

3、已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则 $A^{-1} =$ _____.

4、已知矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $R(A) = r$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是_____.

5、已知向量 $\alpha = (1, a, b)$ 与向量 $\beta = (2, 2, 2), \gamma = (3, 1, 3)$ 都正交, 则 $a =$ ____, $b =$ ____.

三、计算下面 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}. \quad (\text{本题 12 分})$$

四、已知三阶方阵 A 和 X 满足矩阵方程 (本题 12 分)

$$A^{-1}XA = 6A^{-1}, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/7 \end{pmatrix}, \text{ 求矩阵 } X$$

五、利用矩阵的初等行变换求下面向量组的秩及其一个极大线性无关组. (本题 12 分)

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 3, 5), \alpha_3 = (1, -1, 3, 1), \alpha_4 = (1, 2, 4, 9), \alpha_5 = (1, 1, 2, 5).$$

六、已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
 有无穷多解, 问 a 取什么值? 并求其通解.

(本题 12 分)

七、已知三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的所有特征值及其全体特征向量. (本题 12 分)