



ASSEGNAMENTO POLI



- 1. Concetti Generali**
- 2. Equazione Diofantina**
- 3. Tecniche di Assegnamento Poli e Controllo nello Spazio di Stato**
- 4. Esempi**



Riferimenti

- Capitoli 14 Testo di Bolzern
- Capitolo 10 Lewis (download)
- Capitoli 6, 7 (part) Murray (download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.



Con. Avanzati

Con. Standard



Requisiti di Controllo



❑ Stabilità in Condizioni nominali

- **Stabilità interna**
- Stabilità esterna
- Realizzazioni

❑ Stabilità in condizioni perturbate

- Sensitività a variazioni di parametri
- Stabilità relativa ad incertezze moltiplicative non strutturate
- Robustezza

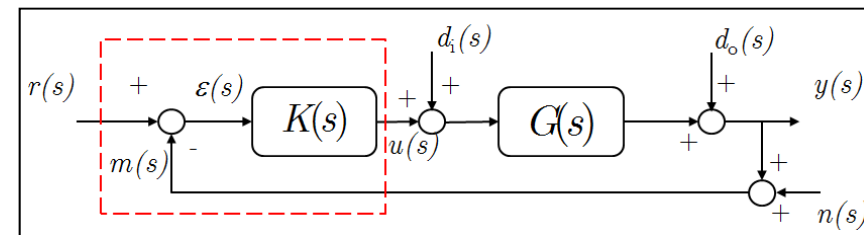
❑ Prestazioni nominali

- Precisione statica
 - Errore a regime
- Precisione dinamica
 - **Risposta transitoria al comando**
 - **Attenuazione dei disturbi**
 - Limite nella quantità di controllo

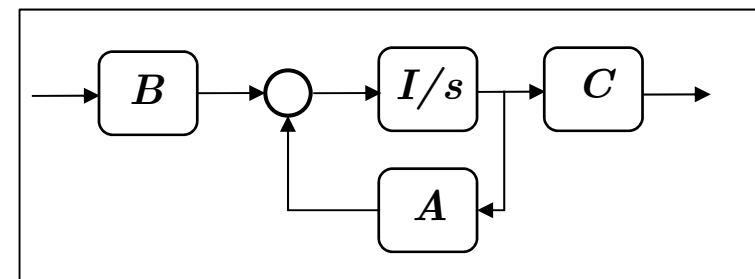
❑ Prestazioni in condizioni perturbate

- Precisione statica
- Precisione dinamica

- ❑ Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio della frequenza, dai poli della funzione di trasferimento



- ❑ Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio del tempo, dagli autovalori della matrice di sistema





Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

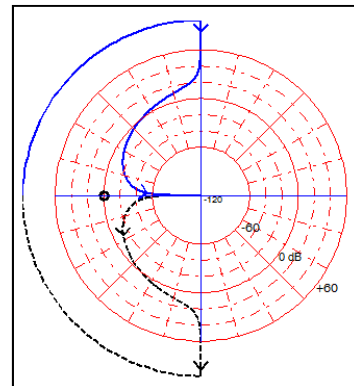
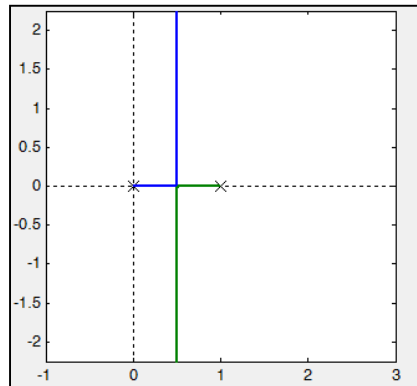
□ Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

- Sistema di Tipo 1
- IL sistema in anello chiuso è sempre instabile per qualsiasi valore del guadagno di anello

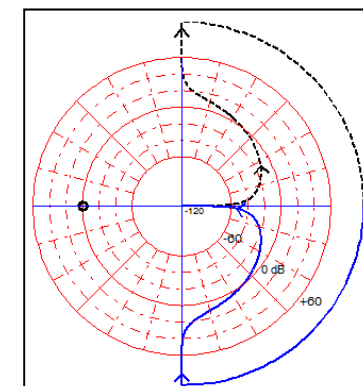
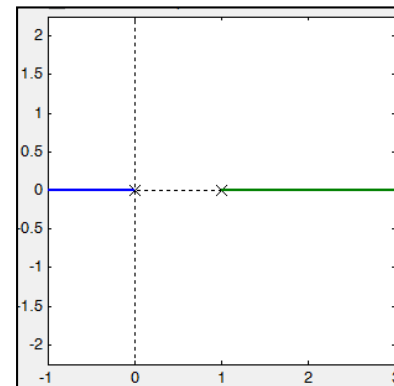
$$T(s) = \frac{k}{s^2 - s + k}$$

$K > 0$



$$Z = N + P = 1 + 1 = 2$$

$K < 0$



$$Z = N + P = 0 + 1 = 1$$



Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



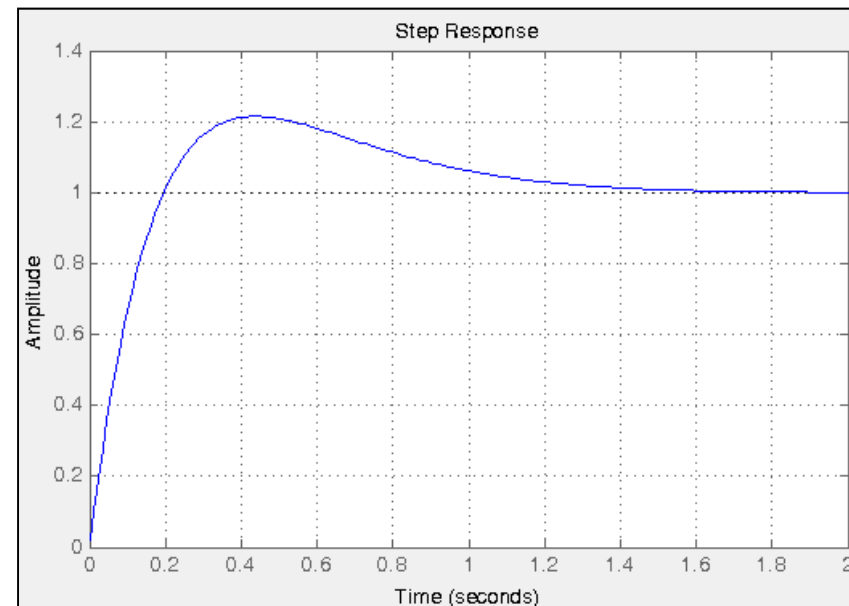
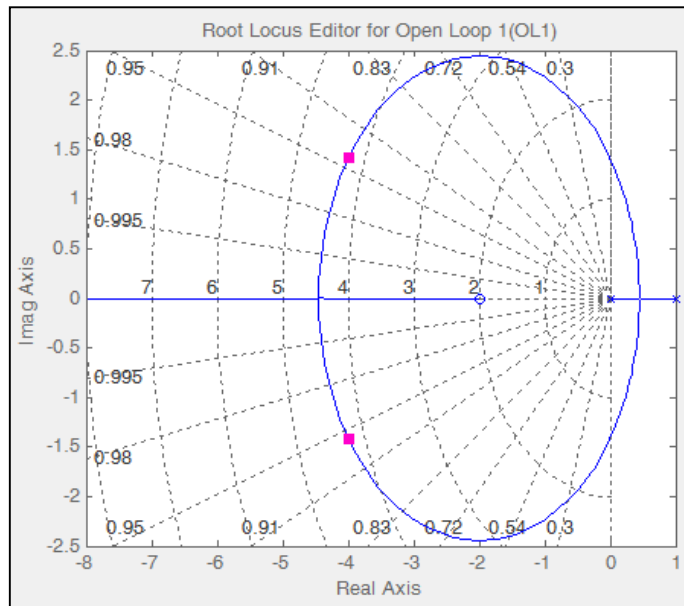
- Il controllore deve contenere uno zero dominante per attirare i poli instabili nel semipiano di parte reale negativa (PD)

$$K(s) = k_1(s + k_2) \quad G(s)K(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s(s - 1)} \quad T(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s^2 + (k_1 - 1)s + k_1k_2}$$

- Il guadagno k_2 seleziona la posizione dello zero ($k_2 > 0$) esempio $k_2 = 2$.
- Il guadagno $k_1 > k_{cr} > 1$ specifica il guadagno di anello necessario per garantire la stabilità in anello chiuso

- Selezione $k_1 = 9$

$$T(s) = \frac{9(s + 2)}{s^2 + 8s + 18}$$



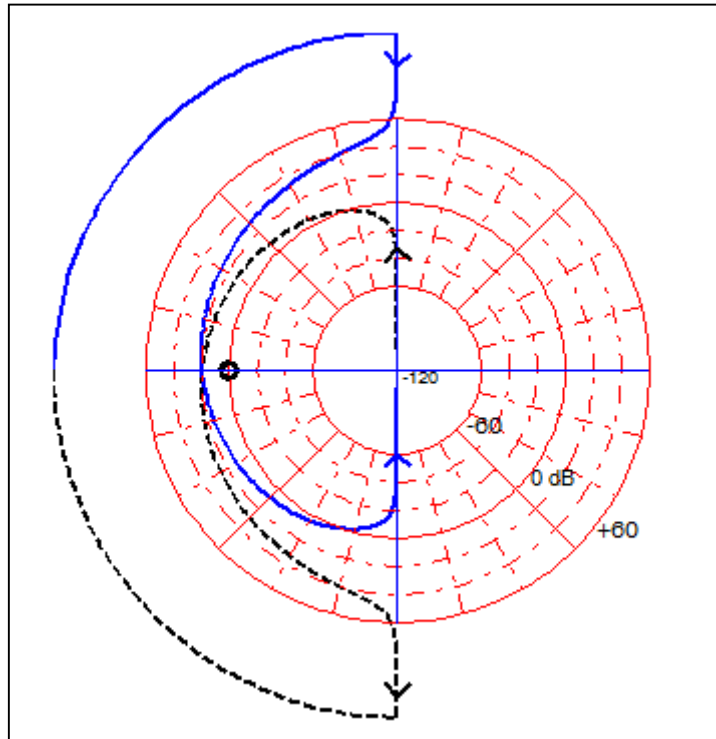


Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

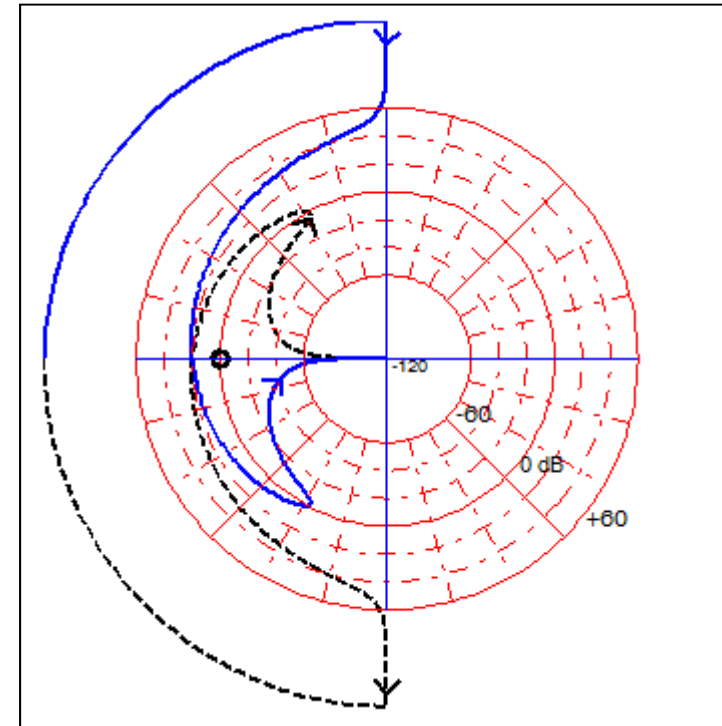
- Il controllore deve essere reso causale mediante la presenza di un polo fuori banda

$$K(s) = k_1(s + k_2) = 9(s + 2)$$

$$K(s) = k \frac{k_1(s + k_2)}{(s + P)} = 10 \frac{9(s + 2)}{(1 + \frac{s}{50})}$$



$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

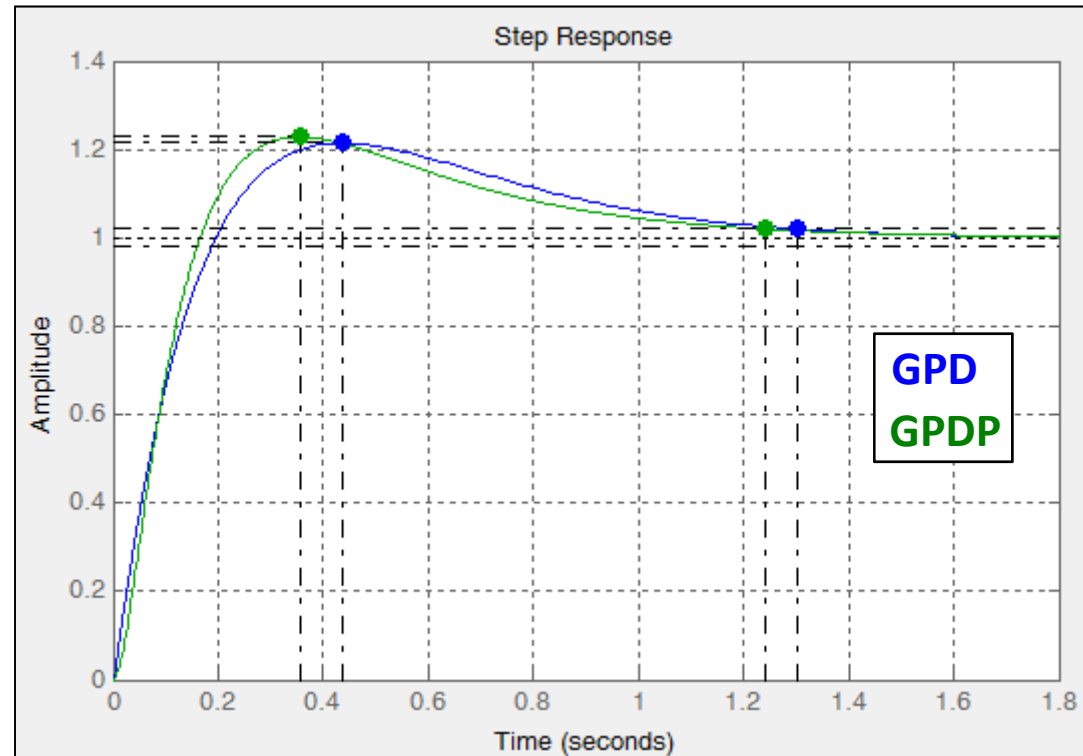
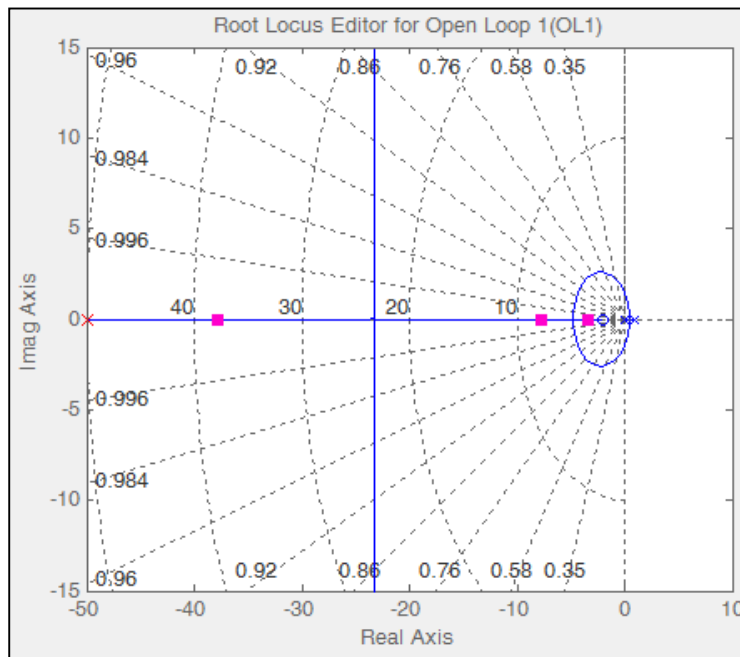


$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$



Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- La scelta del polo e del guadagno di anello è fatta per mantenere il tempo di salita e la sovraelongazione del controllore PD puro (scelta di progetto)

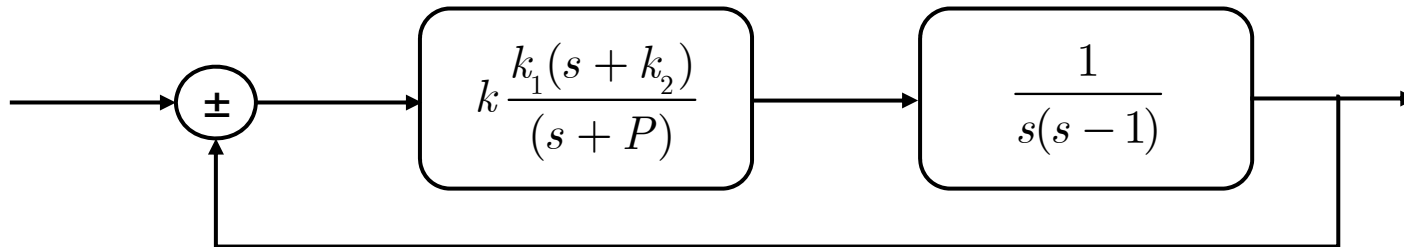


- Nota:** altre scelte di progetto sono possibili ed influenzano la locazione del polo ed il guadagno di anello.



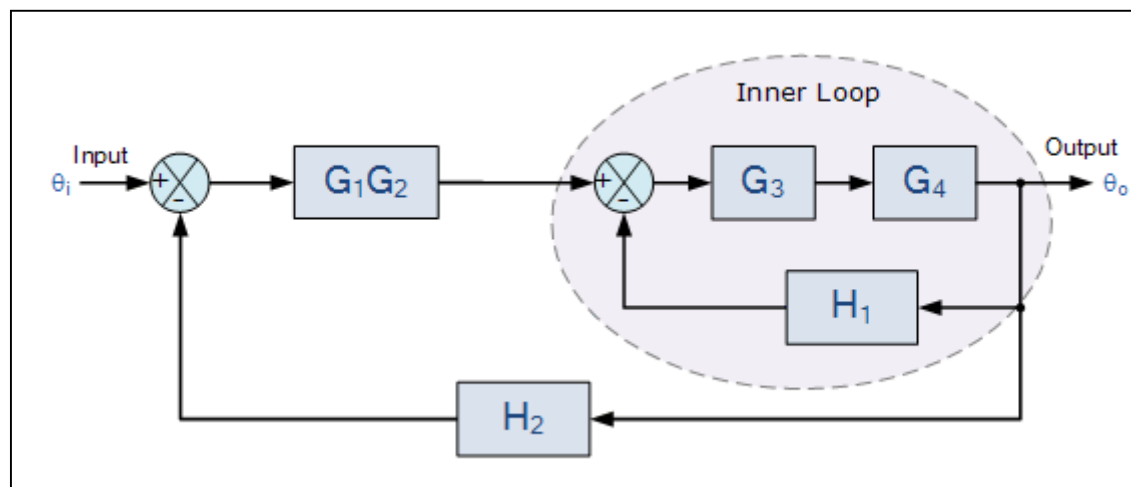
Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Struttura finale del sistema controllato:



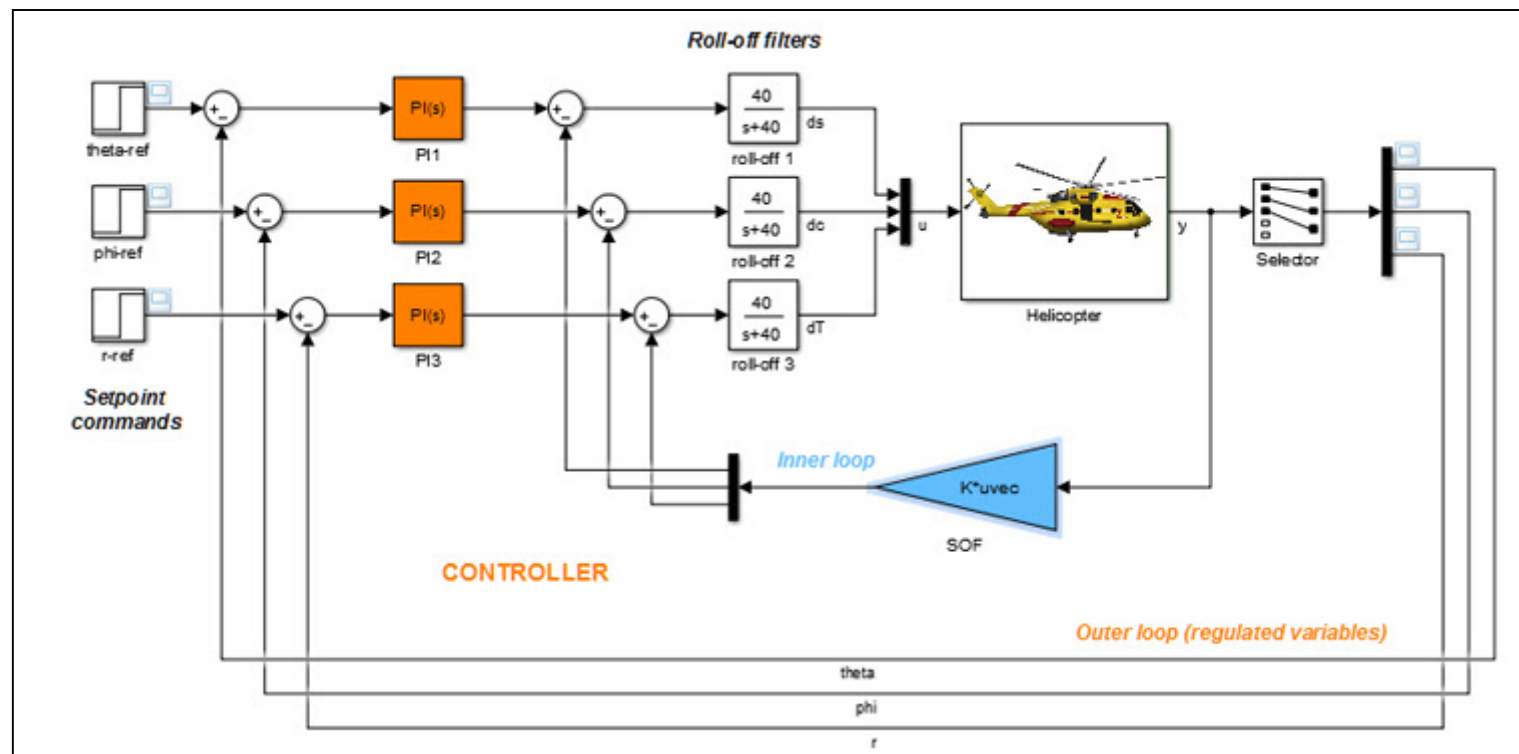
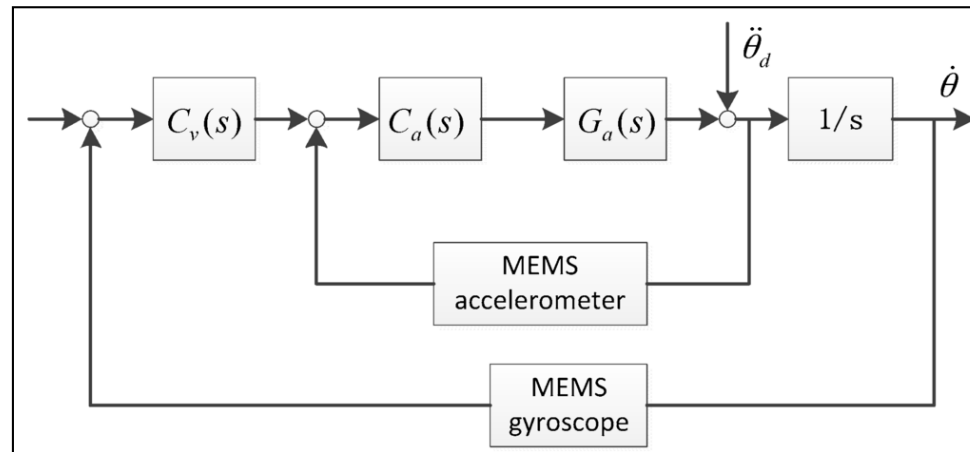
□ Struttura alternativa di controllo mediante anelli multipli

1. Riduzione della complessità del controllore
2. Risparmio energetico di ciascuna componente
3. Sottosistemi operanti in bande di frequenza diverse
4. Richiesta di misure aggiuntive





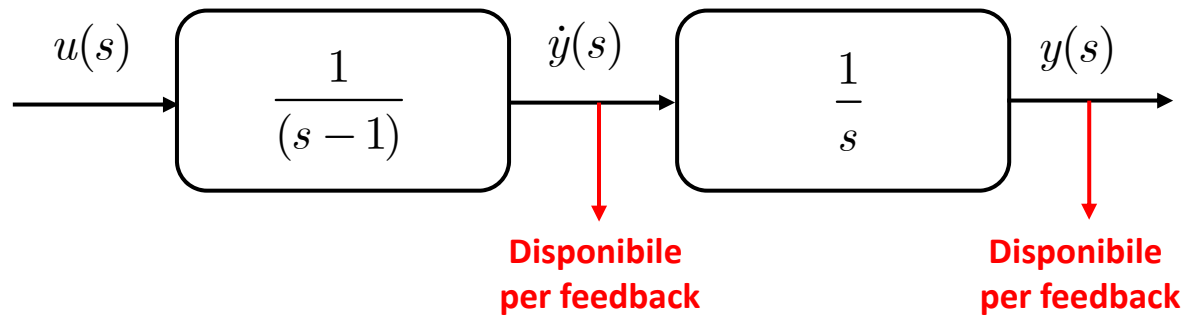
Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



