Prova facoltativa di *Comunicazioni Numeriche* – 26/05/2008

Esercizio no.1

Al ricevitore di Fig.1 viene applicato il segnale $r(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)+w(t)$ con $w(t)$ rumore Gaussiano bianco, valor medio nullo e densità spettrale di potenza $S_w(f)=N_0/2$ e con i simboli a_i binari appartenenti all'alfabeto A= [-1,1], equiprobabili ed indipendenti. Nell'ipotesi che :

a) $g_T(t)=e^{-\frac{|t|}{T}}\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

b) $g_R(t)=g_T(t)$

si risponda alle seguenti domade:

1) Si calcoli l'energia media del segnale $r(t)$, riferita solo alla componente utile $s_R(t)=\sum_i a_i\, g_T(t-iT)$;

2) Si verifichi l'assenza di interferenza intersimbolica.

3) Si determini la potenza media del rumore $n(t)$ all'uscita del filtro di ricezione $g_R(t)$;

4) Si calcoli la probabilità di errore su bit (BER) e si commneti il risultato.

5) Nell'ipotesi che $g_R(t)=e^{-\frac{|t|}{T}}\, rect\left(\frac{t}{2T}\right)$ e che si inserisca un equalizzatore Zero Forcing (ZF) a tre prese dopo il campionatore e prima del decisore, si calcoli:

5.1) La distorsione di picco D_g all'ingresso dell'equalizzatore

5.2) I valori dei coefficienti dell'equalizzatore, $p_\ell\ ,\ell=-1,0,1$ **(DOMANDA OPZIONALE)**

5.3) La distorsione di picco D_q all'uscita dell'equalizzatore **(DOMANDA OPZIONALE)**

Esercizio no.2

Si descriva il problema dell'interferenza intersimbolica in un sistema PAM in banda base e si indichino le condizioni per la sua rimozione.

Esercizio no.3

Si definisca il rumore di quantizzazione in un sistema PCM e si determini l'espressione del rapporto segnale rumore di quantizzazione, nell'ipotesi di segnali di ingresso al PCM con distribuzione di ampiezza uniforme sulla dinamica del quantizzatore.

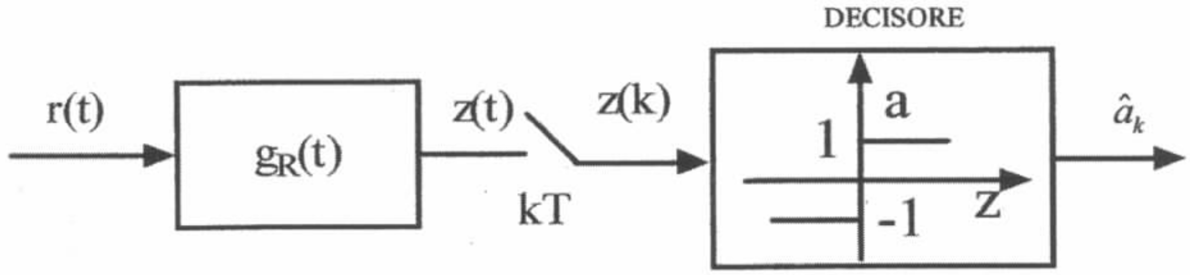
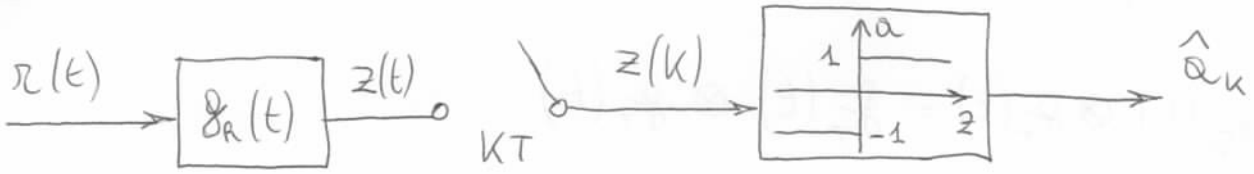


Fig.1

COMPITINO 26/5/08



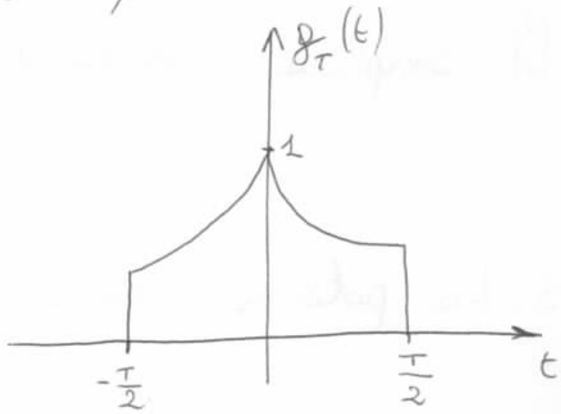
$$r(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT) + w(t)$$

