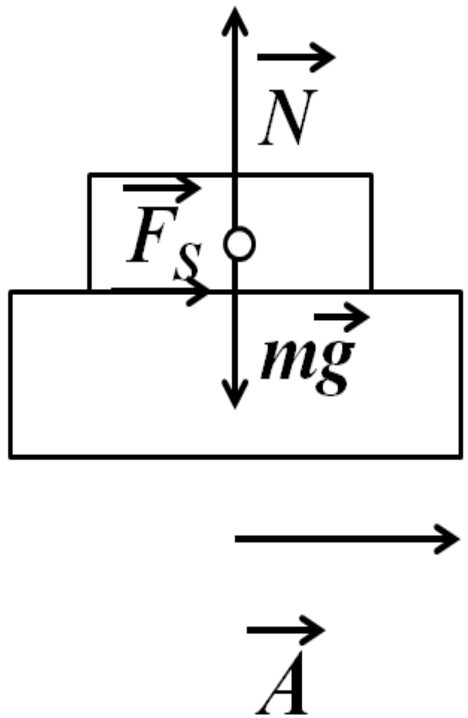
Es. del 3/4/ Ciocci

Esercizio. Un veicolo, con una cartellina appoggiata sul suo tetto, sta accelerando su una strada orizzontale e rettilinea con accelerazione $\vec{A}$ di modulo $2\ \mathrm{m/s^2}$.

1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via.
2) Calcolare, invece, il moto della cartellina rispetto a terra e rispetto al veicolo se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15.

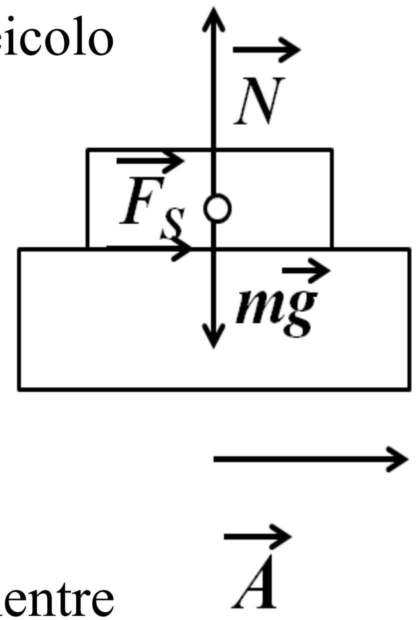


D1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non scivoli via

Soluzione.

1) Siccome la cartellina non scivola via, nel riferimento del veicolo $\vec{a}' = 0$

e $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T = \vec{a}_T = \vec{A}$.



L'equazione del moto nel sistema inerziale è:

$$m\vec{A} = \vec{F}_S + m\vec{g} + \vec{N};$$

lungo y: $N = mg$ *lungo x:* $F_s = mA \leq \mu_S mg$

$$\Longrightarrow \mu_S = \frac{A}{g} = 0.204$$

Si noti che l'accelerazione nel riferimento del veicolo è nulla, mentre in quello a terra è $|\vec{A}| = 2\ m/s^2$

D2.1) Determinare il moto della cartellina rispetto a terra se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15

2) Se $\mu_S < 0.204$, la cartellina scivola e l'accelerazione rispetto al riferimento a terra è:

$$m\vec{a} = \vec{F}_D \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_D}{m} = \frac{\mu_D mg\hat{x}}{m} = 0.15 \times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{x} = 1.47\ \mathrm{m/s^2}\hat{x}$$

Rispetto al riferimento del veicolo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} = (1.47 - 2)\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{x} = -0.53\ \mathrm{m/s^2}\hat{x}$$

D2.2) Determinare il moto della cartellina rispetto al veicolo se il coefficiente di attrito statico è inferiore al valore calcolato in (1) ed il coefficiente di attrito dinamico vale 0.15

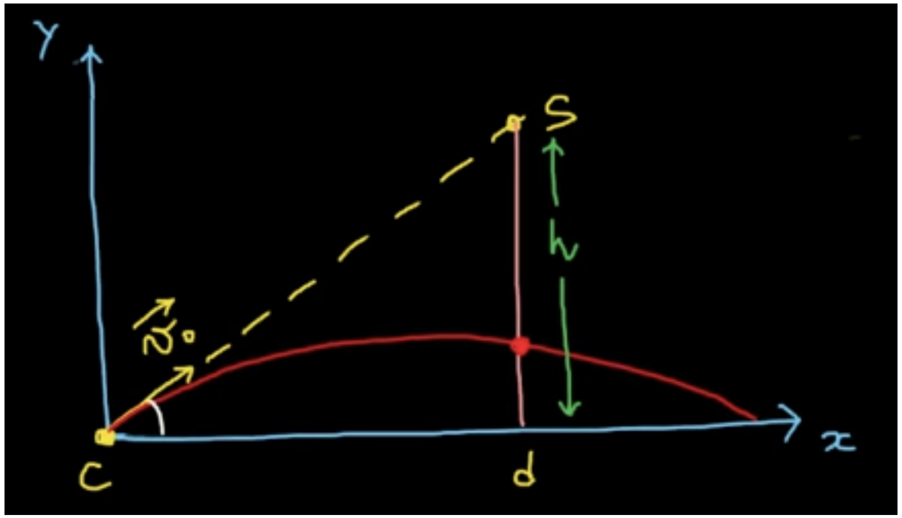
Rispetto al riferimento del veicolo:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} = (1.47 - 2)\ \mathrm{m/s^2}\ \hat{x} = -0.53\ \mathrm{m/s^2}\hat{x}$$

R2

Quindi rispetto a terra il moto è <u>uniformemente accelerato con accelerazione, in avanti, di modulo $1.47\ \mathrm{m/s^2}$</u>, mentre rispetto al veicolo <u>è uniformemente accelerato con accelerazione, all'indietro, di modulo $0.53\ \mathrm{m/s^2}$</u>.

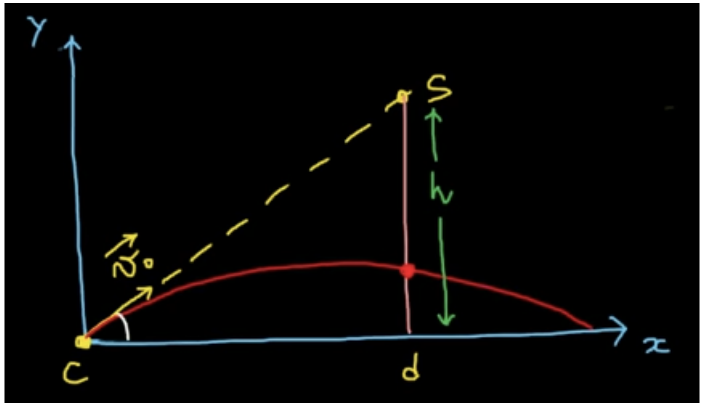
Il problema della scimmia e del cacciatore. Un cacciatore si trova nel punto (0,0) di un sistema di assi cartesiani ed intende sparare con un fucile ad una scimmia, che è appesa al ramo di un albero; le coordinate della scimmia nel sistema di assi cartesiani sono (d, h).
La scimmia ha una prontezza di riflessi infinita, per cui si lascia cadere dal ramo (in caduta libera verticale) nell'istante in cui vede il lampo dello sparo.
Trascurando la resistenza dell'aria e trattando sia il proiettile del fucile sia (soprattutto !) la scimmia come punti materiali, si determini l'angolo di sparo necessario al cacciatore per colpire la scimmia. Si esegua il calcolo prima nel SISTEMA INERZIALE DEL CACCIATORE e poi nel sistema NON INERZIALE DELLA SCIMMIA.



Soluzione.

Unica forza agente sia sul proiettile che sulla scimmia è la forza di gravità

NEL SISTEMA INERZIALE le equazioni del moto per il proiettile e la scimmia sono:



$$m_P \vec{a}_P = m_P \vec{g};\ m_S \vec{a}_S = m_S \vec{g} \quad \Longrightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_S = \vec{g}$$

condizioni iniziali.

Proiettile

$$\begin{cases} x_P(0) = 0,\ y_P(0) = 0 \\ \vec{V}_P(0) = V_0 \cos\theta\,, V_0 \sin\theta \end{cases}$$

Scimmia

$$\begin{cases} x_S(0) = d,\ y_S(0) = h \\ V_S(0) = (0{,}0) \end{cases}$$

$\vec{V}_0$,velocità iniziale del proiettile

θ, angolo formato dalla direzione di $\vec{V}_0$ con l'orizzontale

$$\begin{cases} x_P = V_0 \cos\theta\, t \\ y_P = V_0 \sin\theta\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Se il proiettile colpisce la scimmia, ad un certo istante la scimmia ed il proiettile hanno le stesse coordinate. Eguagliando x_P e x_S si conclude che l'istante richiesto t^*è:

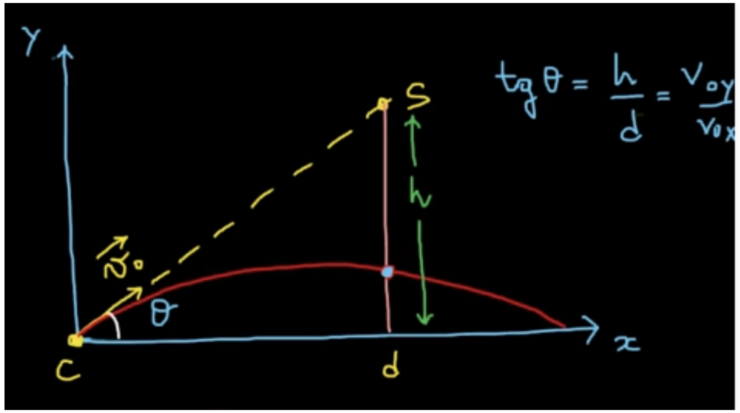
$$t^* = \frac{d}{V_0 \cos\theta}$$

anche le coordinate y_P e y_S se la scimmia viene colpita sono le stesse

$$\begin{cases} x_P = V_0 \cos\theta\, t \\ y_P = V_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_S = d \\ y_S = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

e l'istante t^{**} (che deve essere uguale a t^{*}) in cui le coordinate verticali sono eguali è

$$t^{**} = \frac{h}{V_0 \sin\theta} = t^{*} = \frac{d}{V_0 \cos\theta}$$



Imponendo l'eguaglianza fra t^{*}e t^{**}
si ricava la relazione richiesta:

$$\tan\theta = \frac{h}{d}$$

ovvero la direzione di sparo è proprio quella definita dalla posizione iniziale della scimmia rispetto al cacciatore. Si noti che il risultato è indipendente da $\vec{V}_0$ e conseguentemente anche dall'istante in cui il proiettile colpisce la scimmia.

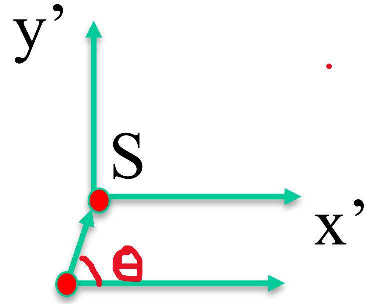
«se un cacciatore spara in direzione di una scimmia appesa ad un albero la quale per la paura si lascia cadere nell'istante in cui parte il colpo, questa verrà colpita in pieno dal proiettile»

SISTEMA NON INERZIALE osservatore “solidale con la scimmia” misura sul proiettile anche una forza apparente, dovuta alla caduta libera della scimmia. Applicando la seconda legge di Newton generalizzata questo osservatore scrive:

$$m_P \vec{a}'_P = \vec{F} + \vec{F}_{app} = m_P \vec{g} - m_P \vec{a}_T = m_P(\vec{g} - \vec{g}) = 0$$

in quanto, a causa della caduta libera della scimmia, l’accelerazione di trascinamento del sistema non inerziale è proprio $\vec{g}$. In questo sistema la scimmia è in quiete e il proiettile si muove quindi di moto rettilineo uniforme per cui la direzione dello sparo è costante e può essere calcolata in un istante qualunque. All’istante $t = 0$ le coordinate del proiettile (che coincidono con quelle del cacciatore) e della scimmia nel sistema di riferimento di quest’ultima sono $(-d, -h)$ e $(0,0)$ per cui la direzione con cui il cacciatore punta la scimmia è definita da un angolo θ tale che:

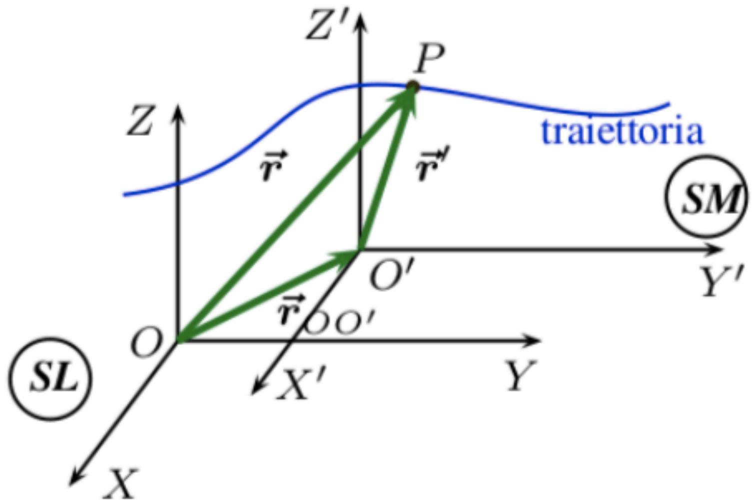
$$\tan\theta = \frac{(0-(-h))}{(0-(-d))} = \frac{h}{d}$$



come nel calcolo precedente. Si noti che il calcolo nel sistema non inerziale è molto più semplice ed immediato a causa della cancellazione (non accidentale !) fra l’accelerazione dovuta alla forza di gravità e l’accelerazione di trascinamento.

Se il sistema di riferimento $\mathcal{SM}$ (non inerziale) è in moto rettilineo, con accelerazione $\vec{a}_t$, rispetto al sistema di riferimento (inerziale) $\mathcal{SL}$:

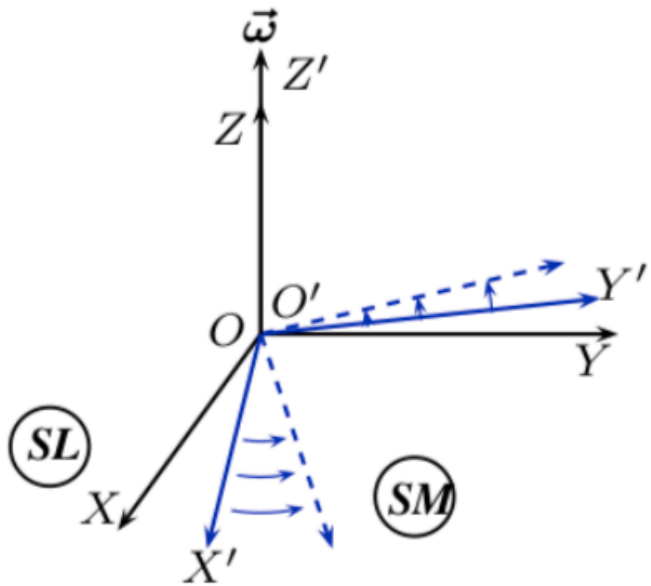
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$



Se il moto relativo è di rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2 \vec{r}_\perp + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}_T = -\omega^2 \vec{r}_\perp + 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}'$$



Esercizio (assenza di peso sulla stazione spaziale).

Un astronauta all'interno dell'ISS (International Space Station), in orbita circolare intorno alla Terra, sale su una bilancia e mentre è fermo sulla bilancia verifica che essa segna zero. Come mai ? È rilevante la quota a cui orbita la stazione spaziale ? E la sua velocità ?

Il sistema di riferimento mobile (l'ISS) si muove lungo una traiettoria circolare. Prendendo xyz SRI, origine in (0,0,0) piano dell'orbita su xy e x' y' z' SRM, sistema rotante origine in x' y' z' =(0,0,0) rotante attorno all'asse z = z'.

Accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_T = 2\vec{\omega}\,\Lambda\,\vec{v}' - \omega^2\vec{R}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare di rotazione dell'ISS rispetto alla Terra, $\vec{v}'$ è la velocità dei corpi all'interno dell'ISS misurati nel sistema mobile e $\vec{R}$ è il raggio vettore dal centro della Terra all'ISS.

Soluzione. L'astronauta si può assumere in quiete rispetto all'ISS per cui nell'accelerazione di trascinamento, $\vec{a}_T = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \omega^2 \vec{R}$, rimane solo il termine centripeto per cui nel sistema rotante :$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T$

Detta m la massa dell'astronauta abbiamo l'equazione del moto nel sistema di riferimento non inerziale dell'ISS, dove l'astronauta è fermo:

$$m\vec{a}' = 0 = m\vec{g}(R) + \vec{N} - m\vec{a}_T \implies \vec{N} = m(\vec{a}_T - \vec{g}(R)) = m\left(-\omega^2\vec{R} - \vec{g}(R)\right)$$

dove $\vec{g}(R)$ è l'accelerazione di gravità a distanza R dalla Terra. Ricordando che

$$\vec{g}(R) = -\frac{GM}{R^2}\hat{R}$$

$m\vec{g} = \frac{-m M G}{R_T^2}\hat{R}$

$\rightarrow (R_T + h)_{ISS}$

$R_T : 6306 \text{ Km}$

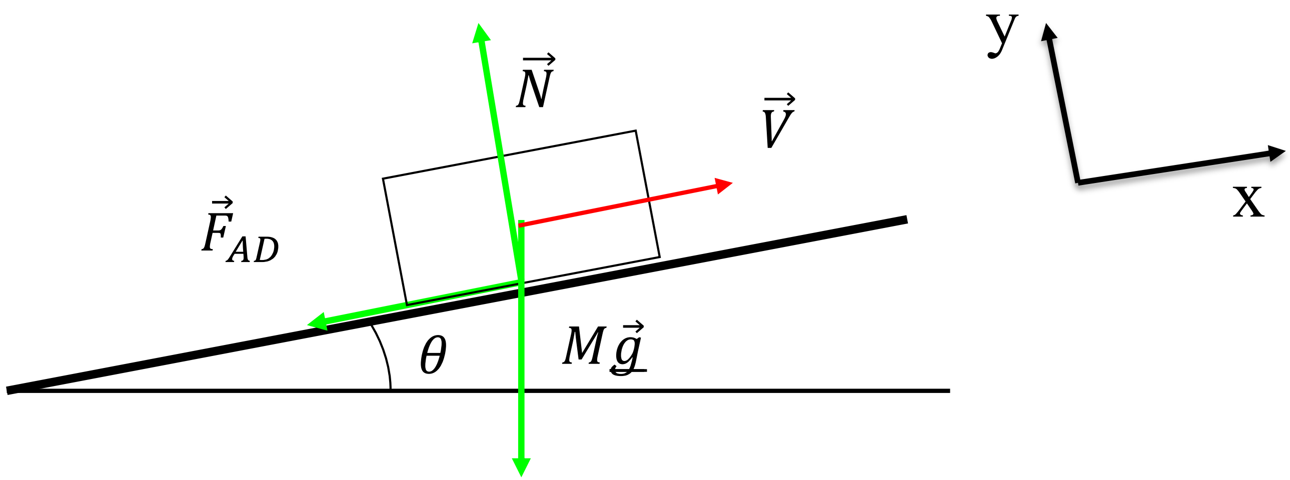
si ottiene:

$$\vec{N} = m\left(-\omega^2\vec{R} + \frac{GM}{R^2}\hat{R}\right) = m\hat{R}\left(-\omega^2 R + \frac{GM}{R^2}\right) = 0$$

in quanto l'ultimo termine è nullo per la condizione di esistenza dell'orbita circolare dell'ISS. Il risultato è indipendente sia dalla quota orbitale sia dalla velocità dell'ISS.
Essendo la reazione vincolare nulla non c'è forza peso!
Nel sistema del laboratorio, come deve essere:

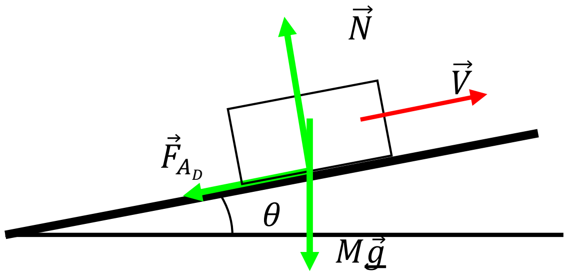
$$m\vec{g}(R) + \vec{N} = 0 + m\vec{a}_T = -m\frac{GM}{R^2}\hat{R} + 0 = -m\omega^2\vec{R} = m\vec{a}$$

Esercizio. Un blocco (massa $M = 10$ kg) è lanciato in salita al tempo $t = 0$ con una velocità $V_0 = 10$ m/s lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto ad un piano orizzontale.
Fra blocco e piano c'è un attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$.
Utilizzando il teorema delle forze vive si calcoli:
1) la massima altezza raggiunta, rispetto alla quota iniziale;
2) la velocità con cui il corpo ripassa nella posizione iniziale.



$M = 10$ kg
$V_0 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, velocità di lancio lungo piano inclinato
$\theta = \pi/6$
attrito dinamico fra blocco e piano, $\mu_D = 0.2$

D1) massima altezza raggiunta h_{max}?



Soluzione.

Salita:

$$K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}MV_0^2 = L_{AD} + L_{M\vec{g}} = \int \vec{F}_{AD} \bullet \overrightarrow{dl} + \int \mathrm{M}\,\vec{g} \bullet \overrightarrow{dl}$$

$$= -\mu_D M g \cos\theta\, l - M g h_{max}$$

$$-|Mg\sin\theta|\int_0^{l} dl = -Mg\underbrace{\sin\theta\, l}_{l\sin\theta = h_{max}}$$

dove l è lo spostamento lungo la direzione del piano, legato a h_{max} dalla relazione

$$h_{max} = l\sin\theta \Longrightarrow \qquad L_{AD} + L_{M\vec{g}} = -Mgh_{max}(\mu_D \cot\theta + 1) = -\frac{1}{2}MV_0^2$$

Pertanto:

$$h_{max} = \frac{V_0^2}{2g(\mu_D \cot\theta + 1)} \approx 3.75\ \mathrm{m}$$

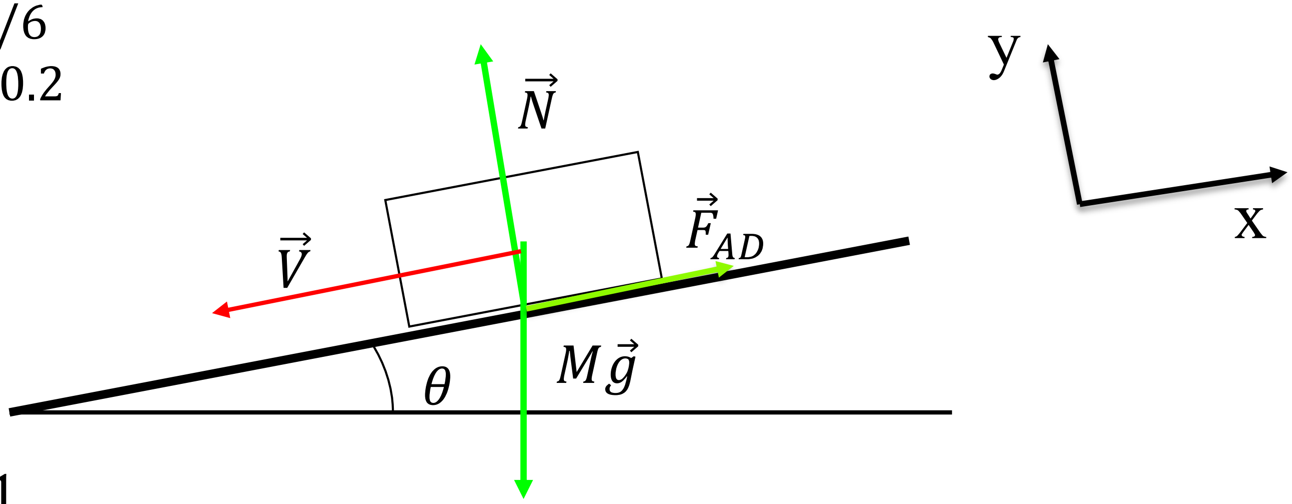
$M = 10$ kg

$V_i = 0$, velocità nel punto di inversione del moto

piano inclinato: $\theta = \pi/6$

attrito dinamico $\mu_D = 0.2$

D.2) velocità con cui il corpo ripassa nella posizione iniziale, $\vec{V}_f$?



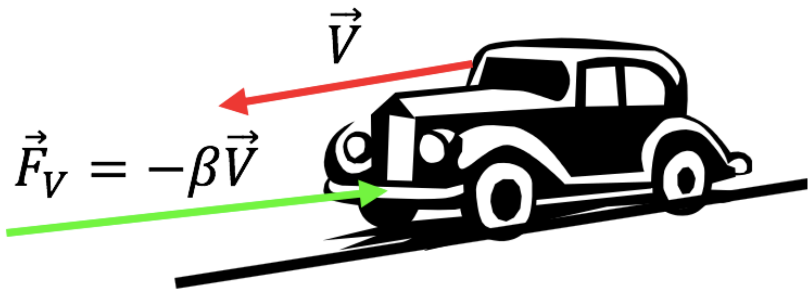
$$K_f - K_i = \frac{1}{2}MV_f^2 - 0 = L_{\vec{F}_{AD}} + L_{M\vec{g}} = -\mu_D Mg\cos\theta\, l + Mgl\sin\theta$$
$$= -\mu_D Mg\cos\theta\, l + Mgh_{max} = Mgh_{max}(-\mu_D\cot\theta + 1)$$

Sostituendo il valore di h_{max} ricavato in precedenza:

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = Mg(1-\mu_D\cot\theta)\frac{V_0^2}{2g(\mu_D\cot\theta+1)} = \frac{MV_0^2(1-\mu_D\cot\theta)}{2(\mu_D\cot\theta+1)} \Longrightarrow$$
$$V_f^2 = \frac{V_0^2(1-\mu_D\cot\theta)}{(\mu_D\cot\theta+1)}$$

Notate che se si pone $\mu_D = 0$ si ottiene $h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$ e $V_f = V_0$.

Esercizio. Un'automobile, di massa $\boldsymbol{M = 1000\ \mathrm{kg}}$, si muove ad una velocità costante $\boldsymbol{V_0 = 72\ \mathrm{km/h} = 20\ \mathrm{m/s}}$ su una strada orizzontale ed il motore eroga una potenza $\boldsymbol{P_0 = 10\ \mathrm{kW}}$. L'attrito dell'aria esercita sull'automobile una forza di tipo viscoso $\boldsymbol{-\beta\vec{V}}$; si trascurino sia i termini della forza viscosa quadratici nella velocità, sia tutte le forze di attrito interne al veicolo.



1) Si identifichino tutte le forze interne ed esterne al veicolo
2) Si calcoli la potenza sviluppata da ognuna di queste forze.

Automobile

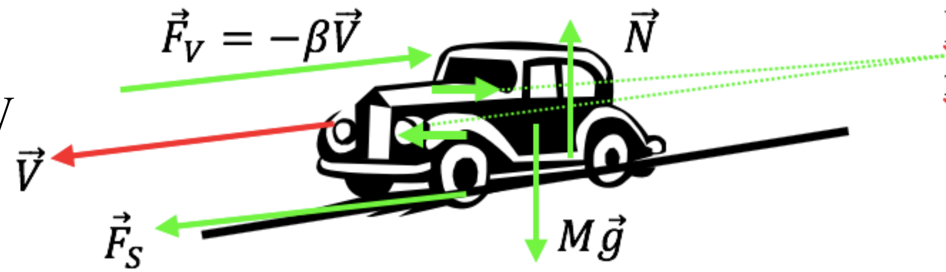
$\boldsymbol{M = 1000}$ **kg**,

$\boldsymbol{V = cost = V_0 = 72\frac{km}{h} = 20\ m/s}$

Potenza motore $\boldsymbol{P_{mot} = 10\ kW} = 10^4$ W

Attrito dell'aria forza di tipo $-\boldsymbol{\beta\vec{V}}$

D.1) forze interne ed esterne al veicolo ?



R.1) Forze esterne: Peso, reazione normale, attrito statico* e viscoso

Forze interne: motore.

D.2) Si calcoli la potenza sviluppata da ognuna di queste forze.

Soluzione.

- $P_{mot} = 10^4$W (dato fornito dal problema);
- $P_{\vec{F}_{AS}} = 0$ (vero sempre);

il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché non c'è spostamento del punto di applicazione: $L_{\vec{F}_{AS}} = 0$.

- $P_{M\vec{g}} = 0$, $P_{\vec{N}} = 0$ (per ortogonalità: $\vec{F} \perp \vec{V}$);
- $P_{\vec{F}_{AV}} = -\beta V^2$.

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot\vec{V}dt = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

D'altra parte se la velocità è costante L= $\boldsymbol{\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = 0}$

per cui P= $\boldsymbol{\frac{dL}{dt} = 0}$

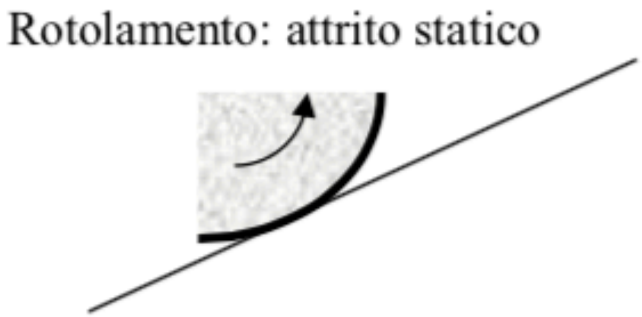
di conseguenza $\boldsymbol{P = \sum_i P_i} = 0$

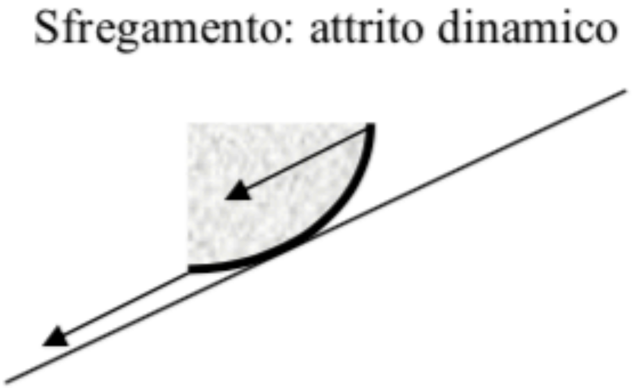
Poiché la potenza totale è nulla (velocità costante) si ha:

$P_{mot} + P_{\vec{F}_{AS}} + P_{M\vec{g}} + P_{\vec{N}} + P_{\vec{F}_{AV}} = 0$

da cui $P_{\vec{F}_{AV}} = -P_{mot} = -10^4$W.

Esempio importante





Punto di contatto istantaneamente fermo: attrito statico

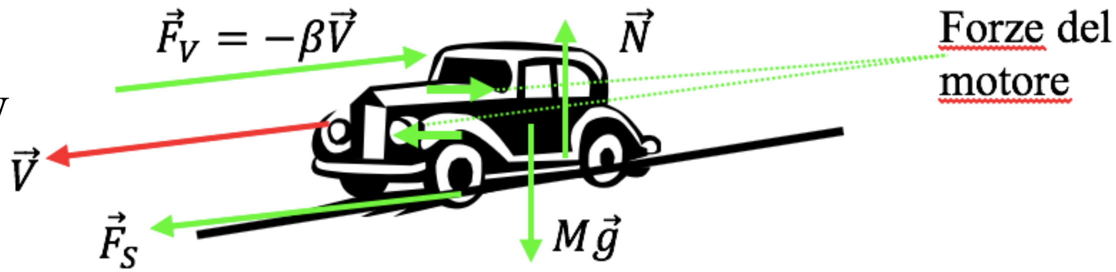
Punto di contatto in movimento con velocità v: attrito dinamico

il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché non c'è spostamento del punto di applicazione

il lavoro della forza di attrito dinamico non è nullo, perché c'è spostamento del punto di applicazione

Automobile
$\boldsymbol{M} = \mathbf{1000\ kg}$,
$\color{red}{\boldsymbol{V = cost = V_0}}$ $= \mathbf{72\,\frac{km}{h} = 20\ m/s}$
Potenza motore $\boldsymbol{P_{mot}} = \mathbf{10\ kW} = 10^4\ \mathrm{W}$
Attrito dell'aria forza di tipo $-\boldsymbol{\beta \vec{V}}$

D.1) forze interne ed esterne al veicolo ?



R.1) Forze esterne: Peso, reazione normale, attrito statico e viscoso

Forze interne: motore.

D.2) Si calcoli la potenza sviluppata da ognuna di queste forze.

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot\vec{V}dt = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

Soluzione.

- $P_{mot} = 10^4$W (dato fornito dal problema);
- $P_{\vec{F}_{AS}} = 0$ (vero sempre);

il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché non c'è spostamento del punto di applicazione: $L_{\vec{F}_{AS}} = 0$.

- $P_{M\vec{g}} = 0$, $P_{\vec{N}} = 0$ (per ortogonalità: $\vec{F} \perp \vec{V}$);
- $P_{\vec{F}_{AV}} = -\beta V^2$.

D'altra parte se la velocità è costante L= $\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2$**=0**

per cui P= $\boldsymbol{\frac{dL}{dt}}$**=0**

di conseguenza $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{P_i}$=0

Poiché la potenza totale è nulla (velocità costante) si ha:

$P_{mot} + P_{\vec{F}_{AS}} + P_{M\vec{g}} + P_{\vec{N}} + P_{\vec{F}_{AV}} = 0$

da cui $P_{\vec{F}_{AV}} = -P_{mot} = -10^4$W.

3) Si calcoli la costante β.

Soluzione.

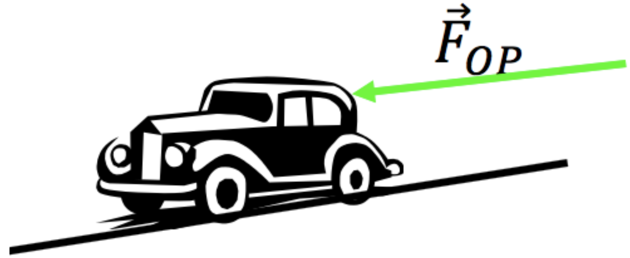
$$P_{\vec{F}_{AV}} = -\beta V^2 = -P_{mot} = -10^4 \mathrm{W}$$

$$\boldsymbol{P_{mot}} = 10^4 \text{ W}$$

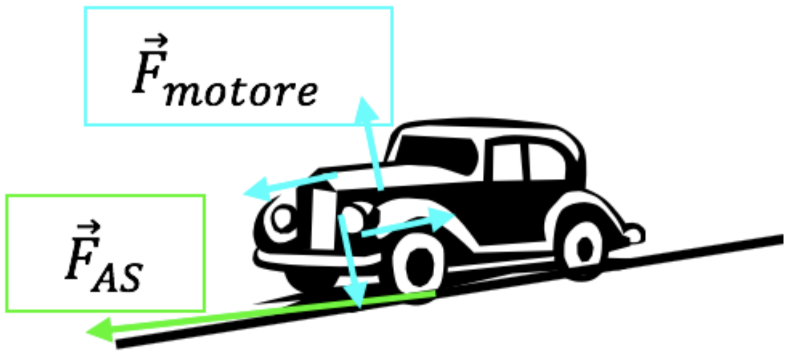
$$\boldsymbol{V = cost = V_0} = \mathbf{72\,\frac{km}{h} = 20\ m/s}$$

da cui $\beta = \frac{10 \text{ kW}}{400 \text{ (m/s)}^2} = 25 \text{ kg/s}$

Esempio. Cosa è necessario per portare un'automobilina (giocattolo) ad una velocità $\vec{V}$ partendo da ferma?



1) Possiamo spingerla con una forza esterna $\vec{F}_{OP}$, il cui impulso fornisce la quantità di moto richiesta: $\vec{P}_{finale} = \vec{P}_{iniziale} + \vec{F}_{OP}\Delta t = M\vec{V}$



2) Se la macchinina ha un motore, le forze del motore possono far muovere la macchinina, purché fra le ruote ed il pavimento ci sia attrito. Infatti **le forze del motore sono interne, per cui la forza totale del motore è nulla:** $\vec{F}_{motore} = \vec{0}$ e quindi non possono cambiare la quantità di moto. Dunque $\vec{P}_{finale} = \vec{F}_{motore}\Delta t + \vec{F}_{AS}\Delta t = \vec{F}_{AS}\Delta t = M\vec{V}$: **la variazione della quantità di moto è prodotta dalla forza di attrito statico (esterna)**

Esercizio. Ipotizziamo che un litro di benzina (che sviluppa bruciando ~ 40 MJ) possa produrre un lavoro meccanico di circa 8 MJ per il motore dell'auto che consideriamo. Quanti km/litro si percorrono in pianura a 72 km/h ? Ed a 144 km/h ?

Soluzione.

V=costante=20m/s. La potenza fornita dal motore è P= βV^2 con $\beta = 25$ kg/s

$$L = Pt = P\frac{X}{V} = \beta XV \quad \Longrightarrow \frac{L}{X} = \beta V = 25\frac{\text{kg}}{\text{s}}\times 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = 500\frac{\text{J}}{\text{m}}$$

$$\Longrightarrow X = \frac{L}{\beta V} = \frac{L(\text{J})}{500} = \frac{8\times 10^6}{500}\text{m} = 1.6\times 10^4 \text{ m} = 16 \text{ km}.$$

Infatti $\frac{L}{X}$ è proprio il lavoro compiuto dal motore per unità di percorso. Con un litro di benzina si percorrono 16 km;

Inoltre, poiché il consumo è proporzionale alla velocità, guidando a 144 km/h il consumo raddoppia e quindi si percorrono 8 km, cioè la metà.

backup

Stazione Spaziale Internazionale

- Viaggia a una velocità media di 27600 km/h
- 15,5 orbite al giorno
- Mantenuta in orbita a un'altitudine compresa tra 330 e 410 km dal livello del mare.
- Abitata dal 2 novembre 2000, da un equipaggio variabile tra 2 e 6 astronauti.

- Massa 419455 kg
- Volume abitabile 425 m^3
- Lunghezza 72,8 m
- Altezza 20 m
- Larghezza 108,5 m