Esercizio

Si supponga di descrivere l'autostrada Torino-Milano con una retta, con origine a Torino e orientata verso Milano, come mostrato in Fig.1. Un'auto parte da Torino e percorre il tragitto Torino-Milano due volte al giorno, seguendo la legge oraria

$$x(t) = D\,\sin^2(\omega t) \qquad\qquad t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}] \tag{1}$$

1. Determinare le unità di misura delle costanti D e ω.

Si suppongano ora i seguenti valori: $D = 150\,\mathrm{Km}$ (=distanza Torino-Milano), e $\omega = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$.

2. Disegnare il grafico della legge oraria;
3. Partendo al tempo $t = 0$ da Torino, in quale istante l'auto raggiunge Milano la prima volta? E la seconda volta?
4. Dopo quanto tempo l'auto si trova nuovamente a Torino la prima volta? E la seconda?
5. In quali istanti (durante tutto il tragitto) l'auto passa da Novara, situata a distanza $x = 2D/3$ da Torino?
6. Calcolare la velocità istantanea dell'auto
7. Calcolare la velocità media dell'auto lungo ciascuna tratta Torino→Milano (solo andata).
8. Calcolare la velocità massima raggiunta durante il tragitto. In che posizione si trova quando raggiunge tale velocità massima?

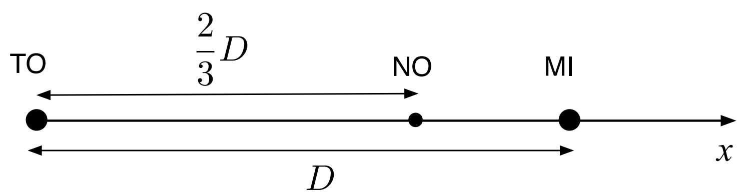

Figure 1:

SOLUZIONE

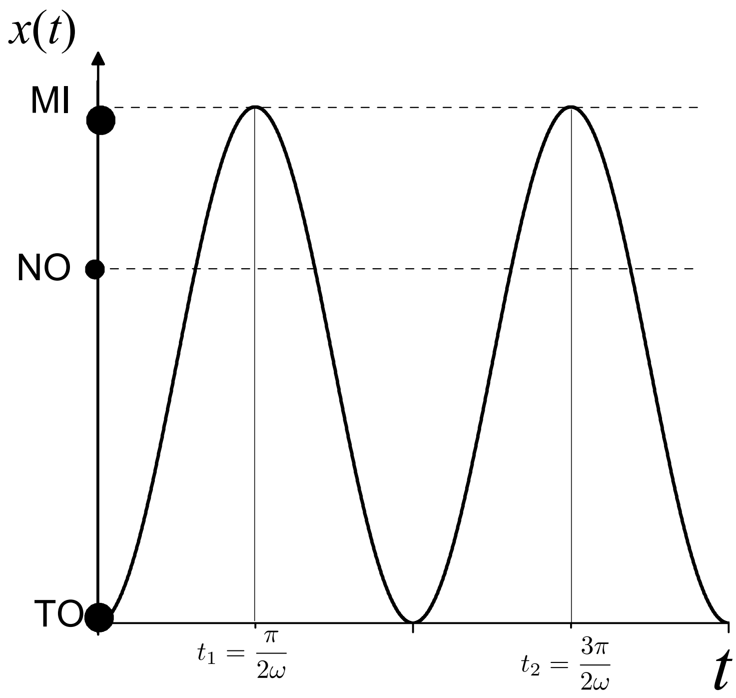

Figure 2:

1. L'unità di misura di ω è s^{-1}, dato che l'argomento ωt di $\sin(\omega t)$ deve essere adimensionale. L'unità di misura di D è invece m, dato che in (1) x è una coordinata spaziale.

