ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 28

Note Title 06/11/2018

RANGO DI UNA MATRICE

<u>Def.</u> Sia A una matrice $m \times n$.

- Si dice R-rango di A il massimo numero di RIGHE lin. indip.
- Si dice C-rango " " " COLONNE "
- Si dice D-rango il massimo k per cui esiste una sotto-matrice $k \times k$ con $\det \neq 0$

<u>Oss.</u> Dalla def. data segue
- R-rango $\leq m$
- C-rango $\leq n$
- D-rango $\leq \min\{m, n\}$

<u>Oss.</u> I vari ranghi si possono caratterizzare come segue

C-rango
- max num. col. lin. indip.
- $\dim(\text{Span}(C_1, \dots, C_n))$

  colonne di A
- $\dim(\text{Im}(A))$ vista come appl. lin. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

R-rango
- max. num. righe lin. indip.
- $\dim(\text{Span}(R_1, \dots, R_m))$

  righe di A
- $\dim(\text{Im}(A^t))$ pensata come $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

D-rango D-rango di $A = k$ se succedono 2 cose
- esiste sottomatrice $k \times k$ con $\det \neq 0$
- TUTTE le sottomatrici $(k+1) \times (k+1)$ hanno $\det = 0$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Per ogni matrice A vale

$$\boxed{\text{R-rango} = \text{C-rango} = \text{D-rango}}$$

<u>Oss</u>. Dato il teorema avremo che $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$

$\boxed{\text{Equivalenza R-rango} = \text{C-rango}}$ Segue da alcuni risultati intermedi

<u>Prop. 1</u> Quando opero alla Gauss su una matrice, R-rango e C-rango non cambiano

<u>Prop. 2</u> Se S è una matrice a scala, allora

$$\boxed{\text{R-rango}(S) = \text{C-rango}(S) = \text{numero dei PIVOT}}$$

Dando per buone Prop. 1 e Prop. 2, si dimostra R-rango = C-rango

$\boxed{\text{Dim.}}$ Parto da A qualunque e lavorandola alla Gauss arrivo a matrice S a scala. Ora

$$\text{R-rango}(A) \underset{\text{Prop. 1}}{=} \text{R-rango}(S) \underset{\text{Prop. 2}}{=} \text{C-rango}(S) \underset{\text{Prop. 1}}{=} \text{C-rango}(A)$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. Prop. 1}}$

$\boxed{\text{R-rango}}$ → Se scambio 2 righe è evidente che il max numero righe lin. indip. non cambia

→ Se sostituisco R_i con $aR_i + bR_j$ con $a \neq 0$, allora

$$\text{Span}(\ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots) = \text{Span}(\ldots, R_j, \ldots, \cancel{R_i}, \ldots, aR_i + bR_j)$$

$$= \text{Span}(\ldots, R_j, \ldots, aR_i + bR_j)$$

posso eliminare l'ultima

elimino R_i che è comb. di R_j e l'ultima

$\boxed{\text{C-rango}}$ Supponiamo che partendo da A otteniamo una matrice B lavorando alla Gauss.
Allora sappiamo che i sistemi lineari

$$Ax = 0 \qquad\qquad Bx = 0$$

hanno le stesse soluzioni, quindi

$$\ker(A) = \ker(B)$$

quindi

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$$

ma allora

$$\begin{aligned}
\text{C-rango}(A) &\overset{\text{def.}}{=} \dim(\operatorname{Im}(A)) \\
&\overset{\text{rank-nullity}}{=} n - \dim(\ker(A)) \qquad (n = \text{dim. sp. partenza}) \\
&\overset{\ker(A)=\ker(B)}{=} n - \dim(\ker(B)) \\
&\overset{\text{rank-nullity}}{=} \dim(\operatorname{Im}(B)) \\
&\overset{\text{def.}}{=} \text{C-rango}(B)
\end{aligned}$$

