Meccanica dei Fluidi: statica e dinamica

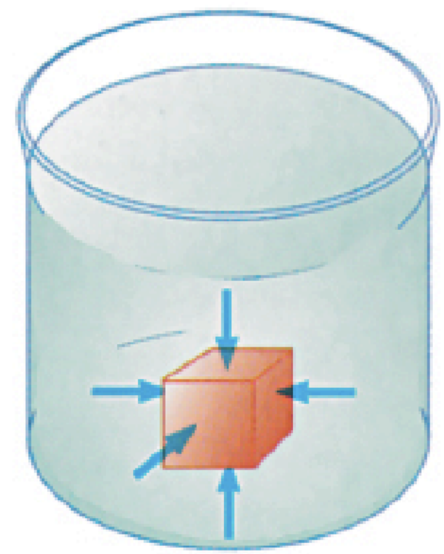
Stati della materia (classificazione assai approssimativa!)

- *Solido*: ha una forma propria, è poco comprimibile e molto denso (ha un'elevata densità, o *massa volumica*, $\rho = M/V$)
- *Liquido*: non ha una forma propria (non resiste a *forze di taglio*), è poco comprimibile (assumiamolo incomprimibile) e molto denso
- *Gas*: simile a un liquido, ma molto comprimibile e molto meno denso

Cosa si può dire sul comportamento meccanico dei *fluidi* (gas e liquidi)?

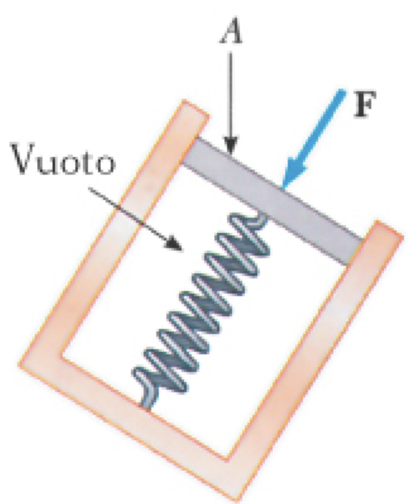
- Condizioni di equilibrio di un fluido?
- Comportamento di oggetti immersi in fluido?
- Moto (semplificato al massimo) di un fluido?

Pressione



Un fluido esercita una *pressione* P sulle pareti del recipiente e sugli oggetti immersi in esso. Se F è la forza agente sulla superficie A, $\boxed{P = \frac{F}{A}}$

La pressione in un fluido è *isotropa*: si esercita ugualmente in tutte le direzioni. *Attenzione:* ciò implica che la pressione è *una grandezza scalare*.



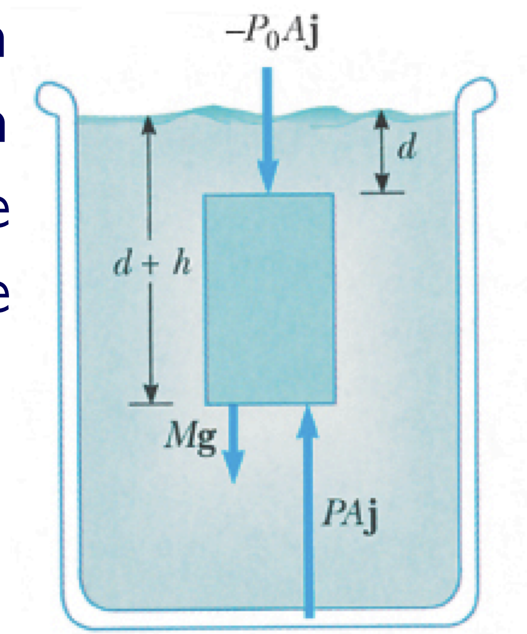
La pressione è una *forza per unità di superficie*. Si misura in pascal (Pa): 1 Pa $= 1$ N$/$m^2.
Pressione atmosferica: $P = 1.013 \times 10^5$ Pa (equivalente a 1 atm o 1013 mbar o 760 torr).
La pressione ha origine dal moto microscopico delle molecole del fluido, sia nei liquidi che nei gas

In figura, uno schema di un semplice strumento per misurare la pressione.

Pressione idrostatica

La pressione in un fluido *aumenta con la profondità*. E' una naturale conseguenza della condizione di equilibrio delle forze su di un fluido.

