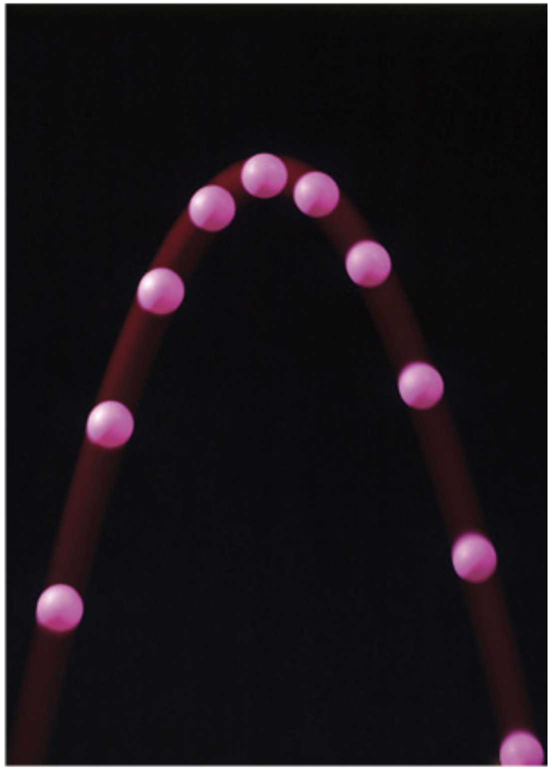
Moto di un corpo composto

- Per corpo composto s'intende un **sistema di punti materiali**.

- Assimilabile al moto di un punto materiale



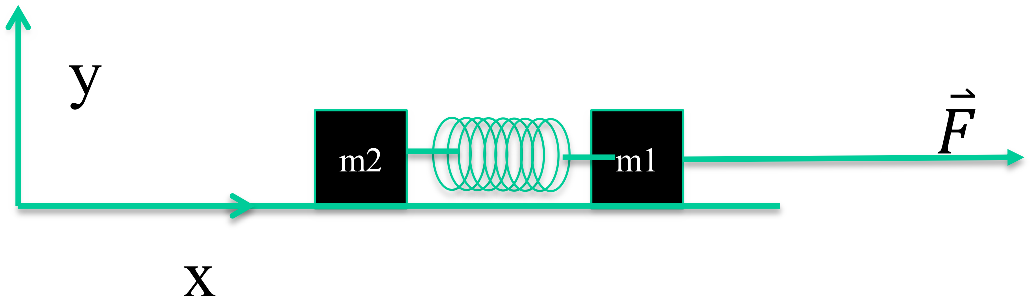
- Moto di un corpo rigido

- I vari punti del corpo hanno moti differenti

Sistema di 2 punti materiali

Due punti materiali di massa inerziale m_1 ed m_2 sono connessi tra loro tramite una molla di costante elastica *k*, lunghezza di riposo l_0 e di massa trascurabile. Sul corpo 1 è applicata una forza **F**

- Consideriamo come un ***sistema*** a se stante i due ***punti materiali*** e la ***molla***



- Questo sistema complesso interagirà con il mondo esterno circostante:
  - la reazione vincolare del piano di appoggio
  - la forza peso nei pressi della superficie terrestre
  - la forza **F**
- differenza di concetto tra la **forza interna** al sistema *esercitata dalla molla* sui due punti materiali e le altre **forze esterne**
- **Cercheremo di risolvere il problema, per il moto di m_1 ed m_2 determineremo cioè le rispettive leggi orarie**

Quantità di moto

- Dato un corpo di massa m che si sta muovendo con velocità **v** , si chiama ***quantità di moto*** del corpo la grandezza *vettoriale*:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

- Cioè il prodotto di uno scalare, la massa, che è un numero positivo, per un vettore, la velocità

  - Ha la stessa direzione e lo stesso verso di **v**
  - Le sue dimensioni sono quelle di una massa per una velocità
  - Nel Sistema Internazionale si misura in kg m s^{-1}

Mv=80 kg * 80 km/h=
=1778 kg m s^{-1}

- se una **bambina** piccola (18 kg)
  vi corresse incontro,
  probabilmente la prendereste in braccio:
  è **piccola** non può far danni.

- se un **giocatore di football** (100 kg)
  facesse la stessa cosa,
  probabilmente vi scansereste velocemente.

  se il giocatore vi venisse incontro
  camminando tranquillamente e vi urtasse,
  non vi preoccupereste molto.

p* *descrive la* ***differenza *fra i due oggetti in moto***

$$\left.\begin{array}{l} m_{bambina} = 18\,kg \\ v_{bambina} = 3\,m/s \end{array}\right\} \quad p_{bambina} = 54\,kg\ m/s$$

a che **velocità** dovrebbe andare il giocatore per avere la stessa quantità di moto?

$$m_{giocatore} = 100\,kg$$

$$p_{giocatore} = p_{bambina}$$

$$m_{giocatore} v_{giocatore} = m_{bambina} v_{bambina}$$

$$v_{giocatore} = \frac{m_{bambina}}{m_{giocatore}} v_{bambina} = 54\ cm/s$$

il giocatore dovrebbe andare **MOLTO** lentamente!

I e II legge della dinamica e impulso

- In termini di quantità di moto il principio di inerzia (la I legge di Newton) si può esprimere dicendo che la "quantità di moto di un punto materiale isolato resta costante", infatti la sua massa non varia e, in base al principio di inerzia, neppure la sua velocità

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \mathrm{m}\vec{a} = \vec{F}$$

- Se invece la velocità del punto materiale cambia per effetto dell'accelerazione prodotta dalla risultante **F** delle forze applicate (**F** = m**a** in base alla II legge di Newton), allora anche la quantità di moto varierà nel tempo. Possiamo calcolare la rapidità con cui essa varia calcolando la sua derivata rispetto al tempo:

$$\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_f} - \overrightarrow{p_i} = \int_i^f \vec{F}\, dt$$

Impulso di una Forza

- **Si definisce l'impulso di una forza di una forza** $\vec{F}$ fra due istanti di tempo t_0 e t l'integrale:

$$\vec{I}_{t_0\to t} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt'$$

- **Proprietà di** $\boldsymbol{\vec{I}_{t_0\to t}}$
  - è una grandezza fisica **vettoriale**
  - $[\vec{I}] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$ come per la quantità di moto

- **Teorema dell'impulso**
  la variazione della quantità di moto di un punto materiale è pari all'impulso totale delle forze esterne:

