8 MAGGIO 2023

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$\tilde{x}(t)$ SOLUZIONE

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x},u,t) \\ \tilde{x}(0) = x_0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

MOVIMENTO DELLO STATO

$y = g(\tilde{x},u,t)$ USCITA CORRISPONDENTE AL MOVIMENTO DELLO STATO

$\dot{\tilde{x}}_E = 0 = f(\tilde{x}_E,u,t)$ $\tilde{x}_E$ MOVIMENTO DI EQ.

$y_E = g(\tilde{x}_E,u,t)$

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$

$$x(t) = \tilde{x}_E(t) + \delta x(t)$$

DINAMICA $$\dot{x}(t) = \underbrace{\cancel{\dot{\tilde{x}}_E(t)}}_{=0} + \delta\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

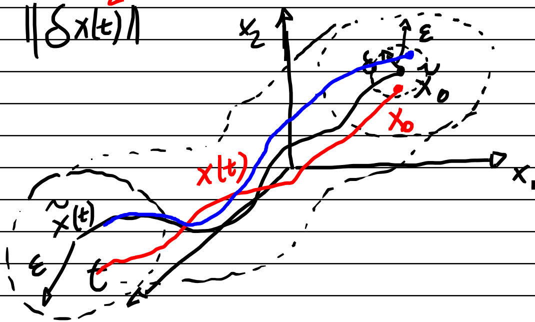
LA DINAMICA DELLA PERTURBAZ DIPENDE DAL PARTICOLARE MOVIMENTO PERTURBATO

# STABILITÀ INTERNA

$\tilde{x}(t)$ MOVIMENTO STABILE (MARGINALMENTE, SEMPLICEMENTE) PER IL SISTEMA SE

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \overbrace{\| x_0 - \tilde{x}_0 \|}^{\| \delta x(0) \|} \le \delta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\| x(t) - \tilde{x}(t) \|}_{\| \delta x(t) \|} \le \varepsilon,\ \forall t > 0$$



$\tilde{x}(t)$ È INSTABILE SE NON È STABILE

$\tilde{x}(t)$ È ASINTOTICAMENTE STABILE SE

È STABILE $\wedge$ $\lim_{t \to \infty} \| x(t) - \tilde{x}(t) \| = 0$

SISTEMI LINEARI

LINEARIZZAZIONE PER SISTEMA NON LINEARE VALIDA NELLO INTORNO DI CERTE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

$(\bar{x}, \bar{u})$ CONDIZIONI (STATO & INGRESSO) DI EQUILIBRIO

RAPPRESENTAZ. LINEARE $\rightarrow$ SVILUPPO IN SERIE TAYLOR (I ORDINE)

SISTEMA STAZIONARIO $\dot{x} = f(x,u)$

$$f(x,u) \approx f(\bar{x},\bar{u}) + \overbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}}^{A} (x-\bar{x}) + $$

$$+ \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}} (u-\bar{u}) \qquad \delta x$$

$$\delta x = x - \bar{x} \qquad\qquad \delta u := u - \bar{u}$$

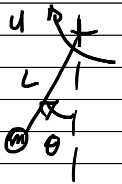
$$\delta\dot{x} = \underset{f(x,u)}{\dot{x}} - \underset{0}{\cancel{\dot{\bar{x}}}} \approx \underset{0}{\cancel{f(\bar{x},\bar{u})}} + A\,\delta x + B\,\delta u - \underset{0}{\cancel{\dot{\bar{x}}}}$$

$$= A\delta x + B\delta u$$

$$\delta y = g(x,u) - g(\bar{x},\bar{u}) \approx C\,\delta x + D\,\delta u$$

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} \qquad D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}$$

ESEMPIO DEL PENDOLO




$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ML^2}\left(u - c x_2 + mgL \operatorname{sen} x_1\right) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \theta$$

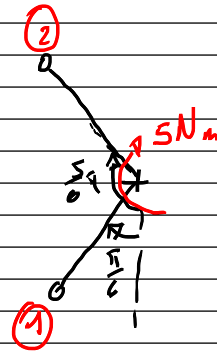
$$\dot{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{mgL}\right) \end{bmatrix}$$

CONDIZ. DI EQUILIBRIO

$m = 1\ \text{kg}$ $\qquad g \approx 10\ m/s^2$ $\qquad L = 1\ m$

$c = 1\ \dfrac{Nms}{rad}$ $\qquad \bar{u} = 5\ Nm$

$\bar{x} = ?$




$$\frac{u}{mgL} = \frac{5}{1 \cdot 10 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

$$(\bar{x}, \bar{u}) \begin{cases} 1 & \bar{u} = 5 \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \bar{u} = 5 \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}\pi \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u$$

$$\underbrace{\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}\left(u - cx_2 + mgL\,\text{sen}\,x_1\right) \end{bmatrix}}_{\dot{x} = f(x,u)}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \theta = x_1$$
$$g(x,u)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\cancel{m}gL}{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}\cos x_1 & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}\bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}\bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}$$

$$D = \frac{\partial g}{\partial u}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = 0 \Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}$$

1 $\quad B_1 = B \qquad C_1 = C \qquad D_1 = D$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

② $B_2 = B$ $C_2 = C$ $D_2 = D$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

EQUILIBRIO SISTEMI LINEARI

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \bar{u} \rightarrow \bar{x} : \underbrace{A\bar{x} + B\bar{u} = 0}$$

SE $A$ È INVERTIBILE $\rightarrow$ SOLUZ. UNICA

$$\Downarrow \qquad \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

(SE $\bar{u} = 0$ L'UNICO STATO DI EQ $\bar{x}$ È L'ORIGINE)

$\det(A) \neq 0$ = $A$ NON HA AUTOVALORI NELL'ORIGINE.

