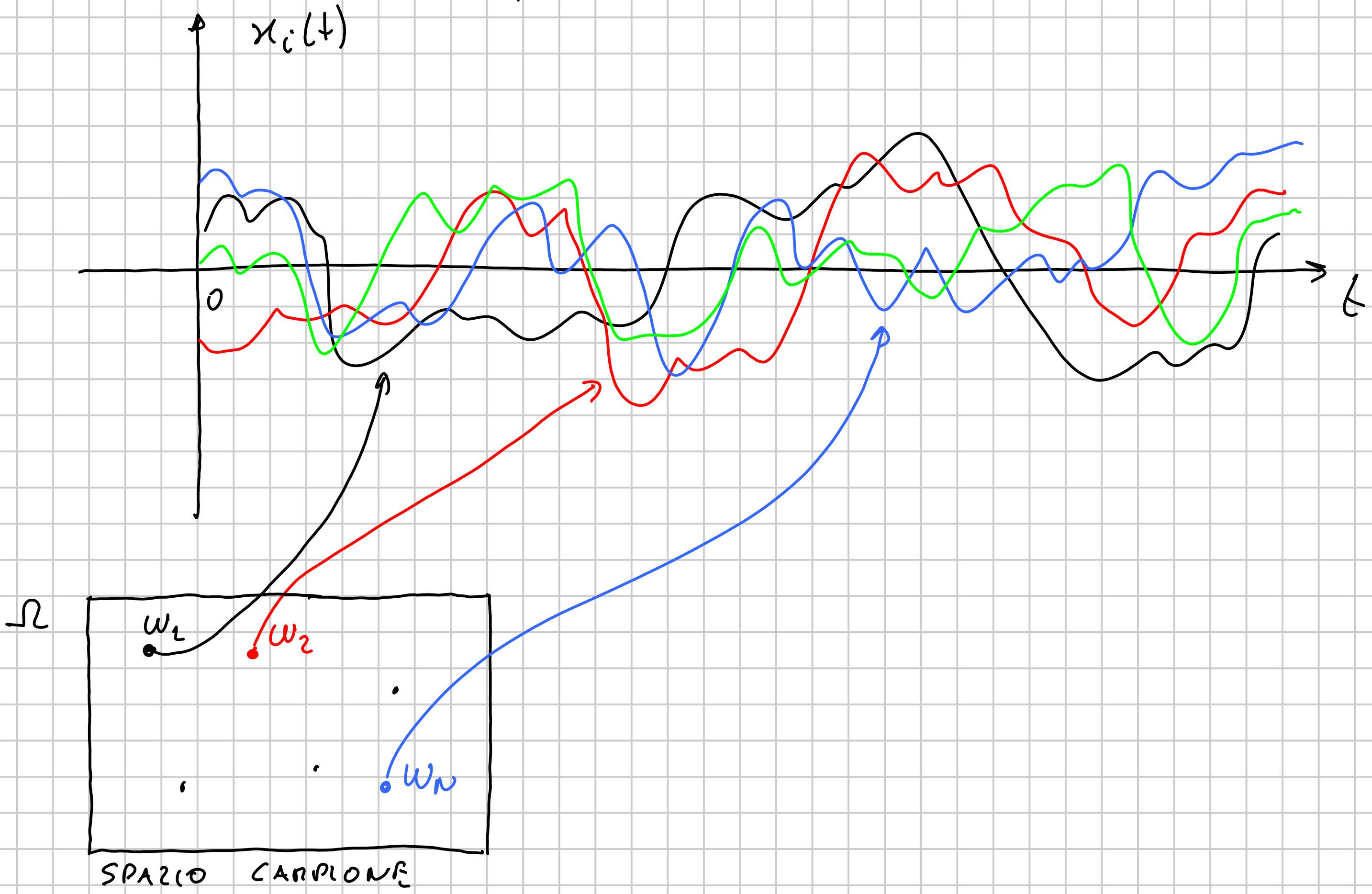
SEGNALI ALEATORI

Un segnale aleatorio è un segnale non predicibile deterministicamente. Es. il rumore generato dalla agitazione termica delle particelle in un dispositivo elettronico.

