

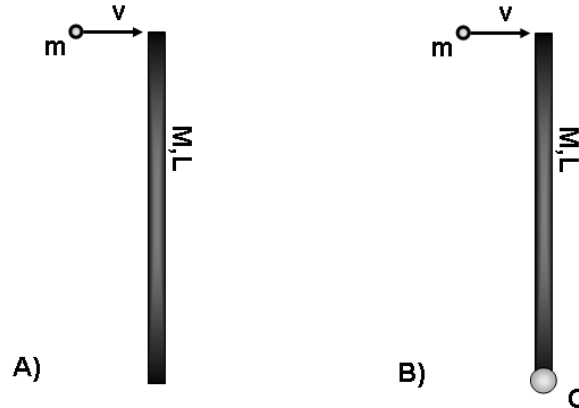
Esame di Fisica Generale del 14/04/2015

Cognome : ..... Nome : .....

Matricola: ..... Anno di corso : .....

## Esercizio 1

Sono date le due situazioni riportate in figura. Nel primo caso una massa puntiforme  $m_1 = 4.0\text{kg}$  urta un'asta, libera di muoversi su un piano, di lunghezza  $L = 4.2\text{m}$  e massa  $M = 1.7\text{kg}$ . Nel secondo caso, invece, i corpi coinvolti sono gli stessi ma l'asta è vincolata in un estremo. La massa  $m_1$  si muove con velocità di modulo,  $v_1 = 4.5\text{m/s}$ . L'urto, che avviene all'estremo dell'asta, è perfettamente anelastico.



Si calcoli:

- a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto nei due casi:

$$\omega_A = ..... \quad \omega_B = .....$$

- b) L'energia dissipata nell'urto nei due casi:

$$E_A = ..... \quad E_B = .....$$

- c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B:

$$\Delta p = .....$$

## Soluzione

a) Caso A:

La velocità del centro di massa del sistema, subito dopo l'urto, si ricava utilizzando la conservazione della quantità di moto, poichè sul sistema non agiscono forze esterne. La quantità di moto iniziale è quella della massa  $m_1$ :

$$p_{inizA} = m_1 v_1$$

mentre quella finale del sistema è:

$$p_{finA} = (m_1 + M)v_{cmA}$$

Uguagliando la quantità di moto finale con quella iniziale si può ricavare la velocità del centro di massa del sistema:

$$v_{cmA} = \frac{p_{inizA}}{m_1 + M}$$

La distanza del centro di massa dal centro dell'asta (dopo l'urto) si calcola nel seguente modo:

$$d_{cmA} = \frac{m_1 L/2}{m_1 + M}$$

Il momento d'inerzia del sistema calcolato nel centro di massa del sistema é:

$$I_A = 1/12ML^2 + Md_{cmA}^2 + m_1(L/2 - d_{cmA})^2$$

La componente z del momento angolare totale (rispetto al centro di massa), subito prima dell'urto é :

$$L_z = m_1 v_1 (L/2 - d_{cmA})$$

Dalla conservazione del momento angolare  $\vec{L}_z = \vec{L}_f$  si ottiene:

$$L_f = I_A \omega_A = L_z \implies \omega_A = \frac{L_z}{I_A} = 1.45 s^{-1}$$

Caso B:

Il momento d'inerzia del sistema calcolato rispetto al polo O é:

$$I_B = ML^2/3 + m_1 L^2$$

La componente z del momento angolare totale (rispetto al polo O), subito prima dell'urto é:

$$L_z = m_1 v_1 L$$

Dalla conservazione del momento angolare  $\vec{L}_z = \vec{L}_f$  si ottiene:

$$L_f = I_B \omega_B = L_z \implies \omega_B = \frac{L_z}{I_B} = 0.94 s^{-1}$$

La distanza del centro di massa dal polo O (dopo l'urto) si calcola nel seguente modo:

$$d_{cmB} = \frac{m_1 L + ML/2}{m_1 + M}$$

b) Caso A:

L'energia meccanica del sistema prima dell'urto vale:

$$E_{iA} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Quella dopo l'urto è:

$$E_{fA} = \frac{1}{2} (m_1 + M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_A^2$$

