1. x^* 为精确值 x 的近似值；$y^* = f(x^*)$ 为一元函数 $y1 = f(x)$ 的近似值；$y^* = f(x^*, y^*)$ 为二元函数 $y2 = f(x, y)$ 的近似值，请写出下面的公式：$e^* = \underline{x^* - x}$：

$$e_r^* = \underline{\frac{x^* - x}{x^*}}$$

$$\varepsilon(y1^*) \approx \underline{|f'(x^*)| \cdot \varepsilon(x^*)} \qquad \varepsilon_r(y1^*) \approx \left|\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)}\right| \cdot \varepsilon_r(x^*)$$

$$\varepsilon(y2^*) \approx \underline{\left|\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}\right| \cdot \varepsilon(x^*) + \left|\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}\right| \cdot \varepsilon(y^*)}$$

$$\varepsilon_r(y2^*) \approx \underline{\left|\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}\right| \cdot \frac{e(x^*)}{|y2^*|} + \left|\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}\right| \cdot \frac{e(y^*)}{|y2^*|}}$$

2、 计算方法实际计算时，对数据只能取有限位表示，这时所产生的误差叫 舍入误差 。

3、 分别用 2.718281，2.718282 作数 e 的近似值，则其有效数字分别有 6 位和 7 位；又取 $\sqrt{3} \approx 1.73$（三位有效数字），则 $|\sqrt{3} - 1.73| \le \underline{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}$ 。

4、 设 $x_1 = 1.216, x_2 = 3.654$ 均具有 3 位有效数字，则 $x_1 x_2$ 的相对误差限为 0.0055 。

5、 设 $x_1 = 1.216, x_2 = 3.654$ 均具有 3 位有效数字，则 $x_1 + x_2$ 的误差限为 0.01 。

6、 已知近似值 $x_A = 2.4560$ 是由真值 x_T 经四舍五入得到，则相对误差限为 0.0000204 .

7、 递推公式 $\begin{cases} y_0 = \sqrt{2}, \\ y_n = 10 y_{n-1} - 1, n = 1, 2, \cdots \end{cases}$，如果取 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$ 作计算，则计算到 y_{10} 时，误差为 $\underline{\frac{1}{2} \times 10^{8}}$；这个计算公式数值稳定不稳定 不稳定 .

8、 精确值 $\pi^* = 3.14159265\cdots$，则近似值 $\pi_1^* = 3.141$ 和 $\pi_2^* = 3.1415$ 分别有 3 位和 4 位有效数字。

9、 若 $x = e \approx 2.71828 = x^*$，则 x 有 6 位有效数字，其绝对误差限为 $1/2*10^{-5}$ 。

10、 设 x* 的相对误差为 2%，求 $(x^*)^n$ 的相对误差 0.02n

11、近似值 $x^* = 0.231$ 关于真值 $x = 0.229$ 有(2) 位有效数字；

12、计算方法主要研究 (截断) 误差和 (舍入) 误差；

13、为了使计算 $y=10+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{6}{(x-1)^3}$ 的乘除法次数尽量地少，应将该表达式改写为 $y=10+(3+(4-6t)t)t,\ t=\frac{1}{x-1}$，为了减少舍入误差，应将表达式 $\sqrt{2001}-\sqrt{1999}$ 改写为 $\frac{2}{\sqrt{2001}+\sqrt{1999}}$。

14、改变函数 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$（$x\gg 1$）的形式，使计算结果较精确 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$。

15、设 $x^*=2.3149541\ldots$，取 5 位有效数字，则所得的近似值 x=_2.3150____.

16、 已知数 e=2.718281828...，取近似值 x=2.7182，那麼 x 具有的有效数字是 4 。

二、单项选择题：

1、舍入误差是（ A ） 产生的误差。

A. 只取有限位数 B . 模型准确值与用数值方法求得的准确值

C. 观察与测量 D . 数学模型准确值与实际值

2、3.141580 是π的有（ B ） 位有效数字的近似值。

A . 6 B . 5 C . 4 D . 7

3、用 1+ x 近似表示 e^x 所产生的误差是 （ C ） 误差。

A. 模型 B . 观测 C . 截断 D . 舍入

4、用 $1+\frac{x}{3}$ 近似表示 $\sqrt[3]{1+x}$ 所产生的误差是 （ D ） 误差。

A． 舍入 B . 观测 C . 模型 D . 截断

5、-324．7500 是舍入得到的近似值，它有 （ C ） 位有效数字。

A . 5 B . 6 C . 7 D . 8

6、(D) 的 3 位有效数字是 0.236 ×102。

(A) 0.0023549 ×103 (B) 2354.82 ×10－2 (C) 235.418 (D) 235.54 × 10－1

7、取 $\sqrt{3}\approx 1.732$ 计算 $x=(\sqrt{3}-1)^4$，下列方法中哪种最好？（ C ）

(A) $28-16\sqrt{3}$； (B) $(4-2\sqrt{3})^2$； (C) $\frac{16}{(4+2\sqrt{3})^2}$； (D) $\frac{16}{(\sqrt{3}+1)^4}$。

三、计算题

1. 有一个长方形水池 ，由测量知长为 (50 ± 0.01) 米，宽为 (25 ± 0.01) 米，深为 (20 ± 0.01) 米，试按所给数据求出该水池的容积 ，并分析所得近似值的绝对误差和相对误差公式 ，并求出绝对误差限和相对误差限 .

解：设长方形水池的长为 L，宽为 W,深为 H，则该水池的面积为 V=LWH

当 L=50,W=25,H=20 时，有 V=50*25*20=25000(米 ^{3})

此时，该近似值的绝对误差可估计为

$$\Delta(V)\approx\frac{\partial V}{\partial L}\Delta(L)+\frac{\partial V}{\partial W}\Delta(W)+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta(H)$$
$$=WH\Delta(L)+HL\Delta(W)+LW\Delta(H)$$

相对误差可估计为： $\Delta_r(V)=\frac{\Delta(V)}{V}$

而已知该水池的长、宽和高的数据的绝对误差满足

$$|\Delta(L)|\le 0.01, |\Delta(W)|\le 0.01, |\Delta(H)|\le 0.01$$

故求得该水池容积的绝对误差限和相对误差限分别为

$$|\Delta(V)|\le WH|\Delta(L)|+HL|\Delta(W)|+LW|\Delta(H)|$$
$$\le 25*20*0.01+50*20*0.01+50*25*0.01=27.50$$
$$|\Delta_r(V)|=\left|\frac{\Delta(V)}{V}\right|\le\frac{27.50}{25000}=1.1*10^{-3}$$

2. 已知测量某长方形场地的长 a=110 米，宽 b=80 米. 若 $|a-a^*|\le 0.1(米)$, $|b-b^*|\le 0.1(米)$ 试求其面积的绝对误差限和相对误差限 .

解：设长方形的面积为 s=ab

当 a=110,b=80 时，有 s==110*80=8800(米 ^{2})

此时，该近似值的绝对误差可估计为

$$\Delta(s)\approx\frac{\partial s}{\partial a}\Delta(a)+\frac{\partial s}{\partial b}\Delta(b)$$
$$=b\Delta(a)+a\Delta(b)$$

相对误差可估计为： $\Delta_r(s)=\frac{\Delta(s)}{s}$

而已知长方形长、宽的数据的绝对误差满足

$$|\Delta(a)|\le 0.1, |\Delta(b)|\le 0.1$$

故求得该长方形的绝对误差限和相对误差限分别为

$$|\Delta(s)|\le b|\Delta(a)|+a|\Delta(b)|$$
$$\le 80*0.1+110*0.1=19.0$$
$$|\Delta_r(s)|=\left|\frac{\Delta(s)}{s}\right|\le\frac{19.0}{8800}=0.002159$$

绝对误差限为 19.0 ；相对误差限为 0.002159 。

3、设 x* 的相对误差为 2%，求 $(x^*)^n$ 的相对误差

解：由于 $f(x)=x^n$，$f'(x)=nx^{n-1}$，故

$$\varepsilon=(x^*)^n-x^n\approx n(x^*)^{n-1}(x-x^*)$$

故 $\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon}{(x^*)^n}\approx n\dfrac{x-x^*}{x^*}=n\varepsilon_r=0.02n$

4、计算球体积要使相对误差为 1%，问度量半径 R允许的相对误差限是多少？

解：令 $V=f(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$，根据一元函数相对误差估计公式，得

$$\varepsilon_R(V)\le\left|\frac{f'(R)}{f(R)}\right|\cdot\varepsilon(R)=\left|\frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|\varepsilon(R)=3\varepsilon_R(R)\le 1\%$$

从而得 $\varepsilon_R(R)\le\dfrac{1}{300}$

5. 正方形的边长大约为 100cm，问怎样测量才能使面积的误差不超过 $1cm^2$

da=ds/(2a)=1cm ^{2}/(2*100)cm=0.5*10 $^{-2}$cm,即边长 a 的误差不超过 0.005cm 时，才能保证其面积误差不超过 1 平方厘米。

6．假设测得一个圆柱体容器的底面半径和高分别为 50.00m 和 100.00m，且已知其测量误差为 0.005m。试估计由此算得的容积的绝对误差和相对误差。

解：$V=\pi r^2 h$

$V^*-V=2\pi rh(r^*-r)$ =2*3.1415926*50*100*0.005=157.0796325

$\dfrac{V^*-V}{V}=2\dfrac{r^*-r}{r}=0.0002$

第一章 插值法

一、填空题：

1. 设 x_i (i=0,1,2,3,4) 为互异节点，$l_i(x)$ 为相应的四次插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{4}(x_i^4+2)l_i(x)=$ (x^4+2).

2. 设 x_i (i=0,1,2,3,4，5) 为互异节点，$l_i(x)$ 为相应的五次插值基函数，则

$\sum_{i=0}^{5}(x_i^5+2x_i^4+x_i^3+1)l_i(x)=$ $x^5+2x^4+x^3+1$

3. 已知 $f(x)=2x^3+5$，则 $f[1,2,3,4]=$ 2 ，$f[1,2,3,4,5]=$ 0

4. $f(x)=3x^2+1$，则 $f[1,2,3]=$ 3 ，$f[1,2,3,4]=$ 0 。

5. 设 $f(x)=3x^2+5, x_k=kh, k=0,1,2,\cdots$ 则 $f[x_n,x_{n+1},x_{n+2}]$ = 3，$f[x_n,x_{n+1},x_{n+2},x_{n+3}]$=0

6. 设 $f(x)=4x^5+2x^4+3x^2+1$ 和节点 $x_k=k/2, k=0,1,2,\cdots$ 则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_5]=$ 4.

