

# Material Didático

## Gases Perfeitos

*”Ser um ser humano (ser, ser, ser) e um verdadeiro herói (herói, herói, herói)”*

**Alisson Ferreira Martins**

Físico

2024

---

*”Este material foi desenvolvido para o estudo de Termodinâmica, um componente essencial da Física. As referências são todas do livro Helou et al., 2010: Helou, D., Gualter, J. B., and Newton, V. B. (2010). Tópicos de Física, volume 2. Editora Saraiva, São Paulo, 1ª edição, sendo, portanto, o material desenvolvido com o objetivo de simplificar o conteúdo.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modelo macroscópico de gás</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>As variáveis de estado de um gás perfeito</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Lei de Boyle</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Lei de Charles e Gay-Lussac</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Lei de Charles</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>A Equação de Clapeyron</b>	<b>8</b>
7.1	A constante universal dos gases perfeitos ( $R$ ) e seus valores . . . . .	9
<b>8</b>	<b>Lei Geral dos Gases Ideais</b>	<b>10</b>
8.1	Mistura física de gases perfeitos . . . . .	11
<b>9</b>	<b>O modelo microscópico de gás perfeito</b>	<b>12</b>
9.1	Velocidade média quadrática . . . . .	13
9.2	Equação Fundamental da Teoria Cinética . . . . .	13
9.3	A temperatura na Teoria Cinética . . . . .	16
9.4	A energia interna de um gás perfeito . . . . .	17
9.5	Equipartição da energia . . . . .	18
9.6	A energia cinética média molecular . . . . .	19

# 1 Introdução

Os cientistas no século XVII ao estudar sobre gases notaram que todos os gases não seguiam o mesmo comportamento, portanto notaram que deveriam fazer uma simplificação, disso vem o surgimento do gás perfeito ou gás ideal.

## 2 Modelo macroscópico de gás

As regras dos comportamentos dos gases perfeitos foram estabelecidas por **Robert Boyle, Jacques Charles, Louis Joseph Gay-Lussac e Paul Emile Clayperon** entre os séculos XVII e XIX. Um gás se enquadra no modelo teórico de gás perfeito se obedece às leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac, tais leis estabelecem as regras do comportamento “externo” do gás perfeito, levando-se em conta as grandezas físicas a ele associadas - temperatura, volume e pressão -, denominadas variáveis de estado do gás.

### 3 As variáveis de estado de um gás perfeito

Sempre que trabalharmos com massa de gás, estabeleceremos uma quantidade  $N$  de partículas desse gás. Esse número  $N$  pode ser descrito em termos de ordens de  $10^{20}$  partículas por  $\text{cm}^3$ .

Onde você se encontra agora, há aproximadamente  $10^{20}$  moléculas dos componentes do ar (oxigênio, hidrogênio, nitrogênio etc). Costumamos quantificar essa porção de gás por meio do seu **número de mols (n)**

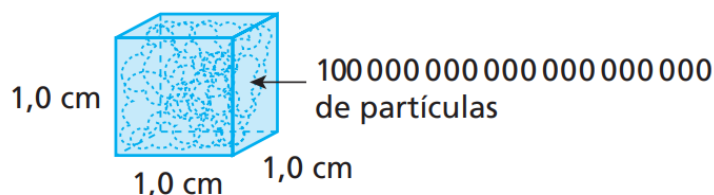


Figura 1: O cubo mostrado representa um volume de  $1 \text{ cm}^3$  contendo  $10^{20}$  moléculas de gás por centímetro cúbico.

Um mol de um gás constitui o número de moléculas desse gás dado pelo **Número de Avogadro** ( $A = 6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas/mol).

O número de mols é obtido dividindo-se a massa do gás ( $m$ ) pela sua massa molar ou molécula-grama ( $M$ ), ambos na mesma unidade.

$$n = \frac{\text{massa do gás}}{\text{mol}} = \frac{m}{M}$$

Sendo os gases expansíveis, suas moléculas ocupam todo o espaço disponível no recipiente que os contém. O volume de um gás corresponde a capacidade do recipiente ao qual o gás está contido.

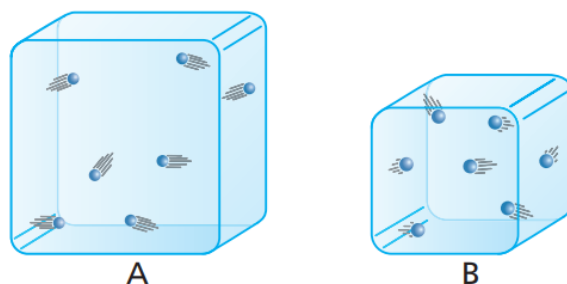


Figura 2: Duas porções iguais (mesmo número de partículas) de um mesmo gás perfeito, colocadas em dois recipientes de capacidades diferentes, ocupam volumes diferentes ( $V_A > V_B$ ).

#### Nota

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L.}$$

## 4 Lei de Boyle

Robert Boyle (1627- -1691), físico e químico irlandês, foi o responsável pela lei que rege as transformações sofridas por determinada massa de gás perfeito quando sua temperatura se mantém constante (transformação isotérmica).

