Résolution exacte via un Branch and Bound

Leandro MONTERO
lmontero@uco.fr

M2 MIASHS

*basé sur le cours de Gilles Simonin

Présentation

Connaissances visées

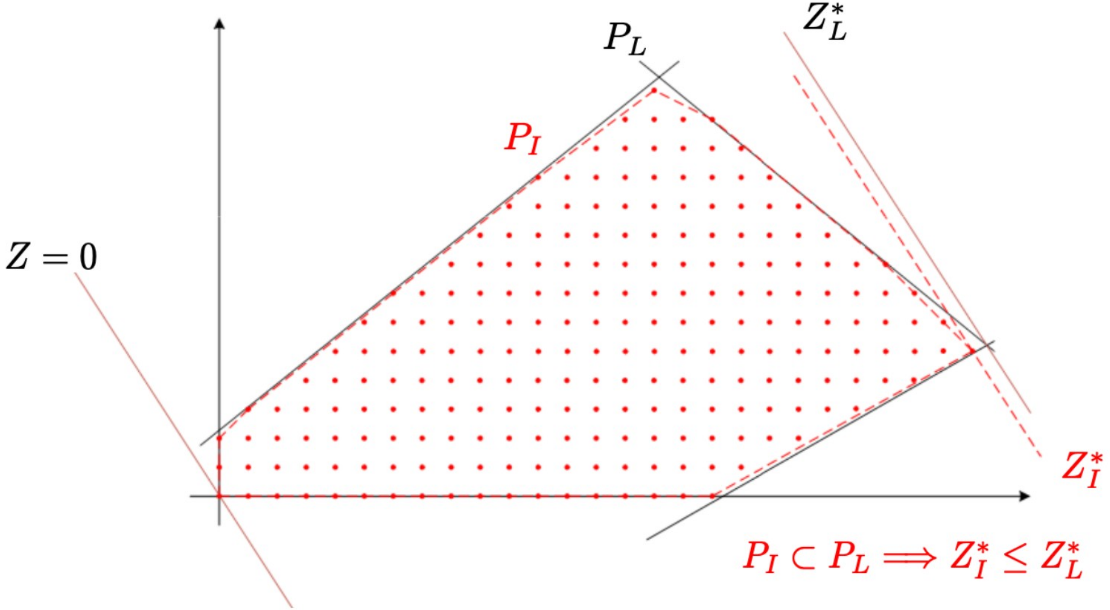
- Utiliser une relaxation linéaire pour résoudre un PLNE via des sous PL
- Compréhension de la technique de base
- Maitrise la résolution en utilisant des bornes inférieures et supérieures

De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$

$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$



$P_I \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_L^*$

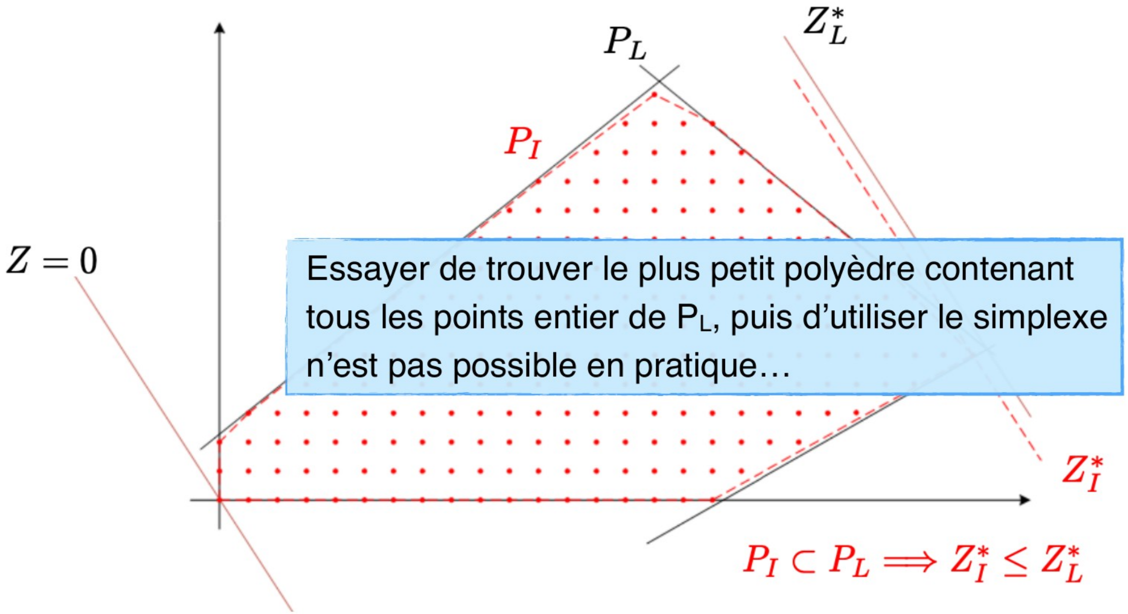
P_L est appelé **relaxation linéaire** de P_I

De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$

$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$



Essayer de trouver le plus petit polyèdre contenant tous les points entier de P_L, puis d'utiliser le simplexe n'est pas possible en pratique…

