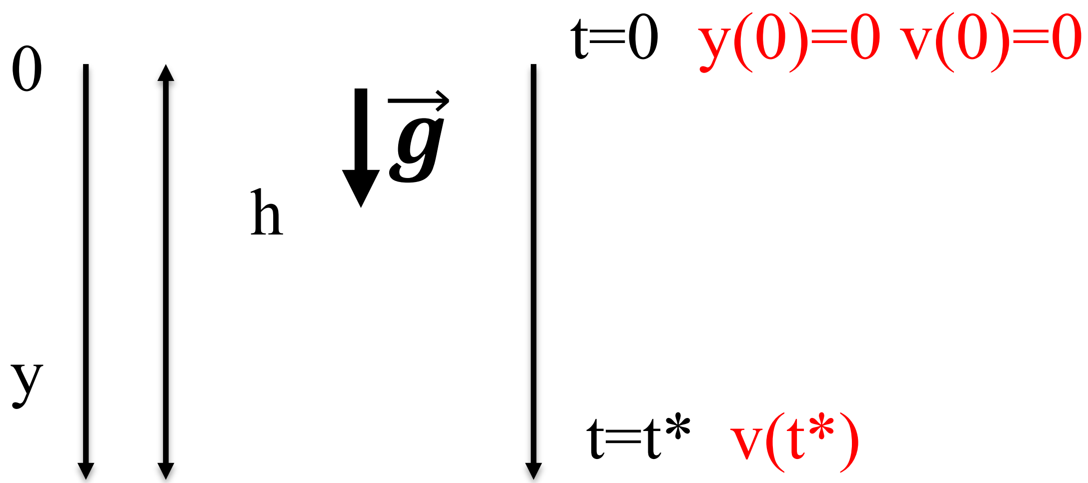
$$y(t') = 0 = v_0 t' + \frac{1}{2} a t'^2 = t'\left(v_0 + \frac{1}{2} a t'\right)$$

$\Rightarrow t' = -\dfrac{2v_0}{a}$ =4.08s $\qquad$ poichè t =0 corrisponde al lancio

Esercizio

In un cantiere una chiave inglese viene lasciata cadere da ferma da una certa altezza e arriva al suolo con velocità v=24 m/s.

1) Quanto tempo impiega la chiave ad arrivare a terra?



Dati
$v(t^*)=24$ m/s
$v(0)=0$

1) $v = at+v_0$

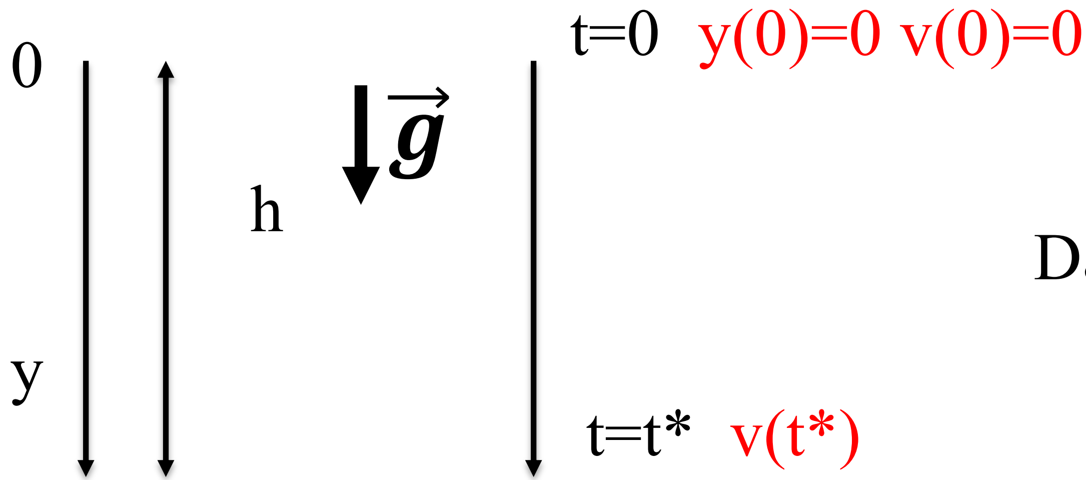
2) $y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$

Dalla 1) $v(t^*)=at^*$

$$\vec{a} = g\hat{y}$$

$$v(t^*) = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v(t^*)}{g} = 2.45 \text{ s}$$

2) Da che altezza h è caduta la chiave?



1) $v = at + v_0$

2) $y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$

Dalla 2) $$y(t^*) = h = \frac{1}{2}at^{*2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}g\left(\frac{v(t^*)}{g}\right)^2 = 29{,}4\text{m}$$

Avremmo anche potuto usare:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0) \qquad \Rightarrow v^2(t^*) = 2gh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2(t^*)}{2g}$$

Come impostare la risoluzione di un problema

Qualche consiglio utile:

a) Leggere attentamente il testo
b) Fare un disegno scegliendo il sistema di riferimento
c) Analizzare il problema: quali relazioni cinematiche si possono usare?
d) Risolvere il problema simbolicamente
e) Verificare se la risposta è dimensionalmente corretta
f) Risolvere il problema numericamente.

Esercizio

Su un'autostrada rettilinea un camion C parte dal km 0 al tempo $t = 0$ e viaggia con velocità costante pari a 90 km/h. Dopo 10 minuti un'automobile parte dal km 0 con velocità di 120 km/h. Rappresentare graficamente i due moti e calcolare dove e quando l'auto supera il camion. (**Suggerimento**: usate km e minuti invece di metri e secondi)

Soluzione

Le velocità e le leggi orarie dell'auto A e del camion C sono:

$$V_A = 2\ \mathrm{km/min} \qquad x_A(t) = x_A(t = 10') + V_A(t - 10') = V_A(t - 10')$$

$$V_C = 1.5\ \mathrm{km/min} \qquad x_C(t) = x_C(t = 0') + V_C(t - 0') = V_C t$$

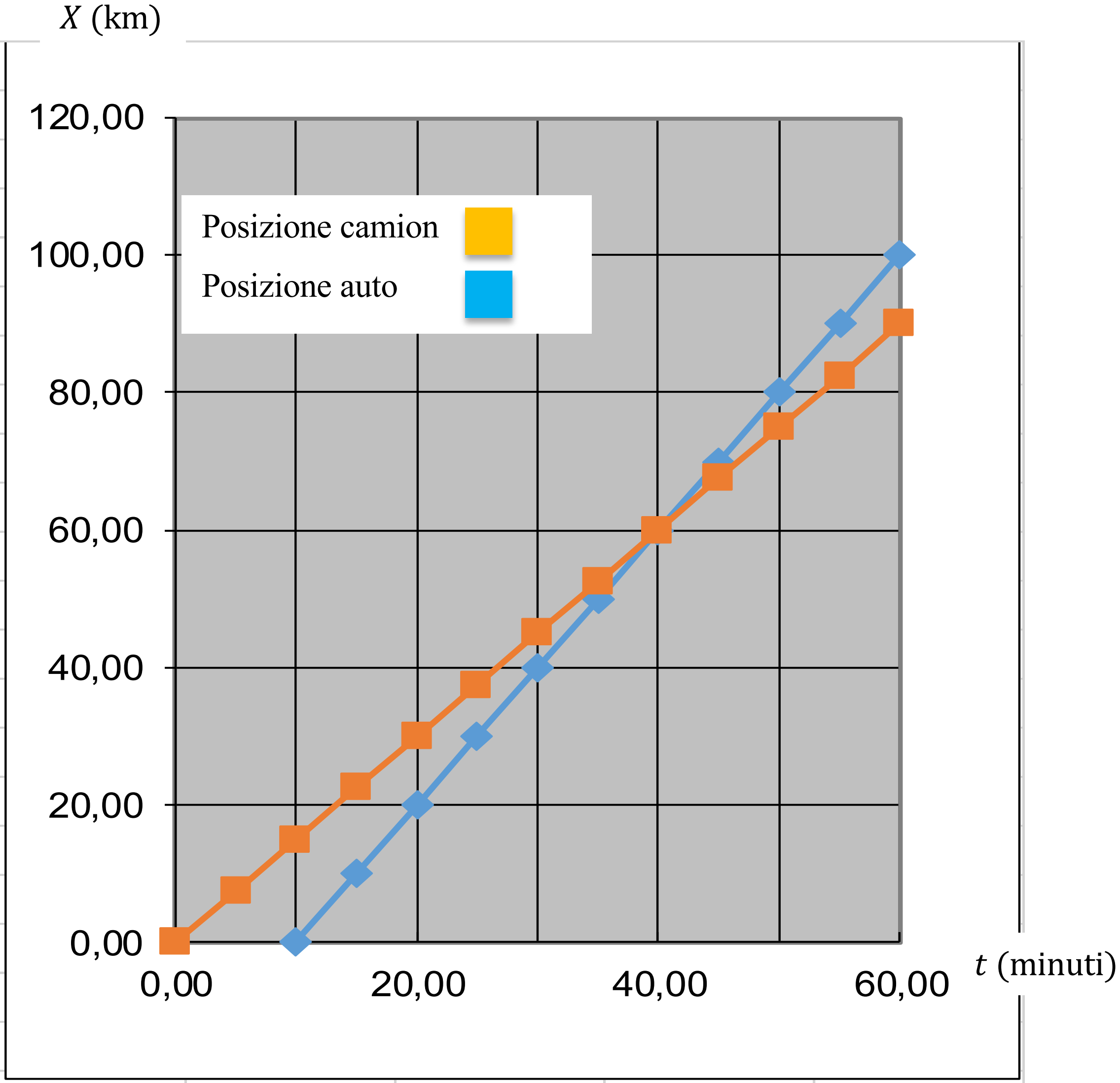
L'auto raggiunge il camion al tempo t^* tale che:

$$x_A(t^*) = x_C(t^*) \quad \Longrightarrow V_A(t^* - 10') = V_C t^* \quad \Longrightarrow t^* = \frac{V_A}{V_A - V_C} 10' = 40'$$

Il punto cruciale dell'esercizio è il fatto che la **macchina parte dieci minuti dopo**, per cui l'istante iniziale del suo moto ("t_0") **non è zero** !

