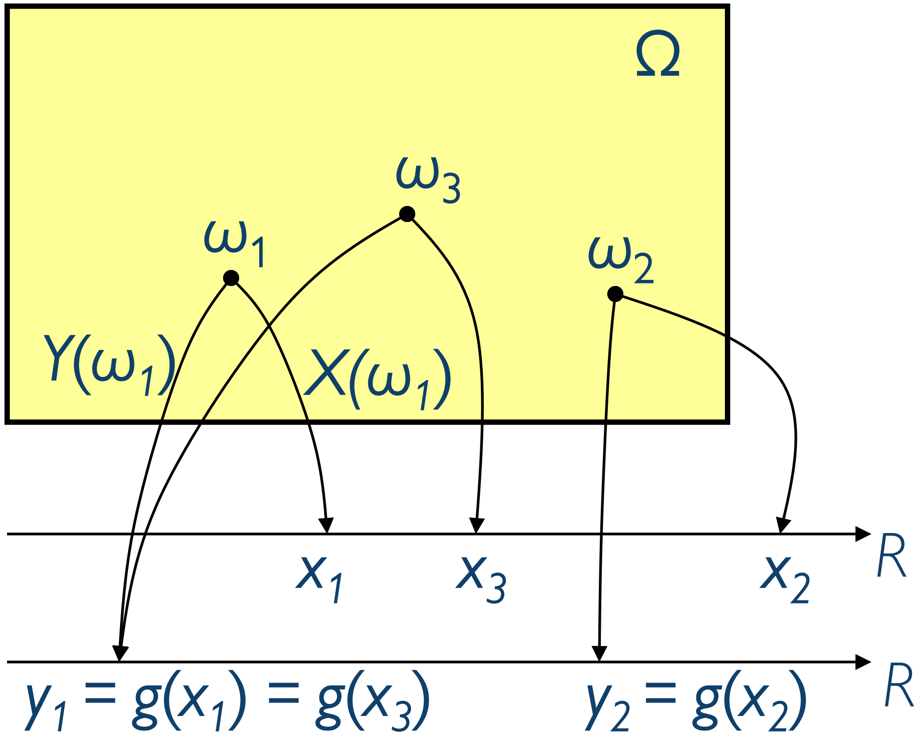
Trasformazioni di una variabile aleatoria



$$Y = g(X)$$

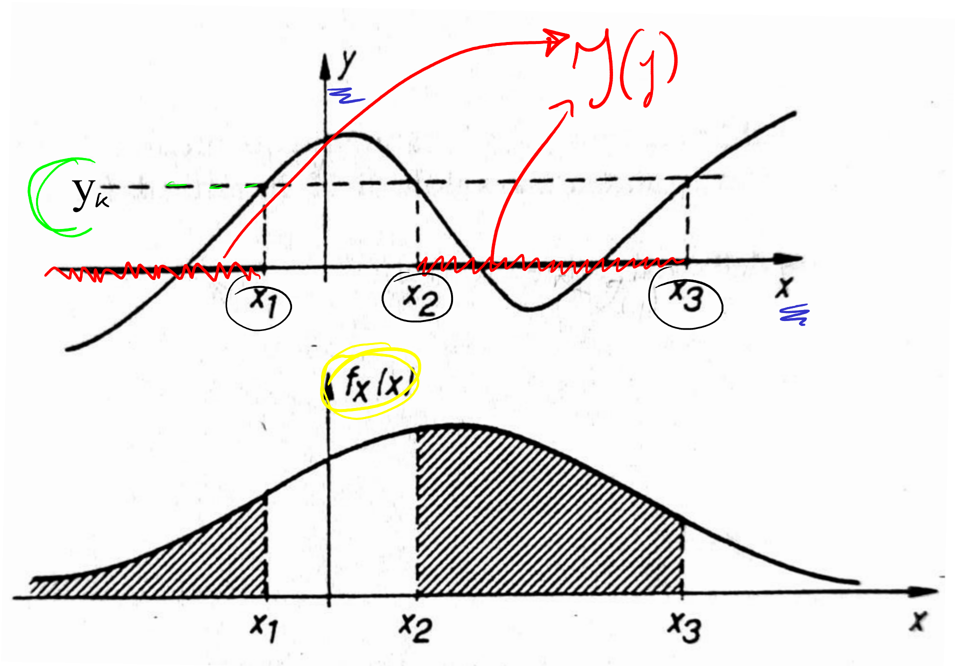
Problema: Determinare $F_Y(y)$ a partire da $F_X(x)$

