Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 22/07/2024

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da un punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. 2 Punti Si scriva il codice Matlab/Octave di una funzione `quadrature` che prende in ingresso una function handle `f` e i due estremi di un intervallo reale `a` e `b` e restituisce le approssimazioni di $\int_a^b f(x)dx$ calcolate con la formula dei trapezi e di Simpson.

```
function [trap, simp] = quadrature(f, a, b)
    trap = (f(a) + f(b)) * (b - a) / 2;
    c = (a + b) / 2;
    simp = (f(a) + 4 * f(c) + f(b)) * (b - a) / 6;
end
```

2. 2 Punti Si supponga di lavorare con l'insieme dei numeri floating point, ovvero rappresentati nel formato in virgola mobile, in precisione doppia e si indichi con RN il metodo di arrotondamento round-to-nearest. Inoltre si denotino con a, b, c numeri floating point e con $u = 2^{-52}$ la precisione di macchina.

V F $RN(1 + u) = 1 + u$.

V **F** $RN(10 + u) - 10 = u$.

V F $RN(a - b) = (a - b)(1 + \epsilon)$ con $|\epsilon| \leq u$.

V F $RN(a \cdot b) = (a \cdot b)(1 + \epsilon)$ con $|\epsilon| \leq u$.

V **F** $RN(RN(a + b) + c) = RN(a + RN(b + c))$.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V F $(RN(a)+RN(b))+c = a+(RN(b)+RN(c))$.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f(x)=0$ un'equazione non lineare con radice α, e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente ad α con ordine p generata da un metodo iterativo.

V F Se $p>1$ allora $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}=0$.

V F Se $p>1$ allora $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}\in(0,\infty)$.

V F Se $p>1$ allora $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^{p+1}}=\infty$.

V F Se $p=1$ allora $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\in(1,\infty)$.

V F Se $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ allora p può essere un numero non intero.

V F Se $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ allora p è sicuramente un numero intero.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, con $n\geq 3$, la matrice tridiagonale con entrate sulle diagonali costanti:

$$A=\begin{bmatrix}1+\mathbf{i} & \frac{3}{4} & & & \\ -\frac{3}{4}\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} & \frac{3}{4} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{3}{4}\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} & \frac{3}{4} \\ & & & -\frac{3}{4}\mathbf{i} & 1+\mathbf{i}\end{bmatrix}.$$

V F A è una matrice hermitiana.

V F A è una matrice riducibile.

V F $||A||_\infty=\frac{3}{4}+\mathbf{i}$.

V F Il raggio spettrale di A è uno degli autovalori di A.

V F A è a predominanza diagonale forte.

V F Se $\lambda\in\mathbb{C}$ è autovalore di A allora necessariamente $\overline{\lambda}$ è autovalore di A.

Esercizio 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e si indichi con $x \in \mathbb{R}^2$ la soluzione di $Ax = b$ e con $x + \delta x$ la soluzione del problema perturbato

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b,$$

dove $\delta A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\delta b \in \mathbb{R}^2$ sono una matrice e un vettore di perturbazione.

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Nel caso

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0.004 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si determini l'errore relativo **rispetto alla norma infinito**: $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty}$.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Nel caso

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad ||\delta b||_\infty = 10^{-5}$$

si determini una maggiorazione per $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty}$ (non è necessario semplificare l'espressione fino alla fine, purchè contenga solo quantità numeriche).

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Nel caso

$$||\delta A||_\infty = 10^{-5}, \qquad ||\delta b||_\infty = 10^{-5}$$

si determini una maggiorazione per $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty}$ (non è necessario semplificare l'espressione fino alla fine, purchè contenga solo quantità numeriche).

(i) $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{\frac{600}{7}}{301} = \frac{600}{2107}$.

(ii) $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty} \le \underbrace{(2.01)^2 \cdot 100}_{\mu_\infty(A)} \cdot \frac{10^{-5}}{2} = \frac{201^2}{2 \cdot 10^7}$.

(iii) $\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \underbrace{\frac{(2.01)^2 \cdot 100}{1-(2.01)^2 \cdot 100 \cdot \frac{10^{-5}}{2.01}}}_{\frac{\mu_\infty(A)}{1-\mu_\infty(A)\frac{||\delta A||_\infty}{||A||_\infty}}} \cdot 10^{-5}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.01}).$

Esercizio 3

Sia

$$f(x) = sin(\pi x) + a \cdot cos(\pi x)$$

con a un parametro reale.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Calcolare il polinomio d'interpolazione $p_a(x)$ della funzione $f(x)$ rispetto ai nodi $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 0.5$.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica per quale a nell'intervallo $[3, 9]$, il valore di $p_a(-0.5) - f(-0.5)$ è minimo.

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica per quale valore di $a \in \mathbb{R}$, $p_a(x)$ interpola $f(x)$ nel punto $x_3 = -0.5$.

(i) $p_a(x) = \frac{4-8a}{3}x^2 + \frac{4-2a}{3}x + a$.

(ii) Il valore minimo si ottiene per $a = 3$.

(iii) $a = -1$.

Esercizio 4

Si consideri l'approssimazione di $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ mediante la formula di quadratura

$$J_1(f) = a_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + a_1 f\left(\frac{2}{3}\right).$$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determinino i pesi a_0 ed a_1 affinchè la formula $J_1(f)$ sia una formula di quadratura interpolatoria e si determini il grado di precisione della formula ottenuta.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcoli il nucleo di Peano $G(t)$ della formula trovata al punto (i).

(i) Prendendo $a_0 = \frac{8}{7}$, $a_1 = \frac{6}{7}$ si ottiene grado di precisione 2.

(ii)

$$G(t) = \begin{cases} \frac{(1-t)^3}{3} - \frac{8}{7}(-\frac{1}{2} - t)^2 - \frac{6}{7}(\frac{2}{3} - t)^2 & t \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ \frac{(1-t)^3}{3} - \frac{6}{7}(\frac{2}{3} - t)^2 & t \in [-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\ \frac{(1-t)^3}{3} & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$