А. А. ВАКУЛЕНКО

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В МЕХАНИКЕ

Издательство Ленинградского университета 1972

Ленинградский ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени А. А. Жданова

А. А. ВАКУЛЕНКО

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ В МЕХАНИКЕ

Издательство Ленинградского университета 1972

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

В книге дается краткое изложение основ тензорного исчисления в духе современной математики. Значительное место уделяется также теории тензорных функций и ряду смежных вопросов, в первую очередь из числа имеющих приложения в механике и реологии.

Книга рассчитана на читателей, занимающихся различными вопросами теоретической и прикладной механики, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей университетов и втузов.

$\frac{2-2-3}{48-71}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

В отечественной научной литературе имеется ряд книг, посвященных тензорному исчислению. Достаточно назвать «Тензорный анализ» П. А. Широкова [1] и известные, неоднократно переиздававшиеся книги Н. Е. Кочина [2] и П. К. Рашевского [3]. Имеется также несколько переводных книг, в том числе широко распространенная за рубежом, весьма компактная и обстоятельная книга Я. А. Схоутена [4]. Однако во всех этих и других книгах подобного направления, изданных в нашей стране, теория тензоров излагается в традиционной «компонентной» форме, в которой тензоры отождествляются с системами их образов при координатных представлениях. Обладая определенными (и немалыми) достоинствами, такой предельно арифметизированный подход, с другой стороны, затушевывает ряд принципиальных моментов и имеет следствием также некоторую громоздкость аппарата, проявляющуюся, в частности, в «вакханалии индексов».

Вместе с тем известна и широко используется в специальной литературе — работах по некоторым отраслям общей алгебры, дифференциальной топологии и др., иная, более изящная и общая точка зрения. Здесь на первый план выступает тот факт, что линейные системы (модули, векторные пространства) естественным образом порождают другие такие системы, канонически и полилинейно связанные с исходными. Элементами так возникающих «новых» пространств и являются тензоры. Точные определения можно сформулировать различным образом, в том числе, в сущности, и весьма просто, если отказаться от стремления к максимальной общности.

Цель настоящей небольшой книги и состоит в том, чтобы изложить основы тензорного исчисления в форме, соответствующей отмеченной современной точке зрения и в то же время доступной достаточно широкому кругу читателей — минимум знаний, необходимых для полного понимания изложенного, исчерпывается началами линейной алгебры. В порядке напоминания эти начальные сведения вкратце приводятся в § 1—3 первой главы. В § 6—8 формулируются основные определения. Как и в определениях на языке гомологической алгебры, в этих определениях тензорные произведения и тензоры выступают в качестве некоторых «универсальных объектов», конкретными моделями которых могут служить полилинейные функции, надлежащим образом связанные с исходными пространствами. В роли последних рассматриваются только векторные пространства обычного типа (с умножением векторов на комплексные или вещественные числа); ценой этого ограничения общности и достигается простота, допускающая указанный минимум исходных сведений. Вторая глава посвящена тензорным функциям и ряду смежных вопросов. Некоторым из этих вопросов обычно значительное внимание уделяется и в курсах линейной алгебры, но здесь они излагаются в той «чисто тензорной» форме, которая вводится в первой главе. Надо заметить, что анализ в книге присутствует почти исключительно в части, относящейся к тензорным функциям — отображениям друг в друга элементов семейства пространств, порождаемых данным исходным линейным пространством. Понятие же «абсолютного» дифференциала, на которое опирается собственно тензорный анализ, затрагивается лишь в одном примере (имеющем, правда, принципиальный характер). Почти отсутствуют также примеры приложений теории тензоров к механике, большое число которых можно найти в упоминавшихся книгах Н. Е. Кочина, П. К. Рашевского и Я. А. Схоутена. Но при отборе материала, вошедшего в книгу вслед за основными определениями первой главы, автор руководствовался в первую очередь интересами указанных приложений, что и позволил себе подчеркнуть в названии книги.

Написанию книги способствовали многие друзья и коллеги автора. Особой благодарностью автор обязан К. Маркову, оказавшему большую помощь как при выборе окончательного варианта, так и при оформлении рукописи.

Глава I

ТЕНЗОРЫ НАД ВЕКТОРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Понятие тензора тесно связано с понятием линейной структуры (линейной системы). Именно, тензоры данного строения всегда порождаются некоторой совокупностью (не обязательно различных) линейных структур и в свою очередь сами образуют такую структуру, называемую тензорным произведением исходных. Так, можно рассматривать тензорные произведения модулей, векторных пространств любого числа измерений и над любым телом, линейных алгебр и т. д. Но мы не будем стараться определить понятие тензора во всей его общности и ограничимся тензорами, которые порождаются векторными пространствами. Более того, как правило, речь будет идти о тензорах над векторными пространствами довольно частного вида — конечномерными пространствами с умножением векторов на комплексные или вещественные числа. Вместе со значительным упрощением изложения при этом сохраняются еще сравнительно широкие возможности приложений: в механике и других областях точного естествознания чаще всего встречаются тензоры именно такого типа.

§ 1. Векторное пространство

1. Пусть R обозначает поле вещественных, C — поле комплексных чисел. Напомним, что вещественное (комплексное) векторное пространство — это совокупность 1) некоторого непустого множества A, 2) поля R (или соответственно C), 3) двух всюду определенных и удовлетворяющих ряду других требований «законов композиций», называемых сложением векторов (элементов множества A) и умножением векторов на скаляры (числа из R или C). Так как A играет роль основного из «базисных множеств» — множества всех векторов пространства, последнее обычно обозначают тем же символом, что и это множество.

Достаточно детальное изложение аксиоматики векторного (линейного) пространства можно найти во многих руководствах (см., например, любой из известных курсов [5, 6, 7, 8] или монографию [9]). Подчеркнем лишь, что эта аксиоматика имеет в основе свойства сложения и умножения на скаляры векторов обычного евклидова пространства. В результате и сама теория векторных пространств состоит во многом из обобщений понятий и построений элементарной векторной алгебры.

Прежде всего, для любых конечных системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и системы скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ определена и также является вектором из A композиция $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots$ $\ldots + \alpha_k x_k$; вектор $\sum_{p=1}^{k} \alpha_p x_p$ называется линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Пусть 0 — нулевой вектор. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются линейно независимыми, если $\sum_{p=1}^{k} \alpha_p x_p = 0$ только при $\alpha_p = 0$ для каждого $p = 1, 2, \ldots, k$; в противном случае $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы. Нетрудно видеть, что векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Будучи «всюду определенными» законами композиций, сложение и умножение на числа векторов из A определены и для элементов любого непустого подмножества $S \subset A$. Подмножество в A, которое с такими (индуцированными из A) законами композиций само образует векторное пространство, называется подпространством пространства A. Для того чтобы непустое $S \subset A$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы любая линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ при $x \in S$ и $y \in S$ была бы также вектором из S.

Для любого $S \subset A$ существует подпространство, содержащее подмножество S и наименьшее среди подпространств с таким свойством (содержащееся в любом из них). Это подпространство состоит из всевозможных линейных комбинаций векторов из S и называется подпространством, порожденным подмножеством S или натянутым на S или, наконец, линейной оболочкой этого подмножества.

Векторное пространство A называется конечномерным, если существует конечная система векторов из A, порожденное которой подпространство совпадает с A. В этом случае существует также такое, зависящее только от A, неотрицательное целое число $\dim A$, что среди векторов пространства A можно найти $\dim A$ линейно независимых, а любые $\dim A + 1$ векторов линейно зависимы. Конечномерное A с $\dim A = n$ называется n-мерным.

В дальнейшем n-мерное векторное пространство будем обозначать, как правило, через A_n. Векторное пространство A бесконечномерно тогда и только тогда, когда для любого целого $m > 0$ найдутся m линейно независимых векторов из A. В этом случае по определению $\dim A = \infty$ (или же $\dim A$ обозначает мощность определенного подмножества в A). С различного рода дополнительными условиями бесконечномерные векторные пространства изучаются в функциональном анализе.

2. В соответствии с определением A_n существует n линейно-независимых векторов $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n \in A_n$. С присоединением к ним любого $\mathrm{x} \in A_n$ получается система из $n+1$ векторов и потому линейно зависимая: $\alpha_0 \mathrm{x} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i = 0$, где не все $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны нулю. Заведомо $\alpha_0 \neq 0$, ибо в силу линейной независимости векторов $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ при $\alpha_0 = 0$ равенство $\alpha_0 \mathrm{x} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i = 0$ истинно только с равенством нулю и всех остальных коэффициентов. Поэтому для любого $\mathrm{x} \in A_n$ имеем $\mathrm{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i \mathrm{e}_i$, $x^i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}$. Условимся, как это принято в тензорной алгебре, опускать символ $\sum$ в обозначении сумм такого вида:

$$\mathrm{x} = x^i \mathrm{e}_i = x^1 \mathrm{e}_1 + x^2 \mathrm{e}_2 + \ldots + x^n \mathrm{e}_n, \tag{1}$$

в роли символа суммирования здесь выступает сам факт повторения индекса i.

Система из n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства называется его базисом. На основании изложенного любой вектор $\mathrm{x} \in A_n$ представим в виде линейной комбинации (1) векторов базиса. Для каждого $\mathrm{x} \in A_n$ такое представление единственно: из $\mathrm{x} = x^i \mathrm{e}_i = x_0^i \mathrm{e}_i$ имеем $(x^i - x_0^i)\, \mathrm{e}_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов базиса $x_0^i = x^i$. Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в (1), комплексные или вещественные в зависимости от того, какое из полей C и R играет роль поля скаляров пространства A_n, называются компонентами (или координатами) вектора x в данном базисе для A_n. Из аксиом векторного пространства в совокупности с только что изложенным следует, что

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = x^i \mathrm{e}_i + y^i \mathrm{e}_i = (x^i + y^i)\, \mathrm{e}_i, \quad \alpha \mathrm{x} = \alpha (x^i \mathrm{e}_i) = (\alpha x^i)\, \mathrm{e}_i$$

для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A_n$ и скаляра α. Отсюда в свою очередь $\mathrm{x} - \mathrm{y} = (x^i - y^i)\, \mathrm{e}_i$, 0 — вектор, все компоненты которого в любом базисе равны нулю, и т. д.

§ 2. Некоторые примеры (модели, реализации) векторного пространства

1. «Арифметические» модели A_n. Пусть, как обычно, $\underbrace{C \times C \times \ldots \times C}_{n} \equiv C^n$ — прямое (декартово) произведение, т. е. множество, элементами которого являются всевозможные

упорядоченные системы $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$, $\alpha^i \in C$ (здесь i, конечно, индекс, а не показатель степени). Положим для любых $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$ из C^n и любого $\gamma \in C$

$$\begin{aligned}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) + (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n) = \\ = (\alpha^1 + \beta^1, \alpha^2 + \beta^2, \ldots, \alpha^n + \beta^n), \\ \gamma(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) = (\gamma\alpha^1, \gamma\alpha^2, \ldots, \gamma\alpha^n).\end{aligned} \tag{1}$$

В совокупности с так определенными сложением и умножением на числа из C элементов множества C^n последнее образует векторное пространство. Очевидно, что система из n элементов $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 0, \ldots, 1)$ множества C^n является базисом этого пространства, которое поэтому n-мерное векторное пространство над полем C.

Аналогичным образом строится „арифметическая" („числовая") модель вещественного A_n. Роль векторов в этом случае играют элементы множества $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n} \equiv R^n$ — системы из n вещественных чисел с покомпонентно (т. е. по формулам вида (1)) определенными их сложением и умножением на числа.

2. Множество всех матриц данного строения. Пусть $\|\alpha_{kl}\|$, $\|\beta_{kl}\|$ — матрицы $m \times n$ (т. е. с m строками и n столбцами) из комплексных или вещественных чисел. С покомпонентным сложением и умножением на числа: $\|\alpha_{kl}\| + \|\beta_{kl}\| = \|\alpha_{kl} + \beta_{kl}\|$, $\gamma\|\alpha_{kl}\| = \|\gamma\alpha_{kl}\|$ множество всех матриц $m \times n$ над полем C или R обладает структурой mn-мерного векторного пространства. Один из базисов этого пространства образуют матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}, \ldots \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix}.$$

Как будет видно в дальнейшем, тензорное произведение друг на друга каких-либо A_m и A_n представляет собой «структуру», арифметической моделью которой как раз и является такое mn-мерное векторное пространство, образуемое матрицами $m \times n$ из чисел соответствующего поля.

3. Множество всех векторных функций с данной областью определения. Пусть V, W —какие-либо множества, $\Psi(V, W)$ — множество всех отображений множества V в W. Таким образом, отношение $f \in \Psi(V, W)$ равносильно условию, что f — функция на V со значениями в W. Если при этом W — (непустое) подмножество векторного пространства, то для элементов множества $\Psi(V, W)$ естественным образом определяются линейные композиции. Действительно, в этом случае имеют смысл отношения

$$(f+g)(\tau)=f(\tau)+g(\tau), \quad (\alpha f)(\tau)=\alpha f(\tau), \qquad (2)$$
$$f, g \in \Psi(V, W), \quad \tau \in V.$$

Но композиции, определенные согласно (2), не обязательно функции из $\Psi(V, W)$, ибо в область значений для $f+g$ и αf могут входить векторы, не принадлежащие W.

Усилим поэтому еще раз исходные условия, а именно будем считать, что W — не произвольное непустое подмножество, а подпространство некоторого векторного пространства. Тогда и только тогда, как вытекает из (2) и определения подпространства (§ 1), для любых f и g из $\Psi(V, W)$ и любого элемента поля скаляров для W функции $f+g$ и αf также $\in \Psi(V, W)$. Отсюда в свою очередь следует, что *для любых непустого множества V и векторного пространства A множество $\Psi(V, A)$ всех отображений $V \to A$ с естественным* (*вводимом отношениями* (2)) *определением их сложения и умножения на скаляры само образует векторное пространство.*

Рассматривая различные конкретные V в совокупности хотя бы с одной известной моделью векторного пространства в качестве пространства A, при помощи этого предложения можно построить как угодно много других таких моделей.

Как будет видно далее, при определенной конкретизации множества V одно из подпространств пространства $\Psi(V, A)$ образуют так называемые полилинейные отображения. Понятие полилинейного отображения занимает центральное место в тензорной алгебре — термины «тензорная алгебра» и «полилинейная алгебра» являются синонимами. Сначала, однако, напомним определение линейного отображения и некоторые связанные с ним факты.

§ 3. Гомоморфизмы

Пусть A, B — векторные пространства, h — функция на A со значениями в B, т. е. отображение $h: \mathrm{x} \to h(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in A$, пространства A в B. *Отображение h называется линейным, если $h(\mathrm{x}+\mathrm{y})=h(\mathrm{x})+h(\mathrm{y})$, $h(\alpha\mathrm{x})=\alpha h(\mathrm{x})$ для любых x, $\mathrm{y} \in A$ и числа α — элемента поля скаляров пространства A.*

Таким образом, линейные отображения «сохраняют» характерные для векторной структуры композиции, т. е. каждой линейной комбинации векторов из области определения сопоставляют аналогичную линейную комбинацию их образов, и потому являются гомоморфизмами (представлениями) векторного пространства. Взаимно однозначные гомоморфизмы, как обычно, называются изоморфизмами. Соответственно векторные пространства A и B называются изоморфными, если существует линейное и взаимно однозначное отображение одного из них на другое.

Нетрудно видеть, что когда такое отображение существует, то $\dim A = \dim B$ и A, B — оба вещественные или оба комплексные (вообще, с одинаковым полем скаляров). В конечномерном случае эти два необходимых условия являются и достаточными: *при любом целом $n \geqslant 0$ любые n-мерные A_n и B_n с одинаковым полем скаляров — изоморфные векторные пространства.* Действительно, при этом с фиксированием любых базиса $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ для A_n и базиса $\text{э}_1, \text{э}_2, \ldots, \text{э}_n$ для B_n определяется также отображение A_n на B_n по закону $\mathrm{x} = x^i \mathrm{e}_i \to x^i \text{э}_i$ (сопоставляющее каждому $\mathrm{x} \in A_n$ вектор из B_n, системой компонент которого в своем базисе служит та же система чисел, что и для x). Это отображение линейно и, как вытекает из определения базисов, взаимно однозначно, т. е. представляет собой изоморфизм пространства A_n на B_n.

В частности, любое A_n изоморфно «арифметической» своей модели. Соответствующий изоморфизм определяется заданием базиса для A_n и действует по закону $\mathrm{x} = x^i \mathrm{e}_i \to (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Очевидно, что каждый базис пространства A_n порождает такой его изоморфизм на C^n (или R^n), называемый обычно координатным, причем любым двум различным базисам соответствуют и различные координатные изоморфизмы. Подобным образом, вообще говоря, обстоит дело и с изоморфизмами друг на друга любых вещественных или комплексных A_n и B_n. Действительно, фиксировав, например, базис одного из пространств A_n, B_n и рассматривая различные базисы второго, в каждом случае будем иметь изоморфизм A_n на B_n, о котором упоминалось выше (действующий по правилу $x^i \mathrm{e}_i \to x^i \text{э}_i$). Таким путем, очевидно, можно построить как угодно много различных изоморфизмов A_n на B_n.

В некоторых случаях, однако, вместе с только что описанными может существовать изоморфизм, закон которого полностью определяется лишь «внутренними» (не зависящими от выбора базиса) свойствами связываемых им пространств. Существование для некоторой пары векторных пространств такого («канонического») изоморфизма одного из них на другое делает эти пространства уже вполне равноправными с точки зрения алгебры.

§ 4. Полилинейные отображения

Допустим теперь, что даны некоторые $k+1$ векторные пространства $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}, B$ и отображение P множества $\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots$

$\ldots \times \underset{(k)}{A}$ в B. Таким образом, P действует по правилу $(\underset{(1)}{\mathrm{x}}, \underset{(2)}{\mathrm{x}}, \ldots, \underset{(k)}{\mathrm{x}}) \to P(\underset{(1)}{\mathrm{x}}, \underset{(2)}{\mathrm{x}}, \ldots, \underset{(k)}{\mathrm{x}}) \in B$, т. е. представляет собой векторную функцию от k векторных аргументов, каждый из которых пробегает свое пространство. Если закрепить любые $k-1$ из этих k векторов-аргументов, то, очевидно, P сведется к векторной функции одного переменного вектора — отображению в B одного из пространств $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}$.

Отображение P называется полилинейным, если при любом целом $r \in [1, k]$ и любых фиксированных векторах $\underset{(1)}{\mathrm{a}}, \underset{(2)}{\mathrm{a}}, \ldots, \underset{(r-1)}{\mathrm{a}}, \underset{(r+1)}{\mathrm{a}}, \ldots, \underset{(k)}{\mathrm{a}}$ *(соответственно из* $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(r-1)}{A}, \underset{(r+1)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}$*) отображение* $\underset{(r)}{\mathrm{x}} \to P(\underset{(1)}{\mathrm{a}}, \ldots, \underset{(r-1)}{\mathrm{a}}, \underset{(r)}{\mathrm{x}}, \underset{(r+1)}{\mathrm{a}}, \ldots, \underset{(k)}{\mathrm{a}})$ *есть линейное отображение пространства $\underset{(r)}{A}$ в B.*

В случае $k=2$ полилинейное отображение называется обычно билинейным, при $k=3$ — трилинейным и т. д. Нетрудно видеть, что отображение произведения $\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}$ в B может быть полилинейным только тогда, когда поле скаляров пространства B содержит поле скаляров любого из пространств $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}$. Таким образом, например, обстоит дело, когда $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}, B$ — все вещественные или все комплексные векторные пространства.

Предложение. *Для любой конечной системы $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}$. B векторных пространств с одинаковым полем скаляров множество $\mathbf{P}(\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}, B)$ всех полилинейных отображений произведения $\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}$ в B естественным образом наделено структурой векторного пространства.*

Действительно, пусть $P, T \in \mathbf{P}(\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}, B)$, α — элемент поля скаляров пространств $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, B$. Нетрудно видеть, что при этом композиции $P+T$ и αP, определенные естественным для функций с векторными значениями образом (отношения (2) в § 2), — всегда тоже полилинейные отображения. Другими словами, подмножество $\mathbf{P}(\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}, B)$ множества $\Psi(\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}, B)$ всех отображений произведения $\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}$ в B замкнуто в отношении линейных комбинаций своих элементов и потому является подпространством векторного пространства, которое в силу сказанного в п. 3 § 2 образует множество $\Psi(\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}, B)$.

В заключение напомним, что для элементов любого поля определены, в частности, композиции, с которыми поле обладает структурой (одномерного) векторного пространства. Так, поле R вещественных чисел заключает в себе арифметическую модель «вещественной прямой», поле C соответственно — арифметическую модель одномерного комплексного векторного пространства. Поэтому определения гомоморфизмов и полилинейного отображения сохраняют смысл и для отображений в поле. Такие, имеющие числовые (скалярные) значения, функции векторных аргументов называются обычно формами.

§ 5. Сопряженное пространство. Скалярные произведения векторов

1. Пусть A — векторное пространство, ξ — линейная форма на A, т. е. линейное отображение пространства A в поле скаляров последнего. Условимся числа, служащие значениями формы ξ, записывать в виде $\xi \cdot x$, т. е. $\xi \cdot x \equiv \xi(x)$, $x \in A$, множество всех линейных форм на A обозначим через A^*.

В силу предложения § 4 множество A^* наделено структурой векторного пространства (с композициями $\xi + \eta$, $\alpha\xi$, для которых $(\xi + \eta)\cdot x = \xi \cdot x + \eta \cdot x$, $(\alpha\xi)\cdot x = \alpha\xi \cdot x$). Это векторное пространство называется *сопряженным* (*или двойственным*) к A. Так как векторы из A^* — линейные формы на A, для каждой пары $(\xi, x) \in A^* \times A$ определено число $\xi \cdot x$. Тем самым множество $A^* \times A$ канонически отображается в поле скаляров (одинаковое для A и A^*). Это отображение действует по закону

$$I:\ (\xi,\ x) \to \xi \cdot x, \quad \xi \in A^*,\ x \in A \tag{1}$$

и представляет собой билинейную форму на $A^* \times A$.

2. Рассмотрим A_n. Для каждого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства A_n найдутся такие n форм $e^1, e^2, \ldots, e^n$ на A_n, что $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$, где δ^i_j — символ Кронекера: $\delta^i_j = 0$ при $i \neq j$ и $\delta^i_j = 1$ при $i = j$. Действительно, пусть $e^i \cdot x = x^i$, т. е. форма e^i действует по правилу $x = x^i e_i \to x^i$ (каждому вектору $x \in A_n$ сопоставляет i-ю его компоненту в данном базисе для A_n). При этом e^i — линейная форма и, кроме того, поскольку $e_i = \delta^j_i e_j$,

$$e^i \cdot e_j = \delta^i_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

С другой стороны, для любой линейной формы ξ на A_n имеем $\xi \cdot x = \xi \cdot (x^i e_i) = (\xi \cdot e_i)\, x^i = (\xi \cdot e_i)(e^i \cdot x)$. Отсюда $\xi = (\xi \cdot e_i)\, e^i$ или, обозначая числа $\xi \cdot e_i$ через ξ_i, $\xi = \xi_i e^i$. Таким образом, любая линейная форма на A_n представляется линейной комбинацией форм $e^1, e^2, \ldots, e^n$. Благодаря (2), кроме того, последние линейно независимы и потому образуют базис сопряженного к A_n пространства. Можно утверждать, следовательно, что *пространство, сопряженное к A_n, — также n-мерное* *векторное пространство (и с тем же полем скаляров, так что A_n и A_n^* изоморфны). Каждому базису пространства A_n можно сопоставить базис для A_n^*, удовлетворяющий условию* (2).

3. Линейные формы на A_n^* в свою очередь суть векторы пространства A_n^{**}, сопряженного к A_n^*. Продолжая этот процесс, получим последовательность A_n, A_n^*, A_n^{**}, ... Можно показать, однако, что любые два члена этой последовательности, расположенные в ней через один, представляют собой канонически изоморфные векторные пространства и потому их можно отождествить. В результате $A_n = A_n^{**} = A_n^{****} = \ldots$ и соответственно $A_n^* = A_n^{***} = \ldots$.

В этом вопросе существенна конечномерность A_n. Для бесконечномерного векторного пространства ряд A, A^*, A^{**}, ... может содержать и более чем два различных (не связанных каноническим изоморфизмом) члена.

Вернемся, однако, к конечномерному случаю. В соответствии со сказанным в этом случае A_n и A_n^* можно считать взаимно сопряженными пространствами. Если A_n — векторное пространство, для которого кроме линейных композиций подходящим образом определено скалярное умножение векторов, то исчезает различие и между A_n и A_n^*.

