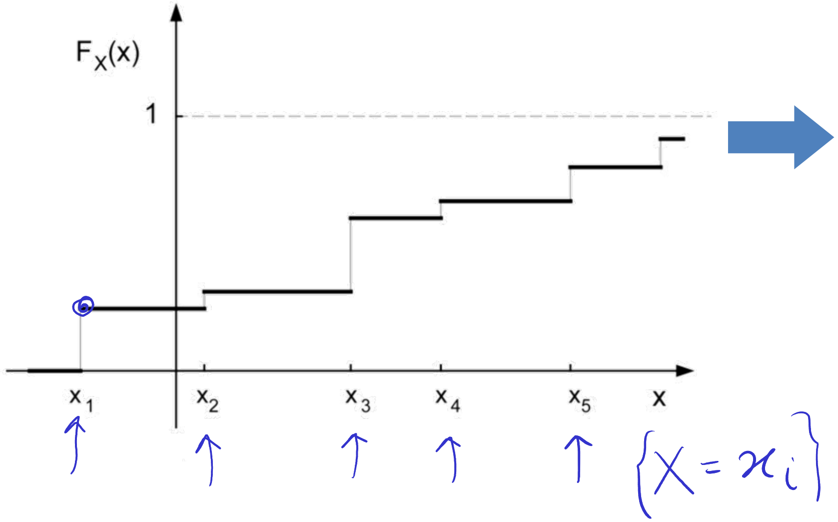
Esempi di funzione di distribuzione

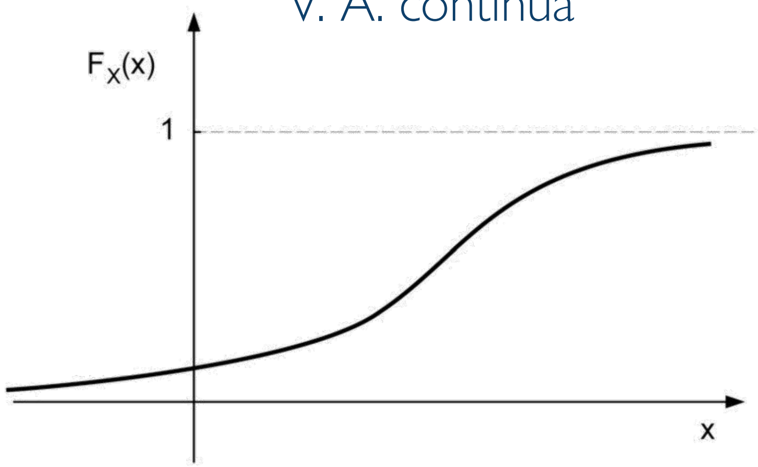
V. A. discreta



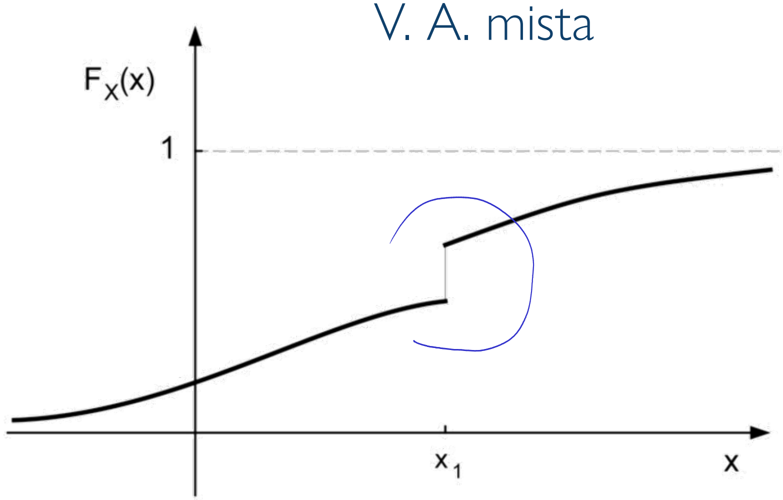
X discreta → $F_X(x)$ è una funzione costante a tratti

La variabile aleatoria X assume con probabilità diversa da zero un insieme di valori x_k *discreto*

V. A. continua



V. A. mista



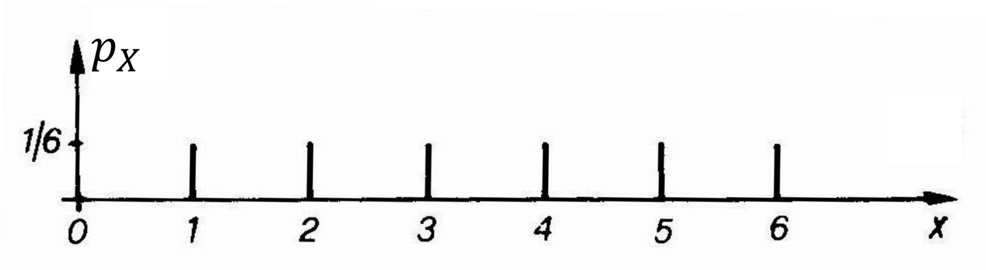
Variabili aleatorie discrete

Una v.a. si dice *discreta* se assume un numero finito o una infinità numerabile di valori distinti: $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$

Funzione massa di probabilità: $p_X(x) = P(\{X = x\})$

È diversa da zero solo in $x = x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$

Esempio:
Lancio di un dado non truccato



$$\sum_i p_X(x_i) = \sum_i P(\{X = x_i\}) = 1$$

Gli eventi $\{X = x_i\}$ sono una partizione di Ω

Misura della massa di probabilità di v.a. discrete

- Definizione di massa di probabilità come limite della frequenza relativa:

$$p_X(x_i) = P(\{X = x_i\}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{n(x_i)}{N}$$

- Ripetere *N* volte l'esperimento;
- Per ogni x_i, calcolare il numero di volte $n(x_i)$ in cui tale valore si è presentato;
- Per ogni x_i, calcolare la frequenza di presentazione:

$$\hat{p}_X(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}$$

Variabili aleatorie discrete: v.a. binaria

- Si consideri l'esperimento costituito dal lancio di un dado perfettamente simmetrico

- Se ad ogni faccia si associa il suo valore numerico, si definisce una v.a. X che assume i valori i=1, 2, 3, 4, 5, 6 con massa di probabilità $p_X(i) = 1/6$

- Si può anche definire una v.a. Y che vale 1 se si presenta la faccia 5 o 6, 0 altrimenti → La funzione massa di probabilità in questo caso è data da:

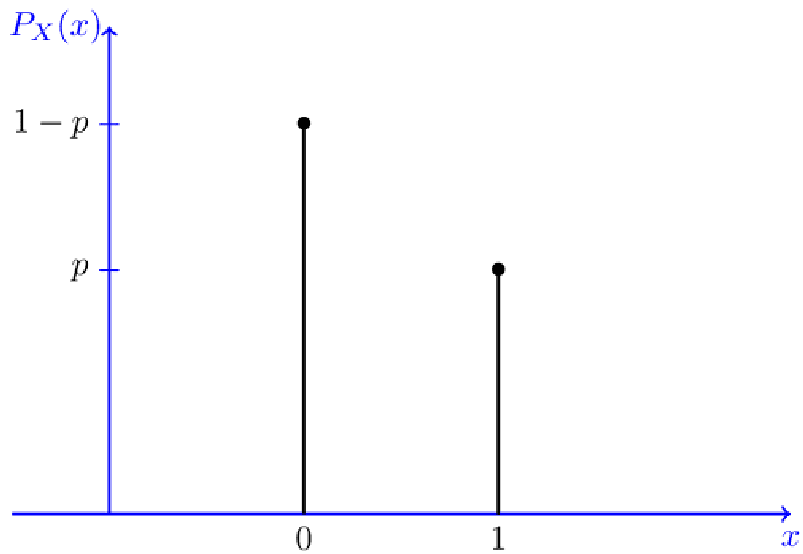
$$p_Y(1) = P(Y=1) = P(X=5) + P(X=6) = 1/3$$
$$p_Y(0) = P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = 2/3$$