Se osserviamo il rumore prodotto da 4 dispositivi identici otteniamo comunque 4 segnali diversi data l'aleatorietà del movimento delle particelle



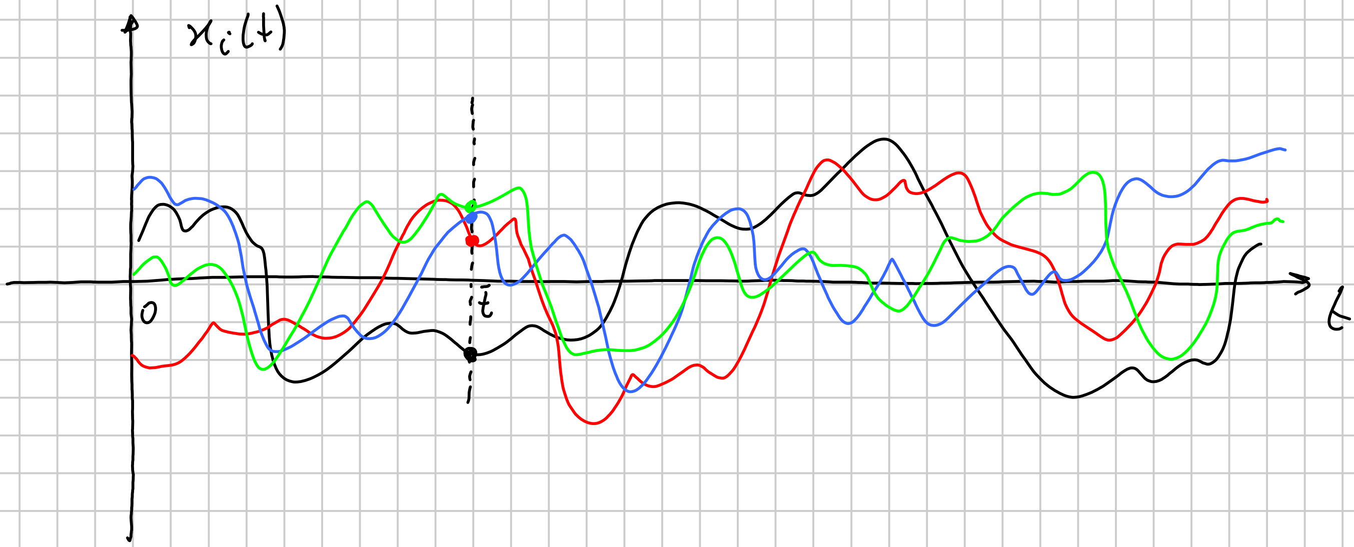
(contiene tutte le possibili realizzazioni di rumore)

Si definisce PROCESSO ALEATORIO la corrispondenza tra risultato dell'esperimento (w_i) e la realizzazione del segnale $x_i(t)$

$$X(w_i, t) = x_i(t)$$

Nella notazione si omette w_i $\Rightarrow X(w, t) \Rightarrow X(t)$ così come fatto per le v.a.

Fissando un istante di tempo $\bar{t}$ si ottiene una v.a. $X(\bar{t})$
Quindi il valore di un processo aleatorio ad un dato istante è una v.a.



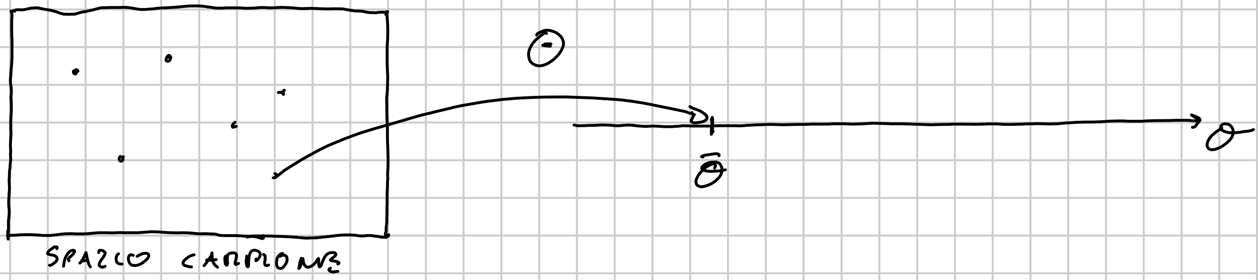
PROCESSI PARAMETRICI

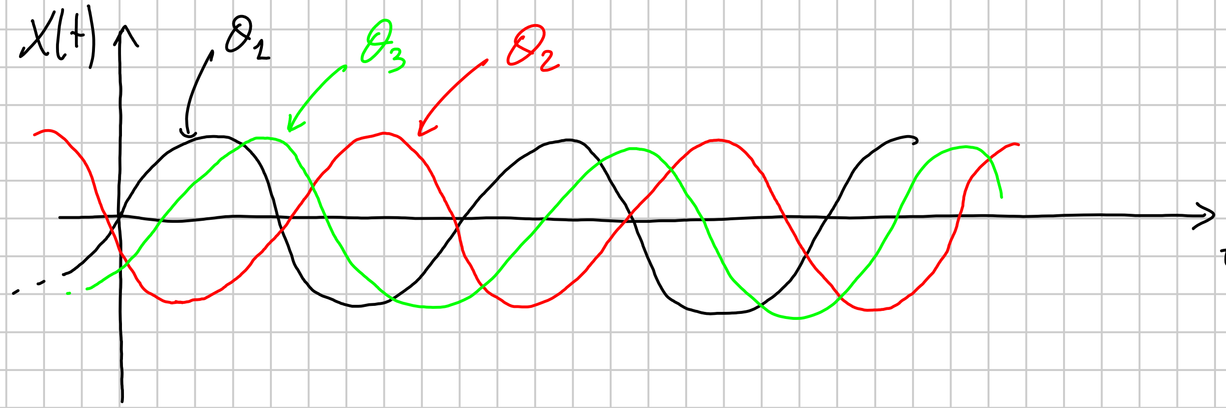
Un processo parametrico è definito da un segnale la cui aleatorietà dipende da uno o più parametri aleatori (o variabili aleatorie).

