DEFINIZIONI E TEOREMI ESAME ANALISI 1

Isabella Mauri

(Prof. Placido Longo – a.a. 2021/2022)

Nota: le pagine accanto ad alcuni teoremi fanno riferimento alle pagine del Giusti

FUNZIONE

Una funzione è una relazione tra due insiemi, chiamati dominio e codominio della funzione, che associa a ogni elemento del dominio uno e un solo elemento del codominio.

$$\forall a \in A\ \exists!\, b\ \in B:\ f: a \longrightarrow b$$

IMMAGINE

Data una funzione f di dominio X e codominio Y, comunque scelto un elemento x del dominio, si chiama immagine di x il corrispondente elemento del codominio, indicato con $f(x)$.

L'insieme

$$\{y \in Y | \exists x \in X: y = f(x)\}$$

degli elementi y del codominio per i quali esiste almeno un x nel dominio che ha y come immagine è detto immagine di f e si denota con $Im(f)$.

DOMINIO

Il dominio di una funzione è l'insieme su cui è definita la funzione, ossia l'insieme sui cui elementi ha senso valutare la funzione.

CODOMINIO

Il codominio di una funzione è l'insieme in cui sono contenute le immagini della funzione.

FUNZIONE INIETTIVA

Una funzione $f: X \to Y$ si dice iniettiva (o invertibile) se associa, ad elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio, cioè se:

$$\forall x_1, x_2\ \ di\ X\ con\ x_1 \neq x_2\ risulta\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

FUNZIONE SURIETTIVA

Una funzione $f: X \to Y$ si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio, cioè se:

$$\forall y \in Y\ \ \exists x \in X: f(x) = y$$

FUNZIONE BIIETTIVA (o BIUNIVOCA)

Una funzione $f: X \to Y$ si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva e dunque anche invertibile, cioè se:

$$y = f(x)\ ha\ una\ e\ una\ sola\ soluzione\ \forall y \in Y$$

FUNZIONE INVERSA

$Una\ funzione\ f: X \ \rightarrow Y\ si\ dice\ invertibile\ se\ esiste\ una\ funzione\ g: Y \rightarrow X\ tale\ che$:

$g(f(x)) = x\ per\ ogni\ x \in X$

$f(g(y)) = y\ per\ ogni\ y \in Y$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (o di BOLZANO-WEIRSTRASS) (p.232)

$Sia\ I \subset\ \mathbb{R}\ un\ intervallo\ e\ sia\ f(x)\ una\ funzione\ continua\ in\ I.$
$f(x)\ assume\ tutti\ i\ valori\ compresi\ tra\ quelli\ assunti\ in\ due\ punti\ arbitrari\ del\ dominio$
$x_1, x_2\ con\ x_1 < x_2 \quad (Una\ f.continua\ in\ I\ assume\ tutti\ i\ valori\ compresi\ tra\ inf_I f\ e\ sup_I f)$

<u>*Dimostrazione*</u>

$Sia\ c\ un\ valore\ compreso\ tra\ inf_I f\ e\ sup_I f: \quad inf_I f < c < sup_I f$
$Essendo\ c > inf_I f, c\ non$ è $un\ minorante. Dunque\ \exists a \in I: f(a) < c$
$Essendo\ c < sup_I f, c\ non$ è $un\ maggiorante. Dunque\ \exists b \in I: f(b) > c$
$La\ funzione\ continua\ g(x) = f(x) - c\ sar$à $allora\ positiva\ in\ b\ e\ negativa\ in\ a.$
$Per\ il\ th\ degli\ zeri\ (p.8)\ ci\ sar$à $un\ punto\ x_0\ compreso\ tra\ a\ e\ b\ in\ cui$
$g(x) = 0\ cio$è $in\ cui\ f(x_0) = c$

FUNZIONE CRESCENTE (strettamente crescente se $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)} \Rightarrow$ iniettiva)

$Sia\ A \subset\ \mathbb{R}.$
$Una\ funzione\ f: A\ \rightarrow \mathbb{R}\ si\ dice\ crescente\ se\ \forall x_1, x_2 \in \mathrm{A}\ con\ x_1 < x_2, si\ ha\ f(x_1) \leq f(x_2)$

$N.B: Una\ funzione\ f$ è $crescente\ se\ e\ solo\ se\ il\ rapporto\ incrementale\ \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$

FUNZIONE DECRESCENTE (strettamente decrescente se $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$ $\Rightarrow$ iniettiva)

$Sia\ A \subset\ \mathbb{R}.$
$Una\ funzione\ f: A\ \rightarrow \mathbb{R}\ si\ dice\ decrescente\ se\ \forall x_1, x_2 \in \mathrm{A}\ con\ x_1 < x_2, si\ ha\ f(x_1) \geq f(x_2)$

$N.B: Una\ funzione\ f$ è $decrescente\ se\ e\ solo\ se\ il\ rapp.incrementale\ \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$

MASSIMO DI UN INSIEME (<u>può</u> esistere)

$Sia\ M \subseteq \mathbb{R}, x_0\ \in \mathbb{R}.$
x_0 è $detto\ massimo\ di\ M\ se\ verifica\ le\ seguenti\ propriet$à:

1) $x_0\ \in M$
2) $x_0\ \geq x\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{M}\ (ovvero\ x_0$ è $un\ maggiorante\ di\ M)$

MINIMO DI UN INSIEME (<u>può</u> esistere)

$Sia\ M \subseteq \mathbb{R}, x_0\ \in \mathbb{R}.$
x_0 è $detto\ minimo\ di\ M\ se\ verifica\ le\ seguenti\ propriet$à:

1) $x_0\ \in M$
2) $x_0\ \leq x\ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{M}\ (ovvero\ x_0$ è $un\ minorante\ di\ M)$

<u>N.B</u>: Maggioranti e minoranti sono infiniti.

INSIEME LIMITATO SUPERIORMENTE

Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}$ *si dice limitato superiormente se* $\exists k \in \mathbb{R}: x \leq k \ \forall x \in M$
(*ovvero se* M *possiede almeno un maggiorante*)

INSIEME LIMITATO INFERIORMENTE

Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}$ *si dice limitato inferiormente se* $\exists h \in \mathbb{R}: x \geq h \ \forall x \in M$
(*ovvero se* M *possiede almeno un minorante*)

Se un insieme è limitato sia superiormente che inferiormente si dirà limitato
($\exists k \in \mathbb{R}: -k \leq x \leq k \ \forall x \in M$)

ESTREMO SUPERIORE (esiste <u>sempre</u>, ammesso che l'insieme non sia vuoto)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente.*
Allora $\Lambda \in \mathbb{R}$ *sarà detto estremo superiore* ($supA$) *di* A *se è il min. dei suoi maggioranti, cioè se*:

1) $a \leq \Lambda \ \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A: \quad \bar{a} > \Lambda - \varepsilon$

ESTREMO INFERIORE (esiste <u>sempre</u>, ammesso che l'insieme non sia vuoto)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato inferiormente.*
Allora $\lambda \in \mathbb{R}$ *sarà detto estremo inferiore* ($infA$) *di* A *se è il max. dei suoi minoranti, cioè se*:

1) $\lambda \leq a \ \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A: \bar{a} < \lambda - \varepsilon$

<u>N.B</u>: $\bar{a} =$ *valore specifico di* a; $\varepsilon = 0^+$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *si ha* $|a + b| \leq |a| + |b|$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Per ogni intero $n \geq 0$ *e ogni numero reale* $x > -1$ *si ha* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

PRINCIPIO DI LOCALIZZAZIONE (o PRINCIPIO DI CANTOR)

Data una successione di intervalli chiusi e limitati (*decresc. rispetto alla relazione di inclusione*)

$$I_0 = [a_0, b_0] \supseteq I_1 = [a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq I_n = [a_n, b_n] \supseteq \cdots$$

Tale che

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad b_n - a_n < 10^{-M}$$

Esiste un unico numero reale x^* *verificante*

$$x^* \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Risulta inoltre $x^* = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$

SUCCESSIONE ($\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$)

Una successione è una particolare funzione $f(x)$ definita solo per valori interi di x, ovvero nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali $\big(Dom(f(x)) = \mathbb{N}\big)$

- a_n *si dirà crescente se* $n \leq m \implies a_n \leq a_m \forall n, m \in \mathbb{N}$
- a_n *si dirà decrescente se* $n \leq m \implies a_n \geq a_m \forall n, m \in \mathbb{N}$
- a_n *si dirà* ***convergente*** *ad L se* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N}: \forall n > \nu \quad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ (*se è convergente, è anche limitata*) *cioè se* $\exists l \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} a_n = L}$
- a_n *si dirà* ***limitata*** *se* $\exists k > 0 \in \mathbb{R}: \ |a_n| \leq k \ (-k \leq a_n \leq k) \ \forall n \in \mathbb{N}$
- a_n *si dirà divergente ad* $+\infty$ *se* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu: \forall n > \nu \quad a_n > \varepsilon$
- a_n *si dirà divergente ad* $-\infty$ *se* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu: \forall n > \nu \quad a_n < -\varepsilon$
- a_n *si dirà* ***divergente*** *se* $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} a_n} = \pm\infty$
- a_n *si dirà oscillante se non è nè convergente nè divergente*
- a_n *si dirà* ***infinitesima*** *se* $\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$
- *Una restrizione della successione a_n a un sottoinsieme infinito K di $\mathbb{N}$ si dirà sottosuccessione*

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO (p.143)

Se la funz. $g(x)$ ha limite M positivo ($\lim_{x \to x_0} g(x) = M > 0$), *allora esiste un $\delta > 0$ tale che* $\forall$x *con* $0 < |x - x_0| < \delta$ *si ha* $g(x) > \frac{M}{2}$ *e dunque in particolare* $g(x) > 0$

<u>*Dimostrazione*</u>

Dato che $M > 0$, si può prendere $\varepsilon \leq \frac{M}{2}$.