7. 设 $f(0)=0$, $f(1)=16$, $f(2)=46$, 则 $f[0,1]=$ 16, $f[0,1,2]=$ 7, $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为 0+16(x-0)+7(x-0)(x-1)。

8. 如有下列表函数 ：

x_i	0.2	0.3	0.4
$f(x_i)$	0.04	0.09	0.16

则一次差商 $f[0.2,0.4]=$ 0.6。

9、2、$f(1)=-1$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, 则过这三点的二次插值多项式中 x^2 的系数为 -2，拉格朗日插值多项式为 $L_2(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x-3)-2(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$，或 $-2x^2+9x-8$

10、对 $f(x)=x^3+x+1$, 差商 $f[0,1,2,3]=$ (1), $f[0,1,2,3,4]=$ (0) ;

11、已知 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(4)=5.9$, 则二次 Newton 插值多项式中 x^2 系数为 (0.15) ;

12、设 $f(0)=0$, $f(1)=16$, $f(2)=46$, 则 $l_1(x)=$ $-x(x-2)$, $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为 $N_2(x)=16x+7x(x-1)$。

13、$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是以整数点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=$ 1，$\sum_{k=0}^{n} x_k l_j(x_k)=$ x_j，，当 $n\geq 2$ 时 $\sum_{k=0}^{n}(x_k^4+x_k^2+3)l_k(x)=$ (x^4+x^2+3)。

14、设一阶差商 $f(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1-4}{2-1}=-3$，

$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{6-1}{4-2}=\frac{5}{2}$ 则二阶差商 $f(x_1,x_2,x_3)=$ ____

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{5/2-(-3)}{4-1}=\frac{11}{6}$$

15、通过四个互异节点的插值多项式 p(x), 只要满足三阶均差为 0，则 p(x) 是不超过二次的多项式

16、若 $f(x)=3x^4+2x+1$, 则差商 $f[2,4,8,16,32]=$ 3。

二、单项选择题：

1、设 f (-1)=1, f (0)=3, f (2)=4, 则抛物插值多项式中 x^2 的系数为 (A) 。

A －0．5 B ．0．5 C ．2 D ．-2

2、拉格朗日插值多项式的余项是 (B), 牛顿插值多项式的余项是 (C) 。

(A) f(x,x0,x1,x2, ⋯,xn)(x －x1)(x －x2)⋯(x －xn－1)(x －xn) ,

(B) $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

(C) f(x,x0,x1,x2, ⋯,xn)(x －x0)(x －x1)(x －x2)⋯(x －xn－1)(x －xn) ,

(D) $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

3、有下列数表

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25

所确定的插值多项式的次数是（ A ）。

（A）二次； （B）三次； （C）四次； （D）五次

4、由下列数表进行 Newton 插值，所确定的插值多项式的最高次数是（ D ）

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x_i)$	-1	0.5	2.5	5.0	8.0	11.5

(A) 5； (B) 4； (C) 3； (D) 2。

5、设 $l_i(x)$ 是以 $x_k=k(k=0,1,\cdots,9)$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{9} kl_i(k)=$ (C)

(A) x； （B） k； （C） i； （D） 1。

6、由下列数据

x	0	1	2	3	4
f (x)	1	2	4	3	-5

确定的唯一插值多项式的次数为 (A)

(A) 4 ； (B)2 ； (C)1 ； (D)3 。

三、问答题

1. 什么是 Lagrange 插值基函数 ?它们有什么特性？

答：插值基函数 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是满足插值条件 $l_i(x_j)=\begin{cases}1, j=i\\0, j\neq i(i,j=1,\cdots,n)\end{cases}$ 的 n 次插值多项式，它可表示为 $l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$ 并有以下性质，$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1$

2. 给定插值点 $(x_i,f_i)(i=0,1,\cdots,n)$ 可分别构造 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式，它们是否相同？为什么 ?它们各有何优点？

答 :给定插值点后构造的 Lagrange 多项式为 $L_n(x)$ Newton 插值多项式为 $N_n(x)$ 它们形式不同但

都满足条件 $L_n(x_i)=f_i, N_n(x_i)=f_i(i=0,1,\cdots,n)$, 于是 $L_n(x_i)-N_n(x_i)=0, i=0,1,\cdots,n$ 它表明 n 次多项式 $[L_n(x)-N_n(x)]$ 有 n+1 个零点，这与 n 次多项式只有 n 个零点矛盾，故 $L_n(x)=N_n(x)$ 即 $L_n(x)$ 与 $N_n(x)$ 是相同的。$L_n(x)$ 是用基函数表达的，便于研究方法的稳定性和收敛性等理论研究和应用，但不便于计算，而 $N_n(x)$ 每增加一个插值点就增加一项前面计算都有效，因此较适合于计算。

3.Hermite 插值与 Lagrange 插值公式的构造与余项表达式有何异同？

答：Hermite 插值的插值点除满足函数值条件外还有导数值条件比 Lagrange 插值复什一些，但它们都用基函数方法构造，余项表达式也相似，对 Lagrange 插值余项表达式为 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$，而 Hermite 插值余项在有条件的点 x_i 看作重节点，多一个条件相当于多一点，若一共有 m+1 个条件，则余项中前面因子为 $\dfrac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$ 后面相因子 $(x-x_i)$ 改为 $(x-x_i)^2$ 即可得到 Hermite 插值余项。

四、计算题

1、设 $f(x)=x^7+5x^3+1$，求差商

$$f[2^0,2^1], f[2^0,2^1,2^2], f[2^0,2^1,\cdots,2^7], f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$$

解：$f[2^0]=7, f[2^1]=169, f[2^2]=16705$，故

$$f[2^0,2^1]=162, f[2^1,2^2]=8268, f[2^0,2^1,2^2]=2702$$

根据差商的性质，得

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=1$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$$

2、求满足下列条件的埃尔米特插值多项式：

x_i：	1	2
y_i	2	3
y_i'	1	-1

解：根据已知条件可求得

$$\alpha_0(x)=(2x-1)(x-2)^2, \alpha_1(x)=(-2x+5)(x-1)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-1)(x-2)^2, \beta_1(x)=(x-2)(x-1)^2$$

代入埃尔米特三次插值多项式公式

$p_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_0'\beta_1(x)$

$=2(2x-1)(x-2)^2+3(-2x+5)(x-1)^2+(x-1)(x-2)^2-(x-2)(x-1)^2$

3、如有下列表函数 ：

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	6	11	18	27

试计算此列表函数的差分表 ，并给出它的牛顿插值多项式及余项公式 .

解：查分表如下：

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	3				
1	6	3			
2	11	5	1		
3	18	7	1	0	
4	27	9	1	0	0

$N_4(x)=3+3(x-0)+1*(x-0)(x-1)=x^2+2x+3, 0\le x\le 1$

4、给出 ln x 的函数表如下：

x	0.40	0.50	0.60	0.70
ln x	—0.916291	—0.693147	—0.510826	—0.356675

试用线性插值和抛物插值求 ln 0.54 的近似值。

解答 线性插值，取 $x_0=0.5, x_1=0.6$，则

$$\ln 0.54\approx\frac{0.54-0.60}{0.5-0.60}(-0.693\,147)+\frac{0.54-0.5}{0.60-0.5}(-0.510\,826)=-0.620\,219$$

二次插值，取 $x_0=0.5,\ x_1=0.6,\ x_2=0.7$，得，

$$\ln 0.54=\frac{(0.54-0.6)(0.54-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times(-0.693\,147)+\frac{(0.54-0.5)(0.54-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times(-0.510\,826)+\frac{(0.54-0.5)(0.54-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times(-0.356\,675)=-0.616\,838\,2$$

注记 若取 $x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6$，则 $\ln 0.54\approx-0.615\,319\,8$.

5. 已知

x	-1	1	2
F（x）	3	1	-1

请依据上述数据求 f(x) 的 2 次 Lagrange 插值多项式。

解：记 $x_0=-1, x_1=1, x_2=2$, 则 $f(x_0)=3,\ f(x_1)=1,\ f(x_2)=-1$

所以 $L_2(x)=f(x_0)\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)}$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=3\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+1\times\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1+2)}$$

$$+(-1)\times\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)-\frac{1}{3}(x+1)(x-1)$$

6. 用插值法求满足以下条件的不超过三次的插值多项式

f(0)=1,f(1)=2,f (2)=9,f ’(1)=3，并写出插值余项。

解：根据 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式得出

$$L_2(x)=N_2(x)=3x^2-2x+1$$

设待插值函数为：

$$H_3(x)=N_2(x)+k(x-0)(x-1)(x-2)$$

根据

$H_3'(1)=f'(1)=3$，得参数 $k=1$，则

$$H_3(x)=x^3+1.$$

插值余项为：

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-2)$$

7、 已知

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	2	6	5	4

分别用拉格朗日插值法和牛顿插值法求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $P_3(x)$，并求 $f(2)$ 的近似值（保留四位小数）。

答案：$L_3(x)=2\dfrac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)}+6\dfrac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)}$

$$+5\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-3)(4-5)}+4\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-3)(5-4)}$$

差商表为

x_i	y_i	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	2			
3	6	2		
4	5	-1	-1	
5	4	-1	0	1/4

$$P_3(x)=N_3(x)=2+2(x-1)-(x-1)(x-3)+\frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$f(2)\approx P_3(2)=5.5$$

8、已知 $\sin x$ 区间 [0.4 ， 0.8] 的函数表

x_i	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422	0.71736

如用二次插值求 $\sin 0.63891$ 的近似值，如何选择节点才能使误差最小？并求该近似值。

答案：解： 应选三个节点，使误差 $|R_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}|\omega_3(x)|$ 尽量小，即应使 $|\omega_3(x)|$ 尽量小，最靠近插值点的三个节点满足上述要求。即取节点 $\{0.5,0.6,0.7\}$ 最好，实际计算结果 $\sin 0.63891\approx 0.596274$， 且

$$\left|\sin 0.63891-0.596274\right|$$

$$\le\frac{1}{3!}\left|(0.63891-0.5)(0.63891-9-0.6)(0.63891-0.7)\right|$$

$$\le 0.55032\times 10^{-4}$$

9、取节点 $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1$，求函数 $f(x)=e^{-x}$ 在区间 [0,1] 上的二次插值多项式 $P_2(x)$，并估计误差。

解：
$$P_2(x)=e^{-0}\times\frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}+e^{-0.5}\times\frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}$$

$$+e^{-1}\times\frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}$$

$$=2(x-0.5)(x-1)-4e^{-0.5}x(x-1)+2e^{-1}x(x-0.5)$$

又 $f(x)=e^{-x}, f'''(x)=-e^{-x}, M_3=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'''(x)|=1$

故截断误差 $$|R_2(x)|=|e^{-x}-P_2(x)|\le\frac{1}{3!}|x(x-0.5)(x-1)|$$ 。

10、已知 f (-1)=2 ， f (1)=3 ， f (2)=-4 ，求拉格朗日插值多项式 $L_2(x)$ 及 f (1，5) 的近似值，取五位小数。

解：$$L_2(x)=2\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+3\times\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}-4\times\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)-\frac{4}{3}(x+1)(x-1)$$

$$f(1.5)\approx L_2(1.5)=\frac{1}{24}\approx 0.04167$$

11、(12 分) 以 100,121,144 为插值节点，用插值法计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并利用余项估计误差。