Variabili aleatorie discrete: v.a. di Bernoulli

Consideriamo un esperimento casuale che assume uno dei due valori possibili:

- il valore 1 con probabilità p
- il valore 0 con probabilità $1 - p$

Una variabile aleatoria di questo tipo è detta v.a. di Bernoulli: $X \in Bernoulli(p)$



Variabili aleatorie discrete: v.a. binomiale

- Si ripeta N volte un esperimento aleatorio nel quale un certo evento A *(evento favorevole)* si può presentare con probabilità p in ciascuna prova (prove indipendenti)

- Si può definire una v.a. X il cui valore si identifica con il numero di volte in cui si verifica l'evento A sul totale delle N prove

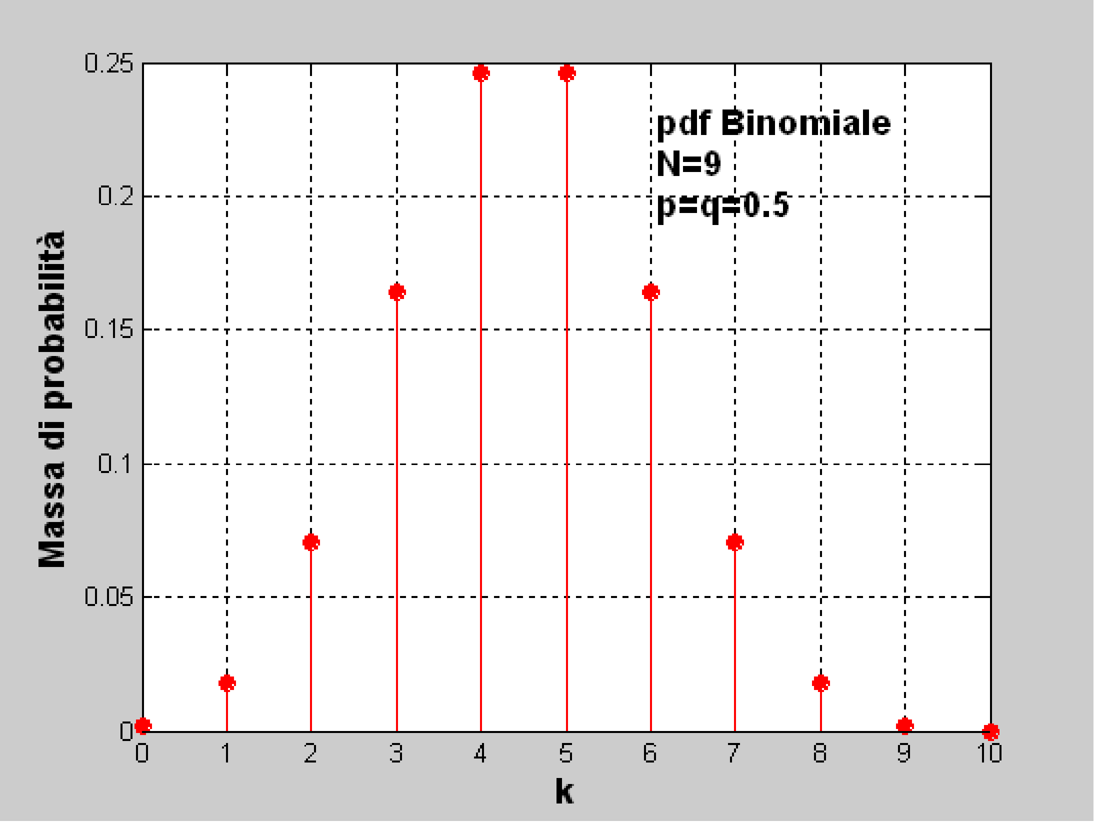
- Tale v.a., detta *numero di successi*, è di tipo discreto e può assumere i valori $x_k = 0, 1, 2, \ldots, N$ con massa di probabilità:

$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, \ldots, N$$

Variabili aleatorie discrete: v.a. binomiale

Una v.a. $X \in B(p, N)$ è detta binomiale se è discreta, definita per valori interi 0, 1, 2, …, N e con la seguente massa di probabilità:

$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, \dots, N$$



Variabili aleatorie discrete: v.a. di Poisson

Una v.a. $X \in P(\Lambda)$ è detta di **Poisson** di parametro Λ (con $\Lambda > 0$) se è discreta, definita per valori interi positivi, ed ha la seguente **massa di probabilità**:

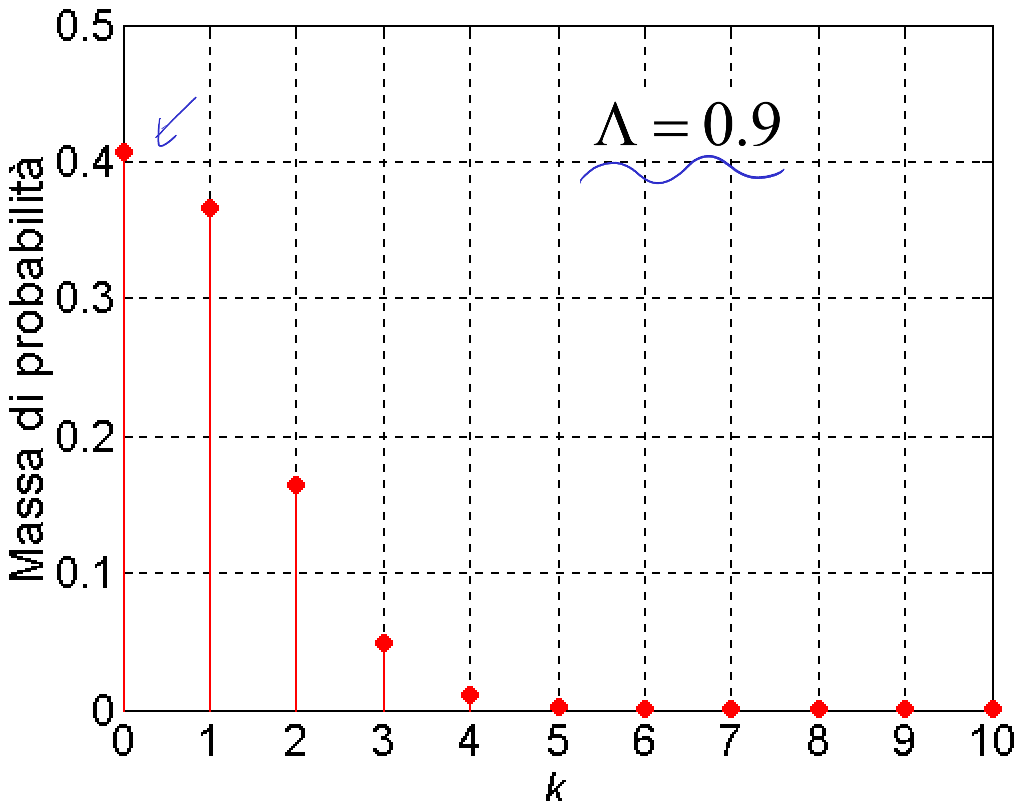
$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \underbrace{\frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

