Soluzione Prova in Itinere 05/04/2008

Es ①

CAUSALITÀ

L'uscita all'istante "t" dipende solo da valori dell'ingresso antecedenti o al più all'istante "t". Per cui il sistema è causale

STAZIONARIETÀ

$$x(t-t_0) + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\alpha - t_0)\, d\alpha = \qquad (\alpha - t_0 = \alpha')$$

$$= x(t-t_0) + \frac{1}{T}\int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha' = y(t-t_0)$$

IL SISTEMA È STAZIONARIO

STABILITÀ

$$|x(t)| \leq M$$

$$|y(t)| = \left| x(t) + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \right| \leq |x(t)| + \frac{1}{T}\left|\int_{t-T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha\right|$$

$$\leq |x(t)| + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} |x(\alpha)|\, d\alpha \leq M + \frac{1}{T} M T = 2M$$

Quindi $|y(t)| \leq N = 2M$, per cui il sistema è stabile

LINEARITÀ

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$y(t) = \left[a x_1(t) + b x_2(t)\right] + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \left[a x_1(\alpha) + b x_2(\alpha)\right] d\alpha =$$

$$= a\underbrace{\left[x_1(t) + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_1(\alpha)\,d\alpha\right]}_{y_1(t)} + b\underbrace{\left[x_2(t) + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x_2(\alpha)\,d\alpha\right]}_{y_2(t)} =$$

IL SISTEMA È LINEARE

MEMORIA

L'uscita all'istante "t" dipende anche da valori dell'ingresso precedenti l'istante "t"

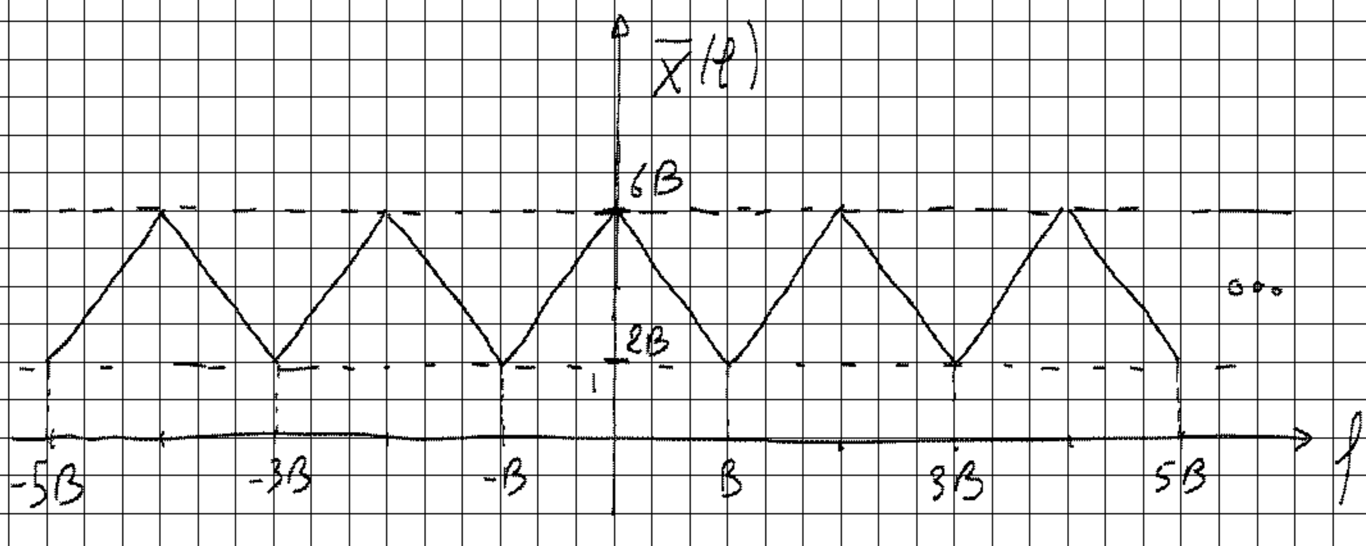
IL SISTEMA HA MEMORIA

ES (2)

1) $$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + 2\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \otimes \frac{1}{2}\left[\delta(f-2B) + \delta(f+2B)\right]$$

$$= \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \left[\left(1 - \frac{|f-2B|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f-2B}{2B}\right) + \left(1 - \frac{|f+2B|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f+2B}{2B}\right)\right]$$

2) $$\bar{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = 2B\sum_n X(f - n2B)$$



$$\bar{X}(f) = \sum_n X_0(f - n2B)$$

$$X_0(f) = 2B\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + 4B\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

3) $P(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$$Y(f) = \bar{X}(f)\cdot P(f) = X_0(f)$$

$$y(t) = x_0(t) = 4B^2\,\mathrm{sinc}(2Bt) + 4B^2\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$$

$y(t)$ non è una replica fedele di $x(t)$

ES. 3

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = \sum_n x_{10}(t - nT_0) \quad , \quad T_0 = 6T$$

$$x_2(t) = \sum_n x_{20}(t - nT_0)$$

$$x_{10}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

$$x_{20}(t) = \left(1 - \frac{|t-3T|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-3T}{2T}\right)$$

$$X_k = X_{1k} + X_{2k}$$

$$X_{1k} = \frac{1}{T_0} X_{10}\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$X_{2k} = \frac{1}{T_0} X_{20}\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$X_{10}(f) = 2T \,\text{sinc}(2Tf)$$

$$X_{20}(f) = T\,\text{sinc}^2(Tf)\, e^{-j2\pi f 3T} =$$

$$= T\,\text{sinc}^2(Tf)\, e^{-j6\pi f T}$$

$$X_{1k} = \frac{2T}{T_0}\,\text{sinc}\left(2T\frac{k}{T_0}\right) = \frac{2T}{6T}\,\text{sinc}\left(\frac{2Tk}{6T}\right) = \frac{1}{3}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right)$$

$$X_{2k} = \frac{T}{T_0}\,\text{sinc}^2\left(T\frac{k}{T_0}\right) e^{-j6\pi \frac{k}{T_0} T} =$$

$$= \frac{T}{6T}\,\text{sinc}^2\left(\frac{Tk}{6T}\right) e^{-j6\pi \frac{k}{6T} T} = \frac{1}{6}\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{6}\right) e^{-jk\pi}$$

$$X_k = \frac{1}{3}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{3}\right) + (-1)^k \cdot \frac{1}{6}\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{6}\right)$$

Es 4 VEDI DISPENSE

Es 5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = X(0) = 0$$

$$Y(f) = X(f)\, H(f)$$

$$Y(0) = X(0)\, H(0) = 0$$

N.B. $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = 0$ indica che $h(t)$ ha energia finita. Per cui non può accadere che $H(0) = \infty$.

Es 6 (FACOLTATIVO)

Se $x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$ e

$y[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{Y}(f)$ allora

deve essere $\frac{d}{df}\bar{X}(f) = \bar{Y}(f)$

Dimostrazione

$$Y(f) = \frac{d}{df}\bar{X}(f) = \frac{d}{df}\sum_n x[n]\,e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n x[n]\frac{d}{df}e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n x[n]\left(-j2\pi n T\right)e^{-j2\pi n f T} =$$

$$= \sum_n \underbrace{\left[-j2\pi n T\; x[n]\right]}_{y[n]} e^{-j2\pi n f T}$$