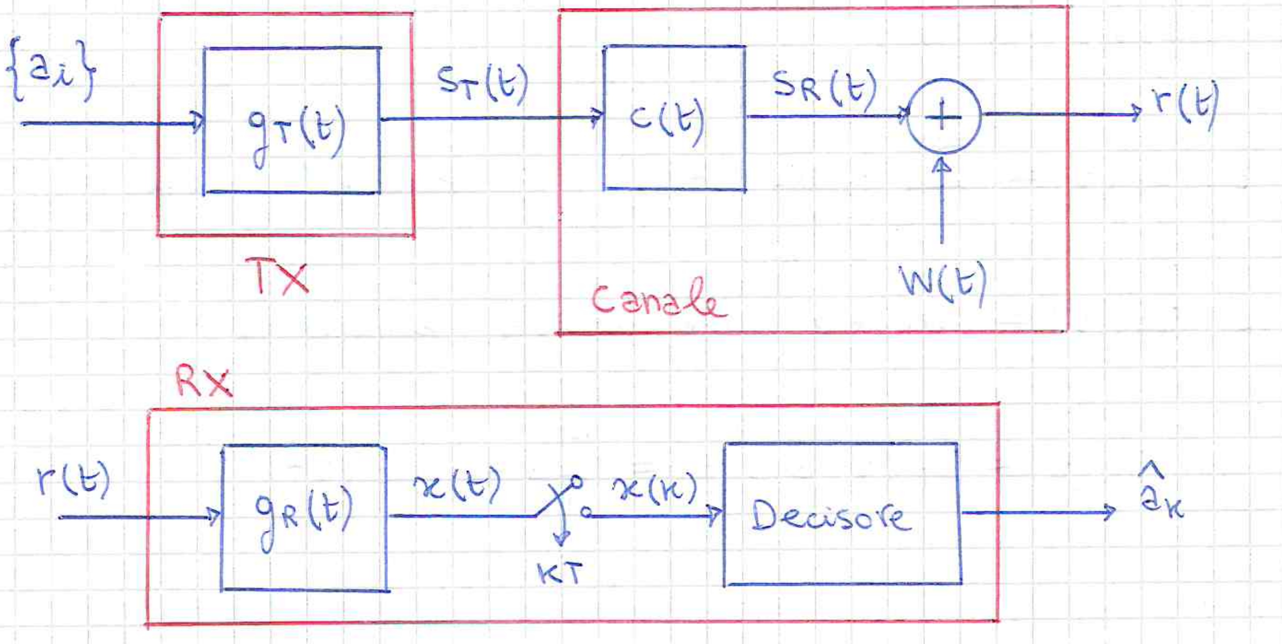
Schema completo di un sistema di comunicazione PAM

La figura seguente mostra lo schema a blocchi di un sistema di comunicazione PAM



$\{a_i\}$ = sequenza dei simboli di modulazione, generati con frequenza $f_s = 1/T$ e appartenenti ad un alfabeto

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$$

$g_T(t)$ = impulso di trasmissione

$c(t)$ = risposta impulsiva del canale

$w(t)$ = rumore Gaussiano bianco (rumore termico), con densità spettrale di potenza

$$S_W(f) = \frac{N_0}{2}$$

$g_R(t)$ = filtro di ricezione

$\hat{a}$ = stima del simbolo a_k

Analizziamo il modello del segnale nei vari punti dello schema. Si ha:

1) $S_T(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$ segnale trasmesso

2) $S_R(t)$ = segnale utile ricevuto, espresso da

$$S_R(t) = S_T(t) \otimes c(t) = \sum_i a_i g_{TC}(t - iT)$$

dove

$$g_{TC}(t) = g_T(t) \otimes c(t)$$

3) $r(t) = s_R(t) + w(t)$ è il segnale ricevuto

4) $x(t) =$ segnale in uscita dal filtro di ricezione, espresso da

$$x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = \sum_i a_i g(t - iT) + n(t)$$

dove

$$g(t) = g_{TC}(t) \otimes g_R(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

è la "risposta impulsiva globale" del sistema di comunicazione, mentre

$$n(t) = w(t) \otimes g_R(t)$$

è la componente di rumore. Esso è un processo Gaussiano a media nulla e densità spettrale di potenza

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2$$

5) $x(k) =$ campione ricevuto, espresso da

$$x(k) = \sum_i a_i g[(k-i)T] + n_k$$

dove n_k è una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla e varianza

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_{g_R}$$

essendo E_{g_R} l'energia di $g_R(t)$. Con il cambio di indice $k-i=m$, il campione in uscita del filtro di ricezione assume la forma

$$x(k) = \sum_m a_{k-m}\, g(mT) + n_k$$

ed isolando il termine relativo a $m=0$ si trova

$$\boxed{x(k) = a_k\, g(0) + \sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT) + n_k}$$

Poiché il campione $x(k)$ è utilizzato per prendere una decisione sul simbolo a_k, il termine utile nella espressione di $x(k)$ ai fini della decisione su a_k è

$$a_k\, g(0) = \text{termine utile}$$

Il secondo termine è il contributo di tutti i simboli di modulazione diversi da a_k e rappresenta un disturbo che si sovrappone al termine utile. Tale disturbo prende il nome di "interferenza intersimbolica" o ISI

$$ISI = \sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT)$$

Infine, il termine n_k è il contributo del rumore termico. In definitiva, rispetto ai sistemi di comunicazione analogici, si vede che nei sistemi di comunicazione numerica è presente un'altra forma di disturbo denominata ISI. In molte occasioni, l'ISI è un disturbo più rilevante del rumore termico, per cui è necessario tenerlo sotto controllo.

Condizione per l'annullamento dell'ISI

Ricordando l'espressione analitica dell'ISI

$$ISI = \sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT)$$

si vede che il suo completo annullamento si ottiene imponendo le seguenti "condizioni di Nyquist" nel dominio del tempo

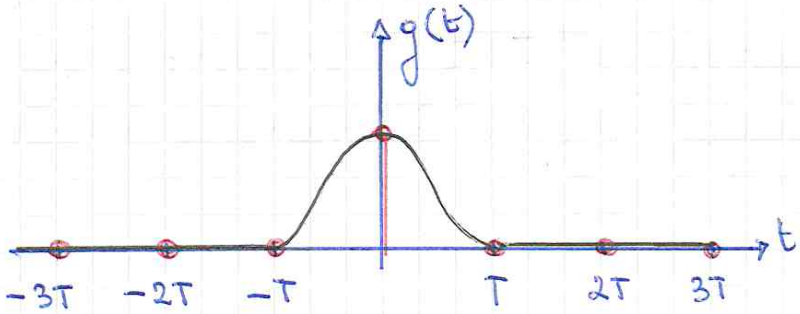
$$g(mT) = \begin{cases} 1 & \text{per } m = 0 \\ 0 & \text{per } m \neq 0 \end{cases}$$

Se tali condizioni valgono, allora l'espressione del campione $x(k)$ in uscita dal filtro adattato diventa

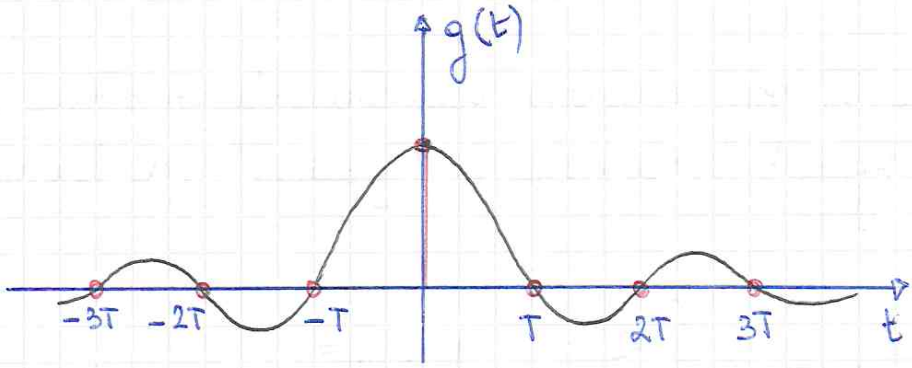
$$x(k) = a_k + n_k$$

ed è costituito dal simbolo trasmesso a_k cui si aggiunge la componente di rumore n_k. Un impulso che soddisfi le precedenti condizioni si dice "Impulso di Nyquist".

Si osservi che tutti gli impulsi $g(t)$ che sono nulli all'esterno dell'intervallo $(-T, T)$ e che sono non nullo in $t=0$ soddisfano le condizioni di Nyquist



Anche impulsi $g(t)$ non nulli all'esterno dell'intervallo $(-T, T)$ possono comunque soddisfare le condizioni di Nyquist, come mostrato nella figura seguente



Vediamo ora come le condizioni di Nyquist nel dominio del tempo si traducano in condizioni equivalenti sulla trasformata di Fourier di $g(t)$, denominata

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

A tale scopo si ricorda che vale la seguente relazione generale, nota come "somma di Poisson"

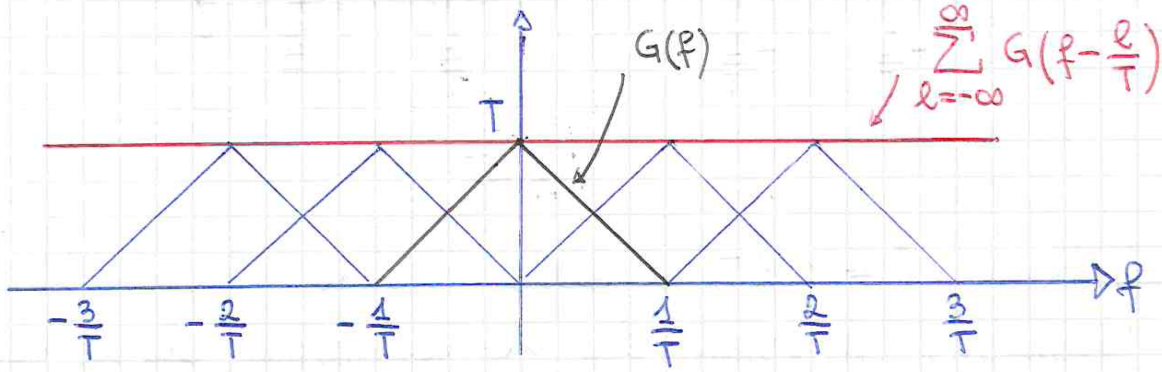
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mT)\, e^{-j2\pi m f T} = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{\ell}{T}\right)$$

Se $g(t)$ soddisfa le condizioni di Nyquist nel dominio del tempo, allora il primo membro della precedente equazione si riduce ad un solo termine di valore unitario (quello relativo a $m=0$), e si ottengono le seguenti "condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza"

$$\boxed{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{\ell}{T}\right) = T}$$

le quali affermano che la ripetizione della trasformata $G(f)$ nel dominio della frequenza per multipli di $1/T$ deve risultare costante su tutto l'asse delle frequenze.

Un esempio di trasformata $G(f)$ che soddisfa tali condizioni è riportato nella figura seguente



Banda minima di Nyquist

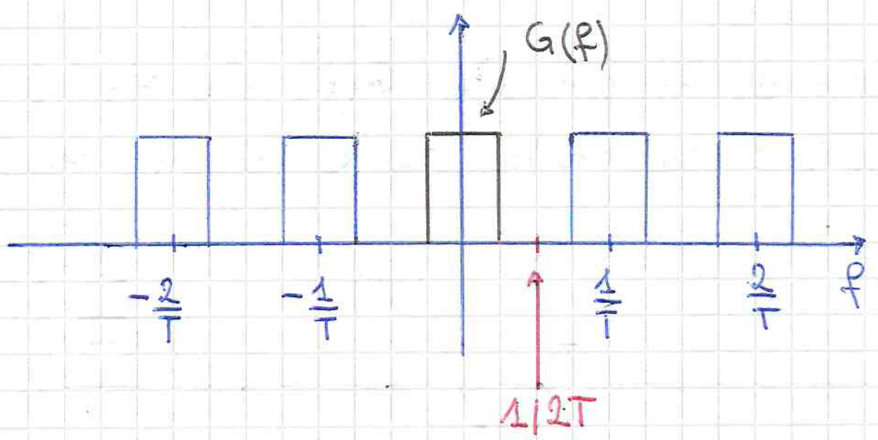
Le condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{\ell}{T}\right)=T$$

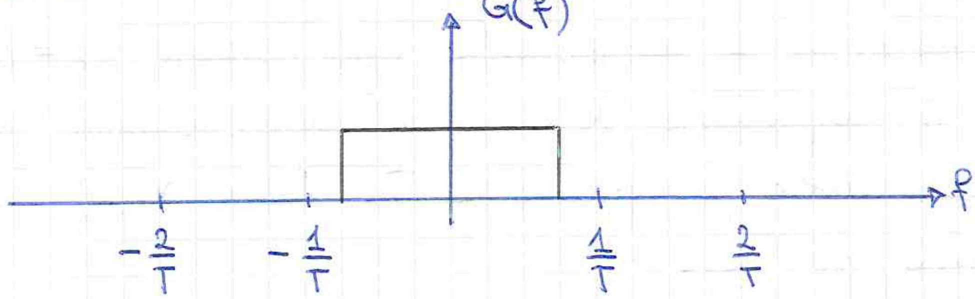
indicano chiaramente che:

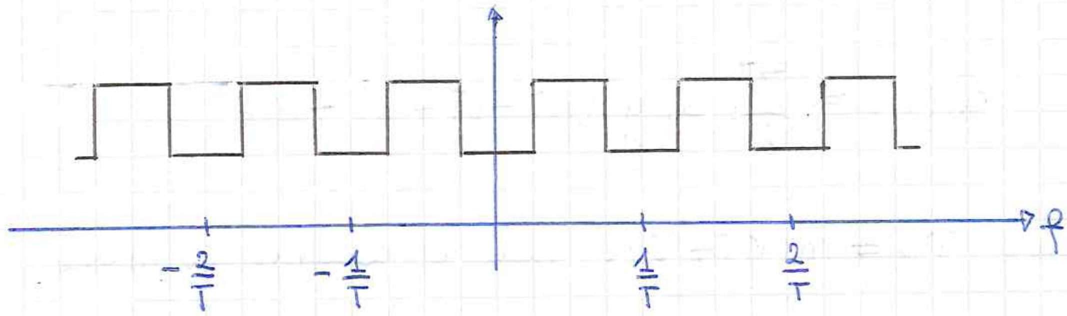
> Condizione NECESSARIA (ma non sufficiente) affinché un impulso $g(t)$ sia di Nyquist è che la sua trasformata di Fourier $G(f)$ abbia banda almeno pari a $1/2T$

Se così non fosse, la ripetizione della trasformata $G(f)$ nel dominio della frequenza sarebbe nulla in $f = 1/2T$ e non sarebbero più soddisfatte le condizioni di Nyquist nel dominio della frequenza, come mostrato nella figura seguente

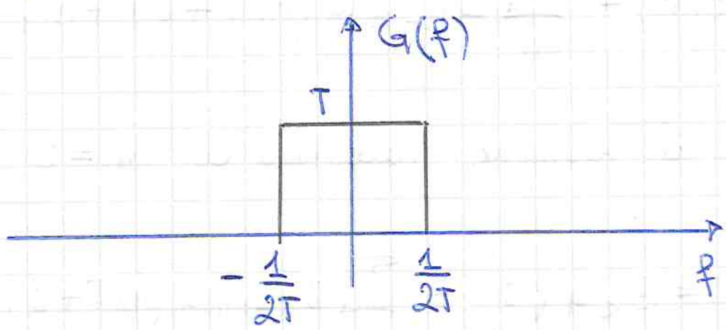


La banda $B = 1/2T$ è detta "banda minima" di Nyquist. Si osservi che la condizione che la banda di $G(f)$ ma non inferiore a $1/2T$ è solo necessaria, ma non sufficiente alla eliminazione dell'ISI. Esistono infatti impulsi di banda maggiore di $1/2T$ la cui ripetizione in frequenza di $G(f)$ non è costante al variare di f. Un esempio è mostrato nelle figure seguenti





L'impulso di Nyquist avente banda minima è evidentemente quello con trasformata di Fourier rettangolare



e la sua espressione nel dominio del tempo è

$$g(t) = \text{sinc}(t/T)$$