Shell Theorem

Alisson Ferreira Martins

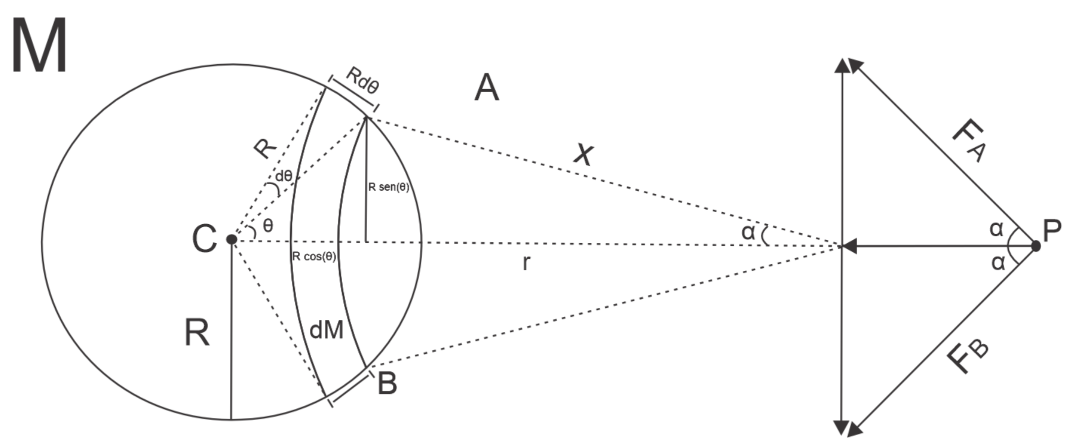
March 2025

1 Teorema das Cascas

1. Teorema da casca nº 1: Uma casca esférica de massa específica uniforme atrai uma partícula externa como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro.

2. Teorema da casca nº 2: Uma casca esférica de massa específica uniforme não exerce nenhuma força gravitacional sobre uma partícula localizada em qualquer lugar do seu interior.

Prova e demonstração



$$F_A = G\frac{Mm}{r^2} \quad \text{e} \quad F_B = G\frac{Mm}{r^2}$$

Como $F_A = F_B = F$, temos:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

As componentes horizontais de F_A e F_B são:

$$F_A \cos(\alpha) + F_B \cos(\alpha) = (F_A + F_B)\cos(\alpha) = 2F\cos(\alpha)$$

As componentes verticais de F_A e F_B são:

$$F_A \operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad F_B \operatorname{sen}(\alpha)$$

Como $F_A = F_B$ e as componentes verticais têm sentidos opostos, elas se anulam:

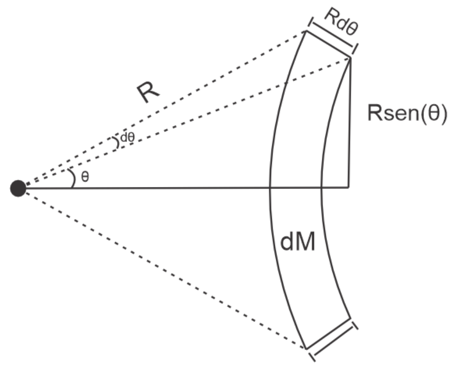
$$F_A \operatorname{sen}(\alpha) - F_B \operatorname{sen}(\alpha) = 0$$

Portanto, a força resultante F_R é dada apenas pelas componentes horizontais:

$$F_R = 2F\cos(\alpha) = 2\left(G\frac{Mm}{r^2}\right)\cos(\alpha)$$

Simplificando:

$$F_R = 2G\frac{Mm}{r^2}\cos(\alpha)$$



Suponha que o elemento de massa da camada seja constituído de um anel circular de massa dM, tenha raio $R\,\mathrm{sen}(\theta)$, comprimento $2\pi R\,\mathrm{sen}(\theta)$, largura R $d\theta$ e espessura e. Seu volume infinitesimal é:

$$dV = [2\pi R\sin(\theta)]\,\cdot(R\,d\theta)\cdot e$$

Ou seja, a equação fica:

$$\boxed{dV = 2\pi eR^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta} \tag{1}$$

A densidade volumétrica de massa ρ é dada por:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

Ou seja, o volume diferencial pode ser expresso como:

$$\boxed{dV = \frac{dM}{\rho}} \tag{2}$$

Agora, substituímos a expressão de dV de (1) na equação (2):

$$\frac{dM}{\rho} = 2\pi eR^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta$$

Portanto, a relação final entre dM e os parâmetros R, θ, e e ρ é:

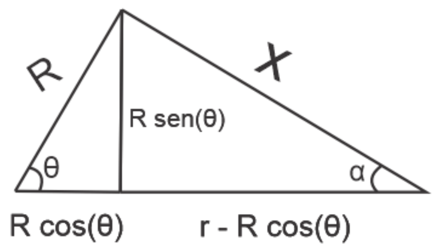
$$\boxed{dM = \rho\cdot 2\pi eR^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta} \tag{3}$$

