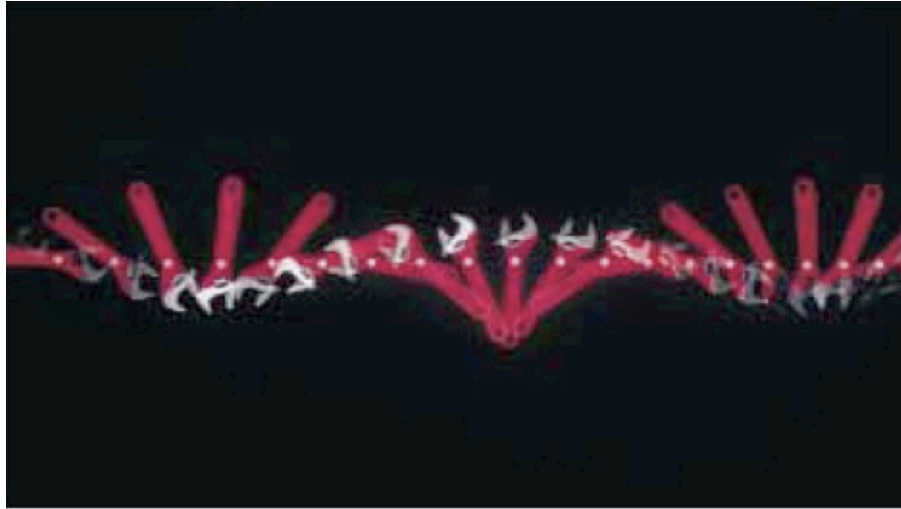


Dinamica Rotazionale

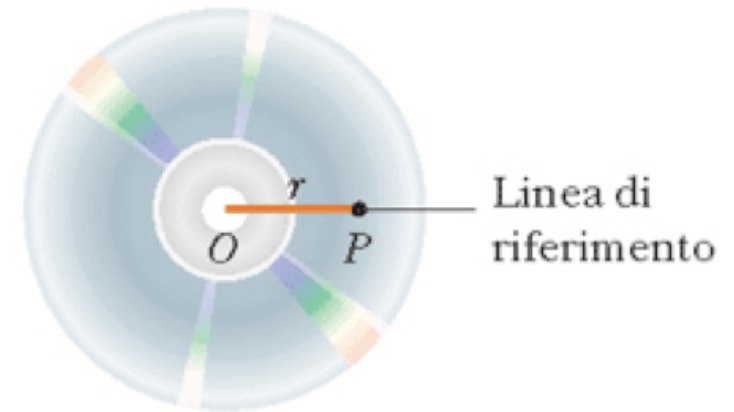


- *Richiamo:* cinematica rotazionale, velocità e accelerazione angolare
- *Energia cinetica rotazionale:* momento d'inerzia
- *Equazione del moto rotatorio:* momento angolare e delle forze
- *Leggi di conservazione per il moto rotatorio*
- *Moto di puro rotolamento*

Posizione angolare

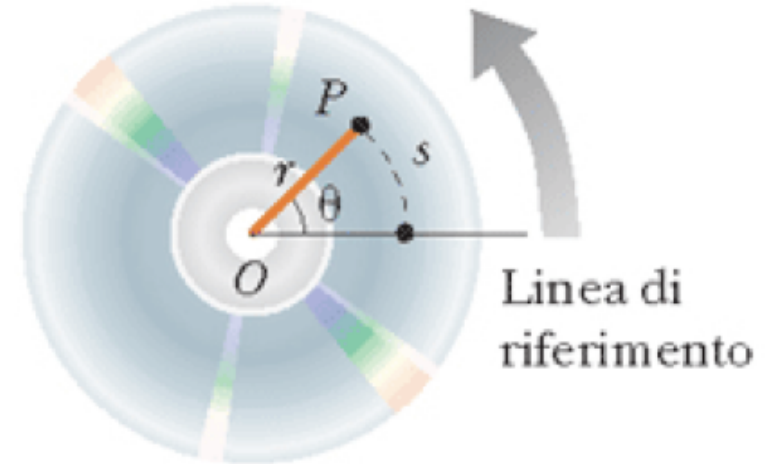
Come possiamo descrivere la posizione angolare in un moto di rotazione di un corpo rigido? Prendiamo per semplicità il caso di un disco.

