La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

Sistemi del primo e del secondo ordine

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0 \qquad\qquad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

Applicando la regola di trasformazione della derivata

$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot s \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

Non e' piu' differenziale

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

FdT ingresso/uscita

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)}$$

Se vogliamo sapere la y(t) in risposta al gradino U(s)=1/s:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

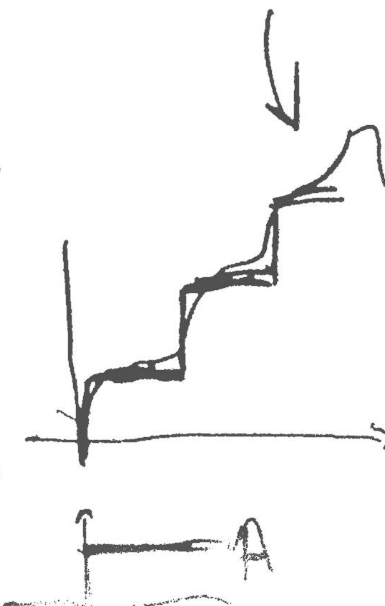
$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)}$$

Se vogliamo sapere la y(t) in risposta al gradino U(s)=1/s:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\boxed{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1}} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

FORMA
EVANS



La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

Se vogliamo sapere la y(t) in risposta al gradino U(s)=1/s:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty}\left(s \cdot \frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right) = 0$$

Teorema del valore iniziale

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right) = \frac{b_0}{a_0}$$

Teorema del valore finale

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

Se vogliamo sapere la y(t) in risposta al gradino U(s)=1/s:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

Due poli

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b_0/a_1}{(s + a_0/a_1) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0/a_1}$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0 \qquad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b_0/a_1}{(s + a_0/a_1) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0/a_1}$$

$$A = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{b_0/a_1}{(s + a_0/a_1) \cdot s} = \frac{b_0}{a_0} = G(0) \longleftarrow \text{Guadagno statico}$$

$$B = \lim_{s \to -a_0/a_1} (s + a_0/a_1) \cdot Y(s) = \lim_{s \to -a_0/a_1} (s + a_0/a_1) \cdot \frac{b_0/a_1}{(s + a_0/a_1) \cdot s} = -\frac{b_0}{a_0} = -G(0)$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_0/a_1}{s + a_0/a_1} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

$A = G(0) = b_0/a_0$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b_0/a_1}{(s + a_0/a_1) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0/a_1}$$

T costante di tempo del sistema dinamico

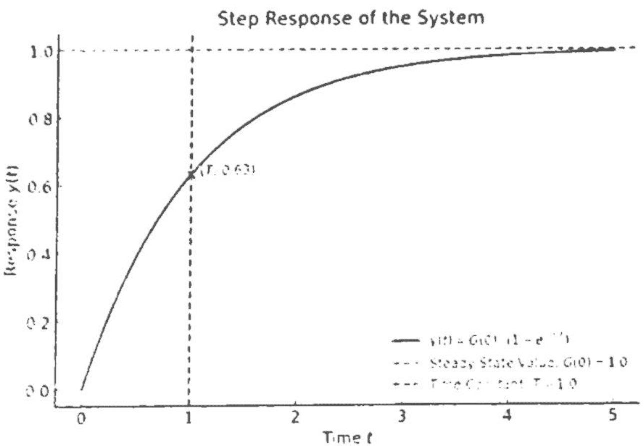
$$y(t) = A \cdot 1(t) + B \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \cdot 1(t) \longleftarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) \cdot 1(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$$

