PLR

lunedì 6 novembre 2023 10:27

Autore: Valerio Cannalire
Anno accademico delle lezioni: 2023/2024
Nota: potrebbero essere presenti errori numerici (dovuti a me stesso) e difetti dovuti alla conversione in .pdf

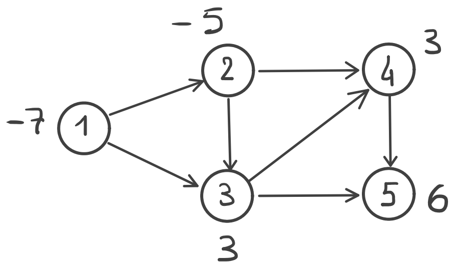
Reti

Le reti sono costituite da una coppia (N,A) dove $N \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei nodi
e A invece è un sottoinsieme dell'insieme di tutti i possibili archi tra i nodi, quindi
$A \subseteq N \times N$. A è l'insieme degli archi effettivamente presenti nella rete.

Flusso di costo minimo non capacitato

Si considerano *n* nodi e *m* archi.

Nell'esempio mostrato i nodi sono 5 e gli archi 7: *12*, *13*, *23*, *24*, *34*, *35*, *45*.



Concetto di flusso di beni: ogni nodo produce o potrebbe richiedere un certo numero di beni che possono essere spostati attraverso la rete. Il problema consiste nell'assegnare i beni ai nodi che ne fanno richiesta liberando completamente i nodi di produzione.

Bilancio $b \in \mathbb{R}^n$ = numero di beni che i nodi producono o richiedono. Col '+' si indicano i beni richiesti e col '-' quelli posseduti dai nodi di produzione. I bilanci b_i sono segnati a fianco di ogni nodo.

Nell'esempio mostrato b = (-7,-5,3,3,4).

Il bilancio di un nodo potrebbe essere anche = 0. In tal caso si parla di "nodo di transito"

Il flusso dei beni da un nodo all'altro deve essere una soluzione ammissibile.

Nell'esempio mostrato $x = (x_{12}\ x_{13}\ x_{23}\ x_{31}\ x_{34}\ x_{35}\ x_{45}) = (0\ 7\ 2\ 3\ 0\ 6\ 0)$.

Se invece la rete fosse sbilanciata?

- Se ci fosse più richiesta che produzione $\Longrightarrow$ (P) = $\emptyset$.
- Nel caso invece la produzione fosse maggiore della richiesta si potrebbe aggiungere un nodo fittizio "deposito" dove vengono stoccate le merci rimanenti. Il bilancio di questo nodo dovrà essere = $-\sum b_i$. Gli archi su questo nodo sarebbero solo entranti dai nodi di produzione.

Nel caso la rete sia bilanciata $\sum bi = 0$, altrimenti

- $\sum bi < 0 \Longrightarrow$ produzione > richiesta
- $\sum bi > 0 \Longrightarrow$ produzione < richiesta

È possibile elencare tutte le possibili soluzioni ammissibili? No, perché la complessità è esponenziale (gli archi possono essere molti e la distribuzione dei beni sugli questi può variare moltissimo).

Modello

Una soluzione ammissibile è una soluzione ottima? In assenza di funzione obiettivo sì, altrimenti se si introducesse $c \in \mathbb{R}^m$ che indica il costo di transito di un'unità di bene per ogni arco la funzione obiettivo diventerebbe $\min(c^T \cdot x)$. Il costo di transito si scrive a fianco di ogni arco. Nel nostro esempio si suppone che $c = (4,2,5,6,8,3,9)$.

Per ogni nodo si può scrivere un vincolo detto equazione di bilancio dove nel membro sinistro si scrivono le variabili x_{ij} che rappresentano gli archi insistenti sul nodo, positive se gli archi sono entranti nel nodo, e negative se gli archi fossero uscenti, Nel membro destro invece si scrive b_i, perché i beni entranti e uscenti da un nodo devono rispettare il bilancio di esso.

Nel caso considerato:

nodo 1: $- x_{12} - x_{13} = -7$
nodo 2: $x_{12} - x_{23} - x_{24} = -5$
nodo 3: $x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 3$
nodo 4: $x_{24} + x_{34} - x_{45} = 3$
nodo 5: $x_{35} + x_{45} = 3$

Si introduce $E \in \{-1, 0, 1\}^{nxm}$ detta matrice di incidenza della rete.

Per ogni colonna/arco si pone 0 per i nodi non coinvolti dall'arco, -1 per il nodo da cui l'arco esce e 1 per il nodo in cui entra.
Nel caso considerato:

	12	*13*	*23*	*24*	*34*	*35*	*45*
1	-1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0	0	0
3	0	1	1	0	-1	-1	0
4	0	0	0	1	1	0	-1
5	0	0	0	0	0	1	1

È evidente che questa matrice corrisponda direttamente al disegno fatto in precedenza. Potrebbero esserci anche modi più compatti per portare il disegno in un formato numerico, ma questo risulta molto pratico.

Si può fare il prodotto $E \cdot x$, e si noterebbe che i risultati corrisponderebbero esattamente ai membri sinistri delle equazioni di bilancio. Quindi i vincoli possono essere scritti come $E \cdot x = b$.

Infine si aggiunge il vincolo $x_{ij} >= 0$

Il modello completo quindi è:

$$\begin{cases} \min(c^T \cdot x) \\ E \cdot x = b \\ x_{ij} >= 0 \end{cases}$$

dove $E \cdot x = b$, $x_{ij} >= 0$ è il poliedro dei flussi

Riflessioni sulle possibilità di risoluzione del problema

Osservando il problema si nota facilmente che è appartenente alla PL e che si trova già in formato duale standard.

Si può notare che facendo la somma di tutte le righe di E tra loro si ottiene sempre 0 per ogni colonna, e ciò significa che le equazioni di bilancio sono linearmente dipendenti tra loro. Conseguentemente non è possibile trovare alcuna sottomatrice 5x5 invertibile, e quindi non esistono matrici di base. Quindi non si può usare il simplesso.

Quando le equazioni di un sistema sono linearmente dipendenti tra loro vuol dire che tra queste ne è presente una superflua e quindi eliminabile. Quindi eliminando un'equazione si potrebbero trovare $\tilde{E} \cdot \tilde{b}$.

Si considera un albero di copertura T per la rete e la relativa matrice di incidenza E_T. Gli archi di un albero di copertura per n nodi sono n -1. Eliminando poi l'equazione di un nodo si ottiene $E_T \in \{-1, 0, 1\}^{(n-1)x(n-1)}$.

E_T ha sempre det = ± 1, il cui segno dipende dall'ordine in cui sono state scritte le righe. Se E_T venisse scritta seguendo sempre l'ordine delle righe e delle colonne sempre secondo la visita posticipata a partire da una foglia, allora si otterrebbe una matrice triangolare inferiore.

Per costruire E_T con una visita posticipata:

- si parte con E_T vuota (senza nemmeno indici delle righe e delle colonne)
- si parte da una foglia *j* diversa dal nodo virtualmente eliminato (connessa con un solo arco che entrante o uscente ∈ T). Potrebbe essercene più di una.
- in E_T si aggiunge la colonna relativa all'unico arco x_{ij} insistente sulla foglia, si aggiunge la riga relativa a essa e si pone = 1 se entrante, = -1 se uscente
- attraverso questo arco si risale all'altro nodo. Per questo nodo si pone x_{ij} opposto rispetto a quanto fatto per il nodo precedente.
- Si eliminano virtualmente l'arco *ij* e la foglia appena considerati ⟹ l'altro nodo

diventerà a sua volta una foglia.

- Si riesegue lo stesso ragionamento iterativamente. Non è importante l'ordine con cui si scelgono le foglie.

  Nel caso considerato, eliminando il nodo 1 e considerando T = {12, 13, 24, 45}

	45	*24*	*12*	*13*
5	1	0	0	0
4	-1	1	0	0
2	0	-1	1	0
3	0	0	0	1

Il problema dei flussi di costo minimo ha come soluzioni ottime sempre vertici interi, poiché nei rapporti si ha a denominatore il det che è sempre ± 1. Quindi in presenza dei vincoli di interezza valgono gli stessi risultati che si otterrebbero in PL.

Teorema delle reti

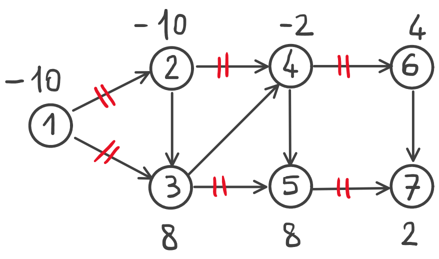
- Gli alberi hanno hanno det $\neq 0$
- ogni sottomatrice quadrata di E ha determinante $\neq 0$ e quindi è un albero

Se un albero ha det $\neq 0 \Longrightarrow$ un albero è una base. Se è una base allora esiste sicuramente una soluzione di base. Queste possono essere:
- ammissibili se $\forall$ ij $\in$ T : $x_{ij} > 0$
- non ammissibili se $\exists$ ij $\in$ T : $x_{ij} < 0$. Ciò accade quando per bilanciare i flussi dovesse essere necessario percorrere un arco nel verso opposto a come è orientato.
- degeneri se $\exists$ ij $\in$ T : $x_{ij} = 0$
- non degeneri se $\nexists$ ij $\in$ T : $x_{ij} = 0$

Calcolo di una soluzione di base

Per trovare una soluzione di base si effettua una visita posticipata dalle foglie:
- si pongono le $x_{ij} = 0$ per gli archi $\notin$ T
- si parte da una foglia *j*. Potrebbe essercene più di una.
- attraverso l'unico arco insistente su essa si risale al nodo precedente *i*. Per soddisfare il vincolo di bilancio si deve per forza porre $x_{ij} = b_i$.
- Si eliminano virtualmente l'arco *ij* e la foglia *j* appena considerati $\Longrightarrow$ il nodo *i* diventerà a sua volta una foglia.
- Si riesegue lo stesso ragionamento iterativamente, ma dalla seconda iterazione bisogna tener conto anche dei beni che sono già usciti dal foglia *j* (che prima era il nodo *i*). Quindi adesso x_{ij} non può più essere = b_i, ma sarà invece la somma di tutti i b_i dei nodi già considerati sul ramo.

