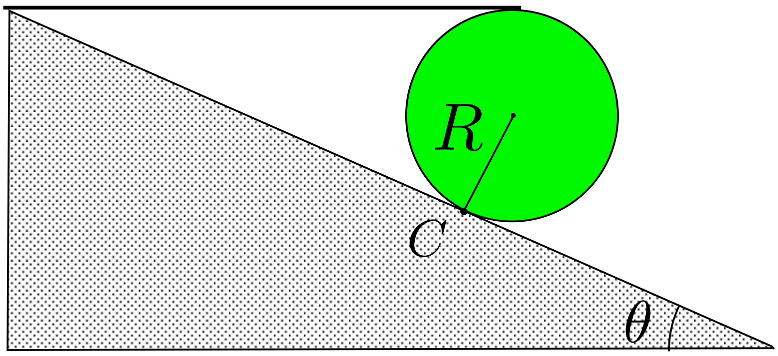
Esercizio

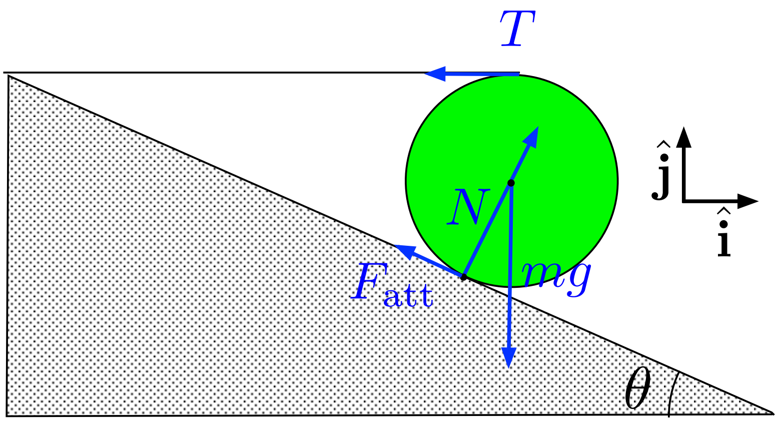
Un cilindro di raggio $R = 20\,\text{cm}$ e massa $m = 150\,\text{Kg}$ è appoggiato su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^o$ ed è tenuto fermo da una corda tesa orizzontalmente; l'attrito statico tra il cilindro ed il piano nel punto di contatto C è sufficiente ad impedire lo slittamento.

Calcolare la tensione T della corda e la reazione vincolare N in C.



SOLUZIONE
DATI INIZIALI

$$\begin{aligned} R &= 0.2\,\mathrm{m} \\ m &= 150\,\mathrm{Kg} \\ \theta &= \pi/6 \end{aligned}$$



- Denotiamo anche con $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ due versori orizzontale e verticale rispettivamente, e disegniamo le forze che agiscono sul disco. Si tratta di:

  i) forza peso $m\vec{g}$ (diretta verso il basso);

  $$m\vec{g} = -mg\,\hat{\jmath}$$

  ii) tensione $\vec{T}$ della corda (diretta orizzontalmente verso sinistra, di modulo $T = |\vec{T}|$);

  $$\vec{T} = -T\,\hat{\imath}$$

  iii) reazione vincolare $\vec{N}$ del piano (diretta ortogonalmente al piano, di modulo $N = |\vec{N}|$);

  $$\vec{N} = N\sin\theta\,\vec{\imath} + N\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

  iv) forza d'attrito statico $\vec{F}_{\mathrm{att}}$ (diretta longitudinalmente al piano, di modulo $F_{\mathrm{att}} = |\vec{F}_{\mathrm{att}}|$);

  $$F_{\mathrm{att}} = -F_{\mathrm{att}}\cos\theta\,\vec{\imath} + F_{\mathrm{att}}\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

  IMPORTANTE: La forza di attrito statico è un'*incognita* del problema (al pari della reazione vincolare e della tensione). Quindi NON è uguale $\mu_S\, mg\cos\theta$. Dal testo del problema sappiamo solo che tale forza è sufficiente a non far slittare il disco. Ciò significa che il suo valore è non superiore al valore massimo

  $$F_{\mathrm{att}} \leq F_{\mathrm{att}}^{max} = \mu_S\, mg\cos\theta \tag{1}$$

  ma NON è pari al valore massimo $F_{\mathrm{att}}^{max} = \mu_S\, mg\cos\theta$. Un errore tipico è quello di scrivere

  $$F_{\mathrm{att}} = \mu_S\, mg\cos\theta \qquad \textbf{SBAGLIATO !}$$

  La F_{att} è un'incognita e deve essere determinata dal problema.

