Ricerca Operativa 10/1/24

Cognome	Nome

Esercizio 1. Una vetreria produce tre tipi di vetro (antiriflesso, serigrafato e traslucido) utilizzando una di 3 macchine (M1, M2, M3) a disposizione. Giornalmente bisogna produrre almeno 7 quintali di antiriflesso e al più 3 quintali di serigrafato e massimizzare il guadagno. La tabella riporta le ore necessarie per lavorare un quintale di vetro, le ore giornaliere di possibile utilizzo delle macchine ed il profitto in migliaia di euro per quintale:

	M1	M2	M3	guadagno
antiriflesso	0.2	0.3	0.12	6
serigrafato	0.5	0.65	0.45	20
traslucido	0.4	0.6	0.2	15
ore disponibili al giorno	6	7	7	

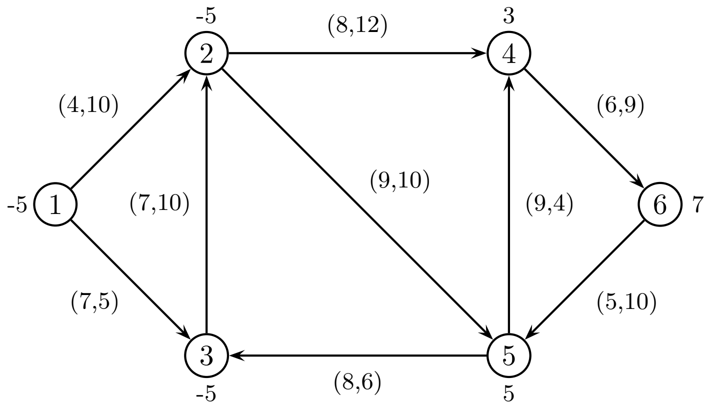
Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione che prevede la massima produzione possibile di solo vetro antiriflesso. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo per lastre di vetro indivisibili?

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 52\,x_1 + 27\,x_2 + 50\,x_3 + 60\,x_4 + 31\,x_5 + 11\,x_6 \\ \quad\ 10\,x_1 + \ 6\,x_2 + 15\,x_3 + 22\,x_4 + 17\,x_5 + 14\,x_6 \leq 39 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases} \tag{P}$$

Calcolare valutazione inferiore e superiore con i rendimenti. Risolverlo con il "Branch and Bound" istanziando ad ogni passo la variabile frazionaria. Considerare poi la versione intera, non necessariamente binaria, calcolare valutazione inferiore e superiore con i rendimenti ed un piano di taglio di Gomory. Controllare di quanto si è ridotto il "gap" aggiungendo il piano di taglio.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,5), (3,2), (4,6) e (6,5) e l'arco (2,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 e la soluzione ottima in termini di flusso su reti. Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 6 di capacitá minima e la soluzione ottima del problema del flusso massimo.

Esercizio 4. Eseguire un'iterazione del metodo di Frank-Wolfe ed una del gradiente proiettato

$$\begin{cases} \max\ 2\ x_1^2 - 4\ x_1\,x_2 + 4\ x_2^2 - 10\ x_1 - 8\ x_2 \\ -x_2 \leq -1 \\ -4\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1 \leq 4 \\ 2\ x_1 + 5\ x_2 \leq 23 \end{cases}$$

partendo dal punto $(1,1)$. Trovare minimo globale, massimo globale e relativi moltiplicatori.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 6x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\ x_1 \geq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \leq 6 \\ 0.3x_1 + 0.65x_2 + 0.6x_3 \leq 7 \\ 0.12x_1 + 0.45x_2 + 0.2x_3 \leq 7 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases}$$

La soluzione di partenza è $(70/3, 0, 0)$, $B = \{4, 7, 8\}$, $y = (0, 0, 0, 20, 0, 0, -7, -3)$, h=7, $W = \begin{pmatrix} -10/3 & -13/6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $r = (98/13, 3, 20, 420/19, 140/13)$ e k=2.

L'ottimo è $(7, 3, 59/12)$ ed in formato duale è $x = (7, 3, 59/12, 0, 0, 17/15, 0, 287/75)$. La terza riga della matrice $\tilde{A}$ è $(1/2, -13/12, 5/3)$ ed il taglio è $6x_4 + 11x_5 + 8x_7 \geq 11$. Aggiungendo questo taglio la nuova soluzione ottima è $x = (53/6, 3, 4)$ che non è la soluzione ottima del PLI.

