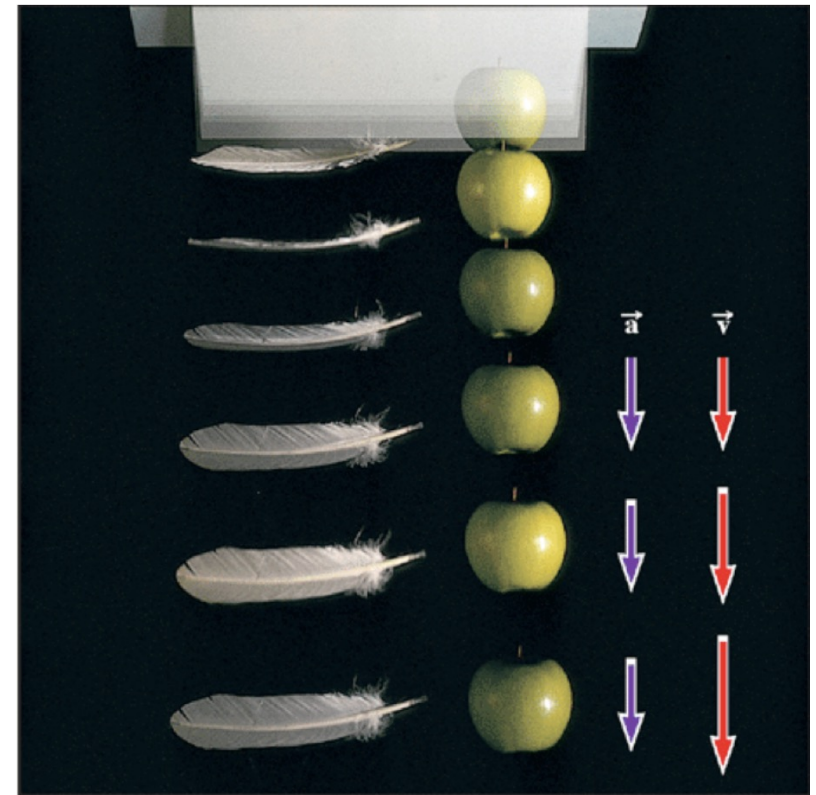


# Accelerazione di gravità

Un oggetto lasciato libero cade verso terra per effetto della forza di gravità.

L'accelerazione causata dalla gravità è la stessa per qualunque oggetto: in assenza di altre forze (per esempio, resistenza dell'aria) tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione.



L'accelerazione di gravità si indica per convenzione con la lettera  $g$ .

- Alle nostre latitudini, alla superficie terrestre:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- All'equatore,  $g = 9.78 \text{ m/s}^2$
- Al polo nord,  $g = 9.83 \text{ m/s}^2$

# Caduta libera dei gravi

Nell'esempio a lato,

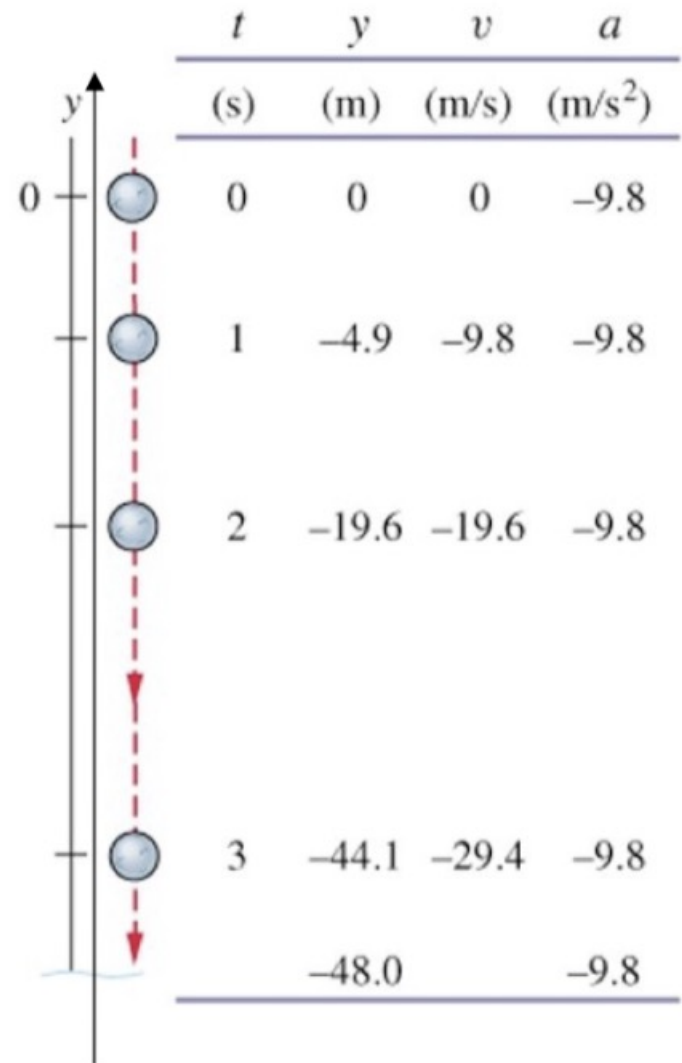
$$y_0 = y(t = 0) = 0$$

$$v_0 = v_{0y}(t = 0) = 0$$

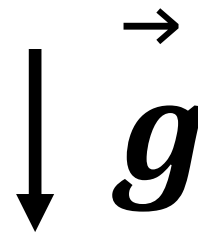
$$a_y = -g$$

Il segno dell'accelerazione è dovuto alla scelta del verso dell'asse y (positivo verso l'alto, supponiamo di essere in cima ad un edificio)

$$v(t) = -gt \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



# Un altro esempio moto 1D



$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$$

$$v = v(t) = at + v_0$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$$

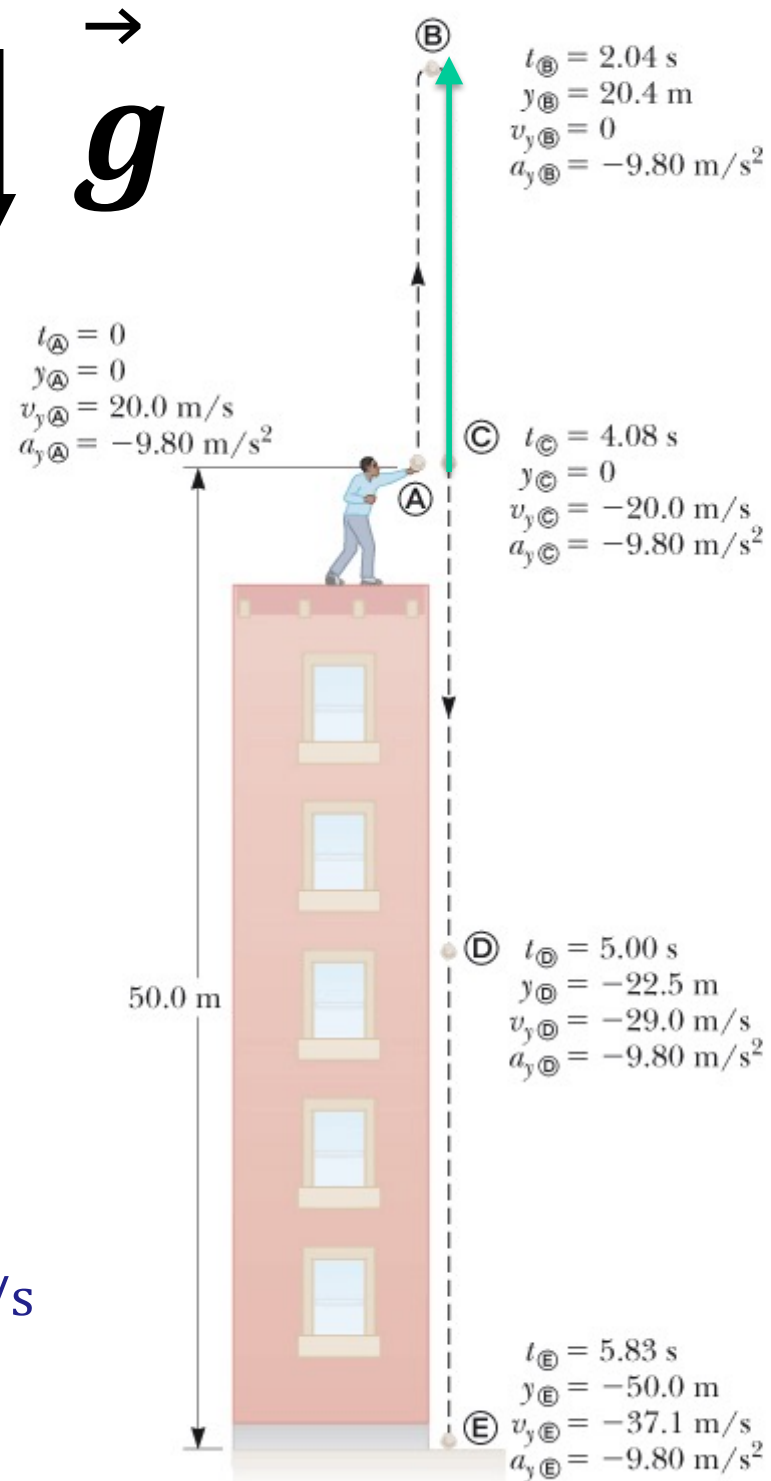
$$a = a_y = -g$$

$$v = v_y$$

$$v_0 = v_{0y}$$

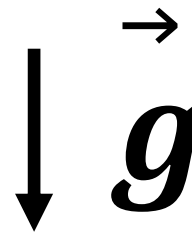
$$v_{yi} = v_y(t = 0) = v_0 = 20 \text{ m/s}$$

$$y_{yi} = y(t = 0) = y_0 = 0 \text{ m}$$



$$v_0 = 20 \text{ m/s} \quad a = -9,8 \text{ m/s}^2$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$



D.1 In quale istante  $t^*$  la palla raggiunge la quota massima?

R.1 Quando raggiunge la quota massima la velocità si annulla, per cui:

$$v = at + v_0 \Rightarrow t^* = -\frac{v_0}{a} = 2.04 \text{ s}$$

D.2 A che quota  $y_{max}$  arriva la pallina (usare il sistema di riferimento indicato)?

R.2  $y_{max}$  viene raggiunta a  $t = t^*$ , pertanto:

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0 \Rightarrow y_{max} = v_0t^* + \frac{1}{2}at^{*2} = 20.4 \text{ m}$$

D.3 Determinare il tempo  $t'$  che impiega la pallina una volta lanciata a ritornare nella stessa posizione