$P_I \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_L^*$

P_L est appelé **relaxation linéaire** de P_I

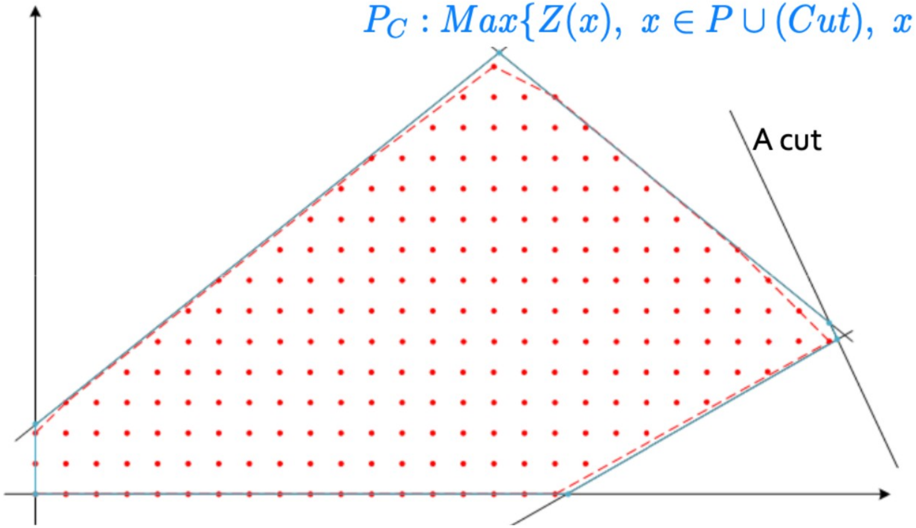
De PL vers PLNE

Chercher un sous Polyèdre

$P_L : Max\{Z(x),\ x \in P\ x \geq 0\}$

$P_I : Max\{Z(x),\ x \in P,\ x\ integer\}$

$P_C : Max\{Z(x),\ x \in P \cup (Cut),\ x \geq 0\}$



Essayer de trouver le plus petit polyèdre contenant tous les points entier de P_L en ajoutant de nouvelles contraintes appelées des *Coupes* (Cut)

$$P_I \subset P_C \subset P_L \Longrightarrow Z_I^* \leq Z_C^* \leq Z_L^*$$

Branch & Bound

La méthode du Branch and Bound

Définition

Cette méthode a été développée pour de la programmation en nombres entier

$$\min_{x \in S \subset \mathbb{N}^n} F(x)$$

Pour réduire l'exploration des solutions dans S, on utilise le principe de division :

- À chaque étape , l'ensemble S est divisé en un nombre fini de sous ensemble $S^{(i)}$ tel que $\bigcup_{i=1}^{p} S^{(i)} = S$
- En général, $S^{(i)} \cap S^{(j)} = \emptyset \quad \forall (i,j),\ i \neq j$, et dans ce cas le problème général se réduit à étudier p problèmes de la forme :

$$\min_{x \in S^{(i)} \subset \mathbb{N}^n} F(x) \longrightarrow$$

Utiliser la méthode du Simplexe pour le résoudre

La méthode du Branch and Bound

Définition

Cette méthode a été développée pour de la programmation en nombres entier

$$\min_{x \in S \subset \mathbb{N}^n} F(x)$$

Pour réduire l'exploration des solutions dans S, on utilise le principe de division :

- À chaque étape , l'ensemble S est divisé en un nombre fini de sous ensemble $S^{(i)}$
  tel que $\bigcup_{i=1}^{p} S^{(i)} = S$
- En général, $S^{(i)} \cap S^{(j)} = \emptyset \quad \forall (i,j),\ i \neq j$, et dans ce cas le problème général
  se réduit à étudier p problèmes de la forme :

$$\min_{x \in S^{(i)} \subset \mathbb{N}^n} F(x) \longrightarrow$$ Utiliser la méthode du Simplexe pour le résoudre

Le nombre de sous problèmes est exponentiel !

La méthode du Branch and Bound

Exemple

$$\max z = 15x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

subject to

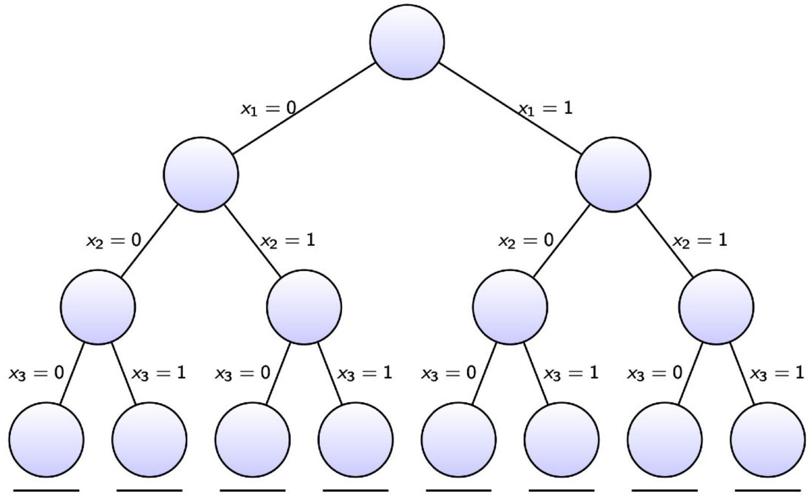
$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_k \in \{0, 1\} \text{ for } k = 1...3$$

Comment résoudre ce problème ?

Une possibilité est d'utiliser une énumération en arborescence.

Cela permet d'énumérer toutes les solutions possibles d'un programme linéaire en nombre entier



La méthode du Branch and Bound

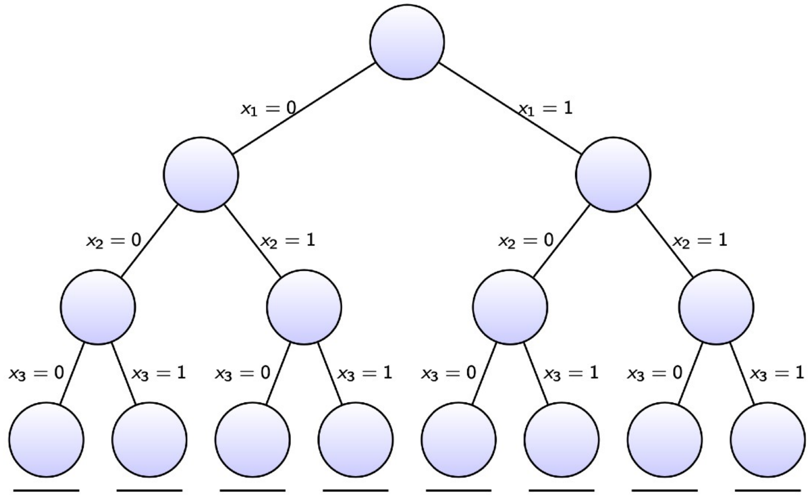
Exemple

$$\max z = 15x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

subject to

$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$x_k \in \{0,1\} \text{ for } k = 1...3$$

- Solution for $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
- Solution for $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$
- Solution for $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$
- Solution for $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$
- Solution for $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$
- Solution for $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$
- Solution for $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$
- Solution for $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$



Quelle est la solution optimale ?

