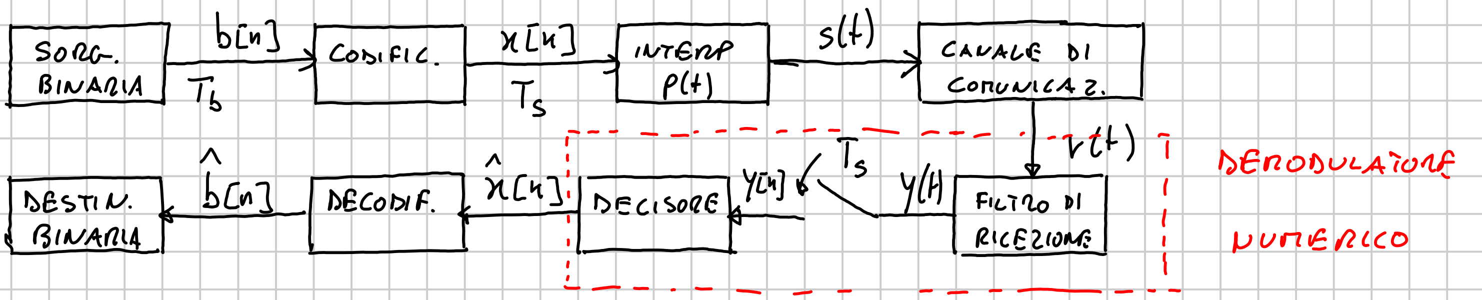
MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA BASE

La modulazione numerica è necessaria per poter trasmettere sequenze binarie attraverso un mezzo trasmissivo. In particolare, per adesso, ci concentreremo su canali trasmissivi in banda base, come ad esempio il doppino telefonico o il cavo coassiale.



-) CODIFICATORE: trasforma sequenze di bit in simboli M-ari appartenenti ad un alfabeto A_s
-) INTERPOLATORE: modula impulsi tramite i simboli $x[k]$ in ingresso per produrre una sequenza di impulsi $s(t)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t - kT_s)$$

-) CANALE DI COMUNICAZIONE: sono assenti i trasduttori in quanto la propagazione nel mezzo trasmissivo è elettrica
-) FILTRO DI RICEZIONE: filtra componenti di rumore generate nel canale e compensa eventuali distorsioni.
-) CAMPIONATORE: preleva campioni dal segnale filtrato $y(t)$
-) DECISORE: associa un simbolo dell'alfabeto A_s ad ogni campione
-) DECODIFICATORE: trasforma i simboli in sequenze binarie

CODIFICATORE

-) Deve essere sincrono con la sorgente

$$T_s = T_b \log_2 M$$

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b \log_2 M}$$

·) La sequenza di simboli generata dal codificatore viene considerata come un processo stazionario. Spesso, i simboli trasmessi sono considerati equiprobabili

$$P\{x[n]=d_i\} = \frac{1}{M} \quad , \quad \forall i$$

INTERPOLATORE

In un sistema di comunicazione numerico in banda base, l'interpolatore da solo svolge il compito di modulatore numerico, in quanto effettua la sagomatura, mentre non è prevista nessuna traslazione in frequenza. Il filtro sagomatore è realizzato tramite la generazione dell'impulso $p(t)$. Infatti, si può pensare a $P(f)$ come allo spettro del singolo impulso.

B_p : banda dell'impulso $p(t)$

E_p : energia dell'impulso $p(t)$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\, df$$

Data l'aleatorietà della sequenza di simboli $x[n]$, $s(t)$ deve essere interpretato come la realizzazione di un processo aleatorio $S(t)$ stazionario.

Il processo $S(t)$ ha una autocorrelazione $R_S(\tau)$ ed una densità spettrale di potenza $S_S(f)$.

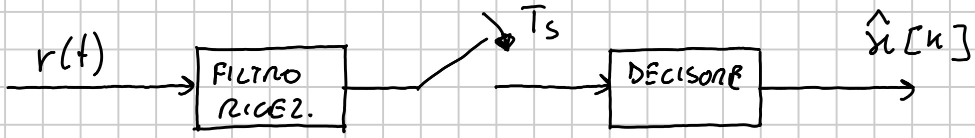
Per cui è definita una potenza P_S ed una banda B_T.

Energia per bit

L'energia media per bit può essere calcolata come

$$E_b = \frac{T_S P_S}{\log_2 M} = \frac{E_S}{\log_2 M} \quad , \quad E_S = \text{energia media per simbolo}$$

DEMODULATORE NUMERICO



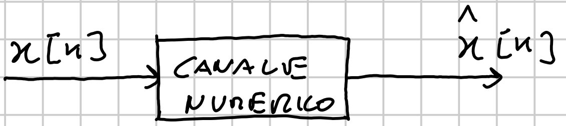
Il demodulatore numerico produce una sequenza $\hat{x}[n]$ in modo tale da minimizzare la probabilità di errore.