- Si sceglie una linea di riferimento
- Un punto P a distanza r dall'origine ruoterà attorno all'origine in un cerchio di raggio r
- Ogni particella nel corpo rigido percorre un moto circolare attorno all'origine O
- Conviene usare coordinate polari per rappresentare la posizione di P (o di altri punti): $P = (r, \theta)$, dove r è la distanza dall'origine a P e θ è misurato dalla linea di riferimento in senso antiorario



Posizione angolare (2)

- Se la particella si muove, la sola coordinata che cambia è θ
- Se la particella ruota di θ , percorre un arco di lunghezza s , legato a r da $s = r\theta$



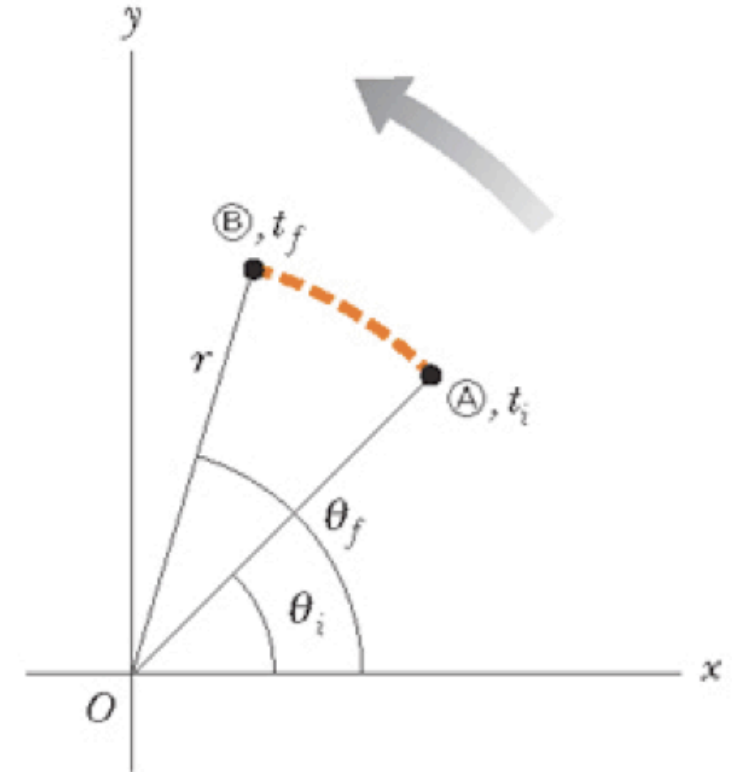
- Possiamo associare l'angolo θ all'intero corpo rigido come pure alle particelle individuali che lo compongono
Ricordate che ogni particella dell'oggetto ruota dello stesso angolo
- La *posizione angolare* del corpo rigido è l'angolo θ fra la linea di riferimento sul corpo e la linea fissa di riferimento nello spazio
La linea fissa di riferimento nello spazio è spesso presa come asse x

Spostamento angolare

- Lo spostamento angolare è definito come l'angolo di rotazione dell'oggetto in un intervallo di tempo finito:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- E' l'angolo spazzato dalla linea di riferimento di lunghezza r



- La velocità angolare *media* $\bar{\omega}$ di un corpo rigido in rotazione è il rapporto fra spostamento angolare e intervallo di tempo:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocità angolare

- La velocità angolare *istantanea* ω è definita come il limite della velocità angolare media $\bar{\omega}$ quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Unità della velocità angolare: radianti/s, o anche s^{-1} (i radianti non hanno dimensione)
- La velocità angolare è positiva se θ aumenta (rotazione in senso antiorario), negativa se θ diminuisce (rotazione in senso orario)
- Notare l'analogia fra *velocità* per il moto *lineare* e *velocità angolare* per il moto *rotazionale*

