Osservazioni

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

STABILITÀ : A

RAGGIUNGIBILITÀ : (A, B)

M_R

OSSERVABILI

Un sistema completamente osservabile e raggiungibile e' detto in ***forma minima***
(non e' possibile usare un numero di variabili di stato minore del suo ordine per descrivere la relazione ingresso-uscita)

Le parti non raggiungibili o non osservabili ***non*** *rappresentano la relazione ingresso-uscita (movimento forzato dell'uscita)*

Le parti non raggiungibili o non osservabili sono comunque importanti per lo studio del movimento libero dello stato o dell'uscita (es. analisi della stabilità)

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Caso SISO (m=1), *A* diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{M}_R = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{M}_R) = n \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ non ha elementi nulli e } \lambda_i \text{ sono distinti.}$$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Caso SISO (m=1), A diagonale

$B_{n\times m}$ $\rightarrow$ $\dot{x} = Ax + Bu$

$B \quad AB \quad A^2B = A \cdot AB$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{M}_R = \left[\begin{array}{c|c|c} b_1 & \lambda_1 b_1 & \cdots \quad \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \cdots \quad \lambda_n^{n-1} b_n \end{array}\right]$$

$$\textbf{rank}(\mathcal{M}_R) = n \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ non ha elementi nulli e } \lambda_i \text{ sono distinti.}$$

Lemma PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

Teorema

Il sistema dinamico LTI $\dot{x} = Ax + Bu$ e' completamente raggiungibile

se e solo se $\mathbf{rank}\,[\lambda I - A \mid B] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Lemma PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

Teorema

Il sistema dinamico LTI $\dot{x} = Ax + Bu$ e' completamente raggiungibile

se e solo se $\mathbf{rank}\left[\lambda I - A \mid B\right] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Dimensione n x (n+m)

- Se λ non e' autovalore: condizione sempre verificata

$$\det(\lambda I - A) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{rank}(\lambda I - A) = n$$

- Se λ e' autovalore: la condizione deve verificata perché $\mathbf{rank}(\lambda I - A) < n$

Lemma PBH: dimostrazione

Supponiamo che esista un $\lambda_i : \text{rank}\left[\lambda I - A | B\right] < n \leftarrow (1)$

allora $\exists q \neq 0 : q^T\left[\underbrace{\lambda I - A}_{M} | B\right] = 0$ ovvero $q \in Ker(\left[\lambda I - A | B\right])$

$q^T M = 0$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Supponiamo che esista un $\lambda_i : \operatorname{rank}\left[\lambda I - A | B\right] < n$

allora $\exists q \neq 0 : q^T \left[\lambda I - A | B\right] = 0$ ovvero $q \in Ker(\left[\lambda I - A | B\right])$

$$q^T (\lambda_i I - A) = 0, \quad q^T B = 0.$$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Supponiamo che esista un $\lambda_i : \text{rank}\left[\lambda I - A | B\right] < n$

allora $\exists q \neq 0 : q^T \left[\lambda I - A | B\right] = 0$ ovvero $q \in Ker(\left[\lambda I - A | B\right])$

$$q^T(\lambda_i I - A) = 0, \quad q^T B = 0.$$

Post-moltiplichiamo a destra per B

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Supponiamo che esista un $\lambda_i : \operatorname{rank}\left[\lambda I - A | B\right] < n$

allora $\exists q \neq 0 : q^T\left[\lambda I - A | B\right] = 0$ ovvero $q \in Ker(\left[\lambda I - A | B\right])$

$$\underline{q^T(\lambda_i I - A)} = 0, \quad q^T B = 0.$$

Post-moltiplichiamo a destra per B

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

Post-moltiplichiamo per AB

$$q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Post-moltiplichiamo la prima equazione a destra per B $\quad q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$

Post-moltiplichiamo per AB $\quad q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$

Ispezione diretta per la raggiungibilità

Iterando la procedura

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

$$q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$$

$$\dots$$

$$q^T A^{n-1} B = \lambda_i q^T A^{n-2} B = 0$$

Sono tutti uguali a 0!

Ma questo significa che:

$$q^T \left[B | AB | \dots | A^{n-1} B \right] = 0$$

E quindi il sistema non e' raggiungibile

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & & \mathbf{0} & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & \mathbf{0} & & & \ddots & & \mathbf{0} & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\
 & \mathbf{0} & & & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p
\end{array}\right]; \qquad
\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c}
\mathbf{B}_{11} \\
\mathbf{B}_{12} \\
\vdots \\
\mathbf{B}_{1,m_1} \\
\hline
\vdots \\
\hline
\mathbf{B}_{p,1} \\
\mathbf{B}_{p,2} \\
\vdots \\
\mathbf{B}_{p,m_p}
\end{array}\right]
$$

Dimensione blocco 1

Dimensione blocco p

Matrice in forma di Jordan con *p* blocchi

Per un sistema SISO, la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori deve essere pari a uno; e B deve avere almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di A.

