PARIS PANTHÉON-ASSAS UNIVERSITÉ

Chapitre 2

Théorie de la Relativité Restreinte

23-24

Plan

1. Postulats d'Einstein
2. Transformations de Lorentz
3. Longueur, temps et simultanéité en relativité

II.1 Les postulats d'Einstein

❖ **Postulat I:** Le **principe de la relativité**

Enoncé : Toutes les lois de la physique sont invariantes dans tous les référentiels d'inertie (référentiels se déplaçant avec un mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres).

→ **Tous les référentiels inertiels sont équivalents.**

II.1 Les postulats d'Einstein

❖ **Postulat II:** Le **principe de la constance de la vitesse de la lumière**

Enoncé: La vitesse de la lumière dans le vide, *c* est la même dans tous les référentiels d'inertie : c'est une constante universelle.

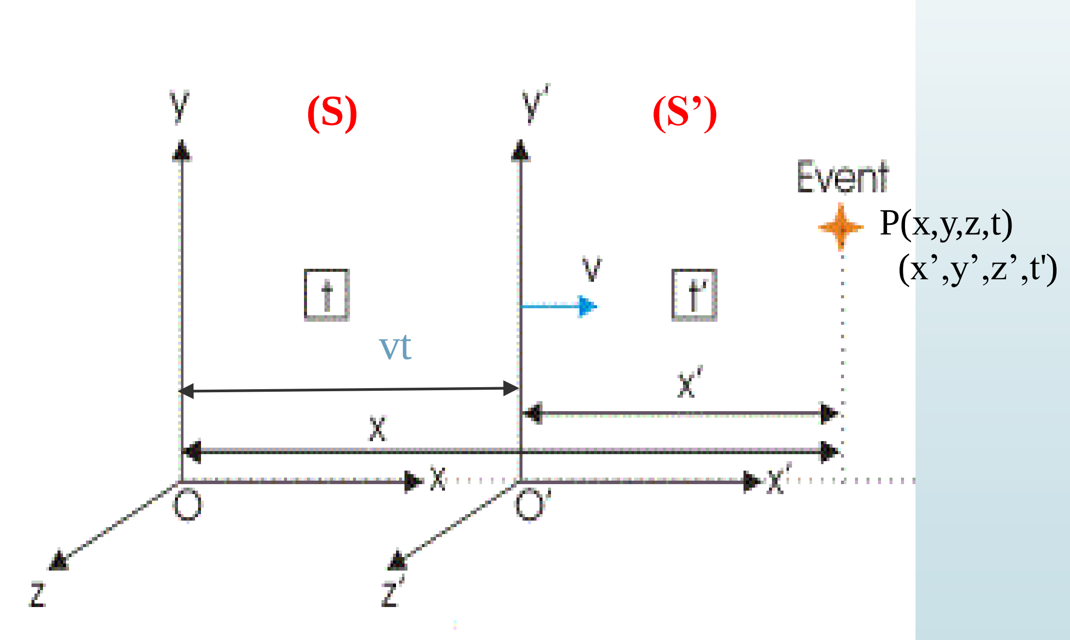
Elle ne dépend pas du mouvement de la source ou de l'observateur

→ **Les lois de la mécanique ainsi que les lois de l'électromagnétisme sont invariantes sous toutes les transformations**

II.2 – Transformation des coordonnées de Lorentz

Considérons un système inertiel (S) au repos et un autre système inertiel (S') se déplaçant avec une vitesse " v " le long des axes xx'.

Il y a 2 observateurs: le premier est au repos par rapport à (S) et le second est au repos par rapport à (S').

