$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \lambda_3 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_n & 1 \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Soluzione forma standard per sistemi lineari

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}$$

Matrice di *funzioni* del tempo

La matrice esponenziale

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}$$

E' una matrice di *funzioni* del tempo

Se la matrice A ha autovalori distinti, allora A e' diagonalizzabile

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{D}}\mathbf{T} \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La matrice esponenziale

Quando A e' diagonalizzabile, l'esponenziale di A ha una forma qualitativamente semplice:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}^{-1} e^{\mathbf{A_D}t}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

Le funzioni sono combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori di A, detti anche **modi propri** del sistema

Autovalori complessi

Se gli autovalori sono complessi e coniugati

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \text{and} \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i,$$

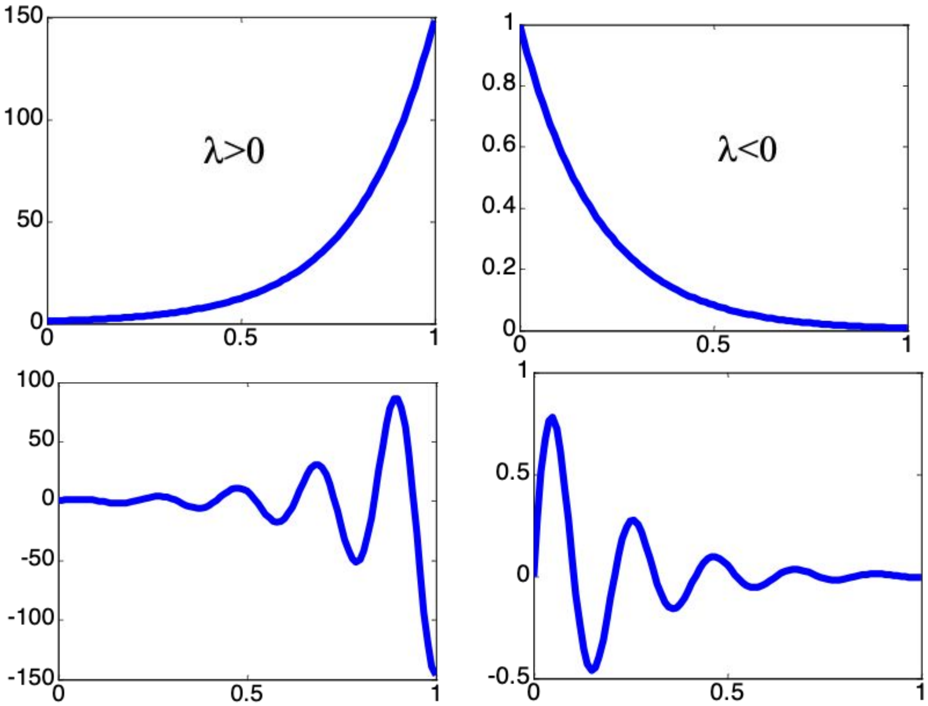
$$e^{\lambda_i t} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}. \qquad e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t}.$$

E quindi avremo modi con seni e coseni.

Modi propri

Autovalori reali (positivi o negativi)

Autovalori complessi (a parte Re positiva o negativa)



Se λ autovalore con molteplicità k>1, allora modi propri associati:

$$C(t)e^{\lambda t}, \qquad C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{k-1} t^{k-1}$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Prendiamo

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix},$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Prendiamo

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}, \qquad T_D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{\mathbf{diag}}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_l(t) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$\boldsymbol{x}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_l(t) = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0$$

$$e^{(1+j)t} = e^t e^{jt} = e^t(\cos(t) + j\sin(t)),$$
$$e^{(1-j)t} = e^t e^{-jt} = e^t(\cos(t) - j\sin(t)).$$

Autovalori e Modi: A diagonalizzabile - Esempio

$$\hat{A} = T_D A T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix}.$$

Da cui: $$y_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}_D^{-1}\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}\mathbf{T}_D \boldsymbol{x}_0$$

$$y_l(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0 = \sqrt{2} e^t \begin{bmatrix} \cos(t+\pi/4) & \cos(t-\pi/4) \end{bmatrix} x_0$$

Matrice reale, autovalori complessi

Se A e' reale ma qualche suo autovalore non lo e', il corrispondente autovettore e anche la matrice A_D e' complessa

Si consideri la matrice diagonale M con autovalori $\sigma + j\omega$ e $\sigma - j\omega$

$$M = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

Questa è *simile* alla matrice in *forma reale* S

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Come calcolare gli autovalori

