ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

ФИЗИКО–МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Высшая школа теоретической механики

Индивидуальное задание №8 (2 семестр)
по дисциплине: «Вычислительная механика»

Вариант №14

Выполнил
студент гр. 5030103/00101 Работинский А. Д.

Проверил: Витохин. Е. Ю.

«___» __________ 2023 г.

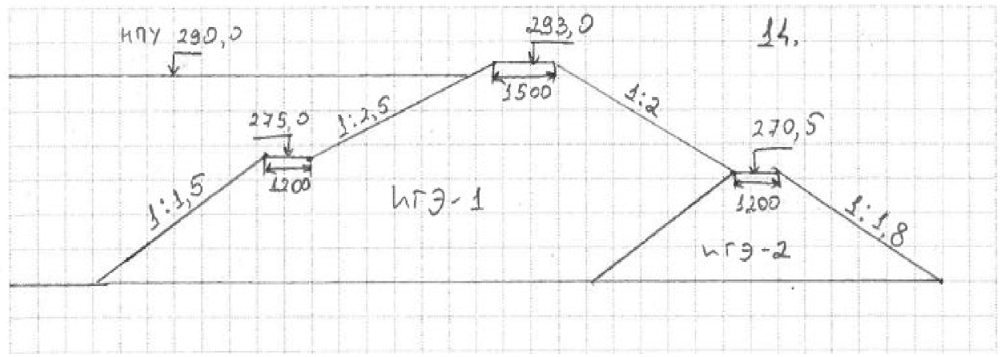
Санкт-Петербург

2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи

Требуется рассчитать поле температур плотины, сооруженной из материалов с коэффициентами теплопроводности: k1 = 1.75 (ИГЭ-1) и k2 = 1.5 (ИГЭ-2). Чертеж плотины представлен ниже.



Чертеж плотины

2. Решение задачи

Далее мы будем рассматривать линейный треугольник, для того, чтобы описать температуру в нем достаточно полинома 1 степени:

$$T = A + Bx + Cy$$

$$[N] - \text{функции форм}$$

Тогда получим температуры внутри КЭ:

$$T = [N] \cdot \{T^e\}$$

Запишем закон Фурье:

$$\underline{h} = -\lambda \nabla T \ (*)$$

$$\{h\}^T = \{h_x, h_y\} \ (h_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, h_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) \ (\#)$$

Подставим (*) в (#):

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} -\lambda(\frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k) \\ -\lambda(\frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k \end{Bmatrix}$$

$$\{T^e\}^T = \{T_i, T_j, T_k\}$$

$$\{h\} = -\lambda [B]\{T^e\}$$

$[B]$ – матрица температурных градиентов.

Внутренняя энергия:

$$u = C_v \cdot T$$

Запишем уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho \dot{u} = -\nabla \cdot \underline{h}$$

Тогда уравнение теплопроводности примет вид:

$$\rho C_v \dot{T} = -\nabla \cdot \underline{h}$$

Подставим полученное выражение для вектора теплового потока и матрицы градиентов в уравнение теплопроводности:

$$\rho C_v [N] \cdot \{\dot{T}^e\} - \lambda \nabla \cdot ([B]\{T^e\}) = 0$$

Граничные условия, возможные при постановке задачи теплопроводности:

Условия Дирихле (1 род)

$$T_s = T_1(x, y, t)$$

Условия Неймана (2 рода)

$$-\underline{h}_s = h_x \cdot \underline{n}_x + h_y \cdot \underline{n}_y$$

Смешанные условия (3 рода)

$$h_x \cdot \underline{n}_x + h_y \cdot \underline{n}_y = \varkappa(T_s - T_f)$$

Где $\varkappa$ – коэффициент теплоотдачи; T_s – температура поверхности; T_f – температура окружающей среды;

Для решения задачи теплопроводности воспользуемся методом Галеркина: для решения уравнения умножим его на базисные функции, роль которых играют функции форм и проинтегрируем

$$\int_V (\rho C_v [N] \cdot \{\dot{T}^e\} - \lambda \nabla \cdot ([B] \cdot \{T^e\})) \cdot [N]^T \, dV = 0$$

Интеграл суммы – сумма интегралов, интеграл второй части возьмем по частям и воспользуемся граничными условиями:

$$[C] \cdot \{\dot{T}^e\} + ([K_c] + [K_\varkappa]) \cdot \{T^e\} = \{R_T\} + \{R_h\} + \{R_\varkappa\}$$

Где

1) $[C]$ – матрица теплоёмкости;

2) $[K_c]$ – матрица теплопроводности;

3)$\{R_{\varkappa}\}$; $\{R_T\}$; $\{R_h\}$;– матрицы внешних нагрузок;

В данной лабораторной работе решается стационарное уравнение теплопроводности без теплообмена:

$$[K_c] \cdot \{T^e\} = \{R_T\} + \{R_h\}$$

Осталось найти способ посчитать матрицу $[B]$, однако проблема в том, что $[B]$ зависит от производных от функций форм по x, y , которые зависят от координат элементов конкретного КЭ, считать матрицу градиентов для каждого КЭ непосредственно в исходной СК – достаточно времязатратная задача, требующая символьных вычислений, поэтому перейдем в изопараметрическую СК, вычислим там функции форм элемента, далее с помощью матрицы Якоби и якобиана будем переходить в исходную СК.

