# ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 48

Note Title 04/12/2018

## PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

**Def.** Sia V uno sp. vett. (di dimensione finita).
Un prodotto scalare in V è una funzione $V^2 \to \mathbb{R}$
(INPUT: coppie di vettori, OUTPUT: numero reale) che di solito si indica con $<x, y>$, che verifica le seguenti proprietà

(i) $<x,y> = <y,x>$ per ogni x e y in V (simmetria)

(ii) $<\lambda x, y> = \lambda <x,y>$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$, $y \in V$

(ii') $<x, \lambda y> = \lambda <x,y>$ " "

(iii) $<x_1 + x_2, y> = <x_1, y> + <x_2, y>$ per ogni $x_1, x_2, y$ in V

(iii') $<x, y_1 + y_2> = <x, y_1> + <x, y_2>$ per ogni $x, y_1, y_2$ in V

**Oss.** La (ii') segue da (i) + (ii)

$$<x, \lambda y> \underset{(i)}{=} <\lambda y, x> \underset{(ii)}{=} \lambda <y, x> \underset{(i)}{=} \lambda <x, y>$$

Analogamente (iii') segue da (i) + (iii)

$$<x, y_1 + y_2> \underset{(i)}{=} <y_1 + y_2, x> \underset{(iii)}{=} <y_1, x> + <y_2, x> \underset{(i)}{=} <x, y_1> + <x, y_2>$$

**Oss.** Le proprietà (ii) e (iii) dicono che $<x,y>$ è una funzione lineare vista come funzione di x (pensando y come fissato).

**Def.** Si definisce forma quadratica associata ad un prodotto scalare la forma

$$q(x) = <x, x>$$

(prodotto scalare di un vettore con se stesso)

Esempio 1 Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. Poniamo

$$\langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

INPUT: due polinomi OUTPUT: numero reale

$\boxed{\text{Verifico (i)}}$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx = \int_0^1 q(x)p(x)\,dx = \langle q(x), p(x) \rangle$$

Se scambio $p(x)$ e $q(x)$ non cambia nulla!

$\boxed{\text{Verifica (ii)}}$

$$\langle \lambda p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 \lambda p(x)q(x)\,dx = \lambda \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

$$= \lambda \langle p(x), q(x) \rangle$$

$\boxed{\text{Verifica (iii)}}$

$$\langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle = \int_0^1 [p_1(x)+p_2(x)]q(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 p_1(x)q(x)\,dx + \int_0^1 p_2(x)q(x)\,dx = \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle$$

— o — o —

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(1)q(1) - p(2018)q(2018)$$

Verifiche: prende in INPUT due pol. e restituisce un numero

(i): ovvia

(ii): $\lambda$ si raccoglie

(iii): facile conto

— o — o —

# Matrice che rappresenta un prodotto scalare

Sia $V$ sp. vett. di dim. finita, sia $\langle x, y \rangle$ un prod. scalare su $V$, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$.

Se conosco $\langle v_i, v_j \rangle$ per ogni coppia di elementi della base (anche coincidenti), allora conosco il prod. scalare tra due vettori qualunque.
Questa è una conseguenza della linearità

Tocchiamo con mano in dim. 2. Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di $V$.
Allora ogni $v \in V$ si scrive come $v = av_1 + bv_2$
" $w \in V$ " " " $w = cv_1 + dv_2$
Ma allora

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2 \rangle \\ &= a\langle v_1, cv_1 + dv_2 \rangle + \\ &\quad + b\langle v_2, cv_1 + dv_2 \rangle \\ &= ac\boxed{\langle v_1, v_1 \rangle} + ad\boxed{\langle v_1, v_2 \rangle} + bc\boxed{\langle v_2, v_1 \rangle} + bd\boxed{\langle v_2, v_2 \rangle}\end{aligned}$$

(espando usando la linearità)

uguali

Se conosco quelli riquadrati, allora posso calcolare $\langle v, w \rangle$

La matrice associata a $\langle x, y \rangle$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è la matrice $B$ di elementi

$$\boxed{B_{i,j} := \langle v_i, v_j \rangle}$$

Nota:
- si tratta di una matrice SIMMETRICA
- sulla diagonale ci sono i prodotti scalari degli el. della base con se stessi.

Trovata la matrice, la posso usare per calcolare il prodotto fra coppie di vettori

Dati $v \in V$ e $w \in V$, scrivo le componenti rispetto alla base ottenendo vettori $x$ e $y$ che penso come colonne

$v \rightsquigarrow$ vettore $x$ delle sue componenti
$w \rightsquigarrow$ " $y$ " " "

A quel punto

$$\langle v, w \rangle = \underset{\text{riga lunga } n}{y^t} \underbrace{B\, x}_{\text{colonna lunga } n} = x^t B y$$

<u>Esempio 1 di prima</u> $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \quad \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Come base di $V$ scegliamo $\{x^3, x^2, x, 1\}$.
Calcoliamo la matrice $B$

Devo calcolare tutti i prod. scalari fra el. della base

$\langle x^3, x^3 \rangle = \int_0^1 x^6\,dx = \frac{1}{7}$

$\langle x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$

$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1\,dx = 1$

$\langle x^3, x^2 \rangle = \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{6}$

$\langle x^3, x \rangle = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$

$\langle x^3, 1 \rangle = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

$\langle x^2, x \rangle = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

La matrice risulta

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x^3 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{array} \end{array}$$

Usando la matrice, calcolare $\langle \underbrace{x^2+1}_{v}, \underbrace{x^2+x^3}_{w} \rangle$

Calcolo le componenti di $v$ e $w$

$$x^2+1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x^3 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow 1 \end{array} \qquad x^2+x^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = (1 \ 1 \ 0 \ 0) \, B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{fare il conto...}$$

... e verificare che venga esattamente

$$\int_0^1 (x^2+1)(x^2+x^3)\,dx = \int_0^1 (x^4+x^5+x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

—o—o—

**Esempio 3** $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p(x), q(x) \rangle := 3p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

Verificare che si tratta di un prod. scalare $\rightsquigarrow$ vedi esempi prec.

Scrivere la matrice $B$ nella base $\{1, x^2, x\}$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -13 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x^2 & x \end{array} \end{array}$$

$$\langle 1, x \rangle = 3 - 2 = 1$$
$$\langle x^2, x \rangle = 3 - 8 = -5$$

$$\langle 1, 1 \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$$
$$\langle x^2, x^2 \rangle = 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2 - 2^2 \cdot 2^2 = 3 - 16 = -13$$
$$\langle x, x \rangle = 3 - 4 = -1$$
$$\langle 1, x^2 \rangle = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 = -1$$

Calcolare $\langle x^2+1, x-2 \rangle$

$$x^2+1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x-2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -13 & -5 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -6$$

verifica nell'altro modo

$$\langle \underbrace{x^2+1}_{p(x)}, \underbrace{x-2}_{q(x)} \rangle = 3\, p(1) q(1) - p(2) q(2)$$

$$= 3 \cdot 2 (-1) - 5 \cdot 0 = -6$$ ☺

Oss. Nel caso del prod. scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ la matrice B rispetto alla base canonica è quella identica.