

Trafic Routier

Simulation Numérique

Présenté et Préparé par : AL SAMADI Assmaa
Sous la direction de : Dr. Houssam Khalil

Université Libanaise Faculté Des Sciences

11 mars 2019

Modélisation du problème

Les Grandeurs de modélisation du trafic routier

Le Trafic routier est modélisé par des grandeurs globales :

La densité du trafic en x à l'instant t notée $P(x,t)$.

Le flux de voitures en x à l'instant t noté $Q(x,t)$.

L'équation de modélisation

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Les équations étudiées

$$Q = cP - \alpha \frac{\partial P}{\partial t}.$$

avec c et α sont deux constantes positives.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$Q = \alpha \left(1 - \frac{P}{\beta}\right) P$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\alpha \left(1 - \frac{P}{\beta}\right) \left(1 - 2\frac{P}{\beta}\right) \frac{\partial P}{\partial x}$$

- 1 Méthode de discrétisation
- 2 Equation de Transport
 - Schéma Implicite
 - Simulation numérique
 - Schéma amont
 - Simulation Numérique
- 3 Equation Transport-Diffusion
 - Simulation Numérique
- 4 Equation de diffusion
 - Simulation Numérique
- 5 Equation de Transport avec vitesse variable
 - Simulation numérique
- 6 Conclusion

Méthode de discrétisation

On discrétise l'espace $[0;L]$ avec un pas uniforme h de discrétisation

$h = \frac{L}{N+1}$ où N est fixé.

$x_i = ih \forall i = 1..n$ avec $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = L$.

$dt = \frac{T}{m+1}$.

Equation de Transport

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial x} \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ P(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } \mathbb{R} \\ Q(x, t) = cP(x, t) \end{array} \right.$$

Theorem

La solution exacte de (1) est de la forme $h(x, t) = u^0(x - ct)$ avec $x \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}_+$

Démonstration.

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -c \frac{\partial u^0}{\partial x}(x - ct) = -c \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = 0$$



Schéma Implicite

La developpement de taylor d'ordre 1 en temps et 2 en espace de l'ée de transport nous donne :

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{dt} = -c \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2h} \quad (1)$$

$$Q_i^n = cP_i^n$$

la forme matricielle suivante de l'équation de transport :

$$AP^{n+1} = P^n + F^{n+1}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{cdt}{2h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{cdt}{2h} & 1 & \frac{cdt}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{bmatrix} P_1^n \\ P_2^n \\ \vdots \\ P_N^n \end{bmatrix} \quad F^{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{-cdt}{h} P_0^{n+1} \\ 0 \\ \frac{cdt}{2h} P_0^{n+1} \end{bmatrix}$$

Le Flux Q est approché par : $Q^n = cP^n$

Stabilité du schéma implicite

Le schéma Implicite est inconditionnellement stable en norme L^∞

On montre que le schéma implicite vérifie le principe de maximum discret, i.e $\forall n \inf_i P_i^0 = m < P_i^n \leq M = \max_i P_i^0 \forall i=0..N+1$.

