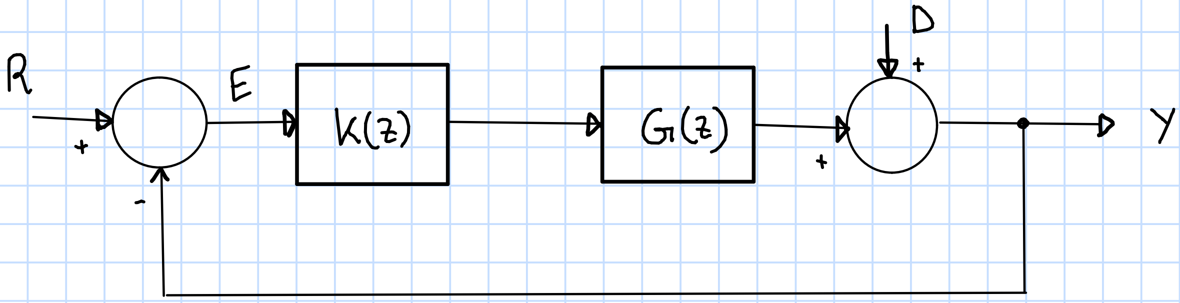
Principio del Modello Interno



Obiettivo: Y insegue R ovvero $E \to \emptyset$ e disturbo D rigettato

$$Y(z) = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} D(z)$$

piccolo per reiezione Disturbo

$$E(z) = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} R(z)$$

piccolo per inseguimento del Riferimento

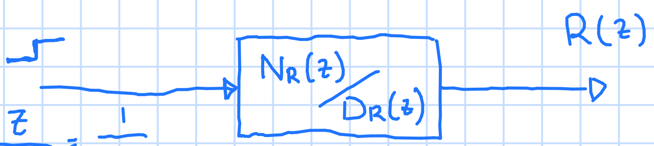
$$\text{se} \quad R(z) = \left\{ \begin{matrix} \text{vale anche} \\ \text{per } D(z) \end{matrix} \right\} = \frac{N_R(z)}{\alpha_R(z)\, D_R(z)}$$

N_R e D_R sono polinomi con RADICI a $|\cdot| < 1$

α_R modello del segnale da inseguire:

- Valore cost $(1 - z^{-1})$ $= \frac{z}{z-1}$ TRASFORM DEL GRADINO
- Rampa $(1 - z^{-1})^2 =$
- Segn Sinusoidale $1 - 2\cos\omega \cdot z^{-1} + z^{-2}$

Ex:



$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Se $K(z)G(z) = \dfrac{N(z)}{\alpha(z)\, D(z)}$ con $N(z)$ e $D(z)$ polinomi con radici $|\cdot| \neq 1$

Allora:

$$E(z) = \frac{1}{1 + K(z)G(z)} \cdot R(z) = \frac{1}{1 + \frac{N}{\alpha D}} \cdot \frac{N_R}{\alpha_R D_R} =$$

$$= \frac{\alpha D}{\alpha D + N} \cdot \frac{N_R}{\alpha_R D_R} = \boxed{\frac{N_R D}{\alpha D + N}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_R}$$

polinomio caratteristico a ciclo chiuso

Trasform di un segnale che converge a $\emptyset$ con $k \to \infty$

se il sist è asintot stabile a ciclo chiuso allora $|\lambda(\alpha D + N)| < 1$

RADICI!

- Se $\alpha(z) = \alpha_R(z)$ ovvero sistema $K(z)G(z)$ "contiene internamente un modello* del segnale da inseguire" allora:

  $\Rightarrow \quad e(k) = Z^{-1}\{E(z)\} \to \emptyset \quad k \to \infty$

- se il sistema "contiene internamente un modello* del disturbo da reiettare" allora:

  $\Rightarrow \quad Y(k) \to \emptyset$ per $k \to \infty$

(*) Deve essere in grado di generare un segnale con le stesse caratter (val costante, rampe etc..) uguale a quello da reiettare o inseguire

Tipo di un sistema

$$K(z)G(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{sist di tipo } N$$

In generale $R(z) = \frac{N_R(z)}{D_R(z)} \cdot \frac{1}{(z-1)^M}$

$$E(z) = \left\{ \overset{o}{Y}(z) \right\} = \frac{1}{1+KG} R(z) \left\{ \overset{o}{D}(z) \right\} = \frac{1}{1+\frac{N}{D}\cdot\frac{1}{(z-1)^N}} \cdot \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{1}{(z-1)^M} =$$

$$= \frac{D(z-1)^N}{D(z-1)^N + N} \cdot \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{1}{(z-1)^M} = \frac{D N_R}{D_R\left(D(z-1)^N + N\right)} \cdot (z-1)^{N-M}$$

uso th valore finale

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \frac{\cancel{z-1}}{z} \underbrace{\frac{D N_R}{D_R\left(D(z-1)^N+N\right)}}_{\text{non ci sono radici in } 1} \cdot (z-1)^{N-M+1}$$

