Notas de Aula - Análise Real

Alisson Ferreira Martins

Abril de 2025

Sumário

1 Começando pelo começo: Os números naturais

1.1 Axiomas de Peano

Os axiomas de Peano foram inicialmente estabelecidos por Giuseppe Peano (1858-1932) e são uma maneira padrão de definir os números naturais.

Definição 1.1 (Informal). *Um número natural é qualquer elemento do conjunto*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

que é o conjunto de todos os números começando com 0 e então contando para frente indefinidamente. Chamamos $\mathbb{N}$ *de conjunto dos números naturais.*

Axiomas Fundamentais

1. **Axioma 1 (Zero)**: 0 é um número natural.

2. **Axioma 2 (Sucessão)**: Se n é um número natural, então n++ (o sucessor de n) também é um número natural.

3. **Axioma 3 (Zero não é sucessor)**: 0 não é sucessor de nenhum número natural; ou seja, temos $n{+}{+} \neq 0$ para todo número natural n.

4. **Axioma 4 (Injetividade da sucessão)**: Números naturais diferentes devem ter diferentes sucessores, ou seja, se n, m são números naturais e $n \neq m$, então $n++ \neq m++$. Equivalentemente, se $n++ = m++$, então temos que $n = m$.

5. **Axioma 5 (Princípio da Indução Matemática)**: Seja $P(n)$ qualquer propriedade referente a um número natural n. Suponha que $P(0)$ seja verdadeira, e suponha que, sempre que $P(n)$ for verdadeira, $P(n{+}{+})$ também seja verdadeira. Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Definição 1.2 (Notação numérica). *Definimos:*

- $1 := 0{+}{+}$
- $2 := 1{+}{+} = (0{+}{+}){+}{+}$
- $3 := 2{+}{+} = ((0{+}{+}){+}{+}){+}{+}$

e assim por diante.

Neste texto, utilizo "$x := y$" para denotar a afirmação de que x é definido como igual a y.

Proposição 1.1. 3 *é um número natural.*

Demonstração. Pelo Axioma 1, 0 é um número natural. Pelo Axioma 2, $0{+}{+} = 1$ é um número natural. Novamente pelo Axioma 2, $1{+}{+} = 2$ é um número natural. Aplicando o Axioma 2 mais uma vez, $2{+}{+} = 3$ é um número natural. □

Observação 1.1. *A notação n++ representa o sucessor de n, que na notação usual seria* $n + 1$*. Esta é a notação originalmente usada por Peano e que aparece em muitos textos modernos de teoria dos conjuntos e fundamentos da matemática.*

Proposição 1.2. *4 não é igual a 0.*

Demonstração. Por definição, $4 = 3{++}$. Pelo axioma 1 e 2, 3 é um número natural. Portanto pelo axioma 3, $3 + + \neq 0$, ou seja, $4 \neq 0$. □

Exemplo 1.1. *Considere um sistema numérico consistindo em cinco números 0,1,2,3,4,5, no qual a operação de incremento atinge um teto em 4. Mais precisamente, suponha que 0++ = 1, 1++=2, 2++=3, 3++=4, mas 4++=4 (Ou em outras palavras, que 5=4, e portanto 6=4, 7=4, et). Isso não contradiz os Axiomas 1 2 e 3*

Proposição 1.3. *6 não é igual a 2.*

Demonstração. Suponha por interesse de contradição que $6 = 2$. Então $5 + + = 1 + +$, então pelo Axioma 4, temos que $5 = 1$, de modo que $4 + + = 0 + +$. Aplicando de novo o Axioma 4, temos que $4 = 0$, o que contradiz nossa proposição anterior. □

Parece que podemos manter todos os números naturais distintos uns dos outros. No entanto, ainda há mais um problema: embora os Axiomas (1 e 2) nos permitam confirmar que 0,1,2,3,... são elementos distintos de N, há o problema de que pode haver outros elementos "desonestos"em nosso sistema númerico que não tenham esta forma:

Exemplo 1.2. *(Informal) Suponha que nosso sistema numérico N consiste da seguinte coleção de inteiros e meios-inteiros.*

$$N := \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, ...\}.$$

Este exemplo é mercado como "informal"porque estamos usando números reais, os quais não deveríamos usar ainda.) Pode-se verificar que os Axiomas 1 e 4 ainda são satisfeitos para esse conjunto.