S.N du schéma implicite

$$P(x, 0) = \exp(-200(x - cT - 0.5)^2)$$

$$P_0^n = P_{N+1}^n = 0$$

$$c = 0.5; T = 0.5; L = 1; N = 100; m = 100;$$

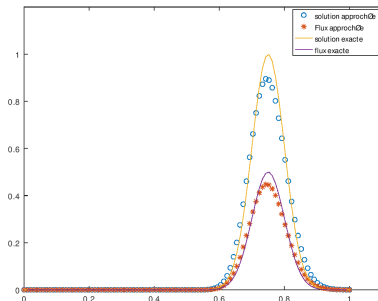


FIGURE – Résultat du schéma implicite pour $N=100$ et $m=100$

S.n du schéma implicite

$$P(x, 0) = \exp(-200(x - cT - 0.5)^2)$$

$$P_0^n = P_{N+1}^n = 0$$

$$c = 0.5; T = 0.5; L = 1; N = 700; m = 300$$

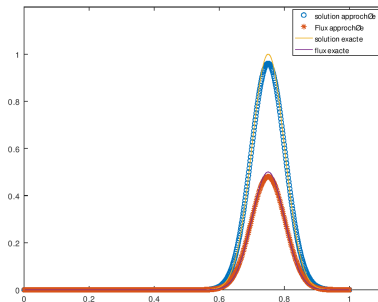


FIGURE – Résultat du schéma implicite $N=700$ et $m=300$

Commentaire

D'après les 2 figures on remarque la stabilité du schéma implicite. La solution approchée est presque égale à la solution exacte pour $N=700$ et $m=300$ très grandes mais pour N et $m=100$ assez grandes la solution approchée est très proche à la solution exacte on peut remarquer que la convergence du schéma implicite est très rapide.

Schéma Amont

on obtient le schéma amont (1.3) en discrétisant d'ordre 1 en temps et un développement de taylor décentré en espace .

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{dt} = -c \frac{p_i^n - p_{i+1}^n}{h} \quad (2)$$

$$Q_i^n = cP_i^n$$

Le schéma (1.3) s'ecrit sous forme matricielle

$$P^{n+1} = BP^n + R^n$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \frac{cdt}{h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{cdt}{h} & 1 - \frac{cdt}{h} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$R^n = \begin{vmatrix} \frac{cdt}{h} P_0^n \\ 0 \end{vmatrix} \quad P^n = \begin{vmatrix} P_1^n \\ .. \\ P_N^n \end{vmatrix}$$

Stabilité du schéma Amont

Le schéma amont est stable en norme L^∞ sous la condition CFL $dt \leq \frac{h}{c}$

on peut démontrer que le schéma amont vérifie le principe de maximum discret sous la condition CFL

$$"- \frac{cdt}{h} + 1) \geq 0"$$

Simulation du schéma amont sans condition CFL

$$P(x, 0) = \exp(-200(x - cT - 0.5)^2)$$

$$P_0^n = P_{N+1}^n = 0$$

$$c = 0.5; T = 0.5; L = 1; N = 300; m = 50;$$

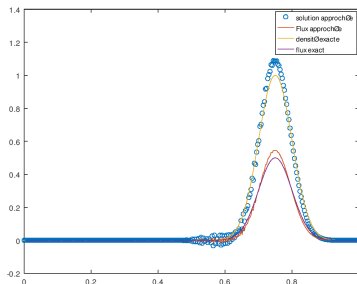


FIGURE – Résultat du schéma Amont sans LES CFL $N=300$ $m=50$

Simulation du schéma amont avec condition au limite non nulle

$$P(x, 0) = \exp(-200(x - cT - 0.5)^2)$$

$$P_0^n = 0.08t.t + \exp(-200(0.5)^2))$$

$$P_{N+1}^n = 0$$

$$c = 0.8; T = 0.5; L = 1; N = 100; m = 54$$

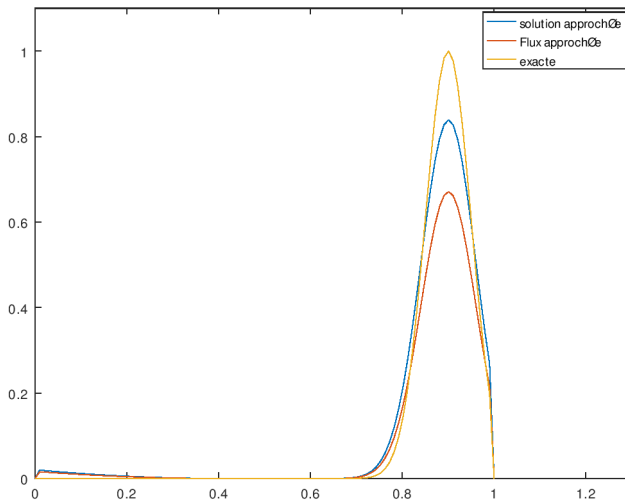


FIGURE – Schéma amont avec condition aux limites non nulles

Comparaison des résultats Implicite Amont

Comparaison des résultants Implicite-Amont

en $x_{38} = 0.745P(x, T_{final}) = 0.99521$

Schéma -Implicite : $P_{38} = 0.81957$

Schéma-Amont : $p_{38} = 0.63099$

$N = 50$ et $m = 54$

Remark

Ces valeurs sont calculées en utilisant Octave.

