Programmation Linéaire en Nombre Entiers (PLNE)

Leandro MONTERO
lmontero@uco.fr

M2 MIASHS

*basé sur le cours de Gilles Simonin

De PL vers PLNE

Motivation

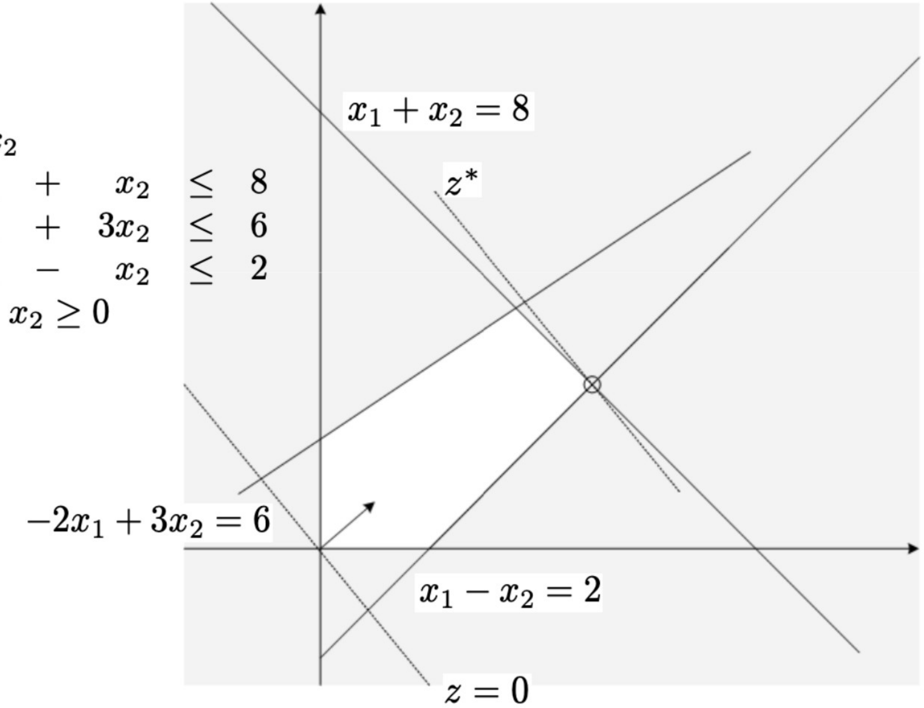
Pouvez vous résoudre ce programme linéaire (PL) graphiquement ?

$$
\begin{array}{ll}
max\ z = & 6x_1 + 5x_2 \\
& \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \end{array} \right. \\
& x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

De PL vers PLNE

Motivation

$$\max z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$



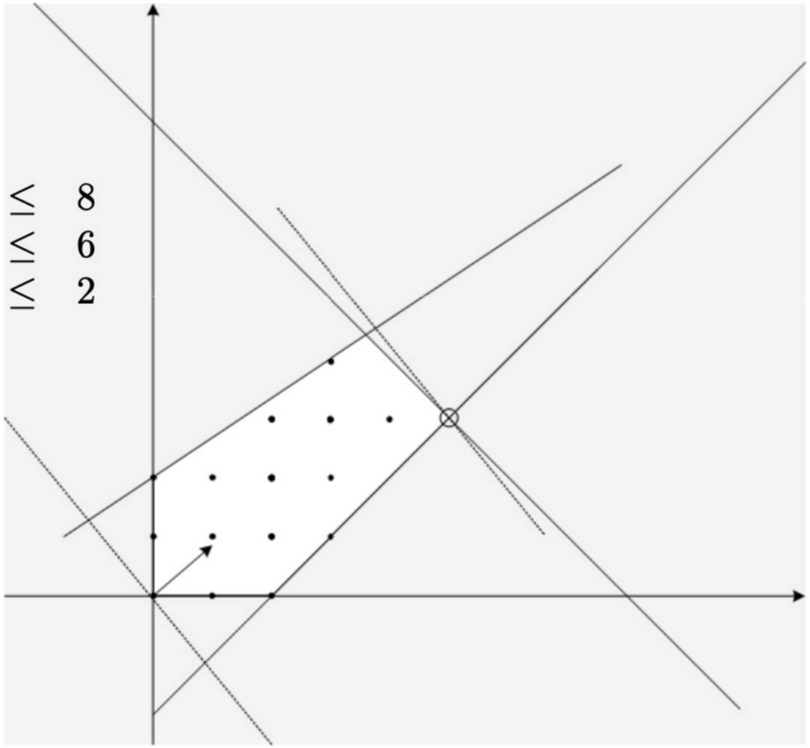
On peut aussi avec la méthode du simplex !

De PL vers PLNE

Motivation

Maintenant imaginons :

$$max\ z = \quad 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$\boxed{x_1 \in \mathbb{N}\ ,\ x_2 \in \mathbb{N}}$$



Que ce passe t'il lors du simplexe ?

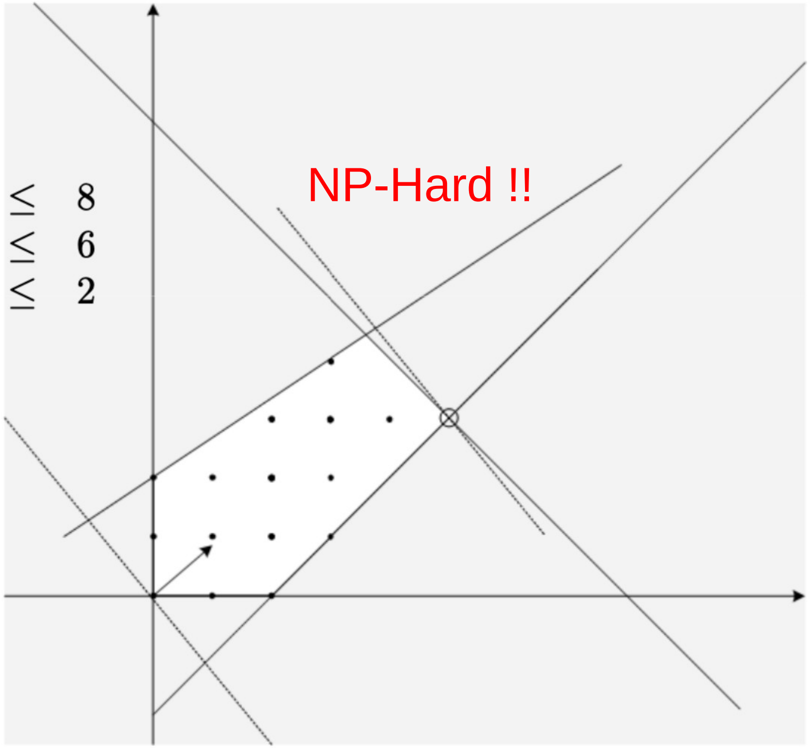
Les différentes bases ne sont plus des points solutions possibles car non entières.

De PL vers PLNE

Motivation

Maintenant imaginons :

$$max\ z = \quad 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$
$$x_1 \in \mathbb{N}\ ,\ x_2 \in \mathbb{N}$$



Que ce passe t'il lors du simplexe ?

Les différentes bases ne sont plus des points solutions possibles car non entières.

