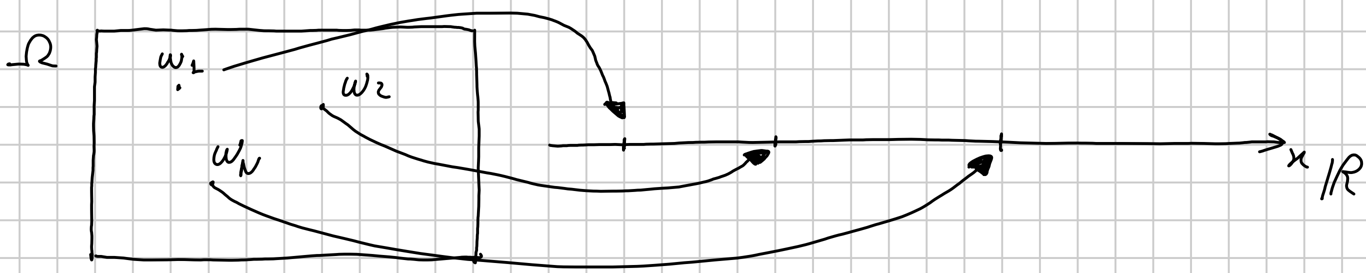
VARIABILI ALEATORIE

Il concetto di v.a. si introduce per astrarre da quelli che possono essere i vari esperimenti casuali.
Una variabile aleatoria può essere ad esempio definita per rappresentare il risultato di un esperimento, ad esempio il lancio di un dado. In questo caso il risultato X sarà una variabile che può assumere un valore numerico $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

DEFINIZIONE



Definito uno spazio campione Ω, la corrispondenza $X(\omega_i)$, che mappa un risultato di un esperimento casuale sull'asse dei numeri reali, è una variabile aleatoria se l'insieme dei risultati per cui si verifica che $X(\omega) \leq a$ $\forall a$ arbitrario è un evento.

Le variabili aleatorie si indicheranno con le lettere maiuscole X, Y, Z, omettendo la dipendenza dal risultato dell'esperimento casuale "ω".

Le v.a. si utilizzano per rappresentare i risultati di un esperimento il cui risultato non è predicibile.

Essendo le v.a. rappresentative di risultati di un esp. casuale, come si misura la probabilità in questa nuova rappresentazione?

$X \leq a$ è rappresentativo di un evento per cui definiamo

$$\boxed{F_X(x) = P\{X \leq x\}}$$

FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA'

La $F_X(x)$ rappresenta la probabilità che la v.a. sia minore o al più uguale ad un valore x generico

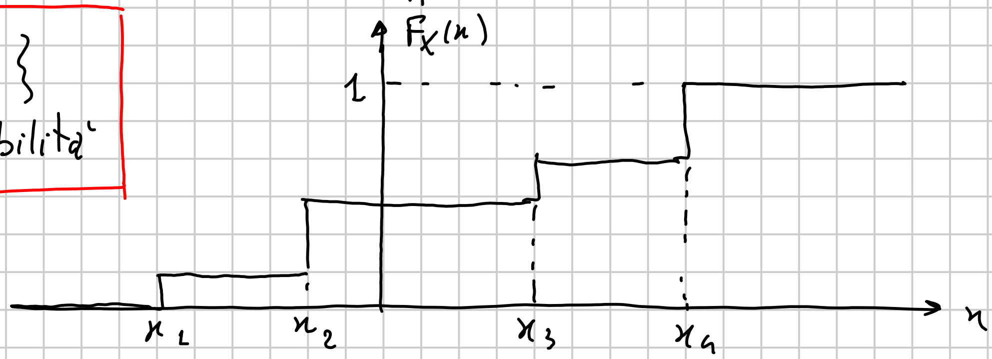
PROPRIETA'

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- Se $x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ (monotona non decrescente)
- $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ (continuità da destra)
- Se presenta una discontinuità di prima specie in $x = \bar{x}$ allora $F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-) = P\{x = \bar{x}\}$
- $P\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE, CONTINUE, MISTE

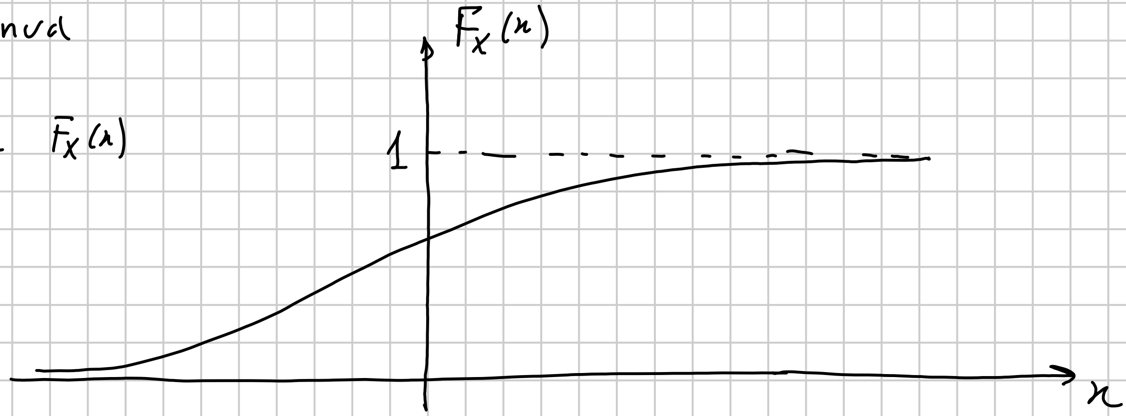
- X discreta $\Rightarrow F_X(x) = \sum_n P\{X = x_n\}\, u(x - x_n)$

