ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 09

Note Title 09/10/2018

Esercizio 1 Verifichiamo che se A ed I sono matrici $n \times n$ con I = matrice identità = matrice identica, allora

$$AI = IA = A$$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$ descrizione formale della matrice I

A questo punto

$$(AI)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} A_{i,r} \cdot I_{r,j} = A_{i,j}$$

l'unico che vale 1 è quello con $r = j$

$$(IA)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} I_{i,r} \cdot A_{r,j} = A_{i,j}$$

l'unico $\neq 0$ è quello con $r = i$

Esercizio 2 Siano $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{m \times k}$.
Posso calcolare AB.
Per le trasposte vale $A^t \in M_{m \times n}$ e $B^t \in M_{k \times m}$
Posso sempre moltiplicare $B^t A^t$ e viene

$$\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$[(AB)^t]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{r=1}^{m} A_{j,r} B_{r,i}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} B_{r,i} \cdot A_{j,r}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} (B^t)_{i,r} (A^t)_{r,j} = (B^t \cdot A^t)_{i,j}$$

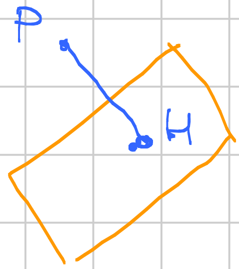
Indici corretti dopo video

— o — o —

Esercizio 3 Consideriamo il piano $2x+3y-z=4$
Consideriamo il p.to $P=(1,2,-1)$

- Scrivere l'equazione della retta passante per P e $\perp$ al piano

So che che il vettore $(2,3,-1)$ è $\perp$ al piano. Lo uso come vettore direzione e trovo



retta: $(1,2,-1)+t\,(2,3,-1)$

- Calcolare la proiezione di P sul piano.
La proiezione è il p.to H in cui la retta di prima interseca il piano

Devo fare intersezione retta / piano. Retta: $(1+2t,\,2+3t,\,-1-t)$ e sostituisco nel piano

$$2x+3y-z=4 \rightsquigarrow 2(1+2t)+3(2+3t)-(-1-t)=4$$
$$2+4t+6+9t+1+t=4$$
$$14t=-5 \rightsquigarrow t=-\frac{5}{14}$$

Sostituendo il valore di t nella parametrica trovo il punto: $\left(1-\frac{5}{7},\ 2-\frac{15}{14},\ -1+\frac{5}{14}\right)$

- Calcolare la distanza tra P ed il piano

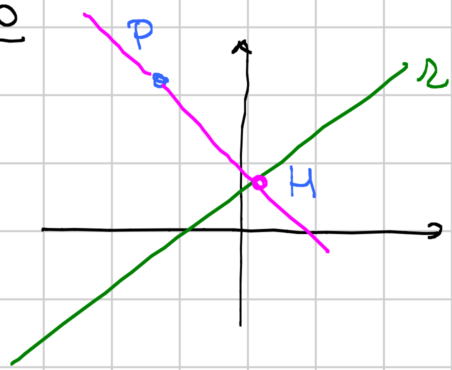
Basta calcolare la norma di $P-H$.

- Dato $Q=(1,1,1)$, calcolare l'intersezione tra il piano e la retta PQ

retta PQ: $P+t\,(Q-P)$ e poi come sopra

$P+t\,(P-Q)$ andava bene uguale perché è la stessa retta percorsa al contrario.

Distanza di un p.to da una retta nel piano



Percorso: → scrivo retta per P ⊥ ad r
→ interseco e trovo H
→ calcolo $\|P-H\|$

Se retta : $ax+by+c=0$
punto : (x_0, y_0)

⇝ conto ⇝ $\boxed{\text{dist} = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

N.B.: il denom. è di sicuro $\neq 0$

Distanza di un punto da un piano nello spazio

Piano : $ax+by+cz+d=0$ Punto : (x_0, y_0, z_0)