Rappresentzione grafica

t (min)	Xa (km)	Xc (km)
0,00		0,00
5,00		7,50
10,00	0,00	15,00
15,00	10,00	22,50
20,00	20,00	30,00
25,00	30,00	37,50
30,00	40,00	45,00
35,00	50,00	52,50
40,00	60,00	60,00
45,00	70,00	67,50
50,00	80,00	75,00
55,00	90,00	82,50
60,00	100,00	90,00

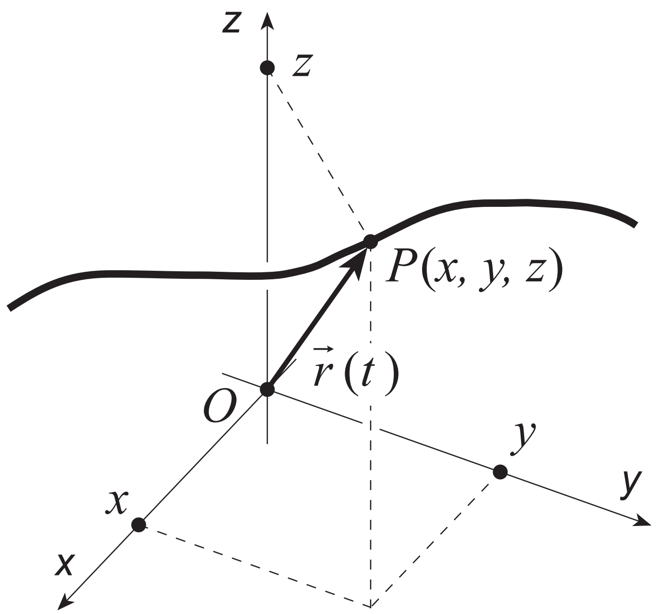


Moto di un punto materiale in 2D-3D

- **La legge oraria** è ora una funzione vettoriale in cui le coordinate sono variabili dipendenti ed il tempo è la variabile indipendente

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$



- La curva continua prende il nome di traiettoria

è l'insieme delle posizioni occupate dal punto materiale durante il moto

Cinematica in due o più dimensioni

- Le grandezze cinematiche fondamentali:
  - posizione
  - velocità
  - accelerazione

  sono dei vettori nello spazio a due o tre dimensioni, dotati di modulo, direzione, verso.

In realtà anche nel moto rettilineo tali grandezzze sono dei vettori, ma ... in una dimensione! Hanno un segno e un modulo ma la direzione è fissata.

- Il corpo percorre una traiettoria nello spazio

Moti in 2-D e 3-D

L'estensione ai casi 2-D e 3-D si ottiene applicando le definizioni di velocità ed accelerazione alle singole componenti: il moto 2-D (3-D) e' la "sovrapposizione" di 2 (3) moti 1-D.

Posizione	Velocità	Accelerazione
$\vec{s} = \vec{s}(t)$	$\vec{v} = \vec{v}(t)$	$\vec{a} = \vec{a}(t)$
$x = x(t)$	$v_x = v_x(t)$	$a_x = a_x(t)$
$y = y(t)$	$v_y = v_y(t)$	$a_y = a_y(t)$
$z = z(t)$	$v_z = v_z(t)$	$a_z = a_z(t)$

Moto di un punto materiale in 3D: posizione e spostamento

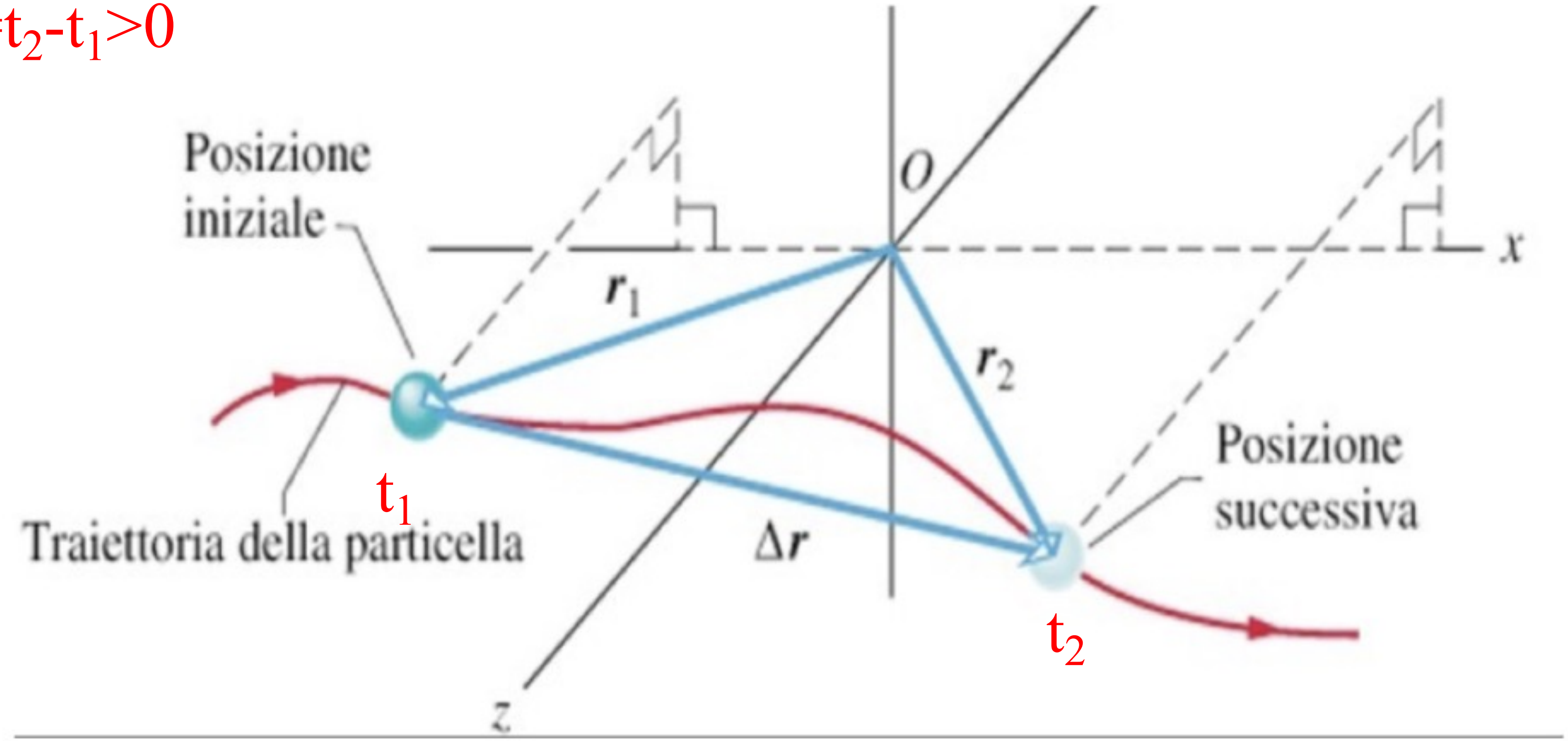
- Vettore posizione:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

- Vettore spostamento tra t_1 e t_2 :

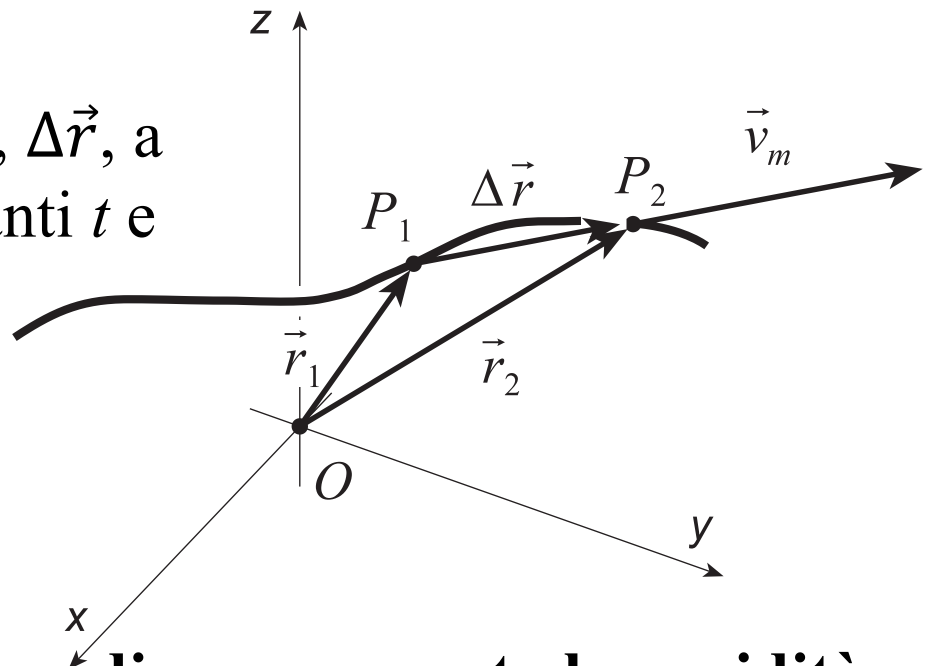
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$



Velocità media 3-D

- Possiamo scrivere il vettore spostamento del punto materiale, $\Delta\vec{r}$, a partire dalla posizione tra gli istanti t e $t+\Delta t$.

