Esercizio

Un punto materiale soggetto all'azione di un campo di forze

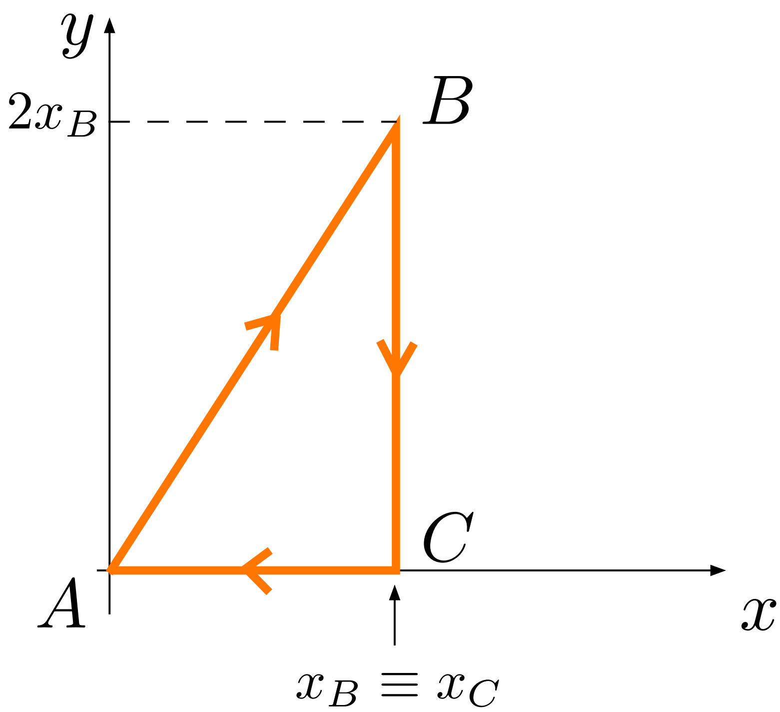
$$\vec{F}(x,y) = a\,xy\,\vec{u}_x + \frac{a}{2}x^2\vec{u}_y \qquad\qquad a = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{1}$$

si muove sul piano (x, y) lungo una traiettoria chiusa ABC, come in figura. Il segmento AB si trova lungo la retta di equazione $y = 2x$, e la coordinata x del punto B è $x_B = 1$m.

1. calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze lungo il percorso;
2. il risultato del punto precedente permette di stabilire se la forza è conservativa?
3. Determinare, se esiste, l'energia potenziale $U(x, y)$ del campo di forze $\vec{F}$.

Ripetere il problema per il seguente campo di forze:

$$\vec{F}(x,y) = a\,x^2\,\vec{u}_y \qquad\qquad a = 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \tag{2}$$



SOLUZIONE
Consideriamo il primo campo di forze

$$\vec{F}(x,y) = a\,xy\,\vec{u}_x + \frac{a}{2}x^2\vec{u}_y \tag{3}$$

1. Siccome il percorso consta di 3 parti, il lavoro totale è dato dalla somma dei 3 contributi

$$W_{tot} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_C^A \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{4}$$

Valutiamo ora ciascuno dei contributi

(a) A→ B
Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $y = 2x \;\rightarrow\; dy = 2dx$, con x che varia da 0 a x_B. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = (\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx \tag{5}$$

$$\begin{aligned} W_{A\rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{x_B} \vec{F}(x,2x)\cdot(\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx = \\ &= \int_0^{x_B} \left(a\,x2x\,\vec{u}_x + \frac{a}{2}x^2\vec{u}_y\right)\cdot(\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx = \\ &= \int_0^{x_B} \left(2a\,x^2 + 2\frac{a}{2}x^2\right)\,dx = \\ &= 3a\,\frac{x_B^3}{3} = \\ &= a\,x_B^3 \end{aligned} \tag{6}$$

(b) B→ C
Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $x \equiv x_B \;\rightarrow\; dx = 0$, con y che varia da $2x_B$ a 0. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = \vec{u}_y\,dy \tag{7}$$

$$\begin{aligned} W_{B\rightarrow C} &= \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{2x_B}^{0} \vec{F}(x_B,y)\cdot\vec{u}_y\,dy = \\ &= \int_{2x_B}^{0} \left(a\,x_B y\,\vec{u}_x + \frac{a}{2}x_B^2\vec{u}_y\right)\cdot\vec{u}_y\,dy = \\ &= \int_{2x_B}^{0} \left(0 + \frac{a}{2}x_B^2\right)\,dy = \\ &= -\frac{a}{2}x_B^2\,2x_B = \\ &= -a\,x_B^3 \end{aligned} \tag{8}$$

(c) C→ A
Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $y \equiv 0 \;\rightarrow\; dy = 0$, con x che varia da x_B a 0. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = \vec{u}_x\,dx \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
W_{C\to A} &= \int_C^A \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{x_B}^0 \vec{F}(x,0)\cdot \vec{u}_x\, dx = \\
&= \int_{x_B}^0 \left(0\,\vec{u}_x + \frac{a}{2}x^2\vec{u}_y\right)\cdot \vec{u}_x\, dx = \\
&= \int_{x_B}^0 0\, dx = \\
&= 0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Sostituendo (6), (8) e (10) in (4) si ottiene

$$
W_{tot} = a\, x_B^3 \; - \; a\, x_B^3 + 0 = 0 \qquad (11)
$$

e dunque il lavoro della forza (3) sul percorso chiuso in figura è 0.

