# Gravitação Universal

Aste Physics

February 2025

# 1 Gravitação

É o estudo das forças de atração entre massas (forças gravitacionais) e dos movimentos dos corpos submetidos a essas forças.

## 1.1 Contexto Histórico

Teorias vieram, teorias se foram, até que chegássemos à concepção atual do Sistema Solar. De início, o misticismo e a religião dissociavam as ideias sobre o Universo do caráter científico.

Os gregos foram os fundadores da ciência modernamente conhecida como Astronomia. No século II d.C., Cláudio Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo, propôs um modelo planetário em que a Terra era o centro do Sistema Solar, de modo que todos os astros conhecidos, inclusive o Sol e a Lua, deveriam gravitar ao seu redor. Esse modelo – geocêntrico, pois tinha a Terra como centro – foi aceito por mais de quinze séculos, sobretudo por ser coerente com a filosofia e os valores correntes.

No século XVI, o monge polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), estudioso de Medicina, Matemática e Astronomia, apresentou uma concepção revolucionária para o Sistema Solar. Segundo ele, o Sol, e não a Terra, seria o centro em torno do qual deveriam gravitar em órbitas circulares a Terra e todos os planetas conhecidos. Embora mais simples que o de Ptolomeu, o modelo de Copérnico - heliocêntrico, pois admitia o Sol como centro do sistema - encontrou grandes osbstáculos para sua aceitação, já que se contrapunha aos preceitos antropocêntricos da Igreja.

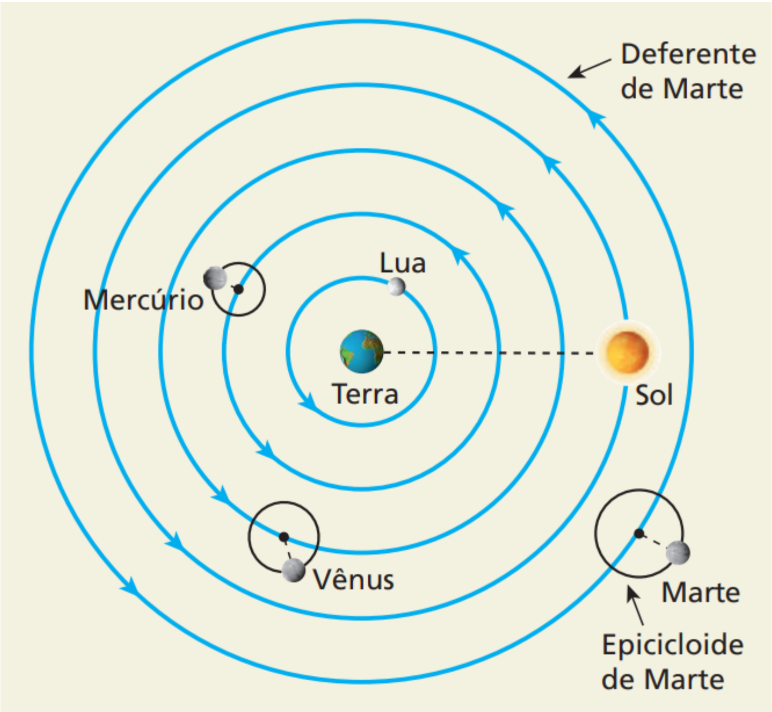



Figure 1: Ilustração com tamanhos e distância fora de escala. No modelo potolomaico do Sistema Solar, cada planeta realizava dois movimentos circulares concomitantemente. Marte, por exemplo, descrevia um epiciclo, cujo centro realizava uma deferente ao redor da Terra. Contudo, isso não acontecia com a Lua e com o Sol, que descreviam apenas a deferente.

**Nicolau Copérnico**. Sua obra mais importante, o livro *Das revoluções dos mundos celestes*, escrito originalmente em latim (*De Revolutionibus Orbium Coelestium*), conforme a tradição da época, constitui um dos mais importantes marcos da evolução dos conceitos referentes à situação da Terra diante do panorama universal. Copérnico recebeu o primeiro exemplar de seu livro no dia de sua morte (25 de maio de 1543), em Frauenburg, na Polônia. Nessa obra, ele propunha a **Teoria Heliocêntrica**, além de explicar os fundamentos do movimento de rotação da Terra, responsável pela sucessão dos dias e das noites. Por contestar o dogma de que o ser humano, obra-prima da criação divina, deveria ocupar juntamente com a Terra o centro do Universo, esse livro foi imediatamente incluído no *Index* – relação das leituras proibidas pela Igreja.


Um importante adepto do pensamento copernicano foi o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1565-1642). Devido às necessidades de suas observações astrônomicas, Galileu construiu diversas lunetas. Com elas, ele descobriu os satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as manchas solares e detalhes da Lua. Além disso, elaborou mapas celestes de rara precisão para a época. Seus estudos o levaram a também concordar com a ideia de que o Sol, e não a Terra, deveria ser o centro do Sistema Solar. Por essa razão, foi perseguido e preso pela Inquisição e, sob pressão, negou perante um tribunal as teses que defendia. A crescente controvérsia entre as proposições de Ptolomeu e Copérnico levou os astrônomos a estudos mais profundos. Foi o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) quem conseguiu descrever de modo preciso os movimentos planetários.

