Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Направление подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Отчёт по лабораторной работе №5

Тема: Метод конечных элементов. Растяжение-сжатие упругих стержней"

Дисциплина "Вычислительная механика"

Выполнил:
Работинский А.Д.
Группа:
5030103/00101
Преподаватель:
Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург
2022

1 Постановка

Произвести расчет плоских фермы под действием нагрузки **F**. Нагрузку следует прикладывать на верхний пояс. Закрепить крайне левый и правый нижний угол. Закрепление производится по горизонтальным и вертикальным степеням свободы. Требуется определить перемещения узлов фермы и усилия в стержнях.

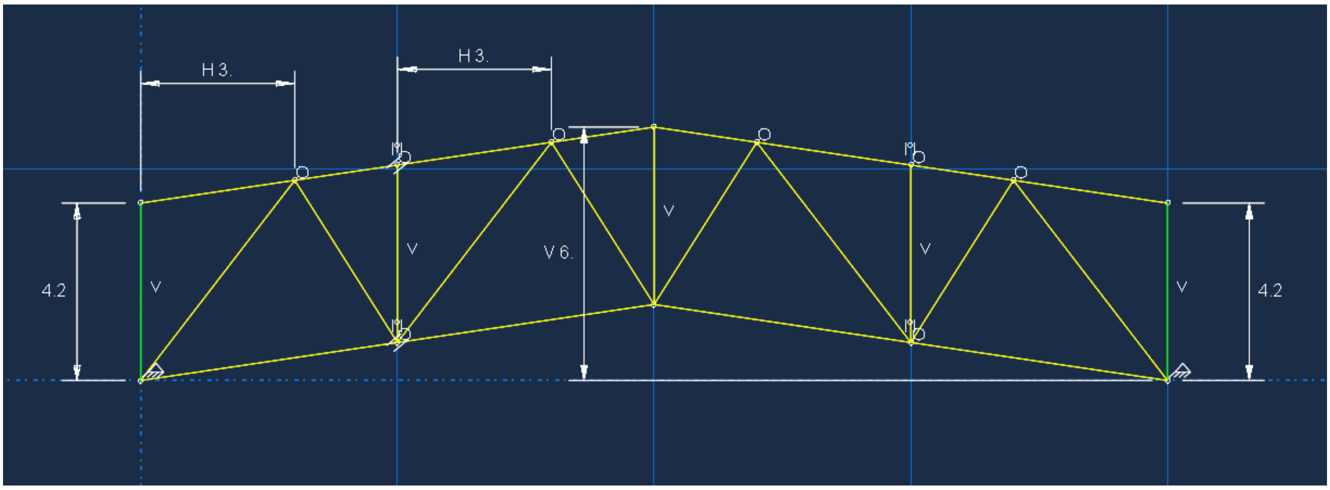

Рис. 1: Система

2 Метод решения

Для решения задачи статики используется эмперический подход: минимализация функционала потенциальной энергии.

$$\Pi = \Lambda - \Omega$$

Λ - энергия деформации
Ω - работа внешних сил
Минимум функционала достигается в том случае, когда первая вариация этого функционала равна нулю.

$$\frac{\delta \pi}{\delta \{U^e\}} = 0$$

Для каждого стержня находим локальную матрицу жесткости:

$$k^e_{loc} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Длину стержня находим следующим образом:

$$l_k = (\sqrt{(x^k_j - x^k_i)^2 + (y^k_j - y^k_i)^2},$$

где k - номер стержня
Основное уравнение МКЭ для одного элемента:

$$\left[k^l\right] \cdot \left\{U^l\right\} = \left\{F^l\right\}$$

Осуществим переход от локальной СК связанной с самим КЭ к глобальной СК при помощи матрицы перехода:

$$T = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

Переход к матрице жесткости элемента в глобальной системе координат для каждого элемента при помощи матрицы перехода:

$$k^e_{gl} = T^T \cdot k^e_{loc} \cdot T$$

, где

$$m_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l} \quad l_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l}$$

