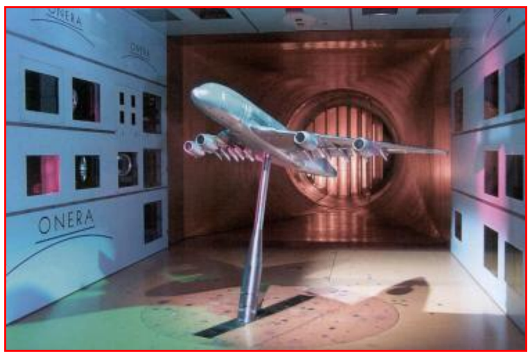
Optimisation Combinatoire

I - Modélisation mathématique



Leandro Montero
(basé sur les cours de Eric Pinson)

Institut de Mathématiques Appliquées
Université Catholique de l'Ouest
Angers - France

UCO ANGERS
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE L'OUEST

M2 MIASHS

IMA Mathématiques Appliquées

Modélisation Mathématique

La notion de modèle

Modèle = construction qui a pour but de représenter ou reproduire les caractéristiques et le fonctionnement d'un système étudié (une partie ou un aspect du monde réel).

Modèles concrets ou physiques

maquettes en ingénierie aéronautique

Des expériences réalisées sur la maquette, on peut extrapoler des comportements de l'objet modélisé dans la réalité

- Réduction de coûts
- Souvent limitée à des domaines technologiques

Modèles abstraits ou conceptuels

$$
\begin{array}{llr}
(PM) min & \sum_{i\in]n],k\in]p]} c_i x_{ik} & \\
s.c. & \sum_{k\in]p]} x_{ik} \geq d_i & \forall i \in]n] \\
 & \sum_{j\in]m]} y_{kj} = 1 & \forall k \in]p] \\
 & \frac{1}{b_j} \sum_{k\in]p],i\in]n]} \tau_i^c x_{ik} y_{kj} \geq u_j^c & \forall j \in]m], \forall c \in]q] \\
 & \frac{1}{b_j} \sum_{k\in]p],i\in]n]} \tau_i^c x_{ik} y_{kj} \leq v_j^c & \forall j \in]m], \forall c \in]q] \\
 & \sum_{k\in]p],i\in]n]} x_{ik} y_{kj} = b_j & \forall j \in]m] \\
 & x_{ik} \geq 0 & \forall i \in]n], \forall k \in]p] \\
 & y_{kj} \geq 0 & \forall j \in]m], \forall k \in]p]
\end{array}
$$

Un traitement symbolique ou numérique du modèle mathématique permet d'établir une prédiction quant au comportement du système réel.

Utilisent le plus souvent un formalisme mathématique

Modélisation Mathématique

La notion de modèle

Un modèle mathématique est typiquement constitué :

- de paramètres le caractérisant,
- de variables décrivant l'état du modèle (variables d'état),
- de variables influant sur les variables d'état du modèle (variables de commande, de contrôle ou de décision),
- de relations mathématiques liant entre elles, les variables (équations, inégalités, dépendances logiques, etc., en général on leur donne le nom de contraintes).

Ces dernières permettent, habituellement par calcul, de déduire les valeurs des variables d'état en fonction des variables de décision et des paramètres.

Modélisation Mathématique

Principales raisons d'un recours à des modèles mathématiques :

- La démarche de construction du modèle peut faire découvrir des relations qui ne sont pas évidentes. Par son exercice, le modélisateur arrive à une meilleure perception de l'objet étudié, et force le décideur à précisément formuler sa problématique.
- Un traitement mathématique du modèle peut fournir au modélisateur des informations qu'il ne pourrait pas obtenir autrement, en particulier des actions ou décisions concernant l'objet de la modélisation.
- L'expérimentation ou la simulation peut être envisageable dans le cas du modèle alors qu'impraticable dans la réalité (coûts, risques,…).
- La modélisation peut ramener la solution de problèmes/phénomènes/situations apparemment très différents à celle d'un même problème mathématique.

Modélisation Mathématique

Démarche suivie par le « modélisateur » (succinctement) :

- Identifier les aspects pertinents du problème réel analysé.
- Formuler un modèle mathématique qui englobe les aspects relevés.
- Rassembler les données (valeurs de paramètres) nécessaires au modèle.
- Résoudre des instances du modèle en ayant recours à un algorithme.
- Utiliser les informations provenant de la résolution du modèle afin d'entreprendre une action concernant ce qui est modélisé (prise de décision).

Modélisation Mathématique

Formulation du modèle mathématique

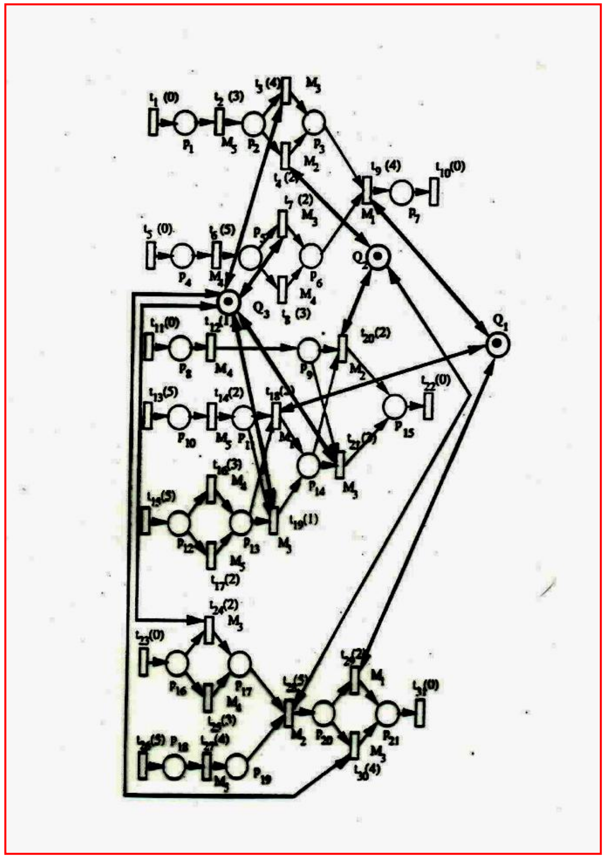
- Définir le problème
  - Quelle est la nature exacte du problème?
  - Quel est l'objectif recherché?
  - Quelles sont les conditions d'opération?
  - Quels sont les paramètres à considérer? Quelle influence?
  - Quel est le degré de précision requis?

Des outils puissants :

- Programmation Mathématique
- PPC
- Graphes
- Réseaux de Petri
- Simulation
- RNF
- …

- **Définir les** variables de décision
  - ensemble des variables qui régissent la situation à modéliser
  - variables réelles, entières, binaires
- **Préciser la** fonction objectif
  - fonction mathématique composée des variables de décision qui représente le modèle physique modélisé
  - fonction linéaire, non-linéaire
- **Préciser les** contraintes **du problème**
  - ensemble des paramètres qui limitent le modèle réalisable
  - équations ou inéquations composées des variables de décision
- **Préciser les** paramètres **du modèle**
  - constantes associées aux contraintes et à la fonction objective

Modélisation Mathématique



Réseau de Petri

$$\textbf{[P]} : \text{ minimiser } \sum_{t\in H} \sum_{k\in V_t} \Big[\sum_{i\in I_k} e_{k-,i}\, x^k_{k-,i} + \sum_{i\in I_k} e_{i,k+}\, x^k_{i,k+} + \sum_{i\in I_k} e_{o,i}\, x^k_{o,i} + \sum_{ij\in I_k} e_{i,j}\, x^k_{i,j}\Big]$$

$$\textit{SC} \left\{ \begin{array}{lll}
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall i\in I^k, & x^k_{o,i} + x^k_{k-,i} + \sum_{j\in I_k} x^k_{j,i} = 1 & \textbf{(1)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall i\in I^k, & x^k_{o,i} = 1 - \sigma^k_i & \textbf{(2)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall i\in I^k, & x^k_{i,k+} + \sum_{j\in I_k} x^k_{i,j} = \sigma^k_i & \textbf{(3)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t, & x^k \in \Delta(I_k \cup \{k^-, k^+, o\}) & \textbf{(4)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t, & \sum_{i\in I_k} q_i \sigma^k_i \le c_k & \textbf{(5)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall ij\in I^k, & x^k_{i,j} = 1 \Rightarrow s^k_j \ge s^k_i + t_{ij} & \textbf{(6)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall i\in I^k, & \sigma^k_i = 1 \Rightarrow r_i \le s^k_i & \textbf{(7)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall i\in I^k, & \sigma^k_i = 1 \Rightarrow s^k_i \le d_i & \textbf{(8)} \\
\forall t\in H,\ \forall k\in V_t,\ \forall ij\in I^k, & \sum_{ij\in I_k} t_{i,j}\, x^k_{i,j} \le f_k & \textbf{(9)} \\
\forall i\in F_8, & \sum_{t\in\{1,2\}} \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i = 1 & \\
\quad \sum_{t\in\{4,5\}} \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i = 1 & & \\
 & \sum_{k\in V_2} \sigma^k_i \le \sum_{k\in V_5} \sigma^k_i & \\
\forall t\in\{1,2,4,5\},\ \forall h\in\{5,10,15\}, & \sum_{k\in V_{t+h}} \sigma^k_i = \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i & \\
\forall i\in F_4, & \sum_{t\in\{1,..,5\}} \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i = 1 & \textbf{CR)} \\
\forall t\in\{1,..,5\},\ \forall h\in\{5,10,15\}, & \sum_{k\in V_{t+h}} \sigma^k_i = \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i & \\
\forall i\in F_2, & \sum_{t\in\{1,..,10\}} \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i = 1 & \\
\forall t\in\{1,..,10\}, & \sum_{k\in V_{t+10}} \sigma^k_i = \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i & \\
\forall i\in F_1, & \sum_{t\in H} \sum_{k\in V_t} \sigma^k_i = 1 & \\
\forall k\in]K],\ \forall ij\in I^k, & x^k_{ij} \in \{0,1\} & \textbf{(10)} \\
\forall k\in]K],\quad \forall i\in I^k, & \sigma^k_i \in \{0,1\} & \textbf{(11)}
\end{array} \right.$$

