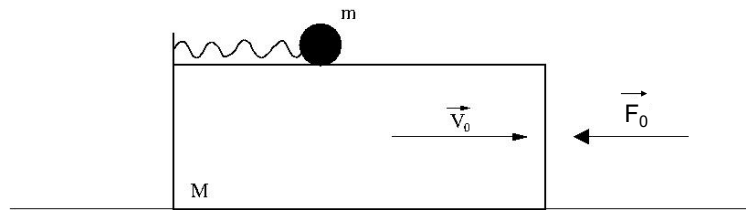


Esame di Fisica Generale del 19/2/2019

Cognome : Nome :

Matricola: Anno di corso :

Esercizio 1



Un blocco di massa M è appoggiato su un piano orizzontale, dove può muoversi senza attrito. Una pallina di massa m , assimilabile ad un punto materiale, è collegata ad un estremo del blocco tramite una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 , come in figura. La pallina può muoversi senza attrito sul blocco. All'inizio il sistema trasla con velocità costante v_0 . Da un certo istante ($t=0$) una forza opportuna F_0 , non necessariamente costante, fa frenare il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante. Sapendo che nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, che nello stesso istante la molla ha lunghezza $2l_0$, e che da quel momento (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo, calcolare:

1. La velocità v_0 , il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza \vec{F}_0

$$v_0 = \dots\dots\dots \quad \tau = \dots\dots\dots \quad a_0 = \dots\dots\dots$$

2. Il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

$$L_{frenante} = \dots\dots\dots$$

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$$l_{min} = \dots\dots\dots$$

Dati: $M = 0.4 \text{ Kg}$, $m = 0.1 \text{ Kg}$, $k = 2 \text{ N/m}$, $l_0 = 40 \text{ cm}$

Soluzione Esercizio 1

1. Scriviamo l'equazione del moto per la pallina nel sistema di riferimento non inerziale del blocco (proiettata lungo la direzione orizzontale):

$$-k(x - l_0) + ma_0 = ma_{rel} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

dove x indica la lunghezza della molla. La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$x(t) = x^* + A \cos(\omega t + \phi)$$

in cui:

$$x^* = l_0 + \frac{ma_0}{k} ; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e con A e ϕ da determinare in base alle condizioni iniziali, ovvero la posizione iniziale della pallina e la sua velocità relativa:

$$x(0) = x^* + A \cos \phi = l_0 \rightarrow A \cos \phi = l_0 - l_0 - \frac{ma_0}{k} = -\frac{ma_0}{k}$$

$$v_{rel}(0) = -A \omega \sin(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow A = -\frac{ma_0}{k}$$

per cui l'equazione del moto diventa:

$$x(t) = l_0 + \frac{ma_0}{k}(1 - \cos \omega t)$$

La velocità si ricava dall'equazione del moto come:

$$v_{rel}(t) = \frac{ma_0}{k} \omega \sin(\omega t)$$

che è nulla per $\omega t = n\pi$, ovvero, escludendo $t = 0$ in cui la velocità relativa era nulla per dato del problema, succede per la prima volta per $n = 1$, cioè per $t = \pi/\omega = T/2$. Dopo un semiperiodo, quindi, l'elongazione della molla è massima e vale $2l_0$ quindi

$$x(T/2) = l_0 + \frac{ma_0}{k}(1 - \cos \omega(T/2)) = 2l_0$$

$$x(T/2) = l_0 + \frac{2ma_0}{k} = 2l_0 \rightarrow a_0 = l_0 k / 2m = 4m/s^2$$

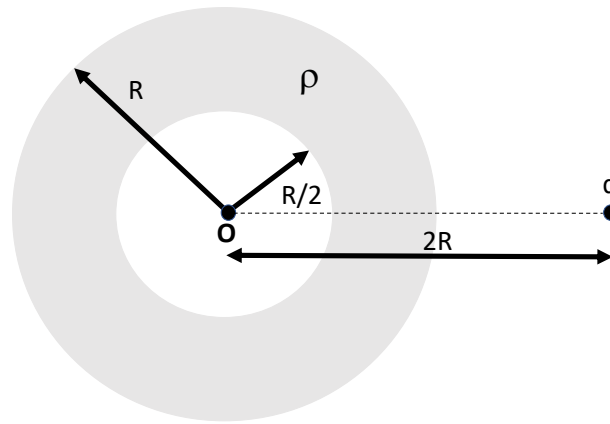
Il tempo di frenata sarà allora $\tau = T/2 = 0.7s$ e la velocità iniziale $v_0 = a_0 \tau = 2.8m/s$.

2. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica a tutto il sistema, dall'inizio ($t = 0$) fino a quando il blocco si ferma ($t = \tau$) e in quel momento anche la pallina si ferma:

$$L_{frenante} = \frac{1}{2} k l_0^2 - \frac{1}{2} (M + m) V_0^2 = -1.8 J$$

3. Da quando il blocco si ferma in poi ($t > \tau$) si conserva l'energia meccanica, per cui la molla inizierà ad oscillare conservando l'energia meccanica. L'ampiezza massima dell'oscillazione sarà quella iniziale, ovvero l'elongazione massima trovata nel punto 1, mentre il centro dell'oscillazione è la lunghezza a riposo della molla. Per cui la molla oscillerà tra $l = 0$ e $l = 2l_0$, passando per il centro di oscillazione a l_0 , quindi la lunghezza minima della molla è $l_{min} = 0$.

Esercizio 2



Una carica Q ha una distribuzione di carica nel guscio sferico di raggio interno $R/2$ e raggio esterno R (vedi figura) data da $\rho = Ar$, con A costante di opportune dimensioni. Una particella di massa m e carica q (un protone) si trova a distanza $2R$ da O

1. Determinare la densità di carica sul bordo esterno della regione sferica, $\rho(R)$.

$$\rho(R) = \dots\dots\dots$$

2. Determinare l'accelerazione a cui è soggetta la particella, nella posizione da essa occupata, $a(2R)$.

$$a(2R) = \dots\dots\dots$$

3. Determinare la velocità minima, v che deve avere la particella carica per arrivare in O

$$v = \dots\dots\dots$$

Dati: $R = 20 \text{ m}$, $Q = 20 \text{ } \mu\text{C}$, $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Soluzione Esercizio 2

1. La carica totale è data da:

$$Q = A \int_{R/2}^R r 4\pi r^2 dr = 4A\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R/2}^R = A\pi \left(R^4 - \frac{R^4}{16} \right) = A\pi \frac{15}{16} R^4$$

per cui:

$$A = \frac{16Q}{15\pi R^4} = 4.24 \times 10^{-11} \text{ C/m}^4$$

Di conseguenza la densità di carica per $r = R$ vale:

$$\rho(R) = AR = 8.49 \times 10^{-10} \text{ C/m}^3$$

2. le linee di forza del campo elettrico all'esterno della distribuzione sono radiali uscenti. Il modulo del campo elettrico in ogni punto esterno al guscio sferico, per il teorema di Gauss è dato da:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In particolare per $r=2R$:

$$E(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 1.12 \times 10^2 \text{ V/m}$$

per cui il modulo dell'accelerazione è dato da

$$a = \frac{qE(2R)}{m} = 1.08 \times 10^{10} \text{ m/s}^2$$

Da notare che all'interno del guscio per $R/2 \leq r \leq R$ le linee di forza del CE sono sempre radiali e uscenti e il modulo del CE per il teorema di Gauss soddisfa la relazione:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{A4\pi \int_{R/2}^r r'^3 dr'}{\epsilon_0}$$

Per cui:

$$E(r) = \frac{A}{4\epsilon_0 r^2} \left(r^4 - \frac{R^4}{16} \right)$$

Inoltre, sempre per il teorema di Gauss, il campo elettrico nella regione $0 \leq r \leq R/2$ è nullo

3. Poichè l'energia è conservata, l'energia iniziale della particella nella posizione $2R$ deve essere uguale all'energia finale in O .

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV(2R) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(O)$$

Il valore minimo della velocità v per poter arrivare in O , corrisponde alla velocità di arrivo, v_f , nulla in O .

Pertanto: $v = \sqrt{\frac{2q(V(O)-V(2R))}{m}}$ e dobbiamo determinare $(V(O) - V(2R))$ per determinare v . Sappiamo che:

$$V(O) - V(2R) = \int_0^{2R} E(r) dr$$

Inoltre, poichè per $0 \leq r < R/2$ il campo elettrico è nullo otteniamo:

$$V(O) - V(2R) = \int_{R/2}^R \frac{A}{4\epsilon_0 r^2} \left(r^4 - \frac{R^4}{16} \right) dr + \int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

con

$$\int_{R/2}^R \frac{A}{4\epsilon_0 r^2} \left(r^4 - \frac{R^4}{16} \right) dr = \frac{AR^3}{4\epsilon_0} \frac{11}{48} = 2.2 \times 10^3 \text{ V}$$

e

$$\int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = 4.5 \times 10^3 \text{ V}$$

Per cui:

$$V(O) - V(2R) = 6.7 \times 10^3 \text{ V}$$

di conseguenza:

$$v = \sqrt{\frac{2q(V(O) - V(2R))}{m}} = 1.13 \times 10^6 \text{ m/s}$$