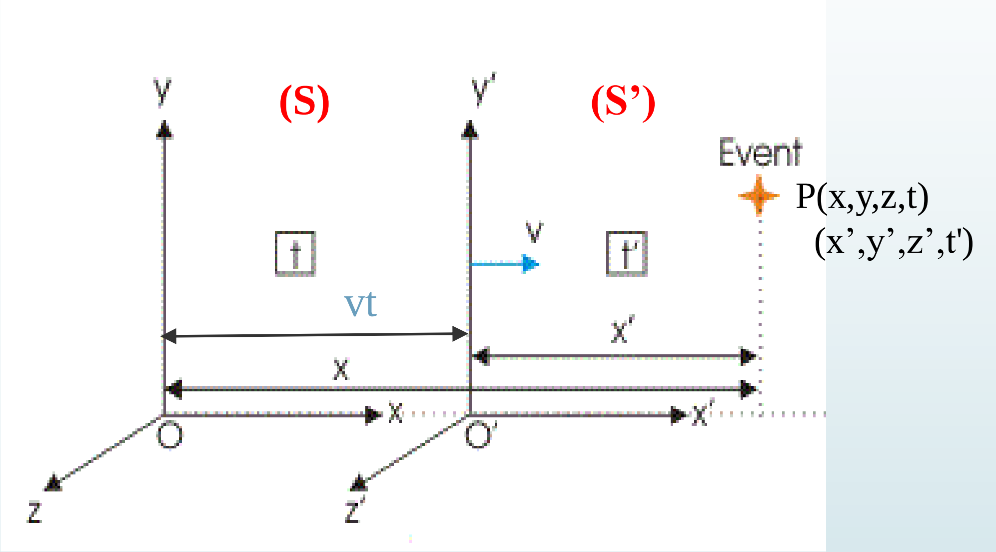


Les mêmes unités de distance et de temps sont adoptées dans les deux systèmes.

II.2 – Transformation des coordonnées de Lorentz

Les 2 systèmes inertiels coïncident à t = t '= 0 et ils restent parallèles tout au long du mouvement.

Événement: un éclair de lumière est émis depuis l'origine commune de S et S'. Après un certain temps, le signal lumineux atteint le point "P" ce point est à une distance r de S et r'de S'.



Selon Newton: La mécanique newtonienne est invariante sous les transformations galiléenne reliant deux référentiels inertiels se déplaçant à vitesse relative v dans la direction x. Ces transformations supposent que pour atteindre le point P, le «temps» soit bien défini et le même! Mais la «vitesse» devrait être différente pour le deuxième observateur.

Selon le postulat II: La «vitesse» de la lumière c est la même dans tout système inertiel. Mais le «temps» que l'événement a pris pour parcourir les distances r et r' » est différent d'un système à l'autre car $r \neq r'$:

$$r = ct \text{ et } r' = ct'$$

(1.1)

Les nouvelles équations de transformation sont:

(1.2)

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \text{ et } x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

Puisque les systèmes S et S' ne se déplacent que le long de l'axe xx':

$$y = y' \text{ and } z = z'$$

et l'équation **(1.2)** devient:

(1.3)

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad \mathbf{(1.3)}$$

Nous souhaitons trouver x' et t' en fonction de “x” et “t” : $x' = x'(x, t)$ et $t' = t'(x, t)$

Nous supposons que les transformations sont linéaires. Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} t \\ t' &= a_{21} x + a_{22} t \end{aligned} \quad \mathbf{(1.4)}$$

où a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} sont des constantes à évaluer.

Considérons le mouvement de l’origine dans S’ pour lequel $x' = 0$ à $t' = 0$. Selon S, le système semble se déplacer avec une vitesse v et donc $\boldsymbol{x = v.t}$

Quand $x' = 0$, on a $x = v.t$ donc de l'équation **(1.4)** on a :

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \;\Rightarrow\; 0 = a_{11}x + a_{12}t$$

$$\Rightarrow\; 0 = a_{11}(v \cdot t) + a_{12}t \;\Rightarrow\; a_{12} = -va_{11}$$

donc:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - v \cdot t) \\ t' &= a_{21}x + a_{22}t \end{aligned}}$$

Remplacer ces équations dans **(1.3)** on obtient:

$$x^2 - c^2t^2 = \left[a_{11}(x - v \cdot t)\right]^2 - c^2\left[a_{21}x + a_{22}t\right]^2$$

$$\Rightarrow a_{11}^2(x - vt)^2 - c^2\left(a_{21}x + a_{22}t\right)^2 - x^2 + c^2t^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{11}^2\left(x - 2xvt + v^2t^2\right) - c^2\left(a_{21}x + 2a_{21}a_{22}xt + a_{22}^2t^2\right) - x^2 + c^2t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(a_{11}^2 - c^2a_{22}^2 - 1\right)x^2 - 2\left(a_{11}^2v + c^2a_{21}a_{22}\right)xt - \left(c^2a_{22}^2 - a_{11}^2v^2 - c^2\right)t^2 = 0$$

les coefficients doivent être égale à zéro :

$$\begin{cases} \left(a_{11}^2 - c^2 a_{22}^2 - 1\right) = 0 \\ 2\left(a_{11}^2 v + c^2 a_{21} a_{22}\right) = 0 \\ \left(c^2 a_{22}^2 - a_{11}^2 v^2 - c^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}^2 v + c^2 a_{21} a_{22} = 0 \\ c^2 a_{22}^2 - a_{11}^2 v^2 = c^2 \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations et pour plus de simplicité, nous prendrons :

$$\boxed{\beta = v/c \ \text{ et } \ \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}}$$

