Università di Pisa

Pietro Ducange

Algoritmi e strutture dati
Programmazione dinamica e algoritmi greedy

a.a. 2020/2021

Si ringrazia la prof. Nicoletta De Francesco per aver messo a disposizione la maggior parte delle slide utilizzate nella presente lezione

Si può usare quando non è possibile applicare il metodo del divide et impera (non si sa con esattezza quali sottoproblemi risolvere e non è possibile partizionare l'insieme in sottoinsiemi disgiunti)

Metodo: si risolvono tutti i sottoproblemi a partire dal basso e si conservano i risultati ottenuti per poterli usare successivamente. (strategia bottom-up)

La complessità del metodo dipende dal numero dei sottoproblemi

Quando si può applicare

sottostruttura ottima: una soluzione ottima del problema contiene la soluzione ottima dei sottoproblemi

sottoproblemi comuni : un algoritmo ricorsivo richiederebbe di risolvere lo stesso sottoproblema più volte

Più lunga sottosequenza comune (PLSC)

$\alpha = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$

$\beta = \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6$

α =a b c a b b a **β=c b a b a c**

3 PLSC: baba, cbba, caba

Lunghezza delle PLSC = 4

PLSC

$\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_m \qquad \beta = \beta_1 \ldots \beta_j \ldots \beta_n$

L(i,j) = lunghezza delle PLSC di α_1 **..** α_i e β_1 **..** β_j

L(0,0)=L(i,0)=L(0,j)=0

L(i,j)=L(i-1,j-1)+1 **se** $\alpha_i = \beta_j$

L(i,j)=max(L(i,j-1),L(i-1,j)) **se** $\alpha_i \neq \beta_j$

Più lunga sottosequenza comune (PLSC)

$\alpha = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\quad \alpha_7 \qquad \beta = \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\quad \beta_6$

- **L(i,j)=L(i-1,j-1)+1** **se** $\alpha_i = \beta_j$

$\alpha = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \gamma \qquad \beta = \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6\ \gamma$

- **L(i,j)=max(L(i,j-1),L(i-1,j))** **se** $\alpha_i \neq \beta_j$

$\alpha = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$

$\beta = \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6$

$\alpha = \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$

$\beta = \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6\ \beta_6$

Verifica prima condizione

Sequenze originali:

$\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_m \quad \beta = \beta_1 \ldots \beta_j \ldots \beta_n$

$\alpha_1 .. \alpha_i$ e $\beta_1 .. \beta_j$

con i<=n e j<=m, sono due **prefissi** di α e β rispettivamente

Se la sequenza χ è una PLSC fra le due sotto-sequenze, χ sarà sicuramente un prefisso (primo pezzo) di una PLSC fra α e β completi.

Verifica prima condizione: Esempio

α =a b c a b b a β=c b a b a c

$\alpha 1$ =a b c a $\beta 1$=c b a b

χ= ba, ca

3 PLSC: baba, cbba, caba

```
int length(char*  a, char* b, int i, int j) {
    if (i==0 || j==0) return 0;
    if (a[i]==b[j]) return length(a, b, i-1, j-1)+1;
    else
     return max(length(a,b,i,j-1),length(a,b,i-1,j));
 };
```

Relazione ricorrenza

T(k)= b +2T(k-1)

La funzione ha un tempo esponenziale in k (minimo fra *n* e *m*).

Algoritmo di programmazione dinamica

Costruisce tutti gli L(i,j) a partire dagli indici più piccoli (bottom-up):

L(0,0), L(0,1) … L(0,n),

L(1,0), L(1,1) … L(1,n),

…

L(m,0), L(m,1) … L(m,n)

Algoritmo di programmazione dinamica

```
const int m=7; const int n=6;
int L [m+1][n+1];
int quickLength(char *a, char *b) {
   for (int j=0; j<=n; j++) L[ 0 ] [ j ]=0; // prima riga

    for (int i=1; i<=m; i++) {            // i-esima riga
      L[ i ] [ 0 ]=0;
     for (j=1; j<=n; j++)
          if (a[ i] != b[ j])
            L[ i ] [ j ] = max(L[ i ] [ j-1 ],L[ i-1 ] [ j ]);
          else  L[ i ] [ j ]=L[ i-1 ] [ j-1 ]+1;
   }
   return L[ m ] [n ];
 }
```

Complessità?

