

Impulso a coseno rialzato

Abbiamo in precedenza visto come l'impulso di Nyquist di banda minima $1/2T$ era

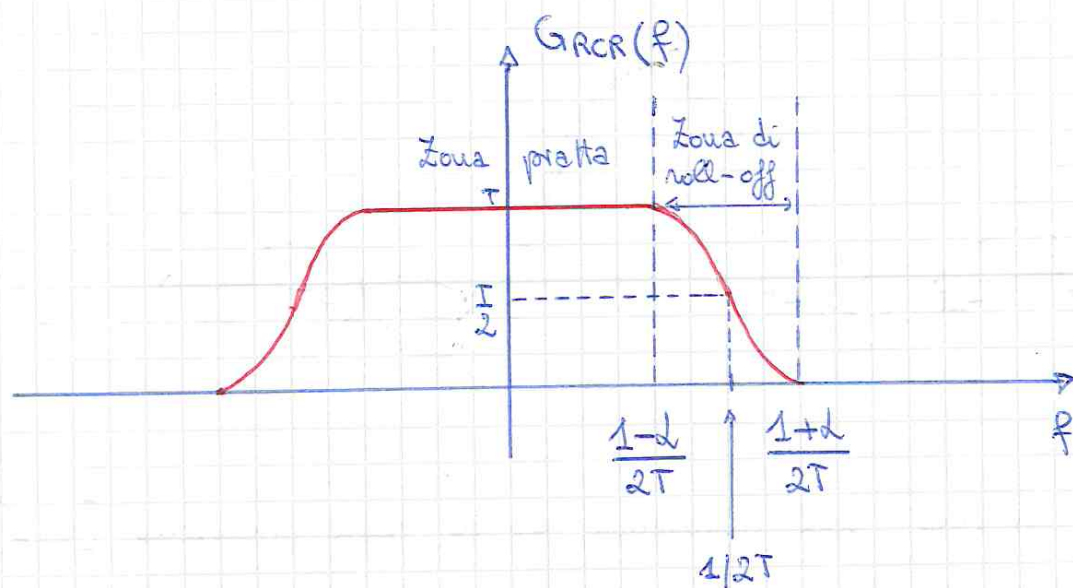
$$g(t) = \text{sinc}(t/T)$$

e abbia trasformata di Fourier $G(f)$ rettangolare.

Sebbene tale impulso garantisca la migliore efficienza spettrale al sistema di comunicazione, esso in genere non viene utilizzato per i seguenti due motivi:

- 1) non è facilmente implementabile, vista la discontinuità che $G(f)$ presenta in $f = \pm 1/2T$
- 2) Ha lobi molto pronunciati nel dominio del tempo, e quindi rende il sistema molto sensibile ad eventuali errori di timing