Для того, чтобы не решать систему тривиальным пересчетом, создадим глобальную матрицу жесткости, в одном конечном элементе 2 узла и в каждом 2 степени свободы, на которые накладываются соотвтсвующие жесткости), а в теле в данном случае 14 узлов, в каждом по 2 степени свободы, т.е. матрица жесткости для системы будет иметь размерность 28 на 28.Но с другой стороны: $\sum_0^l k^e_{gl}$ Чтобы в результате суммирования матриц 4 на 4 получить матрицу 28 на 28 нужно задать некоторое правило по которому элемненты локальной матрицы будут записываться в глобальную матрицу для системы, очевидный для этого способ:
$u = [u^1_x, u^1_y, u^2_x, u^2_y, \dots] \Rightarrow$ если рассмотреть локальную матрицу жесткости для элемента из узлов с номерами m и n $m_x = 2m - 1 \quad m_y = 2m \quad n_x = 2n - 1 \quad n_y = 2n$.Далее воспользуемся способом аналогичным переводу в глобальную СК:построим некоторую матрицу A, такую что: $[A]^T * \left\{k^e_{gl}\right\} * [A]$
Эта матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Где ненулевые элементы стоят на местах $1; m_x \quad 2; m_y \quad 3; n_x \quad 4; n_y$ Преобразование такими матрицами для каждого элемента в сумме даст искомую глобальню матрицу жесткостей для системы
Введем вектор сил и перемещений для системы:

$$U = \begin{pmatrix} U^1_x \\ U^1_y \\ U^2_x \\ U^2_y \\ \dots \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F^1_x \\ F^1_y \\ F^2_x \\ F^2_y \\ \dots \end{pmatrix}$$

Применим граничные условия, обнулив пары столбцов и строк и поставив единицы по диагонали у соответствующих узлов.
Составим основное уравнение МКЭ:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & .. & k_{1N} \\ .. & .. & .. \\ k_{N1} & .. & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U^1_x \\ U^1_y \\ U^2_x \\ U^2_y \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1_x \\ F^1_y \\ F^2_x \\ F^2_y \\ \dots \end{pmatrix}$$

