Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Направление подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Отчёт по лабораторной работе №4

Тема: "Интерполяционные полиномы"

Дисциплина "Вычислительная механика"

Выполнил:
Работинский А.Д.
Группа: 5030103/10001
Преподаватель:
Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург
2022

1) Постановка задачи

Требуется отыскать функции формы для всех узлов данного конечного элемента, провести проверку путем непосредственной подстановки узловых точек в полученные функции, построить визуализацию. Рассматриваемый конечный элемент: линейный тетраэдр.

Перемещения внутри линейного тетраэдра: $u = A + Bx + Cy + Dz + Exy + Fxz + Gyz + Hxyz$

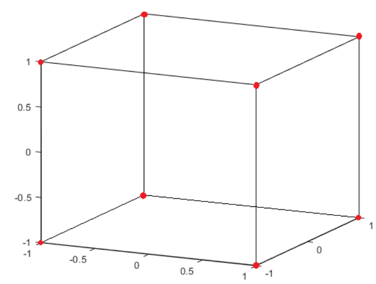

Рис. 1: Линейный тетраэдр с отмеченными узлами

Узлы тетраэдра:

Номер узла	X	Y	Z
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	1
3	-1	1	-1
4	-1	1	1
5	1	-1	-1
6	1	-1	1
7	1	1	-1
8	1	1	1

Функция формы для i-ого узла должна удовлетворять следущему равенству:

$$N_m(x_m, y_m, z_m) = 1$$

$$N_m(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (i \neq m)$$

2) Решение

Для каждого узла из 8 выше представленных можно записать 8 уравнений исходя из свойств:

$$N_m(x_i, y_i, z_i) = 1 \quad (i = m)(1 \text{ уравнение}) \text{ и } N_m(x_i, y_i, z_i) = 1 \quad (i \neq m)(7 \text{ уравнений})$$

Получим систему следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1y_1z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x51z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \end{pmatrix} = [E]$$

Перепишем систему более компактно:

$$[X][A] = [E] \quad | \quad [X]* \quad \Rightarrow \boxed{[A] = [X]^{-1}}$$

Получившаяся матрица коэффициентов:

0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125	0,125	0,125
-0,125	-0,125	0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125
-0,125	0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125
0,125	0,125	-0,125	-0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125
0,125	-0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,125
0,125	-0,125	-0,125	0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125
-0,125	0,125	0,125	-0,125	0,125	-0,125	-0,125	0,125

Рис. 2: Матрица коэффициентов

Тогда составив вектор-столбец $\approx$ интерполяционному многочлену: $[P]^T = [1 \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad xz \quad yz \quad xyz]$

Найдем функции формы следующим образом:

$$[\widetilde{N}] = [P]^T * [A]$$

Тогда, полученные функции формы:

$$\boxed{\mathrm{N}_1 = \frac{1}{8}((x*y) - y - z - x + (x*z) + (y*z) - (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_2 = \frac{1}{8}(z - y - x + (x*y) - (x*z) - (y*z) + (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_3 = \frac{1}{8}(y - x - z - (x*y) + (x*z) - (y*z) + (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_4 = \frac{1}{8}(y - x + z - (x*y) - (x*z) + (y*z) - (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_5 = \frac{1}{8}(x - y - z - (x*y) - (x*z) + (y*z) + (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_6 = \frac{1}{8}(x - y + z - (x*y) + (x*z) - (y*z) - (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_7 = \frac{1}{8}(x + y - z + (x*y) - (x*z) - (y*z) - (x*y*z) + 1)}$$

$$\boxed{\mathrm{N}_8 = \frac{1}{8}(x + y + z + (x*y) + (x*z) + (y*z) + (x*y*z) + 1)}$$

3) Проверка результатов по визулизации

Спроецируем значения функций форм на исходный конечный элемент:

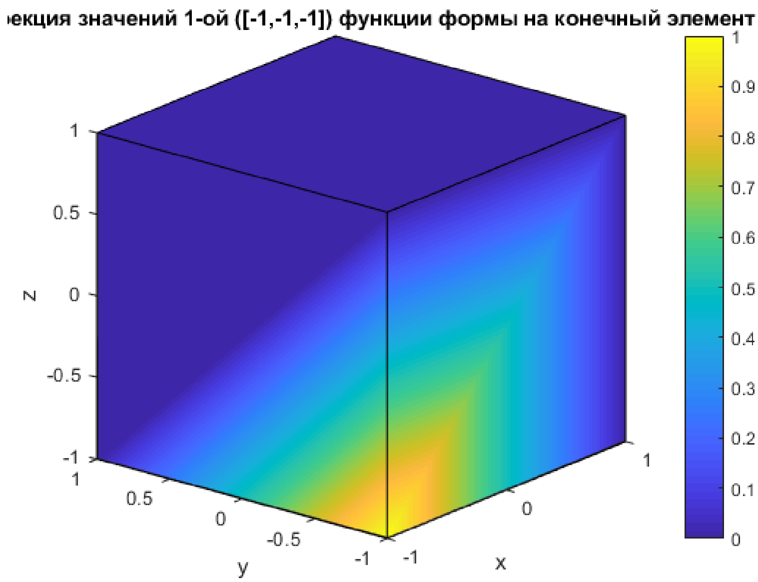

Рис. 3: Проекция значений 1ой функции формы на конечный элемент

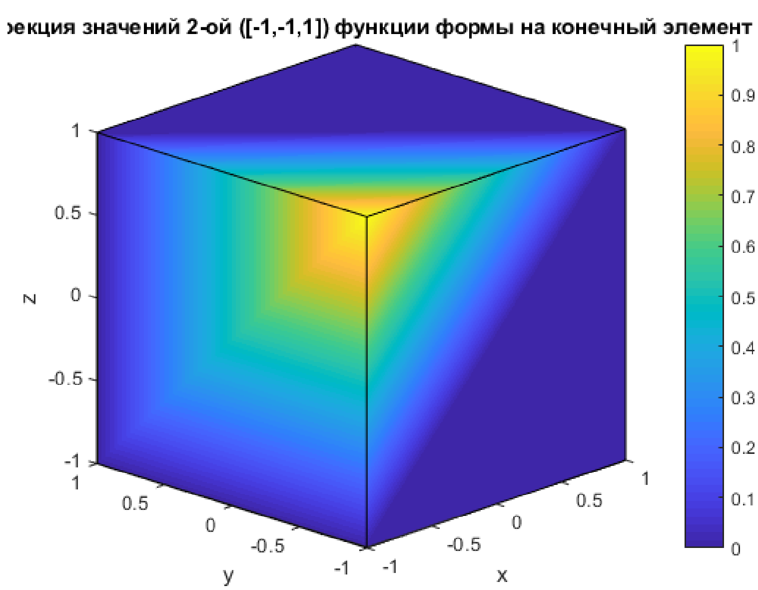

Рис. 4: Проекция значений 2ой функции формы на конечный элемент

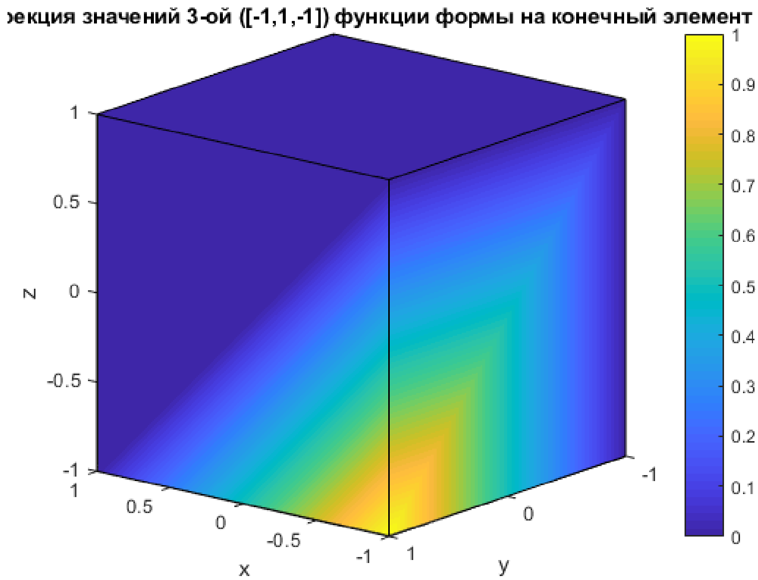

Рис. 5: Проекция значений 3ой функции формы на конечный элемент