$$\boxed{p_n = P\{X = x_n\}}$$
massa di probabilità

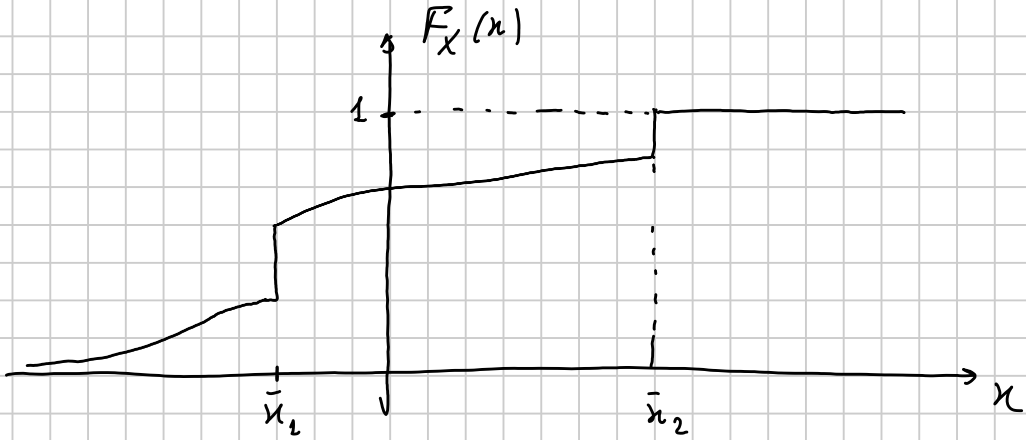


·) X Continua

⇒ produce una $F_X(x)$ continua



·) X Mista



DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V. A.

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)}$$ DENSITÀ DI PROBABILITÀ d.d.p.

Si deduce che:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

PROPRIETÀ DELLA d.d.p

·) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$ essendo la $F_X(x)$ monotona non decresc.

·) $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) =$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx = \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

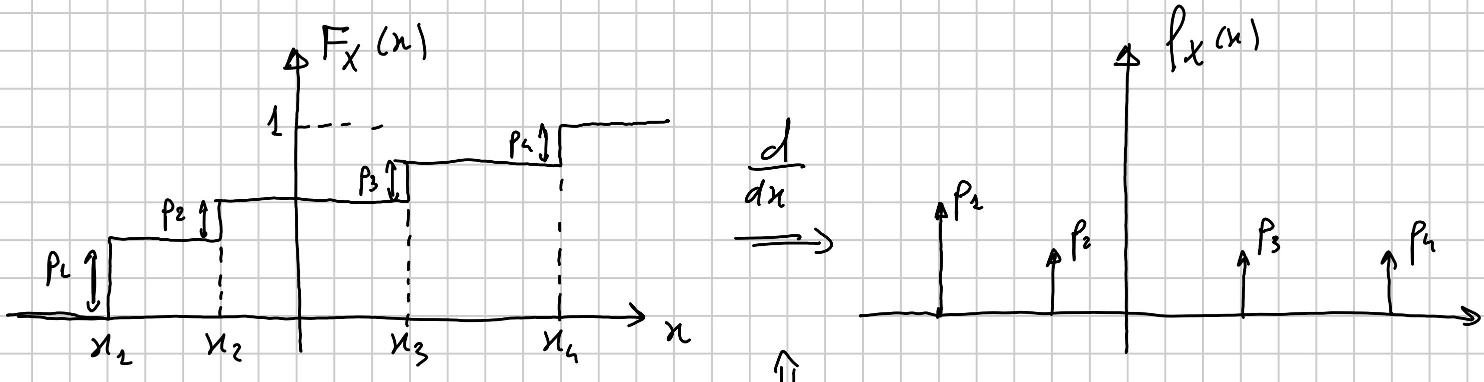
$$\cdot) \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \qquad \text{Probabilità dell'evento certo}$$

CONCETTO DI DDP

$$P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f_X(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta x \text{ molto} \\ \text{piccoli}}}{\simeq} f_X(\bar{x}) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) \simeq \frac{P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\}}{\Delta x} \qquad \text{concetto di densità}$$

DDP DI V.A. DISCRETE



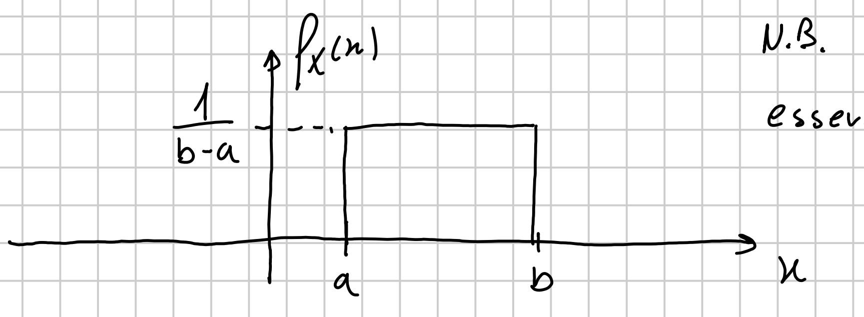
$\Rightarrow$ Si sfrutta la derivata del gradino

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{N} p_n\, \delta(x - x_n) \qquad \text{DDP DI UN V.A. DISCRETA}$$

V. A. UNIFORMI

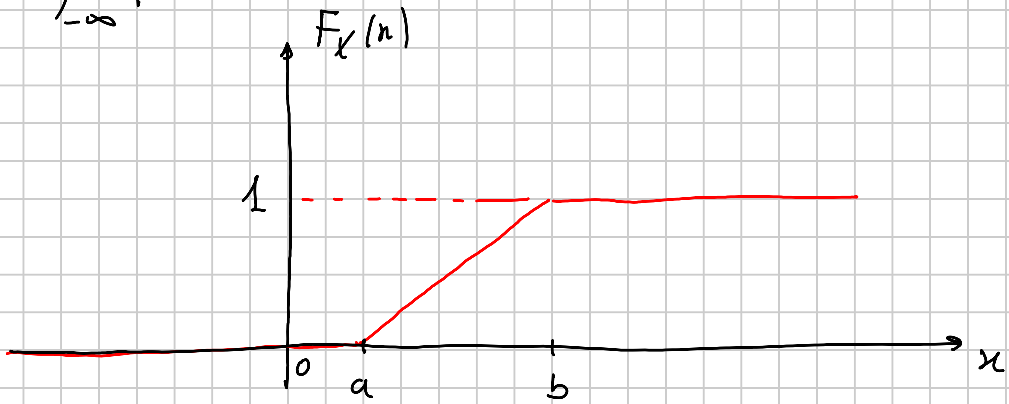
Una v.a. X è uniforme sull'intervallo (a, b) se

