Interpolazione e Approssimazione di funzioni
I^a parte

Calcolo Numerico - Ing. Inf. - Lezione 14

Outline

Introduzione

In molti problemi si ha a che fare con una funzione $f(x)$ di forma non elementare, o addirittura sconosciuta, di cui si possiede solo una tabulazione in un insieme finito di punti (sovente si tratta di misurazioni sperimentali)

In questi casi la stima di un valore di $f(x)$, in un punto diverso da quelli in cui è data, può essere fatta utilizzando i dati disponibili

Questa operazione si effettua sostituendo a $f(x)$ una funzione che sia facilmente calcolabile come, per esempio, un polinomio. Descriveremo alcune tecniche di interpolazione e la tecnica di approssimazione di una funzione col metodo dei minimi quadrati nel caso discreto

Outline

Siano dati $k+1$ punti reali $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{I}$, due a due distinti, in corrispondenza dei quali siano noti i $k+1$ valori reali $f(x_0), f(x_1), \ldots \ldots, f(x_k)$

L'**interpolazione parabolica** consiste nel determinare un polinomio di grado al più k

$$P_k(x) \; = \; a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$(a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, k)$ tale che

$$P_k(x_i) \; = \; f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

Il polinomio $P_k(x)$ si chiama **polinomio di interpolazione**

Nell'insieme dei polinomi di grado k ne esiste **uno ed uno solo** che verifica le condizioni richieste

Infatti, imponendo che il polinomio verifichi le condizioni di interpolazione, si ottiene il sistema lineare di $k+1$ equazioni nelle $k+1$ incognite a_i, $i = 0, 1, \dots, k$,

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & + & a_1 x_0 & + & \cdots & + & a_{k-1} x_0^{k-1} & + & a_k x_0^k & = & f(x_0) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_0 & + & a_1 x_k & + & \cdots & + & a_{k-1} x_k^{k-1} & + & a_k x_k^k & = & f(x_k)\,. \end{array}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{k-1} & x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_k & \cdots & x_k^{k-1} & x_k^k \end{pmatrix}$$

che è una **matrice di Vandermonde**

Il determinante di V è

$$\det(V) = \prod_{0 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j)$$

e risulta diverso da zero, essendo i punti x_i due a due distinti

Il sistema lineare

$$V\,a = f\,,$$

dove $a = (a_0, a_1, \ldots, a_k)^T$ e $f = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k))^T$, ha quindi un'unica soluzione e perciò il **polinomio di interpolazione** risulta **unico**

Osservazione

Il polinomio di interpolazione può risultare di grado minore di k perchè, nella soluzione del sistema, potrebbe risultare $a_k = 0$

Per questo motivo si è soliti dire che con $k + 1$ punti il polinomio di interpolazione risulta di **grado al più k**

Osservazione

Poiché la matrice V risulta una matrice malcondizionata non conviene risolvere il sistema lineare $Va = f$ per determinare il polinomio di interpolazione

Alternativa

Per costruire il polinomio di interpolazione $P_k(x)$ esistono metodi diretti di calcolo che non prevedono la risoluzione di problemi aggiuntivi come quello di dover risolvere un sistema lineare

Una forma del polinomio di interpolazione si può ottenere per mezzo delle funzioni polinomiali di grado k

$$\ell_r(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\cdots(x - x_k)}{(x_r - x_0)\cdots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\cdots(x_r - x_k)},$$

$r = 0, 1, \dots, k$

Questi polinomi godono della proprietà

$$\ell_r(x_s) = \delta_{r,s}, \qquad r, s = 0, 1, \dots, k$$

Segue che il polinomio

$$L_k(x) = \sum_{r=0}^{k} \ell_r(x) f(x_r)$$

risulta tale da soddisfare le condizioni $L_k(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, per cui è il polinomio di interpolazione cercato

Il polinomio $L_k(x)$ si chiama **polinomio di interpolazione di Lagrange** e i polinomi $\ell_r(x)$ sono detti **polinomi fondamentali della interpolazione di Lagrange**