Atualmente, o modelo aceito para o Sistema Solar é basicamente o de Copérnico, feitas as correções sugeridas por Kepler e por cientistas que o sucederam.
Sabe-se que oito planetas gravitam em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. Na ordem crescente de distância ao Sol, são eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

### Nota

Na época de Kepler (por volta de 1600), eram conhecidos apenas seis planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, todos observáveis a olho nu.

**Johannes Kepler**. Autor de uma obra extensa que inclui vários opúsculos e livros, como *Epitome Astronomiae Copernicanae* e *Harmonice Mundi*, em que ratifica e amplia as teorias de Copérnico, descrevendo de maneira precisa os movimentos dos planetas em torno do Sol. Para elaborar seus trabalhos, Kepler fundamentou-se em suas observações do planeta Marte, em correspondências com Galileu Galilei e, sobretudo, em dados e medidas astronômicos obtidos pelo seu mestre dinamarquês, Tycho Brahe (1546-1601), com quem trabalhou durante algum tempo.

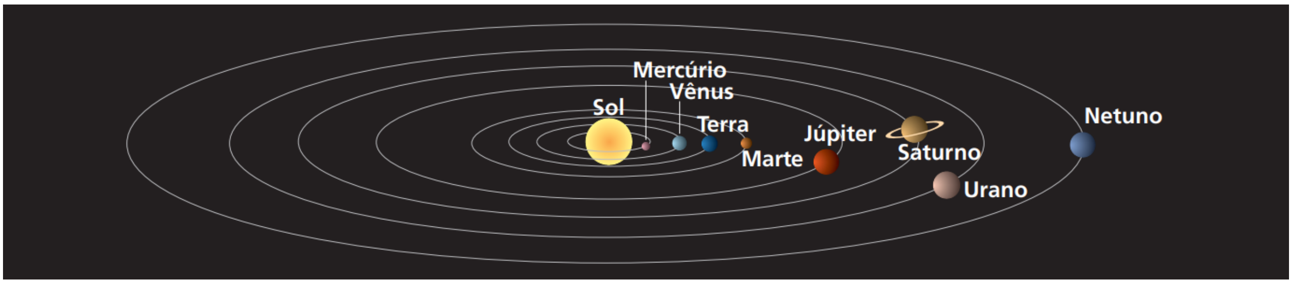



Figure 2: Aspecto das órbitas planetárias em torno do Sol. As trajetórias descritas pelos planetas pertencem praticamente a um mesmo plano. A órbita de Mercúrio é a mais elíptica, sendo as demais aproximadamente circulares. ( Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia).

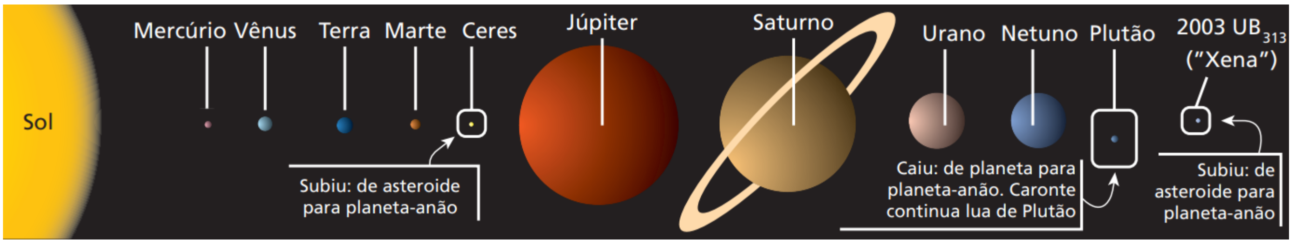



Figure 3: Depois das deliberações da União Astronômica Internacional (UAI), em 2006, está é a situação atual do Sistema Solar.

## Plutão-Caronte

### Plutão-Caronte

Descoberto em 1930, Plutão foi considerado até 2006 o nono planeta do Sistema Solar. Sua distância média ao Sol é de 39,6 UA (uma unidade astronômica – UA é a distância média entre a Terra e o Sol e equivale aproximadamente a 149 milhões de quilômetros) – e seu período de revolução equivale a 248 anos terrestres. A órbita de Plutão é uma elipse de grande excentricidade, inclinada cerca de 17° em relação ao plano das demais órbitas planetárias. Em 2006, porém, a União Astronômica Internacional (UAI), depois de estabelecer novos parâmetros para a definição do que deve ser chamado de planeta, deliberou por rebaixar Plutão à condição de planeta-anão, já que muitas de suas características não correspondem às atuais exigências. Plutão na verdade compõe com Caronte – um outro corpo celeste praticamente do mesmo tamanho, descoberto em 1978 – um sistema duplo em que os dois astros gravitam com períodos iguais ao redor de um centro imaginário que gira em torno do Sol. Caronte, no entanto, é considerado uma lua de Plutão.