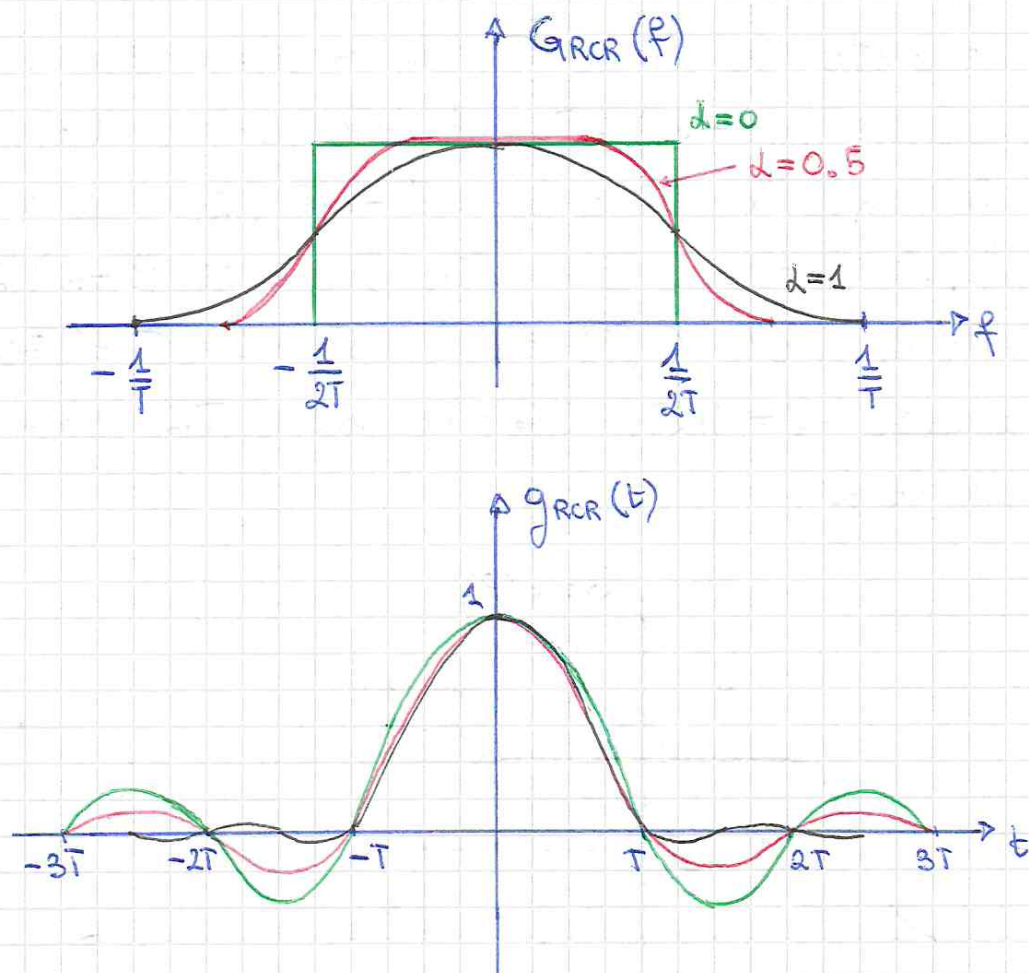
Al suo posto, si utilizzano i cosiddetti "Impulsi a coseno rialzato", indicati con la sigla RCR (Raised Cosine Roll-off). Essi costituiscono una famiglia di impulsi, caratterizzati da un parametro $\alpha \in [0, 1]$ detto "fattore di Roll-off". La loro trasformata di Fourier presenta una parte piatta di valore T , che si estende fino alla frequenza $(1-\alpha)/2T$. A tale parte piatta, fa seguito la cosiddetta Zona di roll-off (Zona di rolloff), che si estende fino alla frequenza $(1+\alpha)/2T$, e durante la quale $G(f)$ scende dal valore T a zero. Alla frequenza $f = 1/2T$, $G(f)$ ha valore $T/2$ indipendentemente da α .



Nel dominio del tempo, l'impulso a coseno rialzato ha la seguente espressione

$$g_{RCR}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - (2\alpha t/T)^2}$$

e ricordiamo un impulso tipo $\text{rinc}(t/T)$, con i lobi laterali che tendono però a ridursi man mano che λ aumenta. Le figure seguenti mostrano $G_{\text{RRC}}(f)$ e $g_{\text{RRC}}(t)$ per 3 valori di λ ($\lambda=0$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$).

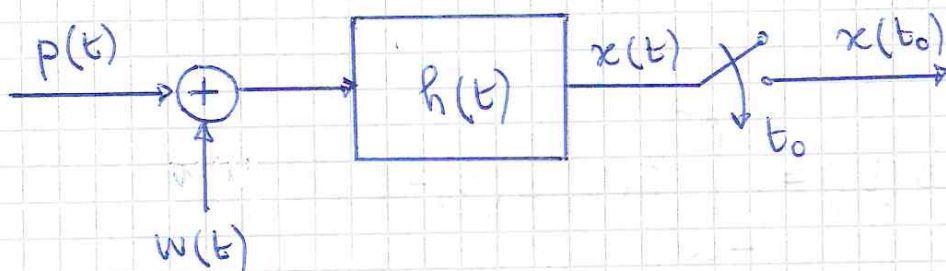


Come si vede, all'aumentare di λ nell'intervallo $[0, 1]$ la banda di $G_{\text{RRC}}(f)$ aumenta e i lobi laterali di $g_{\text{RRC}}(t)$ diminuiscono in ampiezza. La scelta del fattore di roll-off λ deve quindi essere effettuata tenendo conto da un lato della efficienza spettrale che migliora al decrescere di λ , dall'altro lato tenendo conto della sensibilità all'errore di timing, che diminuisce al crescere di λ .

