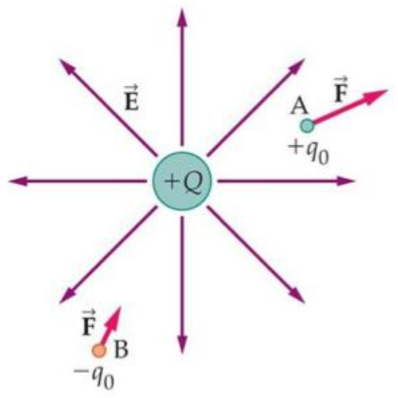
Lezione

- Distribuzioni continue di cariche, campo E
- Flusso di campo elettrico e teorema di Gauss.
- Isolanti e conduttori.
- Applicazioni.

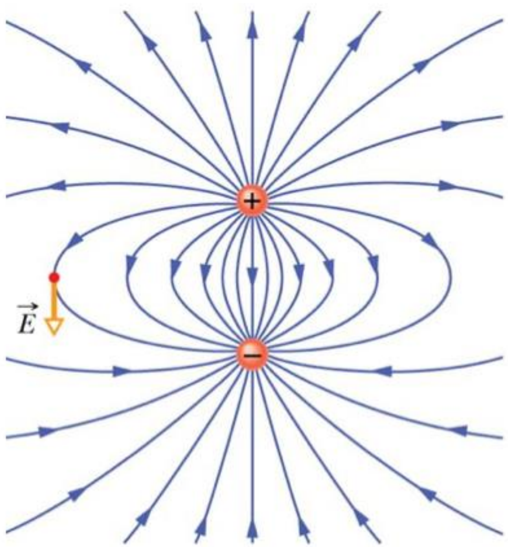
Dalle lezioni precedenti…..

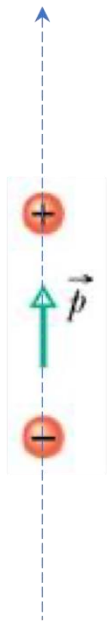
- Campo Elettrico di una carica puntiforme



$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}$$

- Campo Elettrico di un dipolo (sovrapposizione di due cariche)

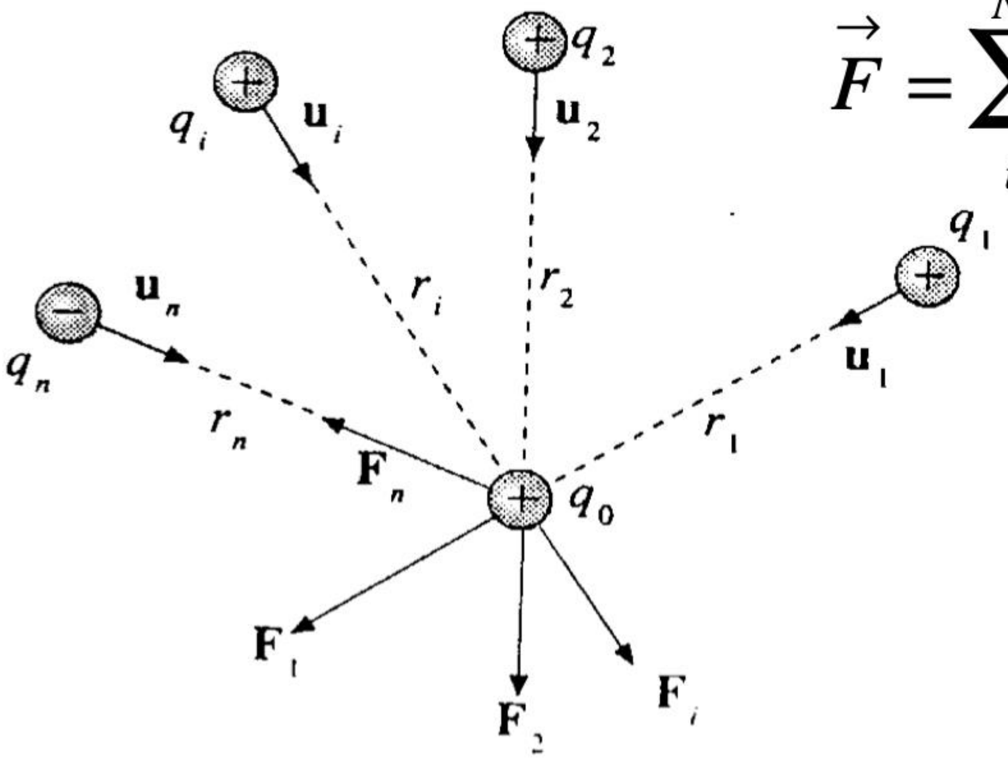




Principio di Sovrapposizione: E_{tot} di più cariche

- Formalismo discreto: sovrapposizione di cariche puntiformi

Determinare la forza e il campo che agiscono su q_0 dovuta ad **N** cariche puntiformi



$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = q_0 \sum_i^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E}_i(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

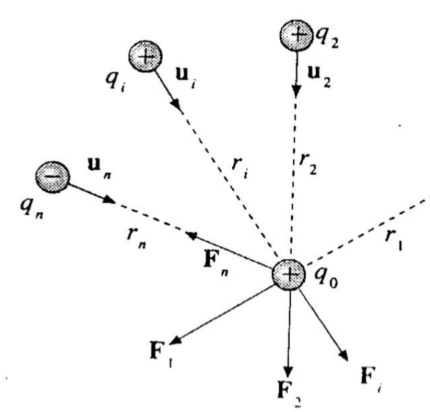
- All’aumentare di N questo tipo di approccio diviene sempre più complicato

Sovrapposizioni di cariche

- Formalismo discreto: sovrapposizione

cariche puntiformi

Determinare la forza e il campo che agiscono su q_0 dovuta ad **N** cariche puntiformi



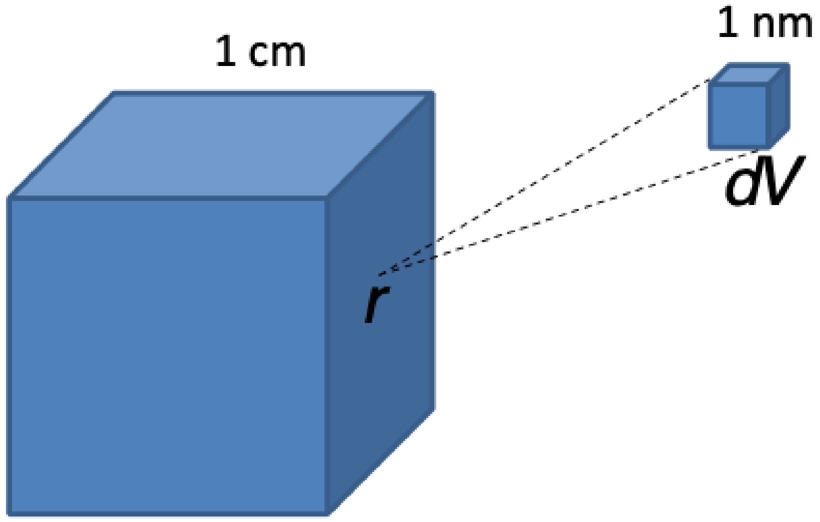
$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = q_0 \sum_i^N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E}_i(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

- Formalismo discreto: missione complicata !

- Formalismo continuo: cariche distribuite nei mezzi materiali



- Consideriamo un elemento di volume molto piccolo, *dV* : ***INFINTESIMO***, un numero infinito di *dV* costruisce il volume finito del cubo
- Ciascun *dV* INFINITESIMO, possiamo considerarlo come puntiforme

- 1 cm^3 ~ 1 Mole ~ 6 10^{23}

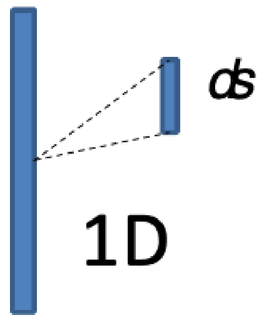
atomi/molecole

- La quantità di carica contenuta in *dV* potrà dipendere dalla posizione di *dV* all'interno del cubo originario

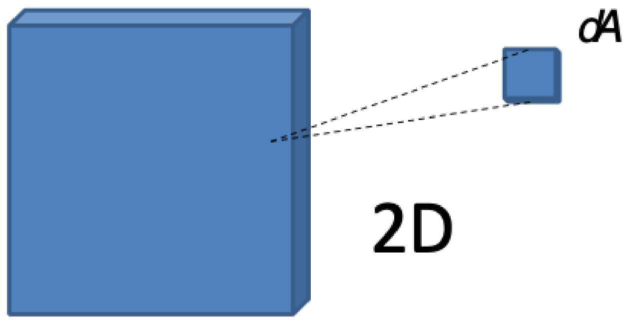
Distribuzioni continue di cariche

- Densità di carica

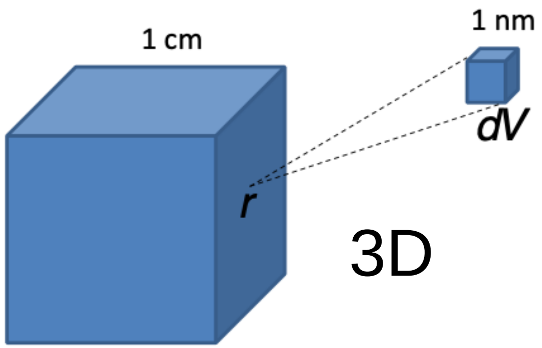
- Densità di carica lineare



- Densità di carica superficiale

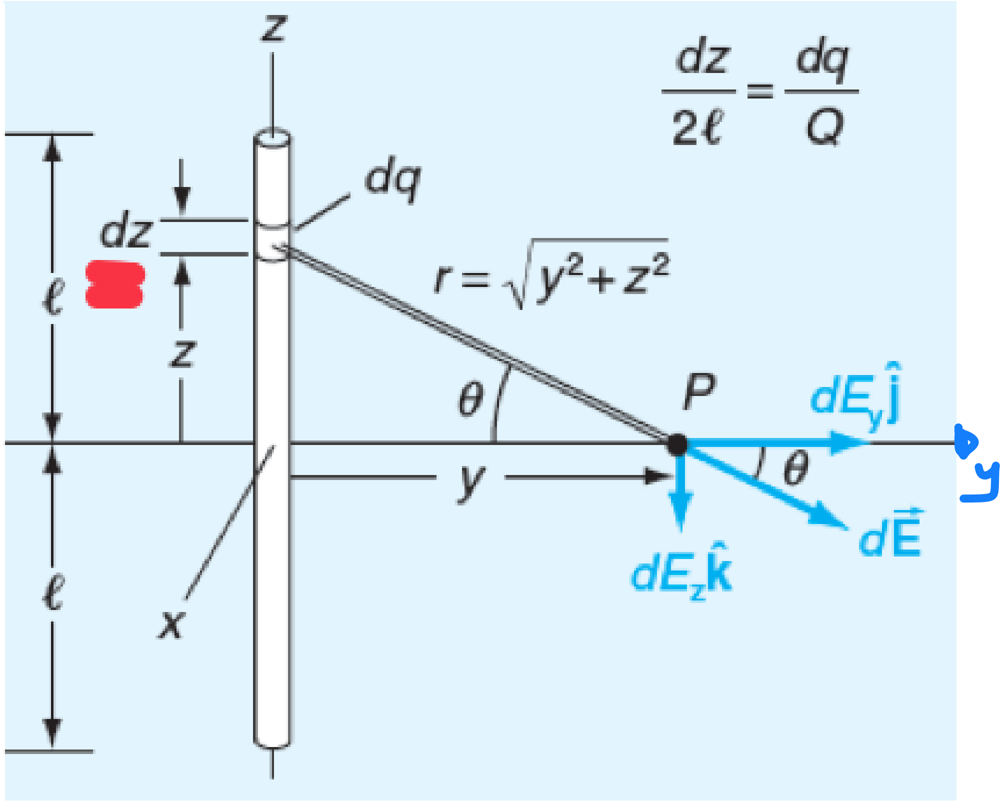


- Densità di carica di volume



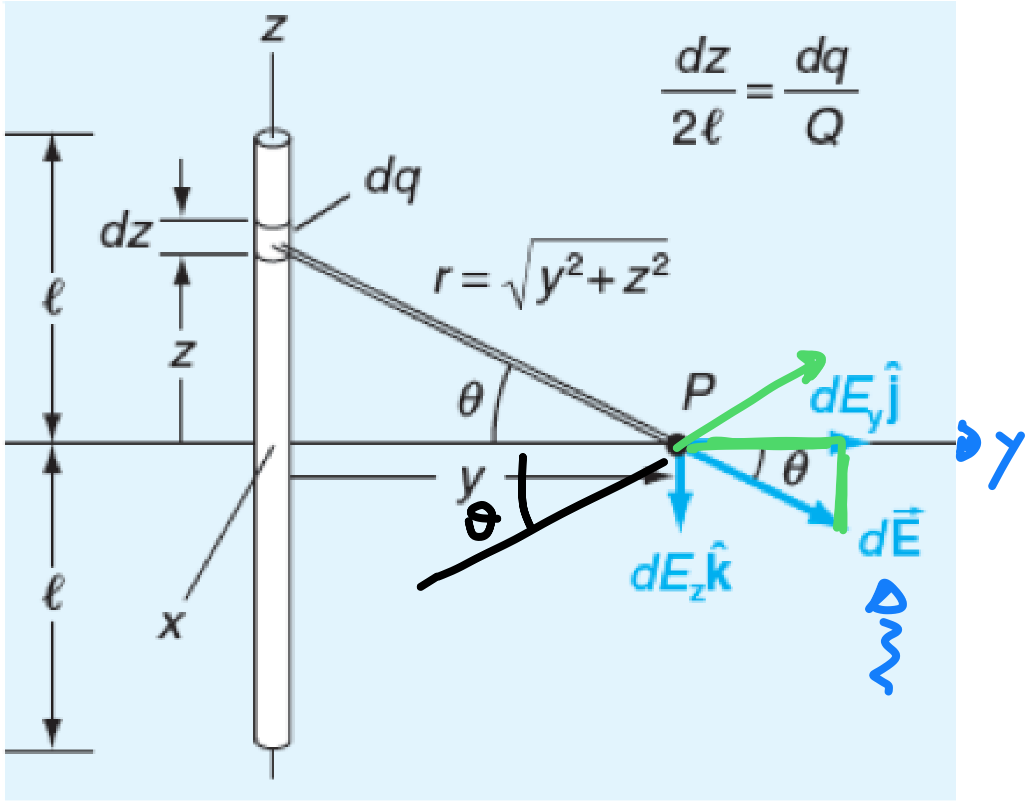
Distribuzione di carica lineare : filo

- Filo ottenuto sovrapponendo in maniera uniforme (equi spaziata) cariche puntiformi lungo l'asse z: lunghezza totale 2L, carica totale Q.



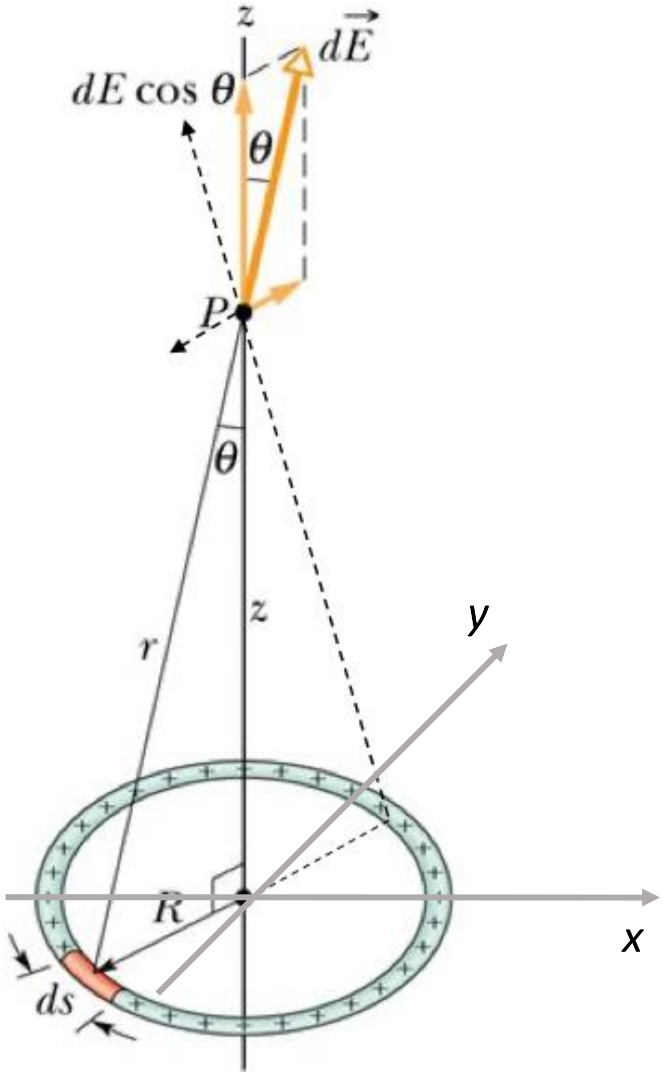
Distribuzione di carica lineare : filo

- Filo ottenuto sovrapponendo in maniera uniforme (equi spaziata) cariche puntiformi lungo l'asse z: lunghezza totale 2L, carica totale Q.

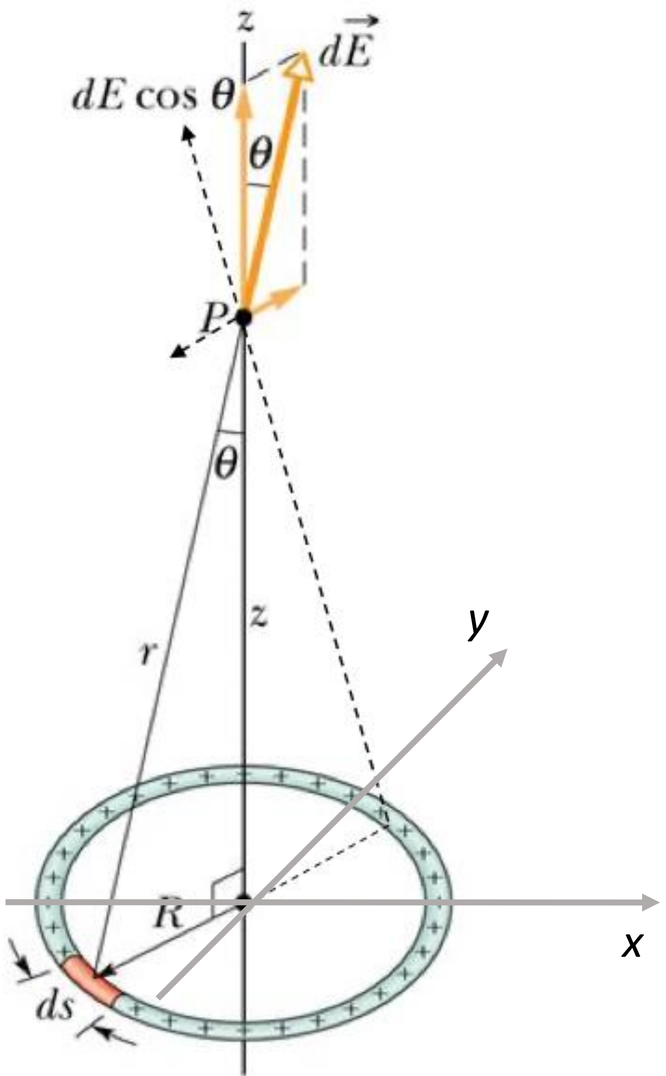


Distribuzione di carica lineare : anello

- Anello carico di raggio R disposto sul piano xy: campo E in un punto dell'asse



Distribuzione di carica lineare : anello



- Cosa accade se la carica dell'anello è negativa ?

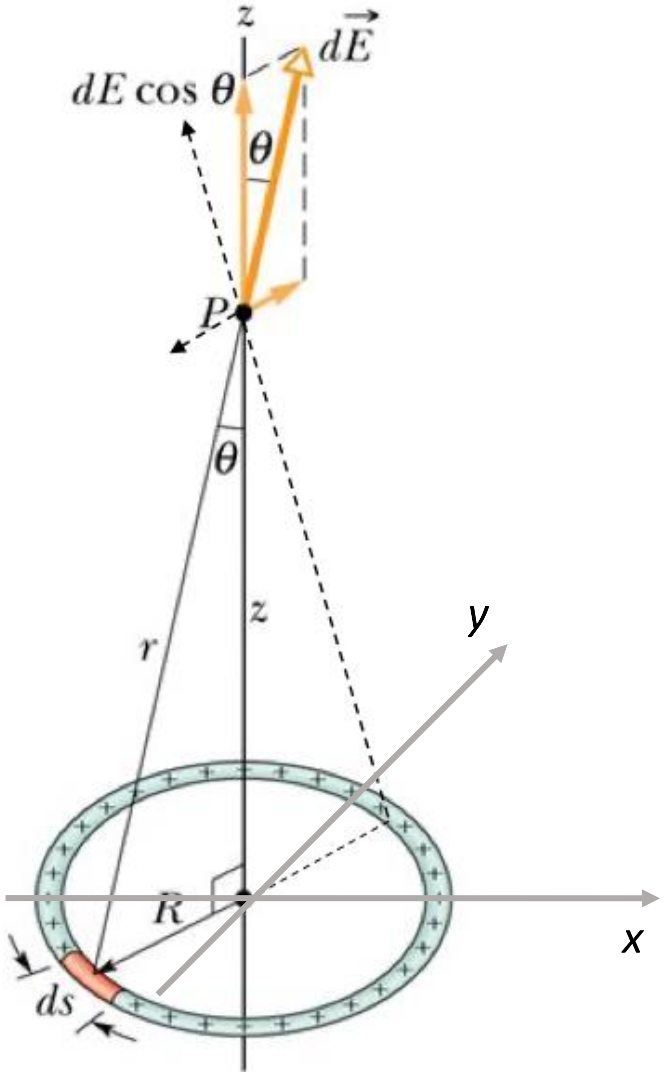
- Valore del campo E a z = 0

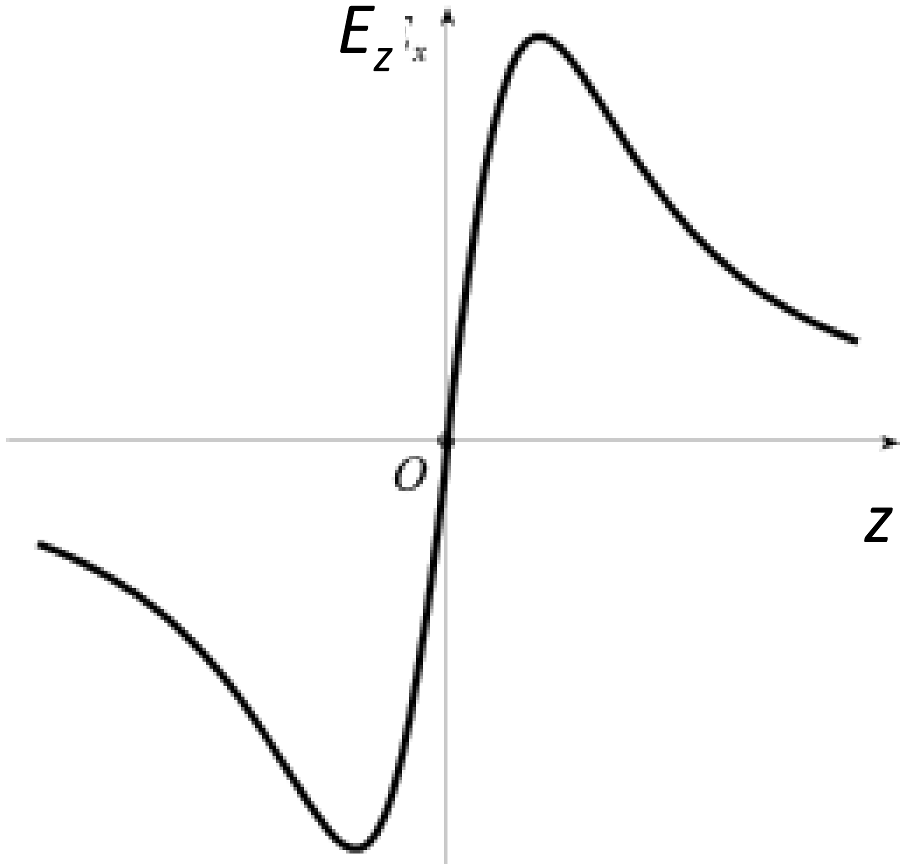
- Valore del campo E a *z >> R*

$$E_z = k\frac{zq}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Distribuzione di carica lineare : anello

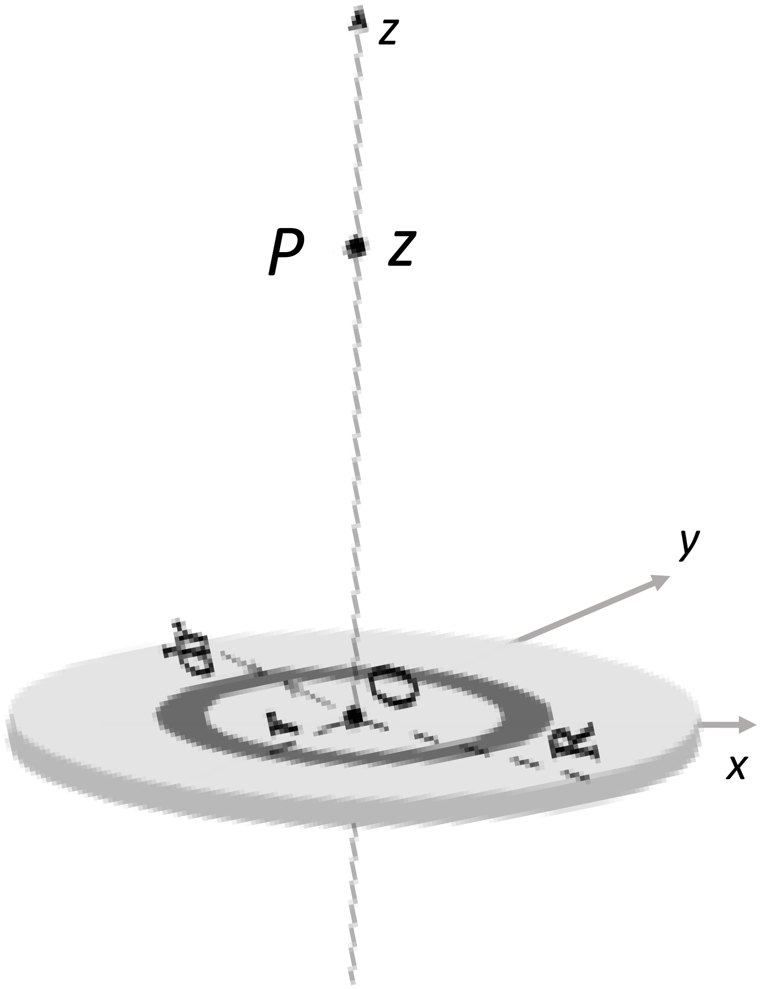
- Anello carico di raggio R disposto sul piano xy: grafico della componente $E_z(z)$





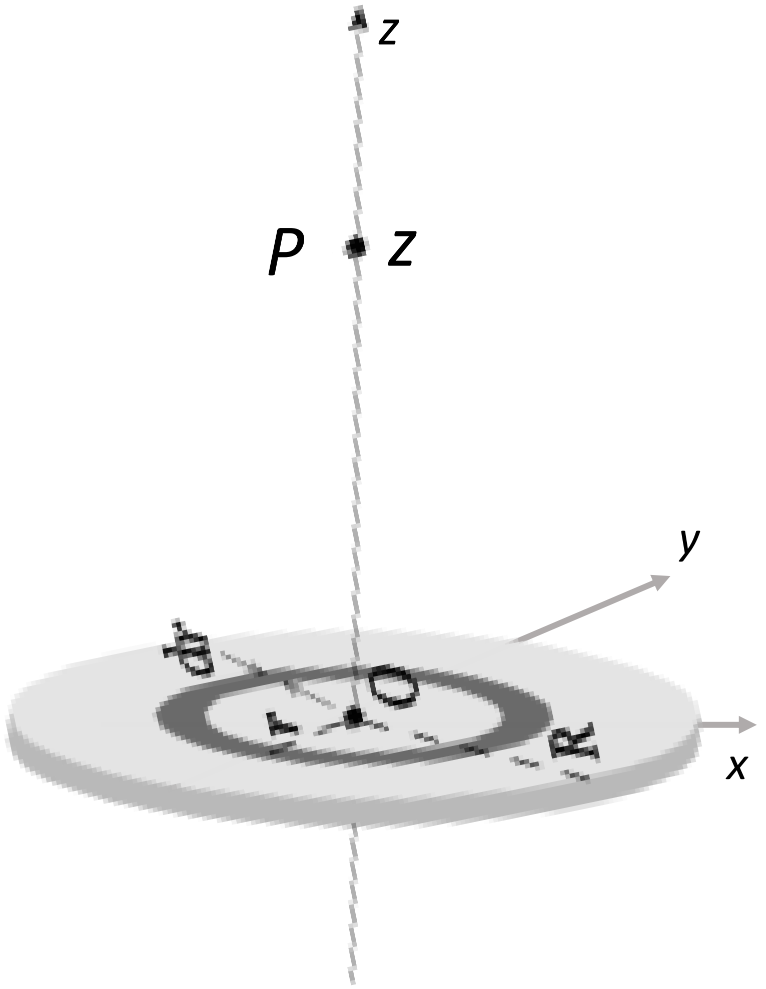
Distribuzione di carica di superficie : disco

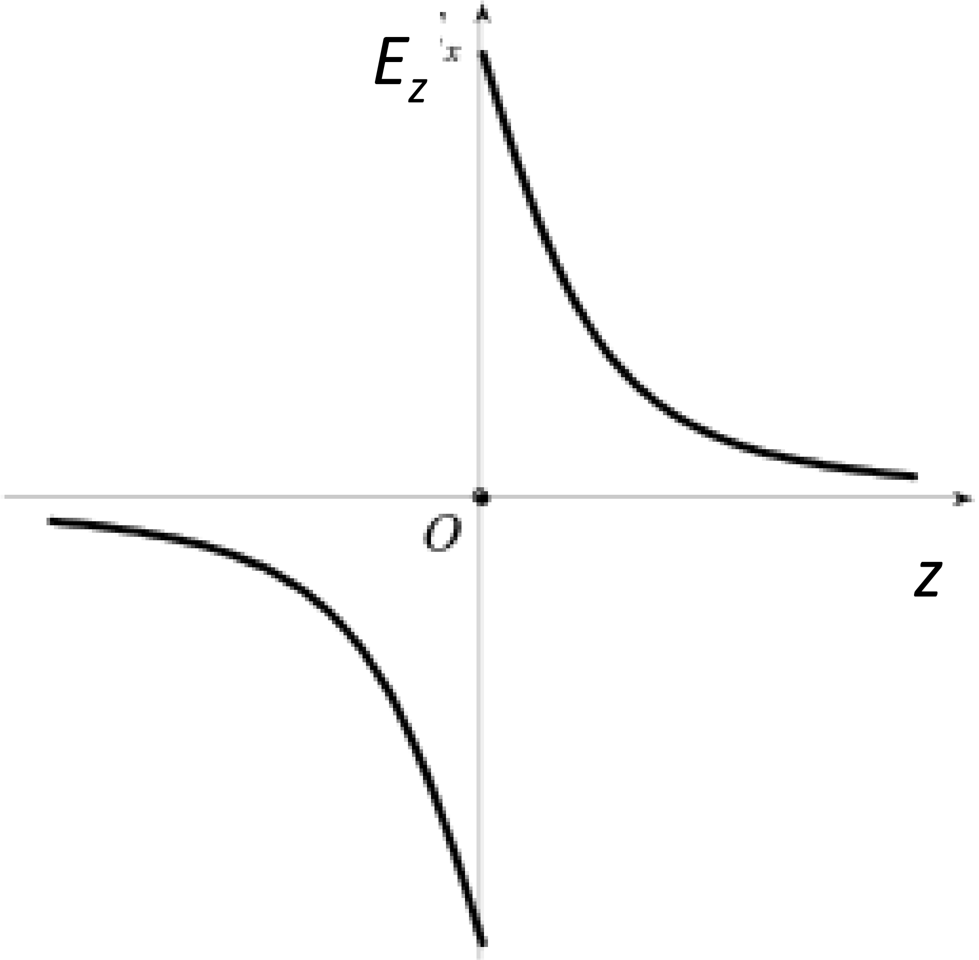
- Disco carico di raggio R disposto sul piano xy (calcolo completo ad esercitazione)



Distribuzione di carica di superficie : disco

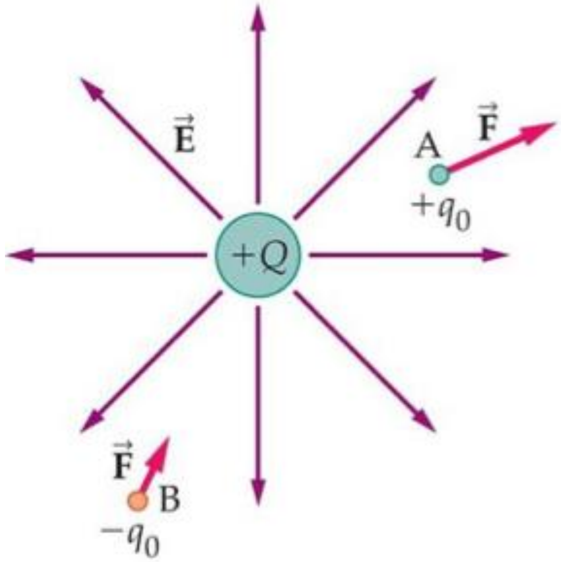
- Disco carico di raggio R disposto sul piano xy: grafico della componente $E_z(z)$

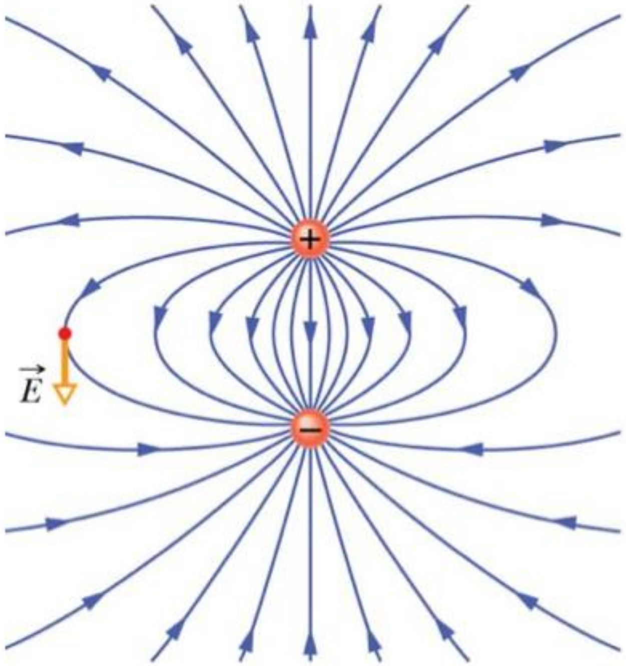




Legge di Gauss

- Sfrutta la simmetria delle distribuzioni di carica sorgenti del campo ***E***

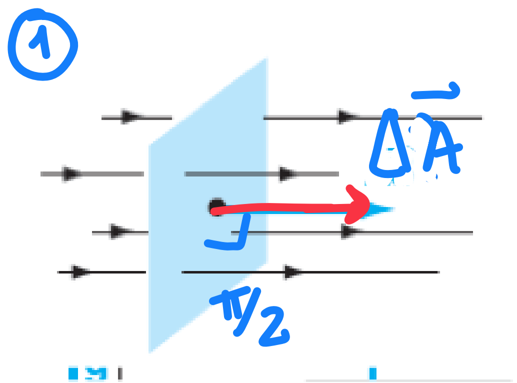


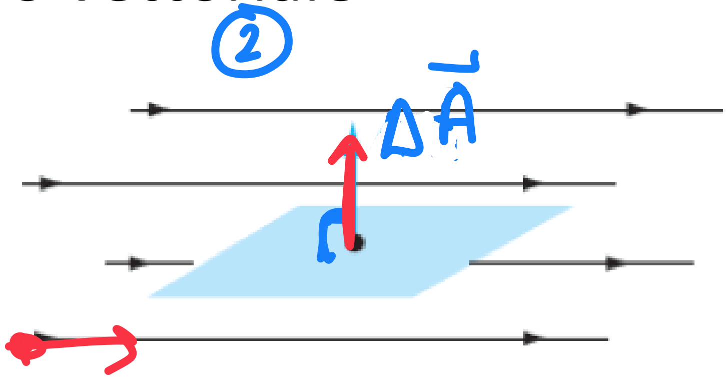


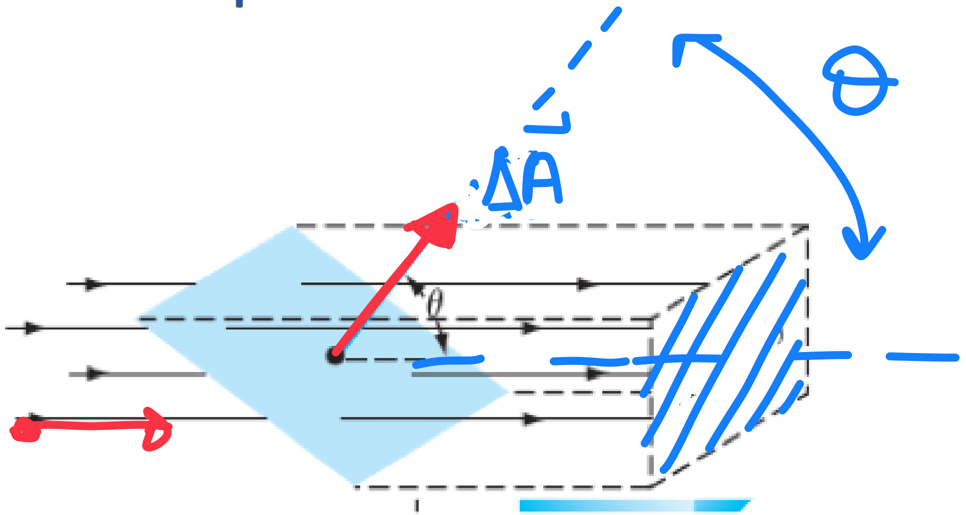
- Calcola analiticamente il campo elettrico ***E***

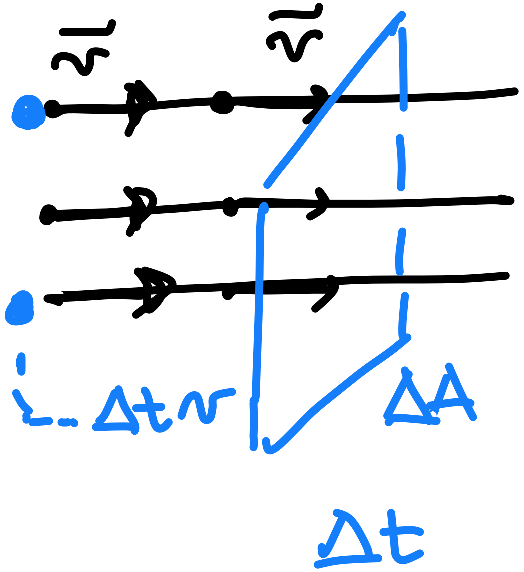
Legge di Gauss: Flusso di un campo vettoriale

- Flusso di un campo vettoriale









$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \propto \frac{\Delta t\, v}{\Delta t} = v$$

$\vec{\Delta A}$

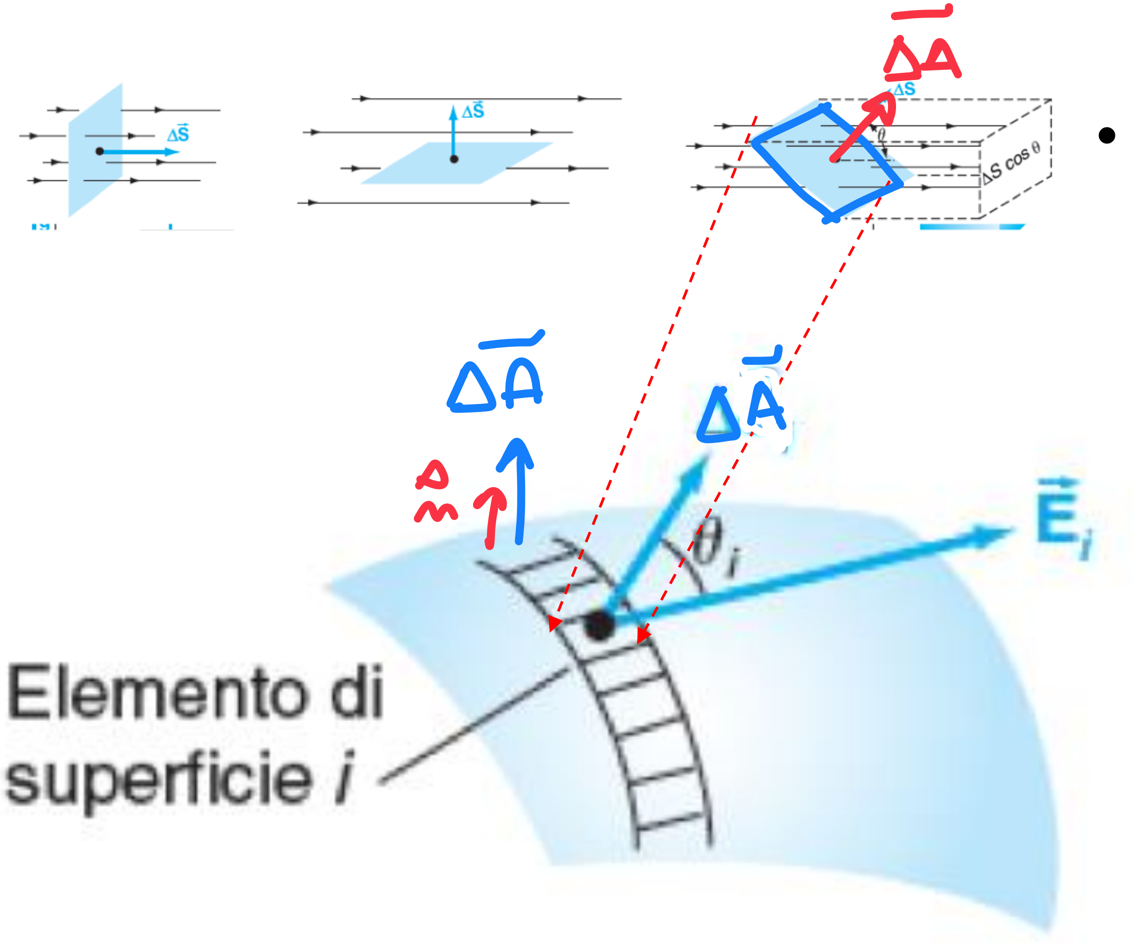
$|\Delta A| = sup.$

$$\vec{\Delta A} \cdot \vec{v} = \phi$$

$$\boxed{\Phi_{\vec{E}} = \vec{\Delta A} \cdot \vec{E}}$$

- Flusso Φ dimensioni = [Campo] $[L]^2$

Legge di Gauss: Flusso di un campo vettoriale E



- Superficie finita come somma di ΔS infinitesimi

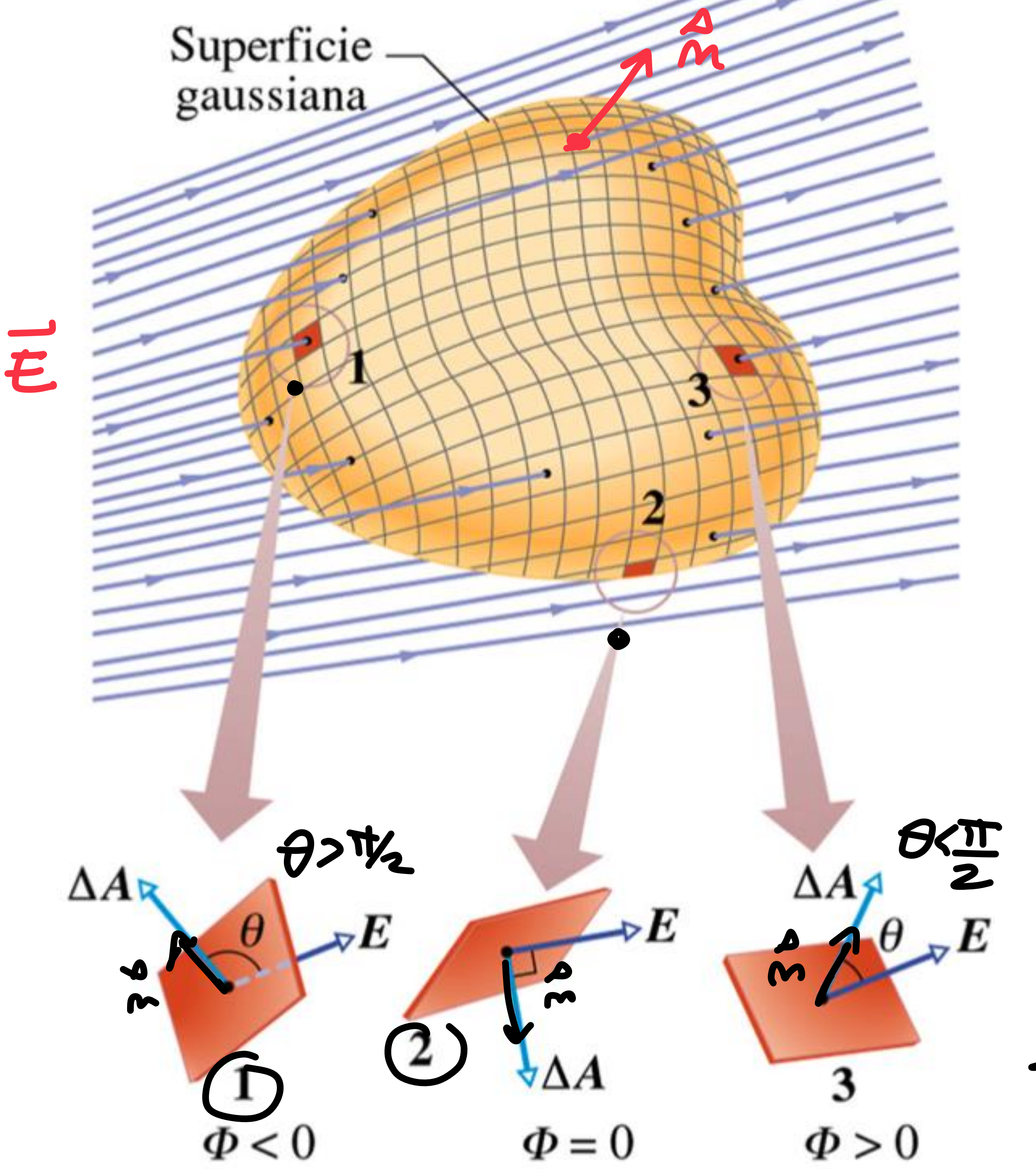
$$\Phi_E =$$

- Un numero infinito di superfici INFINITESIME *dS* costruiscono una superficie finita

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_S E \cos\theta dA$$

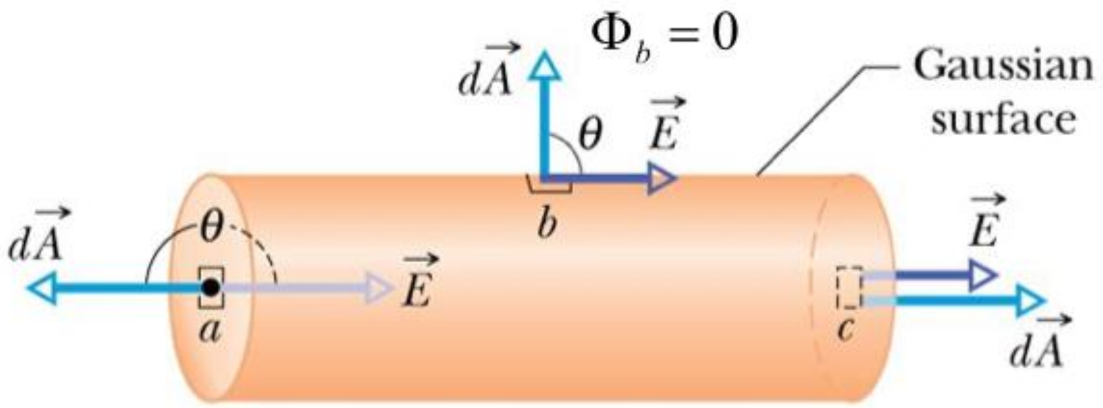
Flusso attraverso una superficie chiusa

- Flusso attraverso una superficie chiusa (a volte nei testi si chiama 'superficie gaussiana')
- Linee di campo
  - 1 'entranti' contribuiscono con un flusso negativo
  - 3 'uscenti' contribuiscono con un flusso positivo
  - 2 'tangenti' contribuiscono con un flusso nullo
- Una linea di campo elettrico che attraversa completamente la superficie chiusa contribuisce con un flusso nullo
- Il flusso è proporzionale al conteggio tra linee di campo entranti ed uscenti



Flusso di un campo elettrico uniforme E

- Calcoliamo il flusso di un campo elettrico uniforme nello spazio attraverso una superficie ***Cilindrica Chiusa***



- Flusso Φ_E dimensioni = [E] [L]^2
- Unità di misura Φ_E (Nm^2/C) nel SI

Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico ***E*** attraverso una superficie **Chiusa** è proporzionale alla quantità **Totale** di carica **Contenuta all'Interno** del volume definito dalla superficie chiusa

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}$$

$$\boxed{\Phi_E = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0}}$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

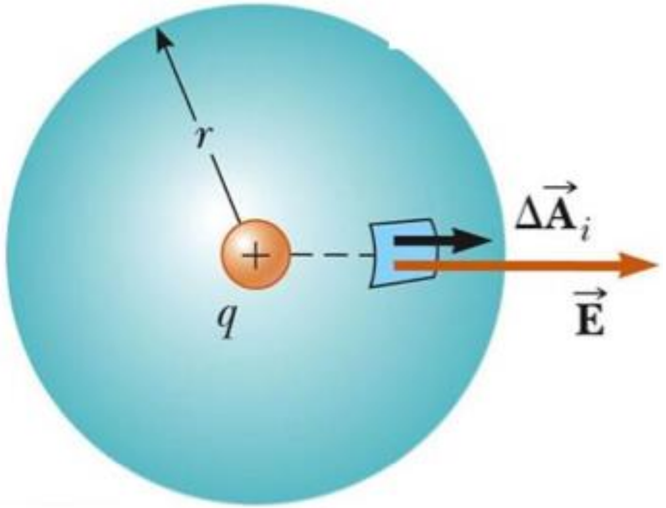
Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico ***E*** attraverso una superficie **Chiusa** è proporzionale alla quantità **Totale** di carica **Contenuta all'Interno** del volume definito dalla superficie chiusa

$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\,m^2}$$

La carica **Contenuta ll'Interno** del volume efinito dalla superficie hiusa contribuisce al usso



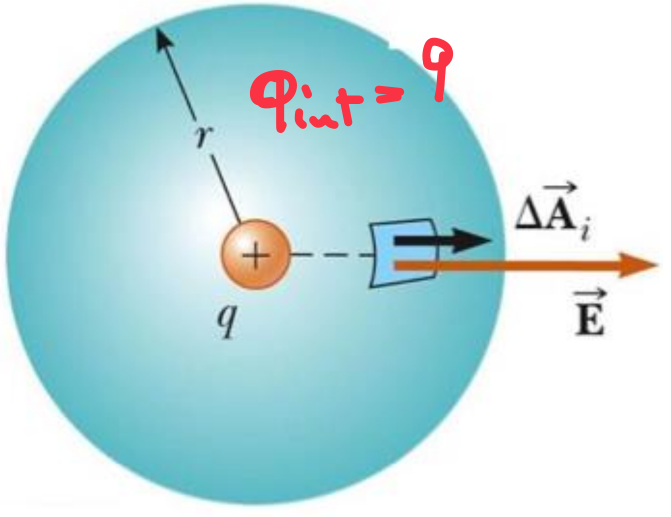
Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico ***E*** attraverso una superficie **Chiusa** è proporzionale alla quantità **Totale** di carica **Contenuta** **all'Interno** del volume definito dalla superficie chiusa

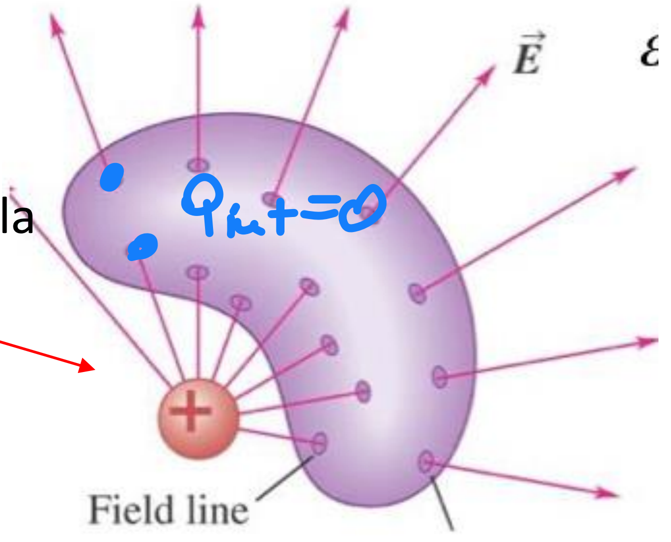
$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2}$$

La carica **Contenuta** **ll'Interno** del volume efinito dalla superficie hiusa contribuisce al usso



La carica **esterna** del volume definito dalla superficie chiusa NON contribuisce al flusso

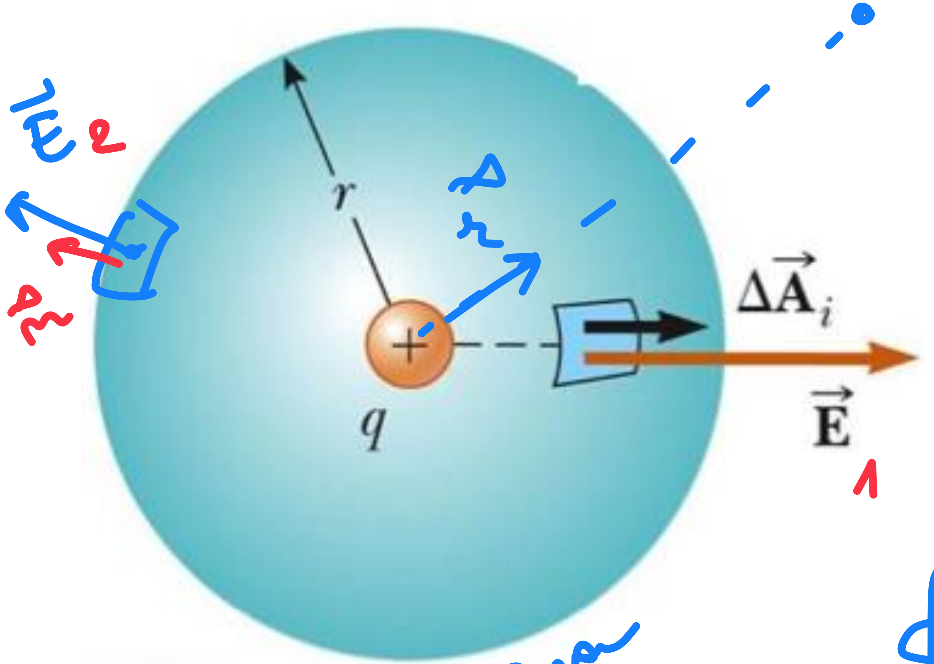


Applicazione: Gauss - Coulomb

- Calcolo il campo ***E*** di una carica puntiforme (a noi gia noto !)

(+)

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



$$\oiint_{\text{sfera}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ simmetria sferica

$\vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = E\, dA$ $\quad \vec{E} \parallel \hat{n}$

$$\oiint_{\text{sferica}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = \oiint_{\text{sfera}} E\, dA = E \oiint_{\text{sfera}} dA = E\cdot 4\pi r^2$$

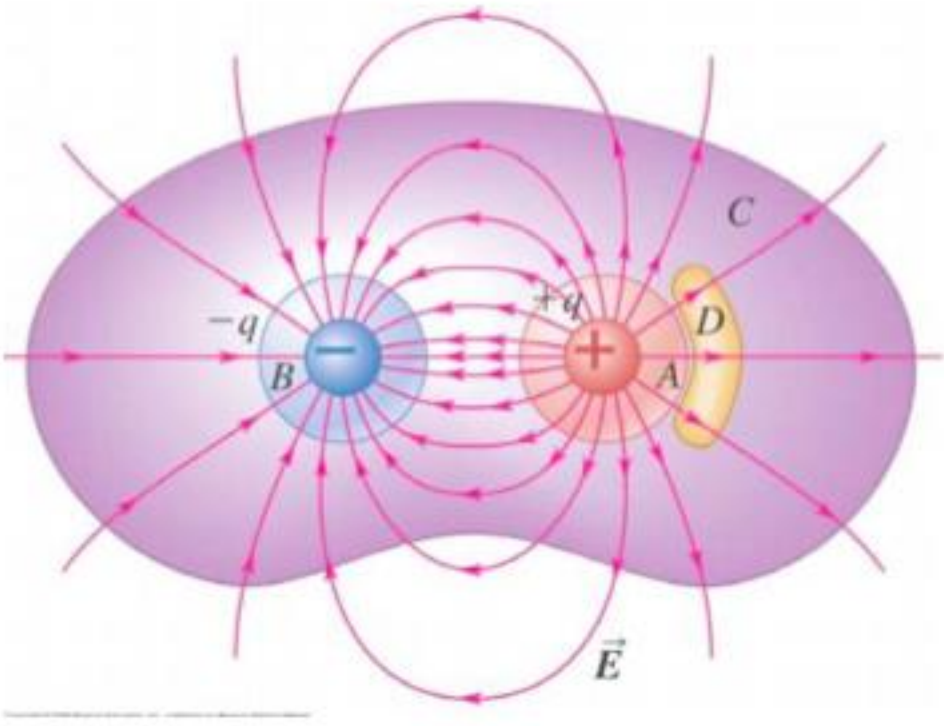
$E\, 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ sfera $\qquad E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Teorema di Gauss: dimostrazione

Esempio: il dipolo elettrico

Consideriamo un campo di dipolo di carica q, e calcoliamo il flusso attraverso le 4 superfici chiuse in figura:

- ✓ La superficie *A* contiene la carica positiva del dipolo
- ✓ La superficie *B* contiene la carica negativa del dipolo
- ✓ La superficie *C* racchiude entrambe le cariche, per cui la carica netta è nulla
- ✓ La superficie *D* non ha carica al suo interno



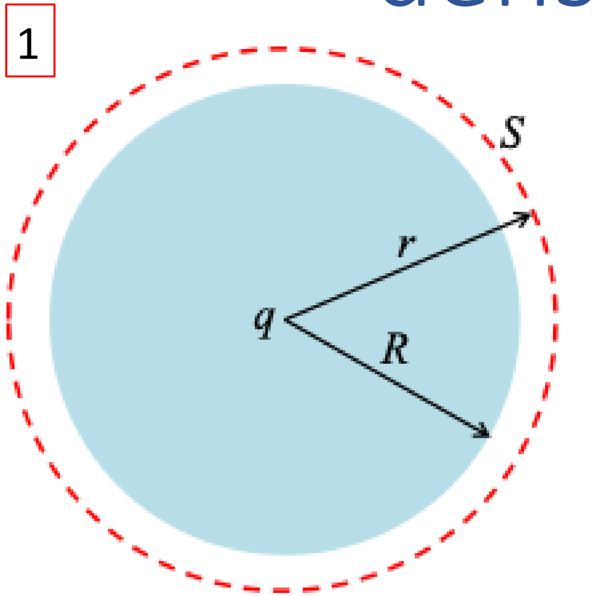
$$\Phi_A = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_B = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

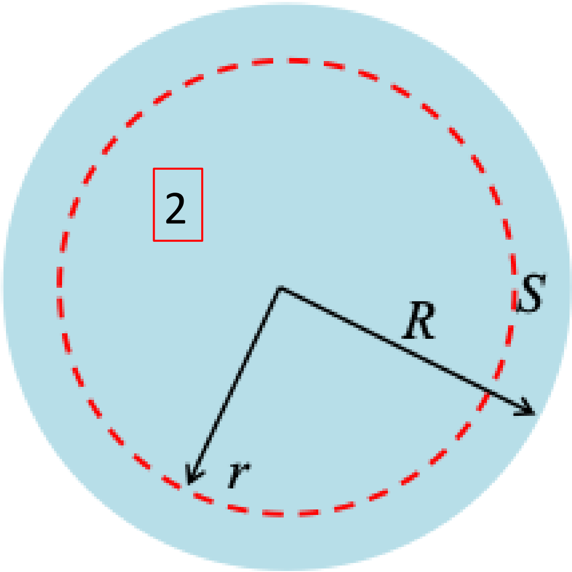
$$\Phi_C = 0 \qquad \Phi_D = 0$$

La superficie scala come $1/R^2$

Il campo scala come $1/R^3$

Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

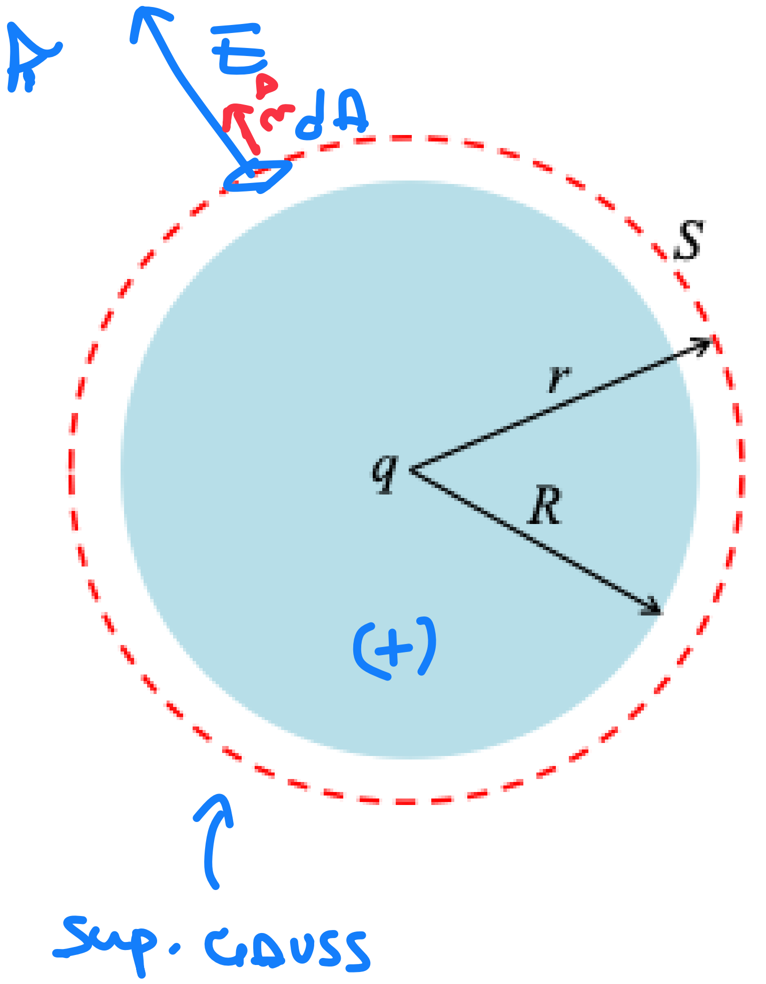




- L’intero spazio 3D è diviso in 2 regioni, il problema ci porta a determinare due soluzioni:
  1) Lo spazio esterno alla sfera (privo di cariche)
     - Campo all’esterno della sfera $\vec{E}_{esterno}$
  2) Lo spazio interno della sfera (è presente la carica di volume)
     - Campo all’interno della sfera $\vec{E}_{interno}$

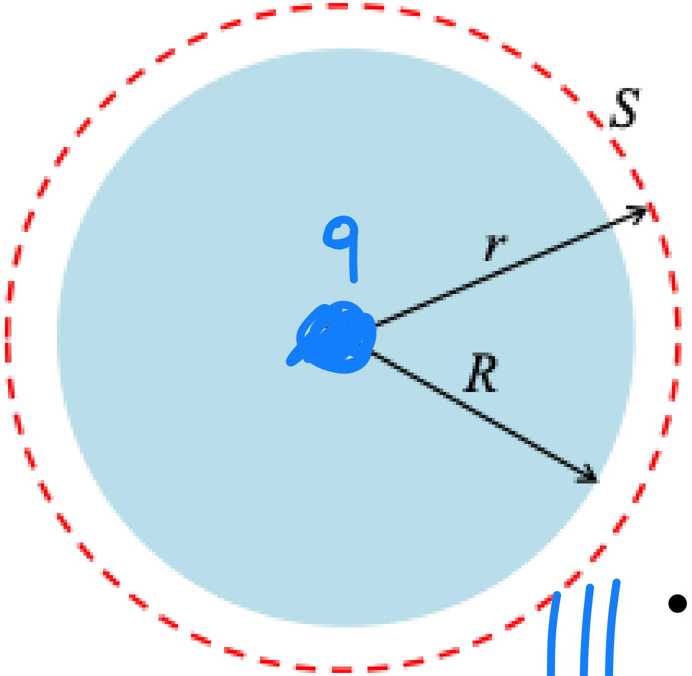
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

- Campo all'esterno della sfera



Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

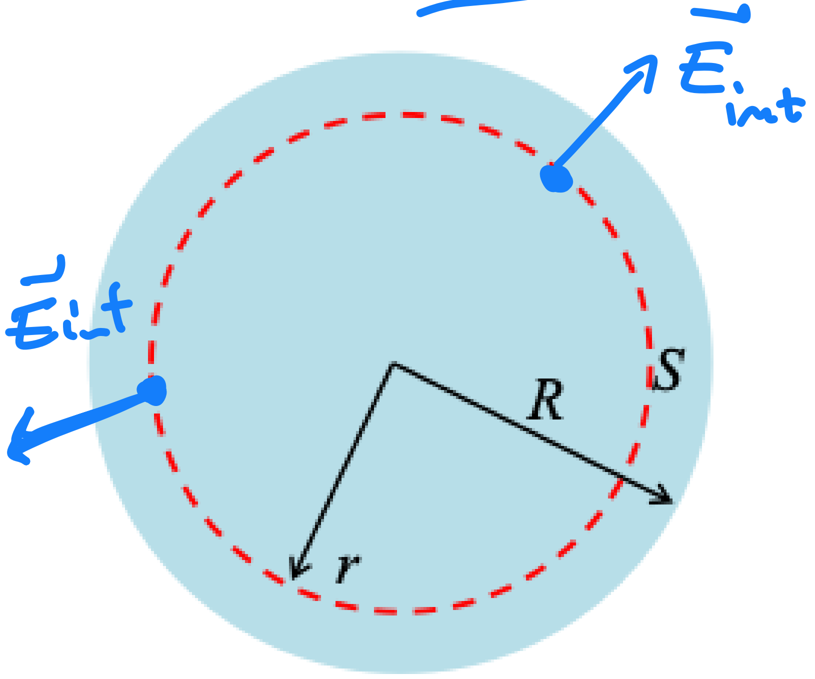
- Campo all'esterno della sfera



- Il campo generato dalla **sfera uniformemente carica in un punto esterno alla sfera** è uguale al campo generato da una carica **puntiforme q corrispondente alla carica totale della sfera, posta nel centro della sfera**

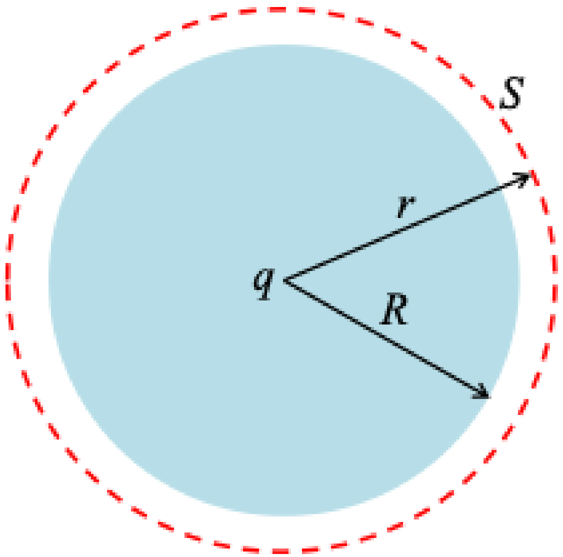
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

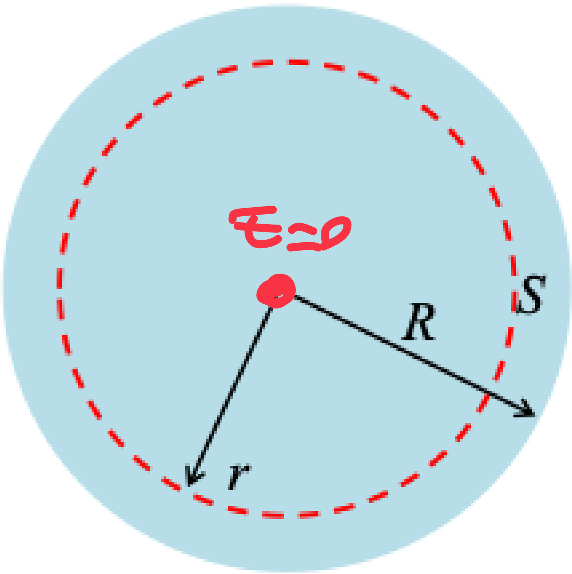
- Campo all'interno della sfera



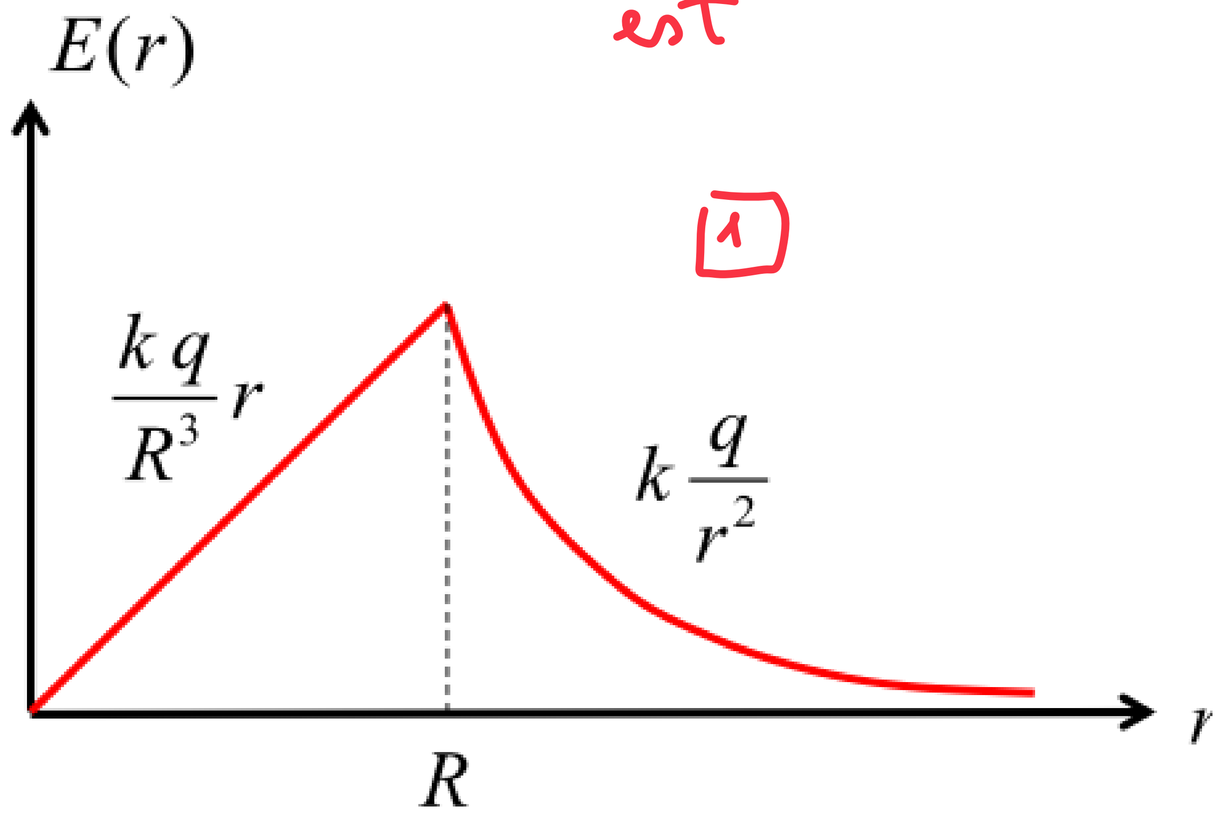
sfera $r < R$ $\qquad r\ [0, R]$

Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme: riepilogo



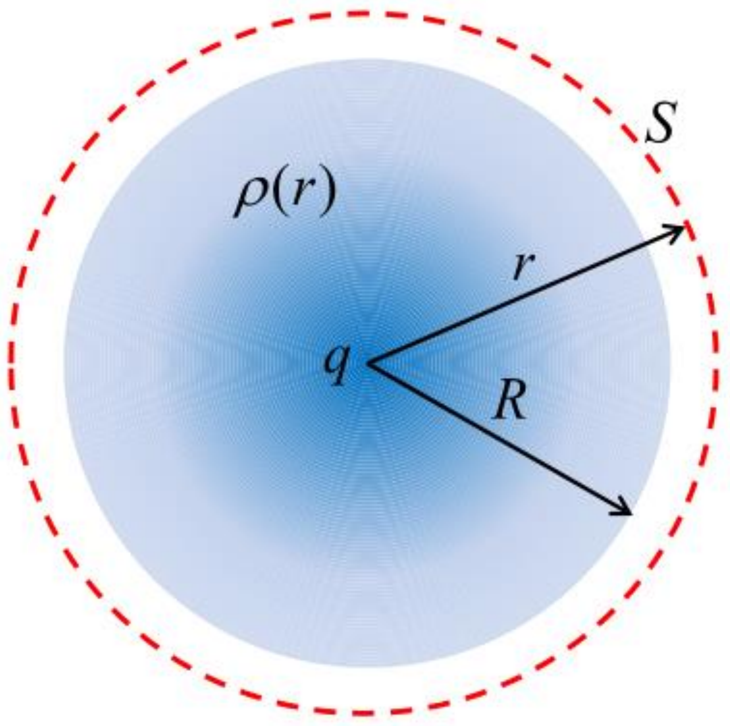


est



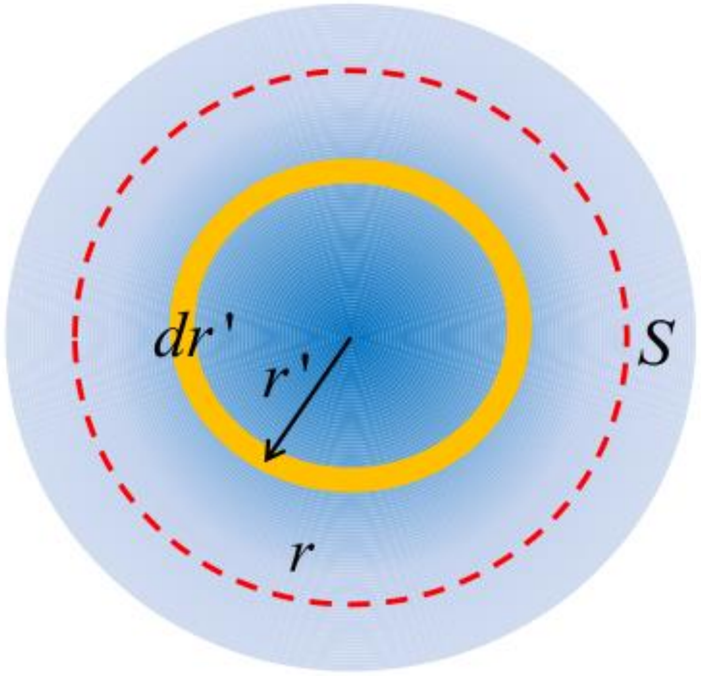
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume ρ(r)

- Campo all'esterno della sfera



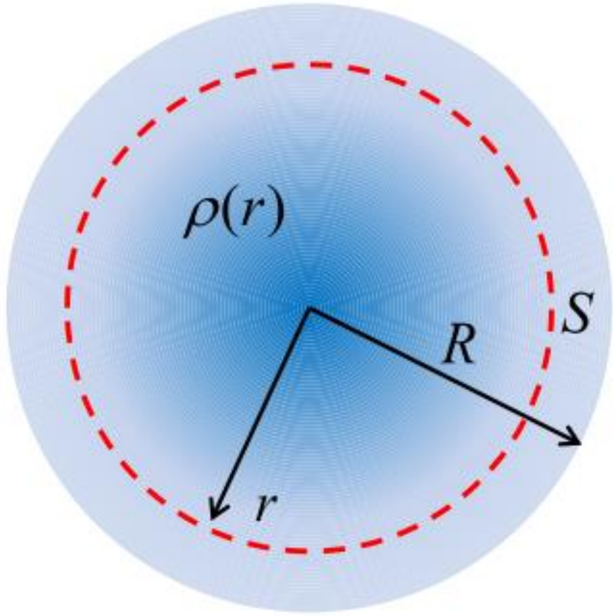
Sfera costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume $\rho(r)$

- Campo all'interno della sfera

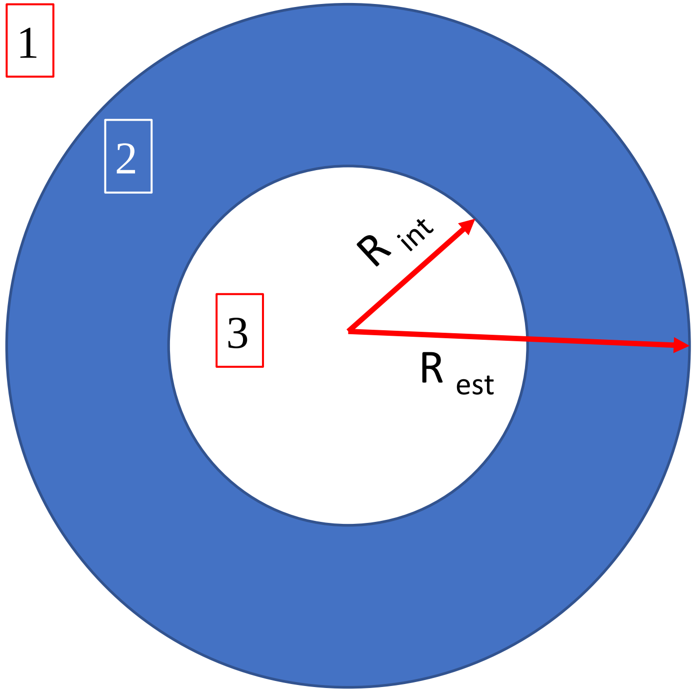


Esempio

- Consideriamo una sfera isolante carica di raggio R= 4 cm e densità radiale $\rho(r) = A/r$, A = 1 mC/m^2;
- determinare il campo elettrico per distanze dal centro r = 2 cm, r = 4 cm, r = 8 cm



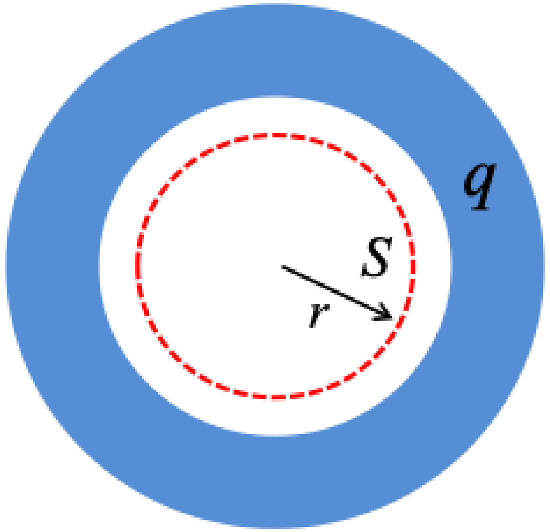
Guscio sferico costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme



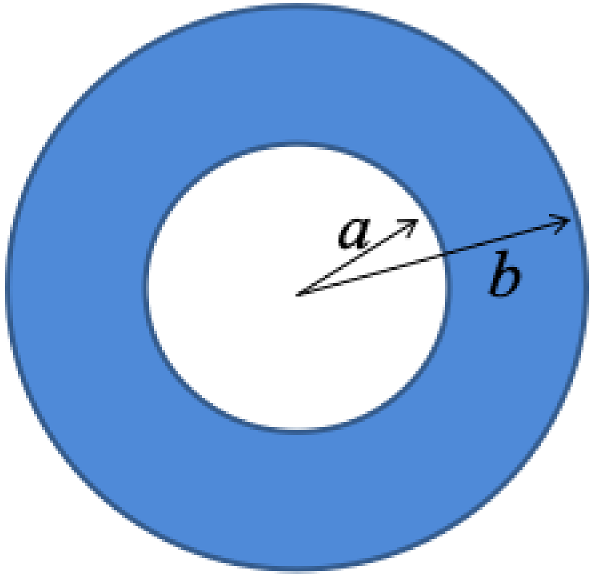
- L'intero spazio 3D è diviso in 3 regioni, il problema ci porta a determinare tre soluzioni:
    1) Lo spazio esterno al guscio ($r > R_{est}$ privo di cariche)
        - Campo all'esterno della guscio $\boldsymbol{E_{esterno}}$
    2) Lo spazio interno al guscio ($R_{int} < r < R_{est}$ è presente la carica di volume)
        - Campo all'interno al guscio $\boldsymbol{E_{interno}}$
    3) Lo spazio interno della cavita del guscio ($r < R_{int}$ privo di cariche)
        - Campo all'interno al guscio $\boldsymbol{E_{cavita}}$

Guscio sferico costruita da cariche puntiformi distribuite con densità di carica di volume uniforme

- Campo all'interno della cavita del guscio sferico



Problema

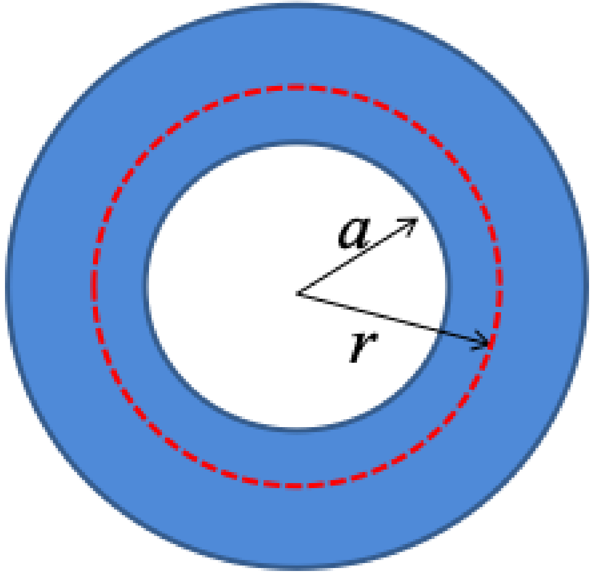


Sia dato un guscio sferico isolante carico, con carica distribuita uniformemente q_s =3 μC, raggio interno *a*=5 cm ed esterno *b*=10 cm

a) Scrivere l'espressione del campo elettrico *E(r)* in funzione della distanza *r* per *r* < *a* (nella cavità), per *a* > *r* > *b* (nel guscio), per *r* > *b* (esterno al guscio)
b) Calcolare l'intensità del campo elettrico nei punti *r* = 2 cm, *r* =7 cm, *r* =10 cm

Applicando le due regole dei gusci isolanti si ottiene immediatamente:

$$r < a \quad E(r) = 0 \qquad\qquad r > b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$



In un punto a distanza *r* dal centro interno al guscio il campo elettrico è dato da:

$$E(r) = k\frac{q'(r)}{r^2}$$

q'(r) è la sola carica contenuta all'interno della sfera di raggio *r*

Problema

Calcoliamo *q′(r)* sfruttando il fatto che la densità di carica ρ è uniforme:

$$\rho = \frac{q'(r)}{V(r)} = \frac{q_s}{V_{TOT}} \quad \Rightarrow q'(r) = q_s \frac{V(r)}{V_{TOT}}$$

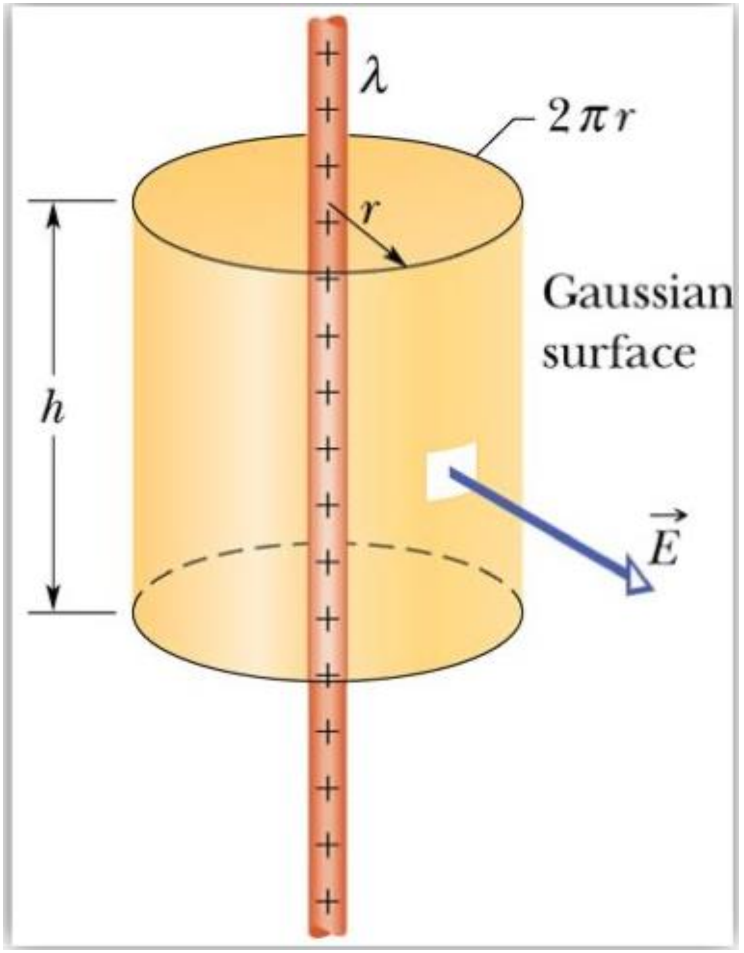
Chiaramente V_{TOT} è il volume totale del guscio, $V(r)$ il volume della porzione di guscio interna alla sfera di raggio r:

$$V_{TOT} = \frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right) \qquad V(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - a^3\right)$$

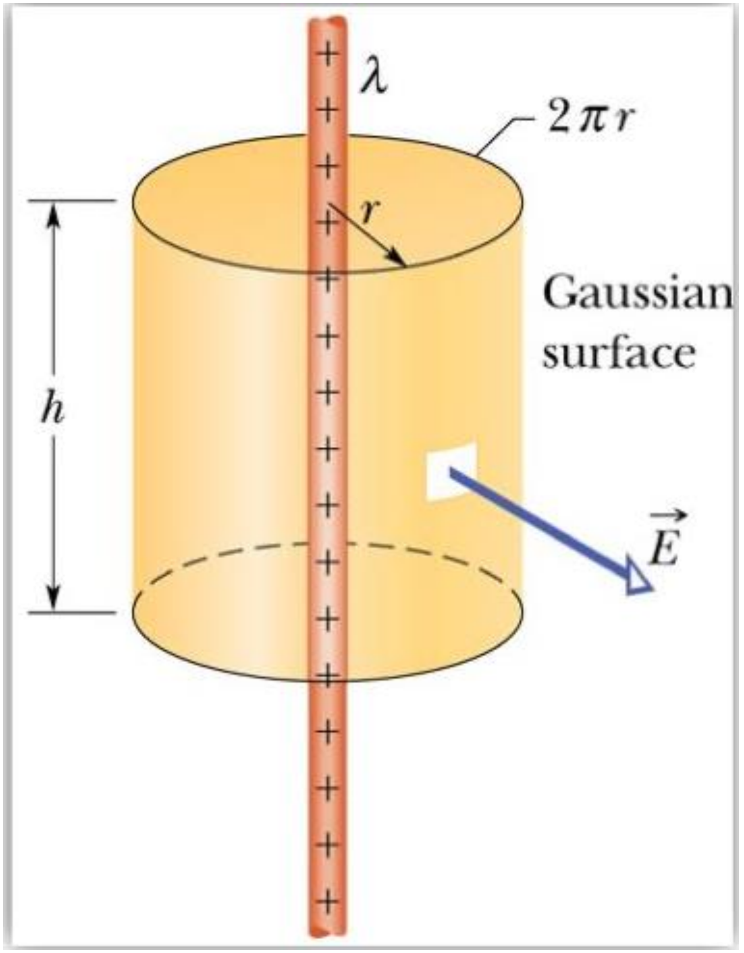
$$\frac{V(r)}{V_{TOT}} = \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \quad \Rightarrow E(r) = k\frac{q_s}{r^2}\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

$$\begin{cases} r = 7\,cm \quad E = 9\times10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{49\times10^{-4}m^2}\left(\dfrac{7^3 - 5^3}{10^3 - 5^3}\right) = 0.137\times10^7 (N/C) \\ r = 10\ cm \quad E = 9\times10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{3\mu C}{10^{-2}m^2} = 0.27\times10^7 (N/C) \end{cases}$$

Campo generato da una distribuzione lineare di cariche uniforme e di lunghezza infinita



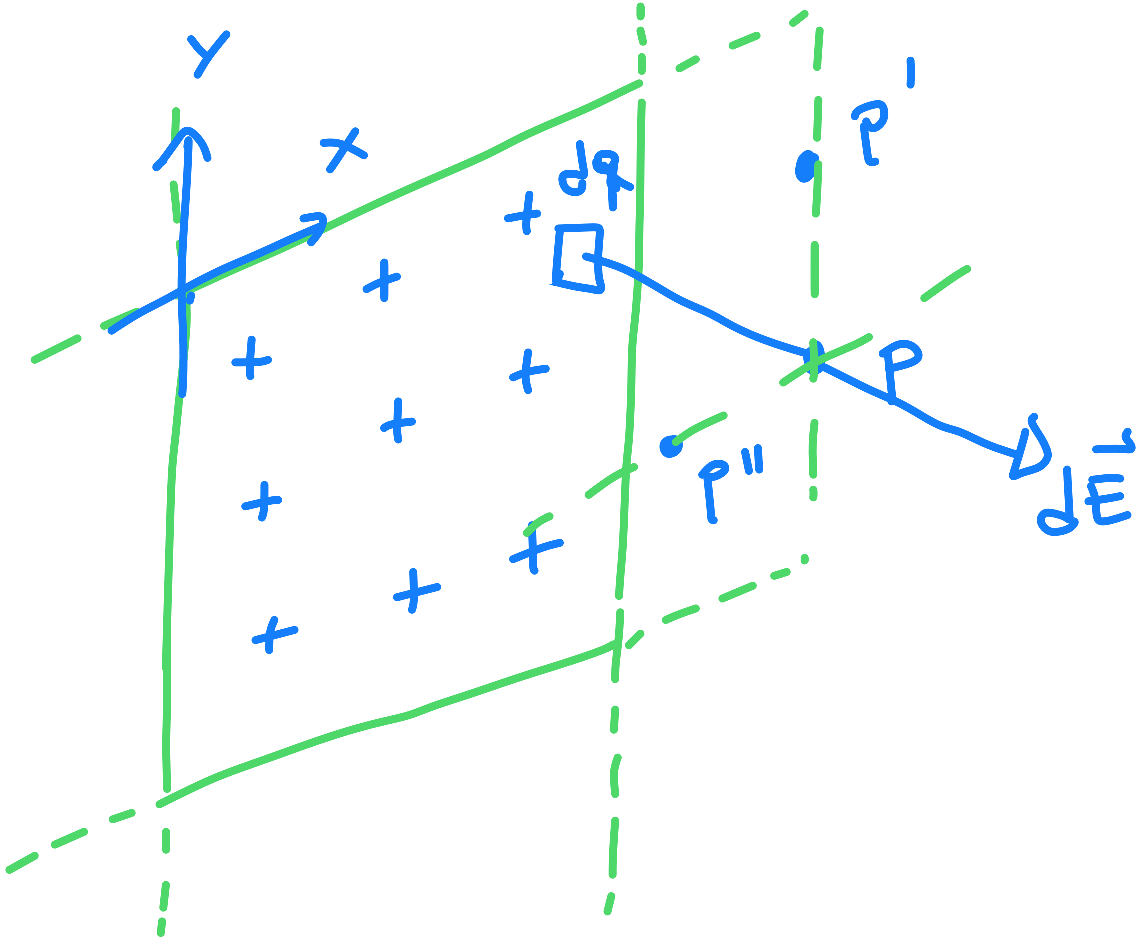
Campo generato da una distribuzione lineare di cariche uniforme e di lunghezza infinita



Piano carico costruito con densità di carica uniforme

- Consideriamo il piano come un insieme di cariche 2D (senza volume fisico ‘interna’)
- Il piano di dimensione infinita è ricoperto con una vernice carica di densità ad esempio uniforme
- La quantità usata di carica è necessariamente infinita.

$\sigma \quad C/m^2 \qquad dq = \sigma dA$



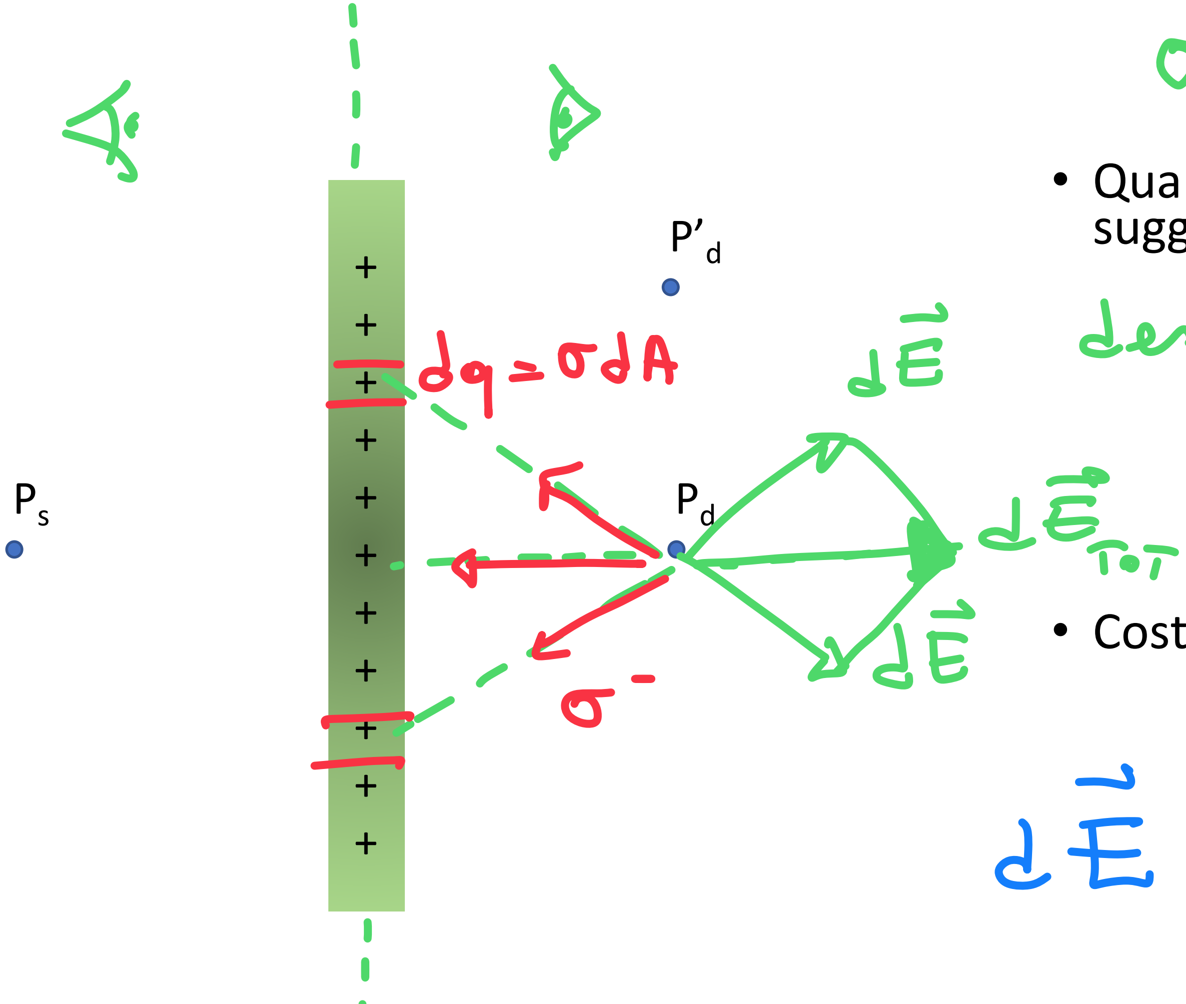
- Quali sono le simmetrie del campo E che possiamo suggerire?

- Costruiamo il campo E a partire da cariche infinitesime

Piano carico costruito con densità di carica uniforme

- Consideriamo il piano come un insieme di cariche 2D (senza volume fisico 'interna')
- Lo spazio è quindi diviso in due parti : a sinistra (1) ed a destra (2) del piano carico

σ^+



- Quali sono le simmetrie del campo E che possiamo suggerire?

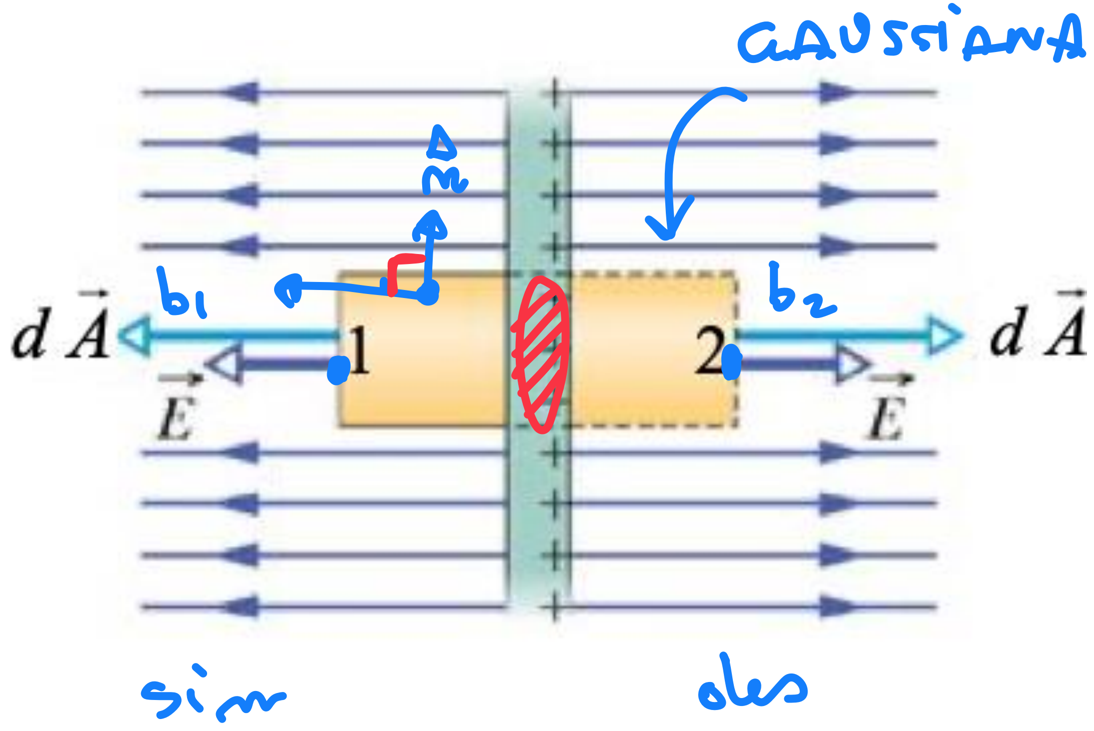
destra – sinistra

- Costruiamo il campo E a partire da cariche infinitesime

$d\vec{E} \perp$ al piano

Piano carico costruito con densità di carica uniforme

- Consideriamo il piano come un insieme di cariche 2D (senza volume fisico ‘interna’)
- Lo spazio è quindi diviso in due parti : a sinistra (1) ed a destra (2) del piano carico
- La quantità usata di carica è necessariamente infinita.



- Applichiamo il teorema di Gauss:

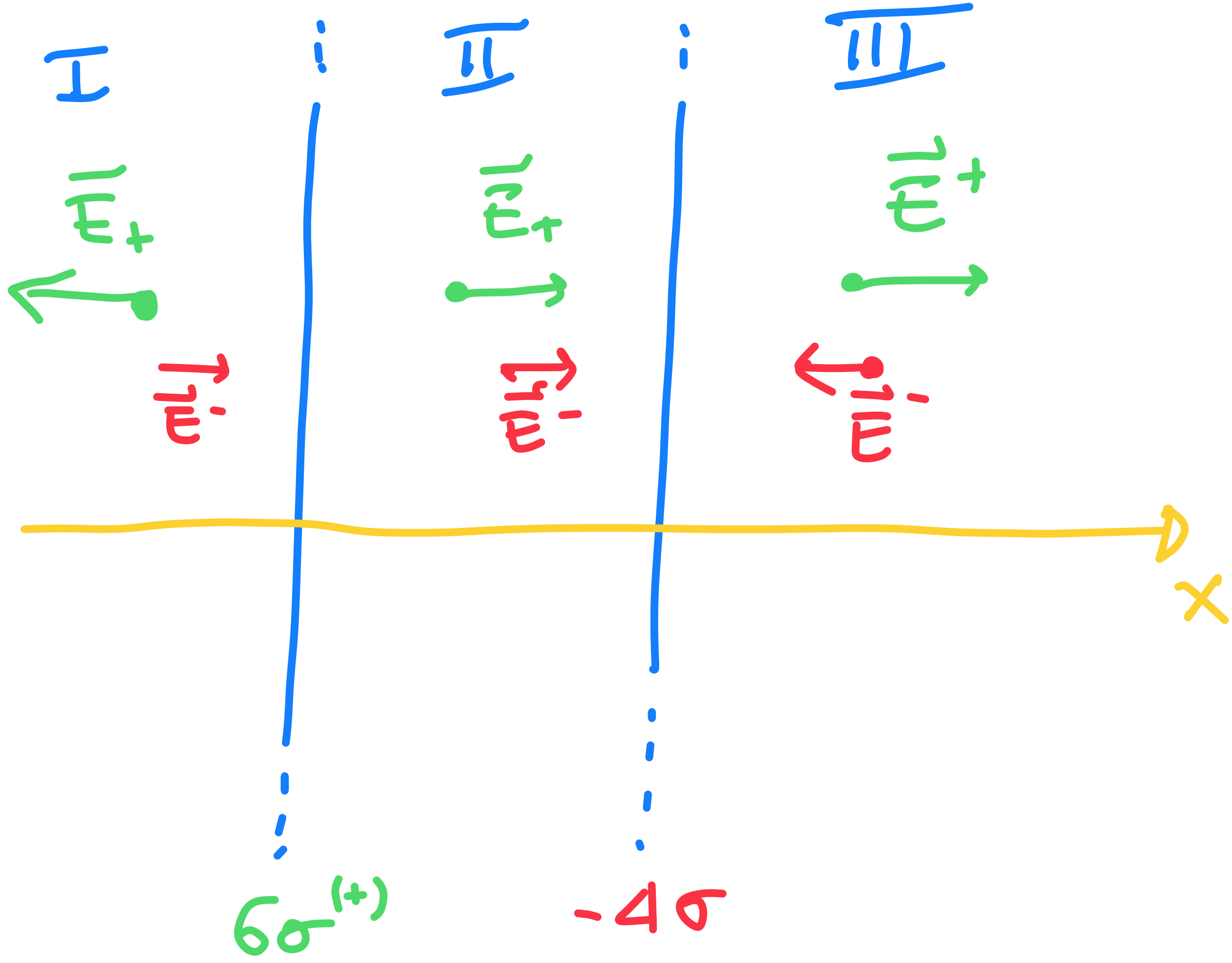
$$\phi_{cil} = \oiint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$\phi_{cil} = \phi_{b_1} + \phi_{b_2} = 2\pi r^2 E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$q_{int} = \sigma \pi r^2$$

$$2\cancel{\pi r^2}\,E = \frac{\sigma \cancel{\pi r^2}}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$



σ = num. positivo

$$\vec{E}_{I} = -E^{+}\hat{i} + E^{-}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{II} = E^{+}\hat{i} + E^{-}\hat{i}$$

$$\vec{E}_{III} = E^{+}\hat{i} - E^{-}\hat{i}$$

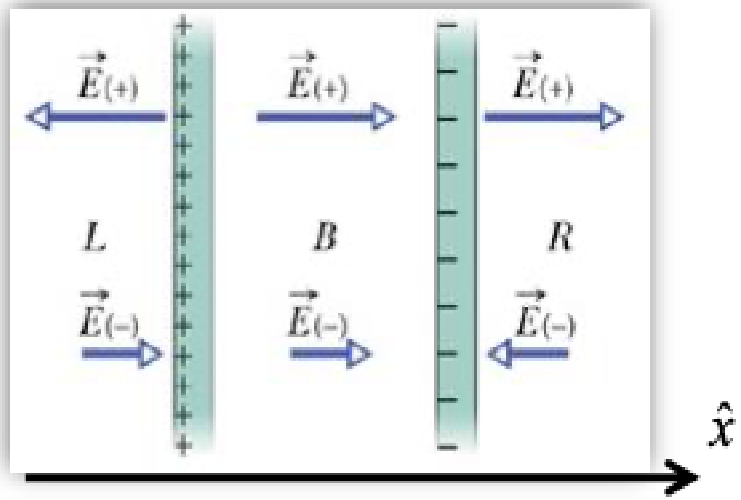
$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}$$

$$E^{+} = \frac{6\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{3\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E^{-} = \frac{4\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}$$

Problema 23.6

Consideriamo due **lamine isolanti parallele** con densità $\sigma_+ = 6\sigma$, $\sigma_- = -4\sigma$, $\sigma = 1\ mC/m^2$; calcolare il campo tra le lamine e nelle regioni esterne. Essendo le lamine isolanti, il campo totale è la somma dei campi di ciascuna piastra; sia *x* l'asse perpendicolare alle piastre.



Regione interna:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{5\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{5\mu C/m^2}{8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.56\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

Regione esterna destra:

$$\vec{E} = \left(\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{1\mu C/m^2}{8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\,m^2}}\hat{x} = 0.11\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

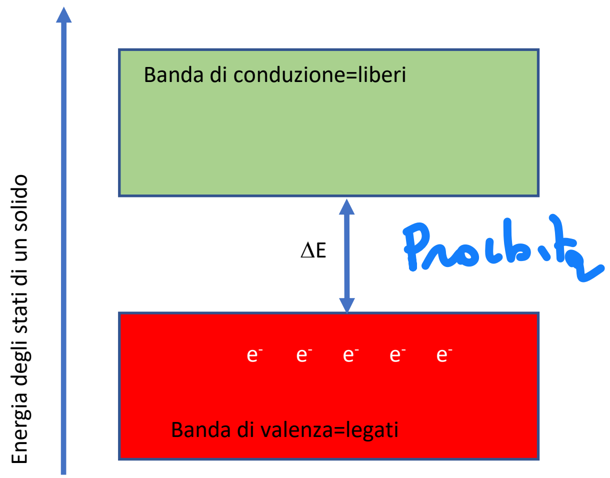
Regione esterna sinistra:

$$\vec{E} = \left(-\frac{6\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = -0.11\times10^6\ \frac{N}{C}\hat{x}$$

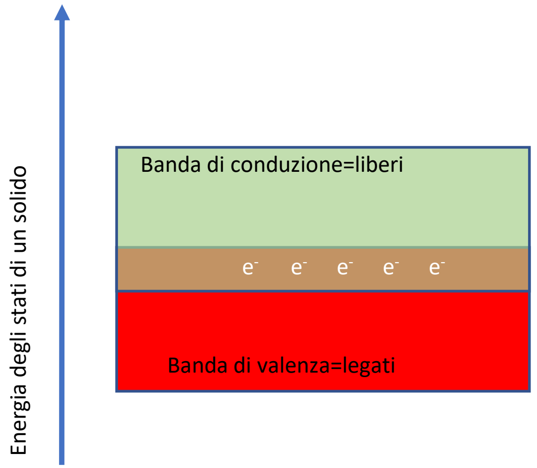
Distribuzioni di cariche nei mezzi materiali

- Materia ordinaria composta da atomi (p^+, n^0, e^-) con diversi tipi di legame
  - Reticoli solidi con atomi posti in posizioni "strategiche"

- *Materiali isolanti*
  - Nel materiale **isolante** gli **elettroni** atomici sono saldamente legati agli atomi di appartenenza ed a quelli vicini nei legami.



- *Conduttori solidi*
  - La caratteristica principale di un corpo solido conduttore è data dalla presenza di **elettroni liberi**, quindi capaci di reagire a sollecitazioni elettrostatiche esterne.
    - Nei materiali conduttori la struttura cristallina di legame metallico è tale per cui almeno **un elettrone per atomo si può considerare** libero di vagare all'interno del materiale.

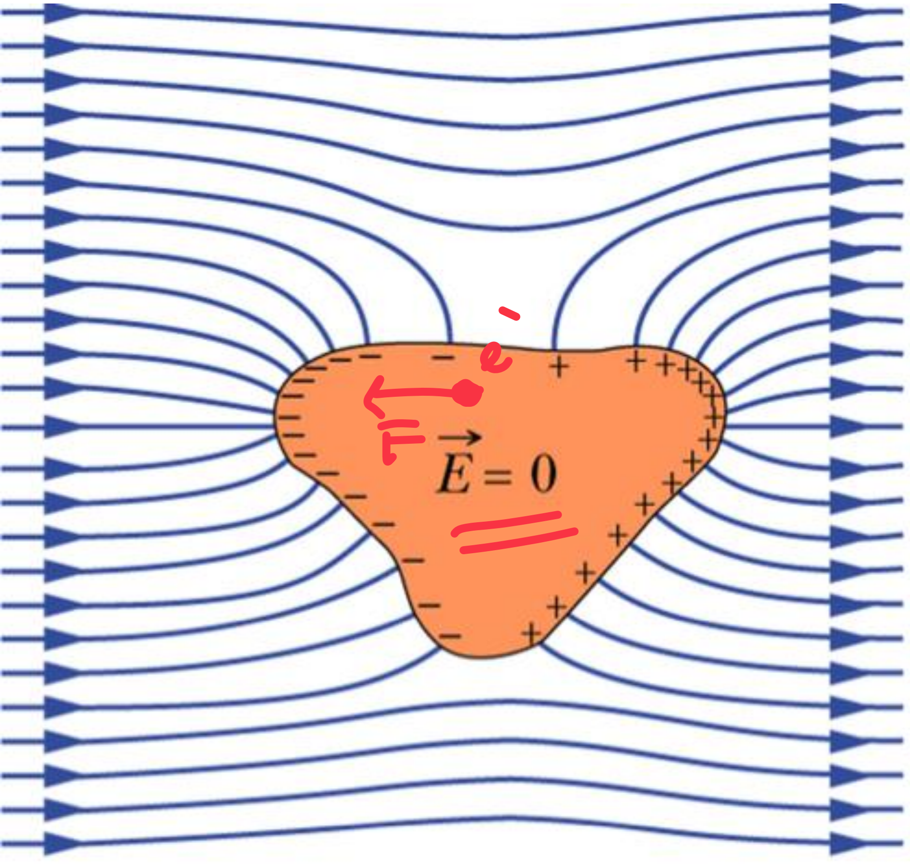


Distribuzioni di cariche nei mezzi conduttori

- Conduttore neutro immerso in un campo elettrico esterno, $\boldsymbol{E}_{est}$, *(uniforme)* creato da sorgenti fisse (ad esempio piano carico)

$\vec{F}_e = e^- \vec{E}$

→ E uniforme



- Periodo ‘**transiente**’
  - con cariche in movimento
- prima di raggiungere la condizione di ‘**equilibrio**’ elettrostatico
  - cariche immobili nella loro posizione finale

- Fenomeno della ***Induzione elettrostatica***: all’equilibrio (cariche libere (e^-) non più in moto) si osserva una distribuzione di cariche nette (“+” e “- “) localizzate sulla superficie del corpo solido
  - **Il risultato è E_{int}=0 all’interno del corpo conduttore**

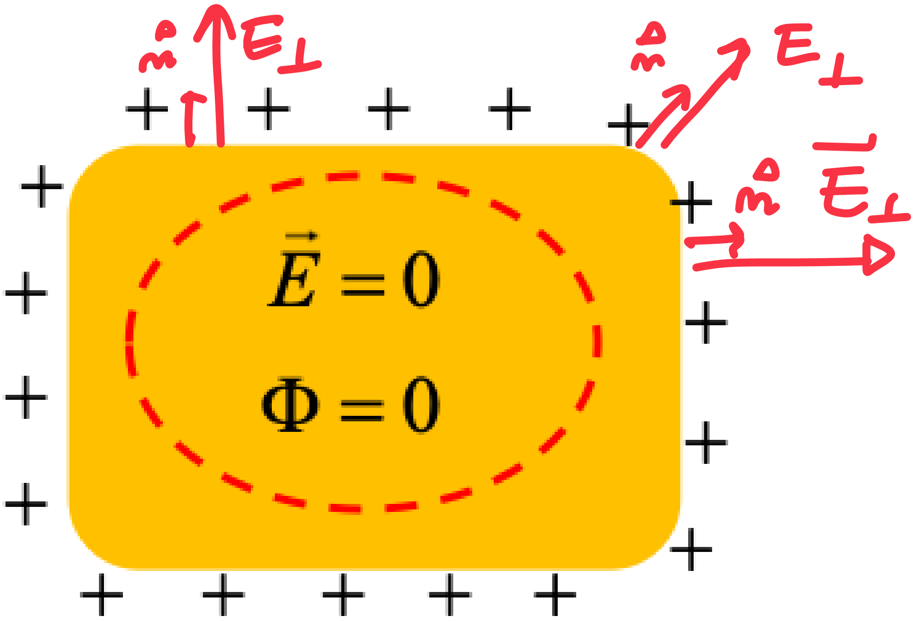
- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
  - **Gauss assicura che non può esistere carica all’interno del corpo conduttore**

$E_{int} = E_{sorg.} + E_{cond}$

Equilibrio elettrostat

Distribuzioni di cariche nei mezzi conduttori

- Conduttore solido esplicitamente carico (ad es. con cariche positive) ed isolato dal mondo esterno:

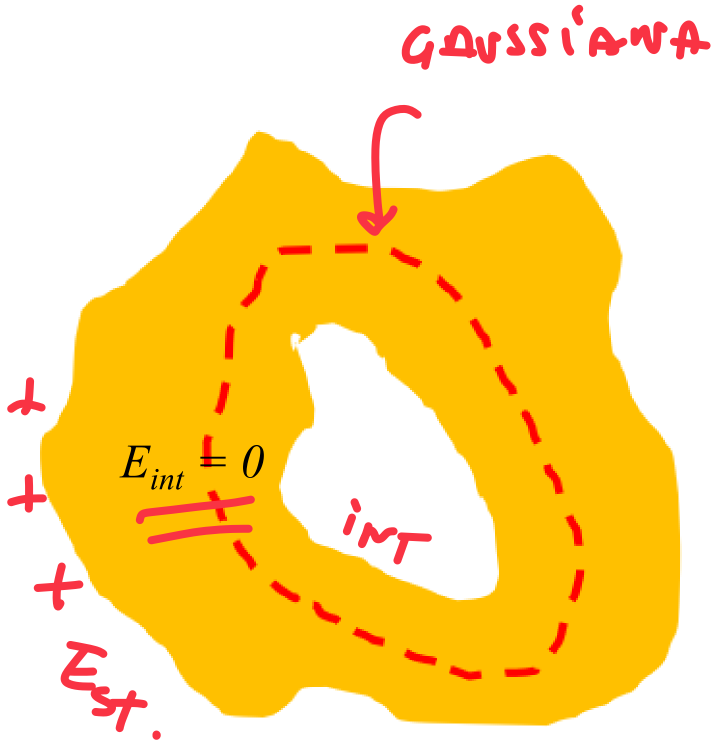


- A seguito di un periodo transiente si raggiunge l'equilibrio elettrostatico: $E_{int} = 0$
- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
  - **Gauss assicura che non può esistere carica all'interno del corpo conduttore**
- Il flusso di E è non nullo solo se *'la superficie' del conduttore'* è contenuta all'interno della superficie su cui applico il teorema di Gauss.

- Possono dislocarsi sia cariche (+) sia e^- del materiale
  - La soluzione dipende molto dalla geometria del corpo
    - In questo caso specifico non è necessario ridistribuire gli elettroni

Legge di Gauss applicata ai materiali conduttori

- Conduttore con cavita interna (priva di cariche) :

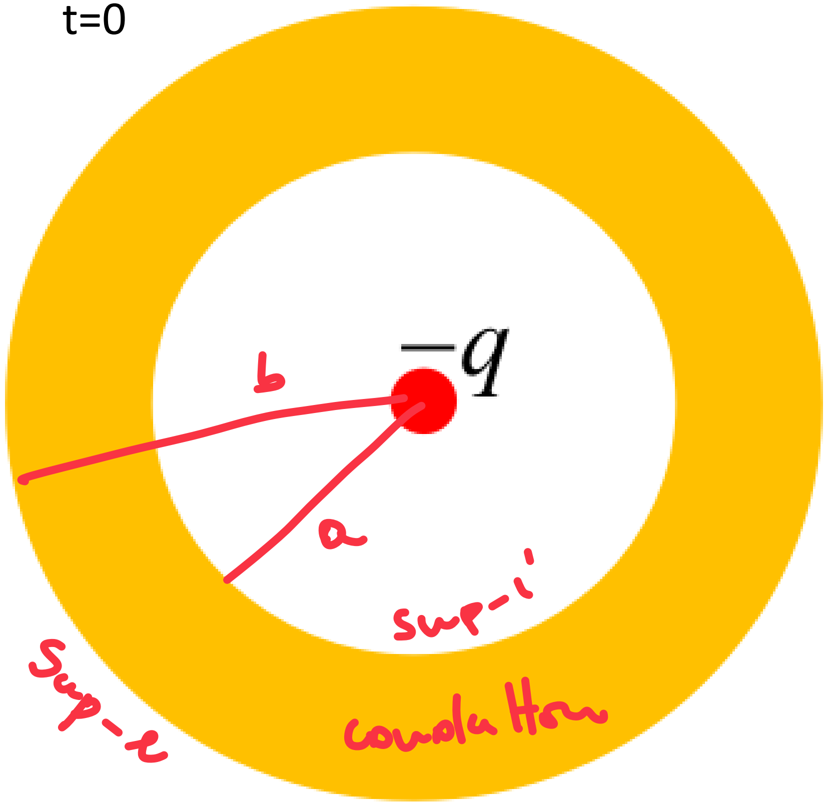


- All'equilibrio elettrostatico $E_{int}=0$
- Flusso di E attraverso qualsiasi superficie interna è nullo
- Gauss assicura che:
  - Non può esistere carica all'interno del corpo conduttore
  - Non può esistere una carica non nulla nella superficie interna
- La carica si può trovare solo sulla superficie 'esterna'

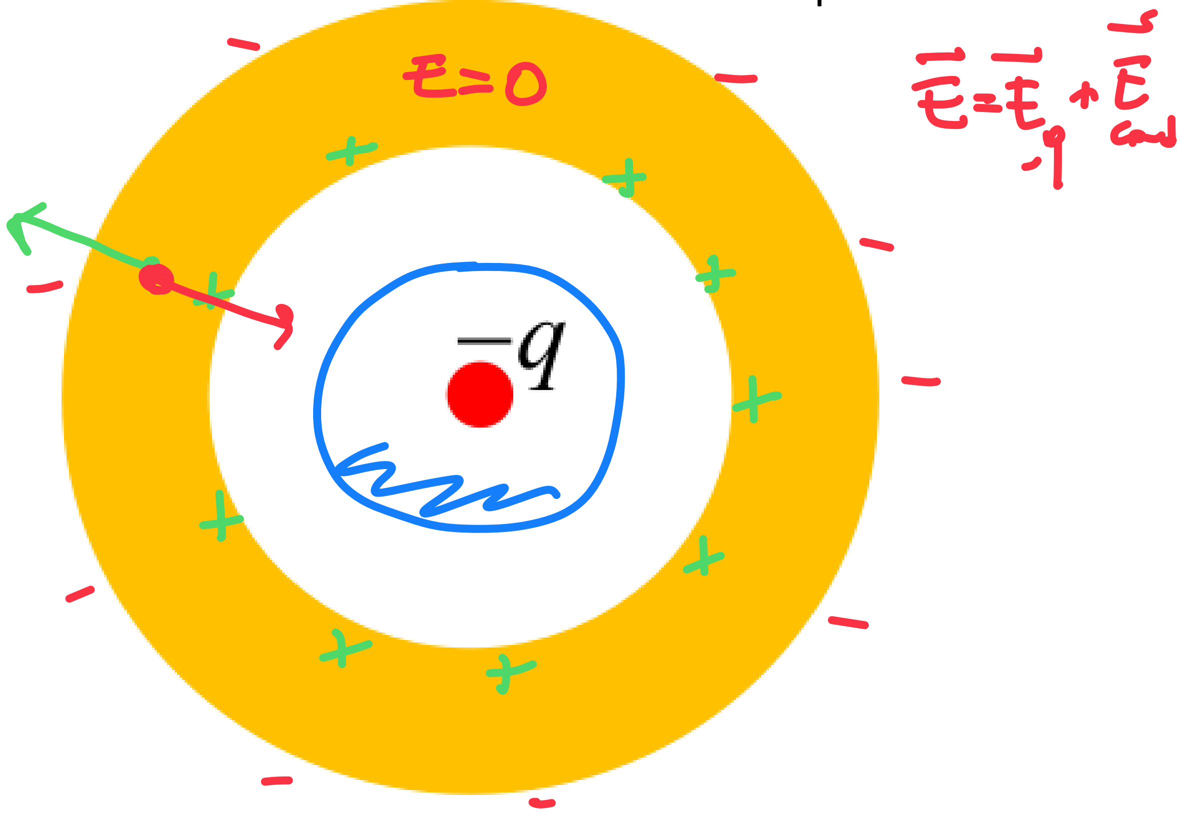
Carica puntiforme ‘nascosta’ al centro di un guscio conduttore scarico

- Analizziamo (Prevediamo) la situazione all’equilibrio elettrostatico

t=0



t= equilibrio

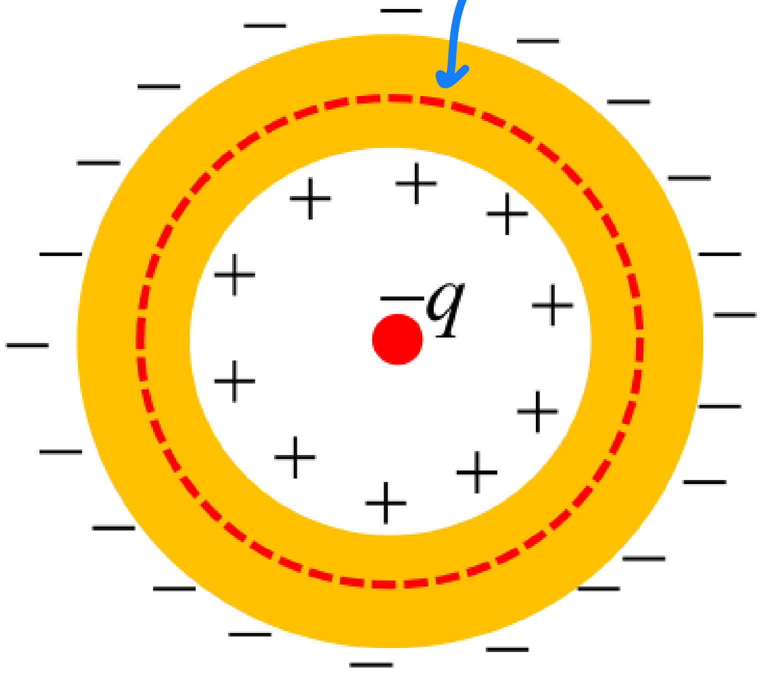


- Per costruzione il problema presenta una simmetria sferica

Carica puntiforme 'nascosta' al centro di un guscio conduttore scarico

- Analizziamo la situazione all'equilibrio elettrostatico: all'interno del conduttore

gaussiana



$$\Phi_{sfera} = \oint\!\!\!\oint_{sfera} \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = 0 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

$$q_{int} = -q + q_{sup-i}$$

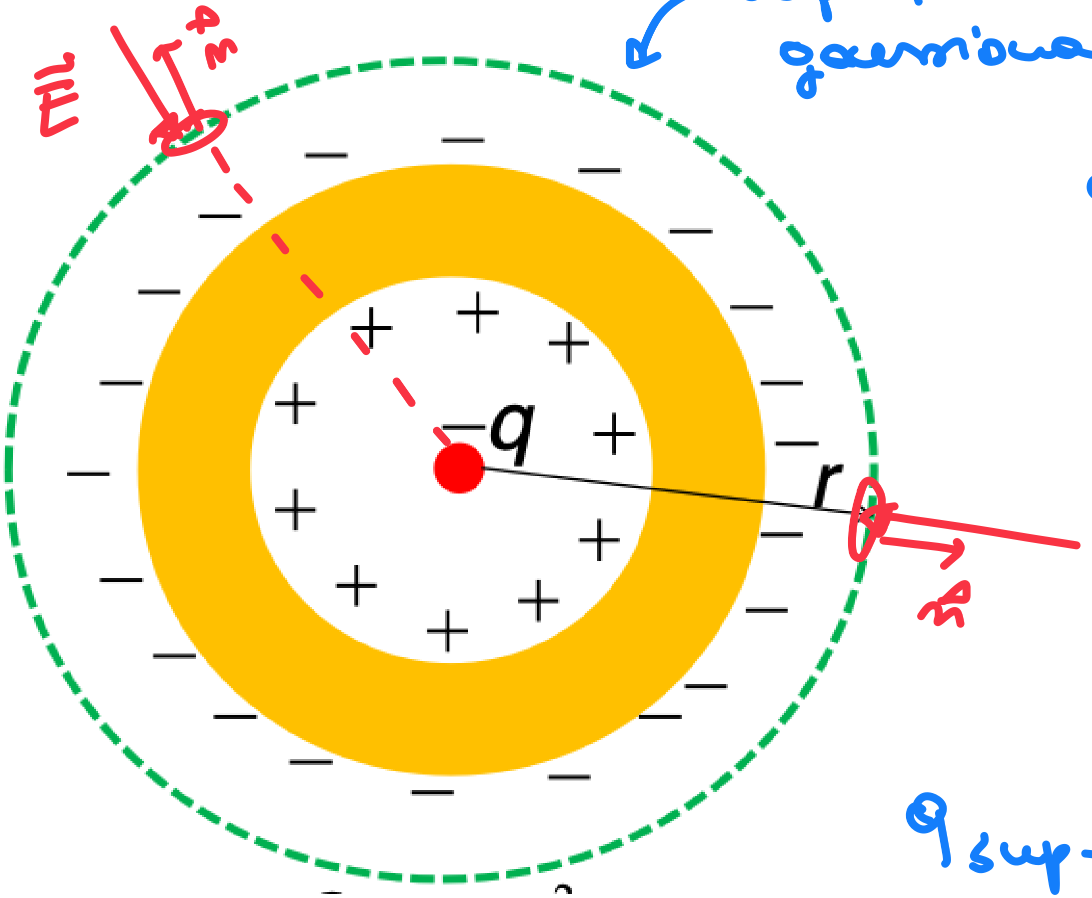
$$q_{sup-i} = q$$

$$\sigma_{sup-i} = \frac{q}{4\pi a^2}$$

Carica puntiforme ‘nascosta’ al centro di un guscio conduttore scarico

$$\vec{E}_{est} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

- Analizziamo la situazione all’equilibrio elettrostatico: all’esterno del conduttore



superf. gaussiana

$r > b$

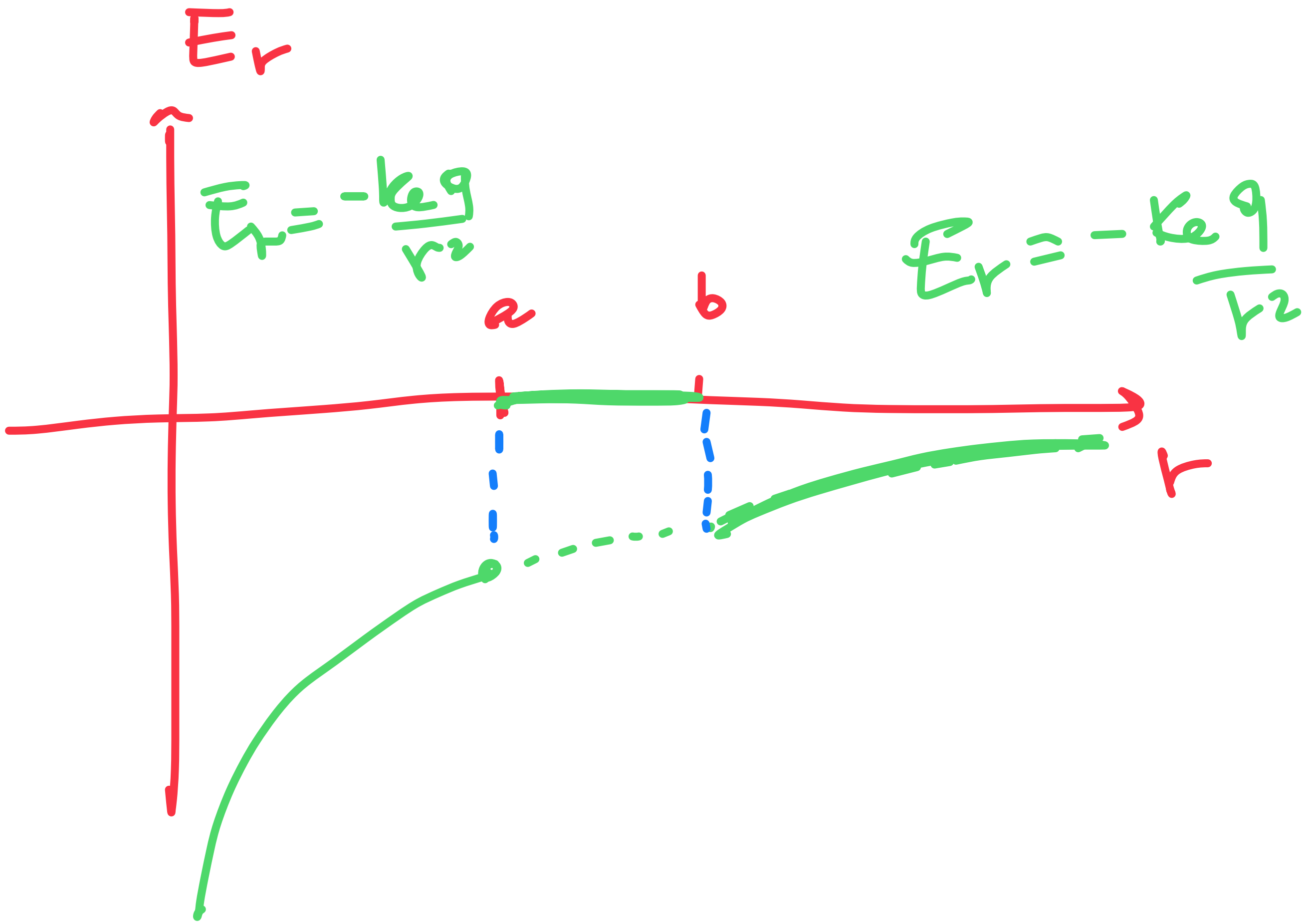
$$\Phi_{sfera} = \oint_{sfera} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = E\, 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \qquad \frac{-q}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[-q + q_{sup-i} + q_{sup-e}\right]$$

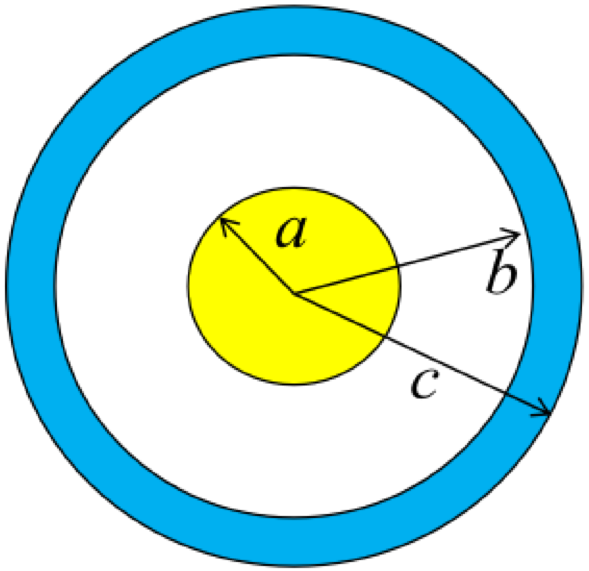
$$q_{sup-i} + q_{sup-e} = 0$$ conduttore scarico

$$q_{sup-e} = -q_{sup-i} = -q \qquad \sigma_{sup-e} = \frac{-q}{4\pi b^2}$$

$$\vec{E} = E_r \hat{r}$$



Problema



La sfera gialla isolante con carica uniforme q_s = 3 μC e raggio a=2 cm è posta al centro di un guscio conduttore sferico con raggio interno b = 6 cm e raggio esterno c =7 cm; sul guscio è presente una carica q_c = -7 μC.

1) scrivere l'espressione $E(r)$ del campo elettrico in funzione della distanza dal centro, nella regione interna alla sfera ($r < a$), interna alla cavità ($a < r < b$), interna al guscio ($b < r < c$), ed esterna al guscio ($r > c$)
2) Determinare la carica Q accumulata sulla superficie interna ed esterna del guscio
3) Calcolare l'intensità del campo nei punti r=1 cm, r=5 cm, r=10 cm

$$r < a \quad E(r) = k\frac{q_s}{a^3}r$$

$$a < r < b \quad E(r) = k\frac{q_s}{r^2}$$

$$b < r < c \quad E(r) = 0$$

$$r > c \quad E(r) = k\frac{(q_s + q_c)}{r^2}$$

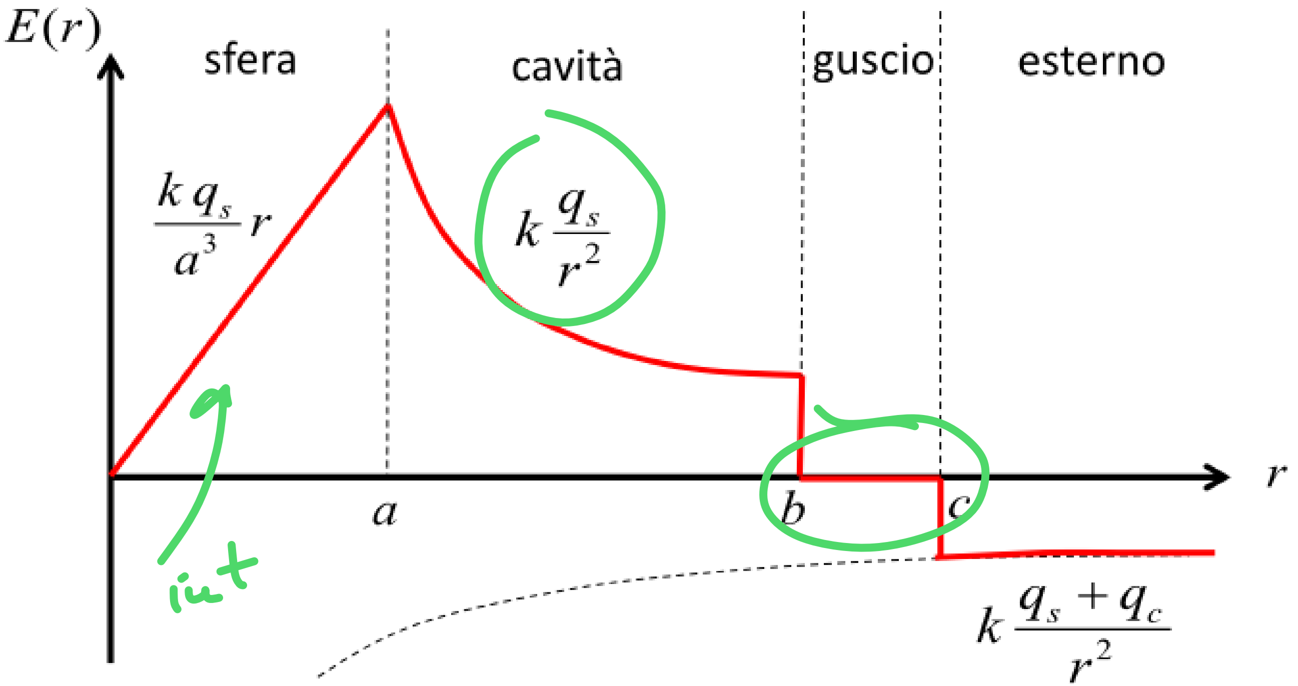
Sup. interna Q = -3 μC   Sup. esterna Q = -4 μC

Problema

$$r = 1\,cm \quad E = 9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C\times 1cm}{(2cm)^3} = 3.375\times10^{7}(N/C)$$

$$r = 5\,cm \quad E = 9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}\frac{3\mu C}{25\times10^{-4}m^2} = 1.08\times10^{7}(N/C)$$

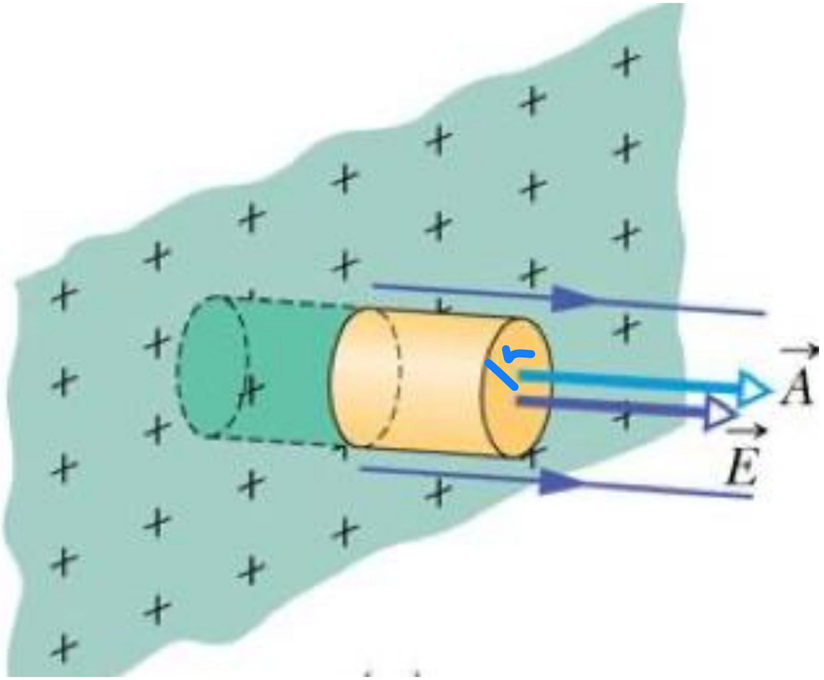
$$r = 10\,cm \quad E = -9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}\frac{4\mu C}{100\times10^{-4}m^2} = -0.36\times10^{7}(N/C)$$

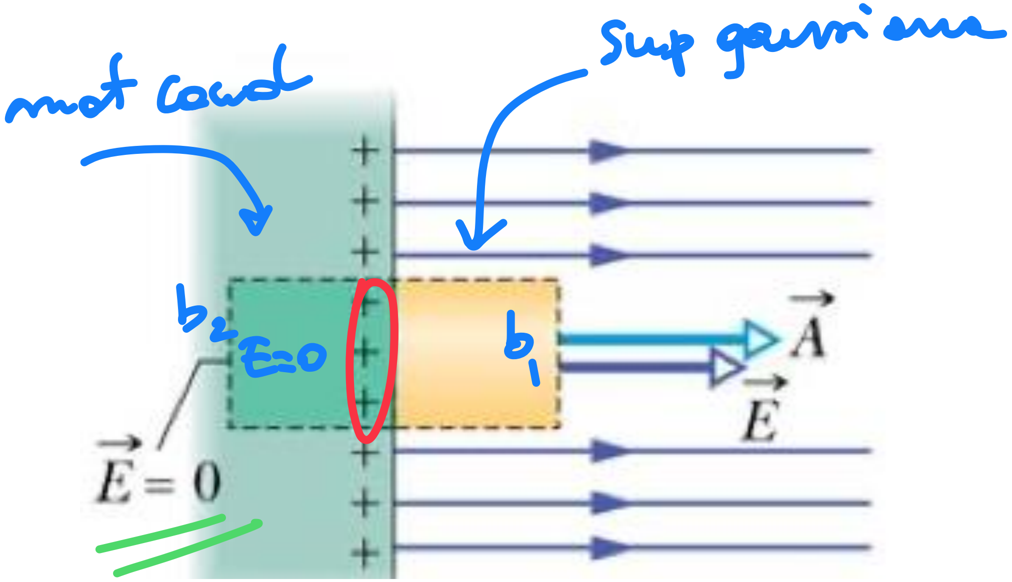


Il campo elettrico presenta discontinuità in corrispondenza di pareti cariche

Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- Consideriamo una superficie piana infinita
- in assenza di altri campi la distribuzione di carica avrà densità σ uniforme.
- All’equilibrio elettrostatico il campo sul conduttore deve essere perpendicolare alla superficie, altrimenti le cariche si muoverebbero sulla superficie



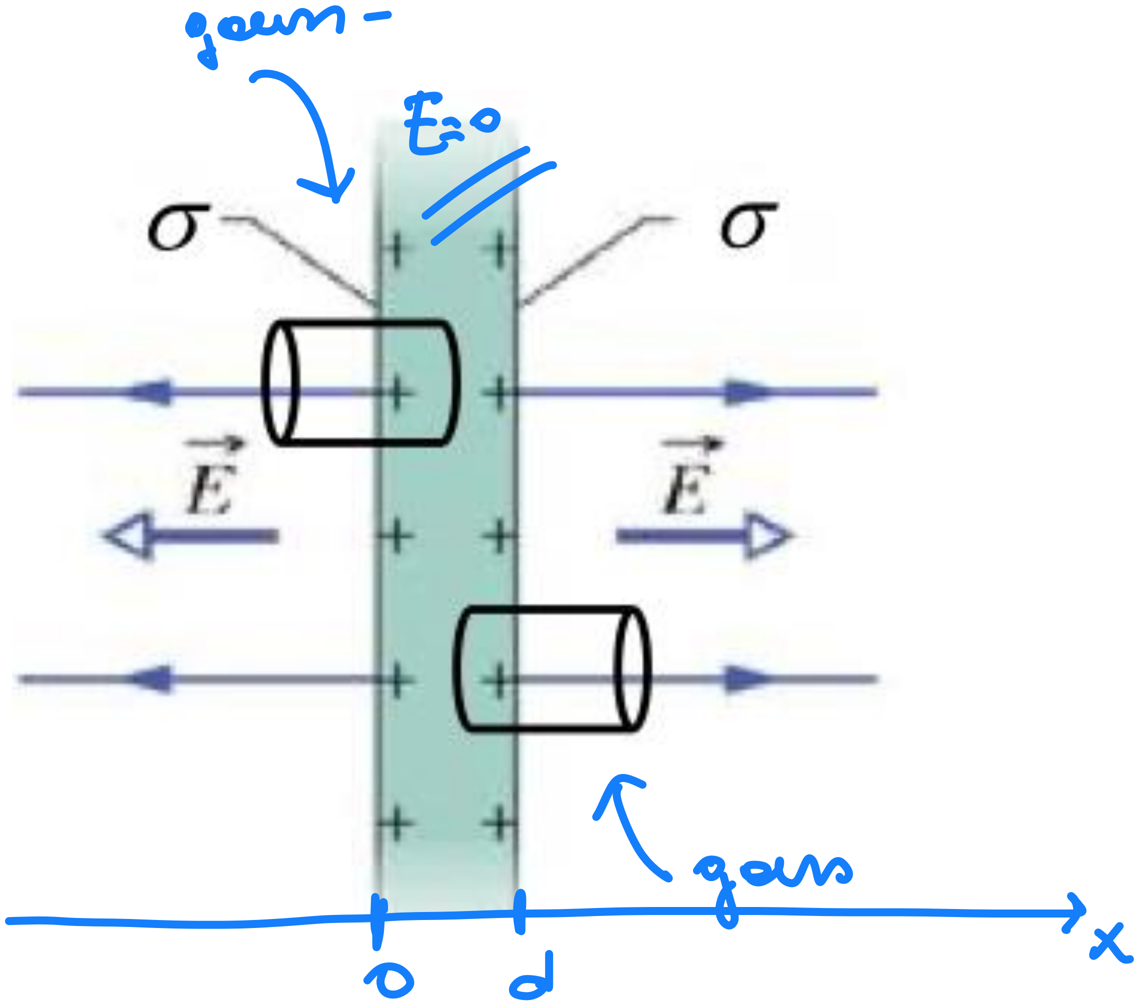


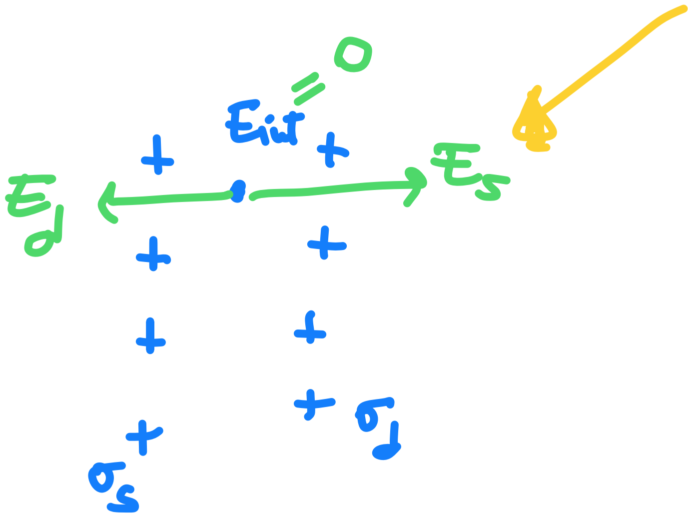
$$\Phi_{cil} = \Phi_{b_1} = \pi r^2 E = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

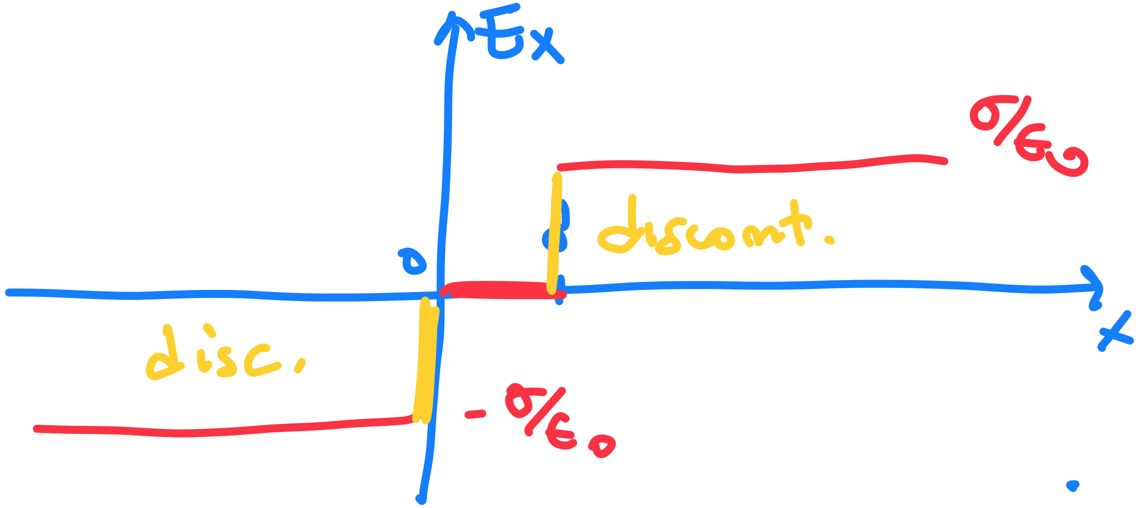
Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- In entrambi i lati in cui è suddiviso lo spazio



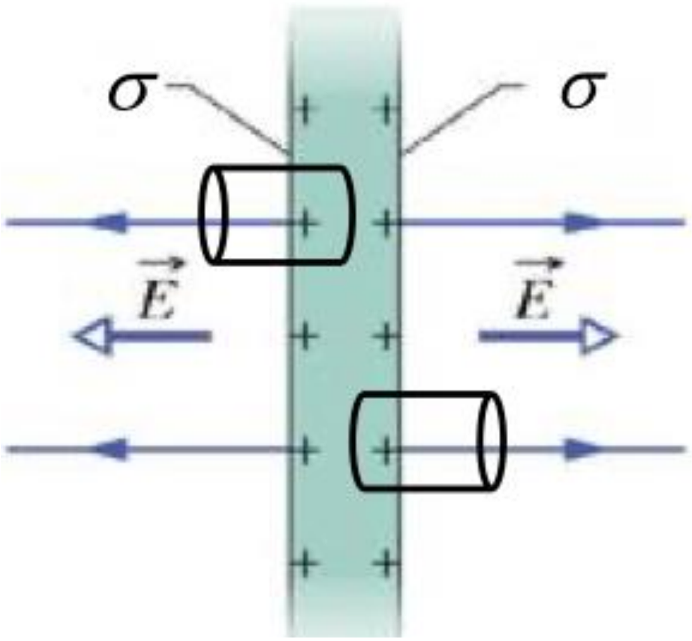


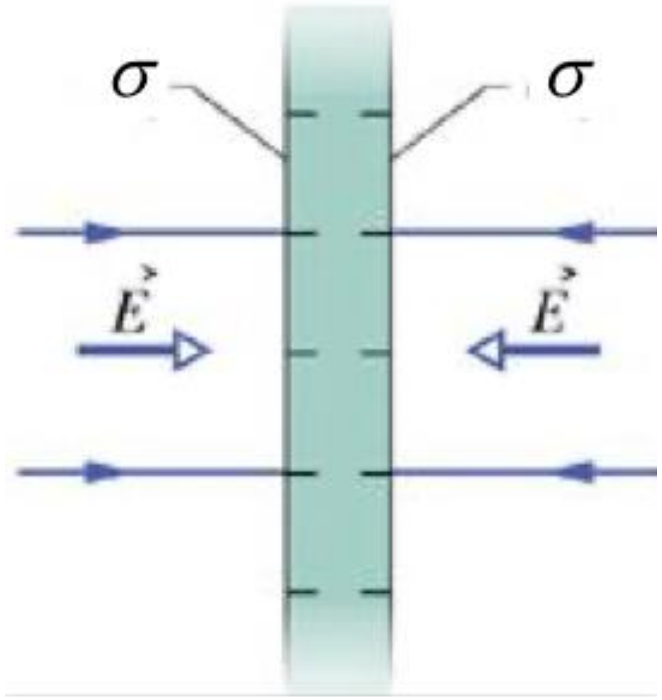
$$|\vec{E}_d| = |\vec{E}_s| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Campo elettrico ‘esterno’ ad una lastra piana conduttrice carica

- Caso di cariche depositate positive e negativa

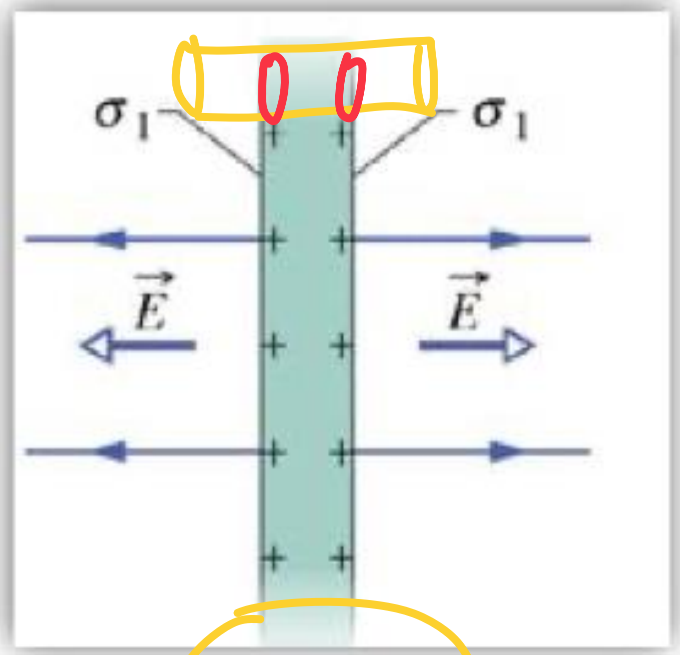




Sommario distribuzioni di cariche piane 2D

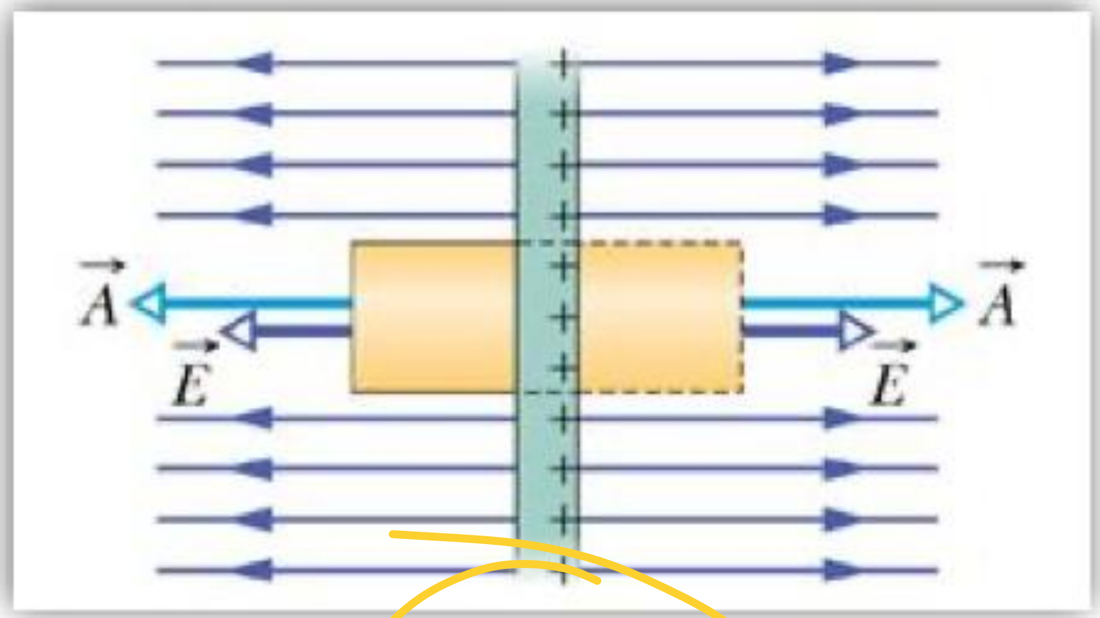
- Il campo elettrico è ortogonale alle lamine in entrambe i casi
- A parità di densità di carica superficiale le intensità dei campi sono differenti nei due casi

lamina conduttiva:

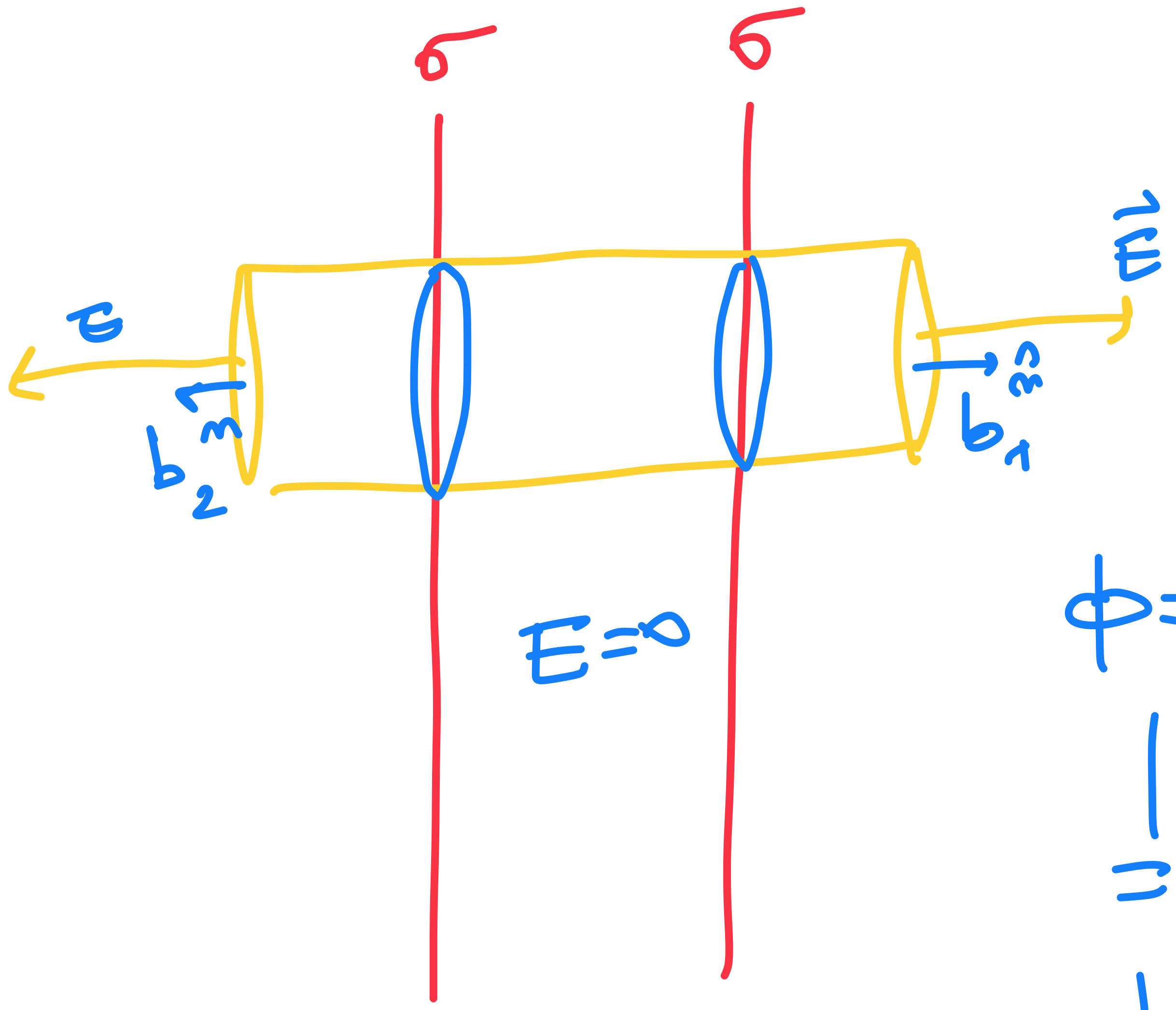


$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

lamina isolante:



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$\Phi = \Phi_{b_1} + \Phi_{b_2}$$

$$= \pi r^2 E + \pi r^2 E$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\pi r^2 \sigma + \pi r^2 \sigma\right]$$

$$\cancel{2\pi r^2} E = \frac{1}{\epsilon}\, \cancel{2\pi r^2}\, \sigma \qquad E = \sigma/\epsilon_0$$

Extra

Esercizio

Consideriamo una **sfera conduttiva carica**, con carica q_C = 8 μC, cava al suo interno; una carica puntuale negativa q = -5 μC è posta in un punto interno alla cavità. Determinare quanta carica deve essere distribuita sulle superficie interna (q_{int}) ed esterna (q_{est}) del conduttore

Per la legge di Gauss, la **carica sulla superficie interna** deve compensare la carica puntuale, per cui:

$$q_{\mathrm{int}} = 5\,\mu C$$

Poiché la carica totale sul conduttore è:

$$q_C = q_{\mathrm{int}} + q_{est} = 8\,\mu C$$

ne deriva che sulla superficie esterna deve essere distribuita una carica:

$$q_{est} = 3\,\mu C$$

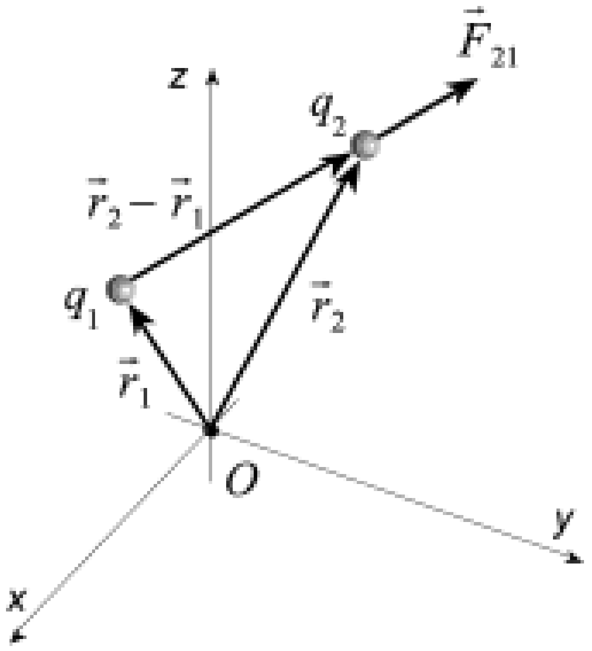
Legge di Gauss

Johann Friedrich Carl Gauss (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23 febbraio 1855). Matematico, astronomo e fisico. Definito "il Principe dei matematici", è annoverato fra i più importanti scienziati della storia avendo contribuito in modo decisivo all'evoluzione delle scienze matematiche, fisiche e naturali.

- ✓ Si deve al fisico e matematico tedesco Carl Friedrich Gauss la scoperta di una legge che rappresenta un formidabile strumento per l’analisi dei problemi elettrostatici.

Approfondimenti

- Verificare l'espressione



$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$