I) $N=M$ $\quad \lim_{k\to\infty} e(k) = \emptyset$

II) $N>M$ $\quad \lim_{k\to\infty} e(k) = \emptyset$

III) $N<M$

III.A) $\boxed{\begin{matrix}N=0\\M=1\end{matrix}}$ $\quad \boxed{\lim_{k\to\infty} e(k)} = \lim_{z\to1} \overset{=1}{\frac{1}{z}} \frac{D N_R}{D_R\left(D\underbrace{(z-1)^N}_{=1}+N\right)} \cdot (z-1)^{0} {}^{=1} = \lim_{z\to 1} \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{D}{D+N} =$

$$= \lim_{z\to1} \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{1}{1+\frac{N}{D}} = \boxed{\lim_{z\to1} \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{1}{1+K_p}}$$

$K_p = \lim_{z\to1} \frac{N(z)}{D(z)} = G(1)$ guadagno statico

guad di posizione

valor grad a regime

→ "errore percentuale"

III.B) $N=1$, $M=2$ $\quad \lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to1} \overset{1}{\frac{1}{z}} \frac{D N_R}{D_R\left(D\underbrace{(z-1)^N}_{=0}+N\right)} (z-1)^{0} {}^{=1} =$

$$= \lim_{z\to1} \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{D}{N} = \lim_{z\to1} \frac{N_R}{D_R} \frac{1}{N/D} = \lim_{z\to1} \frac{N_R}{D_R} \cdot \frac{1}{K_v}$$

UGUALE FINCHE $M-N=1$!!!

guad di veloc $\quad K_v = \lim_{z\to1} (z-1)KG = \lim_{z\to1} \frac{N}{D}$

III.C) Se $M-N>1 \Rightarrow M>N+1$

$$\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to1} \frac{1}{z} \frac{DN_R}{D_R(\cdots)} \boxed{(z-1)^{N-M+1}} = \infty$$

$N-M+1 < \emptyset$ → ∞ quando $z\to1$!

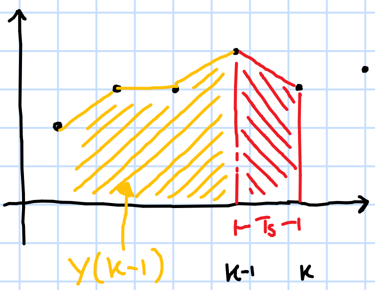
Controllo PID

T.C. $\quad K(s) = K_P + K_D\, s + \dfrac{K_F}{s}$

Nel T.D.

- Componente proporzionale $\quad K(z) = K_p \Rightarrow U(z) = K_p \cdot E(z)$!
- Componente integrale, posso ottenere qualcosa di simile a $u(t) = \int_{t_0}^{t} K_I\, e(\tau)\, d\tau$ attraverso l'integrazione approssimata !

POSSIAMO USARE INTEGRAZ TRAPEZOIDALE :



$$Y(k) = Y(k-1) + \underbrace{\frac{T_s}{2}\left[u(k) + u(k-1)\right]}_{\text{AREA TRAPEZIO}}$$

questa è un eq delle differenze

⇓

faccio la trasf z e ottengo la f.d.t. del intero integratore

$$Y(z) = z^{-1}\, Y(z) + \frac{T_s}{2}\left[U(z) + z^{-1} U(z)\right]$$

$$(1 - z)^{-1}\, Y(z) = \frac{T_s}{2}\left[1 + z^{-1}\right] U(z) \Rightarrow \boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}} = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \boxed{\frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}}$$

dalla f.d.t dell'integratore $I(z) = \dfrac{T_s}{2}\,\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ posso ricavare quella del derivatore:

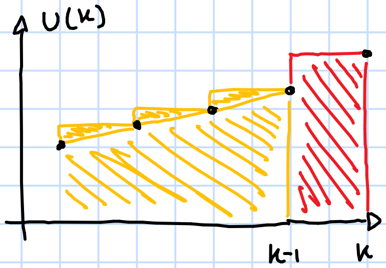
$$D(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1}$$

— questo sistema dinamico ha un polo in -1 (ascisse) ovvero in uscita il modo $(-1)^k$ che non voglio

Quindi provo un altro metodo di integrazione !

Altro metodo integrazione approssimata:

Backward Difference



$$Y(k) = Y(k-1) + T_s \cdot U(k)$$

$$\Big\downarrow z$$

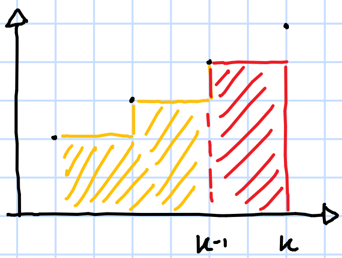
$$Y(z) = z^{-1}\, Y(z) + T_s\, U(z)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = T_s\, U(z) \implies \boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}} = \frac{T_s}{1 - z^{-1}} = \boxed{T_s \cdot \frac{z}{z-1}}$$

INTEGRATORE !

da cui ottengo il derivatore: $\boxed{D(z) = \frac{1}{T_s}\, \frac{z-1}{z}}$ ← polo in ∅ ok!

Esiste anche diff in avanti



$$Y(k) = Y(k-1) + T_s\, u(k-1)$$

$$Y(z) = z^{-1}\, Y(z) + T_s\, z^{-1}\, U(z)$$

$$(1 - z^{-1})\, Y(z) = T_s\, z^{-1}\, U(z)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)}} = T_s \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \boxed{T_s\, \frac{1}{z-1}}$$

in ritardo rispetto all' integrat precedente !

da cui ottengo il derivatore $\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{1}{T_s} \cdot \frac{z-1}{1}$ } NON REALIZZABILE perchè ha più zeri che poli ! SIST NON CAUSALE !

