Esercizio (tratto dal Problema 41 del Mazzoldi)

Lungo un piano inclinato di $\alpha = 30^o$ vengono fatti scendere due cubi di ugual massa $m = 2\,\mathrm{Kg}$ con diverso coefficiente di attrito dinamico col piano: $\mu_1 = 0.4$ per quello a valle e $\mu_2 = 0.2$ per quello a monte. I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1\,\mathrm{m}$ l'uno dall'altro lungo il piano, vengono liberati simultaneamente all'istante $t = 0$ e iniziano a scendere. Calcolare:

1. dopo quanto tempo si urtano
2. l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto, sapendo che i due cubi rimangono attaccati;
3. la velocità del sistema immediatamente dopo il contatto;
4. la forza $F_{2\to1}$ che il cubo a monte esercita su quello a valle

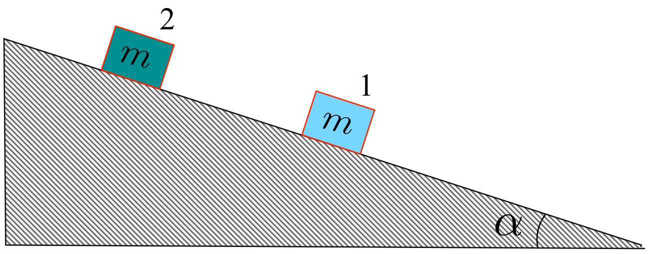

Figure 1:

SOLUZIONE

1. **Moto prima dell'urto**
   Prima dell'urto i due cubi non esercitano alcuna forza l'uno sull'altro ($F_{2\to 1} = F_{1\to 2} = 0$ nell'Eq.(12))

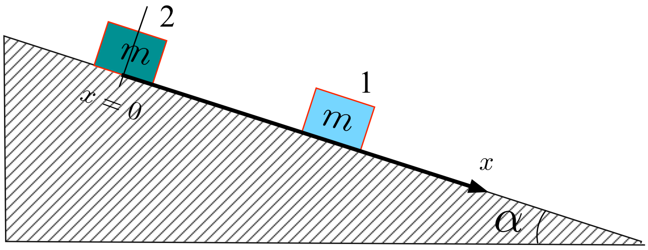

Figure 2:

- Consideriamo il moto nella direzione lungo il piano (che indichiamo con x), orientando l'asse verso valle e ponendo l'origine nella posizione iniziale del corpo 2 a monte. Le forze che agiscono su ciascun corpo lungo il piano sono

  -la componente longitudinale della forza peso (diretta a valle);
  -la forza di attrito dinamico (diretta a monte)

  Le equazioni (12) della dinamica per i due corpi lungo il piano si riducono pertanto a

$$m\,a_1 = mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha \qquad (1)$$
$$m\,a_2 = mg\sin\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha \qquad (2)$$

  da cui si ricavano le accelerazioni

$$\begin{cases} a_1 = g\,(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \\ a_2 = g\,(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \end{cases} \qquad (3)$$

  Siccome le accelerazioni sono costanti, si tratta di due moti rettilinei uniformemente accelerati, con velocità iniziali dei due corpi pari a

$$\begin{cases} v_{01} = v_1(t=0) = 0 \\ v_{02} = v_2(t=0) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

  e posizioni iniziali lungo il piano pari a

$$\begin{cases} x_{01} = x_1(t=0) = d \\ x_{02} = x_2(t=0) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

  Pertanto le leggi orarie dei due corpi sono

$$\begin{cases} x_1(t) = d + \frac{1}{2}a_1 t^2 \\ \\ x_2(t) = \frac{1}{2}a_2 t^2 \end{cases} \qquad (6)$$

- Dalle (6) possiamo ricavare anche le leggi orarie delle velocità (prima dell'urto)

$$\begin{cases} v_1(t) & = & \dfrac{dx_1}{dt} = a_1\, t = g\,(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)\; t \\ \\ v_2(t) & = & \dfrac{dx_2}{dt} = a_2\, t = g\,(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)\; t \end{cases} \tag{7}$$

e dunque delle quantità di moto

$$\begin{cases} p_1(t) & = & mv_1(t) = mg\,(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)\; t \\ \\ p_2(t) & = & mv_2(t) = mg\,(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)\; t \end{cases} \qquad \text{(prima dell'urto)} \tag{8}$$

Entrambe crescono linearmente nel tempo. Tuttavia, essendo $\mu_1 > \mu_2$, la quantità di moto del corpo a valle cresce più lentamente nel tempo di quella del corpo a monte, e dunque quest'ultimo lo raggiunge.

