ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 27

Note Title 02/11/2018

FORMULA MISTERIOSA PER VETTORI ORTOGONALI

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\underbrace{v_2w_3 - v_3w_2}_{\text{Det } A_{1,1}}, \underbrace{v_3w_1 - v_1w_3}_{-\text{Det } A_{1,2}}, \underbrace{v_1w_2 - v_2w_1}_{\text{Det } A_{1,3}})$$

Dico che il vettore scritto è perpendicolare a (v_1, v_2, v_3) e a (w_1, w_2, w_3)

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 righe} \\ \text{uguali}}}{0 =} \text{Det} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{1a riga}}}{=} v_1 \cdot \text{Det } A_{1,1} - v_2 \cdot \text{Det } A_{1,2} + v_3 \text{ Det} A_{1,3}$$

= prodotto scalare tra $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e il vettore prodotto dalla formula misteriosa

Stessa identica cosa se al posto di $* * *$ metto il vettore w.

— o — o —

Allo stesso modo, ad esempio in $\mathbb{R}^4$, posso produrre un vettore perpendicolare a 3 vettori dati

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \end{matrix}$$

Un vettore perp. ai 3 vettori dati è

$$(\text{Det } A_{1,1}, -\text{Det } A_{1,2}, \text{Det } A_{1,3}, -\text{Det } A_{1,4})$$

Metodo antico: impostare sistema di 3 eq. in 4 incognite.

— o — o —

METODO DI CRAMER (per i sistemi lineari)

Ho un sistema di (n) equazioni in (n) incognite (stesso numero) non omogeneo

$$\underset{\substack{\text{matrice}\\ n\times n}}{A}\ \underset{\substack{\text{vettore}\\ \text{incognite}}}{x} = \underset{\text{vettore lungo } n}{b}$$

Supponiamo $\operatorname{Det}(A) \neq 0$. Allora la soluzione è unica e

$$\boxed{x_i = \frac{\operatorname{Det}(A_i)}{\operatorname{Det}(A)}}$$

dove A_i è la matrice ottenuta a partire da A sostituendo la i-esima colonna con b

Oss. Dal p.to di vista pratico non è molto comodo perché fare i Det è pesante quando le matrici sono grandi. Diventa interessante se mi serve solo una componente della soluzione.

Esempio

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ x - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\operatorname{Det}(A)}$$

e con 2 Sarrus ho finito.

Dim. che CRAMER funziona

Indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A.
Sia $(x_1, \dots, x_n)$ una sol. del nostro sistema, cioè

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = b$$

Consideriamo $A_i = \left(C_1 \middle| \dots \middle| C_{i-1} \middle| b \middle| C_{i+1} \middle| \dots \middle| C_n \right)$

Quindi

$$A_i = \Big(\underbrace{C_1 \,|\, \dots}_{\text{normali colonne di } A} \,\Big|\, x_1 C_1 + \dots + x_n C_n \,\Big|\, \underbrace{\dots}_{\text{normali colonne di } A} \Big)$$

$$= x_1 \left(C_1 \middle| \dots \middle| C_1 \middle| \dots \right) + x_2 \left(C_1 \middle| \dots \middle| C_2 \middle| \dots \right) + \dots$$

Tutte queste matrici sono uguali ovunque tranne che nella colonna i-esima, quindi il loro Det è la somma dei Det
(c'è di mezzo che il Det della trasposta è uguale a quello della matrice originaria)
Ma allora

$$\mathrm{Det}(A_i) = x_1 \underbrace{\mathrm{Det}\left(C_1 | \dots | C_1 | \dots \right)}_{= 0} + x_2 \,\mathrm{Det}\left(C_1 | \dots | C_2 | \dots \right) + \dots$$

$$= x_i \,\mathrm{Det}\left(C_1 | \dots | C_i | \dots C_n \right) = x_i \,\mathrm{Det}\, A$$

(Tutti gli altri determinanti sono nulli perché ci sono 2 colonne uguali)