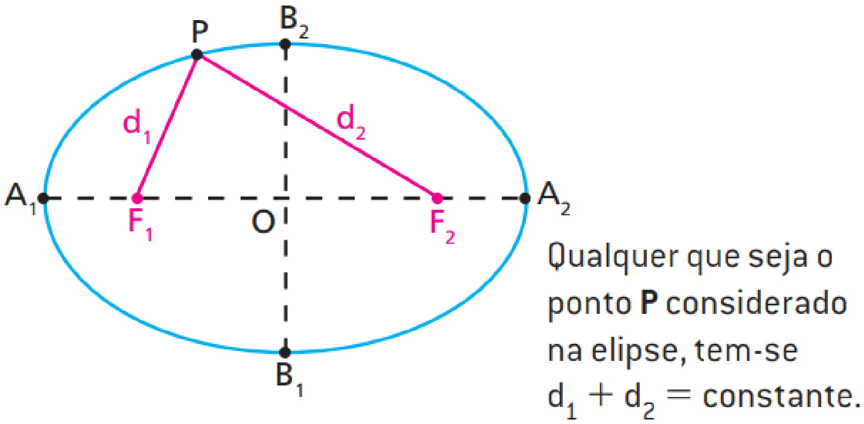

Imagem do sistema Plutão-Caronte obtida em 1994 pelo telescópio Hubble.

**Elipse**

Elipse é o conjunto de pontos de um plano para os quais a soma das distâncias $d_1$ e $d_2$, respectivamente a dois pontos fixos, denominados focos, $F_1$ e $F_2$ pertencentes a esse plano, permanece constante.

Elementos de uma elipse

- $F_1$ e $F_2$ são focos;
- $OA_1 = OA_2$ são os semieixos maiores;
- $OB_1 = OB_2$ são os semieixos menores;




Façamos $OA_1 + OA_2 = E$ (eixo maior da elipse) e $OF_1 + OF_2 = f$ (distância entre os focos da elipse). Chama-se **excentricidade da elipse** a grandeza adimensional e dada por:

$$\boxed{e = \frac{f}{E} \qquad (0 \leq e < 1)}$$

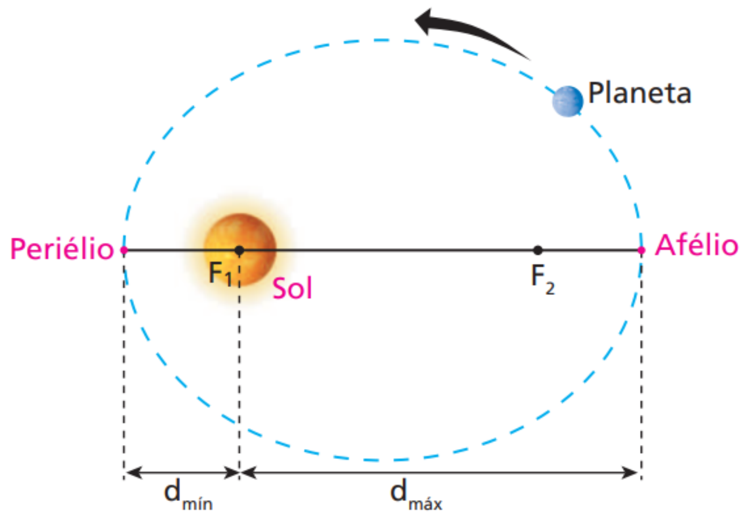
Se $f = 0$, $F_1$ e $F_2$ serão coincidentes e a elispe assumirá a forma particular de uma circunferência com o centro localizado em $F_1 \equiv F_2$. Se f tender a E, porém, a excentricidadfe e se aproximará de 1 e a elipse ficará semelhante a um segmento de reta.

## 1.2 As leis de Kepler

Foi por intermédio de Kepler que a Astronomia se desvencilhou da Teologia para se ligar definitivamente à Física. Dono de uma personalidade indagadora e obstinada, este professor de Matemática e Astronomia, conhecedor das teoria de Copérnico, herdou um grande acervo de informações e medidas. Esses ingredientes ajudaram-no a verificar que existem notórias regularidades nos movimentos planetários, de modo que ele pôde formular, mesmo sem demonstrar matematicamente, três generalizações, conhecidas como Leis de Kepler.

### 1ª Lei - Lei das Órbitas

Em relação a um referencial no Sol, os planetas movimentam-se descrevendo órbitas elípticas, ocupando o Sol um dos focos da elipse.




O ponto da órbita mais próximo do Sol é denominado periélio, e o mais afastado, afélio. Chamando de $d_{min}$ e $d_{max}$ as distâncias do periélio e do afélio ao centro do Sol, respectivamente, definimos raio médio da órbita (R) do planeta como a média aritmética entre $d_{min}$ e $d_{max}$.

$$\boxed{R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}}$$

Com a definição acima, chegamos a conclusão que o raio médio da órbita é o semieixo maior da elipse. Entre os planetas do Sistema Solar, Mercúrio é o que descreve órbita de maior excentricidade. Os demais planetas, inclusive a Terra, realizam órbitas praticamente circulares, como pode ser observado na tabela abaixo:

| Planeta | Excentricidade da elipse |
|---|---|
| Mercúrio | 0,20 |
| Vênus | 0,07 |
| Terra | 0,02 |
| Marte | 0,09 |
| Júpiter | 0,05 |
| Saturno | 0,06 |
| Urano | 0,05 |
| Netuno | 0,009 |

Figure 4: Valor da excentricidade da órbita de cada planeta.