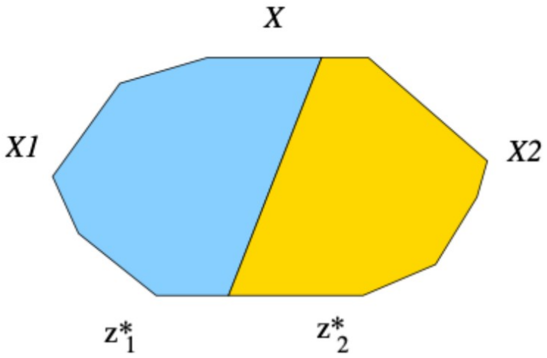
Est-il nécessaire et efficace d'évaluer toutes les possibilités ?

La méthode du Branch and Bound

Principe

- Le Branch and Bound est basé sur une énumération intelligente des solutions réalisables
- L'idée est de prouver l'optimalité d'une solution en partitionnant l'espace des solutions

- On veut résoudre $z^* = \max\{cx \mid x \in X\}$
- Si on partitionne X en (X_1, X_2)
- Alors $z^* = \max\{z_1^*, z_2^*\}$



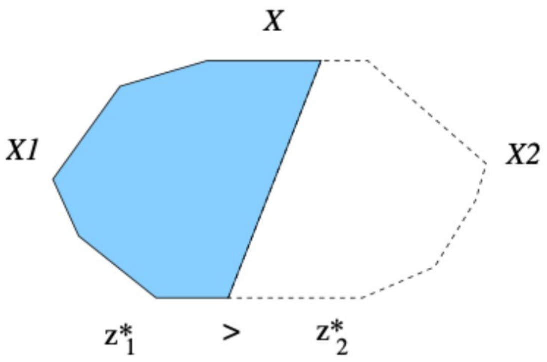
La méthode du Branch and Bound

Principe

- Le Branch and Bound est basé sur une énumération intelligente des solutions réalisables
- L'idée est de prouver l'optimalité d'une solution en partitionnant l'espace des solutions

- Si $z_1^* > z_2^*$
- Alors il est inutile d'explorer le sous-ensemble X_2

$\Rightarrow$ X_2 ne contient pas de solution optimale.



La méthode du Branch and Bound

Principe

- Le Branch and Bound est basé sur une énumération intelligente des solutions réalisables
- L'idée est de prouver l'optimalité d'une solution en partitionnant l'espace des solutions
- Comment déterminer qu'il est inutile d'explorer X_2 sans calculer z_2^* ?
  - Estimation (par borne supérieure) de la valeur de z_2^*.

Pour un PLNE, une **Borne Supérieure** est donnée par sa relaxation linéaire

Résoudre sa forme PL

$$\begin{array}{l} \max\ c^T \mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \text{ entier} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \max\ c^T \mathbf{x} \\ A.\mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

La méthode du Branch and Bound

Principe

- Le Branch and Bound est basé sur une énumération intelligente des solutions réalisables
- L'idée est de prouver l'optimalité d'une solution en partitionnant l'espace des solutions
- Comment déterminer qu'il est inutile d'explorer X_2 sans calculer z_2^* ?
  - Estimation (par borne supérieure) de la valeur de z_2^*.

Pour un PLNE, une **Borne Supérieure** est donnée par sa relaxation linéaire

Résoudre sa forme PL

Propriétés sur la relaxation linéaire d'un problème de maximisation :

- La valeur d'une solution optimale d'un PL est une Borne Sup de la valeur optimale de la version PLNE
- La valeur d'une solution réalisable d'un PLNE donne une Borne Inf de la valeur optimale de la version PL
- Si la solution optimale d'un PL est entière, alors cette solution est optimale pour la version PLNE

La méthode du Branch and Bound

Énumération arborescente implicite

Pour résoudre $z^* = \max\{cx \mid x \in X\}$

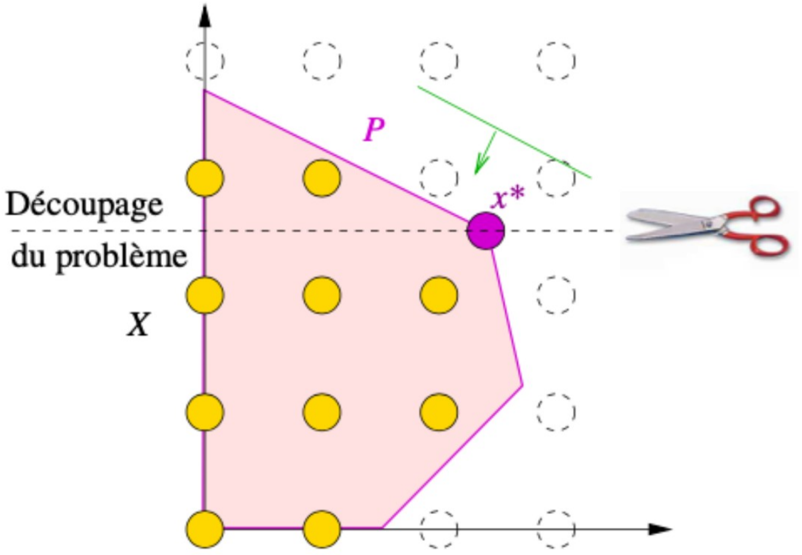
- On découpe l'ensemble des solutions X
- Sur chaque $Y \subseteq X$, on calcule une borne supérieure $B(Y)$ de l'optimum $z^*(Y)$.
- Si $B(Y) \leq$ à la meilleure solution trouvée, alors on élague Y
- Sinon on découpe récursivement Y

La méthode du Branch and Bound

Comment découper l'espace des solutions ?

