10 MAGGIO 2023

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$\tilde{x}(t)$ SOLUZIONE $\rightarrow$ MOVIMENTO

STABILITÀ DEL MOVIMENTO
- $\rightarrow$ STABILE (SEMPL., MARG.)
- $\rightarrow$ ASINT. STABILE
- $\rightarrow$ INSTABILE

$\downarrow$

INTERNA (MOV. DELLO STATO A FRONTE DI PERT. DELLE C.I.)

(T)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{RISP. LIBERA OMOGENEA}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{RISP. FORZATA PARTICOLARE}}$$

PER LTI

$$\delta\dot{x} = A\,\delta x$$

$\longrightarrow$ LA DINAMICA NON DIPENDE DAL PART. MOVIMENTO

$$\Downarrow$$

PER LTI STABILITÀ PROPRIETÀ DEL SISTEMA

$$\delta x(t) = e^{At}\,\delta x_0$$

STABILITÀ LEGATA A e^{At} E QUINDI ALLA MATRICE A

e^{At} DEFINIZIONE, PROPRIETÀ

A DIAGONALIZZABILE

m.a. = m.g.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ AUTOVALORI DI A

COLONNE DI T AUTOVETTORI DI A

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

AUTOVALORI COMPLESSI $\sigma \pm j\omega$

$$e^{(\sigma + j\omega)t} \qquad e^{(\sigma - j\omega)t}$$

$$e^{\sigma t} \operatorname{sen} \omega t \qquad e^{\sigma t} \cos \omega t$$

- DIFETTIVE (NON DIAG. $m.a. \neq m.g.$)

RELAZ. SIMIL. VALE CON MATRICE IN FORMA DI J

DEFINIZIONE E ESEMPI

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & \ddots & J_N \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & & 0 \\ & \lambda_h & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_h \end{bmatrix}$$

RELAZ. CON m.a e m.g.

AUTOV. COMPARE TANTE VOLTE QUANTO È LA SUA m.a.

TANTI BLOCCHI DI J. ASSOCIATI ALLO STESSO AUTOVALORE QUANTO È LA SUA m.g.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

AUTOV. -1 — m.a. = 5

m.g. = 2 2 blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N \end{bmatrix} \qquad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{J_N t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} t} =$$

$$J_i = \lambda I + J_0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{(\lambda I t + J_0 t)} = e^{\lambda I t} \cdot e^{J_0 t}$$

$$e^{\lambda I t} \rightarrow e^{\lambda t} \cdot I$$

$$= e^{\lambda t} \cancel{I} \cdot e^{J_0 t}$$

IDENTITÀ

$$e^{J_0 t} = ?$$

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + J_0^{q-1} \frac{t^q}{q!}$$

ESEMPIO

$\dim(J_0) = 5 \times 5$ $\quad q \times q$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_0^5 = O_{5 \times 5}$$

J_0 NILPOTENTE DI ORDINE 5

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + J_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

QUALI SONO LE FUNZ. DEL TEMPO CHE COMPAIONO (COMBINATE LIN.) IN e^{At}?

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{J_0 t}$$

$$e^{\lambda t} \quad t e^{\lambda t} \quad \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$$

TERMINI $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}$ $\quad 0 \leq k \leq q-1$

MATRICE DIFETTIVE CON AUTOVALORI COMPLESSI

$\sigma \pm j\omega$

$$\begin{bmatrix} \sigma+j\omega & 1 & 0 & & & \\ 0 & \sigma+j\omega & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \sigma+j\omega & & & \\ & & & \sigma-j\omega & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & \sigma-j\omega & 1 \\ & & & 0 & 0 & \sigma-j\omega \end{bmatrix}$$

$\Big\downarrow$ SIMILE

MATRICE IN FORMA DI JORDAN REALE

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 & & \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & & 0 \\ \hline & & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ & 0 & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline & & & & \sigma & \omega \\ 0 & & 0 & & -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ AUTOV. $\sigma \pm j\omega$

