ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 13

Note Title 16/10/2018

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Ripasso definizioni Sia V uno sp. vettoriale su campo $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R})$

(1) I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono generatori di V se ogni $v \in V$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$, cioè

$$\forall v \in V \quad \exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

cioè $\quad V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

(2) I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono lin. indip. se

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \dots = c_n = 0$$

(3) I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V se sono generatori e sono lin. indip.

Fatto fondamentale Se $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V, allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Teorema 1 (Esistenza della base)

Sia V uno spazio vettoriale. Supponiamo che esista un insieme finito $v_1, \dots, v_n$ di generatori.
Allora esiste una base in V.

Teorema 2 (Proprietà delle basi)

Sia V uno spazio vettoriale che ammette una base.
Allora valgono questi fatti.

(1) Se $v_1, \dots, v_n$ sono generatori, allora posso ottenere una base eliminando qualcuno dei v_i.

(2) Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip., allora posso ottenere una base aggiungendo qualche elemento.

(3) Due qualunque basi hanno lo stesso numero di elementi (questo numero si dice la dimensione di V)

(4) Sia n la dimensione di V. Allora ogni insieme di generatori con n elementi è una base di V.

(5) Sia n la dimensione di V. Allora ogni insieme di n vettori lin. indip. è una base di V.

Lemma Sia V uno spazio vettoriale.
Siano $v_1, \dots, v_m$ vettori lin. indip.
Siano $w_1, \dots, w_n$ generatori.
Allora

- $m \leq n$
- Posso sostituire m elementi dei w_i con i v_i in modo da avere ancora dei generatori, cioè esistono $w_1, \dots, w_m$ tali che
  $\{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori.

— o — o —

Dim. teorema (2)

(1) Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ dei generatori. Dico che un loro sottoinsieme è una base.
Considero tutti i possibili sottoinsiemi. Alcuni di questi saranno ancora generatori. Tra quelli che vanno bene, scelgo il sottoinsieme (o uno dei sottoinsiemi) che ha il minimo numero di elementi.

Sia $v_1, \dots, v_m$ questo sottoinsieme con il minimo numero. Dico che sono lin. indip.
Se non lo fossero, allora potrei scrivere

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

senza che tutti i coeff. siano nulli. Supponiamo $a_1 \neq 0$.
Allora dico che posso fare a meno di v_1, cioè $\{v_2, \dots, v_m\}$ sono ancora generatori.
Ricavo v_1:

$$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_m v_m$$

$$\rightsquigarrow \quad v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m$$

e quindi se $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$

$$= c_1 \left(-\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m \right) + \dots + c_m v_m$$

Quindi qualunque cosa che posso scrivere come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ la posso scrivere usando solo $v_2, \dots, v_m$. Questo è assurdo perché basterebbero $m-1$ elementi.

Questo dimostra che posso costruire una base per eliminazione e quindi dimostra anche l'esistenza di una base quando c'è numero finito di generatori.

(2) Siano $v_1, \dots, v_m$ degli elementi linearmente indip. Siano $w_1, \dots, w_n$ una base (e quindi in particolare dei generatori).
Per il lemma $m \leq n$ e posso sostituire m dei w_i con $v_1, \dots, v_m$ ottenendo ancora dei generatori.
Dico che sono una base. Questo sarà evidente dai punti successivi.

(3) Dimostro che tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.

Siano $v_1, \dots, v_m$ una base

Siano $w_1, \dots, w_n$ un'altra base

$v_1, \dots, v_m$ lin. indip. $w_1, \dots, w_n$ generatori

Per il lemma $\boxed{m \leq n}$

$w_1, \dots, w_n$ sono lin. indip $v_1, \dots, v_m$ generatori

Per il lemma $\boxed{n \leq m}$

(4) Ogni insieme di generatori con n elementi è una base

dim (V)

Se non lo fossero, per un p.to precedente potrei ottenere una base eliminando qualcuno. Ma allora avrei una base con meno elementi della dim (V).

(5) Ogni insieme di n vett. lin. indip. con $n = \dim(V)$ è una base.

Ma allora potrei ottenere una base aggiungendo elementi, ma questo non è possibile perché avrei una base con più elementi della dim.(V) il che è assurdo.

— o — o —

Resta da verificare nel p.to (2) che l'insieme

$$v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n$$

è costituito da vettori lin. indip.

Supponiamo che non lo siano. Allora avrei una comb. lin. che fa 0

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c_{m+1} w_{m+1} + \dots + c_n w_n = 0$$

[Lo metto a posto dopo ...]

— o — o —

Oss. Ho dimostrato in realtà il

$\boxed{\text{Lemma di eliminazione}}$

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ siano vettori di V.
Supponiamo che v_1 sia comb. lin. di $v_2, \dots, v_n$.
Allora

$$\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_n\}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ È evidente che

$$v \in \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow v \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$v = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \Rightarrow v = 0 \cdot v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Meno evidente è il viceversa, cioè che

$$v \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow v \in \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_n\}$$

Qui serve l'ipotesi che $\boxed{v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n}$

Ma allora, se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$= a_1 (c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$= (a_1 c_2 + a_2) v_2 + \dots + (a_1 c_2 + a_n) v_n$$

In poche parole, v_1 è eliminabile.

— o — o —

Il vecchio punto (1) è una conseguenza del fatto precedente.

... ad un certo punto succedeva che $w_1, \dots, w_m$ erano generatori, cioè $\text{Span}(w_1, \dots, w_m) = V$
Tuttavia w_1 era comb. lin. degli altri. Ma allora era eliminabile e quindi

$$\text{Span}(w_2, \dots, w_m) = V$$

cioè $w_2, \dots, w_m$ erano ancora generatori, il che è assurdo perché m era il min. numero di generatori.

— o — o —