Sull'immaginario cilindretto di liquido in figura, la forza di gravità Mg è compensata dalla differenza di pressione tra la superficie inferiore, P, e superiore, P_0: $PA - P_0A = Mg$. Se $\rho = M/V$ è la densità del liquido, con $V = Ah$, l'espressione



$$P = P_0 + \rho g h$$

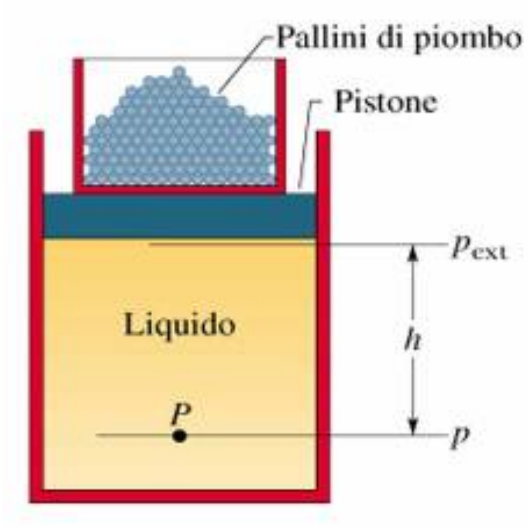
dà la pressione a profondità h, dove P_0 è la pressione al pelo dell'acqua (di solito la pressione atmosferica). Nota anche come *Legge di Stevino*.

Vale per liquidi *incomprimibili*, la cui densità si assume costante. Corollario:

Legge dei vasi comunicanti. La superficie del fluido in due vasi comunicanti è allo stesso livello (altrimenti avremmo nei due vasi pressioni diverse a parità di quota)

Principio di Pascal

Una variazione di pressione applicata ad un fluido chiuso (confinato in un recipiente) è *trasmessa integralmente a tutto il fluido*.



La dimostrazione è immediata: se con un pistone a tenuta poggiato sulla superficie di un fluido contenuto in un recipiente (vedi figura qui a lato) aumentiamo la pressione esterna (rispetto a quella atmosferica) di una quantità ΔP_{ext}, ovviamente la pressione alle varie quote diventerà

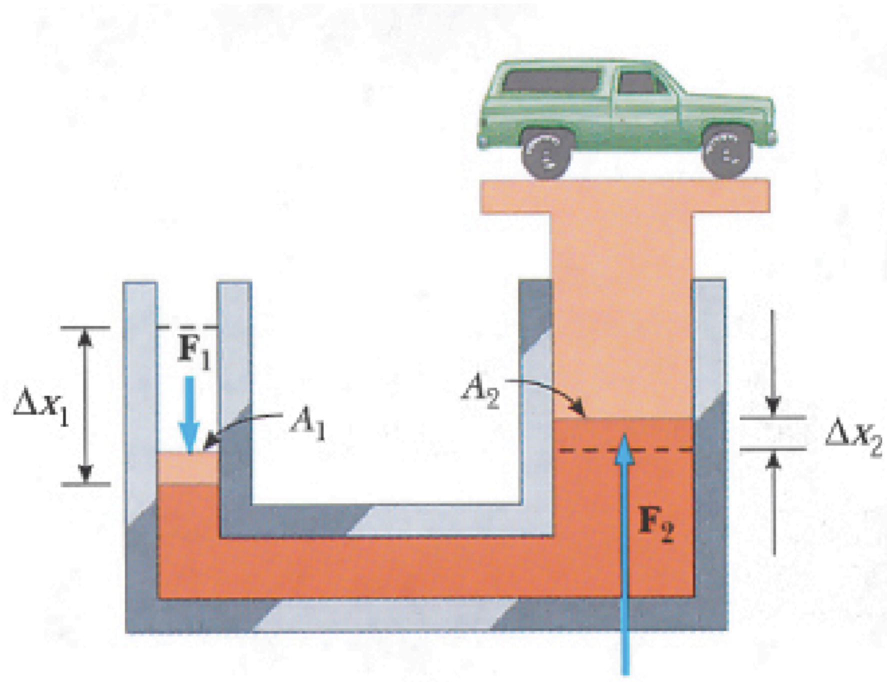
$$P'(h) = P_0 + \Delta P_{ext} + \rho g h$$

con una variazione di pressione ad ogni quota pari a ΔP_{ext}.

Martinetto idraulico

Applicazione: Martinetto idraulico. Una forza F_1 su di una superficie piccola A_1 produce una pressione $P = F_1/A_1$. La superficie grande A_2 è a pressione P ed esercita una forza $F_2 = PA_2 = F_1 A_2/A_1 >> F_1$.