$$N_i = 1 - \xi - \eta$$

$$N_j = \eta$$

$$N_i = \xi$$

Тогда:

$$[K_c] = \lambda \int_V \ [B]^T[B]dxdydz = \lambda[B]^T[B] \int_V \ dxdydz =$$

$$\lambda[B]^T[B]\tau \int_S \ dxdy =$$

$$\lambda[B]^T[B]\tau \int_S \ |J|d\xi d\eta = \lambda[B]^T[B]\tau|J| \int_S \ d\xi d\eta = \frac{1}{2}[B]^T[B]\tau|J|$$

Последний интеграл – это площадь КЭ в изопараметрической СК, поскольку элемент в ней единичен, то его площадь равна 0.5.

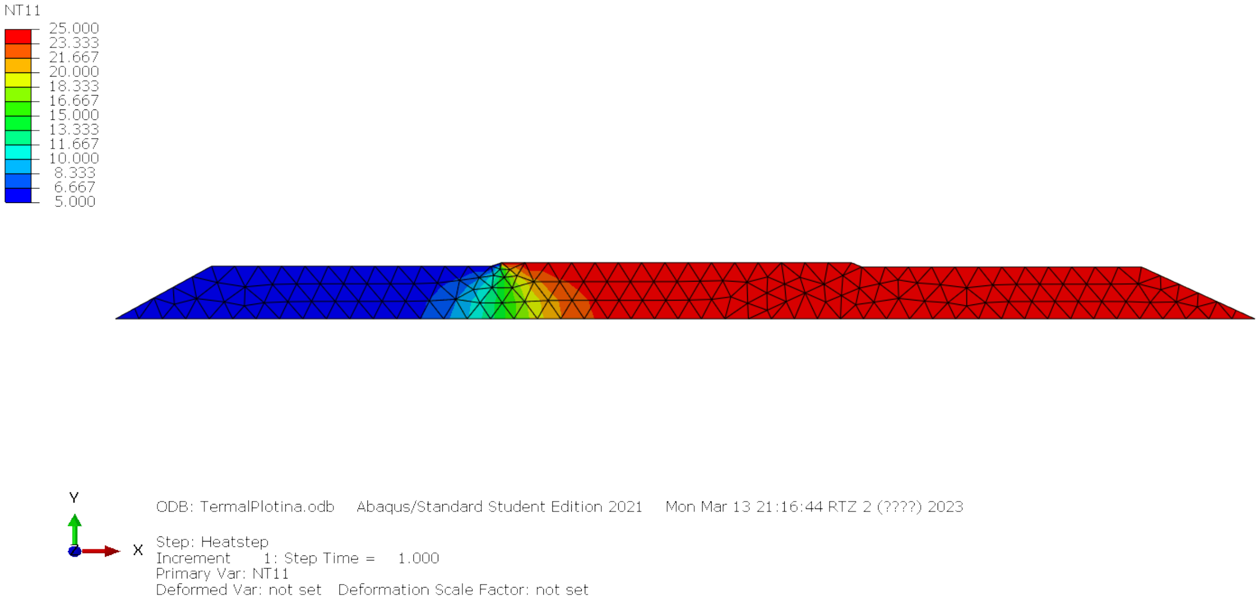
Далее покажем, как высчитывалась матрица градиентов:

Любой столбец матрицы градиентов: $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{bmatrix}$$

3. Результаты

1)Абакус дал следующее поле температур:



Поле температур Абакус (℃)

2)Матлаб дал следующее поле температур:

Поле температур Матлаб (℃)

Заключение

В результате выполнения лабораторной работы мы получили поле температур с помощью конечно-элементного пакета Abaqus и непосредственно используя вышеописанный метод в MatLab, полученные значения совпали, что говорит о правильности выполнения лабораторной работы.

