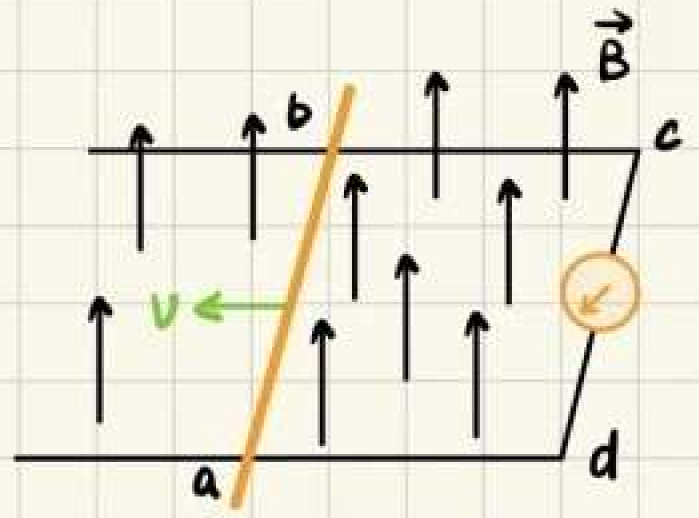
第12章 电磁感应

12.1 电磁感应定律

电磁感应现象

当穿过闭合回路的磁通量发生变化时，回路中会有电流产生
产生的电流称为感应电流，相应的电动势为感应电动势



法拉第电磁感应定律

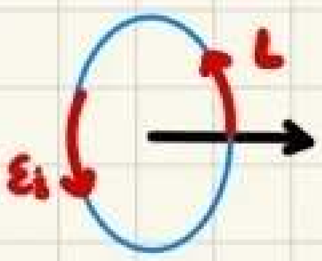
闭合回路中的感应电动势大小与穿过回路的磁通量对时间的变化率成正比：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

B↑时，$\frac{d\phi_m}{dt}>0$
B↓时，$\frac{d\phi_m}{dt}<0$

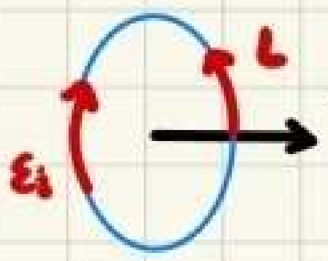
$d\phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S}$

感应电动势方向的确定：选定回路的绕行方向，使回路的磁感线方向与回路方向成右手螺旋关系



$\vec{B}$减小 ⇒ $\varepsilon_i>0$ ⟹ $\varepsilon>0$ ⇒ ε的方向与回路绕向相同

则有



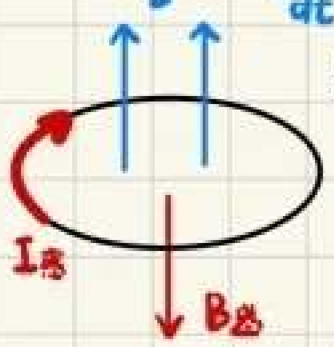
$\vec{B}$增大 ⇒ $\varepsilon_i<0$ ⟹ $\varepsilon<0$ ⇒ ε的方向与回路绕向相反

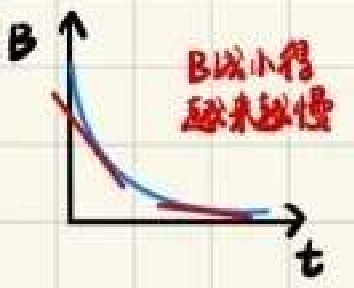
楞次定律：感应电动势产生的感应电流方向总是使它激发的磁场阻止原磁通量的变化 $\left\{\begin{array}{l}\text{来拒去留}\\ \text{增缩减扩}\end{array}\right.$

▲只能阻碍但不能改变变化趋势

判断方法：① 回路中ϕ_m增加/减少
② 由楞次定律确定$B_感$方向
③ 由右手定则判定$I_感$方向

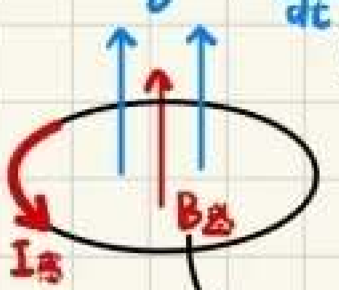
$\vec{B}$ $\frac{d\phi_m}{dt}$↑ (B不一定增大)

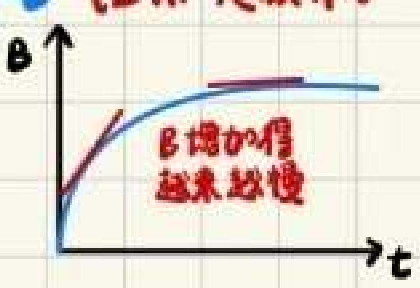




→阻碍原磁场变化
(阻碍减少变慢趋势
⇒$B_感$与B反向，促进其加快减少)

$\vec{B}$ $\frac{d\phi_m}{dt}$↓ (B不一定减小)





阻碍原磁场变化
(阻碍增大变慢趋势
⇒$B_感$与B同向，促进其加快增加)

对N匝线圈，有 $\varepsilon = -\frac{d\phi_{m1}}{dt} - \frac{d\phi_{m2}}{dt} - \frac{d\phi_{m3}}{dt}$