Es.

$$X(t) = a \cos\left(2\pi f_0 t + \underset{\text{v.a.}}{\Theta}\right)$$

Il segnale $X(t)$ è un processo in quanto esso non è predicibile deterministicamente ed è definito tramite la definizione della v.a. Θ





Ovviamente un processo parametrico può essere definito tramite più v.a.

Es. $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$

v.a. v.a.

CARATTERIZZAZIONE STATISTICA DI PROCESSI ALEATORI TEMPO CONTINUI

Funzione distribuzione di probabilità del I° ordine

$$F_X(x; t_1) \triangleq P\{X(t_1) \leq x\}$$

N.B. deriva dalla definizione data per le v.a.

La funzione distribuzione di probabilità del I° ordine non è sufficiente a caratterizzare un processo aleatorio
Es. se volessi calcolare la probabilità che ad un istante t_2 la $P\{X(t_2) > X(t_1)\}$, non potrei farlo conoscendo solo la $F_X(x, t_1)$, ma dovrei conoscere la distrib. di prob. congiunta.
Si definisce allora la funzione distribuzione di probabilità del II° ordine

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \triangleq P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

Per via iterativa si possono definire le funzioni distribuzione di probabilità di ordine "n"

$$F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) \triangleq P\{X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_N) \le x_N\}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI ORDINE N

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) \triangleq \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots t_N)$$

La caratterizzazione statistica completa di un processo aleatorio è definita dalla funzione di distribuzione di probabilità di ordine n, con n arbitrario.
Analogamente può essere caratterizzato dalla ddp di ordine n.

INDICI STATISTICI DEL I° E II° ORDINE DI UN PROCESSO ALEATORIO TEMPO CONTINUO

Gli indici statistici per processi aleatori possono essere ricavati per estensione di quelli definiti per le v.a.

VALOR MEDIO

$$\eta_X(\bar{t}) = E[X(\bar{t})] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x; \bar{t})\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_X(t) \triangleq E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x; t)\, dx$$

In generale una v.a. estratta ad un istante $\bar{t}$ dal processo $X(t)$ avrà un diverso valor medio rispetto ad una v.a. estratta ad un altro istante

POTENZA MEDIA STATISTICA ISTANTANEA
(VALOR QUADRATICO MEDIO)

$$P_X(t) \triangleq E\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x;t)\,dx$$

VARIANZA DEL PROCESSO

$$\sigma_X^2(t) \triangleq E\left[\left(X(t)-\eta_X\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_X)^2 f_X(x;t)\,dx$$

RELAZIONE TRA POTENZA, VARIANZA e VALOR MEDIO

$$\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2(t)$$

Dim:

$$\sigma_X^2(t) = E\left[\left(X(t)-\eta_X(t)\right)^2\right] = E\left[X^2(t)\right] - 2\eta_X(t)\,E\left[X^2(t)\right] + \eta_X^2(t)$$

$$= P_X(t) - \eta_X^2(t)$$

AUTOCORRELAZIONE

Si fissano due istanti temporali t_1 e t_2 che estraggono due v.d. da un processo aleatorio $X(t)$

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\left[X(t_1)\,X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

AUTOCOVARIANZA

$$C_X(t_1,t_2) \triangleq E\left[\left(X(t_1)-\eta_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-\eta_X(t_2)\right)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1 - \eta_X(t_1)\right)\left(x_2 - \eta_X(t_2)\right) f_X(x_1, x_2 ; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

RELAZIONE TRA AUTOCORRELAZIONE, AUTOCOVARIANZA E VALOR MEDIO

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\, \eta_X(t_2)$$

PROCESSI A TEMPO CONTINUO STAZIONARI

STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO

Un processo aleatorio è stazionario in senso stretto (SSS) se vale la seguente proprietà

$$f_X(x_1, \dots, x_N ; t_1, \dots, t_N) = f_X(x_1, \dots, x_N ; t_1 + \Delta t, \dots, t_N + \Delta t)$$

ovvero se una traslazione temporale rigida non cambia le proprietà statistiche del processo.

