Содержание

1. Экзотические опционы (Exotic Options)

Для решения задачи оценки справедливой стоимости и хеджирования с использованием экзотическим опционов существуют различные подходы: формулы в явном виде в рамках модели Блэка-Шоулза с непрерывным временем или биномиальной модели.

1.1. Опцион с правом выбора (Chooser options)

Определение 1. *Опцион выбора (опцион as you like it) – предоставляет право выбора типа опциона (колл или пут) в момент времени* T_1 *по правилу* $\max(c, p)$, *где* c, p *– стоимости опциона колл и пут, лежащих в основе опциона с правом выбора.*

Если опционы, лежащие в основе опциона с правом выбора, являются европейскими и имеют одинаковую цену исполнения, то для получения формулы оценки можно использовать паритет пут-колл. Предположим, что S_1 – цена актива в момент T_1, K – цена исполнения, T_2 – срок погашения опциона, а r – безрисковая процентная ставка, q – дивидендная доходность, тогда на основании паритета пут-колл:

$$\begin{aligned}\max(c, p) &= \max\left(c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}\right)\\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max\left(0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1\right).\end{aligned}$$

Можно заметить, что опцион с правом выбора представляет собой пакет, состоящий из:

1) опциона колл со страйком K и временем исполнения T_2,
2) дисконтированного опциона пут со страйком K и временем исполнения T_1,

Окончательно, используя формулу Рубенштейна [2] можно оценить справедливую стоимость опциона с правом выбора

$$\begin{aligned}w = {} & Se^{-qT_2}\mathcal{N}(d) - Ke^{-rT_2}\mathcal{N}\left(d - \sigma\sqrt{T_2}\right)\\ & - Se^{-qT_2}\mathcal{N}(-y)\\ & + Ke^{-rT_2}\mathcal{N}\left(-y + \sigma\sqrt{T_1}\right),\end{aligned}$$

где

$$d = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad y = \frac{\ln(S/K) + (r - q)T_2 + \sigma^2 T_1/2}{\sigma\sqrt{T_1}}.$$

Определение 2. *Сложный опцион с правом выбора дает держателю право выбора по истечении времени t: будет ли опцион стандартным опционом колл с исполнением в момент времени T_c и страйком K_c или опционом пут с исполнением в T_p и страйком K_p: $t < T_c, T_p$.*

Сложный опцион с правом выбора можно оценить по формуле

$$
\begin{aligned}
w &= Se^{-qT_c}\mathcal{M}(d_1, y_1; \rho_1) - K_c e^{-rT_c}\mathcal{M}\left(d_2, y_1 - \sigma\sqrt{T_c}; \rho_1\right) \\
&- Se^{-qT_p}\mathcal{M}(-d_1, -y_2; \rho_2) \\
&+ K_p e^{-rT_p}\mathcal{M}\left(-d_2, -y_2 + \sigma\sqrt{T_p}; \rho_2\right),
\end{aligned}
$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/I) + (r - q + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t},$$

$$y_1 = \frac{\ln(S/K_c) + (r - q + \sigma^2/2)T_c}{\sigma\sqrt{T_c}}, \quad y_2 = \frac{\ln(S/K_p) + (r - q + \sigma^2/2)T_p}{\sigma\sqrt{T_p}},$$

$$\rho_1 = \sqrt{t/T_c}, \quad \rho_1 = \sqrt{t/T_p}$$

и I – это решение уравнения

$$
\begin{gathered}
Ie^{-q(T_c-t)}\mathcal{N}(z_1) - K_c e^{-r(T_c-t)}\mathcal{N}(z_1 - \sigma\sqrt{T_c - t}) + \\
Ie^{-q(T_p-t)}\mathcal{N}(-z_2) - K_p e^{-r(T_p-t)}\mathcal{N}(-z_2 + \sigma\sqrt{T_p - t}) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\ln(I/K_c) + (r - q + \sigma^2/2)(T_c - t)}{\sigma\sqrt{T_c - t}}, \\
z_2 &= \frac{\ln(I/K_p) + (r - q + \sigma^2/2)(T_p - t)}{\sigma\sqrt{T_p - t}}.
\end{aligned}
$$

Для решения уравнения (1) можно использовать метод Ньютона-Рафсона.

Напомним определение двумерной функции нормального распределения

$$\mathcal{M}(a, b; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right) dxdy,$$

где $x < a$, $y < b$, ρ коэффициент корреляции.

Задача 1. *Оцените справедливую стоимость опциона, который по истечению трех месяцев дает держателю право выбора: между шестимесячным опционом колл со страйком 55 и семимесячным опционом пут со страйком 48. Базовая цена акций – 50, безрисковая процентная ставка 10% годовых, дивидендная доходность – 5% годовых, а годовая волатильность 35%.*

1.2. Опцион на опцион (Compound options)

Определение 3. *Составные опционы – это опционы на опционы. Существует четыре основных типа составных опционов: колл на колл, пут на колл, колл на пут и пут на пут. Составные опционы имеют две цены исполнения* K_1, K_2 *и две даты исполнения* T_1, T_2.

Пример 1. *Составной опцион колл на колл. В первую дату исполнения* T_1 *держатель составного опциона имеет право заплатить первую цену исполнения* K_1 *и получить опцион колл. Опцион колл дает держателю право купить базовый актив по второй цене исполнения* K_2 *во вторую дату исполнения* T_2. *Составной опцион будет исполнен в первую дату исполнения только в том случае, если стоимость опциона на эту дату превышает первую цену исполнения.*

Европейские составные опционы можно аналитически оценить через интеграл двумерного нормального распределения. Стоимость в нулевой момент времени европейского опциона колл на опцион колл:

$$\begin{aligned} c_c = {} & S_0 e^{-qT_2}\mathcal{M}(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) \\ & - K_2 e^{-rT_2}\mathcal{M}(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) \\ & - e^{-rT_1} K_1 \mathcal{N}(a_2), \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{\ln S_0/S^* + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$
$$b_1 = \frac{\ln S_0/K_2 + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

здесь S^* – это цена актива в момент времени T_1.

