ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 14

Note Title 16/10/2018

Ordine logico della dimostrazione

→ lemma di eliminazione
→ esistenza di una base per eliminazione a partire da un insieme di generatori (1)
→ lemma di sostituzione (più delicato)
→ tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi
→ (4), (5), (2)

Il vecchio (2) diventa ora facile.
Se $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip., allora posso aggiungere roba e ottenere una base.
Come faccio? Prendo una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ che so già che esiste. Uso il lemma di sostituzione e ottengo un nuovo sistema di generatori

$$\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

e dico che questi sono lin. indip. perché se non lo fossero qualcuno sarebbe comb. lin. degli altri, ma allora è eliminabile e avrei ottenuto una base con meno di n elementi, il che è assurdo.

— o — o —

Dim. lemma di sostituzione

Ipotesi: $v_1, \dots, v_m$ lin. indip.
$w_1, \dots, w_n$ generatori

Tesi: $m \leq n$
posso sostituire un po' dei w_i con tutti i v_i ottenendo ancora generatori

Induzione su m

Caso m = 1 È evidente in questo caso che $m \leq n$.
Voglio fare la sostituzione. Scrivo

$$v_1 = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$$ (posso perché sono generatori)

Almeno un coeff. c_i è $\neq 0$ perché altrimenti $v_1 = 0$ e non sarebbe lin. indip $1 \cdot v_1 = 0$.
Supponiamo che c_1 sia $\neq 0$. Ma allora w_1 lo posso ricavare dagli altri

$$c_1 w_1 = v_1 - c_2 w_2 - \dots - c_n w_n$$ ... divido ...

Ma allora

lo posso eliminare

$$V = \underset{\uparrow \text{ sono gen.}}{\mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_n\}} \underset{\uparrow \text{ ho solo aggiunto roba}}{=} \mathrm{Span}\{v_1, \cancel{w_1}, \dots, w_n\}$$

$$= \mathrm{Span}\{\underbrace{v_1, w_2, \dots, w_n}_{\text{sono ancora generatori}}\}$$

<u>Passo induttivo</u>: suppongo la tesi vera per m e la dim. per m+1

Prendo $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ lin. indip
$w_1, \dots, w_n$ generatori

Considero solo $v_1, \dots, v_m$. Questi sono ancora lin. indip.
Quindi per ipotesi induttiva $m \leq n$ e posso fare la sostituzione in modo che

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

sono ancora generatori.
Devo sostituire ancora uno dei w_i.
Domanda: è rimasto qualcuno dei w_i?
Sì! Altrimenti $v_1, \dots, v_m$ sarebbero generatori e quindi

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

e quindi portando tutto a sx avrei una comb. lin. dei v_i che viene 0 con almeno un coeff. $\neq 0$ (quello di v_{m+1}).
Di conseguenza è rimasto almeno uno dei w_i e quindi $n \geq m+1$.
Per fare l'ultima sostituzione scrivo

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n$$

e osservo che uno degli ultimi coeff. $c_{m+1}, \dots, c_n$ è $\neq 0$ perché altrimenti è come prima.
Supponiamo sia c_{m+1} $\rightsquigarrow$ posso ricavare w_{m+1} in funzione del resto e concludo come prima

$$V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$$

$$= \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \cancel{w_{m+1}}, \dots, w_n\}$$

$$= \operatorname{Span}\{\underbrace{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$$

— o — o —

Esempio di spazio di V che non ha una base finita

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi.
Questo non ha un insieme di generatori finito e quindi non ha nemmeno una base finita.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che $p_1(x), \dots, p_n(x)$ sia un insieme di generatori.
Sia d il massimo grado di $p_1(x), \dots, p_n(x)$.
Allora x^{d+1} non può essere comb. lin. di $p_1, \dots, p_n$.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Dimostrare che $(1,2)$, $(-1,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.
Trovare le componenti di $(1,4)$ rispetto a questa base

Per dim. che sono una base, dovrei fare 2 verifiche
→ lin. indip.
→ generatori
Essendo 2 elementi, basta fare una delle 2 verifiche, ad esempio la lin. indip.

$$a(1,2) + b(-1,3) = (0,0) \leadsto (a-b, 2a+3b) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=b \\ 5b=0 \end{matrix} \leadsto b=0 \leadsto a=0 \Rightarrow \text{sono lin. indip.}$$

Devo scrivere $(1,4)$ come loro comb. lin.

$$(1,4) = a(1,2) + b(-1,3) \qquad (a-b, 2a+3b) = (1,4)$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 2a+3b=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

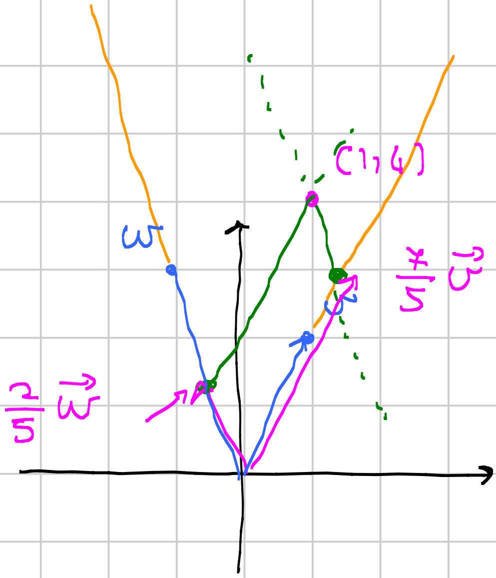
$$5b = 2 \leadsto b = \frac{2}{5} \qquad a-b=1 \leadsto a = b+1 \leadsto \frac{2}{5}+1 = \frac{7}{5}$$

Quindi $$(1,4) = \frac{7}{5}(1,2) + \frac{2}{5}(-1,3)$$ (Verifica!)

componenti

Significato geometrico

Voglio scrivere (1,4) come somma di un multiplo di v più un multiplo di w.
Completo il parallelogramma e quello che ottengo in direzione $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono le due componenti.



Esempio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Dimostrare che $x+1$, $x-1$, x^2+x sono una base e trovare le componenti di x^2-1 rispetto a questa base

- Dim. che sono una base. Osservo che $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ha dimensione 3 (ax^2+bx+c, quindi $1, x, x^2$ è una base)
Avendo dati 3 vettori, se mostro che sono lin. indip so che saranno una base

$$a(x+1)+b(x-1)+c(x^2+x)=0$$

$$cx^2+(a+b+c)x+a-b=0$$

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b \Rightarrow a=b=0$$

$\rightsquigarrow$ sono lin. indip.
$\rightsquigarrow$ sono una base

- Trovo le componenti di x^2-1

$$a(x+1)+b(x-1)+c(x^2+x) = x^2-1$$

Ora il sistema diventa

$$\begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = 0 \\ a-b = -1 \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ si risolve in modo unico

Esempio 3 $\quad \underset{v_1}{(1,0,1)}, \underset{v_2}{(0,2,3)}, \underset{v_3}{(1,1,4)}, \underset{v_4}{(1,2,4)}$

sono una base di $\mathbb{R}^3$? No! Sono troppi

sono lin. indip. ? No! $\to$ sono troppi!

$\to v_4 = v_1 + v_2$

Sono generatori ? Forse : bisognerebbe fare la verifica

v_1, v_2, v_4 sono una base di $\mathbb{R}^3$? No! Non sono lin. indip.