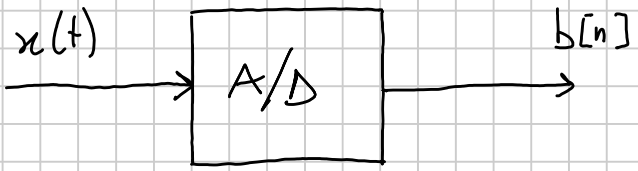
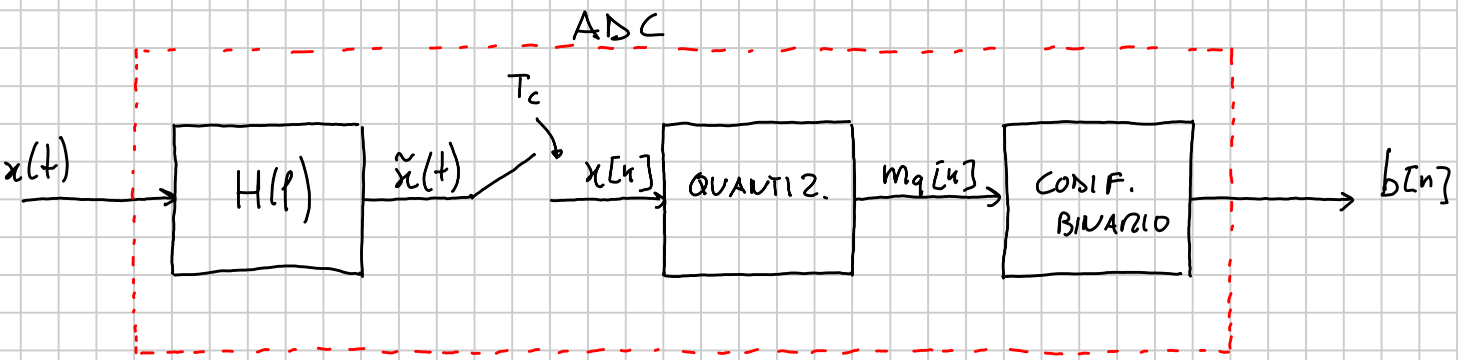
CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE (A/D)



$x(t)$ = segnale analogico

$b[n]$ = sequenza binaria

I convertitori analogico/digitali (ADC) sono dispositivi che convertono un segnale analogico in un segnale digitale, ovvero in sequenze di bit. Questi sono necessari ogni qualvolta si voglia utilizzare un sistema di comunicazione numerico per trasmettere un segnale analogico.



$x(t)$ = segnale analogico

$H(f)$ = risposta in frequenza del filtro anti-aliasing

$\tilde{x}(t)$ = segnale analogico filtrato

T_c = periodo di campionamento

$x[n]$ = segnale campionato (1 campione ogni T_c)

$m_q[n]$ = sequenza quantizzata (1 campione ogni T_c)

$b[n]$ = sequenza binaria (1 campione ogni T_b)

T_b = intervallo di simbolo binario

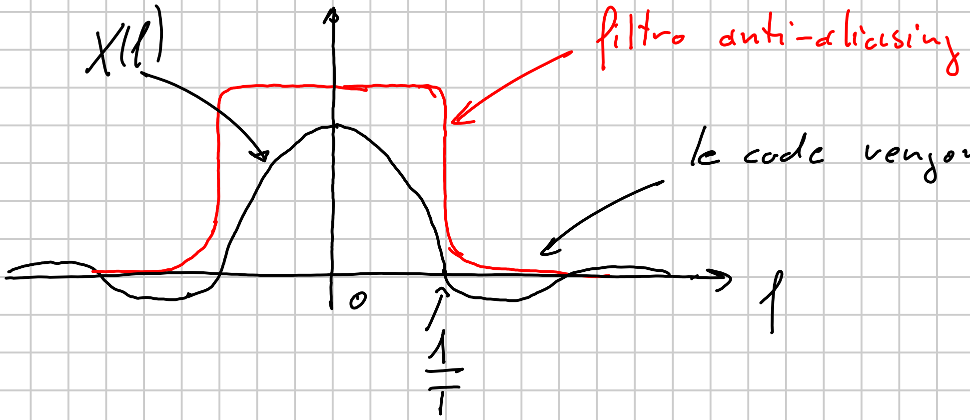
FILTRAGGIO ANTI-ALIASING E CAMPIONAMENTO

Il teorema del campionamento si applica a segnali a banda rigorosamente limitata al fine di eliminare il problema dell'aliasing

Segnali fisicamente realizzabili non hanno banda rigorosamente limitata per cui il fenomeno dell'aliasing non è mai del tutto eliminabile. Lo si può però limitare in modo che non distrugga l'informazione associata al segnale. Per fare questo si introduce un filtro anti-aliasing.

