Leis de Newton

Alisson Ferreira Martins

2024

Sumário

1 O princípio da Dinâmica **2**
- 1.1 Forças e Suas Consequências Dinâmicas 2
- 1.2 Força resultante 2
- 1.3 Equilíbrio de uma partícula 3
- 1.4 Equilíbrio Estático 3
- 1.5 Inércia 3

2 O Princípio da Inércia (1ª Lei de Newton) **4**

3 O Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton) **5**

4 Peso **8**
- 4.1 Força Peso 8
- 4.2 Corpos com "peso" nulo: levitação 10

5 A força de resistência do ar e o estudo da queda vertical de um corpo no ar **11**
- 5.0.1 A força de resistência do ar 11
- 5.0.2 Queda vertical, no ar, de um corpo de dimensões relativamente pequenas 12

6 Deformações em sistemas elásticos **14**
- 6.1 Lei de Hooke 14
- 6.2 O dinâmometro 16
- 6.3 Associação de molas 17
  - 6.3.1 Associação em série 17
  - 6.3.2 Associação em paralelo 21

7 O Princípio da Ação e da Reação(3ª Lei de Newton) **23**

8 Atrito entre sólidos **26**
- 8.0.1 O atrito estático 27
- 8.0.2 Cálculo da intensidade da força de atrito de destaque (F_{at_d}) 29
- 8.0.3 Compressão horizontal 30
- 8.1 Atrito cinético 33
- 8.2 Cálculo da intensidade da força de atrito cinético (F_{atc}) 33
- 8.3 Lei do atrito 35
- 8.4 Força máxima e mínima em um plano inclinado 35

1 O princípio da Dinâmica

Vivemos em um universo que se move. Nosso planeta se move, os carros se movem, o ar se move, as estrelas se movem, os satélites e os cometas. O movimento intriga a humanidade desde os tempos mais remotos. Qual a causa do movimento? Muitos formularam hipóteses para explicar a origem do movimento, como Aristóteles, seguido por Galileu, Newton e Einstein.

1.1 Forças e Suas Consequências Dinâmicas

Força nada mais é que interação, no universo temos interações, mediadas por forças, forças de origem gravitacionais, eletromagnéticas, fraca e forte. O efeito dinâmico de uma força é a aceleração.

1.2 Força resultante

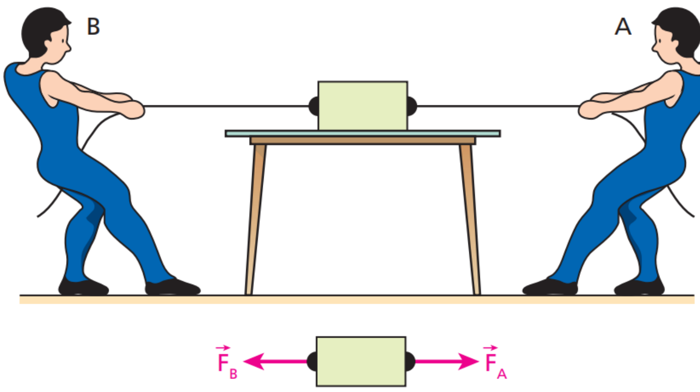

Figura 1: Arranjo experimental com o bloco puxado pelos garotos A e B. O garoto A puxa o bloco para a direita com a força $\vec{F_A}$, enquanto o garoto B puxa para a esquerda com a força $\vec{F_B}$. A aceleração $\vec{a}$ do bloco depende da comparação entre as intensidades das forças. Se apenas A puxasse, o bloco aceleraria para a direita com a_A; se apenas B puxasse, a aceleração seria para a esquerda com a_B.

Considerando a relação entre as forças, temos:

1. Se $|\vec{F_A}| > |\vec{F_B}|$:
   - A força resultante será dirigida para a direita.
   - A aceleração $\vec{a} > 0$.
2. Se $|\vec{F_A}| < |\vec{F_B}|$:
   - A força resultante será orientada para a esquerda.
   - A aceleração $\vec{a} < 0$.
3. Se $|\vec{F_A}| = |\vec{F_B}|$:
   - O sistema estará em equilíbrio.
   - A aceleração $\vec{a} = 0$.

A força resultante de $\vec{F_A}$ e $\vec{F_B}$ equivale a uma força única que, atuando sozinha, imprime ao bloco a mesma aceleração que $\vec{F_A}$ e $\vec{F_B}$ imprimiriam se agissem em conjunto.

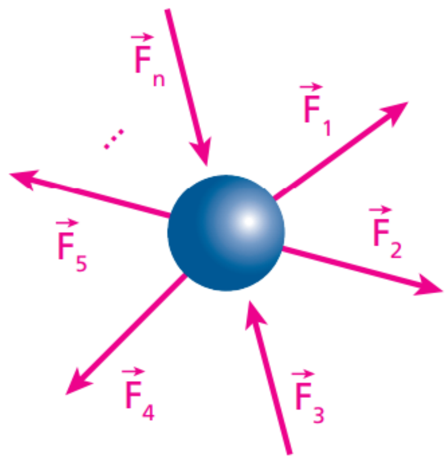

Figura 2: A resultante F desse sistema de forças é a soma vetorial das n forças atuantes $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Nota: A resultante F não representa uma força adicional atuando na partícula; ao contrário, F é o resultado da soma vetorial dos vetores de forças $F_1, F_2, \ldots, F_n$ que atuam sobre ela.

1.3 Equilíbrio de uma partícula

Uma partícula está em equilíbrio ou parada em relação a um referencial quando a soma de todas as forças que agem sobre ela é zero.

1.4 Equilíbrio Estático

Uma partícula está em equilíbrio estático quando permanece em repouso em relação a um referencial. Isso acontece quando todas as forças que atuam sobre ela se cancelam, resultando em uma força líquida igual a zero. Dessa forma, a partícula não se movimenta.

$$\vec{v} = \textbf{constante} = 0$$

1.5 Inércia

Inércia é a tendência dos corpos de manterem seu estado de movimento.

1. Tudo o que possui matéria tem inércia.

2. A inércia é uma característica própria da matéria.

3. Para que as tendências inerciais de um corpo sejam vencidas, é necessária a intervenção de uma força externa.

2 O Princípio da Inércia ($1^{\underline{a}}$ Lei de Newton)

1. Enunciado: Se a força resultante sobre uma partícula é nula, ela permanece em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

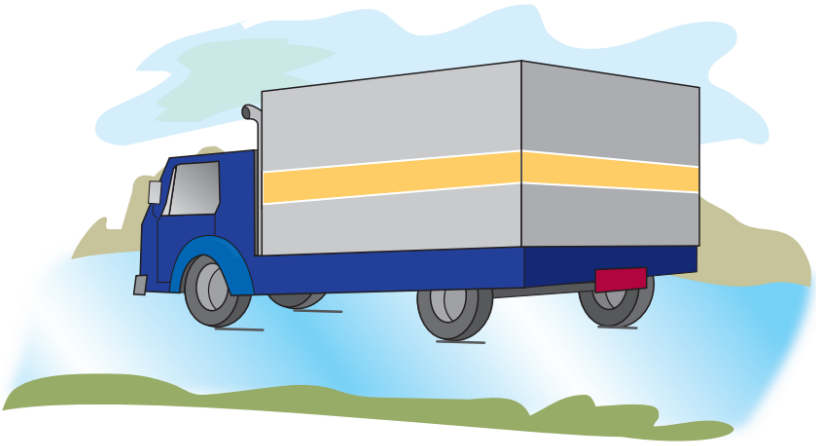

Figura 3: Quando em repouso, enquanto a força resultante for nula, o caminhão permanecerá em repouso, por inércia.

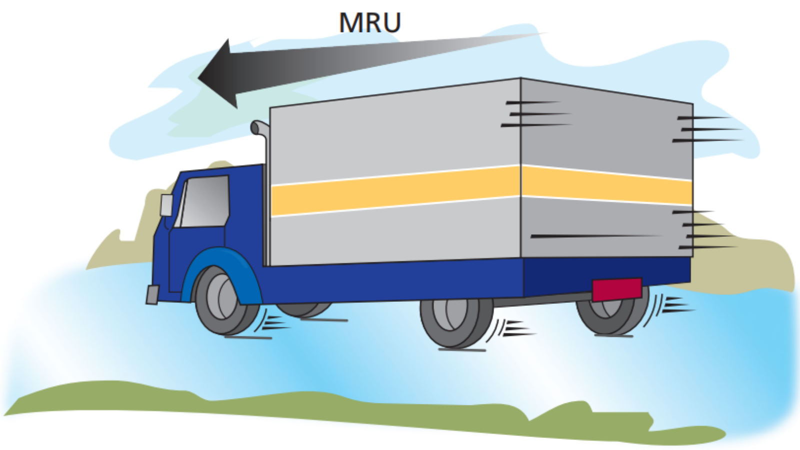

Figura 4: Quando em movimento, enquanto a força resultante for nula, o caminhão seguirá em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

2. Enunciado: Um corpo livre de uma força externa resultante é incapaz de variar sua própria velocidade vetorial.

3 O Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton)

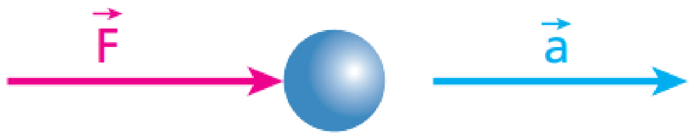

Figura 5: Consideremos uma partícula submetida à ação de uma força resultante $\vec{F}$. Ela adquirirá uma aceleração $\vec{a}$, isto é, experimentará variações de velocidade ao longo do tempo. Se $\vec{F}$ é horizontal e dirigida para a direita, a aceleração $\vec{a}$ terá a mesma orientação, ou seja, será horizontal para a direita. Assim, se $\vec{F}$ é a resultante das forças que agem na partícula, $\vec{a}$ terá a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{F}$. Se aumentarmos a intensidade de $\vec{F}$, verifica-se que esse aumento provoca um aumento diretamente proporcional no módulo de $\vec{a}$, fazendo com que a partícula experimente variações de velocidade cada vez maiores para um mesmo intervalo de tempo.