Per cui PID ottenuto è :

$$K(z) = \underbrace{K_P} + \underbrace{K_I} \cdot \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} + \underbrace{K_D} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z} =$$

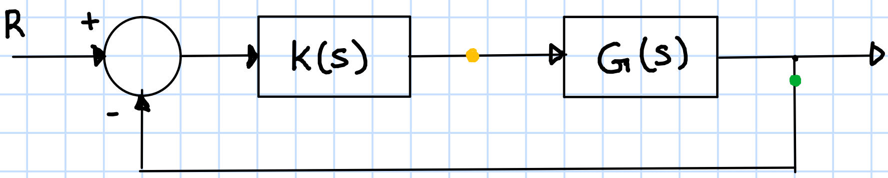
$$= K_P \left[1 + \frac{1}{\tau_i} \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} + \tau_D \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z} \right]$$

SE VOGLIO VELOCIZZARE IL TEMPO IN CUI IL SIST RAGGIUNGE IL PT DI EQUILIB AUMENTO K_I

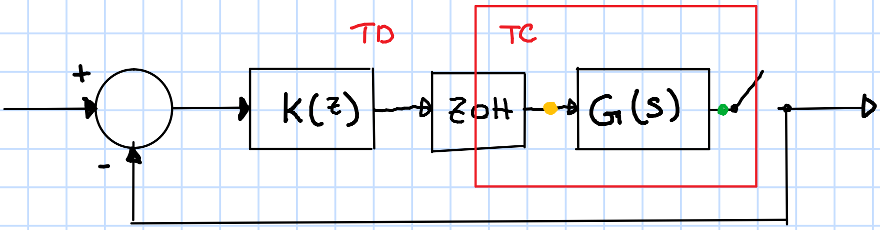
se voglio aument VELOCITÀ RISPOSTA AUMENTO K_P

SE VOGLIO SMORZARE OSCILLAZIONI AUMENTO K_D

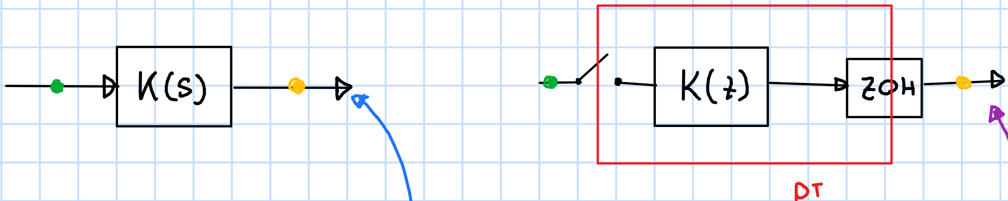
Potrei pensare di applicare la tecnica di integrazione approssimata anche a funzioni di trasferimento complesse (Tipo K(s)) invece che solo a $\frac{1}{s}$



Contesto in cui K(s) è progettato



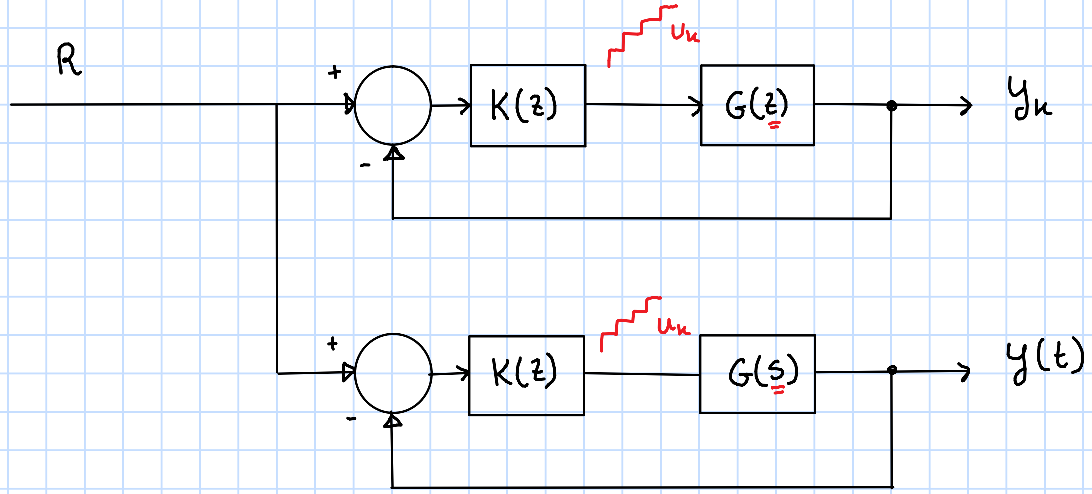
Vorrei trovare K(z) equiv a K(s) quando questo controlla G(s)



Questo problema è irrisolvibile con esattezza !

