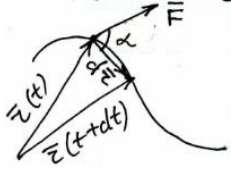


Раздел I. МЕХАНИКА.

Глава 4. Работа. Потенциальная энергия.

1. Работа. Мощность

Работа силы на элементарном участке траектории:



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha$$

$$[H \cdot m] = [Дж]$$

$$dA > 0 \quad \alpha \leq 0 < \frac{\pi}{2}$$

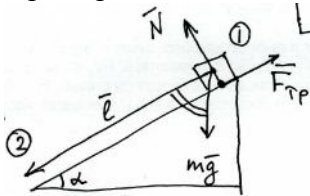
$$dA = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$dA < 0 \quad \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$$

Работа на большом участке траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Пример:



$$A_{12}^N = 0 \quad (\cos \vec{N} \wedge \vec{l} = 0)$$

$$A_{12}^{mg} = mgl \cos(90^\circ - \alpha) = mgl \sin \alpha$$

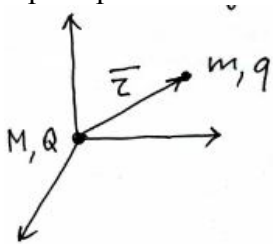
$$A^{F_{mp}} = F_{mp} l \cos 180^\circ = -\mu N l = -\mu mgl \cos \alpha$$

$$\text{Мощность } P = \frac{dA}{dt} \quad \left[\frac{Дж}{с} = Вт \right]$$

2. Потенциальное поле.

Если на материальную точку в каждой точке пространства действует сила, то говорят, что м. т. находится в силовом поле.

Примеры:



Гравитационное поле:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Кулоновское поле:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Если силы со стороны поля не зависят от времени, то такое поле называется стационарным.

Стационарное силовое поле называется потенциальным, если работа сил поля при перемещении тела из точки 1 в точку 2 не зависит от траектории, по которой перемещается тело, а зависит только от начальной и конечной точки. Соответствующие силы называются

потенциальными.

$$A_{12} = A'_{12}$$

⇓



В потенциальном поле работа сил поля при перемещении тела по замкнутому контуру равна 0. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

3. Потенциальная энергия.

В потенциальном поле можно ввести функцию $U(\vec{r})$ такую, что:

$$A_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = U_1 - U_2$$

$U(\vec{r})$ называется потенциальной энергией тела в данном поле.

Потенциальная энергия $U(\vec{r})$ определена с точностью до константы, но это не имеет значения, так как все физические величины будут определяться через разность потенциальных энергий. Для устранения неудобств при написании формул потенциальных энергий договариваются, где потенциальная энергия будет считаться равной 0.

Между потенциальной энергией $U(\vec{r})$ и силой

$\vec{F}(\vec{r})$ существует связь:

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad \text{grad}U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

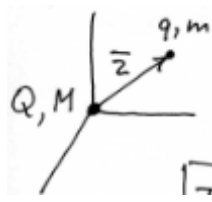
Заметим, что при замене $U \rightarrow U + c$, сила \vec{F} остается без изменения.

4. Формулы потенциальных энергий.

а) Центральные поля (кулоновские, гравитационные).

Центральные поля являются потенциальными,

$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$ не зависит от траектории.



Для кулоновского и гравитационного полей

считают $U_\infty = 0$

↓

$$U(\vec{r}) = A_{r\infty} = \int_r^\infty \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

↓

$$U(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

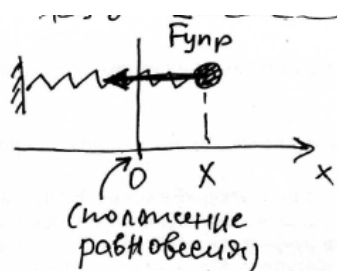
кул

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

грав

Q, q – заряды со знаком

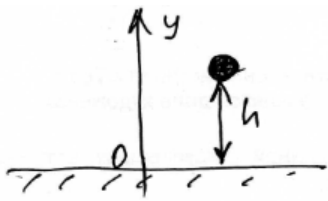
б) Грузик на пружинке.



Считают $U(0) = 0$.

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

в) Тело в однородном поле силы тяжести (вблизи поверхности Земли).



Считают $U(0) = 0$ (на поверхности Земли).

$$U(h) = mgh$$

Вопросы

1. Что такое работа силы.
2. Что такое потенциальное поле.
3. Определение потенциальной функции.
4. Формулы потенциальной энергии:
 - а. кулоновская и гравитационная;
 - б. грузик на пружинке;
 - в. тело вблизи поверхности Земли.
5. Связь силы и потенциальной энергии.
6. Что такое мощность.

Q1

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

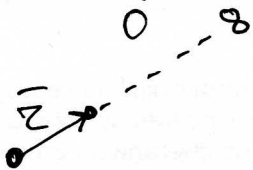
6

$$U(x, y, z) - U(x+dx, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$F_x = - \frac{U(x+dx, y, z) - U(x, y, z)}{dx} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

Q2

$$U(z) - U(0) = \int_0^z \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^z \frac{\alpha}{z^2} dz = - \frac{\alpha}{z} \Big|_0^z = \frac{\alpha}{z}$$

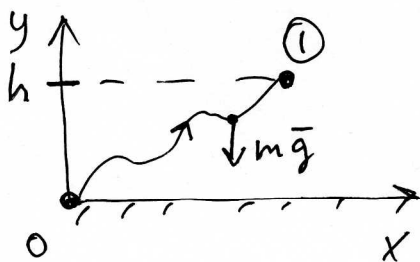


$$\alpha = \begin{cases} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \\ -\gamma Mm \end{cases} \quad \text{(смена и направление в разные стороны)}$$

Q3

$$U(0) - U(x) = -U(x) = \int_0^x F_{\text{упр}} dx \cdot \cos 180^\circ = - \int_0^x Kx dx = - \frac{Kx^2}{2} \Big|_0^x = - \frac{Kx^2}{2}$$

Q4



$$U(0) - U(1) = \int_0^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-mg dy + 0 \cdot dx) = -mg \int_0^h dy = -mgh$$