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\, \mathrm{rect}\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$



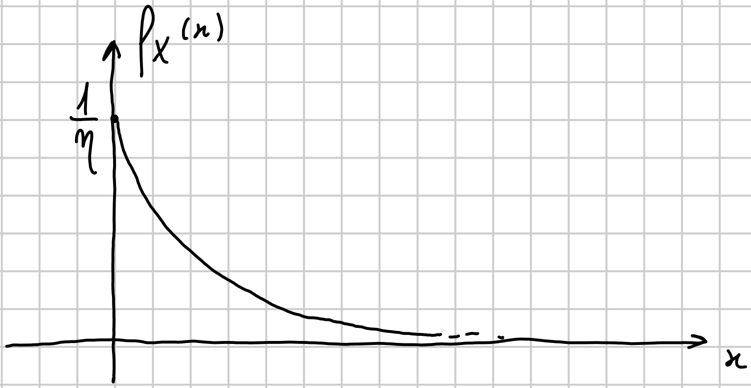
N.B. l'area deve essere unitaria !!

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha$$

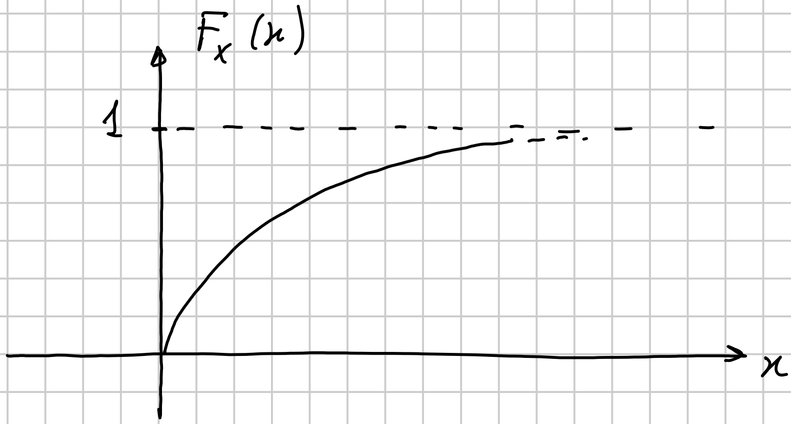


V.A. ESPONENZIALI (UNILATERE)

$$f_X(x) \triangleq \frac{1}{\eta}\, e^{-\frac{x}{\eta}}\, u(x)$$



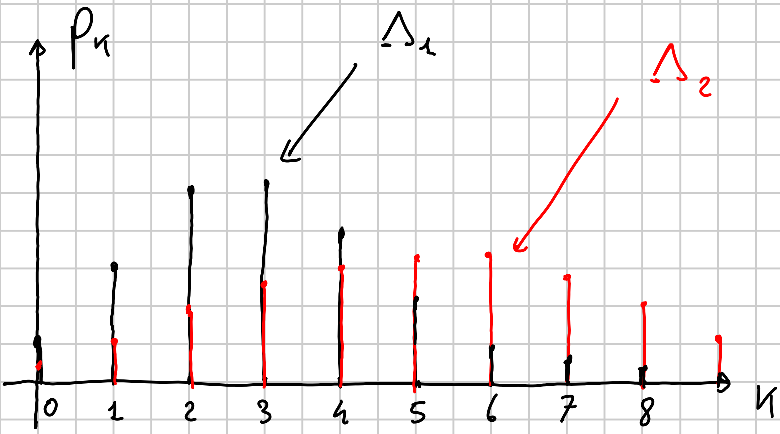
$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\eta}}\,d\alpha = \frac{1}{\eta}(-\eta)\, e^{-\frac{\alpha}{\eta}}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\frac{x}{\eta}}$$



V.A. DI POISSON (DISCRETA)

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!} \delta(x-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \delta(x-k) \quad , \quad p_k \triangleq e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!}$$

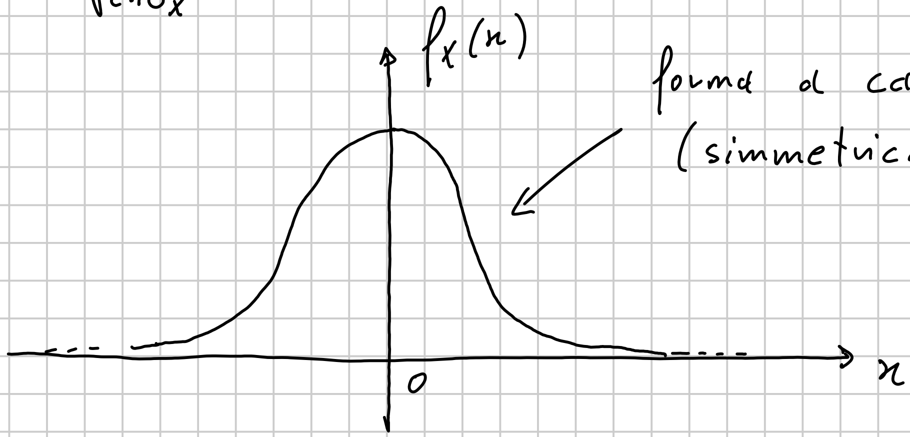


La forma cambia al variare di Λ (parametro della ddp di Poisson)

V.A. GAUSSIANE (o NORMALI)

$$X \in \mathcal{N}(\eta_X, \sigma_X^2) \qquad \text{(simbologia)}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$



forma a campana (simmetrica)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(\alpha-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}} d\alpha$$

NON ESISTE UNA SOLUZIONE IN FORMA CHIUSA

V.A. GAUSSIANA STANDARD

$$X \in \mathcal{N}(0,1) \qquad \eta_x = 0 \,,\ \sigma_x^2 = 1$$

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F_N(x) \triangleq \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

LA FUNZIONE $\Phi(x)$ SI TROVA TABULATA O PUÒ ESSERE CALCOLATA CON METODI NUMERICI

TRASFORMAZIONI DI V.A.

