西安交通大学考试题

成绩	

课　　程 　计算方法 A　

系　　别 ____________　　**考试日期**　2001 年 1 月 11 日

专业班号 ____________

姓　　名 ________　　**学　　号** ________　　**期中** ☐　　**期末** ☐

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一.（10 分）填空：

（1）在科学计算中，计算结果与客观实际存在着误差，误差按其来源通常分为_______误差、_______误差和_______误差；在计算方法课程中，主要研究_______误差和_______误差。______________________________称为稳定的方法。

（2）设在点集 $x=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ 上，已知函数 $y=y(x)$ 的值为 $y_1,y_2,...,y_m$ 和一组权系数______________________________，要求广义多项式 $p(x)$，使得______________________________最小，这时 $p(x)$ 称为__________________________________的最小二乘逼近多项式。

（3）将方程 $f(x)=0$ 化为一个等价（同解）的方程____________，建立迭代格式______________，给定一个初值 x_0，若迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛，则必有 $f(x^*)=0$，这种求根方法称为简单迭代法。

（4）考虑典型的常微分方程（称为试验方程）____________________，在把某一解法应用于该试验方法且步长取为 h 时，如果只是在计算开始时产生误差，而这误差以后____________________，我们就说这种解法相对该 $\overline{h}=\lambda h$ 是______________；$\overline{h}$ 的全体，称为______________。

（5）设 $y_0, y_1, ..., y_n$ 是不全等的一串数，满足

$$\begin{cases} l(y_i) \equiv (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2 - q_i y_i \geq 0 \\ q_i \geq 0, \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n-1 \end{cases}$$

那么（极值原理）：________________________________

若 $y_0 = -1, \quad y_n = 2$，则对 $y_i, i = 1, 2, ..., n-1$ 可有估计______________

二．（20 分）计算填空：

（1）已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}，\ b = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \\ 95 \end{pmatrix}$$

方程组 $Ax = b$ 的解是________________________________

（2）已知方程组的系数矩阵 A，求雅可比迭代矩阵 B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$，B=________________，$\|B\|_\infty =$________，由此

可知雅可比迭代是否收敛？________

（3）某圆形场地的半径为 10m，若测量半径时产生 0.1m 的误差，在计算场地的面积时，大约误差（不计π 的误差）$\Delta S \approx$__________。

（4）$S(x)$ 是定义在$[0,2]$上的函数：

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \in [0,1] \\ 3x^3 - 5x + 4, & x \in [1,2] \end{cases},$$

$S(x)$ 是不是为$[0,1]$、$[1,2]$上的三次样条函数？________

（5）已知$\{g_k(x)\}$是区间$[a,b]$上以$\sqrt{x}$为权函数的正交函数系，化简（$a \geq 0$）：

$$\int_a^b \sqrt{x}(xg_2(x) + 3x^2)g_4(x)dx =$$________________________________

三．（7 分）已知数据点（1.0，3.0），（1.5，4.0），（2.0，4.5），求 y 的一次近似多项式。

解：

四．（6 分）试设计一种求$\sqrt[5]{11}$的算法，并说明其可行性。

解：

五．（7 分）已知用$f(h)$计算S时，有误差

$$S-f(h)=a_1h^3+a_2h^6+a_3h^9+\dots$$

试建立一种新的计算公式$g(h)$，使得$S-g(h)=0$。

解：

六．（7 分）设 $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$，$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 为高斯型求积公式，

试证明求积系数具有非负性，即 $A_i > 0, i = 1, 2, .., n$.（提示：考虑利用函数

$g_i(x) = \left[(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)\right]^2$）

证明：

七．（10 分）常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的一个数值求

解公式是：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$.

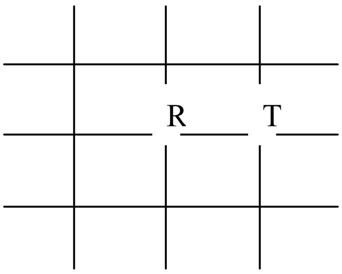
（1）试确定此公式的代数精度；

（2）求出此公式的局部截断误差估计式。

解：

八.（8 分）如图是用差分法求椭圆方程的第一类边值问题数值解的部分网格，$R(i,j)$为一节点，T为求解区域边界上一点，h为横向步长，$\left|RT\right|=h'$。试证明在节点$R(i,j)$处有

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(i,j)} \approx \frac{2}{h+h'}\left(\frac{u(T)-u(x_i,y_j)}{h'}-\frac{u(x_i,y_j)-u\left(x_{i-1},y_j\right)}{h}\right)$$



解：

九．（10 分）常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\left(py'\right)' + qy = f(x), & a < x < b \\ y(a) = d_1, \quad y(b) = d_2 \end{cases}$$，其中 $p(x) > 0,\ q(x) > 0$

的有限元算法，其单元刚度矩阵和右端向量的计算公式如下

$$K^{(i)} = -\frac{p_i}{l_i}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{l_i q_i}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b^{(i)} = \frac{l_i f_i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

试用有限元方法求边值问题 $\begin{cases} y'' - xy + 2 = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 \end{cases}$ 的数值解。

（求解时将 $\left[0,1\right]$ 等分为两个小区间）

解：