Università di Pisa

Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Appunti

Analisi Matematica I

Professore:
Prof. Berselli

Autore:
Enea Passardi

Anno Accademico 2023/2024

Contents

1 Gli insiemi

Un insieme nella sua definizione primitiva è descrivibile come un contenitore di oggetti. Questi oggetti, o formalmente chiamati, elementi determinano l'insieme stesso, difatti un insieme è definibile solo quando è possibile stabilire un criterio che determini se un elemento fa parte di quell'insieme. Un insieme viene scritto nel seguente modo:

A = 1,2,3

dove la lettera A indica il nome dell'insieme, le parentesi graffe il limitatore dell'insieme e le cifre il contenuto. Per indicare l'appartenenza di un elemento ad un insieme viene usato un simbolo matematico:

$$a \in A \tag{1}$$

Negli insiemi non conta l'ordine degli elementi, scrivere infatti 1,2,3 oppure 2,3,1 è ambivalente, inoltre si annulla anche il concetto di molteplicità. Inoltre è possibile definire dei sottoinsiemi, i quali rappresentano degli insiemi contenuto a loro volta dentro altri insiemi, per indicare che un insieme è sottoinsieme di un'altro si usa il simbolo:

$$A \subseteq B \tag{2}$$

con questa scrittura si intende l'insieme A è compreso nell'insieme B

1.1 Uguaglianza tra insiemi

Due insiemi possono essere definiti uguali quando contengono gli stessi elementi, di conseguenza quando uno è contenuto nell'altro e viceversa, a livello matematico si definisce come la seguente relazione:

$$A \subseteq B \;\; e \;\; B \subseteq A \tag{3}$$

questa relazione può essere anche espressa nel seguente modo:

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) e \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A) \tag{4}$$

1.2 Inclusione stretta

Quando un insieme è incluso in un altro non si può escludere che essi non siano uguali, in quanto la semplice inclusione di A in B non implica necessariamente che B non sia incluso in A, se voglio predisporre che un insieme A è incluso in B, ma che il contrario non sia possibile uso l'inclusione stretta:

$$A \subset B \tag{5}$$

formalmente si definisce la relazione come: $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \;\; \exists x \in B : x \notin A$.

1.3 Unione di insiemi

L'unione di due insiemi è un'operazione che dati due insiemi crea un insieme contenente tutti gli elementi comuni e non comuni di ambedue gli insiemi di partenza:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \tag{6}$$

1.4 Intersezione di insiemi

L'intersezione di due insiemi è un'operazione che dati due insiemi restituisce un insieme contenente gli elementi comuni ai due insiemi:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \tag{7}$$

1.5 Differenza di insiemi

L'intersezione di due insiemi è un'operazione che dati due insiemi restituisce un insieme contenente gli elementi comuni ai due insiemi:

$$A/B = \{x|x \in A \land x \notin B\} \tag{8}$$

1.6 Insiemi multipli

Potrebbe capitare talvolta che alcuni insiemi abbiano lo stesso nome e siano identificabili soltanto da un indice, essi prendono il nome di insiemi indicizzati e vengono rappresentati in questo modo:

$$A_i i = 0 \rightarrow 10 \tag{9}$$

Utilizzando questo sistema di rappresentazione è possibile rappresentare anche le operazioni di **intersezione** e di **unione**

$$1. \quad \bigcup_{i=0}^{n} A_i \tag{10}$$

$$1. \quad \bigcap_{i=0}^{n} A_i \tag{11}$$

1.7 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B il prodotto cartesiano AxB indica tutte le coppie ordinate ottenibili accoppiando ogni elemento di A con ogni elemento di B

$$AxB = \{(a, b) \mid a \in Aeb \in B\} \tag{12}$$

1.8 Massimo, Minimo e estremi di un insieme

Assumiamo di avere un insieme di elementi A, si definisce come:

- **massimo** di A, un qualsiasi valore $M \in A$ tale che:

  $$a \leq M \quad \forall a \in A \tag{13}$$

  se questa relazione è verificata allora M viene definito come **maggiorante** di A.

- **minimo** di A, un qualsiasi valore $m \in A$ tale che:

  $$a \geq M \quad \forall a \in A \tag{14}$$

  se questa relazione è verificata allora m viene definito come **minorante** di A.

talvolta però il massimo e/o il minimo di un insieme posso anche non esistere, prendiamo come esempio l'intervallo $]0, 1[$, ci si convince facilmente che l'insieme non ha ne **massimo** e ne tantomento **minimo**,

2 Introduzione

2.1 Prodotti notevoli

Si definisce come $(a+b)^n$ un qualsiasi polinomio di grado n, per risolverlo occorre ricorrere ad una particolare formula

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{15}$$

All'interno della quale si riscontra la scrittura $\binom{n}{k}$ la quale identifica il *binomio di Newton* che si esprime come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n! \cdot (n-k)!} \tag{16}$$

2.2 Frazioni e radici

2.3 Algoritmo di euclide

L'algoritmo di Euclide è un algoritmo **ricorsivo** utilizzato per il calcolo dell'MCD, quest'algoritmo sfrutta la definizione di divisione, secondo la quale la divisione tra un numero a e un numero b è data dalla seguente formula:

$$a = b \cdot q + r \tag{17}$$

Tramite questa formula si arriva alla definizione dell'algortimo, secondo la quale l'MCD tra a e b è uguale all'MCD tra b e il resto della divisione tra a e b:

$$MCD(a, b) = MCD(b, r) \tag{18}$$

L'algoritmo procede in modo ricorsivo fintanto che il numero b non equivale a 0.

2.3.1 Dimostrazione

La dimostrazione si articola su alcuni passi fondamentali:

1. Creo due insiemi, un insieme A dei divisori comuni tra a e b e un insieme B dei divisori comuni di a e r:
   (a) A = $\{n : n \mid a \wedge\ n \mid b\}$
   (b) B = $\{n : n \mid a \wedge\ n \mid r\}$

   per poter dimostrare che i due MCD sono uguali devo dimostrare che i due insiemi dei divisori sono uguali, ovvero, devo dimostrare che A = B.

2. Ipotizzo l'esistenza di un $m \in A$ (quindi un divisore di a e b): se $m|a$ allora $a = m \cdot a_1$ e consequenzialmente se $m|b$, $b = m \cdot b_1$.

3. dimostro che i valori dell'insieme A appartengono anche all'insieme B

$$\begin{aligned} a = b \cdot q + r \rightarrow m \cdot a_1 = m \cdot b_1 \cdot q + r \rightarrow r = m \cdot a_1 - m \cdot b_1 \cdot q \\ \rightarrow r = m\,(a_1 - b_1 \cdot q) \end{aligned} \tag{19}$$

   In questo modo dimostro che r è a sua volta un multiplo di m in quanto deriva da m moltiplicato per un numero ($r/m = a1 - b1 \cdot q$). Essendo quindi i valori di A divisibili sia per b che per r essi apparterranno anche all'insieme B.

4. ipotizzo l'esistenza di un n B (quindi un divisore di b e r):se $n|b$ allora $b = n \cdot b1$ e consequenzialmente se $n|r$,$r = n \cdot r1$.

5. dimostro che i valori dell'insieme B appartengono anche all'insieme A:

$$\begin{aligned} a = b \cdot q + r \rightarrow a = n \cdot b_1 \cdot q + n \cdot r_1 \rightarrow \\ a = n\,(b_1 \cdot q + r_1) \end{aligned} \tag{20}$$

in questo modo dimostro, che a è un multiplo di n, in quanto deriva da n moltiplicato per un numero ($a/n = b1 \cdot q + r1$). Essendo quindi anche m, valore dell'insieme B, divisibile sia per a che per b dimostro che a sua volta appartiene all'insieme A.

2.4 Principio di Gauss

Il metodo di Gauss per la somma di n numeri è un metodo che permette di fare la somma tra n numeri consecutivi, leggenda narra che Gauss abbia inventato questo metodo durante la scuola primaria, quando la maestra chiese agli alunni di sommare i numeri da 1 a 100. La formula è:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{21}$$

Questo principio può essere facilmente dimostrato tramite il principio di **induzione**

2.4.1 Dimostrazione

Per questa dimostrazione devo procedere con due passi;

1. **Passo base**: dimostro che la formula vale per $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} a_i = \frac{0(0+1)}{2} = 0 \tag{22}$$

essendo che effettivamente la somma dei primi 0 numeri consecutivi è 0 ho dimostrato il passo base.

2. **Passo induttivo**: dimostro che la formula vale per $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rightarrow \\ \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rightarrow \frac{(n+1)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \tag{23}$$

l'identità è verificata, di conseguenza la formula di **Gauss** è verificata $\forall x \in \mathbb{N}$.

2.5 Disuguaglianza di Bernoulli

La disuguaglianza di Bernoulli viene utilizzata per la dimostrazione di alcuni limiti fondamentali, la sua struttura è:

$$(1+x)^n \leq (1 + n \cdot x) \tag{24}$$

2.5.1 Dimostrazione

La disuguaglianza di Bernoulli può essere dimostrata mediante principio di **induzione**:

1. **Dimostro che vale per n = 0**

$$(1+x)^0 \leq (1 + 0 \cdot x) = 1 \leq 1 \tag{25}$$

dopo aver verificato il *passo base*, verifico quello induttivo.

2. **Dimostro che vale per n+1**

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

Dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza è vera per $n = k+1$. Quindi, consideriamo:

$$(1+x)^{k+1}$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva, sappiamo che $(1+x)^k \geq 1+kx$. Moltiplicando entrambi i lati per $(1+x)$, otteniamo:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

Ora espandiamo il lato destro:

$$(1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2$$

Dato che k è un numero naturale e x è maggiore o uguale a -1, abbiamo $kx^2 \geq 0$. Pertanto:

$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

3 Numeri immaginari

3.1 Introduzione

Prendiamo un'equazione del tipo $x^2+1=0$, se andassimo a risolverla risulterebbe che non esistono soluzioni nel dominio dei $\mathbb{R}$, ma al di fuori di questo dominio non è detto che non esistano ulteriori soluzioni, infatti nel dominio dei cosiddetti numeri complessi $\mathbb{C}$ possono esistere delle soluzioni alla suddetta equazione. Una qualsiasi equazione ha sempre un numero pari di soluzioni complesse. I numeri complessi possono essere definiti come:

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} : (x, y) = x + iy \tag{26}$$

Un numero complesso viene rappresentato come una coppia di valori posta su un piano immaginario in quanto esso possiede una parte intera e una parte reale, nel caso (x, y) la y sarà il **coefficiente immaginario** e x il **coefficiente reale**. L'unità fondamentale dei numeri immaginari è i, la quale vale:

$$i = \sqrt{-1} \tag{27}$$

Viene definito **opposto** di un numero immaginario quel numero che se moltiplicato a z porta ad avere come risultato 1, esso viene descritto come:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{(x+iy)}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{a^2+b^2}, -\frac{iy}{a^2+b^2}\right) \tag{28}$$

La rappresentazione grafica di un numero immaginario viene fatta mediante **Piano di Gauss**:

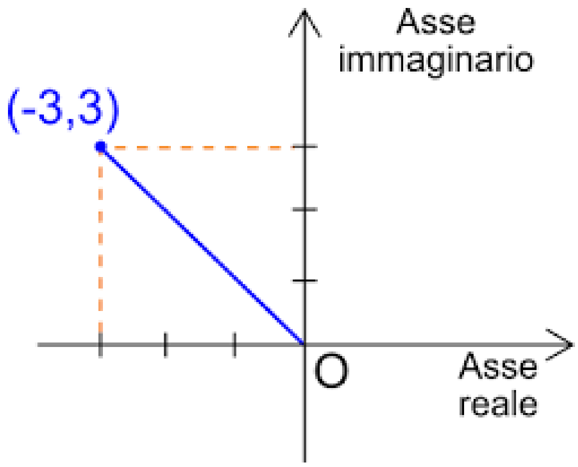


Figure 1: Piano di Gauss-Jordan

3.2 Operazioni tra numeri immaginari

I numeri immaginari godono di due proprietà *fondamentali*, la **somma** tra numeri immaginari e il **prodotto** tra numeri immaginari:

- **Somma tra numeri immaginari**:

$$z + v = (x_z + x_v) + i(y_z + y_v) = (x_z + x_v, y_z + y_v) \tag{29}$$

- **Prodotto tra numeri immaginari**:

$$z * v = (x_n x_v - y_v y_z) + i(x_v y_z + y_z x_v) = (x_z x_v + y_z y_v, x_z y_v + x_v y_z) \tag{30}$$

3.3 Il coniugato immaginario

Si definisce come coniugato quel numero sul **Piano Gaussiano** che ha *parte reale* uguale al numero originale e *parte immaginaria* opposta, a livello algebrico viene descritto come:

$$\overline{z} = x - iy \tag{31}$$

Il coniugato di un numero complesso gode di due proprietà fondamentali:

$$1.\ \ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{32}$$

$$2.\ \ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \tag{33}$$

3.4 Numeri complessi e Vettori

Un numero complesso può essere rappresentato anche su di un piano gaussiano, ad ogni numero complesso posso associare un vettore che va dall'origine verso quel numero, il vettore possiede quindi un modulo, il quale viene definito come:

$$||z|| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{34}$$

Il modulo similmente al valore assoluto gode di alcune proprietà fondamentali:

$$1.\ \ ||z + w|| \leq ||z|| + ||w|| \tag{35}$$

$$2.\ \ ||z - w|| \leq |||z|| - ||w||| \tag{36}$$

3.5 Coordinate Polari

Generalmente si identifica un vettore dalle coordinate (x, y), le quali identificano il punto di "*arrivo*" del vettore. Vi è la possibilità di rappresentare un vettore in un'altro modo, la rappresentazione a **coordinate polari**, in questa rappresentazione non vi è più l'uso delle coordinate (x, y), ma, l'uso di un valore ρ identificante la norma del vettore e un angolo θ identificante l'angolo del vettore con l'asse delle ordinate.

$$\vec{v} = (x, y) \rightarrow \vec{v} = (\rho, \theta) \tag{37}$$

inoltre vale la seguente relazione tra le componenti θ, x e y:

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta) \implies \theta \tag{38}$$

Non è sempre possibile applicare la f^{-1} della $\tan(x)$, la quale sarebbe $\arctan(x)$, ciò dipende dal dominio della funzione $\arctan(x)$, il quale è definito nell'intervallo:

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\tag{39}$$

genericamente però si può asserire che:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \\ & a = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \end{cases} \tag{40}$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ \ a > 0 \tag{41}$$

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi\ \ a < 0 \tag{42}$$

3.6 Radice di un numero complesso

Un'altra proprietà dei numeri complessi è quella che riguarda la radice di un numero complesso, essa infatti non sarà più la radice reale, ma sarà una radice complessa, la sua risoluzione infatti non porta ad avere una soluzione, ma porta ad avere n soluzioni:

$$\sqrt{z}^{\mathbb{C}} \tag{43}$$

Essa viene risolta mediante un sistema:

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt[n]{\rho_z} \\ \theta_1 = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \tag{44}$$

3.7 Esponenziale di un numero complesso

Un'ulteriore modo per rappresentare un numero complesso è la forma **euleriana** la quale può essere scritta come:

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho e^{i\theta} \tag{45}$$

è importante notare che se elevassi e ad un qualsiasi numero complesso $z(e^z)$ non potrei applicare la **funzione inversa** $\ln z$ in quanto $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$ ammette infinite soluzioni.

3.7.1 Esempio

Risolvere la seguente equazione:

$$e^{i\theta} = 1 \tag{46}$$

per risolverla procedo nel seguente modo:

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = 1 + i0 \tag{47}$$

dalla quale ricavo $\theta = 0 + 2k\pi$.

4 Le funzioni

Una funzione (A, B, f) è composta da:

1. un insieme A chiamato dominio (*insieme di partenza*).
2. un insieme B chiamato codominio (*insieme di arrivo*).
3. una relazione che lega l'insieme **A** all'insieme **B**, associando ad ogni elemento di **A uno e un solo** elemento di **B**.

Non si può considerare una funzione una relazione nella quale un elemento del dominio non è associato a nessun elemento del codominio, in termini più formali: *non si considera una funzione una relazione nella quale anche solo un elemento del dominio non ha una corrispondente immagine nel codominio.*

L'immagine di una funzione indica il tutto l'insieme dei valori che la funzione riesce a raggiungere nel codominio:

$$f.A \to B \implies imm(f) = B \tag{48}$$

Si definisce come cardinalità di un insieme il numero di elementi in esso contenuti, il simbolo che permette di indicarlo è #, ad esempio, prendendo in esame l'insieme dei numeri reali posso asserire che $\#\mathbb{R} = \infty$.

Unicità delle funzioni Una caratteristica che rimane di fondamentale importanza nel mondo delle funzioni è quella dell'unicità, in quanto, ogni funzione è **unica**, anche un singolo elemento cambiato nel dominio modifica in modo radicale la funzione stessa.

Grafico di una funzione Il grafico di una funzione viene espresso come **prodotto cartesiano** tra tutte le coppie $(a, b) \in \mathbb{R}$ ottenute tramite il **prodotto cartesiano** tra **dominio** e **codominio**, prendendo le coppie dove l'immagine calcolata del **dominio** è uguale all'elemento b appartenente al **codominio**:

$$G = \{(a, b) \in AxB \mid f(a) = b\} \subseteq \mathbb{R} \tag{49}$$

4.1 Classificazione delle funzioni

Una funzione può essere classificata in base a due parametri, **iniettività** e **suriettività**. Una funzione si dice iniettiva se e solo se:

$$\forall a_1, a_2 \in A \mid a_1 \neq a_2 \;\; f(a_1) \neq f(a_2) \tag{50}$$

In termini più semplici, una funzione è iniettiva quando prendendo ogni coppia di numeri e calcolandone l'immagine risulterà che esse sono diverse.
Una funzione si definisce **suriettiva** se e solo se:

$$\forall b \in B \;\; \exists a \in A \mid f(a) = b \tag{51}$$

In termini semplici, una funzione è suriettiva quando ad ogni valore del codominio è associato almeno un elemento del dominio, quindi, quando ogni elemento del codominio ha almeno una controimmagine nell'insieme del dominio.
Il fatto che una funzione sia iniettiva o meno non implica che essa sia anche suriettiva, questi ultimi sono due concetti indipendenti, come si vede anche dall'immagine:
Per funzioni con un **dominio** e un **codominio** con un numero di elementi finiti se la cardinalità del **dominio** è maggiore della cardinalità del **codominio** la funzione non può essere **iniettiva** in quanto, ci sarà sicuramente un elemento del **codominio** che sarà immagine di più di un elemento del **dominio**.
Una funzione si definisce come **biunivoca** se e solo se è sia **iniettiva** che **suriettiva**.

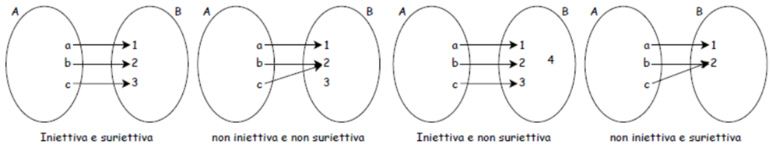


Figure 2: Tipologie di funzioni

4.2 Funzione inversa

La funzione inversa, definita anche come la $f^{-1}(y)$ è una funzione che ha come dominio il codominio della funzione iniziale e come codominio il dominio della funzione iniziale:

$$f(x) : [a, b] \to [c, d] \implies f^{-1}(x) : [c, d] \to [a, b] \tag{52}$$

una funzione si definisce come **invertibile** se e solo se essa è **biettiva**. Una funzione che all'apparenza risulta essere non invertibile potrebbe divernirlo se si attua una **restrizione del dominio**, prendiamo in esame la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$, di per sè questa funzione non è invertibile, in quanto non iniettiva, ma se limitiamo il codominio hai soli elementi positivi:

$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \tag{53}$$

la funzione diviene iniettiva e suriettiva e quindi **invertibile**.

4.3 Valore assoluto

si definisce il valore assoluto come quella funzione che, nel caso in cui x sia minore di zero equivale a -x, mentre, se x è maggiore di zero, essa equivale ad x.

$$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \tag{54}$$

Inoltre, per il valore assoluto valgono le seguenti proprietà:

$$1.\ \ |x + y| < |x| + |y| \tag{55}$$

$$2.\ \ ||x| - |y|| < |x - y| \tag{56}$$

4.3.1 Dimostrazione disuguaglianza triangolare

1. **dimostro che $|x| < a \implies -a < x < a \quad \forall a \in \mathbb{R}$:** La dimostrazione di questo postulato è di facile comprensione, in quanto, prendendo una a qualsiasi maggiore di x, so che a è necessariamente positivo (il valore assoluto restituisce sempre un numero positivo) ciò implica che non potendo mai essere x negativa, essa sarà sempre maggiore del reciproco della a.

2. **dimostro che** $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall a \in \mathbb{R}$: La dimostrazione di questo passo è estremamente intuitiva, —x— sarà positivo, di conseguenza sarà uguale a x se e solo se x è positiva o maggiore se x è negativa, di conseguenza la condizione è verificata. D'altra parte $-|x|$ essendo negativo, sarà uguale ad x se x è negativo o minore se x è positivo.

4.3.2 Dimostrazione valore assoluto

4.4 Andamento di una funzione

Una funzione durante il suo sviluppo cartesiano potrebbe **crescere** o **decrescere**, in particolare una funzione si definisce come:

- **Monotona crescente** se durante tutto il suo sviluppo cartesiano essa cresce soltanto:

$$\forall x_1, x_2 \in D \ \mid \ x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) < f(x_2) \tag{57}$$

- **Debolmente crescente**: se durante tutto il suo sviluppo cartesiano essa cresce stazionando talvolta in alcuni punti o intervalli:

$$\forall x_1, x_2 \in D \mid x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2) \tag{58}$$

- **Monotona decrescente** se durante tutto il suo sviluppo cartesiano essa decresce soltanto:

$$\forall x_1, x_2 \in D \mid x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) > f(x_2) \tag{59}$$

- **Debolmente decrescente**: se durante tutto il suo sviluppo cartesiano essa decresce stazionando talvolta in alcuni punti o intervalli:

$$\forall x_1, x_2 \in D \mid x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2) \tag{60}$$

4.5 Funzioni composte

Una funzione composta è una funzione derivata dalla composizione di due funzioni applicando alle immagini della prima funzione la seconda funzione:

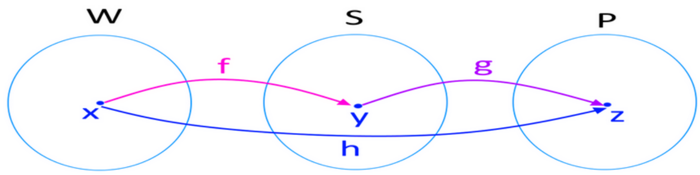


Figure 3: Tipologie di funzioni

generalmente per indicare una funzione composta di usa la scrittura $f(g(x))$, un esempio di funzione composta è:

$$f(g(x)) = e^{3x+1} \tag{61}$$

4.6 Massimo, minimo e estremi di una funzione

Una funzione durante il suo sviluppo cartesiano potrebbe assumere, all'interno di un intervallo $[a, b]$ un valore massimo o un valore minimo, in particolare, si dice che la funzione ha un massimo quando:

$$\exists M \in [a, b] \mid f(x) \leq M \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{62}$$

in questo caso si dice che M è un **maggiorante** di $[a, b]$

4.7 Serie e successioni

Una successione è una sequenza ordinata di infiniti numeri, definiti come termini della successione. Essa è una funzione da $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ descritta nella forma:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \tag{63}$$

Un esempio di successione è $a_n = 2n-3$, in quanto essa possiede infiniti termini: $-3(a_0), -1(a_1), 1(a_2), \ldots, q(a_n)$. Per esprimere una successione in maniera più generale si usa la simbologia $\{a_n\}$ Una successione $\{a_n\}$ generica può essere:

- **Monotona crescente**: $\forall n_1, n_2 | n_1 \neq n_2 \;\; a_{n_1} < a_{n_2}$
- **Monotona decrescente**: $\forall n_1, n_2 | n_1 \neq n_2 \;\; a_{n_1} > a_{n_2}$
- **Limitata**: $m < a_n < M$
- **Limitata superiormente**: $\exists M \in \mathbb{N} | \forall n \in D \;\; a_n < M$

- **Limitata inferiormente**: $\exists m \in \mathbb{N} | \forall n \in D \;\; a_n > m$

data una successione an si definisce serie la *somma degli infiniti termini della successione*, quest'ultima viene indicata nel seguente modo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{64}$$

Esistono due tipi di serie, le **serie algebriche** e le **serie geometriche**, quest'ultime possono essere rappresentate nella forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{65}$$

5 Limiti di una successione

Quando si parla di limite di una successione si utilizza una diversa definizione rispetto a quella usata nei limiti per **funzioni a variabile reale**, il motivo principale è che una successione non è una funzione *continua*, ma è una serie di punti che si sviluppano progressivamente nello spazio, difatti una successione è sì una funzione, ma non è definita da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è invece definita da $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. La definizione di limite notevole ci dice che:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \;\; |a_n - L| < \epsilon \tag{66}$$

Questa definizione postula che, se il limite esiste posso trovare un punto N oltre il quale la successione è compresa nell'intervallo $l + \epsilon < a_n < l - \epsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

5.1 Funzioni illimitate

Per definizione, una successione è illimitata quando può crescere o decrescere senza nessun limite, quindi, senza nessun "muro" che la fermi, in termini formali per indicare che una successione è **illimitata** si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} a_n = \pm\infty \tag{67}$$

Scrivere in questo modo equivale a dire che:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \;\; a_n > \epsilon \tag{68}$$

quindi, che indipendentemente da che ϵ prenda posso comunque trovare una n la quale non rientra nell'intervallo $]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

5.2 Teorema di unicità del limite

Questo teorema molto semplicemente asserisce che: *Il limite, se e solo se esiste, è unico.*

5.2.1 Dimostrazione

Assumiamo per assurdo di avere una successione per cui vale la seguente proprietà:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l_1 e \lim_{n \to \infty} a_n = l_2 \tag{69}$$

Allora si devono verificare due condizioni:

- Poiché so che:
$$\lim_{n \to \infty} a_n = l_1 \tag{70}$$
posso asserire che: $\exists N_1 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n > N \;\;\; l_1 - \epsilon < a_n < l_1 + \epsilon$

- Poiché so che:
$$\lim_{n \to \infty} a_n = l_2 \tag{71}$$
posso asserire che: $\exists N_2 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n > N \;\;\; l_2 - \epsilon < a_n < l_2 + \epsilon$

assumo di prendere ϵ come:

$$\frac{l_2 - l_1}{2} \tag{72}$$

A questo punto sostituisco l'epsilon nell'espressione del secondo limite, in quanto, assumo che esso sia maggiore del primo:

$$1.l_2 - \epsilon = l_2 - \frac{l_2 + l_1}{2} = \frac{l_2 + l_1}{2} \tag{73}$$

$$2.l_2 - \epsilon = l_2 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2} \tag{74}$$

Assumo di avere una terza N la quale vale il max (N_1,N_2) in modo che entrambe le definizioni di limite valgano, a questo punto la disuguaglianza sarà:

$$\frac{l_2 + l_1}{2} < a_n < \frac{l_1 + l_2}{2} \tag{75}$$

Si ricade in un **assurdo**, in quanto a_n deve essere sia maggiore che minore di una stessa quantità, condizione che è matematicamente impossibile. Cadendo quindi l'assurdo è dimostrato il teorema dell'uncità del limite.