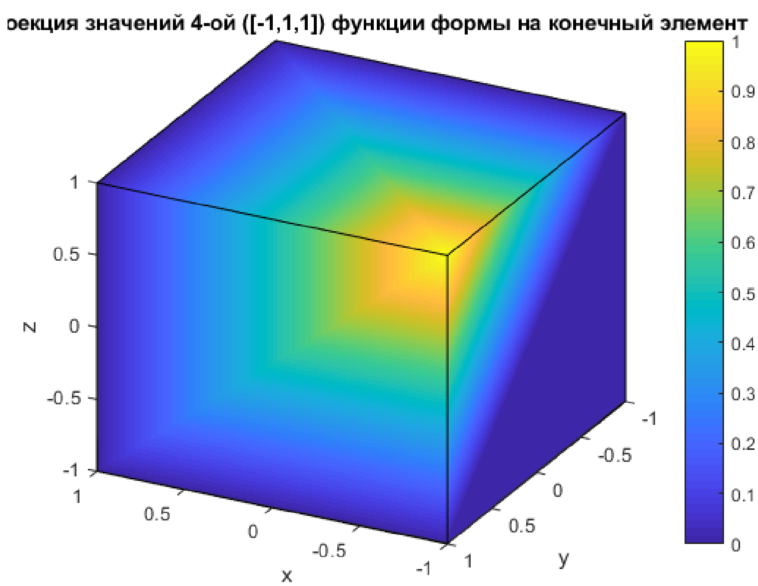

Рис. 6: Проекция значений 4ой функции формы на конечный элемент

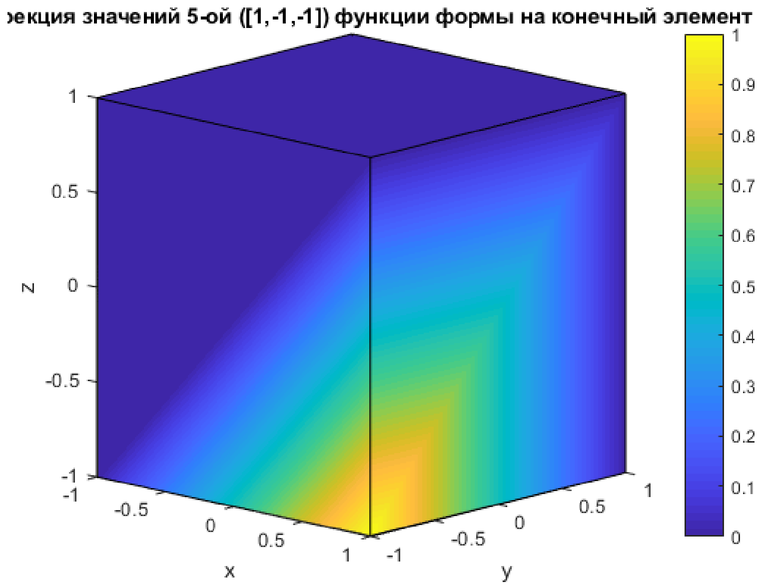

Рис. 7: Проекция значений 5ой функции формы на конечный элемент

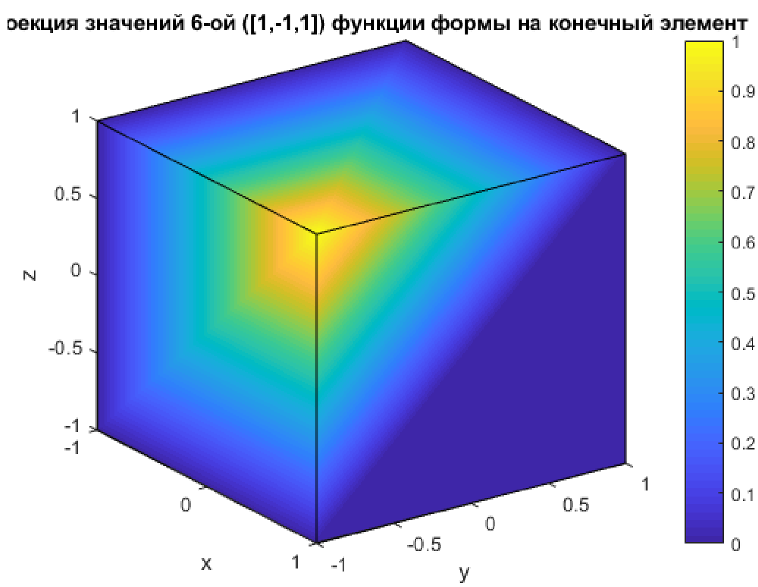

Рис. 8: Проекция значений 6ой функции формы на конечный элемент