用 Newton 插值方法：差分表：

100	0	1	
121	1	1 0.0476190	
144	2	1 0.0434783	-0.0000941136

$\sqrt{115}\approx$ 10+0.0476190(115-100)-0.0000941136(115-100)(115-121)

=10.7227555

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$|R|=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(115-100)(115-121)(115-144)\right|$$

$$\le\frac{1}{6}\frac{3}{8}100^{-\frac{5}{2}}\times15\times6\times29\approx0.00163$$

12、(10 分) 已知下列函数表：

x	0	1	2	3
f (x)	1	3	9	27

(1) 写出相应的三次 Lagrange 插值多项式；

(2) 作均差表，写出相应的三次 Newton 插值多项式，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解：（1）

$$L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x+1$$

0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

（2）均差表：

$$N_3(x)=1+2x+2x(x-1)+\frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$f(1.5)\approx N_3(1.5)=5$$

13、　已知 y=f（x）的数据如下

x	0	2	3
f（x）	1	3	2

求二次插值多项式 $p_2(x)$ 及 f（2.5）

解：$p_2(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+1$

$$f(2.5)\approx-\frac{2}{3}\times(2.5)^2+\frac{7}{3}\times2.5+1=2.6667$$

14、设 $f(x)=x^{\frac{3}{2}},x_0=\frac{1}{4},x_1=1,x_2=\frac{9}{4}$

（1）试求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right]$ 上的三次 Hermite 插值多项式 H（x）使满足 $H(x_j)=f(x_j),j=0,1,2,\quad H'(x_1)=f'(x_1)$ H（x）以升幂形式给出。

（2）写出余项 $R(x)=f(x)-H(x)$ 的表达式

解　（1）$H(x)=-\frac{14}{225}x^3+\frac{263}{450}x^2+\frac{233}{450}x-\frac{1}{25}$

（2）$R(x)=\frac{1}{4!}\frac{9}{16}\xi^{-\frac{5}{2}}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4}),\xi=\xi(x)\in(\frac{1}{4},\frac{9}{4})$

第四章　数值积分

一、填空题

1、求 $\int_1^2 x^2dx$，利用梯形公式的计算结果为 <u>2.5</u>，利用辛卜生公式的计算结果为 <u>2.333</u>。

2. n 次插值型求积公式至少具有 <u>n</u> 次代数精度，如果 n 为偶数，则有 <u>n+1</u> 次代数精度。

3. 梯形公式具有 1 次代数精度，Simpson 公式有 <u>3</u> 次代数精度。

4. 插值型求积公式 $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x)$ 的求积系数之和 <u>b-a</u>。

5、计算积分 $\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx$，取 4 位有效数字。用梯形公式计算求得的近似值为 <u>0.4268</u>，用辛卜生公式计算求得的近似值为 <u>0.4309</u>，梯形公式的代数精度为 <u>1</u>，辛卜生公式的代数精度为 <u>3</u>。

6、已知 f (1)=1，f (3)=5，f (5)=-3，用辛普生求积公式求 $\int_1^5 f(x)dx \approx$ (12) 。

7、设 f (1)=1，f (2)=2，f (3)=0，用三点式求 $f'(1) \approx$ (2.5) 。

8、若用复化梯形公式计算 $\int_0^1 e^x dx$，要求误差不超过 10^{-6}，利用余项公式估计，至少用 <u>477</u> 个求积节点。

9、数值积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{9}[f(-1)+8f(0)+f'(1)]$ 的代数精度为 <u>2</u>。

10、已知 $f(1)=1.0$，$f(2)=1.2$，$f(3)=1.3$，则用辛普生（辛卜生）公式计算求得 $\int_1^3 f(x)dx \approx$ ________，用三点式求得 $f'(1) \approx$ ________。

答案：2.367，0.25

10、数值微分中，已知等距节点的函数值 $(x_0,y_0)(x_1,y_1)(x_2,y_2)$，则由三点的求导公式，有

$$f'(x_1) = \underline{\quad}\frac{1}{2h}(-y_0+y_2)$$

11、对于 n+1 个节点的插值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少具有 <u>n</u> 次代数精度 .

二、单项选择题：

1、等距二点求导公式 $f'(x1) \approx$ (A) 。

(A) $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$　(B) $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_0-x_1}$　(C) $\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{x_0-x_1}$　(D) $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1+x_0}$

2、在牛顿 - 柯特斯求积公式：$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$ 中，当系数 $C_i^{(n)}$ 是负值时，公式的稳定性不能保证，所以实际应用中，当（　A　）时的牛顿 - 柯特斯求积公式不使用。

（A）$n \geq 8$，　（B）$n \geq 7$，　（C）$n \geq 10$，　（D）$n \geq 6$，

三、问答题

1. 什么是求积公式的代数精确度？如何利用代数精确度的概念去确定求积公式中的待定参数？

答：一个求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 如果当 $f(x)$ 为任意 m 次多项式时，求积公式精确成立，而当 $f(x)$ 为次数大于 m 次多项式时，它不精确成立，则称此求积公式具有 m 次代数精确度。根据定义只要令 $f(x)=x^i (i=0,1,\cdots,m)$ 代入求积公式两端，公式成立，得含待定参数的 m+1 个方程的方程组，这里 m+1 为待定参数个数，解此方程组则为所求。

四、计算题

1、确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有的代数精确度 .

(1) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}xx \approx Af(0)+Bf(x_1)+Cf(1)$

解：本题直接利用求积公式精确度定义，则可突出求积公式的参数。

令 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 代入公式两端并使其相等，得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ Bx_1+C=\dfrac{1}{2} \\ Bx_1^2+C=\dfrac{1}{3} \\ Bx_1^3+C=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解此方程组得 $x_1=\dfrac{1}{2}, A=\dfrac{1}{6}, B=\dfrac{2}{3}, C=\dfrac{1}{6}$，于是有

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{1}{6}f(1)$$

再令 $f(x)=x^4$，得 $\int_0^1 x^4 dx \neq \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^4+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

故求积公式具有 3 次代数精确度。

（2）$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

解答 (1) 求积公式中含有三个待定参数，即 A_{-1}, A_0, A_1. 将 $f(x)=1, x, x^2$ 分别代入求积公式，并令其左右相等，得

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -h(A_{-1}-A_1)=0 \\ h^2(A_{-1}+A_1)=\dfrac{2}{3}h^2 \end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{1}{3}h, A_0=4h/3$. 所求公式至少具有两次代数精确度. 又由于

$$\int_{-h}^{h} x^3 \mathrm{d}x = \frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h} x^4 \mathrm{d}x \neq \frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{h}{3}f(-h)+\dfrac{4}{3}f(0)+\dfrac{h}{3}f(h)$ 具有三次代数精确度.

（3） $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-h)+Bf(x_1)$

解：令 $f(x)=1, x, x^2$ 代入公式精确成立，得

$$\begin{cases} A+B=2h \\ -hA+Bx_1=0 \\ h^2A+Bx_1^2=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{1}{3}h, B=\dfrac{3}{2}h, A=\dfrac{1}{2}h$，

得求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \dfrac{h}{2}[f(-h)+3f(\dfrac{1}{3}h)]$

对 $f(x)=x^3$ $\quad 0=\int_{-h}^{h} x^3dx \neq \dfrac{h}{2}[(-h)^3+3(\dfrac{1}{3}h)^3]=-\dfrac{4}{9}h^4$

故求积公式具有 2 次代数精确度。

2. 求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0)+A_1 f(1)+B_0 f'(0)$，已知其余项表达式为 $R(f)=kf'''(\xi), \xi\in(0,1)$，试确定系数 A_0, A_1, B_0，使该求积公式具有尽可能高的代数精度，并给出代数精度的次数及求积公式余项。

解：本题虽然用到了 $f'(0)$ 的值，仍用代数精度定义确定参数 A_0, A_1, B_0。令 $f(x)=1, x, x^2$，分别代入求积公式，令公式两端相等，则得

$$\begin{cases} f(x)=1, A_0+A_1=1 \\ f(x)=x, A_1+B_0=\frac{1}{2} \\ f(x)=x^2, A_1=\frac{1}{3} \end{cases}$$，求得 $$\begin{cases} A_0=\frac{2}{3} \\ A_1=\frac{1}{3} \\ B_0=\frac{1}{6} \end{cases}$$，则有

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)$$

再令 $f(x)=x^3$，此时 $\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$，而上式右端 $=\frac{1}{3}$，两端不相等，故它的代数精度为 2次。

为求余项可将 $f(x)=x^3$ 代入求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)+kf'''(\xi),\ \xi\in(0,1)$$

当 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，$f''(x)=6x$，$f'''(x)=6$， 7.

代入上式得 $\frac{1}{4}=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{3}+6k$，即 $k=-\frac{1}{72}$，

所以余项 $R(f)=-\frac{1}{72}f'''(\xi),\ \xi\in(0,1)$

3、根据下面给出的函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的数据表，分别用复合梯形公式和复合辛甫生公式

计算 $I=\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$

x_k	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500
f (x_k)	1	0.997 39784	0.9896 1584	0.976 72675	0.95885 108
x_k	0.625	0.750	0.875	1.000	
f (x_k)	0.936 15563	0.908 85168	0.8771 9257	0.841 47098	

解　用复合梯形公式，这里 n=8，$h=\frac{1}{8}=0.125$，

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{0.125}{2}\{f(0)+2[f(0.125)+f(0.25)$$
$$+f(0.375)+f(0.5)+f(0.625)+f(0.75)+f(0.875)]+f(1)\}$$
$$=0.94569086$$

用复合辛甫生公式：这里 n=4，$h=\frac{1}{4}=0.25$，可得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{0.25}{6}\{f(0)+4[f(0.125)+f(0.375)$$

$$+f(0.625)+f(0.875)]+2[f(0.25)$$
$$+f(0.5)+f(0.75)]+f(1)\}$$
$$=0.946083305$$

4、求 A、B 使求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A[f(-1)+f(1)]+B[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$ 的代数精度尽量高，并求其代数精度；利用此公式求 $I=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$（保留四位小数）。

答案：$f(x)=1, x, x^2$ 是精确成立，即

$$\begin{cases} 2A+2B=2 \\ 2A+\frac{1}{2}B=\frac{2}{3} \end{cases}$$ 得 $A=\frac{1}{9}, B=\frac{8}{9}$

求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{9}[f(-1)+f(1)]+\frac{8}{9}[f(-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})]$

当 $f(x)=x^3$ 时，公式显然精确成立；当 $f(x)=x^4$ 时，左 $=\frac{2}{5}$，右 $=\frac{1}{3}$。所以代数精度为 3。

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx \overset{t=2x-3}{=} \int_{-1}^{1}\frac{1}{t+3}dt \approx \frac{1}{9}[\frac{1}{-1+3}+\frac{1}{1+3}]+\frac{8}{9}[\frac{1}{-1/2+3}+\frac{1}{1/2+3}]$$
$$=\frac{97}{140}\approx 0.69286$$

