习题 5.1 求下列给定区间上关于权函数的正交多项式

（1）$[0,1],\omega(x)=\sqrt{x}$ （2）$[-1,1],\omega(x)=1+x^2$

（3）$[0,1],\omega(x)=\sqrt{x(1-x)}$ （4）$[-1,1],\omega(x)=\sqrt{1-x^2}$

解:

（1） 取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，令 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x-\dfrac{3}{5}$

令 $\varphi_2(x)=x^2-\dfrac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\dfrac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)=x^2-\dfrac{10}{9}x+\dfrac{5}{21}$

令

$$\varphi_3(x)=x^3-\frac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)-\frac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)\approx x^3-20.5078x^2-21.7259x-47.8615$$

（2） 取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，令 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x-\dfrac{1}{2}$

令 $\varphi_2(x)=x^2-\dfrac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\dfrac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)=x^2-x-\dfrac{7}{16}$

令

$$\varphi_3(x)=x^3-\frac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)-\frac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)=x^3+\frac{67}{202}x^2-\frac{439}{808}x+\frac{9533}{48480}$$

（3） 取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，令 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x-\dfrac{3}{5}$

（4） 取 $\varphi_0(x)\equiv 1$，令 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x$

令 $\varphi_2(x)=x^2-\dfrac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\dfrac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)=x^2-\dfrac{1}{4}$

令 $\varphi_3(x)=x^3-\dfrac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\dfrac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)-\dfrac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{8}$

习题 5.4 用正交多项式求下列函数的最优平方逼近二次多项式

(1) $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	7	8	10	11	11	10	9	8

(2) $y=\arcsin x,[0,1]$

解:

（1） 利用三项递推关系构造正交多项式. 取

$$g_0(x)=1,g_1(x)=x-\frac{\beta_0}{\gamma_0},g_2(x)=(x-b_1)g_1(x)-c_1g_0(x)$$

而

$$\gamma_0=(g_0,g_0)=(1,1)=\sum_{i=1}^{9}1=9$$

$$\beta_0=(xg_0,g_0)=(x,1)=\sum_{i=1}^{9}x_i=53,\frac{\beta_0}{\gamma_0}=\frac{53}{9}$$

故 $g_1(x)=x-\frac{53}{9}$.又

$$\gamma_1=(g_1,g_1)=\sum_{i=1}^{9}(x_i-\frac{53}{9})^2=\frac{620}{9}$$

$$\beta_1=(xg_1,g_1)=\sum_{i=1}^{9}x_i(x_i-\frac{53}{9})^2=\frac{29780}{81},$$

$$b_1=\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\frac{1489}{279},c_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{620}{81},$$

所以

$$g_2(x)=(x-\frac{53}{9})^2-\frac{620}{81}$$

而

$$(g_2,g_2)=\sum_{i=1}^{9}((x_i-\frac{53}{9})^2-\frac{620}{81})^2\approx 39398.86$$

$$(g_0,f)=\sum_{i=1}^{9}y_i=76$$

$$(g_1,f)=\sum_{i=1}^{9}(x_i-\frac{53}{9})y_i=\frac{373}{9}$$

$$(g_2,f)=\sum_{i=1}^{9}((x_i-\frac{53}{9})^2-\frac{620}{81})y_i\approx -158.46$$

所以

$$\begin{aligned}p(x)&=c_0g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x)\\&=\frac{(g_0,f)}{(g_0,g_0)}g_0(x)+\frac{(g_1,f)}{(g_1,g_1)}g_1(x)+\frac{(g_2,f)}{(g_2,g_2)}g_2(x)\\&\approx 8.4445+0.6016(x-5.8889)-0.004((x-5.8889)^2-7.6543)\\&=4.7936+0.6487x-0.004x^2\end{aligned}$$

（2） 解法一：设 $p_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$，则 $\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=x,\phi_2(x)=x^2$.

$$(\phi_k,\phi_j)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1},$$

$\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=x,\phi_2(x)=x^2$

$(\phi_k,\phi_j)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1}$, $\quad (\phi_0,f)=\int_0^1 \arcsin x dx=0.5708,$

$(\phi_1,f)=\int_0^1 x\arcsin x dx=0.3927,\quad (\phi_2,f)=\int_0^1 x^2\arcsin x dx=0.3014$

由正规方程组有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5708 \\ 0.3927 \\ 0.3014 \end{bmatrix}$$

解得 $c_0=0.042, c_1=0.5976, c_2=0.69$

从而 $p_2(x)=0.042+0.5976x+0.69x^2$

解法二：利用三项递推关系构造正交多项式．取

$g_0(x)=1, g_1(x)=x-\dfrac{\beta_0}{\gamma_0}, g_2(x)=(x-b_1)g_1(x)-c_1g_0(x)$

而

$$\gamma_0=(g_0,g_0)=\int_0^1 xdx=1$$

$$\beta_0=(xg_0,g_0)=(x,1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\frac{\beta_0}{\gamma_0}=\frac{2}{1}$$

