

Verschiebung von Koordinatensystemen

Justus Seeck

27. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Vorwort	2
1.2	Schreibweisen und Definitionen	2
2	Vektoren	2
2.1	Rechnen mit Vektoren und Punkten	2
2.2	Einheitsvektoren im Koordinatensystem	3
3	Die Verschiebung von Koordinatensystemen	3
3.1	Länge von Vektoren und Abstände von Punkten	3
3.2	Das Skalarprodukt	4
3.3	Koordinaten Transformieren	5
3.4	Anwendung	5
3.5	Matrizenrechnung	6
4	Anhänge	7
4.1	Vektoren 1	7
4.2	Vektoren 2	7
4.3	Vektoren 3	8
4.4	Vektoren 4	8
4.5	Vektoren 5	9
4.6	Skalarprodukt 1	9
4.7	Koordinatentransformation 1	10
4.8	TITEL	10
4.9	TITEL	11
5	Quellen	12

1 Einführung

1.1 Vorwort

In der folgenden Arbeit wird lediglich die Verschiebung von Koordinatensystemen in der Ebene (also in zwei Dimensionen) behandelt. Die Methodik lässt sich jedoch auch auf die dritte Dimension übertragen. Auch die Anzahl der Verschiebungen ist beliebig, da man die hier verwendete Formel beliebig oft hintereinander anwenden kann, wird hier jedoch auf eine Verschiebung beschränkt. Die Verschiebung von Koordinatensystemen findet beispielweise in der Robotik Anwendung: Am Ende eines Roboterarms befindet sich meist ein weiteres Koordinatensystem, "Toolsystem", welches sich am Ende des Roboterarms befindet. Dadurch gibt es in diesem System keine Verschiebung, wenn sich der Arm bewegt, sondern lediglich wenn sich das Tool, oder dessen Ladung bewegt.

1.2 Schreibweisen und Definitionen

Punkte Ein Punkt P wurde bisher in der Form $P(x|y)$ dargestellt. Dies wird in der folgenden Arbeit nicht mehr verwendet. Stattdessen wird der Punkt P in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dargestellt. Dies ist eine sogenannte Matrix mit zwei Zeilen und einer Spalte. Die erste Zeile enthält die x-Koordinate, die zweite Zeile die y-Koordinate. Da im folgenden mit zwei verschiedenen Koordinatensystemen, dem Weltsystem U und dem Toolsystem T , gearbeitet wird, werden Punkte im Bezug auf ein Koordinatensystem mit Index angegeben, insofern dies nötig ist. Der Punkt P im Bezug zum Weltsystem U wird folgendermaßen dargestellt: $[P]_U$. Im Bezug zum Toolsystem lautet die Darstellung $[P]_T$.

2 Vektoren

Geometrische Vektoren sind Pfeile (oder Pfeilklassen). \vec{v} ist ein Vektor. Vektoren werden durch ihre Länge in x -Richtung und y -Richtung definiert (bei drei Dimensionen zusätzlich in z -Richtung) und mit einem Pfeil über dem Buchstaben gekennzeichnet. Vektoren haben keine feste Position im Koordinatensystem. Sie können beliebig verschoben werden. Solange der Vektor alle seine Eigenschaften (Länge in x -, y - und ggf. z -Richtung) behält, ist er der gleiche Vektor. **Anhang: Vektoren 1.** Zwischen zwei gleichen Vektoren lässt sich ein Parallelogramm zeichnen.

2.1 Rechnen mit Vektoren und Punkten

Vektoren können durch mathematische Operationen verändert werden. Sie können addiert, subtrahiert und mit einem Skalar (hier: einer Zahl) multipliziert werden. **Anhang: Vektoren 2.** Es sind folgende Regeln gültig:

Summen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

Differenzen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$$

(Skalares) Produkt (Erklärung folgt)

$$r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a \\ r \cdot b \end{pmatrix}$$