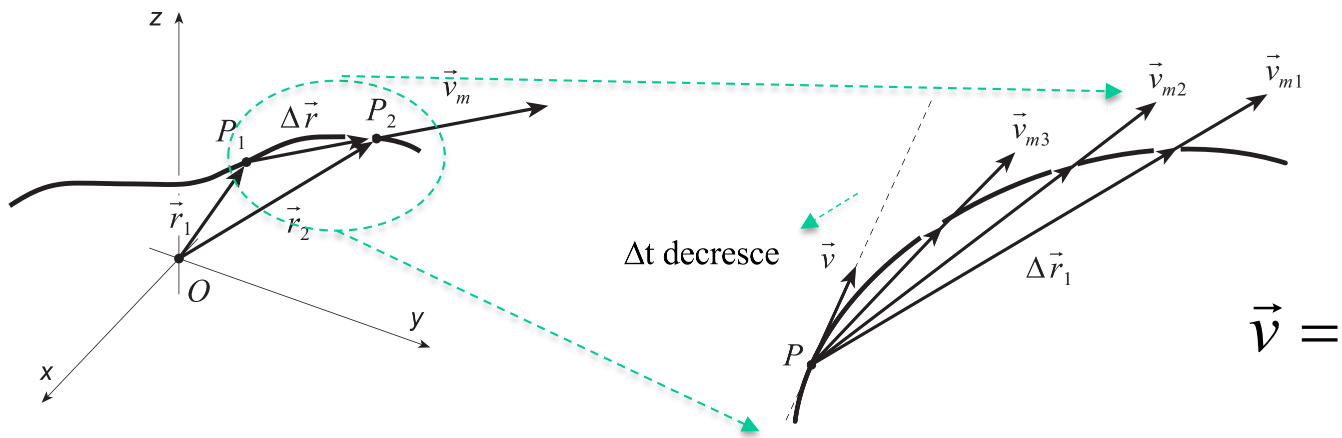


$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

- come in precedenza la **velocità media rappresenta la rapidità con cui varia la posizione**
- è il **rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui avviene lo spostamento**

$$\vec{V}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- Se procediamo come prima diminuendo l'ampiezza del Δt otteniamo velocità medie che «tendono» ad avvicinarsi alla retta tangente alla traiettoria nel punto P_1



$$\vec{v} = \hat{t}\, v\,,$$

- Definiamo quindi in modo analogo al caso unidimensionale la **Velocità istantanea** (o semplicemente **velocità**) il <u>limite</u> <u>della velocità media</u> per $\Delta t \to 0 \Longrightarrow$

$$\vec{V} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Alcune **note importanti** sulla velocità:

- È una grandezza fisica **vettoriale:**

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

  La velocità è quindi la **derivata del vettore posizione rispetto al tempo**.

- La velocità è sempre **tangente alla traiettoria** del punto, **coerentemente con il significato geometrico della derivata** (direzione della tangente ad una curva data).

- La velocità più famosa ed importante in fisica è la **velocità della luce nel vuoto**: $c = 300000\ \mathrm{km/s}$.

- Se le velocità sono **trascurabili rispetto a *c*** si può usare la **meccanica classica**, che è perfettamente adeguata; in caso contrario è necessaria la **meccanica relativistica** (Einstein, 1905)

Velocità in coordinate cartesiane

Velocità media: $\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

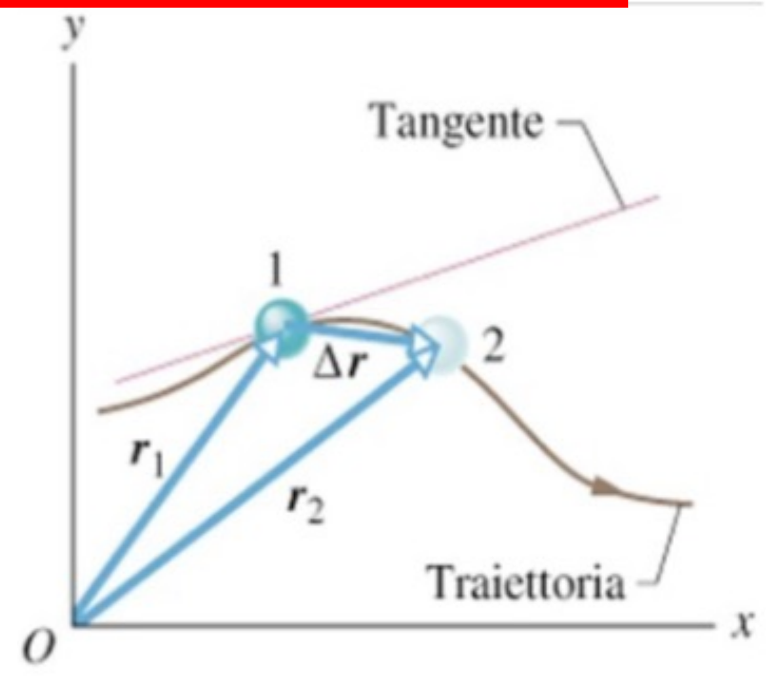
Velocità istantanea:

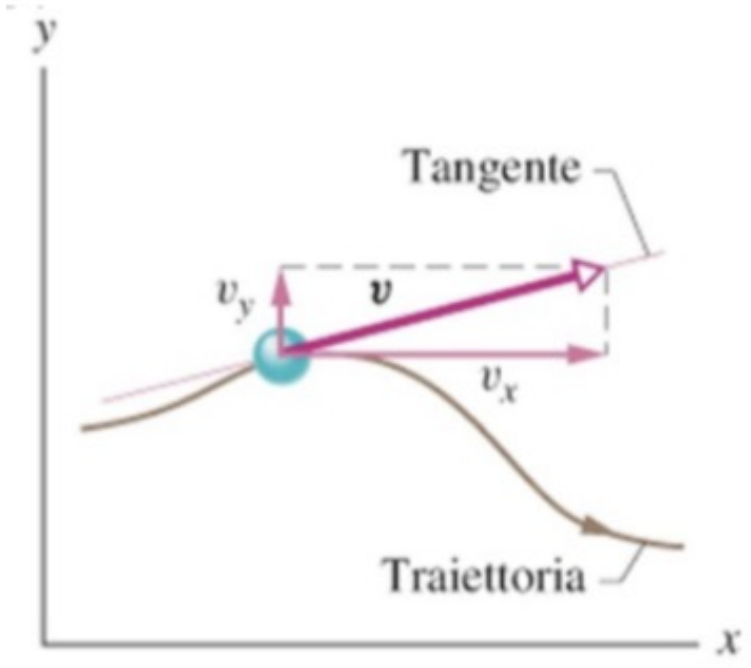
$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

- è sempre tangente alla traiettoria in coordinate cartesiane

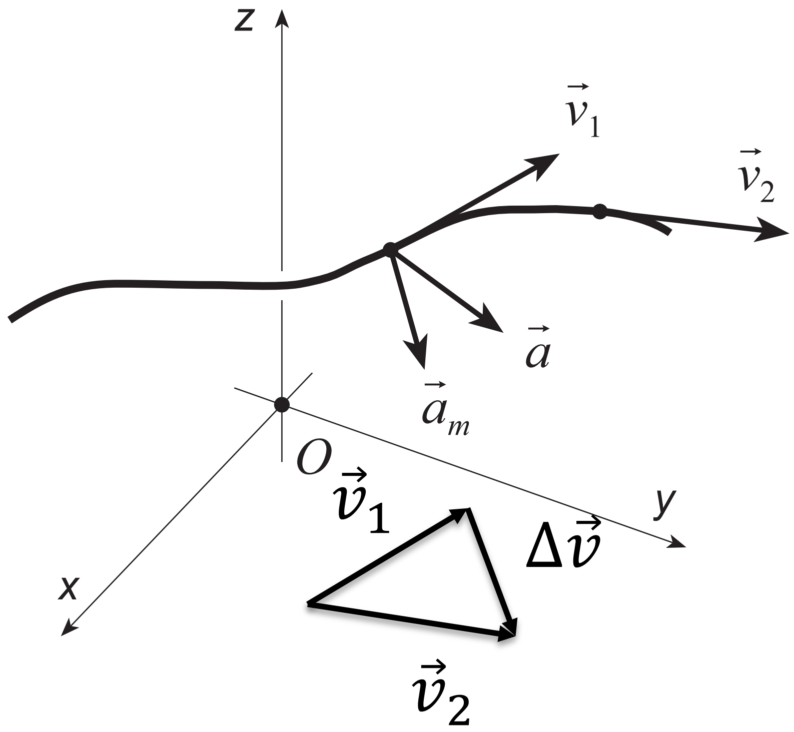




accelerazione media e istantanea in coordinate cartesiane

- Analogamente definiamo la rapidità con cui cambia il vettore velocità nel tempo, tra due tempi t_1 e t_2 con $t_2 > t_1$, l'accelerazione media tra t_1 e e t_2 :

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



- Nel caso 3-D l'accelerazione istantanea al tempo t è definita da:

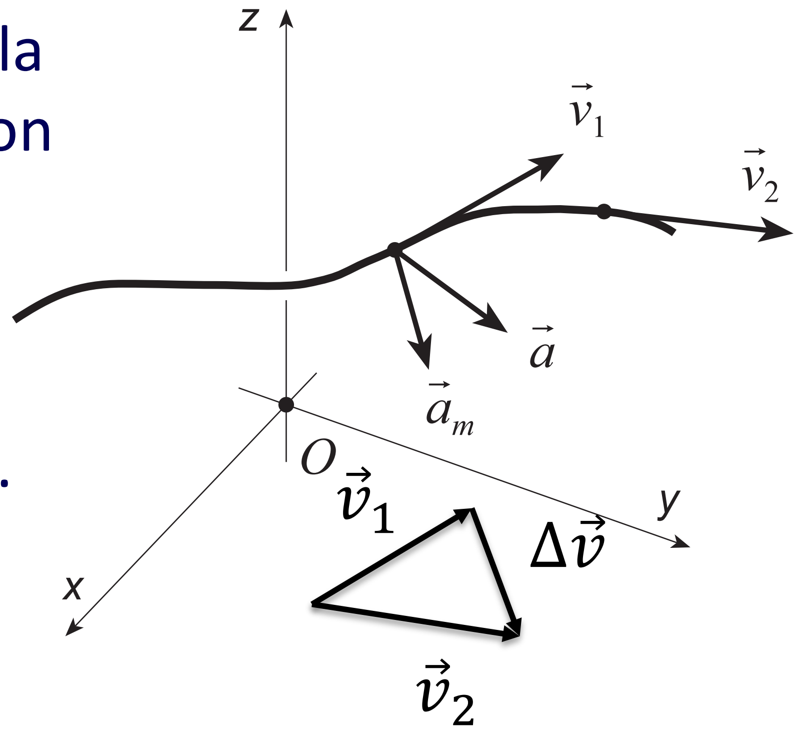
$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt}\hat{k} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

Accelerazione (2)

- In generale, in un moto curvilineo, la velocità cambia sia in modulo che in direzione

  ⇒ l'accelerazione può essere non nulla anche se il modulo della velocità non cambia.



- L'accelerazione è un vettore nella direzione della variazione della velocità.