5.3 Teorema del confronto

Assumiamo di avere due successioni a_n e b_n le quali convergono o divergono verso una stessa quantità:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \tag{76}$$

se e solo se $\exists N \in \mathbb{N} \mid n > N \;\; \forall n \in D$ e se $a_n \leq c_n \leq b_n$ posso asserire che:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l \tag{77}$$

5.3.1 Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema devo partire dalle definizione di limite per le due successioni note:

1. a_n: $\forall\epsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_1 \;\; l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$
2. a_n: $\forall\epsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2 \;\; l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$

Affinchè entrambe le condizioni siano vere devo prendere max (N_1,N_2). Inoltre, sapendo che $a_n \leq c_n \leq b_n$ posso asserire che:

$$l - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \epsilon \tag{78}$$

e di conseguenza:

$$l - \epsilon < c_n < l + \epsilon \tag{79}$$

5.4 Somma di un limite convergente con uno divergente

Assumiamo di trovarci nella seguente situazione, abbiamo una successione a_n la quale converge ad un valore M e una successione b_n la quale invece diverge verso $\pm\infty$, la loro somma sarà quindi definita come:

$$\lim_{n\to\infty} b_n + a_n = M + \infty \tag{80}$$

In questa situazione posso dire che semplicemente essendo b_n una successione che cresce o decresce sempre, nonostante io vi possa sommare un numero essa rimarrà sempre divergente verso $\pm\infty$, quest'affermazione è vera, tranne in tutti quei casi in cui a_n:

1. Nel caso in cui b_n diverga a $+\infty$ l'affermazione risulta falsa se a_n non è limitata inferiormente, in quanto si potrebbe ricadere nella situazione:

   $$\lim_{n\to\infty} b_n + a_n = +\infty - \infty \tag{81}$$

   situazione dalla quale non si esce facilmente, in quanto diventa necessario capire se a_n **decresce** più velocemente di quanto b_n **cresce**.

2. Nel caso in cui b_n diverga a $-\infty$ l'affermazione risulta falsa se a_n non è limitata superiormente, in quanto si potrebbe ricadere nella situazione:

   $$\lim_{n\to\infty} b_n + a_n = -\infty + \infty \tag{82}$$

   situazione dalla quale non si esce facilmente, in quanto diventa necessario capire se a_n **cresce** più velocemente di quanto b_n **decresce**.

5.4.1 Dimostrazione

Assumiamo di avere $b_n \to \infty$ e $a_n \to \infty$, per definizione, visto che a_n è limitata superioremente, sappiamo che:

$$-M < a_n < M \tag{83}$$

sommo a tutti i membri b_n

$$b_n - M < a_n < b_n + M \tag{84}$$

affinché possa valere il teorema del confronto devo essere sicuro che $b_n - M$ diverga verso $+\infty$, di conseguenza devo essere sicuro che:

$$b_n - M > k \tag{85}$$

e consequenzialmente che:

$$b_n > k + M \tag{86}$$

sapendo però che b_n diverge verso $+\infty$ e di conseguenza che non è limitata superiormente posso dare per certo che b_n supera il valore $k + M$.

5.5 Prodotto di un limite convergente per uno divergente

Assumiamo di avere un polinomio **p(n)** esprimibile come:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n \cdot k^n = a_0 + a_1 k^1 + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n \tag{87}$$

se di esso vado a fare il limite mi troverei in una situazione del tipo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n k^n = \pm\infty \tag{88}$$

Il motivo deriva dal fatto che k^n tende ad infinito, ma a_n se diverso da 0 potrebbe essere un numero negativo o un numero positivo facendo quindi cambiare il risultato del limite, in quanto se:

- Se $a_k < 0$ il numero k^n sarà un numero negativo che al variare di k sarà sempre più piccolo.
- Se $a_n > 0$ il numero k^n sarà un numero positivo che al variare di k sarà sempre più grande.

In un polinomio però si pone il problema della presenza di più fattori dipendenti da valori di a_n diversi, in essi sarà quindi possibile trovare situazioni in cui alcuni blocchi risultano essere uguali a $+\infty$ altri risultano uguali a $-\infty$. Genericamente si può astrarre il problema nel seguente modo, assumiamo di avere una successione a_n la quale converge verso un valore M e una successione b_n la quale diverge verso $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} a_n \cdot b_n \tag{89}$$

si potrebbe immaginare che, moltiplicando un valore n per infinito esso dia comunque origine ad un ulteriore infinito, ma in realtà ciò non è del tutto giusto, infatti si possono distinguere tre diversi casi:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty \;\; M < 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = N.D \;\; M == 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty \;\; M > 0 \end{cases} \tag{90}$$

5.5.1 Dimostrazione

La dimostrazione risulta semplice, assumiamo di avere la successione b_n tendente ad un numero M, posso sicuraemente dire che:

$$M - \epsilon < b_n < M + \epsilon \tag{91}$$

procedo ora prendendo $\epsilon = M/2$, otteniamo quindi:

$$M - \frac{M}{2} < b_n < M + \frac{M}{2} \tag{92}$$

la quale equivale a scrivere:

$$\frac{M}{2} < b_n < \frac{3M}{2} \tag{93}$$

moltiplico tutti i fattori per a_n

$$a_n \cdot \frac{M}{2} < a_n \cdot b_n < a_n \cdot \frac{3M}{2} \tag{94}$$

sapendo che a_n è **definitivamente crescente** oltre un certo valore k posso dire che:

$$k < a_n \cdot \frac{M}{2} \tag{95}$$

e di conseguenza che affinché la funzione sia crescente devo prendere un valore tale che:

$$\frac{2k}{M} < a_n \tag{96}$$

posso applicare lo stesso ragionamento anche per la parte destra della disuguaglianza:

$$a_n \cdot \frac{3M}{2} > k \tag{97}$$

e quindi, affinché a_n sia strettamente crescente devo prendere un valore tale che:

$$\frac{2k}{3M} < a_n \tag{98}$$

se prendo il massimo tra i due valori trovo tutti quei punti per i quali entrambe le condizioni sono rispettate e per i quali le due successioni tendono verso infinito e per **teorema del confronto** posso asserire che anche $a_n \cdot b_n$ tende verso infinito.

5.6 Limite di un polinomio di grado n-esimo

Assumiamo, come nel caso precedente, di avere un polinomio di grado **n-esimo** nella forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n \cdot k^n = a_0 + a_1 k^1 + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n \tag{99}$$

assumiamo inoltre di trovarci nel caso in cui alcuni fattori del polinomio tendano a $+\infty$ e altri a $-\infty$. Per risolvere questa situazione è sufficiente guaradare il polinomio di grado più alto, in quanto la crescita o la decrescita di questo fattore sarà più alta rispetto a quella di ogni altro del polinomio. Nel caso pratico sarà quindi sufficiente portare in evidenza il fattore di grado più alto:

$$a_0 + a_1 k^1 + a_2 k^2 + \cdots + a_n k^n = k^n \left(\frac{a_0}{k_n} + \frac{a_1 k^1}{k_n} + \cdots + a_k \right) \tag{100}$$

Possiamo inoltre dimostrare che, un qualunque fattore che viene diviso per k^n è inferiore a livello di crescita e di consequenza il rapportò tenderà a 0.

5.7 Forme indeterminate

Una forma indeterminata è un caso nel quale un limte converge ad un valore *ambiguo*, le principali forme indeterminate sono:

- $+\infty - \infty$
- $+\infty \cdot 0$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

- $\frac{\infty}{0}$
- 1^{∞}

Ognuna di esse ha bisogno di essere studiata singolarmente, non è possibile definire una regola generale per risolverle

5.8 Limite del minimo e del massimo tra due successioni

Se si volesse calcolare il limite del minimo o del massimo tra due successioni è possibile applicare una semplice regola:

$$1. \min(a_n, b_n) = \min(L, M) \tag{101}$$

$$2. \max(a_n, b_n) = \max(L, M) \tag{102}$$

5.9 Osservazioni

- **Limite convergente a 0**

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{103}$$

- **Limite di radice quadrata**

$$\lim_{x\to\infty} a_n = L \implies \lim_{x\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L} \tag{104}$$

La dimostrazione richiede di analizzare due casi:

1. $L > 0$
2. $L = 0$

- **Conseguenza teorema del confronto** Assumiamo di avere una successione a_n tale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{105}$$

assumiamo ora di avere un'altra successione b_n per cui $\exists n > N \mid b_n \geq a_n$, per teorema del confronto so che:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \tag{106}$$

5.10 Rapporto di una successione

Assumendo di avere una successione $a_n \to L$ è possibile affermare che:

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{L} \tag{107}$$

e quindi che:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N \;\; \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon \tag{108}$$

5.10.1 Dimostrazione

Per dimostrare questa proprietà parto dalla condizione sopradescritta:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon \iff \epsilon > \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| \tag{109}$$

Adesso calcolo porto all'interno del valore assoluto ad aver un unica frazione

$$\left|\frac{L - a_n}{a_n L}\right| < \epsilon = \left|(L - a_n)\frac{1}{a_n L}\right| < \epsilon \tag{110}$$

Sfruttando delle proprietà del valore assoluto posso riscrivere la diseguaglianza come:

$$|(L - a_n)| \cdot \left|\frac{1}{a_n L}\right| \tag{111}$$

Inoltre:

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{|\epsilon|} \implies \frac{1}{|a_n L|} < \frac{1}{|\epsilon L|} \tag{112}$$

Adesso prendo ϵ come $\dfrac{L}{2}$, l'espressione diventa quindi:

$$\frac{1}{|a_n L|} \leq \frac{1}{|\epsilon| \cdot \left|\frac{L}{2}\right|} \tag{113}$$

ritornando all'espressione originale posso dire che:

$$|a_n - L| \cdot \frac{1}{|a_n L|} \leq |a_n - L| \frac{1}{|\epsilon| \cdot \left|\frac{L}{2}\right|} \tag{114}$$

Adesso devo dimostrare la proprietà che ho utilizzato all'inzio:

$$|a_n L| = |a_n||L| \tag{115}$$

Parto dalla seguente ipotesi:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| \implies \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \phi \in \mathbb{N} \mid \forall n > \phi \;\; |a_n - L| < \epsilon \implies |L| - \epsilon \leq |a_n| \leq |L| + \epsilon \tag{116}$$

prendendo $\epsilon = \dfrac{L}{2}$ l'espressione diventa:

$$|L| - \frac{|L|}{2} \leq |a_n| \leq |L| + \frac{|L|}{2} \tag{117}$$

Adesso, dopo aver dimostrato questa proprietà torno alla diseguglianza originale:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| < |a_n - L| \frac{2}{L^2} < \frac{\epsilon L^2}{2} \tag{118}$$

DA CONTINUARE

6 Funzioni continue

Nella sezione 5, a riguardo dei limiti di successioni, abbiamo dimostrato la seguente proprietà:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| \tag{119}$$

Seguendo questo stesso principio potremmo chiederci se vale anche quest'altra proprietà:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \tag{120}$$

la risposta non è però semplice, in effetti vi sono dei casi in cui questa proprietà è applicabile e funziona, ma ve ne sono anche altri nei quali vale l'opposto e questa formula non è più valida, un esempio è:

$$\begin{cases} sin(x) & x > 0 \\ cos(x) & x \leq 0 \end{cases} \tag{121}$$

assumo inoltre di avere una successione $a_n = 1/n$ di cui definisco il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{122}$$

provo quindi ad applicare il teorema, per cui:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = f(x_0) \tag{123}$$

Il motivo per cui il teorema non funziona è dovuto dal fatto che essa non è **continua** in $x_0 = 0$.

Criterio di non continuità Assumiamo di avere due successioni $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$, si definisce che una funzione non è continua quando:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n) \tag{124}$$

6.1 Continuità di una funzione

Si definisce una funzione continua in x_0, se e solo se posso prendere una ϵ piccola a piacere e trovare in funzione di essa un δ per il cui, tanto più i valori dell'immagine si stringono intorno al valore dell'immagine in x_0, tanto più i valori della x si stringono intorno al punto x_0:

$$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ | \ \ |x - x_0| < \delta \forall x \in D \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{125}$$

Tanto più i valori dell'immagine si avvicinano al valore dell'immagine in x_0, tanto più i valori della x si avvicineranno ad x_0. Un'osservazione che è possibile fare è la seguente: *non è possibile verificare che la funzione sia continua in tutti i reali*, ma è possibile verificare che essa sia continua in un intorno di x_0, verficando che i valori dell'immagine dei punti nell'intorno siano "simili" a quelli che l'immagine assume nel punto x_0. Inoltre, assumendo di avere due successioni $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$, si definisce una funzione come continua se e solo se:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0) \tag{126}$$

6.2 Funzione limitata

Una funzione limitata è una funzione che essume valori limitati tra due numeri reali oscillando tra di essi senza mai superarlo, esistono tre tipologie di funzioni limitate:

- Una funzione si dice *limitata superiormente* se vale la seguente relazione:

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \ | \ \ f(x) \leq M \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{127}$$

- Una funzione si dice *limitata inferiormente* se vale la seguente relazione:

$$\exists m \in \mathbb{R} \;\mid\; f(x) \geq m \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{128}$$

- Una funzione si dice *limitata* se vale la seguente relazione:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \;\mid\; m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in \mathbb{R} \tag{129}$$

6.3 Punto interno e punto di frontiera

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme reale e sia $x_0 \in E$ un punto appartenente all'insieme, diciamo che:

- x_0 è un *punto interno* ad E se esiste almeno un intorno completo di x_0 interamente contenuto in E.
- x_0 è un *punto esterno* ad E se esiste almeno un intorno completo di x_0 internamente contenuto nel complementare di E. Si definisce come complementare di E (E^c) come l'insieme dei punti esterni da E:
$$E^c = \{x \notin E\} \tag{130}$$
- x_0 è un *punto di frontiera* di E se e solo se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di E e un punto del complementare di E.

6.4 Teorema della permanenza del segno

Il teorema della permanenza del segno asserisce che, se ho una funzione g(x) continua in x_0, con $x_0 \neq 0$ vale che:
$$\exists \delta > 0 \;\mid\; g(x) > 0 \;\; |x - x_0| < \delta \tag{131}$$
In altre parole, se una funzione è continua in x_0 e x_0 è diverso da zero posso affermare che all'interno dell'intervallo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ la funzione sarà strettamente positiva.

6.4.1 Dimostrazione

Assumo di avere una $f(x)$ continua in x_0, posso quindi asserire che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \tag{132}$$

Ora prendo come ϵ il valore $\dfrac{f(x_0)}{2}$, ottenendo:

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2} \tag{133}$$

Arrivando ad avere:
$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \tag{134}$$
$f(x)$ è compresa tra due quantità positive e tenderà quindi, per **teorema del confronto**, ad un valore positivo

6.5 Somma di funzioni continue

Un ulteriore caso che occorre analizzare è il seguente, assumo di avere due funzioni continue in un intorno di x_0, allora si può affermare che:

$$(f + g)(x_0) \tag{135}$$

è continua in x_0.

6.5.1 Dimostrazione

Sappiamo per ipotesi che sia f(x) che, g(x) sono continue in x_0, di conseguenza, possiamo asserire che:

$$1.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{136}$$

$$2.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \tag{137}$$

Adesso, per dimostrare che $f + g(x)$ è a sua volta continua devo dimostrare che:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| < \epsilon \tag{138}$$

Il prossimo passaggio è quello di dividere le f(x) dalle g(x):

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| < \epsilon \tag{139}$$

Analizzando in particolare $|(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))|$ so, per **disuguaglianza triangolare** che esso è:

$$|(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \tag{140}$$

Per far si che questa quantità sia strettamente minore di ϵ devono verficarsi due condizioni:

$$1.\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{141}$$

$$2.\ |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{142}$$

In particolare so, che per verificarsi questa condizione deve avvenire che:

$$1.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_f > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{143}$$

$$2.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_g > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{144}$$

Infine, per fare si che entrambe le condizioni siano vere allo stesso tempo devo prendere un δ che vada bene ad entrambe, sarà sufficente quindi prendere il minore tra δ_f e δ_g.

6.6 Prodotto di funzioni continue

Un'altra proprietà interessante sulle funzioni continue riguarda il prodotto di esse. Assumiamo di avere due funzioni g(x) e f(x) continue in x_0, si può affermare che:

$$(f \cdot g)(x) \tag{145}$$

è a sua volta continua in x_0

6.6.1 Dimostrazione

Sappiamo per ipotesi che sia f(x) che, g(x) sono continue in x_0, di conseguenza, possiamo asserire che:

$$1.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{146}$$

$$2.\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \tag{147}$$

Adesso, per dimostrare che $f + g(x)$ è a sua volta continua devo dimostrare che:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \mid\ |x - x_0| < \epsilon\ \ |f(x) \cdot g(x) + (f(x_0) \cdot g(x_0))| < \epsilon \tag{148}$$

Adesso possiamo focalizzarci su $|f(x) \cdot g(x) - (f(x_0) \cdot g(x_0))| < \epsilon$, riscrivo quindi la diseguaglianza nel seguente modo:

$$|f(x) \cdot g(x) + (f(x_0) \cdot g(x_0)) - (f(x_0) \cdot g(x_0)) + (f(x_0) \cdot g(x_0))| < \epsilon \tag{149}$$

A questo punto porto in evidenza un $g(x)$ e un $f(x_0)$ otterrei quindi:

$$|g(x)(f(x) + (f(x_0)) + f(x_0)(g(x) + g(x_0))| < \epsilon \tag{150}$$

Applicando la disugualianza trinagolare so per certo che questa quantità è minore o uguale a:

$$|g(x)(f(x) + (f(x_0))| + |f(x_0)(g(x) + g(x_0))| \tag{151}$$

la quale può essere anche riscritta nel seguente modo:

$$|g(x)| \cdot |(f(x) + (f(x_0))| + |f(x_0)| \cdot |(g(x) + g(x_0))| < \epsilon \tag{152}$$

Affinché siano verificate entrambe le condizioni deve verificarsi che:

$$1.\ \ |f(x_0)| \cdot |(g(x) + g(x_0))| < \frac{\epsilon}{2} \tag{153}$$

$$2.\ \ |g(x)| \cdot |(f(x) + (f(x_0))| < \frac{\epsilon}{2} \tag{154}$$

nel caso della prima so che:

$$1.\ \ |(g(x) + g(x_0))| < \frac{\epsilon}{|f(x_0)| \cdot 2} < \frac{\epsilon}{2} \tag{155}$$

avendo dimostrato che $|(g(x) + g(x_0))|$ è minore di una quantità ancora più piccola di $\epsilon/2$ posso afferamare che questa diseguaglianza è verificata. Il secondo caso è un po più complesso, in quanto:

$$2.\ \ |(f(x) + (f(x_0))| < \frac{\epsilon}{2 \cdot |g(x)|} \tag{156}$$

Il problema che si verifica in questo caso è legato al fatto che non so se $g(x)$ è limitato, di conseguenza potrebbe tendere a ∞, mentre invece per definizione sappiamo che $|(f(x) + (f(x_0))| < \epsilon$, di conseguenza è una quantità molto piccola, ciò potrebbe portare ad una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Una possibile soluzione potrebbe essere quella di cercare di dimostrare che $g(x)$ è limitata superiormente:

$$g(x) \leq M \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{157}$$

Se fosse vero potrei dire che:

$$|g(x)| \cdot |(f(x) + (f(x_0))| \ \ \leq \ \ M \cdot |(f(x) + (f(x_0))| < \frac{\epsilon}{2} \tag{158}$$

Ma per la stessa definizione di *funzione continua* sappiamo che non è possibile definire se una funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Posso però dimostrare che essa è limitata vicino ad x_0:

$$\exists n \ \mid \ |x - x_0| < n \ \ |g(x) - g(x_0)| < M \tag{159}$$

Da cui ne derivo che la condizione vale se e solo se:

$$|x - x_0| < \delta \ \ M = \max(g(x_0) + \epsilon, \ \ g(x_0) - \epsilon) \tag{160}$$

6.7 Rapporto di funzioni continue

Date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in Dom(f) \cup Dom(g)$ un punto di continuità per ambo le funzioni tale che $g(x_0) \neq 0$. Allora il rapporto

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{161}$$

è a sua volta una funzione continua.

6.8 Teorema di Weierstrass

Il **teorema di Weierstrass** asserisce che, *data una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se f è continua in $[a,b] \iff f \in C([a,b])$ la funzione assume, rispettivamente in un qualsiasi punto x_m e x_M interno all'intervallo, il valore **massimo** possibile e il valore **minimo** possibile, formalmente ciò viene descritto come:

$$1.\ \exists x_m \in [a,b] \ | \ f(x_m) = m = \min[f] \tag{162}$$

$$2.\ \exists x_M \in [a,b] \ | \ f(x_M) = M = \max[f] \tag{163}$$

6.9 Teorema sulle funzioni composte

Assumiamo di avere una $f(x) : D_1 \to \mathbb{R}$ con $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione $g(x) : D_2 \to \mathbb{R}$ con $D_2 \subseteq \mathbb{R}$, assumiamo inoltre che, $f(x)$ è continua in x_0 e $g(x)$ è continua in $y_0 = f(x_0) \in D_2$, allora posso asserire che:

$$g(f(x)) : D_1 \to \mathbb{R} \tag{164}$$

è a sua volta continua in x_0.

6.10 Continuità da destra e da sinistra

Può capitare talvolta che una funzione sia continua solo da destra o da sinistra in una funzione, in particolare:

- **Se** $f(x)$ **è continua in** x_0 **da destra** so che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{165}$$

  a patto che $x \in D$ e che $x \geq 0$, se questa condizione è rispettata allora, assumendo di avere una successione $x_n > 0$ la quale tende ad un valore x_0, posso asserire che:

$$\forall x_n \ \ x_n \geq 0 \ \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{166}$$

- **Se** $f(x)$ **è continua in** x_0 **da sinistra** so che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{167}$$

  a patto che $x \in D$ e che $x \leq 0$, se questa condizione è rispettata allora, assumendo di avere una successione $g_n < 0$ la quale tende ad un valore x_0, posso asserire che:

$$\forall g_n \ \ g_n \geq 0 \ \ \lim_{n\to\infty} f(g_n) = f(\lim_{n\to\infty} g_n) \tag{168}$$

6.11 Teorema di esistenza degli zeri

Assumiamo di avere una funzione $f(x) \in C([a,b])$ tale che:

$$1.\ f(a) < 0 \ \ f(b) > 0 \tag{169}$$

oppure, tale che:

$$2.\ f(a) > 0 \ \ f(b) < 0 \tag{170}$$

il teorema di esistenza degli zeri garantisce che:

$$\exists \overline{x} \in [a,b] \ | \ f(\overline{x}) = 0 \tag{171}$$

in altre parole, sapendo che la funzione è continua in un intervallo $[a,b]$ e che la funzione ad un estremo assume valori negativi e all'altro estremo valori positivi, sono certo che in almeno un punto intersecherà l'asse delle ordinate.

6.11.1 Algoritmo di Bisezione

L'algoritmo di Bisezione è un algoritmo utilizzato per trovare il valore $\overline{x}$ per cui la funzione si azzera, esso si basa su un dimezzamento costante dell'intervallo, bisezionandolo sempre a metà e controllando in quale metà dell'intervallo rientra il punto $\overline{x}$. Assumiamo di avere un intervallo $[a, b]$, una **funzione continua** nell'intervallo e i due **estremi di segno opposto**, applicando il metodo di Bisezione si calcola il punto medio x_n tale che:

$$x_n = \frac{b - a}{2} \tag{172}$$

dopo aver trovato il punto medio si procede calcolando la funzione nel punto x_n:

$$f(x_n) = l \tag{173}$$

se il valore converge a 0 posso terminare l'algoritmo, invece, se il valore converge ad un numero $\neq 0$ devo valutare due casi:

$$\begin{cases} [a, x_n] & x_n > 0 \\ [x_n, b] & x_n < 0 \end{cases} \tag{174}$$

6.11.2 Dimostrazione

La dimostrazione del **Teorema di esistenza degli zeri** viene fatta tramite la dimostrazione per *assurdo*. Assumo di avere due successioni a_n e b_n tali che $a_n < b_m$, definisco inoltre un intervallo $[a_n, b_n]$ che si restringe, quindi:

$$[a_n, b_n] > [a_{n+1}, b_{n+1}] \tag{175}$$

L'intervallo si restringe e di conseguenza la prima successione $a_n \to \alpha$, mentre la seconda successione $b_n \to \beta$, inoltre, visto che a_n si sposta verso destra sull'asse delle ordinate posso dire che:

$$1.\ \ a_{n+1} \geq a_n \tag{176}$$

mentre, visto che b_n descresce andando verso sinistra sull'asse delle ordinate posso dire che:

$$2.\ \ b_{n+1} \leq a_n \tag{177}$$

da ciò ne deduco che $\{a_n\}$ è **crescente**, che $\{b_n\}$ è, invero, **decrescente** e che sono ambedue limitate:

$$1.\ \ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{178}$$

$$2.\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \tag{179}$$

assumo, per assurdo che $\alpha \neq \beta$ e di conseguenza che:

$$a_n < \alpha < \beta < b_n \tag{180}$$

inoltre, visto che $\alpha \neq \beta$ posso anche asserire che la differenza tra α e β è un numero l positivo. Utilizzando le due ipotesi dimostrate sopra posso asserire che:

$$b_n - a_n \geq \beta - \alpha = l > 0 \tag{181}$$

adesso si procede andando ad applicare la formula di **bisezione**:

$$|b_n - a_n| = \frac{b - a}{2^{p-1}} \tag{182}$$

Portando questa quantità al limite si osserva che essa converge a 0, d'altro canto però abbiamo anche detto che $b_n - a_n \geq l > 0$, si crea così quindi l'**assurdo**, dal quale si deduce che:

$$\alpha = \beta = c \tag{183}$$

e di conseguenza che entrambe le successioni convergono verso c. Per dimostrare che c equivale a 0, quindi che:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c) = 0 \tag{184}$$

inoltre, un'altra ipotesi fondamentale riguarda la continuità di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Per **Teorema della permanenza del segno** so che:

$$\begin{cases} \{a_n\} < 0 \implies a_n \to \alpha \leq 0 \\ \{b_n\} > 0 \implies b_n \to \beta \geq 0 \end{cases} \tag{185}$$

Dalle condizioni sopracitate sappiamo che $\alpha = \beta = c = 0$.