3 Результаты

3.1 Результаты работы в Abaqus

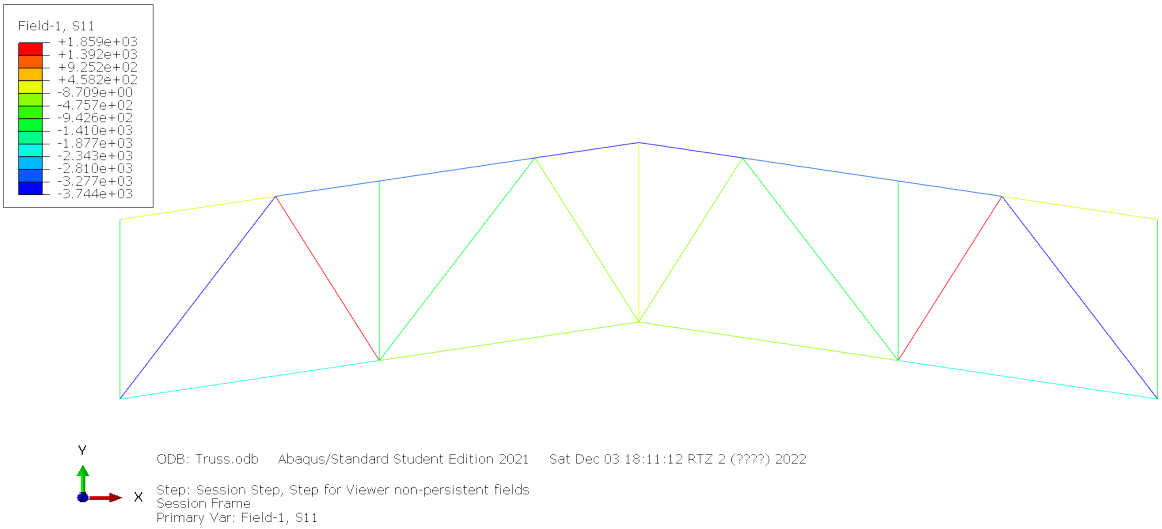

Рис. 2: Усилия, возникающие в ферме

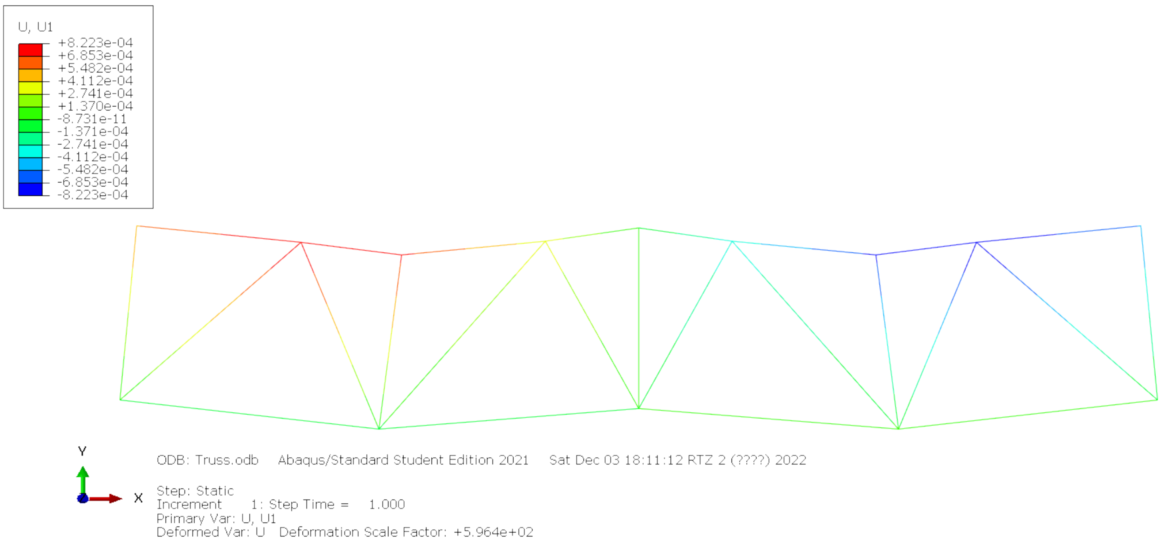

Рис. 3: Поле перемещений по оси X

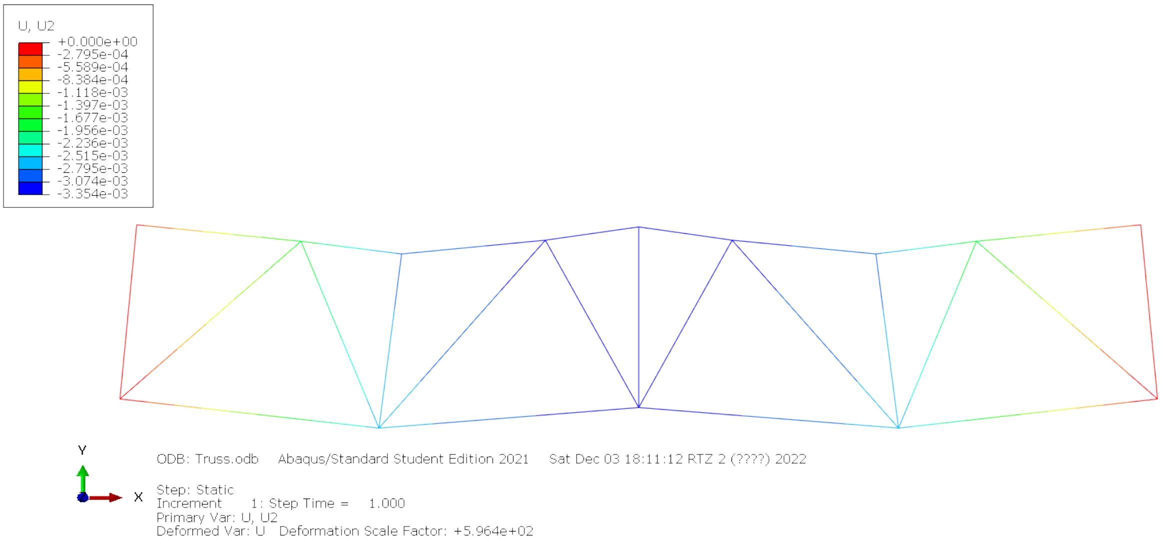

Рис. 4: Поле перемещений по оси Y

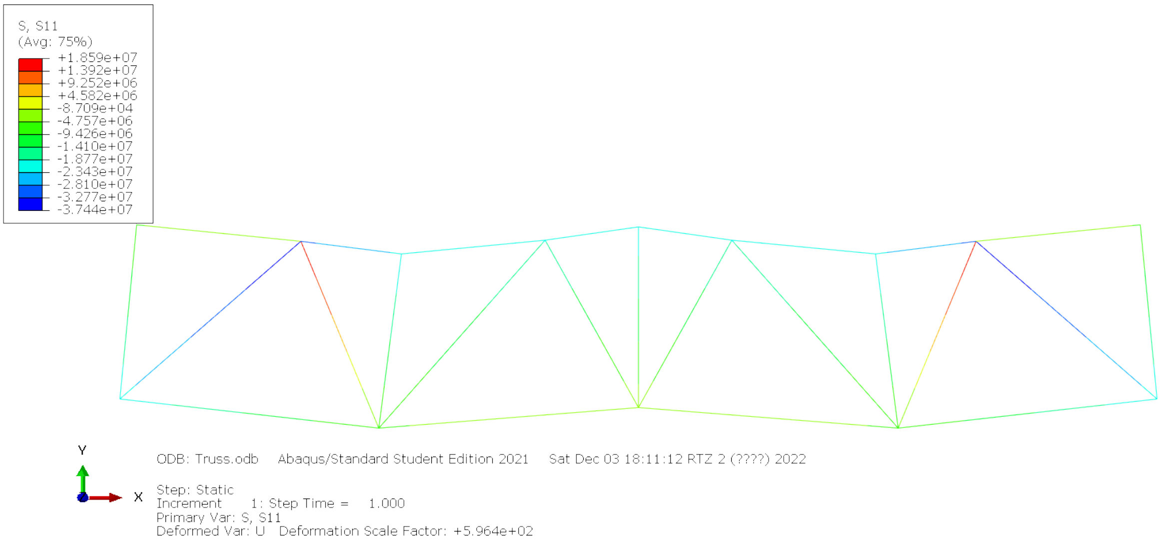

Рис. 5: Напряжения в ферме

3.2 Результаты работы в MatLab

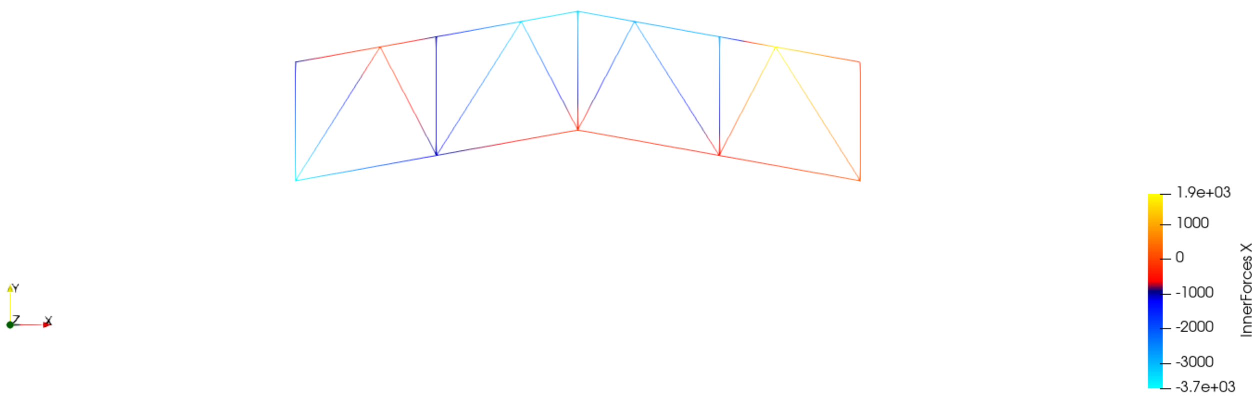

Рис. 6: Усилия, возникающие в ферме

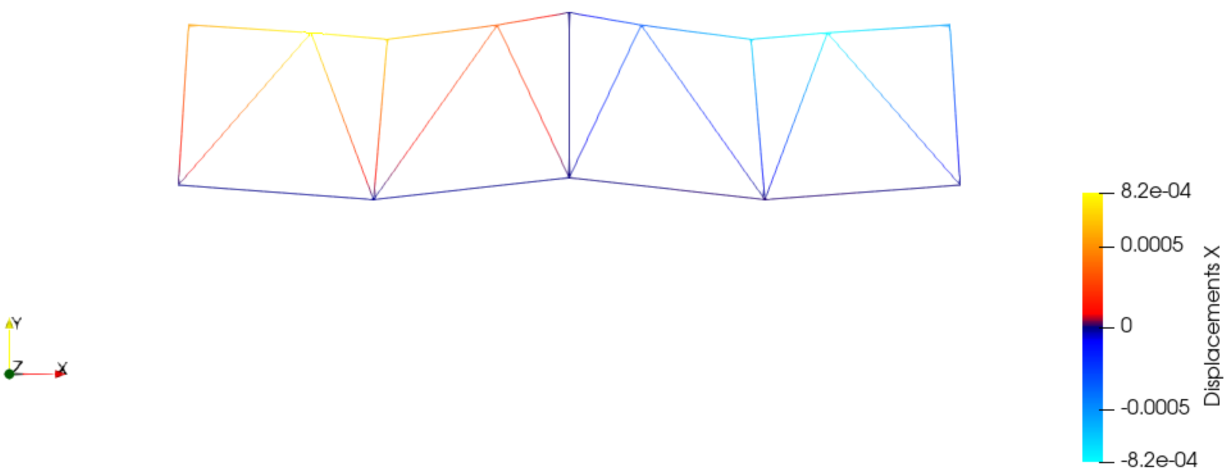

Рис. 7: Поле перемещений по оси X

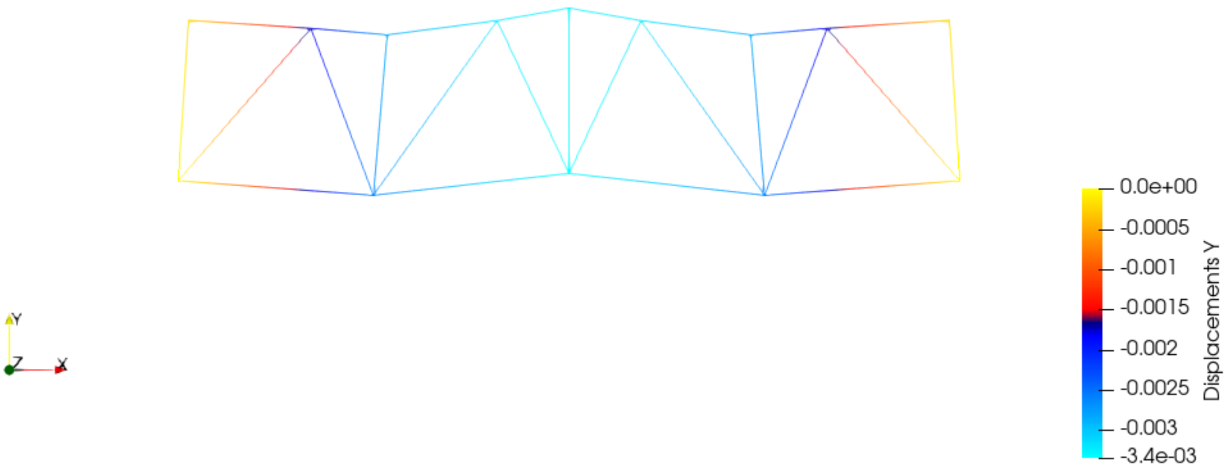

Рис. 8: Поле перемещений по оси Y

3.3 Сравнение результатов

	A	B	C	D	E	F
1	Ux	Uy	Ux (abaqus)	Uy(abaqus)	Ux-Ux (abaqus)	Uy-Uy(abaqus)