Nota: g(x) è funzione reale della variabile reale x, il cui dominio contiene tutti i possibili valori di X → Ad ogni valore di X corrisponde un solo valore di Y, ma valori distinti di X possono dar luogo ad un medesimo valore di Y

Trasformazioni di una variabile aleatoria

$$F_Y(y) \triangleq P(Y \leq y) = P[X \in \Im(y)] \qquad \text{dove}: \quad \Im(y) = \{x : g(x) \leq y\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_Y(y) = \int_{\Im(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x}$$



Una volta ricavata la funzione di distribuzione è possibile ricavare la ddp per derivazione:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

Il metodo, chiamato "Metodo della Funzione Distribuzione", è generale, si applica a v.a. continue, discrete e miste; esistono tuttavia casi in cui è possibile ricavare la ddp della v.a. trasformata in maniera più semplice

Trasformazioni di una v.a. discreta

- Se Y è una v.a. discreta che assume i valori $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots,$ è spesso conveniente determinare direttamente la massa di probabilità $P(Y = y_k) = p_Y(y_k)$

- Se anche la v.a. X è **discreta** l'evento $\{g(X) = y_k\}$ è la unione di tutti gli eventi $\{X = x_i\}$ per i quali è soddisfatta la relazione $y_k = g(x_i)$

- Ponendo $G(y_k) = \{x_i : g(x_i) = y_k\}$ si ha:

$$p_Y(y_k) = P(Y = y_k) = \sum_{G(y_k)} P(X = x_i) = \sum_{G(y_k)} p_X(x_i)$$

Trasformazioni di una v.a. discreta

Esempio:

Se $Y=X^2$ e si vuol calcolare la probabilità che $Y=4$, si ha:

$$p_Y(4) = P(X=2) + P(X=-2) = p_X(2) + p_X(-2)$$

Se X è una v.a. ternaria che può assumere valori {-2,0,2} con la stessa probabilità, allora $Y=X^2$ è una v.a. binaria che può assumere valori {0,4} con massa di probabilità:

$$p_Y(0) = P(X=0) = 1/3$$

$$p_Y(4) = P(X=2) + P(X=-2) = 2/3$$

Trasformazioni di una v.a.

Lo stesso ragionamento può essere esteso al caso in cui (con Y discreta) X sia continua

Esempio:

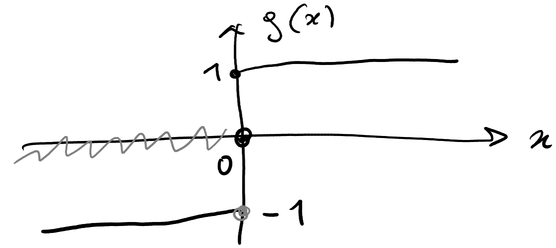
Si consideri la trasformazione $Y=g(X)$, detta Hard Limiter, data da:

$$g(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & \text{per} \quad x>0 \\ 0 & \text{per} \quad x=0 \\ -1 & \text{per} \quad x<0 \end{cases}$$

X è una v.a. **continua** di cui è nota $f_X(x)$ oppure $F_X(x)$

Si calcoli la legge di distribuzione di Y

Trasformazioni di una v.a.