6.12 Teorema del valori intermedi

Assumiamo di avere una funzione $f(x) \in C([a, b])$, il teorema del valor medio enuncia che: *in un intervallo chiuso [a,b] la funzione associa ogni punto almeno una volta.* L'enunciazione matematica richiede di definire m e M come:

$$\begin{cases} m = \min f \in [a, b] \\ M = \min f \in [a, b] \end{cases} \tag{186}$$

quindi, secondo il teorema:

$$\forall \lambda \in [a, b] \;\; \exists x \in [m, M] \;\mid\; f(x) = \lambda \tag{187}$$

6.12.1 Dimostrazione

Assumo di avere una $f \in C([a, b])$ definendo inoltre il massimo e il minimo. La dimostrazione richiede di ricondurre la funzione ad un caso in cui si riesce ad applicare il **teorema degli zeri**, ad esempio creando una $F(x)$ tale che:

$$1.\;\; F(x) = f(x) - \lambda \tag{188}$$

$$2.\;\; \exists \alpha, \beta \;\mid\; F(\alpha) \cdot F(\beta) < 0 \tag{189}$$

andando a prendere l'intervallo $[\alpha, \beta]$ posso cercare una successione $x_n \to M$ tale che:

$$F(x) = f(x_n) - \lambda = M - \lambda > 0 \tag{190}$$

dalla quale deduco che:

$$\begin{cases} m = \min f = f_m \\ M = \min f = f_M \end{cases} \tag{191}$$

6.13 Secondo teorema dei valori intermedi

Assumiamo di avere una funzione $f \in C(]a, b[)$ e i due estremi:

$$1.\;\; I = \inf{(f)} \tag{192}$$

$$2.\;\; S = \sup{(f)} \tag{193}$$

affinché il teorema sia valido e di conseguenza:

$$\forall \lambda \in [a, b] \;\; \exists x \in]I, S[\;\mid\; f(x) = \lambda \tag{194}$$

6.13.1 Dimostrazione

la dimostrazione richiede di dimostrare che esista un'intervallo chiuso all'interno del quale è possibile applicare il teorema, la dimostrazione richiede l'utilizzo della definizione di **estremo superiore** e di estremo **inferiore**:

- **Estremo superiore**:

$$1.\ f(x) < S \ \ \forall x \in]a, b[\tag{195}$$

$$2.\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \mid \ |x - x_0| < \delta \ \ S - \epsilon < f(x). \tag{196}$$

- **Estremo inferiore**:

$$1.\ f(x) < S \ \ \forall x \in]a, b[\tag{197}$$

$$2.\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \mid \ |x - x_0| < \delta \ \ f(x) < I + \epsilon. \tag{198}$$

Adesso posso asserire che:

$$I < I + \epsilon < f(x) < S - \epsilon < S \tag{199}$$

dal quale ne deduco che:

$$I + \epsilon < f(x) < S - \epsilon \tag{200}$$

adesso ho trovato un intervallo chiuso $[I+\epsilon, S-\epsilon]$ nel quale è possibile applicare il **primo teorema sui valori intermedi**.

6.14 Continuità funzione inversa

Assumiamo di avere una funzione $f \in C([a, b])$ invertibile, allora, da teorema posso dire che anche $g(x) = f^{-1}(x)$ è a sua volta continua e **monotona**.

6.14.1 Dimostrazione

Assumiamo per assurdo che $f(x)$ non sia **monotona**, ciò vorra dire che potrebbero esistere due punti che assumono lo stesso valore, oppure la funzione, in certi intervalli potrebbe prima *crescere* e poi *decrescere*, assumiamo inoltre di avere tre punti x_1, x_2, x_3 tali che:

$$x_1 \leq x_2 \land x_3 \leq x_2 \tag{201}$$

adesso prendiamo un intervallo $[x_1, x_2]$, per teorema del *valor medio* posso asserire che:

$$\exists x_n \ \mid \ f(x_n) = \lambda \tag{202}$$

adesso prendiamo invece l'intervallo $[x_2, x_3]$, per teorema del *valor medio* posso asserire che:

$$\exists x_m \ \mid \ f(x_m) = \lambda \tag{203}$$

Il problema si pone andando a prendere l'intervallo $[x_1, x_3]$ avremmo due punti nei quali $f(x) = \lambda$, da ciò se ne deduce che la funzione non è *biunivoca* e di conseguenza **non invertibile**.

6.15 Limiti di una funzione non continua

Assumiamo ora di avere una funzione **non continua**, definita come:

$$f :]a, b[/\{x_0\} \to \mathbb{R} \tag{204}$$

si cerca di indagare riguardo a cosa succede quando mi avvicino a x_0, costruisco quindi una successione $x_n \to x_0$ ma con $x_n \neq x_0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \tag{205}$$

e di conseguenza, che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists x \in]a, b[\ x \neq x_0 \ \ |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{206}$$

6.15.1 Esempio

Assumiamo di avere una funzione definita a tratti:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq x_0 \\ 3 \ \ x = x_0 \end{cases} \tag{207}$$

andando a fare il limite per $x \to x_0$ otterrei come risultato 2, in quanto non conta dove la funzione va in quel punto, la successione tende e basta senza mai toccare X_0.

6.16 "O-Grande" e "o-piccolo"

Assumiamo di avere due funzioni $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x_1) = \lim_{x \to x_0} f(x_2) = 0 \tag{208}$$

Si dice che $f(x_1) = o(f(x_2))$ o che $f(x_1)$ è un o piccolo di $f(x_2)$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = 0 \tag{209}$$

Si dice che $f(x_1) = O(f(x_2))$ o che $f(x_1)$ è un o grande di $f(x_2)$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = L \tag{210}$$

6.17 Limite da destra e da sinistra

Talvolta per poter calcolare un limite in un punto x_0 è necessario utilizzare due successioni diverse, una successione $x_n \to x_0$ da destra (quindi dai numeri positivi) con $x_n \neq x_0$ e una successione $y_n \to x_0$ da sinistra (dai numeri negativi) con $y_n \neq x_0$.
Si definisce come **limite da destra**:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \tag{211}$$

Il quale implica che:

$$f :]a, b[/\{x_0\} \to \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ | \ \ |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{212}$$

con $x > x_0$.
Si definisce come **limite da sinistra**:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \tag{213}$$

il quale implica che:

$$f :]a, b[/\{x_0\} \to \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ | \ \ |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{214}$$

con $x < x_0$.

6.18 Discontinuità di prima specie

Assumiamo di avere una funzione definita a tratti della forma:

$$\begin{cases} e^x & x < 0 \\ \sin x & x \geq 0 \end{cases} \tag{215}$$

Per dimostrare che la funzione è continua è necessario andare a analizzare cosa succede nel punto $x_0 = 0$, in particolare deve essere dimostrato che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = f(x_0) \tag{216}$$

osservando la funzione ci si accorge immediatamente del fatto che questa condizione non viene rispettata, in particolare:

$$\lim_{x \to x_0^+} e^{x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \sin(x_0) = \sin(x_0) \tag{217}$$

dalla quale si ottiene:

$$1 = 0 = 0 \tag{218}$$

e di conseguenza la funzione non è continua in x_0, in partcolare, in x_0 si dice che è presente un *punto di discontinuità di prima specie*.
Si definisce *punto di discontinuità di prima specie* un punto nel quale vale la seguente relazione:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x_0) \tag{219}$$

6.18.1 Discontinuità di seconda specie

Si ha una discontinuità di seconda specie quando andando a prendere una successione $b_n \to x_0^+$ e una successione $a_n \to x_0^-$ con a_n e $b_n \neq x_0$ ottengo che uno dei due limiti diverge verso ∞:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(a_n) = \pm\infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(b_n) = \pm\infty \tag{220}$$

6.19 Discontinuità di terza specie

Si ha una discontinuità di terza specie quando andando a prendere una successione $b_n \to x_0^+$ e una successione $a_n \to x_0^-$ con a_n e $b_n \neq x_0$ ottengo che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(a_n) = \lim_{x \to x_0^+} f(b_n) \neq f(x_0) \tag{221}$$

6.20 Rapporto incrementale

Si definisce come **rapporto incrementale** il *coefficente angolare* della retta secante passante per due punti. Il *coefficente angolare* viene calcolato mediante la formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x+h)}{h} \tag{222}$$

Se il *coefficente angolare* della retta è **positivo** allora la funzione è **crescente**, altrimenti, se il *coefficente angolare* della retta è **negativo**, la funzione è **decrescente**. In particolare possiamo distunguere quattro casi:

- **Funzione strettamente crescente**:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \tag{223}$$
- **Funzione strettamente decrescente**:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \tag{224}$$
- **Funzione crescente**:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \tag{225}$$
- **Funzione decrescente**:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in D \tag{226}$$

7 Dimostrazioni continuità delle funzioni

7.1 Continuità di $\sin x$

La dimostrazione di questo teorema parte dalla seguente desuguaglianza:

$$0 \;\leq\; sin(x) \;\leq\; x \tag{227}$$

adesso applico il valore assoluto da ambo le parti:

$$0 \;\leq\; |sin(x)| \;\leq\; |x| \;\; x \;\in\; \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right] \tag{228}$$

la quale può anche essere riscritta come:

$$0 \;\leq\; |\sin(x) - \sin(0)| \;\leq\; |x - 0| \tag{229}$$

dalla quale ne derivo che

$$0 \;\leq\; |\sin(x) - \sin(0)| \;\leq\; |x - 0| < \delta \tag{230}$$

visto che $|f(x) - f(x_0)$ deve essere minore o uguale di $|x - x_0|$ il quale a sua volta minore o uguale di δ posso dire che:

$$\delta \;=\; \epsilon \tag{231}$$

Adesso applico la seguente formula:

$$\sin(x) - \sin(y) \;=\; 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{232}$$

Applico il valore assoluto a tutti i membri:

$$|\sin(x) - \sin(y)| \;=\; 2 \;\cdot\; \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \;\cdot\; \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \tag{233}$$

Sapendo che il $\cos x$ può al massimo tendere verso 1 posso dire che:

$$2 \;\cdot\; \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \;\cdot\; \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2 \;\cdot\; \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \tag{234}$$

dal passaggio (129) posso asserire che:

$$\sin(x) - \sin(y) \;\leq 2 \;\cdot\; \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \tag{235}$$

inololtre, sfruttando l'ipotesi $|\sin x| < |x|$ posso scrivere:

$$2 \;\cdot\; \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2 \;\cdot\; \left|\frac{x-y}{2}\right| \;\; con \;\; \left|\frac{x-y}{2}\right| < \frac{\pi}{2} \tag{236}$$

Facendo le dovute semplificazioni posso dire che:

$$|\sin(x) - \sin(y)| < 2 \;\cdot\; \left|\frac{x-y}{2}\right| \;\;=\;\; |x-y| \tag{237}$$

Dalla condizione (...) so che:

$$|\sin(x) - \sin(y)| < |x-y| < \epsilon \tag{238}$$

Sapendo che $|x - x_0|$ potrebbe essere sia minore di δ che di π, di conseguenza è sufficente prendere come ϵ:

$$\min(\delta, \pi) \tag{239}$$

Da questa dimostrazione è possibile dimostrare che ogni altra funzione trigonometrica è continua su $\mathbb{R}$

7.2 Continuità di x^2

7.3 Continuità di funzione a tratti

Assumiamo di avere una funzione del tipo:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \;\; x > 0 \\ 1 \;\; x = -10^{10} \end{cases} \tag{240}$$

Ora, verifichiamo se la funzione è continua in $x_0 = -10^{10}$. Applichiamo quindi la definizione di funzione continua:

$$\forall \exists > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; | \;\; |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \tag{241}$$

Prendo quindi un $0 < \delta < \dfrac{1}{2 \cdot 10^{10}}$, di conseguenza ogni x deve distare da x_0 un valore minore di $\delta = \min(\epsilon, \dfrac{1}{2 \cdot 10^{10}})$. Assumiamo di avere una successione $\{x_n\} \to \overline{x}$ tale che:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\overline{x}) \tag{242}$$

Visto che $x_n \to \overline{x}$ posso dedurre che:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; |x_n - \overline{x}| < \epsilon \tag{243}$$

Analizzando bene come è strutturata la successione noto che essa è composta solo da un punto, di conseguenza è un *punto isolato* e quindi la funzione è continua in quel punto.

8 Dimostrazioni Limiti notevoli

8.1 Dimostrazione $\sin \frac{1}{n}$

La tesi che dobbiamo dimostrare è la seguente:

$$\lim_{n \to \infty} \sin \left(\frac{1}{n} \right) = \sin(0) = 0 \tag{244}$$

in generale, astraendo il concetto, devo dimostrare che:

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} a_n \right) \tag{245}$$

La dimostrazione avviene per via trigonometrica, assumiamo di avere un circonferenza di raggio unitario della forma:

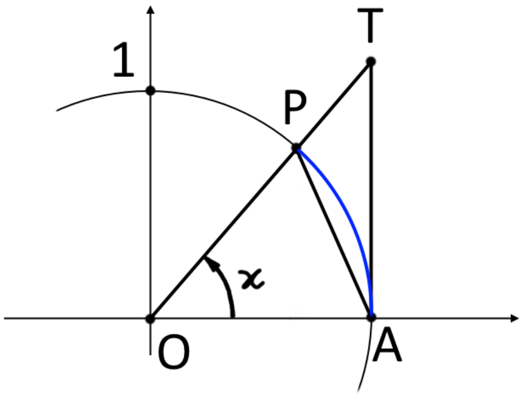


Figure 4: Grafico dimostrazione

Tracciamo la lineare perpendicolare $\overline{Ph}$ a P che si congiunge con il segemento $\overline{OA}$, per definizione sappiamo che $\overline{Ph} = \sin x$ di conseguenza l'area del triangolo $(OAPA)$ sarà uguale a:

$$\overset{\triangle}{OPA} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{Ph}}{2} = \frac{\sin x}{2} \tag{246}$$

osservando il grafico posso asserire anche un'altra cosa:

$$\overset{\triangle}{OPA} \leq OAP \tag{247}$$

dove AOP indica l'area della circonferenza compresa all'interno dell'arco di circonferenza; Per conoscere l'area di quest'area è possibile applicare il seguente rapporto:

$$\frac{A(OPA)}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi} \tag{248}$$

Il rapporto in questione esplica che: *l'area della porzione di circonferenza racchiusa tra l'arco sta a l'area della circonferenza come x sta a 2π.* Semplificando un π da ambo le parti ottengo:

$$\frac{A(OPA)}{r^2} = \frac{x}{2} \tag{249}$$

essendo una circonferenza unitaria il raggio della circonferenza è uguale ad 1, di conseguenza:

$$A(OPA) = \frac{x}{2} \tag{250}$$

applicando nuovamente la diseguaglianza $\overset{\triangle}{OPA} \leq OAP$ posso dedurre che:

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \iff \sin x \leq x \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\tag{251}$$

adesso procedo a sostiture $x = \frac{1}{n}$:

$$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \tag{252}$$

Sapendo che $\frac{1}{n}$ tende a 0, deduco che il $\sin a_n$ risiede tra due quantità che tendono a valori vicini lo zero, di conseguenza, applicando il **teorema del confronto** posso asserire che la tesi iniziale è vera.

8.2 Limite frazione del seno

La tesi che dobbiamo dimostrare è la seguente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \tag{253}$$

Analizzando l'epressione andando a calcolare il valore dei due limiti singoli mi trovo in una situazione del tipo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0} = F.I. \tag{254}$$

Non è possibile dunque ricorrere al passaggio al limite, l'unico modo per dimostrare che tutto il limite converge verso 1 equivale a dimostrare che i due membri convergono verso 0 alla stessa velocità. Per dimostrarlo è sufficente tornare al caso base:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin x}{x} \tag{255}$$

La dimostrazione, anche in questo caso, avviene per via trigonometrica, assumiamo di avere un circonferenza di raggio unitario della forma: Sfruttando la precedente dimostrazione so che vale la

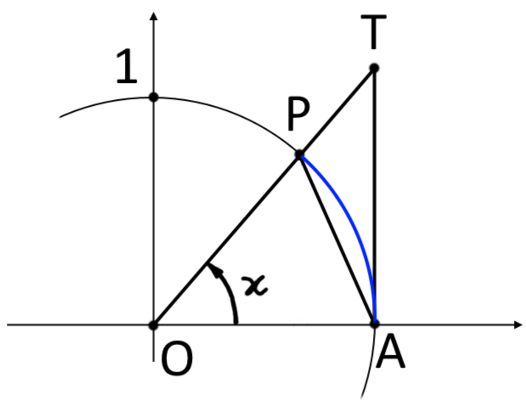


Figure 5: Grafico dimostrazione

seguente relazione:

$$A(\overset{\triangle}{APO}) \leq A(AOP) \leq A(\overset{\triangle}{ATO}) \tag{256}$$

Analizzando in particolare l'ultimo membro della diseguaglianza posso asserire che:

$$A(\overset{\triangle}{ATO}) = \frac{\tan x}{2} \tag{257}$$

adesso, facendo le dovute sostituzioni posso dire che:

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \iff \sin x \leq x \leq \tan x \tag{258}$$

Mediante un passaggio algebrico divido per $\sin x$ ogni membro:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \tag{259}$$

per dimostrare che il membro centrale della disuguaglianza tende a 1 devo prima dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos x} = 1 \tag{260}$$

per dimostrarlo posso innanzitutto applicare il **teorema fondamentale della trigonometria**:

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1 \implies \cos x = \sqrt{1 - \sin x^2} \tag{261}$$

come nell'esempio precendente sostituisco ad x la successione $a_n = \frac{1}{n}$:

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{262}$$

Applicando il limite notevole $\sin\frac{1}{n} \to 1$ posso dimostrare che tutta la radice tende a 1, dimostrando consequenzialmente che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} = 1 \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\tag{263}$$

adesso, sfruttando il teorema del confronto posso confermare la tesi iniziale, di conseguenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \tag{264}$$

Caso speciale è possibile anche dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{a_n}{n}\right)}{\frac{a_n}{n}} = 1 \tag{265}$$

8.3 Limite di π

Il simbolo π in matematica viene utilizzato per indicare il numero PiGreco, esso risulta di fondamentale importanza per il calcolo della circonferenza, dell'area e del volume di ogni solido di rotazione. A riguardo di questo numero vale la seguente proprietà

$$\pi \in \mathbb{C} \tag{266}$$

Se si andasse ad analizzare il π come valore numerico, otteremmo un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola non esprimibile sotto forma di frazione, consequenzialmente a ciò se ne deduce che esso non fa parte dell'insieme dei numeri $\mathbb{R}$.
π può inoltre essere espresso sottoforma di *successione* vista la presenza di infiniti termini. Vi è la possibilità di far convergere verso il valore di 2π due limiti:

$$1. \lim_{x\to\infty} 2^{(n+1)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \tag{267}$$

$$2. \lim_{x\to\infty} 2^{(n+1)} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \tag{268}$$

Se si volesse utilizzare un'altra formula più "avanzata" si dovrebbe usare al formula di *Leibniz*.

8.3.1 Dimostrazione

Per dimostrare questa formula occorre partire da una dissertazione di stampo geometrico:

1. Assumiamo di avere un cerchio di raggio unitario 1, un poligono inscritto di n lati e un ulteriore poligono circoscritto, sempre di n lati, da ciò deduciamo che se il numero di lati raddoppia:
   (a) Il perimetro del nostro poligono inscritto aumenta convergendo sempre di più verso il perimetro della circonferenza.
   (b) Il perimetro del nostro poligono circoscritto diminuisce convergendo sempre di più verso il perimetro della circonferenza.
2. Dal precedente punto posso ricavare che il perimetro della circonferenza è compreso tra l'area del poligono inscritto e del poligono circoscritto, nello specifico si applica la seguente relazione:

$$\prod_n < 2\pi < \prod_N \tag{269}$$

   dove $\prod_n$ indica il perimetro del poligono inscritto e $\prod_N$ indica il perimetro del poligono circoscritto
3. A questo punto posso svilupppare la circonferenza dei due poligoni
   (a) Area circonferenza inscritta:

$$\prod_n = n \cdot \overline{AB} = 2n \cdot \overline{Ah} = 2n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{270}$$

   (b) Area circonferenza circoscritta:

$$\prod_N = n \cdot \overline{PQ} = 2n \cdot \overline{PB} = 2n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{271}$$

4. Osservo dove converge il primo limite:

$$\lim_{x\to\infty} 2n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} 2\pi \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \tag{272}$$

5. Osservo dove converge il secondo limite:

$$\lim_{x\to\infty} 2n\cdot\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\pi}{\pi} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} 2\pi\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 2\pi\cdot 1\cdot 1 = 2\pi \tag{273}$$

In questo modo ho potuto dimostrare che sia la circonferenza del poligono inscritto (9) e del poligono circoscritto (10) convergono verso 2π

8.4 Limite di Nepero

Il numero di Nepero, indicato come e appartiene ad un gruppo di numeri identificati come *numeri trascendenti*; In matematica un numero trascendente è un numero irrazionale che non è un *numero algebrico*, ossia non soluzione di nessuna equazione polinomiale. Come anche π il numero di Nepero ha la seguente proprietà:

$$e \in \mathbb{C} \tag{274}$$

Inoltre, sempre come π anche il numero di Nepero è una successione del tipo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ il cui limite esiste ed è *convergente* verso e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{275}$$

8.4.1 Dimostrazione

La dimostrazione di questo limite richiede di dimostrare che la successione è *monotona crescente* e che vi è l'esistenza di un estremo superiore, in modo che valga la seguente relazione:

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \sup(a) = e \tag{276}$$

Per far si che una funzione sia crescente e che essa abbia un estremo superiore devono verificarsi contemporaneamente due condizioni:

$$1.\forall x_1,\ x_2 \in D \mid x_1 \neq x_2\ \ a_n < a_{n+1} \tag{277}$$

$$2.\exists M \in \mathbb{N} \mid \forall n \in D\ \ a_n < M \tag{278}$$

Per dimostrare che essa è *monotona crescente* devo applicare la disuauglianza di Bernoulli dimostrando che

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)$$
$$= \frac{\left(\frac{(n-1)(n-1)}{n^2}\right)}{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = \left(\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n \geq 1 \tag{279}$$

Ora devo procedere considerando la successione b_n e dimostrando che essa è *monotona decrescente*, cioè che:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \tag{280}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \tag{281}$$

essendo però

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \geq 1 + \frac{1}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n} \tag{282}$$

ne deduco che, essendo $b_n < b_{n-1} \implies b_n < 4 \forall n \in \mathbb{N}$ ed essendo inoltre $a_n < b_n$ ne deduco che:

$$2 < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < 4 \implies 2 < a_n < 4 \tag{283}$$

Dalla dimostrazione precedente (8) risulta che a_n converge ad e per difetto, mentre b_n converge ad e per eccesso. Il problema di questo metodo è l'estrema lentezza dovuta al fatto che per quanto si possa prendere un n grande lo scarto tra a_n e b_n risulta sempre grande:

$$|b_n - a_n| = b_n\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{4}{n+1} \tag{284}$$

8.5 Dimostrazione limite esponenziale

L'ipotesi che dobbiamo dimostrare è la seguente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{285}$$

Andando a fare un semplice passaggio al limite si arriverebbe ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, la dimostrazione richiede quindi di dimostrare che $e^x - 1$ converge a 0 velocemente quanto x e di conseguenza che $e^x - 1 = O(x)$.

8.5.1 Dimostrazione

Per dimostrare la funzione utilizzo un cambio di variaibile, assumo quindi di avere una funzione $y \to 0$ con $y = e^x - 1$, adesso però è necessario portare tutto in funzione di x in modo da sostituirla nella frazione:

$$y = e^x - 1 \implies e^x = y + 1 \implies x = \ln(y+1) \tag{286}$$

la frazione può essere riscritta come:

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{ln(y+1)} \tag{287}$$

per poterlo dimostrare devo utilizzare un altro limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{288}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} \tag{289}$$

adesso si procede sostituendo $y = x + 1 \implies x = y - 1$ e riscrivendo il tutto si ottiene:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y-1} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \cdot \frac{1}{\left(\frac{y}{y-1}\right)^{1}} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \cdot \left(\frac{y-1}{y}\right)^{1} = \\ \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{1} \tag{290}$$

Analizziamo adesso ogni singolo membro:

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{1} \to 1 \tag{291}$$

di conseguenza posso riscrivere soltanto:

$$\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \tag{292}$$

8.6 limite $\frac{\ln(1+x)}{x}$

L'ipotesi che va dimostrata è la seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{293}$$

8.7 Dimostrazione

Per definizione è noto che:

$$\lim_{n\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \tag{294}$$

il quale implica che:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{295}$$

passando ai logaritmi si ottiene che:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \tag{296}$$

se si pone la seguente condizione:

$$y = \frac{1}{x} \quad y \to 0^{\pm} \tag{297}$$

si ottiene che:

$$\lim_{y\to 0^{\pm}} \frac{\log(y+1)}{y} = 1 \tag{298}$$

8.8 Dimostrazione $\frac{(1+x)^c-1}{x} = c$

L'ipotesi che va dimostrata è la seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^c-1}{x} = c \tag{299}$$

9 Derivate

Dal concetto di rapporto incrementale, esprimibile come:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x+h)}{h} \tag{300}$$

In particolare potrei dire che più h diventa piccolo, quindi, tanto più x si avvicina ad x_0 tanto più i due punti si avvicineranno:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{301}$$

se questo limite converge ad un valore posso asserire di aver trovato la *derivata prima* calcolata in x_0, la quale può anche essere espressa come:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \tag{302}$$

9.1 Continuità e derivabilità

Vi è una relazione che esiste tra la continuità di una funzione e la derivabilità, se una funzione è derivabile in un intervallo $[a, b]$ allora sarà anche continua nel suddetto intervallo, non vale però il contrario. Inoltre vale anche che, se una funzione è continua e derivabile non è detto che la sua derivata sia a sua volta continua.

9.2 Derivata della somma

Assumiamo di avere due funzioni f, g continue e derivabili in x_0, posso definire come derivata della somma, *la somma delle singole derivate*:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{303}$$

9.2.1 Dimostrazione

Andiamo a fare il rapporto incrementale dei membri:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0)
\end{aligned} \tag{304}$$

9.3 Derivata del prodotto

Assumiamo di avere due funzioni f, g continue e derivabili in x_0, posso definire come derivata del prodotto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{305}$$

9.3.1 Dimostrazione

: Andiamo a fare il rapporto incrementale dei membri:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}
\end{aligned} \tag{306}$$

Analizzando i singoli fattori si ottiene che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} = f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0) \tag{307}$$

Il motivo per cui è stato portato $f(x_0)$ fuori dal limite deriva dal fatto che esso è un numero e di conseguenza per le proprietà dei limiti è possibile portarlo fuori.
Il secondo fattore invece:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)f'(x_0) \tag{308}$$

$g(x_0)$ non è un elemento problematico, l'importante è che sia continuo in x_0.

9.4 Derivata del rapporto

Assumiamo di avere due funzioni f, g continue e derivabili in x_0, posso definire come rapporto delle derivate:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(x\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{309}$$

9.4.1 Dimostrazione

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)-\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\right)}{x-x_0} \\
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} \\
\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)(f(x_0)-f(x))}{x-x_0} \\
\frac{1}{g(x_0)^2}(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))
\end{gathered} \tag{310}$$

9.5 Derivata di funzioni composte

Assumiamo di avere due funzioni f, g continue e derivabili in x_0, le quali rispettano le regole delle funzioni composte, posso definire come definire come derivata della funzione $f(g(x))$:

$$f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{311}$$

9.5.1 Dimostrazione

Applichiamo la definizione di rapporto incrementale:

$$\begin{gathered}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \\
\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}
\end{gathered} \tag{312}$$

adesso procedo attuando un cambio di variabile al primo membro:

$$g(x) = y \implies g(x_0) = y_0 \tag{313}$$

adesso riscrivo il limite come:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \tag{314}$$

Analizzando il primo membro ne ricavo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0)) \tag{315}$$

Ricavo inoltre che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \tag{316}$$

9.6 Derivate di funzioni pari e dispari

: Assumiamo di avere una funzione, la quale può essere:

- Pari: $f(-x) = f(x)$.
- Dispari: $f(-x) = -f(x)$.

dalle derivate sulle funzioni composte ricavo inoltre che:

$$[f(-x)]' = -f^{(1)}(-x) \tag{317}$$

a questo punto:

- se $f(x)$ è pari allora:

  $$[f(x)]' = [f(-x)]' \implies f'(x) = -f'(-x) \tag{318}$$

  la derivata sarà quindi **dispari**.
- se $f(x)$ è dispari allora:

  $$[f(-x)]' = [-f(x)]' \implies -f'(x) = -f'(-x) \tag{319}$$

  la derivatà sarà quindi **pari**.