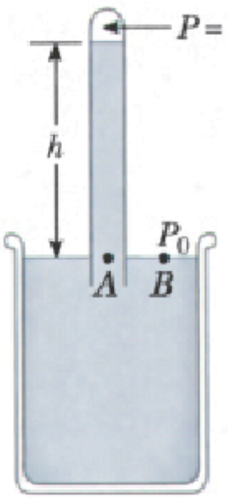
Notare che *non c'è nessuna violazione della conservazione dell'energia!*
Il lavoro fatto sul liquido, $L = F_1 \Delta x_1$, è uguale al lavoro $L = F_2 \Delta x_2$ fatto sull'oggetto sollevato, ed è uguale a $L = P\Delta V$, dove $V = \Delta x_1 A_1 = \Delta x_2 A_2$ è il volume del liquido spostato (si assume il liquido incomprimibile, si trascura la massa del liquido spostato e la variazione di pressione idrostatica)



Manometri a pressione idrostatica

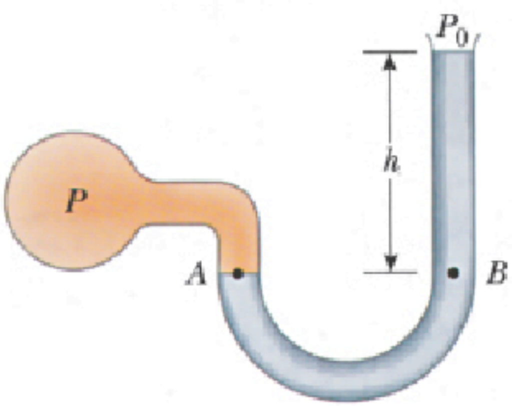
La pressione idrostatica può essere usata per costruire semplici dispositivi per la misurazione della pressione:

a) Manometro di Torricelli: misura la pressione atmosferica. $P_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa $= \rho g h$. Mercurio: $\rho = 13600$ Kg/m^3, $h = 0.76$ m. Acqua: $\rho = 1000$ Kg/m^3, $h = 10.33$ m.



(a)

b) Manometro a tubo aperto: $\rho g h = P - P_0$. Misura la pressione relativamente alla pressione atmosferica.

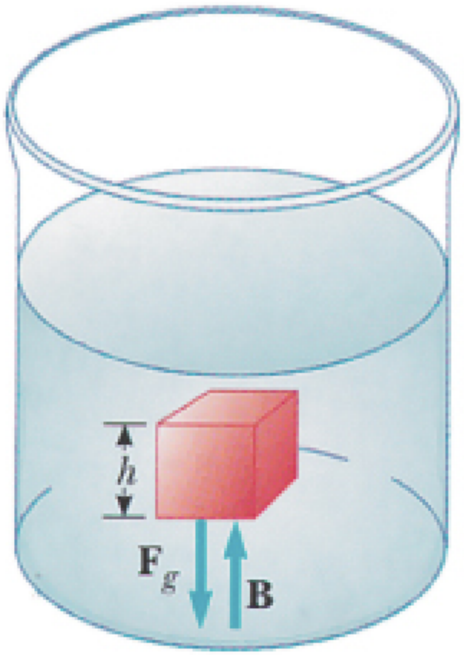


(b)

Legge di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta pari al peso del liquido spostato. E' un'ovvia conseguenza delle leggi dell'equilibrio statico.

Il corpo di massa m è sottoposto alla forza peso $F_g = mg$ e alla spinta idrostatica $B = A\Delta P = A\rho gh = Mg$ diretta verso l'alto, dove ΔP è la differenza di pressione idrostatica fra le facce superiore e inferiore, di area A, $M = \rho Ah$ la massa del cubetto se fosse composta di liquido

