Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=048973

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=048973

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2) \le -1\}$$

valgono

A: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3,141} & \text{per } x \le 0 \\ \cos(x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$

A: è continua e derivabile. B: è continua, ma non derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: è derivabile, ma non continua. E: N.A.

3. La funzione $f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x-1|)$ è

A: monotona crescente B: concava C: iniettiva D: surgettiva E: N.A.

4. L'integrale

$$\int_0^1 |e^x - 2|\, dx$$

vale

A: 0 B: $\sqrt{2}$ C: $e - 3$ D: $-5 + e + \log[16]$ E: N.A.

5. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(x^3 + \cos(x)\right)}{\log(x)}$$

vale

A: 0 B: $+\infty$ C: $1/3$ D: N.A. E: N.E.

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arcsin(x)$ nel punto $x_0 = \sqrt{2}/2$ vale

A: $\frac{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{16-\pi^2}} + \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ B: x C: N.A. D: $\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$ E: $1 + \arcsin(x)(x - \sqrt{2}/2)$

7. Data $f(x) = 4^{\log(3x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: 0 B: 4^3 C: $\log(3)4^{\log(2)}$ D: $4^{\log(3)}\log(4)$ E: N.A.

8. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \log(2t)$ sono

A: $\frac{2t}{\log(2t)} + c$ B: N.A. C: $2t\log(2t) + c$ D: N.E. E: $t\log(t) - t + c$

9. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $e^z = 1$ è

A: 3 B: 1 C: N.A. D: 2 E: 4

10. L'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n>\pi}^{\infty} \sin(n^{-\log(\alpha)})$$

è

A: $\pi < \alpha < \pi^2$ B: $\alpha > 1/e$ C: $\alpha \ge 1$ D: N.A. E: $\alpha > 1$

CODICE=048973

CODICE=048973

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=069630

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=069630

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^1 |\mathrm{e}^x - 2|\, dx$$
vale

A: $-5+\mathrm{e}+\log[16]$ B: $\mathrm{e}-3$ C: $\sqrt{2}$ D: 0 E: N.A.

2. La funzione $f:\ \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x-1|)$ è

A: concava B: iniettiva C: monotona crescente D: surgettiva E: N.A.

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3,141} & \text{per } x \le 0 \\ \cos(x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: N.A. C: non è né continua né derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è continua e derivabile.

4. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $\mathrm{e}^z = 1$ è

A: 2 B: N.A. C: 3 D: 1 E: 4

5. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \log(2t)$ sono

A: N.A. B: $t\log(t) - t + c$ C: N.E. D: $2t\log(2t) + c$ E: $\frac{2t}{\log(2t)} + c$

6. Data $f(x) = 4^{\log(3x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: 0 B: $\log(3)4^{\log(2)}$ C: 4^3 D: N.A. E: $4^{\log(3)}\log(4)$

7. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(x^3+\cos(x)\right)}{\log(x)}$$
vale

A: $1/3$ B: 0 C: $+\infty$ D: N.E. E: N.A.

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arcsin(x)$ nel punto $x_0 = \sqrt{2}/2$ vale

A: $\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$ B: N.A. C: $\frac{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{16-\pi^2}} + \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ D: x E: $1 + \arcsin(x)(x - \sqrt{2}/2)$

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2) \le -1\}$$
valgono

A: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ D: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ E: N.A.

10. L'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n>\pi}^{\infty} \sin(n^{-\log(\alpha)})$$
è

A: $\alpha \ge 1$ B: $\alpha > 1$ C: $\pi < \alpha < \pi^2$ D: $\alpha > 1/\mathrm{e}$ E: N.A.