Uma diminuição no volume de um gás aumentará a concentração de partículas, aumentando o número de colisões com a parede do recipiente, o que provoca um aumento na pressão do gás. Por outro lado, um aumento no volume fará com que as partículas se espalhem, diminuindo o número de colisões com as paredes do recipiente e, consequentemente, diminuindo a pressão. Para o gás ideal, formalizamos o enunciado da seguinte forma:

**Quando determinada massa de um gás perfeito sofre uma transformação isotérmica, sua pressão varia de maneira inversamente proporcional ao volume por ele ocupado.**

Sendo expresso matematicamente como:

$$pV = K_1$$

Em que  $p$  é a pressão,  $V$  é o volume do gás e  $K_1$  é uma constante que depende da massa, da temperatura e da natureza do gás.

À temperatura constante, para dobrarmos o valor da pressão devemos reduzir o valor do volume à metade.

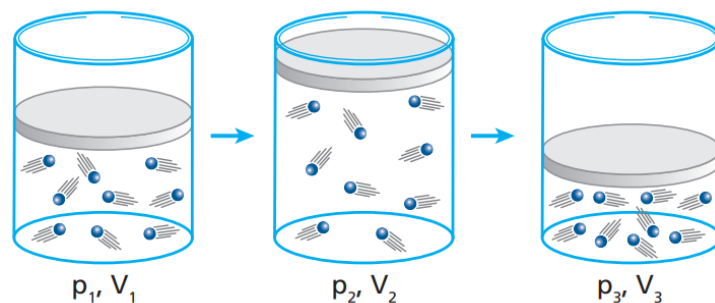


Figura 3: À temperatura constante, para dobrarmos o valor da pressão devemos reduzir o valor do volume à metade. Nessas transformações, a massa e a temperatura do gás perfeito mantêm-se constantes.

A Lei de Boyle garante a validade da relação:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_3 V_3$$

À temperatura constante, para dobrarmos o valor da pressão devemos reduzir o valor do volume à metade.

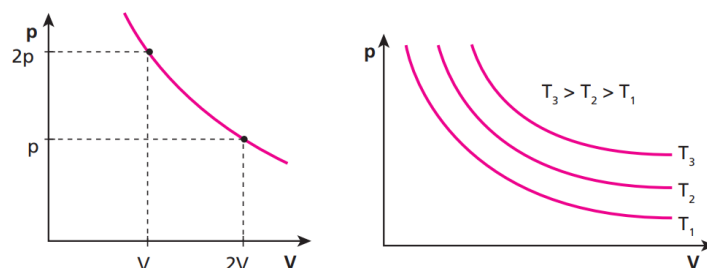


Figura 4: Diagrama pressão ( $p$ ) x volume ( $V$ ), a representação gráfica da Lei de Boyle é um ramo de hipérbole.

Para cada valor da temperatura absoluta do gás obtemos uma hipérbole diferente. Quanto maior a temperatura, mais afastada da origem dos eixos encontra-se a hipérbole.

## 5 Lei de Charles e Gay-Lussac

A lei que rege a **transformação isobárica** em que determinada massa de um gás perfeito se mantém com pressão constante foi estabelecida pelo físico e químico francês Louis Joseph Gay-Lussac (1778-1850). Antes, entretanto, Jacques A. C. Charles (1746-1823), físico francês, já havia apresentado trabalhos a respeito.

Se aumentamos o volume de um gás, a sua pressão diminui, pois reduzimos o número de colisões por unidade de área. Para compensar isso, devemos aumentar o número de colisões do gás de acordo com o volume aumentado, o que reflete um aumento na temperatura do gás para manter a pressão constante. Se diminuirmos o volume do gás, a intensidade das colisões aumenta. Para compensar e manter a pressão constante, devemos diminuir a intensidade, ou seja, reduzir a temperatura do gás. Portanto, a Lei de Charles e a Lei de Gay-Lussac são formalizadas como:

**Quando determinada massa de gás perfeito passa por uma transformação isobárica, seu volume deve variar, mantendo-se diretamente proporcional à temperatura absoluta desse gás.**

Sendo expresso matematicamente como:

$$V = K_2 T$$

Em que  $V$  é o volume ocupado pelo gás,  $T$  sua temperatura absoluta e  $K_2$  uma constante que depende da massa, da pressão e da natureza do gás, sendo inversamente proporcional ao valor da pressão, que permanece constante.

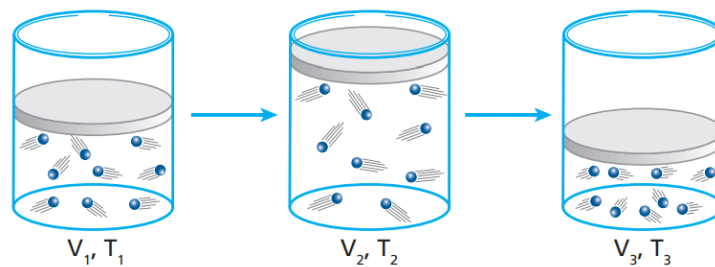


Figura 5: Para mantermos constante a pressão de um gás perfeito, ao dobrarmos o valor de sua temperatura absoluta, devemos dobrar a capacidade do recipiente que o contém. Nessas transformações, a massa e a pressão do gás perfeito mantêm-se constantes.

