Trasformata Z

Dato il segnale $\{u(k)\}$ la trasf z di $u(k)$ è:

$$\mathcal{Z}(u(k)) = U(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\, z^{-k}$$

$z \in \mathbb{C}$

se esistono dei valori z per cui $\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\, z^{-k}\right| < \infty$ allora $U(z)$ è la trasf Z di $u(k)$

Se considero sistemi causali: $\Rightarrow U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$ con $u_k = 0 \quad \forall k < \emptyset$

Esiste l'antitrasformata Z: $\Rightarrow u_k = \frac{1}{2\pi j} \oint U(z) \cdot z^{k-1}\, dz$

[integrale effettuato su percorso chiuso attorno all'origine del piano z che passa solo per z dove $U(z)$ esiste.]

Anche per la Z transform così come per quella di Laplace, l'antitrasf avviene per espansione in fratti semplici e confr con trasf NOTEVOLI:

$$U(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

la z-trasf in genere è un rapporto di polinomi in z.

Esempi di TRASFORM.

IMPULSO

$$\delta(k) \Rightarrow \underline{\delta(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)\, z^{-k} = \delta(0)\cdot z^{-\phi} = \boxed{1}$$

GRADINO

$$1(k) \Rightarrow \underline{1(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 1(k)\cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{k} =$$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{k} = \text{se } |\alpha| < 1 = \frac{1}{1-\alpha} \right| = \text{se } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \boxed{\frac{z}{z-1}}$$

Proprietà Trasform Z

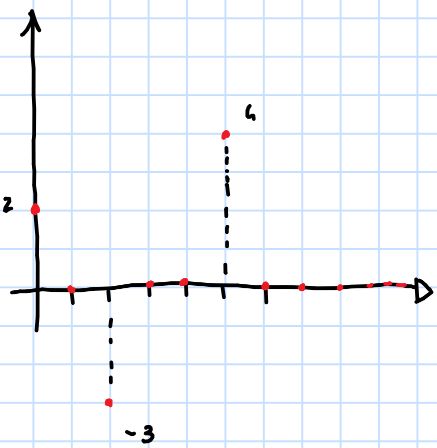
LINEARITÀ:

$$Z\{\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)\} = \alpha Z(x_1(k)) + \beta Z(x_2(k))$$

$$= \sum [\alpha x_1(k) + \beta(x_2(k))]\, z^{-k} = \alpha \sum x_1(k)\, z^{-k} + \beta \sum x_2(k)\, z^{-k}$$

$$= \alpha Z\{x_1(k)\} + \beta Z\{x_2(k)\} \quad !$$

TRASFORM DI UN SEGN DI DURATA FINITA



$$u(k) = 2\delta(k) - 3\delta(k-2) + 4\delta(k-5)$$

LI TRASFORMO SEPARATAMENTE

$$U(z) = \left(2 - 3z^{-2} + 4z^{-5}\right)\frac{z^5}{z^5} = \frac{2z^5 - 3z^3 + 4}{z^5}$$

{ segnali di durata limitata hanno radici del denomin in ∅ }

$$Z\{2\delta(k)\} = 2$$

$$Z\{-3\delta(k-2)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} -3\, \underbrace{\delta(k-2)}_{\neq 0 \text{ solo } k=2}\, z^{-k} = -3z^{-2}$$

$$Z\{4\delta(k-5)\} = 4z^{-5}$$

Trasformata di $\cos(\Omega k)$

$$\mathcal{Z}\left\{\cos(\Omega k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{j\Omega k}+e^{-j\Omega k}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{e^{j\Omega k}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{e^{-j\Omega k}\right\} =$$

- $$\mathcal{Z}\{\alpha^k\} = \sum \alpha^k \cdot z^{-k} = \sum\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-k} = \sum\left(\bar{z}\right)^{-k} = \sum\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} = \frac{z/\alpha}{\frac{z}{\alpha}-1}$$
$$= \frac{z}{z-\alpha}$$

siccome $e^{j\Omega k} = (e^{j\Omega})^k \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\,\frac{z}{z-e^{j\Omega}} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{z-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{2}\,\frac{z(z-e^{-j\Omega})+z(z-e^{j\Omega})}{(z-e^{j\Omega})(z-e^{-j\Omega})} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^2 - z e^{-j\Omega} + z^2 - z e^{j\Omega}}{z^2 + \underbrace{e^{j\Omega}\cdot e^{-j\Omega}}_{e^0=1} \underbrace{- z e^{-j\Omega} - z e^{j\Omega}}_{-z\left(e^{-j\Omega}+e^{j\Omega}\right)\frac{2}{2} = -2z\cos\Omega}} =$$

$-2z\cos\Omega$

$\cos\Omega$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2z^2 - 2z\cos\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1} = \boxed{\frac{z^2 - z\cos\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1} = \mathcal{Z}\left\{\cos(\Omega k)\right\}}$$

ed anche ... $\Rightarrow$ $$\boxed{\mathcal{Z}\left\{\sin(\Omega k)\right\} = \frac{z\sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}}$$

TRASLAZIONE NEL TEMPO

se $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$ $\qquad \mathcal{Z}\{f(k-k_0)\} = F(z) \cdot z_0^{-k_0}$

$$\mathcal{Z}\{f(k-k_0)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k-k_0)\, z^{-k} = \Big|_{k'=k-k_0} = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} f(k')\, z^{-(k'+k_0)} =$$

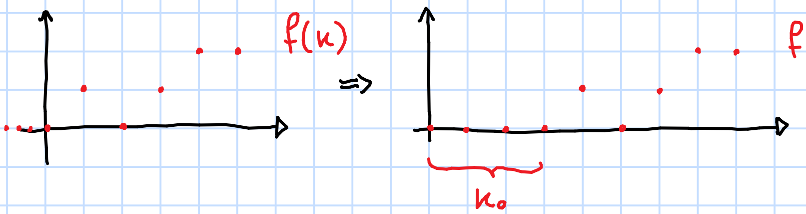
$$= \underbrace{\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} f(k')\, z^{-k'}}_{\mathcal{Z}\{f(k)\}} \cdot z^{-k_0} = F(z) \cdot z^{-k_0}$$

Cosa succede in caso di trasform per segnali causali?