Condizione di normalizzazione della massa di probabilità:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k)} = e^{-\Lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} = e^{-\Lambda} e^{\Lambda} = 1$$

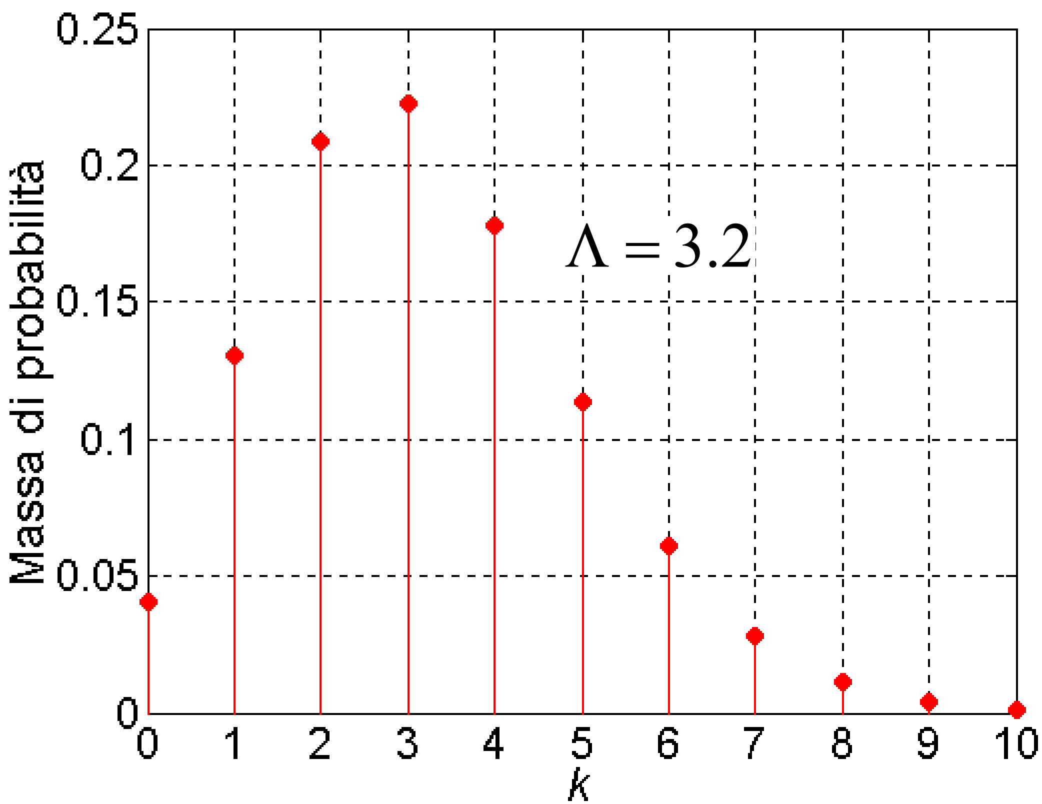
Variabili aleatorie discrete: v.a. di Poisson

Se $\Lambda < 1$, allora $p_X(k)$ è massima in k=0



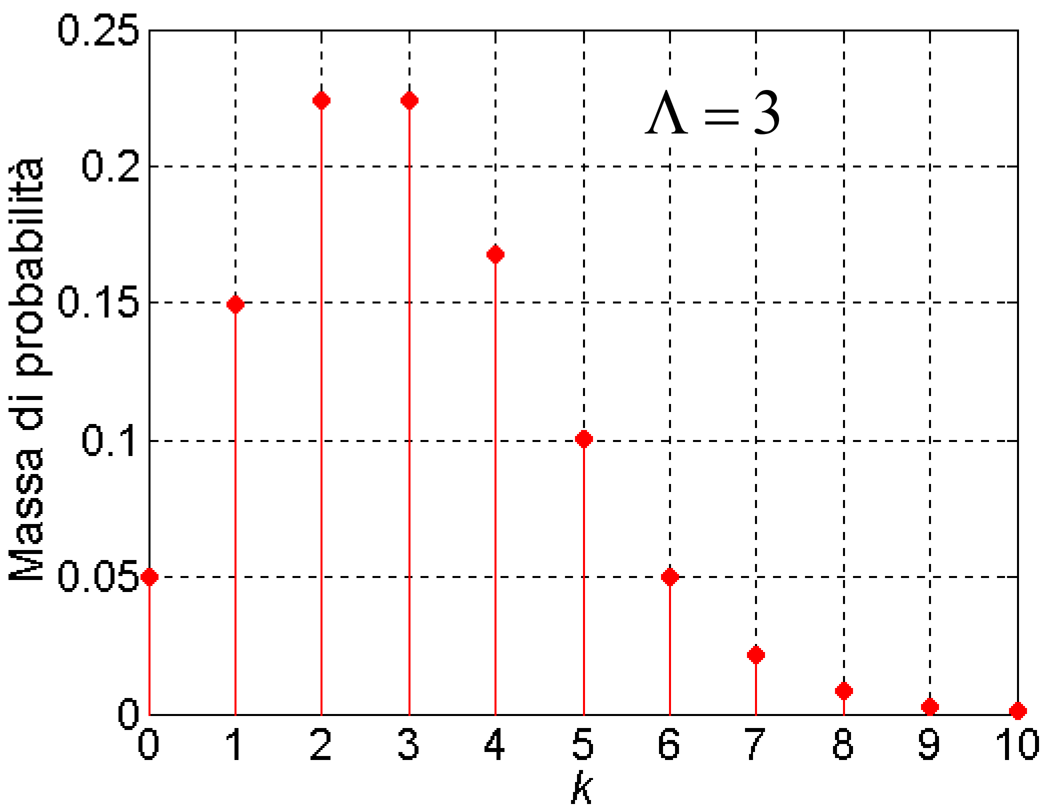
Variabili aleatorie discrete: v.a. di Poisson

Se Λ non è un intero ed è maggiore di 1, allora il massimo si ha per k uguale alla parte intera di Λ



Variabili aleatorie discrete: v.a. di Poisson

Se Λ è maggiore di uno ed è intero, allora si hanno due massimi per $k = \Lambda$ e $k = \Lambda - 1$



Decadimento radioattivo

Esercizio:

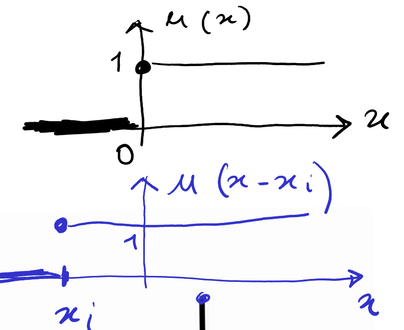
- Il numero di decadimenti per unità di tempo in una sostanza radioattiva a vita media molto lunga (in modo da poter considerare costante l'intensità radioattiva per tutta la durata dell'osservazione) è schematizzabile come una variabile aleatoria di Poisson
- I numeri di decadimenti che avvengono in intervalli di tempo non sovrapposti possono considerarsi *indipendenti*
- Il numero medio di decadimenti al secondo è $\lambda=0.5$

