西安交通大学考试题

成绩	

课　程　计算方法A

系　别 ________　考试日期　2002 年 7 月 2 日

专业班号 ________

姓　名 ________　学　号 ________　期中 □　期末 □

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一．（15 分）用列主元 Gauss 消去法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

解：

二．（10 分）设 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是互不相等的节点，$L_n(x)$ 是 $f(x)$ 的插值多项式，

$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.证明：

（a）$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} = 1$；（b）$\displaystyle f(x) - L_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x) - f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$.

证明：

三．（15 分）确定计算积分

$$I(f)=\int_0^h f(x)dx$$

的求积公式

$$Q(f)=A_1 f(0)+A_2 f(h)+A_3 f'(0)+A_4 f'(h)$$

中的系数 $A_i\left(i=1,2,3,4\right)$，使其具有尽可能高的代数精度。其代数精度是几次？

解：

四．（15 分）设 $f(x)=x^4-x-10$

（a）证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $[1.5,2]$ 中有根 x^*；

（b）验证对此方程，当 $x_0=2$ 时，*Newton* 迭代法收敛；

（c）用 *Newton* 迭代法求方程 $f(x)=0$ 的根的近似值 $\bar{x}$，使

$$\left|x^*-\bar{x}\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

解：

五．（15 分）设 n 阶矩阵 G 满足 $\|G\|<1$．证明对任意 n 维向量 $x^{(0)}$ 由

$$x^{(k)}=G^kx^{(0)}+\left(1+G+G^2+\ldots+G^{k-1}\right)d$$

定义的向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 收敛于方程组

$$x=Gx+d$$

的解 x^*，且

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|\le\|G\|^k\left[\left\|x^{(0)}\right\|+\frac{\|d\|}{1-\|G\|}\right]$$

证明：

六.（15 分）设有常微分方程初值问题$\begin{cases} y' = at + b \\ y(0) = 0 \end{cases}$，其中 a，b 为常数.

（1）试推出数值解此问题的 *Euler* 公式及其截断误差公式；

（2）取节点 $t_i = ih$（$i = 0,1,2,...,N$，h 是常数），用 *Euler* 公式计算出的数值解记为 $y_i\left(i = 0,1,2,...,N\right)$．证明：

$$y_i = \frac{1}{2}at_i^{\,2} + bt_i - \frac{1}{2}aht_i, \qquad i = 1,2,...,N$$

解：

七．（15 分）数值求解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\lambda^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1,\quad 0<t<0.04 \\ u(x,0)=\sin\pi x, & 0<x<1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\le t\le 0.04 \end{cases}$$

（1） 写出用显示差分格式求解它的公式；

（2） 取 x 方向步长 $h=0.2$，为保证格式稳定，t 方向的步长 τ 应取多大？

（3） 对此步长计算 $j=1$ 时的数值解 $u_i(i=0,1,2,3,4,5)$（结果取 4 位小数）.

解：