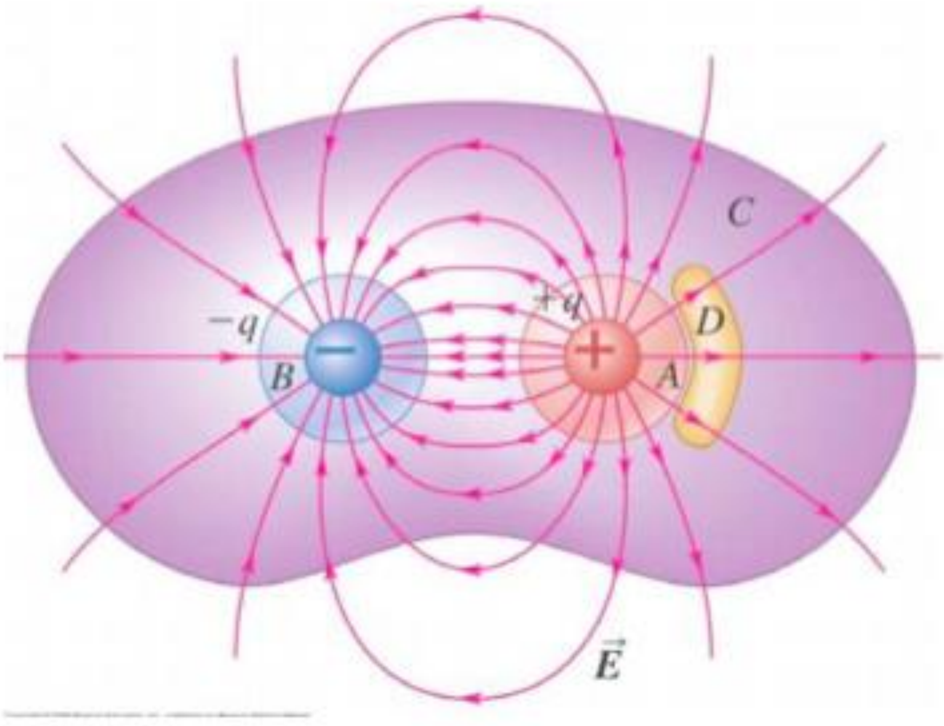
Esempio: il dipolo elettrico

Consideriamo un campo di dipolo di carica q, e calcoliamo il flusso attraverso le 4 superfici chiuse in figura:

- ✓ La superficie *A* contiene la carica positiva del dipolo
- ✓ La superficie *B* contiene la carica negativa del dipolo
- ✓ La superficie *C* racchiude entrambe le cariche, per cui la carica netta è nulla
- ✓ La superficie *D* non ha carica al suo interno



$$\Phi_A = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_B = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

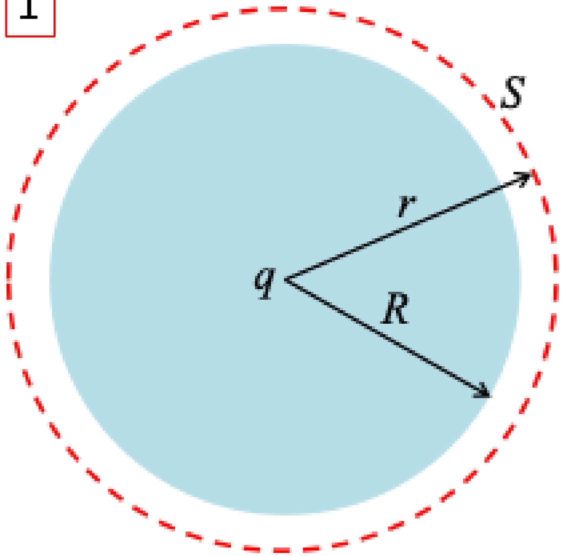
$$\Phi_C = 0 \qquad \Phi_D = 0$$

La superficie scala come $1/R^2$

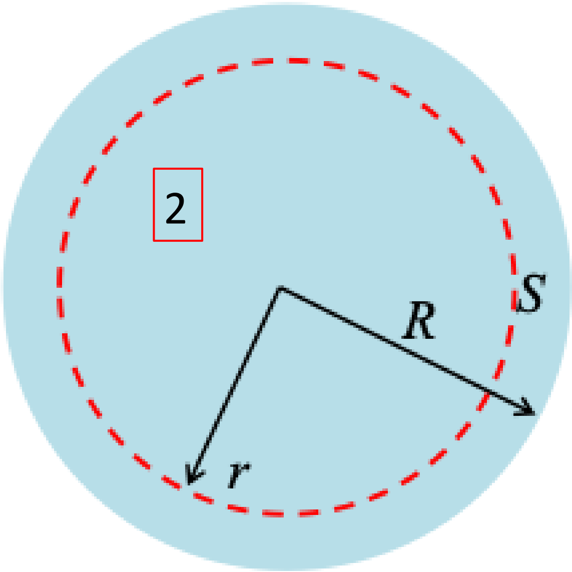
Il campo scala come $1/R^3$

Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

1



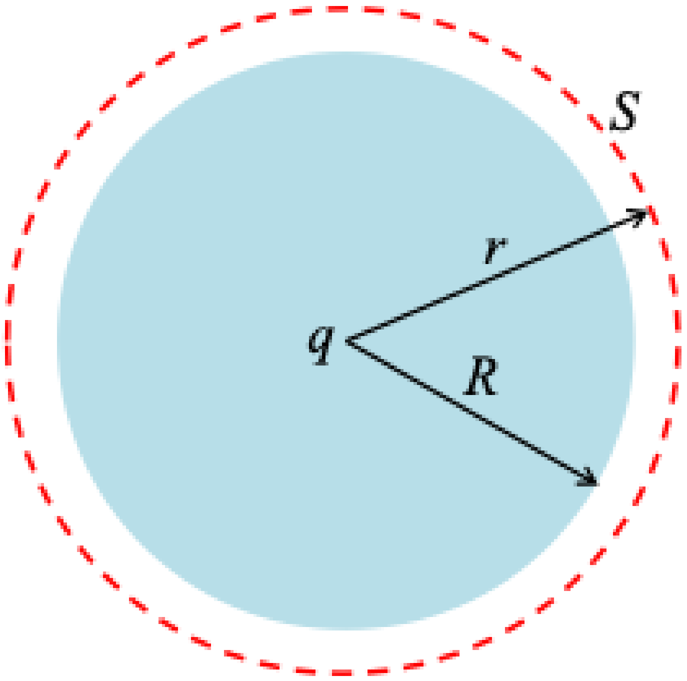
2



- L'intero spazio 3D è diviso in 2 regioni, il problema ci porta a determinare due soluzioni:
  1) Lo spazio esterno alla sfera (privo di cariche)
     - Campo all'esterno della sfera $\vec{E}_{esterno}$
  2) Lo spazio interno della sfera (è presente la carica di volume)
     - Campo all'interno della sfera $\vec{E}_{interno}$

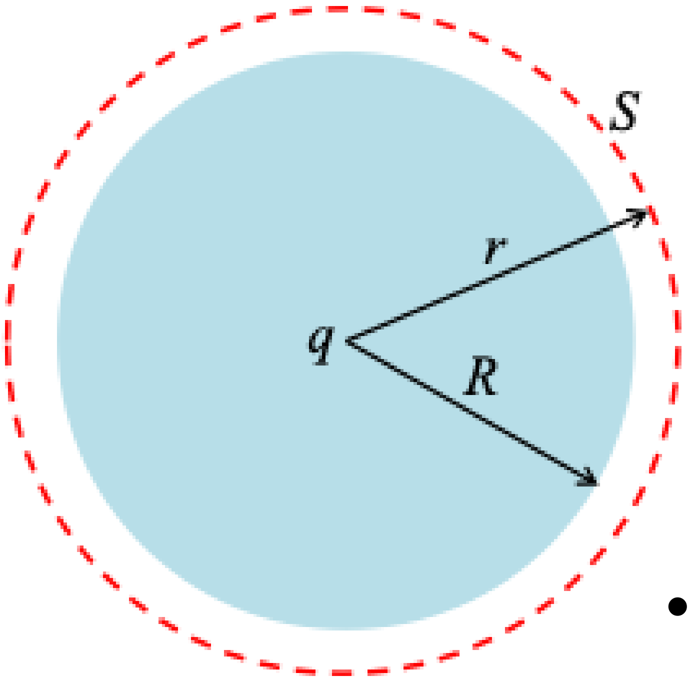
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

- Campo all’esterno della sfera



Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

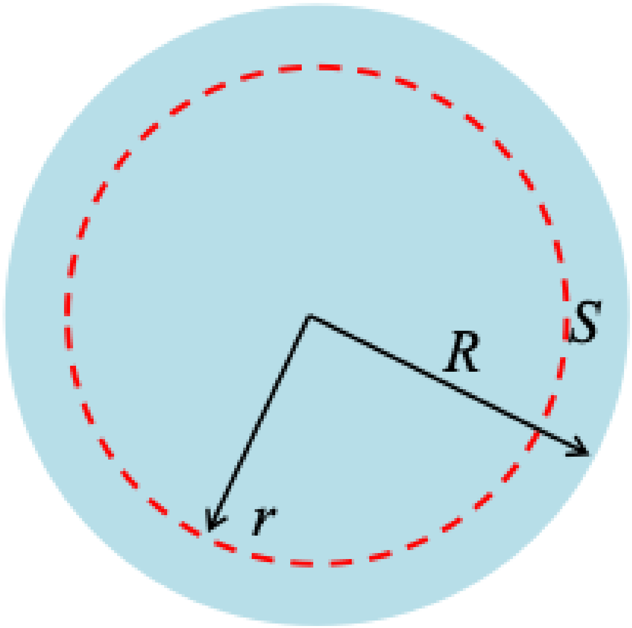
- Campo all'esterno della sfera



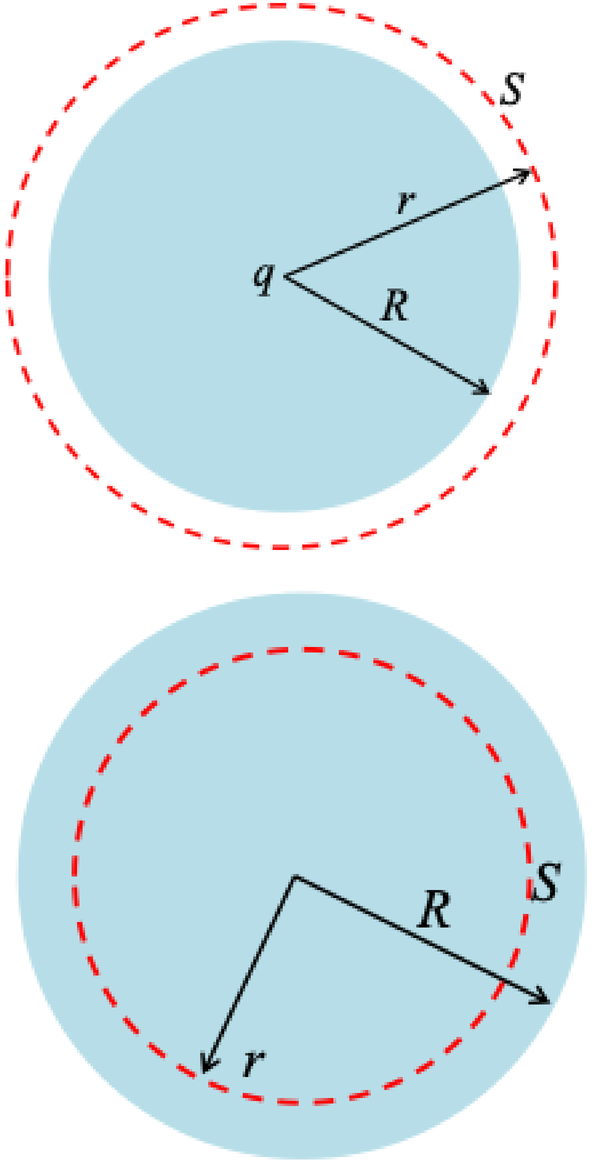
- Il campo generato dalla **sfera uniformemente carica in un punto esterno alla sfera** è uguale al campo generato da una carica **puntiforme q corrispondente alla carica totale della sfera, posta nel centro della sfera**

