



RISPOSTA IN FREQUENZA



- Introduzione
- Definizioni e Calcolo
- Rappresentazioni Grafiche
- Parametri della Risposta Temporale dalla Risposta in Frequenza



- Capitolo 7, Appendice B Testo di Bolzern
- Capitolo 9, testo di Murray (download)
- Capitolo 4 Lewis (download)
-

Riferimenti



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

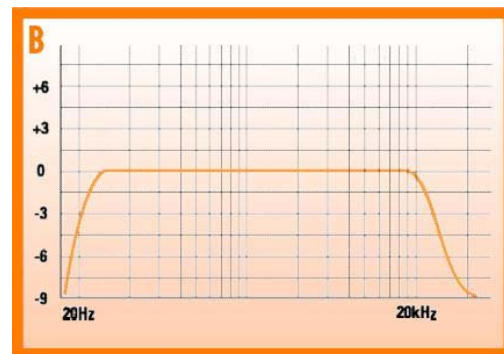
Con. Standard



Introduzione



- ☐ Metodo più comunemente utilizzato per l'analisi e la progettazione di sistemi di controllo classico e SISO.
- ☐ La risposta in frequenza è una rappresentazione della risposta dei sistemi ingressi di tipo sinusoidale a diverse frequenze; l'uscita di sistemi lineari a tali ingressi è data da segnali sinusoidali alla stessa frequenza ma con ampiezze e fasi differenti.
- ☐ Tutte quelle funzioni che, tramite la scomposizione armonica, possono rappresentare un segnale come combinazione lineare di componenti sinusoidali possono essere prese in considerazione (segnali sviluppabili in Serie di Fourier e/o che ammettono trasformata di Fourier).



- Banda Passante
- Frequenza di campionamento
- Filtraggio
- Armonica
- Broadband
- Spettro
- Densità spettrale di potenza

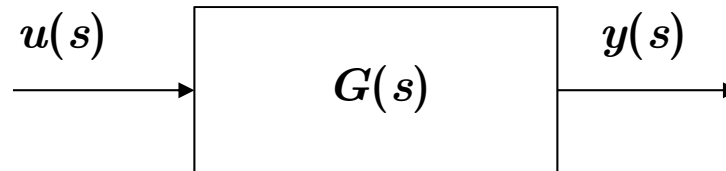
...



Introduzione



- Caratteristiche che definiscono la risposta in frequenza:
 - Proprietà strutturali del sistema (stabilità)
 - Tipologia di ingresso $u(t)$



- Consideriamo un sistema lineare SISO, stazionario e asintoticamente stabile, e calcoliamo la risposta a regime, quando l'ingresso è una funzione sinusoidale ad una data frequenza ω_0 :

$$\begin{cases} u(t) = U \sin \omega_0 t \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = ? \end{cases}$$

- Usando la rappresentazione mediante Trasformata di Laplace:

$$y(s) = G(s) \frac{U \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{A_1}{s + j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s + j\omega_0} + \text{i termini stabili dovuti a } G(s)$$



Definizioni e Calcolo

- L'uscita a regime, indicata con $y_{ss}(s)$ è quindi:

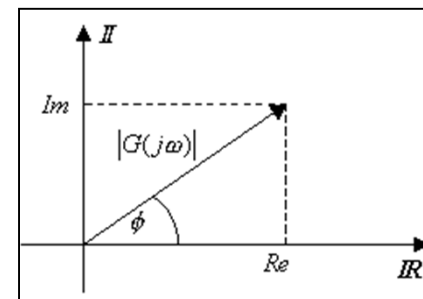
$$y_{ss}(s) = \frac{A_1}{s + j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s - j\omega_0}$$

- I residui (complessi e coniugati) valgono:

$$A_1 = \left[G(s) \cdot u(s) \right] \Big|_{s=-j\omega_0} = \frac{G(-j\omega_0)U}{-2j} \quad A_1^* = \frac{G(j\omega_0)U}{2j}$$

- Poiché $s = j\omega_0$ è un numero complesso lo sono anche $G(j\omega_0)$ e $G(-j\omega_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)| \cdot e^{j\varphi} \\ G(-j\omega_0) = |G(-j\omega_0)| \cdot e^{-j\varphi} = |G(j\omega_0)| \cdot e^{-j\varphi} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]} = \arg G(j\omega_0) = \angle G(j\omega_0) \end{array} \right.$$





Definizioni e Calcolo

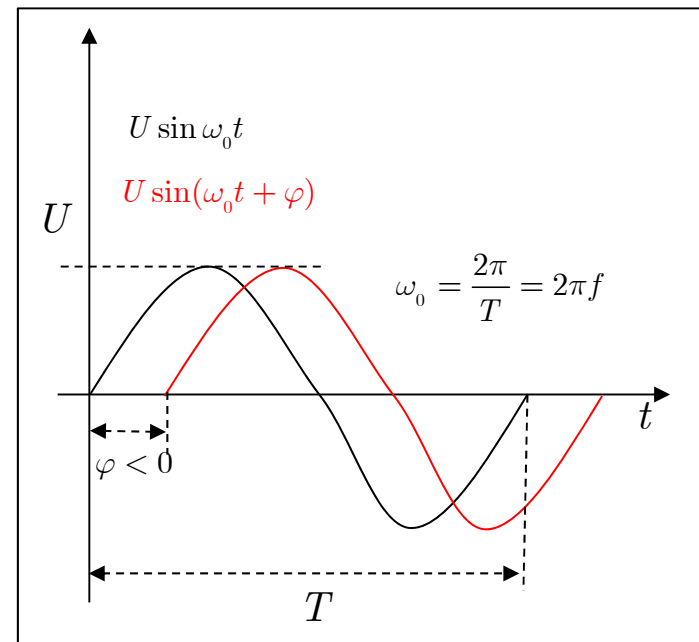
- Applicando la Antitrasformata di Laplace, si ha:

$$y_{ss}(t) = A_1 e^{-j\omega_0 t} + A_1^* e^{j\omega_0 t} = \frac{U |G(j\omega_0)|}{-2j} \cdot e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{U |G(j\omega_0)|}{2j} \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

- Nel dominio del tempo, usando le formule di Eulero:

$$y_{ss}(t) = U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi) = Y \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} Y = U \cdot |G(j\omega_0)| \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]} \end{cases}$$





Definizioni e Calcolo



■ Commenti:

1. La risposta di un sistema lineare ad un ingresso sinusoidale (armonico) a frequenza ω_0 è un segnale sinusoidale alla stessa frequenza;
2. L'ampiezza Y della risposta dipende dall'ampiezza U del segnale d'ingresso e dall'ampiezza del sistema $|G(j\omega_0)|$

3. La fase φ (< 0 ritardo, > 0 anticipo) della risposta è uguale alla fase del sistema

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]}$$

4. La risposta di un sistema lineare ad un ingresso armonico è quindi nota quando siano noti:
 - Ampiezza e Fase di $G(j\omega_0)$, oppure
 - Parte Reale e Parte Immaginaria di $G(j\omega_0)$

□ **Definizione di Risposta in Frequenza:** Dato un sistema lineare SISO, stazionario e asintoticamente stabile, la risposta in frequenza è data dall'uscita $y(t)$ a regime, quando l'ingresso è una funzione sinusoidale del tipo $u(t) = U \cdot \sin(\omega t)$, $t \geq 0$ e per $\omega \in [0, \infty)$

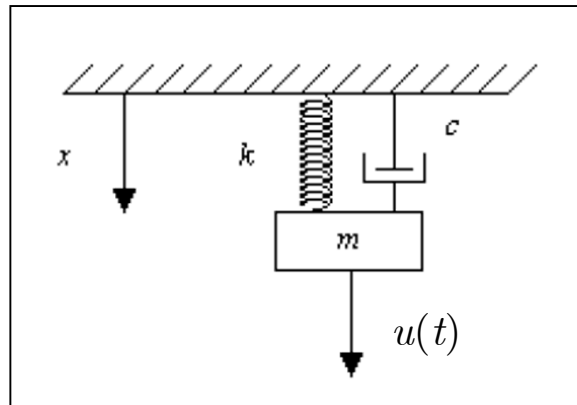


Definizioni e Calcolo

❑ **Nota:** Un sistema “perfetto”, ovvero capace di riprodurre esattamente un ingresso armonico a tutte le frequenze deve avere una FdT pari a:

$$G(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} = 0^\circ \end{cases}, \forall \omega \in [0, \infty)$$

❑ **Esempio 1:**



$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \\ u(t) = 10 \sin(\omega t) \end{cases}$$

- Posto $m = k = c = 1$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X = 10 |G(j\omega)| \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$



Definizioni e Calcolo

- FdT in funzione della frequenza

$$G(j\omega) = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} \cdot e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}}}$$

- Modulo e Fase della FdT

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

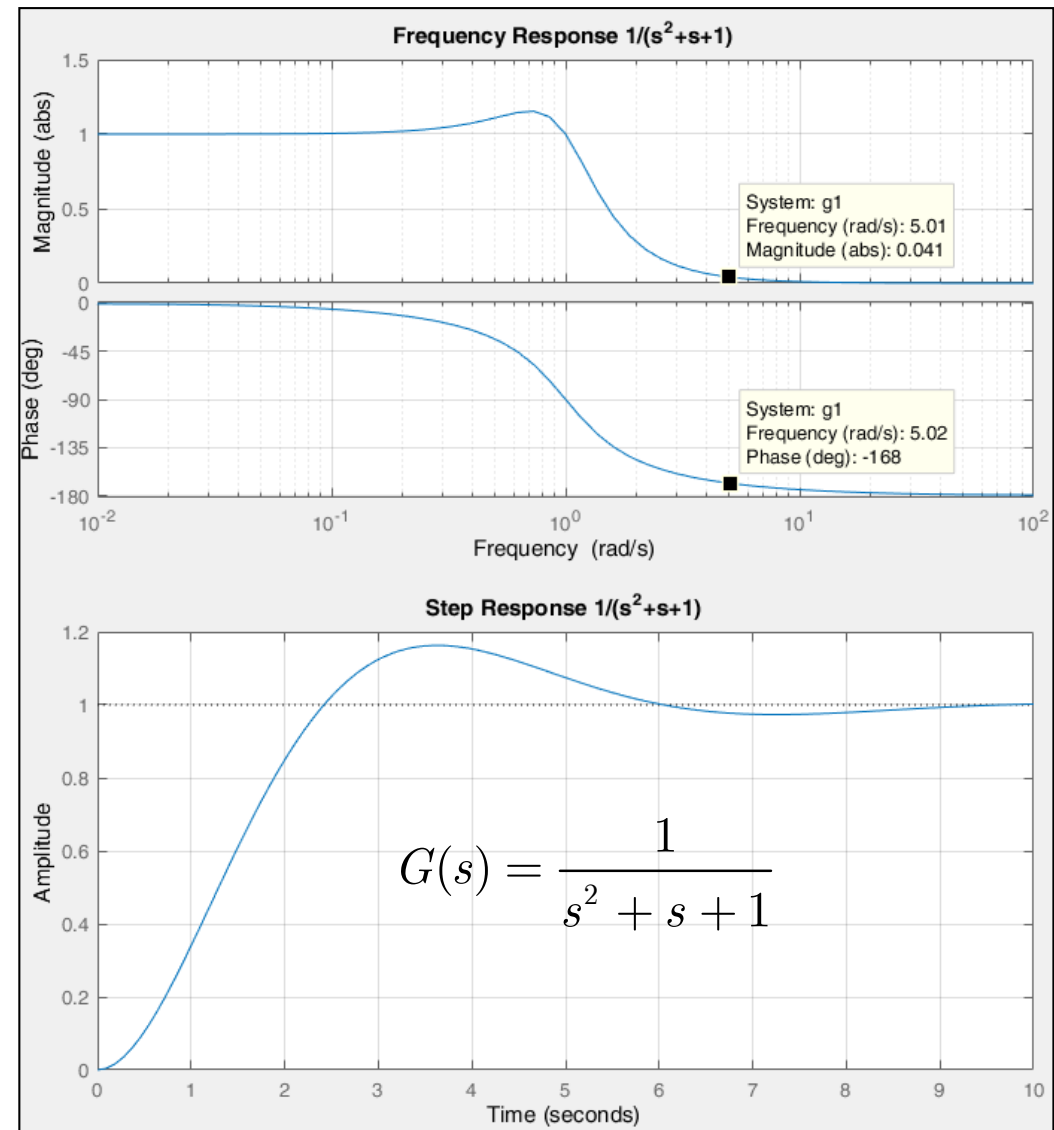
- Forma generale della risposta

$$x(t) = \frac{10}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}\right)$$

- Caso numerico particolare

$$u(t) = 10 \sin(5t)$$

$$\Rightarrow x(t) = 0.401 \sin(5t - 0.29)$$



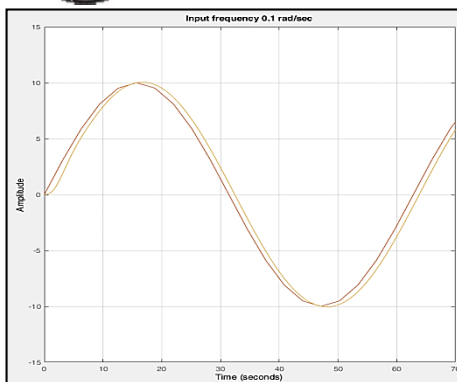


Definizioni e Calcolo

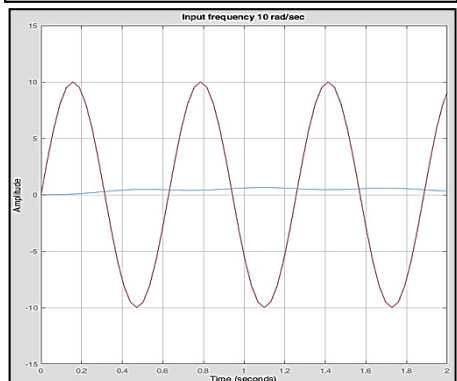
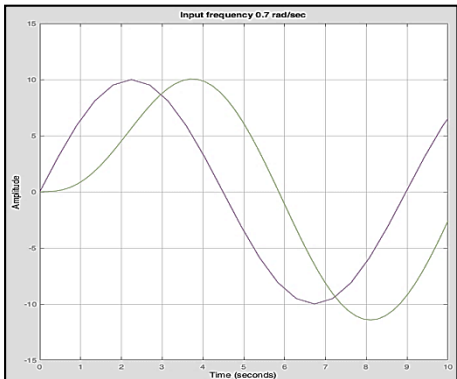
$$u(t) = 10 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = 10 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

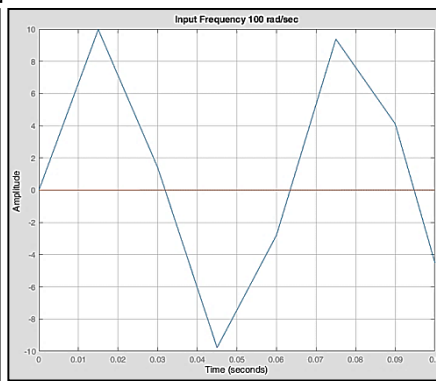
$$\omega = 0.1, M = 1.01, P = -5.8^\circ$$



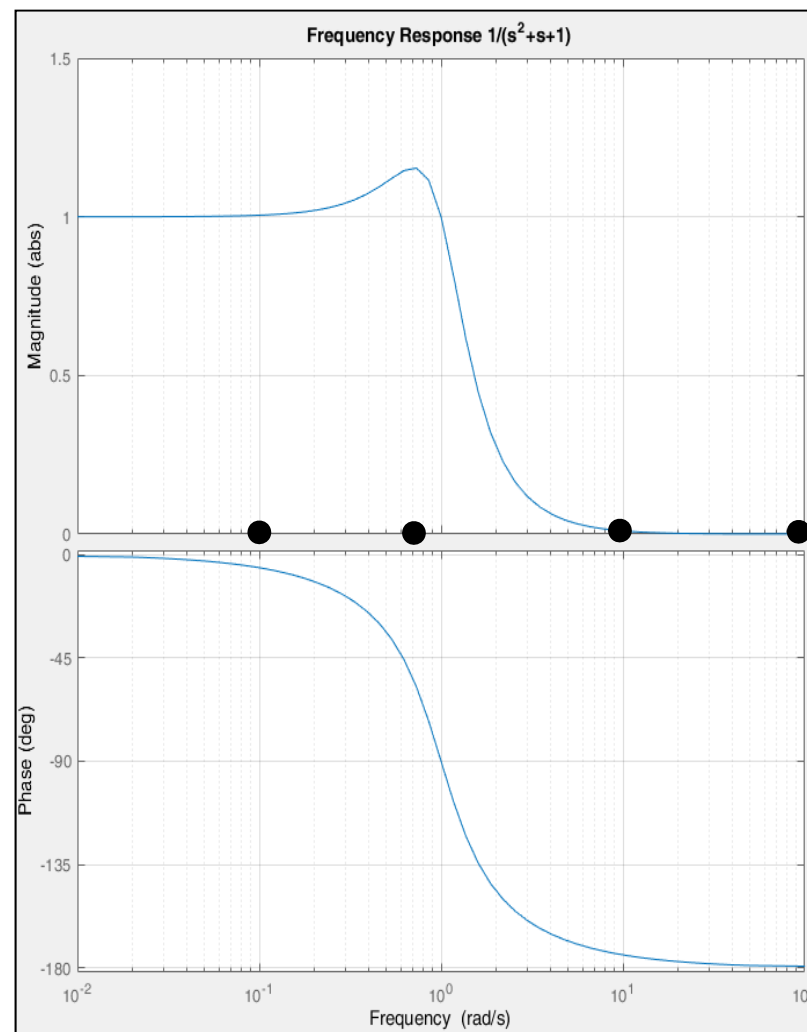
$$\omega = 0.7, M = 1.15, P = -53.7^\circ$$



$$\omega = 10, M = 0.01, P = -174^\circ$$



$$\omega = 100, M = 0.0003, P = -179^\circ$$

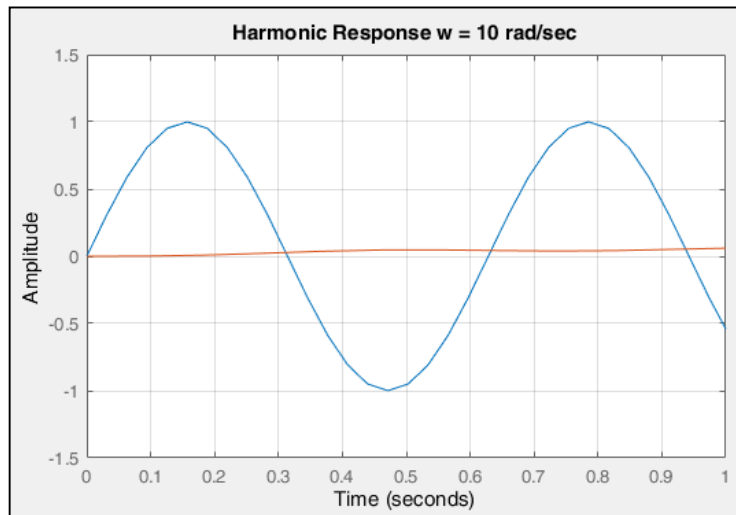




Definizioni e Calcolo

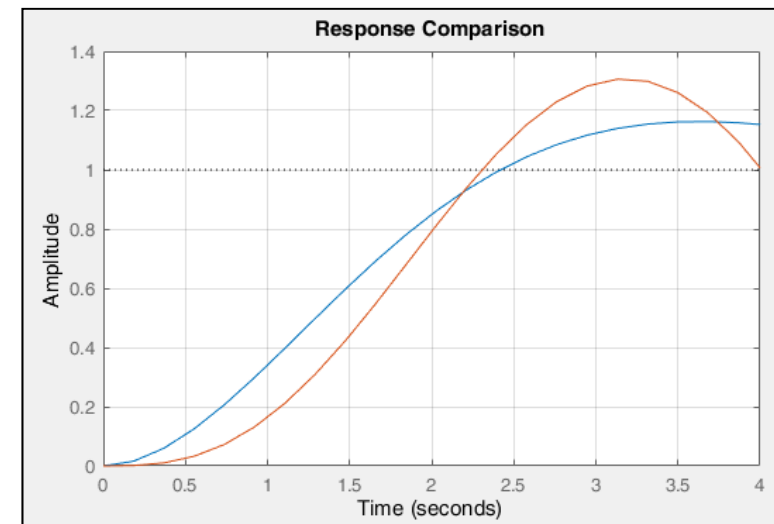
□ Commenti:

1. All'aumentare della frequenza, l'ampiezza della risposta armonica tende a zero. Si può trovare una frequenza dopo la quale possiamo dire che, in pratica, il sistema NON risponde, ovvero la massa non si muove!



2. Paragone tra la risposta al gradino e la risposta ad una somma di ingressi sinusoidali

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,7} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{30}\right)$$





Definizioni e Calcolo

□ Esempio 2:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

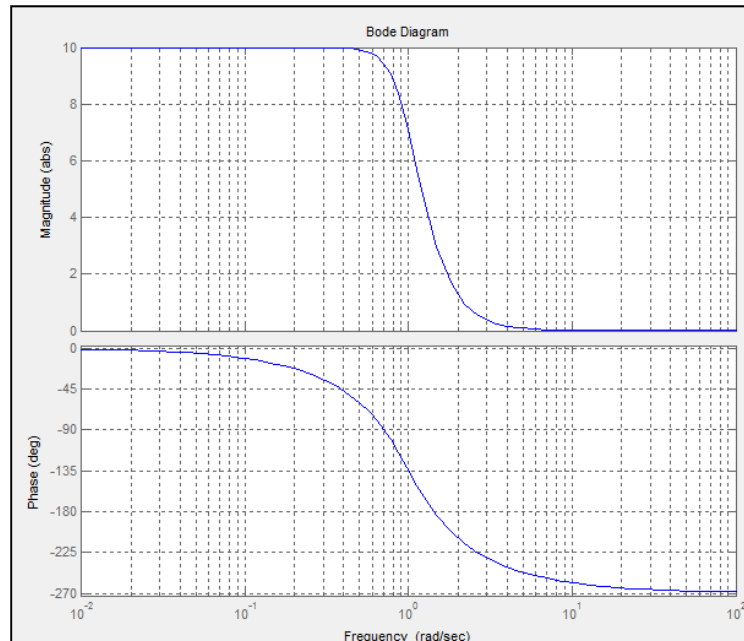
$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j\omega-\omega^2)}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{100(1-2\omega^2)^2 + 100\omega^2(2-\omega^2)^2}{((1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-[\omega(2-\omega^2)]}{1-2\omega^2}$$

$$u(t) = U \sin \omega t$$

$$y(t) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$



frequency	Magnitude	Phase
0.1 rad/sec	10.0	-12 deg
1.0 rad/sec	7.0	-135 deg
10.0 rad/sec	0.0107	-258 deg

$$u(t) = 4 \sin t$$

$$y(t) = 28 \sin(t - 2.356)$$

$$u(t) = \sin 10t$$

$$y(t) = 0.0107 \sin(t - 4.5)$$



Introduzione



- La risposta in frequenza può essere calcolata anche per segnali non puramente armonici sfruttando lo sviluppo in serie di Fourier, la sua trasformata ed il fatto che per i sistemi di interesse vale il principio di sovrapposizione degli effetti (linearità)
 - Si può quindi studiare la risposta di un sistema ad ingressi:
 - Sinusoidali
 - Periodici
 - “Aperiodici”

□ Definizione – Funzione periodica:

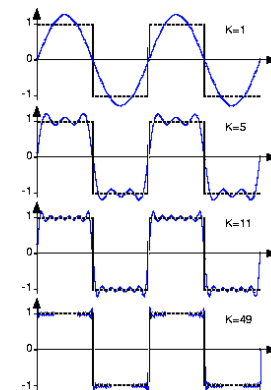
Una funzione $f(t)$ si dice periodica di periodo T se

$$\exists T > 0 := f(t) = f(t + T), \forall t$$

• Il più piccolo valore T si dice Periodo fondamentale

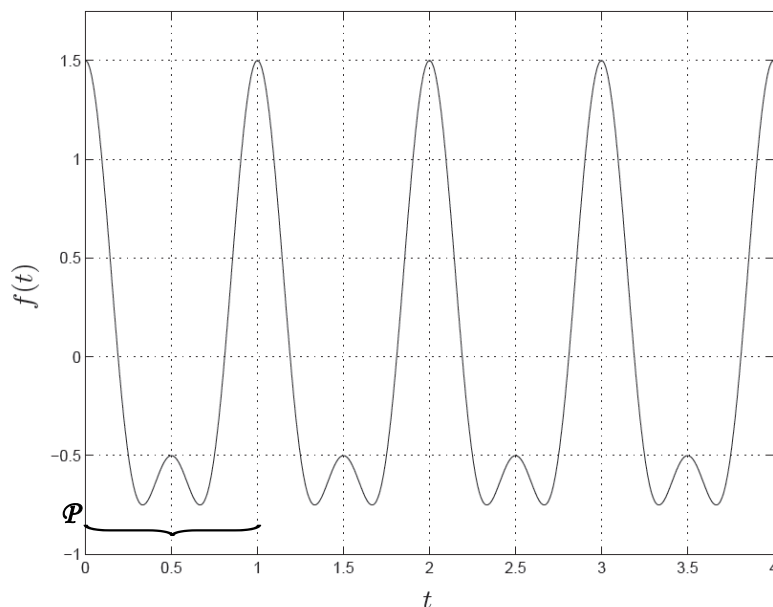
Ogni multiplo intero del periodo fondamentale è anch'esso un Periodo.

$$f(t + mT) = f(t), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$





Introduzione



$$f(t) = \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(4\pi t)$$

$$\begin{cases} \cos(2\pi t) \Rightarrow \mathcal{P} = 1 \\ \cos(4\pi t) \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathcal{P} = 1$ è il più piccolo periodo T per cui $f(t) = f(t + T)$

- In generale, per una funzione periodica (per esempio di periodo 2π) si hanno le seguenti definizioni:

$$A \sin\left(2\pi\nu t + \phi\right)$$

A = Ampiezza (Modulo)

ϕ = Fase (rad)

$\nu = 1/\mathcal{P}$ frequenza (Hz, sec^{-1})

$2\pi\nu = \omega$ = pulsazione (rad/sec)

$$A \sin\left[2\pi\nu\left(t + \frac{1}{\nu}\right) + \phi\right] = A \sin[2\pi\nu t + 2\pi + \phi] = A \sin[2\pi\nu t + \phi]$$



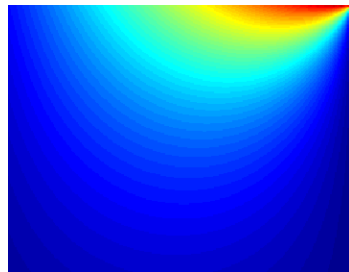
Introduzione



□ **Domanda:** E' possibile usare una somma di funzioni trigonometriche per rappresentare una funzione periodica qualsiasi? → Serie di Fourier

- Nel caso di dello sviluppo originario di Fourier (circa 1822) si parla di periodicità spaziale per il modello della distribuzione di temperatura in una piastra metallica partendo da una barra monodimensionale:

$$? = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta + \phi_n)$$



- I termini sinusoidali sono detti Armoniche
- La dipendenza dal tempo è eventualmente implicita nei coefficienti
- Ogni armonica ha Periodo $2\pi/n$ con frequenza $\nu = n/2\pi$
- Il Periodo della somma è comunque 2π !