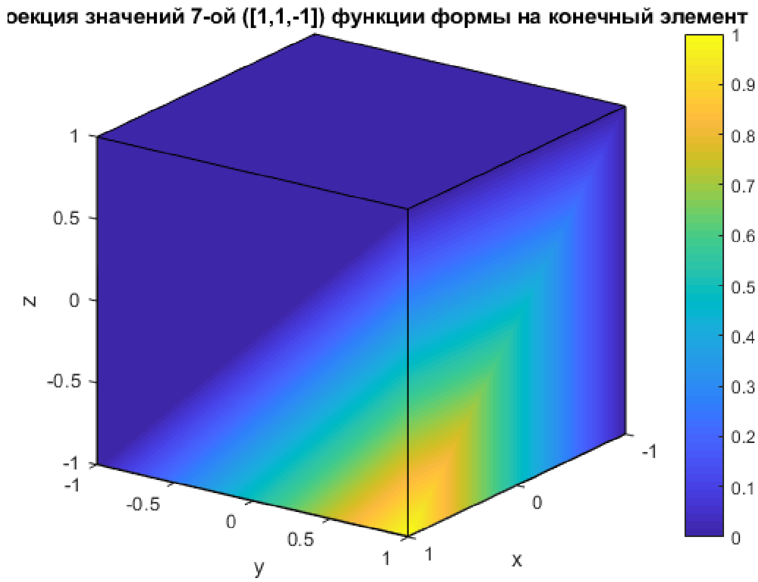

Рис. 9: Проекция значений 7ой функции формы на конечный элемент

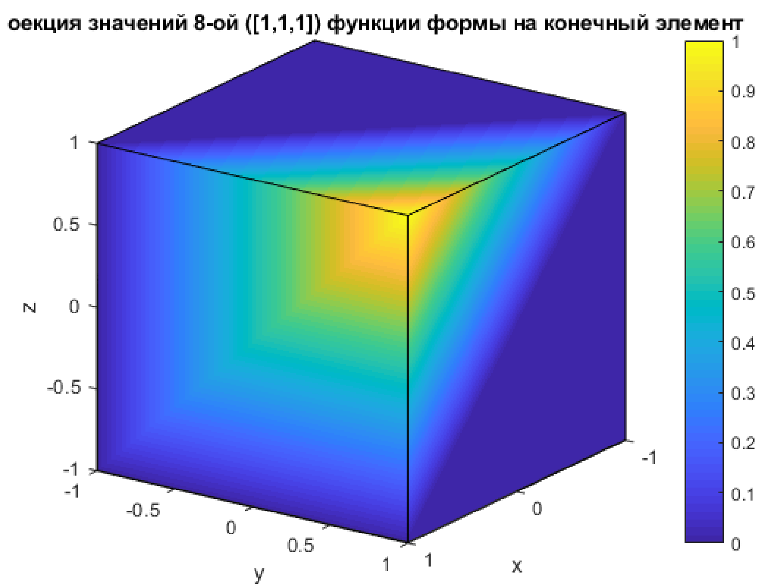

Рис. 10: Проекция значений 8ой функции формы на конечный элемент

4) Выводы

Из 3 пункта видно, что найденные функции форм удовлетворяют свойствам, что говорит о верности проведенных вычислений.

