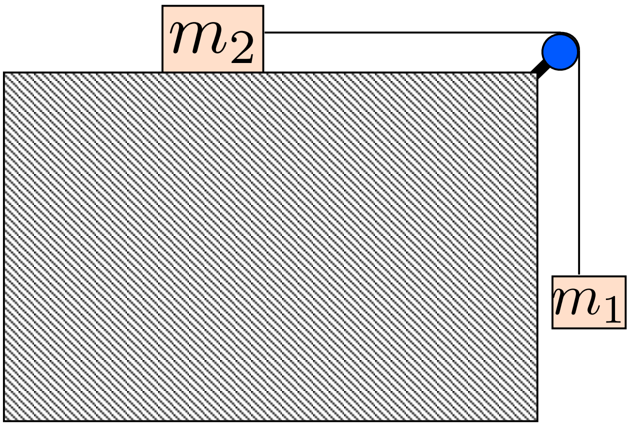
Esercizio (tratto dal Problema 3.26 del Mazzoldi 2)

Due masse m_1 e m_2 sono disposte come in figura. Il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e m_2 vale $\mu_D = 0.2$ e quello di attrito statico $\mu_S = 0.4$.

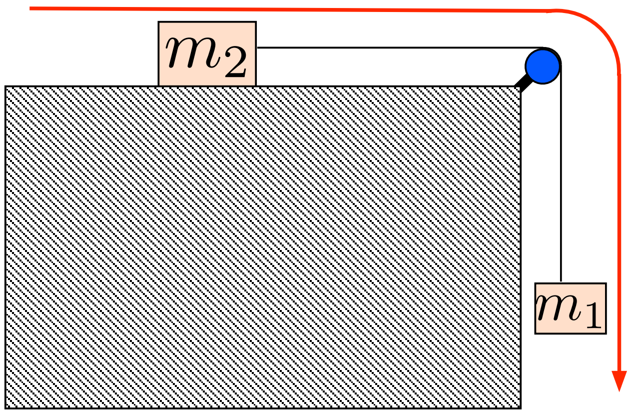
Supponiamo che le masse si muovano:

1. calcolare l'accelerazione a del sistema delle due masse e la tensione T del filo;
2. discutere il comportamento dell'accelerazione e della tensione nel caso $m_1 \gg m_2$;
3. calcolare i valori di a e T nel caso $m_1 = 1\,\mathrm{Kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{Kg}$.
4. Se la tensione massima che il filo può sopportare è $T_{max} = 20\,\mathrm{N}$, quanto vale la massa m_{max} che si può collegare alla carrucola senza che il filo si spezzi ? ($m_2 = 3\,\mathrm{Kg}$);

Le due masse si muovono in ogni caso? Se sì, spiegare perché. Se no, determinare la condizione che deve essere soddisfatta affinché le due masse non si muovano.



SOLUZIONE:
Scegliamo anzitutto il verso convenzionale di moto del sistema come indicato in figura



1. Consideriamo il caso dinamico, ossia il caso in cui sappiamo che le due masse sono in movimento. In tal caso

   - sulla massa m_1 agiscono:

forza peso	(concorde alla direzione convenzionale)	(1)
tensione del filo	(discorde alla direzione convenzionale)	

     e dunque
     $$m_1 a = m_1 g - T \tag{2}$$

   - sulla massa m_2 agiscono

tensione del filo T	(concorde alla direzione convenzionale)	
forza di attrito dinamico $= \mu_D\, N = \mu_D m_2 g$	(discorde alla direzione convenzionale)	(3)

     e dunque
     $$m_2 a = T - \mu_D m_2 g \tag{4}$$

   Mettendo insieme la (2) e la (4) otteniamo
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} m_1 a & = & m_1 g - T \\ & & \\ m_2 a & = & T - \mu_D m_2 g \end{array} \right. \tag{5}$$

   un sistema di due equazioni in due incognite a e T. Prendendo somma e differenza delle due equazioni
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} (m_1 + m_2) a & = & (m_1 - \mu_D m_2)\, g \\ & & \\ (m_1 - m_2) a & = & -2T + (m_1 + \mu_D m_2) g \end{array} \right. \tag{6}$$

da cui

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - \mu_D m_2}{(m_1 + m_2)}\, g \\ \\ T = \frac{1}{2}\left((m_1 + \mu_D m_2)g - (m_1 - m_2)a\right) \end{cases} \tag{7}$$

Sostituendo la prima nella seconda otteniamo

$$T = \frac{1}{2}\left((m_1 + \mu_D m_2)g - (m_1 - m_2)\frac{m_1 - \mu_D m_2}{(m_1 + m_2)} g\right) \tag{8}$$

$$T = \frac{g}{2}\left(\frac{(m_1 + \mu_D m_2)(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)(m_1 - \mu_D m_2)}{(m_1 + m_2)}\right) \tag{9}$$

