Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 01/07/2024

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da un punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\begin{aligned} 6 \text{ corrette} &\to 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} &\to 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} &\to 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} &\to 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} &\to 0 \text{ punti} \end{aligned}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e supponiamo di avere memorizzato questa matrice in una variabile omonima nel workspace di Matlab/Octave.

   La matrice $A^H A$ è stampata a schermo dalla seguente (unica) riga di codice

   ```
   A'*A
   ```

   La sottomatrice di A ottenuta estraendo **solo le colonne con indici pari** di A è stampata a schermo dalla seguente (unica) riga di codice `A(:, 2:2:end)`

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Indicare con $\boxed{\text{V}}$ quali delle seguenti matrici è **riducibile** e con $\boxed{\text{F}}$ altrimenti.

V **F** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

V **F** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

V **F** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

V F $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

V **F** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

V F $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile e $b \in \mathbb{C}^n$. Si indichi con $\boxed{\text{V}}$ quali delle seguenti operazione ha un costo computazionale asintotico superiore a $\mathcal{O}(n^3)$ (ad esempio $\mathcal{O}(n^4)$ o esponenziale) e con $\boxed{\text{F}}$ altrimenti.

- **V** F Risolvere $Ax = b$ valutando la formula di Cramer.
- V **F** Calcolo della fattorizzazione QR di A.
- V **F** Calcolo della forma di Hessenberg di A.
- **V** F Calcolo del determinante di A tramite lo sviluppo di Laplace.
- V **F** Eseguire n iterazioni del metodo delle potenze.
- V **F** Eseguire n iterazioni del metodo delle potenze inverse.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $n \geq 2$ e $J_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$ una formula di quadratura interpolatoria sui nodi $c \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq d$ per l'approssimazione di $\int_c^d f(x)dx$.

- **V** F $J_n(f)$ ha grado di precisione almeno n.
- V **F** $J_n(f)$ ha grado di precisione almeno $2n$.
- V **F** $J_n(f)$ ha grado di precisione al massimo n.
- V **F** $J_n(f)$ ha grado di precisione al massimo $2n$.
- V **F** I coefficienti a_j sono tutti non negativi.
- **V** F Nel caso $c = 0$, $d = 10$, $f(x) = |x + 1|$, vale $J_n(f) = \int_c^d f(x)dx$.

Esercizio 2

Sia $A \in \mathbb{C}^{4\times 3}$ tale per cui la sua fattorizzazione QR è data da

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2-\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sia $b \in \mathbb{C}^4$ il vettore

$$b = \begin{bmatrix} \alpha^2 - 1 \\ -2 \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix},$$

dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Sia $\theta(\alpha)$ il valore ottimo del problema ai minimi quadrati:

$$\theta(\alpha) = \min_{x\in\mathbb{C}^3} ||Ax - b||_2.$$

Si determini il valore di α che rende minimo $\theta(\alpha)$ e si calcoli tale valore minimo.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcoli la soluzione del problema ai minimi quadrati associata al valore di α trovato al punto precedente.

(i) Il valore ottimale è $\alpha = -\frac{1}{2}$, per cui si ottiene $\theta(\alpha) = \frac{7}{8}$.

(ii) La soluzione del problema ai minimi quadrati per $\alpha = -\frac{1}{2}$ è:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{17}{8}\mathbf{i} \\ -\frac{23}{48} + \frac{17}{16}\mathbf{i} \\ -\frac{17}{16} + \frac{17}{16}\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 2 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{bmatrix}.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si trovino tutti gli zeri di f, ovvero tutte le soluzioni di $f(x, y) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Per ognuno degli zeri di f si dica se il metodo di Newton-Raphson è localmente convergente.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Per ognuno degli zeri di f si dica se il metodo di Jacobi-Newton è localmente convergente.

(i) L'equazione $f(x, y)$ ha le seguenti due soluzioni:

$$(x_1, y_1) = (1 - \frac{\sqrt{14}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}), \qquad (x_2, y_2) = (1 + \frac{\sqrt{14}}{2},\ 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}).$$

(ii) Per entrambi gli zeri il metodo di Newton-Raphson è localmente convergente.

(iii) Per (x_1, y_1) il metodo di Jacobi-Newton è localmente convergente mentre per (x_2, y_2) no.

Esercizio 4

Data la tabella di valori

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	-2	$-\frac{54}{16}$	-5	$-\frac{55}{8}$	-9

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Determinare il grado del polinomio di interpolazione di $f(x)$ nei punti dati.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Calcolare l'approssimazione di $\int_1^2 f(x)dx$ mediante la formula dei trapezi composita con 4 sottointervalli.

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Calcolare l'approssimazione di $\int_1^2 f(x)dx$ mediante la formula di Simpson composita con 2 sottointervalli.

(i) Il grado del polinomio di interpolazione è 2.

(ii) L'approssimazione ottenuta con la formula dei trapezi composita è $-\frac{83}{16}$.

(iii) L'approssimazione ottenuta con la formula di Simpson composita è $-\frac{31}{6}$.