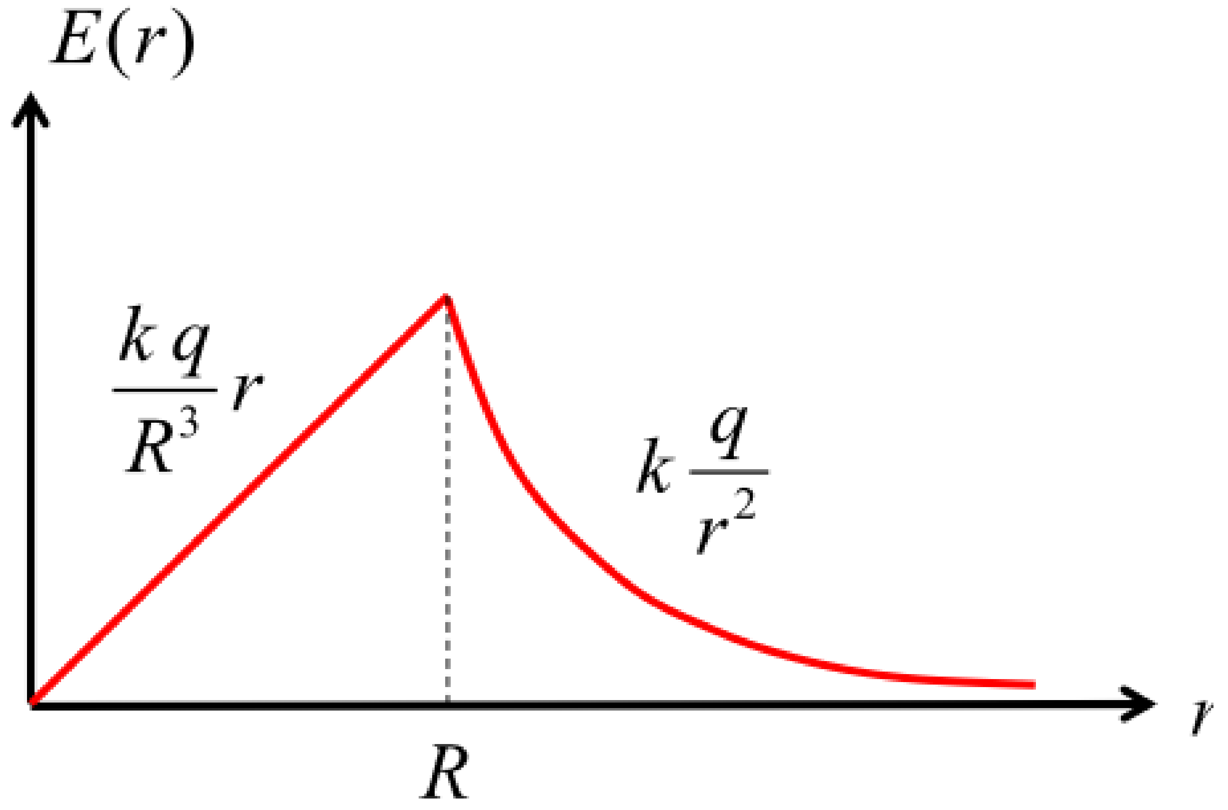
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

- Campo all'interno della sfera



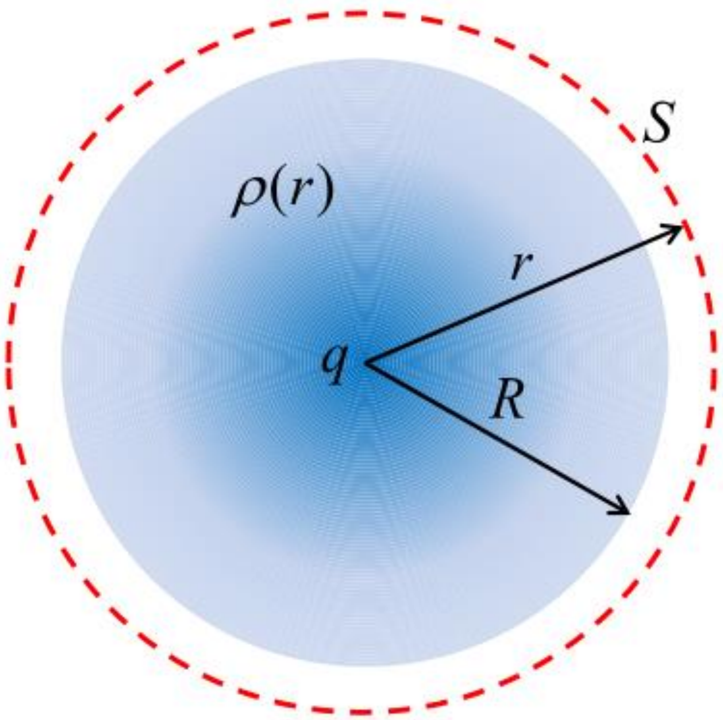
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme: riepilogo





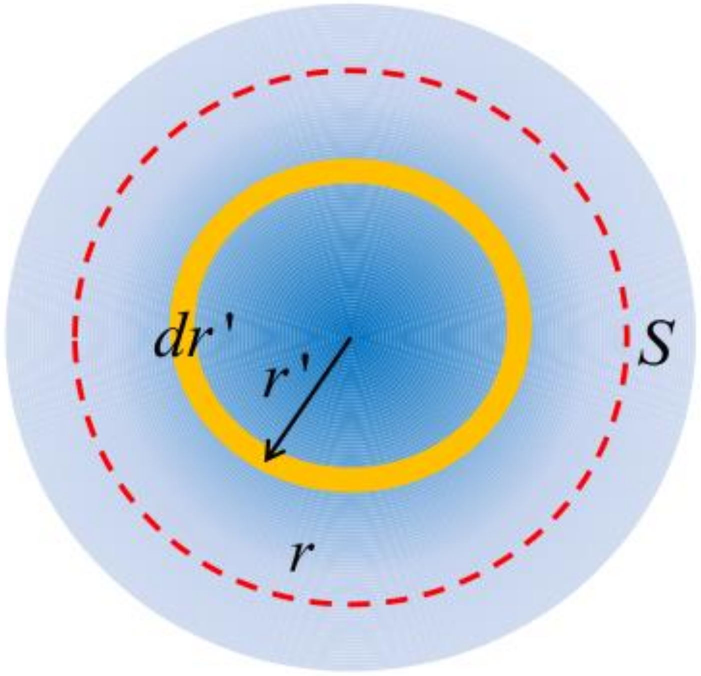
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume ρ(r)

- Campo all'esterno della sfera



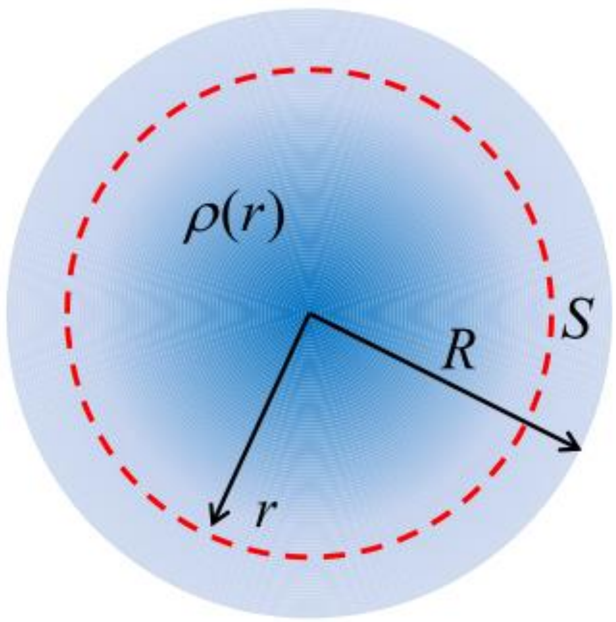
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume ρ(r)

- Campo all'interno della sfera

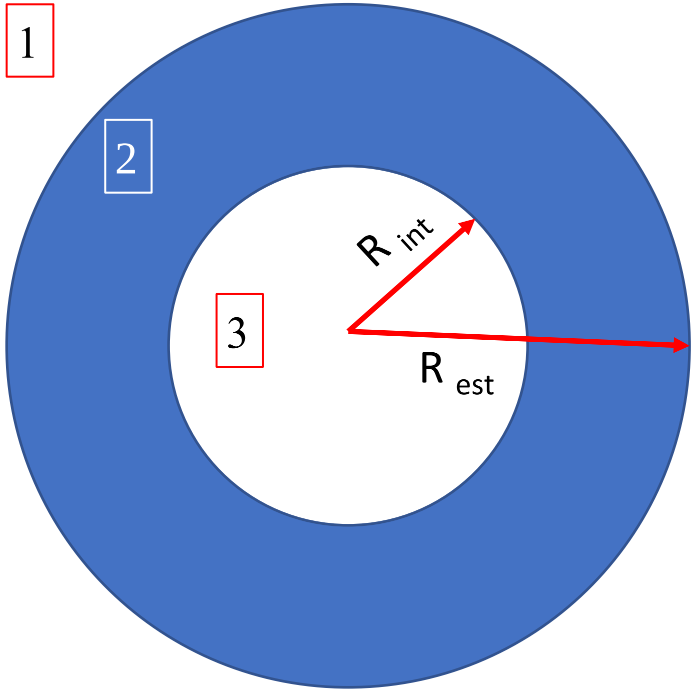


Esempio

- Consideriamo una sfera isolante carica di raggio R= 4 cm e densità radiale $\rho(r) = A/r$, A = 1 mC/m^2;
- determinare il campo elettrico per distanze dal centro r = 2 cm, r = 4 cm, r = 8 cm



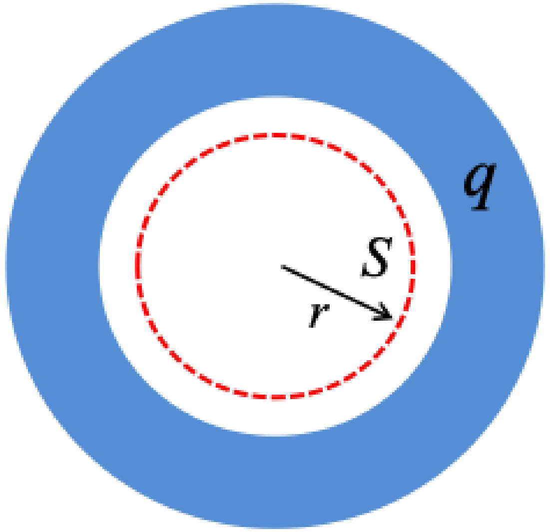
Guscio sferico costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme



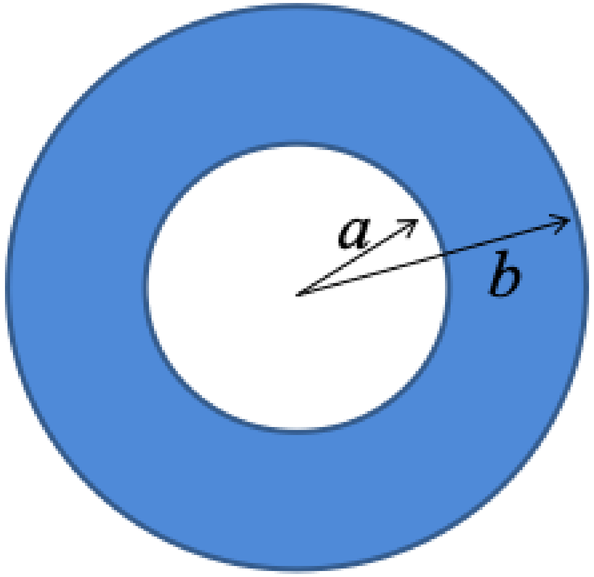
- L'intero spazio 3D è diviso in 3 regioni, il problema ci porta a determinare tre soluzioni:
  1) Lo spazio esterno al guscio ($r > R_{est}$ privo di cariche)
     - Campo all'esterno della guscio $\boldsymbol{E_{esterno}}$
  2) Lo spazio interno al guscio ($R_{int} < r < R_{est}$ è presente la carica di volume)
     - Campo all'interno al guscio $\boldsymbol{E_{interno}}$
  3) Lo spazio interno della cavita del guscio ($r < R_{int}$ privo di cariche)
     - Campo all'interno al guscio $\boldsymbol{E_{cavita}}$

Guscio sferico costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

- Campo all’interno della cavita del guscio sferico

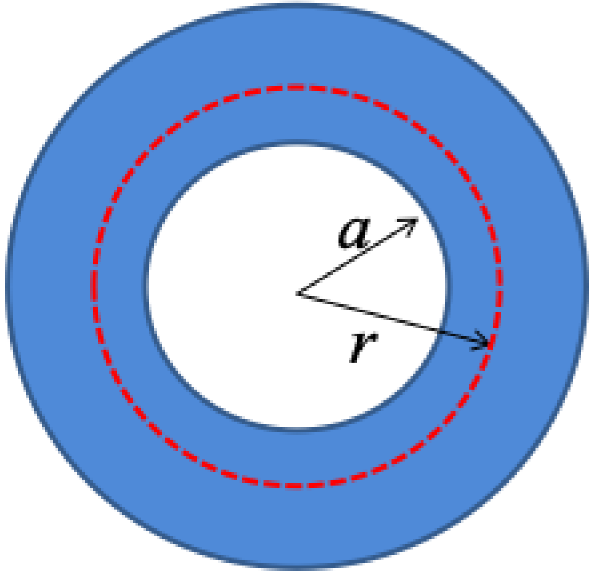


Problema



Sia dato un guscio sferico isolante carico, con carica distribuita uniformemente q_s =3 μC, raggio interno *a*=5 cm ed esterno *b*=10 cm

a) Scrivere l'espressione del campo elettrico *E(r)* in funzione della distanza *r* per *r* < *a* (nella cavità), per *a* > *r* > *b* (nel guscio), per *r* > *b* (esterno al guscio)
b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti *r* = 2 cm, *r* =7 cm, *r* =10 cm



Applicando le due regole dei gusci isolanti si ottiene immediatamente:

$$r < a \quad E(r) = 0 \qquad\qquad r > b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$

In un punto a distanza *r* dal centro interno al guscio il campo elettrico è dato da:

$$E(r) = k\frac{q'(r)}{r^2}$$

q'(r) è la sola carica contenuta all'interno della sfera di raggio *r*

Problema

Calcoliamo $q'(r)$ sfruttando il fatto che la densità di carica ρ è uniforme:

$$\rho = \frac{q'(r)}{V(r)} = \frac{q_s}{V_{TOT}} \quad \Rightarrow q'(r) = q_s \frac{V(r)}{V_{TOT}}$$

Chiaramente V_{TOT} è il volume totale del guscio, $V(r)$ il volume della porzione di guscio interna alla sfera di raggio r:

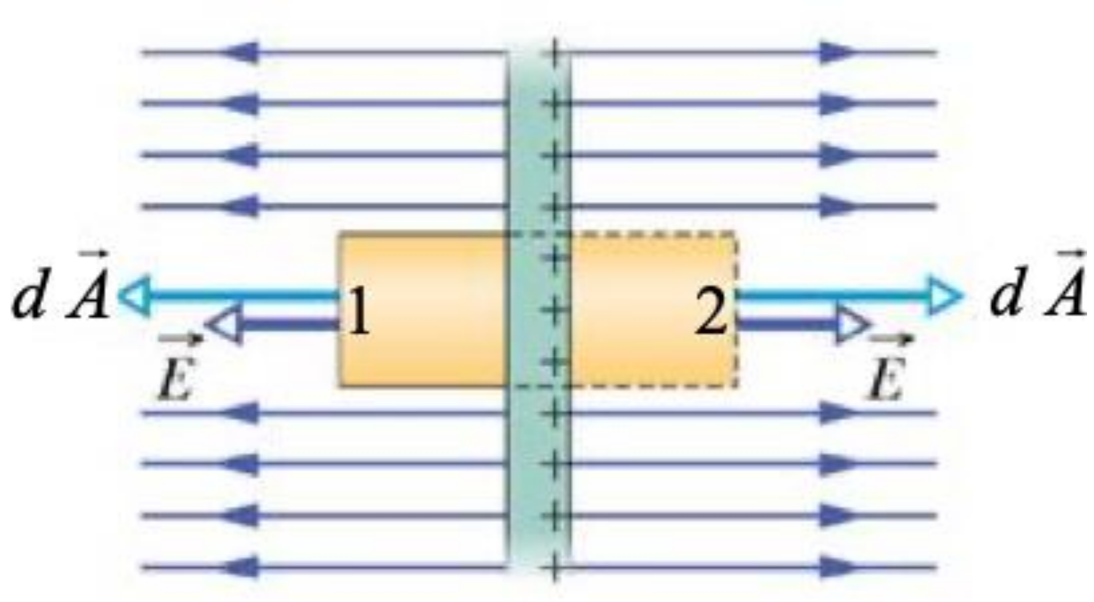
$$V_{TOT} = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right) \qquad V(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - a^3\right)$$

$$\frac{V(r)}{V_{TOT}} = \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \quad \Rightarrow E(r) = k\frac{q_s}{r^2}\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

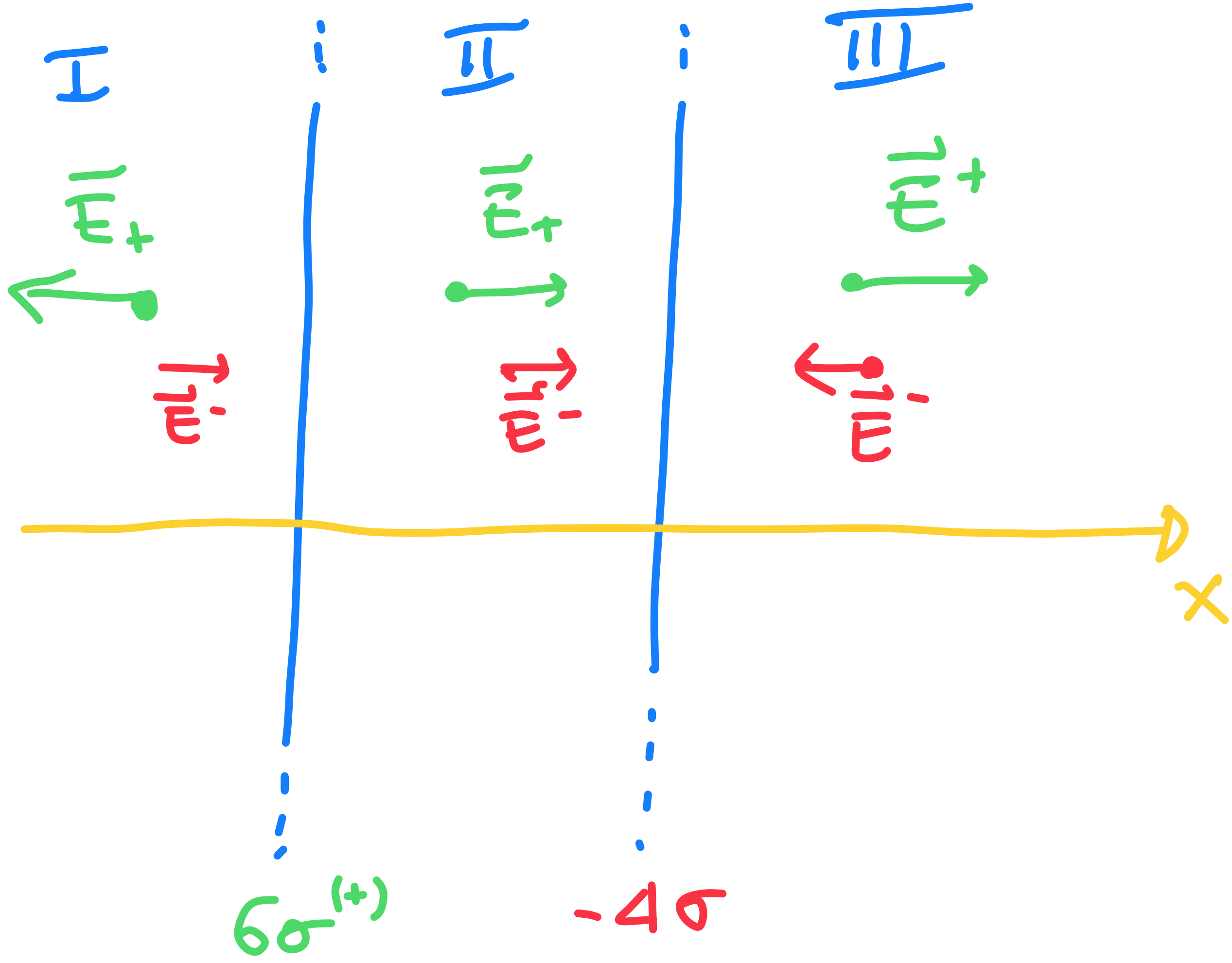
$$\begin{cases} r = 7\,cm \quad E = 9\times 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{49\times 10^{-4} m^2}\left(\dfrac{7^3 - 5^3}{10^3 - 5^3}\right) = 0.137\times 10^7 (N/C) \\ r = 10\ cm \quad E = 9\times 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{10^{-2} m^2} = 0.27\times 10^7 (N/C) \end{cases}$$

Piano carico costruito con densità di carica uniforme

- Consideriamo il piano come un insieme di cariche 2D (senza volume fisico ‘interna’)
- Lo spazio è quindi diviso in due parti : a sinistra (1) ed a destra (2) del piano carico
- La quantità usata di carica è necessariamente infinita.

