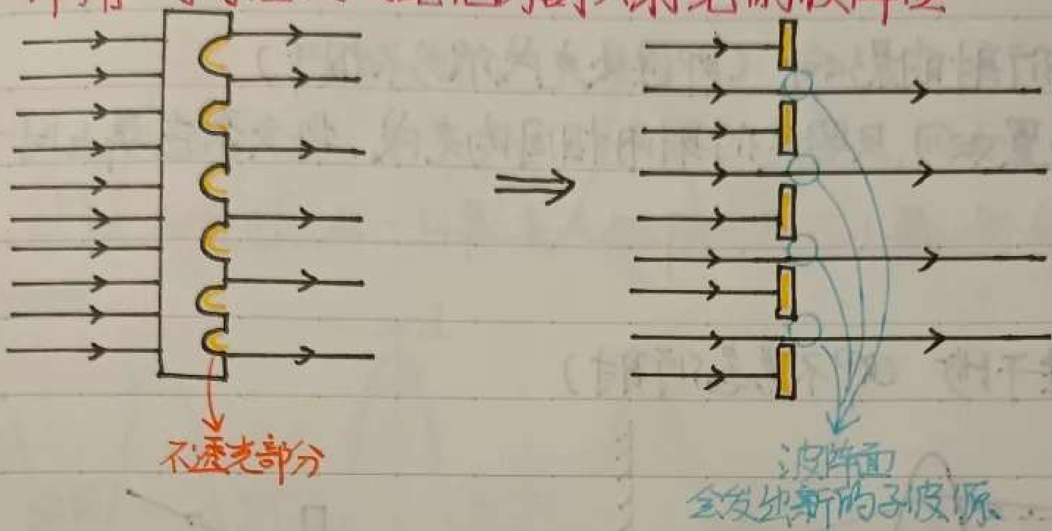
§3.5 光栅衍射

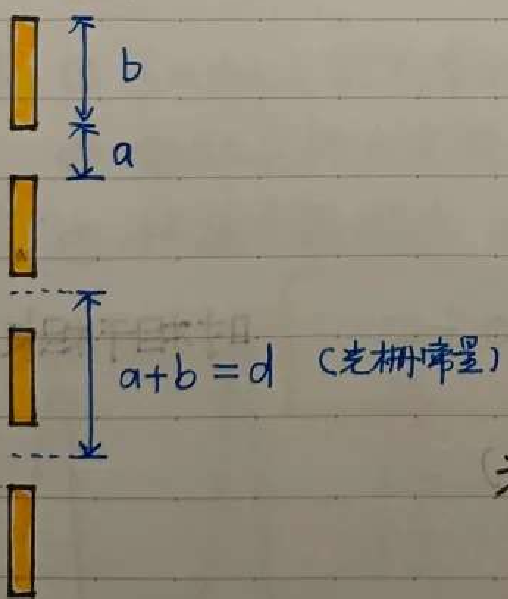
一.光栅衍射（只讨论透射光栅）

1. 光栅：大量等宽等间距的平行狭缝构成的光学器件

作用：可等宽、等间距地分割入射光的波阵面



2. 光栅常量



a：透光的部分,即缝宽

b：不透光部分的宽度

d：光栅常量,即两缝中心距离

光栅宽度 = $N\times d$

↓

总缝数

如：每毫米有800条刻线的光栅，光栅常量为？

$$d = a+b = \frac{1}{800}\,mm = 1.25\times10^{-3}\,mm$$

Date

3. 光栅衍射

光栅的衍射条纹是单缝衍射和多缝干涉的综合结果

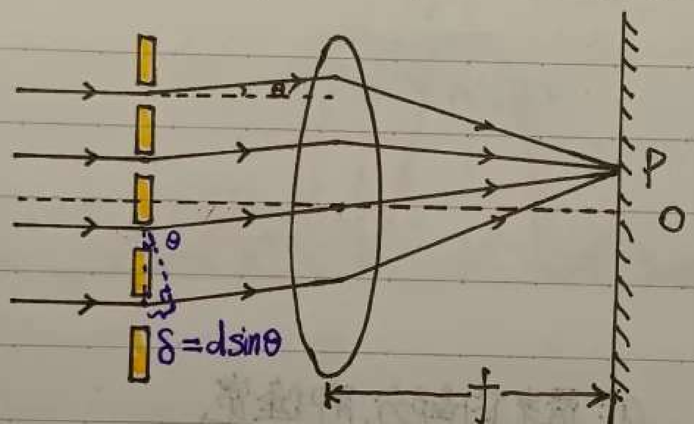
可证明，屏幕上任一点的光强，等于由N条相干光束在该点的干涉光强与宽度为d的单缝衍射在该点光强的乘积.