- Nelle tre dimensioni spaziali, definendo la funzione diffusione termica $u(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

$$u_t = \alpha \left(u_{xx} + u_{yy} \right) \Big|_{\substack{0 < x < L \\ 0 < y < L}}$$



Introduzione



□ Serie di Fourier per una funzione periodica (forma esponenziale):

- Consideriamo una funzione periodica complessa, continua e derivabile

$$f(t) = f(t + T), \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

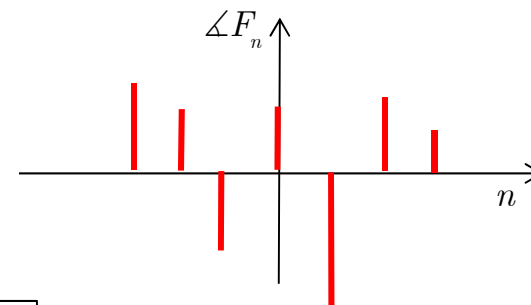
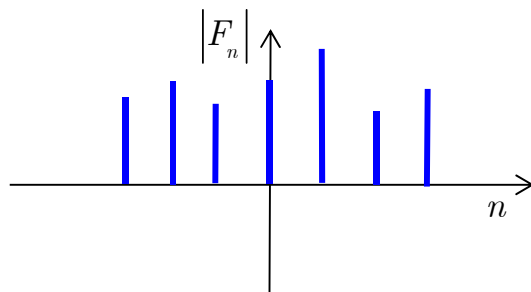
$$2\pi v = \frac{2\pi}{T} = \omega \text{ pulsazione}$$

- Si associ alla funzione $f(t)$ i coefficienti complessi F_n per $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$e^{-jn\omega t} = \cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)$$

$$e^{jn\omega t} = \cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t)$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega t}$$



Introduzione



- Nel caso in cui $f(t)$ sia una funzione reale i coefficienti complessi sono anche coniugati rispetto ad n

$$F_{-n} = \bar{F}_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(F_n e^{jn\omega t} + \bar{F}_n e^{-jn\omega t} \right)$$

- Quindi il modulo e la fase di F_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ definiscono completamente la $f(t)$

❑ Serie di Fourier per una funzione periodica (forma trigonometrica)

- Usando le formule di Eulero per riscrivere i coefficienti F_n :

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [F_{cn} \cos(n\omega t) + F_{sn} \sin(n\omega t)] \quad F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$$

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |F_n| \cos(n\omega t + \angle F_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$



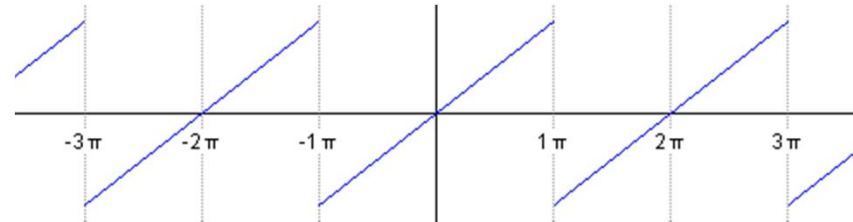
Introduzione



❑ **Esempio:** Consideriamo la seguente funzione periodica

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), -\infty < x < \infty$$

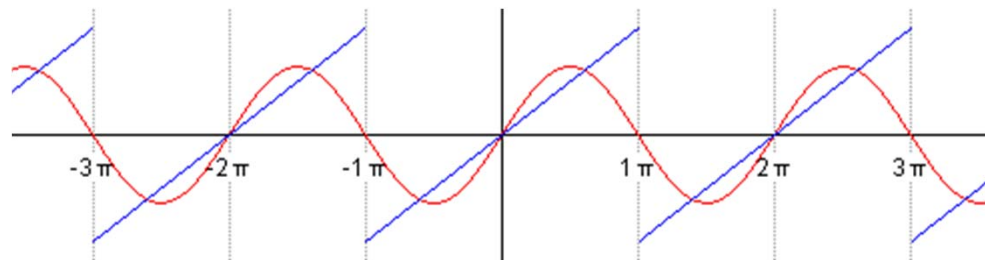


$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] \cos(nx) + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \sin(nx)$$

$$a_n = 0$$

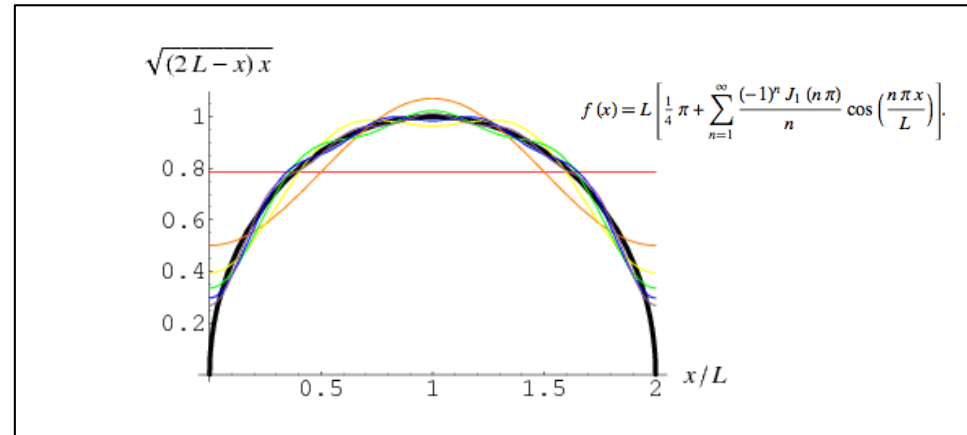
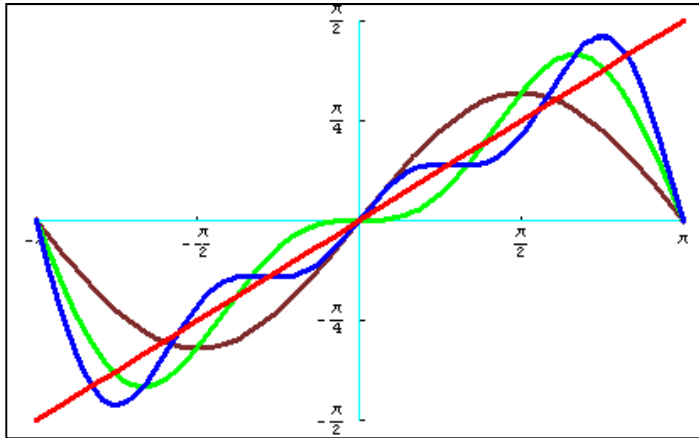
$$b_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) + \dots, -\infty < x < \infty$$



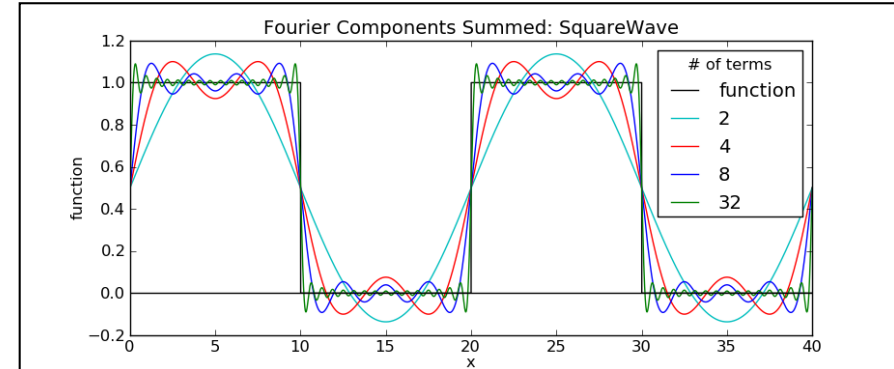


Introduzione



- Segnali a banda limitata:

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^N |F_n| \cos(n\omega t + \angle F_n)$$
$$F_n = 0, n > N$$



- Come quantifichiamo la 'capacità di risposta' di un sistema? L'intervallo di frequenze entro il quale il sistema fornisce una risposta è detto **Banda** oppure **Banda Passante**.



Introduzione



❑ Serie di Fourier per segnali Aperiodici (Trasformata Continua)

Nel caso di segnale aperiodico, si ipotizza che esso sia un segnale periodico il cui periodo, T_0 tende all'infinito, il che significa che la pulsazione (frequenza) tendono a zero

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_p(t)$$

❑ **Sommario:** Dato un sistema lineare, tempo invariante, asintoticamente stabile con FdT $G(j\omega)$

- La risposta in frequenza ad un ingresso sinusoidale è ancora un segnale sinusoidale

$$\begin{aligned} u(t) &= U \sin \omega_0 t \\ y(t) &= U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

- La risposta in frequenza ad un ingresso periodico è la combinazione lineare delle risposte alle armoniche costituenti lo sviluppo in serie di Fourier dell'ingresso

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}, Y_n = G(jn\omega_0) U_n \end{aligned}$$

- La risposta in frequenza ad un ingresso aperiodico può essere approssimata con quella di un ingresso periodico avente periodo $T \rightarrow \infty$



Rappresentazioni Grafiche

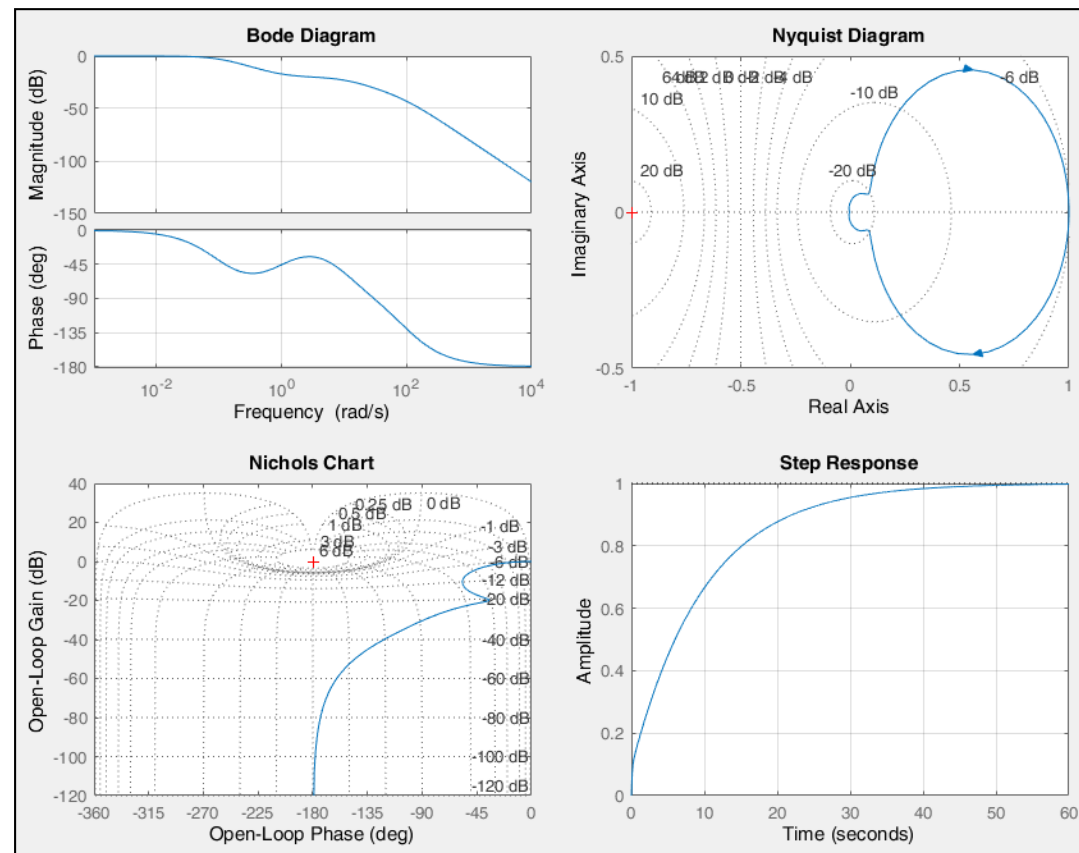


□ Rappresentazione Grafica della Risposta in Frequenza

- Uno dei vantaggi della risposta in frequenza è la sua facilità di rappresentazione grafica anche approssimata manualmente.

- Le tecniche grafiche principali sono:
- *Diagrammi di Bode o diagrammi Cartesiani*
- *Diagrammi di Nyquist o polari*
- *Diagrammi di Nichols*

```
>> SYS1=100*(s+1)/((s+0.1)*(s+10)*(s+100))  
  
SYS1 =  
  
      100 s + 100  
-----  
s^3 + 110.1 s^2 + 1011 s + 100  
Continuous-time transfer function.
```





Richiami



□ Introduzione con Esempio

- Consideriamo una funzione scalare razionale fratta di variabile complessa

$$G = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)}{(a_3 + jb_3)} \quad (a_1 + jb_1) = |(a_1 + jb_1)| e^{j\angle(a_1 + jb_1)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} e^{j \tan^{-1} \frac{b}{a}}$$

- Per le proprietà dei numeri complessi:

$$|G| = \left| \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)}{(a_3 + jb_3)} \right| = \frac{|a_1 + jb_1| |a_2 + jb_2|}{|a_3 + jb_3|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

$$\angle G = \angle(a_1 + jb_1) + \angle(a_2 + jb_2) - \angle(a_3 + jb_3)$$

- Per le proprietà logaritmi:

$$\begin{aligned} \log_{10} |G| &= \log_{10} \frac{|a_1 + jb_1| |a_2 + jb_2|}{|a_3 + jb_3|} = \log_{10} \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} = \\ &= \log_{10} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \log_{10} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - \log_{10} \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \end{aligned}$$



Richiami



$$G(s) = \frac{(10)(s+5)}{s(s+40)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{(10)5(\frac{j\omega}{5} + 1)}{(j\omega)40(\frac{j\omega}{40} + 1)} = \frac{(1.25)(\frac{j\omega}{5} + 1)}{(j\omega)(\frac{j\omega}{40} + 1)}$$

- Consideriamo la seguente misura per il modulo di $G(j\omega)$:

$$\boxed{|G(j\omega)|_{dB} \Rightarrow 20 \log_{10} |G(j\omega)|}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{|1.25| \left| \frac{j\omega}{5} + 1 \right|}{|j\omega| \left| \frac{j\omega}{40} + 1 \right|} =$$

$$= 20 \log_{10}(1.25) + 20 \log_{10}(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{25}}) - 20 \log_{10}(\sqrt{\omega^2}) - 20 \log_{10}(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{1600}})$$

- Calcoliamo la fase di $G(j\omega)$:

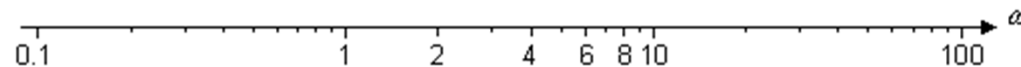
$$\angle G(j\omega) = \angle(1.25) + \angle(\frac{j\omega}{5} + 1) - \angle(j\omega) - \angle(\frac{j\omega}{40} + 1)$$



Diagrammi di Bode



- ❑ I *diagrammi di Bode* sono la tecnica grafica più comunemente utilizzata per rappresentare la risposta in frequenza; tale rappresentazione usa due diversi diagrammi, uno per il modulo per la fase come funzioni della frequenza
- ❑ L'asse delle ascisse riporta il valore delle diverse frequenze f o pulsazioni $\omega = 2\pi f$; l'unità di misura di solito quindi Hz oppure rad/sec rispettivamente. *La scala dell'asse delle ascisse è di solito logaritmica in base 10:*



- ❑ Se il rapporto fra due pulsazioni successive è pari a 10 si dice che sono separate da una *decade*:

$$\text{decade} = \frac{\log_{10} (\omega_2 / \omega_1)}{\log_{10} 10}$$

- Se il rapporto fra due pulsazioni è pari a 2 si dice che sono separate da una *ottava*

$$\text{ottava} = \frac{\log_{10} (\omega_2 / \omega_1)}{\log_{10} 2}$$

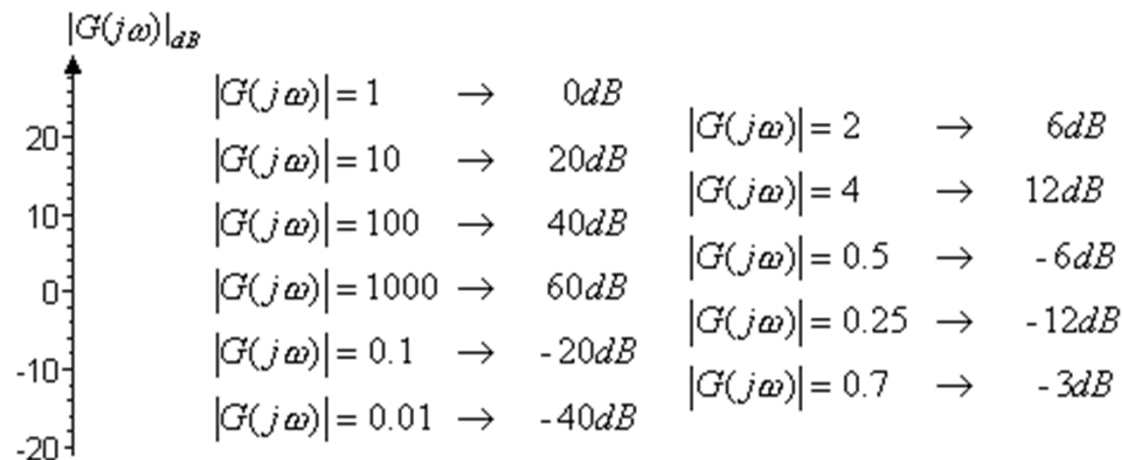


Diagrammi di Bode



- Nel *diagramma del modulo* l'asse delle ordinate riporta, il valore dell'ampiezza della $G(j\omega)$; i valori vengono riportati in *Decibel (dB)*, in una scala lineare

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

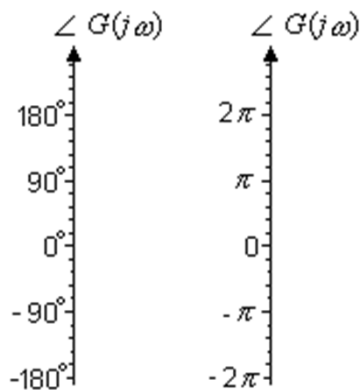


- Una differenza di 20 dB corrisponde ad un cambiamento di un'ordine di grandezza dell'ampiezza.
- **Un grafico lineare asintotico approssimato può essere disegnato usando linee rette dato che la relazione fra dB e $\log_{10}\omega$ è lineare.**
- Utilizzando i dB le ampiezze possono essere semplicemente sommate e sottratte (essendo logaritmi).



Diagrammi di Bode

- Nel *diagramma di fase* l'asse delle ordinate riporta, la fase di $G(j\omega)$ espressa in gradi o radianti, con scala lineare; quando la $G(j\omega)$ viene espressa in modulo e fase (cioè come $|G(j\omega)| \cdot e^{\angle G(j\omega)}$) anche le fasi possono essere sommate e sottratte



- L'uso dei logaritmi e della trattazione del numero complesso $G(j\omega)$, permette anche il tracciamento approssimato dei diagrammi di Bode per mezzo di approssimanti Lineari, ottenendo i cosiddetti diagrammi asintotici

- Il tracciamento dei diagrammi asintotici di Bode consiste nel riscrivere la $G(s)$ ponendo $s = j\omega$, e portare l'espressione in **forma di Bode**

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

- Dopo di che si usano le proprietà dei logaritmi e dei numeri complessi viste precedentemente.



Diagrammi di Bode



- Essendo la $G(j\omega)$ un numero complesso, la fase è data dalla somma (e sottrazione) delle fasi delle varie componenti e il modulo è dato dal prodotto dei moduli; ricordando però che il diagramma riporta il modulo espresso in dB si ha che anche il modulo è dato dalla somma dei moduli, espressi in dB , delle varie componenti:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = & 20 \cdot \log_{10} |k| - 20 \cdot r \cdot \log_{10} |j\omega| + \sum_i 20 \cdot \log_{10} |1 + j\tau_i \omega| + \\ & + \sum_i 20 \cdot \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2 \right| - \sum_i 20 \cdot \log_{10} |1 + jT_i \omega| + \\ & - \sum_i 20 \cdot \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) = & \angle k - r \cdot \angle(j\omega) + \sum_i \angle(1 + j\tau_i \omega) + \sum_i \angle(1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2) + \\ & - \sum_i \angle(1 + jT_i \omega) - \angle \sum_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2) \end{aligned}$$



Diagrammi di Bode



□ **Esempio** $G(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+10)}$

- Forma di Bode

$$G(s) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)} = 0.2 \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)} \Rightarrow G(j\omega) = 0.2 \cdot \frac{1+j\omega}{j\omega \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

- Modulo e Fase

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1+j\omega| - 20 \log_{10} \left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1+j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

- Esaminiamo i contributi separatamente



Diagrammi di Bode



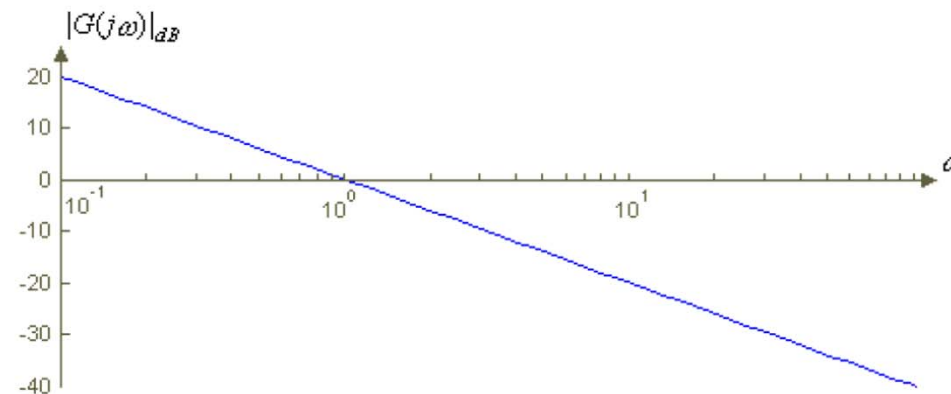
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$

$$1) 20 \log_{10} |0.2| = -14$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$

$$2) -20 \cdot \log_{10} |j\omega|$$

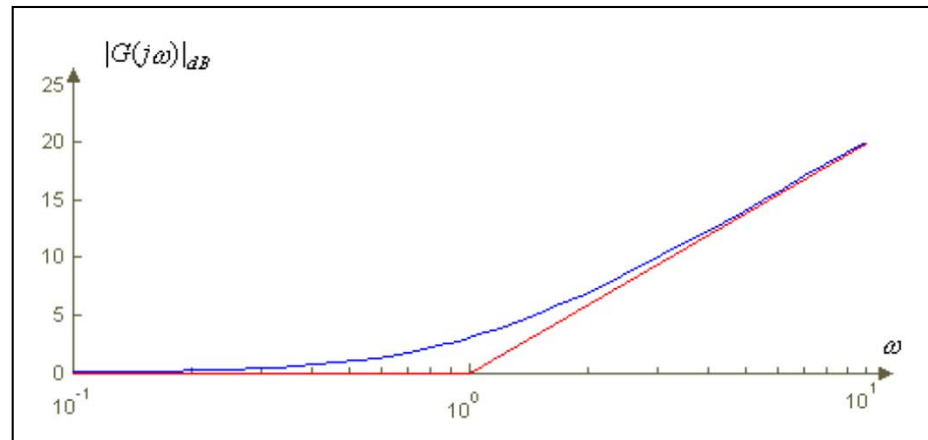
Si ha ovviamente che per $\omega \rightarrow 0$ tende a ∞ mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a 0 con un andamento lineare con una pendenza di -20 dB/decade :





Diagrammi di Bode

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$



3) $20 \cdot \log_{10} |1 + j\omega|$

Tenendo presente che

$$|1 + j\omega| = \sqrt{1 + \omega^2}$$

si possono fare le seguenti ipotesi:

- a) $\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx 1$
- b) $\omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx \omega$

e quindi, per $\omega \rightarrow 0$ tende a 0 mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a ∞ con un andamento lineare con una pendenza di 20 dB/decade.



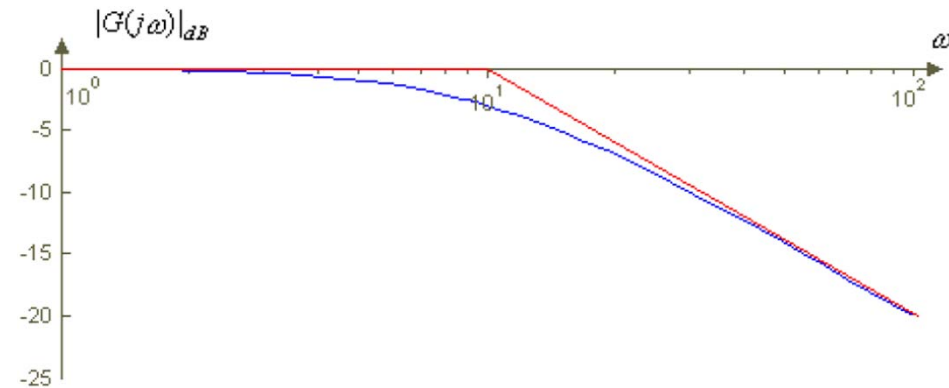
Diagrammi di Bode

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}|0.2| - 20\log_{10}|j\omega| + 20\log_{10}|1 + j\omega| - 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$

4) $-20 \cdot \log_{10}|1 + j(\omega/10)|$

In questo caso si ha che:

$$\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}$$



si possono fare le seguenti ipotesi:

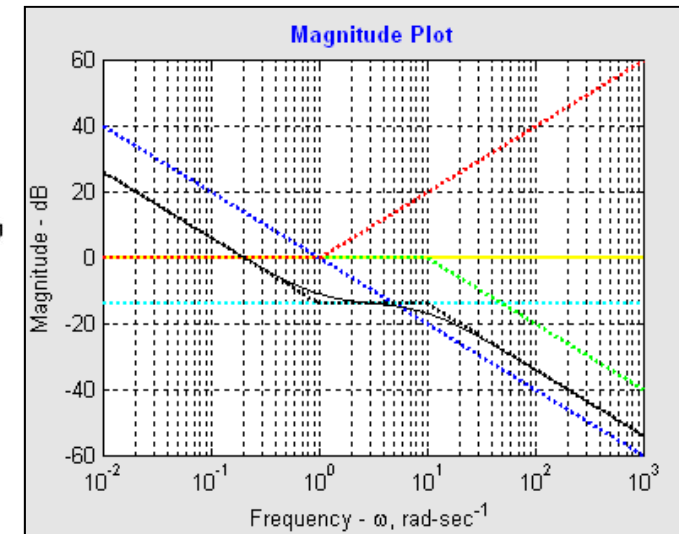
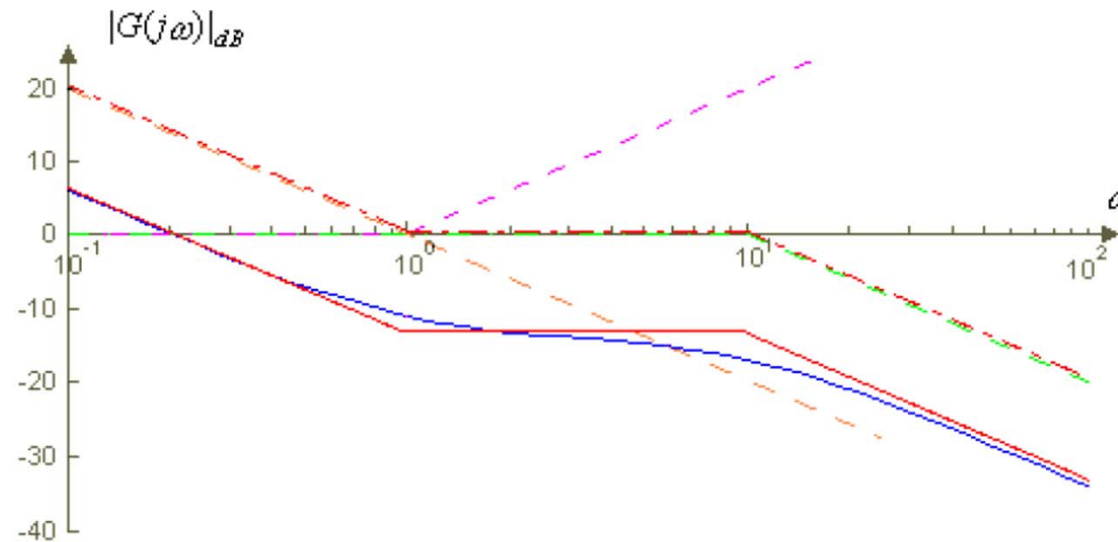
a) $\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx 1$

b) $\omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx \frac{\omega}{10}$

e quindi, per $\omega \rightarrow 0$ tende a 0 mentre per $\omega \rightarrow \infty$ tende a andamento lineare con una pendenza di -20 dB/decade .