- **Calcolare la probabilità che l'intervallo di tempo intercorrente fra due decadimenti successivi superi un secondo**

$$p_X(k) = P(\{X = k \text{ decadimenti in un secondo}\}) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$p_X(0) = P(\{X=0\}) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-0,5} \simeq 0,606$$

Funzione di distribuzione di v.a. discrete

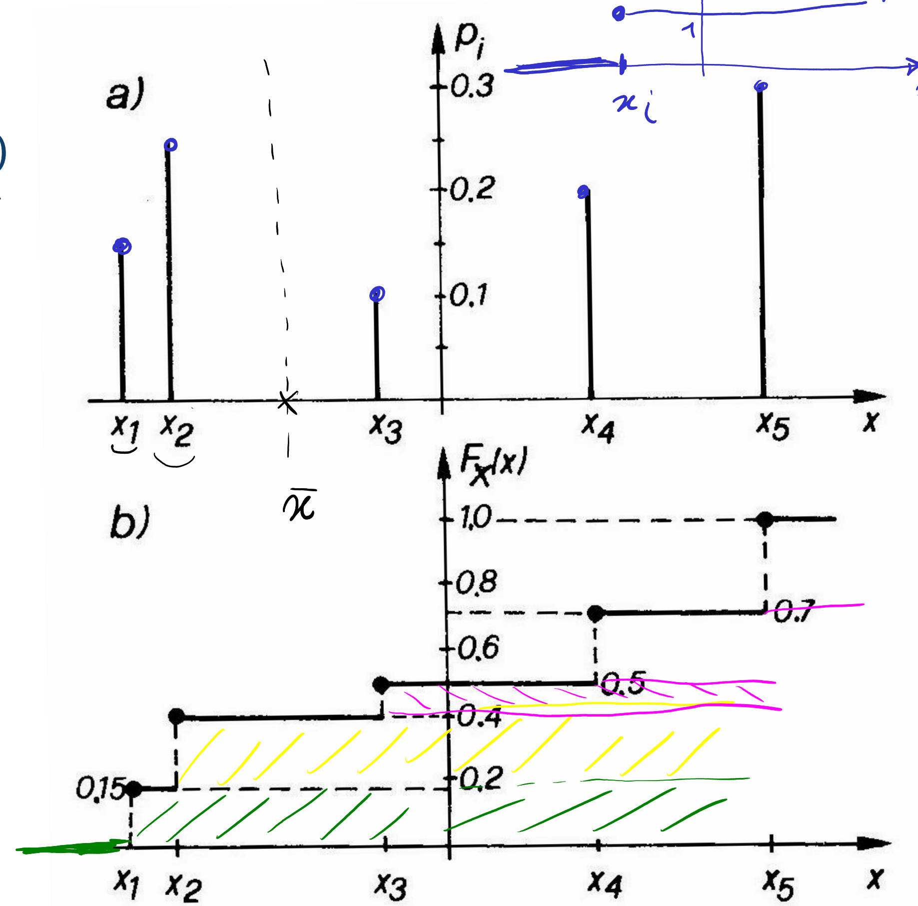


$$F_X(x) \triangleq P(\{X \le x\})$$

$$= \sum_{\{i:\, x_i \le x\}} P\{(X = x_i)\} = \sum_{\{i:\, x_i \le x\}} p_X(x_i)$$

$$= \sum_i P\{(X = x_i)\}\, u(x - x_i)$$

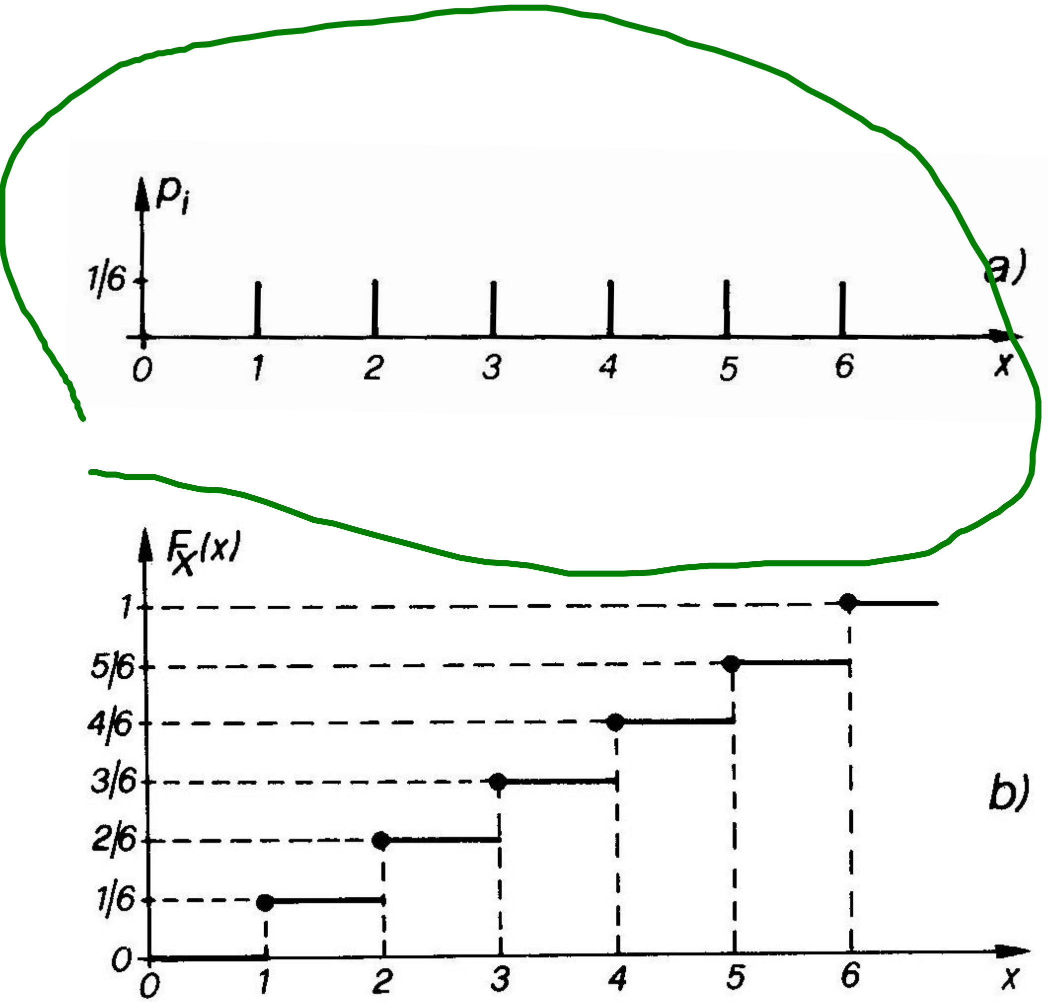
$$= \sum_i p_X(x_i) u(x - x_i)$$



Se la $F_X(x)$ di una v.a. discreta è nota, è possibile dedurre sia i valori assunti dalla v.a., sia le corrispondenti probabilità → Dalla $F_X(x)$ possiamo ricavare la massa di probabilità

