Линейная алгебра, 3 модуль, лекция 16

18.01.2016

Вспомним предыдущую лекцию и кое-что дополним

Замечание.

1. *Элемент 0 — единственный*
2. *Элемент $-a$ тоже единственный*
3. *Элемент* 1 *тоже единственный*
4. *Элемент a^{-1} тоже единственный*

Легко увидеть, что пункты 2 и 4 доказываются одинаково с точностью до замены операции, как и пункты 1 и 3

Доказательство. Докажем пункт 3. Если существует $1'$ — ещё одна единица, тогда по аксиомам $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

Докажем теперь пункт 4. Пусть b и c таковы, что $b \neq c$ и $ba = ab = ac = ca = 1$. Тогда

$$bac = (ba)\,c = b\,(ac) = 1 \cdot c = c = 1 \cdot b = b$$

То есть $b = c$. $\square$

Комплексные числа (продолжение)

Предложение. *Пусть $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Иными словами, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Просто раскроем скобки и приведём подобные

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) =$$
$$= |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$\square$

Следствие. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Следствие (Формула Муавра)**.** . *Пусть $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда*

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))\,\forall n \in \mathbb{Z}$$

Замечание. *В комплексном анализе функция* $\exp x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *доопределяется до* $\exp z\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *следующим образом*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

И тогда оказывается, что $\exp z$ *обладает теми же свойствами, кроме того*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\ \forall\varphi \in \mathbb{C}$$

Всякое $z \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathrm{Arg}\ (z)$. Тогда формула Муавра приобретает совсем очевидный вид

$$|z_1|e^{i\varphi_2} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Замечание. *Отображение* $R_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to ze^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *определяет поворот на угол* φ *вокруг 0.*

Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

Определение. *Корнем* n*-й степени из числа* z *называется всякое* $w \in \mathbb{C}$: $w^n = z$. *То есть*

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$$

Если $z = 0$, то $|z| = 0$, а значит $|w| = 0$, $w = 0$. Получается, 0 — единственное комплексное число, у которого корень определён однозначно.

Далее рассмотрим случай $z \neq 0$.

$$\begin{gathered} z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \\ w = |w|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \end{gathered}$$

$$z = w^n \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\theta \in \mathrm{Arg}\ (z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \end{cases}$$

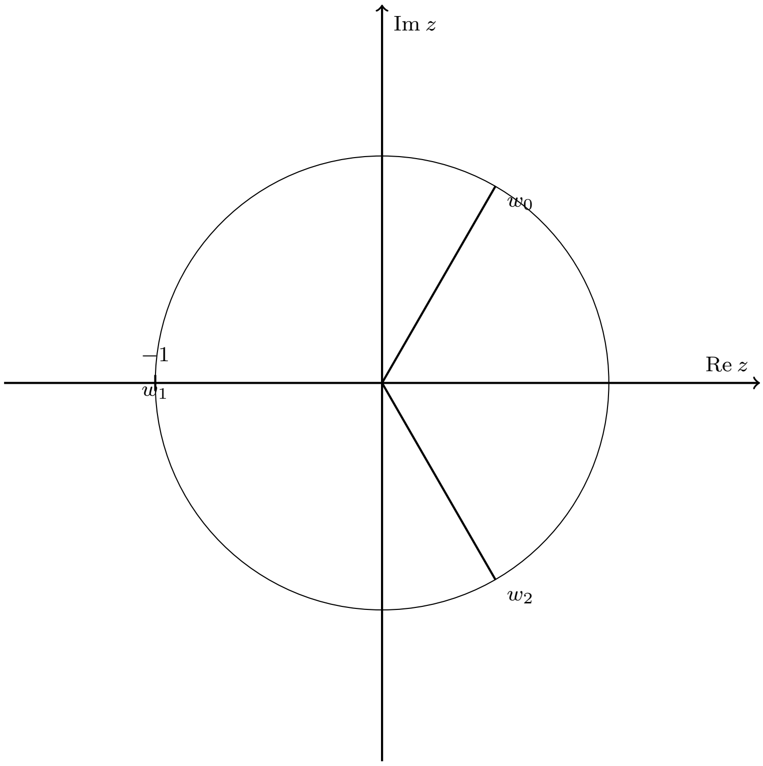
С точностью до кратного 2π различные значения в формуле $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ получаются при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значит z имеет ровно n корней n-й степени.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{|z|\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\ \middle|\ k = 0, \ldots, n-1\right\}$$

Замечание. *Точки из мн-ва* $\sqrt[n]{z}$ *при* $z \neq 0$ *лежат в вершинах правильного* n*-угольника, вписанного в окружность радиуса* $\sqrt[n]{z}$*.*

Пример. $z = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

$$\sqrt[3]{z} = \left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};\ \cos\pi + i\sin\pi;\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right\}$$



Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами

Пусть дано квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$, $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Тогда будем иметь

$$z^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$
$$z^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$z + \frac{b}{2a} \in \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

То есть все решения - это $z1,z2 = \dfrac{-b + d_1,d_2}{2a}$, где $\{d_1,d_2\} = \sqrt{b^2 - 4ac}$, в частности, квадратное уравнение всегда имеет комплексный корень. При $b^2 - 4ac \neq 0$ корней 2.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степени n, где $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, и $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ имеет корень.*

1 Векторные пространства над произвольным полем

Вспомним, что такое векторное пространство

- Некоторое множество V
- Операция сложения $V \times V \to V$

- Операция умножения на скаляр $F \times V \to V$
- 8 аксиом

Все основные понятия и результаты теории векторных пространств из прошлого полугодия можно перенести на случай произвольного поля F без изменений.

Пример. *Пусть V — векторное пространство над полем из двух элементов,* $\dim V = n$*. Тогда $|V| = 2^n$. Действительно, каждое конечномерное пространство обладает базисом (в данном случае $e_1, \ldots, e_n$). Тогда $V = \{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n \mid k_i \in F\}$. Но очень легко заметить, что всего таких линейных комбинаций 2^n*