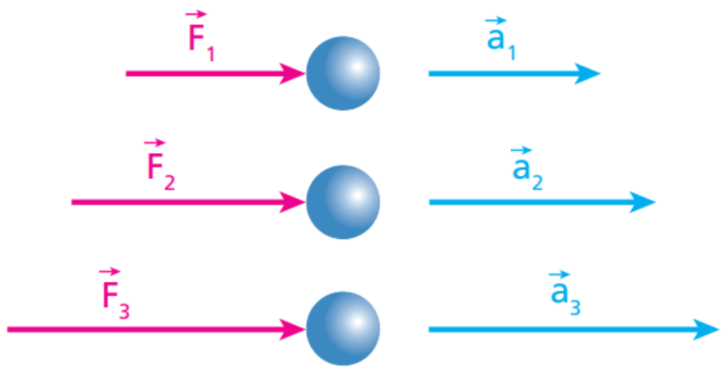

Figura 6: Considerando o exemplo esquematizado na figura, uma mesma partícula é submetida, sucessivamente, à ação das forças resultantes $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$. Consequentemente, a partícula irá adquirir, respectivamente, as acelerações $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ e $\vec{a_3}$. Assim, se $\vec{F_3} > \vec{F_2} > \vec{F_1}$, temos $\vec{a_3} > \vec{a_2} > \vec{a_1}$.

Lembrando que o módulo da aceleração é diretamente proporcional à intensidade da força, podemos escrever:

$$\frac{\vec{F_3}}{\vec{a_3}} = \frac{\vec{F_2}}{\vec{a_2}} = \frac{\vec{F_1}}{\vec{a_1}} = k$$

em que k é a constante de proporcionalidade. Essa constante está ligada à dificuldade de se produzir uma determinada aceleração na partícula, referindo-se à medida da inércia da partícula. Essa constante denomina-se massa (inercial) da partícula e é simbolizada por m. Daí segue que:

$$\frac{\vec{F_3}}{\vec{a_3}} = \frac{\vec{F_2}}{\vec{a_2}} = \frac{\vec{F_1}}{\vec{a_1}} = m$$

Ou, de forma genérica:

$$\frac{F}{a} = m \quad \Rightarrow \quad F = ma$$

Tendo em vista o exposto, cabe ao Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton) o seguinte enunciado:

Se $\vec{F}$ é a resultante das forças que agem em uma partícula, então, em consequência de $\vec{F}$, a partícula adquire, na mesma direção e no mesmo sentido da força, uma aceleração $\vec{a}$, cujo módulo é diretamente proporcional à intensidade da força. A expressão matemática da 2ª Lei de Newton é:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

No SI, a unidade de massa é o quilograma (kg), que corresponde à massa de um protótipo cilíndrico de platina iridiada, conservado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França.

Figura 7: Um litro de leite tipo C,que tem uma grande porcentagem de água, apresenta massa muito próxima de 1 kg.

Outras unidades de massa frequentemente usadas são:

- tonelada (t) = $1\,\text{t} = 1{,}000\,\text{kg} = 10^3\,\text{kg}$
- grama (g) = $1\,\text{g} = 0{,}001\,\text{kg} = 10^{-3}\,\text{kg}$
- miligrama (mg) = $1\,\text{mg} = 0{,}001\,\text{g} = 10^{-6}\,\text{kg}$

Nota: É importante ter atenção às diferentes unidades de massa, pois podem afetar os cálculos e resultados em física.

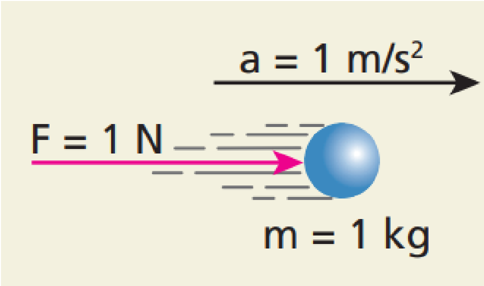

Figura 8: **Um newton** é a intensidade da força que, aplicada em uma partícula de massa igual a 1 quilograma, produz na sua direção e no seu sentido uma aceleração de módulo 1 metro por segundo, por segundo.

Figura 9: Fotografia de quilograma- -padrão exposto no Escritório Internacionalde Pesos e Medidas, emSèvres, França.

A medição de massa e das demais grandezas físicas que com ela se relacionam – como força, energia e quantidade de movimento – depende de um objeto cilíndrico de platina-irídio com diâmetro e altura iguais a 39 mm (do tamanho de uma ameixa), confeccionado há mais de cem anos. Esse protótipo, entretanto, tem se mostrado inadequado, já que foi comprovada uma alteração de sua massa em cerca de 50 microgramas desde a sua elaboração.

Por isso, está se cogitando um padrão de medida de massa baseado em algum fenômeno natural que se repita da mesma forma, independentemente de época ou condições externas. Duas abordagens despontam como mais promissoras: uma está relacionada à massa de uma determinada quantidade de carbono-12, e outra envolve fenômenos quânticos.

Outras duas grandezas físicas fundamentais – o comprimento e o tempo – já dispõem de unidades de medida no SI definidas a partir de fenômenos naturais. Um metro equivale à distância percorrida pela luz no vácuo durante $\frac{1}{299792458}$ de segundo. Por outro lado, um segundo corresponde à duração de 9.192.631.770 períodos da radiação emitida pelo átomo de césio-133 na transição entre dois níveis hiperfinos do seu estado fundamental.

4 Peso

4.1 Força Peso

Um corpo é tanto mais pesado quanto mais intensa for a força de atração gravitacional exercida pelo planeta sobre ele. Se deixarmos cair uma bola de futebol ou outros objetos nas proximidades da Terra, eles cairão verticalmente, indo em direção à superfície do planeta. Isso se deve a uma interação de natureza gravitacional que ocorre entre a Terra e o objeto, que recebe uma força atrativa dirigida para o centro de massa do planeta. Essa força é o que, na ausência de atritos, faz o corpo descer em movimento acelerado até colidir com o solo.

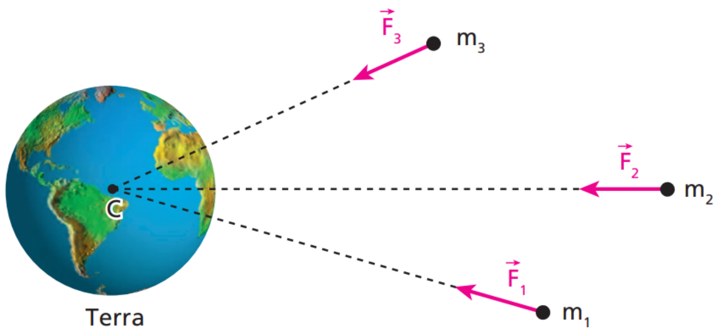

Figura 10: **As massas m_1, m_2 e m_3 são atraídas gravitacionalmente por meio das forças $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$, respectivamente. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)**

O peso de um corpo é a força de atração gravitacional exercida sobre ele.

É importante destacar que a aceleração produzida pela força gravitacional (peso) é aceleração da gravidade ($\vec{g}$), que constitui o vetor característico da interação de campo entre a Terra e o corpo.

Por meio de diversos experimentos, pôde-se constatar que, ao nível do mar e em um local de latitude 45°, o módulo de g (denominado normal) vale:

$$g_n = 9.80665 \quad \text{m/s}^2$$

Sejam três corpos de pesos P_1, P_2, P_3, com massas respectivamente iguais a m_1, m_2 e m_3, situados em um mesmo local. Através de experimentos, verifica-se que a intensidade do peso é diretamente proporcional à massa do corpo considerado. À maior massa corresponde o peso de maior intensidade.

Levando em conta a proporcionalidade mencionada, podemos escrever que:

$$\frac{|\vec{P_1}|}{m_1} = \frac{|\vec{P_2}|}{m_2} = \frac{|\vec{P_3}|}{m_3} = k \quad \text{(constante)}$$

A constante da proporcionalidade (k) é o módulo da aceleração da gravidade do local, o que nos permite escrever que:

$$\frac{|\vec{P}|}{m} = |\vec{g}| \Rightarrow |\vec{P}| = m|\vec{g}|$$

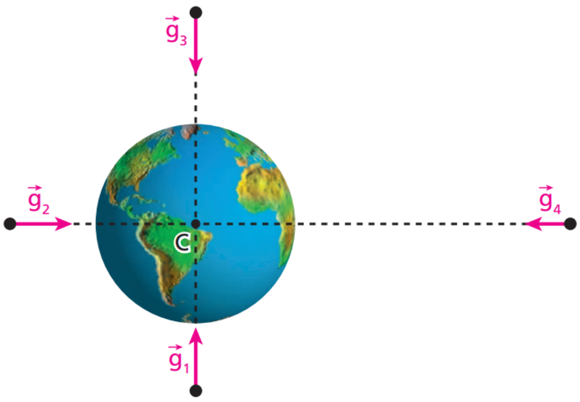

Figura 11: **A intensidade de g, por sua vez, depende do local em que é feita a avaliação. Quanto maior for a distância do ponto considerado à superfície terrestre, menor será a magnitude da aceleração da gravidade, o que significa que g decresce com a altitude. Além disso, e em razão principalmente da rotação da Terra, verifica-se que, sobre a superfície terrestre, do Equador para os polos, g cresce, mostrando que o valor dessa aceleração varia com a latitude.**

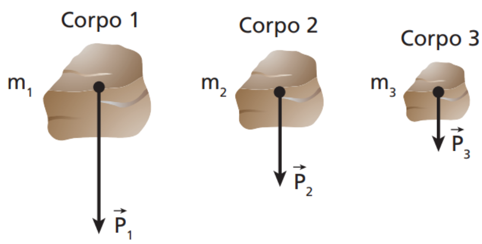

Figura 12: **Ilustração dos corpos e suas respectivas forças de peso.**

ou vetorialmente:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

Observe que a massa m é uma grandeza escalar, enquanto o peso $\vec{P}$ é uma grandeza vetorial. Assim, o peso tem direção (da vertical do lugar) e sentido (para baixo).