SE $\exists$ AUTOVALORI DI $A$ NULLO

- NON ESISTE SOLUZIONE
- OPPURE, SE ESISTE SOLUZIONE $\bar{x}$

ALLORA ANCHE $x' = \bar{x} + x_n$ È SOLUZIONE

CON $x_n \in \ker(A)$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$$

$$y = Cx + Du$$

SISO CON $\dim(x) = n = 1$

$$\dot{x} = a x + b u$$

SCALARI

SOLUZIONE NOTA : FORMA DI LAGRANGE

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t \underbrace{e^{a(t-\tau)}}_{e^{at} \cdot e^{-a\tau}} u(\tau)\, d\tau$$

PROVA:

$$x(t) = x_0 e^{at} + b e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau)\, d\tau$$

$$\dot{x}(t) = a x_0 e^{at} + b a e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau)\, d\tau +$$

$$+ b \cancel{e^{at}} \cancel{e^{-at}} u(t) =$$

$$= a \underbrace{\left( x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right)}_{x(t)} + b u =$$

$$= a\, x(t) + b\, u(t)$$

$$\dot{x} = a x + b u$$

GENERALIZZAZIONE AL CASO MIMO con $n > 1$

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad y = Cx + Du$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau +$$
$$+ D\, u(t)$$

---

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

$e^{At}$ ! ESPONENZIALE DI MATRICE

M QUADRATA

$$e^{M} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{6} + \dots$$

PROPRIETÀ

- ESISTE SEMPRE $\left(e^{M}\right)^{-1}$ COINCIDENTE CON $e^{-M}$

[ANCHE SE $M$ NON È INVERTIBILE]

- $e^{T^{-1}MT} = T^{-1} e^{M} T$

- $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{SOLO C.I.}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \, d\tau}_{\text{SOLO INGRESSO}}$$

SOLO C.I. — SOLUZIONE OMOGENEA

SOLO INGRESSO — SOLUZIONE PARTICOLARE

$\downarrow$ EVOLUZIONE LIBERA

$\downarrow$ EVOLUZIONE FORZATA

STABILITÀ DEL MOVIMENTO $\tilde{x}(t)$ PER LTI

CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $\tilde{u}(t)$ PER $t \geq 0$

E C.I. $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$

$x(t)$ MOVIMENTO PERTURBATO

PERTURBAZIONE $\delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$

DALLE C.I. $\delta x(0) = \delta x_0$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$
$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}$$
$$\Rightarrow \boxed{\delta\dot{x} = A\,\delta x}$$

$*$

$\tilde{x}$ È STABILE SE $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \delta x_0 : \|\delta x_0\| < \delta$

ALLORA $\|\delta x(t)\| < \varepsilon \, , \forall t > 0$

$*$ SI EVINCE CHE PER SISTEMI LTI LA DINAMICA DELLA PERTURBAZIONE NON DIPENDE DAL PARTICOLARE MOVIMENTO

$\Downarrow$

PER SISTEMI LTI si parla quindi di

SISTEMA
- STABILE (SEMPLICEMENTE o MARGINALMENTE)
- ASINTOTICAMENTE STABILE
- INSTABILE

$$\delta \dot{x} = A \, \delta x$$

SOLUZIONE DI QUESTA EQ. DIFFERENZIALE

$\downarrow$

$$\delta x(t) = \underbrace{e^{At}}_{} \delta x_0$$

STABILITÀ DEL SISTEMA È LEGATA PROPRIO ALLA MATRICE $e^{At}$ E QUINDI ALLA MATRICE $A$ DEL SISTEMA

$$e^{At}$$

- $A$ MATRICE DIAGONALIZZABILE $\iff$ $M.a. = M.g.$

$\Lambda = T^{-1} A T$ ESISTE $T$ — RELAZIONE DI SIMILITUDINE CON MATRICE DIAGONALE

CON $\Lambda$ MATRICE DIAGONALE

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \lambda_i \text{ AUTOVALORI DI } A$$

LE COLONNE DI $T$ SONO GLI AUTOVETTORI DI $A$

- TUTTI AUTOVALORI REALI

$$e^{At} = T \, e^{\Lambda t} \, T^{-1}$$

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} t^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} t^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- CASO DIAGONALIZZABILE CON AUTOVALORI COMPLESSI

$\exists\, \lambda_i = \sigma + j\omega$

SE ESISTE $\lambda_i$ ALLORA ESISTE $\lambda_j = \sigma - j\omega$

$$e^{(\sigma + j\omega)t} \qquad e^{(\sigma - j\omega)t}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LE FUNZIONI $e^{(\sigma+j\omega)t}$ E $e^{(\sigma-j\omega)t}$ SI COMBINANO SEMPRE IN FUNZIONI REALI SINUSOIDALI DEL TIPO $e^{\sigma t}\operatorname{sen}(\omega t)$ $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$

$$\left[\begin{bmatrix} \sigma+j\omega & 0 \\ 0 & \sigma-j\omega \end{bmatrix} \text{ È SIMILE ALLA FORMA REALE } \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}\right]$$

- CASO DI MATRICE **NON** DIAGONALIZZABILE

$A$ DIFETTIVA

UNA MATRICE SIMILE AD $A$ "PIÚ VICINA POSSIBILE" AD UNA MATRICE DIAGONALE È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN

$A = Q J Q^{-1}$ $\qquad$ $Q$ AUTOVETTORI GENERALIZZATI

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N \end{bmatrix}$$

DIAGONALE A BLOCCHI

(OGNI BLOCCO $J_i$)

OGNI BLOCCO DI JORDAN $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & & 0 \\ & \lambda_h & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] ?$$

SI!

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] ?$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ?$$

NO!