9.7 Retta tangente

Dalla definizione di **rapporto incrementale** è stato postulato che, portando al limite il rapporto si riesce a determinare il coefficente angolare della retta tangente al grafico della funzione passante per il punto $P = (x_0, f(x_0)$, il problema deriva dal fatto che questa definizione non è sempre valida, prendiamo come esempio la funzione:

$$f(x) = \cos x \tag{320}$$

andando a disegnare il grafico si nota subito che ogni possibile retta interseca il grafico in infiniti punti.
Si procede analizzando il fascio di punti passante per $P = (x_0, f(x_0)$:

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) \implies f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) \tag{321}$$

Inoltre, per definizio so che:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x_0) \to 0 \\ &x - x_0 \to 0 \end{aligned} \tag{322}$$

Affinché però il limite converga a 0 devo far si che $f(x) - f(x_0)$ vada a 0 più velocemente che $x - x_0$, esprimendolo in termini matematici, voglio che:

$$f(x) - f(x_0) = o(x - x_0) \tag{323}$$

e di conseguenza che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{324}$$

Si procede con le dovute sostituzioni ottenendo che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) +]}{x - x_0} - m = 0 \implies f'(x_0) = m \qquad (325)$$

da questa relazione ricavo che la retta tangente è la retta che meglio approssima il grafico di $f(x)$ vicino al punto x_0:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x) + \omega(x, x_0) \qquad (326)$$

dove $\omega(x, x_0)$ indica una qualsiasi funzione che riduce a 0 l'errore di approssimazione tra retta tangente e grafico.

9.8 Invertibilità della funzione derivata

Assumiamo di avere una funzione $f(x)$ tale che, avendo una $g(x)$ ho la seguente relazione

$$f(x) = g^{-1}(x) \qquad (327)$$

posso definire come derivata della funzione inversa la seguente relazione:

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(x_0)} \qquad (328)$$

9.8.1 Dimostrazione

Dalle relazioni della funzione inversa ricavo che:

$$\begin{gathered} f(g(x)) = x \\ f(g(x_0) = x_0 \end{gathered} \qquad (329)$$

applicando la formula del rapporto incrementale si determina che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \qquad (330)$$

mediante cambio di variabile pongo la seguente condizione:

$$y = f(g(x)) \qquad (331)$$

che andando a sostituire nella seguente disuguaglianza mi porta ad avere:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)} = \frac{1}{g'(x_0)} \qquad (332)$$

9.9 Teorema di Fermat

Supponiamo di avere:

- **una funzione** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **un punto** $x_0 \in]a, b[$.
- **il punto** x_0 equivalente ad un punto di massimo o di minimo (*relativo o assuluto*):
  - punto di **massimo assoluto**:

$$\forall x \in [a, b] \;\; f(x) < f(x_0) \qquad (333)$$

  - punto di **massimo relativo**:

$$\exists \delta | \;\; f(x_0) > f(x) \;\; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\qquad (334)$$

  invertendo i segni si trova le definizione di punto di minimo relativo o assoluto.
- la **funzione derivabile** nell'intervallo $[a, b]$

se queste condizioni sono verificate posso asserire che:

$$f'(x_0) = 0 \qquad (335)$$

9.9.1 Dimostrazione

Per prima ipotesi si osserva che $f(x)$ è derivabile in x_0 vale la seguente condizione:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \tag{336}$$

assumiamo adesso che x_0 sia un punto di massimo relativo e quindi, per definizione sappiamo che:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \tag{337}$$

in quanto andando a spostarci sull'asse delle ascisse si trovernno valori della funzione più piccoli di quelli assunti da $f(x_0)$, adesso va divisa la disuguaglianza per h ottenendo:

- se $h > 0$:

$$1.\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \tag{338}$$

- se $h \leq 0$:

$$2.\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \tag{339}$$

adesso si porta al limite entrambe le frazioni:

$$\begin{aligned} &1.\ \lim_{x \to h} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \\ &2.\ lim_{x \to h} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \end{aligned} \tag{340}$$

le quali non sono altro che il limite destro e sinistro della derivata, i quali per ipotesi devono coincidere:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \tag{341}$$

inoltre sapendo che:

$$f'_+(x_0) \leq 0 \wedge f'_-(x_0) \geq 0 \tag{342}$$

può solo valere che:

$$f'(x_0) = 0 \tag{343}$$

9.9.2 Il teorema vale senza ipotesi ?

9.10 Teorema di Rolle

Il teorema di Rolle si lega al teorema di Lagrange, esso parte da tre presupposti:

- Funzione **continua** nell'intervallo $[a, b]$:

$$f \in C([a, b]) \tag{344}$$

- Funzione **derivabile** in $]a, b[$
- La funzione calcolata nei due estremi dell'intervallo deve essere uguale:

$$f(a) = f(b) \tag{345}$$

se queste condizioni sono rispettate allora posso asserire che:

$$\exists c \in [a, b] \ \mid \ f'(c) = 0 \tag{346}$$

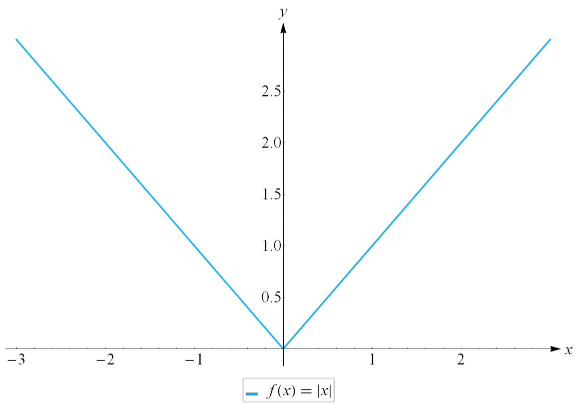


Figure 6: Grafico valore assoluto

9.10.1 Il teorema vale senza ipotesi ?

Assumiamo che la terza ipotesi non sia valida e di conseguenza che la $f(a) \neq f(b)$, il fatto che la funzione non debba tornare al valore del primo estremo implica che non necessariamente la funzione assumerà zero come valore, prendiamo ad esempio la funzione $f(x) = x$ con $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, andando a disegnare il grafico, si può osservare come i due estremi siano diversi e di conseguenza la funzione non necessariamente assumerà zero come valore nell'intervallo.
Assumiamo adesso che la seconda ipotesi non sia più valida e che quindi la funzione non sia derivable nell'intervallo $[a, b]$, prendiamo come esempio la funzione $|x|$: Andando a calcolare la derivata in zero ci si accorge che essa non esiste, il problema di questa funzione deriva dal fatto che la **continuità** non implica necessariamente la **derivabilità** di una funzione. D'altro canto però la **derivabilità** implica la **continuità** di una funzione nel punto.

9.10.2 Dimostrazione

Assumiamo di avere una funzione $f \in C([a, b])$, per enunciato del teorema di **Weierstrass** posso asserire che:

$$1.\ \exists m \in [a, b] \ \mid \ f(m) = \min f \tag{347}$$

$$2.\ \exists M \in [a, b] \ \mid \ f(M) = \max f \tag{348}$$

se $x_m \in]a, b[$ possiamo di certo asserire che:

$$\exists c = x_m \in]a, b[\ \mid \ f'(c) = 0 \tag{349}$$

se invece $x_m = a$ oppure $x_m = b$ si controlla x_M, se $x_M \in]a, b[$ si è sicuri che:

$$f'(x_M) = 0 \tag{350}$$

se invece $x_m = a$ e $x_M = b$ o vicerversa, si può asserire che:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \tag{351}$$

applicando l'ipotesi $f(a) = f(b)$ ne risulta che:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(a) \tag{352}$$

e di conseguenza che $f(x) = f(a)$, il che implica che f sia costante e di conseguenza che $f'(x) = 0$.

9.11 Teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange è un teorema derivato dal teorema di Rolle, secondo questo teorema, se vengono rispettate alcune ipotesi:

- Funzione **continua** nell'intervallo $[a,b]$:

$$f \in C([a,b]) \tag{353}$$

- f derivabile nell'intervallo $]a,b[$

posso asserire che:

$$\exists c \in]a,b[\;\mid\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{354}$$

in altre parole, è possibile trovare all'interno dell'intervallo un punto la cui derivata nel punto sia uguale al coefficente angolare della retta secante passante per gli estremi.

9.11.1 Cosa succede senza ipotesi ?

Valutiamo ora cosa succede nel caso in cui le condizioni del teorema di Fermat non siano rispettate

- **Funzione non continua**

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{355}$$

- **Funzione non differenziabile**

$$f(x) = |x| \tag{356}$$

- **Funzione su intervallo chiuso**

$$x^2 \in [0,1] \tag{357}$$

- **Funzione illimitata**

$$\ln(x) \in]0,1] \tag{358}$$

- **Funzione definita a tratti**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{359}$$

9.12 Primo corollario teorema di Lagrange

Se sono rispettate le condizioni per il teorema di Lagrange si può asserire che, se $f'(x) = 0$ allora f è costante.

9.12.1 Dimostrazione

Prendiamo una qualsiasi $x_0 \in]a,b]$ e andando ad applicare il teorema di lagrange nell'intervallo $]a,x_0[$ si ha che:

$$lim_{x_0 \to a} \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = f'(c) = 0 \tag{360}$$

applicando l'ipotesi iniziale ricavo che $f(a) = f(x) = 0$.

9.13 secondo corollario teorema di Lagrange

Se $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in]a,b[$ allora posso asserire che f è crescente nell'intervallo.

9.13.1 Dimostrazione

Per definizione una funzione si definisce come crescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D \;\; x_1 < x_2 \;\; f(x_1) \leq f(x_2) \tag{361}$$

Si procede studiando:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{362}$$

in particolare, applicando **Lagrange** sull'intervallo $[x_1,x_2]$ posso asserire che, se rispettate le condizioni:

$$\exists c \in]x_1,x_2[\;\mid\; f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{363}$$

9.14 Condizione per massimi e minimi

Assumiamo di avere una f derivabile in $[a, b]$, con un punto di massimo e di minimo interno, per definizione so che esiste un punto in corrispondenza del minimo o del massimo tale che:

$$f'(x_0) = 0 \tag{364}$$

A questo punto, se esso è un punto di minimo posso dimostrare che:

$$\begin{aligned} &\exists\delta \mid f'(x) < 0 \;\; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ &\exists\delta \mid f'(x) > 0 \;\; \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\end{aligned} \tag{365}$$

e di conseguenza che f è strettamente decrescente per $x < x_0$ e strettamente crescente per $x > x_0$. D'altro canto, se esso è un punto di massimo posso dimostrare che:

$$\begin{aligned} &\exists\delta \mid f'(x) > 0 \;\; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\\ &\exists\delta \mid f'(x) < 0 \;\; \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\end{aligned} \tag{366}$$

e di conseguenza che f è strettamente crescente per $x < x_0$ e strettamente decrescente per $x > x_0$.

9.15 Derivata seconda

Assumiamo di avere una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, per definizione la derivata viene calcolata come:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{367}$$

lo stesso procedimento può essere applicato altre n volte, ottenendo così la derivata n-esima:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \tag{368}$$

9.16 Continuità della derivata

Assumiamo di avere una $f \in C([a, b])$ e derivabile in $]a, b[/\{x_0\}$, posso asserire che vale la seguente implicazione:

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = L \implies f'(x) = L \tag{369}$$

calcolare la derivata da destra e da sinistra per permette di definire il valore di una derivata in un punto in cui essa non è definita
Se la condizione sopracitata risulta essere falso si può certamente asserire che la **f non è derivabile** in x_0.

9.17 Approssimazione tramite derivata

Assumiamo di avere una $f(x) = \sqrt{x}$ e di voler calcolare il valore di, ad esempio, $f(81, 1) = \sqrt{81, 1}$ posso applicare la definizione di teorema di lagrange:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{370}$$

adesso tramite opportune trasformazioni posso asserire che:

$$f(b) = f(a) - f'(c)(b - a) \tag{371}$$

assumiamo adesso che $b = 81, 1$ e che $a = 81$ (la radice reale più vicina), posso scrivere:

$$\sqrt{81, 1} - 9 = \frac{0, 1}{2\sqrt{c}} \tag{372}$$

Sempre definizione del teorema di Lagrange so per certo che:

$$81 < c < 81,1` \tag{373}$$

Di conseguenza il caso peggiore in cui si può incappare è quello nel quale c si avvicina molto ad 81,1 e di conseguenza:

$$0 < \sqrt{81} - 9 = \frac{0,1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{9} =` \frac{1}{180} \tag{374}$$

avendo quindi un approssimazione minore di $\frac{1}{180}$ posso dire di avere un valore molto vicino a quello cercato.
In generale posso dire che data una $f(x_0)$ tale che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(C) \tag{375}$$

posso asserire che:

$$0 < |c - x_0| < |x - x_0| \implies f'(c)|x - x_0| \leq M|x - x_0| \tag{376}$$

con M definito come massimo della funzione nell'intervallo $[a, b]$

9.18 Teorema di Cauchy

Siano f, g funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$, allora esiste un punto c interno ad $]ab, b[$ tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{377}$$

9.19 Teorema De L'Hopital

Siano $f(x), g(x)$ funzioni continue in un intorno di x_0, supponiamo inoltre che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \tag{378}$$

con $L = 0, \pm\infty$, in particolare, se:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni **derivabili** nell'intervallo di x_0.
- $g'(x) \neq 0$ nell'intorno di x_0.

e se esiste il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{379}$$

allora esiste anche il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{380}$$

uguale al limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{381}$$

9.20 Serie di Taylor

Si definisce come **Serie di Taylor** un meccanismo di approssimazione mediante il quale è possibile trovare una funzione $\phi(x_0)$ che si comporta, con una certa precisione, come la funzione nel punto x_0, essa viene definita come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{382}$$

è importante però che siano rispettate due condizioni fondamentali:

- $f \in C^n([a, b])$.
- $x_0 \in [a, b]$.

9.20.1 Dimostrazione

Quando è stata indagato il concetto di retta tangente essa è stada definita come *la retta che meglio approssima la funzione nel punto* x_0, definita anche come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{383}$$

Potrebbe venire naturale credere che approssimando mediante l'uso di una parabola si potrebbe ottenere un approssimazione migliore. Prendiamo quindi una parabola del tipo:

$$f(x) = ax^2 + by + c \tag{384}$$

Adesso procedo cercando la parabola che meglio approssima la mia curva:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c \tag{385}$$

porto tutto al limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + f(x_0)}{(x - x_0)^2} \tag{386}$$

a questo punto applico l'**Hopital** ottenendo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0) - (2a(x - x0) + b}{2(x - x_0)} \tag{387}$$

il denominatore tende verso zero, anche il fattore $2a(x - x_0)$ tende a sua volta verso zero, da ciò ne deduco che per far convergere anche il resto del numeratore verso zero deve valere la relazione:

$$f'(x_0) = b \tag{388}$$

adesso applicando le dovute sostituzioni si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}{(x - x_0)^2} \tag{389}$$

DA CONTINUARE.

9.21 Condizione per massimi e minimi con derivate successive

Assumiamo di avere una $f(x) \in C^n([a, b])$, assumiamo inoltre, di avere un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che:

1. $f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ (390)
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (391)

allora possiamo asserire che:

- se il grado di n è **pari**:
  - se $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di **minimo** locale.
  - se $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di **massimo** locale.
- se il grado di n è **dispari** x_0 è un punto di flesso.

è importante precisare che esse sono condizioni sufficenti, ma non necessarie al verificarsi dell'ipotesi.

9.21.1 Dimostrazione

Supponiamo di avere una $f(x) \in C^2([a,b])$, supponiamo inoltre, di avere un punto $x_0 \in]a,b[$ tale che:

$$1.\ f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{392}$$

$$2.\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \tag{393}$$

posso applicare lo sviluppo di Taylor fino al grado *n-esimo*:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \tag{394}$$

per ipotesi so che $f^{(1)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e di conseguenza l'espressione può essere riscritta come:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_2(x, x_0) \tag{395}$$

porto $f(x_0)$ dall'altra parte:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + R_2(x, x_0) \tag{396}$$

e porto in evidenza una $(x-x_0)^n$:

$$(x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{2} + \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} \right] \tag{397}$$

suppongo adesso $f^{(n)}(x_0) > 0$ e n pari, allora, dalla formula posso ricavare che:

$$\begin{aligned} &1.\ (x-x_0)^n > 0. \\ &2.\ \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^2} > 0 \end{aligned} \tag{398}$$

di conseguenza:

$$f(x) - f(x_0) > 0 \implies f(x) > f(x_0) \tag{399}$$

da questa disequazione si deduce che x_0 è un punto di minimo locale.
Invertendo il ragionamento si arriva anche alla definizione per il punto di massimo locale.

9.22 Punti di flesso

Attraverso l'uso della $f^{(2)}(x)$ è possibile calcolare anche la concavità della funzione identificando i possibili **punti di flesso**, definibili come *punti in cui la funzione cambia la propria concavità*, in particolare, dobbiamo analizzare quando:

$$f^{(2)}(x) = 0 \tag{400}$$

le soluzioni di questa equazione sono i possibili candidati punti di flesso. Per definire quali sono effettivamente i punti di flesso e come varia la concavità è necessario fare lo studio della derivata seconda:

$$f^{(2)}(x) > 0 \tag{401}$$

dalla quale ricavo che:

- Per intervalli nei quali la derivata seconda è **minore** di zero la concavità è rivolta verso il basso.
- Per intervalli nei quali la derivata seconda è **maggiore** di zero la concavità è rivolta verso l'alto.

inoltre, in base alla variazione della concavità è anche possibile definire i vari punti di flesso:

- Se la derivata seconda passa da valori positivi a valori negativi il punto di flesso è definito come **punto di flesso discendente**
- Se la derivata seconda passa da valori negativi a valori positivi il punto di flesso è definito come **punto di flesso ascendente**

9.23 Approssimazione tramite resto di Lagrange

Solitamente quando si applica lo sviluppo di Taylor si trova a fine espressione un resto, chiamato anche resto di peano, il quale gode della seguente proprietà:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \implies R_n(x, x_0) = o(x - x_0)^n \tag{402}$$

quindi il resto diventa più piccolo più velocemente di $(x - x_0)$. Se però la funzione è derivabile $(n + 1)$ volte vale anche la seguente ipotesi: *esiste nell'intervallo* $(x - x_0)$ *un punto c per il quale il resto può essere riscritto come*:

$$\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{403}$$

questo resto viene anche definito come **resto di lagrange**. Andando a studiare questo resto è anche possibile definire l'errore della nostra funzione.

9.23.1 Esempio

Assumiamo di voler calcolare il valore di $e^{1+\frac{1}{10}}$, per farlo posso innanzitutto definire il polinomio di **Taylor** per la più generale funzione e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \tag{404}$$

che nello specifico caso di $e^{\frac{1}{10}}$ diventa:

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{1}{6} + \frac{e^x}{4 \cdot 10^4} \tag{405}$$

adesso porto tutti i membri definiti a sinistra dell'espressione:

$$e^{\frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{e^x}{4! \cdot 10^4} \tag{406}$$

inoltre, visto che nel caso peggiore $e^x = e^1 \simeq 3$ posso asserire che l'errore sia inferiore o uguale a:

$$\frac{e^x}{4! \cdot 10^4} \leq \frac{1}{4! \cdot 10^4} \tag{407}$$

quindi l'errore che avrò dall'approssimazione è estremamente basso.

10 Derivate elementari

10.1 Derivata $\sin x$

Ipotesi: $f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$

10.1.1 Dimostrazione

$$\begin{gathered}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0)\cos(h)-\sin(h)\cos(x_0)-sin(x_0)}{h} \\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0)(\cos h-1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)\sin h}{h} = \cos(x_0)\end{gathered} \tag{408}$$

10.2 Derivata $\cos x$

Ipotesi: $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin x$

10.2.1 Dimostrazioni

$$\begin{gathered}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h)-\cos(x_0)}{h} = \\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1)}{h} - \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h} = -\sin(x_0)\end{gathered} \tag{409}$$

10.3 Derivata $\tan x$

Ipotesi: $f(x) = \tan(x) \implies f'(x) = \sec(x) \iff 1+\tan^2(x)$

10.3.1 Dimostrazione

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2 x} \tag{410}$$

a questo punto è possibile prosegure in due modi diversi:

- Applicando il teorema fondamentale della trigonometria, secondo il quale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec x \tag{411}$$

- Applicando le proprietà delle frazioni:

$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \tag{412}$$

10.4 Derivata $\cot x$

Ipotesi: $f(x) = \tan(x) \implies f'(x) = \csc(x) \iff 1+\cot^2(x)$

10.4.1 Dimostrazione

TODO

10.5 Derivata e^x

Ipotesi: $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

10.5.1 Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}e^h-e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0} \tag{413}$$

10.6 Derivata a^x

Ipotesi: $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a$

10.6.1 Dimostrazione

$$\begin{gathered}\lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0}e^h - a^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \\ a^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h \ln a} \ln a = a^x \ln a\end{gathered} \tag{414}$$

10.7 Derivata x^k

10.8 Derivata di logaritmo naturale

Ipotesi:$f(x) = \ln x \implies f'(x) = \dfrac{1}{x}$

10.8.1 Dimostrazione

La dimostrazione richiede di fare un osservazione, il logaritmo naturale è la funzione inversa di e^x, di conseguenza è possibile applicare il teorema sulla derivata della funzione inversa:

$$\frac{d}{dx} \ln x_0 = \frac{1}{e_0^x} \tag{415}$$

adesso procedo mediante un cambio di variaibile:

$$y_0 = e_0^X \implies x_0 = lny_0 \tag{416}$$

andando a sostituire nella frazione ricavo che:

$$\frac{1}{e_0^x} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0} \tag{417}$$

10.9 Derivata di $\sqrt{x}$

Ipotesi: $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

10.9.1 Dimostrazione 1: derivata dell'esponente

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{418}$$

10.9.2 Dimostrazione 2: limite rapporto incrementale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \tag{419}$$

10.9.3 Dimostrazione 2: funzione inversa

Questa dimostrazione parte con l'asserire che:

$$g(x) = x^2 \implies f(x) = g^{-1} = \sqrt{x} \tag{420}$$

Dalla quale ricavo inoltre che:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= \sqrt{y} \end{aligned} \tag{421}$$

applicando la formula ottengo:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \tag{422}$$

10.10 Dimostrazione $\sinh x$

Ipotesi: $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \implies f'(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

10.10.1 Dimostrazione

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - [-(e^{-x})]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x_0 \tag{423}$$

10.11 Dimostrazione $\cosh x$

Ipotesi: $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \implies f'(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

10.11.1 Dimostrazione

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + [-(e^{-x})]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x_0 \tag{424}$$

11 Integrali e Funzioni primitive

Assumiamo di avere una curva generica come in figura:

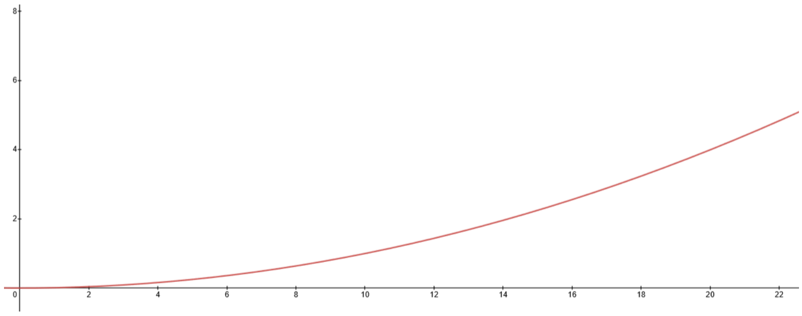


Figure 7: Curva parabolica

consideriamo adesso la porzione di curva sottesa al grafico e assumiamo di voler calcolare il suo valore in un dato intervallo $[a,b]$, per farlo si potrebbe procede nel seguente modo: *l'intervallo viene suddiviso in tanti piccoli rettangoli e si somma l'area di questi rettangoli*, ciò però porta ad avere una situazione spiacevole, l'area della porzione sottesa alla curva potrebbe venire arrotondata per difetto o per eccesso, ciò dipende da quale parametro si prende per l'altezza:

- se si prende l'estremo **inferiore** ($\inf(f)$) l'area risulterà approssimata per difetto.
- se si prende l'estremo **superiore** ($\sup(f)$) l'area risulterà approssimata per eccesso.

andiamo a prendere l'estremo inferiore come altezza, l'area ricavata sarà:

$$0 + \frac{1}{n}x_1^2 + \frac{1}{n}x_2^2 + \dots + \frac{1}{n}x_n^2 = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right] = \\ \frac{1}{n \cdot n^2}[1^2 + \ \dots \ + (n+1)^2] \tag{425}$$

in particolare si potrebbe fare un'altra supposizione, i valori nella parentesi quadra sono la somma dei primi k quadrati:

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{1}{n^3}\frac{2n^3+\dots}{6} \tag{426}$$

tanto più prendo n grande tanto più gli intervalli sono piccoli e tanto meno errore ottengo, ovviamente però se approssimo dal **basso** posso dire che:

$$p_b(n) \leq A \ \ n \to +\infty \tag{427}$$

dal'altro canto però se approssimo dall'alto posso dire certamente che:

$$p_a(n) \geq A \tag{428}$$

e quindi in particolare vale la seguente relazione:

$$p_b(n) \leq A \leq p_a(n) \tag{429}$$

se facessi il calcolo della frazione otterrei che l'area totale vale:

$$A = \frac{1}{3} \tag{430}$$

tutto questo ragionamento può essere anche scritto come:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \implies \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)[x_{k+1} - x_k] \tag{431}$$

questa operazione viene anche definita come *integrale definito da 0 a 1 di* x^2.