Аналогично запишем стоимость европейского опциона пут на колл:

$$\begin{aligned}p_c = &K_2 e^{-rT_2}\mathcal{M}(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2})\\&- S_0 e^{-qT_2}\mathcal{M}(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2})\\&+ e^{-rT_1}K_1\mathcal{N}(-a_2).\end{aligned}$$

Стоимость европейского опциона колл на пут:

$$\begin{aligned}c_p = &K_2 e^{-rT_2}\mathcal{M}(-a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2})\\&- S_0 e^{-qT_2}\mathcal{M}(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2})\\&- e^{-rT_1}K_1\mathcal{N}(a_2).\end{aligned}$$

Стоимость европейского опциона пут на пут:

$$\begin{aligned}p_p = &S_0 e^{-qT_2}\mathcal{M}(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2})\\&- K_2 e^{-rT_2}\mathcal{M}(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2})\\&+ e^{-rT_1}K_1\mathcal{N}(-a_2).\end{aligned}$$

Задача 2. *Предположим, что применима модель Блэка-Шоулза. Текущая цена акции 80, по ним выплачиваются дивиденды по ставке 2%, волатильность 30%, безрисковая процентная ставка составляет 6%. Рассмотрим сложный опцион колл на пут. Срок действия базового опциона пут истекает через 4 года, а цена исполнения составляет 90. Срок действия сложного опциона истекает через один год, цена исполнения составляет 13, а стоимость составляет 5,20. Найдите цену составного опциона пут с тем же базовым опционом, что и составной колл.*

1.3. Опцион с последействием (Lookback options)

Выделяют два типа опционов с последействием: опцион с плавающей ценой исполнения (floating-strike lookback options) и опцион с фиксированной ценой исполнения (fixed-strike lookback options).

Опцион с плавающей ценой исполнения

Определение 4. *Опционы с последействием – это опционы, выплаты по которым зависят от максимальной или минимальной цены базового актива, достигнутой в течение срока действия опциона.*

Выплата по опциону колл *с плавающей ценой исполнения* – это сумма, на которую окончательная цена актива превышает минимальную цену актива S_{min}, наблюдаемую в течение срока действия опциона. Выплата по опциону пут *с плавающей ценой исполнения* – это сумма, на которую максимальная цена актива S_{max}, наблюдаемая в течение срока действия опциона, превышает окончательную цену актива.

Оценка стоимости опциона колл с плавающей ценой исполнения в начальный момент времени может быть найдена по формуле:

$$\begin{aligned} c_{fl} &= S_0 e^{-qT} \mathcal{N}(a_1) \\ &- S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \mathcal{N}(-a_1) \\ &- S_{\min} e^{-rT} \left(N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_1} \mathcal{N}(-a_3) \right), \end{aligned}$$

где

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T},$$
$$a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$Y_1 = -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2}.$$

Для только что выпущенных опционов принимаем $S_{\min} = S_0$.

Оценка стоимости опциона пут с плавающей ценой исполнения в начальный момент времени может быть найдена по формуле:

$$\begin{aligned} p_{fl} &= S_{\max} e^{-rT} \bigg(\mathcal{N}(b_1) \\ &- \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{Y_2} \mathcal{N}(-b_3) \bigg) \\ &+ S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} \mathcal{N}(-b_2) - S_0 e^{-qT} \mathcal{N}(b_2), \end{aligned}$$

где

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2},$$
Для только что выпущенных опционов принимаем $S_{\max} = S_0$.

Опцион колл (пут) с плавающей ценой исполнения – это способ, с помощью которого держатель опциона может купить (продать) базовый актив по самой низкой (высокой) цене, достигнутой в течение срока действия опциона.

Опционы с фиксированной ценой исполнения

Определение 5. *Опционы с фиксированной ценой исполнения – это опционы, для которых страйк зафиксирован заранее. Для опциона колл с фиксированной ценой исполнения выплата такая же, как и у обычного европейского опциона колл, за исключением того, что окончательная цена актива заменяется максимальной ценой актива, достигнутой в течение срока действия опциона. Для опциона пут с фиксированной ценой исполнения выплата такая же, как и у обычного европейского опциона пут, за исключением того, что окончательная цена актива заменяется минимальной ценой актива, достигнутой в течение срока действия опциона.*

Обозначим
$$S^*_{\max} = \max(S_{\max}, K),$$
и p^*_{fl} – стоимость опциона пут с плавающей ценой исполнения, который длится тот же период, что и опцион колл с фиксированной ценой исполнения, при замене фактической максимальной цены $S_{\max}$ на $S^*_{\max}$.

Для опциона колл с фиксированным страйком на основании путколл паритета справедливо
$$c_{fix} = p^*_{fl} + S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}. \tag{2}$$

Аналогично, если
$$S^*_{\min} = \min(S_{\min}, K),$$
тогда оценка пут с фиксированным страйком p_{fix} может быть найдена как
$$p_{fix} = c^*_{fl} + K e^{-rT} - S_0 e^{-qT}, \tag{3}$$

где c_{fl}^* – оценка опциона колл с плавающим страйком, который длится тот же период, что опцион пут с фиксированным страйком, когда фактическая минимальная цена актива $S_{\min}$, заменяется на $S_{\min}^*$.

Формулы (2), (3) показывают как можно перейти от оценок опционов с плавающим страйком к опционам с фиксированным страйком.

Заметим, что опционы с последействием привлекательны для инвесторов, но они дороже стандартных опционов. Как и в случае с барьерными опционами, стоимость опционов с последействием чувствительна к частоте наблюдений. Приведенные выше формулы предполагают, что цена актива наблюдается постоянно.

