Esame di Ricerca Operativa del 09/01/15

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 7\,y_1 + y_2 + 6\,y_3 + 4\,y_4 + y_5 + 7\,y_6 \\ 2\,y_1 + y_3 - y_4 - 2\,y_5 - y_6 = -1 \\ -y_1 - y_2 + 2\,y_3 + 3\,y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x =$		
$\{1,\,4\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{4,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 50, 40 e 60 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

Stabilimento	costo giornaliero (euro)	produzione (tonnellate/giorno)		
		bassa	media	alta
1	350	6	4	3
2	400	2	3	5

Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

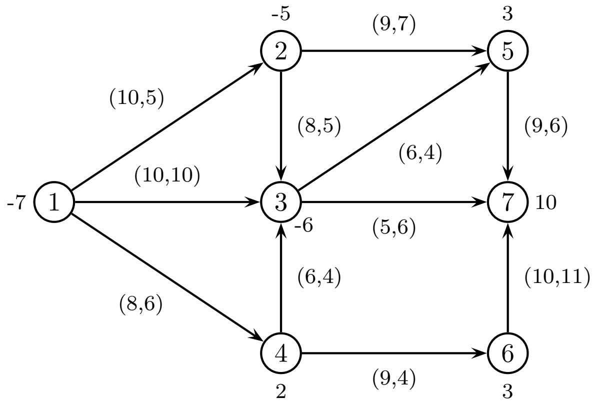
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

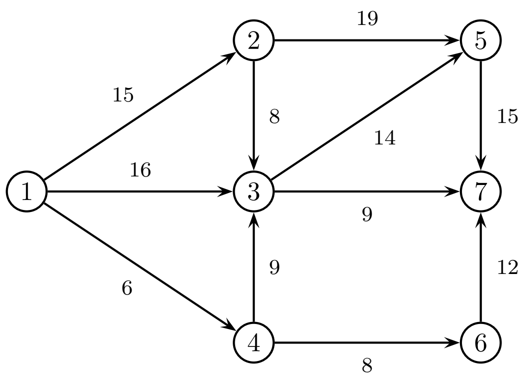


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

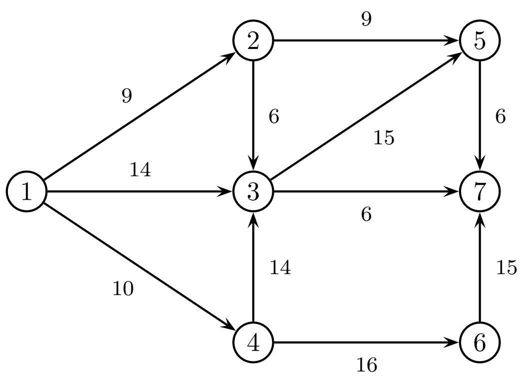
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \\ 11\ x_1 + 9\ x_2 \geq 60 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	91	62	42
2		25	54	56
3			9	11
4				13

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -10\, x_1 x_2 - 2\, x_2^2 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, 2)$, $(-4, 3)$, $(4, -4)$ e $(-2, -3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(3, -2)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 7\ y_1 + y_2 + 6\ y_3 + 4\ y_4 + y_5 + 7\ y_6 \\ 2\ y_1 + y_3 - y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -1 \\ -y_1 - y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -1)$	SI	NO
$\{1,\ 4\}$	$y = \left(-\frac{2}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$\left(-\frac{17}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$	2	2	6
2° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(-7,\ -1)$	$(0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	5	$\frac{2}{7},\ \frac{1}{2}$	2

Esercizio 3.

variabili decisionali:
x_1 = giorni di lavoro nello stabilimento 1
x_2 = giorni di lavoro nello stabilimento 2

modello: $\begin{cases} \min 350\,x_1 + 400\,x_2 \\ 6\,x_1 + 2\,x_2 \geq 50 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \geq 40 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 \geq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