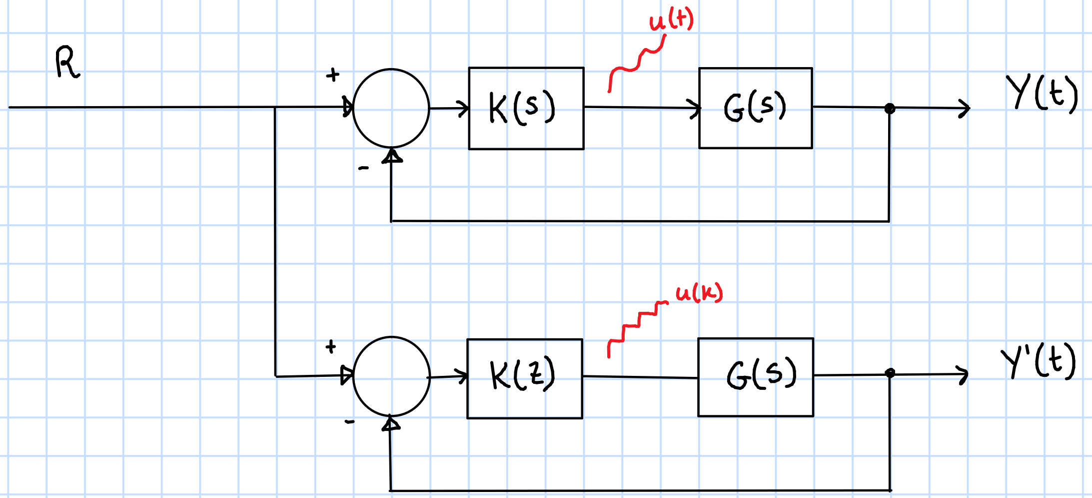
Ex : questo è un segnale continuo mentre questo è continuo a tratti

Nota bene



da teoria garantisce: $Y(t)\Big|_{t=kT_s} = Y_k$!!!

Se invece convertiamo K(s) in K(z)



ottengo $Y(t) \neq Y'(t)$ ed anche $Y(kT_s) \neq Y'(kT_s)$

$\Rightarrow$ devo scegliere T_s "molto piccolo" per avere una "gradinata" SIMILE ALLA CONTINUA !

Come posso trasf $K(s)$ in $K(z)$?

$$K(s) \xrightarrow[\text{di stato}]{\text{in var}} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow$$ Integro numericamente l' eq differenziale

Forward Recto

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}(t)\Big|_{t = kT_s} = x_k + T\dot{x}_k \qquad \dot{x}_k = \dot{x}(kT_s)$$

$$\begin{cases} \underset{zX(z)}{x_{k+1}} = \underset{X(z)}{x_k} + T\left[A\underset{X(z)}{x_k} + B\underset{U(z)}{u_k}\right] \\ \underset{Y(z)}{y_k} = Cx_k + Du_k \end{cases} \Rightarrow$$

$$zX(z) = X(z) + T\left[AX(z) + Bu(z)\right]$$

$$\left(\frac{z-1}{T}\right)X(z) = AX(z) + Bu(z)$$

$$\left[\frac{(z-1)}{T}I - A\right]X(z) = Bu(z)$$

$$X(z) = \left[\frac{z-1}{T}I - A\right]^{-1} Bu(z)$$

$$Y(z) = Cx(z) + Du(z)$$

$$= C\left[\frac{z-1}{T}I - A\right]^{-1} Bu(z) + Du(z)$$

$$= \underbrace{\left(C\left[\frac{z-1}{T}I - A\right]^{-1}B + D\right)}_{K(z)} U(z)$$

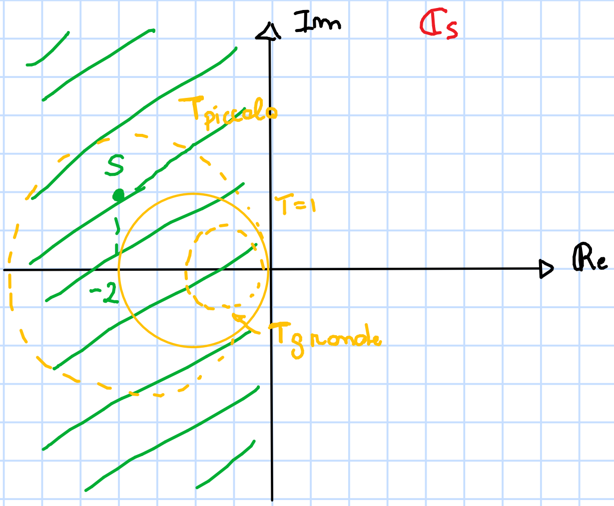
$$K(s) = \left(C\left(sI - A\right)^{-1}B + D\right)U(s)$$

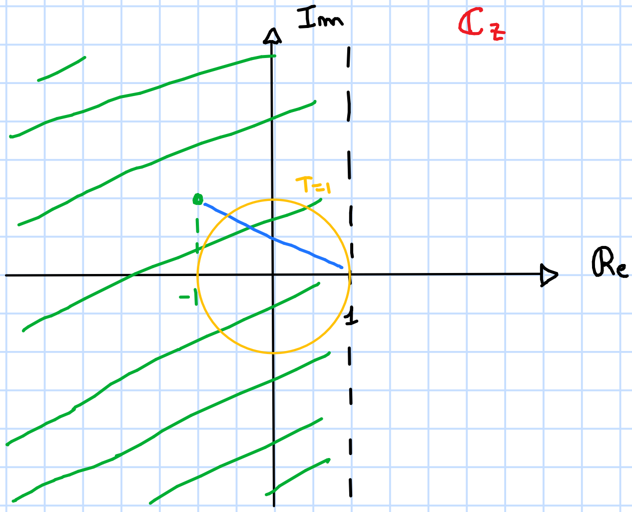
$$\Rightarrow \boxed{K(z) = K(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{T}}}$$