Allora $\exists \delta > 0: \quad \forall x$ *con* $0 < |x - x_0| < \delta$ *si ha* $|g(x) - M| < \varepsilon \leq \frac{M}{2}$

dunque $\frac{M}{2} < g(x) < \frac{3}{2}M$ *e in particolare* $g(x) > \frac{M}{2}$

TEOREMA DEL CONFRONTO (o DEI CARABINIERI) (p.147)

Siano $f(x), g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni, e supponiamo che risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno bucato di x_0 (cioè escluso x_0) e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Allora si ha anche:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

<u>*Dimostrazione*</u>

Sia $\varepsilon > 0$.

Poichè $f(x) \longrightarrow L \quad \exists \delta_1 > 0: \quad \forall x$ *con* $0 < |x - x_0| < \delta_1$ *risulta* $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ *e dunque in particolare* $f(x) > L - \varepsilon$.

Dato che $h(x) \longrightarrow L \quad \exists \delta_2 > 0: \quad \forall x$ *con* $0 < |x - x_0| < \delta_2$ *risulta* $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ *e dunque in particolare* $h(x) < L + \varepsilon$.

$Infine\ \exists\delta_3$: $se\ 0 < |x - x_0| < \delta_3$ $si\ ha$ $f(x) \le g(x) \le h(x)$
$Se\ si\ prende\ \delta\ uguale\ al\ minimo\ tra\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, tutte\ queste\ disuguaglianze\ varranno$

$simultaneamente\ \ \forall x\ con\ 0 < |x - x_0| < \delta$. $Pertanto\ per\ questi\ x\ si\ avr$à
$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$ $e\ quindi$ $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ $da\ cui\ segue\ la\ tesi.$

TEOREMA DEL CONFRONTO (per successioni)

$Siano\ \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}\ tre\ successioni, e\ supponiamo\ che\ risulti\ a_n \le b_n \le c_n\ e$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

$Allora\ si\ ha\ anche$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

CRITERIO DI CAUCHY (o CONDIZIONE DI CAUCHY) (p.190)

$\boldsymbol{TH}$: $Una\ successione\ a_n$ è $convergente\ se\ e\ solo\ se$ è $di\ Cauchy$

$Dunque\ CNS\ perch$è $la\ successione\ a_n\ sia\ convergente$ è $che\ sia\ di\ Cauchy, ovvero\ che$:

$$\boldsymbol{Def.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu: \forall n, m > \nu \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

<u>*Dimostrazione*</u>

1) $Una\ successione\ convergente$ è $di\ Cauchy$

$Supponiamo\ che\ la\ successione\ a_n\ sia\ convergente\ a\ un\ numero\ reale\ L.\ Allora$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu: \quad \forall n > \nu\ \ risulta\ \ |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$Se\ anche\ m > \nu\ si\ avr$à $|a_m - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $e\ dunque$

$$|a_n - a_m| \le |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$cosicch$è $la\ successione\ a_n$ è $di\ Cauchy$.

2) $Una\ successione\ di\ Cauchy$ è $convergente$

$Innanzitutto$ è $necessario\ provare\ che\ una\ successione\ di\ Cauchy$ è $limitata.$
$Se\ nella\ definizione\ di\ successione\ di\ Cauchy\ prendiamo\ \varepsilon = 1, concludiamo\ che$

$$\exists \nu: \forall n, m > \nu \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$In\ particolare\ si\ pu$ò $prendere\ m = \nu + 1.\ Si\ ha\ allora, per\ n > \nu$:

$$|a_n| \le |a_{\nu+1}| + |a_n - a_{\nu+1}| < |a_{\nu+1}| + 1$$

$D'altra\ parte\ per\ n \le \nu\ risulta$

$$|a_n| < |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|$$

$e\ quindi\ in\ ogni\ caso\ si\ avr$à

$$|a_n| < |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu| + |a_{\nu+1}| + 1 = M$$

$e\ quindi\ a_n$ è $limitata.$

$Poich$è a_n è $limitata, possiamo\ estrarre\ una\ sottosuccessione\ a_{k_n}\ convergente\ a\ un\ numero\ reale\ L.\ \ Allora$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_1: \quad per \quad n > \nu_1 \quad si\ ha \quad |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$$

$Dobbiamo\ ora\ provare\ che\ tutta\ la\ successione\ a_n\ tende\ a\ L.$
$Per\ la\ definizione\ di\ successione\ di\ Cauchy$

$$\exists \nu_2: \quad \forall n, m > \nu_2 \quad risulta \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$In\ particolare, dato\ che\ k_n \geq n, se\ n > \nu_2 \quad si\ ha \quad |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$

$Se\ ora\ si\ prende\ \nu\ uguale\ al\ massimo\ tra\ \nu_1\ e\ \nu_2\ , si\ avr$à $per\ ogni\ n > \nu$:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$e\ quindi\ la\ successione\ a_n\ tende\ ad\ L.$

LIMITE FINITO AL FINITO (limite finito di una funzione per $x \longrightarrow x_0$)

$Sia\ \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$Def. 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in Dom(f) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

$Def. 2\ (tramite\ successioni, si\ usa\ per\ dimostrare\ che\ il\ limite\ \nexists)$

$$\forall \{x_n\} \ \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \quad con\ x_n \neq x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} y_n = L$$

LIMITE INFINITO AL FINITO (limite infinito di una funzione per $x \longrightarrow x_0$)

$Sia\ \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$Def. \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in Dom(f) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$

$Sia\ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$Def. \quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in Dom(f) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M$

LIMITE FINITO ALL' INFINITO (limite infinito di una funzione per $x \longrightarrow \pm\infty$)

$Sia\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad con\ L \in \mathbb{R}$

$Def. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad \forall x \in Dom(f) \quad x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

$Sia\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad con\ L \in \mathbb{R}$

$Def. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0: \quad \forall x \in Dom(f) \quad x < -M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

LIMITE INFINITO ALL'INFINITO (limite infinito di una funzione per $x \longrightarrow \pm\infty$)

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ con\ dominio\ illimitato\ superiormente, si\ dice\ che$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se: $\quad \forall M > 0 \quad \exists k_M > 0: \quad x > k_M \Rightarrow f(x) > M$

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ con\ dominio\ illimitato\ inferiormente, si\ dice\ che$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Se: $\quad \forall M > 0 \quad \exists k_M > 0: \quad x < -k_M \Rightarrow f(x) > M$

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ con\ dominio\ illimitato\ superiormente, si\ dice\ che$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Se: $\quad \forall M > 0 \quad \exists k_M > 0: \quad x > k_M \Rightarrow f(x) < -M$

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ con\ dominio\ illimitato\ inferiormente, si\ dice\ che$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Se: $\quad \forall M > 0 \quad \exists k_M > 0: \quad x < -k_M \Rightarrow f(x) < -M$

LIMITE DESTRO

$Diremo\ che\ la\ funzione\ f(x), definita\ in\ un\ insieme\ D \subset \mathbb{R},$
$ha\ limite\ L\ per\ x \longrightarrow x_0\ da\ destra\ \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\right) se$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D \quad con\ 0 < x - x_0 < \delta \quad si\ ha\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

LIMITE SINISTRO

$Diremo\ che\ la\ funzione\ f(x), definita\ in\ un\ insieme\ D \subset \mathbb{R},$
$ha\ limite\ l\ per\ x \longrightarrow x_0\ da\ sinistra\ \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l\right) se$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D\ con\ -\delta < x - x_0 < 0 \quad si\ ha\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

$Sia\ una\ funzione\ f(x)\ definita\ in\ un\ insieme\ D \subset \mathbb{R}, e\ supponiamo\ che\ risulti$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

$Allora\ la\ funzione\ f(x)\ ha\ limite\ per\ x \longrightarrow x_0\ e\ si\ ha$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

<u>N.B</u>: Se una funzione f(x) ha limite, avrà anche i limiti destro e sinistro, che coincideranno con il limite (e viceversa). Dunque se i limiti destro e sinistro di una funzione f(x) sono diversi, si potrà concludere che il limite non esiste.