Оценку опциона колл с фиксированным страйком можно записать

$$\begin{aligned} c_{fix} &= Se^{-qT}\mathcal{N}(b_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \\ &+ Se^{-rT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}\left(-\left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(d_1 - \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) + e^{(r-q)T}\mathcal{N}(d_1)\right), \end{aligned}$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Если $K \leq S_{\max}$,

$$\begin{aligned} c_{fix} &= (S_{\max} - K)e^{-qT} + Se^{-qT}\mathcal{N}(e_1) - S_{\max}e^{-rT}\mathcal{N}(e_2) \\ &+ Se^{-rT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}\left(-\left(\frac{S}{S_{\max}}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(e_1 - \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) + e^{(r-q)T}\mathcal{N}(e_1)\right), \end{aligned}$$

где

$$e_1 = \frac{\ln(S/S_{\max}) + (-r+q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad e_2 = e_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Оценку опциона пут с фиксированным страйком можно записать

$$\begin{aligned} p_{fix} &= Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - Se^{-qT}\mathcal{N}(-d_1) - \\ &+ Se^{-rT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}\left(-\left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(-d_1 + \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{(r-q)T}\mathcal{N}(-d_1)\right). \end{aligned}$$

Если $K \geq S_{\min}$,

$$\begin{aligned} p_{fix} &= (K - S_{\min})e^{-rT} - Se^{-qT}\mathcal{N}(-f_1) + S_{\min}e^{-rT}\mathcal{N}(-f_2) \\ &+ Se^{-rT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}\left(-\left(\frac{S}{S_{\min}}\right)^{-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\mathcal{N}\left(-f_1 + \frac{2b}{\sigma}\sqrt{T}\right) - e^{(r-q)T}\mathcal{N}(-f_1)\right), \end{aligned}$$

где

$$f_1 = \frac{\ln(S/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad f_2 = f_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Пример 2. *В рамках можели Блэка-Шоулза оцените опционы с последействием на недивидендные акции. Если цена акции равна 50, волатильность цены акции составляет 40% в год, безрисковая ставка составляет 10% годовых, срок погашения – 3 месяца.*

Пример 3. *Заполните таблицу для опционов с последействием колл и пут с фиксированным страйком для разных значений дат экспираций* $T = 0.5, 1.0$, *цен исполнения* $K = 95, 100, 105$ *и волатильностями* $\sigma = 0.1, 0.2, 0.3$. *Безриская ставка 10%, по базовому активу дивиденды не выплачиваются. Максимальная, минимальная цены базового актива и цена базового актива в текущий момент одинаковые и равны 100. Сравните результаты с Таблицей 1.*

Таблица 1: Оценка опционов с последействием колл и пут с фиксированным страйком, $S = S_{\min} = S_{\max} = 100$, $r = 0.1$, $b = 0.1$ [2]

		Call			Put		
	K	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.3$
	95	13.2687	18.9263	24.9857	0.6899	4.4447	8.9213
$T = 0.5$	100	8.5125	14.1701	20.2296	3.3916	8.3177	13.1578
	105	4.3907	9.8905	15.8511	8.1478	13.0738	17.9140
	95	18.3241	26.0730	34.7116	1.0533	6.2813	12.2375
$T = 1.0$	100	13.7999	21.5488	30.1874	3.8078	10.1293	16.3888
	105	9.5444	17.2964	25.9001	8.3320	14.6535	20.9130

В дополнение к ранее рассмотренным экзотическим опционам приведем примеры экзотических опционов для двух и более активов.

1.4. Опцион на отношение (Quotient Option)

Определение 6. *Опцион на отношение – это опцион, для которого функция выплаты определяется отношением цен двух базовых активов.*

Такие опционы могут быть полезны при торговле иностранной валютой, когда нет прямого кросс-курса, доступного для торговли.

Функция выплат для европейского опциона на отношение цен двух базовых активов можно записать:

$$P_{quot}^{1/2} = \left(\theta\left(\frac{S_1}{S_2} - K\right)\right)^+ \quad \text{или} \quad P_{quot}^{2/1} = \left(\theta\left(\frac{S_2}{S_1} - \theta K\right)\right)^+,$$

где $\theta = \pm 1$ для опциона колл и пут соответственно.

Формула Блека-Шоулза будет выглядеть:

$$P_{quot}^{1/2} = \theta e^{-rT}(F\mathcal{N}(\theta d_2) - K\mathbf{N}(\theta d_1)),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_1/S_2/K) + (b_1 - b_2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2) \cdot T)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 + \hat{\sigma}\sqrt{T}, \quad F = S_1/S_2 e^{(b_1 - b_2 + \sigma_2(\sigma_2 - \rho \cdot \sigma_1))T)},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

ρ – корреляция между доходностями двух активов, здесь $b_i = r - q_i$, $i = 1, 2$, σ_1, σ_2 – волатильности.

1.5. Опцион на произведение (Product Option)

Определение 7. *Опцион на произведение – это опцион, для которого функция выплаты определяется произведением цен двух базовых активов.*

Функция выплат для европейского опциона на произведение цен двух базовых активов можно записать:

$$P_{prod} = (\theta(S_1 \cdot S_2 - K))^+.$$

Формула Блека-Шоулза будет выглядеть:

$$P_{prod} = \theta e^{-rT}(F\mathcal{N}(\theta d_2) - K\mathcal{N}(\theta d_1)),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_1 \cdot S_2/K) + (b_1 + b_2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2) \cdot T)}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 + \hat{\sigma}\sqrt{T}, \quad F = S_1 S_2 e^{(b_1 + b_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)T},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Пример 4. *Вычислите оценки для опционов колл на отношение для* $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.4$, $b_1 = 0.05$, $b_2 = 0.03$, $r = 0.07$, $S_1 = 130$, $S_2 = 100$, $T = 0.25, 0.5$, $\rho = \{-0.5, 0, 0.5\}$ *и* $K = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0, 2.0, 3.0$, *безрисковая ставка 7%. Сравните результаты с таблицей 2. Повторите вычисления для опционов пут и сделайте выводы.*

