Esercizio (tratto dal Problema 2.12 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale descrive una traiettoria circolare di raggio $R = 14\,\mathrm{cm}$, inizialmente con moto uniforme di velocità angolare $\omega_0 = 0.4\,\mathrm{s}^{-1}$. All'istante $t = 0$ il moto diventa accelerato con accelerazione angolare che cresce nel tempo secondo la legge $\alpha(t) = c\,t$ con $c = 0.2\,\mathrm{s}^{-3}$. Calcolare all'istante $t = 8\,\mathrm{s}$:

1. la velocità angolare;

2. il modulo dell'accelerazione;

3. l'angolo che l'accelerazione forma con la tangente alla circonferenza

SOLUZIONE

Dati iniziali:
$R = 0.14\,\mathrm{m}$
$\omega(t=0) = \omega_0 = 0.4\,\mathrm{s}^{-1}$
$\alpha(t) = c\,t \quad t \geq 0 \quad \text{con } c = 0.2\ \mathrm{s}^{-3}$

- Stabiliamo anzitutto l'andamento nel tempo della velocità angolare $\omega(t)$. A tale scopo integriamo la definizione di accelerazione angolare

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \tag{1}$$

da $t = 0$ fino ad un generico tempo t, ottenendo

$$\omega(t) = \omega(t=0) + \int_0^t \alpha(t')\,dt' \tag{2}$$
$$= \omega_0 + \int_0^t c\,t'\,dt' \tag{3}$$

ossia

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{c}{2}\,t^2 \tag{4}$$

- Le componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione

$$\mathbf{a} = \underbrace{R\frac{d\omega}{dt}}_{=a_\theta}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta \underbrace{-R\omega^2}_{=a_r}\,\hat{\mathbf{u}}_r \tag{5}$$

variano dunque nel tempo secondo

$$\begin{cases} a_\theta(t) = R\frac{d\omega}{dt} = Rc\,t \\ \\ a_r(t) = -R\omega^2(t) = -R\left(\omega_0 + \frac{c}{2}\,t^2\right)^2 \end{cases} \tag{6}$$

Pertanto abbiamo

1. la velocità angolare all'istante $t = 8\,\mathrm{s}$ vale

$$\begin{aligned} \omega(t=8\,\mathrm{s}) &= 0.4\,\mathrm{s}^{-1} + \frac{0.2\,\mathrm{s}^{-3}}{2}\,(8\,\mathrm{s})^2 = \\ &= 0.4\,\mathrm{s}^{-1} + 6.4\,\mathrm{s}^{-1} = \\ &= 6.8\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Le due componenti dell'accelerazione valgono

$$a_\theta(t=8\,\mathrm{s}) = 0.14\,\mathrm{m}\cdot\frac{0.2}{\mathrm{s}^3}\cdot 8\,\mathrm{s} = 0.224\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{8}$$
$$a_r(t=8\,\mathrm{s}) = -R\,\omega^2(t=8\,\mathrm{s}) = -0.14\,\mathrm{m}\cdot(\frac{6.8}{\mathrm{s}^2})^2 = -6.474\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{9}$$

e notiamo che $a_\theta \ll a_r$.

2. il modulo dell'accelerazione varia nel tempo secondo

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a_\theta^2(t) + a_r^2(t)} \tag{10}$$

In particolare, all'istante $t = 8\,\mathrm{s}$, vale

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(t = 8\,\mathrm{s})| &= \sqrt{a_\theta^2(t = 8\,\mathrm{s}) + a_r^2(t = 8\,\mathrm{s})} = \\ &= \sqrt{\left(0.224\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2 + \left(-6.474\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2} = \\ &= 6.48\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{11}$$

3. l'angolo che l'accelerazione forma con la tangente alla circonferenza vale

$$\phi = \arctan\frac{|a_r|}{|a_\theta|} \tag{12}$$

ed in particolare, all'istante $t = 8\,\mathrm{s}$, vale

$$\begin{aligned} \phi(t = 8\,\mathrm{s}) &= \arctan\frac{|a_r(t = 8\,\mathrm{s})|}{|a_\theta(t = 8\,\mathrm{s})|} = \\ &= \arctan\frac{6.474\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0.224\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \arctan(28.9) = 1.53 \simeq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

Pertanto l'accelerazione $\mathbf{a}$ è praticamente diretta radialmente verso il centro, visto che $a_\theta \ll a_r$.