Il campo magnetico generato da correnti

Hans Christian Ørsted
(1777 –1851)

- ✓ Siamo in Danimarca nel 1820: durante alcuni esperimenti all'Università di Copenhagen, il fisico danese Hans Christian Oersted si accorge che *l'ago di un compasso magnetico viene deflesso se avvicinato ad un circuito elettrico*
- ✓ ciò significa che il ***circuito elettrico è in grado di generare un campo magnetico***, proprio come fosse un magnete !!

- ✓ E' un momento storico, che segna *l'unificazione di due fenomeni fino ad allora considerati totalmente distinti, ovvero elettricità e magnetismo*. Nasce l'***elettromagnetismo***.

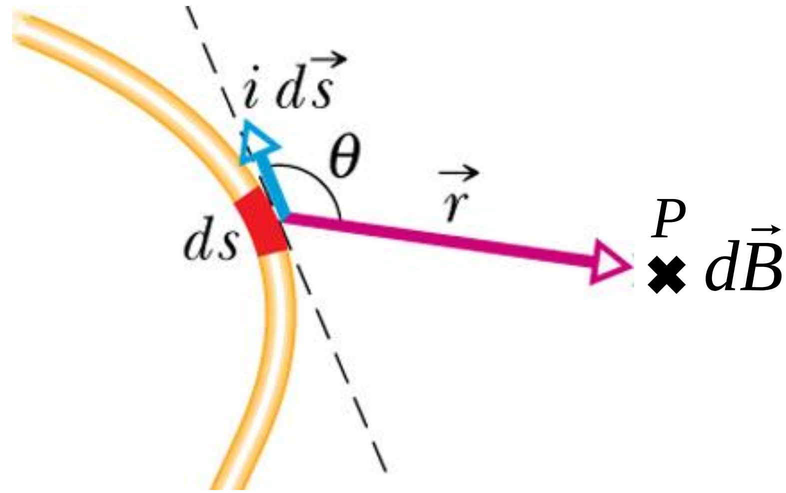
Legge di Biot-Savart

Jean-Baptiste Biot (Parigi, 1774-1862)

Félix Savart (Charleville, 1791-1841)

- ✓ Sia ***ds*** una porzione infinitesima di filo percorso da corrente *i*
- ✓ il campo magnetico *d**B*** generato da ***ds*** in un punto P dello spazio è dato da:

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\, d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$



✓ Il campo *d**B*** è perpendicolare al piano formato dall'elemento di filo ***ds*** e dalla distanza ***r*** tra ***ds*** ed il punto *P*; se ***ds*** ed ***r*** sono entrambi paralleli alla pagina, *d**B*** è perpendicolare ed entrante nella pagina

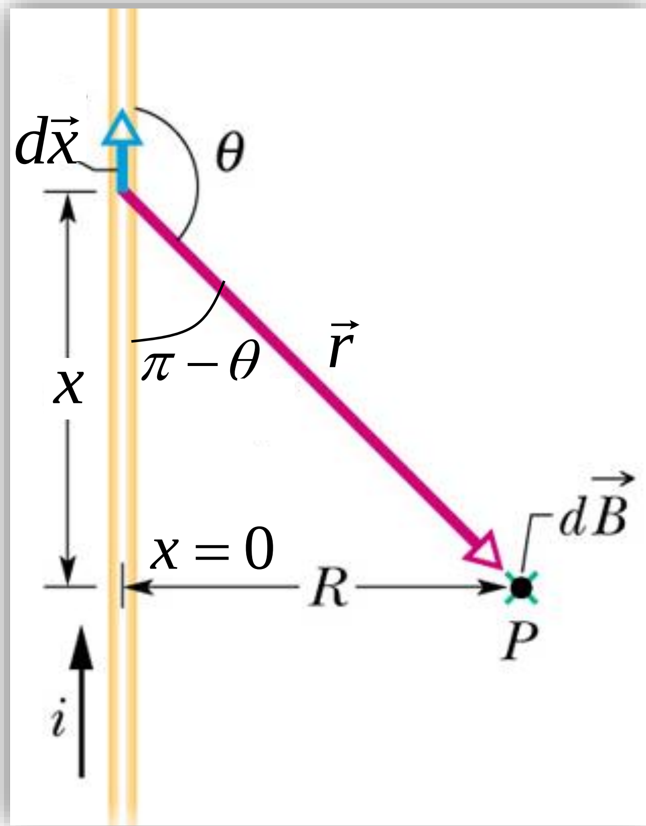
✓ *d**B*** dipende dal quadrato della distanza dal filo, in analogia con il campo elettrico che dipende dal quadrato della distanza dalla carica che lo genera;

✓ μ_0 è una costante universale detta **permeabilità magnetica del vuoto**:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\left(\frac{T\,m}{A}\right) \approx 1.26 \times 10^{-6}\left(\frac{T\,m}{A}\right)$$

NB: μ_0 non ha la dimensione fisica del dipolo magnetico

Campo magnetico generato dal filo rettilineo infinito



- ✓ Consideriamo un filo rettilineo infinito, percorso da corrente *i*, orientato lungo *x*
- ✓ secondo Biot-Savart, il campo ***dB*** generato nel punto *P* da un segmento infinitesimo *dx* è perpendicolare alla pagina, e di verso entrante; in modulo:

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,dx\sin(\theta)}{r^2}$$

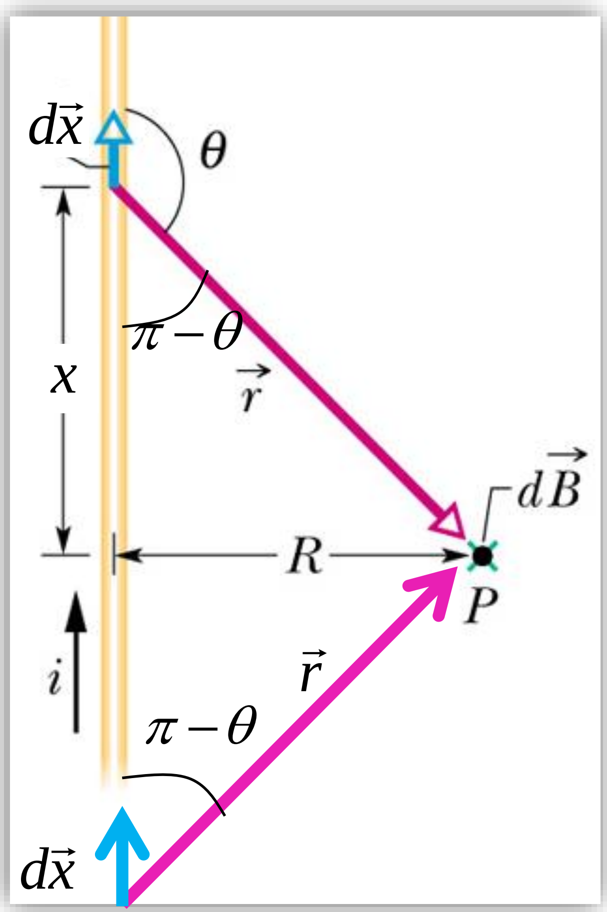
- ✓ Poniamo in $x = 0$ il punto del filo più vicino a *P*, e riscriviamo *r* e sen(θ) in funzione di *x*
- ✓ Infine integriamo in *x* lungo il filo tra 0 ed ∞ (ovvero sulla metà superiore del filo)

$$r^2 = x^2 + R^2 \qquad r\sin(\pi-\theta) = r\sin(\theta) = R \quad \Rightarrow \sin(\theta) = R/r$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}\right)\int_0^\infty dx\frac{\sin(\theta)}{r^2} = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}\right)R\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Campo magnetico generato dal filo rettilineo infinito

L'integrale notevole ha soluzione* $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$



- ✓ Consideriamo infine che a ciascun elemento infinitesimo *d***x** nella metà superiore del filo corrisponde un *d***x** nella metà inferiore, disposto alla stessa distanza *r* da P, il quale genera lo stesso campo ***dB*** in modulo, direzione e verso
- ✓ dunque il campo generato da tutto il filo è il doppio del campo generato dalla metà superiore; il campo totale generato nel punto P è quindi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

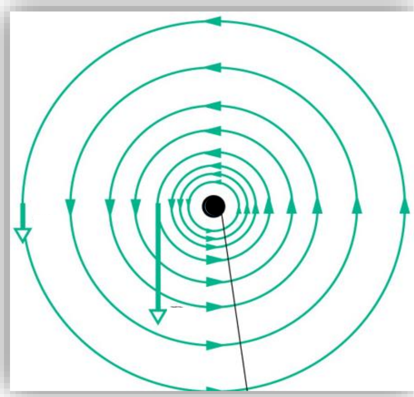
In pratica, la formula è valida se la **lunghezza del filo è molto maggiore della distanza** *R* tra il filo ed il punto in cui si calcola il campo

*Lo svolgimento dell'integrale è riportato nell'ultima slide

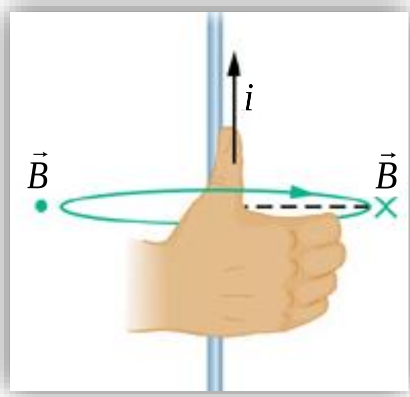
Campo magnetico di un filo infinito

- ✓ in tutti i punti dello spazio, *B* dipende soltanto dalla distanza *R* dal filo, dunque le sue linee di flusso (in verde) sono **cerchi concentrici**, nel piano perpendicolare alla direzione del filo; il campo ha **simmetria cilindrica**
- ✓ **L'intensità del campo è inversamente proporzionale** ad *R*; dunque la densità dei cerchi si riduce allontanandosi dal filo
- ✓ ***B*** è sempre perpendicolare al filo e alla distanza ***R*** dal filo
- ✓ Il verso di ***B*** si ottiene dalla seguente regola della mano destra: orientando il pollice lungo *i*, le 4 dita indicano il verso di ***B***

