Carica Elettrica
Alla base dei fenomeni elettromagnetici si sono le cariche elettriche. Si noti che la carica elettrica è una proprietà della materia ed è posseduta da ogni corpo presente nell'universo. Se non fosse così l'universo sarebbe un ammasso di pulviscolo atomico perché non esisterebbe la forza che permette agli atomi di formare la materia; tale forza è scaturita dalla carica elettrica, posseduta da ogni atomo, così che la differenza di carica generi le forze di interazione nucleare.
La carica elettrica è di due tipi:

- Cariche elettriche positive (q+);
- Cariche elettriche negative (q-).

Tale natura caratterizza i comportamenti delle forze scaturite dall'interazione di due cariche:
se due cariche sono discorde (quindi di segno opposto) la forza scaturita è di tipo attrattivo mentre se due cariche sono concorde (quindi di egual segno) la forza è di tipo repulsivo.
Ogni corpo, essendo la carica una proprietà intrinseca della materia, è definito carico ma la tendenza naturale di ogni corpo è quella di essere *neutro.* Ogni qual volta si avrà un corpo negativamente carico allora è segno che abbia una prevalenza di cariche negative mentre, nel caso di un corpo positivamente carico, tale corpo è in posseso in prevalenza di carica positive. In entrambe le occasioni il corpo tenderà naturalmente a cercare una "condizione di equilibrio" scaricando a massa l'eccedenza di cariche.
N.B. *Le scariche sono sempre rivolte a ristabilire la condizione di elettroneutralità.*
Alla base della materia ci sono gli atomi; si può fare un paragone in ambito elettrico dicendo che alla base dell'elettricità ci sono gli elettroni e i protoni. Infatti l'elettrone possiede carica negativa (e-) mentre il protone possiede carica positiva (e+). Normalmente gli atomi sono neutri perché sono costituiti dallo stesso numero di elettroni e protoni.
La carica elettrica ha un'altra importante proprietà: è *quantizzata*. Ciò significa che si presenta sempre in multipli interi di una certa carica di riferimento. Le cariche possono dunque essere sempre espresse con N*e*, ove *e* (detto quanto elementare) rappresenta la carica dell'elettrone ed N un numero intero.
L'origine della corrente è data dalla struttura interna dell'atomo: gli elettroni posti nelle orbite più distanti dal nucleo hanno la capacità di saltare da un atomo all'altro dando origine ad un flusso di cariche, per l'appunto, la corrente elettrica. Nei corpi in cui tale flusso è mitigato a tal punto da isolare le cariche al loro interno, e quindi bloccare il flusso tra oggetti, si dicono *isolanti*; i corpi in cui invece non accade ciò si dicono *conduttori*.
Elettrizzazione per induzione: il modo sperimentalmente più semplice per notare i fenomeni provocate dalle cariche elettriche è quella di strofinare un panno di lana ad un bacchetta di plastica e avvicinarla a dei pezzettini di carta. Tale processo è detto *elettrizzazione per strofinio*. Questo fenomeno accade perché gli elettroni di conduzione si muovono dal panno alla bacchetta a causa dello sfregamento, rendendo la bacchetta elettricamente carica. Ma cosa succede quando i pezzettini di carta vengono attratti dalla bacchetta? Avviene un altro tipo di elettrizzazione, detta per *induzione*. I pezzettini di carta, elettricamente neutri, subiscono la forza attrattiva causata dalla prevalenza di elettroni sulla superficie della bacchetta più vicina ad essi. Tale forza attrattiva è causata dal fatto che, essendo neutro, le cariche sul pezzettino di carta sono disposte equamente su tutta la superficie. Quando la forza degli elettroni si fa abbastanza forte le cariche negative più vicine tendono ad essere repulse più lontano e quindi si viene a creare una zona con una prevalenza di cariche positive. A tal punto la forza diviene attrattiva e il pezzetto di carta è attratto dalla bacchetta, come ci suggerisce l'esperienza quotidiana.

Legge di Coulomb
La forza che si crea dall'interazione di due cariche è stata espressa per la prima volta dall'ingegnere francese Coulomb nella forma:

$$\overline{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\widehat{r} \qquad\qquad k = 9 \cdot 10^9 N\frac{m^2}{C^2}$$

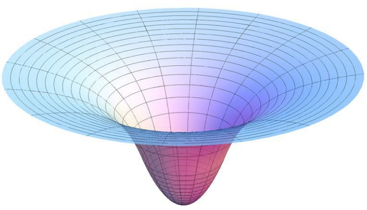
Tra la forza di Coulomb e la legge di gravitazione universale ci sono delle forti analogie:

+ Entrambe le forze sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza e sono dirette lungo la direzione del vettore congiungente le due entità (cariche o corpi).
+ Entrambe le forze sono proporzionali alle masse ed ad una costante (quest'ultima diversa tra le due forze).

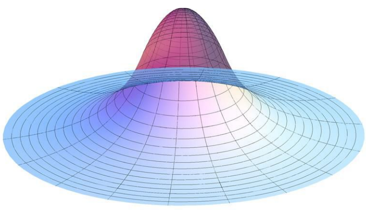
Principio di sovrapposizione: la forza agente su una particella dovuta ad un insieme di cariche è la risultante delle forze esercitate da ciascuna particella.

Il campo elettrico
La forza causata dall'interazione di due cariche dipende dalla distanza tra di esse. Si dice che la forza elettrica, descritta dalla legge di Coulomb, è scaturita dal momento in cui le due cariche entrano in contatto. Il concetto di contatto tra due cariche è molto diverso dal concetto comune che si ha della parola: si dirà che due cariche sono a contatto quando la distanza tra di esse è tale da non poter più trascurare i fenomeni che accadono a causa della natura delle cariche.
Due fisici britannici trovarono un modo per descrivere diversamente le forze scaturite dalla presenza di carica: venne introdotto il *campo elettrico*. Ogni carica genera intorno a sé un campo elettrico, ossia ogni carica ha la capacità di modificare la struttura e la disposizione della materia intorno a se. Le forze scaturiscono quando una carica entra nel campo elettrico di un'altra carica.
Campo di una carica:

$$\overline{E} = k\frac{q}{r^2}\widehat{r}$$



Campo elettrico generato da una carica, posta al centro, su di una carica di segno opposto.



Campo elettrico generato da una carica, posta la centro, su di una carica di segno concorde.

La forza di Coulomb tra due cariche puntiformi è uguale al prodotto di una delle due cariche per il campo elettrico generato dall'altra.

Rappresentazione del campo elettrico: linee di forza

Il campo elettrico è graficamente rappresentato da delle linee radiali passanti per la carica elettrica. La direzione del campo è tangente alle linee di forza e ha verso uscente se la carica è positiva, verso entrante altrimenti.

Dipolo elettrico

Il dipolo elettrico è la più semplice composizione di cariche elettriche. Esso è un sistema composto da due cariche elettriche, di uguale intensità ma discordi, poste ad una distanza costante l'una dall'altra. In tale situazione il campo elettrico generato dal dipolo, in relazione all'asse congiunte le due cariche, è dato da:

$$\overline{E} = (k\frac{q_+}{(z+d/2)^2} + k\frac{q_-}{(z-d/2)^2})\widehat{z} = (k\frac{q_+}{(z+d/2)^2} - k\frac{q_-}{(z-d/2)^2})\widehat{z}$$

Si è posto il centro del dipolo sul punto z e la distanza tra le due carica è *d*. Il versore z rappresenta la direzione dell'asse dipolare.

All'interno di un campo elettrico un dipolo è soggetto ad un momento torcente. Ciò deriva dal fatto che le linee di forza del campo tendono a far allineare il dipolo lungo l'asse dipolare. Tale momento, propriamente detto momento meccanico perché provoca una rotazione, è dato da:

$$\tau = \overline{P} \wedge \overline{E}$$

Il vettore P rappresenta il momento elettrico (anche detto momento del dipolo) ed è dato da:

$$\overline{P} = dQ$$

dove *d* rappresenta la distanza tra le due cariche e *Q* rappresenta l'intensità di un carica.

Se si conosce il momento del dipolo allora il campo elettrico generato (considerato come se il dipolo fosse un'unica carica) è esprimibile come:

$$\overline{E} = 2k\frac{\overline{P}}{z^3}$$

Distribuzioni continue di cariche

Fino ad ora si è considerato la carica di corpi discreti. Quindi la carica totale di un insieme di cariche era data dalla somma dei contributi di ogni carica. La situazione è ben diversa per i corpi continui. Considerando che in ogni atomo potenzialmente ci possono essere svariate cariche e che in un corpo di volume piccolissimo si arriva facilmente ad un numero di atomi pari al Numero di Avogadro, calcolare la carica con questo metodo è impensabile.

Grazie all'introduzione della densità di carica, definita come:

$$\rho(\overline{r}) = \frac{dq}{dV}$$

Si esprime la carica totale di un corpo continuo come la somma di tutti contributi di volume infinitesimo aventi una densità di carica ρ:

$$q = \lim_{n \to oo} \sum_{i}^{n} \rho_i \cdot dV_i = \int \rho \cdot dV$$

Flusso di un campo vettoriale

Si consideri il campo generato da un vettore. Inoltre si consideri una superficie piana avente area *A*. Si assume che il campo sia costante su tutta la superficie del piano e che tra la retta su cui giace il vettore e la normale al piano ci sia un angolo θ.

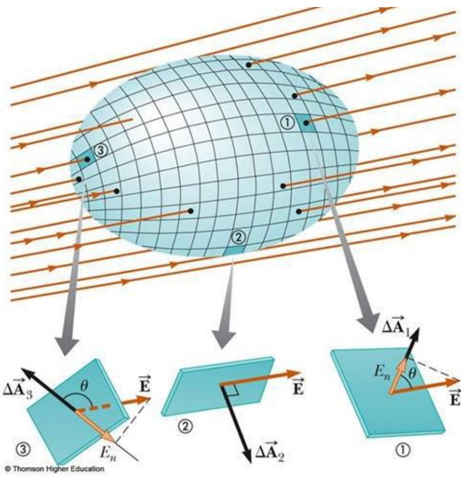
Si definisce *flusso di un campo vettoriale* la quantità di sostanza (o nel caso di fenomeni elettrici la quantità di carica) che attraversa la superficie nell'unità di tempo.

$$\Phi = \overline{E} \cdot cos\theta \cdot A$$

Flusso del campo elettrico
La definizione di flusso di un campo vettoriale ricorre anche a proposito dei corpi carichi. Consideriamo una sfera di volume costante. Possiamo calcolare il flusso in una porzione infinitesima di sfera attraverso la definizione di campo elettrico (possiamo considerare la superficie della sfera come un piano se per l'appunto si usano porzioni di sfera infinitesime).

$$\Phi = \overline{E} \cdot d\overline{A}$$

Il flusso totale si ottiene integrando per la superficie areale: $\Phi = \int \overline{E} \cdot d\overline{A}$.



Se la superficie è chiusa il flusso si indica con un cerchietto sull'integrale: $\Phi = \oint \overline{E} \cdot d\overline{A}$.

Nei casi in cui la superficie è chiusa essa si dirà '*gaussiana*'. Per convenzione se il campo è entrante nella superficie il flusso è negativo, viceversa se il campo è uscente dalla superficie.
Se il numero di linee di campo entranti è pari al numero di linee di campo uscenti dalla superficie il flusso è nullo.

Legge di Gauss
Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica contenuta nella superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto ε (detta anche permittività dielettrica del vuoto).

$$\Phi = \oint \overline{E} \cdot d\overline{A} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Attenzione: il th. di Gauss si può utilizzare in questa forma se e solo se la distribuzione di carica è omogenea. Quindi si deve essere in una situazione di simmetria di carica (nel caso di una sfera si può ad esempio avere una densità di carica dipendente dal raggio e quindi ancora avere una simmetria di carica radiale),

Utilità della Legge di Gauss
Dimostriamo la validità, e la notevole utilità, della legge in un tipico esempio di applicazione.
Consideriamo una carica di intensità Q costante. Si supponga di racchiudere la carica in una sfera di volume costante $\frac{4}{3}\pi r^3$ ..
Dato che il volume della sfera e la carica (posta al centro) sono costanti, si suppone che il campo generato dalla carica sia costante e simmetricamente radiale rispetto allo carica e distribuito in maniera omogenea in tutta la sfera.
Si ha quindi, calcolando il flusso del campo sulla superficie sferica ($4\pi r^2$):

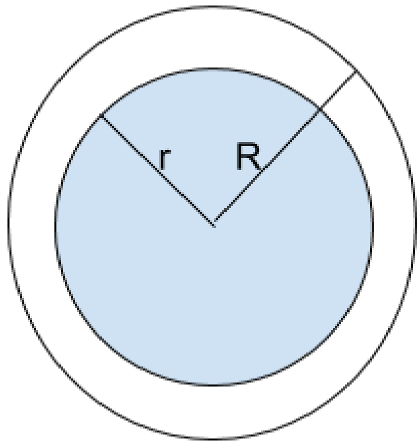
$$\Phi = \oint \overline{E} \cdot d\overline{A} = \overline{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Da tale relazione segue:

$$\overline{E} = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} = k\frac{Q}{r^2}$$

E come volevasi dimostrare si trova infine la legge di Coulomb.

Secondo esempio: si vuole calcolare il campo generato da una sfera (avente densità di carica costante) ad una distanza R dal centro della sfera.



