11 MAGGIO 2023

- STABILITÀ PER LTI ✓
- STABILITÀ MOVIMENTO PER NL ?

→ STABILITÀ MOVIMENTO DI EQUILIBRIO PER NL È LEGATA STABILITÀ LTI ASSOCIATO ?

TEOREMI:

- $\bar{x}$ STATO DI EQUILIBRIO CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $\bar{u}$ PER NL: $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$

  È A.S. SE IL CORRISP. SISTEMA LINEARIZZATO È A.S.

- $\bar{x}$ " " " " " $\bar{u}$ PER NL

  È INSTABILE SE " " " " È INSTABILE

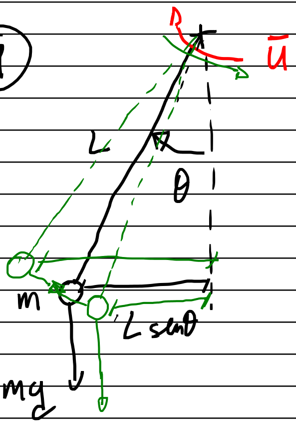
• SE LINEARIZZATO È STABILE MARGINALMENTE, NON SI PUÒ DIRE NIENTE SULLA STABILITÀ DI $\bar{x}$

PENDOLO

$m = 1\ Kg \qquad L = 1\ m \qquad g \approx 10\ m/s^2$

$c = 1\ \frac{Nms}{rad} \qquad \bar{u} = 5\ Nm \qquad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

(1)

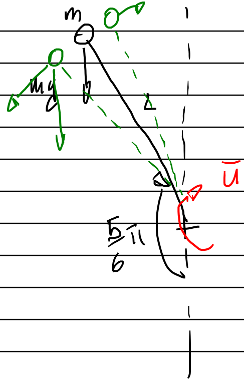


EQUILIBRI

(1) $\bar{u} = 5\ Nm \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $\bar{u} = 5\ Nm \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

(2)



(1) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -5\sqrt{3} & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda + 5\sqrt{3} = 0$$

REGOLA DI CARTESIO (POL. DI ORDINE 2)

C.N. E S. ENTRAMBI AUTOV.
CON $Re < 0$

SISTEMA LINEARIZZATO È A.S.

LO MOVIMENTO DI EQ. (1) PER SISTEMA N.L.
È A.S.

② $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 5\sqrt{3} & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\lambda^2 + \lambda - 5\sqrt{3} = 0$$

SISTEMA LINEARIZZATO È

1 AUTOV. PARTE REALE > 0 INSTABILE

1 " " " < 0

MOVIMENTO DI EQ. ② PER N.L.
È INSTABILE

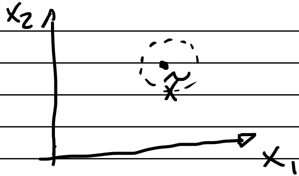
METODO DI LYAPUNOV

FUNZIONI DEFINITE / SEMI DEFINITE IN SEGNO

- $V(x)$ FUNZIONE SCALARE DI UN VETTORE $x \in \mathbb{R}^n$

È DEFINITA POSITIVA (DP) IN $\tilde{x}$ SE
DEFINITA NEGATIVA (DN)

SI ANNULLA IN $x = \tilde{x}$ E ASSUME VALORI POSITIVI IN UN SUO INTORNO
NEGATIVI



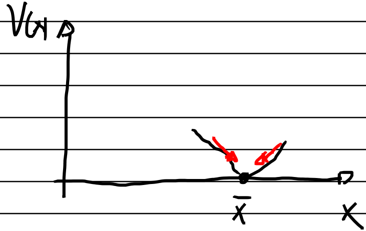
$V(\tilde{x}) = 0$

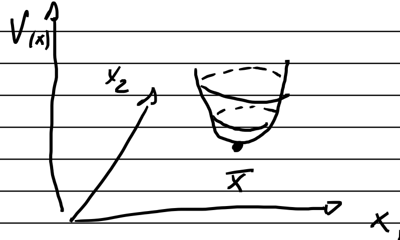
$V(x) > 0$ IN TUTTI I PUNTI DI UN INTORNO, TRANNE $\tilde{x}$,
$V(x) < 0$

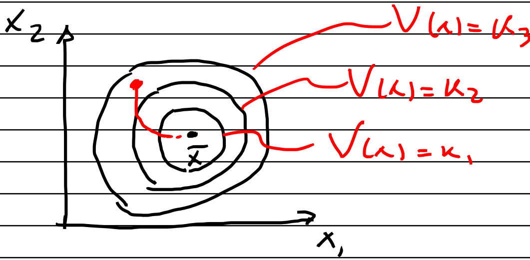
- SEMI DEFINITA POSITIVA ....   VALORI NON NEGATIVI
  " NEGATIVA   NON POSITIVI

- SE ESISTE $V(x)$ DP IN $\bar{x}$ E t.c. $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x)$ SIA SDN IN $\bar{x}$
ALLORA $\bar{x}$ È UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE (SEMPLICEMENTE) DEL SISTEMA

- SE ESISTE $V(x)$ DP IN $\bar{x}$ E t.c. $\dot{V}(x)$ È DN IN $\bar{x}$
ALLORA $\bar{x}$ È UN PUNTO DI EQ. AS. STABILE PER IL SISTEMA







$V(x) = K$

$K_3 > K_2 > K_1$

• ... $V(x)$ DP ..... $\dot{V}(x)$ DP ... $\bar{x}$ INSTABILE

- $V(x)$ SCELTA COME FUNZIONE CHE DESCRIVE ENERGIA DEL SISTEMA (UNA POSSIBILITÀ)

- UN'ALTRA POSSIBILE SCELTA PER $V(x)$ FORME QUADRATICHE

$V(x) = x^T M x$ D.P. IN $x = 0$ $\Leftrightarrow$ $M = M^T$ E M MATRICE POSITIVA DEFINITA (TUTTI AUTOV. SONO $Re > 0$)

$x^T M x$ D.N. IN $x = 0$

$\Leftrightarrow$ $M = M^T$ E M NEGATIVA DEFINITA

PER VALUTARE SE UNA MATRICE M È P.D.