Aus der Grafik (**Anhang: Vektoren 2**) wird zudem deutlich, dass die Summe zweier Vektoren (eine Aneinanderlegung von Pfeilen) die Summe der beiden Einzelvektoren (Koordinatenvektoren) ist:

$$[\vec{w} + \vec{a}] = [\vec{w}] + [\vec{a}]$$

Punkte können mithilfe von Vektoren verschoben werden. Der Punkt wird dabei mit dem Vektor addiert. Dies entspricht dem Anhängen des Vektors an den Punkt. Das Ende des Vektors entspricht dann dem neuen Punkt. Man kann auch ein Parallelogramm zwischen dem Punkt und dem Vektor bilden. Der "fehlende" Punkt ergibt dann die gesuchte Stelle des neuen Punktes. **Anhang: Vektoren 3.**

2.2 Einheitsvektoren im Koordinatensystem

Ein Punkt P kann mit Hilfe von Einheitsvektoren im Koordinatensystem U beschrieben werden. Das Koordinatensystem U hat rechtwinklige Achsen. Bei einer Drehung der x -Achse um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn entsteht deswegen die y -Achse. Es gibt jeweils einen Einheitsvektor in x -Richtung und einen Einheitsvektor in y -Richtung. Der Einheitsvektor in x -Richtung ist $\vec{x}_U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Einheitsvektor in y -Richtung ist $\vec{y}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Länge des Einheitsvektors ist dabei 1 (eine Längeneinheit) in seine respective Richtung. Um nun beispielweise den Punkt $[P]_U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu beschreiben, benötigt man den Ursprung des Koordinatensystems O_U , seine Koordinate in x -Richtung (hier: a), seine Koordinate in y -Richtung (hier: b) und die beiden Einheitsvektoren \vec{x}_U und \vec{y}_U .

Es ergibt sich die folgende Formel:

$$[P]_U = [O]_U + a \cdot \vec{x}_U + b \cdot \vec{y}_U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Der Punkt $[P]_U$ entspricht dem dem Punkt $[O]_U$ zu dem man eine Verschiebung in x -Richtung (hier: $a \cdot \vec{x}_U$) und y -Richtung (hier: $b \cdot \vec{y}_U$) hinzufügt. **Anhang: Vektoren 4.** Befindet sich ein Vektor in einem Koordinatensystem, lässt sich dieser durch die Differenz des Anfangs- und Endpunktes des Vektors darstellen. Es ergibt sich folgendes:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Anhang: Vektoren 5 zeigt die Darstellung eines Vektors in einem Koordinatensystem.

3 Die Verschiebung von Koordinatensystemen

Unser Ziel besteht darin, die bekannten Koordinaten eines Objekts, beispielweise eines Punktes im Toolsystem T in das Koordinatensystem U zu überführen. Dazu benötigen wir die Verschiebung des Ursprungs des Toolsystems $[O_T]_U$ ausgehend vom Ursprung des Koordinatensystems $[O]_U$ im Bezug auf das Ursprungssystem. Diese Verschiebung kann durch einen Vektor beschrieben werden. Dieser Vektor wird als Verschiebevektor bezeichnet.

Die Position von $[O_T]_U$ ist gegeben.

3.1 Länge von Vektoren und Abstände von Punkten

Um den Verschiebevektor zu bestimmen, wird der Abstand zwischen dem Ursprung des Toolsystems $[O_T]_U$ und dem Ursprung des Koordinatensystems U benötigt, also $[O]_U$. Diese Formel kann auch für andere Punkte angewendet werden.

Die Länge eines Vektors wird durch die Pythagoras-Formel berechnet. Die Länge von \vec{v} wird folgendermaßen dargestellt $\|\vec{v}\|$.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\| \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen den Punkten P und Q ist nach dieser Formel dann: $dist(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$.
 ist $[P]_U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ und $[Q]_U = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} dist(P, Q) &= \|\vec{PQ}\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} v_x - u_x \\ v_y - u_y \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2} \end{aligned}$$

3.2 Das Skalarprodukt

"Das Skalarprodukt ist eine mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet."

(<https://www.mathebibel.de/skalarprodukt> - Letzter Aufruf: 26.12.2022 @ 17:03:54) In diesem Fall wird das Skalarprodukt verwendet, um den Winkel θ zwischen zwei Vektoren zu berechnen.

Anhang: Skalarprodukt 1 zeigt eine Skizze.

θ ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{v} und \vec{u} . Beide Vektoren haben den selben Ursprung. Der Winkel θ ist hierbei ungerichtet (Siehe **Anhang: Skalarprodukt 1**) und liegt zwischen 0 und 180 Grad.

