ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 37

Note Title 19/11/2018

Prop (Proprietà del polinomio caratteristico)
Sia A matrice $n \times n$, e sia $p_A(\lambda)$ il suo polinomio caratt., cioè

$$p_A(\lambda) = \mathrm{Det}\,(A - \lambda \mathrm{Id}).$$

Allora valgono i seguenti fatti

(1) Il grado di $p_A(\lambda) = n$

(2) Il coeff. di λ^n è $(-1)^n$

(3) Le radici di $p_A(\lambda)$ sono gli autovalori di A, contati secondo la molteplicità algebrica

(4) Se A è diagonale con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale, allora

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

(5) Se A è triangolare superiore (o inferiore), allora vale la stessa formula (usando solo i valori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che stanno sulla diagonale)

(6) Il termine noto del pol. caratteristico è $\mathrm{Det}\,(A)$

(7) La somma delle radici è la traccia della matrice.

Def. (Traccia di una matrice) Sia A matrice $n \times n$.
Si dice <u>traccia</u> di A la somma degli elementi sulla diagonale

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

<u>Conseguenza</u> Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A (con molt.) allora

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{Tr}\,(A)$$
$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \mathrm{Det}\,(A)$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Due matrici simili hanno

- lo stesso polinomio caratteristico
- gli stessi autovalori
- lo stesso determinante
- la stessa traccia

$\Big]$ facili conseguenze della prima

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo $B = M^{-1} A M$. Allora

$$
\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \mathrm{Det}\,(B - \lambda \mathrm{Id}) \\
&= \mathrm{Det}\,(M^{-1}AM - \lambda \overbrace{M^{-1}M}) \\
&= \mathrm{Det}\,[\, M^{-1}(A - \lambda \mathrm{Id})\, M \,] \\
&= \underbrace{\mathrm{Det}\,(M^{-1})}_{=\frac{1}{\cancel{\mathrm{Det}(M)}}}\ \mathrm{Det}\,(A - \lambda \mathrm{Id}) \cdot \cancel{\mathrm{Det}\,(M)}
\end{aligned}
$$

BINET

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Det}\,(A - \lambda \mathrm{Id}) \\
&= p_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

<u>Esercizio</u> Osservare che $\mathrm{Det}\,(M^{-1}AM) = \mathrm{Det}\,(A)$ senza passare dai polinomi caratteristici

$\boxed{\text{Dim Prop iniziale}}$ (4) e (5) Sia A triang. superiore con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sulla diagonale

$$
A - \lambda \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & * & * \\ & \lambda_2 - \lambda & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}
$$

Il Det è il prodotto dei termini sulla diagonale

(3) Visto alla lezione 35

(1) e (2) Dobbiamo dimostrare che $p_A(\lambda)$ "inizia" con $(-1)^n \lambda^n$ (termine di grado più alto)

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & * & * & \\ * & a_{2,2}-\lambda & * & \\ * & * & a_{3,3}-\lambda & \\ * & * & * & \ddots \end{pmatrix}$$

Devo calcolare il Det di questa matrice.

Se sviluppo con Laplace rispetto alla prima colonna mi viene

$$\underbrace{(a_{1,1}-\lambda)}_{\text{un } \lambda} \cdot \text{Det} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{2,2}-\lambda & \\ & \ddots \end{pmatrix}}_{(n-1)\,\lambda \text{ per ipotesi induttiva}} + \text{numeri} \cdot \text{Det matrici con} \le n-2 \text{ volte } \lambda$$

Il termine che produce la max potenza di λ è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

(6) termine noto di $p_A(\lambda) = p_A(0) = \text{Det}(A - 0 \cdot Id)$
$= \text{Det}(A)$

(7) Convincersene in casi 2×2 o 3×3 facendo direttamente il conto
(la dim. formale è un'induzione)

— o — o —

Ricapitolazione diagonalizzazione sui reali

- Cond. nec. e suff.: n autov. reali, tutti con molt. alg. e geom. uguali
- Cond. nec.: n autovalori reali
- Cond. suff.: n autovalori reali DISTINTI

$\boxed{\text{Dim. cond. suff.}}$ Sapendo che $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
Se sono tutti distinti, allora hanno tutti $m_a = 1$, ma allora hanno tutti $m_g = 1$, ma allora hanno tutti $m_a = m_g$.

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ \pi & 12 & 28 \end{pmatrix}$$ è diagonalizzabile

Il suo polinomio caratteristico è $(1-\lambda)(5-\lambda)(28-\lambda)$ che quindi ha 3 radici reali distinte ☺
Quindi la matrice data è simile a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} = B$$

Dunque esiste M tale che $B = M^{-1} A M$.

La matrice M (cambio base) è la matrice che ha come colonne gli autovettori di A, dunque devo risolvere

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 28\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Dim che } 1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)}$

È ovvio che $m_g = \dim(\ker(A-\lambda Id)) \ge 1$ (se λ_1 è autovalore, allora c'è almeno un autovettore).

Poniamo $k = m_g$. Allora esistono k vettori lin. indip $v_1, \dots, v_k$ che stanno nel ker di $A - \lambda Id$, cioè

$$A v_i = \lambda_1 v_i \qquad \forall i = 1, \dots, k$$

Li completo ad una base aggiungendo $v_{k+1}, \dots, v_n$. In questa nuova base la matrice A diventa

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * \\
0 & \lambda_1 & & 0 & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
0 & \cdots & & \lambda_1 & & & \\
\hline
0 & & & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & & \\
0 & & & 0 & * & * & *
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{array} &
\end{array}$$

Devo togliere λ sulla diagonale e calcolare il Det

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
\lambda_1-\lambda & 0 & 0 & \\
0 & \lambda_1-\lambda & & \text{Di} \\
0 & 0 & \ddots \; \lambda_1-\lambda & \text{tutto} \\
\hline
\vdots & & & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}\right)$$

Quando faccio il Det, mi ritrovo

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_1-\lambda)}_{k \text{ volte}} \cdot \text{roba strana}$$

La matrice finale è simile a quella iniziale, quindi ha lo stesso pol. caratteristico, e si vede che λ_1 è una radice di molt. almeno k.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. cond. nec. e suff.}}$ Devo dimostrare 2 implicazioni

- Se A è diagonalizzabile sui reali, allora ha n autovalori con molt. alg. e geom. coincidenti.

Se A è diagonalizzabile, allora è simile ad una matrice D diagonale, ma allora

$$p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

e quindi ha n radici reali.
Le molteplicità coincidono perché quando calcolo

$A - \lambda_1 Id$ questa è simile ad una matrice diagonale

in cui tutti i λ_1 sono stati sostituiti da 0. Questa ha tante colonne nulle quanto era il numero di volte che compariva lo stesso λ_1, cioè $m_a(\lambda_1)$.
Ma in questo caso il numero di colonne nulle è proprio la dim ker.

(Fatto generale: per una matrice diagonale vale

dim (ker) = numeri di zeri sulla diagonale)

— o — o —