Equazioni non lineari

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 9

Outline

Outline

Sia $f(x) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua almeno su un certo intervallo $\mathcal{I}$ e si supponga che $f(x)$ non sia della forma $f(x) = a_1 x + a_0$ con a_1 e a_0 costanti

La relazione

$$f(x) = 0$$

si dice **equazione non lineare** nell'incognita x

Il problema che ci poniamo è di determinare, se esistono, gli **zeri** di $f(x)$, ossia di trovare le eventuali **radici dell'equazione** $f(x) = 0$

Il problema di determinare (se esistono) gli zeri di $f(x)$ raramente può essere risolto con un metodo diretto

Per esempio, consideriamo una equazione con $f(x)$ polinomio di grado maggiore di 1 della forma

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; = \; 0, \quad (a_m \neq 0)$$

con m intero ≥ 2

Quest'ultima equazione prende il nome di **equazione algebrica di grado** m e possiede m radici nel campo complesso, ma queste, salvo casi speciali, si possono trovare con un metodo diretto soltanto per $m \leq 4$

In generale, per calcolare numericamente una radice α di una equazione non lineare si ricorre ad un metodo iterativo, cioè all'applicazione ripetuta di una formula del tipo

$$x_{n+1} = \phi_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k \geq 1,$$

dove ϕ_n si dice la **funzione di iterazione** del metodo

La funzione ϕ_n dipende non solo dagli argomenti $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}$, ma anche dalla funzione $f(x)$ e la sua forma può variare al variare di n

Una opportuna scelta della funzione di iterazione e delle **approssimazioni iniziali** $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-k+1}$ può rendere la successione $\{x_n\}$ convergente alla radice α

Il calcolo viene arrestato al verificarsi di un opportuno criterio di arresto

Ad eccezione dei k valori iniziali, ogni altro termine di $\{x_n\}$ viene calcolato in funzione di k termini già noti

Per questo motivo si parla di **metodo iterativo a k punti**

Se la forma di ϕ_n non varia al variare di n il metodo si dice **stazionario**

Ordine di convergenza

Definizione

Data una successione $\{x_n\}$ convergente ad un limite α, si ponga $e_n = x_n - \alpha$

Se esistono due numeri reali $p \geq 1$ e $C \neq 0$ tali che sia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ e_{n+1}\ |}{|\ e_n\ |^p} = C$$

si dice che la successione ha **ordine di convergenza** p e **fattore di convergenza** C

Per $p = 1$ o $p = 2$ la convergenza si dice **lineare** o **quadratica**
Nel caso di $p = 1$ la convergenza ad α implica $C < 1$

Prima di iniziare a parlare dei metodi per approssimare gli zeri di una funzione $f(x)$ è bene provare a determinare quanti sono gli zeri e intervalli a cui appartengono

La strategia che suggeriamo non è una tecnica che viene riportata sui testi perché si basa su un banale ragionamento sullo studio di un grafico e non risulta applicabile con successo per ogni funzione $f(x)$

Separazione grafica

Si pone

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

dove le funzioni $g(x)$ e $h(x)$ possono essere scelte in tanti modi purché la loro differenza sia uguale a $f(x)$

Se vale l'uguaglianza $f(x) = 0$ allora risulta

$$g(x) = h(x)$$

Separazione grafica

L'ultima equazione, introducendo la variabile y, porta alla scrittura del sistema

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Le soluzioni (se esistono) del sistema sono coppie ordinate (x, y)

Le componenti x delle soluzioni del sistema coincidono con le soluzioni della equazione $f(x) = 0$

Separazione grafica

La tecnica di **separazione grafica** consiste nel tracciare il grafico delle funzioni $g(x)$ e $h(x)$

I punti di intersezione (più precisamente le loro coordinate) tra i due grafici individuano le soluzioni del sistema

In particolare, le ascisse dei punti di intersezione sono le soluzioni della equazione $f(x) = 0$

Dallo studio dei due grafici è quindi possibile dire quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ ed individuare gli **intervalli di separazione** a ciascuno dei quali appartiene **una ed una sola** soluzione dell'equazione

Esempio 1

Si vuole risolvere l'equazione

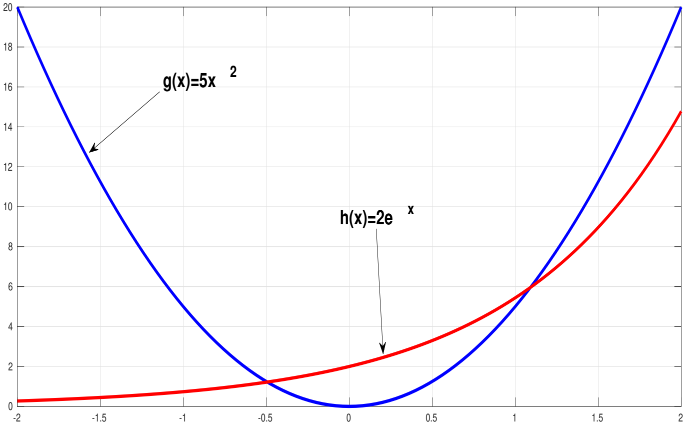
$$5\,x^2 \;-\; 2\,e^x \;=\; 0$$

La separazione più ovvia da seguire è di porre

$$g(x) \;=\; 5\,x^2 \qquad h(x) \;=\; 2\,e^x$$

Nella slide che segue sono tracciati i grafici delle due funzioni e quindi possiamo rispondere alla domanda
Quante sono le soluzioni dell'equazione $5x^2 - 2e^x = 0$?