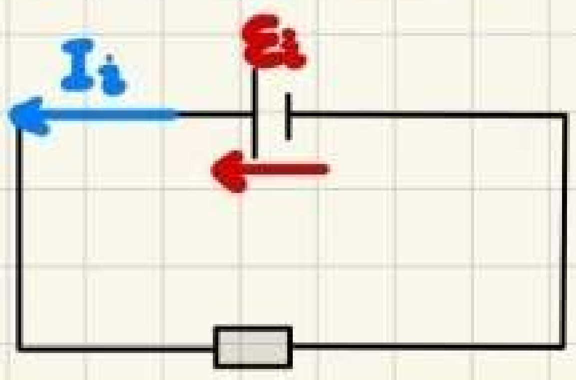
$$= -\frac{d(\Sigma\phi_{mi})}{dt} = -\frac{d\psi_m}{dt}$$

其中$\psi_m = \Sigma\phi_{mi}$为磁通链数(全磁通)

若每匝磁通量相同，即 $\psi_m = \underbrace{N}_{\text{线圈匝数}}\cdot\phi_m$ ⟹ $\varepsilon = -\frac{d\psi_m}{dt} = -N\frac{d\phi_m}{dt}$

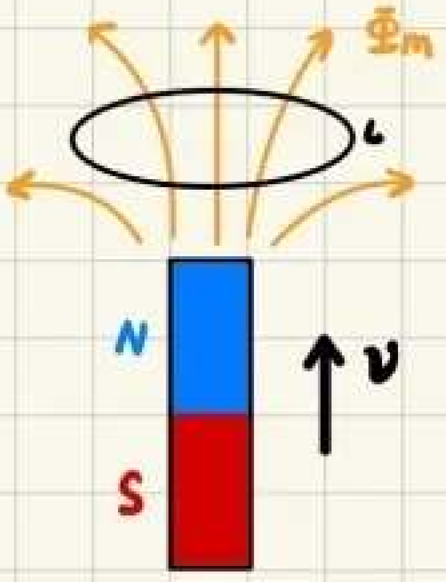
⇒回路中的感应电流 $I_感 = \frac{\varepsilon}{\underbrace{R}_{\text{电阻}}} = -\frac{1}{R}\frac{d\psi_m}{dt}$

▲感应电流与感应电动势方向总是一致的



⇒一定时间内通过回路的感应电量：$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi_m = -\frac{1}{R}(\psi_2-\psi_1) = -\frac{\Delta\psi_m}{R}$ (磁通计的原理)

▲ 感应电动势是比感应电流更本质的



若L为导线 ⇒ 有ε_i有I_i

若L为空气 ⇒ 有ε_i无I_i

法拉第电磁感应定律的应用

① 由符号法则选回路的绕行方向

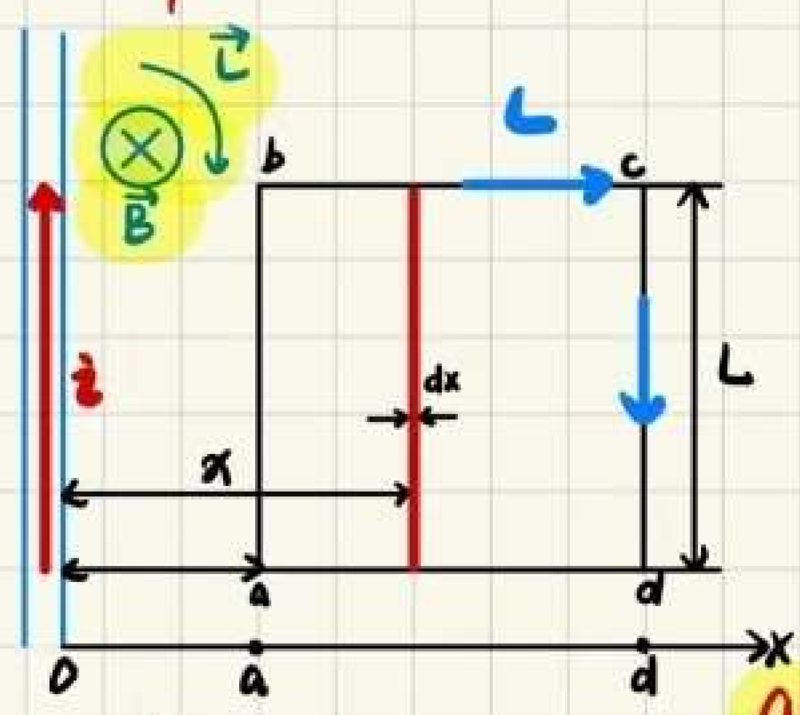
② 由 $\Phi_m=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ 求回路中 Φ_m

③ 由 $\varepsilon_i=-N\frac{d\Phi_m}{dt}$ 求 ε_i

④ 由 ε_i 正负判定其方向

eg. 在通有 $I=I_0\cos\omega t$ 的长直载流导线旁放置一矩形回路，求回路中的感应电动势

符合右手螺旋



解: 从 t=0 开始 $I=I_0\cos\omega t$ 先减小，

即B先减小，由 $\varepsilon=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ ⇒ $\varepsilon>0$

选顺时针方向为回路方向

并取一窄带 dx

有 $d\Phi_m=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi x}}_{\text{长直导线磁感应强度结论}}\cdot\underbrace{L\,dx}_{\text{窄条面积}dS}$

$$\Rightarrow \Phi_m=\int d\Phi_m=\int_a^{a+d}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}L\,dx=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{d+a}{a}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{a+d}{a}\frac{dI}{dt}=\frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{a+d}{a}\cdot I_0\omega\sin\omega t$$