11.1 Integrale di Riemann

Più in generale assumiamo di avere una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la quale è limitata:

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta \tag{432}$$

prendiamo ora una partizione ordinata:

$$P = \{x_k \;\; k = 0, \dots, n \;\mid\; \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < x_n = \beta\} \tag{433}$$

dopo di che sezioni tutto in intervalli più piccoli e in base a che approssimazione viene fatta si ottiene due somme:

- Somma inferiore di **Riemann**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \inf(f, [a, b]) \cdot (x_{k+1} - x_k) \tag{434}$$

- Somma superiore di **Riemann**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sup(f, [a, b]) \cdot (x_{k+1} - x_k) \tag{435}$$

in particolare, tanto più l'intervallo diventa piccolo tanto più i due estremi saranno coincidenti e in particolare vale che:

$$\inf(f, [a, b]) = \sup(f, [a, b]) = \int_b^a f(x)dx \tag{436}$$

inoltre, non è nenanche giusto dire che l'integrale di Riemann è l'area sottessa alla curva, prendiamo infatti come esempio la funzione:

$$y = x - 1 \tag{437}$$

e andiamo a calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 x - 1 = 0 \tag{438}$$

Funzione primitiva e derivata Quando si calcola l'integrale di Riemann si ottiene una funzione definita come **Funzione primitiva**, in particolare, si dice che una funzione $F(x)$ è una **primitiva** di una funzione $f(x)$ se e solo se:

$$F'(x) = f(x) \tag{439}$$

11.1.1 Funzione definita a tratti

Assumiamo di avere una funzione $f(x)$ definita a tratti:

$$\begin{cases} f_1(x) & \forall x \in [a, c] \\ f_2(x) & \forall x \in]c, d] \end{cases} \tag{440}$$

assumiamo inoltre che la funzione non sia continua in c, se volessi calcolare:

$$\int_a^d f(x)dx \tag{441}$$

dovrei considerare l'intervallo $[a, d]$ come due intervallini distinti $[a, c]$ calcolando l'integrale in questo intervallo:

$$\int_a^c f(x)dx \tag{442}$$

successivamente si considera l'intervallo $[c, d]$ calcolando l'integrale nell'intervallo:

$$\int_c^d f(x)dx \tag{443}$$

potrebbe venire normale chiedersi come mai si calcola l'integrale in un punto in cui la funzione non è definita, ma ciò di per se non rappresenta un problema, in quanto è possibile dimostrare che:

$$f \in C([a, b]) \quad g = f \quad \forall x \in [a, b] - \{y_1, \dots, y_n\} \tag{444}$$

11.2 Funzione integrabile

Secondo Riemann una funzione integrabile è una funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ si definisce integrabile se e solo se:

$$\sup s(f, P) = \inf S(f, P) \tag{445}$$

Inoltre, un'altra condizione sufficiente per la quale la funzione è integrabile è, se presa ogni partizione possibile dell'intervallo $[a, b]$ vale la seguente relazione:

$$s(f, P) - S(f, P) < \epsilon \;\; \forall \epsilon \in \mathbb{R} \tag{446}$$

dove ϵ è un numero reale positivo. Da questo teorema si ricava un corollario secondo il quale:

- Se la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a, b)$ allora essa è integrabile in ogni intervallo $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$.
- Una funzione $f(x) \in C([a, b])$ (*continua nell'intervallo* $[a, b]$*)* è integrabile nell'intervallo $[a, b)$.
- Una funzione $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ è integrabile nell'intervallo $[a, b)$.

11.2.1 Funzione non integrabile

Il caso più famoso di funzione non integrabile è la funzione di **Dirichlet**, la quale è una $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \tag{447}$$

la funzione vale 1 nei punti razionali e 0 nei punti non razionali, ciò ci porta a dire che la funzione è **discontinua** in ogni punto dell'intervallo. Si potrebbe ora provare a calcolare la somma inferiore di Riemann:

$$s(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf(f, [x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_k - x_{k+1}) \tag{448}$$

per quanto piccoli possa prendere gli intervalli ci sarà sicuramente in ogni intervallo almeno un punto che vale 0, di conseguenza la somma risulterà:

$$s(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_k - x_{k+1}) = 0 \tag{449}$$

se invece si calcola la somma superiore di Riemann, calcolata come:

$$S(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup(f, [x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_k - x_{k+1}) \tag{450}$$

si deduce che in almeno un punto l'estremo superiore varrà 1 e di conseguenza:

$$S(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup(f, [x_k, x_{k+1}]) \cdot (x_k - x_{k+1}) = 1 \tag{451}$$

quindi non si potrà mai verificare la condizione necessaria per l'integrabilità della funzione.

11.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Ipotiziamo di avere una funzione $f \in C([a, b])$ tale che $F'(x) = f(x)$ allora possiamo asserire due cose:

$$\begin{aligned} &1. \;\; \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \\ &2. \;\; \forall G(x) \;\mid\; G'(x) = f(x) \implies \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \end{aligned} \tag{452}$$

Talvolta si dice anche che *integrazione e derivazione sono* ***operazioni inverse***.

11.3.1 Dimostrazione

Siano $a = x_0, \ldots, x_n$ punti che suddividono l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli di uguali ampiezza, andando a calcolare l'integrale nel seguente intervallo si ottiene:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(x_n) - G(x_0) = [G(x_n) - G(x_{n-1})] + \cdots + [G(x_1) - G(X_0)] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1}] \end{aligned} \tag{453}$$

inoltre, per tesi del teorema di Lagrange sulle derivate, secondo il quale, rispettate le condizioni, esiste un punto c nell'intervallo $[a, b]$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{454}$$

la quale se applicata a questo esempio porta ad asserire che:

$$G'(c) = f(c) = \frac{G(x_k) - G(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{455}$$

dalla quale ricavo che:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(c) = \int_a^b f(x)dx \tag{456}$$

11.4 Teorema della media integrale

Sia $f(x) : [a, b] \in \mathbb{R}$ e sia $f(x) \in C([a, b])$ allora $\exists c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = f(c) \tag{457}$$

geometricamente il teorema del valor medio ci assicura che, rispettate le condizioni, esista un generico punto c nell'intervallo dove l'area del rettangolo calcolata usando come altezza l'immagine in quel punto e come base la distanza tra gli estremi sua uguale all'integrale della funzione nell'intervallo.

11.4.1 Dimostrazione

Per ipotesi sappiamo che $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ e di conseguenza per **teorema di Weierstrass** la funzione nel suddetto intervallo avrà un minimo m e un massimo M tali che:

$$m \leq f(x) \leq M \tag{458}$$

ed in particolare vale anche che:

$$m = \frac{1}{b - a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b M dx = M \tag{459}$$

dalla proprietà dei valori intermedi sulle funzioni continue sappiamo che una funzione nell'intervallo $[m, M]$ assume tutti i valori possibili e di conseguenza:

$$\exists c \in [m, M] \ \mid \ f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \tag{460}$$

11.5 Proprietà degli integrali

1. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ (461)

2. $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (462)

3. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (463)

4. $f(x) \geq \implies \int_b^a f(x)dx \geq 0$ (464)

5. $f(x) \geq g(x) \implies \int_b^a f(x)dx \geq \int_b^a g(x)dx$ (465)

11.6 Metodi di integrazione

11.6.1 Integrale del valore assoluto

Assumiamo di avere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = |x - 1| \tag{466}$$

per poter calcolare l'integrale è necessario espandere la funzione nei due casi:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases} \tag{467}$$

a questo punto è sufficente suddividere l'integrale in due sotto integrali delimitati dall'intervallo specificato:

$$\int_0^2 |x - 1| \, dx = \int_0^1 1 - x \, dx + \int_1^2 x - 1 \, dx \tag{468}$$

11.6.2 Integrazione per parti

Consideriamo due funzioni $f(x), g'(x)$ continue, derivabili e integrabili, si definisce come integrale del prodotto tra queste due funzioni:

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \tag{469}$$

Dimostrazione La dimostrazione di questo metodo richiede di ragionare sul metodo di derivazione per le funzioni composte:

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{470}$$

integrando ogni fattore si ottiene:

$$\int D[f(x)g(x)] = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x) \tag{471}$$

essendo però l'integrale l'inversa della derivata si ottiene che:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x) \tag{472}$$

facendo alcuni scambi si ottiene che:

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \tag{473}$$

11.6.3 Integrazione per sostituzione

Sia $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ continua e sia $g : [c, d] \to [a, b]$ continua e derivabile, allora vale la seguente relazione:

$$\int_a^b f((g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dx \quad t = g(x) \tag{474}$$

inoltre, se la funzione è invertibile vale anche che:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt \quad t = g^{-1}(x) \tag{475}$$

inoltre, quando si pone $t = g(x)$ si deve necessariamente determinare anche il nuovo determinate, il quale non sarà più dx, ma dt:

$$t = g(x) \implies \frac{dt}{dx} = g(x) \implies dt = g'(x)dx \tag{476}$$

ottenendo quindi quanto vale il dt è possibile procede con la sostituzione

Dimostrazione Essendo questa regola di integrazione strettamente legata alla derivabilità di funzioni composte la dimostrazione parte da una trattazione rispetto alla legge di derivazione:

$$\frac{d}{dx}f(g(X)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{477}$$

possiamo quindi osservare che $f(x)$ è una primitiva di $f'(x)$ e l'espressione può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dx}F(g(X)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{478}$$

andando a integrare da entrambe le parti si ottiene che:

$$\int \frac{d}{dx}F(g(X)) = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{479}$$

dalla quale ricavo infine che:

$$F(g(X)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \tag{480}$$

11.6.4 Decomposizione in frazioni parziali

Assumiamo di avere una funzione scritta nella forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \tag{481}$$

nella quale $\deg(N) < \deg(D)$, in questo caso non è possibile procede con la divisione, occorre per prima cosa calcolare le radici del polinomio che si presenta al denominatore, in particolare verificando il Δ, il quale si può presentare in tre modi diversi:

- $\Delta \geq 0$, in questo caso si procede con la **decomposizione in frazioni parziali**: Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo di integrabilità scritta nella forma:

  $$\frac{N(x)}{D(x)} \tag{482}$$

  per la quale vale che il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore, prendiamo come esempio una funzione del tipo:

  $$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} \tag{483}$$

posso a questo punto asserire che esistano due numeri A e B tali che:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} = \int \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \tag{484}$$

per definire questi due numeri si procede facendo il minimo comune multiplo tra le due frazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{Ax - Ax_2 + BxBx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \\ &= \frac{x(A-B)+Ax_2+Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} \end{aligned} \tag{485}$$

a questo punto per calcolare i fattori A e B è sufficente eguagliare la frazione appena trovata con i rispettivi fattori nella frazione originale, ad esempio, in questo caso il numeratore della frazione originale è 1, segue che il fattore con la x è 0, mentre il fattore noto è 1, il sistema sarà quindi:

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ Ax_2 + Bx_1 = 1 \end{cases} \tag{486}$$

- $\Delta < 0$, in questo caso le radici del polinomio non sono definite nel dominio dei reali, ma appartengono al dominio dei numeri complessi, segue quindi che esse abbiano una struttura della forma:

  $$x_{0,1} = p \pm iq \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{487}$$

  in particolare si ricava che:

  $$\begin{aligned} &(x-x_0)(x-x_1) = [x-(p+iq)][x-(p-iq)] = [(x-p)+iq][(x-p)-iq] = \\ &(x-p)^2 + iq^2 = iq^2 + (x-p)^2 \end{aligned} \tag{488}$$

11.6.5 Metodo per polinomi generali

Nel caso in cui si abbia polinomi di grado superiore a due esiste un metodo generale per poter calcolare l'integrale, assumiamo infatti di avere un polinomio qualsiasi scritto nella forma:

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x-2)} \tag{489}$$

in questo caso ogni fattore possiede una **molteplicità** diversa (*annulla il polinomio in "tre" punti diversi*), è necessario quindi dividere il polinomio in base alle molteplicità come segue nell'esempio:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-1)} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{F}{(x-2)} \tag{490}$$

adesso per trovare i fattori si può procedere nel seguente modo, per i fattori con la molteplicità più alta è sufficente moltiplicare da tutte le parti per il rispettivo fattore, ad esempio, applichiamo per trovare C:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x^3A}{x} + \frac{x^3B}{x^2} + C + \frac{x^3D}{(x-1)} + \frac{x^3E}{(x-1)^2} + \frac{x^3F}{(x-2)} \tag{491}$$

in particolare, se $x \to 0$ tutti i fattori si annullerebbero, eccetto per C e per la frazione dopo l'uguale che invece andrebbe a convergere a 1/2, quindi posso asserire con certezza che:

$$C = \frac{1}{2} \tag{492}$$

lo stesso ragionamento può essere applicato anche per $(x-1)^2$, mentre invece per gli altri fattori è necessario porre un sistema di equazioni.

11.6.6 Integrali di funzioni razionali fratte per divisione

11.7 Integrali generalizzati

Integrale fondamentale	Integrale in forma generalizzata
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\, n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\, n \neq -1$
$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln\|x\| + c$	$\int f(x)^{-1} \cdot f'(x) \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln\|f(x)\| + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x) \, dx = -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \, dx = \sin[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2[f(x)]} \cdot f'(x) \, dx = \tan[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2[f(x)]} \cdot f'(x) \, dx = -\cot[f(x)] + c$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) \, dx = \arcsin[f(x)] + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) \, dx = \arccos[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x) \, dx = \arctan[f(x)] + c$

Figure 8: Integrali generalizzati

11.8 Integrali impropri

Il concetto di integrale improprio rappresenta una generalizzazione del concetto di integrale di Riemann, il quale per definizione è definito su un intervallo chiuso, d'altro canto gli integrali impropri di prima spece lavorano su intervalli aperti della forma:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) \, dx \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx \tag{493}$$

quando si trova un integrale di questo tipo la risoluzione richiede di portare al limite la funzione primitiva rispetto al valore che tende all'infinito, ad esempio:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x) \, dx = \lim_{a \to -\infty} F(b) - F(a) \tag{494}$$

se la funzione diverge allora la funzione **non è integrabile**, mentre se converge è **integrabile**.

11.8.1 Teoremi sulla convergenza degli integrali impropri

11.9 Approssimazione tramite metodo dei rettangoli

Talvolta capita che nel calcolo di un integrale definito non si riesca a trovare in alcun modo una primitiva o, in altri casi, si potrebbe altresì trovare una primita, ma estremamente complessa da calcolare, ciò crea la necessità di avere dei metodi che permettano di calcolare gli integrali approssimandoli con un errore minimo (il quale deve essere anch'esso noto), uno di questi metodi è noto come *metodo dei rettangoli.* Questo metodo prevede di dividere l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, sfruttando gli n+1 punti x_k:

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{495}$$

definiamo, inoltre, come **valore approssimato dell'integrale** la seguente somma finita:

$$S_n = \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}] \tag{496}$$

la somma S_n approssima però la funzione come se essa fosse costante a tratti, usando come estremo di riferimento per l'altezza del rettangolo l'estremo sinistro, ciò porterebbe ad avere una stima ottimale dell'integrale se esso fosse quindi molto simile a una funzione costante, la quale presenta **variazioni minime** tra i punti. Per poter studiare al meglio queste variazioni si può ricorrere all'utilizzo della derivata prima, la quale plausibilmente, ci darà una stima dell'errore commesso:

Teorema dell'errore Supponiamo che $|f'(x)| < M \quad \forall x \in [a, b]$ e assumiamo la somma di tutti i rettangoli dell'intervallo come descritta dalla seguente serie finita:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \tag{497}$$

allora possiamo affermare che:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| < \frac{M(b-a)^2}{2n} \tag{498}$$

da questo teorema è possibile giungere ad una colclusione importante, al crescere di n la somma S_n approssima sempre meglio l'area sottostante alla funzione diminuendo così l'errore e permette inoltre di fissare l'errore massimo così da trovare di conseguenza la miglior partizione possibile dell'insieme.

11.10 Approssimazione tramite *mid point*

11.11 Integrale generalizzato

Assumiamo di avere una funzione $f(x) \in C(]a, b])$ con f non limitata, supponiamo adesso di voler calcolare l'integrale:

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{499}$$

per condizione stessa della funzione presa in esame, in a non è garantita la continuità della funzione, di conseguenza non è più possibile utilizzare i teoremi per l'integrale di **Riemann**, è però possibile prende un generico valore α tale che $a < \alpha \geq b$ e calcolare l'integrale definito tra:

$$\int_\alpha^b f(x)\, dx \tag{500}$$

si procede poi andando a far tendere il valore di α verso a osservando cosa succede:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x)\, dx \tag{501}$$

se il limite **diverge** allora si può asserire che l'integrale non è definito neanche in **senso generalizzato**.

12 Serie

Per secoli i matematici si sono interrogati se avesse senso sommare *infiniti* numeri, verrebbe infati da pensare che una tale operazione sia insensata, in quanto sommare infiniti termini porta a pensare che in ogni caso si arrivi ad avere un valore tendente all'infinito, ma ciò non è sempre vero, si potrebbe considerare una successione a_n definita come:

$$a_n = \frac{1}{10^n} \tag{502}$$

andando a calcolare i vari fattori ci si accorge di un particolare:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \tag{503}$$

i valori progrediscono a numeri sempre più piccoli, è quindi impossibile che la serie vada a $+\infty$.

12.1 Somme parziali e convergenza della serie

Per arrivare però a una generalizzazione del concetto di serie e in particolare del concetto di convergenza o divergenza è necessario fare un passo indietro e tornare al concetto di **somme parziali**, prendiamo sempre la successione a_n definita come:

$$a_n = \frac{1}{10^n} \tag{504}$$

andiamo adesso a definire s come la somma parziale, in particolare so che:

$$\begin{aligned} &1.s_0 = 1 \\ &2.s_1 = s_0 + \frac{1}{10} \\ &3.s_2 = s_1 + \frac{1}{100} \\ &n.s_n = s_{n-1} + a_n \end{aligned} \tag{505}$$

si potrebbe quindi pensare di portare questo concetto al limite, in particolare essendo una progressione la n tende sempre verso infinito:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \tag{506}$$

risolvendo il limite ci si può trovare in due situazioni:

- Il limite esiste ed è finito:

  $$\lim_{n \to +\infty} s_n = L \tag{507}$$

  in questo caso si può asserire che la serie **converge** verso un valore finito, è importante però fare un osservazione, il valore L a cui converge il limite non è il valore a cui converge la serie.

- Il limite esiste ma non è finito:

  $$\lim_{n \to +\infty} s_n = \pm\infty \tag{508}$$

  in questo caso si può asserire che la serie **diverge**.

Inoltre, un osservazione che si potrebbe fare è la seguente: *se presa una successione a_n essa converge a un valore allora anche la successione a_{n+1} converge allo stesso valore.*

12.2 Teorema sulla convergenza

Assumiamo di avere una serie s_n la quale so per certo convergere, allora posso asserire:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \tag{509}$$

Quindi se la serie converge so per certo che il suo limite farà 0, ma non vale l'opposto, non è quindi detto che presa una successione qualsiasi valga la stessa proprietà e quindi che se il limite converge a 0 allora anche la serie sia convergente, sempre da questa legge però posso compiere un osservazione, se la serie diverge a un valore diverso da 0 allora posso definitivamente asserire che la serie diverge anch'essa.

12.2.1 Esempio sulla condizione sufficente

Assumiamo per assurdo che valga la proprietà anche al contrario e di conseguenza che prendendo una qualsiasi successione $\{a_n\} \to 0$ si possa assicurare che la serie s_n converga. Si sceglie quindi una successione $\{a_n\}$ definita come:

$$a_n = \frac{1}{n} \tag{510}$$

la quale rispetta la mia ipotesi iniziale, in quanto:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{511}$$

adesso si procede andando a disegnare il grafico della successione: si potrebbe ora disegnare dei

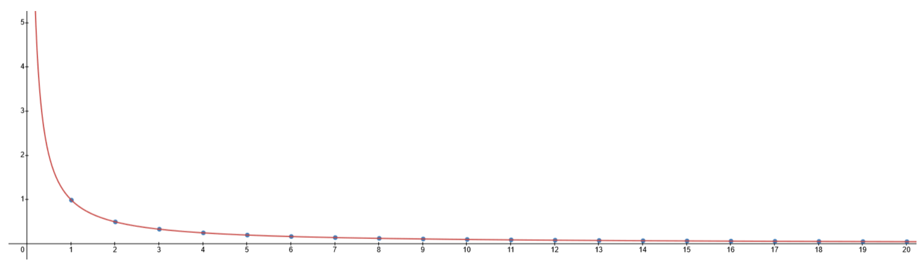


Figure 9: successione $\frac{1}{n}$

rettangoli che "sovrastano" la funzione e dei rettangoli che "sottostanno" alla funzione, essi sono in particolare definiti da due serie equivalenti:

$$\begin{aligned} &1.\ \sum_{n=2} \frac{1}{n-1} \\ &2.\ \sum_{n=1} \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{512}$$

in particolare, posso asseire che:

$$\sum_{n=2} \frac{1}{n-1} \approx \sum_{n=1} \frac{1}{n} \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \tag{513}$$

andando quindi ad analizzare l'integrale posso avere delle informazioni sulla convergenza o meno della serie, senza necessariamente riscrivere i calcoli posso definitivamente affermare che:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty \tag{514}$$

e di conseguenza la serie diverge, qui si presenta l'assurdo e cade l'ipotesi iniziale.

12.3 Secondo teorema sulla convergenza

Il teorema del confronto per le serie è un teorema estremamente utile, in quanto ci permette di determinare la convergenza delle serie usandone serie assolutamente minori o maggiori. Assumiamo di avere due serio s_n e q_n tali che $s_n \geq q_n \forall n \in \mathbb{N}$, allora posso sicuramente affermare che:

$$\begin{aligned} &1. \sum_{n\to+\infty} s_n = L \implies \sum_{n\to+\infty} q_n = M \\ &2. \sum_{n\to+\infty} q_n = +\infty \implies \sum_{n\to+\infty} s_n = +\infty \end{aligned} \tag{515}$$

12.4 Serie geometriche

Si definisce come serie geometria la serie definita come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad q \in \mathbb{R} \tag{516}$$

in particolare è possibile dimostrare che la serie vale:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1+q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 \quad q = 1 \end{cases} \tag{517}$$

inoltre, il valore q è definito come **ragione della serie** e analizzandolo si riesce a capire se la serie converge e quanto vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & 0 < q < 1 \\ +\infty \quad q \geq 1 \\ N.E \quad q < 0 \end{cases} \tag{518}$$

12.5 Serie armoniche

Si definisce una serie armonica una serie definita come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{519}$$

in particolare per questa serie si può distinguere due casi fondamentali:

- $\alpha > 1$ la serie **converge**.
- $0 < \alpha \leq 1$ la serie **diverge**.

12.6 Teorema del confronto

Siano a_b e b_n due successioni e siano s_n e q_n le rispettive serie, supponiamo inoltre che:

$$\frac{a_n}{b_n} = L \neq \pm\infty \tag{520}$$

allora posso affermare che:

- se a_n **converge** allora anche b_n **converge** e viceversa.
- se a_n **diverge** allora anche b_n **diverge** e viceversa.

questo teorema permette di capire facilmente se una serie converge o diverge semplicemente studiando una serie simile che si comporta *allo stesso modo.*

12.7 Criterio della radice

Sia a_n una successione e sia s_n la rispettiva serie, è possibile calcolare:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n} = L \tag{521}$$

e se $L > 1$ la serie **diverge**, se $L < 1$ la serie converge e invece, se $L = 1$ non si può dire nulla sulla convergenza o meno della serie.

12.8 Criterio della convergenza assoluta

Assuamiamo di avere una successione a_n e la rispettiva serie s_n di cui però non si conosce il valore, se la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = L \tag{522}$$

è **assolutamente convergente** allora si può affermare che anche la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L \tag{523}$$

è convergente, è però fondamentale notare che non vale il contrario, infatti non tutte le serie convergenti sono anche **assolutamente convergenti**.

12.9 Criterio di Leibniz

Quando però ci si trova a non avere alcuna informazione dal **criterio della convergenza assoluta** allora si può ricorrere all'ultilizzo del criterio di **Leibniz** il quale afferma che, data una successione a_n, se rispettate le ipotesi:

- $a_n \geq 0$ definitivamente.
- $a_n \to 0$ per $n \to \infty$.
- $a_{n+1} \leq a_n$.

la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \tag{524}$$

è **convergente**.

12.9.1 Esempio sul criterio di Leibniz

Si ipotizzi di avere una serie s_n definita come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \tag{525}$$

e assumiamo di volerne calcolare la convergenza, occorre quindi procede utilizzando il criterio di Leibniz controllando, quindi, se la serie soddisfa le ipotesi:

- la successione $\sin \frac{1}{n}$ è definitivamente positiva ? certo, lo si riesce a dimostrare graficamente.
- la successione $\sin \frac{1}{n}$ tende a 0 quando n tende a infinito ? si, basta portare al limite.
- la successione $\sin \frac{1}{n}$ è decrescente ? sì, si dimostra graficamente.

visto che le condizioni sono rispettare si può sicuramente asserire che la serie è convergente.

12.10 Serie immaginarie

Assumiamo di voler calcolare una successione z_n definita nel campo dei numeri imamginari, dove ogni elemento viene rappresentato come somma di parte intera più parte immaginaria:

$$z_i = a_i + ib_i \tag{526}$$

in particolare, definisco la serie come:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + ib_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} ib_n \tag{527}$$

segue che la convergenza di questa serie deriva ora da due sottoserie, una la cui denominazione può essere *serie reale*, l'altra, la cui denominazione può essere *serie immaginaria.*
Assumiamo adesso di voler calcolare il valore della successione z^n, o della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \tag{528}$$

la quale è molto simile alla sopracitata serie **geometrica** la quale ha anche, rispetto alle altre serie, una **formula** per calcolarne il valore. Viene quindi legittimo chiedersi se le stesse proprietà delle serie geometriche reali valgano anche per le serie definite in campo reale; Si potrebbe procedere analizzando il numero z^n:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \implies ||z^n|| = ||z||^n \quad 0 \leq q = ||z|| < 1 \tag{529}$$

da questa formula si può anche ricavare un utile variazione del teorema sull'assoluta convergenza:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ||z_n|| = L < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = L < +\infty \tag{530}$$

12.11 Teorema Riemann-Dini

Assumiamo di avere una successione a_n tale che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L \tag{531}$$

quindi convergente, ma tale che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty \tag{532}$$

e di conseguenza **non assolutamente convergente**. Sia inoltre $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, allora esiste una permutazione di fattori per cui la serie eguaglia quel valore.

12.12 Serie di potenze e raggio di convergenza

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia a_n una successione di numeri reali, si definisce come serie di **potenze** di coefficenti a_n e punto centrale in x_0 definita come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{533}$$

è importante notare che la serie convergerà sempre per $x = x_0$, di conseguenza l'insieme I di convergenza non sarà mai vuoto.
Si definisce come **raggio di convergenza** della serie di potenze il valore reale:

$$R := \sup\left\{ r \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n < +\infty \right\} \tag{534}$$

è quel valore per il quale la serie converge. Per studiare il raggio di convergenza della serie è necessario studiare prima di tutto il limite della radice n-esima:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \begin{cases} +\infty \\ L \neq 0 \\ 0 \end{cases} \tag{535}$$

ad ognuno di questi risultati è possibile associare un diverso raggio di convergenza, in particolare:

- Se il limite converge verso 0 posso asserire che $R = +\infty$ e di conseguenza per ogni valore reale che possa scegliere la serie converge.
- Se il limite diverge verso $+\infty$ il limite non converge mai, eccetto che per il valore 0, di conseguenza $R = 0$.
- Se il limite converge ad un valore finito si ha dei punti, appartenenti al cosidetto *insieme di convergenza*, per il quale la serie converge, dei punti per i quali la serie diverge e i punti di frontiera, dove è necessario studiare singolarmente la serie, il raggio in questo caso è definito come:

$$R = \frac{1}{L} \tag{536}$$

Trovato il raggio di convergenza posso capire per quali valori la serie converge, questi valori sono definiti dalla seguente disequazione:

$$|x - x_0| < \frac{1}{L} \implies -\frac{1}{L} < x - x_0 < \frac{1}{L} \tag{537}$$

12.12.1 Raggio di convergenza per serie immaginarie

Assumiamo di avere una serie di potenze definita come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{538}$$

il procedimento per calcolare il raggio di convergenza rimane lo stesso utilizzato per le serie di potenze reali, l'unica cosa che cambia è l'insieme di convergenza, difatti la serie non converge più per $|x| < R$, ma:

$$||z|| < R \implies \sqrt{x^2 + y^2} < R \implies x^2 + y^2 < R \tag{539}$$

andando poi a osservare graficamente a cosa equivale l'espressione ci si rende facilmente conto che essa non è altro che una circonferenza di centro $(0,0)$ e di raggio 1, nel quale i punti esterni sono i punti per i quali la serie diverge, i punti interni per i quali la serie converge e i punti di frontiera dove non si sa cosa fa la serie.

