Notas de Aula - Equações Diferenciais Ordinárias

Alisson Ferreira Martins

2025

Sumário

1 Classificação das Equações Diferenciais

As E.D são classificadas em tipo, ordem e linearidade.

1. Ao tipo, ela pode ser ordinária (EDO) ou parcial (EDP). Ela é ordinária se as funções do tipo forem de uma **variável independente**, ou seja, contém uma derivada ordinária, de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma variável independente, do contrário ela é parcial, ou seja, contém derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes.

   Exemplos de (EDO) e (EDP)

   Movimento do pêndulo simples: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ (EDO, $\omega(t)$ é a função)

   Sistema massa-mola: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dfrac{dx}{dt} + kx = f_o\cos(\omega t)$ (EDO, $x(t)$ é a função)

   CIRCUITO RC: $R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = v(t)$ (EDO, Q(t) é a função)

   $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (EDP, u(x,y) é a função)

2. Uma ED pode ser de $1^a, 2^a, 3^a, ...$, n-ésima ordem, dependendo da derivada de maior ordem presente na equação.

   Exemplos de equações

   Movimento do pêndulo simples: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ (EDO de 2^a ordem)

   Sistema massa-mola: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dfrac{dx}{dt} + kx = f_o\cos(\omega t)$ (EDO de 2^a ordem)

   CIRCUITO RC: $R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = v(t)$ (EDO de 1^a ordem)

   $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (EDP de 2^a ordem)

3. Uma ED pode ser linear ou não-linear, será linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear, ou seja, as incógnitas e cada uma de seus respectivos termos aparecem em uma soma, e cada termo é produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas, para ser linear também a variável dependente e suas derivadas devem ter expoente um e a variável dependente não pode aparecer em funções não-linear.

Exemplos de E.D linear e não-linear

Movimento do pêndulo simples: $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin(\theta) = 0$ (EDO de 2^a ordem não-linear, a linear variável dependente θ aparece em uma função não-linear seno).

Sistema massa-mola: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dfrac{dx}{dt} + kx = f_o\cos(\omega t)$ (EDO de 2^a ordem linear, a variável dependente x não multiplica sua derivada, nem x e nem suas derivadas estão com expoente diferente de um e x não aparece em uma função linear.

CIRCUITO RC: $R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = v(t)$ (EDO de 1^a ordem linear, a variável dependente Q não multiplica sua derivada, nem Q e nem suas derivadas estão com expoentes diferentes de um e Q não aparece em uma função linear)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ (EDP de 2^a ordem linear, observe que u, nossa variável dependente não multiplica sua derivada, nem ela e nem suas derivadas estão com expoentes diferente de um, e além disso u não aparece em uma função não-linear)

Notação para derivadas ordinárias

1. Notação de Leibniz: $\dfrac{dy}{dx}$
2. Notação de linha: $y^{'}, y^{''}, y^{'''}, y^4, \cdots, y^n, \cdots$
3. Notação ponto de Newton: $\ddot{x}$

Notação para derivadas parciais

1. Notação com delta minúsculo: $\dfrac{\partial x}{\partial y}$
2. Notação de subscrito: $u_x, u_{xx}, u_{xy}, \cdots$

Soluções de equações diferenciais

EDO de primeira ordem

Equações lineares

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Onde p e g são funções dadas da variável independente t.

Podemos resolver esse tipo de equação pelo método dos fatores integrantes, ou pelo método de integração se conseguirmos separar as variáveis

Método da integração

Exemplo por Método da integração

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \longrightarrow y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$$

Pelo método dos fatores integrantes teríamos que multiplicar a ED por uma função $\mu(t)$ **fator integrante** e tornar a equação diferencial da seguinte maneira, $L\{y'\} + \frac{1}{2}L\{y\} = \frac{3}{2}L\{1\}$

Para equações diferenciais de primeira ordem mais gerais o método de integração acaba não surtindo efeito, portanto acabamos não encontrando solução alguma. Para achar a solução utilizamos do **método do fator integrante**, multiplicamos a ED por uma função ao qual não conhecemos $\mu(t)$ **(fator integrante)** tornando a equação integrável e possível de se achar a solução.