V e’ autovettore di A, e $\boldsymbol{\lambda}$ e’ l’autovalore associato, se vale la relazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow$$
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

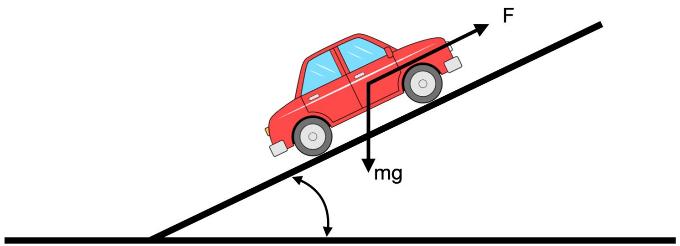
Equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n \quad = 0$$

Equazione risolubile numericamente con Matlab

Modi propri: velocità di crociera

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



Autovalori di A:
(per ispezione: matrice triangolare)

$$0; \ -\frac{\beta}{m}$$

Modi propri:

$$1(t); \ e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Come calcolare gli autovalori

Data una matrice A, e una variabile complessa λ e' possibile associare il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

e l'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = 0$$

Le *n* soluzioni λ si chiamano **autovalori**

Equazioni caratteristica e autovalori

Data una matrice A (n x n), e una variabile complessa $\boldsymbol{\lambda}$ e' possibile associare il polinomio caratteristico e l'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

$$p(\lambda) = 0$$

A ogni autovalore si puo' associare un vettore colonna *v (nx1)*, diverso da zero che soddisfa l'equazione:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

Sono n equazioni

v e' detto autovettore, e non e' definito in modo univoco

Autovalori distinti

Se gli autovalori sono tutti distinti $(\lambda_i I - A)v_i = 0$

Può essere riscritta come: $A[v_1, v_2, \dots v_n] = [v_1, v_2, \dots v_n] diag\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$

Matrice non singolare

La forma di Jordan

Se gli autovalori sono tutti distinti $(\lambda_i I - A)v_i = 0$

Può essere riscritta come: $A[v_1, v_2, \ldots v_n] = [v_1, v_2, \ldots v_n] diag\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$

Matrice non singolare

Scegliendo:

$$T = [v_1, v_2, ...v_n]$$

La matrice esponenziale

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}$$

E' una matrice di *funzioni* del tempo

Se la matrice A ha autovalori distinti, allora A e' diagonalizzabile

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{D}}\mathbf{T} \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Se gli autovalori sono tutti distinti $(\lambda_i I - A)v_i = 0$

Può essere riscritta come: $A[v_1, v_2, \ldots v_n] = [v_1, v_2, \ldots v_n] diag\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$

Matrice non singolare

Scegliendo:

$$T = [v_1, v_2, ...v_n]$$

Matrici simili

E quindi:

$$T^{-1}AT = A_D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$ A diagonalizzabile

esempio

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 5$$

esempio

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 6$$

Esempio - matrice diagonale a blocchi

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1,\;\; 3,\;\; 4.5 + 1.32j,\;\; 4.5 - 1.32j$$

La forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma A non e' diagonalizzabile

E' possibile portare A in ***forma di Jordan*** *attraverso un'altra trasformazione*

$$J = QAQ^{-1}$$

Blocco di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_h \end{bmatrix}.$$

La forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma A non e’ diagonalizzabile

E’ possibile portare A in ***forma di Jordan*** *attraverso un’altra trasformazione*

$$J = QAQ^{-1}$$

Blocco di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_h \end{bmatrix}.$$

La forma di Jordan - autovalori multipli, non diagon.

$$J = QAQ^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_h \end{bmatrix}.$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale un autovalore (lo stesso valore) che compare tante volte quanto è la sua **molteplicità algebrica** (m.a.); ci sono tanti blocchi J_i associati allo **stesso** autovalore quanto è la sua **molteplicità geometrica** (la m.g. e’ uguale al numero di blocchi di Jordan in cui l’autovalore compare)

La forma di Jordan - intuizione

Definizione di autovettore generalizzato

Un vettore v è un **autovettore generalizzato** di autovalore λ se esiste un numero intero k tale che:

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

dove I è la matrice identità e k è un numero intero positivo chiamato **grado dell'autovettore generalizzato**.

La forma di Jordan

The **geometric multiplicity** of an eigenvalue is the number of **linearly independent eigenvectors** associated with that eigenvalue. It indicates the dimensionality of the eigenspace corresponding to the eigenvalue.