Soluzione:

Y è una v.a. ternaria che può assumere valori {-1, 0, 1}, quindi è completamente specificata dalla conoscenza della massa di probabilità:

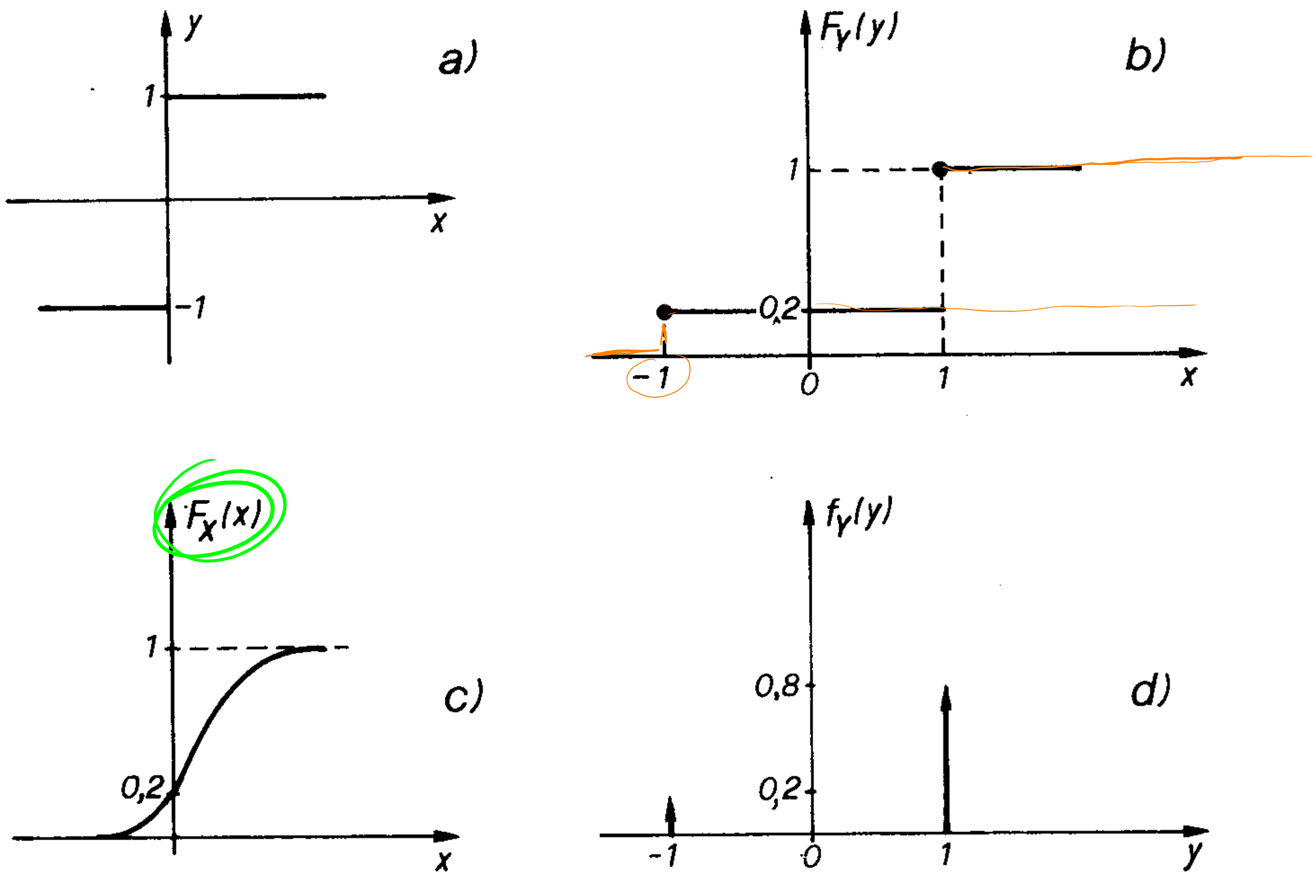
$$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\mathrm{d}x = F_X(0)$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=0$$

$$P(Y=1)=P(X>0)=\int_{0}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1-F_X(0)$$