m.a $= 3$

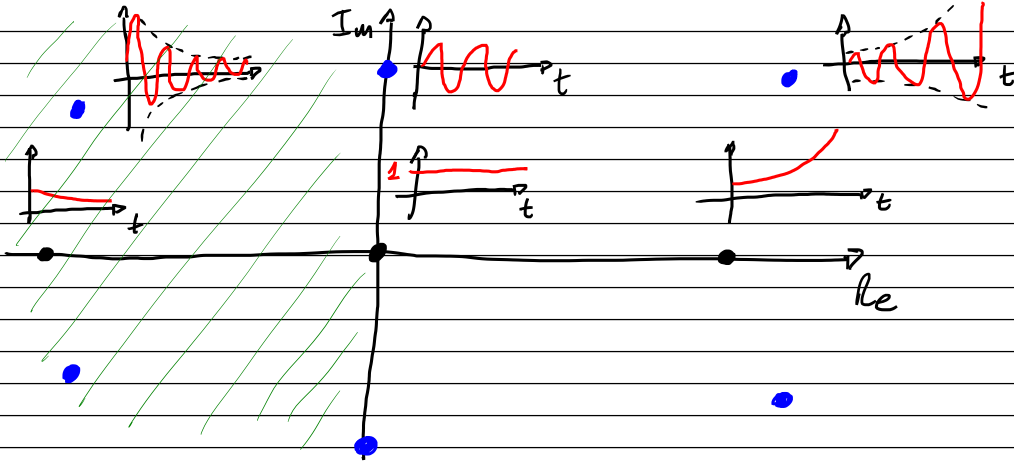
m.g $= 1$

TERMINI → FUNZ. DEL TEMPO

$$\frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \operatorname{sen} \omega t \qquad \frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \cos \omega t$$

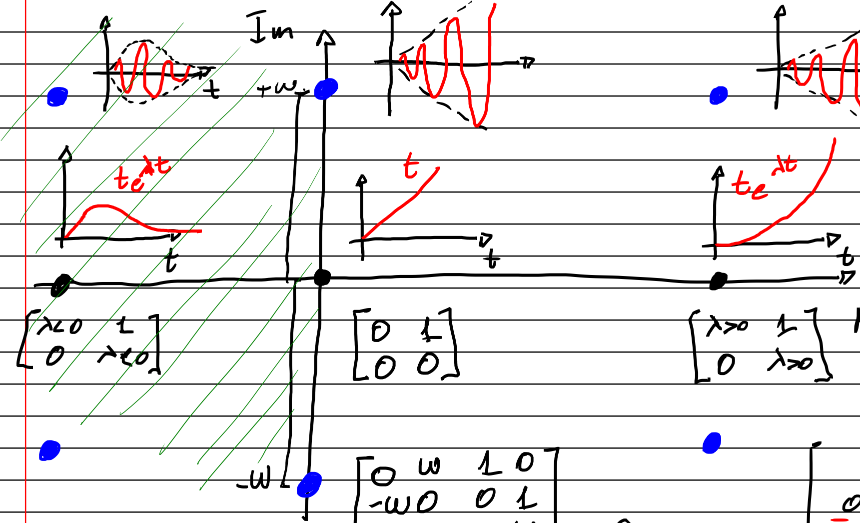
$$0 \le k \le q - 1$$

q DIM. DEL BLOCCO DI JORDAN



q = 1

DIAGONALIZ.



$\begin{bmatrix} \lambda<0 & 1 \\ 0 & \lambda<0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \lambda>0 & 1 \\ 0 & \lambda>0 \end{bmatrix}$

$q = 2$

$(q > 1)$

MFETTIVE

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

SIMILE

$$\left[\begin{array}{cc|cc} j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j\omega \end{array}\right]$$

$$e^{\lambda t}\begin{cases}\lambda=0 & \text{COSTANTE}\\ \lambda>0 & \text{ESP. CRESCENTI}\\ & \text{(ESP. DIVERGENTI)}\\ \lambda<0 & \text{ESP DECRESCENTI}\\ & \text{(ESP. CONV. A ZERO)}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}e^{\sigma t}\,\mathrm{sen}\,\omega t\\ e^{\sigma t}\cos\omega t\end{matrix}\begin{cases}\sigma=0 & \text{OSCILLAT. AMP. COSTANTE}\\ \sigma>0 & \text{// // ESP. DIV.}\\ \sigma<0 & \text{// // ESP CONV. A ZERO}\end{cases}$$

MATRICE DIFETTIVE

$$t^{k}e^{\lambda t}\begin{cases}\lambda=0 & \text{POLIN. DIV.}\\ \lambda>0 & \text{ESP. DIV.}\\ \lambda<0 & \text{ESP. CONV}\end{cases}$$

$$t^n e^{\sigma t} \sin \omega t \qquad t^n e^{\sigma t} \cos \omega t \quad \begin{cases} \sigma = 0 & \text{OSCILLAT. POLIN. DIVERGENTI} \\ \sigma > 0 & \text{'' ESP. DIVERG.} \\ \sigma < 0 & \text{'' ESP. CONVERG.} \end{cases}$$

SI IDENTIFICANO DUE ZONE:

PER PARTE REALE AUTOVALORI < 0 TUTTE FUNZ. CONV. A ZERO

PER '' '' '' > 0 '' '' DIVERG. ESP.

PER '' '' '' $= 0$

$\rightarrow q = 1 \rightarrow$ FUNZ. COSTANTI IN AMP.

$\rightarrow q > 1 \rightarrow$ FUNZ DIVERG. POLINOMIALM.