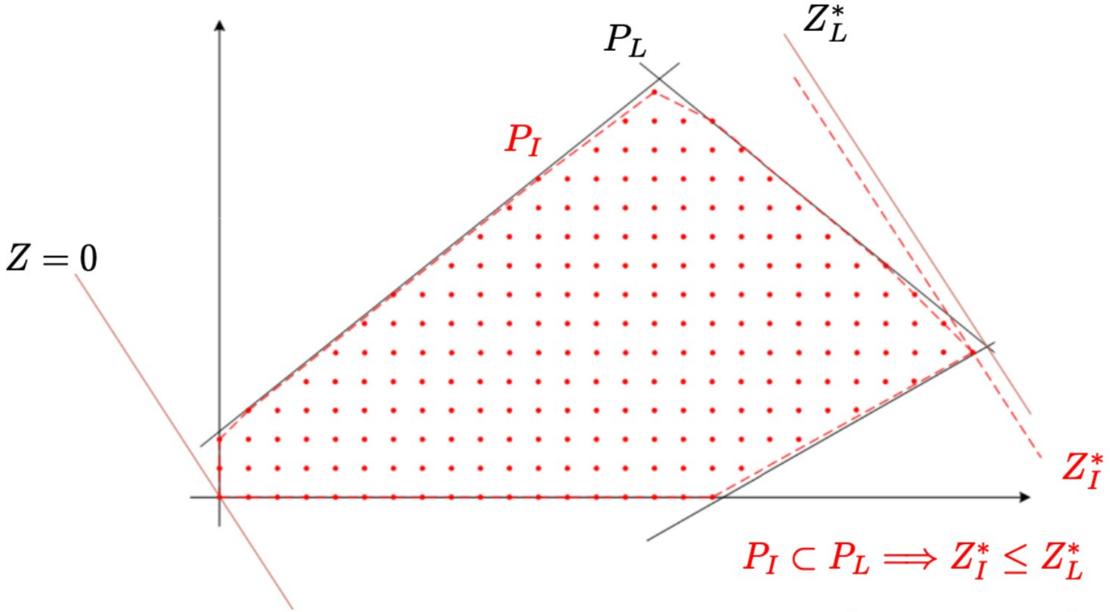
Trouver le sous polyèdre ne contenant que des solutions avec des valeurs entières est extrêmement difficile !

De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$$

$$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$$



$$P_I \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_L^*$$

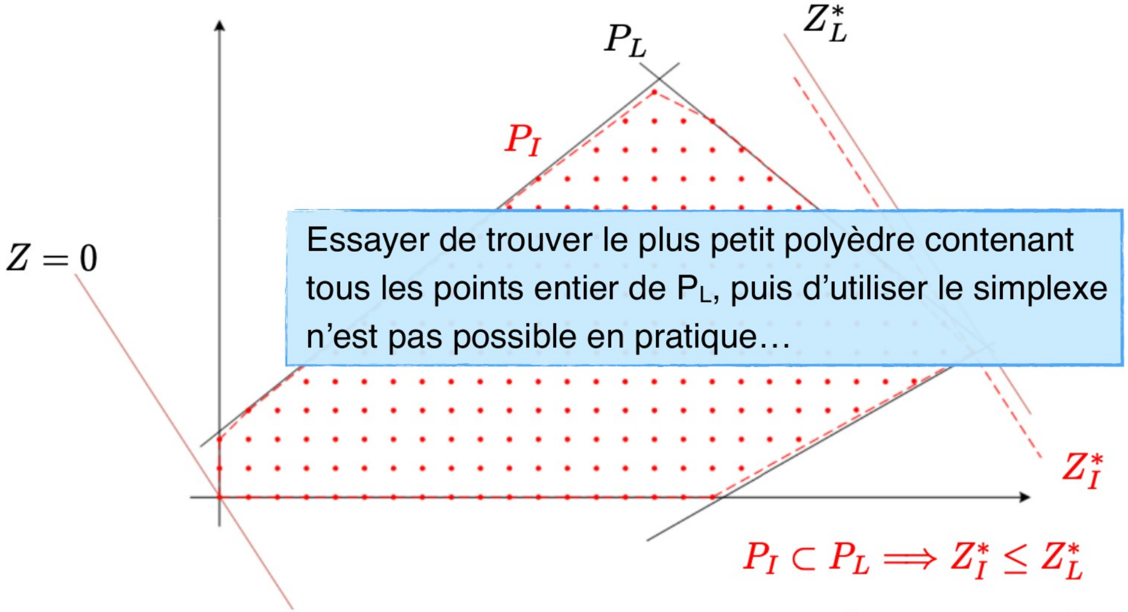
P_L est appelé relaxation linéaire de P_I

De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$$

$$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$$



Essayer de trouver le plus petit polyèdre contenant tous les points entier de P$_L$, puis d'utiliser le simplexe n'est pas possible en pratique…

$$P_I \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_L^*$$

P$_L$ est appelé relaxation linéaire de P$_I$

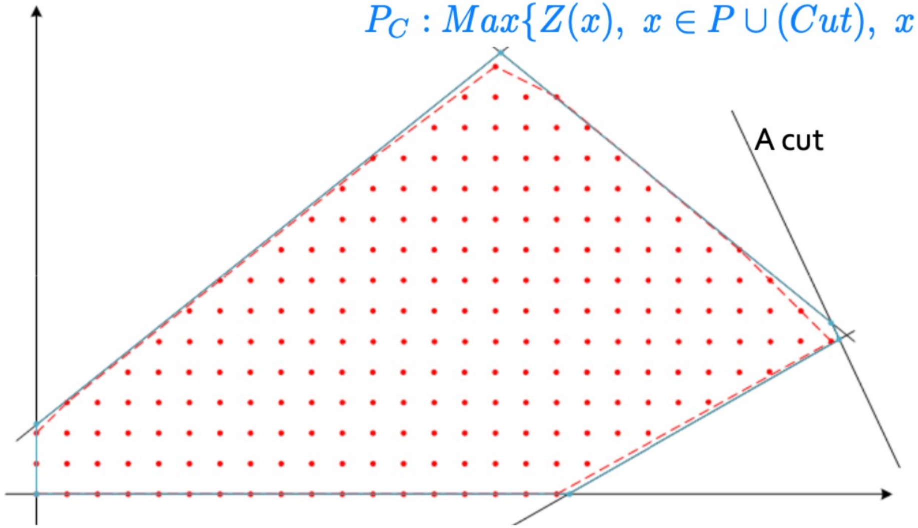
De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$$

$$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$$

$$P_C : Max\{Z(x),\ x \in P \cup (Cut),\ x \geq 0\}$$



Essayer de trouver le plus petit polyèdre contenant tous les points entier de P_L en ajoutant de nouvelles contraintes appelées des *Coupes* (Cut)

$$P_I \subset P_C \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_C^* \leq Z_L^*$$

Branch & Bound

Modélisation en PLNE

Motivation

- La PLNE permet de résoudre beaucoup de problèmes combinatoires
- mais ATTENTION à l'efficacité de la résolution...

Les variables entières sont introduites

- Pour décrire des structures discrètes

  sous-ensemble $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$\Rightarrow$ vecteur indicateur $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

- Pour linéariser des expressions non linéaires

Techniques de Modélisation

1 - *Restriction à un ensemble discret de valeurs*

- x doit prendre sa valeur parmi $\{p_1, p_2 \dots p_k\}$
- On introduit une variable y_i indicatrice de $\{x = p_i\}$
  $y_i \equiv 1$ si $x = p_i$, et 0 sinon

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i y_i \\ y_i \in \{0, 1\} \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots k \end{cases}$$

Techniques de Modélisation

2 - *Contraintes de Seuil*

Contraintes de seuil : si $x > 0$ alors $x \geq K$ (constante)

$$\begin{cases} x \leq My \\ x \geq Ky \qquad \text{où } M \text{ est une constante plus grande que } x \\ y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Techniques de Modélisation

3 - *Implication logique*

Implication logique : $x = 1 \;\Rightarrow\; y = 1$
avec x et y deux variables booléennes $\{0, 1\}$

$$x \leq y$$

4 - *OU logique*

OU logique : x ou y doit être à VRAI
avec x et y deux variables booléennes $\{0, 1\}$

$$x + y \geq 1$$

Techniques de Modélisation

5 - *Objectif avec coût fixe*

x : une variable de décision

Objectif avec coût fixe (fonction affine) : min $f\mathbf{1}_{\{x>0\}} + cx$

- Le coût est composé d'un coût unitaire c et d'un coût fixe f payé uniquement si $x > 0$
- On introduit une variable y indicatrice de $\{x > 0\}$
  $y \equiv 1$ ssi $x > 0$, et 0 sinon

$$\begin{cases} \min fy + cx \\ x \leq My \\ y \in \{0,1\} \end{cases}$$

où M est une constante $\geq x$

Techniques de Modélisation

6 - *Contraintes disjonctives*

- deux taches de durées d_i et d_j doivent être usinées sur une même ressource

$$\begin{cases} t_i + d_i \leq t_j & \text{si } i \text{ est réalisée avant } j \\ t_j + d_j \leq t_i & \text{si } j \text{ est réalisée avant } i \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_i + d_i \leq t_j + M(1 - y_{ij}) \\ t_j + d_j \leq t_i + My_{ij} \\ y_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Techniques de Modélisation