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \;\; dt'$$

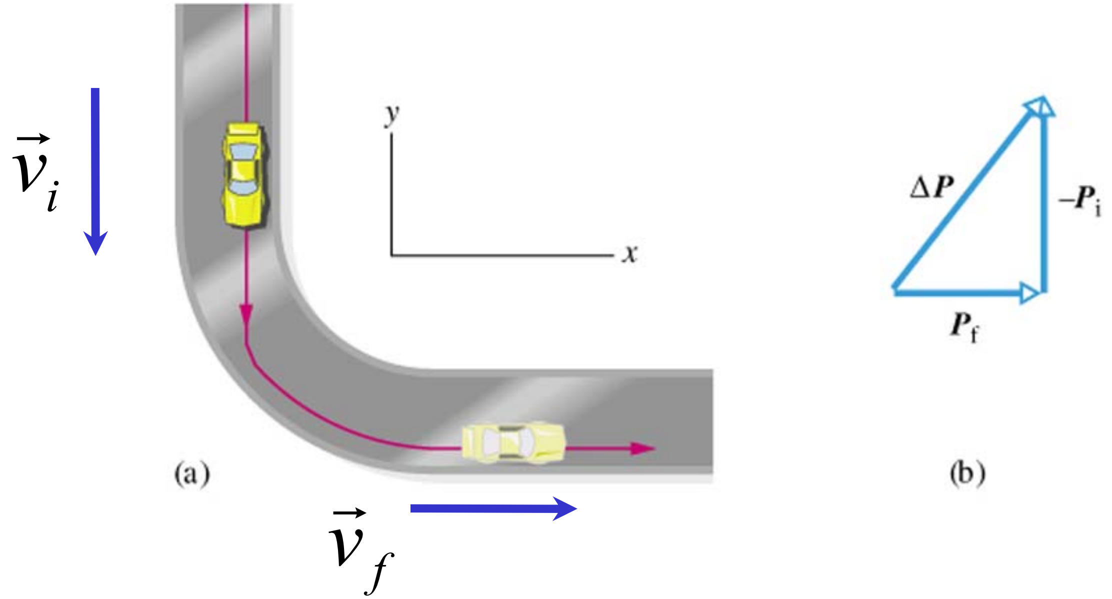
Dimostrazione

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F} \;\; dt' = \int_{t_0}^{t} m\vec{a} dt' = [m\vec{v}]_{t_0}^{t} = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

esempio: pista automobili giocattolo

$$m = 2.0\,kg$$
$$v_i = 0.50\,m/s$$
$$v_f = 0.40\,m/s$$

$$\Delta\vec{p} = ?$$



$$\vec{p}_i = (2.0\,kg)(-0.50\,m/s)\vec{j}$$
$$\vec{p}_f = (2.0\,kg)(0.40\,m/s)\vec{i}$$
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$
$$= (2.0\,kg)(0.40\,m/s)\vec{i} - (2.0\,kg)(-0.50\,m/s)\vec{j}$$
$$= (0.8\,\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\;kg\,m/s$$

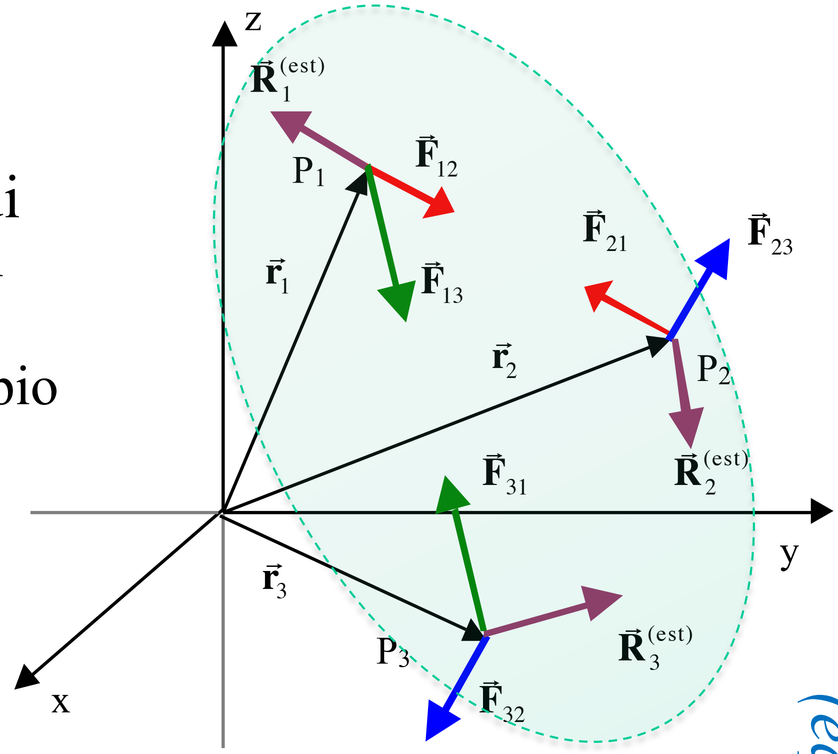
Ha agito una forza esterna,
che ha prodotto una accelerazione
con componente tangenziale e centripeta

Dinamica di un sistema di punti materiali

- Per ciascuno dei punti materiali del sistema possiamo sicuramente scrivere che

$$m\vec{a}_i = \vec{R}_i$$

- Dove $\vec{R}_i$ rappresenta la risultante di tutte le forze che agisco su ciascun punto materiale:
  - **forze interne** (la molla dell'esempio precedente)
  - **forze esterne** di risultante $\vec{R}_i^{(est)}$



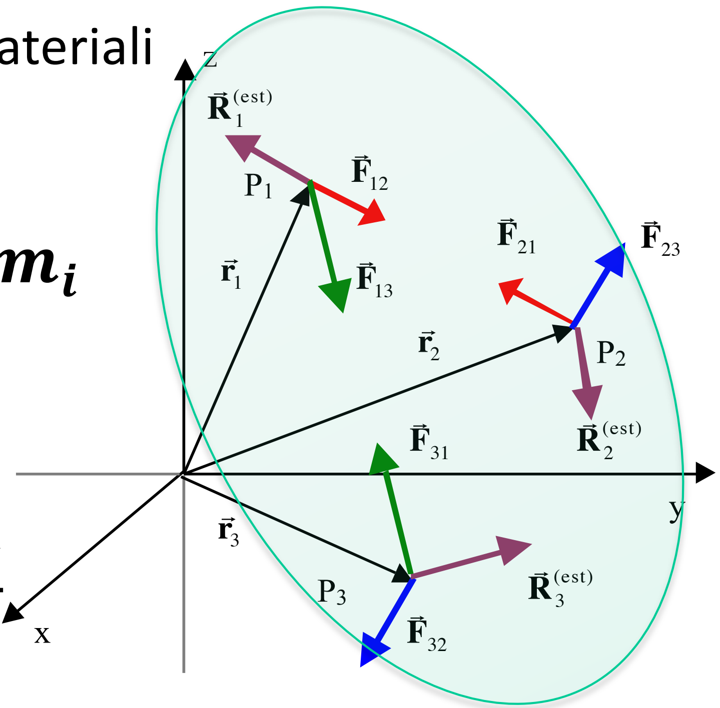
(eq_cinematica)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$

(eq_dinamica)

(eq_cinematica) Cinematica, definizioni

- Consideriamo un sistema discreto n di punti materiali
- Definiamo ***Centro di massa*** (CM) del sistema



