

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Направление подготовки  
01.03.03 Механика и математическое моделирование

## Отчёт по лабораторной работе №2

Тема: "Уравнение колебания струны"

Дисциплина "Вычислительная механика"

**Выполнил:**  
Работинский А.Д.  
Группа: 5030103/10001  
**Преподаватель:**  
Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург  
2022

## 1) Постановка задачи

Решается уравнение колебаний струны:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

, где коэффициент  $c = 1$

Граничные условия:  $u(0, t) = \phi_0(t)$   $u(l, t) = \phi_l(t)$

Начальные условия:  $u(x, 0) = \psi_0(x)$   $\dot{u}(x, 0) = \psi^*(x)$

Конечно-разностные схемы строятся схожим образом, но при решении данной задачи стоит помнить, что должно быть выполнено условие Куранта, иначе в силу отсутствия устойчивости, явная схема даст неверное решение:

$$\Delta t < \frac{h}{c}$$

В нашем случае граничные условия имеют следующий вид:

$\dot{u}(x, 0) = x^2(x + 1)$   $u(x, 0) = x^2 \cos(\pi x)$   $u(l, t) = t - 1$   $u(0, t) = \phi_0(t)$  Шаг по пространству:  $h = 0.1$ , шаг по времени  $\Delta t = 0.01$

## 2) Явная схема интегрирования

Конечно-разностные аппроксимации получаются схожим образом - из разложения в ряд Тейлора:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + \frac{h}{1!} u'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + o(h^2)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - \frac{h}{1!} u'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + o(h^2)$$

Осталось разрешить систему относительно  $u''(x_0)$ :

$$u''(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2}$$

Разложим в ряд Тейлора функцию перемещений около точки  $t_0$ :

$$u(t_0 + \Delta t) = u(t_0) + \frac{\Delta t}{1!} \dot{u}(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}(t_0) + o(\Delta t^2)$$

$$u(t_0 - \Delta t) = u(t_0) - \frac{\Delta t}{1!} \dot{u}(t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}(t_0) + o(\Delta t^2)$$

Получаем аппроксимацию для:  $\ddot{u}(t_0)$ :

$$\ddot{u}(t_0) = \frac{u(t_0 + \Delta t) - 2u(t_0) + u(t_0 - \Delta t)}{\Delta t^2}$$

Введем сетку следующим образом:

$$x = ih \quad x \in [0; N]$$

$$t = kh \quad k \in [0; K]$$

Итого получаем выражение для интегрирования по явной схеме:

$$u_i^{k+1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{h^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + 2u_i^k - u_i^{k-1}$$

Получившиеся результаты:

Время(----->)	Длина(----->)									
	0,2500	-0,9062	-2,1085	-3,3288	-4,4650	-5,2258	-5,0780	-3,8990	-2,6432	-1,6417
	0,2450	-0,8452	-1,9964	-3,1935	-4,3525	-5,1928	-5,1669	-4,0545	-2,7467	-1,7059
	0,2400	-0,7848	-1,8847	-3,0578	-4,2368	-5,1512	-5,2450	-4,2080	-2,8529	-1,7684
	0,2350	-0,7252	-1,7738	-2,9221	-4,1184	-5,1014	-5,3118	-4,3584	-2,9618	-1,8293
	0,2300	-0,6664	-1,6639	-2,7870	-3,9980	-5,0438	-5,3669	-4,5043	-3,0733	-1,8886
	0,2250	-0,6087	-1,5552	-2,6527	-3,8759	-4,9790	-5,4102	-4,6446	-3,1873	-1,9462
	0,2200	-0,5521	-1,4480	-2,5196	-3,7525	-4,9075	-5,4415	-4,7779	-3,3035	-2,0023
	0,2150	-0,4967	-1,3426	-2,3882	-3,6284	-4,8298	-5,4609	-4,9031	-3,4214	-2,0569
	0,2100	-0,4427	-1,2392	-2,2587	-3,5039	-4,7464	-5,4683	-5,0191	-3,5404	-2,1104
	0,2050	-0,3901	-1,1380	-2,1315	-3,3794	-4,6578	-5,4641	-5,1248	-3,6600	-2,1628
	0,2000	-0,3390	-1,0393	-2,0068	-3,2552	-4,5644	-5,4483	-5,2192	-3,7792	-2,2145
	0,1950	-0,2896	-0,9432	-1,8850	-3,1316	-4,4668	-5,4215	-5,3016	-3,8972	-2,2656
	0,1900	-0,2418	-0,8500	-1,7661	-3,0089	-4,3654	-5,3839	-5,3710	-4,0129	-2,3166
	0,1850	-0,1958	-0,7599	-1,6506	-2,8873	-4,2607	-5,3360	-5,4271	-4,1252	-2,3675
	0,1800	-0,1517	-0,6731	-1,5385	-2,7671	-4,1529	-5,2782	-5,4692	-4,2329	-2,4186
	0,1750	-0,1094	-0,5897	-1,4300	-2,6484	-4,0425	-5,2112	-5,4970	-4,3349	-2,4701
	0,1700	-0,0691	-0,5099	-1,3254	-2,5316	-3,9299	-5,1352	-5,5103	-4,4299	-2,5221
	0,1650	-0,0308	-0,4339	-1,2246	-2,4166	-3,8153	-5,0510	-5,5091	-4,5166	-2,5744
	0,1600	0,0054	-0,3617	-1,1278	-2,3037	-3,6992	-4,9590	-5,4934	-4,5937	-2,6272
	0,1550	0,0395	-0,2935	-1,0352	-2,1930	-3,5816	-4,8598	-5,4633	-4,6603	-2,6802
	0,1500	0,0714	-0,2294	-0,9467	-2,0846	-3,4630	-4,7538	-5,4192	-4,7150	-2,7330
	0,1450	0,1011	-0,1695	-0,8624	-1,9786	-3,3435	-4,6415	-5,3614	-4,7570	-2,7854
	0,1400	0,1285	-0,1138	-0,7823	-1,8751	-3,2233	-4,5235	-5,2903	-4,7853	-2,8367
	0,1350	0,1536	-0,0624	-0,7065	-1,7742	-3,1026	-4,4001	-5,2066	-4,7991	-2,8863
	0,1300	0,1764	-0,0152	-0,6349	-1,6758	-2,9816	-4,2718	-5,1106	-4,7980	-2,9335