R.2 per  $t = t'$ ,  $y(t') = 0$  pertanto:

$$y(t') = 0 = v_0t' + \frac{1}{2}at'^2 = t'(v_0 + \frac{1}{2}at')$$

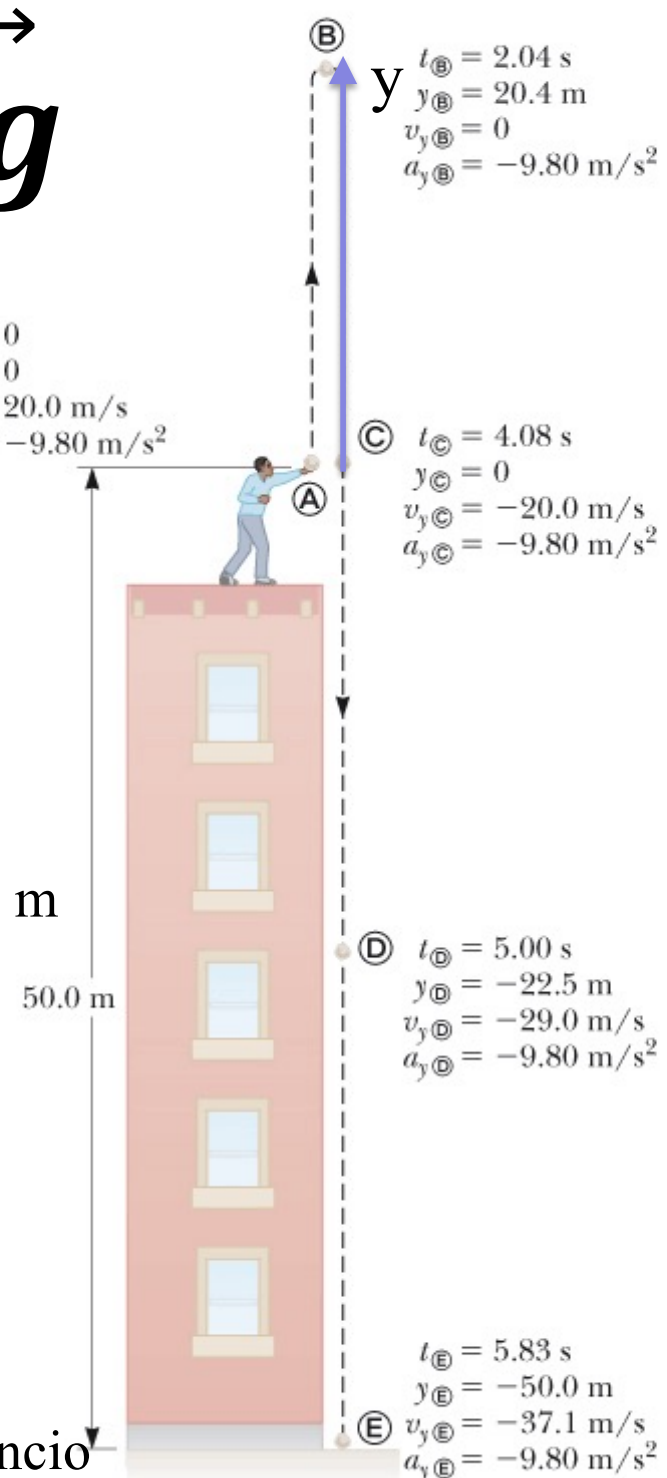
$$\Rightarrow t' = -\frac{2v_0}{a} = 4.08 \text{ s} \quad \text{poichè } t = 0 \text{ corrisponde al lancio}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{A}} &= 0 \\ y_{\text{A}} &= 0 \\ v_{y\text{A}} &= 20.0 \text{ m/s} \\ a_{y\text{A}} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{C}} &= 4.08 \text{ s} \\ y_{\text{C}} &= 0 \\ v_{y\text{C}} &= -20.0 \text{ m/s} \\ a_{y\text{C}} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{D}} &= 5.00 \text{ s} \\ y_{\text{D}} &= -22.5 \text{ m} \\ v_{y\text{D}} &= -29.0 \text{ m/s} \\ a_{y\text{D}} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

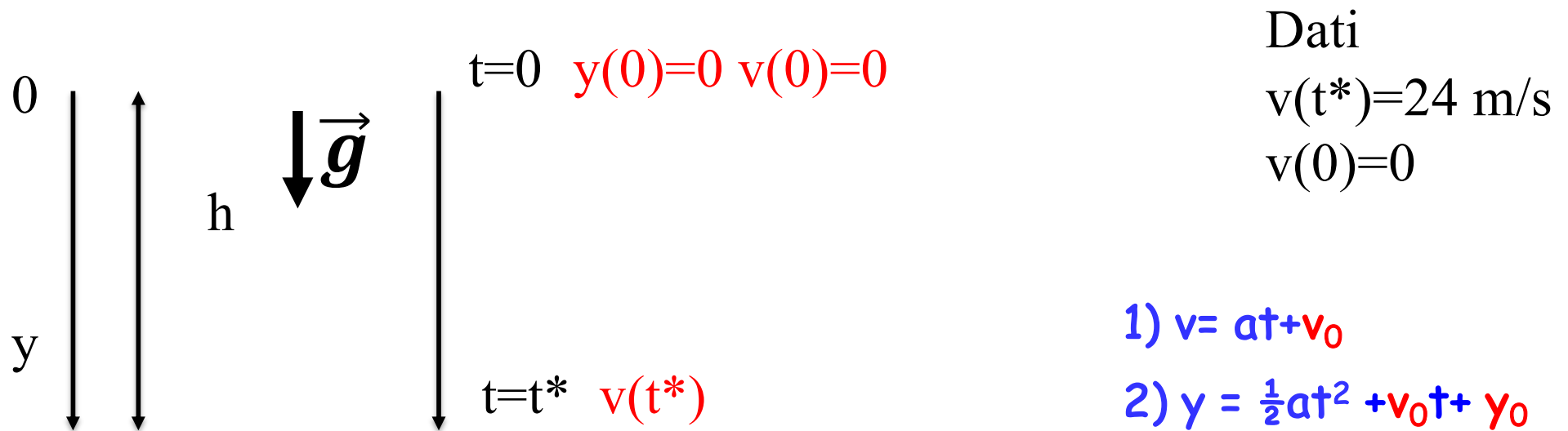
$$\begin{aligned} t_{\text{E}} &= 5.83 \text{ s} \\ y_{\text{E}} &= -50.0 \text{ m} \\ v_{y\text{E}} &= -37.1 \text{ m/s} \\ a_{y\text{E}} &= -9.80 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



## Esercizio

In un cantiere una chiave inglese viene lasciata cadere da ferma da una certa altezza e arriva al suolo con velocità  $v=24$  m/s.

1) Quanto tempo impiega la chiave ad arrivare a terra?

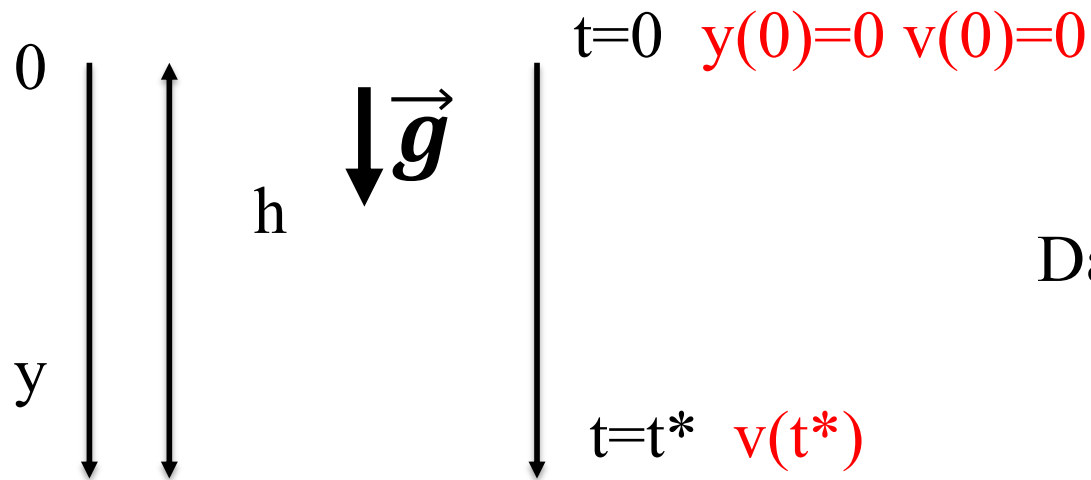


Dalla 1)  $v(t^*) = at^*$

$$\vec{a} = g\hat{y}$$

$$v(t^*) = at^* \Rightarrow t^* = \frac{v(t^*)}{g} = 2.45 \text{ s}$$

2) Da che altezza  $h$  è caduta la chiave?



$$1) v = at + v_0$$

$$2) y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + y_0$$

Dalla 2)  $y(t^*) = h = \frac{1}{2}at^{*2}$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}g \left( \frac{v(t^*)}{g} \right)^2 = 29,4\text{m}$$

Avremmo anche potuto usare:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0) \quad \Rightarrow v^2(t^*) = 2gh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2(t^*)}{2g}$$

# Come impostare la risoluzione di un problema

Qualche consiglio utile:

- a) Leggere attentamente il testo
- b) Fare un disegno scegliendo il sistema di riferimento
- c) Analizzare il problema: quali relazioni cinematiche si possono usare?
- d) Risolvere il problema simbolicamente
- e) Verificare se la risposta è dimensionalmente corretta
- f) Risolvere il problema numericamente.

## Esercizio

Su un'autostrada rettilinea un camion  $C$  parte dal km 0 al tempo  $t = 0$  e viaggia con velocità costante pari a 90 km/h. Dopo 10 minuti un'automobile parte dal km 0 con velocità di 120 km/h. Rappresentare graficamente i due moti e calcolare dove e quando l'auto supera il camion. (**Suggerimento:** usate km e minuti invece di metri e secondi)

### Soluzione

Le velocità e la legge oraria del camion  $C$  sono:

$$V_C = 1.5 \text{ km/min}$$

Le velocità e la legge oraria dell'auto  $A$  sono:

$$\begin{cases} V_A = 0 & \text{per } 0 < t < 10' \\ V_A = 2 \text{ km/min} & \text{per } t > 10' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A(t) = 0 & \text{per } 0 < t < 10' \\ x_A(t) = x_A(t = 10') + V_A(t - 10') = V_A(t - 10') & \text{per } t > 10' \end{cases}$$

L'auto raggiunge il camion a un tempo  $t^* > 10'$  tale che:

$$x_A(t^*) = x_C(t^*) \Rightarrow V_A(t^* - 10') = V_C t^* \Rightarrow t^* = \frac{V_A}{V_A - V_C} 10' = 40'$$



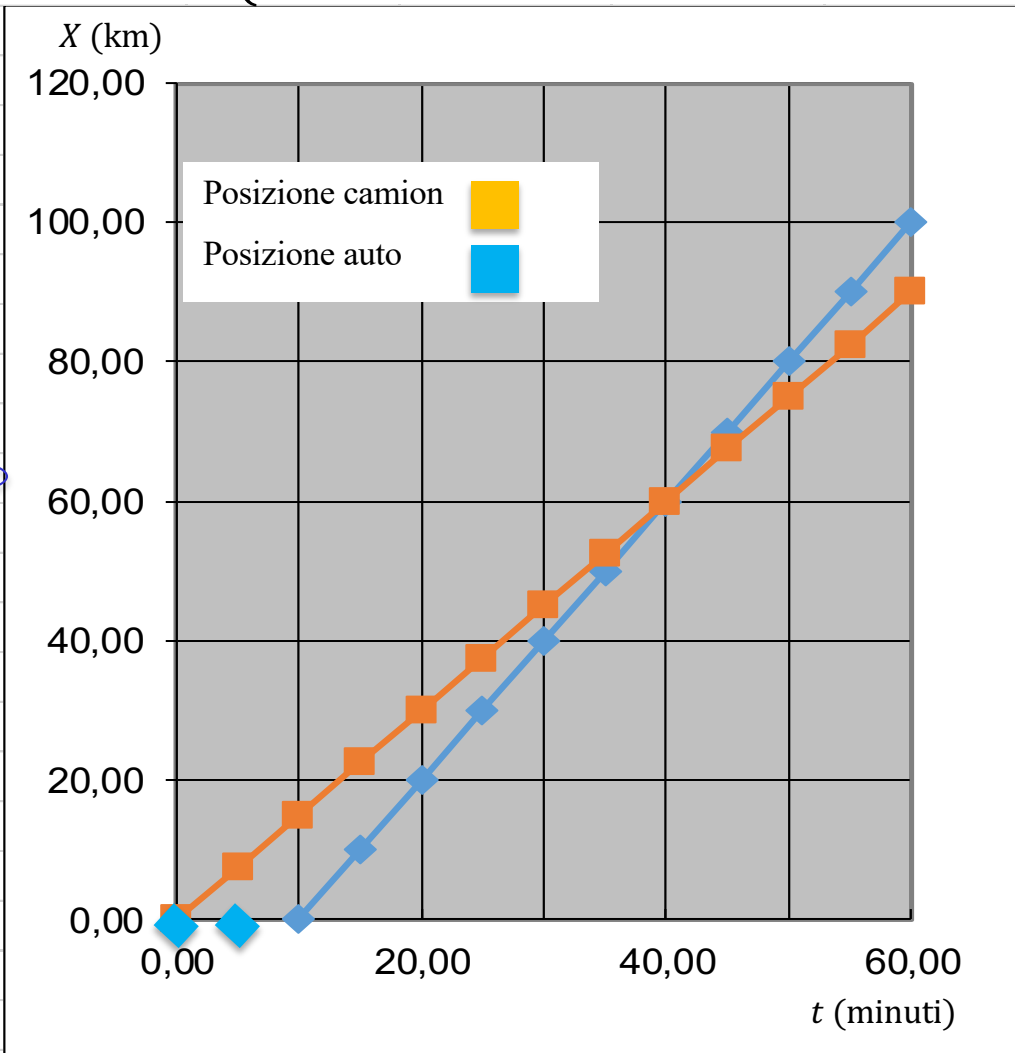
# Rappresentazione grafica

$$V_C = 1.5 \text{ km/min} \quad x_C(t) = V_C t$$

$$\begin{cases} V_A = 0 & \text{per } 0 < t < 10' \\ V_A = 2 \text{ km/min} & \text{per } t > 10' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A(t) = 0 & \text{per } 0 < t < 10' \\ x_A(t) = V_A(t - 10') & \text{per } t > 10' \end{cases}$$

t (min)	Xa (km)	Xc (km)
0,00	0,00	0,00
5,00	0,00	7,50
10,00	0,00	15,00
15,00	10,00	22,50
20,00	20,00	30,00
25,00	30,00	37,50
30,00	40,00	45,00
35,00	50,00	52,50
40,00	60,00	60,00
45,00	70,00	67,50
50,00	80,00	75,00
55,00	90,00	82,50
60,00	100,00	90,00