Supponiamo che una grandezza x sia trasformata in una grandezza y tramite $y = g(x)$. Se la grandezza x è una V.A. allora, dalla trasformazione di X si ottiene una nuova V.A.

$$Y = g(X)$$

A questo punto si può calcolare la $f_Y(y)$ dalla $f_X(x)$ nel seguente modo:

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}}$$

TEOREMA FONDAMENTALE PER LA TRASFORMAZIONE DI UNA V.A.

dove $\{x_i\}$ è l'insieme costituito da tutte le soluzioni dell'equazione $g(x) = y$

Applicazione del T.F.

1) A seconda del valore considerato di y può succedere che
   - $\{x_i\}$ è un insieme vuoto $\Rightarrow f_Y(y) = 0$
   - $\{x_i\}$ può contenere un numero finito o infinito numerabile di punti

2) Se nel punto $x = \bar{x}$ la derivata prima $g'(\bar{x})$ è nulla si hanno due casi:

- la trasformazione $g(x)$ ha in $\bar{x}$ un max o min relativo e quindi se $f_X(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow f_Y(y) \to +\infty$
- $\bar{x}$ appartiene ad un intervallo I nel quale la $g(x)$ assume un valore costante. In questo caso la V.A. Y assume il valore $\bar{y} = g(\bar{x})$ con probabilità

$$P\{Y = \bar{y}\} = P\{X \in I\}$$

e se tale probabilità è non nulla allora la V.A. Y è mista.

INDICI CARATTERISTICI DI UNA DISTRIBUZIONE

La conoscenza della ddp di una V.A. è il massimo che si possa conoscere di essa. Spesso però non è ottenibile, allora ci si può accontentare di conoscere alcuni parametri statistici (o indici statistici).

VALOR MEDIO (o SPERANZA, o ATTESA)

$$\boxed{\eta_X \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx}$$

È UNA SORTA DI CALCOLO DI UN CENTRO DI MASSA

PER V.A. DISCRETE

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{N} p_k\, \delta(x - x_k)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \delta(x - x_k)\, dx = \sum_{k=1}^{N} p_k\, x_k$$

OPERATORE "VALOR MEDIO"

$$\eta_X = E[X] \quad , \ E \text{ sta per Expectation (Aspettativa)}$$

$$\eta_X = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Se è presente una trasformazione di v.a. $Y = g(X)$

$$\boxed{\eta_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = E[g(X)]}$$

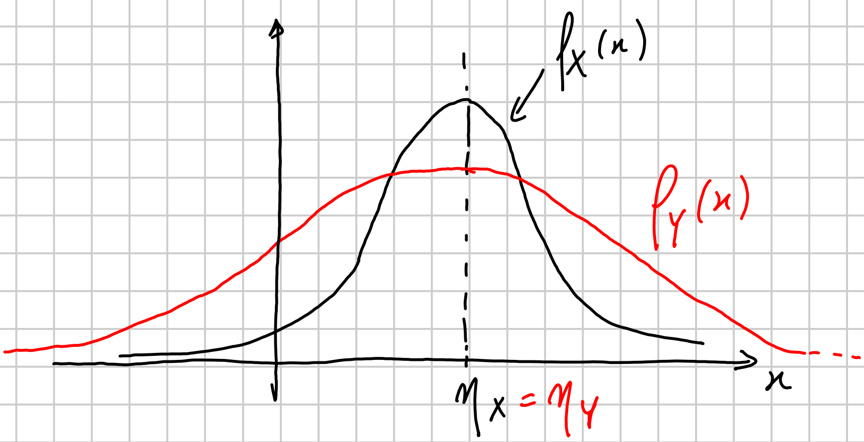
PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$$Y = \alpha\, g(X) + \beta\, h(X)$$

$$\eta_Y = \alpha\, E[g(X)] + \beta\, E[h(X)]$$

<u>VARIANZA DI UNA V.A.</u>

$$\sigma_X^2 \triangleq E[(X - \eta_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2\, f_X(x)\, dx$$



$$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

È UNA MISURA DELLA DISPERSIONE DELLA DDP INTORNO AL V.M.

N.B. $\sigma_X^2 \geq 0$

DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma_X \triangleq \sqrt{\sigma_X^2}$$

CASO LIMITE (VARIANZA NULLA)

$$f_X(x) = \delta(x - \eta_x) \Rightarrow \sigma_X^2 = 0$$

VALOR QUADRATICO MEDIO

$$m_X^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

LEGAME TRA VARIANZA E VALOR QUADRATICO MEDIO

$$\sigma_X^2 = E[(X-\eta_X)^2] = E[X^2 + \eta_X^2 - 2\eta_X X] =$$

$$= E[X^2] + \eta_X^2 - 2\eta_X E[X] =$$

$$= m_X^2 - \eta_X^2$$

INDICI CARATTERISTICI DI V.A. GAUSSIANE

VALOR MEDIO

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx =$$

SOSTITUZIONE:

$$(x - \eta_x) = y \Rightarrow x = y + \eta_x \quad , \quad dx = dy$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (y + \eta_x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}} dy =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy}_{0} + \eta_x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy}_{1 \text{ (evento certo)}}$$

funz. pari · funz. dispari

$$E[X] = \eta_x$$

VARIANZA

$$E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

$$(x - \eta_x = y) \quad , \quad dx = dy$$

$$E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy =$$

$$= -\sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} y \cdot \left[-\frac{y}{\sigma_x^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right] dy =$$

$$\left(\frac{d}{dy}\left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right] = -\frac{y}{\sigma_x^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right)$$

$$= -\sigma_x^2 \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} y \, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy}_{=1} \right\}$$

$$= \sigma_x^2$$

RELAZIONE TRA V.A. GAUSSIANE STANDARD e NON-STANDARD

Una generica v.a. Gaussiana può essere ottenuta come una trasformazione lineare di una v.a. Gaussiana standard

$$X = \sigma_x N + \eta_x \quad , \quad \begin{aligned} N &\in \mathcal{N}(0,1) \\ X &\in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2) \end{aligned}$$

Dim.

Si applica il teo. fondamentale

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \quad , \quad X = g(N) = \sigma_x N + \eta_x$$

$$\Rightarrow N = \frac{X - \eta_x}{\sigma_x} \quad \text{(una soluzione inversa)}$$

$$f_X(x) = \frac{f_N(n_i)}{|g'(n_i)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x}\right)^2}{2}}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

CALCOLO DI PROBABILITÀ TRAMITE LA FUNZIONE Φ

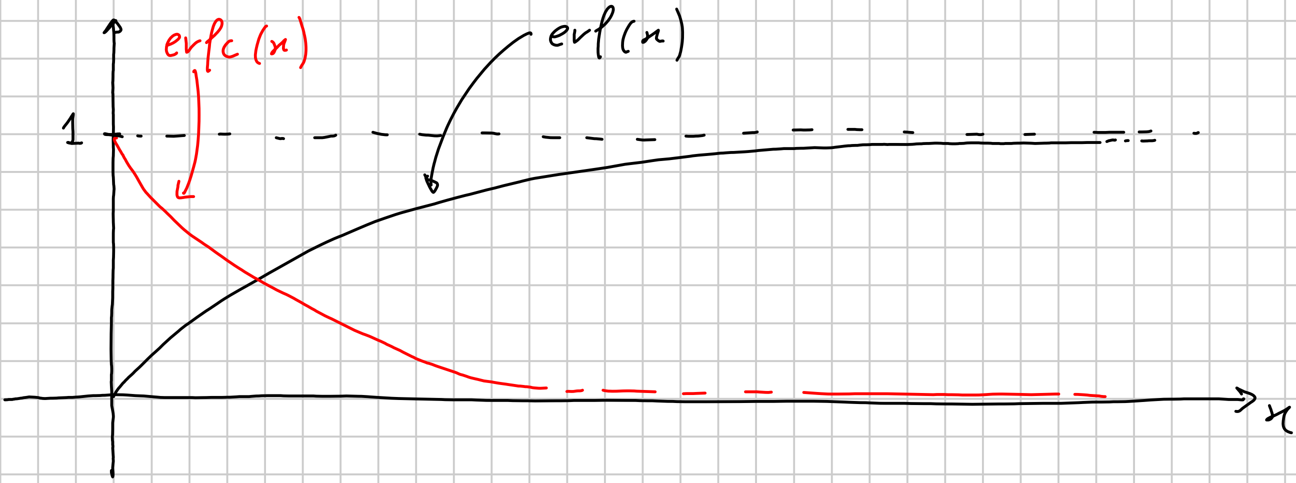
$$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\eta_x}{\sigma_x}\right)$$

LA FUNZIONE "ERF" - ERROR FUNCTION

$$\mathrm{erf}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\theta^2} \, d\theta$$

LA FUNZIONE "ERFC" - COMPLEMENTARY ERROR FUNCTION

$$\mathrm{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\theta^2} \, d\theta = 1 - \mathrm{erf}(x)$$



RELAZIONE TRA Φ e ERF

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

La probabilità in un intervallo è quindi calcolabile in questo modo:

$$P\{a < X \leq b\} = \Phi\left(\frac{b-\eta_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\eta_x}{\sigma_x}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{b-\eta_x}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right) - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a-\eta_x}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{b-\eta_x}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{a-\eta_x}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right)$$

LA FUNZIONE "Q" - QUEUE (CODA)

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

V.A. CONDIZIONATE

$$P\{X \leq x\} = F_X(x)$$

$$P\{X|B \leq x\} = F_{X|B}(x|B) = \frac{P\{X \leq x, B\}}{P\{B\}}$$

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA

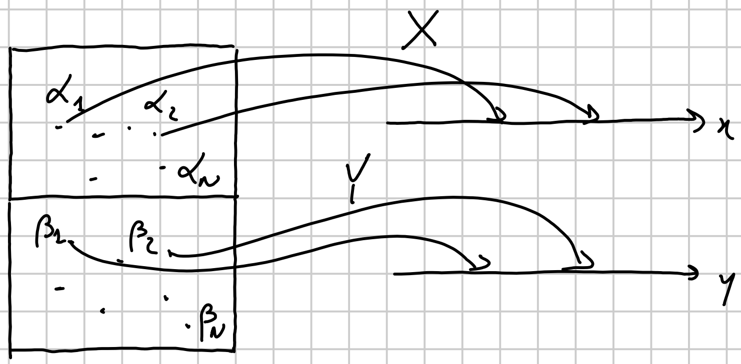
DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$f_{X|B}(x|B) \triangleq \frac{d}{dx} F_{X|B}(x|B)$$

Le proprietà delle funzioni di distribuzione e di densità sono le stesse di quelle non condizionale (marginali)

SISTEMI DI DUE V.A.

Consideriamo esperimenti composti da due risultati. Ad ogni risultato è quindi associato un numero reale attraverso una variabile aleatoria.



$$\boxed{P\{X \leq x, Y \leq y\} = F_{XY}(x,y)}$$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

Mentre le distribuzioni marginali $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ non dicono niente sulla $F_{XY}(x,y)$, è vero il viceversa, ovvero le $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ sono ricavabili dalla $F_{XY}(x,y)$

PROPRIETÀ DELLA $F_{XY}(x,y)$

- $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$
- $F_{XY}(x, y_0)$ è monotona non decrescente della variabile x e continua da destra. Lo stesso vale per $F_{XY}(x_0, y)$
- $F_{XY}(-\infty, y) = P\{X \leq -\infty, Y \leq x\} = 0$
- $F_{XY}(x, -\infty) = P\{X \leq x, Y \leq -\infty\} = 0$

