Integrazione numerica
II^a parte

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 17

Outline

1. Formule di Newton-Cotes
   - Formule generalizzate (o composite)
   - Applicazione della estrapolazione all'integrazione
2. Formule di quadratura di tipo gaussiano
   - Polinomi ortogonali
   - Formule gaussiane

Se i nodi della formula considerata sono prefissati arbitrariamente (due a due distinti), i pesi sono determinati dalle prime $n+1$ equazioni del sistema lineare riportato nella Lezione 16 -Slide 23 del tipo $V\alpha = \mu$ con

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$\alpha^T = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $\mu^T = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$

Poiché V è una matrice di Vandermonde, nelle ipotesi attuali risulta $\det(V) \neq 0$ e quindi α esiste ed è unico ed inoltre il grado di precisione è almeno n poiché $E_n(1) = E_n(x) = \cdots = E_n(x^n) = 0$

Outline

1. Formule di Newton-Cotes
   - Formule generalizzate (o composite)
   - Applicazione della estrapolazione all'integrazione
2. Formule di quadratura di tipo gaussiano
   - Polinomi ortogonali
   - Formule gaussiane

Se $\rho(x) = 1$ e i nodi sono fissati in progressione aritmetica di ragione $h = (b - a)/n$, cioè $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, e quindi con $x_0 = a$ e $x_n = b$, si hanno le **formule di Newton-Cotes**

h si dice il **passo** della formula ed i pesi sono definiti con la tecnica interpolatoria $a_i = I(\ell_i(x))$

La formula trapezoidale e la formula di Simpson sono le prime due formule di Newton-Cotes

I pesi delle formule di Newton-Cotes sono stati calcolati per vari valori di n

Fino a $n = 7$ (otto punti) i pesi sono positivi, mentre per $n > 7$ compaiono pesi negativi e le formule diventano numericamente instabili, cioè la loro capacità di amplificare gli errori di arrotondamento aumenta

Una caratteristica importante delle formule di Newton-Cotes risiede nel fatto che per esse il nucleo di Peano $G(t)$ non cambia segno in $[a, b]$, per cui, per l'errore, si può utilizzare l'espressione nella Lezione 16 - Slide 25 dove m si determina in base alla definizione e il termine $E_n(x^{m+1})$ si calcola facilmente una volta noti i pesi

Indicando con $p = n + 1$ il numero dei nodi, l'errore assume la seguente forma caratteristica

$$E_n(f) = \begin{cases} c_p\, h^{p+1} f^{(p)}(\theta), & p \quad \text{pari}, \\ c_p\, h^{p+2} f^{(p+1)}(\theta), & p \quad \text{dispari}, \end{cases}$$

con c_p costante dipendente da p

Le formule di Newton-Cotes qui definite vengono dette **chiuse**, per distinguerle da formule analoghe dette **aperte** nelle quali si ha
$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$
(a parità di numero di nodi, le formule aperte sono meno precise di quelle ti tipo chiuso)

Si riportano le prime tre formule chiuse con i relativi errori

1. Formula trapezoidale

$$I(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\theta)$$

2. Formula di Simpson:

$$I(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\theta)$$

3. Formula dei 3/8 o "pulcherrima":

$$I(f) = \frac{b-a}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\theta)$$

Se, per una formula a $n+1$ punti, il passo di integrazione $h = (b-a)/n$ risulta troppo ampio, si divide $[a, b]$ in L parti uguali, mediante i punti $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_L = b$, e si utilizza la proprietà

$$I(f) = \sum_{i=1}^{L} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Si ottengono quindi le **formule di Newton-Cotes generalizzate** applicando una stessa formula a $n+1$ punti per ognuno degli L integrali a secondo membro

Si hanno così $nL+1$ nodi con un passo $h = \frac{b-a}{nL}$

Le formule più usate sono la formula trapezoidale ($n = 1$) e quella di Simpson ($n = 2$) le quali danno luogo alle corrispondenti formule generalizzate

