Laboratorio di Calcolo Numerico
Lezione 10

Metodi di punto fisso

Il metodo del punto fisso prevede di cercare lo zero di una funzione f attraverso la ricerca del punto fisso di un'altra funzione, chiamiamola ϕ, ottenuta manipolando f. Se l'equazione $f(x) = 0$ è riscritta nella forma $x = \phi(x)$, è possibile utilizzare un metodo iterativo di punto fisso della seguente forma

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = \phi(x_n) \end{cases} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

e sperare che la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga ad una radice di f. Partendo da una certa funzione f si possono derivare infinite funzioni ϕ che sono la riscrittura di f nella forma di punto fisso, ma non è detto che ognuna di queste funzioni porti ad una successione convergente.

Esercizio 1. Si implementi una funzione Matlab

```
function xvec = puntofisso(phi, x0, tol, maxit)
```

che calcoli la successione (1) (restituita nel vettore `xvec`) per una funzione $\phi(x)$ passata come handle function, un punto di partenza `x0` e per un massimo numero di iterazioni `maxit`. Si faccia terminare l'esecuzione prematuramente (cioè prima di aver eseguito `maxit` iterazioni) nel caso si verifichi $|x_n - \phi(x_n)| <$ `tol`.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ con

$$f(x) = x - x^{\frac{1}{3}} - 2,$$

- Mostrare teoricamente che $f(x)$ ha un unico zero e si trova nell'intervallo [3,5].
- Utilizzare, mediante la funzione `puntofisso`, le seguenti 3 iterazioni di punto fisso (dopo aver verificato che si ottengono davvero manipolando $f(x)$) per determinare lo zero della funzione, impiegando come punto iniziale $x_0 = 3$ (e valori `tol` e `maxit` di vostra scelta):

  $\phi_1(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$,

  $\phi_2(x) = (x - 2)^3$,

$\phi_3(x) = \frac{6+2x^{\frac{1}{3}}}{3-x^{-\frac{2}{3}}}$.

- Si stimi l'errore relativo dei tre metodi nel seguente modo. Si utilizzi la funzione interna di Matlab `fzero` per ottenere un valore di riferimento α della radice che si sta cercando. Quindi si faccia uso di α e degli elementi del vettore `xvec` per calcolare la successione degli errori relativi $\frac{|x_n-\alpha|}{|\alpha|}$ (per ognuna delle tre successioni). Infine traccino dei grafici, con scala logaritmica sull'asse delle y, contenenti l'andamento dell'errore relativo vs le iterazioni, per i 3 diversi metodi.
- Giustificare la mancata convergenza dell'iterazione di punto fisso collegata a $\phi_2(x)$ e della convergenza negli altri 2 casi.

Metodo di Newton

Il metodo di Newton (detto anche metodo delle tangenti) è un particolare metodo stazionario ad un punto, che cerca di approssimare una radice di una funzione derivabile $f(x)$ generando la successione:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Esercizio 3. Si implementi una funzione

```
function [xvec, valvec] = newton(f, df, x0, tol, maxit)
```

che esegua `maxit` passi del metodo di Newton per la funzione `f`, con derivata `df`, a partire dal punto `x0`. Il metodo termina prematuramente se si verifica la condizione $|f(x_n)|$ <`tol`. Infine si restituiscano i vettori `xvec` e `valvec` contenenti i punti x_n generati dal metodo di Newton e le corrispondenti valutazioni di f, in modo da poter valutare la convergenza.

Esercizio 4. Si applichi il metodo di Newton al calcolo degli zeri della funzione

$$f(x) = x^3 + 4x\cos(x) - 2,$$

nell'intervallo $[0, 2]$. Si testino vari punti di partenza x_0 e si traccino dei grafici che riportino l'andamento delle valutazioni (contenute in `valvec`) e dell'errore relativo. Per il calcolo di quest'ultimo si utilizzi il valore della radice α stimato con la funzione `fzero`.

Il metodo di Newton potrebbe non convergere

Esercizio 5. Si utilizzi il metodo di Newton per il calcolo della radice quadrata x di un numero positivo A, inteso come zero della funzione $f(x) = x^2 - A$. Si faccia partire l'algoritmo da un punto iniziale a scelta e si riprovi poi con il suo opposto, e poi con $x = 0$. Commentare i risultati alla luce della convergenza o meno del metodo e del valore a cui converge.