Esercitazione 28-03-2012

Esercizio #1

Una stanza è illuminata da due lampadine in serie. La probabilità che una lampadina sia guasta ad un certo istante è p. Si possono guastare in maniera indipendente l'una dall'altra.

Calcolare la probabilità che la stanza sia buia.

$$\Omega = \{ (F_1, G_2) ; (G_1, F_2) ; (G_1, G_2) ; (F_1, F_2) \}$$

$$A = \{ (F_1, G_2) ; (G_1, F_2) ; (G_1, G_2) \}$$

$$Pr\{A\} = ?$$

1) $Pr\{A\} = Pr\{(F_1, G_2)\} + Pr\{(G_1, F_2)\} + Pr\{(G_1, G_2)\}$

2) $Pr\{A\} = 1 - Pr\{(F_1, F_2)\}$

3) $\alpha_1 = \{ (G_1, F_2) ; (G_1, G_2) \}$ $\qquad Pr\{\alpha_1\} = p$

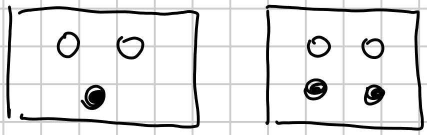
$\alpha_2 = \{ (F_1, G_2) ; (G_1, G_2) \}$ $\qquad Pr\{\alpha_2\} = p$

$$Pr\{A\} = Pr\{\alpha_1 \cup \alpha_2\} = Pr\{\alpha_1\} + Pr\{\alpha_2\} - Pr\{\alpha_1 \cap \alpha_2\} =$$

$$= p + p - p^2 = 2p - p^2$$

Esercizio #2

Ci sono due urne, una contiene 1 pallina nera e 2 bianche e l'altra 2 bianche e 2 nere



L'esperimento consiste nello scegliere un'urna e poi nello scegliere una pallina.

Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca.

$$\Omega = \{ (U_1, b_{11}) \ (U_1, b_{12}) \ (U_2, b_{21}) \ (U_2, b_{22}) \ (U_1, n_{11}) \ (U_2, n_{12}) \ (U_2, n_{22}) \}$$

$$B = \{ (U_1, b_{11}) \ (U_1, b_{12}) \ (U_2, b_{21}) \ (U_2, b_{22}) \}$$

$$P_r\{B\} = \sum_i P_r\{B \mid U_i\} \cdot P_r\{U_i\}$$

$$U_1 \cup U_2 = \Omega$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

$$Pr\{B \mid U_1\} \cdot Pr\{U_1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$Pr\{B \mid U_2\} \cdot Pr\{U_2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$Pr\{B\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Calcolare la probabilità di aver scelto l'urna 1 sapendo che ho estratto una pallina bianca.

$$Pr\{U_1 \mid B\} = \frac{Pr\{B \mid U_1\} \cdot Pr\{U_1\}}{Pr\{B\}}$$

$$Pr\{B\} = \frac{7}{12}$$

$$Pr\{U_1\} = \frac{1}{2}$$

$$Pr\{B \mid U_1\} = \frac{2}{3}$$

$$Pr\{U_1 \mid B\} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{12}^{4}}{7} = \frac{4}{7}$$

Esercizio #3

Un Trasmettitore trasmette un segnale binario

$$Pr\{T_b = 1\} = 0{,}3$$

$$Pr\{T_b = 0\} = 0{,}7$$

$$Pr\{E\} = 0{,}01$$ probabilità che il bit sia ricevuto erroneamente

Il ricevitore riceve uno 0 logico.
Calcolare la probabilità che sia stato trasmesso uno 0

$$Pr\{T_0 | R_0\} = ?$$

Bayes

$$Pr\{T_0 | R_0\} = \frac{Pr\{R_0 | T_0\} \, Pr\{T_0\}}{Pr\{R_0\}}$$

$$Pr\{R_0 | T_0\} = 1 - Pr\{R_0 | T_1\} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

$$Pr\{T_0\} = 0{,}7$$

$$Pr\{R_0\} = Pr\{R_0 | T_0\} \cdot Pr\{T_0\} + Pr\{R_0 | T_1\} \cdot Pr\{T_1\} =$$

$$T_1 \cup T_0 = \Omega \qquad T_1 \cap T_0 = \emptyset$$

$$= 0,99 \cdot 0,7 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,696$$

$$\Pr\{T_0 \mid R_0\} = \frac{0,99 \cdot 0,7}{0,696} \cong 0,9956$$

Esercizio #4

Lo studente X è sottoposto ad un quiz con M possibili risposte.

Se X ha studiato risponderà correttamente, altrimenti risponderà a caso.

X ha studiato con probabilità p, supponiamo che sottoposto al quiz risponda correttamente.