L'energia meccanica dissipata nell'urto è data, pertanto, dalla differenza tra  $E_{iA}$  e  $E_{fA}$ :

$$E_A = E_{iA} - E_{fA} = 3.89 J$$

Caso B:

L'energia meccanica del sistema prima dell'urto vale:

$$E_{iB} = \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

Quella dopo l'urto è:

$$E_{fB} = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

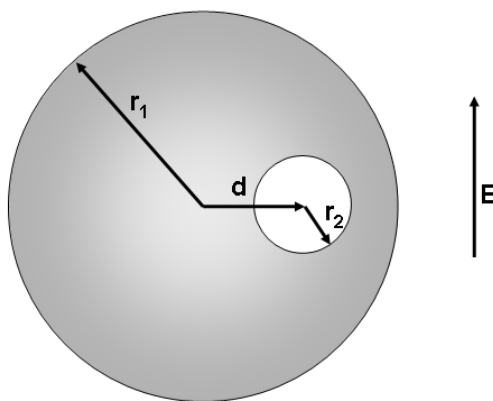
L'energia meccanica dissipata nell'urto è data dalla differenza tra  $E_{iB}$  e  $E_{fB}$ :

$$E_B = E_{iB} - E_{fB} = 5.03J$$

c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B è:

$$\Delta p = p_{finA} - p_{finB} = m_1v_1 - (M + m_1)v_{cmB} = m_1v_1 - (M + m_1)\omega_B d_{cmB} = 6.77kgms^{-1}$$

## Esercizio 2



Una sfera di raggio  $r_1 = 0.20\text{m}$  presenta una densità di carica elettrica uniforme  $\rho = 0.3 \cdot 10^{-6}\text{C/m}^3$ . All'interno della sfera si trova una cavità sferica di raggio  $r_2 = 0.05\text{m}$  con il centro posizionato a distanza  $d = 0.10\text{m}$  dal centro della sfera. Si calcoli:

- a) Il modulo del campo elettrico all'interno della cavità mostrando che tale campo elettrico è uniforme:

$$E_{int} = \dots\dots\dots$$

Si accende quindi un campo elettrico esterno uniforme  $E = 20 \cdot 10^8\text{N/C}$  diretto ortogonalmente rispetto all'asse che congiunge i centri delle due sfere (vedere figura). Calcolare:

- b) Il modulo della forza sulla sfera:

$$F = \dots\dots\dots$$

- c) Il modulo del momento della forza rispetto al centro della sfera:

$$\tau = \dots\dots\dots$$

## Soluzione

- a) Una sfera uniformemente carica con una cavità interna è equivalente a una sfera piena con densità di carica uguale a quella iniziale sovrapposta ad una sfera, uguale alla cavità, con densità di carica di segno opposto. Sfruttando il teorema di Gauss si dimostra che il campo elettrico interno ad una sfera uniformemente carica è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Il campo è radiale e il modulo è proporzionale alla distanza dal centro. Il campo elettrico in un punto P interno alla cavità è quindi dato da due contributi, uno radiale rispetto al centro della sfera ed uno radiale rispetto al centro della cavità di segno opposto al primo. Il campo risultante è proporzionale alla somma vettoriale dei due contributi ed è uniforme in tutta la cavità.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho \vec{d}}{3\epsilon_0} \implies E_{int} = 1.13 \cdot 10^3 N/C$$

- b) In presenza di un campo esterno  $\vec{E}$  la forza risultante sulla sfera è data dalla sommatoria delle forze sulle singole cariche.

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

dove Q è la carica totale. Quindi

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi\rho(r_1^3 - r_2^3)\vec{E} \implies F = 19.79N$$

La forza è la stessa che si avrebbe considerando due cariche puntiformi poste rispettivamente al centro della sfera e della cavità.

- c) Schematizzando il sistema con due cariche poste rispettivamente nell'origine e nel centro della cavità si ha che solo la forza esercitata su quest'ultima ha momento diverso da zero (rispetto al centro della sfera). Quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{F} = -\frac{4}{3}\pi\rho r_2^3 \vec{d} \times \vec{E} \implies \tau = 0.031Nm$$