12.13 Criterio del rapporto (o D'Alambert)

Sia a_n una **serie di potenze** definita nella forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{540}$$

Il criterio D'Alambert asserisce che esiste:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \tag{541}$$

a questo punto si applica le stesse regole già soprascritte per il raggio di convergenza.

12.14 Criterio di condensazione di Cauchy

Il prodotto alla Cauchy è criterio utilizzato per stabilire il carattere di una serie, applicabile soltanto per serie a termini positivi. Consideriamo una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{542}$$

per la quale valgono le seguenti ipotesi:

- La serie è a **termini positivi**:
$$a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{543}$$

- La serie è **decrescente**:
$$a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{544}$$

se le ipotesi sono verificate il carattere della serie iniziale è lo stesso della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \tag{545}$$

12.15 Approssimazione tramite Serie di Taylor

Come anche nel caso dei limiti vi è la possibilita di utilizzare la **serie di Taylor** per approssimare serie di cui risulta difficile il calcolo immediato, prendiamo come sempio la funzione e^x, la quale può essere approssimata come:

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_k(x) \tag{546}$$

applicando la serie di Taylor è possibile approssimare qualsiasi funzione, un altro esempio è quello della funzione $\arctan(x)$, la quale equivale:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \tag{547}$$

12.16 Prodotto alla Cauchy

Supponiamo di avere due successioni a_n e b_n delle quali vogliamo calcolare il prodotto delle rispettive serie, si potrebbe essere portati a credere che esso sia:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{548}$$

questa ipotesi è però sbagliata, lo si dimostra facilmente con qualche esempio. La versione corretta è la seguente, date due successioni a_n e b_n si definisce come prodotto delle due serie secondo Cauchy la serie della successione costruita come:

$$c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} \tag{549}$$

dalla quale si ricava la serie, definita come:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{n} a_k b_{n-k} \right] \tag{550}$$

12.16.1 Dimostrazione

Per dimostrare questo risultato si procede con il prodotto di due serie di potenze:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2) = \\ &a_0 b_0 + [a_1 b_1] z + [a_2 b_2] z^2 + \dots = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots\end{aligned} \tag{551}$$

13 Equazioni differenziali ordinarie

In generale può dire che un equazione differenziale è un equazione che accetta come soluzione una funzione $f(x) = y(x) = y$.

13.1 Equazione differenziale

Si definisce come *equazione differenziale ordinaria di grado n* un equazione della forma:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n-1}(x), y^n(x)) = 0 \tag{552}$$

dove y^n identifica la derivata *n-esima*, mentre $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. L'equazione differenziale mette quindi in relazione la funzione incognita y, alla variaibile indipendente x e a tutte le derivate successive fino all'ordine n.
L'incognita di questa equazione differenziale è la funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (funzione di variabile reale) dipendente dalla variabile x.

Osservazione Essendo il risultato della equazione una funzione, vi sono infinite soluzioni possibili, in quanto non vi è necessariamente una solo funzione che rispetta i criteti, affinché si possa scegliere una particolare funzione bisogna impostare un **problema di Cauchy**.

13.2 Equazioni differenziali a variabili separate

Si definisce come equazione differenziale del primo ordine a variaibile separata una qualsiasi equazione differenziale scritta nella forma

$$y' = F(x) \cdot G(y) \tag{553}$$

nella quale si ha quindi un fattore dipendente esclusivamente da x e un fattore dipendente esclusivamente da y; vale inoltre che $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ e che $G : (c, d) \to \mathbb{R}$.

Lo scopo di questa equazione differenziale è quello di determinare tutte le funzioni $y(x) : (\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in (\alpha, \beta) \ \ \exists y'(x) \ \mid \ y'(x) = F(x) \cdot G(y(x))$, o in altre parole, che al variare di x nell'intervallo la funzione $y(x) \in (c, d)$, quindi tutte le soluzioni sono comprese nel rettangolo formato dagli insiemi di definizione.

Risoluzione di una equazione lineare Per risolvere un'equazione differenziale di primo ordine è necessario definire quali sono le possibili soluzioni di prima categoria, le quali sono rappresentate dall'insieme

$$A = \{y_P \in (c, d) : \ G(y) = 0\} \tag{554}$$

andando quindi a prendere l'equazione differenziale

$$y' = y \tag{555}$$

possi dire che sicuramente $y = 0$ è una soluzione. Si procede, successivamente, calcolando quelle che sono le **soluzioni di seconda categoria**, definite come funzioni

$$y_S : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} \backslash P \tag{556}$$

per trovarli bisogna procedere mediante alcune manipolazioni della funzione originale

$$y' = F(x)G(y) \to \frac{dy}{dx} = F(x)G(x) \to \frac{dy}{G(y)} = F(x)dx \to \int \frac{1}{G(y)}\, dx = \int F(x)\, dx + c \tag{557}$$

13.3 Problemi di Cauchy

Si definisce come *problema di Cauchy* l'insieme di un'equazione differenziale di grado **n** e di **n** condizioni iniziali:

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n-1}(x), y^n(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots = \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{558}$$

Il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ prende il nome di *punto iniziale*, mentre le $y_i \in \mathbb{R}i$ i *valori iniziali*, i quali sono i valori di $y(x)$ e di tutte le sue derivate fino a $n-1$-esima nel punto x_0

Per fare un esempio elementare si consideri l'equazione del primo grado:

$$y'(x) = f(x) \tag{559}$$

dalle ipotesi stiamo supponendo che f sia una funzione **continua** e quindi integrabile con **Riemann**. Questa euazione può essere risolte mediante integrazione, per identificare però una soluzione singole tra le infinite possibili bisogna impostare un sistema specificando una soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{560}$$

in questo caso la soluzione è data da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \tag{561}$$

come si può anche notare dall'esempio, un'equazione differenziale di primo grado richiede solo una condiziona iniziale, quindi un equazione differenziale di grado *n-esimo* richiede n condizioni iniziali.

Osservazione Una volta che viene fissato il valore y_0 che la soluzione deve assumere nel punto x_0 è automaticamente fissato il valore della derivata della soluzione nel punto.

Si definisce come *soluzione del problema di Cauchy* una funzione y di classe C^n (dove n è il grado dell'equazione differenziale) che soddisfa il sistema. Inoltre, y deve essere definita su un intervallo $]a, b[$ tale che $x_0 \in]a, b[$; l'intervallo può anche non essere limitato, ma ogni funzione definita su un intervallo non contenente x_0, anche se soddisfa tutte le condizioni del sistema, *non è definibile come una soluzione dell'equazione.*

Nel corso verranno considerate solo equazioni in forma normale, quindi euqazioni la cui derivata massima può essere esplicitata. Tali equazioni possono essere scritte come:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{n-1}(x)) \tag{562}$$

con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione continua. Ogni equazione di grado n in forma normale può essere trasformata in un sistema di I grado con n equazioni, cioè un equazione di primo grado la cui incognita è un vettore di n componenti, definiamo infatti il vettore $\vec{z}(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{z}(x) = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n-2} \\ y^{n-1} \end{bmatrix} \tag{563}$$

abbiamo quindi definito una funzione $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, si consideri ora di far agire su di essa la derivata rispetto ad ogni termine. Si ottiene quindi:

$$\frac{d\vec{z}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} z_0' \\ z_1' \\ \vdots \\ z_{n-2}' \\ z_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{n-1} \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ F(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_{n-2}(x), z_{n-1}(x)) \end{bmatrix} \overset{def}{=} \vec{F}(x, \vec{z}(x)) \tag{564}$$

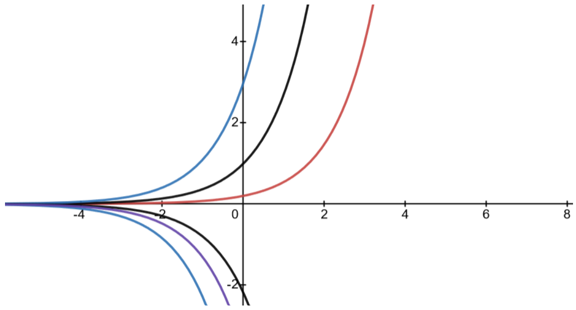


Figure 10: Enter Caption

13.3.1 Unicità delle soluzioni del problema di Cauchy

Si consideri l'equazione differenziale a variaibile serparata:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{565}$$

si riesce facilmente a dedurre che l'unica funzione $f \in C^1$ tale che la sua derivata è ancora la funzione stessa è la famiglia di primitive

$$y = ke^X \tag{566}$$

la quale può essere rappresentata come un infinità di curve dipendenti dal parametro k, come nell'immagine
a questo punto bisogna trovare tutte quelle funzioni che passano per il punto $(1, 2)$, vanno però presi in considerazioni due punti:

- non ho una garanzia che vi sia solo una funzione che soddisfi il problema di Cauchy.
- dove le soluzioni trovate sono definite.

13.4 Equazione lineare

Si definisce come **equazione lineare** una qualunque equazione scritta nella forma

$$\sum_{n=0}^{n} a_n x^n = y(x) \tag{567}$$

formalmente si dividono le equazioni lineari in due tipi

- **equazioni lineari *omogenee***: se la funzione incognita $y(x)$ è uguale a 0.
- **equazioni lineari**: se la funzione incognita $y(x)$ è diversa da 0.

generalmente le equazioni lineari omogenee sono una **sottoclasse** delle equazioni lineari, dalle quali, risolvendole è possibile estrarre delle soluzioni, le cui combinazioni lineari sono a loro volta delle soluzioni.

Principio di *sovrapposizione* Si supponga di avere due soluzioni di un equazione lineare omogenea $y_1, y_2 \in C^n(\mathbb{R})$, allora la funzione

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{568}$$

è a sua volta soluzione dell'equazione lineare omogenea, inoltre, tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea compongono il ker dell'applicazione lineare L, definita come

$$L : C^n \to C^0 \tag{569}$$

quindi una funzione L che ha come dominio lo spazio vettoriale delle **funzioni derivabili** n volte e come codominio lo spazio vettoriale delle **funzioni continue**.

Teorema di struttura Si supponga di avere un equazione lineare non omogenea nella forma

$$\sum_{n=0}^{n} a_n x^n = y(x) \neq 0 \tag{570}$$

per calcolare l'integrale generale dell'equazione è possibile procede trovando una soluzione dell'equazione disomogena, passasare all'associata e dopo di ciò trovare procedere con la seguente somma

$$y = y_f + y_0(\ker(L)) \tag{571}$$

Inoltre, l'ultimo teorema afferma che, a patto di avere sufficenti condizioni iniziali, vale la seguente affermazione

$$\exists! y_g \in C^n(\mathbb{R}) \;\mid\; \sum_{n=0}^{n} a_n y_g^n = f(x) \neq 0 \tag{572}$$

13.5 Equazioni differenziale di secondo grado omogenee

Un equazione differenziale di secondo grado è un tipo di equazione differenziale nella quale compare una derivata di ordine due

$$y'' + y' + y = 0 \tag{573}$$

Per comprendere al meglio questo tipo di equazioni differenziali è necessario definire alcuni concetti legati all'**analisi algebrica**, assumiamo di avere due spazi vettoriali V e W, una mappa lineare $L : V \to W$, si definisce come

$$\ker(L) = \{v \in V \;\mid\; L(v) = 0\} \tag{574}$$

il ker rappresenta quindi il sottospazio costituito da tutte le **radici** della mappa lineare, inoltre vale anche la seguente relazione

$$0 \in \ker(L) \in V \tag{575}$$

l'elemento $0 \in \mathbb{R}^n$ è sempre un elemento del Kernel, in particolare se $\ker(L) = \{0\}$ posso affermare che la funzione è sicuramente **iniettiva**, lo si dimostra facilmente

$$L(v_1) = L(v_2) \implies L(v_1 - v_2) = 0 \implies v_1 = v_2 \tag{576}$$

Se $\dim(\ker(L)) = K$ allora posso dire che il $\ker(L) = span(v_1, \ldots, v_k)$, difatti se il ker di K è uguale ad un certo insieme posso dire che esso è costituito dalle combinazioni lineari di quegli elementi.

Assumiamo adesso di avere due sottospazi vettoriali $V = C^n(\mathbb{R})$ e $W = C^0(\mathbb{R})$ e di avere una mappa lineare $L : V \to W$ definita come

$$Ly(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} \tag{577}$$

la quale rappresenta un equazione differenziale lineare, in particolare, essendo una mappa lineare applicata ad un'insieme di funzioni, essa prende il nome di **operatore**.

Dal teorema di struttura si può, banalmente, affermare che la soluzione dell'equazione differenziale di secondo grado è data da

$$y = y_f + \overline{y} \in \ker(L) \tag{578}$$

ottenuta sommando ad una soluzione particolare del sistema disomogeno l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo, definito, in questo caso come

$$\ker(L) = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\mid\; f(x) = 0 \;\forall x\} \subseteq W \tag{579}$$

per calcolare quante soluzioni all'equazione omogenea associata ci sono si può ricorrere ad un teorema, secondo il quale

$$\dim(\ker(L)) = n \tag{580}$$

dove n rappresenta il numero di gradi di derivazione dell'equazione differenziale, ad esempio, in grado due abbiamo due soluzioni diverse.

Visto che, per definizione, un elemento ottenuto attraverso combinazione lineare di due elementi del $\ker(L)$ è a sua volta un elemento del $\ker(L)$ possiamo sicuramente dire che, il $\ker(L)$ è dato da tutte le funzioni del tipo

$$\alpha_1 \bar{j}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{j}_n \tag{581}$$

che in termini algebrici equivale allo $span(\overline{j_1}, \overline{j_n}$.

Per risolvere un equazione lineare omogenea è necessario prima di tutto definire quella che potrebbe essere la struttura delle soluzioni, analizziamo il caso generale

$$\sum_{k=0}^{1} a_k y^{(k)} = y' + a_1 y = 0 \tag{582}$$

assumiamo inoltre che a_0 sia uguale a 1 in modo da ridurre i calcoli necessari. Posso facilmente dedurre che una possibile funzione soluzione dell'equazione omogenea è

$$y(x) = e^{-a_0 x} \implies \ker(L) = span(e^{-a_0 x}) = c_1 e^{-a_0 x} \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{583}$$

generalizzando il tutto si può arrivare ad avere una soluzione simile anche per quanto riguarda le equazioni del tipo

$$\sum_{k=0}^{2} a_k y^{(k)} = y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{584}$$

in questo caso infatti si procede cercando le soluzioni nella forma

$$e^{\lambda x} \implies [e^{\lambda x}]' = \lambda e^{\lambda x} \implies [\lambda e^{\lambda x}]' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{585}$$

andando a sostituire nell'equazione originale si ottiene

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0 \tag{586}$$

portando in evidenza un $e^{\lambda x}$ si ottiene

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \tag{587}$$

siccome $e^{\lambda x}$ non potrà mai essere zero lo semplifico da entrambi le parti e procedo a cercare le radici dell'equazione omogenea associata, le quali saranno λ_1, λ_2, in particolare però ci sono tre casi

- Discriminante positivo: ci sono due soluzioni distinte e la soluzione generale dell'equazione associata è

  $$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_1 e^{\lambda_2 x} \tag{588}$$

  inoltre le due soluzioni sono linearmente indipendenti.

- Il discriminante è uguale a 0: le due soluzioni sono coincidenti, ciò di per se causa un problema, in quanto sappiamo che la dimensione del $\ker(L)$ dovrebbe essere due e soprauttto le soluzioni non sono linearmente indipendenti

  $$\ker(L) = span(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_1 x}) = span(e^{\lambda_1 x}) \tag{589}$$

  è possibile dimostrare facilmente che in questo caso la soluzione è composta dalle funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $xe^{\lambda_1 x}$, di conseguenza lo span sarà equivalente a

  $$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \tag{590}$$

- Discriminante negativo: in questo caso ci saranno due soluzioni distinte, ma definite nel campo complesso e coniugate, nella forma

  $$a \pm ib \tag{591}$$

  in questo caso la soluzione viene rappresentata dalle funzioni $e^{ax} \cos(bx)$ e $e^{ax} \sin(bx)$ e di conseguenza la soluzione generale è lo span di queste due funzioni

  $$c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx) \tag{592}$$

Autovalori e soluzioni Assumiamo di voler risolvere un equazione lineare del tipo

$$y'' - 5y' + 6 = 0 \tag{593}$$

andiamo adesso a imporre

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \end{aligned} \tag{594}$$

andando a derivare ogni membro si ottiene

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) \\ z_2'(x) &= y''(x) \end{aligned} \tag{595}$$

lavorando l'espressione originale si può imporre $y''(x) = 5y'(x) - 6$ ottenendo

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2 \\ z_2'(x) &= y''(x) = 5y'(x) - 6 \end{aligned} \tag{596}$$

andando quindi a analizzare

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{597}$$

si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1-6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{598}$$

per trovare gli autovalori della matrice, definiti come le radici del polinomio caratteristico, si procede calcolando

$$\det(A - I\lambda) \tag{599}$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{600}$$

13.5.1 Equazioni differenziali del secondo ordine non omogene

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come risolvere equazioni differenziali con l'ordine massimo di derivazione pari a due, mettiamo caso però di avere un equazione differenziale nella forma

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = f(x) \tag{601}$$

questo tipo di equazione viene chiamata **equazione differenziale disomogenea**, in quanto come termine dopo l'uguale non vi è uno zero, ma bensì una funzione.

La risoluzione di questo tipo di funzioni ricorre a un particolare teorema, chiamato **teorema di struttura**, il cui enunciato si trova in questa sezione, in generale esso afferma che l'*integrale generale* dell'equazione differenziale è dato da

$$y = y_f + \overline{y} \tag{602}$$

quindi dalla somma di una soluzione dell'equazione disomogenea e dalle soluzioni del sistema omogeno.

Assumiamo quindi di aver già definito le soluzioni dell'equazione disomogena, la quale sarà nella forma

$$c_1e^{\lambda_1 x} + c_1e^{\lambda_2 x} \tag{603}$$

Successivamente si procede cercando la soluzione del sistema lineare disomogeno applicando il metodo degli **annichilatori**, l'idea generale di questo metodo è quella di trovare una soluzione particolare la cui forma sia

$$P(x)e^{\alpha x} \tag{604}$$

è importante però fare un osservazione, infatti affinché questo metodo funzione correttamente deve essere verificata una condizione

$$\alpha \neq \lambda \quad \forall \lambda \tag{605}$$

se infatti una soluzione dell'equazione omogenea è anche soluzione dell'equazione disomogenea vi è la presenza di **risonanza** e vi è bisogno di fare degli aggiustamenti.

Una volta definita la soluzione generica la deriviamo tante volte quanti sono i gradi di derivazione andando a sostituire nell'equazione differenziale originale, dopo di ché si svolgono i calcoli fino a trovare la soluzione particolare.

Se dopo l'uguale vi è una somma di funzione si procede in un modo analogo, andando a trovare la soluzione rispetto ad ogni membro dopo l'uguale e andando a sommare il tutto con la soluzione del sistema omogeneo.

Quando si ha una soluzione in cui è presente il seno o il coseno è importante che la struttura della soluzione particolare includa anche l'altra funzione moltiplicata per un polinomio.

13.6 Equazioni lineari con grado superiore a due

Andiamo a considerare, adesso, un'equazione lineare nella forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0 \tag{606}$$

per definizione so che la soluzione di questa equazione è nella forma

$$y = \ker(L) = span(y_1, \ldots, y_n) \tag{607}$$

inoltre, come nel caso precedente cerco le soluzioni nella forma

$$e^{\lambda x} \tag{608}$$

in questo caso però considero anche le molteplicità delle radici della funzione, la quale sarà definita come

$$y = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) \tag{609}$$

dove la somma delle molteplicità delle radici equivale al numero.

13.7 Metodo del fattore integrande per coefficenti non costanti

Il metodo del fattore integrante viene utilizzato per risolvere equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$y' + A(x)y = B(x) \tag{610}$$

moltiplicando entrambi i memebri dell'equazione tramite il fattore integrante $M(x)$

$$M(x) = e^{\int A(x)} \tag{611}$$

13.8 Approssimazione dell'equazione differenziale

Nella moltitudine dei casi non è possibile definire esattamente il risultato di un'equazione differenziale, è possibile però procedere con un metodo di approssimazione generale, supponiamo di avere un problema di Cauchy definito come

$$\begin{cases} y'(x) = \arctan(x^2 y(x) + sin(x)) \end{cases} \tag{612}$$

guardando questo integrale ci si accorge subito dell'impossibilità di calcolarne esattamente il valore, si potrebbe però fare un osservazione, la derivata prima è definita come

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \tag{613}$$

andando a sostituire nell'espressione si ottiene quindi:

$$\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h} = \arctan(x^2y(x)+sin(x)) \tag{614}$$

inoltre, suppongo di sapere che $y(0) = 1$; adesso si procede dividendo l'intervallo h volte e attuando delle manipolazioni sull'espressione si ottiene

$$y(x_0+h) = h[\arctan(x^2y(x_0)+sin(x_0))] + y(x_0) \tag{615}$$

adesso, dopo aver calcolato il valore $y(x_0+h)$ fissando a quanto equivale h, posso ripetere l'operazione all'infinito.

14 Compendiario generale

14.1 Funzioni trigonometriche inverse

Ogni qualvolta si cerca di calcolare il valore di una funzione trigonometrica inversa conviene porsi questo quesito: *quale angolo ha la funzione trigonometrica che vale quella quantità ?*

14.1.1 Funzione $\arcsin(x)$

Analizziamo la funzione $\sin(x)$, essa è una funzione $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ rappresentabile graficamente come:

verrebbe da chiedersi se essa sia invertibile o meno, in generale, possiamo asserire di no, in

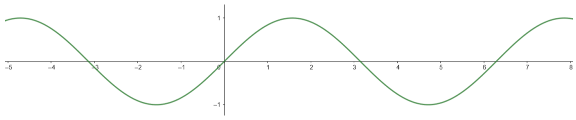


Figure 11: Grafico $\sin(x)$

quanto per definizione sappiamo che la funzione inversa f^{-1} è una funzione che ha come dominio il codominio della funzione che inverte e come codominio il dominio della stessa, definibile solo per funzioni **biunivoche** e il seno, nella sua definizione base non lo è, posso però attuare una restrizione del dominio, andando a prendere un singolo **periodo** della funzione che nel caso del $\sin(x)$ è $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Adesso, se definiamo il seno come una $f : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è biunivoca e di conseguenza invertibile, definiamo quindi come **funzione inversa** del seno la funzione $\arcsin(X)$ definita come una $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ rappresentata graficamente come:

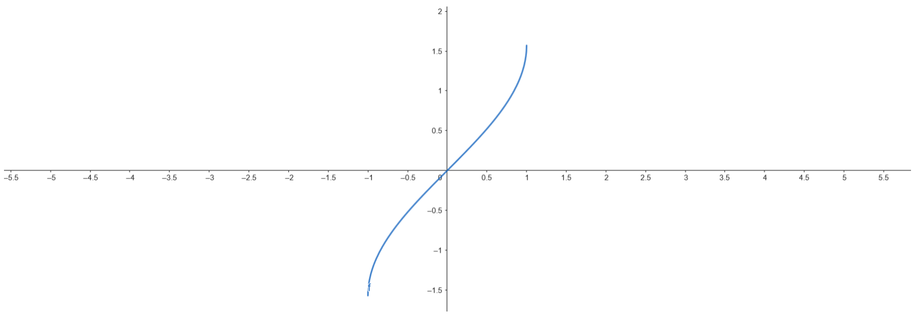


Figure 12: Grafico $\arcsin(x)$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \arcsin(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\arcsin(x)}{x} = 0 \tag{616}$$

in particolare l'ultima si dimostra deducendo che $\arcsin(x)$ è una funzione limitata che oscilla tra due valori massimi, mentre invece x è una funzione **illimitata**.

14.1.2 Funzione $\arccos(x)$

Analizziamo la funzione $\sin(x)$, essa è una funzione $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ rappresentabile graficamente come:

verrebbe da chiedersi se essa sia invertibile o meno, in generale, possiamo asserire di no, in quanto per definizione sappiamo che la funzione inversa f^{-1} è una funzione che ha come dominio il codominio della funzione che inverte e come codominio il dominio della stessa. Inoltre, la funzione inversa è definibile solo per funzioni **biunivoche** e il coseno, nella sua definizione base non lo è,

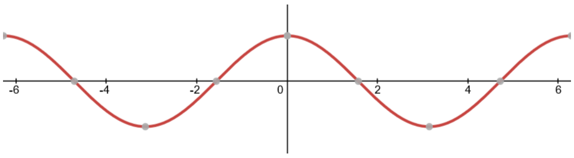


Figure 13: Grafico $\cos(x)$

posso però attuare una restrizione del dominio, andando a prendere un singolo **periodo** della funzione che nel caso del $\sin(x)$ è $[0, \pi]$. Adesso, se definiamo il coseno come una $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ si può asserire che essa è biunivoca e di conseguenza invertibile, definiamo quindi come **funzione inversa** del coseno la funzione $\arccos(X)$ definita come una $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ rappresentata graficamente come:

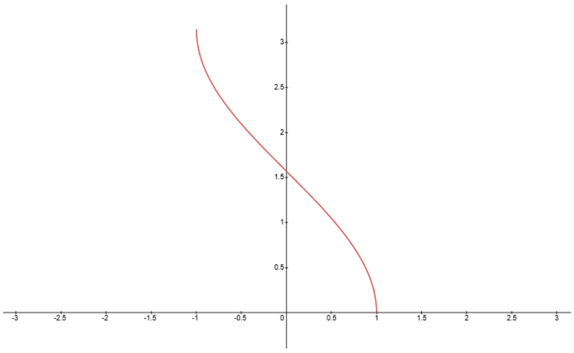


Figure 14: Grafico $\arccos(x)$

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x)}{x} = N.E \qquad \lim_{x\to 0} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \tag{617}$$

14.1.3 Funzione $\arctan(x)$

Analizziamo la funzione $\tan(x)$, essa è una funzione $f : \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ rappresentabile graficamente come:

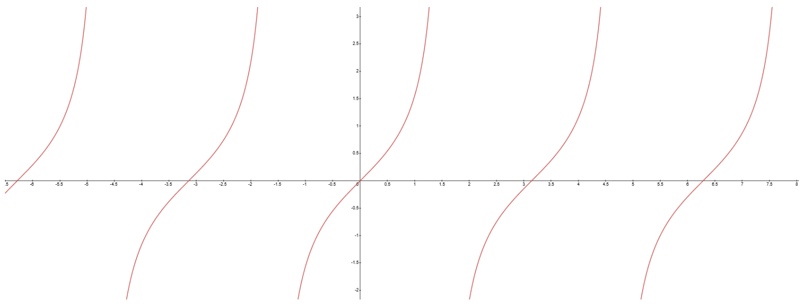


Figure 15: Grafico $\tan(x)$

verrebbe da chiedersi se essa sia invertibile o meno, in generale, possiamo asserire di no, in quanto per definizione sappiamo che la funzione inversa f^{-1} è una funzione che ha come dominio il codominio della funzione che inverte e come codominio il dominio della stessa. Inoltre, la funzione inversa è definibile solo per funzioni **biunivoche** e la tangente, nella sua definizione base non lo è, posso però attuare una restrizione del dominio, andando a prendere un singolo **periodo** della funzione che nel caso della $\tan(x)$ è $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Adesso, se definiamo il coseno come una $f:]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ si può asserire che essa è biunivoca e di conseguenza **invertibile**, definiamo quindi come **funzione inversa** della tangente la funzione $\arctan(X)$ definita come una $f: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ rappresentata graficamente come:

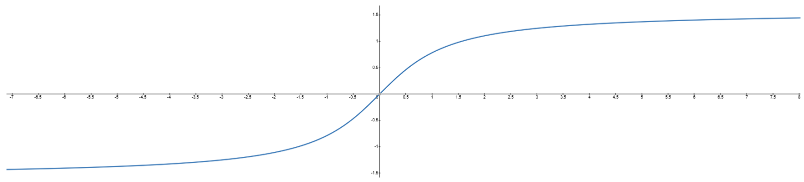


Figure 16: Grafico $\arctan(x)$

è importante ricordare che nonostante la funzione vada verso l'infinito essa ha comunque uno sviluppo asintotico e un limite **superiore** e **inferiore**.