Diagrammi di Bode



- Comando Matlab: BodePlotGui
- Scaricabile dal sito oppure da Matlab Central

$$\angle G(j\omega) = \boxed{\angle 0.2} - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

$$\angle 0.2 = 0$$

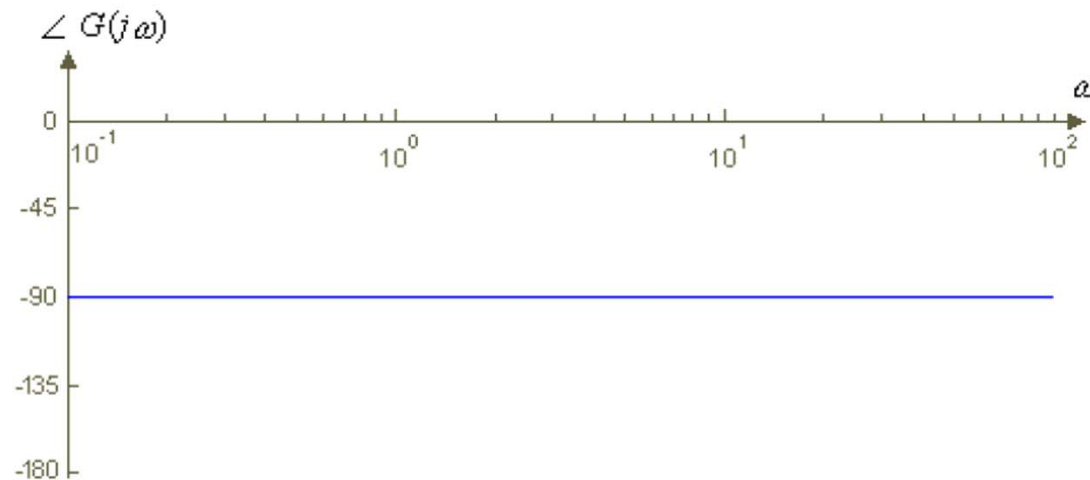


Diagrammi di Bode

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

2) $\angle(-j\omega)$

Questo termine introduce una fase pari a -90° per tutte le frequenze





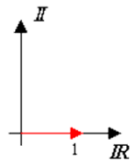
Diagrammi di Bode

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

3) $\angle(1+j\omega)$

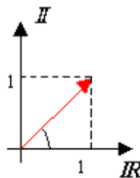
Il termine $(1+j\omega)$ rappresenta un vettore con parte reale pari a 1
parte immaginaria pari a ω e quindi:

$\omega \rightarrow 0$



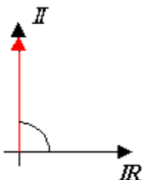
$$\angle(1+j\omega) = 0^\circ$$

$\omega = 1$

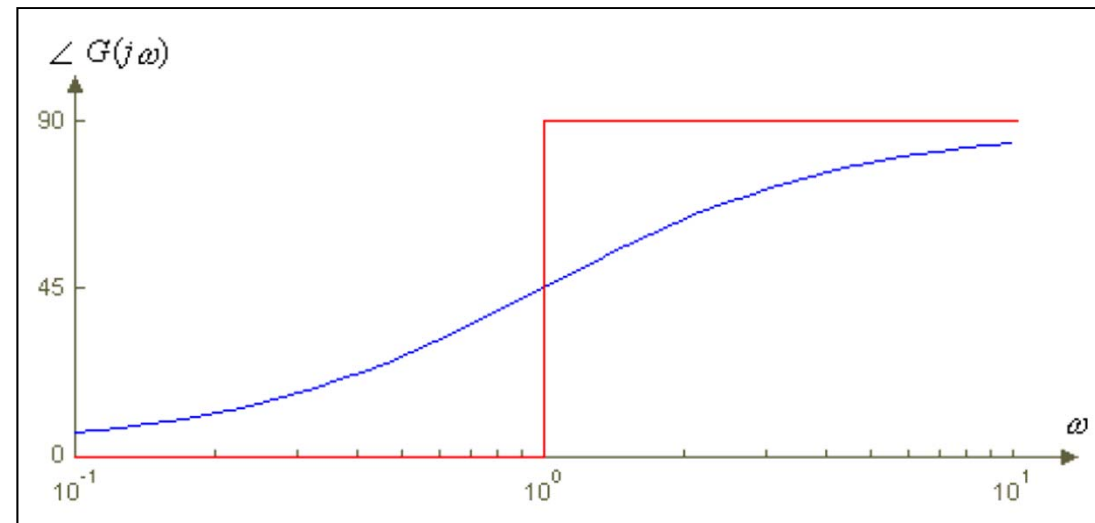


$$\angle(1+j\omega) = 45^\circ$$

$\omega \rightarrow \infty$



$$\angle(1+j\omega) = 90^\circ$$





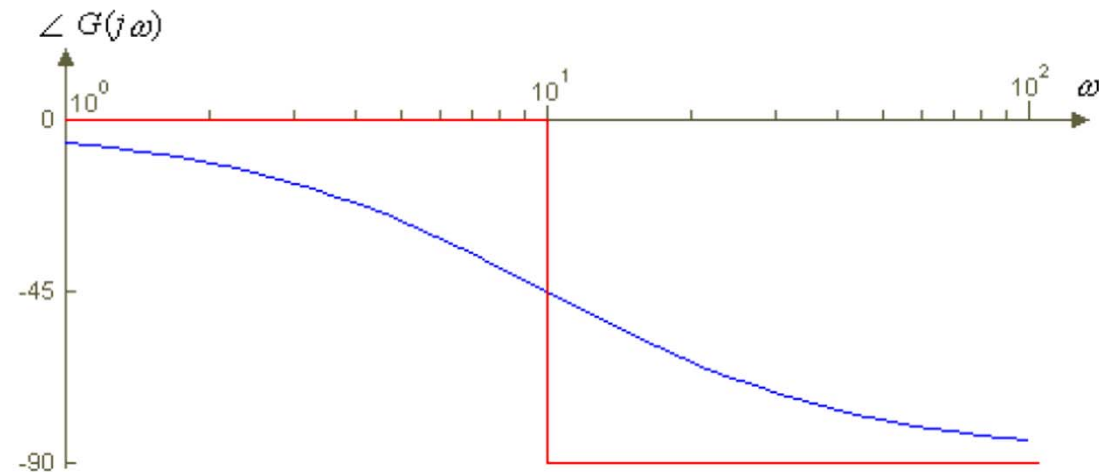
Diagrammi di Bode

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

4) $\angle\{-[1+(j\omega/10)]\}$

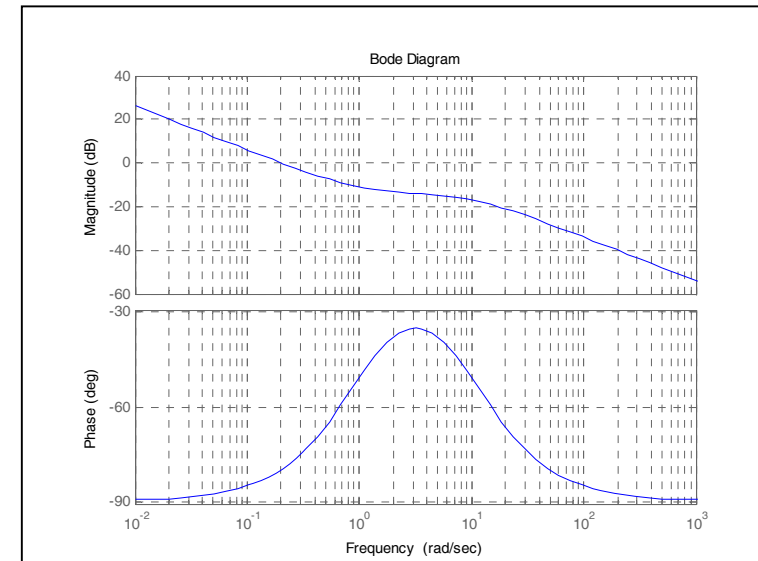
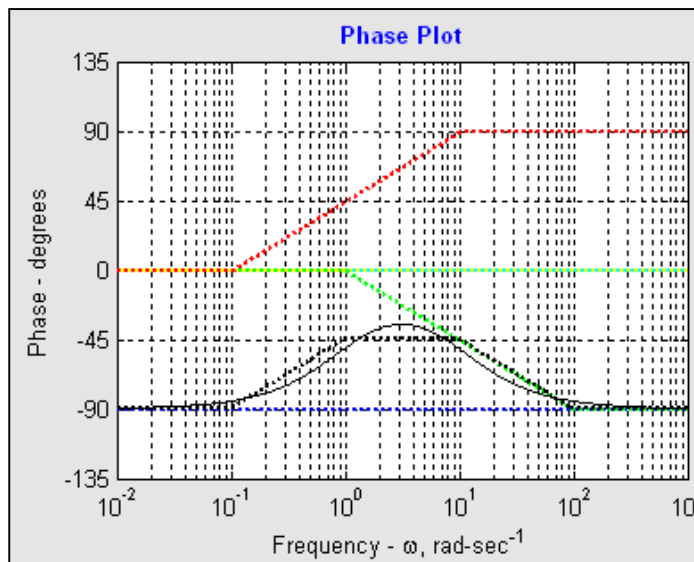
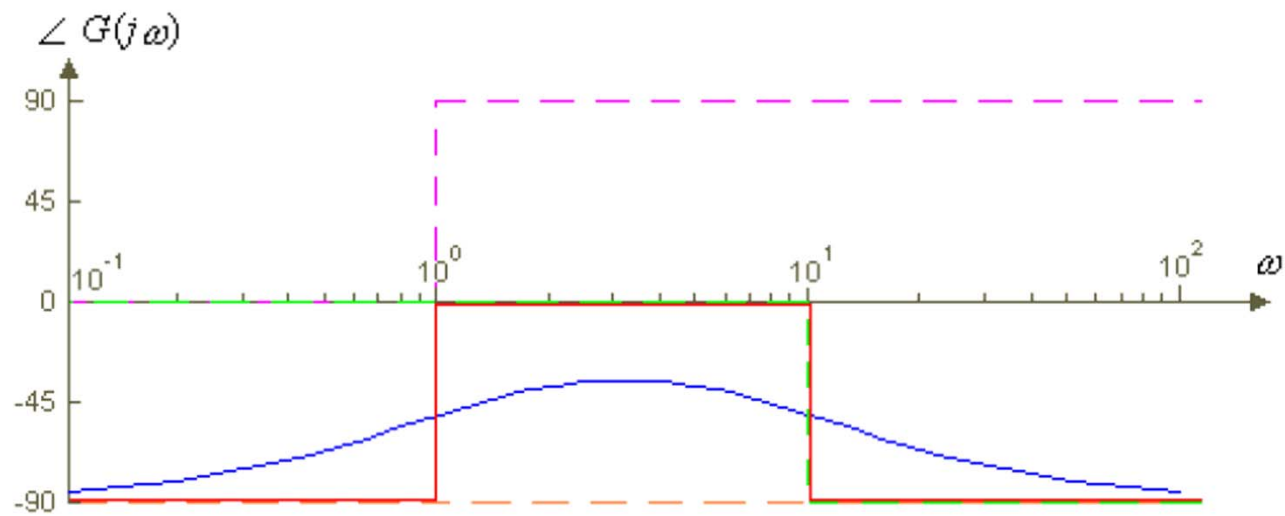
Con ragionamenti analoghi al termine appena visto si ha che:

- a) $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 0^\circ$
- b) $\omega = 10 \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 45^\circ$
- c) $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 90^\circ$





Diagrammi di Bode





Diagrammi di Bode

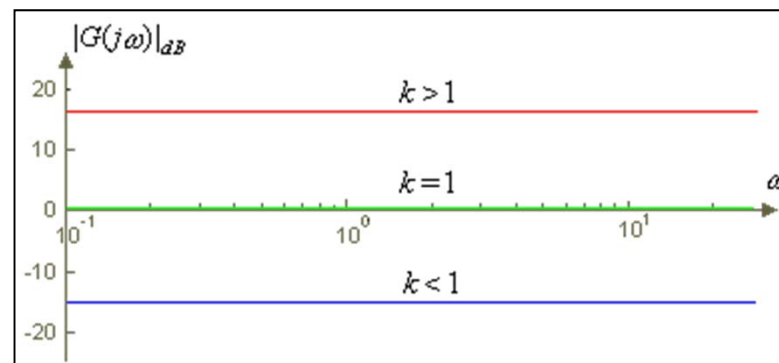
□ Regole generali per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo

- Qualsiasi funzione di trasferimento è costruita in generale da una combinazione di quattro Componenti:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

1. Guadagno statico
2. Polo/Zero all'origine
3. Polo/Zero ad una frequenza finita (termine del primo ordine)
4. Coppia di Poli/Zeri complessi e coniugati

1. $\pm k$ Costante di Guadagno Statico $\left| G(j\omega) \right|_{dB} = 20 \log_{10} |k|$



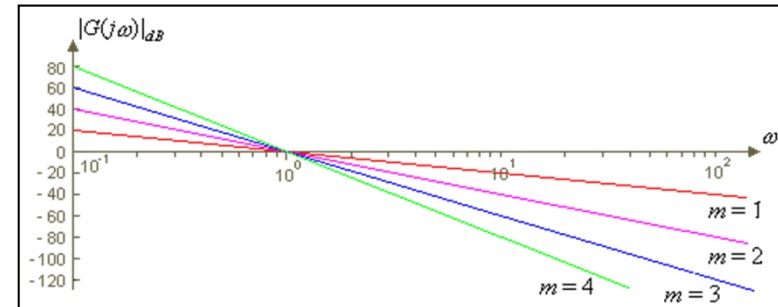
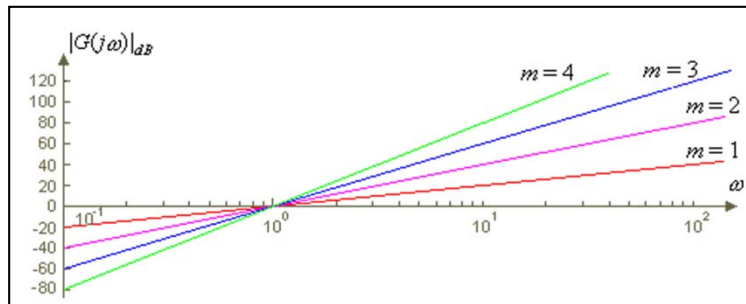


Diagrammi di Bode

2. $(j\omega)^{\pm m}$ zeri/poli nell'origine

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} \left|(j\omega)^m\right| = m \cdot 20 \log_{10} \omega$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} \left|(j\omega)^{-m}\right| = -m \cdot 20 \log_{10} \omega$$



- Lo zero all'origine inserisce una retta con una pendenza pari a $m \cdot 20 \text{ dB/dec.}$ e tale che per $\omega = 1$ si ha $|G(j\omega)| = 0$;
- Il polo all'origine inserisce una retta con una pendenza pari a $-m \cdot 20 \text{ dB/dec.}$ e tale che per $\omega = 1$ si ha $|G(j\omega)| = 0$

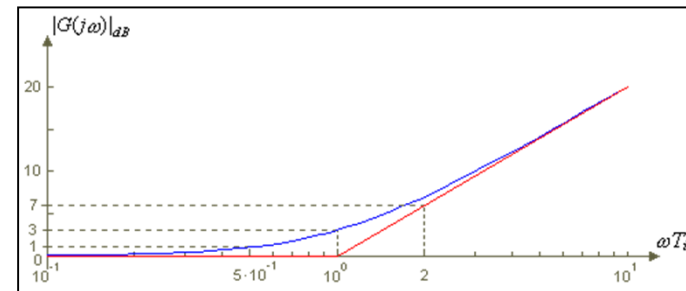
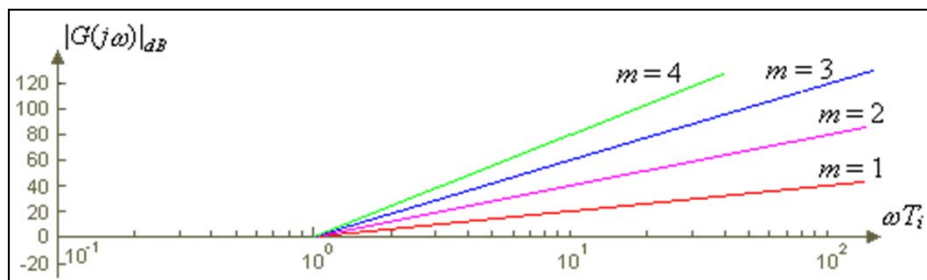


Diagrammi di Bode

3. $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$ zeri/poli semplici o ripetuti

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} \left| (1 + j\omega T_i)^m \right| = m \cdot 20 \log_{10} \left| 1 + j\omega T_i \right| \quad \text{zeri (+ } m \text{)}$$

- $\omega \ll 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = 0$ questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0 dB;
- $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = m \cdot 20 \log_{10}(\omega T_i)$ in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la retta con pendenza pari a $m \cdot 20$ dB/dec. e passante per la frequenza $\omega = 1/T_i$.
- La frequenza $\omega = 1/T_i$ è detta frequenza d'angolo (Corner Frequency) ed è pari al valore dello Zero



La curva effettiva si discosta di 3 dB
alla frequenza d'angolo

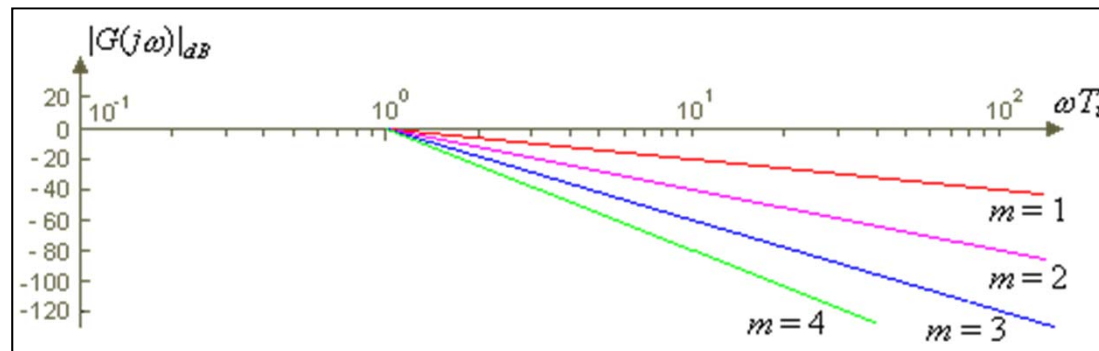


Diagrammi di Bode

3. $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$ zeri/poli semplici o ripetuti

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} \left| (1 + j\omega T_i)^{-m} \right| = -m \cdot 20 \log_{10} \left| 1 + j\omega T_i \right| \quad \text{poli } (-m)$$

- Con considerazioni del tutto analoghe al caso degli zeri e tenendo presente che questa volta le pendenze sono negative ($-m \cdot 20 \text{ db/dec.}$) si ottiene, per diversi valori del parametro m il seguente grafico:





Diagrammi di Bode



4. $(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2)^{\pm 1}$ zeri/poli complessi coniugati ($\xi_i < 1$)

▪ Zeri complessi coniugati

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i - \omega^2 / \omega_i^2 \right| = 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_i^2)^2 + (2\xi_i \omega / \omega_i)^2}$$

I. $\omega \ll \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0$

questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0 dB;

II. $\omega \gg \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(\omega / \omega_i)^2 = 40 \log_{10}(\omega / \omega_i)$

in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la retta con pendenza pari a 40 dB/dec. e passante per la frequenza $\omega = \omega_i$.

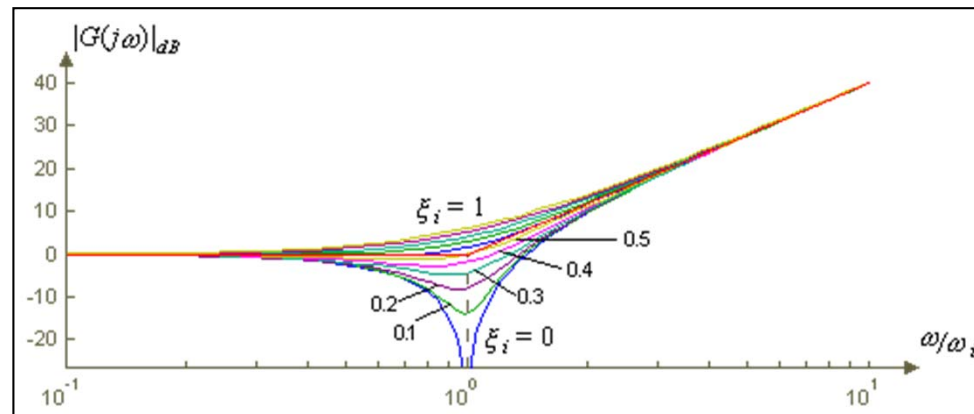
La frequenza ω_i è la *frequenza d'angolo* e per $\omega = \omega_i$ si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} 2\xi_i$$

valore che ovviamente aumenta al crescere di ξ_i .



Diagrammi di Bode



- Una situazione particolare si ha quando $\xi_i = 0$, cioè nel caso di due zeri immaginari puri; il fattore in esame diviene così $(1 - \omega^2/\omega_i^2)$ e ai due asintoti che si ottengono normalmente se ne aggiunge un terzo dato da una retta verticale che interseca l'asse delle ascisse sempre in ω_i
- La curva reale interseca l'asse 0 dB per $\omega/\omega_i = 1$ quando $\xi_i = 0.5$
- La frequenza ω_r per la quale si ottiene il minimo valore si definisce frequenza di risonanza; al variare del coefficiente di smorzamento è individuata annullando la derivata rispetto a ω/ω_i del modulo del fattore stesso

$$\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - 2\xi_i^2} < \omega_i$$

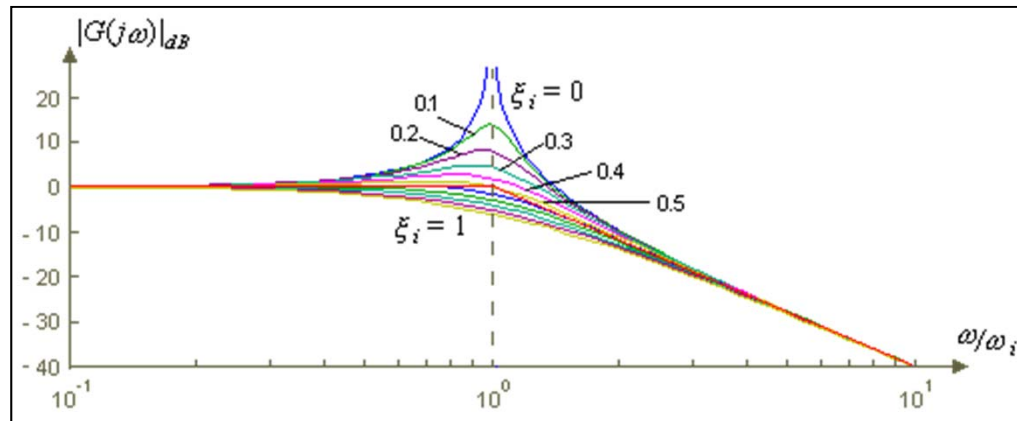
$$M_s = -\frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$



Diagrammi di Bode

- Poli complessi coniugati

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} \left| (1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i - \omega^2 / \omega_i^2)^{-1} \right| = \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_i^2)^2 + (2\xi_i \omega / \omega_i)^2} \end{aligned}$$



- La frequenza ω_r per la quale si ottiene il massimo valore si definisce frequenza di *risonanza*; al variare del coefficiente di smorzamento è individuata annullando la derivata rispetto a ω / ω_i del modulo del fattore stesso

$$\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - 2\xi_i^2} < \omega_i$$

$$M_s = - \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$



Diagrammi di Bode

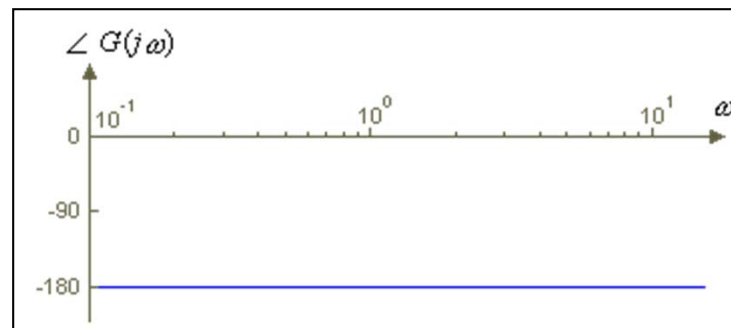
□ Regole generali per il tracciamento del diagramma asintotico della Fase

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

1. Guadagno statico
2. Polo/Zero all'origine
3. Polo/Zero ad una frequenza finita (termine del primo ordine)
4. Coppia di Poli/Zeri complessi e coniugati

1. $\pm k$ Costante di Guadagno Statico $\angle G(j\omega) = \angle(\pm k)$

- Questo termine ha fase uguale a zero se è positivo; nel caso, invece, in cui il termine di guadagno sia negativo, ovvero $-k$ esso introduce una fase pari a -180° ($-\pi$)



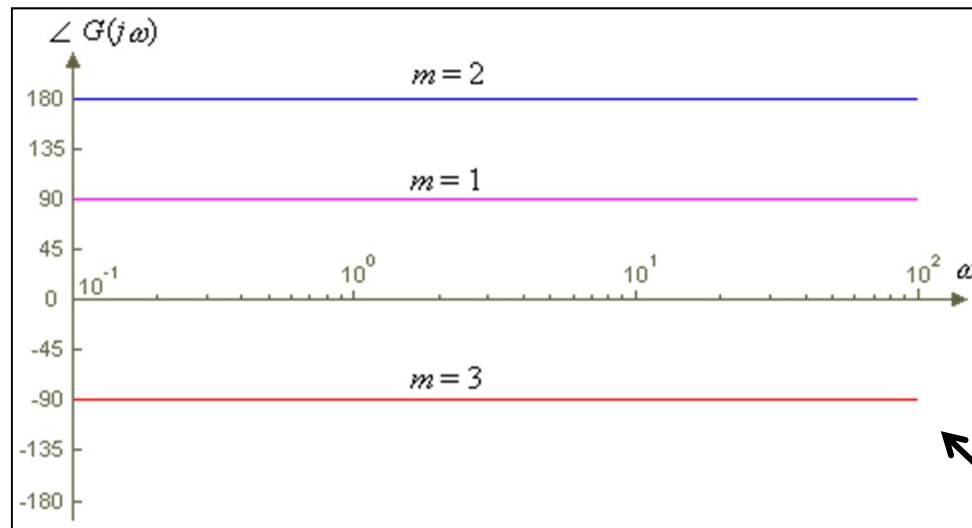


Diagrammi di Bode

2. $(j\omega)^{\pm m}$ zeri/poli nell'origine

- Gli Zeri introducono un ANTICIPO di Fase, multiplo di 90 gradi

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^m = m \cdot 90^\circ = m \frac{\pi}{2}$$



Per convenzioni di tracciamento, se la rappresentazione della fase avviene fra -180° e 180° , il caso $m=2$ può essere riportato indifferentemente ai due estremi, mentre per il caso $m=3$ si considera che la fase 270° coincide con -90°



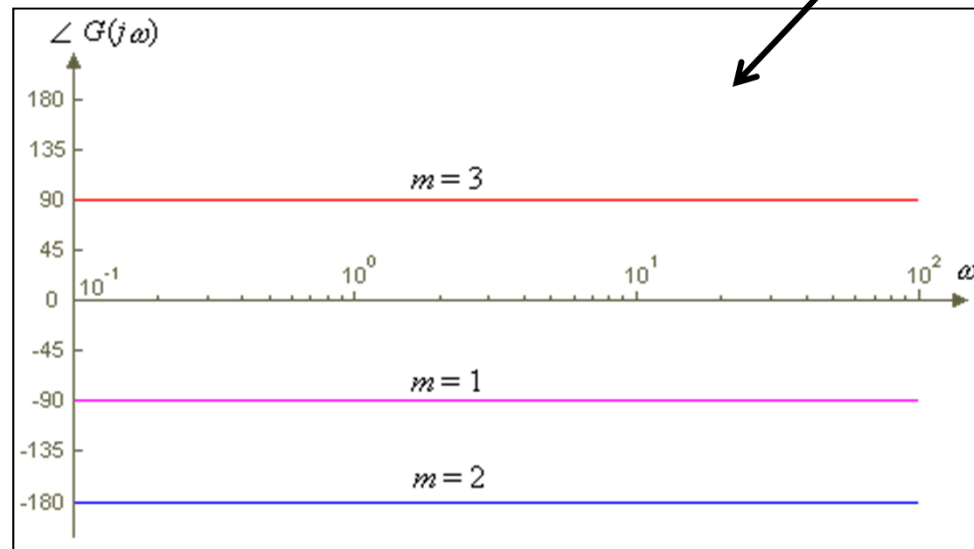
Diagrammi di Bode

2. $(j\omega)^{\pm m}$ zeri/poli nell'origine

- I Poli introducono un RITARDO di Fase multiplo di -90 gradi

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^{-m} = -m \cdot 90^\circ = -m \frac{\pi}{2}$$

Si deve tener presente che, se la rappresentazione della fase avviene fra -180° e 180° , il caso $m = 2$ può essere riportato indifferentemente ai due estremi, mentre per il caso $m = -3$ si considera che la fase -270° coincide con $+90^\circ$





Diagrammi di Bode

3. $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$ zeri/poli semplici o ripetuti

- Si considera dapprima il caso di zeri con $m = 1$ per il quale si ha che

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i) = \tan^{-1}(\omega T_i)$$

