Segnali

Segnale: grandezza fisica a cui è associata informazione

esempi: segnale audio, video, elettrocardiogramma, uscita di un sensore di temperatura, umidità, pressione

Tipi di segnale

1) Deterministici: rappresentabili con delle funzioni analitiche

2) Aleatori: rappresentabili tramite le loro statistiche

Dimensionalità:

segnale $\underline{y}(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

esempi

) elettrocardiogramma $\Rightarrow x(t)$, t = tempo, x = ampiezza

) audio stereo $\Rightarrow (x(t), y(t))$, t = tempo, x = ampiezza canale dx
y = ampiezza canale sx

) immagine b/w $\Rightarrow z(x, y)$, z = intensità di grigio,
(x, y) = coordinate spaziali

) immagine colori RGB $\Rightarrow \underline{z}(x, y)$, $\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ = intensità dei colori, (x, y) = coordinate spaziali

Tipologia di segnali

·) Segnali a tempo continuo: t assume con continuita' tutti i valori reali contenuti in un certo intervallo (anche ∞)

$x(t), y(t), \ldots$

·) Segnali a tempo discreto: la variabile temporale assume solo valori discreti

$x[n], y[n], \ldots$

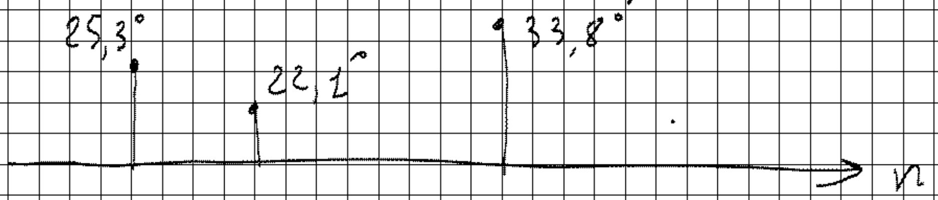
·) Segnali ad ampiezza continua: la grandezza fisica del segnale assume con continuita' tutti i valori (reali o complessi) all'interno di un certo intervallo (anche ∞)

·) Segnali ad ampiezza discreta: la grandezza fisica del segnale assume solo valori discreti (reali o complessi) appartenenti ad un certo alfabeto. Il più semplice e' un alfabeto binario (0, 1)

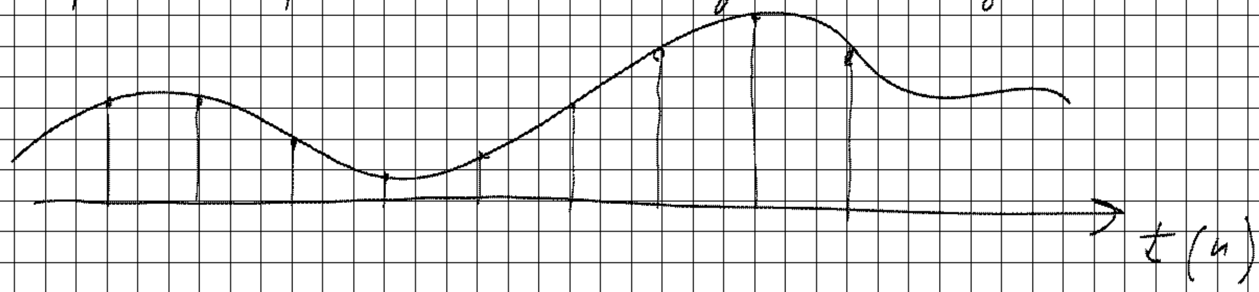
	tempo continuo	tempo discreto
ampiezza continua	analogici	sequenze
ampiezza discreta	quantizzati	numerici

·) I segnali analogici tipici sono: il segnale audio analogico, video analogico, elettrocardiogramma, ecc.