2	-0,000335634	-0,003228271	-3,36E-04	-3,23E-03	-1,23E-12	-4,99E-11
3	-0,000719887	-0,002861822	-7,20E-04	-2,86E-03	-1,41E-11	-3,48E-11
4	-0,0008223	-0,001763327	-8,22E-04	-1,76E-03	2,43E-11	-2,34E-11
5	1,24E-05	-0,002651822	1,24E-05	-2,65E-03	-3,54E-13	-8,36E-11
6	5,00E-19	-0,003353625	-6,67E-19	-3,35E-03	1,17E-18	-6,50E-11
7	0,000335634	-0,003228271	3,36E-04	-3,23E-03	1,23E-12	-4,99E-11
8	-6,18E-19	-0,003311004	3,25E-20	-3,31E-03	-6,50E-19	-2,13E-14
9	-0,000542702	-0,00021	-5,43E-04	-2,10E-04	-6,50E-12	-1,05E-11
10	1,00E-33	1,00E-33	3,87E-33	-4,50E-33	-2,87E-33	5,50E-33
11	-1,24E-05	-0,002651822	-1,24E-05	-2,65E-03	3,54E-13	-8,36E-11
12	0,000719887	-0,002861822	7,20E-04	-2,86E-03	1,41E-11	-3,48E-11
