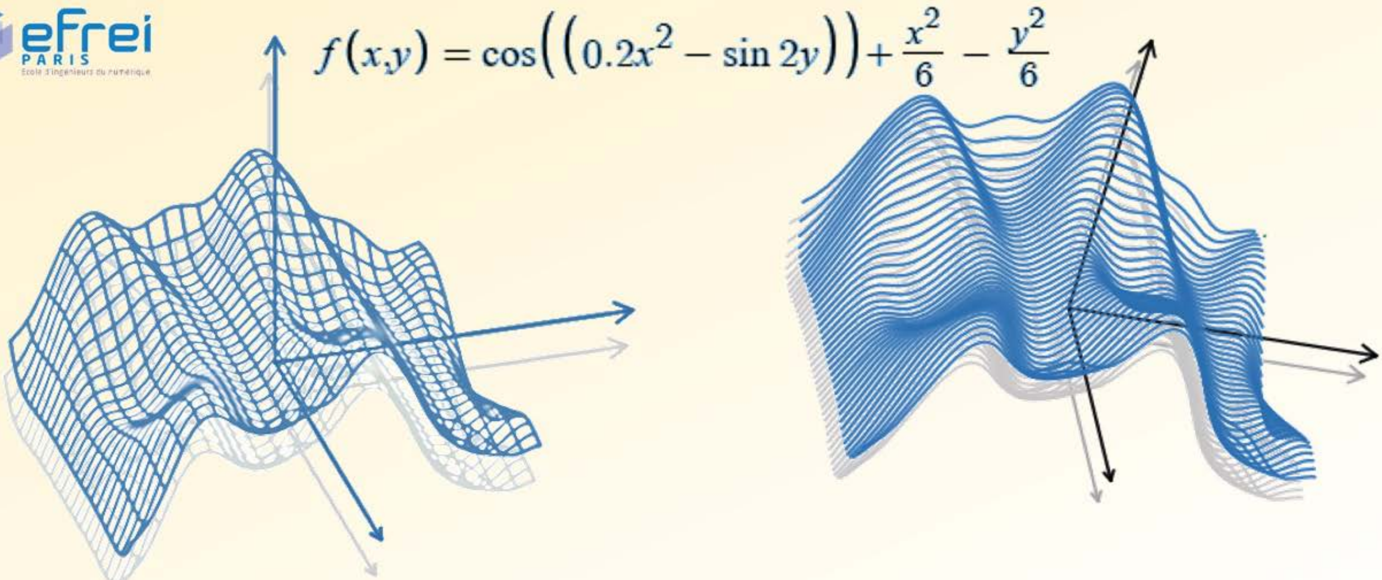

3. Dérivées partielles et différentiabilité

3.1 Introduction

Comme on a vu dans les chapitres précédents, l'analyse en plusieurs variables est similaire à l'analyse en une seule variable appliqué à plusieurs variables une à la fois. Par exemple, en prenant une fonction de deux variables, en fixant une variable constante, nous pouvons dériver par rapport à l'autre variable et nous obtenons une **dérivée partielle**. Nous montrons dans le premier paragraphe comment on définit et on interprète les dérivées partielles en utilisant nos connaissances en analyse d'une seule variable. Puis, plus tard, on définit la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables qui nécessite plus que la simple existence des dérivées partielles.

Pour comprendre le contexte général, on regarde l'exemple suivant. On souhaite discuter le taux de variation d'une fonction à un point donné. On rappelle que lorsque nous avons une fonction f d'une variable réelle x, ce taux est la dérivée donnée par

$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

Ce nombre représente le rapport entre le changement de la fonction et le changement de la variable d'entrée x ce qui représente la pente de la fonction en un point donné a.
On va définir un concept similaire pour les fonctions de plusieurs variables. Imaginez un randonneur au pied d'une montagne (Figure 3.1). Quelle serait la pente (dérivée) de sa trajectoire ? Eh bien, cela dépend : s'il marche tout en gardant la même altitude, la pente serait de 0 (piste rouge), sinon, la pente peut être positive ou négative, qu'il monte ou descende. Ici aussi, nous avons de nombreuses options. La pente peut être maximale s'il se déplace dans la direction de la plus grande augmentation d'altitude (piste noire), ou d'autres valeurs dans d'autres directions (piste jaune). Alors, la dérivée n'est définie dans notre contexte que selon une direction et elle peut avoir des valeurs différentes dans différentes directions. Par conséquent, à un point donné, une fonction peut être différentiable dans certaines directions et non différentiable dans d'autres. Dans ce qui suit, on commence par discuter des dérivées selon les directions de l'axe des x et de l'axe des y.