# Moto di un punto materiale in 2D-3D

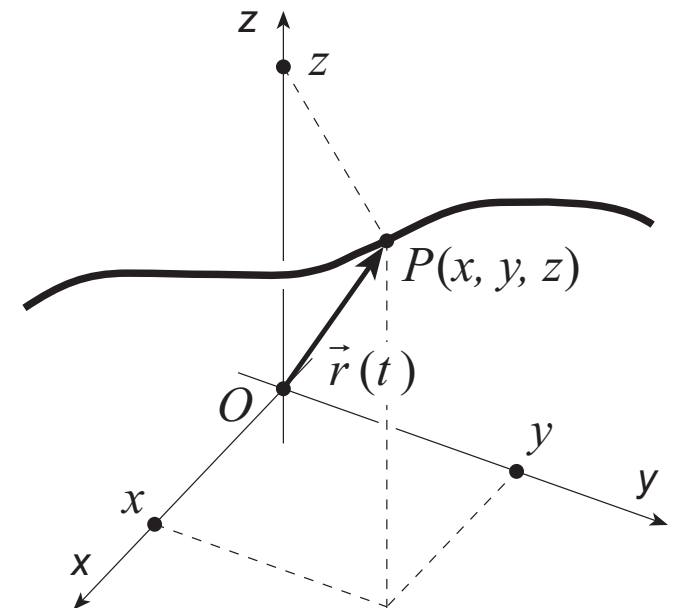
- **La legge oraria** è ora una funzione vettoriale in cui le coordinate sono variabili dipendenti ed il tempo è la variabile indipendente

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- La curva continua prende il nome di **traiettoria**

è l'insieme delle posizioni occupate dal punto materiale durante il moto



# Cinematica in due o più dimensioni

- Le grandezze cinematiche fondamentali:

- posizione
- velocità
- accelerazione

sono dei vettori nello spazio a due o tre dimensioni, dotati di modulo, direzione, verso.

In realtà anche nel moto rettilineo tali grandezze sono dei vettori, ma ... in una dimensione! Hanno un segno e un modulo ma la direzione è fissata.

- Il corpo percorre una traiettoria nello spazio

# Moti in 2-D e 3-D

L'estensione ai casi 2-D e 3-D si ottiene applicando le definizioni di velocità ed accelerazione alle singole componenti: il moto 2-D (3-D) e' la "sovrapposizione" di 2 (3) moti 1-D.

Posizione

$$\vec{s} = \vec{s}(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

$$v_x = v_x(t)$$

$$v_y = v_y(t)$$

$$v_z = v_z(t)$$

Accelerazione

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

$$a_x = a_x(t)$$

$$a_y = a_y(t)$$

$$a_z = a_z(t)$$

# Moto di un punto materiale in 3D: posizione e spostamento

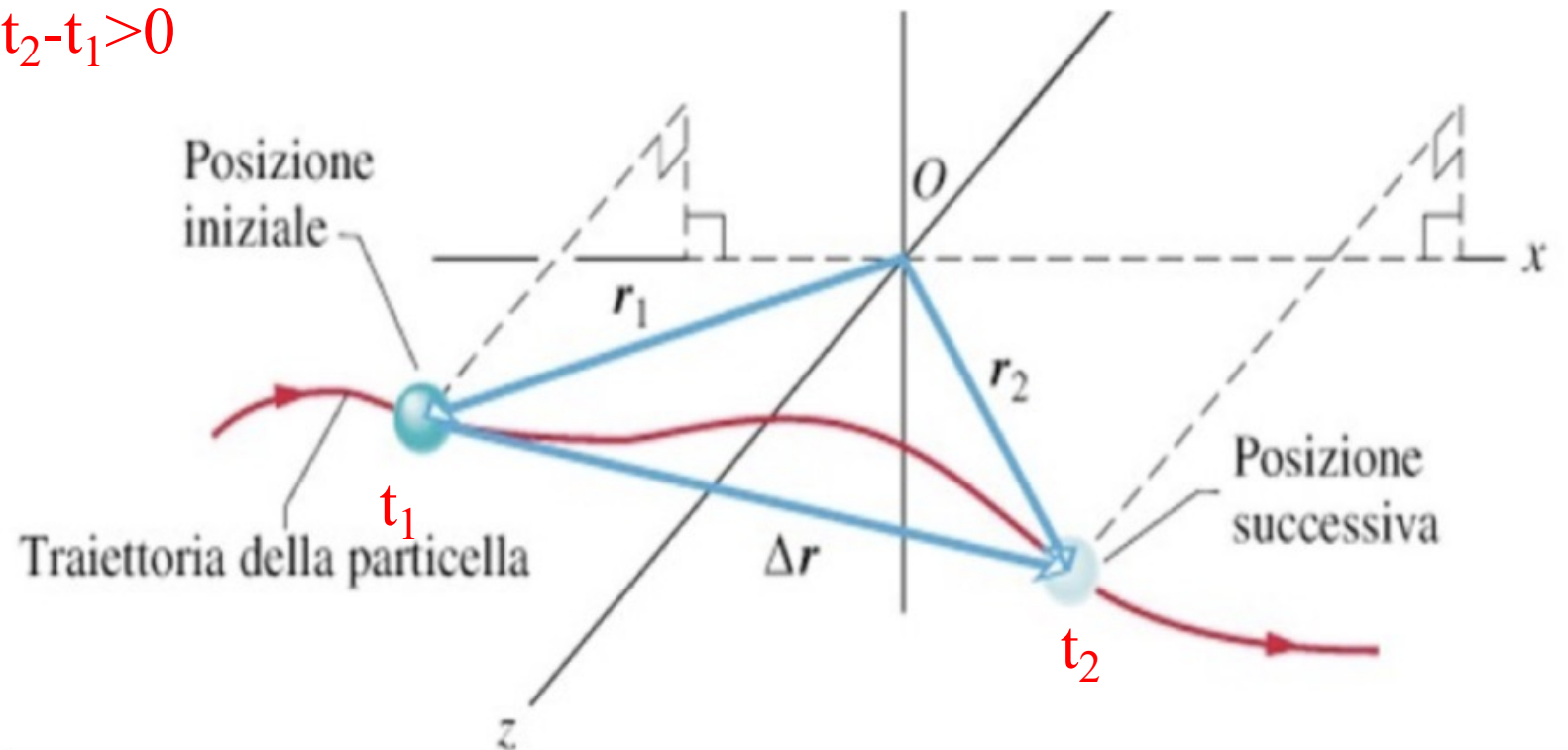
- Vettore posizione:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

- Vettore spostamento tra  $t_1$  e  $t_2$  :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

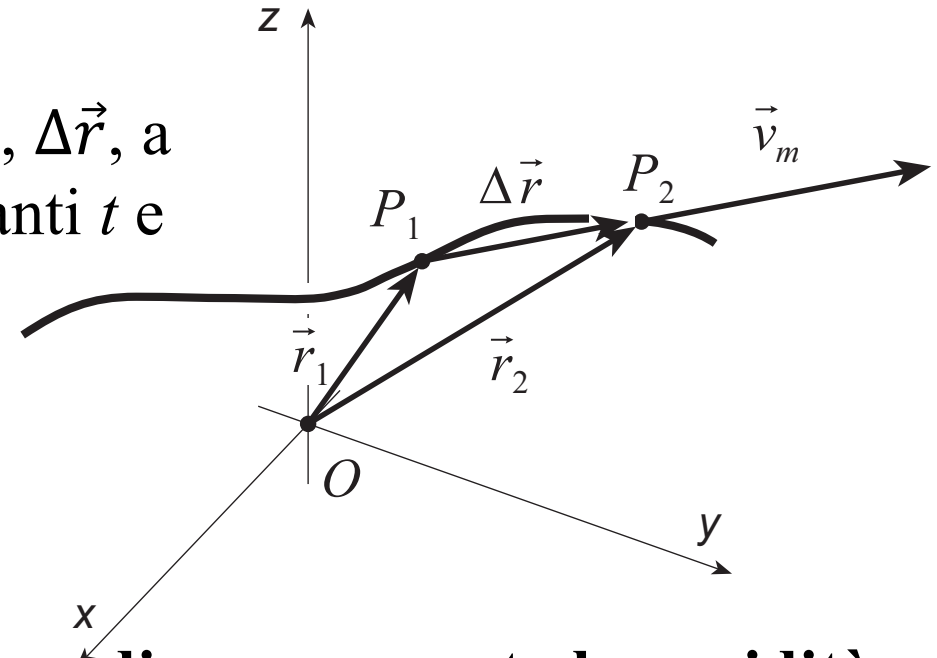
$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$$



## Velocità media 3-D

- Possiamo scrivere il vettore spostamento del punto materiale,  $\Delta\vec{r}$ , a partire dalla posizione tra gli istanti  $t$  e  $t+\Delta t$ .

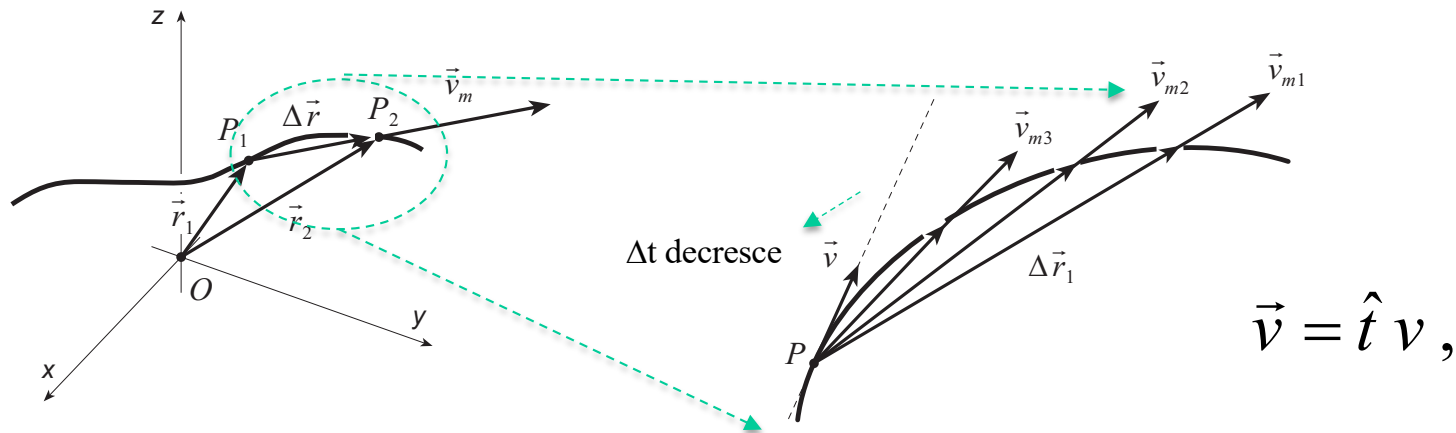
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$



- come in precedenza la **velocità media rappresenta la rapidità con cui varia la posizione**
- **è il rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui avviene lo spostamento**

$$\vec{V}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

- Se procediamo come prima diminuendo l'ampiezza del  $\Delta t$  otteniamo velocità medie che «tendono» ad avvicinarsi alla retta tangente alla traiettoria nel punto  $P_1$



- Definiamo quindi in modo analogo al caso unidimensionale la **Velocità istantanea** (o semplicemente **velocità**) il limite della velocità media per  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\vec{V} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Alcune **note importanti** sulla velocità:

- È una grandezza fisica **vettoriale**:

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

La velocità è quindi la **derivata del vettore posizione rispetto al tempo**.