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

- Le coordinate cartesiane del ***CM*** *sono*

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

- Definiamo la **velocità del *Centro di massa*** del sistema

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

- Definiamo l'impulso **del *Centro di massa***

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

- Le variabili cinematiche del CM

$$\underbrace{\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} \underbrace{= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}}{M}}_{\substack{\text{perchè la derivata si può} \\ \text{distribuire sulla somma} \\ \text{e perchè } m_i \text{ è costante}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M}$$

$$\vec{P}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots\ldots = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \Rightarrow \vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM}$$

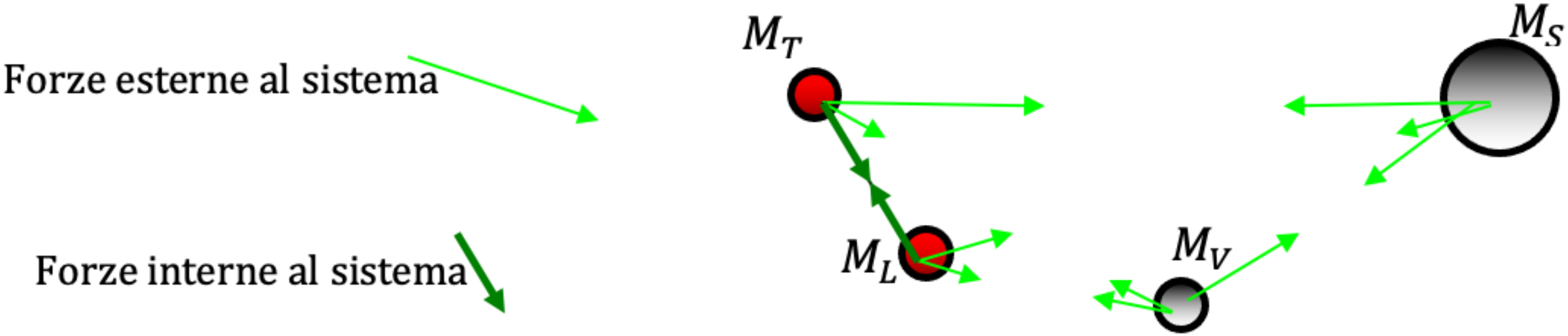
- ***Primo teorema del CM***

  - la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla quantità di moto che avrebbe un punto materiale di massa uguale alla massa totale e velocità uguale a quella del C.M. del sistema

$$\vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM}$$

Forze interne agenti su sistemi di punti materiali

- Consideriamo il sistema (punti rossi) composto dalla Terra e dalla Luna, che interagiscono secondo la legge di gravitazione e che sono in vicinanza del Sole e di Venere.



  - Consideriamo solo il moto del sistema Terra-Luna: rispetto a questo sistema esistono forze **esterne** ed **interne**

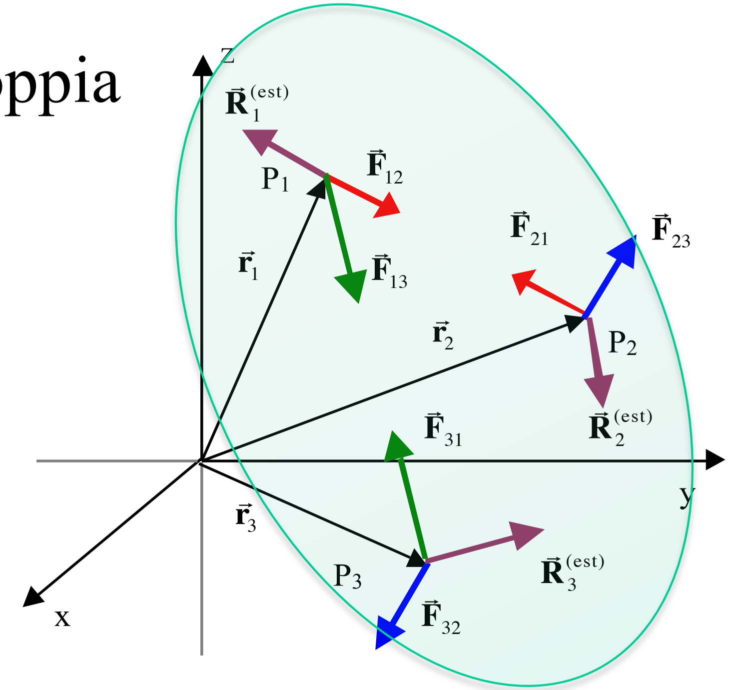
- Si definiscono **forze interne (ad un sistema)** le **forze fra due punti materiali entrambi interni al sistema**

Nel sistema considerato la forza interna è l'attrazione gravitazionale reciproca fra Terra e Luna, mentre le altre attrazioni gravitazionali, dovute al Sole ed a Venere, sono forze esterne

Forza agente su un sistema di punti materiali

- da $\vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = M\,\vec{a}_{CM}$
- Indichiamo con

- $\vec{f}_{ij}$ le forze di interazione (interne) tra la coppia di punti materiali ij
- $\vec{R}_i^{(est)}$ la risultante delle forze esterne agenti sullo i-esimo punto materiale del sistema



$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\overrightarrow{f_{ij}} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{32}} + \overrightarrow{F_{23}} + \dots = 0$$

La risultante delle forze interne è nulla ! $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$

Forza agente su un sistema discreto di punti materiali (2)

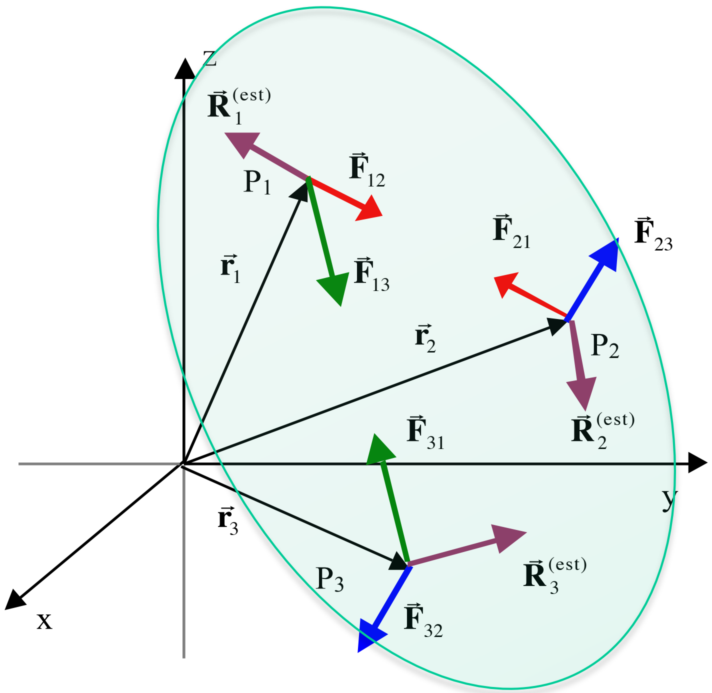
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale dei sistemi***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(est)}$$