- Denotiamo con t_u l'istante in cui i due corpi si urtano: in tale istante le loro coordinate assumono lo stesso valore.

$$\begin{array}{rcl} x_1(t_u) & = & x_2(t_u) \\ & \Downarrow & \qquad\qquad [\text{uso (6)}] \\ d + \dfrac{1}{2} a_1\, t_u^2 & = & \dfrac{1}{2} a_2\, t_u^2 \\ & \Downarrow & \\ d & = & \dfrac{1}{2}(a_2 - a_1)\, t_u^2 \end{array} \tag{9}$$

da cui

$$\begin{array}{rcl} t_u & = & \sqrt{\dfrac{2d}{a_2 - a_1}} = \qquad [\text{uso (3)}] \\ & = & \sqrt{\dfrac{2d}{(\mu_1 - \mu_2) g \cos\alpha}} \end{array} \tag{10}$$

Sostituendo i dati

$$t_u \;=\; \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,\cancel{\mathrm{m}}}{(0.4 - 0.2)\, 9.81\, \frac{\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}^2} \frac{\sqrt{3}}{2}}} = 1.09\,\mathrm{s} \tag{11}$$

2. **In generale (prima e dopo l'urto)**
Consideriamo i due cubi come un sistema di due punti materiali che si muovono lungo il piano. Mentre prima dell'urto sono staccati, durante l'urto e dopo l'urto ciascuno esercita sull'altro una forza (di deformazione plastica).
In generale le due equazioni del moto per le quantità di moto dei due corpi lungo il piano sono

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} & = & \underbrace{F_{2\to 1}}_{\text{interna}} + \underbrace{mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha}_{\text{esterne}} \\ \\ \dfrac{dp_2}{dt} & = & \underbrace{F_{1\to 2}}_{\text{interna}} + \underbrace{mg\sin\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha}_{\text{esterne}} \end{cases} \tag{12}$$

dove

- $F_{2\to 1}$ è la forza che 2 esercita su 1 (forza interna, presente durante e dopo l'urto);
- $F_{1\to 2}$ è la forza che 1 esercita su 2 (forza interna, presente durante e dopo l'urto);
- $mg\sin\alpha$ è la forza peso (forza esterna, presente sempre);
- $\mu_i mg\cos\alpha$ è la forza di attrito dinamico (forza esterna, presente sempre);

- **Quantità di moto totale**
  Sommando le due equazioni (12) troviamo l'equazione del moto della quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$. Ricordando che per il terzo principio della dinamica le due forze interne sono uguali ed opposte ($F_{2\to 1} = -F_{1\to 2}$), si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \sum F_{ext} = \underbrace{2mg\sin\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha}_{\text{somma forze esterne}} \qquad (13)$$

  In particolare il membro destro della (13) mostra che la derivata di P è una costante. Pertanto

$$P(t) = \underbrace{P(t=0)}_{=0} + (2mg\sin\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha)\ t$$

$$\rightarrow \boxed{P(t) = 2mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)\ t} \qquad (14)$$

  ossia la quantità di moto totale P cresce linearmente col tempo (vedi Fig.3).
  Osserviamo che, siccome

$$P = Mv_{CM}$$

  e la quantità di moto totale P è determinata dalle sole forze esterne [vedi Eq.(13)], il moto del centro di massa non 'vede' l'urto.

  - **La quantità di moto totale si conserva nel tempo?**
    La risposta è NO, dato che su ciascuno dei due corpi agiscono, oltre alla forza esercitata dall'altro corpo, anche delle forze esterne (=non dovute all'altro componente del sistema), ossia la forza peso e la forza di attrito col piano. Pertanto il sistema dei due corpi 1 e 2 non è un sistema isolato e la quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ NON si conserva, nel senso che NON è costante nel tempo, come si vede esplicitamente dalla (14).