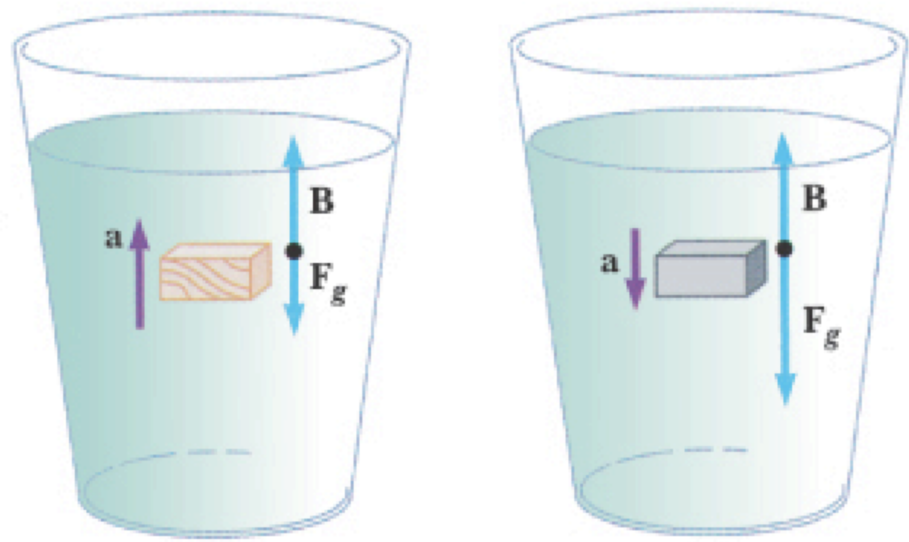


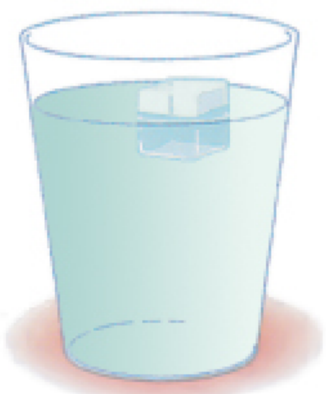
Tale risultato *non dipende dalla forma del corpo*: lo si dimostra scomponendo il corpo in cilindretti verticali di base infinitesima.

Legge di Archimede

La spinta idrostatica *non dipende dalla composizione del corpo* ma solo dal volume della parte sottostante al livello del liquido.

Corpo totalmente immerso: la forza risultante sul corpo è diretta verso l'alto se $B > F_g$, ovvero $\rho > \rho_m = m/V$, densità del corpo; verso il basso se $\rho < \rho_m$.

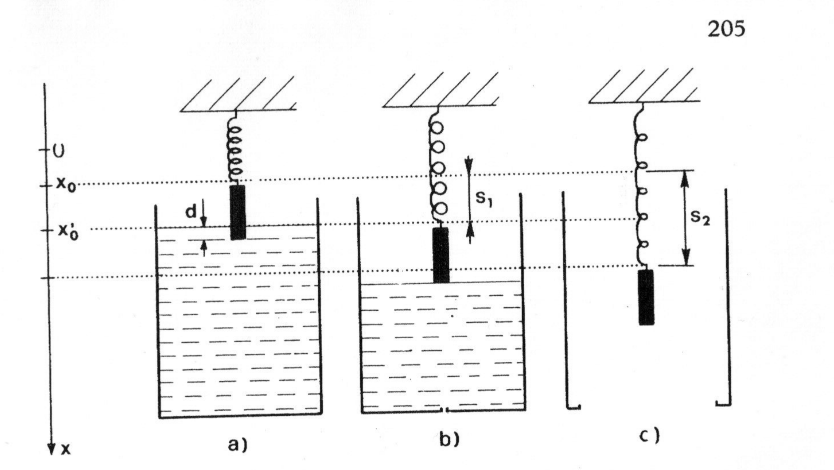




Se $B > F_g$ il corpo emergerà parzialmente: il volume sommerso si riduce e così la spinta idrostatica, fino a quando spinta idrostatica e forza peso sono in equilibrio

Esempio

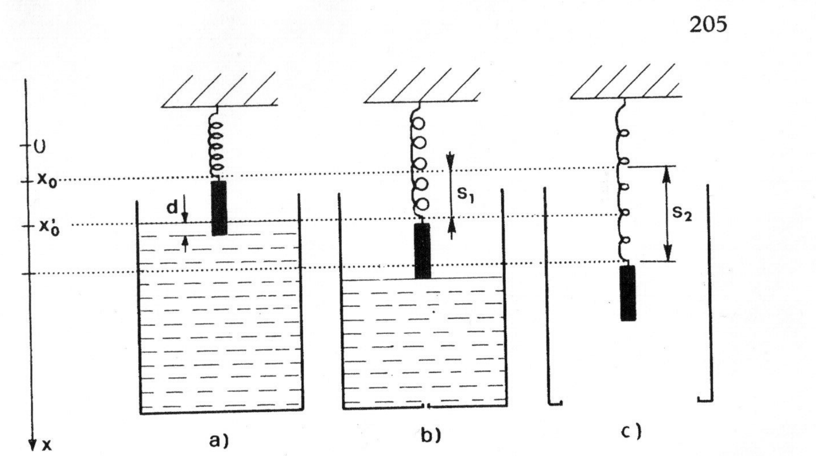
A un estremo di una lunga molla, vincolata all'altro estremo, è appeso un cilindro di massa $m = 10\text{Kg}$ e raggio $R = 10\text{cm}$ che, a sua volta, pesca per una profondità $d = 20\text{cm}$ in un grande recipiente pieno d'acqua. In condizioni di equilibrio la molla presenta un'elongazione $x_0 = 40\text{cm}$ dalla sua posizione di riposo (vedere caso a) in figura). Si supponga che venga aperta una falla nel recipiente per cui esso si svuoti.