O fato de existirem órbitas praticamente circulares não inválida, contudo a 1ª Lei de Kepler, já que a circunferência é um caso particular de elipse que tem os focos coincidentes. Uma evidência de que a órbita da Terra é praticamente circular é que, quando observamos o Sol, ele nos aparenta ter o mesmo "tamanho" em qualquer época do ano. Se a órbita terrestre fosse uma elipse de grande excentricidade, visualizaríamos o Sol muito grande quando o planeta percorresse a região do periélio e muito pequeno quando o planeta percorresse a região do afélio. Além disso, na passagem da Terra pela região do periélio, sentiríamos um calor imenso, ficando sujeitos a marés devastadoras. Na passagem da Terra pela região do afélio, porém, nos submeteríamos a fenômenos opostos: sentiríamos um frio glacial e as marés seriam amenas, provocadas quase que exclusivamente pela influência da Lua.

### 2ª Lei - Lei das Órbitas

As áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são diretamente proporcionais aos respectivos intervalos de tempo gastos.

$$\boxed{A = V_a \Delta t}$$

- A (Área)
- $\Delta t$ (Intervalo de tempo)
- $V_a$ (Constante de proporcionalidade $V_a$ denomina-se velocidade areolar e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta, que tem origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre as respectivas áreas.

A Lei das áreas pode ser enunciada da seguinte maneira:

O vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

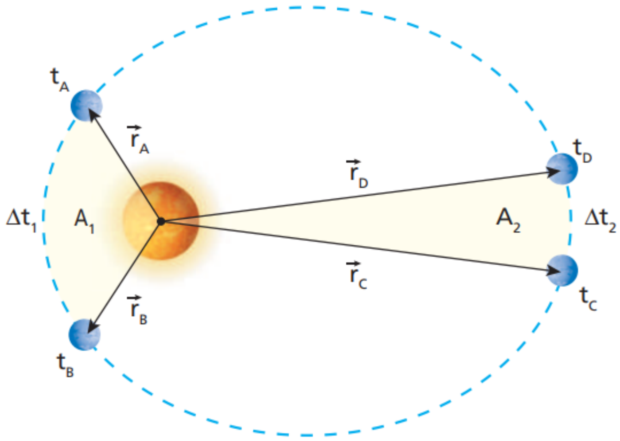



Figure 5: Planeta em quatro instantes consecutivos do seu movimento orbital em torno do Sol, e seus respectivos vetores-posição $\vec{r_A}$, $\vec{r_B}$, $\vec{r_C}$ e $\vec{r_D}$ associado aos instantes $t_A$, $t_B$, $t_C$ e $t_D$ respectivamente.

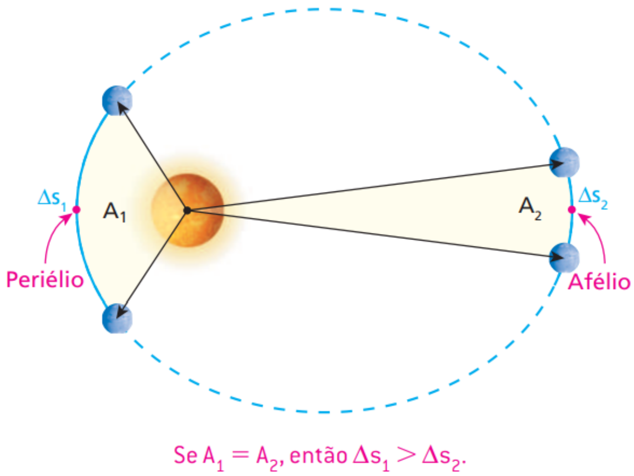
Representamos por $A_1$ E $A_2$ as áreas varridas pelo vetor-posição do planeta nos intervalos $\Delta t_1 = t_B - t_A$ e $\Delta t_2 = t_D - t_c$ :

Conforme propõe a 2ª Lei de Kepler, temos:

$$\text{Se } \Delta t_1 = \Delta t_2, \text{ então } A_1 = A_2$$

É importante reforçar que a velocidade areolar para um dado planeta do Sistema Solar é constante. Isso não significa, porém, que o movimento do planeta ao longo de sua órbita seja uniforme.

Admitamos que, na figura abaixo, as áreas $A_1$ e $A_2$ sejam varridas em intervalos de tempos iguais. Com base na Lei das áreas, concluímos que $A_1 = A_2$ e que, devido à excentricidade da órbita, o espaço percorrido pelo planeta na região do periélio (deslocamento escalar) é maior que o espaço percorrido pelo planeta na região do afélio ($\Delta s_1 > \Delta s_2$).