Probabilità di errore sul simbolo e sul bit

$$P_{E_S} = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$$

$$P_{E_b} = P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\}$$ BEP (bit error probability)

CANALE NUMERICO E PRESTAZIONI



$x[n] \in A_S$, $A_S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$

$$P_E(M) \triangleq P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\} P\{\alpha_j\}$$

Nel caso di simboli equiprobabili

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\}$$

FORMATO DI MODULAZIONE EQUIENERGIA

$E_S(i) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt$, $s_i(t)$ = segnale trasmesso in corrispondenza del simbolo α_i

Il formato di modulazione è equienergetico se

$$E_S(i) = E_S \qquad \forall i$$

ORTOGONALITÀ

Il formato di modulazione è detto ortogonale se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_i(t)\, s_j(t)\, dt = 0 \qquad \forall\ i \neq j$$

EFFICIENZA ENERGETICA

Fissata una P_{E_b}, l'efficienza energetica è definita come il valore

$$\eta_P \triangleq \frac{1}{SNR} \quad , \quad SNR \triangleq \frac{P_s}{P_n}$$

che permette di ottenere tale BEP.

Quindi tanto maggiore è η_P, tanto minore deve essere il SNR che garantice una data BEP.

EFFICIENZA SPETTRALE

L'efficienza spettrale è definita come il rapporto tra il tasso di erogazione binario e la banda di trasmissione

$$\eta_B \triangleq \frac{R_b}{B_T} \quad [bit/s/Hz]$$

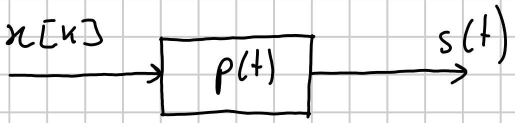
Quindi l'efficienza cresce quando a parità tasso di erogazione la banda utilizzata in trasmissione si riduce.

In termini di T_S e M:

$$\eta_B = \frac{\log_2 M}{B_T T_S}$$

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

La PAM nel caso generico è detta anche M-PAM o PAM M-aria, dove con M si indica il numero di simboli presenti nell'alfabeto A_s.



PROPRIETÀ CHE DEFINISCONO UNA M-PAM

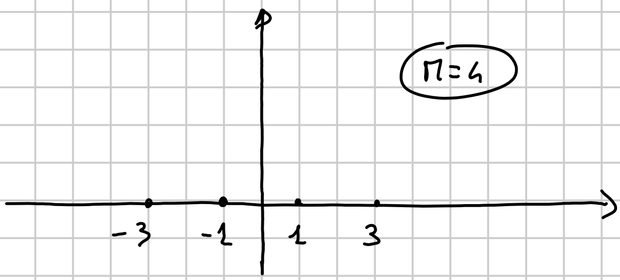
1) $$s(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t - kT_s)$$

2) Gli M valori $(M \geq 2)$ che costituiscono l'alfabeto $A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ sono definiti come

$$\alpha_i = 2i - 1 - M \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Esempio

$M = 4 \Rightarrow \alpha_1 = -3 \,,\; \alpha_2 = -1 \,,\; \alpha_3 = 1 \,,\; \alpha_4 = 3$



$$E_s(i) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2\, p^2(t - kT_s)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (2i - 1 - M)^2\, p^2(t)\, dt = (2i - 1 - M)^2 E_p$$

M PARI $\Rightarrow A_s = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$

M DISPARI $\Rightarrow A_s = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm (M-1)\}$

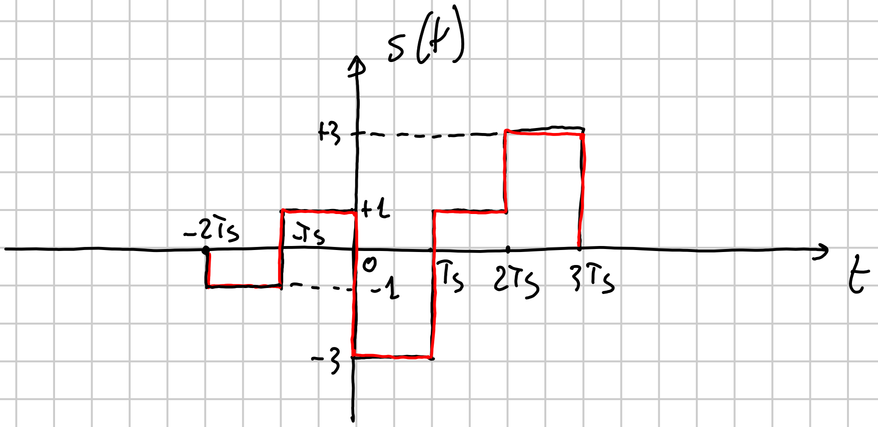
I formati M-PAM di più largo impiego sono quelli dove M è una potenza di 2.