	0,1250	0,1968	0,0277	-0,5676	-1,5801	-2,8605	-4,1390	-5,0032	-4,7812	-2,9774
	0,1200	0,2148	0,0663	-0,5044	-1,4871	-2,7393	-4,0021	-4,8849	-4,7487	-3,0171
	0,1150	0,2303	0,1007	-0,4453	-1,3968	-2,6183	-3,8614	-4,7564	-4,7002	-3,0515
	0,1100	0,2434	0,1309	-0,3903	-1,3092	-2,4975	-3,7171	-4,6184	-4,6358	-3,0796
	0,1050	0,2541	0,1571	-0,3392	-1,2242	-2,3769	-3,5697	-4,4716	-4,5557	-3,1002
	0,1000	0,2622	0,1792	-0,2921	-1,1420	-2,2568	-3,4194	-4,3166	-4,4601	-3,1124
	0,0950	0,2680	0,1975	-0,2487	-1,0624	-2,1372	-3,2665	-4,1540	-4,3497	-3,1148
	0,0900	0,2713	0,2120	-0,2090	-0,9854	-2,0181	-3,1111	-3,9845	-4,2249	-3,1066
	0,0850	0,2722	0,2229	-0,1729	-0,9110	-1,8996	-2,9535	-3,8087	-4,0866	-3,0866
	0,0800	0,2707	0,2304	-0,1402	-0,8391	-1,7818	-2,7939	-3,6272	-3,9355	-3,0542
	0,0750	0,2669	0,2345	-0,1107	-0,7696	-1,6646	-2,6326	-3,4403	-3,7724	-3,0083
	0,0700	0,2609	0,2355	-0,0844	-0,7025	-1,5482	-2,4696	-3,2488	-3,5985	-2,9486
	0,0650	0,2527	0,2335	-0,0611	-0,6376	-1,4326	-2,3053	-3,0529	-3,4145	-2,8744
	0,0600	0,2424	0,2288	-0,0406	-0,5749	-1,3177	-2,1396	-2,8532	-3,2215	-2,7856
	0,0550	0,2302	0,2216	-0,0228	-0,5144	-1,2036	-1,9729	-2,6500	-3,0205	-2,6821
	0,0500	0,2161	0,2120	-0,0074	-0,4558	-1,0903	-1,8053	-2,4437	-2,8123	-2,5641
	0,0450	0,2004	0,2002	0,0057	-0,3990	-0,9778	-1,6369	-2,2348	-2,5980	-2,4319
	0,0400	0,1831	0,1865	0,0167	-0,3440	-0,8661	-1,4679	-2,0235	-2,3785	-2,2862
	0,0350	0,1643	0,1710	0,0258	-0,2907	-0,7553	-1,2984	-1,8102	-2,1544	-2,1277
	0,0300	0,1444	0,1541	0,0331	-0,2388	-0,6452	-1,1286	-1,5952	-1,9266	-1,9575
	0,0250	0,1234	0,1358	0,0390	-0,1882	-0,5358	-0,9586	-1,3789	-1,6959	-1,7768
	0,0200	0,1016	0,1164	0,0435	-0,1388	-0,4273	-0,7887	-1,1615	-1,4627	-1,5871
	0,0150	0,0791	0,0962	0,0470	-0,0906	-0,3194	-0,6188	-0,9434	-1,2278	-1,3898
	0,0100	0,0561	0,0753	0,0495	-0,0432	-0,2123	-0,4492	-0,7249	-0,9917	-1,1867
	0,0050	0,0328	0,0540	0,0515	0,0034	-0,1058	-0,2799	-0,5064	-0,7549	-0,9796
	0,0000	0,0095	0,0324	0,0529	0,0494	0,0000	-0,1112	-0,2880	-0,5178	-0,7704

Рис. 1: Таблица перемещений явной схемы

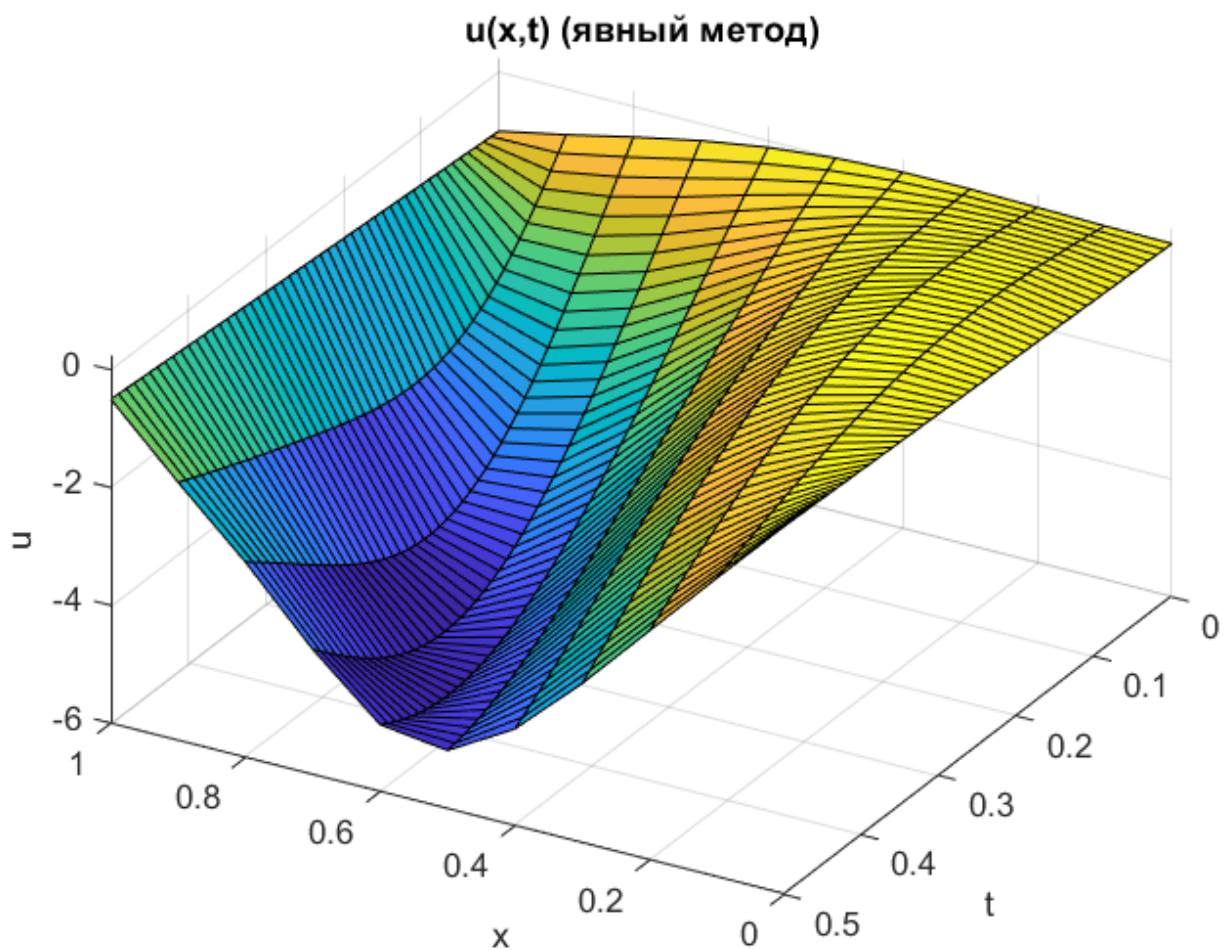


Рис. 2: График  $u(x,t)$

## 2) Неявный метод

Используя выражения производных по координате и времени от  $u$  выше и уравнение колебаний  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , получим СЛАУ, которую приводим к более общему виду:

$$-Au_{i-1}^{k+1} + Bu_i^{k+1} - Cu_{i+1}^{k+1} = F_i$$

,где  $A = \frac{1}{h^2}$ ,  $B = \frac{2\Delta t^2 c^2 + h^2}{\Delta t^2 h^2}$ ,  $C = \frac{1}{h^2}$ ,  $F_i = \frac{2}{\Delta t^2} u_i^k - \frac{1}{\Delta t^2} u_i^{k-1}$ .

Это уравнение представляет из себя СЛАУ, причем матрица этой системы трехдиагональна, таким образом ее целесообразно решать методом прогонки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A & B & -C & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -A & B & -C & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -A & B & -C \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{k+1} \\ u_0^{k+1} \\ u_0^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0^{k+1} \\ F_0^{k+1} \\ F_0^{k+1} \\ \vdots \\ F_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы сохранить второй порядок точности необходимо, чтобы было выполнено следующее условие:

$$u_i^1 = \psi_0(x) + \psi^*(x)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2 c^2}{2h^2}(\psi_{0,i-1} - 2\psi_{0,i} + \psi_{0,i+1})$$

Получившиеся результаты:

Время(----->)	Длина(----->)									
	0,2450	-0,8593	-1,9972	-3,1649	-4,2550	-4,9861	-4,9390	-4,0076	-2,7857	-1,6802
	0,2400	-0,8016	-1,8917	-3,0400	-4,1535	-4,9565	-5,0103	-4,1388	-2,8902	-1,7408
	0,2350	-0,7443	-1,7866	-2,9144	-4,0484	-4,9191	-5,0728	-4,2672	-2,9960	-1,8008
	0,2300	-0,6877	-1,6821	-2,7884	-3,9402	-4,8743	-5,1260	-4,3918	-3,1027	-1,8601
	0,2250	-0,6319	-1,5784	-2,6625	-3,8293	-4,8222	-5,1696	-4,5117	-3,2101	-1,9186
	0,2200	-0,5769	-1,4758	-2,5370	-3,7163	-4,7634	-5,2033	-4,6261	-3,3180	-1,9763
	0,2150	-0,5229	-1,3746	-2,4123	-3,6016	-4,6981	-5,2270	-4,7341	-3,4261	-2,0332
	0,2100	-0,4700	-1,2750	-2,2889	-3,4855	-4,6267	-5,2406	-4,8347	-3,5338	-2,0895
	0,2050	-0,4184	-1,1773	-2,1669	-3,3685	-4,5497	-5,2439	-4,9272	-3,6406	-2,1450
	0,2000	-0,3681	-1,0817	-2,0468	-3,2509	-4,4673	-5,2370	-5,0107	-3,7460	-2,1998
	0,1950	-0,3192	-0,9884	-1,9288	-3,1331	-4,3802	-5,2200	-5,0846	-3,8493	-2,2541
	0,1900	-0,2719	-0,8976	-1,8132	-3,0155	-4,2885	-5,1931	-5,1480	-3,9498	-2,3078
	0,1850	-0,2262	-0,8095	-1,7002	-2,8983	-4,1928	-5,1564	-5,2005	-4,0467	-2,3610
	0,1800	-0,1822	-0,7243	-1,5901	-2,7818	-4,0933	-5,1102	-5,2414	-4,1392	-2,4138
	0,1750	-0,1399	-0,6422	-1,4831	-2,6662	-3,9906	-5,0548	-5,2704	-4,2263	-2,4661
	0,1700	-0,0996	-0,5633	-1,3793	-2,5519	-3,8849	-4,9905	-5,2870	-4,3073	-2,5180
	0,1650	-0,0611	-0,4878	-1,2790	-2,4389	-3,7767	-4,9178	-5,2910	-4,3810	-2,5693
	0,1600	-0,0246	-0,4159	-1,1822	-2,3276	-3,6661	-4,8369	-5,2822	-4,4467	-2,6198
	0,1550	0,0098	-0,3475	-1,0891	-2,2181	-3,5536	-4,7484	-5,2607	-4,5033	-2,6696
	0,1500	0,0421	-0,2830	-0,9998	-2,1104	-3,4394	-4,6527	-5,2263	-4,5500	-2,7182
	0,1450	0,0723	-0,2222	-0,9143	-2,0049	-3,3238	-4,5501	-5,1792	-4,5860	-2,7653
	0,1400	0,1003	-0,1654	-0,8329	-1,9015	-3,2070	-4,4411	-5,1196	-4,6104	-2,8106
	0,1350	0,1260	-0,1126	-0,7553	-1,8004	-3,0893	-4,3261	-5,0478	-4,6225	-2,8535
	0,1300	0,1495	-0,0638	-0,6818	-1,7017	-2,9709	-4,2056	-4,9641	-4,6218	-2,8935
	0,1250	0,1706	-0,0190	-0,6124	-1,6054	-2,8520	-4,0800	-4,8690	-4,6075	-2,9300
	0,1200	0,1894	0,0217	-0,5469	-1,5116	-2,7328	-3,9495	-4,7628	-4,5795	-2,9622
	0,1150	0,2059	0,0584	-0,4855	-1,4204	-2,6133	-3,8147	-4,6461	-4,5372	-2,9894
	0,1100	0,2200	0,0911	-0,4280	-1,3317	-2,4938	-3,6759	-4,5195	-4,4807	-3,0107
	0,1050	0,2317	0,1198	-0,3744	-1,2456	-2,3744	-3,5333	-4,3835	-4,4097	-3,0253
	0,1000	0,2410	0,1447	-0,3246	-1,1621	-2,2552	-3,3874	-4,2386	-4,3244	-3,0324
	0,0950	0,2479	0,1656	-0,2786	-1,0811	-2,1363	-3,2384	-4,0855	-4,2251	-3,0309
	0,0900	0,2524	0,1829	-0,2364	-1,0027	-2,0178	-3,0865	-3,9248	-4,1119	-3,0200
	0,0850	0,2546	0,1965	-0,1976	-0,9269	-1,8997	-2,9322	-3,7569	-3,9854	-2,9988
	0,0800	0,2545	0,2067	-0,1624	-0,8535	-1,7822	-2,7755	-3,5826	-3,8461	-2,9666
	0,0750	0,2522	0,2135	-0,1305	-0,7825	-1,6653	-2,6167	-3,4023	-3,6947	-2,9225
	0,0700	0,2476	0,2170	-0,1019	-0,7140	-1,5490	-2,4561	-3,2166	-3,5318	-2,8660
	0,0650	0,2408	0,2176	-0,0763	-0,6477	-1,4334	-2,2938	-3,0259	-3,3583	-2,7965
	0,0600	0,2320	0,2152	-0,0536	-0,5837	-1,3186	-2,1301	-2,8308	-3,1750	-2,7135
	0,0550	0,2212	0,2101	-0,0337	-0,5218	-1,2044	-1,9650	-2,6316	-2,9827	-2,6169
	0,0500	0,2086	0,2025	-0,0165	-0,4620	-1,0911	-1,7989	-2,4290	-2,7824	-2,5066
	0,0450	0,1942	0,1926	-0,0016	-0,4041	-0,9785	-1,6318	-2,2231	-2,5749	-2,3827
	0,0400	0,1781	0,1806	0,0109	-0,3480	-0,8667	-1,4640	-2,0145	-2,3611	-2,2455
	0,0350	0,1605	0,1666	0,0214	-0,2937	-0,7557	-1,2955	-1,8035	-2,1419	-2,0955
	0,0300	0,1416	0,1509	0,0300	-0,2409	-0,6455	-1,1265	-1,5905	-1,9181	-1,9333
	0,0250	0,1215	0,1337	0,0369	-0,1897	-0,5361	-0,9573	-1,3757	-1,6904	-1,7600
	0,0200	0,1004	0,1152	0,0422	-0,1397	-0,4274	-0,7878	-1,1596	-1,4596	-1,5766
	0,0150	0,0785	0,0956	0,0463	-0,0910	-0,3195	-0,6184	-0,9425	-1,2263	-1,3844
	0,0100	0,0559	0,0751	0,0493	-0,0433	-0,2123	-0,4490	-0,7246	-0,9912	-1,1849
	0,0050	0,0328	0,0540	0,0515	0,0034	-0,1058	-0,2799	-0,5064	-0,7549	-0,9796
	0,0000	0,0095	0,0324	0,0529	0,0494	0,0000	-0,1112	-0,2880	-0,5178	-0,7704

Рис. 3: Таблица перемещений неявной схемы



Получившиеся результаты:

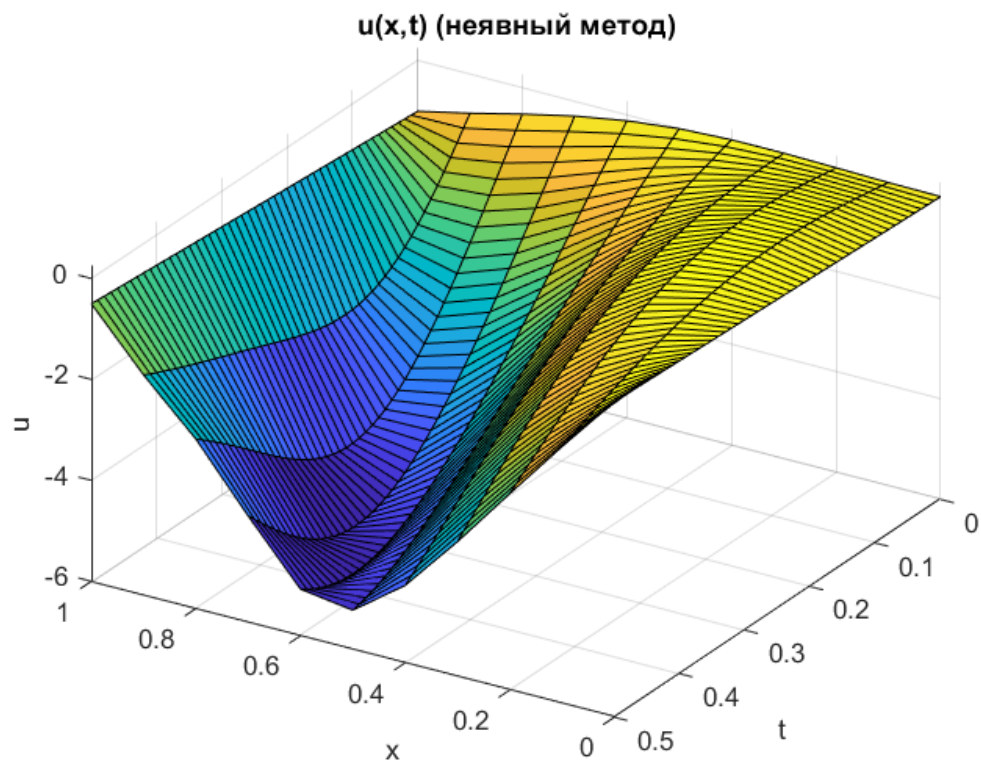


Рис. 4: График  $u(x,t)$

## Сравнение результатов:

Из графиков ниже, заметим, что методы дают очень близкие результаты, что говорит о правильности решения задачи.