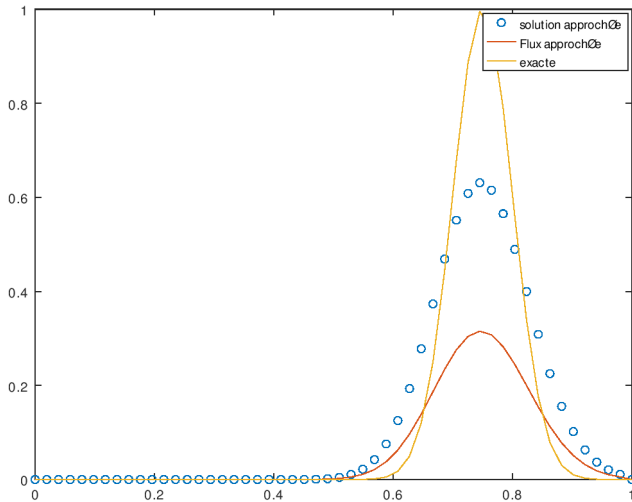


FIGURE – Schéma amont $n=50$; $m=54$

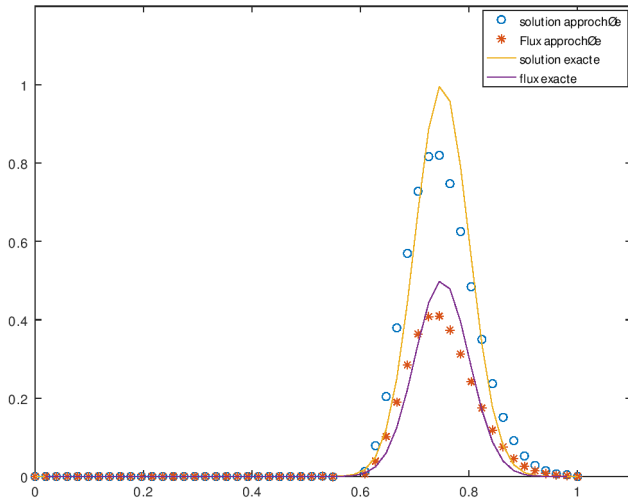


FIGURE – Schéma Implicite $n=50$; $m=54$

Commentaire

On peut remarquer que le schéma implicite est plus précis que le schéma amont, d'après octave on a pour le schéma implicite une erreur égale à $P(x, T_{final}) - P_{38}^T = 0.17564$ une erreur beaucoup plus petite que celle du schéma amont $P(x, T_{final}) - P_{38}^T = 0.36422$ pour des pas petits $N=50$ et $m=54$. On peut remarquer que la convergence du schéma implicite est plus rapide que celle du schéma amont, la solution approchée du schéma implicite est plus proche de la solution exacte que celle du schéma amont.

Equation Transport-Diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = -c \frac{\partial P}{\partial x} + r \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \text{ sur } [0; L] \times \mathbb{R}_+ \\ P(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } [0; L] \\ P(0, t) \text{ et } P(L, t) \text{ connus} \\ Q = cP - r \frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right.$$

Schéma proposé

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{dt} + c \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h} = r \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{h^2} \end{array} \right.$$

