

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

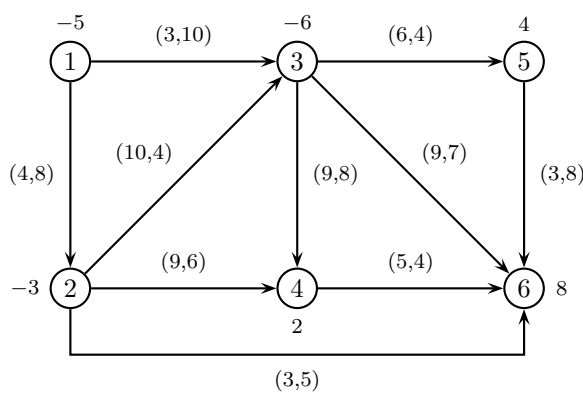
Esercizio 1. Un'azienda produce due materiali diversi (A e B). Le materie prime disponibili consentono di produrre al massimo 3 tonnellate di A e 2 di B alla settimana. Ogni tonnellata prodotta di ogni materiale dá luogo a 2 quintali di materiale di scarto da trattare. In una settimana non si possono trattare più di 7 quintali di materiale di scarto. Il profitto dei materiali é 3000 euro per A e 1000 euro B. Trovare la soluzione ottima eseguendo l'algoritmo del simplesso partendo dal vertice $(\frac{3}{2}, 2)$. Costruire un piano di taglio di Gomory per il problema in cui si possano produrre solo un numero intero di tonnellate.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{cases} \max & 52x_1 + 27x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 31x_5 + 11x_6 \\ & 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 + 22x_4 + 17x_5 + 14x_6 \leq 39 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (P)$$

Determinare la valutazione data dal rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$, quella data dal rilassamento $x \geq 0$ e quella ottenuta aggiungendo un piano di taglio di Gomory. Risolvere poi il problema con il "Branch and Bound" utilizzando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,3), (2,6), (3,4) e (3,5), gli archi (2,3) e (3,6) come archi saturi e gli archi rimanenti in L , il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare il taglio da 1 a 6 di capacità minima.

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \min & x_1^2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto (6, 1). Trovare il massimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT. Quale é il minimo globale?

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(\frac{3}{2}, 2)$ con base $B = \{2, 3\}$. La duale complementare é $(0, -2, \frac{3}{2}, 0, 0)$. Indice uscente 2. $W = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. I rapporti valgono $r_1 = \frac{3}{2}$ mentre $r_5 = 2$. Indice entrante 1. Soluzione ottima $(3, \frac{1}{2})$. Base ottima $B = \{1, 3\}$. La matrice per i tagli di Gomory é data da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ che dá il taglio $x_4 \geq 1$, ovvero $x_1 + x_2 \leq 3$.

Esercizio 2. Le soluzioni ottime dei rilassati continui sono $x = (\frac{39}{10}, 0, 0, 0, 0, 0)$ con v_S pari a 202, e $x = (1, 1, 1, \frac{8}{22}, 0, 0)$ con v_S pari a 150. La base ottima della prima é $B = \{1\}$. Il taglio di Gomory é dato da

$$6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 4x_6 + x_s \geq 9$$

La v_S con il taglio di Gomory é 196 data da $(3, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0)$.

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (3,5)	
Archi di U	(2,3) (3,6)	
x	(2, 3, 4, 0, 1, 2, 4, 7, 0, 0)	
π	(0, 4, 3, 12, 9, 7)	
Arco entrante	(2,3)	
ϑ^+, ϑ^-	7, 2	
Arco uscente	(1,2)	

Il taglio é $N_s = \{1\}$ di capacità 18. L'albero dei cammini minimi é $\{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 4), (3, 5)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (2, 3, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
(6, 1)	(1, 0)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(0, 10)	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	(6, 4)

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
(6, 1)	$-4x_1 - 10x_2$	(3, 6)	(-3, 5)	$\frac{19}{34}$	$\left(\frac{147}{34}, \frac{129}{34}\right)$

Massimo globale é $(0, 0)$ con moltiplicatori $(0, 0, 0, -16, -12)$ mentre $(6, 4)$ é minimo globale.