Filtro adattato

Si è visto come un sistema di comunicazione PAM sia costituito da un filtro di trasmissione di risposta impulsiva $g_T(t)$ e da un filtro di ricezione di risposta impulsiva $g_R(t)$. A questo punto sorge il problema di come scegliere le due risposte impulsive $g_T(t)$ e $g_R(t)$ in modo da combattere il più efficacemente possibile sia l'ISI che il rumore termico. Per affrontare tale problema, occorre prima richiamare la teoria del filtro adattato (matched filter).

Il filtro adattato risolve il seguente problema. Si abbia un impulso $p(t)$ di forma nota, immerso in rumore bianco $w(t)$ (non necessariamente Gaussiano) con densità spettrale di potenza $S_w(f) = N_0/2$. Il segnale è inviato in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta impulsiva $h(t)$ e campionato ad un prefissato istante t_0 , ottenendo il campione $x(t_0)$ come mostrato in figura seguente.



Si vuole determinare $h(t)$ in modo che sia massimo il rapporto segnale/rumore sul campione $x(t_0)$.

A tale scopo, si calcola l'uscita $x(t)$ del filtro $h(t)$, che è esprimibile nella forma

$$x(t) = s(t) + m(t)$$

dove $s(t)$ è il contributo di $p(t)$, ovvero

$$s(t) = p(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) p(t-\tau) d\tau$$

mentre

$$m(t) = w(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) w(t-\tau) d\tau$$

è il contributo del rumore termico. Il campione in uscita del filtro è allora

$$x(t_0) = s(t_0) + m(t_0)$$

con

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) p(t_0 - \tau) d\tau$$

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) w(t_0 - \tau) d\tau$$

Il rapporto segnale/numero nel campione $x(t_0)$ è definito da

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{s^2(t_0)}{E\{m^2(t_0)\}}$$

dove

$$E\{m^2(t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df$$

essendo $H(f)$ la trasformata di Fourier di $h(t)$. Tenendo conto del teorema di Parseval, si ha

$$E\{m^2(t_0)\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

per cui S_u/N_u può essere scritto come

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) p(t_0 - t) dt \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}$$

Dobbiamo ora individuare $h(t)$ in modo che S_u/N_u sia massimo. A tal proposito, ricorriamo alle disuguaglianze di Schwartz, secondo le quali risulta

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) p(t_0 - t) dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t) dt$$

con il segno di uguaglianza che vale quando

$$h(t) = K p(t_0 - t)$$

con K numero reale non nullo. Sostituendo tale disuguaglianza nella espressione di S_u/N_u si ottiene

$$\frac{S_u}{N_u} \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t) dt$$

ovvero

$$\frac{S_u}{N_u} \leq \frac{2E_p}{N_0}$$

dove E_p è l'energia dell'impulso $p(t)$. Deducendo che il massimo rapporto segnale/rumore ottenibile sul can = prova $x(t_0)$ vale

$$\left. \frac{S_u}{N_u} \right|_{\max} = \frac{2E_p}{N_0}$$

ed è ottenibile quando vale la relazione

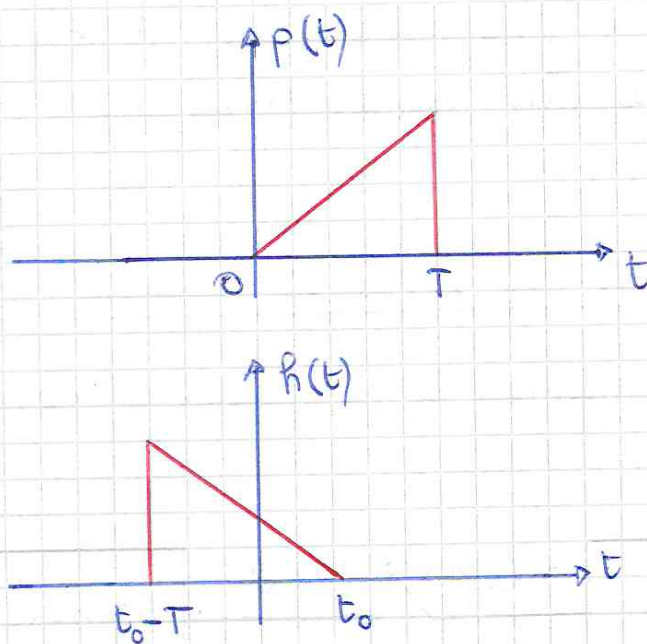
$$h(t) = p(t_0 - t)$$

Un filtro $h(t)$ la cui risposta impulsiva è

$$h(t) = p(t_0 - t)$$

è detto "ADATTATO" all'impulso $p(t)$, e massimizza il rapporto segnale/rumore alle sue uscite all'istante t_0 quando il rumore di ingresso è bianco.