  Esempio:



In rosso sono segnati gli archi $\in$ T

- Si parte da 7 perché è una foglia
- L'unico arco entrante su essa è x_{57}. Per rispettare il vincolo di bilancio $x_{57} = b_7 = 2$
- Si eliminano virtualmente il nodo e l'arco appena considerati.
- Adesso 5 è una foglia.
- L'unico arco entrante su essa è x_{35}. Per rispettare il vincolo di bilancio $x_{57} = b_5 + b_7 = 10$.

  ...

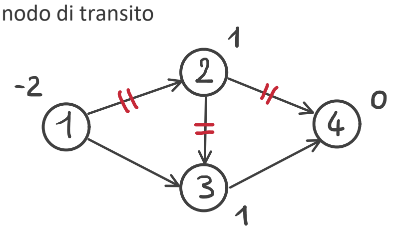
  ...

x = (-8   18   0   2   0   10   0   4   2   0)
12 13 23 24 34 35 45 46 57 67

Siccome $x_{12} < 0 \Longrightarrow$ la soluzione di base non è ammissibile.

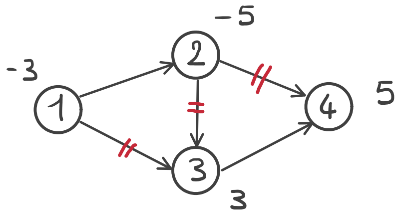
Esempi di soluzioni degeneri:

- Caso col nodo di transito



$x_{24} \in T$, $x_{24} = 0$

- Caso senza nodo di transito



$x_{23} \in T$, $x_{23} = 0$

Test di ottimalità

Per verificare che si sia all'ottimo bisogna calcolare la soluzione primale complementare (nel caso del flusso di costo minimo si parte dal duale) e accertarsi che sia ammissibile. Altrimenti si deve fare un cambio di base similmente a quanto si fa nel simplesso.

Il primale (duale) associato, detto problema dei potenziali è:

$$\begin{cases} \max b^T \cdot \pi \\ E^T \cdot \pi <= c \end{cases}$$

$\pi \in \mathbb{R}^{n-1}$

Per verificare se una soluzione sia ottima con una base T bisogna calcolare
$E^T{}_T \cdot \pi = c_T$ che corrisponde a calcolare $A_B \cdot x = b_B$ nella PL.
Gli elementi di π sono detti potenziali.
In E_T è stata eliminata una variabile (arbitraria, ma di solito la 1°) ponendo $\pi_1 = 0$. I valori di π_i differiscono di un valore k a seconda di quale sia la variabile posta a 0.
Le righe di E_T sono così composte: $- \pi_i + \pi_j = c_{ij}\ \forall\ ij \in T$, dette equazioni del potenziale di base

Calcolo dei potenziali di base

Si pone a 0 una qualsiasi delle componenti π_i, e per calcolare i restanti π_i si fa una visita anticipata dalla radice (la radice è la componente $\pi_i = 0$) determinando i valori affinché soddisfino le equazioni $- \pi_i + \pi_j = c_{ij}\ \forall\ ij \in T$. Nel dettaglio:

- si parte dalla radice, ovvero dalla variabile π_i posta = 0
- tenendo conto del relativo π_i, ci si muove sugli archi $ij \in T$ e si determinano i valori dei potenziali π_j al fine di soddisfare le equazioni del potenziale di base. I costi c_{ij} saranno considerati > 0 se il verso di percorrenza dell'arco fosse lo stesso con cui è effettivamente orientato, < 0 se l'arco venisse percorso nel verso opposto rispetto a come è orientato

Condizioni di Bellman

Adesso bisogna verificare se la soluzione complementare sia ammissibile accertandosi che
$- \pi_i + \pi_j <= c_{ij}\ \forall\ ij \in L$ dove L è il complementare di T. Ciò in PL equivale a fare $A_N \cdot x <= b_N$.
Queste condizioni da verificare sono dette condizioni di Bellman.
$- \pi_i + \pi_j <= c_{ij}$ è il poliedro dei potenziali

Th. dato un albero di copertura che generi un flusso di base ammissibile, se sono soddisfatte le condizioni di Bellman $\Longrightarrow$ il flusso e il potenziale sono ottimi (la base, l'albero sono ottimi)

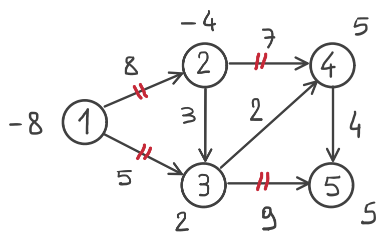
Definizione: dato un potenziale di base si definisce costo ridotto dell'arco $c_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$, che vale

- $c_{ij}^{\pi} = 0$ per gli archi di base
- $c_{ij}^{\pi} >= 0$ per gli archi non di base

Utilizzando i costi ridotti le equazioni di Bellman diventano $c_{ij}^{\pi} >= 0$

Un potenziale di base è degenere quando una delle condizioni di Bellman è verificata con l'uguaglianza.

1° Esempio



$\bar{x}$ = (1, 7, 0, 5, 0, 5, 0) è il flusso per la base considerata.
Siccome è ammissibile ⟹ è un vertice del poliedro dei flussi.
È un ottimo? Dipende dai costi degli archi.

Adesso ponendo $\pi_1 = 0$ si calcolano i potenziali
π = (0, 8, 5, 15, 14)

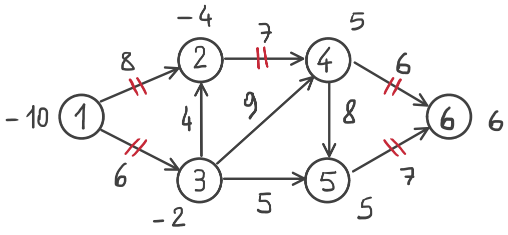
Adesso per verificare che la soluzione di base complementare sia ammissibile ci si accerta che siano rispettate le condizioni di Bellman.

23: -8 + 5 <= 3 OK
34: -5 + 15 <= 2 ⟹ condizione violata ⟹ soluzione complementare non ammissibile ⟹ $\bar{x}$ non è la soluzione ottima

Non è necessario verificare l'ultima condizione siccome ne è già stata violata una, ma se si volesse vedere se la soluzione primale sia degenere o meno allora andrebbe calcolata

45: -14+15 <= 4 ⟹ non degenere

2° Esempio



Si può subito notare che sicuramente la soluzione di base non sarà ammissibile, perché nonostante quello disegnato sia un albero di copertura il nodo 5 non può essere soddisfatto a meno che non si inverta l'arco *56*.

$\bar{x}$ = (12, -2, 16, 0, 0, 0, 0, 11, -5)
Questa soluzione di base quindi non è ammissibile e non è degenere. Non può nemmeno essere ottima non essendo ammissibile.

π = (0, 8, 6, 15, 14, 21)

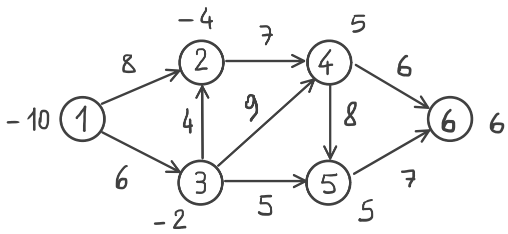
La complementare è ammissibile? Si verifica con Bellman servendosi dei costi ridotti.

c_{32}^{π} = 4 + 6 - 8 = 2 ⟹ OK, > 0
c_{34}^{π} = 9 + 6 - 15 = 0 ⟹ OK ma degenere, = 0
c_{35}^{π} = 5 + 6 - 14 = -3 ⟹ condizione violata < 0

Calcolo di una base dato un potenziale

Per calcolare una base dato un potenziale si sostituisce questo in tutte le possibili disequazioni di Bellman, e si vede quali di queste siano verificate con l'uguaglianza. Le disequazioni verificate con l'uguaglianza devono essere almeno n - 1, e affinché formino una base devono formare un albero di copertura.

Esempio



π = (0, 5, 6, 12, 11, 18)

12: 0 + 5 <= 8
13: 0 + 6 <= 6 ⟹ uguglianza
24: -5 + 12 <= 7 ⟹ uguaglianza
32: -6 + 5 <= 4
34: -6 + 12 <= 9
35: -6 + 11 <= 5 ⟹ uguaglianza
45: -12 + 11 <= 8
46: -12 + 18 <= 6 ⟹ uguaglianza
56: -11 + 18 <= 7 ⟹ uguaglianza

Le disequazioni verificate con l'uguaglianza costituiscono effettivamente un albero di copertura ⟹ T = {*13*, *24*, *35*, *46*, *56*}

Simplesso dei flussi

Supponiamo di avere T che generi un flusso di base ammissibile, allora si calcoli il flusso di base π di T.

Supponiamo che ∃ ij ∈ L : $c_{ij}^{\pi} < 0$, ovvero che il potenziale non verifichi le condizioni di Bellman. Allora l'indice ij sarà l'indice entrante k. Pertanto ij sarà l'arco nuovo che entrerà in T. Se ce ne fosse più di uno allora si applicherebbe la regola anticiclo di Bland e quindi si dovrebbe prendere il primo che violi il vincolo.