Strategia: → scrivo retta r per P e ⊥ al piano

$$(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

→ interseco retta e piano (come prima) e trovo H
→ calcolo $\|P-H\|$

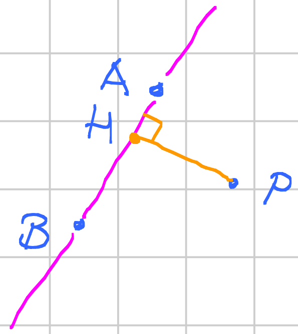
Facendo il conto trovo

$$\boxed{\text{dist} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

— o — o —

Distanza punto-retta nello spazio

Esercizio 4 $P = (1,0,2)$ retta passante per $A = (2,1,3)$ e $B = (-1,0,1)$



Scrivo la retta in parametrica

$$A + t(B-A) = (2,1,3) + t(-3,-1,-2)$$
$$= (2,1,3) + t(3,1,2)$$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scrivo l'eq. del piano che passa per P ed è $\perp$ alla retta

Il piano sarà $\underbrace{3x + y + 2z}_{\text{usato direzione retta}} = d$

Trovo d sostituendo P: $3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7 = d$

L'eq. del piano è $\boxed{3x + y + 2z = 7}$

Interseco piano e retta e trovo H

$$3(2+3t) + (1+t) + 2(3+2t) = 7 \rightsquigarrow 6 + 9t + \cancel{1} + t + \cancel{6} + 4t = \cancel{7}$$

$\rightsquigarrow 14t = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{3}{7} \rightsquigarrow$ sostituisco nella parametrica e ho H.

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Considero un punto Q variabile sulla retta

$$Q = (2+3t, 1+t, 3+2t)$$

Scrivo il vettore $Q - P = (1+3t, 1+t, 1+2t)$

Impongo che $Q-P$ sia $\perp$ alla direzione della retta, cioè $(3,1,2)$ $\rightsquigarrow$ dovrebbe venire H

$$\langle (1+3t, 1+t, 1+2t), (3,1,2) \rangle = 0$$

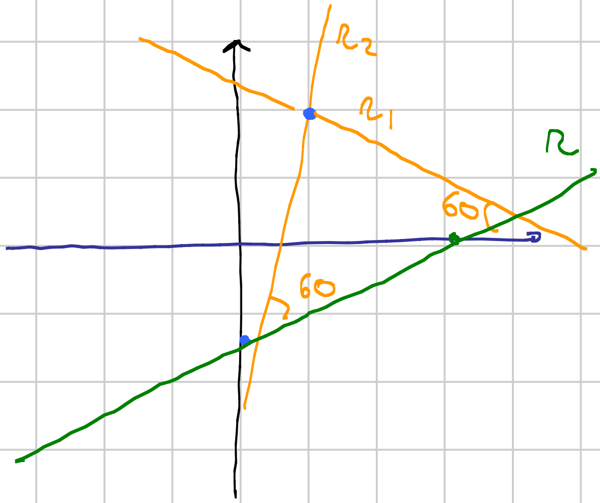
$$3(1+3t) + (1+t) + 2(1+2t) = 0$$
$$3+9t+1+t+2+4t = 0 \rightsquigarrow 14t = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{3}{7}$$

Concludo facendo la distanza di P da H.

— ○ — ○ —

<u>Esercizio 5</u> Consideriamo nel piano la retta $x-2y=3$. Scrivere le due rette per $(1,2)$ che formano con la retta data un angolo di $60°$.

$r: x-2y=3 \rightsquigarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$



Direzione di r: $(2,1)$
Sia (a,b) la direzione di r_1 ed r_2
Allora
angolo compreso $= 60°$
cioè $\cos = \frac{1}{2}$

$$\frac{\langle (a,b),(2,1)\rangle}{\|(a,b)\| \cdot \|(2,1)\|} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{2a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow 4(2a+b)^2 = 5(a^2+b^2) \rightsquigarrow 16a^2+4b^2+16ab = 5a^2+5b^2$$

$$\rightsquigarrow 11a^2+16ab-b^2 = 0 \rightsquigarrow a = \frac{-8b \pm \sqrt{64b^2+11b^2}}{11}$$
$$= \frac{(-8 \pm \sqrt{75})\,b}{11}$$
$$= \frac{(-8 \pm 5\sqrt{3})\,b}{11}$$

Posso porre tranquillamente $b = 11$ e ottengo $a = -8 \pm 5\sqrt{3}$

Quindi in parametrica le 2 rette richieste sono

$$(1,2) + t\,(-8 \pm 5\sqrt{3}, 11)$$

Dalla parametrica trovo facilmente la cartesiana.

— o — o —