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

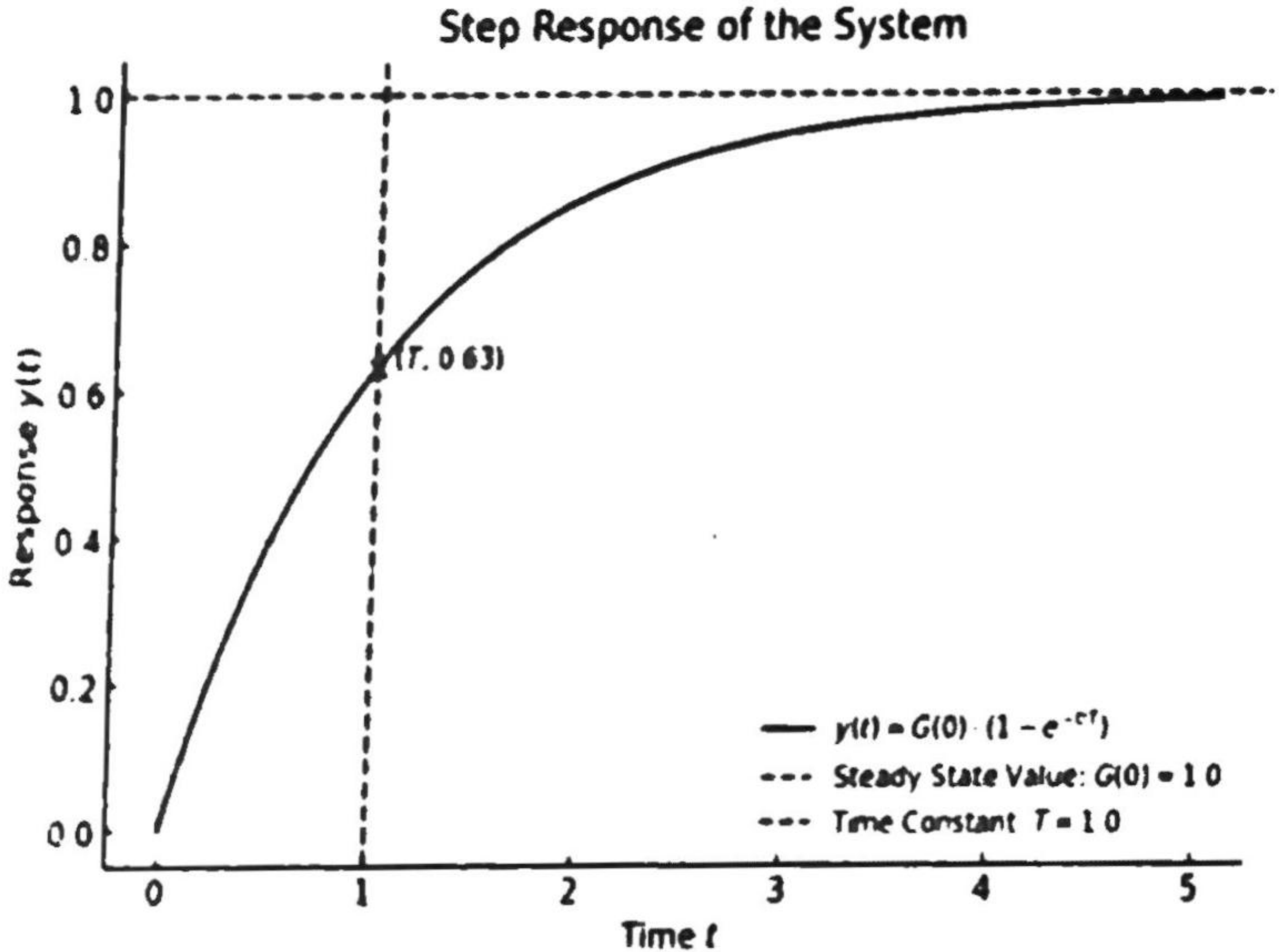
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b_0}{a_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0}{a_1}t}\right) \cdot 1(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$$



$$y(T) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \approx 0.63 \cdot G(0)$$

T costante di tempo del sistema dinamico

63% del valore di regime


Step Response of the System
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Response y(t)
(T, 0.63)
0
1
2
3
4
5
Time t
Steady State Value: G(0) = 1.0
Time Constant T = 1.0

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

Tempo di assestamento (settling time) *al i% e' il tempo che serve a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia ±i% intorno al valore di regime*

La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali

Tempo di assestamento (settling time) *al i% e' il tempo che serve a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia ±i% intorno al valore di regime*

Per esempio, il tempo di assestamento al 5%:

$$y(t_{ss}) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{ss}}{T}}\right) = 0.95 \cdot \underbrace{G(0)}_{\text{Valore di regime}} \longrightarrow \quad 0.05 = e^{-\frac{t_{ss}}{T}} \implies -\frac{t_{ss}}{T} = \ln(0.05)$$

$$t_{ss} = T \cdot \ln(20) \approx 3 \cdot T$$

3 volte la costante di tempo del sistema

La forma di Bode e la forma di Evans

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot s \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot s \cdot U(s) \longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

Possiamo scrivere le funzioni di trasferimento in due modi

***Forma di Bode**: evidenzia le costanti di tempo del sistema dinamico*

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{b_1}{b_0}}{1 + s \cdot \frac{a_1}{a_0}} = G(0) \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_z}{1 + s \cdot \tau}$$

Costante di tempo

La forma di Bode e la forma di Evans

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot s \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot s \cdot U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} = G(s)}$$