$a(t)=a+vt$

若I不变

扩展: 线框以速度v匀速向X轴正方向运动

则有 $\Phi_m=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{d+a(t)}{a(t)}=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a+vt}{a+vt}\right)$

$$\Rightarrow \varepsilon=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\cdot\frac{a(t)}{d+a(t)}\cdot\frac{a'(t)\cdot a(t)-a'(t)(d+a(t))}{a^2(t)}$$

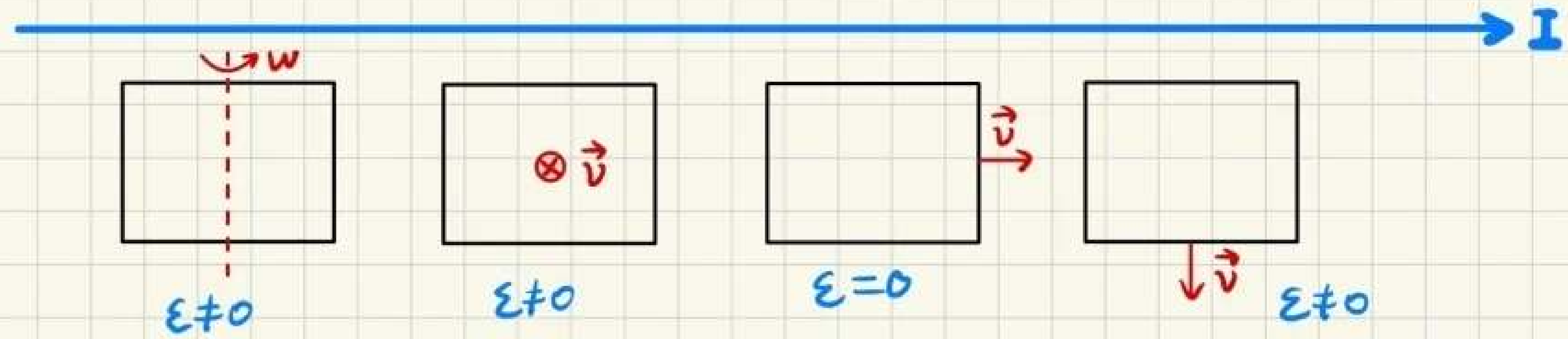
复合函数除法求导

$$=-\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\cdot\frac{a'(t)(a(t)-d-a(t))}{(d+a(t))\cdot a(t)}$$

$$=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\cdot\frac{a'(t)d}{a(t)(d+a(t))}=\frac{vd}{(a+vt)(d+a+vt)}$$

eg. 在一无限长直导线旁有4个相同大小的线圈分别作如图所示

判断回路中是否有感应电流



本质上是看穿过线框的磁通量是否随时间变化

11.2 动生电动势

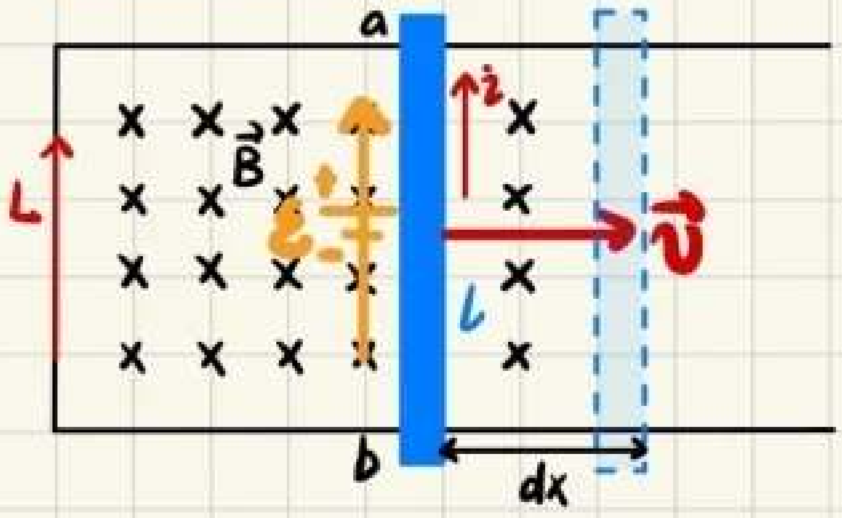
法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\psi_m}{dt} = -N\cdot\frac{d\phi_m}{dt}$

其中：$\phi_m = \int_S B\cos\theta\, dS$

> B.θ.S 三者之一变化，就有 ε_i 产生

感应电动势 { 动生电动势：回路变化引起
　　　　　 感生电动势：磁场变化引起

动生电动势



如图：动生电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\frac{Bl\,dx}{dt} = -Blv \qquad \frac{dx}{dt}=v$$

由楞次定律，ε 方向为：$b\to a$
即产生的感应电流 i 的方向

▲ 动生电动势只存在于运动的导体上

且电源内部电动势方向指向电源正极

产生动生电动势原因：电子受到洛伦兹力

洛伦兹力作为电源的非静电力 $\vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B}$

正负电荷分离后，建立的静电场使电子受电场力：$\vec{F_e} = -e\vec{E}$

平衡时有：$\vec{E_k} = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}$

非静电场

计算方法 ① 由电动势定义：$\varepsilon_i = \int_{(-)}^{(+)} \vec{E_k}\cdot d\vec{l} = \int_{(-)}^{(+)} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

若整个回路都在磁场中运动，则有 $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E_k}\cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

② 由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -N\frac{d\phi_m}{dt}$

▲ 用 $\varepsilon_动 = \int_b^a (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ 计算时，步骤为：