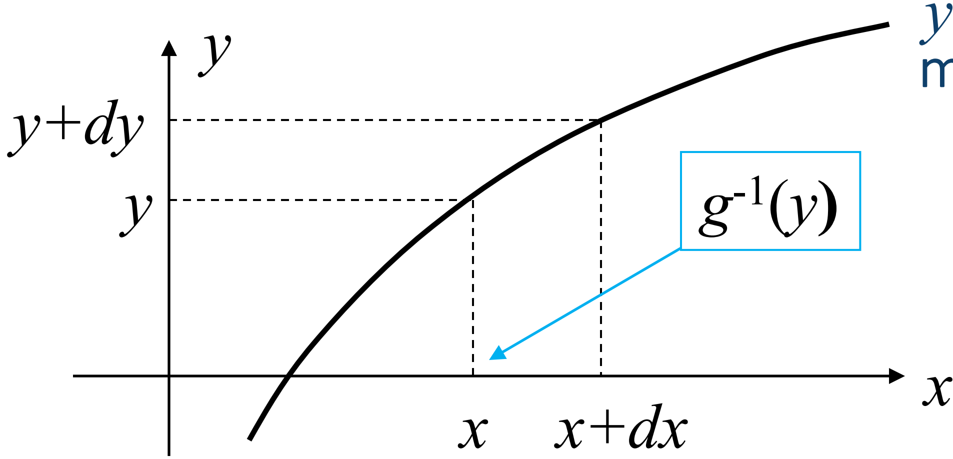
Notare che vale la proprietà di normalizzazione!

Trasformazioni di una v.a.



Trasformazioni di una v.a. continua

Se le v.a. X e Y=g(X) sono **entrambe continue**, è possibile esprimere *direttamente* la ddp di Y mediante quella di X:



$y = g(x)$
monotona crescente

Gli eventi {y < Y ≤ y+dy} e {x < X ≤ x+dx} sono uguali perché costituiti dagli stessi risultati
→ Sono uguali le loro probabilità

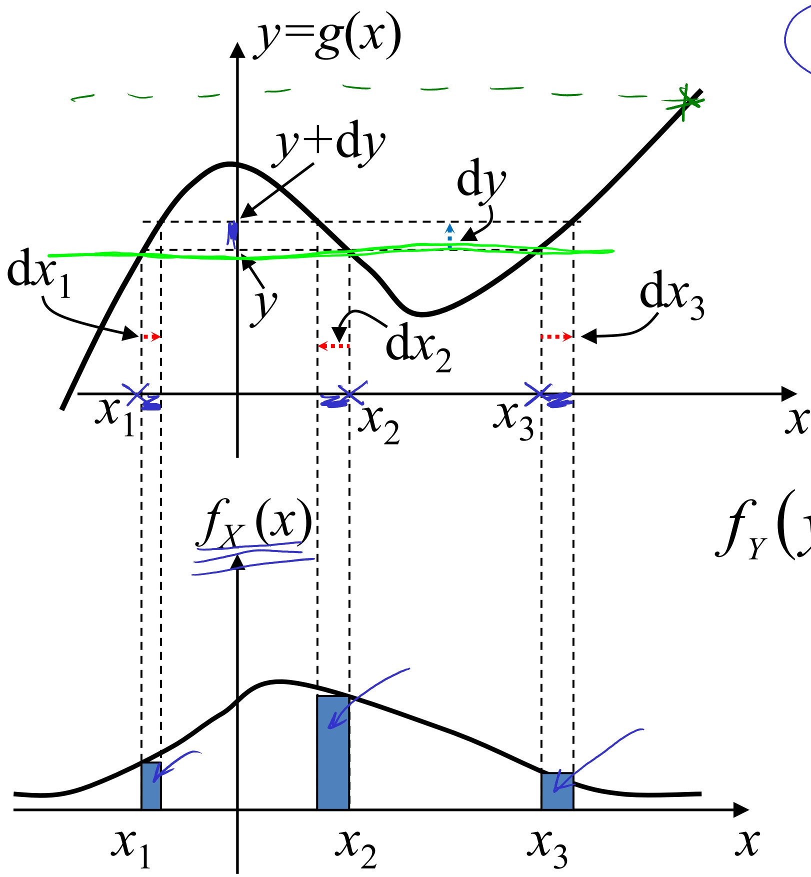
$$f_Y(y)\mathrm{d}y = f_X(x)\mathrm{d}x$$