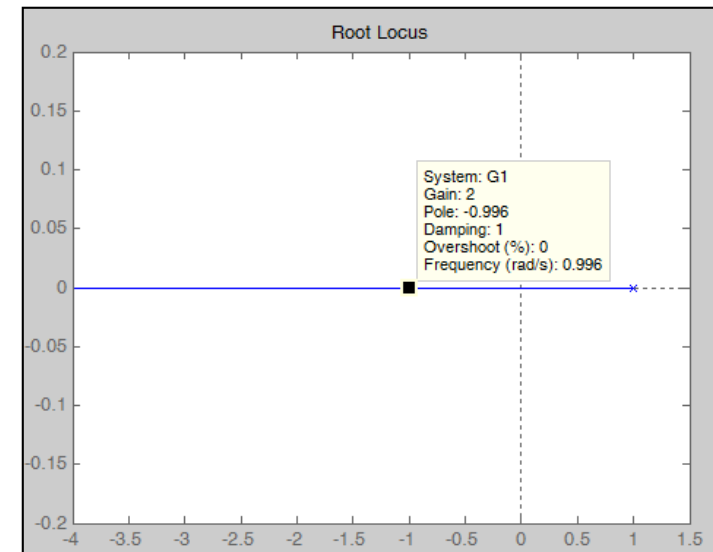
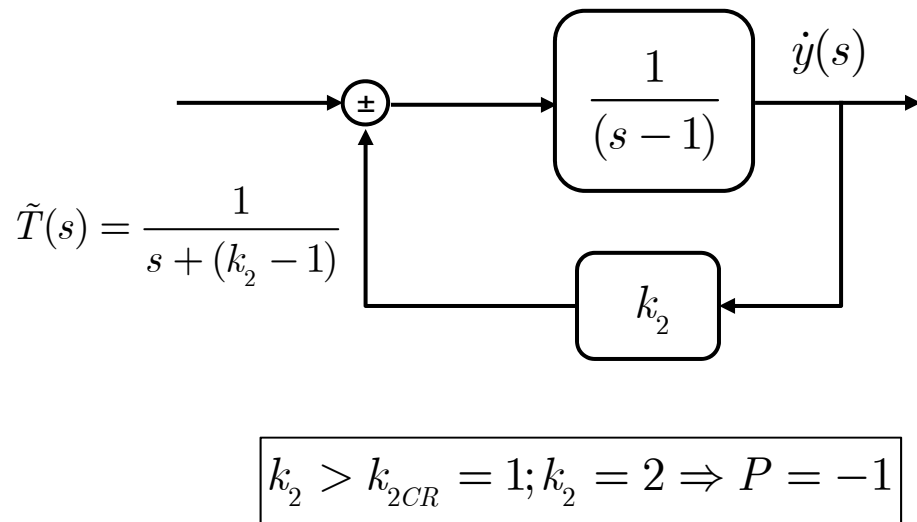


Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{s}$$



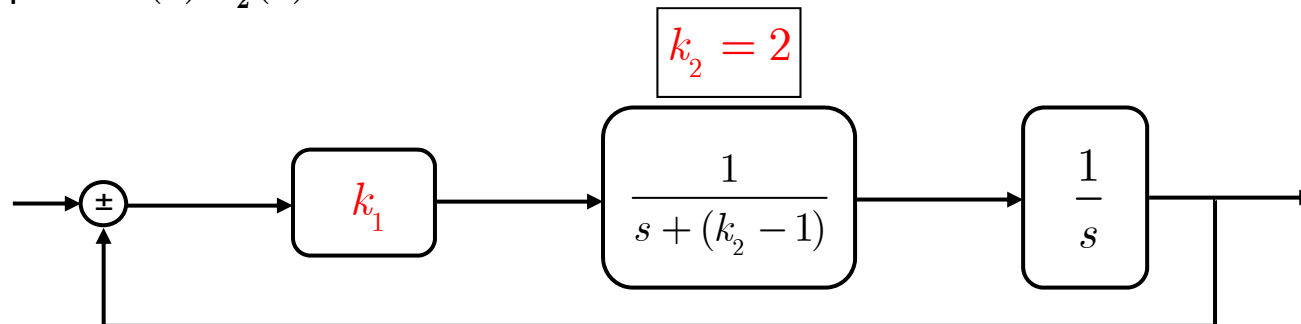
- Progetto di un controllore interno per stabilizzare il primo sottosistema $G_1(s)$





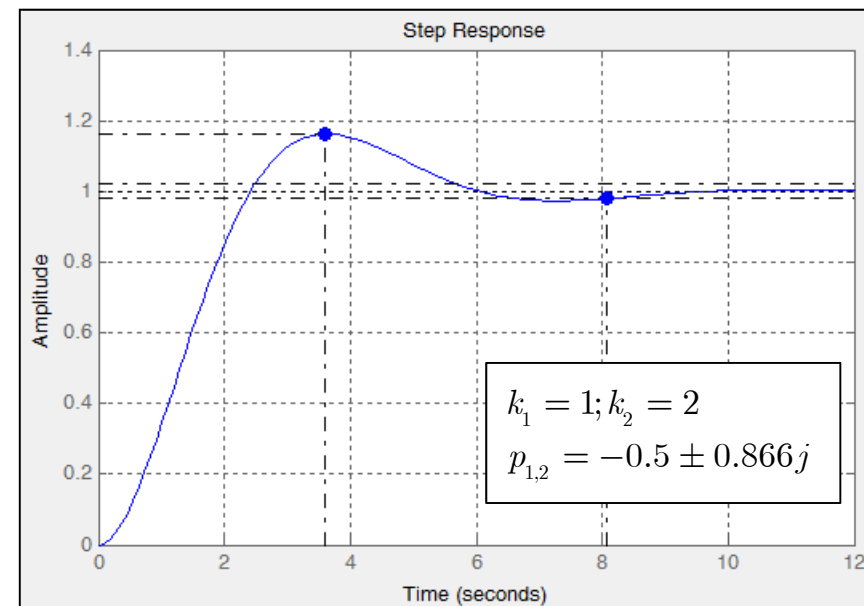
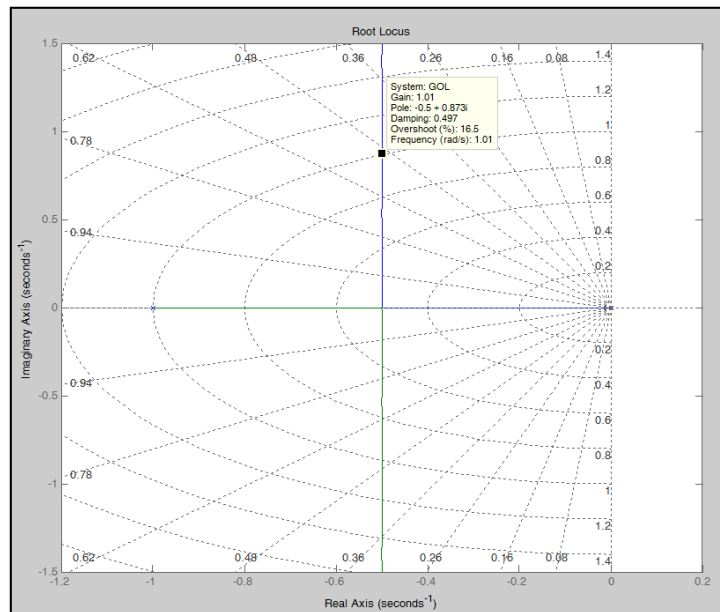
Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Progetto del controllore esterno in retroazione unitaria per stabilizzare il sistema completo $T(s)G_2(s)$



$$G(s)K(s) = \frac{k_1}{s[s + (k_2 - 1)]}$$

$$T(s) = \frac{k_1}{s^2 + (k_2 - 1)s + k_1}$$

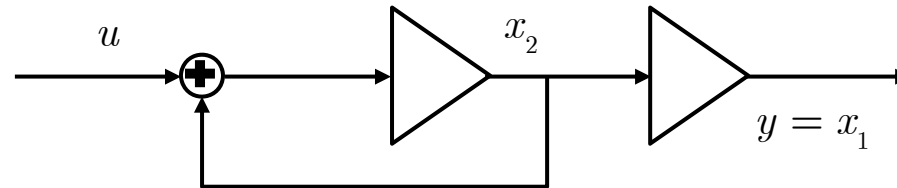




Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

□ Consideriamo una rappresentazione nello spazio di stato del sistema di partenza

- Il sistema è sia controllabile che osservabile (non vi sono cancellazioni)
- Uso dei diagrammi analogici per il calcolo di una realizzazione minima



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

▪ Nota:

- Il sistema è sia controllabile, che osservabile
- Gli autovalori sono uguali ai poli del sistema (0, +1)

▪ Ipotesi di lavoro:

1. Il vettore di stato è disponibile per la retroazione (misurabile)
2. Il controllore ha la forma:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + r$$

3. La matrice K è una matrice costante, nell'esempio 1x2, $\mathbf{K} = [k_1, k_2]$



Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Chiusura dell'anello con il controllore scelto precedentemente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r = \mathbf{A}_{CL}\mathbf{x} + \mathbf{B}r$$

$$\mathbf{A}_{CL} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$$

- Nell'esempio considerato:

$$\mathbf{A}_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

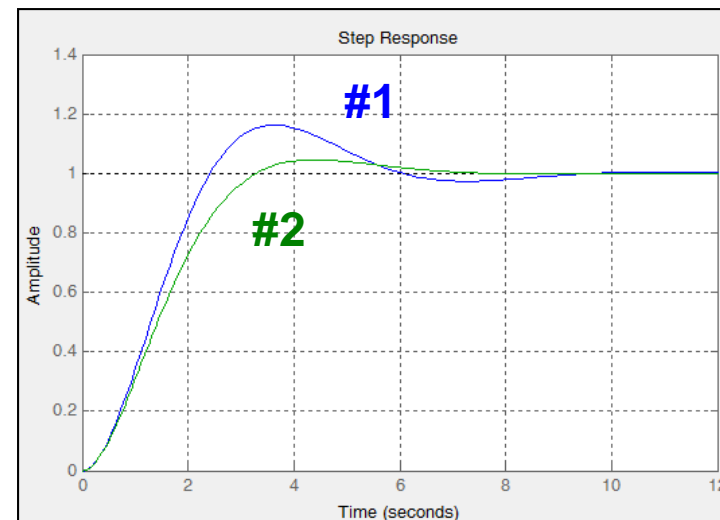
- Calcolo degli autovalori in anello chiuso $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_{CL}) = \lambda^2 + (k_2 - 1)\lambda + k_1 = 0$
 $k_2 > 1, k_1 > 0$

- Esempio #1:

$$-0.5 \pm 0.866j \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

- Esempio #2:

$$[\xi = 0.7, \omega_n = 1] \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2.4$$



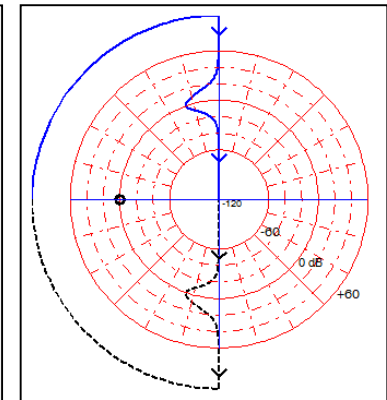
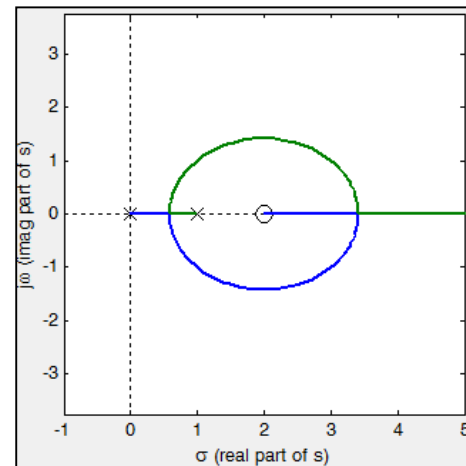
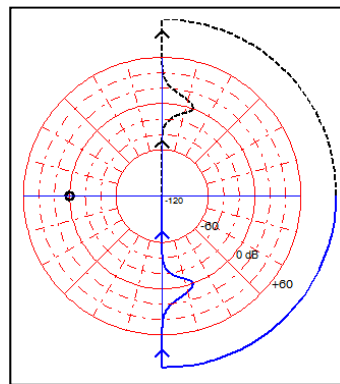
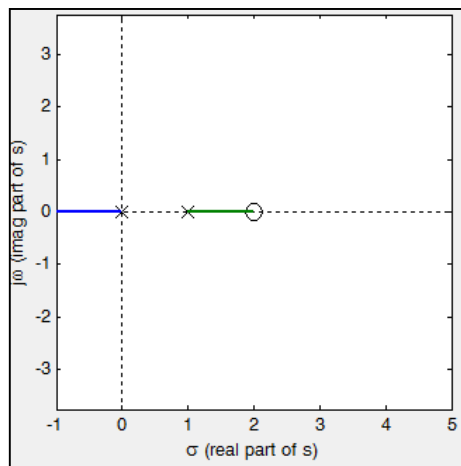


Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



- ❑ Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema instabile e a fase non minima:

$$G(s) = \frac{s - 2}{s(s - 1)}$$



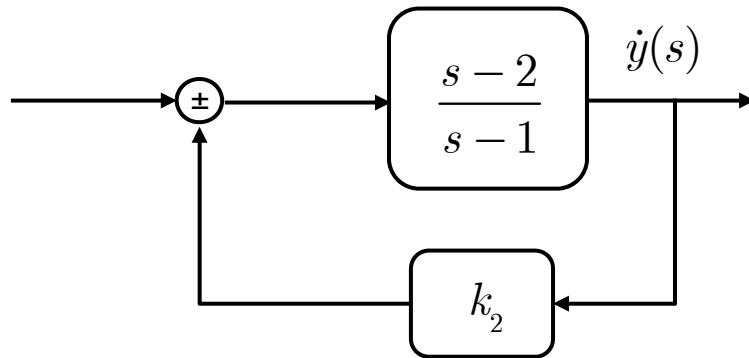
- Un controllore singolo standard non riesce a stabilizzare il sistema



Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



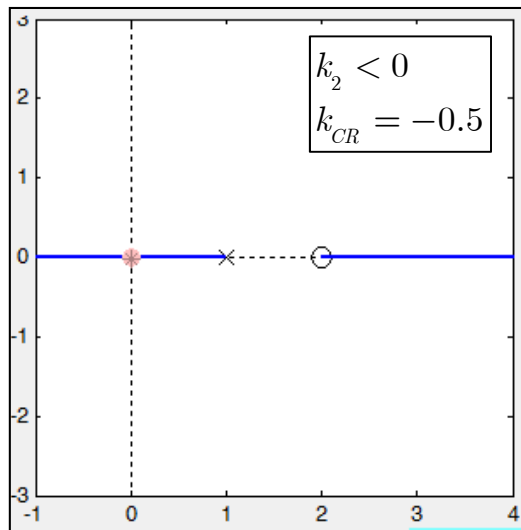
□ Approccio ad anelli multipli (anello interno stabilizzante)



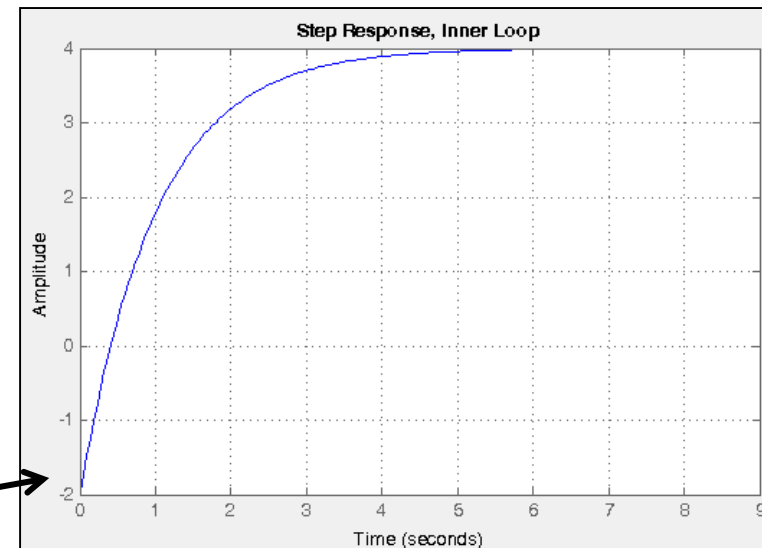
$$\tilde{T}(s) = \frac{s-2}{(1+k_2)s - (1+2k_2)}$$

- Esempio: $k_2 = -2/3$

$$\tilde{T}(s) = \frac{3(s-2)}{s+1}$$



Nota il contributo di fase non minima!

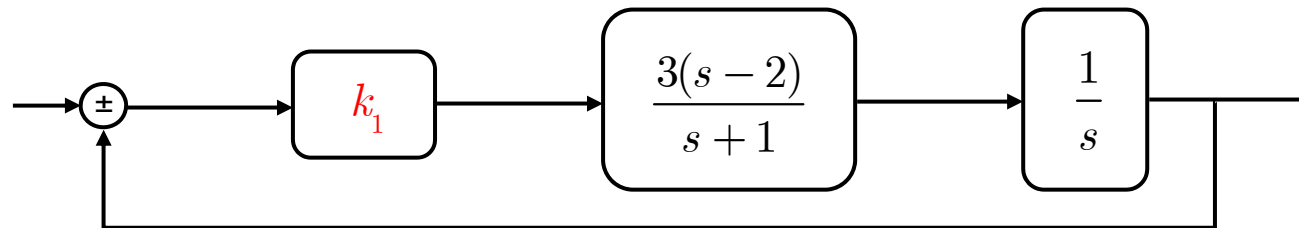




Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

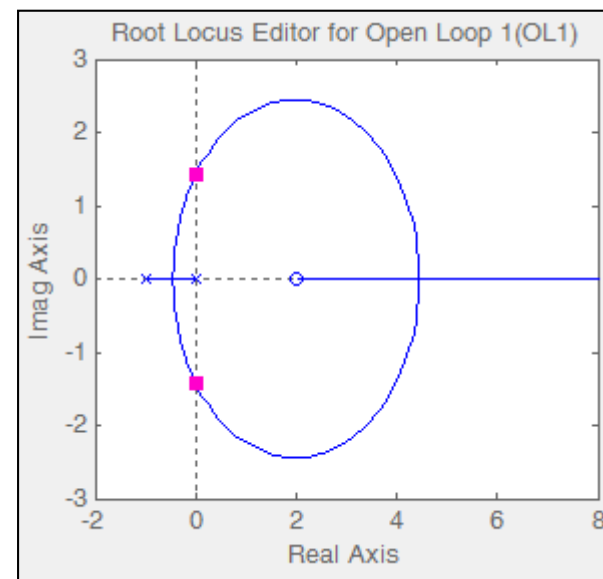
□ Approccio ad anelli multipli (anello esterno)

$$k_2 = -\frac{2}{3} \quad \tilde{T}(s) = \frac{s-2}{(1+k_2)s - (1+2k_2)}$$



$$T(s) = \frac{3k_1(s-2)}{s^2 + (1+3k_1)s - 6k_1}$$

$$k_1 < 0$$
$$k_{1CR} = -\frac{1}{3}$$

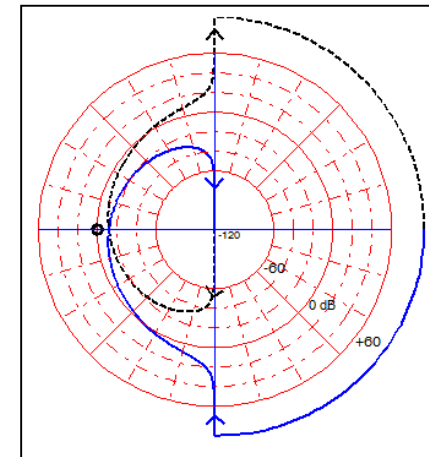
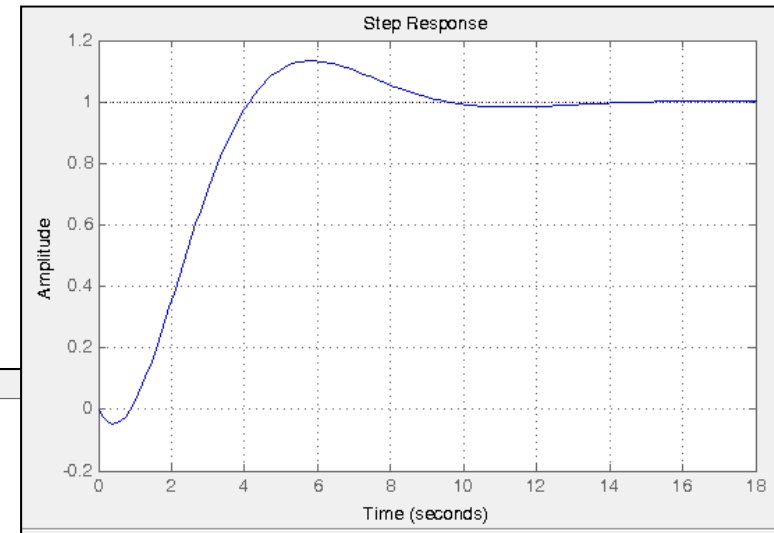
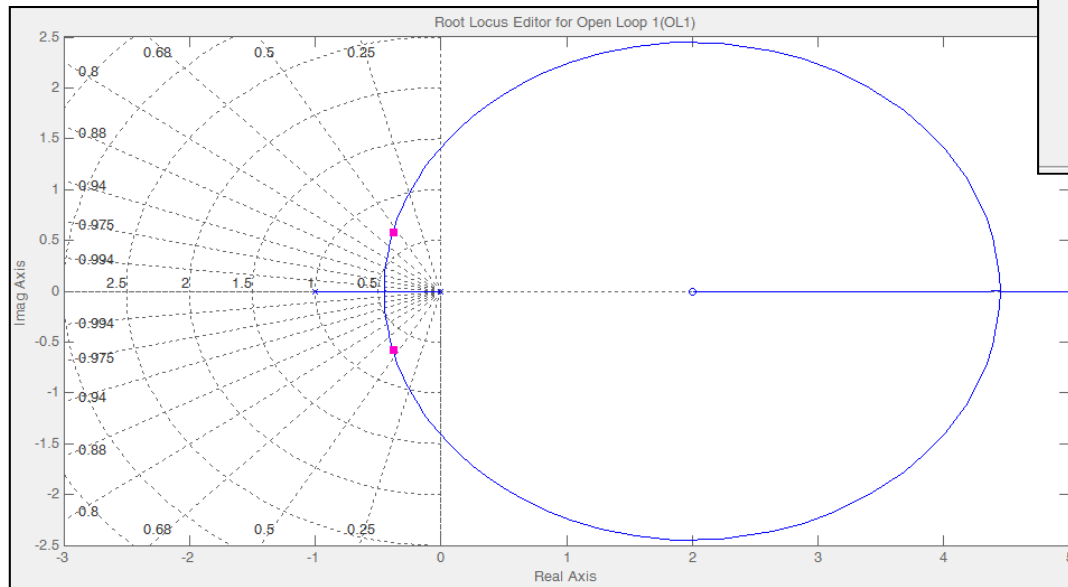




Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Esempio numerico con $k_1 = -0.08$

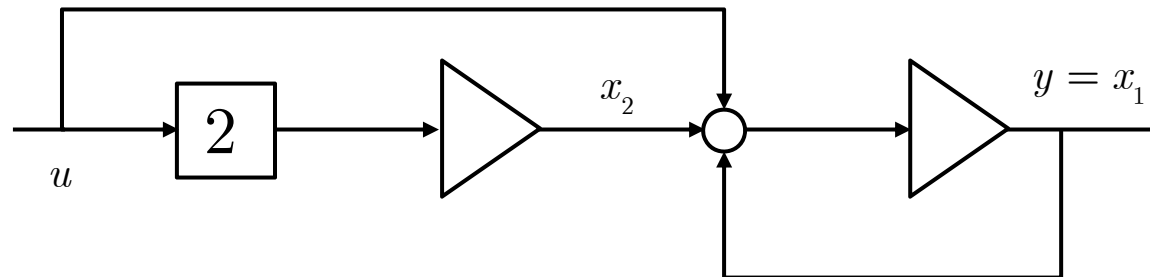
$$T(s) = \frac{-0.24(s-2)}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$





Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Uso della rappresentazione nello spazio di stato



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u = A\mathbf{x} + Bu$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = C\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} + Br = A_{CL}\mathbf{x} + Br$$
$$A_{CL} = (A - BK)$$

- Calcolo degli autovalori in anello chiuso

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + (2k_2 - 1 + k_1)\lambda - 2(k_1 + k_2) = 0$$

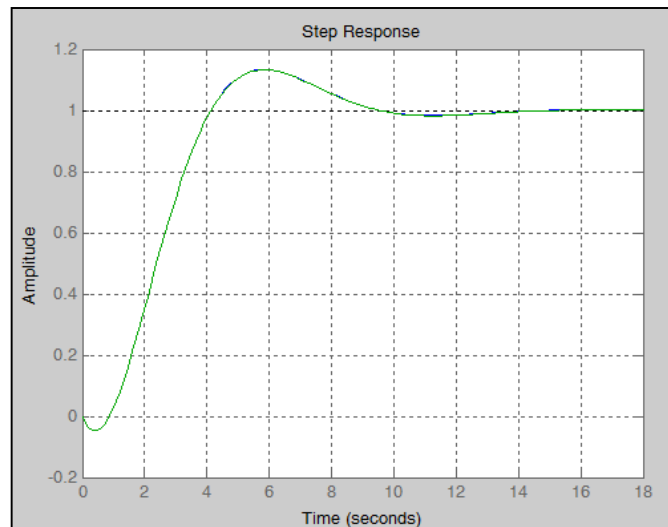
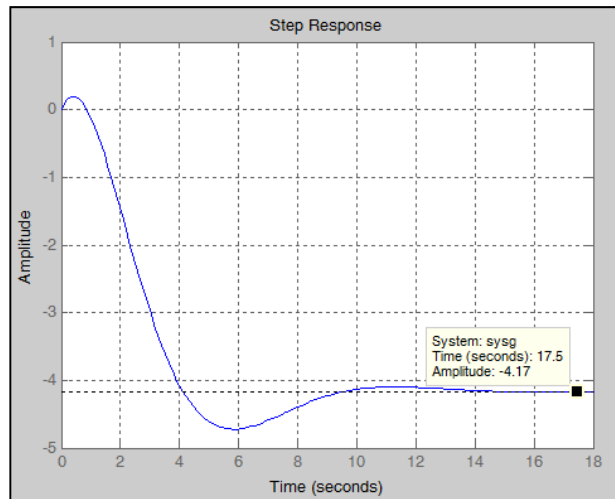
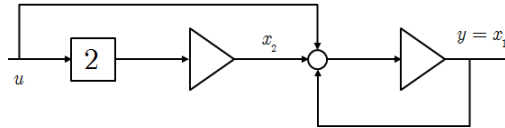
$$s^2 + 0.76s + 0.48 \Rightarrow K = [-2.24, 2]$$

- FdT in anello chiuso

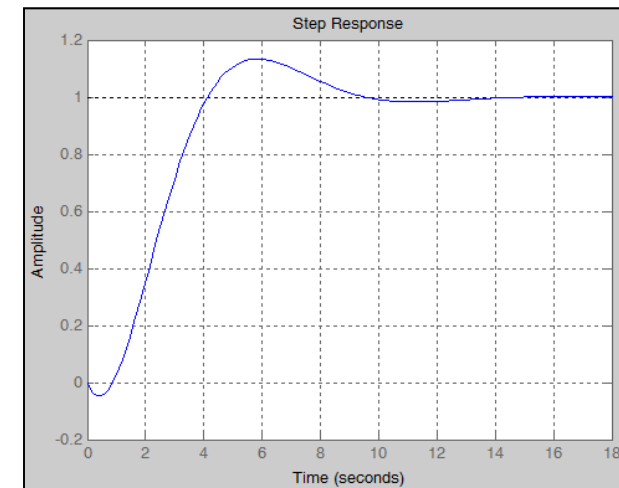
$$G_{CL}(s) = C(sI - A_{CL})^{-1}B = \frac{s - 2}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$



Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



- Considerazioni:
 - Transitorio corretto
 - Segno (zero a fase non minima)
 - Regime
- Uso di un prefiltro:
 - $G_{PRE} \approx -1/4.1667$



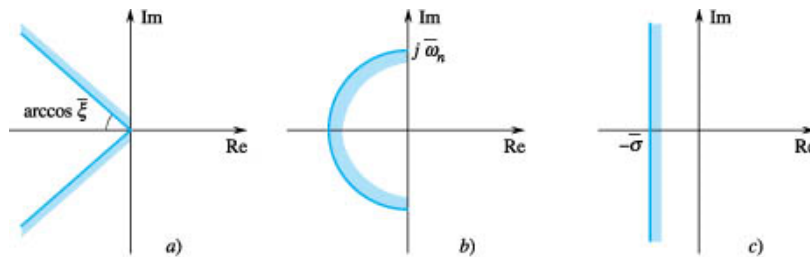
- Le due risposte al gradino coincidono



Assegnamento Poli/Autovalori



- ☐ La tecnica dell'assegnamento dei poli è un metodo di progetto di controllore utilizzabile quando il sistema considerato risulta **controllabile** (in misura minore stabilizzabile)
- ☐ La tecnica permette di poter gestire completamente le caratteristiche transitorie in ciclo chiuso, specificandone la locazione nel piano complesso.
- ☐ La scelta dei poli è basata sulla risposta transitoria e/o della risposta in frequenza (velocità di risposta, sovraelongazione, larghezza di banda).

