591AA 21/22 – COMPITO, LEZIONI 10, 11 E 12

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione. Invece, circa una settimana dopo che è stato assegnato, le soluzioni saranno pubblicate.

La maggior parte di questi problemi sono trascritti da "Schaum's Outlines, Linear Algebra, 3rd ed", che include anche le soluzioni e molti problemi simili.

Problema 1. [4.19–4.21, pg. 143–144, pdf pg. 151–152 (Lezione 10)]. Determina se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti:

(a) $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(4, 5, 5)$. [4.19]
(b) $(1, 2, 5)$, $(2, 5, 1)$, $(1, 5, 2)$. [4.20]
(c) $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 1, 4)$. [4.20]
(d) $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$, $h(t) = t$ (elementi dello spazio delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Suggerimento per (d): Sia $s(x) = af(x)+bf(x)+ch(x)$. Se $s = 0$ allora $s(0) = s(\pi/2) = s(\pi) = 0$. Interpreta questo come un sistema lineare di equazioni.

Problema 2. [4.13–4.14, pg 142, pdf pg. 150 (Lezione 10)]

(a) Verifica che i seguenti vettori generino $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 5, 8)\}$.
(b) Determinare le condizioni su a, b, c in modo che (a, b, c) sia un elemento del sottospazio generato da $\{(1, 2, 0), (-1, 1, 2), (3, 0, 4)\}$.

Problema 3. [4.24–4.25, pg 145, pdf pg. 153 (Lezione 10)]

(a) Determina se i seguenti vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 1, 1), (1, 2, 5), (5, 3, 4)$. In caso contrario, determinare la dimensione dello spazio che generano.
(b) Determina se i seguenti vettori sono una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$$

In caso contrario, determinare la dimensione dello spazio che generano.
(c) Determina se i seguenti polinomi sono una base di $P_3[t]$: $\{1, 1+t, 1+t+2t^2, 1+t+2t^2+3t^3\}$

Problema 4. (Lezione 11) Spiega usando l'eliminazione gaussiana perch il seguente risultato, chiamato Teorema di Rouch-Capelli, vero: Spiega usando l'eliminazione gaussiana perch il seguente risultato, chiamato Teorema di Rouch-Capelli, è vero:

Teorema. *Un sistema di equazioni lineari con n variabili ha soluzione se e solo se il rango della sua matrice di coefficienti A è uguale al rango della sua matrice aumentata* $[A \mid b]$

Nota: Questo esercizio non è difficile. Se rimani bloccato, prova alcuni esempi per vedere perch il teorema funziona.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Problema 5. (Lezione 11)

(a) Come abbiamo discusso a pagina 2 della lezione 6, la proiezione su un piano in $\mathbb{R}^3$ definisce una mappe lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Trova la matrice di L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ nel caso del piano $x + 2y + 2z = 0$. [Ricorda, devi ottenere un vettore unitario per la formula nella lezione 6].

(b) Come abbiamo discusso a pagina 3 della lezione 6, la riflessione su un piano in $\mathbb{R}^3$ definisce una mappa lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Trova la matrice di L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ nel caso del piano $x + 2y + 2z = 0$. [Ricorda, devi ottenere un vettore unitario per la formula nella lezione 6].

(c) Trova la matrice della mappa lineare

$$L : P_3[x] \to P_3[x], \qquad L(f) = x\frac{df}{dx} - f$$

rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Problema 6. (Lezione 11) Trova il rango di ciascuna delle mappe lineari del problema 5. Calcola la dimensione del kernel di ogni mappa lineare del problema 5 usando il teorema del rango.

Problema 7. [3.18, pg. 98, pdf pg 107 (Lezione 11)]

(a) Determinare la forma echelon ridotta delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A è equivalente per righe alla matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8. (Lezione 12) Siano U e V spazi vettoriali di dimensione finita. Verifica che

$$\dim U \times V = \dim U + \dim V$$

Problema 9. (Lezione 12) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\{(1, -1, -1, -2, 0), (1, -2, -2, 0, -3), (1, -1, -2, -2, 1)\}$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$\{(1, -2, -3, 0, -2), (1, -1, 2, -3, -4), (1, -1, -2, 2, 5)\}$$

(a) Trova una base di $U + W$. [Questo può essere fatto utilizzando l'algoritmo per trovare la base di uno spazio riga o l'algoritmo per trovare la base di uno spazio colonna discusso nella lezione 9].

(b) Trova una base di $U \cap W$. Questo può essere fatto descrivendo U e W come lo spazio nullo di una coppia di matrici e quindi utilizzando l'algoritmo a pagina 11 della lezione 12.

In alternativa, puoi risolvere le parti (a) e (b) contemporaneamente utilizzando l'algoritmo Zassenhaus a pagina 11 della lezione 12.