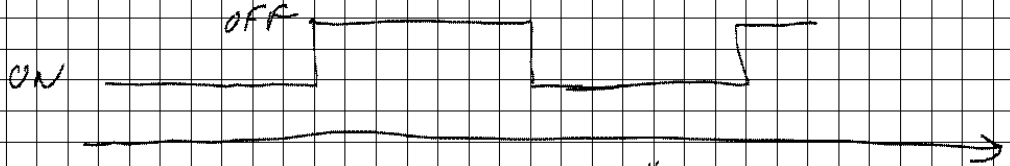
·) Le sequenze possono essere ottenute come risultato di una misura della temperatura ogni 30 min.



oppure per campionamento di segnali analogici

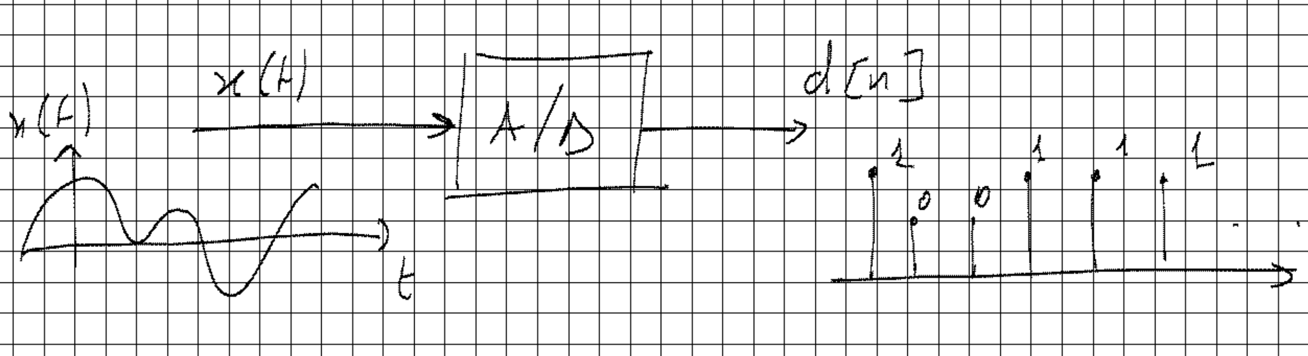


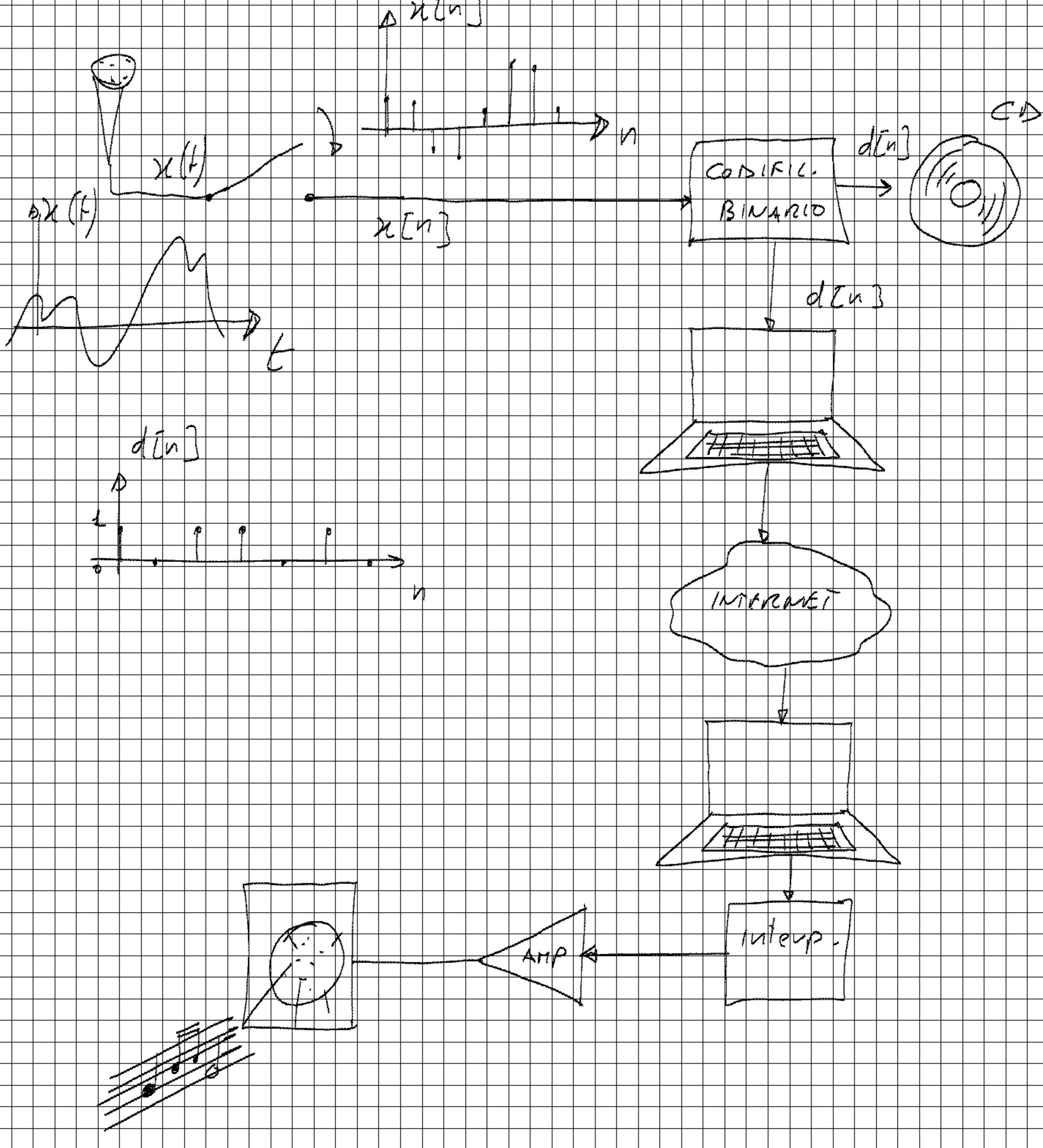
·) I segnali quantizzati possono scaturire da segnali di led luminosi (acceso / spento)