Let $\mathbf{A}$ be an $n \times n$ matrix, and λ be an eigenvalue of $\mathbf{A}$. The **geometric multiplicity** of λ is defined as:

$$\dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})),$$

where:

- $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ (kernel) is the null space of $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$,
- $\dim$ denotes the dimension of this null space.

In simpler terms, it is the number of independent solutions to the eigenvector equation:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0.$$

- The **algebraic multiplicity** of λ is the number of times λ appears as a root of the characteristic polynomial $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.
- The geometric multiplicity of λ is always **less than or equal to** its algebraic multiplicity.

$$\text{Geometric Multiplicity} \leq \text{Algebraic Multiplicity}.$$

La forma di Jordan - esempi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan - esempi

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$Eigenvalue : \lambda = -1$$

$$m_a = 5, \quad m_g = 2$$

La forma di Jordan - esempi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Eigenvalue : \lambda = -1$$

$$m_a = 5, \quad m_g = 2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan - esempi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Eigenvalue : \lambda = -1$$

$$m_a = 5, \quad m_g = 2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Eigenvalue : \lambda = -2$$

$$m_a = 2, \quad m_g = 1$$

$$Eigenvalue : \lambda = -3$$

$$m_a = 3, \quad m_g = 1$$

La forma di Jordan - esempi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Non e' una forma di Jordan

La forma di Jordan

Riprendiamo la matrice esponenziale

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{QJQ}^{-1}t} = \mathbf{Q}\left[\mathbf{I} + \mathbf{J}t + \frac{\mathbf{J}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{J}^3t^3}{3!} + \cdots\right]\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{Q}^{-1}$$

Diagonale a blocchi

$$\begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{J}_2t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\mathbf{J}_Nt} \end{bmatrix}$$

E ogni blocco e' della forma

Parte nilpotente

$$e^{\mathbf{J}_it} = e^{\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t}e^{J_{0i}t}$$

Matrice qxq

scalare

La forma di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{\mathbf{J}_{oi}t}$

$$e^{J_{oi}t} = I + J_{oi}t + J_{oi}^2\frac{t^2}{2} + \ldots + J_{oi}^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{\mathbf{J}_{oi}t}$

Dimensione blocco di Jordan

$$e^{J_{oi}t} = I + J_{oi}t + J_{oi}^2\frac{t^2}{2} + \ldots + J_{oi}^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{0_{5\times 5}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Dimensione blocco di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{J_{0i}t}$

$$e^{J_{0i}t} = I + J_{0i}t + \frac{J_{0i}^2 t^2}{2!} + \frac{J_{0i}^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{J_{0i}^{q-1} t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{J_{0i}t}$

Prendiamo la matrice *J_0* come 5×5, nilpotente.

$$J_{0_{5\times5}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{J_{0i}t}$

$$e^{J_{0i}t} = I + J_{0i}t + \frac{J_{0i}^2 t^2}{2!} + \frac{J_{0i}^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{J_{0i}^{q-1} t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma allora

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

Guardiamo com'e' fatta $e^{\mathbf{J}_{oi}t}$

Dimensione blocco di Jordan

$$e^{J_{oi}t} = I + J_{oi}t + J_{oi}^2\frac{t^2}{2} + \ldots + J_{oi}^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora

$$e^{J_0t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan

$$e^{\mathbf{J}_i t} = e^{\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) t} = e^{(\lambda I + J_{0i})t} = e^{\lambda t} e^{J_{0i} t}$$

con

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi le funzioni che si **combinano linearmente** sono

$$t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!} \quad 0 \leq k \leq q-1$$

Con q dimensione del blocco di Jordan

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

Se A e’ una matrice a valori reali, gli autovalori e autovettori sono complessi e coniugati

E’ possibile usare un cambio di coordinate reale che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi (blocchi al piu’ di dimensione 2)

Il numero di blocchi e’ pari al numero di coppie di autovalori complessi e coniugati.

