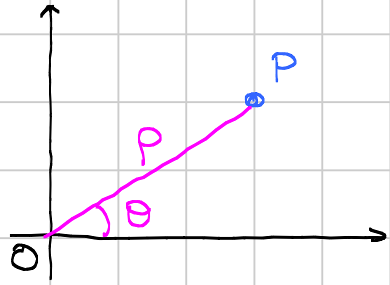
ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 02

Note Title 28/09/2018

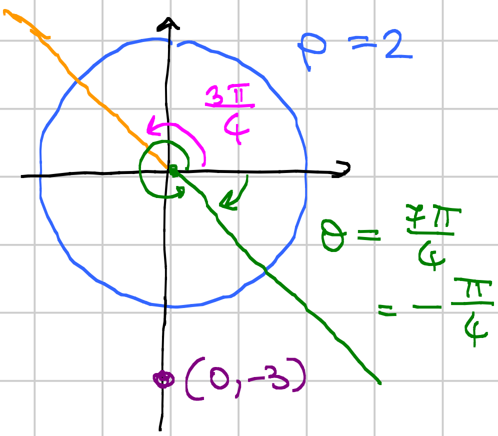
COORDINATE POLARI NEL PIANO

Modo alternativo di descrivere i punti del piano
Un punto è determinato da ρ, θ dove



- ρ indica la distanza dall'origine O (numero reale ≥ 0)
- θ indica l'angolo che OP forma con il semiasse positivo delle x. (essendo un angolo, è definito a meno di multipli di 2π)

Esempio Descrive tutti i p.ti del piano che verificano $\rho = 2$



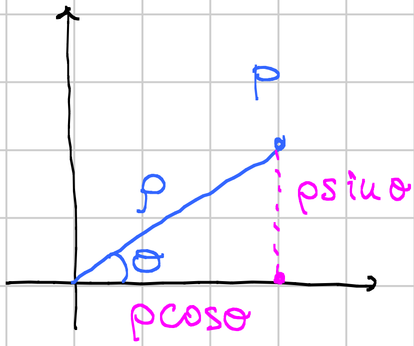
Descrivere tutti i p.ti tali che $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Quali sono le coord. polari di (0,-3)?
$\rho = 3 \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$ opp. $\frac{3\pi}{2}$

Formule di passaggio polari $\rightsquigarrow$ cartesiane

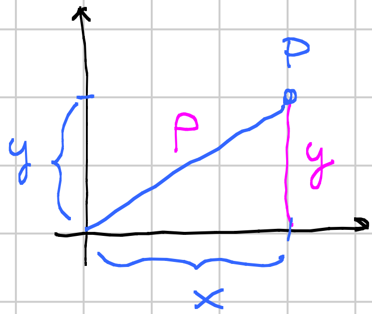
Se conosco ρ e θ, come trovo x e y?

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta}$$



Formule di passaggio cartesiane ⤳ polari

Conosco x e y, e voglio trovare ρ e θ



$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Norma del vettore

Come trovo θ? Guardo il disegno!

Achtung! Occhio alle formule per θ!

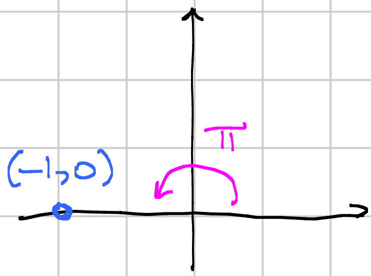
Parto da $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$... dividendo trovo

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Esempio $P = (\underset{x}{\underset{\shortparallel}{-1}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{0}})$ ⤳ $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 0$ ⤳

$\theta = 0$ è una soluzione

MA È SBAGLIATA!!



Se uso la formula $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ devo stare attento a

- il fatto che x potrebbe annullarsi
- ci sono sempre 2 valori di θ che vanno bene, e solo uno è quello buono (guardare il disegno)

Achtung! Il θ dell'origine non è ben definito...

— o — o —

Significato geometrico del prod. scalare

1° modo Via coordinate polari.

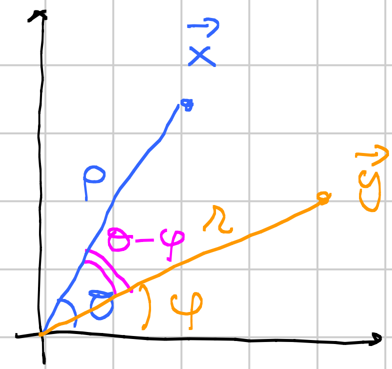
Prendiamo due vettori nel piano

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{y} = (y_1, y_2)$

Siano ρ e θ le coord. pol. di $\vec{x}$ $\qquad x_1 = \rho\cos\theta \qquad x_2 = \rho\sin\theta$