Qual'è la probabilità che abbia studiato davvero?

$$S = \{X \text{ ha studiato}\}$$

$$\Pr\{S\} = p$$

$$C = \{X \text{ ha risposto correttamente}\}$$

$$\Pr\{C \mid S\} = 1$$

$$\bar{S} = \{X \text{ non ha studiato}\}$$

$$\Pr\{C \mid \bar{S}\} = \frac{1}{M}$$

$$S \cap \bar{S} = \emptyset$$

$$S \cup \bar{S} = \Omega$$

$$\Pr\{S \mid C\} = ?$$

Bayes

$$\Pr\{S \mid C\} = \frac{\Pr\{C \mid S\} \cdot \Pr\{S\}}{\Pr\{C\}}$$

$$\Pr\{C\} = \Pr\{C \mid S\} \cdot \Pr\{S\} + \Pr\{C \mid \bar{S}\} \cdot \Pr\{\bar{S}\} =$$

$$= 1 \cdot p + \frac{1}{M} \cdot (1-p)$$

$$\Pr\{S \mid C\} = \frac{p}{p + \frac{1}{M}(1-p)}$$

Esercizio #5

Un libro A che ha 200 pagine e un libro B che ha 300 pagine.

Questi due libri sono aperti indipendentemente da due lettori.

Calcolare la probabilità dell'evento

$$\alpha = \{ \text{pag } A > \text{pag } B \} = \{ P_A > P_B \}$$

- I risultati dell'esperimento sono coppie di pagine (P_A, P_B)
- Le coppie favorevoli sono quelle in cui $P_A > P_B$
-

$$Pr\{ P_A > P_B \} = \sum_{n=1}^{300} Pr\{ P_A > P_B \mid P_B = n \} \cdot Pr\{ P_B = n \}$$

$$Pr\{ P_B = n \} = \frac{1}{300}$$

$n \leq 200$ $\qquad Pr\{ P_A > P_B \mid P_B = n \} = \dfrac{200 - n}{200}$

$$Pr\{ P_A > P_B \} = \sum_{n=1}^{200} \frac{1}{300} \cdot \frac{200-n}{200} = \frac{1}{300 \cdot 200} \sum_{n=1}^{200} (200 - n) =$$

$$= \frac{1}{300 \cdot 200} \sum_{n=0}^{199} n = \frac{1}{300 \cdot 200} \left(\frac{199 \cdot 198}{2} \right)$$

Esercizio # 6

È data una V.A. $X \in \mathcal{N}(0,1)$

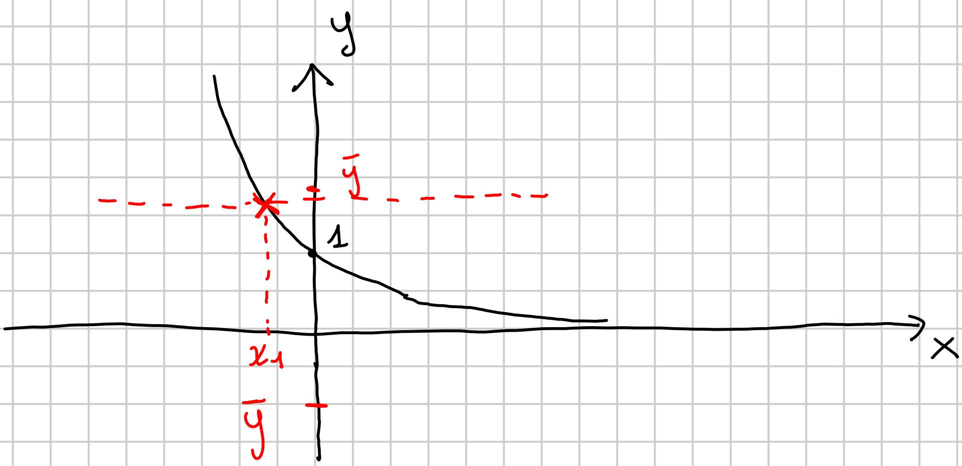
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Determinare $f_Y(y)$ e η_Y della V.A.

$$Y = e^{-X} \qquad \text{V.A. LOG NORMALE}$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$$y = g(x_i)$$



se $\bar{y} < 0$ non ci sono soluzioni $\Rightarrow f_Y(y) = 0 \quad \bar{y} < 0$

Se $\bar{y} > 0$ $\exists$ 1 sola soluzione $x_1 = -\ln(\bar{y})$

$$f_X(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$$

$$g'(x_1) = -e^{-x_1} = -y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} u(y)$$

$$\eta_y = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + x = \frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - 1\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} \, dx =$$

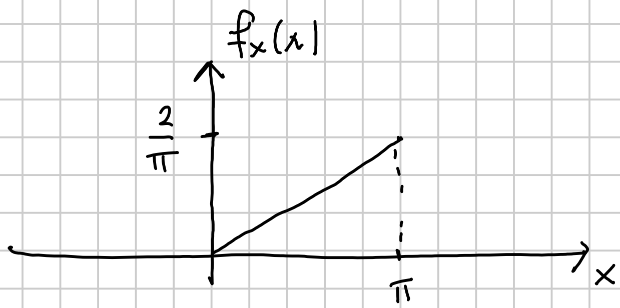
$$= e^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \, dx}_{\mathcal{N}(-1,\, 1)} = e^{1/2}$$

