Esercizio

Un'automobile, inizialmente ferma, si mette in moto ed accelera. Si osserva che l'andamento della sua velocità nel tempo è ben descritto dalla seguente legge oraria

$$v(t) = b\,t^2 \tag{1}$$

dove b è una costante. Dopo $3\,\mathrm{s}$ l'auto ha percorso $20\,\mathrm{m}$.

1. Determinare l'unità di misura della costante b;

2. Determinare il valore della costante b;

3. Determinare quanto tempo impiega l'auto per raggiungere la velocità di $100\,\mathrm{Km/h}$.

SOLUZIONE:

1. La dimensione del parametro b si determina osservando che

$$\begin{aligned} v(t) &= b\,t^2 \\ &\Downarrow \\ [v] &= [b]\,[t^2] \\ &\Downarrow \\ [b] &= \frac{[v]}{[t^2]} = \frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \end{aligned} \tag{2}$$

2. In generale, quando abbiamo la legge oraria $v(t)$ della velocità, l'integrale di $v(t)$ da un istante t_1 ad un istante t_2 è l'area sottesa dalla curva $v(t)$

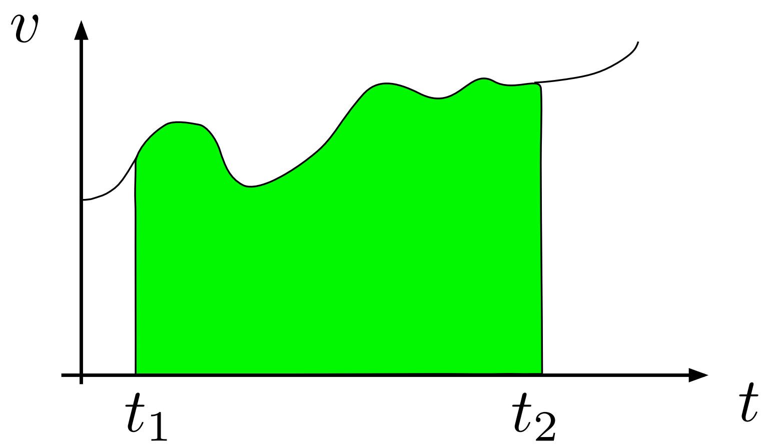

Figure 1:

e fisicamente rappresenta la variazione di posizione della particella tra t_1 e t_2, ossia

$$\int_{t_1}^{t_1} v(t)\,dt \quad = \quad \underbrace{x(t_2) - x(t_1)}_{=\Delta x \text{ variazione di posizione}} \tag{3}$$

Questo risultato è una conseguenza della definizione stessa di derivata e del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}\,dt = \; x(t_2) - x(t_1) = \Delta x \tag{4}$$

- Nel problema in questione, l'andamento di $v(t)$ è come descritto in figura 2. La curvatura della parabola è data dal parametro b, e dobbiamo determinarlo.

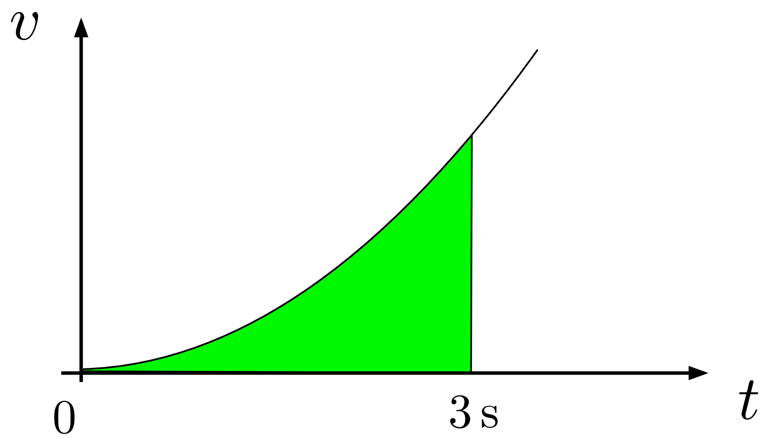

Figure 2:

- Possiamo scegliere l'origine dell'asse x nel punto da cui l'auto parte. Abbiamo due istanti in cui conosciamo la posizione dell'auto. Infatti sappiamo

$$
\begin{aligned}
t &= 0\,\mathrm{s} \qquad \rightarrow x(t=0\,\mathrm{s}) = 0 \qquad \text{(per definizione dell'origine)} \qquad (5)\\
t &= 3\,\mathrm{s} \qquad \rightarrow x(t=3\,\mathrm{s}) = 20\,\mathrm{m} \quad \text{(per quanto scritto nel testo)} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

- Applichiamo la formula generale (3) al caso specifico, dove $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 4\,\mathrm{s}$

$$
\begin{aligned}
\int_{0\,\mathrm{s}}^{3\,\mathrm{s}} v(t)\,dt &= x(t=3\,\mathrm{s}) - x(t=0\,\mathrm{s}) \\
&\Downarrow \\
\int_{0\,\mathrm{s}}^{3\,\mathrm{s}} b\,t^2\,dt &= 20\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} \\
&\Downarrow \\
b\,\frac{t^3}{3}\bigg|_{0\,\mathrm{s}}^{3\,\mathrm{s}} &= 20\,\mathrm{m} \\
&\Downarrow \\
b\left(\frac{(3\,\mathrm{s})^3}{3} - 0\,\mathrm{s}^3\right) &= 20\,\mathrm{m} \\
&\Downarrow \\
b\,9\,\mathrm{s}^3 &= 20\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

da cui otteniamo

$$b = \frac{20}{9}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \qquad (8)$$

3. A questo punto conosciamo la legge oraria della velocità al completo. Denotiamo con $v^* = 100$Km/h e con t^* l'istante (incognito) in cui l'auto la raggiunge. Abbiamo

$$v^* = v(t^*) = bt^{*2} \qquad (9)$$

da cui

$$t^* = \sqrt{\frac{v^*}{b}} \tag{10}$$

Per determinare l'istante t^* occorre prima convertire il dato in unità di misura del Sistema Internazionale

$$\begin{aligned} v^* &= 100\,\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{h}} = \frac{100 \cdot 1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} == \\ &= \frac{100}{3.6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{11}$$

Sostituendo (11) in (10) otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \sqrt{\frac{v^*}{b}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{100}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{20}{9}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{3.6}\;\mathrm{s}^2} = \\ &= 3.54\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{12}$$