2 Método dos fatores integrantes

Equações de primeira ordem possuem a seguinte característica

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

Em que f é uma função dada de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de uma solução. O objetivo é determinar se tal função existe e, nesse caso, desenvolver métodos para encontrá-la. Infelizmente, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares para uma função arbitrária f. Em vez disso, descreveremos diversos métodos, cada um deles aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes equações lineares são as separáveis, as equações exatas. Algumas aplicações importantes introduzem a ideia de aproximar uma solução por cálculos numéricos e discutem questões teóricas relacionadas com a existência e a unicidade de soluções. Inclui exemplo de soluções caóticas no contexto de equações de diferenças finitas de primeira ordem.

Se a função f na Equação depender linearmente da variável dependente y, então a Equação é dita uma equação linear de primeira ordem. Temos um tipo restrito de equações lineares de primeira ordem, as que têm coeficientes constantes. Um exemplo típico é

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \tag{2}$$

Em que a e b são constantes dadas. Uma equação dessa forma descreve o movimento de um objeto em queda na atmosfera, conforme estudado anteriormente. Agora, consideramos a equação linear de primeira ordem geral , obtida substituindo-se os coeficientes a e b na Equação por funções arbitrárias de t. Em geral, escreveremos a **equação diferencial linear de primeira ordem geral na forma padrão**

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \tag{3}$$

em que p e g são funções dadas da variável idnependente t. Algumas vezes, é mais conveniente escrever a equação na forma

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{4}$$

na qual P, Q e G são dadas. É claro que, sempre que $P(t) \neq 0$, você pode converter a Equação na Equação dividindo a Equação por $P(t)$.

A maioria das equações diferenciais lineares, nem sempre possuem as expressões à esquerda do sinal de igualdade iguais à derivada do produto de y com outra função. Entretanto, Leibniz descobriu que, se a equação diferencial for multiplicada por determinada função $\mu(t)$, então a equação transforma-se em uma que é imediatamente integrável usando-se a regra para a derivada de um produto. A função $\mu(t)$ é chamada de **fator integrante** e nossa tarefa principal é determinar como encontrá-la para uma equação dada.

Demonstração

Dada uma equação da forma

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + ay = g(t)} \tag{5}$$

a é uma constante e $g(t)$ uma função, podemos multiplicar todos os termos por uma função $\mu(t)$ que é o nosso fator integrante.

A equação multiplicada por $\mu(t)$ toma a seguinte forma

$$\boxed{\frac{dy}{dt}\mu(t) + a\mu(t)y = g(t)\mu(t)} \tag{6}$$

Ao analisarmos a expressão a esquerda do sinal de igualdade é notório que podemos reescrevermos a expressão 2 como a derivada do produto $a\mu(t)y$. $\mu(t)$ deve satisfazer a equação

Relembrando a derivada do produto pela definição

$H(x) = f(x) \cdot g(x)$ Sua derivada é escrita como

$$\boxed{g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]} \tag{7}$$

Podemos reescrever a E.D na forma da derivada do produto.

$H(t) = \mu(t) \cdot y(t)$ [1]
A derivada do produto portanto para o fator integrante pode ser escrita como

$$H^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{H(t+h) - H(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)\cdot y(t+h) - \mu(t)\cdot y(t)}{h}$$

Em seguida somamos e subtraímos $\mu(t+h)\cdot y(t) - \mu(t+h)\cdot y(t)$ na expressão sem alterar os termos resultando em

$$H^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)\cdot y(t+h) - \mu(t)\cdot y(t) + \mu(t+h)\cdot y(t) - \mu(t+h)\cdot y(t)}{h}$$

Colocando os termos em evidência

$$H^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)\big(y(t+h) - y(t)\big) + y(t)\big(\mu(t+h) - \mu(t)\big)}{h}$$