De acordo com os preceitos da Mecânica Clássica, a massa de um corpo é uma característica sua, sendo constante em qualquer ponto do Universo. No entanto, o mesmo não ocorre com o peso, que é função do local, já que depende de g. Na Lua, por exemplo, uma mesma pessoa pesa cerca de $\frac{1}{6}$ do que pesa na Terra, pois o módulo da aceleração da gravidade na superfície lunar é cerca de $1,67\,\mathrm{m/s^2}$, o que corresponde a $\frac{1}{6}$ de $9,8\,\mathrm{m/s^2}$ aproximadamente.

4.2 Corpos com "peso" nulo: levitação

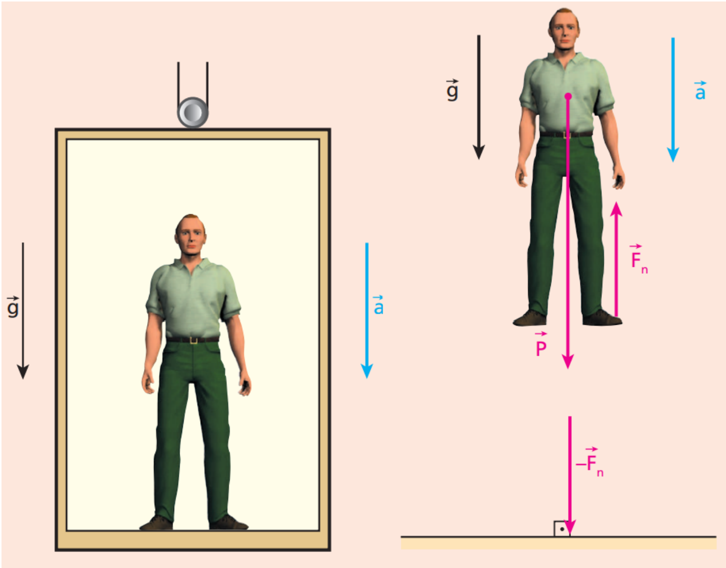

Figura 13: Uma pessoa de massa (m) apoiada sobre um piso de um elevador que se movimenta verticalmente com aceleração de intensidade $\vec{a}$, dirigida para baixo.

Há duas forças de ação-reação, o peso (P_n) e a reação normal exercida pelo piso ($\vec{F_n}$). A força normal ($-\vec{F_n}$) que a pessoa aplica no piso do elevador constitui seu "peso aparente" P_{ap}, o peso que é indicado por uma balança, caso a pessoa estivesse sobre uma.

P_{ap} pode ser determinado através da **Segunda Lei de Newton**

$$P - F_n = ma$$

$$mg - P_{ap} = ma$$

Isolando P_{ap} obtemos

$$\boxed{P_{ap} = m(g - a)}$$

Um caso interessante é pensarmos o que aconteceria se a aceleração do elevador fosse igual à da gravidade. Como $a = g$, isso implicaria um peso aparente $P_{ap} = 0$. Entraria em um estado de levitação, não existiria nenhuma compressão no piso, a aceleração seria nula.

$$P_{ap} = m(g - a)$$

$$P_{ap} = m \underbrace{(g - g)}_{\text{aceleração=0}}$$

$$\boxed{P_{ap} = 0}$$

Essa situação ocorre, por exemplo, com um astronauta confinado em uma espaçonave em órbita da Terra. Nesse caso, a aceleração do sistema é causada pela gravidade, fazendo com que o astronauta e os objetos dentro da nave fiquem sem peso, como se fossem imponderáveis. Dessa forma, é possível movimentar os corpos dentro da nave com facilidade, utilizando os movimentos inerciais que se seguem a pequenos impulsos.

5 A força de resistência do ar e o estudo da queda vertical de um corpo no ar

5.0.1 A força de resistência do ar

Por ser um meio gasoso, o ar permite a passagem de corpos através dele. Esses corpos, porém, colidem com as moléculas do ar durante o movimento, ficando sujeitos a uma força de oposição ao avanço, denominada força de resistência do ar. Essa força é tanto mais intensa quanto maior for a área da superfície externa do corpo exposta às colisões com as partículas do ar.

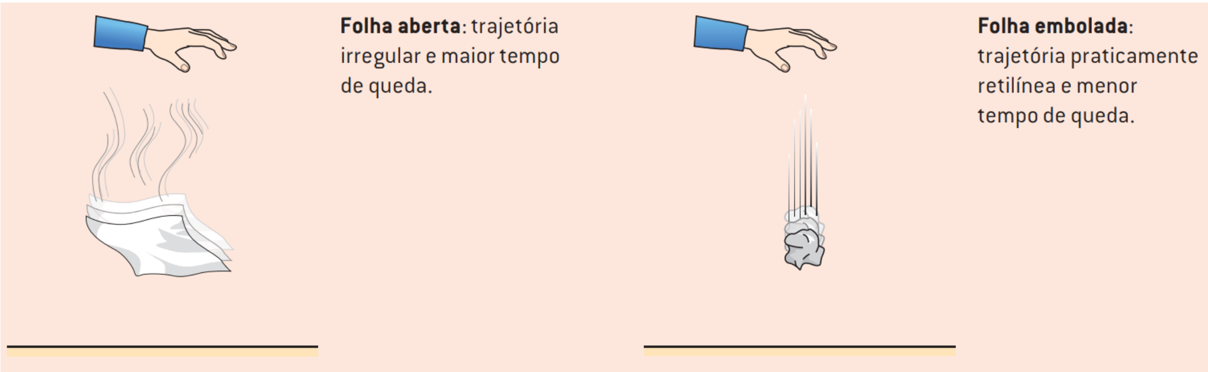

Figura 14: Um experimento simples que demonstra esse conceito pode ser realizado usando uma folha de papel. Quando a folha é deixada cair aberta, sua trajetória será irregular. No entanto, se a mesma folha for lançada do mesmo ponto, mas em forma de bola, ela seguirá uma trajetória quase reta e atingirá o solo em um tempo menor do que na primeira situação. Isso evidencia que, no caso da folha embolada, a resistência do ar é reduzida, pois a área em contato com as moléculas de ar é menor.

a força de resistência do ar é tanto mais intensa quanto maior for a velocidade do corpo em relação ao ar, o que se justifica pela intensificação dos efeitos das colisões das partículas de ar contr o corpo. Experimentalmente é verificado que a descrição matemática que melhor se adequa é quadrática, sendo expressa portanto da seguinte forma,

$$\boxed{F_r = Kv^2}$$

- F_r é a intensidade da força de resistência do ar;
- K é um coeficiente que depende da forma do corpo, da densidade do ar e da maior
- área de uma seção do corpo perpendicular à direção do movimento; v é a intensidade da velocidade.

O design de um carro determina sua forma aerodinâmica, influenciando o coeficiente de resistência do ar (k). Carros com valores baixos de k enfrentam menos resistência do ar, que aumenta com a velocidade. Assim, a força de resistência exercida pelo ar em um carro em movimento depende da aerodinâmica e da velocidade do veículo.

5.0.2 Queda vertical, no ar, de um corpo de dimensões relativamente pequenas

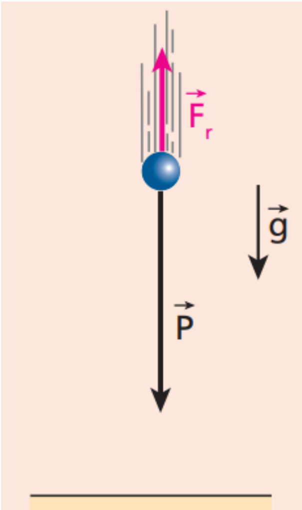

Figura 15: Corpo esférico abandonado partindo-se do repouso de uma grande altitude em relação ao solo. Desprezando-se a ação de ventos, durante a queda há apenas duas forças agindo sobre ele força peso ($\vec{P}$) e a força de resistência do ar $\vec{F_r}$.

Supondo que as variações do campo gravitacional sejam desprezíveis, seu peso permanecerá constante durante o movimento. No entanto, a força de resistência do ar terá sua intensidade aumentada conforme o corpo adquirir mais velocidade. O movimento acelerado terá duração limitada, pois, quando o corpo atinge certa velocidade, a força de resistência do ar terá seu valor proporcional à força peso. Nesse momento, podemos dizer que o corpo atingiu sua velocidade terminal (limite), onde a força resultante F_R é nula. O corpo, portanto, percorrerá o restante do trajeto em movimento retilíneo e uniforme por inércia, pois não há nenhuma força atuando.

Figura 16: Um paraquedista descreve, inicialmente, um movimento acelerado na direção vertical, sob a ação da força da gravidade (peso) e da força vertical de resistência do ar. A partir do instante em que a força resistente aplicada pelo ar equilibra o peso, o movimento do esportista torna-se uniforme e a velocidade constante adquirida é a velocidade terminal (limite).

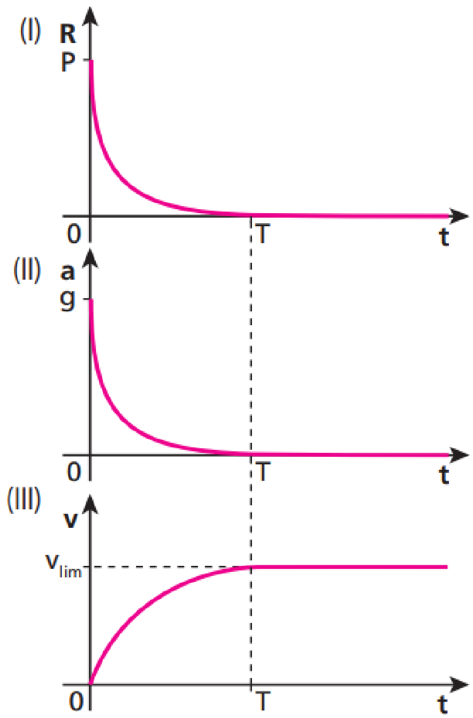

Figura 17: No gráfico (I), (II), (III), temos variações com o tempo (t) da intensidade da força resultante sobre o corpo (R), da intensidade da aceleração (a) e da intensidade da velocidade (v), g é o módulo da aceleração da gravidade, v_{lim} é o módulo da velocidade terminal (limite) atingida pelo corpo e T é o instante de tempo em que é atingida essa velocidade.

$$\boxed{\text{Condição: } v_{\text{lim}} = |\vec{F}_r| = |\vec{P}|}$$

6 Deformações em sistemas elásticos

6.1 Lei de Hooke

Consideremos uma mola de massa desprezível e que possui uma de suas extremidades fixas. Uma força $\vec{F}$ é aplicada em sua extremidade livre (B), provocando uma deformação (alongamento) ΔX. A força $\vec{F}$ foi suprimida (C) e a mola foi restituída em seu estado original x_0.

