Esame di Ricerca Operativa del 6/6/22

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda produce ogni giorno due tipi di oggetti in alluminio detti A e B. Sono disponibili 12 chili di alluminio al giorno; ogni oggetto di tipo A ne richiede 4 kg, mentre ogni oggetto di tipo B ne richiede 3 kg. Il numero di oggetti di tipo B prodotti non deve essere inferiore a quelli di tipo A. Il prezzo di vendita di A é 3000 euro mentre quello di B é 1000. La societá deve avere un ricavo d almenoi 3000 euro al giorno. Il tipo A dá un guadagno del 10 % mentre il tipo B del 20 %. La societá vuole massimizzare il guadagno.

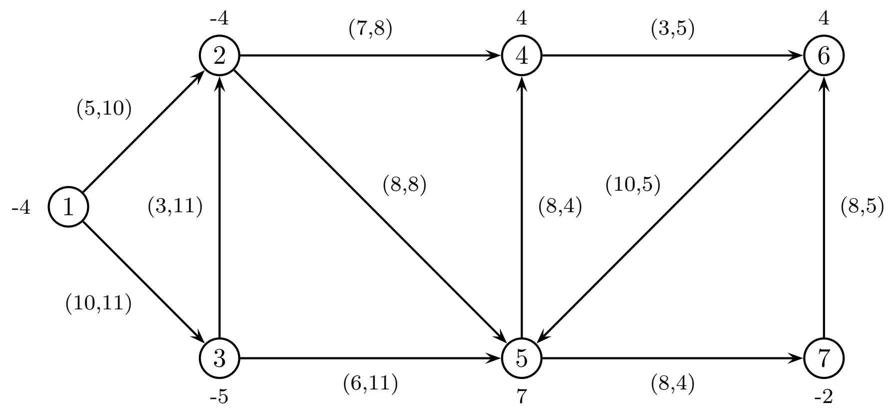
Trovare la soluzione ottima del rilassato continuo tramite il simplesso partendo da una soluzione in cui non si producono oggetti di tipo A. Calcolare valutazione inferiore e superiore del problema. Calcolare il secondo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete:

	2	**3**	**4**	**5**
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

Trovare una valutazione calcolando il 4–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 3. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{34} e x_{45}. Siamo arrivati all'ottimo? Se il costo dell'arco x_{23} cambiasse, la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,6) e (7,6) e l'arco (5,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare il taglio da 1 a 7 di capacitá minima.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\,x_1^2 - x_2^2 + 4\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 8 \\ 2\,x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(0, 3)$. Trovare il minimo globale ed il massimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT.
Massimo e minimo globale cambiano se si tolgono i vincoli di positività?

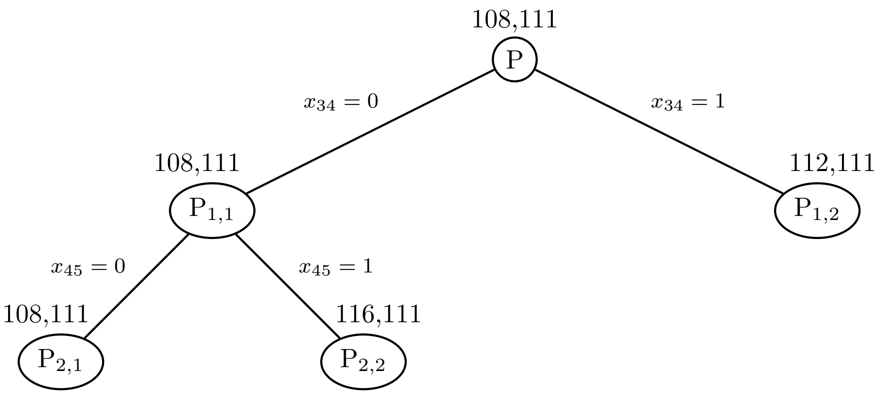
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + 2\ x_2 \\ 4\ x_1 + 3\ x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ -3\ x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(0, 4)$ con base $B = \{1, 4\}$. Soluzione ottima $(\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$. Base ottima $B = \{1, 2\}$. Soluzione ottima PLI $(0, 4)$. Taglio $x_1 \leq 1$.

Esercizio 2.
4–albero: (1 , 3) (1 , 5) (2 , 4) (2 , 5) (1 , 4) $\quad v_I(P) = 108$
ciclo: 3 – 1– 5 – 2 – 4 $\quad v_S(P) = 111$
soluzione ottima 1 – 3 – 5 – 2 – 4 $\quad v(P) = 110$



Il ramo $P_{2,2}$ viene tagliato. Poiché l'arco $(2, 3)$ non appartiene al ciclo ottimo se il suo costo diminuisce la soluzione ottima potrebbe cambiare.
Esercizio 3.

		iterazione 1
Archi di T		(1,3) (2,4) (2,5) (3,5) (4,6) (7,6)
Archi di U		(5,4)
x		(0, 4, 2, 2, 0, 9, 2, 4, 0, 0, 2)
π		(0, 8, 10, 15, 16, 18, 10)
Arco entrante		(1,2)
ϑ^+, ϑ^-		6 , 4
Arco uscente		(1,3)

Il taglio é $N_s = \{6\}$ di capacitá 4. L'albero dei cammini minimi é $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 6), (5, 7)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (5, 1, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$(0, 3)$	$(-1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0, -4)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$(0, 2)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(0, 3)$	$4x_1 - 4x_2$	(8,0)	$(8, -3)$	$\frac{22}{137}$	$\left(\frac{176}{137}, \frac{345}{137}\right)$

Minimo globale é $(8, 0)$, con moltiplicatori $(0, 58, 28, 0)$ mentre $(1, 1)$ é massimo globale con moltiplicatori tutti nulli. Se si tolgono i vincoli di positivitá il minimo globale diventa $-\infty$ mentre il massimo globale non cambia.