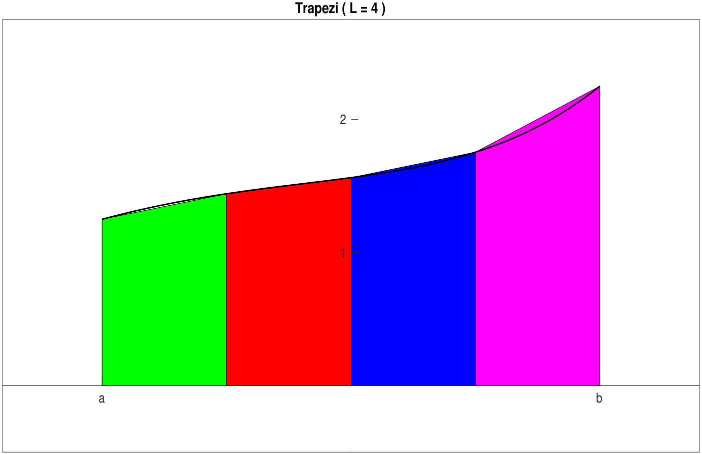
Formula dei Trapezi

$$I(f) = \frac{b-a}{2L}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L)\right] - \frac{(b-a)^3}{12L^2} f^{(2)}(\tau)$$

$$J_1^{(G)}(f) \;=\; \frac{b-a}{2L}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L)\right]$$

$$E_1^{(G)}(f) \;=\; -\frac{(b-a)^3}{12L^2} f^{(2)}(\tau)$$

La figura rappresenta una applicazione della formula dei trapezi



Formula di Cavalieri-Simpson

$$I(f) = \frac{b-a}{6L}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{L-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880L^4} f^{(4)}(\tau)$$

$$J_2^{(G)}(f) = \frac{b-a}{6L}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{L-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{L-1} f(x_i) + f(x_L)\right]$$

$$E_2^{(G)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880L^4} f^{(4)}(\tau)$$

Queste due formule generalizzate hanno lo stesso grado di precisione delle formule di cui sono la generalizzazione ma presentano il vantaggio di un errore che tende a zero al crescere di L (se le derivate nella espressione dell'errore sono limitate in $[a, b]$)

Si può osservare che da $h = (b - a)/nL$ segue che gli errori sono rispettivamente dell'ordine di h^2 e di h^4

Esempio 1

Si vuole approssimare

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

con un massimo errore assoluto E con $|E| \leq 10^{-2}$

Utilizziamo la formula trapezoidale e, in un secondo momento, la formula di Cavalieri-Simpson dovendo stabilire quale delle due sia da preferirsi

Esempio 1

L'errore che si commette nell'approssimare un integrale con una formula di quadratura è composto da due contributi

1. errore algoritmico **dovuto alla sostituzione dell'integrale con un algoritmo di calcolo che è dato dalla formula considerata**
2. errore trasmesso dai dati **dovuto al calcolo concreto del valore dato dalla formula**

Il primo contributo all'errore coincide con l'errore della formula

Il secondo contributo è di difficile calcolo e dipende dalle caratteristiche dei mezzi di calcolo a disposizione

Esempio 1

Da quanto detto, indicato con $E_n^{(G)}(f)$ l'errore della formula, imponiamo

$$\left|E_n^{(G)}(f)\right| \leq \frac{1}{2}|E|$$

L'altra metà dell'errore si riserva al calcolo del valore della formula di quadratura

Esempio 1 - Formula dei Trapezi

Per la formula dei trapezi, sull'intervallo $[0,1]$, risulta
$E_1^{(G)}(f) = -\frac{1}{12L^2} f^{(2)}(\tau)$

Poniamo

$$M_2 \geq \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(2)}(x)\right|$$

Per determinare quanti devono essere gli L intervalli per rientrare nella limitazione dell'errore si risolve la disequazione

$$\frac{1}{12L^2} M_2 \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$$

Esempio 1 - Formula dei Trapezi

Poiché $f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ si ha

$$M_2 = 2$$

Si deve quindi risolvere la disequazione

$$\frac{1}{6L^2} \leq \frac{1}{2}10^{-2}$$

le cui soluzioni sono

$$L \geq 6$$

Esempio 1 - Formula dei Trapezi

Si deduce che, per rientrare nella limitazione richiesta, basta applicare la formula dei trapezi con $L = 6$

Il costo computazionale si misura in base a quante valutazione di funzione si devono fare per calcolare il valore della formula di quadratura