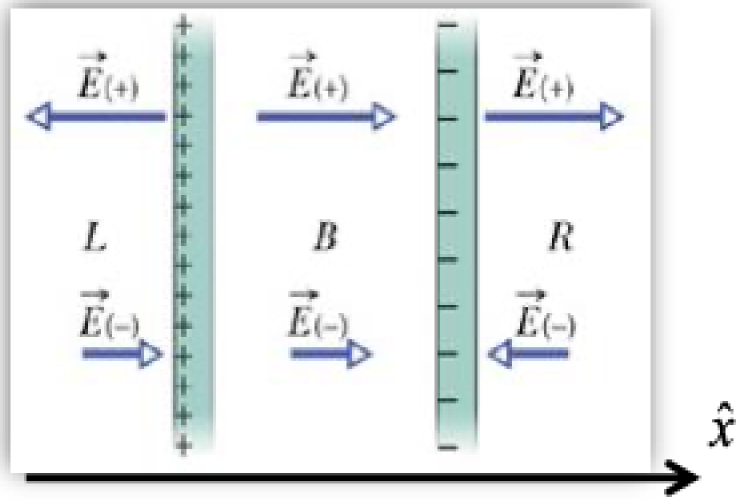


- Applichiamo il teorema di Gauss:


I
II
III
$\vec{E}_+$
$\vec{E}_+$
$\vec{E}^+$
$\vec{E}^-$
$\vec{E}^-$
$\vec{E}^-$
x
$6\sigma^{(+)}$
-4σ

Problema 23.6

Consideriamo due **lamine isolanti parallele** con densità $\sigma_+ = 6\sigma$, $\sigma_- = -4\sigma$, $\sigma = 1\ mC/m^2$; calcolare il campo tra le lamine e nelle regioni esterne. Essendo le lamine isolanti, il campo totale è la somma dei campi di ciascuna piastra; sia *x* l'asse perpendicolare alle piastre.



Regione interna:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{5\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{5\mu C/m^2}{8.85\times10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.56\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

Regione esterna destra:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{1\mu C/m^2}{8.85\times10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.11\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

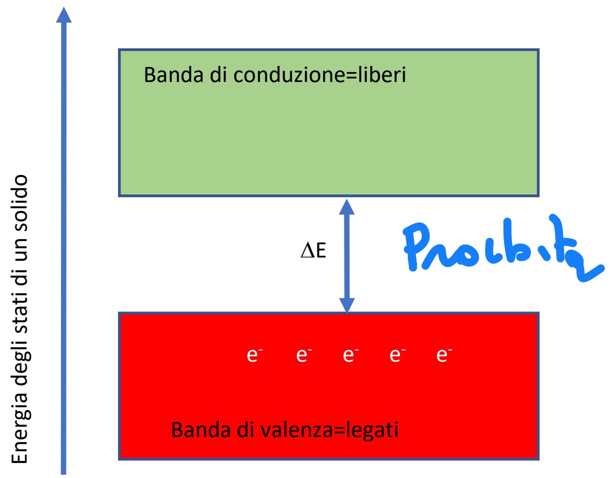
Regione esterna sinistra:

$$\vec{E} = \left(-\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = -0.11\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

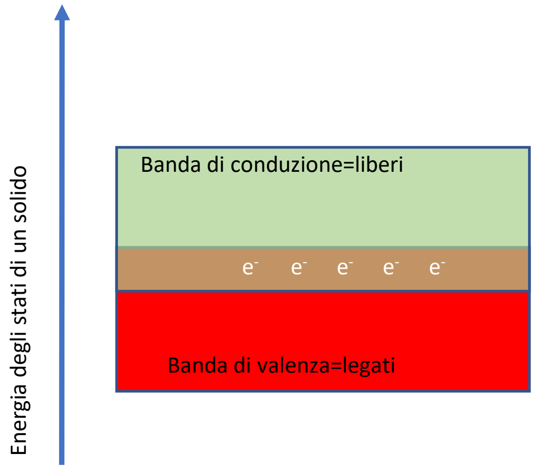
Distribuzioni di cariche nei mezzi materiali

- Materia ordinaria composta da atomi (p^+,n^0,e^-) con diversi tipi di legame
  - Reticoli solidi con atomi posti in posizioni “strategiche”

- *Materiali isolanti*
  - Nel materiale **isolante** gli **elettroni** atomici sono saldamente legati agli atomi di appartenenza ed a quelli vicini nei legami.

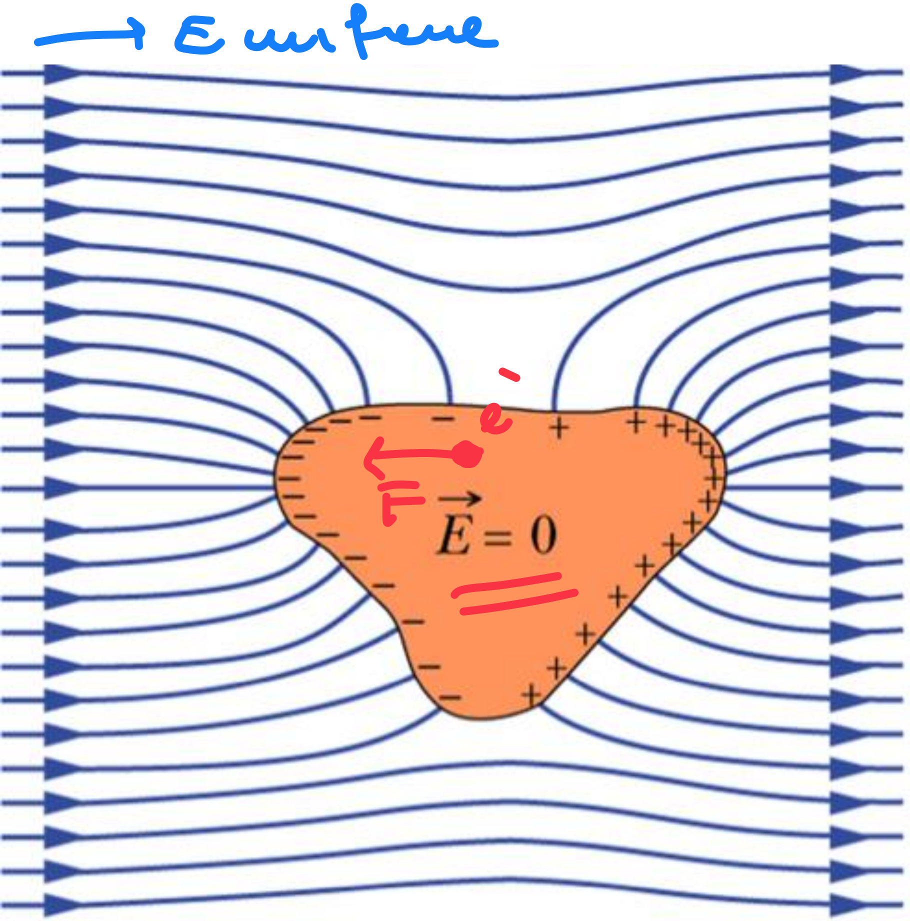


- *Conduttori solidi*
  - La caratteristica principale di un corpo solido conduttore è data dalla presenza di **elettroni liberi**, quindi capaci di reagire a sollecitazioni elettrostatiche esterne.
    - Nei materiali conduttori la struttura cristallina di legame metallico è tale per cui almeno **un elettrone per atomo si può considerare** libero di vagare all’interno del materiale.



Distribuzioni di cariche nei mezzi conduttori

- Conduttore neutro immerso in un campo elettrico esterno, $\boldsymbol{E}_{est}$, *(uniforme)* creato da sorgenti fisse (ad esempio piano carico)



- Periodo '**transiente**'
  - con cariche in movimento
- prima di raggiungere la condizione di '**equilibrio**' elettrostatico
  - cariche immobili nella loro posizione finale

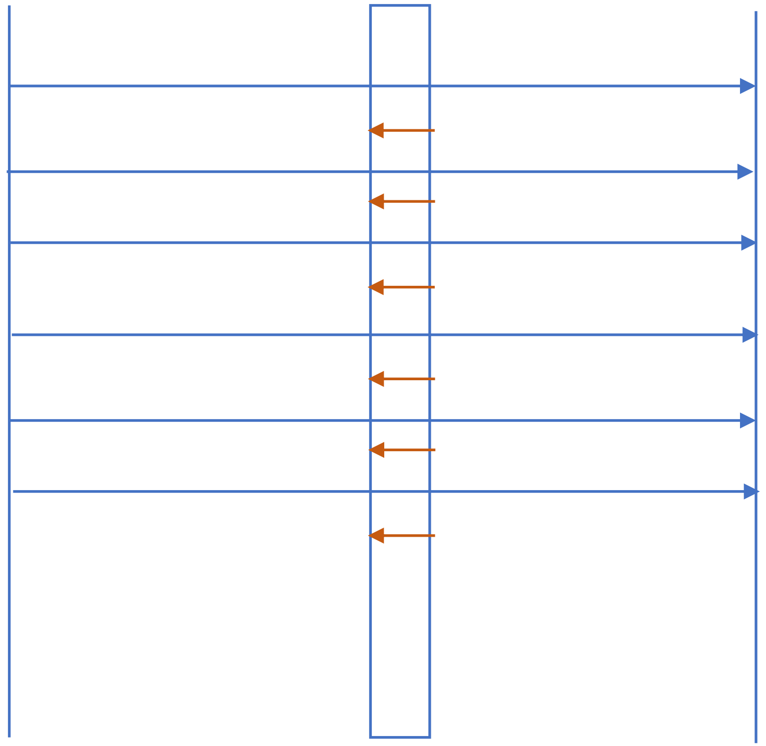
- Fenomeno della ***Induzione elettrostatica***: all'equilibrio (cariche libere (e^-) non più in moto) si osserva una distribuzione di cariche nette ("+" e "- ") localizzate sulla superficie del corpo solido
  - **Il risultato è E_{int}=0 all'interno del corpo conduttore**

- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
  - **Gauss assicura che non può esistere carica all'interno del corpo conduttore**
- E ortogonale alla superficie delconduttore

Distribuzioni di cariche nei mezzi conduttori

- Conduttore neutro immerso in un campo elettrico esterno, $\boldsymbol{E}_{est}$, *(uniforme)* creato da sorgenti fisse (ad esempio piano carico)

$\vec{F}_e = e^- \vec{E}$



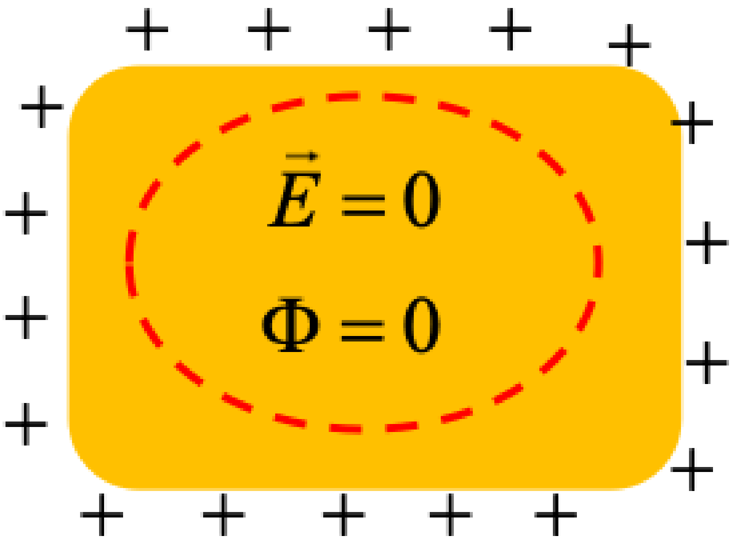
- Periodo ‘**transiente**’
  - con cariche in movimento
- prima di raggiungere la condizione di ‘**equilibrio**’ elettrostatico
  - cariche immobili nella loro posizione finale