Essendo $\mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$, si ottiene: $f_Y(y) = \left.\dfrac{f_X(x)}{g'(x)}\right|_{x=g^{-1}(y)}$

Se la funzione fosse **monotona decrescente** a denominatore ci sarebbe il *valore assoluto di g'(x)* (una ddp è sempre non negativa)

Trasformazioni di una v.a. continua

Se in generale g(X) è una funzione continua, che non è costante in alcun intervallo (altrimenti anche se X fosse continua non lo sarebbe Y):



$$\{y < Y \le y + dy\} = \{x_1 < X \le x_1 + dx_1\}$$
$$+ \{x_2 + dx_2 \le X < x_2\}$$
$$+ \{x_3 < X \le x_3 + dx_3\}$$

Eventi mutuamente esclusivi

$$f_Y(y)dy = f_X(x_1)dx_1 + f_X(x_2)|dx_2| + f_X(x_3)dx_3$$

Essendo $\mathrm{d}y = g'(x_i)\mathrm{d}x_i;\ i = 1,2,3$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{g'(x_1)} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \frac{f_X(x_3)}{g'(x_3)}$$

Trasformazioni di una v.a. continua

Generalizzando il ragionamento al caso in cui $y=g(x)$ ha K soluzioni:

$$\{y < Y \le y + dy\} = \{x_1 < X \le x_1 + dx_1\} + \cdots + \{x_k < X \le x_k + dx_k\}$$

si ricava il **Teorema Fondamentale per la trasformazione di una v.a.:**

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} \left. \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \right|_{x_i = g^{-1}(y)} \quad \text{dove} \quad \{x_i : g(x_i) = y\}$$

ovvero, sono le K soluzioni dell'equazione $y=g(x)$

Nota:

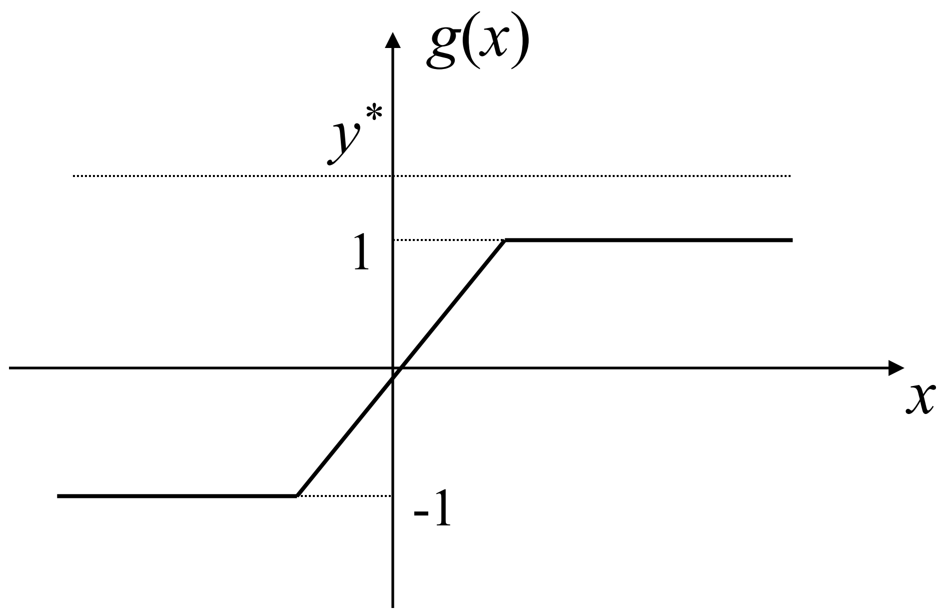
Il numero K di soluzioni può variare al variare di y