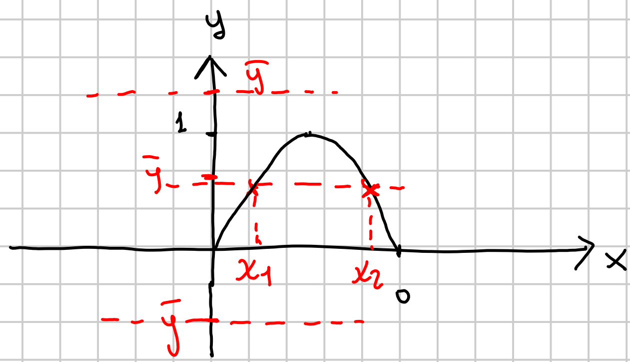
Esercizio #6

Sia X una v.A. tale che

$$f_X(x) = \frac{2x}{\pi^2} \, \text{rect}\left(\frac{x - \pi/2}{\pi}\right)$$

Sia $Y = \sin(X)$. Trovare $f_Y(y)$ e η_Y





·) se $\bar{y} > 1$ e $\bar{y} < 0$ non esistono soluzione dell'equazione

$y = g(x) \Rightarrow f_Y(y) = 0 \quad y > 1$ e $y < 0$

·) se $0 \leq \bar{y} \leq 1$

$x_1 = a\sin(y)$

$x_2 = \pi - x_1$

·) $g(x) = \sin(x)$

$g'(x) = \cos(x)$

$g'(x_1) = \cos(x_1)$

$g'(x_2) = \cos(\pi - x_1) = -\cos(x_1)$

$f_X(x_1) = \frac{2x_1}{\pi^2}$

$f_X(x_2) = \frac{2(\pi - x_1)}{\pi^2}$

$$f_Y(y) = \frac{2x_1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\cos(x_1)} + \frac{2(\pi - x_1)}{\pi^2 \cdot \cos(x_1)} = \frac{2\cancel{\pi}}{\pi^2 \cdot \cos x_1} = \frac{2}{\pi \cos x_1} =$$

$$= \frac{2}{\pi \cos(a\sin(y))}$$

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y)\, dy$$

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x)\, dx$$

$$\eta_y = \int_0^1 y \cdot \frac{2}{\pi \cos(\operatorname{asin}(y))}\, dy$$

$z = \operatorname{asin}(y)$

$y = \sin z$

$dy = \cos z \cdot dz$

$y = 0 \Rightarrow z = 0$

$y = 1 \Rightarrow z = \pi/2$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin z \, \frac{2}{\pi \cdot \cancel{\cos z}} \cdot \cancel{\cos z}\, dz =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin z \; dz = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\sin(z)\, dz = -\frac{2}{\pi} \cos(z) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(0 - (1)\right) = \frac{2}{\pi}$$

Esercizio #7

È data una V.A. $X \in \mathcal{N}(2,2)$

Si costruisce una variabile

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X > 0 \\ -1 & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

Calcolare η_y e σ_y^2

$$\eta_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i = 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_{-1}$$

$$P_1 = P_r\{Y = 1\}$$

$$P_{-1} = P_r\{Y = -1\}$$

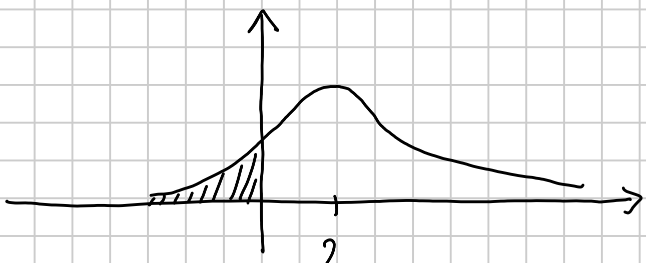
$$P_1 = \int_0^{+\infty} f_x(x)\, dy = P_r\{X > 0\}$$

$$P_{-1} = 1 - P_1$$

$$\eta_y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x)\, dx =$$

$y = g(x) = \mathrm{sgn}(x)$

$$\eta_y = -\int_{-\infty}^{0} f_x(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_x(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{0} f_x(x)\,dx = \Phi\left(\frac{0-2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_{0}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1 - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\eta_y = -\Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) + 1 - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\,\Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sigma_y^2 = E\left\{(y-\eta_y)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\eta_y)^2 f_y(y)\,dy =$$

$$= \sum_i (y - \eta_y)^2 \cdot P_i = (1 - \eta_y)^2 \cdot P_1 + (-1 - \eta_y)^2 \cdot P_{-1}$$