Verschiebung von Koordinatensystemen

Justus Seeck

19. Dezember 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Vorwort

In der folgenden Arbeit wird lediglich die Verschiebung von Koordinatensystemen in der Ebene (also in zwei Dimensionen) behandelt. Die Methodik lässt sich jedoch auch auf die dritte Dimension übertragen. Auch die Anzahl der Verschiebungen ist beliebig, da man die hier verwendete Formel beliebig oft hintereinander anwenden kann, wird hier jedoch auf eine Verschiebung beschränkt. Die Verschiebung von Koordinatensystemen findet beispielweise in der Robotik Anwendung: Am Ende eines Roboterarms befindet sich meist ein weiteres Koordinatensystem, "Toolsystem", welches sich am Ende des Roboterarms befindet. Dadurch gibt es in diesem System keine Verschiebung, wenn sich der Arm bewegt, sondern lediglich wenn sich das Tool, oder dessen Ladung bewegt.

1.2 Schreibweisen und Definitionen

Punkte Ein Punkt P wurde bisher in der Form $P(x, y)$ dargestellt. Dies wird in der folgenden Arbeit nicht mehr verwendet. Stattdessen wird der Punkt P in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dargestellt. Dies ist eine sogenannte Matrix mit zwei Zeilen und einer Spalte. Die erste Zeile enthält die x-Koordinate, die zweite Zeile die y-Koordinate. Da im folgenden mit zwei verschiedenen Koordinatensystemen, dem Weltsystem U und dem Toolsystem T, gearbeitet wird, werden Punkte im Bezug auf ein Koordinatensystem mit Index angegeben. Der Punkt P im Bezug zum Weltsystem U wird folgendermaßen dargestellt: $[P]_U$. Im Bezug zum Toolsystem lautet die Darstellung $[P]_T$.

2 Vektoren

Geometrische Vektoren sind Pfeile (oder Pfeilklassen). $\vec{v}$ ist ein Vektor. Vektoren werden durch ihre Länge in x-Richtung und y-Richtung definiert (bei drei Dimensionen zusätzlich in z-Richtung) und mit einem Pfeil über dem Buchstaben gekennzeichnet. Vektoren haben keine Feste Postition im Koordinatensystem. Sie können beliebig verschoben werden. Solange der Vektor alle seine Eigenschaften (Länge in x-, y- und ggf. z-Richtung) behält, ist er der gleiche Vektor. **Anhang: Vektoren 1**. Zwischen zwei Vektroen lässt sich ein Paralellogramm zeichnen.

2.1 Rechnen mit Vektoren und Punkten

Vektoren können durch mathematische Operationen verändert werden. Multipliziert man beispielweise den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit -1, erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man kan auch zwei Vektoren addieren. Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. **Anhang: Vektoren 2**.

Punkte können mithilfe von Vektoren verschoben werden. Der Punkt wird dabei mit dem Vektor addiert. Dies entspricht dem Änhängen"des Vektors an den Punkt. Das Ende des Vektors entspricht dann dem neuen Punkt. Man kann auch ein Parallelogramm zwischen dem Punkt und dem Vektor bilden. Der "fehlende"Punkt ergibt dann die gesuchte Stelle des neuen Punktes. **Anhang: Vektoren 3**.

