# 定积分

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_b^a f(x) \geq 0(b > a)\text{反之不行}$$

## 积分比大小

$$\text{在}[a,b], f(x) \geq g(x) \rightleftharpoons f(x) - g(x) \geq 0$$
$$\int_b^a [f(x) - g(x)] \geq 0 \Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq \int_b^a g(x)dx$$

## 积分中值定理

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)(a \leq \xi \leq b)$$

## 换元积分

换元必换根

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^a g(\phi(x))\phi(x)^{'}dx$$
$$\int_b^a g(\phi(x))d(\phi x) = (\phi = u)\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} g(u)du$$

## 重要推论

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx) + f(cosx)dx$$
$$\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx$$
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x) + f(-x)dx$$

## 华莱士定理

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x$$
$$\text{当}n\text{为奇数时}$$
$$\frac{(n-1)!!}{n!!}$$
$$\text{当}n\text{为偶数时}$$
$$\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$$

# 周期函数积分

$$f(x+T)=f(x)$$

$$\int_{a+T}^{b+T}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^{a+nT}f(x)dx=\int_0^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$$

# 有关定积分的极限

$$\lim_{n\to\infty}[f(\frac{0}{n})\frac{1}{n}+f(\frac{1}{n})\frac{1}{n}+f(\frac{2}{n})\frac{1}{n}\cdots f(\frac{n-1}{n})\frac{1}{n}]=\int_0^1 f(x)dx$$

重要的地方在于碰到该类型的极限时，需要先提出一个1/n，然后判断式子中剩余的部分，还原出原函数，从而积分

# 变限积分

$$G^{'}(x)=[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(t)dt]^{'}$$
$$=f[\phi_2(x)]\phi_2^{'}(x)+f[\phi_1(x)]\phi_1^{'}(x)$$

## 变限积分性质

### 可导与连续

$$f(x)\text{连续},F(x)=\int_a^x f(t)dt\text{必可导，}F^{'}(x)=f(x)$$

$$f(x)\text{可积}\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt\text{必连续}$$
$$\text{有有限个第一类间断点}$$

# 反常积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=F(x)|_{-\infty}^a\text{取极限}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_a^{\infty}f(x)dx+\int_{-\infty}^a f(x)dx$$
$$\text{只要一个发散，则整体发散}$$

## 瑕积分

$$\int_{a^+}^b f(x)dx=\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx\text{为无界函数}$$

$$\int_{a^+}^{b-}f(x)dx=\int_{a^+}^c f(x)dx+\int_c^{b-}f(x)dx$$

# 瑕点出现在积分中间

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c^-} f(x)dx + \int_{c^-}^b f(x)dx$$

# 定积分几何

## 面积

## 旋转体积

### 绕x轴

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

### 绕y轴

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

## 弧长

## 侧面积