13	0,0008223	-0,001763327	8,22E-04	-1,76E-03	-2,43E-11	-2,34E-11
14	1,00E-33	1,00E-33	-3,87E-33	-4,50E-33	4,87E-33	5,50E-33
15	0,000542702	-0,00021	5,43E-04	-2,10E-04	6,50E-12	-1,05E-11

Рис. 9: Сравнение результатрв для перемещений

17	f matlab	f abaqus	f matlab - f abaqus
18	-2907,140502	-2,91E+03	9,19E-02
19	-2904,496138	-2,91E+03	2,74E+00
20	1859,8134	1,86E+03	7,06E-01
21	-441,3784485	-4,42E+02	1,86E-01
22	-202,5487841	-2,03E+02	6,74E-02
23	-3395,247685	-3,40E+03	1,11E-03
24	-3395,247685	-3,40E+03	1,11E-03
25	-202,5487841	-2,03E+02	6,74E-02
26	202,9574498	2,03E+02	9,79E-06
27	-1072,987466	-1,07E+03	1,15E-01
28	-999,6958129	-1,00E+03	3,04E-01
29	2,680917371	2,03E-13	2,68E+00
30	-3743,487739	-3,74E+03	8,53E-01
31	-999,8330274	-1,00E+03	1,67E-01
32	-1894,632324	-1,90E+03	2,63E+00
33	-441,3784485	-4,42E+02	1,86E-01
34	-999,6958129	-1,00E+03	3,04E-01
35	-2904,496138	-2,91E+03	2,74E+00
36	-3743,487739	-3,74E+03	8,53E-01
37	-1894,632324	-1,90E+03	2,63E+00
38	-1072,987466	-1,07E+03	1,15E-01
39	1859,8134	1,86E+03	7,06E-01
40	-2907,140502	-2,91E+03	9,19E-02
41	2,68091738	0,00E+00	2,68E+00
42	-999,8330274	-1,00E+03	1,67E-01

Рис. 10: Сравнение результатов для сил

Выводы

Заметим, что перемещения вычисленные в Абакусе и в МатЛабе в среднем различаются в 10-13 знаках,а силы различаются в среднем в 1-2 знаке, что подтверждает верность полученных результатов.