Rapport TAI (Chaînes de Markov)

CONSIGNES :

Un rapport est demandé pour chacune des équipes qui fera au maximum 16 pages, i.e. environ 4 pages par partie : 1.La forêt des Landes 2.Écosystèmes méditerranéens 3.Modèle plus riche d'écosystème 4.Pour aller plus loin La notation tiendra compte de la qualité des courbes présentées, la concision des réponses ainsi que des interprétations. Le dépôt de votre rapport se fera sur Moodle jusqu'au samedi 2 décembre à 23h59. Aucun délais supplémentaire ne pourra être accepté.

1. La forêt des Landes : modèle à 3 état

1) Comment se traduisent ces informations sur la matrice P telle que nous l'avons définie, possédant la propriété de Markov ?

$$X_n = \begin{pmatrix} Rs \\ Ch \\ Cht \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} Cht \\ Ch \\ Rs \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$\{a, b, c, d, e, f\} \in R^6$

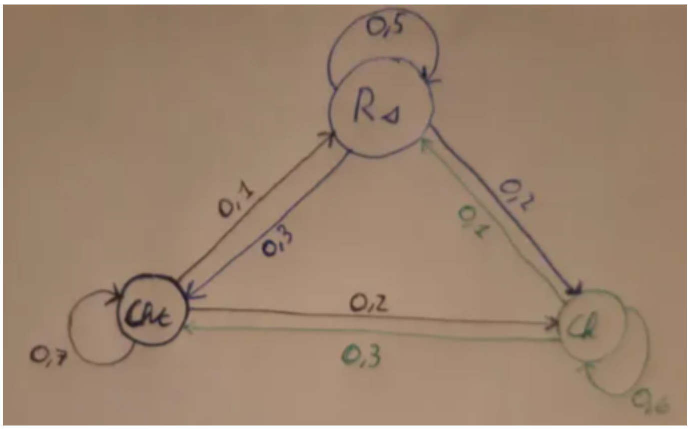
$$P * X_n = \begin{pmatrix} 0,5 & a & b \\ 0,2 & c & d \\ 0,3 & e & f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0,5 & a & b \\ 0,2 & c & d \\ 0,3 & e & f \end{pmatrix}$

---

2) Dessiner un graphe qui modélise l'écosystème. On précisera notamment les valeurs sur chacun des arcs.

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$



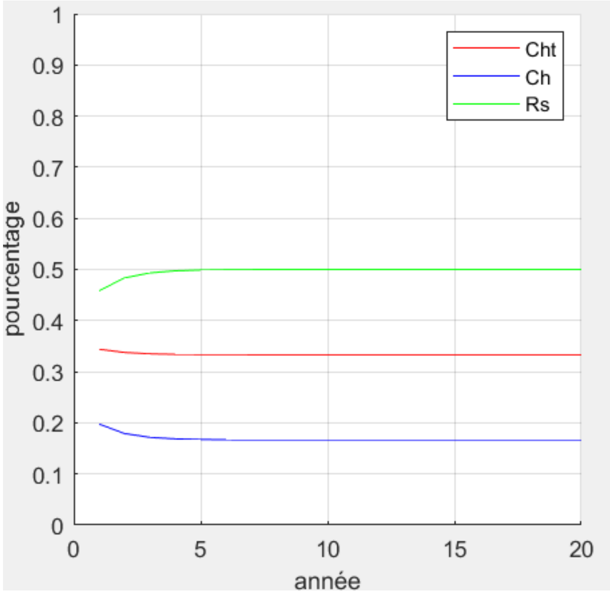
---

3) Calculez la proportion de chaque arbre pour l'année n = 1.

$$X_1 = P.X_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,36 \\ 0,40 \\ 0,24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,36 \\ 0,40 \end{pmatrix}$$

---

4 & 5) A l'aide d'un ordinateur, calculez la proportion de chaque arbre pour n = 20.