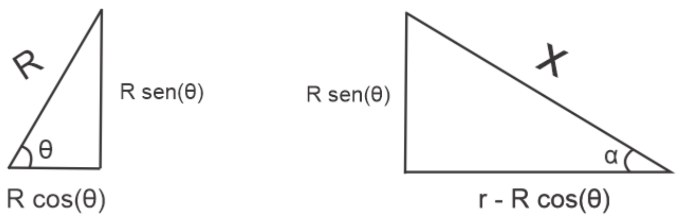
Em forma infinitesimal F é denotado como:

$$\boxed{dF = G\frac{m\,dM\cos(\alpha)}{x^2}} \tag{4}$$

Substituindo (3) em (4) obtemos:

$$\boxed{dF = G\frac{m\,\cos(\alpha)\,\rho\,2\pi eR^2\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta}{x^2}} \tag{5}$$



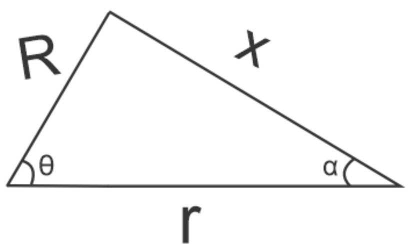


$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{r - R\cos(\theta)}{x}} \tag{6}$$

$$x^2 = R^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + (r - R\cos(\theta))^2$$

$$x^2 = R^2 \sin^2(\theta) + r^2 - 2rR\cos(\theta) + R^2\cos^2(\theta)$$

$$x^2 = R^2(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + r^2 - 2rR\cos(\theta)$$
$$x^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta)$$



Lei dos cossenos:

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta)$$

$$2rR\cos(\theta) = R^2 + r^2 - x^2$$

$$\boxed{R\cos(\theta) = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}} \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6)

$$\cos(\alpha) = \frac{r - \dfrac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}}{x}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}} \tag{8}$$

Colocando na forma infinitesimal em relação a x a expressão $\quad \cos(\theta) = \dfrac{R^2 + r^2 - x^2}{2rR}$

$$\frac{d}{dx}(\cos(\theta)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{R^2 + r^2 - x^2}{2rR}\right)$$

Aplicamos a derivada da fração:

$$\frac{d\cos(\theta)}{dx} = \frac{-4rR - (R^2 + r^2 - x) \cdot 0}{4r^2R^2}$$

Como a expressão $R^2 + r^2 - x$ é constante em relação a x, sua derivada é zero, e o numerador se simplifica para:

$$\frac{d\cos(\theta)}{dx} = \frac{-4xrR}{4r^2R^2}$$

Agora aplicamos a regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\cos(\theta) = \frac{-4xrR}{4r^2R^2}$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{d\theta}\cos(\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$$

Substituímos na equação:

$$-\operatorname{sen}(\theta)\frac{d\theta}{dx} = \frac{-x}{rR}$$

Multiplicamos ambos os lados por -1:

$$\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = \frac{x}{rR}\, dx$$

Finalmente, obtemos o resultado:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta)\, d\theta = \frac{x}{rR}\, dx} \tag{9}$$

Substituindo as equações (8) e (9) na expressão para a força infinitesimal dF:

$$\boxed{dF = G\frac{m\, \cos(\alpha)\, \rho\, 2\pi e R^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta}{x^2}} \tag{10}$$

$$dF = 2\pi e\rho R^2 G\frac{m}{x^2}\left(\frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}\right)\left(\frac{x}{rR}\right)\,dx$$

Integrando dos dois lados da expressão

$$\int dF = \int 2\pi e\rho R^2 G\frac{m}{x^2}\left(\frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}\right)\left(\frac{x}{rR}\right)\,dx$$

Removendo para fora da integral os termos constantes

$$\int dF = \frac{2\pi e\rho R^2 Gm}{2r^2 R}\int \frac{1}{x^2}\left(\frac{r^2 - R^2 + x^2}{x}\right)x\,dx$$

Integrando do intervalo $x = r + R$ a $x = r - R$ podemos reescrever:

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\int_{r-R}^{r+R}\frac{r^2 - R^2x^2}{x^2}\,dx$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)\,dx$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)\,dx$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\left[\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2}\right)\,dx + \int_{r-R}^{r+R} 1\,dx\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\left[\left((r^2 - R^2)\int_{r-R}^{r+R}\frac{1}{x^2}\,dx + x\Big|_{r-R}^{r+R}\right)\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\left[(r^2 - R^2)\left[-\frac{1}{x}\right]_{r-R}^{r+R} + [(r + R) - (r - R)]\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\left[\frac{(-r + R + r + R}{(r + R)(r - R)} + 2R\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2}e\rho RGm\left[\underbrace{(r^2 - R^2)\frac{2R}{(r^2 - R^2)} + 2R}_{2R+2R}\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2}\,e\,\rho\,R\,G\,m(2R + 2R)$$

$$F = \frac{1}{r^2}\,e\,\rho\,R\,G\,m\,4R$$

Reorganizando

$$\boxed{F = \frac{Gm}{r^2}\,4\pi\rho R^2 e} \tag{11}$$

- Área da casca esférica: $A = 4\pi R^2$

- Volume da casca esférica: $V = A \cdot e = 4\pi R^2 e$
- Densidade de massa para a casca esférica: $\rho = \dfrac{M}{V}$

$$M = \rho V = \rho 4\pi R^2 e \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11)

$$F = \frac{Gm}{r^2}\underbrace{4\pi\rho R^2 e}_{M}$$

Portanto

$$\boxed{F = G\frac{Mm}{r^2}} \tag{13}$$

"O campo gravitacional externo gerado por uma distribuição esférica de massa é idêntico ao de uma massa pontual localizada em seu centro."