Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Esercizi di Analisi Matematica 2

27 maggio

1 Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$$

nel triangolo chiuso T del piano (x, y) individuato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 2\pi$.

Soluzione. Osserviamo che dato che $|\sin(x)\cos(y)| \leq 1$ il minimo non può essere inferiore a -1 e il massimo non può superare 1.

Calcolando il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y)),$$

questo si annulla nei punti interni al dominio

$$P_1 = (\pi/2, \pi) \qquad P_2 = (\pi, \pi/2)$$

e qundi $f(P_1) = -1$ è il minimo, mentre $f(P_2) = 0$.

Restringendo la funzione alla retta $y = 0$ si ha

$$f(x, 0) = \sin(x) \qquad x \in [0, 2\pi],$$

che assume il valore 1 per $x = \pi/2$. Quindi

$$\max_T f = 1 \qquad \min_T f = -1$$

2) Calcolare, se possibile, la seguente funzione

$$F(x, y) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx} - e^{-ty}}{t}\, dt \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Suggerimento: provare a calcolare $\partial_x F$ *e* $\partial_y F$

Soluzione. Si ha (e il passaggio può essere giustificato derivando integrale su $[a, b]$ e poi prendendo i limiti $a \to 0^+$ e $b \to +\infty$) che

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} - e^{-ty}}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-tx} - e^{-ty}}{t}\, dt = \int_0^\infty -e^{-tx}\, dt = -\frac{1}{x}.$$

Allo stesso modo

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \int_0^\infty -e^{-ty}\, dt = \frac{1}{y},$$

quindi si ha che

$$F(x,y) = \log(y) - \log(x) + c = \log(y/x) + C.$$

Osservando poi che per $x = y$ si ha che $F(x,x) = \int_0^\infty 0\,dt = 0$ si ottiene

$$0 = F(x,x) = \log(1) + C,$$

e quindi $C = 0$ da cui $F(x,y) = \log(y/x)$.

3) Calcolare, se esiste

$$\int_T \mathrm{e}^{-x^2}\,dxdy.$$

dove T è la regione nel I e IV quadrante compresa tra le rette $y = -x$ e $y = x$.

Soluzione. L'integrale può essere scritto come integrale iterato nel seguente modo

$$\int_T \mathrm{e}^{-x^2}\,dxdy = \int_0^\infty dx \int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-x^2} dy = \int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-x^2} \int_{-x}^{x} dy = \int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

L'ultimo integrale (improprio) si calcola nel seguente modo

$$\int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b -\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-b^2} = 1.$$

Pertanto l'integrale converge e il suo valore è 1.