⇒ Poichè la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria s'incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della traiettoria

Accelerazione (3)

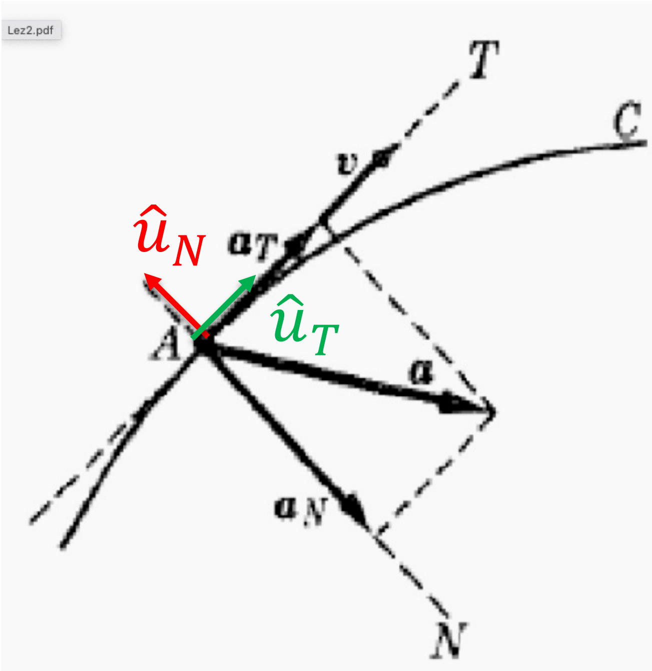
Scomponiamo velocità e accelerazione in parte tangenziale (lungo la tangente alla curva) e parte radiale (lungo la normale)

Introducendo i versori $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$:

$$\vec{v} = \mathrm{v}\hat{u}_T \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\,\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$\hat{u}_T$ dipende dal tempo, ma

$$\frac{d(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T)}{dt} = 0 = 2\hat{u}_T \cdot \frac{d(\hat{u}_T)}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \perp \hat{u}_T$$



$$\vec{a} = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\,\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

- Da qui si vede che a_T è legata alla variazione del modulo, v , di $\vec{v}$ e a_N alla variazione della direzione di $\vec{v}$.

accelerazione istantanea o accelerazione

Note importanti sull'accelerazione:

- $[\vec{a}] = \mathrm{m/s^2}$
- È una grandezza fisica **vettoriale:** $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y},\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

- è importante perché è **legata alle forze**
- nei grafici velocità vs tempo in un moto 1-*d* l'accelerazione è **tangente alla curva della velocità**
- nei moti 2-D e 3-D in generale $\vec{a}$ ha componenti sia **parallela** ($\vec{a}_{\parallel}$) **sia perpendicolare** ($\vec{a}_{\perp}$) **alla traiettoria** del punto;
- ($\vec{a}_{\perp}$) **è sempre diretta verso l'interno** della traiettoria ⇒ **accelerazione centripeta**

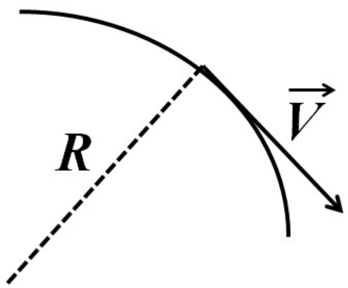
accelerazione istantanea o accelerazione (2)

- nei moti 2-D e 3-D $\vec{a}$ ha componenti sia **parallela** ($\vec{a}_{\parallel}$) **sia perpendicolare** ($\vec{a}_{\perp}$) **alla traiettoria** del punto

- ($\vec{a}_{\perp}$) **è sempre diretta verso l'interno** della traiettoria

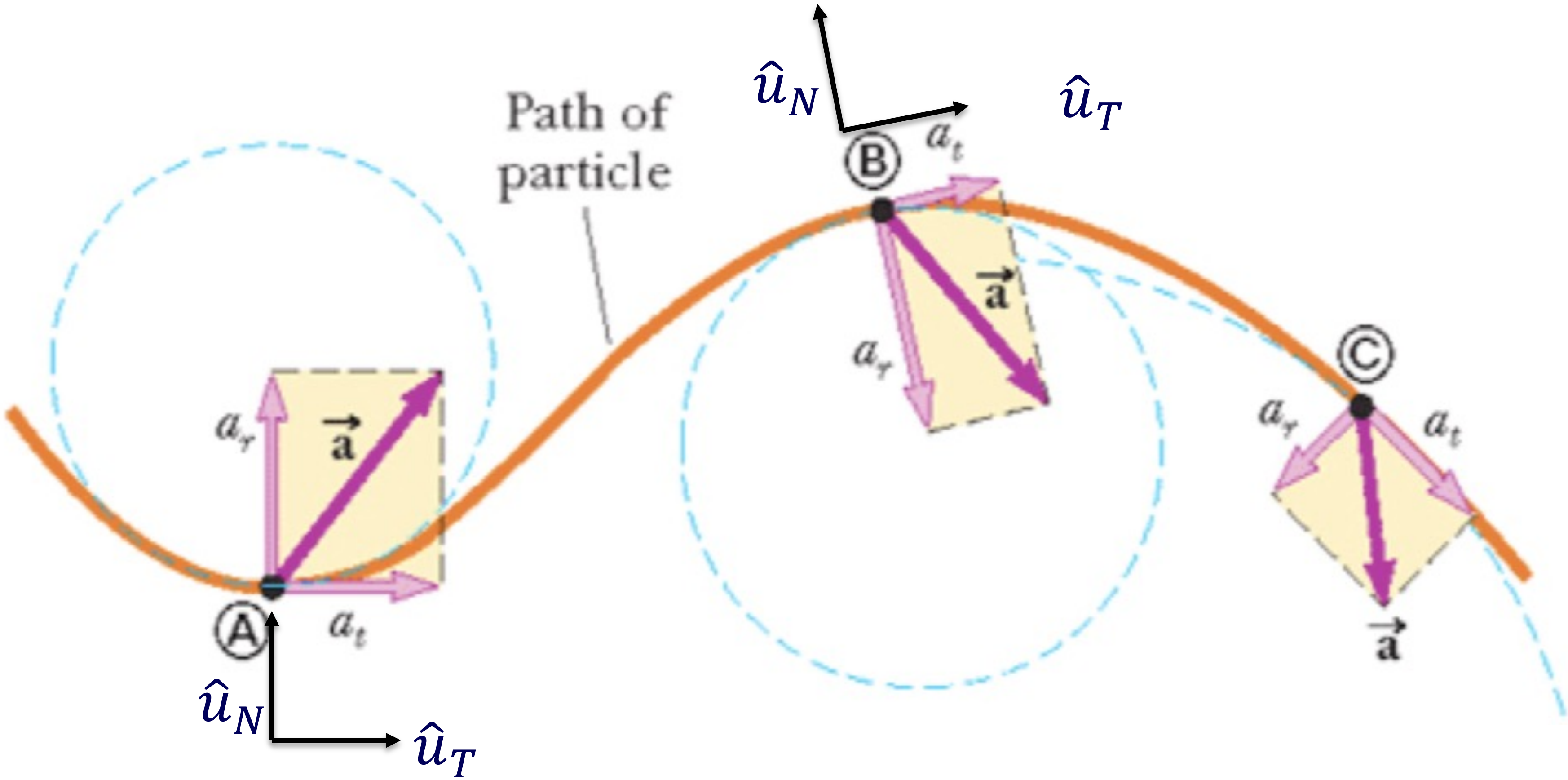
Possiamo anticipare che:

- $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$ può essere positiva, negativa, nulla
- $a_{\perp} = \frac{V^2}{R}$



dove R è il raggio della circonferenza tangente alla curva (N.B. **In generale non è costante**, cioè la circonferenza tangente e la velocità cambiano da punto a punto).

Accelerazione nel moto curvilineo

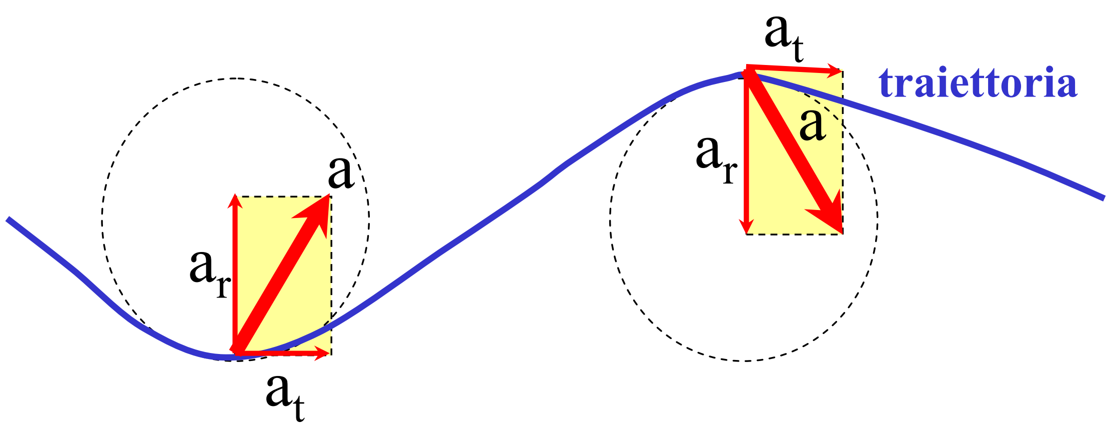


- il cambiamento del modulo della velocità produce l'accelerazione tangenziale
- il cambiamento della direzione del vettore velocità produce l'accelerazione radiale (centripeta)

Traiettoria curva arbitraria

[velocità variabile in direzione e modulo]

approssimo la curva con **archi** di **circonferenza**:



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

accelerazione **tangenziale:**
dovuta a
variazione del **modulo** della velocità

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r}$$

accelerazione **radiale [o centripeta]:**
dovuta a
variazione della **direzione** della velocità

$\vec{a}_r$ diretta sempre verso l'interno della concavità

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

Percorso inverso: dall'accelerazione alla legge oraria

Come si **determina la velocità $\vec{V}$ se è nota l'accelerazione $\vec{a}$** ?