- La velocità è sempre **tangente alla traiettoria** del punto, **coerentemente con il significato geometrico della derivata** (direzione della tangente ad una curva data).
- La velocità più famosa ed importante in fisica è la **velocità della luce nel vuoto**:  $c = 300000 \text{ km/s}$ .
- Se le velocità sono **trascurabili rispetto a  $c$**  si può usare la **meccanica classica**, che è perfettamente adeguata; in caso contrario è necessaria la **meccanica relativistica** (Einstein, 1905)



**Velocità media:**  $\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

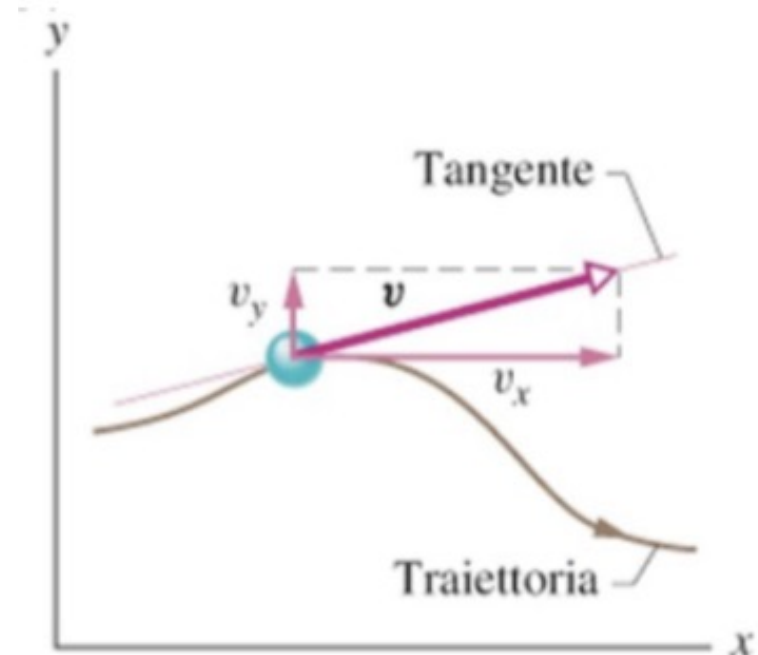
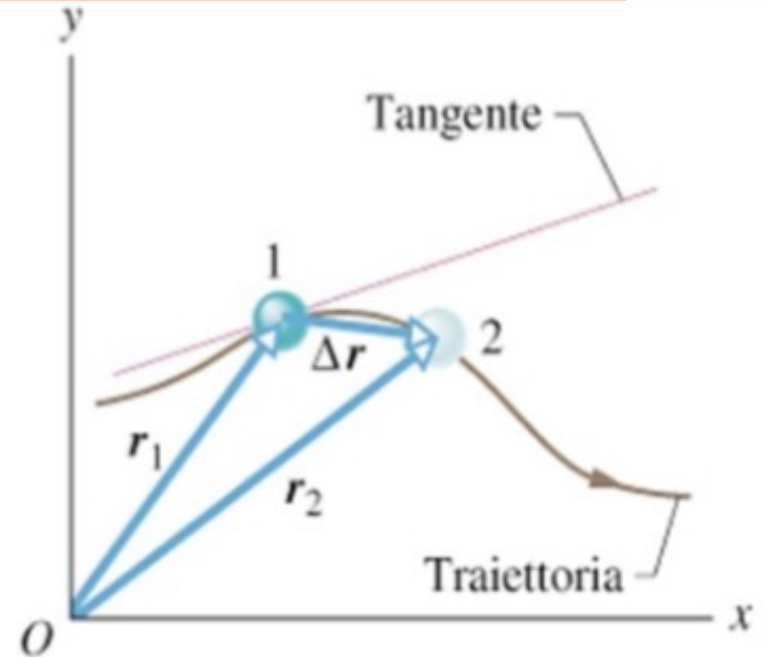
**Velocità istantanea:**

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

- è sempre tangente alla traiettoria in coordinate cartesiane



# accelerazione media e istantanea in coordinate cartesiane

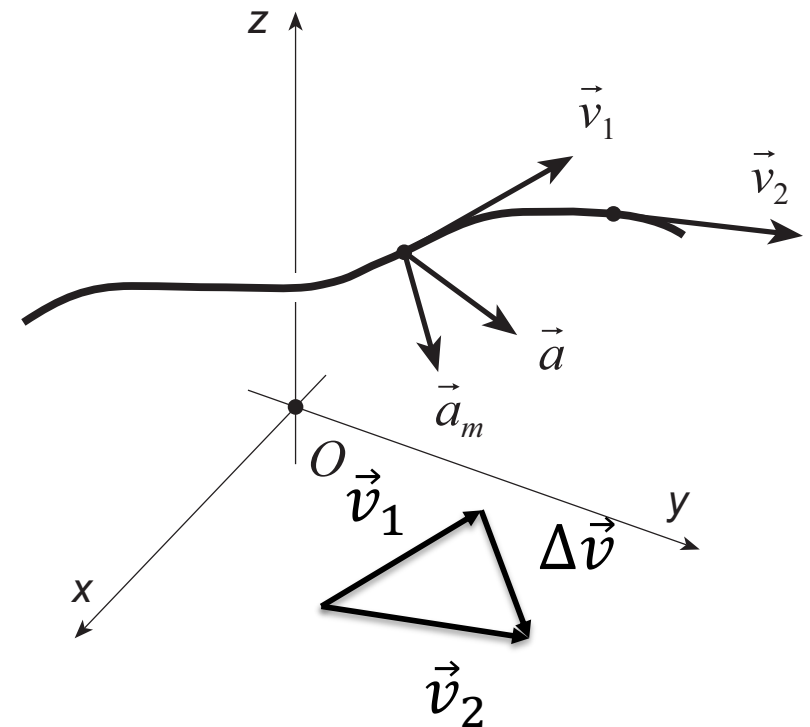
- Analogamente definiamo la rapidità con cui cambia il vettore velocità nel tempo, tra due tempi  $t_1$  e  $t_2$  con  $t_2 > t_1$ , l'accelerazione media tra  $t_1$  e  $t_2$ :

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- Nel caso 3-D l'accelerazione istantanea al tempo  $t$  è definita da:

$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2 x}{dt} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt} \hat{j} + \frac{d^2 z}{dt} \hat{k} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

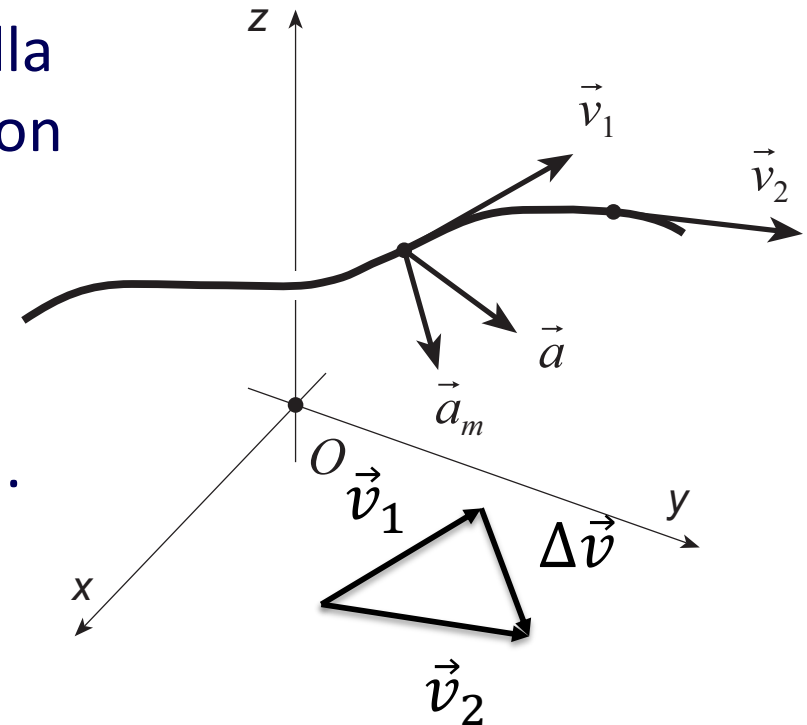


## Accelerazione (2)

- In generale, in un moto curvilineo, la velocità cambia sia in modulo che in direzione

⇒ l'accelerazione può essere non nulla anche se il modulo della velocità non cambia.

- L'accelerazione è un vettore nella direzione della variazione della velocità.



⇒ Poichè la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria s'incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della traiettoria

## Accelerazione (3)

Scomponiamo velocità e accelerazione in parte tangenziale (lungo la tangente alla curva) e parte radiale (lungo la normale)

Introducendo i versori  $\hat{u}_T$  e  $\hat{u}_N$ :

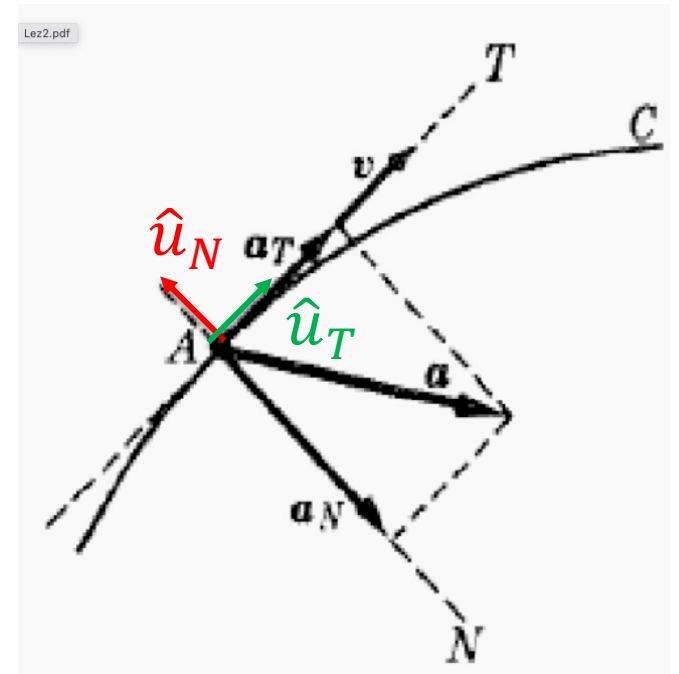
$$\vec{v} = v\hat{u}_T \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$\hat{u}_T$  dipende dal tempo, ma

$$\frac{d(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T)}{dt} = 0 = 2\hat{u}_T \cdot \frac{d(\hat{u}_T)}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} \perp \hat{u}_T$$

$$\vec{a} = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$



- Da qui si vede che  $a_T$  è legata alla variazione del modulo,  $v$ , di  $\vec{v}$  e  $a_N$  alla variazione della direzione di  $\vec{v}$ .