- Siccome si tratta di un problema di statica di un corpo rigido (il disco non si muove!) occorre imporre le due equazioni

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i &= 0 \quad \text{(la sommatoria delle forze sul disco è nulla = il CM non si muove)} & (2) \\ \sum_i \vec{M}_i &= 0 \quad \text{(la sommatoria dei momenti sul disco è nulla = il disco non ruota attorno al CM)} & (3) \end{aligned}$$

- Iniziamo dall'equazione (2). Riscritta esplicitamente, essa risulta

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{att}} = 0 \tag{4}$$

Scomposta in componenti lungo $\vec{i}$ e $\vec{j}$ abbiamo

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{att}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - T + N\sin\theta - F_{\text{att}}\cos\theta &= 0 \\ \\ -mg + 0 + N\cos\theta + F_{\text{att}}\sin\theta &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

Pertanto l'Equazione vettoriale (2) si riduce alle due equazioni (5).

- Passiamo ora all'Equazione (3). Per valutare i momenti dobbiamo scegliere un polo. Scegliamo come polo il centro del disco, che è anche il CM del disco. Indichiamo con $\vec{k}$ il versore perpendicolare al foglio, in direzione uscente. Osserviamo innanzitutto che non tutte le forze esercitano un momento rispetto a tale polo. Infatti:

i) forza peso $m\vec{g}$ NON esercita momento perché applicata proprio al CM (il suo braccio è nullo);

$$\vec{M}_{peso} = 0$$

ii) tensione $\vec{T}$ esercita momento perpendicolare al foglio, verso uscente;

$$\vec{M}_T = TR\,\vec{k}$$

iii) reazione vincolare $\vec{N}$ NON esercita momento perché applicata colinearmente al suo braccio;

$$\vec{M}_N = \vec{N} \times \vec{R}_C = N\,R\underbrace{\sin\alpha}_{=0}\,\vec{k} = 0$$

iv) forza d'attrito statico $\vec{F}_{\text{att}}$ esercita momento perpendicolare al foglio, verso entrante;

$$\vec{M}_{\text{att}} = -F_{\text{att}}\,R\,\vec{k}$$

Pertanto l'Eq.(3) si scrive

$$\begin{aligned} \vec{M}_{peso} + \vec{M}_T + \vec{M}_N + \vec{M}_{\text{att}} &= 0 \\ &\Downarrow \\ 0 + TR\,\vec{k} + 0 - F_{\text{att}}\,R\,\vec{k} &= 0 \\ &\Downarrow \\ T - F_{\text{att}} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

E dunque l'Eq.(3) si riduce all'equazione

$$F_{\rm att} = T \tag{7}$$

Pertanto l'Equazione vettoriale (3) si riduce alla equazione (7).

- Mettendo insieme le tre equazioni ottenute, ossia le due Eq.(5) e l'Eq.(7), abbiamo un sistema di 3 equazioni per le 3 incognite $F_{\rm att}$, N e T

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -T + N\sin\theta - F_{\rm att}\cos\theta & = & 0 \\ \\ -mg + N\cos\theta + F_{\rm att}\sin\theta & = & 0 \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{8}$$

Sostituendo $F_{\rm att}$ (dato dalla terza equazione) nelle prime due equazioni abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -T + N\sin\theta - T\cos\theta & = & 0 \\ \\ -mg + N\cos\theta + T\sin\theta & = & 0 \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{9}$$

ossia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N & = & T\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ \\ N\cos\theta + T\sin\theta & = & mg \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{10}$$

Sostituendo la prima nella seconda equazione

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N & = & T\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ \\ +T\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + T\sin\theta & = & mg \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{11}$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N & = & T\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ \\ T\,\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta} & = & mg \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{12}$$

Usando ora le relazioni trigonometriche

$$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad\qquad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N & = & T\,\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2} \\ \\ T & = & mg\tan\frac{\theta}{2} \\ \\ F_{\rm att} & = & T \end{array} \right. \tag{13}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima e nella terza, otteniamo infine

$$\begin{cases} N &= mg \\ T &= mg \tan \frac{\theta}{2} \\ F_{\text{att}} &= mg \tan \frac{\theta}{2} \end{cases} \tag{14}$$

- Sostituendo i dati, otteniamo per la reazione vincolare

$$\begin{aligned} N &= 150\,\text{Kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 1471.5\,\text{N} \end{aligned} \tag{15}$$

e per la tensione

$$\begin{aligned} T &= 150\,\text{Kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tan \frac{\pi}{12} = \\ &= 394.3\,\text{N} \end{aligned} \tag{16}$$