Si determini la massima distanza s cui si porta il cilindro, rispetto alla posizione iniziale, nei casi estremi in cui il deflusso dell'acqua avvenga: 1) molto lentamente, 2) istantaneamente.

Esempio (con soluzione)

A un estremo di una lunga molla, vincolata all'altro estremo, è appeso un cilindro di massa $m = 10$Kg e raggio $R = 10$cm che, a sua volta, pesca per una profondità $d = 20$cm in un grande recipiente pieno d'acqua. In condizioni di equilibrio la molla presenta un'elongazione $x_0 = 40$cm dalla sua posizione di riposo (vedere caso a) in figura). Si supponga che venga aperta una falla nel recipiente per cui esso si svuoti.

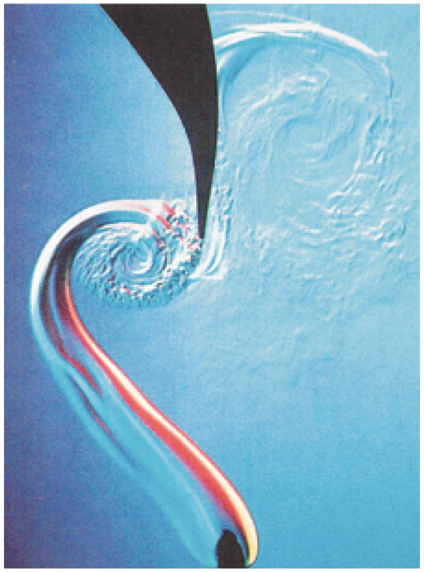


Si determini la massima distanza s cui si porta il cilindro, rispetto alla posizione iniziale, nei casi estremi in cui il deflusso dell'acqua avvenga: 1) molto lentamente, 2) istantaneamente.

Inizialmente, caso a), $kx_0 = mg - Mg$, dove M è la massa del liquido spostato: $M = 1000Kg/m^3 \cdot \pi \cdot 0.01m^2 \cdot 0.2m = 6.28$ Kg, da cui $k = 91.15$ N/m. Nel caso 1) il corpo trova un nuovo equilibrio se $k(x_0 + x_1) = mg$, ovvero scende di $x_1 = 67.6$ cm. Nel caso 2) il corpo scende di x_2, con $k(x_0 + x_2)^2/2 = kx_0/2 + mgx_2$. Si trova $x_2 = 2x_1 = 135.2$ cm: il corpo oscilla con ampiezza x_1 attorno all'equilibrio

Dinamica dei Fluidi

La dinamica dei fluidi è in generale *molto* complicata. Il fenomeno della *turbolenza* ne è la dimostrazione più vistosa. Solo in casi particolari e sotto assunzioni semplificatrici è possibile dare una descrizione semplice del moto di un fluido:



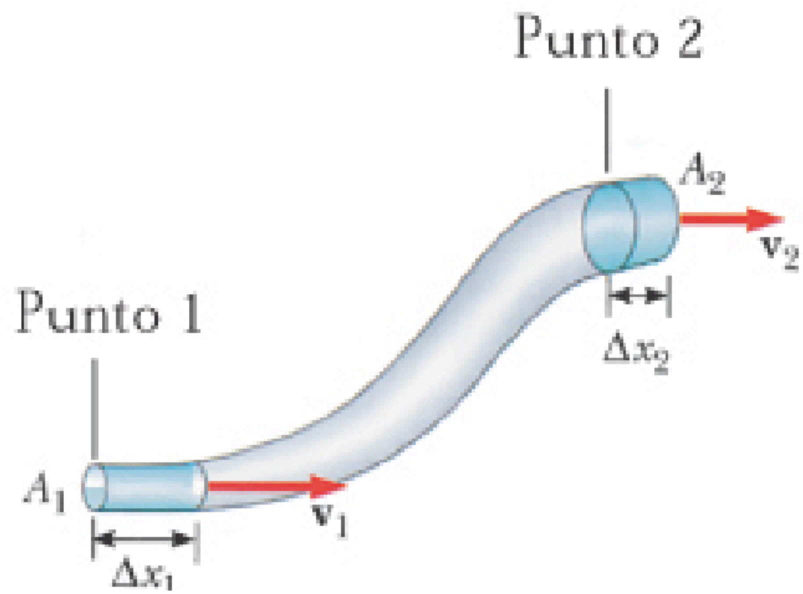
- Il fluido è considerato *incomprimibile*
- Il moto del fluido è *laminare*, ovvero *stazionario*: la velocità del fluido in ogni punto rimane costante nel tempo
- Il moto del fluido è *irrotazionale*: non ci sono vortici o turbolenze
- Si trascura la *viscosità* (attrito interno al fluido)