On résout la relaxation linéaire du problème sur X à l'optimum

- Si la solution x^* est entière, on a trouvé l'optimum sur X
- Sinon pour une variable (au moins) on a : $a < x_i^* < a + 1$

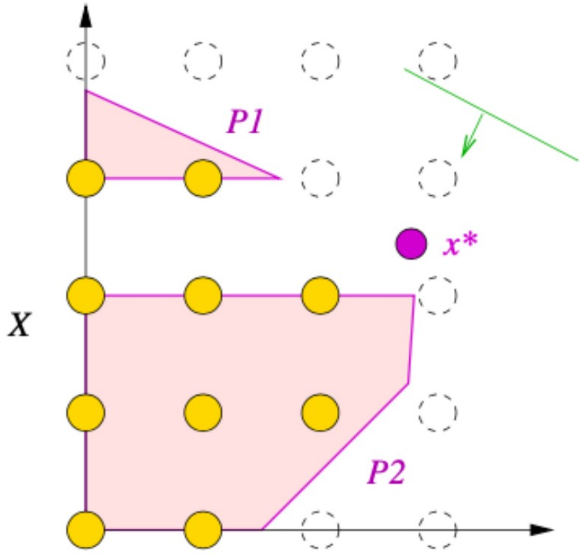


La méthode du Branch and Bound

Branchement sur une variable fractionnaire

On partitionne X en deux nouveaux sous-problèmes :

- $X_1 = x \in X$ et $x_i \leq a$
- $X_2 = x \in X$ et $a + 1 \geq x_i$

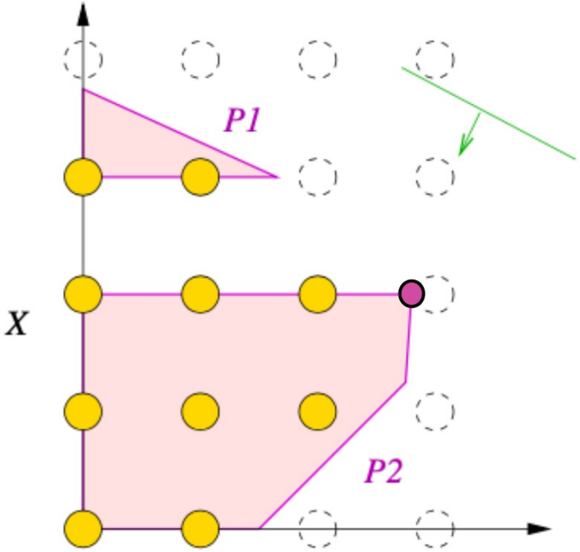


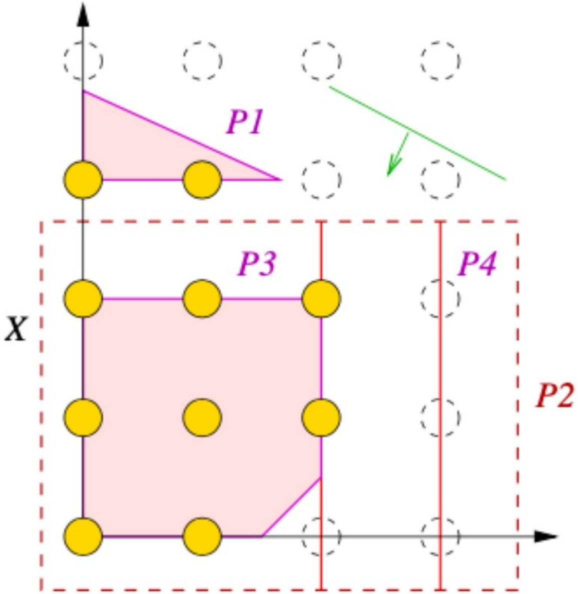
La méthode du Branch and Bound

Exploration de l'ensemble X_2 de solutions

On recherche la meilleure solution sur X_2 :

- On résout la relaxation linéaire sur P_2
- On partitionne en 2 nouveaux sous-problèmes