T sample Time !!

la Trasformazione $K(z) = K(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$

rappresenta una mappa tra i piani complessi s e z

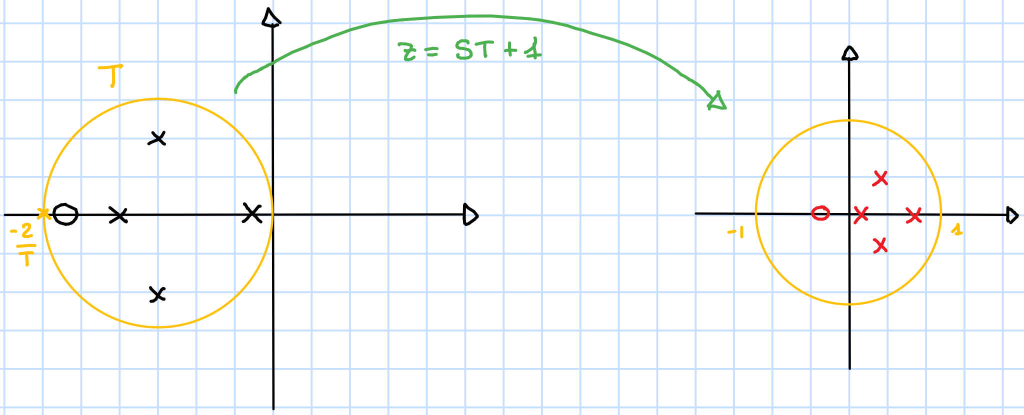




$$s = \frac{z-1}{T} \Rightarrow z-1 = sT \Rightarrow sT+1$$

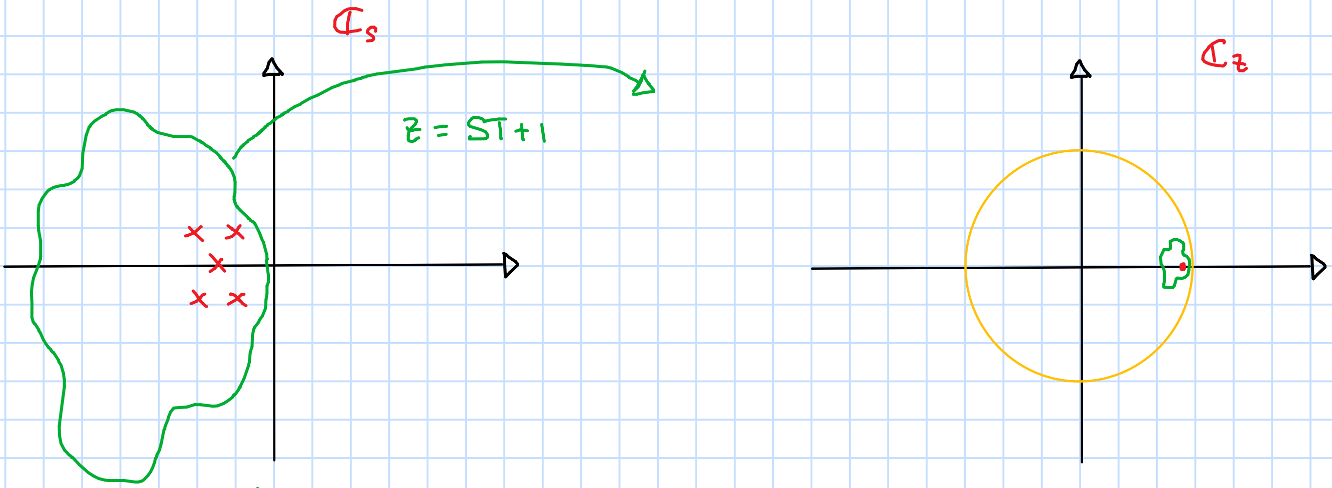
⇒ può succedere che $K(s)$ stabile produca $K(z)$ instabile!

Se desidero $K(z)$ stabile e a fase minima (zeri dentro cerchio UNIT) devo scegliere T affinché tutte le singolarità di $K(s)$ siano all'interno della mappa tramite $s = \frac{z-1}{T}$ del CERCHIO UNITARIO



Soluzione: scelgo T piccolo PAG SUCC!

Se scelgo T troppo piccolo:

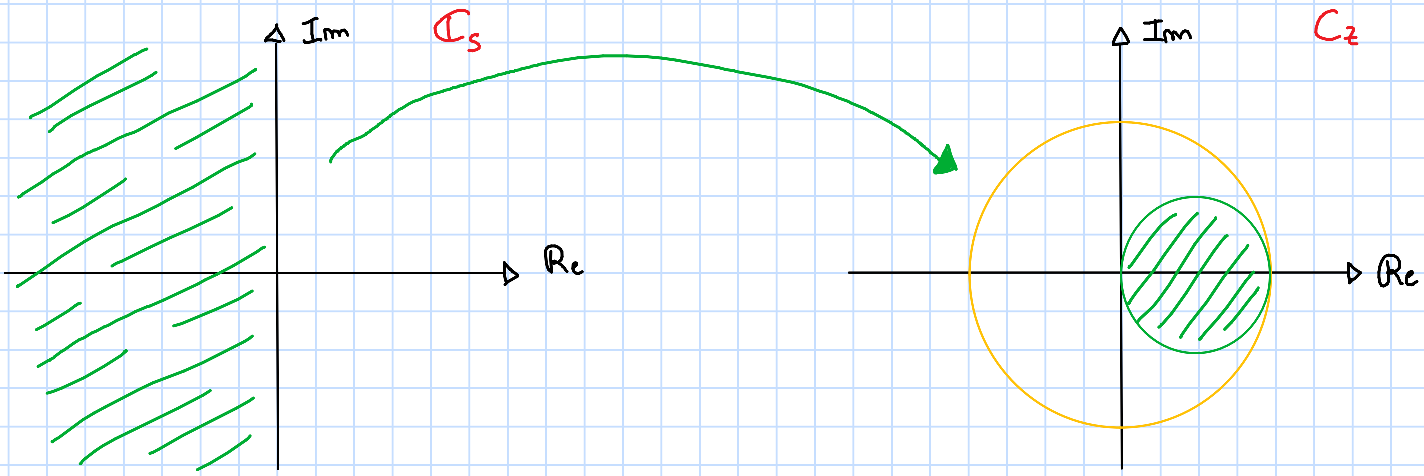


Aree grandi di $\mathbb{C}_s$ vengono mappate vicino a +1 se T molto piccolo !

⇒ tutte le singolarità di $K(s)$ vanno "più o meno" in $z = 1$!

Se uso invece Backward diff

$$s = \frac{z-1}{T \cdot z} \longrightarrow z = \frac{1}{1 - sT}$$

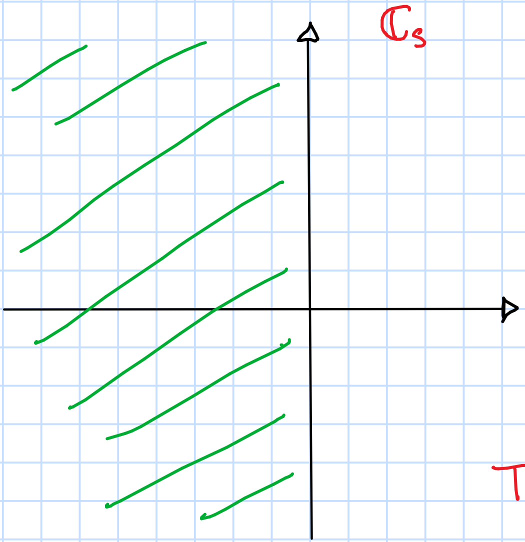


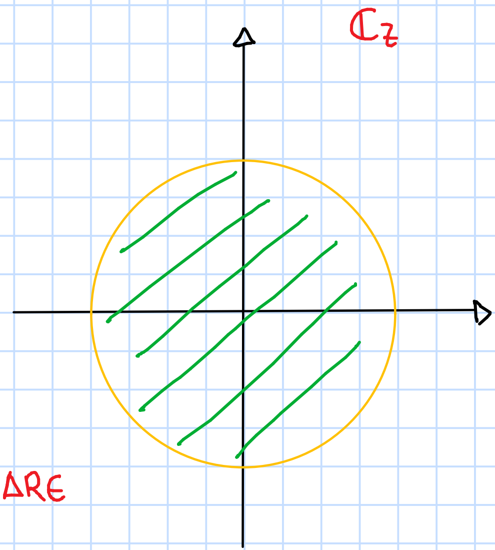
⇒ controllori $K(s)$ stabili producono contr. $K(z)$ stabili !

CONTRO = per ogni polo introduco zero nell'origine
e per ogni zero introduco un polo nell'origine
(GRADO RELATIVO DEL SISTEMA DIFFERENTE)

Se uso invece integrazione Trapezoidale

$$S = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{TS}{2}}{1 - \frac{TS}{2}}$$





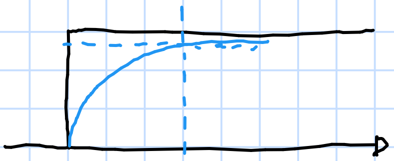
TRASFORM BILINEARE

o

"   " di TUSTIN

Scelta del tempo di campionamento

- "provo" a definire f_{max} [max freq di tutti i segnali che "gireranno" nel sistema: Riferimento, uscita e ingresso dell'impianto e uscita e ingresso del controllore].



3τ $\quad \tau = \frac{1}{\lambda}$ $\quad \lambda$ = autovalore di A o polo G(s)

RAD/s

- non usare th. Shannon ! $\left(\frac{1}{T} = 2 f_{max}\right)$ No!

ma scegliamo ALMENO $T = \dfrac{1}{20 \, f_{max}}$!

Scegliamo una freq di campionam ALMENO UNA DECADE più grande di $2f_{max}$!

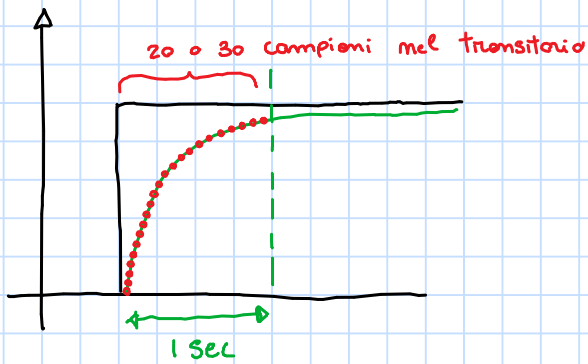
- fare in modo che tutti i segnali siano campionati bene (MOLTI CAMP) nei loro transitori più rapidi !

