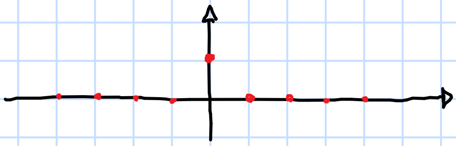
Dato il sistema

$x_{k+1} = Ax_k$ con $\lambda(A)$ con z_i soluzioni di $P(A) = 0$

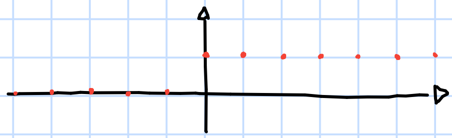
- se tutti gli $|z_i| < 1$ $\Rightarrow$ sist Asintot Stabile
- se anche un solo $|z_i| > 1$ $\Rightarrow$ sist Instabile
- se $\exists z_i : |z_i| = 1$ e $\eta = 1$ $\Rightarrow$ Sist Stabile
- se $\exists z_i : |z_i| = 1$ e $\eta > 1$ $\Rightarrow$ Sist Instabile

Risposta agli ingressi di sist TD LTI

Impulso $\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=\phi \\ 0 & k\neq\phi \end{cases}$



Gradino $1(k) = \begin{cases} 1 & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$

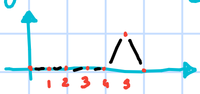


- $\delta(k) = 1(k) - 1(k-1)$

Qualunque segnale T.D. può essere descritto come:

$$\{u(k)\} = \{\dots u(-2), u(-1), u(0), u(1), u(2), \dots\} =$$

= sfrutto la funzione impulso "traslata"



$\delta(k-5)$

$$= \dots + u(-2)\,\delta(k+2) + u(-1)\,\delta(k+1) + u(0)\,\delta(k) + u(1)\,\delta(k-1) + \dots$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\,\delta(k-m)$$

posso def qualsiasi segnale come una sequenza di impulsi

$$y(k) = \cancel{HF^{k}x(0)} + H\sum_{i}^{k-1} F^{k-1-i}\,G\,u(i) + D\,u(k)$$

considero solo l'ingresso

Risposta Impulsiva: $u(k) = \delta(k)$

$$Y(k) = H\cdot\sum_{i}^{k-1} F^{k-1-i}\,G\,\delta(i) + D\,\delta(k)$$

$$= \begin{cases} 0 & k=\phi \\ HF^{k-1}G & k>\phi \\ 0 & k<0 \end{cases} = g_y(k)$$

Risposta Impulsiva del Sistema

Lezione 12/5/21

Qualunque segnale T.D. può essere scritto come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)\,\delta(k-n) \qquad \text{SEQUENZA DI IMPULSI}$$

Come calcolare la risposta di un sistema LTI ad un generico segnale d'ingresso

$$\{u(k)\} \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} u(m)\,\delta(k-m) = u(k)$$

sist LTI ⇒ causale ⇒ $u(k) = 0 \quad \forall k < 0$

Se la risposta ad un impulso $u(k) = \delta(k)$ del sistema è $g_y(k)$ allora la risposta ad una certa somma di impulso è

$$y(k) = \sum_{m=0}^{+\infty} u(m)\,g_y(k-m) = \sum_{m=0}^{k} u(m)\,g_y(k-m)$$

Questa è l'espressione della "somma di convoluzione"

$$y(k) = u(k) * g_y(k)$$

Campionamento di segnali e sistemi

Processo di campionamento

(Comp Uniforme)

se il tempo tra due campioni (SAMPLE) successivo è sempre lo stesso, questo prende il nome di • Tempo di Campionamento T_s {T SAMPLING}

(o Periodo di Campion)