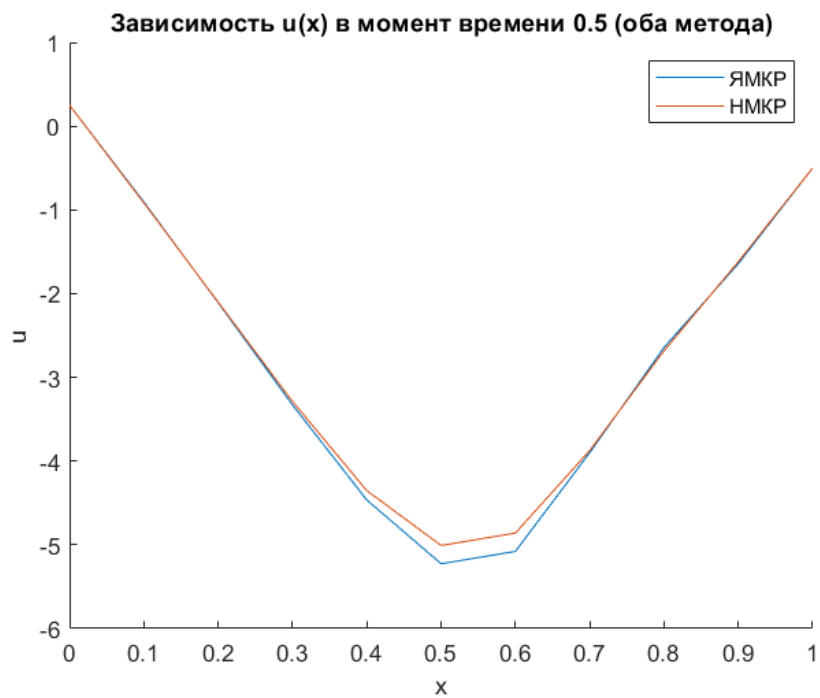


Рис. 5: График  $u(x,t)$  в момент времени 0.5

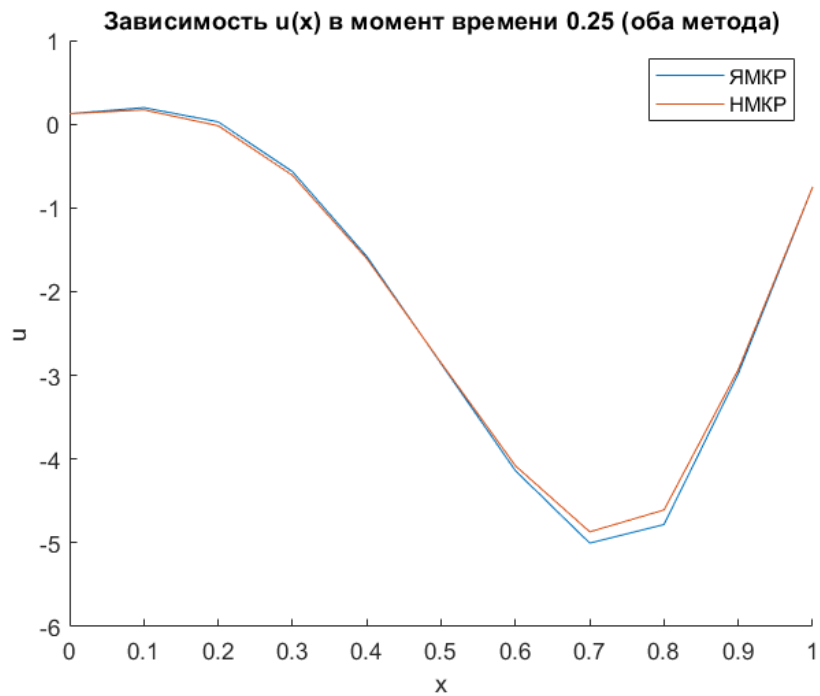


Рис. 6: График  $u(x,t)$  в момент времени 0.25

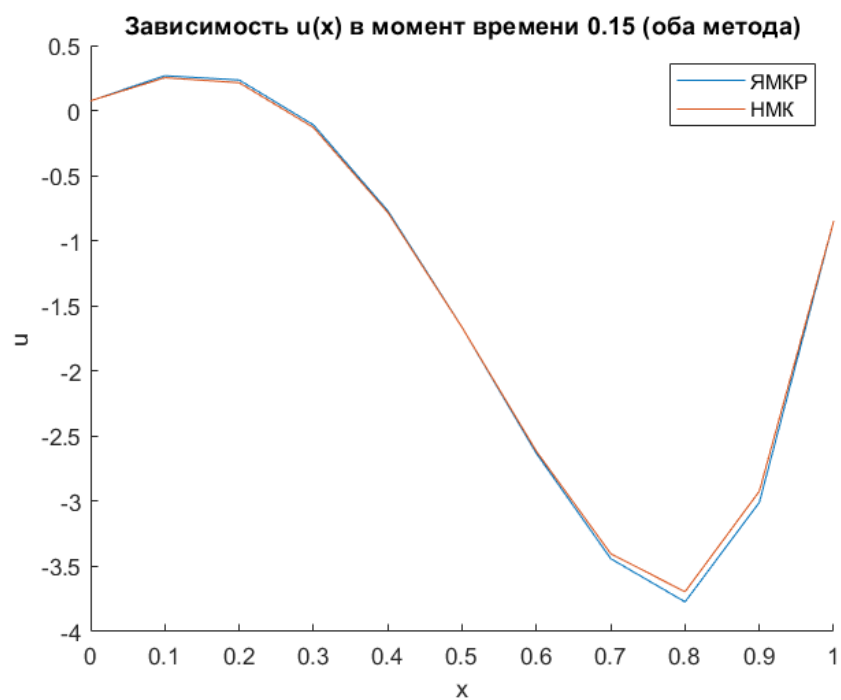


Рис. 7: График  $u(x,t)$  в момент времени 0.15



## Код (выполнен в MATLAB)

```
t=[0:0.01:0.5];
x=[0:0.1:1];
dt=0.01;
h=0.1;
n=(1/0.1)+1;
k=0.5/0.01+1;
u=zeros(k,n);
u1=zeros(k,n);
u_dop=zeros(n,1);
```

Заполняю ГУ

```
for i=1:n
u(k,i)=((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h);
u1(k,i)=((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h);
% u(k,i)=2*((i-1)*h)*((i-1)*h+1)+0.3;
% u1(k,i)=2*((i-1)*h)*((i-1)*h+1)+0.3;
end
for i=k:-1:1
u(i,1)=0.5*((k-i)*dt);
u1(i,1)=0.5*((k-i)*dt);
% u(i,1)=0.3;
% u1(i,1)=0.3;
end
for i=k:-1:1
u(i,n)=(k-i)*dt-1;
u1(i,n)=(k-i)*dt-1;
% u(i,n)=4.3+(i-1)*dt;
% u1(i,n)=4.3+(i-1)*dt;
end
```

Первая строка перемещений

```
for i=2:n-1
u1(k-1,i)=((i*h)^2*cos(pi*i*h))+((i*h)^2*(i*h+1))*dt+...
+(dt^2/(2*h^2))*((((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h))-2*(((i)*h)^2*cos(pi*i*h))...
+(((i+1)*h)^2*cos(pi*(i+1)*h)));
u(k-1,i)=((i*h)^2*cos(pi*i*h))+((i*h)^2*(i*h+1))*dt+...
+(dt^2/(2*h^2))*((((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h))-2*(((i)*h)^2*cos(pi*i*h))+...
+(((i+1)*h)^2*cos(pi*(i+1)*h)));
% (((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h))+(((i-1)*h)^2*((i-1)*h+1))*dt+...
+(dt^2/(2*h^2))*((((i-1)*h)^2*cos(pi*(i-1)*h))-2*(((i)*h)^2*cos(pi*(i)*h))+...
+(((i+1)*h)^2*cos(pi*(i+1)*h)));
end
```

Решение задачи по явному мкр

```
for j=k-1:-1:2
for i=2:n-1
u(j-1,i)=(dt^2/(h^2))*(u(j,i+1)-2*u(j,i)+u(j,i-1))+2*u(j,i)-u(j+1,i));
end
end
```

Решение задачи по неявному мкр

```

A=-1/(h^2);
B=(h^2+2*dt^2)/((dt^2)*(h^2));
C=-1/(h^2);

```

Заполняю матрицу коэффициентов

```

matrix=zeros(n);
for i=2:n-1
matrix(i,i)=B;
matrix(i,i-1)=-A;
matrix(i,i+1)=-C;
end
matrix(1,1)=1;
matrix(n,n)=1;

```

```

for j=k-1:-1:2
del=zeros(n,1);
lam=zeros(n,1);
F=zeros(n,1);

```

```

P(1)=-C/B;

```

Реализуем сам метод прогонки  
прямой ход

```

for i=1:n
F(i)=(2*u1(j,i))/(dt^2)-u1(j+1,i)/(dt^2);
end
Q(1)=F(1)/B;
for i=2:n
P(i)=-C/(B+A*P(i-1));
Q(i)=(F(i)-A*Q(i-1))/(B+A*P(i-1));
end

```

Обратный ход

```

for i=n-1:-1:2
u1(j-1,i)=P(i)*u1(j-1,i+1)+Q(i);
end
end
temp=zeros(1,n);
temp1=zeros(1,n);
for i=1:(k-1)/2
temp=u(i,:);
u(i,:)=u(k-i+1,:);
u(k-i+1,:)=temp;
temp1=u1(i,:);
u1(i,:)=u1(k-i+1,:);
u1(k-i+1,:)=temp1;
end
figure()
hold on
grid on
surf(x,t,u);
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')
figure()

```

```

surf(x,t,u1);
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u')
figure()
hold on
plot(x,u(16,:));
plot(x,u1(16,:));
xlabel('x')
ylabel('u')
figure()
hold on
plot(x,u(k,:));
plot(x,u1(k,:));
xlabel('x')
ylabel('u')
figure()
hold on
plot(x,u(26,:));
plot(x,u1(26,:));
xlabel('x')
ylabel('u')

```