2.2 Einheitsvektoren im Koordinatensystem

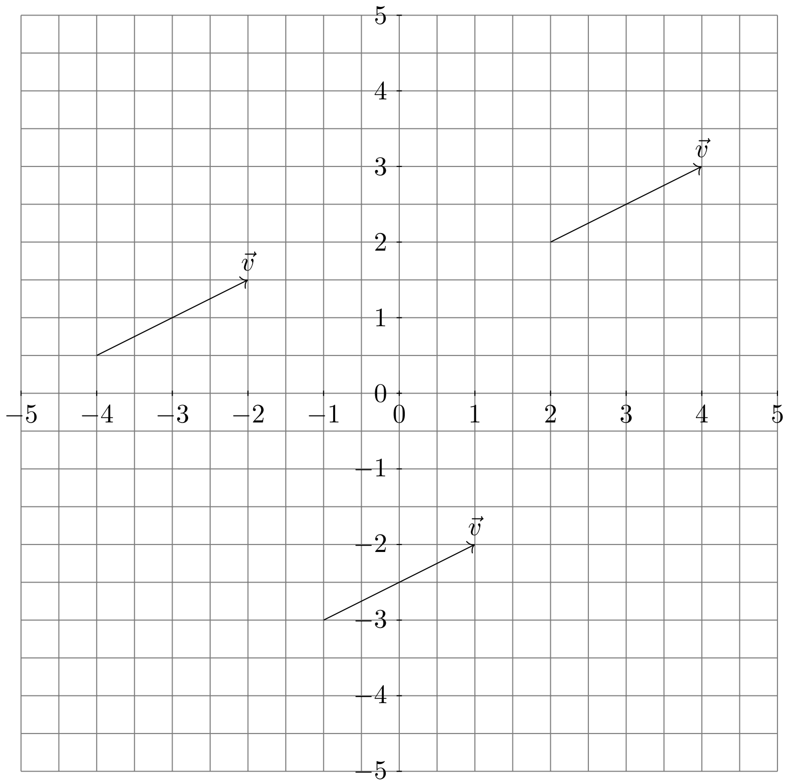
Ein Punkt P kann mit Hilfe von Einheitsvektoren im Koordinatensystem U beschrieben werden. Das Koordinatensystem U hat rechtwinklige Achsen. Es gibt jeweils einen Einheitsvektor in x-Richtung und einen Einheitsvektor in y-Richtung. Der Einheitsvektor in x-Richtung ist $\vec{x_U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Einheitsvektor in y-Richtung ist $\vec{y_U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Länge des Einheitsvektors ist dabei 1 (eine Längeneinheit) in seine respective Richtung. Um nun beispielweise den Punkt $[P]_U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu beschreiben, benötigt man den Ursprung des Koordinatensystems O_U, seine Koordinate in x-Richtung (hier: a), seine Koordinate in y-Richtung (hier: b) und die beiden Einheitsvektoren $\vec{x_U}$ und $\vec{y_U}$.
Es ergibt sich die folgende Formel:

$$[P]_U = [O]_U + a \cdot \vec{x_U} + b \cdot \vec{y_U} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Der Punkt $[P]_U$ entspricht dem dem Punkt $[O]_U$ zu dem man eine Verschiebung in x-Richtung (hier: $a \cdot \vec{x_U}$) und y-Richtung (hier: $b \cdot \vec{y_U}$) hinzufügt. **Anhang: Vektoren 4**.