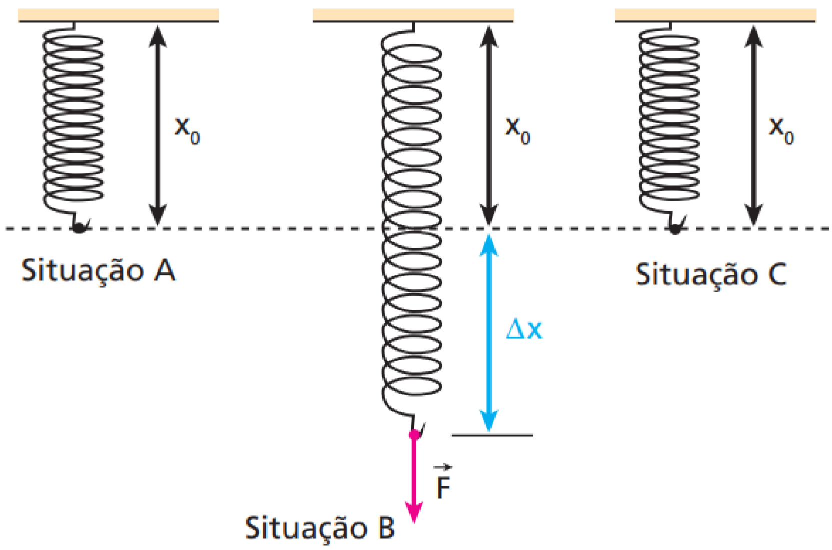

Figura 18: **Mola de massa desprezível e com uma de suas extremidades fixas.**

A mola recobrou seu formato original (x_0 após o encerramento da ação da força, ela sofreu uma **Deformação elástica**. Robert Hooke chegou a uma conclusão conhecida por **Lei de Hooke**.

A deformação sofrida por uma mola em um regime elástico é diretamente proporcional à intensidade da força que a provoca.

Matematicamente podemos formalizar como

$$\boxed{F = K\Delta x}$$

F é a força deformadora; K é a constante de proporcionalidade que depende da propriedade do material ao qual é feito a mola; Δx é a deformação da mola (esticamento). A constante é chamada de constante elástica e tem por unidade padrão no SI o $\frac{N}{m}$.

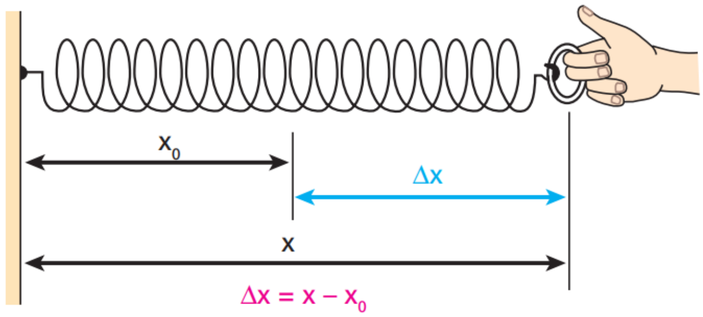

Figura 19: Mola em regime de deformação elástica devido a aplicação de uma força.

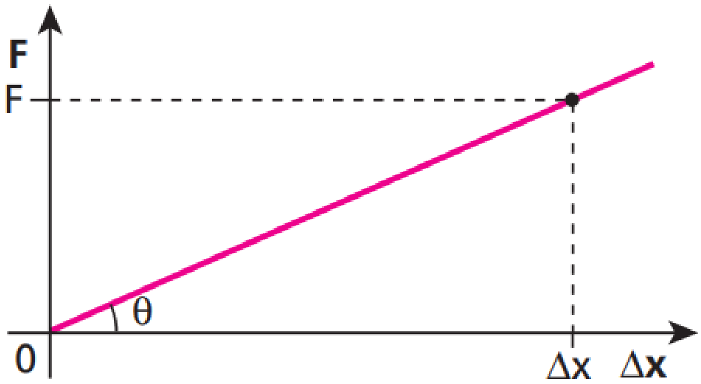

Figura 20: Intensidade da força em função da deformação de uma mola em regime de deformação, o comportamento dura até certo de limite de elasticidade, a mola ao chegar ao ultrapassar esse limite pode ter seu K alterado e o formato gráfico alterado.

A declividade do gráfico ou tangente nos informa a constante elástica sendo representada matemática como,

$$tg\theta = \frac{F}{\Delta x} = K$$

6.2 O dinâmometro

O dinâmometro é um dispositivo que nos informa a intensidade de forças que estão sendo aplicadas. O aparelho funciona através das deformações elásticas de uma mola que tem ligado a si um cursor. Conforme a mola é deformada, o cursor percorre uma escala impressa no aparato que informa a intensidade da soma de todas as forças que estão sendo aplicadas. A calibração é feita utilizando-se de corpos de peso já é conhecidos e pode ser graduada em kgf ou N.

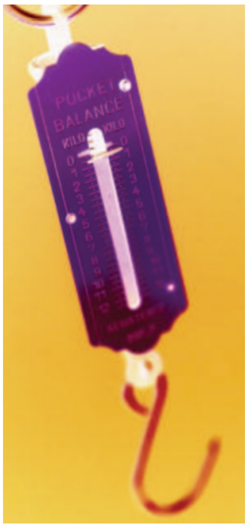

Figura 21: Um dinâmometro calibrado em kgf.

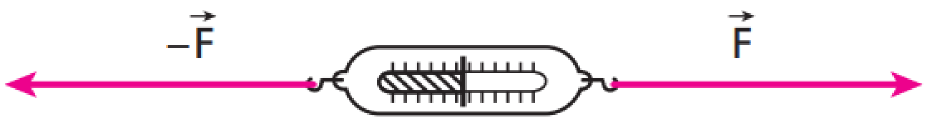

Figura 22: A força resultante no dinâmometro de massa desprezível (dinâmometro ideal) é nula. Portanto é notório dizer que suas extremidades são puxadas por forças opostas $\vec{F} e -\vec{F}$ sendo os vetores de mesmo módulo, direção, porém sentido contrário.

O dinâmometro indica pra gente a força que foi aplicada em uma de suas extremidades, por ambas extremidades estarem ligadas por um fio, o dinâmometro irá indicar para gente a força de tração (T) estabelecida no fio.

6.3 Associação de molas

6.3.1 Associação em série

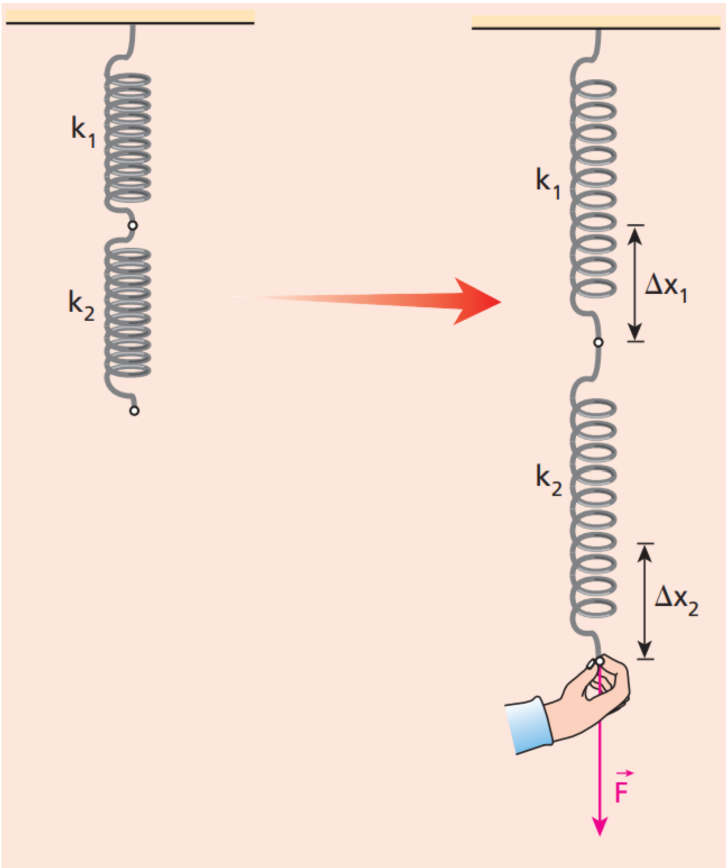

Figura 23: Dispostas duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2, a intensidade da força aplicada nas duas molas representa a deformação total do sistema, Δx.