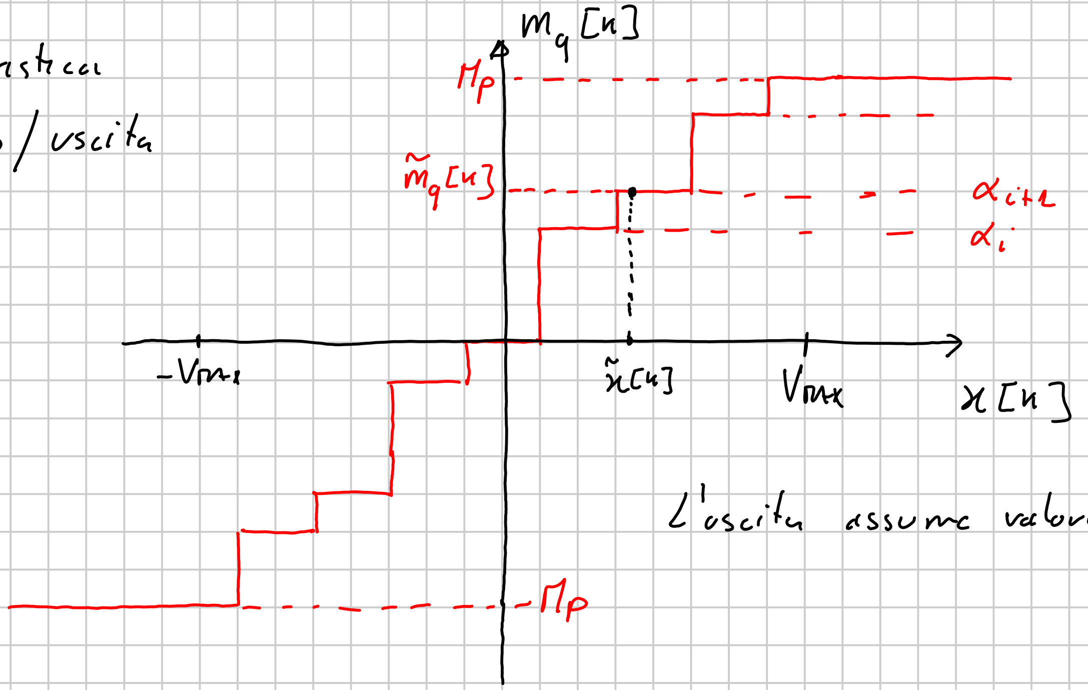
Esempio

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow X(f) = T\,\text{sinc}(Tf)$$



QUANTIZZAZIONE

Caratteristica ingresso/uscita



L'uscita assume valori $\alpha_i \in A$

DINAMICA DI INGRESSO $= 2V_{MAX} \Rightarrow -V_{max} \leq x[n] \leq V_{max} \quad \forall k$

DINAMICA DI USCITA $= 2M_p \Rightarrow -M_p \leq m_q[n] \leq M_p \quad \forall k$

NB: può succedere che $M_p \gtreqless V_{MAX}$

Il quantizzatore associa ad ogni valore dell'ingresso uno dei possibili valori dell'uscita (presi da un insieme finito).

<u>Quantizzatore scalare</u>: l'uscita all'istante "n" dipende solo dal valore dell'ingresso all'istante "n".

$$m_q[n] = Q\left(x[n]\right)$$

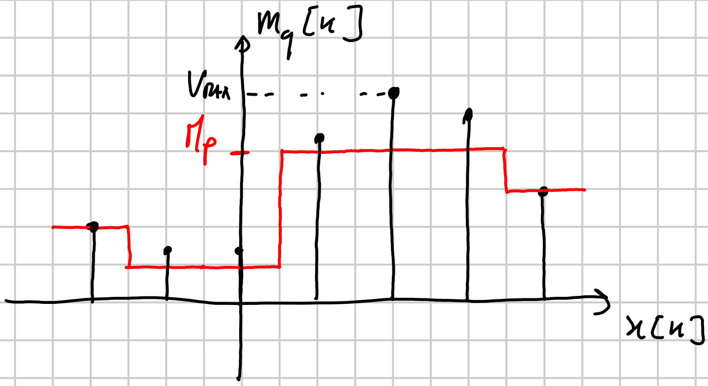
La funzione $Q(\cdot)$ è espressa dalla caratteristica ingresso/uscita del quantizzatore.