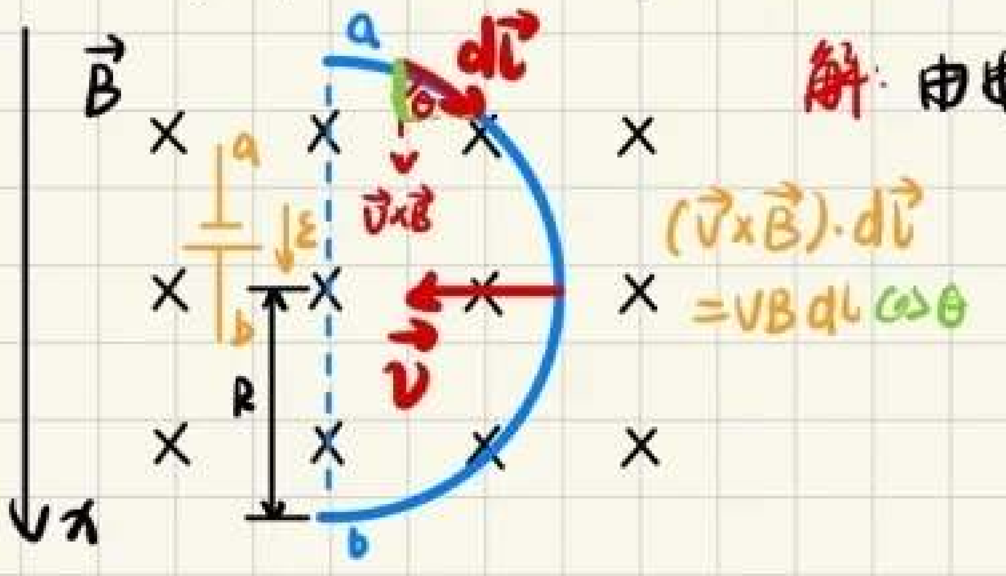
① 规定一个沿导线的积分方向（$d\vec{l}$ 方向）

② 求 dl 上电动势 $d\varepsilon_i$

$\Rightarrow d\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = vB\sin\langle\vec{v},\vec{B}\rangle\cdot l\cos\langle\vec{v}\times\vec{B}, d\vec{l}\rangle \Rightarrow \varepsilon_动 = \int \varepsilon_i$

③ $\varepsilon_i > 0 \Rightarrow \varepsilon_i$ 方向与 dl 同向
$\varepsilon_i < 0 \Rightarrow \varepsilon_i$ 方向与 dl 反向

例. 有一均匀磁场，方向如图，半径为 R 半圆形导线以速度 v 向左运动
求导线中的动生电动势



解：由电动势定义：$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$　→ 夹角为 90°，$\vec{v}\times\vec{B}$ 方向为竖直向下　再点乘 dl

