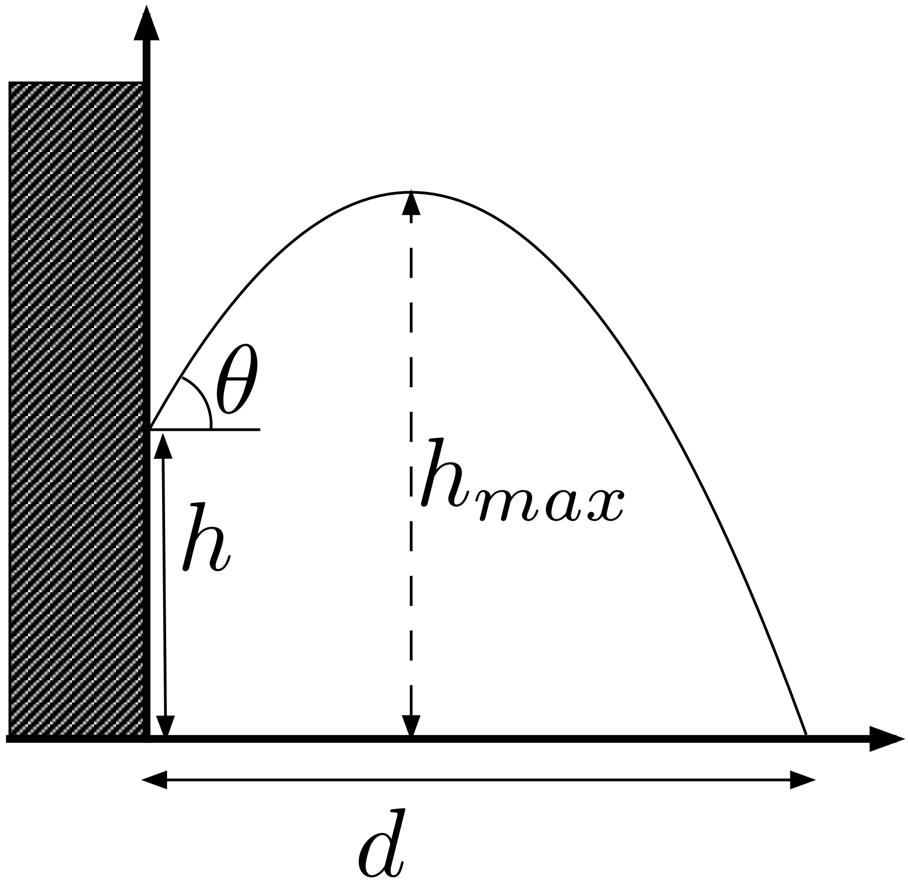
Esercizio

Un oggetto viene lanciato dal balcone di una finestra con velocità iniziale di modulo $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$, ad un angolo $\theta = 60^o$ rispetto all'orizzontale. La finestra si trova ad un'altezza di $8\,\mathrm{m}$ dal suolo. Determinare:

1. l'altezza massima h_{max} a cui giunge l'oggetto;
2. quanto tempo impiega per cadere al suolo;
3. a quale distanza d l'oggetto cade rispetto alla posizione orizzontale del punto di lancio;
4. l'equazione cartesiana $y(x)$ della traiettoria



SOLUZIONE
Dati iniziali:

$$
\begin{array}{rcl}
v_0 & = & |\vec{v}_0| = 15\,\mathrm{m/s} \\
\theta & = & \pi/3
\end{array}
$$

- Il vettore velocità iniziale
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j} \tag{1}$$
ha componenti
$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

- Scegliamo come origine dei tempi ($t = 0$) l'istante del lancio Scomponiamo il moto nelle componenti x e y
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \tag{3}$$
Abbiamo:

  – Moto lungo x: rettilineo uniforme (non ci sono forze lungo x)
  $$x(t) = v_{0x}\,t \tag{4}$$
  – Moto lungo y: rettilineo uniformemente accelerato (in y agisce la forza peso)
  $$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$
  (**NB:** errore frequente: dimenticarsi il segno '-' nell'accelerazione di gravità g.)

1. Per determinare l'altezza massima possiamo procedere in due modi:

   Primo modo
   Dalla legge oraria (5) lungo y possiamo ricavare la legge per la componente y della velocità, derivando rispetto al tempo:
   $$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{6}$$
   L'istante t_{top} in cui l'oggetto raggiunge l'altezza massima è quello in cui la velocità v_y si annulla (si osservi che solo la velocità v_y si annulla alla sommità, mentre la componente v_x rimane sempre costante, essendo il moto lungo x rettilineo uniforme):
   $$0 = v_y(t_{top}) = v_{0y} - gt_{top} \qquad \Rightarrow \qquad t_{top} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{7}$$
   Sostituendo in $y(t)$ si ottiene
   $$
   \begin{aligned}
   h_{max} = y(t_{top}) &= h + v_{0y}t_{top} - \frac{1}{2}gt_{top}^2 = \\
   &= h + v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \\
   &= h + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}
   \end{aligned} \tag{8}
   $$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} h_{max} &= h + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = \\ &= h + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \\ &= h + \frac{v_0^2 \sin^2(\pi/3)}{2g} = \\ &= 8\,\mathrm{m} + \frac{(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \left(8 + 225 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{19.62}\right)\,\mathrm{m} = \\ &= 16.6\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9}$$

Secondo modo
Siccome il moto lungo y è uniformemente accelerato, posso applicare la formula

$$a = \frac{v_{fin}^2 - v_{in}^2}{2\,\Delta s} \tag{10}$$

al tratto di moto tra l'altezza di lancio e l'altezza massima.
Attenzione: stiamo considerando la componente lungo y, quindi nell'Eq.(10) vanno sostituite le *sole* componenti y della velocità, e non il modulo della velocità totale (che comprende anche la componente x e che rimane sempre costante.)

$$\begin{aligned} a &= -g \\ v_{in} &= v_{0y} \\ v_{fin} &= 0 \;\; \text{(alla sommità)} \\ \Delta s &= \Delta h \;\text{(variazione di altezza dal punto di lancio alla sommità)} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'Eq.(10) otteniamo

$$\Delta h = \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{11}$$

Sommando questa variazione all'altezza iniziale, si ottiene

$$h_{max} = h + \Delta h = h + \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{12}$$

e si arriva allo stesso risultato ottenuto precedentemente.

2. Per determinare il tempo di caduta al suolo possiamo procedere in due modi:

Primo modo
Consideriamo la legge oraria lungo y

$$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{13}$$

L'istante t^* in cui l'oggetto cade al suolo è quello in cui y si annulla

$$0 = y(t^*) \quad = \quad h + v_{0y}t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} \tag{14}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{-g} = \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \end{aligned} \tag{15}$$

Osserviamo che una soluzione dà un tempo negativo e l'altra un tempo positivo. Scartiamo la soluzione negativa perché ci interessa ciò che succede <u>dopo</u> il lancio.

$$t^* = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \tag{16}$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g} = \\ &= \frac{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\left(15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \frac{3}{4} + 2 \cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8\,\mathrm{m}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \frac{12.99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \sqrt{325.71\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= \frac{(12.99\ + 18.05)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \\ &= 3.16\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{17}$$

Secondo modo
Possiamo scomporre il tempo di caduta lungo y in due tratti:
-il tempo per raggiungere la sommità (t_{top})
-il tempo di caduta libera dalla sommità al suolo (t_{cl})

Per il primo tratto abbiamo osservato in precedenza che

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \qquad \Rightarrow \qquad t_{top} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{18}$$

Per il secondo tratto è una caduta libera con velocità inizile nulla da un'altezza h_{max}. Possiamo pertanto utilizzare la formula

$$t_{cl} = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} \tag{19}$$

Attenzione: la formula (19) vale solo se la velocità iniziale è nulla. Sarebbe stato sbagliato applicarla all'altezza iniziale

$$t_{cl} \neq \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{20}$$

dato che all'istante del lancio la velocità iniziale non è nulla.

Sostituendo l'espressione

$$h_{max} = h + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

trovata in precedenza per h_{max} [Eq.(8) o (12)] nell'Eq.(19) si ottiene

$$\begin{aligned} t_{cl} &= \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{v_{0y}^2}{2g}\right)}{g}} = \\ &= \sqrt{\frac{2gh + v_{0y}^2}{g^2}} = \\ &= \frac{1}{g}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} \end{aligned} \tag{21}$$

Il tempo totale t^* che l'oggetto impiega per cadere è

$$\begin{aligned} t^* &= t_{top} + t_{cl} = \\ &= \frac{v_{0y}}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gh} = \\ &= \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \end{aligned} \tag{22}$$

che coincide col risultato trovato col primo modo.

3. **NB:** Non si tratta di un problema del calcolo della gittata. Nel calcolo tipico della gittata il punto di lancio e il punto di caduta si trovano alla stessa altezza, mentre qui si trovano ad altezze diverse. Non si può pertanto applicare la formula $x_G = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$ per la gittata. Attenzione ad applicare le formule nelle condizioni in cui si possono applicare.

   Avendo determinato l'istante t^* in cui y si annulla, il punto di caduta si determina sostituendo t^* nell'equazione del moto lungo x

$$x(t) = v_{0x}t \tag{23}$$

   dove $x_0 = 0$ e $v_{0x} = v_0 \cos\theta$. Quindi

$$\begin{aligned} d &= x(t^*) = v_{0x}t^* = \\ &= v_0 \cos\theta \left(\frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

   Sostituendo i valori numerici

$$d = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=1/2}\cdot 3.16\,\mathrm{s} = 23.7\,\mathrm{m} \tag{25}$$

4. Per determinare l'equazione cartesiana della parabola osserviamo che le leggi orarie

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}\, t && (26) \\ y(t) &= h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 && (27) \end{aligned}$$

costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria (dove il parametro è il tempo). Per passare alla rappresentazione cartesiana, dobbiamo eliminare il parametro t dalle due equazioni. Dalla prima abbiamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \qquad (28)$$

e sostituendo nella seconda

$$y = h + v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 \qquad (29)$$

e dunque si ottiene

$$y = h + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\, x - \frac{g}{2 v_{0x}^2}\, x^2 \qquad (30)$$

che rappresenta una parabola, disegnata in figura, la cui curvatura dipende dall'accelerazione di gravità g e dalla componente v_{0x} della velocità iniziale.