Aplicando as propriedades de limites, onde o limite de uma soma é a soma dos limites obtemos

$$H^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)\big(y(t+h) - y(t)\big)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{y(t)\big(\mu(t+h) - \mu(t)\big)}{h}$$

Propriedade o limite de um produto é o produto dos limites

[1] $\mu(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas e diferenciáveis

$$H^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \mu(t+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} + \lim_{h\to 0} y(t) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)-\mu(t)}{h}$$

Aplicando-se os limites obtemos

$$H^{'}(t) = \mu(t) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} + y(t) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mu(t+h)-\mu(t)}{h}$$

Resultando então em

$$\boxed{\mu(t)\frac{d}{dt}\, y(t) + y(t)\, \frac{d}{dt}\mu(t)} \tag{8}$$

Podemos tirar uma conclusão em relação a equação (2) supondo que

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mu(t) = a\mu(t)} \tag{9}$$

Manipulando a equação (5) e assumindo que $\mu(t) > 0$, dividimos ambos os lados por $\mu(t)$:

$$\frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt} = a \tag{10}$$

Aplicamos o operador integral em relação à variável t em ambos os lados. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a igualdade se mantém:

Para resolver o lado esquerdo rigorosamente, utilizamos a **Regra da Integração por Substituição**. A regra afirma formalmente que, para uma integral da forma $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$, definimos $u = g(t)$ e $du = g'(t)\, dt$, transformando a integral em:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(u)\, du$$

Identificação dos Termos:

- **Substituição:** $u = g(t) = \mu(t)$.
- **Derivada/Diferencial:** A diferencial du é $du = g'(t)\, dt = \frac{d\mu(t)}{dt}\, dt$.
- **Função Externa:** $f(u) = \frac{1}{u}$.

O integrando $\frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu}{dt}$ encaixa-se perfeitamente na estrutura $f(g(t)) \cdot g'(t)$. Reagrupamos e substituímos formalmente:

$$\int \frac{1}{\mu(t)} \cdot \left(\frac{d\mu(t)}{dt}\, dt \right)$$

Realizando a substituição ($\mu(t) \to u$ e $\frac{d\mu(t)}{dt}\, dt \to du$), a equação integral torna-se:

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int a\, dt \tag{11}$$

3

Calculando as primitivas de ambos os lados:

$$\ln|u| + B = at + A \tag{12}$$

Substituindo u de volta por $\mu(t)$ e agrupando as constantes. Podemos combinar B e A ficando portanto uma única constante $A - B = C$ obtendo portanto

$$\boxed{\ln|\mu(t)| = at + C} \tag{13}$$

A exponenciação é o inverso do logaritmo natural, então aplicaremos a função exponencial em ambos os lados em (6) obtendo

$$e^{\ln|\mu(t)|} = e^{(at+C)}.$$

Usamos a propriedade de que $e^{\ln(x)} = x$. Então, no lado esquerdo, o logaritmo natural é eliminado, restando apenas $|\mu(t)|$. No lado direito, aplicamos a propriedade de expoentes $e^{at+C} = e^{at} \cdot e^{C}$, resultando em:

$$\mu(t) = e^{C} \cdot e^{at}$$

Agora, sabendo que e^C é uma constante, podemos reescrever como:

$$\boxed{\mu(t) = De^{at}} \tag{14}$$

Onde $D = e^C$

É notório que o fator integrante é $\mu(t) = De^{at}$. Multiplicando a equação diferencial original por $\mu(t)$, obtemos:

$$De^{at} \cdot \frac{dy}{dt} + De^{at} \cdot ay = De^{at} \cdot g(t)$$

Utilizando-se da regra do produto ficamos portanto com:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(De^{at}y) = De^{at} \cdot g(t)} \tag{15}$$