N.B. deve valere $\forall N$

STATISTICHE DEL PRIMO ORDINE

$$f_X(x_1 ; t_1) = f_X(x_1 ; t_1 + \Delta t) \qquad \forall \Delta t$$

vuol dire che le statistiche del primo ordine non dipendono dal tempo

$$f_X(x; t) = f_X(x)$$

$$\eta_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \eta_X \qquad \text{VALOR MEDIO COSTANTE}$$

$$P_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx = P_X \qquad \text{POTENZA MEDIA COSTANTE}$$

$$\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$$ VARIANZA COSTANTE

STATISTICHE DEL SECONDO ORDINE

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

significa che la ddp del secondo ordine dipende solo dalla differenza $t_1 - t_2$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 - t_2)$$

Quindi gli indici statistici del secondo ordine dipendono dalla differenza degli istanti temporali

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$$

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2)$$

STATISTICHE DI ORDINE N

Generalizzando, si ottiene che una statistica di ordine N dipende dalle differenze tra gli N istanti temporali

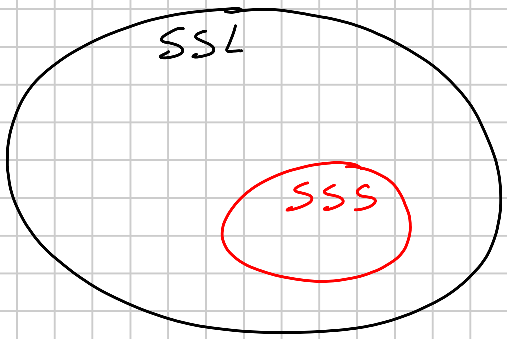
$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1 - t_2, t_2 - t_3, \dots, t_{N-1} - t_N)$$

N.B. la stazionarietà di ordine N implica la stazionarietà di tutti gli ordini inferiori, ma non vale il viceversa. Questo può essere dimostrato con la proprietà delle ddp marginali

STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO

Un processo aleatorio è stazionario in senso lato (SSL) se il suo valor medio è costante $\Rightarrow \boxed{\eta_X(t) = \eta_X}$ e se la sua Autocorrelazione dipende dalla differenza $t_1 - t_2$

$$\Rightarrow \boxed{R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)}$$



I processi SSS sono un sotto insieme dei processi SSL

AUTOCOVARIANZA DI UN PROCESSO SSL

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) - \eta_X^2 = C_X(t_1 - t_2)$$

Anche la AUTOCOVARIANZA dipende solo dalla differenza degli istanti t_1 e t_2.

La differenza tra gli istanti temporali t_1 e t_2 si può esprimere tramite $\tau = t_1 - t_2$

$$R_X(\tau) = R_X(t_1 - t_2) \quad \text{per processi SSL}$$

PROPRIETÀ DELLA AUTOCORRELAZIONE DI UN PROCESSO SSL

1) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

Dim: $R_X(\tau) = E\left[X(t)\,X(t-\tau)\right] = (t' = t - \tau)$

$$= E\left[X(t'+\tau)\,X(t')\right] = E\left[X(t')\,X(t' - (-\tau))\right]$$

$$= R_X(-\tau)$$

2) $R_X(0) = E[X(t)\,X(t)] = E[X^2(t)] = P_X \geq 0$

3) $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

Dim: $E\left[\left\{X(t) \pm X(t-\tau)\right\}^2\right] \geq 0$

$$E[X^2(t)] + E[X^2(t-\tau)] \pm 2\,E[X(t)\,X(t-\tau)] \geq 0$$

$$2P_X \pm 2R_X(\tau) \geq 0$$

$$P_X \geq |R_X(\tau)|$$

4) Se la $R_X(\tau)$ non contiene componenti periodiche

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \eta_X^2$$

Giustif: $\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} \left[C_X(\tau) + \eta_X^2 \right] =$

$$= \lim_{\tau \to \infty} C_X(\tau) + \eta_X^2$$

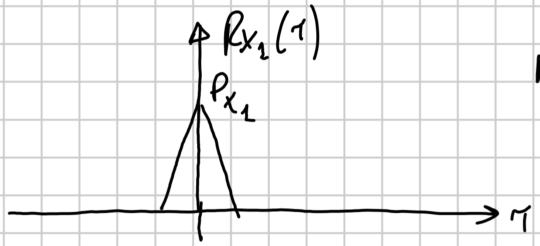
Due v.a. estratte a distanza infinita l'una dall'altra diventano incorrelate

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} C_X(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \eta_X^2$$