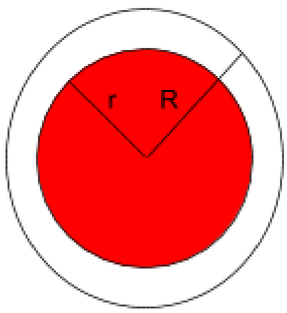
Supponiamo che la carica totale della sfera sia Q e, dato che la distribuzione di carica è uniforme su tutto il volume, possiamo calcolare il flusso generato dal campo sulla superficie gaussiana (area della superficie S = $4\pi r^2$) coassiale al centro della sfera e perpendicolare al campo generato da quest'ultima.

$$\Phi = \oint_0^S \overline{E_{\hat{n}}} \cdot d\overline{S}$$

In queste circostanze si suppone che il campo generato dalla sfera sia simmetrico in ogni direzione e nella fattispecie sia radiale rispetto il centro con intensità costante. Segue:

$$\Phi = \oint_0^S \overline{E_{\hat{n}}} \cdot d\overline{S} = \overline{E} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow th.\ Gauss \Rightarrow \overline{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow \overline{E} = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} = k\frac{Q}{r^2}$$

Si noti che $\overline{E_{\hat{n}}} = \overline{E}$, ossia la componente perpendicolare del campo rispetto alla superficie è esattamente pari al campo dato che si è supposto radiale rispetto al centro.
Si conclude che il campo che viene avvertito al di fuori di una sfera (isolante) è esattamente uguale al campo prodotto da una carica puntiforme.



Terzo esempio: si consideri una sfera isolante di raggio R e si voglia calcolare il campo ad una distanza $r < R$, quindi il campo che si avverte all'interno della sfera. Ancora una volta la sfera ha distribuzione di carica uniforme (quindi densità di carica ρ costante) ed una carica totale Q.
Dal teorema di Gauss, e assunto che il campo sia simmetrico e radiale rispetto al centro, si calcola il flusso del campo su una superficie S = $4\pi r^2$.

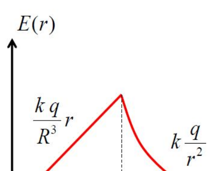
$$\Phi = \oint_0^S \overline{E_{\hat{n}}} \cdot d\overline{S} = \overline{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon}$$

La carica Q' è relativa alla sferetta di raggio r ma noi conosciamo solamente la carica totale relativa alla sfera di raggio R. Data la distribuzione di carica uniforme ci ricaviamo la carica incognita grazie alla densità di carica ρ.

$$Q' = \rho\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Segue agilmente:

$$\overline{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \frac{rQ}{\varepsilon 4\pi R^3} = \frac{r^3 Q}{\varepsilon 4\pi r^2 R^3} = k\frac{Qr}{R^3}$$



Andamento del campo in funzione della distanza

Il campo generato dalla sfera con distribuzione di carica radiale (ove l'intensità dipende dalla distanza dal centro) in un punto esterno alla sfera è uguale a quello generato dalla carica puntiforme Q uguale alla carica totale della sfera, posta nel centro della sfera.

Quarto esempio: si vuole calcolare il campo generato da una sferetta con distribuzione di carica non costante, dipendente radialmente dalla distanza dal centro, ad una distanza $r < R =$ raggio.

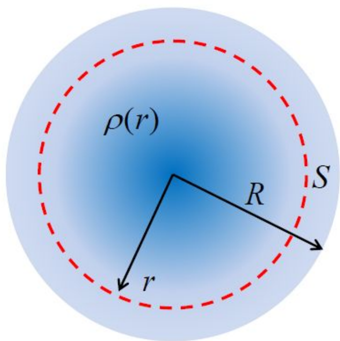
I discorsi su fatti sono ancora validi a patto che si calcoli la carica corrispondente alla distanza r in funzione di $\rho(r)$.

$$\Phi = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = Q'/\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \overline{E} = k\frac{Q'}{r^2}$$

$$Q' = \rho(r) 4\pi r^2$$

Esercizio: Consideriamo una sfera isolante carica di raggio R= 4 cm e densità radiale $\rho(r) = \frac{A}{r}$, $A = 1\frac{\mu C}{m^2}$; determinare il campo elettrico per distanze dal centro $r = 2$ cm, $r = 4$ cm, $r = 8$ cm

Si calcola il flusso del campo per una superficie gaussiana di raggio r considerando la carica totale disposta al centro della superficie.



$$\Phi = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = \oint_0^{4\pi r^2} \overline{E} \cdot d\overline{S} = \overline{E}\, 4\pi\, r^2$$

Si applica il teorema di Gauss:

$$\overline{E} 4 r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{E} = k\frac{Q'}{r^2}$$

Si calcola la carica Q' relativa ai raggi richiesti.

Si consideri un guscio di spessore infinitesimo dr posto a distanza r' dall'origine. In tale guscio si assume che la densità di carica sia costante. Assunto ciò si calcola la carica Q':

$$Q' = \sum_1^n \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int_0^r \frac{A}{r'} r'^2 dr' = 2\pi r^2 A$$

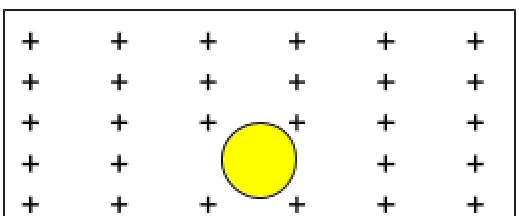
Gusci isolanti a simmetria sferica: regole fondamentali

Si considera un guscio sferico, ossia una sfera cava di raggio R e sfera mancante di raggio r. Si assume che tale guscio abbia una densità di carica costante (distribuzione di carica uniforme) ed inoltre che tale guscio generi un campo simmetrico rispetto al raggio.

In tali condizioni si verifica sempre:

- Il campo generato dal guscio all'interno della sfera cava è nullo;
- Il campo generato dal guscio all'esterno di esso è uguale al campo generato da una carica puntiforme posta al centro del guscio.

Campo elettrico generato da una lamina isolante (infinita)



Consideriamo una lamina, infinita, isolante caricata positivamente. Si assuma infinita una lamina tale che le dimensioni di essa sono infinitamente maggiori della distanza alla quale si vuole calcolare il campo.
Inoltre sia costante la densità di carica planare, quindi una distribuzione di carica uniforme. Sia infine Q la carica totale relativa alla lamina.
Si vuole calcolare il campo relativo alla lamina. Analogamente a quanto fatto in precedenza con il campo di una sferetta isolante, si pensi di costruire un cilindro di raggio *r* e di altezza arbitraria *h* (h sarà la distanza a cui si misurerà il campo).
Detto ciò si può calcolare il flusso del campo:

$$\Phi = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \overline{E} \int_0^{2\pi rh} d\overline{s} + \overline{E} \int_0^{4\pi r^2} d\overline{s} + \overline{E} \int_0^{4\pi r^2} d\overline{s} = 2\overline{E}(4\pi r^2)$$

Si noti che il primo integrale è nullo dato che il campo normale rispetto alla superficie piana. Ciò è sicuramente vero altrimenti le cariche sarebbero “influenzate” dal campo e non si avrebbe una densità di carica, e conseguente distribuzione, costante.
Dal teorema di Gauss segue:

$$2\overline{E}(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = k\frac{Q}{2}$$

Se consideriamo $Q = S \cdot \sigma$ si dimostra che il campo generato da una lamina piana infinita è proporzionale alla densità di carica piana e non dipendente dalla distanza.

$$\overline{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Campo elettrico generato da un filo (densità di carica lineare costante)
Si consideri un filo, carico, di lunghezza infinita (o in alternativa di lunghezza molto maggiore rispetto la distanza a cui si vuole verificare l’effetto del campo elettrico). Inoltre si assume che tale filo abbia una densità lineare costante e il campo sia radialmente simmetrico.
In tali circostanze si può calcolare il il campo generato dal filo grazie al teorema di Gauss.
Si consideri di avvolgere il filo da un cilindro coassiale (raggio = *r*, altezza = *h*) e di calcolare il flusso del campo passante per il solido.

densità lineare $\lambda = \frac{Q}{l}$

Flusso $\Phi = \int_0^{4\pi r^2} \overline{E} d\overline{s} + \int_0^{4\pi r^2} \overline{E} d\overline{s} + \int_0^{2\pi rh} \overline{E} d\overline{s} = \overline{E} \cdot 2\pi rh$

Applicazione del Teorema di Gauss, segue:

Campo $\overline{E} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi rh} = \frac{\lambda h}{\varepsilon \cdot 2\pi rh} = \frac{\lambda}{\varepsilon 2\pi r} = 2k\frac{\lambda}{r}$

Il campo generato da un filo è inversamente proporzionale alla distanza (e non dal quadrato della distanza come nel caso di una sferetta) e inoltre è proporzionale alla densità lineare di carica. Il discorso vale solo se la distanza è trascurabile rispetto alla lunghezza del filo (si possono così trascurare gli effetti di bordo).

Formulazione generale del Teorema di Gauss

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

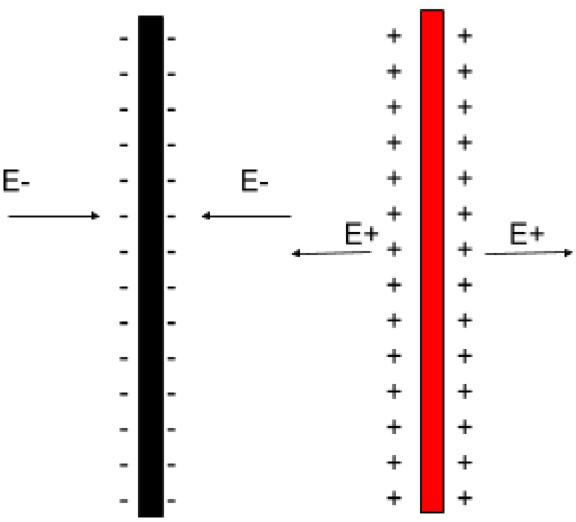
In questa relazione si è posto Q uguale alla carica totale contenuta nel volume del corpo relativo al flusso. Avendo però delle informazioni sulla densità di carica $\rho(r)$ del corpo si può scrivere:

$$\oint_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_V \rho d\overline{v}$$

Legge di Gauss negli oggetti conduttori

Fino ad ora abbiamo trattato oggetti non conduttori; tali oggetti avevano la caratteristica di contenere tutta la carica al loro interno. Per gli oggetti di materiale conduttore la situazione cambia. Data la loro conformazione elettrica, le cariche del corpo si dispongono sulla superficie esterne (fatta la supposizione di un corpo in equilibrio elettrostatico, altrimenti si genererebbero correnti non trascurabili). Per tali corpi il campo elettrico interno alla superficie è nullo dato il fatto che le cariche tendono a distribuirsi sulla superficie esterna.
Di conseguenza anche il flusso su una superficie interna del corpo è nullo.
Consideriamo ora un corpo conduttore avente un foro, assimilabile ad una superficie chiusa. Inoltre si suppone che all'interno del foro non ci siano cariche. Ancora una volta il campo elettrico all'interno del corpo (e quindi all'interno del foro, di qualsiasi forma esso sia) è nullo. Ciò deriva dal fatto che le cariche esterne, respingendosi mutuamente e essendo libere di muoversi, cercheranno la posizione di equilibrio elettrostatico allontanandosi il più possibile tra loro, quindi disponendosi sulla superficie più esterna del corpo.
La situazione è diversa nel caso in cui all'interno del foro ci sia una carica, seppur il comportamento sia il medesimo. Infatti, per rispettare le condizioni di equilibrio elettrostatico, la carica all'interno deve essere bilanciata da un corrispettivo di cariche aventi stessa intensità ma polo opposto. La carica complessiva all'interno del corpo è dunque nulla così come il campo e il flusso.

Campo elettrico di una doppia lamina conduttiva



Come rappresentato in figura, notiamo che il campo tra le due lamine conduttive di segno opposto è doppio, a parità di campo tra i corpi, della singola lamina.

Lavoro ed energia potenziale

Analogamente a quanto detto in meccanica, il lavoro è una quantità scalare che esprime l'energia dissipata per far compiere uno spostamento ad una carica. Essendo il campo elettrico di natura conservativa, il lavoro compiuto dipenderà solamente dal punto iniziale e finale dello spostamento. Per questo motivo anche in elettrostatica è possibile definire un'energia potenziale.
Definizione di Lavoro su uno spostamento rettilineo: $L = \overline{F} \cdot \overline{s} = q\overline{E} \cdot \overline{s}$

A seguito di uno spostamento la carica ha acquisito energia potenziale. Ricordando quanto detto in meccanica (dal teorema delle forze vive $\Delta L = \Delta K$ ma $\Delta K =- \Delta U$ da cui segue $\Delta L =- \Delta U$):
Energia potenziale $\Delta U =- L =- q\overline{E} \cdot \overline{s}$

Potenziale (anche detto differenza di potenziale)
In campo elettronico/elettrotecnico è più comunemente usato la differenza di potenziale o anche detta voltaggio (tensione). La differenza di potenziale è una grandezza scalare che esprime l'energia potenziale generata da un campo per carica unitaria. Esso è definito come:

$$\Delta V = V_f - V_i = \Delta U/q_0 = -L/q_0 = -\overline{E} \cdot \overline{s}$$

Notiamo che il potenziale non dipende dalla carica spostata, ma soltanto dal campo elettrico che compie lavoro; dunque è una grandezza più generale di lavoro ed energia potenziale.

Unità di misura di Lavoro, Energia Potenziale e differenza di Potenziale
Lavoro: **Joule**
Energia Potenziale: **Joule**
Potenziale: [**J**]/[**C**] = [**Nm**]/[**C**] = [**V**] = **Volt**

Formulazione generale del lavoro e dell'energia potenziale
Nella maggior parte dei casi i campi elettrici non sono costanti su tutta la superficie ma anzi è tutto il contrario. Per calcolare il lavoro compiuto da una particella che si muove di traiettoria curvilinea, e quindi che attraversa diverse intensità di campo, bisogna ricorrere al formalismo infinitesimo. Possiamo considerare il campo costante se prendiamo uno spostamento infinitesimo. Segue da sé la definizione di Lavoro:
$L = q_0\overline{E} \cdot d\overline{s}$, lavoro compiuto su uno spostamento d$\overline{s}$;

$L = q_0 \int_S \overline{E} \cdot d\overline{s}$, lavoro compiuto su uno spostamento S (non infinitesimo);

$\Delta U = -q_0 \int_S \overline{E} \cdot d\overline{s}$, energia potenziale derivante da uno spostamento S;

$\Delta V = -\int_S \overline{E} \cdot d\overline{s}$, differenza di potenziale a distanza S.

Dal potenziale al campo elettrico
Abbiamo visto che il potenziale è definito come, nel caso di campo costante, il prodotto del campo per lo spostamento della particella oppure, nel caso di campo variabile, come l'integrale sul prodotto del campo per lo spostamento. Da questa relazione possiamo ricavare il campo avendo il potenziale.
Posto $E_L = \overline{E}cos\theta$, dove θ è l'angolo formato tra lo spostamento e la retta su cui giace la forza, si definisce il campo:
$\overline{E}_L = -\frac{\Delta V}{ds}$, e nel caso di campo variabile $d\overline{E}_L = -\frac{\Delta V}{ds}$ da cui si conclude che il campo è la derivata rispetto al vettore spostamento del potenziale.

$$\overline{E}_x = -\frac{V}{x}, \quad \overline{E}_y = -\frac{V}{y}, \quad \overline{E}_z = -\frac{V}{z}$$

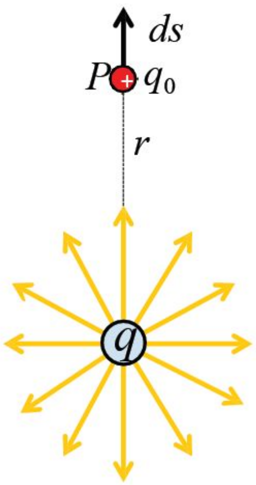
Superfici equipotenziali

Se in una determinata direzione il potenziale non varia (ΔV=0, dunque V è costante in quella direzione), ciò significa che la componente del campo in quella direzione è NULLA.
Il luogo dei punti nello spazio aventi uguale potenziale si dice *superficie equipotenziale.*

Su ciascun punto di una superficie equipotenziale:

- lungo una qualsiasi direzione tangenziale alla superficie, la componente parallela alla superficie del campo E è nulla.
- il campo elettrico non compie lavoro sulla carica che si sposta lungo una traiettoria contenuta sulla superficie.

Potenziale generato da una carica puntiforme



Supponiamo di avere una carica puntiforme di intensità Q che supponiamo di voler calcolare il lavoro che occorre per spostare una carica di prova q_0, posta ad una distanza r dalla carica Q, fino all'infinito.

Il lavoro è quindi dato da: $L = -q_0 \int_r^\infty k\frac{Q}{r^2}dr = kQq_0(\frac{1}{r})$

Segue, dal risultato appena ottenuto, moltiplicando per l'inverso di q_0:

$$\Delta V = k\frac{Q}{r}$$

Una carica puntiforme q genera a distanza r dalla carica un campo elettrico: $E(r) = k\frac{q}{r^2}$

ed un potenziale elettrico (assumendo $V(\infty)=0$): $V(r) = k\frac{q}{r}$

Potenziale di una lamina carica isolante

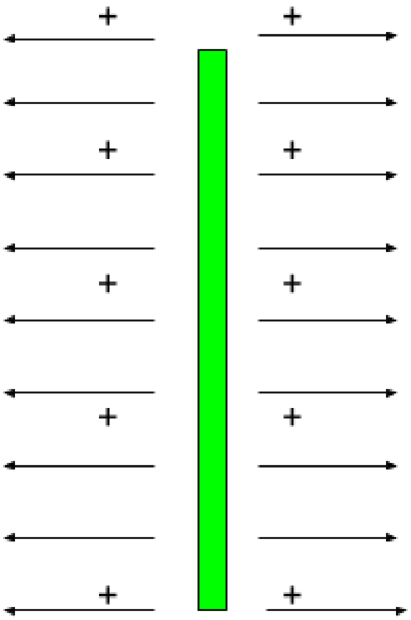
Supponiamo di avere una lamina (piastra) avente distribuzione di carica uniforme e si voglia calcolare il potenziale in funzione della distanza (perpendicolare alla superficie della piastra) sia di una carica concorde, sia di una carica discorde.

Visto che il campo generato dalla piastra è costante e misura $\overline{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$, possiamo facilmente notare che l'energia potenziale che ha una carica unitaria positiva a distanza d dall'origine (posta in corrispondenza della lamina) è proporzionale al campo e a d:
d > 0 ⇒ $\Delta V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot d$
d < 0 ⇒ $\Delta V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot (-d) = \Delta V = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot d$

Notiamo quindi che un campo, il cui naturale comportamento è quello di muovere la carica in un punto in cui il potenziale è minimo, raggiunge il punto di potenziale nullo man mano che la distanza tra la carica e la piastra aumenta.

Si verifica un comportamento analogo ma contrario nel caso di una carica opposta al campo generato da una piastra isolante. Il campo generato dalla piastra tenderà a riportare la carica verso il punto di minimo potenziale, ossia verso la piastra stessa (nel nostro caso verso l'origine).

Potenziale di una piastra carica conduttiva



Visto i risultati ottenuti in precedenza sul campo di una lamina conduttiva carica si vuole calcolare la differenza di potenziale di una carica (concorde e poi opposta) a distanza d, perpendicolare alla superficie laterale della piastra.

Ripasso: calcoliamo il campo.

$\Phi = \int \overline{E} \cdot \overline{ds} = q/\varepsilon$; si suppone che la lamina abbia una distribuzione di carica uniforme e che abbiamo spessore trascurabile (da ciò segue che la lamina abbia densità di carica lineare costante). Si consideri una superficie gaussiana cilindrica immersa nella lamina avente la superficie laterale perpendicolare alla superficie della lamina. Da ciò si calcola il flusso sull'area di base del cilindro:

$$\Phi = \int \overline{E} \cdot \overline{ds} = \Phi = \int_0^{\pi r^2} \overline{E} \cdot \overline{ds} + \int_0^{\pi r^2} \overline{E} \cdot \overline{ds} + \int_0^{2\pi r\, h} \overline{E} \cdot \overline{ds} = \overline{E}(\pi r^2)$$

Ricordiamo che all'interno di un corpo conduttivo, con densità di carica omogenea e costante, il campo è nullo e che il flusso è nullo se la superficie è parallela alle linee di campo.
Dalla densità di carica lineare segue il campo:

$$\overline{E} = \frac{\sigma(\pi r^2)}{(\pi r^2)\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

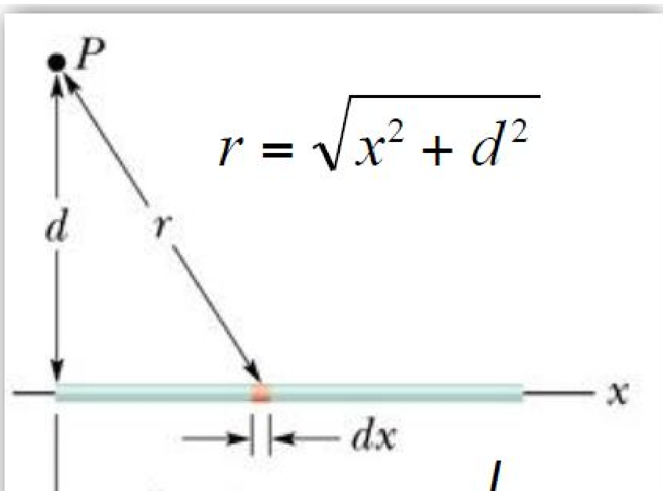
Dalla definizione di differenza di potenziale (opposto dell'integrale tra campo elettrico e distanza) si ottiene facilmente:

$d > 0 \Rightarrow \Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot d$

$d < 0 \Rightarrow \Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot (-d) = \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot d$

Potenziale dovuto ad una bacchetta isolante

Si supponga di avere una bacchetta, carica e isolante, come in figura. Si vuole stimare il potenziale, in funzione della distanza d della carica P causato dal campo dal pezzetto di bacchetta dx.



Dalla definizione di potenziale si trova che:

$$dV_P = k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow V_P = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

La chiave per risolvere l'integrale è la sostituzione di variabile:

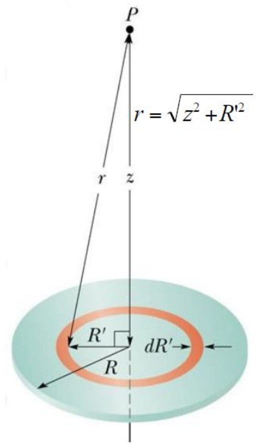
$$x' = x + \sqrt{x^2 + d^2}$$

Risultato finale: $V = \ln(L + \sqrt{L^2 + d^2} / d)$

Potenziale dovuto ad un disco carico isolante

Dato un disco isolante di raggio R e densità di carica uniforme σ, calcolare il potenziale V(z) lungo l'asse z perpendicolare al disco e passante per il centro.

Si vuole stimare il potenziale su P generato dal settore circolare di spessore infinitesimo dr'.
Sappiamo che il carica generata dal settore circolare è data da: $\sigma(2\pi R')dr'$.
Calcolando il potenziale su un punto del settore circolare si trova:



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\sigma(2\pi R')dr'}{\sqrt{z^2+R'^2}}$$

Integrando rispetto l'area del settore:

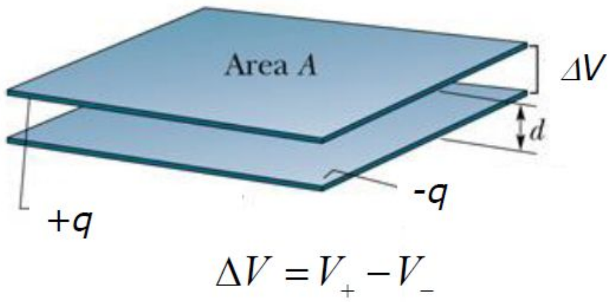
$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \int \frac{R'dr'}{\sqrt{z^2+R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \sqrt{z^2 + R'^2} \Big|_0^R$$

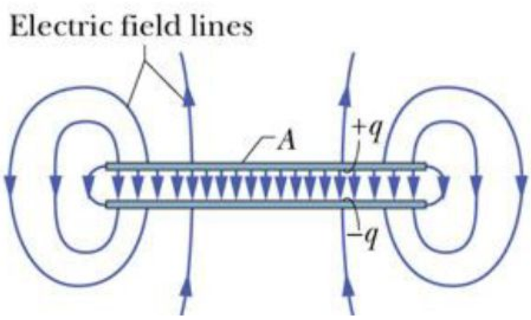
Condensatore

Il condensatore (a volte detto capacitore, dall'inglese capacitor) è uno strumento fondamentale in elettronica poiché consente di immagazzinare e rilasciare energia elettrica in modo molto rapido.

Tipologie di condensatori

+ Condensatore piano, è formato da due piastre poste ad una distanza d (dette piatti o armature). Il condensatore è caricato per mezzo di una batteria (ossia una piastra è caricata positivamente di una certa carica Q+ mentre l'altra piastra è caricata negativamente della stessa quantità di carica). Tra le due armature del condensatore, una volta cariche, si genera un campo e una differenza di potenziale uguale a quella misurabile tra i due poli della batteria. Generalmente si definisce la d.d.p. dalla piastra 'positiva' verso la piastra negativa (quindi $\Delta V > 0$).





+ Condensatore cilindrico.
+ Condensatore sferico.

Capacità di un condensatore

La caratteristica più importante del condensatore è la sua capacità (C); la capacità è il rapporto tra la carica e la d.d.p. tra i due piatti:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad q = C\,\Delta V$$

Possiamo inoltre definire la capacità come la quantità di carica necessaria per avere una differenza di potenziale tra le piastre di 1 Volt. L'unità di misura della capacità è il FARAD (F): un Farad è uguale ad un Coulomb su un Volt.

Capacità del condensatore piano

Consideriamo un condensatore piano, con carica q, area dei piatti A, e distanza tra i piatti d; trascuriamo gli effetti di bordo ed assumiamo il campo uniforme in tutti i punti interni al condensatore.

Calcoliamo la differenza di potenziale tra i due piatti; dalla definizione di d.d.p. abbiamo che:

$$\Delta V = V_f - V_i = L/q_0 = \int_0^d \overline{E} \cdot d\overline{s} = \overline{E} d$$

Si ricorda che non è presente il segno meno perché nei condensatori la d.d.p. è sempre positiva (visto che la si definisce come la differenza tra l'armatura positiva e quella negativa).

Visto che il campo è uniforme su tutta la superficie considerata possiamo concludere che la capacità del condensatore piano è data da:

$$C = \sigma A / \overline{E} d = \sigma A / (\sigma d/\varepsilon) = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Condensatore con dielettrico

Possiamo quindi scrivere la **formula generale della capacità** come:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{L} \qquad \mathcal{L} = \begin{cases} A/d & \textit{piano} \\ 2\pi L / \ln(b/a) & \textit{cilindrico} \\ 4\pi ab/(b-a) & \textit{sferico} \end{cases}$$

vuoto: $\varepsilon_r = 1$ con dielettrico: $\varepsilon_r > 1$

$\mathcal{L}$ è il **fattore geometrico**, ed ha la dimensione fisica di una lunghezza

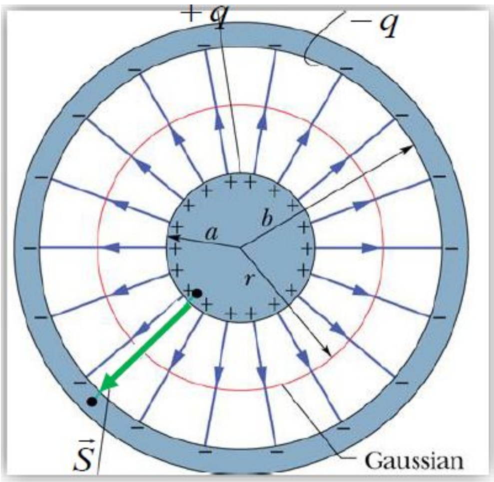
Materiale	ε_r
vuoto	1 (per definizione)
aria (a 1 bar)	1,00054
olio per trasformatori	2,2
polistirolo	2,6
plexiglas, nylon	3,5
carta	3,6

Materiale	ε_r
quarzo	4,3
vetro pyrex	5,1
mica	5,4
porcellana	7,0
acqua (a 20 °C)	80
ceramica al titanio	130

Carica del condensatore
Supponiamo di avere un condensatore, inizialmente scarico, e si voglia caricarlo attraverso una batteria. Una volta che i due poli della batteria sono stati collegati rispettivamente alle due armature del condensatore, le cariche si muovono verso il punto di potenziale minimo (rispettivamente le cariche positive verso la piastra negativa e viceversa). Il condensatore si dirà carico quando la differenza di potenziale tra le due armature è la medesima misurata tra i poli della batteria. Ciò significa che si è raggiunto un equilibrio all'interno del circuito.
La carica accumulata tra le due armature è data dal prodotto della capacità del condensatore per la differenza di potenziale ai due poli della batteria (che si noti è esattamente uguale alla differenza di potenziale tra le due armature una volta cariche).

Nota: permittività dielettrica nel vuoto: $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

Condensatore cilindrico
Supponiamo di avere un cilindro di raggio b dentro il quale è vuoto se non per un altro cilindro, coassiale al primo, di raggio a. Entrambi i cilindri hanno una lunghezza L >> a, b in modo tale da poter assumere trascurabili gli effetti di bordo prodotti dal campo. Supponiamo che la parete interna del cilindro di raggio maggiore sia carica negativamente e la parete esterna del cilindro di raggio minore sia carica positivamente. In queste condizioni si determina la capacità del cilindro (ricordiamo che per far ciò con i seguenti passaggi è necessario che il campo generato all'interno del cilindro abbia simmetria cilindrica).



Ripasso: Calcoliamo il campo elettrico generato all'interno del cilindro.

$\Phi = \int \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{q}{\varepsilon}$, th. Gauss ci permette di calcolare il campo sulla superficie gaussiana (supponiamo che sia un cilindro a $< r <$ b).

$$\Phi = \int \overline{E} \cdot d\overline{s} = 2 \int_0^{\pi r^2} \overline{E} \cdot d\overline{s} + \int_0^{2\pi r L} \overline{E} \cdot d\overline{s} = \overline{E}(2\pi r L)$$

$$\overline{E}(2\pi r L) = \lambda L/\varepsilon \qquad \Rightarrow E = 2k\frac{\lambda}{r}$$

Nei calcoli si è supposto che il cilindro avesse densità di carica lineare costante (da cui si è ricavato la carica λL).
Si calcola ora la differenza di potenziale tra le due armature:

$$\Delta V = V_f - V_i = \int_a^b 2k\frac{\lambda}{r}dr = 2k\lambda \cdot [log(b) - log(a)] = 2k\lambda \cdot log(\frac{b}{a})$$

Segue agilmente la capacità del condensatore:
$C = Q/\Delta V = L/2k \cdot log(\frac{b}{a}) = \varepsilon \cdot 2\pi L/log(\frac{b}{a})$

Condensatore sferico

Si prenda un condensatore di forma sferica, all'interno vuoto, a cui è coassiale un'altra sfera di raggio minore della prima. Entrambe le sfere hanno densità di carica volumetrica costante (per la prima si intende la superficie interna mentre per la seconda si intende la superficie esterna). Sotto queste ipotesi si vuole calcolare la capacità del condensatore sferico.
Come primo passo calcoliamo il campo elettrico presente all'interno della sfera. Si noti che tale campo è generato esclusivamente dalla sfera interna e quindi si calcola il campo mediante il teorema di Gauss (su una superficie di area πr^2 data la simmetria radiale del campo).

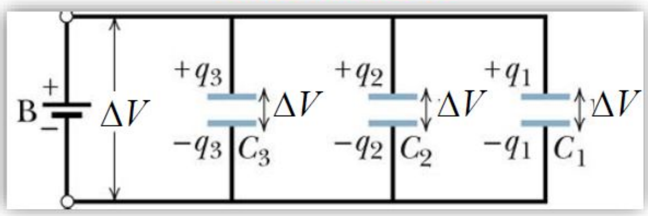
$$\Phi = \int \overline{E} \cdot d\overline{s} = \int_0^{\pi r^2} \overline{E} \cdot d\overline{s} = \overline{E}(\pi r^2) \quad \Rightarrow \overline{E} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon} = k\frac{Q}{r^2}$$

La d.d.p. è data da: $\Delta V = \int_a^b \overline{E} \cdot dr = \int_a^b k\frac{Q}{r^2} dr = -kQ(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$, da cui segue la capacità $C = Q/\Delta V = \frac{1}{k}(\frac{ab}{b-a}) = \varepsilon_0 \frac{4\pi ab}{b-a}$

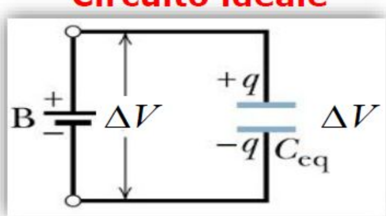
Condensatori in serie e in parallelo
I circuiti elettrici presentano spesso un gran numero di condensatori, i quali possono essere combinati in due modalità fondamentali: serie e parallelo.
La combinazione in parallelo consente di sommare le capacità e le cariche dei singoli condensatori , ovvero di comporre un condensatore equivalente la cui capacità sia somma delle capacità dei singoli condensatori. La combinazione in serie consente di ridistribuire la d.d.p. ai capi dei condensatori , ovvero di comporre un condensatore equivalente la cui d.d.p. è somma delle d.d.p. ai capi dei singoli condensatori, e la cui carica è uguale a quella dei singoli condensatori.
Possiamo ricavare delle leggi generali che consentono di sostituire la capacità di molti condensatori con quella di un unico condensatore equivalente , in modo da semplificare le leggi che regolano il funzionamento dei circuiti.

Condensatori in serie

Circuito reale



Circuito ideale

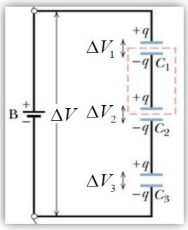


Dato un circuito, chiuso, avente al suo interno tre condensatori posti in parallelo (quindi si ricorda se i condensatori sono posti parallelamente allora tra le armature di ogni condensatore si misura la stessa differenza di potenziale). Il corrispettivo circuito semplificato è dato da un circuito avente un unico condensatore equivalente ai tre precedenti nell'esempio. La capacità del condensatore equivalente è data dalla somma delle capacità dei condensatori.

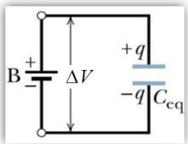
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Condensatori in serie

Circuito reale



Circuito ideale



Anche in questo caso è possibile definire un circuito semplificato che equivale al circuito di partenza.
Se posti in serie ai capi dei condensatori non si avverte più la stessa differenza di potenziale; comunque la differenza di potenziale ai due poli della batteria è la stessa delle somma delle d.d.p. dei condensatori in serie. Da questo segue che:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$1/C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Nel circuito ideale il condensatore equivalente ha stessa carica e d.d.p. uguale alla somma delle d.d.p. dei singoli condensatori.

Energia immagazzinata nel condensatore

L'energia immagazzinata nel condensatore è quella erogata dalla batteria nel processo di carica, e corrisponde al lavoro effettuato dalla batteria per trasportare tutta la carica del condensatore da un piatto all'altro, ovvero l'energia potenziale della carica trasferita tra i piatti.
L'energia potenziale tra due superfici è data da: $dU = dq_0 \Delta V$
Grazie alle relazioni inverse ottenute dalla capacità di un condensatore la precedente relazione si può ottenere similmente da: $\Delta V = q_o/C \quad \Rightarrow dU = q_0/C dq_0$

Integrando si ottiene facilmente l'energia potenziale totale: $\Delta U = \frac{1}{C}\int_0^{q_o} q_0 dq_0 = \frac{1}{2C}Q^2_{tot}$

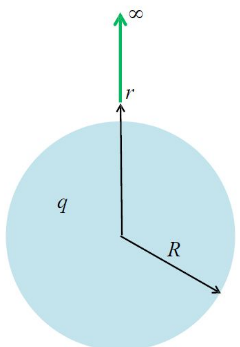
Inoltre tale energia può essere espressa in termini di d.d.p. : $\Delta U = \frac{1}{2C}C^2\Delta V^2 = \frac{1}{2}C\Delta V^2$

Densità di energia del campo elettrico

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dato un campo elettrico qualsiasi E in un punto dello spazio, l'energia elettrostatica immagazzinata in quel punto è proporzionale al quadrato del campo elettrico.

Ripasso: *potenziale, all'esterno, di una sfera carica isolante*



Si vuole dimostrare, come nel caso del campo elettrico, che il potenziale generato, all'esterno della superficie della sfera, sia uguale al potenziale generato da una carica puntiforme.
Supponiamo di calcolare il potenziale tra r (ossia sul bordo della sfera) e l'infinito. Dalla definizione di potenziale come l'integrale del campo sul percorso della differenza di potenziale si ottiene:

$$\Delta V = \int_r^{\infty} k\frac{Q}{r^2}dr = kQ\frac{1}{r}$$

Esercitazione Ciocci 13/05/2020

Esercizio 2 Esame di Fisica Generale del 2/2/2016

Una sfera di raggio $R_1 = 0.4$m presenta una distribuzione di carica positiva uniforme tale che il potenziale in un punto distante $2R_1$ dal centro è $V_0 = 0.2$V rispetto all'infinito (fig.2A).

Risoluzione

a. Il primo punto dell'esercizio si ricava notando che la d.d.p. è data (in caso di densità di carica costante) dal prodotto del campo per lo "spostamento". Da questo si ricava che la densità di carica volumetrica è data dal prodotto del della d.d.p. per il raggio della sfera (da qui si ottiene la carica) il tutto diviso il volume della sfera.

$$\Delta V = \overline{E} \cdot r = kQ/r \quad \Rightarrow Q = \Delta V\, r/k \quad \Rightarrow \rho = \Delta V\, 2r/\tfrac{4}{3}\pi r^3 k = \tfrac{3}{4}\tfrac{2\Delta V}{\pi r^2 k} = \tfrac{6\varepsilon_0 \Delta V}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\tfrac{C}{m^3}$$

b. Ricordiamo che il campo elettrico rispetta il principio di sovrapposizione. Si può immaginare lo scenario del secondo punto come un'unica sfera, avente densità di carica $\rho_1 + \rho_2$, della quale si vuole calcolare il campo elettrico in una regione interna ad essa. Si assume un riferimento di assi cartesiani aventi origine nel centro della prima sfera.

Calcoliamo il campo elettrico, all'interno, della sfera r_1 a distanza r $< r_1$:

$$\Phi = \int \overline{E} \cdot d\overline{s} = \int_0^{4\pi r^2} \overline{E} \cdot d\overline{s} = \overline{E}(4\pi r^2) = \frac{Q_r}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \overline{E} = \rho\tfrac{4}{3}\pi r^3/\varepsilon_0 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \overline{E} = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$$

Quindi possiamo dire che il modulo del campo interno alla zona di sovrapposizione è dato da:

$E_p = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overline{r}_1) + \frac{(-\rho)}{3\varepsilon_0}(\overline{r}_2)$; visto che la somma vettoriale dei due vettori da la distanza d si ottiene facilmente $d = \overline{r}_1 + \overline{r}_2 \quad \Rightarrow \overline{r}_2 = d - \overline{r}_1$ da cui si ricava $E_p = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overline{r}_1) + \frac{(-\rho)}{3\varepsilon_0}(d - \overline{r}_1) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}d$.

(Nota BENE: $\overline{r}_2 = (-r_2, 0, 0)$; $\overline{r}_1 = (r_1, 0, 0)$ e quindi segue $r_2 = r_1 - d$).

c. Si ricordi che la forza che agisce su una particella carica è data da: $\overline{F} = q_0\overline{E}$; da ciò si ricava agilmente: $a_e = \frac{q_0}{m_e}\left|\overline{E}\right|$.

Il campo a cui è sottoposto l'elettrone è dato dalla somma degli effetti dei campi (esterni).

Calcoliamo il campo a cui è sottoposto l'elettrone:

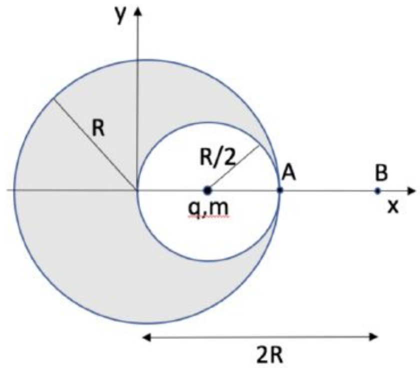
$$\overline{E} = kQ_1/(2R_1)^2 + kQ_2/(2R_1 + d)^2 = k\left(\frac{\rho 4/3\pi R_1}{(2R_1)^2} - \frac{\rho 4/3\pi R_2}{(2R_1 + d)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\rho\tfrac{4}{3}\pi R_1\left(\frac{1}{(2R_1)^2} + \frac{1}{(2R_1 + d)^2}\right) =$$

$$= \frac{\rho R_1}{3\varepsilon}\left(\frac{1}{(2R_1)^2} + \frac{1}{(2R_1 + d)^2}\right)$$

$$a_e = \frac{\rho R_1}{3\varepsilon}\left(\frac{1}{(2R_1)^2} + \frac{1}{(2R_1 + d)^2}\right) \cdot \frac{q_0}{m_e}$$

Esame di Fisica Generale del 2/2/2018

Una sfera di raggio R ha una distribuzione di carica ρ_0 uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio R/2. Assumiamo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate (0, 0, 0), Il centro del foro ha coordinate (R/2, 0, 0).
Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica q e massa m.



Con riferimento alla figura, e sapendo che ρ_0 = 1 μC/m^3, R=1 m, q=1 μC,e m=10^{-6} kg:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava $\vec{E}$ e il suo modulo E all'interno del foro. $\vec{E}$ = ... E= ....
2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate (R, 0, 0) sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava. t = ...
3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate (2R,0,0). v = ...

Risoluzione:

a. Consideriamo il campo generato da una sfera avente una distribuzione di carica costante. All'esterno della sfera il campo percepito è dato da $\overline{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}$, dove R sta per la distanza a cui si percepiscono gli effetti del campo. Allo stesso modo, sempre per il teorema di Gauss, abbiamo provato che il campo percepito all'interno della sfera è dato da: $\overline{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon}$.

Detto ciò notiamo che, in termini di carica totale, il foro sulla sfera comporta una diminuzione di carica. Visto che la distribuzione di carica è omogenea si può concludere:

$Q_{tot} = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 - \rho\frac{4}{3}\pi(R/2)^3 = \rho\frac{4}{3}\pi(R^3 - R^3/8)$

Si conclude che il campo esterno alla sfera vale:

$$\overline{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(R^3 - R^3/8)}{d^2} = \frac{\rho(R^3 - R^3/8)}{3\varepsilon d^2}$$

Ora si calcola il campo percepito da un punto interno alla sfera ed interno al foro.

$\overline{E}_s = \frac{\rho r'}{3\varepsilon}\hat{r}$

$\overline{E}_v = \frac{-\rho(-R/2 + r')}{3\varepsilon}\hat{r}$, da cui si ricava $\overline{E}_{int,\,tot} = \frac{\rho r'}{3\varepsilon}\hat{r} + \frac{-\rho(-R/2 + r')}{3\varepsilon}\hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\frac{R}{2}\hat{r}$

Il modulo del campo è dato da: $\left|\overline{E}_{int,\,tot}\right| = \frac{\rho}{3\varepsilon}\frac{R}{2} = 1.9 \cdot 10^4\ N/C$

b. Per trovare il tempo impiegato dalla carica posta al centro del foro a raggiungere il bordo del sfera è sufficiente calcolare l'accelerazione (costante) prodotta dal campo e poi trovare il tempo notando che si nota un moto rettilineo uniformemente accelerato.

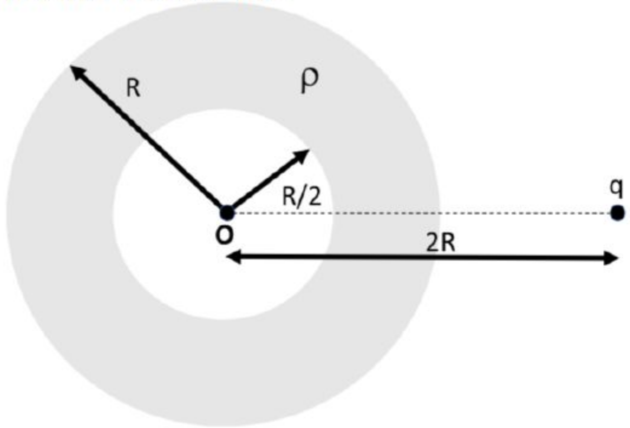
$$a = q/m \cdot \left|\overline{E}_{int,\, tot}\right|$$

Dalla legge oraria segue: $R/2 = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{R/a} = \sqrt{6\varepsilon/\rho} = 7.3 \cdot 10^{-6} s$

c. Il modulo della velocità nel punto B è dato da:

$|v| = a_{int}t_{int} + a_{ext}t$

Esame di Fisica Generale del 19/2/2019



Una carica Q ha una distribuzione di carica nel guscio sferico di raggio interno R/2 e raggio esterno R (vedi figura) data da $\rho = Ar$, con A costante di opportune dimensioni. Una particella di massa m e carica q (un protone) si trova a distanza 2R da O

1. Determinare la densità di carica sul bordo esterno della regione sferica, $\rho(R)$.
   $\rho(R)$ = ...
2. Determinare l'accelerazione a cui è soggetta la particella, nella posizione da essa occupata, a(2R). a(2R) = ...
3. Determinare la velocità minima, v che deve avere la particella carica per arrivare in O. v = ...

Dati: R=20 m,Q=20 μC,m=1.67×10^{-27} kg, q=1.6×10^{-19} C.

Corrente elettrica

Si definisce intensità di corrente la quantità di corrente che attraversa la sezione di un oggetto conduttore nell'unità di tempo. Matematicamente è definita come la derivata della carica rispetto al tempo.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

In accordo con quanto detto sopra è possibile definire la carica come:

$$q = \int i \cdot dt$$

Notiamo che si può enunciare il principio di *stazionarietà*: la differenza di intensità di carica tra due punti arbitrari di un oggetto conduttore è nulla se esso ha densità di carica costante. Questo perché, se tale principio non fosse vero, in due punti distinti le cariche si accumulerebbero ma ciò è in contrasto con l'ipotesi di densità di carica costante.

In realtà saremmo tentati a pensare che in qualsiasi materiale conduttore, seppure non connesso ad una sorgente che sviluppi differenza di potenziale, ci sarebbe della corrente. Infatti sappiamo che gli elettroni di conduzione sono liberi di muoversi all'interno del materiale, di fatto generando dei flussi di cariche. In realtà si definisce intensità di corrente il flusso netto di cariche che attraversano la sezione del conduttore nell'unità di tempo.
Nel caso presentato sopra, il flusso netto sarebbe nullo perché gli elettroni si muoverebbero da una parte all'altra, senza avere una direzione preferenziale dettata dall'applicazione di una differenza di potenziale ai due estremi del corpo.

L'intensità di corrente si misura in *Ampere* [**A**].
La corrente elettrica è una quantità scalare, non confonda il fatto che è disegnata con una freccia che ne indica il verso; due correnti che confluiscono o provengono da un solo ramo si sommano come scalari, non come vettori.
Il punto di congiunzione di due o più rami di circuito si dice **NODO**.

Corrente continua (DC), corrente alternata (AC)

Il modo in cui viaggia la carica nei mezzi di conduzione è differente: per convenzione si assume che le cariche positive si muovono dal polo positivo al polo negativo (in realtà sappiamo che in un metallo gli elettroni di conduzione percorrono la via in senso opposto).
Parleremo di corrente continua quando il flusso di corrente si sposta, senza inversioni di verso, dal polo positivo al polo negativo. Al contrario, si dirà corrente alternata quando il flusso di corrente inverte il "senso di marcia" periodicamente.

Corrente come flusso di carica

Abbiamo definito la corrente come la quantità di cariche che attraversano una certa sezione areale di un filo conduttore. Tale definizione è del tutto simile a quanto detto per il flusso di un campo vettoriale.
Definiamo il vettore velocità di drift (ossia un vettore che esprime con quanta velocità gli elettroni di conduzione si muovono a causa di una differenza di potenziale). Inoltre definiamo un vettore areale che rappresenta la sezione dell'oggetto conduttore. In tali condizione, in un intervallo di tempo dt, un elettrone percorre uno spazio $ds = vdt$.

Definiamo inoltre la densità di elettroni di conduzione n. Detto ciò possiamo ricavare la carica che ha attraversato la sezione ds.

$dq = n \cdot e \cdot v \cdot (Adt)$

Per cui la corrente è altresì definita come $i = n \cdot e \cdot (Av)$, o più in generale (in caso di velocità di drift non costante, $i = ne\int^{A} v \cdot dA$.

La densità di corrente

La densità di corrente è la corrente che attraversa la sezione unitaria del conduttore, ovvero la corrente per unità di area.

$$\vec{J} = n e \vec{v}_d$$

La resistenza elettrica

Georg Simon Ohm notò, nel corso dei suoi esperimenti, che collegando materiali differenti a differenze di potenziale uguali misurava una difformità di comportamento tra i materiali in termini di flusso di corrente. Infatti Notò che nel rame, a parità di condizioni, circola molta più corrente rispetto alla grafite. Tale comportamento gli permise di modellare questo comportamento come una sorta di resistività dei materiali al passaggio della corrente. Da qui nacque il concetto di resistenza elettrica.

La resistenza elettrica è definita come il rapporto tra la differenza di potenziale e la corrente elettrica.

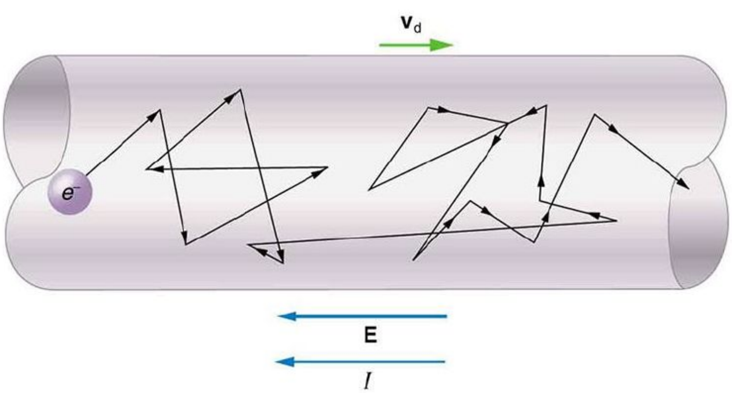
$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

L'unità di misura della resistenza elettrica è l'*Ohm* [Ω].

Prima legge di Ohm

La prima legge di Ohm, definita dall'equazione $R = \Delta V \ / \ I$, dice che la resistenza di un materiale è una proprietà di esso, a temperatura costante. Vediamo la motivazione di questo enunciato.

Abbiamo detto che gli elettroni di conduzione sono i responsabili della corrente elettrica: infatti essi sono in grado muoversi, con un certo grado di libertà dettato dalla struttura cristallina. Ogni materiale ha una diversa struttura cristallina che quindi determina il movimento degli elettroni. Il moto di questa particelle non è libero anzi è molto limitato a tal punto che il flusso della corrente è dato dai successivi scontri che si verificano tra gli elettroni di strutture cristalline vicine. All'aumentare della temperatura le particelle in agitazione aumentano mentre diminuisce la possibilità di ogni singolo elettrone di compiere un percorso rettilineo, e quindi più veloce, tra la marea di urti generata. Ecco che con l'aumentare (diminuire) della temperatura, nei materiali ohmici, aumenta (diminuisce) la resistenza del materiale.



Seconda legge di Ohm

Consideriamo un filo conduttore, di materiale ohmico, avente densità di corrente e campo elettrico costante. In tali condizioni la corrente è proporzionale all'area della sezione e alla densità di corrente.

$$I = JA \qquad \Delta V = EL \quad \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E}{J}\frac{L}{A}$$

Notiamo quindi che la resistenza di un materiale è proporzionale alla lunghezza del conduttore e inversamente proporzionale all'area della sezione del conduttore.

Da ciò segue la formulazione della seconda legge di Ohm: la resistenza R di un conduttore di sezione costante è proporzionale alla lunghezza (L) e inversamente proporzionale all'area (A) della sezione del conduttore.

L'effetto Joule

Consideriamo un elettrone posto nel vuoto, sotto l'azione di un campo elettrico conservativo costante. Se l'elettrone è inizialmente fermo (energia cinetica iniziale nulla) inizierà ad accelerare a causa della forza effetto del campo. Quindi se si prendesse un altro punto del campo noteremo che l'energia totale del sistema si conserva perché il campo genera un aumento dell'energia cinetica ma anche una diminuzione dell'energia potenziale.

Si prenda un conduttore, a temperatura costante, e lo di pone in un circuito che gli fornisce una differenza di potenziale. Se misurassimo la velocità iniziale e finale di un elettrone noteremo che tale misura è costante e che quindi non c'è un bilanciamento di energia (perchè l'elettrone si sposta verso il punto di potenziale minimo e quindi diminuisce l'energia potenziale). Almeno così sembrerebbe: ecco che si introduce l'effetto Joule. Il lavoro compiuto dal campo è disperso, dal punto di vista energetico, in calore. Quindi in generale l'energia totale del sistema si conserva ma l'energia meccanica del sistema non si conserva. Gli urti tra gli elettroni producono una dissipazione di energia che si trasforma in calore: se ci pensiamo è un fenomeno molto comune nella vita di tutti i giorni. Basti pensare a quando si utilizza tanto il telefono e ad un certo punto inizia scaldarsi.

Energia e potenza elettrica

Supponiamo di avere un semplice circuito formato da un generatore di tensione (una batteria) a cui è collegata una resistenza. Le cariche immesse dalla batteria nel circuito si muovono dal polo positivo verso il polo negativo (attraversando il resistore). Ora si pensi di far muovere una carica dal punto di messa a terra (energia potenziale nulla) su un percorso chiuso e quindi considerare i fenomeni energetici che accadono nel percorso. Una carica, per essere spostata da un punto ad un altra, necessita di un dispendio di energia. Tale energia è fornita dalla batteria attraverso un processo chimico. Infatti l'energia chimica della batteria viene trasferita alla carica sotto forma di energia potenziale che poi viene usata per compiere il percorso lungo il circuito e tornare nel punto di partenza con energia potenziale nulla.

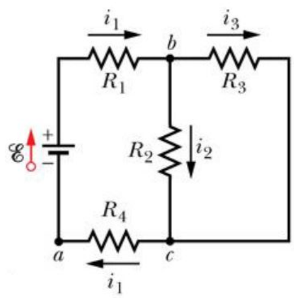
La potenza dissipata dalla batteria è data dalla relazione:

$$P = \Delta V I = RI^2 = (\Delta V)^2/R$$

Circuito elettrico

Si chiama circuito elettrico un generico percorso chiuso in cui le cariche possono muoversi con continuità, costituito da un insieme di componenti collegati tra loro mediante fili conduttori.
Il componente fondamentale di un circuito è il generatore: esso mantiene una d.d.p. fissata tra i due punti del circuito a cui e collegato; pile e batterie sono generatori di d.d.p. continua e costante. Tutti gli altri elementi del circuito si chiamano utilizzatori, poiché utilizzano o consumano l'energia elettrica fornita dal generatore; la lampadina, un motore elettrico, una resistenza, sono esempi di utilizzatori.

Circuiti resistori e leggi di Kirchoff



1^a legge di Kirchoff (o legge dei nodi): La somma delle correnti entranti in un nodo deve essere uguale alla somma delle correnti uscenti.
2^a legge di Kirchhoff: la somma algebrica delle d.d.p. calcolate ai capi di ogni elemento di circuito all'interno di una maglia, quindi un percorso chiuso, deve essere nulla.

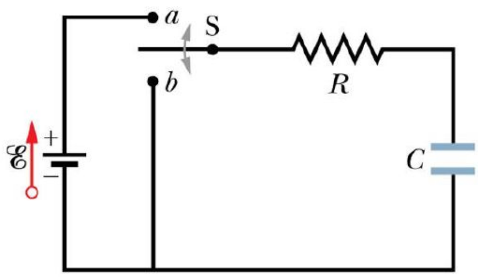
La prima legge di Kirchoff deriva dalla conservazione della carica: infatti tutta la corrente entrante deve uscire nella stessa quantità altrimenti si avrebbe un accumulo di carica. La seconda legge è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia: lungo un percorso chiuso l'energia potenziale di una carica soggetta ad una forza conservativa deve essere nulla. Segue che la d.d.p. ai capi di ogni elemento di una maglia deve essere nulla. Notiamo inoltre che quest'ultima legge è giustificata dal fatto che

Analogia tra condensatori e resistenze

Condensatori in serie Tutti i condensatori hanno la stessa carica. $\frac{1}{C_{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$	**Condensatori in parallelo** Sono attraversati dalla stessa d.d.p. $C_{tot} = \sum_{i=1}^{n} C_i$
Resistenze in serie Sono attraversate dalla stessa corrente. $R_{tot} = \sum_{i=1}^{n} R_i$	**Resistenze in parallelo** Sono attraversate dalla stessa d.d.p. . $\frac{1}{R_{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Circuito RC

Fino ad ora abbiamo considerato circuiti in cui tutte le grande erano costanti nel tempo. Nella realtà i casi in cui ci si trova a che fare con queste situazioni sono molto rari. Dunque è di un'importante utilità studiare i circuiti in cui la differenza di potenziale, così come la corrente o la resistenza, è variabile. Detto ciò si introducono i circuiti RC, dei circuiti composti da una batteria, che funge da forza elettromotrice, da una resistenza e un condensatore.



Possiamo schematizzare concettualmente le tre fasi del circuito, rispetto al tempo, così:

1. Carica: dall'istante t=0, il ramo di circuito che ospita la resistenza e il condensatore è collegato al polo positivo della batteria. Da questo momento la corrente inizia ad attraversa il circuito e a caricare il condensatore.
2. Carica completa: una volta che il condensatore è "saturo" la corrente si ferma. In questo momento la differenza di potenziale ai capi della batteria è uguale al differenza di potenziale tra le armature del condensatore.
3. Scarica: inizia nel momento in cui l'interruttore è messo a contatto con il polo b. In questo momento il circuito è chiuso solo sul percorso condensatore-resistenza. La carica accumulata defluisce nel punto di potenziale minimo (la resistenza) fino a che non si esaurisce.

Schematizziamo il processo di carica dal punto di vista delle leggi fisiche:
Sappiamo dalla seconda legge di Kirchoff che la differenza di potenziale su ciascun ramo del circuito si conserva. Quindi per il nostro circuito si ha:

$$\xi = i(t)R + \Delta V_C(t)$$

La corrente che attraversa la resistenza varia nel tempo così come la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Ricordi che la corrente può essere come la derivata della carica rispetto al tempo mentre la d.d.p. del condensatore può essere ricavata tramite il rapporto della carica e la capacità.

$$\xi = i(t)R + \Delta V_C(t) = \frac{dq}{dt}R + \frac{1}{C}q(t)$$

La soluzione di questa equazione differenziale descrive l'andamento rispetto al tempo della carica tra le armature del condensatore.

Possiamo dimostrare che la soluzione è data da:

$$q(t) = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \qquad \Rightarrow i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathscr{E}}{\tau}e^{-t/\tau}$$

Sostituiamo le espressioni della carica e della corrente nell'equazione (1) e verifichiamo che l'equazione (1) è soddisfatta:

$$\frac{RC\mathscr{E}}{\tau}e^{-t/\tau} + \mathscr{E}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = \mathscr{E} \qquad \Rightarrow \frac{RC}{\tau}e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \tau = RC$$

L'equazione (1) è soddisfatta se la costante τ ("tau") nell'esponenziale è uguale al prodotto *RC;* τ è detta **costante di tempo caratteristica**: infatti, si può verificare che essa ha la dimensione fisica del tempo:

$$[RC] = \Omega F = \frac{V}{A}\frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

Magnetismo
Nella vita quotidiana siamo circondati da dispositivi che sfruttano fenomeni magnetici per funzionare.
I fenomeni elettrici e magnetici quasi non si distinguono nella vita reale ma i due campi si distinguono solamente in condizioni di laboratorio. Ma chi/cosa produce un campo magnetico?
Il campo magnetico è generato dal moto delle cariche elettriche (correnti elettriche di dimensioni molecolari). Ecco perché se c'è campo elettrico è presente sicuramente anche campo elettrico.

Magnetismo generato dal moto degli elettroni
I campi magnetici sono generati da movimenti di cariche elettriche. Uno di questi movimenti è dato dall'agitazione interna degli elettroni in un atomo. Questo accade tipicamente nei materiali magnetici. I magneti (o calamite) sono dei materiali i quali naturalmente generano un campo, simile a quello di un dipolo elettrico. Nel campo magnetico, i ruoli che svolgono le cariche nel campo elettrico sono svolti da due poli: Nord e Sud. Ovviamente le calamite generano campo magnetico seppur non essendo fisicamente connesse ad una differenza di potenziale che generi un flusso di elettroni.
Notiamo che esistono due tipologie di moto a livello "atomico" che generano un campo elettrico:
- Rotazione degli elettroni intorno al nucleo.
- Lo spin degli elettroni.

I materiali, in generale, non sono magnetici
Normalmente la materia NON è magnetica: così come le cariche di segno opposto all'interno di un materiale neutro si compensano, anche i momenti magnetici dovuti al moto orbitale e di spin degli elettroni si compensano, per cui il campo magnetico da essi generato è nullo.

Materiali *diamagnetici*
Materiali *paramagnetici*
Materiali *ferromagnetici*

Un magnete è un materiale con momenti magnetici degli atomi tutti concordemente allineati.

Linee del campo di dipolo magnetico
Campo magnetico e campo elettrico si assomigliano anche nella disposizione delle linee di forza del campo. Notiamo che in un campo magnetico le linee di forza uscenti dal polo Nord si chiudono sul polo magnetico Sud. Non si possono avere linee di campo *aperte*.
Mentre un campo elettrico è prodotto da un'unica entità (una carica positiva oppure una carica negativa, infine un sistema di cariche) un campo magnetico è sempre generato da un dipolo Nord-Sud.

Legge di Gauss per il campo magnetico
Il flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa (o gaussiana) è sempre NULLO, poiché tutte le linee del campo devono necessariamente entrare ed uscire dalla superficie.

Forza di Lorentz (Forza del campo magnetico)

La forza di Lorentz è la forza che agisce su una carica elettrica, che si muove a velocità υ, prodotta dal campo magnetico $\overline{B}$.

$$\overline{F}_L = q\overline{\upsilon} \wedge \overline{B}$$

Si noti che, in accordo con il prodotto vettore, la forza generata dal campo sulla carica è perpendicolare sia alla velocità sia al campo magnetico.

Indubbiamente si ottiene che il modulo della forza di Lorentz è dato da:

$$\overline{F}_L = q\overline{\upsilon}\overline{B}sin\theta$$

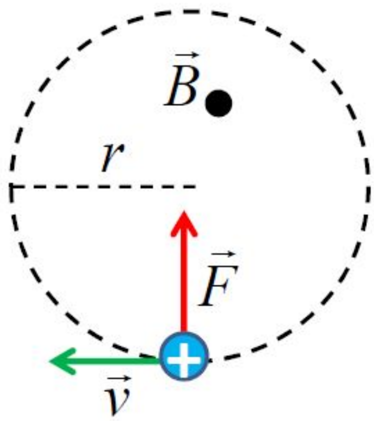
ove θ esprime l'angolo formato tra il campo magnetico e il vettore velocità della carica. Se la carica procede con velocità parallela rispetto al campo, la forza è nulla e il campo non influisce sul moto della carica.

Un altro modo per definire la forza di Lorentz è dire che si tratta di una forza deflettente diretta lungo la perpendicolare al campo e alla velocità della carica (e di conseguenza influisce sulla traiettoria della carica).

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del campo magnetico è il Tesla (T). Per applicazioni pratiche è più comunemente usato il Gauss: 1 T = 10^4 Gauss.

Moto della carica nel campo magnetico

Facciamo un ragionamento: il campo magnetico influisce in qualche modo sull'energia cinetica della carica? Supponiamo di ambientare il problema su un piano (teoricamente di dimensioni infinite) e supponiamo che tale piano generi un campo magnetico costante, uscente verso l'alto rispetto al piano. Inoltre supponiamo di avere una carica, supposta anch'essa costante e puntiforme di cui non è rilevante conoscerne il modulo, che si muove di moto rettilineo uniforme parallelamente al piano (di conseguenza perpendicolarmente al campo magnetico). Non ci sono altre forze esterne al sistema. La domanda quindi equivale a capire se la forza di Lorentz altera in qualche modo il moto rettilineo uniforme della carica una volta che quest'ultima entra a contatto con il campo.



Si può benissimo calcolare la forza di Lorentz, che avrà un certo modulo e in accordo a quanto detto avrà direzione esattamente perpendicolare al vettore velocità e al campo. Tale direzione è diretta verso la destra (supposto di vedere il piano dall'alto). Essendo una forza non nulla e la carica, seppur puntiforme, è dotata di massa ci permette di asserire che la forza fa compiere uno spostamento verso destra alla carica.

Ora concentriamoci sul modulo della velocità della carica durante lo spostamento. Notiamo che, dal teorema delle forze vive, la variazione dell'energia cinetica è pari al lavoro delle forze esterne. Ma sappiamo bene che l'unica forza agente sul sistema è la forza di Lorentz ed è perpendicolare allo spostamento. Ciò implica che il lavoro compiuto dalla forza è nullo e quindi anche l'energia cinetica si conserva. Da questo si ricava che il modulo della velocità della carica è costante nel tempo dando vita ad un *moto circolare uniforme*.

Formule utili e interessanti

In caso di campo magnetico costante abbiamo provato che la carica si muove di moto rettilineo costante. Quindi è del tutto lecito assumere che la forza di Lorentz si comporta come la forza centripeta. Da ciò si ricava:

$\overline{F}_L = \frac{\upsilon^2}{r} m_c$, ma sappiamo che $\overline{F}_L = q\overline{\upsilon}_c\overline{B}$ da cui si ricava $r = m_c\upsilon^2 / q\overline{\upsilon}_c\overline{B} = m_c\upsilon/q\overline{B}$

Moto elicoidale

Supponiamo di porci nelle stesse condizioni sopra elencate ma questa volta la carica ha velocità non parallela al piano (si noti che questo implica che la velocità può essere scomposta in due componenti dirette rispettivamente una sul piano e una verso il campo magnetico). Sotto queste condizioni continua a sussistere il moto circolare uniforme parallelo al piano ma lungo l'asse uscente dal piano la carica ha una componente di velocità (costante visto che la forza di Lorentz non è diretta in quella stessa direzione). Da ciò si ricava che verticalmente la carica si muove di moto rettilineo uniforme. In sostanza la carica compie una traiettoria simile a quella della filettatura di una vite (appunto traiettoria elicoidale).

Forza magnetica su un filo percorso da corrente

Se un filo conduttore percorso da corrente elettrica è immerso in un campo magnetico, gli elettroni in moto sono soggetti alla forza di Lorentz; gli elettroni, non potendo essere espulsi dal filo, trasmettono la forze agente su di loro alla massa del conduttore. Se il conduttore è mobile o flessibile, può essere spostato o deflesso dalla forza di Lorentz.

$$\overline{F}_L = q\overline{\upsilon}_d\overline{B}$$

ove v è la velocità di drift degli elettroni.

Possiamo riscrivere la forza di Lorentz sul filo percorso da corrente in forma macroscopica in termini di corrente:

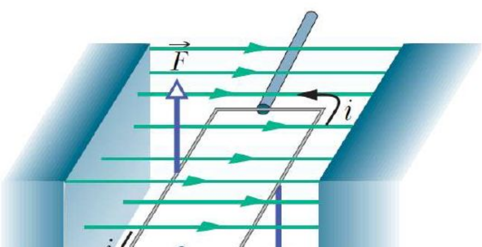
$$\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B}$$

Quest'ultima espressione può essere adoperata solo per tratti di fili rettilinei con corrente costante. Più in generale, la forza di Lorentz agente su un filo curvilineo è dato dall'integrale del percorso prodotto vettore campo magnetico per la corrente costante.

Differenze tra forze elettriche e forze magnetiche

La forza elettrica è sempre diretta nel verso del campo elettrico (si noti che la forza di Coulomb è proporzionale al campo elettrico) mentre la forza magnetica è diretta perpendicolarmente al campo magnetico (in accordo con le proprietà del prodotto vettore). Inoltre la forza elettrica che un campo produce su una carica è indipendente dalla velocità della carica (essa infatti può mettere in movimento una carica) mentre la forza magnetica è proporzionale alla velocità della carica (se la velocità è nulla il campo magnetico non produce effetti in termini di forze sulla carica). In conclusione la forza magnetica, a differenza della forza elettrica, non compie lavoro su una carica perchè è diretta perpendicolarmente allo spostamento di essa.

Base del funzionamento dei motori elettrici



Supponiamo di porre tra due poli magnetici opposti (Nord - Sud) una spira incernierata ad un asse parallelo alle due superficie magnetiche e perpendicolare al campo magnetico. Supponiamo inoltre che tale spira è attraversata da una corrente continua e costante. Si vuole calcolare la forza di Lorentz generata dal campo visto che sulla spira circola corrente (e quindi c'è un flusso netto di elettroni non nullo).
Lungo i lati corti della spira la forza è nulla perché gli elettroni viaggiano in parallelo rispetto al campo e dunque il prodotto vettoriale tra la velocità degli elettroni e il campo è nullo.
Notiamo inoltre che, dato il fatto che la spirale rappresenta un circuito chiuso, la corrente scorre su un unico verso ma ciò implica che la velocità assunta dagli elettroni abbiamo verso opposto tra i due lati lunghi della spira. Da ciò segue che la forza di Lorentz è di uguale intensità ma ha verso opposto nei due lati lunghi della spira. Ne deriva un momento torcente.

Vediamo, in pratica, quanto vale il momento torcente.

$$\overline{F}_{L1} = q\upsilon \wedge \overline{B} = q\frac{ds}{dt} \wedge \overline{B} = iL\overline{B}$$
$$\overline{F}_{L2} = -iL\overline{B}$$
$$\tau_{L1} = \frac{d}{2} \wedge iL\overline{B} = i(\frac{d}{2}L) \wedge \overline{B} = \frac{1}{2}i\overline{A}_{rea} \wedge \overline{B}$$
$$\tau_{L2} = \frac{d}{2} \wedge iL\overline{B} = i(\frac{d}{2}L) \wedge \overline{B} = \frac{1}{2}i\overline{A}_{rea} \wedge \overline{B}$$
$$\tau_{TOT} = i\overline{A}_{rea} \wedge \overline{B}$$

Tale momento torcente porta ad una configurazione di equilibrio. Infatti la spira viene fatta ruotare fin quando l'area della spira è parallela alle superfici dei magneti. In tale configurazione la forza di Lorentz è parallela rispetto all'asse per cui non fa "momento".
Se invertiamo il senso della corrente ad intervalli regolari si avrà una rotazione.

Dalla spira alla bobina

Se invece di una spira si ha una serie di spire avvolgimenti, supponendo che queste siano avvolte così strettamente tra loro da poter considerare identiche la dimensione di ogni spira ed il piano di avvolgimento, si ha quella che si chiama una bobina piana. Per N avvolgimenti, il momento torcente della bobina è la somma dei momenti di ciascuna spira.
Questa espressione vale per qualsiasi bobina piana di area A, qualunque sia la sua forma, purché B sia uniforme in tutta l'area della bobina.

Il campo magnetico può compiere lavoro?

Notiamo, dai risultati ottenuti dallo studio del moto di una particella in moto in un campo magnetico, che la forza di Lorentz non fa lavoro perchè è normale rispetto alla velocità e dunque allo spostamento.
La situazione è differente per un filo conduttore isolato o per delle spire/bobine. Infatti abbiamo notato che gli elettroni, impossibilitati dal vincolo costituito dal materiale conduttore, non possono "liberarsi" e sfogare gli effetti della forza che agisce su di loro. Per questo motivo il

corpo su cui sono vincolati, se flessibile, tende ad essere flesso oppure ad essere spostato se il corpo ha un certo grado di libertà adeguato.

Visto che è possibile definire il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz segue che possiamo enunciare anche un'energia potenziale per i fenomeni magnetici.
A tale scopo, ricordandoci la definizione di momento di dipolo magnetico ($\mu = Ni \cdot (LR) \cdot \widehat{n}$ ove i rappresenta la corrente, N il numero di avvolgimento della bobina, L la lunghezza di un singolo avvolgimento, R il braccio della forza), possiamo definire l'energia potenziale come:

$$\Delta U = -W_i^f \ , \quad U(\theta) = -\mu \cdot \overline{B} = -\mu cos\vartheta \overline{B}$$

Il punto di minimo potenziale si trova quando il momento di dipolo elettrico è parallelo e concorde al campo magnetico mentre il punto di massimo potenziale si trova quando il dipolo si trova parallelo ma diretto in verso opposto al campo magnetico.

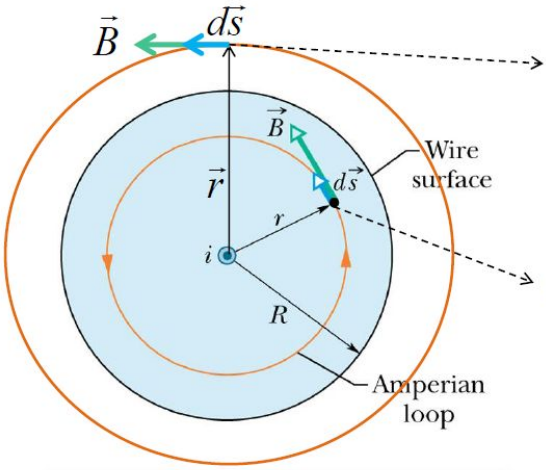
Legge di Biot-Savart

Visto e considerato che in presenza di una corrente elettrica si produce una forza in funzione del campo magnetico, gli scienziati Biot e Savart dedussero una legge che permette di esprime il campo magnetico dB (avvertito in un punto P) in funzione della corrente che scorre in un tratto di filo ds:

$$d\overline{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i d\overline{s} \wedge \widehat{r}}{r^2}$$

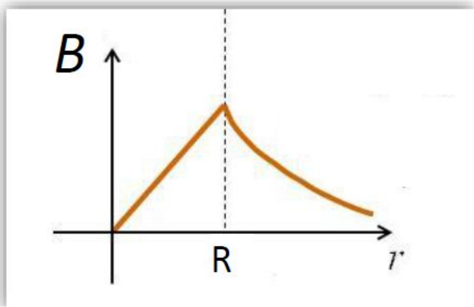
Notare che la legge in questione fornisce il campo magnetico prodotto da una porzione di filo ds. Per ottenere il campo magnetico totale di dovrà ricorrere alla somma vettoriale dei vari contributi forniti da tutti i possibili tratti in cui può essere suddiviso il filo (oppure, ricorrendo al formalismo matematico è possibile fare l'integrale curvilineo sul filo).
Da notare la forte somiglianza con l'espressione del campo elettrico in elettrostatica. Infatti è facile vedere che entrambe sono inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal punto in questione ma differiscono nella direzione in cui è diretto il campo: il campo elettrico è parallelo al versore radiale mentre il campo magnetico è perpendicolare sia al tratto di corrente sia al versore radiale del punto.
Si noti che il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente forma delle linee di campo concentriche avente asse sul centro del filo. Il verso del campo è determinato dalla regola della mano destra (si posiziona il pollice nel verso della corrente e il verso del campo è dato dalla rotazione delle quattro dita che si avvolgono sul palmo della mano).

Attenzione: un filo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico, avverte una forza che lo fa deflettere. Inoltre un filo percorso da corrente produce a sua volta una campo magnetico. Se ne deduce che due fili paralleli saranno sottoposti alla forza generata dalla somma vettoriale dei campi magnetici generati da ognuno (principio di sovrapposizione).
Campo magnetico generato da un filo rettilineo attraversato da corrente (distanza r)



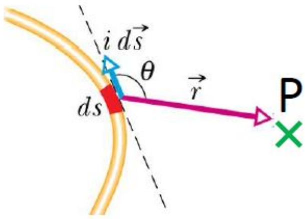
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$ esterno al filo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$ interno al filo



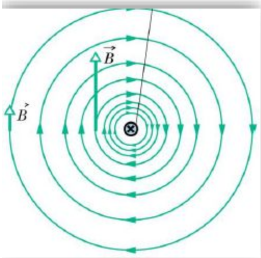
B(r) ha lo **stesso andamento del campo elettrico *E(r)* generato da un cilindro isolante uniformemente carico**: entrambi i campi all'interno del cilindro crescono linearmente, all'esterno decadono come 1/r

Sommario: campi magnetici generati da correnti



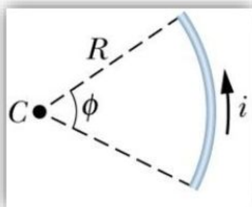
Legge di Biot-Savart $$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}$$

Permeabilità magnetica del vuoto $$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\left(\frac{T\,m}{A}\right)$$



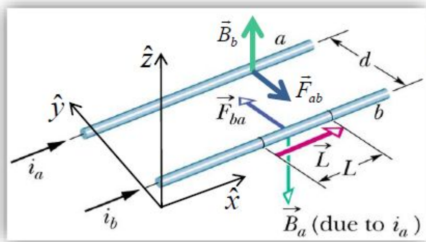
Filo rettilineo infinito: simmetria cilindrica

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



Nel centro di curvatura dell'arco:

$$B = \frac{\mu_0\, i\, \phi_{rad}}{4\pi R}$$



Forza tra fili paralleli

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a\, i_b}{d} L$$

Quando le correnti nei due fili scorrono in verso opposto, le forze si invertono e i due fili si respingono. Si ha quindi che **conduttori paralleli in cui scorrono correnti nello stesso verso si attraggono**, mentre **conduttori paralleli in cui scorrono correnti in verso opposto si respingono.**

Legge di Ampère: l'integrale di linea (curvilineo) del campo magnetico lungo un cammino chiuso è uguale alla corrente complessiva che attraversa la superficie delimitata dal circuito chiuso, moltiplicata per la permeabilità magnetica del vuoto

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{T\,m}{A} \right)$$

Il teorema di Ampere (in analogia con quanto accade per il teorema di Gauss) ci permette di calcolare il campo magnetico, prodotto dalla corrente concatenata alla linea chiusa, ad una certa distanza r (ad esempio r sarà il raggio della circonferenza la quale è attraversata da un certo numero di conduttori in cui scorre una corrente non trascurabile). Si noti che per corrente concatenata si intende la corrente totale che "buca" la superficie delimitata dalla linea chiusa su cui si calcola l'integrale. Quindi in generale è possibile che il campo magnetico varia dalla distanza su cui vengono misurati gli effetti.

Campo magnetico generato da un filo attraversato da corrente

Supponiamo di avere un filo infinitamente lungo, avente raggio r, sul quale scorre una corrente continua avente intensità costante i_c. Si vuole calcolare il campo magnetico generato dal filo ad una distanza R > r.

Si applica il teorema di Ampere alla linea chiusa amperiana $2\pi R$ e si trova che il campo $\overline{B}$:

$$\Phi_B = \oint_0^{2\pi R} \overline{B} \cdot d\overline{s} = \mu_0 i_c \quad \Rightarrow \quad \overline{B} = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi R}$$

Ora si vuole calcolare il campo magnetico generato dalla corrente sul filo ma a distanza R' < r (quindi dentro la sezione del filo). Si noti che non più tutta la corrente contribuisce alla generazione del campo magnetico.

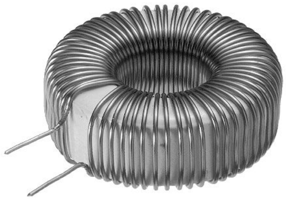
$$\Phi_B = \oint_0^{2\pi R'} \overline{B} \cdot d\overline{s} = \mu_0 i' \quad \Rightarrow \quad \overline{B} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi R'}$$

Si noti che $i' = j\pi R'^2$, dove j indica l'intensità di corrente. La stessa corrente può essere espressa in termini del raggio originario della sezione del filo. Visto che la corrente è costante allora anche il rapporto delle correnti dovrà essere costante. Da ciò segue:

$$\frac{i'}{i_c} = j\pi R'^2 / j\pi r^2 \quad \Rightarrow i' = i_c \frac{R'^2}{r^2}$$

In definitiva: $\overline{B} = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r^2} R'$

Campo magnetico prodotto da una bobina toroidale



Consideriamo una bobina toroidale la quale è composta da N avvolgimenti. Supponiamo che ogni avvolgimento sia percorso dalla stessa corrente, costante per tutti. Si vuole calcolare il campo magnetico prodotto dalla bobina in diversi punti.

Per r < R_{int} il campo magnetico è nullo visto che non vi è alcuna corrente concatenata nella superficie ampierana rappresentata da una circonferenza chiusa di raggio r.

Il medesimo risultato si ottiene per r > R_{ext} visto che ogni spira produce una corrente concatenata ma ogni spira può essere vista, dal punto di vista della superficie amperiana, come due fili paralleli in cui in tutti e due scorre la stessa corrente ma in verso opposto. Per tale motivo il flusso di corrente è nullo e quindi non c'è campo magnetico al di fuori del toroide.

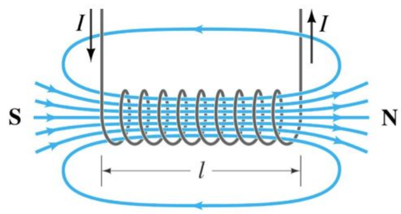
Ora si vuole calcolare il campo magnetico prodotto all'interno della bobina ($R_{int} < r < R_{ext}$).

$$\Phi_B = \oint_0^{2\pi r} \overline{B} \cdot d\overline{s} = \mu_0 i_c \qquad \Rightarrow \qquad \overline{B} = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}$$

Si noti che la corrente concatenata i_c è data dalla somma di ogni avvolgimento e quindi l'espressione del campo diventa:

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 N i_0}{2\pi r}$$

Il solenoide



Un solenoide è un componente elettrico in grado di generare un campo magnetico sufficientemente uniforme all'interno della sua struttura. Si tratta di un oggetto costruito con una serie di avvolgimenti di filo disposti in modo tale da formare delle spire. Maggiore è il numero delle spire, maggiore sarà l'intensità e l'uniformità del campo magnetico.

Si vuole calcolare il campo magnetico generato all'interno del solenoide da un tratto di esso di lunghezza l.

Si noti che è utile usare come superficie amperiana un rettangolo di lato lungo l e di lato corto arbitrario. Si noti che se l << lunghezza solenoide allora si può asserire che il solenoide si comporta come un solenoide di lunghezza infinita e di conseguenza trascurare gli effetti di bordo. In tali circostante il campo magnetico all'interno del solenoide è dato da:

$$\overline{B} = \frac{\mu_0 l \eta i_0}{l} = \mu_0 \eta i_0$$

Dove $\mu = N/l$ indica il rapporto tra il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide.

Legame tra un campo magnetico variabile e campi elettrici

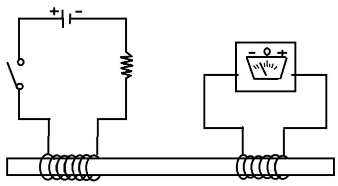
Se fino ad ora abbiamo studiato i fenomeni che a partire da cariche elettriche generano campi magnetici ora studieremo i fenomeni che si comportano in maniera opposta. Infatti proprio la legge di Faraday ci dirà che una corrente variabile nel tempo, e che quindi genera un campo magnetico, è in grado di generare una forza elettromotrice opposta alla f.e.m. che genera la corrente stessa. Questo fenomeno, detto *autoinduzione*, ci permette di dire che un campo magnetico, causato da una corrente variabile nel tempo, produce una corrente nel conduttore, opposta in verso a quella che prodotta dal generatore, chiamata *corrente indotta*.

Flusso di una campo magnetico
Il flusso di un campo magnetico sulla superficie A si definisce in modo analogo al flusso di un campo elettrico.

$$\Phi_B = \oint_A \overline{B} \cdot d\overline{A}$$

Si noti che $\cdot$ denota il prodotto scalare. L'unità di misura del flusso magnetico è il *Weber* (Wb).

Legge di Faraday



Consideriamo il circuito in figura a lato. Come ci si aspetterebbe, quando l'interruttore del circuito primario è aperto, in nessuno dei due circuiti c'è circuitazione. Ora si apra e chiuda repentinamente l'interruttore del circuito e si noti che il galvanometro posto nel circuito secondario segna una variazione di corrente seppure i due circuiti non sono "elettricamente" connessi tra di loro. Questo dimostra che la il campo magnetico (variabile) prodotto sulla spira del circuito primario induca una corrente nel circuito secondario. Questo avviene dal fatto che le linee di forza del campo attraversano l'avvolgimento di spire del circuito secondario. Tale flusso è variabile perché l'intensità del campo varia con il tempo.
Si può dimostrare che la f.e.m. indotta sul circuito secondario dipenda dalla variazione nel tempo del flusso magnetico. Tale relazione, detta *legge di Faraday*, si esprime:

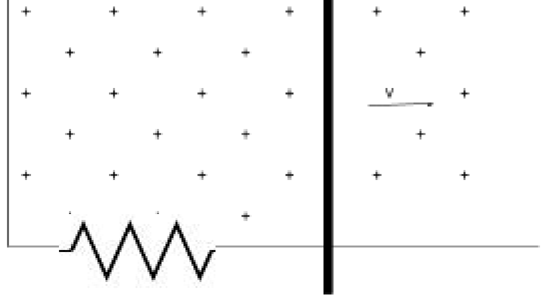
$$f.e.m._{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Nei casi in cui il flusso del campo sia prodotta da una bobina, e quindi la corrente concatenata sia pari al prodotto del numero degli N avvolgimenti e la corrente passante in ognuno di essi, tale legge si trasforma in:

$$f.e.m._{ind} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Notiamo che tale corrente può variare in base alla variazione del flusso del campo. Ciò implica che può variare a seconda della corrente, della superficie e dell'angolo formato dal campo e la superficie.

Forza elettromotrice dinamica



Si consideri il sistema in figura. Come possiamo notare non c'è alcun elemento di circuito che possa produrre una forza elettromotrice.
Ora si metta in moto la sbarretta vincolata ai due fili conduttori paralleli con una certa velocità. Dalla legge di Lorentz segue che viene prodotta una forza che mette in moto gli elettroni presenti all'interno della sbarretta di ferro. Tutto ciò grazie al fatto che l'intero circuito sia immerso in un campo magnetico perpendicolare rispetto al piano

su cui giace il circuito. Vediamo di scoprire come varia nel tempo la forza elettromotrice generata dal movimento della sbarretta.
Se la sbarretta si sposta, il flusso del campo è variabile perché allo spostarsi della sbarretta aumenta la superficie utile per calcolare il flusso.

$$\Phi_B = \oint_A^{} \overline{B} \cdot d\overline{A} = \oint_{A_i}^{lx} \overline{B} \cdot d\overline{A} = \oint_{A_i}^{l(v_0 t)} \overline{B} \cdot d\overline{A} = \overline{B}(lv_0 t - A_i)$$

Dalla legge di Faraday, derivando rispetto al tempo, si ricava:

$$f.e.m._{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d[\overline{B}(lv_0 t - A_i)]}{dt} = -\overline{B}lv_0$$

La corrente indotta nel circuito si trova dalla legge di Ohm:

$$I_{ind} = \Delta V / R = -\overline{B}lv_0 / R$$

Nelle stesse condizioni presentate in precedenza si vuole calcolare l'andamento della velocità della sbarretta nel tempo. Visto che il campo magnetico è diretto entrante nel foglio e il movimento iniziale della sbarretta ha prodotto un movimento degli elettroni dal basso verso l'alto, allora si è creata una corrente diretta anch'essa dal basso verso l'altro che produce una forza frenante sulla sbarretta (si noti che in accordo con le proprietà del prodotto vettore tale forza è diretta verso sinistra.
Si scrivono le forze in gioco nel sistema:

$$m_s a = -il \wedge \overline{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -il\overline{B}/m_s \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -(\overline{B}lv/R)\, l\overline{B}/m_s$$

L'equazione differenziale ha soluzione:

$$v(t) = v_0 e^{-\overline{B}^2 l^2/Rm_s}$$

Legge di Lenz

La polarità della forza elettromotrice indotta tende a sua volta a produrre una corrente tale che, il campo magnetico da essa prodotta, contrasti la variazione di flusso del campo magnetico già presenta.
Esempio: supponiamo di avere un campo magnetico, perpendicolare al piano individuato dal foglio con linee di campo entranti nel foglio. Supponiamo inoltre di avere un circuito formato da una resistenza e una sbarretta libera di muoversi parallelamente ai lati lunghi del circuito (supposto che esso sia di forma rettangolare). Notiamo che se la sbarretta viene fatta muovere verso destra si genera una forza magnetica che a sua volta genera una corrente che scorre in senso orario. La corrente prodotta è controbilanciata dalla corrente indotta dalla forza magnetica. Infatti si noti che la legge di Faraday dice che si crea una forza elettromotrice indotta dalla variazione del campo magnetico nel tempo (in questo caso il campo generato dagli elettroni messi in movimento dallo spostamento della sbarretta). Segue che, in accordo con la legge di Ohm, che ci sarà una corrente proporzionale alla f.e.m. (e inversamente proporzionale a R) ma diretta in verso opposto.

Campo elettrico indotto

Se un campo magnetico variabile nel tempo genera una f.e.m. in un circuito conduttore attraversato dal flusso, deve anche esistere un campo elettrico indotto E che muove le cariche nel circuito. Si può quindi riscrivere la legge di Faraday in termini di:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Il campo elettrico indotto esiste a prescindere dalla presenza di un conduttore: nello spazio vuoto o in assenza di cariche mobili non ci può essere corrente indotta, ma il campo elettrico generato per induzione magnetica esiste comunque!
Notiamo due differenze importanti tra il campo elettrico indotto e il campo elettrico Coulombiano:

1. Il campo elettrico indotto ha linee di forza chiuse.
2. Il campo elettrico indotto è non conservativo.

Quest'ultima è deducibile dal fatto che il lavoro del campo su un percorso chiuso deve essere nullo affinché il campo sia conservativo ma data la definizione del campo esso, qualunque percorso sia scelto, se esiste un campo magnetico non costante il risultato sarà sempre non nullo.

Induttori e induttanze

Gli induttori sono componenti di un circuito elettrico i quali sono capaci di generare un campo magnetico se attraversati da corrente. Tra i diversi induttori possiamo citare i solenoidi, i toroidi e le bobine. Associati agli induttori esiste una caratteristica, detta *induttanza*, che descrive il flusso concatenato per unità di corrente. L'induttanza si esprime in termini di:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

ove il denominatore rappresentato, per l'appunto, il flusso concatenato sulla superficie chiusa rappresentata dall'induttore.
L'unità di misura dell'induttanza è *Henry* (H).

Analogia tra induttori (induttanze) e condensatori (capacità)

Si ricordi che la capacità di un condensatore esprime il rapporto tra la carica tra i piatti e la d.d.p. necessaria per caricare i piatti con carica la stessa carica.
Analogamente, l'induttanza esprime il rapporto della quantità di flusso concatenato e la corrente necessaria per produrlo.
Entrambe le grandezza ci forniscono una misura dei campi, elettrico per la capacità e magnetico per l'induttanza.

Riassunto elementi di circuito

Condensatori	$\Delta V = Q/C$
Resistenze	$\Delta V = R \cdot I = R\frac{dQ}{dt}$
Induttori	$\Delta V = -L\frac{di}{dt}$