14.2 Limiti notevoli

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad 8.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{618}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1 \qquad 9.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{619}$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad 10.\ \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1 \tag{620}$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1 \qquad 11.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^c-1}{x}=c \tag{621}$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{x}=1 \qquad 12.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+1}{x^2}=\frac{1}{2} \tag{622}$$

$$6.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \tag{623}$$

$$7.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tanh(x)}{x}=1 \tag{624}$$

14.3 Derivate fondamentali

1. $(x^k)' = kx^{k-1}$ (625)
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln(x)$ (626)
3. $(\sin(x))' = \cos(x)$ (627)
4. $(e^x)' = e^x$ (628)
5. $(log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$ (629)
6. $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$ (630)
7. $(\cos(x))' = -\sin(x)$ (631)
8. $(\tan(x))' = \frac{1}{\sec(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ (632)
9. $(\cot(x))' = \frac{1}{\csc(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$ (633)
10. $\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (634)
11. $\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (635)
12. $\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (636)
13. $(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ (637)

14.3.1 Formule generali

1. $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{f(x)g'(x)}{f(x)}]$ (638)
2. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (639)
3. $(g(x)f(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (640)

(641)

14.4 Integrali fondamentali

15 Dimostrazioni e esercizi logici

15.1 Esistenza del limite

Si supponga di avere una funzione $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0$, quindi strettamente **convessa**, si supponga inoltre di avere un punto $x_0 = 0$ di minimo nel quale $f(x) = -1$, si verifichi se:

- Esiste il limite per $x \to \infty$.
- Esiste il limite per $x \to \infty$ con $f''(x) \geq 0$.
- Esiste il limite per $x \to \infty$ non considerando x_0 come punto di minimo.

Esistenza del limite Dal **teorema di Fermat** posso affermare che, essendo $x_0 = 0$ un punto di minimo vale la seguente affermazione

$$f'(x_0) = 0 \tag{642}$$

inoltre essendo un punto di minimo posso anche asserire che $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$, essendo anche la funzione strettamente convessa, quindi con la cavità rivoltà verso il basso, si osserva facilmente che:

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \tag{643}$$

Esistenza del limite senza assolutà convessità Posso prendere un qualsiasi punto $x > 0$, come anche nel caso precedente so che $f'(x) > 0$, ma in questo caso non vi è più l'assuluta convessità e di conseguenza non è più detto che la retta

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{644}$$

sia sempre al di sopra della retta, di conseguenza non è possibile asserire definitivamente che il limite diverge a $+\infty$, si prenda come esempio la funzione

$$f(x) = -1 \tag{645}$$

15.2 Integrale di una funzione

Assumiamo di dover calcolare l'integrale di una funzione $f(x)$ definito

$$\int_0^2 f(x)\, dx \tag{646}$$

dove $f(x)$ è definita come: *il numero di volte in cui la funzione $\phi(t) = e^t - e$ cambia di segno quanto $t < x$.*

La risuluzione di questo esercizio richiede quindi di trovare $f(x)$ per poi calcolarne l'integrale nell'intervallo, all'apparenza però caratterizzare $f(x)$ può sembrare complesso, in realtà, banalmente, è sufficente studiare $\phi(t)$

$$e^t - e \tag{647}$$

si dimostra facilmente che la funzione ha uno sviluppo asintotico ed è limitata inferiormente

$$-e < \phi(x) \leq +\infty \tag{648}$$

ciò ci permette di dedurre facilmente che la funzione è strettamente crescente, comportandosi di fatto come e^t; si può dimostrare la stessa identica cosa studiando la derivata prima.

Da ciò che abbiamo ottenuto fino ad ora si deduce che la funzione cambia di segno una sola volta, in particolare, cambia di segno quando $t_0 = 1$, quindi quando $x \leq 1$ la funzione vale 1, altrimenti vale 0

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \tag{649}$$

si procede quindi a calcolare l'integrale

$$\int_1^2 1\, dx + \int_0^1 0\, dx = \int_1^2 1\, dx = 2 - 1 = 1 \tag{650}$$

15.3 Continuità della funzione

Dimostrare che

$$(f(x))^2 \in C(\mathbb{R}) \implies f(x) \in C(\mathbb{R}) \tag{651}$$

per fare questo esercizio è conveniente cercare delle funzioni che permettano di dimostrare o meno la validità del teorema, in questo caso è sufficente prendere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{652}$$

se elevata al quadrato restituisce $(f(x))^2 = 1$ la quale è continua, di conseguenza abbiamno trovato un caso in cui il teorema non funziona.

r

15.3.1 Seconda parte esercizio

Dimostrare che $f(x) \in C^1(\mathbb{R}) : |f'(x)| < k \implies f^2 \in c^1(\mathbb{R}) \wedge \exists c_2 : \frac{d}{dx}\frac{(f(x))^2}{2} \leq c_2$ per dimostrare la non validità dell'implicazione è sufficente prendere

$$f(x) = x \tag{653}$$

la funzione rispetta infatti la condizione del valore assoluto, in quanto $f'(x) = 1$, si procede quindi analizzando la derivata

$$[f(x)]^2 = x^2 \mapsto \left| \frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} \right| = x \tag{654}$$

essendo x una funzione illimitata è falso dire che $x \leq c_2$.

15.4 Coseno immaginario

Determinare le eventuali soluzioni complesse dell'equazione

$$\cos(z) = 2 \tag{655}$$

Osserviamo che per qualsiasi numero reale x si ha che $\cos(x) \neq 2$, occorre quindi cercare le soluzioni immaginarie della forma $z = ix$. Ricordando che

$$\cos(z) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{656}$$

che con le dovute sostituzioni diventa

$$\cos(z) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}(ix)^{2n} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x) \tag{657}$$

l'equazione può essere quindi semplificata a

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{658}$$

15.5 Integrale parte intera e frazionaria

Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^3 [x]^{\{}x\}\, dx \tag{659}$$

la funzione di cui si sta cercando di calcolare l'integrale è una funzione composta derivata a sua volta da due funzioni

- $[x]$, funzione che rappresenta la parte intera di x, definita come

$$[x] = x - \{x\} \tag{660}$$

- $\{x\}$ funzione che rappresenta la parte frazionaria di x, definita come

$$\{x\} = x - [x] \tag{661}$$

La funzione usando la definizione di parte intera e frazionaria risulta essere

$$\begin{cases} 1^{x-1} & 1 \leq x < 2 \\ 2^{x-2} & 2 \leq x < 3 \\ 3^{x-3} & x = 3 \end{cases} \tag{662}$$

risulta quindi continua tranne che in $x = 3$, essendo però la funzione continua a tratti è integrabile secondo Riemann:

$$\int_1^3 [x]^{\{x\}}\, dx = \int_1^2 1\, dx + \int_2^3 2^{x-2}\, dx \tag{663}$$

16 Equazioni differenziali

16.1 Equazione differenziale con somma di funzioni

Supponiamo di avere un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y^{(3)} + y^{(1)} = \cos(2x) + (x + x^2) + e^x \sin(x) \end{cases} \tag{664}$$

risolvere questa vuol dire trovare la soluzione particolare per ogni funzione incognita y_1, y_2, y_3, di conseguenza vuol dire risolvere tre *sotto-equazioni differenziali*

$$\begin{aligned} &1.\ y^{(3)} + y^{(1)} = \cos(2x) \\ &2.\ y^{(3)} + y^{(1)} = (x + x^2) \\ &3.\ y^{(3)} + y^{(1)} = e^x \sin(x) \end{aligned} \tag{665}$$

Si procede prima di tutto andando a calcolare le radici dell'equazione omogenea associata

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \mapsto \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \tag{666}$$

dalla quale ottengo tre radici:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \pm i \end{aligned} \tag{667}$$

successivamente si procede cercando le soluzioni particolari delle equazioni.

Risoluzione equazione 1 Si procede andando a definire la struttura generale della soluzione, la quale è data da

$$y_{f_1} = a_0 \cos(2x) + b_0 \sin(2x) \tag{668}$$

visto che il $\cos(x)$ rappresenta la parte reale di e^{2ix} devo verificare che $\pm 2i$ non sia radice dell'equazione omogenea, ma visto che $\pm i \neq \pm 2i$ posso affermare che non vi è risonanza.

Dopo di ciò si procede derivando fino al terzo ordine la funzione risultato

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2a_0 \sin(2x) + 2b_0 \cos(2x) \\ y^{(3)} &= +8a_0 \sin(2x) - 8b_0 \cos(2x) \end{aligned} \tag{669}$$

si procede sostituendo la funzione nell'espressione originale si ottiene

$$+8a_0 \sin(2x) - 8b_0 \cos(2x) - 2a_0 \sin(2x) + 2b_0 \cos(2x) = \cos(2x) \tag{670}$$

risolvendo l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ b_0 &= -\frac{1}{6} \end{aligned} \tag{671}$$

quindi la soluzione finale per questa equazione è:

$$y_1 = -\frac{sin(2x)}{6} \tag{672}$$

Risoluzione equazione 2 Si procede andando a definire la struttura generale della soluzione, la quale è data da

$$y_{f_2} = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)e^{0x} \tag{673}$$

visto che una delle radici del polinomio risultato è 0 vi è un caso di **risonanza**, è quindi necessario cambiare leggermente il la struttura del risultato dell'equazione

$$y_{f_2} = x(a_2 x^2 + a_1 x + a_0)e^{0x} \tag{674}$$

Dopo di ciò si procede derivando fino al terzo ordine la funzione risultato

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= x(2a_2x + a_1) + (a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ y^{(3)} &= 6a_2 + 2x \end{aligned} \tag{675}$$

si sostituisce nell'espressione originale ottenendo

$$\begin{aligned} &6a_2 + 2x + x(2a_2x + a_1) + (a_2x^2 + a_1x + a_0) = x^2 + x \\ &6a_2 + a_0 + x(2 + 2a_2 + 2a_1) + a_2x^2 = x^2 + x \end{aligned} \tag{676}$$

dal quale si ricava il sistema

$$\begin{cases} 6a_2 + a_0 = 0 \\ 2 + 2a_2 + 2a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases} \tag{677}$$

risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = -\dfrac{3}{2} a_0 = -6 \end{cases} \tag{678}$$

dalla quale si ricava la soluzione

$$y_{f_2} = x^2 - \frac{3}{2}x - 6 \tag{679}$$

Risoluzione equazione 3 Si procede andando a definire la struttura generale della soluzione, la quale è data da

$$y_{f_3} = a_0e^x \sin(x) + b_0e^x \cos(x) \tag{680}$$

visto che rispettivamente il seno e il coseno rappresentano la parte immaginaria e intera del numero immaginario $1 \pm i$ non vi è risonanza, in quanto esso non appartiene alle soluzioni dell'omogenea.

Dopo di ciò si procede derivando fino al terzo ordine la funzione risultato

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= a_0e^x \sin(x) + a_0e^x \cos(x) + b_0e^x \cos(x) - b_0e^x \sin(x) \\ y^{(3)} &= (-2b_0 - 2a_0)e^x \sin(x) + (2a_0 - 2b_0)e^x \cos(x) \end{aligned} \tag{681}$$

si sostituisce nell'espressione originale ottenendo

$$\begin{aligned} &(-2b_0 - 2a_0)e^x \sin(x) + (2a_0 - 2b_0)e^x \cos(x) + a_0e^x \sin(x) + a_0e^x \cos(x) + \\ &b_0e^x \cos(x) - b_0e^x \sin(x) = e^x \sin(x) \end{aligned} \tag{682}$$

riordinando i termini si ottiene

$$\begin{aligned} &e^x[\sin(x)(-2b_0 - 2a_0 + a_0 + b_0) + \cos(x)(2a_0 - 2b_0 + a_0 + b_0] = \\ &e^x[\sin(x)(-b_0 - a_0) + \cos(x)(3a_0 - b_0)] \end{aligned} \tag{683}$$

si imposta successivamente il sistema

$$\begin{cases} a_0 = -b_0 \\ 3a_0 = b_0 \end{cases} \tag{684}$$

dal quale si ricava che entrambi i coefficenti sono zero.

Soluzione finale Da teorema di struttura posso dire che l'integrale generale della soluzione è

$$y = \tag{685}$$

16.2 Problema di Cauchy con parametro variabile

Si risolva per $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - \epsilon^2 y(x) = x \\ y(0) = \epsilon^2 y'(0) = 0 \end{cases} \tag{686}$$

Si determini poi se esiste il limite

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} y_\epsilon(x) \tag{687}$$

Per svolgere questo esercizio è necessario innanzitutto trovare le soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\lambda^2 - \epsilon^2 = 0 \mapsto \lambda = \pm\epsilon \tag{688}$$

l'integrale generale del sistema omogeno sarà quindi

$$\overline{y} = e^{\epsilon x} + e^{-\epsilon x} \tag{689}$$

successivamente si definisce come dovrebbe essere la soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$$a_0 + a_1 x \tag{690}$$

Il problema inoltre è senza **risonanza**. Successivamente si procede canonicamente, calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione, ricavando così l'integrale generale del sistema come

$$y_f(x) = -\frac{x}{\epsilon^2} \tag{691}$$

pertanto l'integrale generale del sistema sarà

$$y_f(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x} \tag{692}$$

imponendo le condizioni iniziali otteniamo inoltre

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \epsilon^2 \\ c_1\epsilon - c_2\epsilon - \dfrac{1}{\epsilon^2} = 0 \end{cases} \tag{693}$$

risolvendo il sistema si ottiene

$$y_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\epsilon^2 + \epsilon^{-3})e^{x\epsilon} + \frac{1}{2}(\epsilon^2 + \epsilon^{-3})e^{-x\epsilon} - \frac{x}{\epsilon^2} \tag{694}$$

Il problema per $\epsilon \to 0$ equivale a

$$\begin{cases} y''(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{695}$$

la cui unica soluzione è

$$y_f(x) = \frac{x^3}{6} \tag{696}$$

17 Studi di funzione

17.1 Retta tangente ad un curva per un punto

Assumiamo di avere una funzione $f(x) = \ln(x)$ e di voler calcolare la retta tangente passante per $(0, 0)$:

$$f(x) = \begin{cases} mx = y \\ \ln(x) = y \end{cases} \tag{697}$$

per semplificare il calcolo creo una funzione $F(x)$ definita come funzione differenza:

$$F(x) = mx - \ln(x) \tag{698}$$

la quale ovviamente assumerà come valore 0 quando le due funzioni avranno lo stesso valore e saranno quindi tangenti. Studio inoltre la funzione in due punti:

$$\begin{aligned} &1. \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & m < 0 \\ -\infty & m > 0 \end{cases} \\ &2. \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \end{aligned} \tag{699}$$

Adesso si procede a studiare la derivata prima, in particolare posso definire come funzione derivata:

$$f'(x) = m - \frac{1}{x} \tag{700}$$

in particolare studiando la variazione del parametro m deduco che:

- Se m ¡ 0 la funzione è **monotona decrescente** e di conseguenza non mi interessa il suo sviluppo.
- se m ¿ 0 posso avere due casi:
  - $m > \frac{1}{x}$ la funzione è monotona **crescente**.
  - $m < \frac{1}{x}$ la funzione è monotona **decrescente**.

di conseguenza posso asserire con certezza che in $x_0 = \frac{1}{m}$

17.2 Calcolo della retta tangente

Assumiamo di avere una funzione $f(x_0)$ di cui stiamo cercando di calcolare la retta tangente in uno specifico punto x_0, se la funzione è continua e derivabile nel punto è sufficente applicare il primo grado del polinomio di Taylor:

$$\phi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{701}$$

dal quale riusciamo agilmente a definire il valore della retta tangente nel punto x_0.

17.3 Calcolo del λ

Assumiamo di avere una funzione $f(x) :]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ definita come:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+3}} \tag{702}$$

e assumiamo di voler cercare un punto λ tale che:

$$\sqrt{\frac{x}{x+3}} = \lambda \tag{703}$$

in questo caso particolare il dominio della funzione e di conseguenza sappiamo come si comporta all'incirca la funzione, però è comunque necessario definire cosa succede più ci si avvicina ai punti non inclusi nel dominio, in particolare:

$$\lim_{x\to-1} \sqrt{\frac{x}{x+3}} = \lim_{x\to-1} \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = +\infty \tag{704}$$

da questo semplice calcolo è possibile dedurre un'informazione abbastanza importante sulla funzione: **non esiste un punto di massimo della funzione**, inotre, visto che la funzione è strettamente positiva possiamo asserire con sicurezza che essa **non sarà mai negativa**, quindi nel caso in cui il λ che stiamo cercando sia negativo non vi sarà alcuna intersezione.
Si procede calcolando la derivata della funzione:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right)' = \frac{x^2(2x+3)}{2\sqrt{\frac{x}{x+3}}(x+1)^2} \tag{705}$$

adesso per indagare il comportamento della funzione possiamo limitarci ad osservare il fattore $(2x+3)$ in quanto esso è l'unico che può assumere valori negativi:

$$2x+3 \geq 0 \implies x \geq -\frac{3}{2} \tag{706}$$

Da questo risultato possiamo dedurre un'informazione fondamentale:

- La $f(x)$ è **decrescente** nell'intervallo $]-\infty, -\frac{3}{2}[$.
- La $f(x)$ è **crescente** nell'intervallo $[-\frac{3}{2}, -1[$ e nell'intervallo $[0, +\infty[$.

Adesso è necessario definire chi tra $f(-\frac{3}{2})$ è $f(0)$ ha valore più alto:

$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{20} \geq f(0) = 0 \tag{707}$$

adesso si può agilmente disegnare il grafico della funzione:

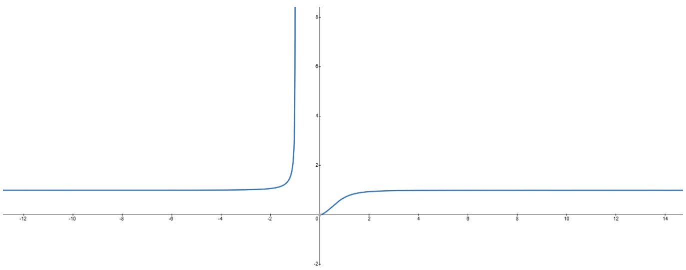


Figure 17: Enter Caption

dal grafico si può infine dedurre le soluzioni dell'espressione orginale:

- se $\lambda < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ esiste **una** sola soluzione.
- se $\lambda = f\left(-\frac{3}{2}\right)$ esistono **due** soluzioni.
- se $\lambda \geq f\left(-\frac{3}{2}\right)$ esistono **tre** soluzioni

17.4 Studio di una funzione particolare

17.5 Studio di una funzione integrale

Si assuma di voler studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x (t-1)e^{t^2}\, dt \tag{708}$$

L'esercizio di per se non è più difficile di un normale studio di funzione, per certi versi avere una funzione integrale permette di semplificare lo studio della derivata. Inoltre, a riguardo di questo esercizio è possibile fare alcune osservazioni:

- Visto che la funzione contiene un e^t si può affermare che $f(x) \in C^{+\infty}(\mathbb{R})$
- Non è possibile esplicitare direttamente l'integrale.

Si procede con lo studio di funzione

$$f'(x) = (t-1)e^{t^2} \tag{709}$$

dal quale si ricava:

- $f'(x) < 0$ quando $x < 1$
- $f'(x) \geq 0$ quando $x \geq 1$

si ha quindi un punto di minimo in $x_0 = 1$.

Successivamente si studia la funzione agli estremi del dominio, se $x \to +\infty$ si ha che $\exists M : t > M \quad (t-1)e^{t^2} \geq 1$, di conseguenza l'integrale può essere diviso nel seguente modo

$$\int_0^{+\infty} (t-1)e^{t^2}\, dt - \int_0^{M} (t-1)e^{t^2}\, dt = +\infty - M = +\infty \tag{710}$$

si può applicare un ragionamento analogo quando $x \to -\infty$ ottenendo che la funzione diverge verso $-\infty$.

17.6 Studio di un'altra funzione integrale

si assuma di voler studiare la funzione

$$f(x) = (1-x^2)\int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{711}$$

17.6.1 Studio del dominio della funzione

Per studiare il dominio della funzione il metodo migliore è quello di analizzare i due *membri* della funzione

$$\begin{gathered} (1-x^2) \in C^0(\mathbb{R}) \\ \int_0^x e^{-t^2}\, dt \in C^0(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{712}$$

di conseguenza essendo $f(x)$ il prodotto di funzioni conitnue, esso è a sua volta una funzione continua, il dominio quindi è definito come

$$]-\infty, +\infty[\tag{713}$$

17.6.2 Studio della derivata

DA TERMINARE

17.7 Studio di funzione 8/01/2020

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}|x| + \ln\left(2\frac{|x|-1}{|x|-2}\right) \tag{714}$$

Il primo passo necessario alla risoluzione dell'esercizio è **definire il dominio della funzione**, per proprietà del logaritmo è necessario che l'argomento sia strettamente maggiore di zero, quindi nel caso della $f(x)$ che

$$\frac{|x|-1}{|x|-2} > 0 \tag{715}$$

la quale è maggiore di zero quando $x = \pm 1$, d'altra parte invece quando la $x = \pm 2$ il denominatore diventa zero. La funzione risultà quindi definita nell'intervallo

$$]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, +\infty[\tag{716}$$

successivamente si procede a espandere la funzione, essendo essa definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \ln\left(2\frac{x-1}{x-2}\right) & x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x + \ln\left(2\frac{-x-1}{-x-2}\right) & x < 0 \end{cases} \tag{717}$$

per semplificare lo svolgimento dell'esercizio vi è un osservazione importante, la funzione è **pari**, in altre parole, è *simmetrica*, ciò implica che andando a studiare l'andamento del grafico da una delle due parti si riesce a ricostruire anche la parte opposta; in questo caso verrà presa in esame la parte positiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \ln\left(2\frac{x-1}{x-2}\right) \tag{718}$$

dopo di che si procede studiando gli estremi della funzione, in particolare $x = 1^-$, $x = \pm\infty$, $x = 2^+$

$$\begin{aligned} &1.\ \lim_{[} x \to 1^-]f(x) = -\infty \\ &2.\ \lim_{[} x \to \pm\infty]f(x) = +\infty \\ &3.\ \lim_{[} x \to 2^+]f(x) = +\infty \end{aligned} \tag{719}$$

dopo essere riusciti a definire la funzione nei suoi estremi si può procedere con lo studio della derivata prima

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 3x - 1}{3(x-1)(x-2)} \tag{720}$$

si procede con lo studio della funzione

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{3(x-1)(x-2)} > 0 \tag{721}$$

visto che $x = 1$ e $x = 2$ non sono inclusi nel dominio posso moltiplicare entrambi i membri per $3(x-1)(x-2)$ ottenendo

$$x^2 - 3x - 1 > 0 \tag{722}$$

risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che:

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \quad x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \mathrm{e} x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ &f'(x) < 0 \quad \frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{aligned} \tag{723}$$

visto che stiamo utilizzando soltanto la parte positiva della funzione posso escludere il punto $x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ e riscrivere gli intervalli della derivata come

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \quad x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ &f'(x) < 0 \quad 0 < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{aligned} \tag{724}$$

visto che $f'(x)$ decresce prima di $x_0 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ e successivamente cresce, si può affermare che x_0 è un punto di **minimo relativo** della funzione.

Studiando invece la derivata seconda si ottiene

$$f''(x) = \frac{2x-2}{(x-2)^2(x-1)^2} \tag{725}$$

come nel caso della derivata prima essendo $x = 1$ e $x = 2$ non inclusi nel dominio, il denominatore **non si azzera mai**, la frazione si annulla solo quando

$$2x - 3 = 0 \mapsto x = \frac{3}{2} \tag{726}$$

dalla precedente analisi sul dominio sappiamo però che $x = \dfrac{3}{2}$ non appartiene a quest'ultimo, sappiamo quindi che la funzione risulta convessa per $x > 2$ e concava per $0 < x < 1$. Abbiamo adesso definito tutte le caratteristiche della funzione, manca solo il disegno del grafico

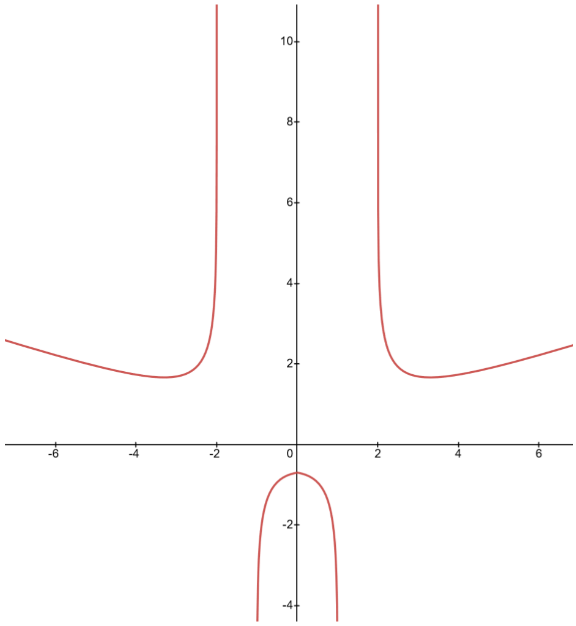


Figure 18: Grafico definitivo dello studio di funzione

17.8 Studio di massimo e minimo al variare di un parametro

Determinare se esistono λ tali che $f(x) = [x^2 - \lambda x]e^{\lambda x}$ ha un massimo assoluto.

