15 MAGGIO 2023

STABILITÀ LTI - AUTOVALORI DI A - MODI SISTEMA

↳ STAB. MOV. PER SIST. NON LINEARE

↳ METODO DI LYAPUNOV

↓

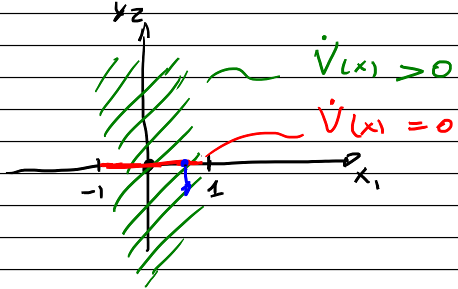
$V(x)$ D.P. STUDIO DELLA $\dot{V}(x)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2-1)\,x_2 - x_1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V(x) = x_1^2 + x_2^2$ D.P.

$\dot{V}(x) = 2x_2^2\left(1 - x_1^2\right)$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \dot{V}(x) = 0$

NELL'INTORNO DI $\bar{x}$ $\quad \dot{V}(x) \geq 0$



$x_2 = 0 \Rightarrow \dot V(x) = 0$

$$\dot x = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

INSTABILE

METODO DI LYAPUNOV CASO LINEARE

LTI è A.S. $\iff$ $\forall\, Q = Q^T$ con Q P.D. esiste una $P = P^T$ P.D. t.c. $A^T P + P A = -Q$

ESEMPIO:

$$\dot x_1 = -2x_1 - 3x_2$$

$$\dot x_2 = 4x_1 - 2x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T P + PA = -Q$$

$$P = ? \qquad P = P^T$$

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -I_{2\times 2}$$

(1,1)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2a + 4b - 2a + 4b = -1$$

$$\Rightarrow -4a + 8b = -1 \quad \Rightarrow a = \frac{1+8b}{4}$$

$(1,2)$ $\qquad \Rightarrow a = \frac{9}{32}$

$-2b + 4c - 3a - 2b = 0$

$-3a - 4b + 4c = 0$

$(2,1)$

$//$

$(2,2)$ $\quad -3b - 2c - 3b - 2c = -1$

$\Rightarrow -6b - 4c = -1 \rightarrow c = \frac{1-6b}{4}$

$= \frac{1 - \frac{3}{32}}{4} = \frac{29}{128}$

$-3\left(\frac{1+8b}{4}\right) - 4b + 1 - 6b = 0$

$b(-6 - 4 - 6) - \frac{3}{4} + 1 = 0 \qquad +16b = +\frac{1}{4}$

$b = \frac{1}{64}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{32} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{64} & \frac{29}{128} \end{bmatrix} = \frac{1}{128} \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{P.D.}$$

$36 > 0$? ✓

$36 \cdot 29 - 4 > 0$? ✓

$\Rightarrow$ SISTEMA ASINTOTICAM. STABILE

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(\lambda+2)^2 + 12 = \lambda^2 + 4\lambda + 16$$

TUTTE RADICI CON $Re < 0$ $\Rightarrow$ CONFERMA SIST. AS. STABILE

STABILITÀ INTERNA

DEFINIZIONE $(\delta x(0) \rightarrow \delta x(t))$

PER MOVIM. STATO

$\forall \varepsilon > 0$ ...

STABILE
AS. STABILE
INSTABILE

NL (STABILITÀ MOVIMENTO)

LINEARIZZAZ. → LTI (STABILITÀ SISTEMA)

LYAPUNOV → $V(x)$ D.P.

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x)$$

LTI → AUTOVALORI DI A (MODI)

LTI → LYAPUNOV → $A^T P + PA = -Q$ EQ. LYAP.

FORMA DI STATO $\longleftrightarrow$ FUNZ. DI TRASF.

(NEL CASO SIST. LINEARI)

$= G(s)$ DESCRIVE IL RAPPORTO TRA TRASFORM. DELL'USCITA (DOVUTA ALL'INGRESSO U - USCITA FORZATA) E LA TRASF. DELL'INGR.