esempio: il codice "Morse"

·) I segnali numerici si ottengono come conversione analogico-digitale per il trattamento dell'informazione tramite calcolatori.





•) Fedeltà della ricostruzione del suono dipende da come sono progettate le varie parti

Segnale periodico

$$x_p(t) = x_p(t - kT) \quad , \quad T = \text{periodo del segnale} \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Proprieta' dei segnali deterministici

) Potenza istantanea

$$x(t) \Rightarrow P_x(t) = |x(t)|^2$$

) Energia

$$x(t) \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

Segnali fisici $\Rightarrow$ $x(t) : E_x < \infty$

Segnali ideali possono avere $E_x = \infty$

es. "batteria ideale"

$$x(t) = V \qquad -\infty < t < +\infty$$

Per tali segnali si introduce il concetto di

"Segnale troncato nel tempo" $\quad x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

) $E_{x_T} < \infty$

) $\lim_{T \to \infty} E_{x_T} = \infty$

Potenza media

$$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$$

$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} P_{x_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Si osserva che:

$x(t)$: $P_x = K \Rightarrow E_x = \infty$ segnale a potenza finita

$x(t)$: $E_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$ segnale ad energia finita

$$P_x = \lim_{T\to\infty} P_{x_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = K \Rightarrow \lim_{T\to\infty} E_{x_T} = \infty$$

$$E_x = \lim_{T\to\infty} E_{x_T} = \lim_{T\to\infty} P_{x_T}\, T = K \Rightarrow \lim_{T\to\infty} P_{x_T} = 0$$

Per i segnali a potenza finita si definisce anche il "valore efficace"

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}$$

Valor medio temporale

$$x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Segnali tipici

·) Costante $\quad x(t) = A$

$$p_x(t) = A^2 \quad , \quad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{E_x}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A^2 T = A^2$$

$$x_{eff} = \sqrt{A^2} = A$$

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} A T = A$$

·) Sinusoidi

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$p_x(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) \, dt =$$

$$= A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \, dt}_{\infty} + A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt}_{0} = \infty$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) \, dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \, dt + \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt =$$

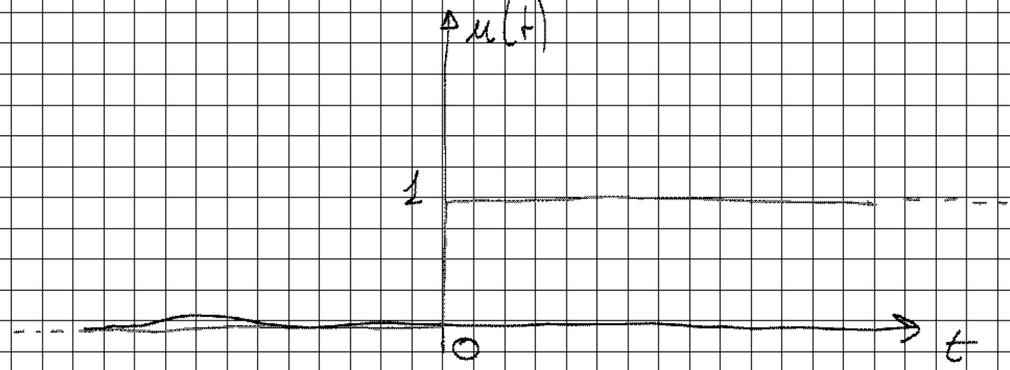
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{T} \frac{T}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{\lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt}{\lim_{T \to \infty} T} = \frac{A^2}{2}$$