·) $F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$

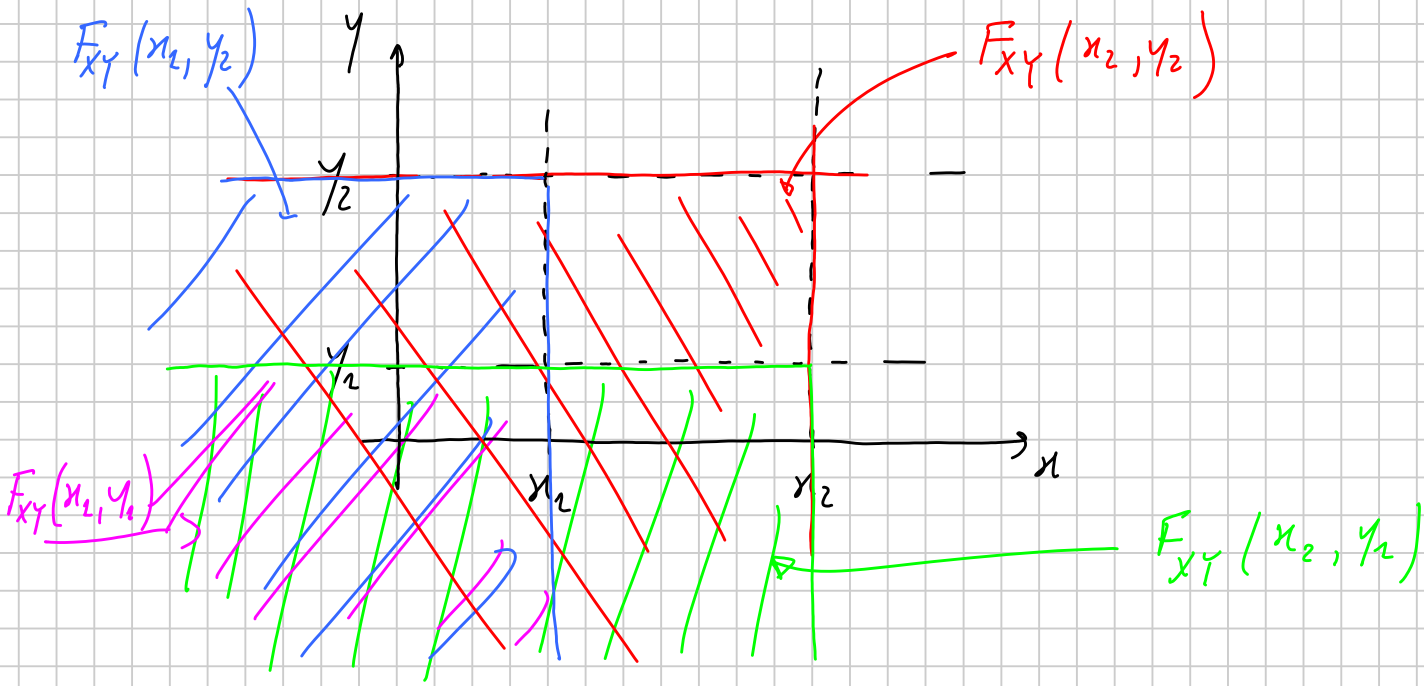
·) $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$

·) $F_X(x) - F_{XY}(x, +\infty)$

·) $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$

·) La probabilità dell'evento rettangolare $R = \{x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\}$ si può calcolare come segue

$$P\{R\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, x_1)$$



·) Per un rettangolo molto piccolo

$$P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x,\ \bar{y} < Y \leq \bar{y} + \Delta y\} =$$

$$= F_{XY}(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F_{XY}(\bar{x}, \bar{y} + \Delta y) - F_{XY}(\bar{x} + \Delta x, \bar{y})$$

$$+ F_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) =$$

$$= F_{XY}(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F_{XY}(\bar{x}, \bar{y} + \Delta y)$$

$$- \left[F_{XY}(\bar{x} + \Delta x, \bar{y}) - F_{XY}(\bar{x}, \bar{y}) \right] =$$

$$\simeq \frac{\partial}{\partial x} F_{XY}(\bar{x}, \bar{y}+\Delta y)\cdot \Delta x - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})\,\Delta x =$$

$$\simeq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(\bar{x}, \bar{y})\,\Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$\Rightarrow P\{x < X \leq x+\Delta x,\ y < Y \leq y+\Delta y\} \simeq f_{XY}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y$$

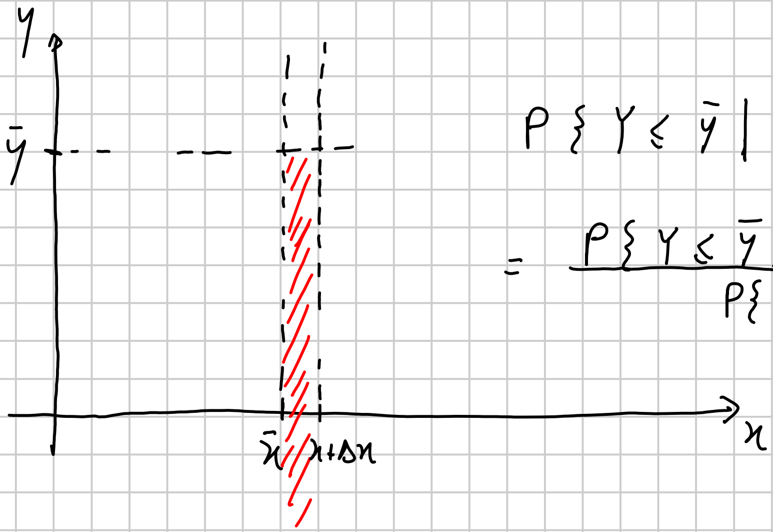
PROPRIETÀ DELLA DDP CONGIUNTA

- $f_{XY}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$
- $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$
- $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$

DISTRIBUZIONE DELLA V.A. Y CONDIZIONATA AD X

$$F_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,\beta)\, d\beta}{f_X(x)}$$

Interpretazione grafica



$$P\{Y \leq \bar{y} \mid \bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} =$$

$$= \frac{P\{Y \leq \bar{y}, \bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\}}{P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\}}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{d}{dy} F_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}}$$

INDIPENDENZA

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Se le variabili X e Y sono indipendenti allora posso scrivere la ddp congiunta come il prodotto delle ddp marginali (SOLO IN QUESTO CASO!!)

TRASFORMAZIONE DI UNA COPPIA DI V.A.