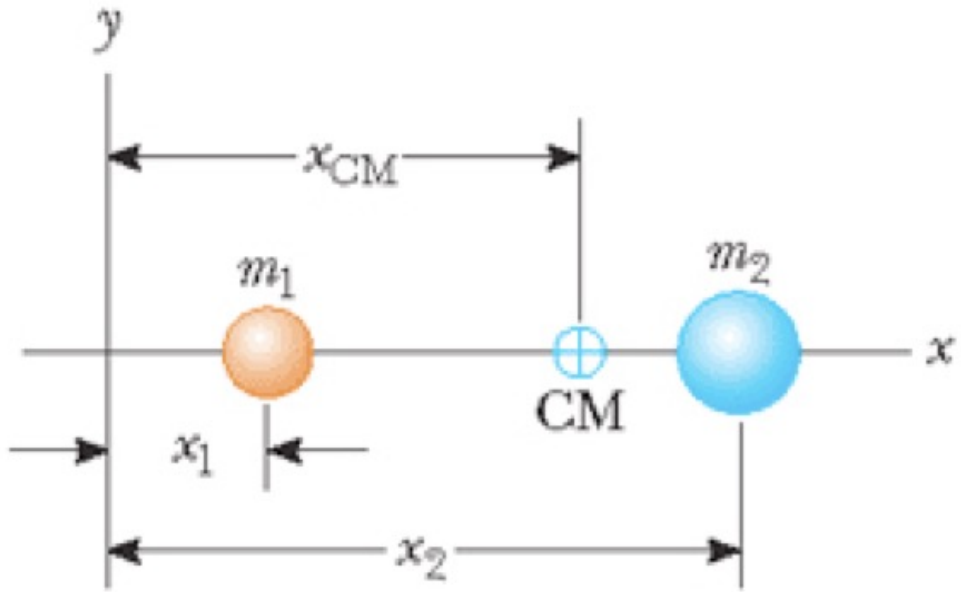


- ***Secondo teorema del CM***: il C.M. di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa totale M soggetto alla risultante delle forze esterne

Calcolo centro di massa, esempi sistema discreto di punti materiali

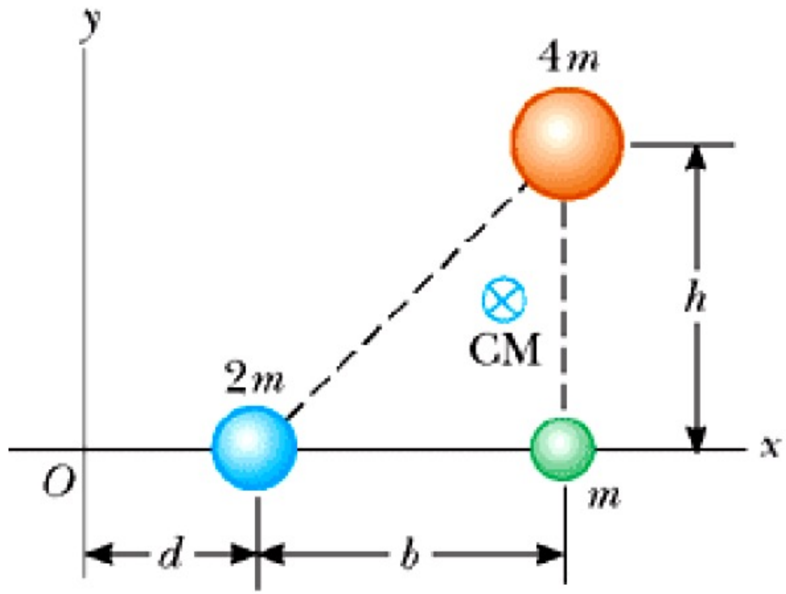
- Per due particelle di massa m_1 ed m_2 su di una retta nelle posizioni x_1 e x_2 , la posizione del centro di massa x_2 è data da

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



- il centro di massa è nel centro della congiungente le due particelle se m_1 = m_2
- in caso contrario, il centro di massa è spostato verso la particella più pesante

- Centro di massa di tre particelle di massa m_1, m_2 e m_3 come mostrate in figura



$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = d \\ y_1 = 0 \\ m_1 = 2m \end{cases} \qquad \vec{r}_2 \rightarrow \begin{cases} x_2 = d + b \\ y_2 = 0 \\ m_2 = m \end{cases} \qquad \vec{r}_3 \rightarrow \begin{cases} x_3 = d + b \\ y_3 = h \\ m_3 = 4m \end{cases}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{2m + m + 4m} = \frac{7md + 5mb}{7m} = d + \frac{5}{7}b$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 + 0 + 4mh}{7m} = \frac{4}{7}h$$

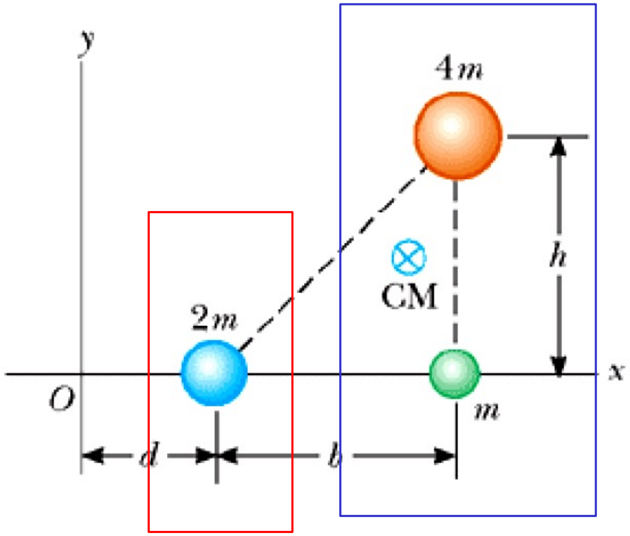
$$\vec{R}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} = \left(d + \frac{5}{7}b\right)\hat{i} + \frac{4}{7}b\hat{j}$$

CM per un sistema composto da più parti

- Nel caso di un sistema composto ad es da due parti, di massa M_1 ed M_2, la posizione di centro di massa è:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_1\vec{R}_{1CM} + M_2\vec{R}_{2CM}}{M_1 + M_2}$$

può essere calcolata come se la massa di ciascuna delle due parti fosse concentrata nel suo centro di massa



- Dimostrazione
  - Supponiamo che il sistema sia composto da due parti, formate rispettivamente da n_1 e n_2 punti punti materiali