Таблица 2: Оценки для опционов колл на отношение

	$T = 0.25$			$T = 0.5$		
K	$\rho = -0.5$	$\rho = 0.0$	$\rho = 0.5$	$\rho = -0.5$	$\rho = 0.0$	$\rho = 0.5$
0.1	1.258176	1.237981	1.218087	1.318772	1.276942	1.236349
0.2	1.159910	1.139716	1.119822	1.222211	1.180382	1.139789
0.3	1.061645	1.041450	1.021556	1.125658	1.083821	1.043228
0.4	0.963381	0.943185	0.923291	1.029201	0.987271	0.946668
0.5	0.865142	0.844921	0.825025	0.933227	0.890826	0.850109
0.6	0.767100	0.746686	0.726760	0.838607	0.794886	0.753578
0.7	0.669880	0.648681	0.628502	0.746640	0.700395	0.657273
0.8	0.574835	0.551674	0.530343	0.658795	0.608852	0.561914
0.9	0.484000	0.457423	0.432895	0.576419	0.522055	0.469130
1.0	0.399660	0.368638	0.338212	0.500532	0.441702	0.381422
2.0	0.026575	0.010692	0.001322	0.096496	0.050866	0.013215
3.0	0.001025	0.000104	0.000000	0.017030	0.004374	0.000162

Пример 5. *Вычислите оценки для опционов на произведение для* $K = 15,000$, $S_1 = 100$, $S_2 = 105$, $b_1 = 0.02$, $b_2 = 0.05$, $T = 0.5, 1$, $\sigma_1 = \{0.2, 0.3, 0.4\}$, $\sigma_2 = 0.3$, *безрисковая ставка* $r = 0.07$. *Сравните результаты с таблицей 3. Повторите вычисления для опционов пут.*

Таблица 3: Оценки для опционов колл на произведение

		$T = 0.25$			$T = 0.5$		
σ_1	σ_2	$\rho = -0.5$	$\rho = 0.0$	$\rho = 0.5$	$\rho = -0.5$	$\rho = 0.0$	$\rho = 0.5$
0.2	0.3	0.0028	0.42890	3.2956	32.6132	154.3380	319.7141
0.3	0.3	0.0267	2.4026	13.2618	56.7733	266.1594	531.7894
0.4	0.3	0.3535	9.3273	35.4908	118.1504	425.9402	787.9742

Задача 3. *Предположим, что есть две акции со спотовыми ценами* $S_1 = S_2 = 100$, *волатильностью* $\sigma_1 = 18\%$ *и* $\sigma_2 = 15\%$ *и ставками дивидендов* $q_1 = 4\%$, $q_2 = 3\%$, *коэффициент корреляции доходностей* $\rho = 0.75$, *безрисковая ставка* $r = 5\%$ *и цена исполнения опциона* $K = 1$. *Оцените цены опционов колл и пут по отношению цены первого актива к цене второго. Срок действия актива истекает через год.*

2. Корзина опционов (Basket Options)

Определение 8. *Корзина опционов – это опцион, выплата по которому зависит от стоимости $n \geq 2$ активов.*

Определим стоимость корзины из n активов как средневзвешенную цену при погашении в дату T:

$$B(T) = \sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T),$$

здесь w_i – доли активов корзины, для которых $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Тогда функцию выплат для корзины опционов можно записать в общем виде как

$$P_{Basket}(B(T), K, \theta) = (\theta(B(T) - K))^{+}.$$

Применение модели Блэка-Шоулза для оценки стоимости корзины опционов невозможно, т. к. цены базовых активов моделируются геометрическими броуновскими движениями и, следовательно, имеют логарифмически нормальное распределение. Напомним, что произведение логарифмически нормально распределенных случайных величин является логарифмически нормальной. Для суммы логнормальных величин это выполняется, поэтому записать явную формулу с использованием модели Блека-Шоулза не предоставляется возможным.

Выходом из этой ситуации – использование методов Монте-Карло или альтернативные методы оценки, основанные на аналитических аппроксимациях или использовании моделей нейронных сетей. Из литературы [4] известны следующие методы для оценки стоимости корзины опционов:

1) Метод условного математического ожидания (Conditional expectation technique, Beisser's technique) [1].
2) Аппроксимация геометрическим средним (approximation by geometric average, Gentel's method).
3) Метод моментов (Log-normal moment matching, Levy's matching).
4) Метод разложения Джу в ряд Тейлора (Ju's approximation) [3].
5) Аппроксимация через обратное геометрическое распределение (The reciprocal gamma approximation, Milevsky and Posner's approximation and Staunton's approximation).

6) Метод моментов высоких порядков (Approximation via higher moments, Milevsky and Posner's approximation 2).

Метод условного математического ожидания [1, 4]

Стоимость корзины опционов колл оценивается как взвешенная сумма европейских опционов колл:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([B(T)-K]^+) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}([B(T)-K]^+|Z)) \\ &\geq \mathbb{E}(\mathbb{E}([B(T)-K|Z]^+)) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[S_i(T)|Z]-K\right)^+\right)\end{aligned}$$

где случайная величина

$$Z := \frac{\sigma_z}{\sqrt{T}} W(T) = \sum_{i=1}^{n} w_i S_i(0)\sigma_i W_i(T) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2),$$

которая измерима совместно с W_i, $i = 1, 2. \ldots, n$, тогда

$$\mathbb{E}[S_i(T)|Z] = S_i(0)\exp\left(\sigma_i m_i Z - \frac{1}{2}\sigma_i^2 m_i^2 \sigma_z^2 + (r-q_i)T\right),$$

где

$$m_i := \frac{Cov(W_i(T), Z)}{Var(Z)}.$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}([B(T)-K]^+) \\ \geq &\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(0)\exp\left(\sigma_i m_i Z - \frac{1}{2}\sigma_i^2 m_i^2 \sigma_z^2 + (r-q_i)T\right)-K\right)^+\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Для нижней границы неравенства (4) Beisser [1] получил решение в явной форме.

