Ricerca Operativa 12/2/25

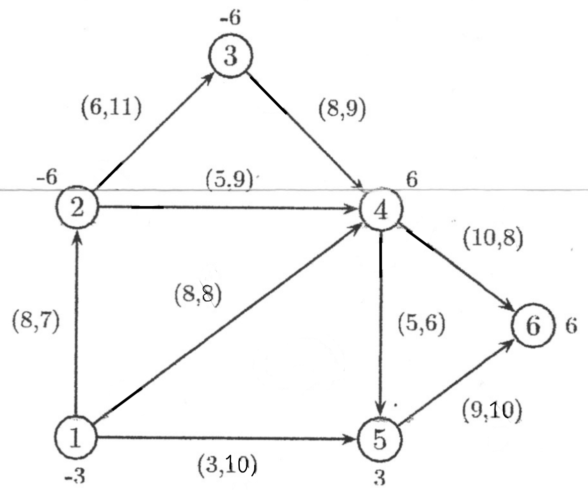
Esercizio 1. Una ditta produce marmellata d'arance e gelatina d'arance con arance, limoni e zucchero. La produzione di un chilo di marmellata richiede 7 arance, 4 limoni e 700 grammi di zucchero, mentre la produzione di un chilo di gelatina richiede 9 arance, 3 limoni ed un chilo di zucchero. Ogni giorno la ditta ha a disposizione 840 arance, 280 limoni e 90 chili di zucchero. Si vuole massimizzare il profitto sapendo che un chilo di marmellata viene venduto a 12 euro mentre uno di gelatina a 15 euro. Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione che prevede la produzione di sola gelatina. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo della PLI?

Esercizio 2. Trovare il ciclo di costo minimo sulla rete:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	37	17	42
2		22	19	32
3			9	13
4				20

Calcolare le valutazioni date da assegnamento di costo minimo, 3–albero di costo minimo, algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5 e algoritmo delle toppe sull'assegnamento trovato. Scrivere esplicitamente l'equazione di un vincolo del TSP violato dall'assegnamento ed uno dal 3–albero. Applicare il *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero ed istanziando x_{15}, x_{25}, x_{35}. Se un arco diventasse inutilizzabile, la soluzione ottima cambierebbe?

Esercizio 3. Su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerare il flusso dato dall'albero di copertura formato dagli archi (1,4) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6) e l'arco (3,4) come arco di U. Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 tramite l'algoritmo di Dijkstra e la soluzione ottima in termini di flusso su reti. Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il vettore del flusso massimo.

Esercizio 4. Sia $f(x_1,x_2) = 2\,x_1^2 + x_2$ su $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2\,x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0\}$. I punti stazionari sono $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$, $\left(\sqrt{30}/4,\ 1/2\right)$, $\left(-\sqrt{30}/4,\ 1/2\right)$. Catalogarli calcolando i moltiplicatori.

Dato

$$\begin{cases} \max\ -(x_1-5)^2 - 2\,(x_2-3)^2 \\ 1 \leq x_1 \leq 4 \\ 1 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Fare un passo del gradiente proiettato ed uno di Frank-Wolfe a partire da $(1,4)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max 12\,x_A + 15\,x_B \\ 7\,x_A + 9\,x_B \leq 840 \\ 4\,x_A + 3\,x_B \leq 280 \\ 0.7\,x_A + x_B \leq 90 \\ x_A, x_B \geq 0. \end{cases}$$

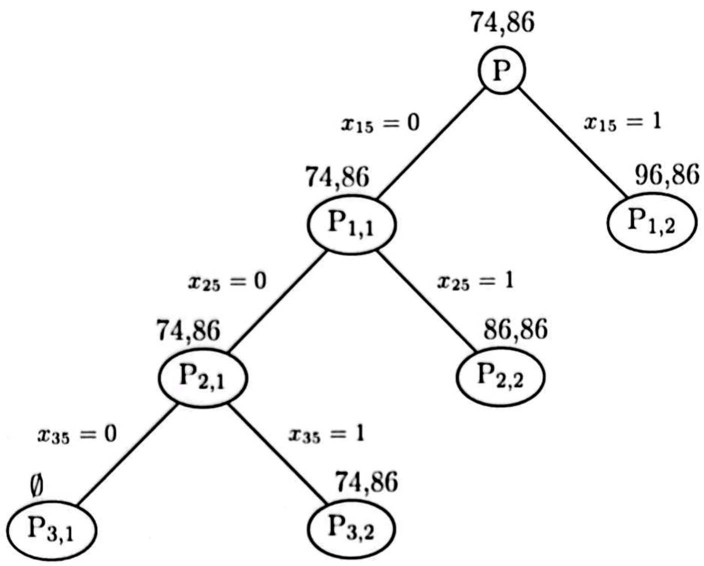
Vertice di partenza: $(0, 90)$ con base $B = \{3, 4\}$. $y = (0, 0, 15, -3/2, 0)$, $h = 4$, e $W^{=}(1 - 7/10)^T$, $r = (300/7, 100/19, 900/)$, $k = 2$. L'ottimo del rilassato continuo è $(100/19, 1640/19)$. per calcolare il piano di taglio $r = 1$ la prima riga della matrice $\tilde{A}$ è $(10/19, -30/19)$ ed il taglio è $10x_4 + 8x_5 \geq 5$.

Esercizio 2. L'assegnamento di costo minimo è $1 - 2 - 1$ e $3 - 4 - 5 - 3$ che dà $v_I(P) = 72$.

3–albero: (1,2) (1,4) (3,4) (3,5) (4,5) e $v_I(P) = 74$

ciclo: 5–3–4–1–2–5 e $v_S(P) = 86$

ciclo ottimo = 5–3–4–1–2–5 e costo = 86



Esercizio 3.

		iterazione 1
Archi di T		(1,4) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)
Archi di U		(3,4)
x		(0, 3, 0, 3, 3, 9, 3, 6, 0)
π		(0, 3, 9, 8, 13, 18)
Arco entrante		(1,5)
ϑ^+, ϑ^-		10 , 3
Arco uscente		(1,4)

L'albero dei cammini minimi come flusso è $x = (1, 3, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. I cammini aumentanti sono 1-3-7; 1-2-5-7; 1-4-3-7; 1-4-6-7 con $\delta = (8, 6, 3, 3)$ con flusso ottimo $x = (6, 8, 6, 6, 0, 11, 3, 3, 6, 3)$, $N_s = \{1, 2, 5\}$.

Esercizio 4.

Soluzioni del sistema LKKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 2)$	$-1/4$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ -2)$	$1/4$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(\sqrt{30}/4,\ 1/2\right)$	-1		SI	SI	NO	NO	NO
$\left(-\sqrt{30}/4,\ 1/2\right)$	-1		SI	SI	NO	NO	NO

Metodo	Punto iniziale	M	Direzione	Massimo Spostamento	Passo	Punto successivo
Gradiente proiettato	$(1,4)$	(-1,0)	(0, -4)	3/4	1/4	$(1,3)$
Metodo	Punto iniziale	F.O. linearizzato	Ottimo linearizzato	Direzione	Passo	Punto successivo
Frank Wolfe	$(1,4)$	$8x_1 - 4x_2$	(4,1)	$(3,-3)$	2/3	$(3,2)$