5) Код (выполнен в MATLAB)

```
X=zeros(8);
x_nde=[];
y_nde=[];
z_nde=[];

x_nde(end+1)=-1;
y_nde(end+1)=-1;
z_nde(end+1)=-1;

x_nde(end+1)=-1;
y_nde(end+1)=-1;
z_nde(end+1)=1;

x_nde(end+1)=-1;
y_nde(end+1)=1;
z_nde(end+1)=-1;

x_nde(end+1)=-1;
y_nde(end+1)=1;
z_nde(end+1)=1;

x_nde(end+1)=1;
y_nde(end+1)=-1;
z_nde(end+1)=-1;

x_nde(end+1)=1;
y_nde(end+1)=-1;
z_nde(end+1)=1;

x_nde(end+1)=1;
y_nde(end+1)=1;
z_nde(end+1)=-1;

x_nde(end+1)=1;
y_nde(end+1)=1;
z_nde(end+1)=1;

X(:,1)=1;
for i=1:8
X(i,2)=x_nde(i);
X(i,3)=y_nde(i);
X(i,4)=z_nde(i);
X(i,5)=x_nde(i)*y_nde(i);
X(i,6)=x_nde(i)*z_nde(i);
X(i,7)=y_nde(i)*z_nde(i);
X(i,8)=x_nde(i)*y_nde(i)*z_nde(i);
end
A=zeros(8);
A=inv(X);
syms x y z;
P=[1;x;y;z;x*y;x*z;y*z;x*y*z];
P=P.';
N=P*A

f(1)={@(x,y,z) (x.*y)/8 - y./8 - z./8 - x./8 + (x.*z)./8 + (y.*z)./8 - (x.*y.*z)./8 + 1/8};
```

```
f(2)={@(x,y,z) z./8 - y./8 - x./8 + (x.*y)./8 - (x.*z)./8 - (y.*z)./8 + (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(3)={@(x,y,z) y./8 - x./8 - z./8 - (x.*y)./8 + (x.*z)./8 - (y.*z)./8 + (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(4)={@(x,y,z) y./8 - x./8 + z./8 - (x.*y)./8 - (x.*z)./8 + (y.*z)./8 - (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(5)={@(x,y,z) x./8 - y./8 - z./8 - (x.*y)./8 - (x.*z)./8 + (y.*z)./8 + (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(6)={@(x,y,z) x./8 - y./8 + z./8 - (x.*y)./8 + (x.*z)./8 - (y.*z)./8 - (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(7)={@(x,y,z) x./8 + y./8 - z./8 + (x.*y)./8 - (x.*z)./8 - (y.*z)./8 - (x.*y.*z)./8 + 1/8};
f(8)={@(x,y,z) x./8 + y./8 + z./8 + (x.*y)./8 + (x.*z)./8 + (y.*z)./8 + (x.*y.*z)./8 + 1/8};
for i=1:8
figure()
hold on
fill3([1 1 -1 -1],[1 1 1 1],[-1 1 1 -1],[f{i}(x_nde(7),y_nde(7),z_nde(7))
,f{i}(x_nde(8),y_nde(8),z_nde(8)),f{i}(x_nde(4),y_nde(4),z_nde(4))
,f{i}(x_nde(3),y_nde(3),z_nde(3))]);
fill3([-1 -1 -1 -1],[1 1 -1 -1],[-1 1 1 -1],[f{i}(x_nde(3),y_nde(3),z_nde(3)),
f{i}(x_nde(4),y_nde(4),z_nde(4)),f{i}(x_nde(2),y_nde(2),z_nde(2))
,f{i}(x_nde(1),y_nde(1),z_nde(1))]);
fill3([-1 -1 1 1],[-1 -1 -1 -1],[-1 1 1 -1],[f{i}(x_nde(1),y_nde(1),z_nde(1))
,f{i}(x_nde(2),y_nde(2),z_nde(2)),f{i}(x_nde(6),y_nde(6),z_nde(6))
,f{i}(x_nde(5),y_nde(5),z_nde(5))]);
fill3([1 1 1 1],[-1 -1 1 1],[-1 1 1 -1],[f{i}(x_nde(5),y_nde(5),z_nde(5))
,f{i}(x_nde(6),y_nde(6),z_nde(6)),f{i}(x_nde(8),y_nde(8),z_nde(8))
,f{i}(x_nde(7),y_nde(7),z_nde(7))]);
fill3([-1 -1 1 1],[1 -1 -1 1],[1 1 1 1],[f{i}(x_nde(4),y_nde(4),z_nde(4))
,f{i}(x_nde(2),y_nde(2),z_nde(2)),f{i}(x_nde(6),y_nde(6),z_nde(6))
,f{i}(x_nde(8),y_nde(8),z_nde(8))]);
fill3([-1 -1 1 1],[1 -1 -1 1],[-1 -1 -1 -1],[f{i}(x_nde(3),y_nde(3),z_nde(3))
,f{i}(x_nde(1),y_nde(1),z_nde(1)),f{i}(x_nde(5),y_nde(5),z_nde(5))
,f{i}(x_nde(7),y_nde(7),z_nde(7))]);
colorbar;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
view(125,21);
end
```