A Lei de Charles e Gay-Lussac garante a validade da relação:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

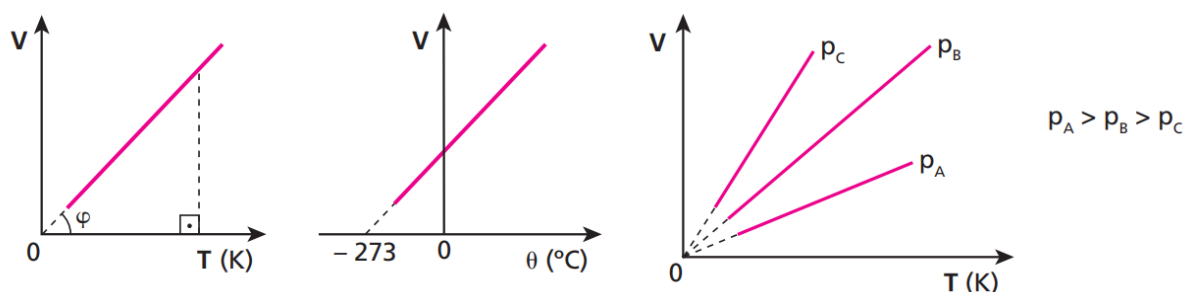


Figura 6: Diagrama volume ( $V$ ) x temperatura ( $T$  ou  $\theta$ ). A Lei de Charles e Gay-Lussac é representada por um segmento de reta oblíquo aos eixos.

Sendo o gás perfeito um modelo teórico constituído de partículas de volume desprezível, à temperatura correspondente ao zero absoluto, o volume desse gás praticamente se anula.

Para três pressões  $p_A$ ,  $p_B$  e  $p_C$  diferentes, sendo  $p_A > p_B > p_C$ , uma mesma massa de um mesmo gás perfeito apresenta três valores diferentes para  $K_2$ , de forma que  $K_{2A}$ ,  $K_{2B}$  e  $K_{2C}$  são distintos. Observe que  $K_2$  é inversamente proporcional à pressão, sendo que, para a maior pressão, temos o menor valor de  $K_2$  e, portanto, o menor ângulo de declividade  $\varphi$ .

## 6 Lei de Charles

A lei que rege as transformações a volume constante de determinada massa de gás foi estabelecida pelo físico francês Jacques Alexandre Cesar Charles (1746-1823). As transformações a volume constante são chamadas de isovolumétricas, isométricas ou isocóricas.

Estudando a pressão média de um gás, podemos inferir que, se mantivermos o volume constante e modificarmos uma das variáveis de estado, no caso a temperatura absoluta, aumentaremos a força média das colisões por unidade de área e a frequência com que essas colisões ocorrem, já que elas terão uma energia cinética maior. A pressão do gás aumentará. Agora, se diminuirmos a temperatura, a força média por unidade de área

diminuirá, assim como a frequência das colisões, resultando na diminuição da pressão do gás.

Portanto a Lei de Charles são formalizadas como:

**Quando determinada massa de gás perfeito sofre uma transformação isométrica, sua pressão mantém-se diretamente proporcional à sua temperatura absoluta.**

Sendo expresso matematicamente como:

$$p = K_3 T$$

Em que  $p$  é a pressão do gás,  $T$  a sua temperatura absoluta e  $K_3$  uma constante que depende da massa, do volume e da natureza do gás, sendo inversamente proporcional ao valor do volume, que permanece constante

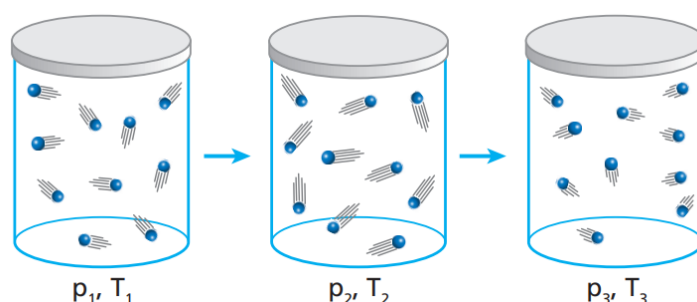


Figura 7: A massa e o volume do gás perfeito mantêm-se constantes. Assim, mantendo-se o volume constante, ao aumentarmos a temperatura absoluta de um gás perfeito, aumentaremos a violência de cada choque das partículas nas paredes do recipiente, elevando a pressão na mesma proporção da temperatura absoluta.

A Lei de Charles garante a validade da relação:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

Admitindo que no zero absoluto cessa o movimento de translação das moléculas do gás, podemos concluir que a essa temperatura as partículas não mais se chocam com as paredes do recipiente, anulando-se a pressão.

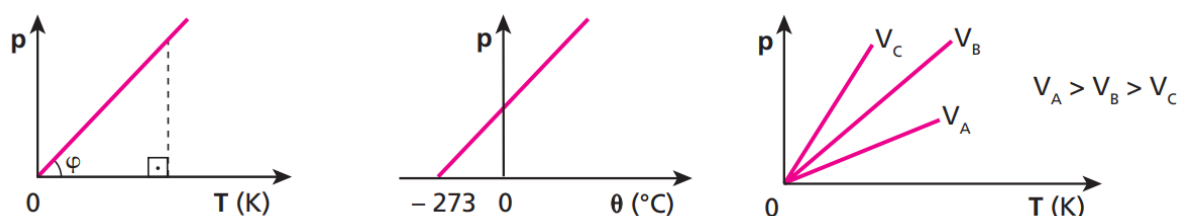


Figura 8: Em um diagrama de pressão ( $p$ ) x temperatura ( $T$  ou  $\theta$ ), a Lei de Charles é representada por um segmento de reta oblíquo aos eixos.