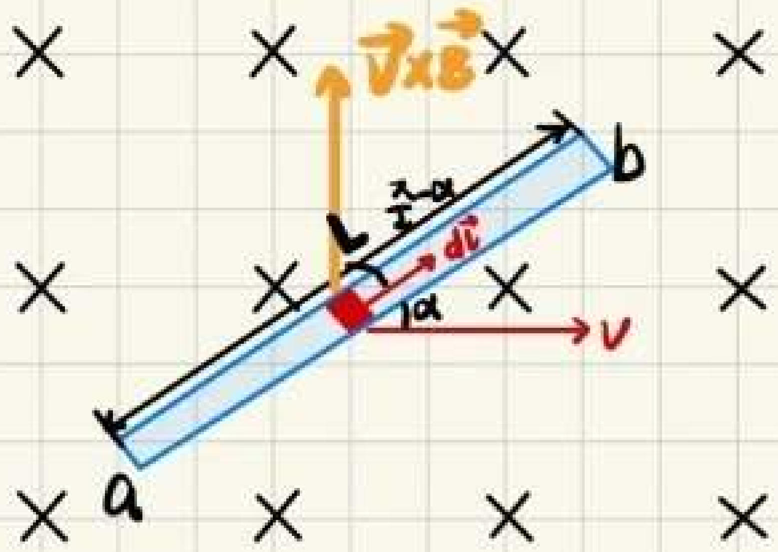
$= VB\int_a^b 1\, dx$

$= VB\cdot 2R$　（相当于直导线 AB 中电动势）

又 $\varepsilon_i > 0 \Rightarrow \varepsilon$ 与 $\vec{l}$ 方向相同

又电源内部 ε 指向正极 $\Rightarrow$ b 为正极 $\Rightarrow$ b 电势高

eg. 已知 $\vec{v}$, $\vec{B}$, α, L, 求 ε



解: 设 dl 方向为 $a\to b$

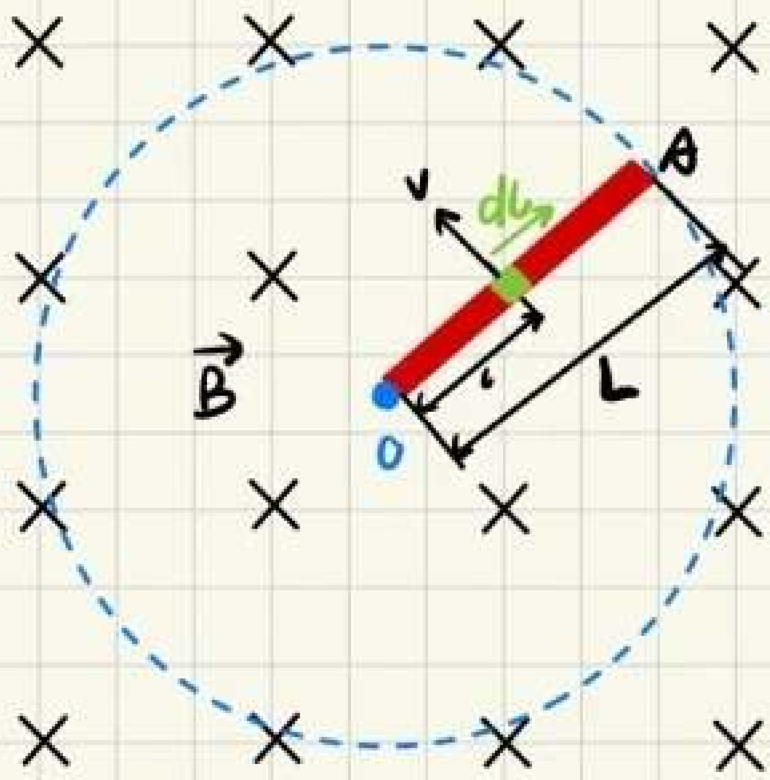
则 $d\varepsilon = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

$= vBdl\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ ← $\vec{v}\times\vec{B}$ 和 $d\vec{l}$ 夹角为 $90^\circ-\alpha$

$= vBdl\sin\alpha$

$\Rightarrow \varepsilon = \int_0^L vB\sin\alpha\, dl = vBL\sin\alpha$

eg. 在均匀磁场B中一长为L导体绕棒一端O以角速度ω转动，求导体棒上的动生电动势



法①: 用动生电动势定义计算

$d\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot dl = vBdl\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi$

$(\vec{v}\times\vec{B})$与$d\vec{l}$夹角

$= -vBdl$

$\Rightarrow \varepsilon_i = \int_0^L d\varepsilon_i = -\int_0^L vBdl$ ← $v=\omega l$

$= -\int_0^L \omega Bl\,dl$

$= -\frac{1}{2}\omega BL^2 \Rightarrow <0$, ε 方向与 dl 相反

$\Rightarrow \varepsilon_i = -\frac{1}{2}\omega BL^2$, 方向为 $A\to O$

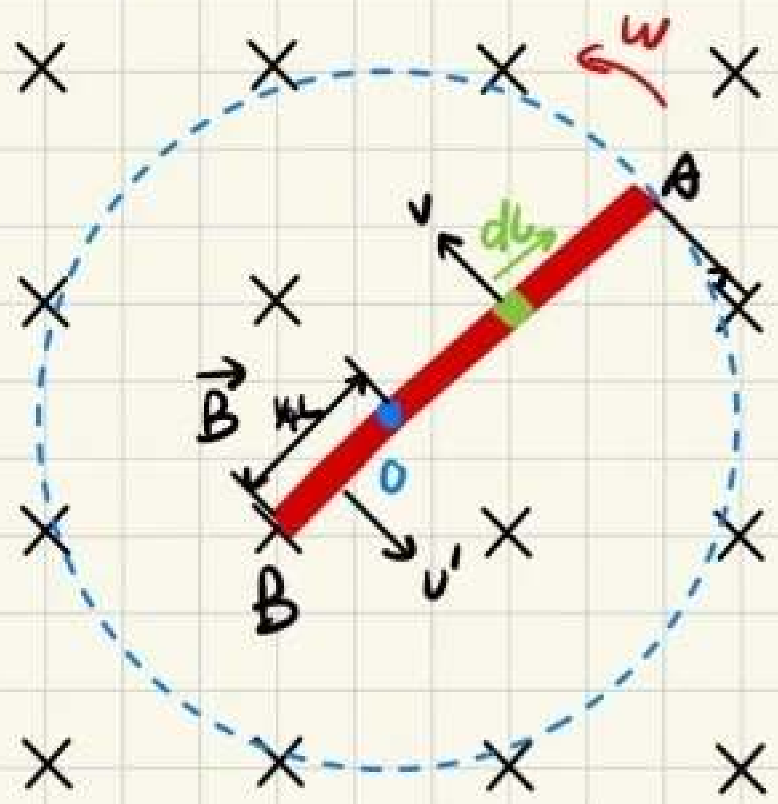
法②: 用法拉第电磁感应定律：单位时间内棒扫过一扇形域

有 $\Phi_m = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = BS$. $S=\frac{1}{2}\theta L^2$

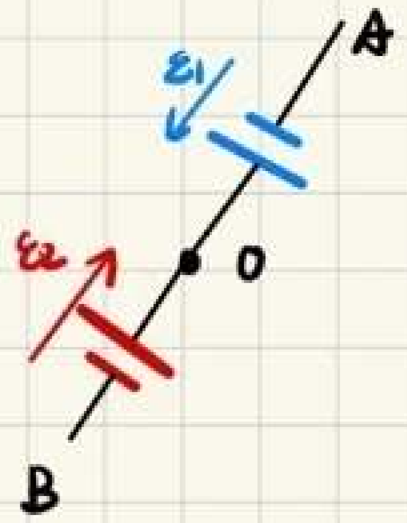
$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\frac{d(\frac{1}{2}\theta L^2)}{dt}$ ← $\frac{d\theta}{dt}=\omega$