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

Nel caso che A abbia miniblocchi di Jordan di dimensione q > 1 corrispondenti ad autovalori complessi coniugati

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan

Forma complessa di Jordan

La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan

La forma di Jordan

Se gli autovalori sono complessi e coniugati, facendo calcoli simili a quelli visto, troviamo che i termini che compaiono sono del tipo:

$$t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \sin(\omega t), \quad t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \cos(\omega t) \quad 0 \leq k \leq q-1$$

Esempio

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema e':

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0),$$

$$e^{At} = e^{\lambda t} e^{J_{oi}t} \qquad e^{J_{oi}t} = I + J_{oi}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \longrightarrow e^{J_{0i}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovvero possiamo calcolare la matrice esponenziale e il movimento dello stato:

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} x(0) \longrightarrow x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}x_1(0) + te^{\lambda t}x_2(0) \\ e^{\lambda t}x_2(0) \end{bmatrix}$$

Molteplicita' geometrica

The **geometric multiplicity** of an eigenvalue λ is the number of **linearly independent eigenvectors** associated with λ. It equals the dimension of the eigenspace of λ.

Steps to Calculate:

1. Solve the eigenvector equation:
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0,$$
where $\mathbf{v} \neq 0$.

2. Compute the null space (kernel) of $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, which consists of all solutions to the equation above.
$$\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \{\mathbf{v} : (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0\}.$$

3. The **geometric multiplicity** is the dimension of this null space:
$$\text{Geometric Multiplicity} = \dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})).$$

Stabilita', modi e autovalori - recap

Modi:
Se la matrice dinamica e' diagonalizzabile, i modi sono del tipo:

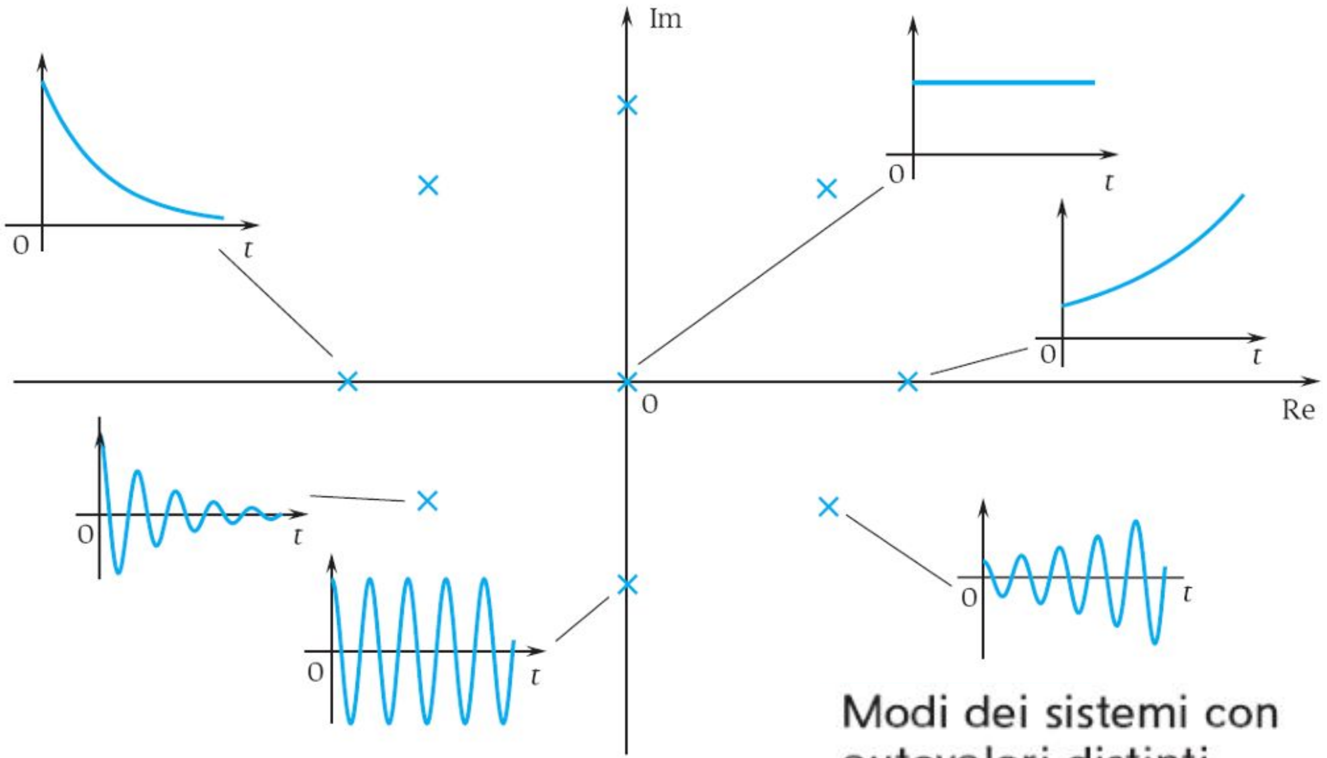
$$e^{\lambda t} \quad \lambda \in \mathcal{C}$$

