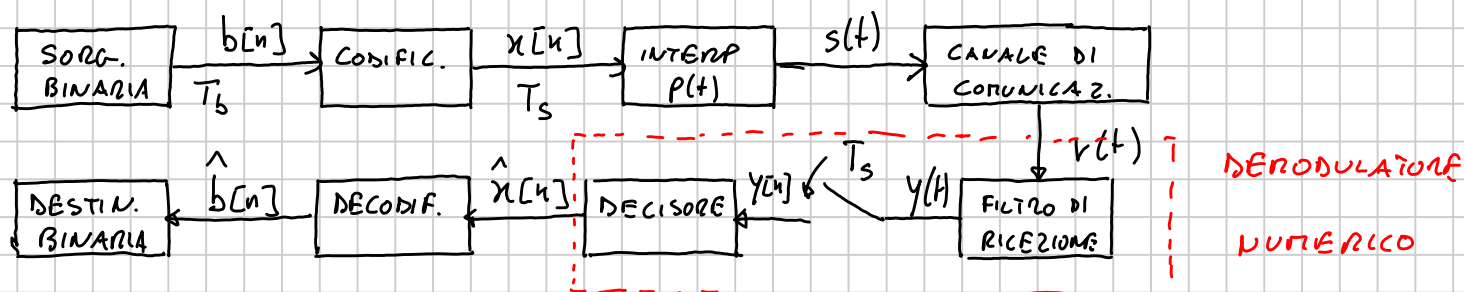


MODULAZIONI NUMERICHE IN BANCA BASE

La modulazione numerica è necessaria per poter trasmettere sequenze binarie attraverso un mezzo trasmissivo. In particolare, per adesso, ci concentreremo su canali trasmissivi in banda base, come ad esempio il doppino telefonico o il cavo coassiale.



→ CODIFICATORE: trasforma sequenze di bit in simboli M -ari appartenenti ad un alfabeto A_s

→ INTERPOLATORE: modula impulsi tramite i simboli $x[n]$ in ingresso per produrre una sequenza di impulsi $s(t)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] p(t - kT_s)$$

→ CANALE DI COMUNICAZIONE: sono assenti i trasduttori in quanto la propagazione nel mezzo trasmissivo è elettrica

→ FILTRO DI RICEZIONE: filtra componenti di rumore generate nel canale e compensa eventuali distorsioni.

→ CAMPIONATORE: preleva campioni dal segnale filtrato $y(t)$

→ DECISORE: associa un simbolo dell'alfabeto A_s ad ogni campione

→ DECODIFICATORE: trasforma i simboli in sequenze binarie

CODIFICATORE

→ Deve essere sincro con la sorgente

$$T_s = T_b \log_2 M$$

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b \log_2 M}$$

3) La sequenza di simboli generata dal codificatore viene considerata come un processo stazionario. Spesso, i simboli trasmessi sono considerati equiprobabili

$$P\{x[n]=d_i\} = \frac{1}{M}, \quad \forall i$$

INTERPOLATORS

In un sistema di comunicazione numerico in banda base, l'interpolatore solo svolge il compito di modulatore numerico, in quanto effettua la sagomatura, mentre non è prevista nessuna traslazione in frequenza. Il filtro sagomatore è realizzato tramite la generazione dell'impulso $p(t)$. Infatti, si può pensare a $P(f)$ come allo spettro del singolo impulso.

B_p : banda dell'impulso $p(t)$

E_p : energia dell'impulso $p(t)$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$$

Data l'aleatorietà della sequenza di simboli $x[n]$, $s(t)$ deve essere interpretato come la realizzazione di un processo aleatorio $S(t)$ stazionario.

Il processo $S(t)$ ha una autocorrelazione $R_s(\tau)$ ed una densità spettrale di potenza $S_s(f)$.

Per cui è definita una potenza P_s ed una banda B_T .

Energia per bit

L'energia media per bit può essere calcolata come

$$E_b = \frac{T_b P_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{\log_2 M}, \quad E_s = \text{energia media per simbolo}$$

DEMODULATORE NUMERICO



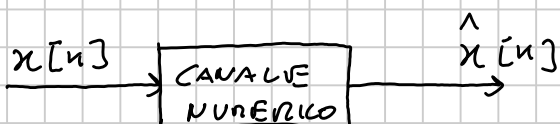
Il demodulatore numerico produce una sequenza $\hat{x}[n]$ in modo tale da minimizzare la probabilità di errore.

Probabilità di errore sul simbolo e sul bit

$$P_{Es} = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$$

$$P_{Eb} = P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\} \quad \text{BER (bit error probability)}$$

CANALE NUMERICO E PRESTAZIONI



$$x[n] \in A_s, \quad A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$$

$$P_E(n) \triangleq P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i | x = \alpha_j\} P\{\alpha_j\}$$

Nel caso di simboli equiprobabili

$$P_E(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P\{\hat{x} = \alpha_i | x = \alpha_j\}$$

FORMATO DI MODULAZIONE EQUIENERGIA

$$E_s(i) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t) dt, \quad s_i(t) = \text{segnale trasmesso in corrispondenza del simbolo } \alpha_i$$

Il formato di modulazione è equienergetico se

$$E_s(i) = E_s \quad \forall i$$

ORTOGONALITÀ

Il formato di modulazione è detto ortogonale se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t) s_j(t) dt = 0 \quad \forall i \neq j$$

EFFICIENZA ENERGETICA

Fissata una P_{Eb} , l'efficienza energetica è definita come il valore

$$\eta_P \triangleq \frac{1}{SNR}, \quad SNR \triangleq \frac{P_s}{P_n}$$

che permette di ottenere tale BEP.

Quindi tanto maggiore è η_P , tanto minore deve essere il SNR che garantisce una data BEP.

EFFICIENZA SPETTRALE

L'efficienza spettrale è definita come il rapporto tra il tasso di erogazione binario e la banda di trasmissione

$$\eta_B \triangleq \frac{R_b}{B_T} \quad [\text{bit/s/Hz}]$$

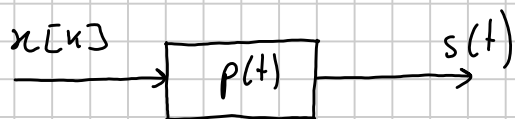
Quindi l'efficienza cresce quando a parità di tasso di erogazione la banda utilizzata in trasmissione si riduce.

In termini di T_s e M :

$$\eta_B = \frac{\log_2 M}{B_T T_s}$$

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

La PAM nel caso generico è detta anche M -PAM o PAM M -aria, dove con M si indica il numero di simboli presenti nell'alfabeto A_S .



PROPRIETÀ CHE DEFINISCONO UNA M -PAM

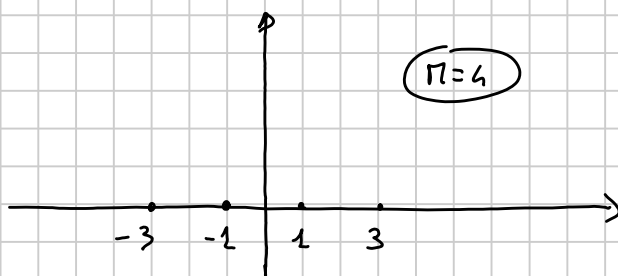
$$1) \quad s(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] p(t - kT_s)$$

2) Gli M valori ($M \geq 2$) che costituiscono l'alfabeto $A_S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ sono definiti come

$$\alpha_i = 2i - 1 - M, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Esempio

$$M = 4 \Rightarrow \alpha_1 = -3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 3$$



$$\begin{aligned} E_S(i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p^2(t - kT_s) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2i - 1 - M)^2 p^2(t) dt = (2i - 1 - M)^2 E_p \end{aligned}$$

$$M \text{ PARI} \Rightarrow A_S = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$$

$$M \text{ DISPARI} \Rightarrow A_S = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm (M-1)\}$$

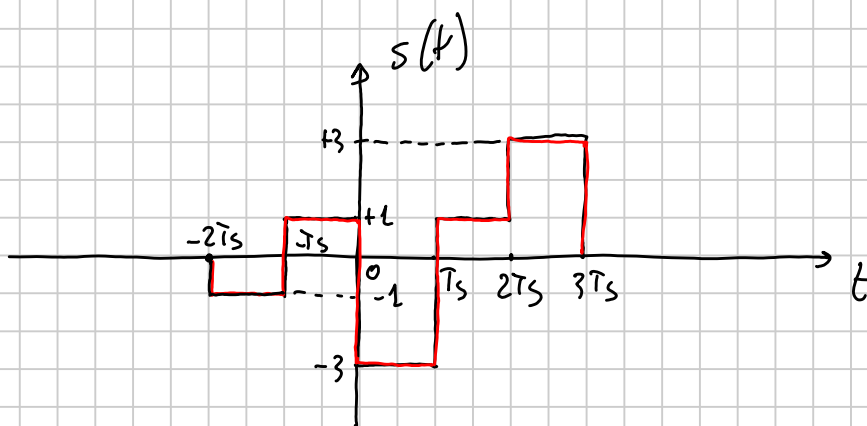
I formati Π -PAM di più largo impiego sono quelli dove M è una potenza di 2.

Esempio

4-PAM

sequenza $\Rightarrow \{x[-2] = -1, x[-1] = +1, x[0] = -3, x[1] = +1, x[2] = +3\}$

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$



PROPRIETÀ DERIVANTE NELLA Π -PAM

1) $E[s(t)] = 0 \quad \forall t$ se i simboli sono equiprobabili:

$$E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT_s)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{E[x[n]]}_{=0} p(t - nT_s) = 0$$

$$E[x[n]] = \sum_{i=1}^M \alpha_i P\{\alpha_i\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i-1-M)$$

$$= \frac{2}{M} \sum_{i=1}^M i - 1 - M = \frac{2}{M} \cdot \frac{M(M+1)}{2} - (M+1) = 0$$

$$2) S_s(f) = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f) |P(f)|^2$$

$$\text{dove } \sigma_x^2 = E[x^2[n]] = \left(\frac{M^2-1}{3}\right)$$

$$R_s(\tau) = E[s(t) s^*(t-\tau)] =$$

$$= E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t-nT_s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k] p^*(t-\tau-kT_s) \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[x[n] x^*[k]] p(t-nT_s) p^*(t-\tau-kT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[n-k] p(t-nT_s) p^*(t-\tau-kT_s)$$

$$\Rightarrow n-k = m \quad \Rightarrow k = n-m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT_s) p^*(t-\tau-nT_s+mT_s)$$

Autocorrelazione media

$$\bar{R}_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t, \tau) dt$$

$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_s(t, \tau) dt \quad \text{se } R_s(t, \tau) \text{ è periodico in } t$$

$$\bar{R}_s(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t-nT_s) p^*(t-\tau-nT_s+mT_s) dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}+nT_s}^{\frac{T_s}{2}+nT_s} p(t') p^*(t'-\tau+mT_s) dt'$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') p^*(t'-\tau+mT_s) dt'$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \cdot \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) P^*(f) e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi f m T_s} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] e^{j2\pi f m T_s} e^{-j2\pi f \tau} df$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 S_x(f) e^{-j2\pi f \tau} df$$

$$R_S(\tau) = \frac{1}{T_S} TCF^{-1} \left[|P(f)|^2 S_x(f) \right]$$

$$\Rightarrow S_S(f) = \frac{1}{T_S} S_x(f) |P(f)|^2$$

Nel caso in cui:

$$1) E[x[n]] = 0$$

$$2) R_x[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$$

Si ha che:

$$S_S(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_S} |P(f)|^2$$

In questo caso la B_T è coincidente con quella del sagomatore $P(f)$.

Calcolo di σ_x^2

$$\sigma_x^2 = E[(x - \eta_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x)^2 f_x(x) dx =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i-1-n)^2 =$$

$$= \frac{1}{M} \left(2 \sum_{i=1}^M i^2 + (1+M)^2 M - 4(1+M) \sum_{i=1}^M i \right)$$

Sfruttando i seguenti risultati noti

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^M i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si ottiene

$$\sigma_x^2 = \frac{M^2-1}{3}$$

$$3) P_S = \frac{\sigma_x^2 E_P}{T_S} = \frac{M^2-1}{3} \frac{E_P}{T_S}$$

EFFICIENZA SPETTRALE DI UNA M -PAM

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{T_s B_p}, \text{ essendo } B_T = B_p$$

L'efficienza spettrale aumenta con l'aumentare del numero di livelli. Sfortunatamente, come verrà dimostrato più avanti, la efficienza in potenza diminuisce all'aumentare di M .