Possiamo scrivere le funzioni di trasferimento in due modi

Forma di Evans: *evidenzia le singolarità dinamiche del sistema, ovvero poli e zeri*

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

Sistemi del Secondo Ordine

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

Condizioni iniziali non nulle

$$y(0) = y_0$$

$$\frac{d(y(0))}{dt} = \dot{y}(0) \neq 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s \cdot Y(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} = s \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \dot{y}(0)$$

$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + a_2 \cdot \left(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0)\right) = b_0 \cdot U(s)$$

Equazioni del Secondo Ordine

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u$$

$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + a_2 \cdot \left(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0)\right) = b_0 \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s) + \frac{a_2 \cdot s \cdot y(0) + a_2 \cdot \dot{y}(0) + a_1 \cdot y(0)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

Risposta in evoluzione **forzata**

Risposta in evoluzione **libera**

Equazioni del Secondo Ordine: risposta forzata

$$\boxed{a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u}$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s) \longrightarrow p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{2 \cdot a_2}$$

Poli del sistema

$$\Delta = \frac{a_1^2}{4} - a_0 \cdot a_2$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \Rightarrow & 2 & \text{poli reali distinti} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow & 2 & \text{poli reali coincidenti} \\ \Delta < 0 & \Rightarrow & 2 & \text{poli complessi coniugati} \end{cases}$$

Equazioni del Secondo Ordine: risposta forzata

Caso Poli reali

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)$$

Forma di Bode, evidenzio costanti di tempo

Guadagno statico

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}, \quad G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

Equazioni del Secondo Ordine: risposta forzata

Caso Poli reali

$$Y(s) = \frac{b_0}{\underline{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}} U(s)$$

Forma di Bode, evidenzio costanti di tempo

Guadagno statico

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T_1)(1 + s \cdot T_2)}, \quad G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

Forma di Evans

$$G(s) = \frac{b_0/a_2}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad \boxed{T_1 \triangleq \frac{1}{p_1}, \quad T_2 \triangleq \frac{1}{p_2}}$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} = \frac{a_0}{a_2}$$

$$p_1 + p_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

Equazioni del Secondo Ordine: risposta forzata

Risposta al gradino

$$G(s) \cdot U(s) = \frac{b_0/a_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2) \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T_1} + \frac{C}{s+1/T_2}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{b_0/a_2}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)} = \frac{b_0}{a_2} \cdot T_1 \cdot T_2 = \frac{b_0 \cdot a_2}{a_2 \cdot a_0} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

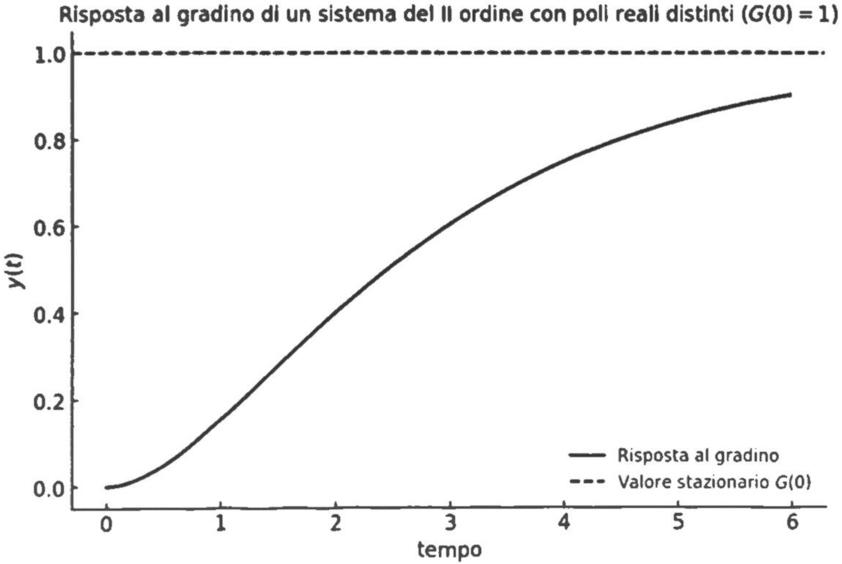
$$B = \lim_{s \to -\frac{1}{T_1}} \frac{b_0/a_2}{s(s+1/T_2)} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_1}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} = \frac{b_0 \cdot T_1^2 \cdot T_2}{a_2 \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \cdot G(0)$$

