ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 33

Titolo nota 13/11/2018

MATRICI ORTOGONALI

Def (Matrice ortogonale)

Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata)

Allora sono fatti equivalenti

(1) Le colonne di A sono $\boxed{\text{ortonormali}}$

(2) Le righe di A sono $\boxed{\text{ortonormali}}$

(3) $A^{-1} = A^t$ (inversa = trasposta)

In questi casi la matrice si dice ortogonale

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) $\Leftrightarrow$ (3)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array} \right) \qquad A^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \\ \hline c_n \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} c_1 & c_2 & \dots \end{array} \right)$$

$B_{i,j}$ = prodotto scalare tra i-esima riga di A^t e j-esima colonna di A

$= \langle c_i, c_j \rangle$

Se le colonne sono ortonormali, allora $B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

cioè B è matrice identica, ma allora $A^t \cdot A = Id$, cioè $A^t = A^{-1}$

Viceversa, se $A^t = A^{-1}$, allora $B = Id$, ma allora le colonne sono ortonormali.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Penso A fatta da righe

$$B = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_n \end{pmatrix} \cdot \left(R_1 \middle| R_2 \middle| \dots \middle| R_n \right)$$

Analogamente a prima $\quad B_{i,j} = \langle R_i, R_j \rangle$

Righe ortonormali $\Leftrightarrow$ $B_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $B = Id$

$\Updownarrow$

$A^t = A^{-1}$

— o — o —

<u>Oss.</u> Se voglio dim. che (1) $\Leftrightarrow$ (2), la strada più breve passa per (3).

— o — o —

<u>Proprietà matrici ortogonali</u>

(1) Se A è ortogonale, allora $Det(A) = \pm 1$

(2) Se A è ortogonale, allora A^{-1} e A^t sono ortogonali

(3) Se A e B sono ortogonali (e $n \times n$), allora AB è ortogonale

<u>Achtung!</u> Se A e B sono ortogonali, non è detto che $A \pm B$ siano ortogonali, così come λA non è detto che lo sia (e non lo è se $\lambda \neq \pm 1$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) Osservo che $A \cdot A^t = Id$. Applico Binet

$$1 = Det(A) \cdot Det(A^t) = Det(A)^2 \rightsquigarrow Det(A) = \pm 1$$

(2) Evidente dalla definizione

(3) Conviene pensare in termini di trasposta ed inversa

$$(AB)^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr.} \\ \text{inversa}}}{=} B^{-1}A^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ e } B \\ \text{sono} \\ \text{ortogonali}}}{=} B^t A^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr.} \\ \text{trasposta}}}{=} (AB)^t$$

Questo dimostra che AB è ortogonale

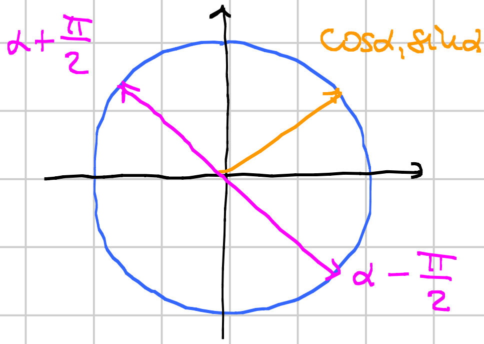
— o — o —

Esercizio Come sono fatte le matrici 2×2 ortogonali

Considero la prima riga. Deve essere un vettore di norma 1. Se (x,y) sono le sue componenti, allora $x^2+y^2=1$, cioè

$$(x,y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

per un qualche $\alpha \in [0,2\pi]$



La seconda riga deve avere ancora norma 1 ed essere $\perp$ alla prima riga.

$\cos\alpha \quad \sin\alpha$

Quindi ci sono 2 possibilità

- $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

  $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$

  $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 1$$

- $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

  $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

  $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -1$$

— o — o —

Esercizio 2

Trovare una matrice 3×3 ortogonale, che non sia l'identità

Idea: costruisco con GS una base ortonormale e la uso come righe / colonne

$v_1 = (1,0,1) \qquad v_2 = (1,0,0) \qquad v_3 = (1,1,0)$

Applico GS: $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1,0,0) - \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{volendo } w_2 = (1,0,-1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$= (0,1,0)$$

Conclusione: $w_1 = (1,0,1)$, $w_2 = (1,0,-1)$, $w_3 = (0,1,0)$

Questi sono una base ORTOGONALE (verificare che i prod. scalari tra 2 diversi vengono nulli)

Per avere una base ORTONORMALE devo dividere per la norma

$$\overline{w_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overline{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overline{w_3} = (0,1,0)$$

Usandoli come righe (o colonne) ottengo matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Per costruzione l'inversa è proprio la trasposta

Esempio 3 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservo che le righe sono ortogonali, ma non ortonormali.
Come faccio l'inversa?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{ho messo trasposta a destra}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fuori dalla diagonale ho tutti 0 perché righe iniziali sono ortogonali

Sulla diag. ho norme delle righe

Basta, per far venire l'identità, moltiplicare le colonne della trasposta per $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Fare la verifica!!

Esempio 4 Costruiamo una matrice con colonne ortogonali

$$\begin{pmatrix} 1 & -14 & 5 \\ 2 & 1 & -46 \\ 3 & 4 & 29 \end{pmatrix}$$

[Ultima colonna corretta dopo video]

1ª colonna a caso
2ª colonna a occhio ⊥ alla 1ª
3ª colonna con formula ex misteriosa

Chi è l'inversa ?

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ -14 \quad 1 \quad 4 \\ 5 \quad -46 \quad 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -14 & 5 \\ 2 & 1 & -46 \\ 3 & 4 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & \boxed{0} \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Se divido la prima riga per A
la 2ª " per B
la 3ª " per C

quello che ottengo a dx è l'inversa della matrice di partenza.

— o — o —