L'arco entrante creerebbe sicuramente un ciclo se non si rimuovesse un altro arco, perché T è già un albero di copertura (si ha un ciclo se alcuni archi delimitano uno spazio chiuso, indipendentemente dall'orientamento di questi). Per eliminare il ciclo si deve individuare quale degli altri archi che lo compongono sia quello uscente h.

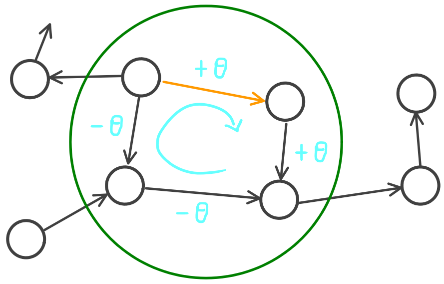
A ogni passo si deve
1) Ricavare un T_{new} che differisca da T di un solo arco
2) c (T_{new}) <= c (T)
3) T_{new} deve essere ammissibile

Si orienta il ciclo il ciclo C nello stesso verso dell'arco entrante, e si dividono gli archi in C^+ e in C^-, dove il primo sottoinsieme comprende gli archi orientati con lo stesso verso del ciclo, vice versa C^-.

Si introduce un numero θ con cui si variano i flussi del ciclo in questo modo

$$\text{flusso } x(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta, & ij \in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta, & ij \in C^- \\ \bar{x}_{ij} \text{ altrove} \end{cases}$$

dove θ ∈ ℕ, $\bar{x}$ è il flusso corrente relativo a T

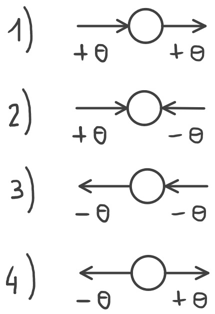


- Arco entrante
- Ciclo
- Orientamento del ciclo

Th. $c \cdot x(\theta) \leq c \cdot \bar{x} \ \ \forall\, \theta > 0$, ma più precisamente $c \cdot x(\theta) = c \cdot \bar{x} + \theta\, c_{ij}^{\pi}\ \forall\, \theta > 0$
quindi si sa anche di quanto diminuisca il costo

Bisogna quindi verificare per quali θ il flusso x(θ) sia ammissibile:

- i nodi devono rimanere bilanciati, ovvero in seguito all'introduzione di θ i bilanci devono rimanere invariati rispetto a come fossero prima. Questa condizione è sempre soddisfatta per tutti i tipi di nodo presenti in un ciclo:



- $x(\theta) \geq 0$, per aver ciò bisogna che $0 \leq \theta \leq \min_{ij \in C^-} \{x_{ij}\}$, in particolare si prende
  $\theta = \min_{ij \in C^-} \{x_{ij}\}$ per dominuire il più possibile il valore della funzione obiettivo.

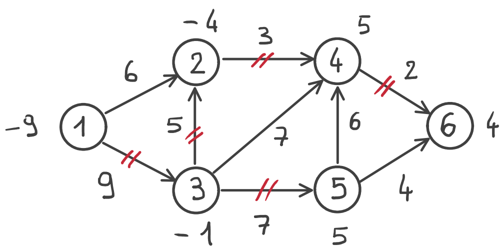
L'arco uscente, per la regola anticiclo di Bland sarà $\min \{ ij \in C^- : \bar{x}_{ij} = \theta \}$

Se tutti gli archi del ciclo fossero in C^+? Si potrebbe prendere arbitrariamente $\theta = \infty$, conseguentemente c_{ij}^{π} sarebbe $-\infty$, il minimo andrebbe a $-\infty$ e quindi il poliedro dei flussi sarebbe illimitato. Ciò non può mai accadere però perché i costi non possono essere tutti > 0.

Se uno dei flussi $\in C^-$ fosse degenere si riuscirebbe comunque a eseguire un passo del simplesso, tuttavia andrebbe imposto $\theta = 0$, per cui non si apprezzerebbero variazioni della funzione obiettivo. Se invece il flusso degenere fosse $\notin C^-$ non succederebbe nulla.

Si noti che questo simplesso non richiede mai il calcolo di una matrice inversa, per cui è applicabile nonostante E_T abbia det = 0.

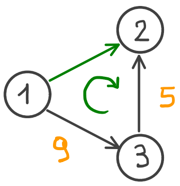
Esempio di esercizio



	12	13	24	32	34	35	46	54	56	
$\bar{x}$ = (	0	9	9	5	0	5	4	0	0	)

$\pi = (0, 14, 9, 17, 16, 19)$

$c_{12}^{\pi} = 6 + 0 - 14 = -8$ violato $\Longrightarrow$ non è l'ottimo $\Longrightarrow k = 12$



$\theta = 5 \Longrightarrow \bar{x}(\theta) = (5, 4, 9, 0, 0, 5, 4, 0, 0) \Longrightarrow$ *32* è l'arco uscente

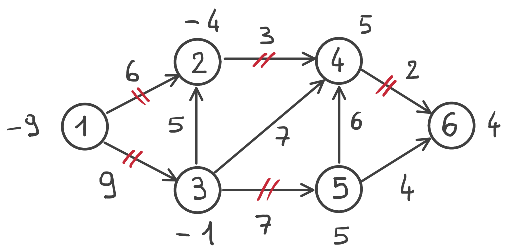
Il valore della funzione obiettivo è diminuito di $-8 \cdot 5 = -40$.

Il nuovo potenziale è $\pi = (0, 6, 9, 9, 16, 11)$

un passo del simplesso si considera concluso

un passo del simplesso si considera concluso
quando è stato anche calcolato il nuovo potenziale

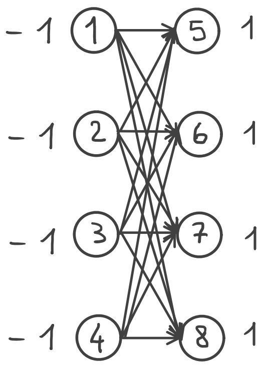
☆ non sono i costi, sono i flussi $\bar{x}_{ij}$



$c_{32}^{\pi} = 9 + 9 - 6 = 12$
$c_{34}^{\pi} = 7 + 9 - 5 = 11$
$c_{54}^{\pi} = 6 + 16 - 9 = 13$
$c_{56}^{\pi} = 4 + 16 - 6 = 14$

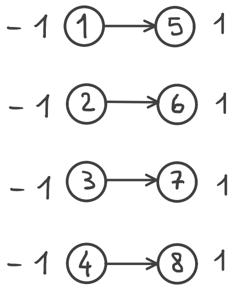
Nessuna condizione di Bellman è stata violata $\Longrightarrow$ siamo all'ottimo

Assegnamento di costo minimo come problema di PLR

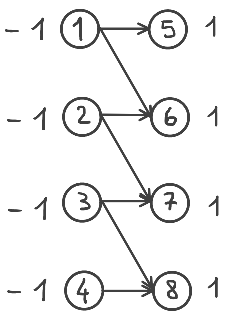


Ogni arco ha il costo rappresentato dalla tabella dei costi c. Essendo un problema di PLR potrebbe essere risolto anche col simplesso dei flussi oltre che con i simplessi della PL. Considerando il problema come se fosse di PLR, si otterrebbero comunque gli stessi vincoli che si ottengono in PL. Siccome è un problema di PLR $\Longrightarrow$ tutti i vertici hanno componenti intere $\Longrightarrow$ non vi sono differenze tra l'assegnamento cooperativo e non cooperativo.

Per applicare il simplesso su reti si potrebbe partire da questo assegnamento canonico?

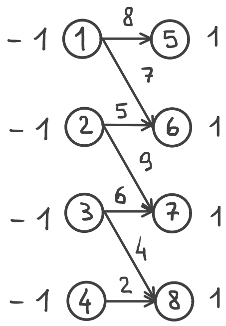


No, perché non sarebbe un albero di copertura, andrebbero aggiunti alcuni archi, ad esempio:



c =

	5	6	7	8
1	8	7	9	10
2	10	5	9	11
3	7	4	6	4
4	10	10	9	2



$\bar{x}$ = (1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1), ovvero 1->5, 2->6, 3->7, 4->8
All'inizio, prima dell'applicazione del simplesso, gli archi aggiunti per tracciare l'albero di copertura avrebbero flusso = 0 per rispettare i bilanci.

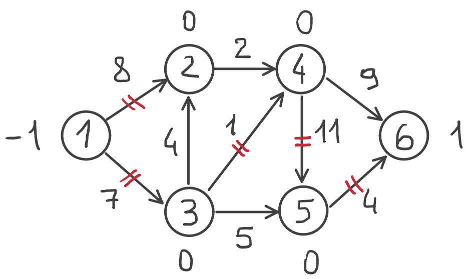
π = (0, 2, 5, 11, 8, 7, 11, 9)

La prima condizione di Bellman violata è $c_{17}^{\pi} = 9 + 0 - 11 = -2 \Longrightarrow$ l'arco entrante è *17*
Non può essere *12* poiché nell'assegnamento di costo minimo questo arco non esiste.

Svolgendo il simplesso, per questi costi si otterrebbe effettivamente la soluzione ottima: 1->5, 2->6, 3->7, 4->8

Problema dei cammini minimi

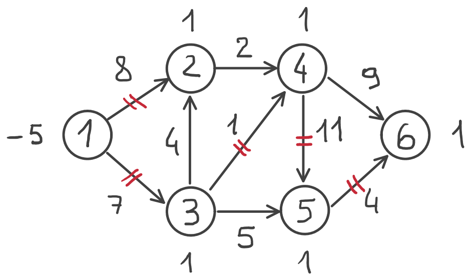
Dato un grafo in cui ogni arco ha un costo, e dati un nodo di partenza e un nodo di arrivo appartenenti al grafo, si vuole trovare il cammino di costo minimo tra questi due nodi. Il numero totale dei cammini è nell'ordine del fattoriale: se tutti i nodi fossero connessi tra di loro da un arco diretto infatti al 1° nodo avrei n-1 scelte, al 2° n-2 e così via. Sfruttando il modello dei flussi di costo minimo si può ottenere ciò ponendo il bilancio del nodo di partenza = -1, il bilancio del nodo di arrivo = 1, e ponendo = 0 il bilancio per tutti gli altri nodi poiché saranno soltanto di passaggio.



