591AA 21/22 – COMPITO, LEZIONI 18 E 19

Data di scadenza: Questo compito non sarà raccolto per la valutazione.

Problema 1. Sia,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trova il polinomio caratteristico di A
(b) Trova gli autovalori e gli autovettori di A.
(c) Quali sono le moltiplicit geometriche e algebriche degli autovalori di A.
(d) La matrice A è normale?

Problema 2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Riempi gli spazi vuoti usando i risultati discussi in classe (usare ogni matrice solo una volta)

(a) La matrice   ha autovalori reali perché
(b) La matrice   ha autovalori immaginari perché
(c) La matrice   è diagonalizzabile perché
(d) La matrice   non è diagonalizzabile perché

Problema 3. Spiega perché la seguente matrice è diagonalizzabile senza calcolare i suoi autovalori o autovettori.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3i & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3i \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che una matrice quadrata A con coefficienti reali si dice definita positiva se

$$(u, v) = (u^t)Av$$

è un prodotto scalare. Per il teorema spettrale, questo è equivalente alla condizione che A sia una matrice simmetrica con solo autovalori positivi. Per il teorema del cerchio di Gershgorin, una condizione sufficiente (ma non necessaria) perché una matrice quadrata sia definita positiva è che tutte le voci diagonali di A siano positive e che A sia diagonalmente dominante per le righe.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Problema 4. Classificare ciascuna delle seguenti matrici come definita positiva o no.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (é o non é): La matrice A definita positiva perché
(b) (é o non é): La matrice B definita positiva perché
(c) (é o non é): La matrice C definita positiva perché
(d) (é o non é): La matrice D definita positiva perché

Problema 5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Allora, A definito positiva (perché?). Applica il processo di Gram-Scmidt alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare $(u, v) = (u^t)Av$ definito dalla matrice A.

Soluzioni, pagina successiva

Soluzioni

Problema 1. La matrice A è stata costruita come

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da questo si può leggere che

(a) $p_A(t) = (t-1)^2(t-2)$. Senza conoscere questa presentazione della matrice A, basta calcolare il polinomio caratteristico usando lo sviluppo di Laplace.

(b) Gli autovettori sono le colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Senza conoscere questa presentazione della matrice A, basta usare l'eliminazione gaussiana per trovare il kernel di $A - I$ e $A - 2I$.

(c) $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 2. $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1.

(d) Sì, calcoliamo semplicemente AA^* e A^*A.

Problema 2.

(a) La matrice B è simmetrica, quindi deve avere autovalori reali.

(b) La matrice A è antisimmetrica, quindi deve avere autovalori immaginari.

(c) La matrice D é normale perché $DD^* = D^*D$, quindi D è diagonalizzabile.

(d) La matrice C è stata costruita come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Quindi, il polinomio caratteristico è t^3. La molteplicit geometrica di $\lambda = 0$ è 1, mentre la molteplicità algebrica di $\lambda = 0$ é 3. Senza conoscere questa presentazione della matrice C, bisogna calcolare il polinomio caratteristico e le molteplicit geometriche e algebriche.

Problema 3. Il raggio di ogni disco di Gershgorin è 2. I centri del disco sono $\{3, -3, 3i, -3i\}$. Poiché la distanza tra questi punti è sempre almeno $3\sqrt{2} > 4$, ne segue che i dischi sono disgiunti. Quindi, il polinomio caratteristico di questa matrice ha 4 radici distinte, e quindi è diagonalizzabile.

Problema 4.

(a) La matrice A non è simmetrica, quindi non definita positiva.

(b) La matrice B é simmetrica e diagonalmente dominante per le righe. Quindi A é definito positiva.

(c) La matrice C é simmetrica, ma non diagonalmente dominante per le righe. Quindi dobbiamo calcolare gli autovalori, che sono $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. Poiché questi sono entrambi positivi, la matrice é definita positiva.

(d) Applicando il teorema del cerchio di Gershgorin alla prima riga, vediamo che abbiamo un autovalore negativo, quindi la matrice non é definita positiva.

Problema 5. Siano. $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_3$. Ricorda che

$$\mathrm{Proj}_u(v) = \frac{(v,u)}{(u,u)}u$$

dove $(u,v) = (u^t)Av$. Applica il processo di Gram-Schmid descritto a pagina 4 della lezione 19.

- $v_1 = u_1 = e_1$;
- $v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2)$. Dove,

$$(u_2, v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad (v_1, v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

Quindi, $v_2 = e_2 - \frac{1}{3}e_1$.

— $v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_3}(u_3)$. Dove,

$$(u_3, v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$
$$(u_3, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3},$$
$$(v_2, v_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)}v_2 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 \\ &= u_3 - \frac{2}{3}\frac{3}{8}v_2 - \frac{1}{3}v_1 \\ &= e_3 - \frac{1}{4}(e_2 - \frac{1}{3}e_1) - \frac{1}{3}e_1 \\ &= e_3 - \frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_1 \end{aligned}$$

Controlla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Quindi, i vettori sono ortogonali. Per rendere i vettori di lunghezza unitaria, abbiamo semplicemente diviso ogni vettore per la radice quadrata della diagonale corrispondente.