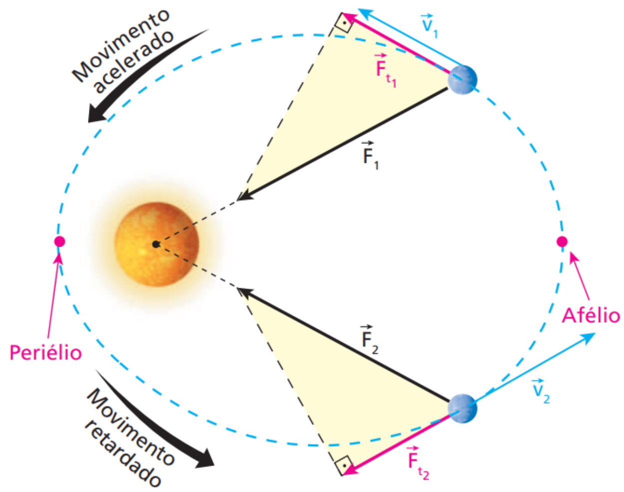



Se na região do periélio, num intervalo de tempo de mesma duração, o planeta percorre um espaço maior que o percorrido na região do afélio, podemos dizer que sua velocidade escalar média de translação é maior na região do periélio que na do afélio.

No periélio, o planeta tem velocidade de translação com intensidade máxima, enquanto no afélio ele tem velocidade translação com intensidade mínima.

O movimento de um planeta que descreve órbita elíptica em torno do Sol não é uniforme. Do afélio para o periélio, o movimento é acelerado, e do, periélio para o afélio, o movimento é retardado.

A explicação para esse mecanismo está na força de atração gravitacional que o Sol exerce no planeta. Essa força, que está sempre dirigida para o centro de massa do Sol, foi descrita por Newton. Do afélio para o periélio, a força gravitacional admite uma componente tangencial no sentido da velocidade, ocorrendo o contrário do periélio para o afélio.




| |
|---|
| O movimento será uniforme no caso particular de planetas descrevendo órbitas circulares. |

**3ª Lei - Lei das Órbitas**

Para qualquer planeta do Sistema Solar, é constante quociente do cubo do raio médio da órbita, $R^3$, pelo quadrado do período de revolução (ou translação), $T^2$, em torno do sol.

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

A constante $K_p$ denomina-se constante de Kepler e seu valor depende apenas da massa do sol e das unidades de medida.

| Planeta | Raio médio da órbita (UA) | Período de revolução (dias) | $\frac{R^3}{T^2}$ ($UA^3/dias^2$) |
|---|---|---|---|
| Mercúrio | 0,389 | 87,77 | $7{,}64 \cdot 10^{-6}$ |
| Vênus | 0,724 | 224,70 | $7{,}52 \cdot 10^{-6}$ |
| Terra | 1,000 | 365,25 | $7{,}50 \cdot 10^{-6}$ |
| Marte | 1,524 | 686,98 | $7{,}50 \cdot 10^{-6}$ |
| Júpiter | 5,200 | 4332,62 | $7{,}49 \cdot 10^{-6}$ |
| Saturno | 9,510 | 10759,20 | $7{,}43 \cdot 10^{-6}$ |
| Urano | 19,261 | 30787,03 | $7{,}54 \cdot 10^{-6}$ |
| Netuno | 30,201 | 60185,18 | $7{,}60 \cdot 10^{-6}$ |

Acima, os oito planetas do Sistema Solar com seus respectivos raios médios de órbita (R) em $UA$ e períodos de revolução (T) em dias. O quociente, ou seja, $\frac{R^3}{T^2}$ para cada caso.

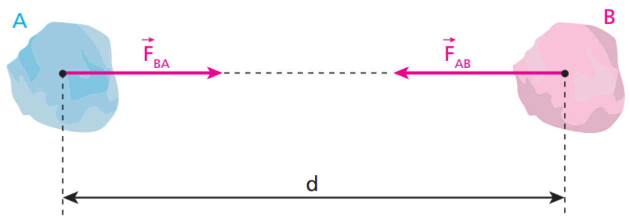
O período de revolução cresce com o raio médio da órbita descrita pelo planeta em torno do Sol. Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e, por isso, é o que tem o menor ano (aproximadamente 88 dias terrestres). Netuno é o planeta mais afastado do Sol e, por isso, é o que tem maior ano (aproximadamente 165 anos terrestres).

### Universalidade das leis de Kepler

As três leis de Kepler são universais, ou seja, valem para o Sistema Solar a que pertencemos e também para qualquer outro sistema do Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores. O planeta Júpiter e seus dezesseis satélites, constituem um sistema desse tipo. O mesmo ocorre com Marte e seus satélites Deimos e Fobos.

## 2 Lei de Newton da atração das massa

No ano de 1665, uma grande epidemia de peste assolou a Inglaterra. Buscando refugiar-se, Isaac Newton interrompeu suas atividades na Universidade de Cambridge que foi fechada na ocasião, e retornou a Woolsthorpe, localidade em que seus familiares mantinham uma pequena propriedade rural. Foi nessa ocasião, na tranquilidade do campo, que Newton viveu, aos 23 anos, uma das fases mais fecundadas de sua vida como homem de ciência. Apoiado nos trabalhos de seus antecessores (Copérnico, Galileu e Kepler), ele enunciou uma lei de âmbito universal, que trouxe nova luz ao conhecimento da época. A Lei de Newton da Atração das Massas é um dos mais notáveis trabalhos do Isaac Newton, constituindo-se em um dos instrumentos que deu sustentação matemática às teorias da Mecânica Clássica.