Para três volumes  $V_A$ ,  $V_B$  e  $V_C$  diferentes, sendo  $V_A > V_B > V_C$ , uma mesma massa de um mesmo gás perfeito apresenta três valores diferentes para  $K_3$ , de forma que  $K_{3A} < K_{3B} < K_{3C}$ . Observe que  $K_3$  é inversamente proporcional ao volume, sendo que, para o maior volume, temos o menor valor de  $K_3$  e, portanto, o menor ângulo  $\varphi$ .



## 7 A Equação de Clapeyron

Foi o físico francês Benoît Paul Émile Clapeyron (1799-1864) quem estabeleceu a equação que relaciona as variáveis de estado de um gás perfeito: pressão ( $p$ ), volume ( $V$ ) e temperatura absoluta ( $T$ ). Equação que nada mais é do que a síntese das leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac.

**De acordo com a Lei de Boyle, a pressão ( $p$ ) e o volume ( $V$ ) de um gás perfeito são inversamente proporcionais, mantendo-se a temperatura constante.**

**De acordo com a Lei de Charles, o volume ( $V$ ) de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta ( $T$ ), quando a pressão é mantida constante.**

**De acordo com a Lei de Gay-Lussac, a pressão ( $p$ ) de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta ( $T$ ), quando o volume é mantido constante.**

Não podemos esquecer ainda que, se a pressão de um gás é produzida pelo choque de suas partículas com as paredes do recipiente, a pressão ( $p$ ) é função também do número de partículas, isto é, da massa ( $m$ ) do gás considerado. Formalizando matematicamente:

$$p = K \frac{m T}{V}$$

Em que  $K$  é uma constante que depende apenas da natureza do gás. Pode-se comprovar que, para diferentes gases, o valor de  $K$  é inversamente proporcional à massa molar ( $M$ ) de cada gás:

$$K = \frac{R}{M}$$

em que  $R$  é uma constante de proporcionalidade igual para todos os gases. É por isso que a constante  $R$  é denominada constante universal dos gases perfeitos. Portanto formalizando matematicamente:

$$p = K \frac{m T}{V} \implies p = \frac{R}{M} \frac{m T}{V} \implies p V = \frac{m}{M} R T$$

O quociente  $\frac{m}{M}$  é o número de mols  $n$  do gás, a Equação de Clapeyron para os gases perfeitos toma seu aspecto definitivo:

$$\boxed{pV = nRT}$$

## 7.1 A constante universal dos gases perfeitos ( $R$ ) e seus valores

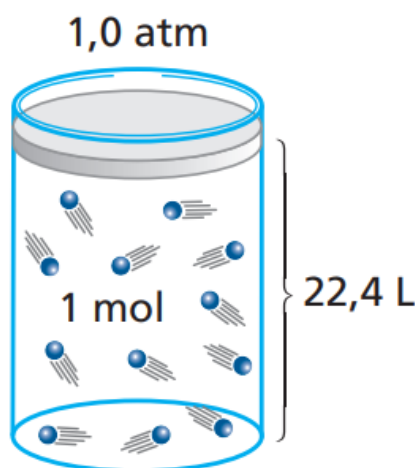


Figura 9: Nas condições normais de temperatura e pressão (CNTp), quando a temperatura é  $0^{\circ}\text{C}$  e a pressão é  $1,0\text{ atm}$ ,  $1\text{ mol}$  de qualquer gás ocupa um volume correspondente a  $22,4\text{ litros}$ .

Da Equação de Clapeyron

$$R = \frac{pV}{nT}$$

Ao substituírmos os dados obtemos

$$R = \frac{1\text{ atm} \cdot 22,4\text{ L}}{1\text{ mol} \cdot 273\text{ K}}$$

$$R = 0,082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$$

A grandeza  $R$  é uma constante física; assim, possui unidades que, ao serem mudadas, produzem alteração no valor numérico da constante. A constante  $R$ , dependendo das unidades das demais grandezas, pode assumir os valores:

$$R = 0,082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}} = 8,31 \frac{\text{joules}}{\text{mol K}} \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

## 8 Lei Geral dos Gases Ideais

Se determinada massa de gás perfeito (massa constante) sofre uma transformação em que as três variáveis pressão ( $p$ ), volume ( $V$ ) e temperatura absoluta ( $T$ ) se modificam, podemos usar a chamada Lei Geral dos Gases.