γ : facteur relativiste

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\ a_{21} = -\dfrac{\beta\gamma}{c} \end{cases}$$

Transformation des coordonnées de Lorentz :

$$x' = \frac{x - v\cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma\left(x - v\cdot t\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \left(\dfrac{\beta}{c}\right)x\right) \end{cases}$$

de S à S'

et de S' à S

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + v\cdot t'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \left(\dfrac{\beta}{c}\right)x'\right) \end{cases}$$

Puisque seule la vitesse relative a de l'importance, un simple changement de signe donne la transformation inverse

Transformation de vitesse de Lorentz :

Considérons 2 systèmes inertiels **S** et **S'** se déplaçant avec une vitesse relative « v » le long de l'axe xx'. Une particule est en "**P**" et se déplace dans l'espace et a une vitesse $U(u_x, u_y, u_z)$ dans S et $U'(u'_x, u'_y, u'_z)$ dans S'.

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{et} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

La Dérivée :

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v \cdot dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right)dx\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v \cdot dt)}{\gamma\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right)dx\right)} = \frac{(dx/dt) - v}{\left(1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}\right)}$$

Transformation de vitesse de Lorentz :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}} \quad ; \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}\right)} \quad ; \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}\right)}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v \cdot u'_x}{c^2}} \quad ; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v \cdot u'_x}{c^2}\right)} \quad ; \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v \cdot u'_x}{c^2}\right)}$$

Puisque seule la vitesse relative a de l’importance, un simple changement de signe donne la transformation inverse

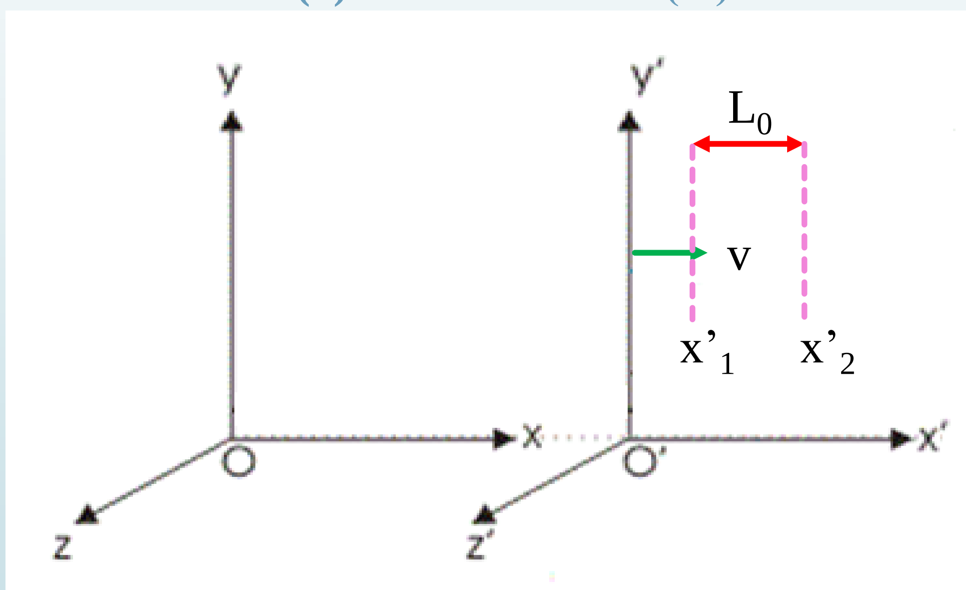
II.3 – a) La contraction des longueurs

Considérons 2 observateurs au repos dans S et S'. L'observateur en S' a une longueur de tige L_0 parallèle à l'axe des x':

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

Supposons maintenant que S' se déplace avec une vitesse « v » le long de l'axe des x'.