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1+n_2} m_i\vec{R}_i}{M_1 + M_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} m_i\vec{R}_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} m_i\vec{R}_i}{M_1 + M_2}$$

$$= \frac{M_1\vec{R}_{1CM} + M_2\vec{R}_{2CM}}{M_1 + M_2} \qquad \text{CVD}$$

Calcolo centro di massa, esempio corpo rigido

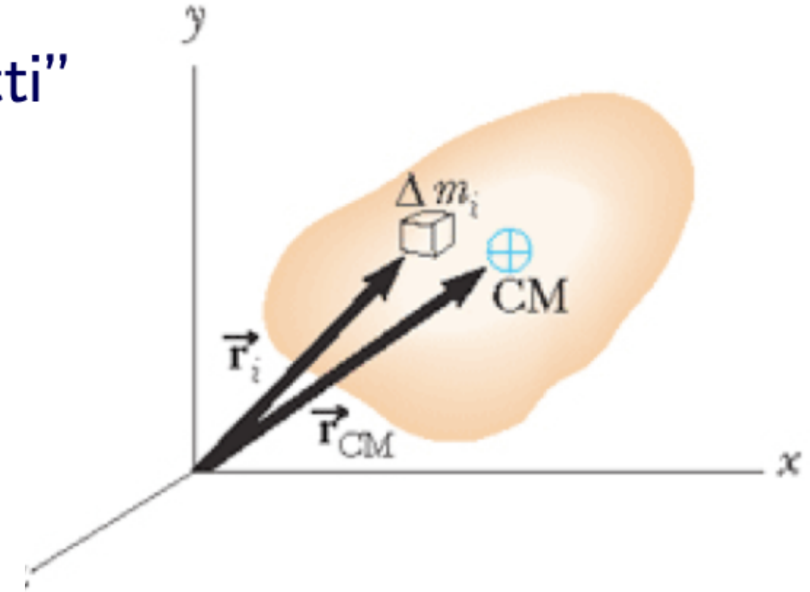
Per due particelle

In tre dimensioni: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Per molte particelle:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i,$$ dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale.

Oggetto esteso: dividiamo in "cubetti"

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \Delta m_i\vec{r}_i$$



Nel limite di "cubetti" infinitesimi:

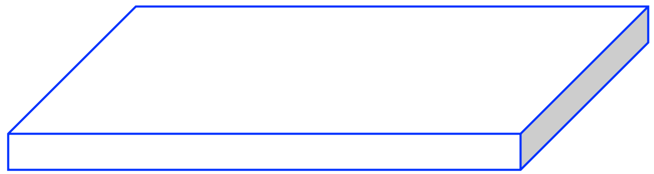
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm,$$

che diventa un integrale sul volume:

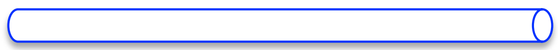
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV$$ introducendo la densità $\rho = \frac{dm}{dV}$

Definizioni di densità di massa volumetrica, superficiale e lineare

- **Densità (di volume) di massa:** $\boldsymbol{\rho_m = \frac{dM}{dV}}$ $\qquad [\rho_m] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
- **Densità superficiale di massa:** $\boldsymbol{\sigma_m = \frac{dM}{dA}}$ $\qquad [\sigma_m] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$
  - si utilizza quando lo spessore può essere trascurato (perché il corpo è realmente sottile rispetto alle altre dimensioni o perché lo spessore non è influente)
  - es. il legno di un parquet di spessore 1 cm ha una densità superficiale di massa di circa 9 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$
  - $\sigma_m = \rho_m \times$spessore



- **Densità lineare di massa:** $\boldsymbol{\lambda_m = \frac{dM}{dl}}$ $\qquad [\lambda_m] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$
  - È definita per corpi in cui l'unica dimensione rilevante è la lunghezza.
  - Esempio: calcolare la densità lineare di massa di un filo elettrico di rame di raggio 1 mm. $\quad \pi r^2 \rho_m = \pi \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \times 8.96 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m}^{-3} = 28\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}}$
  - $\lambda_m = \rho_m \times sezione$



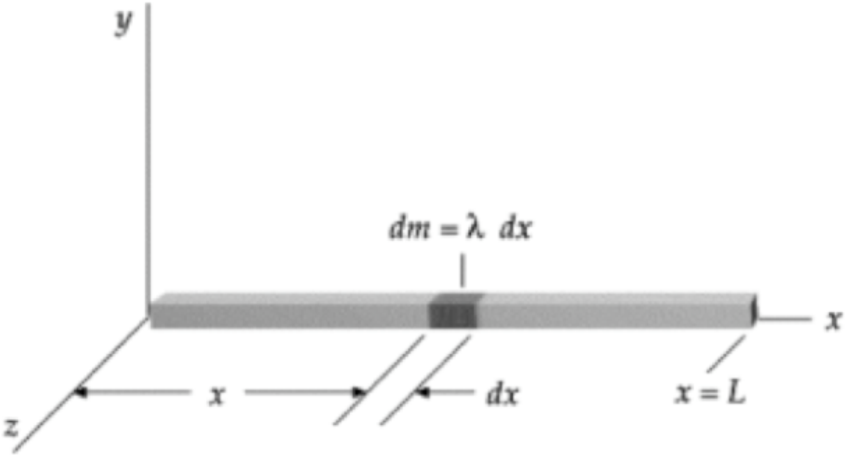
- $\boldsymbol{\rho_m, \sigma_m, \lambda_m}$ sono in generale funzioni delle coordinate del punto nello spazio che viene considerato

Calcolo centro di massa, esempi per corpi rigidi

- Il calcolo del CM di un corpo non è in generale semplice, ma lo è per oggetti di densità costante e di forma semplice

  - Esempio:
    Una sbarra di lunghezza L e massa M con densità lineare di massa λ costante

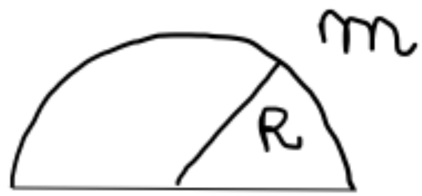
Ha senso calcolare solo la coordinata x del baricentro



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \qquad dm = \lambda\, dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda}{M}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

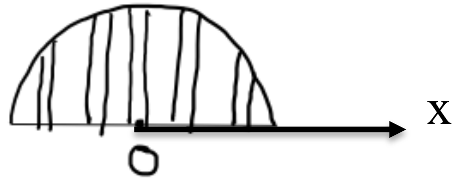
Si trovi il baricentro di una lamina omogenea piana di spessore trascurabile avente la forma di un semicerchio di massa m e raggio R



$$\rho_s = \frac{m}{\pi R^2}\, 2 \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_s\, ds \cdot \vec{r}$$

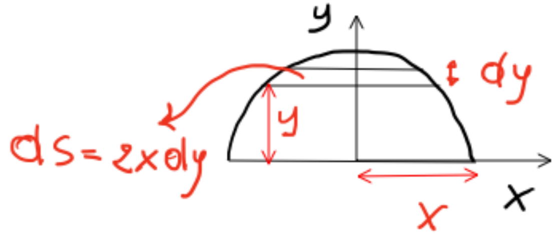
baricentro in $x \Rightarrow$ "affetto" in x

distribuzione simmetrica $\Rightarrow X_{CM} = 0$



baricentro in $y \Rightarrow$ "affetto" in y

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_s\, ds\, y$$



$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_s \int_0^R 2x\, dy \cdot y$$