5、n=3, 用复合梯形公式求 $\int_0^1 e^x dx$ 的近似值（取四位小数），并求误差估计。

解：$\int_0^1 e^x dx \approx T_3=\frac{1-0}{2\times 3}[e^0+2(e^{1/3}+e^{2/3})+e^1]\approx 1.7342$

$f(x)=e^x, f''(x)=e^x$，$0\le x\le 1$ 时，$|f''(x)|\le e$

$$|R|=|e^x-T_3|\le\frac{e}{12\times 3^2}=\frac{e}{108}=0.025\cdots\le 0.05$$

至少有两位有效数字。

6、(15 分) 用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 时，试用余项估计其误差。用 $n=8$ 的复化梯形公式（或复化 Simpson 公式）计算出该积分的近似值。

解：$|R_T[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\times\frac{1}{8^2}\times e^0=\frac{1}{768}=0.001302$

$$T(8)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$

$$=\frac{1}{16}[1+2\times(0.8824969+0.7788008+0.60653066$$

$$+0.5352614+0.47236655+0.41686207)+0.36787947]$$

$$=0.6329434$$

7、（10 分）已知数值积分公式为：

$$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\lambda h^2[f'(0)-f'(h)]$$，试确定积分公式中的参数 λ，使其代数精确度尽量高，并指出其代数精确度的次数。

解： $f(x)=1$ 显然精确成立；

$f(x)=x$ 时，$\int_0^h xdx=\frac{h^2}{2}=\frac{h}{2}[0+h]+\lambda h^2[1-1]$；

$f(x)=x^2$ 时，$\int_0^h x^2dx=\frac{h^3}{3}=\frac{h}{2}[0+h^2]+\lambda h^2[0-2h]=\frac{h^3}{2}-2\lambda h\Rightarrow\lambda=\frac{1}{12}$；

$f(x)=x^3$ 时，$\int_0^h x^3dx=\frac{h^4}{4}=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{1}{12}h^2[0-3h^2]$；

$f(x)=x^4$ 时，$\int_0^h x^4dx=\frac{h^5}{5}\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{1}{12}h^2[0-4h^3]=\frac{h^5}{6}$；

所以，其代数精确度为 3。

8、(10 分) 用复化 Simpson 公式计算积分 $I=\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}dx$ 的近似值，要求误差限为 0.5×10^{-5}。

$$S_1=\frac{1}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=0.94614588$$

$$S_2=\frac{1}{12}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right)=0.94608693$$

$$|I-S_2|\approx\frac{1}{15}|S_2-S_1|=0.393\times10^{-5}\qquad I\approx S_2=0.94608693$$

或利用余项：$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\cdots$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{5}-\frac{x^2}{7\times2!}+\frac{x^4}{9\times4!}-\cdots\qquad |f^{(4)}(x)|\le\frac{1}{5}$$

$$|R|=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\eta)\le\frac{1}{2880\times5n^4}\le0.5\times10^{-5}$$，$n\ge2$，$I\approx S_2=\cdots$

9、（9 分）数值求积公式 $\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 是否为插值型求积公式？为什么？其代数精度是多少？

解：是。因为 $f(x)$ 在基点 1、2 处的插值多项式为 $p(x)=\frac{x-2}{1-2}\times f(1)+\frac{x-1}{2-1}\times f(2)$

$\int_0^3 p(x)dx=\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$ 。其代数精度为 1。

10、(10 分) 取 5 个等距节点，分别用复化梯形公式和复化辛普生公式计算积分 $\int_0^2 \frac{1}{1+2x^2}dx$ 的近似值（保留 4 位小数）。

解：5 个点对应的函数值 $f(x)=\frac{1}{1+2x^2}$

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	0.666667	0.333333	0.181818	0.111111

-- （2 分）

(1) 复化梯形公式（ n=4,h=2/4=0.5 ）：

$$T_4=\frac{0.5}{2}[1+2\times(0.666667+0.333333+0.181818)+0.111111]$$
$$=0.868687$$

(2) 复化梯形公式（ n=2,h=2/2=1 ）：

$$S_2=\frac{1}{6}[1+4\times(0.666667+0.181818)+2\times0.333333+0.111111]$$
$$=0.861953$$

11、(6 分) 构造代数精度最高的如下形式的求积公式，并求出其代数精度：

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right)+A_1 f(1)$$

取 f(x)=1,x ，令公式准确成立，得：

$A_0+A_1=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}A_0+A_1=\frac{1}{3}$ $A_0=\frac{1}{3}$, $A_1=\frac{1}{6}$

f(x)=x^2时，公式左右 =1/4; f(x)=x^3时，公式左 =1/5, 公式右 =5/24

∴ 公式的代数精度 =2

12、 证明定积分近似计算的抛物线公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{b}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

具有三次代数精度

证明：当 $f(x)$ =1 时,

公式左边：$\int_a^b f(x)dx = b-a$ 公式右边：$\frac{b-a}{b}[1+4+1]=b-a$ 左边 =右边

当 $f(x)$ =x 时

左边：$\int_a^b x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$ 右边：$\frac{b-a}{b}[a+4\cdot\frac{a+b}{2}+b]=\frac{b^2-a^2}{2}$ 左边 =右边

当 $f(x)=x^2$ 时

左边：$\int_a^b x^2dx = \frac{x^3}{2}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$ 右边：$\frac{b-a}{b}[a^2+4\cdot(\frac{a+b}{2})^2+b^2]=\frac{b^3-a^3}{3}$ 左边 =右边

当 $f(x)=x^3$ 时

左边：$\int_a^b x^3dx = \frac{b^4-a^4}{4}$ 右边：$\frac{b-a}{b}[a^3+4\cdot(\frac{a+b}{2})^3+b^3]=\frac{b^4-a^4}{4}$ 左边 =右边

当 $f(x)=x^4$ 时左边：$\int_a^b x^4dx = \frac{x^5}{5}\Big|_a^b = \frac{b^5-a^5}{5}$

右边：$\frac{b-a}{b}[a^4+4\cdot(\frac{a+b}{2})^4+b^4]=\frac{b\ -a}{6}(5a^4+4a^3b\ +6a^2b^2+4a\ b^3+5b^4 \neq \frac{b^5-a^5}{5}$

故 $f(x)$ 具有三次代数精度

13、 试确定常数 A，B， C 和 a，使得数值积分公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx Af(-a)+Bf(0)+Cf(a)$$

有尽可能高的代数精度。试问所得的数值积分公式代数精度是多少？它是否为 Gauss 型的？

解 $A=C=\frac{10}{9}$ ，$B=\frac{16}{9}$ ，$a=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}$，该数值求积公式具有 5 次代数精确度,

第五章 常微分方程

一、填空题

1、求解一阶常微分方程初值问题 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的改进的欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{[0]})] \end{cases}$$ 。

2、解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的改进欧拉法 $\begin{cases} y_{n+1}^{[0]}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{[0]})] \end{cases}$ 是 ____2____阶方法。

3、解初始值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 近似解的梯形公式是 $y_{k+1}\approx$ ____

$y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$

4、解常微分方程初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 的梯形格式

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right]$ 是二阶方法

二、计算题

1. 用改进欧拉方法计算初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=x^2+x-y \\ y(0)=0 \end{cases}$ $0<x<1$，取步长 h=0.1 计算到 y_5。

解：改进的欧拉公式 $\begin{cases} \tilde{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\tilde{y}_{n+1})] \end{cases}$

代入 $f(x,y)=x^2+x-y$,且 $x_n=nh$,有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[x_n^2+x_n-y_n+x_{n+1}^2+x_{n+1}-y_n-h(x_n^2+x_n-y_n)]$$

$$=y_n+0.05\times(1.9x_n^2+2.1x_n-1.9y_n+0.11)\quad(n=0,.1,2,3,4)$$

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	0.00550	0.02193	0.05015	0.09094	0.14500

2. 用梯形法解初值问题 $y'=x^2+x-y, y(0)=0$ 取步长 h=0.1，计算到 x=0.5，并与准确解 $y=-e^{-x}+x^2-x+1$ 相比较

解：用梯形法求解公式，得

$$y_{n+1}=y_n+0.05\times(x_n^2+x_n-y_n+x_{n+1}^2+x_{n+1}-y_{n+1})$$

解得

$$y_{n+1}=[y_n+0.05\times(2x_n^2+2.2x_n-y_n+0.11)]/1.05, n=0,1,2,3,4$$

精确解为 $y(x)=-e^{-x}+x^2-x+1$

x_n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
改进 Eulerr 法	0.00550	0.02193	0.05015	0.09094	0.14500
梯形法	0.00524	0.02141	0.04937	0.08991	0.14373
精确解 $y(x_n)$	0.00516	0.02127	0.04918	0.08968	0.14347

3. 用改进的 Euler 法解初值问题 $\begin{cases} y'=x+y, & 0<x<1 \\ y(0)=1, \end{cases}$；取步长 h=0.1 计算 $y(0.5)$，并与精确解 $y=-x-1+2e^x$ 相比较。（计算结果保留到小数点后 4 位）

解：改进的尤拉公式为：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(f(x_n,y_n)+f\left(x_{n+1},\bar{y}_{n+1}\right)\right) \end{cases}$$

代入 $f(x,y)=x+y$ 和 $x_n=nh$，有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[(2+h)x_n+(2+h)y_n+h]$$

$$=\left(\frac{h^2+2h+2}{2}\right)y_n+\frac{h}{2}(nh^2+2nh)+\frac{h^2}{2}$$

代入数据，计算结果如下：

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_n	1	1.11 00	1.24 21	1.39 85	1.58 18	1.79 49
$y(x_n)$	1	1.11	1.24	1.39	1.58	1.79

		03	28	97	36	74

4. 设初值问题 $y' = x^2 + 100y, y(0) = 0$,

a) 由 Euler 方法、取步长 h=0.1 写出表示上述初值问题数值解的公式；

b) 由改进 Euler 方法、取步长 h=0.1 写出上述初值问题数值解的公式。

解：a）根据 Euler 公式： $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n^2 + 100y_n)$$

$y_{n+1} = 11y_n + 0.001n^2$ 3 分

b）根据改进 Euler 公式： $\begin{cases} \overline{y_{n+1}} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}})) \end{cases}$ 5 分

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + 100y_n + x_{n+1}^2 + 100\overline{y_{n+1}})$$

$$= y_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + 100y_n + x_{n+1}^2 + 100(y_n + h(x_n^2 + 100y_n)))$$

$$= y_n + \frac{h}{2}(1200y_n + 12x_n^2 + 0.2x_n + 0.01)$$

$$= 61y_n + 0.006n^2 + 0.001n + 0.0005$$

5. 设初值问题 $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $x > 0$,

a) 写出由 Euler 方法、取步长 h=0.1 解上述初值问题数值解的公式；

b) 写出由改进 Euler 方法、取步长 h=0.1 解上述初值问题数值解的公式。

解：a）根据 Euler 公式：

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + n0.1(x_n - y_n) = 0.9y_n - 0.1x_n$$

b）根据改进 Euler 公式： $\begin{cases} \overline{y_{n+1}} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}})) \end{cases}$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(x_n-y_n+x_{n+1}-\overline{y_{n+1}})$$

$$=y_n+\frac{h}{2}(x_n-y_n+x_{n+1}-(y_n+h(x_n-y_n)))$$

$$=y_n+\frac{h}{2}(x_n-y_n+x_n+h-y_n-hx_n+hy_n)$$

$$=\frac{h^2-2h+2}{2}y_n+\frac{2h-h^2}{2}x_n+\frac{h^2}{2}$$

$$=0.905y_n+0.095x_n+0.005$$

6、用欧拉方法求

$$y(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

在点 $x=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 处的近似值。

解： $y(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 等价于

$$\begin{cases} y'=e^{-x^2} \\ y(0)=0 \end{cases} \quad (x>0)$$

记 $f(x,y)=e^{-x^2}$，取 $h=0.5$，$x_0=0, x_1=0.5, x_2=1.0, x_3=1.5, x_4=2.0$.

