591AA 21/22 – ELENCO DEI PROBLEMI 9

Problema 1. Applicare l'eliminazione gaussiana a queste matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Risolvi i seguenti sistemi lineari usando l'eliminazione gaussiana.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & 7 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Verificare che i seguenti insiemi di matrici siano sottospazi:

(a) U è l'insieme delle matrici $A \in M_{n\times n}$ tali che $A + A^t = 0$.

(b) U è l'insieme delle matrici $A \in M_{n\times n}$ triangolari superiori $A = (a_{ij})$ tali che $i > j \implies a_{ij} = 0$. Esempio: $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

(c) Ricordiamo che se $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$ allora $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Verficare $U = \{A \in M_{n\times n} \mid A + A^t = 0\}$ è un sottospazio di $M_{n\times n}$.

Problema 4. Trova lo span dei seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problema 5. Trova una base per gli spazi riga delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 6. Trova una base per gli spazi colonna delle matrici del problema 5.

Problema 7. Trova una base per il kernel delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Problema 8. Trova una base per il complemento ortogonale del sottospazio attraversato dai seguenti vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$