

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**  
**Testo n.XX - Esame di Fisica Generale sessione del 11/01/2023**

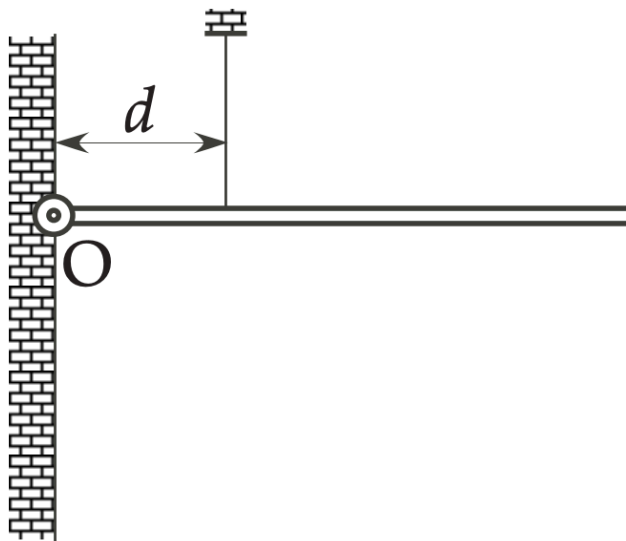
**Nome:**

**Matricola:**

**Cognome:**

**Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**



*(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)*

Un' asta omogenea di lunghezza  $L = 1 \text{ m}$  e massa  $m = 2 \text{ kg}$  è incernierata su una parete verticale mediante un perno in  $O$  che le consente di ruotare senza attrito intorno ad un asse orizzontale passante per esso. Come mostrato in figura, l'asta è tenuta in posizione orizzontale da un filo verticale ad essa fissato a una distanza  $d = 20 \text{ cm}$  dal perno.

1.1 Calcolare il modulo della tensione del filo  $T$  e la reazione del perno  $\vec{R}$  in  $O$

$$T = \dots\dots\dots \quad \vec{R} = \dots\dots\dots$$

Il filo viene tagliato. Calcolare:

1.2 il modulo dell'accelerazione angolare  $\alpha_0$  dell'asta un istante dopo il taglio del filo

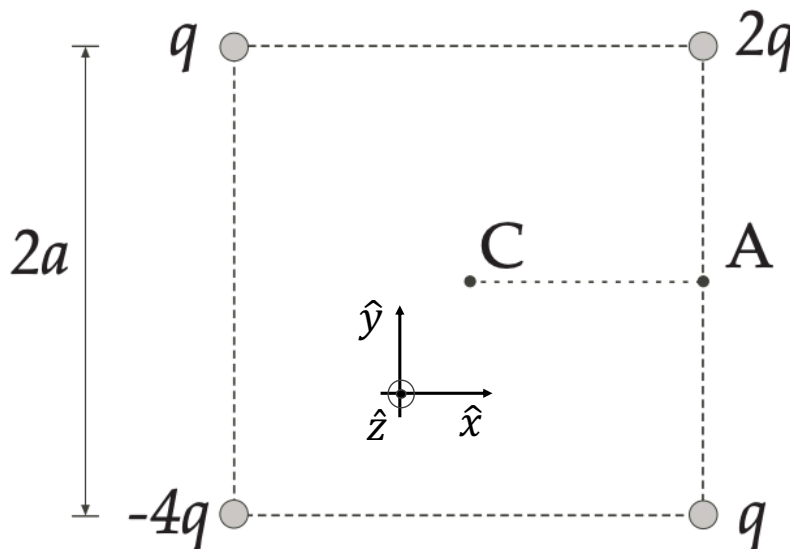
$$\alpha_0 = \dots\dots\dots$$

1.3 l'energia cinetica  $K$  dell'asta nell'istante in cui essa colpisce la parete verticale.

$$K = \dots\dots\dots$$

**Nota Bene:** assumere per i calcoli  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

## ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Come mostrato in figura, quattro particelle cariche puntiformi sono disposte sui vertici di un quadrato di lato  $2a$ , con  $a = 10 \text{ cm}$ . Le cariche delle singole particelle sono indicate in figura, dove  $q = 1 \mu\text{C}$ .

Calcolare:

- 2.1 l'energia elettrostatica totale (detta anche energia potenziale totale)  $U$  del sistema di cariche e il potenziale elettrostatico  $V_C$  da esse generato nel centro del quadrato

$$U = \dots\dots\dots \quad V_C = \dots\dots\dots$$

Una quinta particella puntiforme e di carica  $Q = 5 \mu\text{C}$  viene posta nel centro del quadrato.

Calcolare:

- 2.2 la forza  $\vec{F}$  esercitata dal sistema delle quattro cariche puntiformi sulla carica  $Q$

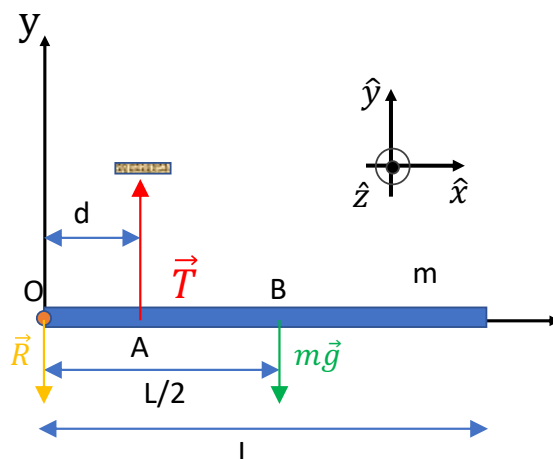
$$\vec{F} = \dots\dots\dots$$

- 2.3 l'energia cinetica  $T_C$  minima che deve essere fornita alla particella di carica  $Q$  posta nel centro del quadrato affinché essa arrivi nel punto  $A$  indicato in figura

$$T_C = \dots\dots\dots$$

**Nota Bene:** assumere per i calcoli  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

## Soluzione Esercizio 1



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

### Domanda 1.1

Le forze esterne applicate alla sbarra sono la reazione vincolare  $\vec{R}$ , la forza peso  $m\vec{g}$  e la tensione del filo  $\vec{T}$  mostrate in figura. In condizione di equilibrio la risultante delle forze esterne e la risultante dei loro momenti devono essere nulle. Prendendo come polo il punto O, il momento della reazione vincolare in O è nullo. Pertanto, imponendo che la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla, utilizzando i versori indicati in figura, si ottiene:

$$0 = \vec{OA} \wedge \vec{T} + \vec{OB} \wedge m\vec{g} = \left( Td - mg\frac{L}{2} \right) \hat{z} \Rightarrow T = mg\frac{L}{2d} = 49.1 \text{ N}$$

Mentre imponendo che la risultante delle forze esterne è nulla otteniamo:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = 0$$

che risolta per componenti fornisce: 
$$\begin{cases} x : R_x = 0 \\ y : T - mg + R_y = mg\left(\frac{L}{2d} - 1\right) + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow R_y = -mg\left(\frac{L}{2d} - 1\right) = -29.4 \text{ N}$$

Come mostrato in figura, all'equilibrio la reazione del perno ha solo componente lungo  $\hat{y}$ :

$$\vec{R} = -29.4\hat{y} \text{ N}$$

### Domanda 1.2

Dopo il taglio del filo le uniche forze in gioco sono la forza peso e la reazione della cerniera, quest'ultima sempre applicata in O. La seconda equazione cardinale, utilizzando come polo per il calcolo dei momenti il punto O, un istante dopo il taglio diviene:

$$\vec{M} = \vec{OB} \wedge m\vec{g} = I\vec{\alpha}_0$$

dove  $I$  è il momento di inerzia dell'asta rispetto al polo O, che utilizzando il teorema di Steiner e indicando con  $I_{cm}$  il momento di inerzia dell'asta rispetto al centro di massa è dato da:

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{3}$$

Inoltre, essendo entrambi i vettori del prodotto vettoriale giacenti sul piano  $xy$  l'accelerazione angolare è diretta lungo  $\hat{z}$ . Pertanto dalla seconda equazione cardinale:

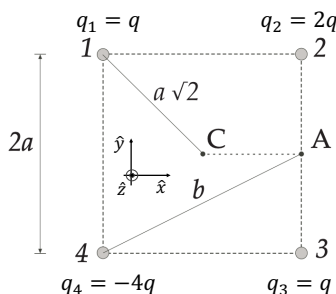
$$\frac{L}{2}\hat{x} \wedge (-mg\hat{y}) = -mg\frac{L}{2}\hat{z} = I\alpha_{0z}\hat{z} = m\frac{L^2}{3}\alpha_{0z}\hat{z} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{3g}{2L} = 14.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

### Domanda 1.3

Quando il filo viene tagliato, non essendo in gioco forze non conservative che compiono lavoro (la reazione vincolare non compie lavoro poichè il punto di applicazione è fermo) l'energia meccanica si conserva. Di conseguenza indicando con  $K_f(K_i)$  l'energia cinetica finale (iniziale) e con  $U_f(U_i)$  l'energia potenziale finale (iniziale), vale  $K_f - K_i = U_i - U_f$ . Poichè l'asta è lasciata cadere con velocità iniziale nulla,  $K_i = 0$ ,  $U_i - U_f = mg(h_i - h_f) = mg\frac{L}{2}$  e poichè  $K_f = K$ , per l'energia cinetica finale otteniamo:

$$K = mg\frac{L}{2} = 9.81 \text{ J}$$

## Soluzione Esercizio 2



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

### Domanda 2.1

Con riferimento alla figura, numerando le cariche come in figura con  $q_1, q_2, q_3, q_4$  l'energia elettrostatica del sistema è definita dalla relazione:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^4 \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

dove  $q_i$  è la  $i$ -esima carica  $r_{ij}$  è la distanza tra la carica  $i$  e la carica  $j$  e il fattore  $\frac{1}{2}$  prima del simbolo della sommatoria deriva dal fatto che le coppie vanno considerate una sola volta. Considerando i sei termini distinti della sommatoria, con le relative cariche e distanze, si ottiene:

$$U = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 4 + \frac{7}{\sqrt{2}} \right) = -0.40 \text{ J}$$

Il potenziale nel punto C, rispetto all'infinito, dal teorema di sovrapposizione degli effetti lo si ottiene sommando i potenziali dovuti alle singole cariche puntiformi  $q_i$ , equidistanti dal punto C, con distanza pari a  $a\sqrt{2}$ .

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} (q + 2q + q - 4q) = 0$$

### Domanda 2.2

La forza esercitata sulla carica  $Q$ , posta nel punto C, la si ottiene sommando vettorialmente le forze dovute alle singole cariche puntiformi  $q_i$ , tutte alla distanza  $a\sqrt{2}$  da C. In particolare, i contributi delle cariche  $q_1$  e  $q_3$  alla forza risultante hanno lo stesso modulo la stessa direzione e verso opposto e si cancellano vicendevolmente, mentre quelli delle cariche  $q_2$  e  $q_4$  hanno la stessa direzione ( diagonale del quadrato) e lo stesso verso dando luogo ad una forza, diretta come la diagonale e verso verso il vertice del quadrato in cui è posta la carica  $q_4$  e di modulo pari alla somma dei moduli delle forze pertanto :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} (2qQ + 4qQ) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right) = -13.5 \text{ N} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Per cui scritta per componenti la forza risultante è data da:

$$\vec{F} = \left( -\frac{1}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} (6qQ), -\frac{1}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2} (6qQ) \right) = (-9.55, -9.55) \text{ N}$$

### Domanda 2.3

Poichè non sono in gioco forze non conservative che compiono lavoro sul sistema, vale la conservazione dell'energia del sistema, inoltre le 4 cariche sono ferme ed hanno la stessa energia iniziale e finale. Pertanto, dalla conservazione dell'energia:

$$T_C + QV_C = T_A + QV_A$$

dove il primo termine e il secondo termine dell'uguaglianza rappresentano rispettivamente la somma delle energie cinetiche e potenziali iniziali e finali. L'energia cinetica minima che deve essere fornita corrisponde a  $T_A = 0$  per cui:

$$T_C = Q(V_A - V_C)$$

Dalla risposta alla domanda 2.1,  $V_C = 0$ , mentre per  $V_A$  (vedi figura per la definizione di  $b$ ):

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{b} + \frac{2q}{a} + \frac{q}{a} - \frac{4q}{b} \right)$$

Dal teorema di Pitagora, vedi figura,  $b = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ , pertanto:

$$T_C = Q (V_A - V_C) = \frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.746 \text{ } J$$