Напомним, что $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$, тогда $W(T) := \frac{\sqrt{T}}{\sigma_z} Z \sim \mathcal{N}(0, T)$. Выберем Z так, чтобы W было броуновским движением. Установим

$$\tilde{\sigma}_i := \frac{\sigma_i m_i \sigma_z}{\sqrt{T}},$$

тогда

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(0)\exp\left(\sigma_i m_i Z - \frac{1}{2}\sigma_i^2 m_i^2 \sigma_z^2 + (r-q_i)T\right) - K\right)^{+}\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{S}_i(T) - K\right)^{+}\right),
\end{aligned}
$$

где

$$
\tilde{S}_i(T) := \tilde{S}_i(0)\exp\left(\left(r - q_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2\right)T + \tilde{\sigma}_i W(T)\right) \tag{5}
$$

и $\tilde{S}_i(0) := S_i(0)$, $\tilde{S}_i(T)$ можно интерпретировать как ценовой процесс нового актива с волатильностью $\tilde{\sigma}_i$, который не торгуется на рынке.

Вместо вычисления $\mathbb{E}([\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K]^{+})$ мы можем вычислить $\mathbb{E}([\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{S}_i(T) - K]^{+})$. Отличие между двумя представлениями состоит в том, что процессы S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ описаны n различными броуновскими движениями W_i, тогда как все процессы $\tilde{S}_i$ описаны одним и тем же броуновским движением W. Следовательно, существует x^*, такой что

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[S_i(T)|W(T) = x^*] = K.
$$

Определим скорректированные страйки как

$$
\tilde{K}_i := \mathbb{E}[S_i(T)|W(T) = x^*]
$$

тогда неравенство

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[S_i(T)|Z] \geq K
$$

равносильно

$$
\mathbb{E}[S_i(T)|Z] \geq \tilde{K}_i, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.
$$

Окончательно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[S_i(T)|Z] - K\right)^{+} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}([\mathbb{E}[S_i(T)|Z] - \tilde{K}_i]^{+}) \qquad (6)\\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i [e^{-q_i T}\tilde{S}_i(0) N(d_{1i}) - e^{-rT}\tilde{K}_i N(d_{2i})],
\end{aligned}
$$

где
$$d_{1i} = \frac{\ln \frac{\tilde{S}_i(0)}{\tilde{K}_i} + (r - q_i + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)}{\tilde{\sigma}_i\sqrt{T}}, \qquad d_{2i} = d_{1i} - \sigma_i\sqrt{T}.$$
В уравнении (6) мы использовали $\tilde{S}_i(T)$, которая лог-нормально распределена с характеристиками $\mathbb{E}[\ln \tilde{S}_i(T)] = \ln \tilde{S}_i(0) + (r - q_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)T$ и $Var[\ln \tilde{S}_i(T)] = \tilde{\sigma}_i^2 T$.

В явном виде нижнюю границу для оценки стоимости корзины опционов колл можно записать:
$$V_{basket}^{call} \geq \sum_{i=1}^{n} w_i[e^{-q_i T}\tilde{S}_i(0)N(d_{1i}) - e^{-rT}\tilde{K}_i N(d_{2i})].$$
Таким образом, стоимость корзины опционов можно аппроксимировать портфелем стандартных опционов, где i-ый актив описывается процессом $\tilde{S}_i(T)$ (5) с волатильностью $\tilde{\sigma}_i$.

Аппроксимация геометрическим средним [4]

Будем использовать свойство: среднее геометрическое логарифмически нормальных случайных величин имеет логарифмически нормальное распределение. Тогда для аппроксимации применим формулу типа Блэка-Шоулза. Функцию выплат можно представить как
$$\begin{aligned} P_{basket} &= \left(\theta\left(\sum_{i=1}^{n} w_i S_i(T) - K\right)\right)^+ \\ &= \left(\theta\left(\left(\sum_{i=1}^{n} w_i F_i^T\right)\sum_{i=1}^{n} a_i S_i^*(T) - K\right)\right)^+, \end{aligned}$$
где
$$F_i^T = S_i(0)\exp\left(\int_0^T (r(s) - q_i(s))ds\right)$$
форвардная цена i-го базового актива (акции), $r(\cdot)$ и $q_i(\cdot)$ – неслучайные ставки безрисковой и дивидендной доходности,
$$a_i = \frac{w_i F_i^T}{\sum_{i=1}^{n} w_i F_i^T}, \quad S_i^* = \frac{S_i(T)}{F_i^T}.$$
Мы аппроксимируем $\sum_{i=1}^{n} a_i S_i^*(T)$ геометрическим средним:
$$\tilde{B}(T) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i F_i^T\right)\prod_{i=1}^{n}(S_i^*(T))^{a_i}.$$

Введем

$$K^* = K - (\mathbb{E}(B(T)) - \mathbb{E}(\tilde{B}(T))) = K - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot F_i^T + e^{\tilde{m}+\frac{1}{2}\cdot\tilde{v}^2}.$$

Для аппроксимации $(B(T) - K)^+$ было использовано $(\tilde{B}(T) - K^*)^+$, где $\tilde{B}(T)$ имеет лог-нормальное распределение и может быть оценена с помощью формулы Блека-Шоулза

$$V_{Basket}(T) = e^{-rT}\theta\left(e^{\tilde{m}+\frac{1}{2}\tilde{v}^2}\mathcal{N}(\theta d_1) - K^*\mathcal{N}(\theta d_2)\right),$$

$$V_{basket}^{call} = e^{-r\cdot T} \cdot (e^{\tilde{m}+0.5\cdot\tilde{v}^2} \cdot \mathcal{N}(d_1) - K^* \cdot \mathcal{N}(d_2)),$$

$$V_{basket}^{put} = e^{-r\cdot T} \cdot (K^* \cdot \mathcal{N}(-d_2) - e^{\tilde{m}+0.5\cdot\tilde{v}^2} \cdot N(-d_1)),$$

$$d_1 = \frac{\tilde{m} - \ln K^* + \tilde{v}^2}{\tilde{v}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{v},$$

$$\tilde{m} = \mathbb{E}(\ln\tilde{B}(T)) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} w_i F_i^T\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i^2 T$$