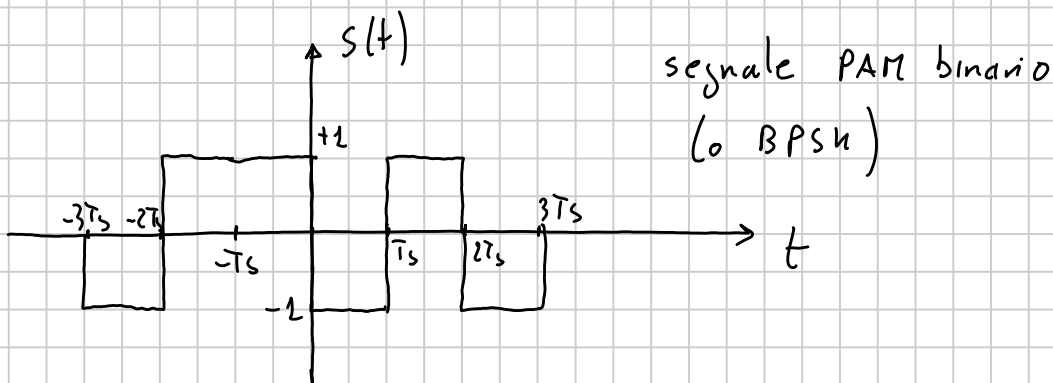
PAM BINARIA o BPSK (Binary Phase Shift Keying)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] p(t - nT_s)$$

$$\text{con } x[n] \in A_s = \{ \pm 1 \} \quad (M=2)$$

$$\Rightarrow T_b = T_s \quad (\log_2 2 = 1)$$

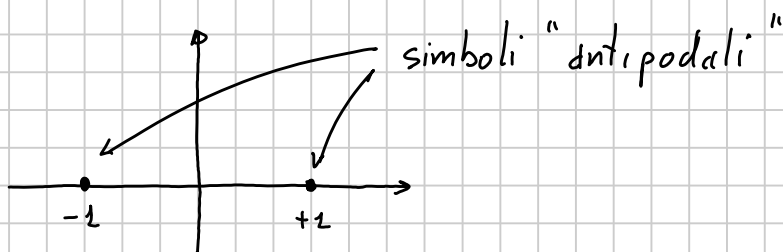
$$\text{Esempio con } p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$



Il PAM Binario è un formato equienergia

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (+1)^2 p^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^2 p^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t) dt = E_{s_2}$$

$$E_{s_1} = E_{s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = E_p$$



$$\begin{aligned} \rightarrow E[s(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[x[n]] p(t - nT_s) && \text{se i simboli sono equiprobabili} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1) \right] p(t - nT_s) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow S_s(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \quad \text{DENSITA' SPECTRALE DI POTENZA}$$

$$\rightarrow P_s = \frac{E_p}{T_b} \quad \text{POTENZA MEDIA}$$

$$\rightarrow B_T = B_P \quad \text{BANDA}$$

$$\rightarrow \eta_B = \frac{1}{T_b B_P} \quad \left(\text{Per impulsi rettangolari } B_P = \frac{1}{T_b} \text{ e quindi } \eta_B = 1 \right)$$

SEGNALE ON-OFF

E' un tipo di PAM binaria con simboli appartenenti ad

$$A_s = \{0, 1\}$$

e impulsi rettangolari $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right)$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2 - nT_b}{T_b}\right)$$

$$\begin{cases} s_1(t) = 0 & \Rightarrow E_{s_1} = 0 \\ s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right) & \Rightarrow E_{s_2} = T_b \end{cases}$$

$$\rightarrow E[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[x[n]] p(t - nT_b) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow E_s = \frac{1}{2} E_{s_1} + \frac{1}{2} E_{s_2} = \frac{T_b}{2}$$

$$\rightarrow P_s = \frac{E_s}{T_b} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow R_x[m] = C_x[m] + \eta_x^2 = \frac{1}{4} \delta[m] + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow S_x(f) = \text{FTS}[R_x[m]] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b} \delta(f)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S_s(f) &= \frac{1}{T_b} S_x(f) |P(f)|^2 = \frac{1}{T_b} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b} \delta(f) \right) T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f) \\ &= \frac{T_b}{4} \left(1 + \frac{\delta(f)}{T_b} \right) \text{sinc}^2(T_b f) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \eta_B = \frac{\log_2 2}{T_b B_p} = 1, \quad B_p = \frac{1}{T_b} \quad \text{per la sinc}$$

Considerazioni

-) L'efficienza spettrale della modulazione ON-OFF è unitaria come nel caso della 2-PAM
-) Essendo la modulazione ON-OFF di tipo unipolare (solo a valori positivi) questa può essere utilizzata su canali di comunicazione che, per loro natura, non possono supportare segnali bipolari.
-) La densità spettrale della ON-OFF presenta un impulso di dirac nell'origine delle frequenze (alla continua), per cui il canale di trasmissione deve avere una risposta in frequenza che non sia nulla nell'origine.