591AA 21/22 – ELENCO DEI PROBLEMI 5

Problema 1. Trova

(a) $(1,2,3,4)-2(1,1,1,1)$
(b) Trova la linea che passa per $p=(1,0,0,1)$ e $q=(1,2,3,4)$.
(c) Trova la retta passante per $p=(1,1,1,1)$ nella direzione $v=(1,2,3,4)$.

Problema 2. Trova l'intersezione di

$$L(t)=(1,1,1,1)+t(1,0,0,-1)$$

con l'iperpiano $x_1+x_2+x_3-x_4=1$.

Problema 3. Trova un polinomio $p(x)$ di grado 2 tale che $p(1) = 0$, $p(2) = 3$, $p(3) = 8$.

Problema 4. Sia V il sottoinsieme dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ costituito da tutte le funzioni della forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

tali che tutti i coefficienti a_n e b_n, tranne finitamente, siano nulli. Dare una descrizione di V in termini di mappe da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ che sia simile alla descrizione dello spazio dei polinomi.

Problema 5. Dimostrare che l'insieme V definito nel problema precedente è uno spazio vettoriale verificando tutti gli assiomi.

Nota: In una lezione successiva, mostreremo che se V è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale W e

(a) V è chiuso sotto l'addizione;
(b) V è chiuso sotto la moltiplicazione scalare

allora V soddisfa tutti gli assiomi degli spazi vettoriali. L'insieme V è chiamato un sottospazio di W.

In particolare, una volta dimostrato che $\mathbb{R}^S$ è uno spazio vettoriale, abbiamo un modo semplice per dimostrare che altre collezioni naturali di funzioni formano uno spazio vettoriale senza dover controllare tutti gli assiomi.