и

$$\tilde{v}^2 = Var(\ln\tilde{B}(T)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} T.$$

Метод моментов

Основная идея метода состоит в том, чтобы аппроксимировать распределение корзины логнормальным распределением $\exp(X)$ со средним значением M и дисперсией $V^2 - M^2$, таким что первые два момента аппроксимирующего и исходного распределения взвешенной суммы цен акций совпадали:

$$m = 2\log(M) - 0.5\log(V^2), \quad v^2 = \log(V^2) - 2\log(M)$$

и

$$M \equiv \mathbb{E}(B(T)) = \sum_{i=1}^{n} w_i F_i(T),$$

$$V^2 \equiv \mathbb{E}(B^2(T)) = \sum_{i=1}^{n} w_i w_j F_i^T F_j^T \exp(\sigma_i \sigma_j \rho_{ij} T),$$

тогда

$$\mathbb{E}(B(T)) = \mathbb{E}(e^X) = e^{m+0.5v^2}$$

и

$$\mathbb{E}(B^2(T)) = \mathbb{E}(e^{2X}), = e^{2m+2v^2}$$

где $X \sim N(m, v^2)$. Окончательно выплату по корзине опционов можно аппроксимировать

$$V_{Basket}(T) \approx e^{-rT}\theta(M \cdot N(\theta d_1) - K \cdot N(\theta d_2)),$$

здесь

$$d_1 = \frac{m - \ln K + v^2}{v}, \quad d_2 = d_1 - v.$$

Заметим, что в методе моментов используется два момента в отличие от метода аппроксимации геометрическим средним, в котором использован только первый момент.

Аппроксимация через обратное гамма распределение.

Milevsky и Posner [5] предлагают использовать обратное геометрическое распределение для аппроксимации функции выплат корзины опционов. Идея метода заключается в использовании свойства: распределение коррелированных логарифмически нормально распределенных случайных величин сходится к обратному гамма-распределению при $n \to \infty$. Следовательно, первые два момента обоих распределений сопоставляются для получения аппроксимации в явном виде.

Обозначим G – гамма распределение с параметрами α, β, G_R – обратное гамма распределение, тогда:

$$G_R(y, \alpha, \beta) = 1 - G(1/y, \alpha, \beta).$$

Если случайная величина $Y \sim G_R(y, \alpha, \beta)$, тогда i-ый момент

$$\mathbb{E}[Y^i] = \frac{1}{\beta^i(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - i)}.$$

Пусть M и V^2 – первые два момента, тогда

$$\alpha = \frac{2V^2 - 1}{V^2 - 1}, \quad \beta = 1 - \frac{1}{V^2}.$$

Функцию выплат для корзины опционов колл можно записать

$$V_{call}(T) \approx e^{-rT}(F \cdot G(F/K, \alpha - 1, \beta) - K \cdot G(F/K, \alpha, \beta)),$$

где $F = \sum_i w_i F_i^T$.

M. Staunton (2002) предложил использовать:

$$\alpha = \frac{2V^2 - M^2}{V^2 - M^2}, \quad \beta = \frac{V^2 - M^2}{V^2 M},$$

тогда функцию выплат можно записать в виде

$$V_{call}(T) \approx e^{-rT}(M \cdot G(1/K, \alpha - 1, \beta) - K \cdot G(1/K, \alpha, \beta)).$$

Пример 6. *В рамках модели Блэка-Шоулза вычислите цены опциона колл на корзину с четырьмя акциями, для которых $T = 5$ лет, безрисковая ставка $r = 0$, корреляция $\rho_{ij} = 0,5$, $\forall i \neq j$, $K = 100$, $F_i^T = 100$, $\sigma_i = 40\%$ и $w_i = 0,25, i, j = 1, 2, 3, 4$. Используйте аппроксимацию рассмотренными методами и сравните результаты с моделированием Монте-Карло (MC), Таблица 4.*

Таблица 4: Оценки для корзины опционов, полученных различными аппроксимационными методами [4]

K	Beisser	Gentle	Ju	Levy	MP-RG	MP-4M	MC	StdDev
50	54,16	51,99	54,31	54,34	51,83	54,35	54,28	0,0383
60	47,27	44,43	47,48	47,52	44,41	47,50	47,45	0,0875
70	41,26	37,93	41,52	41,57	38,01	41,53	41,5	0,0369
80	36,04	32,40	36,35	36,40	32,68	36,34	36,52	0,0363
90	31,53	27,73	31,88	31,92	28,22	31,86	31,85	0,0356
100	27,53	23,78	28,01	28,05	24,50	27,98	27,98	0,0350
110	24,27	20,46	24,67	24,70	21,39	24,63	24,63	0,0344
120	21,35	17,55	21,77	21,80	18,77	21,73	21,74	0,0338
130	18,84	15,27	19,25	19,28	16,57	19,22	19,22	0,0332
140	16,65	13,25	17,07	17,10	14,70	17,04	17,05	0,0326
150	14,75	11,53	15,17	15,19	13,10	15,14	15,45	0,0320
Dev.	0,323	3,746	0,031	0,065	3,038	0,030		

Задача 4. *Для метода Монте-Карло реализуйте функцию для вычисления стандартного отклонения*

$$StdDev = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Price - MC\,Price)^2}$$

и постройте доверительный интервал для оценки.

Задача 5. *Проведите исследование влияния параметров (варьировать один параметр, остальные – зафиксировать) для различных методов аппроксимации и постройте графики, на которых отобразите зависимость для следующих значений параметров:*

1) Цена страйк $K = \{50, 60, \dots, 130\}$,

2) Форвардная цена $F^T = \{50, 60, \dots, 130\}$,

3) Корреляция $\rho = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 0.95\}$,

4) Волатильность $\sigma = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0\}$,

5) Веса $w_1 = \{0.5, 0.2, 0.2, 0.1\}$, $w_2 = \{0.7, 0.1, 0.1, 0.1\}$,

6) Безрисковая ставка $r = \{0.01, 0.02, 0.05, 0.1\}$.