O que queremos é algum axioma que diga que os únicos números em $\mathbb{N}$ são aqueles que podem ser obtidos a partir de 0 e da operação de incremento - de modo a excluir elementos como 0.5. Mas é difícil quantificar o que queremos dizer com "pode ser obtido a partir de"sem já usar os próprios números naturais, que estamos tentando definir. Felizmente, existe uma solução engenhosa para tentar capturar esse fato:

Observação 1.2. *Estamos sendo um pouco vagos sobre o que significa "propriedade"neste ponto, mas alguns exemplos possíveis de $P(n)$ podem ser "n é par"; "n é igual a 3"; "n resolve a equação $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$"; e assim por diante. É claro que ainda não definimos muitos desses conceitos, mas quando fizermos, o Axioma 5 se aplicará a essas propriedades.*

Uma observação lógica: Como esse axioma se refere não apenas a variáveis, mas também a propriedades, ele tem uma natureza diferente dos outros quatro axiomas; de fato, o Axioma 5 deveria tecnicamente ser chamado de esquema de axioma, em vez de um axioma propriamente dito - ele é um modelo para produzir um número (infinito) de axiomas, ao invés de ser um único axioma em si. Discutir essa distinção mais a fundo está além do escopo deste texto e pertence ao campo da lógica.)

A intuição informal por trás desse axioma é a seguinte: Suponha que $P(n)$ seja tal que $P(0)$ é verdadeira, e que sempre que $P(n)$ for verdadeira então $P(n + +)$ também *seja verdadeira. Então, como $P(0)$ é verdadeira, $P(1) = P(0++)$ também é verdadeira. Como $P(1)$ é verdadeira, $P(2) = P(1++)$ também é verdadeira. Repetindo esse processo indefinidamente, vemos que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, etc; são todas verdadeiras - no entanto, essa linha de raciocínio nunca nos permitirá concluir que, por exemplo, $P(0.5)$ seja verdadeira.*

Portanto, o Axioma 5 não deve valer para sistemas numéricos que contenham elementos "desnecessários, como 0.5. Na verdade, pode-se até dar uma "prova"desse fato. Aplique o Axioma 5 à propriedade $P(n) = n$ "não é um meio-inteiro", ou seja, um inteiro somado a 0.5. Então $P(0)$ é verdadeira, e se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n++)$ também é verdadeira. Assim, o Axioma 5 afirma que $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais n, ou seja, nenhum número natural pode ser um meio-inteiro. Em particular, 0.5 não pode ser um número natural. Essa "prova"não é totalmente legítima, pois ainda não definimos noções como "inteiro", "meio-inteiro"e "0.5", mas ela deve te dar uma ideia de como o princípio da indução serve para proibir que quaisquer números diferentes dos "verdadeiros"números naturais apareçam em $\mathbb{N}$.)

O princípio da indução nos fornece uma maneira de provar que uma propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Proposição 1.4. *Uma certa propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.*

Demonstração. Usamos indução. Primeiro, verificamos o caso base $n = 0$, ou seja, provamos $P(0)$. (Insira a prova de $P(0)$ aqui. Agora, suponha por hipótese de indução que n é um número natural e que $P(n)$ já foi provada. Vamos agora provar $P(n++)$. (Insira aqui a demonstração de $P(n++)$, assumindo que $P(n)$ é verdadeira). O processo de indução, e portanto $P(n)$ é verdadeira para todos os números n. □

Os Axiomas de 1 a 5 são conhecidos como os Axiomas de Peano para os números naturais.

Suposição 1.1. *(Informal) Existe um sistema numérico $\mathbb{N}$, cujos elementos chamaremos de números naturais, para o qual os Axiomas 1-5 são verdadeiros.*

Observação 1.3.

Proposição 1.5. *(Definições recursivas). Suponha que para cada número natural n, temos uma função $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ou seja, uma função dos números naturais nos números naturais. Seja c um número natural. Então, podemos assegurar um único número natural a_n para cada número natural n, de forma que $a_0 = c$ e $a_{n++} = f_n(a_n)$ para todo número natural n.*

Demonstração. (Informal) Usamos a indução. Primeiro observamos que esse procedimento atribui um único valor para a_0, nomeado c. Nenhum das outras definições $a_{n++} := f_n(a_n)$ irá redefinir o valor de a_0, por causa do Axioma 3.)

Suponha indutivamente que o procedimento atribui um único valor para a_n. Então ele atribui um único valor para a_{n++}, a saber, $a_{n++} := f_n(a_n)$. (Nenhuma das outras definições $a_{m++} := f_m(a_m)$ irá redefinir o valor de a_{n++}, por causa do Axioma 4.) Isso concluir a indução, e assim a_n está definido para cada número natural n, com um único valor atribuído a cada a_n. □

1.2 Adição

O sistema dos números está bem simples neste momento: temos apenas uma operação - o incremento - e um punhado de axiomas. Mas agora podemos construir operações mais complexa, como a adição.