故 $g_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$．又

$$\gamma_1=(g_1,g_1)=\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{1}{12}$$

$$\beta_1=(xg_1,g_1)=\int_0^1 x(x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{1}{24},$$

$$b_1=\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\frac{1}{2},c_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_0}=\frac{1}{12},$$

所以 $g_2(x)=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{12}$．而

$$(g_2,g_2)=\int_0^1((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{12})^2dx=\frac{1}{180}$$

$$(g_0,f)=\int_0^1 \arcsin xdx\approx 0.5708$$

$$(g_1,f)=\int_0^1(x-\frac{1}{2})\arcsin xdx\approx 0.1073$$

$$(g_2,f)=\int_0^1((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{12})\arcsin xdx\approx 0.0038$$

从而得

$$\begin{aligned} p_2(x)&=c_0g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x)\\ &=\frac{(g_0,f)}{(g_0,g_0)}g_0(x)+\frac{(g_1,f)}{(g_1,g_1)}g_1(x)+\frac{(g_2,f)}{(g_2,g_2)}g_2(x)\\ &\approx 0.5708+1.2876(x-\frac{1}{2})+0.684((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{12})\\ &=0.0415+0.6036x+0.684x^2 \end{aligned}$$

解法三：取勒让德正交多项式作为基函数，先作变换 $x=\dfrac{t+1}{2}(-1\le t\le 1)$，

则 $f(t)=e^{\frac{t+1}{2}}$．前三个勒让德正交多项式为

$$p_0(t)=1,\ p_1(t)=t,\ p_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1),$$

则 $f(t)$ 的最优平方逼近函数为

$$p(x)=c_0p_0(t)+c_1p_1(t)+c_2p_2(t)$$

对于勒让德正交多项式 $(p_k,p_k)=\dfrac{2}{2k+1},(k=0,1,2)$，而

$$(p_0,f)=\int_{-1}^{1}\arcsin(\frac{t+1}{2})dt\approx 1.1416,(p_1,f)=\int_{-1}^{1}t\arcsin(\frac{t+1}{2})dt\approx 0.4292,$$

$$(p_2,f)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3t^2-1)\arcsin(\frac{t+1}{2})dt\approx 0.0457,$$

从而得

$$c_0=\frac{(p_0,f)}{(p_0,p_0)}\approx 0.5708,c_1=\frac{(p_1,f)}{(p_1,p_1)}\approx 0.6438,c_2=\frac{(p_2,f)}{(p_2,p_2)}\approx 0.1142$$

故

$$p(t)=0.5708+0.6438t+0.0571(3t^2-1)$$

再将 $t=2x-1$ 带入上式，则得到 $f(x)$ 的最优平方逼近函数

$$p(x)=0.0411+0.6024x+0.6852x^2$$

习题 5.6 求下列函数在指定区间上的最优一致逼近一次多项式

（1） $y=\sqrt{x},[\frac{1}{4},1]$；（2） $y=\ln x,\ [1,2]$；

（3） $y=e^x,\ [0,1]$；（4） $y=\sqrt{1+x^2},\ [0,1]$.

解:

（1） 设 $p_1(x)=c_0+c_1x$，由于 $y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0\quad(\frac{1}{4}\le x\le 1)$，故取偏差点 $\tilde{x}_0=\frac{1}{4}$，$\tilde{x}_2=1$，则可得方程组:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-c_0-c_1\frac{1}{2}=\mu, & \sqrt{\tilde{x}_1}-c_0-c_1\tilde{x}_1=-\mu,\\ 1-c_0-c_1=\mu, & \frac{1}{2}\tilde{x}_1^{-\frac{1}{2}}-c_1=0,\end{cases}$$

解得

$$c_0=\frac{1}{8},c_1=1,\tilde{x}_1=\frac{1}{4},\mu=-\frac{1}{8}$$

于是得到函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[\frac{1}{4},1]$ 上的最优一致一次多项式

$$\sqrt{x}\approx\frac{1}{8}+x$$

（2） 设 $p_1(x)=c_0+c_1x$，由于 $y''=-x^2<0\quad(1\le x\le 2)$，故取偏差点 $\tilde{x}_0=1$，$\tilde{x}_2=2$，则可得方程组:

$$\begin{cases}-c_0-c_1=\mu, & \ln\tilde{x}_1-c_0-c_1\tilde{x}_1=-\mu,\\ \ln 2-c_0-2c_1=\mu, & \tilde{x}_1^{-1}-c_1=0.\end{cases}$$

解得 $c_0=-0.6633,c_1=\ 0.6931,\tilde{x}_1=\ 1.4427,\mu=-0.0298$

于是得到函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最优一致一次多项式

$$\ln x \approx -0.6633+0.6931x$$

（3） 设 $p_1(x)=c_0+c_1x$，由于 $y''=e^x>0 \quad (0\le x\le 1)$，故取偏差点 $\tilde{x}_0=0$，$\tilde{x}_2=1$，则可得方程组：

$$\begin{cases} 1-c_0=\mu, & e^{\tilde{x}_1}-c_0-c_1\tilde{x}_1=-\mu, \\ e-c_0-c_1=\mu, & e^{\tilde{x}_1}-c_1=0. \end{cases}$$

解得 $c_0=0.8941, c_1=\ 1.7183, \tilde{x}_1=\ 0.5413, \mu=0.1059$

于是得到函数 $y=e^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最优一致一次多项式

$$e^x \approx 0.8941+1.7183x$$

（4） 设 $p_1(x)=c_0+c_1x$，由于 $y''=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}>0 \quad (0\le x\le 1)$，故取偏差点 $\tilde{x}_0=0$，$\tilde{x}_2=1$，

则可得方程组：

$$\begin{cases} 1-c_0=\mu, & \sqrt{1+\tilde{x}_1^2}-c_0-c_1\tilde{x}_1=-\mu, \\ \sqrt{2}-c_0-c_1=\mu, & \dfrac{\tilde{x}_1}{\sqrt{1+\tilde{x}_1^2}}-c_1=0. \end{cases}$$

解得 $c_0=0.6099, c_1=0.4142, \tilde{x}_1=0.8409, \mu=0.3901$

于是得到函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最优一致一次多项式

$$\sqrt{1+x^2}\approx 0.6099+0.4142x$$

习题 5.10 用两种方法求下列函数在指定区间上的近似最优一致逼近一次式，并求其误差：

（1） $y=e^{-x},[-1,1]$；(2) $y=\sin x,\ \ [0,\dfrac{\pi}{4}]$.

解：

（1） 解法一：利用切比雪夫插值多项式，我们取插值点为

$$x_i=\cos\left[\frac{2i+1}{4}\pi\right], i=0,1$$

即 $x_0=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_1=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

利用牛顿插值多项式 $N_1(x)=y_0+\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$，则

$$y=e^{-x}\approx e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\approx 1.2606\text{-}1.0854x$$

$M_2=\max\limits_{-1\le x\le 1}|y''|=e$，故误差估计为

$$\max_{-1\le x\le 1}|R_1(x)|\le \frac{M_2}{2!}\frac{1}{2^3}\approx 0.0849$$

解法二：利用截断切比雪夫级数法，按照切比雪夫系数计算公式

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-\cos\theta}d\theta\approx 1.2661$$

$$c_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-\cos\theta}\cos\theta d\theta\approx \text{-}1.1303$$

所以

$$\begin{aligned}e^{-x}&\approx c_0T_0(x)+c_1T_1(x)=c_0+c_1x\\&\approx 1.2661-1.1303x\end{aligned}$$

（2） 解法一：作变量替换，令 $x=(t\pi+\pi)/8$，将 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 变为 $t\in[-1,1]$，先关于 t 作插值多项式，然后将 t 换为 x 即得近似最优一致逼近一次多项式.

$T_2(t)$ 的零点

$$t_i=\cos\left[\frac{2i+1}{4}\pi\right],i=0,1$$

即 $t_0=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},t_1=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

利用牛顿插值多项式 $N_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$，则

$$y=\sin x=\sin\frac{t\pi+\pi}{8}\approx N_1(t)=\sin t_0+\frac{\sin t_1-\sin t_0}{t_1-t_0}(t-t_0)$$

$$=\sin\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}+\frac{\sin\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}-\sin\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}(t-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

将 $t=\frac{8x-\pi}{\pi}$ 带入上式得

$$y=\sin x\approx\sin\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}+\frac{\sin\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}-\sin\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+\pi}{8}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{8x-\pi}{\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\approx 0.0099\text{+}0.9121x$$

解法二：由解法一知，$t_0=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},t_1=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

此时，$x_0=\frac{t_0\pi+\pi}{8}=\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16},x_1=\frac{t_1\pi+\pi}{8}=\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{16}.$

则

$$y=\sin x\approx N_1(x)=\sin x_0+\frac{\sin x_1-\sin x_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=\sin\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16}+\frac{\sin\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{16}-\sin\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16}}{\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{16}-\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16}}(x-\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{16})$$

$\approx 0.0099+0.9121x$

解法三：利用截断切比雪夫级数，令 $x=(t\pi+\pi)/8$，则

$$y=\sin\frac{t\pi+\pi}{8},-1\le t\le 1$$

按切比雪夫级数系数计算公式

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{\cos\theta\pi+\pi}{8}d\theta\approx 0.36807$$

$$c_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{\cos\theta\pi+\pi}{8}\cos\theta d\theta\approx 0.3559$$

所以

$$y=\sin x=c_0T_0(t)+c_1T_1(t)=c_0+c_1t=c_0+c_1\frac{8x-\pi}{\pi}$$

$$\approx 0.01227+0.9062x$$