È anche possibile assegnare i bilanci dei nodi in modo che sia possibile trovare in una volta sola tutti i cammini minimi a partire dal nodo radice *r* verso tutti gli altri nodi. Per far ciò si pongono i bilanci in questo modo:

$$\begin{cases} b_i = -(n-1), & i = r \\ b_i = 1, & i \neq r \end{cases}$$

Nel caso mostrato prima quindi si avrebbe:



$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 24 & 32 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & \\ \bar{x} = (& 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 &) \end{array}$$

$\pi = (0, 8, 7, 8, 19, 23)$

$c_{24}^{\pi} = 2 + 8 - 8 = 2$
$c_{32}^{\pi} = 4 + 7 - 8 = 3$
$c_{35}^{\pi} = 5 + 7 - 19 = -7$ condizione violata

Siccome una condizione di Bellman è stata violata adesso bisognerebbe proseguire col simplesso su reti

Modello

$$\begin{cases} \min(c^T \cdot x) \\ E \cdot x = b \\ x_i >= 0 \end{cases}$$

dove $b = \begin{cases} b_i = -(n-1), & i = r \\ b_i = 1, & i \neq r \end{cases}$

Risoluzione

È possibile semplificare la risoluzione di questo problema rispetto a quello dei flussi di costo minimo osservando che tutte le soluzioni di base ammissibili sono non degeneri. Questo perché ogni nodo $\neq r$ ha bilancio 1 e un solo arco entrante su esso avrà flusso $\neq 0$ (quello che fa parte dell'albero ottimo).

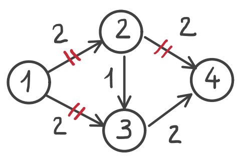
Conseguentemente nel simplesso per questo problema si possono rimuovere tutte le regole anticiclo di Bland (che gestiscono unicamente i casi degeneri), ottenendo due vantaggi importanti:

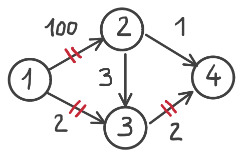
- ci sarà un solo arco il cui $c_{ij}^{\pi} < 0$ sarà minimo, per cui non si dovrà individuare il primo in ordine lessicografico tra quelli che hanno quel costo ridotto
- siccome ogni nodo dell'albero ottimo $\neq r$ può avere un solo arco che entra dentro esso, allora una volta trovato l'arco entrante nel simplesso sarà immediato individuare quello uscente: questo sarà l'arco che entrava precedentemente nel nodo (altrimenti si avrebbe un ciclo).

Osservazioni:

- l'arco più costoso potrebbe essere incluso nel cammino minimo
- l'arco meno costoso potrebbe non essere nel cammino minimo

Esempi:



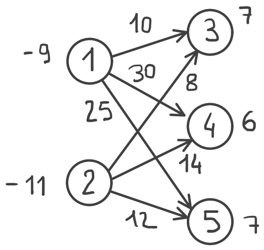


N.B. Perché nel 2° esempio invece dell'arco *34* non si è preso *24*? Questo problema deve trovare i cammini minimi dalla radice verso ogni altro nodo e non albero di copertura. L'albero di copertura che si deve cercare deve essere orientato

Problema del trasporto come problema di PLR

	3	4	5	Disponibilità
1	20	30	25	9
2	8	14	12	11
Richiesta	7	6	7	

Al solito c rappresenta il costo degli archi. I luoghi di produzione/magazzini possono essere visti nodi di produzione il cui bilancio è = - Disponibilità_i, e i luoghi di destinazione possono essere considerati come nodi di consumo aventi bilancio = Richiesta_i.



Trovare il flusso di costo minimo è equivalente a trovare l'ottimo del trasporto.

Sia l'assegnamento di costo minimo che il problema del trasporto sono casi particolari del flusso di costo minimo. Siccome i vertici di questo problema sono a componenti intere a causa del determinante degli alberi $\Longrightarrow$ anche l'assegnamento di costo minimo e il trasporto hanno sempre tutti i vertici a componenti intere.

Flusso di costo minimo nel caso delle reti capacitate

Per ogni arco oltre al costo c_{ij} si introduce anche portata massima u_{ij}, che indica il massimo valore possibile del flusso su quell'arco. Affinché l'esistenza di un arco abbia senso, la sua portata deve essere > 0. Queste reti sono dette "capacitate".

Per far ciò nel caso del flusso di costo minimo si modifica il vincolo $x_{ij} >= 0$ in $0 <= x_{ij} <= u_{ij}$.

Per calcolare soluzioni di base, flussi di casi ecc. come prima cosa si porta il problema in un formato standard, sia quello duale. Per far ciò si devono introdurre delle variabili di scarto w.

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} \min c^T \cdot c \\ \boxed{\begin{array}{l} Ex = b \\ x + w = u \end{array}} \end{array}} \\ x_i, w_i >= 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x^T \cdot E^T = b \\ I \cdot x + I \cdot w = u \end{cases} \rightsquigarrow (x^T, w^T) \underbrace{\begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}$$

$E^T \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}, I \in \mathbb{R}^{m \times m} \Longrightarrow A \in \mathbb{R}^{2m \times (m+n-1)}$

è la matrice del poliedro dei flussi su reti capacitate (A)

$\in \mathbb{R}^m$

$E^T \quad I$ <- sottomatrici relative a x

$0 \quad I$ <- sottomatrici relative a w

$\begin{cases} \boxed{x + w = u} \\ x_i, w_i >= 0 \end{cases}$ $\quad I \cdot x + I \cdot w = u$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \end{pmatrix}$

è la matrice del poliedro dei flussi su reti capacitate (A)

$E^T \quad I$ <- sottomatrici relative a x

$0 \quad I$ <- sottomatrici relative a w

$x \in \mathbb{R}^m$
$u \in \mathbb{R}^m$
$w \in \mathbb{R}^m$

Qual è il rango della matrice del poliedro dei flussi su reti capacitate? La sottomatrice E^T ha rango n-1, e poi siccome il resto della matrice è composta dalle identità e dagli 0 $\Longrightarrow$ il rango è = m+n-1, come il numero delle colonne $\Longrightarrow$ rango massimo.

Inoltre il determinante di questa matrice sempre per le stesse considerazioni è = ± 1.
Quindi tutte le soluzioni di base di questo problema saranno a componenti intere.

Calcolo di una base e della relativa soluzione per le reti capacitate

Nel caso delle reti non capacitate si effettuava una partizione della matrice E^T in T ed L.
Per le reti capacitate invece si effettua una tripartizione degli archi in T, L, U. In T ci sono gli archi che fanno parte dell'albero di copertura, in L ci sono quelli il cui flusso è = 0, e in U ci sono quelli saturi, ovvero il cui flusso è = capacità massima. Uno di questi ultimi insiemi 2 potrebbe anche essere vuoto.

Si tripartiziono le righe della parte relativa a x. Siccome anche la parte relativa a w essendo composta da variabili di scarto è comunque in relazione con gli archi, anche questa deve essere tripartizionata. Quindi si esapartiziona la matrice del poliedro dei flussi su reti capacitate in T, L, U, T', L', U'.

Th. Si ha una base $\Longleftrightarrow$ T, U, T', L' dove T è un albero di copertura *(una base è composta da T, U, T', L' dove T è un albero di copertura)*

Le dimensioni dei sottoinsiemi che compongono la base sono: $\underbrace{\overbrace{T}^{n-1}, \overbrace{U, T', L'}^{m}}_{m+n-1}$, le righe fuori dalla base sono 2m - (m + n - 1) = m - n + 1

Come si scelgono le tripartizioni? Sarebbe sensato cercarne una che generi una soluzione di base ammissibile. Per far ciò ci si serve del problema ausiliario. Siccome non si è ancora visto questo ausiliario, per adesso le tripartizioni si scelgono a caso, scegliendo un T che sia un albero di copertura e inserendo poi gli archi rimanenti arbitrariamente in L o U.

Si prova quindi a costruire la soluzione di base tenendo a mente che $w_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

$$(x,w) = (x^T, x^L, x^U, w^{T'}, w^{L'}, w^{U'}) = (x^T, 0, u^U, u^T - x^T, u^L, 0)$$

- $x^L, w^{U'} = 0$ perché non appartengono alla base
- $x^U = u^U$ perché gli archi $\in$ U sono saturi
- $w^{L'} = u^L$ perché $w^{L'} = u^L - x^L = 0$
- x^T e conseguentemente $w^{T'} = u^T - x^T$ sono da determinare

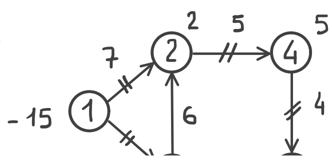
Quindi in sostanza devono essere calcolati soltanto i flussi sull'albero di copertura, perché il resto è automatico. Una differenza col caso non capacitato è che al di fuori della base ci saranno non solo archi vuoti (in L) ma anche saturi in capacità (in U).
Per calcolare i flussi sull'albero di copertura si procede come al solito con la visita posticipata dalle foglie, tenendo però di conto anche i flussi degli archi saturi.

Una soluzione è ammissibile se tutte le componenti (x,w) sono >= 0. Si può notare che se una componente w_{ij} è < 0 $\Longrightarrow$ la relativa x_{ij} sarà > u_{ij}, pertanto sull'arco viene violato il vincolo di portata.