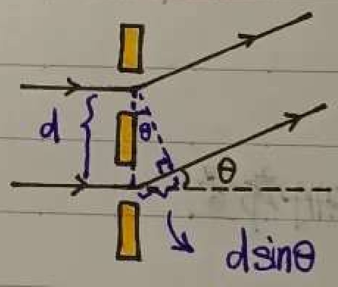
1° 只考虑单缝衍射的影响（即缝处光线彼此不相干）

无论单缝位置如何，只要是衍射角相同的光线，将会聚在屏上同一位置

⇒ 无论多少条缝，屏上强度分布形式与单缝一致，但更大.

2° 只考虑多缝干涉（即不考虑衍射）





N束相干光振幅相等

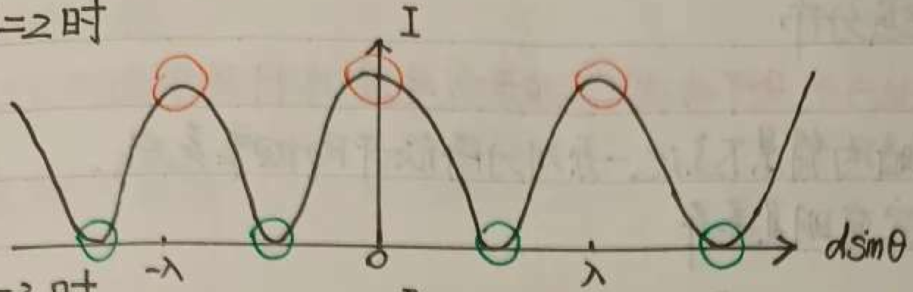
当 $\boxed{d\sin\theta = \pm k\lambda \quad k=0,1,2\cdots}$ 时相干相长

形成明条纹（即主极大条纹）

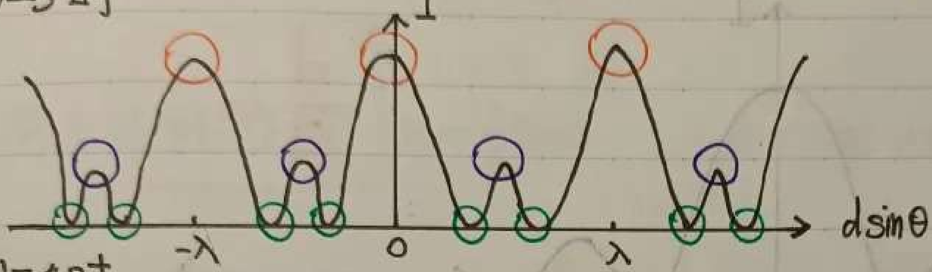
其中 $\boxed{k_{max} = \frac{d}{\lambda} \text{（取整）}}$

