Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Направление подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Отчёт по лабораторной работе №5

Тема: Метод конечных элементов. Растяжение-сжатие упругих стержней"

Дисциплина "Вычислительная механика"

Выполнил:
Работинский А.Д.
Группа:
5030103/00101
Преподаватель:
Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург
2022

1 Постановка

Произвести расчет плоских фермы под действием нагрузки **F**. Нагрузку следует прикладывать на верхний пояс. Закрепить крайне левый и правый нижний угол. Закрепление производится по горизонтальным и вертикальным степеням свободы. Требуется определить перемещения узлов фермы и усилия в стержнях.

Рис. 1: Система

2 Метод решения

Для решения задачи статики используется эмперический подход: минимализация функционала потенциальной энергии.

$$\Pi = \Lambda - \Omega$$

Λ - энергия деформации
Ω - работа внешних сил
Минимум функционала достигается в том случае, когда первая вариация этого функционала равна нулю.

$$\frac{\delta \pi}{\delta \{U^e\}} = 0$$

Для каждого стержня находим локальную матрицу жесткости:

$$k^e_{loc} = \frac{ES}{l} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right]$$

Длину стержня находим следующим образом:

$$l_k = (\sqrt{(x^k_j - x^k_i)^2 + (y^k_j - y^k_i)^2},$$

где k - номер стержня
Основное уравнение МКЭ для одного элемента:

$$\left[k^l\right] \cdot \left\{U^l\right\} = \left\{F^l\right\}$$

Осуществим переход от локальной СК связанной с самим КЭ к глобальной СК при помощи матрицы перехода:

$$T = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

Переход к матрице жесткости элемента в глобальной системе координат для каждого элемента при помощи матрицы перехода:

$$k^e_{gl} = T^T \cdot k^e_{loc} \cdot T$$

, где

$$m_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l} \quad l_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l}$$

Для того, чтобы не решать систему тривиальным пересчетом, создадим глобальную матрицу жесткости, в одном конечном элементе 2 узла и в каждом 2 степени свободы, на которые

накладываются соотвтсвующие жесткости), а в теле в данном случае 14 узлов, в каждом по 2 степени свободы, т.е. матрица жесткости для системы будет иметь размерность 28 на 28.Но с другой стороны: $\sum_0^l k_{gl}^e$ Чтобы в результате суммирования матриц 4 на 4 получить матрицу 28 на 28 нужно задать некоторое правило по которому элемненты локальной матрицы будут записываться в глобальную матрицу для системы, очевидный для этого способ:
$u = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots] \Rightarrow$ если рассмотреть локальную матрицу жесткости для элемента из узлов с номерами m и n $m_x = 2m - 1 \quad m_y = 2m \quad n_x = 2n - 1 \quad n_y = 2n$.Далее воспользуемся способом аналогичным переводу в глобальную СК:построим некоторую матрицу А, такую что: $[A]^T * \left\{k_{gl}^e\right\} * [A]$
Эта матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Где ненулевые элементы стоят на местах $1; m_x \quad 2; m_y \quad 3; n_x \quad 4; n_y$ Преобразование такими матрицами для каждого элемента в сумме даст искомую глобальню матрицу жесткостей для системы
Введем вектор сил и перемещений для системы:

$$U = \begin{pmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ U_x^2 \\ U_y^2 \\ \dots \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Применим граничные условия, обнулив пары столбцов и строк и поставив единицы по диагонали у соответствующих узлов.
Составим основное уравнение МКЭ:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & .. & k_{1N} \\ .. & .. & .. \\ k_{N1} & .. & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ U_x^2 \\ U_y^2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^2 \\ F_y^2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

3 Результаты

3.1 Результаты работы в Abaqus

Рис. 2: Усилия, возникающие в ферме

Рис. 3: Поле перемещений по оси X

Рис. 4: Поле перемещений по оси Y

Рис. 5: Напряжения в ферме

3.2 Результаты работы в MatLab

Рис. 6: Усилия, возникающие в ферме

Рис. 7: Поле перемещений по оси X

Рис. 8: Поле перемещений по оси Y

3.3 Сравнение результатов

Рис. 9: Сравнение результатрв для перемещений

Рис. 10: Сравнение результатов для сил

Выводы

Заметим, что перемещения вычисленные в Абакусе и в МатЛабе в среднем различаются в 10-13 знаках,а силы различаются в среднем в 1-2 знаке, что подтверждает верность полученных результатов.