FORME CANONICHE DI PRODOTTI SCALARI
MATRICI CONGRUENTI

Sia V uno sp. vett., sia $\langle v, w \rangle$ un prod. scalare in V, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, sia B la matrice associata al prod. scalare in quella base.

Domande:

① Se considero una nuova base $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$, come cambia la matrice

② Posso scegliere la nuova base in modo che la matrice diventi particolarmente semplice.

Risposta

$\boxed{1}$ Se M è la matrice di cambio di base dalla base vecchia $\{v_1, \dots, v_n\}$ alla base nuova $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$, allora la nuova matrice $\hat{B}$ verifica

$$\boxed{M^t \hat{B} M = B}$$

$\boxed{2}$ Sylvestrizzazione! Posso fare in modo che $\hat{B}$ sia diagonale con solo $0, 1, -1$ sulla diagonale

Il numero di $0, 1, -1$ coincide con n_0, n_+ e n_- della forma quadratica associata al prodotto scalare.

Def. Due matrici B_1 e B_2 erano simili se esiste M invertibile tale

$$\boxed{B_2 = M^{-1} B_1 M}$$

Ora B_1 e B_2 matrici simmetriche si dicono congruenti se esiste matrice M invertibile tale che

$$\boxed{B_2 = M^t B_1 M}$$

Motivazione risposta $\boxed{1}$

Siano v e w due vettori in V.
Siano x e y le loro comp. rispetto alla base vecchia $\{v_1, \dots, v_n\}$. Allora

$$\langle v, w \rangle = y^t B x$$

Le componenti di v e w rispetto alla base nuova $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ sono $\hat{x} = Mx$, $\hat{y} = My$
(dove M ha come colonne le componenti di $v_1, \dots, v_n$ rispetto alla base nuova).
Nella nuova base deve succedere che

$$\langle v, w \rangle = \hat{y}^t \hat{B} \hat{x} = (My)^t \hat{B} Mx = y^t M^t \hat{B} M x$$

Uguagliando troviamo

$$y^t B x = y^t M^t \hat{B} M x$$

il che è possibile se e solo se $\boxed{B = M^t \hat{B} M}$

<u>Oss.</u> Abbiamo usato come fatto generale che se

$$y^t B_1 x = y^t B_2 x \qquad \forall x \ \forall y$$

allora $B_1 = B_2$

[Questo è vero perché basta usare vettori x e y che hanno tutti 0 tranne un 1 in una posizione specifica:

$$(0\,1\,0)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f$$

Se voglio fare sopravvivere solo l'el. in pos. (i,j) uso e_i^t a sx e e_j a dx]

—o—o—

<u>Domanda: come Sylvestrizzo una matrice</u> ?

Con una specie di GS.

<u>Esempio</u>

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Voglio trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ tale che

$$\langle v_i, v_j \rangle_B = 0 \qquad \text{se } i \neq j$$

In questa nuova base la matrice sarà diagonale

$v_1 = e_1 \qquad \langle v_1, v_1 \rangle_B = \langle e_1, e_1 \rangle_B = 1$

$v_2 = e_2 \qquad \langle v_1, v_2 \rangle_B = \langle e_1, e_2 \rangle_B = 0$

$$\langle v_2, v_2 \rangle_B = \langle e_2, e_2 \rangle_B = 2$$

Devo trovare v_3. Non posso usare e_3.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Cerco v_3 del tipo (a,b,c) e gli impongo di avere prod. scalare nullo con v_1 e v_2

$$\langle v_1, v_3 \rangle = (a\ b\ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a\ b\ c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a + c = 0$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = (a\ b\ c)\ B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a\ b\ c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2b + c = 0$$

Quindi devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases}$$

Una possibile soluzione è $v_3 = (2, 1, -2)$

Una base B-ortogonale è v_1, v_2, v_3 con

$v_1 = (1, 0, 0)$

$v_2 = (0, 1, 0)$

$v_3 = (2, 1, -2)$

In questa nuova base la matrice è

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\uparrow \\ \qquad\qquad \langle v_3, v_3 \rangle \end{array} = \hat{B}$$

$$\langle v_3, v_3 \rangle = (2,1,-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2,1,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 10$$

La matrice di cambio base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

rappresenta il cambio dalla nuova $\{v_1, v_2, v_3\}$ alla vecchia $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dovrebbe quindi succedere che

$$M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

[Fare il conto per verifica]

In questo caso posso far venire tutti 1 sulla diagonale

$\langle v_1, v_1 \rangle_B = 1$

$\langle v_2, v_2 \rangle_B = 2$ quindi $\langle \underbrace{\frac{v_2}{\sqrt{2}}}_{v_2}, \frac{v_2}{\sqrt{2}} \rangle = 1$

$\langle v_3, v_3 \rangle_B = 10$ quindi $\langle \frac{v_3}{\sqrt{10}}, \frac{v_3}{\sqrt{10}} \rangle = 1$

La base sylvestrizzante è $(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$

Esercizio   Con il prod. scalare di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

trovare una base B-ortogonale i cui primi due vettori stiano nel piano $x-y+z=0$

Piano: • scelgo una base di $\mathbb{R}^3$ che cominci con 2 vettori del piano
• la ortogonalizzo con GS rispetto a B.

$v_1 = (1,1,0)$ $\quad v_2 = (0,1,1)$ $\quad v_3 = (1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Det $= 1 \neq 0$ ⇝ sono una base

B-ortogonalizzo con GS : $\hat{v}_1 = v_1$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1$$

$$\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B = \langle v_1, v_1 \rangle_B = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 5$$

$$\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B = \langle v_2, v_1 \rangle = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\hat{v}_2 = (0\ 1\ 1) - \frac{2}{5}(1\ 1\ 0) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$

Volendo posso usare anche $\hat{v}_2 = (-2, 3, 5)$

Passo finale: trovo $\hat{v}_3$ con la formula

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} v_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle_B}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle_B} v_2 = \dots$$

In alternativa: cerco $\hat{v}_3$ del tipo (a, b, c) e gli impongo

$$\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle_B = 0 \qquad \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle_B = 0$$

e viene un sistema di 2 eq. in 3 incognite.

— o — o —