Programme Linéaire en Variables Bivalentes

Modélisation Mathématique

Programmation Mathématique:

Programmation Linéaire

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ \ f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j\in]n]} c_j x_j\\&\mathrm{Sc}\{\forall i\in]m], g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j\in]n]} a_{ij}x_j\le 0\end{aligned}}$$

Programmation Quadratique

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ \ f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i\in]n]}\sum_{j\in]n]} a_{ij}x_i x_j+\sum_{i\in]n]} b_i x_i\\&\mathrm{Sc}\{\forall i\in]m], g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j\in]n]} c_{ij}x_j\le 0\end{aligned}}$$

$$[PM]:\min f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$\mathrm{Sc}\begin{cases}\forall i\in E, g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\\ \forall i\in I, h_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0\\ \forall j\in]n], x_j\in D_j\end{cases}$$

Programmation Mathématique

- **Déterministe**
  - **Programmation Linéaire**
  - **Programmation Quadratique**
  - **Programmation Non Linéaire**
- **Stochastique**
  - **Programmation Stochastique**
  - **Programmation Robuste**

- **Programmation Convexe, SDP**
- **Programmation Conique**
- **Programmation Multicritère**
- **…**

Modélisation Mathématique

Simulation vs Programmation Mathématique

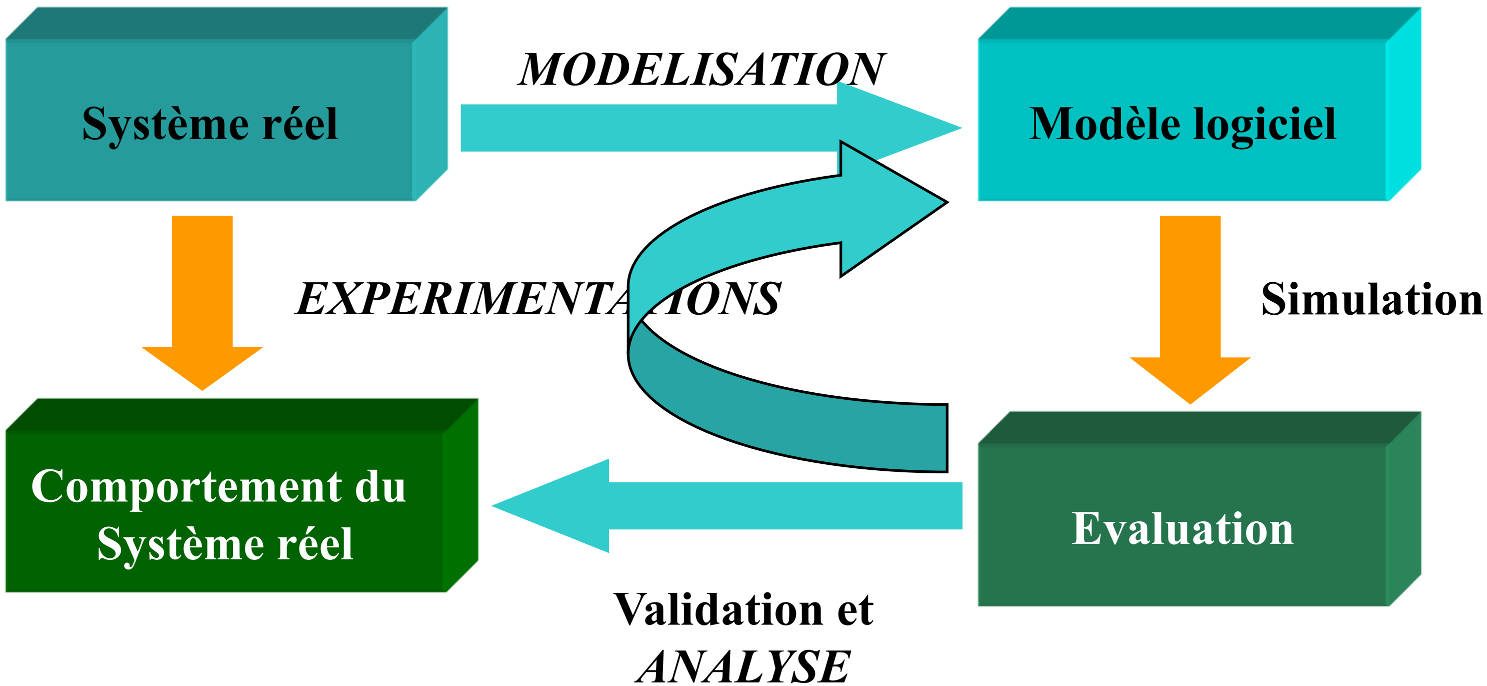
Buts de la Simulation :

- Assister dans la conception ou l'analyse d'un système **avant qu'il ne soit en opération.**
- Assister l'évaluation de stratégies et de politiques **avant leur mise en œuvre.**
- **Comprendre** et apprendre **les caractéristiques et fonctionnement d'un système réel** en expérimentant **à l'aide d'un modèle du système**..
- **Estimer les performances de systèmes complexes** et stochastiques, lorsque des modèles analytiques ne suffisent pas (Techniques d'échantillonnage statistique).
- **Prédire comment un système réagira à des changements dans ses règles de fonctionnement**, dans sa structure, ou dans son environnement.

Modélisation Mathématique

Simulation vs Programmation Mathématique

Processus de Simulation :



Modélisation Mathématique

Simulation vs Programmation Mathématique

Simulation vs Analyse de Scénarios

Analyse de scénarios

- Définition à priori des valeurs pour les données non contrôlables (p.e. valeurs extrêmes)
- Simulation **déterministe** avec ces valeurs
- Choix du scénario donnant le « meilleur » résultat ou identification de stratégies « intéressantes »

Simulation

- Recours à des distributions de probabilités
- Multiples **répétitions** avec des nombres générés aléatoirement
- Analyses statistiques

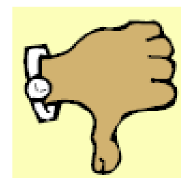
Modélisation Mathématique

Simulation vs Programmation Mathématique

Avantages/Désavantages la simulation

Avantages

- « Facile » à comprendre
- Représentation plus réaliste
- Flexible: peut être utilisée lorsque les conditions ne sont pas adéquates pour les modèles mathématiques



Désavantages

- Long et coûteux à développer, valider et exécuter
- Pas de garantie de « meilleure » solution : estimation d'échantillons
- Ne suggère rien : évalue statistiquement les scénarios fournis

Simulation vs Programmation Mathématique

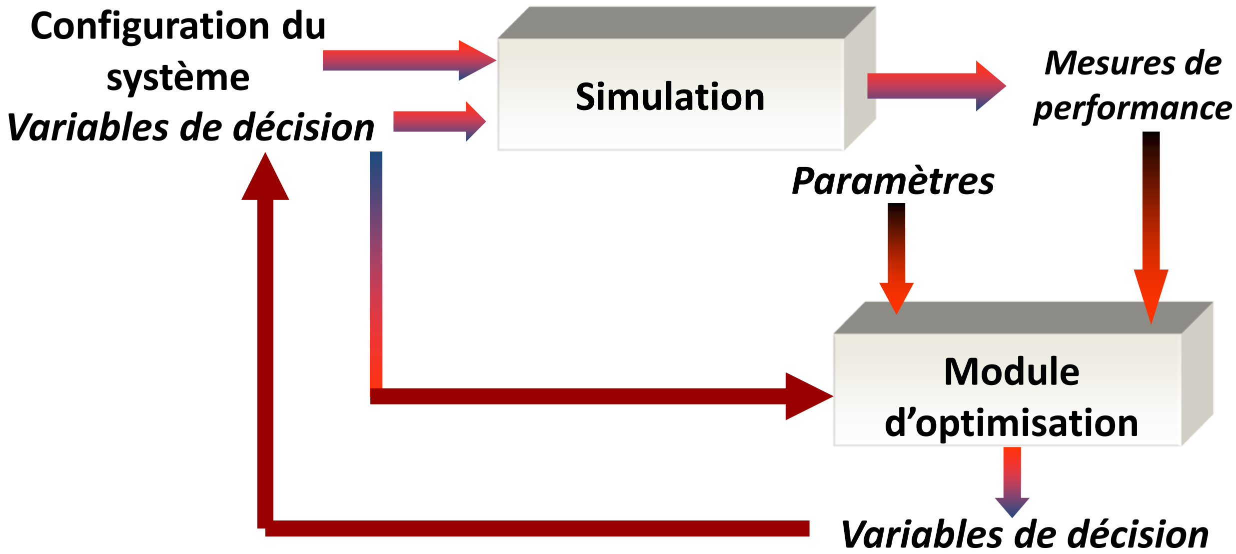
Simulation vs Programmation Mathématique:

- Lorsqu’un modèle mathématique (programmation linéaire, nombres entiers, files d’attente, etc.) peut être construit, c’est probablement mieux que de simuler.
- La simulation peut (devrait) être combinée à la programmation mathématique :
  - Validation de modèle et des résultats.
  - Estimation de paramètres.
  - Optimisation intégrée.

