

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 7/06/2023

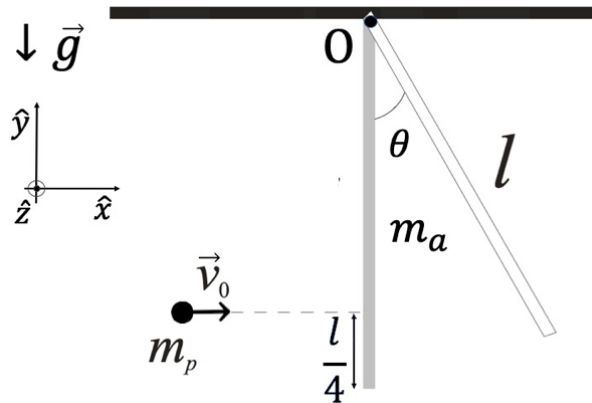
Nome:

Matricola:

Cognome:

Anno di Corso:

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

Una asta di lunghezza $l = 1 \text{ m}$ e massa $m_a = 1 \text{ kg}$, inizialmente ferma in posizione verticale, è appesa per un estremo al soffitto. Un proiettile di massa $m_p = 10 \text{ g}$, che si muove con velocità orizzontale di modulo $v_0 = 100 \text{ m/s}$, urta l'asta a distanza $l/4$ dal suo estremo libero (vedi figura), rimanendovi conficcato. Si calcoli:

1.1 la velocità angolare $\vec{\omega}$ posseduta dal sistema un istante dopo l'urto

$$\vec{\omega} = \dots\dots\dots$$

1.2 la differenza $\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$, tra le quantità di moto del sistema asta proiettile, un istante dopo e un istante prima dell'urto

$$\Delta \vec{P} = \dots\dots\dots$$

1.3 l'angolo massimo θ_{max} formato dall'asta con la verticale nel moto successivo all'urto e il periodo delle piccole oscillazioni T del sistema asta proiettile

$$\theta_{max} = \dots\dots\dots \quad T = \dots\dots\dots$$

Nota Bene: assumere per i calcoli $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Una sfera di raggio $R = 10 \text{ cm}$ è caricata in modo tale che il campo elettrostatico \vec{E} al suo interno in un sistema di coordinate sferiche con origine nel centro della sfera sia diretto radialmente verso l'esterno con $\vec{E} = \alpha r^2 \hat{r}$ dove con r si è indicata la distanza dal centro della sfera e $\alpha = 9 \text{ kV/m}^3$. Determinare:

2.1 la carica della sfera Q

$$Q = \dots\dots\dots$$

2.2 il potenziale elettrostatico $V(r)$ in funzione della distanza r dal centro O della sfera e calcolare $V_O = V(0)$ nel centro della sfera

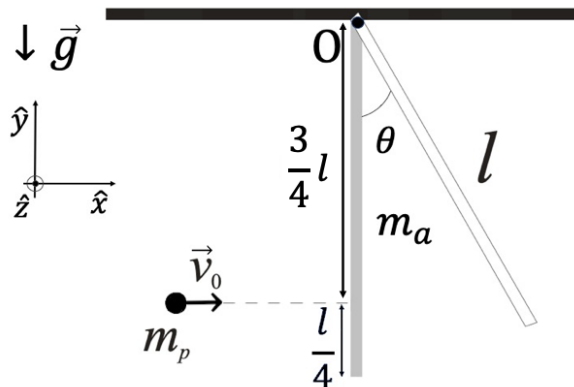
$$V(r) = \dots\dots\dots \quad V_O = \dots\dots\dots$$

2.3 il modulo della velocità v con cui arriva al centro della sfera un elettrone che parte da fermo dalla superficie della sfera

$$v = \dots\dots\dots$$

Nota Bene: assumere per i calcoli $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, massa elettrone $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, carica dell'elettrone $q = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Soluzione Esercizio 1



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

Domanda 1.1

Nell'urto si conserva il momento angolare con polo in O perchè le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse attorno al quale avviene la rotazione (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva. Dalla conservazione del momento angolare rispetto a tale asse:

$$\vec{L}_i = m_p v_0 \frac{3}{4} l \hat{z} = \vec{L}_f = I_O \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{m_p v_0 3l}{4I_O} \hat{z}$$

dove I_O è il momento di inerzia del sistema (asta più proiettile) dopo l'urto rispetto all'asse di rotazione passante per O :

$$I_O = m_p \left(\frac{3}{4} l \right)^2 + m_a \frac{l^2}{3} = 0.339 \text{ kgm}^2$$

