Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 14/09/2023

Esercizio 1

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data la matrice 2×2 ad entrate complesse

$$A = \begin{bmatrix} 2+2\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 2-2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix},$$

ed il vettore di due elementi complessi

$$v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\mathbf{i} \\ -1-\frac{1}{2}\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

si calcolino:

Determinante$(A) = \boxed{2+2\mathbf{i}}$

$$A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i} & -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathbf{i} \\ \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}}$$

Raggio del secondo cerchio di Gershgorin di $A = \boxed{\sqrt{8}}$

$v^H A v = \boxed{\frac{5}{4}}$

$||v||_2^2 = \boxed{\frac{5}{2}}$

$||v||_\infty = \boxed{\sqrt{\frac{5}{4}}}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si considerino $k+1$ punti reali $x_0, \dots x_k$ tali che $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. Si indichi con $S_k(x)$ la **spline naturale cubica** associata ai punti x_j per approssimare la funzione f.

V F $S_k(x)$ interpola f nei nodi x_j, ovvero $S_k(x_j) = f(x_j)$ per $j = 0, \dots, k-1$.

V F $S_k(x)$ è un polinomio di grado 3 sull'intervallo $I = [x_0, x_k]$.

V F $S_k(x)$ ristretta a $[x_0, x_1]$ è un polinomio di grado 3.

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V F $S_k(x)$ è di classe $C^3(I)$ con $I = [x_0, x_k]$.

V F $S_k''(x_0) = f''(x_0)$.

V F $S_k''(x_0) = 0$.

3. 2 Punti Nella seguente lista dire se sono (V) o non sono (F) metodi iterativi.

V F Metodo di eliminazione di Gauss

V F Metodo di bisezione.

V F Metodo delle potenze.

V F Metodo QR per problemi ai minimi quadrati.

V F Metodo QR per il calcolo degli autovalori.

V F Metodo di Newton.

4. 2 Punti Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una generica matrice quadrata. Indicare quali delle seguenti affermazioni sugli autovalori di A sono corrette.

V F Il numero di colonne linearmente indipendenti di A corrisponde al numero di autovalori diversi da 0.

V F Il numero di righe linearmente indipendenti di A corrisponde al numero di autovalori diversi da 0

V F La traccia di A è uguale alla somma degli autovalori di A.

V F Ogni cerchio di Gershgorin associato ad A contiene almeno un autovalore.

V F A^2 ha autovalori reali positivi.

V F Se A è invertibile, gli autovalori di A^{-1} sono i reciproci degli autovalori di A.

Esercizio 2

Sia n un numero intero maggiore o uguale a 2 e si considerino le matrici $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & \beta^{-1} & \dots & \beta^{-1} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \beta & \dots & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sono parametri **complessi**, β è diverso da zero e le entrate non definite in A ed in B corrispondono a zeri delle due matrici. In particolare le due matrici hanno elementi non nulli solo sulla prima riga, sull'ultima riga e sulla diagonale principale.

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica per quali valori di α e β **complessi**, le matrici A e B sono a predominanza diagonale forte.

(ii) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Per entrambe le matrici A e B, si dica per quali valori (**complessi**) del parametro, il metodo di Gauss Seidel a loro associato risulta convergente.

$\boxed{\text{(i)}}$ La matrice A risulta a predominanza diagonale forte se e solo se $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \frac{1}{n-1}\}$. La matrice B non è a predominanza diagonale forte per nessun valore di β.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Per quanto riguarda la matrice A, il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Il metodo di Gauss-Seidel associato alla matrice B non è convergente per nessun valore del parametro β.

Esercizio 3

Sia $P_2(x)$ il polinomio di interpolazione per la funzione $f(x) = \log(2+x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ed $x_2 = 1$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcoli l'espressione di $P_2(x)$ nella base di Lagrange.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si scriva l'espressione dell'errore di interpolazione su $[-1, 1]$ e si dia una limitazione superiore al suo valore assoluto.

$\boxed{\text{(i)}}$ Applicando la formula del polinomio di interpolazione nella base di Lagrange si ottiene

$$P_2(x) = -\log(2)(x+1)(x-1) + \frac{\log(3)}{2}(x+1)x.$$

$\boxed{\text{(ii)}}$ Siccome $f(x)$ è derivabile con continuità almeno 3 volte su $[-1, 1]$, si ha

$$\max_{x\in[-1,1]} |P_2(x) - f(x)| \underbrace{=}_{\text{per un certo } z\in[-1,1]} \frac{1}{3!}|f'''(z)| \max_{x\in[-1,1]} |x(x-1)(x+1)|.$$

Massimizzando su z ed x l'espressione a destra si ottiene $\max_{x\in[-1,1]} |P_2(x) - f(x)| \leq \frac{2}{9\sqrt{3}}$.

Esercizio 4

Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + b_1 f'(1).$$

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Determinare i coefficienti a_0, a_1, b_0, b_1 che rendono massimo il grado di precisione della formula di quadratura.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Determinare l'ordine di precisione della formula.

$\boxed{\text{(i)}}$ Imponendo l'esattezza della formula di quadratura per le funzioni $1, x, x^2, x^3$ si ottiene $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{1}{12}$ e $b_1 = -\frac{1}{12}$.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Verificando l'errore della formula su x^4, si ottiene che la formula ha grado 3.