Trasformazioni di una v.a. continua

Nota:

se per un certo y^* l'equazione $y=g(x)$ non ha soluzione, risulterà:

$$f_Y(y^*)=0$$



Teorema Fondamentale per la trasformazione di una variabile aleatoria

Sia X una v.a. avente ddp $f_X(x)$, e si indichi con Y la v.a. legata ad X tramite trasformazione $y = g(x)$

Se x_i con i=1, 2, ..., K sono le soluzioni reali dell'equazione y-$g(x)$=0, allora la ddp di Y è data dalla seguente equazione:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} \left. \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \right|_{x_i = g^{-1}(y)}$$

Se per un dato valore di y l'equazione y-$g(x)$=0 non ha radici reali, allora $f_Y(y)$=0

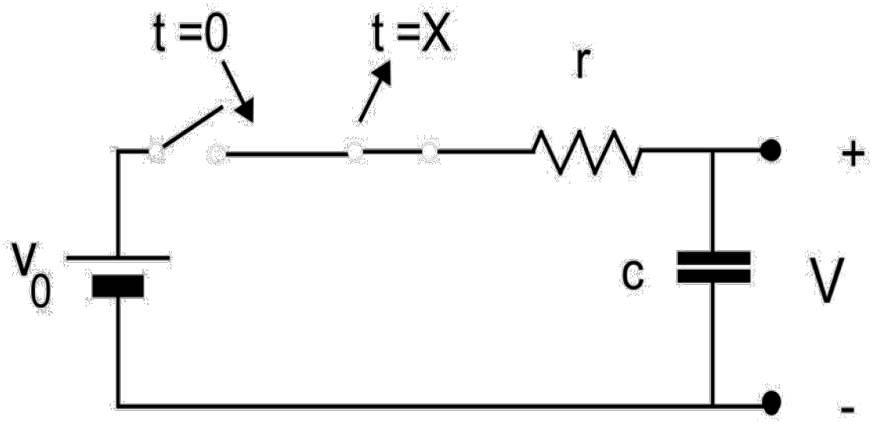
Trasformazioni di una v.a.: squadra R-C

Esempio 8.4 – Libro Luise-Vitetta

- Nel circuito elettrico rappresentato in figura il generatore di tensione v_0 viene collegato alla squadra R-C all'istante t=0
- Il resistore *r* ha un tempo di guasto aleatorio *X* in corrispondenza del quale esso interrompe il circuito → L'istante *X* è una variabile aleatoria avente densità di probabilità esponenziale:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{x}{2\alpha}} \mathrm{u}(x)$$