Der Kosinussatz besagt nun folgendes:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

Aus dem Kosinussatz folgt das Skalarprodukt von \vec{u} und \vec{v} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2) &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \\ &= \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

In Koordinaten lässt sich das Skalarprodukt wie folgt darstellen. Gegeben sind: $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle &\stackrel{\text{Def.}}{=} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\| \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\|^2 - \left\| \begin{pmatrix} v_x - u_x \\ v_y - u_y \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 - [(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2]) \end{aligned}$$

Anwendung der binomischen Formeln und anschließendes vereinfachen ergibt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 - [u_x^2 + v_x^2 - 2u_x v_x + u_y^2 + v_y^2 - 2u_y v_y]) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= u_x v_x + u_y v_y \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass sich das Skalarprodukt nur mit Vektoren (Pfeilen) bilden lässt. Es ist nicht möglich, das Skalarprodukt mit Punkten zu bilden.

Nun lässt sich durch Umstellen der Winkel zwischen zwei koordinatengegebenen Vektoren (\vec{u} und \vec{v}) berechnen:

Aus den oberen Gleichungen geht hervor:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= u_x v_x + u_y v_y
\end{aligned}$$

mit $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ und $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, dass θ zwischen 0 und 180 Grad folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \\
\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right)
\end{aligned}$$

3.3 Koordinaten Transformieren

Es wird ein wie in Punkt 2.2 beschriebenes Koordinatensystem T auf ein anderes Koordinatensystem U gelegt. Im Toolsystem T wird ein Punkt P durch Koordinaten beschrieben. Das Ziel ist, die Koordinaten des Punktes P im Toolsystem U mathematisch zu bestimmen.

Das Skalarprodukt der beiden Koordinatenvektoren ergibt 0, da die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen.

Wie bereits in Punkt 2.2 beschrieben lassen sich Punkte so mit Hilfe der Einheitsvektoren beschreiben. **Anhang: Koordinatentransformation 1**

Formel:

$$[P]_U = [O]_U + a \cdot \vec{x}_U + b \cdot \vec{y}_U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ist der Verschiebevektor (also der Vektor von O_U zu O_T) bekannt, so kann die Formel wie folgt umgeschrieben werden:

$$\vec{u} = \Delta x \cdot \vec{x}_U + \Delta y \cdot \vec{y}_U = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$[P]_T$ wird durch $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$ beschrieben. P wird folgendermaßen in U beschrieben:

$$\begin{aligned}
[P]_U &= [O_T + x_T \cdot \vec{a}_T + y_T \cdot \vec{b}_T]_U \\
&= [O_T]_U + x_T \cdot [\vec{a}_T]_U + y_T \cdot [\vec{b}_T]_U
\end{aligned}$$

Um die Koordinaten des Punktes $[P]_U$ zu bestimmen, reicht es, wie in der oberen Gleichung erkenntlich wird, $[O_T]_U$, $[\vec{a}_T]_U$ und $[\vec{b}_T]_U$ zu bestimmen.

3.4 Anwendung

Gegeben sind $[P]_T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$, $[O_T]_U = \begin{pmatrix} x_{OTU} \\ y_{OTU} \end{pmatrix}$ und der Drehwinkel α .

Die Einheitsvektoren bezüglich des Toolsystems T lassen sich mit Hilfe von Sinus und Cosinus berechnen:

$$\begin{aligned}
[\vec{a}_T]_U &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\
[\vec{b}_T]_U &= \begin{pmatrix} \cos \alpha + 90^\circ \\ \sin \alpha + 90^\circ \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Durch das Skalarprodukt $\langle \vec{a}_T \| \vec{b}_T \rangle$ kann das erhaltene Ergebnis auf Korrektheit überprüft werden. Das Ergebnis des Skalarprodukts muss 0 sein, da beide Vektoren trotz der Drehung senkrecht zueinander stehen. Die Länge der Einzelnen Vektoren muss ebenfalls 1 betragen.

$$\begin{aligned} [P]_U &= [O_T]_U + x_T \cdot [\vec{a}_T]_U + y_T \cdot [\vec{b}_T]_U \\ &= \begin{pmatrix} x_{OTU} \\ y_{OTU} \end{pmatrix} + x_T \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + y_T \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha + 90^\circ \\ \sin \alpha + 90^\circ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{OTU} + x_T \cdot \cos \alpha + y_T \cdot \cos \alpha + 90^\circ \\ y_{OTU} + x_T \cdot \sin \alpha + y_T \cdot \sin \alpha + 90^\circ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert bereits das korrekte Ergebnis. Es gibt jedoch eine Möglichkeit, die Gleichung zu vereinfachen. Dafür wird die sogenannte Matrizenrechnung verwendet.