Esempio 1

È data la seguente tabella di valori

x	0	1	2	-1
y	1	1	3	3

Si vuole calcolare il polinomio di interpolazione di Lagrange $L_3(x)$

Risultano

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(-1)(-2)(1)} \qquad \ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x+1)}{(1)(-1)(2)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x+1)}{(2)(1)(3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}$$

Esempio 1

Il polinomio di interpolazione nella forma di Lagrange è

$$L_3(x) \;=\; \ell_0(x)\cdot 1+\ell_1(x)\cdot 1+\ell_2(x)\cdot 3+\ell_3(x)\cdot 3$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$L_3(x) \;=\; x^2-x+1$$

Differenze divise

Per poter definire il polinomio di interpolazione nella forma di Newton dobbiamo introdurre quelle che si chiamano le differenze divise riferite ad una funzione $f(x) : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definizione

Siano $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathcal{I}$ con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$
La funzione

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}, x] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x - x_{k-1}},$$

dove, per $k = 1$, $f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, è definita $\forall x \in \mathcal{I}$, $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, e si chiama **differenza divisa di ordine k**

Differenze divise

Per esempio, si ha

$f[x] = f(x)$	differenza divisa di ordine 0
$f[x_0, x] = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	differenza divisa di ordine 1
$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0,x]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$	differenza divisa di ordine 2
$f[x_0, x_1, x_2, x] = \frac{f[x_0,x_1,x]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2}$	differenza divisa di ordine 3
....	....
....	....

Differenze divise – proprietà

Simmetria

Se $i_0, i_1, \ldots, i_k$, è una qualunque permutazione dei numeri $0, 1, \ldots, k$, si ha

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Prolungamento per continuità

Se $f(x) \in C^1(\mathcal{I})$, la funzione $f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x]$ è prolungabile per continuità su tutto $\mathcal{I}$

(Le dimostrazioni si trovano sulle dispense)

Differenze divise – proprietà

Se $f(x) \in C^k(\mathcal{I})$ esiste almeno un valore ξ, con la proprietà

$\min_i x_i < \xi < \max_i x_i$, tale che

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

(La dimostrazione si trova sulle dispense)

Differenze divise

Teorema di espansione

Sia $f(x) : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{I}$ con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$; vale l'identità

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k)f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x] \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema di espansione

La dimostrazione si svolge per induzione

Poniamo $k = 0$: si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x] \\
&= f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione del Teorema di espansione

Supponiamo che l'espansione proposta sia vera per un valore k e dobbiamo verificare se questo implica che sia verificata anche per $k+1$

L'espansione che si deve verificare è data da

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k) f[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k+1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}, x] \end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema di espansione

Ricordiamo che

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x] = f[x_0, \ldots, x_{k+1}] + (x - x_{k+1}) f[x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}, x]$$

Se si sostituisce questa espressione nella espansione (Slide 17) supposta vera per il valore k si ha l'espansione cercata per $k+1$

Teorema

Il polinomio

$$\begin{aligned} P_k(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \\ &+(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots\cdots\cdots + \\ &+(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \end{aligned}$$

risulta interpolante ed è noto come il **polinomio di interpolazione di Newton**

Dimostrazione del Teorema (Newton)

Questo teorema si dimostra per induzione

Poniamo $k = 0$: si ha

$$P_0(x) \ = \ f(x_0)$$

per cui risulta banalmente verificata l'unica condizione di interpolazione $P_k(x_0) = f(x_0)$

Supponendo che $P_k(x)$ verifichi le condizioni $P_k(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, deve seguire che $P_{k+1}(x)$ verifica le relazioni $P_{k+1}(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$

Dimostrazione del Teorema (Newton)

Risulta

$$P_{k+1}(x) \;=\; P_k(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_k) f[x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}]$$

È evidente che, annullandosi un fattore dell'ultimo addendo, si ha

$$P_{k+1}(x_i) \;=\; P_k(x_i) \;=\; f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

Dimostrazione del Teorema (Newton)

Rimane da verificare

$$P_{k+1}(x_{k+1}) \; = \; f(x_{k+1})$$

Questa uguaglianza si ottiene andando a sostituire nella espansione di $f(x)$ attraverso le differenze divise (Slide 17) la variabile x con x_{k+1}

Errore nella interpolazione parabolica

L'errore che si commette se si sostituisce alla funzione $f(x)$ il polinomio di interpolazione $P_k(x)$ o $L_k(x)$ (si ricordi che il polinomio di interpolazione è unico) si ricava dalla espansione con le differenze divise che può scriversi

$$f(x) \; = \; P_k(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_k) f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x]$$

Risulta

$$E_k(x) \; = \; f(x) - P_k(x) \; = \; \pi(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_k, x]$$

dove si è posto $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)$

Errore nella interpolazione parabolica

Teorema

Se $f(x) \in C^{k+1}(\mathcal{I})$ si ha

$$f(x) - P_k(x) \; = \; \pi(x)\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

dove

$$\min\{x_0, x_1, \ldots, x_k, x\} < \xi < \max\{x_0, x_1, \ldots, x_k, x\}$$

Quadro delle differenze divise

Per calcolare le differenze divise che intervengono nel polinomio di interpolazione di Newton si può ricorrere alla costruzione di un **quadro delle differenze divise** dove nella colonna DDr sono riportate opportune differenze divise di ordine r

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_0, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_0, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Quadro delle differenze divise

Il quadro può essere esteso quanto si vuole, osservando che ogni differenza divisa si ottiene sottraendo al termine che si trova nella stessa riga e nella colonna immediatamente a sinistra il primo termine di questa colonna e dividendo per la differenza dei corrispondenti valori x_i

Le differenze divise che figurano nel polinomio di interpolazione di Newton

$$f(x_0), \quad f[x_0, x_1], \quad f[x_0, x_1, x_2], \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] \ \ldots\ldots$$

sono date dal primo termine di ciascuna colonna

Quadro delle differenze divise

Osservazione

Nel caso in cui gli elementi della colonna delle differenze di ordine r risultino tutti uguali fra loro, gli elementi delle colonne successive sono nulli, perciò il grado del polinomio di interpolazione è r

Quadro delle differenze divise

Osservazione

Il valore della differenza divisa di ordine k si può anche ottenere direttamente dalla formula

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_k)} \\ &+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_k)} + \cdots \\ &\cdots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \end{aligned}$$

dimostrabile per induzione

Esempio 2

È data la seguente tabella di valori

x	0	-1	2	-2	3
y	5	3	3	-9	11

Si vuole calcolare il polinomio di interpolazione di Newton $P_4(x)$

Esempio 2

Dai dati si ottiene il seguente quadro delle differenze divise

x	y	DD1	DD2	DD3
0	5			
-1	3	2		
2	3	-1	-1	
-2	-9	7	-5	1
3	11	2	0	1

Esempio 2

Soluzione

Le differenze divise del terzo ordine risultano uguali tra loro per cui il polinomio di interpolazione è di grado 3 ed è dato da

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 5 + 2x - x(x+1) + x(x+1)(x-2) \\ &= x^3 - 2x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

Esempio 3

È data la seguente tabella di valori

x	4	8	12	16	20
y	6	42	110	210	342

Si vuole calcolare il polinomio di interpolazione di Newton $P_4(x)$

Esempio 3

Dai dati si ottiene il seguente quadro delle differenze divise

x	y	DD1	DD2
4	6		
8	42	9	
12	110	13	1
16	210	17	1
20	342	21	1

Esempio 3

Soluzione

Le differenze divise del secondo ordine risultano uguali tra loro per cui il polinomio di interpolazione è di grado 2 ed è dato da

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 6 + 9(x-4) + (x-4)(x-8) \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Esempio 4

È data la seguente tabella di valori

x	0	1	2	3	4	5
y	3	8	150	α	47	β

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si vogliono calcolare i valori reali α e β tali che il polinomio di interpolazione risulti di grado minimo

Esempio 4

Per determinare α e β basta considerare il polinomio di grado al più 3 tale che $P_3(0) = 3$, $P_3(1) = 8$, $P_3(2) = 15$, $P_3(4) = 47$ e calcolarlo successivamente per $x = 3$ e $x = 5$