PLSC

		c	b	a	b	a	c
	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	2	2	2
c	0	1	1	1	2	2	3
a	0	1	1	2	2	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3
a	0	1	2	3	3	4	4

Estrazione di una PLSC

		c	b	a	b	a	c
	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	2	2	2
c	0	1	1	1	2	2	3
a	0	1	1	2	2	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3
a	0	1	2	3	3	4	4

cbba

```
void print(int ** L, char  *a, char *b, int i=m, int j=n){
        if ((i==0) || (j==0) ) return;
        if (a[i]==b[j]) {
            print(a,b, i-1, j-1);
            cout << a[i];
        }
        else if (L[i][j] == L[i-1][j])
            print(a,b, i-1, j);
               else print(a,b, i, j-1);
}
```

Riferimenti Bibliografici

Demetrescu:

Capitolo 10.2

Cormen:

Capitolo 15

Algoritmi greedy (golosi)

la soluzione ottima si ottiene mediante una sequenza di scelte

In ogni punto dell'algoritmo, viene scelta la strada che in quel momento sembra la migliore

la scelta locale deve essere in accordo con la scelta globale: scegliendo ad ogni passo l'alternativa che sembra la migliore non si dovrebbero perdere alternative che potrebbero rivelarsi migliori nel seguito.

Metodo top-down

Non sempre si trova la soluzione ottima ma in certi casi si può trovare una soluzione approssimata (esempio del problema dello zaino)

codici di compressione

Alfabeto : insieme di caratteri (es: a, b, c, d, e, f)

Codice binario: assegna ad ogni carattere una stringa binaria

Codifica del testo: sostituisce ad ogni carattere del testo il corrispondente codice binario.

Decodifica: ricostruire il testo originario.

Il codice può essere a lunghezza fissa o a lunghezza variabile

codici di compressione

	a	b	c	d	e	f
frequenza	45	13	12	16	9	5
Codice a lunghezza fissa	000	001	010	011	100	101
Codice a lunghezza variabile	0	101	100	111	1101	1100

codici

Codifica di abc con codice a lunghezza fissa: :

000 001 010 (9 bit)

Codifica di abc con codice a lunghezza variabile :

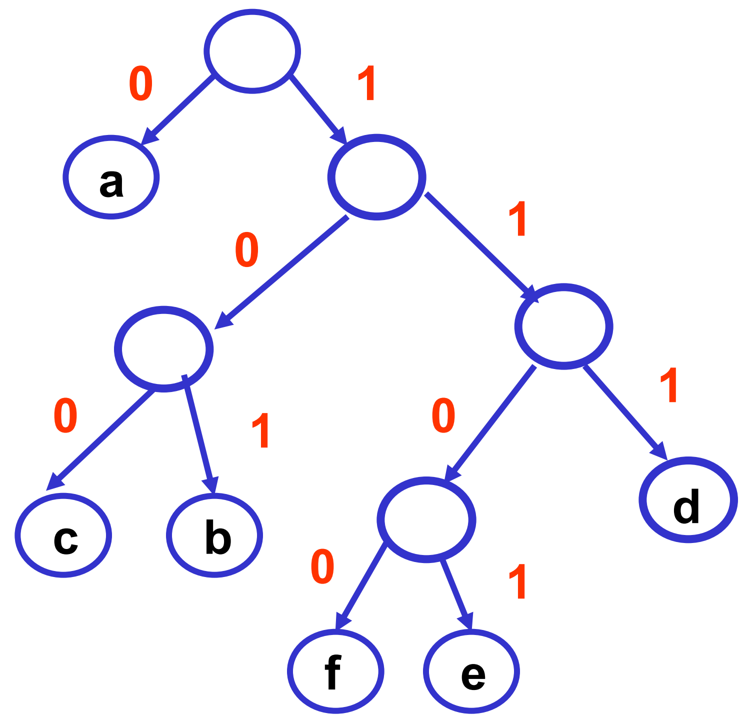
0 101 100 (7 bit)