Un sistema con μ miniblocchi associati ad un unico autovalore λ può essere raggiungibile solo se ha almeno *μ ingressi*

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 1 \\
0 & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
1 & 1
\end{bmatrix}
$$

Sono linearmente indipendenti

Completamente raggiungibile

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_1 I - A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti

Completamente raggiungibile

$\text{rank}[\lambda_1 I - A]$

$\text{rank}[\lambda_1 I - A | B]$

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$$[\lambda_1 I - A \mid B]$$

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & -1 & 0 & — & 0 & \\
0 & 0 & -1 & — & 0 & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 1
\end{array}
$$

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$[\lambda_1 I - A \mid B]$

0 -1 0 — 0

0 0 -1 — 0

— 0 0 0 0 1

— 0 0 0 0 0 0 3

NON RAGG.

Ispezione diretta per l'osservabilità

Lemma PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

Il sistema dinamico lineare

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

e' completamente osservabile se e solo se

$$\text{rang}\begin{bmatrix}\lambda I - A \\ C\end{bmatrix} = n, \quad \underline{\forall \lambda \in \mathbb{C}}$$

Ispezione diretta per l'osservabilità

Matrice in forma di Jordan con *p* blocchi

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \mathbf{0} & & \\
0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & \mathbf{0} & & & \ddots & & \mathbf{0} & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\
 & \mathbf{0} & & & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p
\end{array}\right];
$$

$$
\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{m_1,1} & \cdots & \mathbf{C}_{p,1} & \underline{\mathbf{C}_{2,p}} & \cdots & \mathbf{C}_{m_p,p} \end{array}\right]
$$

Affinche'

$$
\mathrm{rang}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}
$$

Tutte le colonne $C_{i,1}$ dei corrispondenti blocchi di Jordan devono essere linearmente indipendenti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \\ & 0 & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} -1+(-1)-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix}$$

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$\boxed{\lambda I - A}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{3} \\ 2 \\ \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Sono linearmente dipendenti

Non raggiungibile

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & \\ & 0 & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & & 0 & \\ & \boxed{-1} & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} - A = \begin{bmatrix} -1+(-1) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda I - A}$$

Caso ingresso multiplo (MI) e A in forma di Jordan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{3} \\ 2 \\ \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Sono linearmente dipendenti

$\lambda I - A$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{0}\,\cancel{1} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Non raggiungibile

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix}$$

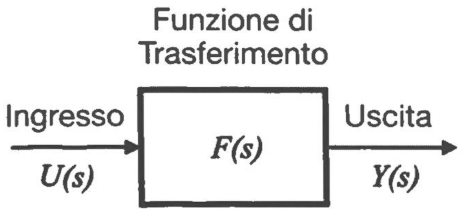
Funzione di Trasferimento

Definizione:

Funzione di trasferimento di un sistema dinamico nella variable **s** e' il **rapporto tra l'uscita del sistema e il suo ingresso**

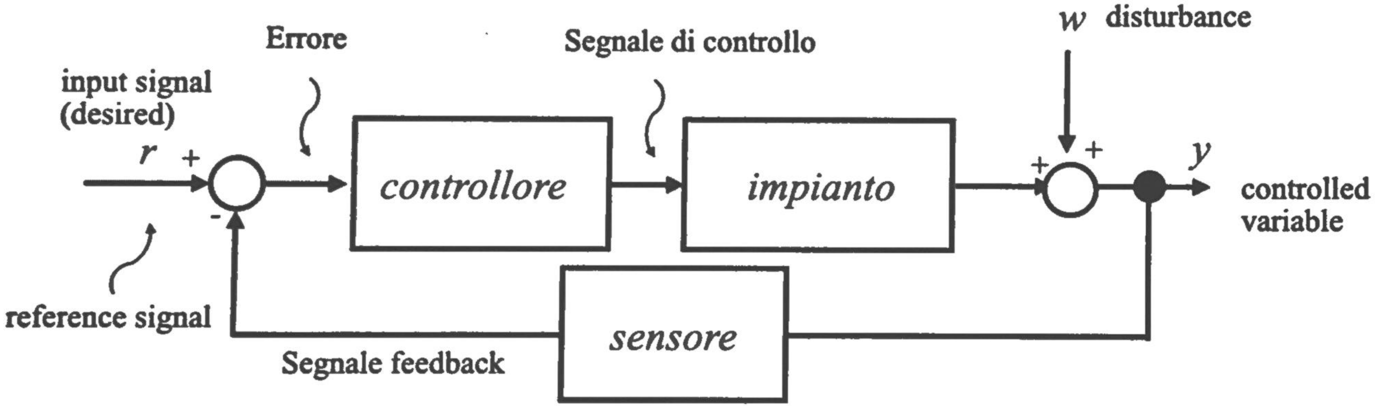
$$F(s) = \frac{uscita}{ingresso} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Come schemi a blocchi:



Controllo in Feedback

Modello piu' usato



Obiettivo: dato l'impianto dobbiamo sapere cosa mettere nel blocco controllore.