7 - *Termes quadratiques*

- linéariser xx' avec $x, x' \in \{0, 1\}$
- On introduit une variable $y \equiv xx'$
  On doit traduire $y = 1$ ssi $(x = 1 \text{ et } x' = 1)$

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq x' \\ x + x' - 1 \leq y \\ y \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Exercices de Modélisation

1 - *Le journal*

Un rédacteur en chef doit mettre au point la maquette de son journal de 10 pages. Il dispose de pages d'articles classées dans différents thèmes : international, national, fait divers, sports et culture.
On estime que chaque page dédiée à un thème donné est susceptible d'intéresser en moyenne un certain nombre de lecteurs.
Le rédacteur en chef doit choisir les thèmes à traiter ainsi que le nombre de pages à accorder à chacun d'eux de façon à attirer le plus de lecteurs. S'il choisit d'inclure un thème, il doit y consacrer un nombre minimal de pages, correspondant aux articles les plus intéressants.

Le tableau ci-dessous donne les fourchettes de pages ainsi que le nombre moyen de lecteurs intéressés pour chaque thème.

Thèmes	Nb min de pages	Nb max de pages	Lecteurs potentiels (par page)
International	5	9	1500
National	4	7	2000
Faits divers	2	5	1000
Sport	2	4	1500
Culture	1	3	750

Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire en nombre entiers

Exercices de Modélisation

1 - *Le journal*

Variables x_I : Nombre de pages dans le thème ``International''
x_N : Nombre de pages dans le thème ``National''
x_F : Nombre de pages dans le thème ``Faits divers''
x_S : Nombre de pages dans le thème ``Sport''
x_C : Nombre de pages dans le thème ``Culture''

Exercices de Modélisation

1 - *Le journal*

Variables x_I : Nombre de pages dans le thème ``International''
x_N : Nombre de pages dans le thème ``National''
x_F : Nombre de pages dans le thème ``Faits divers''
x_S : Nombre de pages dans le thème ``Sport''
x_C : Nombre de pages dans le thème ``Culture''

$y_i = 1$ si $x_i > 0$ et $y_i = 0$ sinon pour $i = I, N, F, S, C$

Fonction Objectif $\max 1500x_I + 2000x_N + 1000x_F + 1500x_S + 750x_C$

Exercices de Modélisation

1 - *Le journal*

Variables x_I : Nombre de pages dans le thème ``International''

x_N : Nombre de pages dans le thème ``National''

x_F : Nombre de pages dans le thème ``Faits divers''

x_S : Nombre de pages dans le thème ``Sport''

x_C : Nombre de pages dans le thème ``Culture''

$y_i = 1$ si $x_i > 0$ et $y_i = 0$ sinon pour $i = I, N, F, S, C$

Fonction Objectif $\max 1500x_I + 2000x_N + 1000x_F + 1500x_S + 750x_C$

Contraintes

$$
\begin{aligned}
& x_I + x_N + x_F + x_S + x_C = 10 \\
& 5y_I \leq x_I \leq 9y_I \\
& 4y_N \leq x_N \leq 7y_N \\
& 2y_F \leq x_F \leq 5y_F \\
& 2y_S \leq x_S \leq 4y_S \\
& y_C \leq x_C \leq 3y_C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_I, x_N, x_F, x_S, x_C \geq 0 \\
& y_I, y_N, y_F, y_S, y_C \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Exercices de Modélisation

2 - *Au charbon !*

On mélange des charbons dans un haut fourneau où ensuite, une réaction à haute température produit le coke. Il y a 8 charbons disponibles. Ces charbons sont entrés par des bandes porteuses qui sont au nombre de 4 (exactement 4 charbons différents dans le mélange).
Si un charbon est dans le mélange, il doit l'être à hauteur de minimum 5%. On exige que la teneur du mélange en Silicium (Si) soit d'au plus 1,8 %.
Finalement, si le charbon C1 est dans le mélange, alors C3 doit y être également. De même, si le charbon C4 est utilisé, alors le charbon C6 doit être utilisé également. On veut déterminer un mélange qui est de coût minimum.