Problema della decodifica

Codice prefisso: nessun codice può essere il prefisso di un altro codice

I codici prefissi possono essere rappresentati con alberi binari

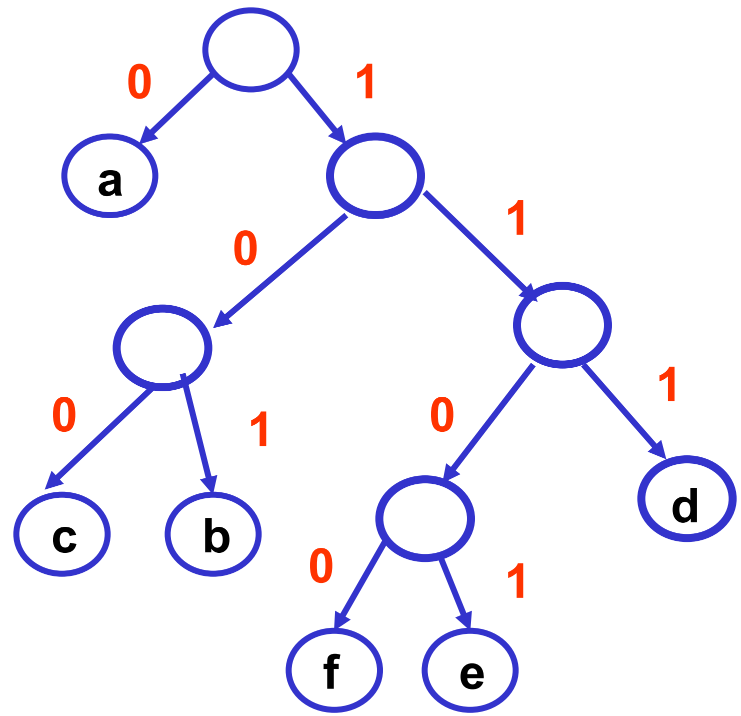
Rappresentazione **ottima**: albero **pienamente binario**



a	b	c	d	e	f
0	101	100	111	1101	1100

L’albero ha tante foglie quanti sono i caratteri dell’alfabeto

L’algoritmo di decodifica trova un cammino dalla radice ad una foglia per ogni carattere riconosciuto



Problema: dato un alfabeto e la frequenza dei suoi caratteri, costruire un codice ottimo (che minimizza la lunghezza in bit delle codifiche)