则由欧拉公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_0=0 \end{cases}, \quad n=0,1,2,3$$

可得 $y(0.5)\approx y_1=0.5,\quad y(1.0)=y_2\approx 0.88940$,

$y(1.5)\approx y_3=1.07334,\quad y(2.0)=y_4\approx 1.12604$

7、取步长 $h=0.2$，用预估 - 校正法解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=2x+3y \\ y(0)=1 \end{cases} \quad (0\le x\le 1)$$

答案：解：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.2\times(2x_n+3y_n) \\ y_{n+1}=y_n+0.1\times[(2x_n+3y_n)+(2x_{n+1}+3y_{n+1}^{(0)})] \end{cases}$$

即 $y_{n+1}=0.52x_n+1.78y_n+0.04$

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

y_n	1	1.82	5.8796	10.7137	19.4224	35.0279

8、(10 分) 求参数 a, b，使得计算初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} (c \le x \le d)$ 的二步数值方法 $y_{n+1} = y_n + h[af(x_n, y_n) + bf(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 的阶数尽量高，并给出局部截断误差的主项。

解：$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \dfrac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dfrac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4)$

$$y_{n+1} = y(x_n) + h(ay'(x_n) + by'(x_{n-1}))$$

$$= y(x_n) + ahy'(x_n) + bh(y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_n) + O(h^4))$$

$$= y(x_n) + (a+b)hy'(x_n) - bh^2 y''(x_n) + \frac{bh^3}{2}hy'''(x_n) + O(h^4))$$

所以当 $\begin{cases} a + b = 1 \\ -b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$，即 $a = \dfrac{3}{2}, b = -\dfrac{1}{2}$ 时，

局部截断误差为 $y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \dfrac{bh^3}{2}y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3)$

局部截断误差的主项为 $y_{n+1} - y(x_{n+1}) = -\dfrac{h^3}{4}y'''(x_n)$，该方法为二阶方法。

9、(15 分) 取步长 $h = 0.1$，求解初值问题 $\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 用改进的欧拉法求 $y(0.1)$ 的值；

解：改进的欧拉法：$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) = 0.9y_n + 0.1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] = 0.905y_n + 0.095 \end{cases}$

所以 $y(0.1) = y_1 = 1$；

10、(10 分) 对于一阶微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = 2x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$，取步长 $h = 0.2$，用 Euler 预报－校正法求 $y(0.2)$ 的近似值。

解：Euler 预报－校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2(2x_n - y_n) = 0.4x_n + 0.8y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1(2x_n - y_n + 2x_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0.16x_n + 0.2x_{n+1} + 0.82y_n \end{cases}$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.2 \times 0.2 + 0.82 \times 1 = 0.86$$

11、(10 分) 用二步法 $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[\alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，问：如何选择参数 α, β 的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

解：局部截断误差为

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha f(x_n,y(x_n))+\beta f(x_{n-1},y(x_{n-1}))]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha y'(x_n)+\beta y'(x_{n-1})]$$

$$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}\alpha y'(x_n)$$

$$-\frac{h}{2}\beta[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^3)]$$

$$=h(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})y'(x_n)+\frac{h^2}{2!}(1+\beta)y''(x_n)+(\frac{h^3}{3!}-\frac{h^3}{4}\beta)y'''(x_n)+O(h^4)$$

因此有 $\begin{cases}1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=0\\ 1+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-1\end{cases}$

局部截断误差主项为 $\frac{5h^3}{12}y'''(x_n)$，该方法是 2 阶的。

12、(10 分) 取步长 $h=0.2$，求解初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=8-3y & (x\geq 0)\\ y(0)=2\end{cases}$，用欧拉预报—校正法求 $y(0.2)$ 的近似值。

解：（1）欧拉预报 - 校正法：

$$\begin{cases}y_{n+1}^{(0)}=y_n+0.2(8-3y_n)=1.6+0.4y_n\\ y_{n+1}=y_n+0.1(8-3y_n+8-3(1.6+0.4y_n))=1.12+0.58y_n\end{cases}$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.28$$

13、(8 分) 已知常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}dy/dx=x/y, & 1\leq x\leq 1.2\\ y(1)=2\end{cases}$$

用改进的 Euler 方法计算 $y(1.2)$ 的近似值，取步长 $h=0.2$。

$k_1=f(x_0,y_0)=0.5$，$k_2=f(x_1,y_0+hk_1)=1.1/(2+0.2\times 0.5)=0.5238095$

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}(k_1+k_2)=2+0.1\times(0.5+0.5238095)=2.1071429$$

第六章　方程求根

一、填空题

1、已知方程 $x^3-x^2-0.8=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有一个根，构造如下两个迭代公式：

(1) $x_{k+1} = \sqrt[3]{0.8 + x_k^2}$ (2) $x_{k+1} = \sqrt{-0.8 + x_k^3}$

则用迭代公式 (1) 求方程的根收敛__，用迭代公式 (2) 求方程的根 _发散_。

2、设 $f(x)$可微，求方程 $x = f(x)$的根的牛顿迭代格式为 ____ $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - f(x_k)}{1 - f'(x_k)}$ 。

3、$\varphi(x) = x + a(x^2 - 5)$，要是迭代法 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 局部收敛到 $x^* = \sqrt{5}$，

则 a 的取值范围是 $-\dfrac{1}{\sqrt{5}} < a < 0$

4、迭代法的收敛条件是（ 1） $a \le \varphi(x) \le b$. （2） $\max\limits_{a \le x \le b} |\phi'(x)| \le L < 1$。

5. 写出立方根 $\sqrt[3]{13}$ 的牛顿迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - 13}{3x_k^2}$

6. 用二分法求解方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在[1，2] 的近似根，准确到 10^{-3}，要达到此精度至少迭代 9 次。

7、设 $f(x)$ 可微，求方程 $x = f(x)$ 的牛顿迭代格式是 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - f(x_n)}{1 - f'(x_n)}$ ；

8、用二分法求非线性方程 f (x)=0 在区间 (a, b) 内的根时，二分 n 次后的误差限为 $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$。

9. 用二分法求方程 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ 在区间 [0,1] 内的根，进行一步后根的所在区间为 0.5，1 ， 进行两步后根的所在区间为 0.5 ，0.75 。

10、若用二分法求方程 $f(x) = 0$ 在区间 [1,2] 内的根，要求精确到第 3 位小数，则需要对分 10 次。

11、如果用二分法求方程 $x^3 + x - 4 = 0$ 在区间 [1,2] 内的根精确到三位小数，需对分 10 次。

12、求方程 $x^2 - x - 1.25 = 0$ 的近似根，用迭代公式 $x = \sqrt{x + 1.25}$，取初始值 $x_0 = 1$，那么 $x_1 =$ ____ 1.5

13、 解非线性方程 f(x)=0 的牛顿迭代法具有局部平方收敛

14、 迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ （k=1,2, …）收敛的充要条件是 $|\varphi'(x)|$ < 1

二、单项选择题：

1、用简单迭代法求方程 f(x)=0 的实根，把方程 f(x)=0 表示成 x=φ(x)，则 f(x)=0 的根是（ B ） 。

(A) y= φ(x) 与 x 轴交点的横坐标　　(B) y=x 与 y=φ(x) 交点的横坐标

(C) y=x 与 x 轴的交点的横坐标　　(D) y=x 与 y=φ(x) 的交点

2、用牛顿切线法解方程 f(x)=0，选初始值 x0 满足 (A)，则它的解数列 {xn}n=0,1,2, …一定收敛到方程 f(x)=0 的根。

(A) $f(x_0)f''(x)>0$　(B) $f(x_0)f'(x)>0$　(C) $f(x_0)f''(x)<0$　(D) $f(x_0)f'(x)<0$

3、为求方程 x3－x2－1=0 在区间 [1.3,1.6] 内的一个根，把方程改写成下列形式，并建立相应的迭代公式，迭代公式不收敛的是 (A) 。

(A) $x^2=\dfrac{1}{x-1}$，迭代公式：$x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

(B) $x=1+\dfrac{1}{x^2}$，迭代公式：$x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^2}$

(C) $x^3=1+x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$

(D) $x^3-1=x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=1+\dfrac{x_k^2}{x_k^2+x_k+1}$

4、计算 $\sqrt{3}$ 的 Newton 迭代格式为 (B)

(A) $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{3}{x_k}$；(B) $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{3}{2x_k}$；(C) $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}+\dfrac{2}{x_k}$；(D) $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{3}+\dfrac{3}{x_k}$。

5、用二分法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在区间 $[1,2]$ 内的实根，要求误差限为 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$，则对分次数至少为 (A)

(A)10；　(B)12；　(C)8；　(D)9。

6、已知方程 $x^3-2x-5=0$ 在 $x=2$ 附近有根，下列迭代格式中在 $x_0=2$ 不收敛的是 (C)

(A) $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}$；(B) $x_{k+1}=\sqrt{2+\dfrac{5}{x_k}}$；(C) $x_{k+1}=x_k^3-x_k-5$；(D) $x_{k+1}=\dfrac{2x_k^3+5}{3x_k^2-2}$。

三、问答题

1. 什么是不动点？如何构造收敛的不动点迭代函数？

答：将方程 $f(x)=0$ 改写为 $x=\varphi(x)$ 若 $x^*\in[a,b]$ 使 $x^*=\varphi(x^*)$ 则称点 x^* 为不动点而 $\varphi(x)$ 就是不动点的迭代函数，迭代函数 $\varphi(x)$ 可以有很多，但必须使构造的 $\varphi(x)$ 满足条件