• Frequenza di Campionam $F_s = \frac{1}{T_s}$

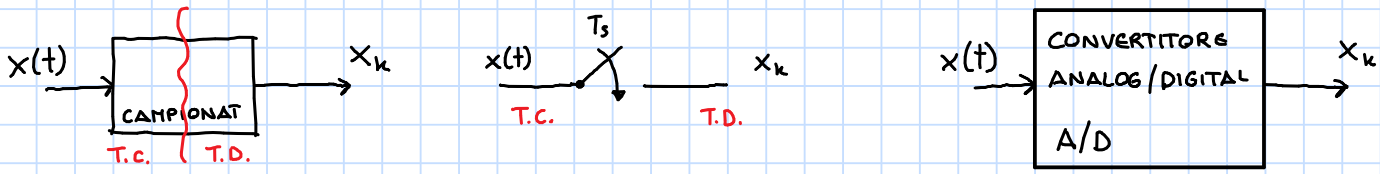
NUM CALCOLATORE

SEGNALE ELETTRICO T.C.

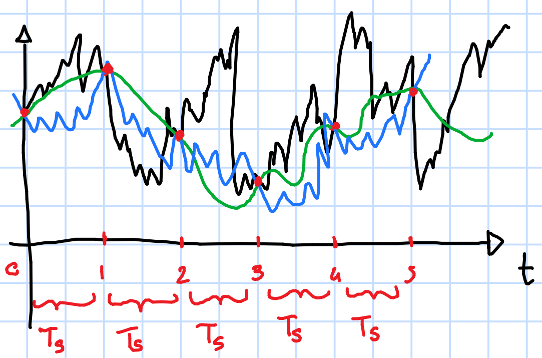
$$\boxed{X_k = x(t)\Big|_{t = k \cdot T_s} = x(kT_s)}$$

ISTANTI MULTIPLI INTERI DEL TEMPO DI CAMPIONAMENTO

Come si realizza un campionam UNIFORME?



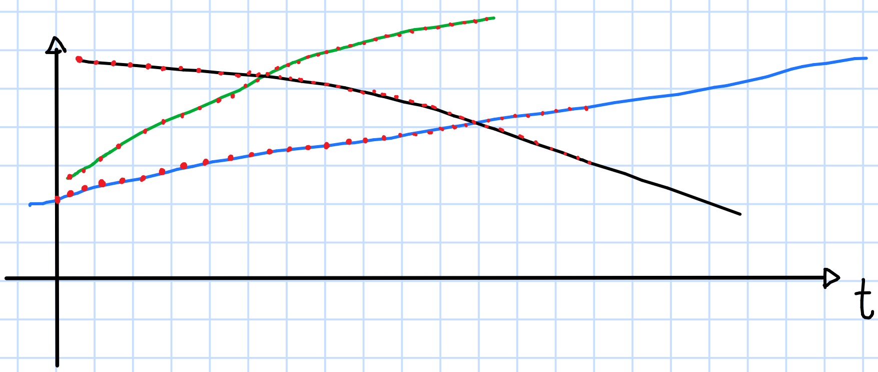
Esempio



segnali molto diversi possono apparire IDENTICI!

per ovviare a questo problema prendo un T_s più PICCOLO!

ZOOM DELLE FUNZ SOPRA IN UN PUNTO



Campionando troppo "velocemente" potremmo avere uscite molto simili e non notiamo cambiam tra passo k e k+1

Campionamento per segnali sinusoidali

fase

$$u(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

Ampiezza — Pulsazione [RAD/s] $\longrightarrow$ $\Omega = 2\pi \cdot F$ (frequenza Hz $= \frac{1}{s}$)

$\Rightarrow$ $u(t)$ è periodica di periodo $1/F$

m INTERO

$$A\cos(2\pi F t + \varphi) = A\cos\left(2\pi F\left(t + \frac{m}{F}\right) + \varphi\right) =$$

$$= A\cos(2\pi F t + \cancel{2\pi m} + \varphi)$$

Segnale sinusoidale T.D.

$\omega = 2\pi f$

$$u_k = A\cos(\omega k + \theta) = A\cos(2\pi f k + \theta)$$

INTERO

PERIODO

x_k è periodico se $x_k = x_{k+n}$ $\forall x$ per qualche n

$$A\cos(2\pi f k + \theta) = A\cos(2\pi f (k+n) + \theta) = A\cos(2\pi f k + 2\pi f n + \theta)$$

Affinché l'espressione sia vera $2\pi f n = 2\pi m$ per qualche m

$\Rightarrow$ $\cancel{2\pi} f n = \cancel{2\pi} m$ $\Rightarrow$ $f = \frac{m}{n}$ se la frequenza può essere scritta come rapporto di NUMERI INTERI, quindi se f numero RAZIONALE!

Non tutte le sinusoidi T.D. sono diverse se $\omega_1 \neq \omega_2$

$$A\cos(\omega_1 k + \theta) = A\cos(\omega_2 k + \theta)\Big|_{\omega_2 = \omega_1 + 2\pi m}$$

INTERO

$$A\cos((\omega_1 + 2\pi m)\cdot k + \theta) = A\cos(\omega_1 k + \underbrace{2\pi m k}_{\text{INTERO}} + \theta) = A\cos(\omega_1 k + \theta)$$

MULTIPLO DI 2π

Sinusoidi T.D. sono identiche se le loro pulsazioni sono diverse di multipli interi di 2π

Campionamento di Sinusoidi tempo continuo

$u(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi)$

$\downarrow$

Campiono con tempo di campion T_s

freq / freq di campion

$$u_k = A\cos(2\pi F \cdot k T_s + \varphi) = A\cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} k + \varphi\right)$$

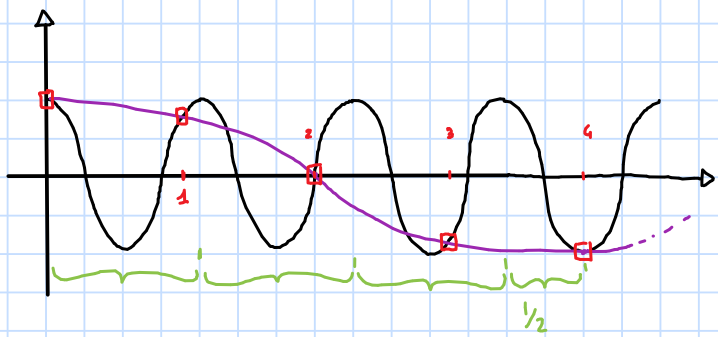
frequenza NORMALIZZATA $= f'$

$$= A\cos(2\pi f' k + \varphi)$$

f' deve essere limitata tra $-\frac{1}{2} < f' < \frac{1}{2}$ altrimenti sinusoidi con F diff possono apparire IDENTICHE

Esempio:

- $u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{8} t\right)$
- $u_2(t) = \cos\left(2\pi \frac{7}{8} t\right)$



scelgo $T_s = 1$ le due sinusoidi producono esatt gli stessi campioni quindi appaiono identiche

Il fenomeno appena descritto prende il nome di ALIASING

$u_1(k) = \cos\left(2\pi \frac{1}{8} \cdot k T_s\right) \qquad u_2(k) = \cos\left(2\pi \frac{7}{8} k\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow = \cos\left(2\pi \overbrace{\left(1 - \frac{1}{8}\right)}^{7/8} k\right) = \cos\left(2\pi k - 2\pi \frac{1}{8} k\right)$$

$$= \cos\left(-2\pi \frac{1}{8} k\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{8} k\right)$$

Tutte le pulsazioni separate da multipli interi di 2π appaiono IDENTICHE!

$\Rightarrow$ Tutte le freq NORMALIZZATE f' $\underbrace{\text{separate da INTERI}}_{f'' = f' + n}$ APPAIONO IDENTICHE

$\Rightarrow$ freq ottenibili sommando interi a una freq sono ALIAS di quella freq

Se considero le freq $-\frac{1}{2} < f' < \frac{1}{2}$

Qualunque freq al di fuori è un ALIAS di una freq. nell'interv

$\Rightarrow$ passo definire $f'_{MAX} = \frac{1}{2} = \frac{f_{MAX}}{F_s}$ ← freq

NORMALIZZ FREQ CAMP

$$\Rightarrow f_{MAX} = \frac{F_s}{2}$$