Dividendo si ha la tesi

— o — o —

FORMULA PER MATRICE INVERSA

Per calcolare l'inversa di A si può usare il seguente algoritmo

1. $A_{i,j}$
2. segni
3. Trasposta
4. Divido per Det

confrontare in un esempio la velocità di esecuzione rispetto a Gauss

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1+0+8+1-0-12 = -4$$

1. In ogni posizione scrivo Det $A_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Applico il solito pattern dei segni a scacchiera

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 1 & 9 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Trasposta

$$\begin{pmatrix} -13 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Divido tutto per Det A

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

<u>Esempio</u> Il caso 2×2 rientra in questo algoritmo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{①}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \underset{②}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \underset{③}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

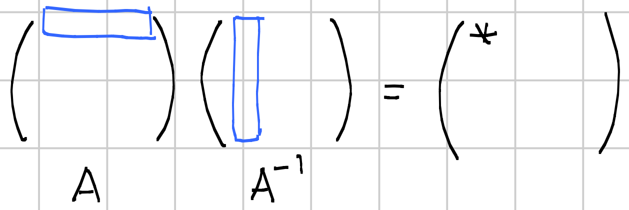
$$\underset{④}{\rightsquigarrow} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— o — o —

Perché funziona l'algoritmo?

Deve succedere che $A \cdot A^{-1} = Id$

Cosa succede all'elemento in posizione $(1,1)$ nel prodotto?



Chi sono gli el. della 1ª colonna di A^{-1}? Se ci pensiamo sono, a meno della divisione per Det A

$\text{Det } A_{1,1}$
$- \text{Det } A_{1,2}$
$\text{Det } A_{1,3}$
$- \text{Det } A_{1,4}$
$\vdots$

1° colonna di A^{-1}

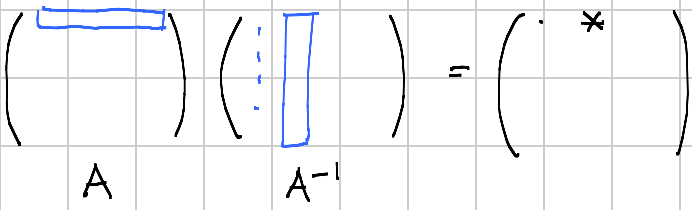
Cosa succede se moltiplico per la 1ª riga di A?

$a_{1,1} \cdot \text{Det } A_{1,1} - a_{1,2} \text{ Det } A_{1,2} + a_{1,3} \text{ Det } A_{1,3} - \ldots$

= Sviluppo di Laplace di Det (A) rispetto alla 1ª riga, e quindi
= Det (A)
che semplificato con il Denominatore viene 1.

Allo stesso modo si sistemano tutti gli 1 sulla diagonale

Vediamo ora il 2° elemento della prima riga



La seconda colonna di A^{-1} contiene

$$\begin{array}{l} -\operatorname{Det} A_{2,1} \\ \operatorname{Det} A_{2,2} \\ -\operatorname{Det} A_{2,3} \\ \operatorname{Det} (A_{2,4}) \\ \vdots \end{array}$$

Cosa succede quando moltiplico per la 1ª riga

$$= -a_{1,1} \operatorname{Det} A_{2,1} + a_{1,2} \operatorname{Det} A_{2,2} - a_{1,3} \operatorname{Det} A_{2,3} + \dots$$

(ogni elemento viene moltiplicando per il Det della sotto-matrice ottenuta eliminando non lui, ma chi gli sta sotto!!!

= sviluppo di Laplace della matrice ottenuta da A sostituendo la 2° riga con una copia della prima.

= 0 perché a questo punto ci sono 2 righe uguali.

Allo stesso modo si sistemano tutti i termini fuori dalla diagonale.

<u>Conclusione</u> Per calcolare l'inversa abbiamo a disposizione due metodi

→ Gauss a partire da (A, Id) fino ad arrivare a $(Id, \underbrace{B}_{A^{-1}})$

→ Metodo con l'algoritmo appena descritto.

— o — o —