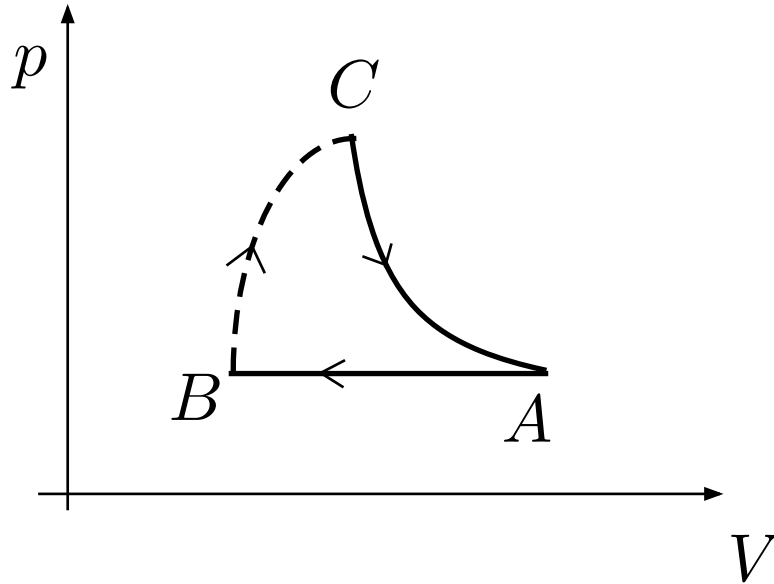


Esercizio (tratto dal Problema 13.34 del Mazzoldi 2)

Un gas ideale biatomico passa dallo stato A ($V_A = 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, $p_A = 0.6 \text{ bar}$, $T_A = 476 \text{ K}$) allo stato B ($V_B = 3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$) con una compressione isobara reversibile. Il gas viene poi posto a contatto termico con una sorgente alla temperatura T_C e si espande fino al volume $V_C = 3.4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, compiendo il lavoro $W_{B \rightarrow C} = 2 \text{ kJ}$. Dallo stato C il gas torna infine nello stato A con un'espansione adiabatica reversibile. Calcolare il rendimento del ciclo e il lavoro nei tratti $A \rightarrow B$ e $C \rightarrow A$.



SOLUZIONE

1. Dati iniziali:

Scriviamo i dati iniziali convertendo in unità del Sistema Internazionale

p_A	$=$	$0.6 \text{ bar} = 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
T_A	$=$	476 K
V_A	$=$	$5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$
V_B	$=$	$3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$
V_C	$=$	$3.4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$
$W_{B \rightarrow C}$	$=$	$2 \cdot 10^3 \text{ J}$

(1)

Calcoliamo anzitutto il numero di moli del gas. Sfruttando l'equazione di stato nella stato A abbiamo:

$$p_A V_A = n R T_A$$

e dunque

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} \quad (2)$$

Sostituendo i dati otteniamo

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} 476 \text{ K}} = \\
 &= \frac{0.6 \cdot 10^5 \cdot 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ Pa m}^3}{8.314 476 \text{ K} \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = \\
 &\quad [\text{uso } \text{J} = \text{N m} = \text{Pa m}^3] \\
 &= 0.773 \text{ mol}
 \end{aligned} \quad (3)$$

2. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato B . Dato che la trasformazione $A \rightarrow B$ è isobara, abbiamo:

$$p_B = p_A \quad (4)$$

e dunque

$$p_B = 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Per quanto riguarda la temperatura, usiamo nuovamente l'equazione di stato

$$p_B V_B = n R T_B$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 T_B &= \frac{p_B V_B}{n R} = \\
 &\quad [\text{uso (2)}] \\
 &= \frac{p_B V_B}{\frac{p_A V_A}{R T_A} R} \\
 &\quad [\text{uso (4)}] \\
 &= T_A \frac{V_B}{V_A}
 \end{aligned} \quad (5)$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 T_B &= T_A \frac{V_B}{V_A} = \\
 &= 476 \text{ K} \frac{3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} = \\
 &= 280 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{6}$$

3. Calcoliamo ora la pressione e la temperatura nello stato C . Siccome la trasformazione $C \rightarrow A$ è un'adiabatica, abbiamo che

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \quad (\text{gas biatomico}) \tag{7}$$

Pertanto

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{7/5} \tag{8}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 p_C &= 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \left(\frac{5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{3.4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \right)^{7/5} = \\
 &= 1.06 \cdot 10^5 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Per la temperatura usiamo nuovamente l'equazione della curva adiabatica, questa volta nella forma

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 T_C &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \\
 &= T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/5}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Sostituendo i valori

$$\begin{aligned}
 T_C &= 476 \text{ K} \left(\frac{5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{3.4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \right)^{2/5} = \\
 &= 560 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nel tratto $C \rightarrow A$ il calore

$$Q_{C \rightarrow A} = 0 \tag{12}$$

in quanto $C \rightarrow A$ è un'adiabatica.

5. Calcoliamo ora il calore $Q_{A \rightarrow B}$. Siccome si tratta di una trasformazione isobara, possiamo utilizzare la formula

$$\begin{aligned}
 Q_{A \rightarrow B} &= n c_p (T_B - T_A) = \\
 &= n \frac{7}{2} R (T_B - T_A) = \\
 &= 0.773 \text{ mol} \frac{7}{2} 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (280 - 476) \text{ K} = \\
 &= -4409 \text{ J} \quad (\text{calore ceduto dal gas})
 \end{aligned} \tag{13}$$

6. Calcoliamo ora il calore $Q_{B \rightarrow C}$. Utilizziamo il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q - W$) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
 Q_{B \rightarrow C} &= \Delta U_{B \rightarrow C} + W_{B \rightarrow C} = \\
 &= nc_V (T_C - T_B) + W_{B \rightarrow C} = \\
 &= n \frac{5}{2} R (T_C - T_B) + W_{B \rightarrow C} = \\
 &= 0.773 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (560 - 280) \text{ K} + 2000 \text{ J} = \\
 &= 6499 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito dal gas})
 \end{aligned} \tag{14}$$

7. Il rendimento del ciclo è definito come

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \tag{15}$$

Per quanto calcolato in precedenza

$$\begin{aligned}
 Q_{ced} &= Q_{A \rightarrow B} = -4409 \text{ J} \\
 Q_{ass} &= Q_{B \rightarrow C} = 6499 \text{ J}
 \end{aligned}$$

e dunque

$$\eta = 1 - \frac{4409 \text{ J}}{6499 \text{ J}} = 0.32 \tag{16}$$

8. Calcoliamo ora il lavoro $W_{A \rightarrow B}$:

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} p dV = \\
 &= p_A (V_B - V_A) = \\
 &= 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} (3.0 - 5.1) \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \\
 &= -1.26 \cdot 10^3 \text{ Pa m}^3 = \\
 &= -1260 \text{ J} \quad (\text{lavoro subito dal gas})
 \end{aligned} \tag{17}$$

9. Calcoliamo ora il lavoro $W_{C \rightarrow A}$. Per il primo principio applicato al caso di un'adiabatica si ha

$$\begin{aligned}
 W_{C \rightarrow A} &= -\Delta U_{C \rightarrow A} = U(C) - U(A) = \\
 &= nc_V (T_C - T_A) = \\
 &= n \frac{5}{2} R (T_C - T_A) = \\
 &\quad [\text{uso (2) e (10) per esprimere tutto in termini dei dati iniziali}] \\
 &= \frac{p_A V_A}{RT_A} \frac{5}{2} R \left(T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/5} - T_A \right) \\
 &= \frac{5}{2} p_A V_A \left(\left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{2/5} - 1 \right) \\
 &= 2.5 \cdot 0.6 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \left(\left(\frac{5.1}{3.4} \right)^{2/5} - 1 \right) = \\
 &= 1347 \text{ J}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Controlliamo che il rendimento del ciclo si possa valutare anche come

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} \quad (19)$$

Per quanto calcolato in precedenza, otteniamo

$$\begin{aligned} W &= W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} = \\ &= -1260 \text{ J} + 2000 \text{ J} + 1347 \text{ J} = \\ &= 2087 \text{ J} \end{aligned} \quad (20)$$

mentre

$$Q_{ass} = Q_{B \rightarrow C} = 6499 \text{ J} \quad (21)$$

e dunque

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{2087 \text{ J}}{6499 \text{ J}} = 0.32 \quad (22)$$

che coincide col risultato (16).