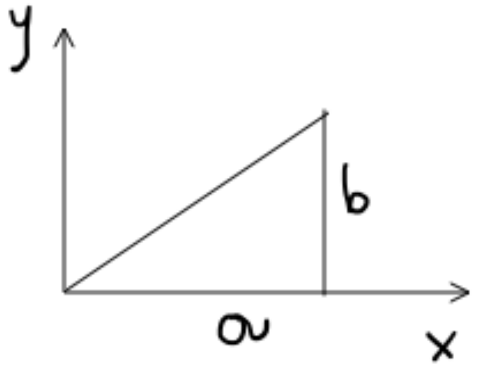
dall'equazione del cerchio $y^2 = R^2 - x^2$ $\qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx \qquad \text{per} \begin{cases} y = R & x = 0 \\ y = 0 & x = R \end{cases}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_s 2\int_R^0 x \frac{(-x)}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_{CM} = -\frac{2\rho_s}{m}\int_R^0 x^2\, dx = \frac{2\rho_s}{m}\frac{R^3}{3} = \frac{2}{m}\cdot\frac{2m}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

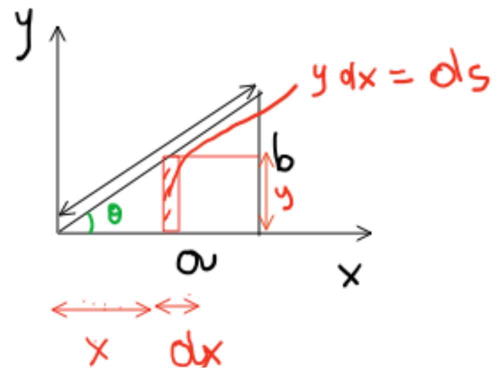
Esercizio: Determinare il C.M. di un triangolo rettangolo di densità uniforme $\sigma = \rho_S$, massa M e lati a, b

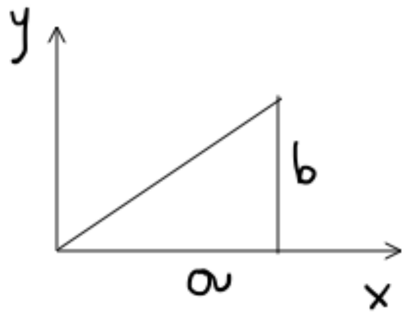


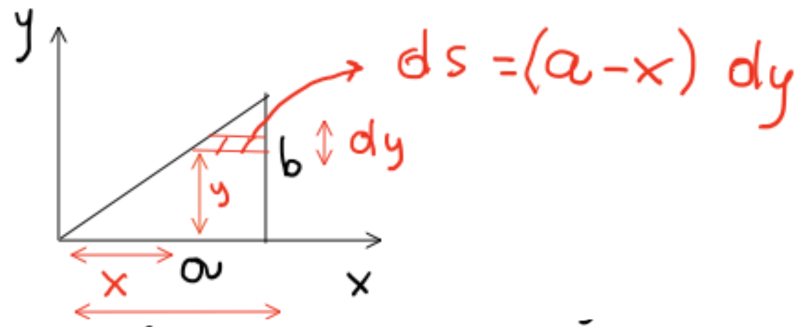
$$\frac{M}{S} = \rho_S = \frac{M \cdot 2}{ab}$$

$$x_{cm} \equiv \frac{1}{M} \int dm\, x \qquad y_{cm} \equiv \frac{1}{M} \int dm\, y$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int \underbrace{\rho_S\, ds}_{dm}\, x \qquad y_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho_S\, ds\, y$$







$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_s \, ds \; x$$

Baricentro in x "affetto" in x

$$ds = y \, dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a \rho_s \, y \, dx \; x$$

$$y = x \, tg\,\theta$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\rho_s \int_0^a x^2 \, tg\,\theta \, dx$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\frac{2M}{ab}\frac{b}{a}\frac{a^3}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{2}{3}a$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int \rho_s \, ds \; y$$

Baricentro in y "affetto" in y

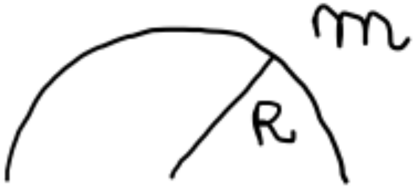
$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M}\int_0^b (a-x)\, dy \; y$$

$$y = x \, tg\,\theta \Rightarrow x = y / tg\,\theta$$

$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M}\int_0^b \left(a - \frac{y}{tg\,\theta}\right) y \, dy$$

$$y_{CM} = \frac{2M}{ab}\cdot\frac{1}{M}\left(\frac{ab^2}{2} - \frac{a}{b}\frac{b^3}{3}\right)$$

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

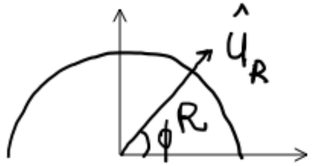


Si calcoli la posizione del C.M. di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R

La massa del semianello è data da

$$m = \rho_\ell \cdot \pi R \qquad \rho_\ell \text{ densità lineare } \Rightarrow \rho_\ell = \frac{m}{\pi R}$$

$$m \vec{r}_{CM} = \int \rho_\ell \, d\ell \cdot \vec{r}$$

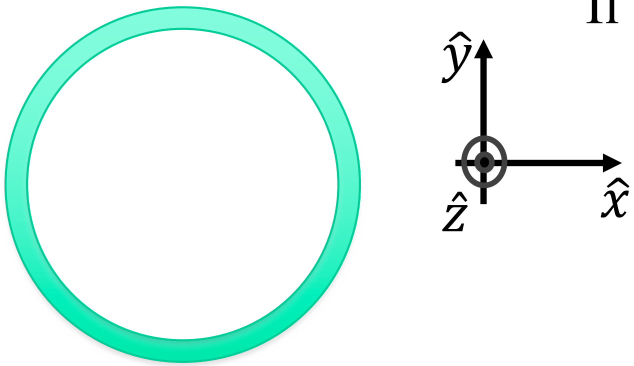


$$m x_{cm} = \rho_\ell \int_0^\pi R \, d\phi \cdot R \cos\phi = 0 \Rightarrow x_{CM} = 0$$

$$m y_{CM} = \rho_\ell \int_0^\pi R \, d\phi \cdot R \sin\phi = \rho_\ell R^2 \left(-\cos\phi \Big|_0^\pi \right) = 2 \rho_\ell R^2$$

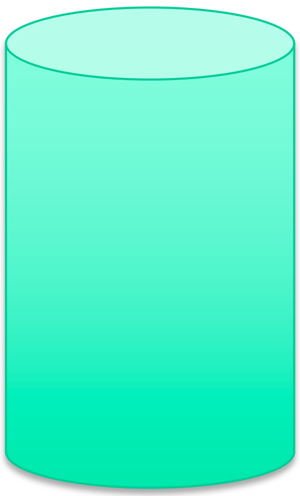
$$m y_{CM} = 2 \frac{m}{\pi R} \cdot R^2 = 2 \frac{m}{\pi} R \Rightarrow y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$$

Considerazioni su simmetrie per il calcolo del CM



Il CM coincide con il centro dell'anello se λ è costante

- Invarianza della distribuzione di massa
  - per rotazioni attorno a un asse z passante per il centro
  - per rotazioni di π attorno a un asse x passante per il centro