Modélisation Mathématique

Simulation vs Programmation Mathématique

Coopération Optimisation/Simulation :



Atteindre le plus rapidement possible les performances optimales du système

Modélisation Mathématique

Modéliser n'est pas résoudre …

- ***Modéliser n'est pas résoudre !***
- ***Influence de la modélisation sur la résolution***
- ***Satisfaction vs Optimisation***

Modélisation Mathématique

Influence de la modélisation

Exemple : $1/r_j/\sum_j w_j U_j$ ➔ Modèle 1

U_j = 1 si le job j est en retard, 0 sinon

C_j : date de fin d'exécution du job j

- n jobs à ordonnancer sur un processus unique.
- Chaque job j est caractérisé par une durée p_j, une date de démarrage au plus tôt r_j, et une date de fin d'exécution au plus tard (due date) d_j.
- L'objectif est de minimiser le nombre pondéré de jobs en retard, w_j désignant la pénalité associée au job j

i	1	2	3	4
r_i	9	3	1	0
p_i	4	5	5	6
d_i	30	28	26	21

$$\text{Min} \sum_{j \in]n]} w_j U_j$$

$$\text{Sc} \begin{cases} \forall j \in]n], C_j \geq r_j + p_j \\ \forall j \in]n], MU_j \geq C_j - d_j \\ \forall i \in]n], \forall j \in]n], i \neq j, C_j \geq C_i + p_j \vee C_i \geq C_j + p_i \\ \forall j \in]n], U_j \in \{0,1\}, C_j \geq 0 \end{cases}$$

➡ **Modèle disjonctif de base**
Inopérant en pratique

Modélisation Mathématique

Influence de la modélisation

Exemple : $1/r_j/\sum_j w_j U_j$ ➔ Modèle 2

$c_{jt} = w_j$ si $t > d_j$, 0 sinon

$x_{jt} = 1$ si le job j se termine à l'instant t, 0 sinon

y_{jt} = # unités de job j exécutées à t

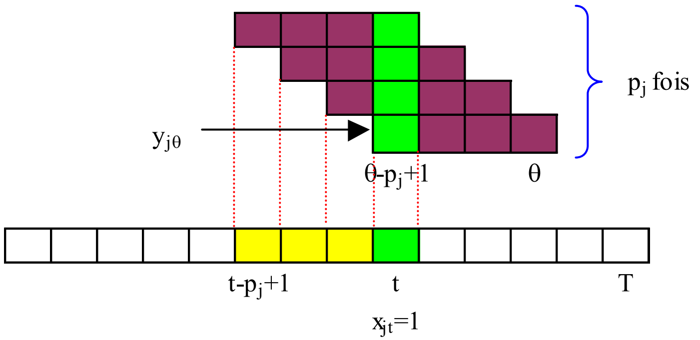
$$\text{Min} \sum_{j\in]n]} \sum_{t\in T} c_{jt} x_{jt}$$

$$\text{Sc}\begin{cases} \forall j \in]n], \sum_{t=r_j+p_j}^{T} x_{jt} = 1 \\ \forall j \in]n], \forall t \in T, \sum_{s=t-p_j+1}^{t} x_{js} = y_{jt} \\ \forall t \in T, \sum_{j\in]n]} y_{jt} \le 1 \\ \forall j \in]n], \sum_{t\in T} y_{jt} = p_j \\ \forall j \in]n], \forall t \in T, x_{jt}, y_{jt} \in \{0,1\} \end{cases}$$

➡ **Différentes Relaxations Lagrangiennes**

- n jobs à ordonnancer sur un processus unique.
- Chaque job j est caractérisé par une durée p_j, une date de démarrage au plus tôt r_j, et une date de fin d'exécution au plus tard (due date) d_j.
- L'objectif est de minimiser le nombre pondéré de jobs en retard, w_j désignant la pénalité associée au job j

i	1	2	3	4
r_i	9	3	1	0
p_i	4	5	5	6
d_i	30	28	26	21



$$x_{jt} = 1 \Rightarrow y_{j\theta} = 1, \theta = t - p_j + 1,..,t$$

Modélisation Mathématique

Influence de la modélisation

Exemple : $1/r_j/\sum_j w_j U_j$ ➔ Modèle 3

$x_{jk} = 1$ si le job j est séquencé en position k, 0 sinon

C_k : date de fin d'exécution du job en position k

- n jobs à ordonnancer sur un processus unique.
- Chaque job j est caractérisé par une durée p_j, une date de démarrage au plus tôt r_j, et une date de fin d'exécution au plus tard (due date) d_j.
- L'objectif est de minimiser le nombre pondéré de jobs en retard, w_j désignant la pénalité associée au job j

$$\text{Max} \sum_{j\in]n]} \sum_{k\in]n]} w_j x_{jk}$$

On maximise le #pondéré de jobs à l'heure

$$\text{Sc}\begin{cases} \forall k \in]n], C_k \geq \sum_{j\in]n]} (r_j + p_j) x_{jk} \\ \forall k \in]n], C_k \geq C_{k-1} + \sum_{j\in]n]} p_j x_{jk} \\ \forall k \in]n], C_k \leq \sum_{j\in]n]} d_j x_{jk} \\ \forall j \in]n], \sum_{k\in]n]} x_{jk} \leq 1 \\ \forall k \in]n], \sum_{j\in]n]} x_{jk} \leq 1 \\ \forall j \in]n], \forall k \in]n], x_{jk} \in \{0,1\}, C_k \geq 0 \end{cases}$$

➡ **Surrogate Relaxation très efficace**

Modélisation Mathématique

Formalisation en terme de PLNE

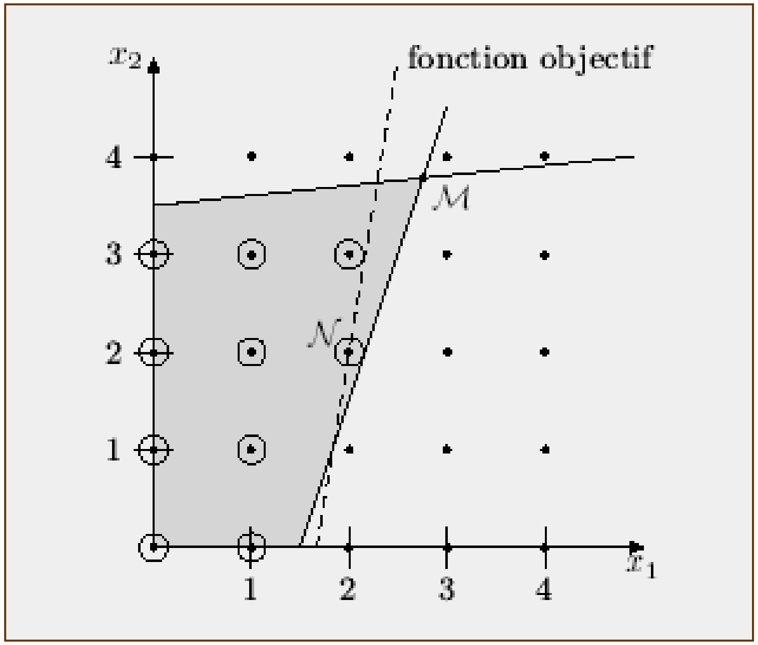
Forme générale :

$$[P] : \min \sum_{j \in]n]} c_j x_j$$

$$Sc \begin{cases} \forall i \in]m], \sum_{j \in]n]} a_{ij} x_j = b_i \\ x \in S \end{cases}$$

Le plus souvent : $S = \mathbb{N}^n$, $\{0,1\}^n$

PLNE, PL01, PL Mixte



Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : **$x_3=1$ seulement si $x_1=1$ ou $x_2=1$**

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **ou** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1+x_2}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **ou** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1+x_2}$$

Exemple 2 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **et** $x_2=1$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : x_3=1 seulement si x_1=1 **ou** x_2=1

$$\boxed{x_3 \leq x_1+x_2}$$

Exemple 2 : x_3=1 seulement si x_1=1 **et** x_2=1

$$\boxed{x_3 \leq x_1 \text{ et } x_3 \leq x_2}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **ou** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1+x_2}$$