Podemos obter essa lei a partir da Equação de Clapeyron, vamos supor que uma determinada massa de gás encontra-se no estado onde suas variáveis de estado são:  $p_1$ ,  $V_1$  e  $T_1$ . Ao sofrer uma transformação essa mesma massa para um estado definido por  $p_2$ ,  $V_2$  e  $T_2$ . Ao formalizarmos para a Equação de Clapeyron formalizaremos matematicamente da seguinte forma,

**Estado (1)**

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad (1)$$

Isolando  $nR$  na equação (1):

$$nR = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad (2)$$

**Estado (2)**

$$p_2 V_2 = nRT_2 \quad (3)$$

Isolando  $nR$  na equação (2):

$$nR = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (4)$$

Igualando os dois resultados para  $nR$  obtemos a denominada **Lei Geral dos Gases Ideais** :

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}} \quad (5)$$

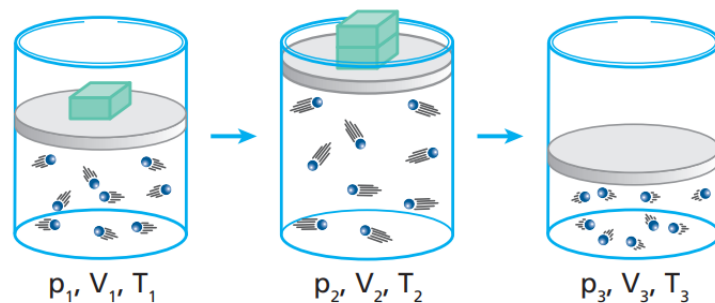


Figura 10: Nas transformações do exemplo, a massa do gás perfeito mantém-se constante, variando apenas as demais grandezas: pressão  $p$ , volume  $V$  e temperatura absoluta  $T$ .

A Lei Geral dos Gases garante a validade da relação:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$$

## 8.1 Mistura física de gases perfeitos

A mistura física de gases perfeitos é a reunião de dois ou mais gases ideais, de forma que não ocorram reações químicas entre suas partículas; as interações são puramente físicas. Ao calcular as grandezas físicas associadas à mistura, devemos sempre lembrar que, em uma mistura de gases perfeitos, o número de mols da reunião é igual à soma do número de mols dos gases componentes. Matematicamente podemos formalizar

$$n_{\text{mistura}} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_e \quad (\text{I})$$

Da equação de Clapeyron temos

$$pV = nRT \implies n = \frac{pV}{RT}$$

Podemos calcular o número de mols de cada gás que será somado, originando a mistura resultante portanto:

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$$

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$$

$$n_3 = \frac{p_3 V_3}{RT_3}$$

$\vdots$

$$n_e = \frac{p_e V_e}{RT_e}$$

Para a mistura total podemos escrever:

$$n_m = \frac{p_m V_m}{RT_m}$$

Da expressão 1, obtemos:

$$\frac{p_m V_m}{T_m} = \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} + \dots + \frac{p_e V_e}{T_e}$$

Em uma mistura de gases ideais, a razão  $\frac{pV}{T}$  da mistura é a soma das razões  $\frac{pV}{T}$  de cada um dos gases participantes, antes da mistura.

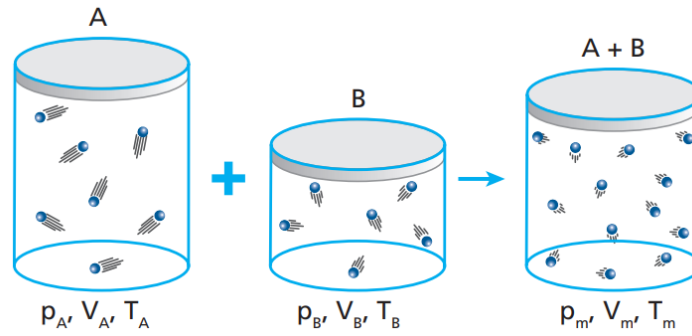


Figura 11: Os gases perfeitos A e B são misturados fisicamente em um terceiro recipiente. A mistura terá um número de mols  $n$  igual à soma dos números de mols de A e B ( $n = n_A + n_B$ ).

$$\frac{p_m V_m}{T_m} = \frac{p_A V_A}{T_A} + \frac{p_B V_B}{T_B}$$

## 9 O modelo microscópico de gás perfeito

Fizemos uma análise macroscópica do gás perfeito, estabelecendo um modelo teórico a partir do seu comportamento “externo”, isto é, do comportamento de seus parâmetros pressão, volume e temperatura.

O estudo do gás perfeito realizado sob a perspectiva microscópica leva-nos à teoria cinética dos gases. Nesse modelo teórico, devido ao fato de encontrarmos um número muito grande de partículas por unidade de volume (da ordem de  $10^{20}$  partículas por  $\text{cm}^3$ ), as hipóteses impostas representam o que deve acontecer, em média, com as partículas do gás.

### Hipóteses

1. Uma porção de gás perfeito é constituída de um grande número de moléculas em movimento caótico (todas as direções são igualmente prováveis).
2. As moléculas são consideradas pontos materiais, ou seja, suas dimensões são desprezíveis quando comparadas com as distâncias que percorrem entre colisões sucessivas.
3. As colisões entre duas moléculas ou entre uma molécula e uma parede do recipiente são supostas perfeitamente elásticas ( não há perda de energia cinética).
4. Cada colisão tem duração desprezível quando comparada com o tempo de corrido entre colisões sucessivas.
5. Entre colisões sucessivas, o movimento das moléculas é retilíneo e uniforme. Isso equivale a desprezar as forças gravitacionais e intermoleculares.
6. As forças intermoleculares só se manifestam durante as colisões.
7. O estudo das colisões das moléculas do gás pode ser feito com base na mecânica newtoniana.