CRITERIO DI SYLVESTER

TUTTI I MINORI PRINCIPALI >0

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + u \end{bmatrix}}_{f(x,u)}$$

STUDIO STABILITÀ EQUILIBRI PER $\bar{u} = 0$

$$f(x, \bar{u}) = 0$$

$$\begin{cases} -x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2 = 0 \\ x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

SICURAMENTE UNA SOLUZIONE È $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

STUDIO DELLA STABILITÀ DEL MOVIMENTO DI EQUILIBRIO $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ CORR SP. ALL' INGRESSO $\bar{u} = 0$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + x_2^2 & -2x_2 + 2x_1x_2 \\ x_2 - 2x_1x_2 & x_1 - 3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix} =$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + u \end{bmatrix}$$

DA VALUTATO $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u = 0$

$\bar{x}$ $\bar{u}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STABILITÀ:

$\lambda_1 = 0$ m.a. = 2, m.g. = 2

$\Rightarrow$ SISTEMA LINEARIZZATO MARGINALM. STABILE

$\Rightarrow$ MOVIMENTO $\bar{x}$ PER N.L. ?

PROVIAMO CON METODO DI LYAPUNOV

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x =$$

M. DEFINITA POSITIVA

$\Rightarrow$ V(x) FUNZ. DEF. POS.

IN $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2} x^T I x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

$$\dot V(x) = ? = \frac{d}{dt} V(x)$$

$$\dot V(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \left(\cancel{2} x_1 \dot x_1 + \cancel{2} x_2 \dot x_2 \right) =$$

$$= x_1 \Big(\overbrace{-x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2}^{\dot x_1} \Big) + x_2 \Big(\overbrace{x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2}^{\dot x_2} \Big) =$$

$$= -x_1^4 - \cancel{x_1 x_2^2} + \cancel{x_1^2 x_2^2} + \cancel{x_1 x_2^2} - x_2^4 - \cancel{x_1^2 x_2^2} =$$

$$= -\left(x_1^4 + x_2^4\right)$$ FUNZ. D.N. IN $\bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x}$ È UN PUNTO DI EQ. ASINTOTICAM. STABILE PER IL SISTEMA N.L.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)\, x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

SISTEMA AUTONOMO (NON COMPARE u)

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ STATO DI EQUILIBRIO $$f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PROVIAMO CON LINEARIZZAZIONE

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x} \\ (u = \bar{u})}} = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 x_2 - 1 & -x_1^2 + 1 \end{bmatrix} \right|_{x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

SOLUZ. HANNO PARTE REALE > 0 ENTRAMBE

SISTEMA LINEARIZZATO È INSTABILE

$\to$ $\bar{x}$ PER N.L. È POS. DI EQ. INSTABILE

$$V(x) = x^T I x = x_1^2 + x_2^2$$

$$[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

DEF. POSITIVA IN $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot V(x) = 2x_1\dot x_1 + 2x_2\dot x_2 =$$

$$= 2x_1x_2 + 2x_2\left(-(x_1^2-1)x_2 - x_1\right) =$$

$$= 2\left(\cancel{x_1x_2} - x_1^2x_2^2 + x_2^2 - \cancel{x_1x_2}\right) = 2x_2^2\left(1-x_1^2\right)$$

$x = \bar x = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ PER $x=\bar x$ $\quad \dot V(x) = 0$ ✓

$\exists$ INTORNO DI $x=\bar x$ IN CUI $\dot V(x) > 0$
$\forall x \neq \bar x$ ✓

$\dot V(x)$ DEF. POSITIVA IN $\bar x$

$\rightarrow$ $\bar x$ MOV. DI EQ. INSTAB. PER IL SIST.

TEORMA DI LYAPUNOV PER LTI

$\dot{x} = Ax + Bu$ CONSIDERO $u = \bar{u} = 0$

$\rightarrow \dot{x} = Ax$ IN QUESTO CASO L'UNICO MOV. DI EQ. È $\bar{x} = 0_{n \times 1}$

STUDIO LA STABILITÀ DI QUESTO MOVIMENTO

↳ POICHÉ SIST È LINEARE → STUDIO LA STAB. DEL SISTEMA

• SCEGLIAMO UNA MATRICE $P = P^T$ DEF. POSITIVA

$V(x) = x^T P x$

$$\dot V(x) = \dot x^T P x + x^T P \dot x =$$

$$= x^T A^T P x + x^T P A x =$$

$$= x^T \left(A^T P + PA \right) x = - x^T Q x$$

$$A^T P + PA := -Q$$

TEOREMA:

LTI è A.S. $\iff$ $\forall\, Q = Q^T$ e Q P.D.

ESISTE UNA MATRICE $P = P^T$ P.D. t.c.

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T P + PA = -Q$$

$\rightarrow$ P INCOGNITA

SE $P = P^T$ È P.D. IL SISTEMA È A.S.