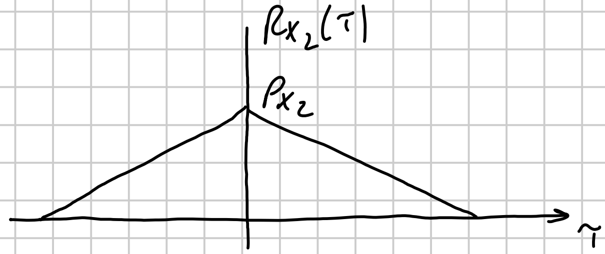
SIGNIFICATO DELLA AUTOCORRELAZIONE

La funzione di autocorrelazione di un processo SSL indica quanto sono correlate due v.a. estratte a distanza τ l'una dall'altra

ES. due processi SSL aventi le stesse statistiche del I° ordine possono avere due $R_X(\tau)$ sostanzialmente diverse



$P_{X_1} = P_{X_2}$



Due v.a. estratte a distanza τ dal primo e dal secondo processo avranno una diversa correlazione (le seconde più correlate delle prime)

La rapidità con cui decresce la $R_X(\tau)$ rispetto a τ indica il grado di decorrelazione del processo (velocità di variazione del processo)

TEMPO DI DECORRELAZIONE (quando $\eta_X = 0$)

τ_{cor} è il minimo intervallo temporale per cui due v.a. estratte siano incorrelate

$$R_X(\tau) = 0 \qquad \forall\, \tau \geq \tau_{cor}$$

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO T.C.

Il filtraggio di processi aleatori è importante in quanto in ingresso a SLS si ha spesso la seguente situazione

$X(t) = s(t) + D(t)$, dove $s(t)$ è il "segnale utile" mentre $D(t)$ indica un disturbo aleatorio

Per la linearità posso supporre che

$$Y(t) = S_u(t) + D_u(t)$$

dove $S_u(t) = s(t) \otimes h(t)$

mentre $D_u(t)$ è il risultato del filtraggio del processo aleatorio $D(t)$

Il filtraggio di un processo aleatorio può essere inteso come il filtraggio di una possibile realizzazione del processo stesso

dove $d(w;t)$ è una realizzazione di $D(t)$ vista come il risultato dell'esperimento casuale w

A questo punto vale la seguente:

$$d_u(w;t) = d(w;t) \otimes h(t)$$

Con questo concetto in testa possiamo scrivere

$$D_u(t) = D(t) \otimes h(t)$$

Quindi si può adottare la seguente simbologia:

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$

Sarebbe opportuno poter ricavare la ddp di ordine N arbitrario del processo in uscita nota la ddp d'ordine N del processo aleatorio in ingresso e la risposta impulsiva $h(t)$.

Purtroppo questo problema non ha una soluzione !!

Si possono però calcolare gli indici statistici del processo in uscita.

VALOR MEDIO

$$\eta_Y(t) = E\left[Y(t) \right] = E\left[X(t) \otimes h(t) \right] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X(t)\right] h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X(t)\, h(t-\tau)\, d\tau = \eta_X(t) \otimes h(t)$$

Se in ingresso ho un processo a VALOR MEDIO nullo anche il processo in uscita avrà VALOR MEDIO NULLO

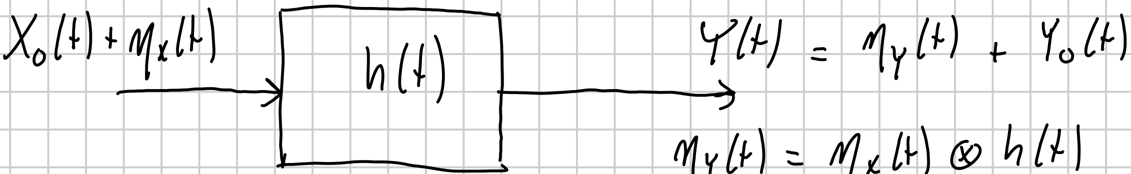
$$\eta_X = 0 \implies \eta_Y = 0$$

INTERPRETAZIONE

$$X(t) = X_0(t) + \eta_X(t)$$

processo a VALOR MEDIO NULLO

VALOR MEDIO (funzione deterministica)



$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t)$$

AUTOCORRELAZIONE DEL PROCESSO IN USCITA AD UN SLS

$$R_Y(t_1, t_2) = E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right] =$$

$$= E\left[\left\{X(t_1) \otimes h(t_1)\right\}\left\{X(t_2) \otimes h(t_2)\right\}\right] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_1)\, h(t_1 - \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_2)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X(\tau_1) X(\tau_2)\right] h(t_1 - \tau_1)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t_1, t_2)\, h(t_1 - \tau_1)\, d\tau_1\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2 =$$

$$= R_X(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO SSL

VALOR MEDIO

$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t) = \eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, d\tau = \boxed{\eta_X\, H(0) = \eta_Y}$$

dove $H(0) = H(f)\Big|_{f=0} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\,\Big|_{f=0}$

