第7章 磁场

一. 磁感应强度

1. 线圈的磁矩：

$$\vec{P}_m = I_0 \Delta S \vec{n}$$

法线方向的单位矢量

$$M_{max} \propto I_0 \Delta S \propto P_m \Rightarrow B \propto \frac{M_{max}}{P_m}$$

即磁感应强度 $B = \frac{M_{max}}{P_m}$ (T)

$1T = 10^4 G$ (高斯)

2. 磁场的高斯定理

1). 磁力线 (B线)

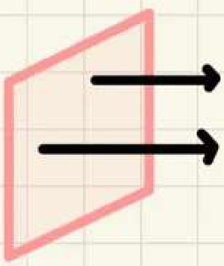
大小：$B = \frac{d\Phi_m}{dS_\perp}$

方向：切线方向

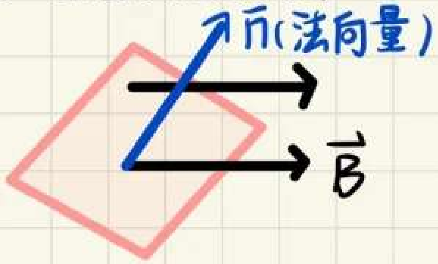
每一条磁力线都是环绕电流的闭合曲线(涡旋场)，且是无头无尾的闭合线(无源场)

任意两条磁力线不相交

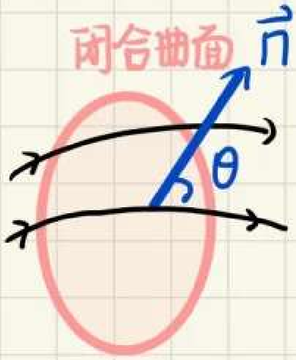
2) 磁通量：穿过磁场中任一曲面磁力线条数



$\Phi_m = BS$



$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\theta$

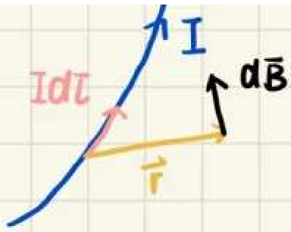


$\Phi_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint B\cos\theta dS$

3). 高斯定理：$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ ⇒ 磁场是无源场

适用于一切情况，任何磁场

二. 毕奥—沙伐尔定律



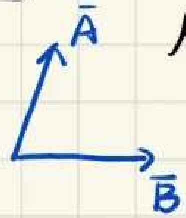
电流元

1). 微分形式: $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times\vec{r_0}}{r^2}$

大小: $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$ $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ (SI)

方向: 右手定则

eg:

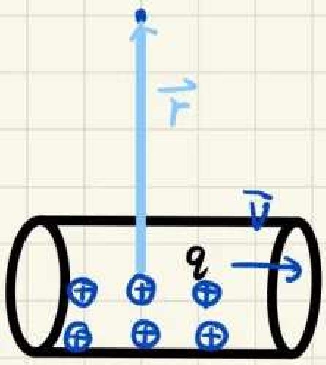


$\vec{A}\times\vec{B}$ ⊗

$\vec{B}\times\vec{A}$ ⊙

2) 积分形式: $\vec{B}=\int d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ 电流源指向场点.

运动电荷的磁场



$I=\frac{dq}{dt}$ $d\vec{l}=\vec{v}dt$

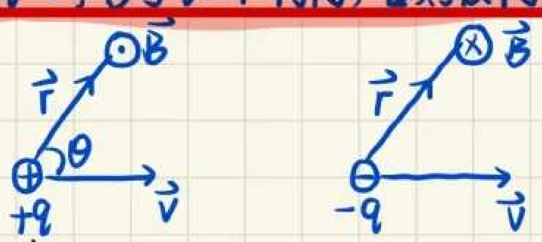
$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Id\vec{l}\times\vec{r_0}}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\frac{dq\cdot\vec{v}\times\vec{r_0}}{r^2}\Rightarrow\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q\vec{v}\times\vec{r_0}}{r^2}$

大小: $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{qv\sin\theta}{r^2}$

方向: 右手定则

若q>0, $\vec{B}$与$\vec{v}\times\vec{r}$同向, 否则反向

eg:



步骤: 分析电流, 建坐标系

↓

选取电流元

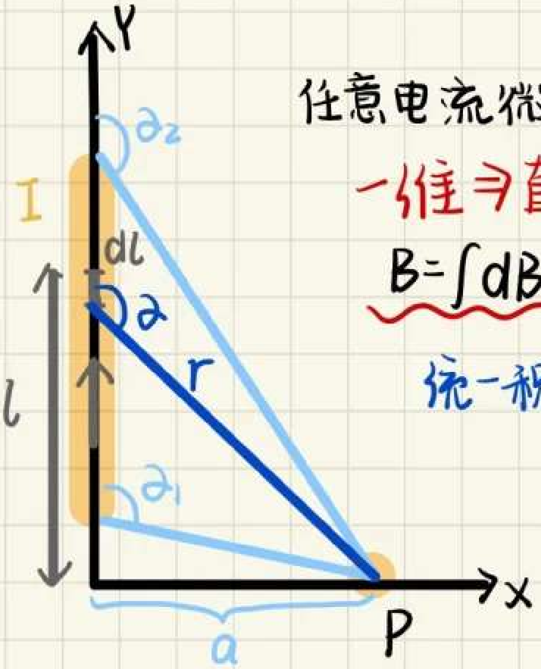
↓

写出微分形式

↓

统一变量并积分

载流直导线的磁场，已知真空中I、θ_1、θ_2、a，求P点的B



任意电流微元 $Id\vec{l}$

$$\begin{cases}\text{大小} & dB=\dfrac{\mu_0 I dl\sin\theta}{4\pi r^2}\\ \text{方向} & Id\vec{l}\times\vec{r}_0\end{cases}$$

一维⇒直接积

$$B=\int dB=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

⇓ 统一积分变量

$l=arctan(\pi-\theta)=-arctan\theta$

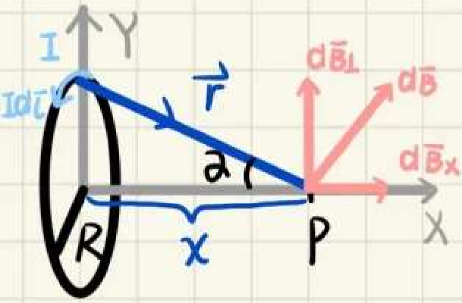
$dl=a\csc^2\theta d\theta$

$r=a/\sin\theta$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

- 若导线无限长：$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$ ⇒ $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$
- 半无限长导线：$\theta_1=\pi/2$，$\theta_2=\pi$ ⇒ $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$
- 直导线延长线上：$\theta=0$ ⇒ $dB=0$ ⇒ $B=0$

圆环电流轴线上磁场，已知R、I，求轴线上P点的磁感应强度



任取 $Id\vec{l}$ 则 $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{Idl}{r^2}$

则由对称性 $dB_\perp$ 抵消，仅剩 dB_x

$$B_x=\int dB_x=\int\frac{\mu_0 Idl\sin\partial}{4\pi r^2}$$

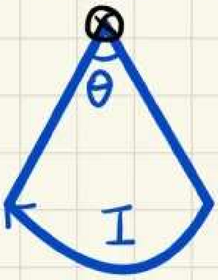
$\sin\partial=R/r$

$$B_x=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int dl=\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\cdot 2\pi R=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

方向：右手螺旋法则

则：
$$\begin{cases} x\gg R: & B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} \\ x=0: & B=\frac{\mu_0 I}{2R}\end{cases}$$

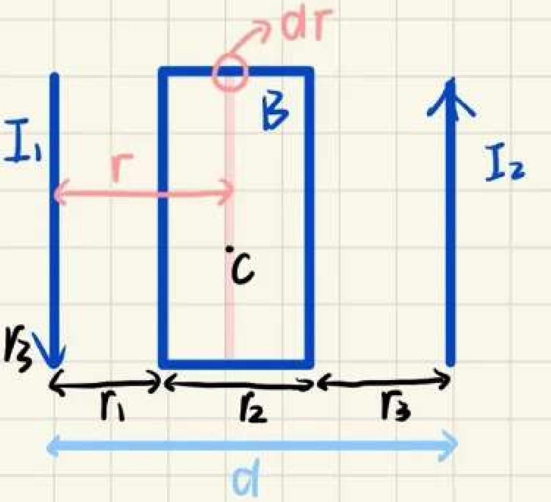
若为圆弧，圆心角θ则有：



$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi}$$

两平行载流直导线，
求两线中点C的B
和过图中矩形的Φ

已知I_1、I_2、d、r_1、r_2、r_3



载流直导线磁场公式

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d/2}$$

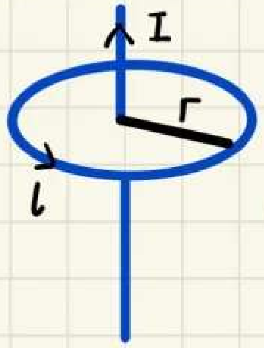
$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = Bl\,dr$，取面积微元：$B_C = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}$

$$\phi_m = \int d\phi_m = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-r)}\right] l\,dr = \cdots\cdots$$

三.磁场的安培环路定理：

1.圆形积分回路：

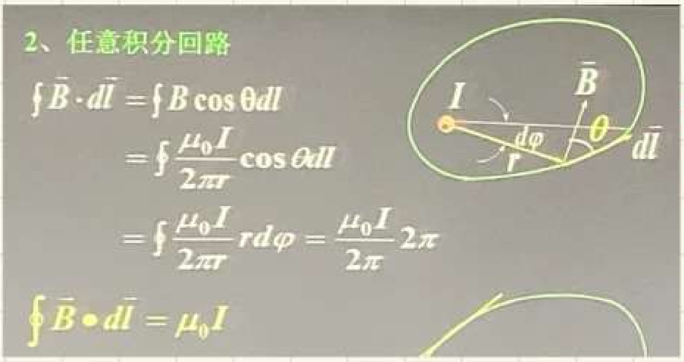
积分环路上各点B相等 ⇒ 直接代B积分



$$\int \vec{B} d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

注意l方向

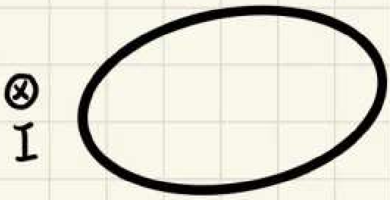
选的环路构成右手定则就为正，反之为负



⇒ 电流被环路包围

3.

⇒ 电流在环路外



$$\oint B dl = 0$$

4.安培环路定理：

积分结果与电流形状、长短无关

环路内外电流产生　　　　环路包围的电流

$$\oint(\sum \vec{B_i}) \cdot d\vec{l} = \oint(\sum \vec{B}_{内} + \sum \vec{B}_{外}) \cdot d\vec{l} = \sum \mu_0 I_{i内} + 0 = \mu I_{内} = \mu(I_2 - I_1)$$

电流与环路右旋时取正

eg:

若将I_3远离，则：B变　$\oint \sum \vec{B_i} d\vec{l}$ 不变，积分结果不变

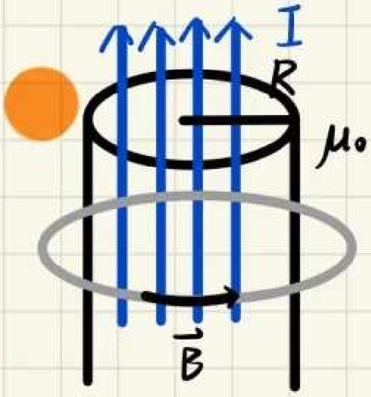
既看内也看外部电流

积分结果只看环路内电流

安培环路定理应用步骤：

分析电流对称性 → 磁场对称性 → 合适回路 → 计算环流 → 求B

无限长载流圆柱体，已知I、R，电流均匀分布，求B



① $r<R$：

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l}=\oint B\,dl=2\pi rB=\mu_0 I'=\mu_0\frac{I\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

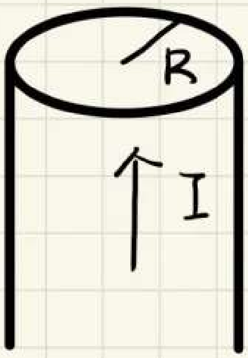
② $r>R$：

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l}=\oint B\,dl=2\pi rB=\mu_0 I$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

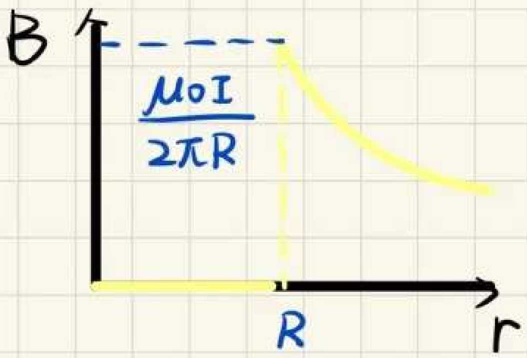
即：$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r\le R\\[2mm] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r\geqslant R\end{cases}$

载流圆柱面，已知I、R



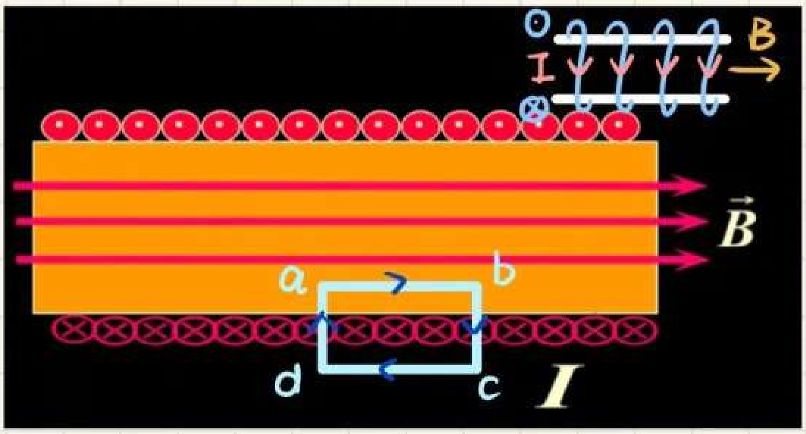
$$\oint \vec{B}\,d\vec{l}=2\pi rB=\begin{cases}0 & r<R\\ \mu_0 I & r>R\end{cases}$$

$$\Rightarrow B=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r>R\end{cases}$$



无限长载流直螺线管内部的磁场，已知 I、n（单位长度导线匝数）、l

$$= \frac{N}{l} = \frac{\text{总匝数}}{\text{长度}}$$



对称性

⇓

管内磁力线平行管轴

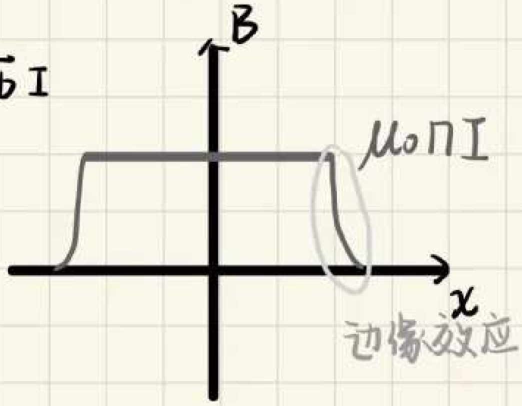
管外靠近管壁处磁场为0

计算环流：

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \int_a^b B\,dl\cos 0 + \int_b^c B\,dl\cos\frac{\pi}{2} + \int_c^d B\,dl\cos\pi + \int_d^a B\,dl\cos\frac{\pi}{2} = B\overline{ab}$$

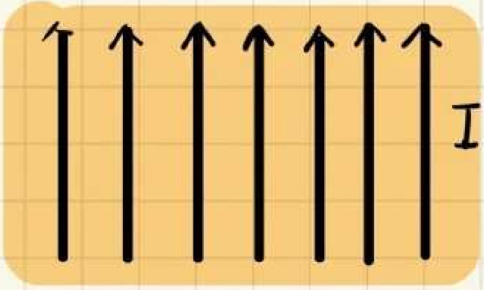
再由安培环路定理求 $\vec{B}$：$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 n \overline{ab} I$

$$B = \begin{cases} \mu_0 n I & \text{内} \\ 0 & \text{外} \end{cases}$$



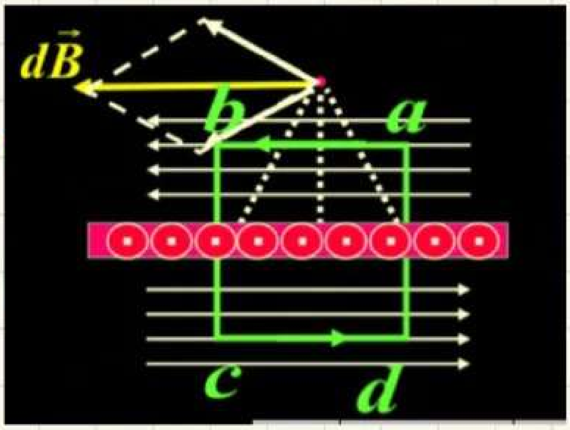
若在螺线管端点，则 $B = \frac{1}{2}\mu_0 n I$

无限大载流薄板，已知I与单位长度匝数n，求B



侧视图

取ab、cd与板等距



$$\oint \bar{B}d\bar{l} = \int_a^b Bdl\cos 0 + \int_b^c Bdl\cos\frac{\pi}{2} + \int_c^d Bdl\cos 0 + \int_d^a Bdl\cos\frac{\pi}{2}$$

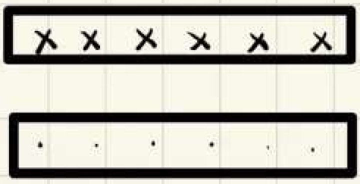
$$= B\overline{ab} + B\overline{cd} = 2B\overline{ab}$$

面电流的线密度

再用安培环路定理：$\oint \bar{B}d\bar{l} = \mu_0 n\overline{ab}I$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 nI}{2} = \frac{\mu_0 NI}{2l} = \frac{\mu_0 I_内}{2l} = \frac{\mu_0 j}{2}$$

两块无限大载流导体薄板平行放置，通有相反方向电流，求磁场分布



已知I、n

$$B = \begin{cases} 0 & 两板外侧 \\ \mu_0 nI & 两板之间 \end{cases}$$