Esame di Ricerca Operativa del 28/01/14

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -5\ x_1 - 4\ x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 2 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ 4\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ 5\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-4,\ 0)$	SI	NO
$\{3,\ 5\}$	$y = \left(0,\ 0,\ \dfrac{8}{3},\ 0,\ \dfrac{1}{3},\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(0,\ -5)$	$\left(0,\ -\dfrac{8}{7},\ 0,\ 0,\ -\dfrac{3}{7},\ 0\right)$	2	$63,\ 28,\ 21,\ 28$	4
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(1,\ -1)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ -1,\ 0)$	5	$12,\ 6$	3

Esercizio 3. Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

prodotti	alluminio (kg)	costo (euro/kg)	ricavo (euro/kg)
A	0.3	12	25
B	0.6	6	30
C	0.9	7	38

Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali: x_A = kg prodotti di A, x_B = kg prodotti di B, x_C = kg prodotti di C

modello:
$$\begin{cases} \max\ (25-12-2.1)\ x_A + (30-6-4.2)\ x_B + (38-7-6.3)\ x_C \\ 0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C \leq 400 \\ 0.3\ x_A \leq (0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C)/3 \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \\ x_C \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

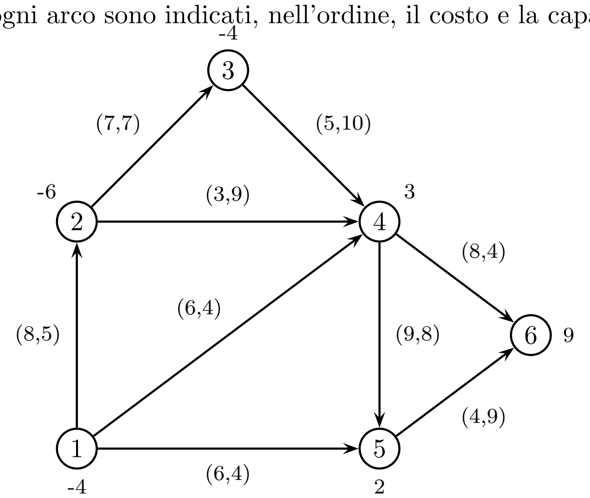
```
c = [-10.9; -19.8; -24.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                    b=[400; 0]

Aeq=[]                                               beq=[]

lb=[0;0;0]                                           ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

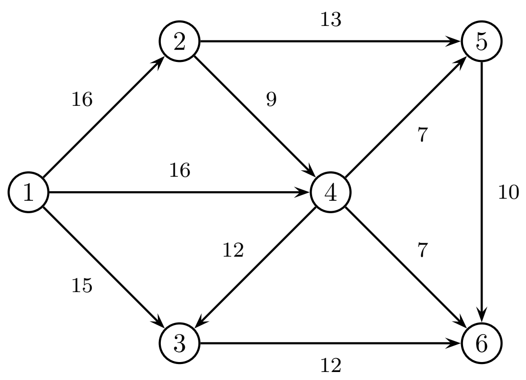


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,3) (3,4) (4,5) (4,6)	(2,4)	$x = (0,\ 4,\ 0,\ -3,\ 9,\ 1,\ 2,\ 9,\ 0)$	NO	SI
(1,4) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6)	(4,5)	$\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 6,\ 10,\ 14)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

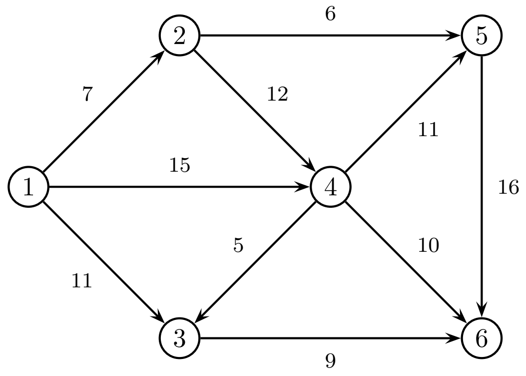
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6)	(1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)
Archi di U	(3,4)	
x	$(0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 0,\ 10,\ 7,\ 0,\ 9)$	$(0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ 4,\ 7,\ 0,\ 9)$
π	$(0,\ -6,\ 1,\ -3,\ 6,\ 10)$	$(0,\ -6,\ -8,\ -3,\ 6,\ 10)$
Arco entrante	(3,4)	(4,6)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 6	4 , 7
Arco uscente	(2,3)	(4,6)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		6	
nodo 2	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 3	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 4	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	2	23	4	23	4	23	4
nodo 6	$+\infty$	-1	27	3	27	3	23	4	23	4	23	4
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 6		4, 5, 6		5, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 6	9	(0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 4 - 6	10	(0, 9, 10, 0, 0, 9, 0, 0, 10, 0)	19
1 - 2 - 5 - 6	6	(6, 9, 10, 0, 6, 9, 0, 0, 10, 6)	25
1 - 4 - 5 - 6	5	(6, 9, 15, 0, 6, 9, 0, 5, 10, 11)	30
1 - 2 - 4 - 5 - 6	1	(7, 9, 15, 1, 6, 9, 0, 6, 10, 12)	31

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 + 6\ x_2 \\ 18\ x_1 + 17\ x_2 \leq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \leq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{23}{12}, \frac{65}{34}\right)$ $\qquad v_S(P) = 22$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 12$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 7\,x_1 + 17\,x_2 \leq 45$
$r = 2$ $\qquad 9\,x_1 + 9\,x_2 \leq 34$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 487 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	7	8	23	24	16	9	15
Volumi	465	106	11	433	43	210	259

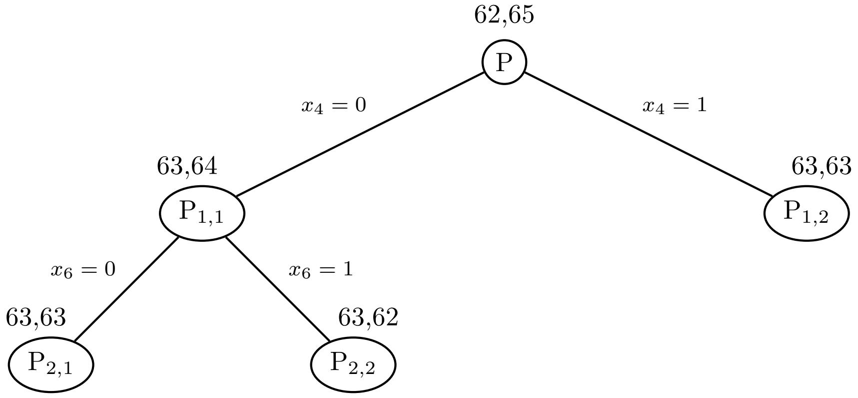
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 62$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 1, 1, \frac{68}{433}, 1, 0, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 65$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima = $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$ valore ottimo = 63

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_2^2 - 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 1)$	$(0, 0)$		NO	?	SI	SI	NO
$(0,\ 2)$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\sqrt{5},\ 2\right)$	$\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-\sqrt{5},\ 2\right)$	$\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ -2)$	$\left(0, -\frac{3}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\sqrt{5},\ -2\right)$	$\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO
$\left(-\sqrt{5},\ -2\right)$	$\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-0, 2)$, $(-3, -0)$, $(-2, 3)$ e $(-1, -3)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$	$3.33333\, x_1 + 5\, x_2$	(-1 ,-3)	$\left(\frac{2}{3}, -1\right)$	1	$(-1, -3)$