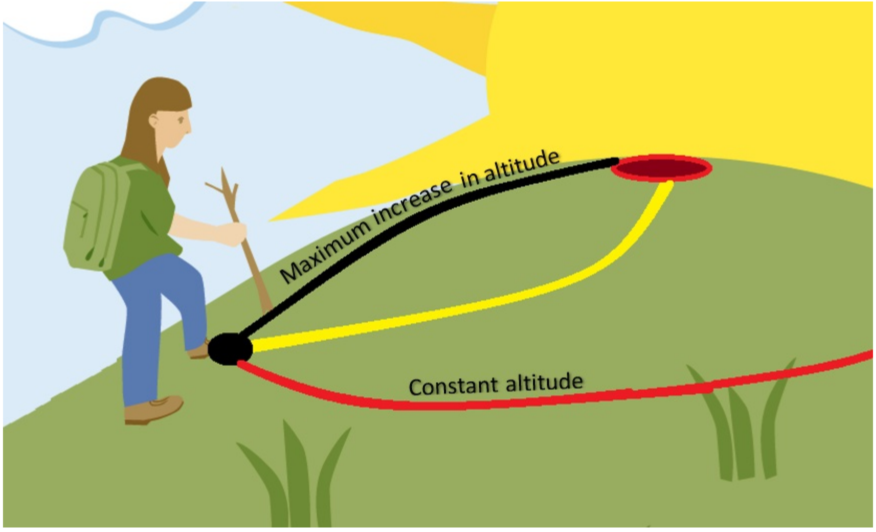

FIGURE 3.1 – Pentes sur une montagne.

Dans ce chapitre, Ω sera un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

3.2 Dérivées partielles

3.2.1 Dérivées partielles premières

On considère tout d'abord une fonction de deux variables. Soit (a_1, a_2) un point du domaine de définition d'une fonction de deux variables f. Les applications partielles passant par (a_1, a_2) sont les fonctions $f(x, a_2)$ et $f(a_1, y)$ obtenues comme intersection des plans verticaux $x = a_1$ et $y = a_2$ avec le graph de f (voir figure 3.2).

Définition 3.2.1 — Dérivées partielles premières de fonctions de deux variables. La dérivée partielles d'une fonction de deux variables $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par rapport à x et y au point $(a_1, a_2) \in \Omega$ sont les nombres réels

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$

en supposant que ces limites existent.

Rmq **Interpretation géométrique**

1. La dérivée partielle de f par rapport à x au point (a_1, a_2) n'est autre que la dérivée classique de la fonction d'une seule variables $f(x, a_2)$ (quand y est fixée à a_2) par rapport à x en $x = a_1$. Il s'agit alors de la pente de la tangente à la courbe de $f(x, a_2)$ en (a_1, a_2) (voir figure 3.2).

2. De même pour la dérivée partielle de f par rapport à y qui n'est autre que la dérivée classique de la fonction d'une seule variable $f(a_1, y)$ (quand x est fixée à une

constante a_1) par rapport à y en $y = a_2$. Il s'agit de la pente de la tangente à la courbe de $f(a_1, y)$ en (a_1, a_2). Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ existe si $f(x, a_2)$ est dérivable en $x = a_1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ existe si $f(a_1, y)$ est dérivable en $y = a_2$ (voir figure 3.2).

Rmq **Notations**

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ est notée aussi $D_1 f(a_1, a_2)$, $D_x f(a_1, a_2)$ ou $f_x(a_1, a_2)$. L'utilisation de la notation ∂ à la place de la notation classique d revient au fait qu'il s'agit d'une dérivée partielle puisque la fonction dépend de plusieurs variables.

2. $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ est notée aussi $D_2 f(a_1, a_2)$, $D_y f(a_1, a_2)$ ou $f_y(a_1, a_2)$.

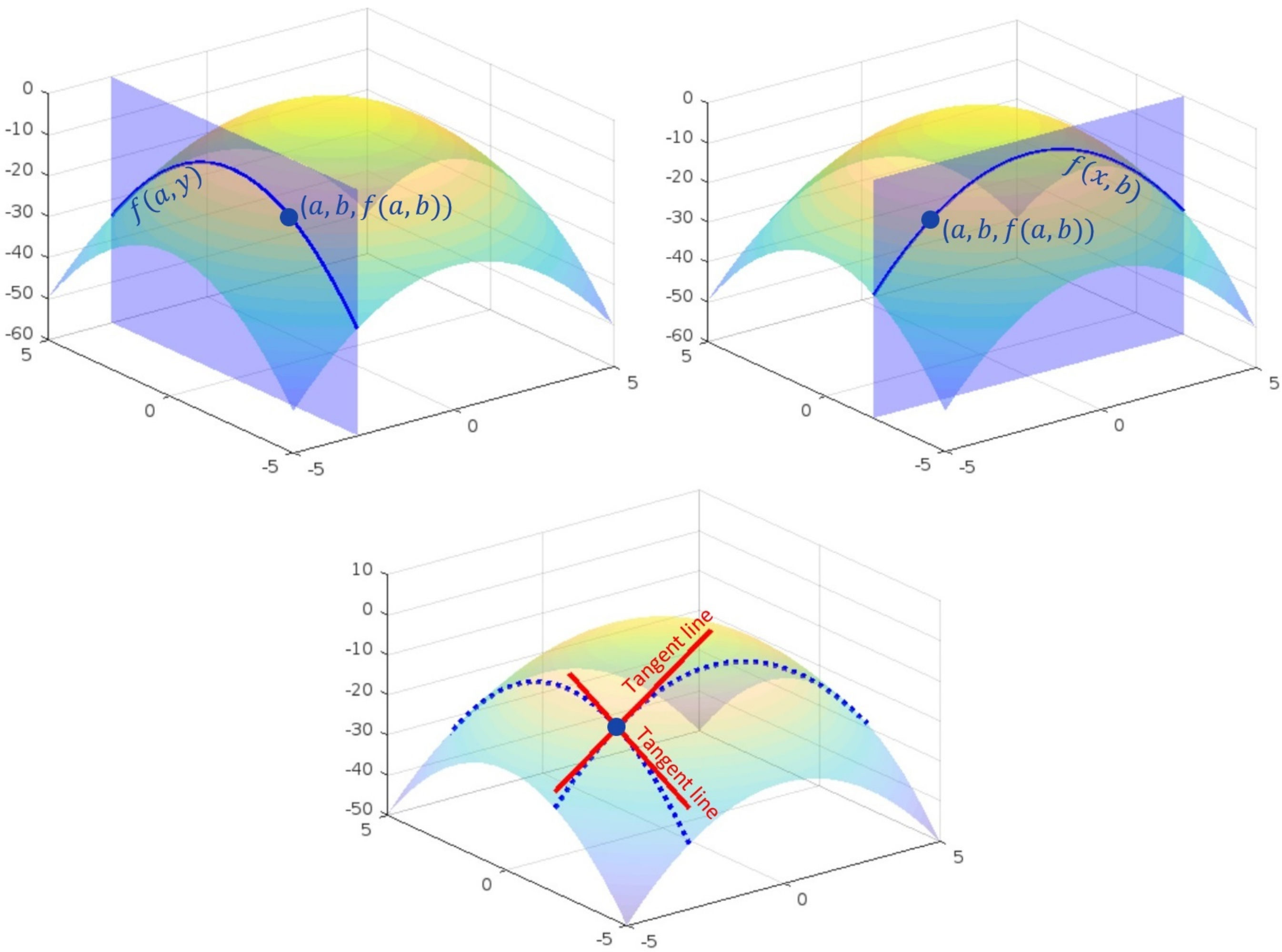

FIGURE 3.2 – Applications partielles et tangente en (a_1, a_2).

Définition 3.2.2 — Fonctions dérivées partielles premières.
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ où on définit une fonction de deux variables f. Si f admet des dérivées partielles en tout point (x, y) de Ω, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont les fonctions dérivées partielles de f.

Rmq

Règle de calcul :

- Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial x}$, considérer que y est une constante et dériver f par rapport à x.
- Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial y}$, considérer que x est une constante et dériver f par rapport à y.

Exemple 3.1

1. Trouver les valeurs des dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ au point $(-5,4)$ où $f(x,y) = 3x^2 + 3xy^2 + 5x - 1$.
2. Trouver les fonctions dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y) = x \sin xy$.
3. Trouver les fonctions dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y) = \dfrac{2x}{x+\cos y}$.
4. Étant donnée la paraboloïde $f(x,y) = x^2 + y^2$. Trouver, la pente de la tangente de l'intersection de f avec le plan vertical $x = 1$ au point $(1;2.5)$ (ceci peut être fait en calculant les dérivées partielles directement, ou bien en utilisant la dérivée de la fonction intersection).
5. Trouver toutes les fonctions de deux variables (x,y) tel que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$

■

Définition 3.2.3 — Dérivées partielles premières de fonction de plus que deux variables. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de n variables réelles. Ses dérivées partielles par rapport à $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ variable est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h}$$

en supposant que ces limites existent.

Exemple 3.2

1. Trouver les fonctions dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y,z) = e^{xz} \ln y$.
2. Trouver les fonctions dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y,z) = \dfrac{2x+3yz}{z}$.
3. Trouver toutes les fonctions de trois variables (x,y,z) tel que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xz + \frac{z}{y^2}$

■

3.2.2 Dérivées d'ordre supérieur

Si f est une fonction n variables, alors ses dérivées partielles premières sont également des fonctions de n variables. Par conséquent, elles peuvent avoir elles mêmes des dérivées partielles par rapport à chacune des n variables. Il s'agit de la dérivée partielle seconde (ou de d'ordre 2) de f.

Notations : On considère une fonction de deux variables $f(x,y)$. En calculant par exemple la dérivée de f par rapport à x tout d'abord ensuite par rapport à y, on obtient la dérivée partielle seconde notée $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. On appelle ces dérivées les dérivées mixtes quand on dérive par rapport à deux variables différentes. la dérivée seconde de f deux fois par rapport à y sera notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdots$

Exemple 3.3

1. Trouver les quatre fonctions dérivées partielles secondes de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y) = x^3 + xy^4 - 3y^2$.
2. Trouver les quatre fonctions dérivées partielles secondes de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où $f(x,y) = x\cos y + ye^x$.
3. Trouver une fonction de deux variables (x,y) tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x + xy^2$.

■

A partir des exemples précédents, on remarque que les **dérivées mixtes secondes** sont égales. Ce n'est pas une coïncidence. Nous pouvons prouver le théorème suivant pour le cas des fonctions de deux variables.

Théorème 3.2.1 — Théorème de Schwartz.
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur un ouvert, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Rmq

Ce résultat peut également être démontré pour les fonctions de plusieurs variables lorsque les dérivées existent et sont continues : pour le cas d'une fonction à trois variables $f(x,y,z)$, si la fonction et ses dérivées sont continues sur un ouvert alors on a par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$$

Rmq

Comme dans le cas d'une seule variable, on peut appliquer les règles de dérivation de somme et de produit pour les dérivées partielles. En ce qui concerne la composition, les choses sont un peu plus compliquées comme indiqué dans le paragraphe suivant.

3.2.3 Règle de la chaîne

La règle de la chaîne pour les fonction d'une seule variable est une formule qui donne la dérivée de la fonction composée $f(g(x))$ des deux fonctions f et g.

On peut démontrer un résultat similaire, mais plus compliqué, pour les fonctions de deux variables :

Théorème 3.2.2 — Règle de la chaîne.

1. Si f est une fonction de deux variables x et y ayant des dérivées partielles premières continues, et si x et y sont des fonctions dérivables de la variable t, alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

2. Si f est une fonction de deux variables x et y ayant des dérivées partielles premières continues, et si x et y sont des fonctions dérivables de deux autres variables u et v, alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

■ **Exemple 3.4**

1. Soit $f = \sin(x^2 y)$ et soit $x = uv^2$ et $y = u^2 + \frac{1}{v}$. Trouver $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$
   (a) après substitution et dérivation directe par rapport à u et v.

   (b) en utilisant la règle de la chaîne.

2. Soit $u = x^2 y$ et $v = x + 2y$. Trouver $\frac{\partial}{\partial x} f(u,v)$ en fonction des dérivées partielles de f par rapport à u et v.

■

■ **Exemple 3.5 Différence entre d et ∂**
La température atmosphérique dépend de la position et le temps. Si on utilise les coordonnées x, y, et z pour repérer la position (mesurée en kilomètres) et t pour représenté le temps (mesuré en heures), alors la température T^oC est une fonction de quatre variable, $T(x,y,z,t)$.

1. Si un thermomètre est attaché à un ballon météo qui se déplace dans l'atmosphère sur un chemin où les coordonnées des points sont données en fonction de temps par $x = f(t)$, $y = g(t)$ et $z = h(t)$. Écrire le taux d'accroissements en temps t de la température T en fonction des dérivées partielles.
2. Trouver le taux d'accroissement des température enregistrées au temps $t = 1$ si

$$T(x,y,z,t) = \frac{xy}{1+z}(1+t)$$

   lorsque le ballon se déplace le long de la courbe donnée par $x = t$, $y = 2t$ et $z = 1 - t^2$.

■

■ **Exemple 3.6 Fonction harmonique**
Une fonction $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est dite harmonique si pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, elle satisfait

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Si $f(u,v)$ est une fonction harmonique. Vérifiez que $f(x,y)$ est aussi harmonique avec $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$.

■

3.3 Différentiabilité

3.3.1 Dérivée directionnelle

On a défini les dérivées partielles d'une fonction de deux variables f, en un point (a_1, a_2) comme étant les dérivées de f suivant les directions parallèles aux axes de coordonnées.

On peut définir de la même manière, des dérivées dans d'autres directions, ces dérivées sont appelées les dérivées directionnelles. Pour un définition formelle de la dérivée directionnelle, voir l'annexe du chapitre.

3.3.2 Différentiabilité

Dans le cas d'une fonction d'une variable, on sait que la dérivabilité en un point conduit à la continuité en ce point ainsi qu'à l'existence d'une tangente à la courbe en ce point. L'existence de cette tangent garantie une certaine régularité du graphe de la fonction en ce point. Une notion équivalente existe pour les fonction de plusieurs variables mais elle est plus compliquée à définir.

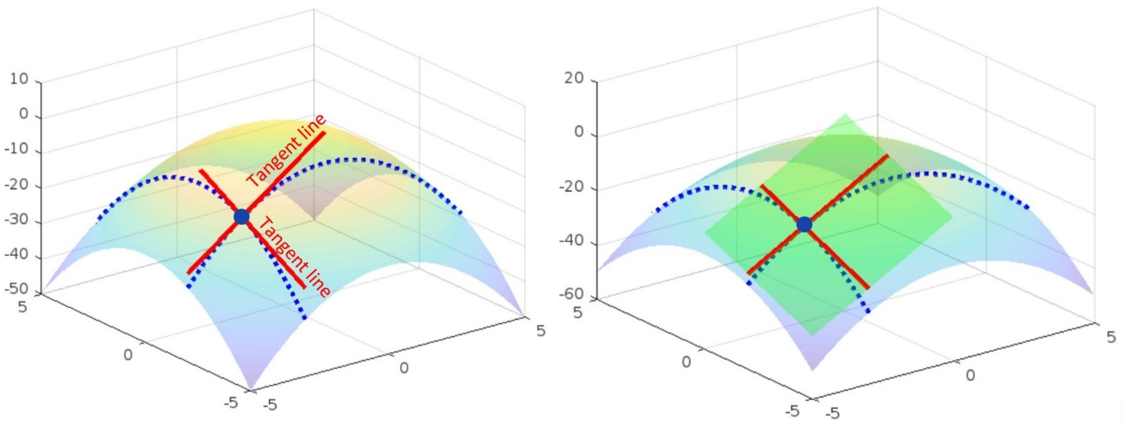

FIGURE 3.3 – Tangentes et plan tangent en (a_1, a_2).

L'équivalent de la tangente en un point pour les fonctions d'une seule variable, sera la plan tangent en un point pour une fonction de deux variables. Géométriquement, on peut s'attendre à que l'existence du plan tangent en un point implique l'existence de tangentes dans toutes les directions. Cependant, la réciproque n'est pas vraie : on peut avoir des fonctions de deux variables ayant des tangentes (des dérivées directionnelles) qui existent dans toutes les direction sans que le plan tangent puisse être construit. On a besoin de plus d'hypothèses pour garantir l'existence du plan tangent. En effet, l'équivalent de la notion de dérivabilité sera la notion de différentiabilité : **il faut que la fonction soit <u>différentiable</u> en un point pour qu'elle soit continue en ce point et pour que le plan tangent existe en ce point.**

Pour démontrer qu'une fonction est différentiable en un point, on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 — Différentiabilité.
Étant donnée une fonction $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans un voisinage de (a_1, a_2) alors f est différentiable en (a_1, a_2).