AUTOCORRELAZIONE

$$R_Y(t_1, t_2) \Rightarrow R_Y(t, t-\tau) = E\left[Y(t)Y(t-\tau)\right] =$$

$$= E\left[\left\{X(t) \otimes h(t)\right\}\left\{X(t-\tau) \otimes h(t-\tau)\right\}\right] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)\, h(t-\tau-\beta)\, d\beta\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X(\alpha)\, X(\beta)\right]\, h(t-\alpha)\, h(t-\tau-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty\,(\alpha)}^{+\infty} \int_{-\infty\,(\beta)}^{+\infty} R_X(\alpha-\beta)\, h(t-\alpha)\, h(t-\tau-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \xi$$

$$= \int_{-\infty\,(\beta)}^{+\infty} \int_{-\infty\,(\xi)}^{+\infty} R_X(\xi)\, h(t-\beta-\xi)\, d\xi\; h(t-\tau-\beta)\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[R_X(t-\beta) \otimes h(t-\beta)\right] h(t-\beta-\tau)\, d\beta$$

$$t - \beta = \xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[R_X(\xi) \otimes h(\xi)\right] h(\xi - \tau)\, d\xi$$

$$= R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes r_h(\tau)} \quad , \quad r_h(\tau) = h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

funzione di autocorrelazione della risposta impulsiva del SLS

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO STAZIONARIO (ALMENO IN SENSO LATO)

I processi di rumore tipici dei sistemi di TLC hanno potenza finita (energia infinita), per cui ha senso parlare di DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA.

Questa può essere definita similmente al caso dei segnali deterministici:

$$S_X(f) \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

Per segnali aleatori si può pensare alla densità spettrale di potenza delle singole realizzazioni

$$S_X(\omega; f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(\omega; f)|^2}{T}$$

dove $X_T(\omega; f)$ è la TCF della realizzazione del processo di rumore ottenuta come risultato dell'esperimento casuale ω.

Quindi la densità spettrale di potenza media statistica può essere ottenuta applicando l'operatore VALOR MEDIO

$$S_X(f) \triangleq E\left[S_X(\omega; f) \right] = E\left[\lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(\omega; f)|^2}{T} \right]$$

$$\boxed{S_X(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{E\left[|X_T(\omega; f)|^2 \right]}{T}}$$

TEOREMA DI WIENER - KHINTCHINE

$$\boxed{S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = TCF\left[R_X(\tau) \right]}$$

Dimostrazione omessa

PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO SSL

1) $S_X(f)$ è reale e pari

Dim. •) $R_X(\tau)$ è reale e pari

•) Per la proprietà nota della TCF, anche la $S_X(f)$ è reale e pari

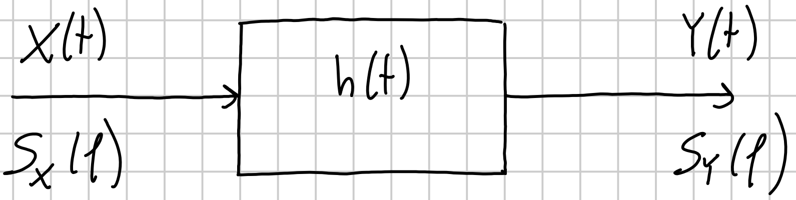
2) $P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df$

Dim: $P_X = E\left[X^2(t)\right] = R_X(0) = \left.\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df\right|_{\tau=0}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df$$

3) $S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$ (la dimostrazione verrà data in seguito)

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO SSL E DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA



$$S_Y(f) = TCF\left[R_Y(\tau)\right] = TCF\left[R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)\right]$$

