Mecânica

Alisson Ferreira Martins

2025

Sumário

1 Introdução a Física

2 Bases da cinemática escalar

2.1 Referencial

A descrição formal do movimento de um corpo pressupõe a determinação de sua **posição** em diferentes instantes. A posição é a grandeza física que localiza o objeto no espaço, sendo sua definição intrinsecamente ligada à adoção de um **referencial**.

Define-se como referencial um corpo (ou um sistema de corpos) em relação ao qual se analisa o estado de movimento ou repouso de outros corpos.

A especificação da posição é comumente realizada associando-se um sistema de coordenadas ao referencial, frequentemente um sistema de eixos cartesianos ortogonais. Desse modo, a posição de um corpo é unicamente determinada por suas coordenadas, as quais são expressas em unidades de comprimento.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de medida padrão para o comprimento é o **metro (m)**.

Outras unidades de comprimento, derivadas do metro e de uso frequente, incluem:

- **Quilômetro (km)**: $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m} = 10^3\,\mathrm{m}$;
- **Centímetro (cm)**: $1\,\mathrm{cm} = 0{,}01\,\mathrm{m} = 10^{-2}\,\mathrm{m}$;
- **Milímetro (mm)**: $1\,\mathrm{mm} = 0{,}001\,\mathrm{m} = 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

2.2 Tempo

Aceitamos o tempo como um conceito primitivo, isto é, entendemos ou concebemos seu significado sem que necessite ser definido, sem que alguém precise dizer o que ele é. Associamos o tempo à sucessão de acontecimentos. Nós o sentimentos, por exemplo, no envelhecimento dos seres vivos à nossa volta, nas mudanças de regimes políticos no surgimento de novos estilos musicais, no avanço tecnológico etc.

Medimos o tempo por meio da contagem das repetições de qualquer fenômeno periódico. Podemos medi-lo, por exemplo, contando o número de voltas completas que a Terra efetua em torno do Sol (contagem dos anos), ou o número de rotações que a Terra efetua em torno de seu próprio eixo (contagem dos dias), ou o número de oscilações de um pêndulo, ou ainda o número de voltas de um ponteiro de relógio.

Nota

- **O segundo (s)** é a unidade de medida de tempo do Sistema Internacional de Unidades (SI). Outras unidades de tempo frequentemente utilizadas são:

  minuto (min): $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$;

  hora (h): $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$;

  dia: $1\,\mathrm{dia} = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$.

Essa pergunta solicita "localização"no tempo de uma ocorrência, de um momento. Esse momento é denominado **instante**. O instante é determinado por uma quantidade que simbolizaremos por t. Essa quantidade representa quantas unidades de tempo já se passaram desde um instante inicial escolhido arbitrariamente, como $t_0 = 0$, chamado **origem dos tempos**.

Observe que essa pergunta solicita um tempo decorrido, ou seja, uma duração, uma sucessão de instantes entre certo instante t_1 e outro instante t_2. A essa sucessão de instantes damos o nome de **intervalo de tempo** e o representamos Δt (lê delta t). O cálculo de Δt é feito subtraindo-se t_1 (ocorrido antes) de t_2 (ocorrido depois):

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

2.3 Movimento e repouso

Dizemos que uma partícula se encontra em movimento quando ela muda de posição com o passar do tempo; caso contrário, encontra-se em repouso. Os conceitos de movimento e de repouso são apresentados a partir do conceito de posição. Como a posição é estabelecida em relação a um referencial, concluímos que movimento e repouso também são conceitos relativos a um referencial.

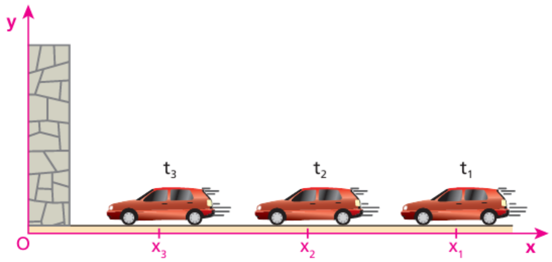
Um ponto material está em **movimento** em relação a um referencial quando sua posição varia com o tempo em relação a esse referencial. Um ponto material está em **repouso** em relação a um referencial quando sua posição não varia com o tempo em relação a esse referencial.

Um mesmo corpo pode estar em movimento em relação a um referencial e em repouso em relação a outro. Nossas casas, por exemplo, estão em repouso em relação à superfície da Terra, pois não mudam de posição em relação ao solo. Em relação ao Sol, entretanto, elas estão em movimento, pois, juntamente com a Terra, mudam de posição em relação ao Sol.

2.4 Simetria dos conceitos de repouso e movimento

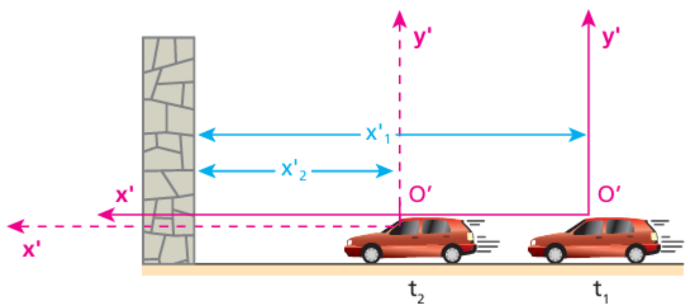
Se um corpo **A** está em movimento (ou em repouso) em relação a um corpo **B**, então **B** também está em movimento (ou em repouso) em relação a A. Isso equivale a dizer que os conceitos de movimento e repouso são **simétricos**.

Considere, por exemplo, um automóvel dirigindo-se frontalmente a um muro. Tomando o muro como referencial e associando a ele um sistema cartesiano Oxy, observamos que a posição do automóvel varia com o tempo, pois sua abscissa **x** está variando. Portanto, **o automóvel está em movimento em relação ao muro**.



Nos instantes t_1, t_2 e t_3, as abscissas do automóvel valem x_1, x_2 e x_3, respectivamente.

Tomando, agora, o automóvel como referencial e associando a ele um sistema cartesiano $O'x'y'$, observamos que a posição do muro também varia, pois sua abscissa x' está variando. Portanto, **o muro está em movimento em relação ao automóvel.**



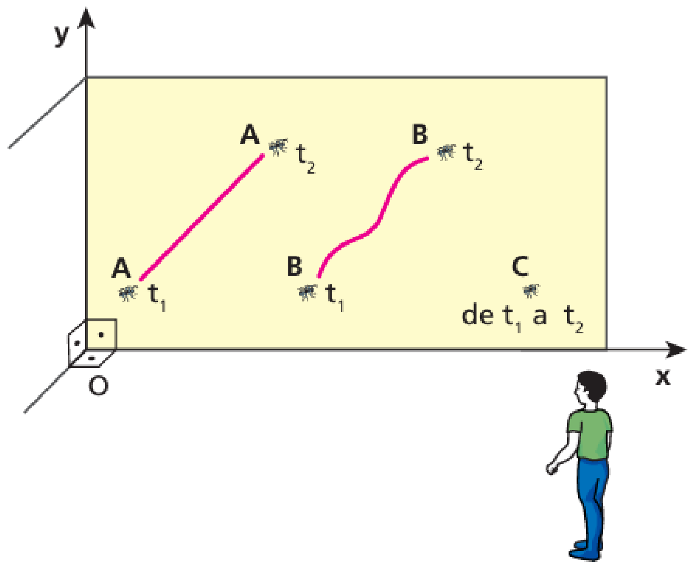
Nos instantes t_1 e t_2, as abscissas do muro valem x_1' e x_2' respectivamente.

2.5 Trajetória

Quando um ponto material se movimenta em relação a certo referencial, ele ocupa diferentes pontos à medida que o tempo passa, descrevendo, assim, uma linha, que pode ser reta ou curva.

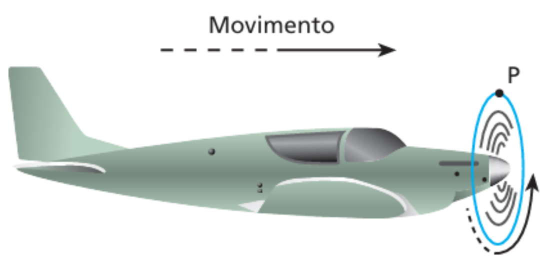
Trajetória de um ponto material em movimento é a linha que ele descreve em relação a um referencial. Caso o ponto material encontre-se em repouso, sua trajetória reduz-se a um ponto.

Imagine, por exemplo, que três formigas **A**, **B** e **C** se mantiveram em uma mesma parede durante certo intervalo de tempo, de t_1 a t_2. A figura a seguir mostra os lugares onde elas estiveram nesse intervalo de tempo.



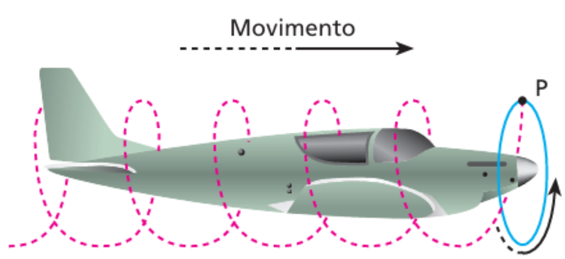
Concluímos que a trajetória descrita em relação à parede foi retilínea para a formiga A, curvilínea para a formiga B e reduziu-se a um ponto para a formiga C, que não se moveu em relação à parede.

O conceito de trajetória também é relativo, isto é, está vinculado à apreciação de um referencial. Assim, a trajetória descrita por uma partícula, durante certo intervalo de tempo, pode variar de um referencial para outro. Considere, por exemplo, um avião em voo retilíneo e horizontal e um ponto **P**, situado em uma das extremidades da hélice. A trajetória desse ponto **P**, em relação ao avião, é uma circunferência.



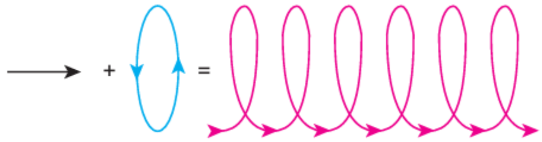
A trajetória de **P** em relação ao avião é uma circunferência.

Em relação a um referencial solidário à Terra, entretanto, a trajetória desse mesmo ponto **P** é uma hélice cilíndrica.



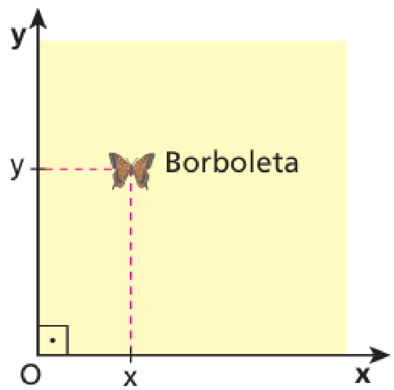
A trajetória de **P** em relação à superfície da Terra é uma hélice cilíndrica.