- Fenomeno della ***Induzione elettrostatica***: all’equilibrio (cariche libere (e^-) non più in moto) si osserva una distribuzione di cariche nette (“+” e “- “) localizzate sulla superficie del corpo solido
  - **Il risultato è E_{int}=0 all’interno del corpo conduttore**

- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
  - **Gauss assicura che non può esistere carica all’interno del corpo conduttore**

Distribuzioni di cariche nei mezzi conduttori

- Conduttore solido carico (ad es. con cariche positive) ed isolato dal mondo esterno:



- Possono dislocarsi sia cariche (*+*) sia *e*⁻ del materiale
  - La soluzione dipende molto dalla geometria del corpo

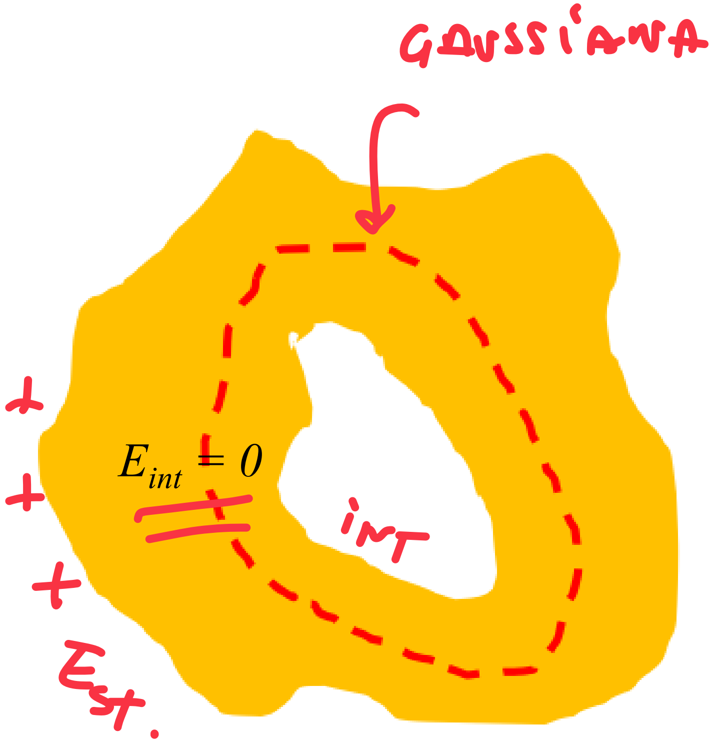
- A seguito di un periodo transiente si raggiunge l'equilibrio elettrostatico: $E_{int} = 0$

- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
  - **Gauss assicura che non può esistere carica all'interno del corpo conduttore**

- Il flusso di E è non nullo solo se *'la superficie' del conduttore'* è contenuta all'interno della superficie su cui applico il teorema di Gauss.

Legge di Gauss applicata ai materiali conduttori

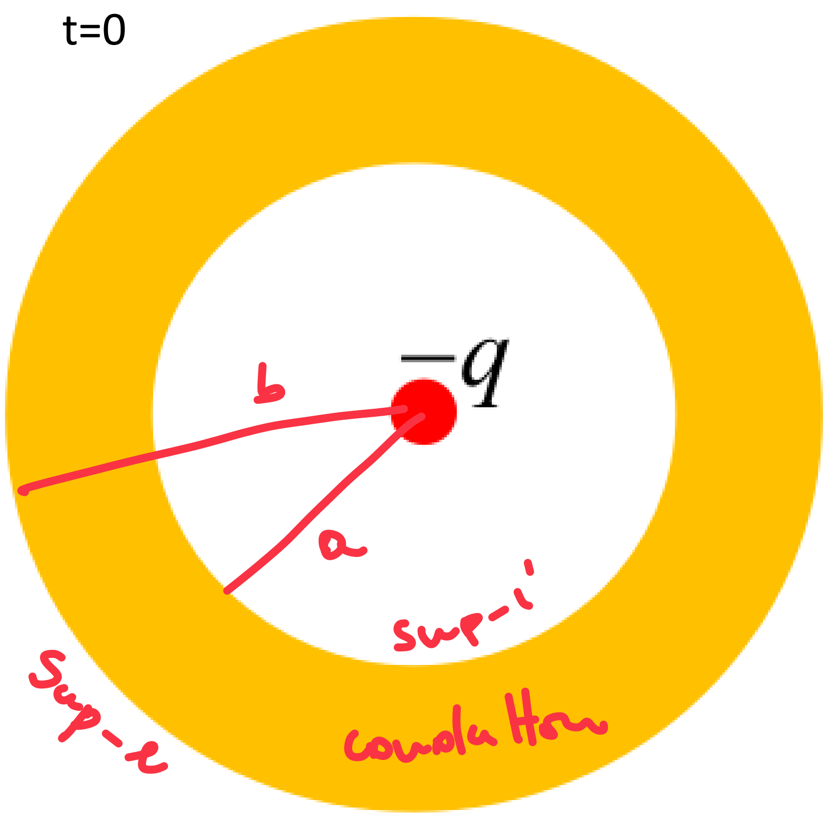
- Conduttore con cavita interna (priva di cariche) :

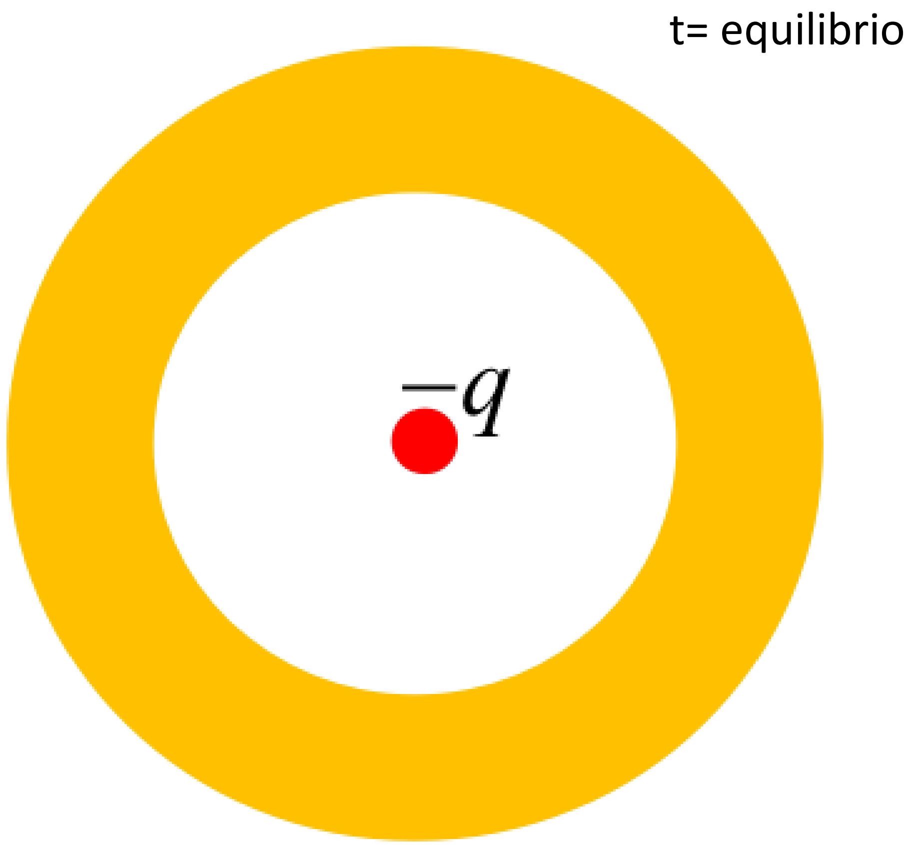


- All’equilibrio elettrostatico E_{int}=0
- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
- Gauss assicura che:
  - Non può esistere carica all’interno del corpo conduttore
  - Non può esistere una carica non nulla nella superficie interna
- La carica si può trovare solo sulla superficie ‘esterna’

Carica puntiforme ‘nascosta’ al centro di un guscio conduttore scarico

- Analizziamo (Prevediamo) la situazione all’equilibrio elettrostatico

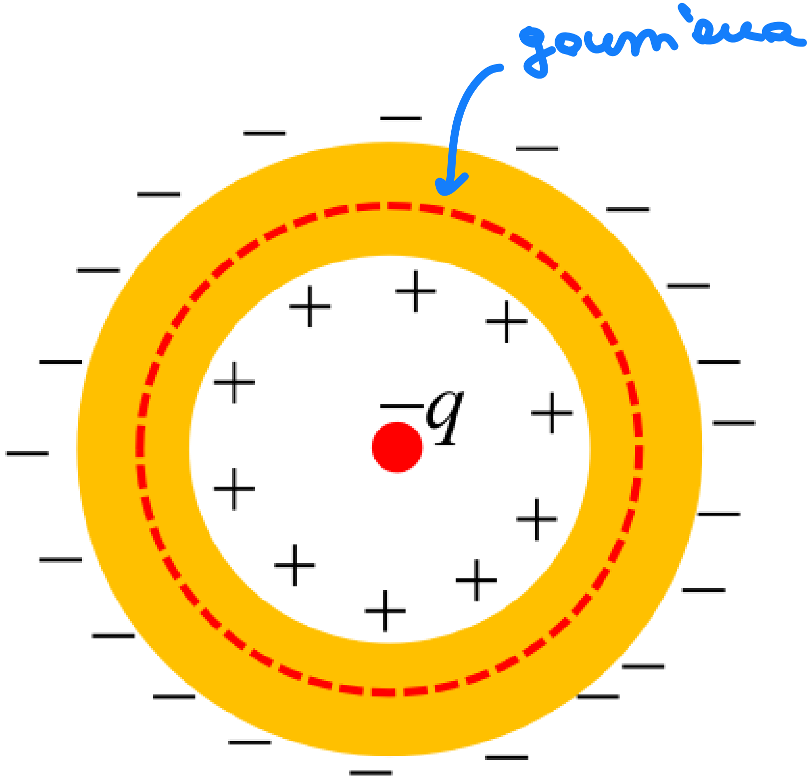




- Per costruzione il problema presenta una simmetria sferica

Carica puntiforme ‘nascosta’ al centro di un guscio conduttore scarico

- Analizziamo la situazione all’equilibrio elettrostatico: all’interno del conduttore



$$\Phi_{sfera} = \oiint_{sfera} \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = 0 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \emptyset$$