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt = 0$$

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt = \frac{\lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt}{\lim_{T\to\infty} T} = 0$$

·) Gradino $\qquad x(t) = u(t)$



$$p_x(t) = u^2(t) = u(t)$$

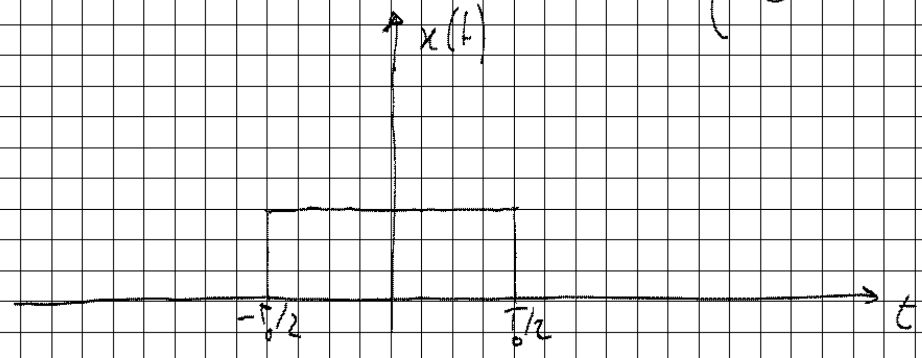
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, dt = \int_0^{+\infty} dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

·) Rettangolo $\qquad x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

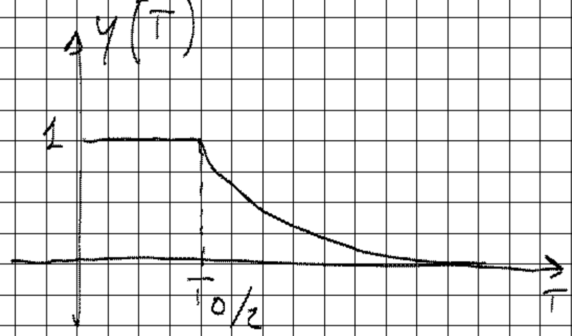


$$P_x(t) = |x(t)|^2 = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = T_0$$

$$P_x = 0 = \lim_{T \to \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt}_{y(T)} = 0$$

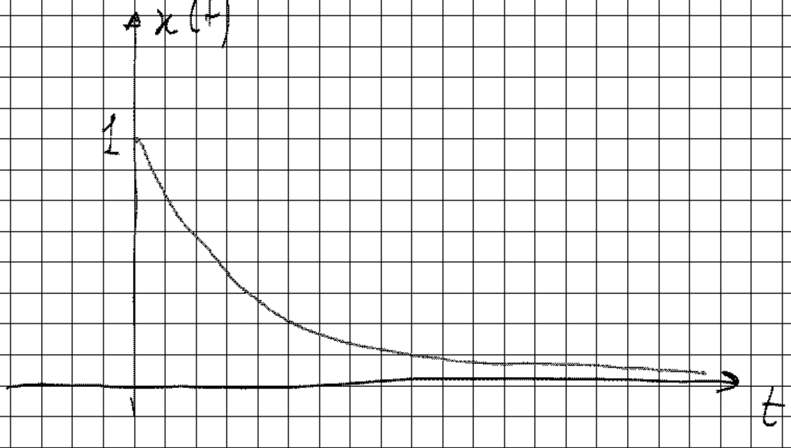
$$y(T) = \begin{cases} 1 & 0 \leq T \leq T_0/2 \\ \frac{T_0}{2T} & T \geq T_0/2 \end{cases}$$



$$x_{eff} = 0$$

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = 0$$

) Esponenziale Unilatera $\quad x(t) = e^{-t} u(t)$



$$P_x(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2t} u(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt =$$

