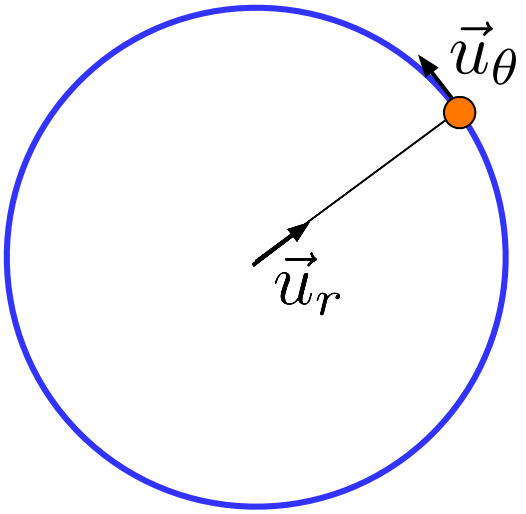
Esercizio (tratto dal Problema 2.10 del Mazzoldi 2)

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 15\,\mathrm{cm}$, in senso antiorario.
A partire dall'istante $t = 0$, in cui la velocità è nulla, si osserva che l'accelerazione centripeta varia nel tempo secondo la legge $a_r(t) = -c\,t^2$, dove $c = 0.38\ \mathrm{m\,s^{-4}}$. Calcolare l'espressione dell'accelerazione tangenziale a_θ.



SOLUZIONE
Dalle formule generali per un punto materiale che si muove in un piano (in maniera arbitraria) sappiamo che l'accelerazione, espressa in coordinate polari, si scrive come

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \vec{u}_\theta \tag{1}$$

In particolare il problema ci dice che il moto della particella avviene lungo una circonferenza (moto circolare), e dunque la coordinata radiale r non varia nel tempo

$$r(t) = R = \text{const} \tag{2}$$

Pertanto la formula generale (1) si semplifica in

$$\vec{a} = \underbrace{-R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}_{\text{accel. radiale (centripeta) } a_r} \vec{u}_r + \underbrace{R \frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\text{accel. tangenziale } a_\theta} \vec{u}_\theta \tag{3}$$

o anche, utilizzando le solite notazioni

$$\begin{aligned} \omega &\doteq \frac{d\theta}{dt} \\ \alpha &\doteq \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

otteniamo

$$\vec{a} = \underbrace{-\omega^2(t)\, R}_{\text{accel. radiale } a_r} \vec{u}_r + \underbrace{\alpha(t)\, R}_{\text{accel. tangenziale } a_\theta} \vec{u}_\theta \tag{4}$$

D'altra parte, dal testo del problema sappiamo che $a_r(t) = -c\, t^2$. Dunque dall'espressione per a_r presente nella (3) abbiamo

$$-\, c\, t^2 = -\omega^2(t)\, R \tag{5}$$

da cui

$$\omega^2(t) = \frac{c}{R}\, t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(t) = \pm \sqrt{\frac{c}{R}}\, t \tag{6}$$

Siccome sappiamo che il moto avviene in senso antiorario, la velocità angolare ω è non negativa, e scegliamo la soluzione col '+'

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{c}{R}}\, t \tag{7}$$

da cui ricaviamo che l'accelerazione angolare vale

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{c}{R}} \tag{8}$$

e notiamo che risulta costante nel tempo.

Dall'espressione della (3) per l'accelerazione tangenziale a_θ otteniamo allora

$$a_\theta = \alpha R = R \sqrt{\frac{c}{R}} = \sqrt{R\, c} \tag{9}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} a_\theta &= \sqrt{0.15\,\text{m} \cdot 0.38\ \text{m}\,\text{s}^{-4}} = \\ &= \sqrt{0.15 \cdot 0.38}\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 0.24\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \tag{10}$$