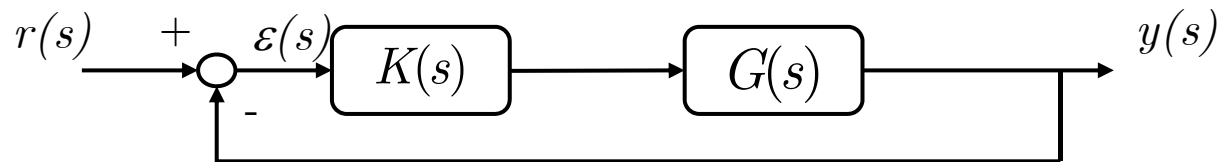


1. Sovraelongazione $\rightarrow M_P \rightarrow \xi \rightarrow$ Margine Fase
2. Velocità di risposta $\rightarrow \xi\omega_n \rightarrow \omega_{BW}$

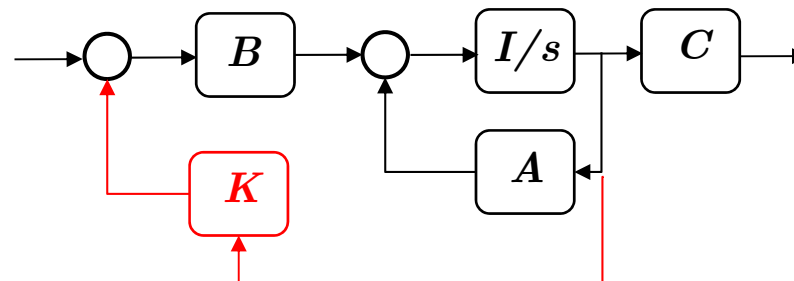


Assegnamento Poli

- ❑ La tecnica di assegnamento dei poli può essere implementata sia nel dominio della frequenza, che nel dominio del tempo
- L'approccio frequenziale richiede anche la **osservabilità** del sistema e si basa sulla soluzione dell'equazione Diofantina, la sua valenza applicativa è per sistemi SISO



- L'approccio nel dominio del tempo è generale e vale per sistemi SISO e MIMO indifferenteemente.





Assegnamento Poli - Eq. Diofantina



- Supponiamo che sia la $G(s)$ che la $K(s)$ siano realizzazioni minime*, si ha:

$$G_{OL}(s) = G(s) \cdot K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \quad G_{CL}(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

- Si vuole calcolare il numeratore ed il denominatore del controllore $K(s)$, dato noto il polinomio in ciclo chiuso $D_{CL}(s)$. Ovvero:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

- * **Nota:** Si può dimostrare che essa ammette un'unica soluzione per ogni generica $D_{CL}(s)$ se e solo se $N(s)$ e $D(s)$ sono primi fra loro



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina



□ Dall'equazione Diofantina si può dedurre che:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

- se si vuole che $D_{CL}(s)$ non contenga dei termini di $D(s)$, tali termini devono essere presenti anche nella $N_k(s)$ e si hanno cancellazioni fra i poli del sistema e zeri del regolatore.
- se si vuole che $D_{CL}(s)$ non contenga dei termini di $N(s)$, tali termini devono essere presenti anche nella $D_k(s)$ e si hanno cancellazioni fra gli zeri del sistema e i poli del regolatore.
- se il sistema presenta zeri a parte reale positiva, tali zeri devono comunque comparire anche nella $G_{CL}(s)$ perché, altrimenti, sarebbero cancellati da un polo del controllore che però, in tal caso, risulterebbe instabile.
- L'ordine di $D_{CL}(s)$ è dato dall'ordine del termine $D(s)D_k(s)$ (per la causalità dei sistemi l'ordine dei denominatori è maggiore uguale a quella dei nominatori).
- La struttura risultante del controllore è quella di un filtro passa banda, oppure a sella



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina



□ Esempio:

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s-1)}$$

- Realizzare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso abbia un errore di risposta alla rampa pari a zero.
- l'equazione diofantina può essere applicata in quanto numeratore e denominatore del sistema sono primi fra loro.

Il regolatore deve avere un polo nell'origine; poiché poi il sistema da controllare è instabile, per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il controllore deve essere almeno di ordine 2 e, per quanto visto, l'ordine della $D_{CL}(s)$ deve essere almeno pari a 4

Poniamo come scelta di progetto il requisito di risposta transitoria :

$$D_{CL}(s) = (s+1)^4$$

- Il denominatore del regolatore ha la forma

$$D_k(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$D_k(s) = a_2 s^2 + a_1 s$$



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina



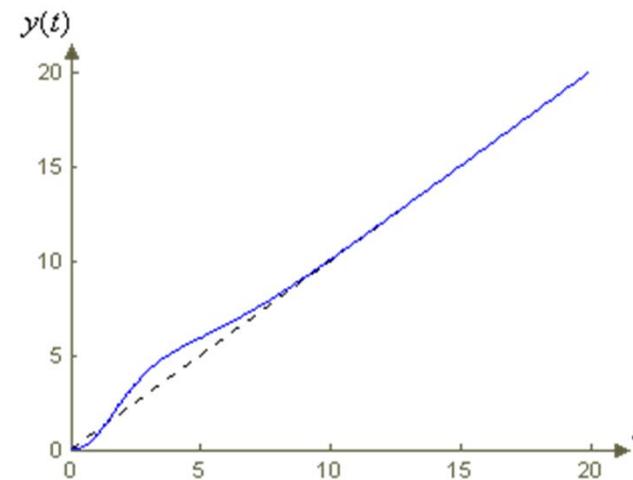
- **Scegliamo** il numeratore di ordine 2 (Controllore proprio):

$$N_k(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (s+1)^4 = 0.1 \cdot (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + s(s-1) \cdot (a_2 s^2 + a_1 s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = a_2 s^4 + (a_1 - a_2)s^3 + (0.1b_2 - a_1)s^2 + 0.1b_1 s + 0.1b_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 4 + a_2 = 5 \\ b_2 = 10(6 + a_1) = 110 \\ b_1 = 10 \cdot 4 = 40 \\ b_0 = 10 \cdot 1 = 10 \end{cases}$$

$$K(s) = 10 \frac{11s^2 + 4s + 1}{s(s+5)} \quad -0.18 \pm 0.24j$$



SISOTOOL-SIMULINK



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

□ Esempio:

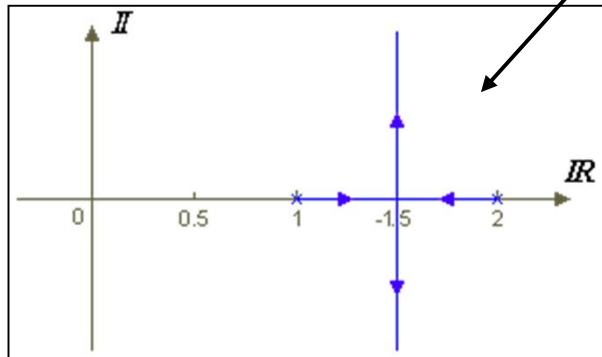
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{s^2 - 3s + 2} & \frac{5s}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}^T$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$



- Si vuole realizzare un regolatore tale che i poli dominanti del sistema controllato

$$\xi = 0.5$$
$$T_{a2} \leq 2 \text{ s} \quad \omega_n \geq 4$$



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina



- Le specifiche precedenti si possono riscrivere come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0.5, \quad T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{2}{\xi} = 4 \text{ rad / s.} \\ s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16 \end{array} \right.$$

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (**con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema**), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati mentre il terzo verrà posto a frequenze fuori banda (es. $s = -10$)

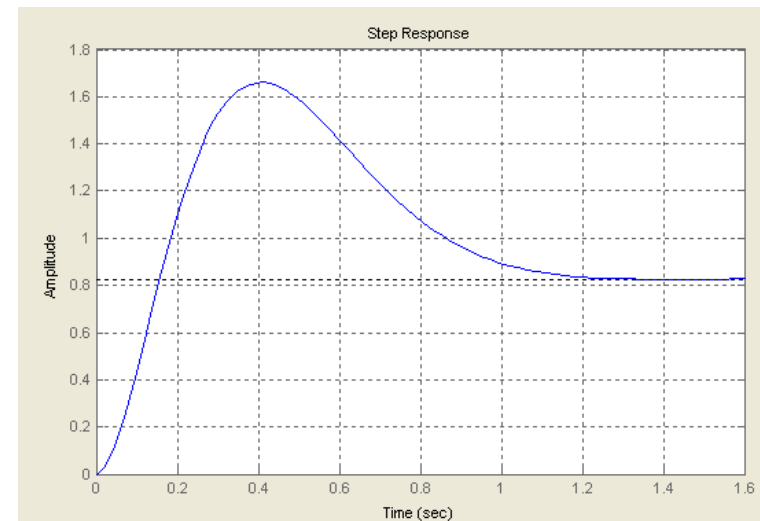
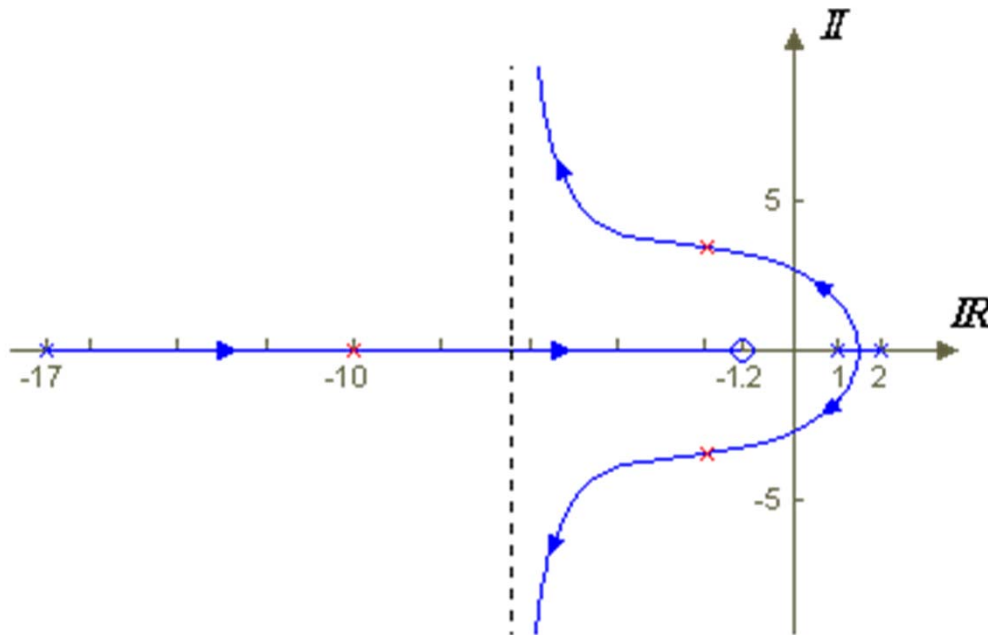
$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= (s + 10)(s^2 + 4s + 16) \\ D_k(s) &= (a_1 s + a_0) \quad N_k(s) = (b_1 s + b_0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 14 + 3 \cdot 1 = 17 \\ b_1 = (56 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 1)/5 = 21 \\ b_0 = (160 - 2 \cdot 17)/5 = 25.2 \end{cases} \end{aligned}$$



Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Il regolatore che soddisfa le specifiche è quindi:

$$K(s) = 21 \frac{s + 1.2}{s + 17}$$



- Necessaria taratura del polo fuori banda per migliorare lo smorzamento

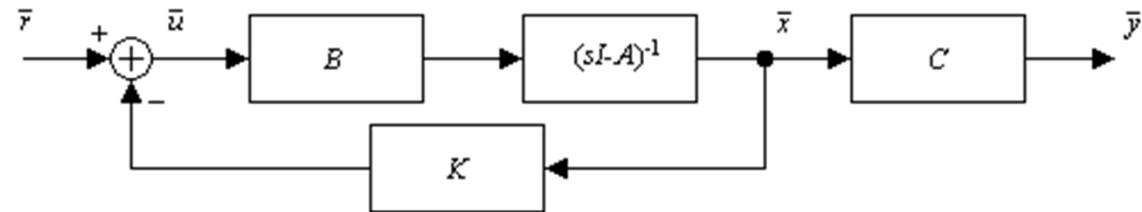


Assegnamento Poli - State Feedback



- Il secondo approccio sfrutta la rappresentazione nello spazio di stato, per il progetto del controllore

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0$$



- IPOTESI:** Supponiamo che il sistema sia controllabile e definiamo la seguente Struttura per il controllore

$$u = -Kx + r$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0 \quad \begin{cases} x(t) = e^{(A-BK)t} x_0 + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} B r(\tau) d\tau \\ y(t) = C e^{(A-BK)t} x_0 + C \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)} B r(\tau) d\tau \end{cases}$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- L'esistenza del controllore (in cui la matrice di guadagno K è costante) è garantita dai seguenti teoremi:

- **Teorema (sistemi con ingresso scalare):**

Dato un qualsiasi polinomio $p(s)$ di grado n esiste un'unica matrice $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tale che $p(s)$ sia il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema ottenuto retroazionando gli stati del sistema mediante la matrice K .

$$A - BK \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

- **Corollario:**

Nel caso in cui il sistema (A, B) sia multi ingresso, esiste un numero infinito di matrici di guadagno $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- **Teorema:**

Dato un sistema lineare (A, B) di ordine n , con m ingressi, l'assegnazione totale è possibile se e soltanto se il sistema è completamente raggiungibile. Ovvero:

$$\text{Rank } \mathcal{B} = \text{Rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \Leftrightarrow \lambda_i^{i=1, \dots, n} (A - BK) \equiv \lambda_i^{i=1, \dots, n} (\text{des.})$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- Consideriamo un sistema a singolo ingresso controllabile (A, B) . Esiste una Trasformazione di similitudine che trasforma il sistema in forma controllabile compagna:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\Rightarrow \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x} \\ (A, B) &\Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B) \\ \tilde{A} = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Applichiamo la legge di controllo a retroazione dello stato al sistema

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{r} \quad \tilde{K} = K \cdot T \quad \mathbf{u} = -\tilde{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{r} = -[\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n] \mathbf{z} + \mathbf{r}$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- Il sistema trasformato, in ciclo chiuso diviene:

$$\dot{z} = (\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K})z + \tilde{B}r$$
$$\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & -a_2 - \tilde{k}_3 & \cdots & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso fornisce la soluzione unica per il guadagno \tilde{K}

$$s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + \tilde{k}_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 + \tilde{k}_1)$$

Essendo il polinomio in ciclo chiuso desiderato:

$$(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0$$



$$\begin{cases} a_{n-1} + \tilde{k}_n = \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + \tilde{k}_1 = \alpha_0 \end{cases}$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- per il sistema originale:

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} \quad u = -K \cdot x + r$$

□ Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$

- si vuole determinare la legge di controllo che porti i poli del sistema retroazionato in $s = -1$ e $s = -10$ e quindi tale che il suo polinomio caratteristico risulti:

$$(s + 1)(s + 10) = s^2 + 11s + 10$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- Il sistema è in forma compagna quindi la tecnica è applicabile direttamente

$$\begin{aligned} A - B \cdot K &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 5k_1 & 3 - 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow sI - A + B \cdot K &= \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 + 5k_1 & s - 3 + 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |sI - A + B \cdot K| &= s(s - 3 + 5k_2) + 2 + 5k_1 = s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 \end{aligned}$$

- Il polinomio desiderato in ciclo chiuso è dato da:

$$s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 = s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{cases} 5k_2 - 3 = 11 \\ 2 + 5k_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 14/5 \\ k_1 = 8/5 \end{cases} \quad u = - \begin{bmatrix} 8/5 & 14/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$



Assegnamento Poli - State Feedback



□ Paragone con l'equazione Diofantina

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati (-1, -10) mentre il terzo verrà posto a frequenze elevate (es. $s = -100$)

$$K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

$$D_{CL}(s) = (s + 1)(s + 10)(s + 100) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 114 \\ b_1 = 154.4 \\ b_0 = 290 \end{cases}$$

$$K(s) = 290 \frac{s + 0.5324}{s + 114}$$



Assegnamento Poli - State Feedback

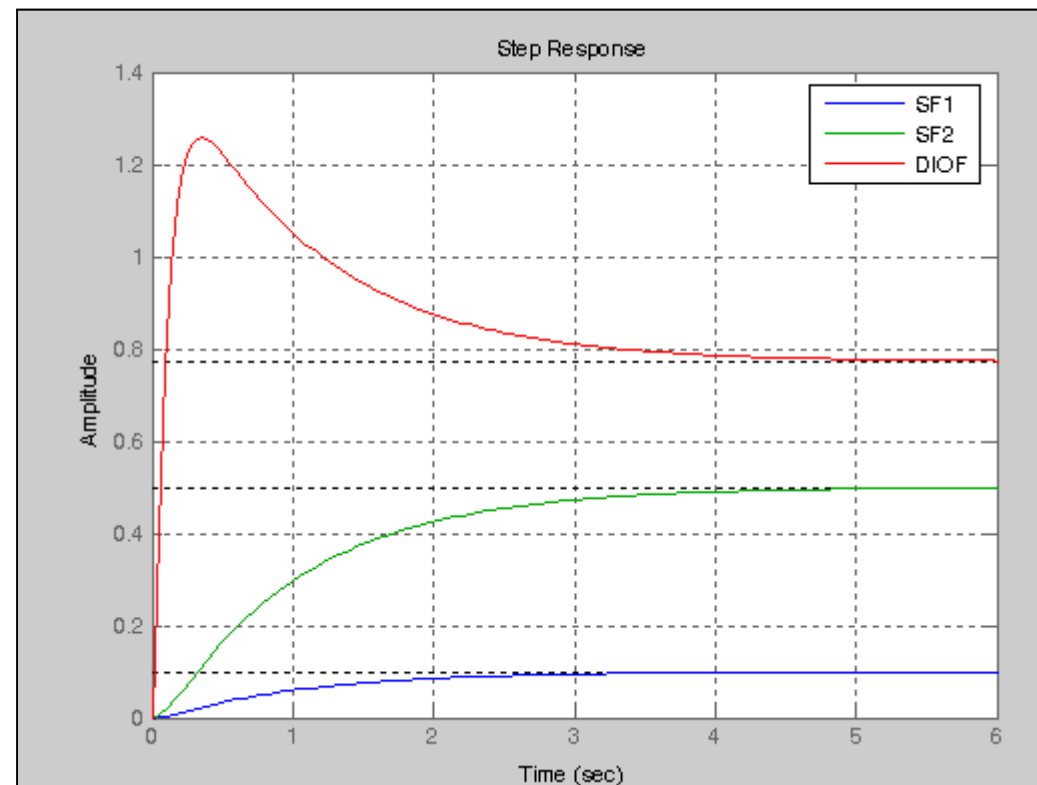
$$G_{CL}^{DIOF}(s) = 1450 \frac{s + 0.5324}{(s + 1)(s + 10)(s + 100)}$$

Retroazione totale in feedback

$$G_{CL}^{SF1}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 10)}$$

Retroazione totale in anello
diretto

$$G_{CL}^{SF2}(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 10)}$$





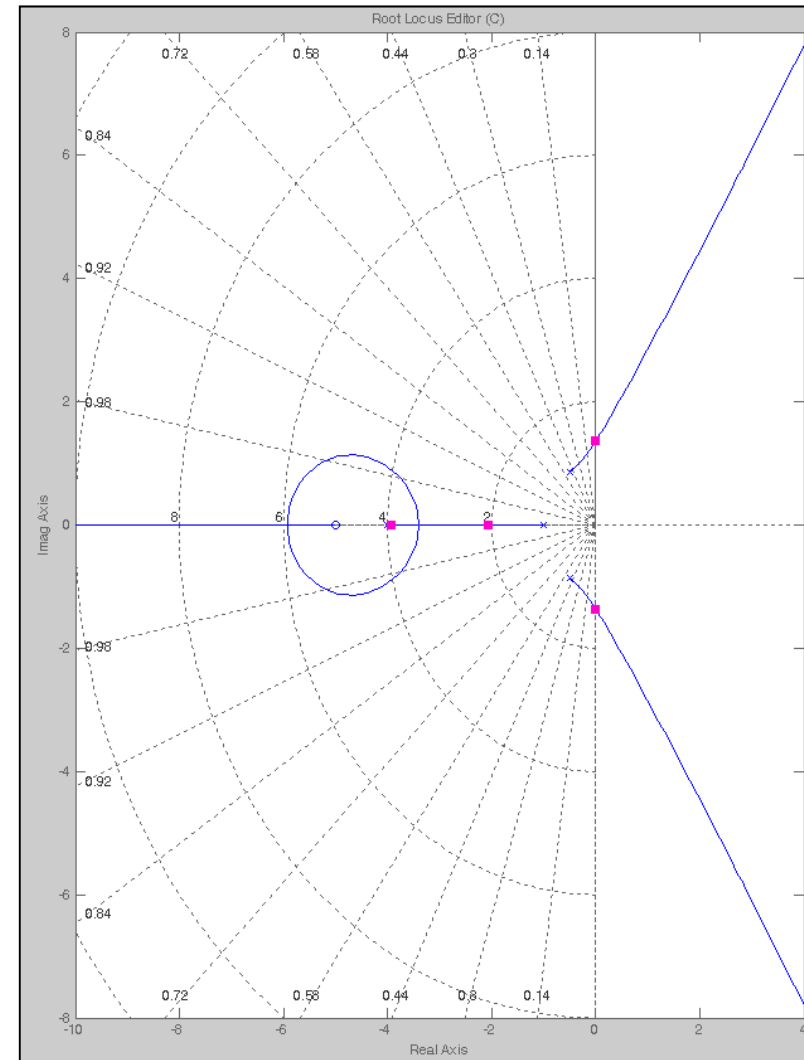
Assegnamento Poli - State Feedback

□ Esempio:

$$G(s) = \frac{s + 5}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(s + 4)}$$

- Si vuole una legge di controllo che permetta di ottenere un sistema retroazionato i cui poli dominanti siano quelli di un sistema del secondo ordine caratterizzato dai seguenti parametri

$$\begin{aligned} M_p &\cong 4.33 \% \\ T_{a2} &\leq 2 \text{ s.} \end{aligned}$$





Assegnamento Poli - State Feedback



- Specifica di sovraelongazione:

$$\xi = \frac{\ln(100 / M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / M_p)}} = \frac{\ln(100 / 4.33)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / 4.33)}} \cong 0.707$$

- Specifica di tempo di assestamento:

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} \Rightarrow \omega_n \cong \frac{4}{\xi T_{a2}} = \frac{4}{0.707 \cdot 2} = 2.8 \text{ rad./s.}$$

- Poli in ciclo chiuso:
 - (A, B) Controllabile, (A, C) Osservabile:

$$p_{1/2} = -2 \pm j2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & -10 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0]$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- La matrice di sistema in ciclo chiuso vale:

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 - k_1 & -9 - k_2 & -10 - k_3 & -6 - k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 4 + k_1 & 9 + k_2 & 10 + k_3 & s + 6 + k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1$$

- Da cui la matrice di guadagno K :

$$s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1 = s^4 + 34s^3 + 328s^2 + 1040s + 1600$$

$$\begin{cases} k_4 = 34 - 6 = 28 \\ k_3 = 328 - 10 = 314 \\ k_2 = 1040 - 9 = 1031 \\ k_1 = 1600 - 4 = 1596 \end{cases} \quad u = - \begin{bmatrix} 1596 & 1031 & 314 & 28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + r$$

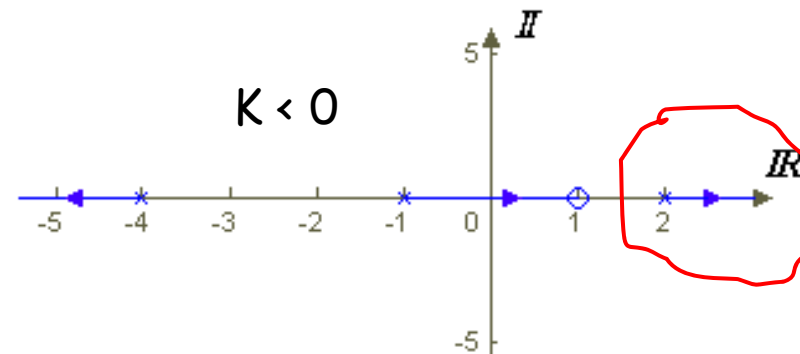
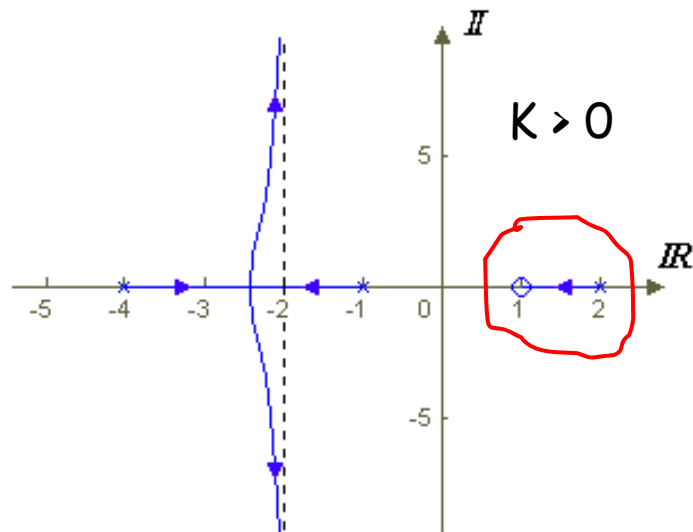


Assegnamento Poli - State Feedback

□ Esempio:

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)(s + 4)}$$

- Consideriamo il problema di stabilità mediante Luogo delle Radici



- Si vuole stabilizzare il sistema, facendo in modo che il sistema retroazionato abbia i poli in:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -10, \quad p_3 = -20$$

$$(s + 1)(s + 10)(s + 20) = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$



Assegnamento Poli - State Feedback



- Data la rappresentazione (A, B, C), il sistema è sia controllabile, che osservabile:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.75 & 0.5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0.25 \quad -0.125], \quad D = [0]$$

$$\begin{aligned} A - B \cdot K &= \begin{pmatrix} -3 - 0.5k_1 & 0.75 - 5k_2 & 0.5 - 0.5k_3 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow sI - A + B \cdot K &= \begin{pmatrix} s + 3 + 0.5k_1 & -0.75 + 5k_2 & -0.5 + 0.5k_3 \\ -8 & s & 0 \\ 0 & -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |sI - A + B \cdot K| &= s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 \end{aligned}$$

$$s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 = s^3 + 31s^2 + 230s + 200 \quad \begin{cases} k_1 = 2 \cdot (31 - 3) = 56 \\ k_2 = (230 + 6)/4 = 59 \\ k_3 = (200 + 8)/8 = 26 \end{cases}$$



Assegnamento Poli - State Feedback



□ Risposta a Regime

- L'introduzione della matrice di guadagno K produce una modifica nell'andamento del transitorio del sistema; ovviamente tale influenza si viene a ripercuotere anche nell'andamento della risposta a regime

- Dal Teorema del Valore Finale:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A + B \cdot K)^{-1} B = -C(A - B \cdot K)^{-1} B$$

- L'errore a regime può quindi essere non nullo ed è dipendente dalla tipologia della FdT di anello aperto.
- si verifica facilmente che se la matrice A ha un autovalore nullo, grazie alla retroazione, oltre al transitorio desiderato è possibile anche avere errore nullo in risposta al segnale gradino in ingresso. Ovviamente tale risultato vale se sull'autovalore nullo entra il segnale di errore;
- se, al contrario, A non ha autovalori nulli, per poter avere un errore nullo in risposta al gradino è necessario inserire un integratore, in modo da operare sul segnale di errore (catena diretta).



