Dalla serie di Fourier all'integrale di Fourier

Analisi di segnali analogici aperiodici

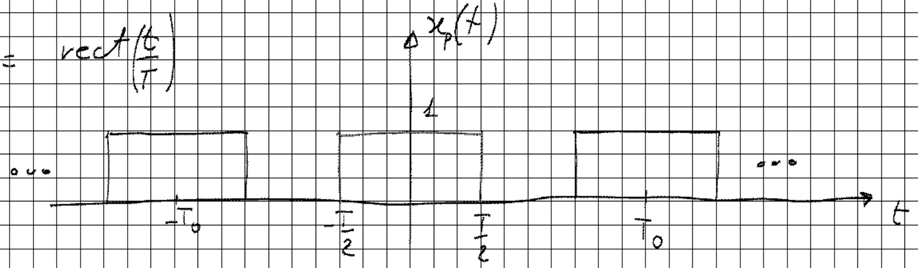
$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Non posso utilizzare la TSF.

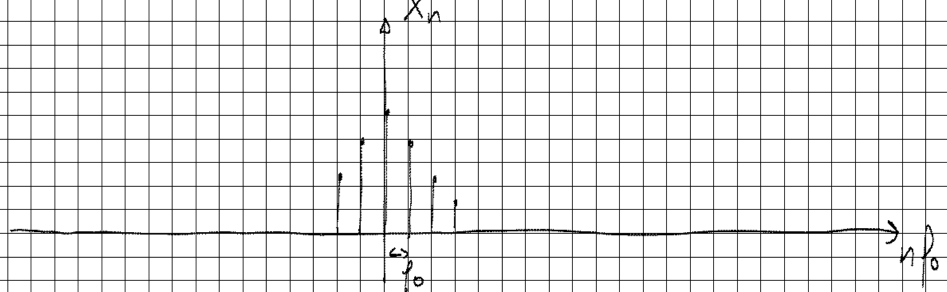
Posso però scrivere:

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_p(t) \quad , \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

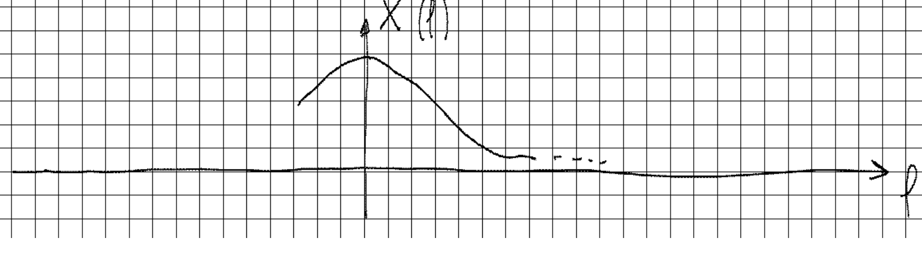
$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = \lim_{f_0 \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$



$$\Downarrow \lim_{f_0 \to 0}$$



$X(f)$ è una densità di ampiezza $\Rightarrow X(f) = \frac{X_n}{f_0}$

$$\lim_{f_0 \to 0} n f_0 = f$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \, df}$$

ANTITRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER (EQ. DI SINTESI)

$$X(f) = \lim_{f_0 \to 0} \frac{X_n}{f_0} = \lim_{\substack{f_0 \to 0 \\ (T_0 \to \infty)}} \frac{1}{f_0} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt}$$

TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER (EQ. DI ANALISI)

$$x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$$

$$X(f) = FT[x(t)] \quad , \quad x(t) = FT^{-1}[X(f)]$$

f = frequenza (Hz)

$\omega = 2\pi f$ = pulsazione (rad/s)

$|X(f)|$ = spettro di ampiezza

$\angle X(f)$ = spettro di fase

Criteri di esistenza

2 Criteri:

I) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ segnali ad energia finita

II) CRITERIO DI DIRICHELET

1) $x(t)$ assolutamente sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt < \infty$$

2) Fissati arbitrariamente t_1 e t_2, $x(t)$ ha un numero finito di discontinuità di prima specie e un numero finito di massimi e minimi nell'intervallo $t_1 \leq t \leq t_2$

SIMMETRIE DEGLI SPETTRI

$$X(f) = R(f) + j\, I(f) \quad , \quad R(f) = Re\{X(f)\}, \; I(f) = Im\{X(f)\}$$

$$X(f) = A(f)\, e^{j\varphi(f)} \quad , \quad A(f) = |X(f)| \, , \; \varphi(f) = \angle X(f)$$

·) Simmetria Hermitiana

$x(t)$ è reale $\iff$ $X(f)$ è Hermitiana

$$R(f) = Re\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, dt = R(-f)$$

$$I(f) = Im\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt = -I(-f)$$

$$X(-f) = R(-f) + j\,I(-f) = R(f) - j\,I(-f) = X^*(f)$$

$$X(-f) = X^*(f)$$

$$A(-f) = \sqrt{R^2(-f) + I^2(-f)} = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} = A(f)$$

$$\varphi(f) = \operatorname{arctg}\frac{I(-f)}{R(-f)} = \operatorname{arctg}\frac{-I(f)}{R(f)} = -\operatorname{arctg}\frac{I(f)}{R(f)} = -\varphi(f)$$

Segnali reali e pari

$$x(t) = x(-t)$$

$$FT\left[x(-t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{j2\pi f t'}\, dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi(-f)t'}\, dt' = X(-f)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'\right]^* = X^*(f)$$

$$X(f) = X^*(f) = X(-f) \Rightarrow Re(f) - j\,Im(f) = Re(-f) + j\,Im(-f)$$

$$Re(f) = Re(-f)$$

$$Im(f) = -Im(f) = 0$$

$$\boxed{X(f) \text{ è reale e pari}}$$

Segnali reali e dispari

$$x(t) = -x(-t)$$

$$FT\left[-x(-t)\right] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{j2\pi f t'}\, dt' = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi(-f)t'}\, dt' = -X(-f)$$

$$= -\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'\right]^{*} = -X^{*}(f)$$

$$X(f) = -X^{*}(f) \quad \Rightarrow \quad R(f) = 0$$

$$-I(-f) = I(f)$$

$\boxed{X(f) \text{ è immaginaria e dispari}}$