Interpolazione e Approssimazione di funzioni
II^a parte

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 15

Outline

I due tipi di interpolazione esposti in precedenza presentano lo svantaggio che, al crescere di k, aumenta, in generale, il grado del polinomio di interpolazione il quale finisce per assumere una forma poco maneggevole e può discostarsi anche sensibilmente dalla funzione $f(x)$

Esempio di Runge

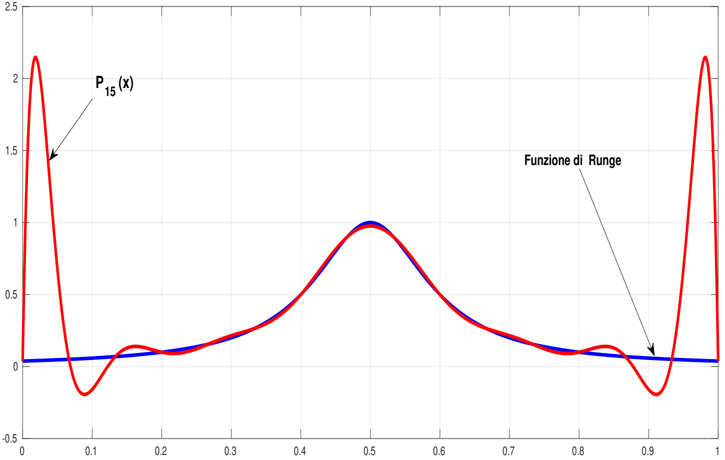
Si consideri la **funzione di Runge**, rappresentata in $[0, 1]$,

$$f(x) = \frac{1}{100x^2 - 100x + 26},$$

per la quale risulta $f(x) \in C^{\infty}([0, 1])$, e si scelgano i punti equidistanti $x_i = i/k$, $i = 0, 1, \dots, k$

Esempio di Runge

Nella figura sono riportate la funzione di Runge e il polinomio di interpolazione $P_{15}(x)$



Esempio di Runge

Si vede dalla figura che l'errore $E_k(x)$ corrispondente al polinomio di interpolazione $P_k(x)$, in prossimità degli estremi dell'intervallo, assume valori elevati

Si può anche dimostrare che

$$\lim_{k \to \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \mid E_k(x) \mid = +\infty$$

In generale, il comportamento dell'errore dipende dalla particolare scelta dei punti x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$

Esempio di Runge

Per esempio, se si scelgono come nodi gli zeri dei polinomi di Chebyshev di prima specie (vedi testi di riferimento) si dimostra che, per ogni $f(x) \in C^2([-1,1])$, $P_k(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$ su $[-1,1]$ per $k \to \infty$ e si ha

$$\|f(x) - P_k(x)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Outline

Per ovviare agli inconvenienti evidenziati si può ricorrere alla interpolazione mediante **funzioni spline** costituita da una **interpolazione polinomiale a tratti** con polinomi di ugual grado su ciascun tratto, soddisfacenti certe condizioni di regolarità

Siano dati $k+1$ punti reali $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ in corrispondenza dei quali siano noti $k+1$ valori reali $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$

Definizione

Dicesi **funzione spline di grado** m, relativa ai punti $x_0, x_1, \ldots, x_k$, una funzione $S_m(x) : [x_0, x_k] \to \mathbb{R}$ tale che:

1. $S_m(x)$ è un polinomio di grado non superiore a m in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$
2. $S_m(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k$
3. $S_m(x) \in C^{m-1}([x_0, x_k])$

Ci occupiamo del caso $m = 3$ dato dalle **spline cubiche**

Una funzione spline cubica $S_3(x)$ è composta da k polinomi $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, di grado al più 3; ciascun polinomio $p_i(x) : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ è definito da quattro coefficienti

$S_3(x)$ risulterà quindi determinata dai $4k$ coefficienti dei polinomi che la compongono

Imponendo che siano verificate le proprietà 2 e 3, si ottengono le $4k - 2$ condizioni

$$
\begin{array}{ll}
p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, & i = 1, 2, \ldots, k \\
p_i(x_i) = y_i, & i = 1, 2, \ldots, k \\
p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i), & i = 1, 2, \ldots, k-1 \\
p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i), & i = 1, 2, \ldots, k-1
\end{array}
$$