Flusso di un fluido

Flusso: volume di fluido che attraversa una superficie data per unità di tempo. Equivalente alla *portata volumetrica*. Si misura in m^3/s.

Equazione di continuità: consideriamo un liquido incomprimibile in moto stazionario in un tubo. In un tempo Δt entra un volume $A_1 \Delta x_1$ ed esce un volume $A_2 \Delta x_2$ di fluido. Da qui:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

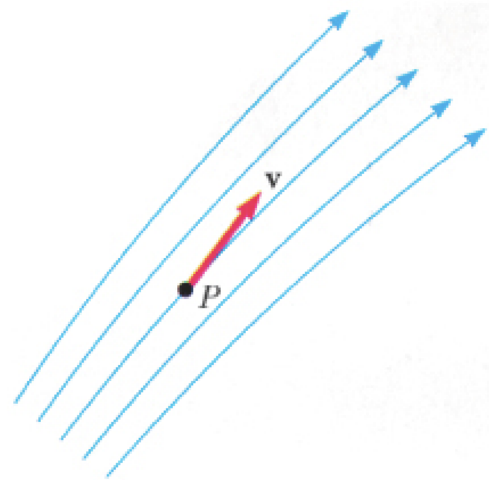


perché i due volumi sono uguali.

Il prodotto della sezione del tubo per la velocità del liquido è *costante*

Linee di flusso

Linee di Flusso: linee la cui tangente è uguale in ogni punto alla velocità del liquido. E' un semplice esempio di *campo vettoriale*, ovvero un vettore associato ad ogni punto di una regione dello spazio.



- Moto *laminare* (o *stazionario*): le linee di flusso non cambiano nel tempo

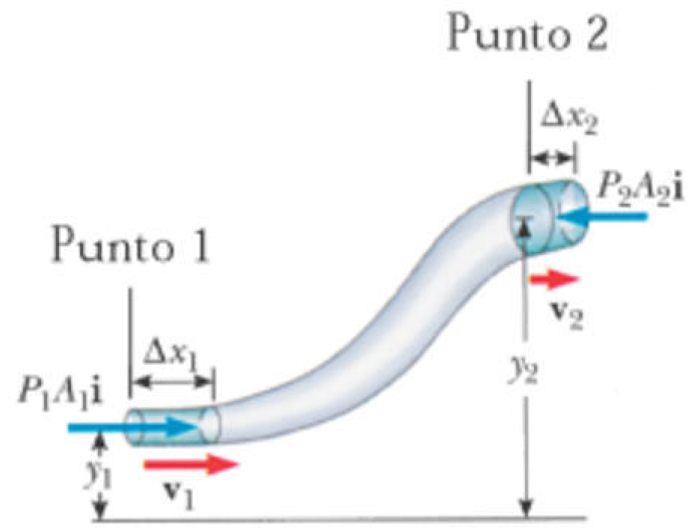
- Moto *irrotazionale*: il fluido ha momento angolare nullo ovunque (le linee di flusso non "ruotano")

Nella foto un esempio di flusso laminare: la turbolenza è quanto mai sgradita in questo caso, in quanto comporta un aumento di resistenza!

Teorema di Bernoulli

Il teorema di Bernoulli *lega velocità, altezza e pressione* in un fluido.