$= -\frac{1}{2}B\omega L^2$

拓展: 棒AB长为L，绕距一端 $\frac{L}{4}$ 的O点转动，求产生的动生电动势



解: 由上述结论，可利用电路图分析



电源内电动势指向正极

如图: $\varepsilon_{\overline{AO}} = V_O - V_A = \frac{1}{2}B\omega(\frac{3}{4}L)^2$

$\varepsilon_{\overline{BO}} = V_O - V_B = \frac{1}{2}B\omega(\frac{1}{4}L)^2$

$\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\overline{AO}} - \varepsilon_{\overline{BO}} = \frac{9B\omega L^2}{32} - \frac{B\omega L^2}{32} = \frac{1}{4}B\omega L^2$

方向为 $A\to O$

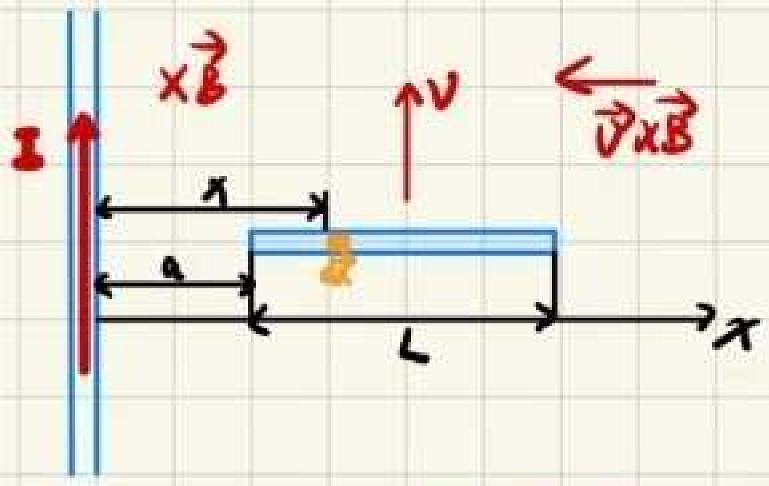
▲ 感应电动势做功但洛仑兹力不做功

不提供能量

只是传递能量

eg. 在通有电流 I 的无限长载流导线旁，距 a 垂直放置一长为 L 向上运动的导体棒
求导体棒中的动生电动势.

解：如图所示：dx处磁感应强度为：



$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

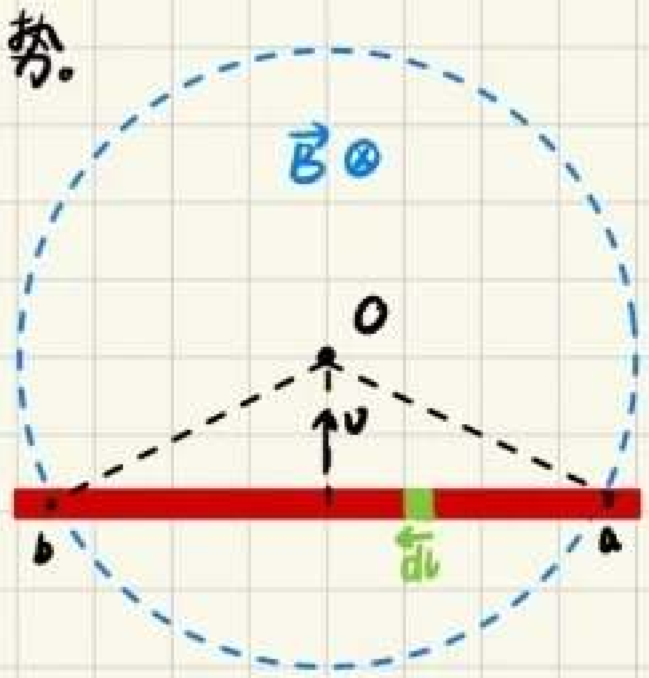
⇒ $d\varepsilon_i = (\vec v\times\vec B)\cdot d\vec x$

$= vB\sin 90°\cdot dx\ \cos 180°$

$= -vB\,dx$

⇒ $\varepsilon_i = -\int_a^{a+L} v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{a+L}{a}$ (<0 ⇒ 方向沿x轴负方向)

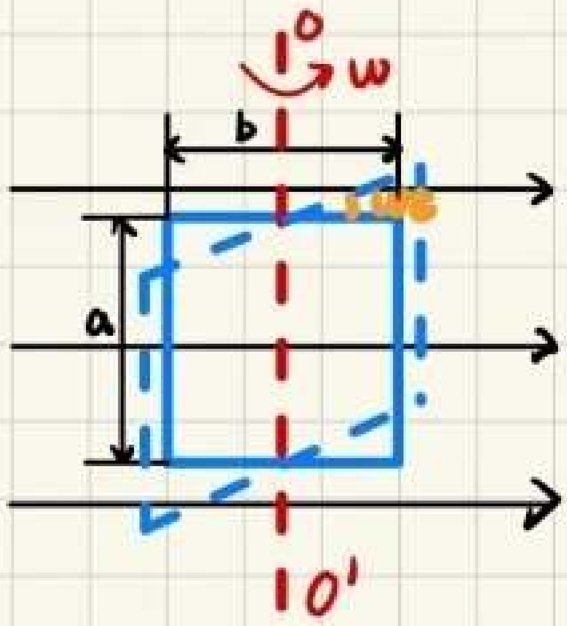
eg. 半径为 R 圆域内有匀强磁场 B，一导线垂直于磁场方向扫过
求当导线距区域中心轴垂直距离为 r 时的动生电动势.



解：$d\varepsilon_i = (\vec v\times\vec B)\cdot d\vec l = v\cdot B\cdot dl$ ($(\vec v\times\vec B)$与 dl 同向)

⇒ $\varepsilon_i = \int_a^b vB\,dl = vB\cdot(\overline{ab}) = 2vB\sqrt{R^2-r^2}$

eg. 如图矩形线框置于均匀磁场 B 中，绕 OO' 轴以 ω 匀速旋转
设 t=0 时线框平行于纸面，求任意时刻感应电动势大小



解：由电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

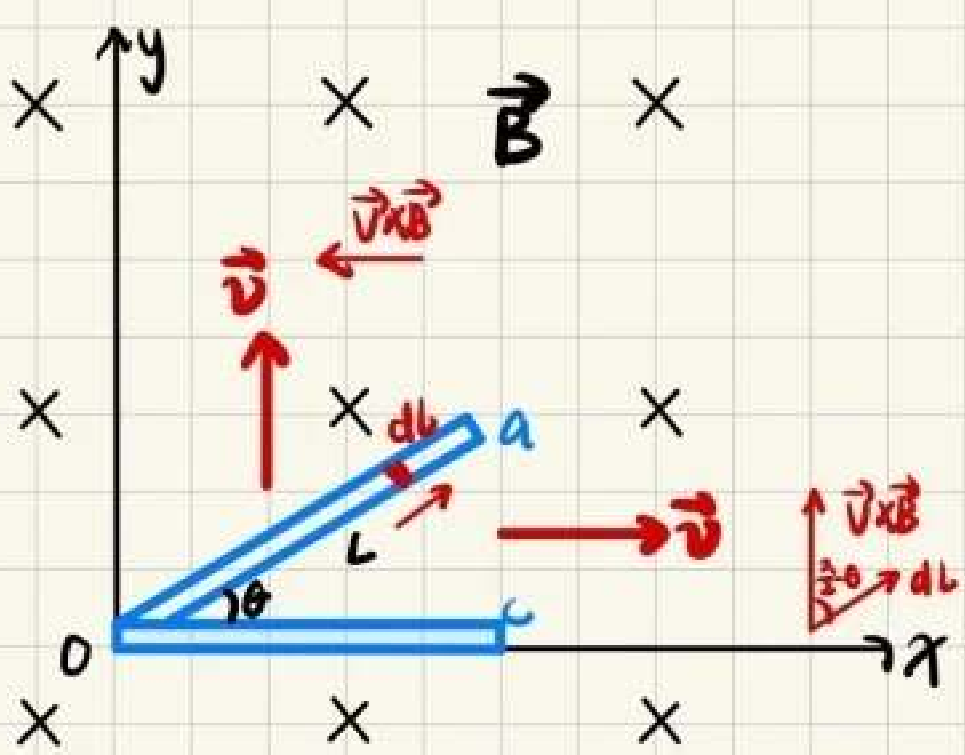
在 t=0 ⇒ $\Phi_m = 0$

在 t=t ⇒ $\Phi_m = B\cdot S\sin\omega t = abB\sin\omega t$

将B分解为垂直于S的有效分量

⇒ $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Bab\omega\cos\omega t$

eg. 如图所示，aO=Oc=L，当 aOc 以速度 v 沿 X 轴正向运动时，求 U_{ac}
当 aOc 以速度 v 沿 y 轴正方向运动时，比较 a、c 两点电势.



解：① 沿X轴正方向动时 设 $U_0=0$

则 $U_{ao} = \int_0^L \vec v\times\vec B\cdot d\vec l$

$=\int_0^L vB\,dl\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$= vBL\sin\theta$

同理 $U_{co} = \int_0^L \vec v\times\vec B\cdot d\vec l = 0$ ($\vec v\times\vec B \perp d\vec l$)

⇒ $U_{ac} = U_{ao}-U_{co} = vBL\sin\theta$

② 沿y轴正方向动时 同理分析

$U_{ao} = -vBL\cos\theta$ $U_{co} = -vBL$ ⇒ $U_{ac} = U_{ao}-U_{co} = vBL(1-\cos\theta)>0$ ⇒ a点电势高

11.3 感生电动势和感生电场

感生电场

由变化的磁场产生 [类似磁场分布，没有源头和尽头]

设感生电场场强为 $\vec{E}_k$

由电动势普遍定义：$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

和法拉第电磁感应定律：$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt}$

⇒ 感生电场的环流为：$\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ $d\vec{S}$ 正方向与L成右手螺旋关系