Sia $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ nota per $t > t_0$:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \quad \Longrightarrow dV_x = a dt \quad \Longrightarrow V_x(t) - V_x(t_0) = \int_{V_{x_0}}^{V_x} dV_x = \int_{t_0}^{t} a_x dt$$

$$V_x(t) = V_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t') dt'$$

dove $V_x(t_0) \equiv V_{x_0}$ è "condizione iniziale" nota. Analogamente:

$$V_y(t) = V_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t') dt' \qquad V_z(t) = V_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t') dt'$$

Per cui in notazione vettoriale:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t') dt'$$

Percorso inverso: dall'accelerazione alla legge oraria

- Legame tra le grandezze della cinematica: relazioni scritte per il caso 1D, adesso intese come valide per la «*componente lungo l'asse x*»
- Equazioni che possono essere «estese» agli altri 2 assi coordinati

(1) da $a_{x,y,z}$ a $v_{x,y,z}$

$$\int_{t_0}^{t} dv_x = v_x(t) - v_{x0} = \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dv_y = v_y(t) - v_{y0} = \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dv_z = v_z(t) - v_{z0} = \int_{t_0}^{t} a_z(\tau)d\tau$$

(2) da $v_{x,y,z}$ a x,y,z

$$\int_{t_0}^{t} dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dy = y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dz = z(t) - z_0 = \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)d\tau$$

- In forma vettoriale indicando con :

$$\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0) \qquad \vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$$

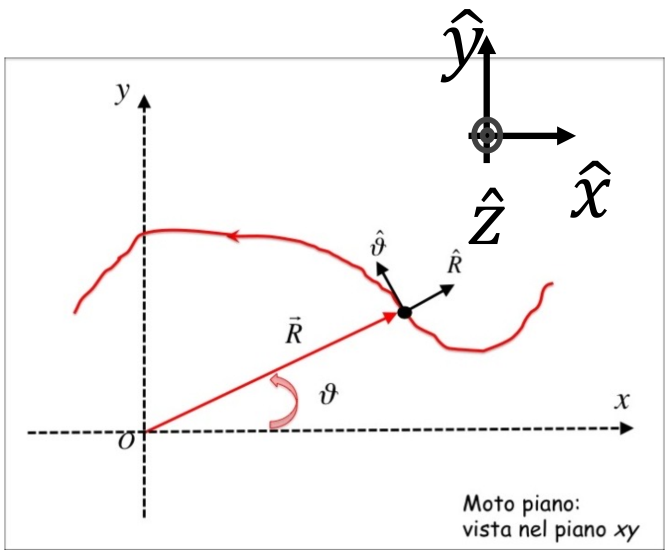
il vettore posizione e la velocità al tempo t sono dati rispettivamente da:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau \qquad \vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)d\tau$$

Moti piani in coordinate polari

Moti piani sono moti la cui traiettoria giace su un piano (per semplicità scegliamo il piano xy).

Vediamo come è possibile descriverli utilizzando le **coordinate polari piane** $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\theta})$



Il vettore $\vec{R}$ e i versori $\hat{R}$ e $\hat{\vartheta}$ hanno le componenti cartesiane:

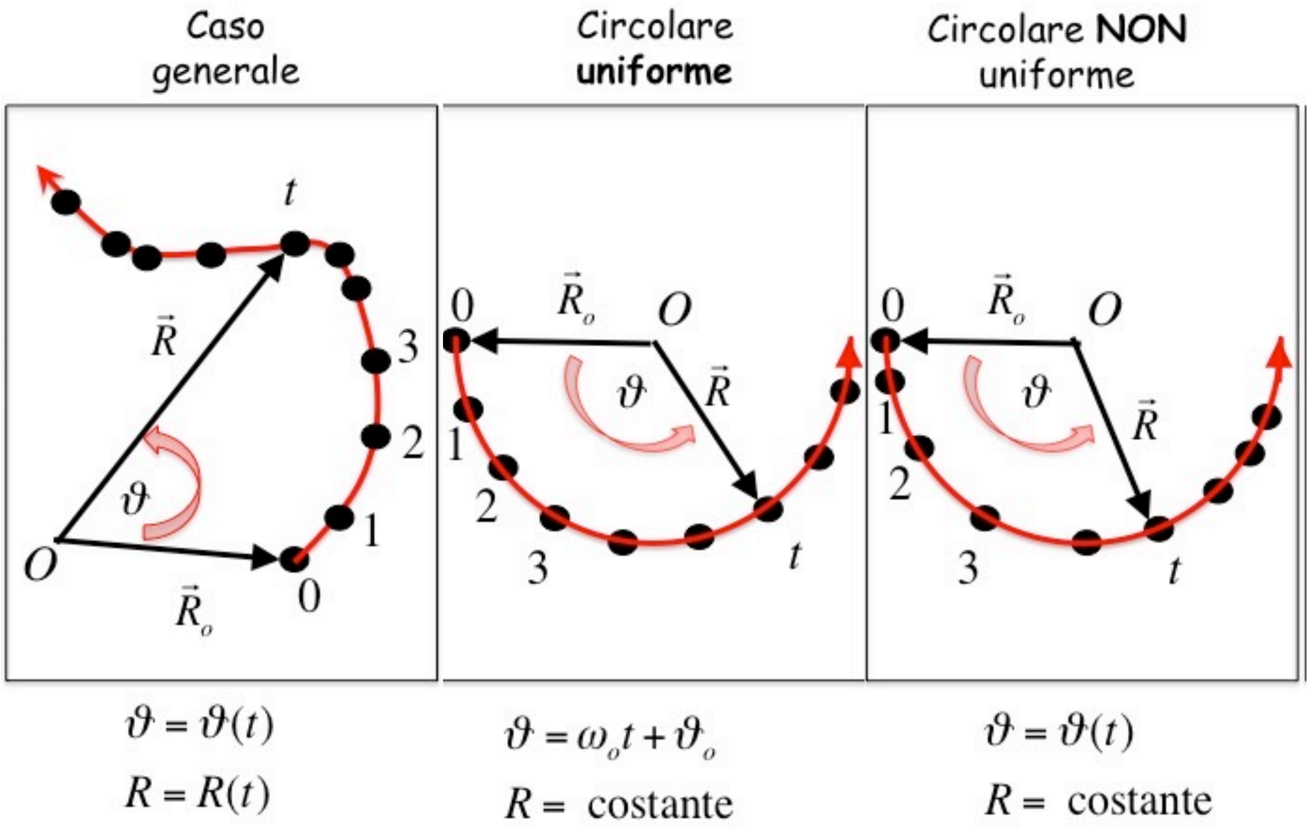
$$\vec{R} = (x, y, 0) = (R\cos\theta\,, R\sin\theta\,, 0)$$

$$\hat{R} = (x/R\,, y/R\,, 0) = (\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0)$$

$$\hat{\theta} = (-\sin\theta\,, \cos\theta\,, 0)$$

sono **moti circolari** quelli in cui la traiettoria è una circonferenza.

Moto piano vario e circolare

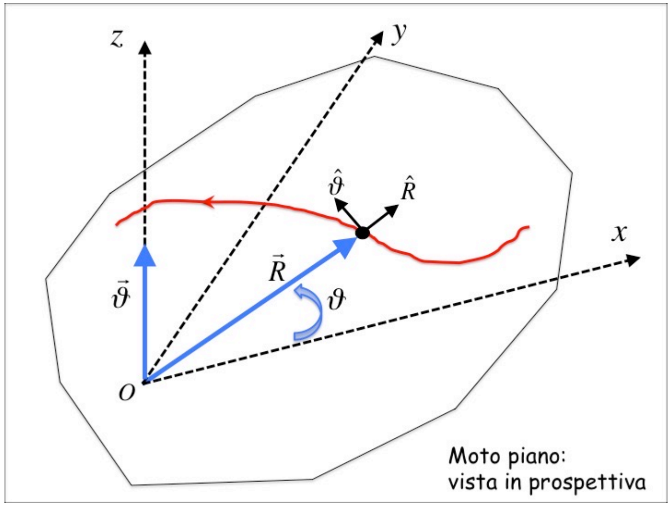


- Moti nel piano
  - i punti rappresentano la posizione a intervalli di tempo uguali

- **Caso generale, il moto è vario nel piano**
  - la traiettoria non è una circonferenza e varia sia la velocità angolare che il raggio

- Se la traiettoria è una circonferenza $|\vec{R}| = R = \text{costante}$
  - **il moto è circolare uniforme** se <u>la traiettoria è una circonferenza</u> ed il <u>modulo della velocità è costante</u>
  - **il moto è circolare non uniforme:** se <u>la traiettoria è una circonferenza</u> e il <u>modulo della velocità non è costante</u>

Velocità angolare $\vec{\omega}$



- all'angolo (definito come la <u>parte di piano compresa fra due semirette avente un vertice in comune</u>) associamo un vettore $\left(\vec{\theta}(t)\right)$ di modulo pari al modulo dell'angolo, direzione perpendicolare al piano che contiene l'angolo e quindi lungo l'asse z, e verso della rotazione definito secondo la regola della mano destra

  per cui $\quad \vec{\theta} = (0,0,\theta) = \theta\hat{z}$

Definizione: la **velocità angolare** è la **derivata del vettore $\vec{\theta}$ rispetto al tempo**:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \left(0,0,\dot{\theta}\right) = \hat{z}\dot{\theta} \implies \omega_z = \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad [\vec{\omega}] = \mathrm{rad/s} \ \text{ o } s^{-1}$$

- La velocità angolare è un <u>vettore costante nel moto circolare uniforme</u>, ma <u>non lo è nei moti piani in generale (neanche quelli circolari) !</u>

  - se è nota $\omega(t)$e $\theta_{(t_0)}$l'angolo in funzione del tempo si ottiene da

$$\theta(t) = \theta_{(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \omega(t')\,dt'$$

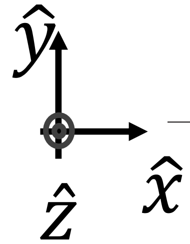
Moto circolare: velocità

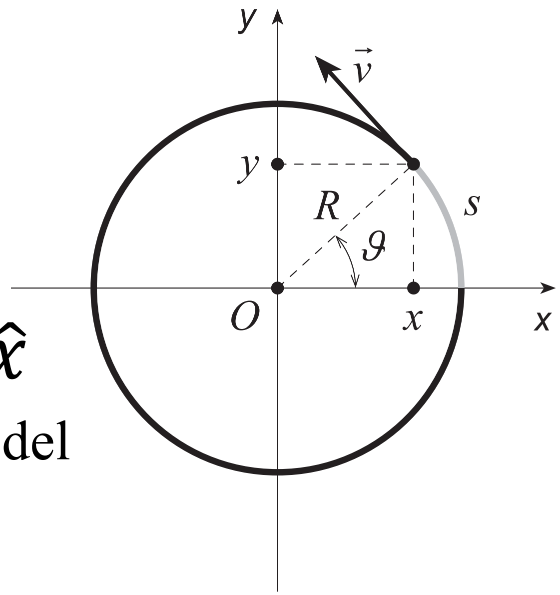
in un moto piano circolare R è costante e si ha:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$= \left(-R\,\dot{\theta}\sin\theta,\ R\,\dot{\theta}\cos\theta, 0\right)$$

$$= R\dot{\theta}(-\sin\theta,\ \cos\theta, 0) = \dot{\theta}R\ \hat{\theta} = \omega R\ \hat{\theta}$$