Rmq On note que si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f ne sont pas nécessairement continues en a.

Définition 3.3.1
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, f est dite $C^1(\Omega)$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω.

Rmq On note que si f est $C^1(\Omega)$ alors elle est différentiable.

Info++

Preuve La preve de ce résultat utilise un théorème d'accroissement fini pour des fonctions de plusieurs variables ainsi que la continuité des fonctions de plusieurs variables.

Rmq Tous les résultats sur la différentiabilité peuvent être étendus aux fonctions de plus de deux variables. De plus, les polynômes, les fonctions rationnelles et trigonométriques sont C^1 sur R^2.

Proposition 3.3.2 La somme, le produit, le quotient (si dénominateur ne s'annule pas) et la composition (à condition que les domaines soient compatibles) des fonctions différentiables est une fonction différentiable.

3.4 Gradient

Pour de nombreux problèmes, il est très utile et pratique de connaître la direction dans laquelle la pente est maximale. En d'autres termes, la direction dans laquelle l'augmentation ou la diminution de la fonction serait maximale par rapport à une augmentation donnée de la variable d'entrée. Par exemple, considérons à nouveau le randonneur sur la montagne, si, à un moment donné, il sait quelle est le pas qu'il doit faire pour ganger le maximum d'altitude d'altitude, il irait dans cette direction au cas où il voudrait le chemin le plus court vers le sommet. Cette direction est le gradient.

Définition 3.4.1 — Gradient.
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ tel que $(0,0) \in \Omega$. Si les dérivées partielles de f en (a_1,a_2) existent, le gradient de f est le vecteur de $\mathbf{R}^2$ donné par

$$\overrightarrow{grad}_{(a_1,a_2)}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)$$

Ce gradient peut aussi être noté $\nabla f(a_1,a_2)$.

■ **Exemple 3.7 Interpretation du gradient :**

On considère la fonction $f(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$. Si les lignes de niveau de f sont des fonctions régulières (C^1) alors en tout point de la courbe de niveau, la tangente est orthogonale au gradient. En d'autres termes, aux points réguliers, le gradient est un vecteur normal (perpendiculaire) à la courbe de niveau. Ceci signifie que la direction du gradient est la direction de la plus grande montée de $f(x,y)$. De plus, la norme du vecteur gradient est la valeur de la pente dans cette direction. La figure suivante montre les courbes de niveau de la fonction$f$ ainsi que les vecteurs gradients le long de ces courbes de niveau.

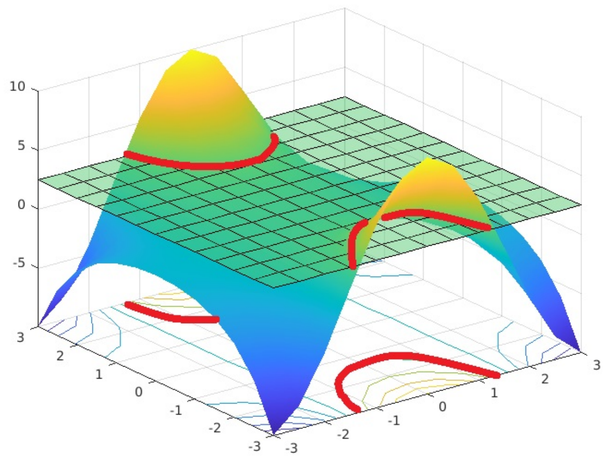

FIGURE 3.4 – Courbes de niveau dans le plan de la fonction $f(x,y) = \cos(x)\ \mathrm{ch}\,(y)$.

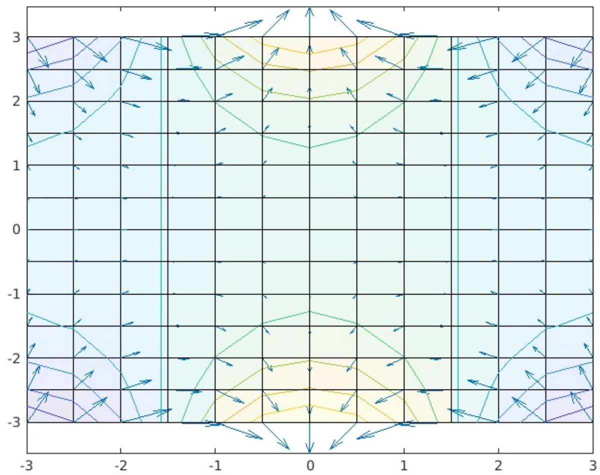

FIGURE 3.5 – Courbes de niveau dans le plan de la fonction $f(x,y) = \cos(x)\ \mathrm{ch}\,(y)$ ainsi que les vecteurs gradients correspondants.