Si ottiene il quadro delle differenze divise

x	y	DD1	DD2	DD3
0	3			
1	8	5		
2	15	6	1	
4	47	11	2	1/2

Esempio 4

Il polinomio di interpolazione è di grado 3 ed è dato da

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 3 + 5x + x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Soluzione

Si ha quindi

$$\alpha = P_3(3) = 27 \qquad \beta = P_3(5) = 78$$

Esempio 5

È data la seguente tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & \alpha & -1 & 3 \\ \hline y & 2 & 1 & 4 & 3\alpha+1 & 11 \end{array} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Si vogliono calcolare i valori reali α tali che il polinomio di interpolazione risulti di grado minimo

Esempio 5

Per determinare α non si possono, come nel caso precedente, eliminare le coppie in cui compare α ma conviene spostarle nelle ultime righe del quadro delle differenze divise

x	y	DD1	DD2
0	2		
1	1	-1	
3	11	3	2
-1	$3\alpha+1$	$1-3\alpha$	$(3\alpha-2)/2$
α	4	$2/\alpha$	$(2+\alpha)/(\alpha(\alpha-1))$

Esempio 5

Soluzione

L'ultima colonna del quadro risulta costante se $\alpha = 2$ e si ottiene quindi

$$P_3(x) \;=\; 2 - x + 2x(x-1) \;=\; 2x^2 - 3x + 2$$

Esempio 6

È data la seguente tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & \lambda & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \end{array} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Si vogliono calcolare i valori reali λ tali che il polinomio di interpolazione risulti di grado minimo

Esempio 6

Si ha il quadro delle differenze divise

x	y	DD1	DD2	DD3
1	1			
3	1	0		
4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	
5	-2	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{7}{24}$
λ	3	$\frac{2}{\lambda-1}$	$\frac{2}{(\lambda-1)(\lambda-3)}$	$\frac{2\lambda^2-8\lambda+12}{3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)}$

Esempio 6

L'ultima colonna del quadro risulta costante se

$$7\lambda^3 - 72\lambda^2 + 197\lambda - 180 \;=\; 0$$

con $\lambda \neq 1, 3, 4, 5$

Per studiare l'equazione si può ricorrere ad una separazione grafica o alla successione di Sturm data da

$$\begin{aligned}
P_0(\lambda) &= 7\lambda^3 - 72\lambda^2 + 197\lambda - 180 \\
P_1(\lambda) &= 21\lambda^2 - 144\lambda + 197 \\
P_2(\lambda) &= 698\lambda - 948 \\
P_3(\lambda) &= \mathit{costante} < 0
\end{aligned}$$

Esempio 6

Si deduce che l'equazione ha una sola soluzione reale

$$\lambda^* \in]6, 7[$$

Per approssimare λ^* si può applicare il metodo iterativo di Newton con punto iniziale $x_0 = 7$ poiché risultano verificate le condizioni sufficienti $f'(\lambda) > 0$ e $f''(\lambda) > 0$ ($f(\lambda) = 7\lambda^3 - 72\lambda^2 + 197\lambda - 180$)

Soluzione

Risulta

$$\lambda^* \in]6.6224, 6.6225[$$

Outline

Siano assegnati $k+1$ punti reali $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{I}$, due a due distinti, in corrispondenza dei quali siano noti $2k+2$ valori reali
$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k), \qquad f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_k)$

L'**interpolazione osculatoria di Hermite** consiste nel determinare un polinomio $H_{2k+1}(x)$ di grado al più $2k+1$ tale che

$$H_{2k+1}(x_r) = f(x_r), \qquad H'_{2k+1}(x_r) = f'(x_r), \qquad r = 0, 1, \ldots, k$$

Il **polinomio di interpolazione di Hermite** viene cercato del tipo

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{r=0}^{k} h_{0r}(x) f(x_r) + \sum_{r=0}^{k} h_{1r}(x) f'(x_r)$$