Corpos A e B, de massas $m_A$ e $m_B$, respectivamente, têm seus centros de gravidade separados por uma distância $d$.

Newton verificou que os dois corpos se atraem mutuamente, trocando forças de ação e reação. O corpo A age no corpo B com uma força $\vec{F}_{AB}$, enquanto B reage em A com uma força $\vec{F}_{BA}$, de mesma intensidade que $\vec{F}_{AB}$. Portanto

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \ \text{(vetorialmente)}$$

$$F_{AB} = F_{BA} \ \text{(em módulo)}$$

As forças trocadas por A e B têm a mesma natureza daquela responsável pela manutenção da Lua em sua órbita em torno da Terra e também daquela responsável pela queda de corpos nas vizinhanças de um astro: são forças atrativas de origem gravitacional.

As intensidades de $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ são diretamente proporcionais ao produto das massas $m_A$ e $m_B$, mas inversamente proporcionais ao quadrado da distância d.

É representado por F a intensidade de $\vec{F}_{AB}$ ou de $\vec{F}_{BA}$, podemos registrar que:

$$\boxed{F = G\frac{m_A \cdot m_B}{d^2}}$$

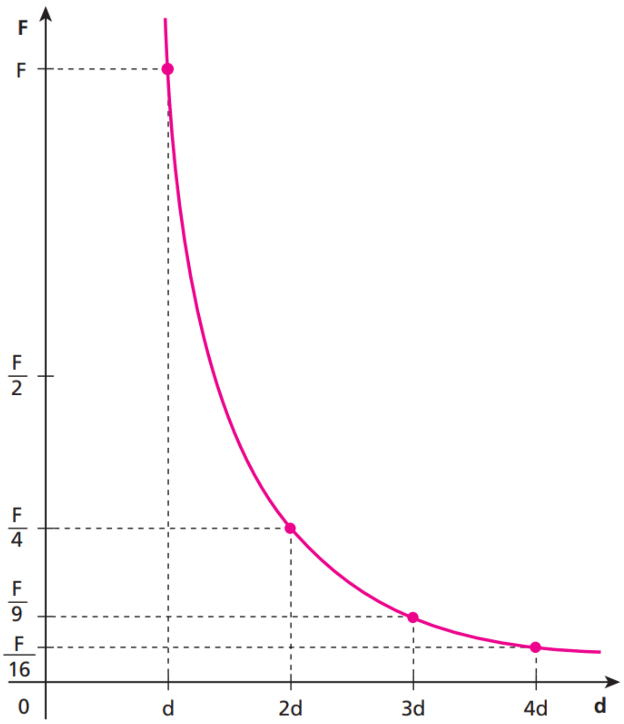
A constante G denomina-se Constante da Gravitação e seu valor numérico, num mesmo sistema de unidades, independe do meio em que os corpos se encontram. Foi o físico e químico inglês Henry Cavendish (1731-1810) quem, em 1798, obteve a primeira medida precisa para a Constante da Gravitação. Utilizando uma balança de torção, ele mediu a intensidade da força atrativa entre dois pares de corpos de massas conhecidas e, a partir dos dados obtidos, calculou o valor de G. Atualmente, o valor teórico para G é:

$$\boxed{G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N\ m^2/kg^2}$$

A intensidade ($F$) da força de atração gravitacional entre dois corpos de massas M e m em função da distância d entre seus centros de gravidade. F é inversamente proporcional ao quadrado de d como representado na tabela a seguir:

| **Distância** | d | 2d | 3d | 4d |
|---|---|---|---|---|
| **Força** | F | $\frac{F}{4}$ | $\frac{F}{9}$ | $\frac{F}{16}$ |

A variação de F em função de d pode ser observado conforme o gráfico a seguir:




**Nota:**

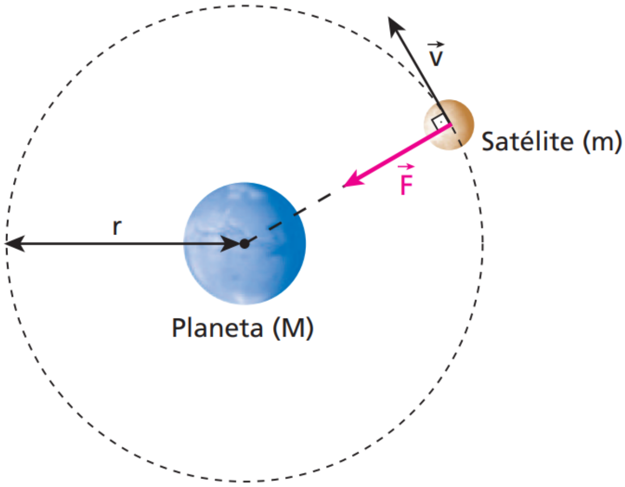
Dois corpos quaisquer sempre interagem gravitacionalmente, atraindo-se. Entretanto, pelo fato de o valor de $G$ ser muito pequeno ($6.67 \cdot 10^{-11}$ SI), a intensidade da força atrativa só se torna apreciável se pelo menos uma das massa for consideravelmente grande. É por isso que duas pessoas, por exemplo, se atraem gravitacionalmente, mas com forças de intensidade tão pequena que seus efeitos passam despercebidos. A força de atração gravitacional adquire intensidade considerável quando um dos corpos é, por exemplo, um planeta e, além disso, a distância envolvida é relativamente pequena.

A Terra e a Lua atraem-se gravitacionalmente trocando forças de ação e reação. É devido à força recebida da Terra que a Lua mantém-se em órbita ao seu redor, realizando uma volta completa em, aproximadamente, 27 dias.

# Satélites

## Estudo do movimento de um satélite genérico

Em que um satélite genérico de massa m gravita em órbita circular em torno de um planeta de massa M. Representemos por r o raio da órbita e por G a Constante da Gravitação.




Como prevê a 2ª Lei de Kepler, se a órbita descrita pelo satélite é circular, seu movimento é uniforme.

## Determinação da velocidade orbital (v)

A força gravitacional que o satélite recebe do planeta é a resultante centrípeta no seu movimento circular e uniforme.

$$F = F_{cp}$$

Porém

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \text{ e } F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

Assim:

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Logo:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

v independe da massa do satélite, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada de r.

## Determinação do período de revolução (T)

O satélite realiza movimento circular e uniforme, temos que:

$$v = \frac{2\pi\ r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi\ r}{v}$$

Sendo $v = \sqrt{\dfrac{G\ M}{r}}$, continua:

$$T = \frac{2\pi\, r}{\sqrt{\dfrac{G\ M}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^2}{\dfrac{G\,M}{r}}}$$

Donde:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}}$$

Note que T também independe da massa do satélite, sendo proporcional à raiz quadrada do cubo de r. Se um outro satélite com massa diferente do primeiro, descrevesse a mesma órbita, esta seria percorrida com o mesmo período de revolução. Ao formular a Lei da Atração das Massas Newton pôde demonstrar matematicamente a 3ª Lei de Kepler. Seguindo um raciocínio semelhante ao que desenvolvemos para obter a equação do período de revolução, ele confirmou que, para qualquer corpo em órbita de um grande massa central, o quociente $\dfrac{r^3}{T^2}$ é constante. A constante, denominada constante de Kepler no caso do Sistema Solar, nada mais é que o quociente $\dfrac{G\,M}{4\pi^2}$. e de fato, só depende da massa central (M).

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\ M}{4\pi^2} = \text{constante}}$$

## Determinação da velocidade areolar

Quando o satélite realiza uma volta completa em sua órbita, seu vetor-posição em relação ao centro do planeta varre uma área $A = \pi\, r^2$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

Da 2ª Lei de Kepler, sabemos que:

$$A = v_a \Delta t \Rightarrow v_a = \frac{A}{\Delta t}$$

Com

$$A = \pi\, r^2 \ \text{ e } \ \Delta t = T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}$$

Calculemos $v_a$

$$v_a = \frac{A}{\Delta t} \Rightarrow v_a = \frac{\pi\, r^2}{2\pi \sqrt{\dfrac{r^3}{G\,M}}}$$

Logo:

$$\boxed{v_a = \frac{1}{2}\sqrt{G\,M\,r}}$$

Da mesma forma que v e T, a velocidade areolar $v_a$ independe da massa do satélite, mas depende do raio órbita (r) e da massa do planeta (M) que, no caso, faz o papel de "Sol".

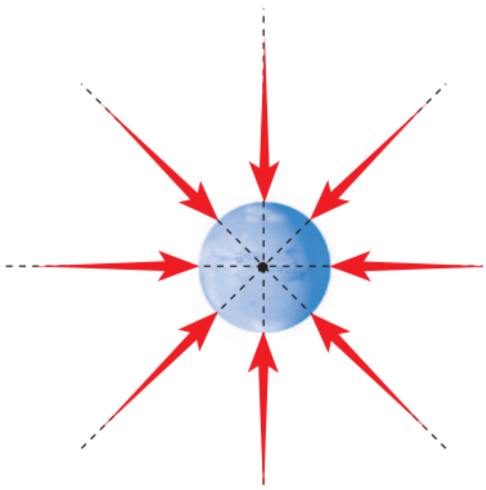
# 3 Estudo do campo gravitacional de astro

## Linhas de força do campo gravitacional

De acordo princípios da Física Clássica, toda massa tem capacidade de criar em torno de si um campo de forças, denominado **campo gravitacional**. Uma estrela tem ao seu redor um campo gravitacional, o mesmo ocorrendo com um simples asteroide. A intensidade do campo gravitacional em determinado ponto aumenta com a massa geradora do campo e diminui com a distância até essa massa. O campo gravitacional é atrativo, já que partículas submetidas exclusivamente aos seus efeitos são "puxadas" para junto da massa geradora.

| |
|---|
| Linhas de força de um campo gravitacional são linhas que representam, em cada ponto, a direção e o sentido da força gravitacional que atua sobre uma partícula de prova submetida exclusivamente aos efeitos desse campo. |

Se o astro considerado for esférico e homogêneo, as linhas de força do seu campo gravitacional terão a direção do raio da esfera em cada ponto (linhas radiais), sendo orientadas para o centro do astro.

