西安交通大学考试题

成绩	

课　　程 计算方法 A

系　　别 ____________　　**考 试 日 期**　2004　年 1 月 6 日

专业班号 ____________

姓　　名 ________　**学　　号** ________　**期中** ☐　**期末** ☐

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一.（5 分）已知

$$A=\begin{pmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ & 2 & 3\\ & & 2\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0\\4\\10\end{pmatrix},$$

求 $A^{-1}b$.

解：

二.（5 分）对方程组

$$\begin{cases}x_1-7x_2+2x_3=-4\\ 2x_1+x_2+9x_3=12\\ 8x_1+x_2-x_3=8\end{cases}$$

（1）试写出一个收敛的高斯-赛德尔迭代格式；

解：

（2）若取 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)})^T=(0,0,0)^T$，

求 $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})^T$.

解：

三．（8 分）已知方程

$$x+e^x=\cos x+1$$

（1） 证明在区间 $[0,1]$ 上方程有唯一根；

（2） 给出为求此根的一种收敛的迭代法，并给出收敛的理由。

解：

四．（8 分）已知函数 $y(x)$ 的数据表

x_i	0.00	1.00	2.00	3.00
y_i	1.00	3.85	6.50	9.35

求 $y(x)$ 的最小二乘拟合一次多项式。

解：

五.（8 分）已知 x_1, x_2, x_3 三点互异，$p_2(x)$ 是 $f(x)$ 的满足插值条件

$$p_2(x_1) = f(x_1), \quad p_2(x_2) = f(x_2), \quad p_2{}'(x_3) = f'(x_3)$$

的二次插值多项式。$p_2(x)$ 是否唯一？证明之。

解：

六．（8 分）用插值法求下列定解问题的数值解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<\pi,\ 0<t\le \pi/3 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & 0<t\le \pi/3 \\ u(x,0)=2\sin x, & 0\le x\le \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, & 0<x<\pi \end{cases}$$

取步长 $h=\tau=\pi/6$。

求未知函数 u 在 $t=\pi/3$ 时各节点处的值。（准确到小数点后两位）

解：

七．（14 分）已知高斯型求积公式形如

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

（1） 确定 A_1, A_2 和 x_1, x_2 的值；

（2） 利用广义佩亚诺定理导出该公式的截断误差。

解：

八．（9 分）对于方程组 $Ax=b$，因 A 发生扰动 δA 而使解发生扰动 δx：

$$\left(A-\delta A\right)\left(x-\delta x\right)=b$$

假定 $\|\delta A\|$ 很小而有 $\|\delta A\|\|A^{-1}\|<1$，试证明：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{Cond(A)}{1-Cond(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

（提示：相容范数性质：若 $\|B\|<1$，则 $(I-B)$ 可逆，且 $\|(I-B)^{-1}\|\le\dfrac{1}{1-\|B\|}$）

解：

九．（10 分）用牛顿迭代法求方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-3=0\\2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}-5=0\end{cases}$ 在 $x_1=-1,\quad x_2=2$ 附近的解。

只需计算出第一步迭代解即可（精确到小数点后两位）。

解：