CODICE=069630

CODICE=069630

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=205996

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=205996

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log(|x-1|)$ è

   A: surgettiva B: N.A. C: concava D: monotona crescente E: iniettiva

2. Data $f(x)=4^{\log(3x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: N.A. B: $4^{\log(3)}\log(4)$ C: $\log(3)4^{\log(2)}$ D: 0 E: 4^3

3. L'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n>\pi}^{\infty}\sin(n^{-\log(\alpha)})$$

   è

   A: $\alpha\ge 1$ B: $\alpha>1$ C: $\pi<\alpha<\pi^2$ D: $\alpha>1/\mathrm{e}$ E: N.A.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A=\{x\in\mathbb{R}:\sin(x^2)\le -1\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty,N.E.,2\pi,2\pi\}$ B: $\{0,0,\pi,\pi\}$ C: $\{-\infty,N.E.,+\infty,N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-\pi,-\pi,+\infty,N.E.\}$

5. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $\mathrm{e}^z=1$ è

   A: 3 B: 4 C: N.A. D: 2 E: 1

6. La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3,141} & \text{per } x\le 0\\ \cos(x) & \text{per } x>0\end{cases}$

   A: è continua, ma non derivabile. B: N.A. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

7. Per $t>0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=\log(2t)$ sono

   A: $2t\log(2t)+c$ B: N.E. C: $\frac{2t}{\log(2t)}+c$ D: N.A. E: $t\log(t)-t+c$

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\arcsin(x)$ nel punto $x_0=\sqrt{2}/2$ vale

   A: $\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4}$ B: x C: $\frac{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{16-\pi^2}}+\arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ D: N.A. E: $1+\arcsin(x)(x-\sqrt{2}/2)$

9. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(x^3+\cos(x)\right)}{\log(x)}$$

   vale

   A: 0 B: $1/3$ C: N.E. D: $+\infty$ E: N.A.

10. L'integrale

$$\int_0^1|\mathrm{e}^x-2|\,dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\mathrm{e}-3$ C: 0 D: $-5+\mathrm{e}+\log[16]$ E: $\sqrt{2}$

CODICE=205996

CODICE=205996

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=881382

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=881382

PARTE A

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arcsin(x)$ nel punto $x_0 = \sqrt{2}/2$ vale

   A: $\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$ B: $1 + \arcsin(x)(x - \sqrt{2}/2)$ C: x D: $\frac{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{16-\pi^2}} + \arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ E: N.A.

2. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $\mathrm{e}^z = 1$ è

   A: 1 B: N.A. C: 4 D: 2 E: 3

3. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \log(2t)$ sono

   A: N.A. B: $\frac{2t}{\log(2t)} + c$ C: N.E. D: $2t\log(2t) + c$ E: $t\log(t) - t + c$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2) \leq -1\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ E: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3,141} & \text{per } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua e derivabile.

6. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(x^3 + \cos(x)\right)}{\log(x)}$$

   vale

   A: N.E. B: 1/3 C: N.A. D: $+\infty$ E: 0

7. La funzione $f:\ \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(|x-1|)$ è

   A: surgettiva B: iniettiva C: monotona crescente D: N.A. E: concava

8. L'integrale

   $$\int_0^1 |\mathrm{e}^x - 2|\, dx$$

   vale

   A: $\mathrm{e} - 3$ B: 0 C: $\sqrt{2}$ D: $-5 + \mathrm{e} + \log[16]$ E: N.A.

9. Data $f(x) = 4^{\log(3x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $4^{\log(3)}\log(4)$ B: $\log(3)4^{\log(2)}$ C: 4^3 D: 0 E: N.A.

10. L'insieme di convergenza della serie

    $$\sum_{n>\pi}^{\infty} \sin(n^{-\log(\alpha)})$$

    è

    A: $\alpha \geq 1$ B: $\alpha > 1$ C: N.A. D: $\pi < \alpha < \pi^2$ E: $\alpha > 1/\mathrm{e}$

CODICE=881382

CODICE=881382

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=048973

CODICE=048973

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=069630

CODICE=069630

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	●	○

CODICE=205996

CODICE=205996

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=881382

CODICE=881382

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

6 giugno 2023

1 Studiare, al variare del parametro $\lambda \neq 0$ la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1+\lambda x}},$$