A deformação total do sistema de duas molas será a soma das deformações individuais de cada mola:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Sabemos que a força elástica para cada mola é dada por $F_{el} = K\Delta x$, e que a deformação de uma mola individual pode ser escrita em termos da força elástica e sua constante elástica:

$$\Delta x = \frac{F_{el}}{K}$$

Para o sistema de duas molas, cada mola possui uma constante elástica k_1 e k_2. Logo, temos:

$$\Delta x_1 = \frac{F_{el}}{k_1} \quad \text{e} \quad \Delta x_2 = \frac{F_{el}}{k_2}$$

Substituímos essas expressões na equação da deformação total:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F_{el}}{k_1} + \frac{F_{el}}{k_2}$$

Colocando F_{el} em evidência:

$$\Delta x = F_{el} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

Agora, podemos expressar a constante elástica equivalente K_s para o sistema em termos da deformação total:

$$\Delta x = \frac{F_{el}}{K_s}$$

Igualando as duas expressões para Δx:

$$\frac{F_{el}}{K_s} = F_{el} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

Dividindo ambos os lados por F_{el} (supondo $F_{el} \neq 0$):

$$\boxed{\frac{1}{K_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Isolando K_s

Para isolar a constante elástica equivalente K_s, partimos da seguinte equação:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Utilizamos o denominador comum $k_1 k_2$ para somar as frações do lado direito:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2}$$

Invertemos ambos os lados da equação para isolar K_s:

$$\boxed{K_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

Caso geral para n molas em série

Quando temos n molas conectadas em série, a deformação total Δx é a soma das deformações individuais de cada mola:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_n$$

Sabemos que a força elástica F_{el} é dada por:

$$F_{el} = K \Delta x$$

A deformação de uma mola individual pode ser expressa em termos da força F_{el} e da constante elástica da mola K:

$$\Delta x = \frac{F_{el}}{K}$$

No caso de n molas em série, cada mola possui uma constante elástica diferente $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Assim, para a i-ésima mola, a deformação será:

$$\Delta x_i = \frac{F_{el}}{k_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Substituímos essas expressões na equação da deformação total:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{el}}{k_i} = F_{el} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \right)$$

Agora, podemos expressar a constante elástica equivalente K_s para o sistema de molas em série. A deformação total Δx também pode ser reescrita em termos de K_s:

$$\Delta x = \frac{F_{el}}{K_s}$$

Igualando as duas expressões para Δx:

$$\frac{F_{el}}{K_s} = F_{el} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \right)$$

Dividimos ambos os lados por F_{el} (supondo que $F_{el} \neq 0$):

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

Essa é a expressão geral para a constante elástica equivalente de n molas em série. De forma condensada, temos:

$$\boxed{\frac{1}{K_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}$$

Ou, em termos de K_s:

$$\boxed{K_s = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \right)}}$$

Vamos chamar a soma no denominador de S:

$$S = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

Agora, reescrevendo K_s em termos de S:

$$K_s = \frac{1}{S}$$

Para inverter a soma, você deve usar a propriedade da inversão de frações. A inversão de S se dá pela multiplicação do numerador e denominador pela soma dos denominadores:

$$S = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = \frac{k_2 k_3 \ldots k_n + k_1 k_3 \ldots k_n + \ldots + k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

O resultado da soma S é:

$$S = \frac{(k_2 k_3 \ldots k_n) + (k_1 k_3 \ldots k_n) + \cdots + (k_1 k_2 \ldots k_{n-1})}{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

Substituindo S de volta em K_s:

$$K_s = \frac{1}{S} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{(k_2 k_3 \ldots k_n) + (k_1 k_3 \ldots k_n) + \ldots + (k_1 k_2 \ldots k_{n-1})}$$

Portanto, a expressão para K_s após inverter o denominador é:

$$\boxed{K_s = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}\right)} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{(k_2 k_3 \ldots k_n) + (k_1 k_3 \ldots k_n) + \ldots + (k_1 k_2 \ldots k_{n-1})}}$$

6.3.2 Associação em paralelo

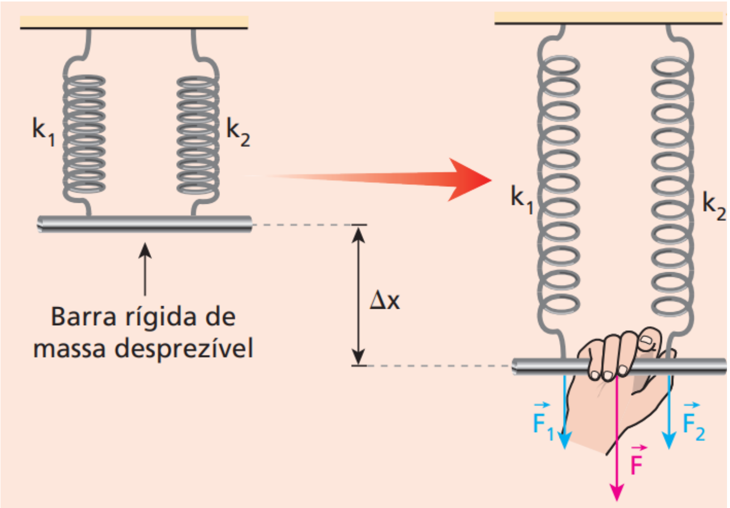

Figura 24: Aplicando-se uma força $\vec{F}$ em um ponto central da barra, as duas molas sofrem deformações equivalentes e a intensidade de $\vec{F}$ aplicada na barra corresponde a soma das intensidades das forças aplicadas em cada mola.

Quando temos molas conectadas em paralelo, a força total exercida pelo sistema de molas é a soma das forças exercidas por cada mola individual.

Caso de Duas Molas em Paralelo

Para duas molas em paralelo, as constantes elásticas são k_1 e k_2. A força elástica total F_{total} é dada pela soma das forças individuais F_1 e F_2:

$$F_{total} = F_1 + F_2$$

Sabemos que a força elástica para cada mola é dada por:

$$F_1 = k_1 \Delta x \quad \text{e} \quad F_2 = k_2 \Delta x$$

Substituindo as expressões para F_1 e F_2 na equação da força total, obtemos:

$$F_{total} = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x$$

Colocando Δx em evidência, temos:

$$F_{total} = (k_1 + k_2) \Delta x$$

A constante elástica equivalente k_p para o sistema de duas molas em paralelo é definida como:

$$F_{total} = k_p \Delta x$$

Igualando as duas expressões para F_{total}:

$$k_p \Delta x = (k_1 + k_2) \Delta x$$

Dividindo ambos os lados por Δx (supondo $\Delta x \neq 0$):

$$k_p = k_1 + k_2$$

Assim, temos a constante elástica equivalente para duas molas em paralelo:

$$\boxed{k_p = k_1 + k_2}$$

Caso Geral para n Molas em Paralelo

Agora, consideremos n molas conectadas em paralelo. Para cada mola i, temos uma constante elástica k_i e a força exercida por cada mola é dada por:

$$F_i = k_i \Delta x \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

A força total F_{total} para n molas em paralelo será:

$$F_{total} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x + \ldots + k_n \Delta x$$

Colocando Δx em evidência:

$$F_{total} = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \Delta x$$

Definindo a constante elástica equivalente k_p para o sistema de n molas em paralelo como:

$$F_{total} = k_p \Delta x$$

Igualando as duas expressões para F_{total}:

$$k_p \Delta x = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \Delta x$$

Dividindo ambos os lados por Δx (supondo $\Delta x \neq 0$):

$$k_p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

Assim, temos a constante elástica equivalente para n molas em paralelo:

$$\boxed{k_p = k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$$

7 O Princípio da Ação e da Reação(3ª Lei de Newton)

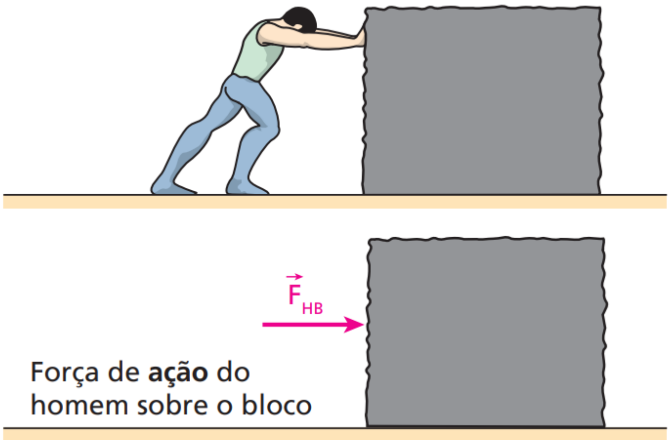

Figura 25: **Ao empurrar o bloco, o homem aplica sobre ele uma força $\vec{F_{HB}}$, que convencionaremos chamar de força de ação.**

Será que o bloco também “empurra” o homem?Sim! Mostram fatos experimentais que, se o homem exerce força no bloco, este faz o mesmo em relação ao homem.

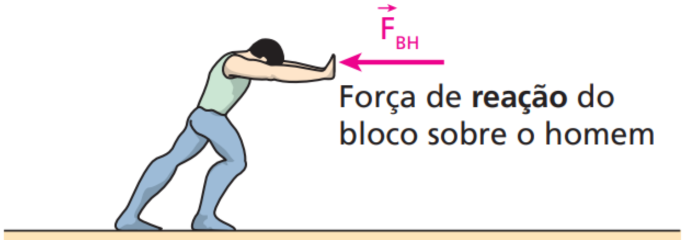

Figura 26: **O bloco aplica no homem uma força $\vec{F_{BH}}$, dirigida para a esquerda, que convencionaremos chamar de força de reação.**

Em resumo, o homem exerce no bloco uma força $\vec{F_{BH}}$, horizontal e para a direita. O bloco, por sua vez, exerce no homem uma força de reação $\vec{F_{BH}}$, horizontal e para a esquerda.

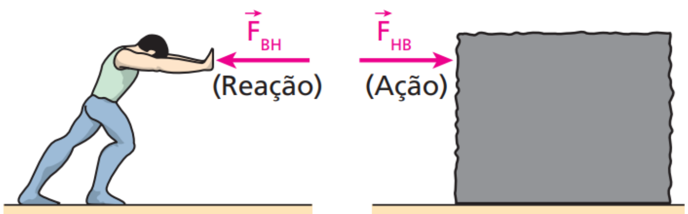

Figura 27: **O homem e o bloco trocam entre si forças de ação e reação.**

Verifica-se que as forças $\vec{F}_{HB}$ e $\vec{F}_{BH}$ são opostas, isto é, $\vec{F}_{HB} = -\vec{F}_{BH}$. Devemos entender, então, que $\vec{F}_{HB}$ e $\vec{F}_{BH}$ têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos. Supondo, por exemplo, que a intensidade da ação ($\vec{F}_{HB}$) seja 100 N, observaremos que a intensidade da reação ($\vec{F}_{BH}$) também será 100 N.

Outro detalhe importante é o fato de as forças de ação e reação estarem aplicadas em corpos diferentes. No caso da situação descrita, a ação ($\vec{F}_{HB}$) está aplicada no bloco, enquanto a reação ($\vec{F}_{BH}$) está aplicada no homem.