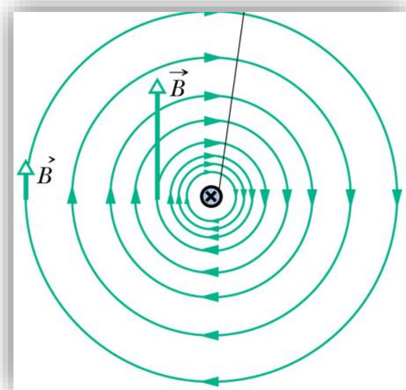
filo perpendicolare entrante nella pagina



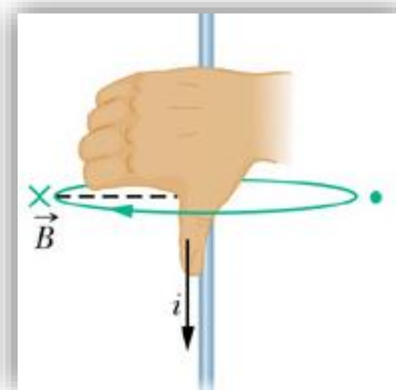
vista laterale



filo perpendicolare uscente dalla pagina

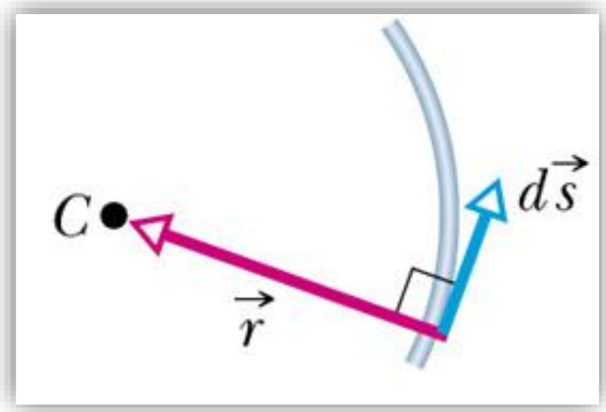


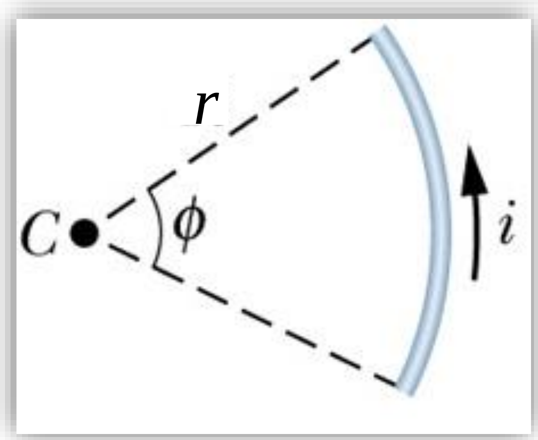
vista laterale



Spargendo limatura di ferro su un piano perpendicolare al filo si possono osservare le linee di flusso del campo: **filmini**

Campo magnetico di un filo piegato ad arco





- ✓ Calcoliamo il **campo magnetico generato da un arco nel suo centro di curvatura** (C)
- ✓ In questo caso ***ds*** ed ***r*** sono sempre perpendicolari, per cui:

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,ds}{r^2}$$

- ✓ ***B*** è perpendicolare ed uscente dalla pagina
- ✓ per ottenere il campo dell'intero arco dobbiamo integrare in *ds*; essendo *r* costante:

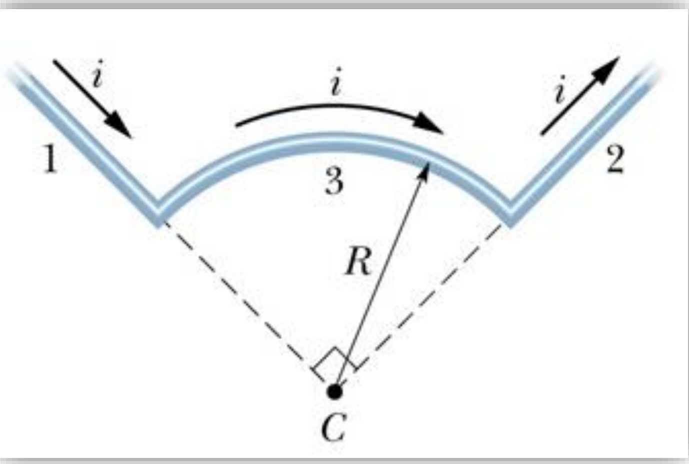
$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,s}{r^2}$$

esprimendo la lunghezza *s* in termini dell'angolo sotteso ϕ in radianti, si ha:

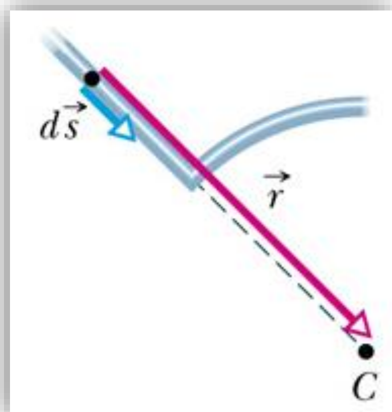
$$\phi_{rad}\, r = s \quad \Rightarrow B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,\phi_{rad}}{r}$$

Per $\phi_{rad} = 2\pi$ si ha il campo generato dalla spira circolare nel centro: $B = \dfrac{\mu_0 i}{2r}$

Problema 29.1



- ✓ Consideriamo il filo in figura, percorso da corrente i=8 A; sia R=4 cm; calcolare modulo, direzione e verso del campo magnetico nel punto C
- ✓ Possiamo calcolare ***B*** come somma dei campi dovuti a 3 elementi distinti: i due tratti rettilinei è l'arco di curva nel mezzo

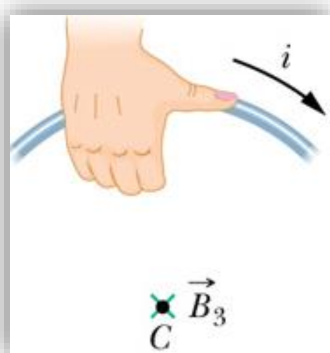


I tratti rettilinei non contribuiscono al campo, poiché per ogni tratto infinitesimo del filo i vettori *d**s*** ed ***r*** sono paralleli, dunque il corrispondente *d**B*** è nullo

Per l'arco applichiamo la formula: $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\phi_{rad}}{R}$$

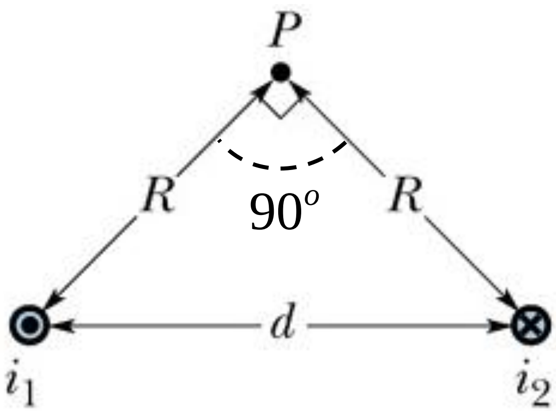
Dalla figura si vede che l'angolo sotteso è $\phi = \pi/2$, per cui:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\pi}{2R} = 10^{-7}\left(\frac{T\,m}{A}\right)\frac{8A\pi}{8\,cm} = \pi\times 10^{-5}\,T$$

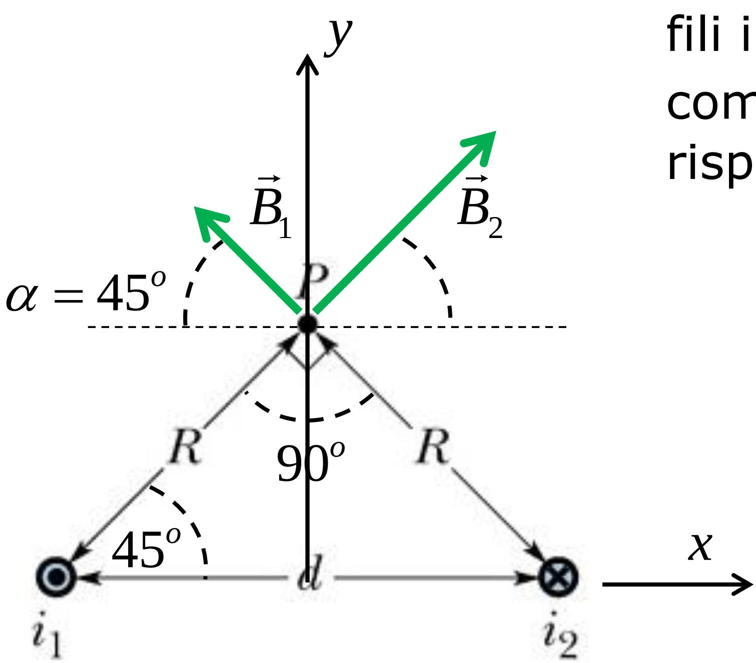


Infine dalla regola della mano destra si ha che il campo è diretto in verso entrante nella pagina

Problema 29.2



- ✓ In figura è mostrata la sezione di due lunghi fili paralleli, in cui scorrono correnti i_1 = 16 A e i_2 =32 A dirette in verso opposto; sia d=4 cm
- ✓ Determinare il campo magnetico totale generato dai due fili carichi nel punto P in coordinate cartesiane
- ✓ Determinare il modulo del campo
- ✓ Determinare l'angolo β che il campo totale forma con l'asse x



Siano $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ i campi magnetici generati dai due fili in P; essi sono perpendicolari ad $\boldsymbol{R}$ e orientati come mostrato in figura, con angolo α=45° rispetto all'asse x; dall'analisi geometrica si ha:

$$R\cos(45^o) = d/2 \Rightarrow R = d/\sqrt{2}$$

il modulo di $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ è dato da:

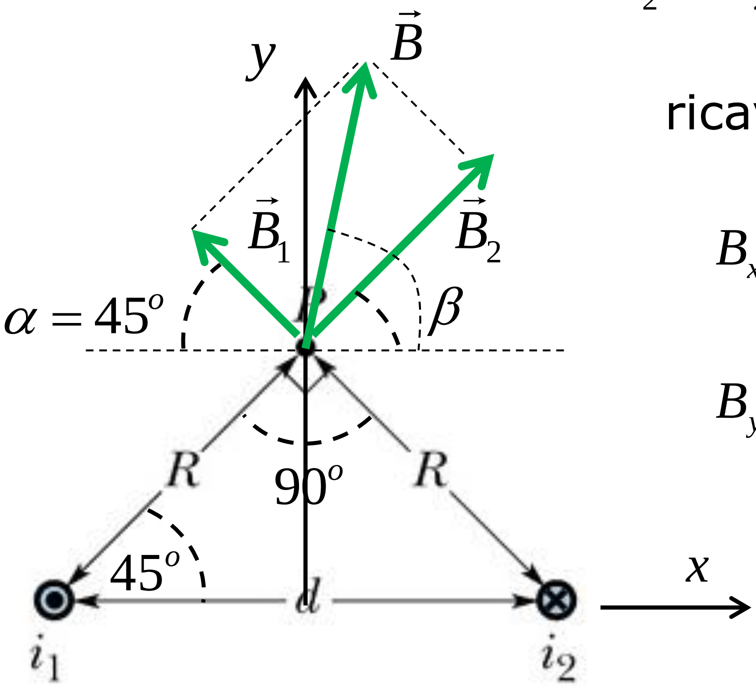
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sqrt{2}\,i_1}{d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sqrt{2}\,i_2}{d}$$

Problema 29.2

Per calcolare il campo totale esprimiamo $\boldsymbol{B}_1$ e $\boldsymbol{B}_2$ in termini di componenti cartesiane lungo x ed y:

$$\vec{B}_1 = -B_1 \cos(45^o)\hat{x} + B_1 \sin(45^o)\hat{y} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi\, d}\hat{x} + \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\, d}\hat{y}$$

$$\vec{B}_2 = B_2 \cos(45^o)\hat{x} + B_2 \sin(45^o)\hat{y} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\, d}\hat{x} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\, d}\hat{y}$$



ricaviamo le componenti del campo totale $\boldsymbol{B}$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi\, d}\left(i_2 - i_1\right) = 2\times10^{-7}\,\frac{Tm}{A}\,\frac{1}{4\,cm}16A = 8\times10^{-5}T$$

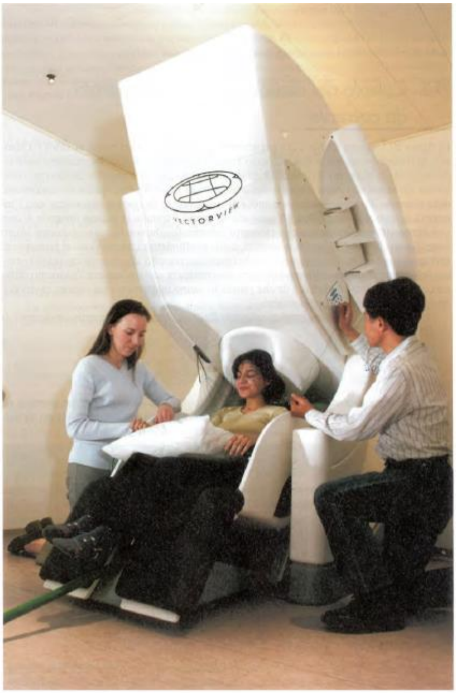
$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi\, d}\left(i_2 + i_1\right) = 2\times10^{-7}\,\frac{Tm}{A}\,\frac{1}{4\,cm}48A = 24\times10^{-5}T$$

Infine ricaviamo modulo e direzione del campo totale lungo l'asse x:

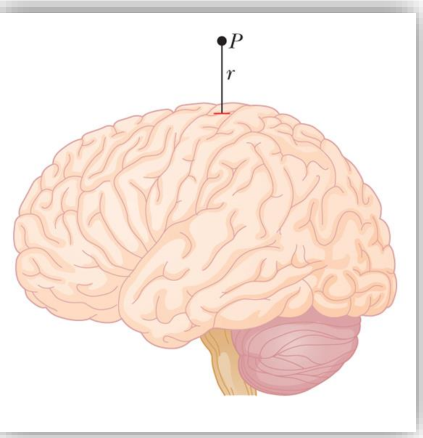
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_x^2} = 25.3\times10^{-5}T$$

$$\tan(\beta) = \frac{B_y}{B_x} = 3 \Rightarrow \beta = 71.6^0$$

Campo magnetico dovuto all'attività cerebrale



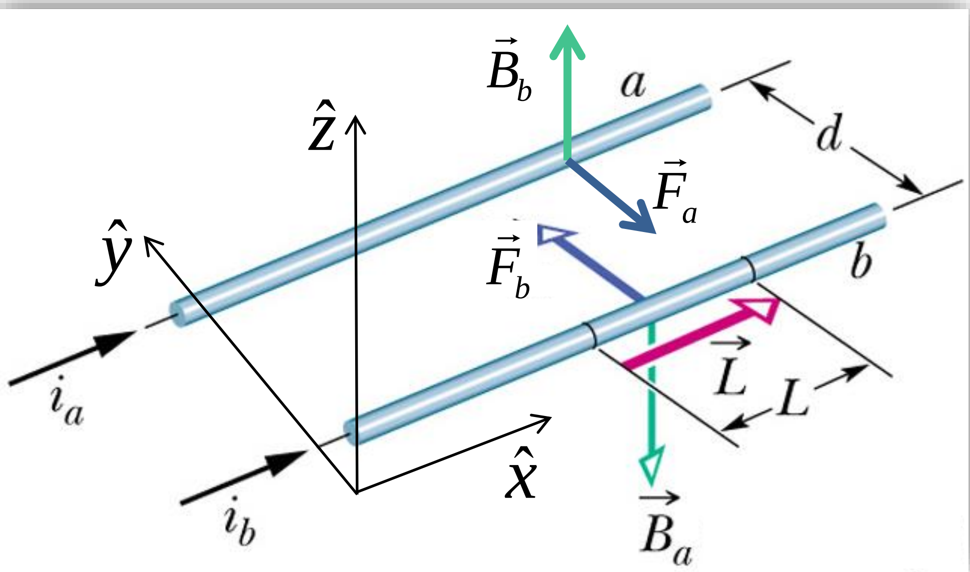
- ✓ Applicazione importante del campo magnetico generato da circuiti elettrici è la ***magnetoencefalografia*** (MEG), ovvero il *monitoraggio del campo magnetico generato dalle correnti elettriche cerebrali*
- ✓ Una qualsiasi attività cerebrale genera impulsi elettrici che connettono le cellule cerebrali viaggiando attraverso canali conduttivi
- ✓ Stimiamo il campo magnetico prodotto dalle correnti cerebrali in un punto *P* distante *r*=2 cm dalla corteccia; ipotizziamo che la corrente sia perpendicolare ad *r*; un tipico impulso cerebrale è caratterizzato da correnti *i*= 10 μA, che viaggiano per distanze del mm; dunque assumo ds=1 mm, e da Biot-Savart ottengo:



$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,ds}{r^2} = 10^{-7}\left(\frac{T\,m}{A}\right)\frac{10\mu A\times 10^{-3}m}{4\times 10^{-4}m^2} = 0.25\times 10^{-11}T = 2.5\,pT$$

- ✓ Benché sia un **campo piccolissimo**, esso è rivelabile mediante strumenti molto sofisticati detti **SQUID** (*superconducting quantum interference device*) usati per la MEG, capaci di rivelare campi magnetici inferiori al pT

Forze tra due fili conduttori paralleli



- ✓ Calcoliamo la forza esercitata tra due fili conduttori paralleli *a*, *b*, percorsi da correnti i_a, i_b di verso concorde
- ✓ Consideriamo un riferimento con l'asse *x* parallelo ai fili e *z* perpendicolare al piano dei fili; siano $\boldsymbol{B}_a$ e $\boldsymbol{B}_b$ i campi generati da i_a e i_b

Il campo generato dal filo *a* in un qualunque punto del filo *b* è: $\vec{B}_a = -\dfrac{\mu_0 i_a}{2\pi d}\hat{z}$

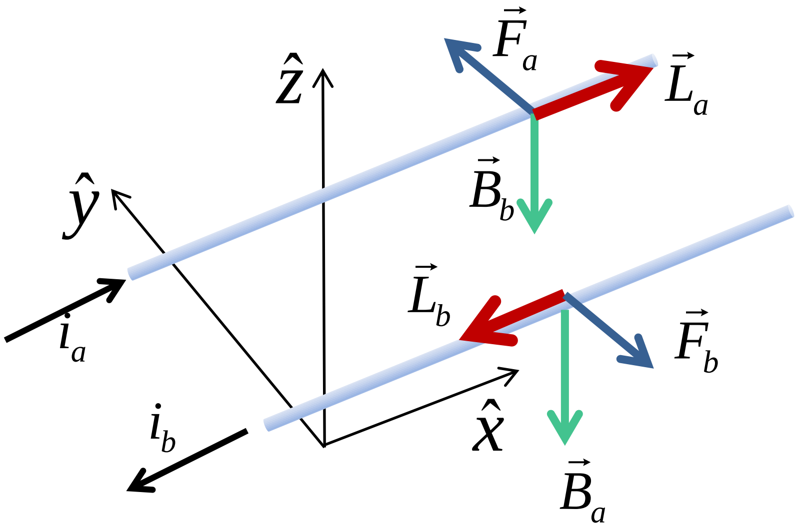
Il campo generato da *b* in un qualunque punto di *a* è: $\vec{B}_b = \dfrac{\mu_0 i_b}{2\pi d}\hat{z}$

la forza che agisce su una sezione *L* del filo *b*: $\vec{F}_b = i_b \vec{L}_b \times \vec{B}_a = \dfrac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}\hat{y}$

La forza che agisce su una sezione L del filo *a*: $\vec{F}_a = i_a \vec{L}_a \times \vec{B}_b = -\dfrac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}\hat{y}$

Due **fili percorsi da correnti concordi si attraggono** con una forza uguale in modulo e direzione ed opposta in verso (principio di azione e reazione)

Forze tra due fili conduttori paralleli



Invertiamo il verso di i_b e ricalcoliamo le forze per le due correnti discordi

Il campo generato da *a* resta lo stesso: $\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}\hat{z}$

poiché $\boldsymbol{L}_b$ ha cambiato verso, anche la forza che agisce su *b* cambia verso:

$$\vec{F}_b = i_b \vec{L}_b \times \vec{B}_a = -\frac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}\hat{y}$$

il campo generato da *b* cambia verso: $\vec{B}_b = -\frac{\mu_0 i_b}{2\pi d}\hat{z}$

La forza che agisce sul filo *a*: $\vec{F}_a = i_a \vec{L}_a \times \vec{B}_b = \frac{\mu_0 i_a i_b L}{2\pi d}\hat{y} = -\vec{F}_b$