On peut donc en déduire que l'écosystème tend vers la stabilité. Il précisément, il tend vers cette valeur :

$$X_{20} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,33 \\ 0,50 \end{pmatrix}$$

---

6) Diagonalisation de P :

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$ Chaque élément non nul est une valeur propre de D

$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & -1 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La première colonne est le vecteur propre de la première valeure de D et ainsi de suite.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P = A.D.A^{-1}$$

---

7) Écrire le vecteur X_n en fonction de D_n, A, A^{-1} et la distribution initiale X_0

$$X_n = X_0.(A.D_n.A^{-1})^T$$

Avec matlab nous obtenons l'exact même résultat qu'à l'exercice 5.

2. Ecosystèmes méditerranéens à 5 états

1) Dessiner le graphe relatif à ce modèle.

2) Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que l'on passe de l'état Pi à Pe, d'une année sur l'autre ?

$$P_i - P_e = 0.25$$

Et de l'état P_e à P_i ? $Pe - Pi = 0$ car en une année, Pe ne peut que passer à G_a ou rester à P_e.

3) Sachant que l'on est dans l'état Pi, quelle est la probabilité d'une trajectoire du type Pi−Pe−Ga ?

$$P((P_e \cap G_a) \setminus P_i) = P(P_e \setminus P_i) * P(Ga \setminus P_e) = 0.25 \times 0.6 = 0.15$$

Et d'une trajectoire du type Pi−C −V ?

$$P((C \cap V) \setminus P_i) = P(C \setminus P_i) * P(V \setminus C) = 0.2 \times 0.1 = 0.02$$

---

4) Donnez un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

$$Pi - V - Ga$$

---

5) En vous servant de votre cours d'Algèbre linéaire de L1 expliquez, lorsque n tend vers l'infini, vers quelle proportion tend la dynamique lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} C \\ V \\ Pe \\ Ga \\ Pi \end{pmatrix}_0 = 0,2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

6) La transition de Pi vers Pe mime la présence des incendies. Étudier l'influence aux temps longs des incendies, en faisant varier sa valeur dans la matrice.

La valeur initiale est $P_i - P_e = 0.25$ et pour cette valeur : $X_n = \begin{pmatrix} 0.1752 \\ 0.1168 \\ 0.2044 \\ 0.1533 \\ 0.3504 \end{pmatrix}$

Si $Pi - Pe = 0$ alors $Xn = 10^{-6} \times \begin{pmatrix} 0.7431 \\ 0.6639 \\ 0.3802 \\ 0.3151 \\ 0.9205 \end{pmatrix}$

Si $Pi - Pe = 0.1, Xn = 10^{-3} \times \begin{pmatrix} 0.0668 \\ 0.0533 \\ 0.0473 \\ 0.0378 \\ 0.1006 \end{pmatrix}$

Si $Pi - Pe = 0.4, Xn = 10^{3} \times \begin{pmatrix} 0.4955 \\ 0.2809 \\ 0.8967 \\ 0.6309 \\ 1.2529 \end{pmatrix}$

Si $Pi - Pe = 0.6, Xn = 10^{7} \times \begin{pmatrix} 0.5804 \\ 0.2772 \\ 1.6602 \\ 1.0842 \\ 1.8503 \end{pmatrix}$

Si $Pi - Pe = 0.8, Xn = 10^{10} \times \begin{pmatrix} 1.4725 \\ 0.6174 \\ 5.9537 \\ 3.6564 \\ 5.5508 \end{pmatrix}$

On remarque que X_n devient plus grand quand $P_i - P_e$ devient plus grand. On peut en déduire que les incendies entraînent plus d'arbres sur le long terme et à l'inverse, pas d'incendies réduit le nombre d'arbres sur le long terme.

3. Modèle plus riche d'écosystème

$$P = \begin{pmatrix}
0.1 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2 & 0.4 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.2 & 0.05 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5 & 0.2 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.2 & 0.05 & 0.05 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.15 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.05 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.05 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1
\end{pmatrix}$$

---

1) A partir de chaque état, le ou lesquels sont à un moment ou un autre visités ? Donner alors les groupes d'états qui communiquent tous ensemble. Expliquer comment cela se voit sur la matrice.