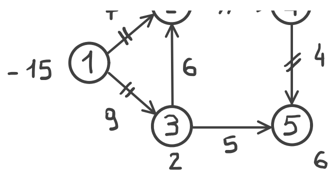
Affinché una soluzione di base sia degenere una delle componenti della base deve essere = 0.
Siccome la portata deve essere > 0, in U non possono esserci componenti nulle, e nemmeno in L' ricordando $w_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$. Quindi una soluzione di base è degenere se uno degli archi di T è vuoto o saturo. Quindi anche per vedere se una soluzione sia degenere è sufficiente guardare le x_{ij}.
Conseguentemente all'esame non è necessario calcolare le w_{ij}.

Esempi *N.B. in questi esempi sugli archi è riportata la capacità massima e non il costo*

1)



T = *{12, 13, 24, 45}*
L = *{32}*
U = *{35}*

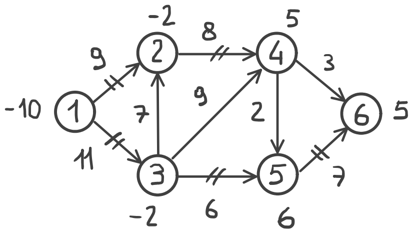


L = {*32*}
U = {*35*}

12 13 24 32 35 45, 12 13 24 32 35 45
(x,w) = (8 7 6 0 5 1 -1 2 -1 6 0 3)

La soluzione di base non è ammissibile perché w_{12} e w_{24} sono negative. Infatti x_{12} e x_{24} eccedono la loro capacità massima.
La soluzione non è degenere non essendoci componenti = 0 appartenti alla base.

2)

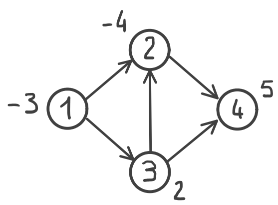


T = {*12, 13, 24, 35, 56*}
L = {*32, 34*}
U = {*45, 46*}

12 13 24 32 34 35 45 46 56, 12 13 24 32 34 35 45 46 56
(x,w) = (8 2 10 0 0 4 2 3 2 1 9 -2 7 9 2 0 0 5)

La soluzione di base non è ammissibile perché w_{24} è negativa. Infatti x_{24} eccede la sua capacità massima.
La soluzione non è degenere non essendoci componenti = 0 appartenti alla base.

3) Si cerchi una tripartizione ammissibile



12 13 23 24 34
x = (0 3 0 4 1)
L T L T T U = ∅

Se la si volesse anche degenere si potrebbe assegnare u_{24} = 4. Siccome quest'arco entrebbe in U ⟹ *12* dovrebbe entrare in T.

Duale (primale) del modello dei flussi di costo minimo su reti capacitate, o problema dei potenziali su reti capacitate

$$\begin{cases}\max\ (\pi,\mu)\begin{pmatrix}b\\u\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}E^T & I\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi^T\\\mu^T\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}\max\ (\pi b+\mu u)\\ E^T\cdot\pi^T+\mu^T\leqslant c\\ \mu^T\leqslant 0\end{cases}$$

$\dim = 2m\times 1$

$\dim = m+n-1$

$\dim = 2m\times(m+n-1)$

deriva da $\min(c^T\cdot x+0\cdot w)$

m+n-1 varaibili e 2m disuguaglianze

Test di ottimalità per reti capacitate

Per verificare se si sia all'ottimo al solito bisogna costruire la soluzione complementare, o dei potenziali di base e verificare che essa sia ammissibile.

$$\begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_T^T & \\ E_L^T & I \\ E_U^T & \\ 0_T & \\ 0_L & I \\ 0_U & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c_T \\ c_L \\ c_U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} E_T^T \pi + \mu_T = c_T \\ E_U^T \pi + \mu_U = c_U \\ \mu_T = 0 \\ \mu_L = 0 \end{cases}$$

Sistema dal quale si calcola la soluzione di base del problema dei potenziali associata alla base composta da T, U, T', L'

Risolvendo il sistema appena ottenuto: $\begin{cases} E_T^T \pi = c_T \\ \mu_U = c_U - E_U^T \pi \end{cases}$

Il potenziale o soluzione di base complementare quindi è: $(\pi, \mu) = (\pi, \mu_T, \mu_L, \mu_U) = (\pi, 0, 0, c_U - E_U^T \cdot \pi)$

Si può notare che all'interno di essa non è presente μ, quindi non serve calcolarlo esplicitamente. Si nota inoltre che il π si calcola nello stesso modo della rete non capacitata.

Per controllare che la soluzione di base complementare sia ammissibile si deve verificare che i vincoli non di base, ovvero i vincoli di L e U' siano ammissibili.

$$\begin{cases} E_L^T \pi + \mu_L \leq c_L \\ \mu_U \leq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \pi E_L \leq c_L \\ \pi E_U \geq c_U \end{cases}$$

ricordando che $\mu_L = 0$ e che $\mu_U = c_U - E_U^T \cdot \pi$

Anche queste sono condizioni di Bellman

Scritte coi costi ridotti $\Rightarrow \begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0 & \forall ij \in L \\ c_{ij}^{\pi} \leq 0 & \forall ij \in U \end{cases}$

Th di Bellman: data una tripartizione che generi una soluzione di base ammissibile, se i costi ridotti degli archi di L sono > 0 e i costi ridotti degli archi di U sono negativi $\Longrightarrow$ la soluzione di base è ottima.

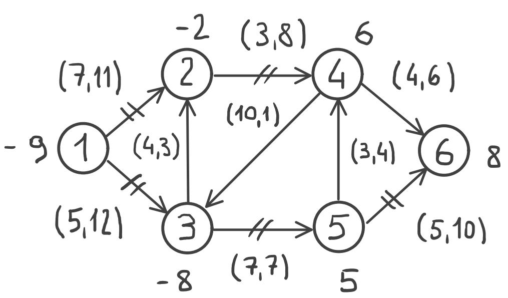
Th di Bellman Bis: Data una tripartizione che generi un potenziale di base ammissibile, se la soluzione di base complementare è ammissibile $\Longrightarrow$ il potenziale è ottimo.

Un potenziale di base è degenere quando almeno una delle disuguaglianze non di base è verificata con l'uguaglianza, ovvero quando almeno uno dei costi ridotti non di base è = 0.

Come si fa a vedere se un flusso sia di base? Gli archi né vuoti né saturi appartengono per forza a T. Gli archi vuoti potrebbero appartenere a T o a L, e gli archi saturi potrebbero appartenere a T o a U. Per decidere dove debba stare uno di questi archi bisogna verificare che si generi una tripartizione.

Esempio *N.B. in questi esempi sugli archi sono riportati (c, u)*

1)



L = {*32, 46, 54*}
U = {*43*}

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 24 & 32 & 35 & 43 & 46 & 54 & 56 \\ 5 & 4 & 7 & 0 & 13 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

π = (0, 7, 5, 10, 12, 17)

La soluzione di base non è ammissbile perché sebbene tutte le componenti siano > 0 sull'arco *35* si supera la capacità massima. La soluzione non è degenere perché nessuno degli archi appartenenti alla base è nullo o saturo.

Si verifica se il potenziale è ammissibile scrivendo le condizioni di Bellman:

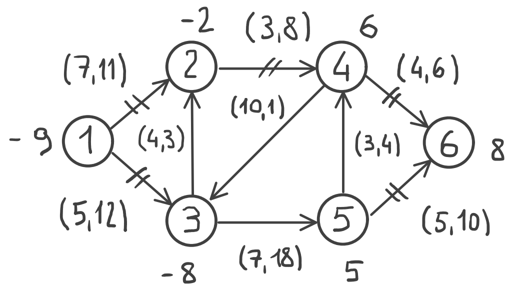
$c_{32}^{\pi} = 4 + 5 - 7 = 2$ Ok, $\in L$ ed è > 0
$c_{43}^{\pi} = 10 + 10 - 5 = 15$ Violato, $\in U$ ed è > 0

Siccome $\bar{x}$ non è degenere $\Longrightarrow$ può essere generato da una sola base $\Longrightarrow$ per forza non si è all'ottimo. Per completezza si calcolano anche le restanti condizioni di Bellman.

$c_{46}^{\pi} = 4 + 10 - 17 = -3$ Violato, $\in L$ ed è < 0
$c_{54}^{\pi} = 3 + 12 - 10 = 5$ Ok, $\in L$ ed è > 0

Quante variabili ha il problema del potenziale in questo caso?
    14 (5 $\pi \neq \pi_1$ e un μ per ogni arco)
Quante ne ha quello del flusso?
    18 (una x e una w per ogni arco)
Le basi che dimensione hanno?
    14 x 14

2)



L = {*32, 43, 54*}
U = {*35*}

$$\bar{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 35 & 43 & 46 & 54 & 56 \\ (-1 & 10 & 1 & 0 & 18 & 0 & -5 & 0 & 13) \end{array}$$

$\pi = (0, 7, 5, 10, 9, 14)$

$c_{32}^{\pi} = 2$, $c_{43}^{\pi} = 15$, $c_{54}^{\pi} = 2$, $c_{35}^{\pi} = 3$

La soluzione non è né ammissibile, né degenere, né ottima.

Che senso ha allora costruire soluzioni di base non ammissibili? Vedere quali archi potrebbero essere invertiti.

Simplesso su reti capacitate

Similmente al caso delle reti non capacitate l'arco entrante è quello che viola le condizioni di Bellman. Questo arco, insieme a soli archi $\in T$ formerà un ciclo, che si orienta differentemente in base all'arco entrante distinguendo gli altri archi che lo compongono in C^+ e C^-.