Le funzioni **monotone** hanno **SEMPRE limiti destro e sinistro**. Si ha infatti il seguente teorema:

$Sia\ una\ funzione\ f(x)\ crescente\ nell'intervallo\ (a,b)\ e\ sia\ x_0\ un\ punto\ di\ (a,b]$.

$Si\ ha\ allora$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = sup_{a<x<x_0} f(x)$$

$Sia\ una\ funzione\ f(x)\ decrescente\ nell'intervallo\ (a,b)\ e\ sia\ x_0\ un\ punto\ di\ (a,b]$.

$Si\ ha\ allora$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = inf_{a<x<x_0} f(x)$$

In maniera simile si dimostra il limite destro e la funzione crescente/decrescente in (a, +∞) o crescente/decrescente in (-∞, b). [NEL DETTAGLIO P.166-167 del GIUSTI]

FUNZIONE PARI (es. tutte le potenze pari, la funzione coseno)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f$ è $pari\ se\ f(-x) = f(x)$

FUNZIONE DISPARI (es. tutte le potenze dispari, la funzione seno)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ f$ è $dispari\ se\ f(-x) = -f(x)$

O GRANDE

$Diremo\ che\ f(x)$ è $un\ O - grande\ di\ g(x)\ per\ x \longrightarrow x_0\ se\ e\ solo\ se$
$il\ limite\ per\ x \longrightarrow x_0\ del\ rapporto\ tra\ f(x)\ e\ g(x)\ esiste\ ed$ è $finito$:

$$f(x) = O\big(g(x)\big)\ per\ x \longrightarrow x_0\ \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l\ \in\ \mathbb{R}$$

$f(x) = O\big(g(x)\big)\ significa\ che\ f(x)\ e\ g(x)\ sono\ infinitesimi\ dello\ stesso\ ordine$

O PICCOLO

$Diremo\ che\ f(x)$ è $un\ o - piccolo\ di\ g(x)\ per\ x \longrightarrow x_0\ se\ e\ solo\ se$
$il\ limite\ per\ x \longrightarrow x_0\ del\ rapporto\ tra\ f(x)\ e\ g(x)$ è $uguale\ a\ zero$:

$$f(x) = o\big(g(x)\big)\ per\ x \longrightarrow x_0\ \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ \in\ \mathbb{R}$$

$f(x) = o\big(g(x)\big)\ significa\ che\ f(x)$ è $un\ infinitesimo\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ a\ g(x)$

RETTA TANGENTE AL GRAFICO IN ($\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f(x_0)}$)

$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

NUMERI COMPLESSI

$I\ numeri\ complessi\ consentono\ di\ risolvere\ equazioni\ di\ secondo\ grado\ x^2 + 2px + q = 0$ $con\ \Delta\ negativo.\ In\ tal\ caso\ le\ soluzioni\ avranno\ forma\ x = -p \pm i\sqrt{q - p^2}.$

- $\boldsymbol{z = a + ib} = n.complesso\ in\ forma\ algebrica\ (utile\ per\ le\ somme)$
- $\boldsymbol{z = \rho(cos\theta + i\sin\theta)} = n.complesso\ in\ forma\ trigonom.(utile\ per\ i\ prodotti)$
- $a = \rho cos\theta = parte\ reale$
- $b = \rho\sin\theta = coefficiente\ parte\ immaginaria$
- $ib = parte\ immaginaria$
- $\rho = modulo = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = argomento = arctg(\frac{b}{a})$
- $Unità\ immaginaria\ \ i^2 = -1$
- $\boldsymbol{Opposto}:\ -a - ib$
- $\boldsymbol{Inverso}\ (o\ reciproco): \frac{a-ib}{a^2+b^2}$
- $\boldsymbol{Modulo}: |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\boldsymbol{Coniugato}: \bar{\alpha} = a - ib$
- $\boldsymbol{Somma}: (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$
- $\boldsymbol{Prodotto}: (a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$
- $Elemento\ neutro\ somma: 0 + i0$
- $Elemento\ neutro\ prodotto: 1 + i0$
- $I\ num.complessi\ soddisfano\ le\ proprietà\ commutativa\ e\ associativa$
- $Non\ si\ usano\ le\ disequazioni\ (non\ si\ possono\ ordinare\ i\ complessi).$
  $Le\ disequazioni\ si\ possono\ fare\ solo\ con\ il\ modulo.$
- $\boldsymbol{Formula\ di\ Eulero}: e^{ix} = cosx + isinx \quad con\ x \in \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{Formula\ di\ De\ Moivre}: z^n = \rho^n(cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\ \ con\ n \in \mathbb{N}\ o\ n \in \mathbb{Z}$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA
(dimostrazione basata sullo sviluppo in serie di Taylor)

$Ogni\ polinomio\ a\ coefficienti\ complessi, di\ grado\ \geq 1, del\ tipo:$

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad a_k, z \in \mathbb{C} \quad a_n \neq 0 \quad n \geq 1$$

$ammette\ almeno\ una\ radice\ (a \in \mathbb{C}\ è\ una\ radice\ di\ p(x)\ se\ p(a) = 0)\ complessa.$

FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

f è $continua\ in\ x_0\ se\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$:

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0: \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

FUNZIONE CONTINUA ($\delta\ dipende\ sia\ da\ \varepsilon\ che\ da\ y$)

f è $continua\ se\ f$ è $continua\ in\ x_0\ \forall x_0 \in Dom(f), cioè\ se$:

$\forall y \in Dom(f), \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ \forall x \in Dom(f)\ \ per\ cui\ \ |x - y| < \delta\ \ \ risulta\ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

N.B: Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato ed è invertibile, allora è anche strettamente monotona.

FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA (δ *dipende da* ε, *ma non da* y)

f è *uniformemente continua se*:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, y \in Dom(f) \quad per\ cui \quad |x - y| < \delta \quad risulta \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(x)$ è *discontinua* $\forall x \in \mathbb{R}$ *e non integrabile* (*secondo Reinmann*)

TEOREMA DEGLI ZERI (per le funzioni continue o TEOREMA DI BOLZANO) (p.231)

Consideriamo una funzione $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
e supponiamo che sia continua nell'intervallo $[a, b] \subseteq Dom(f)$.
Supponiamo inoltre che f *assuma agli estremi dell'intervallo, valori discordi, cioè che*:

$$f(a)f(b) < 0$$

Allora esiste almeno un punto $x_0 \in\ ]a, b[$ *tale che* $f(x_0) = 0$.
In simboli:

$$Sia\ f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ continua \quad e\ sia \quad f(a)f(b) < 0 \quad allora \quad \exists x_0 \in\ ]a, b[: \quad f(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ *in due parti mediante il suo punto di mezzo* $c = \dfrac{a+b}{2}$.
Se $f(c) > 0$ *poniamo* $a_1 = a$ *e* $b_1 = c$; *altrimenti* $a_1 = c$ *e* $b_1 = b$.
Ripetendo il procedimento con $[a_1, b_1]$ *otteniamo un secondo intervallo* $[a_2, b_2]$ *e poi via via una successione di intervalli dimezzati* $[a_k, b_k]$ *tali che* $f(a_k) \le 0$ *e* $f(b_k) > 0$.
Per l'assiomadi continuità, esiste uno e un solo punto x_0 *contenuto in tutti gli intervalli, cioè tale che* $a_k \le x_0 \le b_k$ *per ogni* k. *Le successioni* a_k *e* b_k *tendono ambedue a* x_0.
Siccome f *è continua in* x_0 *si avrà* (*per il th che lega continuità e successioni p.* 225)

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_0)$$

D'altra parte per costruzione risulta $f(a_k) \le 0$ *e dunque anche il primo limite sarà* ≤ 0 *e dunque* $f(x_0) \le 0$.
Analogamente, dato che $f(b_k) > 0$, *risulterà* $f(x_0) \ge 0$ *e in conclusione* $f(x_0) = 0$.