Exemple 2 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **et** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1 \text{ et } x_3 \leq x_2}$$

Exemple 3 : $y>0$ seulement si $x=1$ (y non nécessairement binaire)

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Exemple 1 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **ou** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1+x_2}$$

Exemple 2 : $x_3=1$ seulement si $x_1=1$ **et** $x_2=1$

$$\boxed{x_3 \leq x_1 \text{ et } x_3 \leq x_2}$$

Exemple 3 : $y>0$ seulement si $x=1$ (y non nécessairement binaire)

$$\boxed{y \leq Mx \text{ , } M \text{ majorant de } y}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Contraintes logiques	Forme algébrique
$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n = \text{vrai}$	
$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n = \text{vrai}$	
$p_1 \Rightarrow p_2$	
$p_1 \Leftrightarrow p_2$	

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes logiques :

Contraintes logiques	Forme algébrique
$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n = \text{vrai}$	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 1$
$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n = \text{vrai}$	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n \ (\text{ou} = n)$
$p_1 \Rightarrow p_2$	$x_2 \geq x_1$
$p_1 \Leftrightarrow p_2$	$x_2 = x_1$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Décisions interdépendantes

Six projets sont éligibles pour être retenus pour financement. Modéliser les situations suivantes :

1. Les projets 3 et 6 sont reliés… i.e. si l'un est choisi, l'autre doit aussi l'être.
2. Si le projet 5 est sélectionné, le projet 1 doit l'être. ($x_5=1 \rightarrow x_1=1$)
3. Si le projet 2 n'est pas sélectionné on doit sélectionner le projet 4. ($x_2=0 \rightarrow x_4=1$)
4. Il faut choisir le projet 3 si les projets 5 et 6 sont choisis
5. Il faut choisir le projet 3 si au moins un des projets 5 ou 6 est choisi

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Décisions interdépendantes

Six projets sont éligibles pour être retenus pour financement. Modéliser les situations suivantes :

1. Les projets 3 et 6 sont reliés… i.e. si l'un est choisi, l'autre doit aussi l'être.
2. Si le projet 5 est sélectionné, le projet 1 doit l'être. ($x_5=1 \rightarrow x_1=1$)
3. Si le projet 2 n'est pas sélectionné on doit sélectionner le projet 4. ($x_2=0 \rightarrow x_4=1$)
4. Il faut choisir le projet 3 si les projets 5 et 6 sont choisis
5. Il faut choisir le projet 3 si au moins un des projets 5 ou 6 est choisi

➔ $\forall i \in]6]$, $x_i=1$ si le retenu, 0 sinon

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Décisions interdépendantes

Six projets sont éligibles pour être retenus pour financement. Modéliser les situations suivantes :

1. Les projets 3 et 6 sont reliés… i.e. si l'un est choisi, l'autre doit aussi l'être.
2. Si le projet 5 est sélectionné, le projet 1 doit l'être. ($x_5=1 \rightarrow x_1=1$)
3. Si le projet 2 n'est pas sélectionné on doit sélectionner le projet 4. ($x_2=0 \rightarrow x_4=1$)
4. Il faut choisir le projet 3 si les projets 5 et 6 sont choisis
5. Il faut choisir le projet 3 si au moins un des projets 5 ou 6 est choisi

➔ $\forall i \in]6]$, $x_i=1$ si le retenu, 0 sinon

1. $x_3 = x_6$
2. $x_5 \leq x_1$
3. $x_2 + x_4 \geq 1$
4. $x_5 + x_6 \leq x_3+1$
5. $x_5 + x_6 \leq 2x_3$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes disjonctives :

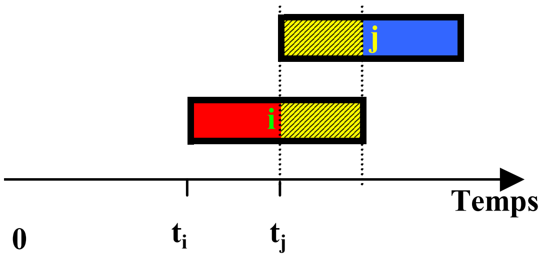
- Deux tâches i et j sont en disjonction si elles ne peuvent être exécutées simultanément

  ➔ Les intervalles d'exécution des tâches disjonctives sont disjoints :

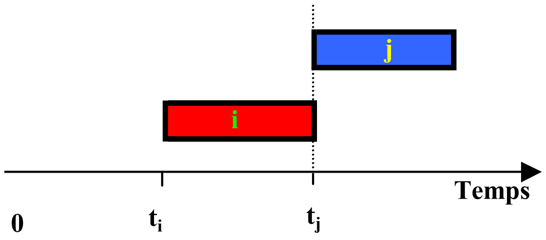
  $$]t_i, t_i + p_i[\cap]t_j , t_j + p_j[= \varnothing$$

- Disjonction d'inégalités de potentiels :

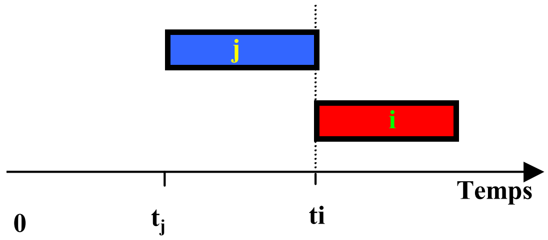
  $$t_j - t_i \geq p_i \text{ ou } t_i - t_j \geq p_j$$



Conflit de ressource



i avant j : $t_j - t_i \geq p_i$



j avant i : $t_i - j_i \geq p_j$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Contraintes disjonctives :

Exemple : $t_j \geq t_i + p_i$ **ou** $t_i \geq t_j + p_j$

$$\begin{array}{l} t_i + p_i - t_j \leq M(1-x_{ij}) \\ t_j + p_j - t_i \leq Mx_{ij} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \\ M>0 \text{ arbitrairement grand} \end{array}$$

$x_{ij}=1 \Rightarrow i \to j \quad t_i+p_i-t_j \leq 0 = M(1-1)$

$\qquad t_j+p_j-t_i > 0 \leq M1$

$x_{ij}=0 \Rightarrow j \to i \quad t_j+p_j-t_i \leq 0 = M0$

$\qquad t_i+p_i-t_j > 0 \leq M(1-0)$

$M \geq \max\{\max\{t_j + p_j - t_i\}, \max\{t_i + p_i - t_j\}\}$

Variable ne prenant qu'un ensemble de valeurs :

Exemple : $x_j \in V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$\begin{cases} x_j = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in \{0,1\} \end{cases}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Coût fixe + coût variable :

Exemple : $F_j(x_j) = \begin{cases} d_j + c_j x_j & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} F_j(x_j) = d_j y_j + c_j x_j \\ x_j \leq M y_j \\ y_j \in \{0,1\} \\ M>0 \text{ arbitrairement grand} \end{array}}$$

Taille minimale de lot (variable nulle ou bornée) :

Exemple : $x_j \in \{0\} \cup [a,b]$

$$\boxed{a y_j \leq x_j \leq b y_j \,,\; y_j \in \{0,1\}}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Modéliser à l'aide de contraintes linéaires la situation suivante :

La valeur d'une variable y doit soit être nulle, soit prendre sa valeur dans l'intervalle [200;500] ou dans l'intervalle [700;1000]

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Modéliser à l'aide de contraintes linéaires la situation suivante :

La valeur d'une variable *y* doit soit être nulle, soit prendre sa valeur dans l'intervalle [200;500] ou dans l'intervalle [700;1000]

$$\Rightarrow \begin{cases} y = y_1 + y_2 \\ 200z_1 \leq y_1 \leq 500z_1 \\ 700z_2 \leq y_2 \leq 1000z_2 \\ z_1 + z_2 \leq 1 \\ z_1, z_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

On considère le problème d'optimisation combinatoire :

$$[P] : \max z = cx$$

$$Sc \begin{cases} Ax = b \\ \forall j \in]n], x_j \in D_j \end{cases}$$

où chaque D_j est un ensemble fini de valeurs numériques (par exemple D_1={1, 2,.5, 7/4}

Montrer que [P] peut s'écrire comme un programme linéaire en nombres entiers.

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Notons, pour j∈]n], $D_j = \{d_j^1, d_j^2, ..., d_j^{\nu_j}\}$ et définissons, la série de variables bivalentes $y_j^1, y_j^2, ..., y_j^{\nu_j}$ en correspondance avec ces valeurs numérique. La variable x_j devant prendre une et une seule des valeurs possible de D_j, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_j = d_j^1 y_j^1 + d_j^2 y_j^2 + ... + d_j^{\nu_j} y_j^{\nu_j} \\ y_j^1 + y_j^2 + ... + y_j^{\nu_j} = 1 \end{cases}$$

Le Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE) en résultant est alors :

$$[PLNE]: \max z = cx$$

$$Sc \begin{cases} Ax = b \\ \forall j \in]n], \begin{cases} x_j = d_j^1 y_j^1 + d_j^2 y_j^2 + ... + d_j^{\nu_j} y_j^{\nu_j} \\ y_j^1 + y_j^2 + ... + y_j^{\nu_j} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Proposer une linéarisation de la contrainte non linéaire suivante :

$$\delta_3 = \delta_1 \delta_2$$

Les variables δ_1, δ_2 et δ_3 sont supposées bivalentes.