O Princípio da Ação e da Reação pode ser enunciado da seguinte maneira:

3. Lei de Newton: A toda força de ação corresponde uma força de reação, de modo que essas forças têm sempre mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes.

É importante destacar que as forças de ação e reação, por estarem aplicadas em corpos diferentes, nunca se equilibram (isto é, nunca se anulam) mutuamente.

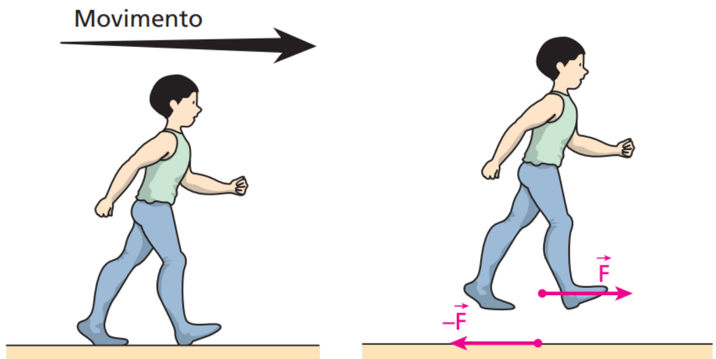

Figura 28: **Ao caminhar, uma pessoa age no chão, empurrando-o "para trás". Este, por sua vez, reage na pessoa, empurrando-a "para a frente". A ação está aplicada no solo, enquanto a reação está aplicada na pessoa.**

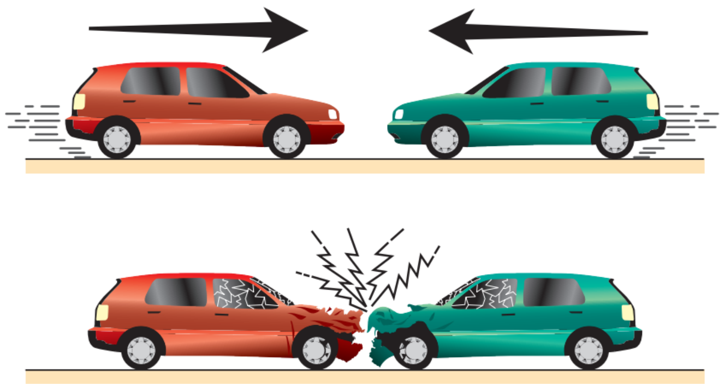

Figura 29: **Na colisão entre dois automóveis, ambos deformam-se. Isso prova que, se um deles age,o outro reage em sentido contrário. Os automóveis trocam forças de ação e reação que têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos.**

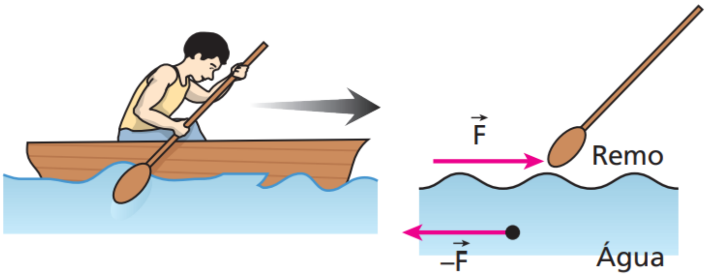

Figura 30: **O remo age na água, empurrando-a com uma força $-\vec{F}$. Esta, por sua vez, reage no remo, empurrando-o em sentido oposto com uma força $\vec{F}$. É importante notar que a ação $-\vec{F}$ está aplicada na água, enquanto a reação $\vec{F}$ está aplicada no remo.**

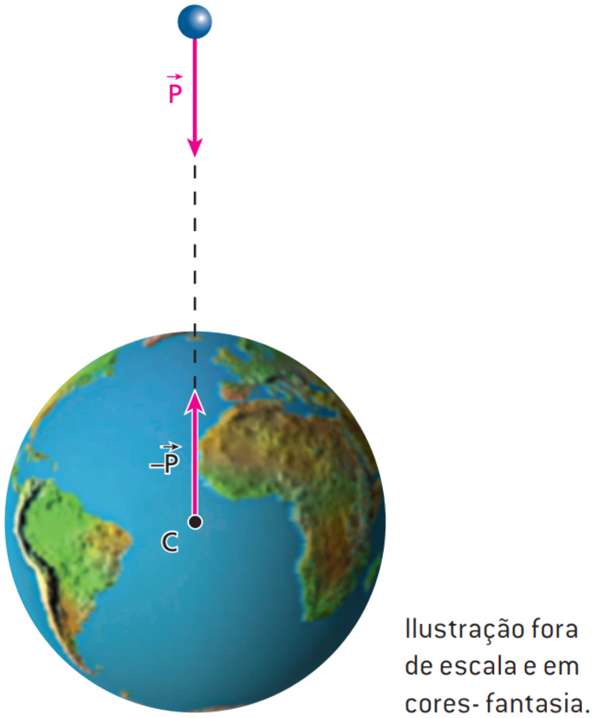

Figura 31: **O corpo é atraído gravitacionalmente, sendo solicitado por uma força $\vec{P}$. Mas, se a Terra, por meio do seu campo de gravidade, age no corpo, este reage na Terra, atraindo-a com uma força $-\vec{P}$. O corpo e a Terra interagem gravitacionalmente, trocando entre si forças de ação e reação.**

Nota: Nos três primeiros exemplos as forças exercidas pelos corpos descritos são forças de contato. Entretanto, no exemplo acima, as forças trocadas pela Terra e pelo corpo são forças de campo, pois advêm de uma interação à distância, que não necessita de contato para ocorrer.

As forças de ação e reação têm sempre a mesma natureza, ou seja, são ambas de contato ou ambas de campo.

8 Atrito entre sólidos

O atrito é um fenômeno muito importante no nosso cotidiano. Se não fosse pelo atrito, seria impossível caminhar sobre o solo; seria improvável o movimento de um carro; escrever e empurrar seriam impraticáveis também. O atrito é um dissipador de energia. Um exemplo é a energia cinética: se lançarmos uma bola no chão, pela ação do atrito, ela será freada, perdendo energia cinética desde o começo. Ou seja, no ato de lançar, uma superfície, por mais polida que seja, apresenta irregularidades, saliências, altos e baixos, asperezas.

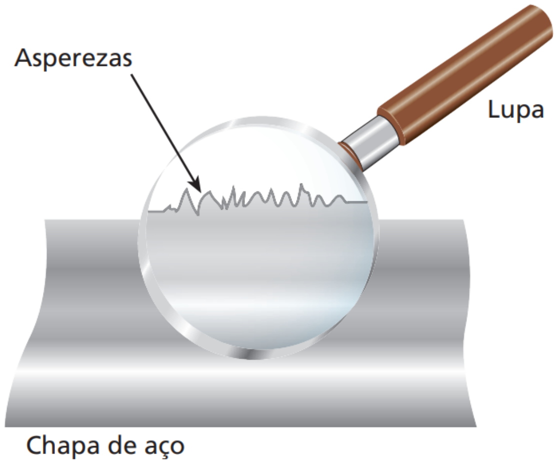

Figura 32: **Superfície irregular de uma chapa de aço.**

Quando dois corpos estão em contato e se comprimem mutuamente, ocorre uma interação entre eles. Se a superfície de um corpo começa a escorregar ou tende a escorregar em relação à superfície do outro, surgem forças conhecidas como forças de atrito. Essas forças sempre atuam no sentido de impedir o escorregamento ou a tendência de escorregamento, resultando de interações eletromagnéticas entre os átomos das áreas de contato das duas superfícies. Para os propósitos deste estudo, adotaremos o modelo mecânico de irregularidades (rugosidades), que atende às nossas necessidades.

Figura 33: **O bloco B repousa sobre a superfície S, plana e horizontal.**

Admitamos que B seja empurrado horizontalmente para a direita por uma força $\vec{F}$, mas sem sair do lugar.

Figura 34: **Ao ser empurrado, B aplica em S uma força $\vec{F_{BS}}$ horizontal dirigida para a direita.**

Como se explica, então, o repouso de B? Ocorre que esse bloco recebe de S, na região de contato, uma força $\vec{F_{SB}}$ horizontal, dirigida para a esquerda, que equilibra a força $\vec{F}$.

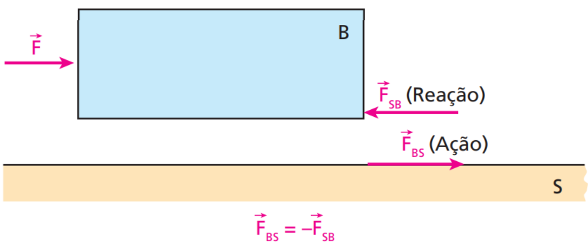

Figura 35: **As forças $\vec{F_{BS}}$ e $\vec{F_{SB}}$ que B e S trocam na região de contato são forças de atrito e constituem um par ação-reação (3ª Lei de Newton).**

Destaquemos, ainda, que as forças de atrito F_{BS} e F_{SB} só aparecem se $F \neq 0$. De fato, se não houver solicitação de escorregamento, não haverá troca de forças de atrito entre as superfícies em contato. Assim, para o bloco B em repouso sobre a superfície S, temos:

$$F = 0 \Rightarrow F_{BS} = F_{SB} = 0$$

No caso de B já estar escorregando sobre a superfície S, as forças de atrito também estarão presentes, independentemente de F estar atuando ou não.

8.0.1 O atrito estático

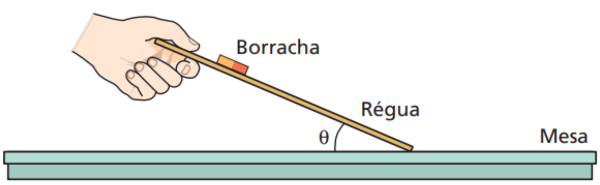

Figura 36: Régua de madeira repousa em uma mesa, uma borracha está apoiada sobre a face mais larga da régua. A borracha não recebe forças de atrito, pois não está na iminência de escorregamento.

Portanto, suponhamos que a régua seja inclinada lentamente em relação à superfície.