COMANDI DI MATLAB

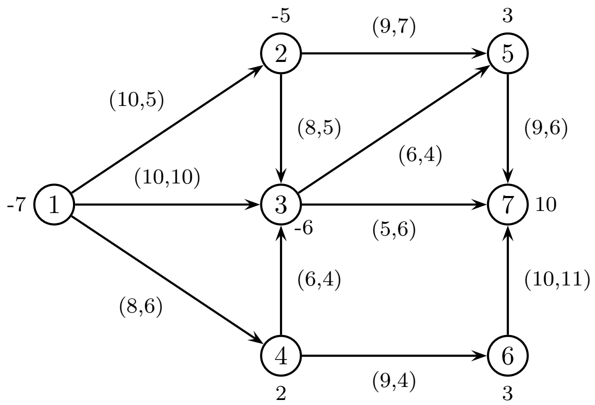
```
c=[ 350 ; 400]

A=[ -6 -2 ; -4 -3 ; -3 -5 ]          b=[ -50 ; -40 ; -60 ]

Aeq=[]                                beq=[]

lb=[0; 0]                             ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

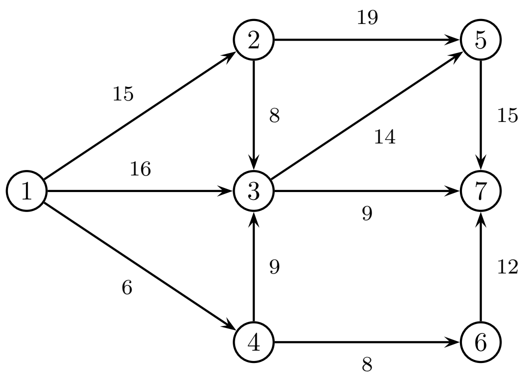


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

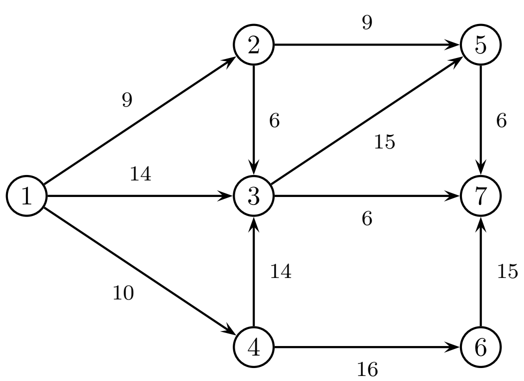
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	(0, 7, 10, 8, 16, 17, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	2 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		2		3		7		5	
nodo 2	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 3	16	1	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4
nodo 4	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	2	29	3	29	3	29	3
nodo 6	$+\infty$	-1	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4	14	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	6	26	6	24	3	24	3	24	3
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 7		3, 5, 7		5, 7		5		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0)	12
1 - 4 - 6 - 7	10	(6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \\ 11\ x_1 + 9\ x_2 \geq 60 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{33}{7}, \frac{19}{21}\right)$ $\qquad v_I(P) = 64$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 1)$ $\qquad v_S(P) = 68$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 9\, x_2 \geq 56$
$r = 2$ $\qquad 9\, x_1 + 14\, x_2 \geq 56$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	9	91	62	42
2		25	54	56
3			9	11
4				13

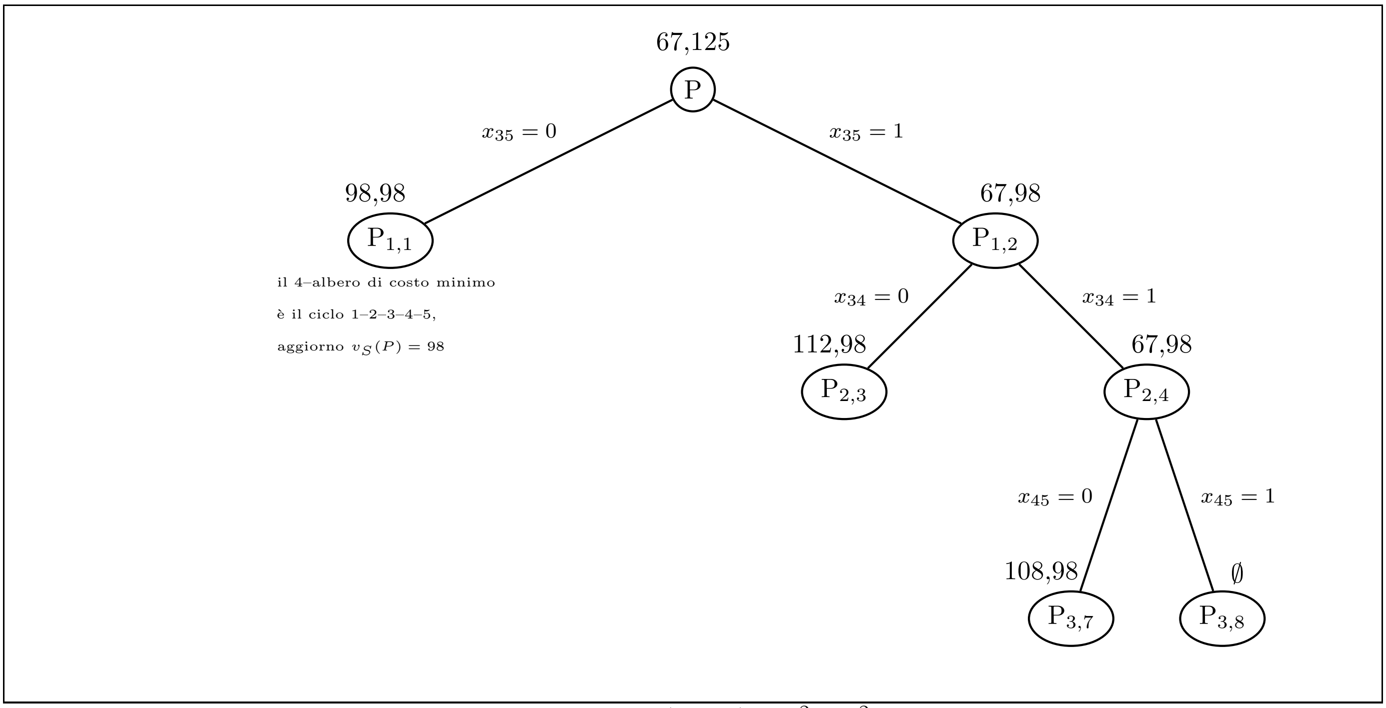
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 67$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $\qquad v_S(P) = 125$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \le 0, \quad -x_1 + x_2 - 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 0)$	$(0, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$	$(0, -1)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$(negativo, negativo)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}, -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$	$(negativo, negativo)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \; -10\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, 2)$, $(-4, 3)$, $(4, -4)$ e $(-2, -3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(3, -2)$	$(2, 1)$	$\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{74}{5}, -\dfrac{148}{5}\right)$	$\dfrac{5}{74}$	$\dfrac{5}{74}$	$(4, -4)$