- ✓ Due **fili percorsi da correnti discordi si respingono** con una forza uguale in modulo e direzione ed opposta in verso
- ✓ la forza è proporzionale al prodotto delle correnti e inversamente proporzionale alla distanza tra i fili

Legge di Ampère

André-Marie Ampere (Lione 1775-1836). Il suo nome è inciso sulla Torre Eiffel

James Clerk Maxwell (Edimburgo 1831-1879). Al pari di Newton ed Einstein, è tra i più grandi fisici teorici della storia

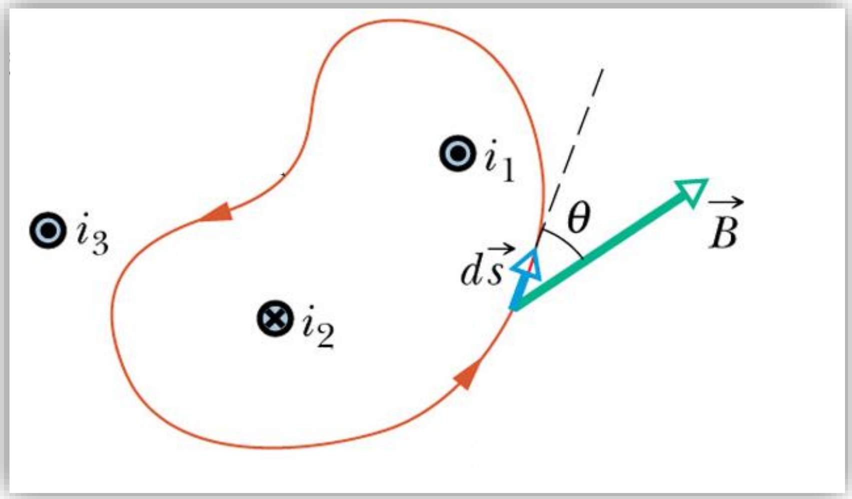
- ✓ La legge di Ampère è **l'analogo magnetico della legge di Gauss per l'elettrostatica**: sfruttando principi di simmetria, essa **permette il calcolo del campo magnetico generato da correnti** in modo semplificato rispetto alla formulazione di Biot-Savart
- ✓ La legge prende il nome dal fisico francese **André-Marie Ampère**, a cui è storicamente attribuita. In realtà la formulazione rigorosa si deve al grande fisico e matematico scozzese **James Clerk Maxwell**, il vero fondatore della teoria classica dell'elettromagnetismo.

Legge di Ampère: l'integrale di linea (curvilineo) del campo magnetico lungo un cammino chiuso è uguale alla corrente complessiva che attraversa la superficie delimitata dal circuito chiuso, moltiplicata per la permeabilità magnetica del vuoto

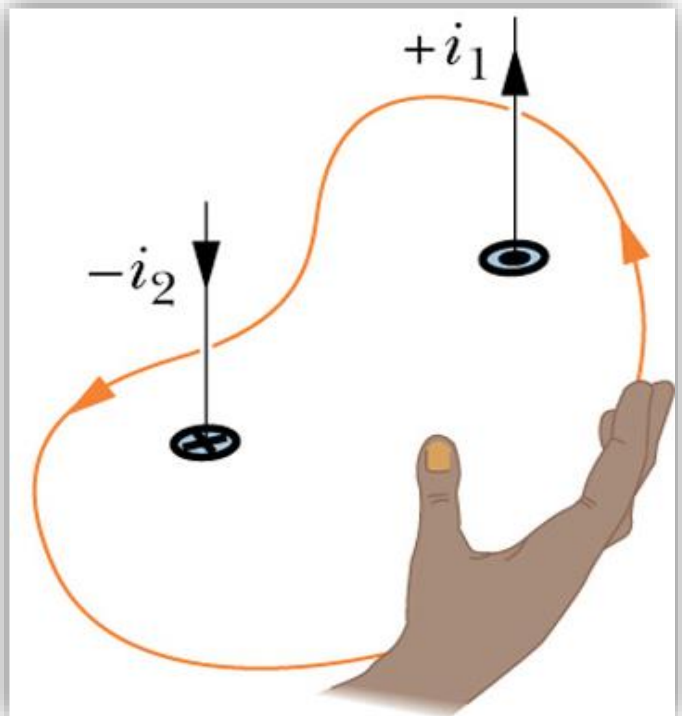
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{T\,m}{A} \right)$$

Legge di Ampère



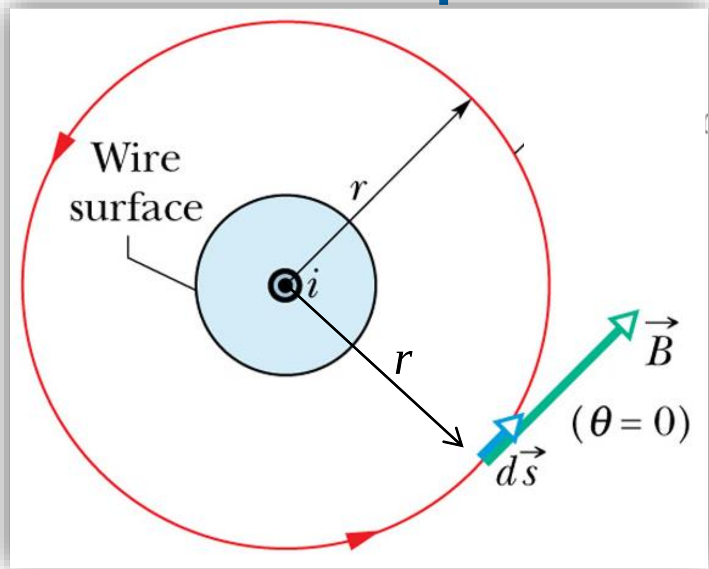
- ✓ Consideriamo il campo ***B*** generato da 3 correnti perpendicolari al piano della figura, ed il cammino chiuso disegnato in rosso
- ✓ ***B*** è generato da tutte le 3 correnti, ma solo i_1 e i_2 che attraversano la superficie delimitata dal circuito chiuso (detto Amperiano) contribuiscono all'integrale di linea



- ✓ Con che segno ciascuna corrente contribuisce all'integrale? Il segno dipende dal verso di integrazione:
- ✓ supponiamo che il verso di integrazione (ovvero di *d**s***) sia quello della freccia lungo il percorso: orientando le 4 dita della mano destra nel verso d'integrazione, sono positive le correnti con verso concorde col pollice, negative quelle opposte al pollice. Dunque:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}} = \mu_0\left(i_1 - i_2\right)$$

Campo magnetico all'esterno di un filo percorso da corrente



- ✓ Utilizziamo la legge di Ampère per calcolare il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito in cui scorre corrente *i*
- ✓ Sappiamo da Biot-Savart che ***B*** è perpendicolare alla direzione del filo e al vettore ***r***, e che in modulo dipende soltanto dalla distanza *r*; ovvero il **campo ha simmetria cilindrica**

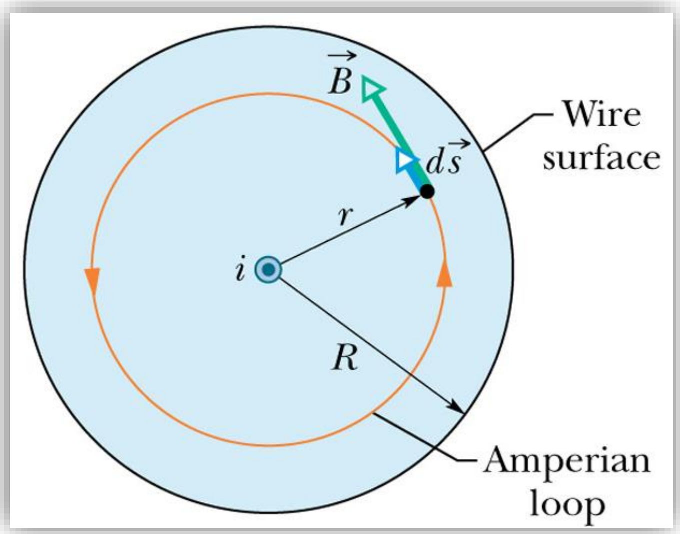
La scelta più semplice per risolvere l'integrale sul circuito è quindi quella di prendere un circuito circolare centrato attorno al filo, poiché lungo il cerchio il campo è costante in modulo e sempre parallelo al vettore spostamento *d**s***. Dunque:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\, ds = B \oint ds = B(2\pi r)$$

Applicando quindi la legge di Ampère, si trova (molto più semplicemente che integrando la formula di Biot-Savart):

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Campo magnetico all'interno del filo



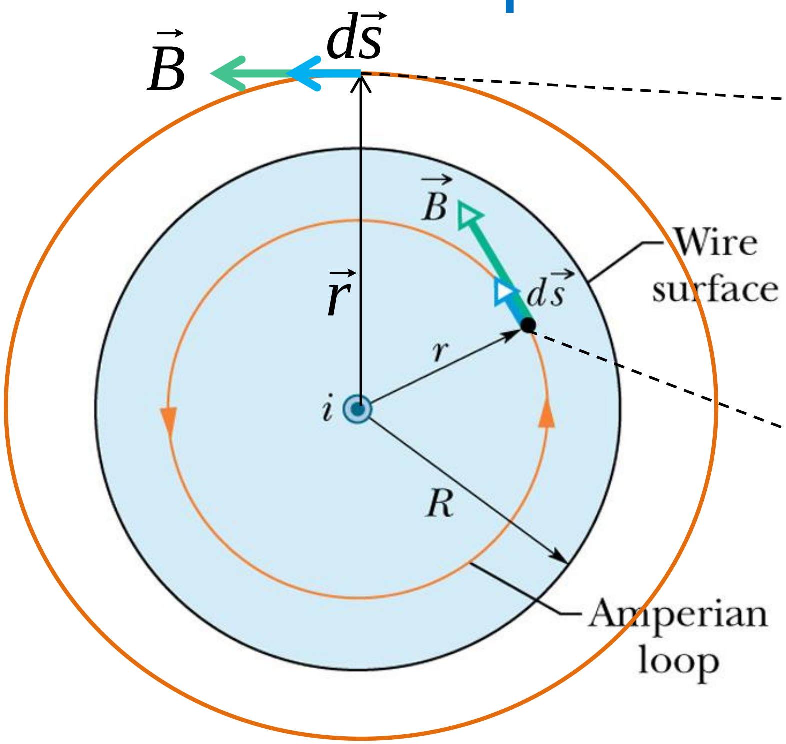
- Calcoliamo il campo magnetico generato dal filo in un punto interno alla sezione del filo (sia *R* il raggio della sezione); si supponga la **densità di corrente *J* uniforme all'interno del filo**
- Il campo magnetico ha ancora **simmetria cilindrica**, e stessa direzione e verso che all'esterno del filo
- considerando l'integrale lungo un cerchio di raggio $r < R$, si ripete lo sviluppo visto per il campo esterno al filo, ottenendo, per la legge di Ampére:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 \, i'$$

- Adesso *i'* è la corrente che **scorre internamente al cilindro di raggio *r***
- Essendo *J* uniforme, se $A = \pi R^2$ è l'area totale della sezione del filo, e $A' = \pi r^2$ l'area della sezione interna al circuito amperiano, si ha:

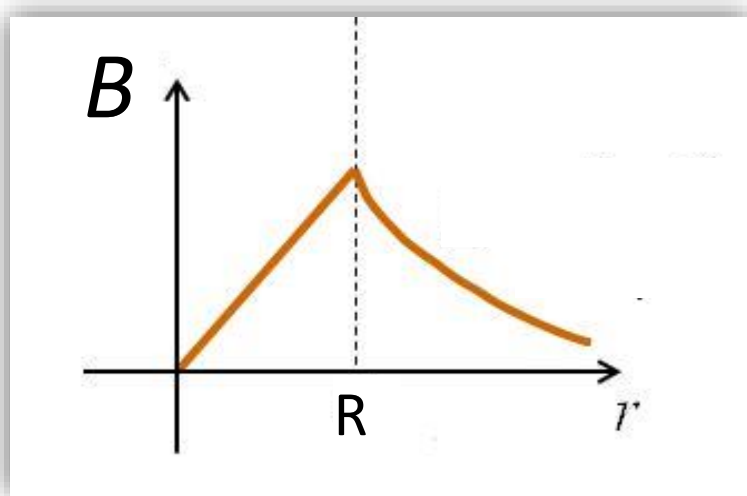
$$i' = JA' = i\frac{A'}{A} = i\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i\frac{r^2}{R^2} \qquad \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i'}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$

Riepilogo: campo magnetico di un filo percorso da corrente



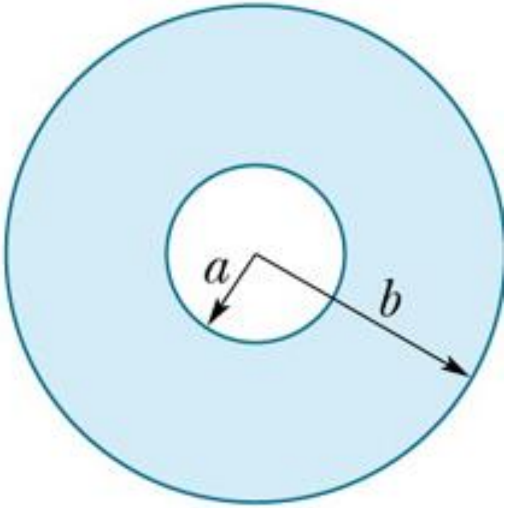
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$ esterno al filo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$ interno al filo



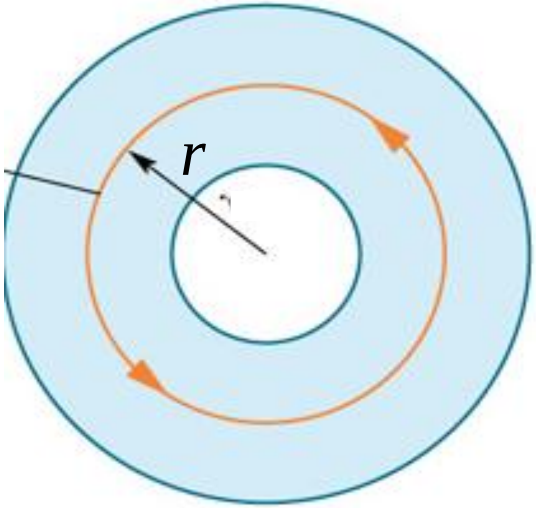
B(r) ha lo **stesso andamento del campo elettrico** *E(r)* **generato da un cilindro isolante uniformemente carico**: entrambi i campi all'interno del cilindro crescono linearmente, all'esterno decadono come 1/r

Problema 29.3



Consideriamo un cilindro cavo, di raggio interno a=2 cm ed esterno b = 6 cm; nel cilindro scorre una corrente uscente dal piano di densità non uniforme $J(r) = cr^2$, con c = 4×10^6 A/m^4; calcolare il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ in un punto distante r = 4 cm dall'asse del cilindro.

Sfruttiamo la ***simmetria cilindrica*** del campo magnetico e calcoliamo l'integrale di linea su un cerchio di raggio r centrato sull'asse del cilindro:

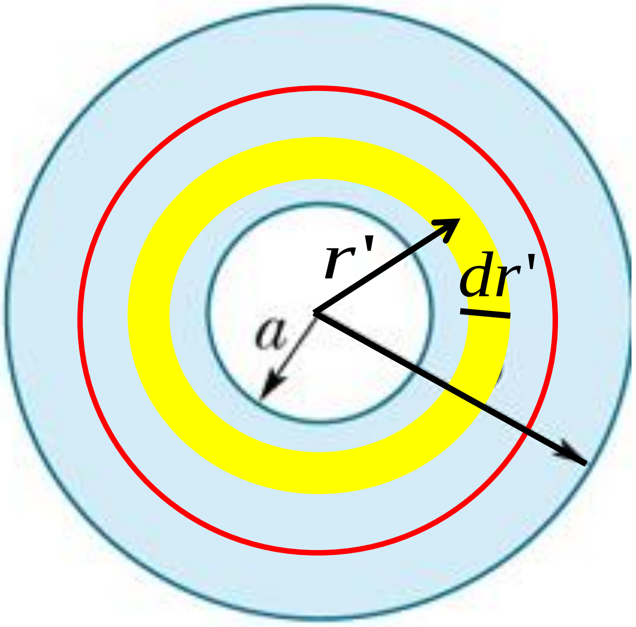


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\left(2\pi r\right) = \mu_0 i_{in}(r) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_{in}(r)}{2\pi r}$$

essendo la ***densità di corrente non uniforme***, la corrente interna al cerchio chiuso di raggio r deve essere calcolata dalla formula generale:

$$i_{in}(r) = \int_a^r \vec{J}(r')\cdot d\vec{A}$$

Problema 29.3



Dobbiamo calcolare la corrente che scorre all'interno della sezione cilindrica delimitata dal circuito rosso; la corrente è perpendicolare all'area della sezione, per cui il prodotto scalare si può eliminare; consideriamo l'area disegnata in giallo in figura, ovvero un anello di raggio *r'* e spessore *dr'*:

$$dA = 2\pi\, r'\, dr'$$

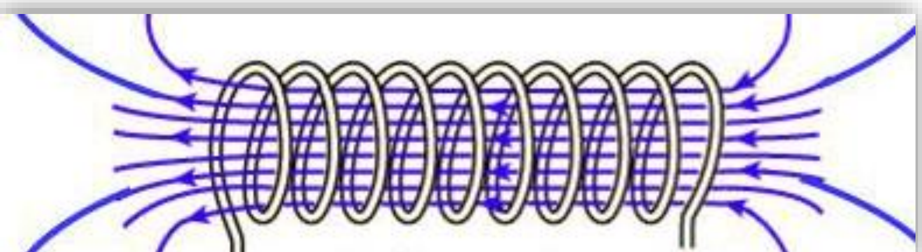
$$\Rightarrow i_{in}(r) = 2\pi \int_a^r J(r')r'dr' = 2\pi c \int_a^r r'^3\, dr = 2\pi c \frac{r^4 - a^4}{4}$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 c \frac{r^4 - a^4}{4r} = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{T\, m}{A} \right) 4 \times 10^6 \frac{A}{m^4} \frac{4^4 - 2^4}{16} 10^{-6} m^3 =$$

$$= \pi \left(4^4 - 2^4 \right) \times 10^{-7}\, T = 0.754 \times 10^{-4}\, T$$

Il Solenoide

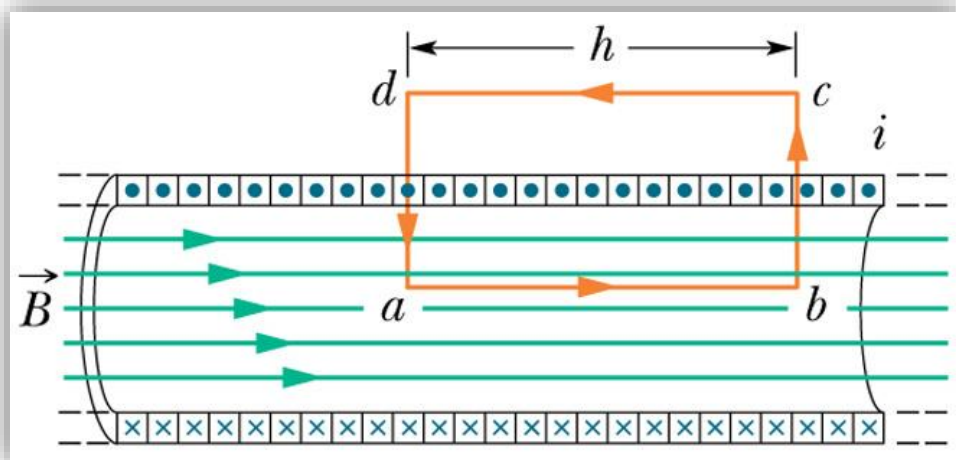
- ✓ Un caso estremamente importante in cui la legge di Ampère è utile è il **solenoide**, ovvero una bobina cilindrica in cui la **lunghezza del filo avvolto è molto maggiore del diametro** della bobina
- ✓ un **solenoide infinitamente lungo e formato da spire strettamente unite** si dice **ideale**.
- ✓ Nel solenoide ideale il **campo magnetico è nullo al di fuori del solenoide, uniforme e parallelo all'asse del solenoide all'interno**
- ✓ In pratica il solenoide è lo strumento più comune per generare campi magnetici uniformi al suo interno, e nulli all'esterno; dunque è **l'analogo del condensatore per i campi elettrici**
- ✓ Supporre il campo nullo all'esterno è ragionevole anche per un solenoide reale, purché la sua lunghezza sia molto maggiore del diametro, ed i punti in cui consideriamo ***B*** sufficientemente lontani dai bordi.



- ✓ All'interno del solenoide l'assunzione di ***B*** uniforme è realistica se non si considerano punti troppo vicini alle spire

Campo magnetico del solenoide ideale

Nel caso del solenoide ideale, il campo magnetico è:
✓ **nullo in tutti i punti all'esterno** del solenoide
✓ **uniforme e parallelo all'asse principale all'interno** del solenoide
✓ il verso del campo magnetico all'interno del solenoide è dato dalla **regola della mano destra per il solenoide**: orientando le 4 dita nel verso della corrente, il pollice dà il verso di ***B*** nel solenoide.

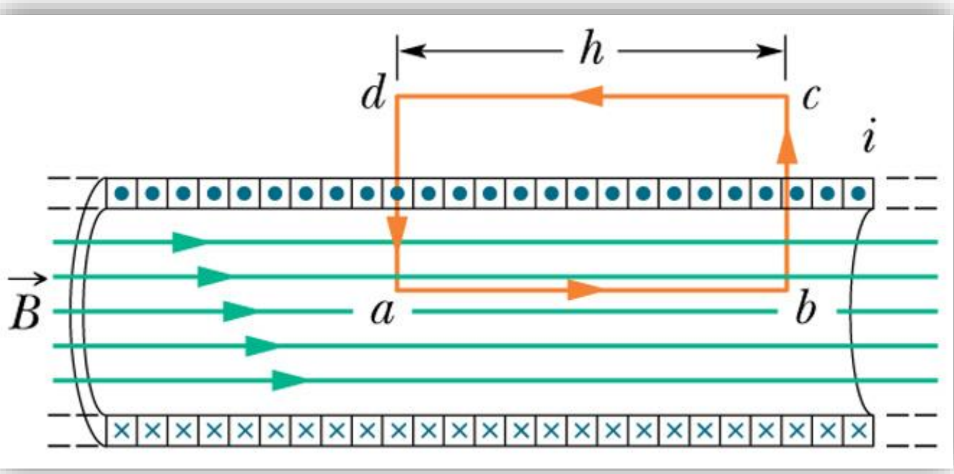


L'intensità del campo magnetico si calcola facilmente dalla legge di Ampère: calcoliamo l'integrale di linea lungo il circuito chiuso rettangolare *abcd* (in arancione in figura)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Soltanto l'integrale tra *a* e *b* è diverso da zero: sui lati verticali ***B*** e ***ds*** sono perpendicolari ed il prodotto scalare è nullo, mentre fuori dal solenoide ***B*** = 0

Campo magnetico del solenoide ideale



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

Poiché ***B*** è uniforme e parallelo a *d**s*** in tutti punti tra *a* e *b*, il risultato dell'integrale di linea è semplicemente:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b B\,ds = Bh$$

La legge di Ampére ci dice che: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\, i_{\text{int}} \quad \Rightarrow B\,h = \mu_0\, i_{\text{int}}$

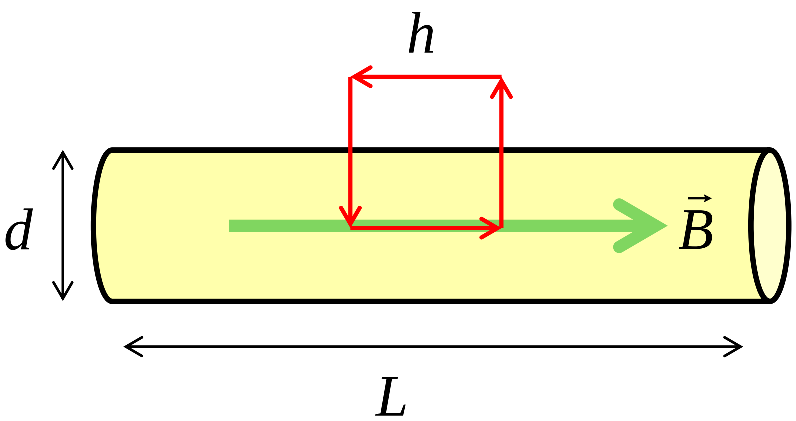
se *i* è la corrente nelle spire del solenoide ed *n* il numero di spire per unità di lunghezza, la corrente totale i_{int} che interseca la superficie rettangolare racchiusa dal loop è:

$$i_{\text{int}} = i\,n\,h$$

$$\Rightarrow Bh = \mu_0 inh \quad \Rightarrow B = \mu_0 in$$

Problema 29.4

Consideriamo un solenoide lungo *L*=1 m, e diametro interno *d* =3 cm, composto da 5 strati di spire, ciascuno con *N* = 1000 spire, in cui scorre una corrente i=5 A. Calcolare ***B*** nel centro del solenoide.



Essendo *L* >> *d* si può supporre il solenoide ideale. Dalla legge di Ampére sappiamo che il campo vale:

$$B = \mu_0 \, i \, n$$

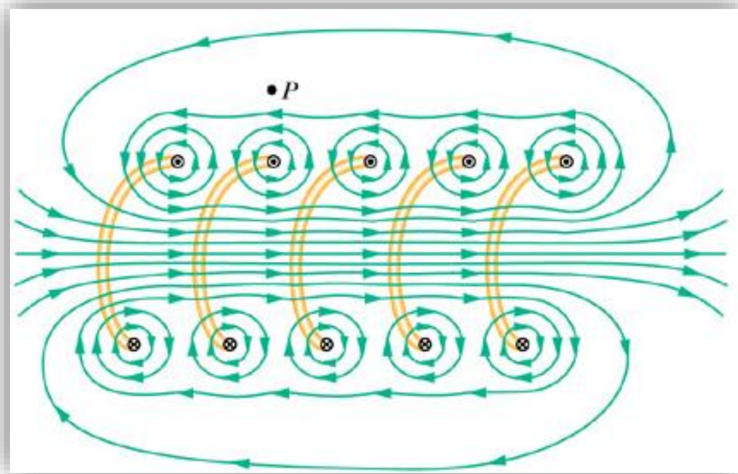
ipotizzando la densità di spire *n* uniforme, e considerando i 5 strati, otteniamo:

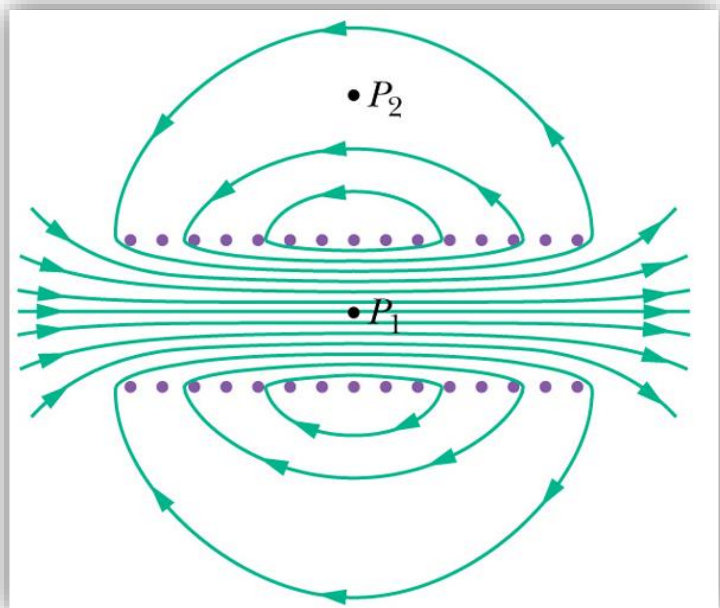
$$n = 5 \times \frac{1000}{L} = 5000 \, m^{-1}$$

$$\Rightarrow B = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A} \times 5A \times 5000 \, m^{-1} = \pi \times 10^{-2} T$$

NB: *d* non entra nell'espressione di B, serve soltanto a definire il carattere ideale del solenoide

Campo magnetico del solenoide reale





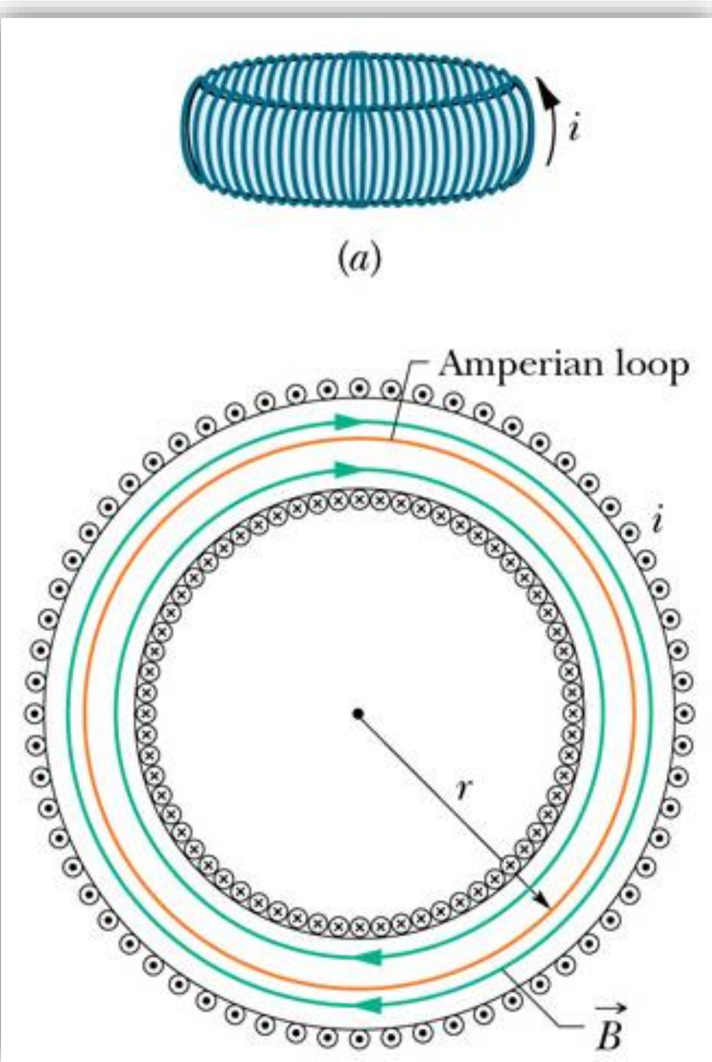
Il campo magnetico del solenoide è la **somma vettoriale dei campi prodotti da ciascuna spira**. Osserviamo le linee di flusso in figura:

✓ All'interno del solenoide, in punti non troppo vicini al filo, il **campo è circa uniforme, con linee parallele all'asse del solenoide;** poiché ogni spira corrisponde approssimativamente ad un dipolo magnetico, possiamo immaginare il solenoide nella regione centrale come una serie di dipoli allineati lungo l'asse

✓ Vicino alle spire le **linee del campo sono cerchi concentrici** poiché il campo tende ad assomigliare a quello del filo rettilineo

✓ Al di fuori del solenoide il campo **tende ad annullarsi** poiché i contributi delle spire superiori (corrente uscente dal foglio) ed inferiori (entrante nel foglio) si compensano

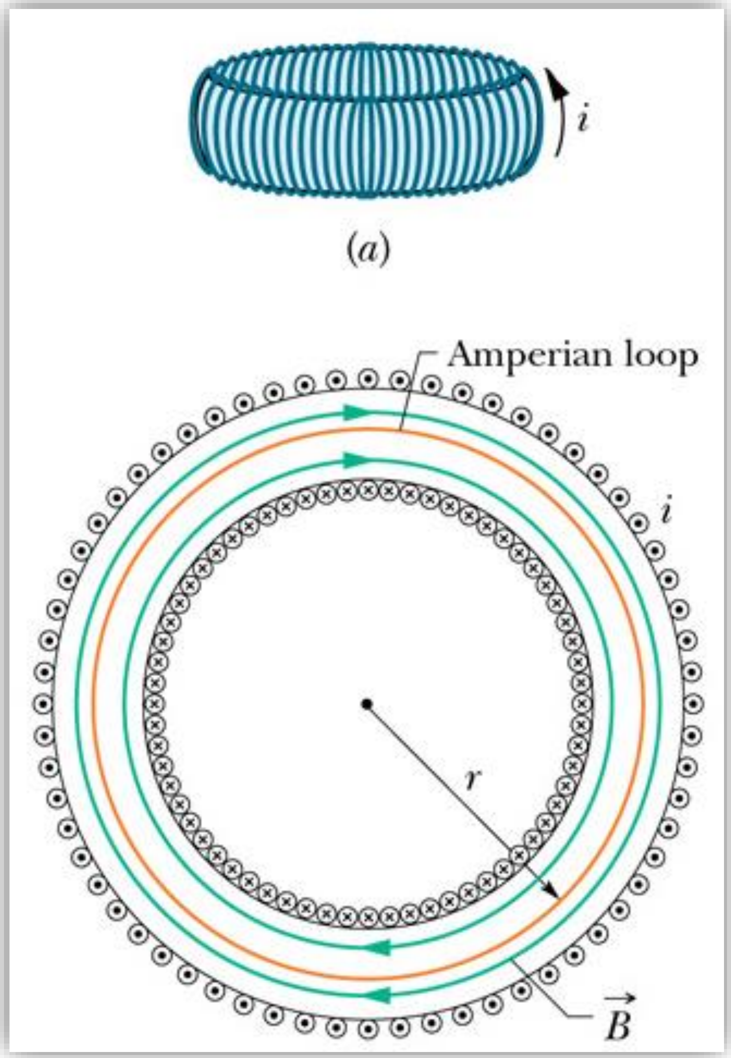
Campo magnetico del toroide



- ✓ Il toroide è un solenoide ripiegato a ciambella; nella figura in basso vediamo le spire del toroide tagliate in sezione
- ✓ si intuisce che le **linee di campo magnetico interne al toroide debbono essere circonferenze centrate nel centro del toroide**

- ✓ Il verso della corrente è uguale a quello del solenoide visto in precedenza: la corrente esce dalle spire esterne, ed entra in quelle interne; per la regola della mano destra, ***B*** è orientato in verso orario (linee verdi)
- ✓ Utilizzando il circuito Amperiano di raggio *r*, (linea arancione), calcoliamo l'integrale curvilineo percorrendo il loop **in senso orario,** cosicché ***B*** e ***ds*** siano paralleli e concordi, ed il loro prodotto scalare sia positivo

Campo magnetico del toroide



- ✓ Per simmetria radiale il campo è uniforme in modulo e sempre tangenziale al circuito amperiano in ogni suo punto, per cui la circuitazione del campo è:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r)$$

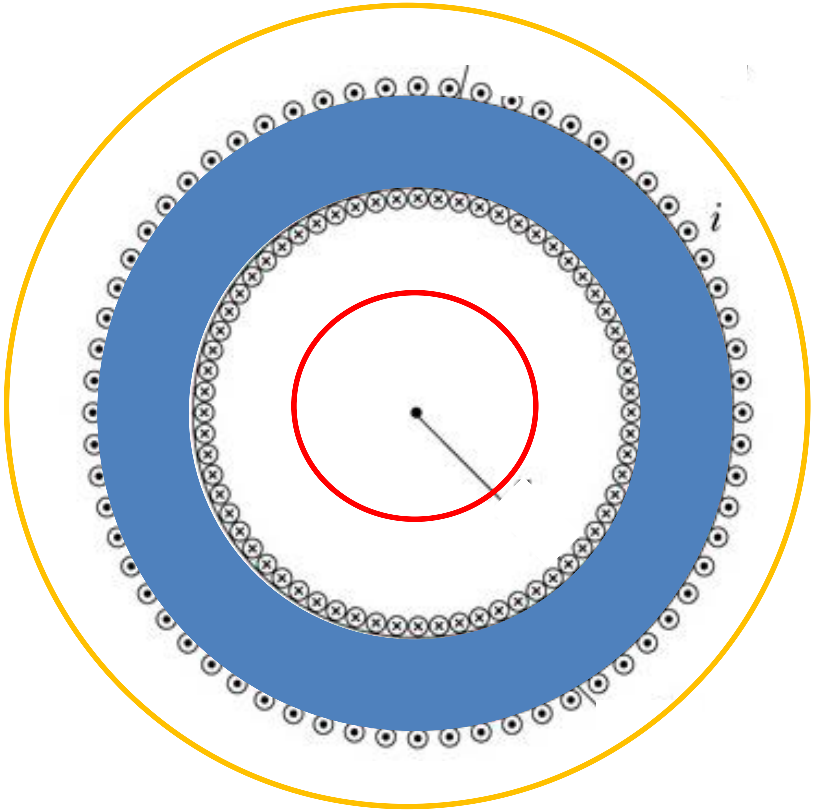
- ✓ dalla legge di Ampére:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i\, N$$

- ✓ Si noti che le *N* correnti interne al loop sono entranti nel foglio, per cui, integrando in senso orario, vanno presa col segno positivo, come prescritto dalla regola della mano destra; dunque:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{iN}{r}$$

Campo magnetico del toroide



- ✓ Considerando un circuito Amperiano esterno al toroide (giallo) oppure interno alla cavità delimitata dal toroide (rosso)
- ✓ vediamo che in entrambi i casi la corrente totale che attraversa l'area racchiusa dal circuito è complessivamente nulla
- ✓ Dunque il **campo magnetico esterno alla superficie del toroide è sempre nullo**

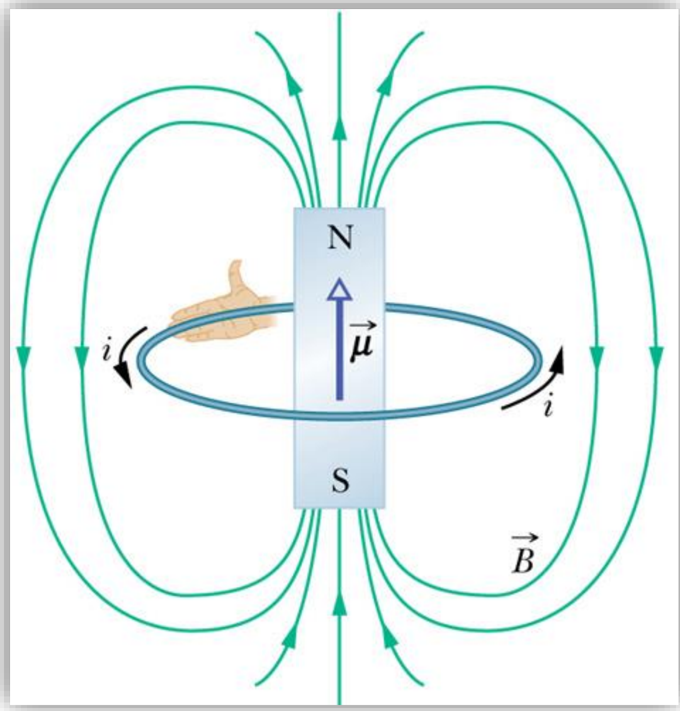
L'area delimitata dal circuito rosso non è attraversata da spire, per cui i =0

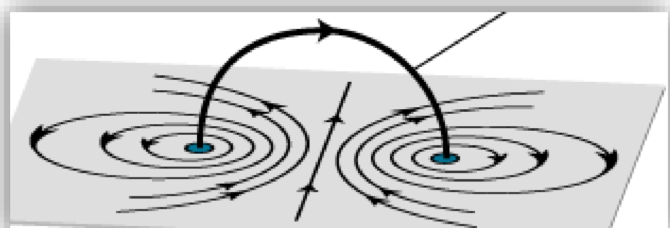
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = 0 \Rightarrow B = 0$$

L'area delimitata dal circuito giallo è attraversata da N fili con corrente entrante nel foglio, ed N fili con corrente uscente, per cui in totale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 \left(Ni - Ni \right) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Campo magnetico generato dalla bobina





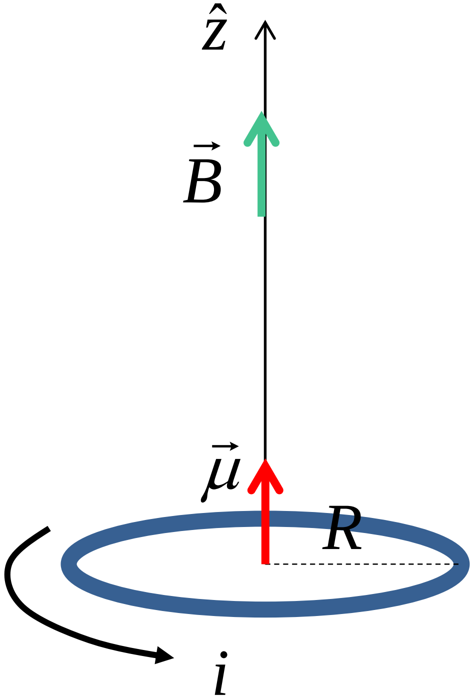
✓ **La bobina in campo magnetico** si comporta come un **dipolo magnetico** di momento $\mu = NiA$**,** la cui direzione dipende dal verso della corrente, secondo la regola della mano destra