## 9.1 Velocidade média quadrática

No interior de um recipiente em repouso, encontramos partículas de gás que se deslocam em todas as direções e sentidos, fazendo com que a velocidade média das partículas seja nula, ao contrário da energia cinética média (que não é nula). Sendo  $N$  o número de partículas do gás, obtemos

$$E_{cm} = \frac{E_{c1} + E_{c2} + \dots + E_{cn}}{N}$$
$$E_{cm} = \frac{\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \dots + \frac{mv_N^2}{2}}{N}$$
$$E_{cm} = \frac{m}{2} \left( \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right)$$

O termo existente no interior do parênteses é  $\bar{v}$  (velocidade média quadrática). Podemos formalizar então:

$$E_{cm} = \frac{m(\bar{v})^2}{2}$$

E  $\bar{v}$  é a relação

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}}$$

## 9.2 Equação Fundamental da Teoria Cinética

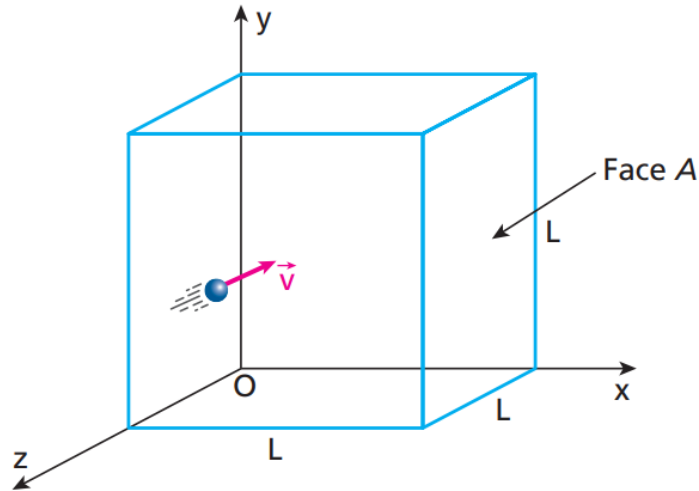


Figura 12: Recipiente cúbico de aresta  $L$ , com um de seus vértices na origem de um sistema de eixos triortogonais, e em seu interior uma amostra de gás perfeito.

Vamos considerar apenas 1 partícula das  $N$  partículas desse gás, ela está se dirigindo-se para a face  $A$  com uma velocidade  $\vec{v}$ . Fazendo-se a decomposição vetorial de  $\vec{v}$  nos eixos, obtemos:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Após a colisão dessa partícula com a face A, as componentes  $v_y$  e  $v_z$  não foram alteradas; no entanto, a componente  $v_x$  inverteu o sentido de seu movimento. Sofrendo por tanto uma alteração no seu momentum, sendo portanto

$$\Delta Q = Q_f - Q_i$$

$$\Delta Q = -mv_x - (mv_x)$$

$$\Delta Q = -2mv_x$$

Como o momentum total é uma grandeza que se conserva, podemos afirmar que a face A do recipiente sofreu uma variação do seu momentum, portanto:

$$\Delta Q = 2mv_x$$

Formalizando-se com o Teorema do Impulso, chegamos a intensidade média da força aplicada (perpendicularmente) na face A.

$$I = \Delta Q$$

$$F\Delta t = \Delta Q$$

$$F = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Teorizando que a partícula, move-se de maneira retilínea e uniforme e colida com a face oposta e torne a chocar-se com a face A, podemos chegar em uma expressão para a frequência de colisões dessa partícula em A.

$$\Delta s = v\Delta t$$

$$(L + L) = v_x \cdot \Delta t$$

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2L}$$

Então:

$$F = 2mv_x \cdot \frac{v_x}{2L}$$

$$F = \frac{mv_x^2}{L}$$

Sabemos que a pressão exercida pela partícula em A é  $p = \frac{F}{A}$ . Substituindo força (F) e a área de impacto temos a seguinte expressão:

$$p = \frac{\frac{mv_x^2}{L}}{L^2} \implies p = \frac{mv_x^2}{L^3}$$

Se levarmos em conta que N é o número total de partículas do gás e n é seu número por unidade de volume, obtemos

$$n = \frac{N}{V} \longrightarrow n = \frac{N}{L^3}$$

$$\text{Logo } L^3 = \frac{N}{n}$$

Substituindo na expressão da pressão obtemos

$$p = \frac{mv_x^2}{\frac{N}{n}} \implies p = \frac{nmv_x^2}{N}$$

Levando em consideração que o gás é homogêneo, com todas as partículas de mesma massa ( $m$ ), a pressão na face A, em virtude de todas as partículas do gás, será:

$$p = nm \left( \frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \dots + v_{x_n}^2}{N} \right)$$

Sabemos que a velocidade média quadrática é dada por:

$$(\bar{v}_x)^2 = \frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \dots + v_{x_N}^2}{N}$$

Chegamos portanto em:

$$p = nm\bar{v}_x^2$$

O gás é constituído por um grande número de partículas e elas se movem de forma aleatória, fazendo com que os valores médios de  $(\bar{v}_x^2)$ ,  $(\bar{v}_y^2)$  e  $(\bar{v}_z^2)$  sejam iguais, valendo a relação:

$$(\bar{v}_x)^2 = (\bar{v}_y)^2 = (\bar{v}_z)^2$$

Se as expressões são iguais

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2 + (\bar{v}_z)^2 = 3(\bar{v}_x)^2$$

Temos então:

$$(\bar{v}_x)^2 = \frac{(\bar{v})^2}{3}$$

Assim:

$$p = nm \frac{(\bar{v})^2}{3}$$

Sabemos que  $nm$  é a massa das partículas por unidade de volume, ou seja, a densidade volumétrica ( $\mu$ ) do gás.