Funzione a gradini: i gradini sono in corrispondenza degli x_i

Funzione di distribuzione di v.a. discrete



Esempio:
Lancio di un dado non truccato

Nota:
$F_X(x)$ è continua da destra

Lancio di 2 dadi

Esercizio:
Si lanciano due dadi non truccati, uno di colore verde e uno di colore rosso. Si definiscono due v.a. discrete V e R:

- V: numero sulla faccia verso l'alto del dado verde
- R: numero sulla faccia verso l'alto del dado rosso

La massa di probabilità e la funzione distribuzione di V ed R sono quelle riportate nella diapositiva precedente

- Ricavare la *massa di probabilità* delle v.a. S e D definite come segue:

$$\begin{cases} S = V + R \\ D = V - R \end{cases}$$

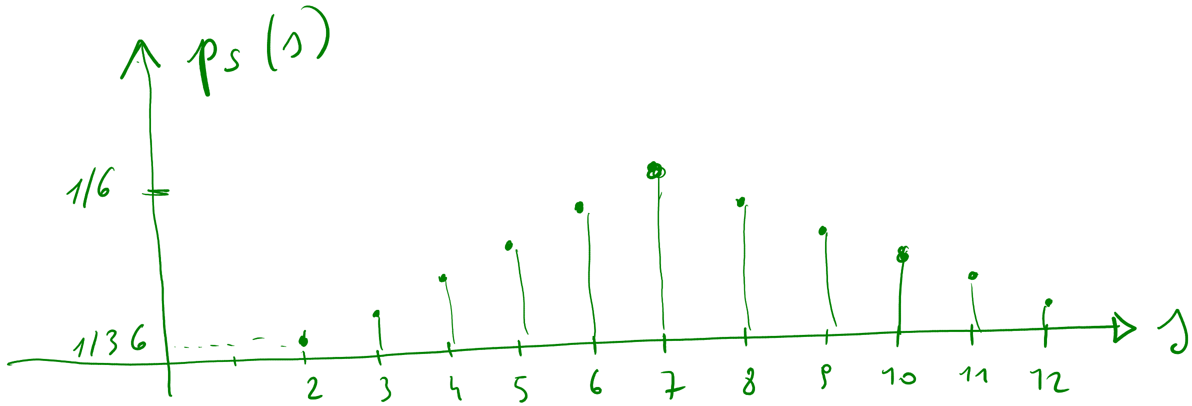
Lancio di 2 dadi

$$\begin{cases} \boxed{S = V + R} \\ D = V - R \end{cases}$$

R \ V	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

s	#	$p_S(s)$
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	⋮
5	4	
6	5	
7	6	6/36
8	5	⋮
9	4	
10	3	
11	2	
12	1	1/36

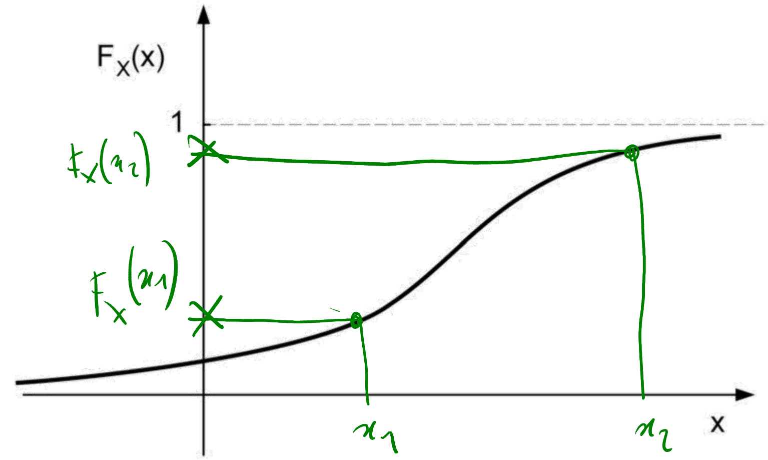
$\sum = 36$


ps (s)
1/6
1/36
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
s

Funzione di distribuzione di v.a. continue

Una v.a. si dice *continua* se può assumere un'infinità di valori, (ad esempio: tutti i numeri reali nell'intervallo di estremi *a* e *b*), ognuno dei quali con probabilità nulla:

$$P(\{X = x\}) = 0, \quad \forall x$$



- La funzione di distribuzione è continua: $F_X(x^+) = F_X(x^-) = F_X(x)$
- $P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$

$$= P(x_1 < X < x_2)$$

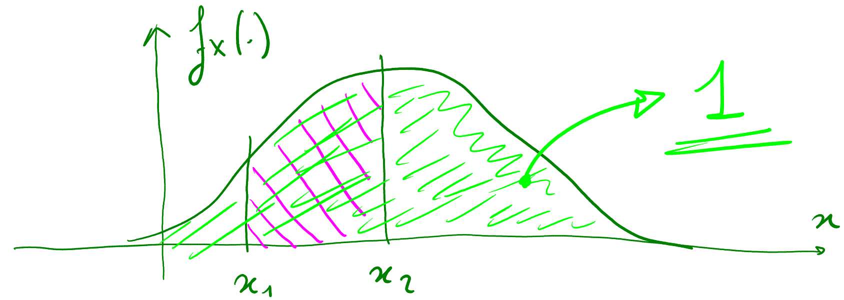
$$= P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Densità di probabilità di v.a. continue

Se $F_X(x)$ è derivabile, si definisce *densità di probabilità (ddp)* della v.a. *X la funzione:*

$$f_X(x) \triangleq \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$$



- $f_X(x) \geq 0$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\mathrm{d}\alpha$
- $\int_{x_1}^{x_2} f_X(\alpha)\mathrm{d}\alpha = F_X(x_2) - F_X(x_1) \Rightarrow P(X \in I) = \int_I f_X(\alpha)\mathrm{d}\alpha$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)\mathrm{d}\alpha = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$ Proprietà di normalizzazione

$1 \quad - \quad 0$

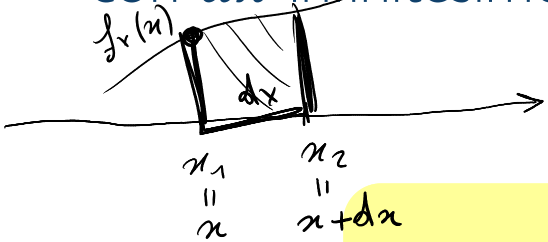
Densità di probabilità di v.a. continue

- Dalla relazione: $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x = P(x_1 < X \le x_2)$, fissando

$x_1 = x,\ \ x_2 = x + dx$

con dx infinitesimo

$$f_X(x)\mathrm{d}x = P(x < X \le x + \mathrm{d}x)$$



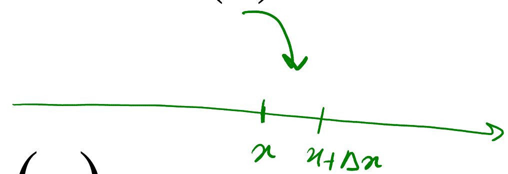
per cui:

$$f_X(x) = \frac{P(x < X \le x + \mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}$$

quindi la ddp rappresenta la probabilità (al variare di *x*) che la v.a. *X* assuma valori appartenenti all'intervallo infinitesimo (*x*, *x*+d*x*) diviso l'ampiezza infinitesima d*x* dell'intervallo

Misura della densità di probabilità di v.a. continue

Questa proprietà è utile per misurare sperimentalmente la ddp di una v.a. passando alla *frequenza relativa*; infatti, se ripetiamo l'esperimento *N* volte e contiamo il numero $\Delta n(x)$ di risultati per cui $x < X \le x + \Delta x$, si ottiene:



$$f_X(x)\Delta x \cong P(x < X \le x + \Delta x) \cong \frac{\Delta n(x)}{N}$$

purché Δx sia sufficientemente piccolo e *N* sufficientemente grande, quindi la ddp si può ottenere come segue:

$$f_X(x) \cong \frac{\Delta n(x)}{N \Delta x}$$

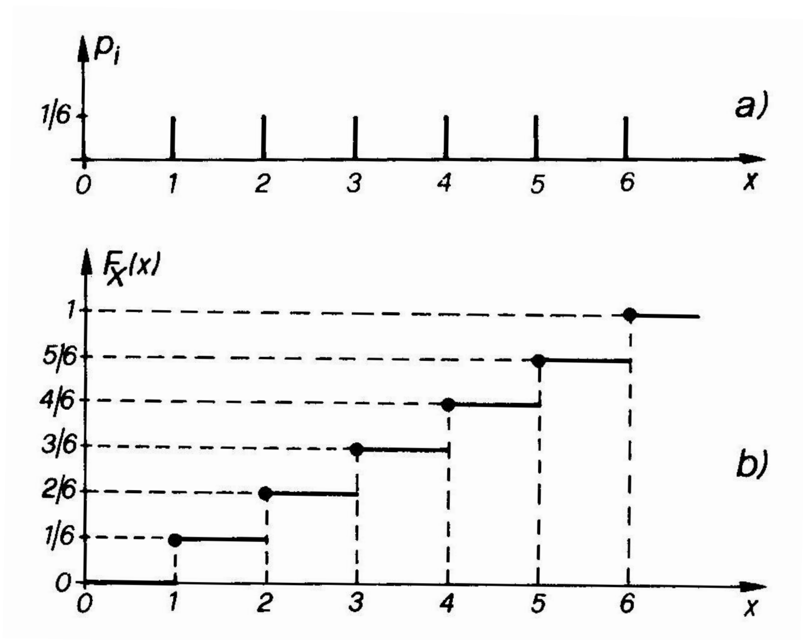
Densità di probabilità di v.a. discrete

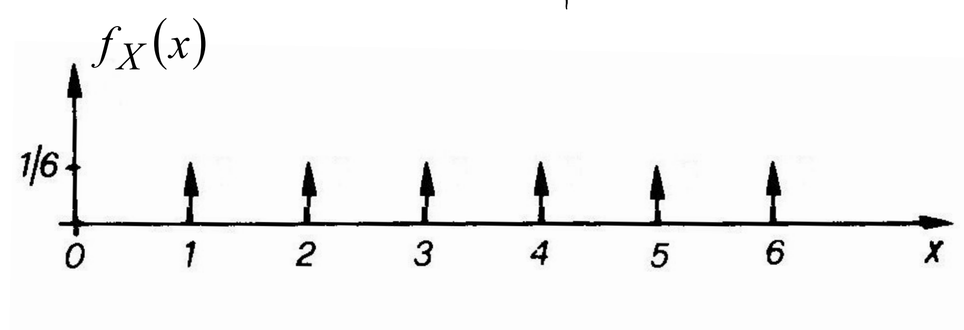
Data una v.a. discreta X che assume i valori $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots,$ con probabilità $p_X(x_i)$, si può scrivere la ddp mediante la funzione *delta di Dirac*:

$$F_X(x) = \sum_i p_X(x_i)\, u(x - x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$f_X(x) = \sum_i p_X(x_i)\, \delta(x - x_i)$$





Densità di probabilità di v.a. discrete

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\sum_i p_X(x_i)}\int_a^b \delta(x - x_i)\mathrm{d}x$$

- Se a e b non coincidono con nessuno degli x_i, si ottiene semplicemente la somma delle probabilità associate ai valori assunti dalla v.a. interni all'intervallo (a, b)

- Si deve fare attenzione al caso in cui uno degli estremi, ad esempio b, coincide con un valore della v.a.; in tal caso, i due integrali:

$$\int_a^{b^+} f_X(x)\mathrm{d}x = P(a < X \le b) \quad \text{e} \quad \int_a^{b^-} f_X(x)\mathrm{d}x = P(a < X < b)$$

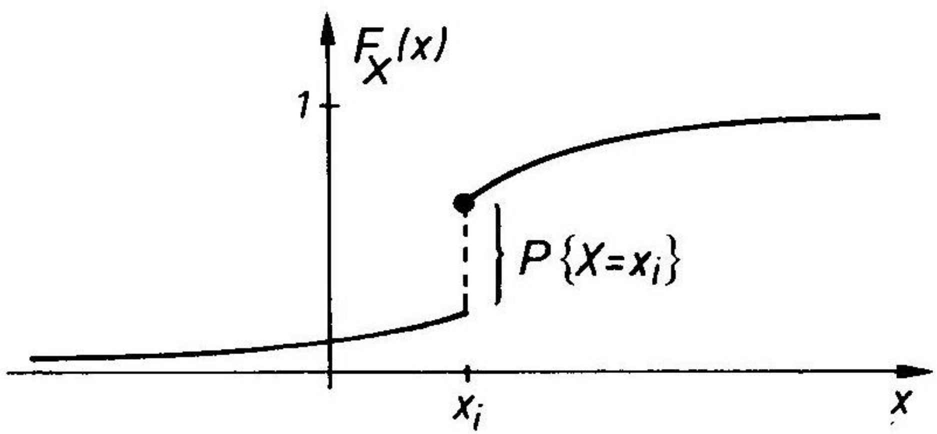
non coincidono, perché nel primo caso si comprende nella integrazione l'impulso $P(X = b)\delta(x - b)$, mentre nel secondo lo si esclude

Funzione di distribuzione di v.a. miste

- Una v.a. si dice *mista* se la funzione di distribuzione $F_X(x)$ è discontinua, ma non costante a tratti (cioè la forma a *gradini* tipica delle v.a. discrete)

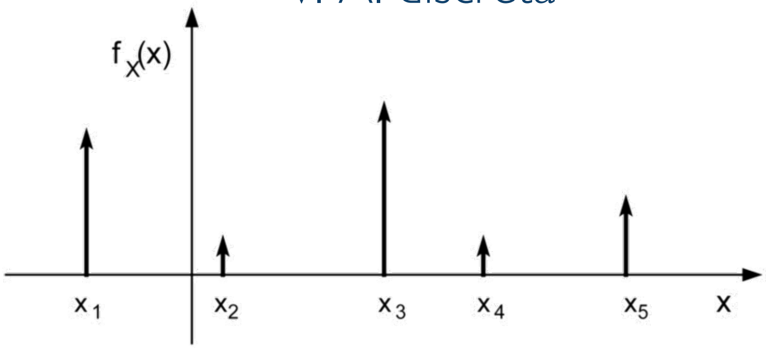
- In tal caso la v.a., oltre ai valori di un intervallo continuo, può assumere valori discreti con probabilità non nulla

- L'entità del salto in x_i rappresenta la probabilità dell'evento $\{X = x_i\}$

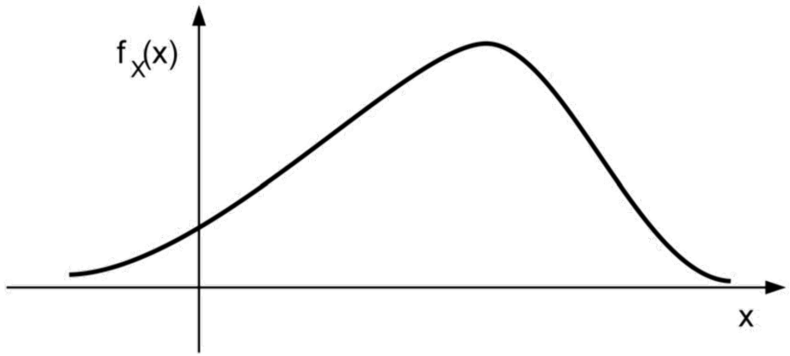


Esempi della funzione densità di probabilità

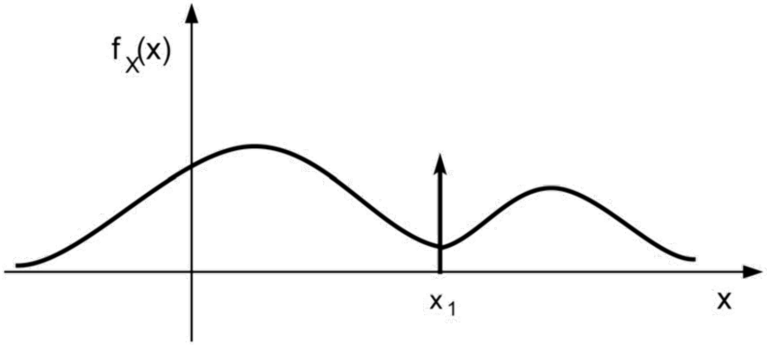
V. A. discreta



V. A. continua



V. A. mista

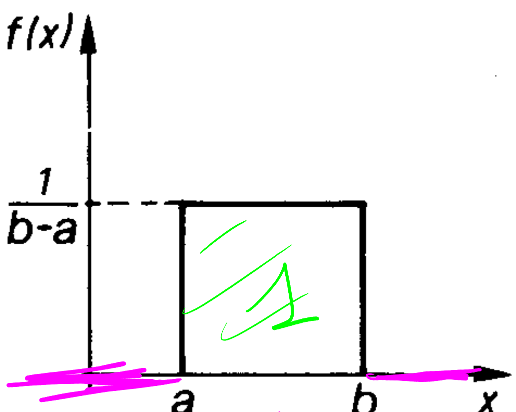


Variabili aleatorie continue: v.a. uniforme

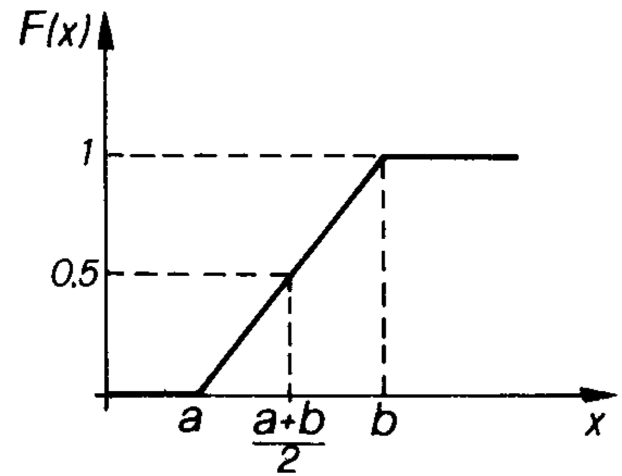
Una v.a. $X \in U(a, b)$ è detta **uniforme** nell'intervallo (*a*, *b*) se la sua ddp è costante in quell'intervallo:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{per } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{per } a \le x \le b \\ 1 & \text{per } x > b \end{cases}$$



b - a



Variabili aleatorie continue: v.a. esponenziale

Una v.a. $X \in Exp(\lambda)$ è detta **di tipo esponenziale** di parametro λ, se ha la seguente ddp:

gradino

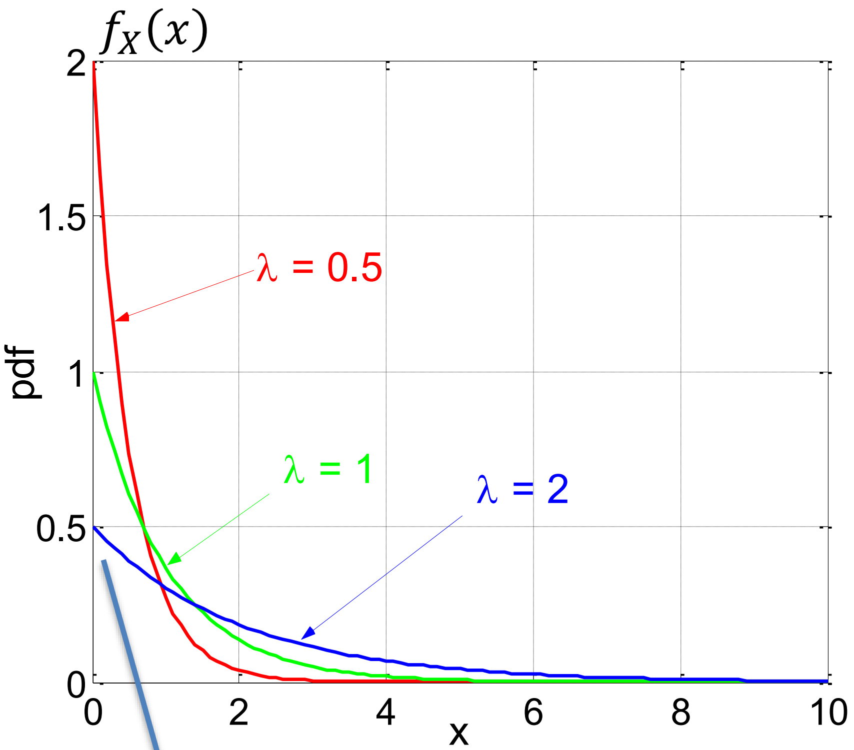
$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\mathrm{u}(x)$$

La funzione di distribuzione di una v.a. esponenziale è:

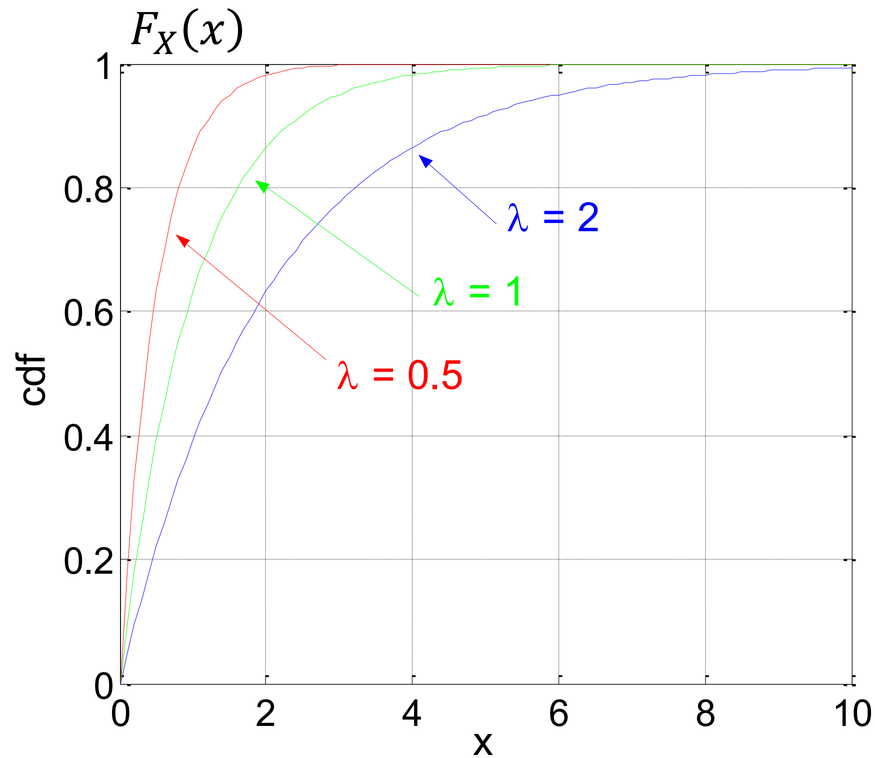
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)u(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \; x < 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\mathrm{d}\alpha & \text{se } \; x \geq 0 \end{cases} = \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\right]\mathrm{u}(x)$$

Variabili aleatorie continue: v.a. esponenziale



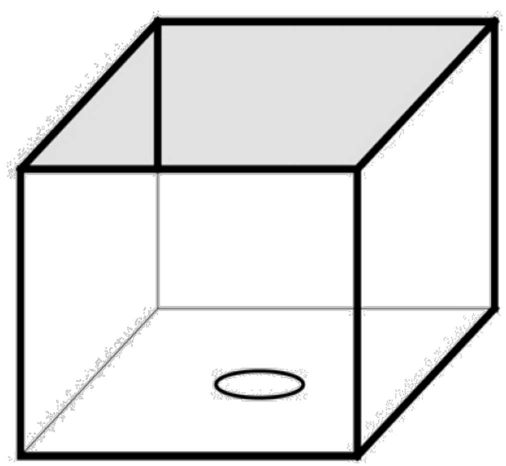
In zero vale $\frac{1}{\lambda}$

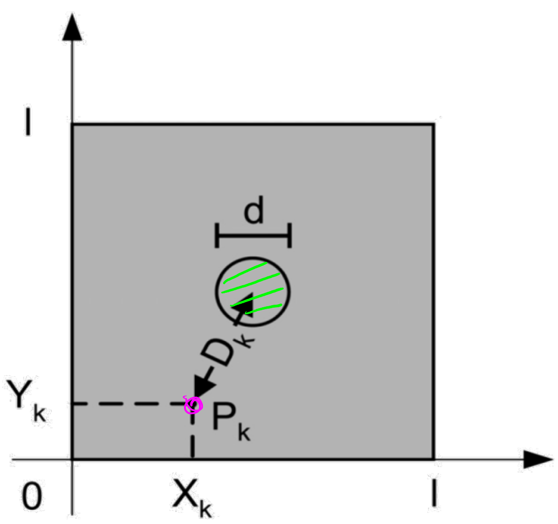


Problema: scatola forata

Esempio: MATLAB 8.2 – Libro Luise-Vitetta

- Un contenitore ha un fondo quadrato (di lato $l = 1\ m$) al centro del quale è praticato un foro circolare di diametro $d = 20\ cm$.
- Sul fondo del contenitore vengono depositate, a caso e in modo indipendente, 10 palline di piccolo diametro (cioè di diametro molto minore di d)
- Determiniamo la probabilità che, alla fine della successione di questi eventi, nella scatola siano rimaste esattamente 7 palline





Problema: scatola forata – Calcolo teorico

- Prove ripetute binarie indipendenti

- Calcolo la probabilità che una pallina esca dal contenitore

$$q = \frac{A_f}{A_s} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ell^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{0,2}{1}\right)^2 = \frac{\pi}{100}$$

- Probabilità dell'evento A = {7 palline all'interno della scatola dopo 10 lanci}:

Formula di Bernoulli

$$P(\{A\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$p = 1 - q \qquad N = 10 \qquad k = 7$$

$$= \binom{10}{7} (1-q)^7 (q)^3 \simeq 2,98 \cdot 10^{-3}$$

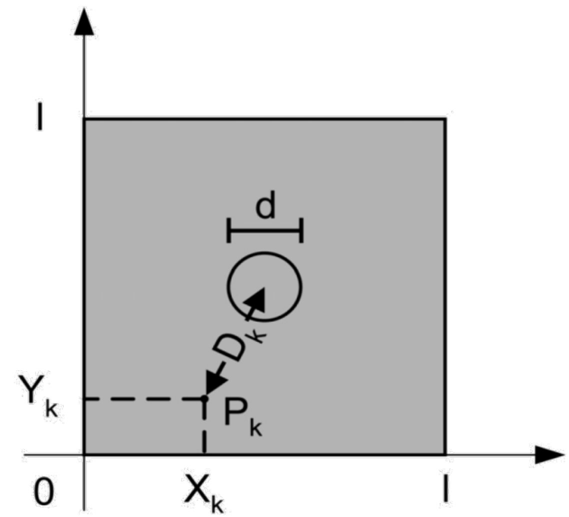
Problema: scatola forata – Verifica sperimentale

- E' utile fornire una descrizione statistica delle coordinate (X_k, Y_k) del punto P_k dove viene appoggiata la k-esima pallina sul fondo della scatola
- Posizione casuale → X_k, Y_k v.a. $\in U(0, 1\,m)$ e indipendenti fra loro

- La k-esima pallina esce quando la distanza aleatoria

$$D_k = \sqrt{\left(X_k - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(Y_k - \frac{l}{2}\right)^2}$$

tra il punto P_k ed il centro della scatola è $\leq \frac{d}{2}$



- Calcoliamo quindi $P\left(\left\{D_k \leq \frac{d}{2}\right\}\right)$ con un approccio frequentista

Problema: scatola forata – Verifica sperimentale

```
diametro=0.1:0.1:1.0; % diametro del foro [m]
for i=1:length(diametro)
    d=diametro(i); % diametro del foro [m]
    l=1.0; % lato della scatola [m]
    N=0; % numero di prove effettuate
    N_A=0; % numero di prove in cui l'evento A si è verificato
    while (N_A<1000)
        N=N+1; % incremento del contatore N
        pallineUscite=0; % numero di palline uscite dal foro
        for k=1:10
            % lancio della k-esima pallina
            x=l*rand(1); % ascissa del punto P [m]
            y=l*rand(1); % ordinata del punto P [m]
            dp=sqrt((x-l/2)^2+(y-l/2)^2); % distanza dal centro [m]
            if (dp<d/2) % la pallina esce dal foro
                pallineUscite=pallineUscite+1;
                % incremento del contatore pallineUscite
            end
        end
        if (pallineUscite==3) % l'evento A si è verificato
            N_A=N_A+1; % incremento del contatore N_A
        end
    end
    prob_sperimentale(i)=N_A/N % probabilità sperimentale

    q=pi/4*(d/l)^2; % probabilità teorica che una pallina esca
    p=1-q; % probabilità teorica che una pallina rimanga nella scatola
    prob_teorica(i)=factorial(10)/(factorial(7)*factorial(3))*p^7*q^3;
    % probabilità teorica
end
```