Дискретная математика. Модуль 3. Лекция 1

Лекторий ПМИ ФКН 2015-2016
Бубнова Валерия
Жижин Пётр
Пузырев Дмитрий

11 января 2016

Схемы. Булевы схемы

Важное примечание: В данной лекции все рассмотренные функции являются *всюду определенными.*

Схема — это функция, заданная последовательность присваиваний.

Также в профессиональной среде схемы принято называть SLP (*straight line programmes*).

Рассмотрим такую функцию f, определенную для булевых значений (*булеву функцию*): $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Базисом В булевой функции будем называть некий набор $B : \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, где $f_1 \ldots f_n$ - булевы функции.

Булева схема в базисе B — последовательность функций $x_1, x_2, x_3 ... x_n, x_{n+1} := S_1, x_L := S_{L-n}$, которая вычисляет $x_L(x_1, \ldots, x_n)$.

$$S_j = g(S_{i_1}, ..., s_{i_r}), g \in B, i_< j$$

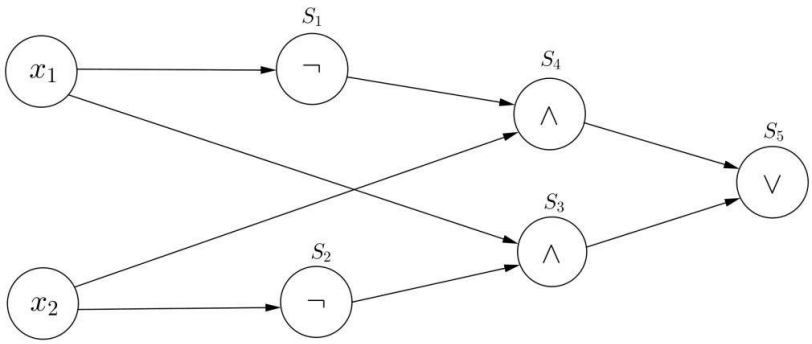
Стандартный базис есть базис, состоящий из операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции: $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Пример 1

Зададим булеву схему с помощью стандартного базиса.

$x_1, \ldots, x_n, s_1 := \neg x_1, s_2 = \neg x_2, s_3 := x_1 \wedge s_2, s_4 := x_2 \wedge s_1; s_5 := s_3 \vee s_4$

S



Если $x_2 = 0$, то $s_5 = x_1$

Если $x_2 = 1$, то $s_5 = \neg x_1$

Результатом выполнения булевой схемы является сложение по модулю 2 (1, если значения x_1 и x_2 разные) - $\oplus$.

Пример 2

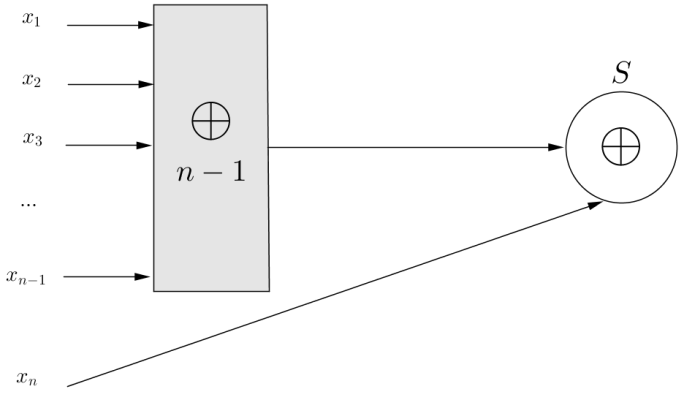
Составим схему, которая является сложением по модулю 2 n переменных. Приведём индуктивное доказательство её существования:

1. База индукции — $n = 2$. Сложение 2 переменных по модулю 2 возможно по схеме, описанной выше
2. Предположим существование такой схемы для $n - 1$ переменных

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}$$

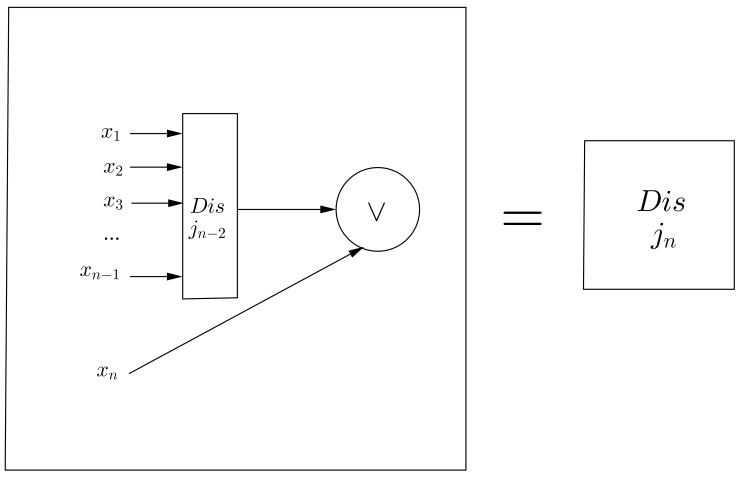
3. Рассмотрим сложение по модулю 2 n переменных. Представим его как сложение по модулю 2 x_n с результатом предыдущего шага. Существование второго слагаемого объясняется предположением индукции. Сложение с x_n можно выполнить по схеме выше.

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \oplus x_n = (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}) \oplus x_n$$



Пример 3

Дизъюнкция n переменных — аналогично, по индукции. Такие рассуждения можно построить и для конъюнкции.



Анализ схем

Анализ базисов: все ли функции можно выразить через схему в данном базисе?

Полный базис: Базис B - *полный*, если любую булеву функцию можно вычислить схемой в базисе B.

Теорема о стандартном базисе. *Стандартный базис — полный.*

Доказательство. Вспомним, что ДНФ - это дизъюнкция конъюнктов литералов. Построим схему ДНФ.

$x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n, c_1, \ldots, c_n, D$, где c_j — конъюнкция литералов, D — дизъюнкция. Данный порядок действий соответствует определению ДНФ, следовательно ДНФ представима в виде схемы и любая функция представима в виде ДНФ. что доказано ранее. (Note: $0 = x \wedge \neg x, 1 = x \vee \neg x$) **Q.E.D.**

Лемма. *Пусть базис B_1 — полный.*
$\forall f \in B_1$ *вычисляется схемой в базисе* B_2.
Тогда B_2 *— полный.*

Доказательство. Вычислим схему в базисе B_1.
$(B_1)x_1,...x_n,s_j$:=вычисление $f, F(..)$
Теперь вычислим схему в базисе B_2.
(B_2)вычисление $f, F(..)$

Q.E.D.

Примечание: Заметим, что если стандартный базис выразим через некоторые функции, то данные функции будут составлять полный базис.

Следствие 1. *Полнота базиса Жегалкина* $\{1, x_1 \wedge x_2, x_1 \oplus x_2\}$.

Доказательство. $\neg x_1 = 1 \oplus x_1$ $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$ или $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)$ **Q.E.D.**

Немного о схемах.
Любая формула является схемой. При этом формула — частный случай схемы. Не любая схема — формула.
Пример: $x_1 \oplus x_2 = x_1 \wedge \neg x_2 \vee \neg x_1 \wedge x_2 = F(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (F) \wedge \neg x_3 \vee \neg F \wedge x_3$

Следствие 2. *Полнота базиса* $\neg, \wedge$.

Доказательство. $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$ **Q.E.D.**

Функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *монотонной*, если $\forall i : x_i \leqslant y_i \Rightarrow f(x_1 \ldots x_n) \leqslant f(y_1 \ldots y_n)$
Монотонный базис — это базис $\vee, \wedge$

Теорема о монотонном базисе. *Монотонный базис* $\{\vee, \wedge\}$ *— неполный*

Доказательство. Воспользоваться монотонностью функций $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \wedge x_2$ и немонотонностью функции $\neg x_1$ **Q.E.D.**

Утверждение 1. *Схема в монотонном базисе вычисляет монотонную функцию.*

Доказательство. Доказываем индукцией по размеру схем

$$x_1, \ldots, x_n, S_1 \ldots S_L, S_{L+1}$$

$$s_{L+1} := f(s_{i_1} ... s_{i_r})$$
$$S_{i\alpha}(x) \leqslant S_{i\alpha}(y)$$

Так как f — монотонная

$$S_{L+1}(x) \leqslant S_{L+1}(y)$$

Q.E.D.

Заметим также неполноту следующих базисов:

1. $\{\wedge,\oplus\}$
2. $\{1,\wedge\}$
3. $\{1,\oplus\}$

Функция называется *линейной*, если существуют такие $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_i \in 0;1, \forall i = \overline{1,n}$ имеет место равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus \ldots \oplus a_n \wedge x_n$$

Утверждение 2. *Сумма двух линейных функций также будет линейна.*

Доказательство.

$$a_0 + \sum a_i x_i + b_0 + \sum b_i x_i = (a_0 + b_0) + \sum (a_i + b_i) x_i$$

Q.E.D.

Полином Жегалкина представляет из себя сумму по модулю два произведений неинвертированных переменных. Формально это можно записать так: $P(x_1 \ldots x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \wedge x_i, a_i \in 0,1$

Примечание. Не все булевы функции — линейные
Линейных функций — 2^{n+1}
Булевых функций — 2^{2^n}
Получается, линейных функций меньше.

Теорема Жегалкина. *Любая булева функция представима единственным образом в виде полинома Жегалкина.*

Доказательство. Существование: Заметим, что различных булевых функций от n переменных 2^{2^n} штук.При этом конъюнкций вида $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ существует ровно $2n$, так как из nвозможных сомножителей каждый или входит в конъюнкцию, или нет. В полиноме у каждой такой конъюнкции стоит 0 или 1, то есть существует 2^{2^n} различных полиномов Жегалкина от n переменных.

Единственность: Теперь докажем, что различные полиномы реализуют различные функции. Предположим противное. Тогда приравняв два различных полинома и перенеся один из них в другую часть равенства, получим полином, тождественно равный нулю и имеющий ненулевые коэффициенты. Тогда рассмотрим слагаемое с единичным коэффициентом наименьшей длины, то есть с наименьшим числом переменных, входящих в него (любой один, если таких несколько). Подставив единицы на места этих переменных, и нули на места остальных, получим, что на этом наборе только одно это слагаемое принимает единичное значение, то есть нулевая функция на одном из наборов принимает значение 1. Противоречие. Значит, каждая булева функция реализуется полиномом Жегалкина единственным образом. **Q.E.D.**

Двойственной называется функция $f^* = (x_1 \ldots x_n) = \neg f = (\neg x_1 \ldots \neg x_n)$.
Если $f = f^*$, то такая функция называется *самойдейственной.*

Теорема Поста

Теорема Поста. *Для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов:*

- *булевых функций, сохраняющих 1*

- *булевых функций, сохраняющих 0*
- *линейных функций*
- *монотонных функций*
- *самодвойственных функций*

в системе Φ *нашлась хотя бы одна функция* ϕ_i*, ему не принадлежащая. Иными словами, система не содержится полностью ни в одном из пяти классов.*

Строгое доказательство этой теоремы мы проведём в дальнейшем, на семинарах и следующих лекциях.