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Proposer une linéarisation de la contrainte non linéaire suivante :

$$\delta_3 = \delta_1\delta_2$$

Les variables δ_1, δ_2 et δ_3 sont supposées bivalentes.

$\delta_3 = \delta_1\delta_2$ 1 $\longrightarrow$ 2 $\begin{cases} \delta_3 \leq \delta_1 \\ \delta_3 \leq \delta_2 \\ \delta_3 \geq \delta_1 + \delta_2 - 1 \end{cases}$

		1	2
δ_1	δ_2	δ_3	δ_3
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Formuler les expressions suivantes comme des problèmes de programmation linéaire mixte :

a) $u=\min \{(x_1, x_2)\}$, avec $0 \leq x_1,x_2 \leq C$

b) $v=|x_1 - x_2|$, avec $0 \leq x_1,x_2 \leq C$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Formuler les expressions suivantes comme des problèmes de programmation linéaire mixte :

a) $u=\min\{(x_1, x_2)\}$, avec $0 \le x_1,x_2 \le C$

b) $v=|x_1 - x_2|$, avec $0 \le x_1,x_2 \le C$

a

$$\begin{cases} x_1 \le x_2 + Cy \\ u \le x_1 \\ u \ge x_1 - Cy \end{cases}$$

$x_1 \le x_2$: $y=0$; $u=x_1$

$$\begin{cases} x_2 \le x_1 + C(1-y) \\ u \le x_2 \\ u \ge x_2 - C(1-y) \end{cases}$$

$x_2 \le x_1$: $y=1$; $u=x_2$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

Formuler les expressions suivantes comme des problèmes de programmation linéaire mixte :

a) $u = \min\{(x_1, x_2)\}$, avec $0 \le x_1, x_2 \le C$

b) $v = |x_1 - x_2|$, avec $0 \le x_1, x_2 \le C$

a

$$\begin{cases} x_1 \le x_2 + Cy \\ u \le x_1 \\ u \ge x_1 - Cy \end{cases}$$

$\boxed{x_1 \le x_2 : y=0 \; ; u=x_1}$

$$\begin{cases} x_2 \le x_1 + C(1-y) \\ u \le x_2 \\ u \ge x_2 - C(1-y) \end{cases}$$

$\boxed{x_2 \le x_1 : y=1; u=x_2}$

b

$$\begin{cases} x_2 \le x_1 + Cy \\ v \ge x_1 - x_2 \\ v \le x_1 - x_2 + Cy \end{cases}$$

$\boxed{x_2 - x_1 \le 0 \rightarrow |x_1 - x_2| = x_1 - x_2 : y=0}$

$$\begin{cases} x_1 \le x_2 + C(1-y) \\ v \ge x_2 - x_1 \\ v \le x_2 - x_1 + C(1-y) \end{cases}$$

$\boxed{x_1 - x_2 \le 0 \rightarrow |x_1 - x_2| = x_2 - x_1 : y=1}$

OU

$$\begin{cases} y^+ - y^- = x_1 - x_2 \\ 0 \le x_1, x_2 \le C \\ v = y^+ + y^- \\ y^+, y^- \ge 0 \end{cases}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

On considère le Programme linéaire suivant :

$$\text{Max } z = 350x_1 + 300x_2$$

$$\text{Sc}\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ 9x_1 + 6x_2 = 1520 \\ 12x_1 + 16x_2 = 2650 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ entiers} \end{cases}$$

Comment le modifier pour intégrer les ajustements de coefficients de la fonction objectif suivants :

$$0 \leq x_1 \leq 75 \rightarrow c_1 = 350$$

$$x_1 > 75 \rightarrow c_1 = 375$$

$$0 \leq x_2 \leq 50 \rightarrow c_2 = 300$$

$$x_2 > 50 \rightarrow c_2 = 325$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Exercice :

$$\text{Max } z = 350x_1 + 300x_2$$

$$\text{Sc}\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ 9x_1 + 6x_2 = 1520 \\ 12x_1 + 16x_2 = 2650 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ entiers} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 75 \rightarrow c_1 = 350 \\ x_1 > 75 \rightarrow c_1 = 375 \\ 0 \leq x_2 \leq 50 \rightarrow c_2 = 300 \\ x_2 > 50 \rightarrow c_2 = 325 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{array}} \; \boxed{\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{array}}$$

$$\text{Max } z = 350x_{11} + 375x_{12} + 300x_{21} + 325x_{22}$$

$$\text{Sc}\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} \\ x_2 = x_{21} + x_{22} \\ x_1 + x_2 = 200 \\ 9x_1 + 6x_2 = 1520 \\ 12x_1 + 16x_2 = 2650 \\ 0 \leq x_{11} \leq 75y_{11}, 76y_{12} \leq x_{12} \leq My_{12} \\ 0 \leq x_{21} \leq 50y_{21}, 51y_{22} \leq x_{22} \leq My_{22} \\ y_{11} + y_{12} = 1 \\ y_{21} + y_{22} = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ entiers} \\ y_{11}, y_{12}, y_{21} y_{22} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. "You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2" ."Z1 ONLY IF Z2" ."Z1 is sufficient for Z2" ."Z1 implies Z2"

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. "You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2" ."Z1 ONLY IF Z2" ."Z1 is sufficient for Z2" ."Z1 implies Z2"

$$Z1 \leq Z2$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. “You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2” .“Z1 ONLY IF Z2” .“Z1 is sufficient for Z2” .“Z1 implies Z2”

   $$Z1 \leq Z2$$

2. “Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available” .“Define Z3 as Z1 AND Z2”

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. “You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2” .“Z1 ONLY IF Z2” .“Z1 is sufficient for Z2” .“Z1 implies Z2”

   $$Z1 \leq Z2$$

2. “Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available” .“Define Z3 as Z1 AND Z2”

   $$Z3 \leq Z1,\ Z3 \leq Z2,\ Z1+Z2 \leq Z3+1$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. “You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2” .“Z1 ONLY IF Z2” .“Z1 is sufficient for Z2” .“Z1 implies Z2”

   $$Z1 \leq Z2$$

2. “Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available” .“Define Z3 as Z1 AND Z2”

   $$Z3 \leq Z1,\ Z3 \leq Z2,\ Z1+Z2 \leq Z3+1$$

3. “Project Z3 can be funded if and only if project Z1 **or** project Z2, or both projects are funded” .“Define Z3 as the ‘INCLUSIVE OR’ of Z1 and Z2.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. "You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2" ."Z1 ONLY IF Z2" ."Z1 is sufficient for Z2" ."Z1 implies Z2"

   $$Z1 \leq Z2$$

2. "Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available" ."Define Z3 as Z1 AND Z2"

   $$Z3 \leq Z1, Z3 \leq Z2, Z1+Z2 \leq Z3+1$$

3. "Project Z3 can be funded if and only if project Z1 **or** project Z2, or both projects are funded" ."Define Z3 as the 'INCLUSIVE OR' of Z1 and Z2."

   $$Z3 \leq Z1+Z2, Z1 \leq Z3, Z2 \leq Z3$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. “You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2” .“Z1 ONLY IF Z2” .“Z1 is sufficient for Z2” .“Z1 implies Z2”

   $Z1 \leq Z2$

2. “Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available” .“Define Z3 as Z1 AND Z2”

   $Z3 \leq Z1$, $Z3 \leq Z2$, $Z1+Z2 \leq Z3+1$

3. “Project Z3 can be funded if and only if project Z1 **or** project Z2, or both projects are funded” .“Define Z3 as the ‘INCLUSIVE OR’ of Z1 and Z2.”

   $Z3 \leq Z1+Z2$, $Z1 \leq Z3$, $Z2 \leq Z3$

4. “NOT Z.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

Un test américain … Integer Linear Programming Formulettes

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

1. “You can launch satellite Z1 only if you have chosen a compatible booster Z2” .“Z1 ONLY IF Z2” .“Z1 is sufficient for Z2” .“Z1 implies Z2”

   $Z1 \leq Z2$

2. “Z3 can be produced if and only if a machine Z1 **and** a worker Z2 are available” .“Define Z3 as Z1 AND Z2”

   $Z3 \leq Z1$, $Z3 \leq Z2$, $Z1+Z2 \leq Z3+1$

3. “Project Z3 can be funded if and only if project Z1 **or** project Z2, or both projects are funded” .“Define Z3 as the ‘INCLUSIVE OR’ of Z1 and Z2.”

   $Z3 \leq Z1+Z2$, $Z1 \leq Z3$, $Z2 \leq Z3$

4. “NOT Z.” **$1-Z$**

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 1$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \leq 1$$

7. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \geq 1$$

8. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 1$$

8. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 4$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one."

   $$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one."

   $$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 1$$

8. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three."

   $$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 4$$

9. "If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it" ."If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13."

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 1$$

8. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three."

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 4$$

9. "If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it" ."If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13."

$$X \leq 13Z$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \leq 1$$

7. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one.”

