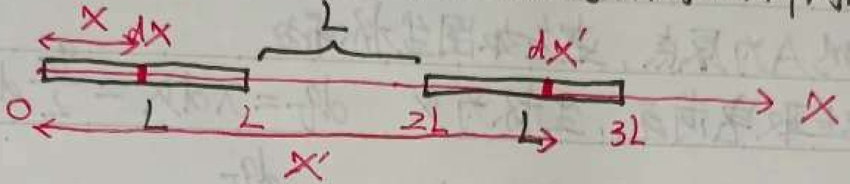
No.

Date

电磁学

chp1. 静电场

1. 两带电线杆电荷线密度均为λ，长度为L，相距L，求两杆间的电场力



解：建立图示坐标系，左、右两杆上分别选电荷元 $dq = \lambda dx$，$dq' = \lambda dx'$

根据库仑定律：$dF = \dfrac{\lambda dx \, \lambda dx'}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2}$

$$F = \int_0^L dx \int_{2L}^{3L} \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 (x'-x)^2} dx'$$

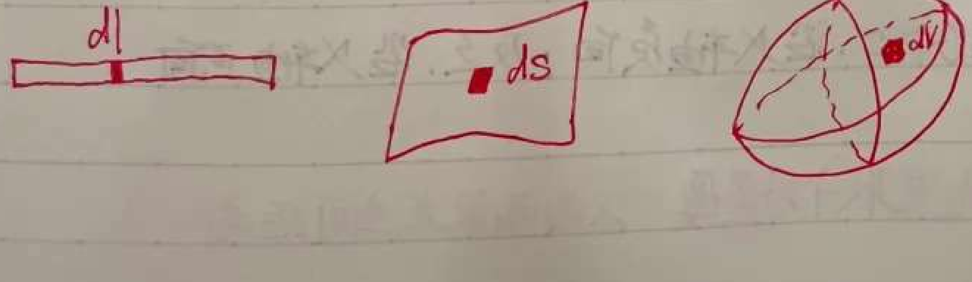
$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{4}{3}$$

注：1° 库仑力 $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$

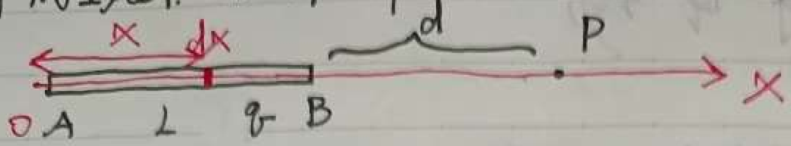
2° λ：电荷线密度 $\lambda = \dfrac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \lambda dl$

σ：电荷面密度 $\sigma = \dfrac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma dS$

ρ：电荷体密度 $\rho = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV$



2. 有一均匀带电直线段，长度为 L，总电荷量为 q，求其延长线上一点 P 的场强.（距杆右端距离为 d）



解：如图以 A 为原点，建立如图坐标轴

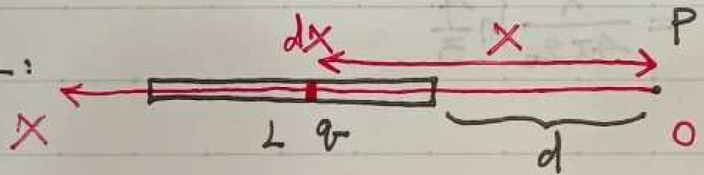
在棒上取电荷元，坐标为 x　$dq=\lambda dx=\frac{q}{L}dx$

它在 P 点处产生的电场强度 $dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(L+d-x)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{dx}{(L+d-x)^2}$

$\Rightarrow$ P 点的合电场强度 $E=\int_0^L\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{1}{(L+d-x)^2}dx=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d(d+L)}$

若 $\lambda>0$，沿 x 轴正向；反之，沿 x 轴负向

法二：



在坐标轴 x 处取电荷元，$dq=\lambda dx=\frac{q}{L}dx$

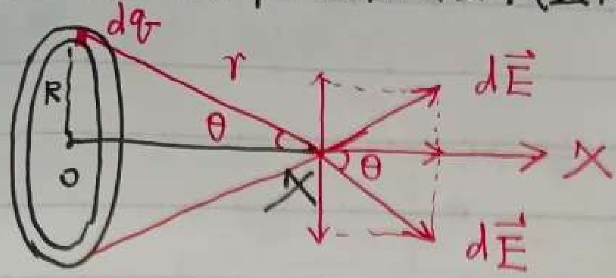
$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{q}{L}dx}{x^2}$$