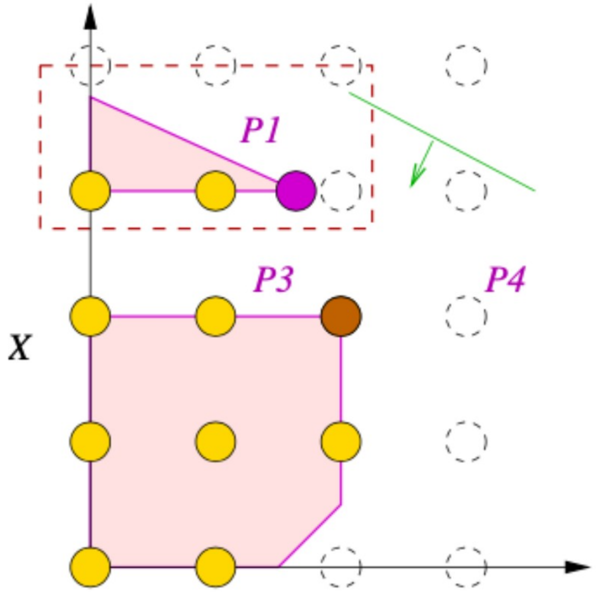


La méthode du Branch and Bound

Exploration de l'ensemble X_1 de solutions

On a trouvé la solution optimale sur X_2

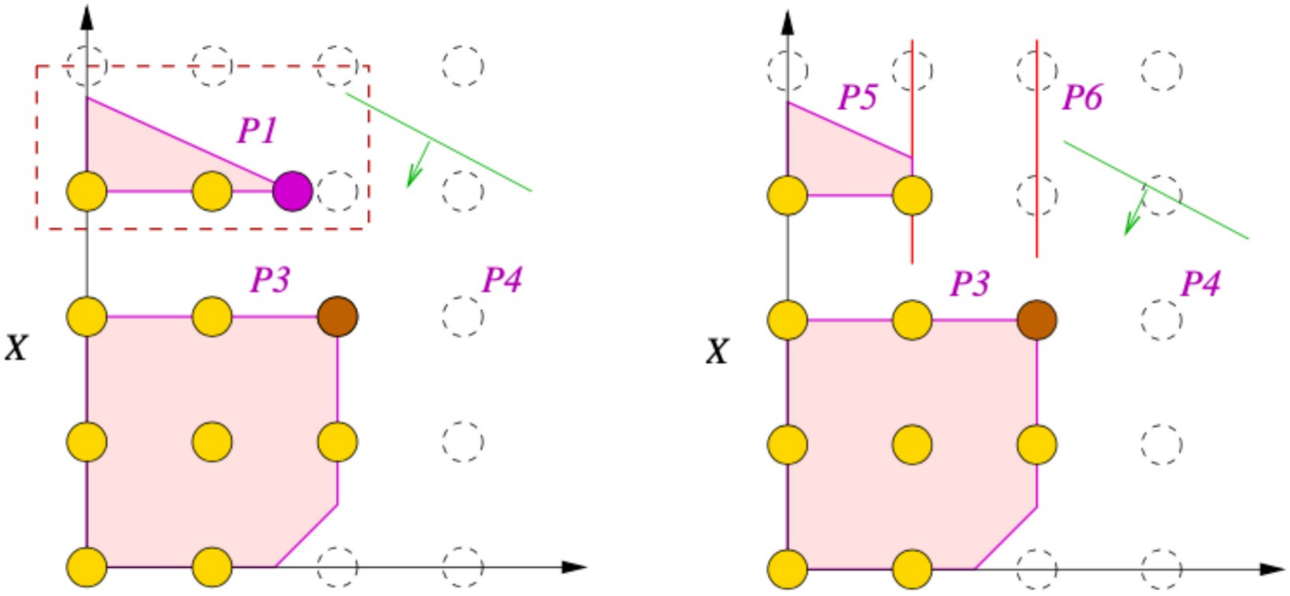
- Existe-t-il une meilleure solution sur X_1 ?
- La borne supérieure ne nous permet pas d'élaguer X_1



La méthode du Branch and Bound

Exploration de l'ensemble X_1 de solutions
On recherche la meilleure solution sur X_1 :

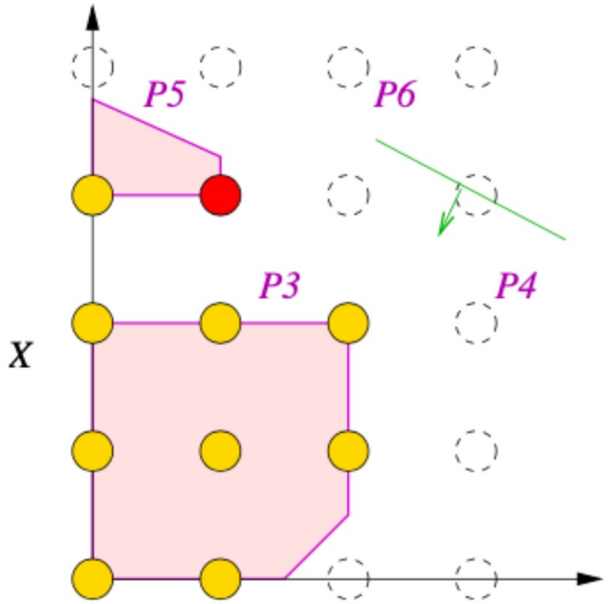
- On partitionne en 2 nouveaux sous-problèmes



La méthode du Branch and Bound

Fin du Branch & Bound

- La solution optimale sur X est la meilleure des 2 solutions trouvées sur X_1 et X_2.



La méthode du Branch and Bound

1. résoudre la relaxation linéaire
2. brancher sur une variable non entière (à choisir)
   $\rightarrow$ 2 sous problèmes
3. diviser à nouveau un nœud fils en deux ($\neq$ choix possibles)
4. continuer à séparer sur les nœuds dont la valeur est $>$ à la borne inf jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de branchement possible

On coupe une branche si

- La relaxation linéaire n'a pas de solution
- la relaxation linéaire donne une solution entière
- la valeur de la borne supérieure est inférieure à la valeur de la meilleure solution entière obtenue