Esempio

4-PAM

sequenza $\Rightarrow \{x[-2]=-1,\ x[-1]=+1,\ x[0]=-3,\ x[1]=+1,\ x[2]=+3\}$

$$p(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t-T_s/2}{T_s}\right)$$



PROPRIETÀ DERIVATE DELLA M-PAM

1) $E[s(t)]=0 \quad \forall t$ se i simboli sono equiprobabili

$$E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,p(t-nT_s)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underset{\substack{\| \\ 0}}{E[x[n]]}\,p(t-nT_s)=0$$

$$E[x[n]]=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i P\{\alpha_i\}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(2i-1-M)$$

$$=\frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} i-1-M=\cancel{\frac{2}{M}}\cdot\frac{\cancel{M}(M+1)}{\cancel{2}}-(M+1)=0$$

2) $$S_s(f)=\frac{1}{T_s}S_x(f)\,|P(f)|^2$$

dove $\sigma_x^2=E[x^2[n]]=\left(\frac{M^2-1}{3}\right)$

$$R_s(t,\tau) = E\left[s(t)\, s^*(t-\tau) \right] =$$

$$= E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\, p^*(t-\tau-kT_s) \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\left[x[n]\, x^*[k] \right] p(t-nT_s)\, p^*(t-\tau-kT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[n-k]\, p(t-nT_s)\, p^*(t-\tau-kT_s)$$

$$\Rightarrow \quad n-k = m \quad \Rightarrow \quad k = n-m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-nT_s)\, p^*(t-\tau-nT_s+mT_s)$$

Autocorrelazione media

$$\overline{R}_s(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t,\tau)\, dt$$

$$\overline{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} R_s(t,\tau)\, dt$$ se $R_s(t,\tau)$ e' periodico in t

$$\overline{R}_s(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t-nT_s)\, p^*(t-\tau-nT_s+mT_s)\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_s}{2}+nT_s}^{\frac{T_s}{2}+nT_s} p(t')\, p^*(t'-\tau+mT_s)\, dt'$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t')\, p^*(t'-\tau+mT_s)\, dt'$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] \cdot \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) \left[P(f)\, e^{-j2\pi f\tau}\, e^{j2\pi f m T_s} \right]^* df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, e^{-j2\pi f m T_s}\, e^{+j2\pi f\tau}\, df$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\, S_x(f)\, e^{+j2\pi f\tau}\, df$$

$$\bar{R}_s(\tau) = \frac{1}{T_s} TCF^{-1}\left[|P(f)|^2 S_x(f) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{S_s(f) = \frac{1}{T_s} S_x(f) |P(f)|^2}$$

Nel caso in cui:

·) $E[x[n]] = 0$

·) $R_x[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$

Si ha che:

$$S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2$$

In questo caso la B_T è coincidente con quella del sagomatore $P(f)$.

Calcolo di σ_x^2

$$\sigma_x^2 = E[(x - \eta_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x)^2 f_X(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (2i - 1 - M)^2 =$$

$$= \frac{1}{M} \left(2 \sum_{i=1}^{M} i^2 + (1+M)^2 M - 4(1+M) \sum_{i=1}^{M} i \right)$$

Sfruttando i seguenti risultati noti

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{M} i = \frac{M(M+1)}{2} \quad , \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} i^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$$

Si ottiene

$$\sigma_x^2 = \frac{M^2 - 1}{3}$$

3) $$P_s = \frac{\sigma_x^2 E_P}{T_s} = \frac{M^2-1}{3} \frac{E_P}{T_s}$$

EFFICIENZA SPETTRALE DI UNA M-PAM

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{T_s B_p} \quad , \text{ essendo } B_T = B_p$$

L'efficienza spettrale aumenta con l'aumentare del numero di livelli. Sfortunatamente, come verrà dimostrato più avanti, la efficienza in potenza diminuisce all'aumentare di M.