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

TRASF. DI $u(t)$

TRASF. DI $y(t)$

TRASF. DI $\mathcal{L}$ DELLA DERIV. RISPETTO t

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

(1) $\dot{x} = Ax + Bu$

(2) $y = Cx + Du$

(1) $s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s)$

② $$Y(s) = C\,\bar{X}(s) + D\,U(s)$$

① $$s\,\bar{X}(s) - A\,\bar{X}(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$(sI - A)\,\bar{X}(s) = x(0) + B\,U(s)$$

$$\bar{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{TRASF DELL' EV. LIBERA}} + \underbrace{(sI - A)^{-1} B\,U(s)}_{\text{TRASF. DELL' EVOLUZ. FORZATA}}$$

RICORDA: SOL. EQ. DIFF. IN FORMA DI STATO

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{EVOLUZ. LIBERA DELLO STATO}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau}_{\text{EVOL. FORZATA CORRISP. AD } u(t)}$$

(2) $Y(s) = C\bar{X}(s) + D\,U(s)$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI-A)^{-1}x_0}_{\text{USCITA CORRISP. EV. LIBERA}} + \underbrace{C(sI-A)^{-1}B\,U(s) + D\,U(s)}_{\text{EVOLUZ. FORZATA DELL' USCITA}}$$

TRASF. DELL'EV. FORZ. DELL' USCITA

$$\underbrace{\left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)U(s)}_{Y_p(s)}$$

$G(s)$

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

F.d.t.

NEL CASO MIMO MATRICE DI TRASFERIM.

$$C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$(sI-A)^{-1}$$

$$= \frac{C\,\mathrm{adj}(sI-A)\,B}{\underbrace{\det(sI-A)}_{\pi_A(s)}} + D =$$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

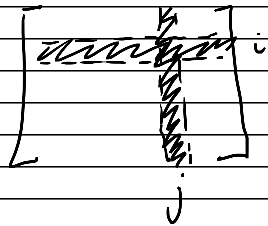
$$M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(M)}{\det(M)}$$

$$\mathrm{adj}(M) = \mathrm{cof}^T(M)$$

$$\mathrm{cof}(M) = -1^{(i+j)} \det(M_{i,j})$$

$$= \frac{C\,\overbrace{\mathrm{adj}(sI-A)\,B}^{\text{GRADO MAX } n-1} + \overbrace{D\,\pi_A(s)}^{\text{GRADO } n}}{\underbrace{\pi_A(s)}_{\text{GRADO MAX } n}}$$

$$M_{i,j} =$$



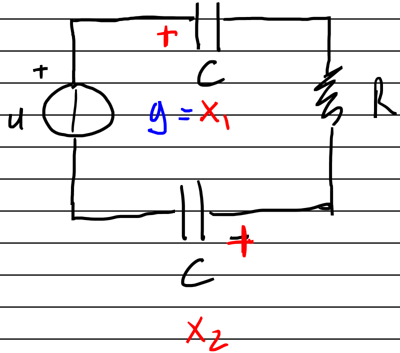
1. PROPRIETÀ DI CAUSALITÀ:

FORMA DI STATO: FdT

CRITERIO STRETTAM. CAUSALE $\rightarrow D = 0$ CON MINORE STRETTO

CAUSALE $\rightarrow$ SEMPRE SE IN FORMA DI STATO GRADO NUM $\leq$ GRADO DEN.

2. IN GENERALE I POLI DELLA FdT SONO UN SOTTOINSIEME DEGLI AUTOVALORI DI A



$$\dot v = \frac{1}{C} \cdot i$$

$$\left.\begin{cases} \dot x_1 = -\dfrac{1}{CR}\left(x_1 + x_2 - u\right) \\ \dot x_2 = -\dfrac{1}{CR}\left(x_1 + x_2 - u\right) \\ y = x_1 \end{cases}\right] \ast$$

CAMBIO DI VARIABILI

$$\hat x_1 = x_1 + x_2 \qquad \dot{\hat x}_1 = \dot x_1 + \dot x_2$$

$$\hat x_2 = x_1 - x_2 \qquad \dot{\hat x}_2 = \dot x_1 - \dot x_2$$

$$y = x_1 = \frac{1}{2}\left(\hat x_1 + \hat x_2\right)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\dfrac{2}{RC}(x_1 + x_2 - u) = -\dfrac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 0 \end{cases}$$

RAPPR. EQUIVALENTE A $\star$

$$y = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

QUESTA RAPPRESENTAZ. EVIDENZIA CHE È POSS. AGIRE SU $\hat{x}_1$ TRAMITE u, MA CHE u È TOTALM. ININFLUENTE SU $\hat{x}_2$

CI CHIEDIAMO SE TRAMITE L'INGRESSO u POSSIAMO FAR SEMPRE RAGGIUNGERE AD UN SISTEMA UN DETERMINATO STATO. (?)

LA RISPOSTA È NO! (ESEMPIO).

VOGLIAMO QUINDI IDENTIFICARE LE "PARTI" DI STATO CHE NON SONO INFLUENZATE DALLA VARIABILE DI INGRESSO

PROPRIETÀ: RAGGIUNGIBILITÀ

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

UNO STATO $\tilde{x}$ DEL SISTEMA SI DICE <u>RAGGIUNGIBILE</u> SE ESISTONO UN ISTANTE DI TEMPO FINITO $\tilde{t} > 0$ E UN INGRESSO $\tilde{u}$ DEFINITO TRA 0 E $\tilde{t}$

TALI CHE SE $\tilde{x}_f(t)$ $0 \le t \le \tilde{t}$ IL MOVIM.