Ao inclinarmos mais a régua de modo que varie o ângulo θ, chega-se a um ponto em que a borracha se apresenta na iminência de movimento, isto é, está prestes a descer. Nesse caso, a força de atrito estático que mantém a borracha em equilíbrio terá atingido

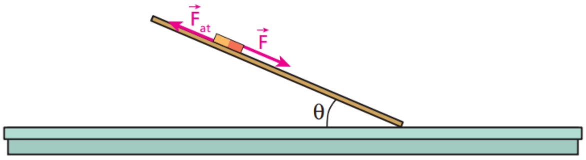

Figura 37: Para pequenos valores do ângulo θ, a borracha permanece parada e a força de atrito que a mantém em equilíbrio é do tipo estático. Tal força tem intensidade crescente a partir de zero, constituindo-se na equilibrante da força que solicita a borracha a descer (componente tangente do peso da borracha).

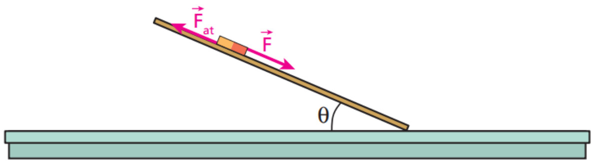

Figura 38: Enquanto a borracha está em equilíbrio, $\vec{F}$ e $-\vec{F}_{at}$ possuem intensidade crescente com o ângulo θ, valendo a relação $\vec{F_{at}} = -\vec{F}$.

sua máxima intensidade. Essa máxima força de atrito estático, quando o escorregamento é iminente, denomina-se **força de atrito de destaque** ($\vec{F_{at_d}}$).

A força de atrito estático tem intensidade variável desde zero, quando não há solicitação de escorregamento, até um valor máximo de destaque, quando o corpo fica na iminência de escorregar. Portanto, é válida a relação

$$0 \leq F_{at} \leq F_{at_d}$$

A intensidade da força de atrito estático depende da intensidade da força que tenta provocar o deslizamento, sendo sempre igual a essa força até o limite máximo do atrito estático.

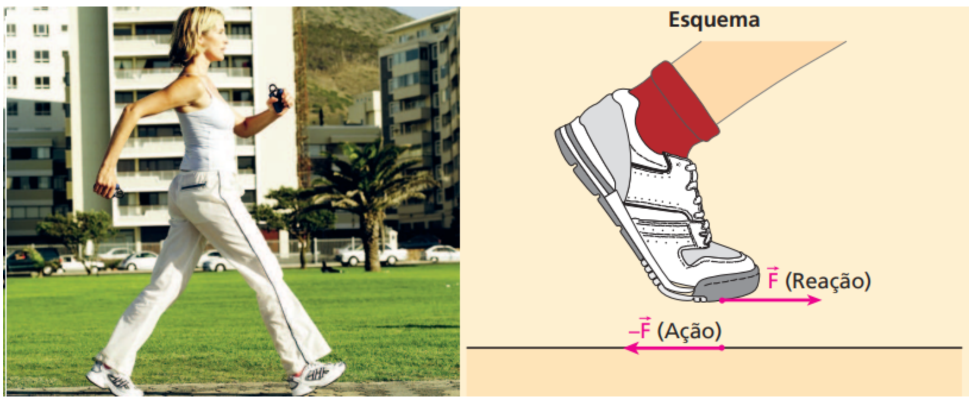

Figura 39: Ao caminhar, o pé de uma pessoa empurra o chão para trás e este reage no pé da pessoa, empurrando-o para a frente. Pé e solo trocam entre si forças de atrito do tipo ação e reação (mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, ou seja, par ação-reção.

8.0.2 Cálculo da intensidade da força de atrito de destaque (F_{at_d})

Imaginemos uma caixa de papelão, como uma caixa de sapatos, destampada e apoiada sobre a superfície plana e horizontal de um piso de concreto. Empurrando-se a caixa, inicialmente vazia, com uma força horizontal, ela seria colocada facilmente em movimento. Porém, se colocarmos areia, a força horizontal necessária para iniciar o movimento será, certamente, mais intensa do que aquela aplicada no caso anterior.

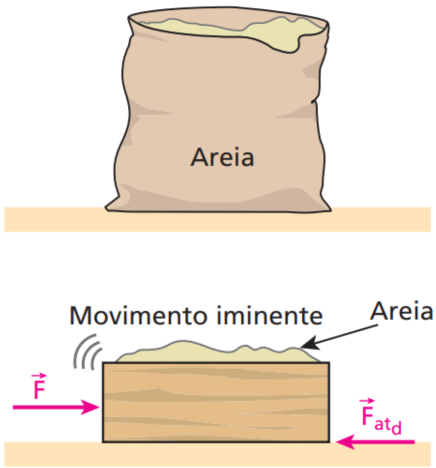

Figura 40: Se enchermos a caixa de areia, é notório que, quanto mais areia colocarmos, maior será a intensidade da força horizontal a ser aplicada para que o movimento seja iniciado. Isso nos mostra que, quanto mais se preenche a caixa com areia, maior se torna a força de atrito de destaque entre ela e o plano de apoio, e maior será a dificuldade de colocar a caixa em movimento.

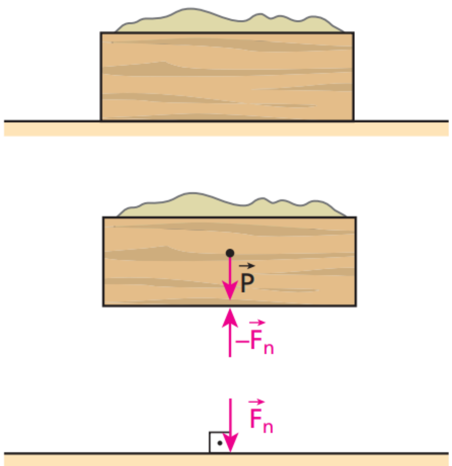

Figura 41: A introdução de areia contribui no aumento do peso ($\vec{P}$) do sistema, e por isso, este exerce sobre o plano de apoio uma força normal de compressão ($\vec{F_n}$) cada vez mais intensa. Quanto mais areia introduzirmos, maior será o peso do sistema como um todo.

Experimentalmente é verificado que a intensidade da força de atrito de destaque ($\vec{F_{at_d}}$) é diretamente proporcional à intensidade da força ($\vec{F_n}$) trocada pelas superfícies na região de contato. Podemos expressar matematicamente como:

$$\boxed{F_{at_d} = \mu_e F_n}$$

- A constante de proporcionalidade μ_e denomina-se coeficiente de atrito estático e seu valor depende dos materiais em contato e do grau de polimento deles.

8.0.3 Compressão horizontal

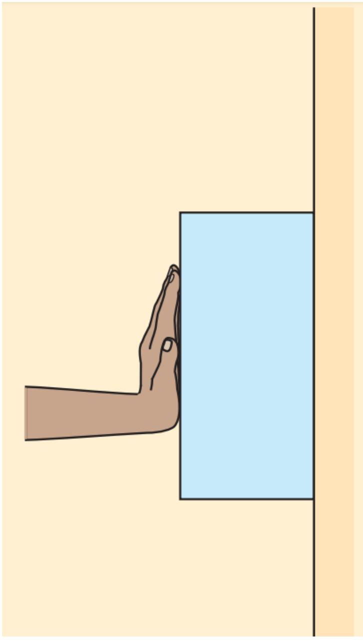

Figura 42: É muito comum a compressão horizontal de objetos contra uma parede vertical com o intuito de mantê-los em repouso.

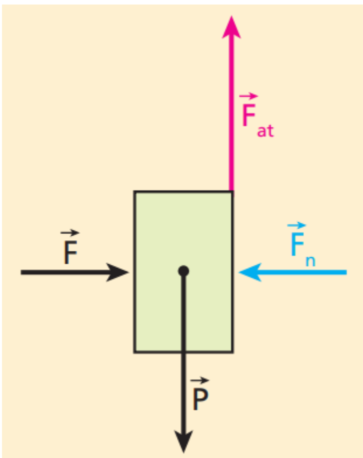

Figura 43: É possível mantê-los em repouso desde que a força de compressão seja suficientemente intensa para que a intensidade do peso do objeto não supere a intensidade da força de atrito de destaque ($\vec{F_{at_d}}$). Na situação, temos que a força de atrito estático (não necessariamente a de destaque) equilibra o peso.

Esquema de forças na caixa

- $\vec{F}$: força aplicada pela mão da pessoa;
- $\vec{F}n$: reação normal da parede;

- $\vec{P}$: força da gravidade (peso);
- $\vec{F_{at}}$: força de atrito estático

Equilíbrio na horizontal $|\vec{F_n}| = |\vec{F}|$
Equilíbrio na vertical $|\vec{F_{at}}| = |\vec{P}|$

Nessa análise, não se foi considerado a possível força de atrito entre a caixa e a mão.