QUESTE FUNZIONI SI CHIAMANO **MODI** DEL SISTEMA

e^{At} $\delta x(t) = e^{At} \delta x_0$

MODI SONO TUTTE E SOLE LE FUNZ. DEL TEMPO CHE COMPAIONO COMBINATE LIN. COME ELEMENTI DI e^{At}

E QUINDI ANCHE COME ELEMENTI DELLA
EV. LIBERA DELLO STATO $x_l(t) = e^{At} x_0$

E ANCHE COME EVOLUZIONE NEL TEMPO
DELLE SUE PERTURBAZ. A FRONTE DI
PERTURBAZ. DELLE C.I. $\delta x(t) = e^{At} \delta x_0$

→ <u>STABILITÀ INTERNA</u>

STABILITÀ	MODI	AUTOV. DI A
ASINTOTICAMENTE STABILE	TUTTI CONV. A ZERO	TUTTI A PARTE $Re < 0$
SEMPLIC. O MARGIN. STABILE	NON CI SONO MODI DIVERG. $\exists$ MODO NON CONVERGENTE	NO AUTOV. $Re>0$ ALMENO UNO CON PARTE REALE $=0$ TUTTI GLI AUTOV. CON $Re=0$ HANNO m.a. = m.g.
INSTABILE	$\exists$ MODO DIVERGENTE	$\exists$ AUTOV. CON $Re>0$ $\vee$ $\exists$ AUTOV. CON $Re=0$ CON m.a. $\neq$ m.g.

ECCO IL CRITERIO!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

STUDIO AUTOVALORI

$\lambda = -1$ m.a. $= 5$

m.g. $= 3$

MODI DEL SISTEMA

1 $t^k e^{\lambda t}$ $0 \le k \le 2$ — e^{-t}, te^{-t}, $t^2 e^{-t}$

2 e^{-t}

3 e^{-t}

e^{-t} te^{-t} $t^2 e^{-t}$

STABILITÀ: ASINTOTICAM. STABILE

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 2

STUDIO AUTOVALORI

$\lambda_1 = -1 + 2j$ m.a. $= 1 =$ m.g.

$\lambda_2 = -1 - 2j$ PER TUTTI I λ_i

$\lambda_3 = 0$

1 SIMILE A $\begin{bmatrix} -1+j2 & 0 \\ 0 & -1-j2 \end{bmatrix}$

STABILITÀ:

MARG. STABILE

MODI $e^{\sigma t} \sin \omega t$ $e^{\sigma t} \cos \omega t$

1 $\left\langle \begin{array}{l} e^{-t} \sin 2t \\ e^{-t} \cos 2t \end{array} \right.$ 2 $1 = e^{0t}$

AUTOV.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{matrix}$$

$\lambda_1 = -2$ m.a. = 2, m.g. = 1

$\lambda_2 = -2+j$ m.a. = m.g. = 1

$\lambda_3 = -2-j$ " "

2 È SIMILE A $\begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix}$

STABILITÀ: ASINTOTICAM. STABILE

MODI

1 $\begin{cases} e^{-2t} \\ t e^{-2t} \end{cases}$

2 $\begin{cases} e^{-2t} \operatorname{sen} t \\ e^{-2t} \cos t \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORI

$\lambda_1 = 0$ $\quad m.a. = 1$

$\lambda_2 = j$ $\quad m.g = 1$

$\lambda_3 = -j$

STABILITÀ : MARG. STABILE

MODI : 1

$\sin t$

$\cos t$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1

2

AUTOVALORI

0 $\quad m.a. = 2$ $\quad m.g = 1$

j $\quad m.a. = 2$ $\quad m.g. = 1$

$-j$

$$\begin{matrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{matrix}$$

2 È SIMILE ALLA MAT IN FORMA DI JORDAN

$$\left[\begin{array}{cc|cc} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{array}\right]$$

MODI:

1 $\begin{cases} 1 \\ t \end{cases}$

2 $\begin{cases} \cos t \\ \text{sen}\, t \\ t \cos t \\ t\, \text{sen}\, t \end{cases}$

STABILITÀ: INSTABILE

$$A = \begin{bmatrix} 5 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & \\ & -2 & 1 & & & \\ & & & -2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

AUTOVALORI

$\lambda_1 = 5$ m.a. = 1 m.g. = 1

$\lambda_2 = 1 + j2$ m.a. = 1 m.g. = 1

$\lambda_3 = 1 - j2$

$\lambda_4 = -2$ m.a. 3 m.g. 1

STABILITÀ INTERNA : INSTABILE

MODI

e^{5t}

$e^{t} \sin 2t$

$e^{t} \cos 2t$

e^{-2t} $t e^{-2t}$ $t^2 e^{-2t}$