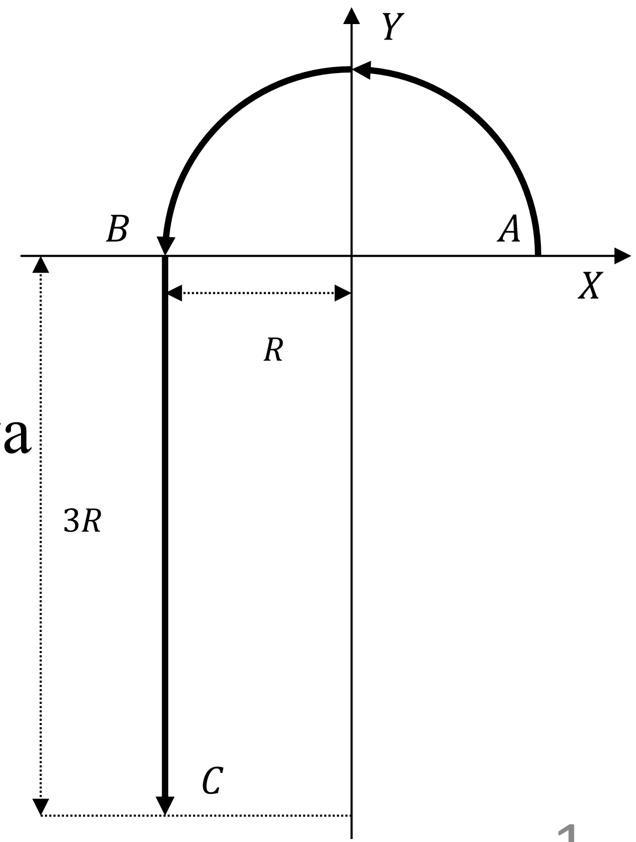
Esercizio 8). Un'automobile, che si muove nel piano xy, parte a $t = t_0 = 0$ dal punto $A = (R, 0)$ e percorre in verso antiorario la semicirconferenza di raggio $R = 1\ \mathrm{km}$ e centro O fino al punto $B = (-R, 0)$. Poi prosegue in linea retta fino al punto C di coordinate $C = (-R, -3R)$ che raggiunge al tempo $t = t_f$; durante tutto il moto la velocità ha un modulo costante $V_0 = 20\ \mathrm{m/s}$.



Calcolare:

i) $\int_0^{t_f} |\vec{V}| dt'$

Risposta.

Questo integrale è per definizione la lunghezza della traiettoria $\Longrightarrow$

$$\int_0^{t_f} |\vec{V}| dt = \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t_f)} |d\vec{R}| = \int_A^B |d\vec{R}| + \int_B^C |d\vec{R}|$$

$$= (\pi + 3)R = 6.14\ \mathrm{km}$$

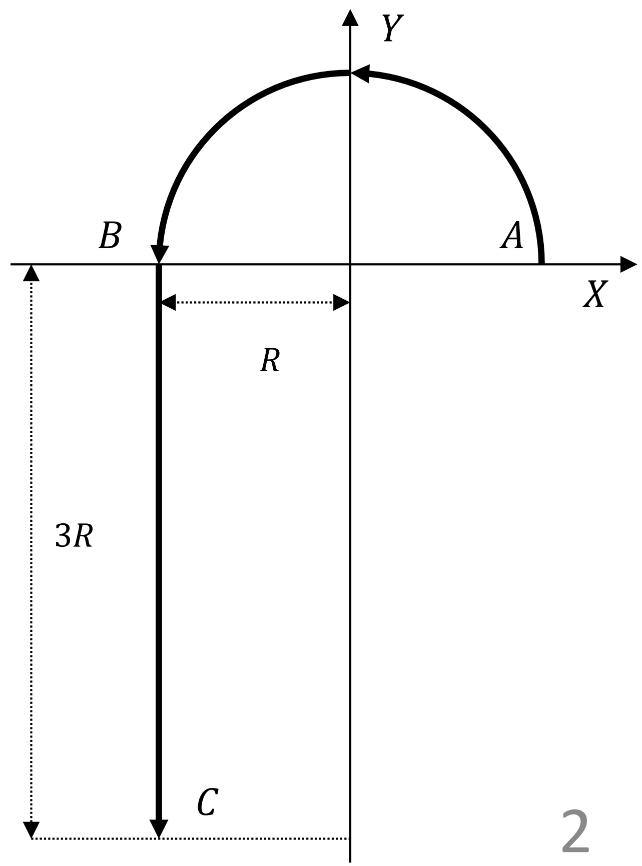
ii) Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{V}\,dt$

Risposta.
Questo integrale, sempre per definizione, è lo spostamento dal punto iniziale a quello finale, per cui:

$$\int_0^{t_f} \vec{V}\,dt = \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t_f)} d\vec{R} = \vec{R}(t_f) - \vec{R}(0) =$$

$$(-R, -3R) - (R, 0) = (-2R, -3R) =$$

$$-R(2\hat{x} + 3\hat{y})$$



iii) Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{a}dt$

Risposta.

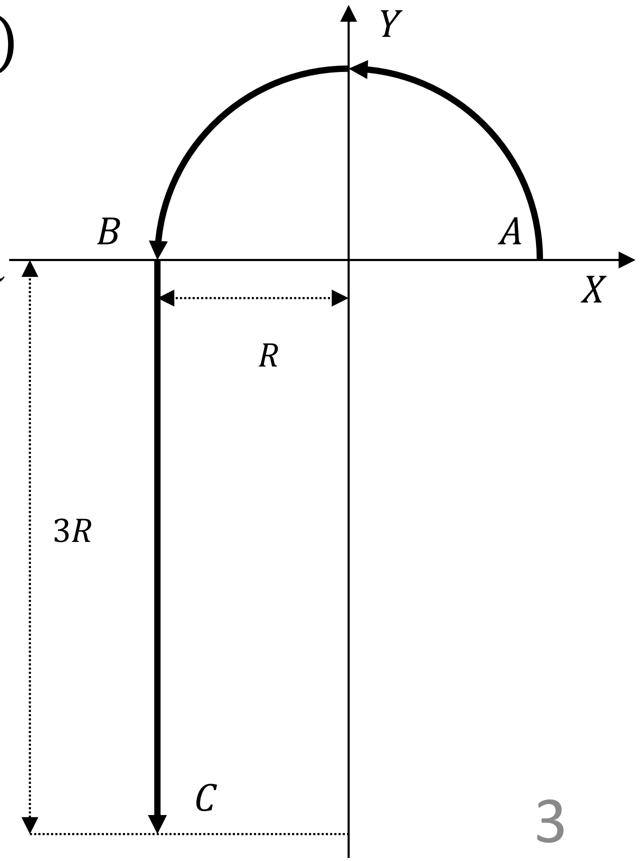
Anche questo integrale ha un chiaro significato, essendo per definizione la variazione di velocità fra il punto iniziale A ed il punto finale C.

$$\int_0^{t_f} \vec{a}dt = \int_0^{t_f} \frac{d\vec{V}}{dt} dt = \int_{\vec{V}(0)}^{\vec{V}(t_f)} d\vec{V} = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(0)$$

Poiché la velocità è sempre tangente alla traiettoria:

$\vec{V}(0) = \vec{V}_A = (0, V_0)$ e $\vec{V}(t_f) = \vec{V}_C = (0, -V_0)$

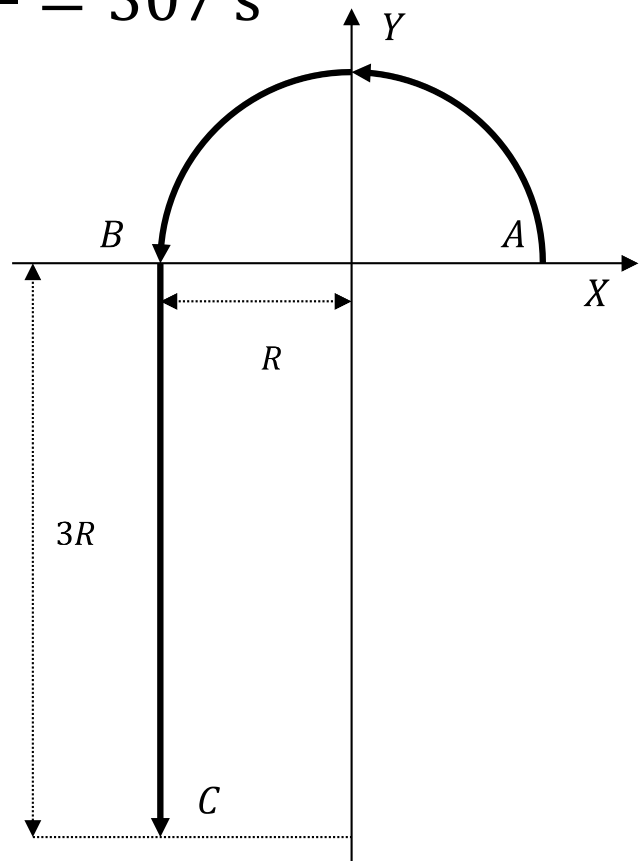
$$\int_0^{t_f} \vec{a}dt = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(0)$$
$$= (0, -V_0) - (0, V_0) = -2V_0\hat{y}$$



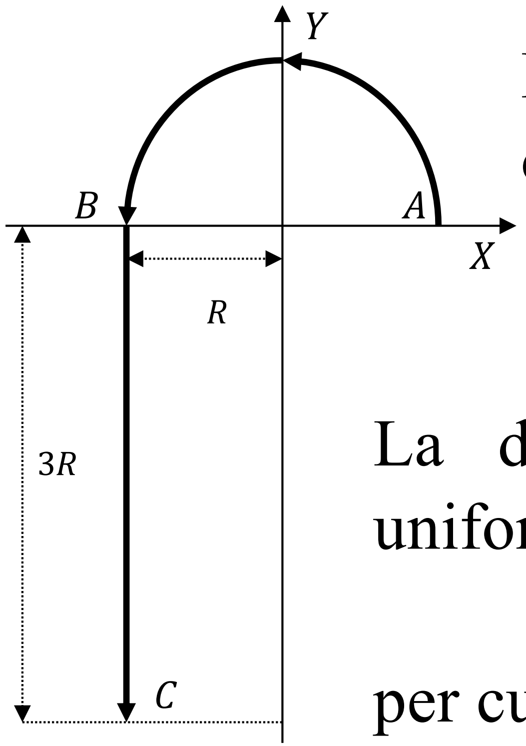
iv) determinare il tempo $t_C(t_f)$ in cui l'auto raggiunge il punto C.

Risposta.
In base al risultato del punto i) sappiamo che la traiettoria ha lunghezza $(\pi + 3)R$. Poiché essa è percorsa a velocità costante si ha:

$$t_C = \frac{(\pi + 3)R}{V_0} = \frac{6.14\times 10^3\ \text{m}}{20\ \text{m/s}} = 307\ \text{s}$$



v) determinare x(t) e *y(t)* (per *0<t<t*$_C$) e costruirne i grafici



L'automobile percorre inizialmente una circonferenza di moto circolare uniforme con $\omega = V_0/R$

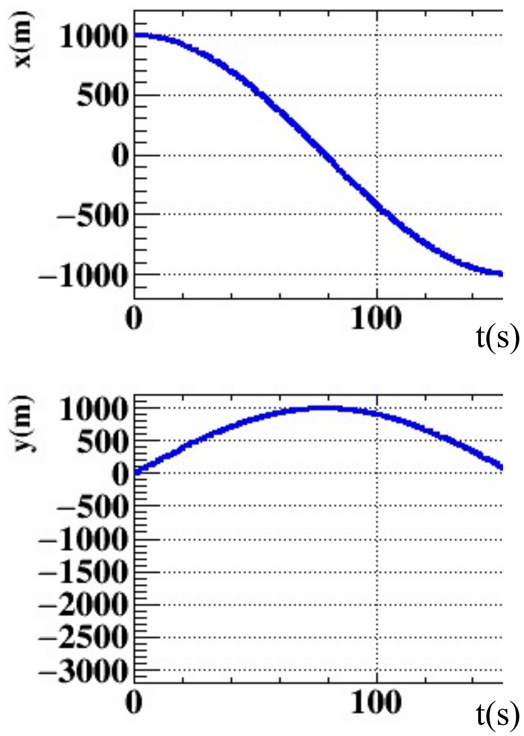
Nel primo tratto quindi le sue coordinate $x(t)$ e $y(t)$ compiono un moto armonico

La durata del tratto di moto circolare uniforme è

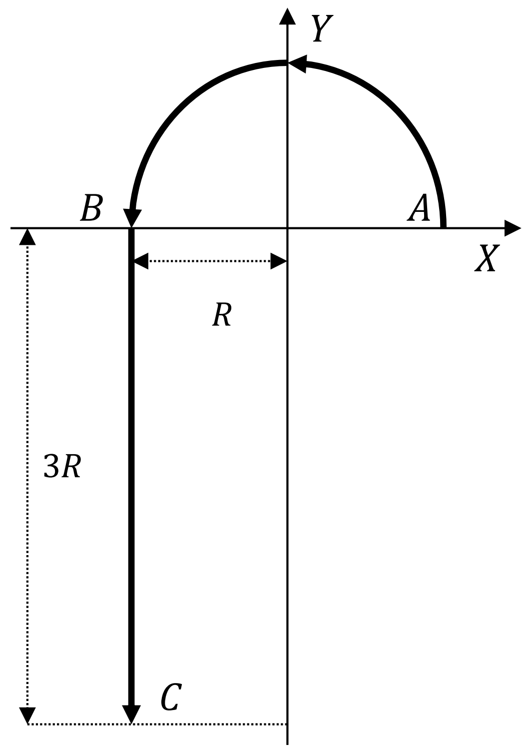
$$T = \frac{\pi R}{V_0}$$

per cui:

$$\text{per } 0 < t < T$$
$$\vec{R}(t) = \left(R\cos\left(\frac{V_0 t}{R}\right),\ R\sin\left(\frac{V_0 t}{R}\right)\right)$$

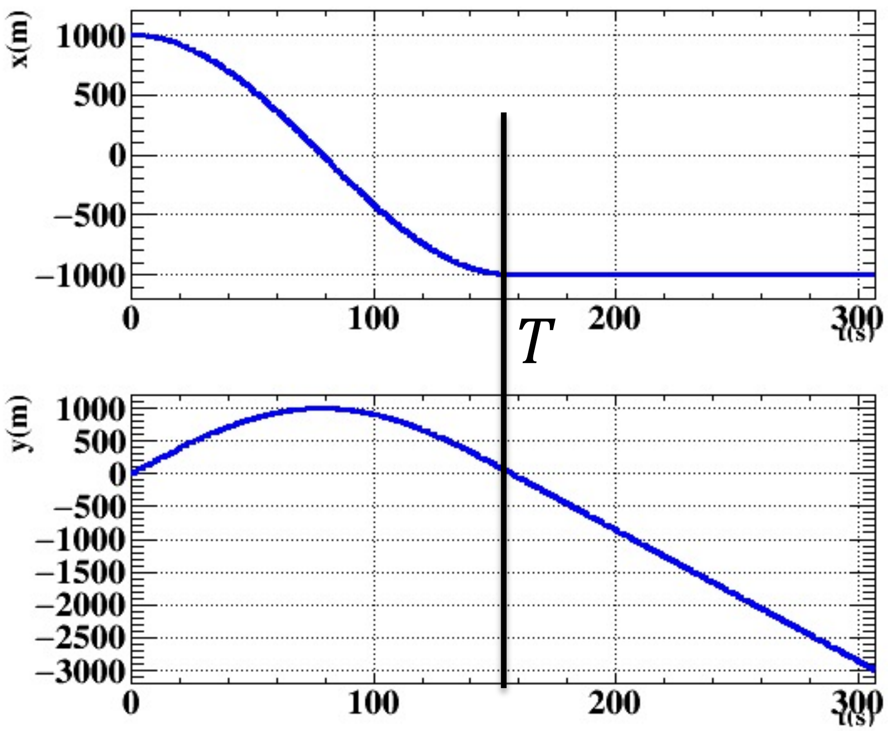


Nel tratto da B a C
la coordinata x è fissa e pari a -R
mentre l'ungo l'asse y il moto è
rettilineo uniforme con velocità
$-V_0\hat{y}$.



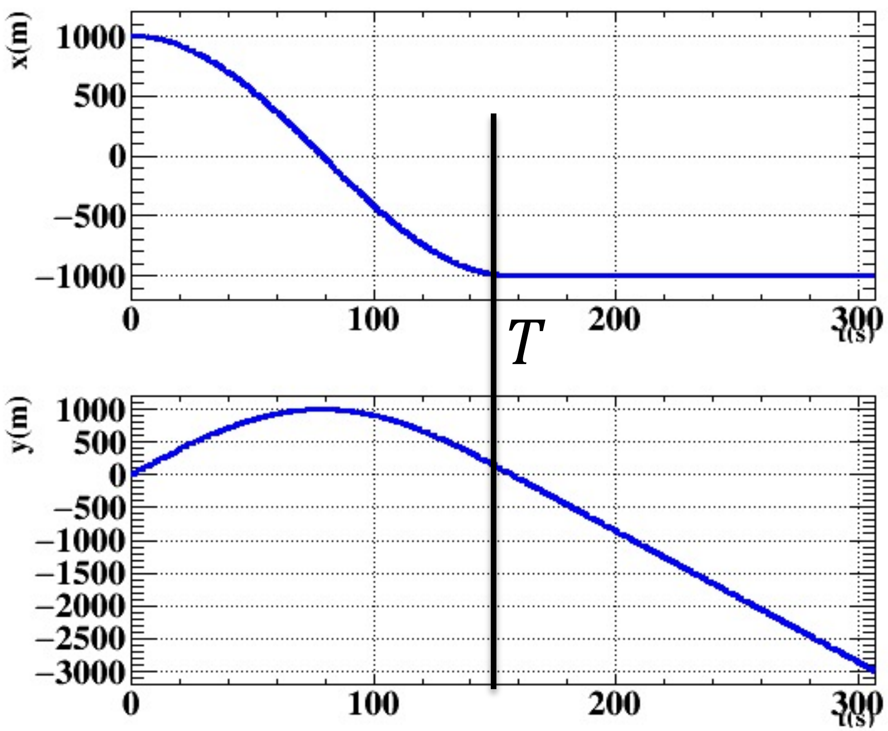
Per cui per $T < t < t_C = \frac{(3+\pi)R}{V_0}$

$$\vec{R}(t) = \left(-R, -V_0(t-T)\right)$$



Per cui riassumendo

$$\vec{R}(t) = \begin{cases} \left(R\cos\left(\frac{V_0 t}{R}\right),\ R\sin\left(\frac{V_0 t}{R}\right)\right) & per\ 0 < t < T = \frac{\pi R}{V_0} \\ \left(-R, -V_0(t-T)\right) & per\ T < t < t_C = \frac{(3+\pi)R}{V_0} \end{cases}$$



vi) determinare $|\vec{a}(t)|$

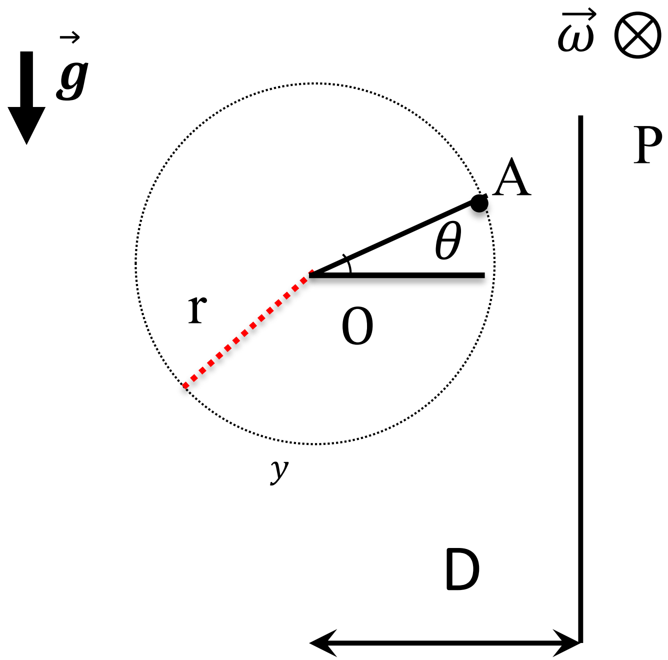
Risposta

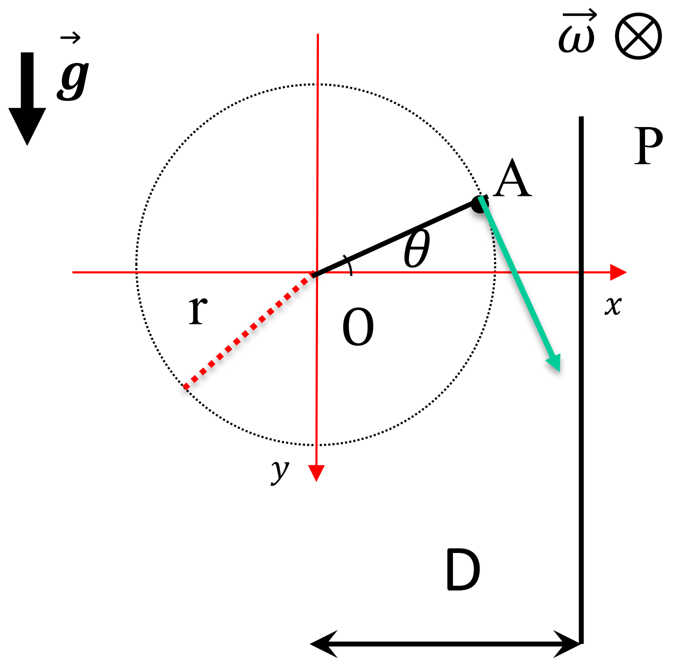
L'accelerazione è centripeta nel tratto di moto circolare uniforme e nulla nel tratto di moto rettilineo uniforme, per cui:

$$|\vec{a}(t)| = \begin{cases} \dfrac{V_0^2}{R} & per\ 0 < t < T \\ 0 & per\ T < t < t_C \end{cases}$$

Es. 1.19 Mazzoldi Saggion

Una ruota di raggio R=50 cm gira con moto uniforme con verso orario attorno a un'asse passante per il suo centro O ed ortogonale al piano della ruota con ω=4 rad/s. Nell'istante in cui il raggio OA forma l'angolo $\theta=30^0$ con l'asse x, si stacca da A un punto materiale che dopo un certo tempo colpisce una parete P distante D=1 m da O. Calcolare il tempo di volo t del punto e la sua velocità $\vec{V}$ nell'istante dell'urto.





Dati

r=50 cm

$|\vec{\omega}| = \omega = 4$ rad/s

$\theta = 30^0$

D=1 m

t_v ?

$\vec{V}\,(t_v\,)$?