Le due ulteriori condizioni si scelgono di solito fra le seguenti:

$$p_1''(x_0) = p_k''(x_k) = 0\,, \qquad \textit{Spline naturale};$$
$$p_1'(x_0) = p_k'(x_k)\,,\; p_1''(x_0) = p_k''(x_k)\,, \qquad \textit{Spline periodica};$$
$$p_1'(x_0) = y_0'\,,\; p_k'(x_k) = y_k'\,, \qquad \textit{Spline vincolata},$$

se i valori $y_0' = f'(x_0)$ e $y_k' = f'(x_k)$ sono noti

Teorema

Se i punti $x_0, \ldots, x_k$ sono tali che $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, 2, \ldots, k$, esiste una unica funzione spline cubica naturale $S_3(x)$

Dimostrazione

Introdotti $k+1$ valori arbitrari m_i, si costruiscono i polinomi $p_i(x)$ nella forma di Hermite a due punti con $f(x_r) = y_r$, $f'(x_r) = m_r$, $r = i-1, i$,

$$
\begin{aligned}
p_i(x) \quad = \quad & \left[1 + \frac{2}{h}(x - x_{i-1})\right] \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 y_{i-1} \\
& + \left[1 - \frac{2}{h}(x - x_i)\right] \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 y_i \\
& + (x - x_{i-1}) \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 m_{i-1} + (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 m_i \\
& \qquad i = 1, 2, \ldots k
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

I polinomi $p_i(x)$ verificano, per costruzione, i primi tre gruppi di condizioni per essere una funzione spline qualunque siano i valori $m_0, m_1, \ldots, m_k$

Per determinare tali $k+1$ valori si utilizzano le ultime condizioni delle funzioni spline e le due condizioni di spline naturale

Essendo

$$p_i''(x_{i-1}) = \frac{2}{h^2}\left[3(y_i - y_{i-1}) - h(m_i + 2m_{i-1})\right],$$

$$p_i''(x_i) = \frac{2}{h^2}\left[3(y_{i-1} - y_i) + h(2m_i + m_{i-1})\right],$$

si perviene al seguente sistema lineare

Dimostrazione

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2m_0 & + & m_1 & & & & & & & = & \frac{3}{h}(y_1 - y_0) \\
m_0 & + & 4m_1 & + & m_2 & & & & & = & \frac{3}{h}(y_2 - y_0) \\
& & m_1 & + & 4m_2 & + & m_3 & & & = & \frac{3}{h}(y_3 - y_1) \\
& & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
& & & & m_{k-2} & + & 4m_{k-1} & + & m_k & = & \frac{3}{h}(y_k - y_{k-2}) \\
& & & & & & m_{k-1} & + & 2m_k & = & \frac{3}{h}(y_k - y_{k-1})\,.
\end{array}
$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è a predominanza diagonale forte per cui è non degenere. Ne discende che la soluzione esiste ed è unica, quindi esistono, univocamente determinati, i polinomi $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$

Con considerazioni analoghe alle precedenti, l'esistenza e l'unicità si può dimostrare anche nel caso di partizione non uniforme, cioè con punti x_i non in progressione aritmetica, e per spline cubiche periodiche o vincolate

Nel caso delle spline cubiche vincolate e per partizioni uniformi si può dimostrare il seguente teorema di convergenza

Teorema

Se $f(x) \in C^4([x_0, x_k])$, allora esistono delle $K_p > 0$, $p = 0, 1, 2, 3$, tali che

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_k} \left| f^{(p)}(x) - S_3^{(p)}(x) \right| \leq K_p M_4 h^{4-p}, \quad 0 \leq p \leq 2,$$

$$\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left| f^{(3)}(x) - p_i^{(3)}(x) \right| \leq K_3 M_4 h\,, \quad i = 1, 2 \dots k,$$

dove $M_4 = \max_{x_0 \leq x \leq x_k} \left| f^{(4)}(x) \right|$

Esempio 1

Si vuole determinare la spline cubica naturale $S_3(x)$ che interpola i valori

x	0	1	2
y	a	$-a$	$2a$

dove $a \in \mathbb{R}$

La spline $S_3(x)$ è composta da due polinomi $p_1(x), p_2(x)$ di grado al più tre, relativi agli intervalli $[0, 1]$ e $[1, 2]$