（1） $a\le\varphi(x)\le b.$

（2） $\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|\le L<1$

若 x^* 已知，且 $|\varphi'(x^*)|<1$ 时也收敛，称为局部收敛。

2. 对于迭代法 $x_{n+1}=\varphi(x_n),(n=0,1,\cdots)$ 初始近似 x_0，当 $|\varphi'(x_0)|<1$ 时为什么还不能断定迭代法

收敛？

答：迭代法是否收敛一定要按收敛定理的条件判断，定理 6.1 是全局收敛性，需要在包含 x_0 的区间 $[a,b]$ 上证明 $a \le \varphi(x) \le b$ 且 $\max_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|<1$ 才能说明由 x_0 出是迭代法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛

如果用局部收敛定理 6.2，则要知道不动点为 x^* 才可由 $|\varphi'(x^*)|<1$ 证明其收敛性，由 $|\varphi'(x_0)|<1$ 还不能说明迭代法收敛。

3. 怎样判断迭代法收敛的快慢？一个迭代公式要达到 P 阶收敛需要什么条件？

答：衡量迭代法快慢要看收敛阶 P 的大小，若序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，记为 $\varepsilon_k = x_k - x^*$ 若存在 $P\ge 1$ 及 $\alpha>0$，使 $\lim_{k\to\infty}\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p}=\alpha$ 则称序列 $\{x_k\}$ 为 P 阶收敛，P 越大收敛越快，当 P＝1，则 α 越小，收敛越快。一个迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 若 x^* 为 φ 的不动点，P 为大于 1 的整数，$\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 连续，且 $\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$ 而 $\varphi^{(p)}(x^*)\ne 0$ 则此迭代公式为 P 阶收敛。

4. 方程 $f(x)=0$ 求根的 Newton 法是如何推出的？它在单根附近几阶收敛？在重根附近是几阶收敛？

答：用曲线 $y=f(x)$ 在点 x_k 上的切线 $y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ 的零点近似曲线零点得到 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 就是 Newton 法，在单根附近 2 阶收敛，当 x^* 为重根时是线性收敛。

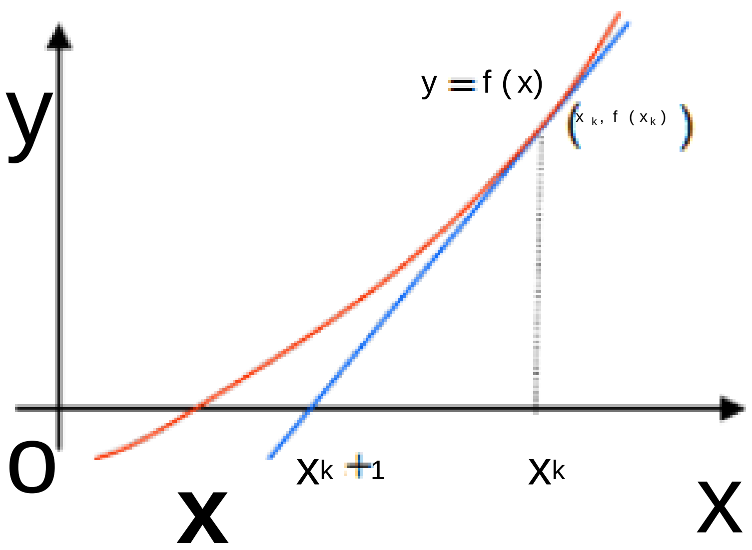
5、简述二分法的优缺点

答：优点 (a) 计算简单，方法可靠； (b) 对 f (x) 要求不高（只要连续即可）；(c) 收敛性总能得到保证。缺点 (a) 无法求复根及偶重根 ；(b) 收敛慢

6、画图说明牛顿迭代公式的几何意义。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿迭代公式就是切线与 x 轴交点的横坐标，所以牛顿法是用切线与 x 轴的交点的横坐标来近似代替曲线与 x 轴交点的横坐标。



四、计算题

1、用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的正根，使误差小于 0.05.

解 使用二分法先要确定有根区间 $[a,b]$。本题 f(x)=x2-x-1=0, 因 f(1)=-1,f(2)=1, 故区间 [1,2] 为有根区间。另一根在 [-1,0] 内，故正根在 [1,2] 内。用二分法计算各次迭代值如表。

N	a_n	b_n	x_n	$F(x_n)$符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-

$x_4 = 1.59375$ 其误差 $|x_4 - x^*| < \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} < 0.05$

2. 求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 x_0=1.5 附近的一个根，将方程改写成下列等价形式，并建立相应迭代公式 .

(1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$，迭代公式 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$.

(2) $x^3 = 1 + x^2$, 迭代公式 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{\frac{1}{3}}$.

(3) $x^2 = \frac{1}{x-1}$，迭代公式 $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k - 1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种收敛最快的方法求具有 4 位有效数字的近似根 .

解：（1）取区间 $[1.3,1.6], \varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \varphi(x) \in [1.3,1.6]$ 且 $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3}$，在 $[1.3,1.6]$ 且 $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3}$，在 $[1.3,1.6]$ 中 $0.488 \le |\varphi'(x)| \le 0.911$，则 L<1，满足收敛定理条件，故迭代收敛。

（2）$\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$，在 $[1.3,1.6]$ 中 $\varphi(x) \in [1.3,1.6]$，且 $\varphi'(x) = \frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$，在 $[1.3,1.6]$ 中有 $|\varphi'(x)| \le 0.46 = L < 1$，故迭代收敛。

（3）$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \varphi'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$，在 $x_0 = 1.5$ 附近 $|\varphi'(x)| > 1$，故迭代法发散。

在迭代（1）及（2）中，因为（2）的迭代因子 L 较小，故它比（1）收敛快。用（2）迭代，取 $x_0 = 1.5$，则

$$x_1 = 1.481248, x_2 = 1.472706, x_3 = 1.468817, x_4 = 1.467048$$
$$x_5 = 1.466243, x_6 = 1.465877, x_7 = 1.465710, x_8 = 1.465634$$
$$x_9 = 1.465599, x_{10} = 1.465583, x_{11} = 1.465577, x_{12} = 1.465574$$
$$x_{13} = 1.465572, x_{14} = 1.465572$$

3. 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在，而且 $0<m\le f'(x)\le M$. 证明对 $0<\lambda<\frac{2}{M}$ 的任意常数 λ，迭代法 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于方程 $f(x)=0$ 的根 .

解：由于 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调增函数，故方程 $f(x)=0$ 的根是唯一的（假定方程有根 x^*）。迭代函数 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$，$\varphi'(x)=1-\lambda' f(x)$。令 $|\varphi'(x)\le L|$，则 $L=\max\{|1-\lambda M|,|1-\lambda m|\}<1$，由递推有

$|x_k-x^*|\le L|x_{k-1}-x^*|\le\cdots\le L^k|x_0-x^*|\to 0$，即 $\lim_{k\to\infty}x_k=x^*$

4. 用 Newton 法求下列方程的根，计算准确到 4 位有效数字 .

(1) $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 x_0=2 附近的根 .

(2) $f(x)=x^2-3x-e^x+2=0$ 在 x_0=1 附近的根 .

解：（1） $f(x)=x^3-3x-1, f'(x)=3x^2-3$

Newton 迭代法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-3x_k-1}{3(x_k^2-1)}$

取 $x_0=2$，则 $x_1=1.8889, x_2=0.25751, x_3=0.25753, x_4=0.25753$，取 $x^*\approx 1.879$

（2） $f(x)=x^2-3x-e^x+2, f'(x)=2x-3-e^x$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-3x_k-e^{xk}+2}{2x_k-e^{xk}-3}$$

令 $x_0=1$，则 $x_1=0.26894, x_2=0.25751, x_3=0.25753, x_4=0.25753$，取 $x^*\approx 0.2575$

5. 应用 Newton 法于方程 $x^3-a=0$，求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性 .

解：方程 $x^3-a=0$ 的根为 $x^*=\sqrt[3]{a}$，用 Newton 迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2}{3}x_k+\frac{a}{3x_k^2}, k=0,1,\cdots$$

此公式迭代函数 $\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3x^2}$，则 $\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{x^3}, \varphi'(x^*)=0, \varphi''(x^*)=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\ne 0$，故迭代法 2 阶收敛。

6. 用牛顿法求方程 $xe^x-1=0$ 的根，$x_0=0.5$，计算结果准确到四位有效数字。

解：根据牛顿法得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

取，迭代结果如下表

k	x_k
0	0.5
1	0.571 02
2	0.567 16
3	0.567 14

所以，方程的根约为 0.56714

7、构造求解方程 $e^x+10x-2=0$ 的根的迭代格式 $x_{n+1}=\varphi(x_n), n=0,1,2,\cdots$，讨论其收敛性，并将根求出来，$|x_{n+1}-x_n|<10^{-4}$。

答案：解：令 $f(x)=e^x+10x-2$，$f(0)=-2<0$，$f(1)=10+e>0$.

且 $f'(x)=e^x+10>0$ 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，故 $f(x)=0$ 在 (0,1) 内有唯一实根．将方程 $f(x)=0$ 变形为

$$x=\frac{1}{10}(2-e^x)$$

则当 $x\in(0,1)$ 时

$$\varphi(x)=\frac{1}{10}(2-e^x),\quad |\varphi'(x)|=\left|-\frac{e^x}{10}\right|\le\frac{e}{10}<1$$

故迭代格式

$$x_{n+1}=\frac{1}{10}(2-e^{x_n})$$

收敛。取 $x_0=0.5$，计算结果列表如下：

n	0	1	2	3
x_n	0.5	0.035127872	0.096424785	0.089877325
n	4	5	6	7
x_n	0.090595993	0.090517340	0.090525950	0.090525008

且满足 $|x_7-x_6|\le 0.000\,000\,95<10^{-6}$. 所以 $x^*\approx 0.090\,525\,008$.