Integrando ambos os lados em relação a t, temos:

$$\int \frac{d}{dt}(De^{at}y)\ dt = \int De^{at} \cdot g(t)\ dt$$

A operação de integração desfaz a operação de diferenciação, portanto a integral da derivada é simplesmente a própria função, ficando do lado esquerdo:

$$De^{at}y + E = \int De^{at} \cdot g(t)\ dt$$

Reorganizando temos:

$$\boxed{De^{at}y = \int De^{at} \cdot g(t)\, dt - E} \tag{16}$$

Onde E é uma constante arbitrária. Para muitas funções simples $g(t)$, podemos calcular a integral na equação acima e expressar a solução y em termos de funções elementares como polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais ou logarítmicas. No entanto, para funções $g(t)$ mais complicadas, compensa mais deixar a solução na forma integral definindo limites de integração t_0 e t:

$$y = \frac{1}{De^{at}} \left(\int_{t_0}^{t} De^{as} \cdot g(s)\, ds - E \right)$$

$$y = \int_{t_0}^{t} \frac{De^{as} \cdot g(s)}{De^{at}}\, ds - \frac{E}{De^{at}}$$

Simplificando os termos constantes D dentro da integral e renomeando a constante arbitrária final (onde $c = -E/D$), chegamos à forma canônica:

$$\boxed{y = e^{-at} \int_{t_0}^{t} e^{as} g(s)\, ds + ce^{-at}}$$

Denotando por s a variável de integração para distingui-la da variável independente t, escolhemos algum valor conveniente t_0 para o limite inferior de integração. A escolha de t_0 determina o valor específico da constante c, mas não muda a solução geral. Por exemplo, fazendo $t = t_0$ na equação, a integral se anula e obtemos $c = y(t_0)e^{at_0}$.

Determinação da Constante c

Para determinar o valor de c em termos das condições iniciais, avaliamos a solução geral no instante $t = t_0$:

$$y(t_0) = e^{-at_0} \int_{t_0}^{t_0} e^{as} g(s)\, ds + ce^{-at_0}$$

Pelas propriedades da integral definida, sabemos que qualquer integral cujo limite superior é igual ao limite inferior é nula:

$$\int_{t_0}^{t_0} e^{as} g(s)\, ds = 0$$

Portanto, a equação simplifica-se para:

$$y(t_0) = 0 + ce^{-at_0}$$

Para isolar a constante c, multiplicamos ambos os lados por e^{at_0}:

$$\boxed{c = y(t_0)e^{at_0}} \tag{17}$$

Substituindo este valor de c de volta na solução geral, obtemos a solução particular que satisfaz a condição inicial no ponto t_0.

[1] A mudança de variável de t para s no integrando é fundamental pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**. O t no limite superior representa o ponto exato onde queremos avaliar a solução (o "agora"), enquanto a variável s é uma variável auxiliar (ou variável muda) que percorre todos os valores entre o início t_0 e o fim t para realizar o acúmulo da integral. Se usássemos t em ambos os lugares, haveria uma ambiguidade sintática, pois uma variável não pode ser simultaneamente o limite de integração e o parâmetro de variação interna.

Voltando para a equação linear geral de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

Em que p e g são funções dadas. Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a Equação por uma função $\mu(t)$

4 Equações Diferenciais Separáveis

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

Onde temos a e b constantes.

A equação geral de primeira ordem é

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \tag{1}$$

Se a equação (1) não for linear, não existe um método absoluto para solucionar. Vamos considerar aqui uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por integração direta.

A equação (1) pode ser escrita na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

Ao analisarmos a E.D podemos definir $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$. Se M depende apenas de x e N depende apenas de y a equação (2) demonstra a seguinte aparência

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3}$$

A equação (3) é dita **separável**, porque ao escrever na **forma diferencial**

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{4}$$

Cada parcela então pode ser colocada no lado oposto da igualdade $'' ='' $. A equação separável pode ser resolvida integrando-se M e N.

A forma diferencial (4) tende a ser simétrica e tende diminuir a diferença entre as variáveis dependente e independente.

Sejam H_1 e H_2 duas primitivas quaisquer de M e N, respectivamente. Então

$$H_1^{'}(x) = M(x), \quad H_2^{'}(y) = N(y) \tag{5}$$

A equação (4) fica

$$H_1^{'}(x) + H_2^{'}(y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{6}$$

Se y for considerado função de x, então, de acordo com a regra da cadeia.

Demonstração. **Definições Iniciais**
Sejam $y = y(x)$ e $H_2 = H_2(y)$ funções diferenciáveis em seus respectivos domínios. A função composta que queremos derivar é dada por:

$$h(x) = H_2(y(x))$$

Consideramos uma variação Δx na variável independente x, tal que $\Delta x \neq 0$. Essa variação provoca uma mudança em h, que chamamos de incremento Δh:

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x)$$

Usando a definição de h, substituímos $h(x)$ por $H_2(y(x))$:

$$\Delta h = H_2(y(x + \Delta x)) - H_2(y(x)) \tag{1}$$

Agora, analisamos a variação na função interna y. Definimos o incremento Δy como:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

Podemos isolar o termo $y(x + \Delta x)$ na equação acima, resultando em:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta y \tag{2}$$

Agora, fazemos a primeira substituição importante. Substituímos a expressão (2) dentro da equação (1). Isso nos dá o incremento de h em termos de y e Δy:

$$\Delta h = H_2(y(x) + \Delta y) - H_2(y(x)) \tag{3}$$

Etapa 1: A Expansão Linear (Diferenciabilidade de H_2)

Precisamos relacionar a diferença $H_2(y + \Delta y) - H_2(y)$ com a derivada $H_2'(y)$.

Como H_2 é diferenciável, a reta tangente é uma boa aproximação para a função. A diferença entre o valor real da função e a reta tangente é um "erro"que diminui muito rápido. Para formalizar isso matematicamente e evitar divisões por zero, definimos uma função auxiliar de erro, $\varepsilon(\Delta y)$, da seguinte maneira:

$$\varepsilon(\Delta y) = \begin{cases} \dfrac{H_2(y(x) + \Delta y) - H_2(y(x))}{\Delta y} - H_2'(y(x)) & \text{se } \Delta y \neq 0 \\ 0 & \text{se } \Delta y = 0 \end{cases}$$

Nota: Essa definição garante que ε seja contínua em 0, pois pela definição de derivada, $\lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$.

Agora, vamos rearranjar a primeira linha da definição acima (para $\Delta y \neq 0$) multiplicando tudo por Δy. O resultado é a fórmula da **expansão linear exata** de H_2:

$$H_2(y(x) + \Delta y) - H_2(y(x)) = H_2'(y(x)) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta y) \cdot \Delta y \tag{4}$$

Note que a equação (4) também é verdadeira se $\Delta y = 0$ (pois ficaria $0 = 0$), então ela é válida sempre.

Etapa 2: Substituição na Expressão de Δh

Retornamos à expressão (3) para Δh. Observe que o lado direito de (3) é exatamente o lado esquerdo de (4). Portanto, podemos substituir:

$$\Delta h = \underbrace{H_2'(y(x)) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta y) \cdot \Delta y}_{\text{Substituição da Expansão Linear}}$$

Para encontrar a derivada, precisamos da razão incremental $\frac{\Delta h}{\Delta x}$. Dividimos toda a equação acima por Δx (lembrando que $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{H_2'(y(x)) \cdot \Delta y}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(\Delta y) \cdot \Delta y}{\Delta x}$$

Podemos reescrever as frações para evidenciar a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = H_2'(y(x)) \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + \varepsilon(\Delta y) \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Etapa 3: Aplicação do Limite

Agora aplicamos o limite quando $\Delta x \to 0$ em ambos os lados da equação.
Antes de calcular, precisamos de uma observação crucial sobre a continuidade:

> *Justificativa:* Como $y(x)$ é diferenciável em x, ela é contínua em x. Isso implica que quando $\Delta x \to 0$, a variação Δy também tende a zero ($\Delta y \to 0$).

Isso nos permite afirmar que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$$

Agora aplicamos os limites na equação principal:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[H_2'(y(x)) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right]$$

Pelas propriedades dos limites (limite da soma é a soma dos limites, e limite do produto é o produto dos limites):

$$h'(x) = H_2'(y(x)) \cdot \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right] + \left[\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y)\right] \cdot \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$$

Substituindo os valores conhecidos dos limites:

- $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ (Definição de derivada de y)
- $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$ (Como justificado acima)

Temos:

$$h'(x) = H_2'(y(x)) \cdot y'(x) + 0 \cdot y'(x)$$

O segundo termo se anula, restando apenas:

$$h'(x) = H_2'(y(x)) \cdot y'(x)$$

Portanto, a regra da cadeia está demonstrada:

$$\boxed{\frac{d}{dx} H_2(y(x)) = H_2'(y(x)) \cdot y'(x)}$$

□

Em consequência a equação 6 pode ser escrita como

$$H_1^{'}(x) + H_2(y(x))\frac{d}{dx} = 0$$

Podemos reescrever como

$$\frac{d}{dx}(H_1(x) + H_2(y(x)) = 0 \tag{7}$$

Integrando a equação 7 em relação a x

$$\int \frac{d}{dx}\big(H_1(x)) + \int \frac{d}{dx}H_2(y(x)\big)\ dx = \int 0\ dx$$

Temos que $\int\ 0\ dx = C$ e o lado esquerdo pela Regra Fundamental do Cálculo $H_1(x) + H_2(y(x)) = C$, portanto obtemos como resultado final

$$\boxed{H_1(x) + H_2(y) = C} \tag{8}$$

C é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \varphi(x)$ que satisfaz a equação (8) é uma solução da equação (3); em outras palavras, a equação 8 define a solução implicitamente, em vez de explicitamente. Na prática, a equação (8) é obtida, em geral, da equação (4) integrando-se o primeiro termo em relação a x e o segundo em relação a y.

A equação diferencial (4), juntamente com uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{9}$$

Forma um problema de valor inicial. Para resolver esse problema de valor inicial, precisamos determinar o valor apropriado da constante C na (8) . Fazemos isso configurando $x = x_0$ e $y = y_0$ na equação (8) o que resulta em

$$C = H_1(x_0) + H_2(y_0) \tag{10}$$

Substituindo (10) na equação (8) por esse valor obtemos

$$H_1(x_0) + H_2(y_0) = H_1(x) + H_2(y) = C$$

Observamos que:

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(s)\,ds \quad \text{e} \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(s)\,ds$$

Obtemos

$$\int_{x_0}^{x} M(s)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(s)\,ds\ = 0 \tag{11}$$

A equação (11) é é uma representação implícita da solução da equação diferencial (3) que também satisfaz a condição inicial (9). Tenha em mente o fato de que, para obter uma fórmula explícita para a solução, é preciso resolver a Eq. (11) para y como função de x. Infelizmente, muitas vezes isso é impossível analiticamente; em tais casos, você pode apelar para métodos numéricos para encontrar valores aproximados de y para valores dados de x.

Modelagem com equação diferencial linear (Velocidade de escape) Exemplo

5 Diferenças entre Equações Diferenciais Lineares e Não Lineares

Equações de primeira ordem podem ser usadas para investigar muitos tipos diferentes de problemas nas ciências naturais e em apresentar métodos para resolver tais equações se forem lineares ou separáveis.

5.1 Existência e Unicidade de Soluções

É discutido problemas de valor inicial, cada um dos quais tinha uma solução e, aparentemente apenas uma. Isso levanta a questão de se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações e primeira ordem. Será que todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução? Se você encontrar um problema de valor inicial ao investigar algum problema físico, pode querer saber se ele tem solução antes de gastar muito tempo e esforço tentando resolvê-lo. Se encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se deve continuar a busca por outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções.

Teorema 1 (Existência e Unicidade para Equações Lineares de Primeira Ordem)**.** *Se as funções $p(t)$ e $g(t)$ forem contínuas em um intervalo aberto $I : a < t < b$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial*

$$y' + p(t)\, y = g(t),$$

para cada $t \in I$, e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0,$$

em que y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

5.2 Teorema de Existência e Unicidade I para Equações Lineares de Primeira Ordem

5.3 Teorema de Existência e Unicidade para Equações Não Lineares de Primeira Ordem

6 Equações Diferenciais Exatas e Fatores Integrantes

7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler

8 O Teorema de Existência e Unicidade II

9 Equações de Diferenciais de Primeira Ordem

10 Equações de Diferenciais de Segunda Ordem

Equações lineares têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais, por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível em um nível matemático relativamente elementar. A segunda razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da Física-Matemática Não se pode progredir muito no estudo da mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos sem esbarrar na necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem.

10.1 Equações Diferenciais Homogêneas com Coeficientes Constantes

As equações diferenciais de segunda ordem têm a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{I}$$

Em que f é uma função dada. Denotaremos a variável independente por t, já que o tempo é, com frequência, a variável independente em fenômenos físicos, mas, algumas vezes, usaremos x em seu lugar. Usaremos y ou, ocasionalmente, outra letra, para denotar a variável dependente. A equação I é dita *linear* se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y \tag{II}$$

Ou seja, se f é linear em y e em $\dfrac{dy}{dt}$. Na equação II, g, p e q são funções especificadas da variável independente t, mas não dependem de y, Nesse caso, reescrevemos a Equação I, em geral, como

$$y^{''} + p(t)^{'} + q(t)y = g(t) \tag{III}$$

Em que a linha denota diferenciação em relação a t. No lugar da Equação III, encontramos, com frequência, a equação

$$P(t)y^{''} + Q(t)y^{'} + R(t)y = G(t) \tag{IV}$$

É claro que, se $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Equação IV, por $P(t)$, obtendo ,assim, a Equação III, com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)} \tag{V}$$

Ao discutir a Equação III e tentar resolvê-la, vamos nos restringir a intervalos nos quais as funções p, q e g sejam contínuas.

Se a Equação I não for da forma (III) ou (IV), então ela é dita **não linear**. Investigações analíticas de equações não lineares são relativamente difíceis, abordagens numérica ou geométricas são frequentemente mais apropriadas.

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial, como as Equações I, III ou IV, juntamente com um par de condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y^{'}(t_0) = y_0^{'} \tag{VI}$$

Em que y_0 e $y_0^{'}$ são números dados que descrevem os valores de y e de $y^{'}$ no ponto inicial t_0. Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam apenas um ponto particular t_0, y_0 que deve pertencer ao gráfico da solução, mas, também, o coeficiente angular $y^{'}(0)$ da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, precisa-se de duas integrações para encontrar a solução, e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficiente para a determinação dos valores dessas duas constantes.

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função g(t) na Equação III, ou $G(t)$ na Equação IV, for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita **não homogênea**. O termo não homogêneo g(t), ou $G(t)$, às vezes é chamado de força externa, já que, em muitas aplicações, ela descrever uma força aplicada externamente.

$$P(t)y^{''} + Q(t)y^{'} + R(t)y = 0 \tag{VII}$$

Será demonstrado posteriormente que, uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não homogênea correspondente IV, ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental.

As funções P, Q e R nos casos tratados são constantes. Nesse caso a Equação VII, se torna

$$ay^{''} + by'' + cy = 0 \tag{VIII}$$

Em que a, b e c são constantes dadas. Acontece que a Equação 8 sempre pode ser facilmente resolvida em termos das funções elementares do cálculo. Por outro lado, é muito mais difícil, em geral, resolver a Equação VII se os coeficientes não forem constantes.