Assegnamento Poli - State Feedback



❑ Introduzione di un comportamento integrale

- Nel caso in cui sia necessario un integratore (o più integratori), esso deve essere aggiunto prima della retroazione.
- Il sistema aumenta di dimensione di una variabile di stato per ogni integratore. Siccome si desidera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (r - y) = 0$$

- Il nuovo vettore di stato e sistema diventano:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}, z \end{bmatrix}^T = \left[\mathbf{x}, \int (r - y) \cdot dt \right]^T \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

- Il nuovo sistema risulta controllabile, se lo è la coppia (A, B)

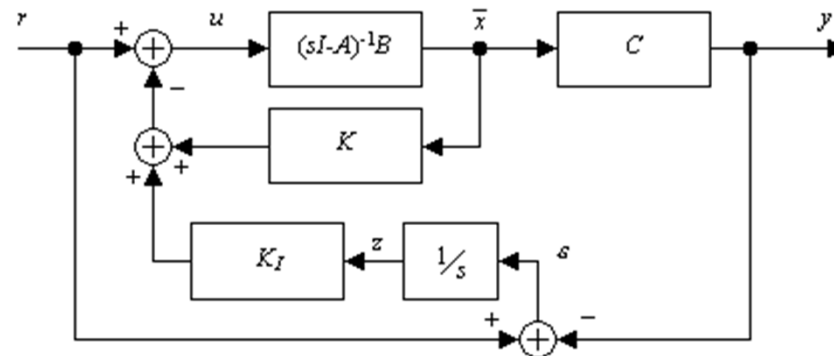
$$\mathcal{Rango}[\mathcal{B}] = \mathcal{Rango} \begin{bmatrix} B & AB & \dots \\ 0 & -CB & \dots \end{bmatrix} = n + 1$$



Assegnamento Poli - State Feedback

- Il controllore si può calcolare adesso in modo simile ai casi precedenti

$$u = -K \cdot \mathbf{x} - K_I z + r \quad u = -K \cdot \mathbf{x} + r - K_I \int \varepsilon \cdot dt = -K \cdot \mathbf{x} - K_I \int (r - y) \cdot dt + r$$



- Il sistema “aumentato” in ciclo chiuso è quindi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = (A - BK)\mathbf{x} - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \end{aligned}$$



Assegnamento Poli



□ **Esempio:** Dato il sistema instabile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Progettare un controllore a retroazione totale: $u = -K \cdot x + r$

Tale che:

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[\lambda_i] < 0 \\ \varepsilon_{step} = 0 \\ MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \end{cases}$$

- Il controllore deve fornire azione integrale e due poli dominanti come da Specifiche in transitorio, ovvero:

$$MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \Rightarrow \xi = 0.78, \omega_n = 1.0187 \text{ rad / sec} \quad p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$



Assegnamento Poli



- Introduzione di 1 integratore:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Poli in Ciclo Chiuso:

$$p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$

$$p_3 = -10$$

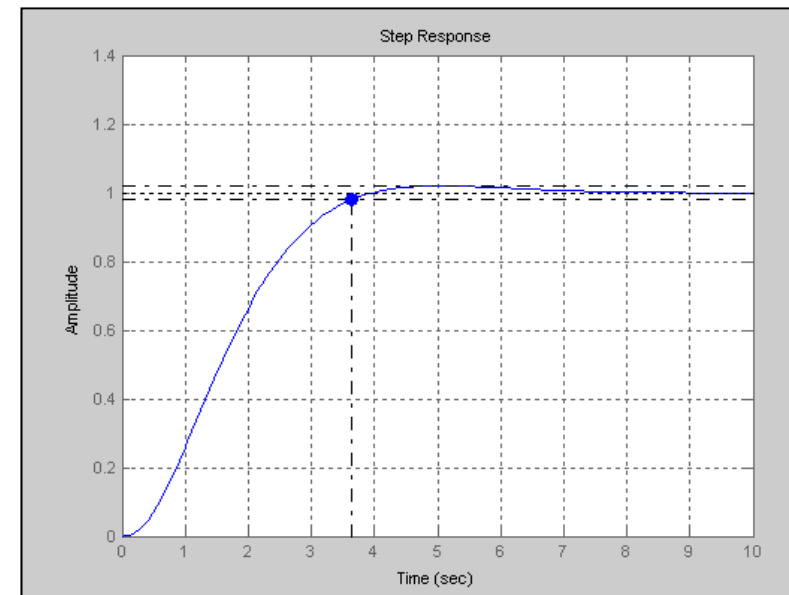
>> k=place(a,b1,p)

>> k = 29.5190 13.5892 -10.3780

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = (A - BK)\mathbf{x} - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\Rightarrow y' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix} r$$

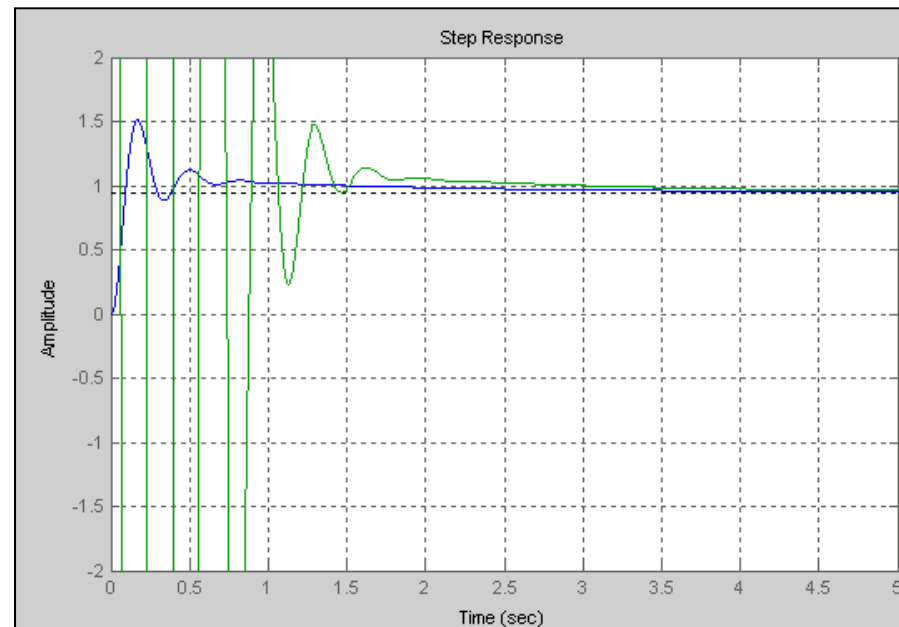
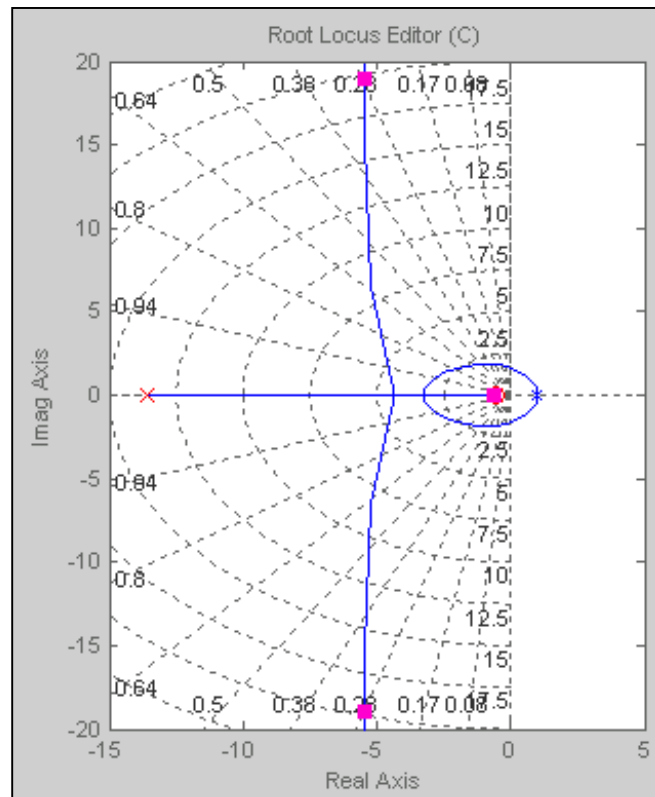




Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{17.93(s + 0.5788)}{(s + 13.5892)}$$

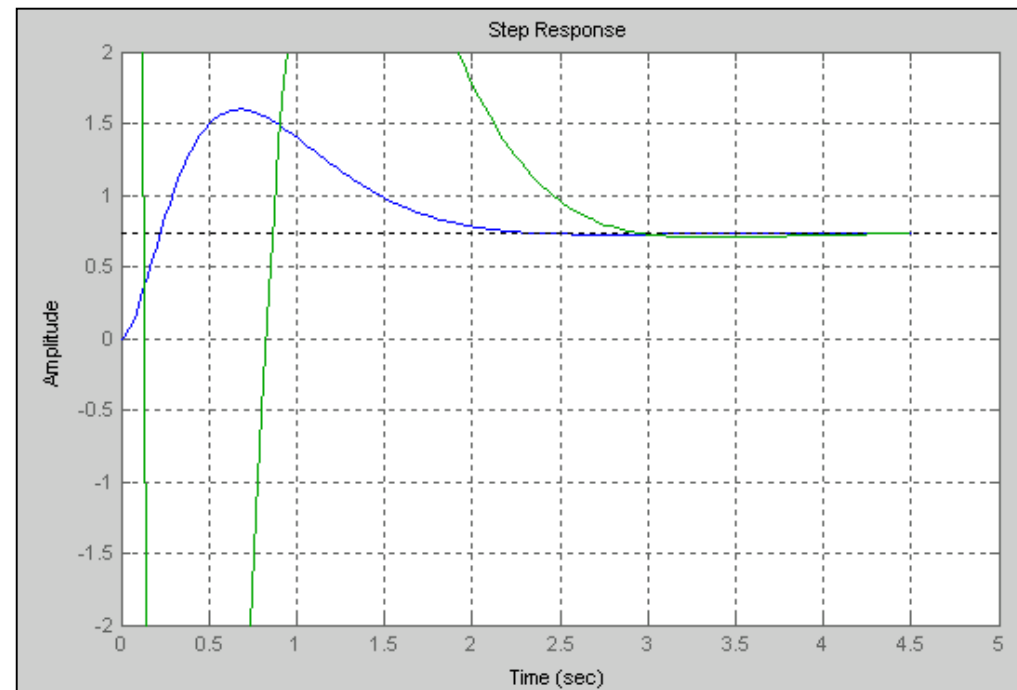
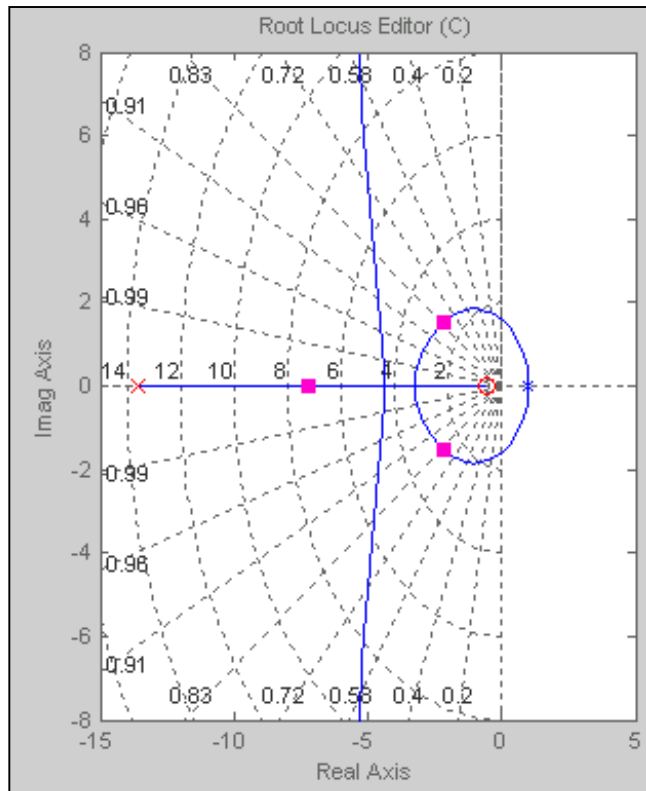




Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{k(s + 0.5788)}{(s + 13.5892)}$$

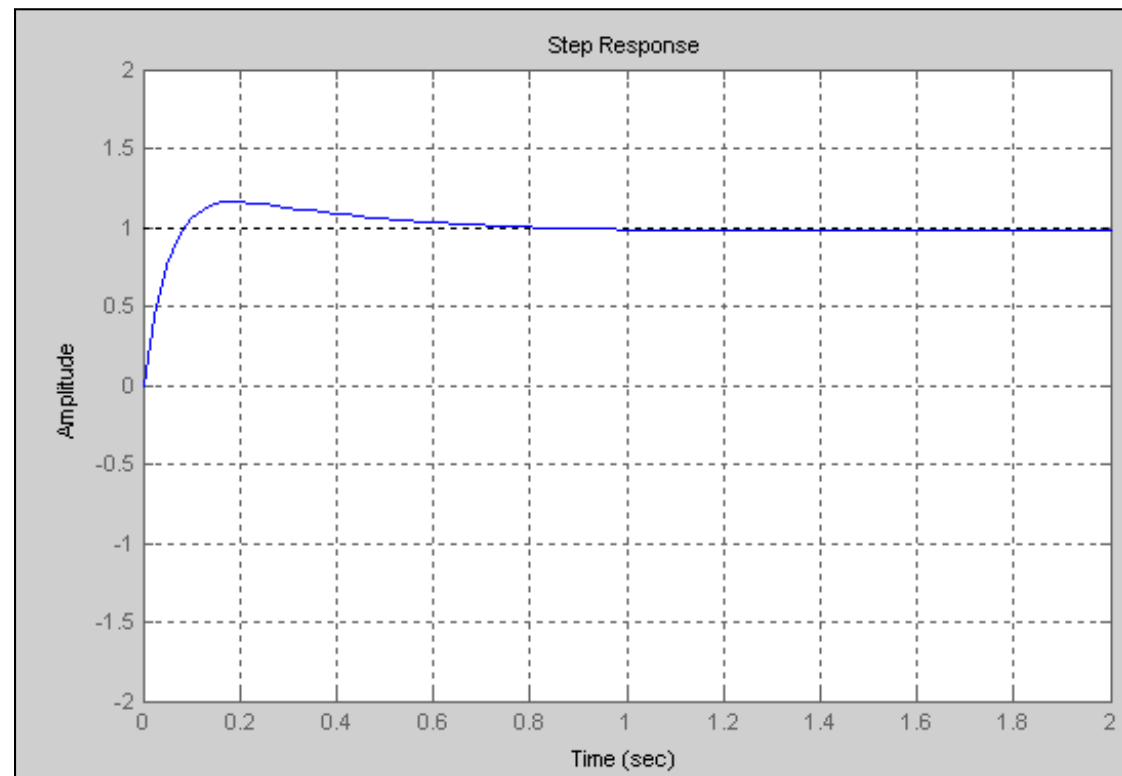
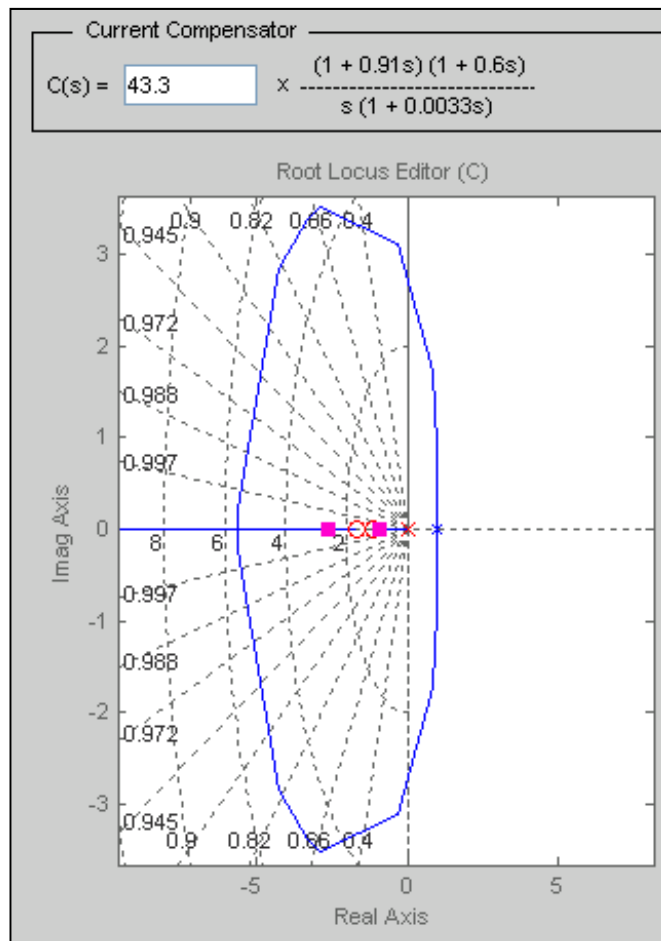




Assegnamento Poli

- Mediante Luogo delle Radici:

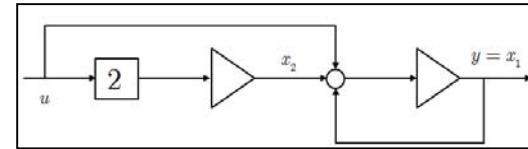
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)}$$



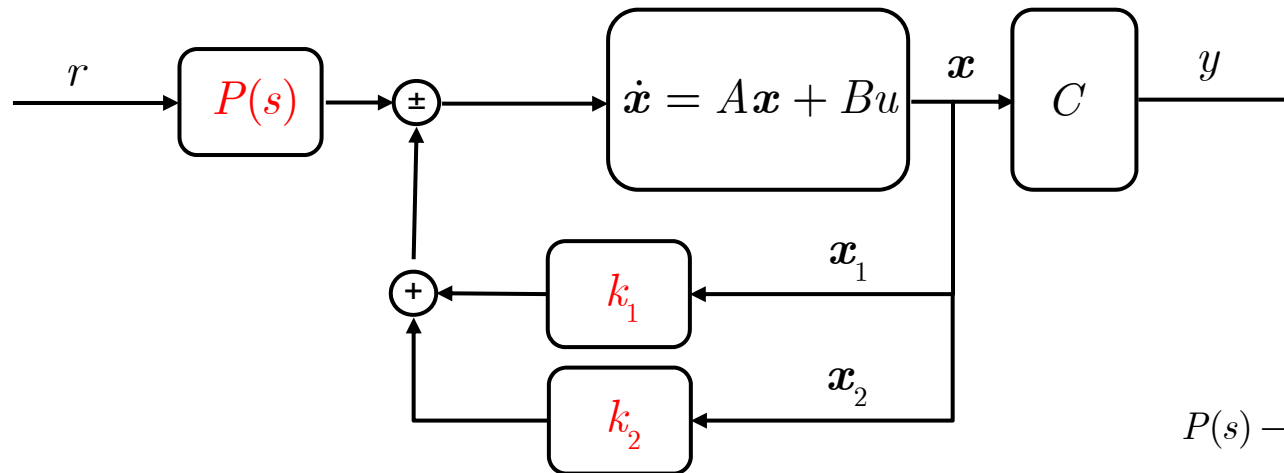


Assegnamento Poli

- Consideriamo l'esempio introduttivo:



$$G(s) = \frac{s-2}{s(s-1)}$$



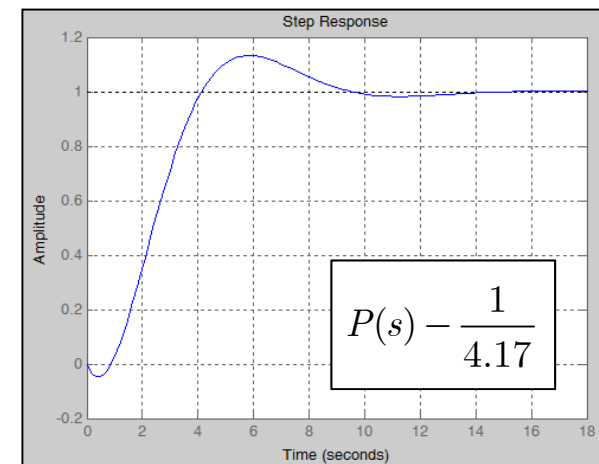
$$P(s) = \frac{1}{C[A_{CL}]^{-1}B}$$

$$\dot{x} = A_{CL}x + Br = \left\{ A - BK \right\} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 2.24 & -1 \\ 4.48 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = Cx$$

- Il valore di regime al gradino vale:

$$y_{SS} = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A_{CL})^{-1} B \frac{1}{s} = -C[A_{CL}]^{-1} B$$





Assegnamento Poli



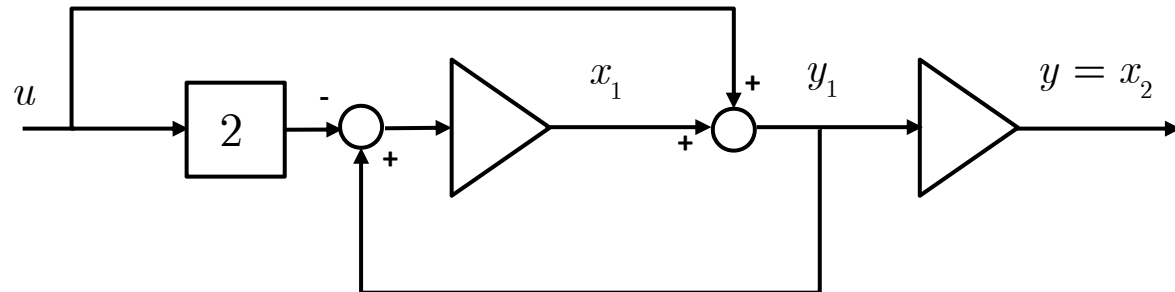
- Consideriamo la seguente realizzazione del sistema

$$\dot{x}_1 = y_1 - 2u$$

$$y_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = y_1$$

$$y = x_2$$



$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x = Cx$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s(s-1)}$$

$$A_{CL} = A - BK$$

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + 0.76\lambda + 0.48 = 0$$

```
>> astat
astat =
    1    0
    1    0
>> bstat
bstat =
   -1
    1
>> poles
poles =
-0.3800 + 0.5793i
-0.3800 - 0.5793i
>> kstat=place(astat, bstat, poles)
kstat =
-2.0000 -0.2400
```

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -0.24 \end{bmatrix}$$

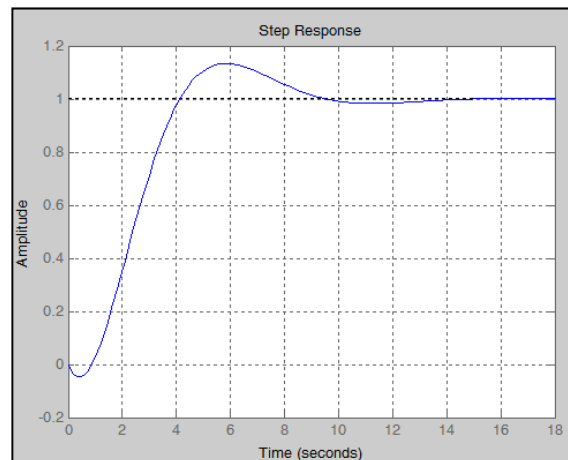
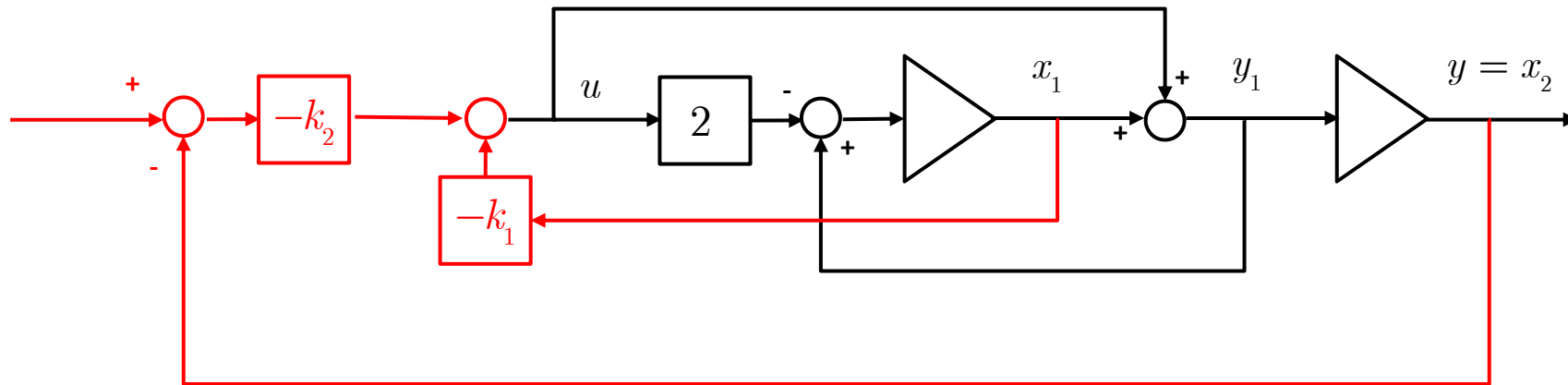


Assegnamento Poli

- Per evitare il prefiltro, la retroazione dell'integratore va fatta sulla dinamica dell'errore:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 x_1 - k_2 (r - y) = -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 r \\ &= -2x_1 + 0.24x_2 - 0.24r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.24 \\ +3 & +0.24 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} +0.24 \\ -0.24 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$





Esempio Harrier

- Equazioni del moto linearizzate intorno all'equilibrio HOVER

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 = ru_1 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi = u_1 - u_2\phi - mg\phi, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 + F_1\phi - mg = u_2 + u_1\phi \end{cases} \begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 - mg \end{cases}$$

- Rappresentazione nello spazio di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.2632 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} u$$

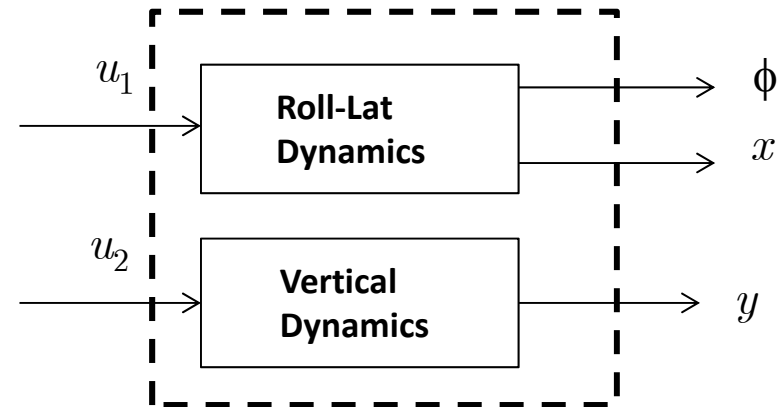
- **Nota:** Traslazione Laterale e Rotazione in Rollio sono disaccoppiate dalla Traslazione verticale.