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI

$Siano\ f, g, h\ tre\ infinitesimi\ simultanei\ per\ x \to x_0$
$e\ supponiamo\ che\ f\ sia\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ a\ g.$
$Allora:$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$$

MASSIMO DI UNA FUNZIONE (ASSOLUTO E RELATIVO)

$Si\ dice\ che\ una\ funzione\ f: D \longrightarrow \mathbb{R}\ ha\ in\ un\ punto\ x_0\ (punto\ di\ massimo)\ del\ proprio$
$dominio\ D\ un\ \boldsymbol{massimo}\ globale\ (o\ \boldsymbol{assoluto})\ se\ assume\ un\ valore\ maggiore\ o\ uguale$
$a\ quello\ che\ assume\ negli\ altri\ punti\ di\ D, cioè\ se:\ \ f(x_0) \geq f(x)\ \ \forall x \in D$
$Si\ dice\ che\ una\ funzione\ ha\ un\ punto\ di\ \boldsymbol{massimo}\ locale\ (o\ \boldsymbol{relativo})\ se:$
$\exists \delta > 0: f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$

MINIMO DI UNA FUNZIONE (ASSOLUTO E RELATIVO)

$Si\ dice\ che\ una\ funzione\ f: D \longrightarrow \mathbb{R}\ ha\ in\ un\ punto\ x_0\ (punto\ di\ minimo)\ del\ proprio$
$dominio\ D\ un\ \boldsymbol{minimo}\ globale\ (o\ \boldsymbol{assoluto})\ se\ assume\ un\ valore\ minore\ o\ uguale$
$a\ quello\ che\ assume\ negli\ altri\ punti\ di\ D, cioè\ se:\ \ f(x_0) \leq f(x)\ \ \forall x \in D$
$Si\ dice\ che\ una\ funzione\ ha\ un\ punto\ di\ \boldsymbol{minimo}\ locale\ (o\ \boldsymbol{relativo})\ se:$
$\exists \delta > 0: f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$

TEOREMA DI WEIRSTRASS (p.239)

$Una\ funzione\ continua\ in\ un\ intervallo\ chiuso\ e\ limitato\ non\ vuoto\ ammette\ almeno$
$un\ punto\ di\ massimo\ assoluto\ e\ un\ punto\ di\ minimo\ assoluto\ nell'intervallo.$

TEOREMA DI ROLLE (p.275)

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ continua\ in\ un\ intervallo\ chiuso\ e\ limitato\ [a, b],$
$derivabile\ in\ ]a, b[\ \ tale\ che\ f(a) = f(b).$
$Allora\ esiste\ un\ punto\ compreso\ tra\ a\ e\ b\ in\ cui\ la\ derivata\ si\ annulla:$

$$\exists x_0 \in]a, b[\ \ tale\ che\ \ f'(x_0) = 0$$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Per\ il\ th\ di\ Weirstrass, la\ funzione\ f\ ha\ massimo\ e\ minimo\ in\ [a, b].$

$Siano\ x_M\ un\ punto\ di\ massimo\ e\ x_m\ un\ punto\ di\ minimo. Si\ possono\ distinguere\ due\ casi:$

1. $Sia\ x_M\ che\ x_m\ cadono\ agli\ estremi\ dell'intervallo\ [a, b].$
   $Poichè\ la\ funzione\ assume\ lo\ stesso\ valore\ in\ questi\ due\ punti, il\ massimo\ della$
   $funzione\ coinciderà\ col\ minimo, e\ dunque\ f\ sarà\ costante\ e\ la\ derivata\ sarà$
   $sempre\ nulla.$
2. $Uno\ almeno\ dei\ due\ punti\ x_M\ o\ x_m\ cade\ all'interno\ dell'intervallo\ [a, b].$
   $Ma\ allora, per\ il\ th\ di\ Fermat, la\ derivata\ in\ questo\ punto\ è\ zero.$

$In\ ogni\ caso\ la\ derivata\ si\ annulla\ in\ almeno\ un\ punto\ interno.$

TEOREMA DI LAGRANGE (o DEL VALOR MEDIO) (p.276)

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ continua\ in\ un\ intervallo\ chiuso\ e\ limitato\ [a,b]$
$e\ derivabile\ in\ ]a,b[$
$Allora$:

$$\exists \xi \in]a,b[\ \ tale\ che\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

<u>$Dimostrazione$</u>

$La\ funzione$

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

è $continua\ in\ [a,b], e\ derivabile\ in\ ]a,b[$.
$Inoltre\ si\ ha\ g(a)=g(b)=0\ e\ quindi, per\ il\ th\ di\ Rolle$

$$\exists \xi \in]a,b[\ \ in\ cui\ g'(\xi)=0$$

$da\ cui$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=pendenza\ media$$

TEOREMA DI CAUCHY (p.277)

$Siano\ f(x)\ e\ g(x)\ due\ funzioni\ continue\ in\ un\ intervallo\ chiuso\ [a,b], e\ derivabili\ in\ ]a,b[$

$Allora$:

$$\exists \xi \in]a,b[\quad tale\ che\quad [g(b)-g(a)]f'(\xi)=[f(b)-f(a)]g'(\xi)$$

<u>$Dimostrazione$</u>

$La\ funzione$

$$h(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x)$$

$verifica\ tutte\ le\ ipotesi\ del\ teorema\ di\ Rolle.$
$Infatti\ essa$ è $continua\ in\ [a,b] e\ derivabile\ in\ ]a,b[.$

$Inoltre\ si\ ha$

$$h(a)=[g(b)-g(a)]f(a)-[f(b)-f(a)]g(a)=g(b)f(a)-f(b)g(a)$$

$$h(b)=[g(b)-g(a)]f(b)-[f(b)-f(a)]g(b)=-g(a)f(b)+f(a)g(b)=h(a)$$

$Di\ conseguenza$

$$\exists \xi \in]a,b[\quad in\ cui\ \ h'(\xi)=0$$

TEOREMA DI FERMAT

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ con\ dominio\ Dom(f) \subseteq \mathbb{R}.$
$Se\ x_0\ \in Dom(f)$ è $un\ punto\ di\ massimo\ o\ minimo\ locale\ interno\ al\ dominio$
$(N.B{:}\ un\ pto\ si\ dice\ interno\ al\ dominio\ se\ \exists\delta{:}\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D)$
$e\ la\ funzione$ è $derivabile\ in\ quel\ punto\ allora\ si\ ha\ che:$

$$f'(x_0) = 0$$

<u>*Dimostrazione*</u>

$Supponiamo\ che\ x_0\ sia\ un\ pto\ di\ massimo\ locale:$

$\exists\delta > 0{:}\ f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$

$Pertanto\ \forall h \in\ ]0, \delta[\ \ si\ ha$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$Poich$è

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$si\ pu$ò $concludere\ per\ la\ perm.\ del\ segno\ che\ f'(x_0) \leq 0$

$Invece\ \forall h \in\ ] - \delta, 0[\ \ si\ ha$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

$Poich$è

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$si\ pu$ò $concludere\ per\ la\ perm.\ del\ segno\ che\ f'(x_0) \geq 0$

$Combinando\ i\ risultati\ si\ pu$ò $concludere\ che\ f'(x_0) = 0.$

DERIVATA

$La\ derivata\ di\ f(x)\ in\ x_0$ è $definita\ come\ il\ numero\ f'(x_0)\ uguale\ al$ $\boldsymbol{limite\ del\ rapporto\ incrementale\ al\ tendere\ a\ 0\ dell'incremento}$$, sotto\ l'ipotesi\ che\ tale\ limite\ esista\ e\ sia\ finito.$
$In\ modo\ esplicito, detto\ h\ l'incremento, una\ funzione\ f\ definita\ in\ un\ intorno\ di\ x_0\ si\ dice$
$derivabile\ nel\ punto\ x_0\ se{:}\ \ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L \in \mathbb{R}$

TEOREMI SULLE DERIVATE

$Se\ f$ è $costante\ in\ [a, b]\ allora\ f'(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$

$Se\ f$ è $crescente\ in\ [a, b]\ allora\ f'(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$

<u>*Dimostrazione*</u>

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \begin{cases} f(x_0) > f(x_0) \\ x > x_0 \end{cases} \Rightarrow (Per\ la\ perm.\ del\ segno)\ f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0) \qquad \begin{cases} f(x_0)<f(x_0) \\ x<x_0 \end{cases} \Longrightarrow (Per\ la\ perm.del\ segno)\ f'(x_0)\le 0$$

FUNZIONE LIPSCHITZIANA

$Una\ funzione\ f: A \longrightarrow \mathbb{R}\ si\ dirà\ lipschitziana\ se$:

$$\exists L \ge 0: \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le L \quad \forall x,y \in Dom(f)\ \ con\ x \ne y$$

$Se\ f$ è $lipschitziana\ di\ costante\ L\ ed$ è $derivabile\ (anche\ solo\ in\ un\ punto\ singolo)\ si\ ha\ che$:

$$|f'(x_0)| \le L$$

$Dunque, se\ f$ è $lipschitziana, la\ sua\ derivata\ prima$ è $limitata\ dall'alto.$

FORMULA DI TAYLOR (CON RESTO DI PEANO E DI LAGRANGE)

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ derivabile\ n\ volte\ in\ un\ intervallo\ I, e\ siano\ x\ e\ x_0\ due\ punti\ di\ I.$
$Allora, definito\ il$ $\boldsymbol{polinomio\ di\ Taylor}$ $di\ grado\ n\ come$:

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x-x_0)^k$$

$Si\ ha\ che$:

$$f(x)=P_n+R_n$$

$Dove\ R_n$ è $un\ o-piccolo\ di\ (x-x_0)^n\ in\ quanto$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n}{(x-x_0)^n}=0$$

$Dunque$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}+o(x-x_0)^n$$

$Dove\ o(x-x_0)^n$ è $chiamato$ $\boldsymbol{resto\ di\ Peano}$.