8、用牛顿（切线）法求 $\sqrt{3}$ 的近似值。取 x_0=1.7，计算 x_1, x_2, x_3 的值，保留五位小数。

解：$\sqrt{3}$ 是 $f(x)=x^2-3=0$ 的正根，$f'(x)=2x$，牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}, \quad 即 \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

取 $x_0=1.7$， 列表如下：

n	1	2	3
x_n	1.73235	1.73205	1.73205

9、（15 分）方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近有根，把方程写成三种不同的等价形式（1）$x = \sqrt[3]{x+1}$ 对应迭代格式 $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}$；(2) $x = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ 对应迭代格式 $x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n}}$；（3）$x = x^3 - 1$ 对应迭代格式 $x_{n+1} = x_n^3 - 1$。判断迭代格式在 $x_0 = 1.5$ 的收敛性，选一种收敛格式计算 $x = 1.5$ 附近的根，精确到小数点后第三位。

解：（1） $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，$|\varphi'(1.5)| = 0.18 < 1$，故收敛；

（2） $\varphi'(x) = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$，$|\varphi'(1.5)| = 0.17 < 1$，故收敛；

（3） $\varphi'(x) = 3x^2$，$|\varphi'(1.5)| = 3 \times 1.5^2 > 1$，故发散。

选择（1）：$x_0 = 1.5$，$x_1 = 1.3572$，$x_2 = 1.3309$，$x_3 = 1.3259$，$x_4 = 1.3249$，
$x_5 = 1.32476$，$x_6 = 1.32472$

10、(6 分) 写出求方程 $4x = \cos(x) + 1$ 在区间 [0,1] 的根的收敛的迭代公式，并证明其收敛性。

解：$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{1}{4}\left[1 + \cos(x_n)\right]$， n=0,1,2, ···

$|\phi'(x)| = \frac{1}{4}|\sin(x)| \le \frac{1}{4} < 1$ ∴ 对任意的初值 $x_0 \in [0,1]$，迭代公式都收敛。

11、 设 $f(x) = (x^3 - a)^2$

（1） 写出解 $f(x) = 0$ 的 Newton 迭代格式

（2） 证明此迭代格式是线性收敛的

证明：（1）因 $f(x) = (x^3 - a)^2$，故 $f'(x) = 6x^2(x^3 - a)$，由 Newton 迭代公式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\cdots$$

得 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{(x_n^3-a)^2}{6x_n^2(x_n^3-a)}=\dfrac{5x_n}{6}+\dfrac{a}{6x_n^2}$，n=0,1, …

（2）因迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{a}{6x^2}$，而 $\varphi'(x)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{a}{3}x^{-3}$，

又 $x^*=\sqrt[3]{a}$，则 $\varphi'(\sqrt[3]{a})=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}(\sqrt[3]{a})^{-3}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\neq 0$

故此迭代格式是线性收敛的。

第七章　线性方程组的直接解法

一、填空题

1. $A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -5 & 1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ __6__，A 的谱半径 $\rho(A)=$ $1+2\sqrt{5}$.

2. 设 x=（11 0 5 1 ）^{T}，则 $\|x\|_1=$ _17__，$\|x\|_\infty=$ _11__，$\|x\|_2=\sqrt{147}$.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$ 计算 A 的行范数 ______，列范数 ______，F- 范数 ______，2 范数____.____

解：$\|A\|_\infty=1.1, \|A\|_1=0.8, \|A\|_F=\sqrt{0.71}=0.84$

$A^TA=\begin{bmatrix}0.37 & 0.33\\ 0.33 & 0.34\end{bmatrix}, \lambda_{\max}(A^TA)=0.68534$

故 $\|A\|_2=\sqrt{0.68534}=0.82785$

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ _8__，$\|A\|_2=4\sqrt{2}$，$\|A\|_\infty=$ _6_ 。

5．设 x=（3 -1 5 8 ）^{T}，则 $\|x\|_1=$ _17____，$\|x\|_\infty=$ _8____，$\|x\|_2=\sqrt{99}$ 。

6．已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)=$ __$1+\sqrt{5}$__，则 $\|A\|_\infty=$ __6__ 。

7、 $x=(3,0,-4,12)^T$，则 $\|x\|_1=$ 19__，$\|x\|_2=$ 13__，$\|x\|_\infty=$ 12___

8. 设 x=（1 9 -5 2 ）^{T}，则 $\|x\|_1=$ _17___，$\|x\|_\infty=$ _9 .__ $\|x\|_2=\sqrt{111}$.

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$. 则 $\|A\|_1=$ _6_，$\|A\|_\infty=$ _7_，$\|Ax\|_1=$ _16_，$\|Ax\|_\infty=$ _11_ .

10、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&0&4\\1&3&5\end{bmatrix}$ 分解为 $A=LU$，则 $U=$ $\underline{\begin{bmatrix}3&2&1\\0&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}\\0&0&\frac{21}{2}\end{bmatrix}}$

11、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&8&2\\2&5&7\\1&3&6\end{bmatrix}$ 的 $A=LU$，则 $U=$ $\underline{\begin{bmatrix}4&8&2\\0&1&6\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}}$。

12、设 $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ __9__。

13、解线性方程组 Ax=b 的高斯顺序消元法满足的充要条件为 A的各阶顺序主子式均不为零。

二、单项选择题：

1、用列主元消去法解线性方程组 $\begin{cases}3x_1-x_2+4x_3=1\\-x_1+2x_2-9x_3=0\\-4x_1-3x_2+x_3=-1\end{cases}$，第 1 次消元，选择主元为（ A ）。

(A) －4　(B) 3　(C) 4　(D) －9

三、问答题

1. 在什么情况下 Gauss 消去法会出现数值不稳定？如何克服？

答：当消元过程中增广矩阵 $[A^{(k)}\mid b^{(k)}]$ 的元素 $|a_{kk}^{(k)}|$ 很小时，Gauss 消去法会出现数值不稳定，此时采用列主元消去法可克服这一问题。

2．什么是矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 的条件数？如何判断 A 是"病态的"或"良态的"？

答：A 的条件数定义为 $Cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$，这里 $\|\cdot\|$ 为矩阵的任一种从属范数。当 $Cond(A)>10$ 时就认为 A 为病态矩阵，通常 $Cond(A)<10$ 可认为 A 是良态的。

3. 矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 满足什么条件才能使 A 的 LU 分解存在唯一？如何利用 A=LU分解求解不同右端项的方程组？如 $Ax=b, Ax=c, Ax=d, x,b,c,d\in R^n$.

答：A 的顺序主子式 $\Delta i\neq 0(i=1,\cdots,n-1)$ 时存在唯一单位下三角阵 L 及上三角阵 U，使 A=LU，而当 $\det A\neq 0$ 则方程 $Ax=b$ 存在唯一解，此时 $Ax=b$ 等价于解 $LUx=b$ 于是由 $Ly=b$ 及 $Ux=y$ 可求得 Ax=b 的解 x，同样解 Ly＝c 及 Ux=y 和 Ly=d,Ux=y 则分别得到不同右端项的方程解。

四、计算题

1. 用 Gauss 消去法求解下列方程组．

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

解　本题是 Gauss 消去法解具体方程组，只要直接用消元公式及回代公式直接计算即可。

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9 \\ -\frac{1}{60}x_2 - \frac{1}{45}x_3 = -4 \\ \qquad\qquad \frac{13}{15}x_3 = -154 \end{cases}$$

故

$$x_3 = -154 \times 153 = -177.69$$

$$x_2 = -60(-4 + \frac{1}{45}x_3) = 476.92$$

$$x_1 = 4(9 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{5}x_2) = -227.08$$

2. 用列主元消去法求解方程组 $\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ 并求出系数矩阵 A 的行列式 detA 的值 .

解：先选列主元 $i_1 = 2$，2 行与 1 行交换得

$$\left[A^{(1)} \middle| b^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{消元}} \left[\begin{array}{ccc|c} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{array}\right]$$

3 行与 2 行交换 $\left[\begin{array}{ccc|c} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{array}\right]$ 消元 $\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{22}{7} & \frac{66}{7} \end{bmatrix}$

回代得解

$x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$

行列式得

$$\det A = -18 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{22}{7} = -66$$

3. 用 Doolittle 分解法求习题 1(1) 方程组的解 .

解：由矩阵乘法得

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{3} & 1 & \\ 2 & -36 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{45} \\ & & \frac{13}{15} \end{bmatrix}$$

再由 $Ly = b$ 求得

$$y = (9, -4, -154)^T$$

由 $ux = y$ 解得

$$x = (-227.08, 476.92, -177.69)^T$$

4. 将矩阵 A 分解为单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$，然后求解该方程组 $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$。（9 分）

答案：

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

求解 $Ly = b$ 得 $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$；求解 $Ux = y$ 得方程的解为： $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$

5. 用直接三角分解（ Doolittle ）法解方程组（不选主元）

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 & 14 \\ 6 & 13 & 20 & 26 \\ 8 & 18 & 29 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 37 \\ 65 \\ 95 \end{bmatrix}$$

解：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 & 4 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} y = (14 \quad 9 \quad 5 \quad 2)^T \\ x = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T \end{cases}$$

6. 设 $x \in R^n$，证明 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

解：$\|x\|_\infty^2 = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^2| \le x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|_2^2$

即 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$，另一方面

$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le n \max_{1 \le i \le n} |x_i^2| = n\|x\|_\infty^2$$

故 $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

7. 设 $x \in R^n$，证明：$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$。

证明：由定义可知：

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1 \le n \max_{1 \le i \le n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

从而

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

由此可以看到 $\|x\|_1$ 可由 $\|x\|_\infty$ 控制。

8. 将矩阵 A 分解为单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，

然后求解该方程组 $Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 3.5 \\ 2 \end{pmatrix}$。

解：$A = L \bullet U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2/3 & 1/3 \\ & & 1/2 \end{bmatrix}$,

先求解 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3.5 \\ 2 \end{bmatrix}$，得 $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5/6 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

再解 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2/3 & 1/3 \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5/6 \\ 1/4 \end{bmatrix}$，得 $X = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

9、$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$，则 A的（Doolittle ）LU分解为 $A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$。

答案：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/4 & 1 & \\ 0 & -4/15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ & 15/4 & -1 \\ & & 56/15 \end{bmatrix}$$

10、用直接三角分解（ Doolittle ）法解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \end{cases}$。

答案：解：$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{bmatrix}$

令 $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ 得 $\mathbf{y} = (14, -10, -72)^T$，$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 得 $\mathbf{x} = (1,2,3)^T$.

11、用列主元素消元法求解方程组 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ 11 \end{bmatrix}$。

解：$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 3 & -12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{2}{5}r_1]{r_2-\frac{1}{5}r_1}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{1}{13}r_2}\begin{bmatrix}5 & -4 & 3 & -12\\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{79}{5}\\ 0 & & \frac{5}{13} & -\frac{5}{13}\end{bmatrix}$$

回代得 $x_3=-1, x_2=6, x_1=3$。

12、(10 分)用 Gauss 列主元消去法解方程组：

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3=24\\ 3x_1+x_2+5x_3=34\\ 2x_1+6x_2+x_3=27\end{cases}$$

3.0000 1.0000 5.0000 34.0000

0.0000 3.6667 0.3333 12.6667

0.0000 5.3333 -2.3333 4.3333

3.0000 1.0000 5.0000 34.0000

0.0000 5.3333 -2.3333 4.3333

0.0000 0.00000 1.9375 9.6875

$$x=(2.0000,3.0000,5.0000)^T$$

第八章 线性方程组的迭代法

一、填空题

1、用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2=4\\ 2ax_1+x_2=-3\end{cases}$，其中 a 为实数，方法收敛的充要条件是 a 满足 $\underline{\frac{-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}}$。

2、求解方程组 $\begin{cases}3x_1+5x_2=1\\ 0.2x_1+4x_2=0\end{cases}$ 的高斯—塞德尔迭代格式为 _ $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-5x_2^{(k)})/3\\ x_2^{(k+1)}=-x_1^{(k+1)}/20\end{cases}$ _，该迭代格式的迭代矩阵的谱半径 $\rho(M)=\underline{\frac{1}{12}}$。

3、写出求解方程组 $\begin{cases} x_1 + 1.6x_2 = 1 \\ -0.4x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代分量形式 $\underline{\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 1.6x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 2 + 0.4x_1^{(k+1)} \end{cases}, k = 0,1,\cdots}$，迭代矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1.6 \\ 0 & -0.64 \end{pmatrix}}$，此迭代法是否收敛 <u>收敛</u> 。

4、若线性代数方程组 AX=b 的系数矩阵 A 为严格对角占优阵，则雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代都 <u>收敛</u>.

