Дискретная математика. Модуль 3. Лекция 1

Лекторий ПМИ ФКН 2015-2016
Бубнова Валерия
Жижин Пётр
Пузырев Дмитрий

18 января 2016

1 Размер схемы. Сложность булевой функции. Верхние и нижние оценки сложности

Размер схемы. Сложность булевой функции

Размер булевой схемы — это количество присваиваний в схеме $g_1, \ldots, g_L$ для вычисления функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Сложность функции f в базисе B — это минимальный размер булевой схемы, вычисляющей функцию f в базисе B. Если базис не указывают – имеют в виду стандартный базис $\{\neg, \vee, \wedge\}$. *Обозначение:* $C(f)$.

Утверждение: Если B – конечный базис, тогда $\exists c : \forall f$ если f вычисляется схемой S в B размера L, тогда существует схема в стандартном базисе размера меньше, чем $c \cdot L$, вычисляющая ту же функцию f.

Доказательство. Пусть f вычисляется схемой S в базисе B путём следующих присваиваний:

$$g_1, \ldots, g_k, \ldots, g_L = f$$

Рассмотрим некоторую g_k как функцию в базисе B от каких-то аргументов.

$$g_k = g(\ldots), g \in B$$

Для этой функции есть некоторая схема в стандартном базисе некоторого размера L'_k (так как в стандартном базисе любая функция вычислима, в том числе и g).

Каждую g_i заменим на соответствующую схему в стандартном базисе размера L'_i. Тогда и вся функция вычислима в стандартном базисе схемой размера:

$$L' = L'_1 + L'_2 + L'_3 + \ldots + L'_L \leqslant L \cdot max(L'_1, L'_2, \ldots L'_L) = L \cdot c_f$$

Для того чтобы теперь подобрать константу c в определении опять возьмем наибольшее из всех c_f. **Q.E.D.**

Верхняя оценка схемной сложности

Теорема. $C(f) = O(n \cdot 2^n)$

Доказательство. Повторим предыдущие рассуждения при доказательстве того, что в стандартном базисе любая функция вычислима. Для этого вспомним:

$$f(x) = \bigvee_{\substack{a: f(a)=1 \\ a \in \{0,1\}^n}} x^a, \; x^a = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

Нетрудно посчитать, что схема для вычисления x^a имеет размер $L_a = O(n)$. Тогда итоговый размер схемы $L \leqslant 2^n \cdot O(n) \iff L = O(n \cdot 2^n)$. **Q.E.D.**

Теорема. $C(f) = O(\frac{2^n}{n})$

Доказательство. В доказательстве много возни, желающие могут найти и прочитать. Идея в том, что многие схемы можно повторять примерно n^2 раз. **Q.E.D.**

Нижняя оценка схемной сложности

Теорема. *Существует функция* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *такая, что* $C(f) \geqslant \frac{2^n}{10n}$ *(в точности то же самое, что* $C(f) = \Omega(\frac{2^n}{n})$*).*