✓ Come il dipolo magnetico ed ogni circuito percorso da corrente, **anche la bobina produce il suo campo magnetico**; ma a differenza del solenoide e del toroide, **la bobina non ha simmetria così elevata** da permettere l'utilizzo della legge di Ampère, per cui il calcolo di $\boldsymbol{B}$ richiede l'uso di Biot-Savart

✓ Lungo l'asse perpendicolare al piano, $\boldsymbol{B}$ è simile a quello generato **da un dipolo magnetico**, con la faccia superiore della spira che funge da polo nord, e quella inferiore da polo sud

✓ **Nei dintorni della spira** il campo si discosta radicalmente da quello tipico del dipolo magnetico, e approssima quello del **filo rettilineo, con centri concentrici che si diradano allontanandosi dal filo**

Campo magnetico generato dalla bobina lungo l'asse



Per una bobina di area *A*, corrente *i*, ed *N* spire, si dimostra che il campo ***B*** generato lungo l'asse *z* perpendicolare al piano della bobina e passante per il centro è dato da:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \qquad \vec{\mu} = NiA\,\hat{z}$$

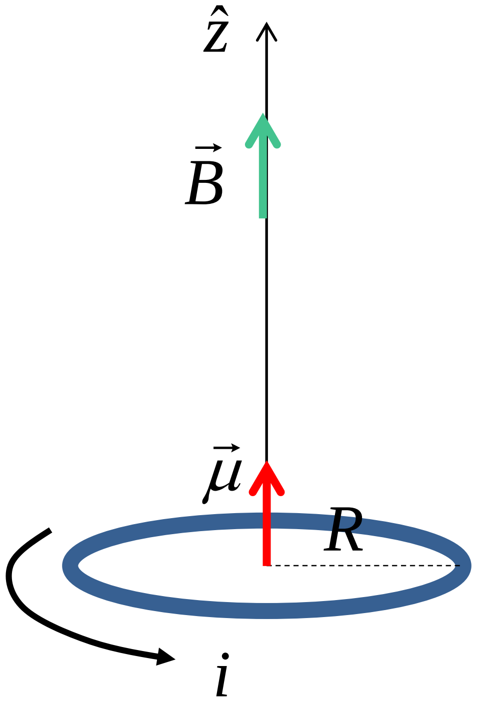
B è proporzionale al momento di dipolo, ed ha quindi stessa direzione e verso di $\boldsymbol{\mu}$

nel centro della bobina (z=0)*:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{R^3} = \frac{\mu_0 Ni}{2R}\hat{z}$$

*stessa formula ottenuta applicando Biot-Savart all'arco

Campo magnetico generato dalla bobina lungo l'asse



nei punti lontani dalla spira (*z* >> *R*):

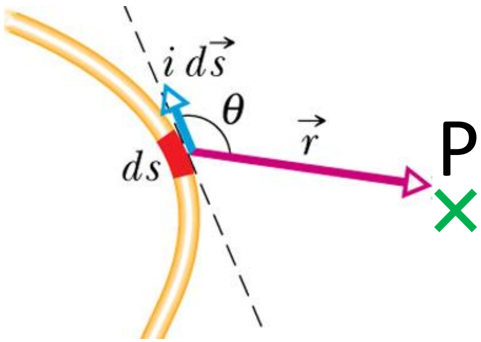
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3\left((R/z)^2 + 1\right)^{3/2}} \sim \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

✓ questa espressione per ***B*** è valida non solo per la bobina ma anche per il campo generato da un qualsiasi dipolo magnetico di momento $\boldsymbol{\mu}$ lungo l'asse del dipolo

✓ L'espressione di ***B*** ha una forte analogia col campo del dipolo elettrico calcolato lungo l'asse del dipolo:

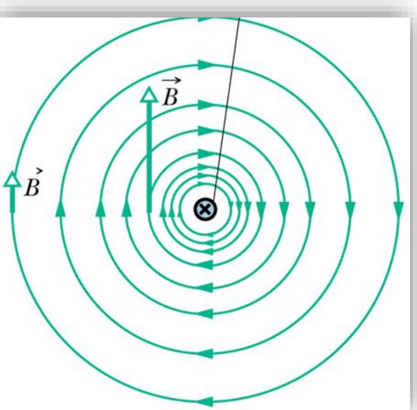
$$\vec{E}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z^3} \vec{p} \qquad \vec{p} = q\vec{d}$$

Sommario: campi magnetici generati da correnti



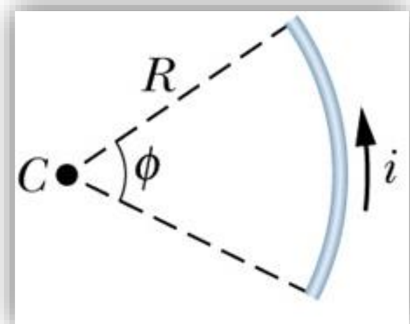
Legge di Biot-Savart $$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Permeabilità magnetica del vuoto $$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\left(\frac{T\,m}{A}\right)$$



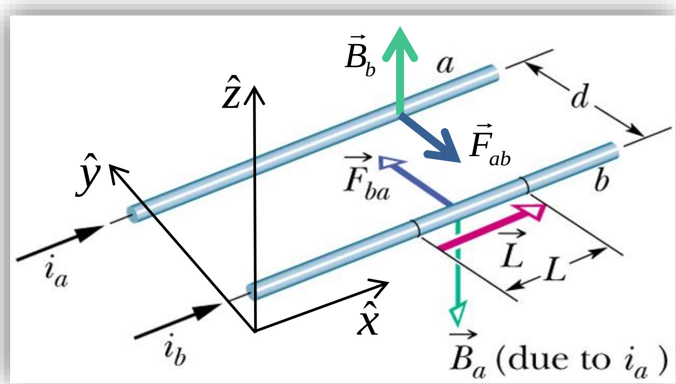
Filo rettilineo infinito: simmetria cilindrica

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



Nel centro di curvatura dell'arco:

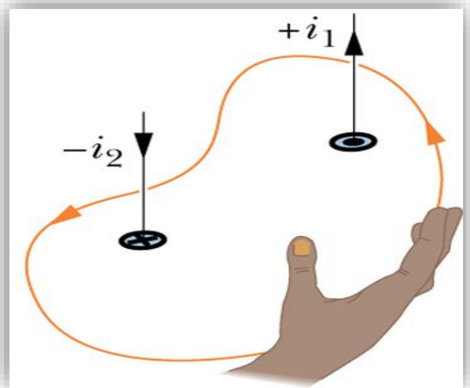
$$B = \frac{\mu_0\, i\, \phi_{rad}}{4\pi R}$$



Forza tra fili paralleli

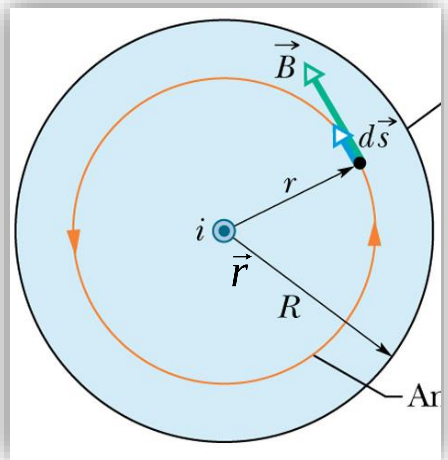
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a\, i_b}{d}L$$

Sommario: campi magnetici generati da correnti



Legge di Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$



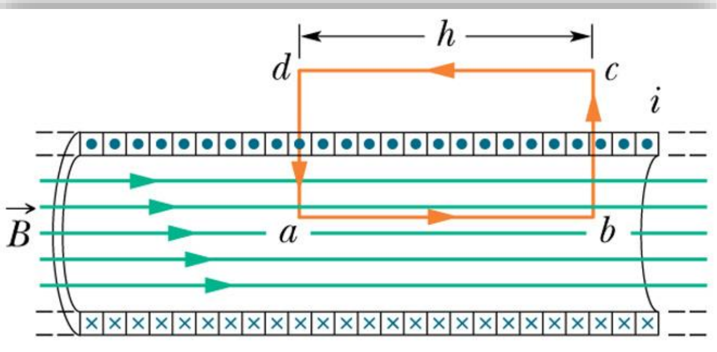
esterno al filo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

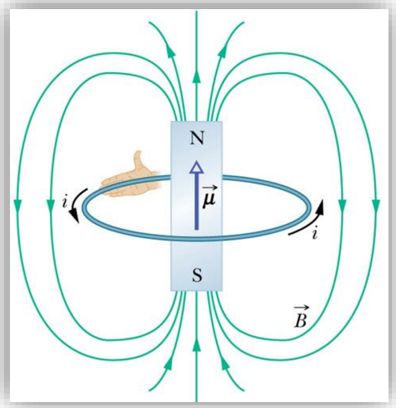
interno al filo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$

Nel solenoide ideale: $B = \mu_0 i n$



Lungo l'asse della bobina, lontano dalla bobina (anche per un qualsiasi dipolo magnetico):



$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

Nel toroide

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i N}{r}$$

Soluzione dell'integrale

$$I = \int \frac{ds}{\left(s^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Operiamo la sostituzione di variabile s→ t:

$$s = R\tan(t) \Rightarrow ds = R\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$\Rightarrow I = R\int \frac{dt}{\cos^2(t)\left(R^2\tan^2(t) + R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\int \frac{dt}{\cos^2(t)\left(\tan^2(t)+1\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{R^2}\int \frac{dt}{\cos^2(t)\left(\cos^{-2}(t)\right)^{3/2}} = \frac{1}{R^2}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{R^2}\sin(t)$$

$$\tan(t) = \frac{s}{R} \Rightarrow \sin(t) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{s}{R^2\sqrt{s^2 + R^2}} = \frac{1}{R^2\sqrt{1 + (R/s)^2}}$$