Esempio Harrier

$$\dot{x} = Ax + Bu = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] u$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\phi} &= \{0, 0\} \\ \lambda_x &= \{0, -0.0125\} \\ \lambda_y &= \{0, -0.0125\} \end{aligned}$$



- I due sottosistemi sono controllabili, in quanto:

$$Rango[B_1, A_{11}B_1, A_{11}^2B_1, A_{11}^3B_1] = 4$$

$$Rango[B_2, A_{22}B_2] = 2$$

- Specifiche di Transitorio:

$$K_1 = [35.444, 4.3777, 4.6530, 7.7874]$$

$$K_2 = [8.0, 11.95]$$

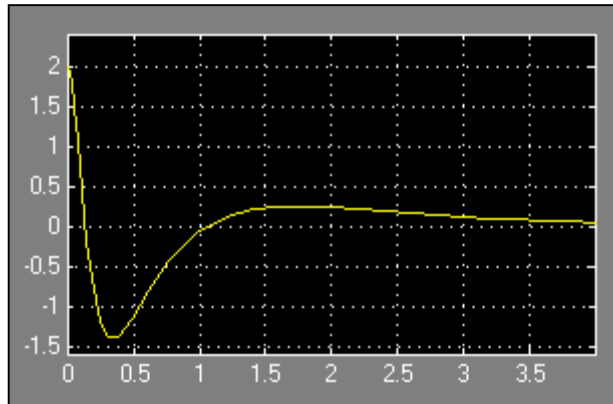
$$\lambda_{\phi DES} = \{-10, -12\}$$

$$\lambda_{x DES} = \{-1, -2\}$$

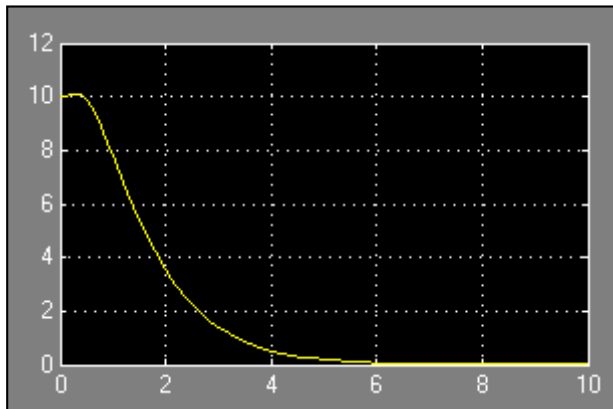
$$\lambda_{y DES} = \{-1, -2\}$$



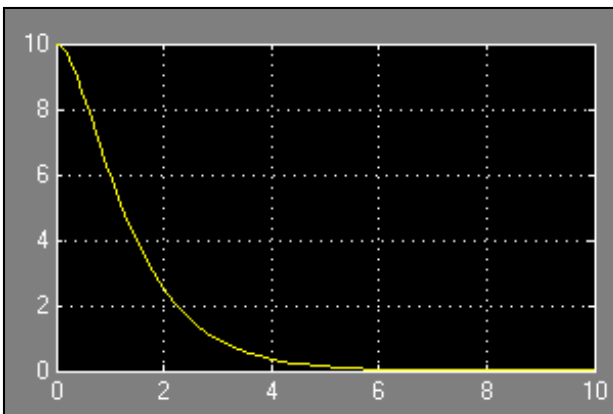
Esempio Harrier



Rollio



Traslazione Laterale



Traslazione verticale

- Simulazione della risposta del sistema ad un disturbo in condizioni iniziali dalla condizione di equilibrio di hover (0, 0, 0)

$$\phi_0 = 2 \text{ deg.}$$

$$x_0 = 10m.$$

$$y_0 = 10m.$$

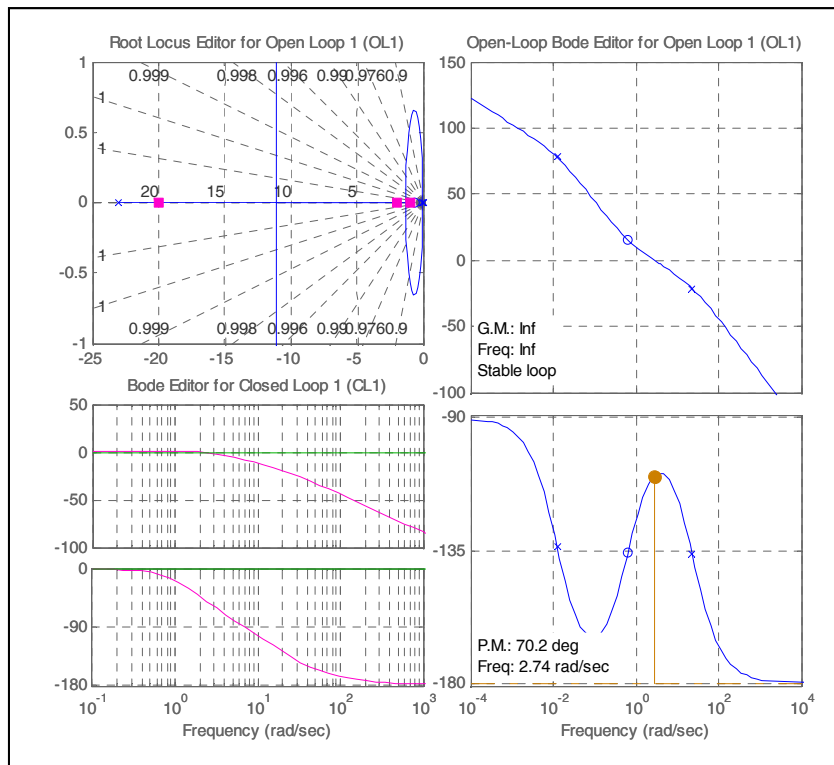


Esempio Harrier

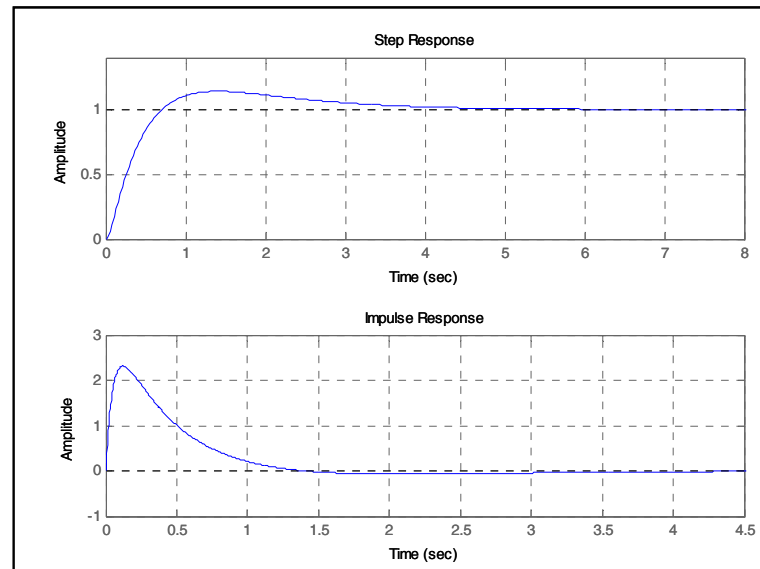
- Sintesi del controllore di traslazione verticale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -1, -2.
- Il controllore richiede uno zero a bassa frequenza ed un polo fuori banda

$$K(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = k(a_1 s + a_0) \cdot 0.25 + (b_1 s + b_0)(4s^2 + 0.05s)$$



$$K(s) = 246.8506 \frac{s + 0.6482}{s + 22.9875}$$





Esempio Harrier

- Sintesi del controllore di rollio e traslazione laterale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -10, -12 (rollio); -1, -2 (traslaz. Laterale)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{x}_{LAT} \\ \ddot{x}_{LAT} \end{bmatrix} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & -.0125 \end{array} \right] \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5.2632 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} u_1$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}$$

- Usando le partizioni di cui sopra, la dinamica di rollio è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\phi} = A_{11}\mathbf{x}_{\phi} + B_1u_1 \\ \phi = C_{11}\mathbf{x}_{\phi} \end{cases}, \phi(s) = \frac{5.2632}{s^2} u_1(s)$$

- Il controllo sul rollio è disaccoppiato dalla traslazione laterale (il viceversa non è vero):



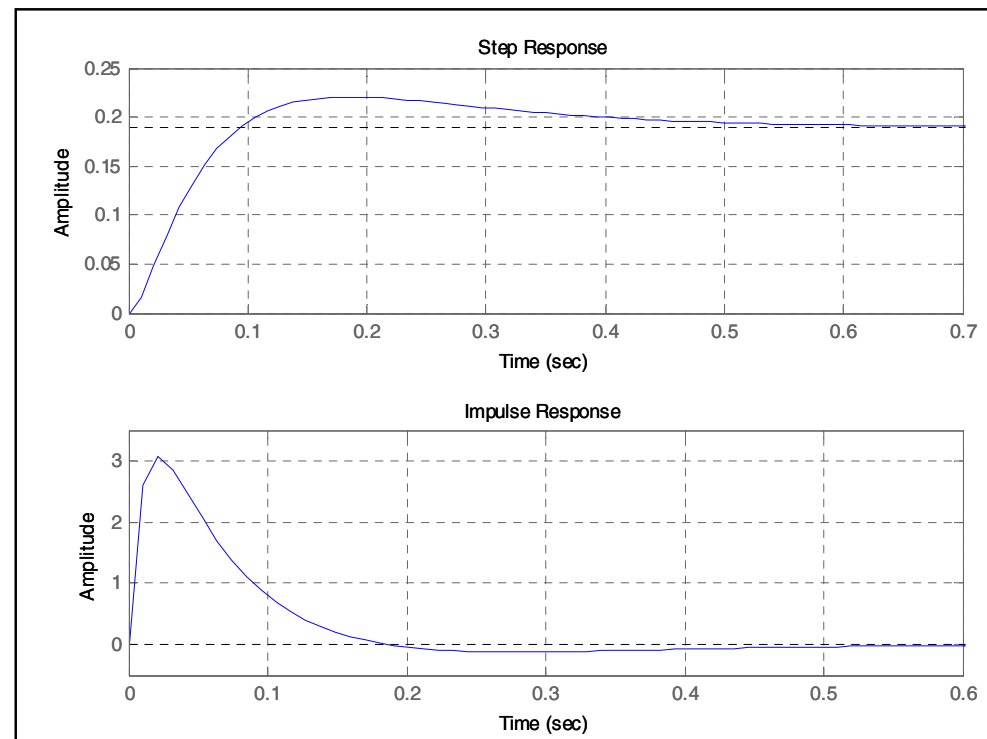
Esempio Harrier

- Dalle specifiche sull'allocazione dei poli in ciclo chiuso:

$$K_{\phi}(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = 5.2632k(a_1 s + a_0) + s^2(b_1 s + b_0) = (s + 10)(s + 12)(s + 100)$$

$$K_{\phi}(s) = 440.8 \frac{s + 5.1724}{s + 122} \Rightarrow$$
$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$

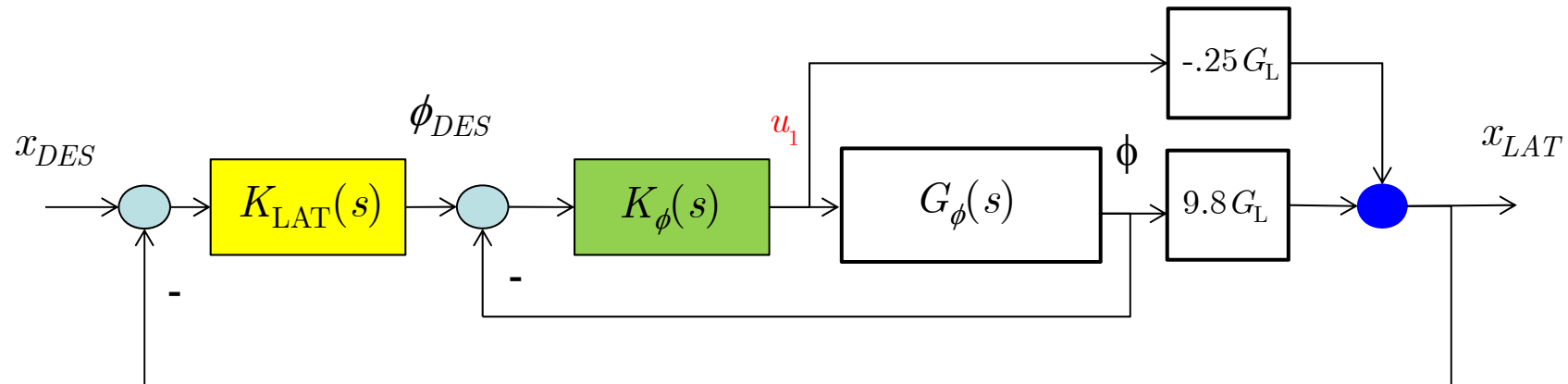




Esempio Harrier

- Il controllo sulla traslazione laterale non è disaccoppiato dal rollio:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{LAT} = A_{21} \mathbf{x}_{\phi} + A_{22} \mathbf{x}_{LAT} + B_2 u_1 \\ x_{LAT} = C_{22} \mathbf{x}_{LAT} \end{cases}, x_{LAT}(s) = \frac{1}{s(s + .0125)} [9.8\phi(s) - .25u_1(s)]$$



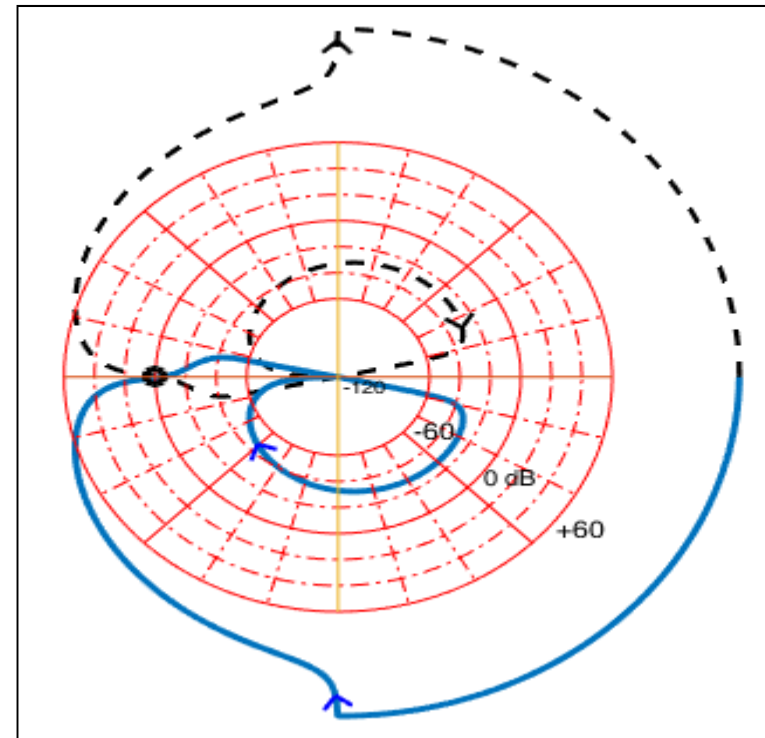
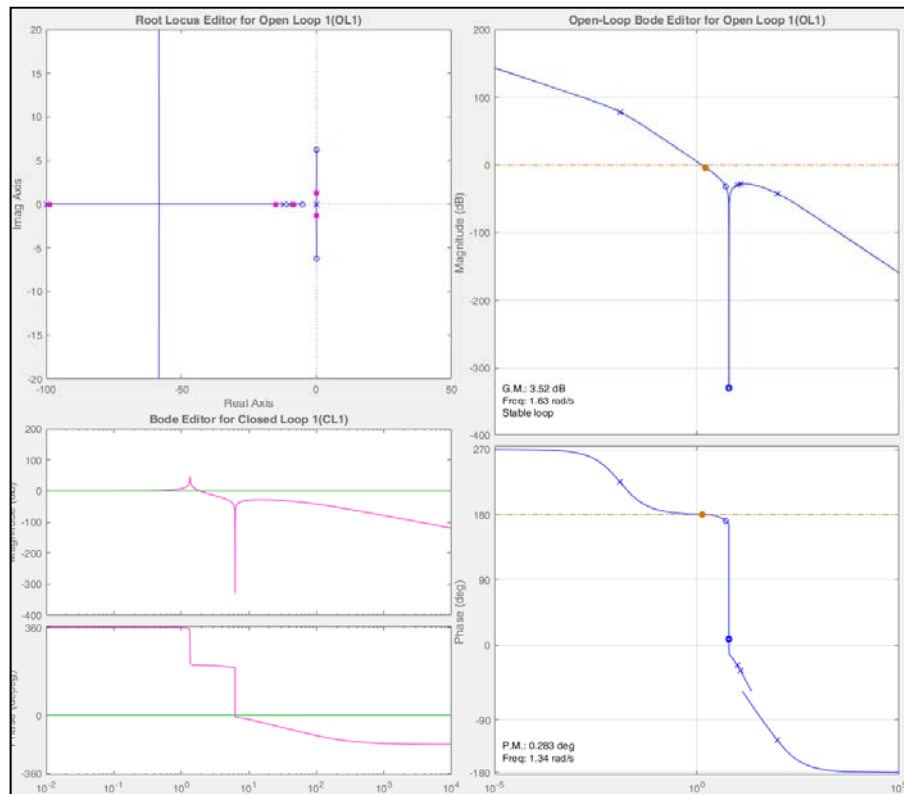
$$G_L(s) = \frac{1}{s(s + .0125)} \quad u_1(s) = \frac{K_{\phi}(s)}{1 + K_{\phi}(s)G_{\phi}(s)} [\phi_D(s) - \phi(s)]$$

$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$



Esempio Harrier

$$x_{LAT}(s) = \frac{110.2(s + 5.1724)(s^2 + 39.2)}{s(s + .0125)(s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000)} \phi_D(s)$$





Esempio Harrier



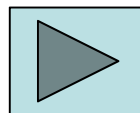
$$K_{LAT}(s) = k \frac{\prod_{i=1}^4 (s + z_i)}{\prod_{j=1}^4 (s + p_j)}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 100)^3$$

$$\begin{aligned} & (s^5 + 122s^4 + 2322s^3 + 12029s^2 + 150s)(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4) + \\ & k(110.2s^3 + 570s^2 + 4320s + 22340)(s + z_1)(s + z_2)(s + z_3)(s + z_4) = \\ & = (s + 1)(s + 2)(s + 100)^3 \end{aligned}$$



Il sistema in ciclo chiuso deve avere almeno 10 poli.



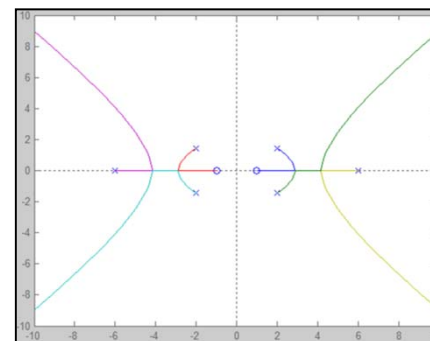
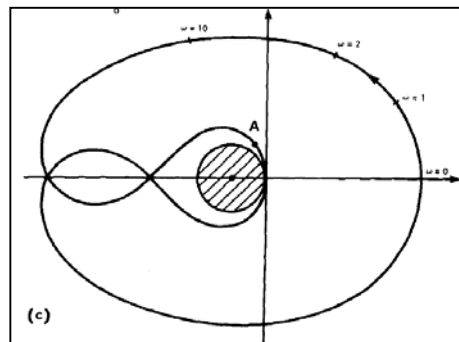


Note aggiuntive

- Assegnamento Poli permette di soddisfare i requisiti di progetto in termini di risposta transitoria e di regime (con modifica riguardo a integratori)
 - Con l'ipotesi di controllabilità, possiamo ottenere una matrice di guadagno K , tale che sia specificato univocamente uno spettro di autovalori asintoticamente stabili

□ Domande:

1. Esiste un legame tra assegnamento poli e risposta in frequenza? Possiamo definire la matrice di guadagno in modo da soddisfare il requisito di margini di stabilità?
2. Possiamo specificare un parametro nella matrice di guadagno in modo legarne la variazione con un andamento specifico dei poli in anello chiuso ovvero tracciarne un 'Luogo delle Radici'?



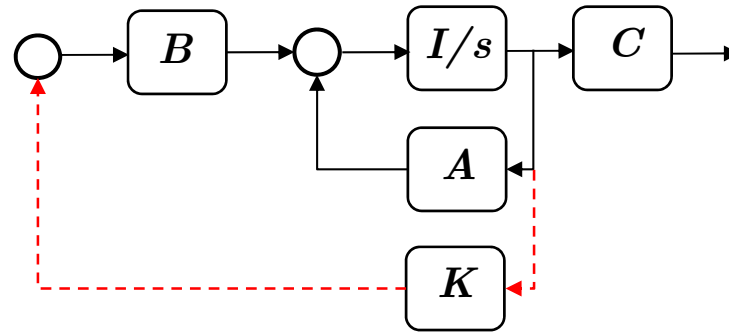


Note aggiuntive



□ Richiamo dalla teoria della stabilità di Lyapunov:

$$\operatorname{Re}\left[\lambda_i(A - BK)\right] < 0 \Leftrightarrow \exists P = P^T \geq 0, \forall Q = Q^T \geq 0 \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) + Q = 0$$



□ Ipotesi No. 1: Consideriamo un sistema SISO controllabile e osservabile, strettamente proprio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B u \\ y = C\mathbf{x} \\ y \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = -K\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \quad \begin{cases} B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ K \in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{cases}$$



Note aggiuntive



- Riscriviamo l'equazione di Lyapunov per il sistema in anello chiuso (asintoticamente stabile):

$$A^T P + PA + Q - K^T B^T P - PBK = 0$$

□ **Ipotesi No. 2:** Poniamo:
$$\begin{cases} K = K_c = \frac{1}{r} B^T P \Rightarrow K_c^T = \frac{1}{r} PB; r > 0 \\ Q = C^T C \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{r} PBB^T P - \frac{1}{r} PBB^T P = 0$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{2}{r} PBB^T P = 0$$

- definiamo:

$$r = \frac{\rho}{2} > 0 \Rightarrow A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{\rho} PBB^T P = 0 \quad (2)$$

- (2) Prende il nome di: Equazione algebrica di Riccati (ARE), la quale ammette un'unica soluzione P , positiva (semi)definita, per ogni Q positiva (semi)definita



Note aggiuntive

- **Nota:** Le Funzioni di Trasferimento di interesse nell'analisi in frequenza sono:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT del Sistema}$$

$$L(s) = K_c(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT di Anello}$$

- **Obiettivo:** Riscrivere (2) come funzione di $G(s)$ e $L(s)$

- Dalla definizione di K_c risulta:

$$\frac{PBB^T P}{\rho} = K^T \rho K$$

- ARE (2) diventa:

$$A^T P + PA + C^T C - K^T \rho K = 0$$

- Aggiungere il termine nullo $-Ps + Ps$

$$-Ps + Ps + A^T P + PA + C^T C - K^T \rho K = 0$$

$$-A^T P - PA - C^T C + K^T \rho K - Ps + Ps = 0$$



Note aggiuntive



$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c = C^T C \quad (3)$$

- Premoltiplicare e postmoltiplicare ambo i membri di (3) rispettivamente per $\frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1}$ e $(sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ C^T C \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$

- Moltiplicare tutti i termini. Sostituendo i valori:

$$\begin{aligned} PB &= K_c^T \rho \\ B^T P &= \rho K_c \end{aligned}$$



Note aggiuntive



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (4)$$

- Consideriamo la relazione:

$$\left[1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] \quad (5)$$

- Eeguire la trasposta e moltiplicare ambo i membri:

$$\begin{aligned} (5) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$



Note aggiuntive



- Risulta quindi:

(5) = primo membro di (4) + 1 \rightarrow (5) = secondo membro di (4) + 1

$$\begin{aligned} & \left[1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] = \quad (6) \\ & = 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$

- **Definizione:** Data una matrice di variabile complessa $A(s=j\omega)$, essa si dice Hermitiana se

$$A(s) = A^*(s) = A^T(-s)$$

- Dalla definizione: LHS di (6) è Hermitiana, RHS di (6) ha la forma $1 + H^*(j\omega)QH(j\omega) \geq 1$

$$L(s) = K_c (sI - A)^{-1} B$$

$$L^T(-s) = L^*(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$G^T(-s) = G^*(s)$$

$$\left[1 + K_c (-sI - A)^{-1} B \right]^T \left[1 + K_c (sI - A)^{-1} B \right] \geq 1$$

- **Disuguaglianza di Kalman**



Note aggiuntive

- Riprendiamo la disuguaglianza di Kalman:

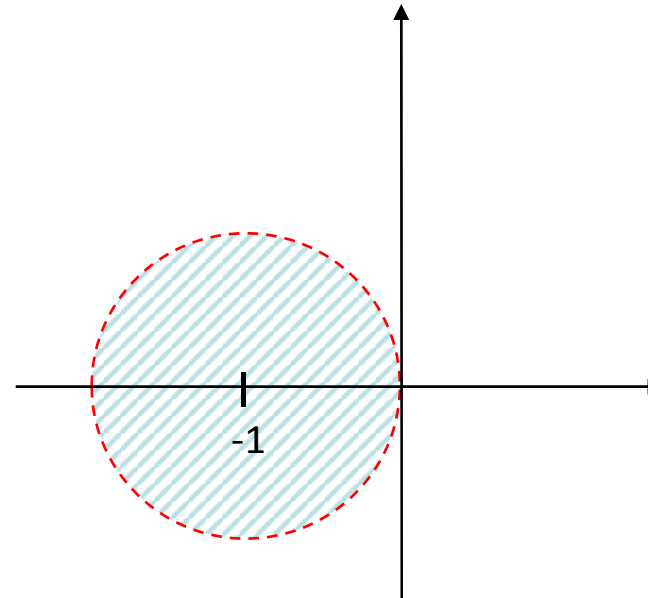
$$\left[1 + K_c(-j\omega I - A)^{-1}B\right]^T \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$\left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right]^* \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$[1 + L(s)]^* [1 + L(s)] \geq 1$$

$$|1 + L(s)|^2 \geq 1$$

$|1 + L(s)| \geq 1$



- La FdT di anello $L(s)$ non può essere all'interno del cerchio di raggio unitario, con origine nel punto critico

$$[1 + L(s)]^* [1 + L(s)] = 1 + G^*(s)G(s) \geq 1$$

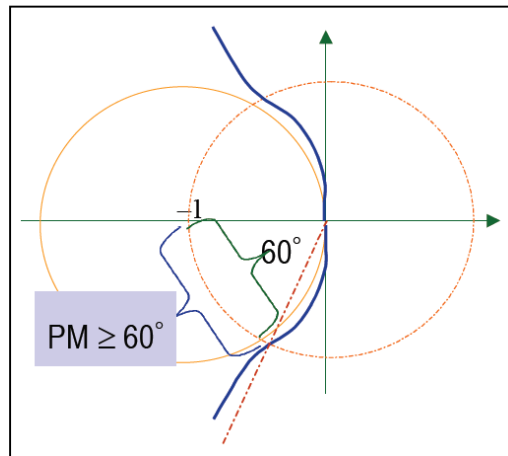


Note aggiuntive

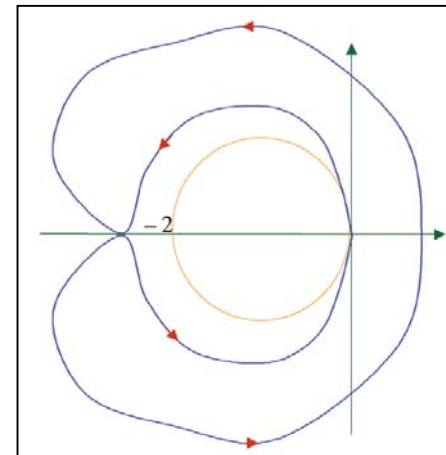
□ Interpretazione mediante il Criterio di Nyquist:

$$|1 + L(s)| \geq 1$$

- Essendo il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile per costruzione, $Z = 0$
- Indipendentemente dal numero di poli instabili in anello aperto, si ha ***sempre*** $N = -P$



- Il Margine di Fase non può essere minore di $\pm 60^\circ$



- Il Margine di Guadagno è compreso tra 0.5 (-6 dB) e ∞



Note aggiuntive

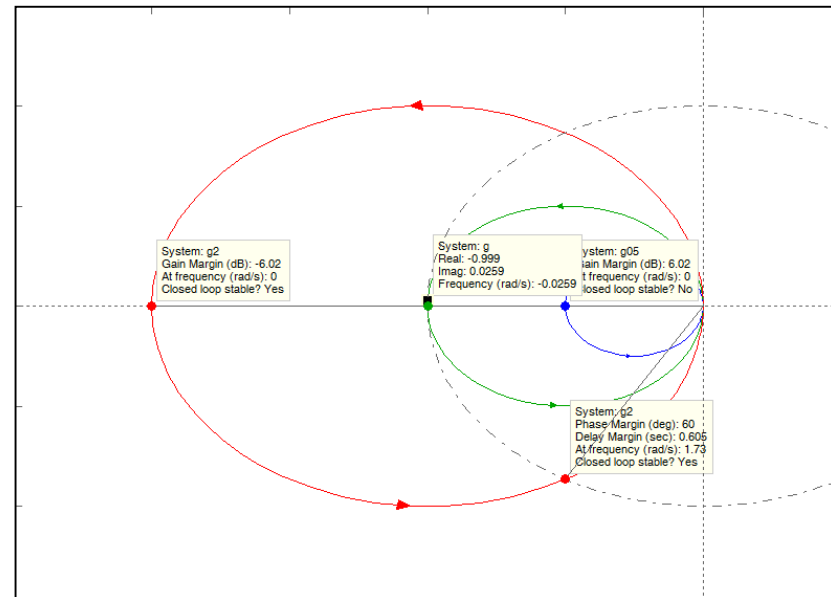
- Dato il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso
- $$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_c)x \\ K_c = \frac{1}{r} B^T P \end{cases}$$
- **Domanda:** Esiste un andamento prefissato dei poli in anello chiuso al variare del parametro r , con $0 < r < \infty$?

