# ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 04

Note Title 02/10/2018

## SISTEMI LINEARI

Un'equazione lineare è un'equazione in cui compaiono solo somme di multipli delle incognite (combinazioni lineari delle incognite)

Esempio $2x + 3y - 5z = 0$

incognite

Un sistema lineare è un sistema di equazioni lineari

Esempi $\begin{cases} 2x+3y-5z=0 \\ x+7z=0 \end{cases}$ 2 equ., 3 incognite

$\begin{cases} x+5y=6 \\ x-3y=4 \\ 5x+2y=7 \end{cases}$ 3 equ., 2 incognite

Notazione: a sx le comb. lin. delle incognite, a dx gli eventuali termini noti

Classificazione Un sistema si dice

- OMOGENEO se a dx ho tutti 0
- NON OMOGENEO altrimenti

Esempio $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=4 \end{cases} \rightsquigarrow x = y+4 \overset{1^a}{\rightsquigarrow} 2y+8+3y=5$

$5y = -3$

$y = -\frac{3}{5} \rightsquigarrow$ trovo $x$

Per un sistema lineare possono accadere 3 cose

1. Il sistema ha una soluzione unica
2. Il sistema non ha soluzioni (è impossibile)
3. Il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da un certo numero di parametri

Esempio 1
$$\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$1^a$ equ. $-$ $3\cdot 2^a$ equ: $\quad -x = -1 \rightsquigarrow x = 1$
da cui facilmente anche $y = 1$

$(x,y) = (1,1)$ è l'unica soluzione

Esempio 2
$$\begin{cases} 2x+4y = 5 \\ 3x+6y = 7 \end{cases}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Bovina sostituzione $\quad 2x = 5-4y \quad x = \frac{5}{2} - 2y$

Sostituisco nella $2^a$: $\quad 3\left(\frac{5}{2} - 2y\right) + 6y = 7$

$$\frac{15}{2} - \cancel{6y} + \cancel{6y} = 7 \rightsquigarrow \frac{15}{2} = 7$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Più astuto: moltiplico la $1^a$ per 3 e la $2^a$ per 2

$$\begin{matrix} 6x+12y = 15 \\ 6x+12y = 14 \end{matrix}$$

Da qui è più evidente l'impossibilità

Esempio 3
$$\begin{cases} x+2y = 3 \\ 2x+4y = 6 \end{cases}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $x = 3-2y \rightsquigarrow$ nella $2^a$: $2(3-2y)+4y=6$

$$\cancel{6} - \cancel{4y} + \cancel{4y} = \cancel{6}$$

Tutte le volte che $x = 3-2y$ il sistema è risolto

Le soluzioni sono infinite del tipo $(3-2t, t)$
dove $t$ è un parametro che può assumere ogni valore
Per $t=5$ ottengo $(x,y) = (-7, 5)$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ La $2^a$ equazione è "il doppio della prima", quindi tutte le soluz. della prima sono soluz. della $2^a$.

Esempio 4
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

Ricopio la $1^a$ equazione, poi cerco di eliminare la $x$ dalla $2^a$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 & 1^a \text{ ricopiata} \\ -5y + 7z = -2 & 2^a - 2 \cdot 1^a \end{cases}$$

A $z$ posso dare un valore qualunque
$z = t$. Dalla $2^a$ ricavo

$$-5y = -2 - 7z = -2 - 7t \quad \text{da cui} \quad y = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}t$$

Dalla $1^a$ ricavo

$$x = 5 - 2y + 3z = 5 - \frac{4}{5} - \frac{14}{5}t + 3t = \frac{21}{5} + \frac{1}{5}t$$

Sol. generale è
$$\left(\frac{21}{5} + \frac{1}{5}t, \frac{2}{5} + \frac{7}{5}t, t\right)$$
$$= \left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) + t\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1\right)$$

Esempio 5

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 5 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & 1^a \text{ ricopiata} \\ -3y - 4z = 5 & 2^a - 1^a \\ -4y - 5z = 1 & 3^a - 2 \cdot 1^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & 1^a \text{ ricopiata} \\ -3y - 4z = 5 & 2^a \text{ ricopiata} \\ z = -17 & 3 \cdot 3^a - 4 \cdot 2^a \end{cases}$$

$$3(-4y-5z) - 4(-3y-4z) = \cancel{-12y} - 15z + \cancel{12y} + 16z = z$$

Dalla $3^a$ so che $z = -17$. Sostituisco nella $2^a$ e trovo

$$-3y = 5 + 4z = 5 - 68 = -63 \qquad y = +21$$

Dalla $1^a$ $\quad x = -2y - 3z$ e lo trovo

— o — o —

Se riesco a portare un sistema nella forma A SCALA, allora poi risolvo facilmente partendo dal basso.

— o — o —

Oss. Il primo passaggio fatto (ricopio la $1^a$ e elimino la $x$ sotto) è equiv. a ricavare $x$ dalla prima e sostituire nelle altre)

Il secondo passaggio è equivalente a ricavare $y$ dalla $2^a$ e sostituire nella $3^a$.

— o — o —

Esempio 6
$$\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \\ x + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \\ -y + 2z = 3 \end{cases}$$

1ª ricopiata
2ª ricopiata
$3^a - 1^a$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + 3z = 1 \\ 7z = 7 \end{cases}$$

$2^a + 2 \cdot 3^a$

$z = 1 \qquad 2y = 1 - 3z = -2 \rightsquigarrow y = -1$

$x = 2 - y + z = 4$

$$(x, y, z) = \boxed{(4, -1, 1)}$$

La verifica costa 30 secondi !!!

Esempio 7
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Dalla 3ª ricavo $z = 3$. Dalla 1ª ottengo $x = 1 + 2z - 3y$
$= 7 - 3y$

Il sistema ha infinite soluzioni e posso fissare come parametro $y$

$y = t, \quad z = 3, \quad x = 7 - 3t$

La soluzione generale è $(x, y, z) = (7 - 3t, t, 3)$
$= (7, 0, 3) + t(-3, 1, 0)$

Oss. La variabile libera è legata alla presenza di un "gradino da 2" nella forma a scala.