Siano r e φ le coord. pol. di $\vec{y}$ $\qquad y_1 = r\cos\varphi \qquad y_2 = r\sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\
&= \rho\cos\theta \cdot r\cos\varphi + \rho\sin\theta \cdot r\sin\varphi \\
&= \rho r\,(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) \\
&= \rho r \cos(\theta - \varphi) \\
&= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta - \varphi)
\end{aligned}
$$



Conseguenza 1

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\text{angolo compreso})}$$

Conseguenza : se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono due vettori non nulli (diversi dall'origine, quindi con almeno una componente non nulla) allora

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \iff \cos(\theta - \varphi) = 0$$

$\iff$ i due vettori sono perpendicolari

Conseguenza 2

$$\boxed{|<\vec{x},\vec{y}>| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

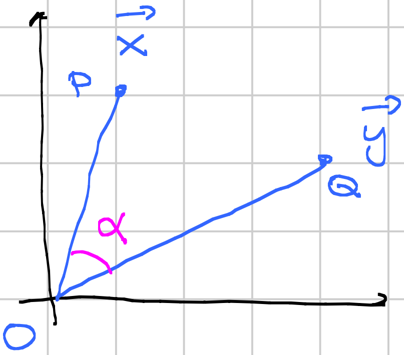
DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY – SCHWARZ

valore assoluto di un numero

norme di un vettore

"Dim"
$$|<\vec{x},\vec{y}>| = \big|\, \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\ldots) \big|$$
$$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \underbrace{|\cos(\ldots)|}_{\leq 1}$$
$$\leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Guardo il triangolo OPQ



- $OP = \|\vec{x}\|$
- $OQ = \|\vec{y}\|$
- $PQ = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ (o $\|\vec{y}-\vec{x}\|$, che è lo stesso)

Precorso ⇝ teorema del coseno (teorema di CARNOT)

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cdot \cos\alpha$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} - 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha$$
$$\parallel$$
$$\cancel{\|\vec{x}\|^2} + \cancel{\|\vec{y}\|^2} - 2<\vec{x},\vec{y}>$$

Otteniamo nuovamente

$$<\vec{x},\vec{y}> = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha$$

↑ angolo compreso

Disuguaglianza di Cauchy – Schwarz

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

Dim Per ogni $t \in \mathbb{R}$ considero $\|\vec{x}+t\vec{y}\|^2 \geq 0$
Sviluppo il conto

$$\|\vec{x}+t\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|t\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x},t\vec{y}\rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 + t^2\|\vec{y}\|^2 + 2t\langle \vec{x},\vec{y}\rangle$$

$$= \|\vec{y}\|^2 t^2 + 2\langle \vec{x},\vec{y}\rangle t + \|\vec{x}\|^2$$

$$A t^2 + 2Bt + C \geq 0 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Un polinomio di secondo grado che è sempre ≥ 0 ha per forza $\Delta \leq 0$ (altrimenti avrebbe...)

$$\Delta = B^2 - AC \leq 0, \quad \text{cioè} \quad B^2 \leq AC, \quad \text{cioè}$$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2$$

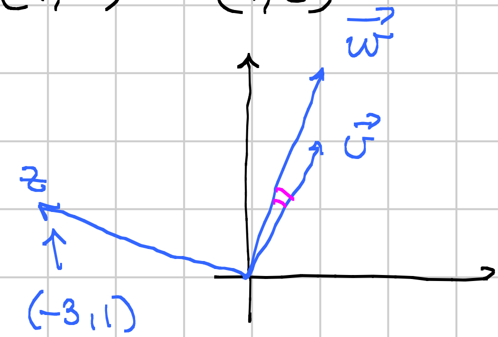
Facendo la radice a dx e sx, e osservando che

$$\sqrt{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2} = |\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \quad \text{(Precorso!!)}$$

otteniamo la tesi, senza usare argomenti geometrici

— o — o —

Esempio Calcolare l'angolo tra $(1,2)$ e $(1,3)$



$$\vec{v} = (1,2) \qquad \vec{w} = (1,3)$$

$$\underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{\substack{\parallel \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ \parallel \\ 7}} = \underbrace{\| \vec{v} \|}_{\substack{\parallel \\ \sqrt{5}}} \cdot \underbrace{\| \vec{w} \|}_{\substack{\parallel \\ \sqrt{10}}} \cdot \cos(\text{angolo})$$

Quindi $\cos(\text{angolo}) = \dfrac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{7}{5\sqrt{2}} = \dfrac{7}{7,\text{poco}} \sim 1$

$$\langle \vec{v}, \vec{z} \rangle = \| \vec{v} \| \cdot \| \vec{z} \| \cdot \cos(\text{angolo})$$

$$\parallel$$

$$-1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(\ldots)$$

$$\cos(\text{angolo}) = -\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}} < 0$$

Coseno < 0 $\rightsquigarrow$ Angolo ottuso

— o — o —