—o—o—

Oss. Se lavorando su A alla Gauss ottengo B, allora

- $\ker(A) = \ker(B)$
- $\operatorname{Im}(A)$ può essere diversa da $\operatorname{Im}(B)$ ← OCCHIO!!!
- $\dim(\operatorname{Im}(A)) = \dim(\operatorname{Im}(B))$

—o—o—

$\boxed{\text{Dim. Prop. 2}}$ Una matrice S a scala è della forma in figura

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & & \\ 0 & \boxed{*} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & \\ & & & & \\ 0 & - & - & - & 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che abbia r-righe non completamente nulle e poi in fondo righe nulle. Siano $R_1, R_2, \dots, R_r$ le righe non nulle.
Dico che R-rango è proprio r.
È evidente che R-rango$(S) \leq r$ (al max ci sono r righe lin. indip.).
Resta da dim. che $R_1, \dots, R_r$ sono davvero lin. indip.

Prendo una loro comb. che si annulla

$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_r R_r = 0$$

Allora

* per forza $x_1 = 0$ (altrimenti la comp. che corrisponde alla posiz. del primo PIVOT viene $\neq 0$)
* per forza $x_2 = 0$ (altrimenti stesso discorso con la comp. nella posiz. del 2° PIVOT)

... e così via.

Dico che anche C-rango $= r$.
Infatti

$$\text{Span}(C_1, \dots, C_m) \subseteq \text{Span}(\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\text{primi } r\text{-vettori della base canonica}})$$

quindi C-rango $(s) \leq r$.
Dico che ci sono r colonne lin. indip., e sono quelle che contengono i PIVOT.
Queste sono lin. indip. per lo stesso discorso fatto sulle righe: se fosse

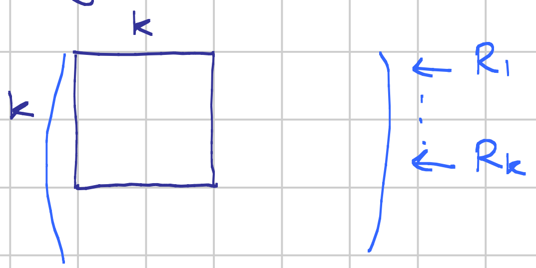
$$y_1 C_1 + y_2 C_2 + \dots + y_r C_r = 0$$

Ora partendo dal fondo scopro che
$y_r = 0$, quindi $y_{r-1} = 0$, ... e così via.

— o — o —

Mostriamo ora che D-rango = R-rango

$\boxed{\text{D-rango} \leq \text{R-rango}}$ Sia R-rango $= r$
Prendiamo una sottomatrice $k \times k$ con $k > r$.
Voglio dire che ha $\det = 0$.



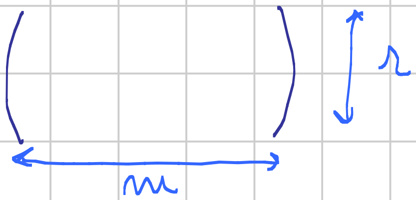
Le righe $R_1, \dots, R_k$ sono lin. dip., quindi di una loro comb. lin. non banale si annulla. Ma allora sono lin. dip. anche le righe ristrette al $k \times k$
Ma allora $\det = 0$

D-rango $\geq$ R-rango

Devo dire che, se ho r-righe lin. indip., allora esiste sotto-matrice $r \times r$ con det. $\neq 0$.

Per prima cosa seleziono r-righe lin. indip.

Buttando via il resto ottengo una matrice $r \times n$ con R-rango $= r$



Ma allora questa avrà C-rango $= r$, quindi ha r colonne lin. indip. Conservando solo queste ottengo una matrice $r \times r$ che ha le colonne lin. indip.

La matrice $r \times r$ ottenuta ha R-rango $=$ C-rango $= r$ quindi ridotta a scala ha PIVOT su tutte le righe (e nessuna riga finale di 0) quindi ha det $\neq 0$.