Se la matrice non e' diagonalizzabile

$$t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!} \quad 0 \leq k \leq q-1 \qquad \lambda_i \quad \text{reale}$$

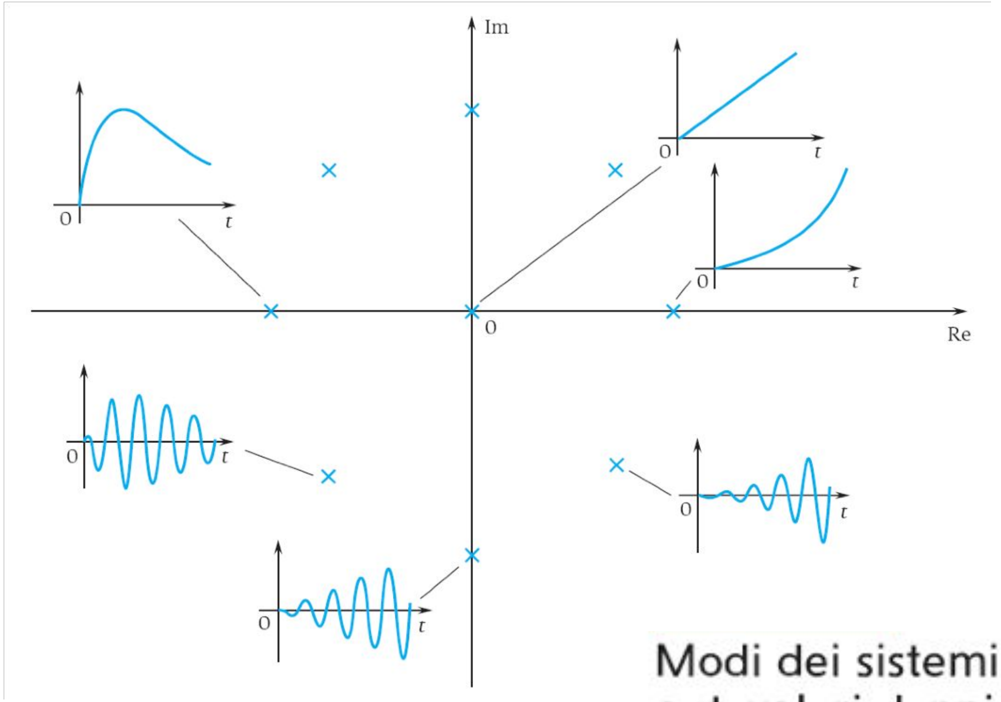
$$t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \sin(\omega t), \quad t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \cos(\omega t) \quad 0 \leq k \leq q-1 \qquad \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \text{complesso}$$

Autovalori e Modi (q=1)



Modi dei sistemi con autovalori distinti.

Autovalori e Modi (q=2)



Modi dei sistemi con autovalori doppi.

Stabilita' e autovalori

stabilita' $\longleftrightarrow$ modi $\longleftrightarrow$ autovalori

Stabilita' nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la definizione di stabilita'

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ e' **stabile**, se per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per *tutti* gli x_0 che soddisfano

$$||x_0 - \bar{x}|| \leq \delta$$

Si ha: $$||x(t) - \bar{x}|| \leq \epsilon \qquad t \geq 0$$

La definizione di stabilità e' una definizione rispetto a perturbazioni dello stato.

Ritorniamo alla stabilità nei sistemi lineari stazionari

L'origine è sempre punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora è stabile qualsiasi altro punto di equilibrio. Si parla allora di *stabilità del sistema.* La stabilità dipende solo dalla *risposta libera* del sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

La stabilità dipende solo dai *modi propri* del sistema.

Se autovalori a Re < 0, sistema asintoticamente stabile

Se autovalori a Re <= 0, e se Re = 0 molteplicità 1, sistema stabile

Stabilita’ e autovalori

stabilita’ ⟷	**modi** ⟷	**autovalori**	
Stabilita’ asintotica	Tendono a zero	Parte reale <0	
Stabilita’ semplice o marginale	Non vanno a infinito Almeno uno non converge a zero	Parte reale <= 0 Almeno uno con parte reale = 0 →	con ma=mg (q=1)
Instabile	Almeno uno va a infinito	Almeno uno con parte reale >0 oppure almeno uno con parte reale=0 →	con **ma** diversa **mg** (q>1)

Analisi modale

1) Modi esponenziali semplici $e^{\lambda t}$

Ogni autovalore ha un miniblocco di dimensione 1 (A e' diagonalizzabile)

2) Modi quasi-polimoniali $t^k e^{\lambda t}$

Si verificano quando gli autovalori reali sono associati a miniblocchi **di dimensione maggiore di 1**.
Se un autovalore ha un miniblocco di dimensione *q*, allora la soluzione ha termini fino a t^{q-1}.