■

■ **Exemple 3.8** Trouver les dérivées directionnelles de la fonction $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ en $(2,0)$ dans la direction $u = (3,-4)$.

■

■ **Exemple 3.9** Trouver les directions suivant lesquelles $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

a. croît le plus rapidement au point $(1,1)$.
b. décroît le plus rapidement au point $(1,1)$.

Que sont les directions suivant lesquelles les valeurs de la fonction restent inchangées f en $(1,1)$. ■

3.5 Application : Equations aux dérivées partielles

3.5.1 Pourquoi des EDPs

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation d'une fonction d'une seule variable qui fait intervenir la variable indépendante, la fonction, et les dérivées de la fonction comme :

$$3xy'' + 2xy' - x^2y = e^x.$$

Résoudre une équation reviendra à trouver une fonction de la variable x qui satisfait cette équation. Dans le cadre de ce cours, nous traitons des fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées partielles. Par conséquent, ce paragraphe donne des exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont des équations d'une fonction dépendant de plus qu'une variable indépendante. Elles font intervenir les variables indépendantes, la fonction et les dérivées partielles de la fonction telles que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + y^2.$$

De nombreux EDPs proviennent de différents domaines de la physique (acoustique, optique, élasticité, hydro et aérodynamique, électromagnétisme, mécanique quantique, sismologie, etc.) puisque leur solutions représentent des solutions au problèmes physiques correspondants.

Cependant, les EDPs apparaissent également dans d'autres domaines de la science (chimie quantique, cinétique chimique, économie, mathématiques financières, informatique...).

3.5.2 Quelques exemples

Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variable suffisamment régulière.

Exemple simple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

La fonction solution f peut être toute fonction qui ne dépend pas de x comme $f(x,y) = y^2$, $f(x,y) = y^2 \cos y$ ... En général, elle peut s'écrire $f(x,y) = g(y)$ où g dépend seulement de y.

Equation de Transport

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

CEtte équation décrit comment un quantité scalaire est transportée dans l'espace ou dans un fluide par exemple.

Equation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Les fonctions satisfaisant cette équation sont appelées fonctions harmoniques. Il a été prouvé dans le chapitre qu'une fonction qui peut être écrite comme $f(u)$ où $u = fracxy$ est une fonction harmonique.

■ **Exemple 3.10** Vérifier que la fonction $g(x,y) = e^x \sin y$ est une solution de l'équation de Laplace.
■

Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

La solution de cette équation représente le mouvement d'une onde qui pourrait être une vague océanique, une onde sonore, une onde lumineuse ou une onde voyageant le long d'une corde vibrante. Par exemple, elle peut représenter le déplacement d'une corde de violon vibrante au cours du temps. La constante c dans l'équation représente dans ce cas la densité et la tension dans la corde.

The solution of this equation represents the motion of a waveform, which could be an ocean wave, a sound wave, a light wave, or a wave traveling along a vibrating string. For instance, if represents the displacement of a vibrating violin string at time and at a distance from one end of the string. The constant c in the equation represents in this case the density and the tension in the string.

■ **Exemple 3.11** Vérifier que la fonction $g(x,y) = \sin(x - ct)$ est une solution de l'équation des ondes. ■

3.5.3 Recherche de solutions de quelques EDPs

Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables suffisamment régulière.

■ **Exemple 3.12** Trouver les fonction f solutions de

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

■

■ **Exemple 3.13** Étant donné la corde d'un violon représentée dans la figure suivante :

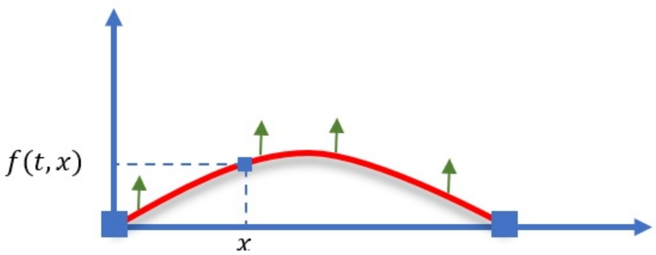

FIGURE 3.6 – Mouvement de la corde d'un violon.