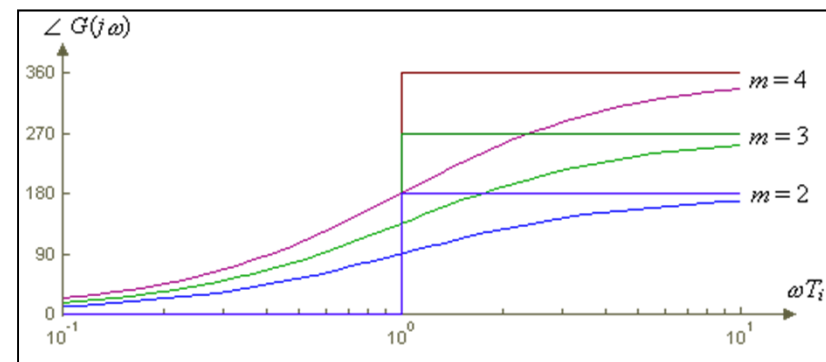
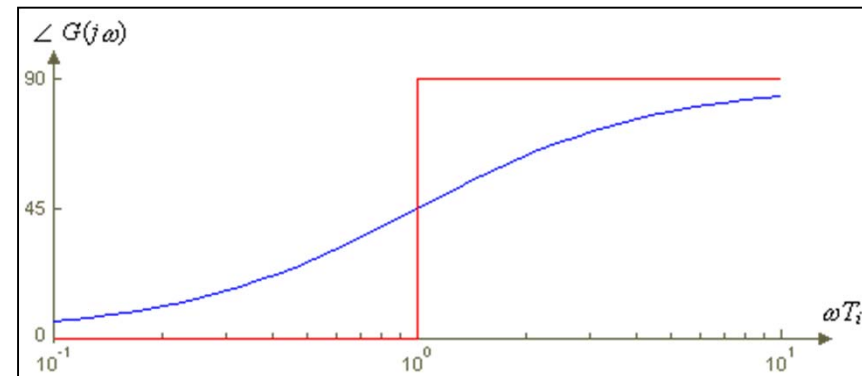
La costruzione del diagramma di Bode
asintotico della fase usa le
approssimazioni:

$$\omega \ll 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$$

$$\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 45^\circ$$

Nel caso in cui sia $m > 1$ si ha che per
 $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 90^\circ$ e
per $\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 45^\circ$





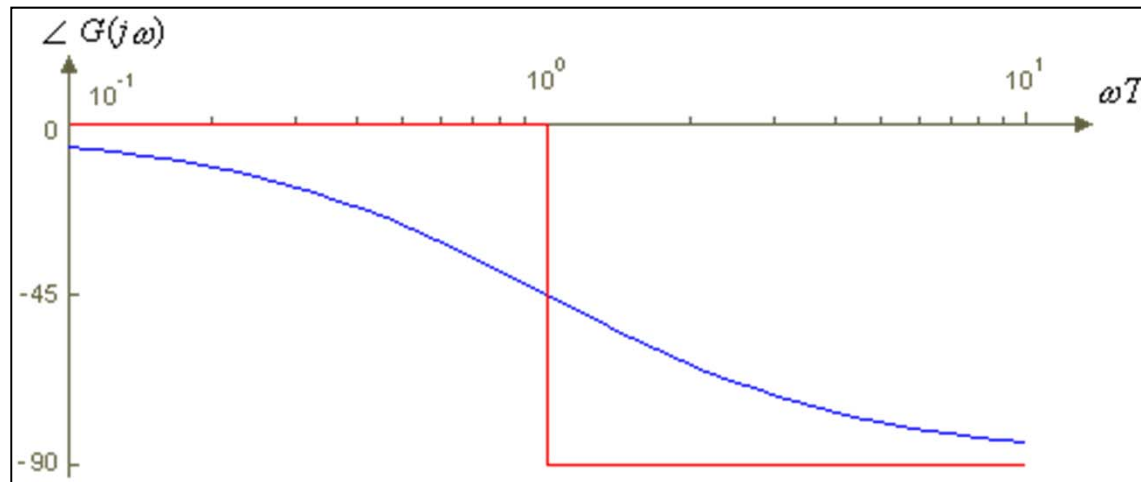
Diagrammi di Bode

Consideriamo adesso il caso dei poli, con $m > 1$ si ha $\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-m}$

Nel caso di polo singolo,

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-1} = -\angle(1 + j\omega T_i) = -\tan^{-1} \omega T_i$$

Le considerazioni fatte per gli zeri sono valide anche per i poli e il diagramma asintotico che se ne ricava, tenendo presente la differenza del segno, è:



Nel caso di $m = 2$ il ritardo di fase è pari a -180° e così via.



Diagrammi di Bode

4. $(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2)^{\pm 1}$ zeri/poli complessi coniugati ($\xi_i < 1$)

■ Zeri complessi e coniugati

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2) = \tan^{-1} \frac{2\xi_i \omega / \omega_i}{1 - \omega^2 / \omega_i^2}$$

Consideriamo le seguenti approssimazioni:

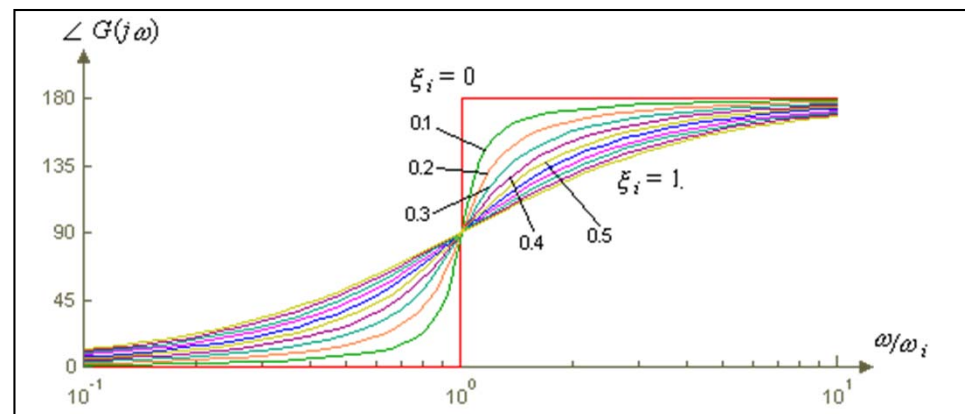
$$\omega \ll \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$$

$$\omega \gg \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-2\xi_i \omega_i / \omega) = 90^\circ$$

Quando la frequenza assume il valore della frequenza d'angolo

$\omega = \omega_i$ la fase è:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}[2\xi_i / (1 - 1)] = 90^\circ.$$

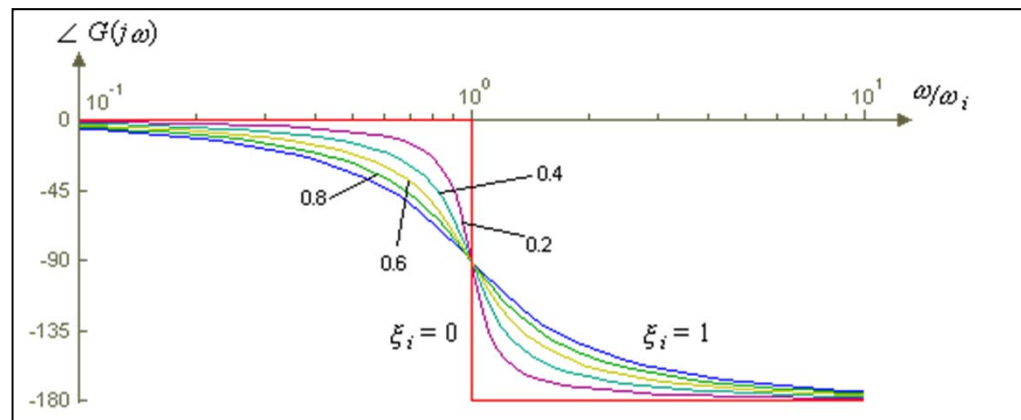




Diagrammi di Bode

- Poli complessi e coniugati

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(1 + 2j\xi_i\omega/\omega_i + \omega^2/\omega_i^2)} = 0^\circ - \tan^{-1} \frac{2\xi_i\omega/\omega_i}{1 - \omega^2/\omega_i^2}$$



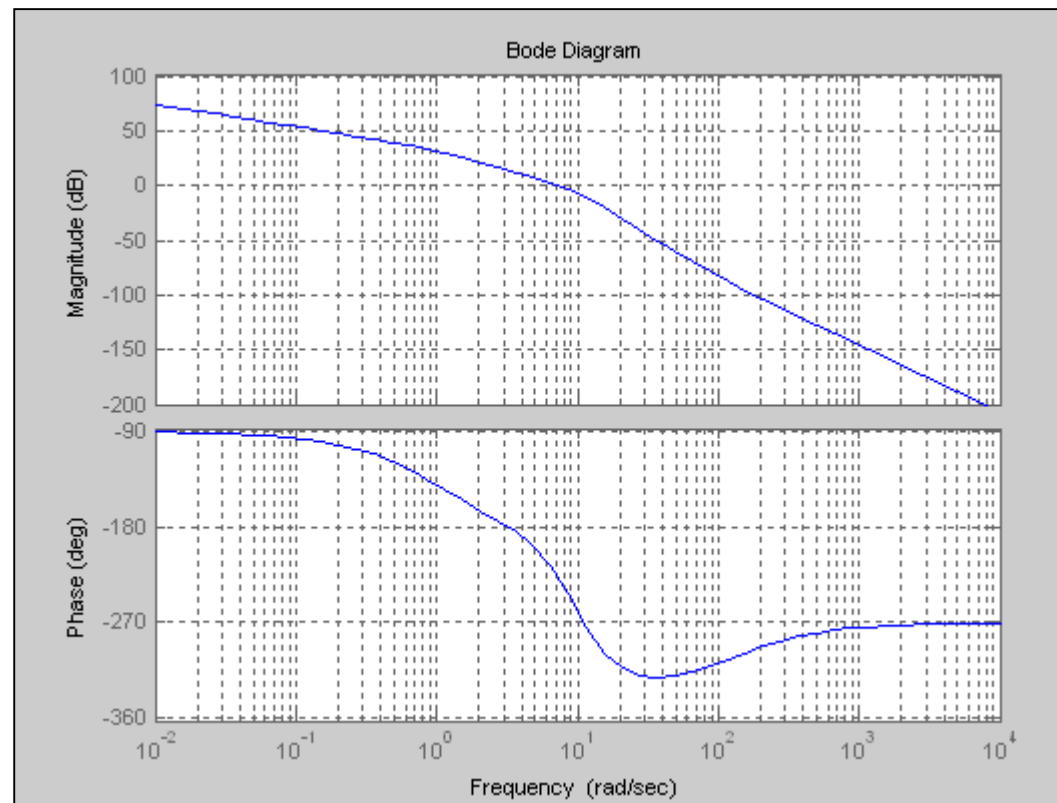
1. Scrivere la $G(s)$ in Forma di Bode
2. Porre il Guadagno statico $K = 1$
3. Riportare sulle ascisse tutte le frequenze d'angolo (Corner Frequencies), ovvero tutti i poli e gli zeri della $G(s)$
4. Tracciare tutte le componenti del Modulo a partire dalle frequenze più basse
5. Sommare e sottrarre i Moduli al crescere di ω
6. Ripetere il passo 4 per le fasi
7. Spostare verticalmente il diagramma del Modulo del valore del Guadagno Statico pari a $20 \cdot \log_{10} k$



Diagrammi di Bode

□ Esempio

$$G(s) = \frac{50 \cdot (s + 100)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s^2 + 10s + 100)}$$





Diagrammi di Bode



- Riscrivere la FdT in forma di Bode

$$G(s) = 50 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right)}{j\omega \cdot (1 + j\omega) \cdot 100 \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}$$

- Zeri: $Z_1 = -100$

$$\left(1 + j \frac{\omega}{100}\right) \Rightarrow \omega_z = 100$$

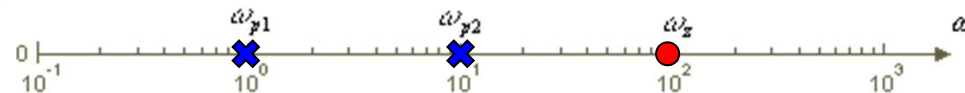
- Guadagno Statico:

$$k = 50 = 20 \log_{10} 50 = 33.98 dB$$

- Poli: $P_0=0$, $P_1=-1$, $P_{2,3}=-5 \pm j4.33$

$$(j\omega)^{-1} (1 + j\omega)^{-1} \Rightarrow \omega_{p1} = 1$$

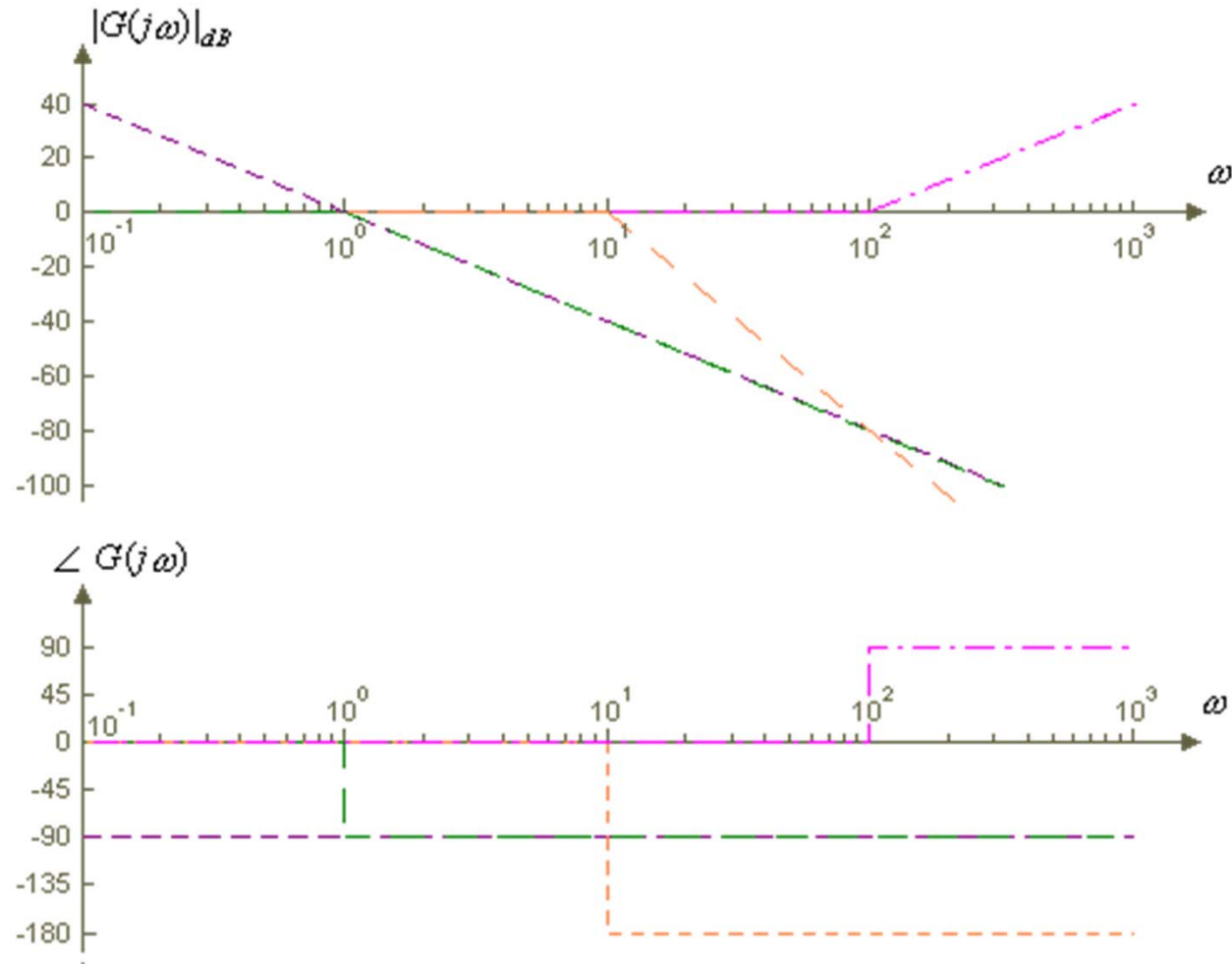
$$\left(1 + j \frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)^{-1} \Rightarrow \omega_{p2} = 10, \xi = 0.5$$





Diagrammi di Bode

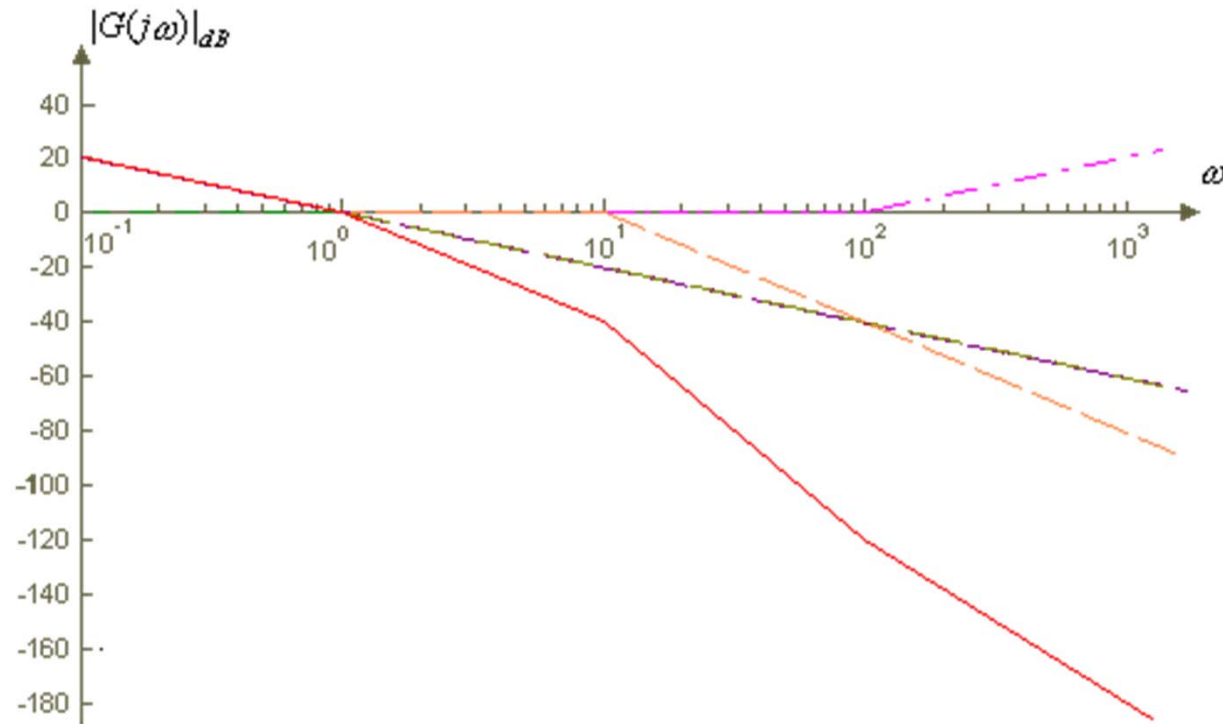
- Disegnare tutte le componenti partendo dalle frequenze più basse





Diagrammi di Bode

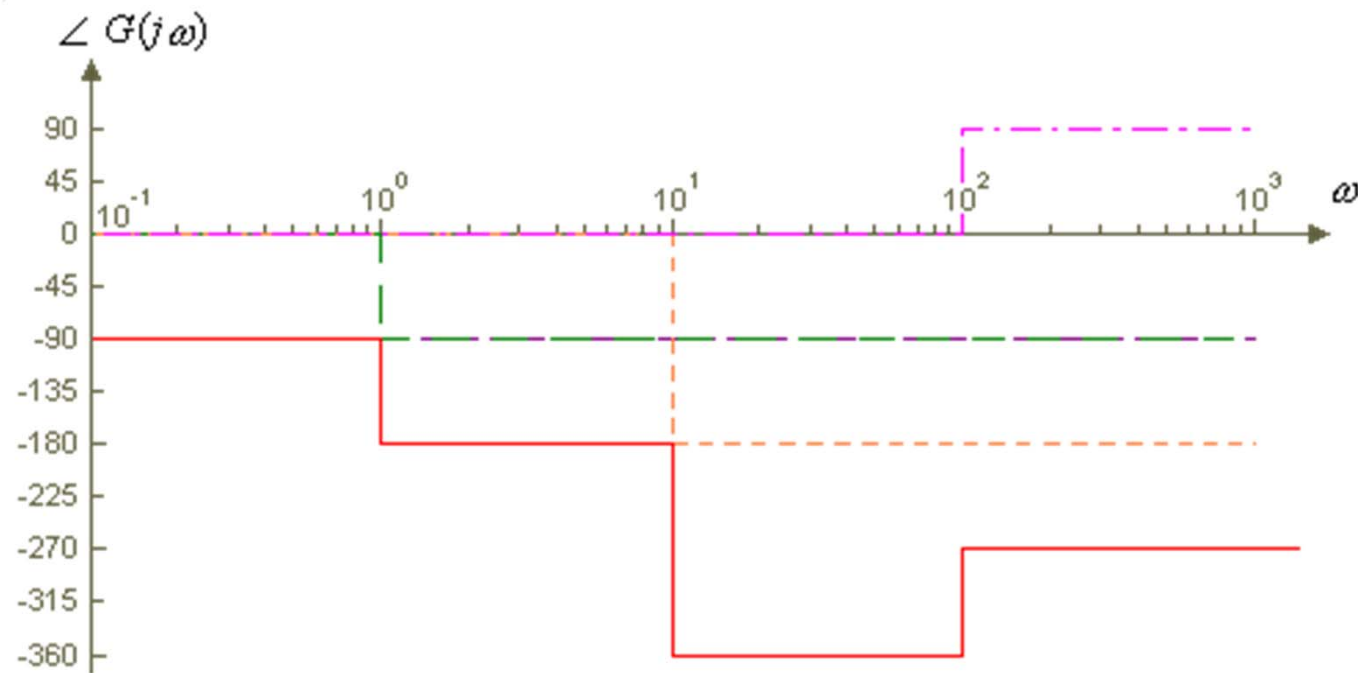
- Sommare Algebricamente i Moduli partendo dalle frequenze più basse





Diagrammi di Bode

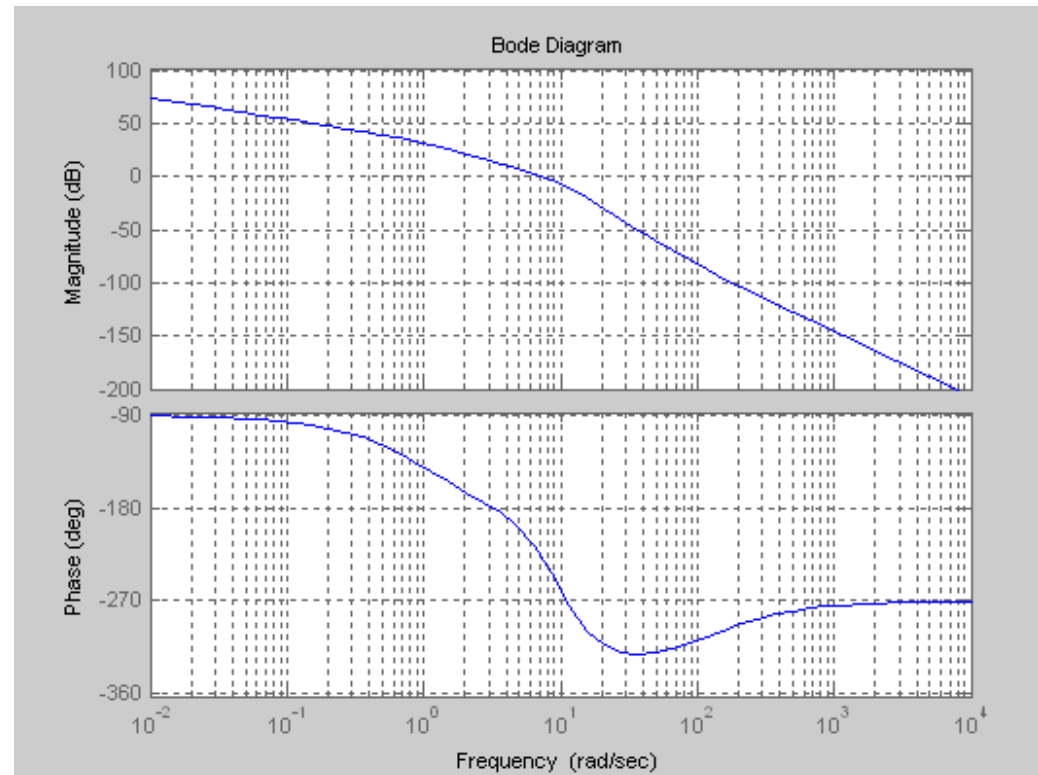
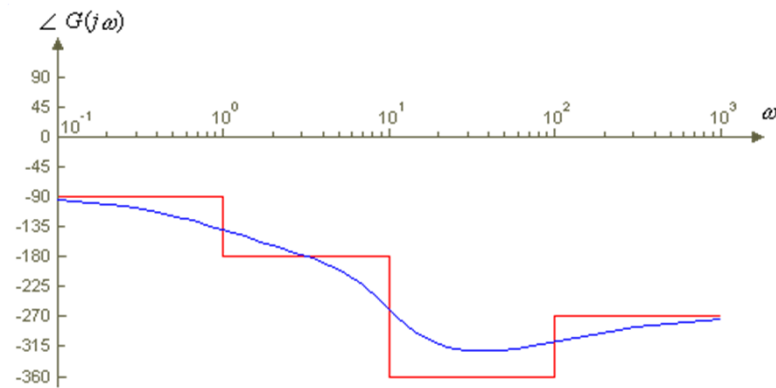
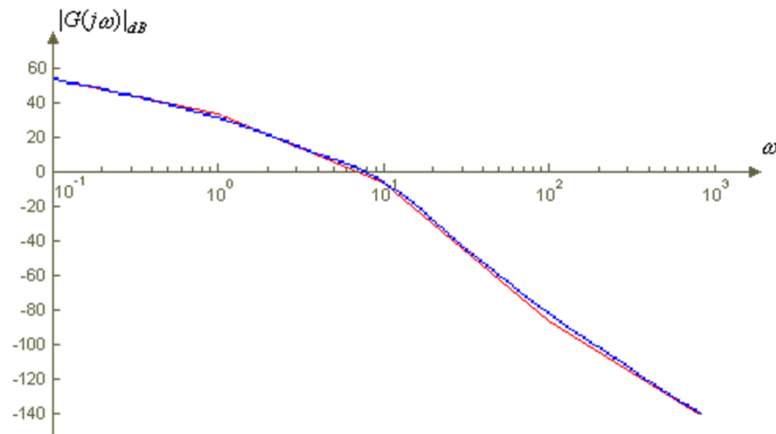
- Sommare Algebricamente le Fasi partendo dalle frequenze più basse





Diagrammi di Bode

- Aggiungere il Contributo del Guadagno Statico pari a 33.98 dB





Diagrammi di Bode

❑ Esempio:

$$G(s) = \frac{10(s + 0.5)(s + 20)}{s^2(s + 0.1)(s + 10)(s + 100)}$$

N =

10 205 100

```
>> D=conv([1 0 0],[1 0.1])
```

D =

1.0000 0.1000 0 0

```
>> D=conv(D,[1 10]);
```

```
>> D=conv(D,[1 100])
```

D =

1.0e+003 *
0.0010 0.1101 1.0110 0.1000 0 0

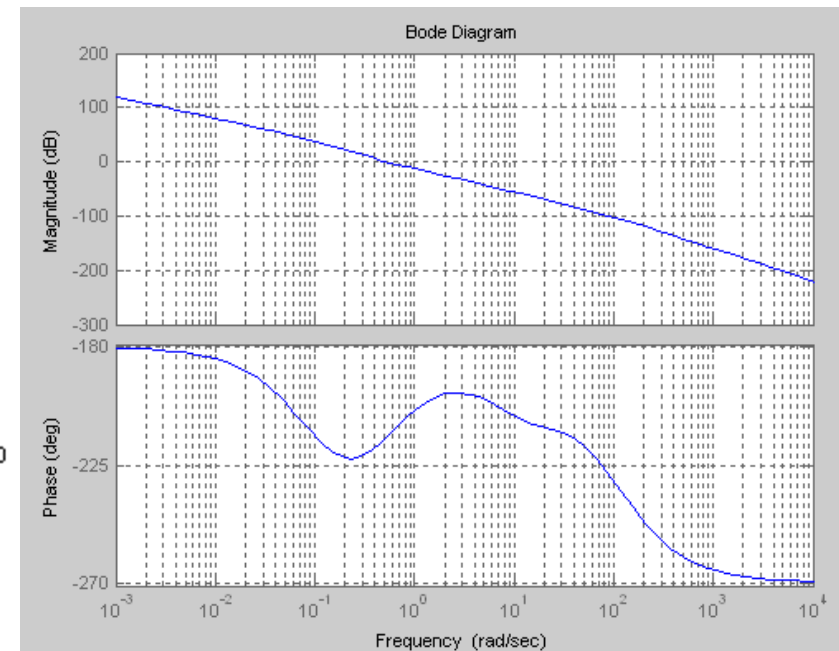
```
>> sys=tf(N,D)
```

Transfer function:

10 s^2 + 205 s + 100

s^5 + 110.1 s^4 + 1011 s^3 + 100 s^2

```
>> _bode(sys)
```



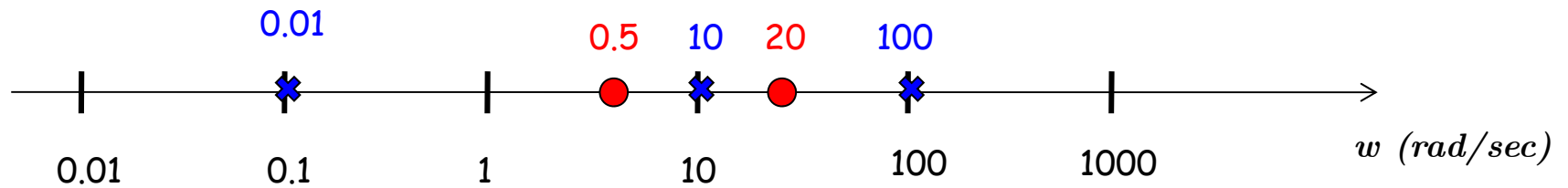


Diagrammi di Bode

$$G(j\omega) = k \cdot \frac{(1 + \frac{j\omega}{0.5})(1 + \frac{j\omega}{20})}{(j\omega)^2(1 + \frac{j\omega}{0.1})(1 + \frac{j\omega}{10})(1 + \frac{j\omega}{100})}, k = 0dB$$

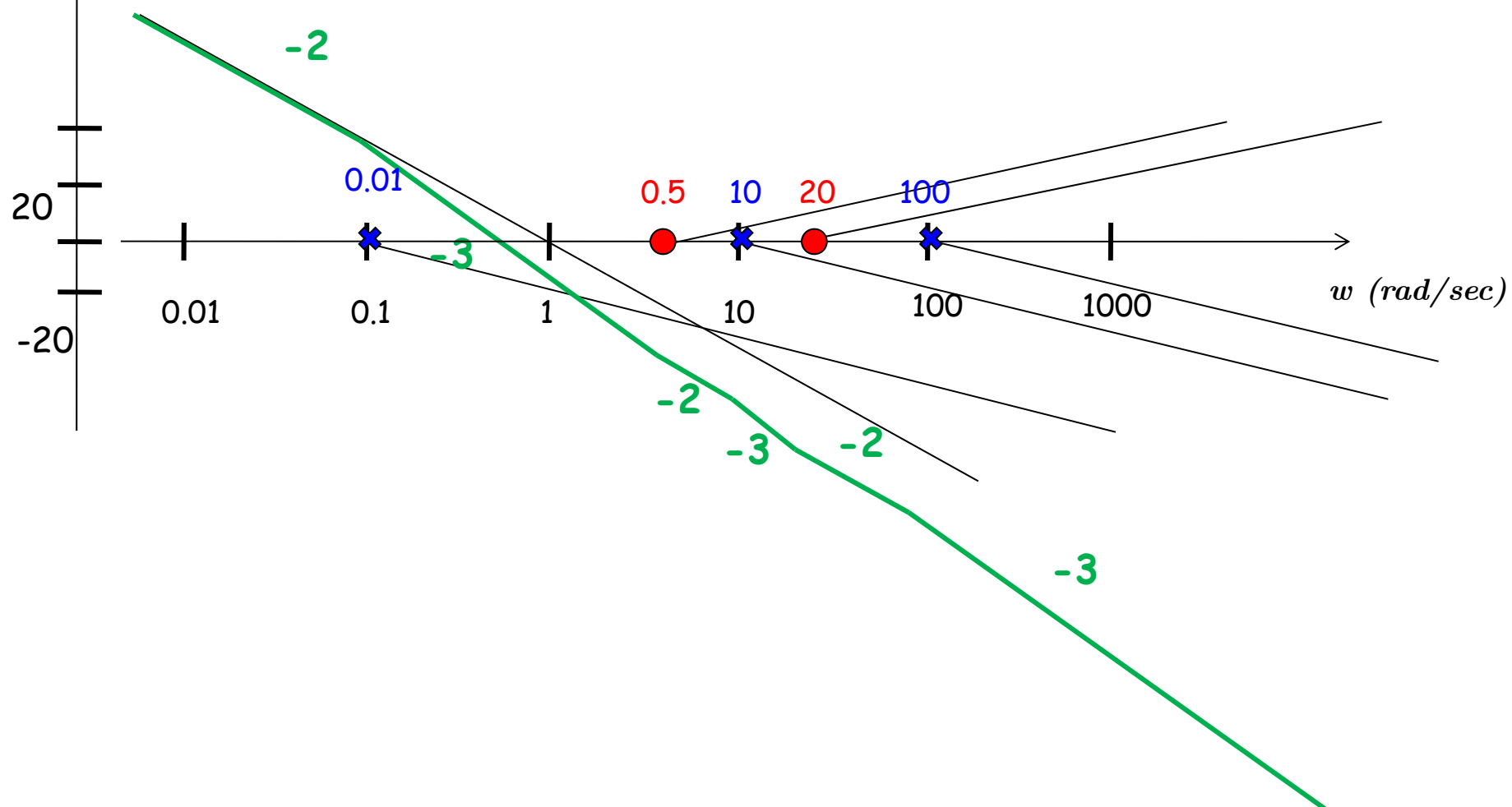
× 0

× 0



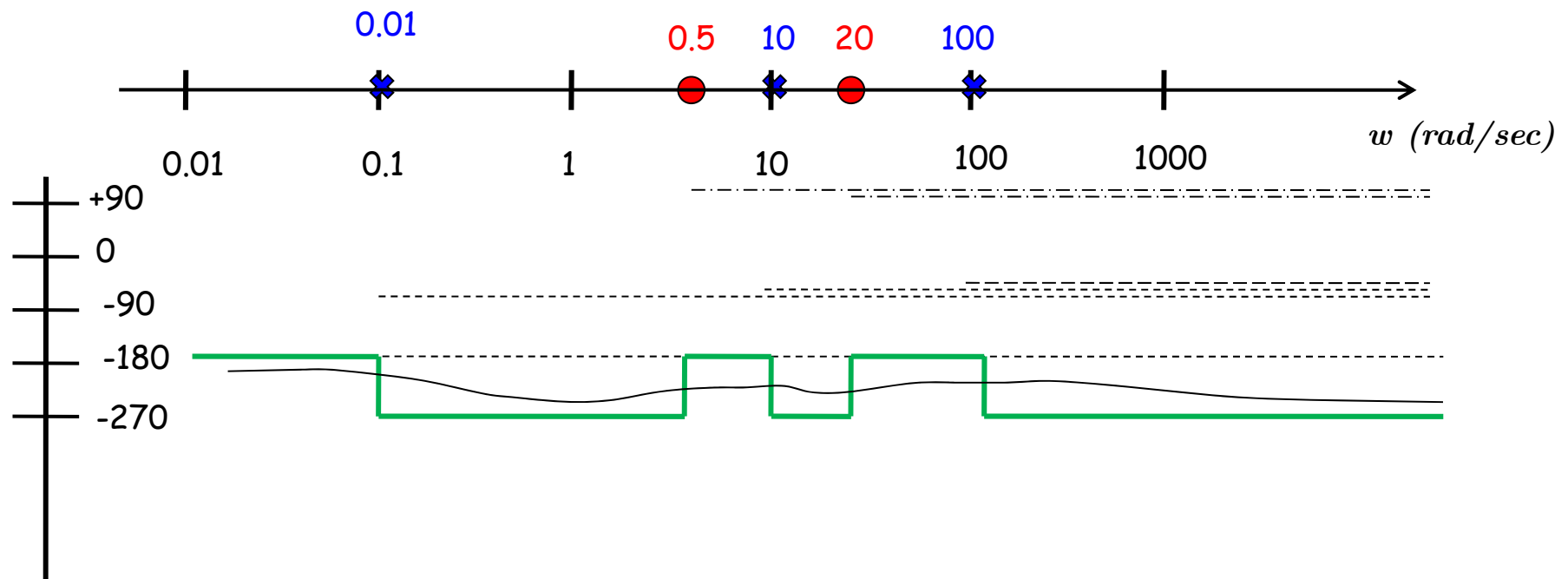


Diagrammi di Bode





Diagrammi di Bode

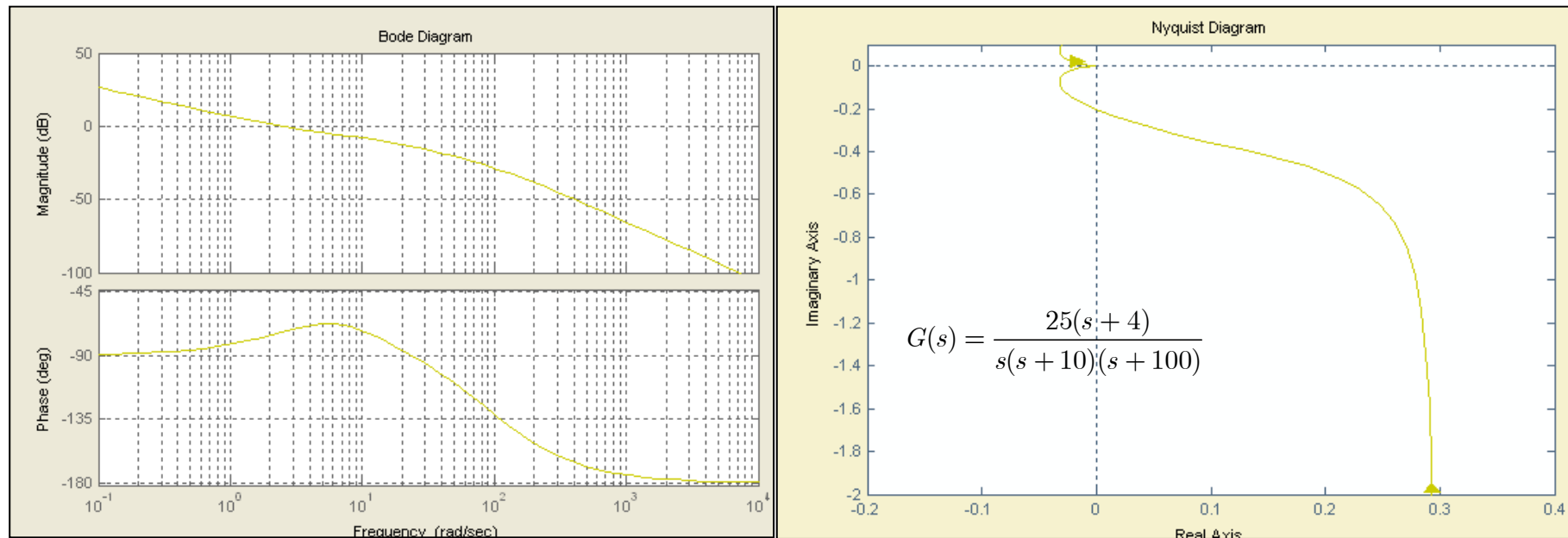


□ Uso di Matlab



Diagrammi Polari

- ❑ I diagrammi polari (o di Nyquist) sono una rappresentazione grafica alternativa della risposta in frequenza di sistemi lineari. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, il diagramma polare è il grafico implicito di parte reale e parte immaginaria nel piano complesso posto che sia $s = j\omega$ ($Re[G(j\omega)]$ e $Im[G(j\omega)]$) e $\omega \in [0, \infty)$.



- ❑ Formalmente, il diagramma di Nyquist è il diagramma polare tracciato per frequenze comprese tra $\omega \in (-\infty, +\infty)$.



Diagrammi Polari



- I diagrammi polari possono essere tracciati in modo approssimato facendo attenzione all'intervallo di frequenza di interesse in quanto i punti sul piano complesso non hanno una evoluzione lineare con la frequenza.

1. Riscrivere la $G(s)$ in forma fattorizzata ponendo $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (-z_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{iz}^2 + 2j\xi_{iz}\omega_{iz}\omega)}{(j\omega)^r \prod_i (-p_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{ip}^2 + 2j\xi_{ip}\omega_{ip}\omega)}$$

2. Riscrivere la $G(s)$ in parte reale ed immaginaria

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

3. Trovare i valori ai limiti di parte reale e parte immaginaria

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] , \quad & \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] , \quad & \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] \end{aligned}$$

4. Trovare eventuali punti di intersezione con gli assi, ponendo $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0$ e $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0$

5. Ricavare ampiezza e fase di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$, con l'aiuto di Bode



Diagrammi Polari

□ Esempio:

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10} = \frac{5+j\omega}{10+j\omega} \frac{(5+j\omega)(10-j\omega)}{(10+j\omega)(10-j\omega)} = \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} + j \frac{5\omega}{100+\omega^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} = \frac{1}{2}$$

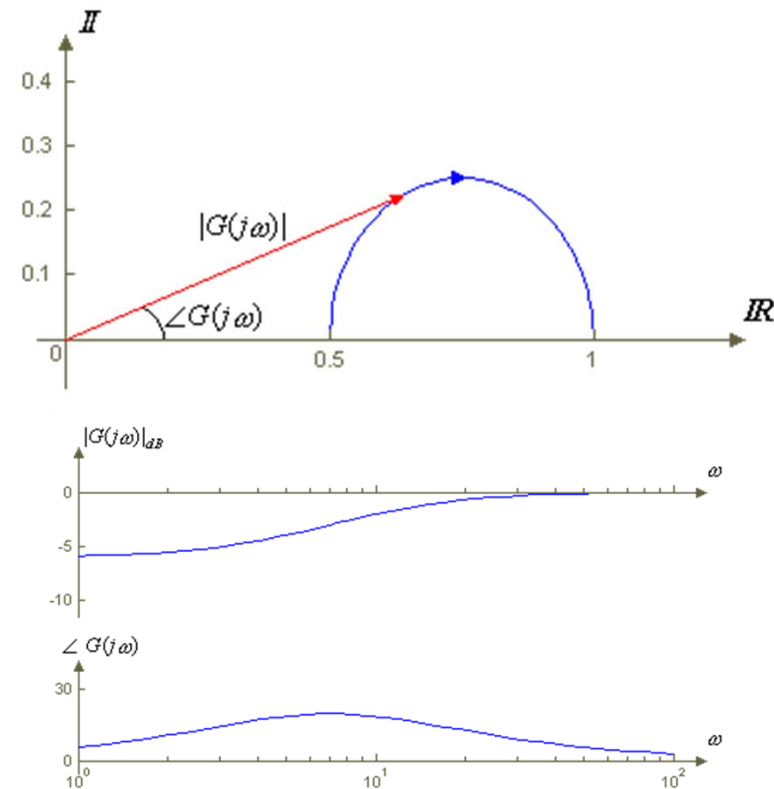
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{5\omega}{100+\omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{5\omega}{100+\omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = 0$$





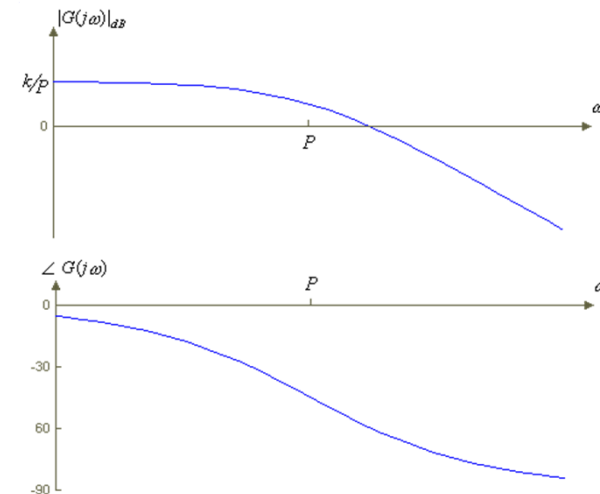
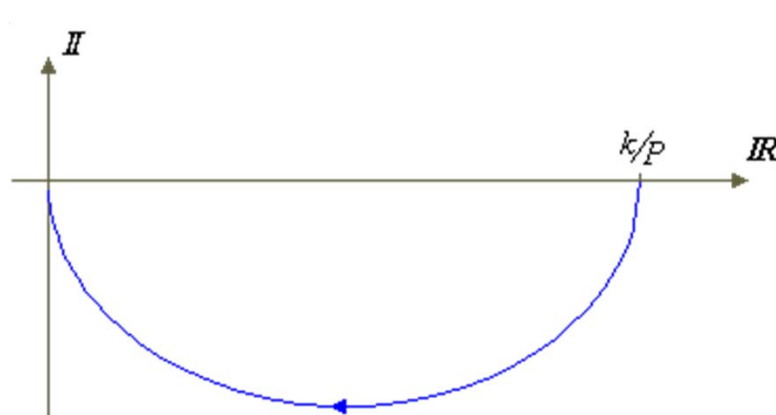
Diagrammi Polari

- Il tracciamento approssimato dei diagrammi polari sfrutta le variazioni di Modulo e Fase dei poli e degli zeri all'aumentare della Frequenza.

$$G(s) = \frac{k}{s + P} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{kP}{P^2 + \omega^2} + j \frac{-k\omega}{P^2 + \omega^2}$$

- Il diagramma non attraversa gli assi per alcun valore della frequenza

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{P^2 + \omega^2}, \quad \angle G(j\omega) = 0^\circ - \angle(P + j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{P}\right)$$





Diagrammi Polari

$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)} \Rightarrow G(j\omega) = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

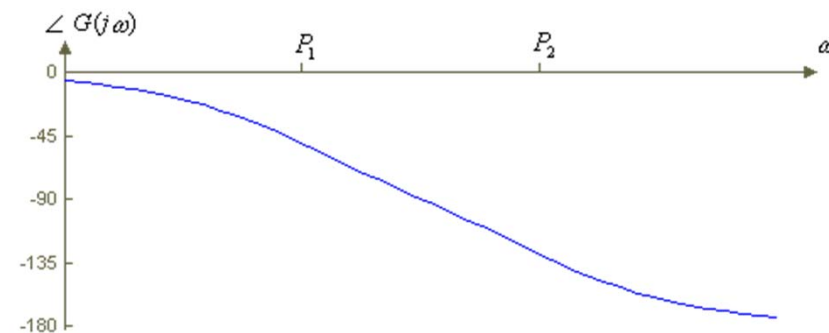
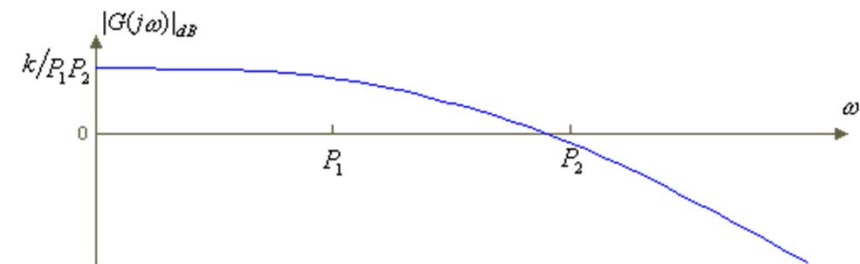
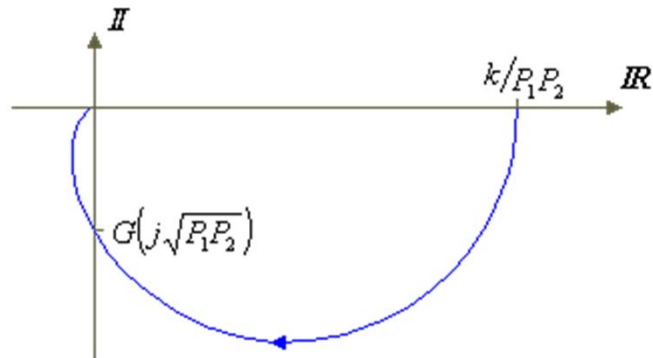
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = \frac{k}{P_1 P_2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{P_1 P_2}$$





Diagrammi Polari

$$G(s) = \frac{k}{s(s + P_1)(s + P_2)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

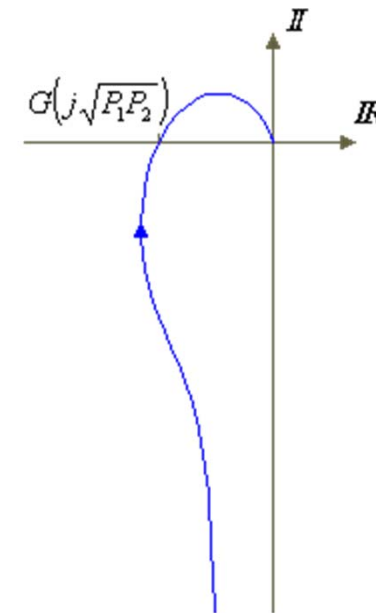
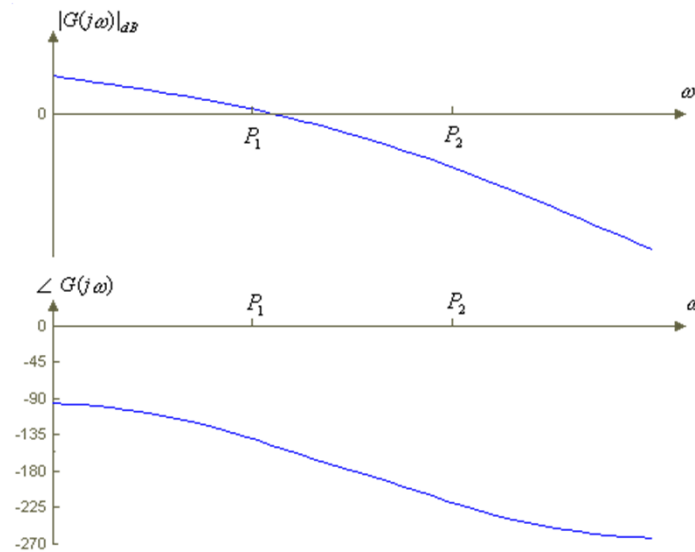
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -k \frac{P_1 + P_2}{P_1^2 P_2^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{k\omega(P_1P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

- Il grafico attraversa una volta l'asse reale mentre non attraversa quello immaginario

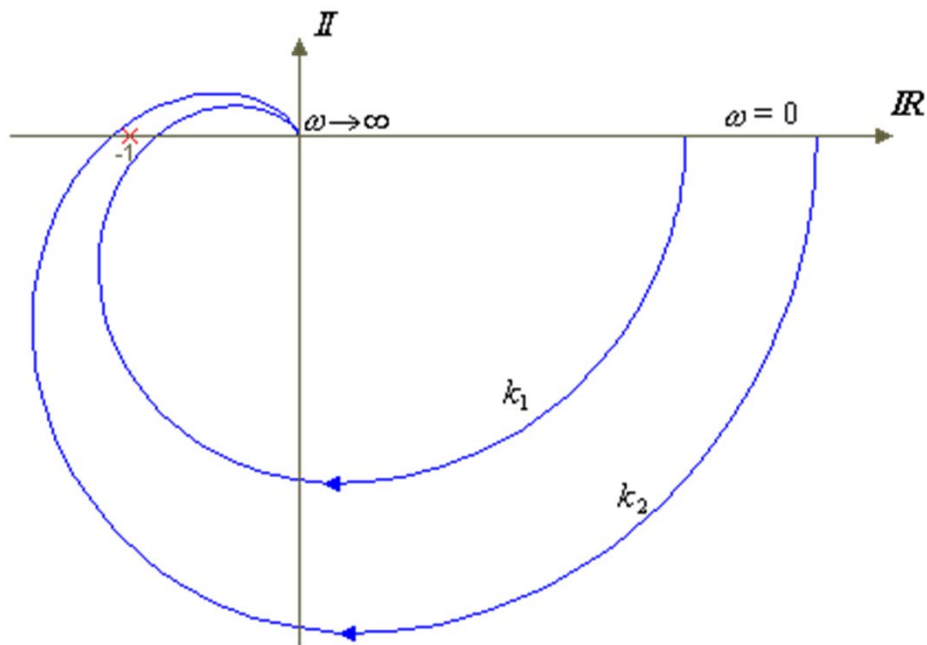




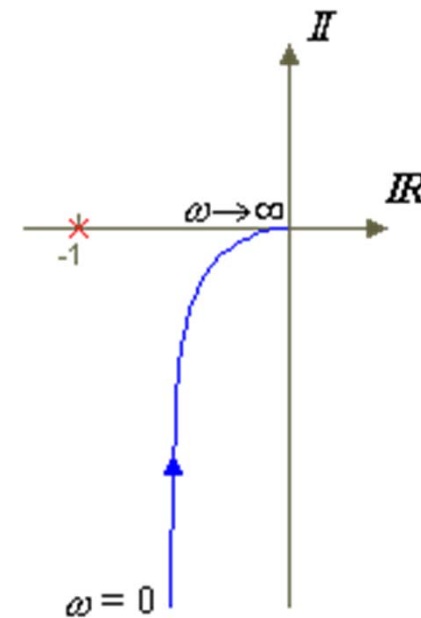
Diagrammi Polari

- Come verrà mostrato più avanti, il comportamento del diagramma polare nei riguardi del punto di coordinate $(-1, 0)$, ha un'estrema importanza, essendo legato alla stabilità del sistema in ciclo chiuso.

