Prova di Comunicazioni Numeriche 075II

03/06/2024

1. Nel gioco del Lotto ci sono 90 numeri da estrarre, si estrae sequenzialmente senza rimettere i numeri all'interno dell'urna una volta estratti.

   (a) Calcolare la probabilità che esca 6 alla prima o alla seconda pescata.

   Proof. La probabilità che esca il numero 6 alla prima pescata è:

   $$P(6 \text{ alla prima}) = \frac{1}{90}$$

   La probabilità che esca il numero 6 alla seconda pescata, considerando che non è uscito alla prima, è:

   $$P(6 \text{ alla seconda}) = \frac{89}{90} \times \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$$

   La probabilità totale che esca il numero 6 alla prima o alla seconda pescata è la somma delle due probabilità:

   $$P(6 \text{ alla prima o seconda}) = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

   □

2. Data la funzione di densità di probabilità $f_X(X) = kx$, definita in $[0, 4]$:

   (a) Calcolare k e disegnare $f_X(X)$.

   Proof. Per trovare k, dobbiamo assicurare che l'integrale di $f_X(X)$ su $[0, 4]$ sia uguale a 1:

   $$\int_0^4 kx\, dx = 1$$

$$k \int_0^4 x\,dx = 1$$
$$k \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1$$
$$k \left(\frac{16}{2}\right) = 1$$
$$k \cdot 8 = 1$$
$$k = \frac{1}{8}$$

Quindi la funzione di densità di probabilità è $f_X(X) = \frac{1}{8}x$. □

(b) Calcolare e disegnare la funzione di distribuzione di X.

Proof. La funzione di distribuzione cumulativa $F_X(X)$ è l'integrale di $f_X(X)$:

$$F_X(X) = \int_0^X \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^X = \frac{1}{8} \cdot \frac{X^2}{2} = \frac{X^2}{16}$$

□

(c) Calcolare il valor medio e la varianza di X.

Proof. Il valor medio μ di X è dato da:

$$\mu = \int_0^4 x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$$

La varianza σ^2 di X è data da:

$$\sigma^2 = \int_0^4 x^2 \cdot f_X(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8}x\,dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3\,dx - \frac{64}{9}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{1}{8} \cdot \frac{256}{4} - \frac{64}{9} = \frac{32}{1} - \frac{64}{9} = \frac{288}{9} - \frac{64}{9} = \frac{224}{9}$$

□

3. Sia $w(t) = \frac{N_0}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ in ingresso a un sistema LTI con $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$:

(a) Calcolare la potenza del segnale in uscita $x(t)$.

Proof. La risposta in frequenza del sistema è:

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$$

La densità spettrale di potenza del segnale in uscita $S_{xx}(f)$ è data da:

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 \, S_{ww}(f)$$

Dove $S_{ww}(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$:

$$|H(f)|^2 = \left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)\left(1 - e^{j2\pi fT}\right) = 2 - 2\cos(2\pi fT) = 4\sin^2(\pi fT)$$

$$S_{xx}(f) = 4\sin^2(\pi fT) \cdot \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

La potenza del segnale in uscita è:

$$P_x = \int_{-B}^{B} S_{xx}(f)\, df = \int_{-B}^{B} 2N_0 \sin^2(\pi fT)\, df$$

Con $\sin^2(\pi fT) = \frac{1-\cos(2\pi fT)}{2}$:

$$P_x = N_0 \int_{-B}^{B} (1 - \cos(2\pi fT))\, df = N_0 \left[f - \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi T} \right]_{-B}^{B} = N_0\,(2B - 0) = 2BN_0$$

□

4. Utilizzare un esempio per dimostrare la veridicità dell'affermazione:

   "Una dilatazione dell'asse dei tempi comporta compressione delle frequenze e viceversa".

   Proof. Consideriamo un segnale sinusoidale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. Se dilatiamo l'asse dei tempi di un fattore a, otteniamo $y(t) = \sin(2\pi f_0 t/a)$. La frequenza del nuovo segnale è f_0/a, quindi la frequenza si è compressa di un fattore a. □

5. Data la funzione $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{2t}{T}\right)$, con $T = 0.1$ micro secondi:

   (a) Calcolare la frequenza minima di $y(t) = x^3(t)$ per essere campionato.

Proof. La funzione $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{2t}{T}\right)$ ha una larghezza di banda di $\frac{1}{T}$. Per $x^3(t)$, la larghezza di banda sarà triplicata, quindi:

$$B_{y(t)} = 3 \cdot \frac{1}{T} = \frac{3}{0.1 \times 10^{-6}} = 30 \text{ MHz}$$

La frequenza minima di campionamento secondo il teorema di Nyquist è:

$$f_s = 2 \cdot B_{y(t)} = 2 \cdot 30 \text{ MHz} = 60 \text{ MHz}$$

□

6. Si consideri un codice di Hamming sistematico di ordine 3. Con la codifica a sindrome, calcolare x avendo ricevuto $y = x+e = [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]$.

Proof. La matrice di controllo di parità H è:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la sindrome $S = H \cdot y^T$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La sindrome corrisponde all'errore nella posizione 7, quindi:

$$e = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], \quad x = y \oplus e = [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]$$

□

7. Si consideri un codice a ripetizione di ordine 3. Utilizzando la codifica a sindrome:

   (a) Determinare quanti errori può correggere.

   Proof. Un codice a ripetizione di ordine 3 può correggere fino a 1 errore. □

(b) Calcolare la probabilità di errore sul bit in funzione di p.

Proof. La probabilità di errore sul bit P_e è data dalla probabilità che la maggioranza dei bit ripetuti sia errata. Per un codice di ripetizione di ordine 3, questo avviene se 2 o 3 bit sono errati:

$$P_e = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

□

8. Un sistema di comunicazione 4 QAM impiega un codice a blocco con rate r ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.4$. Il sistema è utilizzato per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 100$ Mbit/s.

(a) Determinare il rate del codice al fine di garantire una banda $B =$ 80 MHz.

Proof. La banda occupata da un sistema 4 QAM con roll-off $\alpha =$ 0.4 è:

$$B = \frac{R_b}{r}(1+\alpha) = 80 \text{ MHz}$$

$$80 \text{ MHz} = \frac{100 \text{ Mbit/s}}{r}(1+0.4)$$

$$80 \text{ MHz} = \frac{140}{r} \text{ MHz}$$

$$r = \frac{140}{80} = 1.75$$

□

(b) Calcolare la probabilità di errore sul bit in ingresso al decodificatore del codice a blocco, nell'ipotesi in cui $\frac{E_b}{N_0} = 7$ dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit non codificato).

Proof. La probabilità di errore per un sistema 4 QAM è:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Convertiamo $\frac{E_b}{N_0} = 7$ dB in valore lineare:

$$\frac{E_b}{N_0} = 10^{7/10} \approx 5.01$$

Quindi:

$$P_e = Q\left(\sqrt{2 \cdot 5.01}\right) = Q\left(\sqrt{10.02}\right) \approx Q(3.16)$$

Utilizzando una tabella dei valori di Q:

$$Q(3.16) \approx 0.0008$$

$\square$