Il problema della trasformazione di una coppia di v.a. riguarda il calcolo della ddp della nuova v.a., note che siano:

1) La trasformazione $Z = g(X, Y)$
2) La ddp congiunta di X e Y $f_{XY}(x, y)$

La distribuzione di probabilita' della variabile Z e' scrivibile come

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{g(X,Y) \leq z\}$$

Quindi

$$F_Z(z) = \iint_{R(z)} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

dove $R(z)$ e' la regione del piano (x, y) dove e' verificata la relazione $g(x,y) \leq z$

Quindi si può ottenere la $f_Z(z)$ per derivazione

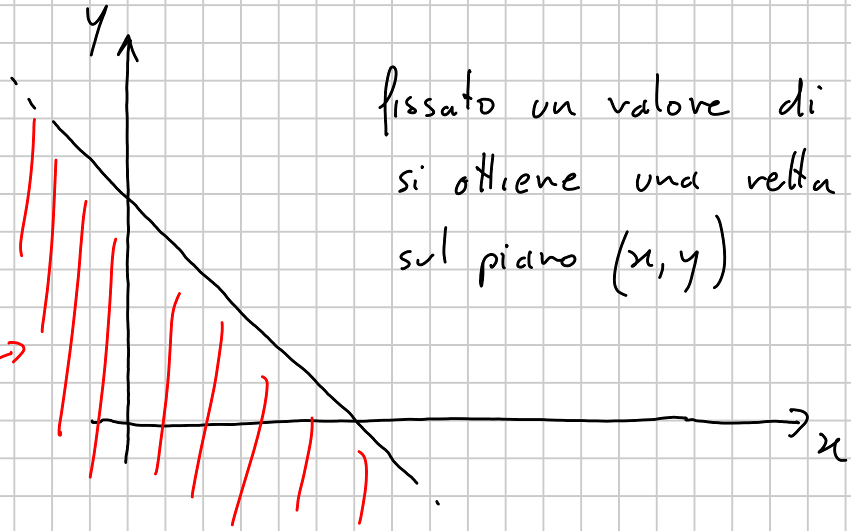
$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

ESEMPIO

$Z = X + Y$

$f_Z(z) = ?$

semipiano per cui $x + y \leq z$



fissato un valore di z si ottiene una retta sul piano (x, y)

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} f_{XY}(x, y'-x)\, dx\, dy'$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} f_{XY}(x, y'-x)\, dx\, dy'\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z} f_{XY}(x, y'-x)\, dx\, dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx$$

Se le v.a. X e Y sono indipendenti

$$f_{XY}(x, z-x) = f_X(x)\, f_Y(z-x)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = f_X(z) \otimes f_Y(z)$$

N.B. Questo risultato è indipendente dalla distribuzione delle singole v.a.

CORRELAZIONE e COVARIANZA

La correlazione e la covarianza sono due indici caratteristici per la descrizione statistica di v.a. congiunte

$$\boxed{r_{XY} \triangleq E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$ CORRELAZIONE

$$\boxed{C_{XY} \triangleq E\left[(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\eta_x)(y-\eta_y)\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

COVARIANZA

E' facile dimostrare che $C_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y$, sfruttando la linearita' dell'operatore "VALORE ATTESO" $E[\cdot]$

SIGNIFICATO DELLA COVARIANZA

La covarianza tra due v.a. X e Y mette in evidenza, e quantifica, l'esistenza di una relazione lineare tra le due variabili.

-) Covarianze grandi tendono ad indicare grandi scostamenti dai valori medi di entrambe le variabili.
-) Covarianze positive indicano spostamenti nello stesso verso rispetto ai valori medi

Esempio: se si valutavo con X l'altezza di una persona e con Y il suo peso, allora una covarianza positiva indica che una persona più alta della media sarà probabilmente anche più pesante della media

IN CORRELAZIONE TRA V.A.

Due v.a. X e Y si dicono INCORRELATE se $C_{XY} = 0$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{XY} \triangleq \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{r_{XY} - \eta_X \eta_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

PROPRIETÀ

-) $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

- $\rho_{XY} = 0$ solo se le due v.a. sono incorrelate
- $|\rho_{XY}| = 1$ solo se le due v.a. sono linearmente dipendenti

$$Y = aX + b$$

N.B. quando $|\rho_{XY}| = 1$ significa che se è noto il risultato di una v.a. è noto anche il risultato dell'altra

Il coefficiente di correlazione è una covarianza normalizzata. Questo serve a definire una quantità che esprime il livello di correlazione tra due v.a. indipendentemente dalle loro caratteristiche individuali.

INDIPENDENZA ED INCORRELAZIONE TRA V.A.

Se due v.a. sono indipendenti, allora

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Quindi

$$r_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \eta_X \eta_Y$$

$$\Rightarrow \quad C_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0$$

Se due v.a. sono INDIPENDENTI allora sono anche INCORRELATE

INDIPENDENZA $\Rightarrow$ INCORRELAZIONE

N.B. Non è vero il contrario:

INCORRELAZIONE $\cancel{\Rightarrow}$ INDIPENDENZA

Esempio:

Sia Θ una v.a. uniformemente distribuita tra 0 e 2π

$$\Theta \in \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

siano:

$$\begin{cases} X = \cos\Theta \\ Y = \sin\Theta \end{cases}$$

Calcolare C_{XY}

$$r_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \sin\theta \, f_\Theta(\theta) \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta = 0$$

$$\eta_X = E[X] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\eta_Y = E[Y] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$$

$$C_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0$$

Le v.a. X e Y sono INCORRELATE

N.B. $X^2 + Y^2 = 1$, quindi le due v.a. dipendono l'una dall'altra (esempio $X = \pm\sqrt{1-Y^2}$)

QUINDI NON SONO INDIPENDENTI

SISTEMI DI N V.A. (VETTORI ALEATORI)

Si definisce come distribuzione di probabilità di n v.a.