Separiamo i termini che dipendono da μ_D e quelli che ne sono indipendenti

$$\begin{aligned} T &= \frac{g}{2}\left(\frac{m_1(m_1 + m_2 - m_1 + m_2) + \mu_D m_2(m_1 + m_2 + m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\right) = \\ &= \frac{g}{2}\left(\frac{2m_1 m_2 - \mu_D 2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\right) = \\ &= \frac{m_1 m_2\, g}{(m_1 + m_2)}(1 + \mu_D) \end{aligned} \tag{10}$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$a = \frac{m_1 - \mu_D m_2}{m_1 + m_2}\, g \tag{11}$$

$$T = \frac{m_1 m_2\, g}{m_1 + m_2}(1 + \mu_D) \tag{12}$$

2. Consideriamo ora il caso $m_1 \gg m_2$. In questo caso i risultati (11) e (12) tendono a

$$a = \frac{m_1 - \mu_D m_2}{m_1 + m_2}\, g \;\to\; g \tag{13}$$

$$T = \frac{m_1 m_2\, g}{m_1 + m_2}(1 + \mu_D) \;\to\; m_2(1 + \mu_D)\, g \tag{14}$$

   da cui vediamo che l'accelerazione del sistema è semplicemente g e la tensione del filo è la forza peso dovuta a m_2. Si noti che, anche quando la massa m_1 è grandissima rispetto a m_2, la tensione del filo non diverge, ed è legata al valore di m_2.

3. Considerando ora il risultato nel caso specifico $m_1 = 1\,\mathrm{Kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{Kg}$, otteniamo per l'accelerazione

$$\begin{aligned} a &= \frac{1\,\mathrm{K}\cancel{\mathrm{g}} - 0.2 \cdot 3\,\mathrm{K}\cancel{\mathrm{g}}}{1\,\mathrm{K}\cancel{\mathrm{g}} + 3\,\mathrm{K}\cancel{\mathrm{g}}}\, 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= \frac{0.4}{4}\, 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 0.98\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{15}$$

e la tensione del filo vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1\,\cancel{\mathrm{Kg}} \cdot 3\,\mathrm{Kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1\,\cancel{\mathrm{Kg}} + 3\,\cancel{\mathrm{Kg}}}(1+0.2) = \\ &= 0.75 \cdot 9.81 \cdot 1.2\ \mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \\ &= 8.83\,\mathrm{N} \end{aligned} \qquad (16)$$

4. Dalla formula generale (12) trovata, abbiamo che

$$\frac{m_1 m_2\, g}{m_1+m_2}(1+\mu_D) \leq T_{max} \qquad (17)$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 m_2\, g(1+\mu_D) \leq T_{max}\,(m_1+m_2)$$

$$\Downarrow$$

$$m_1\,(m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max}) \leq T_{max} m_2 \qquad (18)$$

Possiamo distinguere due casi:

(a) $m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max} > 0$
In tal caso dalla (18) otteniamo

$$m_1 \leq \underbrace{m_2\,\frac{T_{max}}{(m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max})}}_{=m_{max}} \qquad (19)$$

per cui

$$m_{max} = m_2\,\frac{T_{max}}{m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max}} \qquad (20)$$

(b) $m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max} < 0$
In tal caso dalla (18) otteniamo

$$m_1 \geq m_2\,\frac{T_{max}}{(m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max})} = \underbrace{-m_2\,\frac{T_{max}}{|m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max}|}}_{<0} \qquad (21)$$

che è verificata per qualsiasi m_1 (in tal caso il filo non si spezza mai).

Il valore dato dal testo, $T_{max} = 20\,\mathrm{N}$, rientra nel primo caso. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} m_{max} &= m_2\,\frac{T_{max}}{m_2\, g(1+\mu_D) - T_{max}} = \\ &= 3\,\mathrm{Kg}\frac{20\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{Kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(1+0.2) - 20\,\mathrm{N}} = \\ &= \mathrm{Kg}\,\frac{60\,\cancel{\mathrm{N}}}{35.32\,\cancel{\mathrm{N}} - 20\,\cancel{\mathrm{N}}} = \\ &= 3.92\,\mathrm{Kg} \end{aligned} \qquad (22)$$

5. Consideriamo ora il caso statico. Intuitivamente ci aspettiamo che se c'è attrito tra piano e m_2, e se la massa m_1 è troppo piccola, la massa m_2 non si sposterà. Questo perchè su m_2 agisce una forza f di attrito *statico* che controbilancia la tensione del filo. Scriviamo allora le equazioni di equilibrio ($a = 0$) per il sistema:

$$\begin{cases} m_1 g - T & = & m_1 a = 0 \\ \\ T - f & = & m_2 a = 0 \end{cases} \tag{23}$$

NOTA BENE: Un tipico errore è quello di scrivere la forza di attrito statico come $f = \mu_S\, m_2 g$, per analogia con la forza di attrito dinamico. Questo è sbagliato perché $\mu_S\, m_2 g$ è il valore *massimo* possibile della forza di attrito statico, non il valore vero. In generale f assume un valore *compreso* nell'intervallo $0 \leq f \leq \mu_S\, m_2 g$. Il valore vero dipende dalla tensione T. Questo significa che il corpo m_2 non si muove fintanto che la forza di attrito statico f che si oppone alla tensione T non raggiunge il valore massimo.

Da (24) ricaviamo che

$$f = T = m_1 g \tag{24}$$

Affinché il corpo m_2 non si muova tale valore non deve superare il valore massimo

$$f \leq \mu_S\, m_2 g$$

$$\Rightarrow \quad m_1 g \leq \mu_S\, m_2 g \tag{25}$$

da cui ricaviamo che deve valere

$$m_1 \leq \mu_S m_2 \tag{26}$$