2. Il grafico della legge oraria è mostrato in Fig.1

3. Dato che Milano si trova alla coordinata $x = D$, l'auto raggiunge Milano agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = D \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = D \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm 1 \tag{2}$$

ossia agli istanti

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \tag{3}$$
$$t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} \tag{4}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$t_1 = \frac{\pi}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 7854\,\mathrm{s} = 2 \times 3600\,\mathrm{s} + 10 \times 60\mathrm{s} + 54\mathrm{s} = 2\mathrm{h}\,10\mathrm{min}\,54\mathrm{s} \tag{5}$$
$$t_2 = \frac{3\pi}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 23562\,\mathrm{s} = 6 \times 3600\,\mathrm{s} + 32 \times 60\mathrm{s} + 42\mathrm{s} = 6\mathrm{h}\,32\mathrm{min}\,42\mathrm{s} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

4. Dato che Torino si trova alla coordinata $x = 0$, l'auto raggiunge Torino agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = 0 \tag{8}$$

ossia agli istanti

$$t_0 = 0 \qquad \text{(istante iniziale di partenza)} \tag{9}$$
$$t_3 = \frac{\pi}{\omega} \qquad \text{(primo ritorno a TO)} \tag{10}$$
$$t_4 = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(secondo ritorno a TO)} \tag{11}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$t_3 = \frac{\pi}{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 15708\,\mathrm{s} = 4 \times 3600\,\mathrm{s} + 21 \times 60\mathrm{s} + 48\mathrm{s} = 4\mathrm{h}\,21\mathrm{min}\,48\mathrm{s} \tag{12}$$
$$t_4 = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}} = 31416\,\mathrm{s} = 8 \times 3600\,\mathrm{s} + 43 \times 60\mathrm{s} + 36\mathrm{s} = 8\mathrm{h}\,43\mathrm{min}\,36\mathrm{s} \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

5. Dato che Novara si trova alla coordinata $x = 2D/3$, l'auto si trova a Novara agli istanti t (compresi nell'intervallo $t \in [0; 2\pi/\omega]$) tali che

$$x(t) = \frac{2}{3}D \qquad \Rightarrow \qquad D\sin^2(\omega t) = \frac{2}{3}D \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\omega t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{15}$$

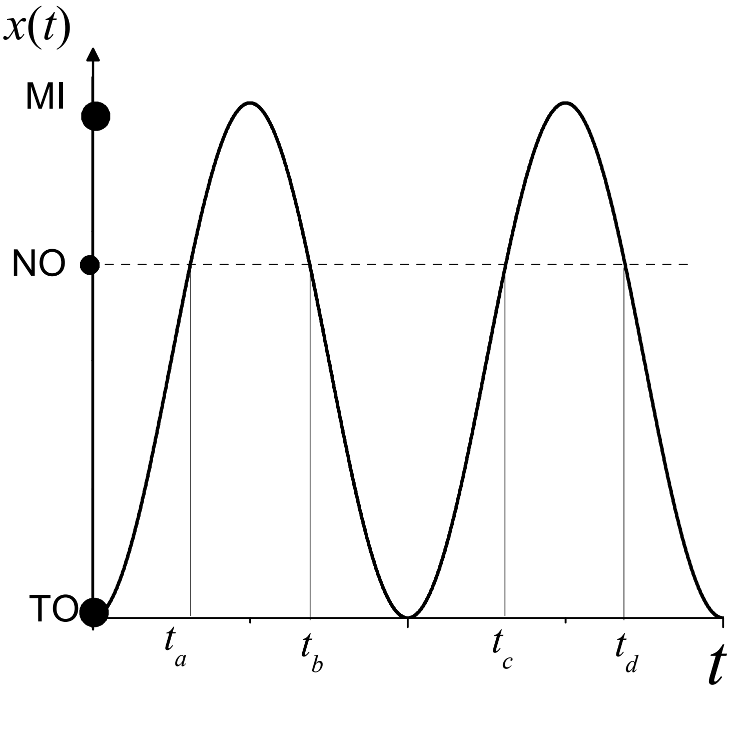

Figure 3:

$$t_a = \frac{1}{\omega}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq \frac{0.96}{\omega} \qquad \text{(primo passaggio da Novara (direzione MI))} \tag{16}$$

$$t_b = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(secondo passaggio da Novara (direzione TO))} \tag{17}$$

$$t_c = \frac{1}{\omega}\left(\pi + \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(terzo passaggio da Novara (direzione MI))} \tag{18}$$

$$t_d = \frac{1}{\omega}\left(2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \text{(quarto passaggio da Novara (direzione TO))} \tag{19}$$

