ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 07

Titolo nota 05/10/2018

PIANI NELLO SPAZIO → Forma cartesiana
→ Forma parametrica

Piani che passano per l'origine

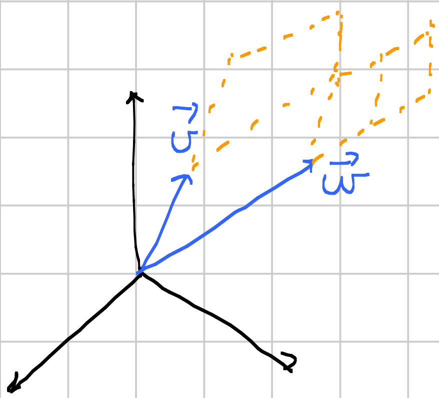
(a,b,c) = vettore $\perp$ al piano

Eq. cartesiana : $\boxed{ax+by+cz=0}$

$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle$

Quindi sto cercando tutti i vettori (x,y,z) dello spazio che sono perpendicolari al vettore (a,b,c) dato.
Ovviamente deve essere $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, cioè almeno una componente deve essere non nulla.

Eq. parametrica: $\boxed{t\vec{v}+s\vec{w}}$ dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori del piano che non sono l'uno multiplo dell'altro



In questo modo costruisco tutto il piano che passa per l'origine e per i punti corrisp. a $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esempio $t(2,3,4)+s(-1,3,2)$

$= (2t-s,\ 3t+3s,\ 4t+2s)$

"con un parametro descrivo una retta, con due parametri descrivo un piano"

Piani che non passano necessariamente per l'origine

Eq. cartesiana: $ax+by+cz+d=0$

passa per l'origine $\Leftrightarrow d=0$

Eq. parametrica: $\vec{u}+t\vec{v}+s\vec{w}$

p.to di partenza

due direzioni che "generano il piano"

— o — o —

Mutua posizione di due piani

- coincidenti (infinite intersezioni, dip. da 2 parametri)
- paralleli (nessuna intersezione
- incidenti (infinite intersezioni, dipendenti da 1 solo parametro)

Come interseco due piani ?

Dipende dalla forma in cui li conosco

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Se conosco le 2 forme cartesiane, metto a sistema e risolvo ☺

Esempio
$$\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 3y-7z=-6 \end{cases} \rightsquigarrow z \text{ variabile libera}$$

$z=t$; $3y=7z-6=7t-6 \rightsquigarrow y=\frac{7}{3}t-2$

$x=4+y-3z=4+\frac{7}{3}t-2-3t=2-\frac{2}{3}t$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni

$$(x,y,z) = \left(2-\frac{2}{3}t,\ \frac{7}{3}t-2,\ t\right)$$

$$= (2,-2,0) + t\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 1\right) \quad \text{MA ANCHE}$$

$$\boxed{(2,-2,0) + t(-2,7,3)}$$

Forma parametrica della retta intersezione dei due piani

Che angolo formano i due piani tra di loro?

È lo stesso angolo che formano i vettori $\perp$ ai piani, nel nostro caso

$(1,-1,3)$ $\qquad$ $(2,1,-1)$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Conosco le due forme parametriche

1° modo: passo in cartesiana (ok, ma come si fa?)

2° modo meglio passare in cartesiana ☺

Come passo tra le varie forme?

$\boxed{\text{1° caso}}$: conosco cartesiana e voglio parametrica

Devo trovare tre punti del piano $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ e poi scrivo

$$\vec{P} + t(\vec{Q}-\vec{P}) + s(\vec{R}-\vec{P})$$

Esempio $\quad 2x + y - 3z = 7$

Trovo un p.to qualunque del piano : $(0,7,0)$
Quindi il piano sarà del tipo

$$(0,7,0) + t\vec{v} + s\vec{w}$$

devono essere $\perp$ al vettore
$(2,1,-3)$ che sappiamo
essere $\perp$ al piano

Non resta che trovare 2 vettori $\perp$ a $(2,1,-3)$ e che non siano uno multiplo dell'altro

$(0,3,1) = \vec{v}$ $\qquad\qquad$ $\vec{w} = (3,0,2)$

Eq. parametrica : $\boxed{(0,7,0) + t\,(0,3,1) + s\,(3,0,2)}$

Potevo anche scegliere $\vec{w} = (-1,2,0)$

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Conosco la parametrica e voglio la cartesiana

Esempio $\qquad (5,1,0) + t\,(2,1,1) + s\,(-1,3,1)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ riscrivo la parametrica

$$(\underset{x}{\overset{\shortparallel}{5+2t-s}},\ \underset{y}{\overset{\shortparallel}{1+t+3s}},\ \underset{z}{\overset{\shortparallel}{t+s}})$$

Il piano sarà $\quad ax+by+cz+d=0$. Sostituisco

$$a\,(5+2t-s) + b\,(1+t+3s) + c\,(t+s) + d = 0$$

$2a+b+c = 0$ $\qquad$ (coeff. di t)
$-a+3b+c = 0$ $\qquad$ (coeff. di s)
$5a+b+d = 0$ $\qquad$ (termine noto)

Risolvendo trovo a, b, c

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

d è param libero

d = parametro libero

$+26c = 14d \rightsquigarrow c = \frac{7d}{13}$

$7b = -3c \rightsquigarrow b = -\frac{3}{7}c = -\frac{3}{13}d$

$2a = -b - c = \frac{3}{13}d - \frac{7}{13}d = -\frac{4}{13}d \rightsquigarrow a = -\frac{2}{13}d$

Potendo scegliere d a piacimento, prendo $d = 13$ e trovo

$$\boxed{-2x - 3y + 7z + 13 = 0}$$

2° modo Osservo che (a, b, c) deve essere $\perp$ ai due vettori che moltiplicano t e/o s, cioè

$(2, 1, 1)$ e $(-1, 3, 1)$

Esiste una FORMULA MISTERIOSA che fornisce un vettore $\perp$ a due vettori dati

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)}$$

La applico ai 2 vettori dati

$(-2, -3, 7)$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x &: 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -2 \\ y &: 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3 \rightsquigarrow \text{cambio segno: } -3 \\ z &: 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7 \end{aligned}$$

Trovati (a, b, c) sostituisco un p.to e trovo d.