Линейная алгебра, 3 модуль, лекция 1

11.01.2016

Для начала вспомним, что такое *векторное пространство* — это множество, на котором введены операции сложения, умножения на скаляр и в котором будут выполнятся восемь аксиом (см. 1 семестр). Но что такое скаляр?

Определение. *Скаляры — это элементы некоторого фиксированного поля.*

Определение. *Полем называется множество F, на котором заданы две операции — «сложение» (+) и «умножение» (·),*

$$F \times F \to F \Rightarrow \begin{array}{c} + : (a, b) \mapsto a + b \\ \cdot : (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

удовлетворяющие следующим свойствам («аксиомам поля»): $\forall a, b, c \in F$

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность по сложению);*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность по сложению);*
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ *(существование нулевого элемента);*
4. $\exists - a \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(существование противоположного элемента);*
5. $a(b + c) = ab + ac$ *(дистрибутивность; связь между сложением и умножением);*
6. $ab = ba$ *(коммутативность по умножению);*
7. $(ab)c = a(bc)$ *(ассоциативность по умножению);*
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ *(существование единицы);*
9. $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *(существование обратного элемента).*

Примеры.

- $\mathbb{Q}$ — *рациональные числа;*
- $\mathbb{R}$ — *вещественные числа;*
- $\mathbb{C}$ — *комплексные числа;*
- $F_2 = \{0, 1\}$, *при сложении и умножении по модулю 2.*

Поле комплексных чисел

Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ плохо тем, что в нем уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения. Отсюда возникает идея определить поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

(T1) новое поле содержит $\mathbb{R}$;

(T2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение.

Возьмем и формально простроим такое поле.

Определение. *Полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, на котором заданы операции сложения: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и умножения: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$.*

Предложение. $\mathbb{C}$ *и впрямь является полем.*

Доказательство. Операции сложения и умножения введены, осталось только проверить выполнение всех аксиом.

1. очевидно, так как сложение идет поэлементно;
2. также очевидно;
3. $0 = (0, 0)$;
4. $-(a, b) = (-a, -b)$;
5. почти очевидно (т.е. прямая проверка);
6. ясно (тоже прямая проверка);
7. проверим:

$$\begin{gathered}((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)(a_3, b_3) = \\ = (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3) = \\ = (a_1, b_1)(a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_2 a_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));\end{gathered}$$

8. $1 = (1, 0)$;
9. $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \to (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

$\square$

Осталось только проверить, правда ли введенное поле $\mathbb{C}$ удовлетворяет нашим требованиям:

(T1) Заметим, что в подмножестве $\mathbb{C}$, состоящим из элементов вида $(a, 0)$ операции сложения и умножения будут работать как в поле вещественных чисел.

$$\begin{gathered}(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \\ (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\end{gathered}$$

Следовательно, отображение $a \mapsto (a, 0)$ отождествляет $\mathbb{R}$ с этим подмножеством, то есть $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Что нам и требуется.

(T2) Примем $i = (0, 1)$. Тогда $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Итого, требование выполнено.

Однако запись комплексных чисел в виде упорядоченной пары (a, b) не очень удобна и громоздка. Поэтому преобразуем запись следующим образом:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Тем самым мы получили реализацию поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел как множества $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$, с обычным сложением и умножением.

Определение. *Запись $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$.*

$a = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть числа z.*

$b = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть числа z.*

Определение. *Числа вида $z = bi$ (т.е. $\operatorname{Re} z = 0$) называются чисто мнимыми.*

Определение. *Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi$ называется (комплексным) сопряжением. Само число $\overline{z} = a - bi$ называется (комплексно) сопряженным к числу $x = a + bi$.*

Лемма. *Для любых двух комплексных числе $z, w \in \mathbb{C}$ выполняется, что*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi$, а $w = c + di$.

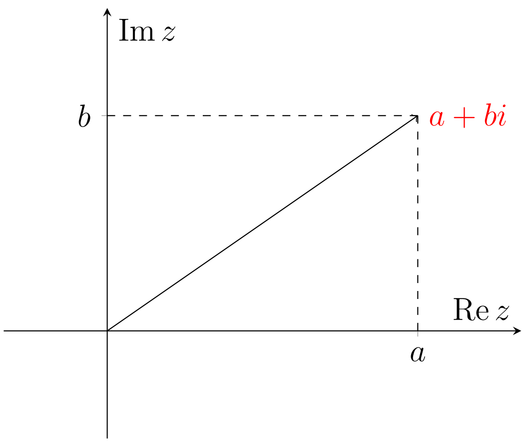
1. $\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$
2. $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$

□

Замечание. *Равенство $z = \overline{z}$ равносильно равенству $\operatorname{Im} z = 0$, то есть $z \in \mathbb{R}$.*

Геометрическая модель поля $\mathbb{C}$

Заметим, что поле комплексных числе $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}$ равно $\mathbb{R}^2$. Следовательно, комплексные числа можно представить как точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$, или сопоставить их векторам.



В таком представлении сложение комплексных чисел сопоставляется со сложением вектором, а сопряжение — с отражением относительно оси $Ox(\operatorname{Re} z)$.

Определение. *Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего вектора. Обозначение: $|z|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Свойства модуля:

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$;

2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ — неравенство треугольника;

3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

   Доказательство. $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ □

4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;

   Доказательство. Возведем в квадрат.

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = (zw)\overline{z}\overline{w} = zw\overline{zw} = |zw|^2$$

□

Замечание. *Из свойства 3 следует, что при $z \neq 0$ выполняется $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, т.е. $(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.*

Определение. *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется всякий угол φ такой что*

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Неформально говоря, аргумент z — это угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание.

1. *Аргумент определен с точностью до 2π.*

2. *Аргумент $z = 0$ не определен.*

Для $z \neq 0$ введем множество $\operatorname{Arg} z = \{$множество всех аргументов $z\}$ — *большой аргумент.* Также введем *малый аргумент* $\arg z$ — это такой $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, который удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и определен однозначно.

Используя аргумент, можно представить комплексное число следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\sin\varphi \end{array}\right| \Rightarrow z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Определение. *Запись $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.*

Замечание.

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$