A hélice cilíndrica descrita é o resultado da composição de dois movimentos: um movimento circular e um movimento retilíneo horizontal, perpendicular ao plano primeiro.



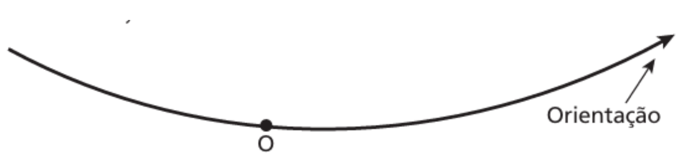
2.6 Espaço

Considere uma borboleta pousada em uma parede. A sua posição em relação à parede pode ser dada pelas coordenadas lidas em um sistema de eixos cartesianos ortogonais associados à parede, conforme a mistura.

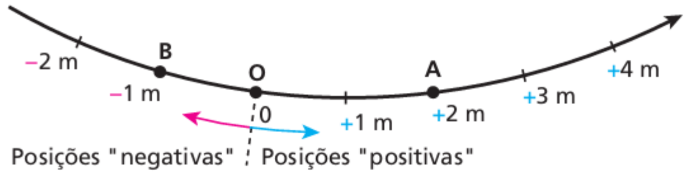


Observe que a borboleta pode movimentar-se livremente pela parede e até mesmo sair dela. Não sabemos de antemão qual a trajetória que ela vai seguir, mas, se ela se movimentar no plano da parede, sempre poderemos dar a sua posição por meio de uma abscissa x e de uma ordenada y. Já quando a trajetória a ser descrita por uma partícula for conhecida de antemão e tivermos acesso a ela, poderemos dar a posição da partícula em relação à própria trajetória, dispensando o sistema de eixos.

Vamos adotar, sobre a trajetória, um ponto arbitrário **O**, em relação ao qual será dada a posição da partícula. Vamos, também, atribuir uma orientação a essa trajetória.



Em seguida, marcamos trechos de, por exemplo, 1 metro, a partir de **O**.



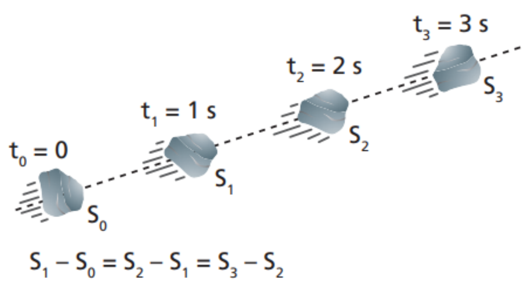
3 Movimento Uniforme

Definição:

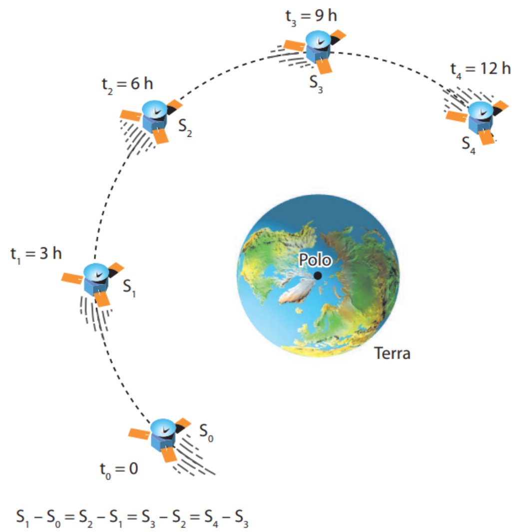
Um movimento é denominado uniforme quando ocorre com uma velocidade escalar que não se modifica com o passar do tempo. É o que pode acontecer, por exemplo, com alguns automóveis modernos dotados de piloto automático. Em condições de trânsito livre, mesmo um automóvel sem esse recurso pode manter-se em movimento praticamente uniforme durante algum tempo. Na natureza, encontramos casos interessantes de movimento uniformes, como a propagação da luz e do som em meios homogêneos ou o movimento de uma rocha numa região do Universo em que o campo gravitacional seja desprezível.

Movimento Uniforme (MU) é aquele em que a velocidade escalar instantânea é constante e diferente de zero, de modo que o móvel sofre iguais variações de espaço em iguais intervalos de tempos.

Na definição apresentada, não foi feita nenhuma restrição à forma da trajetória, podendo ser retilínea ou curvilínea.



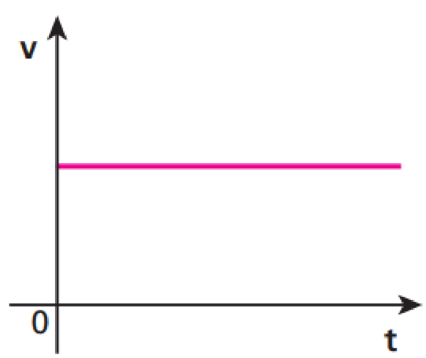
Uma rocha lançada em uma região do Universo de gravidade desprezível realiza um movimento uniforme e retilíneo. Observe que, em iguais intervalos de tempo, ela percorre distâncias iguais.

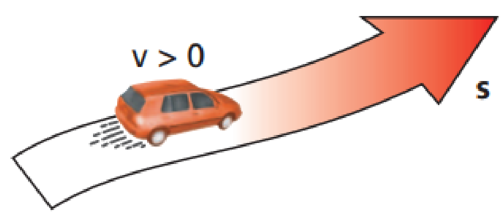


Muitos satélites artificiais realizam movimentos uniformes e circulares. Mais uma vez, pode-se observar que, em iguais intervalos de tempo, as distâncias percorridas são iguais. Evidentemente, esses satélites estão submetidos à gravidade terrestre. (Tamanhos e distâncias fora de escala.)

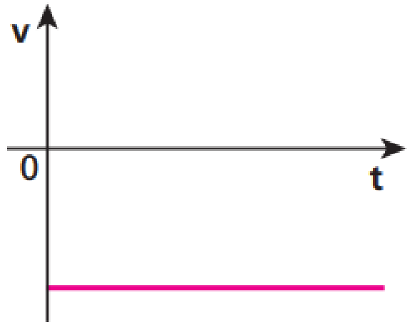
3.1 Representação gráfica da velocidade escalar instantânea em função do tempo

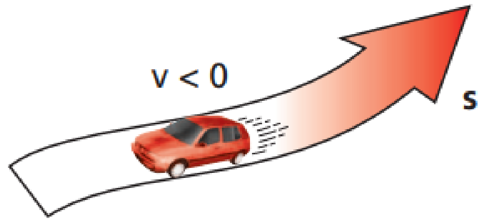
Em todos os instantes do intervalo de tempo em que um movimento é uniforme, a velocidade escalar instantânea é sempre a mesma. Então, a representação gráfica dessa velocidade em função do tempo pode ser:





A velocidade escalar é constante e diferente de zero, o que nos leva à conclusão de que o movimento é uniforme. A velocidade escalar é positiva, e por isso, concluímos que o movimento se dá no sentido da trajetória (movimento progressivo)





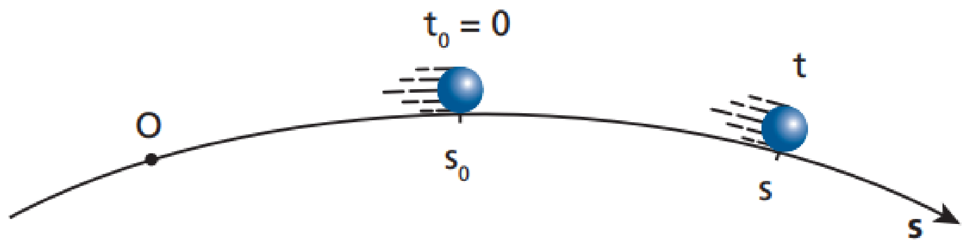
A velocidade escalar é constante e diferente de zero, portanto, o movimento é uniforme. A velocidade escalar é negativa, então, o movimento se dá em sentido contrário ao da trajetória (movimento retrógrado).

Nota:

- No **repouso**, a velocidade escalar é constante e igual a zero. Nesse caso, a representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo é:

3.2 Função horária do espaço

Considere uma partícula em movimento uniforme descrevendo a trajetória representada a seguir:



Essa trajetória está orientada, sendo o ponto **O** a origem dos espaços. No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), a partícula estava em um ponto no qual o espaço era s_0 (espaço inicial). Num instante qualquer **t**, a partícula está em um ponto de espaço **s**. Observe que , num movimento uniforme, a velocidade escalar média (v_m) em qualquer intervalo de tempo coincide com a velocidade escalar instantânea (v) em qualquer instante, uma vez que esta última é constante. Assim, podemos escrever, no intervalo de t_0 a t :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s - s_0}{t}$$

$$s - s_0 = vt$$

Reorganizando obtemos:

$$\boxed{s = s_0 + vt}$$

A expressão obtida é a função horária dos espaços para qualquer movimento uniforme. Observe que, nessa expressão:

- s_0 é a posição inicial, ou seja, o espaço no instante $t_0 = 0$;
- v é a velocidade escalar;
- s é a posição (ou espaço) no instante de tempo t.

Observe, também, que a função obtida é do **primeiro grau** em **t**.
Em muitas situações, é mais conveniente escrever essa função da seguinte forma:

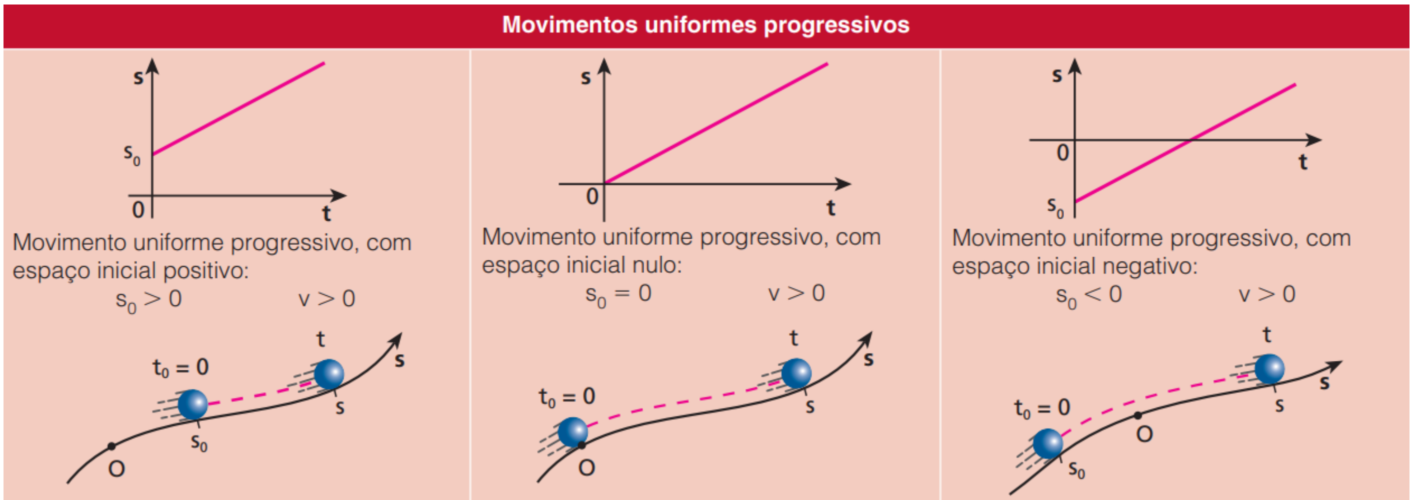
$$\boxed{\Delta s = vt}$$

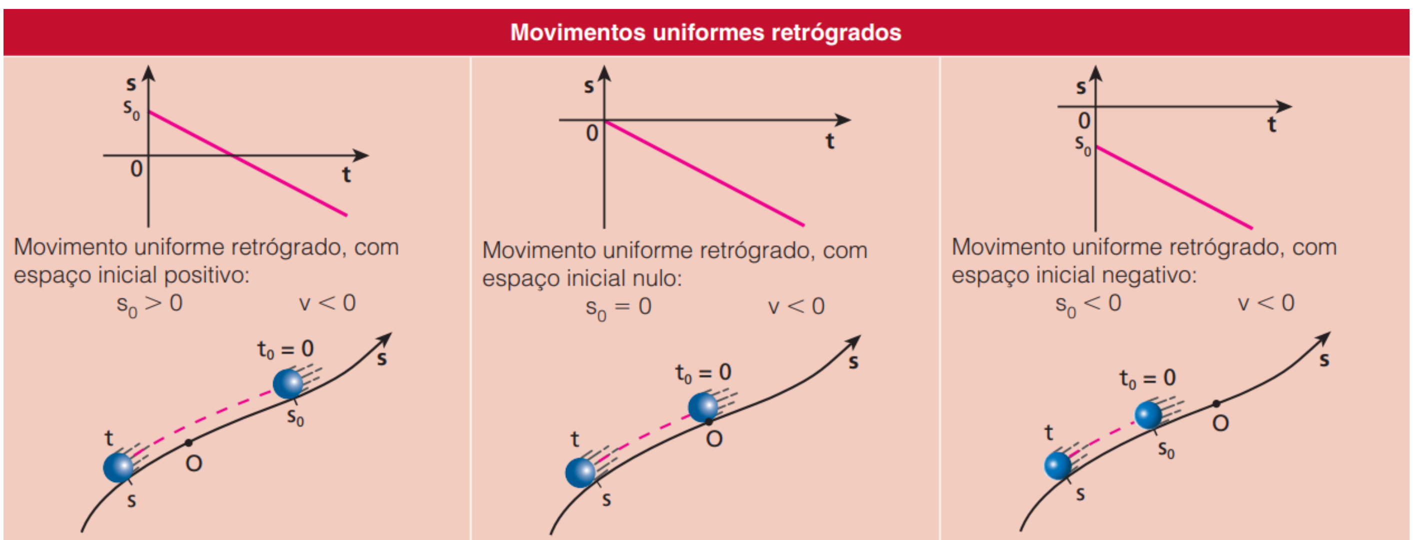
Em que Δs é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante **t**.
Nota

- Frequentemente, encontramos enunciados de questões em que a orienntação da trajetória e a origem dos espaços não são dadas. Se tivermos de equacionar um movimento, nesses casos, adotamos uma orientação para a trajetória e escolhemos um ponto qualquer dela para ser a origem dos espaços.

3.3 Representação gráfica do espaço em função do tempo

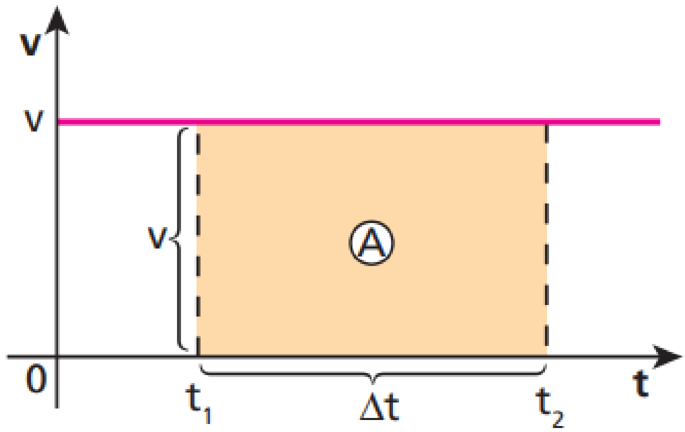
Como a função horária do movimento uniforme, $s = s_0 + v\,t$, é do primeiro grau em t, sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos, podendo enquadrar-se em um dos casos apresentados a seguir:





3.4 Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

Considere o gráfico da velocidade escalar v em função do tempo t num movimento uniforme. Vamos escolher dois instantes quaisquer t_1 e t_2 e calcular a "área"**A** que eles determinam entre o eixo dos tempos e o gráfico:



A região destacada no gráfico é um retângulo, cuja base representa o intervalo de tempo Δt entre t_1 e t_2 e a altura representa a velocidade escalar.

A área de um retângulo é determinada multiplicando-se a medida de sua base pela medida de sua altura, temos:

$$A = \Delta t\, v \tag{I}$$

Como $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, temos que:

$$\Delta s = \Delta t\, v \tag{II}$$

Comparando I e II, podemos afirmar que:

$$\boxed{A = \Delta s}$$

Assim, podemos enunciar:

> No gráfico da velocidade escalar (v) em função do tempo (t), a "área"entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2, expressa a variação de espaço entre t_1 e t_2.
>
> $$\text{“Área”} = \Delta s = s_2 - s_1$$

A rigor, não calculamos a área do retângulo, pois esta seria o produto do comprimento da base pelo comprimento da altura. Na verdade, fizemos o produto daquilo que a base representa (Δt) por aquilo que a altura representa (v). É por esse motivo que escrevermos “área” usando aspas.

3.5 Aceleração escalar

No movimento uniforme a velocidade escalar é constante e diferente de zero. Consequentemente, nesse movimento, a aceleração escalar é constante, porém igual a zero.

Num movimento uniforme, a aceleração escalar é constantemente nula, pois não há variação da velocidade escalar.

4 Movimento uniformemente variado

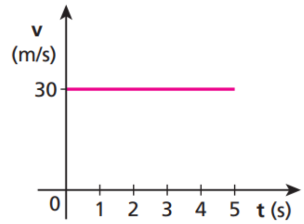
A velocidade escalar em um movimento uniformemente variado varia com o passar do tempo, mas de modo especial.

No processo de decolagem, um avião pode realizar, com boa aproximação, um movimento uniformemente variado (acelerado). Conhecendo-se a velocidade v que o avião precisa atingir para decolar e sua aceleração escalar, seremos capazes de calcular o comprimento necessário de pista Δs e o intervalo de tempo de duração da decolagem t.

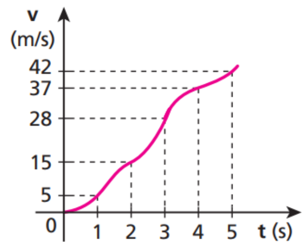
Durante a freagem, um automóvel pode realizar um movimento uniformemente variado (retardado). Conhecendo-se sua velocidade inicial v_0 e sua aceleração de retardamento, seremos capazes de calcular o comprimento ncessário de percurso Δs e o intervalo de tempo de duração da freagem t.

Definição

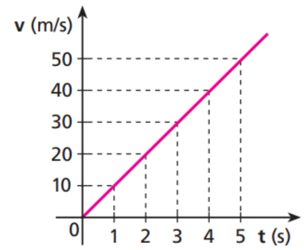
Consideremos três móveis, A, **B** e **C**, cujas velocidades escalares instantânea estão representadas em função do tempo nos gráficos a seguir:



Móvel **A**



Móvel **B**



Móvel **C**

Analisando o gráfico correspondente ao móvel **A**, percebemos que sua velocidade escalar é constante e igual a 30 m/s. Então, o movimento de A é uniforme e, por isso, sua aceleração escalar é constantemente nula.

Com relação ao movimento de C, observamos que sua velocidade escalar também varia com o tempo, tratando-se, portanto, de mais um movimento variado. Então, tanto o movimento de B como o de C são variados. Existe, porém, uma diferença marcante entre os dois: a velocidade escalar de C sofre variações iguais em iguais intervalos de tempo, o que não ocorre com a velocidade escalar de B. De fato, de acordo com os gráficos, temos que a velocidade escalar de B varia 5 m/s no primeiro segundo, 10 m/s no segundo, 13 m/s no terceiro, 9 m/s no quarto e 5 m/s no último segundo; isso significa que a aceleração escalar de B é variável. Já a velocidade escalar de C varia sempre 10 m/s em cada segundo, o que significa que sua aceleração escalar é constante e igual a $10\,\mathrm{m/s^2}$. Por isso, o movimento variado de C é denominado movimento uniformemente variado.

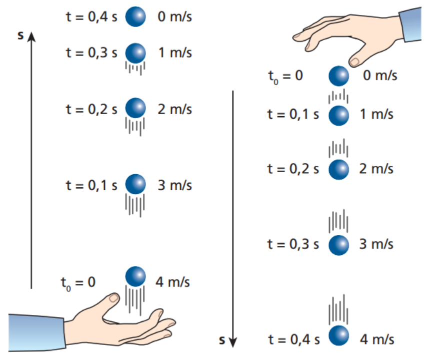
Movimento uniformemente variado (MUV) é aquele em que a aceleração escalar é constante e diferente de zero. Consequentemente, a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempos iguais.

$$\text{“Área”} = \Delta s = s_2 - s_1$$

Exemplo de movimento uniformemente variado

Quando um corpo bastante denso se move no ar, com velocidades baixas, a resistência do ar ao movimento é desprezível. É o que acontece, por exemplo, com uma esfera de aço de 2 cm de diâmetro movendo-se em relação ao ar a 4 m/s. Como será justificado em Dinâmica, o movimento de um corpo, abandonado ou lançado verticalmente nas proximidades da superfície da Terra, é uniformemente variado desde que a resistência do ar possa ser desprezada. Além disso, veremos que a aceleração do corpo, chamada **aceleração da gravidade**, tem módulo g igual a $9,8\ \mathrm{m/s^2}$, independentemente da massa do corpo!

Para simplificar os cálculos, arredondamos esse valor para $10\ \mathrm{m/s^2}$; isso quer dizer que o módulo da velocidade do corpo varia $10\ \mathrm{m/s^2}$ em casa segundo. Isso também significa, por exemplo, que o módulo da velocidade do corpo varia 1 m/s em cada décimo de segundo $(0,1\ \mathrm{s})$:



Uma esfera de aço lançada verticalmente para cima realiza, durante a subida, um MUV retardado: o módulo de sua velocidade diminui 1 m/s. Uma esfera de aço solta de determinada altura realiza, ao descer, um MUV acelerado: o módulo de sua velocidade aumenta 1 m/s
em cada décimo de segundo.