Dalle ultime due equazioni si ricava:

$$\vec{\omega} = 2,21 \text{ rad/s} \hat{z}$$

Domanda 1.2

Non si conserva la quantità di moto del sistema asta-punto materiale nell'urto in quanto in O si sviluppa una reazione impulsiva. Di conseguenza $\Delta \vec{P} \neq \vec{0}$. La differenza tra la quantità di moto del sistema un istante dopo e un istante prima dell'urto è data da

$$\Delta \vec{P} = (m_p v_1 + m_a v_2 - m_p v_0) \hat{x}$$

dove le velocità v_1 e v_2 possono essere calcolate nota ω e le distanze dei centri di massa dell'asta e del punto materiale da O . Per cui:

$$\Delta \vec{P} = \left(m_p \omega \frac{3}{4} l + m_a \omega \frac{l}{2} - m_p v_0 \right) \hat{x} = 0.123 \text{ Ns} \hat{x}$$

Domanda 1.3

Considerando che la reazione vincolare in O non può compiere lavoro poiché il suo punto di applicazione è fisso e che la rimanente forza in gioco è la forza di gravità che è conservativa, l'energia meccanica nel moto dopo l'urto si conserva. Di conseguenza, l'angolo massimo formato dall'asta con la verticale si ottiene applicando la conservazione dell'energia meccanica, determinando la posizione dell'asta in cui l'energia cinetica si annulla. Per cui, prendendo l'origine dell'energia potenziale alla quota dell'estremo inferiore dell'asta in cui l'asta forma un angolo di 0° , le quote iniziali e finali dell'asta (h_i^a, h_f^a) e del proiettile (h_i^p, h_f^p) sono date da:

$$h_i^a = \frac{l}{2} \quad h_f^a = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} (1 - \cos \theta_{max}) \quad h_i^p = \frac{l}{4} \quad h_f^p = \frac{l}{4} + \frac{3}{4} l (1 - \cos \theta_{max})$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$T_f - T_i = U_i - U_f = 0 - \frac{1}{2} I_O \omega^2 = m_p g (h_i^p - h_f^p) + m_a g (h_i^a - h_f^a) \Rightarrow \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \left(\frac{1}{2} m_a + \frac{3}{4} m_p \right) gl (1 - \cos \theta_{max})$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{max} = 1 - \frac{I_O \omega^2}{(m_a + \frac{3}{2} m_p) gl} \Rightarrow \theta_{max} = 0.586 \text{ rad} (33.6^\circ)$$

Ovviamente avremmo potuto anche usare il teorema di *König* per esprimere l'energia cinetica.

Il sistema è assimilabile ad un pendolo fisico. La posizione di equilibrio stabile del sistema è quella corrispondente all'asta in basso in posizione verticale ($\theta = 0$). Se posto in questa questa posizione, il sistema resta in questa configurazione, e se il sistema è ruotato di un'angolo molto minore di un radiante, θ_0 ($\theta_0 \leq 0.17rad$) esso inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Ci sono due procedure per determinare T . La prima considera la conservazione dell'energia che per una posizione arbitraria θ del pendolo fisico composto da asta più proiettile, ci permette di esprimere l'energia del sistema come:

$$E(\theta) = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + m_pgl \left(1 - \frac{3}{4}\cos\theta\right) + m_agl \left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta\right) = costante$$

Per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_O\omega\dot{\omega} + m_pgl\frac{3}{4}\sin\theta\dot{\theta} + m_agl\frac{1}{2}\sin\theta\dot{\theta}$$

Ricordando che $\omega = \dot{\theta}$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, dividendo per ω l'ultima equazione, otteniamo:

$$I_O\ddot{\theta} + m_pgl\frac{3}{4}\sin\theta + m_agl\frac{1}{2}\sin\theta = 0$$

Per piccole oscillazioni: $\sin(\theta) \simeq \theta$, per cui l'equazione diviene:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m_pgl\frac{3}{4} + m_agl\frac{1}{2}}{I_O}\right)\theta = 0$$

che è l'equazione differenziale dei moti oscillatori non smorzati. La legge oraria del moto è:

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t + \phi)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{m_pgl\frac{3}{4} + m_agl\frac{1}{2}}{I_O}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{m_pgl\frac{3}{4} + m_agl\frac{1}{2}}} = 1.64 \text{ s}$$

La seconda procedura sfrutta la II^a equazione cardinale. Quando il pendolo composto viene spostato dalla posizione di equilibrio ($\theta = 0$) ad una posizione in cui l'angolo è θ , utilizzando per il calcolo del momento delle forze O come polo, si ha un momento (\vec{M}^O) non nullo. In particolare:

$$\vec{M}^O = I_O\dot{\omega}\hat{z} = -\left(m_agl\frac{1}{2} + m_pgl\frac{3}{4}\right)\sin\theta\hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_O\ddot{\theta} + \left(m_agl\frac{1}{2} + m_pgl\frac{3}{4}\right)\sin\theta = 0$$

che per piccole oscillazioni, tenendo conto che $\omega = \dot{\theta}$ porta alla stessa equazione ottenuta con il metodo della conservazione dell'energia:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_agl\frac{1}{2} + m_pgl\frac{3}{4})}{I_O}\theta = 0$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 2.1

La sfera è caricata in modo tale che il campo elettrico (CE) al suo interno per $0 \leq r \leq R$ è radiale, con $\vec{E} = E_r \hat{r} = \alpha r^2 \hat{r}$, in coordinate sferiche con origine del sistema di coordinate nel centro della sfera e dove abbiamo indicato con r la distanza da centro della sfera. Se il campo è radiale, la densità di carica ρ della sfera è invariante per rotazioni attorno a qualsiasi asse passante per il centro della sfera e dipende unicamente dalla distanza dal centro della sfera. Di conseguenza, anche all'esterno della sfera il CE è radiale. Per il teorema di Gauss, la carica Q racchiusa dalla superficie della sfera che ha raggio R , e che coincide con la carica della sfera stessa è data da:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_S E_r \hat{r} \cdot \hat{r} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \alpha R^2 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 \alpha R^4 = 1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Allo stesso risultato si arriva osservando che per $r \geq R$ il CE è lo stesso di quello generato da una carica puntiforme Q posta al centro della sfera, per cui per $r = R$:

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \alpha R^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Domanda 2.2

Per $r \geq R$ sia il potenziale che il CE sono gli stessi di quelli generati da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera per cui:

$$\text{per } r \geq R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Di conseguenza all'infinito il potenziale è nullo: $V(\infty) = 0$.

Per $0 \leq r \leq R$:

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \int_r^R E_1(r') dr' + \int_R^\infty E_2(r') dr' \Rightarrow V(r) = \int_r^R \alpha r'^2 dr' + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{\alpha}{3} R^3 - \frac{\alpha}{3} r^3 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

usando infine (Domanda 2.1) $Q = 4\pi\varepsilon_0 \alpha R^4$ otteniamo per $0 \leq r \leq R$:

$$V(r) = \frac{\alpha}{3} R^3 - \frac{\alpha}{3} r^3 + \frac{4\pi\varepsilon_0 \alpha R^4}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{3} \alpha (4R^3 - r^3)$$

Riassumendo:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{3} \alpha (4R^3 - r^3) & 0 \leq r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\alpha R^4}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Pertanto:

$$V_O = V(0) = \frac{4}{3} \alpha R^3 = 12 \text{ V}$$

Domanda 2.3

Poichè l'unica forza in gioco è la forza elettrostatica agente sull'elettrone, che è una forza conservativa, per il teorema dell'energia cinetica, indicando con K_f e K_i rispettivamente l'energia cinetica finale e iniziale dell'elettrone e con U_f e U_i la sua energia potenziale finale e iniziale, vale:

$$K_f - K_i = U_i - U_f = K_f - 0 = q(V(R) - V(0)) \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = q \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{4}{3} \alpha R^3 \right) = q \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 \alpha R^4}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{4}{3} \alpha R^3 \right) = -\frac{1}{3} q \alpha R^3$$

Per cui:

$$v = \sqrt{-\frac{2q\alpha R^3}{3m}} = 1.03 \times 10^6 \text{ m/s}$$