Ogni transitorio deve contenere molti campioni !

- Considero anche le specifiche di prestaz a ciclo chiuso

Ex: $T_{settling} = 1$ sec

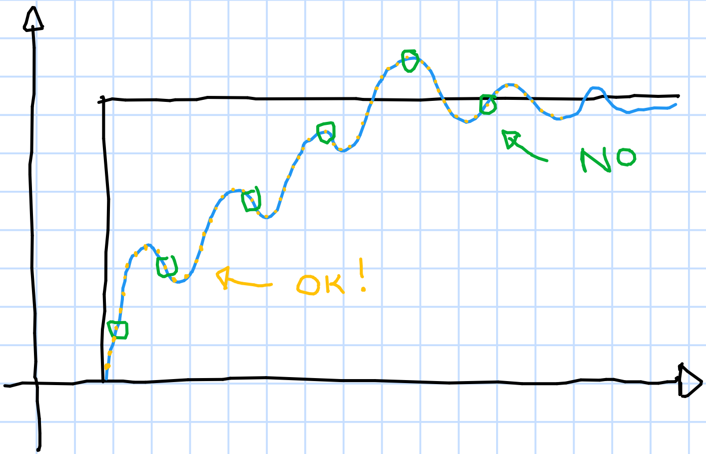
$T = \dfrac{T_{settling}}{20 \text{ o } 30}$



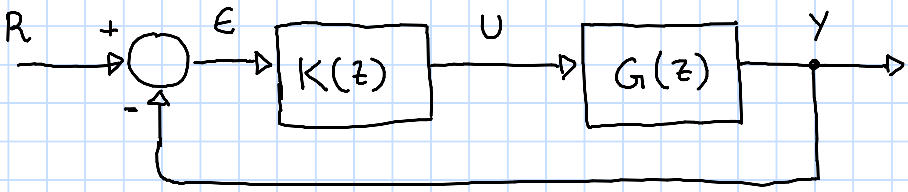
- Verificare a posteriori che tutti i segnali compreso l'uscita del controllore "appaiono ben campionati"

- Controllare che tutti i segnali con oscillazioni siano ben campionati.
  (NUMERO ELEVATO DI CAMPIONI NEL PERIODO)

  20 o 30



Sintesi diretta di controllori



$$G_{CL}(z) = \frac{K(z)\,G(z)}{1 + K(z)G(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

Cercare $K(z)$: $G_{CL}(z) = G_{CL}(z)_{\text{desiderata}}$

Risolvo per $K(z)$: $\quad G_{CL} \cdot (1 + KG) = KG \rightarrow G_{CL} + G_{CL} \cdot KG = KG$

$$KG \cdot (1 - G_{CL}) = G_{CL} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{G} \cdot \frac{G_{CL}}{1 - G_{CL}}}$$

PER TROVARE K.

Domande:

- posso ottenere qualsiasi G_{CL} desiderata? NO!
- posso sempre applicare questa tecnica? NO!

Il grado rel di $G \leq$ del grado Rel di G_{desid}

Analizziamo struttura controllore risultante

$$K(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \qquad G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad G_{CL}(z)_{desid} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$K = \frac{Q}{P} = \frac{D}{N} \cdot \frac{B/A}{1 - B/A} = \frac{D}{N} \cdot \frac{B/\cancel{A}}{\frac{A-B}{\cancel{A}}} = \frac{D}{N} \cdot \frac{B}{(A-B)}$$

- affinché K sia causale: $\deg(Q) \leq \deg(P)$

$$\deg(D \cdot B) = \deg(D) + \deg(B) \leq \deg(N) + dg\,(\underbrace{A-B}_{})$$

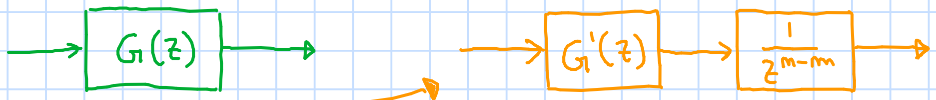
$dg(A) \geq dg(B)$ per G_{CL} causale

$$\underbrace{dg(D) - dg(N)}_{\text{Grado rel di } G} \leq \underbrace{dg(A) - dg(B)}_{\text{Grado rel } G_{CL}}$$

Non posso chiedere a G_{CL} di risp ad R più velocem di quanto G risponde ad u

!!

Interpretazione del grado relativo di una G(z)



$$G(z) = \frac{\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_0}$$

Grado relativo $n-m$

(≥ 0 se sistema causale)

$$G(z) \cdot \frac{z^{n-m}}{z^{n-m}} = \underbrace{\frac{1}{z^{n-m}}}_{} \cdot \underbrace{\frac{\alpha_m z^{\overbrace{m+(n-m)}^{n}} + \dots + \alpha_0 z^{n-m}}{\beta_n z^n + \dots + \beta_0}}_{}$$

$G'(z)$ di grado relativo 0

$\Downarrow$

$D \neq 0 \rightarrow y_k = Cx_k + Du_k \Rightarrow$ { l'uscita y_k cambia immediatamente quando u_k cambia

$\Rightarrow$ l'effetto dell'ingresso si vede sull'uscita con ritardo 0 !