$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)(s + P_3)}$$



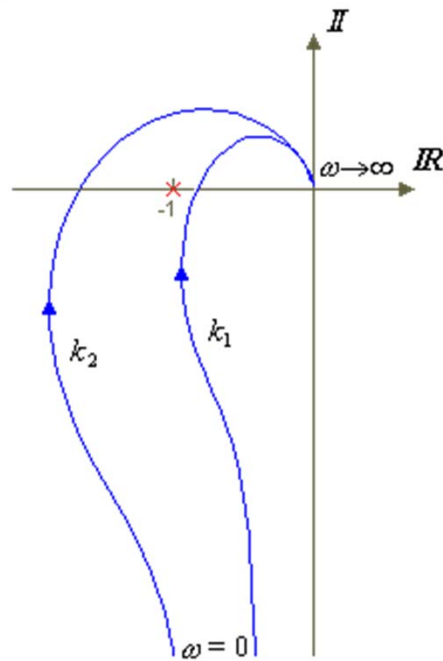
$$G(s) = \frac{k}{s(s + P)}$$





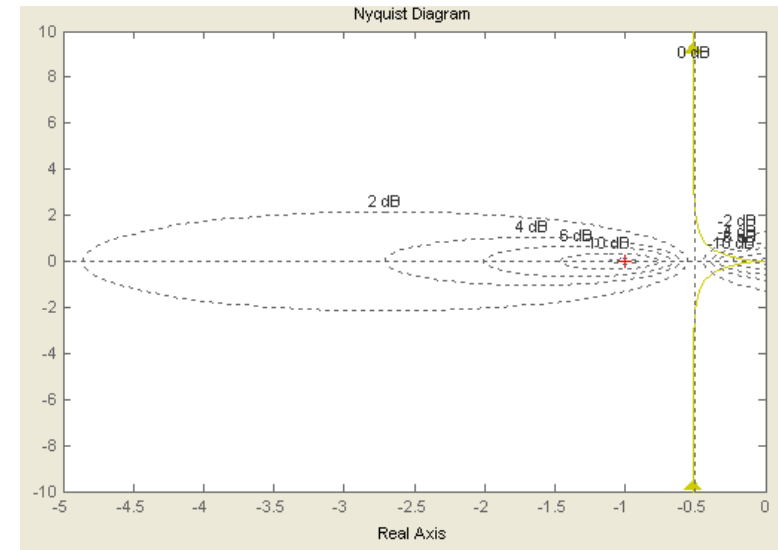
Diagrammi Polari

$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + P_1)(s + P_2)}$$

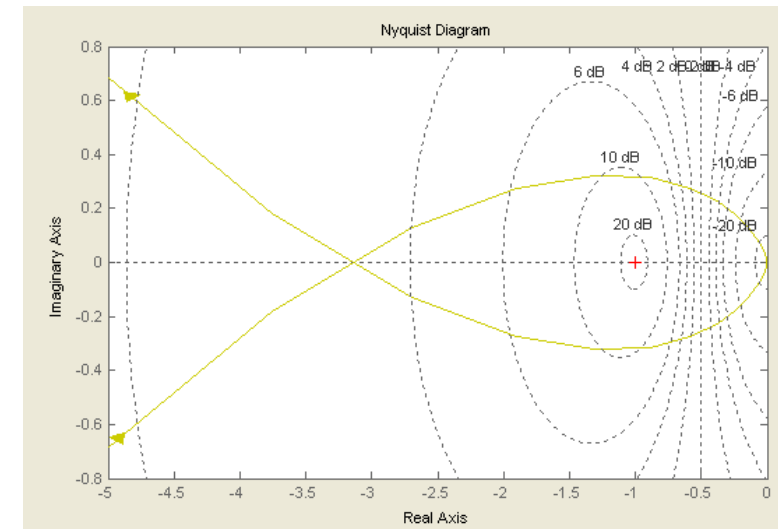


$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + 1)(s + 10)}$$

$$K < 110$$



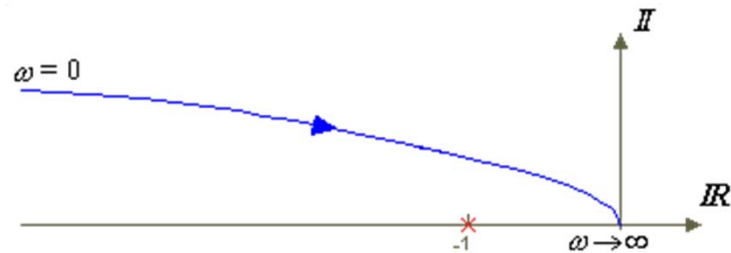
$$K > 110$$



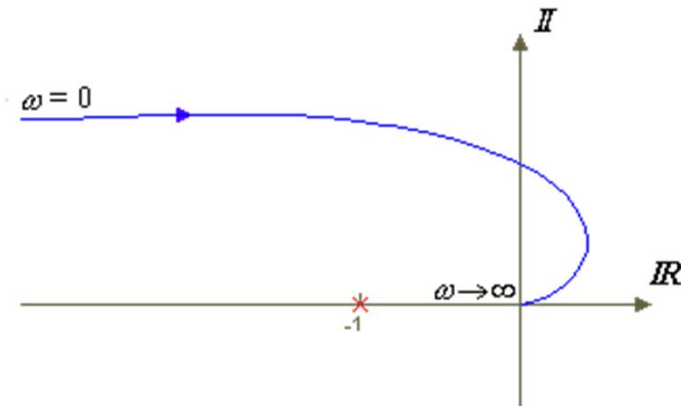


Diagrammi Polari

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s + P)}$$



$$G(s) = \frac{k}{s^2(s + P_1)(s + P_2)}$$

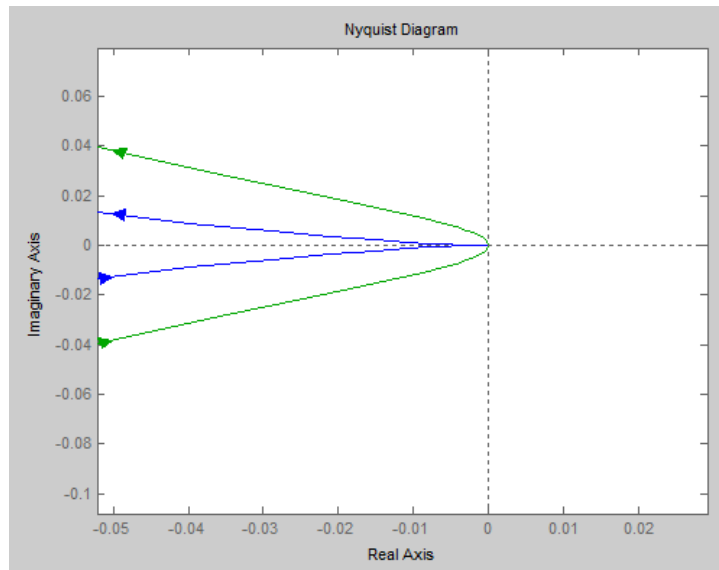


Presenza di Zeri nella FdT

- ❑ La presenza di Zeri, **riduce e/o rallenta il ritardo di Fase** dovuto ai poli all'aumentare della frequenza



Diagrammi Polari



Transfer function:

$$100$$

$$s^2 + 11s + 10$$

>> sys2

Transfer function:

$$s + 100$$

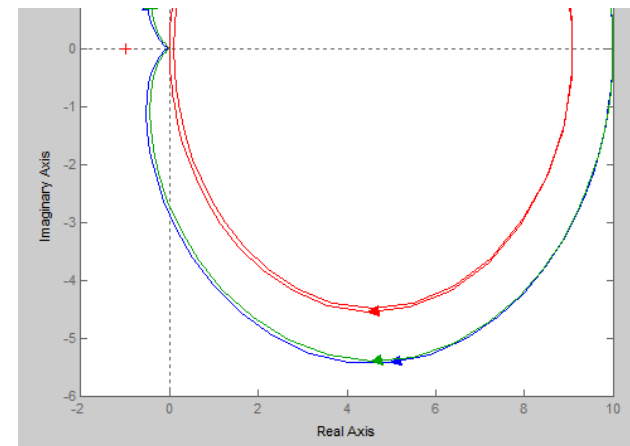
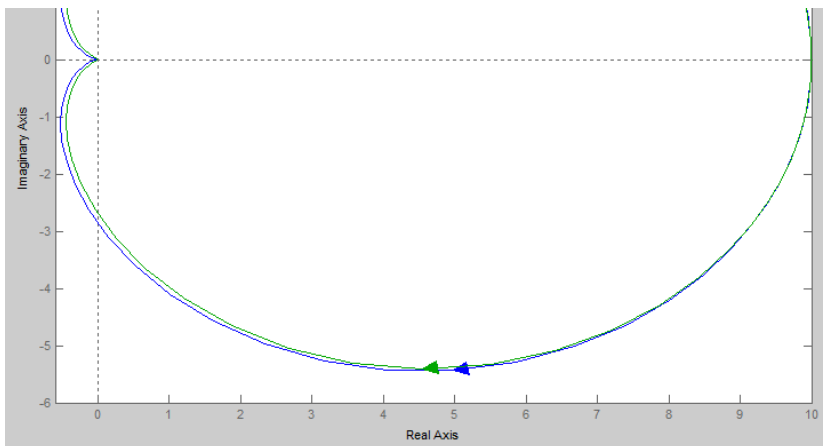
$$s^2 + 11s + 10$$

>> sys3

Transfer function:

$$100s + 1$$

$$s^2 + 11s + 10$$

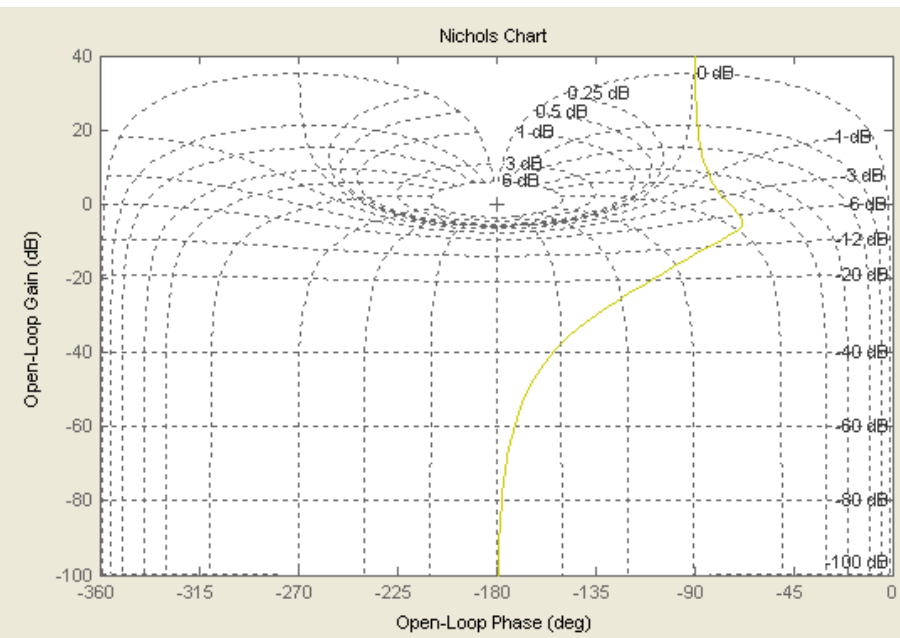
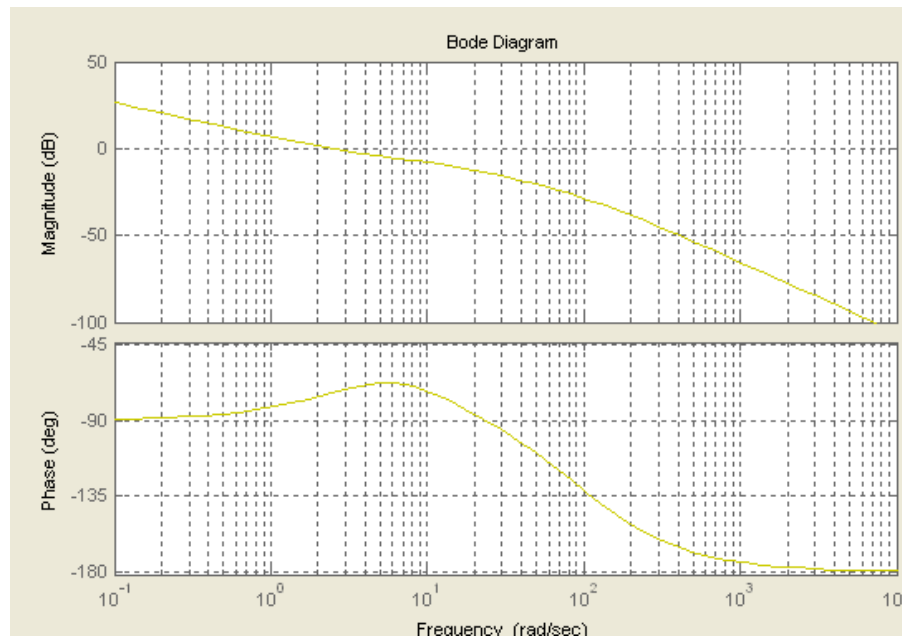




Diagrammi di Nichols

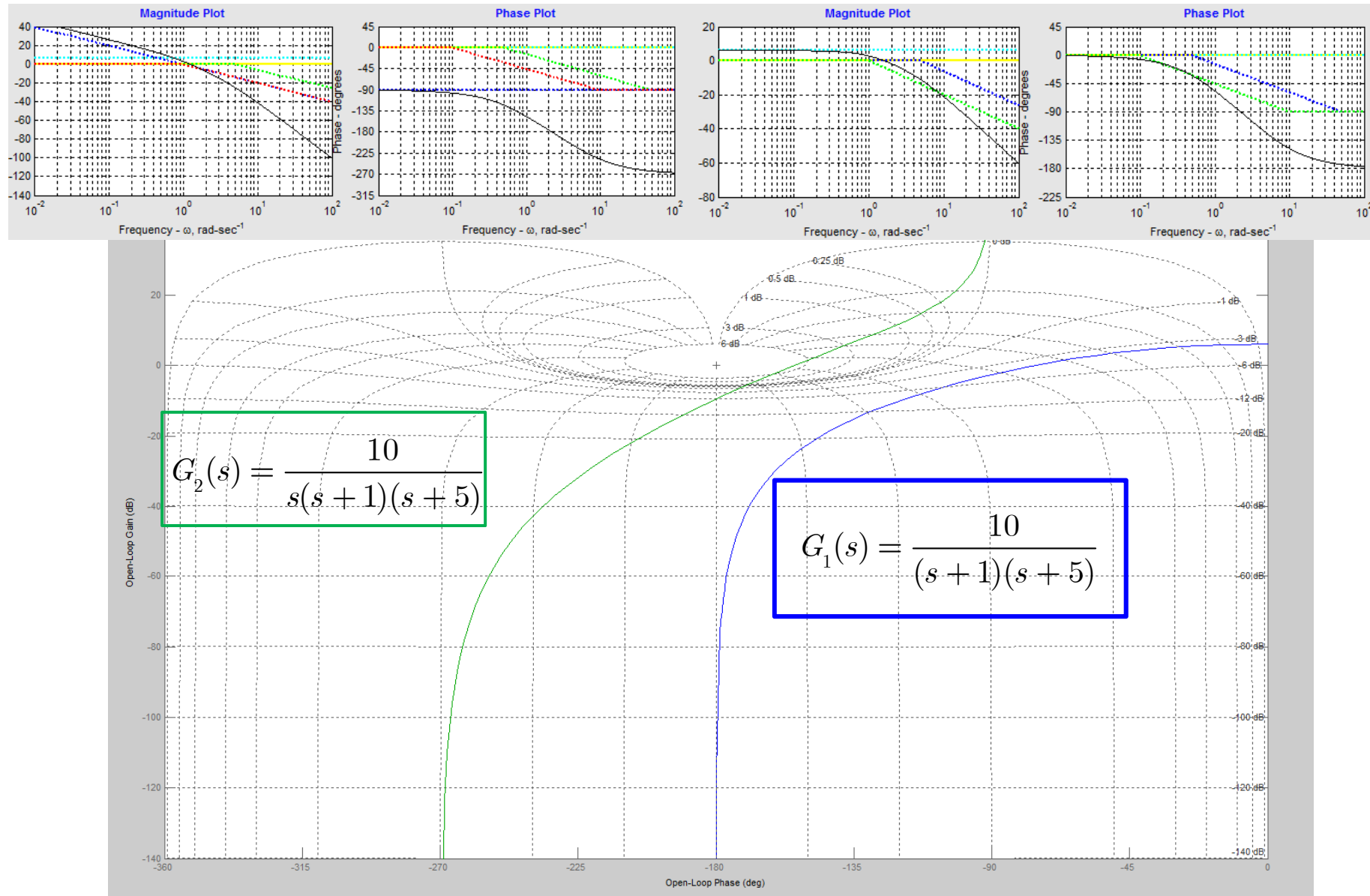
- ❑ Le Carte di Nichols forniscono una rappresentazione “implicita” della Risposta in Frequenza. La Fase è riportata in Ascissa ed il Modulo in Ordinata (in dB).
- ❑ L’uso delle carte di Nichols è storicamente prevalente in ambiente industriale (elettrico, meccanico, aeronautico,..)

$$G(s) = \frac{25(s + 4)}{s(s + 10)(s + 100)}$$





Diagrammi di Nichols





Casi Particolari nella Risposta in Frequenza



Vi sono dei casi di interesse pratico, per i quali il tracciamento della risposta in Frequenza richiede particolare attenzione.

- ❑ **Presenza di un Ritardo Puro:** Questa situazione si presenta spesso nei a causa di ritardi puri e/o approssimazioni di dinamiche mediante elementi di ritardo. La presenza del ritardo può portare a fenomeni di instabilità per Valori sufficientemente alti del Guadagno d'anello.
- ❑ **Sistemi Instabili:** In questo caso, la risposta in frequenza come da definizione non è applicabile. Si può comunque tracciare un andamento di $G(jw)$ Tenendo conto del valore esatto della fase delle varie componenti.
- ❑ **Sistemi a Fase non minima:** Tali sistemi hanno un effetto di fase che Risulta destabilizzante ad alti guadagni, per cui la risposta in frequenza va Tracciata con attenzione.
- ❑ **$G(s)$ da dati sperimentali:** Dati sperimentali possono essere usati per Ricavare la risposta in frequenza in alcuni casi.



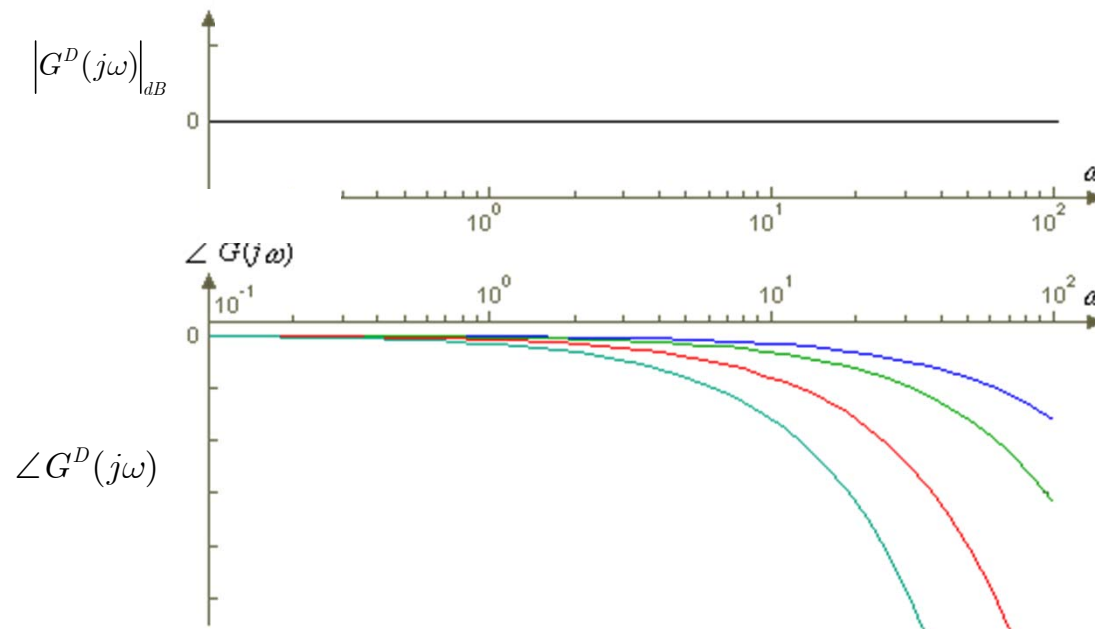
Presenza di un Ritardo Puro (Bode)

□ Consideriamo una funzione con un ritardo T_d , applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$g(t) \rightarrow g(t - T_d) \Rightarrow G(s) \rightarrow G(s) \cdot e^{-T_d s} = G(s)G^D(s)$$

▪ Contributo del Ritardo nella risposta in frequenza:

$$G^D(j\omega) = e^{-jT_d\omega} = \cos(\omega T_d) - j \sin(\omega T_d)$$
$$\begin{aligned} |G^D(j\omega)| &= 1 \\ \angle G^D(j\omega) &= -T_d\omega \end{aligned}$$



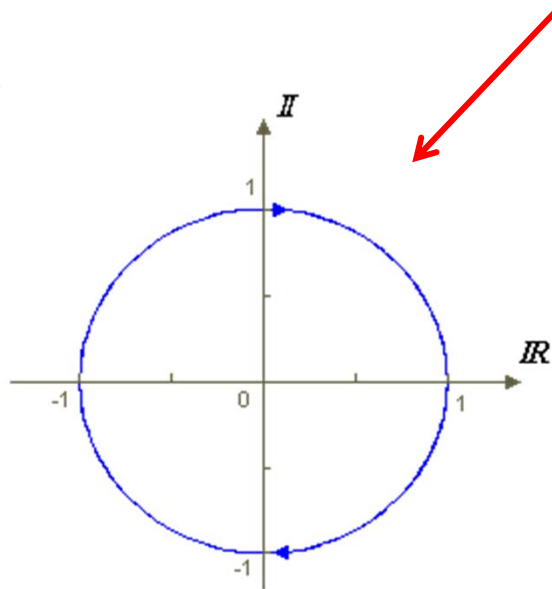
ω	0.01	1.0	10	Delay (sec)
0.01	0.0001	0.01	0.1	
0.1	0.001	0.1	1.0	
1.0	0.01	1.0	10	
10	0.1	10	100	
100	1	100	1000	
1000	10	1000	10000	
..	

Phase Delay (rad)



Presenza di un Ritardo Puro (Nyquist)

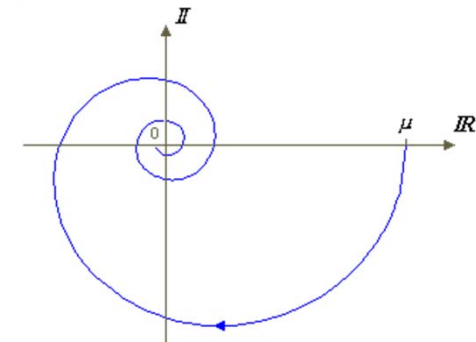
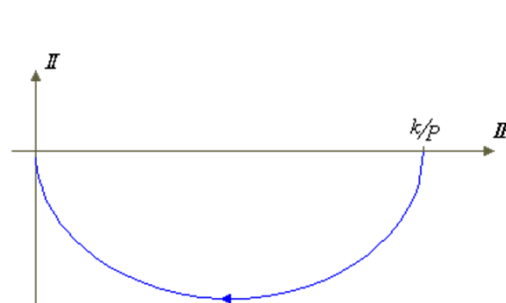
Il diagramma polare associato al ritardo è costituito, per quanto visto su modulo e fase, da una circonferenza di raggio unitario percorsa un numero infinito di volte in senso orario a partire dal semiasse reale positivo



- il modulo della $G(s)$ non è influenzato dal ritardo, mentre la fase decresce al crescere di ω in modo tale che il diagramma compie un numero sempre maggiore di giri in senso orario attorno all'origine del piano complesso

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}, \mu = kT = \frac{k}{P} > 0, T = \frac{1}{P} > 0$$

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-T_d s}$$

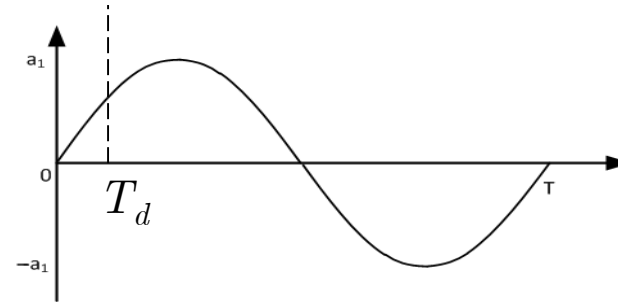




Presenza di un Ritardo Puro

- ❑ La presenza di ritardo di anello rende impossibile il calcolo dei poli in ciclo chiuso, essendo il sistema descritto da una FdT **non razionale**:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-T_d s}$$



- La FdT in anello chiuso vale:

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{\omega_n^2 e^{-T_d s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 (1 + e^{-T_d s})}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 (1 + e^{-T_d s}) = 0$$

- Quali sono i poli del sistema in anello chiuso?
Non esiste una radice s (reale o complessa) tale che il denominatore sia uguale a zero !!



- ❑ Come si può verificare la stabilità in anello chiuso?

- Uso della risposta in frequenza (vedi Criterio di Nyquist)
- Approssimazione polinomiale del termine di ritardo

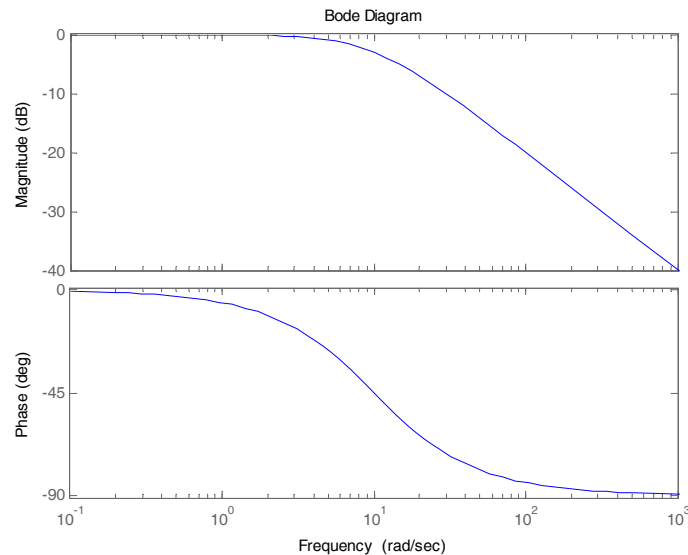


Presenza di un Ritardo Puro

- L'approssimazione polinomiale viene eseguita mediante un sistema del primo ordine oppure con gli approssimatori algebrici di Padè.

- Sistema del primo ordine

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1}{1 + T_d s}$$

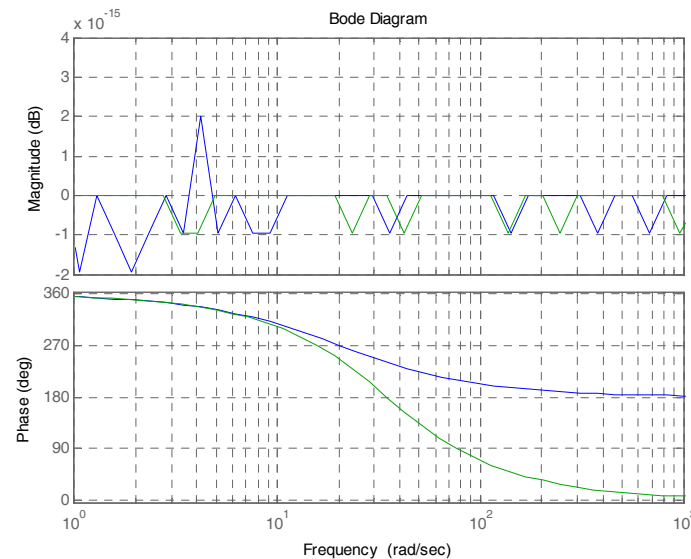


- Approssimanti di Padè di e^x

$$\exp_{1/1}(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

$$\exp_{2/2}(x) = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

$$\exp_{3/3}(x) = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$$



Transfer function:

$-s + 20$

$s + 20$

`>> sys2`

Transfer function:

$s^2 - 60s + 1200$

$s^2 + 60s + 1200$



Sistemi Instabili

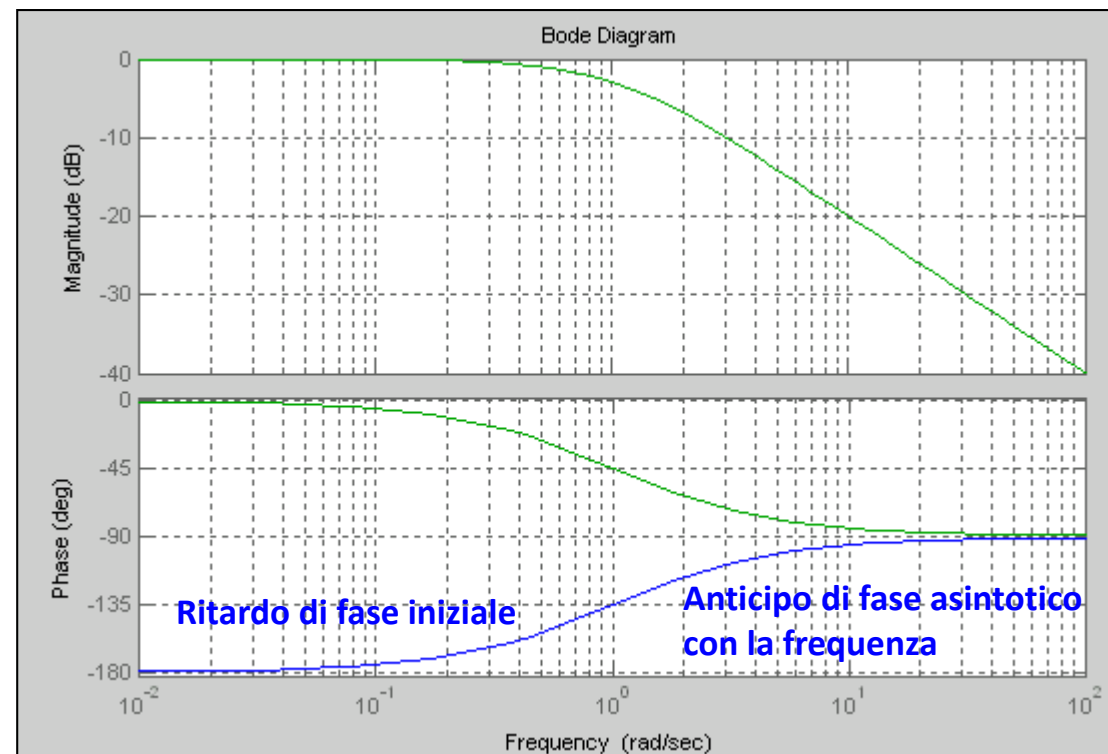
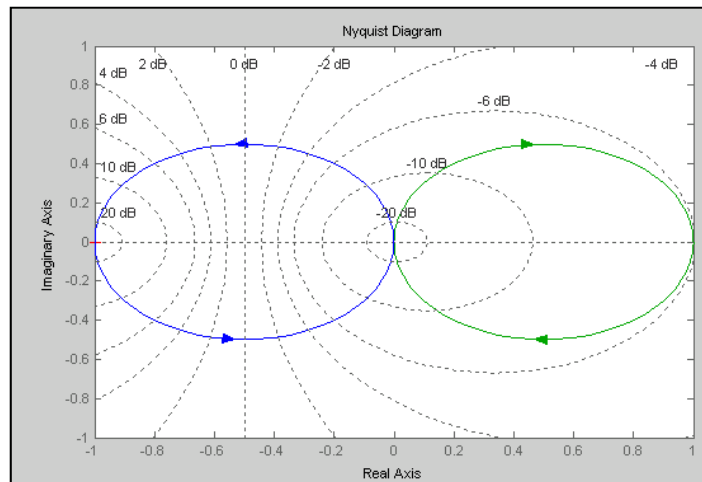
- ❑ I sistemi instabili hanno poli a parte reale positiva, per cui formalmente la risposta in frequenza non produce un'armonica in uscita. Consideriamo il caso di un singolo polo instabile

$$G_p(s) = \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s}$$

$$|G_p(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = |G(j\omega)| \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\angle G_p(j\omega) = \angle(-1) - \tan^{-1}(-\omega) = -180^\circ + \tan^{-1} \omega$$

$$G_p(j\omega) = -\frac{1}{1-j\omega}$$





Sistemi Instabili



- Nel caso di sistemi instabili, comunque, si può dimostrare che un'opportuna scelta di condizioni iniziali permette di avere un'uscita armonica (Vedi testo Bolzern, pp 169 – 170).
- Consideriamo un sistema SISO, lineare, strettamente proprio e asintoticamente stabile:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; u, y \in \mathbb{R}^1 \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