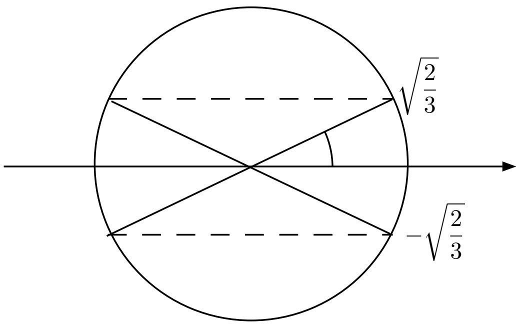

Figure 4:

6. La velocità istantanea dell'auto è la derivata rispetto al tempo della legge oraria

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2D\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = D\omega\sin(2\omega t) \tag{20}$$

ed è rappresentata in Fig.5.

7. la velocità media nella tratta Torino-Milano (ad esempio la prima) è data da

$$\bar{v} = \frac{D}{t_1} = \frac{150 \cdot 10^3 \mathrm{m}}{7854\,\mathrm{s}} = 19.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 19.1\frac{\frac{\mathrm{Km}}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{3600}} = 68.6\,\mathrm{Km/h} \tag{21}$$

8. La velocità massima (in modulo) si ottiene direttamente guardando la (20), ossia

$$v_{max} = D\omega = 150 \cdot 10^3 \mathrm{m} \cdot\ 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1} = 30\mathrm{m/s} = 30\frac{\frac{\mathrm{Km}}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{3600}} = 108\,\mathrm{Km/h} \tag{22}$$

e viene raggiunta agli istanti t tali che

$$v(t) = \pm D\omega \qquad \Rightarrow \qquad D\omega\sin(2\omega t) = \pm D\omega \qquad \Rightarrow \qquad \sin(2\omega t) = \pm 1 \tag{23}$$

ossia

$$t_e = \frac{\pi}{4\omega} \tag{24}$$

$$t_f = \frac{3\pi}{4\omega} \tag{25}$$

$$t_g = \frac{5\pi}{4\omega} \tag{26}$$

$$t_h = \frac{7\pi}{4\omega} \tag{27}$$

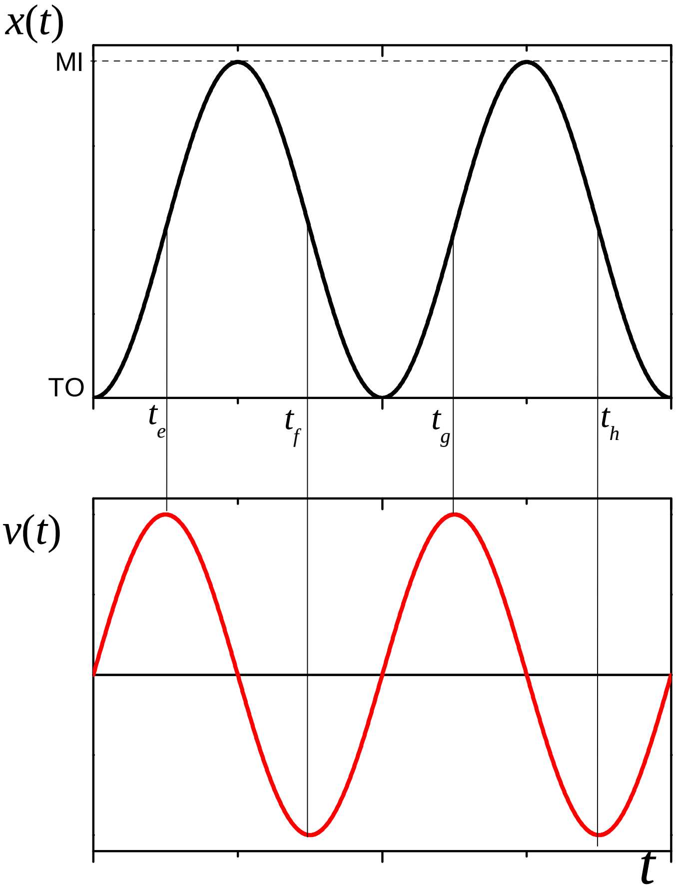

Figure 5: