# 第四章课后习题

November 19, 2020

**习题 4.3** 在 $x=-1,1,2$ 处，$f(x)=-3,0,4$，求 $f(x)$ 的二次插值多项式.

(1) $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$;

(2) 拉格朗日插值多项式;

(3) 牛顿插值多项式，

证明上述三种方法求得的插值多项式是相同的.

**解**：由 $f(x)$ 的二次插值多项式存在且唯一，得

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=0 \\ a_0-a_1+a_2=-3 \\ a_0+2a_1+4a_2=4 \end{cases}$$

解得 $a_0=-\frac{7}{3}$，$a_1=\frac{3}{2}$，$a_2=\frac{5}{6}$，因此 $p_2(x)=-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}x^2$.

拉格朗日插值多项式：由

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=-\frac{(x+1)(x+2)}{2}$$

$$l_1=\frac{(x-1)(x-2)}{6},\quad l_2=\frac{(x-1)(x+1)}{3}$$

故

$$L_2(x)=\sum_{k=0}^{2}y_kl_k(x)=-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}x^2$$

牛顿插值多项式：设

$$N_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1),$$

其中

$$c_0=f[x_0]=-3,\quad c_1=f[x_0,x_1]=\frac{3}{2},\quad c_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{5}{6}$$

因此

$$N_2(x)=-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}x+\frac{5}{6}x^2.$$

故上述三种方法求得的插值多项式是相同的.

**习题 4.7** $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\dots,2^7]$ 和 $f[2^0,2^1,\dots,2^8]$.

**解**：由

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

因此，当 $k=7$ 时

$$f[2^0,2^1,\dots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=1,$$

同理，当 $k=8$ 时，$f[2^0,2^1,\ldots,2^8]=0$.

**习题 4.7** 已知函数 $y=f(x)$ 在若干点处的函数值、导数值如下表所示，求埃尔米特插值多项式和截断误差表达式：

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | -1 | 0 | 1 |
| $y_i'$ | 0 | 0 | 0 |

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | -1 | 0 |
| $y_i'$ | 0 | 0 | |
| $y_i''$ | 2 | | |

**解**：(1) 设拉格朗日型埃尔米特插值多项式的形式为

$$H_5(x)=\sum_{i=0}^{2}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(x)f'(x_i)=\sum_{i=0}^{2}h_i(x)f(x_i), \tag{1}$$

其中

$$h_i(x)=\left[1-2(x-x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{2}\frac{1}{x_i-x_j}\right]l_i^2(x),$$

由于

$$l_0(x)=\frac{x(x-1)}{2},\quad l_1(x)=(x+1)(x-1),\quad l_2(x)=\frac{x(x+1)}{2},$$

故

$$h_0(x)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2+\frac{3}{4}x^2(x+1)(x-1)^2,\ \ h_1(x)=(x+1)^2(x-1)^2,\ \ h_2(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2-\frac{3}{4}x^2(x-1)(x+1)^2,$$

将上式带入 (1) 得埃米尔特插值多项式为

$$H_5(x)=-\frac{1}{4}x^2(x-1)^2-\frac{3}{4}x^2(x+1)^2(x-1)^2+\frac{1}{4}x^2(x+1)^2-\frac{3}{4}x^2(x-1)(x+1)^2.$$

进一步，其截断误差估计式为

$$R_5(x)=f(x)-H_5(x)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+1)^2x^2(x-1)^2.$$

(2) 由 $k$ 阶差商的性质可知

$$f[0,0]=f'(0)=0,\quad f[0,0,0]=\frac{f''(0)}{2!}=1,\quad f[1,1]=f'(1)=0,$$

作差商表

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\underline{1}$ | | | | | |
| 0 | 1 | $\underline{0}$ | | | | |
| 0 | 1 | 0 | $\underline{0}$ | | | |
| 1 | -1 | -2 | -2 | $\underline{-2}$ | | |
| 1 | -1 | 0 | 2 | 4 | $\underline{6}$ | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{9}{4}$ | $\underline{-\frac{33}{8}}$ |

所以

$$H_5(x)=1-2x^3+6x^3(x-1)-\frac{33}{8}x^3(x-1)^2,$$
$$R_5(x)=f[0,0,0,1,1,2,x]x^3(x-1)^2(x-2).$$

**习题 4.10** 设 $x_i(i=0,1,\ldots,n)$ 是互不相同的插值节点，$l_i(x)(i=0,1,\ldots,n)$ 是拉格朗日插值基函数. 证明：

(1) $\sum_{i=1}^n l_i(x)=1$;

(2) $\sum_{i=1}^n l_i(x)x_i^k=x^k(k=1,2,\ldots,n)$;

(3) $\sum_{i=1}^n l_i(x)(x_i-x)^k=0(k=1,2,\ldots,n)$;

(4) $\sum_{i=1}^n l_i(0)x_i^k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k=1,2,\ldots,n,\\ (-1)^n x_0x_1\ldots x_n, & k=n+1.\end{cases}$

*Proof.* (1) 记 $\varphi(x)=1$，则 $\varphi(x)$ 以 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 为插值节点的拉格朗日插值多项式为 $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)l_i(x)$，且

$$\varphi(x)-\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)l_i(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^n(x-x_i)=0,$$

即

$$\sum_{i=1}^n l_i(x)=1.$$

(2) 记 $\varphi_k(x)=x^k$, $k=1,2,\ldots,n$，则 $\varphi_k(x)$ 以 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 为插值节点的拉格朗日插值多项式为 $\sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i)l_i(x)$，且有

$$\varphi_k(x)-\sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i)l_i(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^n(x-x_i)=0,$$

