Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 02/02/2023

Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n > 1$, una matrice per cui esiste ed è unica la fattorizzazione LU. Abbiamo visto che applicare l'algoritmo di eliminazione di Gauss ad A è equivalente a moltiplicare a sinistra per $n-1$ matrici; più precisamente:

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_1 A = U$$

dove le H_j sono matrici con una particolare struttura dette matrici elementari di Gauss ed il prodotto $L = H_1^{-1}\dots H_{n-2}^{-1}H_{n-1}^{-1}$ fornisce il fattore L della fattorizzazione LU. Vale che:

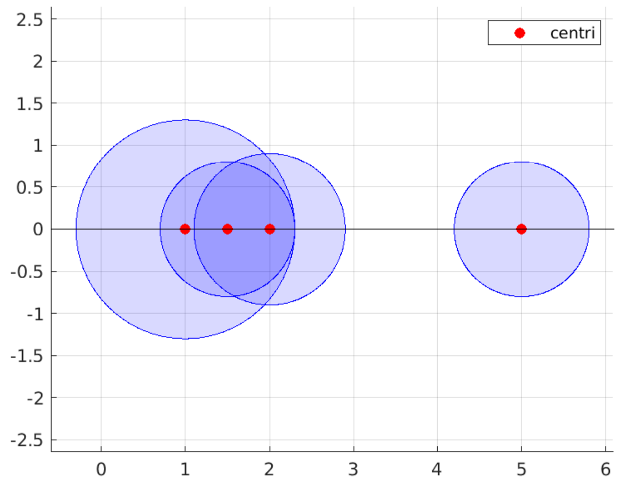
- [x] Per ogni $j = 1, \dots, n-1$, il determinante di H_j è uguale a 1.
- [x] Per ogni $j = 1, \dots, n-1$, la traccia di H_j è uguale a n.
- [x] Per ogni $j = 1, \dots, n-1$, il determinante di H_j^{-1} è uguale a 1.
- [x] Per ogni $j = 1, \dots, n-1$, la traccia di H_j^{-1} è uguale a n.
- [x] Il determinante di U è uguale al determinante di A.
- [x] La matrice U è riducibile.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con continuità almeno 2 volte, $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha) = 0$ e si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione di α. Dire quali delle seguenti deduzioni risulta corretta.

- [x] Se $f'(\alpha) \neq 0$ allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il metodo di Newton converge localmente in modo superlineare ad α.
- [x] Se $f'(\alpha) \neq 0$ allora il metodo di Newton converge localmente ad α.
- [ ] Se $f'(\alpha) = 0$ allora per ogni $x_0 \neq \alpha$ il metodo non converge ad α.
- [x] Se $f(x) = ax + b$ per dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il metodo di Newton converge in un solo passo.
- [ ] Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ per dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il metodo di Newton converge in un solo passo.
- [ ] Nessuna delle precedenti.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi che non sono a risposta multipla.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ una matrice di numeri reali i cui cerchi di Gershgorin sono riportati nella seguente figura.



Da queste informazioni possiamo dedurre che:

- ☐ A è a predominanza diagonale forte.
- ☐ A ha tutti gli autovalori reali.
- ☑ A ha almeno 1 autovalore reale.
- ☐ A è convergente.
- ☑ La traccia di A è un numero reale.
- ☐ Nessuna delle precedenti.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri il problema dell'interpolazione polinomiale su n punti $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, con $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.

- ☑ Il polinomio di interpolazione esiste ed è unico se e solo se $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$.
- ☐ La condizione $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, è necessaria per l'esistenza ed unicità del polinomio d'interpolazione ma non è sufficiente.

- [ ] Se esiste, il polinomio di interpolazione ha grado n.
- [x] Se esiste, il polinomio di interpolazione ha grado al più n.
- [ ] Se esiste, il polinomio d'interpolazione ha grado maggiore di 0.
- [ ] Nessuna delle precedenti.

Esercizio 2

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Risolvere, nel senso dei minimi quadrati, il sistema lineare $A_1 x = b_1$ con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Procedendo con il sistema delle equazioni normali si ha

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 26 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} -\frac{16}{75} \\ -\frac{28}{75} \end{bmatrix}.$$

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Sia $A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ una matrice rettangolare di rango 2. Dati

$$b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

il vettore $b_2 \in \mathbb{R}^3$ ed il fattore Q, della fattorizzazione QR di A_2 si calcoli il valore ottimo $\theta \in \mathbb{R}$ del problema ai minimi quadrati

$$\theta = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||A_2 x - b_2||_2.$$

Si ha che

$$Q^T b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \theta = 2.$$

Esercizio 3

Si consideri l'equazione $x^3 - 2x + 1 = 0$ che ha 3 soluzioni reali distinte: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sapendo che $\alpha_3 = 1$, si determinino α_1 ed α_2.

$$\alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dica se l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = g_1(x_k) = (x_k^3 + 1)/2$ è localmente convergente per α_2 ed α_3.

Dato l'errore nel testo originale andava bene lo studio della convergenza per due qualunque delle tre radici:

$$|g_1'(\alpha_1)|, |g_1'(\alpha_3)| > 1 \Rightarrow \text{non è convergente per } \alpha_1 \text{ e per } \alpha_3.$$
$$|g_1'(\alpha_2)| < 1 \Rightarrow \text{localmente convergente per } \alpha_2.$$

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si dica se l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = g_2(x_k) = \sqrt[3]{2x_k - 1}$ è localmente convergente per α_2 ed α_3.

Dato l'errore nel testo originale andava bene lo studio della convergenza per due qualunque delle tre radici:

$$|g_2'(\alpha_1)|, |g_2'(\alpha_3)| < 1 \Rightarrow \text{è localmente convergente sia per } \alpha_1, \text{ che per } \alpha_3.$$
$$|g_2'(\alpha_2)| > 1 \Rightarrow \text{non è convergente per } \alpha_2.$$

Esercizio 4

Sia $f(x, y)$ l'**approssimazione con la formula dei trapezi** di

$$\int_x^y 2t^2 dt.$$

(i) $\boxed{\text{1 Punto}}$ Si scriva l'espressione esplicita di f come funzione di x ed y.

$$f(x, y) = (y - x)(y^2 + x^2).$$

(ii) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si scriva un algoritmo per il calcolo di $f(x, y)$ e si determini l'espressione dell'errore relativo algoritmico in funzione dei vari errori di arrotondamento.

Calcolando $f(x, y)$ mediante i passaggi

$$r_1 \leftarrow x \cdot x$$
$$r_2 \leftarrow y \cdot y$$
$$r_3 \leftarrow y - x$$
$$r_4 \leftarrow r_2 - r_1$$
$$r_5 \leftarrow r_3 \cdot r_4$$

si ottiene come errore relativo algoritmico:

$$\epsilon_a = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\epsilon_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5,$$

dove ϵ_i rapressenta l'errore di arrotondamento introdotto per il calcolo di r_i, $i = 1, \ldots, 5$.

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Assumendo l'utilizzo dell'aritmetica floating point e che x, y non sono entrambi nulli, si determini una limitazione superiore dell'errore relativo algoritmico in termini della precisione di macchina u.

Sfruttando che, in floating point, $|\epsilon_i| \leq u$ e per ogni x, y, $|\frac{x^2}{x^2+y^2}|, |\frac{y^2}{x^2+y^2}| \leq 1$ si ottiene $|\epsilon| \leq 5u$.