Tous sont visités sauf le 12e élément. Le 1er au 4e communiquent ensemble, le 6,7 et 8e, communiquent entre eux. Les 13 à 20 aussi. La 5e ligne communique avec les 1,3,5 et est visitee par le 7e element. Les 9,10 et 11 communquent entre elles, la 10 visite la 20 et la 11 visite la 13. Il faut regarder les lignes pour regarder quel élément est visité et les colonnes pour regarder les éléments que visite celui sur lequel on est.

---

2) Calculs de X_1, X_2, X_{50} avec matlab :

$X_0 = 1/16 \times (\ 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\ )$

$X_1 =$
$(\ 0.0688\quad 0.0406\quad 0.0844\quad 0.0500\quad 0.0813\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.0688\quad 0.0625\quad 0.0250\quad 0\quad 0.1219\quad 0.0750\quad 0.0438\quad 0.0500\quad 0.0438\quad 0.0688\quad 0.($

$X_2 =$
$(\ 0.09060\quad 0.03420\quad 0.07230\quad 0.04920\quad 0.09230\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.06880\quad 0.03690\quad 0.02190\quad 0\quad 0.1281\quad 0.08440\quad 0.04750\quad 0.05200\quad 0.0461$

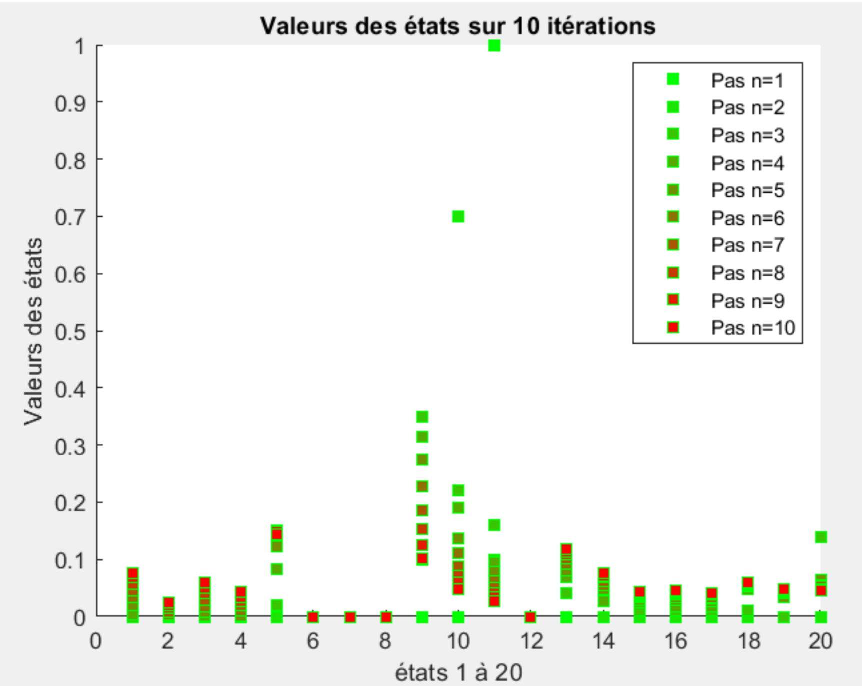
$X_{50} =$
$(\ 0.1084\quad 0.04440\quad 0.09850\quad 0.07160\quad 0.09410\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.1459\quad 0.09710\quad 0.05300\quad 0.05920\quad 0.05320\quad 0.07270\quad 0.0600$

Il faut en moyenne un seul pas pour que toutes les valeurs soient concentrées sur les états {1, 2, 3, 4, 5}, {13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

---

3) Simulation des états de Y_n par rapport à n :