A forma como isso funciona é a seguinte: somar três com cinco deve ser o mesmo que incrementar cinco três vezes - isso é um incremento a mais do que somar dois com cinco, que é um incremento a mais do que somar um com cinco, que é um incremento a mais do que somar zero com cinco, o que deve simplesmente resultar em cinco. Portanto, damos uma definição recursiva para a adição da seguinte forma.

Definição 1.3 (Adição de números naturais)**.** *Seja m um número natural. Para somar zero a m, definimos $0 + m := m$. Agora, suponha por indução que já tenhamos definido como somar n a m. Então, podemos somar $n++$ a m definindo $(n++) + m =:= (n + m) ++$.*

Assim, $0+m = m$, $1+m = (0++)+m = m++$; $2+m = (1++)+m = (m++)++$; e assim por adiante. Por exemplo, temos

$$2 + 3 = (3 ++) ++ = 4 ++ = 5$$

A partir da nossa discussão sobre recursão na seção anterior, vemos que definimos $n + m$ para todo número natural n. Aqui estamos especializando a discussão geral anterior para o caso em que $a_n = n + m$ e $f_n(a_n) = a_n ++$.

Note que essa definição é assimétrica: 3+5 significa incrementar 5 três vezes, enquanto 5+3 incrementar 3 cinco vezes. Claro que ambos resultam no mesmo valor, 8. Mais geralmente, é um fato (que provaremos em breve) que $a + b = b + a$ para todos os números naturais a e b, embora isso não fique imediatamente claro pela definição.

Perceba que podemos provar facilmente, usando os Axiomas 1, 2 e o da indução (Axioma 5), que a soma de dois números naturais é novamente um número natural (por quê?). Neste momento, só temos dois fatos sobre a adição: que $0 + m = m$, e que $(n ++) + m = (n + m) ++$. Surpreendentemente, isso é suficiente para deduzir todo o restante que conhecemos sobre a adição. Começamos com alguns lemas básicos.

Lema 1.1. *Para todo número natural n, $n + 0 = n$.*

Note que não podemos deduzir isso imediatamente a partir de $0 + m = m$, porque ainda não sabemos que $a + b = b + a$.

Demonstração. Usamos a indução. O caso base 0+0 = 0 vale, pois sabemos que $0+m = 0$ para todo número natural m, e 0 é um número natural. Agora, suponha por hipótese de indução que $n + 0 = n$. Queremos mostrar que $(n ++) + 0 = n ++$. Mas, pela definição da adição, $(n ++) + 0 = (n + 0) ++$, que é igual a $n ++$, já que $n + 0 = n$. Isso encerra a indução. □

Lema 1.2. *Para qualquer número natural n e m, $n + (m ++) = (n + m) ++$.*

Mais uma vez, não podemos deduzir isso ainda a partir de $(n++)+m = (n+m)++$, porque ainda não sabemos que $a + b = b + a$

Demonstração. Faremos indução em n(mantendo m fixo).

Começamos com o caso base n = 0. Neste caso, devemos provar que

$$0 + (m++) = (0 + m)++$$

Pela definição da adição, temos

$$0 + (m++) = m++ \text{ e } 0 + m = m$$

Então ambos os lados são iguais a $m++$, e portanto são iguais entre si.
Agora, suponha por hipótese de indução que

$$n + (m++) = (n + m)++$$

Precisamos mostrar que

$$(n++) + (m++) = ((n++) + m)++$$

O lado esquerdo, pela definição de adição, é

$$(n + (m++))++$$

Pela hipótese de indução, $n + (m++) = (n + m)++$, então temos:

$$(n + (m++))++ = ((n + m)++)++$$

Por outro lado temos

$$(n++) + m = (n + m)++$$

(Pela definição da adição), e então o lado direito é

$$((n++) + m)++ = ((n + m)++)++$$

Logo os dois lados são iguais, e isso encerra a indução. □

Lema 1.3. *Para qualquer*

[0] Do ponto de vista lógico, não há diferença entre um lema, proposição, teorema ou corolário — todos são afirmações que aguardam demonstração. No entanto, usamos esses termos para sugerir diferentes níveis de importância e dificuldade. Um *lema* é uma afirmação de prova simples, útil para demonstrar outras proposições e teoremas, mas que geralmente não é particularmente interessante por si só. Uma *proposição* é uma afirmação interessante por si mesma, enquanto um *teorema* é uma afirmação mais importante que uma proposição, que diz algo definitivo sobre o assunto e, muitas vezes, exige mais esforço para ser provada do que uma proposição ou lema. Um *corolário* é uma consequência imediata de uma proposição ou teorema que foi provado recentemente.