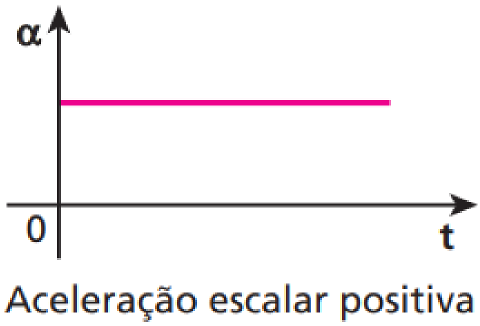
Algumas acelerações notáveis

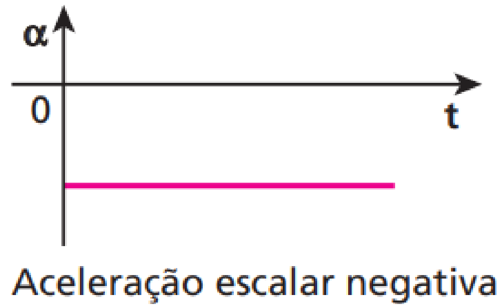
A tabela a seguir fornece os valores aproximados de algumas acelerações escalares, expressos em função de $g = 9,8\ \text{m/s}^2$, e os valores aproximados de seus tempos de duração, em segundos:

	Aceleração	Tempo de duração
Elevadores	0,2 g	3 s
Parada brusca de um automóvel a 110 km/h, por ação dos freios	g	3 s
Ejeção do assento de um avião	de 15 g a 20 g	0,2 s
Colisão, possivelmente não fatal, entre automóveis ou aviões	de 20 g a 100 g	de 0,02 s a 0,1 s
Foguete partindo da plataforma de lançamento	45 g	de 0,2 s a 0,4 s
Colisão fatal entre automóveis ou aviões	de 150 g a 1 000 g	de 0,01 s a 0,001 s

Representação gráfica d aceleração escalar em função do tempo

Sendo uma constante diferente de zero, a aceleração escalar é representada graficamente de uma das duas maneiras seguintes:



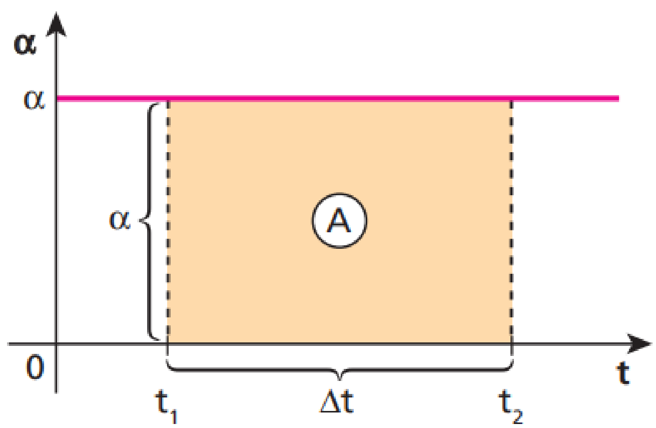


A aceleração escalar média de uma partícula em movimento uniformemente variado, calculada em qualquer intervalo de tempo, coincide com a aceleração escalar instantânea em qualquer instante por esta ser igual durante todo o movimento. Assim, num MUV, temos:

$\boxed{\alpha_m = \alpha}$ **constante e diferente de zero**

Propriedade do gráfico da aceleração escalar em função do tempo

No gráfico da aceleração escalar (α) em função do tempo (t) dado a seguir, vamos calcular a "área"A limitada pelo gráfico e pelo eixo dos tempos entre os instantes t_1 e t_2:



$$A = \Delta t\,\alpha \tag{I}$$

Como $\alpha = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \Delta t\,\alpha$

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{A = \Delta v}$$

No gráfico da aceleração escalar (α) em função do tempo (t), a "área"entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2, expressa a variação da velocidade escalar entre t_1 e t_2.

$$\boxed{\text{“Área”} = \Delta v = v_2 - v_1}$$

4.1 Função horária da velocidade escalar instantânea

Partícula em movimento uniformemente variado, numa trajetória orientada. Chamemos de v_0 sua velocidade escalar no instante t_0

Podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v - v_0 = \alpha\, t$$

$$\boxed{v = v_0 + \alpha\, t}$$

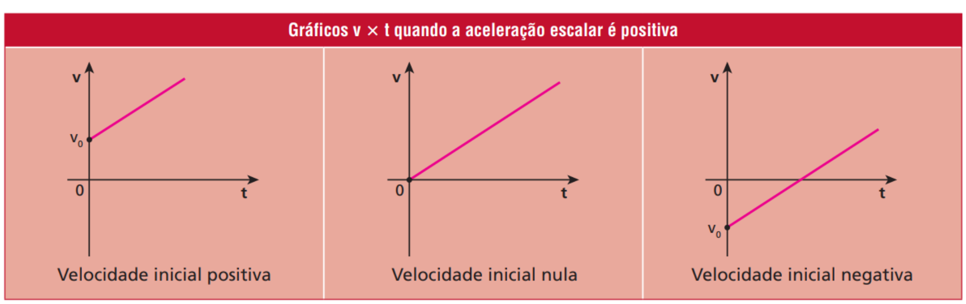
Essa expressão fornece a velocidade escalar v num instante t qualquer do movimento. Ela é, por isso, denominada **função horária da velocidade escalar instantânea**.

4.2 Representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo

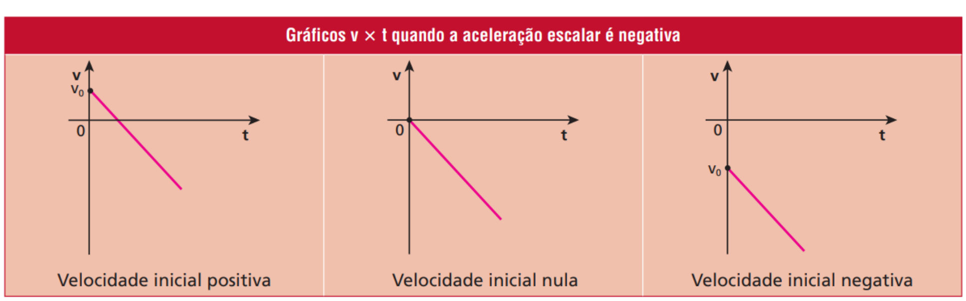
A função horária da velocidade escalar no movimento uniformemente variado é do primeiro grau em t:

$$v = v_0 + \alpha\, t$$

Consequentemente, sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos. Se a aceleração escalar α for positiva, a função será crescente e sua representação gráfica poderá assumir os seguintes aspectos:

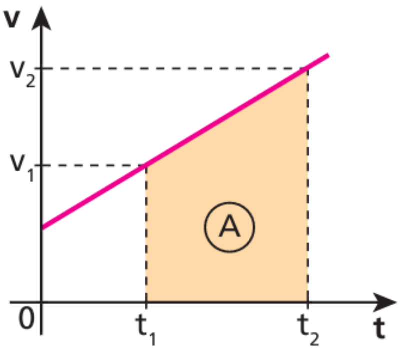


Entretanto, se a aceleração escalar for negativa, poderemos ter:



4.3 Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

No gráfico da velocidade escalar (v) em função do tempo (t), a "área" A compreendida entre a reta inclinada e o eixo dos tempos, de um instante t_1 até outro instante t_2, expressa a variação de espaço Δs entre esses instantes:



$$A = \Delta s = s_2 - s_1$$

Essa propriedade é válida para qualquer movimento.

4.4 Velocidade escalar média no MUV

O movimento uniformemente variado tem uma propriedade bastante útil: a velocidade escalar média entre dois instantes t_1 e t_2 é a média aritmética as velocidades v_1 e v_2 nesses instantes. Para provar essa propriedade, vamos usar o gráfico anterior, lembrando que a área A de um trapézio é dada por:

$$\boxed{A = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura}}$$

Então: $\Delta s = A = \dfrac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)$

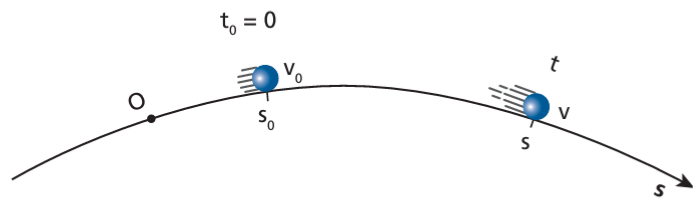
Como $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, temos:

$$v_m = \frac{\dfrac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)}$$

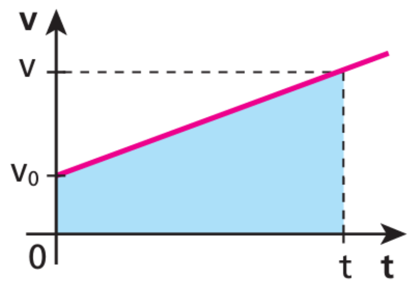
$$\boxed{v_m = \frac{(v_1 + v_2)}{2}}$$

4.5 Função horária do espaço

Considere uma partícula em movimento uniformemente variado numa trajetória orientada:



No instante $t_0 =$ (origem dos tempos), o espaço é s_0 e a velocidade escalar é v_0. No instante t, o espaço é s e a velocidade escalar é v. Queremos a expressão de s em função de t. Para isso traçamos o gráfico $v \times t$:



Como já vimos, "área"destacada na figura expressada a variação de espaço Δs de 0 a t:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v)}{2} \cdot t$$

Lembrando que $v = v_0 + \alpha \cdot t$, temos que:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v_0 + \alpha t)}{2} \cdot t = v_0 \, t + \frac{\alpha}{2} \, t^2$$

Como $\Delta s = s - s_0$, vem

$$s - s_0 = v_0 \, t + \frac{\alpha}{2} \, t^2$$

Assim, chegamos à **função horária dos espaços** num MUV:

$$s = s_0 + v_0 \, t + \frac{\alpha}{2} \, t^2$$

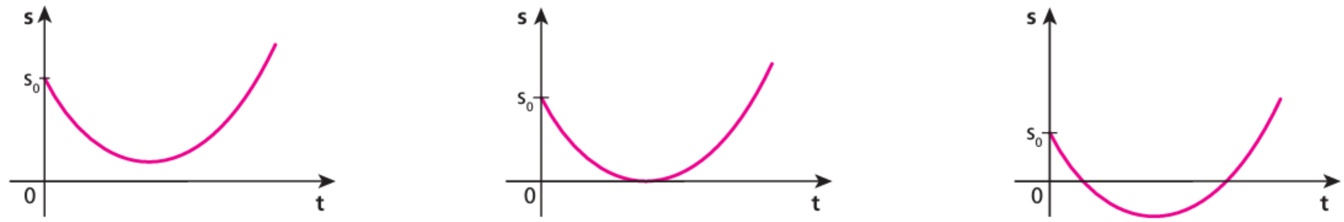
Essa função é do **segundo grau em t.** É conveniente escrever em muitas situações da seguinte forma a função obtida:

$$\Delta s = v_0 \, t + \frac{\alpha}{2} \, t^2$$

Em que Δs é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante t.