5、高斯--塞尔德迭代法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

的迭代格式中求 $x_3^{(k+1)} = \underline{x_3^{(k+1)} = (-2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)})/5 \quad (k = 0,1,2,\ldots)}$

6、若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 则矩阵 A 的谱半径 ρ(A)= <u>1</u>

7、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A) = \sqrt{6}$ ，A 的 $\mathrm{cond}(A)_1 = 6$

二、单项选择题：

1、 Jacobi 迭代法解方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的必要条件是（ C ）。

A．A 的各阶顺序主子式不为零　　B．$\rho(A) < 1$

C．$a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$　　D．$\|A\| \leq 1$

2、设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$，则 $\rho(A)$ 为（ C ）．

A．2　B．5　C．7　D．3

3、解方程组 $Ax = b$ 的简单迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 收敛的充要条件是（ B ）。

（A）$\rho(A) < 1$，（B）$\rho(B) < 1$，（C）$\rho(A) > 1$，（D）$\rho(B) > 1$

三、问答题

1. 迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f(k = 0,1,\cdots)$ 收敛的充要条件是什么？如果 $\|B\| \geq 1$ 能否说明迭代法不收敛？用什么表示迭代法的收敛速度？

答：迭代法收敛的充要条件是 $\rho(B) < 1$，当 $\|B\| \geq 1$ 时因 $\rho(B) \leq \|B\|$ 不一定能使 $\rho(B) < 1$，故不能说明迭代法不收敛。反之 $\|B\| < 1$ 则迭代法收敛。

三、计算题：

1. 方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

(1) 写出用 J 法及 GS 法解此方程组的迭代公式并以 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ 计算到 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$ 为止.

（1）J 法得迭代公式是

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(12 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(3 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}), k = 0,1,\cdots$$

取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，迭代到 18 次有

$$x^{(18)} = (-3.999996, 2.999974, 1.99999)^T$$

$$\|x^{(17)} - x^{(18)}\|_\infty \leq 0.4145 \times 10^{-4}$$

GS迭代法计算公式为

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(12 + 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 + x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(3 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}), k = 0,1,\cdots$$

取 $x^{(0)} = (-4.000036, 2.999985, 2.000003)^T$

$$\|x^{(7)} - x^{(8)}\|_\infty \leq 0.9156 \times 10^{-4}$$

2. 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (a_{11}, a_{22} \neq 0)$$

证明解此方程的 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法同时收敛或发散 .

解：Jacobi 迭代为 $\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)}) \end{cases}$

其迭代矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$，谱半径为 $\rho(B) = \sqrt{\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}$，而 Gauss-Seide 迭代法为

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)}) \end{cases}$$

其迭代矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12g}}{a_{11}} \\ 0 & -\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$$，其谱半径为 $\rho(G) = \left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|$

由于 $\rho^2(B) = \rho(G)$，故 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 法同时收敛或同时发散。

3. 下列方程组 Ax=b，若分别用 J 法及 GS法求解，是否收敛 ？

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

解：Jacobi 法的迭代矩阵是

$$B = D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即 $\det(\lambda I - B) = \lambda^3 = 0$，故 $\rho(B) = 0$，J 法收敛、

GS法的迭代矩阵为

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-G)=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda-2&3\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$$

故 $(G)=2>1$，解此方程组的 GS法不收敛。

4、 设 $A=\begin{bmatrix}10&a&0\\b&10&b\\0&a&5\end{bmatrix}$，$\det A\neq0$，用 a ,b 表示解方程组 Ax=f 的 J 法及 GS法收敛的充分必要条件 .

解 J 法迭代矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}0&-\frac{a}{10}&0\\-\frac{b}{10}&0&-\frac{b}{10}\\0&-\frac{a}{5}&0\end{bmatrix},\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda&\frac{a}{10}&0\\\frac{b}{10}&\lambda&\frac{b}{10}\\0&\frac{a}{5}&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-\frac{3ab}{100})=0$$

$\rho(B)=\frac{\sqrt{3|ab|}}{10}<1$，故 J 法收敛的充要条件是 $|ab|<\frac{100}{3}$。GS法迭代矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}10&0&0\\b&10&0\\0&a&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-a&0\\0&0&-b\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\-\frac{b}{100}&\frac{1}{10}&0\\\frac{ab}{500}&-\frac{a}{50}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-a&0\\0&0&-b\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\frac{a}{10}&0\\b&\frac{ab}{100}&-\frac{b}{10}\\0&-\frac{a^2b}{500}&\frac{ab}{50}\end{bmatrix},\det(\lambda I-G)=\begin{bmatrix}\lambda&\frac{a}{10}&0\\0&\lambda-\frac{ab}{100}&\frac{b}{10}\\0&\frac{a^2b}{500}&\lambda-\frac{ab}{50}\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda(\lambda-\frac{ab}{100})(\lambda-\frac{ab}{50})-\frac{a^2b^2}{5000}\lambda=\lambda(\lambda^2-\frac{3ab}{100}\lambda)=0$$

由 $\rho(G)=\frac{|3ab|}{100}<1$ 得 GS法收敛得充要条件是 $|ab|<\frac{100}{3}$

5. 已知方程组 $AX=B$，其中 $A=\begin{bmatrix}4&3&0\\3&4&-1\\0&-1&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}24\\30\\-24\end{bmatrix}$，

（1）列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。
（2）求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径

答案：

（1）分量形式， J 法为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k+1)})\end{cases}$$

GS法为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(24-3x_2^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(30-3x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(-24+x_2^{(k+1)})\end{cases}$$

（2） $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{10}}{4}$

6. 实数 $a\neq 0$，考察矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&a&0\\a&1&a\\0&a&1\end{bmatrix}$，试就方程组 $Ax=b$ 建立 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式。讨论 a 取何值时迭代收敛。

解：当实数 $a\neq 0$ 时 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$B_J=\begin{bmatrix}0&-a&0\\-a&0&-a\\0&-a&0\end{bmatrix},\ B_G=\begin{bmatrix}0&-a&0\\0&a^2&-a\\0&-a^3&a^2\end{bmatrix}$$

由 $\det(\lambda I-B_J)=0$，求得 B_J 的特征值为：$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2}|a|,\lambda_3=-\sqrt{2}|a|$，则 $\rho(B_J)=\sqrt{2}|a|$，

当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，Jacobi 迭代法收敛；

由 $\det(\lambda I-B_G)=0$，求得 B_J 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2a^2$，则 $\rho(B_G)=2a^2$，当

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，Gauss-Seidel 迭代法收敛；

7. 用高斯-塞德尔方法解方程组 $\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=11\\x_1+4x_2+2x_3=18\\2x_1+x_2+5x_3=22\end{cases}$，取 $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代四次（要求按五位有效数字计算）。

答案：迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(11 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(18 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(22 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2.7500	3.8125	2.5375
2	0.20938	3.1789	3.6805
3	0.24043	2.5997	3.1839
4	0.50420	2.4820	3.7019

8、对方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$

（1） 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；

（2） 取初值 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$，利用（1）中建立的迭代公式求解，要求 $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$。

解：调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \end{cases}$$

故对应的高斯—塞德尔迭代法收敛 . 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(\quad 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} \quad + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \quad + 15) \end{cases}$$

取 $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$，经 7 步迭代可得：

$$\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(7)} = (0.999\,991\,459, 0.999\,950\,326, 1.000\,010)^T.$$

9、用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$,

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$, 列表计算三次，保留三位小数。

解：Gauss-Seidel 迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(\quad\quad -x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(-x_1^{(k+1)} \quad - x_3^{(k)} - 1) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} \quad -8) \end{cases}$$

系数矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 严格对角占优，故 Gauss-Seidel 迭代收敛 .

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，列表计算如下 ：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.667	0.889	-2.195
2	2.398	0.867	-2.383
3	2.461	0.359	-2.526

10、（8 分）已知方程组 $AX = f$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \\ 3 & 4 & -1 \\ & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

（1） 列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式。

（2） 求出 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。

解：Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(k)}) \\ k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(30 - 3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(k+1)}) \\ k = 0,1,2,3,\cdots \end{cases}$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(B_J) = \sqrt{5/8}\ (\text{或}\ \frac{\sqrt{10}}{4}) = 0.790569$$

11、(10 分)已知方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1) 列出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式；
(2) 讨论上述两种迭代法的收敛性。

解：（1） Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_2^{(k)})/2\end{cases}$$

Jacobi 迭代矩阵：

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(B)=1$ 收敛性不能确定

（2） Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})/2\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵：

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$\rho(B)=\left|\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{16}\right|=\sqrt{\frac{1}{8}}<1$$

该迭代法收敛

12、（15 分）已知方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，

（1）写出该方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的分量形式；
（2）判断两种方法的收敛性，如果均收敛，说明哪一种方法收敛更快；

解：（1）Jacobi 迭代法的分量形式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=1-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}\\x_2^{(k+1)}=2-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}\quad ;k=0,1,2,\cdots\\x_3^{(k+1)}=3-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}\end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 2 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 3 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} \end{cases} ;k = 0,1,2,\cdots$$

（2）Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，$\rho(B) = 0 < 1$，Jacobi 迭代法收敛

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，$\rho(B) = 2 > 1$，Gauss-Seidel 迭代法发散

第九章 特征值与特征向量

一、计算题

1. 用幂法求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的模最大的特征值及其相应的单位特征向量，迭代至特征值的相邻两次的近似值的距离小于 0.05，取特征向量的初始近似值为 $(1,0)^T$。

解：① $u_1 = Av_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\lambda_1^{(1)} = (u_1, v_0) = 10.00$，$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9950 \\ 0.09950 \end{pmatrix}$

② $u_2 = Av_1 = \begin{pmatrix} 10.05 \\ 1.095 \end{pmatrix}$，$\lambda_1^{(2)} = (u_2, v_1) = 10.108$，$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9941 \\ 0.1083 \end{pmatrix}$，

$\left|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}\right| = 0.11 > 0.05$

③ $u_3 = Av_2 = \begin{pmatrix} 10.05 \\ 1.102 \end{pmatrix}$，$\lambda_1^{(3)} = (u_3, v_2) = 10.110$，$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|_2} = \begin{pmatrix} 0.9940 \\ 0.1090 \end{pmatrix}$，

$\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(3)}\right| = 0.002 < 0.05$

$\therefore \lambda_1 \approx 10.11$，$x_1 \approx \begin{pmatrix} 0.9940 \\ 0.1090 \end{pmatrix}$