计算方法 A　第 2 章习题答案

习题 2.1　用列主元高斯消去法求解以下方程组

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

解

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \mathbf{-4} & 2 & -6 & 14 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 22 \end{pmatrix}.$$

逐步回代解得 $\begin{cases} x_1 = 109 \\ x_2 = 27 \\ x_3 = -66 \end{cases}$

$$(2)\ \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ \mathbf{-18} & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & \mathbf{\frac{7}{6}} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{66}{21} & \frac{66}{7} \end{pmatrix}$$

逐步回代解得 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

习题 2.3　作以下矩阵的 $A = LU$ 分解

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 12 \\ 6 & 27 & 38 \end{pmatrix}.$$

解 根据 $A=LU$ 分解的计算公式可得

(1) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$; (2) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\0&0&\frac{26}{3}\end{pmatrix}$;

(3) $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\0&5&6\\0&0&4\end{pmatrix}$.

习题 2.4 试写出用 $A=LU$ 分解求解下面方程组

$$\begin{pmatrix}b_1&c_1&&&a_1\\a_2&b_2&c_2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&a_{n-1}&b_{n-1}&c_{n-1}\\c_n&&&a_n&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_{n-1}\\d_n\end{pmatrix}$$

的计算公式.

解 由题设, $A=LU$ 分解如下

$$L=\begin{pmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\&l_{32}&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,n-1}&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}u_{11}&c_1&&&u_{1n}\\&u_{22}&c_2&&u_{2n}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&u_{n-1,n-1}&c_{n-1}\\&&&&u_{nn}\end{pmatrix}.$$

其中$l_{i,i-1}$ $(i=2,\cdots,n-1), l_{nj}$ $(j=1,\cdots,n-1)$ 以及 u_{ii} $(i=1,\cdots,n), u_{in}$ $(i=1,\cdots,n-2)$ 的具体计算公式可参见教材 P26.

于是有

$$Ax=d \implies LUx=d \implies \begin{cases}Ly=d,\\Ux=y.\end{cases}$$

$$\text{先从 } Ly=d \text{ 解出 } y \implies \begin{cases}y_1=d_1\\y_i=d_1-\sum\limits_{j=1}^{i=1}l_{ij}y_j,\quad i=2,3,\ldots,n\end{cases}$$

$$\text{再从 } Ux=y \text{ 解出 } x \implies \begin{cases}x_n=y_n/u_{nn}\\x_i=\left(y_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j\right)/u_{ii},\quad i=n-1,n-2,\cdots,2,1\end{cases}$$

习题 2.6 用平方根法和改进平方根法求解以下方程组:

$$(1)\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad (2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解　先用平方根法求解.

$$(1)\ Ax = GG^Tx = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^Tx = y. \end{cases} \text{其中}\ G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{因此有} \begin{cases} y = \big(5, 2, -1\big)^T, \\ x = \big(2, 1, -1\big)^T. \end{cases}$$

$$(2)\ Ax = GG^Tx = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^Tx = y. \end{cases} \text{其中}\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \text{因此有} \begin{cases} y = \big(2, 1, -2\big)^T, \\ x = \big(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\big)^T. \end{cases}$$

再用改进平方根法 $(A = LDL^T)$ 求解.

$$(1)\begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^Tx = z. \end{cases} \text{其中}\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{因此有} \begin{cases} y = \big(10, 8, -1\big)^T, \\ z = \big(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1\big)^T, \\ x = \big(2, 1, -1\big)^T. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^Tx = z. \end{cases} \text{其中}\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 36 \end{pmatrix}, \text{因此有} \begin{cases} y = \big(2, 4, -12\big)^T, \\ z = \big(2, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\big)^T, \\ x = \big(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\big)^T. \end{cases}$$

习题 2.7 用追赶法求解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解　对于三对角矩阵 A, 有如下的 Doolittle 分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

于是求解三对角方程组的追赶法可写为

$$\text{求解}\ Ax = b \implies LUx = b \implies \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases} \implies \begin{cases} y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right)^T \\ x = (1, 1, 1, 1)^T. \end{cases}$$

习题 2.10 证明对于任何实数 $p \geqslant 1$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ 定义了 $\mathbf{R}^n$ 上的一种向量范数.

证 按照向量范数的定义分别验证正定性、齐次性和三角不等式.

(1) 正定性：显然有

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \geqslant 0 \ \text{且}\ \|x\|_p = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \text{即}\ x = 0.$$

(2) 齐次性：

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^p\, |x_i|^p\right)^{1/p} = |\alpha|\|x\|_p.$$

(3) 三角不等式：由于

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p},$$

根据闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式, 有

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

习题 2.16 分别用吉文斯变换和豪斯霍尔德变换作矩阵 $A = QR$ 分解, 其中

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 (i) 用 Givens 变换作分解

(1) 由于 $a_1 = (1,2,2)^{\mathrm{T}}$, 取 $c = \frac{1}{\sqrt{5}}, s = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 于是有

$$P_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_{12}a_1 = (\sqrt{5}, 0, 2)^{\mathrm{T}}$$

接下来取 $c = \frac{\sqrt{5}}{3}, s = \frac{2}{3}$,

$$P_{13} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_{13}P_{12}a_1 = (3,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

因此有

$$P_1 = P_{13}P_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{5} & -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 0 & -\frac{6\sqrt{5}}{5} & \frac{9\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

记 $a_2^{(1)}=(a_{21}^{(1)},\widetilde{a}_2^{(1)})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\widetilde{a}_2^{(1)}=(-\frac{3\sqrt{5}}{5},-\frac{6\sqrt{5}}{5})^{\mathrm{T}}$. 考虑 $\widetilde{a}_2^{(1)}$, 取 $c=-\frac{\sqrt{5}}{5}, s=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 于是

$$\widetilde{P}_{12}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{P}_{12}\widetilde{a}_2^{(1)}=(3,0)^{\mathrm{T}}.$$

因此

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & \widetilde{P}_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)}=P_2A^{(1)}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

即

$$P=P_2P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$Q=P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad R=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A=QR.$$

(2) 由于 $a_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 取 $c=0, s=1$, 于是有

$$P_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad P_{12}a_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

因而有

$$P_1=P_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)}=P_1A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

记 $a_2^{(1)}=(a_{21}^{(1)},\widetilde{a}_2^{(1)})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\widetilde{a}_2^{(1)}=(-4,3)^{\mathrm{T}}$. 考虑 $\widetilde{a}_2^{(1)}$, 取 $c=-\frac{4}{5}, s=\frac{3}{5}$, 于是

$$\widetilde{P}_{12}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{P}_{12}\widetilde{a}_2^{(1)}=(5,0)^{\mathrm{T}}.$$

因此

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & \widetilde{P}_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5}- & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)}=P_2A^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即

$$P=P_2P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5}- & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$Q=P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A=QR.$$

(ii) 用 Householder 变换作分解

(1) 第 1 步　取 $a_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\sigma_1=\|a_1\|_2=3,\quad \alpha_1=\sigma_1(\sigma_1-a_{11})=6,\quad w_1=a_1-\sigma_1e_1=(-2,2,2)^{\mathrm{T}}$$

$$w_1w_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&-4&-4\\-4&4&4\\-4&4&4\end{pmatrix},\quad H_1=I_3-\frac{w_1w_1^{\mathrm{T}}}{\alpha_1}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&\frac13&-\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix},\quad A^{(1)}=H_1A=\begin{pmatrix}3&-3&3\\0&3&-3\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

因此

$$Q=H^{\mathrm{T}}=H_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&\frac13&-\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix},\quad R=A^{(1)}=\begin{pmatrix}3&-3&3\\0&3&-3\\0&0&3\end{pmatrix},\quad A=QR.$$

(2) 第 1 步　取 $a_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\sigma_1=\|a_1\|_2=1,\quad \alpha_1=\sigma_1(\sigma_1-a_{11})=1,\quad w_1=a_1-\sigma_1e_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$w_1w_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H_1=I_3-\frac{w_1w_1^{\mathrm{T}}}{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A^{(1)}=H_1A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&4&1\\0&3&2\end{pmatrix}.$$

第 2 步　考虑子矩阵

$$\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}$$

取 $\widetilde{a}_2^{(1)}=(4,3)^{\mathrm{T}}$, $e_1^{(1)}=(1,0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\sigma_2=\|\widetilde{a}_2^{(1)}\|_2=5,\quad \alpha_2=\sigma_2(\sigma_2-a_{22}^{(1)})=5,\quad w_2=\widetilde{a}_2^{(1)}-\sigma_2e_1^{(1)}=(-1,3)^{\mathrm{T}}$$

$$w_2w_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&9\end{pmatrix},\quad \widetilde{H}_2=I_2-\frac{w_2w_2^{\mathrm{T}}}{\alpha_2}=\begin{pmatrix}\frac45&\frac35\\\frac35&-\frac45\end{pmatrix},\quad H_2=\begin{pmatrix}1&0^{\mathrm{T}}\\0&\widetilde{H}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac45&\frac35\\0&\frac35&-\frac45\end{pmatrix},$$

$$A^{(2)}=H_2A^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac45&\frac35\\0&\frac35&-\frac45\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&4&1\\0&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$H=H_2H_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac45&\frac35\\0&\frac35&-\frac45\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac45&0&\frac35\\\frac35&0&-\frac45\end{pmatrix}.$$

因此

$$Q=H^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&\frac45&\frac35\\1&0&0\\0&\frac35&-\frac45\end{pmatrix},\quad R=A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&2\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad A=QR.$$