Le funzioni $h_{0r}(x)$ e $h_{1r}(x)$ si cercano nell'insieme dei polinomi di grado $2k+1$ in modo tale che il polinomio $H_{2k+1}(x)$ soddisfi le condizioni richieste

A tale scopo, devono risultare verificate le seguenti condizioni

$$\begin{cases} h_{0r}(x_s) = \delta_{rs} & \qquad r, s = 0, 1, \dots, k \\ h'_{0r}(x_s) = 0 & \qquad r, s = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{1r}(x_s) = 0 & \qquad r, s = 0, 1, \dots, k \\ h'_{1r}(x_s) = \delta_{rs} & \qquad r, s = 0, 1, \dots, k \end{cases}$$

Polinomi $h_{0r}(x)$

I polinomi $h_{0r}(x)$ si cercano del tipo

$$h_{0r}(x) \;=\; (Ax + B)\,\ell_r^2(x)$$

dove $\ell_r(x)$ è il polinomio fondamentale della interpolazione di Lagrange

Imponendo le due condizioni richieste su $h_{0r}(x)$ si ottengono solo due equazioni essendo le altre verificate per la struttura del polinomio stesso

$$\begin{aligned} Ax_r + B \;&=\; 1 \\ A + 2(Ax_r + B)\ell_r'(x_r) \;&=\; 0 \end{aligned}$$

Polinomi $h_{0r}(x)$

Tenendo conto della prima equazione, la seconda diviene

$$A + 2\ell_r'(x_r) \ = \ 0$$

Quindi si ha

$$A \ = \ -2\ell_r'(x_r)$$

che sostituito nella prima equazione fornisce

$$B \ = \ 1 + 2\ell_r'(x_r)x_r$$

Polinomi $h_{0r}(x)$

Tenendo conto delle espressioni di A e di B, si ottiene

$$h_{0r}(x) \; = \; (1 - 2\ell'_r(x_r)(x - x_r))\ell_r^2(x)$$

Polinomi $h_{1r}(x)$

I polinomi $h_{1r}(x)$ si cercano del tipo

$$h_{1r}(x) \;=\; (Cx + D)\, \ell_r^2(x)$$

Imponendo le due condizioni richieste su $h_{1r}(x)$ si ottengono solo due equazioni essendo le altre verificate per la struttura del polinomio stesso

$$Cx_r + D \;=\; 0$$

$$C + 2(Cx_r + D)\ell'_r(x_r) \;=\; 1$$

Polinomi $h_{1r}(x)$

Tenendo conto della prima equazione, la seconda diviene

$$C = 1$$

Quindi dalla prima equazione si ottiene

$$D = -x_r$$

Polinomi $h_{1r}(x)$

Tenendo conto delle espressioni di C e di D, risulta

$$h_{1r}(x) = (x - x_r)\ell_r^2(x)$$

Polinomio $H_{2k+1}(x)$

Dalle espressioni delle **funzioni fondamentali di I^a e II^a specie della interpolazione di Hermite** $h_{0r}(x)$ e $h_{1r}(x)$ si ricava il polinomio di interpolazione di Hermite

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{r=0}^{k}(1 - 2\ell_r'(x_r)(x - x_r))\ell_r^2(x)f(x_r) + \sum_{r=0}^{k}(x - x_r)\ell_r^2(x)f'(x_r)$$

Teorema

Il polinomio $H_{2k+1}(x)$ è unico
(la dimostrazione si trova sulle dispense)

Una espressione dell'errore che si commette nel sostituire alla funzione $f(x)$ il polinomio $H_{2k+1}(x)$ è data dal teorema che segue

Teorema

Se $f(x) \in C^{2k+2}(\mathcal{I})$ si ha

$$f(x) - H(x) \;=\; (x - x_0)^2 \cdots (x - x_k)^2 \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!}$$

dove

$$\min\{x_0, x_1, \ldots, x_k, x\} \;<\; \xi \;<\; \max\{x_0, x_1, \ldots, x_k, x\}$$

Esempio 7

Supponiamo di avere due binari ferroviari che devono essere collegati tra loro
Ovviamente, il tracciato complessivo deve risultare almeno una funzione C^1 per cui ricorriamo alla interpolazione di Hermite per tracciare il raccordo tra un binario e l'altro