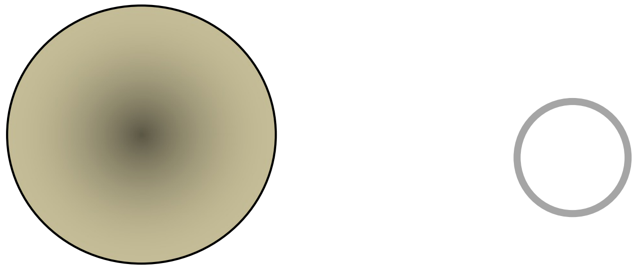


Il CM coincide con il centro del cilindro se ρ dipende unicamente dalla distanza dall'asse y passante per il centro

- Invarianza della distribuzione di massa
  - per rotazioni attorno a un asse y passante per il centro
  - per rotazioni di π attorno a un asse qualsiasi ortogonale all'asse y passante per il centro

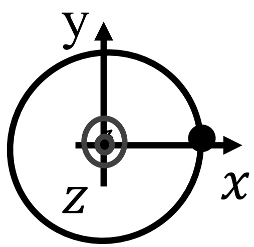
Considerazioni su simmetrie

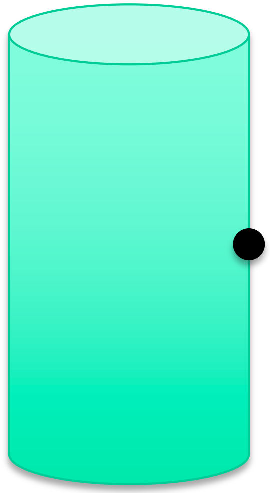
Una pallina da tennis (massa concentrata sul bordo) e la Terra (densità variabile con R) hanno il centro di massa coincidente con il centro geometrico a causa della loro simmetria sferica.



Esempio corpo composto

Esempio Un cilindro omogeneo ha raggio R e massa M ed ha un chiodo di massa $M/4$ infisso sul bordo alla stessa quota del CM del cilindro. Determinare la distanza del CM del sistema da CM del cilindro.

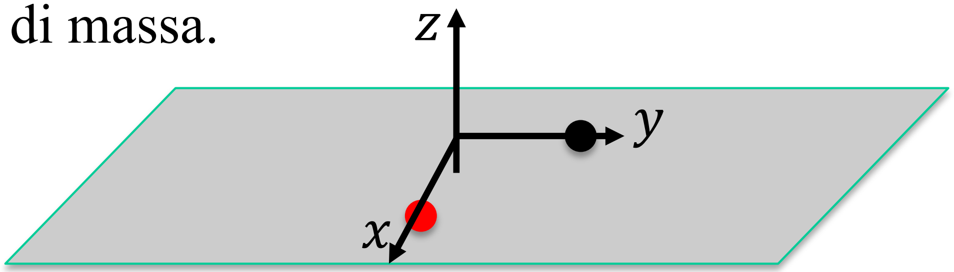




$$R_{CM} = \frac{M \cdot 0 + (M/4)R}{(5/4)M} = \frac{R}{5}$$

Esercizio

Due masse $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 0.6$ kg, inizialmente in quiete, sono disposte su un piano (x, y) privo di attrito. Le coordinate di m_1 siano $(0; 3\ \text{m})$ e quelle di m_2 $(4\ \text{m}; 0)$. Si applichino ad esse le rispettive forze $\vec{F}_1 = 4N\hat{x}$, $\vec{F}_2 = 3N\hat{y}$.
Determinare le equazioni del moto del centro di massa.



Dalla prima equazione della dinamica dei sistemi:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}$$

$$a_{xCM} = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = 2.5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{yCM} = \frac{F_{1y} + F_{2y}}{m_1 + m_2} = \frac{F_2}{m_1 + m_2} = 1.87\ \text{m/s}^2$$

Poichè l'accelerazione del CM lungo x e lungo y è costante il moto del centro di massa è uniformemente accelerato lungo x e lungo y

- Per determinare le equazioni del moto del CM dobbiamo in generale determinare la posizione e la velocità iniziali del CM
  - Le coordinate iniziali del centro di massa sono

$$\begin{cases} x_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.5 \text{ m} \\ y_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.87 \text{ m} \end{cases}$$

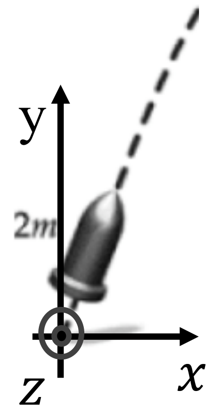
Dalle condizioni iniziali $v_{xcM}(0) = v_{ycM}(0) = 0$

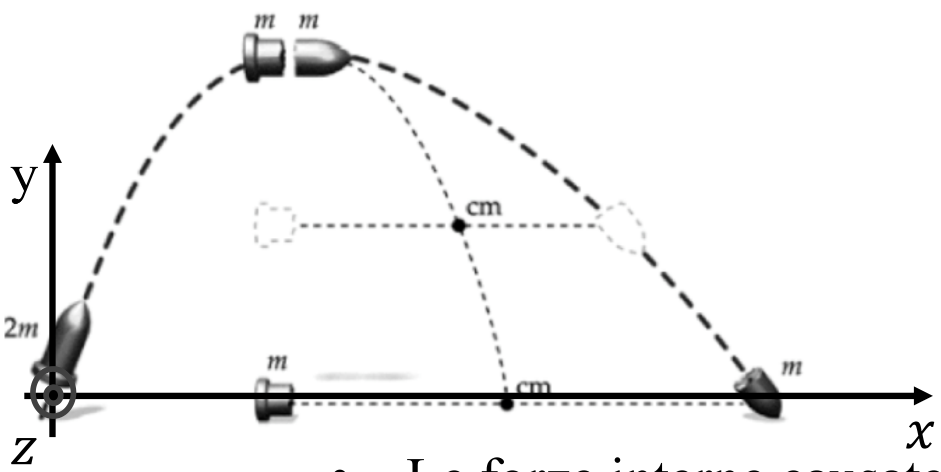
Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} x_{CM}(t) = x_{0CM} + \left(\dfrac{F_1}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.5 \text{ m} + 1.25 \text{ m/s}^2 t^2(\text{s}) \\ y_{CM}(t) = y_{0CM} + \left(\dfrac{F_2}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.87 \text{ m} + 0.93 \text{ m/s}^2 t^2(\text{s}) \end{cases}$$

Esercizio

Un proiettile lanciato ad un angolo $\theta = 36.9°$ con velocità iniziale $v = 24.5$ m/s si frammenta in due pezzi di massa uguale nel punto più alto della traiettoria. Uno dei frammenti cade giù in verticale. Dove atterra l'altro?