Esempio 1

In questo caso si deve risolvere il sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2m_0 & + & m_1 & + & & = & -6a \\ m_0 & + & 4m_1 & + & m_2 & = & 3a \\ & & m_1 & + & 2m_2 & = & 9a \end{array}$$

La soluzione del sistema è

$$m_0 = -\frac{13}{4}a, \quad m_1 = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = \frac{17}{4}a$$

Esempio 1

Si ha quindi la spline $S_3(x)$ formata dai polinomi

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \frac{5}{4}ax^3 - \frac{13}{4}ax + a\,, & x \in [0,1]\,,\\
p_2(x) &= -\frac{5}{4}ax^3 + \frac{15}{2}ax^2 - \frac{43}{4}ax + \frac{7}{2}a\,, & x \in [1,2]
\end{aligned}
$$

Osservazione

Non sempre i polinomi di interpolazione sono adatti per approssimare una funzione continua con una data accuratezza su tutto un intervallo

Infatti, è stato dimostrato che, dato un intervallo $[a, b]$ e fissati in esso $k + 1$ punti, con $k = 1, 2, \ldots$, esiste certamente qualche funzione $f(x)$ continua su $[a, b]$, con la proprietà che la successione dei polinomi interpolanti $P_1(x), P_2(x), \ldots$, di grado pari all'indice, non converge uniformemente ad $f(x)$

Osservazione

Tuttavia, se, per una funzione continua $f(x)$, si cerca nella classe di tutti i polinomi, anziché fra quelli della particolare successione sopra definita, allora esiste qualche polinomio che approssima $f(x)$ quanto si vuole, uniformemente su $[a, b]$ (Teorema di Weierstrass)

Esistono altre strategie per ottenere una approssimazione (anche di tipo polinomiale) di una funzione $f(x)$

Nelle prossime pagine viene illustrata una tecnica molto utilizzata specialmente quando i dati a disposizione sono molti

Outline

Siano dati $k+1$ punti $x_j \in \mathcal{I}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, e si abbiano i valori $f(x_j)$ per ogni x_j

Si scelgono $m+1$ funzioni $\phi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $m \leq k$, continue almeno sull'insieme $\mathcal{I}$ e linearmente indipendenti

Si considera la funzione combinazione lineare delle $\phi_i(x)$

$$\Phi(x) \; = \; c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_m\phi_m(x)$$

dove $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, e si vuole approssimare $f(x)$ con $\Phi(x)$

È evidente che la funzione $\Phi(x)$ dipende dalla scelta dei coefficienti c_i

Si deve quindi stabilire un criterio che ci consenta di determinare i valori c_i

Poiché l'obiettivo è la approssimazione della funzione $f(x)$, sembra logico mettere a confronto i valori $f(x_i)$ con i valori $\Phi(x_i)$ ed in particolare valutare le differenze tra i due numeri $\Phi(x_i) - f(x_i)$

Una prima possibilità potrebbe essere quella di prendere in esame la funzione

$$\psi(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{j=0}^{k} (\Phi(x_j) - f(x_j))$$

Questa scelta non sembra la migliore che si possa fare perchè le differenze tra le due funzioni calcolate punto per punto sono in segno per cui si potrebbe, per esempio, avere una somma degli scarti uguale a zero anche avendo considerevoli differenze in alcuni punti

La precedente considerazione potrebbe suggerire di utilizzare la funzione

$$\psi(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{j=0}^{k} |\Phi(x_j) - f(x_j)|$$

In questo caso non risulta possibile l'eliminazione tra loro di alcuni addendi visto che ne è considerato il valore assoluto (quindi la funzione ψ assume valori non negativi)

In questo caso l'inconveniente si presenta nella non differenziabilità della funzione in tutto lo spazio R^{m+1} a cui appartiene il vettore $c = (c_0, c_1, \dots, c_m)$

Si arriva quindi a prendere in esame la funzione

$$\Psi(c_0, c_1, \ldots, c_m) = \sum_{j=0}^{k} [\Phi(x_j) - f(x_j)]^2$$

che assume sicuramente valori non negativi e risulta differenziabile in tutto $\mathbb{R}^{m+1}$

Il **metodo dei minimi quadrati** consiste nello scegliere i coefficienti c_i per i quali la funzione

$$\Psi(c_0, c_1, \ldots, c_m) = \sum_{j=0}^{k} \left[\sum_{i=0}^{m} c_i \phi_i(x_j) - f(x_j) \right]^2$$

assume valore **minimo**

La funzione $\Psi(c)$ rappresenta la somma degli **scarti quadratici** tra la funzione $\Phi(x)$ e la funzione $f(x)$ nei punti x_j e coincide con il quadrato della norma euclidea del vettore di componenti $\Phi(x_j) - f(x_j)$

$\Psi(c)$ è una funzione continua di $m+1$ variabili, per cui il punto di minimo assoluto (se esiste) è da ricercarsi tra i punti di $\mathbb{R}^{m+1}$ per i quali sono nulle tutte le derivate parziali di Ψ rispetto a $c_0, c_1, \ldots, c_m$

Osservazione

La funzione $\Psi(c)$ assume valori non negativi. Se per un vettore $\hat{c}$ si avesse $\Psi(\hat{c}) = 0$ la funzione $\Phi(x)$ risulterebbe interpolante

Si hanno quindi le relazioni

$$\frac{\partial \Psi}{\partial c_s} = 2 \sum_{j=0}^{k} \left[\sum_{i=0}^{m} c_i \phi_i(x_j) - f(x_j) \right] \phi_s(x_j) = 0, s = 0, 1, \ldots, m,$$

che costituiscono un sistema lineare di $m+1$ equazioni nelle $m+1$ incognite $c_0, c_1, \ldots, c_m$

Poniamo $c = (c_0, c_1, \ldots, c_m)^T$, $b = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_m(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_0(x_k) & \phi_1(x_k) & \cdots & \phi_m(x_k) \end{pmatrix}$$

La funzione $\Psi(c)$ può essere scritta come

$$\Psi(c) = (Ac-b)^T(Ac-b) = \|Ac-b\|_2^2$$

Il sistema dato dalle derivate parziali uguagliate a zero, detto sistema delle **equazioni normali**, si può scrivere nella forma

$$A^T A\, c - A^T b = 0$$

Questo sistema ha soluzione, in quanto si può dimostrare (Algebra Lineare) che $r(A^T A) = r(A^T A \mid A^T b)$

Nel caso in cui la matrice $A \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(m+1)}$ abbia rango uguale a $m+1$, per il Teorema di Binet nella sua versione estesa, la matrice $A^T A \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ ha determinante diverso da zero

Segue che il sistema delle equazioni normali ha un'unica soluzione e la funzione $\Psi(c)$ ha un unico punto stazionario

Tale punto stazionario risulta il punto di minimo assoluto

Infatti, la matrice hessiana di $\Psi(c)$ è la matrice $A^T A$ che, nel caso in esame, risulta definita positiva

La scelta delle funzioni $\phi_i(x)$ può, in pratica, dipendere dalla distribuzione sul piano cartesiano dei punti di coordinate $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, 1, \ldots, k$

Le scelte più comuni sono:

- $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = x^2, \ldots;$
- $\phi_0(x) = \frac{1}{2},\ \phi_1(x) = \cos x,\ \phi_2(x) = \sin x,$
  $\phi_3(x) = \cos(2x),\ \phi_4(x) = \sin(2x), \ldots\ ;$
- $\phi_0(x) = e^{\alpha_0 x},\ \phi_1(x) = e^{\alpha_1 x},\ \phi_2(x) = e^{\alpha_2 x}, \ldots,$
  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \in \mathbb{R}, \alpha_r \neq \alpha_s, \text{con } r \neq s)$

Esempio 2

Calcolare l'equazione della retta e della parabola che approssimano nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x)$ di cui si conoscono i seguenti valori

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.4	3.1	4.8	6.8	8.5

Si indichi quale delle due approssimazioni è da preferirsi

Esempio 2

Ponendo $\Phi_1(x) = \alpha x + \beta$ risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 3.1 \\ 4.8 \\ 6.8 \\ 8.5 \end{pmatrix}$$