  - **La quantità di moto totale si conserva 'nell'urto' ?**
    (P è continua o subisce discontinuità tra immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto?).
    Indicando con t_u l'istante in cui avviene l'urto

$$\underbrace{P(t_u-\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente}\\ \text{prima dell'urto}}} \quad = \quad \underbrace{P(t_u+\epsilon)}_{\substack{\text{immediatamente}\\ \text{dopo l'urto}}} \quad ? \qquad (15)$$

La risposta è SÌ, come si vede dalla (14), e possiamo pertanto scrivere

$$P(t_u+\epsilon) = P(t_u-\epsilon) = P(t_u) = 2mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) t_u \tag{16}$$

3. **Accelerazione dopo l'urto**
Dopo l'urto i due corpi proseguono insieme attaccati come un unico corpo di massa $M = 2m$. Pertanto l'accelerazione con cui scendono è pari all'accelerazione a_{CM} del loro centro di massa, che è a sua volta data dall'equazione

$$\frac{dP}{dt} = (m+m)\, a_{CM} = \sum F_{ext} \tag{17}$$

Sommando le forze esterne [vedi Eq.(13)] otteniamo

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{\sum F_{ext}}{2m} = \frac{2mg\sin\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha}{2m} = \\ &= g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) \end{aligned} \tag{18}$$

Sostituendo i dati, otteniamo

$$\begin{aligned} a_{CM} &= 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{0.4+0.2}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 2.36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{19}$$

4. **Velocità immediatamente dopo l'urto**

   - Siccome dopo l'urto i due corpi proseguono insieme attaccati come un unico corpo di massa $m+m=2m$, la velocità immediatamente dopo l'urto

$$P(t_u+\epsilon) = (m+m)\, v(t_u+\epsilon) \tag{20}$$

Sfrutto ora la continuità della P totale attraverso l'urto [vedi Eq.(16)] ed ottengo

$$\begin{aligned} v(t_u+\epsilon) &= \frac{1}{2m}P(t_u+\epsilon) = \frac{1}{2m}P(t_u) = \\ &= g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) t_u = \\ &= \text{[uso la (18) e la (10)]} \\ &= \underbrace{g\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)}_{a_{CM}} \underbrace{\sqrt{\frac{2d}{(\mu_1-\mu_2)g\cos\alpha}}}_{=t_u} = \\ &= 2.36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}} \times 1.09\,\cancel{\mathrm{s}} = \\ &= 2.57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{21}$$

Osservazione: In presenza di urti ciò che importa è se una certa quantità 'si conserva nell'urto' (=se è continua), piuttosto che se 'si conserva in senso assoluto' (= se rimane sempre costante nel tempo). La seconda condizione è

certamente sufficiente per affermare che la prima vale (= se una funzione è costante, in particolare è continua all'istante t_u dell'urto), ma non è necessaria (=una funzione può variare nel tempo pur essendo continua).

5. **Forze interne**
   Osserviamo ora che

   - dopo l'urto i due corpi proseguono solidalmente,

   $$\begin{array}{rcl} v_1 & = & v_2 \\ & \Downarrow & \qquad \text{(dato che hanno la stessa massa } m\text{)} \\ p_1 & = & p_2 \end{array} \tag{22}$$

   - D'altra parte per definizione

   $$P = p_1 + p_2 \tag{23}$$

   Combinando (22) e (23) ricaviamo che

   $$p_1 = p_2 = \frac{P}{2} \qquad \text{(dopo l'urto)} \tag{24}$$

   da cui

   $$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dP}{dt} = \\ & \text{[uso la (17)]} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2m\, a_{CM} = m\, a_{CM} = \\ & \text{[uso la (18)]} \\ &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\cos\alpha\right) \end{aligned} \tag{25}$$

   - Dalle (12) abbiamo che

   $$\begin{cases} F_{2\to 1} = \dfrac{dp_1}{dt} - mg\sin\alpha + \mu_1 mg\cos\alpha \\[2ex] F_{1\to 2} = \dfrac{dp_2}{dt} - mg\sin\alpha + \mu_2 mg\cos\alpha \end{cases} \tag{26}$$

   Sostituendo la (25) nella prima delle (26) otteniamo

   $$\begin{aligned} F_{2\to 1} &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\cos\alpha\right) - mg\sin\alpha + \mu_1 mg\cos\alpha = \\ &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} mg\cos\alpha \end{aligned} \tag{27}$$

   Sostituendo i dati

   $$\begin{aligned} F_{2\to 1} &= \frac{0.4 - 0.2}{2}\, 2\,\mathrm{Kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= 1.70\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{28}$$

Analogamente, sostituendo la (25) nella seconda delle (26) otteniamo

$$\begin{aligned} F_{1\to 2} &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right) - mg\sin\alpha + \mu_2 mg\cos\alpha = \\ &= -\frac{\mu_1-\mu_2}{2}mg\cos\alpha = \\ &= -F_{2\to 1} \end{aligned} \tag{29}$$

