ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 36

Note Title 19/11/2018

DIAGONALIZZAZIONE

<u>Def.</u> Siano A e B due matrici $n \times n$.
Diciamo che A è SIMILE a B se esiste M matrice $n \times n$ invertibile tale che

$$\boxed{B = M^{-1} A M}$$

Morale: A e B sono simili se rappresentano la stessa applic. lin. in due basi diverse (M = matrice cambio base)

<u>Def.</u> (Diagonalizzazione di matrici)
Sia A matrice $n \times n$. Diagonalizzare A vuol dire trovare una matrice D <u>diagonale</u> simile ad A, cioè t.c.

$$D = M^{-1} A M$$

(contestualmente uno trova anche M)

<u>Def.</u> (Diagonalizz. di applic.)
Sia V sp. vett. di dim. finita, e sia $f : V \to V$ applic. lin.
Diagonalizzare f vuol dire trovare una base di V costituita da autovettori di f.

<u>Collegamento</u>: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V fatta da autovett. di f, cioè $f(v_i) = \lambda_i$, allora la matrice di f usando $\{v_1, \dots, v_n\}$ in partenza ed arrivo è

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow f(v_1) & \end{array}$$

<u>Domande</u>: ① è sempre possibile diagonalizzare matrice / applicazione ? MAGARI!

② Se sì, come trovo M oppure $\{v_1, \dots, v_n\}$? <u>Lezione</u>

③ Se no, cosa faccio quando non è diagonalizzabile ? FORMA DI JORDAN

④ Come capisco se è diagonalizzabile ?

— o — o —

$\boxed{\text{POLINOMI A COEFF. REALI / COMPLESSI}}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

coefficienti e sono numeri (interi, reali o complessi)

Se $a_n \neq 0$, allora n si dice grado del polinomio.

<u>Def</u>. (Radici e molteplicità) Sia $p(x)$ un polinomio

- Si dice che α è radice del polinomio se $p(\alpha) = 0$ (α può essere reale o complessi)

<u>Fatto generale</u> (teo. di Ruffini) Se $p(\alpha) = 0$, allora posso dividere $p(x)$ per $(x - \alpha)$, cioè ottenere

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$$

nuovo polinomio di grado $n-1$

- Si dice <u>molteplicità</u> di una radice α il più grande intero m tale che $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$, cioè

$$p(x) = (x - \alpha)^m\, q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$, altrimenti avrei un altro fattore $x - \alpha$ da mettere in evidenza

Oss. Se $p(x)$ è un polinomio e α è radice di molteplicità m, allora

$$\underbrace{p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \dots = p^{(m-1)}(\alpha)}_{\text{derivate fino all'ordine } m-1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \underbrace{p^{(m)}}_{\substack{\text{derivata} \\ m\text{-esima}}}(\alpha) \neq 0$$

Teorema sui polinomi

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. complessi (se sono reali, va bene uguale) di grado n.

Allora

(1) $p(x)$ ammette ESATTAMENTE n radici COMPLESSE (anche se i coeff. sono tutti reali, le radici possono NON essere reali) se CONTATE CON MOLTEPLICITÀ

(2) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici di $p(x)$, sempre con molteplicità, allora

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Oss. Le due formule si semplificano se $p(x)$ è MONICO cioè se $a_n = 1$ (coeff. termine grado + alto = 1)

Esempi $\quad x^2 + 12x + 23 = 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = -12$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 23$

$x^2 - 8x + 15 = 0$ ha come radici 3 e 5 $\quad (S = 8 \quad P = 15)$

$2x^3 + 7x + 13 = 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \left(-\frac{a_2}{a_3}\right)$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{13}{2} \quad = (-1)^3 \frac{a_0}{a_3}$

(1) Parte facile: $p(x)$ ammette al MASSIMO n radici.
Supponiamo che $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ siano n radici, eventualmente coincidenti. Allora, potendo dividere troviamo

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{a_n}}{\text{numero}}$$

Se sostituisco ad x un valore diverso dalle radici già trovate non può più venire 0.

Altra parte facile: se tutti i polinomi hanno almeno una radice, allora ne hanno esattamente n

$$p(x) \underset{\substack{p \text{ ha} \\ \text{almeno 1} \\ \text{radice}}}{=} (x-\alpha_1)\, q(x) \underset{\substack{\alpha_2 \text{ radice} \\ \text{di } q(x)}}{=} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\, r(x) = \ldots$$

e così via

Parte molto difficile (TEO. FOND. DELL'ALGEBRA): ogni $p(x)$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice.

(2) Casi semplici con grado basso e polinomi monici

$\boxed{n=2}$ $$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{-a_1} x + \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{a_0}$$

$\boxed{n=3}$ $$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

$$= x^3 \underbrace{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}_{a_2} x^2 + \underbrace{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)}_{a_1} x \underbrace{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{a_0}$$

In maniera analoga per induzione si dimostra per tutti i gradi.

—o—o—

Def. Sia A una matrice.

(1) Si dice polinomio caratteristico di A il polinomio

$$p(\lambda) = \text{Det}\,(A - \lambda Id)$$

le cui radici abbiamo visto essere gli autovalori di A

(2) Dato λ autovalore di A, si dice

- Molteplicità algebrica di λ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

- Molteplicità geometrica di λ la dimensione dell'autospazio cioè

$$\dim(\ker(A - \lambda Id))$$

Prop 1 Per ogni autovalore λ di A si ha che

$$\boxed{1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$$

molt. geom. ≤ molt. alg.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Caratt. della diagonalizzabilità)
Una matrice A di dim $n \times n$ è diagonalizzabile sui reali se e solo se
- ha n autovalori reali
- $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni autovalore

Conseguenza 1 Se non ci sono n autovalori reali, allora addio diagonalizzabilità sui reali

Conseguenza 2 Se $p(\lambda)$ ha n radici distinte reali, allora $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$ per ogni autovalore, quindi A è diagonalizz.

— o — o —