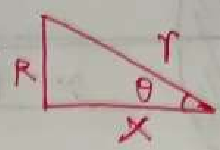
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^{d+L}\frac{q}{L}\cdot\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d(d+L)}$$

若 $q>0$，沿 x 轴负向；反之，沿 x 轴正向

☆坐标系的选取十分重要；x 为两质点之间距离.

3. Q. R. X. 求均匀带电圆环轴线上的场强.





解: 在圆环上任取电荷元 dq

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{e}_r$$

$$dE_x = dE\cdot\cos\theta$$

$$dE_{x\perp} = dE\cdot\sin\theta$$ 由对称性知垂直X轴场强为0

$$\Rightarrow \vec{E} = E_x\cdot\vec{i}$$

$$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\int dE_x$$

$$E = E_x = \int_{(Q)}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\theta = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{(Q)} dq$$

$$= \frac{X}{4\pi\varepsilon_0 r^3}Q = \boxed{\frac{XQ}{4\pi\varepsilon_0(X^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$$ 圆环场强公式

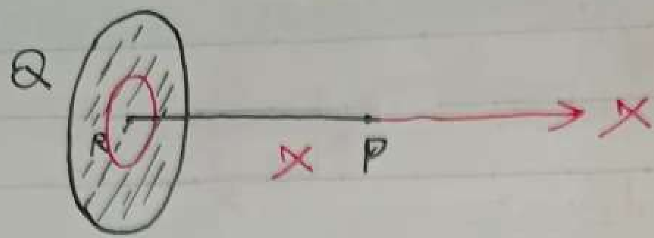
注: 1° 当被积函数与X、θ均无关, 则 $\int dq$ 即为带电体总电荷量

2° 有对称性时一定要先分析对称性.

3° 若 $X \gg R \Rightarrow E = \frac{XQ}{4\pi\varepsilon_0 X^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 X^2}$ (点电荷场强)

若 $X = 0 \Rightarrow E = 0$

4. Q、R，均匀带电圆盘，求轴上的场强



解：$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dQ\cdot\vec{i}$ （圆环）

$$dQ=\sigma dS = \frac{Q}{\pi R^2}\cdot 2\pi r dr = \frac{2Qr}{R^2}dr$$

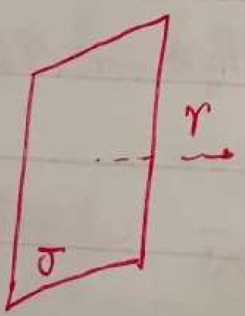
$$E=\frac{xQ}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{r}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\cdot\vec{i}$$

注：1° 当研究物体为圆盘时，应选圆环为微元

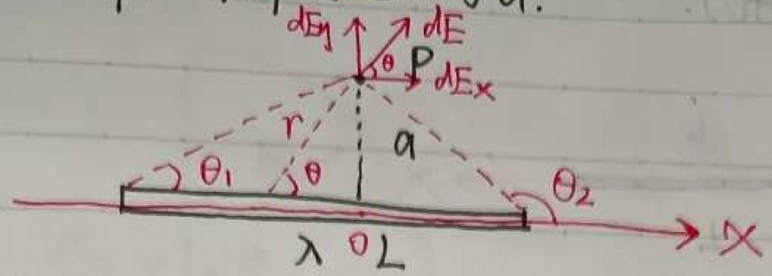
2° 当R≫x时（即无限大带电平面）

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\vec{i} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{i}$$



$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ 无限大带电平面的场强

5. 长为L的均匀带电直杆，λ. 求包在空间一点P产生的电场强度，其中P到杆的垂直距离为a.