3.5 Matrizenrechnung

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema. $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist eine Matrix mit zwei Zeilen und zwei Spalten.

Durch Matrizen lässt sich die obige Gleichung folgendermaßen vereinfachen.

Da $\cos \alpha + 90^\circ = -\sin \alpha$ und $\sin \alpha + 90^\circ = \cos \alpha$ gilt, kann die Matrix wie folgt definiert werden:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

x_T und y_T werden dann mit der Matrix multipliziert:

$$[P]_T \cdot M = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Für die Multiplikation von $2 \cdot 2$ Matrizen gilt, dass die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen muss. Die Anzahl der Zeilen der ersten Matrix entspricht der Anzahl der Zeilen der Ergebnismatrix und die Anzahl der Spalten der zweiten Matrix entspricht der Anzahl der Spalten der Ergebnismatrix.

Die erste Zeile der ersten Matrix wird mit der ersten Spalte der zweiten Matrix multipliziert. Die zweite Zeile der ersten Matrix wird mit der zweiten Spalte der zweiten Matrix multipliziert.

Es ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} [P]_T \cdot M &= \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= x_T \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + y_T \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

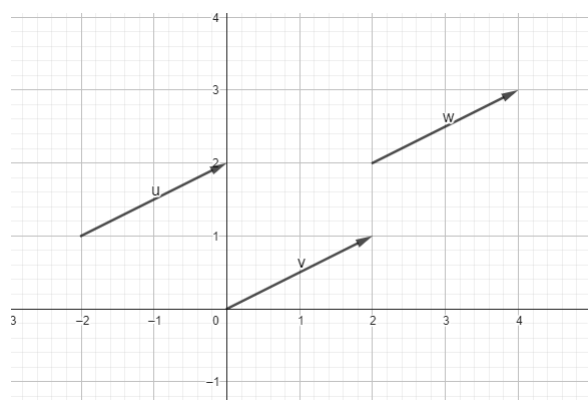
Diesem Gleichungsteil wird nun lediglich noch die Position des Toolsystems T im Ursprungssystem U hinzugefügt.

Die Endgültige Gleichung lautet:

$$[P]_U = [O_T]_U + \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

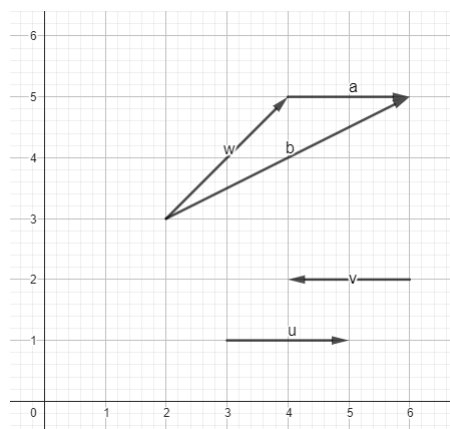
4 Anhänge

4.1 Vektoren 1



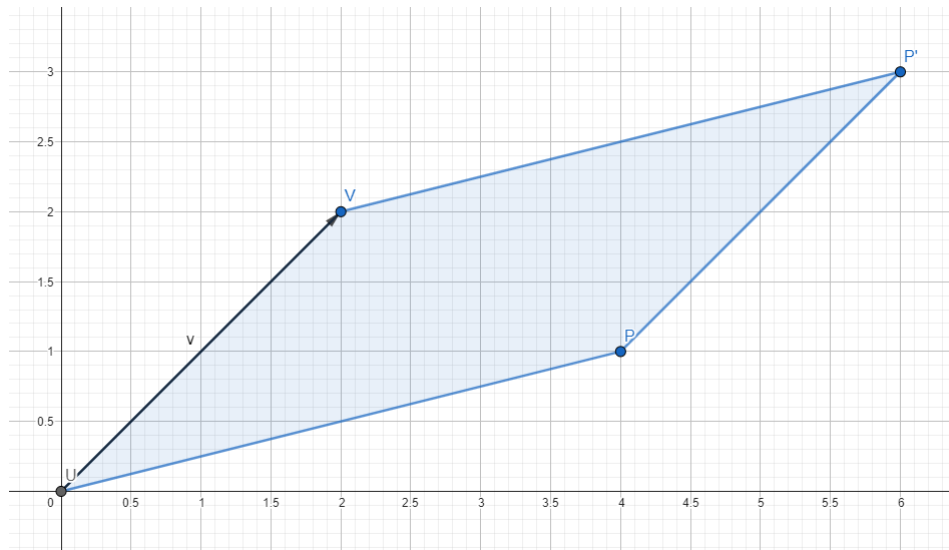
Koordinatensystem mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in drei verschiedenen Positionen.

4.2 Vektoren 2



Multipliziert man den Vektor \vec{u} mit -1 , erhält man so den Vektor \vec{v} . Addiert man die Vektoren \vec{w} und \vec{a} resultiert der Vektor \vec{b} .

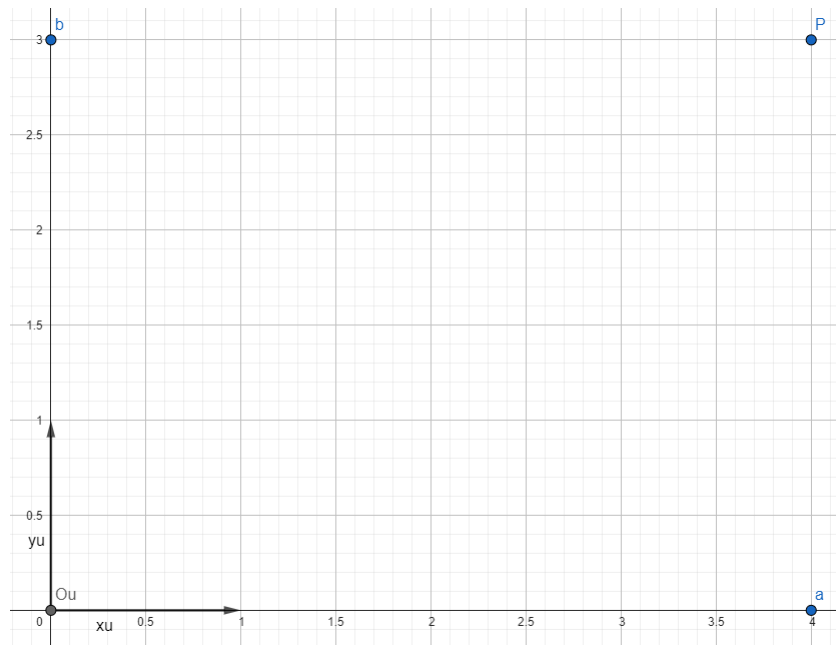
4.3 Vektoren 3



Der Punkt P wird mit dem Vektor \vec{UV} verschoben. Durch das Parallelogramm ergibt sich der neue Punkt P' . Der Vektor \vec{UV} ist dabei der Vektor zwischen den beiden Punkten U und V und wird folgendermaßen beschrieben:

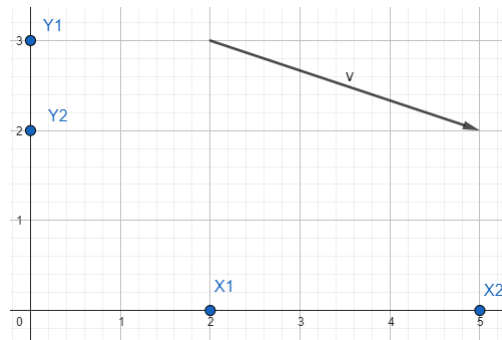
$$\vec{v} = \vec{UV} = V - U$$

4.4 Vektoren 4



Einheitsvektoren x_u und y_u im Koordinatensystem U mit dem Punkt P und seinen beschreibenden Abschnitten a und b .

