考试科目：矩阵理论
考试形式：闭卷
考试日期：2017 年秋
考试时长：2 小时

一. 判断题（正确的打“✓”，错误的打“X”，每题 3 分，共 15 分）

1. 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A 的充分必要条件是以任意范数 $\lim_{k\to\infty}||A^{(k)}||=||A||$ (______)
2. 若 n 阶方阵 A 的存在某矩阵范数 $||\bullet||$ 使得 $||A||<1$，则 A 为收敛矩阵. (______)
3. 设 u 为 n 维单位列向量, E 为单位矩阵, $A=E-2uu^H$: 若 $Aa=b$, 则 $||a||_2=||b||_2,(a,b)=(b,a)$. (______)
4. 若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵，则有 $\det(A)\le a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. (______)
5. A 为正规矩阵，则 $A^+A=AA^+$. (______)

二. 选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$r(A)$ 是其谱半径，$||\bullet||$ 为自相容矩阵范数，则必有 .... (______)
   A. $||A^{-1}||\le 1/||A||$ B. $r(A^n)\le ||A||^n$ C. $||A^n||\ge ||A||^n$ D. $||A||\ge r(A^HA)$
2. 下列命题错误的是 .... (______)
   A. 若 $A^2=A(\neq 0)$ 且 $A=BC$ 为满秩分解，则 $CB=E$（E 为单位矩阵）.
   B. $A\in C^{m\times n},b\in C^m$，则 $A^HAx=A^Hb$ 一定有解.
   C. $N(A^-A)\neq N(A)$.
   D. $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$，则 AA^+ 的正奇异值之和为 r.
3. 下列命题错误的是 .... (______)
   A. 矩阵 A 的每个行盖尔圆盘不一定包含 A 的特征值.
   B. 严格对角占优的矩阵一定是可逆矩阵.
   C. 若 n 阶实矩阵 A 的 n 个圆盘两两互不相交，则 A 一定相似于对角矩阵.
   D. 若 A 为 $Hermite$ 矩阵，则 A 的特征值都为非负实数.
4. 下列结论“错误”的是 .... (______)
   A. 若 A 和 B 分别是列满秩和行满秩矩阵，则 $(AB)^+=B^+A^+$.
   B. 实反对称矩阵，一定能够酉相似对角化.
   C. 对任意矩阵 A，A^HA 和 AA^H 具有相似的特征值.
   D. 设 $A\in C^{m\times n}$ 和 $B\in C^{n\times m}$，则 AB 和 BA 有相同的非零特征值.
5. 设 σ_i 为矩阵 A 的奇异值，下列结论“正确”的是 .... (______)
   A. $(AB)^+=B^+A^+$ B. $||A^+||_F^2=\sum_n^{i=1}\sigma_i^2$ C. $rank(A)=rank(A^+)$ D. $(A^-)^-=A$

三. 计算和证明题（共 70 分）

1. （10 分） 设 $||A||_a$ 是 $C^{n\times m}$ 上的矩阵范数，D 为 n 阶可逆矩阵，证明：对任意 $A\in C^{n\times n}$，$||A||_b=||D^{-1}AD||_a$ 为 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数.

.

2. （10 分） 设 $A \in C^{n\times n}$ 是单纯矩阵，则 A 可分解为一系列幂等矩阵 A_i 的加权和，即 $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$，其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 是 A 的特征值.

3. （10 分）（Rayleigh-Ritz 定理）设 $A \in C^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，证明：A 的最小特征值 $\lambda_{\min} = \min_{x^H x=1} x^H A x$.

4. （10 分） 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \frac{1}{6}A$，完成下列计算：（1）$\sum_{k=0}^{\infty} B^k$；（2）$\sin(At)$.

.

5. （15 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&1&1\\2&1&1&2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，（1）求矩阵 A 的最大秩分解；（2）求矩阵 A 的 $M-P$ 逆 A^{+}；（3）判断方程组 $Ax=b$ 是否有解；（4）求方程组 $Ax=b$ 的通解及最小范数解或最小二乘解通解及其最佳逼近解（指出所求的是哪种解）.

6. （9 分） 设 $A \in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，（1）证明：A 的奇异值等于 A 的特征值的模；（2）证明：A^{+} 为正规矩阵.

7. （6 分） 设 $A \in C_r^{m\times n}$，E 为 n 阶单位矩阵，证明：$rank(E - A^{+}A) = n - r$.