ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 55

Titolo nota 11/12/2018

ISOMETRIE DELLO SPAZIO

Come sono fatte le matrici 3×3 ortogonali

Fatto 1: Una matrice A ortogonale ha $\mathrm{Det} = \pm 1$

Fatto 2: Una matrice A 3×3 ha almeno un autovalore reale
(i polinomi di grado dispari hanno almeno una radice reale)

Fatto 3: Gli autovalori reali di una matrice ortogonale possono essere soltanto ± 1
(le matrici ortogonali conservano la norma, cioè $\|Av\| = \|v\|$ per ogni v, quindi se $Av = \lambda v$ allora $\|v\| = \|Av\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ ed essendo $\|v\| \neq 0$ per forza $|\lambda| = 1$)

Conseguenza: una 3×3 ortogonale ha almeno un autovalore uguale a ± 1.

Classifichiamo le matrici ortogonali guardando gli autovalori

1. Tre autovalori reali

1.1 $+1, +1, +1$ $\quad A = \mathrm{Id}$

1.2 $-1, -1, -1$ $\quad A = -\mathrm{Id}$

1.3 $+1, +1, -1$ $\quad$ Detti v_1, v_2, v_3 i rispettivi autovettori, che sono tra di loro ortogonali, allora A = simmetria rispetto al piano $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$

$\boxed{1.4}$ $+1, -1, -1$ Detti v_1, v_2, v_3 i rispettivi autovettori, che sono ortogonali, allora
$A =$ rotazione di $180°$ nel piano perpendicolare a v_1

$\boxed{2}$ Un autovalore reale, due autovalori complessi coniugati $\cos\theta \pm i \sin\theta$

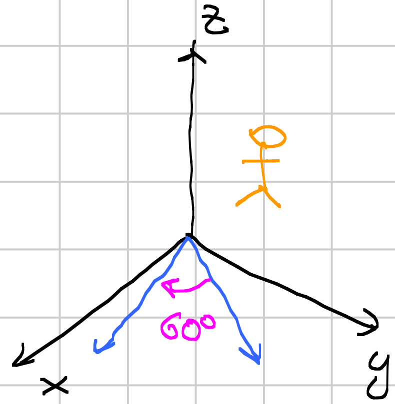
$\boxed{2.1}$ Se l'autovalore reale è $+1$ con autovettore v_1, allora $A =$ rotazione di un angolo θ nel piano perpendicolare a v_1.

$\boxed{2.2}$ Se l'autovalore reale è -1 con autovettore v_1, allora $A =$ rotazione come sopra seguita dalla simmetria rispetto allo stesso piano.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Scrivere la rotazione di $60°$ nel piano xy lasciando l'asse z fisso.

Importante: precisare l'orientazione della rotazione
Detto meglio: ruotare di $60°$ in verso ORARIO per un omino messo in piedi lungo l'asse z positivo



$f(0,0,1) = (0,0,1)$ (autovettore di autovalore 1)

Nel piano xy è la solita

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) & 0 \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto al piano di equazione $x - y + 2z = 0$

Cosa deve succedere
- una base del piano deve andare in se stessa
- il vettore $\perp$ al piano deve andare in $-$ se stesso

vettore $\perp$ al piano : $(1,-1,2) = v_1$

base del piano : $\underset{v_2}{(-2,0,1)}$, $\underset{v_3}{(0,2,1)}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{dalla } \{v_1,v_2,v_3\} \text{ alla canonica}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Dalla } \{v_1,v_2,v_3\} \text{ alla stessa}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Cambio base dalla canonica alla } \{v_1,v_2,v_3\}} = A$$

Alla fine la matrice A deve verificare

$$Av_1 = -v_1 \qquad Av_2 = v_2 \qquad Av_3 = v_3$$

Esempio 3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ Questa rappresenta $(x,y,z) \to (z,y,-x)$

Osservo che le colonne sono ortonormali, quindi A è matrice ortogonale

Calcoliamo gli autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = \pm i$$

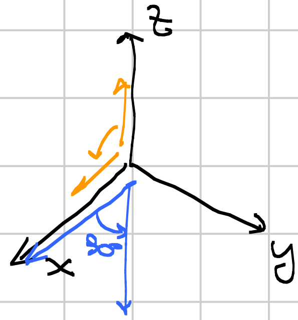
La matrice A rappresenta una rotazione di 90° rispetto ad un asse. Quale asse?

Quello spannato dall'autovettore relativo a $\lambda = 1$

$$(z, y, -x) = (x, y, z)$$

Quindi la soluzione è $\text{span}(0,1,0)$

⇝ rotazione di 90° rispetto all'asse y, cioè la rotazione avviene nel piano xz



Di 90° in che verso?

$$f(1,0,0) = (0,0,-1)$$
$$f(0,0,1) = (1,0,0)$$

Il verso della rotazione è ANTIORARIO per un omino messo in piedi lungo il semiasse positivo delle y.

<u>Esempio 4</u> Stessa trasformazione $(x,y,z) \to (z,y,-x)$

Calcolare l'immagine della retta $(7,2,1) + t(4,0,3)$

Calcolare la controimmagine del piano $x + y - 3z = 0$

Immagine retta: le parametriche vanno bene avanti!

$$(7+4t, 2, 1+3t) \rightsquigarrow (1+3t, 2, -7-4t)$$
$$= (1,2,-7) + t(3,0,-4)$$

Controimmagine del piano: le cartesiane vanno bene indietro

$$(\underbrace{z}_{\text{nuova } x}) + (\underbrace{y}_{\text{nuova } y}) - 3(\underbrace{-x}_{\text{nuova } z}) = 0 \rightsquigarrow z + y + 3x = 0$$

Esempio 5 Capire cosa rappresenta $(x,y,z) \to (z,x,y)$ geometricamente

Matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow f(e_1) \quad \uparrow f(e_2) \quad \uparrow f(e_3)$

Si vede che è ortogonale. Faccio autovalori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -\lambda^3 + 1 = 0$$

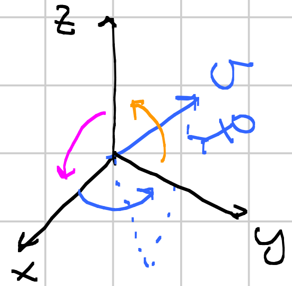
Autovalori: $\lambda^3 - 1 = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\theta} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\theta} \qquad \theta = 120°$$

Quindi A è una rotazione di 120° rispetto all'asse generato dall'autovettore di $\lambda = 1$.

Risolvendo $(x,y,z) = (z,x,y)$ troviamo $x = y = z$ da cui la soluzione $\underset{\displaystyle v}{\overset{}{(1,1,1)}}$.

$(1,1,1) = v$



$f(1,0,0) = (0,1,0)$
$f(0,1,0) = (0,0,1)$
$f(0,0,1) = (1,0,0)$

La rotazione è antioraria per un omino in piedi lungo $(1,1,1)$