Esame di Ricerca Operativa del 30/1/23

(Cognome)	**(Nome)**	**(Numero di Matricola)**

Esercizio 1. Un'industria produce un bene di consumo in due versioni: normale (N) con profitto 1200 per ogni unitá e super (S) con profitto 1500 per ogni unitá. Nella produzione devono essere utilizzati i macchinari A, B e C. La seguente tabella fornisce il numero massimo di ore settimanali disponibili di ogni macchinario ed il tempo necessario per produrre una unitá di bene.

	A	B	C
ore settimanali disponibili	1500	2000	1800
ore di lavoro tipo N	1.5	0.8	1
ore di lavoro tipo S	1.5	1	2.2

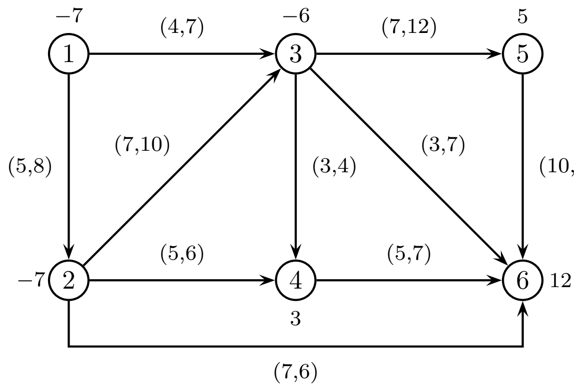
Trovare l'ottimo del rilassato continuo tramite simplesso, per massimizzare il profitto, partendo, se possibile, dalla soluzione che produce il massimo possibile del bene in versione normale e niente del bene in versione super. Costruire un piano di taglio. Trovare la soluzione ottima del problema.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

	2	**3**	**4**	**5**
1	30	35	32	25
2		28	33	26
3			24	16
4				12

Trovare una valutazione calcolando il 5–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 4. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{34}, x_{35} e x_{45}. Si puó affermare che, se il costo dell'arco x_{35} cambiasse, la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,3), (2,6), (4,6) e (5,6) e gli archi (2,4) e (3,5) come archi saturi, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Sono ottimi? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 esprimendo la soluzione ottima anche in termini di flusso su reti. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_2^2 - 4\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é il poliedro di vertici $(-2,2)$, $(3,2)$, $(3,-1)$ e $(0,-3)$.

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $\left(-\frac{1}{3},2\right)$. Trovare il minimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT.

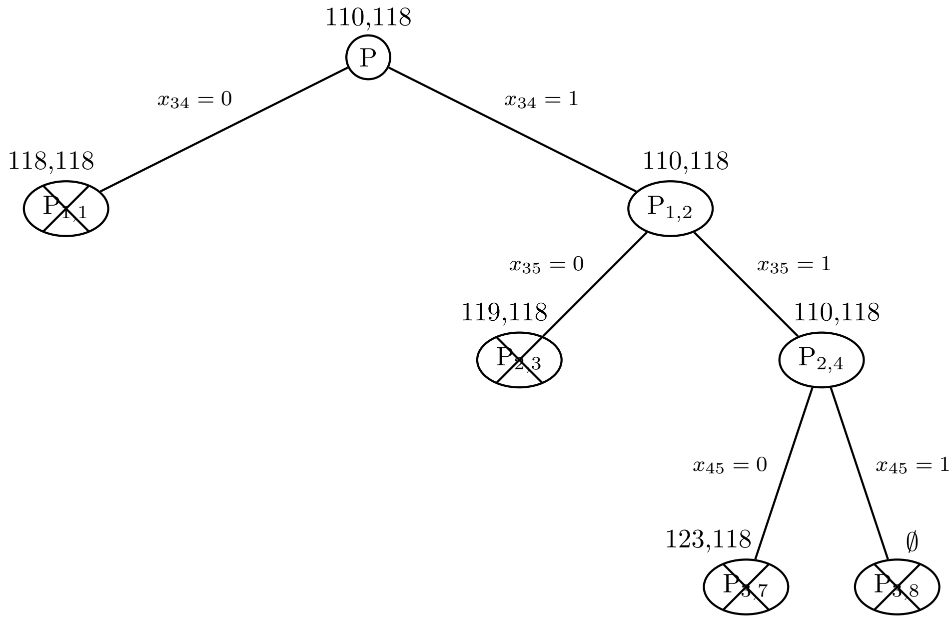
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \min \ 1200\,x_1 + 1500\,x_2 \\ 1.5\ x_1 + 1.5\ x_2 \leq 1500 \\ 0.8\ x_1 + \ x_2 \leq 2000 \\ x_1 \ + 2.2\,x_2 \leq 1800 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(1000, 0)$ con base $B = \{1, 5\}$. La duale complementare é $(800, 0, 0, 0, -300)$. Indice uscente 5 indice entrante 3. Soluzione ottima del rilassato continuo $(\frac{1000}{3}, \frac{2000}{3})$. Base ottima $B = \{1, 3\}$. Matrice del taglio: $\begin{pmatrix} 11/9 & -5/6 \\ -5/9 & 5/6 \end{pmatrix}$. Taglio r=1: $4x_3 + 3x_4 \geq 6$. Soluzione ottima PLI $x = (334, 666)$.

Esercizio 2.
5–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 110$
vincoli violati 2: grado del nodo 3 e grado del nodo 1.
ciclo: $4 - 5 - 3 - 2 - 1 \qquad v_S(P) = 118$



Poiché l'arco $(3, 5)$ appartiene al ciclo ottimo se il suo costo diminuisce la soluzione ottima non cambia se aumenta la soluzione ottima potrebbe cambiare.

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,6) (4,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,6) (4,6) (5,6)
Archi di U	(2,4) (3,5)	(2,4) (3,5)
x	(7, 0, 6, 6, 2, 0, 12, 0, 3, 7)	
π	(0, 5, 12, 7, 2, 12)	
Arco entrante	(1,3)	
ϑ^+, ϑ^-	7 , 6	
Arco uscente	(2,3)	

Il flusso iniziale é degenere.
Il taglio é $N_s = \{1\}$ di capacitá 15.
L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2), (1,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (1, 4, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(-\dfrac{1}{3}, 2\right)$	$(0, 1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(4, 0)$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{5}{6}$	$(3, 2)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(-\frac{1}{3}, 2)$	$-4x_1 - 3x_2$	(3,2)	$(\frac{10}{3}, 0)$	1	$(3, 2)$

Minimo globale é $(0, -3)$ con moltiplicatori $(0, 0, \frac{93}{19}, \frac{22}{19})$