Campus

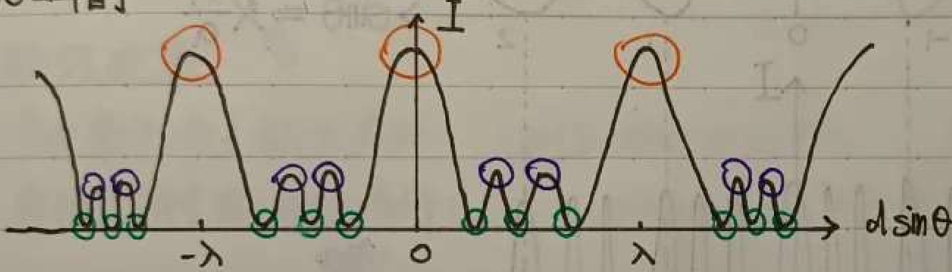
当N=2时



当N=3时



当N=4时

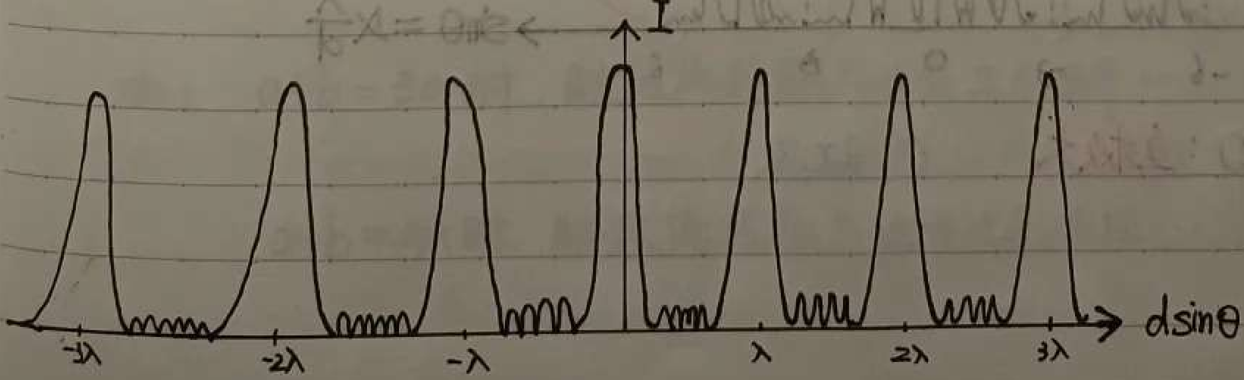


○：主极大　○：次极大　○：极小

规律：① $\delta=\pm k\lambda$ 时为第k级主极大，主极大为又窄又亮的明纹 (N越大

② 相邻主极大间有 $N-1$ 个极小，$N-2$ 个次极大

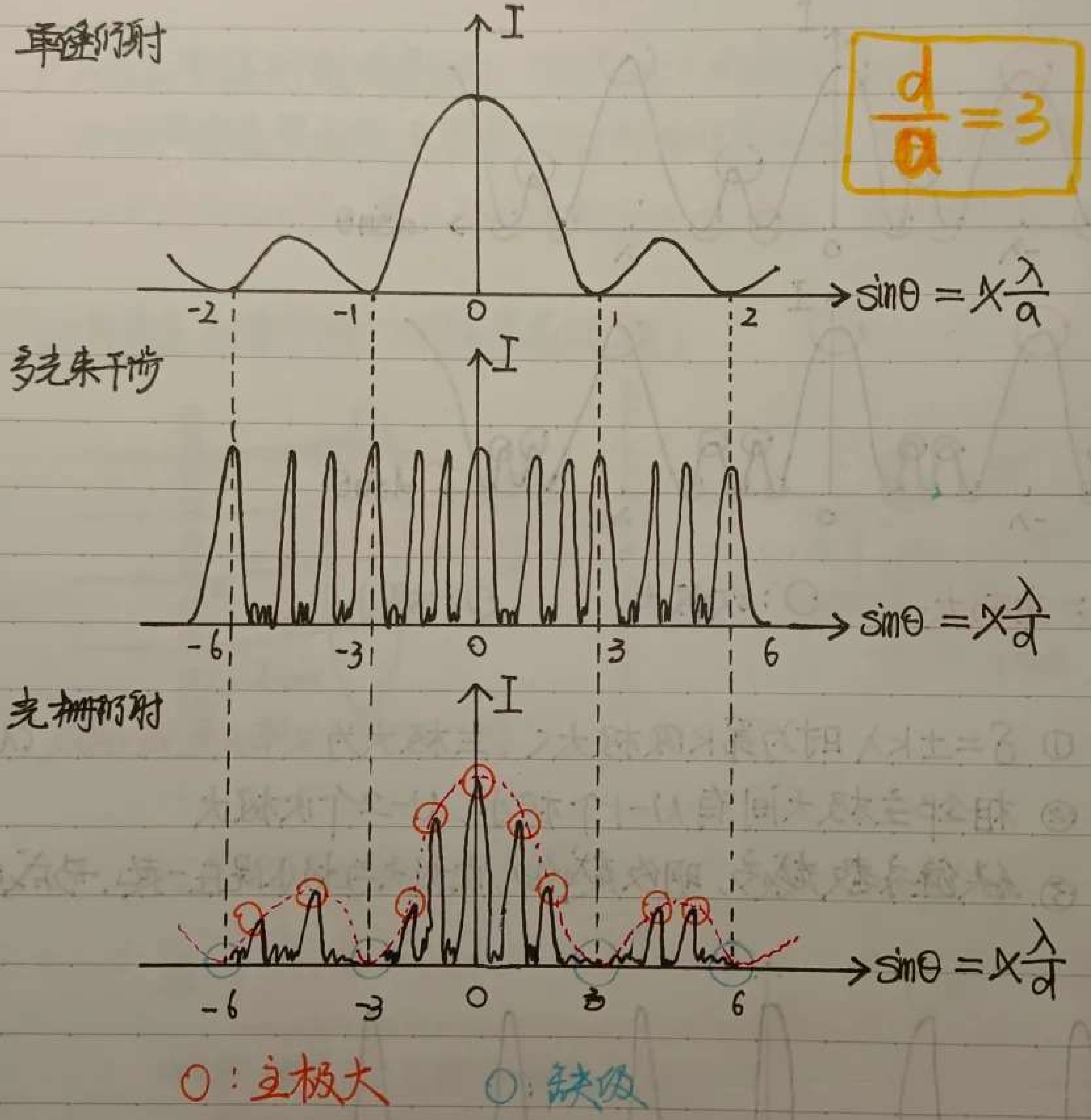
③ 狭缝条数越多，明纹越细，次极大与极小混在一起，形成暗区



4.衍射图样及光强分布

各主极大：位置由多光束干涉决定，强度受单缝衍射的制约

衍射图样：在黑暗的背景下呈现一系列分得很开的细窄亮线，且亮度有明显差异



Date

二、光栅方程

相邻两缝光线的光程差为 $(a+b)\sin\theta$

光栅方程为 $\boxed{(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \quad k=0,1,2,\cdots}$

对应主极大条纹

屏上明条纹位置：$x = f\tan\theta$　（$\theta \neq \sin\theta \neq \tan\theta$）

三、缺级现象

多光束干涉主极大条件：$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$　　$k=0,1,2,\cdots$

单缝衍射的暗纹条件：$a\sin\theta = \pm k'\lambda$　　$k'=1,2,3,\cdots$

当θ同时满足这两个方程，则光栅衍射中k级主极大消失