Note : On ne peut rien couper tant qu'on n'a pas de solution disponible

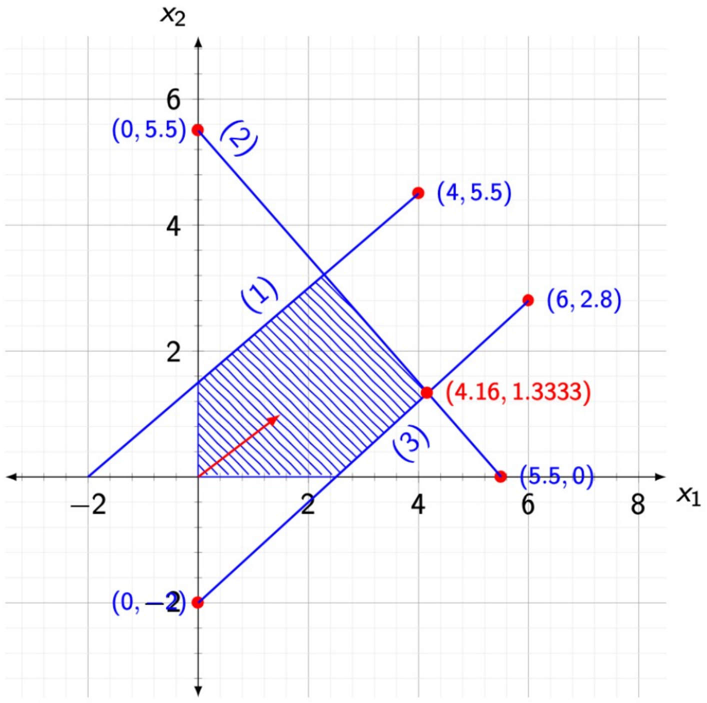
La méthode du Branch and Bound

Exemple

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 2x_2 \\
s.c. \; -3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\
4x_1 - 5x_2 &\leq 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

La méthode du Branch and Bound

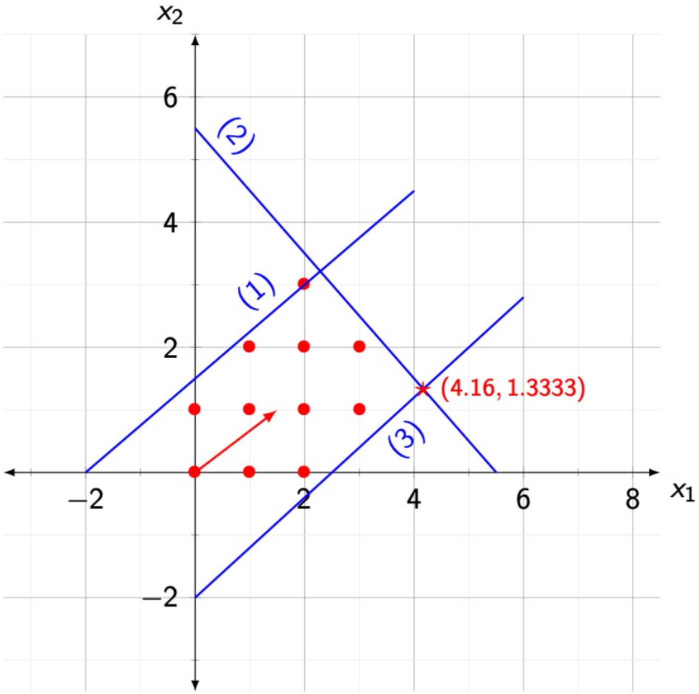
Exemple



La méthode du Branch and Bound

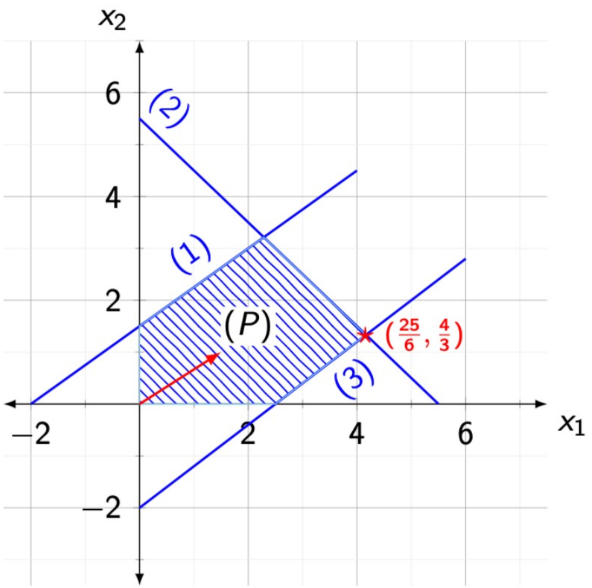
Exemple

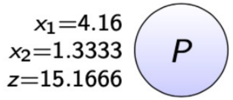
On veut résoudre le problème avec des solutions entières :