Con L intervalli, la formula dei trapezi prevede $V_T = L + 1$ valutazioni di funzione per cui, nel nostro caso risulta

$$V_T = 7$$

Esempio 1 - Formula di Cavalieri-Simpson

Per la formula di Cavalieri-Simpson, sull'intervallo $[0,1]$, risulta $E_2^{(G)}(f) = -\frac{1}{2880L^4} f^{(4)}(\tau)$

Poniamo

$$M_4 \geq \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Per determinare quanti devono essere gli L intervalli per rientrare nella limitazione dell'errore si risolve la disequazione

$$\frac{1}{2880L^4} M_4 \leq \frac{1}{2}10^{-2}$$

Esempio 1 - Formula di Cavalieri-Simpson

Poiché $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$ si ha

$$M_4 \ = \ 24$$

Si deve quindi risolvere la disequazione

$$\frac{24}{2880 L^4} \ \leq \ \frac{1}{2} 10^{-2}$$

le cui soluzioni sono

$$L \ \geq \ 2$$

Esempio 1 - Formula di Cavalieri-Simpson

Si deduce che, per rientrare nella limitazione richiesta, basta applicare la formula di Cavalieri-Simpson con $L = 2$

Il costo computazionale si misura in base a quante valutazione di funzione si devono fare per calcolare il valore della formula di quadratura

Con L intervalli, la formula di Cavalieri-Simpson prevede $V_{CS} = 2L + 1$ valutazioni di funzione per cui, nel nostro caso risulta

$$V_{CS} = 5$$

Esempio 1 - Confronto tra le due formule

Dal confronto tra i due costi computazionali, si conclude che la formula di Cavalieri-Simpson è da preferirsi rispetto alla formula dei trapezi poiché

$$V_{CS} \; < \; V_T$$

L'integrale proposto può essere calcolato esattamente e si ha

$$\log 2 \; = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \; \simeq 0.69314718\ldots$$

mentre risultano

$$J_1^{(G)}(f) \; = \; 0.69487734\ldots \qquad J_2^{(G)}(f) \; = \; 0.69325396\ldots$$

Si può dimostrare che se $f(x)$ è sufficientemente regolare in $[a, b]$, l'errore della formula dei trapezi ammette uno sviluppo in serie di potenze pari di h

Ponendo

$$J_0^{(1)} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m)\right]$$

si può dimostrare il seguente teorema

Teorema

Se $f(x) \in C^{2r+2}([a, b])$, si può scrivere

$$I(f) = J_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} h^2 + \alpha_2^{(1)} h^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} h^{2r} + O(h^{2r+2})$$

dove $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_r^{(1)}$, non dipendono da h

Dalla relazione riportata nell'ultimo teorema risulta evidente come l'errore di $J_0^{(1)}$ sia dell'ordine di h^2

Inoltre, con un costo computazionale relativamente contenuto, si possono ottenere stime più accurate di I per mezzo della **tecnica di estrapolazione**

Scelto l'intero $q > 1$, la formula dei trapezi, con il passo $h/q = (b-a)/mq$, fornisce la stima di I

$$J_1^{(1)} = \frac{h}{2q}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{mq-1} f(x_i) + f(x_{mq})\right]$$

dove ora i nodi sono $x_i = a + i\frac{h}{q}$, $i = 0, 1, \ldots, mq$

Per il Teorema precedente si può scrivere

$$I = J_1^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^2 + \alpha_2^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} \left(\frac{h}{q}\right)^{2r} + O(h^{2r+2})$$

Eliminando il termine $\alpha_1^{(1)} h^2$ fra i due sviluppi di I si ottiene

$$I = J_0^{(2)} + \alpha_2^{(2)} h^4 + \cdots + \alpha_r^{(2)} h^{2r} + O(h^{2r+2})$$

dove si è posto

$$J_0^{(2)} = \frac{q^2 J_1^{(1)} - J_0^{(1)}}{q^2 - 1}$$ **(formula di Romberg**

e dove i nuovi coefficienti $\alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_r^{(2)}$ non dipendono da h