Accelerazione angolare

- L'accelerazione angolare media, $\bar{\alpha}$, di un corpo è definita come il rapporto fra variazione della velocità angolare e il tempo richiesto per la variazione:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

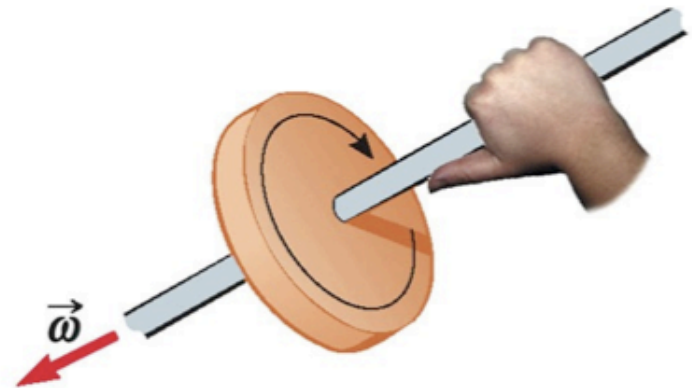
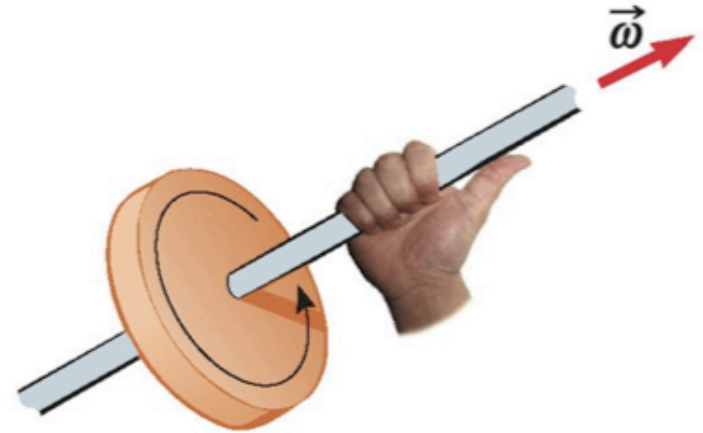
L'accelerazione angolare istantanea α è il limite dell'accelerazione angolare media $\bar{\alpha}$ quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- Le unità dell'accelerazione angolare sono radianti/s², oppure s⁻² (giacché i radianti non hanno dimensioni)

Direzione e verso

- Velocità e accelerazione angolare possono essere definiti come *vettori* $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$, rispettivamente di modulo ω e α , diretti lungo l'asse di rotazione
- Il verso di $\vec{\omega}$ è dato dalla regola della mano destra
- $\vec{\alpha}$ è diretto come $\vec{\omega}$ se la velocità angolare aumenta, in senso opposto se la velocità angolare diminuisce



Con questa definizione, la velocità di un punto del corpo rigido può essere scritta in generale come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ovvero $v = \omega r_{\perp}$, dove r_{\perp} è la distanza dall'asse. Questa è l'espressione da usare in tre dimensioni.

Velocità e accelerazione

La velocità in un corpo che ruota attorno ad un asse, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, è sempre *tangente* al percorso: $v = v_T$ (velocità tangenziale).