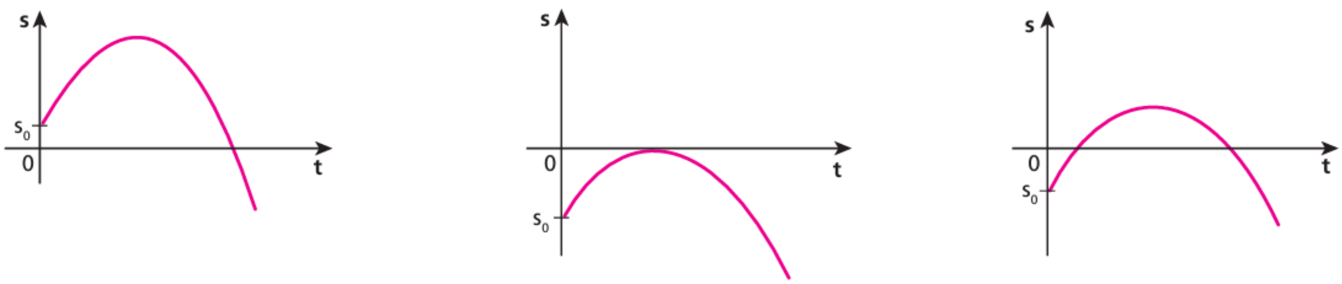
4.6 Representação gráfica do espaço em função do tempo

A Matemática nos ensina, e constataremos isso, que a representação gráfica dessa função é um arco de parábola. além disso, quando a aceleração escalar é positiva, esse arco tem sua concavidade voltada para cima.



Nos três casos, a aceleração escalar é positiva.

Já, se a aceleração escalar é negativa, a concavidade do arco de parábola está voltada para baixo, como, por exemplo:

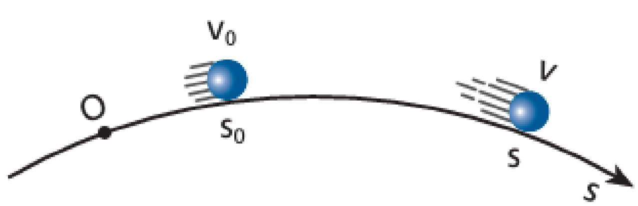


Nos três casos, a aceleração escalar é negativa.

Em todos os gráficos s x t acima, no instante correspondente ao vértice do arco de parábola, a velocidade é nula, ocorrendo então a inversão do sentido do movimento.

4.7 Equação de Torricelli

Considere uma partícula que tem, em $t_0 = 0$, espaço s_0 e velocidade escalar v_0 e que, num instante t qualquer, tem velocidade escalar v e espaço s. Seja α sua aceleração escalar, constante e diferente de zero.



Sabemos que no MUV:

$$s = s_0 + v_0\, t + \frac{\alpha}{2}\, t^2 \qquad \text{(I)}$$

$$v = v_0 + \alpha\, t \qquad \text{(II)}$$

Isolando t numa das equações e substituindo na outra, obtemos v em função de s.

De II, temos: $t = \dfrac{v - v_0}{\alpha}$ (III)

Substituindo (III) em (I), obtemos

$$s = s_0 + v_0\Big(\frac{v - v_0}{\alpha}\Big) + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{v - v_0}{\alpha}\Big)^2$$

$$s - s_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{\alpha} + \frac{\alpha(v^2 - 2v\, v_0 + v_0^2)}{2\alpha^2}$$

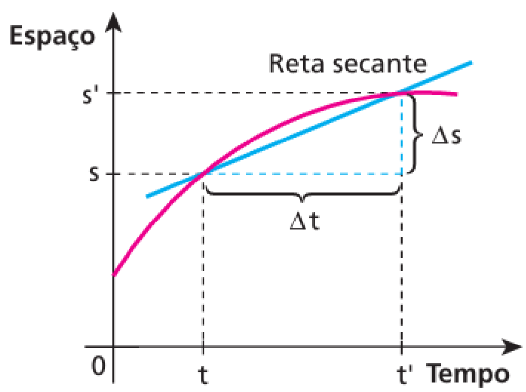
$$s - s_0 = \frac{2v_0\, v - 2v_0^2 + v^2 - 2v\, v_0 + v_0^2}{2\alpha}$$

$$s - s_0 = \frac{v^2 - 2\, v_0^2}{2\alpha}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(s - s_0) \quad \text{ou} \quad v^2 = v_0^2 + 2\alpha\Delta s$$

A expressão obtida agiliza os cálculos em situações que não envolvem a variável t (tempo).

5 Determinação da velocidade escalar instantânea no gráfico s x t



Sejam s e s' os espaços nos instantes t e t' respectivamente. A velocidade escalar média entre t e t' é dada por $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, que é o "coeficiente angular"da reta secante traçada na figura anterior.

Para determinar a velocidade escalar instantânea v, no instante t, fazemos t' "aproximar-se de t'' cada vez mais. Com isso, a reta secante vai se deslocando e, no limite, quando t' tende a t, temos uma reta tangente à curva, como mostra a figura ao lado.

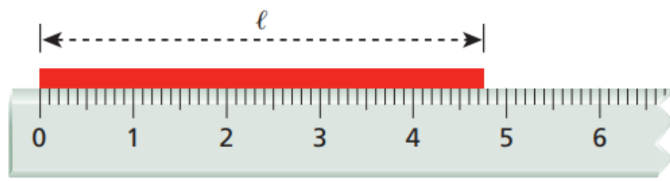
O "coeficiente angular"dessa reta fornece a velocidade escalar v no instante t. Esse coeficiente é a derivada do espaço em relação ao tempo, calculada no instante t:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{(Velocidade escalar instantânea no instante t)}$$

De modo análogo, determinamos a aceleração escalar instantânea no gráfico velocidade x tempo quando o movimento não é uniforme nem uniformemente variado.

6 Vetores e cinemática vetorial

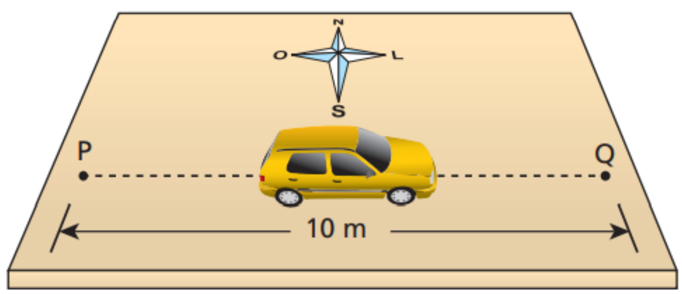
Em Física, há duas categorias de grandeza: as **escalares** e as **vetoriais**. As primeiras caracterizam-se apenas pelo valor numérico, acompanhado da unidade de medida. Já as segundas requerem um valor numérico (sem sinal), denominado **módulo** ou **intensidade**, acompanhado da respectiva unidade de medida e de uma orientação, isto é, uma **direção** e um **sentido**.



Comprimento $\ell = 4,75$ cm medido por uma régua milimetrada é uma grandeza escalar, já que fica totalmente determinado pelo valor numérico (4,75) acompanhado da unidade de medida (cm).**O** comprimento é uma grandeza escalar.

São também escalares as grandezas: área, massa, tempo, energia, potência, densidade, pressão, temperatura, carga elétrica e tensão elétrica, dentre outras.

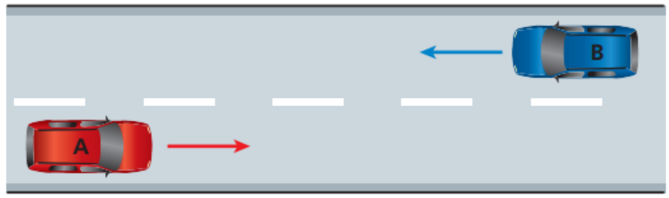
Definir plenamente um deslocamento requer um módulo, uma direção e um sentido, sendo essa grandeza física de natureza **vetorial**.



O deslocamento sofrido pelo carro ao movimentar-se de **P** até **Q** é uma grandeza vetorial, caracterizada por um módulo (10 m) , uma direção (leste-oeste) e um sentido (de oeste para leste). **O deslocamento é uma grandeza vetorial.**

São também vetoriais as grandezas: velocidade, aceleração, força, impulso, quantidade de movimento (ou momento linear), vetor campo elétrico e vetor indução magnética, dentre outras.

Direção e sentido são conceitos diferentes. Uma reta define uma direção. A essa direção podemos associar dois sentidos.

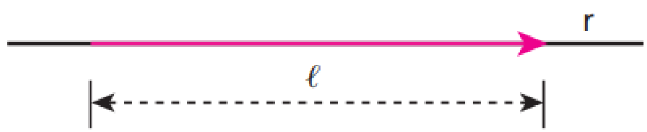


Os carros A e B percorrem uma mesma avenida retilínea e vão se cruzar. Suas velocidades têm a mesma direção, mas sentidos opostos.

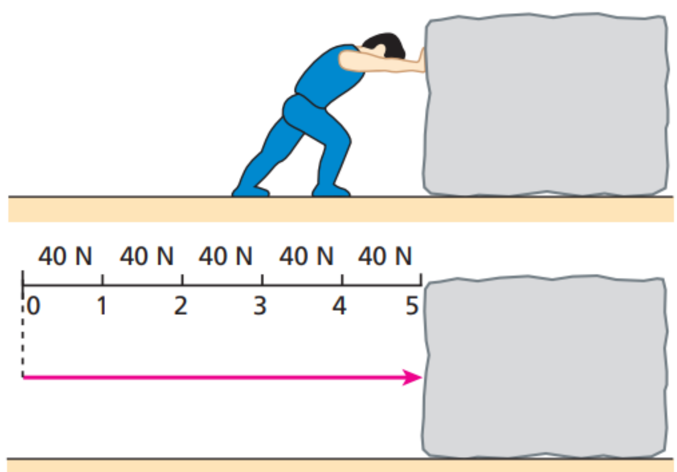
6.1 Vetor

Vetor é um ente matemático constituído de um **módulo**, uma **direção** e um **sentido**, utilizado em Física para representar as **grandezas vetoriais**.

Um vetor pode ser esboçado graficamente por um segmento de reta orientado (seta).



O comprimento ℓ do segmento orientado está associado ao módulo do vetor, a reta suporte **r** fornece direção, e a orientação (ponta aguçada do segmento) evidencia o sentido.