On souhaite connaître la position d'un point d'abscisse x sur la corde oscillante maintenue fixe à ses deux extrémités. Par conséquent, nous devons trouver les fonctions f solutions de l'équation des ondes suivante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Pour trouver ces solutions utilsier un changement de variables $u = x + ct$ et $v = x - ct$ et écrire $f(x,y) = g(u,v)$. ■

Exercise Sheet 3 : Dérivées partielles et différetiabilité

Exercice 1 Déterminer les dérivées partielles premières des fonctions C^1 suivantes

$a.\ f(x,y) = e^x \sin y$ $\quad b.\ f(x,y) = (x^2+y^2)\sin y$ $\quad c.\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$d.\ f(x,y) = \tan(xy)+y$ $\quad e.\ f(x,y) = \frac{(x+y)}{1+x^2y}$ $\quad f.\ f(x,y) = e^{x+y}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$g.\ f(x,y,z) = x^3y+xyz+xy^3$ $\quad h.\ f(x,y) = \ln(x+2y)$ $\quad i.\ f(x,y,z) = x\cos(y-z^2)$

$j.\ f(x,y) = xe^y+ye^x$ $\quad$ ► $h.\ f(x,y) = y^{x^2}$ $\quad$ ► $i.\ f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{x}}$

Exercice 2 Déterminer les dérivées partielles secondes des fonctions C^1 suivantes

$a.\ f(x,y) = y^2(x+y)$ $\quad b.\ f(x,y) = e^{xy}$

$c.\ f(x,y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad d.\ f(x,y) = \sin(x+y)+\cos(x-y)$

► $e.\ f(x,y) = x^2+xy-y^3$ $\quad$ ► $f.\ f(x,y,z) = \sin(xy)+z$

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des fonctions C^2 vérifiant les équations suivantes

$a.\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1+x^2+y^3$ $\quad b.\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$

$c.\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2$ $\quad d.\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1+y$

Exercice 4 Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2y^3 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3y^2 & (2) \end{cases}$$

1. Utiliser l'équation (1) pour déterminer une expression de f en fonction d'une fonction de la variable y.
2. Utiliser l'équation (2) pour déterminer une expression de f en fonction d'une constante.

Exercice 5 Calculer les dérivées partielles premières, si elles existent, de la fonction suivante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

► **Exercice 6** Calculer les dérivées partielles premières, si elles existent, de la fonction suivante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Exercice 7 Soient les résistances R_1, R_2 et R_3 ohms connectées en parallèle. On suppose aue la résistance équivalente est de R ohm. On sait que R est obtenue avec la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Soient $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ et $R_3 = 90$ ohms. Trouver le facteur par lequel sera multipliée R quand on applique un changement à la résistance R_2.

► **Exercice 8** Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Déterminer, si elles existent, les dérivées partielles en $(0,0)$.

► **Exercice 9** Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

1. Trouver la limite de f quand (x,y) tend vers $(0,0)$ le long de la direction de $x = y$.
2. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.
3. Montrer que les dérivées partielles existent à l'origine.

► **Exercice 10** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en $\mathbf{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leurs valeurs.
   (c) Les dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$? Justifier.

▶ **Exercice 11** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbf{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et donner leurs valeurs.
   (c) Les dérivées partielles premières de f sont-elles continues en $(0,0)$? Justifier.
   (d) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 12 Montrer que les fonctions suivantes vérifient les équations aux dérivées partielles correspondantes

$a.\ u = \dfrac{x+y}{x-y}, \qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x} = -y\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$b.\ v = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, \qquad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = -2u$

Exercice 13 Déterminer les fonctions C^1, $f(x,y)$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x - y,$$

en utilisant le changement de variables $u = xy$ et $v = x+y$.

▶ **Exercice 14** On souhaite trouver les fonctions f de classe C^1 tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Calculer a, b, c et d sachant que le changement de variable $u = ax+by$, $v = cx+dy$, pour l'équations donnée conduit à $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, où $g(u,v) = f(x,y)$. Résoudre l'équation alors.

▶ **Exercice 15** Soit $f(x,t)$ une fonction C^2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante qui est l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(0,t) = f(l,t) = 0 \\ f(x,0) = f(x) \end{cases}$$

où $l \in \mathbf{R}$. Utiliser la méthode de séparation de variables en considérant que $f(x,t) = u(x)v(t)$.