# accelerazione istantanea o accelerazione

**Note importanti** sull'accelerazione:

- $[\vec{a}] = \text{m/s}^2$
- È una grandezza fisica **vettoriale**:  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$   
$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$
- è importante perché è **legata alle forze**
- nei grafici velocità vs tempo in un moto 1- $d$  l'accelerazione è **tangente alla curva della velocità**
- nei moti 2-D e 3-D in generale  $\vec{a}$  ha componenti sia **parallela** ( $\vec{a}_{\parallel}$ ) sia **perpendicolare** ( $\vec{a}_{\perp}$ ) **alla traiettoria** del punto;
- ( $\vec{a}_{\perp}$ ) è sempre diretta verso l'interno della traiettoria  $\Rightarrow$   
**accelerazione centripeta**

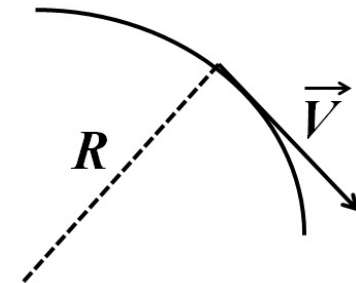
## accelerazione istantanea o accelerazione (2)

- nei moti 2-D e 3-D  $\vec{a}$  ha componenti sia **parallela** ( $\vec{a}_{\parallel}$ ) sia **perpendicolare** ( $\vec{a}_{\perp}$ ) **alla traiettoria** del punto
- ( $\vec{a}_{\perp}$ ) è **sempre diretta verso l'interno** della traiettoria

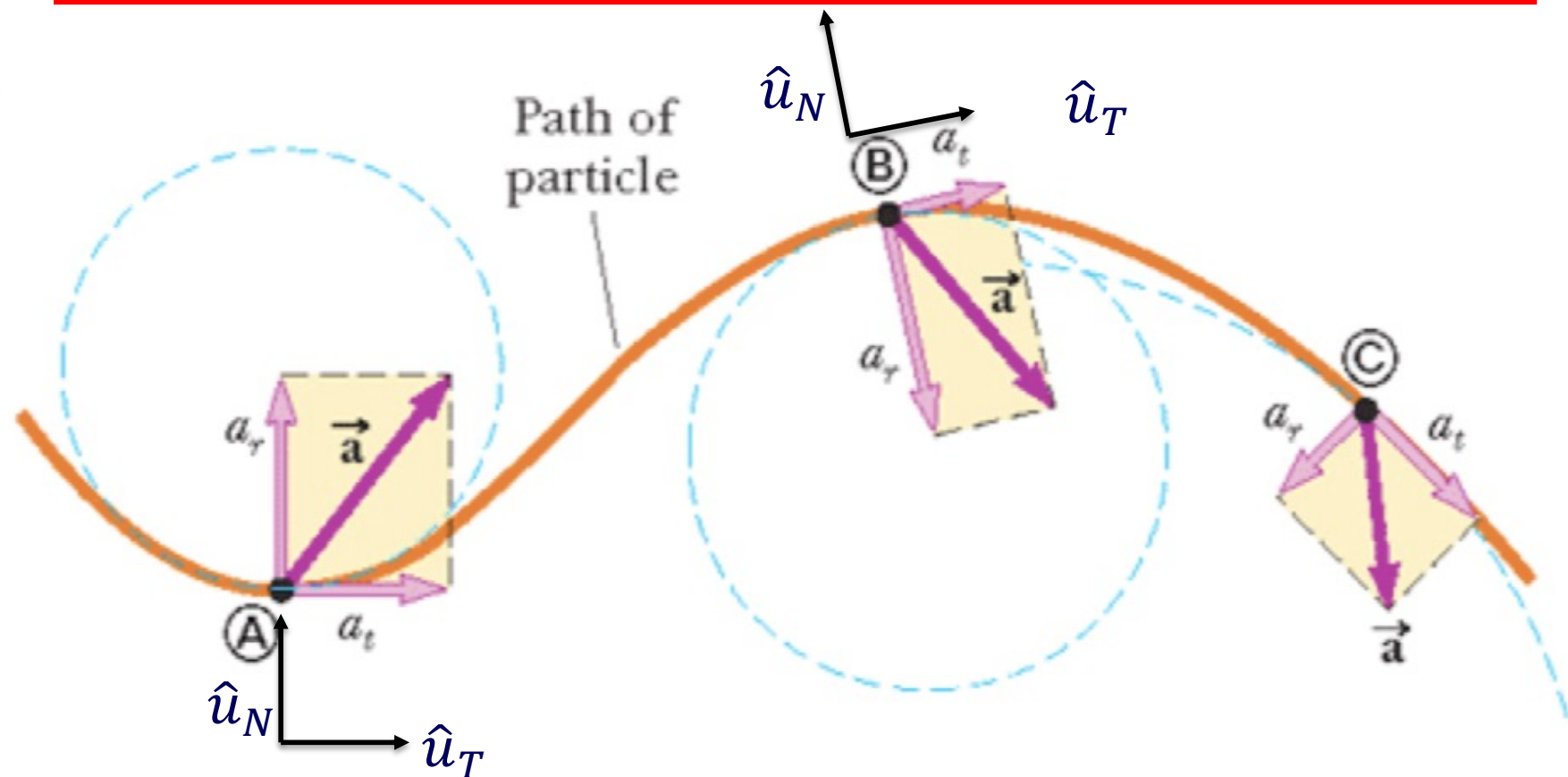
Possiamo anticipare che:

- $a_{\parallel} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$  può essere positiva, negativa, nulla
- $a_{\perp} = \frac{v^2}{R}$

dove  $R$  è il raggio della circonferenza tangente alla curva (N.B. **In generale non è costante**, cioè la circonferenza tangente e la velocità cambiano da punto a punto).



# Accelerazione nel moto curvilineo

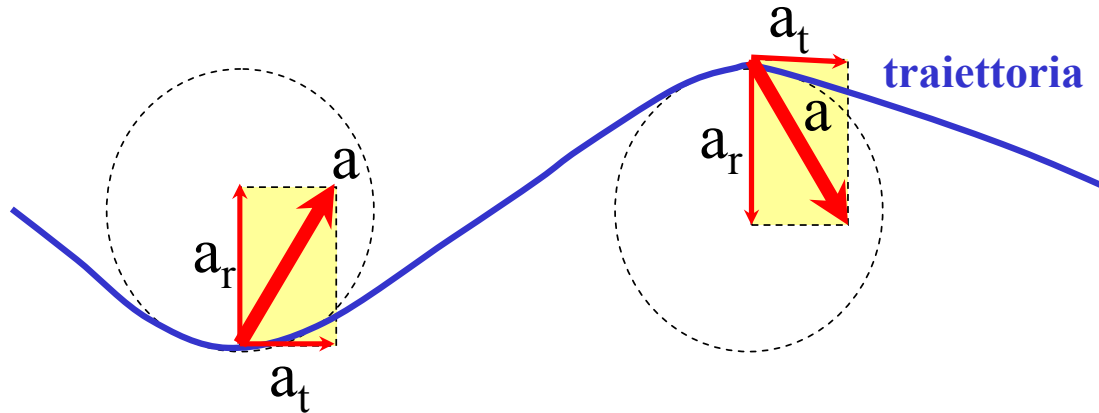


- il cambiamento del modulo della velocità produce l'accelerazione tangenziale
- il cambiamento della direzione del vettore velocità produce l'accelerazione radiale (**centripeta**)

# Traiettoria curva arbitraria

[velocità variabile in direzione e modulo]

approssimo la curva con **archi** di **circonferenza**:



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

accelerazione tangenziale:  
dovuta a  
variazione del **modulo** della velocità

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r}$$

accelerazione radiale [o centripeta]:  
dovuta a  
variazione della **direzione** della velocità

$\vec{a}_r$  diretta sempre verso  
l'interno della concavità

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$



## Percorso inverso: dall'accelerazione alla legge oraria

Come si determina la velocità  $\vec{V}$  se è nota l'accelerazione  $\vec{a}$  ?

Sia  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  nota per  $t > t_0$  :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow dV_x = a_x dt \Rightarrow V_x(t) - V_x(t_0) = \int_{V_{x_0}}^{V_x} dV_x = \int_{t_0}^t a_x dt$$

$$V_x(t) = V_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t') dt'$$

dove  $V_x(t_0) \equiv V_{x_0}$  è "condizione iniziale" nota. Analogamente:

$$V_y(t) = V_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t') dt' \quad V_z(t) = V_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t') dt'$$

Per cui in notazione vettoriale:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

## Percorso inverso: dall'accelerazione alla legge oraria

- Legame tra le grandezze della cinematica: relazioni scritte per il caso 1D, adesso intese come valide per la «componente lungo l'asse x»
- Equazioni che possono essere «estese» agli altri 2 assi coordinati

(1) da  $a_{x,y,z}$  a  $v_{x,y,z}$

$$\int_{t_0}^t dv_x = v_x(t) - v_{x0} = \int_{t_0}^t a_x(\tau) d\tau$$

$$\int_{t_0}^t dv_y = v_y(t) - v_{y0} = \int_{t_0}^t a_y(\tau) d\tau$$

$$\int_{t_0}^t dv_z = v_z(t) - v_{z0} = \int_{t_0}^t a_z(\tau) d\tau$$

(2) da  $v_{x,y,z}$  a  $x,y,z$

$$\int_{t_0}^t dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau$$

$$\int_{t_0}^t dy = y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t v_y(\tau) d\tau$$

$$\int_{t_0}^t dz = z(t) - z_0 = \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau$$

- In forma vettoriale indicando con :

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$$

il vettore posizione e la velocità al tempo  $t$  sono dati rispettivamente da:

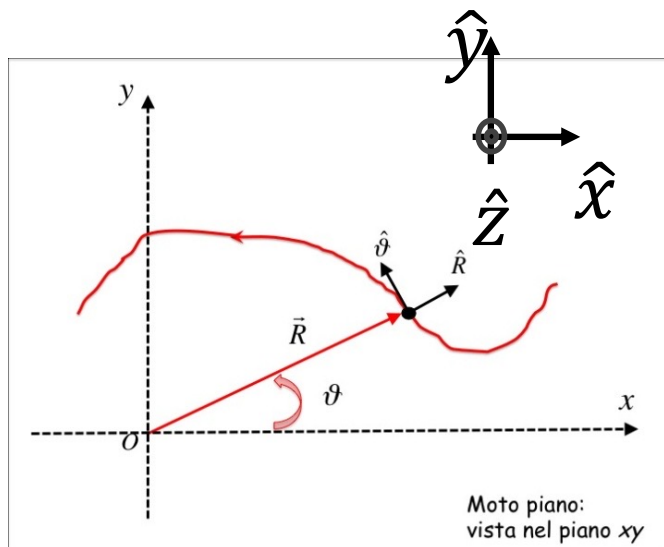
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau$$

## Moti piani in coordinate polari

**Moti piani** sono moti la cui traiettoria giace su un piano (per semplicità scegliamo il piano  $xy$ ).

Vediamo come è possibile descriverli utilizzando le **coordinate polari piane** ( $R, \theta$ )



Il vettore  $\vec{R}$  e i versori  $\hat{R}$  e  $\hat{\vartheta}$  hanno le componenti cartesiane:

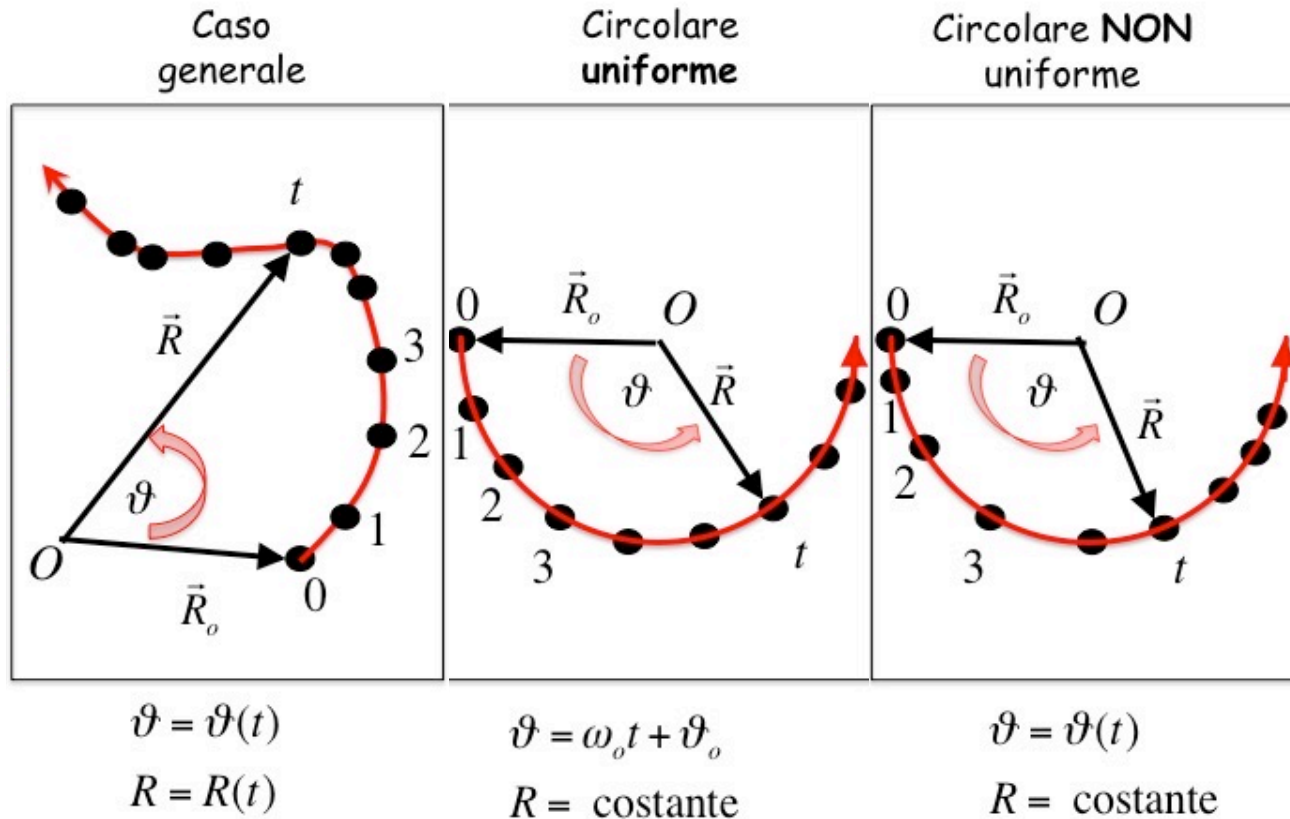
$$\vec{R} = (x, y, 0) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

$$\hat{R} = (x/R, y/R, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

sono **moti circolari** quelli in cui la traiettoria è una circonferenza.