- Sia $u(t)$ un ingresso esponenziale, con polo dominante e/o divergente:

$$u(t) = Ue^{\lambda^* t}, [\lambda^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0]$$

- A regime si ha:

$$y(s) = G(s) \cdot \frac{U}{s - \lambda^*} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{\textcolor{red}{B}_1}{s - \lambda^*} = y_1(s) + y_2(s)$$

$$y^*(t) = y_2(t) = [C(\lambda^* I - A)^{-1}B + D]Ue^{\lambda^* t} = \textcolor{red}{G}(\lambda^*)Ue^{\lambda^* t}$$



Sistemi Instabili



- Consideriamo adesso il caso di un sistema instabile, con ingresso esponenziale:
- **Teorema:** Esiste un vettore di condizioni iniziali capace di produrre l'equivalente della componente $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_2(s)]$, annullando il termine $y_1(t)$

$$\exists \mathbf{x}(0) : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} \quad \lambda^* \mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} = A\mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} + BUe^{\lambda^* t} \quad (\lambda^* I - A)\mathbf{x}(0) = BU$$

$$\left[\lambda^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0 \right] \Rightarrow \mathbf{x}(0) = (\lambda^* I - A)^{-1} BU$$

$$y_2(t) = C\mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} \quad y_2(t) = [C(\lambda^* I - A)^{-1} B]Ue^{\lambda^* t} = G(\lambda^*)Ue^{\lambda^* t}$$

- **La stessa procedura la possiamo applicare ad un sistema instabile con ingresso armonico:**

$$u(t) = U \sin \omega_0 t = \frac{U(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})}{2j} \quad \lambda^* = j\omega_0; \bar{\lambda}^* = -j\omega_0$$

$$y(s) = G(s) \cdot U \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_1}{s + j\omega_0} + \frac{B_1^*}{s - j\omega_0} = y_1(s) + y_2(s)$$

$$\exists \mathbf{x}(0) : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \sin \omega_0 t \quad \blacksquare \quad \text{Tale che: } y(t) = y_2(t) ?$$



Sistemi Instabili



- Il vettore di condizioni iniziali è dato dalla combinazione lineare di due componenti esponenziali:

$$\left[\lambda^*, \bar{\lambda}^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0 \right] \Rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) = (\lambda^* I - A)^{-1} B U - (\bar{\lambda}^* I - A)^{-1} B U$$

$$y_2(t) = C \mathbf{x}(t) \quad y_2(t) = \frac{G(\lambda^*)U}{2j} e^{\lambda^* t} + \frac{G(\bar{\lambda}^*)U}{-2j} e^{\bar{\lambda}^* t} = |G(j\omega_0)| U (\sin \omega_0 t + \varphi)$$



Sistemi a Fase Non Minima

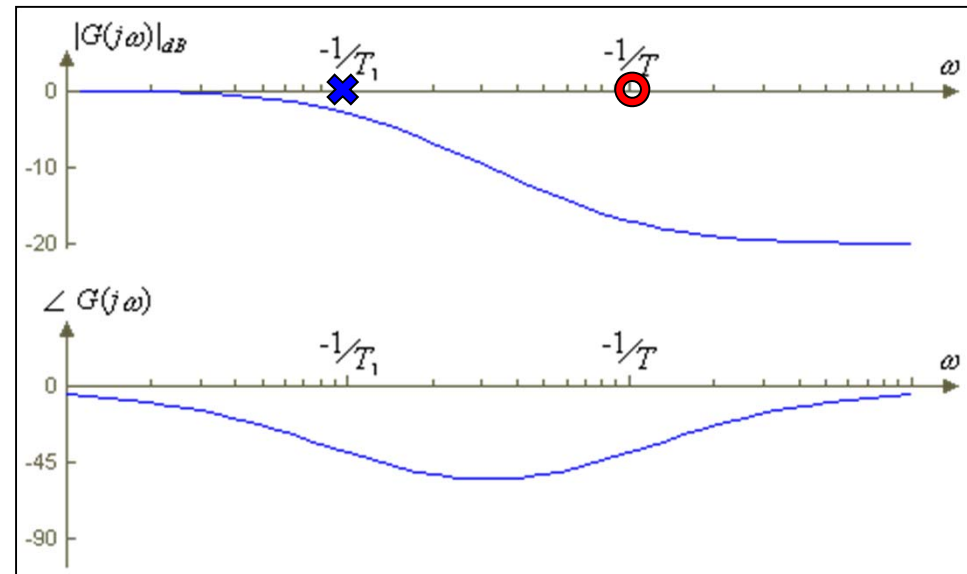
□ Consideriamo un sistema del primo ordine con uno zero a parte reale negativa

$$G(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

□ Nel caso di zero di parte reale positiva si ha un ritardo di fase!

$$G_p(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

$$G_p(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}$$



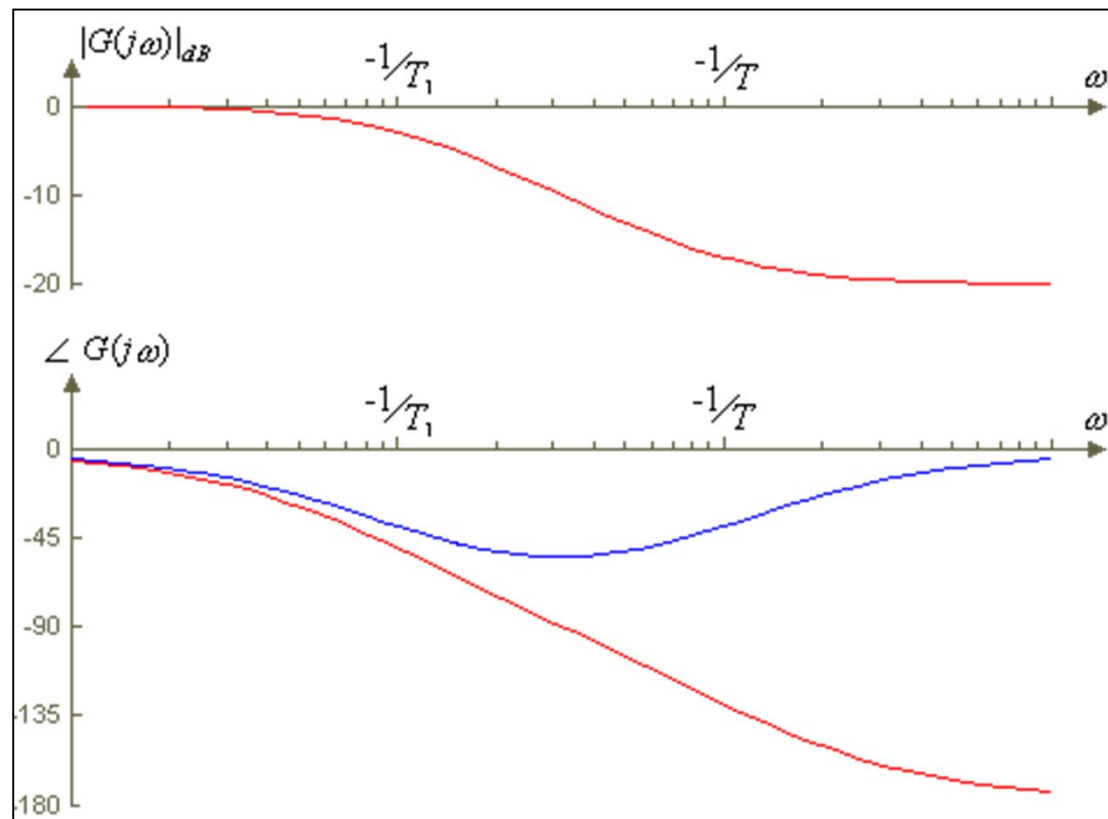
$$|G_p(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} = |G(j\omega)|$$

$$\begin{aligned} \angle G_p(j\omega) &= \angle(1 - j\omega T) - \angle(1 + j\omega T_1) = \\ &= \tan^{-1}(-\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1) = -\tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1) \end{aligned}$$



Sistemi a Fase Non Minima

- Il diagramma del modulo coincide con il sistema a fase minima, quello della fase è diverso; in particolare lo zero a parte reale positiva si comporta, per la fase, come uno polo a parte reale negativa portando un decremento della fase di -90° , ovvero un ritardo

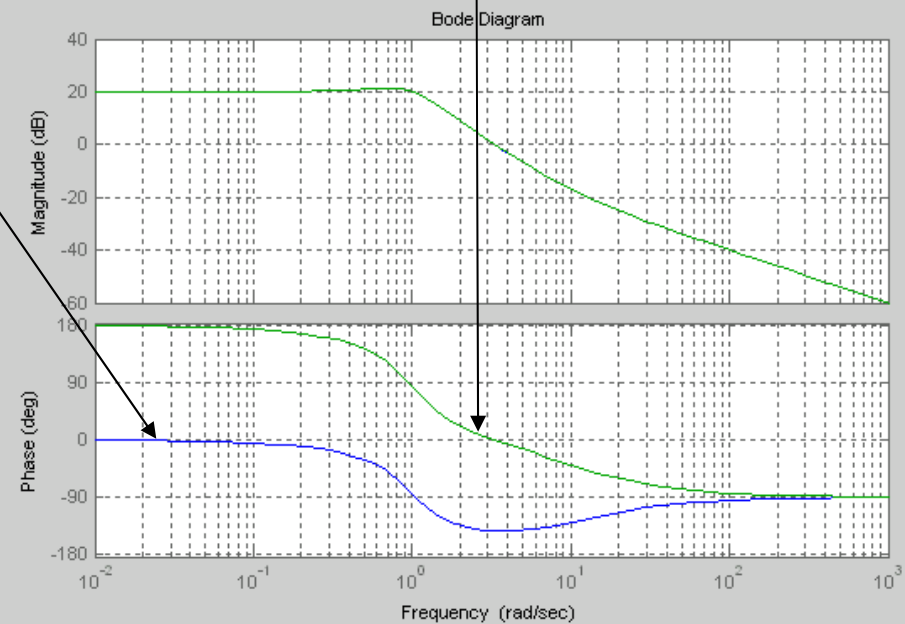
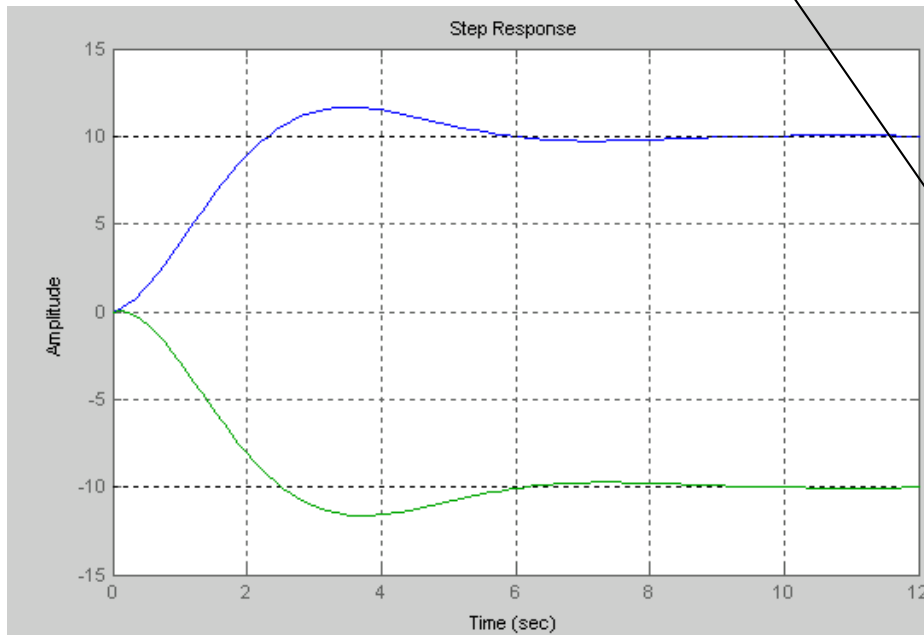




Sistemi a Fase Non Minima

$$G_1(s) = \frac{s + 10}{s^2 + s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{10 - s}{s^2 + s + 1}$$



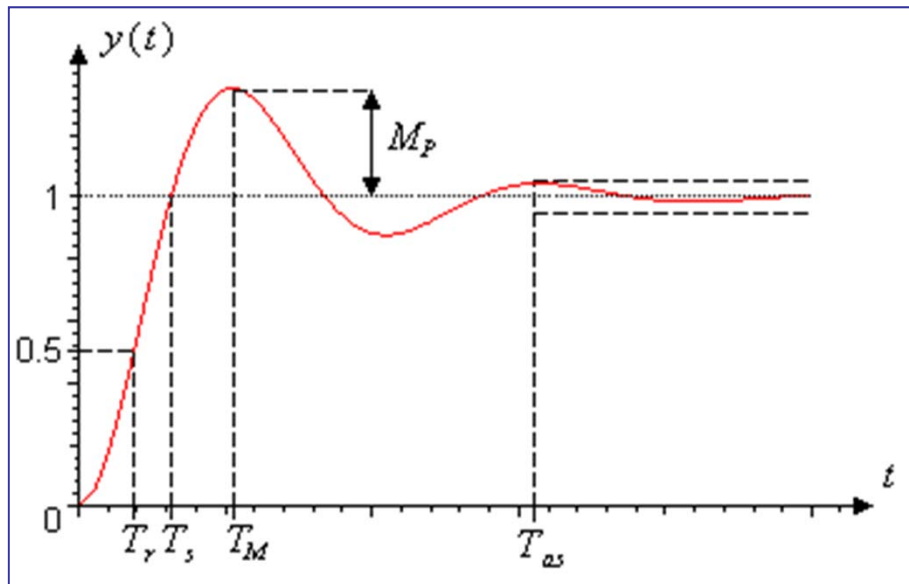
- **Nota:** Come cambia la risposta in frequenza se

$$G_2(s) = \frac{s - 10}{s^2 + s + 1}$$



Parametri della Risposta Transitoria

- ❑ La risposta in frequenza può essere utilizzata per imporre delle specifiche, nel dominio della frequenza, riconducibili ai parametri tipici già visti per la Risposta transitoria e la risposta a regime.
- ❑ Risultati analitici sono ottenibili per sistemi del primo e del secondo ordine. Per sistemi di ordine superiore si possono fare considerazioni qualitative



$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}},$$

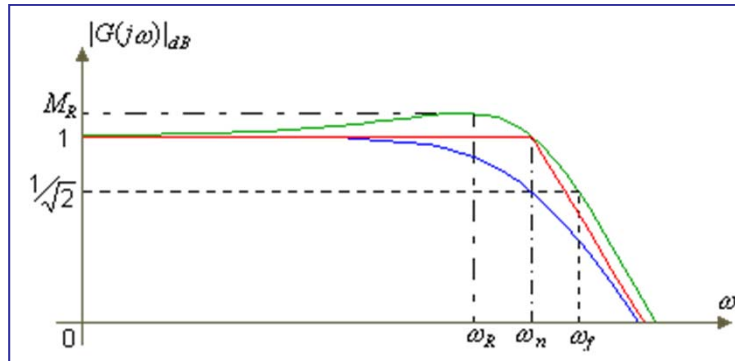
$$M_p = 100 \cdot e^{-\left(\xi \pi / \sqrt{1 - \xi^2}\right)},$$

$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d},$$

$$T_{as} = -\frac{1}{\xi \omega_n} \cdot \ln \varepsilon = \frac{3}{\xi \omega_n}$$



Parametri della Risposta Transitoria



- La frequenza di *risonanza* ω_R , frequenza a cui la risposta assume il suo valore massimo; è legata alla frequenza d'angolo dalla relazione

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

- Il *picco di risonanza* M_R , rapporto fra valore massimo e valore statico della risposta, pari a

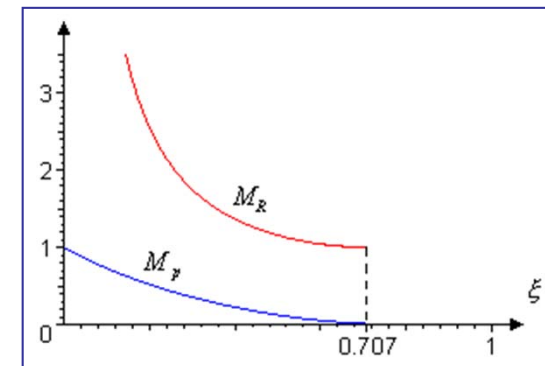
$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

M_R può essere usato come indicatore della sovraelongazione e della velocità di risposta

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

- Nella figura sono stati riportati, il diagramma asintotico (in rosso), e quelli reali per due diversi valori del coefficiente di smorzamento ξ , 0.5 (in verde) e 0.707 (in blu) relativi ad un sistema del secondo ordine oscillatorio smorzato

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow M_R = \infty, M_p = 1 \\ \xi = 0.1 &\Rightarrow M_R = 5.025, M_p = 0.73 \\ \xi = 0.3 &\Rightarrow M_R = 1.747, M_p = 0.37 \\ \xi = 0.5 &\Rightarrow M_R = 1.15, M_p = 0.163 \\ \xi = 0.707 &\Rightarrow M_R = 1, M_p = 0.0433 \\ \xi = 0.8 &\Rightarrow M_R = 1.04, M_p = 0.0152 \end{aligned}$$





Parametri della Risposta Transitoria



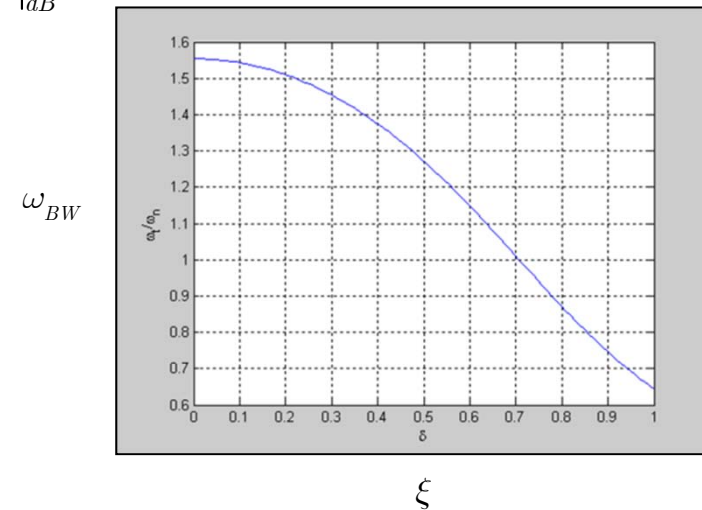
❑ La larghezza di banda o banda passante ω_{BW}

- Nella teoria dei segnali, la banda passante definisce in pratica la limitazione di un filtro teorico passa basso, ovvero un sistema capace di riprodurre, con perdita di ampiezza limitata, un segnale armonico in un certo intervallo di frequenze

Dato un sistema $G(s)$ con guadagno statico $k = |G(j0)|_{dB}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \sqrt{2}, \omega < \omega_{BW} \\ \frac{|G(j\omega)|_{dB}}{|G(j0)|_{dB}} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega > \omega_{BW} \end{cases}$$

$$|G(j\omega_{BW})|_{dB} = |G(j0)|_{dB} - 3 \text{ dB} \simeq 70\% |G(j0)|_{dB}$$



- La banda passante è inversamente proporzionale al coefficiente di smorzamento; tale parametro determina le caratteristiche della risposta transitoria del sistema in termini di tempo di salita e tempo di assestamento.
- Maggiore è la banda passante e migliore è la capacità di un sistema a riprodurre ingressi ad alta frequenza



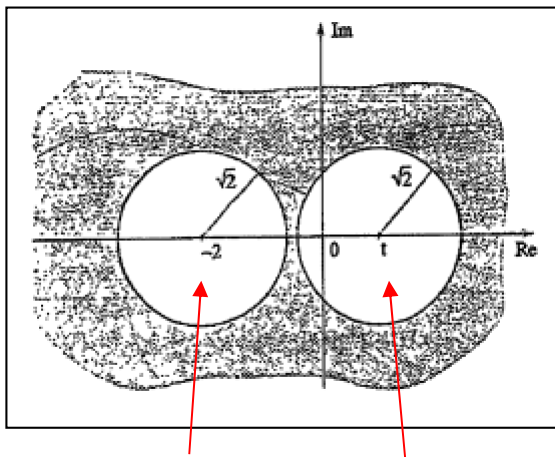
Parametri della Risposta Transitoria

- La definizione di banda passante può essere usata anche nel calcolo della banda passante in anello chiuso

$$T(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)}, S(s) = \frac{1}{1 + G_{ol}(s)}$$

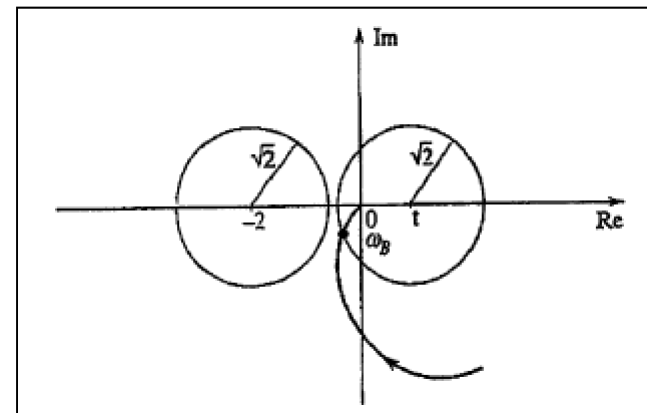
$$\frac{1}{\sqrt{2}} < |T(j\omega)| < \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{|s|}{|s+1|} < \sqrt{2}$$



$$|s+1| = \sqrt{2}|s| \quad |s| = \sqrt{2}|s+1|$$

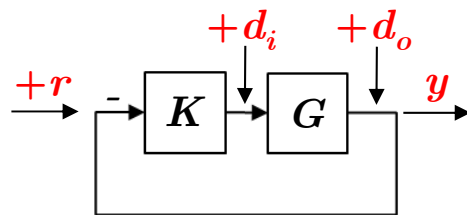
- I valori del piano complesso che soddisfano la definizione di banda sono quelli nella zona scura della figura
- Il diagramma polare di $G_{ol}(s)$ permette di definire il valore della banda passante di $T(s)$





Parametri della Risposta Transitoria

- Prestazioni in anello chiuso dalla funzione di sensitività



- $G(s)$ strettamente propria (# poli > # zeri)
- $K(s)$ propria (strettamente)
- $G_{ol}(s) = K(s)G(s)$ strettamente propria

$$T(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)}, S(s) = \frac{1}{1 + G_{ol}(s)}$$

$$y(s) = S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s) + T(s)r(s) \Rightarrow T(s) + S(s) = 1$$

$$\varepsilon(s) = r(s) - y(s) = S(s)r(s)$$

$$S(j\omega) \downarrow \text{😊}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G_{ol}(j\omega)| \rightarrow \infty \Rightarrow |S(j\omega)| \rightarrow 0$$

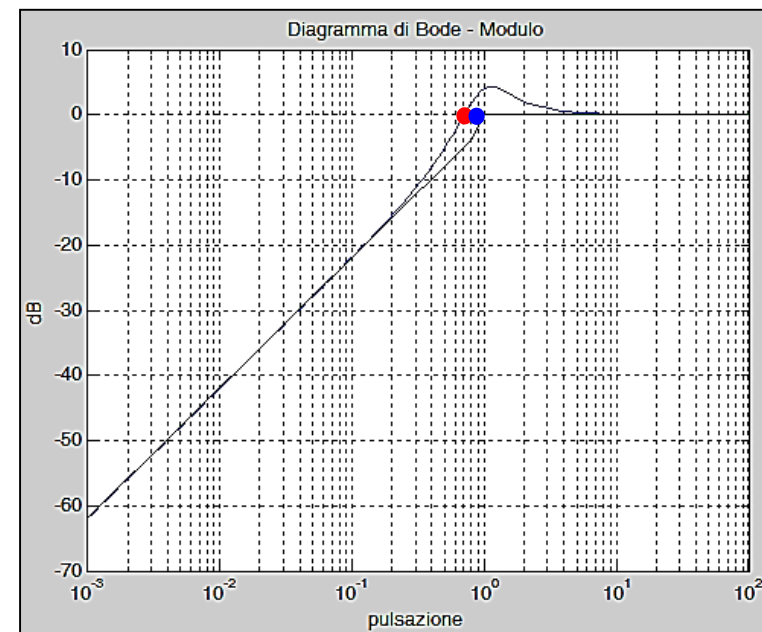
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_{ol}(j\omega)| \rightarrow 0 \Rightarrow |S(j\omega)| \rightarrow 1$$

- $S(j\omega)$ opera come Filtro Passa Alto per frequenze inferiori a ω_C

$$\exists \omega = \omega_C \mid |S(j\omega_C)| = 1$$

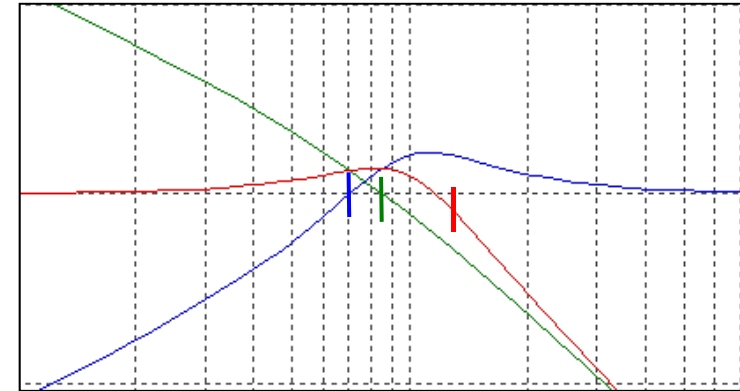
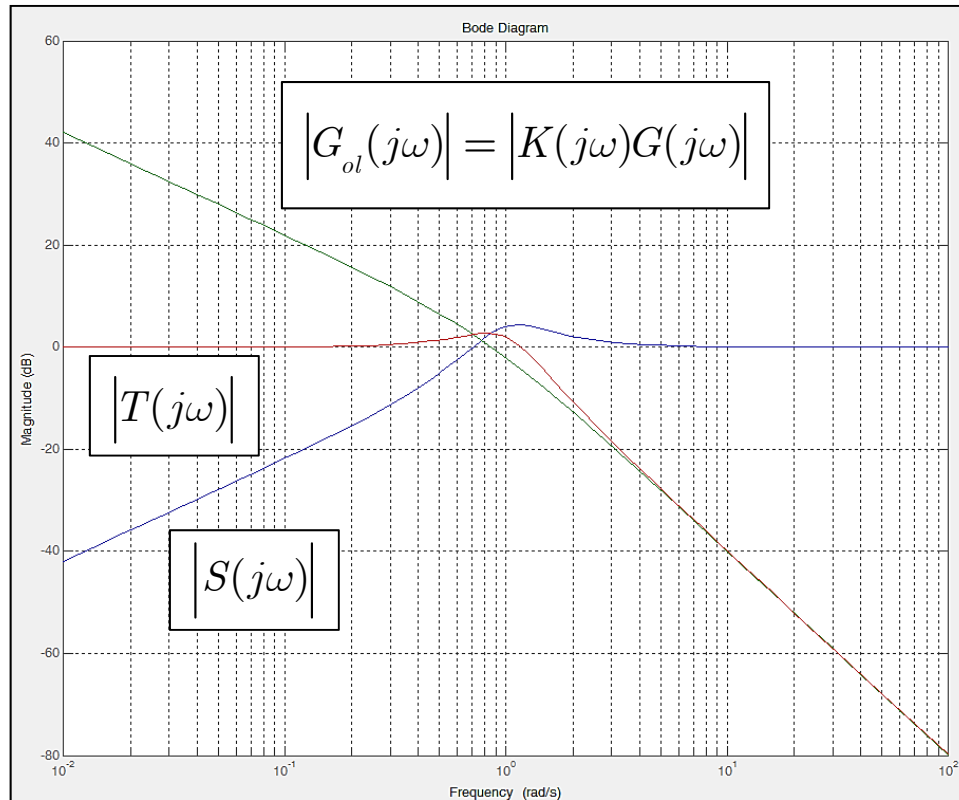
Frequenza di attraversamento
Crossover Frequency

ω_C $\underline{\omega}_C$





Parametri della Risposta Transitoria



ω_{BW} Banda Passante

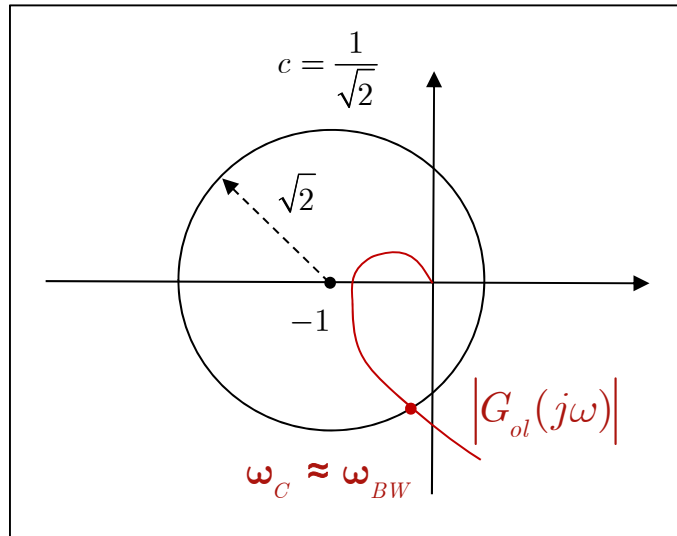
ω_C Frequenza di Attraversamento

$\underline{\omega}_C$ Frequenza Appross. di Attrav.