Esercizio 2. Le variabili hanno rendimenti decrescenti

$$\frac{52}{10} > \frac{27}{6} > \frac{50}{15} > \frac{60}{22} > \frac{31}{17} > \frac{11}{14}.$$

e quindi otteniamo la soluzione ammissibile $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ e $v_I(P) = 129$. La soluzione ottima del rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$ è $(1, 1, 1, \frac{8}{22}, 0, 0)$, quindi abbiamo $v_S(P) = 150$.

Calcoliamo i primi due livelli:

L'ottimo del rilassamento di $P_{1,1}$ è $(1, 1, 1, 0, \frac{8}{17}, 0)$, quindi $v_S(P_{1,1}) = 143$.
L'ottimo del rilassamento di $P_{1,2}$ è $(1, 1, \frac{1}{15}, 1, 0, 0)$ con $v_S(P_{1,2}) = 142$.
L'ottimo del rilassamento di $P_{2,1}$ è $(1, 1, 1, 0, 0, \frac{8}{14})$ con $v_S(P_{2,1}) = 135$.
L'ottimo del rilassamento di $P_{2,2}$ è $(1, 1, \frac{4}{10}, 0, 1, 0)$ con $v_S(P_{2,2}) = 130$.
L'ottimo del rilassamento di $P_{2,3}$ è $(1, 1, 0, 1, \frac{1}{17}, 0)$ con $v_S(P_{2,3}) = 140$.
L'ottimo del rilassamento di $P_{2,4}$ è $(\frac{2}{10}, 0, 1, 1, 0, 0)$ quindi $v_S(P_{2,4}) = 120$.

Nel caso intero la soluzione ammissibile "greedy" sarà $(3, 1, 0, 0, 0, 0)$ con $v_I(P) = 183$ mentre l'ottimo del rilassato continuo è $(\frac{39}{10}, 0, 0, 0, 0, 0)$, con $v_S(P) = 202$. In formato duale standard la base ottima è $B = \{1\}$, con $A_B = 10$, $A_N = (6\ 15\ 22\ 17\ 14\ 1)$ e $\tilde{A} = (\frac{6}{10}, \frac{15}{10}, \frac{22}{10}, \frac{17}{10}, \frac{14}{10}, \frac{1}{10})$. Il taglio di Gomory è:

$$\left\{\frac{6}{10}\right\} x_2 + \left\{\frac{15}{10}\right\} x_3 + \left\{\frac{22}{10}\right\} x_4 + \left\{\frac{17}{10}\right\} x_5 + \left\{\frac{14}{10}\right\} x_6 + \left\{\frac{1}{10}\right\} s \geq \left\{\frac{39}{10}\right\},$$

cioè

$$\frac{6}{10}x_2 + \frac{5}{10}x_3 + \frac{2}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 + \frac{4}{10}x_6 + \frac{1}{10}s \geq \frac{9}{10},$$

che equivale a

$$x_1 + x_3 + 2\,x_4 + x_5 + x_6 \leq 3.$$

L'ottimo del rilassamento con l'aggiunta del taglio di Gomory è $(3, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0)$ con $v_s(P) = 196$.

SOLUZIONE OTTIMA =	(1,1,0,1,0,0)

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (6,5)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	$(0,\ 5,\ 12,\ 3,\ 10,\ 9,\ 0,\ 0,\ 2)$	$(5,\ 0,\ 12,\ 3,\ 5,\ 9,\ 0,\ 0,\ 2)$
π	$(0,\ 14,\ 7,\ 12,\ 23,\ 18)$	
arco entrante	(1,2)	
$\vartheta^+,\ \vartheta^-$	10 5	
arco uscente	(1,3)	

Esercizio 4.

sol. ottima del problema linearizzato in x^0	$(0,1)$
direzione	$(-1,0)$
passo	1
x^1	$(0,1)$

matrice M	$(0,-1)$
matrice H	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
direzione	$(-10,0)$
max spostamento possibile lungo la direzione	$\frac{1}{10}$
passo	$\frac{1}{10}$
x^1	$(0,1)$

Il massimo globale è $(-1,5)$ con moltiplicatori $(0,-121/9,0,-89/9)$.
Il minimo globale è $(4,3)$ con moltiplicatori $(0,0,6,0)$.