- la velocità è <u>tangente alla traiettoria</u> (come accade del resto per tutti i moti)

- il modulo della velocità è dato dal prodotto del modulo della velocità angolare | ω | e del raggio

$$|\vec{V}| = \omega R$$

- la velocità non ha componenti radiali in coordinate polari (O origine SDR...):

$$V_R = \dot{R} = 0 \ e \ V_\theta = \omega R \qquad \vec{V} = (V_R, V_\theta, V_z) = (0, \omega R, 0)$$

- Cambia direzione durante il moto ed è ortogonale al raggio

$$\vec{V} \perp \vec{R}$$

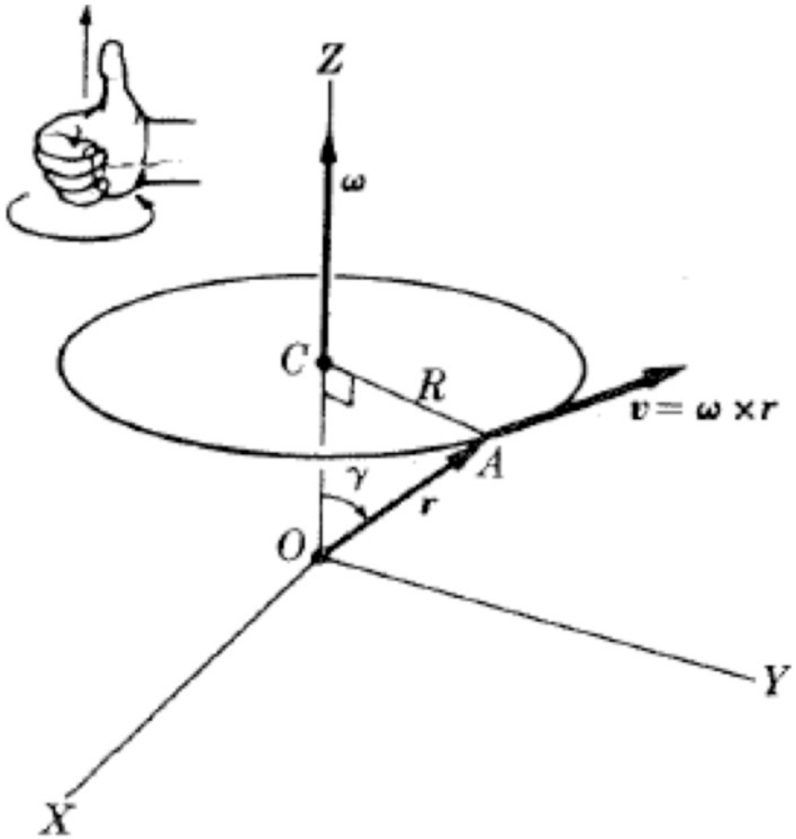
Per un moto circolare (R=costante): $\vec{V} = \omega R\,\hat{\theta} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

Dimostrazione: $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \dot{\theta}\hat{z} \wedge \vec{R} = \dot{\theta}\hat{z} \wedge (\hat{x}R\cos\theta + \hat{y}R\sin\theta)$

$$= \dot{\theta}R(\hat{z} \wedge \hat{x}\cos\theta + \hat{z} \wedge \hat{y}\sin\theta) = \dot{\theta}R(\hat{y}\cos\theta - \hat{x}\sin\theta)$$
$$= \omega R\,\hat{\theta}$$

C.V.D

- Se ω è costante anche il modulo di $\vec{V}$ è costante



Moto circolare uniforme $|\vec{\omega}|$ e $|\vec{V}|$ costanti: accelerazione

$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \hat{\theta}\dot{\theta}R = \omega R\, \hat{\theta}}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

È necessaria una **formula di calcolo vettoriale**, che diamo senza dimostrazione:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 R\hat{R} = -\frac{V^2}{R}\hat{R}$$

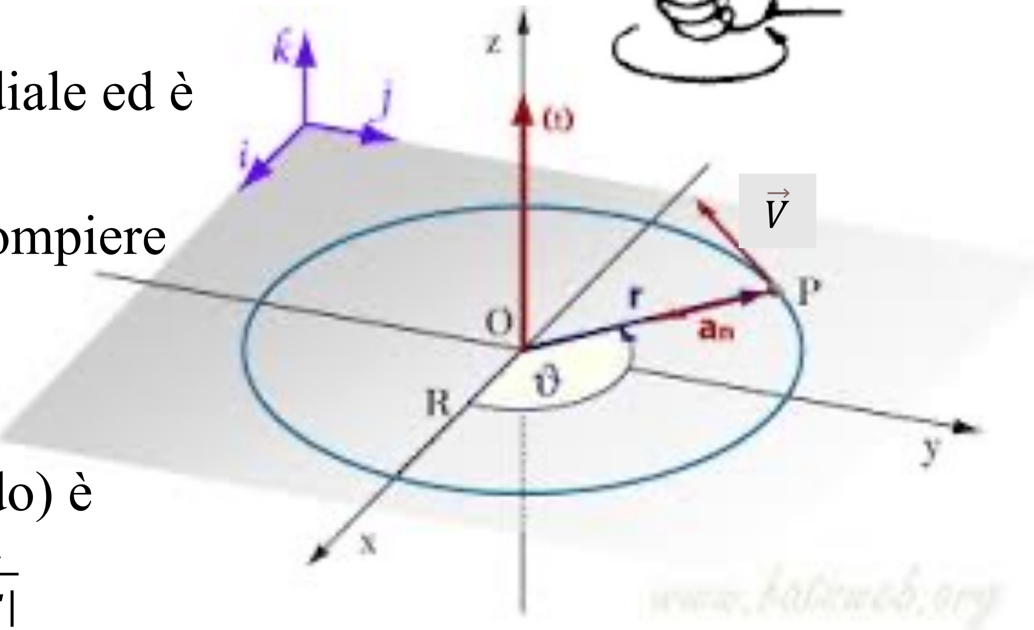
$$\boxed{\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 R\hat{R}}$$

- L'accelerazione ha solo componente radiale ed è centripeta
- indicando con T il tempo impiegato a compiere un giro

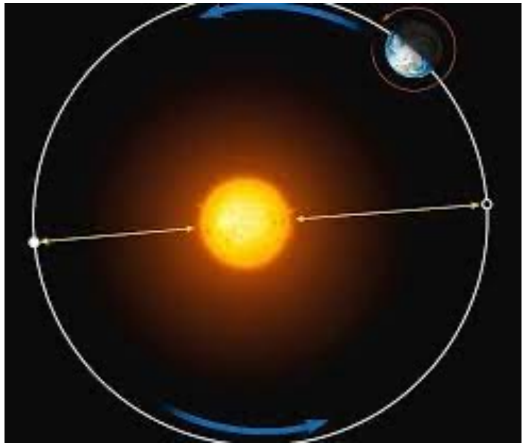
$$VT = |\omega| RT = 2\pi R \quad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

- la frequenza ν (numero di giri al secondo) è

$$\nu = \frac{1}{|T|}$$

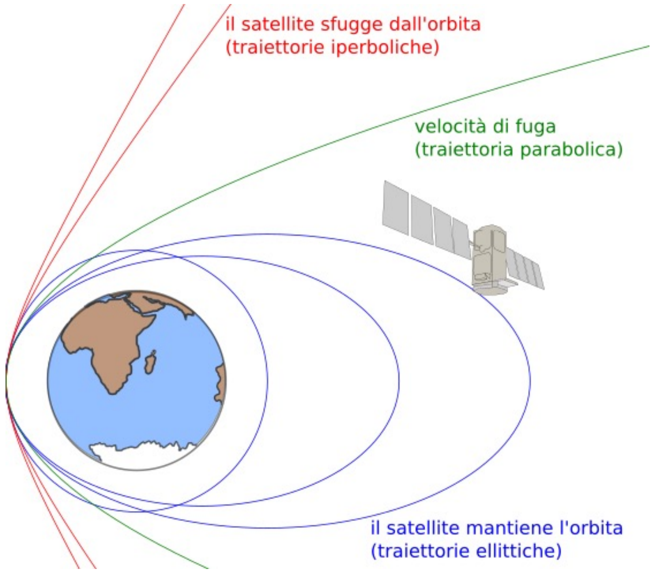


Moto circolare uniforme: ω costante



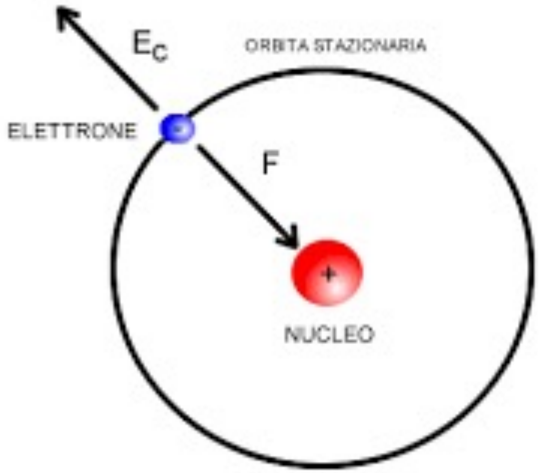
Esempi di moti circolari uniformi:

- moto della Terra intorno al Sole (approssimazione, in realtà è un'ellisse molto poco schiacciata)



- moto di un satellite in orbita geostazionaria intorno alla Terra

- moto classico di un elettrone in un atomo (modello di Bohr)

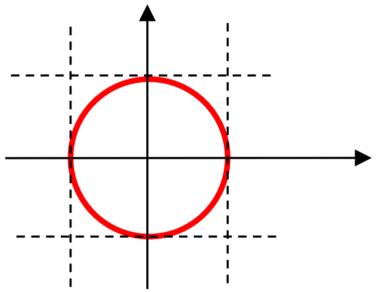


- ….