$w(t)$ rumore Gaussiano bianco con $S_w(f) = N_0/2$

a_i indip. ed equiprobabili, $a_i \in A = [\pm 1]$

$$g_T(t) = e^{-\frac{|t|}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \quad g_R(t) = g_T(t)$$

1. Energia media del segnale $r(t)$, riferita solo alla componente utile $s_R(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT)$



$$\bar{E}_T = P(-1)\,E_{-1} + P(1)\,E_1$$

$$E_1 = E_{-1} = E_{g_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^{T/2} e^{-\frac{2t}{T}}\,dt =$$

$$= 2\left(-\frac{T}{2}\right) e^{-\frac{2t}{T}}\Big|_0^{T/2} = 2\,\frac{T}{2}\left(1 - e^{-1}\right) = T\,\frac{e-1}{e}$$

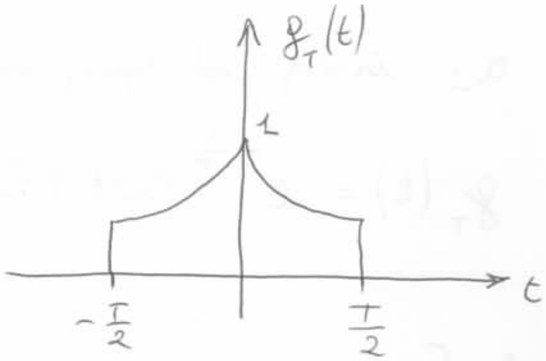
$$\Rightarrow \bar{E}_T = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_{-1} = T\,\frac{e-1}{e}$$

2. Si verifichi l'assenza di ISI

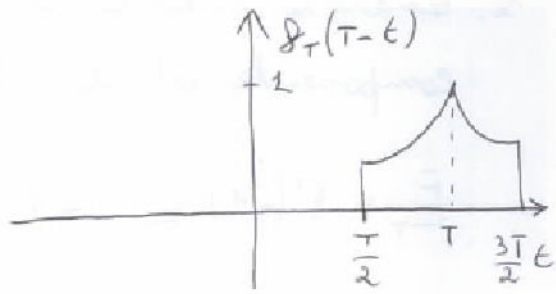
$$g(t) = g_R(t) \otimes g_T(t) = g_T(t) \otimes g_T(t)$$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(\tau)\,d\tau = E_{g_T} = T \cdot \frac{e-1}{e}$$

$$g(\pm T) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\tau)\, g_T(\pm T - \tau)\,d\tau = 0$$



$$\Rightarrow g(kT) = \begin{cases} E_{g_T} & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



Che implica assenza di ISI

3. La potenza media di rumore all'uscita di $g_R(t)$

$$P_n = \sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\,|G_R(f)|^2\,df =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g_R^2(t)\,dt = \frac{N_0}{2} E_{g_T}$$

4. Calcolare la BER e commentare il risultato

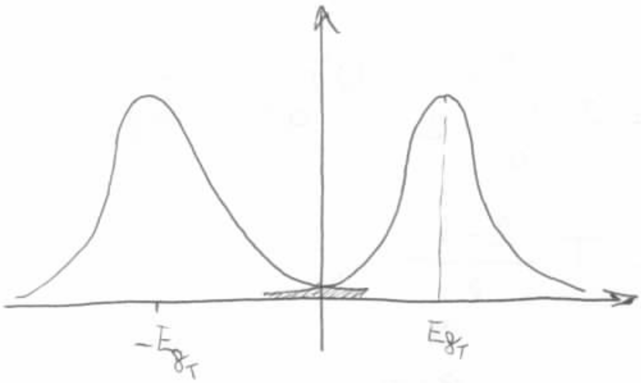
$$z(K) = a_K\, g(0) + n(K)$$

con $n(K) \in \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

dove $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} E_{g_T}$

$$z|1 = g(0) + n(K)$$

$$z|-1 = -g(0) + n(K)$$



$$P(e) = Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{E_{g_T}}{\sqrt{\frac{N_0 E_{g_T}}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{g_T}^2}{N_0 E_{g_T}}}\right) =$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_{g_T}}{N_0}}\right)$$

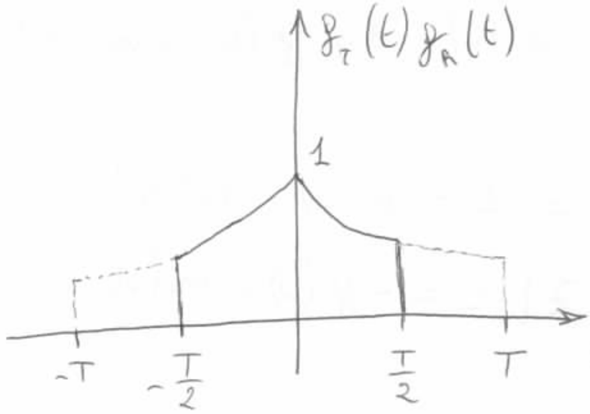
La soglia $\lambda = 0$ è la soglia ottima, minimizza la BER