Per avere la approssimazione nel senso dei minimi quadrati si risolve il sistema delle equazioni normali

$$A^T A\, y = A^T b \quad \text{con} \quad y = (\alpha, \beta)^T$$

Esempio 2

Si ha il sistema

$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.7 \\ 24.6 \end{pmatrix}$$

La soluzione è il vettore

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.79 \\ -0.45 \end{pmatrix}$$

La retta cercata ha equazione

$$\Phi_1(x) = 1.79\,x - 0.45$$

Esempio 2

Ponendo $\Phi_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 3.1 \\ 4.8 \\ 6.8 \\ 8.5 \end{pmatrix}$$

Per avere la approssimazione nel senso dei minimi quadrati si risolve il sistema delle equazioni normali

$$A^T A\, y = A^T b \quad \text{con} \quad y = (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

Esempio 2

Si ha il sistema

$$\begin{pmatrix} 979 & 225 & 55 \\ 225 & 55 & 15 \\ 55 & 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 378.3 \\ 91.7 \\ 24.6 \end{pmatrix}$$

La soluzione è il vettore

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02142857\ldots \\ 1.66142857\ldots \\ -0.3 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

La parabola cercata ha equazione

$$\Phi_2(x) \;=\; 0.02142857\ldots\; x^2 + 1.66142857\ldots\; x - 0.3$$

Per valutare quale delle due funzioni fornisce una migliore approssimazione si confrontano i due scarti quadratici che sono

$$S_1 \;=\; \sum_{i=1}^{5} (\Phi_1(x_i) - f(x_i))^2 \;=\; 0.027$$

$$S_2 \;=\; \sum_{i=1}^{5} (\Phi_2(x_i) - f(x_i))^2 \;=\; 0.0205\ldots$$

e quindi è da preferirsi la approssimazione $\Phi_2(x)$

Siano $k, m \in \mathbb{N}$ con $k > m$ e inoltre si abbiano $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^k$

Il **sistema lineare sovradeterminato**

$$Ax = b$$

ha soluzione se e solo se $r(A) = r(A|b)$

Nel caso $r(A) < r(A|b)$, il sistema sovradeterminato non ha soluzione e quindi per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$b - Ax = r$$

dove $r \in \mathbb{R}^k$, il vettore dei residui, risulta non nullo

Risolvere il sistema lineare sovradeterminato nel senso dei minimi quadrati significa determinare un vettore $x \in \mathbb{R}^m$ che renda minimo il prodotto scalare

$$\Psi(x) = (b - Ax)^T (b - Ax) = r^T r = \sum_{i=1}^{k} r_i^2 = \|r\|_2^2$$

La determinazione di un punto di minimo è ricondotta alla ricerca dei punti che annullano tutte le derivate parziali prime della $\Psi(x)$ ossia alla risoluzione del sistema lineare

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left((b - Ax)^T (b - Ax)\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero si può scrivere nella forma

$$A^T A\, x \;=\; A^T b$$

la cui risolubilità risulta da quanto si è detto per il sistema delle equazioni normali

Esempio 3

Si consideri il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

e si calcoli la soluzione nel senso dei minimi quadrati

La matrice del sistema e il termine noto sono

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3

Abbiamo

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema delle equazioni normali si ha la soluzione nel senso dei minimi quadrati

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Esempio 4

Si consideri il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Determinare le coppie di valori di α e β per le quali il sistema non ha una soluzione unica nel senso dei minimi quadrati

Per non avere una unica soluzione del sistema delle equazioni normali, la matrice dei coefficienti non deve avere rango massimo (nel nostro caso 3)

Esempio 4

I minori di ordine 3 sono 4 e valgono

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - 1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \beta(1 - \alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2\beta$$

Solo due coppie annullano tutti i minori di ordine 3 e sono

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Esempio 5

Si consideri il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Determinare i valori reali di α per i quali il sistema ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati

Per avere una unica soluzione del sistema delle equazioni normali, la matrice dei coefficienti deve avere rango massimo (nel nostro caso 2)

Esempio 5

I minori di ordine 2 sono 3 e valgono

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Per avere rango massimo basta che risulti

$$\alpha \neq 1$$