

一、填空（每空 2 分，共 26 分）

1. 圆周率 $\pi=3.1415926\dots$ 的近似数 $\pi_1=3.1416$ 准确到_____位小数；
2. 给定向量 $\vec{x}=(2,3,-4)^T$ ，则 $\|\vec{x}\|_1=_____$ ， $\|\vec{x}\|_2=_____$
3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的条件数 $\text{cond}_1(A)=_____$
4. 设 $l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)$ 是以 x_0, x_1, x_2, x_3 为互异节点的三次 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{j=0}^3 l_j(x)(x_j-2)^3=_____$ ；
5. 若 $f(x)=2x^6-3x^5+x^3+1$ ，则其六阶差商 $f[3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^6]=_____$ ；
6. 数值积分公式中的 simpson 公式的代数精度为_____；
7. 给定 $x^{(0)}=(0,0)^T$ ，用共轭梯度法求解线性方程组 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，可得 $x^{(1)}=_____$ ；
 $x^{(2)}=_____$ ；
8. 解初值问题 $\begin{cases} y'(x)=f(x) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ 近似解的梯形公式是 $y_{k+1}=_____$ ；
9. 已知线性方程组 $Ax=b$ ，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ， $b=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，作矩阵 A 的杜立特尔(Doolittle)

分解 $A=LU$ ，并利用其解方程组 $Ax=b$ ，则 $L=_____$ ， $U=_____$ ， $x=_____$ ；

二、（7 分）已知函数 $y=f(x)$ 的函数值、导数值如下：

x	0	1
$y(x)$	1	0
$y'(x)$	0	1
$y''(x)$	2	

求满足条件的 Hermite 插值多项式及截断误差表示式

三、（7 分）求函数 $y = e^x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最优平方逼近一次式。

四、（8 分）对线性方程组 $Ax = b$;
$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

（1）请写出雅克比（Jacobi）迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散；

（2）请写出高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法的迭代格式，并证明迭代格式收敛还是发散。

五、（8 分）设方程式 $3 - 3x - 2\sin x = 0$,

（1）证明方程在 $[0, 1]$ 内存在唯一解；

（2）若采用如下迭代公式 $x_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}\sin x_n$, 判定迭代是否收敛。

六、(5 分) 用反幂法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

在 $\lambda = 1$ 附近的特征值及其对应的特征向量, 选取初始向量为 $(1, 1, 1)^T$ 进行迭代, 给出迭代一次的结果。

七、(8 分) 给定微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = x - y + 1, 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, 取 $h = 0.1$.

(1) 用欧拉法求 $y(x)$ 在 $x = 0.2$ 的近似值;

(2) 利用标准的四级四阶龙格-库塔法求 $y(x)$ 在 $x = 0.1$ 的近似值。

八、(7 分) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 记

$$I[f] = \int_0^2 f(x) dx, \quad Q[f] = Af(x_0) + f(x_1)$$

(1) 求参数 A, x_0, x_1 , 使求积公式 $I[f] \approx Q[f]$ 具有尽可能高的代数精度;

(2) 并给出数值积分公式截断误差表示式。

九、(4 分) 设有线性方程组 $Ax = b$, 其中 A 是 n 阶对称正定矩阵且 $\left\| \frac{\omega}{2} A \right\| < 1$, 证明当 $\omega > 0$

时, 由迭代格式 (法):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega \left(A \frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b \right)$$
产生的迭代序列收敛于方程组的唯一解。