

(Cognome)

(Nome)

(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max & -9x_1 + x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 13 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce tre tipi di piastrelle (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascuna materia prima richiesta per produrre una piastrella e la quantità massima (in Kg) di ciascuna materia prima che si può acquistare mensilmente:

	M1	M2	M3
P1	0.2	0.8	0.4
P2	0.4	0.2	0.3
P3	0.3	0.1	0.2
quantità massima	3000	1500	4000

Nella tabella sono riportate le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita e le quantità minime da produrre:

	P1	P2	P3
ore lavorative	1	0.8	0.5
prezzo di vendita	24	20	12
quantità minime	1000	2000	1200

Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della piastrella P1 non deve superare il 30% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le piastrelle fabbricate.

modello:

c=

A=

b=

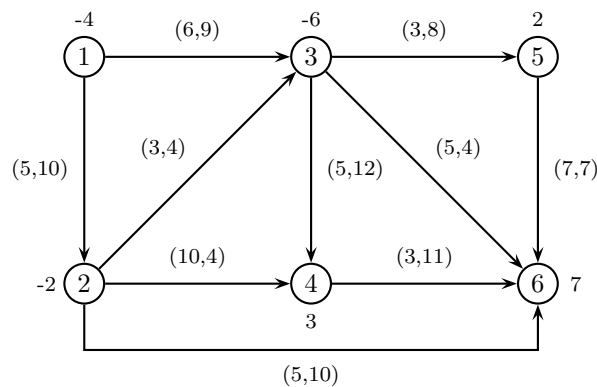
Aeq=

beq=

lb=

ub=

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

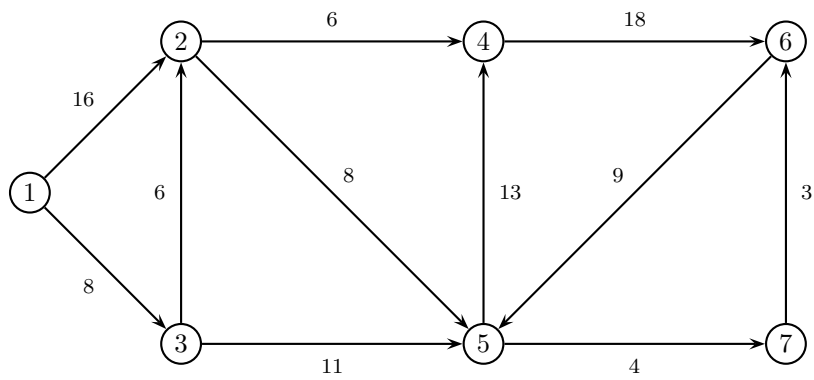


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,3) (3,5) (3,6) (4,6)	(1,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

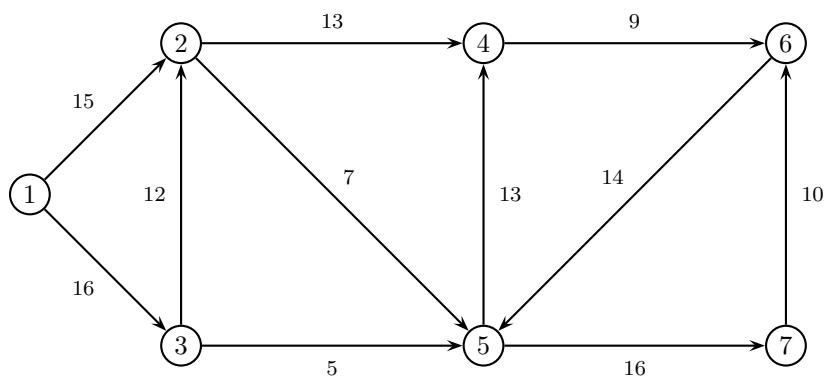
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$

$N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min & 10 x_1 + 14 x_2 \\ & 13 x_1 + 12 x_2 \geq 69 \\ & 7 x_1 + 12 x_2 \geq 65 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$
--------------------------------	------------

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$
--------------------	------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

r =	taglio:
-----	---------

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	8	56	57	21
2		13	58	55
3			14	9
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$
-----------	------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo:	$v_S(P) =$
--------	------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell’ordine, le variabili x_{12} , x_{13} , x_{14} .

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max & -9 x_1 + x_2 \\ & -2 x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 3 x_2 \leq 9 \\ & 4 x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3 x_1 - x_2 \leq 4 \\ & 2 x_1 + 2 x_2 \leq 13 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x = (-4, 0)$	SI	NO
{5, 6}	$y = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4, 5}	(1, -1)	$\left(0, 0, 0, -\frac{6}{7}, -\frac{13}{7}, 0\right)$	4	7	2
2° iterazione	{2, 5}	(0, -4)	$\left(0, \frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{5}{2}, 0\right)$	5	16, 21	1

variabili decisionali: x_i = numero di piastrelle di tipo i prodotte, con $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 3.

modello: $\begin{cases} \max & 24 x_1 + 20 x_2 + 12 x_3 \\ & 0.2 x_1 + 0.4 x_2 + 0.3 x_3 \leq 3000 \\ & 0.8 x_1 + 0.2 x_2 + 0.1 x_3 \leq 1500 \\ & 0.4 x_1 + 0.3 x_2 + 0.2 x_3 \leq 4000 \\ & x_1 \leq 0.3 (x_1 + 0.8 x_2 + 0.5 x_3) \\ & x_A \geq 1000 \\ & x_B \geq 2000 \\ & x_C \geq 1200 \end{cases}$