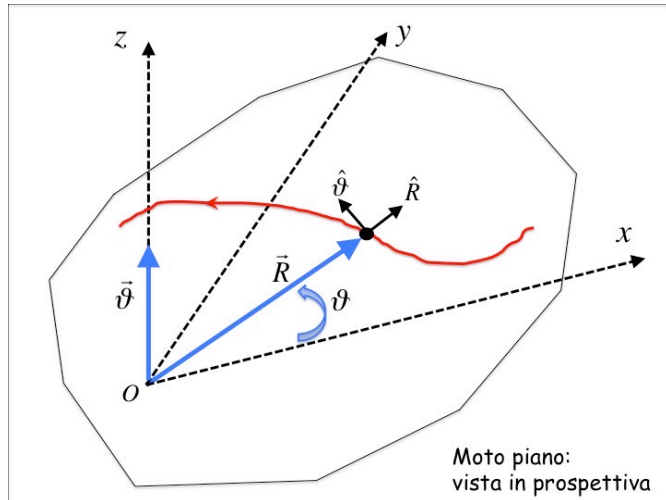
# Moto piano vario e circolare



- Moti nel piano
  - i punti rappresentano la posizione a intervalli di tempo uguali
- **Caso generale, il moto è vario nel piano**
  - la traiettoria non è una circonferenza e varia sia la velocità angolare che il raggio

- Se la traiettoria è una circonferenza  $|\vec{R}| = R = \text{costante}$ 
  - **il moto è circolare uniforme** se la traiettoria è una circonferenza ed il modulo della velocità è costante
  - **il moto è circolare non uniforme:** se la traiettoria è una circonferenza e il modulo della velocità non è costante

# Velocità angolare $\vec{\omega}$



- all'angolo (definito come la parte di piano compresa fra due semirette avente un vertice in comune) associamo un vettore  $(\vec{\theta}(t))$  di modulo pari al modulo dell'angolo, direzione perpendicolare al piano che contiene l'angolo e quindi lungo l'asse z, e verso della rotazione definito secondo la regola della mano destra per cui  $\vec{\theta} = (0,0,\theta) = \theta \hat{z}$

Definizione: la **velocità angolare** è la **derivata del vettore  $\vec{\theta}$  rispetto al tempo**:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = (0,0,\dot{\theta}) = \hat{z}\dot{\theta} \Rightarrow \omega_z = \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad [\vec{\omega}] = \text{rad/s o } s^{-1}$$

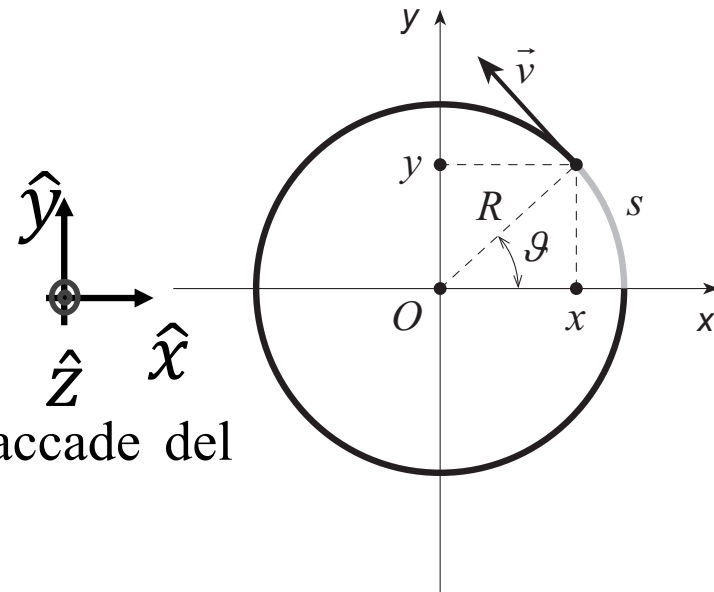
- La velocità angolare è un vettore costante nel moto circolare uniforme, ma non lo è nei moti piani in generale (neanche quelli circolari) !
  - se è nota  $\omega(t)$  e  $\theta(t_0)$  l'angolo in funzione del tempo si ottiene da

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$$

# Moto circolare: velocità

in un moto piano circolare  $R$  è costante e si ha:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \\ &= (-R \dot{\theta} \sin \theta, R \dot{\theta} \cos \theta, 0) \\ &= R \dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \dot{\theta} R \hat{\theta} = \omega R \hat{\theta}\end{aligned}$$



- la velocità è tangente alla traiettoria (come accade del resto per tutti i moti)
- il modulo della velocità è dato dal prodotto del modulo della velocità angolare  $|\omega|$  e del raggio

$$|\vec{V}| = \omega R$$

- la velocità non ha componenti radiali in coordinate polari (O origine SDR...):

$$V_R = \dot{R} = 0 \text{ e } V_\theta = \omega R \quad \vec{V} = (V_R, V_\theta, V_z) = (0, \omega R, 0)$$

- Cambia direzione durante il moto ed è ortogonale al raggio

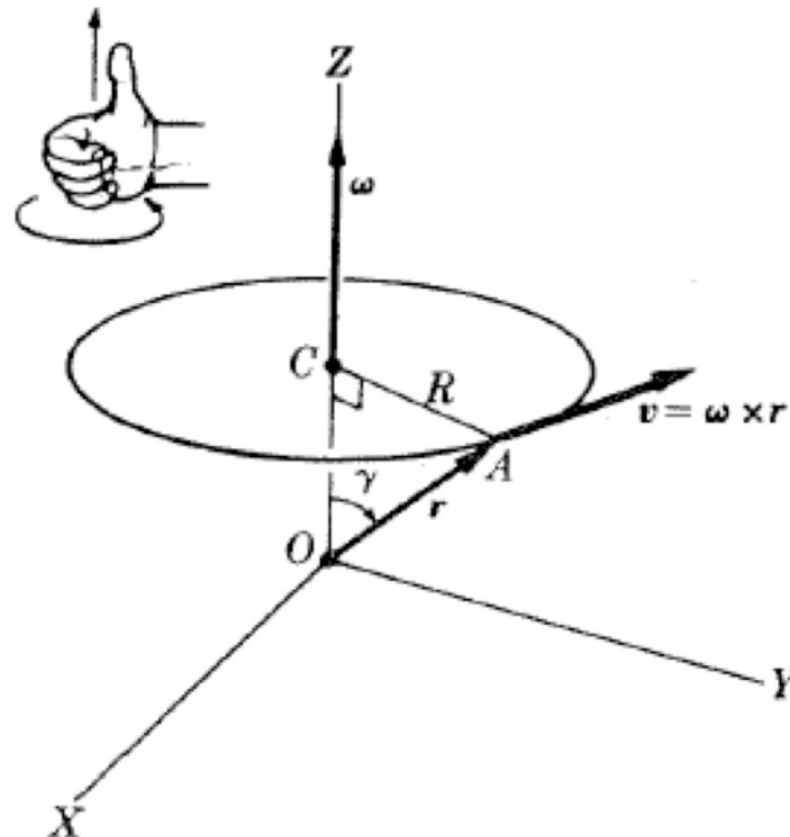
$$\vec{V} \perp \vec{R}$$

Per un moto circolare ( $R=\text{costante}$ ):  $\vec{V} = \omega R \hat{\theta} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione: } \vec{V} &= \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \dot{\theta} \hat{z} \wedge \vec{R} = \dot{\theta} \hat{z} \wedge (\hat{x}R \cos \theta + \hat{y}R \sin \theta) \\ &= \dot{\theta} R (\hat{z} \wedge \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \wedge \hat{y} \sin \theta) = \dot{\theta} R (\hat{y} \cos \theta - \hat{x} \sin \theta) \\ &= \omega R \hat{\theta} \end{aligned}$$

C.V.D

- Se  $\omega$  è costante anche il modulo di  $\vec{V}$  è costante



# Moto circolare uniforme $|\vec{\omega}|$ e $|\vec{V}|$ costanti: accelerazione

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \hat{\theta} \dot{\theta} R = \omega R \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

È necessaria una **formula di calcolo vettoriale**, che diamo senza dimostrazione:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 R \hat{R} = -\frac{v^2}{R} \hat{R}$$

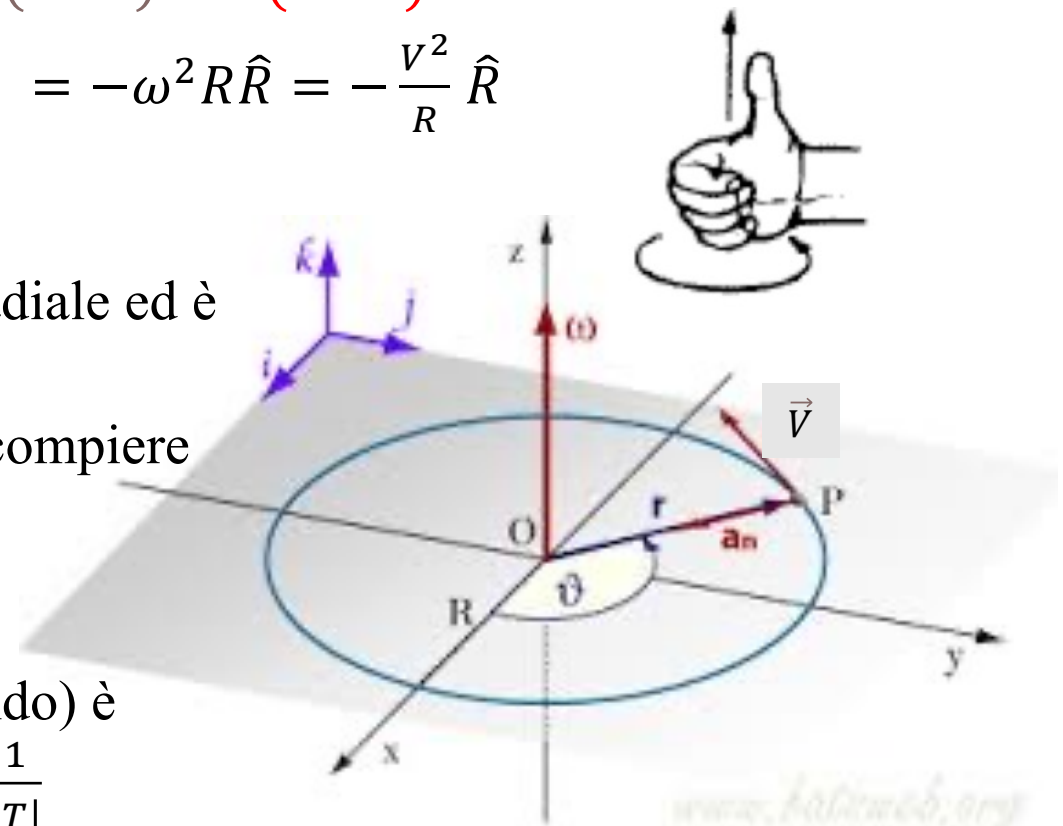
$$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 R \hat{R}$$

- L'accelerazione ha solo componente radiale ed è centripeta
- indicando con T il tempo impiegato a compiere un giro

$$VT = |\omega|RT = 2\pi R \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