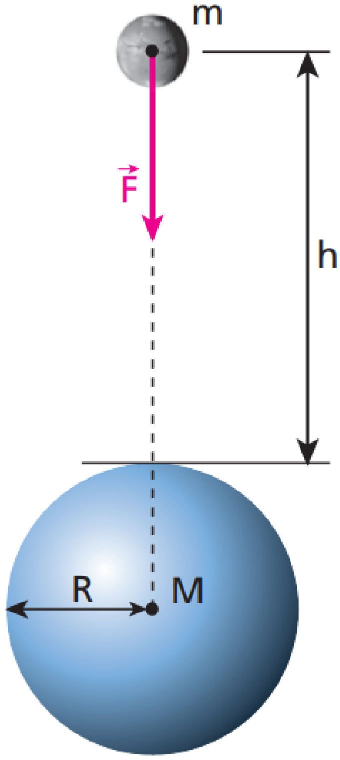


A redução na espessura das linhas de força representa a diminuição da intensidade do campo gravitacional com o aumento da distância à massa geradora.

A grandeza física que caracterica um campo gravitacional é o vetor aceleração da gravidade ($\vec{g}$), que é a aceleração adquirida por uma partícula deixada exclusivamente aos efeitos do campo. A aceleração da gravidade tem a mesma direção e o mesmo sentido das linhas de força, isto é, é radial ao astro e dirigida para o seu centro.

## Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto externo ao astro

Admitir um astro esférico e homogêneo de raio R e massa M. Nesse caso, podemos considerar toda a sua massa concentrada em seu centro geométrico. Um corpo de massa m, situado a uma altura h em relação à sua superfície, receberá uma força de atração gravitacional $\vec{F}$ como ilustrado na figura abaixo.




Sendo $G$ a constante da gravitação universal, podemos expressar a intensidade de $\vec{F}$ pela Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \Rightarrow F = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \tag{1}$$

Por outro lado, representando por $g$ a intensidade da aceleração da gravidade no ponto em que o corpo se encontra, também podemos expressar a força gravitacional como:

$$F = mg \tag{2}$$

Comparando as equações (1) e (2), obtemos:

$$mg = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \tag{3}$$

Cancelando $m$ em ambos os lados da equação, resulta:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} \tag{4}$$

O resultado acima evidencia que g independe da massa de prova (m), dependendo apenas da massa geradora do campo (M) e da distância $d = R + h$.

| **Altitude** (m) | **g** (m/s$^2$) | **Altitude** (m) | **g** (m/s$^2$) |
|---|---|---|---|
| 0 | 9,806 | 32 000 | 9,71 |
| 1 000 | 9,803 | 100 000 | 9,60 |
| 4 000 | 9,794 | 500 000 | 8,53 |
| 8 000 | 9,782 | 1 000 000 | 7,41 |
| 16 000 | 9,757 | 380 000 000 | 0,00271 |

A variação da intensidade da aceleração da gravidade na Terra em função da altitude.

## Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro

Expressão anterior:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

Desprezando os efeitos ligados à rotação e observando que sobre a crosta do astro h = 0, a intensidade da aceleração da gravidade na superfície $g_0$ fica dada por:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

| **Planeta** | $\mathbf{g_0}$ (m/s$^2$) |
|---|---|
| Mercúrio | 2,647 |
| Vênus | 8,433 |
| Terra | 9,806 |
| Marte | 3,628 |
| Júpiter | 25,887 |
| Saturno | 11,473 |
| Urano | 9,021 |
| Netuno | 14,120 |

Valores aproximados das acelerações da gravidade nas superfície dos planetas do Sistema Solar.

## Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno ao astro

A intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno, distante r do centro do astro, é calculada admitindo-se que esse ponto pertença a uma superfície esférica de raio r. Essa superfície envolve uma massa m, evidentemente, menor que a massa M do astro. Sobre a superfície de raio r, temos:

$$g = G\frac{m}{r^2} \tag{I}$$

Suponha que o astro tenha massa específica uniforme e igual a $\mu$. Sendo V o volume da esfera de raio r, podemos denotar:

$$\mu = \frac{m}{V}$$

O volume V, porém, pode ser expresso por:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

Pòrtanto:

$$\mu = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\, r^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}\pi\mu\, r^3 \tag{II}$$

Substituindo (II) em (I), vem

$$g = \frac{G}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi\mu r^3 \Rightarrow g = \frac{4}{3}\,\pi\,\mu\, G\, r$$

Fazendo $\frac{4}{3}\,\pi\,\mu\, G = K$, em que K é uma constante, segue que:

$$\boxed{g = Kr}$$

Concluímos, então, que, para pontos internos ao astro, o valor de g é diretamente proporcional a distância do ponto considerado ao centro do astro.

## Gráfico g versus x

A intensidade da aceleração da gravidade varia em função da distância x ao centro do astro.