Um homem está empurrando um bloco horizontalmente para a direita, aplicando sobre ele uma força de intensidade 200 N (N = newton, a unidade de força no SI).

A força de 200 N que o homem aplica no bloco (grandeza física vetorial) está representada pelo segmento de reta orientado, de comprimento $5,0$ unidades, em que cada unidade de comprimento equivale a 40 N.

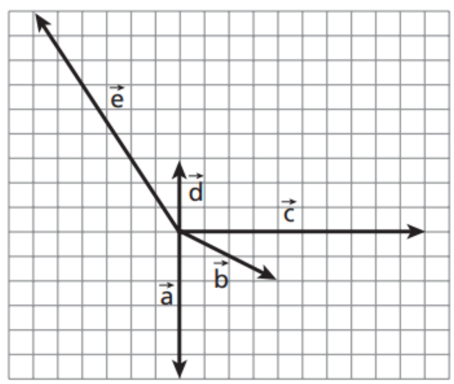
A notação de um vetor é feita geralmente se utilizando uma letra sobreposta por uma pequena seta, como, por exemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{V}$, $\vec{F}$. Outra notação também comum é obtida nomeando-se com letras maiúsculas as extremidades do segmento orientado que representa o valor.

Outra notação também comum é obtida nomeando-se com letras maiúsculas as extremidade do segmento orientado que representado o vetor.

Nessa notação, faz-se sempre a letra que nomeia a ponta aguçada da seta menos a letra que nomeia a extremidade oposta (ou "origem"): $\vec{a} = B - A$.

6.2 Adição de vetores

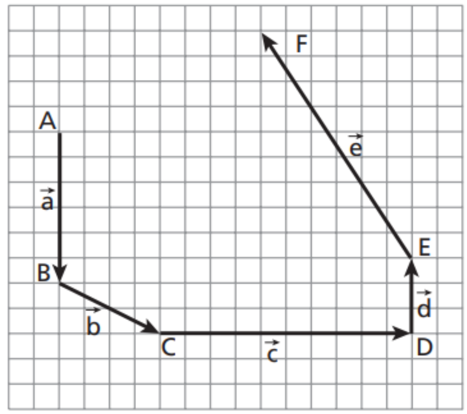
Considere os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$ representados abaixo.



Como podemos obter o vetor-soma (ou resultante) $\vec{s}$, dado por $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$?

Para responder a essa questão, faremos outra figura associando sequencialmente os segmentos orientados - representativos dos vetores parcelas - , de modo que a "origem"de um coincida com a ponta aguçada do que lhe antecede. Na construção dessa figura, devemos preservar as características de cada vetor: módulo, direção e sentido.

De acordo com a figura a seguir, o que se obtém é uma linha segmentada, denominada **linha poligonal**.



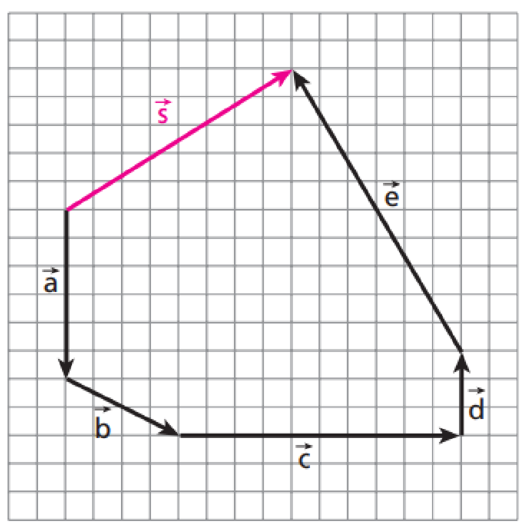
Então, temos: $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - B$, $\vec{c} = D - C$, $d = \vec{E} - D$ e $\vec{e} = F - E$.

Logo:

$$\vec{s} = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + (F - E)$$

$$\vec{s} = F - A$$

Na figura a seguir está ilustrado o vetor resultante $\vec{s}$. O segmento orientado que representa $\vec{s}$ **sempre fecha o polígono** e sua ponta aguçada coincide com a ponta aguçada do segmento orientado que representa o último vetor-parcela.

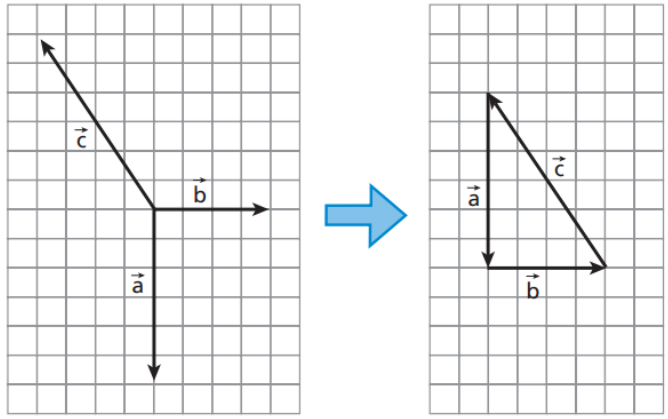


A esse método de adição de vetores damos o nome de **regra do polígono**.

- Vale a **propriedade comutativa**, isto é, a ordem dos vetores parcelas não altera o vetor soma.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{b} + \vec{e} + \vec{d} + \vec{a} + \vec{c}$$

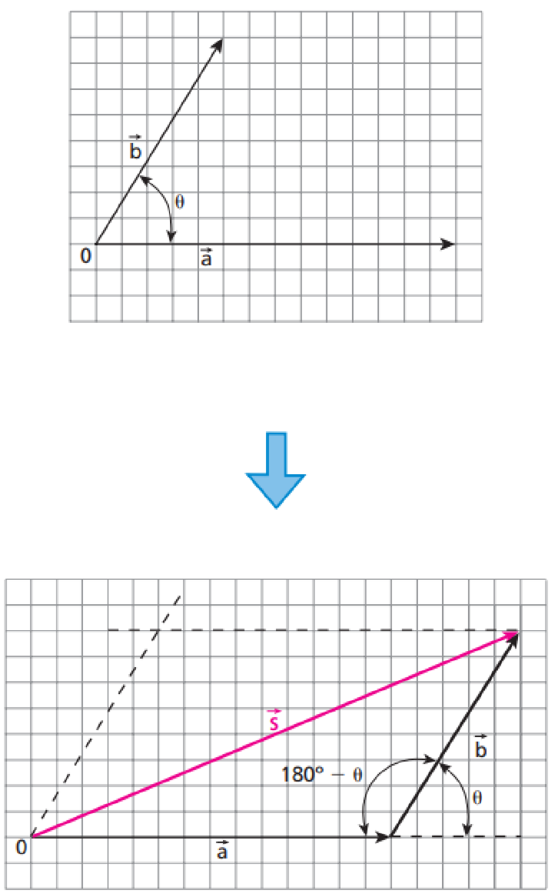
- Se a linha poligonal dos vetores parcelas for fechada então o vetor soma será **nulo**.



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

6.3 Adição de dois vetores

Considere os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura 1. Admitamos que seus segmentos orientados representativos tenham "origens"coincidentes no ponto 0 e que o ângulo formado entre eles seja θ. Na figura 2 está feita a adição $\vec{a} + \vec{b}$ pela regra do polígono:



Observe que o segmento orientado representativo do vetor resultante $\vec{s}$ nada mais é que a **diagonal**

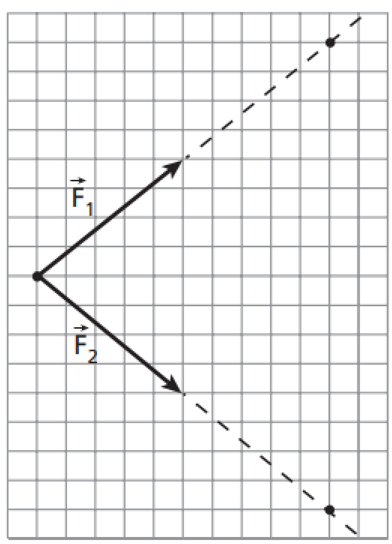
do paralelogramo formado ao traçarmos linhas paralelas aos vetores.

Assim, dados dois vetores, é sempre possível obter graficamente o vetor-soma (resultante) pela **regra do paralelogramo**: fazemos que os segmentos orientados representativos dos vetores tenham "origens"coincidentes; da ponta aguçada do segmento orientado que representa um dos vetores, traçamos uma paralela ao segmento orientado que representa o outro vetor e vice-versa; o segmento orientado representativo do vetor resultante está na diagonal do paralelogramo obtido.

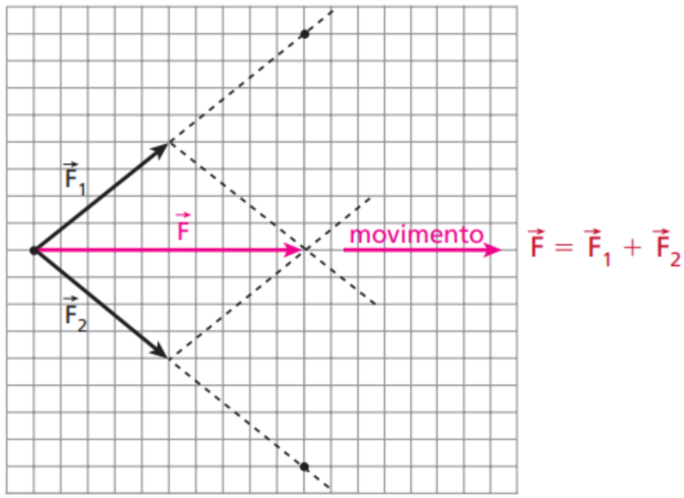
Garoto lançando uma bolinha de gude.

Na situação mostrada na fotografia, o garoto lança uma bolinha de gude sobre uma mesa horizontal, utilizando um elástico tracionado preso em dois pregos fixos.

No ato do lançamento, a bolinha recebe do elástico as forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, representadas na figura abaixo.



O movimento ocorrerá na direção e no sentido da força $\vec{F}$, resultante de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, obtida na figura a seguir pela regrado paralelogramo:



O módulo do vetor-soma (resultante) $\vec{s}$ pode ser obtido aplicando-se uma importante relação matemática denominada **Lei dos cossenos** ao triângulo formado pelos segmetos orientados representativos de $\vec{a}$. $\vec{b}$ e $\vec{s}$.

Sendo **a** o módulo de $\vec{a}$, **b** o módulo de $\vec{b}$ e **s** o módulo de $\vec{s}$, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(180° - \theta)$$

Mas:

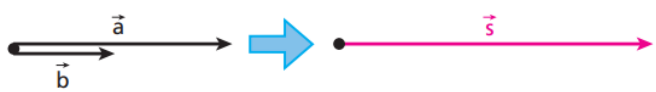
$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

Assim:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

Casos particulares

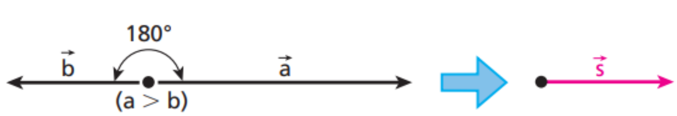
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido. Nesse caso, $\theta = 0°$; então, $\cos\theta = 1$.