缺级现象

$$\boxed{k = \frac{a+b}{a}k' \qquad k'=\pm1,\pm2,\cdots}$$

k只能取整数

如：　$a+b=3a$ 时，缺级的级数为 $\pm3, \pm6, \pm9\cdots$

$a+b=4a$ 时，缺级的级数为 $\pm4, \pm8, \pm12\cdots$

Date

例1：$\lambda=600nm$ 垂直照射光栅，第二级明纹在 $\sin\varphi=0.2$ 处，第四级缺级

求：(1) 光栅常量

(2) 狭缝最小宽度

(3) 写出全部明纹的级次

解：(1) $(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$ 明 $k=0.1.2.\cdots$

$$\Rightarrow d=a+b=\frac{k\lambda}{\sin\theta}=\frac{2\times600\times10^{-9}}{0.2}m=6\times10^{-6}m$$

(2) 第四级缺级 $k=\frac{a+b}{a}k'=4$ $\quad k'=1.2,3\cdots$

$$\Rightarrow a=\frac{a+b}{4}k'$$

当 $k'=1$ 时，$a_{min}=\frac{a+b}{4}=1.5\times10^{-6}m$

(3) $k_{max}=\frac{a+b}{\lambda}=10$ （取不到10）

$\Rightarrow k=0.\pm1.\pm2.\pm3.\pm5.\pm6.\pm7.\pm9$

例2：一光栅的光栅常数为 $d=6.0\times10^{-3}mm$，缝宽 $a=1.2\times10^{-3}m$.