Algoritmo di Huffman

Costruisce l'albero binario in modo bottom-up

È un algoritmo greedy

algoritmo di Huffman

Gestisce un foresta di alberi

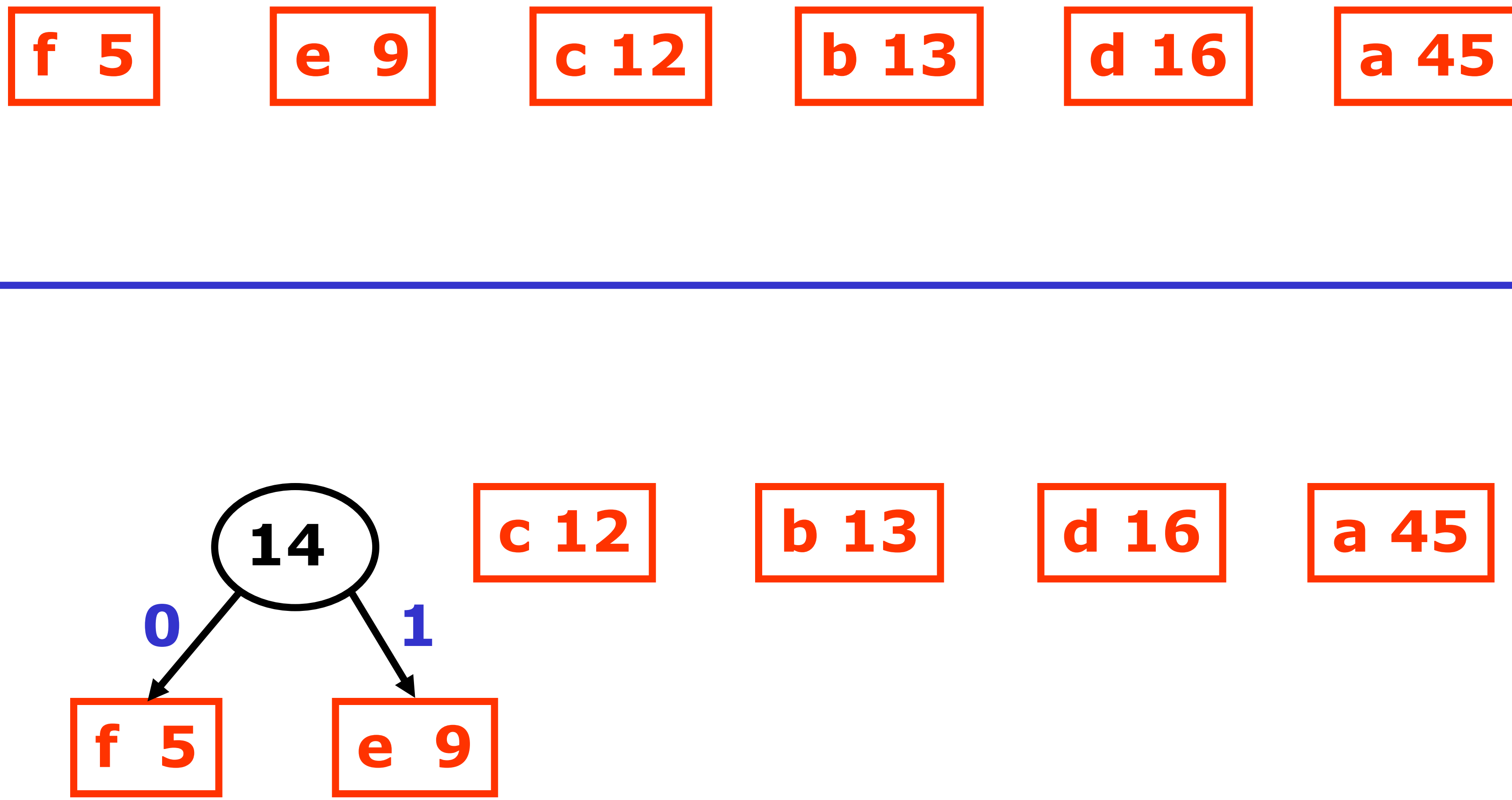
All'inizio ci sono n alberi di un solo nodo con le frequenze dei caratteri.

Ad ogni passo

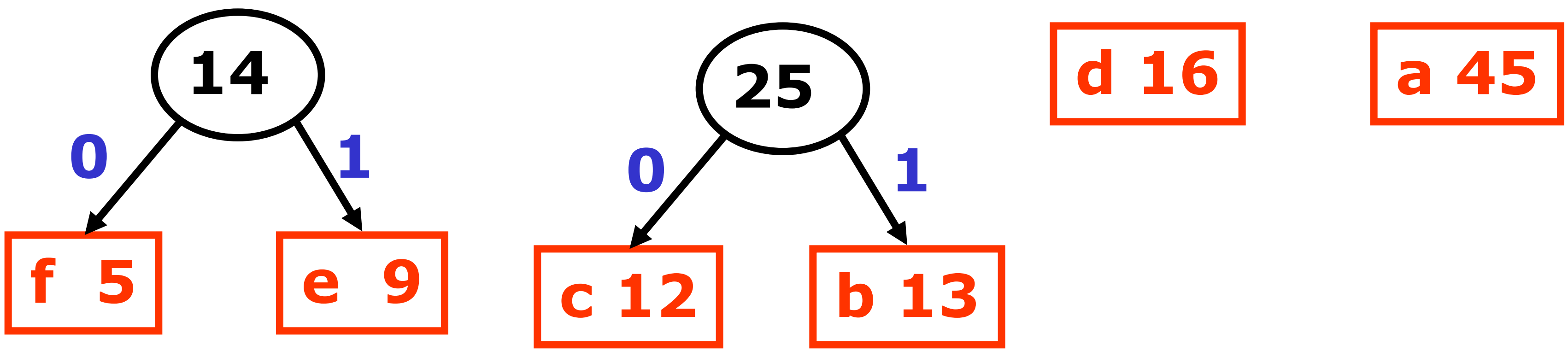
- **vengono fusi i due alberi con radice minore**