$$= S_X(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$$

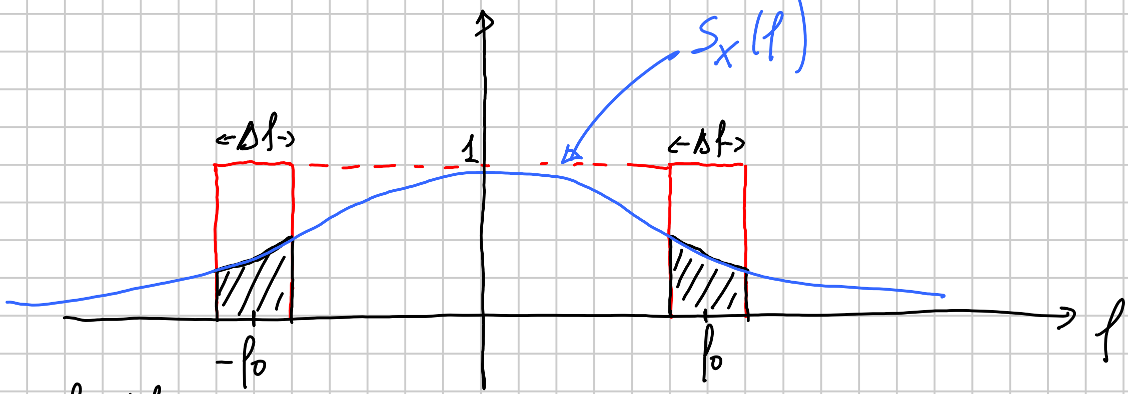
N.B. $h(t)$ è supposta reale

POTENZA MEDIA DEL PROCESSO IN USCITA

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2\, df$$

N.B. $P_Y \geq 0$

Quindi se pensiamo ad un filtro BP ideale con banda passante molto stretta



$$P_Y = 2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} S_X(f)\, df \simeq 2\Delta f\, S_X(f_0)$$

$P_Y \geq 0 \quad \forall f_0, \Delta f \quad \Rightarrow \quad S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$ (dimostrazione della II^a proprietà)

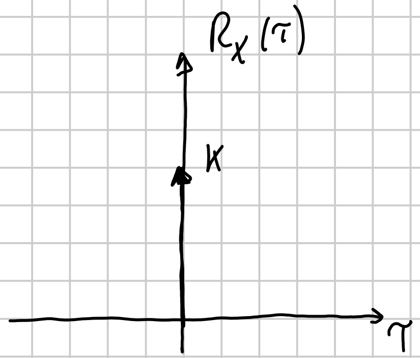
PROCESSO DI RUMORE BIANCO

Un processo di rumore $X(t)$ si dice bianco se questo è un processo SSL con le seguenti caratteristiche

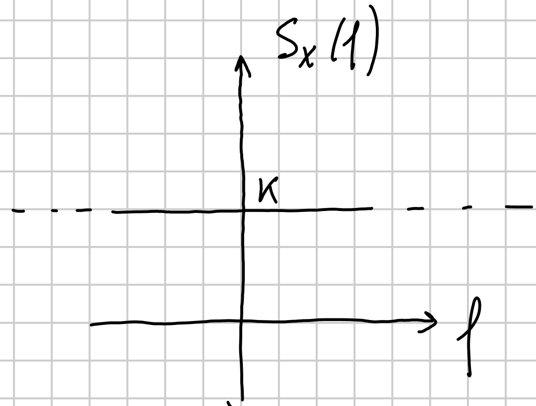
- $\eta_X = 0$
- $R_X(\tau) = K\,\delta(\tau)$

La densità spettrale di potenza di un processo di rumore bianco è pari a

$$S_X(f) = K \qquad \forall f$$

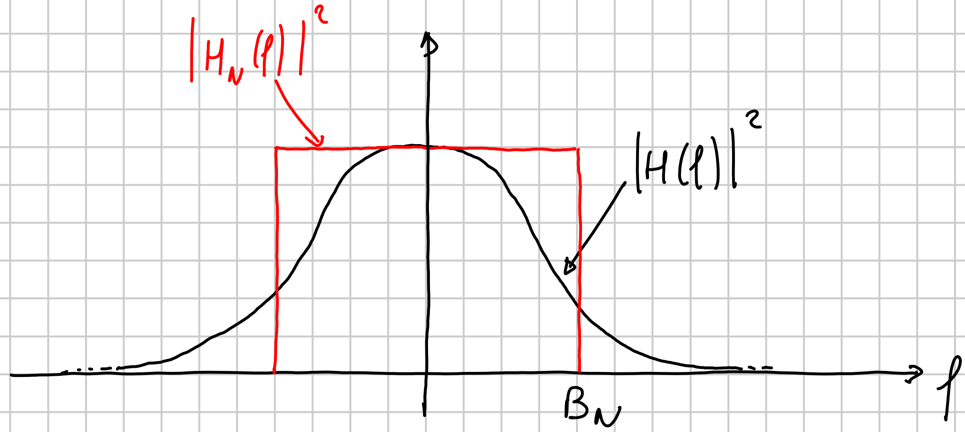


AUTOCORRELAZIONE



DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UN FILTRO



La Banda Equivalente di rumore (B_N) è la banda del filtro passa-basso ideale che produce in uscita un processo con potenza media pari a quella del processo ottenuto con il filtro $H(f)$ quando in ingresso è presente un rumore bianco e considerando la ampiezza del filtro passa-basso pari al valore $H(0)$.

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} K|H(f)|^2 \, df = \int_{-B_N}^{B_N} K \, H^2(0) \, df$$

$$2 B_N K \, H^2(0) = 2 \int_0^{+\infty} K \, |H(f)|^2 \, df$$

$$\boxed{B_N = \frac{\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}{H^2(0)}}$$

$$\left(\begin{array}{c} h(t) \text{ reale} \\ \Downarrow \\ |H(f)| = \text{pari} \end{array} \right)$$

PROCESSI ALEATORI GAUSSIANI

Un processo aleatorio si definisce Gaussiano se comunque si estrae una N-upla di v.a. a n istanti temporali $t_1, \dots, t_N$ questa risulta essere un vettore di N v.a. <u>congiuntamente Gaussiane</u>.