Esercizio

Sia data la legge oraria:

$\vec{R}(t) = (A\cos\omega t\,, A\sin\omega t\,, 0)$ per $t > 0$ con ω=costante



a) Determinare la traiettoria del punto materiale.

Risposta

$\vec{R}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ con $\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

l'argomento di seno e coseno è adimensionale per cui $\omega = \mathrm{rad/s}$ o s^{-1}

- Come si determina la **traiettoria** <u>per via analitica</u> per moti piani (2-*d*) a partire dalla legge oraria ?
  - da $x = x(t)$ si determina $t = t(x)$
  - si sostituisce t in $y = y(t)$, determinando) $y = y(x)$

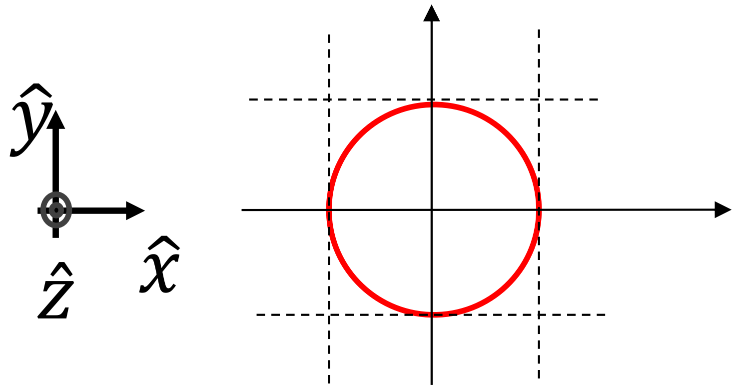
(In alternativa si può invertire $y(t)$ e sostituire il tempo in $x(t)$, oppure eliminare il tempo con altri algoritmi)

Sfruttiamo la relazione fondamentale della trigonometria:

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \quad = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{A}\right)^2 \quad \Longrightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

per cui la traiettoria è una **circonferenza di raggio *A***

b) Determinare: $|\vec{R}|, \vec{V}, \vec{R}\cdot\vec{V}, \vec{R}\wedge\vec{V}$



In base al risultato precedente:

$|\vec{R}|$=A

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\frac{d(A\cos\omega t)}{dt}, \frac{d(A\sin\omega t)}{dt}, 0\right) = (-\omega A\sin\omega t\, , \omega A\cos\omega t\, , 0)$$

$$\Longrightarrow\ |\vec{V}| = \omega A$$

1) $\vec{R}\cdot\vec{V}=(A\cos\omega t\, , A\sin\omega t\, , 0)\cdot(-\omega A\sin\omega t\, , \omega A\cos\omega t\, , 0)$

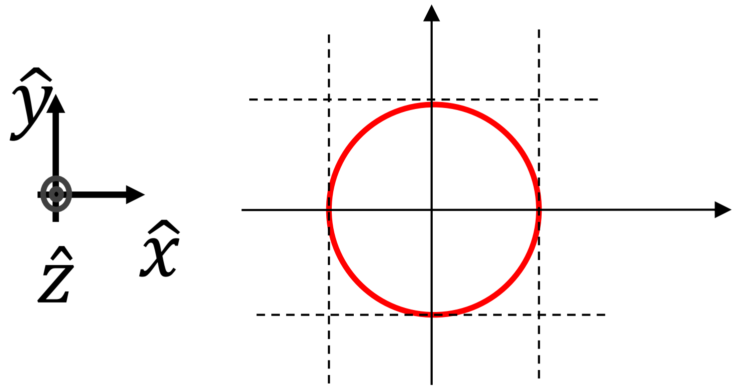
$$= -\omega A^2\cos\omega t\sin\omega t + \omega A^2\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

2) $\vec{R}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ R_x & R_y & 0\\ V_x & V_y & 0\end{vmatrix} = (R_x V_y - R_y V_x)\,\hat{k} = (\omega A^2\cos^2(\omega t) - (-)\,\omega A^2\sin^2(\omega t))\,\hat{k}$

$$= \omega A^2\hat{k} = |\vec{V}|\,|\vec{R}|\,\hat{k}$$

Dall 1) e dalla 2) si ottiene che in un moto circolare uniforme ω = costante,
la posizione e la velocità sono perpendicolari

b) Determinare: $|\vec{a}|$, $\vec{a}\cdot\vec{V}$, $\vec{a}\Lambda\vec{V}$



In base al risultato precedente:

$$\vec{V} = (-\omega A\sin\omega t\,,\omega A\cos\omega t\,,0)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (-\omega^2 A\cos\omega t\,,-\omega^2 A\, sin\,\omega t\,,0) \implies |\vec{a}| = \omega^2 A$$

$$\vec{a}\cdot\vec{V}=(-\omega^2 A\cos\omega t\,,-\omega^2 A\, sin\,\omega t\,,0)\cdot(-\omega A\sin\omega t\,,\omega A\cos\omega t\,,0)$$

$$= \omega^3 A^2 \cos\omega t\sin\omega t - \omega^3 A^2\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

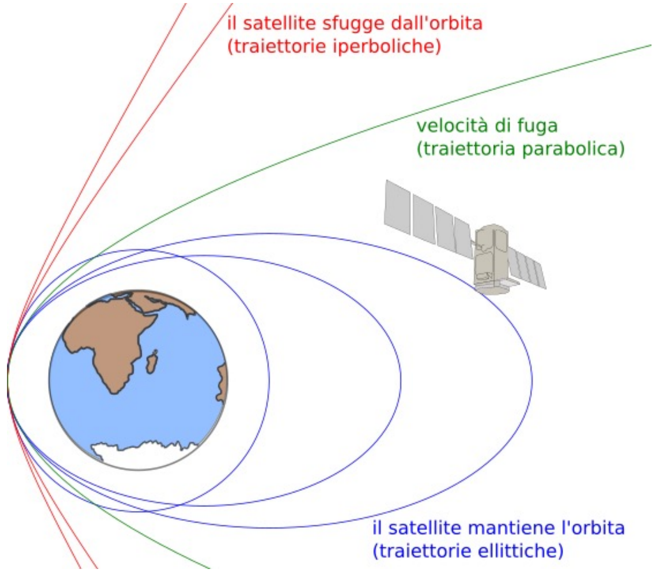
$$\vec{a}\Lambda\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = (a_x V_y - a_y V_x)\,\hat{k} = (-\omega^3 A^2\cos^2(\omega t) - \omega^3 A^2 \sin^2(\omega t))\,\hat{k}$$

$$= -\omega^3 A^2 \hat{k} = -|\vec{a}|\,|\vec{V}|\,\hat{k}$$

In un moto circolare uniforme ω = costante **la posizione e la velocità sono perpendicolari**

Esercizio

Calcolare velocità e accelerazione di un satellite geostazionario.
$(R = 42000\ \text{km}, T = 1\ \text{giorno})$.



Soluzione.
Convertiamo i dati in unità del sistema MKS:

$$R = 42000\ \text{km} = 4.2\times10^{7}\ \text{m}, \qquad T = 1\ \text{giorno} = 8.64\times10^{4}\ \text{s}.$$

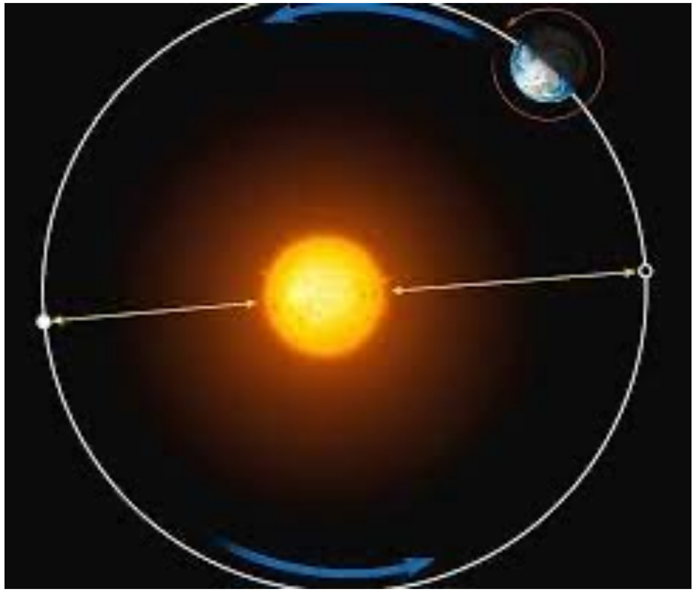
Pertanto:

$$|\vec{V}| = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 3.05\,\frac{\text{km}}{\text{s}},$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0.22\ \text{m/s}^2$$

Esercizio

Esercizio. Calcolare velocità ed accelerazione della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole ($R = 149.5\times10^6$ km $= 1.495\times10^{11}$ m, $T =$ 1 anno $= 3.16\times10^7$s)



Soluzione.
Con le stesse formule dell'Esercizio precedente:

$$\left|\vec{V}\right| = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\times1.495\times10^{11}}{3.16\times10^{7}}\ \mathrm{m/s} = 3\times10^{4}\ \mathrm{m/s} = 30\ \mathrm{km/s}$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} = \frac{9\times10^{8}}{1.495\times10^{11}}\ \mathrm{m/s^2} = 6\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Esercizio

(importante). Calcolare velocità ed accelerazione della città di Pisa (44^o latitudine N) dovuta al suo moto di rotazione intorno al suo asse e confrontarla con l'accelerazione di gravità nel vuoto.

Soluzione.

Raggio della traiettoria compiuta dalla città: $R_{Pisa} = R_{Terra}\cos(44^o)$. Come negli esercizi precedenti:

$$|\vec{V}| = \frac{2\pi R_{Pisa}}{T} = \frac{2\pi\times 6.3\times 10^6\cos(44^o)}{8.64\times 10^4}\ \mathrm{m/s} = 3.3\times 10^2\ \mathrm{m/s} = 330\ \mathrm{m/s}$$

$$|\vec{a}| = \frac{V^2}{R_{Pisa}} = \frac{3.3\times 3.3\times 10^4}{6.3\times 10^6\cos(44^o)}\ \mathrm{m/s^2} = 2.4\times 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\Longrightarrow a/g = 0.0024$$

Esercizio

Calcolare l'accelerazione di un'automobile che effettua una curva di $20\ \mathrm{m}$ di raggio a $36\ \mathrm{km/h}$. Confrontare il risultato ottenuto con l'accelerazione di gravità g e con l'accelerazione lineare di un'automobile che passa da 0 a $100\ \mathrm{km/h}$ in 10 secondi.