COMANDI DI MATLAB

`c=[24;20;12]`

`A=[0.2 0.4 0.3;0.8 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.7 -0.24 -0.15]`

`Aeq=[]`

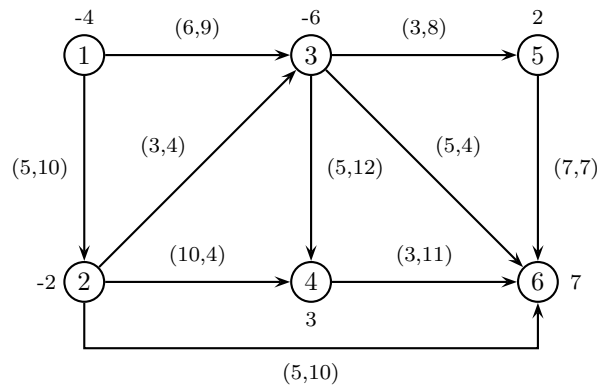
`lb=[1000; 2000; 1200]`

`b=[3000;1500;4000;0]`

`beq=[]`

`ub=[]`

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

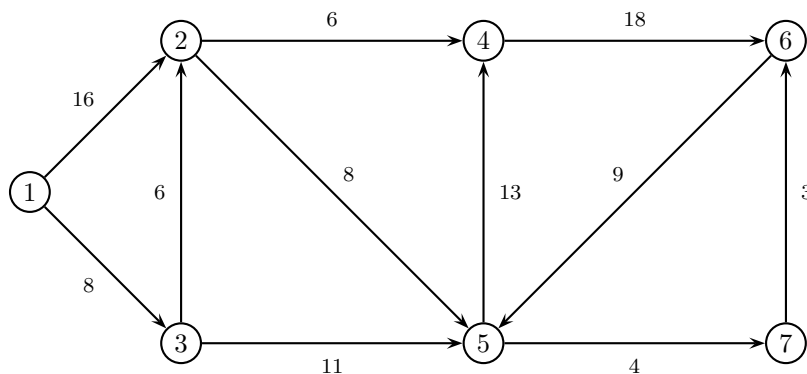


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6)	(2,3)	$x = (4, 0, 4, 3, -1, 0, 10, 0, 0, 8)$	NO	NO
(1,2) (2,3) (3,5) (3,6) (4,6)	(1,3)	$\pi = (0, 5, 8, 10, 11, 13)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

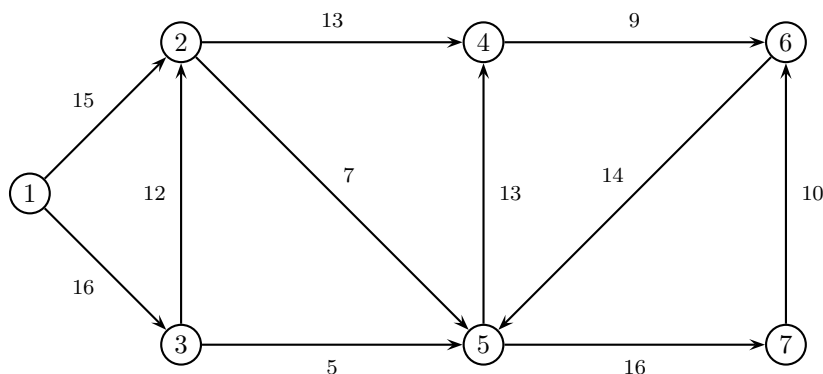
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,4) (2,6) (5,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(1, 3, 0, 3, 0, 0, 8, 1, 0, 6)	(2, 2, 0, 3, 1, 0, 8, 0, 0, 6)
π	(0, 5, 6, 15, 4, 11)	(0, 5, 6, 15, 3, 10)
Arco entrante	(2,6)	(3,4)
ϑ^+, ϑ^-	9, 1	7, 2
Arco uscente	(3,6)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	16	1	14	3	14	3	14	3	14	3	14	3	14	3
nodo 3	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	2	20	2	20	2	20	2	20	2
nodo 5	$+\infty$	-1	19	3	19	3	19	3	19	3	19	3	19	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	38	4	26	7	26	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	5	23	5	23	5	23	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		\emptyset	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 3 - 5 - 7	5	(7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	4	(11, 5, 4, 7, 0, 5, 4, 0, 16, 4, 0)	16

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min 10x_1 + 14x_2 \\ 13x_1 + 12x_2 \geq 69 \\ 7x_1 + 12x_2 \geq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{2}{3}, \frac{181}{36}\right)$ $v_I(P) = 78$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = (1, 6) $v_S(P) = 94$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$$\begin{array}{ll} r = 1 & 4x_1 + 4x_2 \geq 23 \\ r = 2 & 7x_1 + 11x_2 \geq 60 \end{array}$$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	8	56	57	21
2		13	58	55
3			14	9
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5-albero di costo minimo.

5-albero: (1, 2) (1, 5) (2, 3) (3, 4) (3, 5) $v_I(P) = 65$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 - 3 - 5 - 1 - 2 $v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12} , x_{13} , x_{14} .

