Laboratorio di Calcolo Numerico
Lezione 11

Metodo delle potenze

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo per il calcolo approssimato dell'autovalore di modulo massimo di una matrice A diagonalizzabile con autovalori

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

ed un corrispondente autovettore $v^{(1)}$. L'algoritmo si basa sulla seguente idea. Fissato un vettore arbitrario $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ con norma euclidea unitaria, si genera la seguente successione

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= A \cdot z^{(k-1)} \\ \lambda^{(k)} &= [z^{(k-1)}]^H y^{(k)} \\ z^{(k)} &= y^{(k)}/||y^{(k)}||_2. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che, sotto ipotesi molto blande sulla scelta di $z^{(0)}$, la successione $\lambda^{(k)}$ converge a λ_1 mentre la successione dei vettori $z^{(k)}$ tende a un autovettore di norma unitaria associato a λ_1.

Esercizio 1. Scrivere una funzione Matlab

```
[z, lamvec] = potenze(A, z0, maxit)
```

che implementi `maxit` passi del metodo delle potenze, per una matrice A e vettore di partenza `z0`. La funzione deve restituire l'approssimazione finale dell'autovettore ed il vettore contenente tutte le approssimazioni dell'autovalore λ_1 generate durante l'esecuzione del metodo.

- Testare l'algoritmo per il calcolo dell'autovalore dominante e del corrispondente autovettore sulle seguenti matrici

  ```
  A1 = full(gallery('poisson',3));
  A2 = full(gallery('tridiag',10));
  ```

  utilizzando un vettore di partenza scelto in modo casuale.

- Per verificare i calcoli si disegni l'andamento al variare dell'iterazione dell'errore relativo commesso rispetto a λ_1 (come valore di riferimento usare l'autovalore di modulo massimo ottenuto con il comando `eig` di Matlab).
- Per quanto riguarda la matrice $A2$ si scelga come vettore di partenza $z0 = (1, 1, \ldots, 1)^T$ (eventualmente rinormalizzato). Cosa si nota? Perchè? **Suggerimento**: quanto fa $[v^{(1)}]^H z_0$?

Metodo delle potenze inverse

Applicando il metodo delle potenze alla matrice A^{-1}, si può calcolare l'autovalore minimo λ_n della matrice A. Supponiamo che A sia non singolare, diagonalizzabile e con autovalori

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Come sappiamo, la matrice A^{-1} avrà autovalori $\frac{1}{\lambda_i}$ tali che:

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|.$$

Inoltre A e A^{-1} hanno gli stessi autovettori.

Poiché in generale A^{-1} non é nota (e comunque sconveniente da calcolare), il vettore $y^{(k)}$ nel metodo delle potenze per A^{-1} si troverà risolvendo il sistema lineare $Ay^{(k)} = z^{(k-1)}$. Tali sistemi si risolvono efficientemente utilizzando la fattorizzazione LU di A (eventualmente con pivoting) calcolata una volta per tutte, prima di iniziare a calcolare la successione $z^{(n)}$.

Esercizio 2. Scrivere una funzione Matlab

```
[z, lamvec] = potenze_inverse(A, z0, maxit)
```

che implementi `maxit` passi del metodo delle potenze inverse, per una matrice A con vettore di partenza `z0`. La funzione deve sfruttare la fattorizzazione LU della matrice A per eseguire il passo del metodo delle potenze (si può implementare un algoritmo per la fattorizzazione LU basandosi su quanto visto a lezione o utilizzare la funzione `lu` di Matlab). Infine la funzione deve restituire l'approssimazione finale dell'autovettore ed il vettore contenente tutte le approssimazioni dell'autovalore λ_1 generate durante l'esecuzione del metodo.

Esercizio 3. Si usi la funzione `potenze_inverse` per calcolare l'autovalore minimo delle matrici dell'esercizio 1 (come approssimazione iniziale scegliere un vettore casuale generato con il comando `rand` di Matlab). Per verificare i calcoli si disegni l'andamento al variare dell'iterazione dell'errore relativo commesso (l'autovalore minimo di riferimento si può trovare usando il comando `eig` di Matlab).