Per individuare l'arco uscente si devono usare 2 metodologie diverse discriminate dall'insieme a cui apparteneva l'arco violato.

Caso in cui sia un arco ∈ L a violare una condizione di Bellman

Si orienta il ciclo formato dall'arco entrante nello stesso verso di quest'ultimo distinguendo gli altri archi che lo compongono in C^+ se concordi e C^- se discordi.

Th. $c \cdot x(\theta) = c \cdot \bar{x} + \theta \cdot c_{ij}^{T}$ come per il caso non capacitato

Si calcola $x(\theta)$ come nel caso delle reti capacitate accertandosi che i bilanci siano ammissibili. Gli archi al di fuori del ciclo non subiscono variazioni di flusso.

- I bilanci come nel caso delle reti non capacitate sono rispettati $\forall\ \theta$.
- A differenza del caso non capacitato oltre ad accertarsi che $0 <= x(\theta)$ bisogna verificare che $\theta <= u$. Quindi siccome devono essere rispettate anche le capacità massime bisognerà calcolare θ^+ e θ^- separatamente:

$$\theta^- = \min_{ij \in C^-} \{\bar{x}_{ij}\} \qquad \theta^+ = \min_{ij \in C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\} \qquad \theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$$

Come nel caso delle reti non capacitate l'arco che fornisce θ è quello uscente. Sia kl quest'arco:

- se $\theta = \theta^- \Longrightarrow kl \in C^-$
- se $\theta = \theta^+ \Longrightarrow kl \in C^+$

Casi di cambio base

- $\theta = \theta^+ \Longrightarrow$ un arco di T va in U e uno di L va in T. Non si rischia di ciclare all'infinito perché sebbene ij e kl potrebbero essere uguali, la tripartizione comunque cambia e quindi nonostante flussi e potenziali non cambino 2 condizioni di Bellman potrebbero diventare

ammissibili.
- $\theta = \theta^-$ ⟹ un arco di T va in L e uno di L va in T. Non si rischia di ciclare all'infinito perché $ij \in C^-$ e $kl \in C^+$.

Caso in cui sia un arco ∈ U a violare una condizione di Bellman

Si orienta il ciclo nel verso opposto a quello dell'arco entrante: infatti siccome l'arco entrante è saturo, affinché si trovi un flusso $x(\theta)$ ammissibile si deve ridurre il flusso su questo arco. Al solito si suddividono gli archi in C^+ se concordi con il verso del ciclo, C^- se discordi.

Th. Bis $c \cdot x(\theta) = c \cdot \bar{x} - \theta \cdot c_{ij}^{T}$

Affinché $x(\theta)$ sia ammissibile valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente. Gli archi al di fuori del ciclo non subiscono variazioni di flusso.
- I bilanci come nel caso delle reti non capacitate sono rispettati ∀ θ.
- A differenza del caso non capacitato oltre ad accertarsi che $0 <= x(\theta)$ bisogna verificare che $\theta <= u$. Quindi siccome devono essere rispettate anche le capacità massime bisognerà calcolare θ^+ e θ^- separatamente:

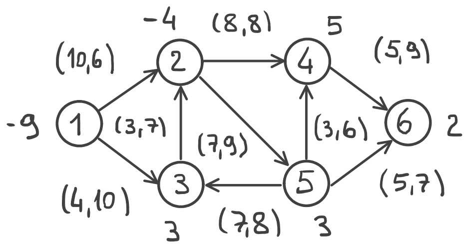
$$\theta^- = \min_{ij \in C^-} \{\bar{x}_{ij}\} \qquad \theta^+ = \min_{ij \in C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\} \qquad \theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$$

- Come nel caso delle reti non capacitate l'arco che fornisce θ è quello uscente. Sia kl quest'arco:
- se $\theta = \theta^-$ ⟹ $kl \in C^-$
- se $\theta = \theta^+$ ⟹ $kl \in C^+$

Casi di cambio base
- $\theta = \theta^+$ ⟹ un arco di T va in U e uno di U va in T.
  Non si rischia di ciclare all'infinito perché $ij \in C^-$ e $kl \in C^+$.
- $\theta = \theta^-$ ⟹ un arco di T va in L e uno di U va in T. Non si rischia di ciclare all'infinito perché sebbene ij e kl potrebbero essere uguali, la tripartizione comunque cambia e quindi nonostante flussi e potenziali non cambino 2 condizioni di Bellman potrebbero diventare ammissibili.

Nel caso il potenziale sia degenere si avrà θ = 0, indipendentemente dal tipo di arco che viola le condizioni di Bellman.
Se ci fosse un arco ∈ L che viola le condizioni di Bellman e anche un arco ∈ U che viola? Regola anticiclo di Bland ⟹ si prende il primo in ordine lessicografico (considerando l'unione dei 2 insiemi).

Esempio di esercizio completo



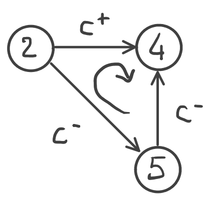
T = {*12, 13, 24, 46, 54*}
L = {*32, 53, 56*}
U = {*25*}

12 13 24 25 32 46 53 54 56
x = (6 3 1 9 0 2 0 6 0)
La soluzione di base è ammissibile e degenere perché gli archi *54*, *12* ∈ T sono saturi.

π = (0, 10, 4, 18, 15, 23)

Si verifica se siano rispettate le condizioni di Bellman
$c_{25}^{\pi} = 7 + 10 - 15 = 2$ violata ⟹ si deve cambiare base ⟹ *25* è l'arco entrante

Siccome l'arco che ha violato la condizione ∈ U il ciclo che si forma è il seguente:



$\theta^+ = \min\{8-1\} = 7$
$\theta^- = \min\{9, 6\} = 6$

$\Longrightarrow \theta = 6 \Longrightarrow$ l'arco uscente è *54*, e questo andrà in L

Si calcola il nuovo flusso

	12	*13*	*24*	*25*	*32*	*46*	*53*	*54*	*56*	
$x(\theta)$ = (	6	3	7	3	0	2	0	0	0	)

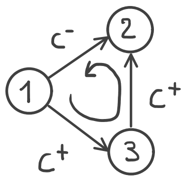
Altro passo

T = {*12, 13, 24, 25, 46*}
L = {*32, 35, 54, 56*}
U = ∅

$\pi = (0, 10, 4, 18, 17, 23)$

Si verifica se siano rispettate le condizioni di Bellman
$c_{32}^{\pi} = 3 + 4 - 10 = -3$ violata $\Longrightarrow$ si deve cambiare base $\Longrightarrow$ *32* è l'arco entrante

Siccome l'arco che ha violato la condizione ∈ L il ciclo che si forma è il seguente:



$\theta^+ = \min\{7-0, 10-3\} = 7$
$\theta^- = \min\{6\} = 6$

$\Longrightarrow \theta = 6 \Longrightarrow$ l'arco uscente è *12*, e questo andrà in L

Si calcola il nuovo flusso

	12	*13*	*24*	*25*	*32*	*46*	*53*	*54*	*56*	
$x(\theta)$ = (	0	9	7	3	6	2	0	0	0	)

Problema del flusso massimo

Sugli archi della rete sono segnate solo le capacità massime. Dato un nodo di origine s (source) e un nodo di destinazione t (tail), qual è il flusso massimo v che si può ottenere tra i 2 nodi? Il nodo di partenza avrà bilancio -v, quello di destinazione +v.

Modello

$$\begin{cases} \max(v) \\ Ex = b, \\ 0 <= x <= u \\ v >= 0 \end{cases} \qquad b = \begin{cases} -v \text{ se è il nodo di origine} \\ +v \text{ se è il nodo di destinazione} \\ 0 \text{ se è un nodo di transito} \end{cases}$$

È un problema di PL in cui ci sono m variabili. v è un'incognita a differenza del problema dei flussi di costo minimo in cui i bilanci sono tutti noti. Come si ottiene v? Si ottiene sommando i flussi uscenti dal nodo di origine, e affinché sia ammissibile deve tassativamente essere minore della somma delle capacità di questi archi. Gli stessi ragionamenti si possono applicare sugli archi entranti nel nodo di destinazione. Il ragionamento con le seguenti accortezze è estendibile a tutti i nodi.

Definizione: si chiama *taglio di una rete* la partizione dei nodi in due insiemi: N_s che contiene almeno s e N_t che contiene almeno t.

Definizione: si chiamano *archi del taglio* gli archi che vanno da N_s a N_t o vice versa. Gli archi che vanno da N_s a N_t sono detti *archi diretti del taglio*, il loro insieme si chiama A^+. Gli archi che vanno da N_t a N_s sono detti *archi inversi del taglio*, il loro insieme si chiama A^-.

Definizione: Si chiama portata del taglio $u(N_s, N_t) = \sum_{ij \in A^+} u_{ij}$

Th. del max-flow/min-cut: considerando tutti i tagli della rete e le relative portate di questi, la portata minima coincide col flusso massimo.

Quanti possibili tagli si possono fare su una rete? s^{n-2} (s e t sono fissati). Pertanto l'elencazione di tutti i tagli non è possibile.

