Esame di Ricerca Operativa del 19/7/23

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un mobilificio produce tavoli, sedie e letti utilizzando come materie prime ebano e compensato. La disponibilita' di materie prime e le quantita' utilizzate sono indicate nella seguente tabella insieme al guadagno da massimizzare.

	Tavoli	Sedie	Letti	Disponibilita'
Ebano	6	5	4	1000
Compensato	4	2	10	800
Guadagno (unitario)	100	80	60	

Inoltre, e' necessario l'impiego di una macchina disponibile per 500 ore e per la produzione di ogni tavolo, sedia e letto sono necessarie 4, 5 e 3 ore rispettivamente. Si richiede che la quantita' di sedie prodotte sia pari ad almeno il doppio dei tavoli e costituisca non piu' del 40% della produzione complessiva.

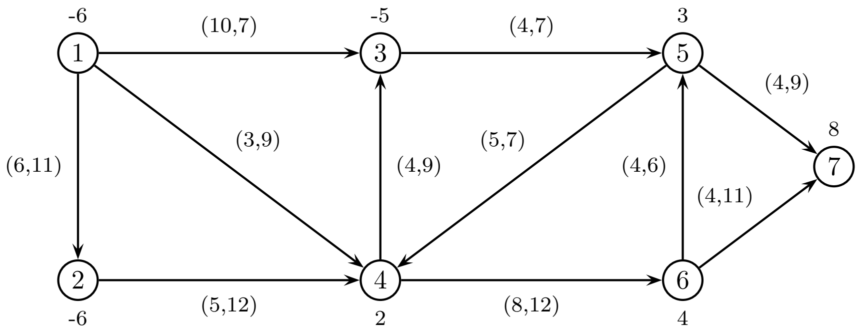
Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione che prevede di produrre solo letti ed il massimo possibile. Calcolare la soluzione ottima del rilassato continuo. Calcolare il primo taglio di Gomory. Calcolare la soluzione ottima.

Esercizio 2. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 331 metri cubi, massimizzando il valore dei beni inseriti.

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	19	9	18	22	15	21	8
Volumi	71	40	116	68	76	244	264

Calcolare una valutazione inferiore ed una valutazione superiore del valore ottimo sia per il caso binario che per quello intero. Risolvere il problema binario applicando il metodo del *Branch and Bound*, effettuando la visita dell'albero per ampiezza ed istanziando l'eventuale variabile frazionaria. Se si dovesse caricare obbligatoriamente il bene 6 o il bene 7, il modello e la soluzione ottima cambierebbero?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,4), (2,4), (4,3), (4,6), (5,4) e (6,7) e l'arco (3,5) come arco saturo, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare, tramite l'algoritmo di Dijkstra, l'albero dei cammini minimi di radice 1. La soluzione ottima in termini di flusso su reti é degenere? Trovare, tramite l'algoritmo di Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp, il taglio da 1 a 7 di capacitá minima. La soluzione ottima in termini di flusso su reti é degenere?

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 2\,x_1\,x_2 + 4\ x_1 - 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4,2)$, $(-3,-2)$, $(0,-3)$ e $(-4,5)$. Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $\left(-1,-\frac{8}{3}\right)$. Se il punto (-4,5) é stazionario calcolare i moltiplicatori LKKT. E' il minimo globale?

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 100x_1 + 80x_2 + 60x_3 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 800 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 500 \\ x_2 \geq 2x_1 \\ x_2 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3, \quad x \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(0,0,80)$ con base $B = \{2,6,7\}$. La duale complementare di base é $(6,-76,-68)$ Indice uscente 6 indice entrante 4. Soluzione ottima PL $(22.41, 44.82, 62.1)$. Base ottima per Gomory é $B = \{1,2,3,4,8\}$. La prima riga della matrice di Gomory è (-3/116, 5/58, 11/29). Soluzione ottima PLI $(23, 46, 59)$.

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,4) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7)	(1,4) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)
Archi di U	(3,5)	
x	(0, 0, 6, 6, 7, 2, 12, 4, 0, 0, 8)	(0, 0, 6, 6, 5, 0, 12, 2, 0, 0, 8)
π	$(0,\ -2,\ 7,\ 3,\ -2,\ 11,\ 15)$	
Arco entrante	(3,5)	
ϑ^+, ϑ^-	Inf , 2	
Arco uscente	(4,3)	

Il taglio é $N_s = \{1,2,3,4\}$ di capacitá 19 ottenuto dopo 4 passi 1-3-5-7, 1-4-6-7, 1-2-4-6-7, 1-2-4-6-5-7 ed il flusso ottimo è $x = (3,7,9,3,7,0,12,0,8,1,11,19)$. L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2),(1,4),(4,3),(4,6),(3,5),(5,7)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (1,0,5,0,2,3,1,0,1,0,0)$.

Esercizio 4.

Punto	F.O. linearizzato	y^k	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, -\frac{8}{3}\right)$	$-4/3\,x_1 - 8\,x_2$	$(0,-3)$	1	$(0,-3)$

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-1, -\frac{8}{3}\right)$	$(-1,-3)$	$\begin{pmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$(0,-3)$

Il punto $(-4,5)$ é stazionario ed i moltiplicatori sono (112/53,154/53,0,0).

Esercizio 2. sol. ammissibile $= (1,1,0,1,1,0,0)$ e $v_I(P) = 65$; sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \frac{19}{29}, 1, 1, 0, 0\right)$ e $v_S(P) = 76$

sol. ammissibile $= (0,1,0,4,0,0,0)$ e $v_I(P) = 97$, sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 0, 0, \frac{331}{68}, 0, 0, 0\right)$ e $v_S(P) = 107$

soluzione ottima $= (1,0,1,1,1,0,0)$ e valore ottimo $= 74$