4. Пусть A_n — вещественное векторное пространство. Будем говорить, что A_n — *пространство со скалярным умножением векторов, если задана билинейная форма* g *на* $A_n \times A_n$, *причем*

а) $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{y} \cdot \mathrm{x}$ *для любых* x *и* y *из* A_n,

б) *для любого* $\mathrm{x} \neq 0$ *найдется хотя бы один* y, *с которым* $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \neq 0$ (где $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \equiv \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — значения формы g). Сама форма при этом называется *фундаментальной* (*или метрической*), число $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ для каждой пары $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in A_n \times A_n$ — *скалярным произведением векторов* x и y.

Как и любая симметрическая билинейная форма на $A_n \times A_n$, форма g порождает линейное отображение пространства A_n в A_n^* (несимметричная билинейная форма на $A_n \times A_n$ порождает два различных таких отображения). В самом деле, с фиксированием любого $\mathrm{x} \in A_n$ форма g сводится к линейной форме $\mathrm{g_x} : \mathrm{y} \to \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ на A_n. Соответственно, $\mathrm{h_g} : \mathrm{x} \to \mathrm{g_x}$ — линейное отображение пространства A_n в A_n^*.

Условие б) есть условие невырожденности формы g. Оно равносильно условию, что отображение $\mathrm{h_g}$ взаимно однозначно. Из сказанного в § 3 вытекает, что, будучи линейным и обратимым отображением пространства A_n в изоморфное ему пространство A_n^*, отображение $\mathrm{h_g}$ в действительности — линейное и обратимое отображение на A_n^* и тем самым изоморфизм пространства A_n на A_n^*. Для данного A_n, очевидно, этот изоморфизм зависит только от формы g. Поэтому для пространства со скалярным умножением векторов такой, порождаемый метрической его формой, изоморфизм A_n на A_n^* можно считать каноническим и, следовательно, отождествить A_n^* с A_n (отождествляя с каждым $\mathrm{x} \in A_n$ форму, служащую образом данного x при этом изоморфизме).

Заметим, что при $A_n = A_n^*$ каноническая билинейная форма I на $A_n^* \times A_n$ (см. п. 1 в настоящем параграфе) превращается в форму на $A_n \times A_n$, совпадающую с метрической: $\mathrm{I} = \mathrm{g}$.

5. Пусть $|\mathrm{x}|$ обозначает неотрицательное (или соответствующее знаку + при мнимой единице, когда $\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} < 0$) из значений радикала $\sqrt{\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}}$. *Число* $|\mathrm{x}|$ *называется длиной* (*нормой*) *вектора* x. Для вещественного A_n симметричная билинейная форма на $A_n \times A_n$ может порождать определенно положительную квадратичную форму, т. е. удовлетворять условию

б') $\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} > 0$ при любом $\mathrm{x} \neq 0$ из A_n. Так как при этом для любого $\mathrm{x} \neq 0$ имеем $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \neq 0$ по меньшей мере при $\mathrm{y} = \mathrm{x}$, вместе с б') всегда выполняется и условие невырожденности б), в то время как из последнего, разумеется, условие б') не вытекает.

Когда фундаментальная форма сверх а) и б) удовлетворяет и условию б'), связанные с нею («метрические») свойства пространства вполне аналогичны метрическим свойствам обычного евклидова пространства. Соответственно, *вещественное* A_n *со скалярным умножением векторов, фундаментальная форма которого вместе с* а) и б) *удовлетворяет и условию* б'), *называется n-мерным евклидовым пространством. Когда фундаментальная форма условию* б') *не удовлетворяет, вещественное* A_n *называется псевдоевклидовым пространством.* Иногда евклидовым называют любое вещественное A_n со скалярным умножением, определяемым симметричной и невырожденной билинейной формой на $A_n \times A_n$. При этом пространства, для которых сверх а) и б) выполняется и б'), называются собственно евклидовыми, а остальные по-прежнему псевдоевклидовыми.

6. Для комплексного A_n скалярное умножение векторов также можно определить заданием билинейной формы на $A_n \times A_n$, подчиняющейся условиям а) и б) (комплексное евклидово пространство). Но при этом условие б') заведомо выполняться не может — в комплексном случае оно противоречит условию билинейности формы. Действительно, для комплексного A_n вместе с каждым $\mathrm{x} \in A_n$ в число векторов пространства входит $i\mathrm{x}$, где сейчас $i = \sqrt{-1}$. Если $\mathrm{g} : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ — билинейная форма, то $(i\mathrm{x}) \cdot (i\mathrm{x}) = -\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}$, и потому при $\mathrm{x} \cdot \mathrm{x} > 0$ для некоторого x, для вектора $i\mathrm{x}$ будет $(i\mathrm{x}) \cdot (i\mathrm{x}) < 0$.

В связи с этим имеет значение возможность иного определения скалярного умножения векторов комплексного векторного пространства, при котором роль фундаментальной играет не билинейная, а так называемая эрмитова полуторалинейная форма (называемая также эрмитово-билинейной или просто эрмитовой формой). Для вещественного пространства эрмитова форма сводится к симметричной билинейной форме, но в отличие от последней может удовлетворять условию б′) и в комплексном случае (комплексное A_n с таким скалярным умножением векторов называется унитарным пространством).

§ 6. Тензорные произведения

Начнем со случая, когда даны какие-либо два векторных пространства A и B (не обязательно со скалярным умножением векторов). Пусть по-прежнему $A \times B$ — прямое произведение, т. е. множество всех упорядоченных пар (x, u), $\mathrm{x} \in A$, $\mathrm{u} \in B$, $\dim(\ )$ — число измерений пространства.

Тензорным умножением векторов из A на векторы из B называется закон, сопоставляющий каждой паре $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$ *вектор* $\mathrm{x} \otimes \mathrm{u}$ *некоторого* $(\dim A)(\dim B)$*-мерного векторного пространства* $A \otimes B$, *причем так, что* $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{x} \otimes \mathrm{u}$ — *каноническое и билинейное отображение, множество значений которого порождает* $A \otimes B$ (как и в § 3 под „каноничностью“ отображения здесь понимается возможность определить его вне связи с выбором базисов).

Пространство $A \otimes B$ *называется тензорным произведением пространств A и B, векторы из* $A \otimes B$ — *тензорами над A, B* (или просто тензорами, когда ясно, элементами тензорного произведения каких и в каком порядке взятых векторных пространств являются эти тензоры; хотя, как можно показать, $A \otimes B$ и $B \otimes A$ канонически изоморфны, имеет смысл их не отождествлять).

Предложение. *Для любых вещественных или комплексных векторных пространств A, B тензорное их произведение существует и определено с точностью до канонического изоморфизма.*

В части, касающейся существования $A \otimes B$, справедливость этого предложения доказывают примеры, приведенные в следующем параграфе. Пусть теперь $A \otimes B$ и $A \underset{\sim}{\otimes} B$ — пространства, каждое из которых обладает всеми свойствами тензорного произведения A на B. Канонические отображения $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{x} \otimes \mathrm{u} \in A \otimes B$ и $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{x} \underset{\sim}{\otimes} \mathrm{u} \in A \underset{\sim}{\otimes} B$ порождают отображение h из $A \otimes B$ в $A \underset{\sim}{\otimes} B$, $\mathrm{h}: \mathrm{x} \otimes \mathrm{u} \to \mathrm{x} \underset{\sim}{\otimes} \mathrm{u}$. В силу условия $\dim A \otimes B = \dim A \underset{\sim}{\otimes} B$ и одного из основных свойств исходных отображений, отображение h естественным образом расширяется до отображения $A \otimes B$ на $A \underset{\sim}{\otimes} B$, для этого достаточно каждой линейной комбинации векторов из области определения отображения h сопоставить такую же линейную комбинацию их образов. В результате получается линейное и обратимое отображение $A \otimes B$ на $A \underset{\sim}{\otimes} B$, не связанное с выбором базисов, т. е. канонический изоморфизм.

§ 7. Модели тензорных произведений

1. Билинейные формы на $A^* \times B^*$. Каждой паре $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$ можно сопоставить определенную и зависящую только от векторов x, u билинейную форму на $A^* \times B^*$: значения этой формы, которую мы обозначим через xu, определяются условием $(\mathrm{xu})(\xi, \gamma) \equiv (\xi \cdot \mathrm{x})(\gamma \cdot \mathrm{u})$, $\xi \in A^*$, $\gamma \in B^*$. Здесь $\xi \cdot \mathrm{x}$ и $\gamma \cdot \mathrm{u}$ — числа (значения форм ξ и γ), тем самым и $(\xi \cdot \mathrm{x})\,(\gamma \cdot \mathrm{u})$ — число, т. е. элемент поля скаляров. Поэтому

$$\mathrm{xu}:\ (\xi, \gamma) \to (\xi \cdot \mathrm{x})(\gamma \cdot \mathrm{u}), \quad (\xi, \gamma) \in A^* \times B^* \tag{1}$$

— действительно форма на $A^* \times B^*$. Очевидно, что эта форма билинейна.

На основании предложения, доказанного в § 4, множество всех билинейных форм на $A^* \times B^*$ естественным образом наделено структурой векторного пространства. Обозначим через $A \otimes B$ подпространство этого пространства, натянутое на подмножество, которое образуют формы xu для всех пар $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$. Соответственно отображение по закону $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{xu}$ есть отображение множества $A \times B$ в $A \otimes B$. Это отображение определяется вне связи с выбором базисов и, кроме того, билинейно: из (1) с учетом определения естественных линейных комбинаций форм следует, что $(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y})\,\mathrm{u} = \alpha \mathrm{xu} + \beta \mathrm{yu}$, $\mathrm{x}(\alpha \mathrm{u} + \beta \mathrm{v}) = \alpha \mathrm{xu} + \beta \mathrm{xv}$ для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in B$ и чисел α, β. Наконец, $\dim A \otimes B = (\dim A)(\dim B)$.

В самом деле, пусть A, B — конечномерные пространства, $\dim A = n$, $\dim B = m$ и $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n)$, $(э_1, э_2, \ldots, э_m)$ — базисы для A и B. Вследствие билинейности отображения $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{xu}$ имеем $\mathrm{xu} = (x^i \mathrm{e}_i)(u^j э_j) = x^i \mathrm{u}^j \mathrm{e}_i э_j \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x^i u^j \mathrm{e}_i э_j \right)$.
Так как $A \otimes B$ натянуто на значения этого отображения, т. е. состоит из всевозможных линейных их комбинаций, произвольный вектор пространства $A \otimes B$ также представляется линейной комбинацией векторов $\mathrm{e}_i э_j$. Система из nm форм $\mathrm{e}_i э_j$ линейно независима, в силу этого и возможности представить любой $\mathrm{T} \in A \otimes B$ линейной комбинацией ее элементов является базисом для $A \otimes B$, откуда и имеем $\dim A \otimes B = nm = (\dim A)(\dim B)$.

Нетрудно убедиться также в том, что для конечномерных A и B рассматриваемое подпространство пространства, образуемого всеми билинейными формами на $A^* \times B^*$, является

„несобственным“ — совпадает в действительности с этим пространством. В бесконечномерном случае этого может и не быть. Но равенство $\dim A \otimes B = (\dim A)(\dim B)$ при надлежащем определении $\dim(\ )$ сохраняет смысл и остается справедливым и в этом случае.

2. *Линейные отображения пространства A^* в B.* Для каждой пары $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$ обозначим теперь через xu отображение пространства A^* в B, действующее по закону

$$\mathrm{xu} : \xi \to (\xi \cdot \mathrm{x})\,\mathrm{u}, \quad \xi \in A^*. \tag{2}$$

Это отображение линейно и подобно (1) зависит только от векторов x, u. Пусть по-прежнему $A \otimes B$ — пространство, натянутое на множество, которое образуют xu для всех пар $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$. При этом снова отображение $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \to \mathrm{xu}$ каноническое и билинейное, а $\dim A \otimes B = (\dim A)(\dim B)$, т. е. выполняются все требования, которые содержит в себе определение произведения $A \otimes B$.

Таким образом, при желании тензорное произведение $A \otimes B$ можно конкретизировать, отождествив тензор $\mathrm{x} \otimes \mathrm{u}$ для каждой пары $(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \in A \times B$ с билинейной формой (1) или линейным отображением (2). Тогда, подчеркнем, и любой тензор $\mathrm{T} \in A \otimes B$ будет представлять собой билинейную форму на $A^* \times B^*$, или соответственно линейное отображение A^* в B. На основании предложения, доказанного в § 6, получающиеся таким путем два вполне конкретных для конкретных исходных A и B векторных пространства канонически изоморфны друг другу, равно как и любой другой, удовлетворяющей всем нужным требованиям, модели произведения $A \otimes B$.

3. *Координатные изоморфизмы и „арифметическая“ модель $A \otimes B$.* Ограничимся конечномерным случаем. Пусть A_n, B_m — какие-либо n- и m-мерные векторные пространства над полем C или R. На основании сказанного в п. 1 для любых базиса $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ пространства A_n и базиса $\text{э}_1, \text{э}_2, \ldots, \text{э}_m$ пространства B_m тензоры[1] $\mathrm{e}_i\text{э}_j$ образуют базис для $A_n \otimes B_m$. Другими словами, для любого $\mathrm{T} \in A_n \otimes B_m$ найдется, причем единственная, матрица $n \times m$ из вещественных или комплексных чисел, с которой

$$\mathrm{T} = \tau^{ij}\mathrm{e}_i\text{э}_j \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau^{ij}\mathrm{e}_i\text{э}_j \right).$$

Для любых тензоров T_α, $\mathrm{T}_\beta \in A_n \otimes B_m$ и скаляра μ

$$\begin{gathered} \mathrm{T}_\alpha + \mathrm{T}_\beta = \alpha^{ij}\mathrm{e}_i\text{э}_j + \beta^{ij}\mathrm{e}_i\text{э}_j = (\alpha^{ij} + \beta^{ij})\,\mathrm{e}_i\text{э}_j, \\ \mu\mathrm{T}_\alpha = (\mu\alpha^{ij})\,\mathrm{e}_i\text{э}_j. \end{gathered} \tag{3}$$

[1] В дальнейшем, сохраняя введенное в § 6 обычное обозначение тензорных произведений в применении к произведениям пространств, в символах тензорных произведений векторов знак $\otimes$, как правило, будем опускать.

Отсюда следует, что отображение по закону $\mathrm{T}=\tau^{ij}e_i\text{э}_j \to \|\tau^{ij}\|$ есть изоморфизм произведения $A_n \otimes B_m$ на пространство, которое состоит из всевозможных матриц $n \times m$ над полем R или C с покомпонентными линейными их комбинациями (п. 2, § 2).

§ 8. Тензорное произведение нескольких векторных пространств

Так как произведение $A \otimes B$ обладает структурой векторного пространства, оно само может служить сомножителем в тензорных произведениях. Пользуясь любой из описанных в предыдущем параграфе моделей тензоров над парой данных векторных пространств, нетрудно проверить, что для любых A, B, D с одинаковым полем скаляров $(A\otimes B)\otimes D = A\otimes(B\otimes D)$. Поскольку, таким образом, порядок расстановки скобок значения не имеет, их можно опустить: $A\otimes B\otimes D = (A\otimes B)\otimes D = A\otimes(B\otimes D)$.

Вообще, для любой конечной системы $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \dots, \underset{(k)}{A}$ векторных пространств $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\dots\otimes\underset{(k)}{A} = (\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A})\otimes(\underset{(3)}{A}\otimes\dots\otimes\underset{(k)}{A}) = \underset{(1)}{A}\otimes(\underset{(2)}{A}\otimes\underset{(3)}{A})\otimes(\underset{(4)}{A}\otimes\dots\otimes\underset{(k)}{A}) = \dots$. Отсюда и из определений § 6 следует, что $\dim(\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\dots\otimes\underset{(k)}{A}) = (\dim\underset{(1)}{A})(\dim\underset{(2)}{A})\dots(\dim\underset{(k)}{A})$ и что $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\dots\otimes\underset{(k)}{A}$ натянуто на множество значений канонического и полилинейного отображения произведения $\underset{(1)}{A}\times\underset{(2)}{A}\times\dots\times\underset{(k)}{A}$.

В некоторых случаях часть сомножителей в тензорном произведении может „исчезать". Действительно, для любых поля K и векторного пространства A над K определены, в частности, $K\otimes A$ и $A\otimes K$ (поскольку K также можно рассматривать как векторное пространство над K). Но отображение по правилу $\alpha\otimes x \to \alpha x$, $\alpha \in K$, $x \in A$, представляет собой канонический изоморфизм пространства $K\otimes A$ на A. Поэтому $K\otimes A$, равно как и $A\otimes K$, можно с A отождествить: $A = K\otimes A = A\otimes K$. В частности, $K = K\otimes K = K\otimes K\otimes K = \dots$.

§ 9. Аффинные тензоры

1. Допустим, что задано какое-либо A. Тем самым задано и A^* — сопряженное к A пространство (§ 5), а также с точностью до канонического изоморфизма любое из тензорных произведений $A\otimes A$, $A\otimes A\otimes A$, $\dots$, $A^*\otimes A^*$, $A^*\otimes A^*\otimes A^*$, $\dots$, $A\otimes A^*$, $A\otimes A^*\otimes A$ и т. д. Элементы всех таких, порождаемых заданием A, тензорных произведений называются аффинными тензорами над A. *Аффинные тензоры, принадлежащие*

$\underbrace{A \otimes A^* \otimes \ldots \otimes A}_{s}$, *называются s-валентными, причем r раз контра- и $(s-r)$ раз ковариантными, если A в это произведение входит сомножителем r раз, а A^*, следовательно, $(s-r)$ раз.* При $r=s$ или $r=0$ кратность контра- или ковариантности обычно не упоминается.

Так, по этой терминологии векторы из A — одновалентные контравариантные, из A^* — одновалентные ковариантные тензоры, из $A \otimes A$ — двухвалентные контравариантные тензоры над A и т. д. В число аффинных тензоров обычно включают также элементы поля скаляров: факты, отмеченные в конце § 8, позволяют рассматривать поле скаляров пространства A как нулевую тензорную его степень, и тогда соответственно скаляры — аффинные тензоры нулевой валентности над A.

2. Рассмотрим случай конечномерного исходного пространства. Любое произведение $A_n \otimes \overset{*}{A}_n \otimes \ldots \otimes A_n$ с $s \geqslant 1$ сомножителями, как вытекает непосредственно из определений § 6 и 8, обладает структурой n^s-мерного векторного пространства. В частности, на основании доказанного в § 7 для любого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства A_n n^2 тензоров $e_i e_j$ образуют базис для $A_n \otimes A_n$, n^3 тензоров $e_i e_j e_k$ — базис для $A_n \otimes A_n \otimes A_n$ и т. д.

Напомним, далее, что в силу условия $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$ каждому базису $e_1, e_2, \ldots, e_n \in A_n$ сопоставляется (причем единственный) базис $e^1, e^2, \ldots, e^n$ для $\overset{*}{A}_n$ (§ 5). При этом n^2 тензоров $e^i e^j$ образуют базис для $\overset{*}{A}_n \otimes \overset{*}{A}_n$, n^3 тензоров $e^i e^j e^k$ — базис для $\overset{*}{A}_n \otimes \overset{*}{A}_n \otimes \overset{*}{A}_n$ и т. д.

Таким образом, заданием базиса для A_n определяется базис и для каждого элемента „лестницы" тензорных произведений, порождаемых A_n (т. е. содержащих аффинные тензоры над A_n). Соответственно замена данного базиса исходного пространства другим определяет преобразование базисов и по всей этой „лестнице".

Пусть $e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'}$ и $e^{1'}, e^{2'}, \ldots, e^{n'}$ — „новые" базисы для A_n и $\overset{*}{A}_n$,

$$e_{i'} = \mathring{A}^i_{i'} e_i, \quad e^{i'} = \mathring{A}^{i'}_i e^i \quad \left(\mathring{A}^i_{i'} \mathring{A}^{i'}_j = \delta^i_j\right) \tag{1}$$

— их разложения по векторам „старых" базисов. Как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, так что $\mathring{A}^i_{i'}$ и $\mathring{A}^{i'}_i$ — общие элементы некоторых (невырожденных) матриц $n \times n$ из вещественных или комплексных чисел. Условие $\mathring{A}^i_{i'} \mathring{A}^{i'}_j = \delta^i_j$ есть необходимое и достаточное условие того, что вместе с $e^i \cdot e_j = \delta^i_j$ аналогичное отношение выполняется и для „новых" базисов. В силу этого условия заданием одного из преобразований (1) полностью определяется и второе.

Вследствие полилинейности отображений, порождающих тензорные произведения,

$$\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}_{j'} = \mathring{A}^{i}_{i'}\mathring{A}^{j}_{j'}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j, \quad \mathrm{e}^{i'}\mathrm{e}_{j'} = \mathring{A}^{i'}_{i}\mathring{A}^{j}_{j'}\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

При этом, разумеется, определенным образом преобразуются и компоненты тензоров. Рассмотрим, для определенности, какой-либо $\mathrm{T} \in A_n \otimes A_n^* \otimes A_n^*$, т. е. трехвалентный „смешанный" тензор: $\mathrm{T} = \tau^{i}_{\cdot jk}\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j\mathrm{e}^k$. Поскольку T с равным правом разлагается по элементам и „нового" базиса для $A_n \otimes A_n^* \otimes A_n^*$, имеем $\mathrm{T} = \tau^{i}_{\cdot jk}\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j\mathrm{e}^k = \tau^{i'}_{\cdot j'k'}\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}^{j'}\mathrm{e}^{k'}$; так как $\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j\mathrm{e}^k = \mathring{A}^{i'}_{i}\mathring{A}^{j}_{j'}\mathring{A}^{k}_{k'}\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}^{j'}\mathrm{e}^{k'}$, отсюда $\mathring{A}^{i'}_{i}\mathring{A}^{j}_{j'}\mathring{A}^{k}_{k'}\tau^{i}_{\cdot jk}\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}^{j'}\mathrm{e}^{k'} = \tau^{i'}_{\cdot j'k'}\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}^{j'}\mathrm{e}^{k'}$ и далее в силу линейной независимости системы из n^3 тензоров $\mathrm{e}_{i'}\mathrm{e}^{j'}\mathrm{e}^{k'}$

$$\tau^{i'}_{\cdot j'k'} = \mathring{A}^{i'}_{i}\mathring{A}^{j}_{j'}\mathring{A}^{k}_{k'}\tau^{i}_{\cdot jk}. \tag{3}$$

В это преобразование один раз входит матрица второго и два раза первого из преобразований (1), что и отражает термин «раз контра- и дважды ковариантный тензор» (поскольку первое из преобразований (1) является в известном смысле основным, а матрица второго получается транспонированием матрицы преобразования, обратного первому). По образцу формулы (3) легко написать формулы преобразования компонент любого аффинного тензора над A_n. Характерная форма «закона» преобразования компонент тензоров лежит в основе обычного «координатного» их определения, используемого в большинстве известных руководств.

3. С помощью разложений по базисам линейные композиции тензоров обычным образом сводятся к аналогичным композициям „одноименных" компонент: для любых тензоров T_α и T_β одинакового „строения", например из $A_n^* \otimes A_n$, имеем $\mathrm{T}_\alpha + \mathrm{T}_\beta = \alpha_i^{\cdot j}\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j + \beta_i^{\cdot j}\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j = (\alpha_i^{\cdot j} + \beta_i^{\cdot j})\,\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j$, а также $\lambda\mathrm{T}_\alpha = (\lambda\alpha_i^{\cdot j})\,\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j$.

Из определений § 6 и 8 следует, кроме того, что для любой конечной упорядоченной системы $\mathrm{T}_\alpha, \mathrm{T}_\omega, \mathrm{T}_\varphi, \ldots, \mathrm{T}_u$ аффинных тензоров над A_n (причем не обязательно уже одинакового „строения") определена и также является аффинным тензором над A_n композиция $\mathrm{T}_\alpha\mathrm{T}_\omega\mathrm{T}_\varphi \ldots \mathrm{T}_u$ — тензорное произведение элементов этой системы[1]. Действительно, поскольку каждый из тензоров $\mathrm{T}_\alpha, \mathrm{T}_\omega, \ldots, \mathrm{T}_u$ является элементом какого-либо из произведений $A_n \otimes A_n^* \otimes \ldots \otimes A_n$ векторных пространств с одинаковым для них всех полем скаляров, для пары T_α, T_ω определен тензор $\mathrm{T}_\alpha\mathrm{T}_\omega$ — тензорное произведение T_α на T_ω, для пары $\mathrm{T}_\alpha\mathrm{T}_\omega$, T_φ в свою очередь—тензор $\mathrm{T}_\alpha\mathrm{T}_\omega\mathrm{T}_\varphi = (\mathrm{T}_\alpha\mathrm{T}_\omega)\,\mathrm{T}_\varphi$ и т. д.

---

[1] Напомним, что знак $\otimes$ мы условились сохранять лишь в символах тензорных произведений пространств.

Пусть, например, $T_\alpha \in A_n \otimes A_n$, $T_\omega \in A_n^* \otimes A_n^*$. Тогда $T_\alpha T_\omega \in (A_n \otimes A_n) \otimes (A_n^* \otimes A_n^*) = A_n \otimes A_n \otimes A_n^* \otimes A_n^*$, откуда $T_\alpha T_\omega = (\alpha^{ij} e_i e_j)(\omega_{kl} e^k e^l) = \alpha^{ij} \omega_{kl} e_i e_j e^k e^l$. Вообще, если T_α и T_ω — какие-либо соответственно p- и s-валентные аффинные тензоры над A_n, то $T_\alpha T_\omega$ будет ps-валентным тензором. Аналогичным образом обстоит дело и с тензорным произведением более чем двух тензоров. Отметим, что, вообще говоря, $T_\alpha T_\omega \neq T_\omega T_\alpha$.

4. Наконец, используя каноническую билинейную форму на $A_n^* \times A_n$ (п. 1, § 5), для аффинных тензоров над A_n можно определить еще один вид композиций, которым соответствует так называемое „свертывание“ компонент.

Пусть $\xi \in A_n^*$ и x, y — какие-либо векторы из A_n, так что $\xi x y \in A_n^* \otimes A_n \otimes A_n$ и отображение по правилу $\xi x y \to (\xi \cdot x) y$, где $\xi \cdot x$ — скаляр (значение упомянутой билинейной формы), есть каноническое отображение на A_n некоторого подмножества пространства $A_n^* \otimes A_n \otimes A_n$. Поскольку последнее натянуто на это подмножество, отображение $\xi x y \to (\xi \cdot x) y$ порождает отображение всего $A_n^* \otimes A_n \otimes A_n$ на A_n, а именно $\tau_i^{\cdot jk} e^i e_j e_k \to \tau_i^{\cdot jk} e^i \cdot e_j e_k = \tau_j^{\cdot jk} e_k$ (где учтено, что $e^i \cdot e_j = \delta_j^i$).

Аналогичным образом отображения $(\xi, xy) \to (\xi \cdot x) y$ и $(\xi, xy) \to x (y \cdot \xi) = (\xi \cdot y) x$ порождают два, вообще различных, отображения множества $A_n^* \times (A_n \otimes A_n)$ на A_n. Условимся образ пары $(\xi, T) \in A_n^* \times (A_n \otimes A_n)$ в первом случае обозначать через $\xi \cdot T$, а во втором — через $T \cdot \xi$; в частности, $\xi \cdot xy = (\xi \cdot x) y$, $xy \cdot \xi = x (y \cdot \xi) = x (\xi \cdot y)$ ($y \cdot \xi = \xi \cdot y$ в силу того, что A_n и A_n^* — взаимно сопряженные пространства, п. 3, § 5). Таким образом, $\xi \cdot T = (\xi_i e^i) \cdot (\tau^{jk} e_j e_k) = \xi_i \tau^{jk} e^i \cdot e_j e_k = \xi_j \tau^{jk} e_k$, где учтено, что $e^i \cdot e_j = \delta_j^i$; $T \cdot \xi = \xi_j \tau^{kj} e_k$.

Эта символика целесообразна и в других случаях. Так, $xy \cdot \xi\eta = (xy \cdot \xi)\eta = x (y \cdot \xi\eta) = (\xi \cdot y) x\eta$. Соответственно $T_\alpha \cdot T_\omega$ для любых $T_\alpha \in A_n \otimes A_n$ и $T_\omega \in A_n^* \otimes A_n^*$ обозначает образ пары T_α, T_ω при каноническом отображении множества $(A_n \otimes A_n) \times (A_n^* \otimes A_n^*)$ на $A_n \otimes A_n^*$, которое порождает отображение по закону $(xy, \xi\eta) \to xy \cdot \xi\eta = (\xi \cdot y) x\eta$.

Очевидно, однако, что композиция $T_u \cdot T_v$ определена не для всякой пары аффинных тензоров. В частности, $T_u \cdot T_v$ теряет смысл, когда оба тензора T_u и T_v вместе «чисто» ко- или контравариантные.

§ 10. Тензоры над пространствами со скалярным умножением векторов

1. Совокупность n-мерного векторного пространства и билинейной метрической формы условимся обозначать $\mathcal{E}_n$. Таким образом, $\mathcal{E}_n$ — евклидово пространство (в широком смысле, т. е.

с метрической формой, которая не обязательно удовлетворяет условию б′) § 5). Для простоты этим же символом $\mathcal{E}_n$ будем обозначать и «базисное» векторное пространство. Поскольку в этом случае $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n$ (§ 5), «лестница» тензорных произведений, порождаемых $\mathcal{E}_n$, сводится к последовательности

$$\mathcal{E}_n, \quad \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \quad \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \ \ldots \tag{1}$$

(к которой по-прежнему в качестве нулевой степени можно присоединить поле скаляров). Иными словами, различие между ко- и контравариантными тензорами исчезает — для каждого целого $s \geqslant 0$ теперь имеется один и только один тип тензоров валентности s, а именно тензоры из $\underbrace{\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_n}_{s}$.

Как и для любого A_n, каждому базису $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ пространства $\mathcal{E}_n$ можно сопоставить сопряженный базис $\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2, \ldots, \mathrm{e}^n : \mathrm{e}^i \cdot \mathrm{e}_j = \delta^i_j$, с той оговоркой, что оба базиса здесь — базисы одного и того же пространства. Соответственно каждая из систем n^2 тензоров $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j$, $\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j$, $\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j$, $\mathrm{e}^i\mathrm{e}^j$ является базисом для $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, каждая из систем n^3 тензоров $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k$, $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}^k, \ldots, \mathrm{e}^i\mathrm{e}^j\mathrm{e}^k$ — базисом для $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и т. д.

Все сказанное в предыдущем параграфе относительно линейных композиций и тензорного умножения аффинных тензоров остается справедливым и в этом случае. Композиции же, о которых шла речь в п. 4 предыдущего параграфа, выполнимы теперь для любых тензоров. В частности, для любых тензоров T_u и T_v над $\mathcal{E}_n$ описанным в § 9 образом определяются $\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v$ и $\mathrm{T}_v \cdot \mathrm{T}_u$. Точно также для любых тензоров над $\mathcal{E}_n$ возможно «свертывание» — каноническое отображение соответствующего из произведений (1) на любое другое из них, расположенное левее на четное число мест. Например, отображение по правилу $u^{ij}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j \to u^{ij}\mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j$ сопоставляет каждому двухвалентному тензору скаляр. Подчеркнем, что это — каноническое отображение, т. е. его можно определить вне связи с выбором базиса для $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$.

Напомним теперь, что моделями тензоров могут служить, в частности, полилинейные формы. Пусть I — тензор, моделью которого является метрическая форма (метрический тензор данного $\mathcal{E}_n$). Это равносильно условию, что $\mathrm{x} \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathcal{E}_n$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{I} = g^{ij}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j = g_{ij}\mathrm{e}^i\mathrm{e}^j = \delta^i_j\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j = \delta^j_i\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j, \tag{2}$$

где $g^{ij} = \mathrm{e}^i \cdot \mathrm{e}^j$, $g_{ij} = \mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j$. Метрический тензор — единственный такой тензор, что $\mathrm{I} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{T}$ для любого тензора T над $\mathcal{E}_n$.

С помощью метрического тензора, в частности, осуществляются преобразования базисов пространств (1), соответствующие так называемому «жонглированию» индексами. Для $\mathcal{E}_n$

эти преобразования суть переходы от одного из пары взаимно сопряженных базисов к другому. Для любой такой пары, как вытекает из (2),

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j. \tag{3}$$

С использованием обоих базисов для любого $x \in \mathcal{E}_n$ имеем $x = x^i e_i = x_i e^i$; отсюда и из (3) $x^i = g^{ij} x_j$, $x_i = g_{ij} x^j$. Для произвольного преобразования базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и соответствующего ему („сохраняющего“ условие сопряжения) преобразования сопряженного базиса справедливы по-прежнему формулы (1) § 9; тот факт, что оба базиса являются теперь базисами одного и того же пространства, внешне в этом отношении ничего не изменяет. Компоненты x^i и x_i при этом преобразуются по формулам $x^{i'} = \mathring{A}_i^{i'} x^i$ и $x_{i'} = \mathring{A}_{i'}^{i} x_i$ точно таким же, какими должны быть формулы преобразования компонент соответственно вектора из A_n и вектора из $\overset{*}{A}_n$, т. е. одновалентных контра- и ковариантного тензоров, в рассматривавшемся в § 9 случае. В связи с этим числа x^i и x_i обычно называют контра- и ковариантными компонентами вектора $x = x^i e_i = x_i e^i$ в данном базисе пространства $\mathcal{E}_n$. Подчеркнем, что эта терминология имеет в основе лишь чисто внешнее сходство ситуации в обоих случаях: в то время как в предыдущем случае термины «контра- и ковариантный» обозначают элементы различных пространств, в рассматриваемом сейчас случае они относятся к элементам одного и того же пространства, обозначая их компоненты в различных базисах последнего, связанных условием сопряжения.

Аналогичным образом обстоит дело с тензорами и более высокой валентности над $\mathcal{E}_n$. Для $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ заданием базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathcal{E}_n$, как уже говорилось, определяются четыре, вообще различных базиса, используя которые для любого $T \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, имеем $T = t^{ij} e_i e_j = t_i^{\cdot j} e^i e_j = t^i_{\cdot j} e_i e^j = t_{ij} e^i e^j$. При этом $t_i^{\cdot j} = t^{kj} g_{ik}$, $t^{ij} = t_k^{\cdot j} g^{ki}$ и т. д.

2. Все изложенное в п. 1 справедливо для любого $\mathcal{E}_n$ — собственно евклидова, псевдоевклидова и комплексного евклидова (а с некоторыми оговорками — и для унитарного, § 5) пространства. Различие между геометриями этих разновидностей евклидова пространства проявляется при построении так называемого ортонормированного базиса.

Пусть $\mathcal{E}_n$ — собственно евклидово пространство, т. е. вместе с условиями билинейности и симметрии метрической формы выполняется условие $x \cdot x > 0$ для любого $x \neq 0$ из $\mathcal{E}_n$. Тогда, как можно показать (см., например, любой из курсов [1, 2, 3, 4]), существует, и при том не единственный, такой базис $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{E}_n$, сопряженный к которому с ним совпадает:

$$a_i \cdot a_j = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad a_i \cdot a_i = 1 \quad \text{при } i = j. \tag{4}$$

Более того, при $n>1$ существует бесконечное множество различных базисов, удовлетворяющих условиям (4), которые и называются ортонормированными. Заданием такого базиса определяется один и только один базис для каждого из тензорных произведений (1), так что различие между ко- и контравариантными компонентами тензоров исчезает.

Для комплексного $\mathcal{E}_n$, как уже отмечалось, $\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}>0$ при любом $\mathrm{x}\neq 0$ быть не может (п. 6, § 5). Тем не менее и здесь существуют базисы, для которых справедливы все соотношения (4).

В случае же псевдоевклидова пространства дело обстоит иначе. Действительно, если базис $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n \in \mathcal{E}_n$ со свойствами (4) существует, то, пользуясь этим базисом, для квадрата длины $|\mathrm{x}|^2 \equiv \mathrm{x}\cdot\mathrm{x}$ каждого $\mathrm{x} \in \mathcal{E}_n$ имеем обычную формулу $\mathrm{x}\cdot\mathrm{x} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $x_i = \mathrm{x}\cdot\mathrm{a}_i$. Отсюда для вещественного $\mathcal{E}_n$ немедленно получается $\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}>0$ при любом $\mathrm{x}\neq 0$, в противоречие с определением псевдоевклидова пространства. В связи с этим для псевдоевклидова $\mathcal{E}_n$ второе из условий (4) заменяется иным, а именно ортонормированным называется такой базис $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$, для которого $\mathrm{a}_i\cdot\mathrm{a}_j=0$, $\mathrm{a}_i\cdot\mathrm{a}_i=\pm 1$. В соответствии с «законом инерции» для квадратичных форм число векторов базиса, для которых второе из этих соотношений выполняется со знаком минус, одинаково для всех таких базисов, т. е. представляет собой характеристику пространства (называемую его индексом).

§ 11. Критерий «тензорности». Примеры

Одно из наиболее важных (по крайней мере с точки зрения алгебры) свойств тензорного произведения векторных пространств состоит в том, что с помощью этого произведения каждому полилинейному отображению канонически сопоставляется линейное. Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\otimes"'] & B \\ & \underset{(1)}{A} \otimes \underset{(2)}{A} \otimes \ldots \otimes \underset{(k)}{A} \arrow[u, "h_P"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

где $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}$ — векторные пространства с одинаковым полем скаляров (а в остальном произвольные), P — некоторое полилинейное отображение множества $\underset{(1)}{A} \times \underset{(2)}{A} \times \ldots \times \underset{(k)}{A}$. В совокупности с каноническим отображением последнего в $\underset{(1)}{A} \otimes \underset{(2)}{A} \otimes \ldots \otimes \underset{(k)}{A}$ P определяет отображение из $\underset{(1)}{A} \otimes \underset{(2)}{A} \otimes \ldots \otimes \underset{(k)}{A}$ в B, которое автоматически расширяется до отображения h_P всего пространства $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\ldots\otimes\underset{(k)}{A}$ в B, поскольку $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\ldots\otimes\underset{(k)}{A}$ на множество значений отображения $\otimes$ натянуто. Из полилинейности отображений $\otimes$ и P вытекает, что h_P — линейное отображение. Очевидно, кроме того, что диаграмма (1) коммутативна, т. е. P можно заменить суперпозицией отображений $\otimes$ и h_P. Таким образом, *для любой конечной системы* $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}, B$ *векторных пространств с одинаковым полем скаляров любое полилинейное отображение* P *множества* $\underset{(1)}{A}\times\underset{(2)}{A}\times\ldots\times\underset{(k)}{A}$ *в* B *порождает линейное отображение* h_P *пространства* $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\ldots\otimes\underset{(k)}{A}$ *в* B, *причем при заданных* $\underset{(1)}{A}, \underset{(2)}{A}, \ldots, \underset{(k)}{A}, B$ *отображение* h_P *зависит только от* P, *и* $P(\underset{(1)}{\mathrm{x}}, \underset{(2)}{\mathrm{x}}, \ldots, \underset{(k)}{\mathrm{x}}) \equiv h_P(\underset{(1)}{\mathrm{x}}\,\underset{(2)}{\mathrm{x}} \ldots \underset{(k)}{\mathrm{x}})$.

Перефразировка этого предложения может служить определением тензорного произведения $\underset{(1)}{A}\otimes\underset{(2)}{A}\otimes\ldots\otimes\underset{(k)}{A}$, вполне эквивалентным сформулированному ранее. В частности, и из этого определения немедленно вытекает, что естественными моделями тензоров являются полилинейные отображения — для каждого тензора найдется (и притом не одно) полилинейное отображение, с которым этот тензор можно отождествить. Другими словами, *математический или физический объект может быть тензором лишь при условии, что задание этого объекта равносильно заданию какого-либо полилинейного отображения.* В конечномерном случае это необходимое условие является и достаточным, представляя собой тем самым вполне определенный и достаточно удобный критерий для распознавания тензоров среди изучаемых объектов.

Рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих использование этого критерия.

I. Один из основных постулатов классической механики сплошной среды состоит в том, что взаимодействие вещества в любом „подобъеме" (v) с остальной массой среды вполне характеризуется полем σ некоторого вектора на поверхности области (v). Фиксировав какую-либо точку среды, рассмотрим в качестве (v) элементарный тетраэдр с центром в этой точке и гранями, три из которых взаимно перпендикулярны (так что единичные векторы a_1, a_2, a_3 внешних нормалей к ним образуют ортонормированный базис). В этом случае из упомянутого постулата и условия равновесия (или сохранения импульса) вытекает $\sigma_1\nu_1+\sigma_2\nu_2+\sigma_3\nu_3=\sigma_\nu$, где σ_1, σ_2, σ_3, σ_ν — векторы поля σ („векторы напряжения") на гранях тетраэдра, ν_1, ν_2, ν_2 — составляющие орта ν внешней нормали к грани с вектором напряжения σ_ν. Если x — произвольный вектор с направлением внешней нормали к этой грани, то $\nu=\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|}$ и $(\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{x})\sigma_1+$

$+(a_2\cdot x)\,\sigma_2+(a_3\cdot x)\,\sigma_3=|x|\,\sigma_\nu$. Очевидно, что отображение по закону $x\to(a_i\cdot x)\,\sigma_i$ есть линейная векторная функция вектора $x\in\mathscr{E}_3$. Поэтому заданием векторов σ_1, σ_2, σ_3, т. е. заданием „напряженного состояния“ в данной точке среды, определяется некоторый двухвалентный тензор T_σ (тензор напряжения). С учетом „конструкции“ закона этой функции $T_\sigma=a_i\sigma_i\ \left(=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i\sigma_i\right)$, откуда в свою очередь $\nu\cdot T_\sigma=\sigma_\nu$.

II. Пусть u_{ijk} $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — система из n^3 чисел, характеризующая при заданном базисе e_1, e_2, ..., e_n пространства $\mathscr{E}_n$ некоторый „объект“. Отображение по закону $(x,\ y,\ z)\to$ $\to u_{ijk}x^iy^jz^k$, $x=x^ie_i$, $y=y^ie_i$, $z=z^ie_i$, представляет собой трилинейную форму на $\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n$. Пусть, далее, $e_{1'}$, $e_{2'}$, ..., $e_{n'}$ — какой-либо другой базис для $\mathscr{E}_n$ и n^3 чисел $u_{i'j'k'}$ — компоненты исследуемого объекта в этом базисе. Отображение по закону $(x,\ y,\ z)\to u_{i'j'k'}x^{i'}y^{j'}z^{k'}$, $x=x^{i'}e_{i'}$, $y=y^{i'}e_{i'}$, $z=z^{i'}e_{i'}$, снова — трилинейная форма на $\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n$, однако не обязательно совпадающая с предыдущей. Любые две такие, порождаемые объектом рассматриваемого типа с заданием базисов для $\mathscr{E}_n$, трилинейные формы на $\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n\times\mathscr{E}_n$ совпадают тогда и только тогда, когда этот объект — (трехвалентный) тензор над $\mathscr{E}_n$.

III. Рассмотрим какую-либо (в частности, не обязательно линейную) форму на $\mathscr{E}_n$, т. е. функцию $f\colon x\to f(x)$, $x\in\mathscr{E}_n$, со скалярными значениями. При фиксированном базисе для $\mathscr{E}_n$ функция f сводится к функции от n скалярных аргументов — компонент произвольного $x\in\mathscr{E}_n$ в данном базисе (или, если угодно, координат точки, радиус-вектором которой служит x). С учетом этого нетрудно проверить, что обычное определение дифференцируемости такой функции (по совокупности аргументов) в некоторой точке равносильно определению, по которому f дифференцируема при $x=x_0$, если для любого $a\in\mathscr{E}_n$ существует предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+at)-f(x_0)}{t}$, причем отображение по правилу

$$a\to\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+at)-f(x_0)}{t},\quad a\in\mathscr{E}_n,$$

представляет собой линейную форму на $\mathscr{E}_n$. Вследствие линейности этой форме соответствует вектор из $\mathscr{E}_n^*=\mathscr{E}_n$, т. е. одновалентный тензор над $\mathscr{E}_n$, с которым ее можно отождествить. Этот вектор, обозначаемый обычно через $f'(x_0)$ или $\nabla f(x_0)$, называется (полной) производной или градиентом функции f при $x=x_0$.

Учитывая, что по определению $\nabla f(x_0)$ $(\nabla f(x_0))\cdot a$ для каждого $a\in\mathscr{E}_n$ совпадает с указанным выше пределом, нетрудно установить связь с обычно определяемыми величинами. Так, для любого a с $|a|=1$ скалярное произведение $(\nabla f(x_0))\cdot a$

представляет собой то, что в классическом анализе принято называть „производной по направлению“ (направлению вектора a). Соответственно при задании любого базиса $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n \in \mathscr{E}_n$, так что $\mathrm{x} = x^i \mathrm{e}_i$ и f сводится к функции на R^n или C^n, $\frac{\partial f}{\partial x^i} = (\nabla f(\mathrm{x})) \cdot \mathrm{e}_i$, откуда $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\nabla f(\mathrm{x})) \cdot d\mathrm{x}$, $d\mathrm{x} = (dx^i)\, \mathrm{e}_i$.

Приведенное определение производной скалярной функции на $\mathscr{E}_n$ пригодно и для функций на A_n (с той лишь оговоркой, что в этом случае $\nabla f(\mathrm{x})$ — вектор из $\overset{*}{A}_n$), а также, и это главное, естественным образом обобщается на случай функций, значения которых суть тензоры любой валентности.

ДВУХВАЛЕНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

Тензорными называются функции, аргументы и значения которых представляют собой тензоры. В число таких функций, конечно, входят и обычные функции на подмножествах поля вещественных или комплексных чисел и со значениями в этих полях. Менее тривиальны с собственно тензорной точки зрения и в то же время допускают почти столь же далеко идущую теорию функций, аргументы и значения которых — двухвалентные тензоры над евклидовым пространством. Эти функции важны и с точки зрения приложений. Так, локальные «определяющие законы» для идеально упругого тела и для многих неупругих сплошных сред сводятся к тензорным функциям именно этого типа.

Элементы теории таких тензорных функций и составляют главное содержание настоящей главы. Ряд затрагиваемых вопросов более детально освещается в одной из глав книги [10], но в большей мере различие связано с тем, что в нашу задачу по-прежнему входило минимальное использование координатных представлений. Отметим также, что непосредственно тензорным функциям посвящены § 7, 8. В первых параграфах излагаются необходимые предварительные сведения, но они большей частью имеют и самостоятельное значение.

§ 1. Сводка исходных фактов

1. В этой главе, как правило, роль основного будет играть обычное, т. е. трехмерное собственно евклидово пространство, которое будем обозначать просто через $\mathcal{E}$ (как всегда, одновременно $\mathcal{E}$ будет обозначать и множество векторов пространства).

Тензорные произведения векторов часто называют также полиадами (диадами, триадами и т. д., когда нужно подчеркнуть число сомножителей). Учитывая, что $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$, на основании изложенного в § 7 предыдущей главы для любых векторов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ из $\mathcal{E}$ диаду $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ можно отождествить с билинейной формой на $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, сопоставляющей каждой паре $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ число $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}) \times$

$\times(\mathrm{b}\cdot\mathrm{y})$, или с линейным отображением пространства $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ по правилу $\mathrm{x}\to(\mathrm{a}\cdot\mathrm{x})\mathrm{b}$. Тогда соответственно

$$\mathrm{ab}:\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y})\to(\mathrm{a}\cdot\mathrm{x})(\mathrm{b}\cdot\mathrm{y}) \text{ или } \mathrm{ab}:\ \mathrm{x}\to(\mathrm{a}\cdot\mathrm{x})\,\mathrm{b} \qquad (1)$$

(линейное отображение пространства $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ по закону $\mathrm{x}\to\mathrm{a}(\mathrm{b}\cdot\mathrm{x})=(\mathrm{b}\cdot\mathrm{x})\mathrm{a}$ нужно считать моделью диады ba). Так как $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ по определению натянуто на множество всех диад из векторов пространства $\mathcal{E}$, при этом и любой $\mathrm{T}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ — двухвалентный тензор над $\mathcal{E}$ — будет представлять собой билинейную форму на $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ или линейное отображение $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$. Если воспользоваться некоторыми из композиций, связанных со „свертыванием“, то соответственно

$$\mathrm{T}:\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y})\to\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{y},\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in\mathcal{E}\times\mathcal{E} \text{ или } \mathrm{T}:\ \mathrm{x}\to\mathrm{x}\cdot\mathrm{T},\ \mathrm{x}\in\mathcal{E}. \qquad (2)$$

Действительно, напомним, что по определению

$$\mathrm{x}\cdot\mathrm{ab}=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{a})\,\mathrm{b},\ \mathrm{ab}\cdot\mathrm{x}=\mathrm{a}(\mathrm{b}\cdot\mathrm{x})=(\mathrm{b}\cdot\mathrm{x})\,\mathrm{a},$$
$$\mathrm{x}\cdot\mathrm{ab}\cdot\mathrm{y}=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{ab})\cdot\mathrm{y}=\mathrm{x}\cdot(\mathrm{ab}\cdot\mathrm{y})=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{a})(\mathrm{b}\cdot\mathrm{y}) \qquad (3)$$

(для любых x, y, a, $\mathrm{b}\in\mathcal{E}$). Когда $\mathrm{T}=\mathrm{ab}$, в силу (3) будет $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{y}=(\mathrm{a}\cdot\mathrm{x})(\mathrm{b}\cdot\mathrm{y})$, $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}=(\mathrm{a}\cdot\mathrm{x})\,\mathrm{b}$, и потому в этом случае (2) сводится к (1). Из (2) и (3) следует также, что произвольный $\mathrm{T}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ представляется линейными комбинациями диад. Но в совокупности с предыдущим это и означает, что при конкретизации диад согласно (1) произвольный $\mathrm{T}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ превращается соответственно в билинейную форму или линейное отображение, действующие так, как указано в (2).

2. Пользуясь любой из этих вполне равноправных моделей произведения $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$, нетрудно проверить непосредственно, что для каждого базиса e_1, e_2, e_3 пространства $\mathcal{E}$ каждая из систем 3^2 тензоров $\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j$, $\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j$, $\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j$, $\mathrm{e}^i\mathrm{e}^j$ есть базис для $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ (где по-прежнему e^i — векторы, с которыми $\mathrm{e}^i\cdot\mathrm{e}_j=\delta^i_j$). В результате фиксированием базиса для $\mathcal{E}$ каждому тензору $\mathrm{T}\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ сопоставляются четыре, вообще говоря, различных матрицы:

$$\mathrm{T}=t^{ij}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j=t_i^{\cdot j}\mathrm{e}^i\mathrm{e}_j=t^{i}_{\cdot j}\mathrm{e}_i\mathrm{e}^j=t_{ij}\mathrm{e}^i\mathrm{e}^j, \qquad (4)$$

причем $t^{ij}=t_k^{\cdot j}g^{ki}=t^{i}_{\cdot k}g^{kj}=t_{kl}g^{ik}g^{jl}$, $t_i^{\cdot j}=t^{kj}g_{ik}=t_{ik}g^{kj}$ и т. д., где $g^{ij}=\mathrm{e}^i\cdot\mathrm{e}^j$, $g_{ij}=\mathrm{e}_i\cdot\mathrm{e}_j$ (§ 10.I). Поскольку $\mathcal{E}$ — собственно евклидово пространство, существуют базисы, при использовании которых различие между разложениями (4) исчезает (п. 2, § 10.I).

3. Присоединим к (3) еще одно естественное „условие ассоциативности“, а именно $\mathrm{x}\cdot(\mathrm{T}_u\cdot\mathrm{T}_v)=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}_u)\cdot\mathrm{T}_v$ для любых $\mathrm{x}\in\mathcal{E}$ и T_u, $\mathrm{T}_v\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$. Тем самым каждой паре T_u, T_v двухвалентных тензоров над $\mathcal{E}$ сопоставляются композиции $\mathrm{T}_u\cdot\mathrm{T}_v$ и $\mathrm{T}_v\cdot\mathrm{T}_u$ — также двухвалентные тензоры над $\mathcal{E}$ (в отличие от тензорных произведений $\mathrm{T}_u\mathrm{T}_v$, $\mathrm{T}_v\mathrm{T}_u$, которые, подчеркнем, — элементы пространства $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$, т. е. четырехвалентные тензоры).

При этом всегда $(\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v) \cdot \mathrm{T}_w = \mathrm{T}_u \cdot (\mathrm{T}_v \cdot \mathrm{T}_w)$, так что естественным образом определяются многократные произведения этого типа. С учетом (3) все такие (связанные со „свертыванием") композиции легко выписываются в координатных представлениях:

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{T} = (x^i \mathrm{e}_i) \cdot (t^{jk} \mathrm{e}_j \mathrm{e}_k) = x^i t^{jk} \mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}_j \mathrm{e}_k = x^i t^{jk} g_{ij} \mathrm{e}_k = x^i t_i^{\cdot j} \mathrm{e}_j,$$

$$\mathrm{T} \cdot \mathrm{x} = x^i t^{j}_{\cdot i} \mathrm{e}_j, \quad \mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v = u^{ij} v^{kl} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j \cdot \mathrm{e}_k \mathrm{e}_l = u^{ij} v^{kl} g_{jk} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_l \qquad (5)$$

и т. д.

Композицию, которая соответствует „полному свертыванию", будем обозначать символом sp ( ). Иными словами, sp T — образ тензора $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ при каноническом отображении произведения $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в поле скаляров. Это отображение порождается отображением по правилу $\mathrm{xy} \to \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ подмножества в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, состоящего из диад, и потому действует по правилу $\mathrm{T} = t^i_{\cdot j} \mathrm{e}_i \mathrm{e}^j \to t^i_{\cdot j} \mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}^j$. Соответственно $\mathrm{sp}\,\mathrm{T} = t^i_{\cdot j} \mathrm{e}_i \cdot \mathrm{e}^j = t^i_{\cdot j} \delta_i^j$ $(= t^1_{\cdot 1} + t^2_{\cdot 2} + t^3_{\cdot 3}$; символ sp и подчеркивает тот факт, что при использовании „смешанных" компонент композиция sp T сводится к „взятию следа" матрицы). Тем самым, конечно, sp T определяется и через матрицу компонент в любом другом базисе: $\mathrm{sp}\,\mathrm{T} = t^i_{\cdot i} = t_i^{\cdot i} = t^{ij} g_{ji} = t_{ij} g^{ji}$. С учетом (5) $\mathrm{sp}(\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v) = u^{ij} v^{kl} g_{jk} g_{il} = u^i_{\cdot j} v^j_{\cdot i}$ и т. д.

Пусть по-прежнему I — метрический тензор. Тогда

$$\mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{I} = \ldots, \quad \mathrm{sp}\,\mathrm{I} = \mathrm{sp}(\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}) = \mathrm{sp}(\mathrm{I} \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{I}) = 3. \qquad (6)$$

Это — характеристические свойства: из каждой системы равенств (6) следует, что для I разложения (4) должны иметь вид (§ 10.I) $\mathrm{I} = \delta^i_j \mathrm{e}_i \mathrm{e}^j = g^{ij} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j = g_{ij} \mathrm{e}^i \mathrm{e}^j$, и обратно, отсюда вытекает (6). В такой же мере характеристическими являются следующие соотношения:

$$\mathrm{x} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}, \quad \mathrm{x} \in \mathscr{E}, \quad \mathrm{T} \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T}, \quad \mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}. \qquad (7)$$

4. *Для каждого* $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ *существует, причем единственный, такой тензор* $T^* \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, *называемый сопряженным к* T, *что* $\mathrm{x} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T}^* \cdot \mathrm{x}$ *для любого* $\mathrm{x} \in \mathscr{E}$. Именно, если $\mathrm{T} = t^{ij} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j$, то $\mathrm{T}^* = t^{ij} \mathrm{e}_j \mathrm{e}_i = t^{ji} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j$. Заметим, что $\mathrm{x} \cdot (\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v) = (\mathrm{x} \cdot \mathrm{T}_u) \cdot \mathrm{T}_v = \mathrm{T}_v^* \cdot (\mathrm{T}_u^* \cdot \mathrm{x}) = (T_v^* \cdot T_u^*) \cdot \mathrm{x}$. Отсюда

$$(\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v)^* = \mathrm{T}_v^* \cdot \mathrm{T}_u^*, \quad (\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v \cdot \mathrm{T}_w)^* = \mathrm{T}_w^* \cdot (\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v)^* = \mathrm{T}_w^* \cdot \mathrm{T}_v^* \cdot \mathrm{T}_u^*. \qquad (8)$$

Тензор T *называется симметричным, если* $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$, *и антисимметричным* (*кососимметричным*), *если* $\mathrm{T} = -\mathrm{T}^*$. Из определения T^* следует, что $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$ и $(\mathrm{T}_u + \mathrm{T}_v)^* = \mathrm{T}_u^* + \mathrm{T}_v^*$ для любых T, T_u, $\mathrm{T}_v \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. В силу этого в свою очередь для любого T из $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ тензор $\mathrm{T} + \mathrm{T}^*$ — симметричный, а $\mathrm{T} - \mathrm{T}^*$ — антисимметричный, и потому T единственным образом представляется в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $\mathrm{T}=\frac{1}{2}(\mathrm{T}+\mathrm{T}^*)+\frac{1}{2}(\mathrm{T}-\mathrm{T}^*)$.

§ 2. Двухвалентные тензоры как линейные операторы

Вернемся к одной из основных моделей произведения $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, в рамках которой каждый тензор $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ — линейное отображение пространства $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}$, а именно

$$\mathrm{T}: \mathrm{x}\to\mathrm{x}\cdot\mathrm{T},\quad \mathrm{x}\in\mathscr{E}. \tag{1}$$

Если для некоторых векторов a_1, $\mathrm{a}_2\in\mathscr{E}$ будет $\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{T}=\mathrm{a}_2\cdot\mathrm{T}=0$, то и для любой их линейной комбинации, очевидно, $(c_1\mathrm{a}_1+c_2\mathrm{a}_2)\cdot\mathrm{T}=0$. Поэтому подмножество $\mathscr{E}_\mathrm{T}\subset\mathscr{E}$, состоящее из всех прообразов нулевого вектора: $\mathrm{a}\in\mathscr{E}_\mathrm{T}\Longleftrightarrow\mathrm{a}\cdot\mathrm{T}=0$, является подпространством пространства $\mathscr{E}$. Это подпространство называется ядром данного отображения (1), $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}$ — его дефектом. Подмножество $\mathscr{E}\cdot\mathrm{T}$, на которое отображается все пространство $\mathscr{E}$, также является подпространством; $\dim(\mathscr{E}\cdot\mathrm{T})$ называется рангом отображения (1).

Если $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=0$, то $\mathscr{E}_\mathrm{T}$ состоит из одного лишь нулевого вектора. В этом (и только этом) случае для каждого базиса e_1, e_2, e_3 пространства $\mathscr{E}$ векторы $\mathrm{e}_1\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{e}_2\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{e}_3\cdot\mathrm{T}$ также образуют базис для $\mathscr{E}$. Действительно, если допустить, что $\mathrm{e}_1\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{e}_2\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{e}_3\cdot\mathrm{T}$ линейно зависимы, то $c_1\mathrm{e}_1\cdot\mathrm{T}+c_2\mathrm{e}_2\cdot\mathrm{T}+c_3\mathrm{e}_3\cdot\mathrm{T}=0$, где не все числа c_i равны нулю, откуда $\mathrm{a}\cdot\mathrm{T}=0$ при $\mathrm{a}=c_1\mathrm{e}_1+c_2\mathrm{e}_2+c_3\mathrm{e}_3\neq0$, в противоречие условию $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=0$. Отсюда вытекает, что условие $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=0$ равносильно каждому из следующих: 1) $\mathscr{E}\cdot\mathrm{T}=\mathscr{E}$, 2) $\dim(\mathscr{E}\cdot\mathrm{T})=\dim\mathscr{E}$, 3) отображение (1), соответствующее данному $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, обратимо. Обратимость отображения (1) означает существование такого тензора T^{-1}, что $(\mathrm{x}\cdot\mathrm{T})\cdot\mathrm{T}^{-1}=\mathrm{x}\cdot(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^{-1})=\mathrm{x}$ для любого $\mathrm{x}\in\mathscr{E}$, откуда в силу отмеченного в п. 3 § 1 $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^{-1}=\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{T}=\mathrm{I}$. Обратно, из существования $\mathrm{T}^{-1}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, удовлетворяющего последним равенствам, вытекает обратимость отображения (1). Поэтому к перечисленным условиям 1), 2), 3) можно добавить еще одно, им равносильное: 4) существует такой тензор $\mathrm{T}^{-1}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, что $\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathrm{T}=\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^{-1}=\mathrm{I}$.

Пусть теперь $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}>0$. Тогда необходимо $\dim(\mathscr{E}\cdot\mathrm{T})<\dim\mathscr{E}$. Вообще, как можно показать, $\dim(\mathscr{E}\cdot\mathrm{T})+\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=\dim\mathscr{E}$, т. е. для любого $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ сумма дефекта и ранга соответствующего линейного отображения пространства $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}$ совпадает с числом измерений последнего. *Тензор* T *будем называть невырожденным, если* $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=0$, *т. е. если невырождено* (*имеет максимальный ранг*) *отображение* (1), *и вырожденным при* $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}>0$ (*однократно вырожденным при* $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=1$, *двухкратно — при* $\dim\mathscr{E}_\mathrm{T}=2$ *и т. д.*).

§ 3. Тождество Гамильтона—Кэли

С заданием определенного $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ определяется и последовательность

$$\mathrm{I} \, (= \mathrm{T}^0), \ \mathrm{T}, \ \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}, \ \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}, \ldots, \tag{1}$$

каждый член которой — также двухвалентный тензор над $\mathscr{E}$. Любая линейно независимая подсистема системы (1) содержит не более чем $\dim \mathscr{E} = 3$ элементов. Доказательству этого факта по существу и посвящен настоящий параграф.

1. Поскольку $\mathscr{E}$ — трехмерное пространство, при любом $\mathrm{x} \in \mathscr{E}$ векторы x, $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$ линейно зависимы. Отсюда

$$\mathrm{x}\cdot(\varphi \mathrm{I} + \varphi_1 \mathrm{T} + \varphi_2 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T} + \varphi_3 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}) = 0, \ \mathrm{x} \in \mathscr{E}, \tag{2}$$

где для каждого x не все числа φ, φ_1, φ_2, φ_3 суть нули. Но тогда должна существовать ненулевая система $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in R^4$, с которой $\varphi \mathrm{I} + \varphi_1 \mathrm{T} + \varphi_2 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T} + \varphi_3 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} = 0$. Если фиксировать какой-либо базис для $\mathscr{E}$ и, следовательно, для $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, то это равенство сведется к системе скалярных уравнений, из которых $\varphi_2 = -\varphi_3 \operatorname{sp} \mathrm{T}$, $\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_3 \ ((\operatorname{sp} \mathrm{T})^2 - \operatorname{sp} \ (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}))$, $\varphi = -\varphi_3 \left(\frac{1}{3} \operatorname{sp} (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}) - \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathrm{T} \operatorname{sp} (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}) + \frac{1}{6} (\operatorname{sp} \mathrm{T})^3 \right)$ (эти выражения, конечно, также можно получить чисто „внутренним“ путем, т. е. не пользуясь координатным представлением тензоров). В результате

$$\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} - J_1 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T} + J_2 \mathrm{T} - J_3 \mathrm{I} = 0, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} J_1 = \operatorname{sp} \mathrm{T}, \ J_2 = \frac{1}{2} ((\operatorname{sp} \mathrm{T})^2 - \operatorname{sp} (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T})), \\ J_3 = \frac{1}{3} \operatorname{sp} (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}) - \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathrm{T} \operatorname{sp} (\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}) + \frac{1}{6} (\operatorname{sp} \mathrm{T})^3. \end{gathered} \tag{4}$$

На основании изложенного равенство (3) справедливо для любого $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ и в этом смысле представляет собой тождество, которое и называется тождеством Гамильтона—Кэли.

Для вырожденного T по крайней мере одно из чисел J_1, J_2, J_3, а именно J_3, равно нулю. Действительно, из (3)

$$J_3 \mathrm{x} = \mathrm{x}\cdot(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} - J_1 \mathrm{T}\cdot\mathrm{T} + J_2 \mathrm{T}), \ \mathrm{x} \in \mathscr{E}. \tag{5}$$

Так как $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T} = 0$ влечет $\mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} = \mathrm{x}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} = 0$, для вырожденного T вырожденный тензор представляет собой и любая линейная комбинация тензоров T, $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$. Вследствие этого и (5), когда T — вырожденный тензор, векторы $J_3 \mathrm{x}$ для всех $\mathrm{x} \in \mathscr{E}$ — элементы не более чем двухмерного подпространства в $\mathscr{E}$, и при $J_3 \neq 0$ с помощью тождества (5) можно было бы построить линейное и взаимно однозначное отображение пространства $\mathscr{E}$ на векторное пространство меньшего числа измерений.

2. *Если* $a \neq 0$ *и при каком-либо* $\lambda \in R$

$$a \cdot T = \lambda a, \tag{6}$$

то a *называется собственным вектором, а соответствующее этому вектору направление в пространстве* $\mathscr{E}$ — *главным направлением* (*или главной осью*) *тензора* $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Так как $a \cdot I = a$, из (6) $a \cdot (T - \lambda I) = 0$; поскольку $a \neq 0$, это означает, что $T_\lambda = T - \lambda I$ — вырожденный тензор и, следовательно, на основании доказанного выше скаляр $J_3 = \frac{1}{3} \operatorname{sp}(T_\lambda \cdot T_\lambda \cdot T_\lambda) - \frac{1}{2}(\operatorname{sp} T_\lambda) \operatorname{sp}(T_\lambda \cdot T_\lambda) + \frac{1}{6}(\operatorname{sp} T_\lambda)^3$ должен равняться нулю:

$$\frac{1}{3} \operatorname{sp}((T - \lambda I) \cdot (T - \lambda I) \cdot (T - \lambda I)) -$$
$$- \frac{1}{2}(\operatorname{sp}(T - \lambda I)) \operatorname{sp}((T - \lambda I) \cdot (T - \lambda I)) +$$
$$+ \frac{1}{6}(\operatorname{sp}(T - \lambda I))^3 = 0. \tag{7}$$

Заметим, что $\operatorname{sp} I = 3$ (п. 3, § 1), поэтому $\operatorname{sp}(T - \lambda I) = \operatorname{sp} T - 3\lambda$, $\operatorname{sp}((T - \lambda I) \cdot (T - \lambda I)) = \operatorname{sp}(T \cdot T) - 2\lambda \operatorname{sp} T + 3\lambda^2$ и т. д. С учетом этого из (7)

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0, \tag{8}$$

где J_1, J_2, J_3 по-прежнему определяются выражениями (4). Если λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения (8), то вместе с (4)

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \; J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \; J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{9}$$

Уравнение (8) *называется характеристическим уравнением данного тензора* $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Если степени скаляра λ в левой части (8) заменить соответствующими из степеней $T \cdot T \cdot T$, $T \cdot T$, T, $I (= T^0)$, то получим равенство (3). Это формальное соответствие указанных скалярного и тензорного уравнений обычно выражается утверждением, что тензор (или матрица) удовлетворяет своему характеристическому уравнению, и называется теоремой Гамильтона—Кэли.

Поскольку для вырожденного T необходимо $J_3 = 0$, в соответствии с (9) в этом случае по крайней мере один из корней уравнения (8) также равен нулю. Обратно, когда хотя бы один из этих корней равен нулю и, следовательно, $J_3 = 0$, тензор T — вырожденный. Действительно, при $\lambda = 0$ из (6) имеем $a \cdot T = 0$ при $a \neq 0$, так что $\dim \mathscr{E}_T > 0$ (§ 2), т. е. T — вырожденный тензор.

Данный $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ однократно вырожден, когда нулевое значение имеет только один из корней характеристического уравнения, двухкратно вырожден, когда нулю равны два (и только два) корня и, наконец, полностью вырожден при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Из определения композиции $\mathrm{sp}(\ )$ (п. 3, § 1) следует, что $\mathrm{sp}\,\mathrm{T}=\mathrm{sp}\,\mathrm{T}^*$ для любого $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$. В частности, поскольку $(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T})^*=\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*$, $(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T})^*=\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*$ (п. 4, § 1), вместе с $\mathrm{sp}\,\mathrm{T}=\mathrm{sp}\,\mathrm{T}^*$ всегда $\mathrm{sp}(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T})=\mathrm{sp}(\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*)$, $\mathrm{sp}(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T})=\mathrm{sp}(\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*\cdot\mathrm{T}^*)$. Вследствие этого и (4) роль J_1, J_2, J_3 — коэффициентов в равенстве Гамильтона—Кэли — для T^* играет та же, что и для T, система чисел, и T, T^* имеют одинаковое характеристическое уравнение.

3. Вернемся к системе (1). Заметим, что из (3)

$$\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}=J_1\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}-J_2\mathrm{T}+J_3\mathrm{I}. \tag{10}$$

Отсюда $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}=J_1\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}-J_2\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+J_3\mathrm{T}$ и, с использованием еще раз выражения (10),

$$\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}=\left(J_1^2-J_2\right)\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+(J_3-J_2J_1)\,\mathrm{T}+J_3J_1\mathrm{I}. \tag{10$'$}$$

Аналогичным образом с помощью последнего выражения и снова (10) линейной комбинацией тензоров $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, T и I представляется $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, затем $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$ и т. д. Но это и значит, что любая конечная подсистема системы (1) содержит не более чем три линейно независимых элемента, т. е. что число измерений подпространства в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, натянутого на систему (1), $\leqslant\dim\mathscr{E}=3$. Как будет видно далее, это число равно $\dim\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда среди корней уравнения (8) нет кратных.

§ 4. Собственные числа и главные оси симметричных и антисимметричных тензоров

1. Каждому $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ можно сопоставить так называемый девиатор — зависящий только от T тензор $\mathrm{D}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, для которого $\mathrm{sp}\,\mathrm{D}=0$. Действительно, пусть $\mathrm{D}=\mathrm{T}-\frac{1}{3}J_1\mathrm{I}=\mathrm{T}-\frac{1}{3}(\mathrm{sp}\,\mathrm{T})\,\mathrm{I}$. Тогда D зависит только от T и, поскольку $\mathrm{sp}\,\mathrm{I}=3$, $\mathrm{sp}\,\mathrm{D}=\mathrm{sp}\,\mathrm{T}-\frac{1}{3}(\mathrm{sp}\,\mathrm{T})\,\mathrm{sp}\,\mathrm{I}=0$. Внося выражение $\mathrm{T}=\mathrm{D}+\frac{1}{3}J_1\mathrm{I}$ в равенство (3) § 3, получим

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}+J_2'\mathrm{D}-J_3'\mathrm{I}=0, \tag{1}$$

где

$$J_2'=J_2-\frac{1}{3}J_1^2=-\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}),\quad J_3'=J_3-\frac{1}{3}J_1J_2+\frac{2}{27}J_1^3=\frac{1}{3}\,\mathrm{sp}\,(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}). \tag{2}$$

Равенство (1) — тождество Гамильтона—Кэли для тензора $D = T - \frac{1}{3} J_1 I$. Соответственно

$$\xi^3 + J_2' \xi - J_3' = 0 \tag{3}$$

— характеристическое уравнение для D. Корни ξ_i последнего связаны с корнями λ_i характеристического уравнения для T так: $\lambda_i = \xi_i + \frac{1}{3} J_1 = \xi_i + \frac{1}{3} \operatorname{sp} T$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому все корни одного из этих уравнений вещественны тогда и только тогда, когда вещественны и все корни другого. Соответствующее условие для дискриминанта уравнения (3) выглядит следующим образом:

$$(J_3')^2 + \frac{4}{27} (J_2')^3 \leqslant 0. \tag{4}$$

2. Пусть $\mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ — подмножество в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, которое образуют антисимметричные тензоры: $T \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E} \Longleftrightarrow T = -T^*$. Для любого $T \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$

$$\operatorname{sp} T = \operatorname{sp}(T \cdot T \cdot T) = 0, \ \operatorname{sp}(T \cdot T) \leqslant 0. \tag{5}$$

В самом деле, $T^* = -T$ влечет $T^* \cdot T^* \cdot T^* = -T \cdot T \cdot T$, откуда $\operatorname{sp} T^* = -\operatorname{sp} T$, $\operatorname{sp}(T^* \cdot T^* \cdot T^*) = -\operatorname{sp}(T \cdot T \cdot T)$. Но для любого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, с другой стороны (п. 2, § 3), $\operatorname{sp} T^* = \operatorname{sp} T$, $\operatorname{sp}(T^* \cdot T^* \cdot T^*) = \operatorname{sp}(T \cdot T \cdot T)$. С предыдущими эти равенства согласуются только при $\operatorname{sp} T = \operatorname{sp} T^* = \operatorname{sp}(T \cdot T \cdot T) = 0$.

Заметим, далее, что $x \cdot T \cdot T^* \cdot x = (x \cdot T) \cdot (x \cdot T)$ — квадрат длины вектора $x \cdot T \in \mathscr{E}$. Поскольку $\mathscr{E}$ — собственно евклидово пространство, $x \cdot T \cdot T^* \cdot x \geqslant 0$ для любого $x \in \mathscr{E}$ и любого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Отсюда в свою очередь

$$\operatorname{sp}(T \cdot T^*) \geqslant 0, \ T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \tag{6}$$

(причем $\operatorname{sp}(T \cdot T^*) = 0 \Longleftrightarrow T = 0$). Если T — антисимметричный тензор, т. е. $T^* = -T$, то $\operatorname{sp}(T \cdot T^*) = -\operatorname{sp}(T \cdot T)$ и (6) сводится к правому из соотношений (5).

Согласно (5) каждый $T \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ совпадает со своим девиатором: $T = D + \frac{1}{3} (\operatorname{sp} T) I = D$. Поэтому совпадают и соответствующие характеристические уравнения. Вследствие (5) уравнение (8) § 3 сводится к уравнению $\lambda^3 + \varphi^2 \lambda = 0$, где $\varphi^2 = -\operatorname{sp}(T \cdot T)$; отсюда, с точностью до нумерации корней, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \varphi \sqrt{-1}$, $\lambda_3 = -\varphi \sqrt{-1}$. Таким образом, для любого антисимметричного T одно из собственных чисел — корней характеристического уравнения — равно нулю, а два остальные суть сопряженные комплексные числа с нулевой вещественной частью.

3. Пусть теперь $\mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E} \subset \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ — подмножество, образуе-

мое симметричными тензорами: $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E} \Longleftrightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}^*$. Очевидно, что $\mathrm{I} \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$ и что для каждого $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$ симметричным тензором является и $\mathrm{D} = \mathrm{T} - \frac{1}{3} J_1 \mathrm{I}$. Наконец, вследствие $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}$ из (6) теперь $\mathrm{sp}(\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}) \geqslant 0$.

Рассмотрим тензор

$$\mathrm{X} = 2J_2' \mathrm{D} \cdot \mathrm{D} + 3J_3' \mathrm{D} + \frac{4}{3} (J_2')^2 \mathrm{I}. \tag{7}$$

Составляя выражение для $\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}$ и пользуясь равенством (1), с помощью которого $\mathrm{D} \cdot \mathrm{D} \cdot \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}$ и $\mathrm{D} \cdot \mathrm{D} \cdot \mathrm{D}$ представляются линейными комбинациями более низких степеней, получим $\mathrm{sp}(\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}) = 18J_2' \left((J_3')^2 + \frac{4}{27} (J_2')^3 \right)$. Поскольку каждому $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$ формулой (7) сопоставляется, очевидно, симметричный тензор X, должно быть $\mathrm{sp}(\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$J_2' \left((J_3')^2 + \frac{4}{27} (J_2')^3 \right) \geqslant 0. \tag{8}$$

Заметим, что $\mathrm{sp}(\mathrm{D} \cdot \mathrm{D}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{D} = 0$, в силу этого и (2) $J_2' = 0$ влечет $J_3' = 0$; с учетом этого видно, что (8) равносильно (4). Тем самым для каждого $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$ — симметричного двухвалентного тензора над $\mathscr{E}$, все корни характеристического уравнения суть вещественные числа.

4. Отсюда следует в свою очередь, что для симметричного T любому из этих чисел — корней уравнения (8) § 3, соответствует по крайней мере одна главная ось тензора T, так что

$$\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{T} = \lambda_1 \mathrm{a}_1, \quad \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{T} = \lambda_2 \mathrm{a}_2, \quad \mathrm{a}_3 \cdot \mathrm{T} = \lambda_3 \mathrm{a}_3. \tag{9}$$

Пусть хотя бы два из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны, например, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда соответствующие им оси взаимно ортогональны: $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 = 0$. В самом деле, из первых двух равенств (9) $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{a}_2 = \lambda_1 \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2$, $\mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{a}_1 = \lambda_2 \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{a}_1$, откуда с учетом симметрии тензора $\lambda_1 \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 = \lambda_2 \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{a}_1$ или $(\lambda_1 - \lambda_2) \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 = 0$ и, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 = 0$.

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, то соответственно триэдр $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$ состоит из попарно ортогональных векторов. Заметим, что в силу однородности уравнений (9) каждый из векторов a_i можно считать вектором единичной длины. Тогда $\mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_j = 0$ при $i \neq j$ и $\mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_j = 1$ при $i = j$, т. е. $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$ образуют ортонормированный базис пространства $\mathscr{E}$. Векторы этого базиса определяются с точностью до множителя ± 1: очевидно, что если векторы $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$ удовлетворяют системе из уравнений (9) и $\mathrm{a}_k \cdot \mathrm{a}_k = 1$, $k = 1, 2, 3$, то и каждый из триэдров — $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$; $\mathrm{a}_1, -\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3$; ... ; $-\mathrm{a}_1, -\mathrm{a}_2, -\mathrm{a}_3$ удовлетворяет этой системе.

Если два из корней характеристического уравнения равны друг другу, например $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$, то с точностью до множителя ± 1 определяется лишь один собственный вектор a_1; в плоскости, перпендикулярной a_1, любое направление будет главным. Наконец, когда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, любое направление в пространстве $\mathscr{E}$ является главным. В этом и только в этом случае данный тензор с точностью до скалярного множителя совпадает с тензором I (представляет собой „шаровой“ тензор).

5. Пусть по-прежнему $T \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$, т. е. T — симметричный двухвалентный тензор над $\mathscr{E}$. В соответствии с изложенным тогда существует такой ортонормированный базис пространства $\mathscr{E}$, что

$$T=\lambda_1 a_1 a_1+\lambda_2 a_2 a_2+\lambda_3 a_3 a_3. \tag{10}$$

Иными словами, в разложении по диадам из векторов этого базиса матрица компонент тензора T является диагональной матрицей с собственными числами в качестве элементов главной диагонали. Так как $a_i \cdot a_j=1$ при $i=j$ и $a_i \cdot a_j=0$ при $i \neq j$, отсюда

$$T \cdot T=\lambda_1^2 a_1 a_1+\lambda_2^2 a_2 a_2+\lambda_3^2 a_3 a_3, \quad T \cdot T \cdot T=\lambda_1^3 a_1 a_1+\lambda_2^3 a_2 a_2+\lambda_3^3 a_3 a_3 \tag{10'}$$

и т. д. Таким образом, для каждого $T \in \mathscr{E} \underset{s}{\otimes} \mathscr{E}$ главные оси тензоров T, $T \cdot T$, $T \cdot T \cdot T$ и т. д. совпадают. Вообще, если a — собственный вектор для T, так что $a \cdot T=\lambda a$, то $a \cdot T \cdot T= =\lambda a \cdot T=\lambda^2 a$; аналогично получается $a \cdot T \cdot T \cdot T=\lambda^3 a$, $a \cdot T \cdot T \cdot T \cdot T= =\lambda^4 a$ и т. д. Это означает, что каждая главная ось тензора T является главной осью и для $T \cdot T$, $T \cdot T \cdot T$ и т. д.

§ 5. Минимальный многочлен

Пусть $\psi(\lambda)=\psi_0 \lambda^m+\psi_1 \lambda^{m-1}+\ldots+\psi_m$ — какой-либо скалярный многочлен. С заменой степеней $1\,(=\lambda^0)$, λ, λ^2, ... скаляра λ тензорами соответственно $I\,(=T^0)$, T, $T \cdot T$, ... $\psi(\lambda)$ превращается в „тензорный многочлен“ — линейную комбинацию элементов системы (1) § 3. *Многочлен* $\psi(\lambda)$ *называется аннулирующим для данного тензора* $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, *если* $\psi(T)=0$. Для каждого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ одним из аннулирующих является многочлен $\Delta(\lambda)= =\lambda^3-J_1 \lambda^2+J_2 \lambda-J_3$ — левая часть характеристического уравнения, поскольку в соответствии со сказанным в § 3 $\Delta(T)=0$. Аннулирующий многочлен минимальной степени называется *минимальным аннулирующим* или просто *минимальным* многочленом для данного T. Если условиться этот многочлен всегда брать с фиксированным, например равным $+1$, коэффициентом при старшей степени аргумента, то для каждого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ он определяется единственным образом.

Нетрудно видеть также, что для каждого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$:

а) степень минимального многочлена $\leqslant \dim \mathscr{E}=3$;

б) многочлен $\psi(\lambda)$ является аннулирующим тогда и только тогда, когда каждый корень уравнения $\Delta(\lambda)=0$ есть корень (хотя, возможно, другой кратности) и уравнения $\psi(\lambda)=0$.

В самом деле, для любого $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ существует аннулирующий многочлен степени $\dim\mathscr{E}$, а именно $\Delta(\lambda)$, откуда и имеем а). Это предложение равносильно рассматривавшемуся в § 3, по которому число измерений подпространства в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, натянутого на систему (1) § 3, не превышает $\dim\mathscr{E}$.

Если, далее, $\psi(\lambda)$ — аннулирующий многочлен для Т, то в силу $\psi(\mathrm{T})=0$ будет $\mathrm{sp}(\psi(\mathrm{T}))=0$. С помощью этого равенства и выражений (4), (9) и (10) § 3 нетрудно проверить, что каждый корень характеристического уравнения для Т является корнем и уравнения $\psi(\lambda)=0$. Обратно, если каждый корень уравнения $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$ есть корень и уравнения $\psi(\lambda)=0$, то $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi_0(\lambda)=\Delta(\lambda)\psi_0(\lambda)$, и потому $\psi(\mathrm{T})=\Delta(\mathrm{T})\psi_0(\mathrm{T})=0$, т. е. многочлен $\psi(\lambda)$ является аннулирующим для Т.

Заметим, что вследствие предложений а) и б) для минимального многочлена $p(\lambda)$ никаких других (не совпадающих с корнями уравнения $\Delta(\lambda)=0$) корней заведомо не существует. Поэтому степень многочлена $p(\lambda)$ определяется числом одинаковых среди корней характеристического уравнения. Именно:

1) если для данного $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ все эти корни различны ($\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_2\neq\lambda_3$, $\lambda_3\neq\lambda_1$), то $p(\lambda)\equiv\Delta(\lambda)$, т. е. минимальный многочлен совпадает с характеристическим;

2) если хотя бы два из чисел λ_1, λ_2, λ_3 одинаковы, то $p(\lambda)$ — многочлен степени $\leqslant\dim\mathscr{E}-1=2$. Действительно, пусть, например, $\lambda_2=\lambda_3$, тогда из $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$ вытекает $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$, и на основании предложения б) многочлен $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2$ является аннулирующим $(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{T}+\lambda_1\lambda_2\mathrm{I}=0)$. С помощью выражений (9) § 3 отсюда

$$\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}-\frac{1}{3}\left(2J_1-\sqrt{J_1-3J_2}\right)\mathrm{T}+\frac{1}{9}\left(6J_2-J_1^2-J_1\sqrt{J_1^2-3J_2}\right)\mathrm{I}=0 \tag{1}$$

(совпадая с предыдущим при $\lambda_2=\lambda_3$, равенство (1) справедливо и при $\lambda_1=\lambda_2$ или $\lambda_3=\lambda_1$). Если уравнение $\Delta(\lambda)=0$ имеет только два одинаковых корня, то многочлен $p(\lambda)$ для данного Т в точности второй степени и $p(\mathrm{T})=0$ равносильно (1). В результате в этом случае Т и I заведомо линейно независимы, в то время как с помощью (1) тензоры $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$ и т. д. представляются линейными комбинациями тензоров Т и I, т. е. подпространство в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, натянутое на систему (1) § 3, есть двухмерное векторное пространство;

3) если, наконец, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3$, $p(\lambda)=$ $=\lambda-\lambda_1=\lambda-\frac{1}{3}J_1$ и, следовательно, $\mathrm{T}-\frac{1}{3}J_1\mathrm{I}=0$, т. е. данный тензор Т является шаровым. В этом и только в этом случае упомянутое подпространство в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ одномерно.

§ 6. Автоморфизмы

1. Напомним теперь, что линейное отображение $T : x \to x \cdot T$ пространства $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ является обратимым (а вместе с этим свойством в силу конечномерности $\mathcal{E}$ — отображением на $\mathcal{E}$) тогда и только тогда, когда для данного T существует такой тензор T^{-1}, что $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I$. Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы T был невырожденным тензором, т. е. чтобы $J_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$ (§ 2, 3).

Если T невырожден и $a \cdot T = \lambda a$, то $a \cdot T \cdot T^{-1} = a = \lambda a \cdot T^{-1}$ и, следовательно, $a \cdot T^{-1} = \frac{1}{\lambda} a$. Таким образом, каждый собственный вектор для T есть собственный вектор и для T^{-1}, равно как и каждый собственный вектор для T^{-1} есть собственный вектор для T (поскольку $(T^{-1})^{-1} = T$), т. е. T и T^{-1} всегда соосные тензоры. Если λ_1, λ_2, λ_3 — собственные числа тензора T, то для T^{-1} собственными числами будут $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$.

Для любых невырожденных T_u, T_v тензор $T_u \cdot T_v$ также невырожден, ибо $(T_u \cdot T_v) \cdot (T_v^{-1} \cdot T_u^{-1}) = T_u \cdot (T_v \cdot T_v^{-1}) \cdot T_u^{-1} = T_u \cdot T_u^{-1} = I$, т. е. в силу существования T_u^{-1}, T_v^{-1} „обратный“ тензор существует и для $T_u \cdot T_v$. Пусть $L(\mathcal{E})$ — подмножество в $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, которое образуют невырожденные тензоры. Как было только что показано, это подмножество устойчиво в отношении композиций $T_u \cdot T_v$: $T_u \in L(\mathcal{E})$ и $T_v \in L(\mathcal{E})$ всегда влекут и $T_u \cdot T_v \in L(\mathcal{E})$. Закон этих композиций ассоциативен: $(T_u \cdot T_v) \cdot T_w = T_u \cdot (T_v \cdot T_w)$ (§ 1), и тензор I, играющий роль „нейтрального элемента“, поскольку $T \cdot I = I \cdot T = I$, невырожден, т. е. принадлежит подмножеству $L(\mathcal{E})$. Все это вместе взятое означает, что $L(\mathcal{E})$ с этим законом композиции обладает структурой группы. Это видно и из следующих соображений.

Известно, что множество всех линейных и обратимых отображений любого векторного пространства на него же представляет собой группу (с обычной суперпозицией отображений в качестве „группового закона“), которую обычно называют полной линейной группой данного пространства. Но при отождествлении двухвалентных тензоров над $\mathcal{E}$ с линейными отображениями $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ подмножество $L(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ как раз и превращается в базисное множество полной линейной группы пространства $\mathcal{E}$, а групповой ее закон — в закон композиций $T_u \cdot T_v$ (суперпозиция отображений $T_u : x \to x \cdot T_u$ и $T_v : x \to x \cdot T_v$ есть отображение по закону $x \to (x \cdot T_u) \cdot T_v = x \cdot (T_u \cdot T_v)$, т. е. тензор $T_u \cdot T_v$).

2. В соответствии с определениями § 3 первой главы для „чисто“ векторного (неметризованного) пространства каждый элемент полной линейной его группы есть изоморфизм этого пространства на себя (автоморфизм). Но пространство $\mathcal{E}$ — векторное пространство со скалярным умножением векторов, т. е.

вместе с законами линейных композиций его структуру определяет метрическая форма. Соответственно, для того чтобы отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$ не изменяло структуры пространства, нужно, чтобы вместе с линейными композициями „сохранялись" и скалярные произведения векторов. Иными словами, отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$ будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда оно линейно (и тем самым представимо в виде $\mathrm{T}: \mathrm{x} \to \mathrm{x}\cdot\mathrm{T}$, где $\mathrm{T} \in L(\mathscr{E})$) и когда, кроме того, для любой пары x, y векторов из $\mathscr{E}$ скалярное произведение их образов совпадает с $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$: $(\mathrm{x}\cdot\mathrm{T})\cdot(\mathrm{y}\cdot\mathrm{T}) = \mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathscr{E}$. Отсюда $\mathrm{x}\cdot(\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^* - \mathrm{I})\cdot\mathrm{y} = 0$ и, поскольку это выполняется для любых x и y, $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^* = \mathrm{I}$, что в свою очередь равносильно $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^{-1}$.

Автоморфизмы евклидова пространства называются также ортогональными его преобразованиями. Часть множества $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, которой канонически соответствует множество всех ортогональных преобразований пространства $\mathscr{E}$, будем обозначать $O(\mathscr{E})$, произвольный элемент множества $O(\mathscr{E})$ — через $\mathring{\mathrm{A}}$. В соответствии со сказанным выше, для каждого $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$ $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathring{\mathrm{A}}^*\cdot\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{I}$. Нетрудно проверить, что и обратно — при $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathrm{I}$ отображение по закону $\mathrm{x} \to \mathrm{x}\cdot\mathring{\mathrm{A}}$ будет ортогональным преобразованием пространства $\mathscr{E}$, т. е. $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathrm{I}$ влечет $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$. Таким образом, по определению множества $O(\mathscr{E})$

$$\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow \mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathring{\mathrm{A}}^*\cdot\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{I} \Longleftrightarrow \mathring{\mathrm{A}}^* = \mathring{\mathrm{A}}^{-1}. \tag{1}$$

Отметим следующие важные свойства тензоров из $O(\mathscr{E})$.

1) Для любых $\mathring{\mathrm{A}}_1 \in O(\mathscr{E})$ и $\mathring{\mathrm{A}}_2 \in O(\mathscr{E})$ будет и $\mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2 \in O(\mathscr{E})$; действительно, так как $(\mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2)^* = \mathring{\mathrm{A}}_2^*\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1^*$ (см. § 1), при $\mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1^* = \mathrm{I}$ и $\mathring{\mathrm{A}}_2\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2^* = \mathrm{I}$ имеем $\mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2\cdot(\mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2)^* = \mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2\cdot\mathring{\mathrm{A}}_2^*\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1^* = \mathring{\mathrm{A}}_1\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1^* = \mathrm{I}$; поэтому подмножество $O(\mathscr{E}) \subset \mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ является подгруппой группы $L(\mathscr{E})$, о которой шла речь в п. 1.

2) Все собственные числа любого $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$ имеют единичный модуль: $|\lambda_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$. В самом деле, для каждого вещественного из этих чисел $\mathbf{a}\cdot\mathring{\mathrm{A}} = \mathring{\mathrm{A}}^*\cdot\mathrm{a} = \lambda_k\mathrm{a}$, $\mathrm{a} \neq 0$, откуда $\mathrm{a}\cdot\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^*\cdot\mathrm{a} = \lambda_k^2\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}$, $\mathrm{a}\cdot\mathrm{a} = \lambda_k^2\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}$ (поскольку $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathrm{I}$) и, следовательно, $|\lambda_k| = 1$. Заметим, кроме того, что, поскольку характеристическое уравнение для $\mathring{\mathrm{A}}$ и $\mathring{\mathrm{A}}^*$ всегда имеет одинаковые коэффициенты (п. 2, § 3), а согласно (1) $\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathring{\mathrm{A}}^{-1}$, одну и ту же систему чисел эти коэффициенты должны представлять и для $\mathring{\mathrm{A}}$ и $\mathring{\mathrm{A}}^{-1}$. С учетом выражения $J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ и сказанного в п. 1 данного параграфа о собственных числах взаимно обратных тензоров, отсюда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ и, следовательно, $|J_3| = |\lambda_1\lambda_2\lambda_3| = 1$ для каждого $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$. Но для любого тензора $\mathrm{T} \in \mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ собственные числа — корни уравнения (8) § 3 — или все вещественные, или же вещественно только одно из них, а два осталь-

ные суть сопряженные комплексные числа. Если для некоторого $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ реализуется второй из этих случаев и вещественным является, например, λ_1, то на основании доказанного $|\lambda_1| = 1$ и, следовательно, $\lambda_1 = \pm 1$, в силу этого из $|\lambda_1\lambda_2\lambda_3| = 1$ имеем $|\lambda_2\lambda_3| = 1$ и, поскольку $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$, $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, т. е. рассматриваемое предложение справедливо и в этом случае.

Из сказанного вытекает также, что это предложение равносильно следующему: для любого $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ с точностью до нумерации собственных чисел $\lambda_1 = 1$ или -1, $\lambda_2 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\lambda_3 = e^{-i\varphi}$ (где $i = \sqrt{-1}$ и φ — некоторое, зависящее от $\mathring{A}$, вещественное число).

3) Для любого $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ и любого ортонормированного базиса a_1, a_2, a_3 ортонормированный базис пространства $\mathscr{E}$ образуют и векторы $a_1 \cdot \mathring{A}$, $a_2 \cdot \mathring{A}$, $a_3 \cdot \mathring{A}$. Как и определяемое предыдущим предложением, это свойство является характеристическим.

3. Так как на основании сказанного для каждого тензора $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ скаляр $J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ имеет значение $+1$ или -1, подмножество $O(\mathscr{E}) \subset L(\mathscr{E}) \subset \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ имеет смысл разбить на части $O'(\mathscr{E})$, $O''(\mathscr{E})$ такие, что

$$\mathring{A} \in O'(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow J_3(\mathring{A}) = 1, \quad \mathring{A} \in O''(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow J_3(\mathring{A}) = -1. \qquad (2)$$

Ортогональные преобразования пространства $\mathscr{E}$, соответствующие тензорам из $O'(\mathscr{E})$, называются ортогональными преобразованиями первого, а тензорам из $O''(\mathscr{E})$ — второго рода.

Напомним, что для любого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ вместе с $J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ имеем $J_3 = \frac{1}{3}\operatorname{sp}(T \cdot T \cdot T \cdot) - \frac{1}{2}\operatorname{sp} T \operatorname{sp}(T \cdot T) + \frac{1}{6}(\operatorname{sp} T)^3$. Если воспользоваться смешанными разложениями (4) § 1, то отсюда $J_3 = \det\|t_j^{\cdot j}\| = \det\|t^i_{\cdot j}\|$. С учетом этого очевидно, что значение коэффициента J_3 характеристического уравнения для тензора $T_u \cdot T_v$ всегда равно произведению значений этого коэффициента для тензоров-сомножителей. Отсюда и из (2) вытекают, в частности, следующие важные факты:

а) $\mathring{A}_\varphi \in O'(\mathscr{E})$ и $\mathring{A}_\omega \in O'(\mathscr{E})$ всегда влекут $\mathring{A}_\varphi \cdot \mathring{A}_\omega \in O'(\mathscr{E})$; тем самым суперпозиция и любой конечной системы ортогональных преобразований первого рода есть ортогональное преобразование первого рода;

б) для любой конечной системы $\mathring{A}_1, \mathring{A}_2, \ldots, \mathring{A}_s$ тензоров из $O(\mathscr{E})$ произведение $\mathring{A}_1 \cdot \mathring{A}_2 \cdot \ldots \cdot \mathring{A}_s$ принадлежит $O'(\mathscr{E})$, если система содержит четное число элементов подмножества $O''(\mathscr{E})$ и $\mathring{A}_1 \cdot \mathring{A}_2 \cdot \ldots \cdot \mathring{A}_s \in O''(\mathscr{E})$, если это число нечетно.

Так как $x \cdot I = x$ при всяком $x \in \mathscr{E}$ и, следовательно, все собственные числа метрического тензора равны $+1$, $I \in O'(\mathscr{E})$, т. е. $I : x \to x \cdot I = x$ — тождественное отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}$, является ортогональным преобразованием первого рода. Отсюда, из предложения а) и того очевидного факта, что $\mathring{A} \in O'(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathring{A}^* = \mathring{A}^{-1} \in O'(\mathcal{E})$, следует, что подмножество $O'(\mathcal{E}) \subset O(\mathcal{E})$ есть подгруппа группы, которую образует $O(\mathcal{E}) \subset L(\mathcal{E})$ (предложение 1) п. 2), а потому и подгруппа полной линейной группы $L(\mathcal{E})$ пространства $\mathcal{E}$. Подмножество же $O''(\mathcal{E})$ подгруппы не образует, ибо, как вытекает из б), устойчивым («замкнутым») относительно упомянутого умножения не является.

Рассмотрим произвольный $\mathring{A} \in O'(\mathcal{E})$. В соответствии с (2) и предложением 2) п. 2 по крайней мере одно из собственных чисел тензора $\mathring{A}$ равно $+1$, и поэтому существует такой вектор $\mathfrak{a}$, $|\mathfrak{a}| = 1$, что $\mathfrak{a} \cdot \mathring{A} = \mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — какие-либо из векторов, с которыми система $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — ортонормированный базис для $\mathcal{E}$. Так как базис $\mathfrak{a} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{b} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{c} \cdot \mathring{A}$ также должен быть ортонормированным (предложение 3) п. 2) и $\mathfrak{a} \cdot \mathring{A} = \mathfrak{a}$, векторы $\mathfrak{b} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{c} \cdot \mathring{A}$ представляются линейными комбинациями векторов $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ и это преобразование пары векторов должно сохранять их длины и взаимную ортогональность. Отсюда

$$\mathfrak{b} \cdot \mathring{A} = \cos\varphi\, \mathfrak{b} + \sin\varphi\, \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} \cdot \mathring{A} = \cos\left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right) \mathfrak{b} + \sin\left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right) \mathfrak{c},$$
$$m = \pm 1, \ \pm 3, \ \ldots \ . \tag{3}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что в (3) содержатся все представления векторов $\mathfrak{b} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{c} \cdot \mathring{A}$ через $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, при которых вместе с $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 1$, $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = 0$ аналогичные условия выполняются и для пары $\mathfrak{b} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{c} \cdot \mathring{A}$.

С другой стороны, поскольку $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \in \mathcal{E}$ — ортонормированный базис, $\mathrm{I} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}$, и поэтому $\mathring{A} = \mathrm{I} \cdot \mathring{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} \cdot \mathring{A} + \mathfrak{b}\mathfrak{b} \cdot \mathring{A} + \mathfrak{c}\mathfrak{c} \cdot \mathring{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{a} + \cos\varphi\, \mathfrak{b}\mathfrak{b} + \sin\varphi\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \cos\left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right) \mathfrak{c}\mathfrak{b} + \sin\left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right) \mathfrak{c}\mathfrak{c}$.

Отсюда $J_3 = \frac{1}{3} \operatorname{sp}(\mathring{A} \cdot \mathring{A} \cdot \mathring{A}) - \frac{1}{2} \operatorname{sp} \mathring{A} \operatorname{sp}(\mathring{A} \cdot \mathring{A}) + \frac{1}{6} (\operatorname{sp} \mathring{A})^3 = \sin\frac{m\pi}{2}$ и, так как должно быть $J_3 = 1$ (ибо $\mathring{A} \in O'(\mathcal{E})$), с точностью до несущественного слагаемого, $m = 1$ или $m = -3$. В силу равенства $\mathfrak{a} \cdot \mathring{A} = \mathfrak{a}$ направление в $\mathcal{E}$, определяемое ортом $\mathfrak{a}$, не изменяется в результате преобразования $\mathring{A}: \mathfrak{x} \to \mathfrak{x} \cdot \mathring{A}$, $\mathfrak{x} \in \mathcal{E}$. Выражениям же (3) при $m = 1$ или $m = -3$ соответствует поворот ортогональной к $\mathfrak{a}$ плоскости как твердого целого на угол φ возле оси с ортом $\mathfrak{a}$. Но это означает, что на угол φ возле этой оси поворачивается как целое само пространство $\mathcal{E}$. Если условиться о «правиле знаков», то из двух указанных значений m допустимым будет лишь одно — первое, если считать углы поворота положительными тогда, когда поворот происходит против часовой стрелки при взгляде вдоль оси со стороны конца к началу орта оси. Тогда

$$\mathrm{a}\cdot\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{a},\ \mathrm{b}\cdot\mathring{\mathrm{A}}=\cos\varphi\,\mathrm{b}+\sin\varphi\,\mathrm{c},\ \mathrm{c}\cdot\mathring{\mathrm{A}}=-\sin\varphi\,\mathrm{b}+\cos\varphi\,\mathrm{c} \qquad (4)$$

и с помощью, по-прежнему, тождества $\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{aa}\cdot\mathring{\mathrm{A}}+\mathrm{bb}\cdot\mathring{\mathrm{A}}+\mathrm{cc}\cdot\mathring{\mathrm{A}}$

$$\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{aa}+(\mathrm{bb}+\mathrm{cc})\cos\varphi+(\mathrm{bc}-\mathrm{cb})\sin\varphi,\quad \mathring{\mathrm{A}}\in O'(\mathcal{E}). \qquad (5)$$

Подчеркнем, что речь шла о произвольном тензоре из $O'(\mathcal{E})$. Поэтому можно утверждать, что для всякого $\mathring{\mathrm{A}}\in O'(\mathcal{E})$ найдутся такие, зависящие от $\mathring{\mathrm{A}}$, орт a и число $\varphi\in R$, что в результате преобразования $\mathring{\mathrm{A}}:\mathrm{x}\to\mathrm{x}\cdot\mathring{\mathrm{A}}$, $\mathrm{x}\in\mathcal{E}$, пространство $\mathcal{E}$ поворачивается как целое на угол φ возле оси с ортом a. Пользуясь (5) и выражениями (4) § 3, нетрудно проверить, что с точностью до слагаемого, кратного 2π, значение этого угла совпадает с числом φ, которое фигурирует во второй формулировке предложения 2) п. 2, т. е. с которым корнями характеристического уравнения для $\mathring{\mathrm{A}}$ служат числа 1, $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$.

При $\varphi=0$ из (5) $\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{I}$. Так как для I все собственные числа равны $+1$, для тензора $-\mathrm{I}=(-1)\mathrm{I}$, очевидно, все эти числа равны -1. Поэтому $-\mathrm{I}\in O''(\mathcal{E})$ и отображение $-\mathrm{I}$: $\mathrm{x}\to-\mathrm{x}$, $\mathrm{x}\in\mathcal{E}$, называемое обычно инверсией пространства $\mathcal{E}$, есть ортогональное преобразование второго рода.

Пусть теперь $\mathring{\mathrm{A}}$ обозначает произвольный элемент множества $O''(\mathcal{E})\subset O(\mathcal{E})$. В силу (2) и предложения 2) п. 2 для каждого $\mathring{\mathrm{A}}\in O''(\mathcal{E})$ по крайней мере одно из собственных чисел равно -1, и потому существует такой a, $|\mathrm{a}|=1$, что $\mathrm{a}\cdot\mathring{\mathrm{A}}=-\mathrm{a}$. Для тензора $\mathring{\mathrm{A}}_1=-\mathring{\mathrm{A}}$ отсюда $\mathrm{a}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1=\mathrm{a}$, а на основании предложения б), доказанного в начале данного параграфа, $\mathring{\mathrm{A}}\in O''(\mathcal{E})$ и $-\mathrm{I}\in O''(\mathcal{E})$ влекут $\mathring{\mathrm{A}}_1=-\mathrm{I}\cdot\mathring{\mathrm{A}}\in O'(\mathcal{E})$. Но в силу этого, на основании изложенного, преобразованию $\mathring{\mathrm{A}}_1$: $\mathrm{x}\to\mathrm{x}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1$ должен соответствовать поворот пространства $\mathcal{E}$ возле направления с ортом a, поэтому при любых b, c, с которыми система a, b, c представляет собой ортонормированный базис для $\mathcal{E}$, $\mathring{\mathrm{A}}_1=-\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{aa}+(\mathrm{bb}+\mathrm{cc})\cos\psi+(\mathrm{bc}-\mathrm{cb})\sin\psi$, откуда, если $\psi+\pi$ обозначить через φ,

$$\mathring{\mathrm{A}}=-\mathrm{aa}+(\mathrm{bb}+\mathrm{cc})\cos\varphi+(\mathrm{bc}-\mathrm{cb})\sin\varphi,\quad \mathring{\mathrm{A}}\in O''(\mathcal{E}). \qquad (6)$$

При $\varphi=\pi$ согласно (6) $\mathring{\mathrm{A}}=-\mathrm{I}$. Пусть, далее, $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}$ — тензор, определяемый равенством (6) при $\varphi=0$:

$$\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}=-\mathrm{aa}+\mathrm{bb}+\mathrm{cc}. \qquad (7)$$

Учитывая, что a, b, $\mathrm{c}\in\mathcal{E}$ — ортонормированный базис, для каждого $\mathrm{x}\in\mathcal{E}$ имеем $\mathrm{x}=(\mathrm{x}\cdot\mathrm{a})\,\mathrm{a}+(\mathrm{x}\cdot\mathrm{b})\,\mathrm{b}+(\mathrm{x}\cdot\mathrm{c})\,\mathrm{c}$, откуда и из (7) $\mathrm{x}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}=-(\mathrm{x}\cdot\mathrm{a})\,\mathrm{a}+(\mathrm{x}\cdot\mathrm{b})\,\mathrm{b}+(\mathrm{x}\cdot\mathrm{c})\,\mathrm{c}$. Отсюда следует, что преобразование $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}$: $\mathrm{x}\to\mathrm{x}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}$ оставляет неизменной плоскость, ортом нормали к которой служит a, а каждый ортогональный к этой плоскости вектор x преобразует в вектор $-\mathrm{x}$ (зеркальное отражение пространства $\mathscr{E}$ в упомянутой плоскости).

Напомним, что $\mathrm{I}=\mathrm{aa}+\mathrm{bb}+\mathrm{cc}$. Отсюда и из (7)

$$\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}}=-2\mathrm{aa}+\mathrm{I}. \tag{8}$$

Это выражение подчеркивает тот факт, что заданием направления в $\mathscr{E}$ вполне определяется и зеркальное отражение пространства $\mathscr{E}$ в плоскости, ортогональной данному направлению. С другой стороны, из (6) и (8)

$$\mathring{\mathrm{A}}=(\mathrm{aa}+(\mathrm{bb}+\mathrm{cc})\cos\varphi+(\mathrm{bc}-\mathrm{cb})\sin\varphi)\cdot\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{a}},\quad \mathring{\mathrm{A}}\in O''(\mathscr{E}). \tag{9}$$

Таким образом, любое ортогональное преобразование второго рода можно рассматривать как суперпозицию поворота пространства $\mathscr{E}$ и зеркального отражения в плоскости, ортогональной оси поворота. Выражению (6) равносильно также следующее:

$$\mathring{\mathrm{A}}=-\mathrm{I}\cdot(\mathrm{aa}+(\mathrm{bb}+\mathrm{cc})\cos(\varphi+\pi)+(\mathrm{bc}-\mathrm{cb})\sin(\varphi+\pi)). \tag{10}$$

Поэтому любое ортогональное преобразование второго рода можно рассматривать и как суперпозицию инверсии с поворотом пространства, причем согласно (9) и (10) — с поворотом возле той же для данного $\mathring{\mathrm{A}}\in O''(\mathscr{E})$ оси, что и в предыдущем случае, но на другой угол. Отметим также, что сомножители в правой части каждого из представлений (8) и (9) можно поменять местами (в то время как для произвольных $\mathring{\mathrm{A}}$, $\mathring{\mathrm{A}}_\eta\in O(\mathscr{E})$ $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_\eta\neq\mathring{\mathrm{A}}_\eta\cdot\mathring{\mathrm{A}}$).

С помощью предложений, доказанных ранее, к этим фактам можно было бы добавить и некоторые другие важные выводы о суперпозиции ортогональных преобразований. Пусть, например, y, z — какие-либо ненулевые векторы из $\mathscr{E}$, $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{y}}$ и $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}$ — тензоры соответствующих зеркальных отражений пространства $\mathscr{E}$: $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{y}}=-\frac{2}{|\mathrm{y}|^2}\mathrm{yy}+\mathrm{I}$, $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}=-\frac{2}{|\mathrm{z}|^2}\mathrm{zz}+\mathrm{I}$ (зеркальных отражений в плоскостях, ортогональных соответственно к y и z). На основании уже упоминавшегося предложения б) п. 3 $\mathring{\mathrm{A}}_\omega\in O''(\mathscr{E})$ и $\mathring{\mathrm{A}}_\eta\in O''(\mathscr{E})$ всегда влекут $\mathring{\mathrm{A}}_\omega\cdot\mathring{\mathrm{A}}_\eta\in O'(\mathscr{E})$, и потому $\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{y}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}\in O'(\mathscr{E})$. Иными словами, любые два последовательно выполненные зеркальные отражения равносильны некоторому ортогональному преобразованию первого рода и тем самым — повороту пространства $\mathscr{E}$ возле некоторой оси. Очевидно, что этой осью будет пересечение плоскостей отражения. С учетом этого можно показать, что для любого $\mathring{\mathrm{A}}\in O'(\mathscr{E})$ найдутся такие y, z, что $\mathring{\mathrm{A}}=\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{y}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}$, т. е. что любой поворот пространства $\mathscr{E}$ можно представить в виде суперпозиции двух зеркальных отражений. Отсюда и из доказанного выше следует в свою очередь, что любое ортогональное преобразование второго рода представимо суперпозицией трех зеркальных отражений, в то время как суперпозиция любых четырех отражений на основании предложения б) п. 3 снова дает нам элемент из $O'(\mathcal{E})$ и т. д.

4. Подведем итог сказанному выше об автоморфизмах пространства $\mathcal{E}$. Так как $\mathcal{E}$ — векторное пространство со скалярным произведением векторов, автоморфизмом этого пространства будет не всякое линейное его отображение на себя: невырожденное линейное отображение $\mathring{A}$: $x \to x \cdot \mathring{A}$, $x \in \mathcal{E}$, — автоморфизм пространства $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда тензор $\mathring{A} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ удовлетворяет условиям (1), т. е. принадлежит подмножеству $O(\mathcal{E}) \subset L(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$. Множество всех автоморфизмов образует подгруппу полной линейной группы пространства $\mathcal{E}$, называемую (полной) ортогональной его группой.

Условиями (2) множество $O(\mathcal{E})$ в свою очередь разбивается на части $O'(\mathcal{E})$, $O''(\mathcal{E})$. Для каждого тензора $\mathring{A} \in O(\mathcal{E})$ существуют такие единичный вектор a и число $\varphi \in R$, что

1) если $\mathring{A} \in O'(\mathcal{E})$, то корнями характеристического уравнения для $\mathring{A}$ являются 1, $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$, а с присоединением к a любых b, c, с которыми система a, b, c — ортонормированный базис пространства $\mathcal{E}$, тензор $\mathring{A}$ представляется разложением (5); с геометрической точки зрения последнее означает, что в результате преобразования $\mathring{A}$: $x \to x \cdot \mathring{A}$ пространство $\mathcal{E}$ поворачивается как целое на угол φ возле направления с ортом a;

2) если $\mathring{A} \in O''(\mathcal{E})$, то корнями его характеристического уравнения будут -1, $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$, а вместо (5) имеет место представление (6), при котором преобразование пространства $\mathcal{E}$ по правилу $x \to x \cdot \mathring{A}$ сводится к повороту на угол φ возле оси с ортом a и зеркальному отражению (до или после поворота, безразлично) в плоскости, ортогональной этой оси (или, если угодно, — к инверсии пространства и повороту на угол $\varphi + \pi$ возле этой же оси).

Подчеркнем, что поворот в каждом случае происходит так, как будто пространство представляет собой абсолютно твердое тело, ибо, сохраняя скалярные произведения векторов, автоморфизмы (ортогональные преобразования) евклидова пространства оставляют неизменными и длины векторов (расстояния между точками). Поэтому теория автоморфизмов пространства $\mathcal{E}$ заключает в себе, в частности, и все то, из чего складывается теория конечных поворотов в кинематике абсолютно твердого тела. Надо заметить, что в рамках описанного подхода, при котором тензоры не арифметизируются обычным образом, т. е. не отождествляются с их образами при координатных представлениях пространства $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, решения всех основных задач теории конечных поворотов твердого тела сводятся к почти что чисто алгорифмическому использованию предложения а) п. 3.

§ 7. Группа симметрии тензора и тензорной функции

1. Пусть $\mathring{A}$ — по-прежнему некоторый элемент подмножества $O(\mathscr{E})\subset L(\mathscr{E})\subset\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, так что $\mathring{A}$: $x\to x\cdot\mathring{A}$, $x\in\mathscr{E}$, — ортогональное преобразование пространства $\mathscr{E}$. С каждым $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})$ можно связать аналогичное по своим свойствам преобразование и любого другого из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, ..., образуемых тензорами над $\mathscr{E}$ различной валентности.

Действительно, с заданием $\mathring{A}$ определены и тензоры $\mathring{A}\mathring{A}\,(=\mathring{A}\otimes\mathring{A})$, $\mathring{A}\mathring{A}\mathring{A}\,(=\mathring{A}\otimes\mathring{A}\otimes\mathring{A})$ и т. д., — тензорные степени данного $\mathring{A}$. Так как $\mathring{A}$ — двухвалентный тензор и, в отличие от умножения, которое мы обозначаем точкой, при тензорном умножении валентность произведения всегда есть сумма валентностей сомножителей, s-я степень $\mathring{A}^s=\underbrace{\mathring{A}\mathring{A}\mathring{A}\ldots\mathring{A}}_{s}$ — тензор валентности $2s$. Поэтому в точности на тех же основаниях, которые позволяют отождествить с $\mathring{A}$ линейное преобразование пространства $\mathscr{E}$, с $\mathring{A}^s$ можно отождествить линейное преобразование пространства $\underbrace{\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\ldots\otimes\mathscr{E}}_{s}$. Принцип этого отождествления проиллюстрируем, воспользовавшись каким-либо базисом e_1, e_2, e_3 для $\mathscr{E}$. Тогда $x=x^ie_i$, $x\cdot\mathring{A}=x^ie_i\cdot\mathring{A}$ и

$$\mathring{A}:\ x=x^ie_i\to x^ie_i\cdot\mathring{A},\quad x\in\mathscr{E}. \tag{1}$$

Аналогично,

$$\mathring{A}^2:\ T=t^{ij}e_ie_j\to t^{ij}e_i\cdot\mathring{A}e_j\cdot\mathring{A},\quad T\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E},$$
$$\mathring{A}^3:\ T=t^{ijk}e_ie_je_k\to t^{ijk}e_i\cdot\mathring{A}e_j\cdot Ae_k\cdot\mathring{A},\quad T\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$$

и т. д. Вообще

$$\mathring{A}^s\colon T\to\mathring{A}^s(T),\quad T\in\underbrace{\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\ldots\otimes\mathscr{E}}_{s} \tag{2}$$

и, с фиксированием любого базиса e_1, e_2, $e_3\in\mathscr{E}$,

$$\mathring{A}^s(T)=\mathring{A}^s(t^{i_1i_2\ldots i_s}e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_s})=t^{i_1i_2\ldots i_s}э_{i_1}э_{i_2}\ldots э_{i_s},\ э_{i_p}=e_{i_p}\cdot\mathring{A}. \tag{2'}$$

В соответствии с этим отображение (2) вполне определяется тензором $\mathring{A}$, а вследствие невырожденности последнего является обратимым линейным отображением множества $\underbrace{\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\ldots\otimes\mathscr{E}}_{s}$ на это же множество: обратное отображение точно также определяется тензором $\mathring{A}^{-1}$ (удовлетворяющим условию $\mathring{A}\cdot\mathring{A}^{-1}=$

$=\mathring{A}^{-1}\cdot\mathring{A}=I$, п. 1, § 6). При $s=1$ отображение (2) сводится к (1), которое, подчеркнем, при $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})$ представляет собой ортогональное преобразование пространства $\mathscr{E}$, т. е. сохраняет «скалярные инварианты» — скалярные произведения и длины векторов из $\mathscr{E}$. Но когда $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})$, отображение (2) обладает аналогичным свойством и при любом целом $s\geqslant 1$.

Так, в соответствии с изложенным в § 3, каждому $T\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, т. е. двухвалентному тензору над $\mathscr{E}$, можно сопоставить систему из трех, зависящих от T и только от T, чисел («скалярных инвариантов» данного T), а именно $\operatorname{sp}T$, $\operatorname{sp}(T\cdot T)$, $\operatorname{sp}(T\cdot T\cdot T)$. По определению композиции sp( ) (п. 3, § 1) $\operatorname{sp}T=\operatorname{sp}(t^{ij}e_ie_j)=t^{ij}e_i\cdot e_j$. С другой стороны, согласно (2) и (2') $\mathring{A}^2(T)=t^{ij}э_iэ_j$, где $э_i=e_i\cdot\mathring{A}$ и, следовательно, $\operatorname{sp}\mathring{A}^2(T)=t^{ij}э_i\cdot э_j=t^{ij}(e_i\cdot\mathring{A})\cdot(e_j\cdot\mathring{A})=t^{ij}e_i\cdot\mathring{A}\cdot\mathring{A}^*\cdot e_j$. Поскольку по определению (1) § 6 подмножества $O(\mathscr{E})\subset\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, $\mathring{A}\cdot\mathring{A}^*=I$, отсюда $\operatorname{sp}\mathring{A}^2(T)=t^{ij}e_i\cdot I\cdot e_j=t^{ij}e_i\cdot e_j=\operatorname{sp}T$. Это справедливо для любого $T\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ и потому отсюда же $\operatorname{sp}\mathring{A}^2(T\cdot T)=\operatorname{sp}(T\cdot T)$, $\operatorname{sp}\mathring{A}^2(T\cdot T\cdot T)=\operatorname{sp}(T\cdot T\cdot T)$. Таким образом, в случае $s=2$ отображение (2) при $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})$ — такое (линейное и обратимое) преобразование пространства $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, при котором каждый $T\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ преобразуется в тензор с теми же, что и для его прообраза, значениями скалярных инвариантов.

Полная система скалярных инвариантов трехвалентного тензора над $\mathscr{E}$ состоит из девяти чисел, четырехвалентного — из двадцати семи и т. д., но все остальное остается в силе и здесь. Иными словами, при $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})$ отображение (2), удовлетворяющее условию (2'), всегда представляет собой автоморфизм соответствующего из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{E},\ldots$, который вместе с линейными композициями «сохраняет» все скалярные инварианты тензоров.

2. Пусть теперь T — какой-либо фиксированный s-валентный тензор и $G_T\subset O(\mathscr{E})$ — такое подмножество, что

$$\mathring{A}\in O(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow \mathring{A}^s(T)=T. \tag{3}$$

Другими словами, это подмножество состоит из таких $\mathring{A}\in O(\mathscr{E})\subset\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, при определяемых которыми согласно (2) и (2') преобразованиях пространства $\underbrace{\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\ldots\otimes\mathscr{E}}_{s}$ данный его элемент T не изменяется. Напомним, что в совокупности с умножением по закону $\mathring{A}_\varphi, \mathring{A}_\omega\to\mathring{A}_\varphi\cdot\mathring{A}_\omega$ множество $O(\mathscr{E})$ образует группу, канонически изоморфную группе всех ортогональных преобразований пространства $\mathscr{E}$ (п. 3, 4 § 6). Для любого тензора T над $\mathscr{E}$ подмножеству $G_T\subset O(\mathscr{E})$ соответствует подгруппа этой группы, называемая группой симметрии данного T. Тензор T называется изотропным, если $G_T=O(\mathscr{E})$.

Как вытекает из (2′), с заданием любого базиса $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ и, следовательно, разложения $T = t^{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_s}$ равенство, фигурирующее в (3), равносильно равенству

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} \cdot \mathring{A} e_{i_2} \cdot \mathring{A} \ldots e_{i_s} \cdot \mathring{A} = t^{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_s}. \qquad (4)$$

Воспользовавшись одним из разложений (двухвалентного) тензора $\mathring{A}$ по «смешанным» диадам: $\mathring{A} = \mathring{A}^j_k e^k e_j$, имеем $e_i \cdot \mathring{A} = e_i \cdot \mathring{A}^j_k e^k e_j = \mathring{A}^j_i e_j$ (поскольку $e_i \cdot e^k = \delta^k_i$ по определению сопряженного базиса). Поэтому (4) в свою очередь сводится к равенствам

$$t^{j_1 j_2 \ldots j_s} \mathring{A}^{i_1}_{j_1} \mathring{A}^{i_2}_{j_2} \ldots \mathring{A}^{i_s}_{j_s} = t^{i_1 i_2 \ldots i_s}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, 3. \qquad (5)$$

Так как для каждого $\mathring{A} \in O(\mathcal{E})$ и каждого базиса $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ векторы $e_1 \cdot \mathring{A}$, $e_2 \cdot \mathring{A}$, $e_3 \cdot \mathring{A}$ также образуют базис для $\mathcal{E}$, при желании вместо преобразования тензоров по правилу (2′) можно рассматривать соответствующие (порождаемые преобразованиями $э_i = e_i \cdot \mathring{A}$) преобразования их компонент. С этой точки зрения равенства (5) означают, что преобразование $э_i = e_i \cdot \mathring{A}$ не изменяет компонент данного T. Действительно, из $T = t^{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} \times \times e_{i_2} \ldots e_{i_s} = \tau^{i_1 i_2 \ldots i_s} э_{i_1} э_{i_2} \ldots э_{i_s}$ при $э_i = e_i \cdot \mathring{A} = \mathring{A}^j_i e_j$ имеем $t^{i_1 i_2 \ldots i_s} = \tau^{j_1 j_2 \ldots j_s} \mathring{A}^{i_1}_{j_1} \mathring{A}^{i_2}_{j_2} \ldots \mathring{A}^{i_s}_{j_s}$, откуда и из (5) $\tau^{i_1 i_2 \ldots i_s} = t^{i_1 i_2 \ldots i_s}$.