Soluzione.

Convertiamo preliminarmente le velocità da $\mathrm{km/h}$ a $\mathrm{m/s}$.

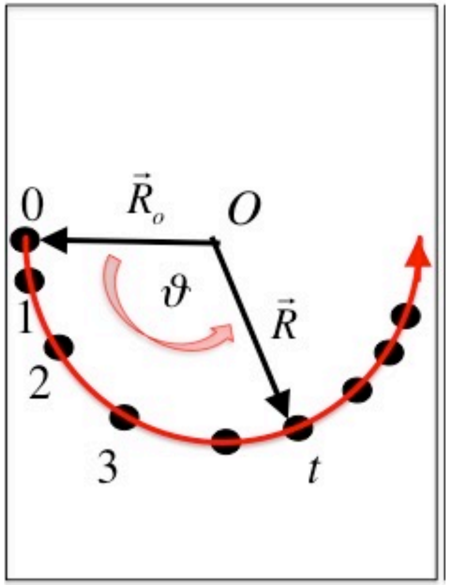
$$36\ \mathrm{km/h} = 10\ \mathrm{m/s}\,;\ 100\ \mathrm{km/h} = 27.8\ \mathrm{m/s}$$

$$|\vec{a}|_{curva} = \frac{V^2}{R} = \frac{10\times 10}{20}\ \mathrm{m/s^2} = 5\ \mathrm{m/s^2} \approx 0.5\ g$$

$$|\vec{a}|_{lineare} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{27.8}{10}\ \mathrm{m/s^2} = 2.78\ \mathrm{m/s^2} \approx 0.56\ |\vec{a}|_{curva}$$

Moto circolare non uniforme: $\vec{\omega} = \vec{\omega}\,(t)$

Circolare **NON** uniforme



$\vartheta = \vartheta(t)$

$R =$ costante

$$\boxed{\vec{V} = \omega R\,\hat{\theta}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{R}\,)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{R} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha}\wedge\vec{R} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{R})$$

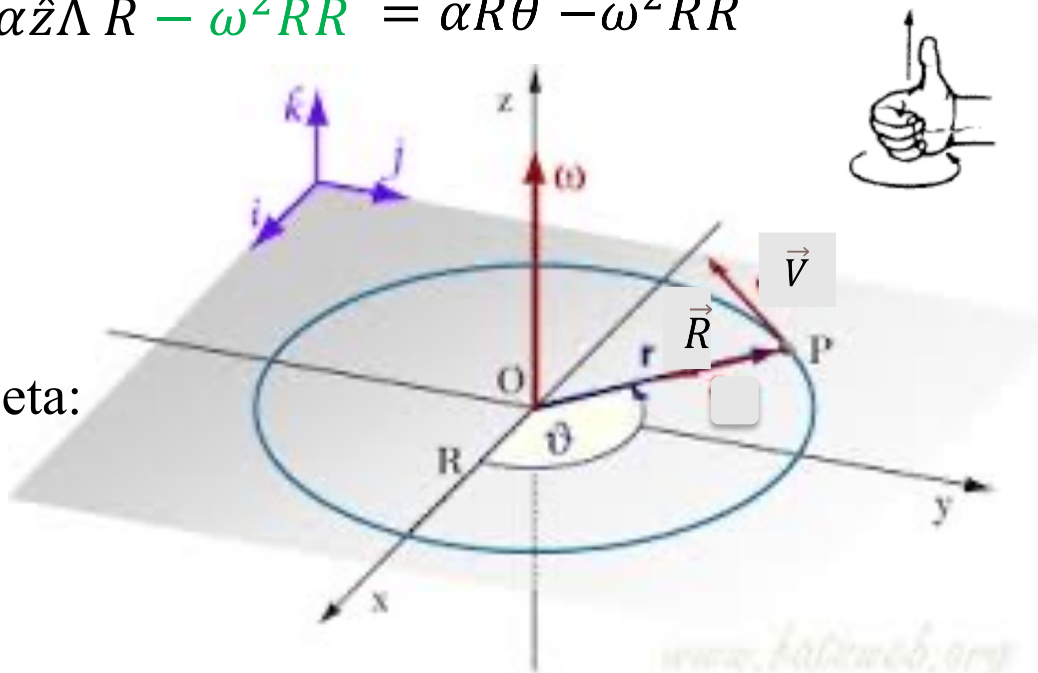
Definizione: si definisce **accelerazione angolare** $\vec{\alpha}$ la <u>derivata della velocità angolare rispetto al tempo</u>:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Longrightarrow \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_R, \alpha_\theta, \alpha_z) = (0,0,\ddot{\theta}) = \ddot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\wedge\vec{R} - \omega^2 R\hat{R} = \alpha\hat{z}\wedge\vec{R} - \omega^2 R\hat{R} = \alpha R\hat{\theta} - \omega^2 R\hat{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = (-\omega^2 R,\, \alpha R)}$$



- L'accelerazione
  - ha una componente radiale centripeta: $\omega^2 R$
  - ha una componente tangenziale: αR

memo su accelerazione angolare

ricordiamo che l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ è la derivata della velocità angolare rispetto al tempo:

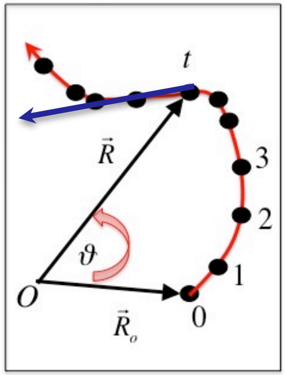
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \implies \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

- L'accelerazione angolare è nulla nel moto circolare uniforme, ma non in un moto piano generico (anche se circolare);
- $[\vec{\alpha}] = \mathrm{rad/s^2}$
- $\vec{\alpha} = (0,0,\dot{\omega}) = \hat{z}\dot{\omega} = \hat{z}\ddot{\theta}$
- $\omega(t) = \omega_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \alpha(t')\,dt'$

  per ricavare la velocità angolare se è nota l'accelerazione angolare

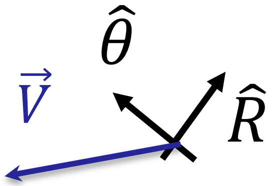
Caso generale $\vec{\omega} = \vec{\omega}$ (t) e $\vec{R} = \vec{R}$(t)

Caso generale



$\vartheta = \vartheta(t)$

$R = R(t)$



in generale per un moto piano $|\vec{R}| = R$(t), e dipende dal tempo e la velocità acquista una <u>componente</u> <u>radiale</u> V_R in coordinate polari. Per cui:

$$\vec{V} = \hat{\theta}V_\theta + \hat{R}V_R = \vec{\omega} \wedge \vec{R} + \hat{R}\frac{d|\vec{R}|}{dt} = \dot{R}\hat{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

Le **componenti polari** della velocità sono: $V_R = \dot{R}$ e $V_\theta = \omega R$

Dimostrazione: $$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$= \left(-R\,\dot{\theta}\sin\theta,\ R\,\dot{\theta}\cos\theta, 0\right) + \left(\dot{R}\cos\theta,\ \dot{R}\sin\theta, 0\right)$$

$$= \dot{R}\hat{R} + \omega R\hat{\theta} \quad = \dot{R}\hat{R} + R\omega\hat{z} \wedge \hat{R} = \dot{R}\hat{R} + R\vec{\omega} \wedge \hat{R}$$

Notiamo inoltre che: $$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\left(R\hat{R}\right)}{dt} = \hat{R}\frac{dR}{dt} + R\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{R}\dot{R} + R\frac{d\hat{R}}{dt}$$

Per cui: $$\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{\theta}\dot{\theta} = \vec{\omega} \wedge \hat{R}$$

accelerazione in coordinate polari moto piano: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ e $\vec{R} = \vec{R}(t)$

Come si esprime l'accelerazione per un moto generale descritto in coordinate polari ?

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\frac{d\hat{R}}{dt}$$

$$= \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R}\right) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\vec{\omega} \wedge \hat{R}$$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} - \omega^2 \vec{R} + \ddot{R}\hat{R} + 2\dot{R}\vec{\omega} \wedge \hat{R} \quad \text{in quanto} \quad \vec{\omega}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{R}\right) = 0$$

L'espressione precedente si può scrivere anche in un'altra forma notando che:

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{R} = \alpha R \hat{z} \wedge \hat{R} = \alpha R \hat{\theta} \qquad \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \omega R \hat{z} \wedge \hat{R} = \omega R \hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\omega^2 R + \ddot{R}\right)\hat{R} + \left(\alpha R + 2\dot{R}\omega\right)\hat{\theta}}$$

Caso generale: $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}$ (t) e $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}$(t)

$\vec{V} = \dot{R}\hat{R} + \omega R\ \hat{\theta}$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\omega^2 R + \ddot{R}\right)\hat{R} + \left(\alpha R + 2\dot{R}\omega\right)\hat{\theta}}$$

Queste equazioni riassumono tutti i possibili casi

Riepilogo moti in coordinate polari in un piano

Grandezza	circolare uniforme	circolare (anche non uniforme)	generale
θ	lineare con t	variabile	variabile
ω	costante	variabile	variabile
α	0	variabile	variabile
$\lvert\vec{R}\rvert$	costante	costante	variabile
$\lvert\vec{V}\rvert$	costante	variabile	variabile
$\vec{V}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R}$
V_R	0	0	$\dot{R}$
V_θ	ωR	ωR	ωR
$\vec{a}$	$-\omega^2\vec{R}$	$-\omega^2\vec{R} + \alpha R\hat{\theta}$	$-\omega^2\vec{R} + \alpha R\hat{\theta} + 2\omega\dot{R}\hat{\theta} + \ddot{R}\hat{R}$
a_R	$-\omega^2 R$	$-\omega^2 R$	$-\omega^2 R + \ddot{R}$
a_θ	0	αR	$\alpha R + 2\omega\dot{R}$