$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \Rightarrow \quad s^2 = (a+b)2$$

$$\boxed{s = a + b}$$

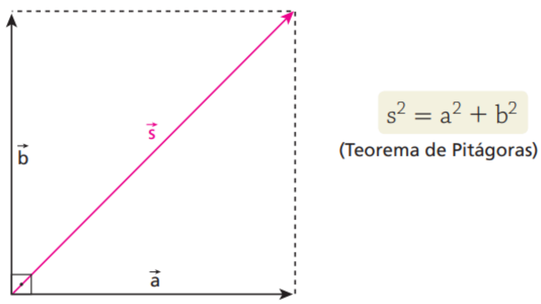
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção e sentidos opostos. Neste caso, $\theta = 180°$; então, $\cos\theta = -1$.



$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad \Rightarrow \quad s^2 = (a-b)^2$$

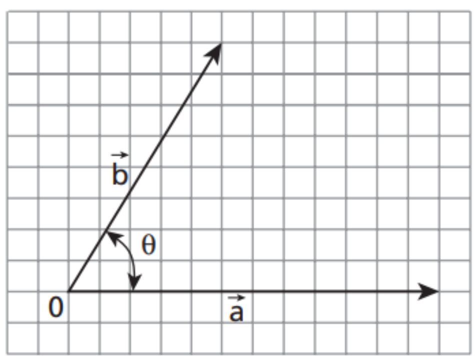
$$\boxed{s = a - b}$$

- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si. Neste caso, $\theta = 90°$; então, $\cos\theta = 0$.

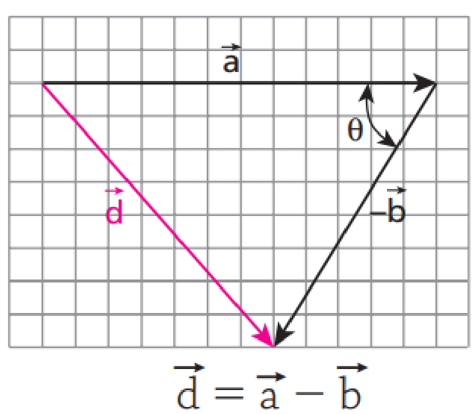


6.4 Subtração de dois vetores

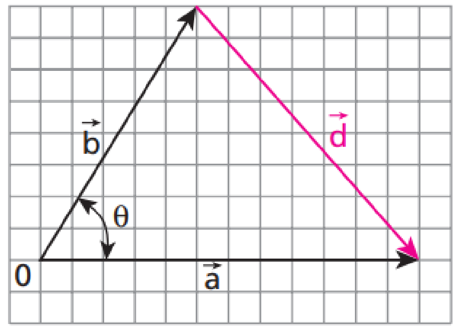
Considere os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura abaixo. Admita que os segmentos orientados representativos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tenham "origens"coincidentes no ponto 0 e que o ângulo formado entre eles seja θ.



O vetor diferença entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ($\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$) pode ser obtido pela soma do vetor $\vec{a}$ com o **oposto** de $\vec{b}$: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. O oposto do vetor $\vec{b}$, ou seja, o vetor $-b$, tem mesmo módulo e mesma direção de $\vec{b}$, porém sentido contrário. Graficamente, temos:



O vetor $\vec{d}$ fica então representado como aparece a seguir.



$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

O módulo de $\vec{d}$ também fica determinado pela **Lei dos cossenos**.

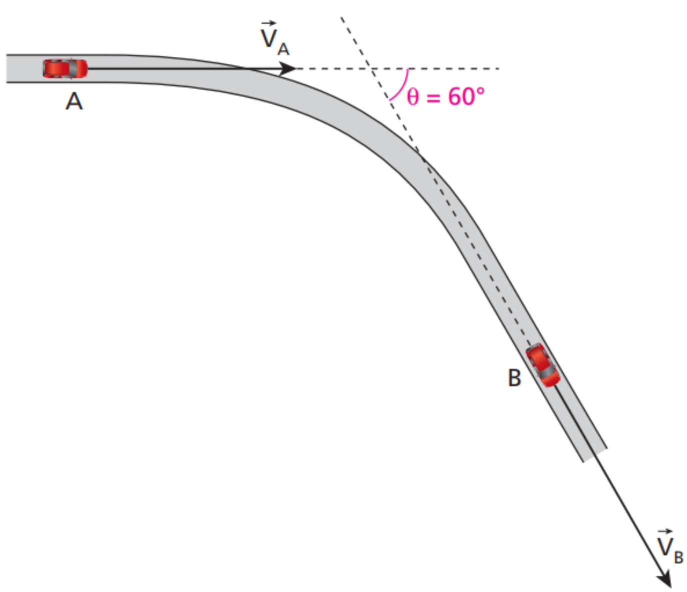
$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

6.5 Variação de uma grandeza vetorial

A subtração de dois vetores tem caráter fundamental no estudo da Física. A variação de uma grandeza vetorial qualquer ($\Delta\vec{G}$), por exemplo) é obtida subtraindo-se a grandeza inicial ($\vec{G_i}$) da grandeza final ($\vec{G_f}$).

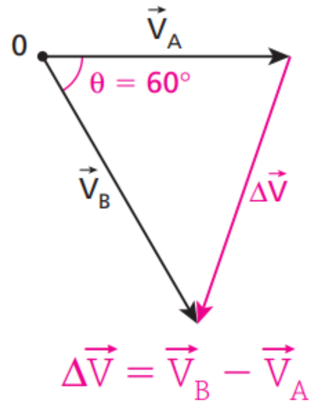
$$\boxed{\Delta\vec{G} = \vec{G_f} - \vec{G_i}}$$

Na ilustração a seguir, vê-se de cima um carro que percorre uma curva passando pelo ponto **A** com velocidade $\vec{V_A}$ de intensidade 60 km/h e pelo ponto **B** com velocidade $\vec{V_B}$ de intensidade 80 km/h. Podemos concluir que a variação da velocidade escalar desse carro tem módulo igual a 20 km/h.



Determinemos agora as características da variação $\Delta\vec{V} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$ da velocidade vetorial do veículo no percurso de **A** até **B**.

A direção e o sentido de $\Delta\vec{V}$ estão caracterizados na figura a seguir.



É interessante observar que $\Delta\vec{V}$ é dirigida para "dentro"da curva.

A intensidade $\Delta\vec{V}$ é determina pela **Lei dos cossenos:**

$$\Delta V^2 = V_A^2 + V_B^2 - 2V_A\,V_B\,\cos\theta$$

$$\Delta V^2 = (60)^2 + (80)^2 - 2 \cdot 60 \cdot 80\,\cos 60^\circ$$

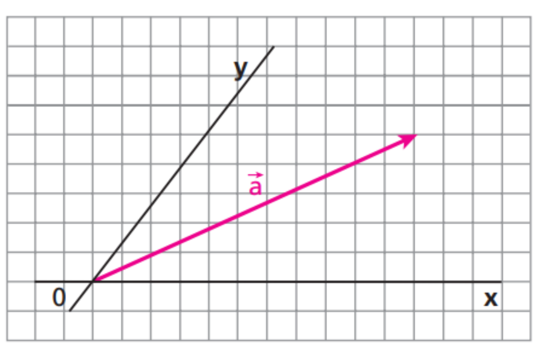
$$\Delta V^2 = 3600 + 6400 - 2 \cdot 4800 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Delta V^2 = 5200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V \cong 72\text{ km/h}}$$

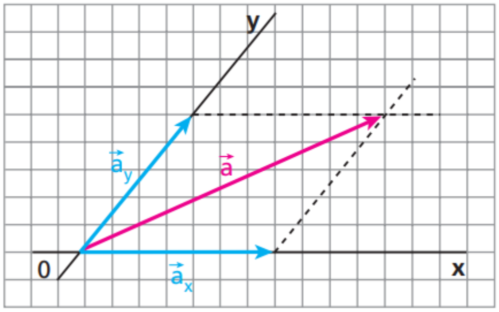
Observe que, nesse exemplo, a intensidade da variação da velocidade vetorial (72 km/h) é diferente do módulo da variação da velocidade escalar (20 km/h).

6.6 Decomposição de um vetor

Considere o vetor $\vec{a}$, representado na figura abaixo, e as retas x e y que se interceptam no ponto 0, "origem"de $\vec{a}$.

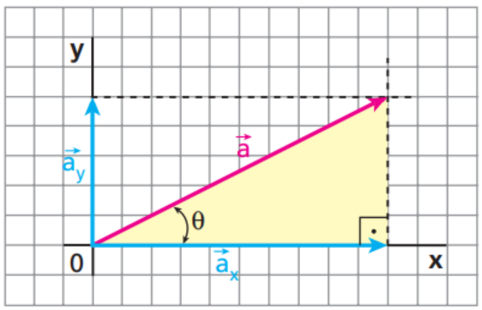


Conforme a regra do paralelogramo, podemos imaginar que o vetor $\vec{a}$ é o resultante da soma de dois vetores $\vec{a_x}$ e $\vec{a}_y$, contidos, respectivamente, nas retas x e y:



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Os vetores $\vec{a_x}$ e $\vec{a_y}$ são, portanto, componentes do vetor $\vec{a}$ nas direções x e y. Incita especial interesse, entretanto, o caso particular das componentes do vetor $\vec{a}$ contidas em duas retas x e y perpendiculares entre si.



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Levando em conta a regra do paralelogramo, teremos as componentes $\vec{a_x}$ e $\vec{a_y}$, representadas na figura. Observando o triângulo retângulo destacado na figura e sendo a_x o módulo de $\vec{a_x}$, $\vec{a_y}$ o módulo de $\vec{a_y}$, **a** o módulo de $\vec{a}$ e θ o ângulo formado entre $\vec{a}$ e a reta **x**, são aplicáveis as seguintes relações métricas e trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a_x}{a}$$

Da qual:

$$\boxed{a_x = a\,\cos\theta}$$

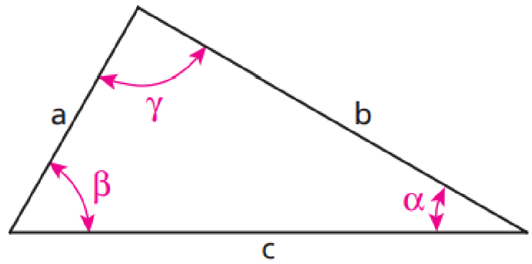
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a_y}{a}$$

Da qual:

$$a_y = a\,\operatorname{sen}\theta$$

Teorema de Pitágoras: $\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2}$

Por outro lado, a **Lei dos senos**, que estabelece a proporcionalidade entre a medida do lado de um triângulo qualquer e o seno do ângulo oposto a ele, pode ser muito útil no estudo dos vetores.