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 1$$

8. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three.”

$$Z1 + Z2 + \ldots + Zk \geq 4$$

9. “If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it” .“If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13.” $X \leq 13Z$

10. “If you build a warehouse Z = 1, it must be used to store at least 56 tons but no more than 141 tons”. “If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ∈[56,141].”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one."

$$Z1+Z2+\ldots+Zk \leq 1$$

7. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one."

$$Z1+Z2+\ldots+Zk \geq 1$$

8. "From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three."

$$Z1+Z2+\ldots+Zk \geq 4$$

9. "If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it" ."If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13."

$$X \leq 13Z$$

10. "If you build a warehouse Z = 1, it must be used to store at least 56 tons but no more than 141 tons". "If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ∈[56,141]."

$$X \geq 56Z, X \leq 141Z$$

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \leq 1$$

7. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \geq 1$$

8. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \geq 4$$

9. “If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it” .“If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13.” $X \leq 13Z$

10. “If you build a warehouse Z = 1, it must be used to store at least 56 tons but no more than 141 tons”. “If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ∈[56,141].”

$$X \geq 56Z,\ X \leq 141Z$$

11. “Use binary variables Z1, Z2, Z3, and Z4 to restrict variable X to a discrete value in the range 5,6,...,15.”

Modélisation Mathématique

Différentes utilisations de variables binaires

In the following examples, variables X are continuous and non-negative, but variables Z are binary.

6. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at most one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \leq 1$$

7. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select at least one.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \geq 1$$

8. “From the set Z1, Z2, ..., Zk, select more than three.”

$$Z1+ Z2+...+ Zk \geq 4$$

9. “If you build a warehouse Z = 1, you can store up to 13 tons of X in it” .“If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ≤ 13.” $X \leq 13Z$

10. “If you build a warehouse Z = 1, it must be used to store at least 56 tons but no more than 141 tons”. “If Z = 0, then X = 0, but if Z = 1, then X ∈[56,141].”

$$X \geq 56Z,\ X \leq 141Z$$

11. “Use binary variables Z1, Z2, Z3, and Z4 to restrict variable X to a discrete value in the range 5,6,...,15.”

$$X=5+1Z1+2Z2+3Z3+4Z4$$

Modélisation Mathématique

Recours à des objets mathématiques “complexes”

Exemple 1 : PVC non orienté

Formalisation classique :

- N=|V| : nombre de sommets du réseau
- c_{ij} = coût de l'arc (i,j)
- x_{ij}=1 si l'arc (i,j) est constitutif de la tournée, 0 sinon

$$\boxed{\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}$$

$$Sc\begin{cases} \forall i \in]n], \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \forall j \in]n], \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \forall i \in]n], \forall j \in]n], x_{ij} \in \{0,1\} \\ X = (x_{ij})_{i,j \in S} \in S \end{cases}$$

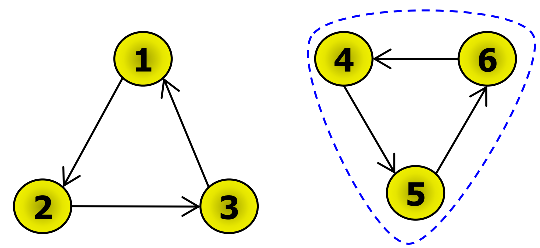
Problème d'affectation simple

Elimination des circuits parasites

$$S = \left\{ (x_{ij}) / \forall Q \subset V, \sum_{i \in Q}\sum_{j \notin Q} x_{ij} > 1 \right\}$$

$$S = \left\{ (x_{ij}) / \forall Q \subset V, \sum_{i \in Q}\sum_{j \in Q} x_{ij} \le |Q| - 1 \right\}$$

$$S = \left\{ (x_{ij}) / \forall (i,j) \in V^2, i \neq j, y_i - y_j + nx_{ij} \le n - 1, \forall i \in V, y_i \ge 0 \right\}$$



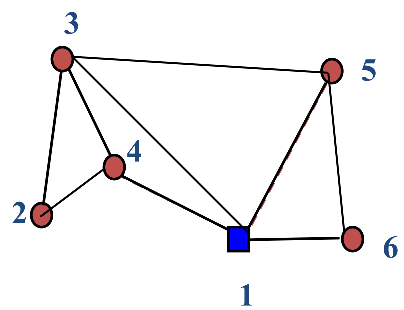
$$\begin{cases} y_4 - y_5 + 7x_{45} \le 6 \\ y_5 - y_6 + 7x_{56} \le 6 \\ y_6 - y_4 + 7x_{64} \le 6 \end{cases} \Rightarrow \text{équivalent à } 7 \times 3 \le 6\text{x}3$$

Modélisation Mathématique

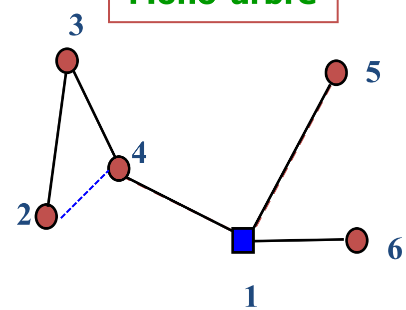
Recours à des objets mathématiques “complexes”

Exemple 1 : PVC non orienté

Graphe G=(X,E,C)



Mono-arbre

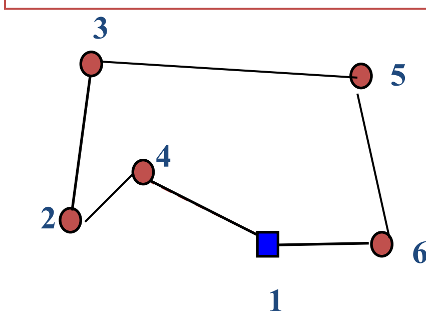


Matrice d’incidence sommets-arêtes

A

	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	3-4	3-5	5-6
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Cycle hamiltonien
=
Mono-arbre + $d_i=2, \forall i \in X$



Plonger le problème dans l’espace des mono-arbres

Modélisation Mathématique

Recours à des objets mathématiques “complexes”

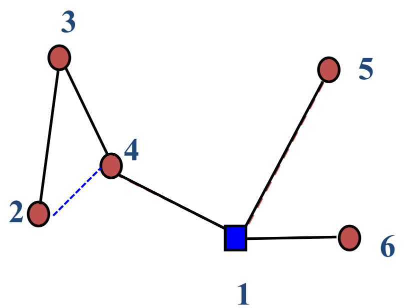
Exemple 1 : PVC non orienté

x_e = 1 si arête $e \in E$ sélectionnée

$$[PVC] : \min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$Sc \begin{cases} Ax = 2 \\ \forall e \in E, x_e \in \{0,1\} \\ x \text{ mono-arbre sur } G \end{cases}$$

	x_e
1-3	0
1-4	1
1-5	1
1-6	1
2-3	1
2-4	1
3-4	1
3-5	0
5-6	0



	1-3	1-4	1-5	1-6	2-3	2-4	3-4	3-5	5-6
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	1	0	0	0	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1

x

	x_e
1-3	0
1-4	1
1-5	1
1-6	1
2-3	1
2-4	1
3-4	1
3-5	0
5-6	0

=

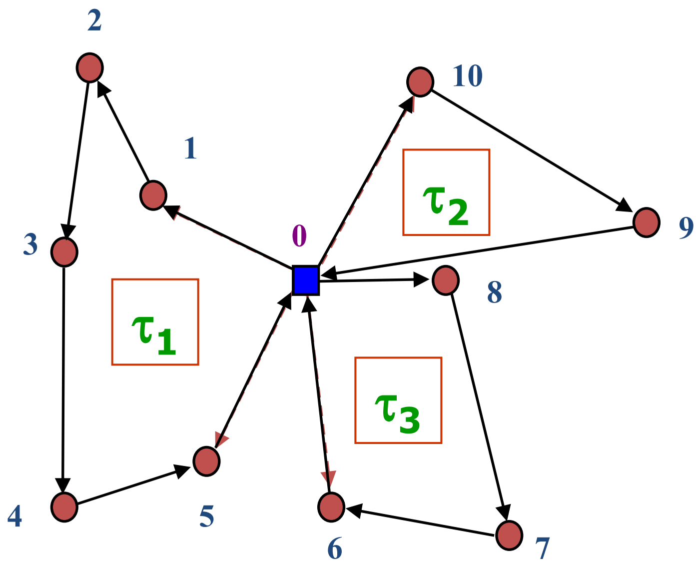
1	3
2	2
3	2
4	3
5	1
6	1

degrés

Modélisation Mathématique

Recours à des objets mathématiques “complexes”

Exemple 2 : VRP



Codage des tours :

	τ_1	τ_2	τ_3
1	1	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0
6	0	1	0
7	0	1	0
8	0	1	0
9	0	0	1
10	0	0	1

Modélisation Mathématique

Recours à des objets mathématiques “complexes”

Exemple 2 : VRP

Hypothèse :

On sait construire une base Ω de tours potentiellement intéressants

$\Omega \rightarrow$ matrice A d’incidence clients-tours

a_{ij} = 1 si le client i est servi par le tour j

c_j = valorisation du tour j

Set Partitioning Problem

$$\min \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$$

$$\mathrm{Sc}\begin{cases} \forall i \in]M], \sum_{j=1}^{N} a_j x_j = 1 \\ \forall j \in]N], x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

Chaque client est servi par un tour unique

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 1 : formulation

Un groupe A d'agences de locations de véhicules possède un nombre V de véhicules répartis sur n agences. Tous les matins, chaque agence $i \in]n]$ doit avoir un nombre théorique de véhicules e^T_i. Elles ont en fait un nombre réel e^R_i qui peut différer du nombre théorique. Il s'agit donc de déplacer des véhicules afin de les répartir correctement entre les agences, sachant que le déplacement d'un véhicule d'une agence i vers une agence j a un coût $c.d_{ij}$ proportionnel à la distance d_{ij} les séparant (en km), c désignant un coût kilométrique unitaire indépendant du véhicule.