Le tableau suivant reprend les prix et teneur en Silicium des charbons

Charbon	**Prix**	**Teneur Si**
Charbon 1	12	2%
Charbon 2	14	2,5%
Charbon 3	17	1%
Charbon 4	10	5%
Charbon 5	13	1%
Charbon 6	9	5%
Charbon 7	15	2%
Charbon 8	11	1,5%

Formulez le problème comme un programme linéaire en nombre entiers

Exercices de Modélisation

2 - *Au charbon !*

x_i = Proportion de charbon i dans le mélange
$y_i = 1$ si le charbon i est dans le mélange, 0 sinon

$\min \sum c_i x_i$
s.c.

$$\sum y_i = 4$$

$$x_i \geq 0.05 y_i$$

$$\sum s_i x_i \leq 1.8\%$$

$$x_i \leq y_i$$

$$\sum x_i = 1$$

$$y_1 \leq y_3$$

$$y_4 \leq y_6$$

$$x_i \geq 0 \qquad y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, 2...8$$

où c_i est le prix du charbon i et s_i est la teneur en silicium du charbon i.

solution optimale : $x_6 = 0,085$ et $x_8 = 91\%$

where c_i is the coal i price and s_i is the sillicium content of coal i.

optimal solution: $x_6 = 0,085$ and $x_8 = 91\%$

Techniques de Modélisation

8 - *Modélisation d'un Min de max*

Comment modéliser une fonction objectif qui consisterait à minimiser le maximum de plusieurs quantités. Par exemple, pour minimiser la charge maximum de plusieurs machines.

On cherche donc à écrire en programmation linéaire la fonction objectif suivante:

$$\min \max(x, y, z)$$

Celle ci n'est pas linéaire mais on peut s'en sortir facilement de la façon suivante:

Techniques de Modélisation

8 - *Modélisation d'un Min de max*

Comment modéliser une fonction objectif qui consisterait à minimiser le maximum de plusieurs quantités. Par exemple, pour minimiser la charge maximum de plusieurs machines.

On cherche donc à écrire en programmation linéaire la fonction objectif suivante:

$$\min \max(x, y, z)$$

Celle ci n'est pas linéaire mais on peut s'en sortir facilement de la façon suivante:

$$\min w$$

$$x \leq w$$

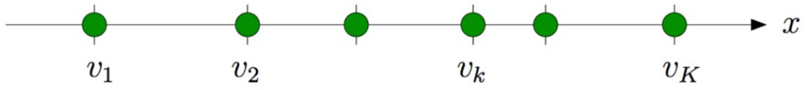
$$y \leq w$$

$$z \leq w$$

9 - *Modélisation d'un domaine discret de valeurs*

Considérons une variable x dont le domaine est l'union d'un ensemble de valeurs entières:

$$x \in \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_K\}$$



On définit pour tout k, une variable binaire y_k =1 si $x = v_k$ et 0 sinon.

La modélisation d'un domaine discret de valeurs peut se faire en PLNE de la façon suivante :

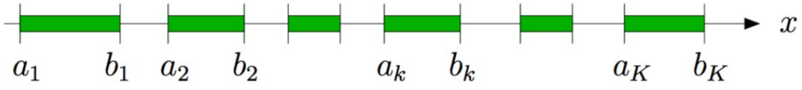
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} y_k = 1 \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} v_k \; y_k \\ x \in \mathbb{R}, \; y_k \in \{0,1\} \qquad \forall k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Techniques de Modélisation

10 - *Modélisation d'un domaine définit comme une union d'intervalles*

Considérons une variable x dont le domaine est l'union d'un ensemble d'intervalles :

$x \in \bigcup_{k=1}^{K} [a_k, b_k]$



On définit, pour tout k, une variable binaire y_k=1 si $x \in [a_k, b_k]$ et 0 sinon.
On définit également une variable réelle x_k qui sera égale à x si $x \in [a_k, b_k]$ et à 0 sinon.

La modélisation d'une union d'intervalles peut se faire en PLNE de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} y_k = 1 & \\ a_k\, y_k \leq x_k \leq b_k\, y_k & \forall k = 1, \ldots, K \\ x = \sum_{k=1}^{K} x_k & \\ x \in \mathbb{R},\ x_k \in \mathbb{R},\ y_k \in \{0, 1\} & \forall k = 1, \ldots, K \end{cases}$$