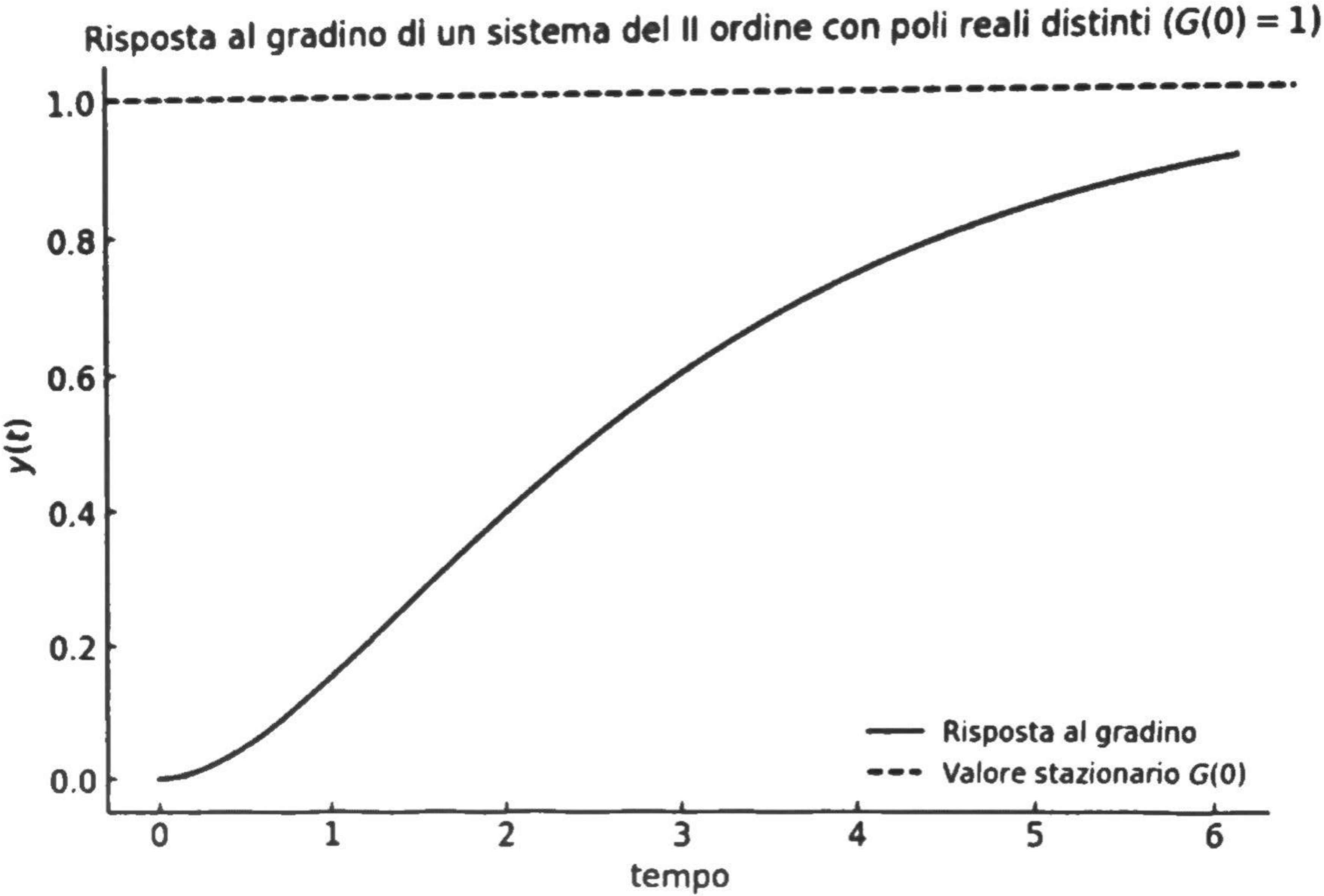
$$C = \lim_{s \to -\frac{1}{T_2}} \frac{b_0/a_2}{s(s+1/T_1)} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_2}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = -\frac{b_0 \cdot T_1 \cdot T_2^2}{a_2 \cdot (T_2 - T_1)} = -\frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot G(0)$$

Equazioni del Secondo Ordine: risposta forzata

Risposta al gradino

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = G(0)\left(1 + \frac{T_1 \cdot e^{-t/T_1} - T_2 \cdot e^{-t/T_2}}{T_2 - T_1}\right) \cdot 1(t)$$




Risposta al gradino di un sistema del II ordine con poli reali distinti (G(0) = 1)
y(t)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
5
6
tempo
Risposta al gradino
Valore stazionario G(0)