ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 53

Titolo nota 11/12/2018

CLASSIFICAZIONE ISOMETRIE NEL PIANO

Isometria del piano $f(x) = Ax + b$ (b: vettore nel piano; A: matrice 2x2 ortogonale)

$\boxed{\text{Caso } b = 0}$ Classificare matrici 2x2 ortogonali

Fatto a suo tempo, usando che le colonne sono ortonormali

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$

- Le matrici del 1° tipo rappresentano rotazioni di un angolo θ in verso antiorario

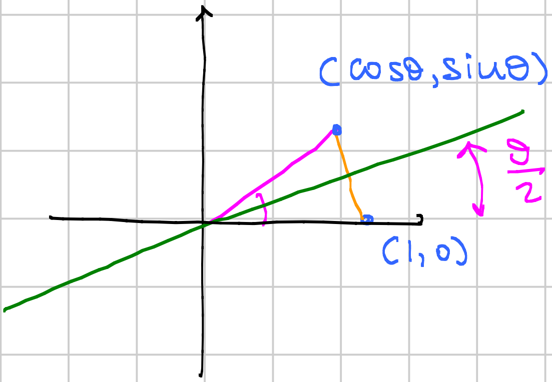
  Osserviamo che queste matrici hanno
  - → Det = 1
  - → Autovalori $\cos\theta \pm i \sin\theta$ (numeri complessi coniugati di norma 1)
  - → sono il prototipo di blocco di Jordan reale

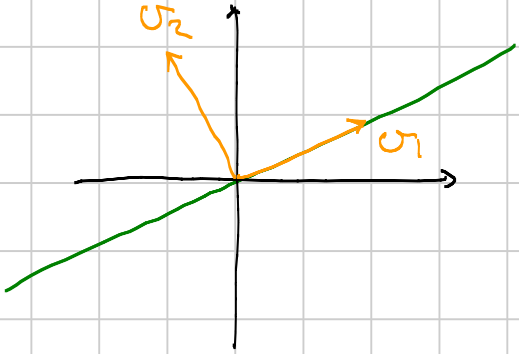
- Le matrici del 2° tipo hanno
  - → Det = −1
  - → Traccia = 0
  - → Autovalori ± 1, quindi esistono v_1 e v_2 ortogonali t.c.

$$Av_1 = v_1 \qquad Av_2 = -v_2$$

  - → sono quindi simmetrie rispetto alla retta $\mathrm{Span}(v_1)$

Che cosa rappresenta θ nelle matrici del 2o tipo?





Basta osservare che $f(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$, quindi stiamo facendo simmetria rispetto ad una retta che forma angolo $\frac{\theta}{2}$ con semiasse x positivo.

— o — o —

$\boxed{\text{Caso generale} \quad b \neq 0}$ $\quad f(x) = Ax + b$

Le isometrie si classificano sulla base dei punti fissi, cioè delle soluzioni di

$$f(x) = x$$

cioè

$$Ax + b = x \qquad (A - Id)x = -b$$

Si tratta di un sistema lineare, e quindi ci sono varie possibilità

1. Infinite soluzioni, dipendenti da due parametri
2. Infinite soluz., dipendenti da 1 parametro
3. Soluzione unica
4. Nessuna soluzione

Cosa accade nei vari casi

$\boxed{1}$ Le soluzioni sono tutto $\mathbb{R}^2$, quindi tutti i p.ti stanno fissi. Allora

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{2}$ Le soluzioni sono una retta, e f è la simmetria rispetto a questa retta

$\boxed{3}$ Un solo punto fisso, e f è la rotazione di un certo angolo intorno al p.to.

$\boxed{4}$ Nessun p.to fisso, e per f ci sono due possibilità

$\boxed{4.1}$ Traslazione $\quad f(x) = x + b$ con $b \neq 0$

$\boxed{4.2}$ Simmetria rispetto ad una retta seguita da traslazione in direzione $/\!/$ alla retta.

Perché i casi sono solo questi?

Stiamo risolvendo $f(x) = x$, cioè

$$(A - Id)x = -b$$

Le soluzioni di questo sistema dipendono dal rango della matrice $A - Id$ e dal rango della matrice completa

$\boxed{1}$ Per avere tutto $\mathbb{R}^2$ come soluzione, la matrice $A - Id$ deve essere la matrice nulla (numero param = dim. sp. − rango) cioè $A = Id$

$\boxed{2}$ Per avere spazio delle soluz. di dim. 1, la matrice $A - Id$ deve avere rango 1, quindi $\dim(\ker) = 1$, quindi esiste v tale che $Av = v$, cioè 1 è autovalore. Ma allora per forza l'altro autovalore è -1 (se fosse 1 saremmo nel caso precedente)

3 Per avere soluzione unica, la matrice $A - Id$ deve essere di rango 2, quindi di sicuro A non ha autovalore 1, quindi A è del 1° tipo (matrice di rotazione)

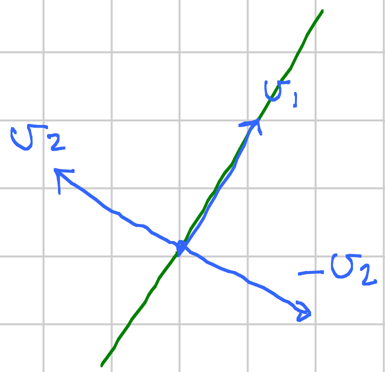
4 Per avere nessuna soluzione devono accadere 2 cose
- $A - Id$ deve avere rango 0 oppure 1
- $-b \notin \operatorname{Im}(A - Id)$

4.1 Se $A - Id$ ha rango 0, allora $A = Id$ e quindi
$$f(x) = x + b \quad \leadsto \text{traslazione}$$

4.2 Se $A - Id$ ha rango 1, allora 1 è autovalore di A e -1 pure, quindi A è matrice di simmetria.
Quindi esistono $v_1 \perp v_2$ tali che
$$Av_1 = v_1 \qquad\qquad Av_2 = -v_2$$
Allora
$$\operatorname{Im}(A - Id) = \operatorname{Span}(v_2)$$
Quindi nel nostro caso $-b \notin \operatorname{Span} v_2$ e quindi
$$b \notin \operatorname{span} v_2$$
cioè
$$b = c_1 v_1 + c_2 v_2$$
con $c_1 \neq 0$.
Allora ogni $x \in \mathbb{R}^2$ lo scriviamo nella forma
$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$$
e
$$\begin{aligned} Ax + b &= A(a_1 v_1 + a_2 v_2) + c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= a_1 Av_1 + a_2 Av_2 + c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= \boxed{a_1 v_1 - a_2 v_2 + \boxed{c_2 v_2}} + c_1 v_1 \end{aligned}$$

simmetria rispetto alla retta di equazione $a_2 = \frac{c_2}{2}$

traslazione parallela alla retta



Esempio $\quad f(x,y) = (x+3, -y+2)$

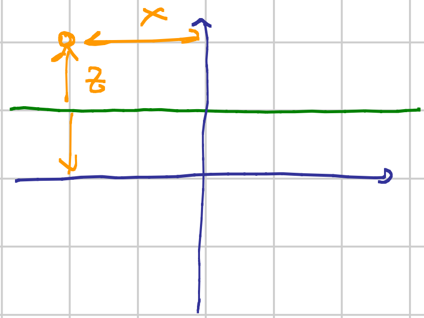
$$= \underbrace{(x,-y)}_{\substack{\text{simmetria} \\ \text{rispetto asse } x}} + (3,2)$$

$$= \boxed{(x,-y) + (0,2)} + (3,0)$$

Che cosa rappresenta $\quad (x,y) \to (x, -y+2)$?

Simmetria rispetto alla retta che resta fissa, cioè $y = 1$

$f(x, 1+z) = (x, -1-z+2)$
$\qquad\qquad = (x, 1-z)$



Esempio 2 $\quad f(x,y) = (-y+3, \ x-4)$

verificare che si tratta di isometria e capire come agisce

$f(x,y) = (-y, x) + (3,-4)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
matrice A ortogonale ?

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

[verifica alternativa: le righe / colonne di A sono ortonorm.]

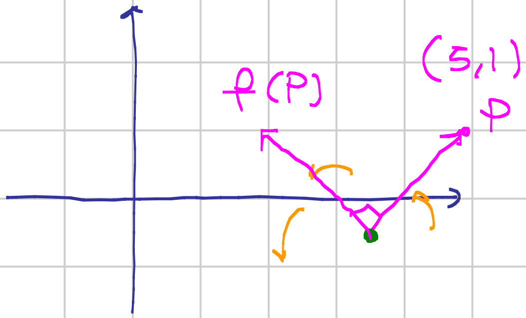
Quindi f è isometria. Di che tipo ? Guardo i p.ti fissi

$f(x,y) = (x,y) \iff (-y+3, x-4) = (x,y)$

$$\begin{cases} -y+3 = x \\ x-4 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 4 \end{cases} \qquad 2x = 7 \rightsquigarrow x = \frac{7}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

Quindi si tratta di una rotazione con centro in $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e angolo θ tale che

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \theta = 90^\circ \text{ antiorario}$$



Ci aspettiamo $f(5,1) = (2,1)$

Ok!!

— o — o —