Soluzione. La funzione risulta definita per $x \neq -1/\lambda$ e nel suo dominio è regolare in quanto composizione di funzioni regolari. Agli estremi del dominio si ha il seguente comportamento (indipendentemente dal valore di λ)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mathrm{e}^{1/\lambda} \qquad \lim_{x\to(-1/\lambda)^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-(1/\lambda)^+} f(x) = 0$$

Calcolando la derivata prima si ha che

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda x+1}}}{(\lambda x+1)^2} > 0$$

pertanto la funzione risulta strettamente crescente per $x < -1/\lambda$ e per $x > -1/\lambda$, ma non è crescente su tutto il dominio.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{x}{\lambda x+1}}\left(-2\lambda - 2\lambda^2 x + 1\right)}{(\lambda x+1)^4}$$

che risulta positiva se $-2\lambda - 2\lambda^2 x + 1 > 0$, cioè se

$$x < \frac{1-2\lambda}{2\lambda^2},$$

e quindi la funzione risulta convessa in $]-\infty, -1/\lambda[\cup]-1/\lambda, \frac{1-2\lambda}{2\lambda^2}[$.

2 Calcolare per $n = 2, 3$ l'integrale definito

$$\mathcal{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

Soluzione. Nel caso $n = 2$ possiamo calcolare l'integrale osservando che

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+1}{1+x} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|1+x|\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \log(2).$$

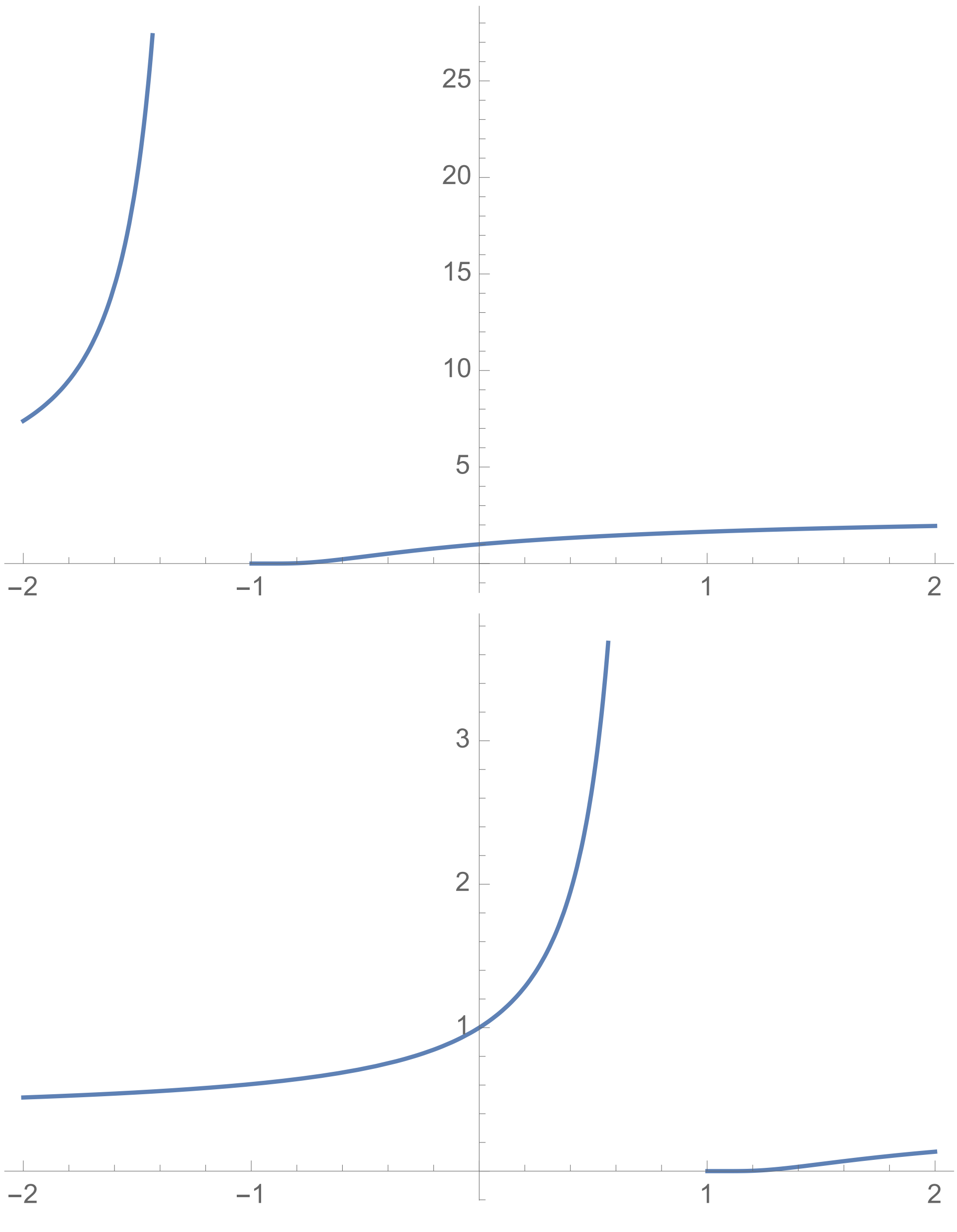

Figura 1: Grafico indicativo per $\lambda > 0$ e per $\lambda < 0$

Nel caso $n = 3$ svolgendo la divisione con resto si ottiene

$$\frac{x^3}{1+x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \log|1+x|\Big|_0^1 = \frac{5}{6} - \log(2).$$

3 Trovare tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'(x)y(x) = 1, \\ \\ \qquad y(0) = 0, \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di problema di Cauchy relativo ad una equazione a variabili separabili che possiamo riscrivere, anche se in maniera imprecisa[1], come $\int_{y_0}^{y} 2y dy = \int_0^x dx$ e quindi, dato che $y(0) = 0$

$$y^2(x) = x$$

che ha come soluzione per $x > 0$ sia $y(x) = \sqrt{x}$ che $y(x) = -\sqrt{x}$.

4 Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([0, +\infty[)$. La funzione ϕ definita con prolungamento pari (riflessione del grafico rispetto alla retta $\{x = 0\}$) risulta continua su tutto $\mathbb{R}$. Determinare quando risulta anche derivabile.

Sia quindi definita la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \geq 0, \\ \\ \alpha_1 f(-x) + \alpha_2 f(-x/2) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Determinare se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in maniera tale che $F \in C^1(\mathbb{R})$.

Soluzione La funzione $\phi(x)$ risulta continua e derivabile per $x \neq 0$. Per $x = 0$ osserviamo che $\lim_{x\to 0^+} \phi'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, mentre dato che per $x < 0$ si ha $\phi(x) = f(-x)$, otteniamo che $\lim_{x\to 0^-} \phi'(x) = \lim_{x\to 0^-} -f'(-x) = \lim_{x\to 0^+} -f'(x) = -f'(0)$ e pertanto se $f'(0) \neq 0$ la funzione ϕ non risulta derivabile per $x = 0$.

Considerando la funzione F osserviamo che risulta continua se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha_1 f(-x) + \alpha_2 f(-x/2),$$

e quindi $f(0) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(0)$ che implica la condizione

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{1}$$

Passando alla derivata prima si ha

$$F'(x) := \begin{cases} f'(x) & \text{per } x > 0, \\ \\ -\alpha_1 f'(-x) - \dfrac{\alpha_2}{2} f'(-x/2) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

e quindi la derivabilità richiede la condizione

$$1 = -\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}, \tag{2}$$

e risolvendo il sistema di due equazioni e due incognite (1)-(2) si ha $\alpha_1 = -3$ e $\alpha_2 = 4$.

[1]dovremmo usare differenti variabili mute di integrazione