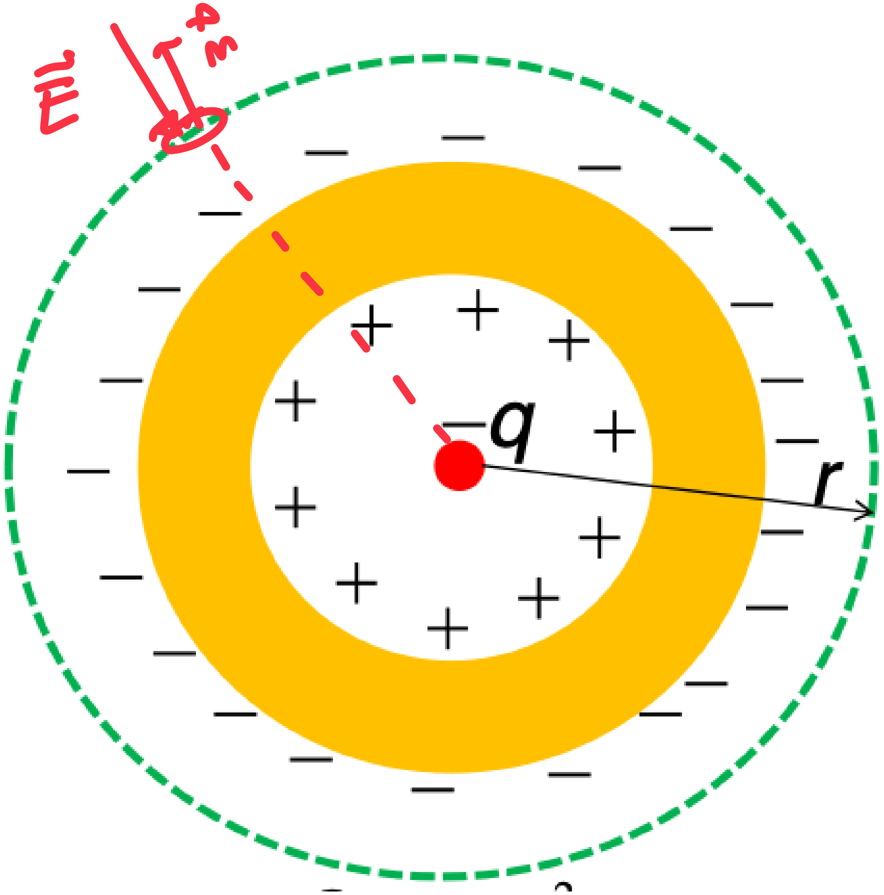
$$q_{int} = -q + q_{sup-i}$$

$$q_{sup-i} = q$$

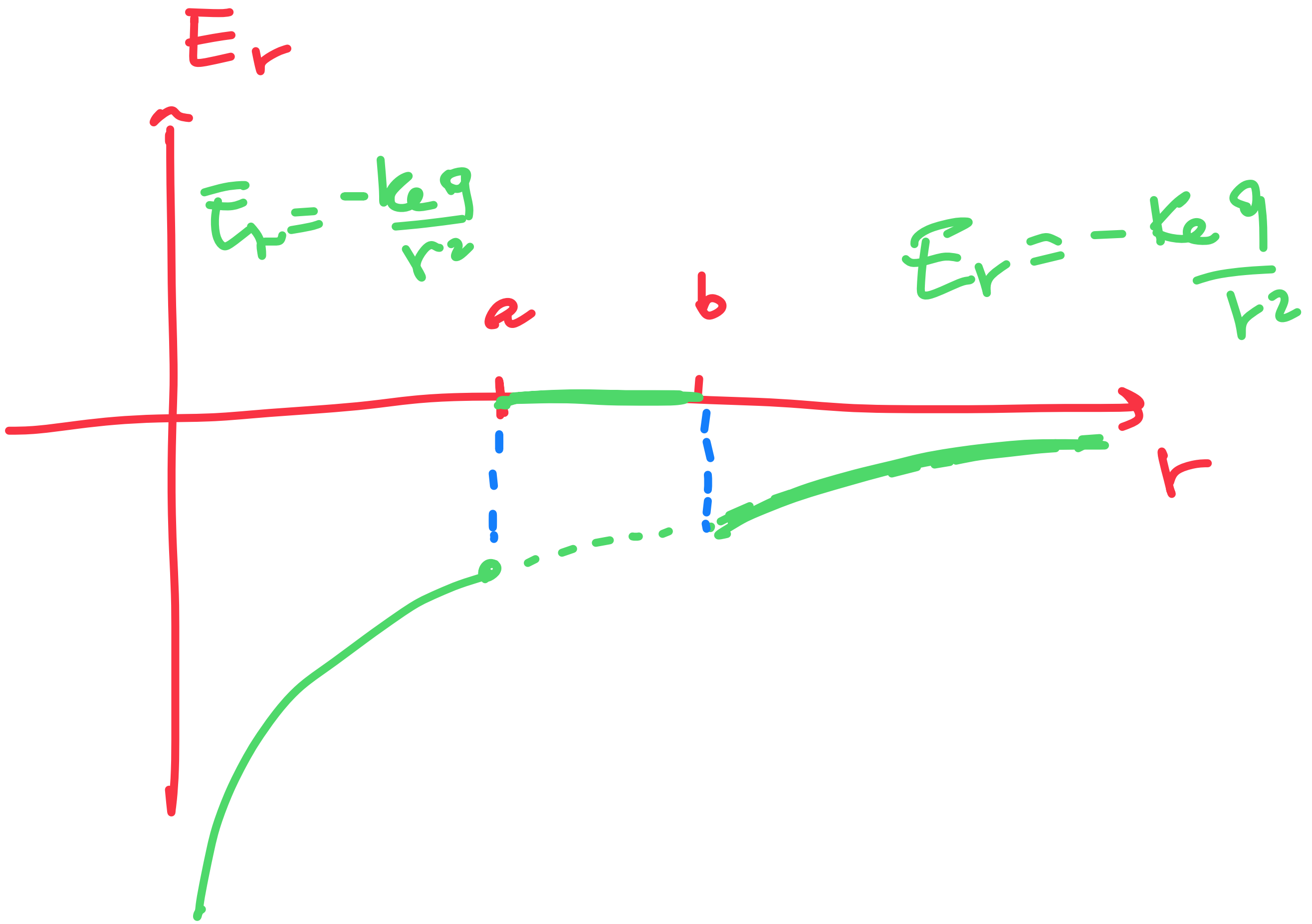
$$\sigma_{sup-i} = \frac{q}{4\pi a^2}$$

Carica puntiforme ‘nascosta’ al centro di un guscio conduttore scarico

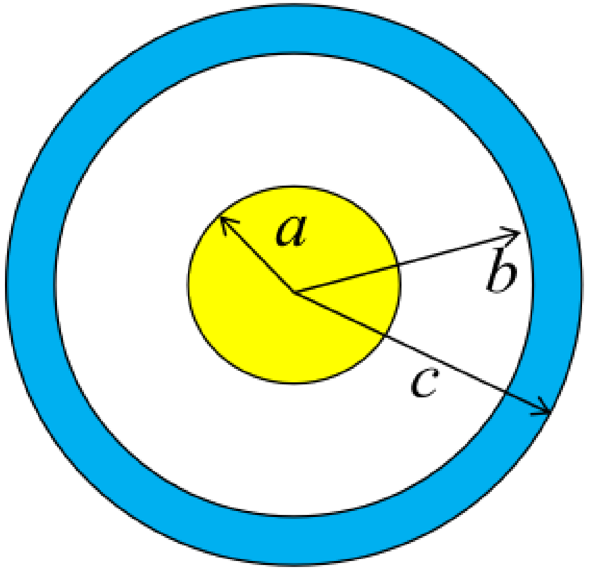
- Analizziamo la situazione all’equilibrio elettrostatico: all’esterno del conduttore



$\vec{E} = E_r \hat{r}$



Problema



La sfera gialla isolante con carica uniforme q_s = 3 μC e raggio a=2 cm è posta al centro di un guscio conduttore sferico con raggio interno b = 6 cm e raggio esterno c =7 cm; sul guscio è presente una carica q_c = -7 μC.

1) scrivere l'espressione $E(r)$ del campo elettrico in funzione della distanza dal centro, nella regione interna alla sfera ($r < a$), interna alla cavità ($a < r < b$), interna al guscio ($b < r < c$), ed esterna al guscio ($r > c$)
2) Determinare la carica Q accumulata sulla superficie interna ed esterna del guscio
3) Calcolare l'intensità del campo nei punti r=1 cm, r=5 cm, r=10 cm

$$r < a \quad E(r) = k\frac{q_s}{a^3}r$$

$$a < r < b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$

$$b < r < c \quad E(r) = 0$$

$$r > c \quad E(r) = k\frac{(q_s + q_c)}{r^2}$$

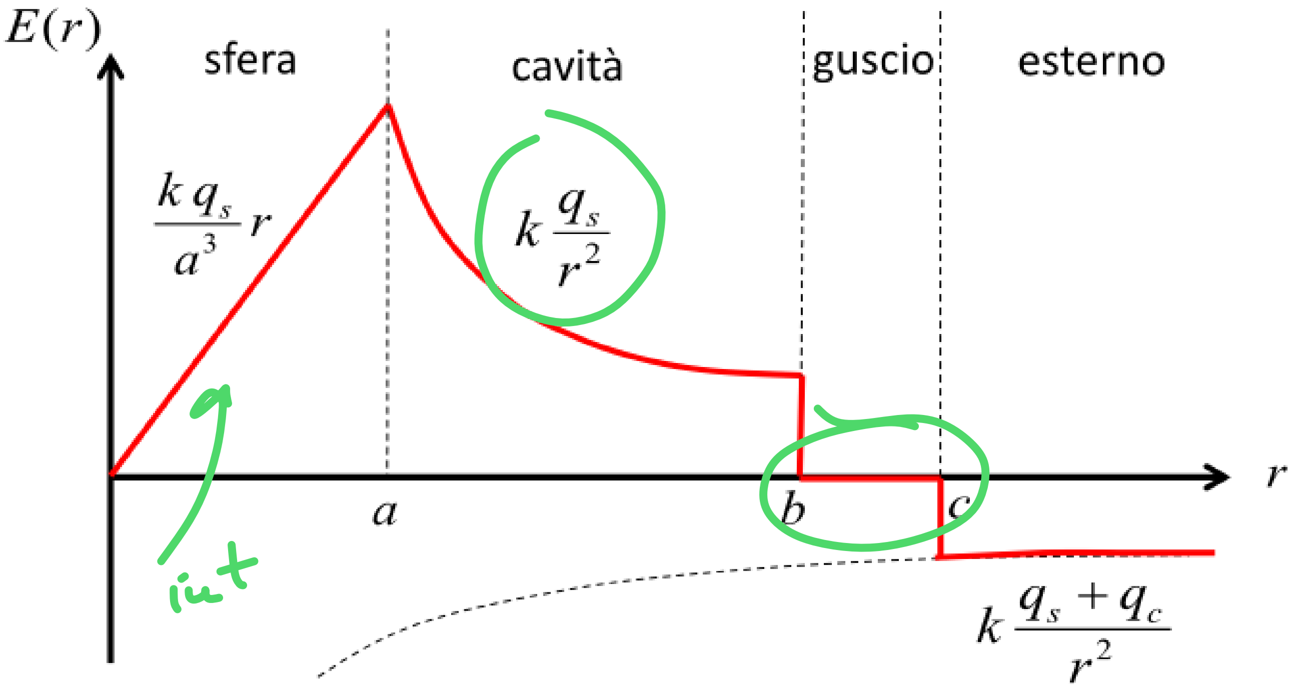
Sup. interna Q = -3 μC   Sup. esterna Q = -4 μC

Problema

$$r = 1\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C\times 1cm}{(2cm)^3} = 3.375\times10^7 (N/C)$$

$$r = 5\,cm \quad E = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C}{25\times10^{-4}m^2} = 1.08\times10^7 (N/C)$$

