ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 22

Note Title 26/10/2018

Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare

- Caso 1: sistema omogeneo

$$\boxed{Ax = 0}$$

L'insieme delle soluzioni è il ker. Detta k la dim. del ker, l'insieme delle soluzioni si scrive come

base del ker

$$x = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

numeri arbitrari

Nota bene: $x = 0$ è sempre una soluzione

- Caso 2: sistema non omogeneo

$$\boxed{Ax = b} \qquad b \neq 0$$

Il sistema può avere o no soluzione (ce l'ha se e solo se $b \in \mathrm{Im}$, cioè allo span delle colonne di A).

Supponiamo che si sia una soluzione x_0, allora TUTTE le soluzioni sono del tipo

$$x = x_0 + \underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}_{\text{soluzione generale del corrispondente sistema omogeneo}}$$

soluzione qualunque del sistema NON omogeneo

__Verifica__ Sia x_0 una soluzione $Ax_0 = b$

Sia x un'altra soluz. $Ax = b$

Allora $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$

Ma allora $x - x_0$ è sol. del sistema omog.

$$x - x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

Porto x_0 a dx e ho finito

D'altra parte, tutti gli x con la forma data sono soluz.

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_0 + c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) \\ &= Ax_0 + c_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Av_1}} + \dots + c_k \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Av_k}} = Ax_0 = b. \end{aligned}$$

— o — o —

__Esempio__

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + 5z - w = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$\boxed{w = t}$, $\boxed{z = s}$, $-2y + 7z - w = -4$

$-2y + 7s - t = -4 \rightsquigarrow -2y = -4 - 7s + t$

$$\boxed{y = +2 + \frac{7}{2}s - \frac{1}{2}t}$$

$$x + y - z = 3 \rightsquigarrow x = 3 + z - y = \overset{3+}{s} - 2 - \frac{7}{2}s + \frac{1}{2}t = 1 - \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}t$$

$$\boxed{x = 1 - \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}t}$$

$$(x, y, z, w) = \underbrace{(1, 2, 0, 0)}_{x_0} + s\underbrace{(-5, 7, 2, 0)}_{v_1} + t\underbrace{(1, -1, 0, 2)}_{v_2}$$

x_0: risolve sist. non omog.

v_1, v_2: base del ker (risolvono sist. omog.)

Esempio Dimostrare che esiste unica $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. t.c.

$f(1,1) = (1,3)$ $\quad$ $f(2,-1) = (1,5)$

Basta verificare che $\underbrace{(1,1)}_{v_1}$ e $\underbrace{(2,-1)}_{v_2}$ sono una base

Scrivere la matrice di f dalla canonica alla canonica

$\boxed{1^o \text{ modo}}$

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) \end{array} \begin{array}{l} \to e_1 \\ \to e_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Quindi mi servono $f(e_1)$ e $f(e_2)$

Per calcolare $f(e_1)$ lo scrivo come comb. lin. di

$(1,0) = a(1,1) + b(2,-1)$

⇝ trovo a e b

⇝ calcola $f(1,0) = a f(1,1) + b f(2,-1)$

$= a(1,3) + b(1,5) = \underbrace{(*,*)}_{1^a \text{ colonna}}$

Stessa cosa per e_2.

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Ultra-bovino. La matrice è $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$a + b = 1$ $\qquad$ $2a - b = 1$

$c + d = 3$ $\qquad$ $2c - d = 5$

$\boxed{3^o \text{ modo}}$ Un po' più astuto

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$

Questa matrice rappresenta f dalla $\{v_1, v_2\}$ alla canonica

Mi serve qualcosa che prenda in input le comp. rispetto alla canonica e restituisca quelle risp. alla $\{v_1, v_2\}$

Scrivo il cambio di base strana ⇝ canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M \qquad M^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta è

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}} = B$$

rappresenta f dalla canonica alla canonica

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verifiche

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A \; M^{-1}$

prende le comp. di x rispetto alla canonica e restituisce " " " " " " $\{v_1, v_2\}$

prende le comp. di x rispetto alla $\{v_1, v_2\}$ e restituisce le comp. di $f(x)$ rispetto alla $\{e_1, e_2\}$

$\boxed{4° \text{ modo}}$ $\boxed{\text{METODO RAPUANO}}$

$f(1,1) = (1,3)$
$f(2,-1) = (1,5)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

← segui corretti dopo video

Trasposta di quella giusta !!!!

Perché funziona il metodo Rapuano.
Siano A ed M come nel 3° modo.
Rapuano parte da $(M^t \mid A^t)$
Lavorando alla Gauss arriva a

$$R(M^t \mid A^t) = (\underbrace{RM^t}_{= Id} \mid RA^t) \rightsquigarrow R = (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$$

Ma allora a dx ritroviamo

$$RA^t = (M^{-1})^t A^t = (\underbrace{AM^{-1}}_{})^t$$

↑ matrice calcolata nel 3° modo

— o — o —

<u>Esempio</u> In $\mathbb{R}^3$ scrivere la matrice di cambio base da $\{v_1, v_2, v_3\}$ a $\{w_1, w_2, w_3\}$

$\boxed{\text{1° modo: semi-bovino}}$

$$\begin{array}{cccl} * & * & * & \to w_1 \\ * & * & * & \to w_2 \\ * & * & * & \to w_3 \\ \uparrow & & & \\ v_1 & & & \end{array}$$

Scrivo $v_1 = a w_1 + b w_2 + c w_3$ e $(a, b, c) \rightsquigarrow$ 1ª colonna
idem per le altre

$\boxed{\text{2° modo: più astuto}}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{cambio base} \\ \text{dalla } \{v_1, v_2, v_3\} \\ \text{alla canonica}}} \qquad B = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{dalla } \{w_1, w_2, w_3\} \\ \text{alla canonica}}}$$

Quindi la matrice richiesta è $B^{-1}A$

Esempio In $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$$V = \mathrm{Span}\{(1,2)\} \qquad W = \mathrm{Span}\{(1,3)\}$$

Si verifica subito che $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$

Quindi ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come

$$x = \underset{\substack{\cap\\ V}}{v} + \underset{\substack{\cap\\ W}}{w}$$

Scrivere la matrice che rappresenta l'appl. $x \longrightarrow v$

Si tratta dell'applic. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$f(1,2) = (1,2)$ Da qui posso concludere alla
$f(1,3) = (0,0)$ Rapuano oppure con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pensarci con calma.

— o — o —