$f(k) \neq 0$ solo se $k \geq \phi$

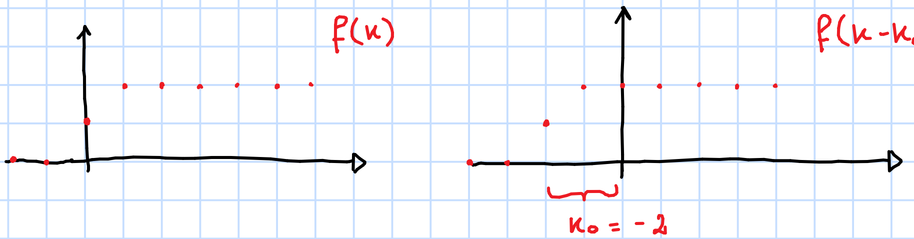
due casi:

1) $k_0 > 0$ (traslaz verso destra o RITARDO)



$\mathcal{Z}\{f(k-k_0)\} = F(z)\, z^{-k_0}$

II) $k_0 < \phi$ (traslaz a sx o ANTICIPO)



$$\mathcal{Z}\{f(k-k_0)\} = F(z) \cdot z^{-k_0} - \sum_{k=0}^{k_0-1} f(k)\, z^{-(k+k_0)}$$

ex: $\boxed{\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = z F(z) - z f(0)}$!

Interpretazione del termine z^{-1}

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1} F(z)$$

$$Z\{f(k-2)\} = z^{-2} F(z)$$

$$\vdots$$

z^{-1} può essere considerato come un "operatore" ritardo di un istante di tempo

$$f(k) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow f(k-1)$$

z quindi è l'operatore ANTICIPO!

Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

Th del valore finale

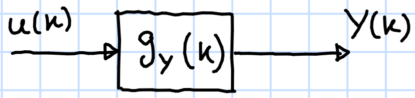
$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) F(z)$$

Trasformata della somma di convoluzione

$$Z\{u(k) * g(k)\} = G(z) \cdot U(z)$$

Se ho un sistema T.D. LTI con risposta impulsiva $g_y(k)$ so che:

$$Y(k) = g_y(k) * u(k)$$

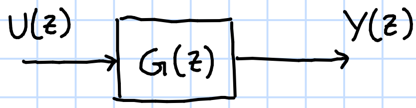


z trasf.

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$\longrightarrow G(z) = Z\{g_y(z)\}$$

$G(z)$ funzione di trasf del sistema



Il guadagno statico di un sistema

T.C. $G(0) = G(s)\big|_{s=\emptyset}$ in $s = \emptyset$

T.D.

Ipotesi $u(k)$ = costante, $Y(k)$ converge ad un valore costante

$$u(k) = 1 \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1} \cdot G(z)$$

T. Val finale

$$\lim_{k \to \infty} Y(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot G(z) = \underline{G(1)}\ !$$

guad statico del sist!

in $z = 1$

Z TRASF. NOTEVOLI

$u(k)$	$U(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k) = H(k)$	$z/z-1$
$kH(k)$ RAMPA	$z/(z-1)^2$
$k^m H(k)$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m \left(z/z-1\right)$
$\alpha^k H(k)$	$z/z-\alpha$
$k^m \alpha^k H(k)$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^m \left(z/z-\alpha\right)$
$\sin(k\Omega)$	$\frac{z \sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}$
$\cos(k\Omega)$	$\frac{z^2 - z\cos\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}$
$a^k \sin(k\Omega)$	$\frac{z \cdot a \sin\Omega}{z^2 - 2az\cos\Omega + 1}$
$a^k \cos(k\Omega)$	$\frac{z^2 - za\cos\Omega}{z^2 - 2az\cos\Omega + 1}$

Calcolo della T.F. della mappa di aggiorn del sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \xrightarrow[\mathcal{Z}\{\}]{} Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$\mathcal{Z}\{\}$

ANTICIPO...

$$\mathcal{Z}\{x_{k+1}\} = \mathcal{Z}\{Ax_k\} + \mathcal{Z}\{Bu_k\} = AX(z) + BU(z)$$

$$zX(z) - zX(0) = AX(z) + BU(z)$$

$$[zI-A]X(z) = zX(0) + BU(z) \xrightarrow[{[zI-A]^{-1}}]{} X(z) = [zI-A]^{-1}zX(0) + [zI-A]^{-1}BU(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{C[zI-A]^{-1}z \cdot X(0)}_{\mathcal{Z}\{A^k x_0\}} + \underbrace{C[zI-A]^{-1}BU(z) + DU(z)}$$

$\mathcal{Z}\{A^k x_0\}$ notare che $\mathcal{Z}\{\alpha^k\} = \frac{z}{z-\alpha} = (z-\alpha)^{-1}z$

che è la z trasf della risposta libera

se pongo $x_0 = \varnothing \Rightarrow$ Risposta Forzata

$$\boxed{Y(z) = \left(C[zI-A]^{-1}B + D\right)U(z) = G(z)U(z)}$$

$Y(s) = \left(C[sI-A]^{-1}B + D\right)U(s)$ nel T.C.

praticamente identici!