A causa della differenza fra pressione P_1 e P_2 agente sul fluido dal lato sinistro e destro del tubo, un volume di fluido $\Delta V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$ sale nel tubo in un tempo Δt. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica fra gli istanti t_0 e $t_0 + \Delta t$, ricordandoci che il moto non varia nel tempo



Il lavoro compiuto dalle forze esterne (forze di pressione):

$$\Delta L = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = (P_1 - P_2)\Delta V$$

deve uguagliare la variazione di energia meccanica del liquido:

$$\Delta L = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

(le forze gravitazionali sono conservative)

Teorema di Bernoulli (2)

Completiamo l'equazione. Variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

(vale $m_1 = m_2 = \rho\Delta V$). Variazione di energia potenziale:

$$\Delta U = m_2 g y_2 - m_1 g y_1 = \rho\Delta V g(y_2 - y_1)$$

da cui si ricava infine l'*equazione di Bernoulli*

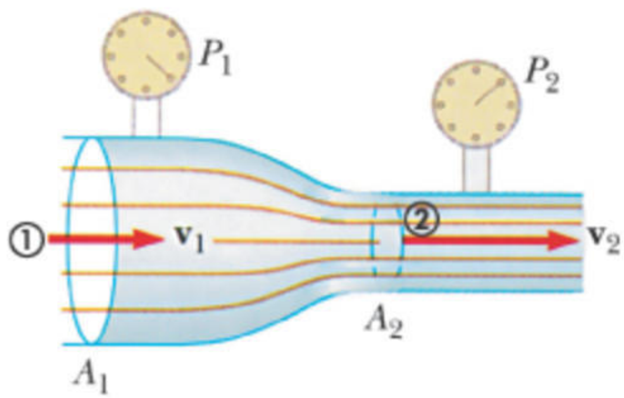
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

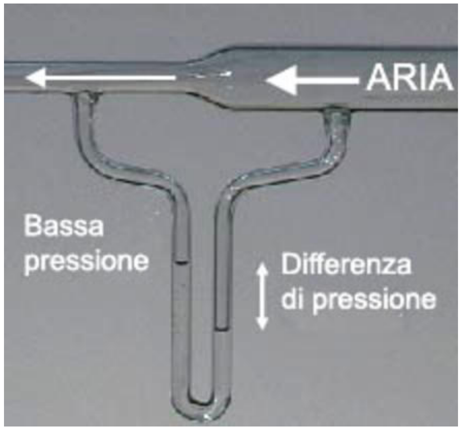
ovvero: $\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{costante},}$ o anche: $\boxed{\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + y = \text{costante}}$

Conseguenze dell'equazione di Bernoulli

- La pressione in un fluido statico *aumenta con la profondità*: Bernoulli generalizza la legge di Stevino al caso di fluido in movimento.

- La pressione in un fluido in movimento *diminuisce all'aumentare della velocità del fluido*



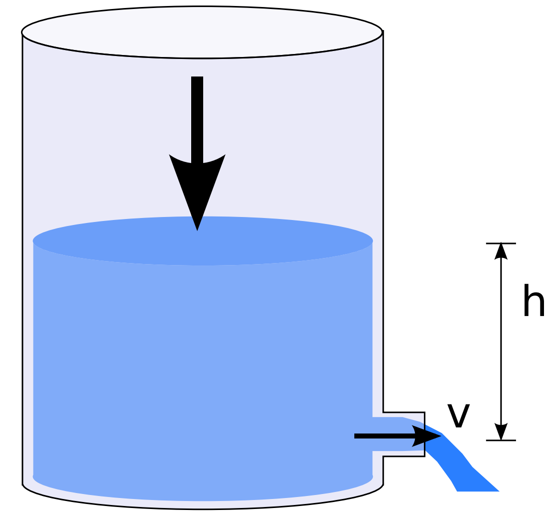


Effetto Venturi: In un tubo di sezione A variabile, P diminuisce dove la sezione diminuisce (perché $vA =$costante per l'equazione di continuità).
(notare che le linee di flusso sono più fitte dove la velocità è maggiore)

Legge di Torricelli

La velocità di un liquido in uscita a profondità h è la stessa che se il liquido cadesse da una quota h:

$$v = \sqrt{2gh}$$



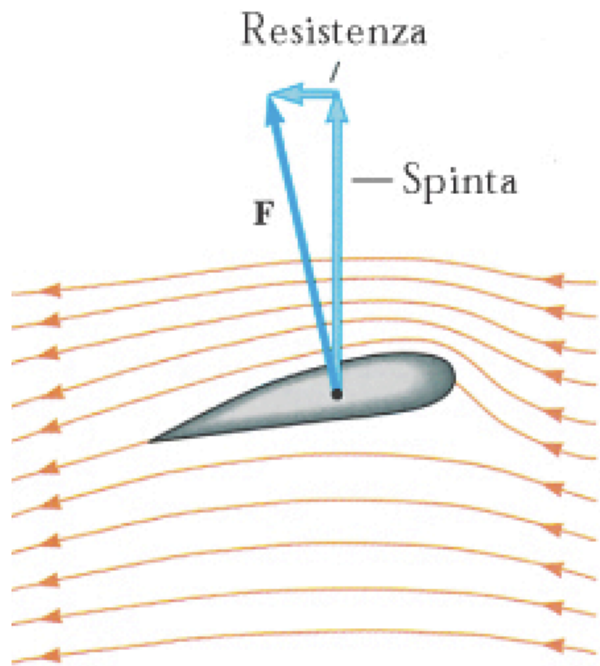
Applichiamo l'equazione di Bernoulli fra il pelo del liquido, a pressione P e quota $y = h$, e il foro, a pressione (atmosferica) P_0 e quota $y = 0$:

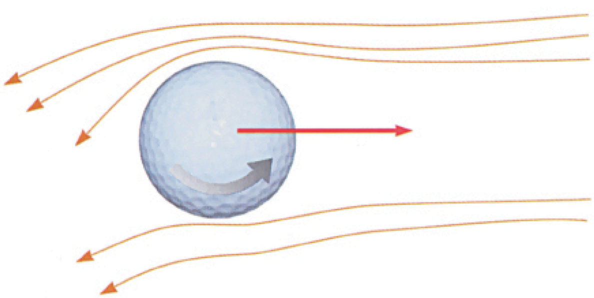
$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Per un serbatoio aperto e in assenza di altre pressioni, $P = P_0$; se il foro è piccolo, $v_0 \simeq 0$, da cui $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$

Portanza

La forma di un'ala e la sua inclinazione producono un aumento della velocità dell'aria sulla parte superiore e una sua diminuzione sulla parte inferiore. Ne deriva una differenza di pressione che genera una forza verso l'alto sull'ala detta *portanza*.



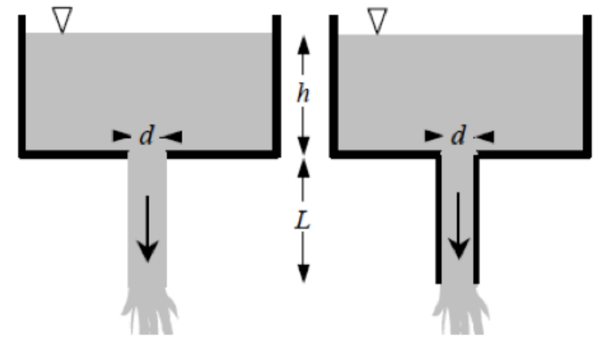


Una palla che ruota trascina con sé dell'aria per attrito. Anche in questo caso la differenza di velocità dell'aria provoca una differenza di pressione che tende a incurvare la traiettoria

Notare che in questi fenomeni l'equazione di Bernoulli dà al più una descrizione qualitativa: l'aria non è incomprimibile e la resistenza dell'aria non è trascurabile

Esercizio

Si consideri un serbatoio dotato di un'apertura circolare di diametro d. Si vuole confrontare la portata uscente dal serbatoio nel caso in cui sia presente la sola apertura e nel caso in cui quest'ultima sia collegata ad un tubo verticale di lunghezza L (vedere figura). Si consideri il fluido come ideale.



1. Determinare nei due casi la velocità del liquido ad una distanza verticale L dall'uscita del serbatoio, assumendo che il pelo libero del serbatoio sia posto ad un'altezza h rispetto al fondo (trascurare l'abbassamento del pelo libero con lo svuotamento).

2. Qual è la velocità del liquido nella sezione di uscita del serbatoio nei due casi? Dedurre la portata uscente nei due casi. Qual è il dispositivo più efficace ?

(Dati: $h = 5$ m; $d = 20$ cm ; $L = 1$ m)

Soluzione

Applichiamo l'equazione di Bernoulli fra il pelo dell'acqua (dove $P = P_0$ *pressione atmosferica) e il foro di uscita (dove pure* $P = P_0$*). Nel primo caso si trova che la velocità al foro di uscita è* $v_1 = \sqrt{2gh}$*, da cui una velocità dopo una caduta* L *verticale* $v = \sqrt{2g(h+L)}$*. Nel secondo caso,* $v_2 = v = \sqrt{2g(h+L)}$*. La velocità a distanza* L *è quindi la stessa nei due casi, ma la velocità all'uscita dal tubo nel secondo caso, e quindi la portata, è maggiore che nel primo caso.*