2023-09-30

Lineare Interpolation zwischen Punkten mittels eines 3R-Roboterarmes in der Ebene

Justus John Michael Seeck

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Ziel dieser Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die mathematische Beschreibung der linearen Interpolation zwischen zwei gegebenen Punkten $[\mathrm{A}]_S$ und $[\mathrm{B}]_S$ mittels eines 3R-Roboterarmes.

Dazu wird die Aufgabe der Interpolation in mehrere Teilbereiche aufgeteilt, welche im Folgenden erläutert werden. Zuerst wird die Gültigkeit von Koordinaten überprüft, indem bestimmt wird, ob die gesamte Strecke zwischen den Punkten $[\mathrm{A}]_S$ mit den Koordinaten $\binom{a_1}{a_2}$ und $[\mathrm{B}]_S$ mit den Koordinaten $\binom{b_1}{b_2}$ in einem vom Roboter erreichbaren Bereich liegt. Im Anschluss wird die Strecke mit Hilfe von Vektoren parametrisiert und ein Zeitverlauf für die Bewegung des Roboters bestimmt, sodass dieser die Strecke in einer vorgegebenen Zeit zurücklegt, ohne dabei die maximalen Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen zu überschreiten.

2. Aufbau des 3R-Roboterarmes

Der 3R-Roboterarm besteht aus drei Gelenken, welche jeweils über einen Schaft mit fester Länge miteinander verbunden sind. Am Ende des drittem Schaftes befindet sich ein Manipulator (hier: ein Greifarm), welcher die Aufgabe hat, einen Stift führen. Das Weltsystem S befindet sich am 1. Gelenk des Roboterarmes (R_1), das Toolsystem T am 3. Gelenk (R_3). Abbildung 1 zeigt den Aufbau des Roboterarmes. Die Länge der einzelnen Schäfte l_1, l_2 und l_3 ist bekannt.

Der Manipulator greift einen Stift mit dem bekannten Radius ρ, in dessen Zentrum sich die Spitze P befindet (siehe: Abbildung 2).

3. Trajektorienplanung

In der Trajektorienplanung wird der Weg, welcher vom Roboterarm zurückgelegt wird, geplant. Hierbei wird die Strecke zwischen den gegebenen Punkten $[\mathrm{A}]_S$ und $[\mathrm{B}]_S$ unter Zurhilfenahme von Vektoren parametrisiert. Die Verwendung von Vektoren anstelle von linearen Funktionen hat den Vorteil, dass auch vertikale Strecken gezeichnet werden können.

Außerdem wird überprüft, ob die Strecke in einem vom Roboter erreichbaren Bereich liegt.

3.1. Erreichbarkeit von Koordinaten

Um einen Pfad für die Bewegung des Roboters zu planen, ist zuvor eine Überprüfung der Erreichbarkeit der Koordinaten nötig. Durch den Aufbau eines Roboterarms kann es passieren, dass gewisse Punkte aufgrund der Armlängen für den Roboter nicht erreichbar sind, und somit das Zeichnen der Strecke nicht möglich ist.

Aus Gründen, welche im Verlauf der Arbeit erläutert werden, entspricht der Winkel des Toolsystems T ($[\theta_3]_S$) zur x-Achse des Weltsystems S dem Winkel zwischen den Punkten $[\mathrm{A}]_S$ und $[\mathrm{B}]_S$.

Für die Laage der Stiftspitze P im Bezug auf das Toolsystem T gilt:

$$[\mathrm{P}]_t = \begin{pmatrix} l_3 + \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Winkel θ zwischen den Punkten $[\mathrm{A}]_S$ und $[\mathrm{B}]_S$ gilt:

$$\theta = \mathrm{atan2}(b_2 - a_2, b_1 - a_1)$$

Die Erreichbarkeitsbegrenzung des Roboterarms ist konzentrisch kreisförmig um den Ursprung des Weltsystems, verschoben um einen Vektor $\vec{v}$.

Um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten, wird $[\mathrm{P}]_t$ mit der bereits aus dem direkten kinematischen Problem bekannten Rotationsmatrix Rot_θ multipliziert.

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= [\mathrm{P}]_t * \mathrm{Rot}_\theta \\
&= \begin{pmatrix} l_3 + \rho \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{-}\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= (l_3 + \rho) * \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt der Kreise M, welche die Erreichbarkeit des Roboters begrenzen, liegt dann bei $M = [\mathrm{O}]_S + \vec{v}$.

Nun müssen die Radien der beiden Kreise bestimmt werden, welche die Erreichbarkeit des Roboters begrenzen.

Für den Maximalradius r_{max} gilt:

$$r_{\text{max}} = l_1 + l_2$$

Für den Minimalradius r_{min} gilt:

$$r_{\text{min}} = |l_1 - l_2|$$

$\Longrightarrow$ Ein Punkt ist dann erreichbar, wenn er innerhalb eines Kreises mit dem Radius r_{max} und dem Mittelpunkt $[\mathrm{O}]_S + \vec{v}$, und außerhalb des Kreises mit dem Radius $|l_1 - l_2|$ und dem Mittelpunkt $[\mathrm{O}]_S + \vec{v}$ liegt.

4. Abbildungen

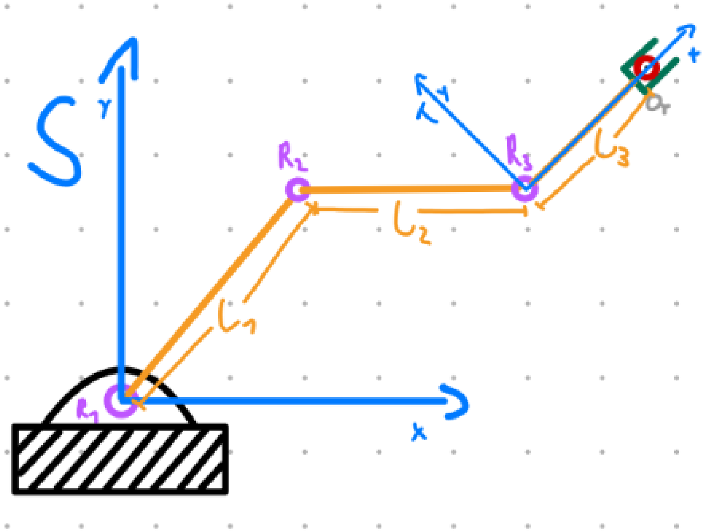

Abbildung 1: Ein 3R-Roboterarm mit dem Weltsystem S und dem Toolsystem T.

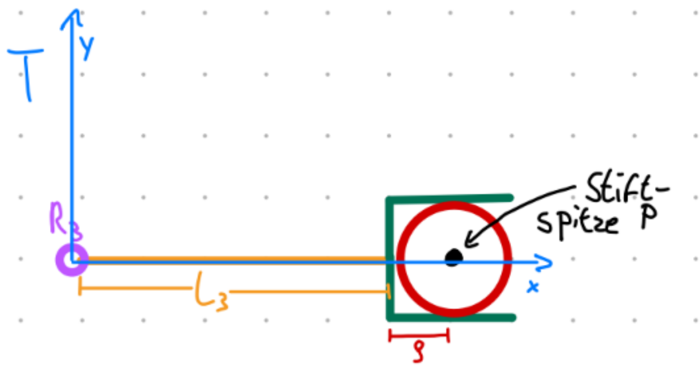

Abbildung 2: Manipulator des Roboters mit dem Stift (rot) und dem Stiftradius ρ.

Bibliographie