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso per ogni guadagno maggiore di 1 (vedi Luogo delle Radici)

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - k)x \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema può essere anche stabilizzato mediante state feedback $u = -kx$





Note aggiuntive

□ Consideriamo la retroazione dello stato con matrice di guadagno scelta precedentemente

$$\begin{cases} k = \frac{1}{r} B^T P = \frac{p}{r} \\ \dot{x} = \left(1 - \frac{p}{r}\right)x \end{cases} \quad \begin{cases} A^T P + P A + C^T C - \frac{1}{r} P B B^T P = 0 \\ p + p + 1 - \frac{p^2}{r} = 0 \quad 0 < r < \infty \end{cases} \quad (2)$$

- Risolviamo (2) per $p > 0$ $p^2 - 2rp - 1 = 0$

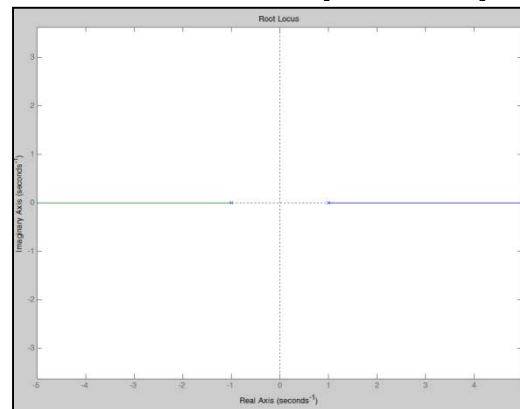
$$p = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 + r} \Rightarrow r + \sqrt{r^2 + r}$$

- Il sistema in anello chiuso diventa:

$$\dot{x} = (A - BK_c)x = \left[1 - \frac{1}{r} \left(r + \sqrt{r^2 + r}\right)\right] x \Rightarrow \dot{x} = \left[-\sqrt{1 + \frac{1}{r}}\right] x$$

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow -1 \end{cases}$$





Note aggiuntive



- Possiamo generalizzare il risultato precedente introducendo la seguente matrice:

$$H = \left[\begin{array}{c|c} A & -\frac{BB^T}{r} \\ \hline -C^T C & -A^T \end{array} \right], H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

- **Teorema:** ARE ha una unica soluzione positiva (semi)definita, se e solo se la matrice H non ha autovalori sull'asse immaginario.

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{PBB^T P}{r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{i=1..n}^{i=1..n}(H) = \sigma_i + j\omega_i, \sigma_i \neq 0$$

- **Corollario:** Gli autovalori di H sono $2n$ e sono simmetrici rispetto all'asse immaginario: se λ è un autovalore, così lo è $-\lambda$.
- Con i risultati precedenti, si può dimostrare che gli autovalori di $(A - BK_c)$ sono gli autovalori stabili di H . Usando le proprietà del determinante:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array} \right] = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D)$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det[(sI + A^T) - C^T C(sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T]$$



Note aggiuntive



- Scomponendo ulteriormente:

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det(sI + A^T) \cdot \det\left[1 - C^T C (sI - A)^{-1} \frac{1}{r} B B^T (sI + A^T)^{-1}\right]$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot (-1)^n \cdot \det(-sI - A) \cdot \det\left[1 + \frac{1}{r} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B\right]$$

- Definiamo:
 $\det(sI - H) = \Phi_{CL}(s) \Phi_{CL}(-s)$
 $\det(sI - A) = \Phi_{OL}(s)$
 $G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{\Psi_{OL}(s)}{\Phi_{OL}(s)}$

- La relazione tra i poli in ciclo aperto ed in ciclo chiuso è quindi:

$$\Phi_{CL}(s) \Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s) \Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r} \Psi_{OL}(s) \Psi_{OL}(-s) = 0$$

- I poli in ciclo chiuso del sistema sono i poli stabili che annullano $\det(sI - H)$ ovvero:

$$1 + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{OL}(s) \Psi_{OL}(-s)}{\Phi_{OL}(s) \Phi_{OL}(-s)} = 0$$

- e variano con il parametro r .

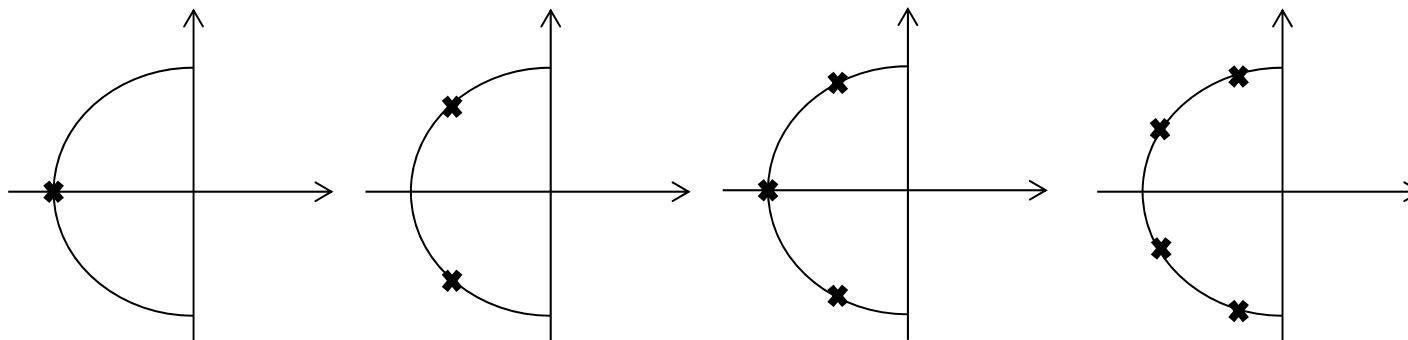


Note Addizionali

❑ Considerazioni al variare del parametro r

$$\Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r}\Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s) = 0$$

- Nel caso $r \rightarrow \infty$, i poli in ciclo chiuso approssimano i poli stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare dei poli instabili in ciclo aperto
- Nel caso $r \rightarrow 0$, i poli in ciclo chiuso approssimano gli zeri stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare degli zeri instabili in ciclo aperto
- Se il sistema è strettamente proprio, i rimanenti poli tendono a $-\infty$ in direzioni asintotiche predefinite (direzioni Butterworth) in funzione di n .





Note Addizionali



□ Luogo delle Radici Simmetrico

$$1 + \frac{1}{r} G(s)G(-s) = 0$$

- **Uso delle variabili di stato per determinare $G(-s)$**

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(-s) = C^T(sI - A^T)^{-1}B^T = C(-sI - A)^{-1}B = C[-(sI + A)]^{-1}B$$

$$G(s) \Rightarrow [C, A, B]$$

$$G(-s) \Rightarrow [C^T, A^T, B^T] = [C, -A, -B]$$

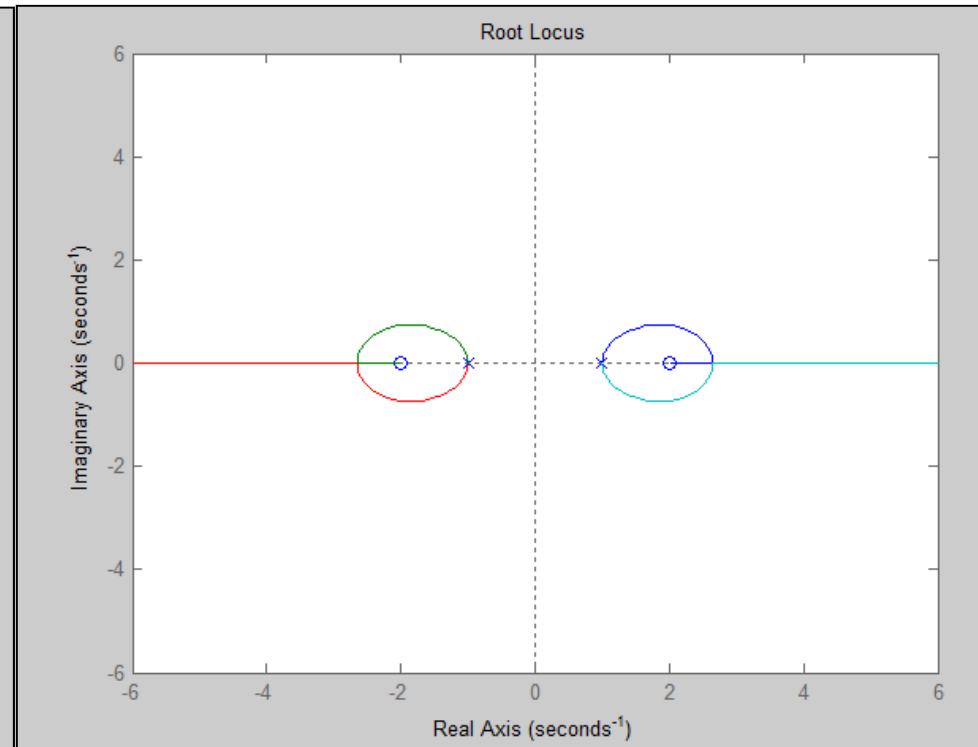
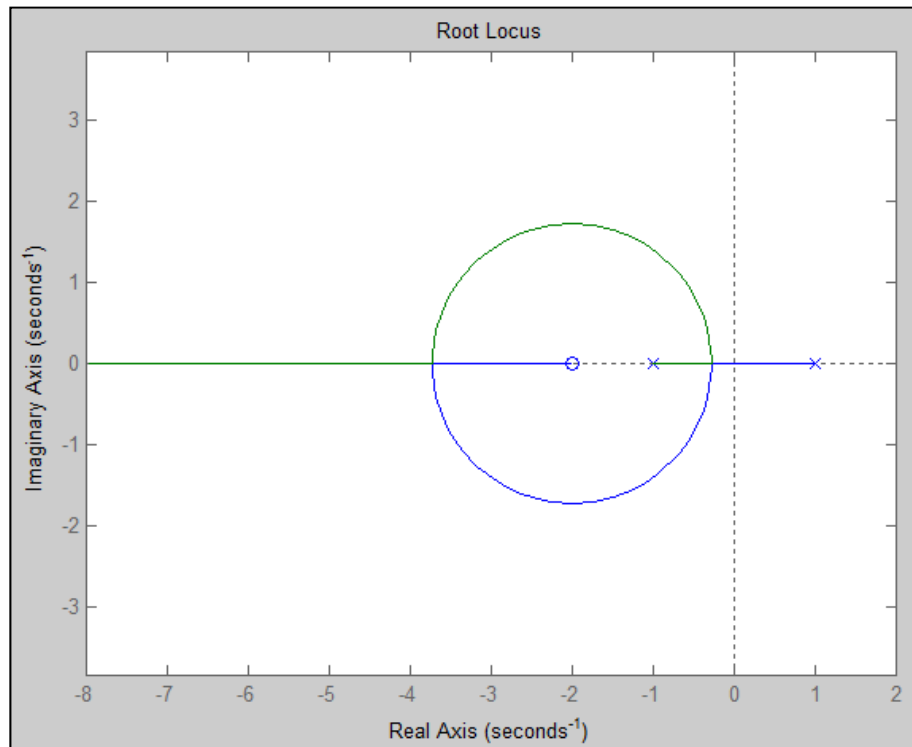
- **Implementazione Matlab**

```
Gs=zpk([numroots],[denroots],gain);  
[a,b,c,d]=ssdata(Gs);  
Gms=zpk(ss(-a,-b,c,d));  
rlocus(Gs*Gms);  
axis equal;
```



Note Addizionali

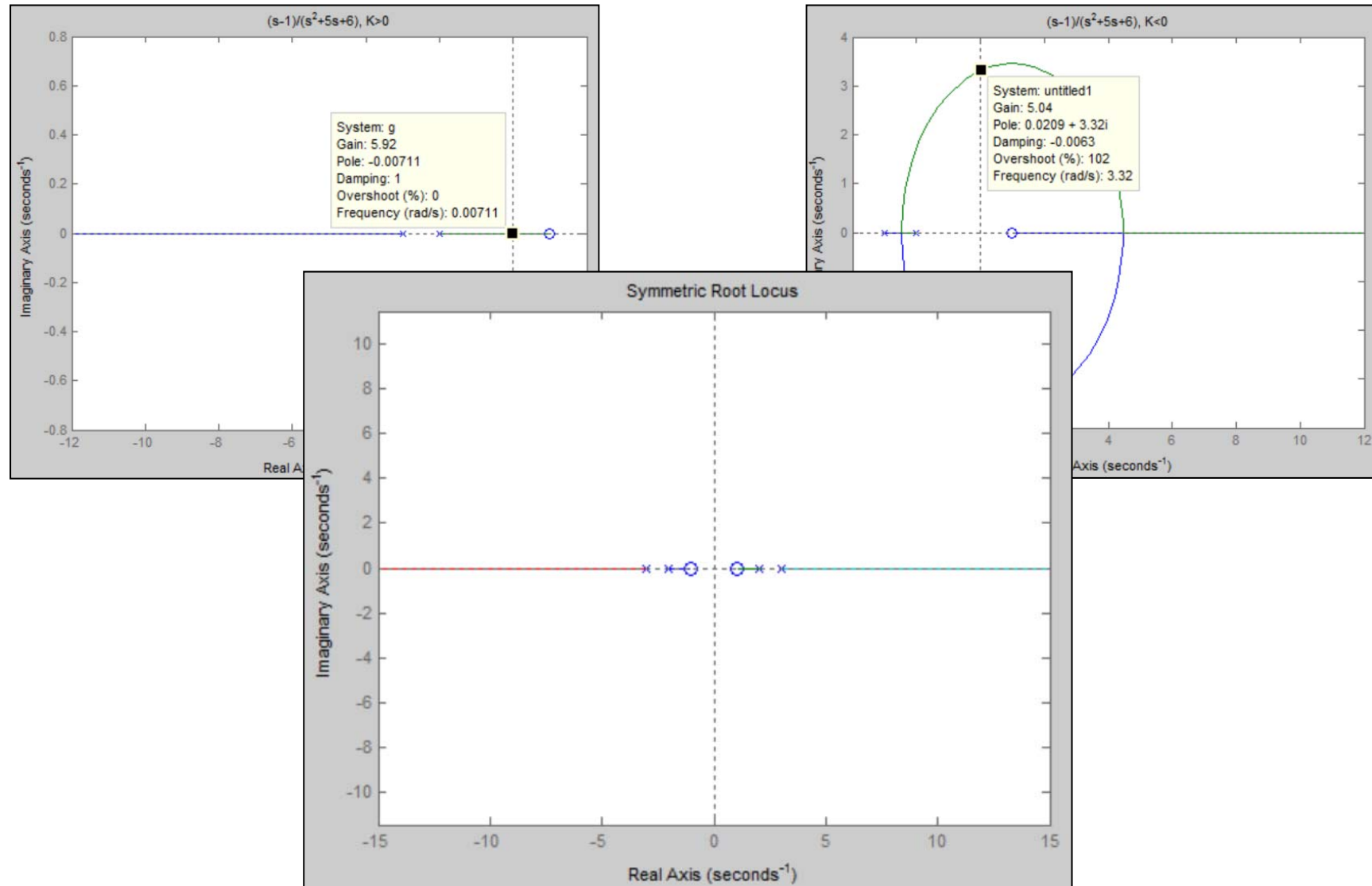
Esempio $G(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$





Note Addizionali

Esempio $G(s) = \frac{s-1}{s^2+5s+6}$





Note Addizionali



$$r = 0.001, P = \begin{bmatrix} 0.0668 & 0.0566 \\ 0.0566 & 2.0616 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 66.7578 & 56.6190 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -71.7578 & -62.6190 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -70.8743 \\ -0.8835 \end{bmatrix}$$

$$r = 0.1, P = \begin{bmatrix} 0.1047 & 0.0782 \\ 0.0782 & 2.1012 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 1.0969 & 0.7823 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -6.0469 & -6.7823 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -4.5593 \\ -1.4876 \end{bmatrix}$$

$$r = 1, P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \\ 0.0828 & 2.1147 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.1152 & -6.0828 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.2348 \\ -1.8804 \end{bmatrix}$$

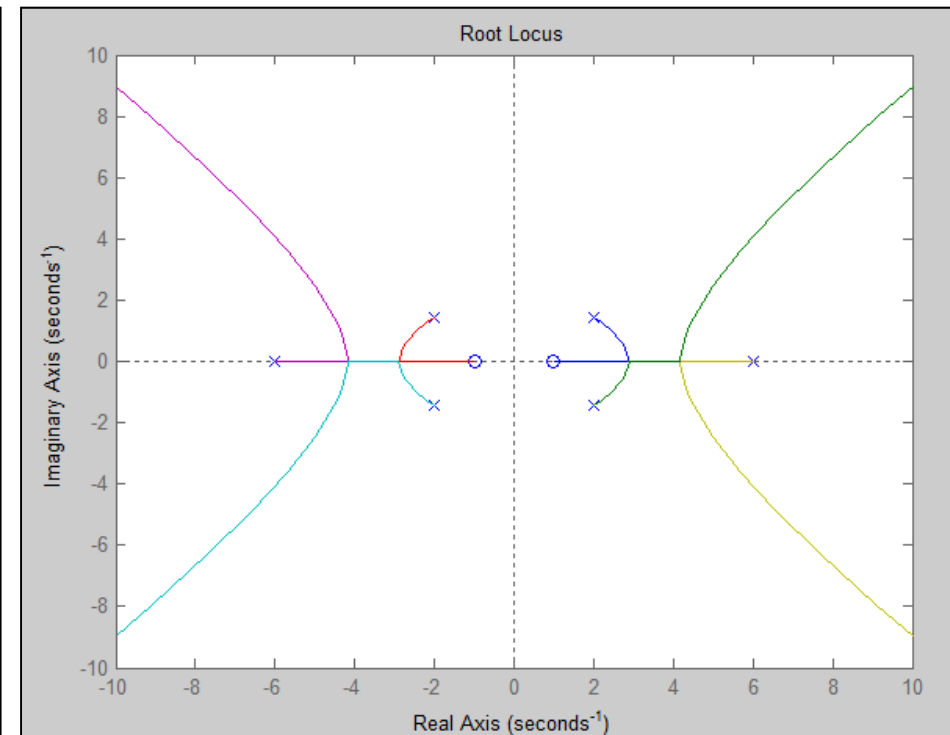
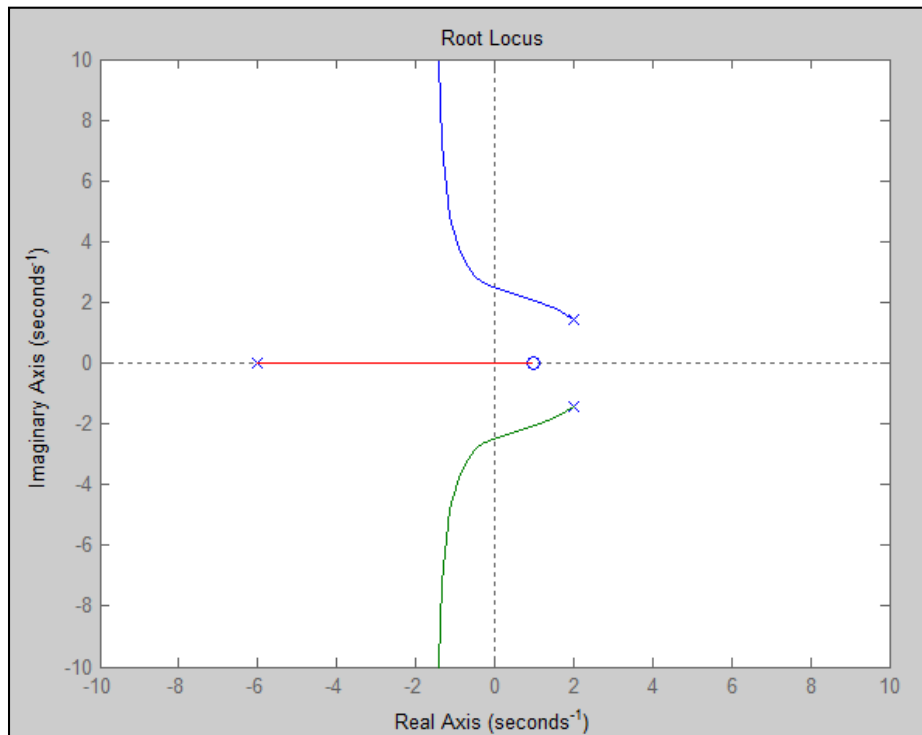
$$r = 10, P = \begin{bmatrix} 0.1165 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1165 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0117 & 0.0083 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0117 & -6.0083 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0262 \\ -1.9854 \end{bmatrix}$$

$$r = 100, P = \begin{bmatrix} 0.1167 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1166 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0008 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0012 & -6.0008 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0027 \\ -1.9985 \end{bmatrix}$$



Note Addizionali

Esempio $G(s) = \frac{s - 1}{(s + 6)(s^2 - 4s + 6)}$



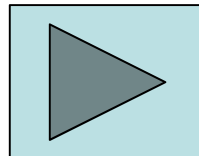


Note Addizionali



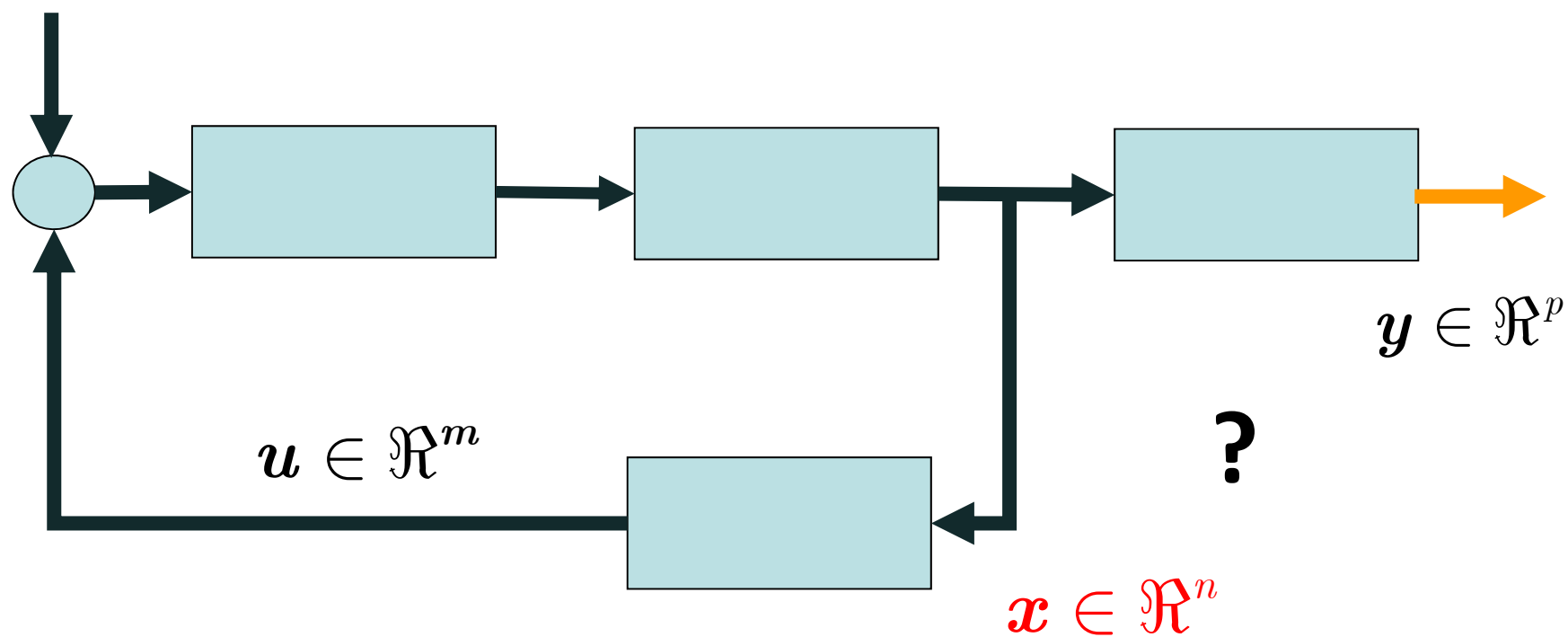
☐ Sommario

1. Dato un sistema controllabile, esso può essere stabilizzato mediante retroazione statica dello stato, in modo da garantire un comportamento desiderato in transitorio.
2. La soluzione fornisce un'unica matrice di guadagno soltanto nel caso di sistemi a singolo ingresso, altrimenti la soluzione non è univoca.
3. Rilassando il vincolo di assegnazione, è possibile calcolare una matrice di guadagno che soddisfi ampi margini di stabilità. La matrice di guadagno deve in tal caso soddisfare una particolare struttura che richiede la soluzione di una equazione algebrica matriciale chiamata equazione di Riccati e produce la disuguaglianza di Kalman.
4. Nel caso di sistemi a singolo ingresso controllabili ed osservabili è anche possibile la matrice di guadagno come funzione di un parametro positivo che varia tra 0 e ∞ . In tal caso, lo spettro dei poli in ciclo chiuso è fornito da un luogo chiamato Luogo delle Radici Simmetrico.