- Prima del distacco: moto circolare uniforme per cui la velocità al tempo del distacco in A è

$$\vec{V}_A = \omega_z \mathrm{r}\,\hat{\theta} \qquad |\vec{V}_A| = \omega \mathrm{r}$$

inoltre $\vec{V}_A \perp \overrightarrow{OA}$ per cui $\vec{V}_A = |\vec{V}_A|\cos(\pi - {}^{\pi}/_{2} - \theta)\,\hat{\imath} + |\vec{V}_A|\sin(\pi - {}^{\pi}/_{2} - \theta)\hat{\jmath}$

mentre le coordinate del punto A sono $(x_A, y_A) = (r\cos(\theta), -r\sin(\theta))$

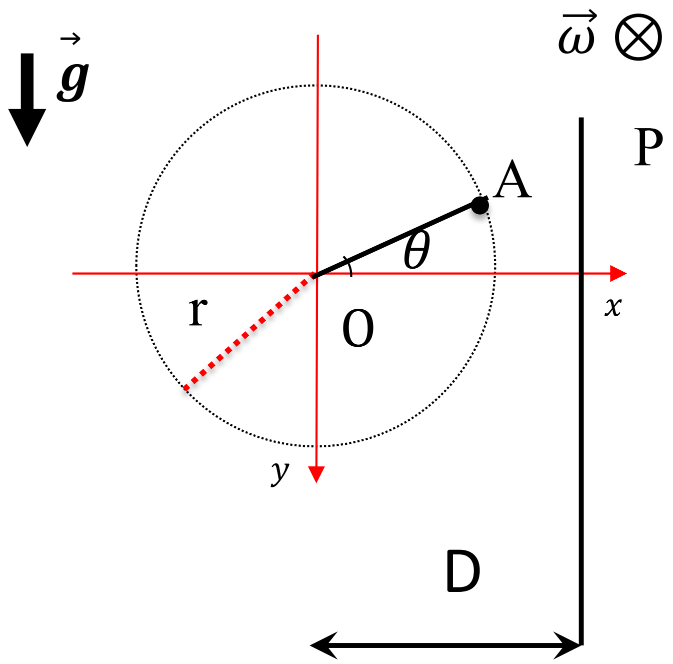
- Dopo il distacco moto rettilineo lungo x e uniformemente accelerato lungo y

per cui il vettore posizione è $\vec{R}(\mathrm{t}) = \left(x_A + |\vec{V}_A|\sin(\theta)t\,, y_A + |\vec{V}_A|\cos(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2\right)$

- t tempotrascorso dal distacco

per cui le componenti della velocita $\vec{V}\,(t)$ in funzione del tempo dopo il distacco sono

$$\vec{V}(\mathrm{t}) = \left(|\vec{V}_A|\sin(\theta)\,, |\vec{V}_A|\cos(\theta) + gt\right)$$



Dati

r=50 cm=0.5m

$|\vec{\omega}| = \omega$ =4 rad/s

$\theta = 30^0$

D=1 m

$D.1\ \ t_v$?

$D.2\ \ \vec{V}\ (t_v\ )$?

$|\vec{V}_A| = \omega$r =2 m/s

$(x_A, y_A) = (r\cos(\theta), -r\sin(\theta))$= (0.43,-0.25)m

$$\vec{R}(\mathrm{t}) = \left(x_A + |\vec{V}_A|\sin(\theta)t\,, y_A + |\vec{V}_A|\cos(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$\vec{V}(\mathrm{t}) = \left(|\vec{V}_A|\sin(\theta)\,, |\vec{V}_A|\cos(\theta) + gt\right)$$

$R.1$ Per $\mathrm{t} = t_v$ $\quad x(t_v) = D = x_A + |\vec{V}_A|\sin(\theta)t_v$

$$t_v = \frac{D - x_A}{|\vec{V}_A|\sin(\theta)} = \frac{0.57}{1}\ \mathrm{s}$$

$R.2$ Per cui $\quad \vec{V}(t_v) = \left(|\vec{V}_A|\sin(\theta)\,, |\vec{V}_A|\cos(\theta) + gt_v\right)$=(1,18.92) m/s

Es. 1.28 Mazzoldi Saggion

Descrivere il moto di un punto materiale le cui equazioni del moto sono

$$\begin{cases} r = r_0 \sin(\omega t) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

con $r_0 = 5\times10^{-2}\ m$ e $\omega = 2\pi\ {}^{rad}/_{s}$

Conviene per descrivere il moto (la traiettoria nel piano) usare coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \begin{cases} r = r_0 \sin(\omega t) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

Per cui

$$\begin{cases} x = r_0 \sin(\theta)\cos(\theta) \\ y = r_0 \sin(\theta)\, sin(\theta) \end{cases}$$

Ricordiamo che

$$\begin{cases} \sin(2\theta) = 2\ \sin(\theta)\cos(\theta)\,. \\ \cos(2\theta) = 1 - 2sin^2(\theta) \Rightarrow sin^2\ (\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2} \end{cases}$$

Sostituendo

$$\begin{cases} x = \dfrac{r_0}{2}\sin(2\theta) \\ y = \dfrac{r_0}{2}(1 - \cos(2\theta)) \end{cases}$$

Che possiamo riscrivere

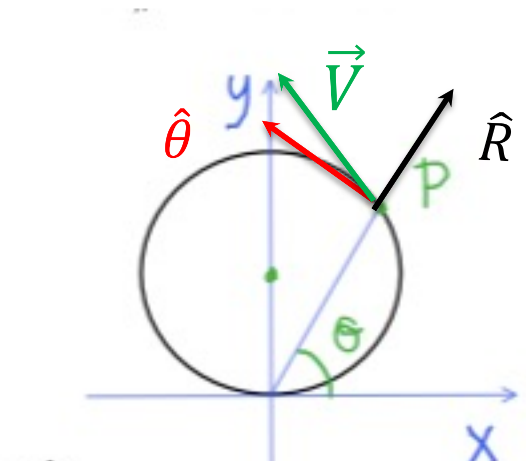
$$\begin{cases} x = \dfrac{r_0}{2}\sin(2\theta) \\ y - \dfrac{r_0}{2} = -\dfrac{r_0}{2}\cos(2\theta) \end{cases}$$

Quadrando e sommando le due equazioni osserviamo che la traiettoria nel piano xy è una circonferenza

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{r_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

con centro in $C = \left(0, \frac{r_0}{2}\right)$ e raggio $R = \frac{r_0}{2}$

quindi il moto è circolare



- Moto circolare

  - centro in C $= \left(0, \frac{r_0}{2}\right)$ e raggio $\frac{r_0}{2} = 2.5\times10^{-2} m$

  Coordinate polari di P: (R, θ)

La velocità è tangente alla traiettoria ma la stiamo determinando in coordinate polari ed ha una componente radiale e una tangenziale in queste coordinate:

$$\vec{V} = (V_r, V_\theta) \quad = V_r\,\hat{R} + V_\theta\hat{\theta} \quad = \dot{R}\hat{R} + \omega R\hat{\theta}$$

Ottenuta derivando il vettore posizione in coordinate polari $\vec{R} = \mathrm{R}\hat{R}$

nel nostro caso $\begin{cases} r = r_0\sin(\omega t) \\ \theta = \omega t \end{cases}$ $\begin{cases} V_r = \omega r_0\cos(\omega t) \\ V_\theta = \omega r_0\sin(\omega t) \end{cases}$

per cui $|\vec{V}| = \omega r_0 = 5\times10^{-2} \times 2\pi \frac{m}{s} = 0.31 \frac{m}{s}$

- Poichè il modulo della velocità è costante il moto è circolare uniforme

$\Rightarrow$ l'accelerazione è centripeta e il suo modulo è $a = \frac{V^2}{(\frac{r_0}{2})} = 2\omega^2\, r_0$

- Poichè il raggio della circonferenza è $\frac{r_0}{2}$ la velocità angolare del punto materiale è $\Omega = 2\omega$

$\Rightarrow$ il periodo del moto è

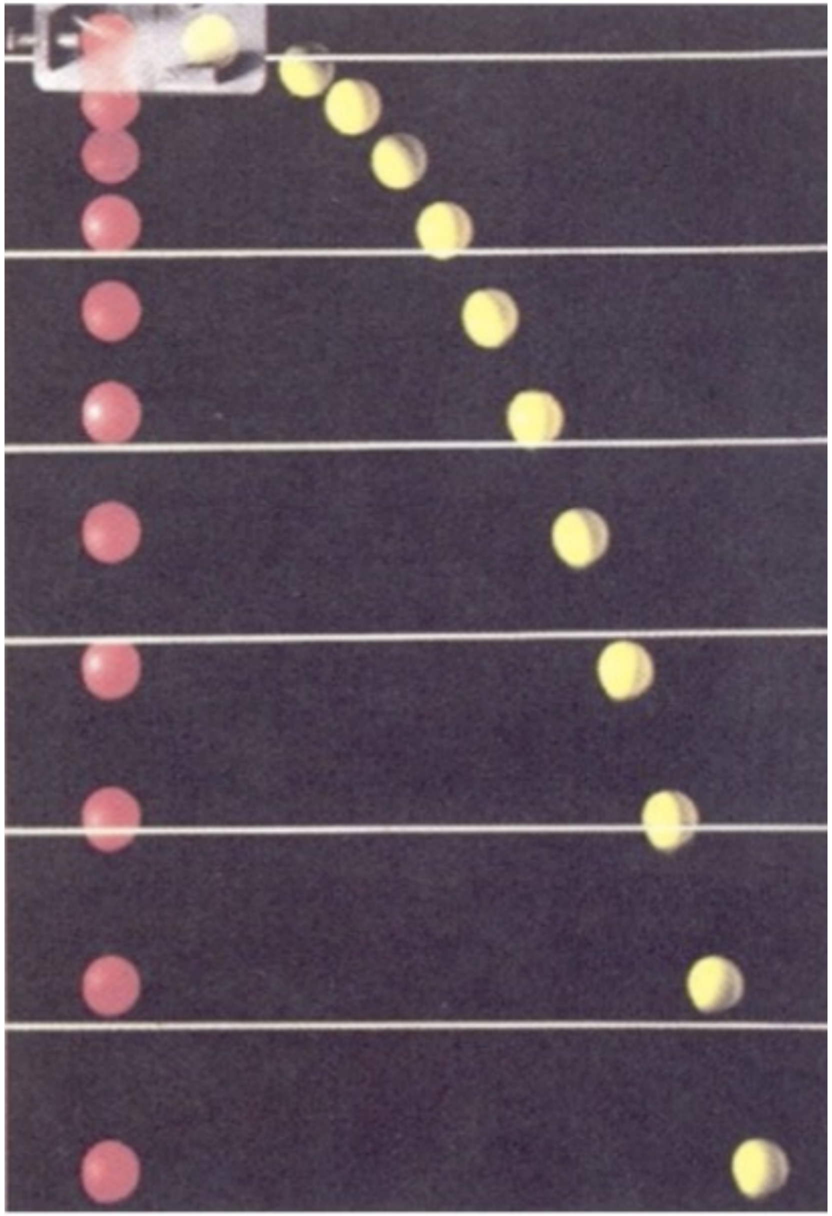
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

Moto dei proietti

- È il moto di particelle che vengono lanciate con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e sono soggette alla sola accelerazione di gravità $\vec{g}$ supposta costante.

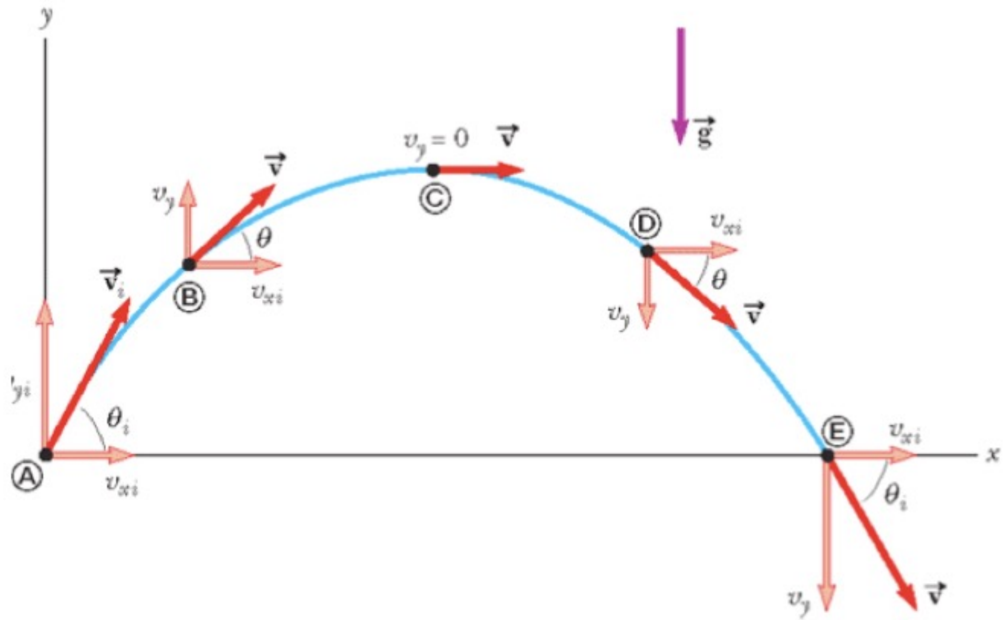
- La pallina rossa viene lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui l'altra è lanciata orizzontalmente verso destra con velocità $\vec{v}_0$.

- Osservazioni sperimentali:
  - gli spostamenti verticali delle due palline sono identici
  - Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti



Analisi del moto dei proietti

- Il moto può essere analizzato separatamente nelle sue componenti:
  - la componente orizzontale è descritta dalle relazioni cinematiche del moto rettilineo uniforme
  - quella verticale dalle relazioni del moto uniformemente accelerato.



- Il moto avviene nel piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{g}$:
- scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale orientando l'asse x orizzontalmente e l'asse y lungo la verticale, in cui giace il piano del moto.

Analisi del moto dei proietti

Analizziamo il moto :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} = cost \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$

- Determiniamo la traiettoria
  - luogo geometrico dei punti occupati dal vettore posizione $\vec{r}(t)$ nel corso del tempo.

Equazione della traiettoria

Eliminiamo t fra le equazioni del moto per x(t) e y(t):

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow y(t) - y_0 = v_{0y}\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

Ponendo

$$v_{0x} = v_0\cos\theta \qquad v_{0y} = v_0\sin\theta \qquad x_0 = 0 \; e \; y_0 = 0$$

otteniamo: $$y(t) = xtg\theta - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

- Questa è l'equazione di una parabola nel piano xy, con la curvatura rivolta verso il basso.
  - La traiettoria è quindi parabolica

Gittata

- Distanza orizzontale coperta dal proietto all'istante t in cui tocca il suolo:

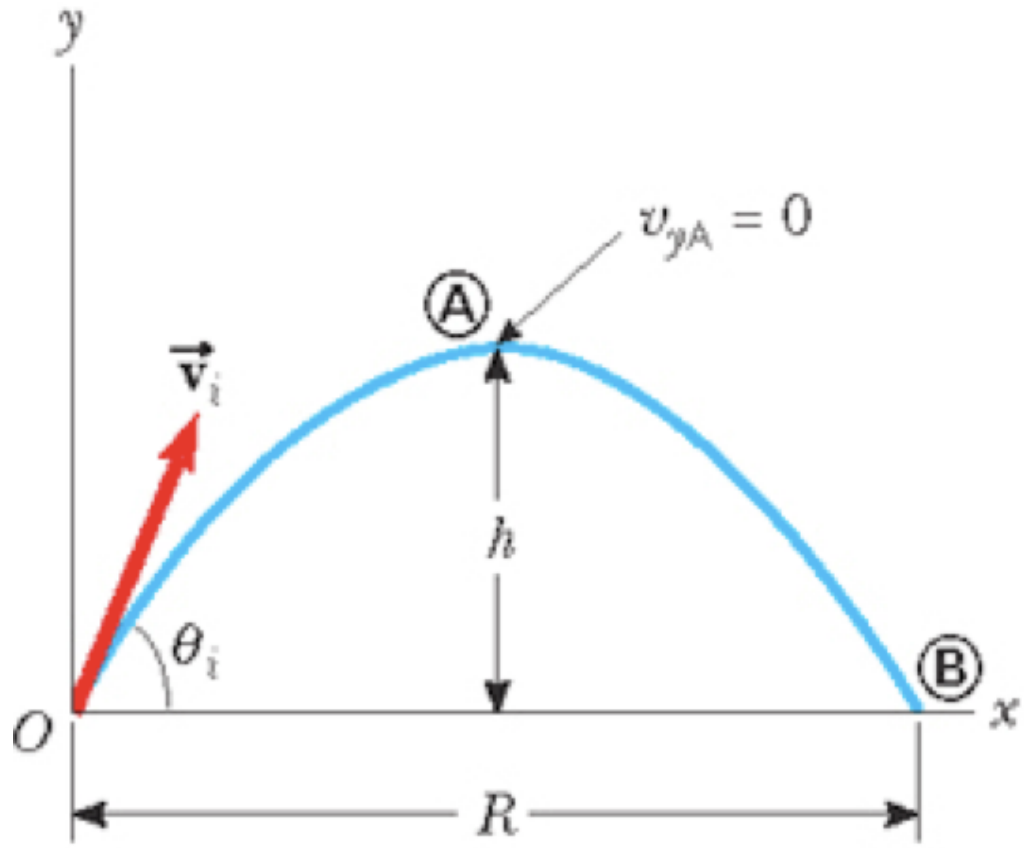
$$y(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Soluzioni:

$$t = 0 \; e \; t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

Sostituendo quest'ultimo in

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$



si trova la gittata R:

$$R \equiv x(t) - x_0 = v_{0x} t \quad = v_{0x} \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 {v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{{v_0}^2}{g} sin(2\theta)$$

(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore di x per cui y = 0)

Gittata 2

La gittata R:

$$R = \frac{{v_0}^2}{g} sin(2\theta)$$

è massima per θ = 45^O

L'altezza massima h si raggiunge quando la pendenza della traiettoria è nulla:

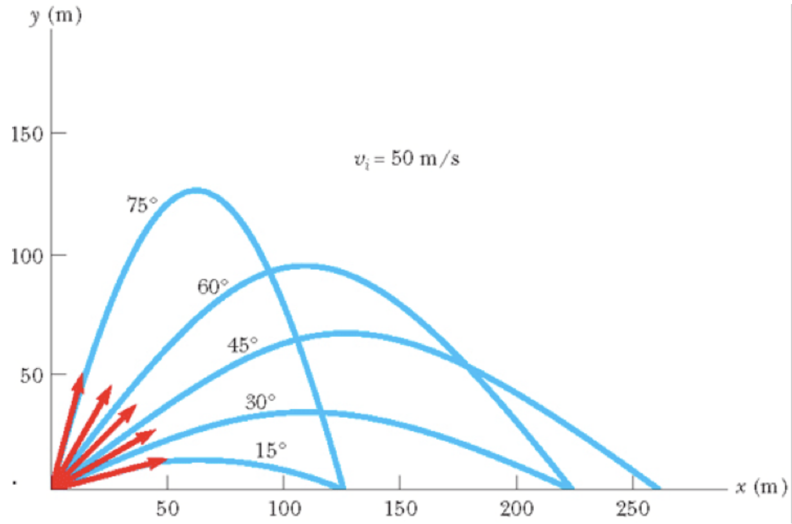
$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt = 0$$

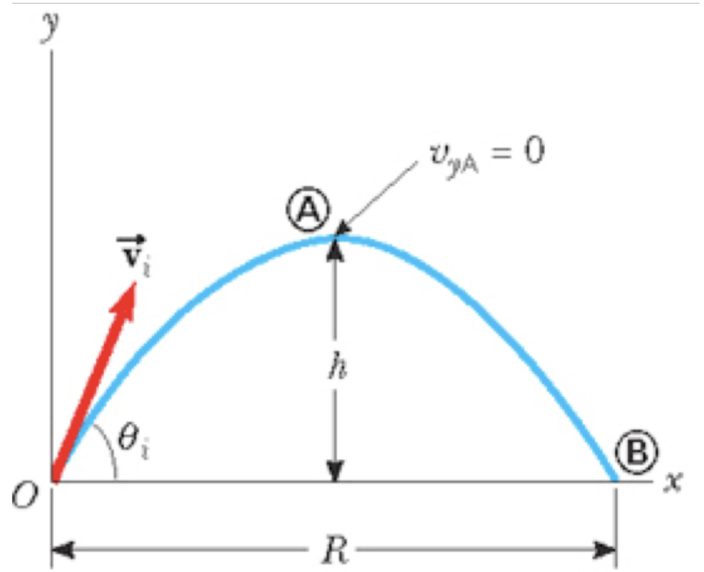
$$\Rightarrow \mathrm{t} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Poichè

$$y = v_0 sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = v_0 sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{2g} \sin\theta^2$$





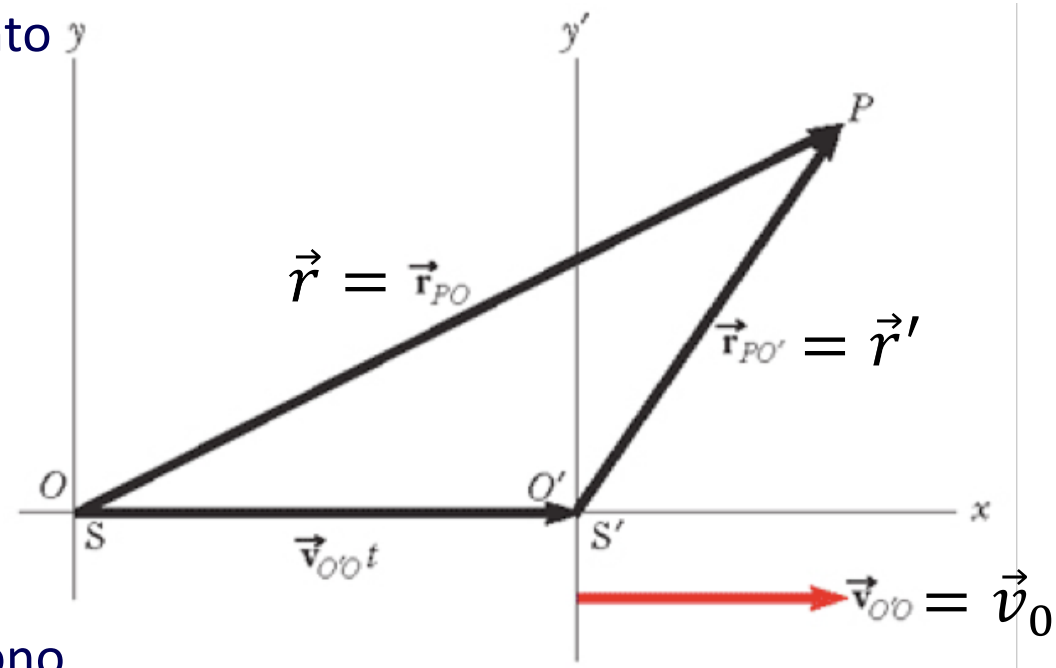
(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore x_{max} per cui dy/dx = 0, trovare poi y(x_{max}))

Relatività galileiana

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

velocità assoluta, relativa e di trascinamento (1)

- Consideriamo due sistemi di riferimento (SDR) S e S'
  - Il sistema di riferimento S è stazionario o di laboratorio
  - Il sistema di riferimento S' è in movimento con velocità (detta di trascinamento) $\vec{v}_0$ costante.



Al tempo t = 0 le origini di S e S' coincidono.

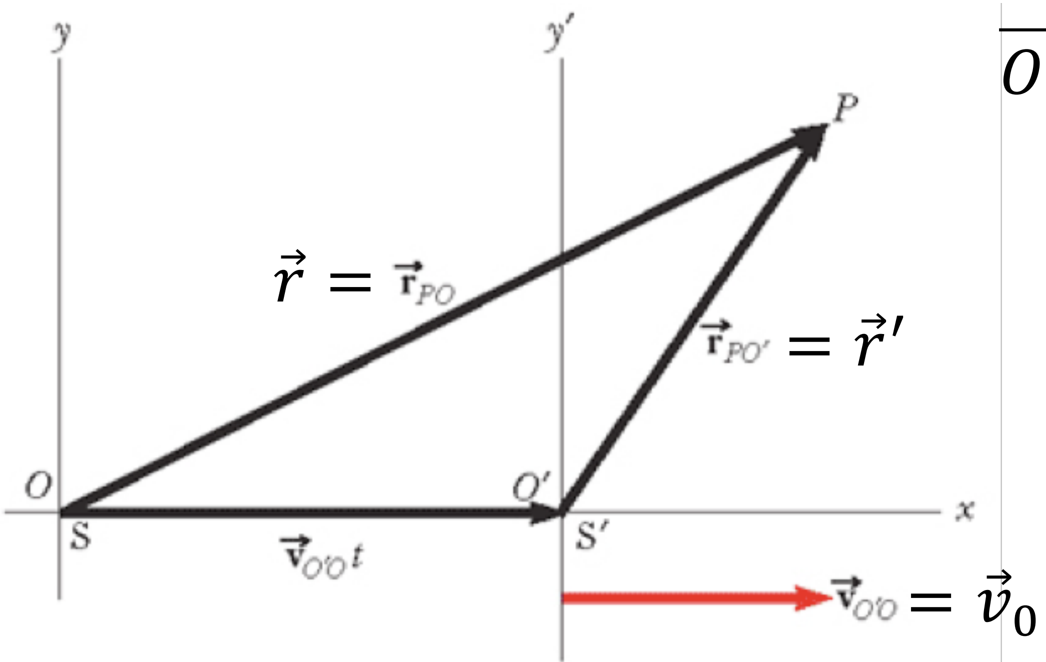
- Vale: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$
- Derivando tale relazione: (trasformazione di Galileo)

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

- Derivando nuovamente, poichè : $\vec{v}_0$ è costante

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

- $\vec{v}$ velocità assoluta
- $\vec{v}'$ velocità relativa
- $\vec{v}_0$velocità di trascinamento



$\overrightarrow{OO'}=0 \qquad \vec{v}_0=0$

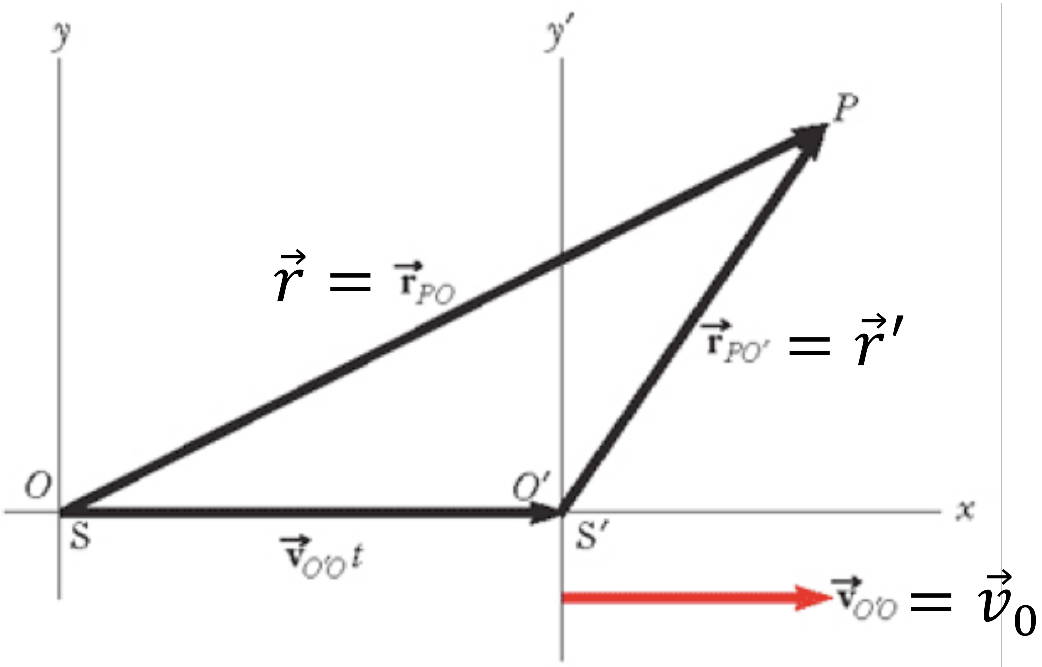
$$\vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

SDR treno S': S e S' coincidono $\qquad \Delta\vec{r} = \overrightarrow{\Delta r'}$

Se sono su un treno fermo vedo le persone ferme o in movimento esattamente come le vedono le persone ferme sul marciapiede della stazione!



SDR treno S'

$$\vec{v}_{OO'} = \vec{v}_0 \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{v}_0 t$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t$$

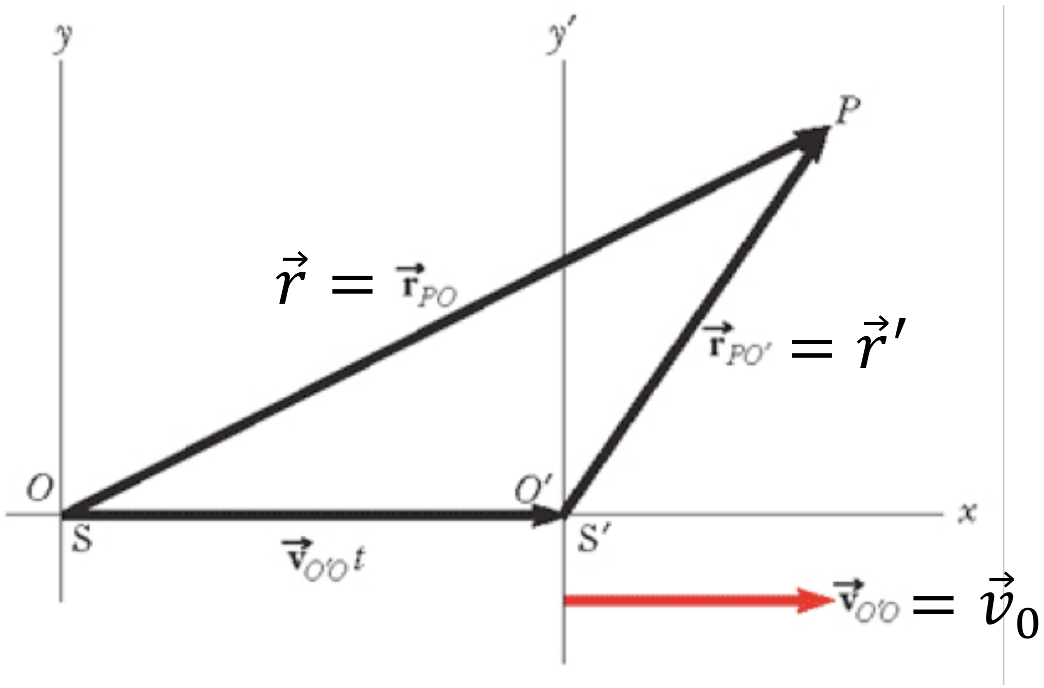
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Se sono su un treno che si sposta in avanti vedo gli alberi andare indietro!