Dati

- $m_1 = m_2 = m$
- $\theta = 36.9^0$
- $v_0 = 24.5 \text{ m/s}$
- Il CM per effetto della gravità ha un moto parabolico
  - atterra a distanza lungo x pari alla gittata (R)
- la coordinata x del CM quando è a terra è

$$x_{CM} = R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right)$$

- Le forze interne causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa

- La frammentazione avviene alla quota massima raggiunta dal proiettile
  - la coordinata x_{CM} alla quota max corrisponde a R/2
  - Uno dei frammenti cade giù in verticale

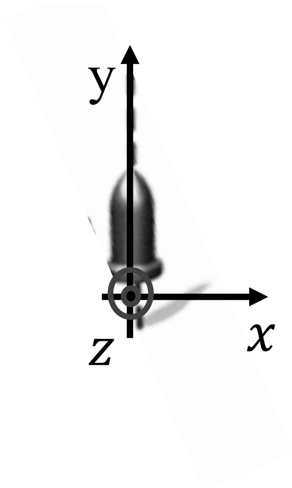
la coordinata x_1 del frammento che cade in verticale corrisponde a R/2

$$x_{CM} = R = \left(\frac{m\frac{R}{2} + m x_2}{2m}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}R \qquad \mathrm{R} = 58.8 \text{ m}, x_2 = 88.1 \text{ m}$$

Esercizio

Un proiettile, sparato in verticale verso l'alto con velocità iniziale V_0, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1. Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

- Velocità iniziale proiettile $\vec{V}_p = (0, V_0)$
- 2 frammenti da esplosione di egual massa
- Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1.
- Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.



Soluzione.

Fissiamo come sistema di riferimento un asse verticale rivolto verso l'alto e con origine nel punto di lancio

- Le forze interne causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa.

- poiché la gravità è l'unica forza esterna, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniformemente decelerato lungo y
  - all'istante t_1 raggiunge la quota:

$$y_{CM}(t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

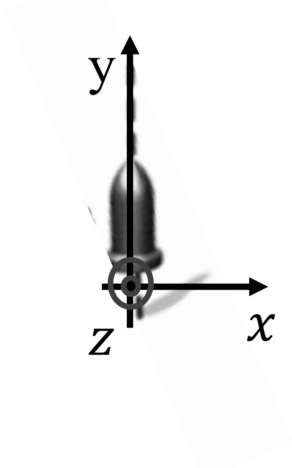
- Inoltre:

$$y_{CM} = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ in quanto le due masse sono eguali

Al tempo t_1 $y_1 = h_1$ si ha:

$$y_2 = h_2 = 2y_{CM} - h_1 = 2V_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$$

- Velocità iniziale proiettile $\vec{V}_p = (0, V_0)$
- 2 frammenti da esplosione di egual massa
- Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1.
- Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.



$$y_{CM}(t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad y_{CM} = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Al tempo t_1 $\quad y_1 = h_1$

$$y_2 = h_2 = 2y_{CM} - h_1 = 2V_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$$

Si osservi ora che la coordinata x dei frammenti non risulta determinata perché dipende dalle velocità vettoriali acquistate all'istante dell'esplosione.

- il centro di massa non è soggetto a forze in direzione orizzontale
- $V_{xCM}(t) = \text{costante} = V_{xCM}(0) = 0$

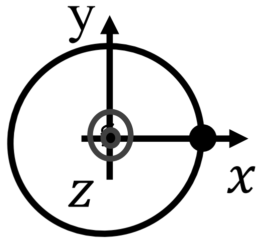
$$\Rightarrow x_{CM}(t) = costante = x_{CM}(0) = 0$$

Nel caso in esame deve essere quindi soddisfatta la condizione

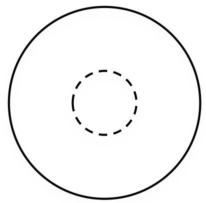
$$x_{CM} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Esercizio

Determinare la velocità, l'accelerazione del centro di massa C e la risultante delle forze esterne di un disco omogeneo di massa $M = 10$ kg e raggio $R = 30$ cm, sul cui bordo è fissato un oggetto di massa $m = 300$ g, che ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s costante su un piano privo di attrito.



- In base alla scelta degli assi cartesiani, la distanza del CM del sistema dall'origine durante il moto di rotazione è costante e pari a $|\vec{R}_{CM}(t)| = \left(\frac{M \cdot 0 + mR}{M+m}\right) = \frac{mR}{m+M}$
- Il CM ruoterà attorno all'asse z con velocità angolare ω a una distanza fissa dal centro del disco: MOTO CIRCOLARE UNIFORME



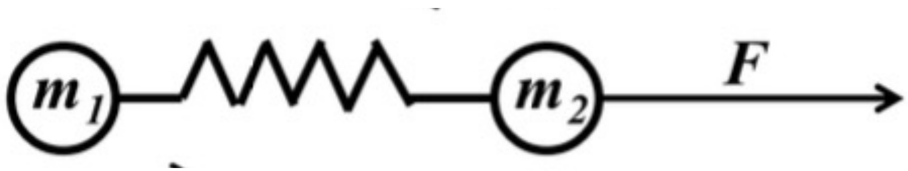
$$|\vec{V}_{CM}| = \frac{m}{m+M}\omega R = \frac{0.3 \times 100 \times 0.3}{10.3} = 0.873 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$|\vec{a}_{CM}| = \frac{m}{m+M}\omega^2 R = \frac{0.3 \times 100^2 \times 0.3}{10.3} = 87.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- La velocità è diretta ortogonalmente alla congiungente della posizione dell'oggetto con il centro del disco e tangente alla traiettoria tratteggiata
- l'accelerazione è centripeta

Esercizio

Due blocchi di massa m_1 ed m_2, collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale F costante. Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.

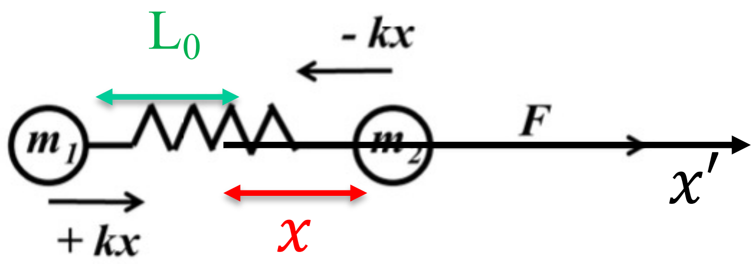


Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.

Soluzione.

- La <u>forza elastica è una forza interna</u>, per cui non influisce sull'accelerazione del centro di massa, che è data da:

$$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}}{(m_1+m_2)}$$



  - l'accelerazione è diretta lungo x:

$$a_{xC} = a_C = \frac{F}{(m_1+m_2)}$$

- Se non si sono instaurate oscillazioni, questa è anche l'accelerazione di ciascun blocco
- Detto x l'allungamento della molla, per il blocco m_2 abbiamo:

$$F - kx = m_2 a_C \quad \Rightarrow x = \frac{F - m_2 a_C}{k} \quad = \frac{F}{k}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{F}{k}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

e per il blocco m_1: $\quad kx = m_1 a_C$

Pertanto: $\quad x = \frac{m_1}{k} a_C = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\frac{F}{k}$

Le due relazioni conducono allo stesso risultato, come prevedibile in quanto la forza elastica è una forza interna al sistema