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \triangleq P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N\}$$

e come ddp

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \triangleq \frac{\partial^N}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

D.D.P. MARGINALI

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_N$$

$\vdots$

$$f_{X_j}(x_j) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_N$$

D.D.P. CONDIZIONATE

$$f_{\{X_i\}|\{X_j\}}(\{x_i\} \mid \{x_j\}) = \frac{f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)}{f_{\{X_j\}}(\{x_j\})}$$

Es. con 5 V.A.

$$f_{X_1, X_3, X_4 | X_2, X_5}(x_1, x_3, x_4 \mid x_2, x_5) = \frac{f_{X_1, \dots, X_5}(x_1, \dots, x_5)}{f_{X_2 X_5}(x_2, x_5)}$$

INDIPENDENZA DI N V.A.

N v.a. si dicono indipendenti se

$$f_{\{X_i\}|\{X_j\}}(\{x_i\} \mid \{x_j\}) = f_{\{X_i\}}(\{x_i\}) \quad \forall \ \{X_i\} \text{ e } \{X_j\}$$

In questo caso la ddp congiunta si può scrivere

$$f_{X_1,\dots,X_N}(x_1,\dots,x_N) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) \cdots\cdots f_{X_N}(x_N)$$

VETTORE ALEATORIO

$$\underline{X} \triangleq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$$

SIMBOLOGIA

·) $F_{\underline{X}}(\underline{x})$

·) $f_{\underline{X}}(\underline{x})$

INDICI CARATTERISTICI

$$\underline{\eta}_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \eta_{X_1} \\ \eta_{X_2} \\ \vdots \\ \eta_{X_N} \end{bmatrix}$$ VETTORE VALOR MEDIO

$$\underline{\underline{R}}_{\underline{X}} \triangleq E[\underline{X}\,\underline{X}^T] = E\left[\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} [X_1, X_2, \dots, X_N] \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} & \cdots & r_{X_1X_N} \\ r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{X_NX_1} & \cdots & \cdots & r_{X_NX_N} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI CORRELAZIONE $(N \times N)$

N.B sulla diagonale ci sono i valori quadratici medi delle singole v.a.

$$m_{X_i} = E[X_i X_i]$$

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} \triangleq E\left[\left(\underline{X}-\underline{m}_{\underline{X}}\right)\left(\underline{X}-\underline{m}_{\underline{X}}\right)^T\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{X_1X_1} & C_{X_1X_2} & \cdots & C_{X_1X_N} \\ C_{X_2X_1} & C_{X_2X_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{X_NX_1} & \cdots & \cdots & C_{X_NX_N} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI COVARIANZA $(N \times N)$

$$= \underline{\underline{R}}_{\underline{X}} - \underline{m}_{\underline{X}} \underline{m}_{\underline{X}}^T$$

TRASFORMAZIONE DI UN VETTORE ALEATORIO

$$\underline{Y} = g(\underline{X})$$

$$\boxed{f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{f_{\underline{X}}(\underline{x}_i)}{\left|\det\left(\underline{\underline{J}}(\underline{x}_i)\right)\right|}}$$

TEOREMA FONDAMENTALE GENERALIZZATO

$$\underline{\underline{J}}(\underline{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_N(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_N(\underline{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_N(\underline{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix}_{\underline{x} = \underline{x}_i}$$

TRASFORMAZIONE DA 2 a 2 V.A.

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{f_{X_1 X_2}(x_{1i}, x_{2i})}{\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\underline{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\underline{x})}{\partial x_2} \end{vmatrix} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_i}}$$

, $\{x_{1i}, x_{2i}\}$ soluzioni di $\underline{x} = g^{-1}(\underline{y})$

VETTORI GAUSSIANI (V.A. CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE)

$\underline{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$ è un vettore Gaussiano se

$$\boxed{f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\underline{\underline{C}}_{\underline{x}})}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\eta}_{\underline{x}})^T \underline{\underline{C}}_{x}^{-1} (\underline{x}-\underline{\eta}_{\underline{x}})}}$$

Analogamente si può dire che le N v.a. $X_1, X_2, \dots, X_N$ sono congiuntamente Gaussiane

PROPRIETÀ DI UN VETTORE GAUSSIANO

- la sua ddp congiunta, e quindi tutte le sue statistiche, sono determinate da due parametri: $\underline{\eta}_{\underline{x}}$ e $\underline{\underline{C}}_{\underline{x}}$
- Se le N v.a. sono incorrelate allora queste sono anche indipendenti

Dim con $N=2$

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\underline{\underline{C}}_{\underline{x}})}} e^{-\frac{1}{2}[x_1-\eta_{X_1}, x_2-\eta_{X_2}] \underline{\underline{C}}_{\underline{x}}^{-1} [x_1-\eta_{X_1}, x_2-\eta_{X_2}]^T}$$

$$\underline{\underline{C}}_{\underline{X}} = \begin{bmatrix} C_{X_1X_1} & C_{X_1X_2} \\ C_{X_2X_1} & C_{X_2X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\eta_{x_1})^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{(x_2-\eta_{x_2})^2}{\sigma_{x_2}^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_1}^2}} e^{-\frac{(x_1-\eta_{x_1})^2}{2\sigma_{x_1}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_2}^2}} e^{-\frac{(x_2-\eta_{x_2})^2}{2\sigma_{x_2}^2}}$$

$$= f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)$$

·) Un qualunque vettore ridotto di $\underline{X}$

es. $\underline{Y} = [X_1, X_2, \dots, X_K]$ $\quad K < N$

è ancora un vettore Gaussiano

N.B. per $K = 1 \Rightarrow$ si ottengono le probabilità marginali, che sono a loro volta Gaussiane

·) Il vettore aleatorio $\underline{Y}$ ottenuto per trasformazione lineare di un vettore $\underline{X}$ Gaussiano è ancora Gaussiano

$$\underline{Y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{b} \quad , \quad \underline{\underline{A}} = \text{matrice di trasformazione}$$

Il valor medio di $\underline{Y}$ si può ottener come segue

$$\underline{\eta}_Y = \underline{\underline{A}}\,\underline{\eta}_X + \underline{b}$$

e la sua covarianza come segue

$$\underline{\underline{C}}_Y = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_X\,\underline{\underline{A}}^T$$

·) Il vettore aleatorio condizionato $[\{X_i\} \mid \{X_j\}]$ è ancora congiuntamente Gaussiano qualunque siano gli insiemi di v.a. $\{X_i\}$ e i loro condizionamenti $\{X_j\}$