平行单色光垂直射到光栅上，计算单缝衍射中央明纹范围内有几条谱线.

解：中央明纹：$-\lambda<a\sin\theta<\lambda$ $\Rightarrow -\frac{\lambda}{a}<\sin\theta<\frac{\lambda}{a}$

$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$ $\quad k=0.1.2.\cdots$

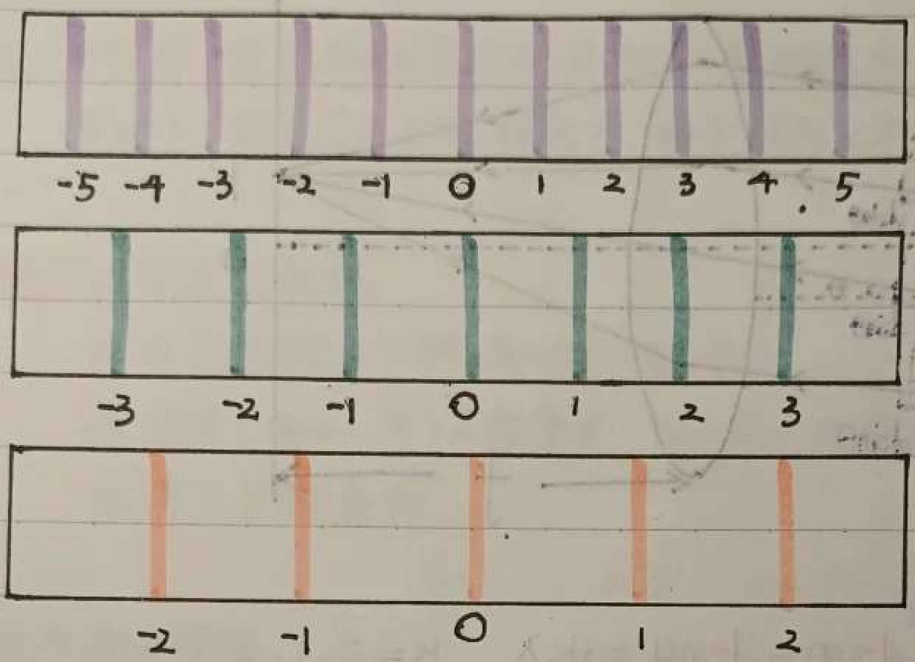
$\because \frac{d}{a}=5$ $\Rightarrow$ 第5级缺级

$\sin\theta=\pm\frac{k\lambda}{5a}\in(-\frac{\lambda}{a},\frac{\lambda}{a})$ $\quad k<5$

$\Rightarrow$ 可看到9条谱线 $\quad k=0.\pm1.\pm2.\pm3.\pm4$

四、光栅光谱

$(a+b)\sin\theta = k\lambda$ ⇒ 对同级次明纹，波长较长的光波衍射角较大



白光或复色光入射，高级次光谱会相互重叠

例：白光垂直照射在 $d=\frac{1}{6500}$ cm 的光栅上，求第二级光谱的张角，并分析能否看到完整的第三级谱线？

解：λ: 400～760 nm　　$(a+b)\sin\theta = k\lambda$

$k=2$，紫光：$\sin\theta_1 = \frac{k\lambda_1}{d} = 0.52 \Rightarrow \theta_1 = 33.3^\circ$

红光：$\sin\theta_2 = \frac{k\lambda_2}{d} = 0.98 \Rightarrow \theta_2 = 81.1^\circ$

$\Rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 49.8^\circ$

$k=3$ 紫光：$\sin\theta_1' = \frac{k\lambda_1}{d} = 0.78 \Rightarrow \theta_1' = 51.3^\circ$