$Y_0 = (\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ )$



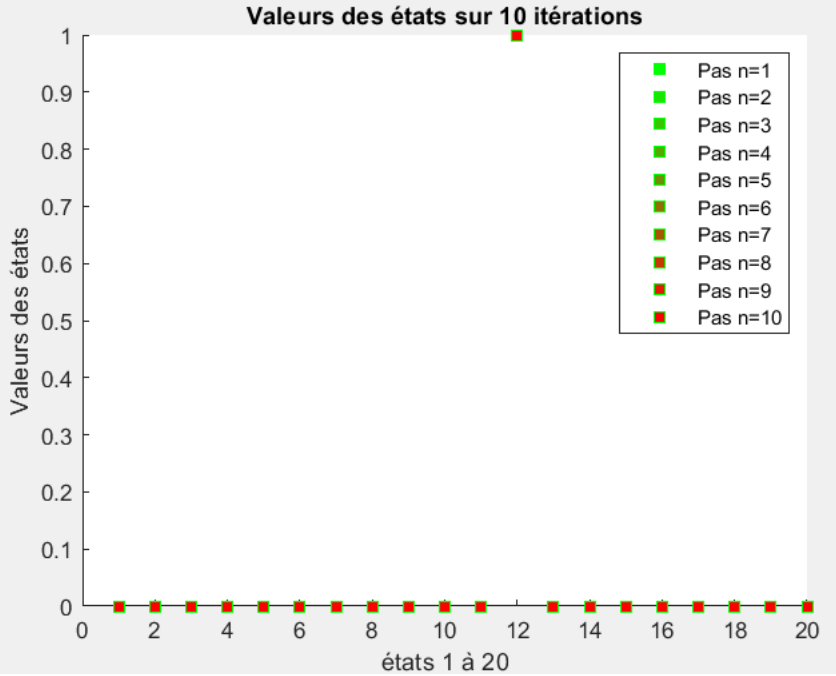
Nombre de pas moyen pour que le système peuple les états {1, 2, 3, 4, 5} :

Nombre de pas moyen pour peupler que le système états {14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} :

---

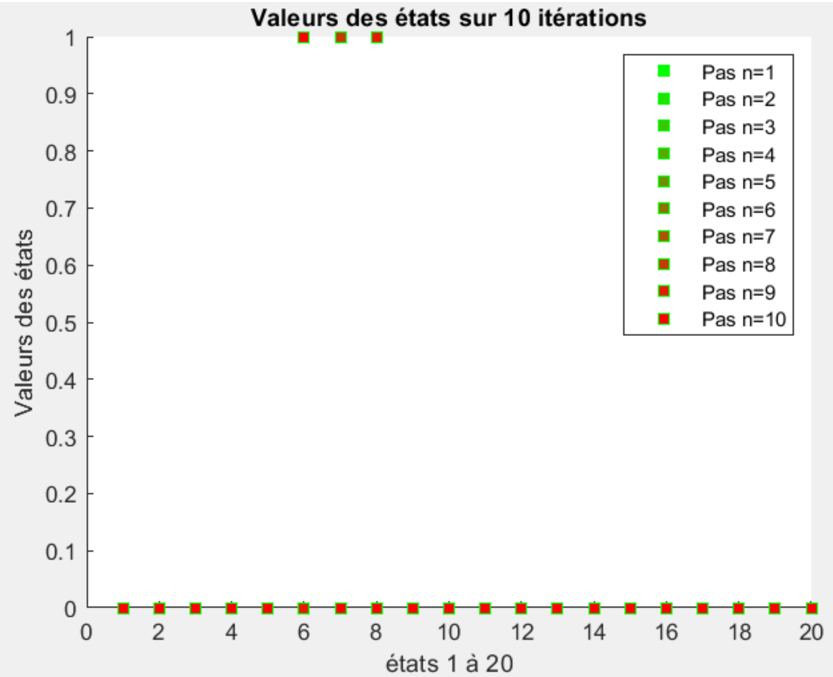
4) Simulation des états de Z_n par rapport à n :

$Z_0 = (\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ )$



5) Simulation des états de A_n par rapport à n :

$$A_0 = (\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ )$$



4. Pour aller plus loin