La méthode du Branch and Bound

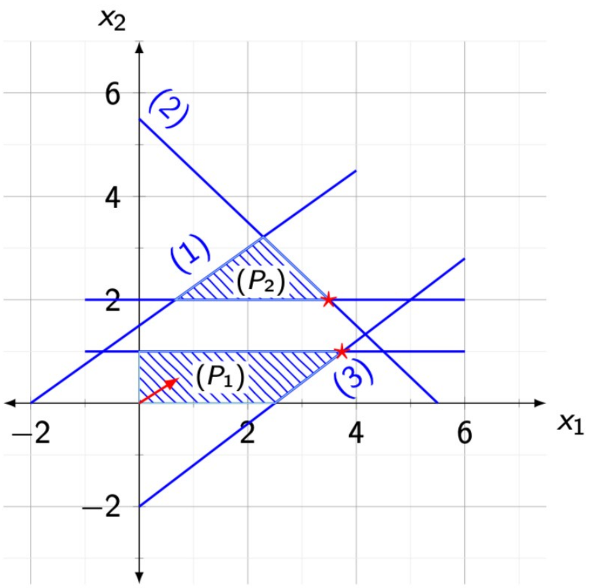
Exemple

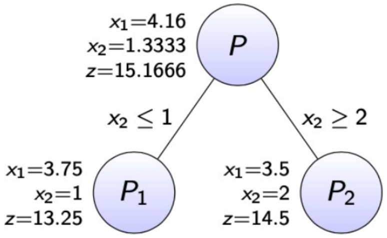




La méthode du Branch and Bound

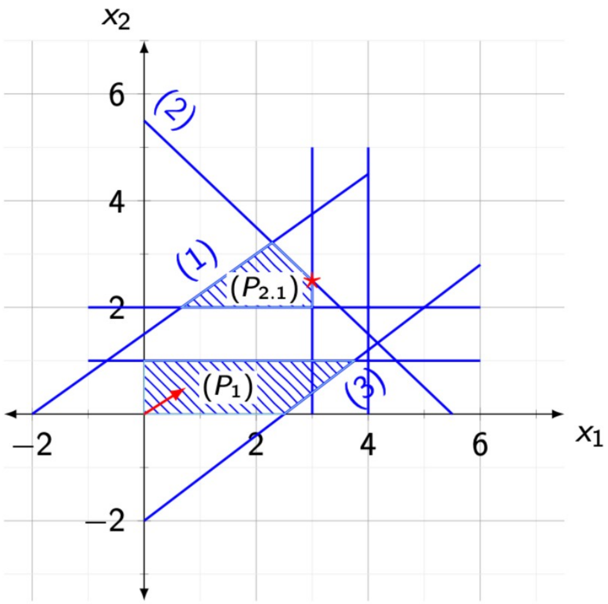
Exemple

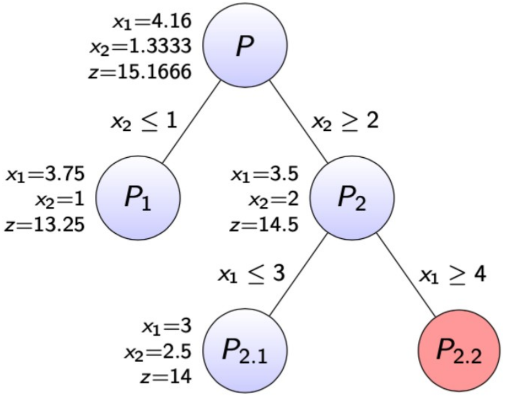




La méthode du Branch and Bound

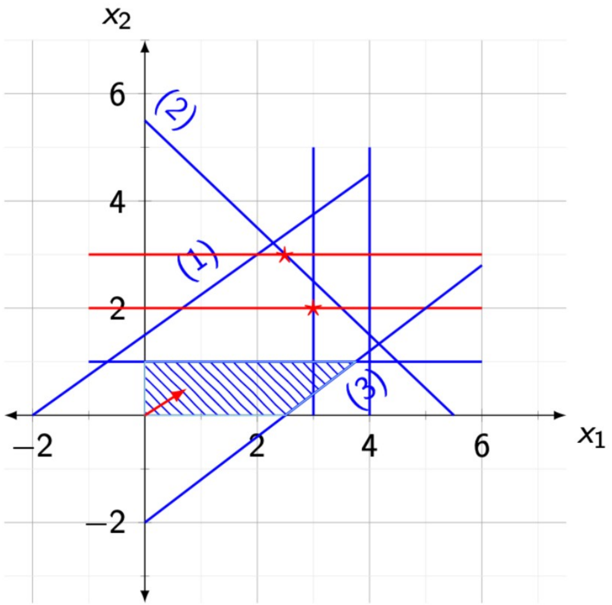
Exemple

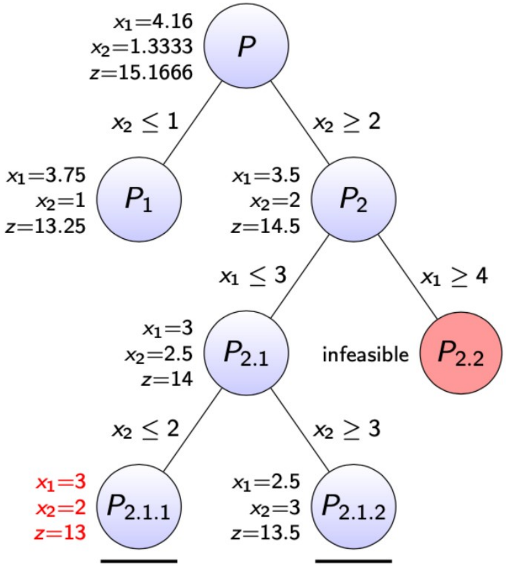




La méthode du Branch and Bound

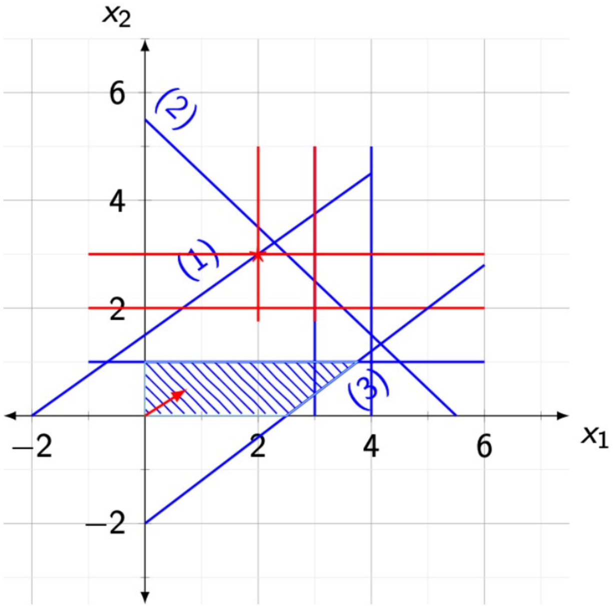
Exemple

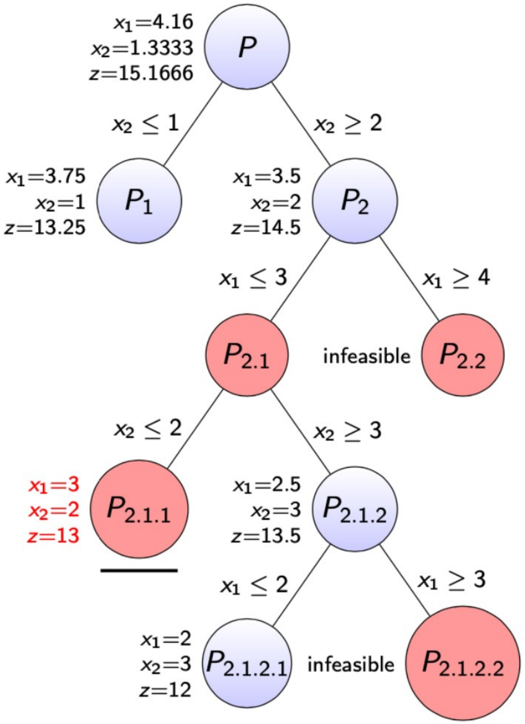




La méthode du Branch and Bound

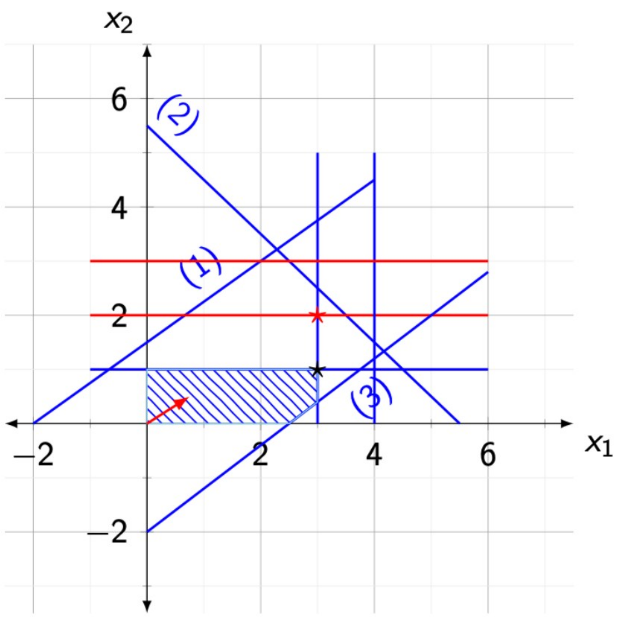
Exemple

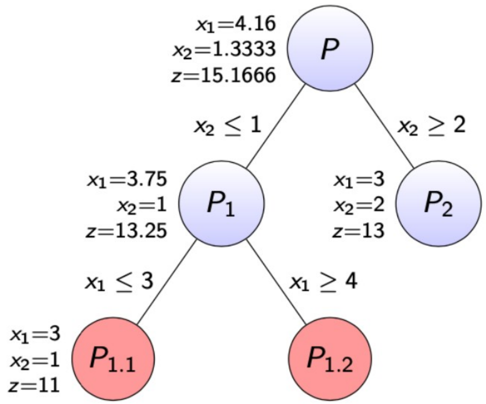




La méthode du Branch and Bound

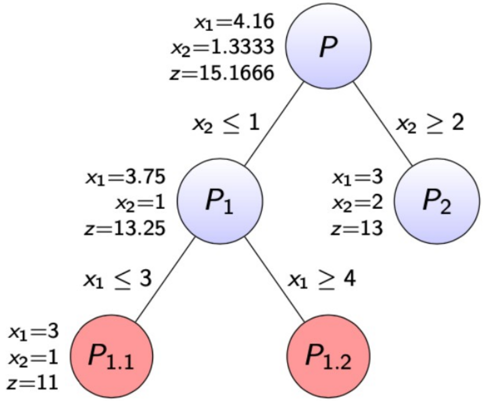
Exemple

