

# DECIMA

**Esercizio 1.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$$

sull'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 = 0\}$ .

Il vincolo é regolare?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 2.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_1 + 2x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-1, 0), (0, 2), (0, -2), (3, 2)$  e  $(4, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 3.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ .

I vincoli sono regolari?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 4.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

sul poliedro di vertici  $(-3, 1), (0, 3), (3, 1), (2, -2)$  e  $(-2, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, -2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 5.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 8\}$ .

Il vincolo é regolare?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 6.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2$$

sul poliedro di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(4, 3)$  e  $(4, 0)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 0)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 4 \leq 0, \quad x_1 \leq 2\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 8.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

sul poliedro di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 2)$  e  $(3, 0)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ .

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 10.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - 2x_1^2 + x_1 + x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, -2), (0, 2), (2, 1), (2, -1)$ , a partire dal punto  $x^k = (0, 1)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 11.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ .

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 12.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, 0), (0, 2), (2, 0), (0, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (-1, -1)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 13.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ .

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 14.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 3)^2 - (x_2 + 1)^2$$

sul poliedro di vertici  $(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)$ , a partire dal punto  $x^k = (2, 3)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	
Passo	
$x^{k+1}$	

**Esercizio 15.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 3 \leq 0\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	
Il vincolo é regolare?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 16.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_1 + 4x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(2, 3)$  e  $(3, 0)$ .

$x^k =$	$(2, 0)$
Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	
$y^k =$	
Passo	
$x^{k+1} =$	



**Esercizio 17.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	
Il vincolo é regolare?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 18.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	
I vincoli sono regolari?	
Soluzioni del sistema LKT	
Punti di massimo globale	
Punti di minimo globale	

**Esercizio 19.** Determinare i punti della curva

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1 - x_1 x_2\}$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine.

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 = 0\}$ .

Il vincolo é regolare?	SI, il gradiente del vincolo non si annulla sull'insieme $D$
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0, 0) \quad \mu = -\frac{1}{2} \quad f(x) = 0$ $x = (0, -2) \quad \mu = \frac{1}{2} \quad f(x) = -2$ $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{9}{4}$ $x = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{9}{4}$
Punti di massimo globale	$(0, 0)$
Punti di minimo globale	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

**Esercizio 2.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_1 + 2x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-1, 0), (0, 2), (0, -2), (3, 2)$  e  $(4, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$3e^4x_1 + e^4x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(-1, 0)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$e^{8t^2-8t+4}$
Passo	$\frac{1}{2}$
$x^{k+1}$	$(0, 1)$

**Esercizio 3.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$ .

I vincoli sono regolari?	SI, il gradiente di ogni vincolo non si annulla mai sull'insieme $D$
Soluzioni del sistema LKT	$\begin{array}{lll} x = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) & \lambda = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0) & f(x) = 2\sqrt{2} \\ x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) & \lambda = (\frac{\sqrt{2}}{4}, 0) & f(x) = -2\sqrt{2} \\ x = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) & \lambda = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) & f(x) = \sqrt{2} \\ x = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) & \lambda = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) & f(x) = -\sqrt{2} \end{array}$
Punti di massimo globale	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Punti di minimo globale	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**Esercizio 4.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

sul poliedro di vertici  $(-3, 1), (0, 3), (3, 1), (2, -2)$  e  $(-2, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, -2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$\frac{1}{5} x_1 - \frac{4}{5} x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(0, 3)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$\log(51 t^2 - 42 t + 10)$
Passo	$\frac{7}{17}$
$x^{k+1}$	$\left(\frac{10}{17}, \frac{1}{17}\right)$

**Esercizio 5.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 8\}$ .

Il vincolo é regolare?	SI, valgono le condizioni di Slater
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0, 0) \quad \lambda = 0 \quad f(x) = 0$ $x = (-2, -2) \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad f(x) = 4$ $x = (2, 2) \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad f(x) = 4$ $x = (-2, 2) \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad f(x) = -4$ $x = (2, -2) \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad f(x) = -4$
Punti di massimo globale	$(-2, -2) \quad (2, 2)$
Punti di minimo globale	$(-2, 2) \quad (2, -2)$

**Esercizio 6.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2$$

sul poliedro di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(4, 3)$  e  $(4, 0)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 0)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$-6x_1 - 3x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(4, 3)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$54t^2 - 27t - 8$
Passo	$\frac{1}{4}$
$x^{k+1}$	$\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 4 \leq 0, \quad x_1 \leq 2\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	SI, la funzione obiettivo é continua e l'insieme $D$ é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0, 1) \quad \lambda = (-1, 0) \quad f(x) = -1$ $x = (2, 0) \quad \lambda = (-\frac{1}{4}, 0) \quad f(x) = -4$ $x = (2, 2) \quad \lambda = (-\frac{1}{4}, 0) \quad f(x) = -4$ $x = (2, 1) \quad \lambda = (0, 0) \quad f(x) = -5$
Punti di massimo globale	$(0, 1)$
Punti di minimo globale	$(2, 1)$

**Esercizio 8.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

sul poliedro di vertici  $(0, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)$  e  $(3, 0)$ , a partire dal punto  $x^k = (1, 2)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$-x_1 + x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(3, 0)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$\log(16 t^2 - 8 t + 2)$
Passo	$\frac{1}{4}$
$x^{k+1}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	SI, la funzione obiettivo é continua e l'insieme $D$ é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$  \begin{array}{lll}  x = (1, 0) & \mu = -\frac{1}{8} & f(x) = 1 \\  x = (-1, 0) & \mu = \frac{1}{8} & f(x) = -1 \\  x = \left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right) & \mu = 1 & f(x) = -\frac{65}{16} \\  x = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{4}\right) & \mu = 1 & f(x) = -\frac{65}{16}  \end{array}  $
Punti di massimo globale	$(1, 0)$
Punti di minimo globale	$\left(-\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{63}}{4}\right), \quad \left(-\frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$

**Esercizio 10.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - 2x_1^2 + x_1 + x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, -2), (0, 2), (2, 1), (2, -1)$ , a partire dal punto  $x^k = (0, 1)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$x_1 + x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(2, 1)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$-4t^2 + 2t + 1$
Passo	$\frac{1}{4}$
$x^{k+1}$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

**Esercizio 11.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	Il minimo globale non esiste perché $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \sqrt{t^2 - 1}) = -\infty$ Il massimo globale esiste perché $-f$ é coerciva
Soluzioni del sistema LKT	$x = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{3}{2}$ $x = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \mu = 1 \quad f(x) = -\frac{3}{2}$
Punti di massimo globale	$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Punti di minimo globale	non esistono

**Esercizio 12.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per minimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, 0), (0, 2), (2, 0), (0, -2)$ , a partire dal punto  $x^k = (-1, -1)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$2x_1 - 6x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(0, 2)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$10t^2 - 16t + 10$
Passo	$\frac{4}{5}$
$x^{k+1}$	$\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

**Esercizio 13.** Trovare massimi e minimi globali della funzione

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	SI perché $f$ é continua e $D$ é compatto
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1, 0) \quad \mu = 0 \quad f(x) = 0$ $x = (-1, 0) \quad \mu = -2 \quad f(x) = 4$
Punti di massimo globale	$(-1, 0)$
Punti di minimo globale	$(1, 0)$

**Esercizio 14.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 3)^2 - (x_2 + 1)^2$$

sul poliedro di vertici  $(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)$ , a partire dal punto  $x^k = (2, 3)$ .

Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$-4x_1 - 8x_2$
$y^k$ (soluzione ottima del problema linearizzato)	$(1, 1)$
funzione obiettivo ristretta al segmento $[x^k, y^k]$	$-2t^2 + 20t - 14$
Passo	1
$x^{k+1}$	$(1, 1)$



**Esercizio 15.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

sull'insieme  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 3 \leq 0\}$ .

Esistono massimi e minimi globali?	SI perché $f$ é continua e $D$ é compatto
Il vincolo é regolare?	SI perché $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$ (oppure perché é soddisfatta la condizione di Slater)
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1, 0) \quad \lambda = 1 \quad f(x) = 1$ $x = (3, 0) \quad \lambda = -3 \quad f(x) = 9$
Punti di massimo globale	$(3, 0)$
Punti di minimo globale	$(1, 0)$

**Esercizio 16.** Eseguire un passo del metodo di Frank-Wolfe per massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_1 + 4x_2$$

sul poliedro di vertici  $(-2, 0), (-1, 2), (2, 3)$  e  $(3, 0)$ .

$x^k =$	$(2, 0)$
Funzione obiettivo linearizzata in $x^k$	$-2x_1 + 4x_2$
$y^k =$	$(-1, 2)$
Passo	$\frac{7}{11}$
$x^{k+1} =$	$\left(\frac{1}{11}, \frac{14}{11}\right)$

**Esercizio 17.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	SI perché $f$ é continua e $D$ é compatto
Il vincolo é regolare?	SI perché valgono le condizioni di Slater
Soluzioni del sistema LKT	$x = (0, \pm 1), \quad \mu = -2 \quad f(x) = 1$ $x = (\pm 1, 0), \quad \mu = -2 \quad f(x) = 1$ $x = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mu = -1 \quad f(x) = \frac{1}{2}$ $x = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mu = -1 \quad f(x) = \frac{1}{2}$
Punti di massimo globale	$(1, 0) \quad (-1, 0) \quad (0, 1) \quad (0, -1)$
Punti di minimo globale	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**Esercizio 18.** Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2$$

sull'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Esistono massimi e minimi globali? Perché?	SI perché $f$ é continua e $D$ é compatto
I vincoli sono regolari?	SI perché sono funzioni affini
Soluzioni del sistema LKT	$x = (1, 0) \quad \lambda = (0, -3, -2) \quad f(x) = 1$ $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \lambda = (0, 0, \frac{1}{4}) \quad f(x) = -\frac{1}{8}$ $x = (0, a) \text{ con } 0 \leq a \leq 1 \quad \lambda = (-a, 0, 0) \quad f(x) = 0$
Punti di massimo globale	$(1, 0)$
Punti di minimo globale	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

**Esercizio 19.** Il problema equivale a cercare i punti di massimo e di minimo globale della funzione  $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  sull'insieme

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1 - x_1 x_2\}.$$

Poiché sulla curva  $\gamma$  si ha  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  e la variabile  $x_3$  è scritta esplicitamente in funzione delle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , cioè  $x_3 = 1 - x_1 x_2$ , il problema si riduce a cercare i massimi e minimi della funzione  $f(x) = 1 + (1 - x_1 x_2)^2$  sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

La funzione obiettivo è continua e la regione ammissibile è compatta, quindi esistono massimi e minimi globali. Inoltre il vincolo è regolare perché valgono le condizioni di Slater. Le soluzioni del sistema LKT sono:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu &= \frac{1}{2} & f(x) &= \frac{1}{4} \\ x &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu &= \frac{1}{2} & f(x) &= \frac{1}{4} \\ x &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu &= -\frac{3}{2} & f(x) &= \frac{9}{4} \\ x &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \mu &= -\frac{3}{2} & f(x) &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Quindi i punti di massimo globale sono  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , mentre i punti di minimo globale sono  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Concludendo, i punti della curva  $\gamma$  con la massima distanza dall'origine sono

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right),$$

mentre i punti della curva  $\gamma$  con la minima distanza dall'origine sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right).$$