FORZATO DELLO STATO GENERATO DA $\tilde{u}$ ALLORA

$\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$

L'INSIEME DI TUTTI GLI STATI PER I QUALI VALE

LA DEF. X_R

IL COMPLEMENTO A X_R IN $\mathbb{R}^n$ È X_{NR}

(INSIEME STATI NON RAGGIUNGIBILI)

$X_R \cup X_{NR} = \mathbb{R}^n$

- UN SISTEMA PER IL QUALE TUTTI GLI STATI

SONO RAGGIUNGIBILI SI DICE

COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

NOTA: PROPRIETÀ NON È LEGATA AL SEGNALE DI USCITA

$y = Cx + Du$ NON GIOCA NESSUN RUOLO RISP. ALLA RAGGIUNGIBILITÀ

$\Rightarrow$ SI PARLA DI RAGGIUNGIBILITÀ DELLA COPPIA (A, B)

TEOREMA

IL SISTEMA Σ È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

[(A, B) COMPL. RAGGIUNGIBILE] $\Longleftrightarrow$

$$M_r = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$ È t.c.

MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ

RANGO $\rho(M_r) = n$

NEL CASO DI SINGOLO INGRESSO $\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

M_r È QUADRATA $n \times n$ $\rightarrow$ LA CONDIZIONE EQUIVALE A $\det(M_r) \neq 0$

SE IL SISTEMA <u>NON</u> È COMPL. RAGG. SI PUÒ PENSARE DI "ISOLARE LA SUA PARTE NON RAGGIUNGIBILE"

CHIAMIAMO $n_r = \rho(M_r)$ $\qquad n_r < n$

EFFETTUIAMO UN CAMBIO DI VARIABILI (TRAMITE MATRICE T_r)

$$\hat{x} = T_r x$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r} \\ \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m} \end{array}$$

COME È COSTRUITA LA MATRICE T_r?

T_r: SELEZIONO n_r COLONNE LIN. INDIP. DALLA MATRICE M_r

(OGNI STATO RAGG. È COMBINAZ. LINEARE DI QUESTE COLONNE)

T_r^{-1} COMPOSTA DA MULTIPLI DELLE COLONNE SELEZIONATE AFFIANCATE DA $n - n_r$ ULTERIORI COLONNE LIN. INDIP.

SE PARTIZIONIAMO LO STATO $\hat{x}$ CORRISPONDENTE IN $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}$ $\quad \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_r}$

ALLORA $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \longrightarrow$

$$① \quad \left[\ \dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b + \hat{B}_a u\ \right]$$

$$② \quad \left[\ \dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b\ \right]$$

TRAMITE INGRESSO u NON SI PUÒ AGIRE NÈ DIRETTAMENTE NÈ INDIRETTAMENTE

$\dot{\hat{x}}_b$ NON È FUNZ. DI u

$\dot{\hat{x}}_a$ È FUNZ. DI u MA $\dot{\hat{x}}_b$ NON È FUNZ. DI $\hat{x}_a$

(1) PARTE RAGGIUNGIBILE DEL SISTEMA

(2) " NON RAGG. " "

NOTA $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$ È MATRICE TRIANGOLARE A BLOCCHI

GLI AUTOV. DI $\hat{A}$ ★ COINCIDONO CON GLI AUTOV. DI $\hat{A}_a$ $\cup$ AUTOV. $\hat{A}_b$

AUTOV. DELLA PARTE RAGGIUNG.

AUTOV. PARTE NON RAGG.

(STESSI AUTOVALORI DI A)

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x - u)$$

$$y = x_1$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{B} u$$

(A, B) È COMPL. RAGG. ?

$$AB = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R^2C^2} \\ -\frac{2}{R^2C^2} \end{bmatrix}$$

$$M_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} \end{bmatrix}$$

$$\rho(M_r) = 1$$

IL SISTEMA NON È COMPL. RAGGIUNGIBILE

$$T_r^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad T_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \quad \rightarrow$$

STESSA TRASF. DELL' ESEMPIO

$$\hat{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\hat{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\dfrac{2}{RC}(x_1 + x_2 - u) = -\dfrac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} -\dfrac{2}{RC} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \hat{B} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{2}{RC} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$-\dfrac{2}{RC}$ È AUTOV. APPART. ALLA PARTE RAGG.

0 " " " " " NON RAGG.