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\mu(\bar{v})^2}$$

Embora formalizamos a expressão apenas para a face A, de acordo com o Princípio de Pascal, a pressão será a mesma nas outras faces. Chegamos então:



A pressão ( $p$ ) exercida por um gás perfeito nas paredes internas de um recipiente é igual a um terço do produto de sua massa específica pelo quadrado da velocidade média quadrática de suas partículas.

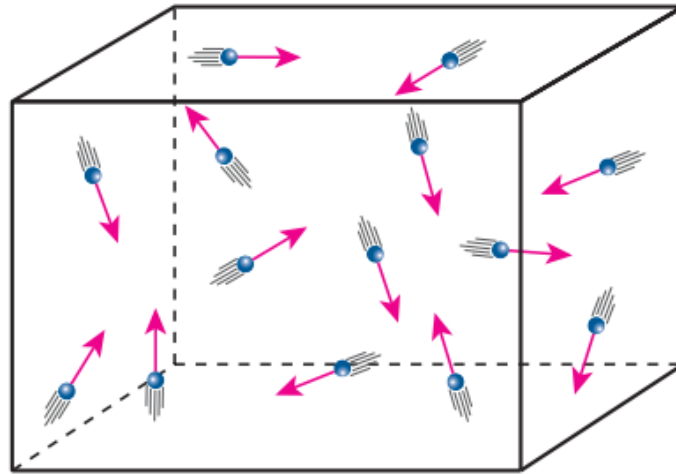


Figura 13: A teoria cinética dos gases nos leva-nos a "visualizar" uma amostra de gás perfeito formada por um grande número de partículas ( $10^{20}$  por  $\text{cm}^3$ ), de dimensões desprezíveis, que se movem em todas as direções de modo aleatório.

### 9.3 A temperatura na Teoria Cinética

A temperatura de um gás está relacionada com a energia de movimentação das moléculas, isso é um fato comprovado experimentalmente. Utilizando informações referente a teoria cinética podemos analisar esse fato.

A Equação Fundamental da Teoria Cinética é

$$p = \frac{1}{3} \mu (\bar{v})^2$$

A massa específica ( $\mu$ ), é o quociente da massa total ( $m$ ) do gás pelo volume ( $V$ ) ocupado por ele

$$\mu = \frac{m}{V}$$

Dessa relação obtemos:

$$p = \frac{1}{3} \frac{m}{V} (\bar{v})^2$$

$$3pV = m (\bar{v})^2 \quad (\text{I})$$

A Equação de Clapeyron é

$$pV = nRT \quad (\text{II})$$

Comparando em , temos:

$$3nRT = m (\bar{v})^2$$

É sabido que  $n = \frac{m}{M}$  disso obtemos:

$$3 \frac{m}{M} RT = m (\bar{v})^2$$

Isolando T, resultamos em

$$\boxed{T = \frac{M}{3R} (\bar{v})^2}$$

É notório e observado através da expressão, que a temperatura absoluta de um gás perfeito é função da velocidade média quadrática de suas partículas e da natureza do gás (T depende de M, que é a massa molar do gás). Essa lei é válida para qualquer tipo de gás, desde que seu comportamento seja igual ou aproximadamente igual ao do gás perfeito.

## 9.4 A energia interna de um gás perfeito

Das hipóteses do modelo teórico de gás perfeito, sabemos que as suas moléculas são pontos materiais que não interagem entre si. Como consequência, temos que essas moléculas não possuem energia cinética de rotação nem energia potencial. Dito isso, podemos formalizar que a energia interna (U) de uma amostra de gás perfeito é a energia cinética de translação de suas moléculas. Portanto

$$U = \frac{1}{2} m (\bar{v})^2 \quad (\text{I})$$

Disso m é a massa total do gás e  $\bar{v}$ , é a velocidade média quadrática das partículas. Da demonstração anterior  $T = \frac{M}{3R} (\bar{v})^2$  podemos isolar  $(\bar{v})^2$  ficando com:

$$(\bar{v})^2 = \frac{3RT}{M} \quad (\text{II})$$

Substituindo em , obtemos

$$U = \frac{1}{2} \frac{m}{M} 3RT$$

Sabemos que  $\frac{m}{M}$  é n (número de mols do gás), portanto:

$$\boxed{U = \frac{3}{2} nRT}$$

A energia interna de um gás perfeito é função exclusiva do número de mols (n) e da temperatura absoluta (T) do gás. Para um gás real, a expressão deduzida não possui validade, uma vez que no zero absoluto sua energia interna não é nula. Ao valor da energia interna no zero absoluto dá-se o nome de energia do ponto zero. Para gases reais monoatômicos, em baixas pressões e altas temperaturas. O valor do coeficiente  $\frac{3}{2}$  varia com a atomicidade do gás real. No caso de gases biatômicos o coeficiente assume o valor de  $\frac{5}{2}$ .