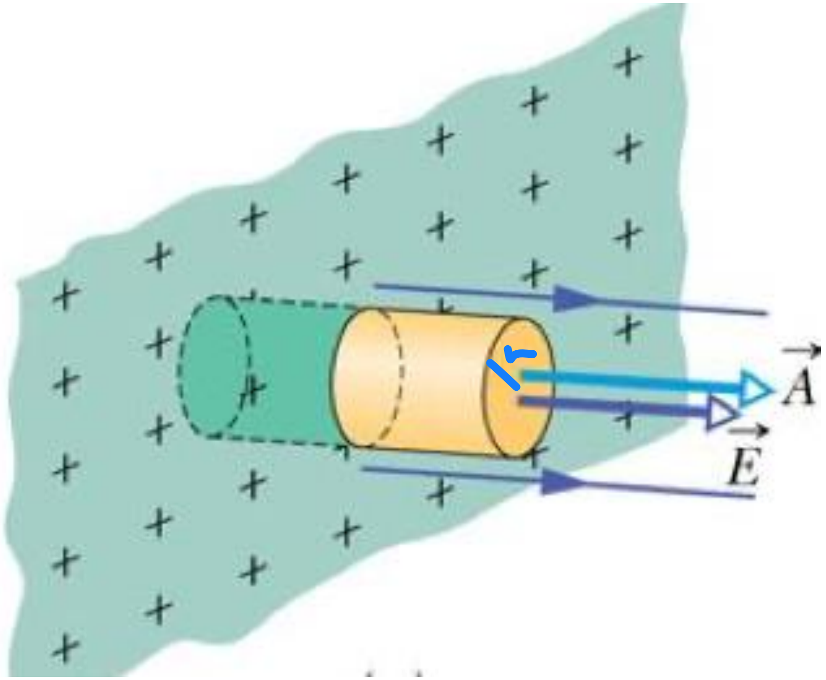
$$r = 10\,cm \quad E = -9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C}{100\times10^{-4}m^2} = -0.36\times10^7 (N/C)$$



Il campo elettrico presenta discontinuità in corrispondenza di pareti cariche

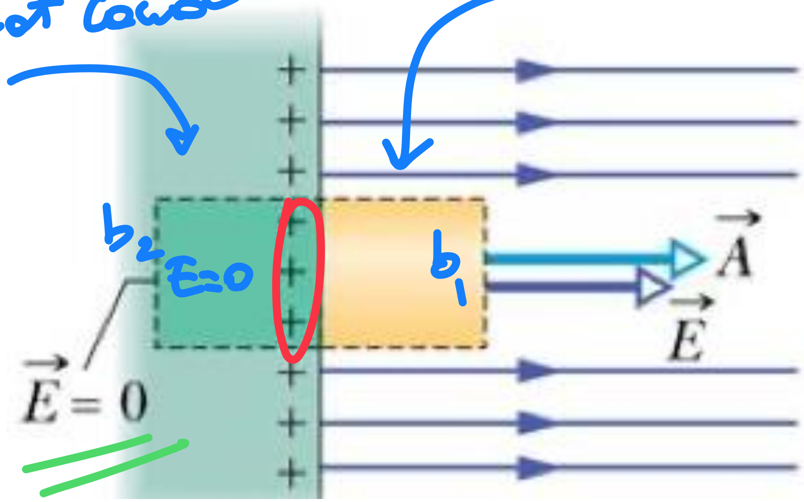
Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- Consideriamo una superficie piana infinita
- in assenza di altri campi la distribuzione di carica avrà densità σ uniforme.
- All’equilibrio elettrostatico il campo sul conduttore deve essere perpendicolare alla superficie, altrimenti le cariche si muoverebbero sulla superficie



mat cond

sup gaussiana

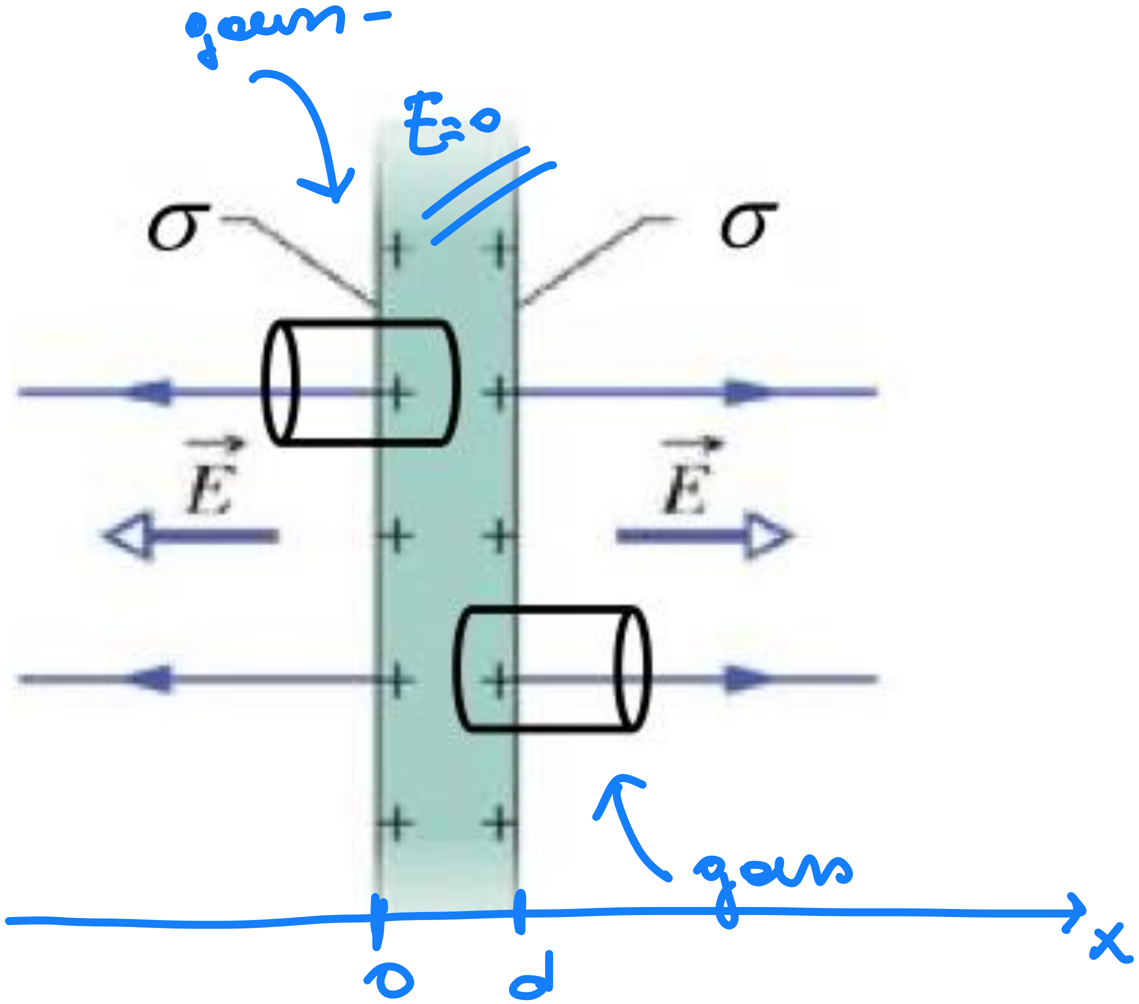


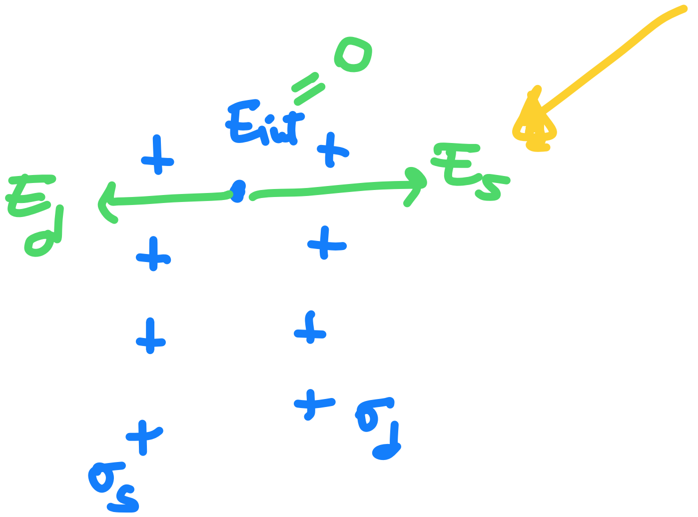
$$\phi_{cil} = \phi_{b_1} = \pi r^2 E = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

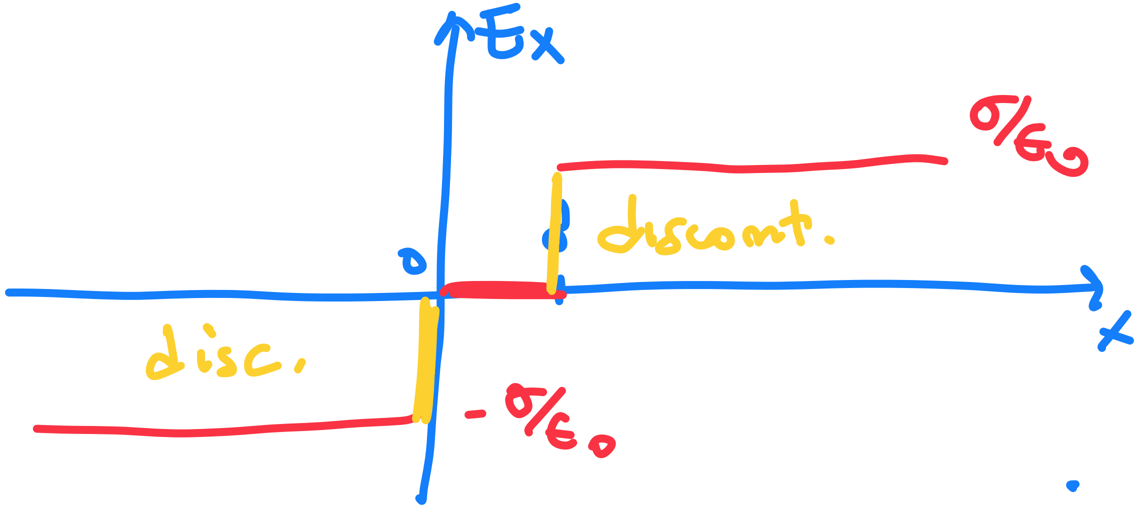
Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- In entrambi i lati in cui è suddiviso lo spazio