- La frequenza di attraversamento della FdT di anello, può essere considerato un parametro della risposta transitoria per quanto riguarda:
 - La Banda Passante in anello chiuso
 - La capacità di del sistema in anello chiuso di reiettare disturbi e di inseguire un comando



Parametri della Risposta Transitoria



- Considerazioni aggiuntive sulla Sensitività $S(j\omega)$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega)|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|1 + s|} = c$$

Circonferenza di
centro -1 e raggio $1/c$

- Valori per cui la Sensitività è inferiore a c sono punti del piano complesso fuori al cerchio

$$|1 + G_{ol}(j\omega)| > \frac{1}{c}$$

$$1 + \frac{1}{c} > G_{ol}(j\omega) > -1 + \frac{1}{c}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega)|} < c$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|S(j\omega_{BW})| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega_{BW})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$



Parametri della Risposta a Regime

- La risposta in Frequenza della funzione di trasferimento di anello fornisce anche informazioni sull'errore a regime in ciclo chiuso

$$\varepsilon(s) = S(s)u(s) = \frac{1}{1 + \mathbf{K(s)G(s)}} u(s)$$

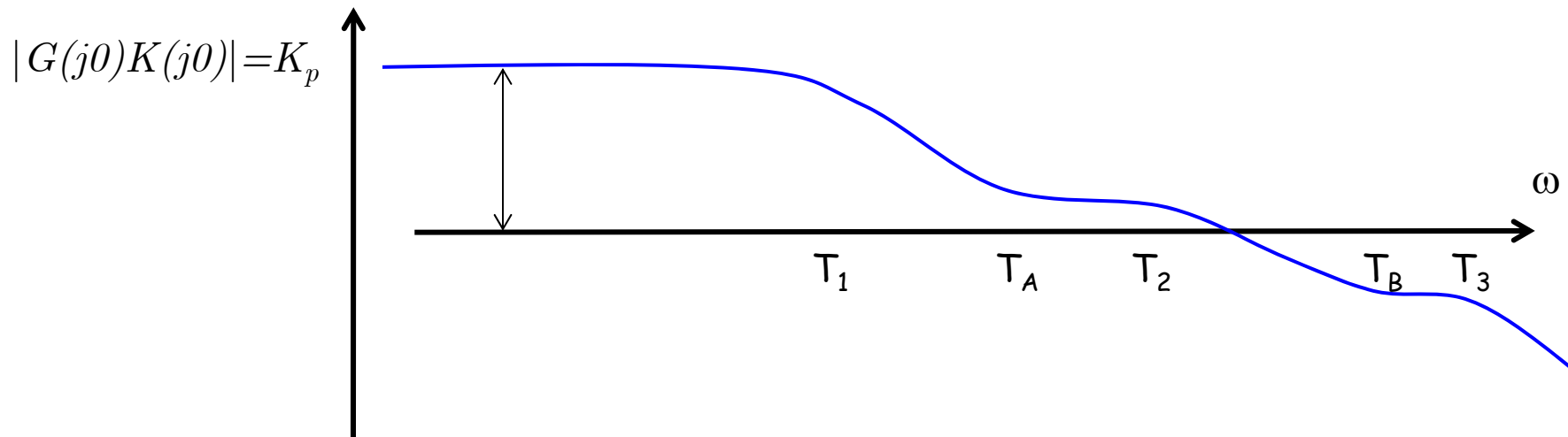
Sistema di Tipo 0

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_p \frac{(1 + j\omega T_A^{-1})(1 + j\omega T_B^{-1})\cdots}{(1 + j\omega T_1^{-1})(1 + j\omega T_2^{-1})\cdots}$$

- K_p è il guadagno di anello

L'errore al Gradino Unitario vale

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$





Parametri della Risposta a Regime



Sistema di Tipo 1

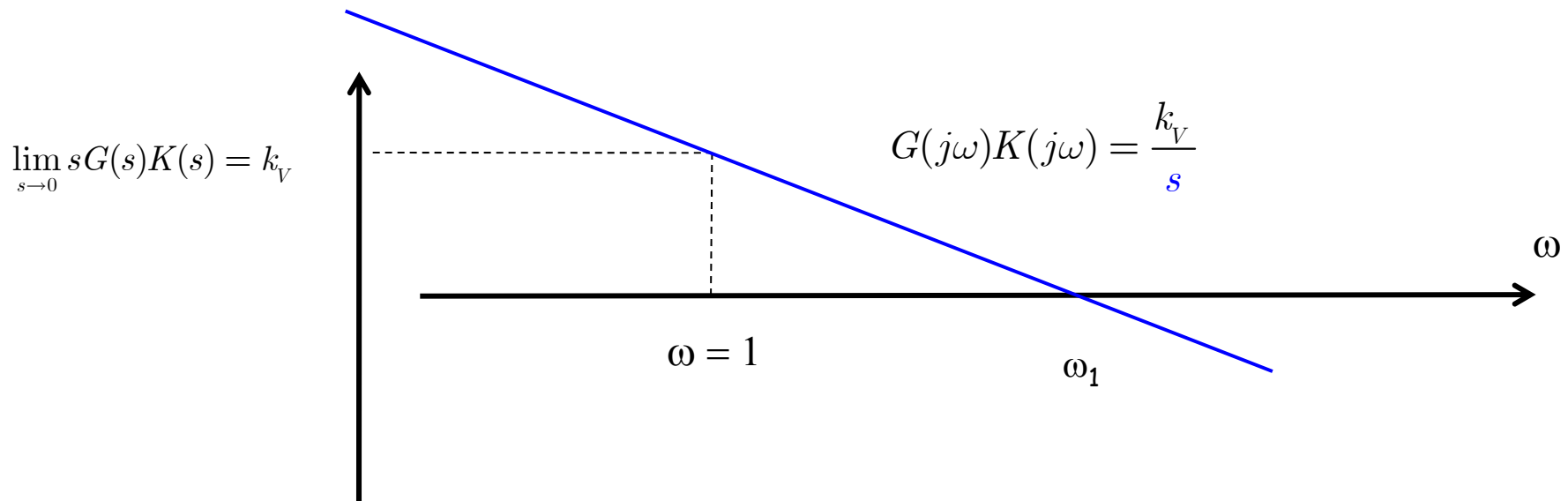
$$G(j\omega)K(j\omega) = K_V \frac{(1 + j\omega T_A^{-1})(1 + j\omega T_B^{-1})\cdots}{s(1 + j\omega T_1^{-1})(1 + j\omega T_2^{-1})\cdots}$$

- K_p è il guadagno di anello della parte senza polo all'origine

- L'errore al Gradino Unitario vale 0

- L'errore alla Rampa Unitaria vale:

$$\epsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)K(s)} = \frac{1}{k_V}$$





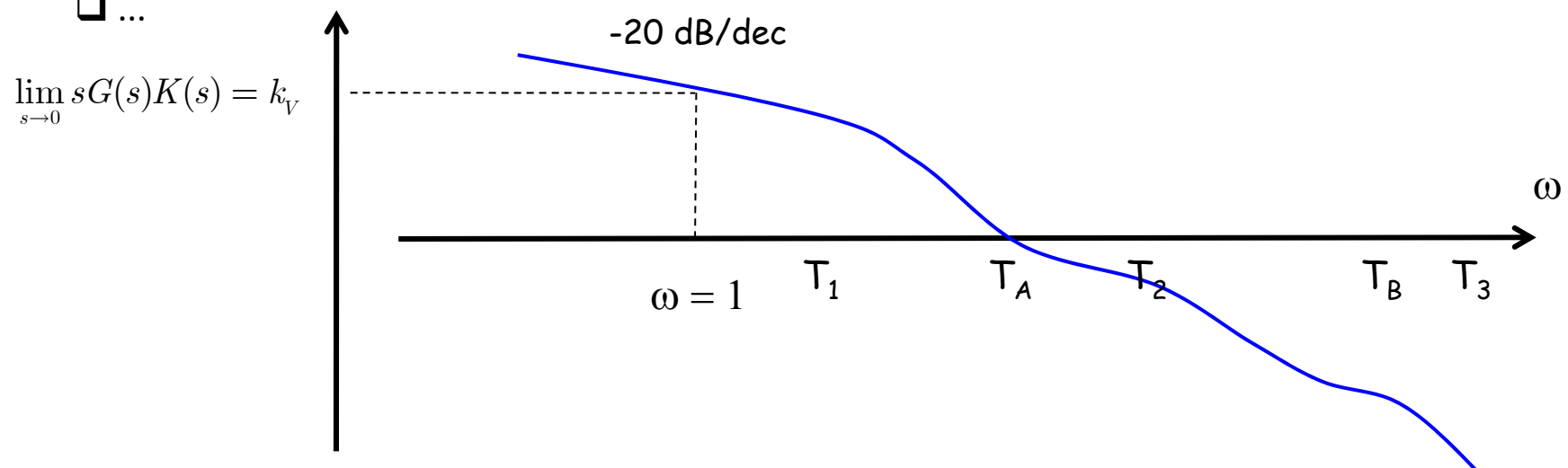
Parametri della Risposta a Regime

La risposta in frequenza della FdT in Anello aperto fornisce direttamente il TIPO di sistema.

A basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$):

- ☐ Se il diagramma del modulo ha una pendenza nulla il sistema è di tipo 0 e l'errore al gradino sarà sempre finito.
- ☐ Se il diagramma del modulo ha una pendenza di -20 dB/dec il sistema è di tipo 1 e l'errore al gradino sarà sempre nullo.
- ☐ Se il diagramma del modulo ha una pendenza di -40 dB/dec il sistema è di tipo 2 e l'errore alla rampa sarà sempre nullo.

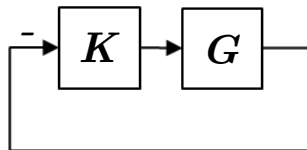
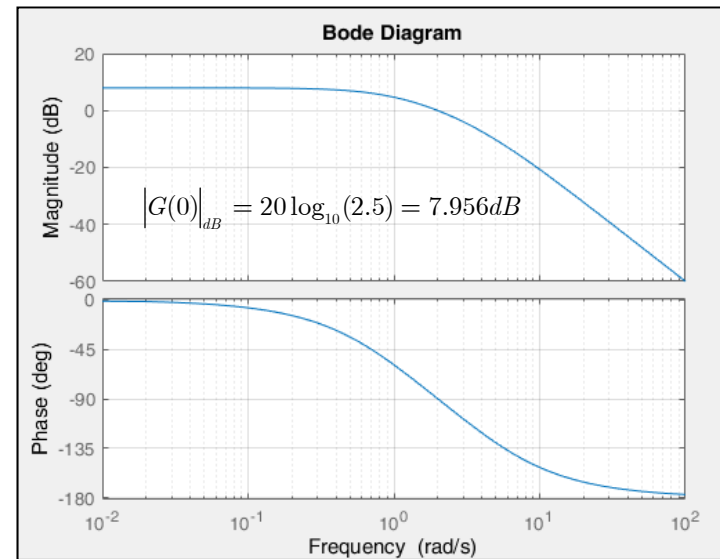
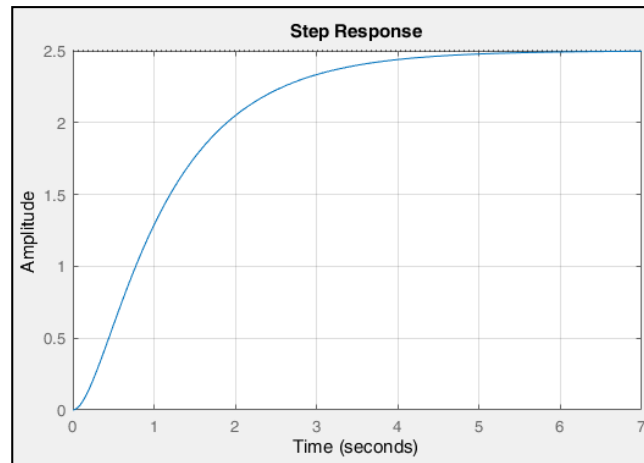
☐ ...





Sommario

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+4)}$$



■ Controllore proporzionale

1. Sistema in anello chiuso sempre asintoticamente stabile
2. Errore a regime al gradino: **FINITO**

$$T(s) = \frac{\frac{10k}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{10k}{(s+1)(s+4)}} = \frac{10k}{s^2 + 5s + (4 + 10k)}$$

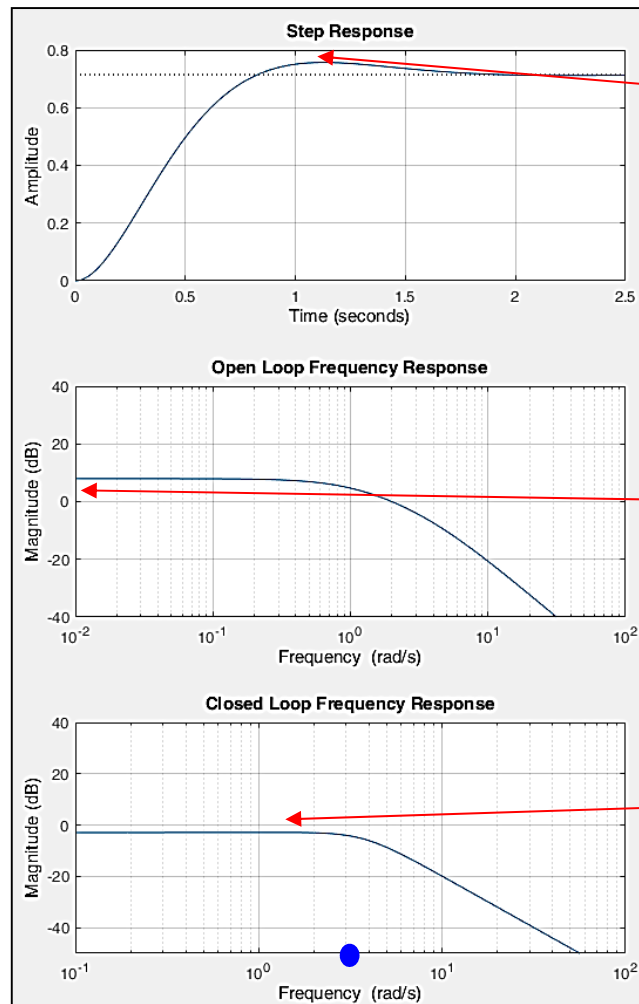
$$K(s)G(s) = \frac{10k}{(s+1)(s+4)}$$

■ Tipo 0

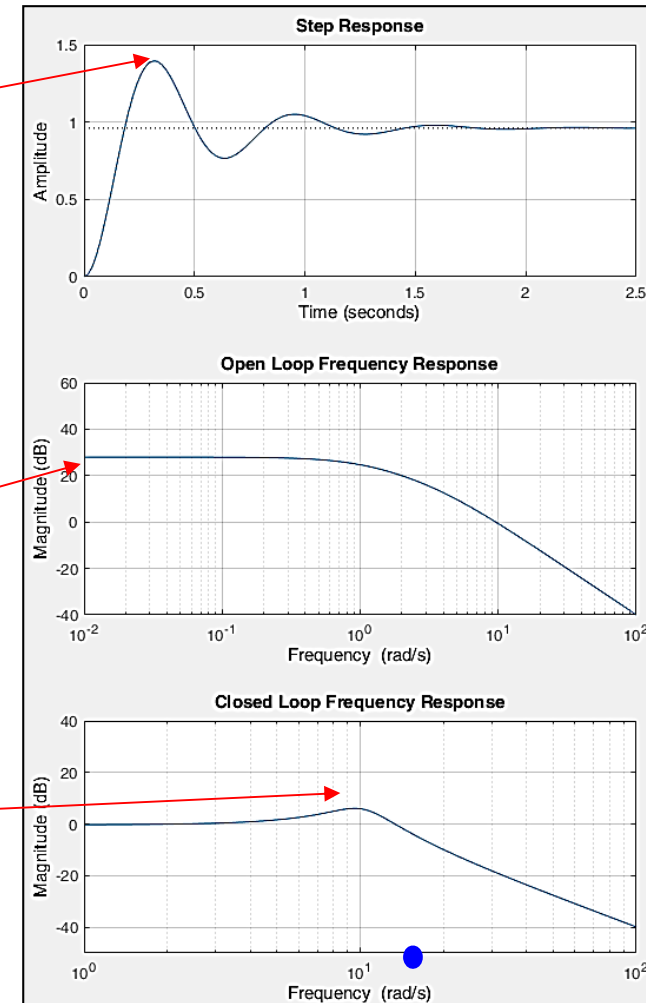


Sommario

- Riduzione dell'errore a regime $k \uparrow \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{1 + K(0)G(0)} \downarrow$



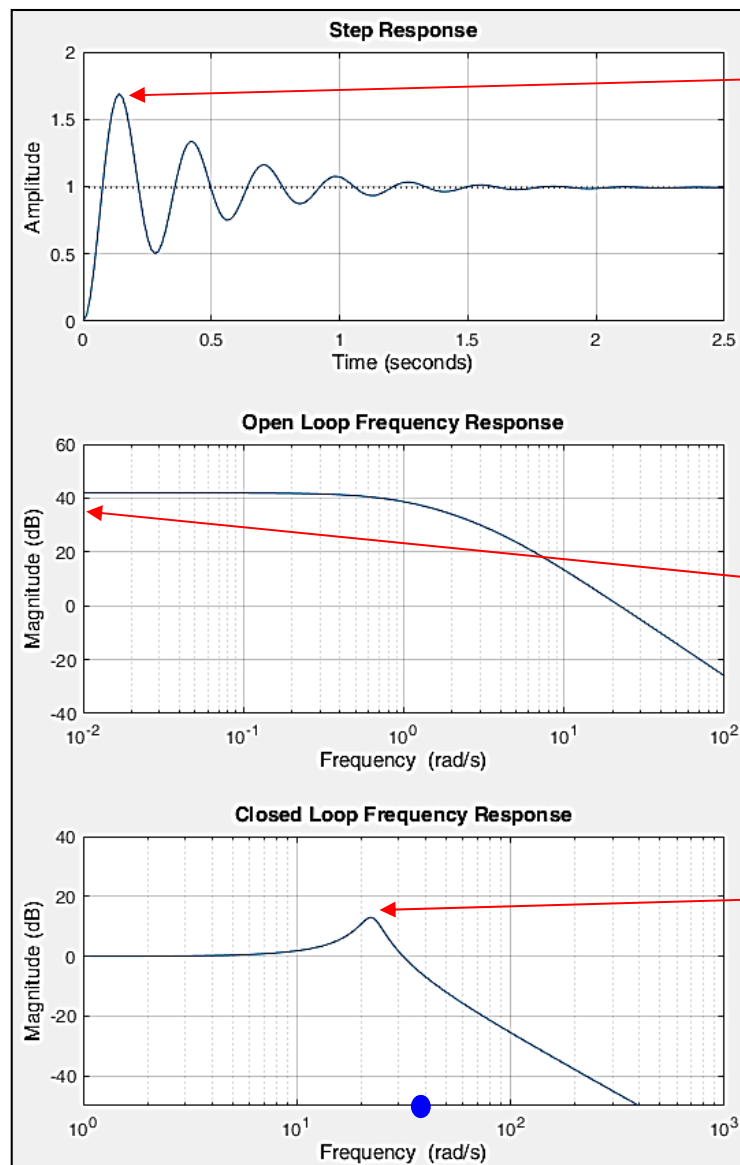
$K = 1$



$K = 10$



Sommario



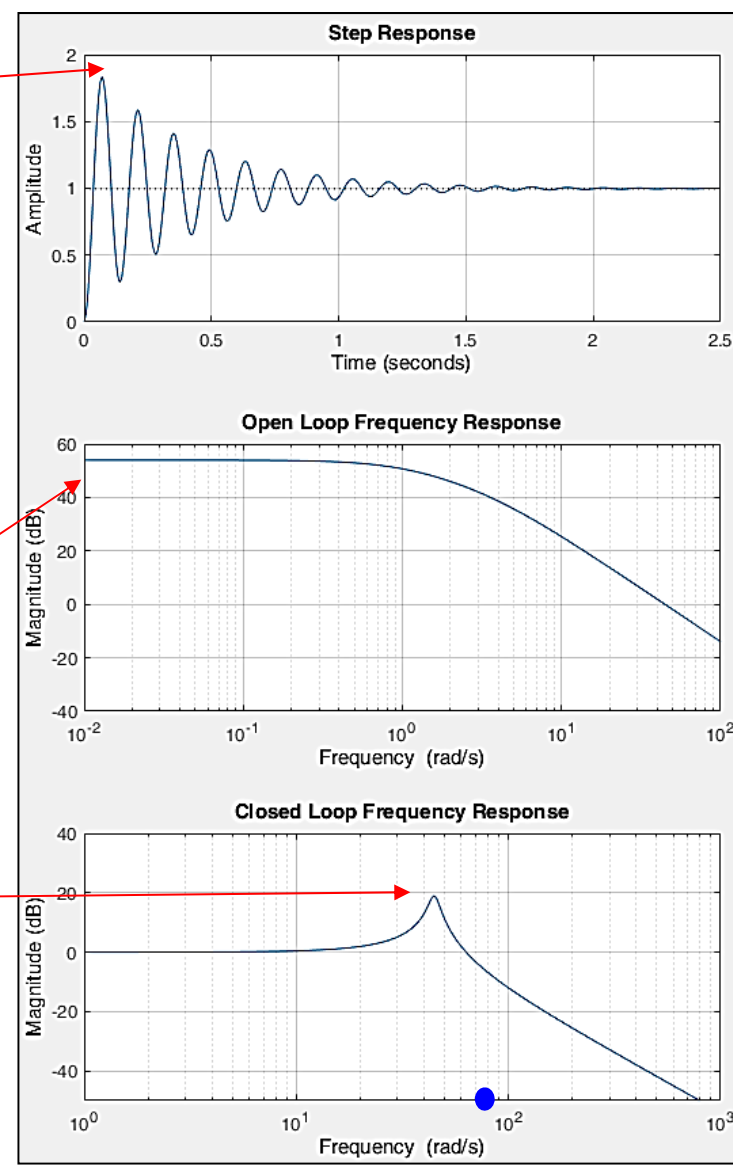
$K = 50$

M_P

$K(0)G(0)$

M_R

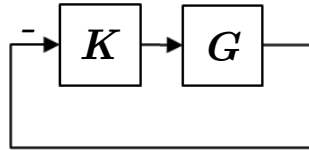
ω_{BW}



$K = 200$



Sommario

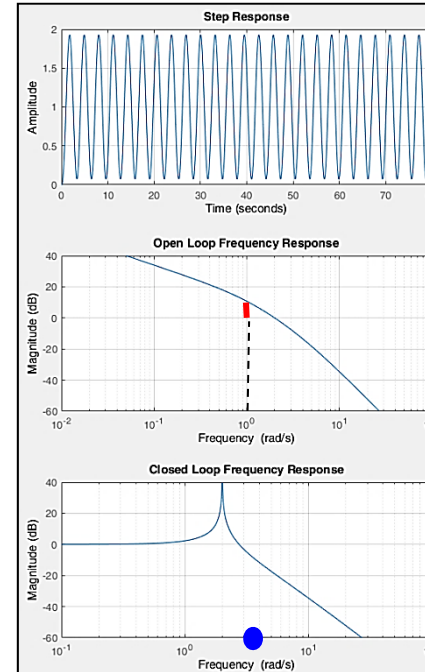
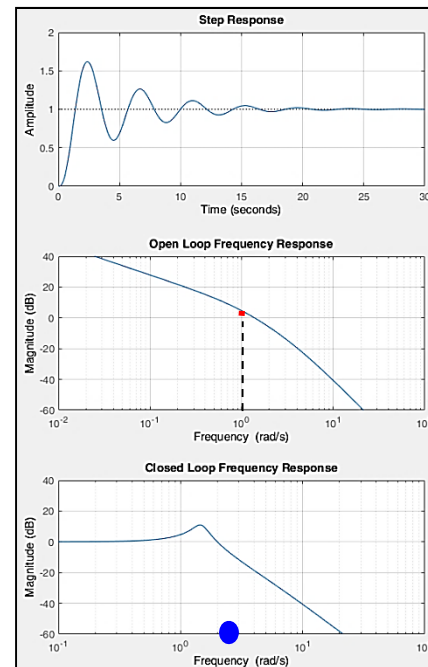
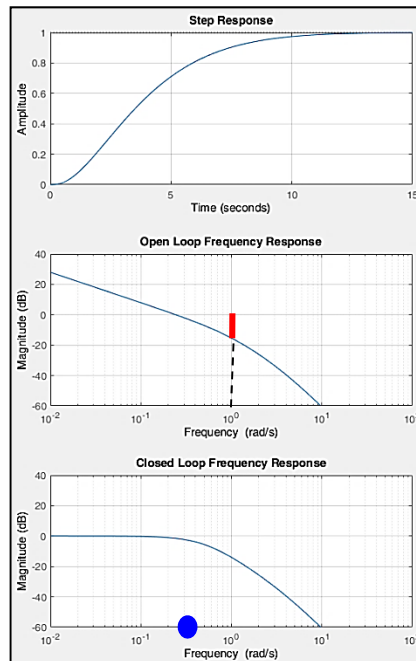


- Controllore integrale
 1. Sistema in anello chiuso sempre asintoticamente stabile ?? => **K < 2**
 2. Errore a regime al gradino: **NULLO**

$$T(s) = \frac{10k}{s(s+1)(s+4)} = \frac{10k}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10k}$$

$$K(s)G(s) = \frac{10k}{s(s+1)(s+4)}$$

▪ **Tipo 1**



$$K = 0.1, 1.0, 2$$

$$\varepsilon_{GRAD} = 0$$

$$K_V \uparrow \Rightarrow \varepsilon_{RAMP} = \frac{1}{K_V} \downarrow$$

$$\omega_{BW} \uparrow$$



$G(s)$ da Dati Sperimentali

□ La risposta in Frequenza è uno degli strumenti per ricavare la FdT di un Sistema a partire da dati sperimentali

- Uso della Trasformata di Fourier (FFT)
- Ingresso Impulsivo

Nel Caso di Sistemi Stabili a Sfasamento Minimo:

