团灭 LeetCode 股票买卖问题

原创：labuladong labuladong 6月7日

预计阅读时间：12分钟

上篇文章 LeetCode 股票问题的一种通用解法 用递归的方法实现了一套简单易懂的可行解，但是时间复杂度略高，不能通过全部测试用例。

这篇文章用「状态机」的技巧给出最优解，可以全部提交通过。不要觉得这个名词高大上，文学词汇而已，实际上就是 DP table，等会儿一讲就明白了。

先随便抽一道题出来，看看别人发的解法：

```
int maxProfit(vector<int>& prices) {
    if(prices.empty()) return 0;
    int s1=-prices[0],s2=INT_MIN,s3=INT_MIN,s4=INT_MIN;

    for(int i=1;i<prices.size();++i) {
        s1 = max(s1, -prices[i]);
        s2 = max(s2, s1+prices[i]);
        s3 = max(s3, s2-prices[i]);
        s4 = max(s4, s3+prices[i]);
    }
    return max(0,s4);
}
```

能看懂吧？会做了吧？不可能的，你看不懂，这才正常。就算你勉强看懂了，下一个问题你还是做不出来。那为什么别人能写出这么诡异却又高效的解法呢？因为这类问题是有框架的，但是人家不会

告诉你的，因为一旦告诉你，你十分钟就学会了，该算法题就不再神秘，变得不堪一击了。

本文就来告诉你处理这类问题的框架，拒绝奇技淫巧，稳扎稳打，以不变应万变。

这 6 道题目是有共性的，本文通过对第四道题的分析，逐步解决所有问题。因为第四题是一个最泛化的形式，其他的问题都是这个形式的简化。看下题目：

给定一个数组，它的第 *i* 个元素是一支给定的股票在第 *i* 天的价格。

设计一个算法来计算你所能获取的最大利润。你最多可以完成 **k** 笔交易。

注意: 你不能同时参与多笔交易（你必须在再次购买前出售掉之前的股票）。

示例 1:

```
输入: [2,4,1], k = 2
输出: 2
解释: 在第 1 天 (股票价格 = 2) 的时候买入，在第 2 天 (股票价格 = 4) 的时候卖出，这笔交易所能获得利润 = 4-2 = 2 。
```

示例 2:

```
输入: [3,2,6,5,0,3], k = 2
输出: 7
解释: 在第 2 天 (股票价格 = 2) 的时候买入，在第 3 天 (股票价格 = 6) 的时候卖出, 这笔交易所能获得利润 = 6-2 = 4 。
     随后，在第 5 天 (股票价格 = 0) 的时候买入，在第 6 天 (股票价格 = 3) 的时候卖出, 这笔交易所能获得利润 = 3-0 = 3 。
```

第一题是只进行一次交易，相当于 k = 1；第二题是不限交易次数，相当于 k = +infinity（正无穷）；第三题是只进行 2 次交易，相当于 k = 2；剩下两道也是不限交易次数，但是加了交易「冷冻期」和「手续费」的额外条件，其实就是第二题的变种，都很容易处理。

如果你还不熟悉题目，可以去 LeetCode 或者上篇文章 一种通用思路 查看这些题目的内容，本文为了节省篇幅，就不列举这些题目的具体内容了。下面言归正传，开始详解。

一、穷举框架

首先，还是一样的思路：如何穷举？这里的穷举思路和上篇文章递归的思想不太一样。

递归其实是符合我们思考的逻辑的，一步步推进，遇到无法解决的就丢给递归，一不小心就做出来了，可读性还很好。缺点就是一旦出错，你也不容易找到错误出现的原因。比如上篇文章的递归解法，肯定还有计算冗余，但确实不容易找到。

而这里，我们不用递归思想进行穷举，而是利用「状态」进行穷举。

看看总共有几种「状态」，再找出每个「状态」对应的「选择」。我们要穷举所有「状态」，穷举的目的是根据对应的「选择」更新状态。看图，就是这个意思。

```
for 状态1 in 状态1的所有取值：
    for 状态2 in 状态2的所有取值：
        for ...
            dp[状态1][状态2][...] = 择优(选择1，选择2...)
```

具体到当前问题，**每天都有三种「选择」**：买入、卖出、无操作，我们用 buy, sell, rest 表示这三种选择。

但问题是，并不是每天都可以任意选择这三种选择的，因为 sell 必须在 buy 之后，buy 必须在 sell 之后（第一次除外）。那么 rest 操作还应该分两种状态，一种是 buy 之后的 rest（持有了股票），一种是 sell 之后的 rest（没有持有股票）。而且别忘了，我们还有交易次数 k 的限制，就是说你 buy 还只能在 k > 0 的前提下操作。

很复杂对吧，不要怕，我们现在的目的只是穷举，你有再多的状态，老夫要做的就是一把梭全部列举出来。**这个问题的「状态」有三个**，第一个是天数，第二个是当天允许交易的最大次数，第三个是当前的持有状态（即之前说的 rest 的状态，我们不妨用 1 表示持有，0 表示没有持有）。

我们用一个三维数组 dp 就可以装下这几种状态的全部组合，用 for 循环就能完成穷举：

```
dp[i][k][0 or 1]
0 <= i <= n-1, 1 <= k <= K
n 为天数，大 K 为最多交易数
此问题共 n × K × 2 种状态，全部穷举就能搞定。

for 0 <= i < n:
    for 1 <= k <= K:
        for s in {0, 1}:
            dp[i][k][s] = max(buy, sell, rest)
```

而且我们可以用自然语言描述出每一个状态的含义，比如说 `dp[3][2][1]` 的含义就是：今天是第三天，我现在手上持有着股票，至今最多进行 2 次交易。再比如 `dp[2][3][0]` 的含义：今天是第二天，我现在手上没有持有股票，至今最多进行 3 次交易。很容易理解，对吧？

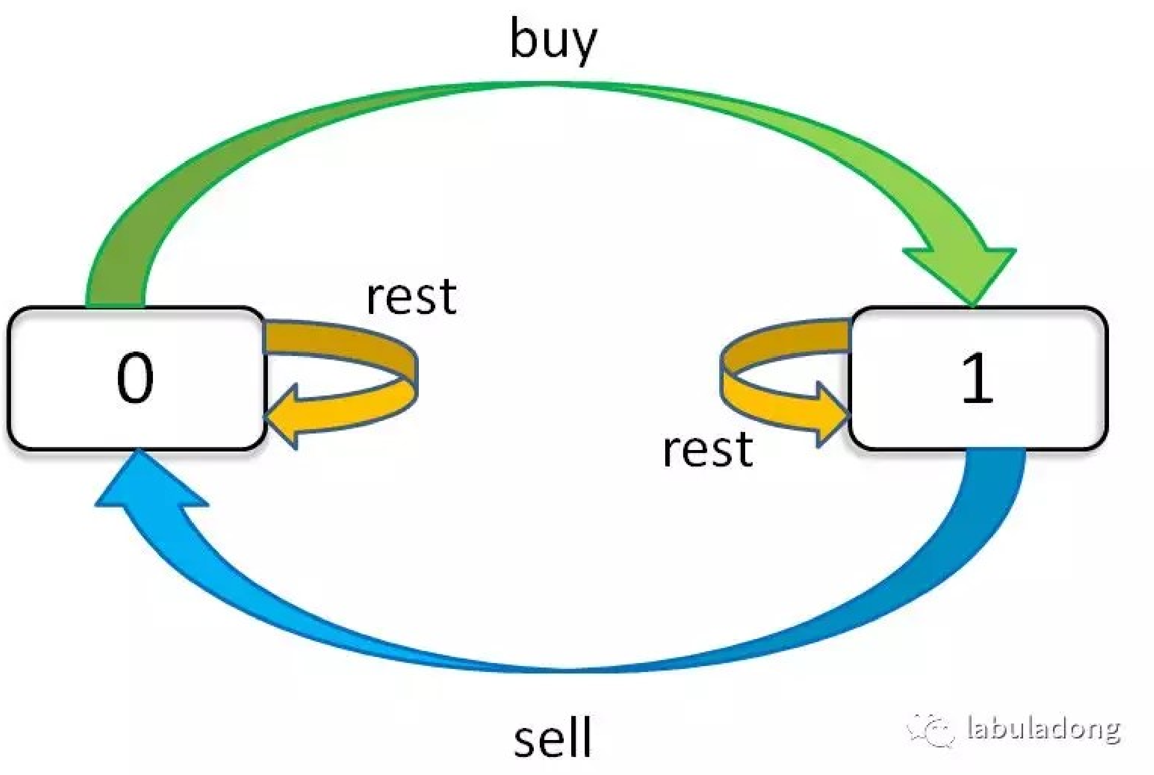
我们想求的最终答案是 dp[n - 1][K][0]，即最后一天，最多允许 K 次交易，所能获取的最大利润。读者可能问为什么不是 dp[n - 1][K][1]？因为 [1] 代表手上还持有股票，[0] 表示手上的股票已经卖出去了，很显然后者得到的利润一定大于前者。

记住如何解释「状态」，一旦你觉得哪里不好理解，把它翻译成自然语言就容易理解了。

二、状态转移框架

现在，我们完成了「状态」的穷举，我们开始思考每种「状态」有哪些「选择」，应该如何更新「状态」。

因为我们的选择是 buy, sell, rest，而这些选择是和「持有状态」相关的，所以只看「持有状态」，可以画个状态转移图。



通过这个图可以很清楚地看到，每种状态（0 和 1）是如何转移而来的。根据这个图，我们来写一下状态转移方程：

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
              max(   选择 rest  ,             选择 sell      )

解释：今天我没有持有股票，有两种可能：
要么是我昨天就没有持有，然后今天选择 rest，所以我今天还是没有持有；
要么是我昨天持有股票，但是今天我 sell 了，所以我今天没有持有股票了。

dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
              max(   选择 rest  ,           选择 buy         )

解释：今天我持有着股票，有两种可能：
要么我昨天就持有着股票，然后今天选择 rest，所以我今天还持有着股票；
要么我昨天本没有持有，但今天我选择 buy，所以今天我就持有股票了。
```


这个解释应该很清楚了，如果 buy，就要从利润中减去 prices[i]，如果 sell，就要给利润增加 prices[i]。今天的最大利润就是这两种可能选择中较大的那个。而且注意 k 的限制，我们在选择 buy 的

时候，把最大交易数 k 减小了 1，很好理解吧，当然你也可以在 sell 的时候减 1，一样的。

现在，我们已经完成了动态规划中最困难的一步：状态转移方程。**如果之前的内容你都可以理解，那么你已经可以秒杀所有问题了，只要套这个框架就行了。**不过还差最后一点点，就是定义 base case，即最简单的情况。

```
dp[-1][k][0] = 0
解释：因为 i 是从 0 开始的，
所以 i = -1 意味着还没有开始，这时候的利润当然是 0 。

dp[-1][k][1] = -infinity
解释：还没开始的时候，是不可能持有股票的，
用负无穷表示这种不可能。

dp[i][0][0] = 0
解释：因为 k 是从 1 开始的，
所以 k = 0 意味着根本不允许交易，这时候利润当然是 0 。

dp[i][0][1] = -infinity
解释：不允许交易的情况下，是不可能持有股票的，
用负无穷表示这种不可能。
```


把上面的状态转移方程总结一下：

```
base case：
dp[-1][k][0] = dp[i][0][0] = 0
dp[-1][k][1] = dp[i][0][1] = -infinity

状态转移方程：
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
```

读者可能会问，这个数组索引是 -1 怎么编程表示出来呢，负无穷怎么表示呢？这都是细节问题，有很多方法实现。现在整体框架已经完成，下面开始具体化。

三、秒杀题目

第一题，k = 1

直接套状态转移方程，根据 base case，可以做一些化简：

```
dp[i][1][0] = max(dp[i-1][1][0], dp[i-1][1][1] + prices[i])
dp[i][1][1] = max(dp[i-1][1][1], dp[i-1][0][0] - prices[i])
            = max(dp[i-1][1][1], -prices[i])
解释：k = 0 的 base case，所以 dp[i-1][0][0] = 0。

现在发现 k 都是 1，不会改变，即 k 对状态转移已经没有影响了。
可以进行进一步化简去掉所有 k：
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], -prices[i])
```


直接翻译成代码：

```
int n = prices.length;
int[][] dp = new int[n][2];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
    dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
}
return dp[n - 1][0];
```


显然 i = 0 时 dp[i-1] 是不合法的。这是因为我们没有对 i 的 base case 进行处理。那就简单粗暴地处理一下：

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (i - 1 == -1) {
        dp[i][0] = 0;
        // 解释：
        //   dp[i][0]
        // = max(dp[-1][0], dp[-1][1] + prices[i])
        // = max(0, -infinity + prices[i]) = 0
        dp[i][1] = -prices[i];
        //解释：
        //   dp[i][1]
        // = max(dp[-1][1], dp[-1][0] - prices[i])
        // = max(-infinity, 0 - prices[i])
        // = -prices[i]
        continue;
    }
    dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
    dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
}
return dp[n - 1][0];
```

第一题就解决了，但是这样处理 base case 很麻烦，而且注意一下状态转移方程，新状态只和相邻的一个状态有关，其实不用整个 dp 数组，只需要两个变量储存所需的状态就足够了，这样可以把空间复杂度降到 O(1):

```
int maxProfit_k_1(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    // base case: dp[-1][0] = 0, dp[-1][1] = -infinity
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        // dp[i][1] = max(dp[i-1][1], -prices[i])
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, -prices[i]);
    }
    return dp_i_0;
}
```

两种方式都是一样的，不过这种编程方法简洁很多。但是如果没有前面状态转移方程的引导，是肯定看不懂的。后续的题目，我主要写这种空间复杂度 O(1) 的解法。

第二题，k = +infinity

如果 k 为正无穷，那么就可以认为 k 和 k - 1 是一样的。可以这样改写框架：

```
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
            = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k][0] - prices[i])

我们发现数组中的 k 已经不会改变了，也就是说不需要记录 k 这个状态了：
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0] - prices[i])
```

直接翻译成代码即可：

```
int maxProfit_k_inf(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int temp = dp_i_0;
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, temp - prices[i]);
    }
    return dp_i_0;
}
```


第三题，k = +infinity with cooldown

每次 sell 之后要等一天才能继续交易。只要把这个特点融入上一题的状态转移方程即可：

```
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-2][0] - prices[i])
解释：第 i 天选择 buy 的时候，要从 i-2 的状态转移，而不是 i-1。
```

直接翻译成代码即可：

```
int maxProfit_with_cool(int[] prices) {
    int n = prices.length;
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    int dp_pre_0 = 0; // 代表 dp[i-2][0]
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int temp = dp_i_0;
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, dp_pre_0 - prices[i]);
        dp_pre_0 = temp;
    }
    return dp_i_0;
}
```


第四题，k = +infinity with fee

每次交易要支付手续费，只要把手续费从利润中减去即可：

```
dp[i][0] = max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i])
dp[i][1] = max(dp[i-1][1], dp[i-1][0] - prices[i] - fee)
解释：相当于买入股票的价格升高了。
在第一个式子里减也是一样的，相当于卖出股票的价格减小了。
```

直接翻译成代码即可：

```java
int maxProfit_with_fee(int[] prices, int fee) {
    int n = prices.length;
    int dp_i_0 = 0, dp_i_1 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int temp = dp_i_0;
        dp_i_0 = Math.max(dp_i_0, dp_i_1 + prices[i]);
        dp_i_1 = Math.max(dp_i_1, temp - prices[i] - fee);
    }
    return dp_i_0;
}
```


第五题，k = 2

k = 2 和前面题目的情况稍微不同，因为上面的情况都和 k 的关系不太大。要么 k 是正无穷，状态转移和 k 没关系了；要么 k = 1，跟 k = 0 这个 base case 挨得近，最后也被消掉了。

这道题 k = 2 和后面要讲的 k 是任意正整数的情况中，对 k 的处理就凸显出来了。我们直接写代码，边写边分析原因。

```
原始的动态转移方程，没有可化简的地方
dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i])
dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i])
```

按照之前的代码，我们可能想当然这样写代码（错误的）：

```java
int k = 2;
int[][][] dp = new int[n][k + 1][2];
for (int i = 0; i < n; i++)
    if (i - 1 == -1) { /* 处理一下 base case*/ }
    dp[i][k][0] = Math.max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i]);
    dp[i][k][1] = Math.max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i]);
}
return dp[n - 1][k][0];
```

为什么错误？我这不是照着状态转移方程写的吗？

还记得前面总结的「穷举框架」吗？就在强调必须穷举所有状态。其实我们之前的解法，都在穷举所有状态，只是之前的题目中 k 都被化简掉了，所以没有对 k 的穷举。比如说第一题，k = 1：

```
int n = prices.length;
int[][] dp = new int[n][2];
for (int i = 0; i < n; i++) { 穷举天数状态
    dp[i][0] = Math.max(dp[i-1][0], dp[i-1][1] + prices[i]);
    dp[i][1] = Math.max(dp[i-1][1], -prices[i]);
}          穷举持有状态
return dp[n - 1][0];
```


这道题由于没有消掉 k 的影响，所以必须要用 for 循环对 k 进行穷举才是正确的：

```
int max_k = 2;
int[][][] dp = new int[n][max_k + 1][2];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int k = max_k; k >= 1; k--) {
        if (i - 1 == -1) { /*处理 base case */ }
        dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i]);
        dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i]);
    }
}
// 穷举了 n × max_k × 2 个状态，正确。
return dp[n - 1][max_k][0];
```


如果你不理解，可以返回第一点「穷举框架」重新阅读体会一下。

第二种解法：因为这里 k 取值范围比较小，所以也可以不用 for 循环，直接把 k = 1 和 2 的情况手动列举出来也是一样的：

```
dp[i][2][0] = max(dp[i-1][2][0], dp[i-1][2][1] + prices[i])
dp[i][2][1] = max(dp[i-1][2][1], dp[i-1][1][0] - prices[i])
dp[i][1][0] = max(dp[i-1][1][0], dp[i-1][1][1] + prices[i])
dp[i][1][1] = max(dp[i-1][1][1], -prices[i])

int maxProfit_k_2(int[] prices) {
    int dp_i10 = 0, dp_i11 = Integer.MIN_VALUE;
    int dp_i20 = 0, dp_i21 = Integer.MIN_VALUE;
    for (int price : prices) {
        dp_i20 = Math.max(dp_i20, dp_i21 + price);
        dp_i21 = Math.max(dp_i21, dp_i10 - price);
        dp_i10 = Math.max(dp_i10, dp_i11 + price);
        dp_i11 = Math.max(dp_i11, -price);
    }
    return dp_i20;
}
```


有状态转移方程和含义明确的变量名引导，相信你很容易看懂。如我我们想故弄玄虚，可以把上述四个变量换成 a, b, c, d。这样当别人看到你的解法时就会大惊失色，一头雾水，不得不对你肃然起敬。

第六题，k = any integer

这题和 k = 2 没啥区别，可以直接套上一题的第一个解法。但是提交之后会出现一个超内存的错误，原来是传入的 k 值可以任意大，导致 dp 数组太大了。现在想想，交易次数 k 最多能有多大呢？

一次交易由买入和卖出构成，至少需要两天。所以说有效的限制次数 k 应该不超过 n/2，如果超过，就没有约束作用了，相当于 k = +infinity。这种情况是之前解决过的。

直接把之前的代码重用：

```java
int maxProfit_k_any(int max_k, int[] prices) {
    int n = prices.length;
    if (max_k > n / 2)
        return maxProfit_k_inf(prices);

    int[][][] dp = new int[n][max_k + 1][2];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        for (int k = max_k; k >= 1; k--) {
            if (i - 1 == -1) { /* 处理 base case */ }
            dp[i][k][0] = max(dp[i-1][k][0], dp[i-1][k][1] + prices[i]);
            dp[i][k][1] = max(dp[i-1][k][1], dp[i-1][k-1][0] - prices[i]);
        }
    return dp[n - 1][max_k][0];
}
```

至此，6 道题目通过一个状态转移方程全部解决。

四、最后总结

本文给大家讲了如何通过状态转移的方法解决复杂的问题，用一个状态转移方程秒杀了 6 道股票买卖问题，现在想想，其实也不算难对吧？而这已经属于动态规划问题中较困难的了。

关键就在于找到所有可能的「状态」，然后想想怎么更新这些「状态」。一般用一个多维 dp 数组储存这些状态，从 base case 开始向后推进，推进到最后的状态，就是我们想要的答案。想想这个过程，你是不是有点理解「动态规划」这个名词的意义了呢？

具体到股票买卖问题，我们发现了三个状态，使用了一个三维数组，无非还是穷举 + 更新，不过我们可以说的高大上一点，这叫「三维 DP」，怕不怕？这个大实话一说，立刻显得你高人一等有没有？

所以给个在看/分享吧，鼓励一下我。

点击这里进入留言板