$La\ formula\ di\ Taylor\ può\ essere\ espressa\ anche\ con\ il$ $\boldsymbol{resto}$ $nella\ forma$ $\boldsymbol{di\ Lagrange}$.
$Il\ resto\ nella\ forma\ di\ Lagrange\ afferma\ che, se\ la\ funzione$ è $derivabile\ n\ volte$
$in\ un\ intorno\ di\ x_0, allora\ \exists\xi \in\ ]x_0,x[\ \ (esiste\ \xi\ compreso\ tra\ x_0\ e\ x)\ tale\ che$:

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$Nel\ caso\ di\ x_0\ =0, la\ formula\ di\ Taylor\ prende\ il\ nome\ di\ formula\ di\ Mac\ Laurin.$

FUNZIONE CONVESSA

$Diremo\ che\ la\ funzione\ f(x)$ è $convessa\ nell'intervallo\ ]a,b[\ se\ comunque\ si\ prendano$
$i\ punti\ x_1\ e\ x_2\ in\ ]a,b[, il\ grafico\ della\ funzione\ f(x)\ compreso\ tra\ i\ punti\ P_1\ e\ P_2\ sta\ tutto$
$al\ di\ sotto\ del\ segmento\ di\ estremi\ P_1\ e\ P_2\ (il\ grafico\ di\ f(x)$ è $sopra\ ogni\ sua\ tangente).$

$Una\ funzione\ f(x)\ con\ derivata\ seconda \geq 0\ in\ ]a,b[$ è $convessa\ (es.\ l'esponenziale).$

FUNZIONE CONCAVA

$Diremo\ che\ la\ funzione\ f(x)$ è $concava\ nell'intervallo\ ]a,b[\ se\ comunque\ si\ prendano$
$i\ punti\ x_1\ e\ x_2\ in\ ]a,b[, il\ grafico\ della\ funzione\ f(x)\ compreso\ tra\ i\ punti\ P_1\ e\ P_2\ sta\ tutto$
$al\ di\ sopra\ del\ segmento\ di\ estremi\ P_1\ e\ P_2\ (il\ grafico\ di\ f(x)$ è $sotto\ ogni\ sua\ tangente).$

$Una\ funzione\ f(x)\ con\ derivata\ seconda \leq 0\ in\ ]a,b[$ è $concava\ (es.\ il\ logaritmo).$

SERIE (somme di infiniti termini)

$Sia \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ una\ serie\ di\ termine\ generico\ a_k\ e\ sia$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$la\ successione\ delle\ sue\ somme\ parziali.$
$Allora:$

- $Se\ la\ successione\ s_n\ ha\ limite\ finito\ s\ diremo\ che\ la\ serie\ converge$

  $e\ chiameremo\ somma\ della\ serie\ il\ numero \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$
- $Se\ la\ successione\ s_n\ ha\ limite \pm\infty\ diremo\ che\ la\ serie\ diverge\ a \pm\infty$
- $Se\ la\ successione\ s_n\ non\ ha\ limite, diremo\ che\ la\ serie$ è $indeterminata$

$\boldsymbol{N.B}: Condizione\ \boldsymbol{necessaria}, ma\ \boldsymbol{non\ sufficiente}\ affinch$è $la\ serie \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \ converga$

è $che\ il\ termine\ generico\ tenda\ a\ 0\text{:}\ \lim_{k} a_k = 0$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Sia\ s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$Sappiamo\ per\ ip.\ che\ la\ serie\ converge\ e\ per\ la\ definizione\ di\ serie\ convergente\ si\ ha:$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$$

$Poich$è $a_n = s_n - s_{n-1}\ passando\ al\ limite\ entrambi\ i\ membri\ si\ ottiene:$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

SERIE GEOMETRICA

Sia c un numero reale, e consideriamo la progressione di ragione c, iniziando dall'unità $(1, c, c^2, c^3 \dots)$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ *di termine generico* $a_k = c^k$, *si chiama* ***serie geometrica*** *di ragione c.*

- *Se* $|c| < 1$ *cioè se* $-1 < c < 1$ *la serie converge a* $\frac{1}{1-c}$
- *Se* $c \geq 1$ *la serie diverge a* $+\infty$

SERIE TELESCOPICA (o SERIE DI MENGOLI)

Si dice telescopica una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *i cui termini appaiono nella forma* $a_k = b_k - b_{k-1}$.

Un tipico esempio è la ***serie di Mengoli*** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

La serie di Mengoli converge a 1.

SERIE A TERMINI POSITIVI

Una serie a termini positivi è una serie $\sum a_k$ *con* $a_k \geq 0$. *Per queste serie la successione delle somme parziali è crescente e quindi ha sempre limite. Si tratta solo di stabilire se questo* ***limite*** *è* ***finito*** (*la serie* ***converge*** *e le somme parziali sono delle approssimazioni per difetto della somma:* $s_n \leq s$) *o* $+\infty$ (*la serie* ***diverge***).

Un risultato analogo vale per le serie a termini negativi, che possono convergere o divergere a $-\infty$.
In questo caso le somme parziali forniscono approssimazioni per eccesso: $s_n \geq s$.

TH: *Sia* $\sum a_k$ *una serie a termini positivi, e sia* s_n *la successione delle somme parziali.*
Se s_n *è limitata superiormente, la serie converge* (*al suo* sup), *altrimenti diverge a* $+\infty$.

SERIE ARMONICA

Con questo nome si indica la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *che diverge molto lentamente a* $+\infty$

(*è una serie a termini positivi*).

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ *è detta serie armonica generalizzata.*
Diverge per $\alpha < 1$ *e converge per* $\alpha > 1$.

SERIE ESPONENZIALE

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *è convergente per qualunque ragione di x diversa da zero.*

$La\ serie \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ converge\ ad\ e.$

CRITERI DI CONVERGENZA (PER SERIE A TERMINI POSITIVI)

1) CRITERIO DEL CONFRONTO (p.205)

$Siano \sum a_k\ \ e\ \sum b_k\ \ due\ serie, e\ supponiamo\ che\ per\ ogni\ intero\ n\ si\ abbia$

$$0 \leq\ a_n \leq b_n$$

$Allora, se\ la\ serie\ \sum b_k\ \ converge, allora\ converge\ anche\ la\ serie\ \sum a_k\ , e\ si\ ha$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$Viceversa, se\ la\ serie\ \sum a_k\ \ diverge, allora\ diverge\ anche\ la\ serie\ \sum b_k\ .$

$In\ altre\ parole,$ $\boldsymbol{se\ converge\ la\ serie\ più\ grande}, \boldsymbol{converge\ anche\ la\ più\ piccola},$

$mentre$ $\boldsymbol{se\ diverge\ la\ serie\ più\ piccola}, \boldsymbol{diverge\ anche\ la\ più\ grande}.$

$\underline{Dimostrazione}$

$Se\ indichiamo\ con\ s_n e\ t_n\ le\ somme\ parziali\ delle\ due\ serie$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\ \ , t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$si\ ha\ ovviamente\ s_n \leq\ t_n\ .$

$Se\ ora\ la\ serie\ \sum b_k\ è\ convergente, le\ somme\ parziali\ t_n\ saranno\ minori\ della\ sua\ somma\ t:$

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k = t$$

$Poichè\ s_n \leq t_n\ , saranno\ minori\ di\ t\ anche\ le\ somme\ parziali\ della\ serie\ \sum a_k,$
$che\ essendo\ a\ termini\ positivi, risulterà\ pertanto\ convergente.$
$Siccome\ poi\ tutte\ le\ somme\ parziali\ s_n\ sono\ minori\ di\ t, anche\ il\ loro\ limite\ sarà\ minore\ di\ t$
$e\ quindi$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$Se\ invece\ la\ serie\ \sum a_k\ \ diverge, deve\ divergere\ anche\ la\ serie\ \sum b_k\ \ , perchè\ se\ questa$

$convergesse, per\ quanto\ abbiamo\ appena\ dimostrato\ dovrebbe\ convergere\ anche\ \sum a_k\ .$

2) CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO (p.208)

$Siano \sum a_n \ e \ \sum b_n \ due\ serie\ a\ termini\ positivi, e\ supponiamo\ che\ si\ abbia$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L < +\infty$$

$Allora, se\ la\ serie \sum b_n \ converge, converger\grave{a}\ anche\ la\ serie \sum a_n.$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Dalla\ definizione\ di\ limite\ si\ ha\ che$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N \quad si\ ha\ L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

$In\ particolare, si\ pu\grave{o}\ prendere\ \varepsilon = 1\ e\ usare\ solo\ la\ seconda\ disuguaglianza, allora$

$$\exists N: \forall n > N \quad \frac{a_n}{b_n} < L + 1$$

$Per\ questi\ n\ si\ ha\ allora$

$$0 < a_n < (L+1)b_n$$

$e\ poich\grave{e}\ la\ serie \sum (L+1)b_n = (L+1)\sum b_n\ converge, converger\grave{a}\ anche\ la\ serie \sum a_n$

3) CRITERIO DELLA RADICE (o di CAUCHY) (p.210)

$Sia \sum a_k \ una\ serie\ a\ termini\ positivi, e\ supponiamo\ che\ risulti$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$Se\ L < 1\ la\ serie \sum a_k\ converge, mentre\ se\ L > 1\ diverge\ positivamente.$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Supponiamo\ dapprima\ che\ sia\ L < 1.$

$Preso\ \varepsilon = \dfrac{1-L}{2}\ , \qquad \exists N: \forall n > N\ \ si\ ha\ \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = \dfrac{1+L}{2}$

$Di\ qui\ segue\ che\ per\ n > N\ si\ ha\ a_n < \left(\dfrac{1+L}{2}\right)^n$

$La\ serie\ a\ secondo\ membro\ \grave{e}\ una\ serie\ geometrica\ di\ ragione\ \dfrac{1+L}{2} < 1\ quindi\ converge$

$; per\ il\ criterio\ del\ confronto\ converger\grave{a}\ anche \sum a_n.$

$Se\ invece\ L > 1, prendendo\ \varepsilon = \dfrac{L-1}{2}\ si\ ha\ da\ un\ certo\ N\ in\ poi\ \sqrt[n]{a_n} > L - \varepsilon = \dfrac{1+L}{2}$

$e\ quindi\ a_n > \left(\dfrac{1+L}{2}\right)^n > 1.$

$In\ particolare, la\ successione\ a_n\ non\ tende\ a\ zero, e\ pertanto\ la\ serie \sum a_n\ \ diverge.$

4) CRITERIO DEL RAPPORTO (o di D'ALAMBERT) (p.210)

$Sia \sum a_k\ una\ serie\ a\ termini\ positivi, e\ supponiamo\ che\ risulti$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$Se\ L < 1\ la\ serie\ \sum a_k\ converge, mentre\ se\ L > 1\ diverge\ positivamente.$

$\underline{Dimostrazione}$

$Supponiamo\ dapprima\ che\ sia\ L < 1.$
$Preso\ \varepsilon = \frac{1-L}{2}\ , \qquad \exists N: \forall k \geq N\ \ si\ ha\ \ \frac{a_{k+1}}{a_k} < L + \varepsilon = \frac{1+L}{2}$

$In\ particolare, posto\ per\ semplicit$à $\frac{1+L}{2} = p, si\ ha\ a_{k+1} < pa_k\ \ \forall k \geq N$

$Preso\ allora\ n > N, si\ ha$

$$a_n < pa_{n-1} < p^2 a_{n-2} < \cdots < p^{n-N} a_N$$

$ovvero$

$$a_n < \frac{a_N}{p^N} p^n$$

$Poich$è $p < 1, la\ serie\ geometrica\ a\ secondo\ membro\ converge, e\ di\ conseguenza$

$converge\ anche\ la\ serie\ \sum a_n.$
$Se\ invece\ si\ ha\ L > 1, preso\ \varepsilon = \frac{L-1}{2}\ , risulta\ da\ un\ certo\ N\ in\ poi\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{L+1}{2} > 1$
$e\ dunque\ a_{n+1} > a_n. Ne\ segue\ che\ per\ n > N\ la\ successione\ positiva\ a_n$ è $crescente$
$e\ dunque\ non\ pu$ò $tendere\ a\ zero.$
Non è $dunque\ verificata\ la\ condizione\ necessaria\ e\ quindi\ la\ serie\ \sum a_n\ \ diverge.$

CRITERI DI CONVERGENZA (PER SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE)

1) TEOREMA DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA (p.213)

Sia $\sum a_k$ *una serie qualsiasi, e supponiamo che la serie* $\sum |a_k|$ *dei valori assoluti sia convergente. Allora converge anche la serie* $\sum a_k$ *di partenza, e si ha*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

N.B: *Una serie* $\sum a_k$ *per la quale converge la serie dei valori assoluti* $\sum |a_k|$ *si dice assolutamente convergente.*

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo due nuove successioni b_k *e* c_k *così definite:*

$$b_k = \begin{cases} a_k, & a_k \ge 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 0, & a_k \ge 0 \\ -a_k, & a_k < 0 \end{cases}$$

Le successioni b_k *e* c_k *sono ambedue positive; si ha inoltre*

$$b_k - c_k = a_k \,; \;\; b_k + c_k = |a_k|$$

In particolare, si ha

$$b_k \le b_k + c_k = |a_k| \text{ e } c_k \le b_k + c_k = |a_k|$$

Possiamo ora applicare il th del confronto; poichè per ipotesi la serie $\sum |a_k|$ *converge, convergeranno anche le serie* $\sum b_k$ *e* $\sum c_k$.

Ma allora convergerà anche la serie $\sum a_k$ *, differenza di queste due.*

Infine si ha

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Da cui segue $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *facendo tendere n all'infinito.*

2) CRITERIO DI LEIBNIZ (p.215)

$Supponiamo\ che\ la\ successione\ positiva\ a_k\ sia\ decrescente\ e\ infinitesima\ (cioè\ che\ abbia$ $limite\ zero). Allora\ la\ serie\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\ \ converge.$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Faremo\ vedere\ che\ la\ successione\ s_n\ delle\ somme\ parziali\ è\ di\ Cauchy.$
$Si\ ha$

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+p}(-1)^i a_i = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1}a_{n+p})$$

$Valutiamo\ ora\ il\ termine\ tra\ parentesi, che\ per\ brevità\ chiameremo\ Q.$
$Siccome\ la\ successione\ a_n\ è\ decrescente, ogni\ termine\ è\ maggiore\ del\ successivo; se\ allora$ $ne\ sommiamo\ due\ per\ volta: a_{n+1} - a_{n+2}, a_{n+3} - a_{n+4}\ eccettera, otteniamo\ tutti\ termini$ $positivi.$
$Se\ p\ è\ pari, si\ esauriscono\ così\ tutti\ i\ termini; se\ invece\ p\ è\ dispari, resta\ l'ultimo, a_{n+p},$ $anch'esso\ positivo\ perchè\ in\ questo\ caso\ (-1)^{p-1} = 1.\ \ Si\ ha\ dunque\ Q > 0.$
$Per\ trovare\ una\ maggiorazione, sommiamo\ i\ vari\ termini\ sempre\ a\ coppie, ma\ stavolta$ $a\ partire\ dal\ secondo. Otterremo\ tutti\ risultati\ negativi, e\ resterà\ escluso\ il\ solo\ primo$ $termine\ se\ p\ è\ dispari, e\ il\ primo\ e\ l'ultimo\ se\ p\ è\ pari.$
$Nel\ primo\ caso\ si\ ha\ Q < a_{n+1}, nel\ secondo\ Q < a_{n+1} - a_{n+p} < a_{n+1}.$
$In\ conclusione, si\ ha\ in\ ogni\ caso\ 0 < Q < a_{n+1}\ e\ quindi$

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| = Q < a_{n+1}$$

$e\ siccome\ per\ ipotesi\ a_{n+1}\ tende\ a\ zero, la\ successione\ s_n\ delle\ somme\ parziali\ è\ di\ Cauchy,$ $dunque\ convergente.$
$Se\ indichiamo\ con\ s\ la\ somma\ della\ serie, e\ se\ nella\ relazione\ precedente\ facciamo$ $tendere\ p\ all'infinito, otteniamo$

$$|s - s_n| \le a_{n+1}$$

$e\ il\ th\ è\ dimostrato.$

3) CRITERIO DI ABEL

$Consideriamo\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\ \ una\ serie\ con\ con\ b_n\ successione\ positiva, infinitesima\ e\ decrescente$ $(stessi\ requisiti\ del\ criterio\ di\ Leibniz)\ e\ con\ a_n\ successione\ tale\ che\ risulti\ limitata$ $la\ successione\ delle\ sue\ somme\ parziali\ \left(ovvero\ la\ serie\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right).$

$Allora, la\ serie\ numerica\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\ \ converge\ (non\ necessariamente\ "assolutamente").$

$\boldsymbol{N.B}$: *Date due serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *la serie prodotto* è

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

- *Se* $\sum a_n$ *converge ad* S, $\sum b_n$ *converge a* T *e* $\sum c_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\sum c_n$ *converge a* ST
- *Se* $\sum a_n$ *converge e* $\sum b_n$ *converge non* è *detto che* $\sum c_n$ *converga*
- *Se almeno una delle due serie converge assolutamente* $\Longrightarrow$ $\sum c_n$ *converge a* ST (***TH DI MERTENS***)
- *Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti* $\Longrightarrow$ $\sum c_n$ *ass. convergente*

FUNZIONE ANALITICA

Una funzione f è *analitica in* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *se* $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *la serie di Taylor di* f *con centro* x_0 *converge a* $f(x_0)$.

SERIE DI POTENZE

Una serie di potenze è *una serie che si presenta nella forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove a_n *può assumere valori reali o complessi e* x_0 è *detto centro.*

Si definisce ***raggio di convergenza*** *della serie di potenze il valore reale*:

$$R = \sup\left\{|x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ converge}\right\}$$

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *una serie di potenze il cui raggio di convergenza* è R.

Allora:

1. *Se* $R = 0$ *la serie converge solo in* x_0
2. *Se* R è *finito non nullo, allora la serie converge assolutamente in* $]x_0 - R, x_0 + R[$ *nulla potendosi dire sul comportamento agli estremi*
3. $R = +\infty$ *allora la serie converge su tutto* $\mathbb{R}$

Il raggio di convergenza si può calcolare tramite il ***criterio del rapporto***, *il* ***criterio della radice*** *o il* ***criterio di Hadamard***.

Per il criterio della radice o del rapporto $R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, L \neq 0 \\ +\infty, & L = 0 \\ 0 & L = +\infty \end{cases}$

INTEGRALE (secondo REINMANN)

$Sia\ f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ limitata\ (\exists M: |f(x)| \leq M\ \ \forall x \in [a, b])$

$Consideriamo\ la\ partizione\ in\ sottointervalli\ di\ [a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$e\ definiamo\ la\ somma\ inferiore$

$$\sigma_\pi = \sum_{0}^{n-1} (\, t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$e\ la\ somma\ superiore$

$$\Sigma_\pi = \sum_{0}^{n-1} (\, t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$Definiamo\ ora\ l'integrale\ superiore$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_\pi \Sigma_\pi$$

$e\ l'integrale\ inferiore$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_\pi \sigma_\pi$$

$Allora\ f\ si\ dice\ integrabile\ in\ [a, b]\ se\ \ \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f\ \ e\ il\ loro\ valore\ si\ definisce\ \int_a^b f.$

PRIMITIVA

$Data\ una\ funzione\ f: I \longrightarrow \mathbb{R}, definita\ su\ un\ intervallo\ I \subset \mathbb{R}, si\ definisce\ primitiva$
$una\ funzione\ F: I \longrightarrow \mathbb{R}\ tale\ che:$

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

$Se\ F$ è $una\ primitiva\ di\ f, tutte\ e\ sole\ le\ primitive\ di\ f\ sono\ nella\ forma\ F(x) + C,$
$dove\ C$ è $una\ costante\ arbitraria\ reale.$

$L'integrale\ indefinito\ di\ f$ è $l'insieme\ di\ tutte\ le\ sue\ primitive.$
$Esso\ si\ denota\ con\ il\ simbolo\ \int f(x)dx$

INTEGRALE IMPROPRIO

$Sia\ f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ continua.\ Allora: \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$

$Sia\ f:]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ continua.\ Allora: \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_c^b f(x)dx$

CRITERI DI INTEGRABILITÀ

$CNS\ perch$è $f\ sia\ integrabile\ su\ [a,b]$ è $che\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\pi: \Sigma_\pi - \sigma_\pi < \varepsilon$

1) $Sia\ f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ crescente, allora$ è $integrabile\ (tutte\ le\ f. monotone\ sono\ integrabili)$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Fissata\ una\ partizione\ arbitraria\ di\ [a,b]\ si\ ha\ che$

$$\sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) \qquad dove\ f(t_i)\ \text{è}\ l'\inf\ f\ su\ [t_i, t_{i+1}]$$

$$\Sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_{i+1}) \quad dove\ f(t_{i+1})\ \text{è}\ il \sup\ f\ su\ [t_i, t_{i+1}]$$

$Consideriamo\ ora\ una\ partizione\ equispaziale\ \pi, dove\ ogni\ parte$ è $uguale\ a\ \dfrac{b-a}{n}$

$$\pi = \left\{a, \dots, a + i\frac{b-a}{n}, \dots, b\right\}$$

$Quindi\ si\ ha\ che$

$$\Sigma_\pi - \sigma_\pi = \sum_0^{n-1} \frac{b-a}{n} [f(t_{i+1}) - f(t_i)] =$$

$$= \frac{b-a}{n} [f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \cdots + f(t_n) - f(t_{n-1})] =$$

$$= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] = 0$$

$perch$è $(b-a)\ e\ [f(b) - f(a)]\ sono\ fissi, mentre\ n \to \infty$

$$Se\ \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{b-a}{\varepsilon} [f(b) - f(a)]$$

2) $Se\ f$ è $lipshitziana\ in\ [a,b], allora$ è $integrabile\ in\ [a,b]$

<u>*Dimostrazione*</u>

$Sia\ \pi = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}\ con\ ampiezza$ max $degli\ intervalli$ $\max|t_{i+1} - t_i| = \delta \geq 0$

$con\ i = 0 \ldots n-1$

$N.B: \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(x_i) \qquad dove\ f(x_i) \text{ è } il \min\ f\ su\ [t_i, t_{i+1}]$$

$$\Sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(y_i) \qquad dove\ f(y_i) \text{ è } il \max\ f\ su\ [t_i, t_{i+1}]$$

$$\Sigma_\pi - \sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i)[f(y_i) - f(x_i)] \leq \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) L\delta =$$

$$= L\delta \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) =$$

$$= L\delta(b-a) < \varepsilon \implies \delta < \frac{\varepsilon}{L(b-a)}$$

3) $Se\ f$ è $continua\ su\ [a,b], allora$ è $integrabile$

<u>*Dimostrazione*</u>

$La\ stima\ precedente\ di\ f(y_i) - f(x_i)\ viene\ ottenuta\ dal\ th\ di\ Heine - Cantor.$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

POSITIVITÀ

$Se\ f$ è $integrabile\ su\ [a,b]\ ed\ f\ \geq 0\ allora\ \int_a^b f \geq 0$

<u>*Dimostrazione*</u>

$Se\ f \geq 0\ \ \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f\ e\ \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f\ sono \geq 0$

$Di\ conseguenza\ anche\ \sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (\,t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \geq 0\ poich$è $(t_{i+1} - t_i) \geq 0$

$Quindi\ anche\ l'integrale\ inferiore\ \ \underline{\int_a^b} f = \sup_\pi \sigma_\pi \geq 0\ e\ poich$è f è $integrabile$

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

ADDITIVITÀ

$Siano\ [a,b]\ un\ intervallo\ chiuso\ e\ limitato\ e\ c\ \in\ ]a,b[\ .$
$Allora\ f$ è $integrabile\ su\ [a,b]\ se\ e\ solo\ se\ essa$ è $integrabile\ su\ \ [a,c]\ e\ su\ [c,b].$
$In\ tal\ caso\ avremo:$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$Dunque\ l'area\ dell'unione\ (senza\ intersezioni)$ è $la\ somma\ delle\ aree.$

<u>*Dimostrazione*</u>

$\pi: \Sigma_\pi - \sigma_\pi < \varepsilon$

$Aggiungendo\ a\ \pi\ il\ punto\ c\ ottengo\ \sum_{[t_i,t_{i+1}]\subseteq[a,c]} \quad + \sum_{[t_i,t_{i+1}]\subseteq[c.b]}$

LINEARITÀ

1) $L'integrale\ della\ somma\ di\ funzioni\ continue\ in\ un\ intervallo\ [a,b]$ è $la\ somma$
$degli\ integrali\ delle\ singole\ funzioni:$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $L'integrale\ del\ prodotto\ di\ una\ funzione\ continua\ in\ un\ intervallo\ [a,b]$
$per\ una\ costante$ è $uguale\ al\ prodotto\ tra\ la\ costante\ e\ l'integrale\ della\ funzione:$

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione

$Somma\ di\ Cauchy\ per\ f + somma\ di\ Cauchy\ per\ g = Somma\ di\ Cauchy\ per\ f + g$

$$\sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f(x_i) + \sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)g(x_i) = \sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)[(f+g)(x_i)]$$

$$\sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)(cf)(x_i) = c\sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f(x_i)$$

$dove\ \sum_{0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f(x_i) = \int_a^b f$

TEOREMI DELLA MEDIA (INTEGRALE)

$Si\ definisce\ media\ (integrale)\ in\ [a,b]\ il\ numero\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

1) $Sia\ f\ integrabile\ su\ [a,b]$.

$Allora\ \exists\lambda \in [\inf f, \sup f]\ tale\ che\ \int_a^b f = \lambda(b-a)$

Dimostrazione

$\pi = \{t_0, t_1\} = \{a,b\}$

$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f \le (b-a)\sup_{[a,b]} f$

$\inf_{[a,b]} f \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le \sup_{[a,b]} f$

$dove\ \frac{\int_a^b f}{b-a} = media\ integrale \approx \lambda$

2) $Sia\ f\ continua\ su\ [a,b]\ (cioè\ integrabile)$.

$Allora\ \exists\xi \in [a,b]\ tale\ che\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(\xi)$

Dimostrazione

$Si\ usa\ il\ th\ dei\ valori\ intermedi\ applicato\ al\ \lambda\ precedente, ad\ f\ e\ all'intervallo [a,b]$.

TH FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TORRICELLI-BARROW) (p.319)

$Sia\ f(x)\ una\ funzione\ continua\ in\ [a,b].$

$Allora:$

1) $La\ funzione\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è $derivabile\ in\ ogni\ punto\ di\ ]a,b[\ e\ inoltre\ F'(x) \equiv f(x)$
   $\forall x \in]a,b[$
   $N.B: F(x)$ è $una\ primitiva\ di\ f\ su\ ]a,b[: \quad (F(x) + cost)' \equiv F'(x) \equiv f(x)$

2) $Se\ G(x)$ è $derivabile\ e\ G'(x) \equiv f(x)\ su\ ]a,b[\ allora$

$$F(x) = G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

<u>$Dimostrazione$</u>

$Per\ quanto\ riguarda\ la\ prima\ parte\ del\ th, si\ ha$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)$$

$dove\ \xi$ è $un\ punto\ compreso\ tra\ x\ e\ x+h.$
$Quando\ h\ tende\ a\ 0, il\ punto\ \xi, compreso\ tra\ x\ e\ x+h, tender$à $a\ x.$
$Per\ la\ continuit$à $della\ funzione\ f, f(\xi)\ tender$à $a\ f(x)\ e\ quindi$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

$La\ funzione\ integrale\ F(x)$è $dunque\ derivabile, e\ la\ sua\ derivata$ è $f(x).$
$La\ prima\ parte\ del\ th$ è così $dimostrata.$
$Quanto\ alla\ seconda\ parte, sia\ G(x)una\ funzione\ che\ verifica\ la\ relazione\ G'(x) = f(x).$
$Si\ ha\ allora\ G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, cio$è $la\ differenza\ G(x) - F(x)ha\ derivata\ nulla\ in\ [a,b].$
$Ma\ allora\ G(x) - F(x)$è $costante\ ed$ è $uguale\ al\ suo\ valore\ nel\ punto\ x_0, dove\ vale\ G(x_0),$
$dato\ che$

$$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$$

$Si\ ha\ dunque\ G(x) - F(x) = G(x_0), ovvero\ F(x) = G(x) - G(x_0).$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DI GRADO n

$Un'equazione\ differenziale$ è $un'equazione\ che\ lega\ una\ funzione\ incognita\ alle\ sue\ derivate.$
$Si\ chiama\ equazione\ differenziale\ ordinaria\ di\ grado\ n\ (1 \leq n \in \mathbb{N})\ un'equazione$
$del\ tipo:$

$$u^{(n)} = f\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t), u^{(n)}(t)\right) = 0$$

$dove\ u^{(n)}\ indica\ la\ derivata\ n-esima, mentre\ f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ è $una\ funzione\ continua.$
$L'incognita\ in\ questo\ caso$ è $la\ funzione\ u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ (funzione\ reale\ di\ variabile\ reale)$
$che\ dipende\ dalla\ variabile\ t.$

Si chiama ***ordine*** *(o grado) dell'equazione l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.*

PROBLEMA DI CAUCHY

Si chiama problema di Cauchy l'insieme di un'equazione differenziale di grado n e di n ***condizioni iniziali***:

$$\begin{cases} u^{(n)} = f\left(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t), u^{(n)}(t)\right) = 0 \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

Il punto $t_0 \in \mathbb{R}$ *viene chiamato punto iniziale, mentre le* $u_i \in \mathbb{R}$, *i valori iniziali, sono valori di* $u(x)$, *e di tutte le sue derivate fino al grado* $n-1$, *nel punto* t_0.

N.B: Il problema di Cauchy ammette soluzione unica, almeno in un intorno del punto t_0.

Es. Problema di Cauchy (problema ai valori iniziali) con eq. di grado 1

$$\begin{cases} u' = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni differenziali del primo ordine, del tipo:

$$u'(t) = a(t) \cdot f(u(t))$$

Per risolverla dividiamo entrambi i membri per $f\big(u(t)\big)$ *e integriamo, ottenendo:*

$$\int \frac{u'(t)}{f(u(t))} dt = \int a(t)dt$$

Il primo membro è nella forma adatta a un'integrazione per sostituzione, poniamo quindi $v = u(t)$:

$$\int \frac{dv}{f(v)} = \int a(t)dt$$

Posto

$$Z(v) = \int \frac{dv}{f(v)} \qquad A(t) = \int a(t)dt$$

la soluzione dell'equazione diventa:

$$Z\big(u(t)\big) = A(t) + c$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI GRADO 1

Le equazioni differenziali lineari sono equazioni del tipo:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI GRADO 1 OMOGENEE

Le equazioni differenziali lineari sono equazioni del tipo:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

In cui $b(t) = 0$. *In questo caso l'equazione si riduce a un'equazione a variabili separabili.*

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI GRADO 1 NON OMOGENEE (COMPLETE)

Le equazioni differenziali lineari sono equazioni del tipo:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

In cui $b(t) \neq 0$.
Se si indica con $A(t)$ *una primitiva della funzione* $a(t)$ *si ha*:

$$\log|u(t)| = A(t) + p$$

e quindi

$$|u(t)| = \begin{cases} ce^{A(t)}, & u > 0 \\ -ce^{A(t)}, & u < 0 \end{cases}$$

dove $c = e^p$ è *una costante arbitraria.*

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI GRADO 2 A COEFF.COSTANTI

- **OMOGENEE**

Sono equazioni del tipo:

$$u'' + au' + bu = 0$$

In cui a e b sono due costanti e $f(t)$ è *una funzione data.*

Polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$	Soluzione associata all'equazione differenziale $y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$ con $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$ Due radici reali e distinte λ_1, λ_2	$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$ Due radici reali e coincidenti λ_0	$y(t) = c_1e^{\lambda_0 t} + tc_2e^{\lambda_0 t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$ Due radici complesse e coniugate $\alpha + i\beta$ $\alpha - i\beta$	$y(t) = c_1e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Le equazioni di questo tipo godono della proprietà che una qualsiasi combinazione lineare di due soluzioni $u_1(t)$ *e* $u_2(t)$ *è ancora una soluzione.*
In altre parole, ***l'insieme delle soluzioni*** *di un'equazione omogenea è* ***uno spazio vettoriale*** *che ha dimensione pari all'ordine dell'equazione.*
Questo significa che una volta trovate due soluzioni particolari dell'equazione, tutte le altre soluzioni si ottengono semplicemente prendendo una loro arbitraria combinazione lineare.

- **NON OMOGENEE (COMPLETE)**

Sono equazioni del tipo:

$$u'' + au' + bu = f(t)$$

La cui soluzione si troverà sommando una soluzione particolare alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Sia $f(t)^{\mu t}$ *, se* μ *è soluzione dell'equazione caratteristica si parla di* ***RISONANZA*** *e il secondo membro è detto* ***RISONANTE***.

COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ *è un numero intero non negativo definito dalla formula:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad con\; n, k \in \mathbb{N}, \qquad 0 \le k \le n$$

Può essere calcolato anche facendo ricorso al triangolo di Tartaglia.
Esso fornisce il numero delle combinazioni semplici di n *elementi di classe* k.