introducendo una nuova radice avente come etichetta la somma delle due radici

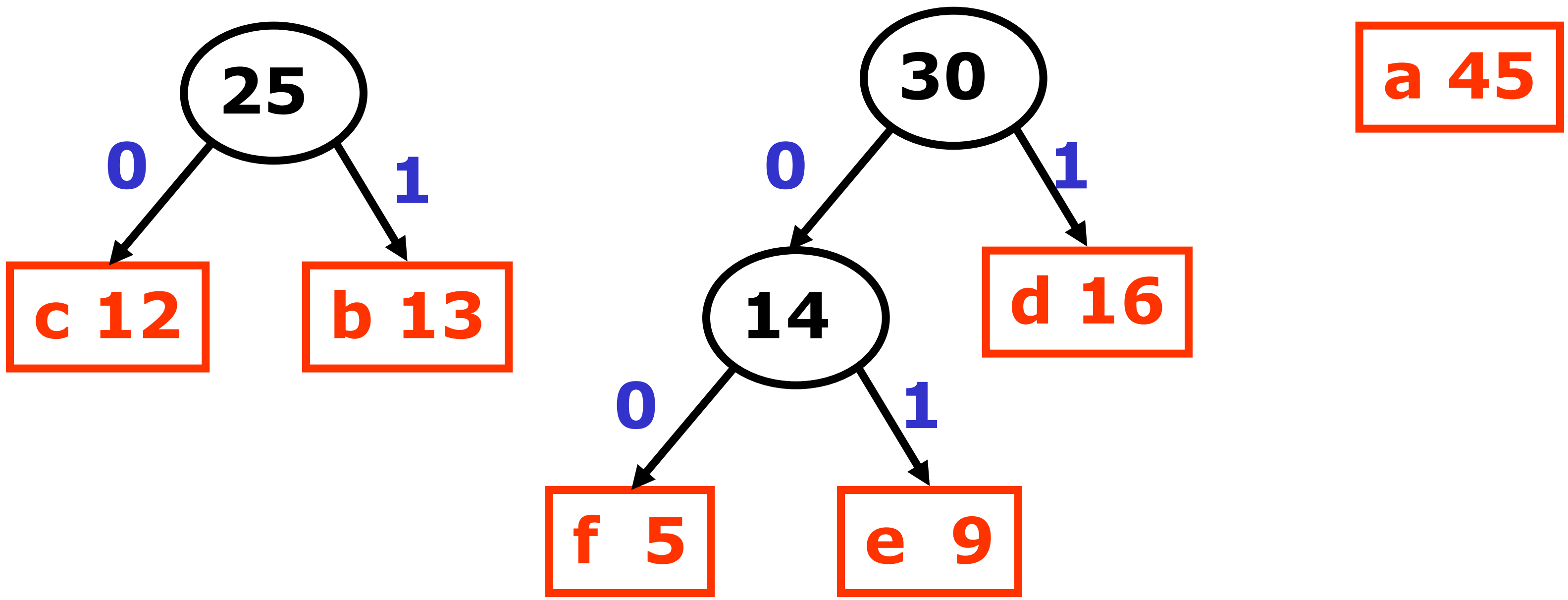
algoritmo di Huffman

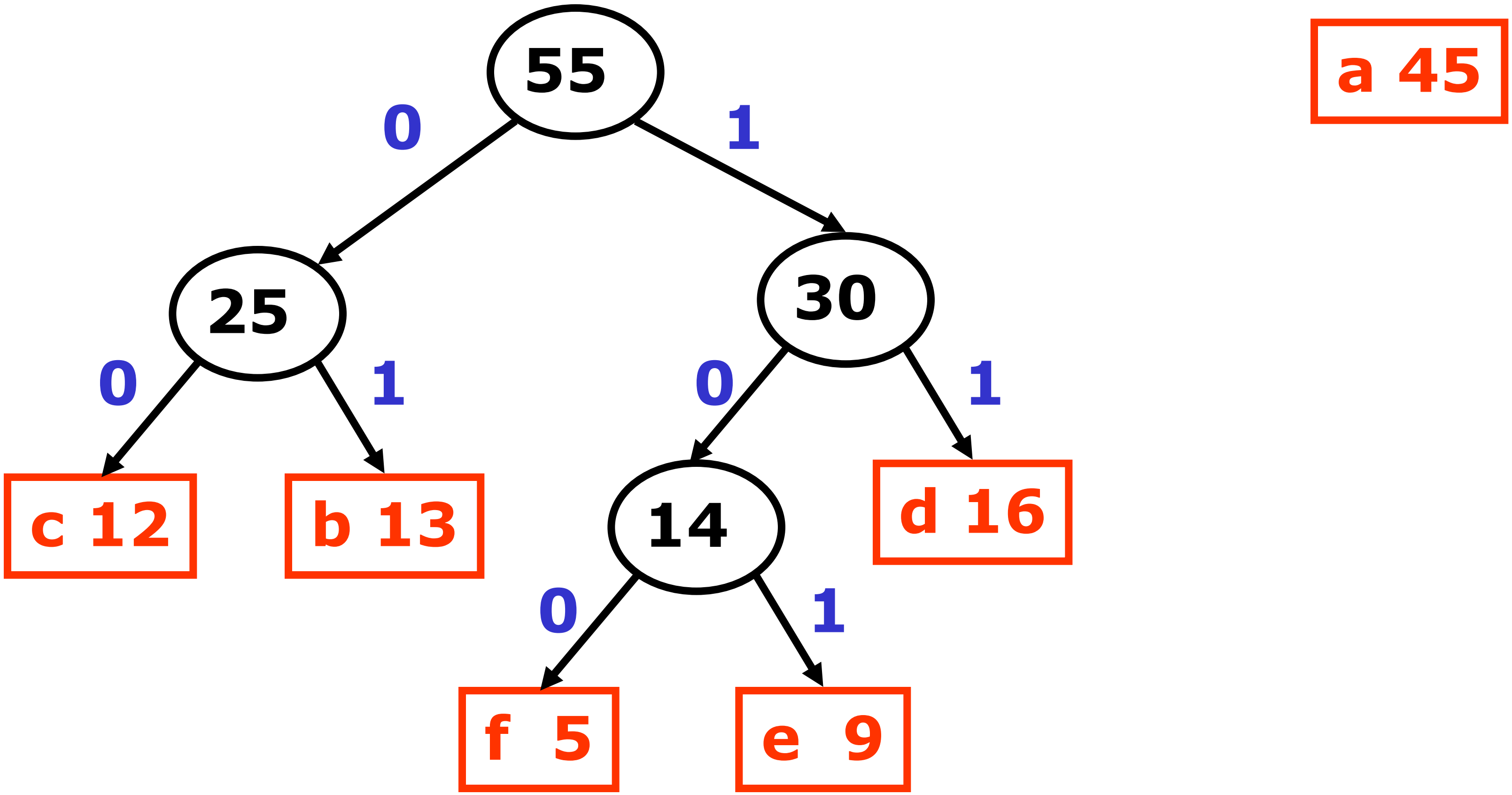


algoritmo di Huffman

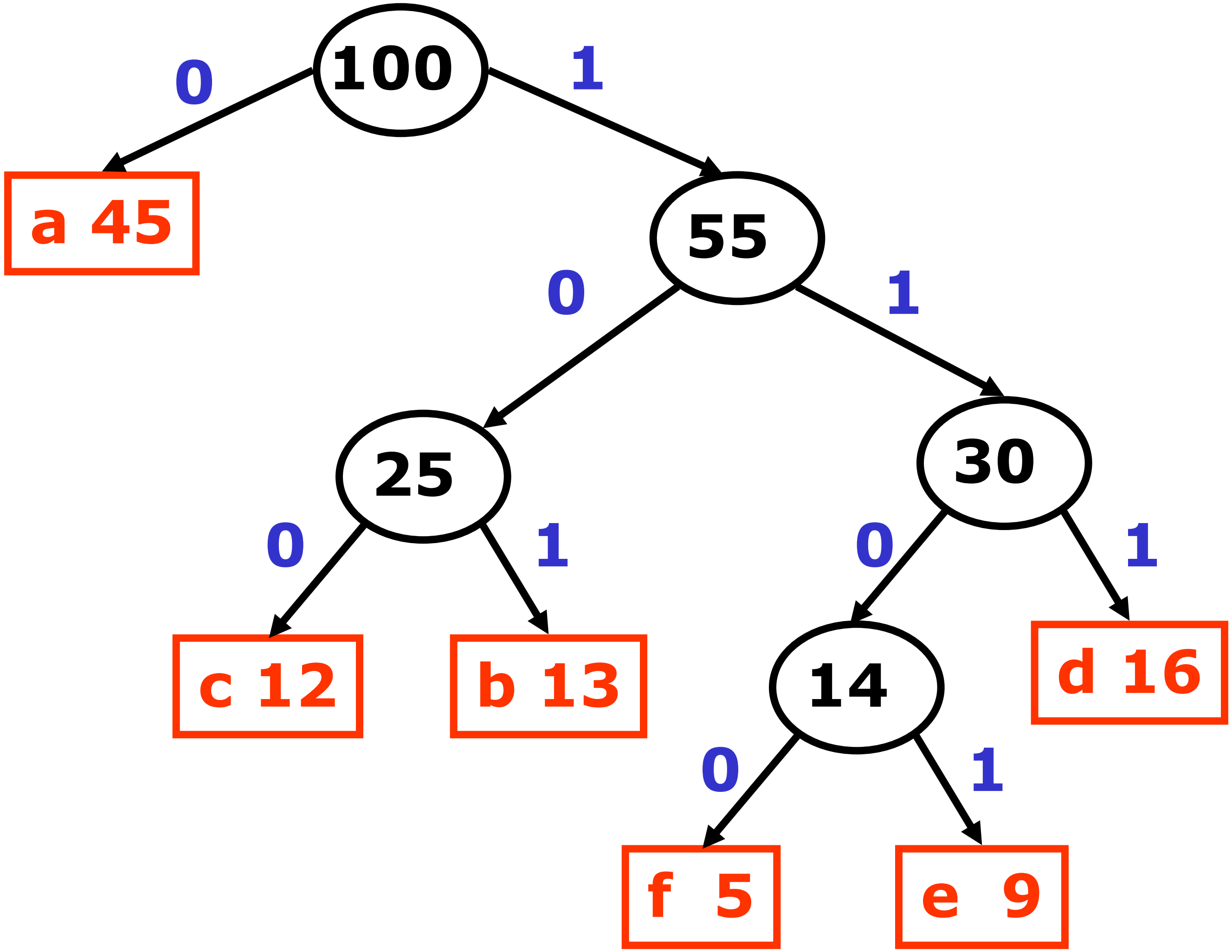


algoritmo di Huffman




55
0
1
25
30
0
1
0
1
c 12
b 13
14
d 16
0
1
f 5
e 9
a 45

algoritmo di Huffman



algoritmo di Huffman: complessità

Gli alberi sono memorizzati in un minheap (heap con ordinamento inverso : la radice è il più piccolo)

Si fa un ciclo dove in ogni iterazione:

- **vengono estratti i due alberi con radice minore**
- **vengono fusi in un nuovo albero avente come etichetta della radice la somma delle due radici**