Exemplo 1:

Considere a Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de segunda ordem:

$$y'' - y = 0 \tag{I}$$

1. Análise e Proposta de Solução

A equação (I) estabelece uma condição geométrica precisa: procuramos uma função $y(x)$ tal que sua segunda derivada (que representa a concavidade) seja exatamente igual à própria função. Recordando os conceitos de Cálculo Diferencial, sabemos que a função exponencial possui a característica única de ter sua derivada proporcional a ela mesma. Portanto, propomos uma *ansatz* (tentativa de solução) da forma:

$$y = e^{rx},$$

onde r é uma constante real que precisamos determinar.

2. Derivação e Substituição

Para verificar a validade dessa proposta, calculamos as derivadas necessárias. Aplicando a regra da cadeia ($\frac{d}{dx}e^u = e^u \cdot u'$), obtemos a primeira derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{rx}\right) = re^{rx}.$$

Derivando novamente em relação a x para encontrar a segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(re^{rx}\right).$$

Como r é uma constante, ela é preservada na multiplicação, resultando em:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r \cdot \left(re^{rx}\right) = r^2e^{rx}.$$

Agora, substituímos y e y'' diretamente na EDO original $y'' - y = 0$:

$$r^2e^{rx} - e^{rx} = 0$$

3. A Equação Característica

Para resolver para r, fatoramos o termo comum e^{rx}:

$$e^{rx}(r^2 - 1) = 0$$

Analisando este produto, temos um argumento lógico fundamental: a função exponencial e^{rx} nunca é nula para valores reais finitos de x. Consequentemente, para que a igualdade seja verdadeira, o termo entre parênteses deve ser zero. Isso define a *equação característica*:

$$r^2 - 1 = 0.$$

Isolando r, temos $r^2 = 1$. Extraindo a raiz quadrada, obtemos duas raízes reais e distintas:

$$r = \pm 1 \implies \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

Cada raiz gera uma solução particular fundamental para a EDO:

$$y_1(x) = e^x \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

4. Verificação de Independência Linear (Wronskiano)

Encontrar as soluções particulares não é suficiente. Para construir a solução *geral* de uma EDO de segunda ordem, precisamos garantir que y_1 e y_2 formem uma **base** no espaço de soluções. Isso significa que uma função não pode ser escrita como múltiplo da outra (elas não podem ser redundantes). Verificamos essa condição através do determinante Wronskiano, denotado por $W(y_1, y_2)$:

Montamos o determinante com as funções na primeira linha e suas derivadas na segunda:

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \frac{d}{dx}(e^x) & \frac{d}{dx}(e^{-x}) \end{vmatrix} \tag{18}$$

Substituindo as derivadas calculadas anteriormente:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} \tag{19}$$

Calculando o determinante (produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária):

$$\begin{aligned} W &= (e^x)(-e^{-x}) - (e^{-x})(e^x) \\ &= -e^{x-x} - e^{-x+x} \\ &= -e^0 - e^0 \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Conclusão do teste: Como $W = -2 \neq 0$ (o determinante é não nulo para todo x), as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes. Elas são matematicamente distintas e formam um conjunto fundamental de soluções válido.

5. Solução Geral

Sendo a EDO linear e homogênea, aplicamos o **Princípio da Superposição**: a solução geral é a combinação linear das soluções fundamentais.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Substituindo y_1 e y_2, chegamos à forma final:

$$\boxed{y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias definidas pelas condições iniciais do problema. Vamos tratar a equação mais geral

$$ay'' + by^{'} + cy = 0$$

cujos coeficientes a, b e c são constantes (reais) arbitrárias? Em primeiro lugar, as soluções no exemplo eram funções exponenciais. Além disso, quando identificamos duas soluções, fomos capazes de usar uma combinação linear delas para satisfazer as condições iniciais dadas, além da equação diferencial propriamente dita.

Podemos resolver a Equação 8 para quaisquer valores de seus coeficientes e satisfazer, também, qualquer conjunto dado de condições iniciais para y e $y^{'}$.