3. Структурный продукт типа автоколл

Определение 9. *Автоколл (autocall) – это структурный продукт с возможностью досрочного погашения (autocallable), которое может произойти при наступлении определённых событий в течение срока жизни продукта.*

Определение 10. *Купонные выплаты, купон (coupon), c – гарантированные или условные (contingent) выплаты по продукту.*

Встречается особый вид условного купона – купон с эффектом памяти (memory coupon, snowball effect, phoenix autocall).

В автоколл встраиваются барьеры (level, barrier), при преодолении которых запускается сценарий, влияющий на выплаты по продукту.

Определение 11. *Барьер автоотзыва (autocall, knock-out barrier),* b_a *– срабатывает, если цена базового актива на дату оценки находится на этом уровне или выше, тогда структурный продукт досрочно прекращает своё действие, инвестору возвращается 100% номинала и выплачивается купон.*

Существуют продукты с разными вариантами досрочного погашения. Например, продукт может быть с заморозкой (досрочное погашение может произойти только после определённого количества дней с момента выпуска продукта) или уровень автоотзыва на каждый момент наблюдения изменяется (растет или падает).

Определение 12. *Барьер купонных выплат, купонный барьер (coupon barrier),* b_c *– срабатывает, если цена базового актива находится на* *этом уровне или выше в любую дату оценки, то инвестору будет выплачен купон.*

Определение 13. *Барьер защиты капитала (barrier capital protection, principal protection barrier), b_p – срабаывает, если цена базового актива в последнюю дату оценки на этом уровне или выше, то инвестор гарантированно получит 100% номинала обратно.*

Если цена базового актива ниже, то возврат капитала производится по специальной формуле (Final Redemption Formula), которую можно найти в проспекте эмиссии структурного продукта.

Основные характеристики автоколла.

1) Срок действия. Обычно он составляет от 1 до 5 лет, но может быть и бессрочным.
2) Барьеры (level, barrier) определяются в процентах от цены базового актива на начало действия продукта и связаны соотношениями: $b_p \leq b_c < b_a$.
3) Частота оценки продукта: непрерывная (американский); дискретная (европейский барьер) – оценка в определенные моменты времени, называемыми купонными датами или датами наблюдения (coupon dates, observation dates, fixing dates). Зачастую продукты оценивают с определенной периодичностью: ежемесячно, ежеквартально, каждые полгода или ежегодно.
4) Купонные выплаты: гарантированные или условные.
5) Базовые активы – фондовый индекс, акция, товар, процентная ставка или другое.
6) Метод оценки базовых активов. Для одного базового актива один оценивается динамика его стоимости, для корзины активов (обычно это корзина акций) рассматривается оценка по наихудшей динамике стоимости актива из корзины (worst-of performance) или средневзвешенная динамика стоимости всех активов (average-of perfomance, weighted basket).
7) Досрочное погашение (автоотзыв). Особенность продукта, позволяющая досрочно погасить продукт с выплатой инвестору инвестированного капитала (номинала) на дату оценки, когда были выполнены условия досрочного погашения.
8) Реализация негативного сценария – может привести к получению инвестором прямого убытка (возврат доли от инвестированных

средств) или поставки инвестору ценных бумаг.

Для корзины из n активов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ оценка выплат в каждый момент времени наблюдения t_i выглядит следующим образом:

$$Coupon(t_i) = N \times c \times \mathbb{1}_{\{f(t_i) \geq b_c\}} \times \mathbb{1}_{\{\max_{j=1,2,\ldots,i-1}(f(t_j)) < b_a\}}, \qquad (7)$$

$$f(t_i) = \begin{cases} \min_{k=1,2,\ldots,n} S_k(t_i)/S_k(0), & \text{по наихудшей (worst of) динамике,} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_k(t_i)/S_k(0), & \text{по средней (average of) динамике,} \\ S(t_i)/S(0), & n = 1. \end{cases}$$

Возврат капитала в любой момент времени (необязательно в дату исполнения) может быть найден по формуле

$$Redemption(t_i) = N \times \mathbb{1}_{\{f(t_i) \geq b_a\}} \times \mathbb{1}_{\{\max_{j=1,2,\ldots,i-1}(f(t_j)) < b_a\}}. \qquad (8)$$

Обозначим $CF = (CF_0, CF_1, \ldots, CF_n)$ – денежный поток, который происходит каждую дату наблюдения во время действия продукта. Компоненты потока являются денежные потоки в j-ю дату оценки: $CF_j = CF(t_j)$, причем некоторые $CF_j = 0$.

Определение 14. *Чистая приведённая стоимость (Net Present Value, NPV) – сумма всех денежных потоков, производимых во время действия структурного продукта, дисконтированных на дату начала действия продукта.*

Для автоколла NPV рассчитывается по следующей формуле:

$$NPV(A) = PV(A) - N = \sum_{j=1}^{n} \frac{CF_j}{(1+\widetilde{\mu})^{t_j - t_0}} - N,$$

где $\widetilde{\mu}$ – ставка дисконтирования, которая включает в себя безрисковую процентную ставку r и премию за кредитный риск эмитента. В качестве прокси безрисковой процентной ставки можно использовать ставки по государственным долгосрочным облигациям для валюты номинала (для России – ОФЗ, для США – US Treasuries, для Великобритании – Gilts), ключевые ставки Центральных Банков или межбанковские ставки (€STR, LIBOR, EURIBOR), а в качестве премии за кредитный риск эмитента — кредитный дефолтный своп (Credit Default Swap, CDS) на эмитента, по срочности продукта.

Если $NPV > 0$, то инвестиция в продукт является экономически эффективной, а если $NPV < 0$, то инвестиция экономически невыгодна, то есть альтернативный проект, доходность которого принята в качестве ставки дисконтирования требует меньших инвестиций для получения аналогичного потока доходов.

Для определения целесообразности инвестирования в структурный продукт рассматриваются задачи.

1) При заданных параметрах продукта N, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$, b_a, b_c, b_p, цене базового актива $S = (S(0), S(1), \ldots, S(n))$ и размере купона c определить теоретическую приведённую стоимость продукта $PV(A)$.
2) При заданной теоретической стоимости $PV(A)$ и параметрах N, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$, b_a, b_c, b_p, S, r, CDS определить размер годовой доходности c, т. е. найти решение $NPV(A) = 0$.

Модель расчётов структурного продукта вида «Автоколл»

Будем считать, что каждую дату наблюдения во время действия продукта происходит денежный поток $CF = (CF_0, CF_1, \ldots, CF_n)$.

Рассмотрим денежные поступления, приходящие инвестору во время действия структурного продукта во все даты оценки, кроме последней:

$$\begin{cases} f(t_j) \geq b_a & \Rightarrow CF_j = N + c\Delta t_j \cdot N, CF_{j+1} = ... = CF_n = 0, \\ b_a > f(t_j) \geq b_c & \Rightarrow CFj = c\Delta t_j \cdot N, \\ f(t_j) < b_c & \Rightarrow CF_j = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В первой строке мы проверяем условие автоотзыва, во второй и третьей – условие выплаты купона.

Теперь рассмотрим денежный поток в последнюю дату оценки:

$$\begin{cases} f(t_n) \geq b_c & \Rightarrow CF_n = N + c\Delta t \cdot N, \\ b_c > f(t_n) \geq b_p & \Rightarrow CF_n = N, \\ f(t_n) < b_p & \Rightarrow CF_n = Redemption(f(t_n)). \end{cases} \tag{10}$$

В первой строке мы проверяем условие купона, во второй – условие защиты капитала. Если цена актива удовлетворяет ему, то инвестору возвращается назад номинал, в противном случае рассматривается негативный сценарий и применяется формула (8).

Алгоритм Монте-Карло оценки теоретической стоимости структурного продукта

1) Сгенерировать рыночные сценарии (price paths) для базовых активов с помощью геометрического броуновского движения.
2) Для каждого рыночного сценария рассчитать денежные потоки, продисконтировать их и найти теоретическую стоимость продукта $PV(A)$ или годовую доходность.
3) Взять среднее от полученных значений на каждом рыночном сценарии соответственно.

В результате выполнения такого алгоритма получится ожидаемая теоретическая стоимость структурного или его ожидаемая годовая доходность.

Вероятность срабатывания автоотзыва

Предположим, что динамика базового актива описывается геометрическим броуновским движением $S_t \sim GBM(\mu, \sigma)$, $t \geq 0$ и $S_0 = 1$. Автоколл наблюдается дискретно в даты $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Купон c выплачивается инвестору в первую дату наблюдения, если базовый актив S_t превысит барьер K. Определим даты срабатывания автоотзыва (knock-out) как

$$\tau = \inf\{t_i, i = 1, 2, \ldots, n | S_{t_i} > K\}.$$

Построим оценку распределения τ, т. е. запишем в явном виде $\mathbb{P}(\tau = t_i)$ и $\mathbb{P}(\tau = \infty)$.

Напомним, что

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right).$$

Для $i = 1$ запишем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau = t_1) &= \mathbb{P}(S_{t_1} > K) \\
&= \mathbb{P}\left(W_{t_1} > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_1}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}\right),
\end{aligned}$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения вероятностей одномерного стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$.

Для $i \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau = t_i) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0\le k\le i-1}\{S_{t_k} \le K\} \cap \{S_{t_i} > K\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{0\le k\le i-1}\left\{W_{t_k} \le \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_k}{\sigma}\right\}\right. \\ &\left.\cap\left\{W_{t_i} > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_i}{\sigma}\right\}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что вектор $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_i})$ – это i-мерное нормальное распределение с нулевым средним значением и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{i\times i}$:

$$\Sigma_{hk} = Cov(W_{t_h}, W_{t_k}) = \min\{t_h, t_k\}, \qquad 1 \le h, k \le i. \tag{12}$$

Обозначим $\Phi_i(\mathbf{L}, \mathbf{U}; \mathbf{0}_i, \mathbf{\Sigma})$ – функция распределения вероятностей i-мерного нормального распределения $\mathcal{N}_i(\mathbf{0}_i, \mathbf{\Sigma})$ с нулевым средним $\mathbf{0}_i$, ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}$ (12), у которой нижняя и верхняя границы $\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^i$ определены:

$$L_k = \begin{cases} -\infty, & \text{если } 0 \le k \le i-1, \\ \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_k}{\sigma}, & \text{если } k = i, \end{cases}$$

$$U_k = \begin{cases} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t_k}{\sigma}, & \text{если } 0 \le k \le i-1, \\ +\infty, & \text{если } k = i. \end{cases}$$

Окончательно из (11) будем иметь

$$\mathbb{P}(\tau = t_i) = \Phi_i(\mathbf{L}, \mathbf{U}; \mathbf{0}_i, \mathbf{\Sigma}).$$

Список литературы

[1] Jochen Beisser. *Another way to value Basket Options*. 2000.

[2] Espen G. Haug. *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*. McGraw Hill, 2007.

[3] Nengjiu Ju. “Pricing Asian and Basket Options Via Taylor Expansion”. В: *Journal of Computational Finance* 5.3 (2002), с. 79—103.

[4] Martin Krekel и др. “An analysis of pricing methods for basket options”. В: *Wilmott* 2004 (май 2004), с. 82—89.

[5] M.A. Milevksy и S.E. Posner. “A Closed-Form Approximation for Valuing Basket Options”. В: *Journal of Derivatives* (1998), с. 54—61.