Si ricorda che la d.d.p. congiunta di N v.a. Gaussiane è nota quando è noto il vettore dei valori medi $\underline{\eta}_{\underline{X}}$ e la matrice di covarianza $\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}$.

Questo si traduce per un processo aleatorio Gaussiano nella conoscenza della funzione VALOR MEDIO $\eta_X(t)$ e nella funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$

La d.d.p. di ordine N per un processo Gaussiano è quindi scrivibile come

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\underline{\underline{C}}_{\underline{X}})}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\eta}_{\underline{X}})^T \underline{\underline{C}}_{\underline{X}}^{-1} (\underline{x} - \underline{\eta}_{\underline{X}})}$$

dove

$$\underline{\eta}_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} E[X(t_1)] \\ E[X(t_2)] \\ \vdots \\ E[X(t_N)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_X(t_1) \\ \eta_X(t_2) \\ \vdots \\ \eta_X(t_N) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & \cdots & C_X(t_1, t_N) \\ \vdots & & \\ C_X(t_N, t_1) & \cdots & C_X(t_N, t_N) \end{bmatrix}$$

Quindi la caratterizzazione completa di un processo aleatorio Gaussiano è data dalla conoscenza di $\eta_X(t)$ e $R_X(t_1, t_2)$

RELAZIONE TRA STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO ED IN SENSO STRETTO PER PROCESSI GAUSSIANI

$$\boxed{\text{Un processo Gaussiano SSL è anche SSS}}$$

Dim: Se un processo Gaussiano è SSL

$$\eta_X(t) = \eta_X$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$$

Quindi $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2)$

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} C_X(0) & C_X(t_1-t_2) & \cdots & C_X(t_1-t_N) \\ C_X(t_2-t_1) & C_X(0) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_X(t_N-t_1) & \cdots & & C_X(0) \end{bmatrix}$$

Se operiamo una traslazione rigida del tempo

$$\underline{X}' = [X(t_1+\Delta t), X(t_2+\Delta t), \dots, X(t_N+\Delta t)]$$

$\underline{\eta}_{X'} = \underline{\eta}_X$ non dipende dal tempo

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}'} = \begin{bmatrix} C_X(0) & C_X[(t_1+\Delta t)-(t_2+\Delta t)] & \cdots & C_X[(t_1+\Delta t)-(t_N+\Delta t)] \\ \vdots & & & \vdots \\ C_X[(t_N+\Delta t)-(t_1+\Delta t)] & \cdots & & C_X(0) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{X'} = \underline{\underline{C}}_{\underline{X}}$$

Essendo $\underline{M}_{\underline{X}}$ e $\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}$ invariati, allora anche la ddp di ordine N è invariata

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1 + \Delta t, \dots, t_N + \Delta t)$$

che implica la STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO

FILTRAGGIO DI PROCESSI GAUSSIANI

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$

$$\boxed{\text{Se il processo di ingresso è un processo Gaussiano anche il processo di uscita è Gaussiano}}$$

Dim:

approssimo l'integrale con una somma

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\Delta\alpha)\, h(t - n\Delta\alpha)\, \Delta\alpha$$

Se estraggo una N-upla $\underline{Y} = [Y(t_1), \dots, Y(t_N)]$

$$Y(t_1) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\Delta\alpha)\, h(t_1 - n\Delta\alpha)\, \Delta\alpha$$

$$\vdots$$

$$Y(t_N) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n\Delta\alpha)\, h(t_N - n\Delta\alpha)\, \Delta\alpha$$

$$\begin{cases} Y(t_1) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{1n} X(n\Delta\alpha) \\ \vdots \\ Y(t_N) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{Nn} X(n\Delta\alpha) \end{cases} \Rightarrow \underline{Y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}$$

Quindi $\underline{Y}$ può essere interpretato come una trasformazione lineare di $\underline{X}$, per cui se $\underline{X}$ è Gaussiano, allora lo è anche $\underline{Y}$.
Essendo questo vero per ogni N-upla e per ogni N allora si conclude che $Y(t)$ è un processo Gaussiano.

Sapendo che il filtraggio lineare di un processo Gaussiano produce un altro processo Gaussiano permette di ottenere una descrizione statistica completa del processo di uscita a partire da quella del processo di ingresso. Infatti basta calcolare $\eta_Y(t)$ e $R_Y(t_1, t_2)$ a partire da $\eta_X(t)$, $R_X(t_1, t_2)$ e $h(t)$.