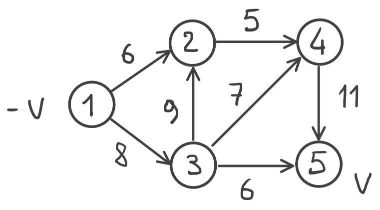
Se si provasse a scrivere la matrice E del problema si noterebbe che l'ultima colonna, quella riferita a v sarebbe così composta:

- 1° componente = 1
- m-2 componenti = 0
- ultima componente = -1

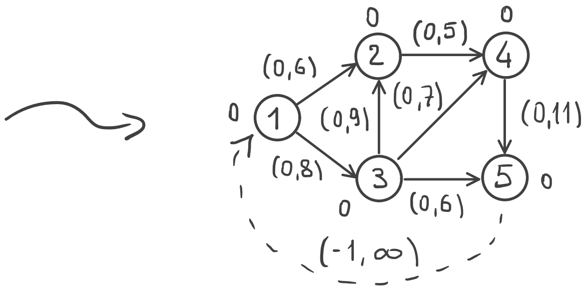
Considerandola come una colonna della matrice di incidenza, ciò equivarrebbe a un arco x_{ts} che collega t con s dove questi 2 nodi hanno bilanci = 0. Considerando il costo di x_{ts} = -1, la sua portata massima = ∞, il costo degli altri archi = 0 e il bilancio di tutti i nodi = 0, si ottiene un problema di flusso di costo minimo su rete capacitata, dove x_{ts} = v, per cui si ottengono tutti i vantaggi di questa categoria di problemi.

Per trovare una soluzione ammissibile con cui far partire il simplesso invece di servirsi del problema ausiliario si potrebbe considerare una soluzione con tutti i flussi = 0, perché nel caso di questo problema è una soluzione sempre ammissibile, e siccome non deve essere calcolata è anche greedy. Il primo arco entrante sarebbe proprio x_{ts}.

Esempio di simplesso



NB: quelle segnate sugli archi sono le capacità

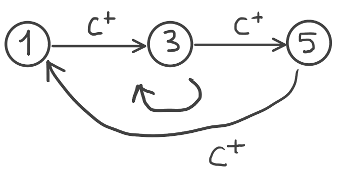


Per il simplesso si parte da (x,v) = (0,0,0,0,0,0,0,0,0) considerando la tripartizione
T = {*12, 13, 24, 35*}, L = {*32, 34, 45*}, U = ∅

π = (0,0,0,0,0)

$c_{32}^{\pi} = 0$
$c_{34}^{\pi} = 0$
$c_{45}^{\pi} = 0$
$c_{51}^{\pi} = -1$ condizione violata ⟹ non è la soluzione ottima ⟹ è *51*, l'arco fittizio a essere entrante

Il ciclo che si forma è:



$\theta^- = \infty$ perché $C^- = \emptyset$
$\theta^+ = \min\{8-0, 6-0, \infty\}$

⟹ θ = 6 ⟹ arco uscente = *35*

(x,v)(θ) = (0,6,0,0,0,6,0,6)

Algoritmo di Ford-Fulkerson per la ricerca del flusso massimo

Algoritmo che invece di basarsi sul simplesso per la ricerca di una soluzione ottima si fonda sul th. del max-flow/min-cut.

Def. grafo residuo: grafo che rispetto a quello dato ha gli stessi nodi ma che per ogni arco ij ha anche il corrispettivo arco ji (verso opposto). Ogni arco è dotato di una capacità residua r_{ij}. All'inizio dell'algoritmo:

- $r_{ij} = u_{ij}$ per gli archi veri
- $r_{ij} = 0$ per gli archi fittizi

Si chiama x_{ij} il flusso che si assegna ad ogni arco durante i passi dell'algoritmo. Inizialmente sarà = 0 per ogni arco.

Def. cammino aumentante sul grafo residuo: è un cammino orientato da s a t sul grafo residuo. Il cammino non prevede la ripetizione di nodi, e quindi non prevede cicli.

Def. portata δ di un cammino aumentato: $\delta = \min_{ij \ \text{cammino}} \{r_{ij}\}$

Durante l'algoritmo si andaranno a variare i flussi x_{ij} e conseguentemente si dovranno aggiornare la capacità residue in questo modo: $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$

Le capacità residue degli archi reali rappresentano effettivamente le capacità ancora disponibili sui rami, mentre le capacità residue degli archi fittizi indicano le unità di flusso già impiegate sul ramo.

Si tenga a mente la relazione $r_{ij} + r_{ji} = u_{ij}$.

Algoritmo vero e proprio

Passo 0: trovare un $\bar{x}$ iniziale ammissibile. Si può partire da $\bar{x} = 0$ (istantaneo).

Passo 1: si cerca un cammino aumentante con $\delta > 0$.

Passo 2: si aggiornano $\bar{x}$ e r. $\bar{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} + \delta$ se ij ∈ cammino, altrimenti $\bar{x}_{ij}$ rimane invariato, mentre invece r si aggiorna di conseguenza ricordando la relazione
$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$

L'algoritmo termina quando non si riesce più a ottenere un cammino aumentante il cui δ sia > 0. Ciò equivale a dire che non sia più presente un percorso da s a t dove sia possibile aumentare il flusso.

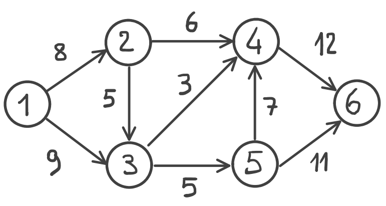
Th. di correttezza: l'algoritmo di Ford Fulckerson è corretto e termina in un numero finito di passi.

Per trovare un cammino aumentante il cui δ è > 0 ci si serve dell'algoritmo di Edmund-Karp (informalmente chiamato come algoritmo della croce).

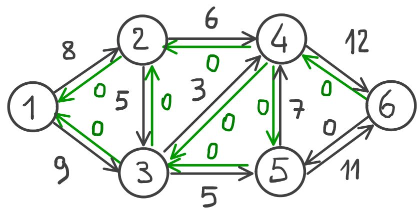
Def. stella uscente: la stella uscente FS di un nodo è l'insieme dei nodi raggiungibili attraverso gli archi uscenti da quello considerato.

Algoritmo di Edmund-Karp
1) si scrive sulla colonna di sinistra il nodo s e si calcola la sua FS. Sulla colonna di destra si scrivono in ordine lessicografico i nodi ∈ FS tali che $r_{ij} > 0$.
2) si prende il 1° nodo (FIFO) della colonna di destra e si scrive sotto in quella di sinistra. Nella colonna di destra si scrivono i nodi ∈ FS tali che $r_{ij} > 0$ non ancora visitati.
3) si procede iterando il 2° passo finché nella colonna di destra non appare il nodo t.
4) il cammino aumentante si ottiene andando a vedere quale sia il nodo nella colonna di sinistra che ha permesso di raggiungere t. Si cerca la riga in cui questo nodo appare sulla colonna di destra e si procede iterativamente guardando quale fosse il nodo da cui è stato raggiunto finché non si arriva a s.

Esempio completo di esercizio



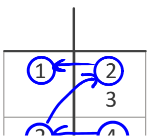
il suo grafo residuo iniziale è



Si parte considerando $\bar{x} = 0$.

1° passo

Applicando l'algoritmo di Edmud-Karp



Il cammino aumentato è 1-2-4-6, il cui $\delta = 6$.

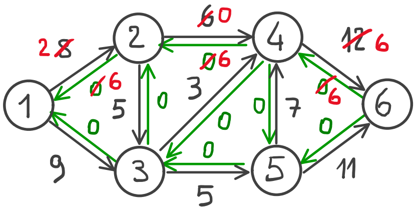
Applicando l'algoritmo di Edmud-Karp

1	2 3
2	4
3	5
4	6

Il cammino aumentato è 1-2-4-6, il cui δ = 6.

x̄ diventa = (6,0,0,6,0,0,6,0,0). La rispettiva v = 6.

Si aggiorna r:



2° passo

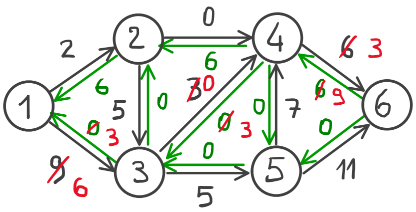
Applicando l'algoritmo di Edmud-Karp

1	2 3
2	-
3	4 5
4	6

Il cammino aumentato è 1-3-4-6, il cui δ = 3.

x̄ diventa = (6,3,0,6,3,0,9,0,0). La rispettiva v = 9.

Si aggiorna r:



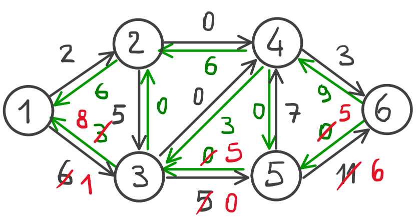
3° passo

Applicando l'algoritmo di Edmud-Karp

1	2 3
2	-
3	5
5	6

Il cammino aumentato è 1-3-5-6, il cui δ = 5.

x̄ diventa = (6,8,0,6,3,5,9,0,5). La rispettiva v = 14.



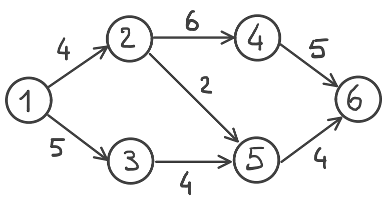
4° passo

1	2 3
2	-
3	-

Nell'algoritmo di Edmund-Karp non è apparso t, quindi il flusso v trovato al passo precedente è quello ottimo.

Efficientamento dell'algoritmo di Ford-Fulckerson

Sono necessari gli archi fittizi affinché si esegua correttamente l'algoritmo?
Di seguito un esempio che ne dimostra la necessità.



Si parte considerando $\bar{x} = 0$.

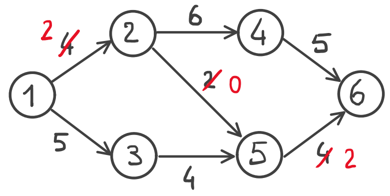
1° passo

1	2 3
2	4 5
3	-
4	6

Il cammino aumentato è 1-2-4-6, il cui $\delta = 2$.

$\bar{x}$ diventa = (2,0,2,0,0,2,0). La rispettiva v = 2.

Si aggiorna r:



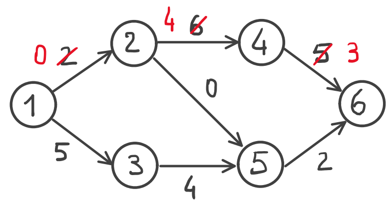
2° passo

1	2 3
2	5
3	4
5	6

Il cammino aumentato è 1-2-5-6, il cui $\delta = 2$.

$\bar{x}$ diventa = (4,0,2,2,0,2,2). La rispettiva v = 4.

Si aggiorna r:



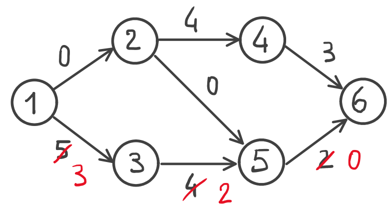
3° passo

1	3
3	5
5	6

Il cammino aumentato è 1-3-4-6, il cui $\delta = 2$.

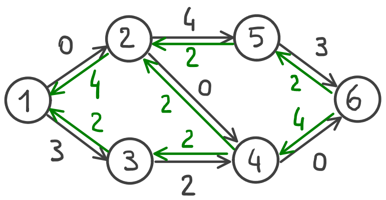
$\bar{x}$ diventa = (4,2,2,2,2,4,2). La rispettiva v = 6.

Si aggiorna r:



Eseguendo un altro passo non si riuscirebbe più a trovare un cammino aumentante con $\delta > 0$. Questa condizione, nel caso dell'algoritmo eseguito sul grafo residuo, avrebbe significato il raggiungimento del flusso ottimo. Tuttavia si può facilmente vedere a occhio sul grafo originario che quello trovato non è sicuramente il flusso massimo.

Quanto ottenuto fino ad ora può però essere comunque utile ai fini della ricerca del flusso ottimo. Infatti si possono introdurre adesso gli archi fittizi considerando il flusso e le capacità residue ottenuti.



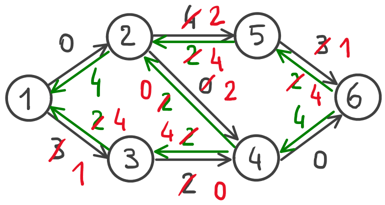
1° passo bis

1	3
3	4
4	2
2	5
5	6

Il cammino aumentato è 1-3-4-2-5-6, il cui $\delta = 2$.

$\bar{x}$ diventa = (4,4,0,4,4,4,4). La rispettiva v = 8.

Si aggiorna r:



Eseguendo un altro passo non si riuscirebbe più a trovare un cammino aumentante con $\delta > 0$ e siccome adesso l'algoritmo è stato eseguito sul grafo eseguito ciò significa che il flusso trovato è quello ottimo.

Quindi conviene iniziare l'algoritmo di Ford-Fulkerson senza l'ausilio degli archi fittizi, perché comporterebbero una complessità computazionale maggiore nell'algoritmo di Edmund-Karp e nell'aggiornamento di r.

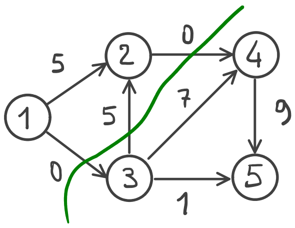
Quando non si trova più un cammino entrante il cui δ sia > 0 si introducono gli archi fittizi per verificare se si sia all'ottimo, in caso contrario da quel punto bisogna proseguire con l'algoritmo sul grafo residuo.

Si noti che dopo l'introduzione degli archi fittizi si è tolto del flusso dall'arco *25* per reindirizzarlo sull'arco *24*. Il flusso che prima passava da *25* andava infatti successivamente a occupare capacità sull'arco *46* utilizzabile da flussi provenienti da *35*, mentre invece poteva passare da *24* che aveva capacità libera.

Per vedere se si sia arrivati all'ottimo senza aver aggiunto gli archi fittizi si potrebbero analizzare i piani del taglio del grafo: qualora ne sia presente uno le cui capacità residue degli archi diretti del taglio siano tutte nulle $\Longrightarrow$ non può passare più flusso di così $\Longrightarrow$ la soluzione è ottima.

Esempio

Sugli archi sono segnate le capacità residue



Considerando il piano di taglio in verde si può facilmente constatare che non sia possibile trasferire una quantità maggiore di flusso, pertanto la soluzione trovata è ottima.

Algoritmo di Djikstra

Questo algoritmo trova l'albero dei cammini minimi, ovvero dato un nodo radice s l'algoritmo trova tutti i singoli cammini minimi da s a ogni altro nodo.

Può essere visto come un problema di PLR usando il modello dei flussi di costo minimo.

Il costo v dell'albero è dato dalla somma dei costi dei cammini tra il nodo di partenza e tutti gli altri nodi.

Per svolgere l'algoritmo si ha bisogno di:

- vettore dei predecessori $p \in \mathbb{R}^n$. Per ogni nodo indica quale sia il nodo che lo precede ripercorrendo il cammino a ritroso verso la radice.
- vettore delle etichette $\pi \in \mathbb{R}^n$. Indica la distanza tra ogni nodo e la radice.
- S insieme dei nodi della rete.

Siccome π è ricavabile da p ne consegue che quest'ultimo sia il vero risultato importante tra i 2.

Siccome inizialmente non si conoscono i predecessori eccetto che per la radice il cui predecessore è la radice stessa (si considera sempre come radice il nodo 1), allora il valore iniziale di p è = (1, ∅,…, ∅).

Analogamente siccome inizialmente non si conoscono le distanze dalla radice agli altri nodi eccetto che per la radice stessa, allora il valore iniziale di π è = (0, +∞,…, +∞).

Passo 1: si seleziona da S il nodo *i* di etichetta π minima e si calcola la sua stella uscente FS(*i*).

Passo 2: ∀ ij ∈ FS(*i*) si controlla se $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$. In tal caso si aggiorna $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$ e $p_j = i$, altrimenti si prosegue. Si elimina il nodo *i* da S e si ritorna al passo 1.

L'algoritmo termina quando in S non ci sono più nodi.

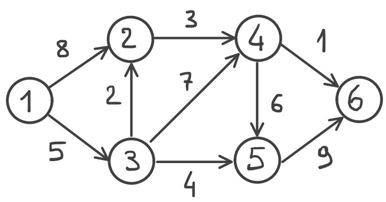
È più efficiente del simplesso sui flussi di costo minimo? Si può notare che riscrivendo $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$ si ottiene $c_{ij} + \pi_i - \pi_j < 0$ che è il costo ridotto c_{ij}^{π}. Inoltre è evidente che etichette = potenziali.

Sostanzialmente quindi è lo stesso algoritmo. L'unica differenza sta nel fatto che a ogni passo invece di valutare tutti i nodi si considerano solo quelli della stella uscente e quindi questo algoritmo risulta più efficiente.

L'algoritmo termina in n-1 passi.

L'algoritmo funziona solo in presenza di costi > 0. In caso contrario esiste una versione modificata dell'algoritmo.

Esempio di esercizio



1° passo

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, $p = \{1,\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset\}$, $\pi = \{0, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty\}$

FS(1) = {2,3}

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 > \pi_1 + c_{12} \Longrightarrow +\infty > 0 + 8 \\ \pi_3 > \pi_1 + c_{13} \Longrightarrow +\infty > 0 + 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow p = \{1,1,1,\emptyset,\emptyset,\emptyset\},\ \pi = \{0, 8, 5, +\infty, +\infty, +\infty\}$$

2° passo

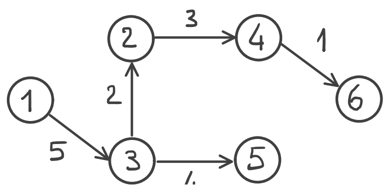
$S = \{\cancel{1},2,3,4,5,6\}$, $p = \{1,1,1,\emptyset,\emptyset,\emptyset\}$, $\pi = \{0, 8, 5, +\infty, +\infty, +\infty\}$

FS(3) = {2,4,5}

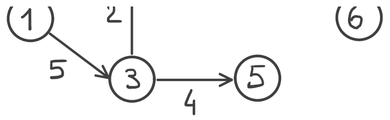
$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 > \pi_3 + c_{32} \Longrightarrow 8 > 5 + 2 \\ \pi_4 > \pi_3 + c_{43} \Longrightarrow +\infty > 5 + 7 \\ \pi_5 > \pi_3 + c_{53} \Longrightarrow +\infty > 5 + 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow p = \{1,3,1,3,3,\emptyset\},\ \pi = \{0, 7, 5, 12, 9, +\infty\}$$

• • •

La soluzione ottima che si trova è {1,3,1,2,3,4}, π = {0, 7, 5, 10, 9, 11}

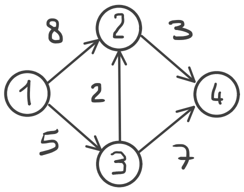


La soluzione ottima che si trova è {1,3,1,2,3,4}, π = {0, 7, 5, 10, 9, 11}



Affinché l'algoritmo restituisca i risultati corretti è necessario che nelle iterazioni si estragga da S il nodo con etichetta minima e non un nodo qualsiasi ∈ S.

Esempio



Se dopo il nodo 1 si estraesse il nodo 2 da S, allora si otterrebbe $\pi_4 = 11$.
Se alla successiva interazione si estraesse il nodo 3 non si troverebbe un cammino migliore per il nodo 4, perché si otterrebbe la disequazione

$$\pi_4 > c_{34} + \pi_3 \Longrightarrow 11 > 5 + 7$$

Tuttavia si può notare dal grafico che esiste un percorso più breve per raggiungere il nodo 4: 1-3-2-4, che darebbe $\pi_4 = 10$. Questo valore verrebbe trovato eseguendo correttamente l'algoritmo.