La nuova espressione di I mostra che l'errore di $J_0^{(2)}$ risulta dell'ordine di h^4, cioè è una stima di I migliore di $J_0^{(1)}$ e $J_1^{(1)}$

Il calcolo di $J_0^{(2)}$ necessita un costo computazionale di solo 3 operazioni essenziali mentre una stima di I più accurata di $J_1^{(1)}$, mediante la formula trapezoidale, implica necessariamente l'uso di un passo minore di h/q e quindi un costo computazionale più elevato

Il procedimento di estrapolazione può essere ripetuto: ad ogni applicazione, l'ordine dell'errore della nuova stima di I aumenta di due

Infatti, con il passo h/q^2, dalla formula dei trapezi, si ricava $J_2^{(1)}$ e si ha

$$I = J_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \left(\frac{h}{q^2}\right)^2 + \alpha_2^{(1)} \left(\frac{h}{q^2}\right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(1)} \left(\frac{h}{q^2}\right)^{2r} + O(h^{2r+2})$$

Eliminando $\alpha_1^{(1)}(h/q)^2$ tra l'ultima relazione e la precedente (Slide 25) si ottiene

$$I = J_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} \left(\frac{h}{q}\right)^4 + \cdots + \alpha_r^{(2)} \left(\frac{h}{q}\right)^{2r} + O(h^{2r+2})$$

dove

$$J_1^{(2)} = \frac{q^2 J_2^{(1)} - J_1^{(1)}}{q^2 - 1}$$

Eliminando ora $\alpha_2^{(2)} h^4$ dalle relazioni coinvolgenti $J_1^{(2)}$ e $J_0^{(2)}$ (Slide 25 - 27) si può scrivere

$$I = J_0^{(3)} + \alpha_3^{(3)} h^6 + \cdots + \alpha_r^{(3)} h^{2r} + O(h^{2r+2})$$

dove

$$J_0^{(3)} = \frac{q^4 J_1^{(2)} - J_0^{(2)}}{q^4 - 1}$$

con $\alpha_3^{(3)}, \ldots, \alpha_r^{(3)}$ indipendenti da h

Nella sua formulazione più generale, la tecnica di estrapolazione consiste, fissato l'intero $N < r$, nel calcolare, mediante la formula dei trapezi, i valori

$$J_0^{(1)},\ J_1^{(1)},\ \ldots,\ J_N^{(1)}$$

corrispondenti ai passi $h, h/q, \ldots, h/q^N$ (questa è la parte piùcostosa del metodo), quindi si costruiscono nuove approssimazioni di I in base allo schema

$$J_i^{(k+1)} = \frac{q^{2k} J_{i+1}^{(k)} - J_i^{(k)}}{q^{2k} - 1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

dove, per ciascun valore di k, l'indice i assume i valori $0, 1, \ldots, N - k$

Dalle considerazioni precedenti si deduce che $J_i^{(k+1)}$ presenta un errore dell'ordine di $(h/q^i)^{2(k+1)}$

Le successive approssimazioni di I ottenute con le formule di Romberg costituiscono una speciale applicazione di un procedimento generale, detto **estrapolazione di Richardson**

Tale procedimento può essere impiegato in tutti quei casi in cui una grandezza T si possa approssimare con un valore $\tau_0^{(1)}$ dipendente da un parametro h, e l'errore $T - \tau_0^{(1)}$ sia sviluppabile come

$$T = \tau_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} h^{r_1} + \beta_2^{(1)} h^{r_2} + \cdots$$

con $\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots$ non dipendenti da h e $0 < r_1 < r_2 < \cdots \in \mathbb{N}$

Outline

Prima di illustrare il secondo insieme di formule di quadratura, si ricordano alcune definizioni e proprietà di una particolare classe di polinomi

Si indichi con Π lo spazio vettoriale dei polinomi algebrici a coefficienti reali e sia $[a, b]$ un intervallo non necessariamente limitato

Per ogni coppia $r(x), s(x) \in \Pi$ si consideri il prodotto scalare

$$< r, s > = < s, r > = I(\rho rs) = \int_a^b \rho(x) r(x) s(x)\, dx$$

Si definisce Π^* come l'insieme dei **polinomi ortogonali**, cioè

$$\Pi^* = \{q_i(x) \mid \text{grado}(q_i) = i;\ < q_i, q_j >= h_i\,\delta_{ij}\ ; i, j = 0, 1, 2, ..\}$$

I numeri positivi h_i sono le costanti di normalizzazione

Dati $[a, b]$ e $\rho(x)$, gli elementi di Π^* restano definiti a meno di una costante moltiplicativa e costituiscono una base per Π

Per i polinomi ortogonali valgono le proprietà

1. $< p, q_n >= 0 \quad \forall p \in \Pi_{n-1}$
2. $q_n(x)$ ha n zeri reali e distinti in $]a, b[$

I polinomi ortogonali possono essere costruiti con semplici formule di ricorrenza a tre termini (alcuni esempi sono riportati nel §7.6.3 delle dispense)

Su intervalli simmetrici rispetto all'origine gli zeri dei polinomi ortogonali sono simmetrici rispetto all'origine

Fissati $\rho(x)$, $[a, b]$ ed n, scegliendo i nodi x_i come gli zeri del polinomio ortogonale di grado $n+1$, risulta univocamente determinata la formula di quadratura di grado di precisione almeno $2n+1$

$$I(\rho f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) = J_n(f)$$

che è detta **formula di quadratura gaussiana**

Si può enunciare il teorema che segue e la cui dimostrazione si trova sulle dispense

Teorema

Dati $[a, b]$ e $\rho(x)$, sia $f(x) \in C^{2n+2}([a, b])$ e $J_n(f)$ una formula di quadratura gaussiana
allora i nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ sono gli zeri di $q_{n+1}(x) \in \Pi^*$, i pesi sono positivi e dati da

$$a_i = I(\rho \ell_i^2), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

e il grado di precisione è esattamente $2n + 1$, essendo

$$E_n(f) \; = \; K_n \, \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}, \quad K_n > 0\,, \quad \theta \in]a, b[$$

l'errore della formula

Osservazione 1

Nodi e pesi delle formule gaussiane sono numeri irrazionali e sono stati calcolati in precisione multipla per vari valori di n
Essi sono inseriti nei principali programmi di calcolo per l'integrazione approssimata

Osservazione 2

Gli integrali estesi ad un intervallo limitato $[a, b]$, si usano polinomi ortogonali definiti in $[-1, 1]$
Ogni intervallo di integrazione $a \leq t \leq b$ può ricondursi all'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ con la trasformazione $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ e la funzione $\rho(x)$ può essere comunque introdotta
Risulta infatti

$$\int_a^b g(t)dt = \int_{-1}^1 \rho(x)f(x)dx$$

ove si assuma $f(x) = \frac{b-a}{2\rho(x)}g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)$

Osservazione 3

La positività dei pesi consente di dimostrare, sotto ipotesi molto generali, la convergenza di $J_n(f)$

Più precisamente, nel caso di intervalli limitati $[a, b]$ e per formule di grado $2n + 1$, la semplice continuità di $f(x)$ è condizione sufficiente affinché

$$\lim_{n\to\infty} J_n(f) = I(\rho f)$$

Pertanto l'errore $E_n(f)$ tende a zero per $n \to \infty$ anche nel caso che $f(x)$ non sia derivabile

Polinomi di Chebyshev di 1^a specie

In questo caso si ha

1. $[a, b] = [-1, 1]$
2. $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $h_0 = \pi,\ h_i = \pi/2,\ i > 0$
4. $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$
   $T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x),\ i = 1, 2, \dots$

I nodi e i pesi delle corrispondenti formule di quadratura sono esprimibili in forma chiusa

$$x_i = -\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad a_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomi di Chebyshev di 2^a specie

In questo caso si ha

1. $[a, b] = [-1, 1]$
2. $\rho(x) = \sqrt{1 - x^2}$
3. $h_i = \pi/2, \;\; i \geq 0$
4. $U_0(x) = 1, \;\; U_1(x) = 2x$

   $U_{i+1}(x) = 2xU_i(x) - U_{i-1}(x), \;\; i = 1, 2, \ldots$

I pesi e i nodi delle prime formule di quadratura sono riportati nella tabella della slide che segue

