Lezione: Span lineare, Indipendenza lineare, Base, Dimensione

Span Lineare:

Lemma: Siano U e U' sottospazi di V. Allora $U \cap U'$ è un sottospazio di V.
Dimostrare:
(i) $u_1, u_2 \in U \cap U' \implies u_1,\ u_2 \in U$ e $u_1,\ u_2 \in U'$.
$u_1,\ u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$ (perché U è un sottospazio)
$u_1,\ u_2 \in U' \implies u_1 + u_2 \in U'$ (perché U' è un sottospazio)

Quindi $u_1 + u_2 \in U \cap U'$

(ii) $u \in U \cap U' \implies u \in U$ e $u \in U' \implies cu \in U$ e $cu \in U' \implies cu \in U \cap U'$
Come volevasi dimostrare

Più in generale, l'intersezione di una collezione arbitraria di sottospazi di V è anche un sottospazio di V per lo stesso argomento.

Lemma: Sia A un insieme. Per ogni $\alpha \in A$, sia U_α un sottospazio di V. Allora anche

$$W = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

è un sottospazio di V.
Dimostrare: Un esercizio per gli studenti.

Definizione: Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Sia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ l'insieme di tutti i sottospazi di V che contengono S. Allora,

$$\mathrm{span}(S) = \cap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Attenzione: V è un sottospazio di V.
Il caso $\mathrm{span}(S) = V$ è importante.

Nota: In termini semplici, $\mathrm{span}(S)$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

Esempio: Sia $S = \{1, x, x^2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Allora $\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}[x]$

Infatti, $\mathrm{span}(S)$ deve contenere ogni monomio x^m e quindi ogni somma finita

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

poiché i sottospazi sono chiusi sotto la presa di somme finite.

Esempio: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$

Infatti, $\{0\}$ contiene $\emptyset$ e quindi $\mathrm{span}(S) \subseteq \{0\}$. Poiché $\{0\}$ è il più piccolo spazio vettoriale (ricordiamo che ogni spazio vettoriale deve contenere 0), dobbiamo avere $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Notazione: Se S è un insieme, allora una combinazione lineare di elementi di S è una somma finita $\sum a_j v_j$ dove ogni $v_j \in S$ e ogni $a_j \in \mathbb{R}$

Somma finita significa che è una somma di un numero finito di vettori

Esempio: Sia $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ dove ogni componente di e_i è zero, tranne l'iesimo posto, che è uguale a 1. Allora

$$\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^n$$

poiché $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Per essere chiari, per n=3:

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

Per ripetere: Se un sottospazio U contiene l'insieme S allora $\operatorname{span}(S) \subseteq U$.

Esempio: $S = \{1, x^2, x^4, \dots\} \implies \operatorname{span}(S) \neq \mathbb{R}[x]$ perché $x \notin \operatorname{span}(S)$.

Esempio: Se $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ è un insieme finito che contiene almeno un elemento, allora

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{(E1)}$$

Lo studente deve verificare che questo è un sottospazio di V.

Infatti: Sia U il lato destro dell'equazione (E1). Allora $S \subseteq U$ e quindi

$$\operatorname{span}(S) \subseteq U$$

Viceversa, ogni sottospazio che contiene S deve contenere anche U poiché i sottospazi sono chiusi sotto la presa di somme finite.

Osservazione: Finché si lavora solo con insiemi finiti di elementi, si può adottare (E1) come definizione operativa di span, a condizione che si accetti che una somma vuota di elementi sia zero (cioè $\operatorname{span}(\emptyset) = \{0\}$)

Indipendenza lineare

Sia S un sottoinsieme finito di uno spazio vettoriale V. Allora S è linearmente indipendente se

(i) $S = \emptyset$ oppure

(ii) $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = 0 \implies a_1 = 0,\ a_2 = 0, \dots, a_n = 0$

altrimenti, diciamo che S è linearmente dipendente.

Esempio:

(a) $S = \{(1,0), (0,1), (1,1)\} \implies \operatorname{span}(S) = \mathbb{R}^2$ perché $\operatorname{span}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$

Tuttavia, S non è linearmente indipendente perché

$$(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$$

Nota: Siano S e S' sottoinsiemi di un sottospazio U. Se $S \subseteq S'$ e $\operatorname{span}(S) = U$ allora $\operatorname{span}(S') = U$. Infatti: S' è un sottoinsieme di U, e U è un sottospazio. Quindi $\operatorname{span}(S') \subseteq U$. D'altra parte $S \subseteq S'$ quindi $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(S')$. Quindi

$$U = \operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(S') \subseteq U \implies \operatorname{span}(S') = U$$

(continua, pagina seguente)

(b) $S = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,2,3,4),\ v_3 = (1,4,9,16)$ è linearmente indipendente perché

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\quad a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \implies (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$

Per determinare $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ consideriamo il kernel della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A) = \operatorname{span}(v_4), \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per la definizione del kernel, $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ consiste nei vettori che sono perpendicolari a $(-1, 3, -3, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1, v_4) \\ (v_2, v_4) \\ (v_3, v_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando l'elminazione gaussiana, possiamo anche verificare che $(-1, 3, -3, 1) \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 4 & 16 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & \boxed{20} \end{array}\right)$$

Omettere i passi intermedi

$\implies$ nessuna soluzione

(c) $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad v_4 = v_1 + v_2$

Un tale insieme è sempre linearmente dipendente.
$\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ poiché l'ultimo vettore è ridondante.

(d) $S = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,2,3,4),\ v_3 = (1,4,9,16),\ v_4 = (-1,3,-3,1)$
è linearmente indipendente perché

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 4 & 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(continua, pagina seguente)

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 9 & -3\\ 1 & 4 & 16 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 6 & -10\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{pmatrix}$$

Quindi $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0 \implies (a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0)$

Per determinare $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ consideriamo il kernel della matrice:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 8 & 15\\ 0 & 4 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -10 & -10\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{pmatrix} \qquad \implies \ker(A) = 0 \implies \operatorname{span}(S) = (\ker(A))^{\perp} = \mathbb{R}^4$$

<u>Definizione</u>: Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Allora S è linearmente indipendente se (e solo se) ogni sottoinsieme finito di S è linearmente indipendente.

<u>Proposizione</u>: Se S è linearmente indipendente allora ogni sottoinsieme $S' \subseteq S$ è linearmente indipendente.
<u>Dimostrazione</u>: Un insieme finito di S' è un insieme finito di S. Qualsiasi insieme finito di S è linearmente indipendente.

In particolare, se S è un insieme finito non è necessario considerare tutti i sottoinsiemi di S per verificare l'indipendenza lineare di S.

<u>Esempio</u>: $\{1, x, x^2, \dots, \} \subset \mathbb{R}[x]$ è linearmente indipendente.

Sia $J = \{0, 1, 2, \dots\}$

Ricordiamo che un polinomio è dato da una funzione $P : J \to \mathbb{R}$ tale che

$$\{j \in J \mid P(j) \neq 0\}$$

è un insieme finito. Il monomio x^m è la funzione:

$$\mu_m : J \to \mathbb{R}, \qquad \mu_m(j) = \begin{cases}1 & j = m\\ 0 & j \neq m\end{cases}$$

Se $\{x^{m_1}, \dots, x^{m_\ell}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ è un insieme finito e

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_k x^{m_k} = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mu_{m_k} = 0 \tag{E2}$$

allora $a_1 = 0,\ a_2,\ \dots,\ a_\ell = 0$. Informalmente, questa è solo l'affermazione che il polinomio è zero se e solo se tutti i suoi coefficienti sono zero. Più formalmente, (E2) è una funzione $J \to \mathbb{R}$. Un elemento dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^J$ è zero se e solo se valuta a zero in ogni $j \in J$. Valutando (E2) in $\{m_1, \dots, m_\ell\}$si vede che (E2) è zero se e solo se $a_1 = 0,\ a_2,\ \dots,\ a_\ell = 0$

$\boxed{\text{Base:}}$

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale. Un insieme $B \subseteq V$ è una base di V se (e solo se)
(1) $\operatorname{span}(B) = V$
(2) B è linearmente indipendente.

Esempio: I vettori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ dati all'inizio della pagina 2 sono una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio: $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]$.

Esempio: Sia $P_n[x]$ l'insieme di tutti i polinomi di grado minore o uguale a n. Allora $P_n[x]$ è uno spazio vettoriale con base $B = \{1, \ldots, n\}$.

Sia $J = \{0, 1, 2 \ldots\}$. Allora

$$P_n[x] = \{\, p \in \mathbb{R}^J \mid j > n \implies p(j) = 0 \,\}$$

che è un sottospazio di $\mathbb{R}^J$. In particolare, poiché $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è linearmente indipendente, il sottoinsieme finito $\{1, x, \ldots, x^n\}$ è linearmente indipendente. Chiaramente $\operatorname{span}(B) = P_n[x]$.

Esempio: $\emptyset$ è una base di $\{0\}$.
(1) $\operatorname{span}(\emptyset) = 0$
(2) $\emptyset$ è linearmente indipendente.

Esempio: Siano n e m interi positivi. L'insieme $M_{n\times m}$ di tutte le matrici $n \times m$ è uno spazio vettoriale con base

$$B = \{\, E_{ij} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \}$$

E_{ij} è la matrice nxm per la quale la voce (i, j) è 1 e tutte le altre voci sono zero.

Per essere chiari: $(n = m = 2)$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio: Se S è un insieme finito allora le funzioni

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

è una base di $\mathbb{R}^S$.

Gli algoritmi per trovare una base dello spazio delle righe, dell'immagine e del kernel di una matrice sono stati dati nella lezione 9.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale V si dice di dimensione finita se esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq V$ tale che $\operatorname{span}(S) = V$.

Proposizione: Uno spazio vettoriale V di dimensione finita ha una base.
Dimostrazione: Il seguente algoritmo produce una base

Nota: Questo algoritmo dimostra che se S è un insieme finito e $V = \operatorname{span}(S)$ allora S contiene una base di V.

Sia S un insieme finito tale che $\operatorname{span}(S) = V$. Sia $L(S)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S linearmente indipendenti. Elenca gli elementi di $L(S)$ in base al numero di elementi che contengono e scegli un insieme B con il maggior numero di elementi. Allora B è una base di V.

Per definizione, B è linearmente indipendente. Per vedere che $\operatorname{span}(B) = V$, sia $s \in S - B$. Allora, $T = B \cup \{s\}$ è linearmente dipendente (per la massimalità di B), quindi esistono scalari $\{a_t \in \mathbb{R} \mid t \in B\}$ tale che

$$\sum_{t \in T} a_t\, t = 0$$

Ricorda: gli elementi degli insiemi S, B, T sono vettori

Se $a_s = 0$ allora B è linearmente dipendente. Quindi, $a_s \neq 0$ da cui segue che $s \in \operatorname{span}(B)$. Dunque

$$\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(S) = V$$

Come volevasi dimostrare

Teorema: Ogni spazio vettoriale ha una base.
Dimostrazione: Se non assumiamo la dimensionalità finita, risulta essere equivalente all'assioma della scelta nella teoria degli insiemi.

Nota: Questo non dice che possiamo trovare una base per un particolare spazio vettoriale a dimensione infinita, come $\mathbb{R}[x]$, solo che non possiamo dare una dimonstrazione per tutti gli spazi vettoriali senza l'assioma della scelta.

Non preoccuparti troppo di questo.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia L un sottoinsieme linearmente indipendente di V e S un sottoinsieme di V tale che $\operatorname{span}(S) = V$. Allora, la cardinalità di L è minore o uguale alla cardinalità di S.
Dimonstrazione: Supponiamo che S sia un insieme finito. Scrivi $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Supponiamo che L contenga un sottoinsieme linearmente indipendente L' con $n+1$ elementi $\{\ell_1, \ldots, \ell_{n+1}\}$. Scrivi

$$\ell_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n$$

Allora,

$$c_1\ell_1 + \cdots + c_{n+1}\ell_{n+1} = 0 \implies \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tuttavia, poiché questo è un sistema di n equazioni in n+1 variabili, ha sempre una soluzione non zero. Dunque, L è linearmente dipendente. Contraddizione.

In particolare, poiché V è di dimensione finita, esiste un insieme finito T tale che $\operatorname{span}(T) = V$. Dunque, la cardinalità di L è finita. Questo gestisce il caso in cui S è un insieme infinito.

Come volevasi dimostrare

Se F è un insieme finito sia $|F|$ denotare il numero di elementi di F.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora,
(1) Ogni base di V è un insieme finito.
(2) Se B e B' sono basi di V allora $|B| = |B'|$
Dimonstrazione
(1) Poiché V è di dimensione finita, esiste un insieme finito S tale che $\mathrm{span}(S) = V$. Poiché B è linearmente indipendente, $|B| \leq |S|$.
(2) Poiché $\mathrm{span}(B) = V$ e B' è linearmente indipendente, $|B'| \leq |B|$. Invertendo i ruoli di B e B' si ottiene $|B| \leq |B'|$. Dunque $|B| = |B'|$.
Come volevasi dimostrare

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora, la dimensione di V, scritta $\dim V$ è il numero di elementi in qualsiasi base di V.

Esempio: $\dim \mathbb{R}^n = n$
$\dim P_n[x] = n+1$ (polinomi di grado $\leq n$)
$\dim M_{n\times m} = nm$ (matrici nxm)
$\dim \{0\} = 0$
Se S è un insieme finito allora $\dim \mathbb{R}^S = |S|$
Se H è un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ allora $\dim H = n-1$
Se L è una linea allora $\dim L = 1$