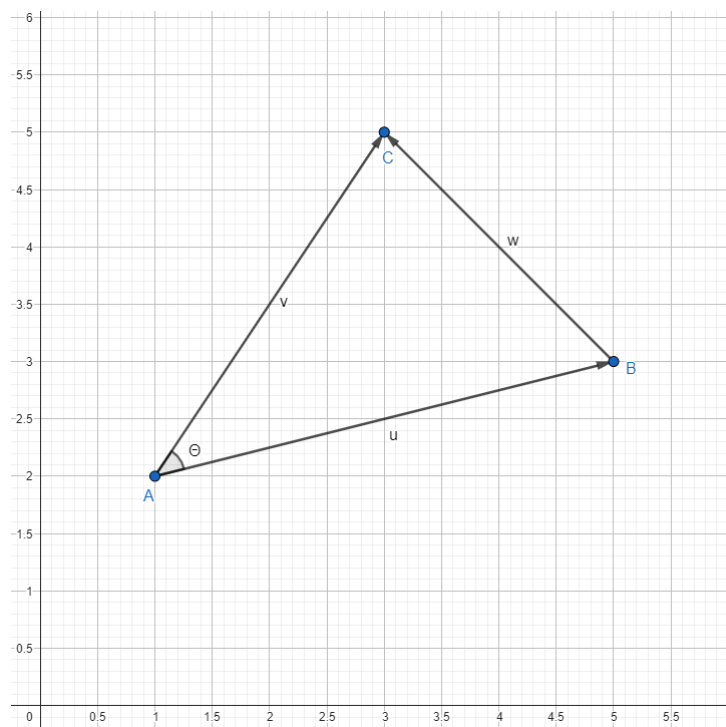
4.5 Vektoren 5



Der Vektor \vec{v} wird durch die Differenz des Anfangs- und Endpunktes des Vektors dargestellt.

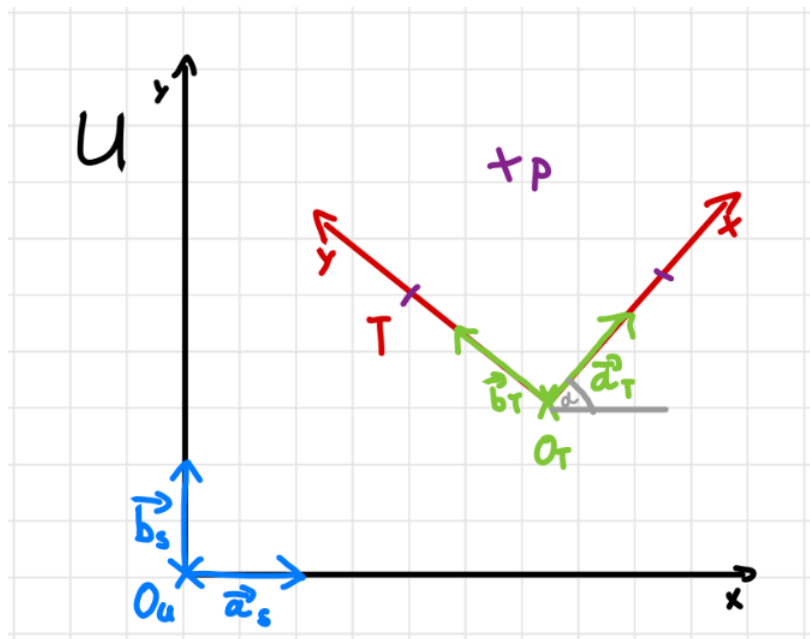
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X2 - X1 \\ Y2 - Y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.6 Skalarprodukt 1



\vec{w} ist der Differenzvektor aus \vec{v} und \vec{u} . Er hat die Länge $\|\vec{v} - \vec{u}\|$. Der Winkel zwischen \vec{v} und \vec{u} ist θ .

4.7 Koordinatentransformation 1



4.8 TITEL



4.9 TITEL



5 Quellen

- eigene Aufzeichnungen
- <https://mathe-lok.de/schuelervorlesung-kinematik-von-roboterarmen> (Letzter Aufruf:)
- <https://www.mathebibel.de/skalarprodukt> (Letzter Aufruf: 26.12.2022 @ 17:23:01)