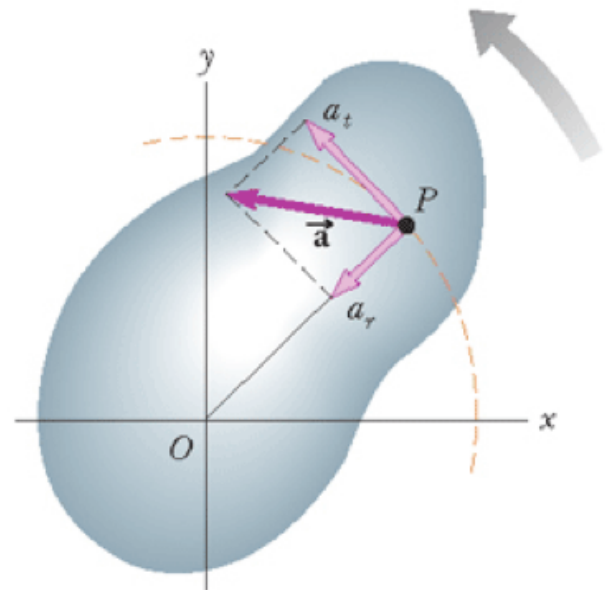
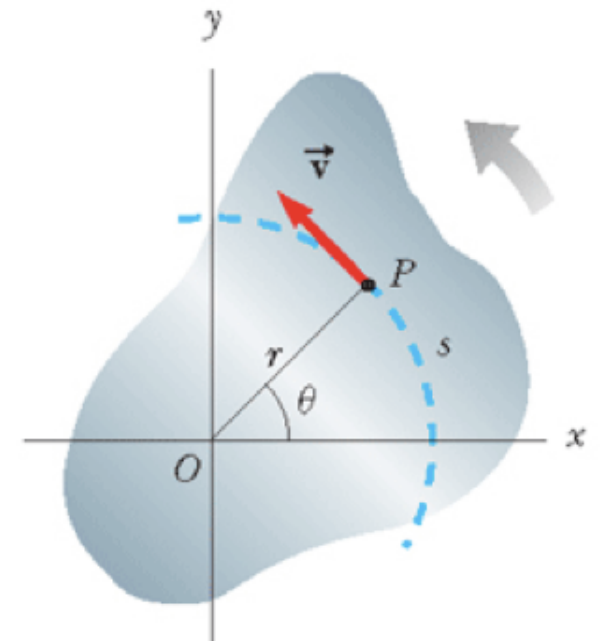
L'accelerazione,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

ha una componente *tangenziale* e una radiale, o *centripeta*:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r_{\perp} \alpha, \quad a_c = \frac{v^2}{r} = r_{\perp} \omega^2$$

con $|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = r_{\perp} \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$
(dimostrazione: sostituire $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, notare che $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}$)



Cinematica Rotazionale

Per *accelerazione angolare costante* (in modulo, direzione e verso!) si può descrivere il moto del corpo rigido usando delle equazioni cinematiche: l'analogo rotazionale delle equazioni cinematiche del moto lineare. Matematicamente:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

La relazione fra quantità lineari ed angolari è semplicemente

$$s(t) = \theta r_{\perp} \quad , \quad v(t) = \omega r_{\perp} \quad , \quad a_t = \alpha r_{\perp}$$

dove a_t è l'accelerazione tangenziale e r_{\perp} la distanza dall'asse di rotazione (attenzione: non dall'origine!)

Notare che tutti i punti del corpo ruotante hanno lo stesso moto angolare, ma hanno moto lineare differente.

Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica *rotazionale*. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove la quantità I è nota come *momento d'inerzia*.

Notare l'analogia fra energie cinetiche associate al moto lineare:

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \text{ e associate al moto rotazionale, } K_R = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Energia Cinetica Rotazionale (2)

In generale la velocità di un punto può essere scritta come $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i$, dove \vec{V}_{CM} è la velocità del centro di massa (CM), \vec{u}_i la velocità nel sistema di riferimento del CM. L'energia cinetica diventa quindi

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_i u_i^2 + m_i \vec{u}_i \cdot \vec{V}_{CM} \right)$$

ma il terzo termine è nullo perché $\sum_i m_i \vec{u}_i = 0$ per definizione. L'energia cinetica è quindi la somma dell'energia cinetica del CM, più l'energia cinetica rispetto al CM. Per un corpo che trasla e ruota attorno ad un asse passante per il suo centro di massa, possiamo quindi scrivere

$$K = K_{CM} + K_R = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

con il moto del CM determinato unicamente dalle forze esterne.