Quantizzatore vettoriale: l'uscita all'istante "n" può dipendere da valori dell'ingresso anche a istanti diversi da "n".

$$m_q[n] = Q\left(x[k-N], \dots, x[n], \dots x[k+M]\right)$$

DINAMICA IN INGRESSO

$V_{MAX} > M_p \Rightarrow$ SATURAZIONE: tutti i valori di $x[n] \geq M_p$ vengono convertiti nel valore M_p

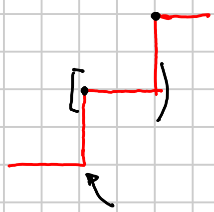


$V_{MAX} < M_p \Rightarrow$ Non si verifica saturazione ma la dinamica di ingresso non viene pienamente sfruttata

$V_{MAX} = M_p \Rightarrow$ CONDIZIONE OTTIMALE

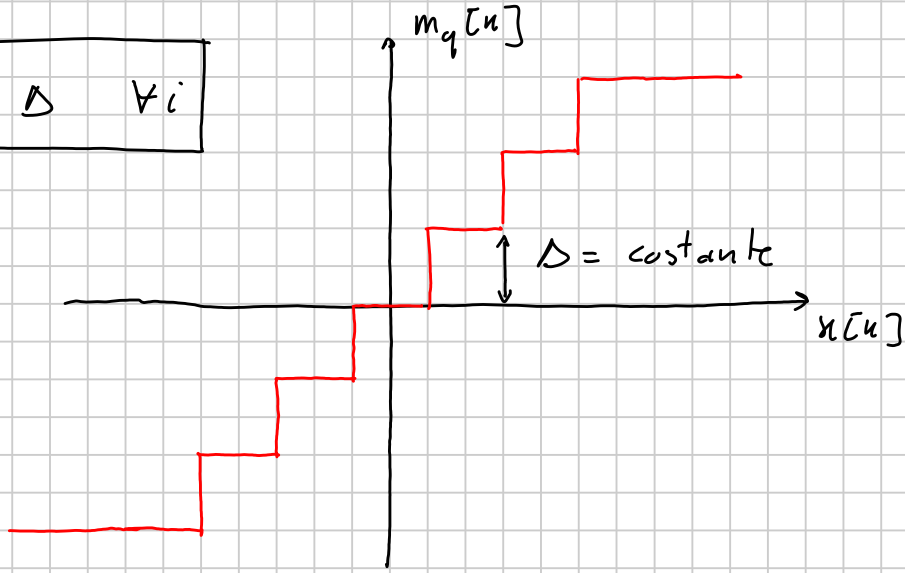
PUNTI DI FRONTIERA

L'intervallo è chiuso da un lato e aperto dall'altro



Quantizzatore scalare uniforme

$$\boxed{\alpha_{i+1} - \alpha_i = \Delta \quad \forall i}$$



$$\Delta = \frac{2M_p}{M-1} \quad , \quad M = \text{nr. di livelli}$$

Prestazioni di quantizzatori scalari uniformi

Una sequenza quantizzata è in generale non identica ad una non quantizzata, per cui il quantizzatore introduce un errore che è quantificabile come

$$e[n] = x[n] - m_q[n] = x[n] - Q\big(x[n]\big)$$

IL RAPPORTO SEGNALE / ERRORE DI QUANTIZZAZIONE

Rappresenta un indice di bontà del quantizzatore: più è alto e migliori sono le prestazioni del quantizzatore

$$SQER \triangleq \frac{E[x^2[n]]}{E[e^2[n]]}$$

supponendo $x[n]$ e $e[n]$ siano processi stazionari

$$SQER = \frac{E[x^2]}{E[e^2]} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - Q(x)\big)^2 f_X(x)\, dx}$$

Supponiamo che il segnale in ingresso abbia una ddp uniforme:

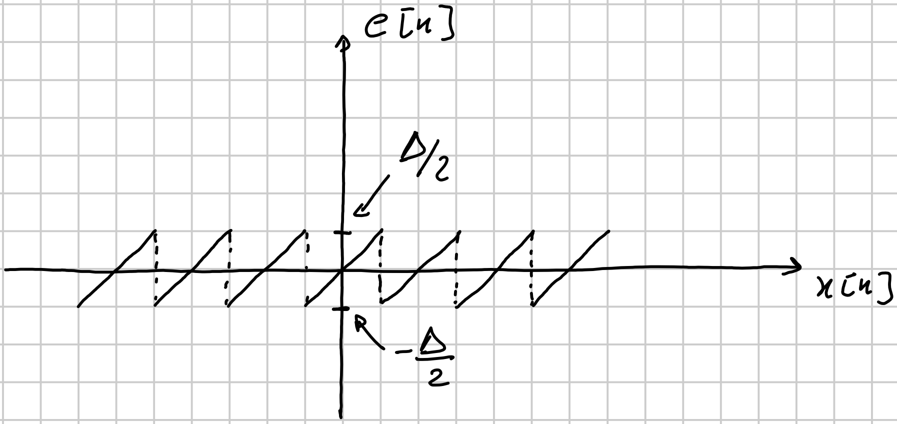
$$f_X(x) = \frac{1}{2V_{max}} \text{rect}\left(\frac{x}{2V_{max}}\right)$$

e che $V_{max} = Mp$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2V_{max}} \text{rect}\left(\frac{x}{2V_{max}}\right) dx = \frac{1}{2V_{max}} \int_{-V_{max}}^{V_{max}} x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2V_{max}} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-V_{max}}^{V_{max}} = \frac{1}{2V_{max}} \cdot \frac{2}{3} V_{max}^3 = \frac{V_{max}^2}{3} = \frac{Mp^2}{3}$$