即

$$x^k-\sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x)=0$$

因此

$$\sum_{i=1}^n l_i(x)x_i^k=x^k,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

(3) 将 $(x_i-x)^k$ 按二次项展开得 $(x_i-x)^k=\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}C_k^j x_i^j x^{k-j}$，所以

$$\sum_{i=1}^n l_i(x)(x_i-x)^k=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}C_k^j x_i^j x^{k-j}\right)l_i(x)=\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}C_k^j x^{k-j}\sum_{i=1}^n x_i^j l_i(x),$$

由 (2) 得

$$\sum_{i=1}^n l_i(x)(x_i-x)^k=\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}C_k^j x^{k-j}x^j=x^k\sum_{j=0}^k(-1)^{k-j}C_k^j=0.$$

(4) 当 $k=0$，$f(x)=x^0=1$ 时，有 $\sum_{i=1}^n l_i(x)x^0=1$，故 $\sum_{i=1}^n l_i(0)=1$.

当 $k=1,2,\ldots,n$，$f(x)=x^k$，由 (2) 得 $\sum_{i=1}^n l_i(x)x_i^k=x^k(k=1,2,\ldots,n)$，令 $x=0$，有 $\sum_{i=1}^n l_i(0)x_i^k=0$.

当 $k=n+1$，$f(x)=x^{n+1}$ 时，

$$x^{n+1}-\sum_{i=1}^n l_i(x)x_i^{(n+1)}=\prod_{i=0}^n(x-x_i),$$

令 $x=0$，有

$$\sum_{i=1}^n l_i(0)x_i^{n+1}=-\prod_{i=0}^n(0-x_i)=(-1)^n x_0x_1\cdots x_n.$$

□

**习题 4.13** 已知函数 $y=f(x)$ 在若干点处的函数值如下表所示，求满足以下端点条件的三次样条插值函数：

(1) $S'(0)=0,\quad S'(4)=48;$

(2) $S''(0)=0,\quad S''(4)=24;$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -8 | -7 | 0 | 19 | 56 |

**解**：由 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 得

$$h_1=h_2=h_3=h_4=1.$$

由 $\mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}},\ \lambda_i=1-\mu_i\ (i=1,2,3)$ 得

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\frac{1}{2},\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2},$$

由 $d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}](i=1,2,3)$ 得

$$d_1=18,\ d_2=36,\ d_3=54,$$

(1) 由第二类边界条件得

$$d_0=6f[x_0,x_0,x_1]=6,\quad d_4=6f[x_3,x_4,x_4]=66$$

进一步可以得到关于第二类边界条件的三弯矩方程组

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=6 \\ \dfrac{1}{2}M_0+2M_1+\dfrac{1}{2}M_2=18 \\ \dfrac{1}{2}M_1+2M_2+\dfrac{1}{2}M_3=36 \\ \dfrac{1}{2}M_2+2M_3+\dfrac{1}{2}M_4=56 \\ M_3+2M_4=66 \end{cases}$$

解得 $M_0=-\frac{1}{21},\ M_1=\frac{128}{21},\ M_2=\frac{35}{3},\ M_3=\frac{404}{21},\ M_4=-\frac{491}{21}$，进一步可得三次样条插值函数 $S(x)$ 为

$$S(x)=\begin{cases} -\dfrac{(1-x)^3}{126}+\dfrac{64}{63}x^3-\dfrac{1}{42}x-\dfrac{1007}{126}, & 0\le x\le 1, \\ \dfrac{64}{63}(2-x)^3+\dfrac{35}{18}(x-1)^3+\dfrac{41}{6}x-\dfrac{281}{18}, & 1\le x\le 2, \\ \dfrac{35}{18}(3-x)^3+\dfrac{202}{63}(x-2)^3-\dfrac{35}{18}(3-x)+\dfrac{995}{63}(x-2), & 2\le x\le 3, \\ \dfrac{202}{63}(4-x)^3+\dfrac{491}{126}(x-3)^3+\dfrac{995}{63}(4-x)+\dfrac{6565}{126}(x-3), & 3\le x\le 4. \end{cases}$$

(2) 由第一类边界条件得 $M_0=0,\ M_4=24$，进一步可得其三弯矩方程组为：

$$\begin{cases} 2M_1-\dfrac{1}{2}M_2=18 \\ \dfrac{1}{2}M_1+2M_2+\dfrac{1}{2}M_3=36 \\ \dfrac{1}{2}M_2+2M_3=42 \end{cases}$$

解得 $M_1 = \frac{93}{8}$， $M_2 = \frac{21}{2}$，$M_3 = \frac{147}{8}$，进而三次样条插值函数 $S(x)$ 为

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{31}{16}x^3 - \dfrac{15}{16}x - 8, & 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{31}{16}(2-x)^3 + \dfrac{7}{4}(x-1)^3 + \dfrac{115}{16}x - \dfrac{128}{8}, & 1 \le x \le 2, \\ \dfrac{7}{4}(3-x)^3 + \dfrac{49}{16}(x-2)^3 + \dfrac{7}{4}(x-3) + \dfrac{255}{16}(x-2), & 2 \le x \le 3, \\ \dfrac{49}{16}(4-x)^3 + 4(x-3)^3 + \dfrac{255}{16}(4-x) + 52(x-3), & 3 \le x \le 4. \end{cases}$$