EQUAZIONI MATRICIALI

(23 - 11 - 2019)

Queste note sono dedicate ad estendere alle matrici i concetti delle equazioni di primo grado e a presentare alcune tecniche per la loro risoluzione.

Il primo importantissimo esempio è costituito dal problema della matrice inversa (destra):

"Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, esiste $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$AX = I, \quad (I \text{ matrice identica})?"$$

Il problema generale che vogliamo risolvere è

"Date $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ esiste $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tale che $AX = B$?"

Il problema, così come accade per l'inversa, può essere facilmente ricondotto alla risoluzione di un sistema lineare con secondi membri multipli. Infatti, posto

$$X = (X_1 \ldots X_p) \quad e \quad B = (B_1, \ldots, B_p),$$

poiché $AX = (AX_1, AX_2, \ldots, AX_p)$ ne segue che l'equazione $AX = B$ equivale ai p sistemi lineari $AX_i = B_i$ $i=1..p$ che, avendo la matrice dei coefficienti comune, possono essere risolti simultaneamente con l'algoritmo di Gauss(-Jordan).

In sostanza, basta risolvere

$$A_1 .. A_n \mid B_1 .. B_p \quad \left(A_1 .. A_n \text{ colonne di } A \right)$$

OSSERVAZIONI:

① NON E' DETTO CHE L'EQUAZIONE SIA RISOLUBILE.

Perché ciò accada, è necessario e sufficiente che $B_i \in \langle A_1, .., A_n \rangle$ $\forall i = 1..p$.

② NON E' DETTO CHE L'EVENTUALE SOLUZIONE SIA UNICA.

I sistemi considerati hanno soluzione unica se e solo se le colonne di A sono indipendenti e cioè, in pratica, se ogni colonna è pivot.

Nel caso in cui i sistemi $AX_i = B_i$ abbiano infinite soluzioni, si potranno ottenere tutte le matrici X soluzioni di $AX = B$ scegliendone le colonne ad arbitrio nell'insieme delle rispettive soluzioni.

ESEMPIO 1._

Determinare tutte le (eventuali) soluzioni X dell'equazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nel caso in esame $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ e $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, da cui $X \in \mathbb{R}^{6\times 3}$.

Per determinare le 3 colonne di X occorre risolvere il sistema

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

che (per semplicità) è già a scala, con x_1, x_2, x_3 incognite vincolate (pivot) e x_4, x_5 e x_6 parametri (non pivot).

Spostiamo a secondo membro le colonne non-pivot

$$\begin{array}{c|ccc|ccccccc}
 & & & & & & & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\checkmark \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & \\
\checkmark \mathrm{II} & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \mathrm{II}-\mathrm{III} \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & \\
\mathrm{I} & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & \mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III}
\end{array}$$

Per scrivere <u>tutte</u> le soluzioni X richieste

- occorre prestare attenzione al fatto che stiamo risolvendo non uno ma tre sistemi lineari, aventi termini noti ottenuti da quelli originali e dalle eventuali colonne non-pivot (3, nel nostro caso) con valori dei parametri potenzialmente diversi in ciascuno dei tre sistemi.
Basta dunque adoperare simboli diversi per le "copie" delle incognite parametriche nelle varie colonne del risultato, mentre i loro coefficienti restano quelli appena calcolati nelle colonne di x_4, x_5, x_6.

$$X = \begin{pmatrix} x_1' & x_1'' & x_1''' \\ x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3' & x_3'' & x_3''' \\ x_4' & x_4'' & x_4''' \\ x_5' & x_5'' & x_5''' \\ x_6' & x_6'' & x_6''' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{pivot}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ \text{non pivot}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{array} \begin{pmatrix} -1+2x_4'+3x_5' & 1+2x_4''+3x_5'' & 0+2x_4'''+3x_5''' \\ 1+2x_5'-2x_6' & 0+2x_5''-2x_6'' & -2+2x_5'''-2x_6''' \\ 1-x_4'-x_5'+x_6' & 1-x_4''-x_5''+x_6'' & 3-x_4'''-x_5'''+x_6''' \\ x_4' & x_4'' & x_4''' \\ x_5' & x_5'' & x_5''' \\ x_6' & x_6'' & x_6''' \end{pmatrix}$$

Come si può notare, l'algoritmo di Gauss-Jordan che opera non sui valori dei parametri ma sui coefficienti di tali valori, consente un discreto risparmio di fatica eseguendo le operazioni su un'unica colonna per ogni parametro, invece di farlo su tante "copie" quante sono le colonne di B.

Attenzione, dunque: per ogni colonna non pivot si necessano tanti parametri arbitrari quante sono le colonne del secondo membro B.

Esempio 2. _

Determiniamo tutte le soluzioni X di $AX = O$ ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $O \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e, cioè, $O = (\underbrace{0 \,..\, 0}_{p})$.

Posto $X = (X_1 \,..\, X_n)$ si ha che

$$AX_i = 0 \quad \forall i = 1 \,..\, p$$

Detto allora Y il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di $Ax = 0$, e cioè il nucleo di

$$\mathcal{A}(x) = Ax$$

si osserva subito che tutte e sole le soluzioni di $AX=0$ sono le matrici

$$(X_1 \dots X_p)$$

le cui colonne appartengono a Y.

Dette dunque $y_1 \dots y_k$ una base per le soluzioni di $Ax=0$, ne segue subito che tutte le soluzioni sono del tipo

$$X = \left(\sum_1^k \alpha_i^1 y_i \quad \sum_1^k \alpha_i^2 y_i \dots \sum_1^k \alpha_i^p y_i \right)$$

che dipendono dai parametri arbitrari α_j^i, il numero dei quali è pari a k (numero di colonne non-pivot di A) per p (numero di colonne del termine noto $O \in \mathbb{R}^{m\times p}$), esattamente come è accaduto nell'esempio precedente.

NOTA: I discorsi fatti per l'equazione $AX=B$ valgono con i dovuti aggiustamenti, anche per le equazioni $XA=B$.
Visto che l'algoritmo di Gauss poggia anche su una "grafica" semplice, ne segue che, piuttosto che svilupparne un'altro per i sistemi $XA=B$ possa risultare più conveniente risolvere il sistema trasposto. Infatti, $XA=B$ equivale a $A^*X^*=B^*$. Dunque, risolto il sistema $A^*W=B^*$, del tipo trattato più su, basterà porre $X=W^*$ per ottenere la soluzione richiesta.