Код программы (выполнен в MatLab)

```
clc;
clear all;
k1 = 1.5;
k2 = 1.75;
Te = zeros(1,3);
n_els = 294;
n_nds = 199;
derivatives = [[-1,0,1];[-1,1,0]];
x=[];
y=[];
Temp = readtable('D:\Учеба\3 курс\Вычислительная
механика\Лаба8\nodes.txt');
x= Temp(:,2);
x=table2array(x);

y= Temp(:,3);
y=table2array(y);

Temp = readtable('D:\Учеба\3 курс\Вычислительная
механика\Лаба8\data.txt');
a=[];
b=[];
c=[];
a = Temp(:,2);
b = Temp(:,3);
c = Temp(:,4);

a=table2array(a);
b=table2array(b);
c=table2array(c);
assoc=zeros(294,3);

for i=1:294
    temp = [a(i),b(i),c(i)];
    assoc(i,1)=a(i);
    assoc(i,2)=b(i);
    assoc(i,3)=c(i);
end
Kc=zeros(n_nds);
% составляем матрицу Kc
for m=1:n_els
    Kce=zeros(3);

    i=assoc(m,1);
    j=assoc(m,2);
    k=assoc(m,3);

    xi=x(i);
    yi=y(i);

    xj=x(j);
```

```
    yj=y(j);

    xk=x(k);
    yk=y(k);

    % матрица якоби и якобиан
    J = derivatives*[[xi,yi];[xj,yj];[xk,yk]];
    detJ = det(J);
    % Матрица Be
    Be=zeros(2,3);
    for n=1:3
        Be(:,n)=inv(J)*derivatives(:,n);
    end
    Kce = 1/2*Be'*Be*detJ;
    %3 узла, в каждом по 1 температуре , тогда матрица А из
прошлыш лаб перейдет в:
    A = zeros(3,n_nds);

    A(1,i)=1;
    A(2,j)=1;
    A(3,k)=1;
        %     проверяем принадлжеит ли элемент материалу ИГЭ-1
или ИГЭ-2 (сетка построена так, что если хоть один узел лежит
внутри зоны одного из материалов, то и весь элемент лежит там)
    if((xi>2715.6 && yi<-2715.6+1.8*xi && xi<3202.5) ||
(xj>2715.6 && yj<-2715.6+1.8*xj && xj<3202.5 ) || (xk>2715.6 &&
yk<-2715.6+1.8*xk && xk<3202.5))
        Kce=k2*Kce;
    elseif((xi>=3202.5 && xi<=4402.5 && yi<=270.5) ||(xj>=3202.5
&& xj<=4402.5 && yj<=270.5) || (xk>=3202.5 && xk<=4402.5 &&
yk<=270.5))
        Kce=k2*Kce;
    elseif ((xi>2715.6 && yi==-2715.6+1.8*xi && xi<3202.5) ||
(xj>2715.6 && yj==-2715.6+1.8*xj && xj<3202.5 ) || (xk>2715.6 &&
yk==-2715.6+1.8*xk && xk<3202.5))
        Kce=k2*Kce;
    else
        Kce=k1*Kce;
    end
    Kc =Kc+A'*Kce*A;
end
% теперь выставляем ГУ
% вода
bcw=[];
% воздух
bca=[];
for m=1:n_els

    i=assoc(m,1);
    j=assoc(m,2);
    k=assoc(m,3);

    xi=x(i);
```

```
    yi=y(i);

    xj=x(j);
    yj=y(j);

    xk=x(k);
    yk=y(k);
    %      проверяем принадлжеит узел участку где вода
    if(yi<=290 && xi<=1650 && sum(bcw(:) == i) == 0)
        if((yi==275 && xi<=1612.5 && xi>=412.5) || (xi*1.5==yi)
|| (-1612.5+xi*2.5==yi))
            bcw=[bcw i];
        end
    end

     if(yj<=290 && xj<=1650 && sum(bcw(:) == j) == 0)
        if((yj==275 && xj<=1612.5 && xj>=412.5) || (xj*1.5==yj)
|| (-1612.5+xi*2.5==yj))
            bcw=[bcw j];
        end
     end

      if(yk<=290 && xk<=1650 && sum(bcw(:) == k) == 0)
        if((yk==275 && xk<=1612.5 && xk>=412.5) || (xk*1.5==yk)
|| (-1612.5+xk*2.5==yk))
            bcw=[bcw k];
        end
      end



    %      проверяем принадлжеит узел участку где водздух
      if(xi>=1650 && yi~=0 && sum(bca(:) == i) == 0)
        if((yi==293 && xi<=3157.5 && xi>=1657.5) || (yi==270.5
&& xi<=4402.5 && xi>=3202.5) || (-0.5*xi+1871.75==yi) ||
(8149/3-xi*5/9==yi))
            bca=[bca i];
        end
      end

      if(xj>=1650 && yj~=0 && sum(bca(:) == j) == 0)
        if((yj==293 && xj<=3157.5 && xj>=1657.5) || (yi==270.5
&& xj<=4402.5 && xj>=3202.5) || (-0.5*xj+1871.75==yj) ||
(8149/3-xj*5/9==yj))
            bca=[bca j];
        end
      end

      if(xk>=1650 && yk~=0 && sum(bca(:) == k) == 0)
        if((yk==293 && xk<=3157.5 && xk>=1657.5) || (yk==270.5
&& xk<=4402.5 && xk>=3202.5) || (-0.5*xk+1871.75==yk) ||
(8149/3-xk*5/9==yk))
            bca=[bca k];
```

```
        end
      end


  end
  R=zeros(n_nds,1);

  T_water = 5;
  for i=1:length(bcw)
     Kc(bcw(i),:)= 0;
     Kc(bcw(i),bcw(i))=1;
     R(bcw(i))=T_water;
  end

  T_air = 25;
  for i=1:length(bca)
     Kc(bca(i),:)= 0;
     Kc(bca(i),bca(i))=1;
     R(bca(i))=T_air;
  end
  T_res = linsolve(Kc,R);
```