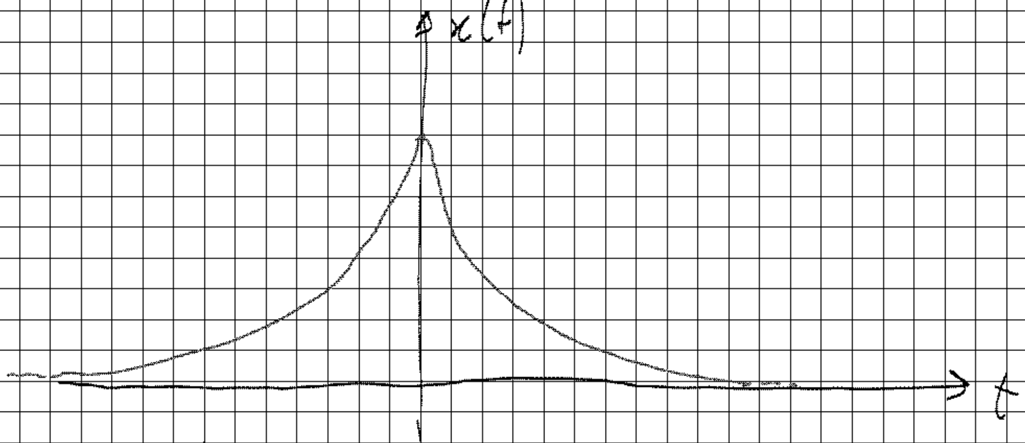
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2T}\left(e^{-T} - 1\right) = 0$$

$$x_{eff} = 0$$

$$x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-t} u(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}(-1)\, e^{-t}\Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{1}{T}\left(e^{-\frac{T}{2}} - 1\right) = 0$$

.) Esponenziale Bilatera $\quad x(t) = e^{-|t|}$



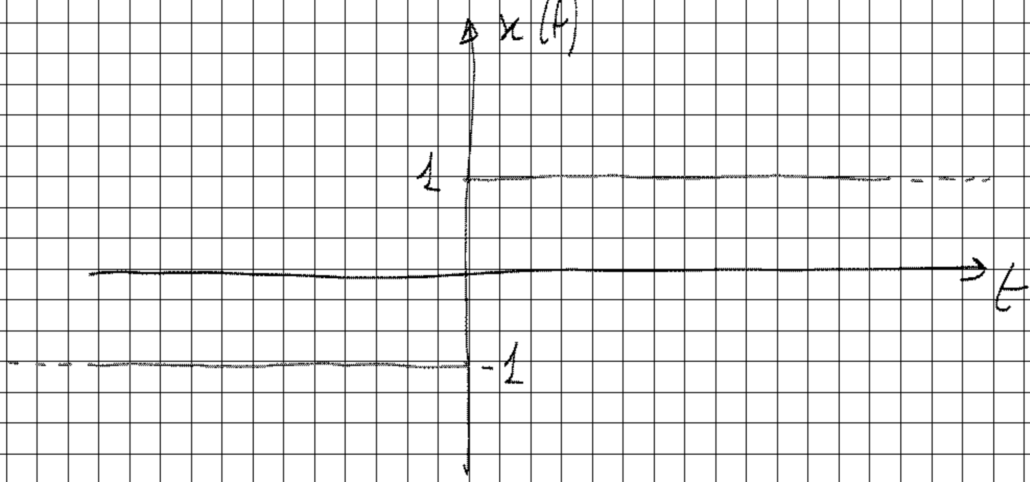
$$P_x(t) = e^{-2|t|}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = 1$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2|t|} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-2t} dt = 0$$

$$x_{eff} = 0 \quad , \quad x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-|t|} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t} dt = 0$$

·) Segno $\qquad x(t) = \mathrm{sgn}(t)$



$$p_x(t) = 1$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \, dt = \infty$$

$$P_x = 1$$

$$x_{eff} = 1$$

$$x_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{sgn}(t) \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2} \right) = 0$$

Si osserva che:

$$P_x = 0 \implies \begin{cases} x_{eff} = 0 \\ x_m = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_m + x'(t) \quad , \quad x'(t) \triangleq x(t) - x_m$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_m + x'(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(x_m + x'(t) \right) \left(x_m^* + x'^*(t) \right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[|x_m|^2 + |x'(t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{ x_m^* x'(t) \right\} \right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_m|^2\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x'(t)|^2 dt +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\left\{ x_m^* \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x'(t)\, dt}_{= 0} \right\} = |x_m|^2 + P_{x'} = 0$$

$\Rightarrow$ Condizione necessaria affinché $P_x = 0$ è che il segnale $x(t)$ sia a media nulla