Заметим, что это справедливо при любом выборе исходного базиса $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$. Кроме того, из $\mathring{A} \in O(\mathcal{E})$ следует, что в силу (5) совпадают не только контравариантные, но и ковариантные и любого рода «смешанные» компоненты данного T в базисах, преобразующихся друг в друга с помощью тензора $\mathring{A}$. В самом деле, по определению сопряженного тензора (п. 4, § 1) при $\mathring{A} = \mathring{A}^j_i e^i e_j$ будет $\mathring{A}^* = \mathring{A}^j_i e_j e^i$, поэтому $\mathring{A} \cdot \mathring{A}^* = \mathring{A}^j_i \mathring{A}^k_l g_{jk} e^i e^l$, $\mathring{A}^* \cdot \mathring{A} = \mathring{A}^j_i \mathring{A}^k_l g^{il} e_j e_k$ (где по-прежнему $g_{ij_0} = e_i e_{j_0}$, $g^{ij} = e^i \cdot e^j$ — компоненты тензора I) и равенства $\mathring{A} \cdot \mathring{A}^* = \mathring{A}^* \cdot \mathring{A} = I$ эквивалентны равенствам $\mathring{A}^j_i \mathring{A}^k_l g_{jk} = g_{il}$, $\mathring{A}^j_i \mathring{A}^k_l g^{il} = g^{jk}$. С учетом этих равенств и того факта, что «поднятие и опускание индексов» осуществляется с помощью компонент метрического тензора (§ 10.1) немедленно получается, что вместе с (5) справедливы равенства $t_{i_1 i_2 \ldots i_s} \mathring{A}^{i_1}_{j_1} \mathring{A}^{i_2}_{j_2} \ldots \mathring{A}^{i_s}_{j_s} = t_{j_1 j_2 \ldots j_s}$, $t^{i_1}_{\cdot i_2 i_3 \ldots i_s} \times \times \mathring{A}^{j_1}_{i_1} \mathring{A}^{i_2}_{j_2} \ldots \mathring{A}^{i_s}_{j_s} = t^{j_1}_{\cdot j_2 j_3 \ldots j_s}$ и т. д.

Таким образом, определение (3) группы симметрии тензора можно сформулировать также так: $\mathring{A} \in G_T$ тогда и только тогда, когда $\mathring{A} \in O(\mathcal{E})$ и при преобразованиях базисов, порождаемых тензором $\mathring{A}$, компоненты тензора T не изменяются. Подчеркнем существенную роль условия $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$, равносильного согласно (1) § 6 равенствам $\mathring{A} \cdot \mathring{A}^* = \mathring{A}^* \cdot \mathring{A} = I$, которые, как только что мы видели, обеспечивают равноправие компонент различного «строения» при использовании этого определения группы G_T.

3. Естественным образом определяется и понятие группы симметрии тензорной функции. Рассмотрим, например, какую-либо функцию Φ на $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, отображающую это пространство в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, т. е.

$$\Phi\colon \mathrm{T} \to \Phi(\mathrm{T}), \quad \mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}, \tag{6}$$

и для каждого $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ — двухвалентного тензора — значение $\Phi(\mathrm{T})$ этой функции есть трехвалентный тензор над $\mathscr{E}$. Любой $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ порождает по формулам вида (2), (2′) автоморфизм и каждого из пространств $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Пара T, $\Phi(\mathrm{T})$ — элемент графика функции Φ — преобразуется при этом в пару $\mathring{A}^2(\mathrm{T})$, $\mathring{A}^3(\Phi(\mathrm{T}))$. Но по закону (6) $\mathring{A}^2(\mathrm{T}) \to \Phi(\mathring{A}^2(\mathrm{T}))$, и потому пара $\mathring{A}^2(\mathrm{T})$, $\mathring{A}^3(\Phi(\mathrm{T}))$ также будет элементом графика функции Φ лишь при условии, что $\mathring{A}^3(\Phi(\mathrm{T})) = \Phi(\mathring{A}^2(\mathrm{T}))$. Соответственно для того чтобы функция Φ совсем не «чувствовала» рассматриваемых преобразований области определения и области значений, необходимо и достаточно, чтобы это условие выполнялось для каждого значения аргумента:

$$\Phi(\mathring{A}^2(\mathrm{T})) = \mathring{A}^3(\Phi(\mathrm{T})), \quad \mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}. \tag{7}$$

Подмножество $G_\Phi \subset O(\mathscr{E})$, состоящее из всех таких $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$, для которых выполняется (7), снова представляет собой подгруппу группы $O(\mathscr{E})$, которая и называется группой симметрии функции Φ. Если $G_\Phi = O(\mathscr{E})$, т. е. с точностью до канонического изоморфизма группа симметрии данной Φ совпадает с полной ортогональной группой, то Φ называется изотропной тензорной функцией.

Эти определения очевидным образом переносятся на случай, когда Φ — функция, аргумент и значения которой суть соответственно r- и s-валентные тензоры над $\mathscr{E}$ при любых целых r, $s \geqslant 0$. Разница состоит лишь в том, что условие (7) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\Phi(\mathring{A}^r(\mathrm{T})) = \mathring{A}^s(\Phi(\mathrm{T})), \quad \mathrm{T} \in \underbrace{\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}}_{r}. \tag{8}$$

Подчеркнем также, что понятие группы симметрии имеет чисто алгебраический характер и условия его применимости не содержат никаких требований о непрерывности или гладкости функции и т. п. Тем не менее это понятие имеет фундаментальное значение не только с точки зрения алгебры. Большое число примеров, иллюстрирующих этот факт, доставляет физика, в первую очередь теория симметрии строения и свойств материальных тел. Можно привести примеры и иного рода. Однако сначала вернемся к определениям п. 2 и рассмотрим несколько простых предложений о группах симметрии тензоров.

4. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_p$ — тензоры одинаковой валентности. Вследствие линейности преобразований, определяемых формулами (2) и (2′), из $T = c_1T_1 + c_2T_2 + \ldots + c_pT_p$ вытекает $\mathring{A}^s(T) = c_1\mathring{A}^s(T_1) + c_2\mathring{A}^s(T_2) + \ldots + c_p\mathring{A}^s(T_p)$. С учетом этого из определения (2) очевидным образом следует, что группа симметрии тензора $c_1T_1 + c_2T_2 + \ldots + c_pT_p$ всегда содержит группу $G_{T_1} \cap G_{T_2} \cap \ldots \cap G_{T_p}$ — пересечение групп симметрии для T_1, $T_2, \ldots, T_p$.

В частности, если $T_1, T_2, \ldots, T_p$ — изотропные тензоры, то и группа симметрии для $c_1T_1 + c_2T_2 + \ldots + c_pT_p$ будет совпадать с $O(\mathscr{E})$. Иными словами, любая линейная комбинация изотропных тензоров также является изотропным тензором. Действительно, если $G_{T_1} = G_{T_2} = \ldots = G_{T_p} = O(\mathscr{E})$ и, следовательно, $G_{T_1} \cap G_{T_2} \cap \ldots \cap G_{T_p} = O(\mathscr{E})$, то группа симметрии для $c_1T_1 + c_2T_2 + \ldots + c_pT_p$ должна одновременно содержать $O(\mathscr{E})$ (на основании только что сформулированного предложения) и содержаться в $O(\mathscr{E})$ (поскольку, по определению, группа симметрии любого T над $\mathscr{E}$ — подгруппа группы $O(\mathscr{E})$).

Для любого данного T тензоры (той же валентности), компоненты которых в каком-либо базисе отличаются от компонент тензора T лишь порядком индексов, обычно называются изомерами последнего. Так, для каждого вектора $x = x^i e_i$ пространства $\mathscr{E}$ — одновалентного тензора над $\mathscr{E}$ — множество всех его изомеров содержит лишь один элемент, а именно сам этот вектор x. Для каждого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ такое множество состоит уже из двух элементов, включая вместе с данным T тензор T^*, ибо в силу $T = t^{ij}e_ie_j$ имеем $T^* = t^{ij}e_je_i = t^{ji}e_ie_j$ (п. 4, § 1). Другими словами, изомеры любого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ суть образы этого тензора при тождественном автоморфизме пространства $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ и автоморфизме по правилу $T \to T^*$. Аналогичным образом обстоит дело и с тензорами любой валентности: для каждого s-валентного T над $\mathscr{E}$ множество всех его изомеров состоит из s тензоров, представляющих собой образы данного T при определенных автоморфизмах пространства $\underbrace{\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \ldots \otimes \mathscr{E}}_{s}$.

Очевидно, что всегда, когда равенства (5) выполняются для системы 3^s чисел $t^{i_1i_2\ldots i_s}$ — компонент данного s-валентного тензора в каком-либо базисе, эти равенства справедливы и для любой системы, получающейся из $t^{i_1i_2\ldots i_s}$ в результате перестановки индексов. Но это значит, что для любого тензора T над $\mathscr{E}$ все его изомеры имеют ту же, что и T, группу симметрии.

Заметим, далее, что когда $\mathring{A} = -I$ и s — любое нечетное число, $e_{i_1} \cdot \mathring{A} e_{i_2} \cdot \mathring{A} \ldots e_{i_s} \cdot \mathring{A} = -e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_s}$ и, следовательно, равенство (4) для ненулевого $T = t^{i_1 i_2 \ldots i_s} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_s}$ заведомо выполняться не может. Иными словами, тензор $-I \in O''(\mathscr{E}) \subset O(\mathscr{E})$ («тензор инверсии», см. п. 3 § 6) будет элементом группы G_T для T нечетной валентности тогда и только тогда, когда $T = 0$. Тем самым для T нечетной валентности $G_T = O(\mathscr{E})$, т. е. группа симметрии совпадает с полной ортогональной группой тогда и только тогда, когда $T = 0$.

Рассмотрим тензоры четной валентности. При $s = 2$ из (2′) имеем $\mathring{A}^2(T) = \mathring{A}^2(t^{ij} e_i e_j) = t^{ij} e_i \cdot \mathring{A} e_j \cdot \mathring{A} = \mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}$, и потому для двухвалентного T определение (3) можно записать так:

$$\mathring{A} \in G_T \Longleftrightarrow \mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A} = T.$$

Равенство $\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A} = T$ означает, в частности, что в результате определяемого тензором $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ ортогонального преобразования пространства $\mathscr{E}$ каждая главная ось тензора T преобразуется в главную же его ось. Соответственно, если $G_T = O(\mathscr{E})$ и тем самым $\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A} = T$ при любом $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$, то T — такой двухвалентный тензор, главные оси которого при любом ортогональном преобразовании преобразуются в главные же его оси. Это возможно только тогда, когда для T каждое направление в $\mathscr{E}$ является главным, т. е. когда T — „шаровой" тензор: $T = cI$.

Пусть теперь s — произвольное положительное четное число и H — какой-либо s-валентный тензор над $\mathscr{E}$. С помощью метрического тензора тензору H можно сопоставить систему двухвалентных тензоров (компоненты которых получаются свертыванием компонент тензора H по $s - 2$ индексам с компонентами тензора I). Учитывая, что на основании только что доказанного I — изотропный тензор, нетрудно видеть, что группа симметрии каждого из этих двухвалентных тензоров содержит G_H. Поэтому при $G_H = O(\mathscr{E})$ каждый из них также должен быть изотропным тензором и, следовательно, представляет собой шаровой тензор. Но любой такой, получающийся путем свертывания из H и I, двухвалентный тензор будет шаровым, т. е. с точностью до скалярного множителя совпадающим с I только тогда, когда H — линейная комбинация изомеров тензора $II \ldots I \; (= I \otimes I \otimes \ldots \otimes I) = g^{i_1 i_2} g^{i_3 i_4} \ldots g^{i_{s-1} i_s} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_s}$. Обратно, при любом целом $r > 0$ тензор $I^r = \underbrace{II \ldots I}_{r}$ — изотропный тензор валентности $s = 2r$, поэтому изотропным тензором является и любой изомер тензора I^2 и, следовательно, на основании доказанного в начале этого пункта, любая линейная комбинация изомеров. Таким образом, любой изотропный тензор четной валентности $s = 2r$ представляется линейной комбинацией изомеров тензора $\underbrace{\mathrm{II}\ldots\mathrm{I}}_{r}$. В случае $s=2$ это возвращает нас к уже известному факту: любой двухвалентный изотропный тензор есть тензор вида $c\mathrm{I}$, $c \in R$.

Пусть теперь $s=4$. Тогда любой четырехвалентный тензор — линейная комбинация изомеров тензора $\mathrm{II}=g^{ij}g^{kl}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k\mathrm{e}_l$. Надо заметить, что вследствие симметрии тензора I среди упомянутых изомеров лишь три линейно независимых, а именно $g^{ij}g^{kl}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k\mathrm{e}_l$, $g^{kj}g^{il}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k\mathrm{e}_l$, $g^{ik}g^{jl}\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k\mathrm{e}_l$. Поэтому любой изотропный четырехвалентный тензор есть линейная комбинация трех этих тензоров:

$$\mathrm{H} \in \mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\otimes\mathcal{E},\ G_{\mathrm{H}}=O(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \mathrm{H}=(c_1 g^{ij}g^{kl}+c_2 g^{kj}g^{il}+ c_3 g^{ik}g^{jl})\,\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j\mathrm{e}_k\mathrm{e}_l. \quad (9)$$

Множество всех изомеров тензора III содержит 15 линейно независимых элементов, тензора IIII — 91 и т. д. (см., например, [7]).

5. Подчеркнем, что термин „изотропный тензор“ выше всюду понимался в смысле определения, сформулированного в п. 2 и отождествляющего изотропию с инвариантностью относительно любого ортогонального преобразования. Иногда, однако, этот термин трактуется иначе, а именно изотропным называется всякий такой T над $\mathcal{E}$, который не „чувствует“ хотя бы ортогональных преобразований первого рода, т. е. для которого G_{T} содержит подмножество $O'(\mathcal{E}) \subset O(\mathcal{E})$, не обязательно совпадая с $O(\mathcal{E})$.

Для тензоров четной валентности это определение эквивалентно предыдущему. В самом деле, поскольку при любом четном s $\mathring{\mathrm{A}}^s=(-\mathring{\mathrm{A}})^s$, для любого T четной валентности $\mathring{\mathrm{A}} \in G_{\mathrm{T}}$ всегда влечет и $-\mathring{\mathrm{A}} \in G_{\mathrm{T}}$. Отсюда и из того, что всякий $\mathrm{A} \in O''(\mathcal{E})$ представляется в виде $\mathring{\mathrm{A}}=-\mathrm{I}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_\varphi=-\mathring{\mathrm{A}}_\varphi$, где $\mathring{\mathrm{A}}_\varphi \in O'(\mathcal{E})$ (п. 3, § 6), вытекает, что для T четной валентности $O'(\mathcal{E}) \subset G_{\mathrm{T}}$ всегда влечет $O''(\mathcal{E}) \subset G_{\mathrm{T}}$, а потому и $G_{\mathrm{T}}=O(\mathcal{E})=O'(\mathcal{E}) \cup O''(\mathcal{E})$.

Оба определения равносильны и в применении к одновалентным тензорам: очевидно, что $G_{\mathrm{a}}=O'(\mathcal{E})$, т. е. вектор a не изменяется при любом повороте пространства $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда совпадает с нулевым вектором и, следовательно, когда $G_{\mathrm{a}}=O(\mathcal{E})$. Для более высоких нечетных валентностей дело обстоит по-другому: здесь $G_{\mathrm{T}} \supset O'(\mathcal{E})$ не равносильно $G_{\mathrm{T}}=O(\mathcal{E})$ и поэтому не влечет $\mathrm{T}=0$.

Действительно, обозначим через E следующий трехвалентный тензор:

$$\mathrm{E}=\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3-\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_2\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_3\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1+\mathrm{e}_3\mathrm{e}_1\mathrm{e}_2-\mathrm{e}_2\mathrm{e}_1\mathrm{e}_3. \quad (10)$$

Можно убедиться (проще всего путем прямых вычислений, с учетом (10) и формул (2), (2′)), что $\mathring{A}^3(E) = J_3 E$ для любого $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$, где по-прежнему

$$J_3 = \det \|\mathring{A}^i_j\| = \frac{1}{3}\operatorname{sp}(\mathring{A}\cdot\mathring{A}\cdot\mathring{A}) - \frac{1}{2}\operatorname{sp}\mathring{A}\operatorname{sp}(\mathring{A}\cdot\mathring{A}) + \frac{1}{6}(\operatorname{sp}A)^3.$$

В соответствии с (3) и определениями (2) § 6 отсюда следует, что $G_E = O'(\mathscr{E})$. Любой трехвалентный тензор, группа симметрии которого совпадает с $O'(\mathscr{E})$, есть линейная комбинация изомеров тензора E. Но, как видно из (10), любой из этих изомеров совпадает или с самим тензором E или с $(-1)E = -E$. Поэтому $H \in \mathscr{E}\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, $G_H = O'(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow H = cE$, $c \in R$.

Можно показать также, что при $s = 5$ всякий s-валентный тензор, группа симметрии которого совпадает с $O'(\mathscr{E})$, представляется линейной комбинацией изомеров тензора EI $(= E \otimes I)$, при $s = 7$ — тензора EII и т. д.

§ 8. Аналитические функции

1. Рассмотрим последовательность

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_m,\ \ldots \tag{1}$$

тензоров одинаковой валентности. Как и при изучении «обычных» (числовых) последовательностей, каждой такой последовательности можно сопоставить ряд. Действительно, пусть $T_0 = S_0$, $T_1 = S_1 - S_0$, $T_2 = S_2 - S_1$ и т. д.; тогда (1) — последовательность «частичных сумм» (отрезков) ряда $T_0 + T_1 + T_2 + \ldots$. Обратно, каждому ряду $T_0 + T_1 + T_2 + \ldots$ из данных тензоров одинаковой валентности можно сопоставить последовательность (1), полагая $S_m = \sum_{k=0}^{m} T_k$. В результате вопрос о сумме ряда сводится к вопросу о пределе этой последовательности.

Пусть, например, (1) состоит из двухвалентных тензоров. Тогда с фиксированием базиса для $\mathscr{E}$ и, следовательно, для $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ имеем $S_m = \underset{m}{s^{ij}} e_i e_j$. Естественно считать, что последовательность (1) сходится, когда сходится каждая из последовательностей $\underset{0}{s^{ij}}, \underset{1}{s^{ij}}, \underset{2}{s^{ij}}, \ldots$, образуемых компонентами тензоров (1). Тензор $S = s^{ij} e_i e_j$ с компонентами $s^{ij} = \lim\limits_{m\to\infty} \underset{m}{s^{ij}}$ при этом называется пределом последовательности (1). С помощью известных предложений о пределах суммы и произведения на число сходящихся числовых последовательностей нетрудно показать, что будучи сходящейся в каком-либо базисе $e_1, e_2, e_3 \in \mathscr{E}$ последовательность (1) сходится и в любом другом базисе, причем к одному и тому же предельному тензору S, который, таким образом, от выбора базиса не зависит. Но при таком «покомпонентном» определении предела последовательности (1) некоторые важные вопросы остаются в стороне. Более общий подход опирается на понятия нормы.

Напомним, что нормой (длиной) вектора $x \in \mathscr{E}$ называется число $|\mathrm{x}| = \sqrt{\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}}$. Из этого определения и свойств метрической формы пространства $\mathscr{E}$ (которое по условию собственно евклидово) вытекает, что 1) $|\mathrm{x}| \geqslant 0$, причем $|\mathrm{x}| = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{x} = 0$, 2) $|c\mathrm{x}| = |c|\,|\mathrm{x}|$, 3) $|\mathrm{x} + \mathrm{y}| \leqslant |\mathrm{x}| + |\mathrm{y}|$ («неравенство треугольника»). Аналогично, нормой векторов пространства $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ — двухвалентных тензоров над $\mathscr{E}$ — называются значения отображения $\mathrm{T} \to |\mathrm{T}|$, $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в R (поле скаляров), для которого 1) $|\mathrm{T}| \geqslant 0$ и $|\mathrm{T}| = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{T} = 0$, 2) $|c\mathrm{T}| = |c|\,|\mathrm{T}|$, 3) $|\mathrm{T}_u + \mathrm{T}_v| \leqslant |\mathrm{T}_u| + |\mathrm{T}_v|$ и, кроме того, 4) $|\mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v| \leqslant |\mathrm{T}_u|\,|\mathrm{T}_v|$ при любых T, T_u, $\mathrm{T}_v \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ и $c \in R$ (дополнительное по сравнению с имевшими место в предыдущем случае условие 4) обеспечивает непрерывность композиции $\mathrm{T}_u, \mathrm{T}_v \to \mathrm{T}_u \cdot \mathrm{T}_v$ в топологии, которую порождает норма на $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$).

В соответствии с изложенным в п. 2 § 6 для каждого $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ скалярный инвариант $\mathrm{sp}(\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^*) = t^i_{\cdot j} t_i^{\cdot j}$ — неотрицательное число, причем $\mathrm{sp}(\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^*) = 0 \longleftrightarrow \mathrm{T} = 0$. Можно показать, что при $|\mathrm{T}| \equiv \sqrt{\mathrm{sp}(\mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^*)}$ вместе с первым выполняются и все остальные из перечисленных выше условий 1) — 4). Таким же образом обстоит дело и при отождествлении $|\mathrm{T}|$ с $|\lambda_{\text{м}}|$, где $\lambda_{\text{м}}$ — максимальное по модулю из собственных чисел тензора T.

Последовательность (1) называется сходящейся, если существует такой тензор $\mathrm{S} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, что $\lim\limits_{m \to \infty} |\mathrm{S}_m - \mathrm{S}| = 0$. Если последовательность (1) сходится в смысле этого определения, то она сходится и покомпонентно, равно как и наоборот.

Выше мы считали, что (1) состоит из двухвалентных тензоров. Но с очевидными изменениями все это остается в силе и для последовательности из тензоров любой данной валентности.

2. Пусть теперь C_0, C_1, C_2, ... — какие-либо тензоры валентности соответственно 2, 4, 6 и т. д. С заданием такой бесконечной системы тензоров над $\mathscr{E}$ каждому $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ можно сопоставить ряд

$$\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 : \mathrm{T} + \mathrm{C}_2 : \mathrm{T}) : \mathrm{T} + \mathrm{C}_3 : \mathrm{T}) : \mathrm{T}) : \mathrm{T} + \ldots \qquad (2)$$

(двоеточие здесь обозначает двухкратное „свертывание“; так $\mathrm{C}_1 : \mathrm{T} = (\underset{1}{c}^{ijkl} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j \mathrm{e}_k \mathrm{e}_l) : (t_{pq} \mathrm{e}^p \mathrm{e}^q) = \underset{1}{c}^{ijkl} t_{pq} (\mathrm{e}_i \mathrm{e}_j \mathrm{e}_k \mathrm{e}_l \cdot \mathrm{e}^p) \cdot \mathrm{e}^q = \underset{1}{c}^{ijkl} t_{lk} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j$, аналогично $\mathrm{C}_2 : \mathrm{T}) : \mathrm{T} = \underset{2}{c}^{ijklpq} t_{qp} t_{lk} \mathrm{e}_i \mathrm{e}_j$ и т. д.). По определению ряд (2) сходится, если сходится последовательность C_0, $\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 : \mathrm{T}$, $\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 : \mathrm{T} + \mathrm{C}_2 : \mathrm{T}) : \mathrm{T}$, ... , образуемая отрезками ряда. Пусть $\mathrm{F}(\mathrm{T})$ — сумма ряда, т. е. предел этой последовательности, и $\Omega \subset \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ — подмножество, образуемое всеми такими

$T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, при которых этот предел существует. Иными словами, Ω — область сходимости ряда (2). Очевидно, что Ω всегда не пустое множество, ибо (2) заведомо сходится при $T = 0$. Тем самым с заданием ряда (2) определяется тензорная функция — отображение по правилу

$$F\colon T \to F(T) = C_0 + C_1 : T + C_2 : T) : T + \ldots, \quad T \in \Omega, \tag{3}$$

некоторого подмножества $\Omega \subset \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Свойства этой функции во многом аналогичны свойствам обычных (скалярных) аналитических функций. Факты же, в которых проявляется специфически тензорная природа аргумента и значений отображения (3), связаны с понятием группы симметрии.

Как уже упоминалось (п.1), норма на $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ допускает различные конкретизации. Но в любом случае значения нормы $|T|$ — некоторый скалярный инвариант тензоров $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. В соответствии с доказанным в п.1 § 7 это означает, что при $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ преобразование $\mathring{A}^2\colon T \to \mathring{A}^2(T) = \mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}$ всегда сохраняет норму: $|\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}| = |T|$ для каждого $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ и $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$. Отсюда следует, что при любом $T \in \Omega$ и любом $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ вместе с (2) сходится и ряд $\mathring{A}^* \cdot C_0 \cdot \mathring{A} + \mathring{A}^* \cdot (C_1 : T) \cdot \mathring{A} + \ldots$. Сумма этого ряда есть образ $\mathring{A}^2(F(T)) = \mathring{A}^* \cdot F(T) \cdot \mathring{A}$ суммы $F(T)$ исходного ряда при автоморфизме $\mathring{A}^2$ пространства $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, т. е.

$$\mathring{A}^* \cdot F(T) \cdot \mathring{A} = \mathring{A}^* \cdot C_0 \cdot \mathring{A} + \mathring{A}^* \cdot (C_1 : T) \cdot \mathring{A} + \ldots . \tag{4}$$

Пусть $G_0, G_1, G_2, \ldots$ — группы симметрии тензоров соответственно $C_0, C_1, C_2, \ldots$. В соответствии с определениями п. 2 § 7 $\mathring{A} \in G_0 \Longleftrightarrow \mathring{A}^2(C_0) = \mathring{A}^* \cdot C_0 \cdot \mathring{A} = C_0$. Нетрудно видеть также, что $\mathring{A} \in G_1 \Longleftrightarrow \mathring{A}^* \cdot (C_1 : T) \cdot \mathring{A} = C_1 : (\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A})$ при любом $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, $\mathring{A} \in G_2 \Longleftrightarrow \mathring{A}^* \cdot (C_2 : T) : T) \cdot \mathring{A} = C_2 : (\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}) : (\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A})$ и т. д. Поэтому всегда, когда $\mathring{A} \in G_0 \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots$ для каждого $T \in \Omega$, вместе с (2) и (4) сходится и ряд, получающийся заменой T в (2) тензором $\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}$, причем $F(\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}) = \mathring{A}^* \cdot F(T) \cdot \mathring{A}$. С определенной оговоркой справедливо и обратное, а именно если для некоторого $\mathring{A} \in O(\mathscr{E})$ из $T \in \Omega$ всегда вытекает $\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A} \in \Omega$ и $F(\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}) = \mathring{A}^* \cdot F(T) \cdot \mathring{A}$, то необходимо $\mathring{A} \in G_0 \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m$. Отсюда видно, во-первых, что группу симметрии функции (3) можно определить непосредственно по образцу определений п. 3 § 7:

$$\mathring{A} \in G_F, \ \mathring{A} \in O(\mathscr{E}), \ F(\mathring{A}^* \cdot T \cdot \mathring{A}) = \mathring{A}^* \cdot F(T) \cdot \mathring{A}$$

$$\text{для любого} \quad T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \tag{5}$$

и, кроме того, что это равносильно определению, по которому

$$G_{\mathrm{F}} = G_0 \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots = \bigcap_{m=0}^{\infty} G_m. \qquad (6)$$

3. Когда последовательность $C_0, C_1, C_2, \ldots$ состоит из произвольных данных тензоров (валентности 2, 4, 6 и т. д.), отображение, которое описанным образом определяется с помощью ряда (2), т. е. действует по правилу (3), — общего вида отображение из $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, аналитическое в некоторой окрестности нулевого элемента этого пространства. Термин „аналитическое отображение“ здесь вполне оправдывается, например, уже тем, что, как вытекает из (3), компоненты тензора $\mathrm{F}(\mathrm{T}) \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в любом базисе суть аналитические функции компонент тензора-аргумента в том же базисе для $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. В соответствии с (6), с другой стороны, группой симметрии этой тензорной функции может служить любая из подгрупп полной ортогональной групп, представляющих группы симметрии тензоров четной валентности.

Однако обычно название „аналитическая“ (тензорная функция), по крайней мере для функций интересующего нас сейчас вида (с аргументом и значениями — двухвалентными тензорами над $\mathscr{E}$), употребляется в существенно более узком смысле. Именно, допустим, что (3)—изотропная функция, т. е. $G_{\mathrm{F}} = O(\mathscr{E})$. Тогда и только тогда, как вытекает из (6), изотропными должны быть и все тензоры $C_0, C_1, C_2, \ldots$ — „коэффициенты“ ряда (3). На основании доказанного в п. 4 § 7 это означает в свою очередь, что $C_0, C_1, C_2, \ldots$ в данном случае представляются линейными комбинациями изомеров тензоров соответственно I, II, III ($=\mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \otimes \mathrm{I}$) и т. д. В частности, для любого целого $m \geqslant 0$ возьмем в качестве C_m тот изомер тензора $c_m \underbrace{\mathrm{II} \ldots \mathrm{I}}_{m}$, для которого

$$C_m : \underbrace{\mathrm{T}) : \mathrm{T}) : \ldots) : \mathrm{T}}_{m} = c_m \underbrace{\mathrm{T} \cdot \mathrm{T} \cdot \ldots \cdot \mathrm{T}}_{m}, \quad \mathrm{T} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}, \quad c_m \in R \qquad (7)$$

(несложно проверить, что такой изомер существует при любом $m \geqslant 0$). С так выбранными „коэффициентами“ C_m ряд в (3) записывается согласно (7) в виде

$$\mathrm{F}(\mathrm{T}) = c_0 \mathrm{I} + c_1 \mathrm{T} + c_2 \mathrm{T} \cdot \mathrm{T} + \ldots, \qquad (8)$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots \in R$.

4. Пусть $z \in C$ — произвольное комплексное число. Как и в § 5, ряду (8) естественно сопоставить скалярный степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots. \qquad (8')$$

Произвольному $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ при этом сопоставляется произвольное $z \in C$, а тензору I — число 1. Наоборот, каждому ряду (8′) можно поставить в соответствие определенный степенной ряд с членами из $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, а именно ряд (8), заменяя скалярные степени z^m тензорами $\underbrace{T \cdot T \cdot \ldots \cdot T}_{m}$. При том же „законе сопоставления" ряду

$$c_0 + c_1(z-b) + c_2(z-b)^2 + \ldots \tag{9}$$

соответствует ряд

$$c_0 I + c_1(T - bI) + c_2(T - bI)\cdot(T - bI) + \ldots . \tag{9′}$$

Целесообразность такого сопоставления степенных рядов на комплексной плоскости и рядов с членами из $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ определяется в первую очередь тем обстоятельством, что хорошо изученные факты о сходимости ряда (9) позволяют сделать некоторые выводы и о сходимости соответствующего тензорного ряда. Основной из этих выводов состоит в следующем: ряд (9) сходится при $|T - bI| < \rho$ и расходится при $|T - bI| > \rho$, где ρ — радиус круга сходимости ряда (9). Если воспользоваться одной из указанных в п. 1 конкретных норм в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, а именно $|T| \equiv |\lambda_м|$, то это же самое можно сформулировать и так: ряд (9′) сходится при каждом $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, характеристические числа которого лежат внутри круга сходимости ряда (9), и расходится для таких $T \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, хотя бы одно из характеристических чисел каждого из которых лежит вне этого круга. Для случая $|T - bI| = \rho$ ответ также зависит от свойств ряда (9); когда последний сходится (расходится) на границе круга $|z - b| \leqslant \rho$, соответственно при $|T - bI| = \rho$ сходится (расходится) и ряд (9′).

Изучение тензорных степенных рядов в свою очередь связано с тем, что по аналогии с ситуацией в классическом анализе с помощью таких рядов определяется некоторый класс „элементарных" тензорных функций (отображений $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ в $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$).

Напомним, например, что по определению экспоненциальной функции $z \to e^z$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!}. \tag{10}$$

Этот ряд сходится при любом конечном значении $z \in C$, т. е. e^z представляет собой „целую функцию". Целой функцией является и

$$a^z = 1 + (\ln a) z + \frac{(\ln a)^2}{2!} z^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} z^3 + \ldots = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\ln a)^m}{m!} z^m. \tag{11}$$

Для функций $\ln z$, $(1+z)^\alpha$

$$\ln z = z-1-\frac{1}{2}(z-1)^2+\frac{1}{3}(z-1)^3-\ldots=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}(z-1)^m, \tag{12}$$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots, \tag{13}$$

причем, с некоторыми оговорками относительно значений z на границе круга сходимости, в первом случае $|z-1|<1$, во втором (при $\alpha>0$ и не целом) $|z|<1$. В соответствии с этим „элементарные" тензорные функции e^{T}, a^{T}, $\ln \mathrm{T}$, $(\mathrm{I}+\mathrm{T})^\alpha$ определяются следующим образом:

$$e^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}+\mathrm{T}+\frac{1}{2!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+\frac{1}{3!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+\ldots, \tag{10'}$$

$$a^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}+(\ln a)\,T+\frac{(\ln a)^2}{2!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+\frac{(\ln a)^3}{3!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+\ldots, \tag{11'}$$

$$\ln\mathrm{T} = \mathrm{T}-\mathrm{I}-\frac{1}{2}(\mathrm{T}-\mathrm{I})\cdot(\mathrm{T}-\mathrm{I})+ \\ +\frac{1}{3}(\mathrm{T}-\mathrm{I})\cdot(\mathrm{T}-\mathrm{I})\cdot(\mathrm{T}-\mathrm{I})-\ldots, \tag{12'}$$

$$(\mathrm{I}+\mathrm{T})^\alpha = \mathrm{I}+\alpha\mathrm{T}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+ \\ +\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}+\ldots, \tag{13'}$$

причем, в соответствии с изложенным выше критерием сходимости тензорных рядов, функции e^{T} и a^{T} определены своими рядами для любого $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, функция $\ln\mathrm{T}$ — для $|\mathrm{T}-\mathrm{I}|<1$, а функция $(\mathrm{I}+\mathrm{T})^\alpha$ — для $|\mathrm{T}|<1$ (при не целом $\alpha>0$).

Существенно, что все эти функции — изотропные отображения $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ (или некоторого $\Omega\subset\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$) в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$. Целесообразность такого определения основных тензорных функций связана с тем, что им при этом оказываются присущими многие (хотя и не все) свойства соответствующих функций числового аргумента.

Так, для e^{T} имеем

$$e^{\mathrm{T}}\cdot e^{-\mathrm{T}}=\mathrm{I}$$

и вообще для любых таких $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, для которых $\mathrm{T}_1\cdot\mathrm{T}_2\neq$ $\neq\mathrm{T}_2\cdot\mathrm{T}_1$, будет

$$e^{\mathrm{T}_1}\cdot e^{\mathrm{T}_2}= e^{\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2}.$$

Функции e^{T} и $\ln\mathrm{T}$ — взаимно обратные, т. е. $\ln e^{\mathrm{T}}=\mathrm{T}$, $e^{\ln\mathrm{T}}=\mathrm{T}$ и т. д. Функция e^{T}, как будет видно далее (см. п. 6 ниже), позволяет связать ортогональные и кососимметрические тензоры.

5. Пусть $P_s: \mathrm{T} \to P_s(\mathrm{T})$ — „полиномиальное“ изотропное отображение $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$, т. е.

$$P_s(\mathrm{T}) = c_0\mathrm{I} + c_1\mathrm{T} + c_2\mathrm{T}\cdot\mathrm{T} + \ldots + c_s\underbrace{\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\ldots\cdot\mathrm{T}}_{s}. \tag{14}$$

С помощью формулы Гамильтона—Кэли (§ 3) каждая степень $\underbrace{\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\ldots\cdot\mathrm{T}}_{m}$ при целом $m \geqslant 3$ выражается через $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$, T, I, и потому многочлен (14) при любом целом s сводится к многочлену, содержащему степени $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}\cdot\ldots\cdot\mathrm{T}$ не выше второй (и со скалярными коэффициентами, которые суть функции характеристических чисел или, что то же самое, — полной системы скалярных инвариантов тензора-аргумента T). Но ряды (10′)—(13′) также содержат такие степени тензора-аргумента T (или $\mathrm{T} - b\mathrm{I}$), что дает основание думать, что и они в области сходимости сводятся к конечному тензорному полиному упомянутого типа. Однако, благодаря наличию в правых частях (10′)—(13′) как угодно больших степеней, проверить это с помощью непосредственно формулы Гамильтона—Кэли затруднительно. Более удобный путь — использование так называемой формулы Лагранжа—Сильвестра, которая одновременно доставляет и более общий, чем степенные ряды, алгоритм сопоставления функциям $z \to f(z)$ тензорных функций.

Пусть $z \to f(z)$ — произвольная комплекснозначная функция комплексного аргумента. Этой функции и каждому тензору T из некоторого подмножества $\Omega_f \subset \mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ сопоставим полином $q(z)$ такой, что

$$q(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad k = 1,\ 2,\ 3 \tag{15}$$

(где по-прежнему $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа тензора $\mathrm{T} \in \Omega_f$). Условимся, что при $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ этот полином квадратичный: $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$, для каждого T, для которого два из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ совпадают (но не равны третьему) будем брать $q(z) = b_0 + b_1 z$ и, наконец, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $q(z) = b_0$. Иными словами, сопоставляя данной $f(z)$ и каждому $\mathrm{T} \in \Omega_f$ полином $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$, удовлетворяющий (15), для осесимметричного T (с двумя совпадающими собственными числами) считаем $b_2 = 0$, а для шарового T — $b_2 = b_1 = 0$. При этом $q(z)$ для каждого $\mathrm{T} \in \Omega_f$ определяется из (15) единственным образом.

Пусть $p(z)$ — минимальный многочлен тензора $\mathrm{T} \in \Omega_f$ (§ 5). Очевидно, что с приближением z к каждой из точек $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ комплексной плоскости C числитель и знаменатель отношения

$$\frac{f(z) - q(z)}{p(z)} \tag{16}$$

стремятся к нулю. Будем считать, что при $z \to \lambda_k$ для каждого $k = 1,\ 2,\ 3$ это отношение остается ограниченным (это условие, например, выполняется, когда $f(z)$ в каждой из точек λ_1, λ_2, λ_3 — регулярная функция). Тогда

$$f(z) = q(z) + p(z)\,\omega(z), \tag{17}$$

где $|\omega(z)| < \infty$ при $z = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Так как $p(\mathrm{T}) = 0$, формальная замена скалярного аргумента z в (17) тензорным T приводит к определению тензорной функции $f: \mathrm{T} \to f(\mathrm{T}) \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, соответствующей скалярной функции $f: z \to f(z)$, причем

$$f(\mathrm{T}) = q(\mathrm{T}) = b_0 \mathrm{I} + b_1 \mathrm{T} + b_2 \mathrm{T} \cdot \mathrm{T}. \tag{18}$$

Условие ограниченности отношения (16) при $z \to \lambda_k$ фактически характеризует „область определения“ Ω_f функции $f(\mathrm{T})$: для каждой данной $f(z)$ и данного $\mathrm{T} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ (16) — вполне определенная функция от z и, перебирая различные $\mathrm{T} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, можно определить подмножество $\Omega_f \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, на котором выполняется упомянутое условие ограниченности отношения (16).

Полином $q(z)$, удовлетворяющий условиям (15), есть полином Лагранжа, который для рассмотренных выше случаев имеет вид:

а) $$q(z) = \frac{(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} f(\lambda_1) + \frac{(z-\lambda_3)(z-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} f(\lambda_2) + \frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} f(\lambda_3) \quad (\text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1);$$

б) $$q(z) = \frac{z-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} f(\lambda_1) + \frac{z-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} f(\lambda_2) \quad (\text{при } \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1);$$

в) $q(z) = \mathrm{const} = f(\lambda_1)$ (при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), откуда и из определения (18)

$$f(\mathrm{T}) = \frac{(\mathrm{T}-\lambda_2 \mathrm{I}) \cdot (\mathrm{T}-\lambda_3 \mathrm{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} f(\lambda_1) + \frac{(\mathrm{T}-\lambda_3 \mathrm{I}) \cdot (\mathrm{T}-\lambda_1 \mathrm{I})}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)} f(\lambda_2) + \frac{(\mathrm{T}-\lambda_1 \mathrm{I}) \cdot (\mathrm{T}-\lambda_2 \mathrm{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} f(\lambda_3) \tag{19}$$

при $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ и соответственно для случаев б) и в).

Запишем (19) в виде

$$f(\mathrm{T}) = -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)} \Big\{ [\lambda_2\lambda_3 f(\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) + \lambda_3\lambda_1 f(\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2 f(\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)]\, \mathrm{I} - \left[f(\lambda_1)\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right) + f(\lambda_2)\left(\lambda_3^2+\lambda_1^2\right) + f(\lambda_3)\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\right] T + [f(\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3) + f(\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1) + f(\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)]\, \mathrm{T} \cdot \mathrm{T} \Big\} \tag{19'}$$

и обозначим $\alpha = \lambda_3 - \lambda_2$, так что $\lambda_3 = \lambda_2 + \alpha$. Внося это выражение в (19′) и переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получим

$$f(\mathrm{T}) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \Big\{ \left[\lambda_2^2 f(\lambda_1) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2) f'(\lambda_2) - \left(2\lambda_1\lambda_2-\lambda_1^2\right) f(\lambda_2)\right] \mathrm{I} - \left[2\lambda_2 \left(f(\lambda_1) - f(\lambda_2) - \left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right) f'(\lambda_2)\right] \mathrm{T} - [f'(\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2) + f'(\lambda_2) - f(\lambda_1)]\, \mathrm{T} \cdot \mathrm{T} \Big\}. \tag{20}$$

Но при $\lambda_2=\lambda_3$, как нетрудно проверить, справедливы выражения

$$\lambda_1=\frac{1}{3}J_1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2-J_2},$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}J_1\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2-J_2},$$

откуда $J_1=\lambda_1+2\lambda_2$, $\sqrt{J_1^2-3J_2}=\pm(\lambda_1-\lambda_2)$. С учетом этого из (1) § 5 и (20) получаем

$$f(\mathrm{T})=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[(\mathrm{T}-\lambda_2\mathrm{I})f(\lambda_1)-(\mathrm{T}-\lambda_1\mathrm{I})f(\lambda_2)\right],\tag{21}$$

т. е. путем указанного предельного перехода из (19) для случая $\lambda_2=\lambda_3$ получается точно такое же выражение, как и из определения (18) при выборе соответствующего (случай б)) полинома $q(z)$. Необходимо, однако, чтобы в точке $z=\lambda_2=\lambda_3$ выполнялось условие $|f'(z)|<\infty$, иначе выражение (20) теряет смысл. Аналогичным образом обстоит дело и в случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$; здесь (случай в)) $f(\mathrm{T})=f(\lambda_1)\mathrm{I}$, с другой стороны, это же выражение для $f(\mathrm{T})$ получается предельным переходом из (19) (или (19')) лишь если существуют и ограничены $f'(\lambda_1)$ и $f''(\lambda_1)$. Это означает, что непрерывность тензорной функции $f(\mathrm{T})$ (эквивалентная, как легко видеть, непрерывности функции $f(z)$) недостаточна для непрерывности коэффициентов b_0, b_1, b_2 в „трехчленном“ представлении (18) функции $f(\mathrm{T})$. Точнее, коэффициенты b_0, b_1, b_2 — непрерывные функции полной системы скалярных инвариантов тензора-аргумента T тогда и только тогда, когда тензорная функция $f(\mathrm{T})$ дважды дифференцируема[1] (или, что то же самое, когда дважды дифференцируема соответствующая скалярная функция $f(z)$).

В заключение этого пункта подчеркнем еще раз, что изложенным выше способом (определение (18)) функциям $f(z)$ ставятся в соответствие изотропные отображения подмножеств множества $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$.

6. Вернемся к изучению экспоненциальной тензорной функции (п. 4): $\mathrm{T}\to e^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\underset{a}{\otimes}\mathscr{E}$. Напомним, что $\mathscr{E}\underset{a}{\otimes}\mathscr{E}\subset\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$ — множество кососимметричных двухвалентных тензоров над $\mathscr{E}$: $\mathrm{T}\in\mathscr{E}\underset{a}{\otimes}\mathscr{E}\Longleftrightarrow\mathrm{T}^*=-\mathrm{T}$; $O'(\mathscr{E})$, $O''(\mathscr{E})\subset O(\mathscr{E})$ — множества всех ортогональных преобразований пространства $\mathscr{E}$ соответственно первого и второго рода (п. 3, § 6).

Покажем, что тензорная функция e^{T} взаимно однозначно отображает множества $\mathscr{E}\underset{a}{\otimes}\mathscr{E}$ и $O'(\mathscr{E})$ (или $\mathscr{E}\underset{a}{\otimes}\mathscr{E}$ и $O''(\mathscr{E})$) друг на друга.

[1] Впервые этот результат получен иным путем Ж. Серрином [12].

Действительно, если $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$, то $\mathrm{T}^* = -\mathrm{T}$ и для тензора $\mathring{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{T}}$ имеем $\mathring{\mathrm{A}}^* = (e^{\mathrm{T}})^* = e^{-\mathrm{T}} = (e^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathring{\mathrm{A}}^{-1}$, т. е. $\mathring{\mathrm{A}}^* = \mathring{\mathrm{A}}^{-1}$, откуда ((1) § 6) $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$. Но раз T кососимметричен, то его собственные числа суть 0, $i\varphi$, $-i\varphi$, где $\varphi^2 = J_2$ (п. 2, § 4). С учетом этого из формулы Лагранжа (19) получаем

$$\mathring{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{T}} = \mathrm{I} + \frac{\sin\varphi}{\varphi}\mathrm{T} + \frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}, \tag{22}$$

причем собственные числа тензора $\mathring{\mathrm{A}}$, согласно (15), суть 1, $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ и тем самым $\mathring{\mathrm{A}} = e^{\mathrm{T}}$ — ортогональное преобразование первого рода (п. 4, § 6). Так как $\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}} = e^{2\mathrm{T}}$, из (22) получаем

$$\mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{I} + \frac{\sin 2\varphi}{\varphi}\mathrm{T} + \frac{1-\cos 2\varphi}{\varphi^2}\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}.$$

Исключая с помощью этого уравнения $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}$ из (22) и разрешая полученное уравнение относительно T, приходим к выражению

$$\mathrm{T} = -\frac{\varphi}{2\sin\varphi}\left[(1+2\cos\varphi)\mathrm{I} - 2(1+\cos\varphi)\mathring{\mathrm{A}} + \mathring{\mathrm{A}}\cdot\mathring{\mathrm{A}}\right] \tag{23}$$

для функции, обратной к экспоненциальной (22), т. е. к выражению для логарифма $\mathrm{T} = \ln\mathring{\mathrm{A}}$ (ортогонального преобразования первого рода: $\mathring{\mathrm{A}} \in O'(\mathscr{E})$; разумеется, (23) можно получить из формулы Лагранжа (19) точно так же, как и (22)). Осталось лишь проверить, что тензор T, определенный равенством (23), кососимметричен, если $\mathring{\mathrm{A}} \in O'(\mathscr{E})$. Для этого воспользуемся диадным представлением (5) § 6 тензоров $\mathring{\mathrm{A}} \in O'(\mathscr{E})$: $\mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{aa} + (\mathrm{bb} + \mathrm{cc})\cos\varphi + (\mathrm{bc} - \mathrm{cb})\sin\varphi$, где, напомним, a — собственный вектор тензора $\mathring{\mathrm{A}}$, соответствующий собственному значению +1, и векторы a, b, c образуют ортонормированный базис пространства $\mathscr{E}$. Подставляя указанное диадное представление в (23), получаем, что $\mathrm{T} = \varphi(\mathrm{cb} - \mathrm{bc})$ и поэтому $\mathrm{T}^* = \varphi(\mathrm{bc} - \mathrm{cb}) = -\mathrm{T}$, т. е. $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$.

Таким образом, $\mathrm{T} \to \mathring{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ есть отображение множества $\mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ на $O'(\mathscr{E})$, а $\mathring{\mathrm{A}} \to \mathrm{T} = \ln\mathring{\mathrm{A}}$, $\mathring{\mathrm{A}} \in O(\mathscr{E})$ — обратное этому отображение $O(\mathscr{E})$ на $\mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$. Поскольку каждый тензор $\mathring{\mathrm{A}} \in O''(\mathscr{E})$ представим в виде $\mathring{\mathrm{A}} = -\mathrm{I}\cdot\mathring{\mathrm{A}}_1 = -\mathring{\mathrm{A}}_1$, $\mathring{\mathrm{A}}_1 \in O'(\mathscr{E})$ (п. 3, § 6), очевидно, что $\mathrm{T} \to -\mathrm{e}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T} \in \mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ — (взаимно однозначное) отображение множества $\mathscr{E} \underset{a}{\otimes} \mathscr{E}$ на $O''(\mathscr{E})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широков П. А. Тензорный анализ. Л.—М., ОНТИ, 1934.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд. АН СССР, 1951.
3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ М., Гостехиздат, 1953.
4. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., изд. «Наука», 1965.
5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., изд. «Наука», 1966.
6. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., изд. «Наука», 1970.
7. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М., Физматгиз, 1963.
8. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М., Гостехиздат, 1956.
9. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
10. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М., Физматгиз, 1962.
11. Вейль Г. Классические группы. М., ИЛ, 1947.
12. Serrin J. The derivation of stress—deformation relations for a Stokesian fluid. J. Math. Mech., 8, 459—470, 1958.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Август Алексеевич Вакуленко

Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике

Редактор *Г. А. Григенч*
Техн. редактор *В. С. Кузина*
Корректор *Е. К. Терентьева*

М-09656 Сдано в набор 13 I 1972 г.
Подписано к печати 5 IV 1972 г.
Формат бумаги 60×90$^1/_{16}$. Печ. л. 4.
Уч.-изд. л. 3,86. Бум. л. 2. Бум. тип. № 3.
Тираж 5800 экз. Заказ 7. Цена 39 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова

Типография ЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9.