# ORALE PRECEDENTE SESSIONE ESAME

Dai la definizione di soluzione di base duale non ammissibile, non degenere.

Una soluzione di base duale è non ammissibile se esiste un indice di base tale che yi ( con i indice di base ) sia minore di zero. Se tutti gli indici di base mi danno una yi diverso da zero questa soluzione è anche non degenere.

Enunciare condizioni di ottimalità per la pl

Se c è diverso da zero allora ogni soluzione ottima di (P) non è interna al poliedro ( se lo fosse, il gradiente della funzione obiettivo, ossia il vettore c, sarebbe nullo ). Se il problema (P) ha due soluzioni ottime allora ne ha infinite.
Le soluzioni ottime locali di (P) sono anche ottime globali.

Costruire un flusso di base degenere non ottimo su una rete non capacitata.

Affinchè sia degenere è sufficiente che esista almeno un arco dell'albero di copertura T con flusso uguale a 0. Per non essere ottimo non devono essere verificate le condizioni di Bellman. Ossia il potenziale di base deve avere costi ridotti minori di 0 per ogni arco (i,j)appartenente a L.

Scrivere il modello del problema dei potenziali su reti capacitate.

In forma matriciale si ha:

max (b,u)' * (π, μ)'
(E' I, 0 I) * (π, μ)'≤(c 0)'

Che equivale a dire:

max π'b + μ'u
π'E + μ' ≤ c'
μ =<0

Scrivere il modello del problema del trasporto.

$$\text{Min } \sum_{(i \to m)} \sum_{(j \to n)} C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{(i \to m)} X_{ij} \geq d_j \quad \text{Per ogni } j=1,\ldots,n$$

$$\sum_{(j \to n)} X_{ij} \leq o_i \quad \text{Per ogni } i=1,\ldots,m$$

$$x \geq 0$$

d = domanda

o = offerta

Se d > 0 non esistono soluzioni ammissibili.

Dare la definizione di taglio, di capacità minima ed enunciare il teorema “max flow/min cut”.

<u>Definizione di TAGLIO:</u>
Un taglio (Ns, Nt) è una partizione dell'insieme N dei nodi in due sottoinsiemi, cioè N=NsUNt e
Ns intersezione Nt =0
Il taglio si dice <u>ammissibile</u> se Ns contiene almeno l'origine s e Nt contiene almeno la destinazione t.
La <u>capacità</u> del taglio è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio:
$u(Ns,Nt)=\sum u_{(i,j)}$ per ogni arco (i,j) appartenente ad A+.
Il valore del <u>flusso</u> del taglio (Ns,Nt) è definito come la differenza tra la somma dei flussi sugli archi diretti e la somma dei flussi sugli archi inversi: x(Ns, Nt) = ∑ Xij – ∑ Xpq con (i,j) archi diretti e (p,q) archi inversi.

Teorema MAX FLOW/MIN CUT:
Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (Ns, Nt) tali che x( Ns, Nt)=u(Ns, Nt), allora x è un flusso di valore Massimo e (Ns, Nt) è un taglio di capacità minima.

Dare la definizione di ciclo hamiltoniano, di assegnamento e sottolineare le differenze.

Un ciclo orientato che passa per tutti i nodi del grafo una ed una sola volta è detto ciclo hamiltoniano e il suo costo è definito come la somma dei costi degli archi da cui è formato. Un ciclo hamiltoniano viene rappresentato tramite la variabile binaria Xij che assume valore 1 se (i,j) appartiene al ciclo, e 0 altrimenti. In questo caso una possibile formulazione del TSP asimmetrico è:

min $\sum_{(i,j) e A}$ CijXij
$\sum_{i e N, i \neq j}$ Xij = 1 Per ogni j e N
$\sum_{j e N, i \neq j}$ Xij = 1 Per ogni i e N
$\sum_{i e S,}$ $\sum_{j \text{ non e } S}$ Xij ≥ 1 Per ogni S contenuto in N, S ≠ 0
Xij e {0,1} Per ogni (i,j) e A

Ho che il primo insieme di vincoli mi dice che deve esserci un solo arco entrante in ogni arco (i,j) per ogni j appartenente all'insieme N dei nodi.
Il secondo insieme di vincoli mi impone che deve esserci un solo arco uscente da ogni arco (i,j) per ogni i appartenente all'insieme N dei nodi.
Il terzo insieme di vincoli sono chiamati vincoli di connessione stabilisce che il ciclo hamiltoniano abbia almeno un arco uscente da un sottoinsieme S non vuoto di nodi, in modo da evitare la formazione di cicli orientati che non passano da tutti i nodi. In questo insieme di vincoli abbiamo che il vincolo per |S|=1 è ridondante perché è già presente nel secondo insieme di vincoli. Questo insieme di vincoli si può quindi eliminare e ottenere così un problema di assegnamento di flusso minimo che può essere risolto tramite l'algoritmo del simplesso per flussi. In questo caso la soluzione ottima è costituita da una famiglia di cicli orientati che copre tutti i nodi del grafo.Il rilassamento che equivale al problema di assegnamento viene indicato:

min $\sum_{(i,j) e A}$ CijXij
$\sum_{i e N}$ Xij = 1 Per ogni j e N
$\sum_{j e N}$ Xij = 1 Per ogni i e N
Xij e {0,1} Per ogni (i,j) e A

Enunciare le regole di taglio del branch and bound per problemi di massimo.

Le regole più comuni sono:

Sia x una soluzione ammissibile di ($P_{ij}$) e vi(P) = $C^T$x:

Se vs(Pij) ≤ vi(P), oppure la regione ammissibile di (Pij) è vuota, allora si può effettuare una visita implicita del nodo Pij, cioè nel sottoalbero di radice Pi,j non esiste una soluzione ammissibile di valore superiore a x. Quindi chiudo il nodo.

Se vs(Pij) > vi(P) e l'ottimo x* del rilassamento di (Pij) è ammissibile per (P), allora x* è una soluzione migliore di x, quindi si aggiorna x con x* e si può effettuare una visita implicita del nodo Pij

## ORALE 15 GENNAIO

Disegnare un poliedro senza vertici, uno con |card E|=1 e uno con |card V|=1 e |card E|=3

si riferisce alla cardinalità e i primi due punti(poliedro vuoto e quello con |E|=1) io l'ho fatto mettendo una retta costante sulle y>0 e prendendo la parte al di sotto con E=(1,0) per l'altro ho preso E = {(1,0) (1,1) (0,-1)} e V = (0,0)

Scrivere le formule dei rapporti del simplesso primale e duale

Simplesso primale: (bn-AnX/AnWi)
Simplesso duale: -yb/AnWi

Scrivere il problema duale ausiliario e dire a cosa serve (non ce l'ho nel programma )

Determinare su una rete un flusso ottimo non unico

Scrivere la regola di riferimento dell'algoritmo di Dijkstra

Questo algoritmo trova un albero dei cammini minimi in un albero in cui i costi degli archi sono non negativi. Ad ogni iterazione il grafo mantiene un albero di copertura orientato di radice r, memorizzato nel vettore p dei predecessori dei nodi, e un vettore π di etichette ai nodi, con la proprietà che πi sia il costo del cammino da r a i contenuto nell'albero. Ossia il potenziale di base corrispondente all'albero

Dare la definizione di cammino aumentante e di portata Delta nell'algoritmo di Ford-Fulkerson

DEFINIZIONE CAMMINO AUMENTANTE

Dato un flusso x ammissibile, un cammino aumentante (rispetto a x) è un cammino orientato da s a t, nel grafo residuo G(x).

DEFINIZIONE DI PORTATA DELTA

L'algoritmo di FF cerca ad ogni iterazione un cammino aumentante rispetto al flusso corrente. Se esiste un cammino aumentante allora il flusso viene aggiornato spedendo su tale cammino il massimo flusso possibile pari alla minima capacità residua, detta delta, sugli archi del cammino.
Scrivere il modello matematico del TSP simmetrico e di quello asimmetrico

ATSP

min $\sum_{(i,j)eA} CijXij$
$\sum_{ieN,i\neq j} Xij = 1$ Per ogni j e N
$\sum_{jeN,i\neq j} Xij = 1$ Per ogni i e N
$\sum_{ieS,} \sum_{j \text{ non e } S} Xij \geq 1$ Per ogni S contenuto in N, S ≠ 0
Xij e {0,1} Per ogni (i,j) e A

STSP

min $\sum_{(i,j)eA} CijXij$
$\sum_{(h,i)eA} X\ hi + \sum_{(i,k)eA} X\ ik = 2$ Per ogni i e N
$\sum_{(i,j)eA,\ ieS,\ jneS} X\ ij + \sum_{(i,j)eA,\ ineS,\ jeS} X\ ik \geq 1$ Per ogni S contenuto in N, 1≤|S|≤|N|/2 preso come parte intera superiore
Xij e {0,1} Per ogni (i,j) e A

Dare la definizione di 5-albero e di albero di copertura di costo minimo

Un 5-albero è un insieme di n archi di cui:

n-2 formano un albero di copertura del sottografo formato dai nodi N escluso il nodo 5

2 archi sono incidenti sul nodo 5.

In pratica metto gli archi esclusi quelli del nodo 5 in ordine di costo crescente. Inizio a scegliere gli archi a partire da quello di costo minimo facendo attenzione a non formare cicli. Come ultimo passaggio collego l'albero che ho così trovato al nodo 5 scegliendo per la connessione i due archi di costo minimo.

Un albero di copertura di costo minimo su un qualsiasi grafo (N, A), si può ottenere rapidamente utilizzando un algoritmi Greedy detto Algoritmo di Kruskal. Esamino gli archi in ordine crescente di costo e li esamino uno a uno e ogni arco viene inserito in T se non forma un ciclo con gli altri archi e se non è già stato inserito.

# Orale del 16 Febbraio

Dare la definizione di poliedro e disegnarne uno con una funzione obiettivo c per cui il minimo valore è $-\infty$

Un poliedro di $R^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $R^n$ . Ossia ogni poliedro può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni in n variabili: P = {x e $R^n$ : Ax ≤ b} dove A è una matrice mxn e b appartiene a $R^m$.

Dare la definizione di potenziale di base, dire quando è ammissibile e degenere

Il potenziale di base relativo alla base T è la soluzione del sistema $\pi^T = c_T^T E_T^{-1}$ definiamo il costo ridotto dell'arco (i,j) relativo al potenziale come $Cij^\pi = Cij + \pi i - \pi j$ allora possiamo dire che il potenziale di base è ammissibile se i costi ridotti degli archi non appartenenti alla base T sono:

per reti capacitate deve valere che gli archi appartenenti a L devono avere costo ridotto maggiore o uguale a zero mentre gli archi appartenenti a U devono avere costi ridotti minori od uguali a zero.

Per reti non capacitate vale solo che gli archi di L devono essere maggiori od uguali a zero.

Il potenziale di base si dice inoltre degenere se esiste anche solo un arco non di base con costo ridotto nullo.

Scrivi il modello matematico dell'albero dei costi minimi

min $\sum_{(i,j)eA} CijXij$
$\sum_{(h,r)eA} X\ hi + \sum_{(irk)eA} X\ ik = 2$ Per ogni i e N
$\sum_{(i,j)eA,\ ieS,\ jneS} X\ ij + \sum_{(i,j)eA,\ ineS,\ jeS} X\ ik \geq 1$ Per ogni S contenuto in N, 1≤|S|≤|N|/2 preso come parte intera superiore
Xij e {0,1} Per ogni (i,j) e A

Comandi Lin. Prog. Per un problema

Ricorda: è positivo ciò che sta dalla parte del minore!
Problema di max:
c = -[]
Ax ≥ b
A = -[]
B = []

Problema di min:
c = []
A x ≤ b
A = []
B = -[]

Ax = b
Aeq = []
Beq = []
A ≤ x ≤ b
Lower bound = lb = [a]
Upper bound = ub = [b]

Dare la definizione di piano di taglio e scrivi l'equazione di quelli di Gomory

Sia x* l'ottimo del rilassamento continuo. Una DV $\pi^T x \leq \pi_o$ per Ω tale che $\pi^T x^* > \pi_o$ si dice piano di taglio.

Particolari piani di taglio sono i piani di taglio di Gomory che hanno equazione: $\{a_{rj}\}xj \geq \{b_r\}$ con $\{a_{rj}\}$ parte frazionaria di $a_{rj}$ che è composta da una parte intera inferiore più una parte frazionaria e $\{b_r\}$intesa come parte frazionaria di b= x*

Cosa sono i costi ridotti e se hanno relazione con le variabili di scarto di un problema di PL

Costo ridotto definito come costo dell'arco + potenziale nodo iniziale – potenziale nodo finale. E' correlato con le variabili di scarto dei problemi di PL perché in quel tipo di problema uso le variabili di scarto per determinare l'ammissibilità e il carattere degenere o non degenere di un problema. Mentre nei problemi di PL su reti uso i costi ridotti.

Enunciare la regola di taglio per B&B per problema di minimo e spiega perche' si può tagliare

Dimostrare che la funzione obbiettivo di un problema di PL di massimo cresce lungo opportuni spigoli

# EXTRA

La soluzione ottima o è una o ce ne sono infinite.
Potrebbe essere al centro o all'interno? No! Non ci sono soluzioni ottime all'interno. Sono tutte sulla frontiera.
Posso scrivere un poliedro vuoto? Vuol dire che ho scritto troppi vincoli.
Se il poliedro non è vuoto c'è Weierstrass? E' chiuso per definizione, ma deve anche essere limitato, allora esiste massimo!!!
I vincoli vengono presi col ≤ e non con il < stretto perché la sua frontiera ci appartiene. Inoltre sto parlando di regione ammissibile e la regione presa con l'uguale è più grande di quelle preso o solo con l'uguale o solo con il minore/maggiore!
Una soluzione di base ammissibile è una soluzione che appartiene al poliedro.
Una soluzione di base non ammissibile è una soluzione che non appartiene al poliedro.

Come si calcolano i vertici?
Supponiamo di avere la matrice Anxn di rango n.
Suppongo di avere B sottoinsieme degli indici di riga B c {1,….,n} |B|= n
Indico Ab la sottomatrice nxn estratta da A ed è quadrata con det ≠ 0 ( invertibile )
Allora sia x* la soluzione del sistema Abx*= bb
Un punto x* così ottenuto si chiama soluzione di base del poliedro.

Se il poliedro ha vertici e la soluzione ottima esiste finita, allora uno dei vertici è soluzione ottima.