$\Rightarrow$ sulla $G(z)$ l'effetto dell'ingresso si vede sull'uscita con un ritardo di $n-m$ campioni !

- Se desidero che $K(z)$ sia stabile $\quad K(z) = \frac{D}{N} \cdot \frac{B}{A-B}$

$\Rightarrow$ N e $(A-B)$ non devono avere radici $|\cdot| > 1$!

Siccome N è il num di $G(z)$ NON LO POSSO CAMBIARE

- se N ha radici $|\cdot| > 1$ (sono zeri $|\cdot| > 1$ di $G(z)$)

$\Rightarrow$ l'unica possibilità è che tutte le radici di N a $|\cdot| > 1$ siano anche radici di B (si cancellano)

$\Rightarrow$ la cancellazione tra tali radici è virtuale perché avviene dentro il controllore

$\Rightarrow$ tutti gli zeri a fase non minima di G devono essere zeri di G_{CL} desiderata !!

Esempio:

Realizzare sistema di controllo per $G(z) = \dfrac{0.0041\,(z+0.819)}{(z-0.905)(z-0.607)}$

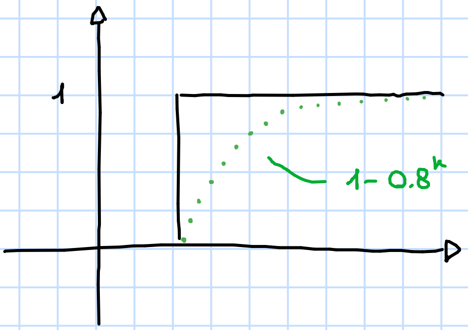
in modo che il sist a ciclo chiuso si comporti come un sistema del primo ordine con guadagno unitario e modo 0.8^k

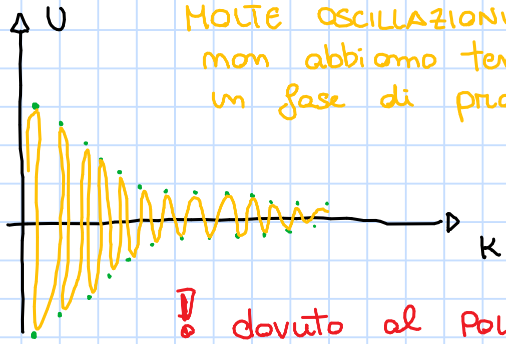
1) Grado relativo $G(z) = 1 \Rightarrow$ grado relativo $G_{cl}(z) \geq 1$

2) prendo $G_{cl}(z) = \dfrac{0.2}{z - 0.8}$ $\Rightarrow$ $\left[\, G(1) = \dfrac{0.2}{1-0.8} = 1 \,\right]$

3) $K(z) = \dfrac{1}{G} \cdot \dfrac{G_{cl}}{1 - G_{cl}} = \dfrac{(z-0.905)(z-0.607)}{0.0041\,(z+0.819)} \cdot \dfrac{0.2/z-0.8}{1 - 0.2/z-0.8} =$

$$= \frac{(z-0.9)(z-0.6)}{0.0041\,(z+0.8)} \cdot \frac{0.2}{z-1}$$





MOLTE OSCILLAZIONI di cui non abbiamo tenuto conto in fase di progettazione...

! dovuto al Polo in -0.819

Se non voglio che lo zero di $G(z)$ in -0.819 diventi un polo del controllore:

$$G_{cl}(z)_{des} = \rho\,\frac{(z+0.819)}{(z-0.8)\,(z-p)}$$

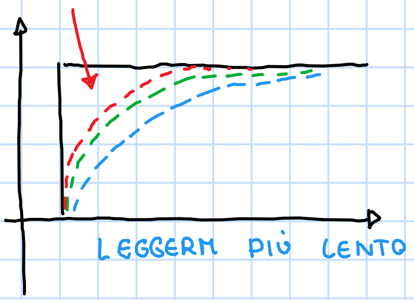
necessario per avere grado relativo 1

p "veloci" $\Rightarrow$ vicino all'origine

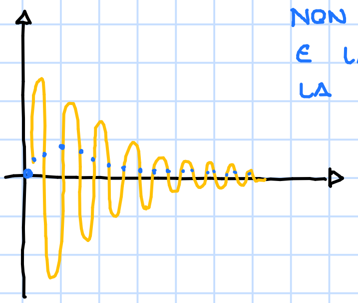
ρ tale che $G_{cl}(1) = 1$

$$G_{cl\,des} = \frac{0.022\,(z+0.819)}{(z-0.8)^2}$$

$(z-0.7)^2$



LEGGERM PIÙ LENTO



NON HO PIÙ LE OSCILLAZIONI
E LA RISPOSTA È PRATICAMENTE LA STESSA !

Oppure posso approssimare il polo con il suo "guadagno equiv"

$$K(z) = \frac{(z-0.905)(z-0.607)}{0.0041\,(z+0.819)} \; \frac{0.2}{z-1} \cong$$

$$\frac{(z-0.905)(z-0.607)}{0.0041\,(1.819)\cdot(z-P)} \; \frac{0.2}{z-1} = K'(z)$$

per la realizzabilità del controllore

$$\left.(z+0.819)\right|_{z=1} = 1.819$$

→ in modo che $K(1) = K'(1)$