## 9.5 Equipartição da energia

Usando como proposições nossas hipóteses a respeito do modelo teórico de gás, temos que as dimensões das partículas do gás é desprezível, e que possuem três graus de liberdade, esses graus de liberdade representam movimentos de translação na direção de cada um dos três eixos x, y e z, de um sistema de referência. Os gases reais monoatômicos têm comportamentos bem próximos do comportamento dos gases perfeitos, com uma boa aproximação matemática sua energia interna pode ser denotada por:

$$U = \frac{1}{2}m(\bar{v})^2$$

Sabemos que  $(\bar{v})^2 = \frac{3RT}{M}$  Substituindo na energia interna obtemos

$$U = \frac{1}{2}m \left( \frac{3RT}{M} \right) = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} nRT$$

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} pV$$

O teorema da equipartição da energia estabelece que a divisão dessa energia deve ser feita de maneira igual para cada grau de liberdade. Portanto:

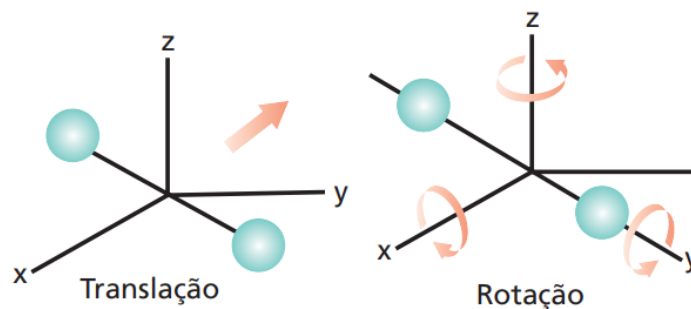
$$U_x = U_y = U_z = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} nRT \right)$$

$$U_x = U_y = U_z = \frac{1}{2} nRT$$

Os gases diatômicos são imaginados como uma "barra" com um átomo em cada ponta (podemos imaginar um haltere), sendo capaz de girar em torno de qualquer um dos eixos ortogonais. A inércia de rotação em torno do eixo, cuja direção coincide com a "barra", é desprezível em comparação com as duas outras direções; A partícula diatômica tem três graus de liberdade na translação e dois graus na rotação, sendo que sua energia interna fica expressa por:

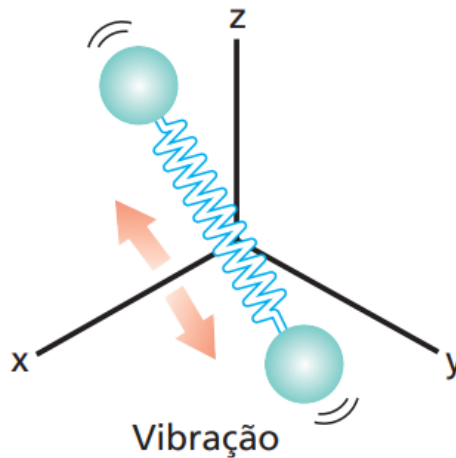
$$U = 3 \left( \frac{1}{2} nRT \right) + 2 \left( \frac{1}{2} nRT \right) = 5 \left( \frac{1}{2} nRT \right)$$

$$U = \frac{5}{2} nRT$$



Se mudarmos o modelo, sendo a "barra" trocada por muma "mola", acrescentaremos à molécula uma vibração. Cada partícula passa a ter translação, rotação e vibração. Passamos a ter mais graus de liberdade, o que faz aumentar a energia interna desse gás.

Esse novo modelo, bem como os gases de atomicidade maior que dois (os poliatômicos), tem energia interna maior que  $\frac{5}{2}nRT$ .



O cálculo da energia interna de um gás depende do modelo que vamos adotar. Porém é importante ressaltar que, para todos os gases (perfeitos ou reais), a energia interna ( $U$ ) é sempre proporcional à temperatura absoluta ( $T$ ) do gás.

## 9.6 A energia cinética média molecular

Em um recipiente no qual há  $N$  moléculas de um gás perfeito, com energia interna igual a  $U$ . A energia cinética média por molécula é denotada por:

$$E_{cm} = \frac{U}{N}$$

A energia interna de um gás perfeito, é exclusivamente cinética de translação, temos:

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

Portanto:

$$E_{cm} = \frac{3}{2} \frac{nRT}{N} \quad (\text{I})$$

Cada mol de gás, representa uma quantidade de partículas dada pelo número de Avogadro ( $A = 6.02 \cdot 10^{23}$  moléculas/mol). Então

$$N = n \cdot A \quad (\text{II})$$

Substituindo em obtemos

$$E_{cm} = \frac{3}{2} \frac{nRT}{nA} \implies E_{cm} = \frac{3}{2} \frac{R}{A} T$$

A razão entre as constantes  $R$  e  $A$  é denominada **constante de Boltzmann** seu valor é:

$$k = \frac{R}{A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

A equação da energia cinética existente em cada partícula de um gás perfeito é denotada então da seguinte maneira:

$$E_{cm} = \frac{3}{2}kT$$

A constante de Boltzmann ( $k$ ) não depende da natureza do gás, portanto é notório que a energia cinética existente, em média, em cada partícula de um gás perfeito é função exclusiva de sua temperatura absoluta.