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 1 : formalisation

z_{ij} : flot de véhicules entre les deux agences i et j

$$\forall i \in A,\ s_i = e^T_i - e^R_i$$

E : ensemble des agences excédentaires en fin de journée ($s_i<0$)

D : ensemble des agences déficitaires en fin de journée ($s_i>0$)

$\text{Min } \sum_{i \in E} \sum_{j \in D} c.d_{ij}.z_{ij}$ On minimise le coût total de déplacement des véhicules

$$\begin{cases} \forall i \in E,\ \sum_{j \in D} z_{ij} = -s_i \\ \forall j \in D,\ \sum_{i \in E} z_{ij} = s_j \\ \forall i \in E,\ \forall j \in D,\ z_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Chaque agence excédentaire doit liquider son excédent

Chaque agence déficitaire doit combler son déficit

problème de de flot minimal

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 2 : formulation (Gestion de Portefeuille)

Un fonds de pension contenant 750 000$ doit être placé dans différentes obligations privées :

Compagnie	Rendement	Échéance	Cote
Acme	8,65%	11 ans	1 Excellent
Dynastar	9,50%	10 ans	3 Bon
Eagle	10,00%	6 ans	4 Faible
Micro	8,75%	10 ans	1 Excellent
Optil	9,25%	7 ans	3 Bon
Sabre	9,00%	13 ans	2 Très bon

Restrictions :

- Pas plus de 25% du budget ne peut être investi dans une seul compagnie.
- Au moins 50% devrait être investi dans des obligations à long terme (échéance d'au moins 10 ans).
- Pas plus de 35% du budget peut être investi dans DynaStar, Eagle Vision et OptiPro.

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 2 : formalisation

Variables de décision :

- X_1 = Montant d'argent investi dans Acme Chemical
- X_2 = Montant d'argent investi dans DynaStar
- X_3 = Montant d'argent investi dans Eagle Vision
- X_4 = Montant d'argent investi dans MicroModeling
- X_5 = Montant d'argent investi dans OptiPro
- X_6 = Montant d'argent investi dans Sabre Systems

Compagnie	Rendement	Échéance	Cote
Acme	8,65%	11 ans	1 Excellent
Dynastar	9,50%	10 ans	3 Bon
Eagle	10,00%	6 ans	4 Faible
Micro	8,75%	10 ans	1 Excellent
Optil	9,25%	7 ans	3 Bon
Sabre	9,00%	13 ans	2 Très bon

Objectif :

Maximiser le revenu annuel:

$$Z = 0{,}0865X_1 + 0{,}095X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}0875X_4 + 0{,}0925X_5 + 0{,}09X_6$$

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 2 : formalisation

Contraintes :

Compagnie	Rendement	Échéance	Cote
Acme	8,65%	11 ans	1 Excellent
Dynastar	9,50%	10 ans	3 Bon
Eagle	10,00%	6 ans	4 Faible
Micro	8,75%	10 ans	1 Excellent
Optil	9,25%	7 ans	3 Bon
Sabre	9,00%	13 ans	2 Très bon

- Investissement total :

  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 750{,}000$
- Pas plus de 25% dans une simple compagnie :

  $X_i <= 187{,}500$, pour tout $\boldsymbol{i}$
- Au moins 50% dans du long terme:

  $X_1 + X_2 + X_4 + X_6 >= 375{,}000$
- Pas plus de 35% dans DynaStar, Eagle Vision et OptiPro:

  $X_2 + X_3 + X_5 <= 262{,}500$
- Non négativité :

  $X_i >= 0$ pour tout $\boldsymbol{i}$

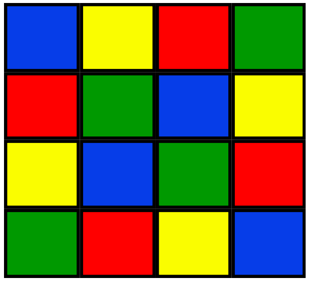
Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 3 : formulation

Given an n x n matrix, and given n colors, a quasigroup of order n is a colored matrix, such that :

- all cells are colored.
- each color occurs exactly once in each row.
- each color occurs exactly once in each column.



Quasigroup or Latin Square (Order 4)

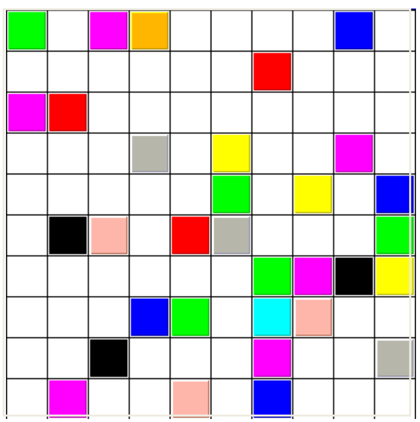
Modélisation Mathématique

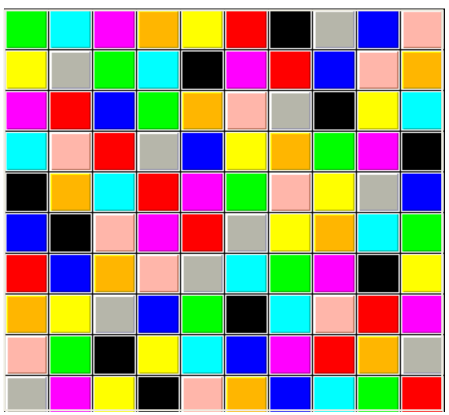
Exemples de modélisation

Exemple 3 : formulation

Given a **partial assignment of colors** (10 colors in this case), can the partial Latin Square be completed so we obtain a **full square** **?**

Example :





Structure of this problem characterizes several real-world applications: e.g., Timetabling, sports scheduling, routing, etc.

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 3 :

Max	number of colored cells
s.t.	at most one color per cell:
	a color appears at most once per row
	a color appears at most once per column

x_{ijk} = 1 si la cellule (i,j) prend la couleur k
= 0 sinon

Partial Latin Square = Liste de cellules précolorées

n^3 variables de décision

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 3 :

x_{ijk} = 1 si la cellule (i,j) prend la couleur k
= 0 sinon

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}$$

$$\text{Sc}\begin{cases} \forall j \in]n], \forall k \in]n], \sum_{i=1}^{n} x_{ijk} \le 1 \\ \forall i \in]n], \forall k \in]n], \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \le 1 \\ \forall i \in]n], \forall j \in]n], \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \le 1 \\ \forall (i,j,k) \in PLS, x_{ijk} = 1 \\ \forall i \in]n], \forall j \in]n], \forall k \in]n], x_{ijk} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Signification des groupes de contraintes ?

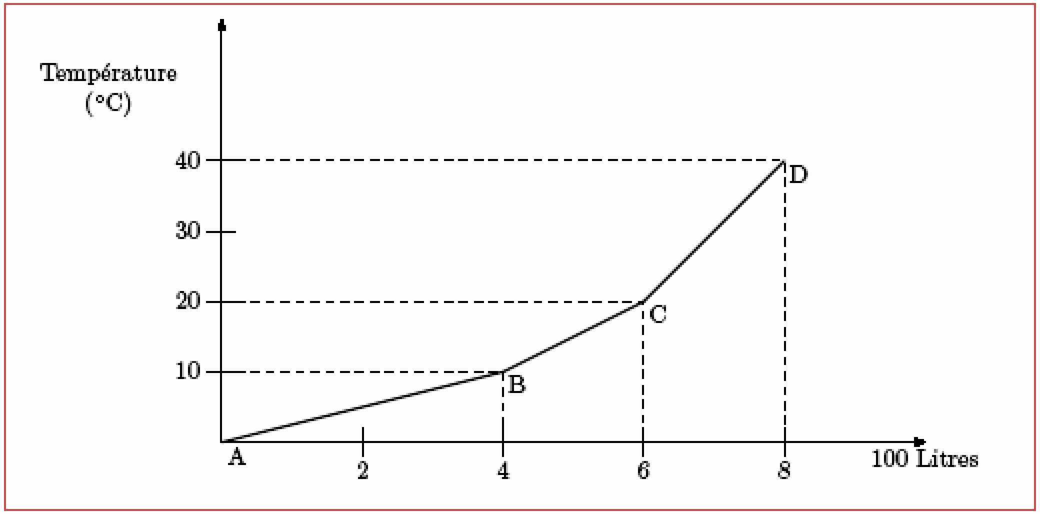
Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 4 : formulation

Une compagnie chimique vend un produit 0.30 francs le litre. La température de traitement augmente le rendement du procédé de fabrication selon la courbe de production ci-dessous.

Supposons que le coût du procédé soit proportionnel à la température au taux de 7.50 francs par ^{o}C.

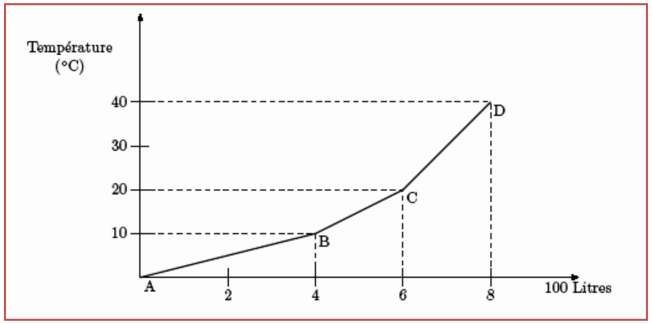


Quelle quantité doit-on produire pour maximiser le profit ?

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 4 : formalisation



Soit x la quantité à produire en hectolitres. On écrira :

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

Avec $0 \leq x_1 \leq 4 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 2.$

Les coûts marginaux sont directement liés aux températures. On aura

$$\theta_1 = 10/4 = 2.5$$
$$\theta_2 = 10/2 = 5$$
$$\theta_3 = 20/2 = 10,$$

qui sont les températures marginales données par les pentes des 3 segments AB, BC, CD, respectivement.

La fonction de profit est donc :

$$f(x) = (30 - 2.5 \times 7.5)x_1 + (30 - 5 \times 7.5)x_2 + (30 - 10 \times 7.5)x_3 = 11.25x_1 - 7.5x_2 - 45x_3$$

La fonction de profit est convexe. On produit tant que le profit marginal est positif, donc on a :

$$x = 4$$
$$f(x) = 4 \times 11.25 = 45.$$

Le fait que la fonction de coût soit convexe implique que la solution peut s'obtenir en résolvant le programme linéaire

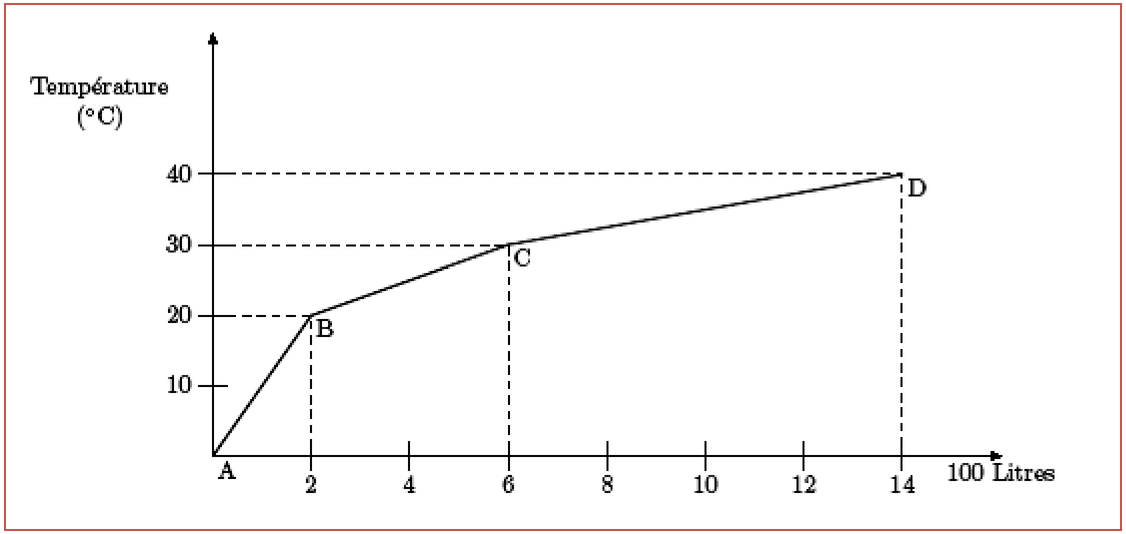
$$\max 11.25x_1 - 7.5x_2 - 45x_3$$
$$\text{s.c.} \quad 0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 2$$
$$0 \leq x_3 \leq 2$$

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 5 : formulation (suite)

Supposons maintenant que la fonction de production soit telle qu'elle indique des rendements marginaux croissants, c'est-à-dire des coûts marginaux décroissants comme illustré ci-dessous.



Quelle quantité doit-on produire pour maximiser le profit ?

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 5 : formalisation

On écrit encore :

x = x1 + x2 + x3

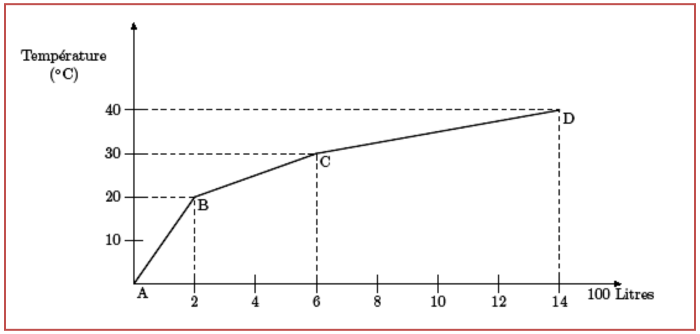
avec $0 \le x_1 \le 2 \quad 0 \le x_2 \le 4 \quad 0 \le x_3 \le 8$.

Les températures marginales sont :

$\theta_1 = 20/2 = 10$

$\theta_2 = 10/4 = 2.5$

$\theta_3 = 10/8 = 1.25$



et la fonction de profit s'écrit :

$$f(x) = (30 - 10 \times 7.5)x_1 + (30 - 2.5 \times 7.5)x_2 + (30 - 1.25 \times 7.5)x_3 = -45x_1 + 11.25x_2 + 20.625x_3.$$

La solution optimale est évidemment $x^* = 14$, donc $x^*_1 = 2$, $x^*_2 = 4$, $x^*_3 = 8$ et

$$f(x^*) = -90 + 45 + 165 = 120.$$

La fonction de coût est concave. La solution de ce problème est fournie par le programme linéaire mixte suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & -45x_1 + 11.25x_2 + 20.625x_3 \\ \text{s.c.} & 0 \le x_1 \le 2 \\ & 2y_2 \le x_1 \\ & 0 \le x_2 \le 4y_2 \\ & 4y_3 \le x_2 \\ & 0 \le x_3 \le 8y_3 \\ & y_2 \in \{0, 1\},\ y_3 \in \{0, 1\}\ . \end{array}$$

Exemples de modélisation

Exemple 6 : formulation (pré-packing)

Ensemble P de n produits
Ensemble S de m magasins

- d_{is} : demande du magasin s en produit i
- l_{is} (resp. u_{is}) déficit (resp. excédent) maximal toléré rapport à la demande

Ensemble K de types de colis types $\rightarrow$ $q = |K|$. La capacité maximale d'un colis est limitée à C.

Objectif : déterminer la composition de chacun des types de colis et le nombre associé envoyé sur chacun des magasins de manière à couvrir la demande de ces derniers, et ce, en respect des tolérances fixées (l_{is}, u_{is}) (le déficit/excédent par rapport à la demande pour un couple (i,s) est pénalisé unitairement (p_{is}^{-}, p_{is}^{+})).

Exemples de modélisation

Exemple 6 : formalisation (pré-packing)

Variables de décision :

- $x_i^k =$ nombre d'articles du produit i composant un colis de type k
- $y_s^k =$ nombre de colis de type k expédié sur le magasin s
- $e_{is}^- =$ déficit toléré en livraison de produit i sur le magasin s
- $e_{is}^+ =$ excédent toléré en livraison de produit i sur le magasin s

Modélisation Mathématique

Exemples de modélisation

Exemple 6 : formalisation (pré-packing)

Variables de décision :

- $x_i^k =$ nombre d'articles du produit i composant un colis de type k
- $y_s^k =$ nombre de colis de type k expédié sur le magasin s
- $e_{is}^- =$ déficit toléré en livraison de produit i sur le magasin s
- $e_{is}^+ =$ excédent toléré en livraison de produit i sur le magasin s

$$[\mathrm{PNL}] : \min \sum_{s \in S} \sum_{i \in P} (p_{is}^+ e_{is}^+ + p_{is}^- e_{is}^-)$$

$$\mathrm{Sc} \begin{cases} (1)\ \forall s \in S, \forall i \in P, \sum_{k \in]q]} x_i^k y_s^k - e_{is}^+ + e_{is}^- = d_{is} \\ (2)\ \forall s \in S, \forall i \in P, e_{is}^- \le l_{is} \\ (3)\ \forall s \in S, \forall i \in P, e_{is}^+ \le u_{is} \\ (4)\ \forall k \in]q], \sum_{i \in P} x_i^k \le C \\ (5)\ \forall s \in S, \forall i \in P, \forall k \in]q], x_i^k, y_s^k \in Z^+ \\ (7)\ \forall s \in S, \forall i \in P, e_{is}^+, e_{is}^- \ge 0 \end{cases}$$

Questions ?