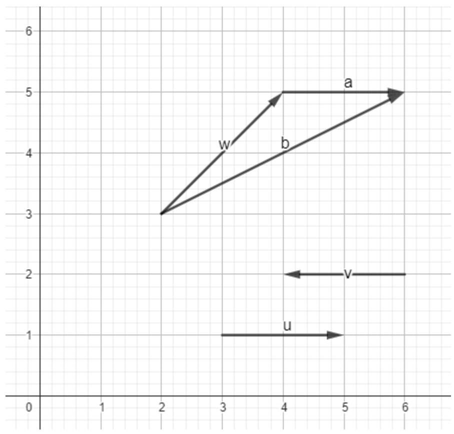
3 Anhänge

3.1 Vektoren 1



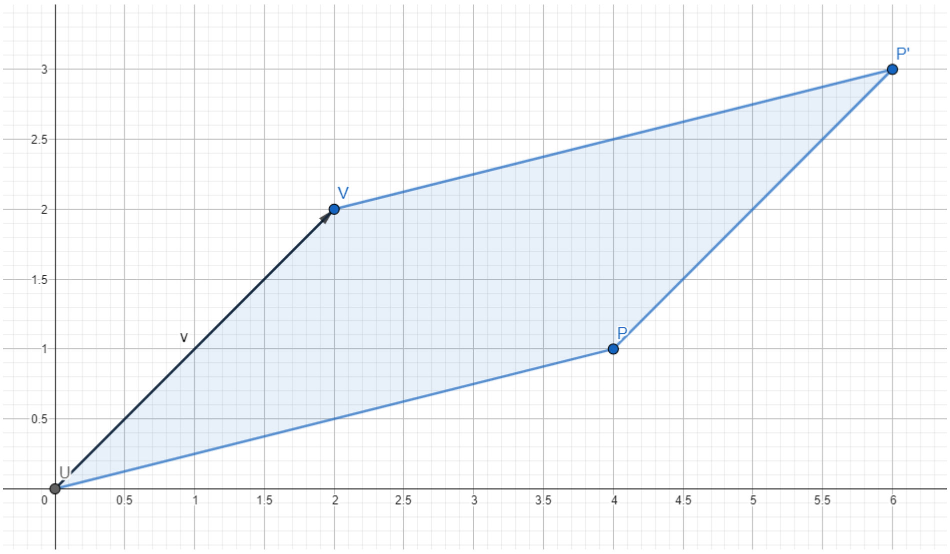
Koordinatensystem mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in drei verschiedenen Positionen.

3.2 Vektoren 2



Multipliziert man den Vektor $\vec{u}$ mit -1, erhält man so den Vektor $\vec{v}$. Addiert man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{w}$ resultiert der Vektor $\vec{b}$.

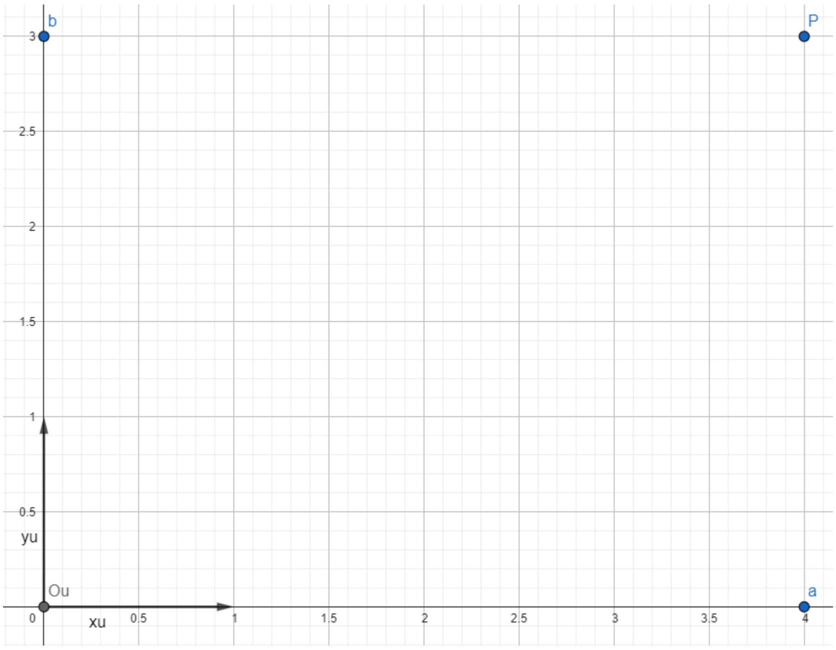
3.3 Vektoren 3



Der Punkt P wird mit dem Vektor $\vec{UV}$ verschoben. Durch das Paralellogramm ergibt sich der neue Punkt P'. Der Vektor $\vec{UV}$ ist dabei der Vektor zwischen den beiden Punkten U und V und wird folgendermaßen beschrieben:

$$\vec{v} = \vec{UV} = V - U$$

3.4 Vektoren 4



Einheitsvektoren xu und yu im Koordinatensystem U mit dem Punkt P und seinen beschreibenden Abschnitten a und b.