Triângulo cujos lados têm comprimentos **a**, **b** e **c**. Sejam α, β e γ os ângulos internos desse triângulo opostos, respectivamente, aos lados de medidas α, β e γ.

A lei dos senos estabelece que:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

6.7 Multiplicação de um número real por um vetor

O produto de um número real n, não nulo, por um vetor $\vec{A}$ é um vetor $\vec{B}$, tal que seu módulo é dado pelo produto do módulo de **n** pelo seu módulo de $\vec{A}$, ou seja, $|\vec{B}| = |n|\ |\vec{A}|$. Sua direção é a mesma de $\vec{A}$; seu sentido, no entanto, é o mesmo de $\vec{A}$ se **n** for positivo, mas oposto ao de $\vec{A}$ se **n** for negativo.

6.8 Deslocamento vetorial

Uma compreensão mais consistente da Mecânica passa pela assimilação conceitual das grandezas físicas vetoriais.

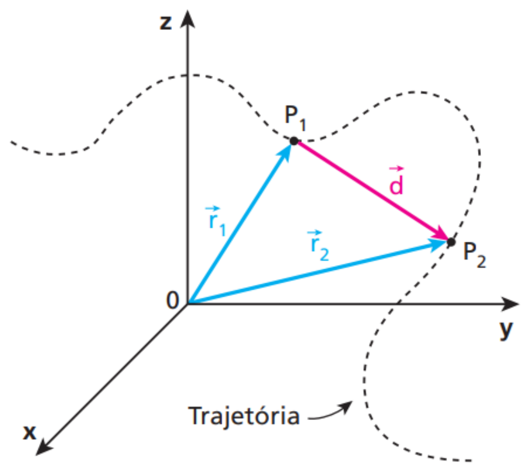
É importante destacar inicialmente, porém, que muito do que apresentaremos nesse ponto do presente capítulo está fundamentado no pensamento do filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650), que é considerado um dos intelectuais mais influentes do pensamento ocidental.

René Descartes: “Penso, logo existo”. Pintura de Frans Hals, c. 1640. Museu do Louvre.

Como filósofo, Descartes foi o fundador do movimento chamado Racionalismo, que se baseou na valorização da dúvida, isto é, na busca das verdades essenciais por meio do questionamento: "Nenhum objeto do pensamento resiste à dúvida, mas o próprio ato de duvidar é indubitável". Ele criou um método dedutivo que obedecia a uma sequência lógica: evidência, análise, síntese e enumeração. Uma das citações de Descartes, feita originalmente em latim - Cogito, ergo sum -, tornou-se célebre: "Penso, logo existo".

No campo da Matemática, criou a Geometria Analítica, que funde Geometria e Álgebra, tendo como elemento de sustentação um sistema de coordenadas chamado cartesiano.

Considere uma partícula em movimento com relação a um referencial cartesiano 0xyz. Na figura a seguir estão indicadas a trajetória descrita pela partícula, bem como as posições P_1 e P_2 ocupadas por ela, respectivamente, nos instantes t_1 e t_2. Os vetores $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ são os vetores-posição "apontam"a posição da partícula em cada ponto da trajetória. Sua "origem"está sempre na origem 0 do referencial e sua extremidade (ou ponta) aguçada coincide com o ponto em que a partícula se encontra no instante considerado.

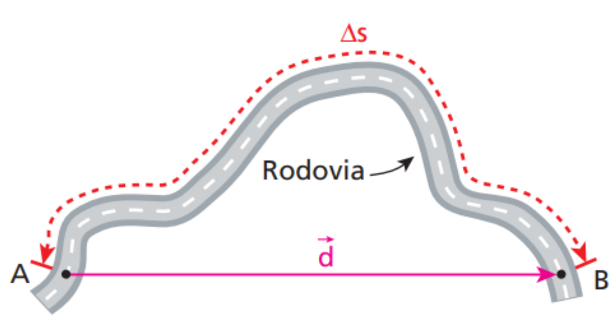


Definimos o deslocamento vetorial ($\vec{d}$) no percurso de P_1 a P_2 por meio da subtração vetorial:

$$\vec{d} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

O deslocamento vetorial sempre conecta duas posições na trajetória. Sua "origem"coincide com o ponto de partida da partícula e sua extremidade (ou ponta) aguçada, com o ponto de chegada.

Na situação esquematizada na figura a seguir, um carro parte do ponto A e percorre a rodovia até atingir o ponto B. Nessa figura estão indicados o deslocamento vetorial $\vec{d}$ e o deslocamento escalar Δs. Observe que o módulo de $\vec{d}$ nunca excede o módulo de Δs.



$$|\,\vec{d}\,| \leq |\,\Delta s\,|$$

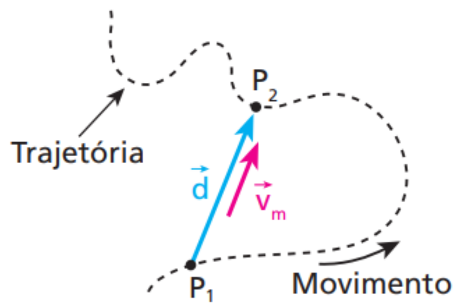
Ocorrerá o caso da igualdade $|\,\vec{d}\,| = |\,\Delta s\,|$ quando a trajetória for retilínea.

6.9 Velocidade vetorial média

É definida como o quociente do deslocamento vetorial $\vec{d}$ pelo respectivo intervalo de tempo Δt.

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{r^2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

Como Δt é um escalar positivo, a velocidade vetorial média tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial (ambos são secantes à trajetória), como representa a figura:



Vamos comparar agora o módulo da velocidade vetorial média com o módulo da velocidade escalar média. Sabemos que:

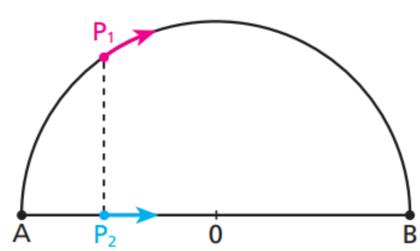
$$|\,\vec{v_m}\,| = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \qquad \text{e} \qquad |v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

Lembrando que $|\,\vec{d}\,| \leq |\,\Delta s\,|$, podemos concluir que o módulo da velocidade vetorial média nunca excede o módulo da velocidade escalar média.

$$\boxed{|\,\vec{v_m}\,| \leq |\,\vec{v_m}\,|}$$

Ocorrerá também o caso da igualdade $|\,\vec{v_m}\,| = |\,\vec{v_m}\,|$ quando a trajetória for retilínea.

Exemplo:



Partícula P_1 vai de **A** até **B** percorrendo a semicircunferência, enquanto outra partícula P_2 também vai de **A** até **B**, porém percorrendo o diâmetro que conecta esses dois pontos. Supondo que as duas partículas se desloquem de **A** até **B** durante o **mesmo intervalo de tempo** podemos concluir que:

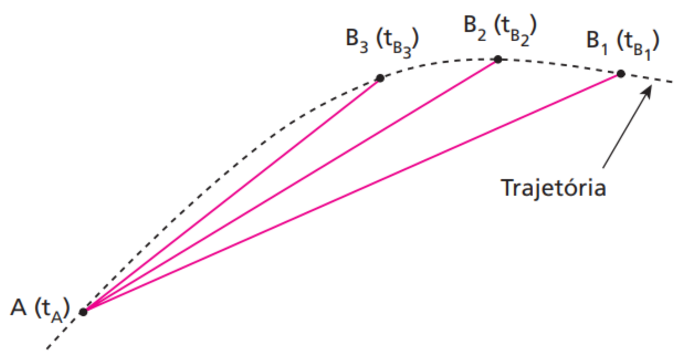
- Os deslocamentos vetoriais são iguais: $\vec{d_1} = \vec{d_2}$
- Os deslocamentos escalares têm módulos diferentes: $|\,\Delta s_1\,| > |\Delta s_2|$.
- $\vec{d_1} < |\Delta s_1|; |\,\vec{d_2}\,| = |\Delta s_2|$
- As velocidades vetoriais médias têm módulos iguais: $|\vec{v_{m_1}}| = |\vec{v_{m_2}}|$.
- As velocidades escalares médias têm módulos diferentes: $|v_{m_1}| > |v_{m_2}|$.
- $|\vec{v_{m_1}}| < |\,v_{m_1}\,|; |\vec{v_{m_2}}| = |\,v_{m_2}\,|$

6.10 Velocidade vetorial (instantânea)

Frequentemente denominada apenas velocidade vetorial, a velocidade vetorial instantânea é dada matematicamente por:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v_m}$$

A velocidade vetorial média é secante à trajetória, apresentando mesma direção e mesmo sentido do deslocamento vetorial no intervalo de tempo considerado. A velocidade vetorial instantânea, entretanto, pelo fato de ser definida em intervalos de tempo tendentes a zero, é **tangente à trajetória** em cada ponto e **orientada no sentido do movimento**.

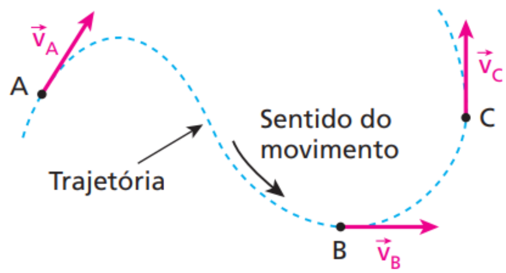


$$\Delta t_1 = t_{B_1} - t_A; \quad \Delta t_2 = t_{B_2} - t_A; \quad \Delta t_3 = t_{B_3} - t_A$$

$$\boxed{\Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1}$$

Reduzindo-se a duração do intervalo de tempo, obtém-se no limite para Δt tendente a zero o ponto B praticamente coincidente com o ponto A. com isso, no limite para Δt tendente a zero, a direção da velocidade vetorial média passa de secante a tangente à trajetória no ponto considerado.

Exemplo



Nesse situação, uma partícula percorre de A para C, em movimento uniforme, a trajetória esquematizada. Estão representadas nos pontos A, B e C as velocidades vetoriais da partícula, todas tangentes à trajetória e orientadas no sentido do movimento.

Observe que, embora as três velocidades vetoriais representadas tenham módulos iguais (movimento uniforme), $\vec{v_A} \neq \vec{v_B} \neq \vec{v_C}$. Isso ocorre porque os vetores representativos dessas velocidades têm direções diferentes.

Dois vetores ou mais são iguais somente quando têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

O módulo (intensidade) da velocidade vetorial instantânea é sempre igual ao módulo da velocidade escalar instantânea:

$$\boxed{|\,\vec{v}\,| = |\,v\,|}$$