(S) (S')



Pour l'observateur en S' la longueur de la tige est L_0 mais pour l'observateur en S, la longueur de la tige est $L = x_2 - x_1$

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \gamma\left(x_1 - v\cdot t_1\right) \\ x'_2 = \gamma\left(x_2 - v\cdot t_2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \gamma\left[\left(x_2 - x_1\right) - v\left(t_2 - t_1\right)\right]$$

L'observateur en S doit mesurer les 2 extrémités de la tige en même temps c'est-à-dire $t_1 = t_2$

$$\Rightarrow x'_2 - x'_1 = \gamma\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}\left(x'_2 - x'_1\right)$$ or $\mathrm{L} = x_2 - x_1$ et $\mathrm{L}_0 = x'_2 - x'_1$

$$\Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}$$ et $\sqrt{1-\beta^2}$ est toujours < 1 $\Rightarrow \gamma \succ \mathbf{1}$

$\boxed{\mathrm{L} < \mathrm{L}_0}$

$$\beta = v/c \text{ et } \gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - \beta^2}$$

La contraction des longueurs : résumé

Equation de la contraction des longueurs : $L = \dfrac{L_0}{\gamma}$

La longueur L_0 d'une tige est l'intervalle séparant ses extrémités dans l'espace, mesurée dans un référentiel où elle est au repos est appelée **longueur propre** . L_0 peut être mesurée dans S′ ou dans S.

Le phénomène de **contraction des longueurs est réciproque**, donc:

- Si L_0 est mesurée dans S′ l'équation s'écrit : $L_{/S} = \dfrac{L_{0/S'}}{\gamma}$
- Si L_0 est mesurée dans S l'équation s'écrit : $L_{/S'} = \dfrac{L_{0/S}}{\gamma}$

Soulignons que ce phénomène ne concerne que les longueurs parallèles à la direction du mouvement; les longueurs perpendiculaires à $\vec{v}$ ne sont pas modifiées.
Puisque $\gamma \approx 1$ dans les situations de notre vie quotidienne, on obtient que $\boldsymbol{L \approx L_0}$: l'effet relativiste de contraction des longueurs est tout à fait inobservable dans la vie quotidienne. **Les effets relativistes se font sentir uniquement quand la vitesse est très grande.**

II.3 – b) Dilatation du temps

Un intervalle de temps comme un intervalle de longueur n'est pas absolu.

Considérons 2 événements différents. Les intervalles de temps entre ces 2 événements sont enregistrés sur 2 horloges différentes dans les systèmes inertiels S et S', mais les deux horloges sont observées depuis le système S.

L'intervalle de temps entre les 2 évènements A et B dans (S') est $t'_2 - t'_1$.

Pour S, le temps de réaliser (A) est $t_1 = \dfrac{t_1^{'} + \left(\dfrac{v}{c^2}\right) x_1^{'}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et le temps de réaliser (B) est $t_2 = \dfrac{t_2^{'} + \left(\dfrac{v}{c^2}\right) x_2^{'}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\left(t_1^{'} - t_2^{'}\right) + \left(\dfrac{v}{c^2}\right)\left(x_1^{'} - x_2^{'}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Considérant que A et B ont la même coordonnée, c'est-à-dire $x_2^{'} = x_1^{'}$

$$\Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\left(t_1^{'} - t_2^{'}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t_1^{'} - t_2^{'}\right)$$

$$\Rightarrow T = \gamma T^{'}$$

$$\beta = v/c \text{ et } \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

Où T est l'intervalle de temps enregistré par l'observateur en S et T' celui enregistré par l'observateur en S'.

(S est en mouvement avec une vitesse "**-v**" par rapport au système inertiel S' et à son horloge).

La dilatation du temps : résumé

Equation de la dilatation du temps : $T = \gamma T_0$

Le **temps propre** T_0 est l'intervalle de temps entre deux évènements mesurés dans le référentiel propre d'une horloge, c'est-à-dire le référentiel auquel cette horloge est liée. Pour que cette horloge puisse mesurer les deux événements, ces derniers doivent se produire au même point dans ce référentiel, c'est-à-dire un point situé près de l'horloge. Le **temps propre** T_0 peut être mesuré dans S comme dans S′.

La **dilatation du temps** est un **phénomène entièrement réciproque** donc :

- Si T_0 est mesurée dans S′ l'équation s'écrit : $T_{/S} = \gamma T_{0/S'}$

- Si T_0 est mesurée dans S l'équation s'écrit : $T_{/S'} = \gamma T_{0/S}$

II.3 – c) Simultanéité

En mécanique classique :

En mécanique classique, le temps est absolu (2 événements sont simultanés soit $t = t'$) pour toutes les références.

En relativité :

Cependant, **en relativité, rien ne se déplace à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.**

Si 2 événements ont lieu simultanément, cela ne signifie pas que ces 2 événements ont la même heure.