Polinomi di Chebyshev di 2^a specie

n	x_i	a_i
0	0.0000000000	1.5707963268
1	$\pm$0.5000000000	0.7853981634
2	$\pm$0.7071067812	0.3926990817
	0.0000000000	0.7853981634
3	$\pm$0.8090169944	0.2170787134
	$\pm$0.3090169944	0.5683194500
4	$\pm$0.8660254038	0.1308996939
	$\pm$0.5000000000	0.3926990817
	0.0000000000	0.5235987756
5	$\pm$0.9009688679	0.0844886909
	$\pm$0.6234898019	0.2743330561
	$\pm$0.2225209340	0.4265764164

Polinomi di Legendre

In questo caso si ha

1. $[a, b] = [-1, 1]$
2. $\rho(x) = 1$
3. $h_i = 2/(2i + 1), \;\; i \geq 0$
4. $P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x$

   $(i + 1)P_{i+1}(x) = (2i + 1)xP_i(x) - iP_{i-1}(x), \; i = 1, 2, \ldots$

I pesi e i nodi delle prime formule di quadratura sono riportati nella tabella della slide che segue

Polinomi di Legendre

n	x_i	a_i
0	0.0000000000	2.0000000000
1	$\pm$0.5773502692	1.0000000000
2	$\pm$0.7745966692	0.5555555555
	0.0000000000	0.8888888888
3	$\pm$0.8611363116	0.3478548451
	$\pm$0.3399810436	0.6521451549
4	$\pm$0.9061798459	0.2369268851
	$\pm$0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888888
5	$\pm$0.9324695142	0.1713244924
	$\pm$0.6612093865	0.3607615730
	$\pm$0.2386191861	0.4679139346

Polinomi di Laguerre

In questo caso si ha

1. $[a, b] = [0, +\infty[$
2. $\rho(x) = e^{-x}$
3. $h_i = 1, \;\; i \geq 0$
4. $L_0(x) = 1, \; L_1(x) = -x + 1$

   $(i+1)L_{i+1}(x) = (2i + 1 - x)L_i(x) - iL_{i-1}(x), \; i = 1, 2, \ldots$

I pesi e i nodi delle prime formule di quadratura sono riportati nella tabella della slide che segue

Polinomi di Laguerre

n	x_i	a_i
0	1.0000000000	1.0000000000
1	0.5857864376	0.8535533906
	3.4142135624	0.1464466094
2	0.4157745568	0.7110930099
	2.2942803603	0.2785177336
	6.2899450829	0.0103892565
3	0.3225476896	0.6031541043
	1.7457611012	0.3574186924
	4.5366202969	0.0388879085
	9.3950709123	0.0005392947

n	x_i	a_i
4	0.2635603197	0.5217556106
	1.4134030591	0.3986668111
	3.5964257710	0.0759424497
	7.0858100059	0.0036117587
	12.640800844	0.0000233700
5	0.2228466042	0.4589646739
	1.1889321017	0.4170008308
	2.9927363261	0.1133733821
	5.7751435691	0.0103991975
	9.8374674184	0.0002610172
	15.982873981	0.0000008985

Polinomi di Hermite

In questo caso si ha

1. $[a, b] =]-\infty, +\infty[$
2. $\rho(x) = e^{-x^2}$
3. $h_i = 2^i (i!) \sqrt{\pi}, \;\; i \geq 0$
4. $H_0(x) = 1, \; H_1(x) = 2x$

   $H_{i+1}(x) = 2xH_i(x) - 2iH_{i-1}(x), \; i = 1, 2, \ldots$

I pesi e i nodi delle prime formule di quadratura sono riportati nella tabella della slide che segue

Polinomi di Hermite

n	x_i	a_i
0	0.0000000000	1.7724538509
1	$\pm$0.7071067812	0.8862269255
2	$\pm$1.2247448714	0.2954089752
	0.0000000000	1.1816359006
3	$\pm$1.6506801239	0.0813128354
	$\pm$0.5246476233	0.8049140900
4	$\pm$2.0201828705	0.0199532421
	$\pm$0.9585724646	0.3936193232
	0.0000000000	0.9453087205
5	$\pm$2.3506049737	0.0045300099
	$\pm$1.3358490740	0.1570673203
	$\pm$0.4360774119	0.7246295952