ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

ФИЗИКО–МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Высшая школа теоретической механики

Индивидуальное задание №8 (2 семестр)
по дисциплине: «Вычислительная механика»

Вариант №14

Выполнил
студент гр. 5030103/00101 Работинский А. Д.

Проверил: Витохин. Е. Ю.

«___» __________ 2023 г.

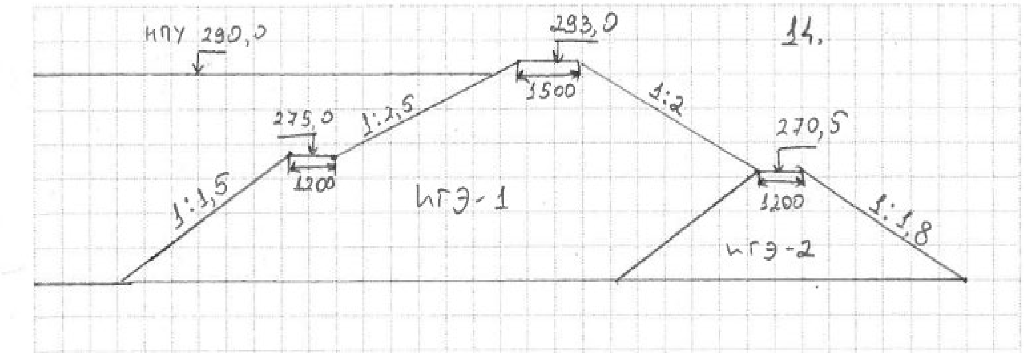
Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи

Требуется рассчитать поле температур плотины, сооруженной из материалов с коэффициентами теплопроводности: k1 = 1.75 (ИГЭ-1) и k2 = 1.5 (ИГЭ-2). Чертеж плотины представлен ниже.



Чертеж плотины

2. Решение задачи

Далее мы будем рассматривать линейный треугольник, для того, чтобы описать температуру в нем достаточно полинома 1 степени:

$$T = A + Bx + Cy$$

$$[N] - \text{функции форм}$$

Тогда получим температуры внутри КЭ:

$$T = [N] \cdot \{T^e\}$$

Запишем закон Фурье:

$$\underline{h} = -\lambda \nabla T \ (*)$$

$$\{h\}^T = \{h_x, h_y\} \ (h_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, h_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) \ (\#)$$

Подставим (*) в (#):

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} -\lambda(\frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k) \\ -\lambda(\frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k \end{Bmatrix}$$

$$\{T^e\}^T = \{T_i, T_j, T_k\}$$

$$\{h\} = -\lambda [B] \{T^e\}$$

$[B]$ – матрица температурных градиентов.

Внутренняя энергия:

$$u = C_v \cdot T$$

Запишем уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho \dot{u} = -\nabla \cdot \underline{h}$$

Тогда уравнение теплопроводности примет вид:

$$\rho C_v \dot{T} = -\nabla \cdot \underline{h}$$

Подставим полученное выражение для вектора теплового потока и матрицы градиентов в уравнение теплопроводности:

$$\rho C_v [N] \cdot \{\dot{T}^e\} - \lambda \nabla \cdot ([B]\{T^e\}) = 0$$

Граничные условия, возможные при постановке задачи теплопроводности:

Условия Дирихле (1 род)

$$T_s = T_1(x, y, t)$$

Условия Неймана (2 рода)

$$-\underline{h}_s = h_x \cdot \underline{n}_x + h_y \cdot \underline{n}_y$$

Смешанные условия (3 рода)

$$h_x \cdot \underline{n}_x + h_y \cdot \underline{n}_y = \varkappa (T_s - T_f)$$

Где $\varkappa$ – коэффициент теплоотдачи; T_s – температура поверхности; T_f – температура окружающей среды;

Для решения задачи теплопроводности воспользуемся методом Галеркина: для решения уравнения умножим его на базисные функции, роль которых играют функции форм и проинтегрируем

$$\int_V (\rho C_v [N] \cdot \{\dot{T}^e\} - \lambda \nabla \cdot ([B] \cdot \{T^e\})) \cdot [N]^T \, dV = 0$$

Интеграл суммы – сумма интегралов, интеграл второй части возьмем по частям и воспользуемся граничными условиями:

$$[C] \cdot \{\dot{T}^e\} + ([K_c] + [K_\varkappa]) \cdot \{T^e\} = \{R_T\} + \{R_h\} + \{R_\varkappa\}$$

Где

1) $[C]$ – матрица теплоёмкости;

2) $[K_c]$ – матрица теплопроводности;

3)$\{R_{\varkappa}\}$; $\{R_T\}$; $\{R_h\}$;– матрицы внешних нагрузок;

В данной лабораторной работе решается стационарное уравнение теплопроводности без теплообмена:

$$[K_c]\cdot\{T^e\} = \{R_T\} + \{R_h\}$$

Осталось найти способ посчитать матрицу $[B]$, однако проблема в том, что $[B]$ зависит от производных от функций форм по x, y, которые зависят от координат элементов конкретного КЭ, считать матрицу градиентов для каждого КЭ непосредственно в исходной СК – достаточно времязатратная задача, требующая символьных вычислений, поэтому перейдем в изопараметрическую СК, вычислим там функции форм элемента, далее с помощью матрицы Якоби и якобиана будем переходить в исходную СК.

$$N_i = 1 - \xi - \eta$$

$$N_j = \eta$$

$$N_i = \xi$$

Тогда:

$$[K_c] = \lambda \int_V \, [B]^T[B]dxdydz = \lambda[B]^T[B]\int_V \, dxdydz =$$

$$\lambda[B]^T[B]\tau\int_S \, dxdy =$$

$$\lambda[B]^T[B]\tau\int_S \, |J|d\xi d\eta = \lambda[B]^T[B]\tau|J|\int_S \, d\xi d\eta = \frac{1}{2}[B]^T[B]\tau|J|$$

Последний интеграл – это площадь КЭ в изопараметрической СК, поскольку элемент в ней единичен, то его площадь равна 0.5.

Далее покажем, как высчитывалась матрица градиентов:

Любой столбец матрицы градиентов: $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{bmatrix}$$