Esempio: Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, la risposta contiene e^{-t} e te^{-t}, segno che l'autovalore -1 ha un miniblocco di dimensione 2.

Analisi modale

3) Modi oscillanti $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$**,** $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Si verificano quando gli autovalori sono **complessi coniugati** $\sigma \pm j\omega$ e sono associati a **miniblocchi di dimensione 1**.
Non ci sono termini in t^k perché la matrice è diagonalizzabile nel sottospazio complesso.

4) Modi oscillanti quasi-polimoniali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$**,** $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Si verificano quando **gli autovalori complessi coniugati hanno miniblocchi di dimensione maggiore di 1**.
Se la coppia $\sigma \pm j\omega$ ha un miniblocco di dimensione q, compariranno termini fino a t^{q-1}
Esempio: Se A ha un miniblocco di ordine 2 associato a $-1 \pm j3$, allora la risposta include $te^{-t}\cos(3t)$ e $te^{-t}\sin(3t)$.

Stabilità dei sistemi linearizzati

- Sistema linearizzato: equazioni nonlineari trascurando i termini di secondo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio
- *Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, allora lo stato di equilibrio del sistema non lineare è stabile* (basta mettersi sufficientemente vicini allo stato di equilibrio per cascarci dentro)
- *Se il sistema linearizzato è semplicemente stabile non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare* (un autovalore 0 è come dire che il termine del primo ordine è 0 … allora contano quelli del secondo ordine …)

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ma=5, mg=3

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$q=3 \xrightarrow{\text{modi}} e^{-t}, \quad te^{-t}, \quad \frac{t^2}{2!}e^{-t}$$

$$q=1 \xrightarrow{\text{modi}} e^{-t}$$

$$q=1 \xrightarrow{\text{modi}} e^{-t}$$

ma=5, mg=3

Il sistema e' asintoticamente stabile

Esempio

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

simile $\begin{bmatrix} \boxed{-1 + j2} & 0 \\ 0 & \boxed{-1 - j2} \end{bmatrix}$

$-1+j2 \rightarrow$ ma=mg=1

$-1-j2 \rightarrow$ ma=mg=1

$\rightarrow e^{-t}\sin(2t), e^{-t}\cos(2t)$

$0 \rightarrow$ ma=mg=1 $\rightarrow e^{0t} = 1$

Il sistema e' marginalmente stabile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ma=2; mg=1} \longrightarrow \textbf{Block 1:} \quad e^{-2t},\ te^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \text{ma=mg=1} \\ \text{ma=mg=1} \end{matrix} \longrightarrow \textbf{Block 2:} \quad e^{-2t}\sin(t),\ e^{-2t}\cos(t)$$

Il sistema e' asintoticamente stabile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad m = 1, \quad mg = 1$$

Block 1: 1

$$\lambda_2 = j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$$

$$\lambda_3 = -j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$$

Block 2: $\sin(t)$, $\cos(t)$

Il sistema e' marginalmente stabile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$\text{Block 1:} \quad 1, t$$

$$\lambda_1 = 0, \quad ma = 2, \quad mg = 1$$

$$\lambda_2 = j, \quad ma = 2, \quad mg = 1$$

$$\lambda_3 = -j, \quad ma = 2, \quad mg = 1$$

$$\text{Block 2:} \quad \cos(t), \sin(t)$$

$$t\cos(t), t\sin(t)$$

Il sistema e' instabile

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad ma = 1, \quad mg = 1 \qquad \text{Block 1:} \quad e^{5t}$$

$$\lambda_2 = 1 + 2j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$$
$$\lambda_3 = 1 - 2j, \quad ma = 1, \quad mg = 1$$

$$\text{Block 2:} \quad e^t \sin(2t),\ e^t \cos(2t)$$

$$\lambda_4 = -2, \quad ma = 3, \quad mg = 1$$

$$\text{Block 3:} \quad e^{-2t},\ te^{-2t},\ t^2e^{-2t}$$