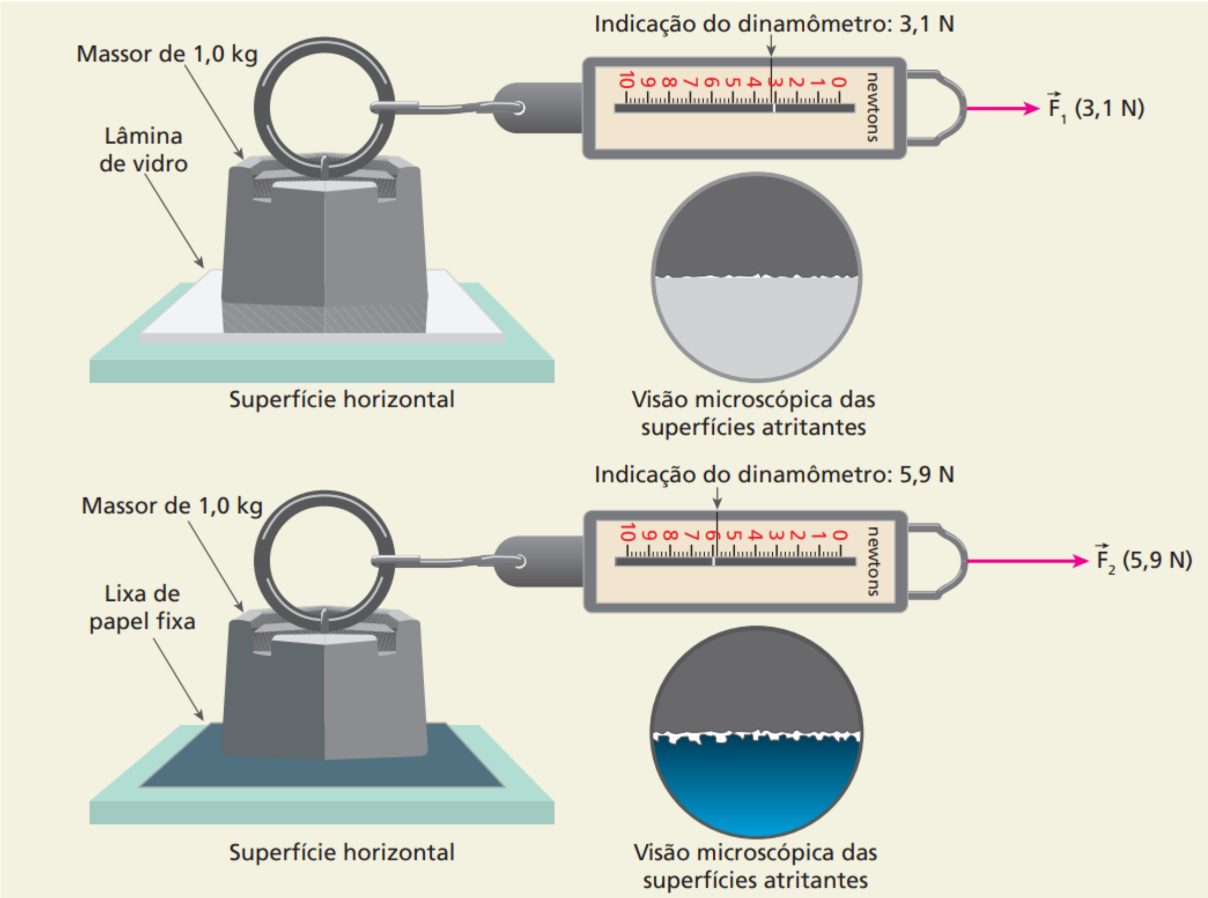

Figura 44: O experimento proposto nas imagens acima tem a finalidade de determinar o coeficiente de atrito estático entre um bloco de ferro de massa-padrão 1 kg e superfície horizontais de apoio de materias diferentes.

No caso 1, o bloco é colocado sobre uma lâmina de vidro (superfície relativamente lisa) e o dinamômetro indica no movimento iminente uma força de 3.1 N. No caso 2, o bloco é colocado sobre uma lixa de papel (superfície bastante áspera) e o dinamômetro indica na situação de movimento iminente 5.9 N. Supondo $g = 10$ m/s^2, podemos determinar o coeficiente de atrito estático para o caso 1 e o caso 2, sabendo que $F_{at} = \mu g$

Caso 1

$$3.1 = \mu_{e_1} \cdot 10$$

$$\mu_{e_1} = \frac{3.1}{10} = 0.31$$

Caso 2

$$5.9 = \mu_{e_2} \cdot 10$$

$$\mu_{e_2} = \frac{5.9}{10} = 0.59$$

8.1 Atrito cinético

Figura 45: **força $\vec{F}$, paralela aplicada ao plano de apoio. Com a atuação de $\vec{F}$, o bloco recebe do plano a força de atrito F_{at}.**

O movimento será iniciado se a intensidade de $\vec{F}$ superar a intensidade da força de atrito de destaque. Supondo que essa condição tenha sido cumprida, observaremos uma situação dinâmica, com o bloco em movimento. Enquanto o bloco estava em repouso, o atrito era chamado de estático. Agora, porém, receberá a denominação de atrito cinético (ou dinâmico).

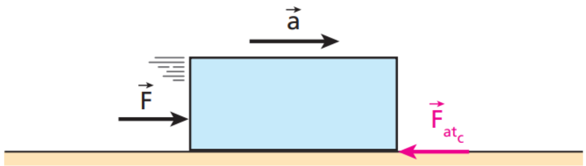

Figura 46: **Sendo $F > F_{atd}$, o bloco entra em movimento e, nessa situação, o atrito recebido do plano de apoio é cinético**

Figura 47: O cofre da figura, inicialmente em repouso, entrará em movimento se a força aplicada pela pessoa vencer a força de atrito de destaque.

8.2 Cálculo da intensidade da força de atrito cinético (F_{atc})

Verifica-se que a intensidade da força de atrito cinético (F_{atc}) é diretamente proporcional à intensidade da força normal trocada pelas superfícies atritantes. Matematicamente obtemos:

$$F_{at} = \mu_c F_n$$

- A constante de proporcionalidade μ_c denomina-se coeficiente de atrito cinético (ou dinâmico) e seu valor também depende dos materiais atritantes e do grau de polimento deles.
- $\mu_c \neq \mu_e$, é de observação experimental que $\mu_c < \mu_e$, o que implica que $F_{atc} < F_{atd}$.

De fato, podemos constatar que é mais fácil manter um armário escorregando sobre o chão do que iniciar seu movimento a partir do repouso. Para simplificar os cálculos, a diferença entre μ_c e μ_e é ignorada, possibilitando-nos escrever que $F_{atc} = F_{atd} = \mu F_n$, em que μ é chamado apenas de coeficiente de atrito.

Materiais atritantes	μ_e	μ_c
Vidro com vidro	0,94	0,35
Borracha com asfalto seco	1,20	0,85
Borracha com asfalto molhado	0,80	0,60
Aço com alumínio	0,61	0,47
Madeira com madeira	0,58	0,40
Madeira encerada com neve	0,05	0,04
Teflon com aço	0,04	0,04

Figura 48: **Valores de coeficientes de atrito entre alguns materiais:**

Graficamente, a intensidade da força de atrito recebida por um corpo em função da intensidade da força que o solicita ao escorregamento é dada conforme os diagramas seguintes:

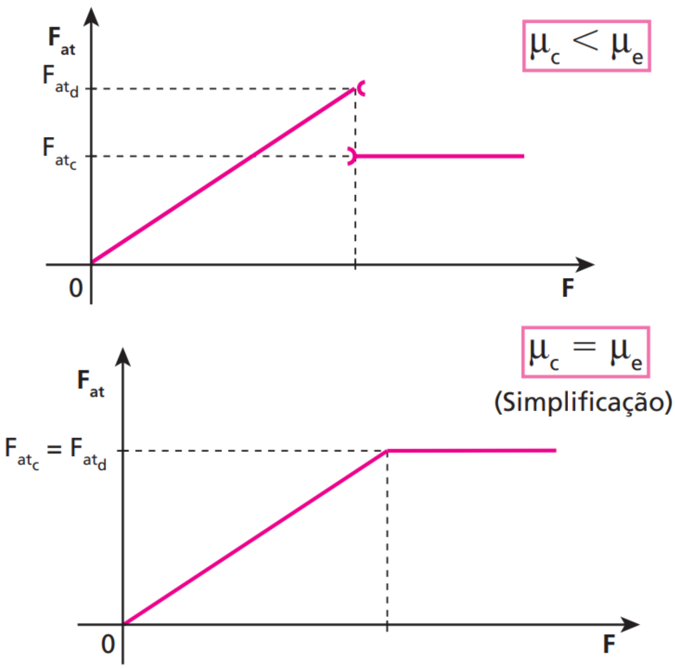

Figura 49: **A força de atrito cinético permanece constante, pelo menos dentro de certos limites de velocidade.**

8.3 Lei do atrito

As forças de atrito de destaque e cinético são praticamente independentes da área de contato entre as superfícies atritantes.

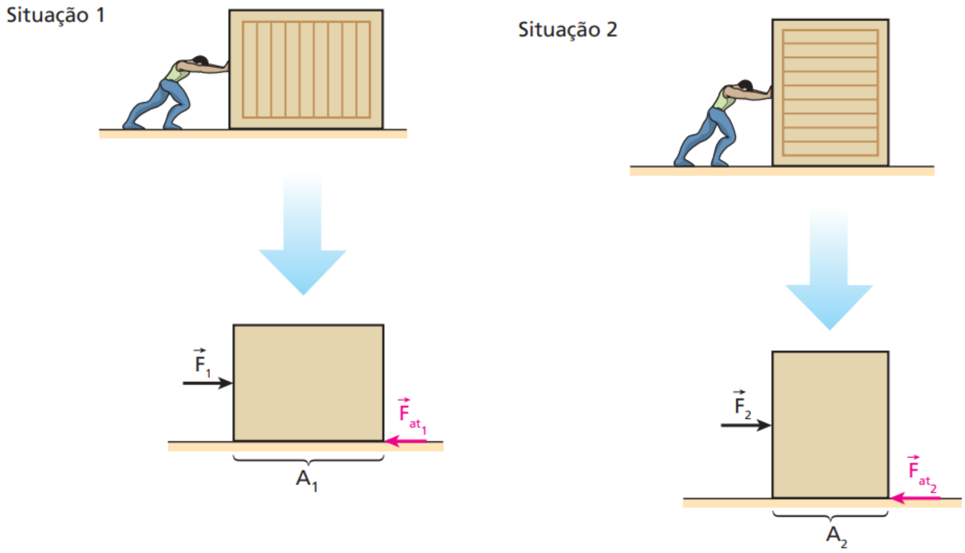

Figura 50: uma mesma caixa de madeira empurrada sobre uma mesma superfície horizontal de concreto recebe, para uma mesma solicitação, forças de atrito de intensidades iguais, independentemente de ela estar apoiada conforme a situação 1 ou asituação 2, ilustradas acima.

No caso da situação 1, a área de contato da caixa com o plano de apoio é A_1; no caso da situação 2, é A_2, de modo que $A_1 > A_2$. Se $F_1 = F_2$, então, $F_{at_1} = F_{at_2}$, independentemente de termos $A_1 > A_2$.

8.4 Força máxima e mínima em um plano inclinado