红光：$\sin\theta_2' = \frac{k\lambda_2}{d} = 1.48 > 1$ ⇒ 看不到完整的第三级谱线

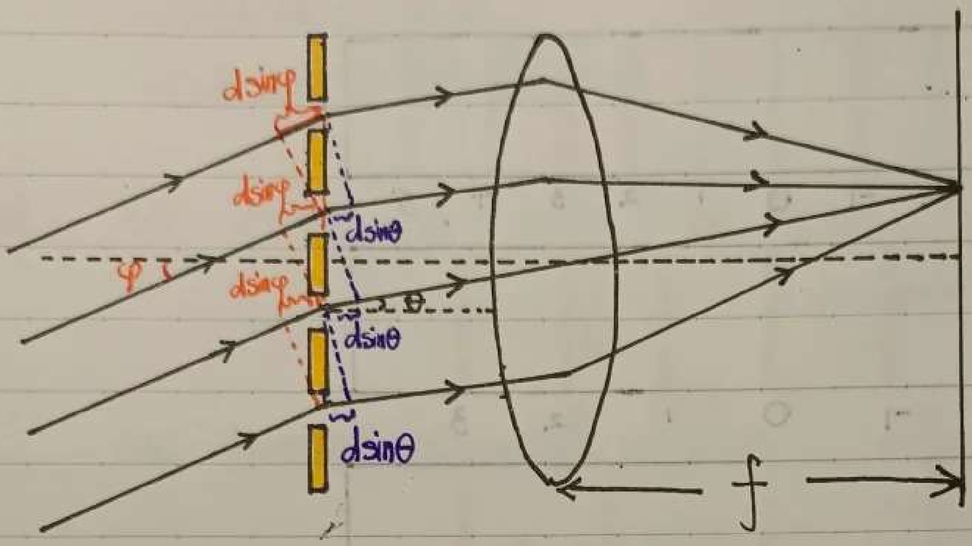
$\Delta\theta' = \theta_2' - \theta_1' = 90^\circ - 51.3^\circ = 38.7^\circ$

$\lambda_{max} = \frac{d\sin 90^\circ}{\underbrace{k}_{3}} = 513\ nm$　　绿色

Date

五. 斜入射光栅衍射

作用：可观察到更高级次的谱线



$$\delta = d\sin\theta - d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad k=0,1,2\cdots$$

例：$d=\frac{1}{5000}$ cm，观察钠光谱线，$\lambda=5893Å$，分别求：

①光垂直入射 ②光以30°角斜入射 时，最多能看到几级条纹。

解：① $K_{max}=\frac{d}{\lambda}\approx 3.4$

⇒最多能看到3级条纹 $k=0,\pm1,\pm2,\pm3$

② $d(\sin\theta-\sin\varphi)=k\lambda \quad k=0,\pm1,\pm2\cdots$

$$K_{+max}=\frac{d(\sin90^\circ-\sin\varphi)}{\lambda}=\frac{d(\sin90^\circ-\sin30^\circ)}{\lambda}\approx1.7 \Rightarrow K_{+max}=1$$

$$K_{-max}=\frac{d(-\sin90^\circ-\sin30^\circ)}{\lambda}=\frac{d(-1-\frac{1}{2})}{\lambda}\approx-5.1 \Rightarrow K_{-max}=-5$$