- la frequenza  $\nu$  (numero di giri al secondo) è

$$\nu = \frac{1}{|T|}$$

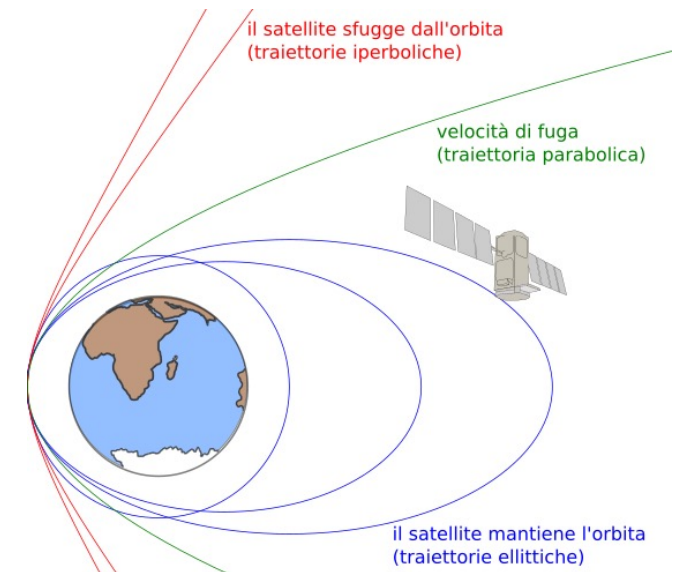
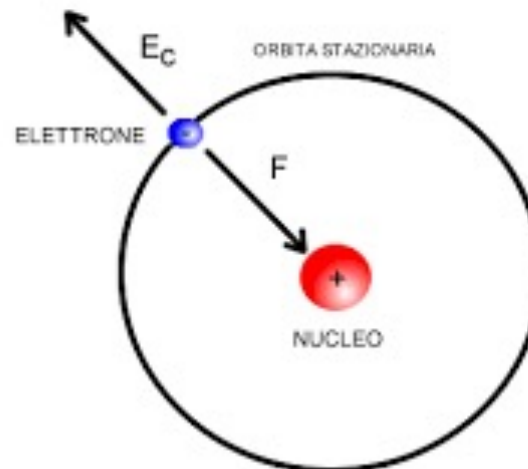
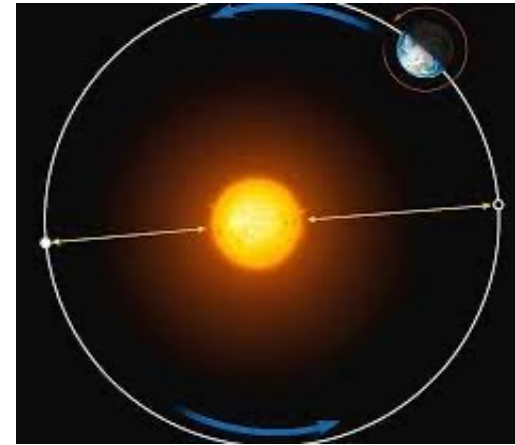




# Moto circolare uniforme: $\omega$ costante

Esempi di moti circolari uniformi:

- moto della Terra intorno al Sole (approssimazione, in realtà è un'ellisse molto poco schiacciata)
- moto di un satellite in orbita geostazionaria intorno alla Terra
- moto classico di un elettrone in un atomo (modello di Bohr)
- ....



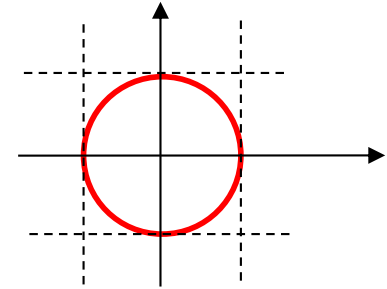
Sia data la legge oraria:

$$\vec{R}(t) = (A \cos \omega t, A \sin \omega t, 0) \text{ per } t > 0 \text{ con } \omega = \text{costante}$$

a) Determinare la traiettoria del punto materiale.

**Risposta**

$$\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t) \\ y(t) = A \sin(\omega t) \end{cases}$$



l'argomento di seno e coseno è adimensionale per cui  $\omega = \text{rad/s}$  o  $\text{s}^{-1}$

- Come si determina la **traiettoria** per via analitica per moti piani (2-d) a partire dalla legge oraria ?
  - da  $x = x(t)$  si determina  $t = t(x)$
  - si sostituisce  $t$  in  $y = y(t)$ , determinando  $y = y(x)$

(In alternativa si può invertire  $y(t)$  e sostituire il tempo in  $x(t)$ , oppure eliminare il tempo con altri algoritmi)

Sfruttiamo la relazione fondamentale della trigonometria:

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{A}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

per cui la traiettoria è una **circonferenza di raggio  $A$**

b) Determinare:  $|\vec{R}|, \vec{V}, \vec{R} \cdot \vec{V}, \vec{R} \wedge \vec{V}$

In base al risultato precedente:

$$|\vec{R}| = A$$

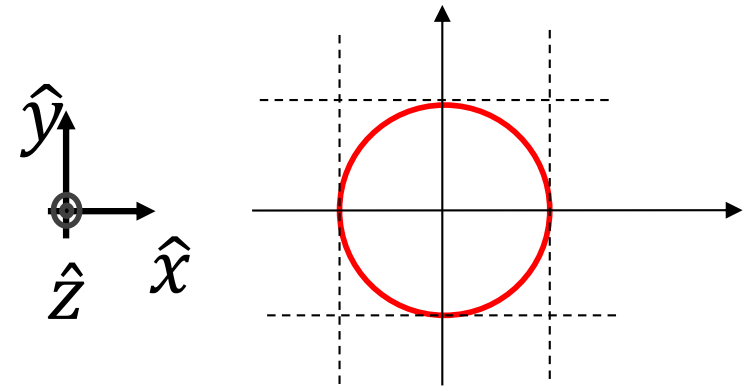
$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \left( \frac{d(A \cos \omega t)}{dt}, \frac{d(A \sin \omega t)}{dt}, 0 \right) = (-\omega A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t, 0)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \omega A$$

$$\begin{aligned} 1) \vec{R} \cdot \vec{V} &= (A \cos \omega t, A \sin \omega t, 0) \cdot (-\omega A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t, 0) \\ &= -\omega A^2 \cos \omega t \sin \omega t + \omega A^2 \cos \omega t \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{R} \wedge \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R_x & R_y & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = (R_x V_y - R_y V_x) \hat{k} = (\omega A^2 \cos^2(\omega t) - (-) \omega A^2 \sin^2(\omega t)) \hat{k} \\ &= \omega A^2 \hat{k} = |\vec{V}| |\vec{R}| \hat{k} \end{aligned}$$

Dall 1) e dalla 2) si ottiene che in un moto circolare uniforme  $\omega = \text{costante}$ ,  
**la posizione e la velocità sono perpendicolari**



b) Determinare:  $|\vec{a}|$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{V}$

In base al risultato precedente:

$$\vec{V} = (-\omega A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t, 0)$$

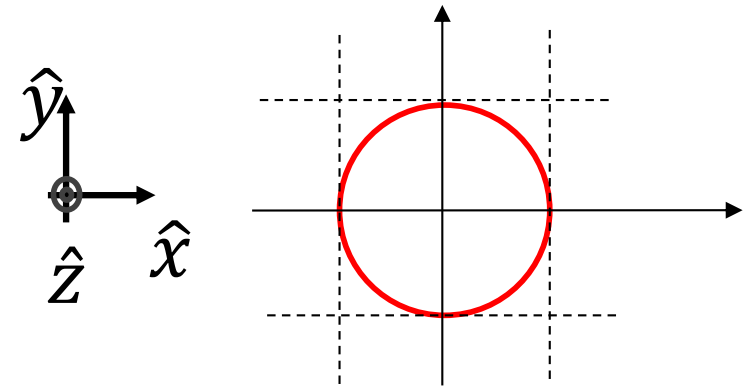
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (-\omega^2 A \cos \omega t, -\omega^2 A \sin \omega t, 0) \Rightarrow |\vec{a}| = \omega^2 A$$

$$\vec{a} \cdot \vec{V} = (-\omega^2 A \cos \omega t, -\omega^2 A \sin \omega t, 0) \cdot (-\omega A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t, 0)$$

$$= \omega^3 A^2 \cos \omega t \sin \omega t - \omega^3 A^2 \cos \omega t \sin \omega t = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = (a_x V_y - a_y V_x) \hat{k} = (-\omega^3 A^2 \cos^2(\omega t) - \omega^3 A^2 \sin^2(\omega t)) \hat{k} \\ &= -\omega^3 A^2 \hat{k} = -|\vec{a}| |\vec{V}| \hat{k} \end{aligned}$$

In un moto circolare uniforme  $\omega = \text{costante}$  **la posizione e la velocità sono perpendicolari**



## Esercizio

Calcolare velocità e accelerazione di un satellite geostazionario.

( $R = 42000 \text{ km}$ ,  $T = 1 \text{ giorno}$ ).

**Soluzione.**

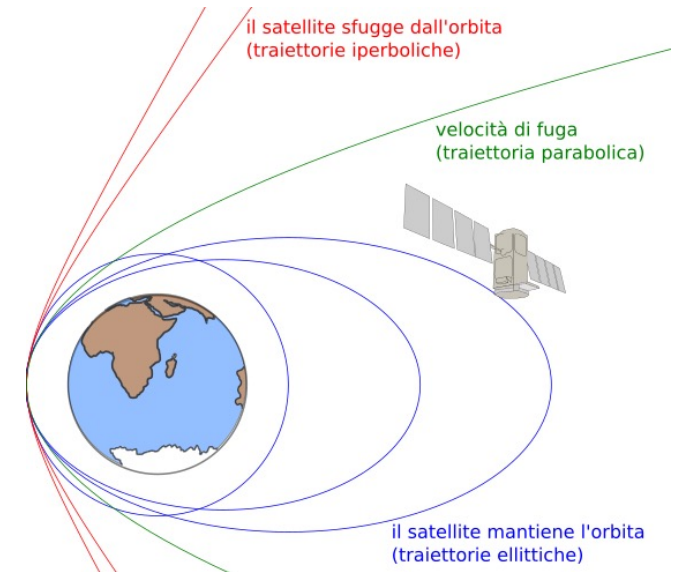
Convertiamo i dati in unità del sistema MKS:

$$R = 42000 \text{ km} = 4.2 \times 10^7 \text{ m}, \quad T = 1 \text{ giorno} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}.$$

Pertanto:

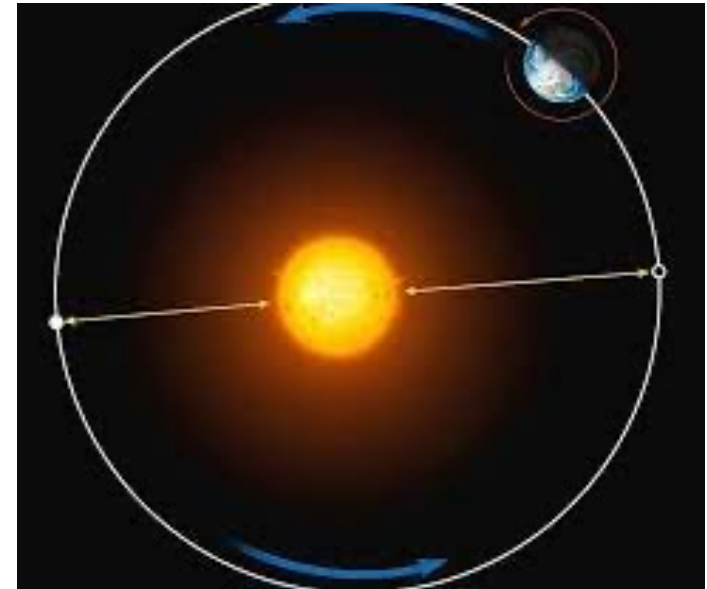
$$|\vec{V}| = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = 3.05 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0.22 \text{ m/s}^2$$



## Esercizio

**Esercizio.** Calcolare velocità ed accelerazione della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole ( $R = 149.5 \times 10^6 \text{ km} = 1.495 \times 10^{11} \text{ m}$ ,  $T = 1 \text{ anno} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$ )



**Soluzione.**

Con le stesse formule dell'Esercizio precedente:

$$|\vec{V}| = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 1.495 \times 10^{11}}{3.16 \times 10^7} \text{ m/s} = 3 \times 10^4 \text{ m/s} = 30 \text{ km/s}$$

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} = \frac{9 \times 10^8}{1.495 \times 10^{11}} \text{ m/s}^2 = 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

## Esercizio

**(importante).** Calcolare velocità ed accelerazione della città di Pisa ( $44^\circ$  latitudine N) dovuta al suo moto di rotazione intorno al suo asse e confrontarla con l'accelerazione di gravità nel vuoto.