Per fissare le idee, poniamo il punto terminale di uno dei due binari nell'origine degli assi e sovrapposto al semiasse dei reali negativi

Il punto terminale dell'altro binario lo assumiamo di coordinate (d, L) e con valore della derivata prima nel punto di ascissa d pari a S

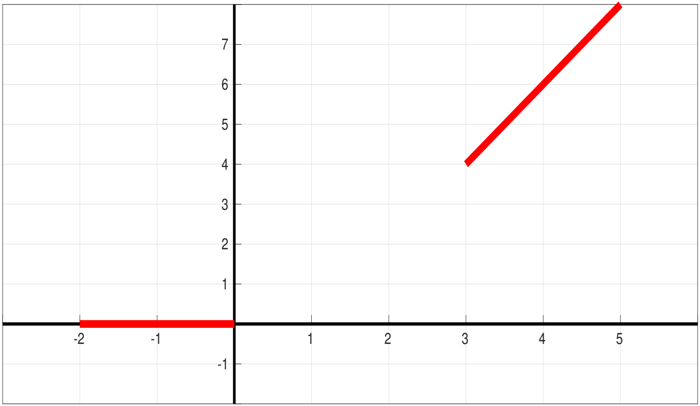
Esempio 7

Abbiamo quindi due punti $x_0 = 0$ e $x_1 = d$ e i valori

$$f(0) = 0, \quad f(d) = L, \quad f'(0) = 0, \quad f'(d) = S$$

Per illustrare la situazione, nella Slide che segue riportiamo la figura con $d = 3$, $L = 4$ e $S = 2$

Esempio 7



Esempio 7

Iniziamo col calcolare i polinomi fondamentali dell'interpolazione di Lagrange

$$\ell_0(x) = \frac{d-x}{d} \qquad \ell_1(x) = \frac{x}{d}$$

Da questi si hanno i polinomi di I^a e II^a specie di Hermite

$$h_{00}(x) = \left[1 + 2\frac{x}{d}\right] \frac{(x-d)^2}{d^2} \qquad h_{01}(x) = \left[1 - 2\frac{x-d}{d}\right] \frac{x^2}{d^2}$$

$$h_{10}(x) = x\frac{(x-d)^2}{d^2} \qquad h_{11}(x) = (x-d)\frac{x^2}{d^2}$$

Esempio 7

Si ha quindi

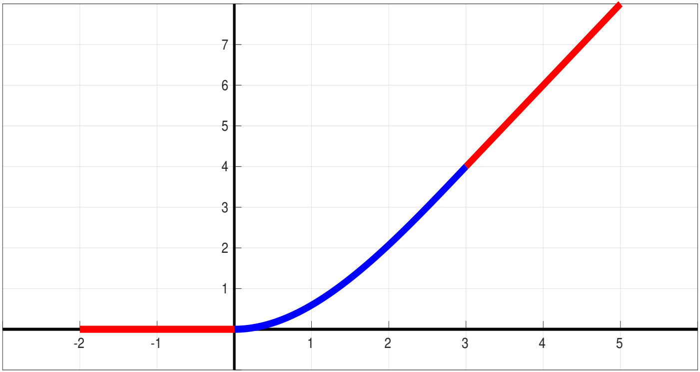
$$H_3(x) \;=\; \left[1 - 2\frac{x-d}{d}\right]\frac{x^2}{d^2}\,L \;+\; (x-d)\frac{x^2}{d^2}\,S$$

Ponendo $d = 3$, $L = 4$ e $S = 2$ si ha il caso particolare

$$H_3(x) \;=\; -\frac{2}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2$$

Esempio 7

$d = 3 \qquad L = 4 \qquad S = 2$



Esempio 7

Ponendo $d = 3$, $L = 4$ e $S = 10$ si ha il caso particolare

$$H_3(x) \; = \; \frac{22}{27}x^3 - 2x^2$$

Esempio 7

$d = 3 \qquad L = 4 \qquad S = 10$