⇒最多能看到5级条纹 $k=-5,-4,-3,-2,-1,0,1$

Campus

§3.6 X射线的衍射

一. X射线

1. 发现：1895年，德国物理学家伦琴在研究阴极射线管的过程中，发现了一种穿透力很强的射线，将它称为X射线

2. 特性：①穿透性很强

②本质与可见光一样，是一种电磁波

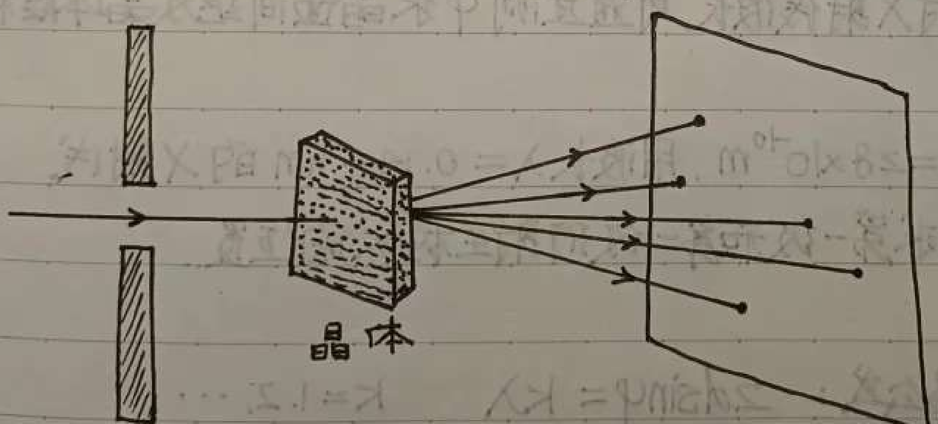
③波长十分小，为1Å数量级 (故用光栅无法观测其光谱)

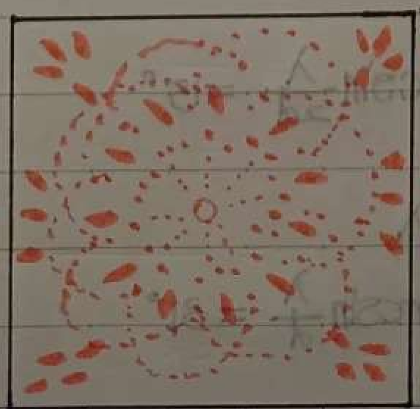
④波长连续分布

二. X射线的衍射

1. 定性研究

1912年，劳厄的X射线衍射实验



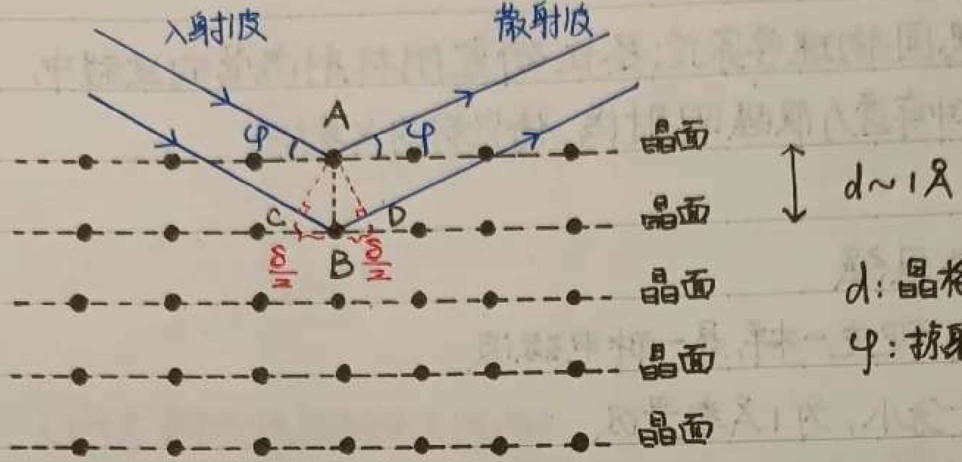


衍射斑纹(劳厄斑)

Date

2. 定量结果

1913年，布拉格父子提出了解释X射线衍射的方法，给出了定量结果



d：晶格常数

φ：掠射角

$$\delta = CB + BD = 2CB = 2d\sin\varphi$$

⇒ 布拉格公式： $2d\sin\varphi = k\lambda$　　$k = 1, 2, \cdots$　　亮点、

应用：①若已知晶体结构，可通过测φ求入射X射线的波长及波谱

②若已知入射X射线波长，可通过测φ求晶面间距及晶体结构

例：某晶体晶格常数 $d = 2.8\times10^{-10}\,m$，用波长 $\lambda = 0.144\,nm$ 的X射线照射到晶体表面．求第一级和第二级衍射主极大的位置．

解：

根据布拉格公式： $2d\sin\varphi = k\lambda$　　$k = 1, 2, \cdots$

$k=1$ 时， $2d\sin\varphi_1 = \lambda$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \arcsin\frac{\lambda}{2d} = 15^\circ$$

$k=2$ 时， $2d\sin\varphi_2 = 2\lambda$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \arcsin\frac{\lambda}{d} = 31^\circ$$