解：建立如图所示坐标轴

$$dq = \lambda dx \qquad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$dE_x = dE\cdot\cos\theta \qquad dE_y = dE\cdot\sin\theta$$

由图中关系：$x = -a\cot\theta$

$$dx = a\csc^2\theta\, d\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2 + a^2\cot^2\theta = a^2\csc^2\theta$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\csc^2\theta}{a^2\csc^2\theta}\cdot\cos\theta\, d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a\csc^2\theta}{a^2\csc^2\theta}\cdot\sin\theta\, d\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

注：1° 积分变量直取线量不方便时便取角量

2° 若$\theta_1 = 0$. $\theta_2 = \pi$ （即无限长直导线）

$$\boxed{E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$ 无限长直导线场强公式

$$E_x = 0$$

6. 已知圆环带电量为q，半径为R，杆的电荷线密度为λ，长为L.
求：杆对圆环的作用力.

解：$dq=\lambda dx$

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ （圆环场强）

$$dF=E_x\,dq=E_x\lambda dx$$

$$F=\int_0^L \frac{xq\lambda}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

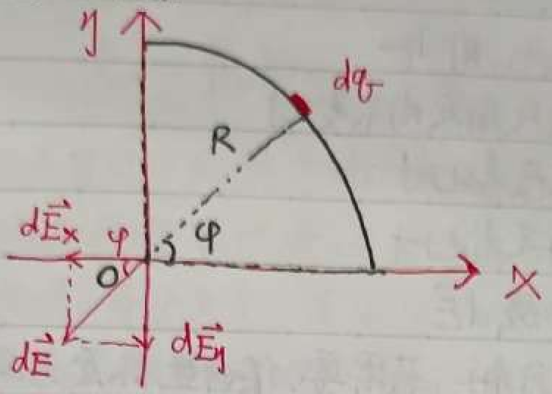
$$=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$$

由牛三：$F'=-F=-\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right)$

注：1° 注意受力物体，这里杆为受力物体，场强是圆环产生给杆的，dq也应在杆上取

2° 妙用"牛三"，即求哪个力方便求哪个力

7. R. $\lambda=\lambda_0\sin\varphi$. λ_0为常数，φ为半径与OA所成的夹角，求O处电场强度.



解：建立如图所示的二维平面直角坐标系

在带电曲线上取电荷元 $dq=\lambda dl=\lambda_0\sin\varphi\cdot Rd\varphi$

O处电场强度 $dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}=\frac{\lambda_0\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R}d\varphi$

$d\vec{E}=dE_x\cdot\vec{i}+dE_y\cdot\vec{j}=(-dE\cdot\cos\varphi)\cdot\vec{i}+(-dE\cdot\sin\varphi)\cdot\vec{j}$

其中：$dE_x=-dE\cdot\cos\varphi$

$dE_y=-dE\cdot\sin\varphi$

$$E_x=\int_{带电体}dE_x=-\int_{带电体}dE\cdot\cos\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda_0\sin\varphi\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R}d\varphi=-\frac{\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y=\int_{带电体}dE_y=-\int_{带电体}dE\cdot\sin\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda_0\sin\varphi\cdot\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R}d\varphi=-\frac{\pi\lambda_0}{16\pi\varepsilon_0 R}$$

注：1° 看清积分上下限的取值，怎么设怎么取

2° 矢量分解的一定要分清

利用微元法求电场强度步骤

step1. 建立合适的坐标系

step2. 在带电体上取微元，即 dq

$$dq \begin{cases} \to dq & \text{长度角度均不变时} \\ \to dx & \text{长度变化时} \\ \to d\theta & \text{角度变化时} \end{cases}$$

step3. 求空间某点的元场强 dE

step4. 观察 dE 是否需要分解，若需要，结合坐标系分解

step5. 对 dE 各个分量做积分（前提是要分解）

$\Downarrow$

E

No.

Date

高斯定理：在真空中的静电场，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以ε_0。

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

注：1° 必须是真空中的静电场 ⇒ ε_0

2° 所选取的面必须是闭合曲面 ⇒ $\oiint_S$

3° 电通量：穿出为正，穿进为负 ⇒ $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\cdot\cos\theta\, dS$

4° 仅面内的电荷对电通量有贡献 ⇒ q^{in}

利用高斯定理求电场强度步骤

step1. 对称性分析，选择合适的高斯面

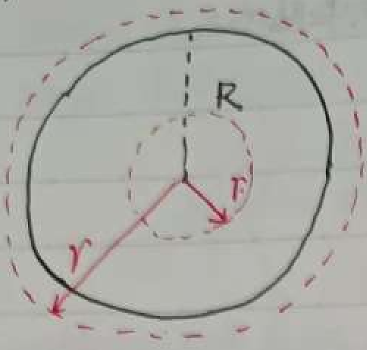
电荷分布呈 { 球状（球面／球体／球壳）；板状（无限大带电平板／平面）；柱状（无限长带电圆柱／圆柱面／细直线） } 的带电体

step2. $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$

⇓

E

1. 半径为R、均匀带电Q的球面，求球面内外任意点的电场强度



解：对称性分析：球面对称

高斯面：闭合球面

当 $0<r<R$ 时，$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$

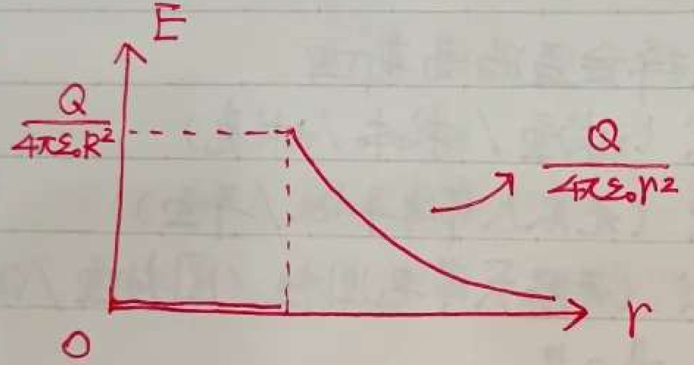
$\Rightarrow \vec{E}=0$

当 $r>R$ 时，$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S E\,dS$

$=E\oint_S dS=4\pi r^2\cdot E=\frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

注：1°



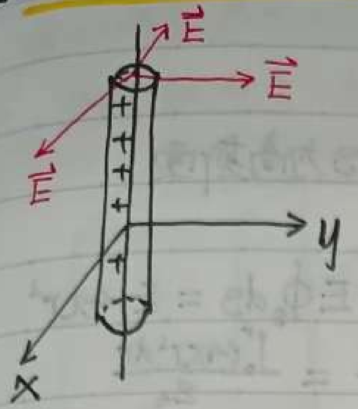
2° 半径为R，电量为Q的均匀带电球面，

其电场强度沿径向，大小为

$$\boxed{E=\begin{cases}0, & r<R\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}}$$

Date

2.无限长均匀带电线，λ，求距直线为r的电场强度

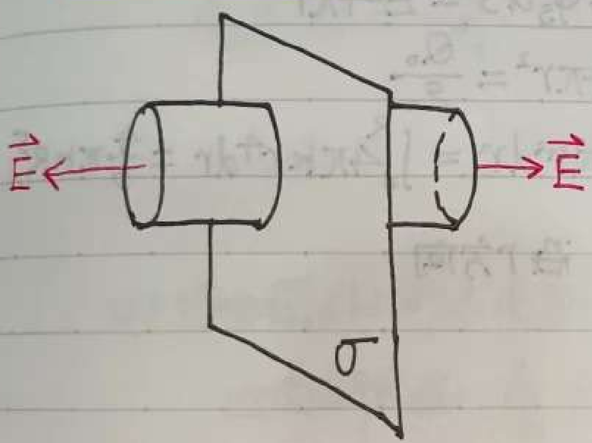


解：对称性分析，选取如图高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0+0+E\cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

3.无限大均匀带电平面，电荷面密度为σ，求距平面为r处某点的电场强度

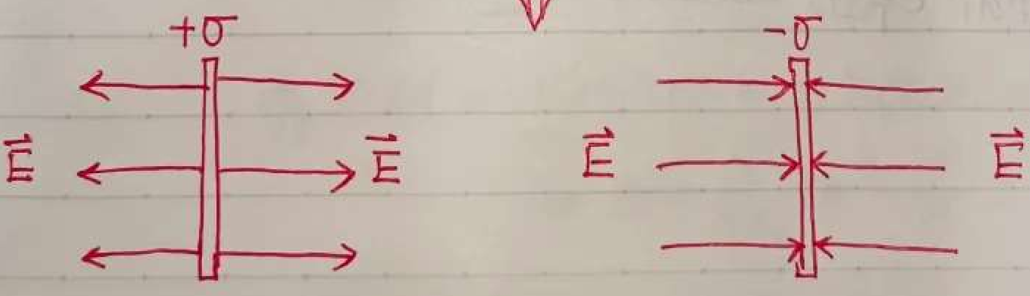


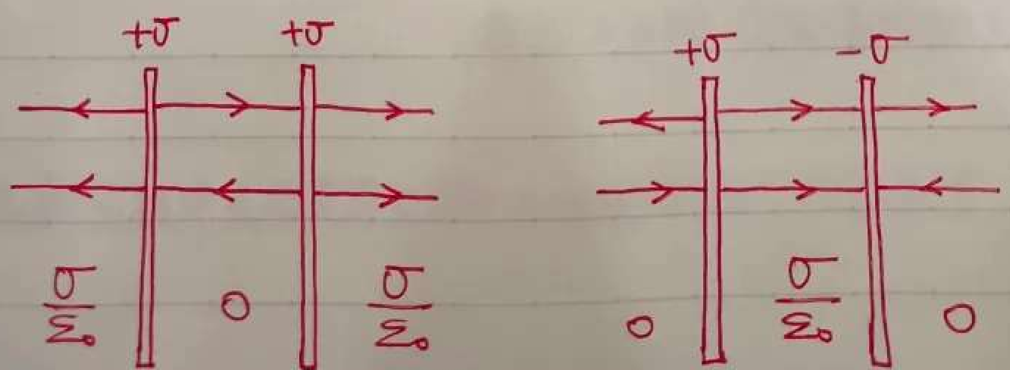
解：对称性分析，选取如图高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0+E\cdot 2S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

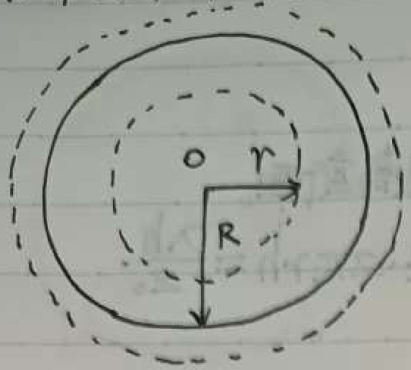
$\Downarrow$





Date

4. 带电球体，半径为R，电荷体密度 $\rho=kr^2$，求电场分布



解：作半径为r的同心球面S为高斯面

当 $r\leqslant R$ 时

S的电通量 $\Phi=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\oint_S dS=E\cdot 4\pi r^2$

根据高斯定理：$E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}=\dfrac{\int_0^r\rho 4\pi r^2dr}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E=\dfrac{kr^3}{5\varepsilon_0}$，沿r方向

当 $r\geqslant R$ 时

$\Phi=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot\oint_S dS=E\cdot 4\pi r^2$

根据高斯定理：$E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}$

$Q_0=\int_0^R\rho 4\pi r^2dr=\int_0^R 4\pi kr^4dr=\frac{4}{5}\pi kR$

$\Rightarrow E=\dfrac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$，沿r方向

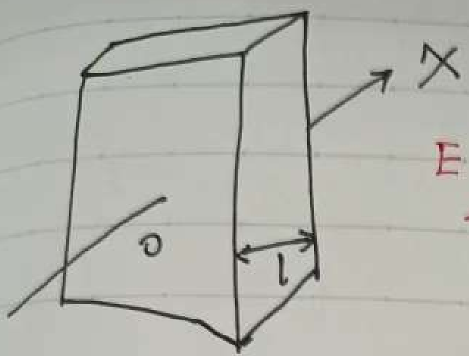
注：$dV=4\pi r^2dr$（立体）

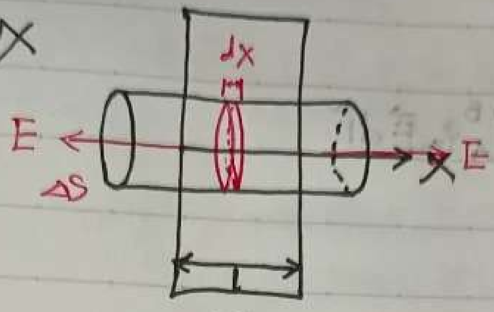
$dS=2\pi rdr$（平面）

5. 厚为 l 的无限大带电平板，其电荷体密度 $\rho=kx^2 \ (0\le x\le l)$

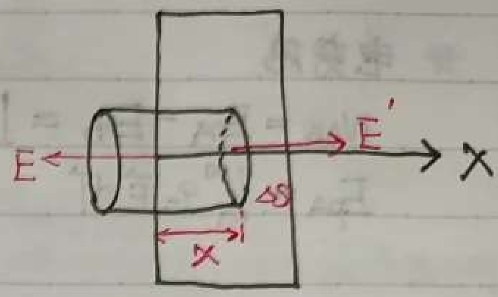
求 (1) 平板外两侧任一点的电场强度

(2) 平板内任一点的电场强度





(a)



(b)

解：(1) 由对称性分析，平板外两侧电场强度大小处处相等、方向垂直且背离于平面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_0}{\varepsilon_0} \qquad Q_0=\int\rho\Delta S\,dx=k\Delta S\int_0^l x^2dx=\frac{1}{3}k\Delta S\, l^3$$

$$2\Delta S\cdot E=\frac{1}{3}k\Delta S\cdot l^3\frac{1}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{kl^3}{6\varepsilon_0}$$ 方向垂直 x 轴且背离平板

(2) 作如图 (b) 所示高斯面 S'，右底面处场强为 $\vec{E}'$

由高斯定理：$\oint_{S'}\vec{E}'\cdot d\vec{S}=\frac{Q_0}{\varepsilon_0}$

$$Q_0=\int_0^x kx^2\cdot\Delta S\,dx=\frac{1}{3}k\Delta S x^3$$

$$\oint_{S'}\vec{E}'d\vec{S}=(E'+E)\Delta S=\frac{1}{3}k\Delta S x^3$$

$$\Rightarrow E'=\frac{k}{3\varepsilon_0}\left(x^3-\frac{l^3}{2}\right)$$

当 $E'>0$ 时，方向沿 x 轴正向；反之沿 x 轴负向

注：高斯定理中只要是穿出闭合曲面的电场线均取正值

No.

Date

一些概念

* 静电场力做功

点电荷受到的电场力做功：$W=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B})$

环路定理：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

* 电势能

$$W_{AB}=E_{pA}-E_{pB}=\int_A^B q_0\vec{E}d\vec{l}$$

$$E_{pA}=\int_A^\infty q_0\vec{E}d\vec{l}$$

* 电势

$$\varphi_A=\int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \vec{E}d\vec{l}$$

点电荷的电势 $\varphi=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

* 电势的叠加原理

点电荷系：$\varphi=\sum_{i=1}^n\varphi_i=\boxed{\sum_{i=1}^n\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

电荷连续分布时：$dq=\rho dV$

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

$$\boxed{\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}}$$

利用微元法求电势的步骤

Step1. 建立坐标系（怎么方便怎么建）
Step2. 在带电体上取微元，电量为 dq
Step3. 求微元在空间某点的电势 $d\varphi$
Step4. 对 $d\varphi$ 做积分（电势是标量，无需分解）

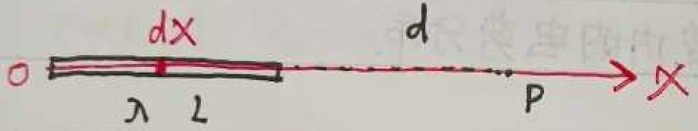
$\Downarrow$

φ

$\Longrightarrow$ 微元法不方便求解便用定义法

Step1. 求出带电体在空间形成的场强分布
Step2. 根据定义求解

1. λ、L、d，计算P点电势



解：在带电细直棒上取电荷元，坐标为 x　$dq=\lambda dx$

以无穷远处为势能零点

电荷元在P处的电势 $d\varphi=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)}=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dx}{(l+d-x)}$

$$\varphi=\int_{棒}d\varphi=\int_0^l\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d+L}{d}$$

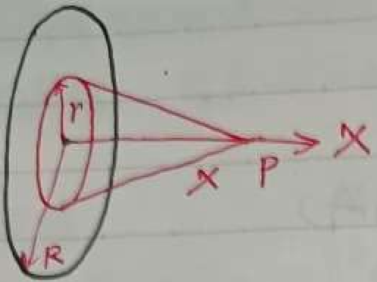
$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

两电荷间距离

No.

Date

2. 求通过一均匀带电圆平面中心且垂直平面的轴线上任意点的电势

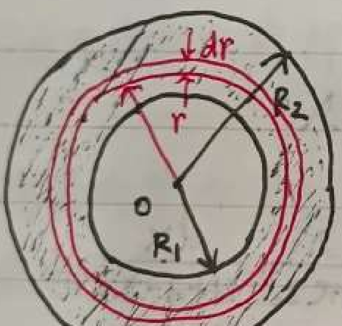


解：带电圆环的电势 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

3. 一均匀带电球壳，电荷体密度 $\rho = Ar$. 球层内表面半径为 R_1，外表面为 R_2，以无穷远处为电势零点，求空腔内的电势分布.



解：在球壳内外表面之间，作半径为 r，厚度为 dr 的壳层，该壳层带电量

$$dq = \rho \cdot dV = Ar \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ar^2 dr}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Ar^2 dr}{\varepsilon_0} = \frac{A}{3\varepsilon_0}\left(R_2^3 - R_1^3\right)$$

注：1° 电势是带电体给的，微元在带电体上取之.

2° 研究对象为球体时，可取球壳为微元.

定义法求电势 $\varphi_A=\int_A^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$

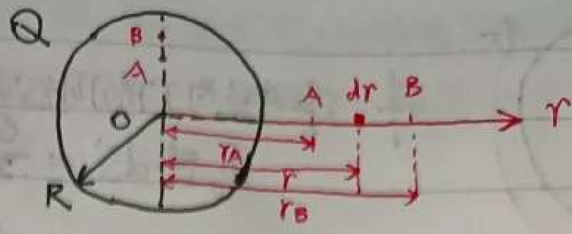
4.真空中有一电荷为Q，半径为R的均匀带电球面，求：

(1) 球外两点间的电势差

(2) 球面内两点间的电势差

(3) 球面外任意点的电势

(4) 球面内任意点的电势



解：(1) $E=\begin{cases}0 &, r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} &, r>R\end{cases}$ (前面推过)

$r>R$时，$\varphi_A-\varphi_B=\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}d\vec{r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\dfrac{dr}{r^2}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}\right)$

(2) $r<R$时，$\varphi_A-\varphi_B=\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\cdot d\vec{r}=0$

(3) $r>R$时，令$r_B=\infty$，则$\varphi_B=0$

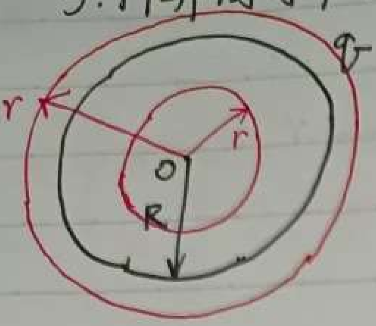
$\varphi_A-\varphi_B=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}\right)\Rightarrow\varphi(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

(4) $r<R$时 $\varphi(r)=\int_r^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^R\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}d\vec{r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

注：均匀带电球面的电势分布(以无穷远处为势能零点)

$$\boxed{\varphi=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} &, r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} &, r>R\end{cases}}$$

5. 计算均匀带电球体电场中的电势分布 (R, q)



解：作半径为r的同心球面为高斯面S

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} = E\cdot 4\pi r^2$$

$r<R$时，$Q_0 = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}q = \dfrac{r^3}{R^3}q$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{rq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{e_r}$$

$r\geq R$时，$Q_0 = q$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

$\vec{e_r}$为球半径方向的单位矢量

取无穷远处为势能零点

场强积分路径沿半径的方

则 $\varphi_P = \underline{\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_P^{\infty}E\cdot dr}$

当$r\geq R$时，$\varphi = \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

当$r<R$时，$\varphi = \displaystyle\int_r^{R}E\,dr + \int_R^{\infty}E\,dr$

$$= \int_r^{R}\frac{rq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr + \int_R^{+\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2-r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$