2. Il risultato (11), di per sé, NON ci permette di concludere che la forza $\vec{F}$ è conservativa. Infatti, per una forza conservativa il lavoro fatto lungo *qualunque* percorso chiuso deve essere nullo, mentre questo risultato dice che il lavoro lungo *questo particolare* cammino è nullo.

3. Per determinare se la forza $\vec{F}$ è conservativa occorre verificare se esiste una funzione $U(x,y)$ (energia potenziale) tale che

$$
\left\{
\begin{aligned}
F_x &= axy = -\frac{\partial U}{\partial x} \\
F_y &= \frac{a}{2}x^2 = -\frac{\partial U}{\partial x}
\end{aligned}
\right. \qquad (12)
$$

E' facile vedere dalle Eq.(12) che la funzione $U(x,y)$ esiste, ed è data da

$$
U(x,y) = -\frac{a}{2}x^2\, y \;\; + \text{const} \qquad (13)
$$

Pertanto il campo di forze $\vec{F}$ è conservativo.

Consideriamo ora il secondo campo di forze

$$\vec{F}(x,y) = a\,x^2\,\vec{u}_y \tag{14}$$

1. Di nuovo, il percorso consta di 3 parti, ed il lavoro totale è dato dalla somma dei 3 contributi

$$W_{tot} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_C^A \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{15}$$

   Valutiamo ora ciascuno dei contributi

   (a) A→ B
   Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $y = 2x \;\rightarrow\; dy = 2dx$, con x che varia da 0 a x_B. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = (\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx \tag{16}$$

$$\begin{aligned} W_{A\rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{x_B} \vec{F}(x,2x)\cdot(\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx = \\ &= \int_0^{x_B} \left(a\,x^2\,\vec{u}_y\right)\cdot(\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y)\,dx = \\ &= \int_0^{x_B} 2a\,x^2\,dx = \\ &= 2a\,\frac{x_B^3}{3} = \\ &= \frac{2}{3}a\,x_B^3 \end{aligned} \tag{17}$$

   (b) B→ C
   Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $x \equiv x_B \;\rightarrow\; dx = 0$, con y che varia da $2x_B$ a 0. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = \vec{u}_y\,dy \tag{18}$$

$$\begin{aligned} W_{B\rightarrow C} &= \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{2x_B}^{0} \vec{F}(x_B,y)\cdot\vec{u}_y\,dy = \\ &= \int_{2x_B}^{0} \left(a\,x_B^2\,\vec{u}_y\right)\cdot\vec{u}_y\,dy = \\ &= \int_{2x_B}^{0} a\,x_B^2\,dy = \\ &= -ax_B^2\,2x_B = \\ &= -2a\,x_B^3 \end{aligned} \tag{19}$$

   (c) C→ A
   Questo tratto di percorso è identificato dalla retta $y \equiv 0 \;\rightarrow\; dy = 0$, con x che varia da x_B a 0. Pertanto

$$d\vec{s} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y = \vec{u}_x\,dx \tag{20}$$

$$\begin{aligned} W_{C\rightarrow A} &= \int_C^A \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{x_B}^{0} \vec{F}(x,0)\cdot\vec{u}_x\,dx = \\ &= \int_{x_B}^{0} (0\,\vec{u}_y)\cdot\vec{u}_x\,dx = \\ &= \int_{x_B}^{0} 0\,dx = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Sostituendo (17), (19) e (21) in (15) si ottiene

$$W_{tot} = \frac{2}{3} a\, x_B^3 \,-\, 2a\, x_B^3 + 0 = -\frac{4}{3} a\, x_B^3 \neq 0 \tag{22}$$

Sostituendo i valori, otteniamo

$$W_{tot} = -\frac{4}{3} \cdot 3\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\, (1\mathrm{m})^3 = -4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = -4\,\mathrm{J} \tag{23}$$

2. Il risultato (22) ci permette di stabilire che la forza (14) NON è conservativa, dato che per una forza conservativa il lavoro su *qualunque* percorso chiuso dovrebbe essere 0, mentre abbiamo trovato almeno un percorso chiuso in cui il lavoro non è nullo. Pertanto non può esistere un'energia potenziale per tale campo di forze.