Problema nella Retroazione Totale





Assegnamento Poli - Osservatore



- ❑ In molte situazioni un sistema non ha disponibile, per assenza di un numero sufficiente di sensori, il vettore di stato per la retroazione.
 - In questo caso, è possibile ricostruire lo stato in modo asintotico ed in assenza di segnali probabilistici, attraverso il progetto di un osservatore dinamico.
 - La possibilità di tale ricostruzione (stima), a partire dalla conoscenza di ingresso ed uscita del sistema, è assicurata dall'osservabilità del vettore di stato che viene sfruttata dagli *stimatori* (o *osservatori*) *dello stato*; lo stimatore è un sistema dinamico capace di fornire una stima del vettore di stato della parte osservabile del sistema
 - Si definisce asintotico lo stimatore tale che, pur avendo stato iniziale diverso dallo stato del sistema soggetto a stima, in assenza di disturbi, tende asintoticamente ad esso in modo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi - x) = 0$$

- x è il vettore delle variabili di stato
- ξ è il vettore di stato stimato dall'osservatore



Assegnamento Poli - Osservatore



Observers for Multivariable Systems

D. G. LUENBERGER, MEMBER, IEEE

Abstract—Often in control design it is necessary to construct estimates of state variables which are not available by direct measurement. If a system is linear, its state vector can be approximately reconstructed by building an observer which is itself a linear system driven by the available outputs and inputs of the original system. The state vector of an n th order system with m independent outputs can be reconstructed with an observer of order $n - m$.

In this paper it is shown that the design of an observer for a system with M outputs can be reduced to the design of m separate observers for single-output subsystems. This result is a consequence of a special canonical form developed in the paper for multiple-output systems.

In the special case of reconstruction of a single linear functional of the unknown state vector, it is shown that a great reduction in observer complexity is often possible.

Finally, the application of observers to control design is investigated. It is shown that an observer's estimate of the system state vector can be used in place of the actual state vector in linear or nonlinear feedback designs without loss of stability.



David Luenberger

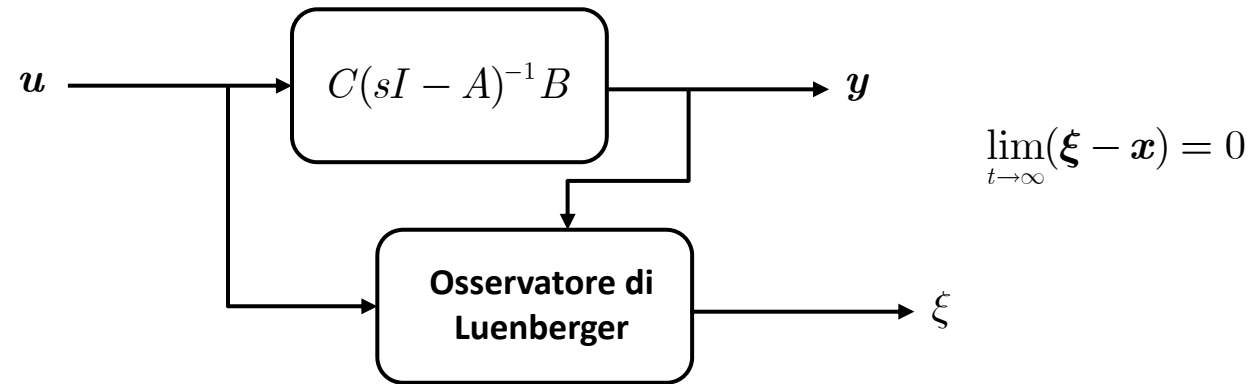
PROFESSOR OF MANAGEMENT SCIENCE AND ENGINEERING, EMERITUS



Assegnamento Poli - Osservatore

□ Osservatore di Luenberger

- L'osservatore di Luenberger è uno stimatore di ordine intero che, utilizzando i vettori di ingresso e di uscita, riesce a fornire la stima asintotica dello stato.



- Lo stimatore può essere visto come un sistema i cui ingressi sono dati dall'ingresso e dall'uscita del sistema in esame e l'uscita coincide con il suo vettore di stato; riportando il suo andamento nella forma i-s-u si ha:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, & \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{y} = \xi \end{cases}$$



Assegnamento Poli - Osservatore



□ Struttura dell'osservatore

- L'impianto da controllare e l'errore di stima sono dati da:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \quad \varepsilon = \xi - x$$

- La dinamica dell'errore vale quindi:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\xi} - \dot{x} = F\xi + Gu + Hy - Ax - Bu = \\ &= F(\varepsilon + x) + Gu + HCx - Ax - Bu = \\ &= F\varepsilon + (F - A + HC)x + (G - B)u \end{aligned}$$

- Affinché $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi - x) = 0$ si deve avere:
 - $G = B$
 - $F = A - HC$
 - Gli autovalori di F devono essere a parte reale strettamente negativa



Assegnamento Poli - Osservatore



- Le condizioni precedenti devono permettere che l'errore tra stato e stato stimato si annulli asintoticamente a partire da qualsiasi condizione iniziale

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

- Se gli autovalori della matrice $F = A - HC$ sono a parte reale strettamente negativa, l'errore tende a zero per qualunque suo valore iniziale:

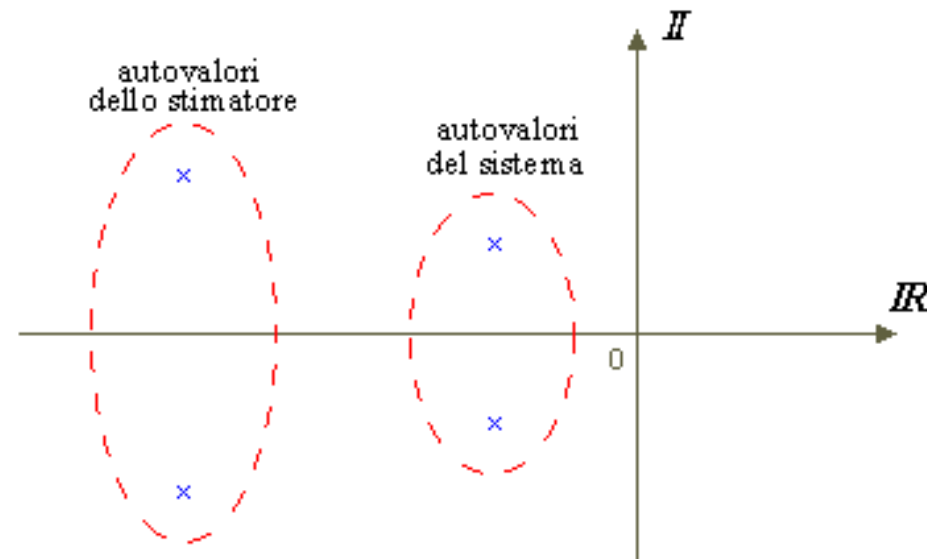
$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon(t) = e^{(A-HC)t} \varepsilon_0$$

- Si deve quindi scegliere la matrice H (guadagno dell'osservatore) opportunamente in modo da rendere F una matrice di stabilità.
- NOTA:** gli autovalori di $(A - HC)$ sono gli stessi di $(A - HC)^T = (A^T - C^T H^T)$, se la coppia (A, C) è osservabile, come da ipotesi, la coppia (A^T, C^T) è controllabile per cui, l'opportuna scelta della matrice H permette di soddisfare tutte le specifiche richieste, mediante un assegnamento poli standard



Assegnamento Poli - Osservatore

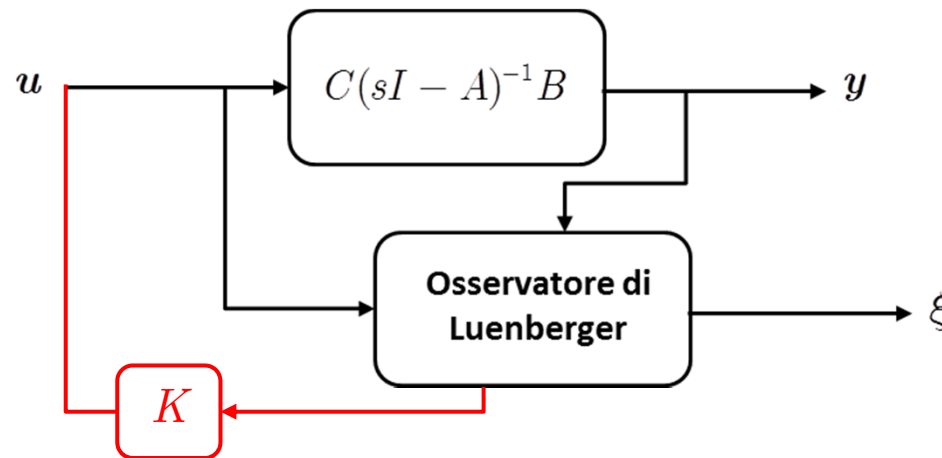
- I poli dell'osservatore devono seguire requisiti generali di progetto:
 - Devono essere a parte reale negativa
 - Devono rendere la banda passante dell'osservatore larga abbastanza in modo che esso sia a regime, quando il controllore inizia ad operare.





Assegnamento Poli - Osservatore

- Schema completo:



- Impianto da controllare $\dot{x} = Ax + Bu$
- Osservatore di Luenberger $\dot{\xi} = (A - HC)\xi + Bu + Hy = A\xi + Bu + H(y - C\xi)$
- Dinamica dell'errore di stima dello stato $\dot{\epsilon} = (A - HC)\epsilon$
- Legge di Controllo $u = r - K\xi$



Assegnamento Poli - Osservatore



□ Principio di Separazione

- Il sistema completo include la dinamica dell'osservatore oltre che la dinamica del processo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(r - K\xi) = Ax + Br - BK(\varepsilon + x) = (A - BK)x - BK\varepsilon + Br \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu + H(y - C\xi)\end{aligned}$$

- Il sistema aumentato diviene:

$$\begin{cases} \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q \end{cases} ; q \in \mathbb{R}^{2n}$$

- Si nota che la matrice dinamica del sistema, essendo triangolare superiore a blocchi, ha gli autovalori che coincidono con quelli delle due sottomatrici che si trovano sulla diagonale, cioè di $(A - BK)$ e $(A - HC)$; questa caratteristica è detta *proprietà di separazione degli autovalori*, dato che gli autovalori del sistema di partenza e quelli dello stimatore sono separati, indicando che i progetti dei due blocchi sono indipendenti fra loro.
- Nota:** La dinamica del sistema completo può essere rappresentata indifferentemente dalle coppie: (x, ξ) , (x, ε) , (ξ, ε)



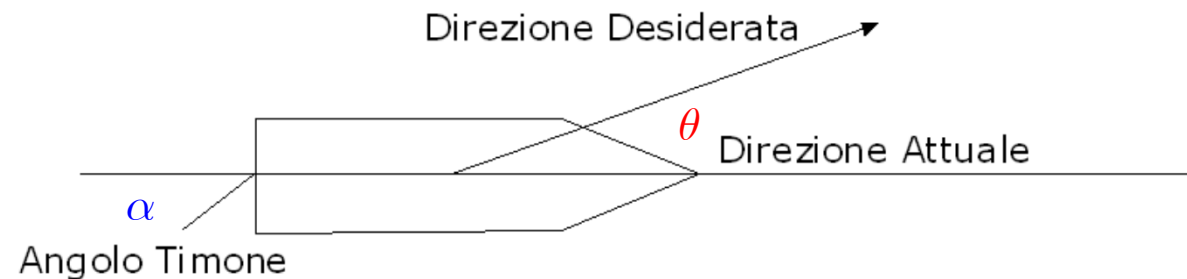
Assegnamento Poli – Esempi



■ Esempio 1

- Consideriamo il problema del progetto di un autopilota per mantenere costante la direzione (heading) di una nave rispetto ad un punto prefissato.
- Il modello semplificato del veicolo è:

$$\text{Veicolo} \quad \begin{cases} M\ddot{\theta}(t) = -d\dot{\theta}(t) - c\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) = -0.1\alpha(t) + 0.1\alpha_c(t) \end{cases} \quad \text{Attuatore timone}$$





Assegnamento Poli – Esempi

- Introducendo valori numerici per i parametri:

$M = 10^7 \text{ kg-m}^2$

$d = 10^6 \text{ N-m-sec/rad}$

$c = 5000 \text{ N-m/rad}$

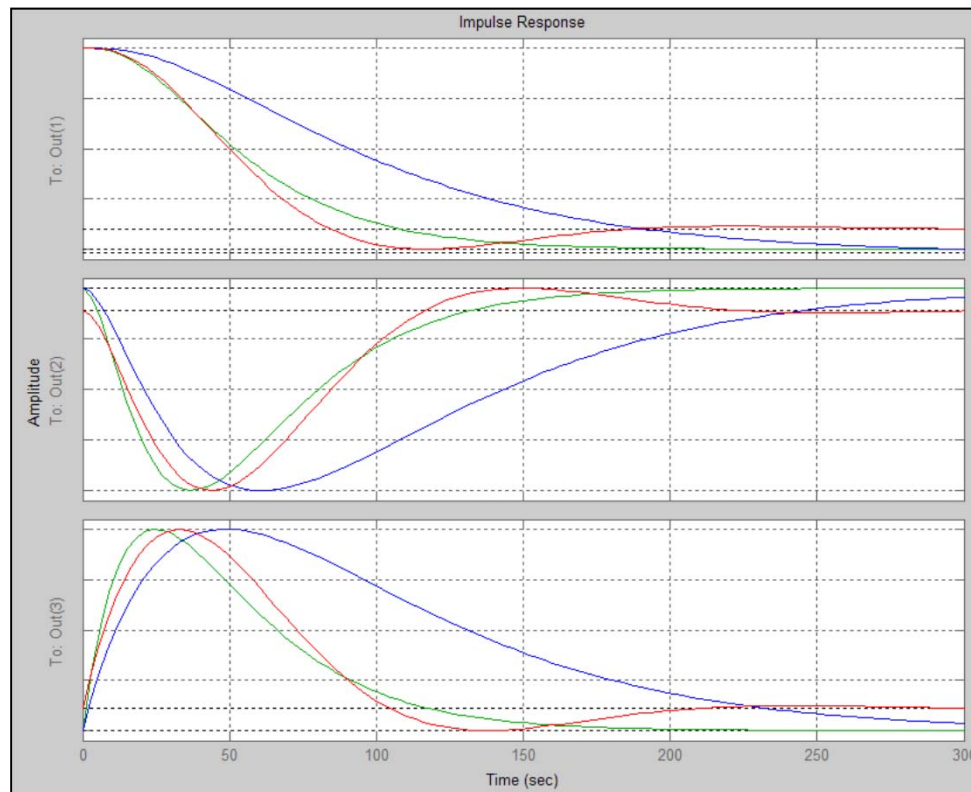
momento d'inerzia

resistenza

rapporto trasmissione

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.0005 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u$$

$$u(t) = a_c(t)$$



- Il Sistema è controllabile

$$\begin{cases} -.02, -.02, -.1, & \text{grafico blu} \\ -.04, -.04, -.1, & \text{grafico verde} \\ -.02 \pm .03j, -.1, & \text{grafico rosso} \end{cases}$$



Assegnamento Poli – Esempi

- Supponiamo di misurare l'errore in heading (direzione) $\theta(t)$ mediante una bussola (Compass), per cui l'equazione di uscita diviene:

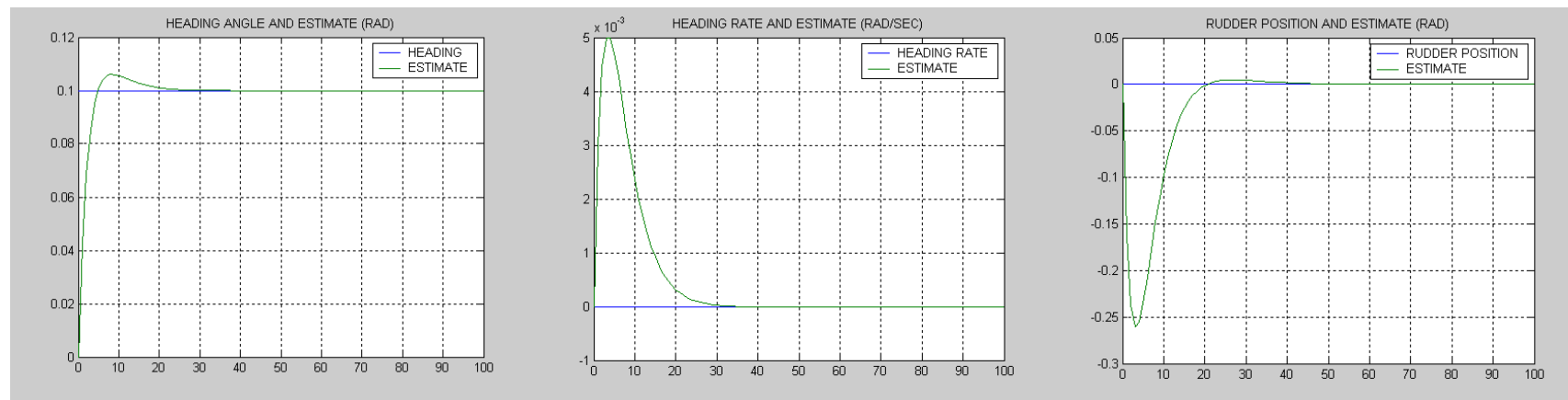
$$y(t) = \theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Il sistema è osservabile.

$$\text{Rango}[\mathbb{C}] = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.0005 \end{bmatrix} = 3$$

- Definiamo la locazione dei poli dell'osservatore da progetto (molto lento in questo caso)

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} -0.16 & -0.16 & -0.4 \end{bmatrix}$$





Assegnamento Poli - Esempi



□ Esempio 2

- Dato il sistema

$$G(s) = \frac{(s - 1)}{(s + 1)(s + 5)}$$

- Requisiti di progetto:

$$\xi \simeq 0.7$$

$$\omega_n \simeq 1.9 \text{ rad / sec}$$

$$\epsilon^{step} = 0$$

- Il controllore necessita di un polo all'origine. Le scelta dei poli in ciclo chiuso è la seguente:

$$\begin{cases} -1.33 \pm 1.35j \\ -20 \end{cases}$$



Assegnamento Poli - Esempi

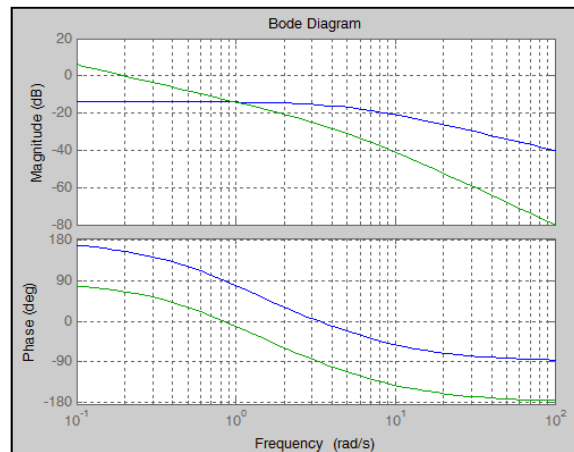
- Aggiunta di un integratore per il requisito di regime

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \int (r - y) \cdot dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+5)}$$

$$G_{AUG}(s) = \frac{s(s-1)}{s(s+1)(s+5)}$$



```
B =  
  
    1    -6    31  
    0     1    -6  
    0    -1     7  
  
>> rank(B)  
  
ans =  
  
    3
```

Sistema
Controllabile

```
C =  
  
    1    -1     0  
   -7    -5     0  
   37   35     0  
  
>> rank(C)  
  
ans =  
  
    2
```

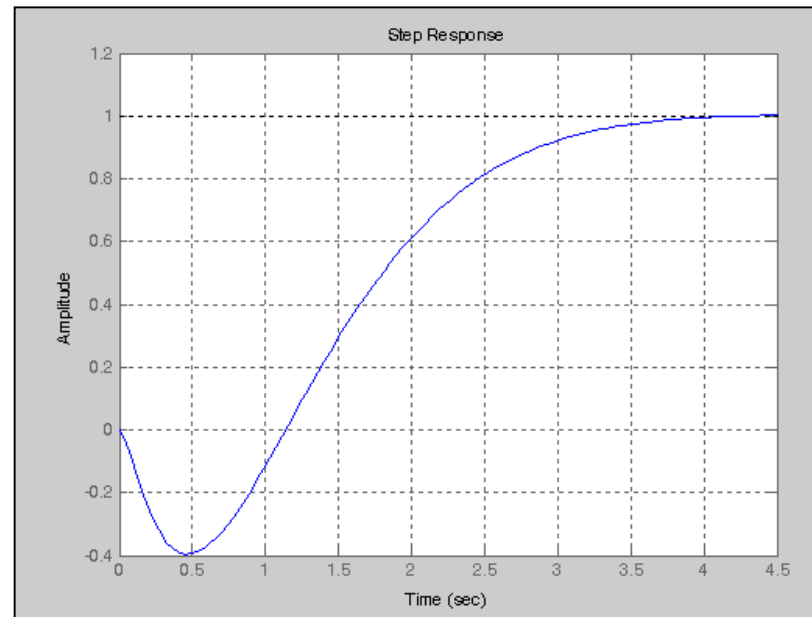
Sistema NON
Osservabile



Assegnamento Poli - Esempi

- Sintesi del controllore a retroazione totale

$$\begin{array}{l} -20.0000 \\ -1.3400 + 0.7000i \\ -1.3400 - 0.7000i \end{array} \quad u = -Kx = - \begin{bmatrix} 16.6800 & 96.5976 & 45.7120 \end{bmatrix} x$$



- Ricostruzione dello stato: L'integratore introdotto per l'errore a regime è uno stato non osservabile. Si deve perciò aggiungere un'uscita misurabile su tale stato



Assegnamento Poli - Esempi

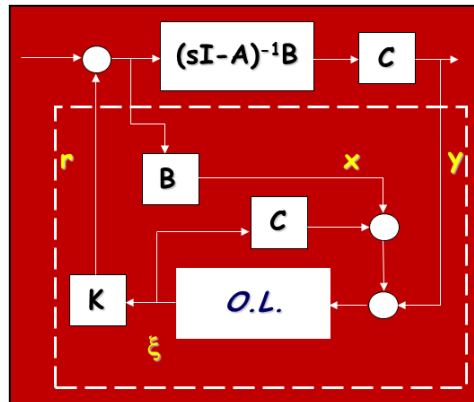
- Sintesi dell'osservatore con poli aggiuntivi:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_{aug}$$

Sensore aggiuntivo

- Dinamica scelta per l'osservatore: -40, -50, -60
- Matrice di guadagno dell'osservatore:

$$H^T = \begin{pmatrix} -154.2500 & -258.25 & -1.0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$



```
cc =  
  
    1    -1    0  
    0     0    1  
  
>> obsv(a,cc)  
  
ans =  
  
    1    -1    0  
    0     0    1  
   -7    -5    0  
   -1     1    0  
   37    35    0  
    7     5    0  
  
>> rank(ans)  
  
ans =  
  
    3
```

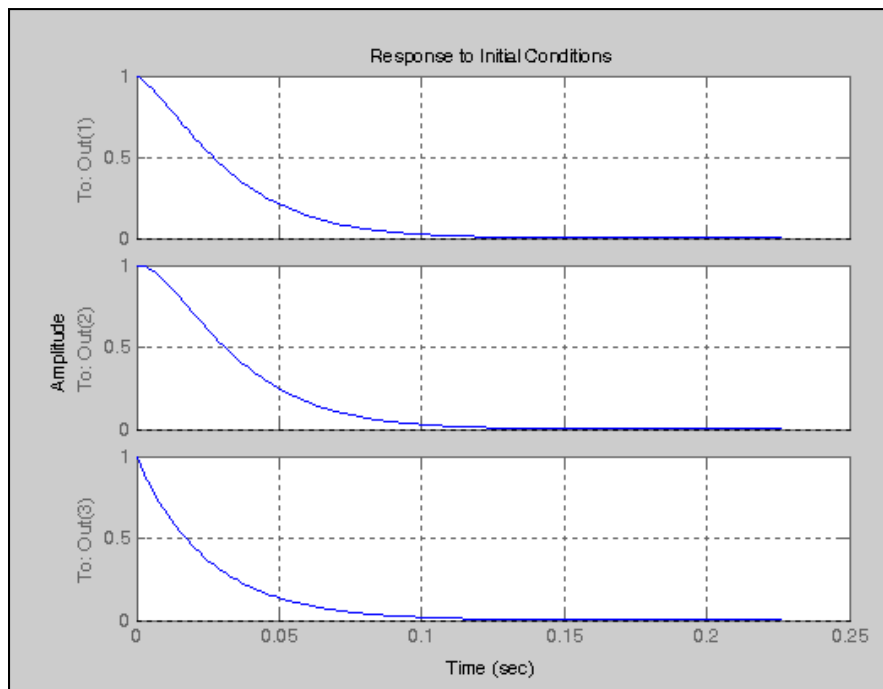


Assegnamento Poli - Esempi

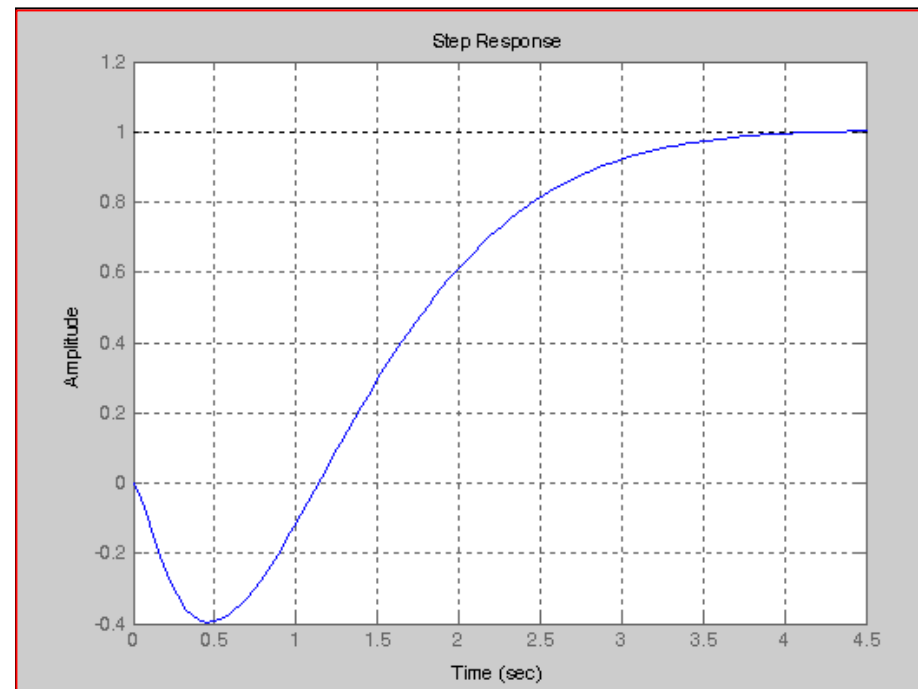
■ Sommario

$$\dot{\mathbf{x}}_{aug} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} \quad u = -K\xi$$
$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(\mathbf{y} - C\xi)$$

■ Errore dell'osservatore



■ Risposta del sistema





Assegnamento Poli – Sommario



- Dato un sistema LTI, controllabile ed osservabile, multivariabile in generale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- La retroazione dello stato richiede che tutte le variabili di stato direttamente misurabili, oppure ricavabili per inversione da un vettore di uscita delle stesse dimensioni

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \quad \dim \mathbf{x} = \dim \mathbf{y}$$

- Nel caso in cui il vettore di stato non sia disponibile, esso viene ricostruito mediante un osservatore asintotico (Luenberger) la cui dinamica $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ è delle stesse dimensioni della dinamica del sistema e data da:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

- Scegliendo la matrice $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$ con autovalori di parte reale strettamente negativa, l'errore tra lo stato ricostruito e lo stato del sistema tende asintoticamente a 0.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) = 0 \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C}$$



Assegnamento Poli – Sommario



- Il sistema in anello chiuso, di ordine $2n$, diviene

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{\xi} = A\xi + Bu + H(y - C\xi) \end{cases}, \quad u = -K\xi + r$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q \end{cases}; \quad q \in \mathbb{R}^{2n}$$

$\varepsilon = \xi - x \quad \xi = \varepsilon + x$

- Il principio di separazione garantisce che il progetto del controllore e quello dell'osservatore sono separati.
- Il transitorio del sistema in anello chiuso è specificato dagli autovalori di $A - BK$, la dinamica dell'errore di ricostruzione dagli autovalori di $A - HC$.
- Il compensatore globale richiede quindi il calcolo di due matrici di guadagno K e H .

$$K(s) = K(sI - A - BK + HC)^{-1}H$$



Esempio Harrier

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.2632 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \\ y_{VER} \end{bmatrix} = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} x$$

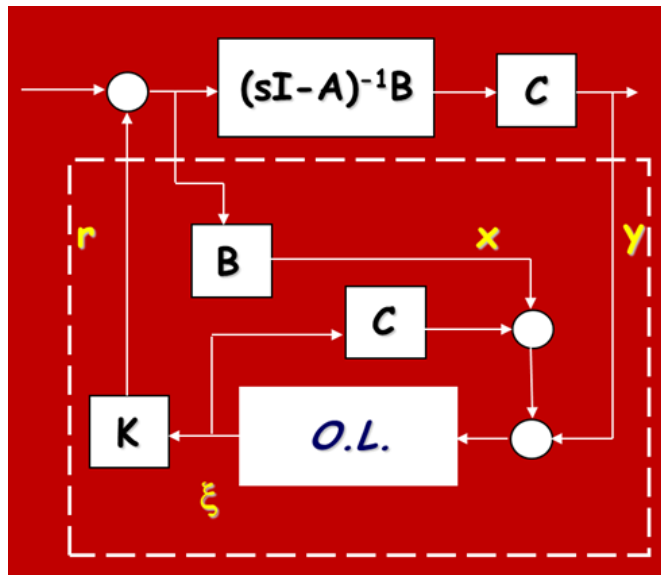
- Sintesi del controllore: (-1, -1.2, -2, -2.2, -10, -12)

```
k =  
  
1.0e+003 *  
  
    0.0206    0.0035    0.0024    0.0041   -0.0002   -0.0001  
   -1.6738   -0.1005   -0.2925   -0.4444    0.0407    0.0357
```



Esempio Harrier

- Sintesi dell'osservatore con assegnazione della dinamica dell'errore fuori banda: (-50, -51, -52, -53, -54, -55)



h =

1.0e+003 *

0.1070	-0.0009	-0.0000
2.8604	-0.0486	-0.0000
-0.0011	0.1070	0.0000
-0.0484	2.8612	0.0000
-0.0000	0.0000	0.1010
-0.0000	0.0000	2.5487

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$$

- Quale è la FdT del Compensatore?

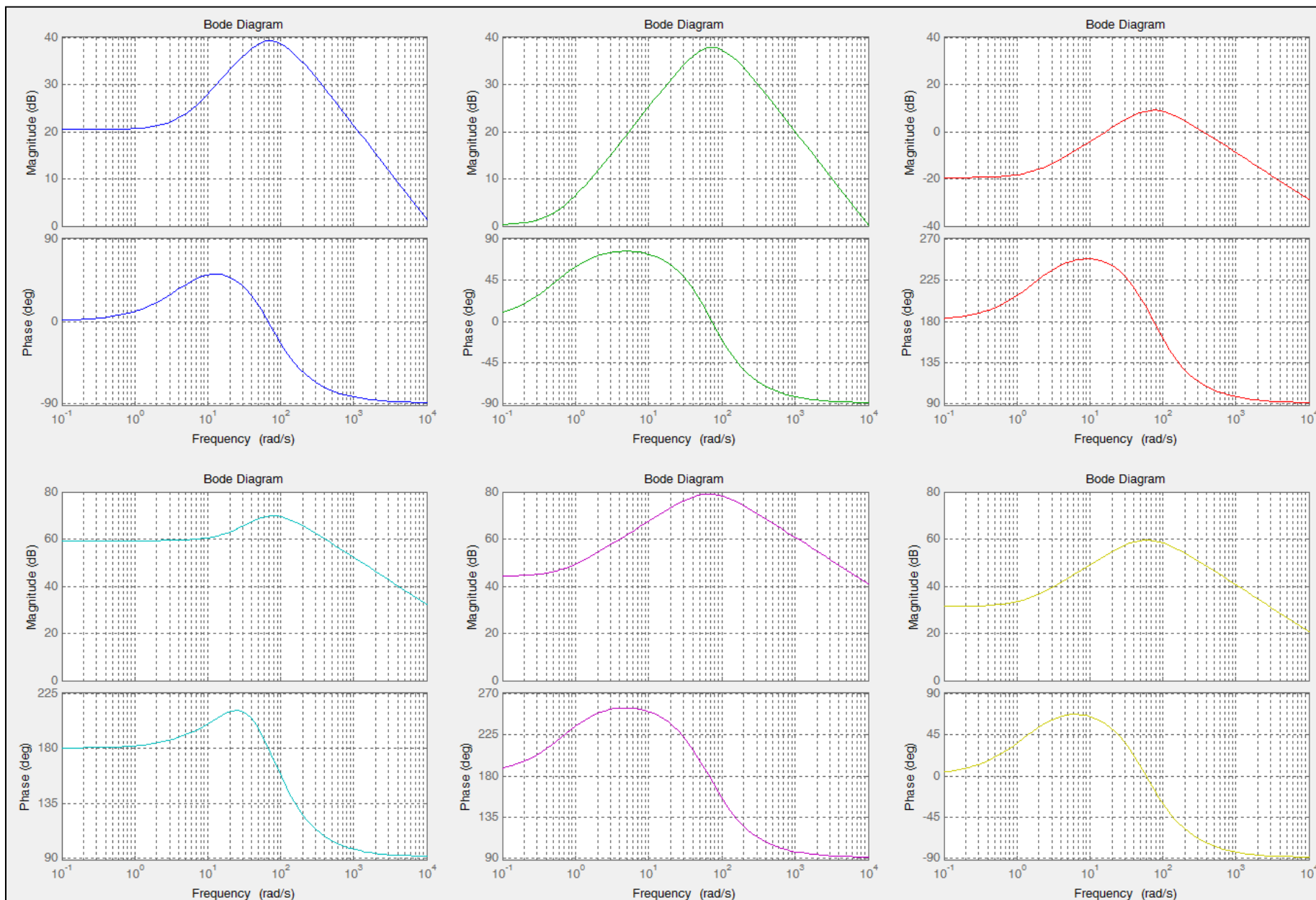
$$\xi(s) = (sI - A + HC)^{-1} Bu(s) + (sI - A + HC)^{-1} Hy(s)$$

$$u = -K\xi$$

$$\begin{aligned} u^{2 \times 1}(s) &= K(s)y^{3 \times 1}(s) = \\ &= -K(sI - A - BK + HC)^{-1} H \end{aligned}$$



Esempio Harrier





Esempio Harrier



ac1 =

1.0e+003 *

Columns 1 through 7

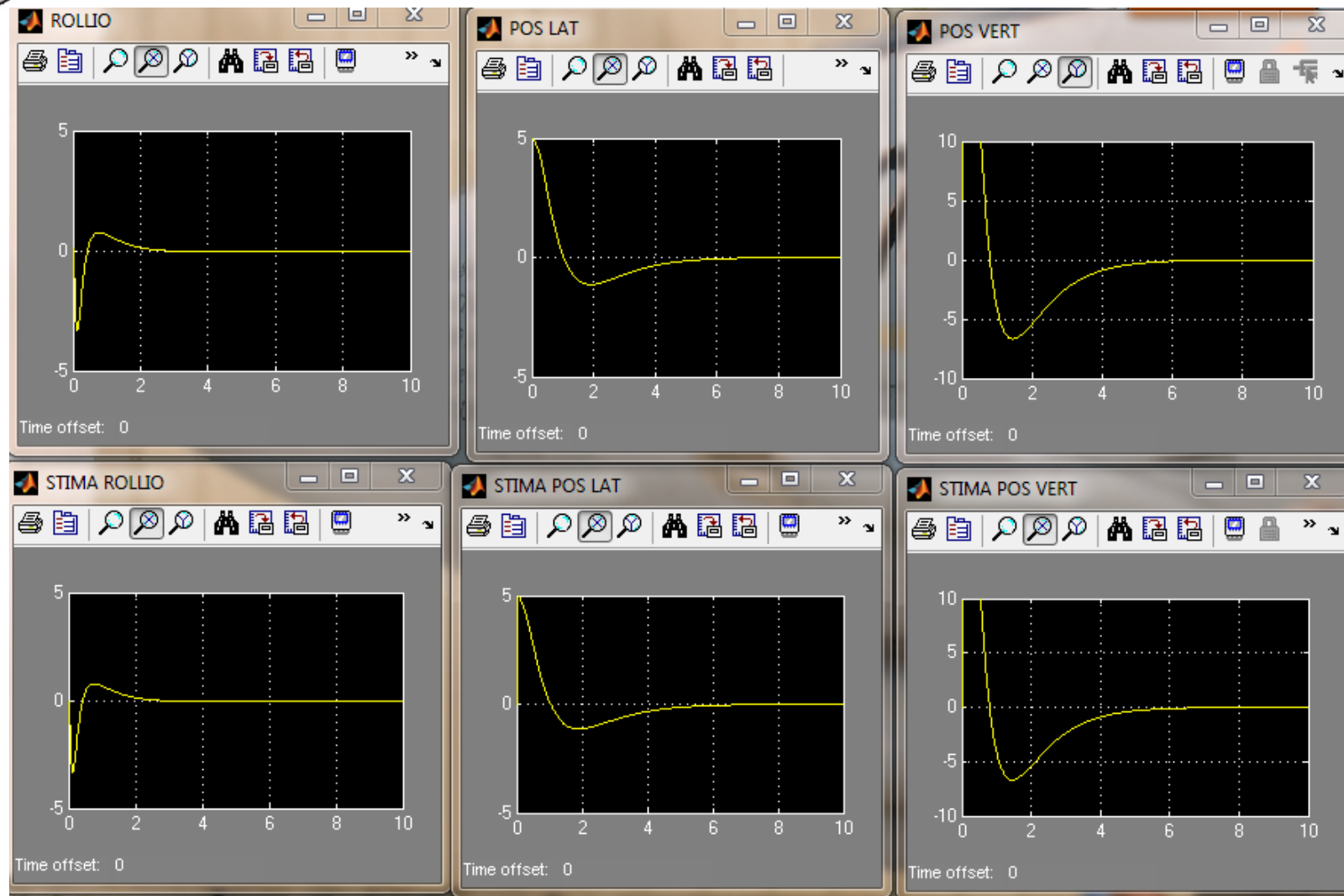
ans =	0	0.0010	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	-0.1084
	0	0	0	0.0010	0	0	0
-12.0000	0.0098	0	0	-0.0000	0	0	-0.0051
-10.0000	0	0	0	0	0	0.0010	0
-2.2000	0	0	0	0	0	-0.0000	0.4184
-2.0000	0.1070	0	-0.0009	0	-0.0000	0	-0.1070
-1.0000	2.8604	0	-0.0486	0	-0.0000	0	-2.9688
-1.1000	-0.0011	0	0.1070	0	0.0000	0	0.0011
-55.0000	-0.0484	0	2.8612	0	0.0000	0	0.0531
-54.0000	-0.0000	0	0.0000	0	0.1010	0	0.0000
-53.0000	-0.0000	0	0.0000	0	2.5487	0	0.4184
-52.0000							
-50.0000							
-51.0000							

Columns 8 through 12

0	0	0	0	0
-0.0183	-0.0125	-0.0214	0.0009	0.0006
0	0	0	0	0
-0.0009	-0.0006	-0.0010	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0
0.0251	0.0731	0.1111	-0.0102	-0.0089
0.0010	0.0009	0	0.0000	0
-0.0183	0.0362	-0.0214	0.0009	0.0006
0	-0.1070	0.0010	-0.0000	0
-0.0009	-2.8618	-0.0010	0.0000	0.0000
0	-0.0000	0	-0.1010	0.0010

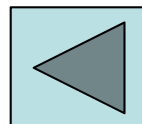
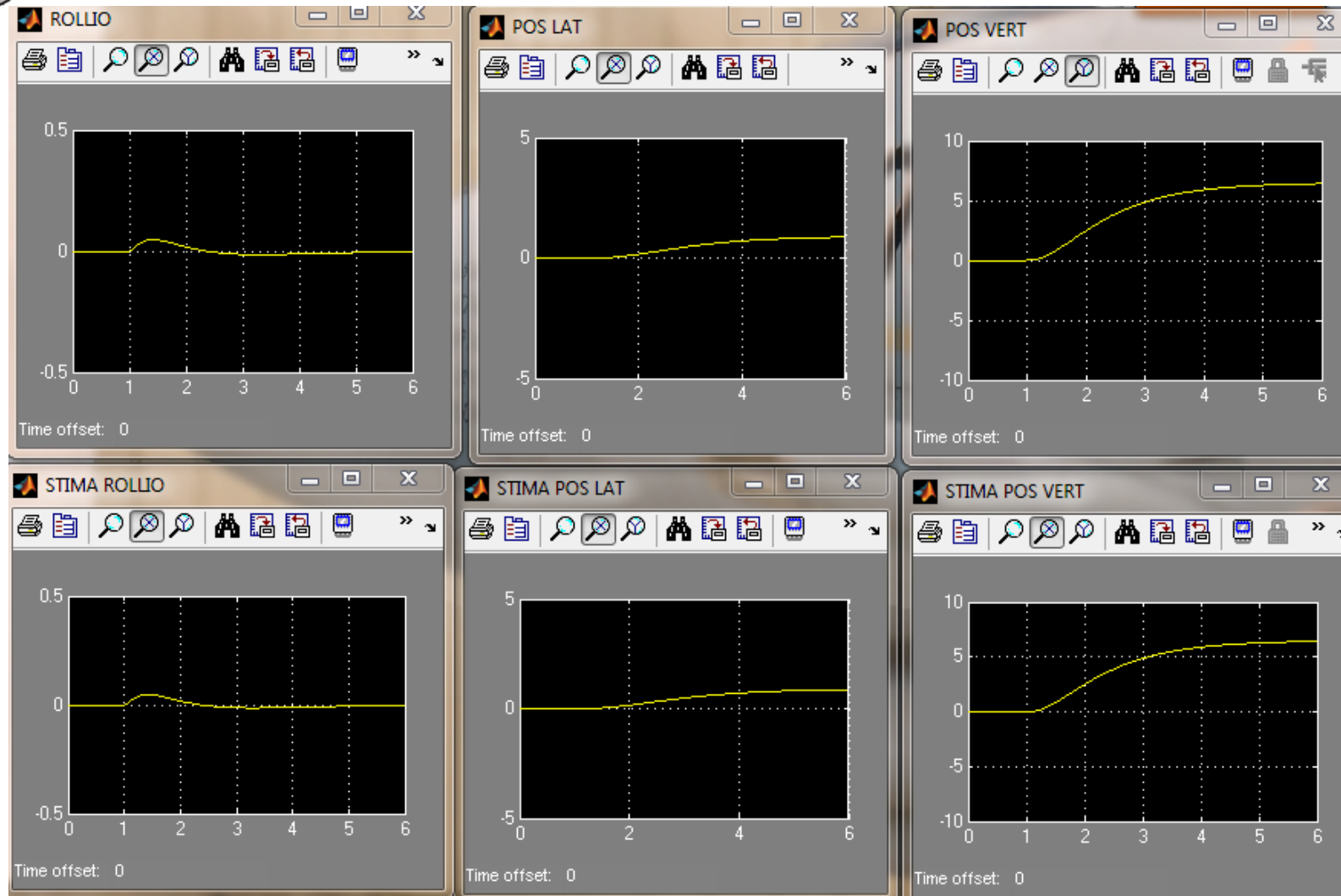


Esempio Harrier, Risposta C.I.





Esempio Harrier, Risposta al gradino u1





Materiale Addizionale



- **Osservatore di Luenberger Ridotto:** Le dimensioni dell'osservatore possono essere ridotte se sfruttiamo la retroazione diretta degli stati misurabili direttamente dall'uscita

- Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Dove: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, (A, C) Osservabile (rivelabile)
 $\text{rank } C = p$

- Determinare una matrice P quadrata $n \times n$ tale che:

$$CP = [I_p \ 0]$$

- Per esempio, usando riduzioni riga – colonna, determinare una matrice R non singolare tale che:

$$CR = [C_1 \ 0] \quad C_1 = p \times p, \det(C_1) \neq 0$$



Materiale Addizionale



- Da cui si può scegliere:

$$P = R \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \quad CP = CR \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = [I_p \ 0]$$

- Mediante la matrice P eseguire la trasformazione di coordinate:

$$x = Pz$$

$$y = Cx = CPz = [I_p \ 0]z$$

- Il nuovo vettore di stato z è partizionabile in una parte direttamente misurabile ed nel suo complemento:

$$z = \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix}, \quad z_a \in R^p, \quad z_b \in R^{n-p} \quad y = [I_p \ 0] \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} = z_a$$



Materiale Addizionale

- Il nuovo sistema è:

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$y = \hat{C}z = CPz = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} z$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad P^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \hat{A}_{11}y + \hat{A}_{12}z_b + \hat{B}_1u \\ \dot{z}_b &= \hat{A}_{21}y + \hat{A}_{22}z_b + \hat{B}_2u \end{aligned}$$

- Risulta quindi necessario stimare soltanto la partizione z_b . Una scelta per la struttura dell'osservatore è data da (in modo simile al caso full order):

$$\dot{\hat{z}}_b = \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u)$$

- Con \tilde{K} scelta tale da soddisfare il requisito di stabilità asintotica:

$$R_e[\lambda(\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})] < 0$$

Lemma: $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$ is observable if and only if (A, C) is observable



Materiale Addizionale



- L'errore di stima è dato dal vettore e_b : $e_b = z_b - \hat{z}_b$

$$\begin{aligned}\dot{e}_b &= \dot{z}_b - \dot{\hat{z}}_b \\ &= \hat{A}_{21}y + \hat{A}_{22}z_b + \hat{B}_2u - \hat{A}_{21}y - \hat{A}_{22}\hat{z}_b - \hat{B}_2u \\ &\quad - \tilde{K}[\hat{A}_{11}y + \hat{A}_{12}z_b + \hat{B}_1u - \hat{A}_{11}y - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{B}_1u] \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})e_b\end{aligned}$$

- **Nota:**

$$R_e[\lambda(\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})] < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_b(t) = 0$$

- La forma originale del vettore di stato x e la sua stima si possono quindi riscrivere in funzione del vettore di uscita e della stima di z_b :

$$x = Pz = P \begin{bmatrix} y \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = P \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_b \end{bmatrix} \quad x - \hat{x} = P \begin{bmatrix} 0 \\ z_b - \hat{z}_b \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$



Materiale Addizionale

- Per evitare la derivazione dell'uscita nell'espressione dell'osservatore ridotto, si può introdurre la variabile ausiliaria w :

$$\dot{\hat{z}}_b = \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u)$$

$$w = \hat{z}_b - \tilde{K}y$$

$$\dot{w} = \dot{\hat{z}}_b - \tilde{K}\dot{y}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u \\ &\quad + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u) \\ &\quad - \tilde{K}\dot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})(w + \tilde{K}y) \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11})y + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})w + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K})y \end{aligned}$$

$\rightarrow L$

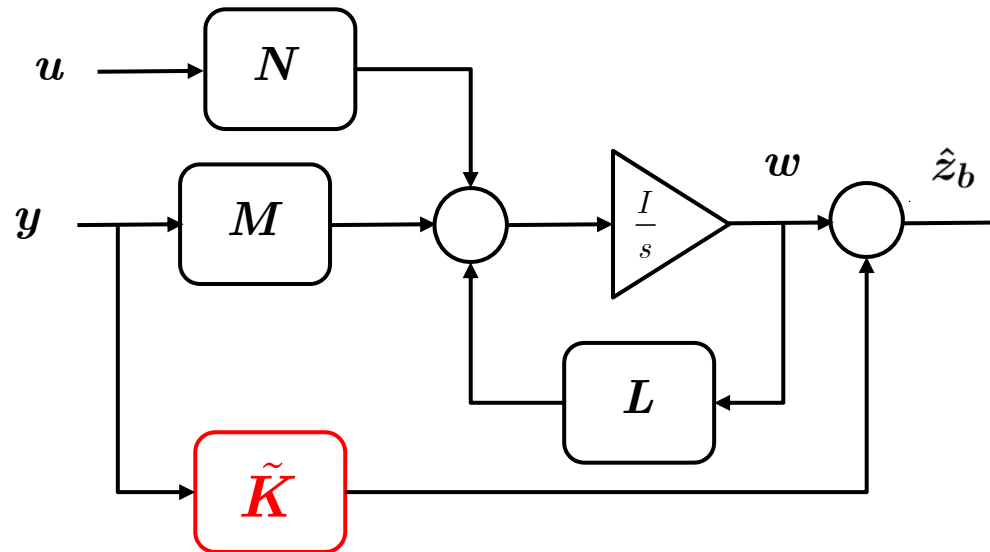
$\rightarrow N$

$\rightarrow M$

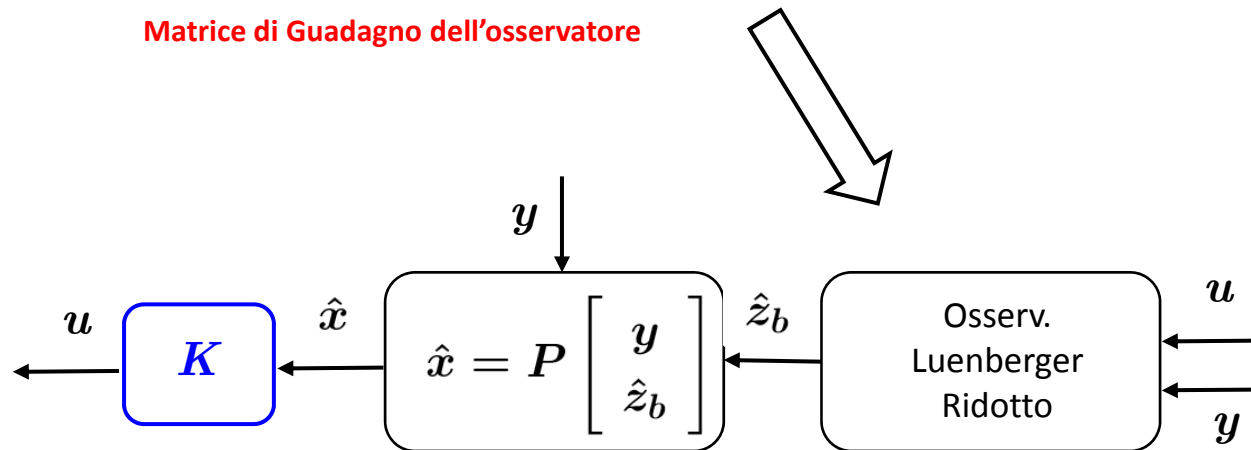


Materiale Addizionale

- In termini di diagramma a blocchi si ha la seguente struttura:



Matrice di Guadagno dell'osservatore



Matrice di Guadagno del controllore



Materiale Addizionale



- **Esempio:** consideriamo la stabilizzazione di un doppio integratore

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Selezionare un controllore stabilizzante:

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} x$$

- Sintesi dell'osservatore di Luenberger:

$$\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -11$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(y - C\xi)$$

$$\lambda_i(A - HC) = \{-10 \quad -11\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 21 \\ 110 \end{bmatrix}$$



Materiale Addizionale



- Sintesi dell'osservatore di Luenberger ridotto:

$$CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P \Rightarrow P = I_{2 \times 2} \quad \hat{A} = P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{B} = P^{-1}B = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Selezionare la matrice di guadagno dell'osservatore ridotto:

$$\tilde{K} = 10 \quad L = \hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12} = -10 \quad N = \hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1 = 1 \quad M = \hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K} = -100$$

$$\hat{x}_2 = w + \tilde{K}y = w + 10y$$

$$\dot{w} = -10w + u - 100y$$

$$u = -4y - 2(w + 10y)$$

$$= -24y - 2w$$

$$\dot{w} = -10w + u - 100y$$

$$= -12w - 124y$$



Materiale Addizionale



- **Esempio:** Dato il sistema:

$$G(s) = \frac{(s-2)(s-4)}{s^2(s-1)(s-3)(s^2 + 0.8s + 4)}$$

- ❑ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 10 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo

- ❑ Confrontare i controllori sviluppati mediante:

1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore

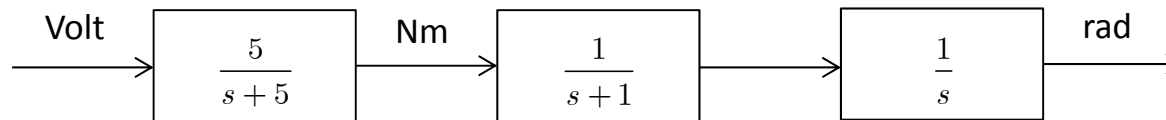
- ❑ Matlab file: ESERCIZIOFINALE.m:



Materiale Addizionale



■ Esempio: Posizionamento Antenna



□ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 4 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo
4. La banda passante sia di circa 5 rad/sec

□ Confrontare i controllori sviluppati mediante::

1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore