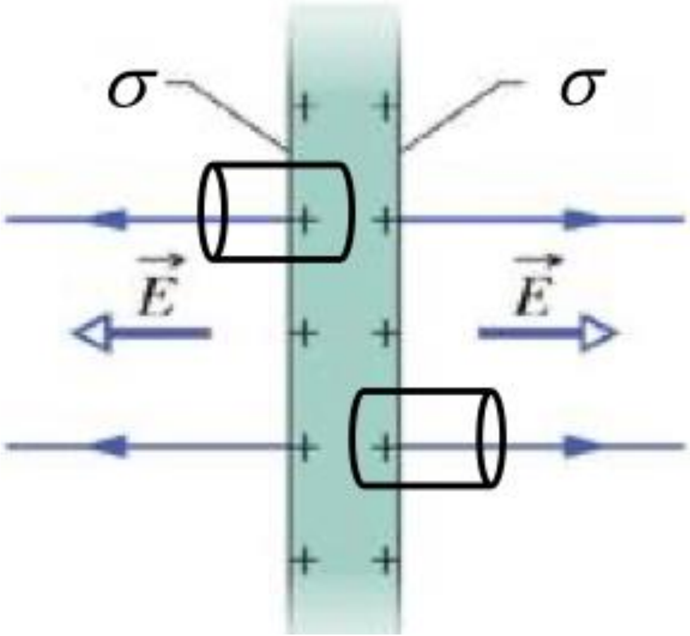


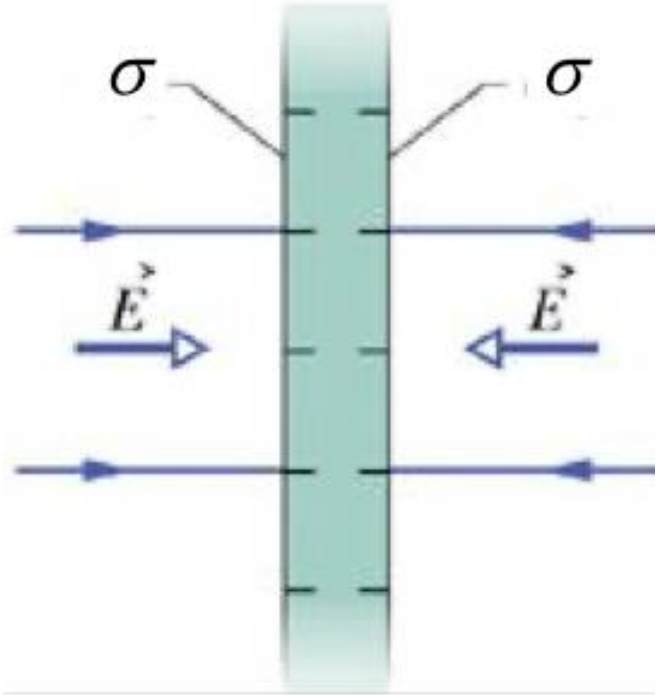
$$|\vec{E}_d| = |\vec{E}_s| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- Caso di cariche depositate positive e negativa

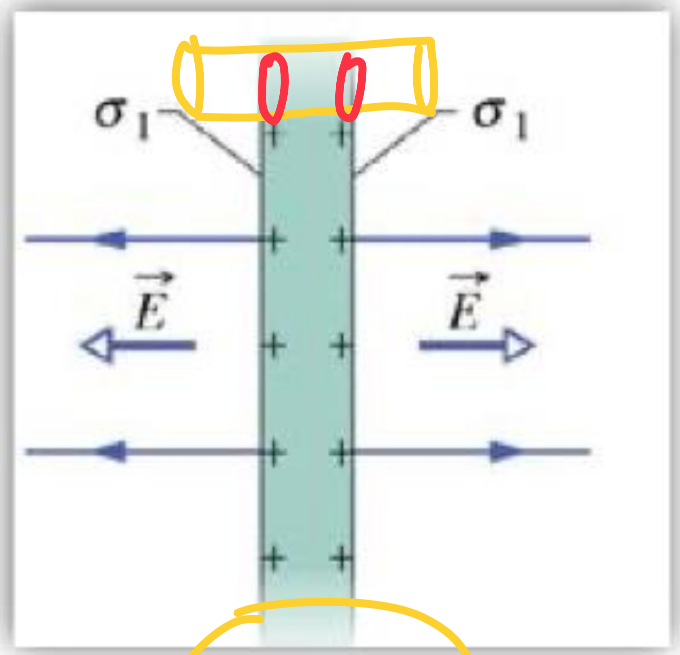




Sommario distribuzioni di cariche piane 2D

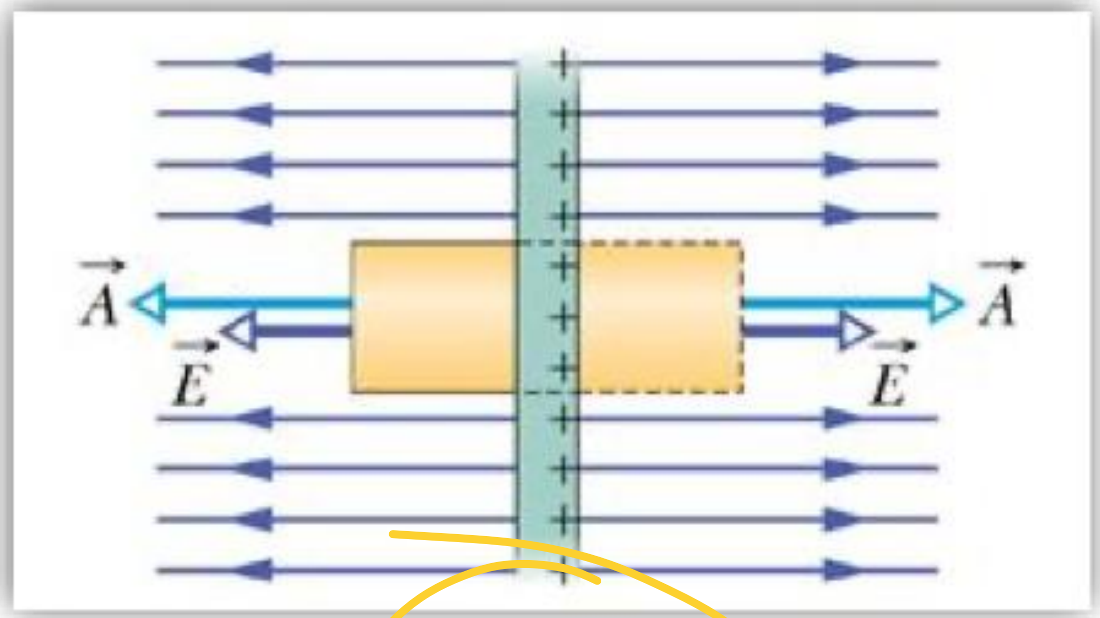
- Il campo elettrico è ortogonale alle lamine in entrambe i casi
- A parità di densità di carica superficiale le intensità dei campi sono differenti nei due casi

lamina conduttiva:

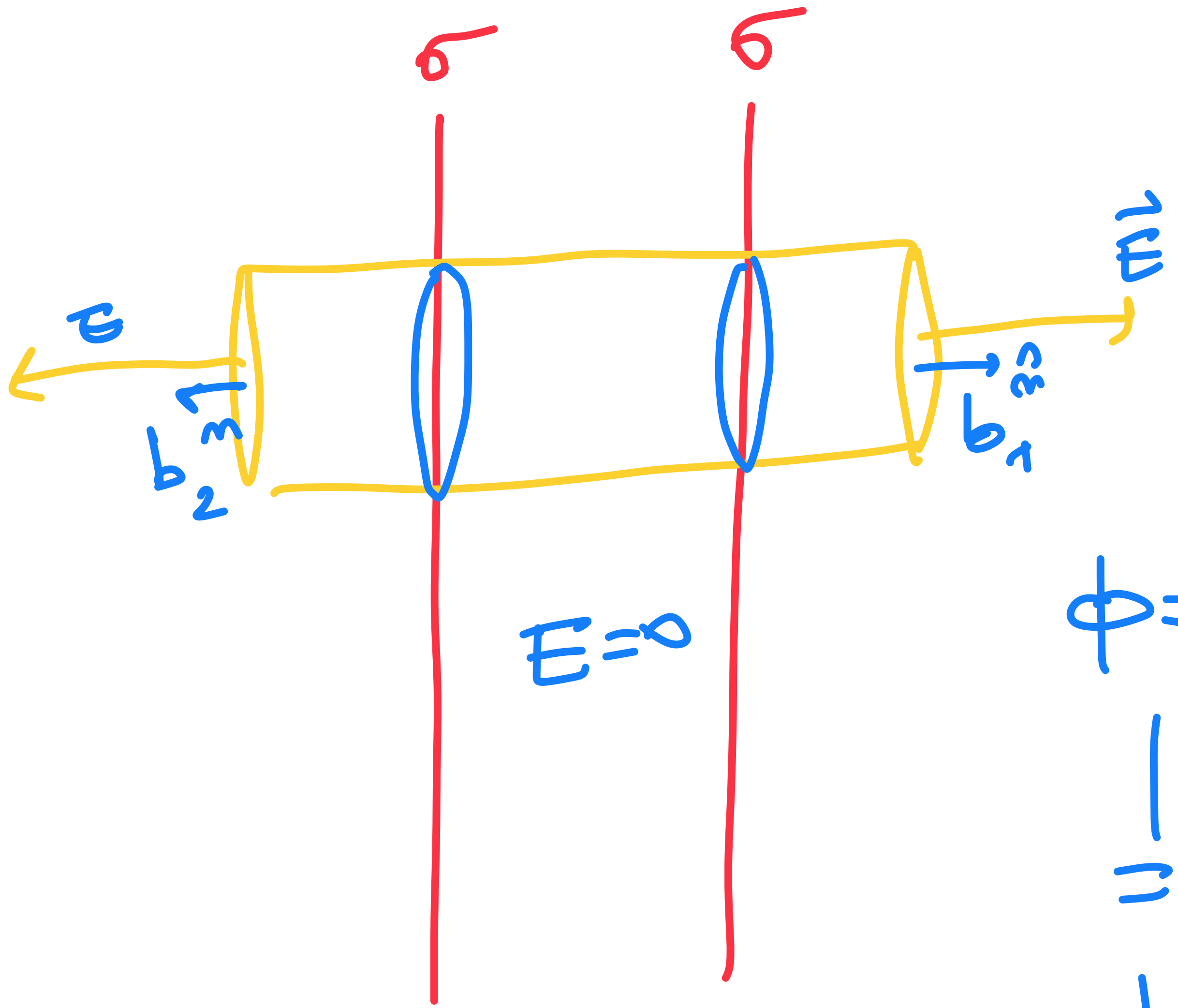


$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

lamina isolante:



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$\Phi = \Phi_{b_1} + \Phi_{b_2}$$

$$= \pi r^2 E + \pi r^2 E$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\pi r^2 \sigma + \pi r^2 \sigma\right]$$

$$\cancel{2\pi r^2} E = \frac{1}{\epsilon} \cancel{2\pi r^2} \sigma \qquad E = \sigma/\epsilon_0$$

Extra

Esercizio

Consideriamo una **sfera conduttiva carica**, con carica q_C = 8 μC, cava al suo interno; una carica puntuale negativa q = -5 μC è posta in un punto interno alla cavità. Determinare quanta carica deve essere distribuita sulle superficie interna (q_{int}) ed esterna (q_{est}) del conduttore

Per la legge di Gauss, la **carica sulla superficie interna** deve compensare la carica puntuale, per cui:

$$q_{\text{int}} = 5\,\mu C$$

Poiché la carica totale sul conduttore è:

$$q_C = q_{\text{int}} + q_{est} = 8\,\mu C$$

ne deriva che sulla superficie esterna deve essere distribuita una carica:

$$q_{est} = 3\,\mu C$$

Legge di Gauss

✓ Si deve al fisico e matematico tedesco Carl Friedrich Gauss la scoperta di una legge che rappresenta un formidabile strumento per l'analisi dei problemi elettrostatici.

Johann Friedrich Carl Gauss (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23 febbraio 1855). Matematico, astronomo e fisico. Definito "il Principe dei matematici", è annoverato fra i più importanti scienziati della storia avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali.