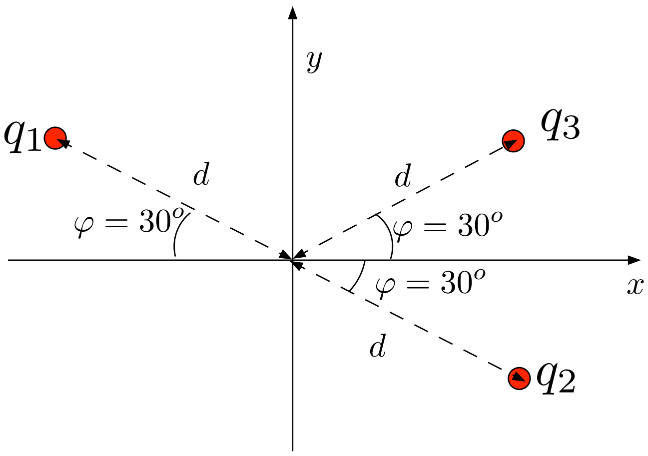
Esercizio **(tratto dal Problema svolto 22.2 dell'Halliday Resnick Walker)**

La figura mostra tre particelle con cariche $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$ e $q_3 = -4Q$, tutte a distanza d dall'origine.

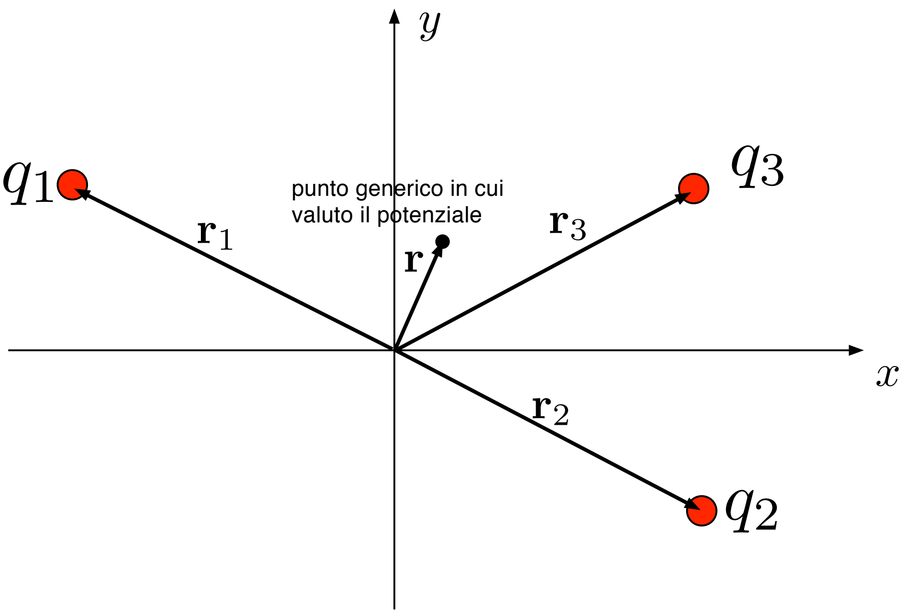
1. Calcolare il potenziale V generato dalle tre cariche
2. Quanto vale il campo elettrico $\mathbf{E}$ nell'origine ?



SOLUZIONE

1. Consideriamo un punto generico di coordinate

$$\mathbf{r} = (x, y) \tag{1}$$



Il potenziale elettrico $V(\mathbf{r})$ in tale punto $\mathbf{r}$ è dato dalla somma dei tre potenziali prodotti $V_i(\mathbf{r})$ $(i = 1, 2, 3)$ dalle tre cariche situate nelle posizioni

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1) & = & (-d\cos\frac{\pi}{6}, +d\sin\frac{\pi}{6}) \\ \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2) & = & (+d\cos\frac{\pi}{6}, -d\sin\frac{\pi}{6}) \\ \mathbf{r}_3 = (x_3, y_3) & = & (+d\cos\frac{\pi}{6}, +d\sin\frac{\pi}{6}) \end{cases} \tag{2}$$

ossia

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} V_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \tag{3}$$

Osserviamo che

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \tag{4}$$

Pertanto

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \tag{5}$$

dove le coordinate x_i e y_i delle tre cariche sono date dalla (2).

2. Per calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ utilizziamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,,\,\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{6}$$

Inserendo la (5) nella (6) otteniamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3} q_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right) \tag{7}$$

osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{2(x-x_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}\,,\,\frac{2(y-y_i)}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)^{3/2}}\right) = \\
&= -\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,(x-x_i,\, y-y_i)
\end{aligned} \tag{8}$$

Sostituendo (8) in (7) otteniamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,(x-x_i,\, y-y_i) = \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}\,(x-x_1\,,\,y-y_1) - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}\,(x-x_2\,,\,y-y_2) - \\
&\quad - \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|^3}\,(x-x_3\,,\,y-y_3)
\end{aligned} \tag{10}$$

Valutiamo ora il campo elettrico nell'origine. Specifichiamo dunque ill risultato (10), valido per un qualunque punto del piano $\mathbf{r} = (x, y)$, all'origine $\mathbf{r} = (0, 0)$. In tal caso abbiamo

$$\mathbf{r} = (0,0) \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| = d \;\; \forall i = 1,2,3 \tag{11}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}=\mathbf{0}) &= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\,(-x_1\,,\,-y_1) - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\,(-x_2\,,\,-y_2) - \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\,(-x_3\,,\,-y_3) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\,((-x_1\,,\,-y_1) - (-x_2\,,\,-y_2) - 2\,(-x_3\,,\,-y_3)) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\left(\left(d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,-d\sin\frac{\pi}{6}\right) - \left(-d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,d\sin\frac{\pi}{6}\right) - 2\left(-d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,-d\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\
&= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^3}\left(4d\cos\frac{\pi}{6}\,,\,0\right) = \\
&= \left(\frac{8Q\cos\frac{\pi}{6}}{4\pi\varepsilon_0\,d^2}, 0\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

e dunque il campo elettrico è diretto lungo l'asse x.