$e = x - Q(x)$



$$p_E(e) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{e}{\Delta}\right)$$

$$E[e^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^2 \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{e}{\Delta}\right) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \, de =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2}{3} \frac{\Delta^3}{8} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$SQER = \frac{\frac{Mp^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}} = 4 \frac{Mp^2}{\Delta^2} = 4 \frac{Mp^2}{\frac{4Mp^2}{(M-1)^2}} = (M-1)^2$$

CODIFICATORE BINARIO

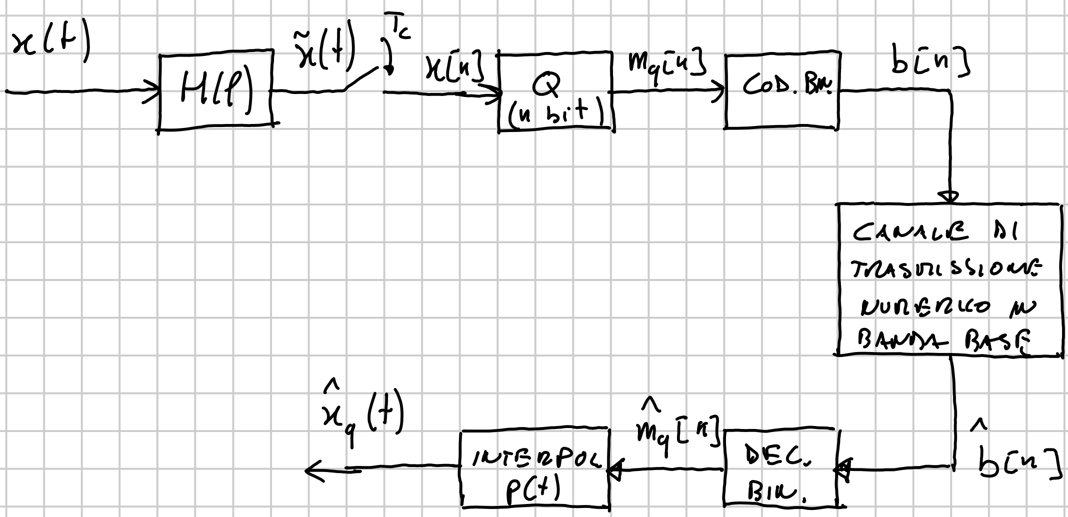
$$T_b = \frac{T_c}{\log_2 M}$$

Il numero di bit necessari a codificare $m_q[n]$ dipende dal numero di livelli M.

- Se $M = 2^N$, N intero $\Rightarrow$ $N = \log_2 M$ (nr. di bit necessari)
- Se non esiste un $N : 2^N = M$, allora si sceglie un numero di bit $N = \log_2 M'$, con M' uguale alla minima potenza di 2 tale che $M' > M$.

PULSE CODE MODULATION (PCM)

Il sistema PCM è uno standard di comunicazione numerico tanto semplice quanto utilizzato. Permette di trasmettere un segnale analogico tramite un canale di trasmissione numerico in banda base.



N.B. $\hat{x}_q(t)$ è un segnale ricostruito dai campioni di un segnale quantizzato, per cui soffre dei seguenti peggioramenti:

1) Distorsioni introdotte dal filtro $H(f)$
2) Aliasing (minimo se $X(f)$ ha una banda uguale a $H(f)$)
3) Errori di quantizzazione
4) Errori introdotti dal canale di trasmissione

STANDARD EUROPEO PCM PER LA TELEFONIA

·) $\tilde{x}(t)$ con banda $B = 4\,KHz$ $\Rightarrow$ $H(f)$ = passa-basso con $B = 4\,KHz$

·) $M = 256$ $\Rightarrow$ nr° di bit $n = 8$

$\Rightarrow$ La frequenza di bit/s è calcolabile come

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{n}{T_c} = n f_c = 8 \cdot \underbrace{8\,Ks/s}_{\text{kilo-sample/second}} = \underbrace{64\,Kbit/s}_{\text{kilo-bit/s}}$$

N.B. nelle TLC si parla di bit/s e non Byte/s