Ricerca Operativa 5/6/24

COGNOME NOME

Esercizio 1. Si progetta una dieta composta da vitamina A, B, C e ferro introducendo tavolette di Vitatav, Bentav ed Extratav. La tabella mostra il contenuto in milligrammi di ogni tavoletta.

	A	B	C	Ferro	costo
Vitatav	10	10	20	4	4
Bentav	15	20	10	5	6
Extratav	20	15	20	2	7

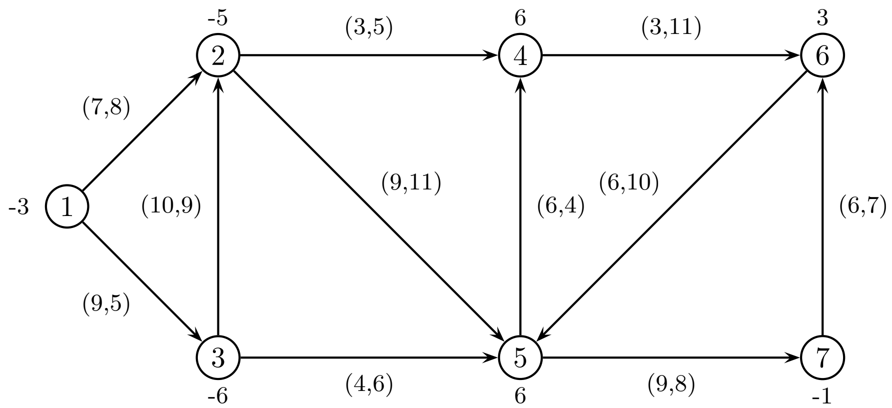
La dieta deve contenere almeno 80, 30, 60 e 14 milligrammi di vitamina A, B, C e ferro e deve avere almeno il 25% di Vitatav ed almeno il doppio di Bentav rispetto ad Extratav. Si vuole minimizzare il costo della dieta. Effettuare un passo del simplesso, per risolvere il rilassato continuo, partendo da una soluzione che prevede assunzione di Vitatav solamente. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 2. Trovare il ciclo di costo minimo sulla rete:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	18	17	26	21
2		20	13	14
3			16	28
4				15

Trovare una valutazione con l'algoritmo delle toppe. Applicare il *Branch and Bound* utilizzando il 5–albero e l'algoritmo del nodo più vicino a partire da 3 ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{24}, x_{35}. Quale è la soluzione ottima? Supponendo che c_{ij} siano interi strettamente positivi ed i nodi siano n, stabilire una condizione necessaria ed una sufficiente affinchè il valore ottimo sia n.

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6) e l'arco (2,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 e la soluzione ottima in termini di flusso su reti. Trovare, tramite l'algoritmo FFEK, il taglio da 1 a 7 di capacitá minima e la soluzione ottima del problema del flusso massimo.

Esercizio 4. Sia $f(x) = -2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 - 6\,x_1 + 8\,x_2$ su P, poliedro di vertici $(-2,3)$, $(0,5)$, $(2,1)$ e $(1,-3)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe ed uno del gradiente proiettato a partire da $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ per la minimizzazione di f. Trovare poi il minimo globale su P ed i relativi moltiplicatori. Quale è il minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$?

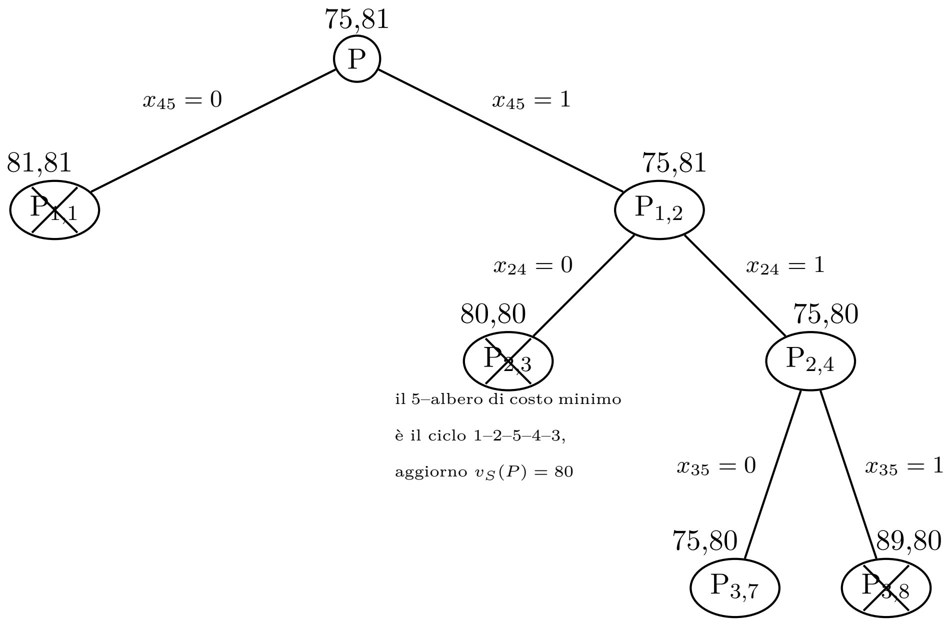
SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$\begin{cases} \min \ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geq 80 \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \geq 30 \\ 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 60 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 14 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\ x_2 - 2x_3 \geq 0 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Vertice di partenza: $(8, 0, 0)$ con base $B = \{1, 8, 9\}$, $y = (2/5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$, $h = 9$, e $W^9 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, $r = (10, 5, 3, 24/7, 0, 4)$, $k = 6$. L'ottimo è $(4/3, 8/3, 4/3)$ da portare in formato duale standard per calcolare il piano di taglio $r = 1$. La prima riga della matrice $\tilde{A}$ è $(-1/60, -10/9, -1/36)$ ed il taglio è $177x_4 + 160x_8 + 175x_9 \geq 6$. La soluzione ottima del PLI $(3, 2, 1)$

Esercizio 2.
L'algoritmo delle toppe si applica calcolando prima l'assegnamento di costo minimo che è 1-3-1 e 2-5-4-2 di valore 76. 5–albero: (1 , 3) (2 , 4) (2 , 5) (3 , 4) (4 , 5); $v_I(P) = 75$
ciclo: 3 – 4 – 2 – 5 – 1; $v_S(P) = 81$



La soluzione ottima è 1-2-5-4-3-1.

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(0, 3, 5, 9, 9, 0, 2, 3, 0, 0, 1)	(3, 0, 5, 9, 6, 0, 2, 3, 0, 0, 1)
π	(0, 19, 9, 34, 28, 37, 31)	
Arco entrante	(1,2)	
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	
Arco uscente	(1,3)	

L'albero dei cammini minimi come flusso è $x = (3, 3, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0)$. L'unico cammino aumentanti è 1-2-5-7; δ è 8 con flusso ottimo $x = (8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0)$, $N_t = 7$.

Esercizio 4.

sol. ottima del linearizzato	$(-2, 3)$
direzione	$\left(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
passo	1
successivo	$(-2, 3)$

matrice M	$(2, 1)$
matrice H	$\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$
direzione	$\left(-\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)$
max spostamento possibile lungo la direzione	$\frac{5}{21}$
passo	$\frac{5}{21}$
x^1	$(0, 5)$

Poichè f è concava il minimo globale su P è $(1, -3)$ con moltiplicatori $(37/3, 35/3, 0, 0)$.

Il minimo globale su tutto $\mathbb{R}^2$ non esiste considerando la restrizione $x_1 = 0$ e $x_2 = t$.