ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 51

Note Title 07/12/2018

GEOMETRIA AFFINE

Setting: $\mathbb{R}^n$ visto come spazio vettoriale

Sottospazi affini: sottospazi vettoriale, eventualmente traslati

in $\mathbb{R}^2$ i sottospazi affini sono
- dim 0 = p.ti
- dim 1 = rette
- dim 2 = tutto $\mathbb{R}^2$

in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi affini sono
- dim 0 = p.ti
- dim 1 = rette
- dim 2 = piani
- dim 3 = tutto $\mathbb{R}^3$

Di un sottospazio affine si possono dare 2 presentazioni
→ CARTESIANA, mediante equazioni
→ PARAMETRICA, cioè come Span + eventuale traslazione

Abituarsi a passare dall'una all'altra

<u>Esempio</u> Scrivere la rappr. parametrica e cartesiana del s.sp. affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3 (iperpiano) che passa per i p.ti

$$\underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{(1,0,1,0)}} \qquad \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{(2,1,3,0)}} \qquad \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{(4,0,-1,0)}} \qquad \underset{v_4}{\underset{\shortparallel}{(1,1,1,0)}}$$

$\boxed{\text{PARAMETRICA}}$ Servono 3 parametri a, b, c

$$v_1 + a\underbrace{(v_2 - v_1)} + b\underbrace{(v_3 - v_1)} + c\underbrace{(v_4 - v_1)}$$

base dello sp. vett. (il parallelo che passa per l'origine)

Andava bene anche

$$v_3 + a(v_1 - v_3) + b(v_2 - v_3) + c(v_4 - v_3)$$

$\boxed{\text{CARTESIANA}}$ 1° modo : bovino

L'eq. sarà del tipo

$$ax + by + cz + dw = e$$

Sostituisco i 4 p.ti dati a (x, y, z, w) e trovo 4 equ. in 5 incognite. Risolvo (ci sarà un grado di libertà) e una qualunque sol. non nulla è buona.

2° modo : usando il prodotto scalare

Osservo che i coeff. a, b, c, d devono essere le componenti di un vettore ortogonale al sottospazio traslato in modo da passare per l'origine. Quindi, dopo aver posto

$$w_1 := v_2 - v_1 \qquad w_2 := v_3 - v_1 \qquad w_3 := v_4 - v_1$$

basta che cerchi un vettore $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ che è $\perp$ a w_1, w_2, w_3 (potevo fare anche $w_1 := v_1 - v_4$, $w_2 := v_2 - v_4$, $w_3 = v_3 - v_4$)

Come trovo un vettore di $\mathbb{R}^4$ $\perp$ a 3 vettori dati?

→ imposto bovinamente il sistema

→ uso l'analogo della formula misteriosa

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ & w_1 & & \\ & w_2 & & \\ & w_3 & & \end{matrix}$$

e immagino di sviluppare il determinante con Laplace rispetto alla 1ª riga.

— o — o —

Esempio 2 In $\mathbb{R}^4$ descrivere il piano (s.sp. affine di dim. 2) che passa per i punti

$$\underset{v_1}{(1,0,1,0)} \qquad \underset{v_2}{(2,1,0,0)} \qquad \underset{v_3}{(0,0,-1,1)}$$

$\boxed{\text{PARAMETRICA}}$ $\quad v_1 + t(v_2 - v_1) + s(v_3 - v_1)$

$$(1,0,1,0) + t(1,1,-1,0) + s(-1,0,-2,1)$$

Determinare l'intersezione tra il piano dato e l'iperpiano (s.sp. di dim 3) di equazione $x+y-z+2w=5$
(ci aspettiamo che l'intersezione abbia dim 1 (per Grassmann) a meno di configurazioni particolari)

1° modo : sostituisco la parametrica nella cartesiana
$$(1+t-s,\ t,\ 1-t-2s,\ s)$$

$$\underbrace{\cancel{1}+t-s}_{x} + \underbrace{t}_{y} - \underbrace{(\cancel{1}-t-2s)}_{z} + \underset{\uparrow\, w}{2s} = 5 \quad \leadsto \quad 3t+3s=5$$
$$\leadsto \quad t = \frac{5-3s}{3} = \frac{5}{3} - s$$

Sostituisco nella parametrica del piano:

$$\left(1+\frac{5}{3}-s-s,\ \frac{5}{3}-s,\ 1-\frac{5}{3}+s-2s,\ s\right)$$

$$\left(\frac{8}{3}-2s,\ \frac{5}{3}-s,\ -\frac{2}{3}-s,\ s\right) = \underbrace{\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3},0\right)}_{\text{p.to base}} + s\underbrace{(-2,-1,-1,1)}_{\text{Direzione retta}}$$

2° modo : mi procuro la cartesiana del piano e metto tutto a sistema
Come deve essere fatta la cartesiana del piano (s.sp. di dim 2 in $\mathbb{R}^4$)
Ci aspettiamo 2 equazioni messe a sistema.

Le eq. saranno del tipo $ax+by+cz+dw=e$

Sostituisco i 3 p.ti.

$$\begin{cases} a+c=e \\ 2a+b=e \\ -c+d=e \end{cases} \qquad \begin{matrix} a+c-e=0 \\ 2a+b-e=0 \\ -c+d-e=0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c = d-e$

$b = 2c-e = 2d-2e-e = 2d-3e$

$a = -c+e = -d+e+e = -d+2e$

con d ed e variabili libere

Diamo dei valori indipendenti

- $d=1, e=0 \rightsquigarrow c=1, b=2, a=-1 \rightsquigarrow -x+2y+z+w=0$
- $d=0, e=1 \rightsquigarrow c=-1, b=-3, a=2 \rightsquigarrow 2x-3y-z=1$

Conclusione: il piano ha rappresentazione cartesiana

$$\boxed{\begin{cases} x-2y-z-w=0 \\ 2x-3y-z \quad =1 \end{cases}}$$

Verifica da 30 secondi: sostituisco i 3 p.ti dati

Verifica da 3 minuti: risolvo il sistema e controllo che le soluzioni, che dipendano da 2 parametri, siano una possibile parametrica del piano.

Ora, se voglio intersecare con l'iperpiano dato, non mi resta che mettere a sistema le 3 equazioni. Risolvendo il sistema di 3 equ. dovrei trovare la stessa retta di prima [fare la verifica!]

<u>Oss.</u> Ottenevo un'altra rappr. parametrica usando

- $d=5, e=7$
- $d=-4, e=3$

— o — o —

TRASFORMAZIONI AFFINI

Def. Una funzione affine $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione del tipo

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } n\times n \text{ data}}}{A}x + \overset{\text{vettore di } \mathbb{R}^n \text{ dato}}{b} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Proposizione La composizione di due trasformazioni affini è ancora affine

Dim $f(x) = A_1 x + b_1 \qquad g(x) = A_2 x + b_2$

$$g(f(x)) = A_2 f(x) + b_2 = A_2 (A_1 x + b_1) + b_2$$

$$= \underbrace{\boxed{A_2 A_1}}_{\text{nuova matrice}} x + \underbrace{\boxed{A_2 b_1 + b_2}}_{\text{nuovo vettore}}$$

Oss. La nuova matrice è il prodotto delle matrici

Esempio 1 $\quad f(x) = x + b \qquad (A = Id)$

Questa è una traslazione in direzione b.

Esempio 2 $\quad f(x) = 7x \qquad (A = 7 \cdot Id,\ b = \underset{\text{vettore nullo}}{0})$

Dilatazione di un fattore 7. In generale $f(x) = \lambda x$ abbiamo

- una omotetia di fattore λ (si intende $\lambda \neq 0$)
- se $\lambda < 0$, c'è anche una simmetria rispetto all'origine oltre all'omotetia.

— o — o —