ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 05

Titolo nota 02/10/2018

$\boxed{\text{Algoritmo di GAUSS}}$ (o GAUSS – JORDAN)

Matrice associata ad un sistema

Esempio
$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y = 6 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left.\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{\text{coeff. delle variabili}}\right| \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{matrix}$$

termini noti

Invece di lavorare sul sistema, lavoro direttamente sulla tabella di numeri.

"Lavorare alla Gauss" vuol dire fare 2 tipi di operazioni

- Scambio di 2 righe
- Sostituire una riga R_j con $aR_j + bR_i$

Di questa seconda operazione ci sono due versioni

→ versione ultraortodossa : per forza $a = 1$

→ versione permissiva : basta $a \neq 0$

Obiettivo: portare la matrice in forma "a scala"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x + 2y - z = 5$$
$$-3y + 2z = -4$$

Fisso $z = t$. Ottengo $+3y = +4 + 2z$

$$y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}z = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t$$

Dalla 1ª equ. trovo x in funzione di t

Le operazioni alla Gauss non alterano le sol. di un sistema

$\boxed{\text{Dim}}$ $\begin{matrix} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} R_j = 0 \\ R_i = 0 \end{matrix}$

2^a operazione $\begin{matrix} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} R_i = 0 \\ aR_j + bR_i = 0 \end{matrix}$ (riga ricopiata)

Se è vero a sx, allora banalmente è vero a dx
Se è vero a dx, allora è vero a sx.
Infatti, se $R_i = 0$ e $aR_j + bR_i = 0$, allora per forza $aR_j = 0$
ma essendo $a \neq 0$, per forza $R_j = 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Matrice a scala}}$ Tutte le righe sono del tipo

$$\underbrace{0\ 0 \ldots 0\ 0}_{\text{zeri iniziali}}\ \underset{\text{numero } \neq 0}{*}\ \underbrace{* * * *}_{\text{altra roba, magari anche nulla}}$$

Nella prima riga possono non esserci zeri iniziali.
Le ultime righe possono essere solo zeri
In ogni riga c'è almeno uno zero iniziale in più rispetto alla riga precedente (tranne con le righe di tutti zeri al fondo)

Il tizio non nullo dopo gli zeri iniziali si chiama $\boxed{\text{PIVOT}}$ della riga.

$\boxed{\text{Fatto fondamentale}}$ Lavorando alla Gauss, posso portare ogni matrice nella forma a scala.
Una volta che la matrice è a scala, risolvo partendo dal basso.

SISTEMI E MATRICI A SCALA

1. Un sistema non ha soluzione se mi ritrovo una riga con il PIVOT in fondo a dx
2. Un sistema ha sol. unica se "tutti i gradini sono da 1". Questo è possibile, ma non garantito, solo se il numero delle eq. coincide con quello delle incognite
3. Un sistema ha ∞ sol. se ci sono dei gradini da + di 2. In questo caso posso assegnare a piacere le variabili nelle cui colonne non compaiono i pivot.

Esempio 1

$$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \\
\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\
x\ \ y\ \ z
\end{array}
\qquad
\begin{cases} 2x + z = 5 \\ 3z = 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{1}{2}(5 - z) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

$y = t$ libero

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{3}, t, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) + t\,(0, 1, 0)$$

Esempio 2

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \\
\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\
x\ \ y\ \ z\ \ w
\end{array}$$

y e w sono variabili libere

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + w = 0 \\ 3z + 5w = 1 \end{cases}
\qquad z = \frac{1 - 5w}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}w$$

$$x = \frac{1}{2}(-2y - z - w) = -y - \frac{z}{2} - \frac{w}{2}$$

$$= -y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}w\right) - \frac{w}{2}$$

$$x = -y - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}w - \frac{1}{2}w = -y - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}w$$

Posso assegnare liberamente $y = t$ e $w = s$ e ottengo

$$(x,y,z,w) = \left(-\frac{1}{6} - t + \frac{1}{3}s,\ t,\ \frac{1}{3} - \frac{5}{3}s,\ s\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + t\,(-1,1,0,0) + s\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{5}{3}, 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + t\,(-1,1,0,0) + s\,\underbrace{(1,0,-5,3)}$$

posso farlo perché i multipli di un certo v sono gli stessi di 3v

— o — o —

Variante di JORDAN all'algoritmo di Gauss.
Lavorando dal basso, dopo aver ridotto a scala possiamo mettere degli 0 sopra tutti i pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se non voglio essere ultraortodosso, posso anche passare a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$1^a - 3^a \rightsquigarrow x = 2$

$2 \cdot 2^a - 3 \cdot 3^a \rightsquigarrow y = \frac{7}{2}$

$\rightsquigarrow z = \frac{1}{2}$

— o — o —