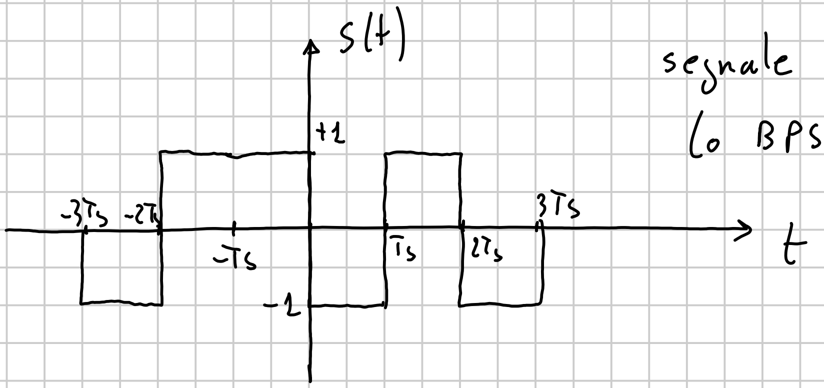
$\boxed{\text{PAM BINARIA o BPSK (Binary Phase Shift Keying)}}$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - kT_s)$$

con $x[n] \in A_s \equiv \{\pm 1\}$ $\qquad (M = 2)$

$\Rightarrow T_b = T_s \qquad (\log_2 2 = 1)$

Esempio con $p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$

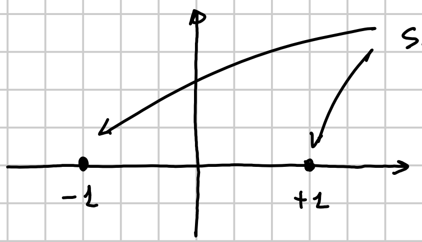


segnale PAM binario (o BPSK)

→ Il PAM Binario è un formato equienergia

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (+1)^2 p^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^2 p^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t)\,dt = E_{s_2}$$

$$E_{s_1} = E_{s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt = E_p$$



simboli "antipodali"

$$E[s(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[x[n]]\, p(t-kT_s)$$ se i simboli sono equiprobabili

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(+1) + \frac{1}{2}(-1)\right] p(t-kT_s) = 0$$

- $S_s(f) = \dfrac{1}{T_b} |P(f)|^2$ DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

- $P_s = \dfrac{E_p}{T_b}$ POTENZA MEDIA

- $B_T = B_p$ BANDA

- $\eta_B = \dfrac{1}{T_b B_p}$

$\boxed{\text{SEGNALAZIONE ON-OFF}}$

È un tipo di PAM binaria con simboli appartenenti ad

$$A_s = \{0, 1\}$$

e impulsi rettangolari $p(t) = \text{rect}\left(\dfrac{t - T_b/2}{T_b}\right)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \text{rect}\left(\frac{t - T_b/2 - kT_b}{T_b}\right)$$

$$\begin{cases} s_1(t) = 0 & \Rightarrow \quad E_{s_1} = 0 \\ s_2(t) = \text{rect}\left(\dfrac{t - T_b/2}{T_b}\right) & \Rightarrow \quad E_{s_2} = T_b \end{cases}$$

- $E[s(t)] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[x[n]]\, p(t-kT_b) = \frac{1}{2}$

- $E_s = \dfrac{1}{2} E_{s_1} + \dfrac{1}{2} E_{s_2} = \dfrac{T_b}{2}$

- $P_s = \dfrac{E_s}{T_b} = \dfrac{1}{2}$

·) $R_x[m] = C_x[m] + \eta_x^2 = \frac{1}{4}\delta[m] + \frac{1}{4}$

·) $S_x(f) = TFS\left[R_x[m]\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{m}{T_b}\right)$

·) $S_s(f) = \frac{1}{T_b} S_x(f)\left|P(f)\right|^2 = \frac{1}{T_b}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4T_b}\delta(f)\right) T_b^2 \operatorname{sinc}^2(T_b f)$

$= \frac{T_b}{4}\left(1 + \frac{\delta(f)}{T_b}\right)\operatorname{sinc}^2(T_b f)$

N.B. Tutte le $\delta(f - \frac{m}{T_b})$ si annullano tranne che in $f=0$

·) $\eta_B = \frac{\log_2 2}{T_b B_p} = 2$, $B_p = \frac{1}{2T_b}$ per la sinc

Considerazioni

·) L'efficienza spettrale della modulazione ON-OFF è unitaria come nel caso della 2-PAM

·) Essendo la modulazione ON-OFF di tipo unipolare (solo a valori positivi) questa può essere utilizzata su canali di comunicazione che, per loro natura, non possono supportare segnali bipolari.

·) La densità spettrale della ON-OFF presenta un impulso di dirac nell'origine delle frequenze (alla continua), per cui il canale di trasmissione deve avere una risposta in frequenza che non sia nulla nell'origine.