即随时间变化率

感生电场的通量为：$\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{S} = 0$

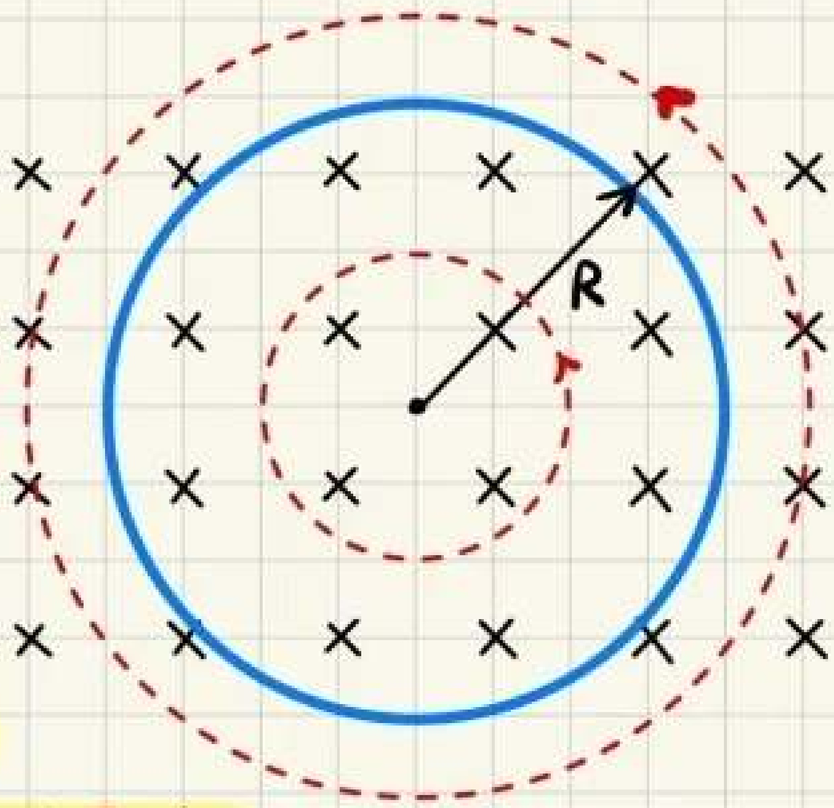
感生电动势与感生电场的计算

法①：由电动势定义：$\varepsilon_k = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

法②：由法拉第电磁感应定律：$\varepsilon_k = -\frac{d\phi_m}{dt}$ (有时需取一闭合回路)

例. 圆形均匀分布的磁场半径为R，磁场随时间均匀增加，$\partial B/\partial t = K$

求空间的感生电场分布：



① $r<R$，作半径为r圆形积分路径

有 $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ $\vec{B}$与$\vec{S}$方向不满足右手定则⇒取负

⇒ $E_k dl = \frac{\partial B}{\partial t}\cdot \pi r^2$

⇒ $E_k = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$

② $r>R$ 同理有 $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

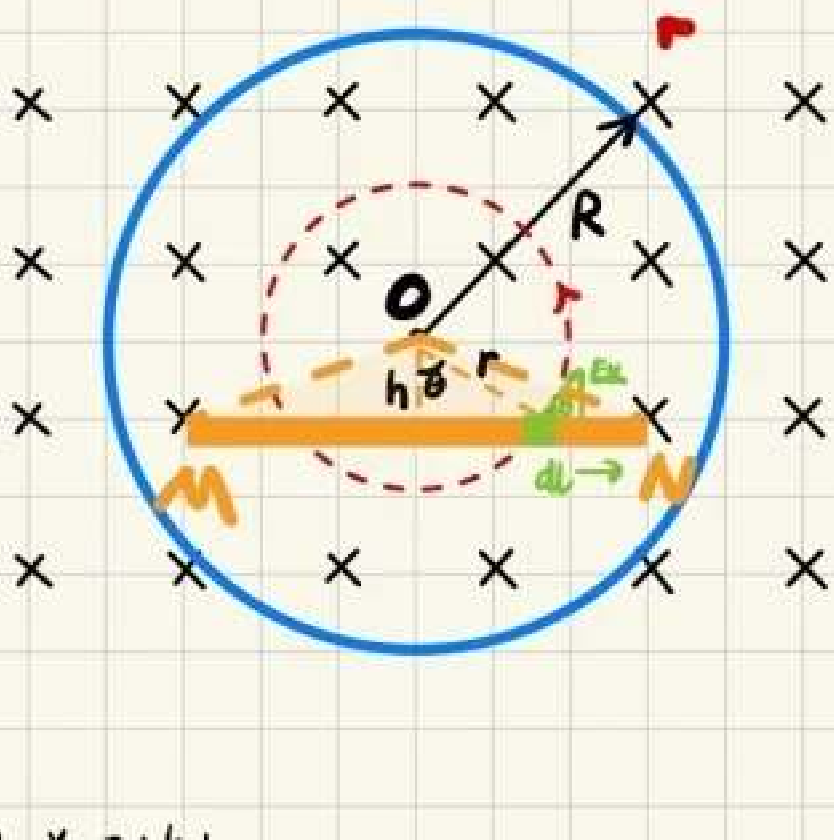
⇒ $E_k \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t}\cdot \pi R^2$

∴ $E_k = \frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}$

S指有磁场存在的面积，而非积分域面积

例. 圆形均匀分布的磁场半径为R，磁场随时间均匀增加，$\partial B/\partial t = K$

在磁场中放一长为L导体棒，求棒中感生电动势



解：分割导体，则在dl上产生的感生电动势为：

$d\varepsilon_k = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = E_k dl\cos\theta$

且 $\int \vec{E}_k d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$ $E_k \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t}\cdot \pi r^2$

⇒ $E_k = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$

⇒ $\varepsilon_k = \int d\varepsilon_k = \int_0^L \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} dl\cos\theta$ $\cos\theta = \frac{h}{r}$

$= \int_0^L \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\frac{h}{r} dl = \int_0^L \frac{1}{2}h\frac{\partial B}{\partial t} dl$

$= \frac{\partial B}{\partial t}\cdot\frac{hL}{2} = \frac{L}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\sqrt{R^2-(\frac{L}{2})^2}$

法②：由电磁感应定律：作闭合回路OMN，绕向为逆时针

$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{S} = \frac{\partial B}{\partial t}\cdot\frac{1}{2}L\sqrt{R^2-(\frac{L}{2})^2}$

$\vec{B}$与$\vec{S}$不符合右手定则 $d\vec{B}\cdot\vec{S}$ 取负