5. Nell'ipotesi che:

$$g_R(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

e che si inserisce un equalizzatore ZF a 3 prese tra il campionatore ed il decisore, si determini:

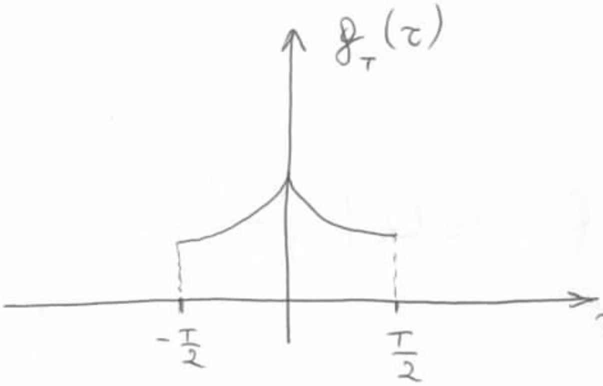
5.1 La distorsione di picco D_g in ingresso all'equalizzatore



$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(t)\, g_R(t)\, dt =$$

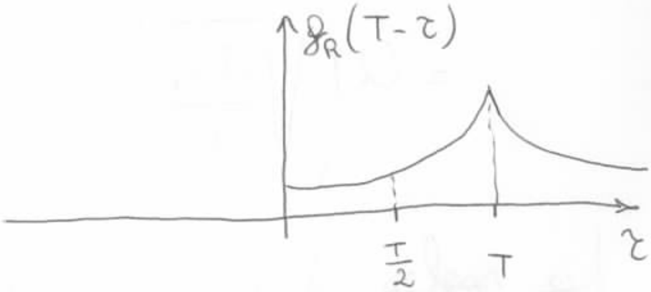
$$= 2 \int_0^{T/2} e^{-2t/T} dt = E_{g_T} =$$

$$= T \, \frac{e-1}{e}$$



$$g(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\tau)\, g_R(T-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{T/2} e^{-\tau/T} e^{\frac{\tau - T}{T}} d\tau =$$



$$= \int_0^{T/2} e^{-\tau/T} e^{\tau/T} e^{-1} d\tau =$$

$$= \left. \frac{\tau}{e} \right|_0^{T/2} = \frac{T}{2e}$$

$$D_g = \frac{\sum_{j \neq 0} g(j)}{g(0)} = \frac{g(T) + g(-T)}{g(0)} = \frac{T/e}{T \cdot \frac{e-1}{e}} =$$

$$= \frac{1}{e-1} \simeq \frac{1}{2.73-1} = \frac{1}{1.73} \simeq 0.57 < 1$$

5.2 I coefficienti dell'eq. ZF, P_ℓ con $\ell = -1, 0, 1$

Applico il teo. di Lucky

$$q(k) = \sum_{\ell=-1}^{1} P_\ell \, g(k-\ell) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{-1}\, g(1) + P_0\, g(0) + P_1\, g(-1) = 1 \\ P_{-1}\, \cancel{g(2)}_{=0} + P_0\, g(1) + P_1\, g(0) = 0 \\ P_{-1}\, g(0) + P_0\, g(-1) + P_1\, \cancel{g(2)}_{=0} = 0 \end{cases}$$

Dove:

$$g(0) = T\,\frac{e-1}{e} \quad ; \quad g(1) = \frac{T}{2e}$$

Sottraendo la 2ª alla 3ª:

$$P_1 = P_{-1} \triangleq P$$

Dalla 1ª equazione:

$$\left(P_{-1} + P_1\right)\frac{T}{2e} + P_0\, T\,\frac{e-1}{e} = 1$$

$$\Rightarrow P_1\,\frac{T}{e} + P_0\, T\,\frac{e-1}{e} = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{e - P_1 T}{T(e-1)}$$

Dalla 2ª eq:

$$p_0 \frac{T}{2e} + p_1 T \frac{e-1}{e} = 0$$

$$\frac{e - Tp_1}{T(e-1)} \cdot \frac{T}{2e} + p_1 T \frac{e-1}{e} = 0$$

$$(e - Tp_1) + 2 p_1 T (e-1)^2 = 0$$

$$p_1 \left[2T(e-1)^2 - T \right] = -e$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{e}{T - 2T(e-1)^2}$$

Dalla 3ª eq:

$$\frac{e-1}{1-2(e-1)^2} + p_0 \frac{T}{2e} = 0$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{e-1}{2(e-1)^2 - 1} \cdot \frac{2e}{T}$$

5.3. La distorsione di picco D_q all'uscita:

$$K = 2 \qquad p_{-1} \underbrace{\cancel{g(3)}}_{=0} + p_0 \underbrace{\cancel{g(2)}}_{=0} + p_1 g(1) = q(2)$$

$$\Rightarrow q(2) = q(-2) = p_1 g(1) = \frac{1}{2\left[1 - 2(e-1)^2\right]} < 0$$

$$\Rightarrow D_q = \frac{\sum_{j \neq 0} |q(j)|}{q(0)} = \frac{1}{2(e-1)^2 - 1} \simeq 0.20$$