Le schéma proposé est d'ordre 1 en temps et 1 en espace

l'erreur de consistance peut s'écrire comme

$$R_i^n = O(dt + h + h^2)$$

Equation Transport Diffusion

Ecriture Matricielle

$$P^{n+1} = DP^n + H^n$$

$$Q^n = EP^n + F^n$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 - \frac{cdt}{h} - \frac{2crdt}{h^2} & \frac{rdt}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{cdt}{h} + \frac{udt}{h^2} & 1 - \frac{cdt}{h} - \frac{2rdt}{h^2} & \frac{rdt}{h^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} c - \frac{r}{h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{r}{h} & c - \frac{r}{h} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{vmatrix} P_1^n \\ P_2^n \\ \vdots \\ P_N^n \end{vmatrix} \quad F^n = \begin{vmatrix} \left(\frac{r}{h} P_0^n\right) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad H^n = \begin{vmatrix} \left(\frac{rdt}{h^2} + \frac{d\tau c}{h}\right) P_0^n \\ 0 \\ \frac{rdt}{h^2} P_L^n \end{vmatrix}$$

Densité Approchée

$$P(x,0)=\exp(-200*(x-0.5).^2);$$

$L=1$; $T=1$; $r=0.5$; $c=0.5$; $n=100$; $m=300$.

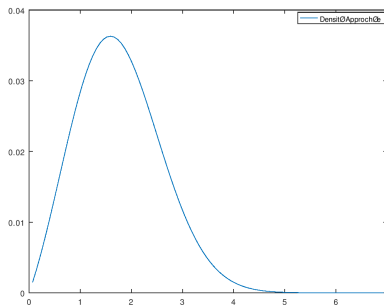


FIGURE – La densité approchée Transport-diffusion

Flux Approché

$$Q(x,0)=(c+400*(x-0.5))P(x,0);$$

$$L=1; T=1; r=0.5; c=0.5; n=100; m=300.$$

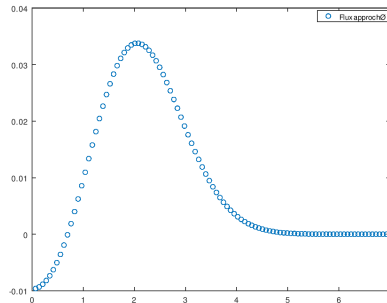


FIGURE – Le flux approché Transport-diffusion

Equation de diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = c \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \text{ sur } [0; L] \times \mathbb{R}_+ \\ P(x, 0) = u^0(x) \text{ sur } [0; L] \\ P_0 = P_L = 0 \\ Q = -c \frac{\partial P}{\partial x} \end{array} \right.$$

Schéma proposé

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p_i^{n+1} - P_i^n}{dt} = c \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{h^2} \\ Q_i^n = \frac{-c}{h} P_i^n + \frac{c}{h} P_{i-1}^n \forall i = 1..N \end{array} \right.$$

Stabilité en norme L^∞

Ce schéma (3.2) est clairement stable en norme L^∞ sous la condition CFL suivante :

$$dt \leq \frac{h^2}{2c}$$

Simulation avec CFL

$$P(x, 0) = (x - 4) \exp(-200(x - 0.5)^2)$$

$L=1$; $T=1$; $N=100$; $m=1000$; $c=0.5$ sous la condition CFL

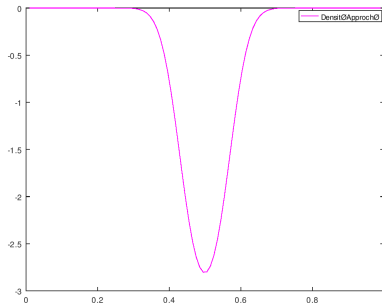


FIGURE – La densité approchée eq-diffusion sous les condition CFL

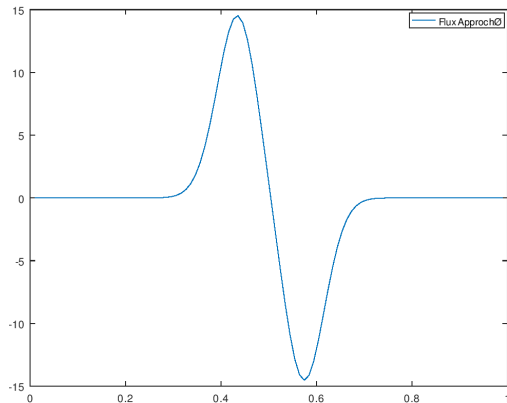


FIGURE – Le Flux approché eq-diffusion sous les condition CFL

Simulation Numérique sans les conditions CFL

$L=1$; $T=1$; $N=100$; $m=100$; $c=0.5$ CFL n'est pas vérifiée

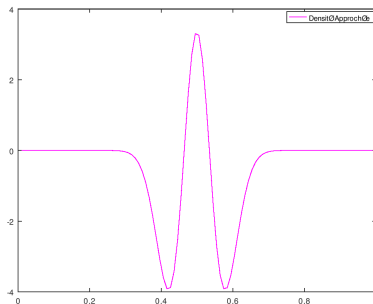


FIGURE – La densité approchée eq-diffusion sans les conditions CFL

Simulation Numérique sans les conditions CFL

$L=1$; $T=1$; $N=100$; $m=100$; $c=0.5$ CFL n'est pas vérifiée

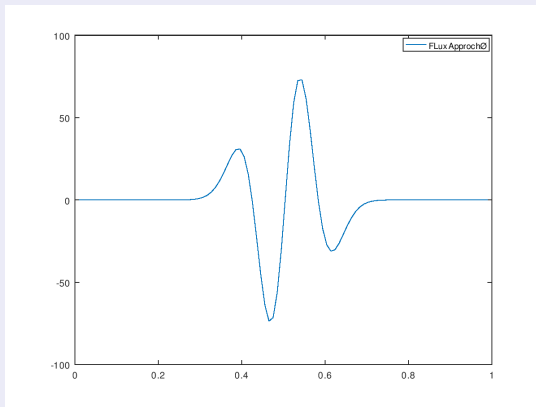


FIGURE – Le Flux approché eq-diffusion sans les conditions CFL

Equation de Transport avec vitesse variable

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = -c(1 - 2\frac{P}{\beta})\frac{\partial P}{\partial x} \\ c = r(1 - \frac{P}{\beta}) \\ P(0,t)=P(L,t)=0 \forall t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$$

Schéma explicite proposé

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{dt} = -(r - \frac{rP_i^n}{\beta})(1 - \frac{2P_i^n}{\beta})\frac{P_{i+1}^n - P_i^n}{h} \quad (3)$$

Simulation Numérique

Remark

on a simulé sous octave l'algorithme pour $N=100$, $m=70$, $r=0.8$, $b=0.5$, $L=T=1$. et pour $N=60$, $m=70$. Octave affiche dans les 2 cas un WARNING : data values greater than float capacity. Scale data. Mais pour $N=100$, $m=3$ on a une solution approchée du densité avec oscillations fig(4.1)

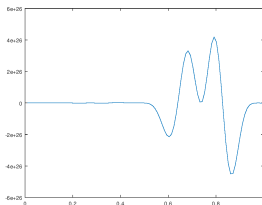


FIGURE – La densité approchée eq de transport avec vitesse variable

Commentaires

Nous sommes incapable de prendre une idée sur la solution du (4.1) avec le schéma proposé (4.2) pour un pas très petit de discrétisation en temps avec l'algorithme proposé précédemment. Il nous faut de proposer un algorithme moins lourd et nous avons besoin d'une étude sur la stabilité des schémas non linéaires. Un algorithme utilisant la méthode du point fixe peut être nous donner un bon résultat.

Conclusion

Après une simulation numérique d'un schéma proposé pour résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles on obtient une instabilité numérique de la solution approchée ou bien une imprécision, donc pour prendre une bonne idée sur la solution, il faut que le schéma choisi soit inconditionnellement stable soit stable sous certaines conditions non compliquées, et de précision élevée, mais dans certains cas un schéma ne possède pas toutes ces propriétés donc il faut changer le schéma (c'est le cas dans le chapitre 1 la bonne idée de la solution est obtenue par le schéma implicite), et dans certains d'autres un algorithme proposé pour simuler ces schémas est très lourd à être exécuter. On conclut qu'il faut faire attention pas seulement aux schémas choisis mais aussi aux algorithmes utilisés dans la simulation, pour obtenir une bonne solution approchée et un résultat dans le plus court temps possible.