- **l'albero risultante è inserito nello heap**

il ciclo ha n iterazioni ed ogni iterazione ha complessità O(logn) (si eseguono 2 estrazioni e un inserimento)

$$\boxed{O(n\log n)}$$

algoritmo di Huffman: perchè funziona

La scelta locale è consistente con la situazione globale:

sistemando prima i nodi con minore frequenza, questi apparterranno ai livelli più alti dell'albero

Codice algoritmo Huffman

```
  struct NodeH{
    char symbol;      // carattere alfabeto
    int freq;         // frequenza carattere
    NodeH* left; NodeH* right;
};
```

```
Node* huffman(Heap H, int n){
  for(int i=0; i< n-1; i++) {
    NodeH *t = new NodeH();
    t->left = H.extract();
    t->right = H.extract();
    t->freq= t->left->freq + t->right->freq;   //somma le radici
    H.insert(t);                               // inserimento nello heap
  }
  return H.extract();   //ritorna la radice dell'albero
}
```

Riferimenti Bibliografici

Demetrescu:

Capitolo 10.3

Cormen:

Capitolo 16

Esercizio 1

Trovare la/le PLSC per le due sequenze:

xyzzyx e **xxyzxy**

		x	y	z	z	y	x
	0	0	0	0	0	0	0
x	0						
x	0						
y	0						
z	0						
x	0						
y	0						

Esercizio 2

Applicare l'algoritmo di Huffmann per trovare un codice di compressione per l'alfabeto seguente con le frequenze indicate

A	13
B	16
C	12
D	10
E	15
F	30
G	4