$$\Delta\vec{r} - \vec{v}_0(t_2 - t_1) = \overrightarrow{\Delta r}'$$

Preso un albero nel sistema S $\Delta\vec{r}$=0!



$$\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_0 \mathrm{t}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

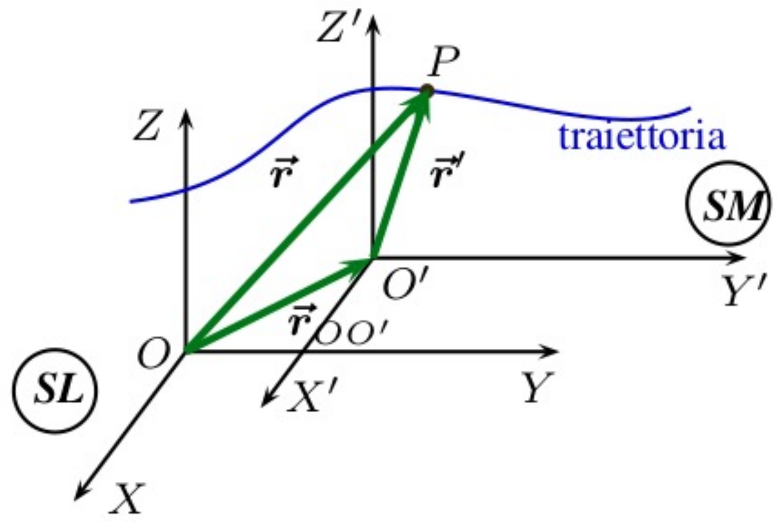
SDR treno S'

Se sono fermo su un treno, chi mi guarda dal marciapiede della stazione mi vede muovermi con la velocità del treno

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0 = \vec{v}_0$$

Velocità e accelerazione di trascinamento (2)

- Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento SM (sistema mobile) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento SL del laboratorio



- La relazione fra le posizioni diventa

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}t$$

- Derivando tale relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t \qquad \text{con } \vec{v}_t = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

- Derivando nuovamente

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t \qquad \text{con } \vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

Dinamica: Forze e Moto, Leggi di Newton

- La Dinamica studia il moto dei corpi e pone in relazione il moto con le sue cause:
  - perchè come gli oggetti si muovono

- La causa del moto è dovuta alla presenza di interazioni fra corpi che si manifestano come Forze

- Il moto dei corpi è determinato dalle Leggi di Newton

Prima Legge di Newton

La prima legge di Newton descrive cosa succede in assenza di interazioni:

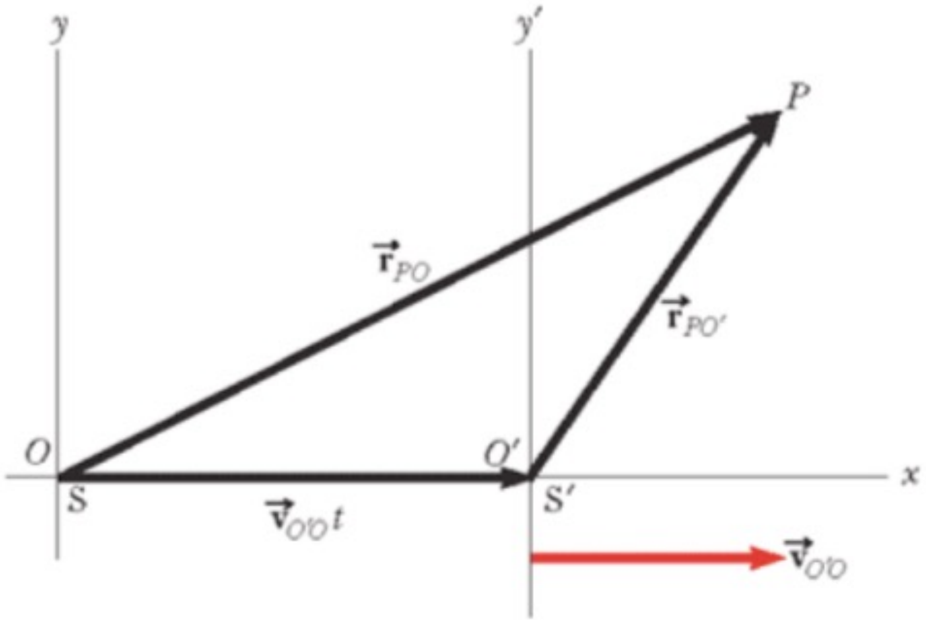
- Per un corpo non sottoposto ad interazioni, è sempre possibile identificare un sistema di riferimento, detto inerziale, nel quale il corpo ha accelerazione nulla.

- In assenza di interazioni con l'esterno, un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto a velocità costante, se osservato da un sistema di riferimento inerziale

Nota anche come Principio di Inerzia.

Sistemi di riferimento inerziali

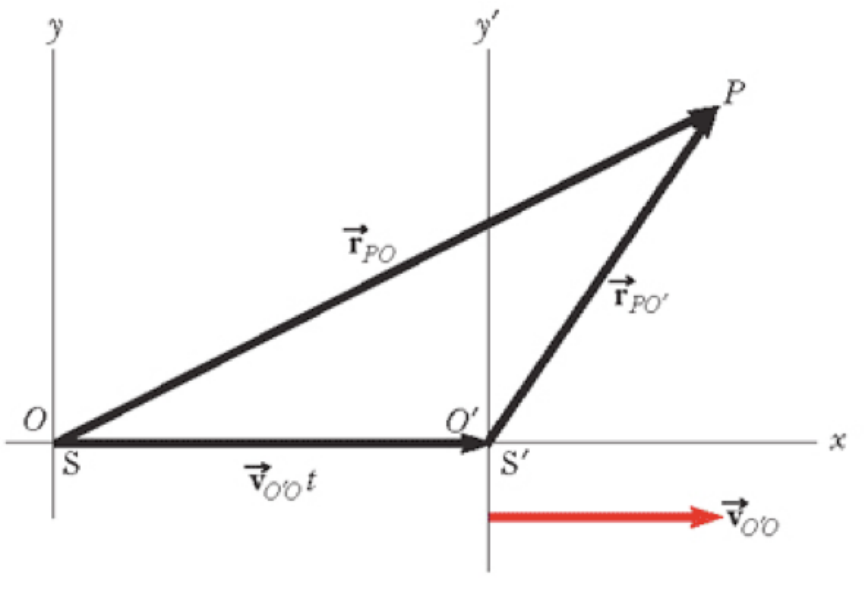
- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ è *stazionario* o *di laboratorio*
- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) $\vec{v}_0$ *costante*



- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo*)
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ perché $\vec{v}_0$ è costante

Sistemi di riferimento inerziali

La prima Legge di Newton definisce i sistemi di riferimento (SDR) inerziali.



- Qualunque SDR che si muova con velocità costante relativamente ad un SDR inerziale è pure un sistema inerziale (trasformazioni di Galilei)

- Un SDR che si muove con velocità costante relativamente alle stelle lontane può essere considerato con buona approssimazione inerziale

- Possiamo considerare la Terra un sistema inerziale, benchè abbia una piccola accelerazione dovuta al suo moto di rivoluzione attorno al sole ($|\vec{a}| = 6\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$)