Per svolgere questo esercizio si può fare ricorso allo studio della derivata, l'idea generale infatti è quella per la quale studiando il segno della derivata riesca a identificare quali sono i punti di massimo e di minimo, in particolare, anche variando il parametro λ. Si può però fare un osservazione preliminare, se λ dovessere venir preso uguale a 0 la funzione diventerebbe

$$f(x) = x^2 \tag{727}$$

la quale non ha alcun punto di massimo. Si procede adesso calcolando la derivata

$$y'(x) = 2xe^x + \lambda x^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}[\lambda x^2 - x(2 - \lambda^2) - \lambda] \tag{728}$$

si procede adesso a studiare dove essa diventa maggiore di zero, ignorando il termine $e^{\lambda x}$, in quanto esso non potrà mai annullarsi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(2-\lambda^2) \pm \sqrt{(2-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda} \tag{729}$$

dal quale ricavo infine che:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 4} - 2}{2\lambda} \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 + 4} - 2}{2\lambda} \end{aligned} \tag{730}$$

dalla quale ricavo infine che se $\lambda > 0$ allora ho il punto di massimo in λ_1, se invece ho $\lambda < 0$ le due frazioni si invertono e λ_2 diventa il punto di massimo.

17.9 Studio funzione

Studiare la funzione

$$|x^3 + x^2 + x + 1| - x^2 \tag{731}$$

Per trattare il valore assoluto è necessario innanzitutto definire dove la funzione si annulla, in questo caso per $x = -1$, la funzione può essere quindi fattorizzata come

$$|(x+1)(x^2+1)| - x^2 \tag{732}$$

visto che $(x^2 + 1)$ è sempre maggiore di zero e non si annulla mai per $x \in \mathbb{R}$ la funzione può essere esplicitata nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & x \geq -1 \\ -x^3 - 2x^2 - x - 1 & x < -1 \end{cases} \tag{733}$$

osservando la funzione ci si rende conto che essa è continua e di conseguenza il suo dominio è definito come

$$D = \{\mathbb{R}\} \tag{734}$$

Successivamente si procede studiando cosa succede agli estremi della funzione

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \tag{735}$$

Dopo di ché si studia la derivata della funzione

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \geq -1 \\ -3x^2 - 4x - 1 & x < -1 \end{cases} \tag{736}$$

Nella parte positiva del grafico la funzione ha un punto stazionario in

$$x = -\frac{1}{3} \tag{737}$$

dove la derivata è prima positiva e successivamente negativa, invece nella parte negativa la funzione si annulla per

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \tag{738}$$

la funzione ha quindi un'altro punto stazionario in meno 1, inoltre la derivata prima nel complesso sarà

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad x > -1 \\ f'(x) < 0 \quad x < -1 \end{aligned} \tag{739}$$

in $x = -1$ vi è un **punto di minimo assoluto**.

Infine si procede con lo studio della derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq -1 \\ -6x - 4 & x \geq -1 \end{cases} \tag{740}$$

che si annullano rispettivamente per $= 0$ e $x = -2/3$, si ha quindi

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \quad -\frac{2}{3} < x < 0 \\ f''(x) > 0 \quad x < -\frac{2}{3} \wedge x > 0 \end{aligned} \tag{741}$$

18 Convergenze integrali e serie

18.1 Convergenza di una serie al variare di un parametro

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0, n\neq 4}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-4n)^{x^3-x+\frac{1}{2}}} \tag{742}$$

considerando che il carattere della serie è determinato fondamentalmente dal termine di grado massimo posso dire che la serie si comporta all'incirca come

$$\sum_{n=0, n\neq 4}^{+\infty} \frac{1}{(n^2)^{x^3-x+\frac{1}{2}}} \tag{743}$$

si procede andando a moltiplicare il fattore 2 per l'equazione al'esponente, ottenendo

$$2x^3 - 2x + 1 \tag{744}$$

si deduce facilmente che questa è una serie armonica, di conseguenza converge quando $\alpha > 1$ e di conseguenza quando

$$2x^3 + 2x + 1 > 1 \mapsto 2x^3 - 2x > 0 \mapsto 2x(x^2-1) > 0 \tag{745}$$

dal quale si ottiene che

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \land x > 1 \end{cases} \tag{746}$$

svolgendo il sistema si deduce dove la serie converge.

18.2 Convergenza di un integrale al variare di un parametro

Determinare per quale valore di λ l'integrale converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1} \tag{747}$$

per svolgere questo esercizio è necesario considerare cosa succede a lamda in tre casi

$\lambda > 0$ il denominatore è positivo e di conseguenza non si annulla mai. Inoltre la funzione andando verso infinito si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+\lambda x^2+1} \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \tag{748}$$

portando l'integrale al limite ci si accorge che esso converge a 0, quindi l'integrale converge a sua volta.

$\lambda < 0$ in questo caso devo capire dove la funzione si annulla, quindi quei punti dove

$$x^4 - \lambda x^2 + 1 = \tag{749}$$

essendo una quadratica si procede con una sostituzione del tipo

$$t = x^2 \mapsto x = \sqrt{t} \tag{750}$$

ottenendo un equazione di secondo grado

$$t^2 + \lambda t + 1 = 0 \tag{751}$$

si procede analizzando il discriminante

- $\delta < 0$ in particolare
$$\delta^2 - 4 < 0 \implies \delta < \pm 2 \implies -2 < x < 2 \tag{752}$$
da questo fatto deduco che quando la funzione è compresa tra $[-2, 0[$ non si annulla mai, di conseguenza si comporta, per teorema del confronto, come
$$\frac{1}{x^2} \tag{753}$$
la quale converge.

- $\delta \geq 0$ oppure per $x \leq -2$ si trovano quattro radici con molteplcità 1, delle quali si considera solo le radici positive, in quanto quelle negative non appartengono sicuramente all'intervallo $]1, +\infty[$, invece per le radici positive cerco di dimostrare che
$$\sqrt{t_{1,2}} \geq 1 \mapsto -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4} \geq 2 \mapsto \pm\sqrt{\lambda^2 - 4} \geq 2 + \lambda \tag{754}$$
questa disequazione è sempre verificata, in quanto la radice è un numero sempre positivo, mentre invece $2 + \lambda$ è una quantità che può oscillare.

Da qui deduco che per $\lambda \leq -2$ il denominatore si annulla almeno una volta nei punti in cui il denominatore si annulla rendendo la funzione non integrabile secondo Riemann.

18.3 Serie geometrica

Assumiamo di avere da risolvere una serie della forma:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \tag{755}$$
si procede valutando il q della serie, definito anche come *ragione della serie*:

- Se $-1 < q < 1$ la serie converge ad un valore, calcolabile come:
$$\frac{1}{1-q} \tag{756}$$
- Se $q \leq -1$ la serie è **irregolare**.
- Se $q \geq 1$ la serie diverge positivamente

consequenzialmente una volta definita la ragione è sufficente, nel caso in cui essa converga a calcolare la formula sostituendo q.
Assumiamo adesso di avere una **serie geometrica** della forma:
$$\sum_{n=k}^{+\infty} q^n \tag{757}$$
in questo caso dopo aver valutato la **ragione** è necessario anche sottrarre alla formula:
$$\frac{1}{1-q} \tag{758}$$
anche i valori precedenti al valore iniziale di n, ad esempio, prendiamo la serie geometrica:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{3^n} = 4\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \tag{759}$$
sappiamo che la ragione fa convergere la serie ad un valore numero definito come:
$$4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\right) \tag{760}$$

in questo caso però non è sufficente calcolare solo la formula, in quanto la serie partiva da 2, bisogna quindi sottrarre il valore della serie in 0 e in 1:

$$4\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^0}-\frac{1}{3^1}\right) \tag{761}$$

si riesce quindi ad ottenere il valore della serie geometrica, il quale equivale a:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{3^n}=\frac{2}{3} \tag{762}$$

18.4 Studio e convergenza di un integrale

Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx \tag{763}$$

per studiare la convergenza dell'integrale è necessario sfruttare il confronto asintotico, infatti

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \tag{764}$$

visto che il secondo membro della disequazione converge, anche il primo converge, inoltre per dimostrarlo si potrebbe analizzare il caso la funzione si comporti come le due funzione al denominatore prese singolarmente.

Successivamente si procede a calcolare l'integrale

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}x}\,dx \tag{765}$$

pongo $t = \sqrt{x}$ ottenendo

$$\int_a^b \frac{1}{1+t^3}\,dt = \int_a^b \frac{A}{1+t} + \int_a^b \frac{Bx+C}{1-t+t^2} \tag{766}$$

infine, considerando le costanti si ottiene

$$-\frac{1}{6}\ln{(t^2-t+1)} + \frac{1}{3}\ln{(t+1)} + \frac{\arctan{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \tag{767}$$

che con le dovute sostituzioni torna

$$-\frac{1}{6}\ln{(t^2-t+1)} + \frac{1}{3}\ln{(t+1)} + \frac{\arctan{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{3}} \tag{768}$$

19 Appendici

19.1 Proprietà dei logaritmi

1. $y = \log_b{(x)} \iff x = b^y$ (769)
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b{(x)} - \log_b{(y)}$ (770)
3. $\log_b{(x)} = \log_b{(c)}\log_c{(x)} = \frac{\log_c{(x)}}{\log_c{(b)}}$ (771)
4. $\log_b{(x^n)} = n\log_b{(x)}$ (772)
5. $\log_b{(1)} = 0$ (773)
6. $\log_b{(b)} = 1$ (774)
7. $\log_b{(xy)} = \log_b{(x)} + \log_b{(y)}$ (775)
9. $f(x) = e^{ln(f(x))}$ (776)

DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Il triangolo ABC ha un angolo retto in C e lati di lunghezza a, b, c (vedi fig. (1)). Le funzioni trigonometriche dell'angolo α sono definite nel modo seguente:

- *seno* di $\alpha = \sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
- *coseno* di $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
- *tangente* di $\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
- *cotangente* di $\alpha = \cot\alpha = \dfrac{b}{a}$
- *secante* di $\alpha = \sec\alpha = \dfrac{c}{b}$
- *cosecante* di $\alpha = \csc\alpha = \dfrac{c}{a}$

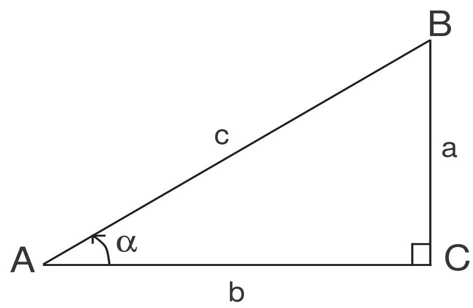


Figura 1: *Il triangolo ABC*

Si consideri, ora, un sistema di coordinate Oxy (vedi figg. (2)). Sia P un punto del piano Oxy di coordinate x, y: $P = P(x, y)$. La distanza di P dall'origine O è positiva e si indica con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'angolo α descritto in senso ***antiorario***, a partire da OX, si considera ***positivo***. Se esso è descritto in senso ***orario***, a partire da OX, è considerato ***negativo***. Chiamiamo $X'OX$ e $Y'OY$ gli assi delle x e delle y, rispettivamente. Indichiamo con I, II, III, IV i vari quadranti (primo, secondo, terzo, quarto quadrante, rispettivamente). In figura $(2)_1$, ad esempio, l'angolo α è nel secondo quadrante, mentre in figura $(2)_2$ è nel terzo quadrante.

Per un angolo α in un qualsiasi quadrante le funzioni trigonometriche sono definite così:

- $\sin\alpha = y/r$
- $\cos\alpha = x/r$
- $\operatorname{tg}\alpha = y/x$
- $\cot\alpha = x/y$
- $\sec\alpha = r/x$
- $\csc\alpha = r/y$

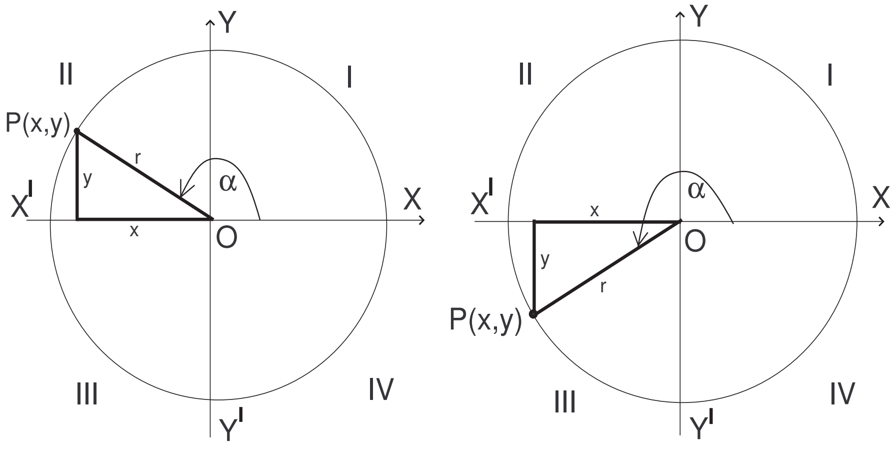


Figura 2: *Quadranti del cerchio trigonometrico.*

RELAZIONE TRA GRADI E RADIANTI

Un radiante è quell'angolo (θ) al centro di una circonferenza di centro O e raggio r, sotteso da un arco $\widehat{MN}$ di lunghezza uguale a quella del raggio r (vedi fig. (3)). Tenendo conto che 2π radianti equivalgono a 360° si ha:

- 1 radiante $=180°/\pi = 57.29577...°$
- $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianti $= 0.01745...$ radianti

Per passare dalla misura in gradi ($\theta°$) alla misura in radianti (θ_{rad}) si usa la proporzione

$$\theta° : 180 = \theta_{rad} : \pi.$$

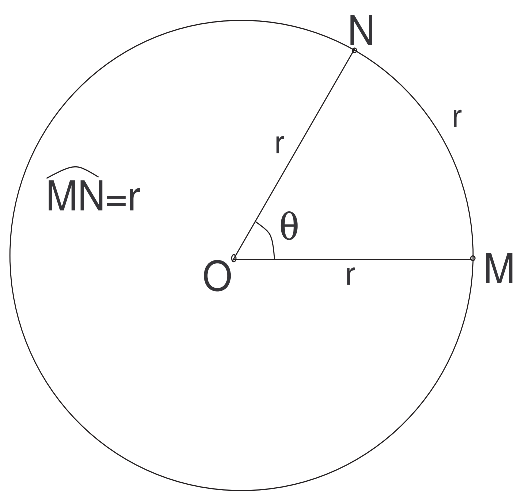


Figura 3: *Radiante.*

PRINCIPALI RELAZIONI TRA LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (il segno davanti alla radice dipende dal quadrante in cui cade α)
- $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$
- $\sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$
- $\cot\alpha = \pm\sqrt{\csc^2\alpha - 1}$
- $\csc\alpha = \pm\sqrt{\cot^2\alpha + 1}$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

SEGNI E VARIAZIONE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Quadrante	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
I	$+$ $0 \to 1$	$+$ $1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$+$ $1 \to \infty$	$+$ $\infty \to 1$
II	$+$ $1 \to 0$	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$	$+$ $1 \to \infty$
III	$-$ $0 \to -1$	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to \infty$	$+$ $\infty \to 0$	$-$ $-1 \to -\infty$	$-$ $-\infty \to -1$
IV	$-$ $-1 \to 0$	$+$ $0 \to 1$	$-$ $-\infty \to 0$	$-$ $0 \to -\infty$	$+$ $\infty \to 1$	$-$ $-1 \to -\infty$

VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI SPECIALI

Angolo α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	tg α	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$0° = 0\,(rad.)$	0	1	0	∞	1	∞
$15° = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$75° = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
$105° = \frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-2\left(\sqrt{3}+1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$
$120° = \frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$
$135° = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150° = \frac{5\pi}{6}$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
$165° = \frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-\left(2-\sqrt{3}\right)$	$-\left(2+\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$
$180° = \pi$	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
$210° = \frac{7\pi}{6}$	$-1/2$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
$225° = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$240° = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$270° = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
$300° = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$330° = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
$360° = 2\pi$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

FUNZIONI DI ANGOLI NEGATIVI

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
- $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
- $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

FORMULE DI ADDIZIONE

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$
- $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
- $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
- $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

FORMULE DI BISEZIONE

- $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

POTENZE DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
- $\mathrm{tg}^2\, \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
- $\cot^2\ \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
- $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$

SOMMA, DIFFERENZA E PRODOTTO DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}$
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\}$
- $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$
- $\mathrm{tg}\, \alpha + \mathrm{tg}\, \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
- $\mathrm{tg}\, \alpha - \mathrm{tg}\, \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
- $\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$
- $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

RIDUZIONE AL PRIMO QUADRANTE

	$-\alpha$	$90° \pm \alpha$ $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$ $\pi \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$ $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$k(360°) \pm \alpha$ $2k\pi \pm \alpha$ (k intero)
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\cot\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$\sec\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

ULTERIORI FORMULE DI RIDUZIONE

- $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°) = -\sin(\alpha - 180°) = -\cos(\alpha - 270°)$
- $\cos\alpha = -\sin(\alpha - 90°) = -\cos(\alpha - 180°) = \sin(\alpha - 270°)$
- $\mathrm{tg}\,\alpha = -\cot(\alpha - 90°) = \mathrm{tg}\,(\alpha - 180°) = -\cot(\alpha - 270°)$
- $\cot\alpha = -\mathrm{tg}\,(\alpha - 90°) = \cot(\alpha - 180°) = -\mathrm{tg}\,(\alpha - 270°)$
- $\sec\alpha = -\csc(\alpha - 90°) = -\sec(\alpha - 180°) = \csc(\alpha - 270°)$
- $\csc\alpha = \sec(\alpha - 90°) = -\csc(\alpha - 180°) = -\sec(\alpha - 270°)$

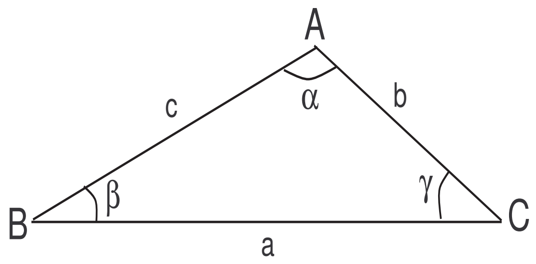
RELAZIONE FRA FUNZIONI DI ANGOLI

Funzione	$\sin\alpha = u$	$\cos\alpha = u$	$\mathrm{tg}\,\alpha = u$	$\cot\alpha = u$	$\sec\alpha = u$	$\csc\alpha = u$
$\sin\alpha$	u	$\pm\sqrt{1-u^2}$	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\dfrac{1}{u}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-u^2}$	u	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{1+u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{\pm\sqrt{u^2-1}}{u}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}$	u	$\dfrac{1}{u}$	$\pm\sqrt{u^2-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{u^2-1}}$
$\cot\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	u	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{u^2-1}}$	$\pm\sqrt{u^2-1}$
$\sec\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{1}{u}$	$\pm\sqrt{1+u^2}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$	u	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{u^2-1}}$
$\csc\alpha$	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-u^2}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$	$\pm\sqrt{1+u^2}$	$\dfrac{u}{\pm\sqrt{u^2-1}}$	u

RELAZIONE FRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO PIANO

Per ogni triangolo piano ABC di lati a, b, c ed angoli α, β, γ (vedi figura seguente) valgono i seguenti risultati:

.



Teorema dei seni: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Teorema del coseno: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta\ ; \qquad \cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ ; \qquad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Teorema delle tangenti: $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}$$

RELAZIONI ESPONENZIALI (α in radianti), EQUAZIONE DI EULERO

- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad (i = \sqrt{-1})$
- $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$
- $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha = -i\left(\dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}\right)$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Se

$$x = \sin y \tag{1}$$

allora

$$y = \sin^{-1} x \tag{2}$$

è l'angolo il cui seno è x. La (2) è la funzione inversa della (1) e si chiama arcoseno di x (si indica con $\arcsin x$ o $\sin^{-1} x$) Si tratta di una funzione polidroma di x ed è un insieme di funzioni univoche dette *rami.* La stessa cosa vale per le altre funzioni trigonometriche inverse

$$\arccos x\,(\cos^{-1} x),\ \operatorname{arctg} x\,(\operatorname{tg}^{-1} x),\ \operatorname{arccot} x\,(\cot^{-1} x),\ \operatorname{arcsec} x\,(\sec^{-1} x),\ \operatorname{arccsc} x\,(\csc^{-1} x).$$

Usualmente, per evitare le difficoltà connesse alla polidromia della funzione, se ne utilizza un ramo particolare detto *ramo principale* e i valori relativi a tale ramo sono detti *valori principali.*

VALORI PRINCIPALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$-\frac{\pi}{2} \leq (\sin^{-1} x) \leq \frac{\pi}{2}$	$-1 \leq x \leq 1$
$0 \leq (\cos^{-1} x) \leq \pi$	$-1 \leq x \leq 1$
$-\frac{\pi}{2} < (\operatorname{tg}^{-1} x) < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$0 < (\cot^{-1} x) < \pi$	$-\infty < x < \infty$
$0 \leq (\sec^{-1} x) < \frac{\pi}{2}$	$x \geq 1$
$-\pi \leq (\sec^{-1} x) < -\frac{\pi}{2}$	$x \leq -1$
$0 < (\csc^{-1} x) \leq \frac{\pi}{2}$	$x \geq 1$
$-\pi < (\csc^{-1} x) \leq -\frac{\pi}{2}$	$x \leq -1$

N.B. Non vi accordo generale sulle definizioni di $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ e $\csc^{-1} x$ per valori negativi di x.

ALCUNE RELAZIONI TRA LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE
(per i valori principali)

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

Mentre le precedenti relazioni valgono sia per $x < 0$ che per $x > 0$, le seguenti valgono solo per $x \geq 0$:

- $\arcsin x = \operatorname{arccsc} \dfrac{1}{x}$
- $\arccos x = \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arcsec} x = \pi + \operatorname{arcsec}(-x)$
- $\operatorname{arccsc} x = \pi + \operatorname{arccsc}(-x)$

Le seguenti relazioni sono, invece, valide solo per $x < 0$:

- $\arcsin x = -\pi - \operatorname{arccsc} \dfrac{1}{x}$
- $\arccos x = -\operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x} - \pi = -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arccot} x = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3\pi}{2} - \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x}$
- $\operatorname{arcsec} x = -\arccos \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x = \operatorname{arcsec}(-x) - \pi = -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc}(-x)$
- $\operatorname{arccsc} x = -\dfrac{3\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x = -\pi - \arcsin \dfrac{1}{x} = \operatorname{arccsc}(-x) - \pi = -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec}(-x)$

Se $\alpha = \arcsin x$, allora:

- $\sin\alpha = x, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ,$
- $\csc\alpha = \dfrac{1}{x}, \quad \sec\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad .$

Se $\alpha = \arccos x$, allora:

- $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}, \quad \cos\alpha = x, \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad ,$
- $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sec\alpha = \dfrac{1}{x}, \quad \cot\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$

Se $\alpha = \operatorname{arctg} x$, allora:

- $\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = x \quad ,$
- $\csc\alpha = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad \sec\alpha = \sqrt{1+x^2}, \quad \cot\alpha = \dfrac{1}{x} \quad .$

Sviluppi in serie di Taylor con c=0 delle funzioni elementari		
Funzione	Sviluppo in forma troncata	Sviluppo in forma compatta
$\sin(x)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	
$\sec(x)$	$\sec(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + o(x^8), \quad \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	
$\arcsin(x)$	$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\arccos(x)$	$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\arctan(x)$	$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
e^x	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$(1+x)^\alpha$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$	
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$	

Tabella degli integrali

$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*	$\int f(x)$ *integrale*	$F(x)$ *primitiva*
$\int x\,dx$	$\frac{x^2}{2} + c$	$\int \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\begin{cases} \pm\arcsin x + c \\ \mp\arccos x + c \end{cases}$
$\int a\,dx$	$ax + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$\log\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\| + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$\int \frac{1}{a^x}\,dx$	$-\frac{a^{-x}}{\log a} + c$
$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$	$\frac{1}{2}\log\left\|x^2+1\right\| + c$	$\int \frac{1}{x^n}\,dx$	$-\frac{n-1}{x^{n-1}} + c$
$\int a\cdot x^n\,dx$	$\frac{a\cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{a+x^2}\,dx \quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\log\|x\|+c$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\log\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$	$\begin{cases} arcSh\,x + c \\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x) + c$
$\int \tan x\,dx$	$-\log(\cos x) + c$	$\int \frac{1}{\tan x}\,dx$	$\log(\sin x) + c$
$\int \arcsin x\,dx$	$\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$	$\log\left\|x+\sqrt{x\pm a^2}\right\| + c$
$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2} + c$	$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + c$
$\int e^{\pm kx}\,dx$	$\pm\frac{e^{\pm kx}}{k} + c$	$\int \frac{1}{e^{kx}}\,dx$	$-\frac{e^{-kx}}{k} + c$
$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$	$\log\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + c$
$\int (1+ctg^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-ctg\,x + c$	$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$	$\log\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| + c$
$\int Sh\,x\,dx$	$Ch\,x + c$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right) + c$
$\int Ch\,x\,dx$	$Sh\,x+c$	$\int \frac{1}{Ch^2 x}\,dx = \int (1-Th^2 x)\,dx + c$	$Th\,x + c$
$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$	$\log(x^2+1) + c$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

Proprietà

$\int \boldsymbol{k} \cdot f(x)\,dx \quad = \quad \boldsymbol{k} \cdot \int f(x)\,dx$
$\int f(x) \;+\; g(x) \;+\ldots+\; f_n(x)\,dx \quad = \quad \int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx \;+\ldots+\; f_n(x)\,dx$
$\int f(x)\,dx \quad = \quad \boldsymbol{a} \int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}} f(x)\,dx \quad = \quad \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}} \int \boldsymbol{a} f(x)\,dx \quad = \quad \int \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} f(x)\,dx \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$

Integrali indefiniti riconducibili ad elementari

$\int f(x)$ ***integrale***	$F(x)$ ***primitiva***
$\int f^n(x) \cdot f'(x)\,dx$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} \;+\; c$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\log\lvert f(x)\rvert \;+\; c$
$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\,dx$	$\sin f(x) \;+\; c$
$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\,dx$	$-\cos f(x) \;+\; c$
$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx$	$e^{f(x)} \;+\; c$
$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx$	$\frac{a^{f(x)}}{\ln a} \;+\; c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx$	$\begin{cases} \arcsin f(x) \;+\; c \\ -\arccos f(x) \;+\; c \end{cases}$
$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$	$\arctan f(x) \;+\; c$

Integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;=\; [F(x)]_a^b$$

dove F è la primitiva di f(x)

Integrazione per parti

Integrale indefinito	$\int f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$ f(x) va derivata e g'(x) va integrata
Integrale definito	$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; [f(b) \cdot g(b) \;-\; f(a) \cdot g(a)] \;-\; \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$

Si integrano per parti funzioni del tipo:

$$P(x) \cdot e^x \qquad P(x) \cdot \sin x \qquad P(x) \cos x \qquad e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \qquad e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

dove P(x) è un polinomio

Integrazione per sostituzione

Integrale indefinito	$\int f(h(x))\,h'(x)\,dx \;=\; \int f(y)\,dy_{\,y=h(x)}$
Integrale definito	$\int_a^b f(h(x))\,h'(x)\,dx \;=\; \int_{h(a)}^{h(b)} f(y)\,dy$