Momento d'inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione!* (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).
- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i . Nel limite continuo:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_{\perp}^2 dm.$$

- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso, $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

Momento d'inerzia, esempi semplici

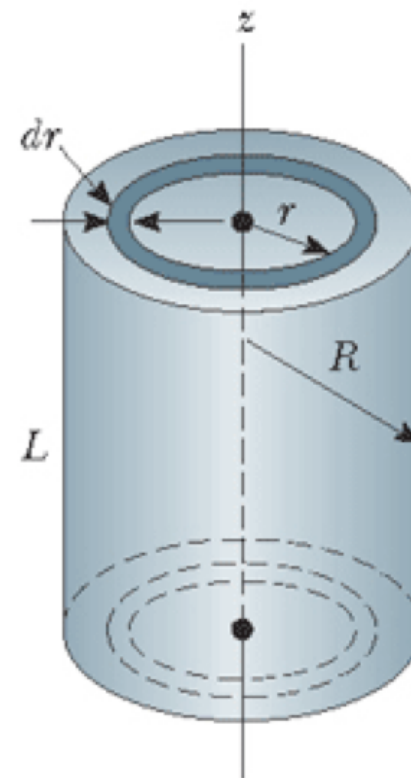
- Modello di una molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d , rispetto ad un asse passante per il centro:

$$I = M \left(\frac{d}{2} \right)^2 + M \left(\frac{-d}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} M d^2$$

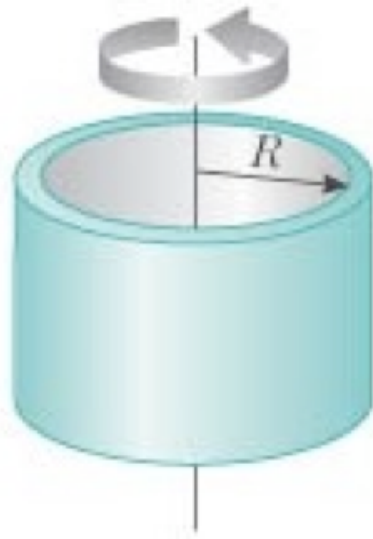
- Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo attorno al suo asse: poniamo $\rho = M/(\pi R^2 L)$, $dm = \rho(2\pi r L)dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \rho(2\pi r L) dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M R^4}{R^2 \cdot 4} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

(da notare che vale anche per un disco)

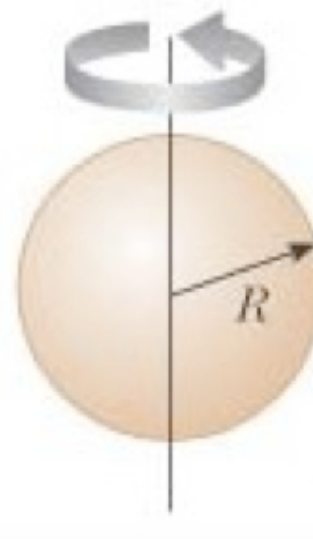


Momento d'inerzia per vari corpi rigidi



Guscio cilindrico
sottile:

$$I = MR^2$$

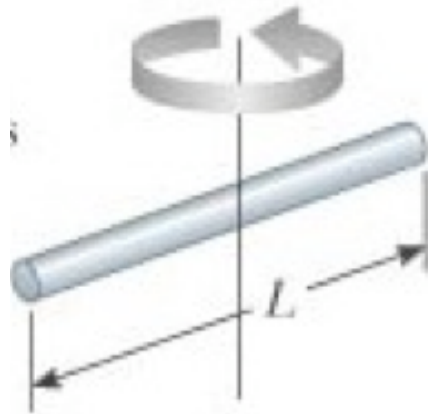


Sfera:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Sbarra sottile,
asse passante
per il centro:

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

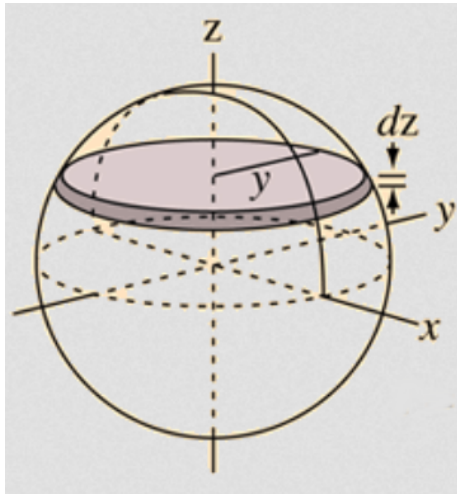


Sbarra sottile,
asse passante
per un estremo:

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



Momento d'inerzia di una sfera



Suddividiamo la sfera in dischi infinitesimi di raggio y e spessore dz (vedi figura):

$$I = \int_{-R}^R \left(\frac{\rho \pi y^2}{2} \right) y^2 dz = \rho \pi \int_0^R y^4 dz$$

(la funzione integrata è pari: $\int_{-R}^R = 2 \int_0^R$)

dove la quantità fra parentesi è il momento d'inerzia di ogni disco; $\rho = 3M/4\pi R^3$ è la densità di una sfera di massa M e raggio R .

Da $y^2 + z^2 = R^2$ si ottiene $I = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz$ e infine

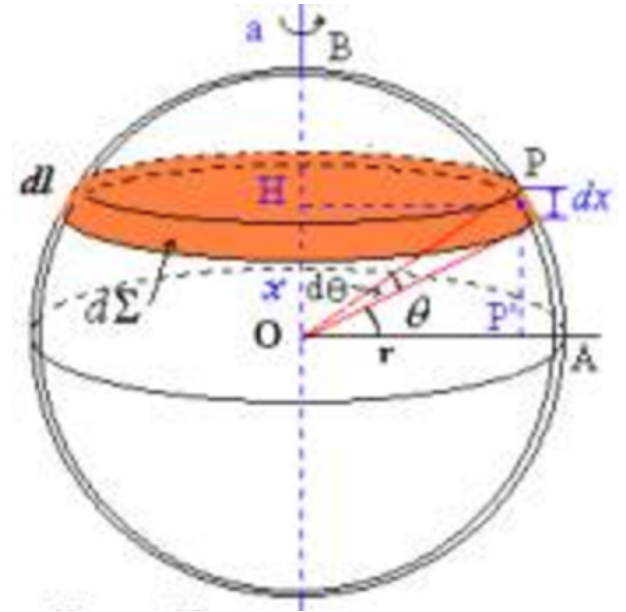
$$I = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \frac{3M}{4R^3} \left[R^4 z + \frac{z^5}{5} - 2R^2 \frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{5} M R^2$$

Momento d'inerzia di una sfera (2)

Alternativa: usiamo l'angolo θ come variabile

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho\pi(R\cos\theta)^2}{2} \underbrace{(R\cos\theta)^2}_{\overline{HP}} \underbrace{R\cos\theta d\theta}_{dx}$$

da cui



$$I = \rho R^5 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta d\theta = \frac{3}{4} M R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta$$

da cui si ritrova il risultato precedente

Un teorema utile sul momento d'inerzia

- Il momento d'inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un certo asse è dato da

$$I = I_{cm} + Md^2$$

dove I_{cm} è il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato, distante d da questo, e *passante per il centro di massa* del sistema considerato (*teorema degli assi paralleli*).

Dimostrazione: chiamiamo \vec{r}_i e \vec{r}'_i le posizioni rispetto al primo asse e rispetto al CM, \vec{d} la distanza fra l'origine sul primo asse e il CM, da cui $\vec{r} = \vec{r}'_i + \vec{d}$. Vale:

$$I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \sum_i m_i [(\vec{r}'_i + \vec{d})_{\perp}]^2 = \sum_i m_i r_{\perp i}'^2 + \sum_i m_i d_{\perp}^2 + 2 \sum_i m_i \vec{r}'_i \cdot \vec{d}_{\perp}$$

ma $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ perché il centro di massa è nell'origine, da cui l'enunciato.

(notare che $\vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \cdot \vec{b}_{\perp} = \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b}$, facilmente dimostrabile usando $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{a})$ e l'analogo per \vec{b}_{\perp} , con \hat{n} versore dell'asse di rotazione)