- Dalle (25) ricaviamo anche l'andamento delle due quantità di moto

$$p_1(t) = p_2(t) = mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)t \qquad \text{(dopo l'urto,} \quad t > t_u) \tag{30}$$

Ricordando gli andamenti (8) ottenuti prima dell'urto, possiamo confrontare i valori delle due quantità di moto immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto:

– corpo a valle

$$\begin{aligned} \text{prima:} \qquad p_1(t_u-\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right)t_u \\ \text{dopo:} \qquad p_1(t_u+\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)t_u = \qquad (31) \\ &= \underbrace{mg\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right)t_u}_{=p_1(t_u-\epsilon)} + \underbrace{mg\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\cos\alpha\; t_u}_{=\Delta p_1} \qquad (32) \end{aligned}$$

– corpo a monte

$$\begin{aligned} \text{prima:} \qquad p_2(t_u-\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right)t_u \\ \text{dopo:} \qquad p_2(t_u+\epsilon) &= mg\left(\sin\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)t_u = \qquad (33) \\ &= \underbrace{mg\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right)t_u}_{=p_2(t_u-\varepsilon)} - \underbrace{mg\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\cos\alpha\, t_u}_{=\Delta p_2} \qquad (34) \end{aligned}$$

Osservazione: I termini sottolineati mostrano che la quantità di moto di ciascun corpo non solo non si conserva nel tempo, ma non si conserva nemmeno nell'urto, ossia p_i subisce un salto discontinuo all'istante t_u dell'urto. In particolare, la quantità di moto del corpo 1 a valle subisce un brusco aumento, mentre quella del corpo 2 a monte una brusca diminuzione. Si noti la differenza rispetto alla quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ che rimane sempre continua. La'ndamento nel tempo è mostrato in Fig.3

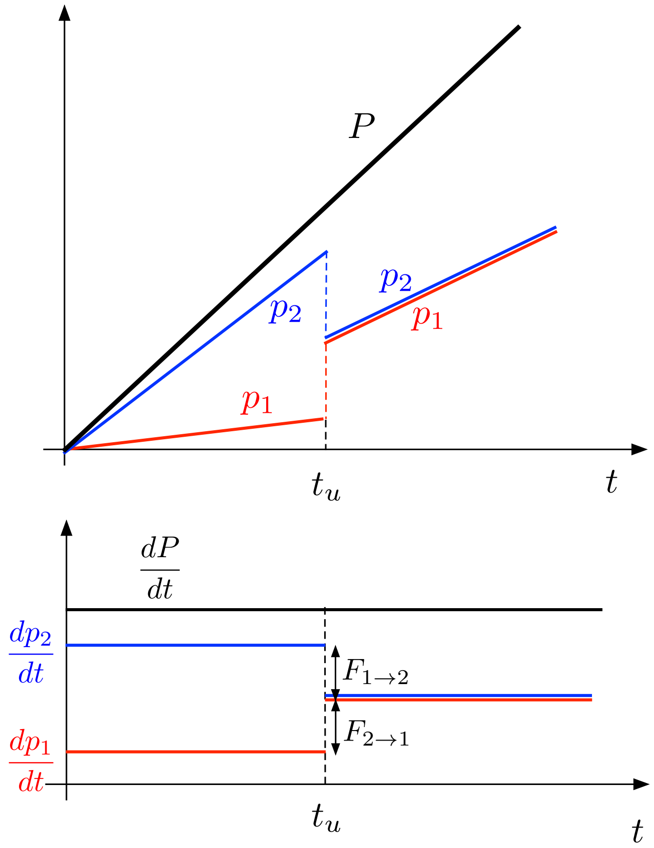

Figure 3: Pannello superiore: Andamento delle quantità di moto p_1 e p_2 dei due corpi (curve rossa e blu) e della quantità di moto totale $P = p_1 + p_2$ (curva nera). La quantità di moto totale non si conserva (cresce nel tempo). Tuttavia si conserva 'nell'urto' (è continua in $t = t_u$). Al contrario, p_1 e p_2 non si conservano nel tempo, né si conservano 'nell'urto', dato che hanno una discontinuità in $t = t_u$. Pannello inferiore: L'andamento delle derivate dp_1/dt e dp_2/dt della quantità di moto dei due corpi mostra che le discontinuità sono dovute alle forze interne di ciascun corpo sull'altro, attive a partire dall'urto.