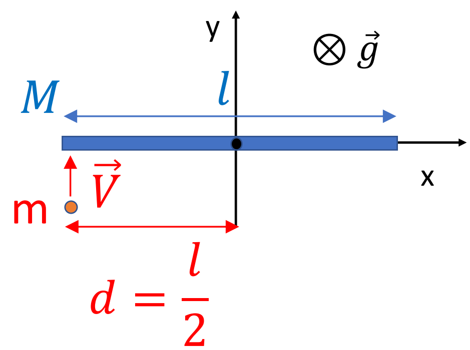
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 26/06/2024

Nome:	**Matricola:**
Cognome:	**Anno di Corso:**

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una sbarra omogenea di lunghezza l e massa M, si trova in quiete su un piano orizzontale privo di attrito. La sbarra viene colpita da una pallina puntiforme di massa m e velocità V in direzione perpendicolare alla sbarra. L'urto avviene a una distanza $d = l/2$ (viene colpita una delle due estremità). L'urto è completamente elastico e dopo l'urto il corpo di massa m si ferma mentre la sbarra si allontana ruotando su se stessa.

1.1 Stabilire quale delle seguenti grandezze, riferite al sistema pallina più sbarra sono conservate nell'urto e spiegarne il motivo: quantità di moto $\overrightarrow{P}$, momento angolare $\overrightarrow{L}$ con polo in O (centro della sbarra), energia cinetica T

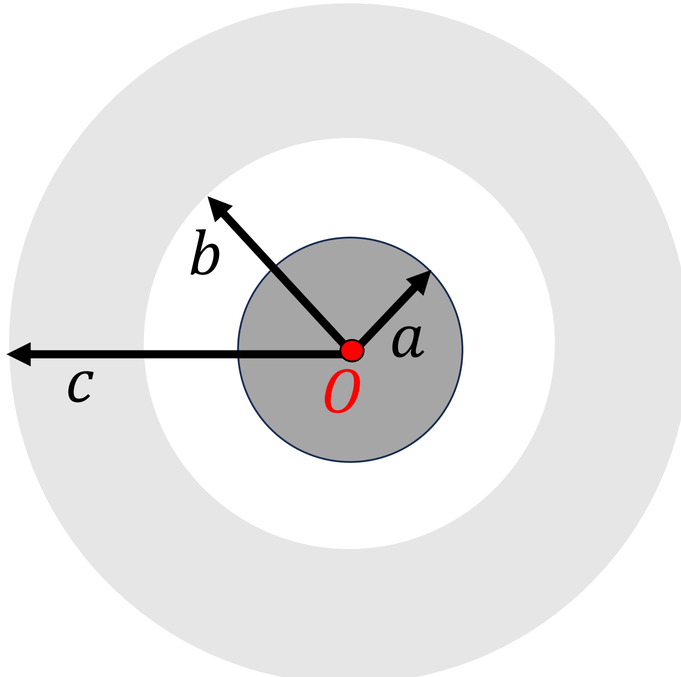
1.2 Determinare l'espressione analitica della velocità V_{CM} del centro di massa della sbarra in funzione di M, m e V e la velocità angolare ω di rotazione della sbarra attorno al suo centro di massa in funzione di l, M,m,V.

V_{CM}= .... ω = ...

1.3 Sfruttando la condizione di completa elasticità dell'urto dimostrare che il rapporto m/M è pari a $1/4$ e calcolare per $m = 2\ kg$ e $V = 2\ m/s$ l'energia cinetica dovuta alla traslazione del centro di massa della sbarra, K_{tr}, e quella dovuta alla rotazione intorno al centro di massa della sbarra, K_{rot}.

K_{tr}= .... K_{rot} = ...

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



($\it{Figura\ qualitativa\ a\ solo\ scopo\ illustrativo}$)

Con riferimento alla figura, una carica $q = 5\ nC$ è distribuita uniformemente nel volume di una sfera isolante di raggio $a = 5\ cm$. La sfera carica viene inserita al centro di un guscio sferico conduttore di raggio interno $b = 12\ cm$ e raggio esterno $c = 18\ cm$, inizialmente scarico ed isolato.
All'equilibrio:

2.1 calcolare i valori delle cariche presenti sulla superficie sferica interna, Q_b, ed esterna, Q_c del guscio conduttore

Q_b= .... Q_c = ...

2.2 determinare l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio e disegnare un grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro O della sfera isolante

$\overrightarrow{E}$ = ...

2.3 calcolare il potenziale del guscio conduttore V_{con} e il potenziale $V(O)$ in O

V_{con}= .... $V(O)$ = ...

Si assuma che il potenziale a distanza infinita da O è nullo.

Costanti Utili: $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ F/m$

Soluzione Esercizio 1

Domanda 1.1
Poichè il sistema non è vincolato e la risultante delle forze esterne (gravità e reazione del piano) è nulla, durante l'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema. Inoltre, dopo l'urto, poichè sulla sbarra la risultante delle forze esterne è nulla, la velocità del CM della sbarra è costante. Non essendo presenti forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato) si conserva il momento angolare rispetto a qualunque polo, e quindi anche prendendo come polo il punto O che coincide con il centro di massa della sbarra. Poichè l'urto è perfettamente elastico, si conserva l'energia cinetica non variando la posizione durante l'urto (e di conseguenza l'energia potenziale) e non essendo in gioco forze dissipative che compiono lavoro (urto elastico).
Domanda 1.2
Dalla conservazione della quantità di moto:

$$M\overrightarrow{V}_{CM} = m\overrightarrow{V} \quad \Rightarrow \quad V_{CM} = \frac{m}{M}V$$

La velocità del CM ha direzione e verso di $\hat{y}$ ed è costante nel moto successivo all'urto, come visto nella risposta alla domanda 1.1. Dalla conservazione del momento angolare rispetto a qualunque polo, scegliendo come polo il CM (O) della sbarra:

$$\overrightarrow{L}_i^{CM} = \overrightarrow{L}_f^{CM} \quad \Rightarrow \quad -dmV\hat{z} = I_{CM}\overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega_z\hat{z} = -\frac{dmV}{I_{CM}}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\frac{l}{2}mV}{\frac{Ml^2}{12}} = \frac{m}{M}\frac{6V}{l}$$

dove I_{CM} è il momento di inerzia della sbarra per l'asse di rotazione che passa per il CM. Di conseguenza dopo l'urto il CM della sbarra trasla con velocità V_{CM} allontanandosi dalla posizione iniziale lungo $\hat{y}$ e la sbarra ruota attorno al CM come dichiarato nel testo, in senso orario ($\omega_z < 0$)
Domanda 1.3
In un urto perfettamente elastico si conserva l'energia cinetica:

$$T_i = \frac{1}{2}mV^2 = T_f = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad mV^2 = MV_{CM}^2 + I_{CM}\omega^2$$

sostituendo le espressioni di V_{CM} e ω come determinate nella risposta alla domanda 2 si ottiene:

$$mV^2 = M\left(\frac{m}{M}V\right)^2 + \frac{Ml^2}{12}\left(\frac{m}{M}\frac{6V}{l}\right)^2 = 4\frac{m^2}{M} \quad \Rightarrow \quad m/M = 1/4$$

L'energia cinetica di traslazione del CM è data da:

$$K_{tr} = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{V}{4}\right)^2 = 1\ J$$

L'energia rotazionale attorno al centro di massa è data da:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{12}\left(\frac{1}{4}\frac{6V}{l}\right)^2 = 3\ J$$

Soluzione Esercizio 2

Domanda 2.1

All'equilibrio, essendo il guscio un conduttore, il campo elettrico per $b < r < c$, è nullo. Di conseguenza prendendo una sfera di Gauss con centro in O e raggio r tale che $b < r < c$ la carica interna a tale sfera che è pari a $q + Q_b$ deve essere nulla. Per cui $Q_b = -q = -5\ nC$. Per la conservazione della carica, poichè la carica iniziale del sistema era pari a $Q_i = q$, raggiunto l'equilibrio per la carica finale del sistema vale:

$$Q_f = q + Q_b + Q_c = Q_i = q \quad \Rightarrow \quad Q_c = q = 5\ nC$$

Domanda 2.2

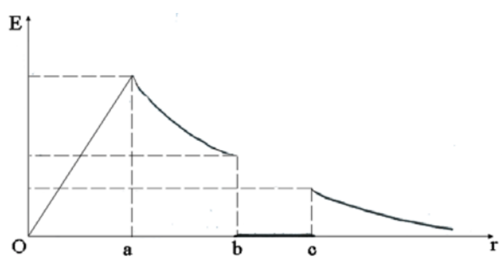
Per la simmetria sferica della distribuzione di carica (la distribuzione di carica è invariante per rotazioni intorno a qualsiasi asse passante per O) il campo è radiale in coordinate sferiche con centro in O : $\overrightarrow{E} = E_r\hat{r}$. Poichè la carica q è distribuita in modo uniforme nel volume della sfera di raggio a, la densità volumetrica di carica in essa è $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$. Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio r concentrica al sistema, si ottiene il campo elettrostatico E_r che ha un diverso andamento nelle quattro regioni $(0 \le r \le a,\ a \le r < b,\ b < r < c,\ r > c)$.

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad Q_{int} = \begin{cases} \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{a^3} & 0 \le r \le a \\ q & a \le r < b \\ 0 & b < r < c \\ q & r > c \end{cases} \quad \overrightarrow{E} = E_r\hat{r} \quad \Rightarrow E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{a^3} & 0 \le r \le a \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & a \le r < b \\ 0 & b < r < c \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > c \end{cases}$$

dove Q_{int} è la carica interna alla sfera di Gauss in ciascuna delle quattro regioni.

Il campo, quando non è nullo, è diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro (O) del sistema (poichè $q > 0$).

Il grafico qualitativo del modulo del campo elettrico in funzione della distanza r da O è riportato nella figura successiva. Il grafico di $E(r)$ è una curva che cresce linarmente con r da 0 ad a, decresce come $\frac{1}{r^2}$ per $a < r < b$ è nullo per $b < r < c$ e decresce come $\frac{1}{r^2}$ per $c < r$.



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Domanda 2.3

Poichè il guscio è conduttore tutti i punti del guscio sono allo stesso potenziale, per cui $V(c) = V(b) = V_{con}$.
Assumendo che il potenziale all'infinito è nullo possiamo determinare $V(c)$:

$$V(c) - V(\infty) = V(c) = -\int_{\infty}^{c} E_r(r)dr = \int_{c}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 250\ V$$

Poichè $V(c) = V(b)$, essendo il conduttore equipotenziale, per calcolare il potenziale al centro del sistema è sufficiente calcolare $V(O) - V(b)$:

$$V(O)-V(b) = -\int_{b}^{0} E_r(r)dr = \int_{0}^{b} E_r(r)dr = \int_{0}^{a} E_r(r)dr + \int_{a}^{b} E_r(r)dr = \int_{0}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{a^3}dr + \int_{a}^{b} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2a} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

Di conseguenza sfruttando $V(c) = V(b)$ si ottiene:

$$V(O) - V(b) = V(O) - V(c) = 975\ V$$

Per cui:

$$V(O) = V(c) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2a} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right] = 1.22 \times 10^3\ V$$