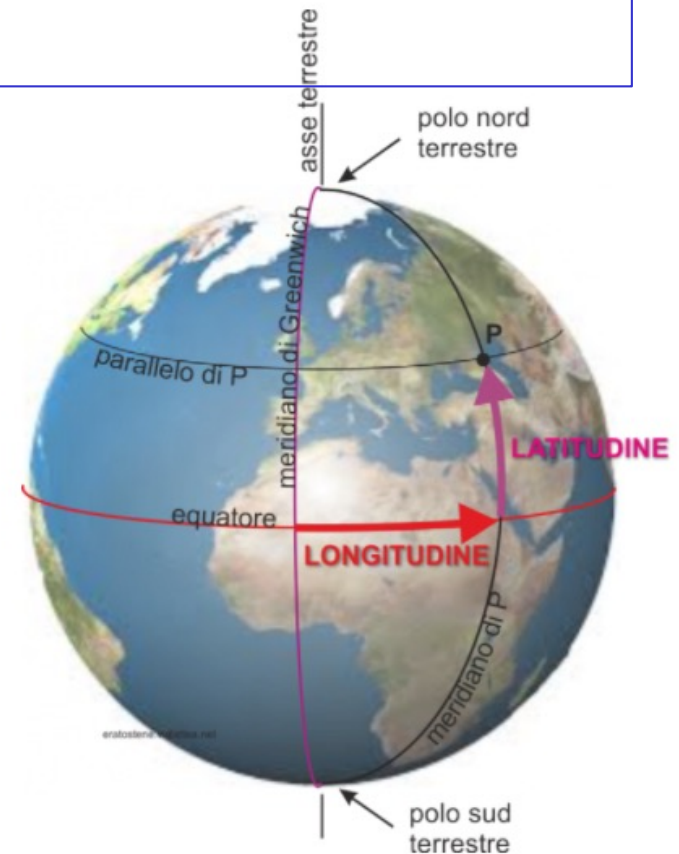
### Soluzione.

Raggio della traiettoria compiuta dalla città:  
 $R_{Pisa} = R_{Terra} \cos(44^\circ)$ . Come negli esercizi precedenti:

$$|\vec{V}| = \frac{2\pi R_{Pisa}}{T} = \frac{2\pi \times 6.3 \times 10^6 \cos(44^\circ)}{8.64 \times 10^4} \text{ m/s}$$
$$= 3.3 \times 10^2 \text{ m/s} = 330 \text{ m/s}$$

$$|\vec{a}| = \frac{V^2}{R_{Pisa}} = \frac{3.3 \times 3.3 \times 10^4}{6.3 \times 10^6 \cos(44^\circ)} \text{ m/s}^2 = 2.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow a/g = 0.0024$$



## Esercizio

Calcolare l'accelerazione di un'automobile che effettua una curva di 20 m di raggio a 36 km/h. Confrontare il risultato ottenuto con l'accelerazione di gravità  $g$  e con l'accelerazione lineare di un'automobile che passa da 0 a 100 km/h in 10 secondi.

### Soluzione.

Convertiamo preliminarmente le velocità da km/h a m/s.

$$36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}; 100 \text{ km/h} = 27.8 \text{ m/s}$$

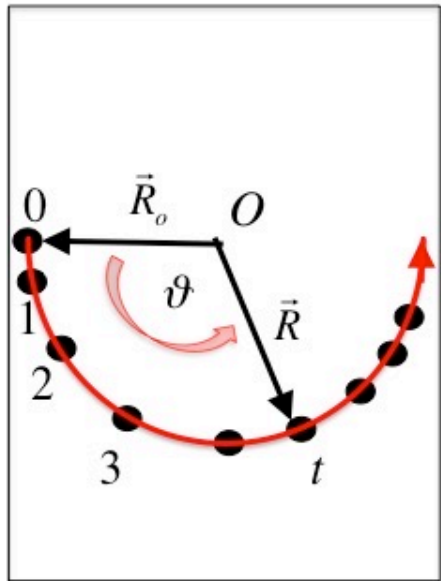
$$|\vec{a}|_{curva} = \frac{V^2}{R} = \frac{10 \times 10}{20} \text{ m/s}^2 = 5 \text{ m/s}^2 \approx 0.5 g$$

$$|\vec{a}|_{lineare} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{27.8}{10} \text{ m/s}^2 = 2.78 \text{ m/s}^2 \approx 0.56 |\vec{a}|_{curva}$$



# Moto circolare non uniforme: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

Circolare **NON**  
uniforme



$$\vartheta = \vartheta(t)$$

$R = \text{costante}$

$$\vec{V} = \omega R \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R})$$

**Definizione:** si definisce **accelerazione angolare**  $\vec{\alpha}$  la derivata della velocità angolare rispetto al tempo:

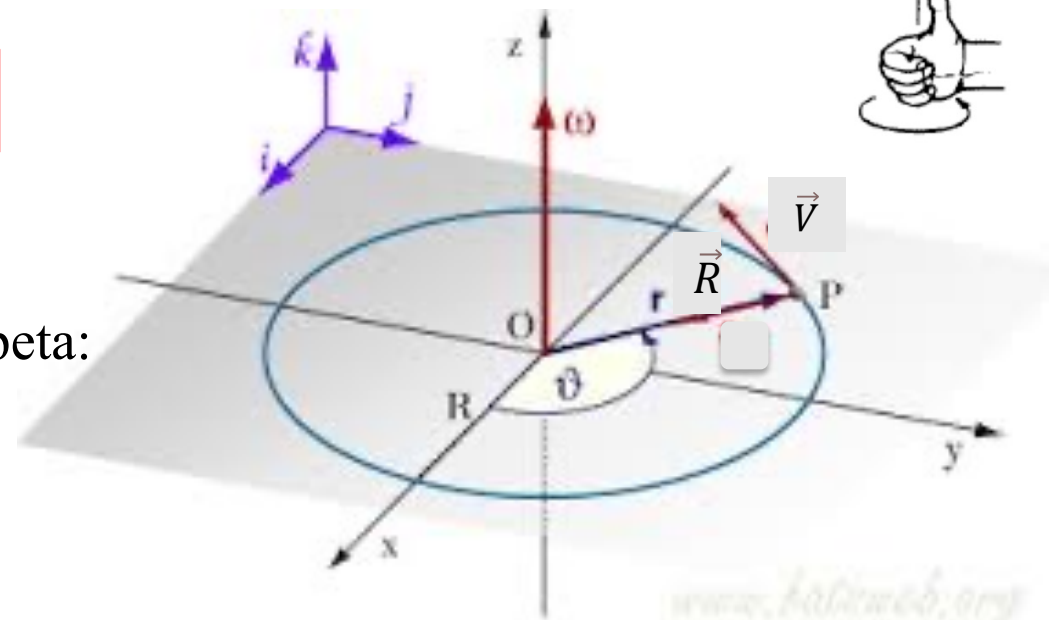
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_R, \alpha_\theta, \alpha_z) = (0, 0, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta} \hat{z}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha \hat{z} \wedge \vec{R} - \omega^2 R \hat{R} = \alpha R \hat{\theta} - \omega^2 R \hat{R}$$

$$\vec{a} = (-\omega^2 R, \alpha R)$$

- L'accelerazione
  - ha una componente radiale centripeta:  
 $\omega^2 R$
  - ha una componente tangenziale:  
 $\alpha R$



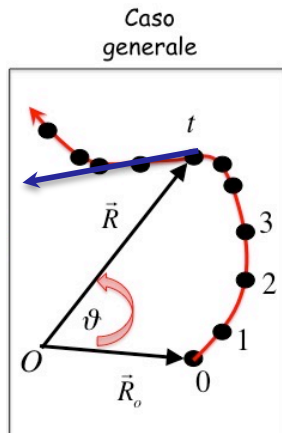
## memo su accelerazione angolare

ricordiamo che l'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  è la derivata della velocità angolare rispetto al tempo:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

- L'accelerazione angolare è nulla nel moto circolare uniforme, ma non in un moto piano generico (anche se circolare);
- $[\vec{\alpha}] = \text{rad/s}^2$
- $\vec{\alpha} = (0,0,\dot{\omega}) = \hat{z}\dot{\omega} = \hat{z}\ddot{\theta}$
- $\omega(t) = \omega_{t_0} + \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'$   
per ricavare la velocità angolare se è nota l'accelerazione angolare

# Caso generale $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ e $\vec{R} = \vec{R}(t)$



$$\vartheta = \vartheta(t)$$

$$R = R(t)$$

Dimostrazione:

in generale per un moto piano  $|\vec{R}| = R(t)$ , e dipende dal tempo e la velocità acquista una componente radiale  $V_R$  in coordinate polari. Per cui:

$$\vec{V} = \hat{\theta}V_{\theta} + \hat{R}V_R = \vec{\omega} \wedge \vec{R} + \hat{R} \frac{d|\vec{R}|}{dt} = \dot{R}\hat{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

Le **componenti polari** della velocità sono:  $V_R = \dot{R}$  e  $V_{\theta} = \omega R$

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \\ &= (-R \dot{\theta} \sin \theta, R \dot{\theta} \cos \theta, 0) + (\dot{R} \cos \theta, \dot{R} \sin \theta, 0) \\ &= \dot{R}\hat{R} + \omega R \hat{\theta} = \dot{R}\hat{R} + R\omega \hat{z} \wedge \hat{R} = \dot{R}\hat{R} + R\vec{\omega} \wedge \hat{R} \end{aligned}$$

Notiamo inoltre che:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(R\hat{R})}{dt} = \hat{R} \frac{dR}{dt} + R \frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{R}\dot{R} + R \frac{d\hat{R}}{dt}$$

Per cui:

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{\theta} \dot{\theta} = \vec{\omega} \wedge \hat{R}$$

## accelerazione in coordinate polari moto piano: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ e $\vec{R} = \vec{R}(t)$

Come si esprime l'accelerazione per un moto generale descritto in coordinate polari ?

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\frac{d\hat{R}}{dt} \\ &= \vec{\alpha} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R}) + \ddot{R}\hat{R} + \dot{R}\vec{\omega} \wedge \hat{R}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R} - \omega^2 \vec{R} + \ddot{R}\hat{R} + 2\dot{R}\vec{\omega} \wedge \hat{R} \quad \text{in quanto} \quad \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R})=0$$

L'espressione precedente si può scrivere anche in un'altra forma notando che:

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{R} = \alpha R \hat{z} \wedge \hat{R} = \alpha R \hat{\theta} \qquad \vec{\omega} \wedge \vec{R} = \omega R \hat{z} \wedge \hat{R} = \omega R \hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = (-\omega^2 R + \ddot{R})\hat{R} + (\alpha R + 2\dot{R}\omega)\hat{\theta}}$$

**Caso generale:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  e  $\vec{R} = \vec{R}(t)$**

$$\vec{V} = \dot{R}\hat{R} + \omega R \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (-\omega^2 R + \ddot{R})\hat{R} + (\alpha R + 2\dot{R}\omega)\hat{\theta}$$

Queste equazioni riassumono tutti i possibili casi

# Riepilogo moti in coordinate polari in un piano

Grandezza	<u>circolare uniforme</u>	<u>circolare (anche non uniforme)</u>	<u>generale</u>
$\theta$	lineare con $t$	variabile	variabile
$\omega$	costante	variabile	variabile
$\alpha$	0	variabile	variabile
$ \vec{R} $	costante	costante	variabile
$ \vec{V} $	costante	variabile	variabile
$\vec{V}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R}$	$\vec{\omega} \wedge \vec{R} + \dot{R}\hat{R}$
$V_R$	0	0	$\dot{R}$
$V_\theta$	$\omega R$	$\omega R$	$\omega R$
$\vec{a}$	$-\omega^2 \vec{R}$	$-\omega^2 \vec{R} + \alpha R \hat{\theta}$	$-\omega^2 \vec{R} + \alpha R \hat{\theta} + 2\omega \dot{R} \hat{\theta} + \ddot{R} \hat{R}$
$a_R$	$-\omega^2 R$	$-\omega^2 R$	$-\omega^2 R + \ddot{R}$
$a_\theta$	0	$\alpha R$	$\alpha R + 2\omega \dot{R}$