Come si vede, la risposta impulsiva del filtro adattato è lo specchio di $p(t)$ ruotato attorno all'asse verticale e traslato di t_0 . La figura seguente mostra un esempio di impulso $p(t)$ e il corrispondente filtro adattato $h(t)$.



Vale la pena osservare che la componente di segnale utile $s(t_0)$ in uscita dal filtro adattato all'istante t_0 è

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t) dt = E_p$$

La risposta in frequenza del filtro adattato è

$$H(f) = \text{TCF}\{p(t_0 - t)\} = P^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

essendo $P(f)$ la trasformata di Fourier di $p(t)$. Il modulo di $H(f)$ è

$$|H(f)| = |P(f)|$$

per cui si osserva come, nel dominio della frequenza, il filtro adattato amplifica le zone frequenziali dove $|P(f)|$ è maggiore (zone ad elevato rapporto segnale/rumore), e attenua le zone frequenziali dove $|P(f)|$ è minore (zone a basso rapporto segnale/rumore).

Progetto dei filtri di trasmissione e di ricezione

In un sistema di comunicazione, il canale fisico è in generale distortante, nel senso che è caratterizzato da una risposta impulsiva $c(t) \neq \delta(t)$. In queste condizioni, il progetto ottimale dei filtri di trasmissione e ricezione (nel senso della minimizzazione della probabilità di errore sui simboli $\{a_i\}$) non è perseguibile perché $g_T(t)$ e $g_R(t)$ verrebbero a dipendere da $c(t)$, che tipicamente non è noto in fase progettuale.

Una strada pratica per il dimensionamento di $g_T(t)$ e $g_R(t)$ consiste nell'assumere che $c(t) = \delta(t)$, ovvero che il canale sia non distortante. In questo modo, come ora vedremo, è possibile dimensionare i filtri di trasmissione e ricezione prescindendo dal reale valore di $c(t)$. Qualora poi il sistema di comunicazione così progettato venisse ad operare su un canale distortante, verrebbero prese delle precauzioni al ricevitori per mitigare le distorsioni introdotte dal canale.

Supponendo pertanto che sia $c(t) = \delta(t)$, gli impulsi in ingresso al filtro di ricezione saranno

$$g_{Tc}(t) = g_T(t) \otimes c(t) = g_T(t)$$

e la risposta impulsiva globale del sistema PAM sarà

$$g(t) = g_{Tc}(t) \otimes g_R(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$$

Il progetto dei filtri $g_T(t)$ e $g_R(t)$ deve ottenere le seguenti due condizioni:

a) Annullamento dell'ISI

Si deve fare in modo che $g(t)$ sia un impulso di Nyquist, tipicamente un impulso a coseno rialzato. Si ha allora

$$G(f) = G_T(f) G_R(f) = G_{RCR}(f)$$

b) Massimizzazione del rapporto segnale/rumore in uscita dal filtro di ricezione

Si deve fare in modo che il filtro di ricezione $g_R(t)$ sia adattato agli impulsi presenti al suo ingresso, ovvero

$$g_R(t) = g_T(-t) \implies G_R(f) = G_T^*(f)$$

Combinando le due condizioni a) e b) e tenendo presente che $G_{RCR}(f)$ è reale e non negativa, si ottiene

$$G_T(f) = G_R(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$$

ovvero le risposte in frequenza dei filtri di trasmissione e ricezione coincidono e sono la radice quadrata di una funzione a coseno rialzato. Il corrispondente impulso $g_T(t)$ e $g_R(t)$ sono allora detti "Impulsi a radice di

coseno rialzato^o, e indicato con l'acronimo RRCR (Root Raised Cosine Roll-off). Vale la pena osservare che esso non è un impulso di Nyquist. È però un m.p. = pulso di Nyquist la loro convoluzione.

La figura seguente mostra la trasformata di Fourier di un impulso $g_{\text{RRCR}}(t)$.

