ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 21

Note Title 26/10/2018

MATRICE INVERSA Data una matrice $n \times n$, che chiamiamo A vogliamo trovare B matrice $n \times n$ t.c.

$$AB = BA = Id$$

Domande: siamo sicuri che B esista?
se sì, come la calcolo.

<u>Esistenza</u>: fare la matrice inversa è come fare la funzione inversa, quindi esiste se e solo l'appl. lin. associata è iniettiva e surgettiva. Essendo lineare, basta una delle due verifiche, diciamo l'iniettività, che a sua volta è equiv. alla lineare indipendenza delle colonne

$$\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, C_3 \,\middle|\, \cdots \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_n C_n$$

comb. lin. delle colonne con gli x_i come coeff.

Quindi matrice invertibile $\Leftrightarrow$ colonne lin. indip
$\Leftrightarrow$ ridotta scala viene il PIVOT in tutte le righe

Tecnica di calcolo → algoritmo di Gauss ←
→ Formula con i determinanti

Calcolo dell'inversa alla Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{inversa} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cerco di fare venire l'identità a sx

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -13 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{matrix}}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Algoritmo:
- → voglio l'inversa di A
- → parto con $(A \mid Id)$
- → lavoro alla Gauss fino ad avere $(Id \mid B)$
- → la B trovata è l'inversa che volevo.

— o — o —

Perché funziona l'algoritmo?

① Lavorare alla Gauss una matrice è come moltiplicarla a destra per un'altra matrice R

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{COPIO LA } 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

② Lavorare tante volte alla Gauss vuol dire moltiplicare tante volte a sinistra

$$\underbrace{\boxed{R_n \dots R_3 R_2 R_1}}_{R} A$$

③ Quando ho una matrice fatta da 2 pezzi $(\underset{n\times m}{A} \mid \underset{n\times n}{B})$ se moltiplico ottengo

$$R\,(A \mid B) = (RA \mid RB)$$ (segue dal prodotto righe per colonne)

④ Se parto da $(A \mid I)$ e moltiplico per R ottengo

$(AR \mid R)$. Se alla fine a sx ho Id, vuol dire che quello che trovo a dx è la matrice inversa.

— o — o —

Caso speciale Matrici 2x2 ⇝ si fa prima a ricordare la formula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \rightsquigarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Dim. Moltiplicare e vedere che viene proprio l'identità

— o — o —

Proprietà dell'inversa Tutte le matrici seguenti sono $n\times n$

① $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Devo verificare che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = Id$

$$A \underbrace{B B^{-1}}_{Id} A^{-1} = AA^{-1} = Id$$

Stessa cosa dall'altra parte

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}B = Id$$

(2) $\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$

Verifica: $A^t (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = Id^t = Id$

$$M^t N^t = (NM)^t$$

Idem dall'altra parte: $(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = Id^t = Id$.

Matrice inversa e cambi di base

<u>Esempio</u> base canonica di $\mathbb{R}^3$: $\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}$

Altra base: $\underset{v_1}{(1,2,3)}, \underset{v_2}{(1,1,2)}, \underset{v_3}{(2,-1,0)}$

Domanda: se conosco le componenti di $v \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, come calcolo le componenti di v rispetto alla canonica?

Mediante la matrice di cambio di base

In questo caso è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccl} * & * & * & \to e_1 \\ * & * & * & \to e_2 \\ * & * & * & \to e_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ v_1 & v_2 & v_3 & \end{array} \quad \text{NUOVA}$$

base vecchia

Domanda più difficile: se conosco le componenti di v rispetto alla canonica, come calcolo le comp. di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$

→ Risposta 1   Metodo bovino. Sia $(7,4,2)$ il vettore e risolvo

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}$$

→ Risposta 2   Scrivo la matrice di cambio di base dalla vecchia $\{e_1, e_2, e_3\}$ alla nuova $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & \to v_1 \\ * & * & * & \to v_2 \\ * & * & * & \to v_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}$$

Quindi nel 1° modo trovo le comp. di e_1, e_2, e_3 e le uso come colonne della matrice.

→ Risposta 3   Basta fare l'inversa della matrice M calcolata sopra

Morale : M → input comp. risp. v_1, v_2, v_3
→ output " " e_1, e_2, e_3

M^{-1} → input " " e_1, e_2, e_3
→ output " " v_1, v_2, v_3

— o — o —

Esempio   Calcolare le componenti di $(5,3)$ rispetto alla base $\{\underset{v_1}{(1,5)}, \underset{v_2}{(2,-1)}\}$ = base strana

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

Dalla strana alla canonica

$$M^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

Basta calcolare

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifica: $1\,(1,5) + 2\,(2,-1) = (5,3)$ ☺

— o — o —