Esempio 1



Esempio 1

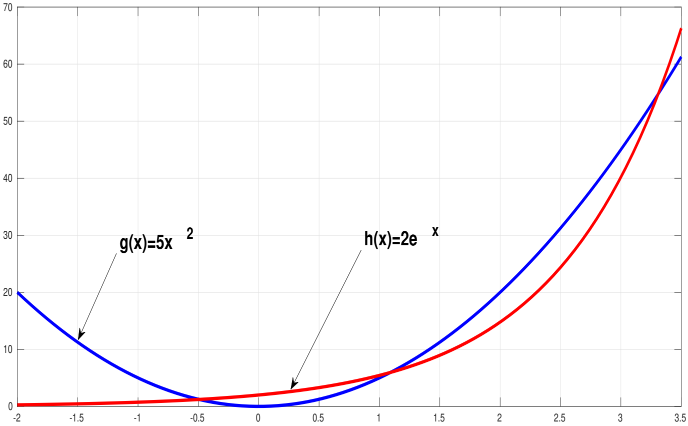
Dalla figura si deduce che l'equazione data ha 2 soluzioni α_1 e α_2 e i relativi intervalli di separazione potrebbero essere (non c'è l'unicità)

$$\alpha_1 \in [-1, 0] \qquad \alpha_2 \in [0.5, 1.5]$$

- Siamo sicuri di avere dato la risposta giusta?
- Abbiamo tenuto conto delle nozioni introdotte nei corsi di Analisi Matematica?

La prossima figura ci darà la risposta alle domande che ci siamo posti

Esempio 1



Esempio 1

Nella seconda figura si evidenzia che l'equazione data ha 3 soluzioni α_1, α_2 e α_3 con possibili intervalli di separazione

$$\alpha_1 \in [-1, 0] \qquad \alpha_2 \in [0.5, 1.5] \qquad \alpha_3 \in [3, 3.5]$$

In questo caso siamo sicuri di non avere altre soluzioni perchè l'Analisi Matematica ci assicura che il comportamento della funzione $h(x)$ (un esponenziale) è tale da non poter dare altre intersezioni tra i due grafici

Quindi.....**i grafici vanno tracciati bene e non vanno dimenticate le informazioni che ci possono dare i precedenti corsi di matematica**

Non per tutte le equazioni la separazione grafica fornisce delle informazioni certe
Per esempio, i due grafici, vista la risoluzione limitata della grafica, potrebbero sembrare indicare una tangenza tra le due curve quando potrebbero non toccarsi o avere due intersezioni talmente "vicine" da non essere apprezzata la loro differenza

Nella pratica, la separazione grafica risulta un valido strumento ma non infallibile

Anche se non dovessimo ruscire ad avere intervalli di separazione a cui appartengono le soluzioni di $f(x) = 0$, il passo successivo consiste nell'applicare un metodo di approssimazione delle soluzioni

Il **metodo di bisezione** è il più semplice (e intuitivo) metodo iterativo per approssimare gli zeri reali di una funzione $f(x)$

In questo metodo ad ogni passo si costruisce un intervallo contenente uno zero di $f(x)$ e si assume come approssimazione di tale zero l'ascissa del punto medio del detto intervallo

Sia $f(x) \in C^0([a, b])$ e poniamo $x_0 = a$, $x_1 = b$
Supposto che si abbia $f(x_0)f(x_1) < 0$, per la continuità di $f(x)$ si ha almeno uno zero in $[x_0, x_1]$ (per semplicità supporremo che $[x_0, x_1]$ contenga un solo zero di $f(x)$)

Il numero

$$x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2}$$

cioè l'ascissa del punto medio di $[x_0, x_1]$, sarà certamente una approssimazione di α migliore di almeno una delle precedenti x_0 e x_1

Se non si verifica $f(x_2) = 0$ (da scartare dal punto di vista numerico), si confronta il segno di $f(x_2)$ con quello di $f(x_1)$
se risulta $f(x_2)f(x_1) < 0$ allora $\alpha \in [x_2, x_1]$, nel caso contrario sarà $\alpha \in [x_0, x_2]$

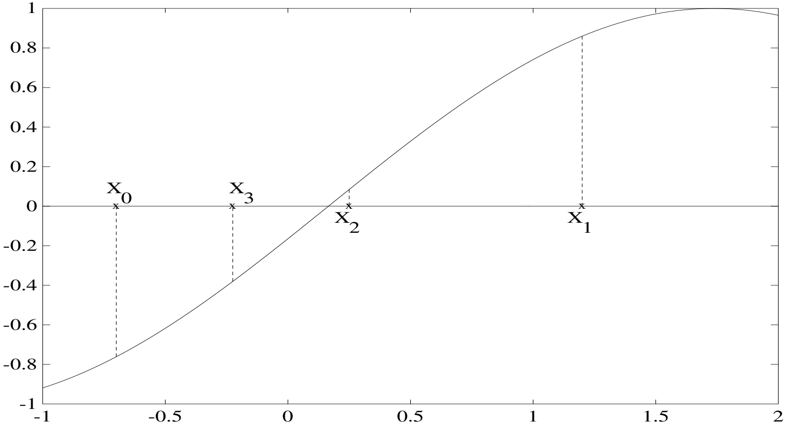
Quindi la nuova approssimazione x_3 sarà data da

- $x_3 = (x_2 + x_1)/2, \quad$ se $\quad f(x_2)f(x_1) < 0$
- $x_3 = (x_2 + x_0)/2, \quad$ se $\quad f(x_2)f(x_1) > 0$

Indicando con $\hat{x}_2$ una variabile che può assumere i valori x_1 o x_0, possiamo unificare i due casi nella sola formula

$$x_3 = \frac{x_2 + \hat{x}_2}{2} \quad \text{dove} \quad \hat{x}_2 = \begin{cases} x_1 & \text{se } f(x_2)f(x_1) < 0 \\ x_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per esempio, nel caso in figura si verifica la seconda possibilità



Ripetendo il procedimento, si determinano $x_4, x_5, x_6, \ldots$ secondo la formula generale

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \hat{x}_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dove per $n = 1$ è $\hat{x}_1 = x_0$ mentre per $n > 1$ si pone

$$\hat{x}_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{se } f(x_n) f(x_{n-1}) < 0 \\ \hat{x}_{n-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il metodo di bisezione è quindi un metodo iterativo a due punti non stazionario, infatti la funzione al secondo membro non è la stessa ad ogni passo

Poiché ad ogni passo l'intervallo contenente α viene dimezzato, dopo n passi si ha una approssimazione x_{n+1}, tale che

$$| x_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$$

Quindi si ha $\lim_{n\to\infty} | x_n - \alpha | = 0$, che prova la convergenza del metodo di bisezione alla radice α e fornisce anche una maggiorazione a priori dell'errore assoluto presente nell'iterata x_{n+1}

La limitazione dell'errore assoluto suggerisce criterio di arresto dato da

$$\frac{1}{2^n}(b-a) < E$$

dove $E \in \mathbb{R}^+$ è un numero prefissato

La stessa condizione permette di conoscere a priori il numero n di iterazioni necessario per avere il modulo dell'errore assoluto minore di E

Risolvendo la disequazione

$$\frac{1}{2^n}(b-a) \; < \; E$$

si ottiene

$$n \; > \; \log_2 \frac{b-a}{E}$$

Segue che per ottenere la approssimazione richiesta bastano

$$n \; = \; \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{E} \right\rceil$$

iterazioni

Il metodo di bisezione converge linearmente, infatti, assumendo $|x_n - x_{n-1}|$ come stima di $|x_n - \alpha| = |e_n|$, si ha, per n abbastanza grande, l'uguaglianza approssimata

$$\frac{|\ e_{n+1}\ |}{|\ e_n\ |} \simeq \frac{|\ x_{n+1} - x_n\ |}{|\ x_n - x_{n-1}\ |} = \frac{1}{2}$$

Poiché la convergenza è lenta, di solito questo metodo viene usato per ottenere una prima approssimazione che consenta l'uso di altri metodi più efficienti

Un secondo algoritmo molto utilizzato è il **metodo delle secanti**, in cui sono richieste due approssimazioni iniziali senza alcun'altra condizione e senza la necessità di controllare il segno di $f(x)$ ad ogni passo

Il calcolo della approssimazione x_{n+1} utilizza le informazioni precedenti, x_n e x_{n-1}, secondo la formula

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2 \dots$$

Il numero x_{n+1} è individuato geometricamente dal punto in cui la secante al grafico di $f(x)$ passante per i punti

$$A_n \equiv [x_n, f(x_n)] \qquad A_{n-1} \equiv [x_{n-1}, f(x_{n-1})]$$

interseca l'asse delle ascisse

Il metodo delle secanti risulta un metodo iterativo stazionario a due punti, ma, per $n \geq 2$, ad ogni passo il calcolo di x_{n+1} richiede la sola valutazione di $f(x_n)$ (come il metodo di bisezione)

La convergenza del metodo si realizza, in generale, se le approssimazioni x_0 e x_1 si scelgono abbastanza vicine alla radice α

L'ordine della convergenza del metodo delle secanti è irrazionale e risulta

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$