con $\alpha = rc$

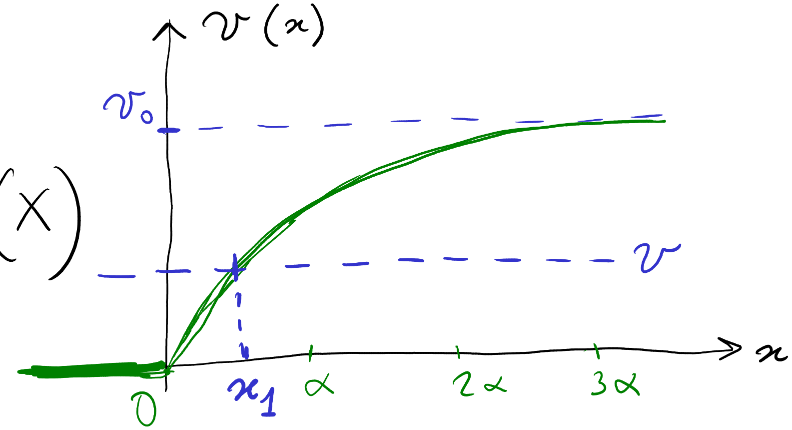


- Vogliamo determinare la densità di probabilità $f_V(v)$ della v.a. *V* che rappresenta la tensione ai capi del condensatore dopo il guasto del resistore

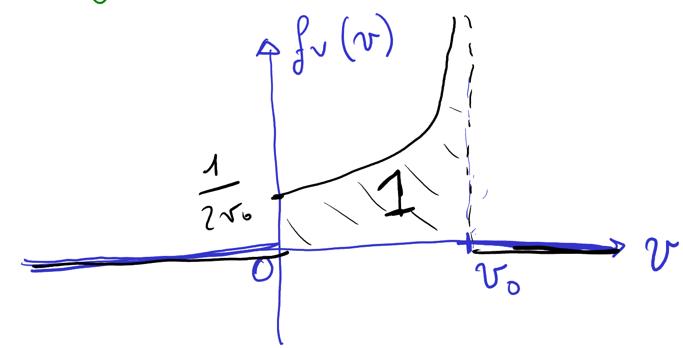
Trasformazioni di una v.a.: squadra R-C

$$v(t) = v_0\left(1 - e^{-t/\alpha}\right)u(t)$$

$$V = v(X) = v_0\left(1 - e^{-\frac{X}{\alpha}}\right)u(X)$$



$f_V(v) = ?$ dato $f_X(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{x}{2\alpha}} u(x)$



se $v \geq v_0$ o $v < 0$: $f_V(v) = 0$

se $0 \leq v < v_0$

$$v = v_0\left(1 - e^{-\frac{x_1}{\alpha}}\right) \qquad \frac{v}{v_0} = 1 - e^{-\frac{x_1}{\alpha}} \; ; \; e^{-\frac{x_1}{\alpha}} = 1 - \frac{v}{v_0}$$

$$-\frac{x_1}{\alpha} = \ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow \boxed{x_1 = -\alpha \ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)}$$

Trasformazioni di una v.a.: squadra R-C

$$v'(x) = v_0 \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

$$f_v(v) = \left.\frac{f_x(x_1)}{|v'(x_1)|}\right|_{x_1 = -\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)}$$

$$= \left.\frac{\frac{1}{2\alpha} \cdot e^{-\frac{x}{2\alpha}} u(x)}{\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha}}}\right|_{x=-\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)} = \frac{\frac{1}{2\alpha} \cdot e^{+\frac{1}{2\cancel{\alpha}} \cdot \left(+\cancel{\alpha} \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)\right)}}{\frac{v_0}{\alpha} e^{+\frac{1}{\cancel{\alpha}}\left(+\cancel{\alpha} \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)\right)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\alpha} \cdot \sqrt{1-\frac{v}{v_0}}}{\frac{v_0}{\alpha} \cdot \left(1-\frac{v}{v_0}\right)} = \boxed{\frac{1}{2v_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v/v_0}} = f_v(v)} \quad 0 \le v < v_0$$

Trasformazioni di una v.a.: rand() → v.a. generica

Esempio: MATLAB 8.3 – Libro Luise-Vitetta

- Trasformare un valore (generato tramite la funzione MATLAB rand()) di una v.a. Y uniformemente distribuita tra 0 e 1 in un valore di una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x)$ assegnata

$h(\cdot)$ $\qquad X = h(Y)$

$\downarrow$

$g(\cdot)$ $\quad h^{-1}(\cdot)$ $\qquad Y = g(X)$

$$\boxed{g(x) = F_X(x)}$$