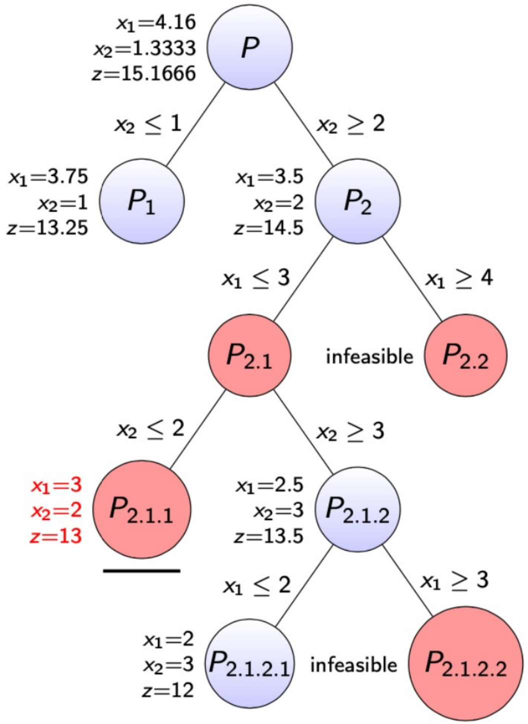


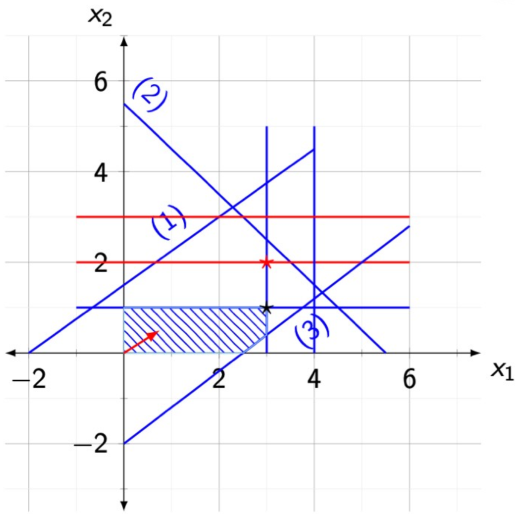


La méthode du Branch and Bound

Exemple







<u>Solution optimale</u> :

$$x_1^* = 3$$
$$x_2^* = 2$$
$$z = 13$$

Exercice

Utilisez la méthode Branch and Bound avec de relaxations linéaires comme bornes supérieures pour résoudre ce PLNE :

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
s.c. \quad & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\
& 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{entiers}
\end{aligned}$$

Exercice

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.c. \quad 5x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$4x_1 + 9x_2 \leq 36$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{entiers}$$