ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 45

Titolo nota 27/11/2018

③ CARTESIO

Teorema misterioso (di analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n con n radici reali (eventualmente con molteplicità).

Allora

- n_0 = (numero di radici nulle) = più piccolo grado di un termine con coeff. $\neq 0$ nel polinomio
- n_+ = numero di VARIAZIONI di segno nella succ. dei coeff. non nulli
- n_- si ottiene per differenza

Esempio $p(x) = x^6 - 3x^4$

Cartesio: $n_0 = 4$ (più piccolo termine è $-3x^4$)

$$p(x) = \overset{\text{molt. della radice } x=0}{x^4}\underbrace{(x^2-3)}_{x=0 \text{ non è radice qui}}$$

Oss. Se il termine noto del polinomio è $\neq 0$, allora $n_0 = 0$ (cioè $x=0$ non è radice)

Cartesio: $n_+ = 1$ = numero di variazioni di segno in $1, -3$

Per differenza: $n_- = 1$

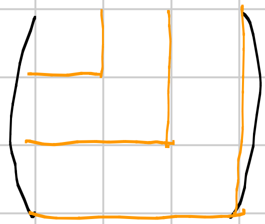
Riprova: le radici sono $x=0$ di molt. 4, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$

Se voglio applicare basta calcolare il pol. caratteristico e poi dedurre il segno degli autovalori.

— o — o —

(4) SYLVESTER (MINORI ORLATI)

Versione basic:



1 - considero tutte le sottomatrici $k \times k$ ottenute partendo da alto - sx
2 - calcolo tutti i determinanti e SPERO che siano $\neq 0$
3 - scrivo in successione i segni di questi determinanti
4 - Aggiungo a sx un segno + (d'ufficio)
5 - allora
   - n_+ = numero di permanenze di segno nella succ.
   - n_- = numero di variazioni di segno
   - $n_0 = 0$ (perché visto che il Det generale è $\neq 0$, allora per forza 0 non è autovalore)

Esempio 1 $q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 6yz - 3z^2$

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$Det_{1\times1} = 1$

$Det_{2\times2} = -4$

$Det_{3\times3} = 12 \underline{+9} = 21$ (Sarrus)

3 [Corretto dopo video]

La successione dei segni è

aggiunto a sx d'ufficio

$$\begin{array}{ccccccc} + & & + & & - & & + \\ & P & & V & & V & \end{array}$$

Conclusione $n_+ = \#P = 1$, $n_- = \#V = 2$, $n_0 = 0$.

Esempio 2 $\quad q(x,y) = 2x^2 + 12y^2 - 10xy$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}_{1\times1} = +$

$\mathrm{Det}_{2\times2} = -$

d'ufficio

$$\underbrace{+\ \ +}_{P}\!\!\underbrace{\ \ -}_{V}$$

Quindi $n_+ = n_- = 1$ e $n_0 = 0$.

(si vedeva guardando anche solo $\mathrm{Det}_{2\times2}$)

Esempio 3 $\quad q(x,y) = 2x^2 + 3xz - 5z^2 + 2ayz + y^2$

Stabilire la segnatura al variare del parametro a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & a \\ \frac{3}{2} & a & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}_{1\times1} = +$

$\mathrm{Det}_{2\times2} = +$

$\mathrm{Det}_{3\times3} = -10 - \frac{9}{4} - 2a^2 = \text{neg. } \forall a$

Quindi

$$+\ \underbrace{\ +}_{P}\ \underbrace{\ +}_{P}\ \underbrace{\ -}_{V}$$

Quindi per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $n_+ = 2$ e $n_- = 1$

Cosa succede se trovo degli 0 strada facendo?

Primo sistema: usare versioni più generali dell'algoritmo

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Sylvester 1 − 2 − 3 − 4

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Sylvester 4 − 3 − 2 − 1

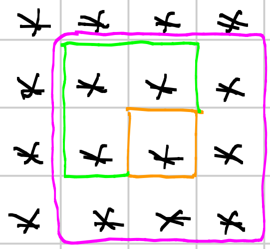
al 1° passaggio uso riga/colonna 4

al 2° " " " 4−3

al 3° " " " 4−3−2

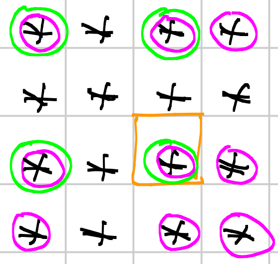
Sylvester 3 – 2 – 4 – 1

1° passaggio
2° passaggio
3° passaggio



Sylvester 3 – 1 – 4 – 2

1° passaggio
2° passaggio
3° passaggio



<u>Esempio</u> $\quad q(x,y,z) = z^2 + 3xz + 6yz + x^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Sylvester 1 – 2 – 3 : ☹

Sylvester 3 – 2 – 1 :

$\mathrm{Det}_{1\times1} = + \qquad (1)$

$\mathrm{Det}_{2\times2} = - \qquad (-9)$

$\mathrm{Det}_{3\times3} = - \qquad (-9)$

Segni $\qquad + \; + \; - \; - \quad \rightsquigarrow \quad n_+ = 2$

$\qquad\qquad\quad$ P $\;$ V $\;$ P $\qquad\qquad\quad n_- = 1$

Non è immediato trovare s.sp. della dim. giusta su cui la forma è def. pos. / neg.

<u>Oss.</u> Come ricordare se le P danno segni + o segni –

Basta pensare a cosa succede nel caso di matrice diagonale
I determinanti successivi cambiano segno solo quando trovo autovalori negativi.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Stabilire la segnatura al variare di a

Sylvester: cerco di fare in modo che il parametro serva solo alla fine
$\rightsquigarrow$ uso $1-3-2$

$Det_{1\times1}$: 1 $\quad +$
$Det_{2\times2}$: $3-4=-1$ $\quad -$
$Det_{3\times3}$: $3a-4a-1=-a-1$

- Se $-a-1>0$, cioè $a<-1$, allora $+ \vdots + - +$
  quindi $+--$
- se $-a-1<0$, cioè $a>-1$, allora $+ \vdots + - -$
  quindi $++-$
- Se $-a-1=0$, cioè $a=-1$, in teoria ☹, tuttavia si può dire che la situazione è $+-0$.

c'è

$q(1,0,0)>0$

$q(0,1,0)<0$

Capire l'ultimo l'ultimo passaggio è il riassunto delle 3 lezioni.

— o — o —