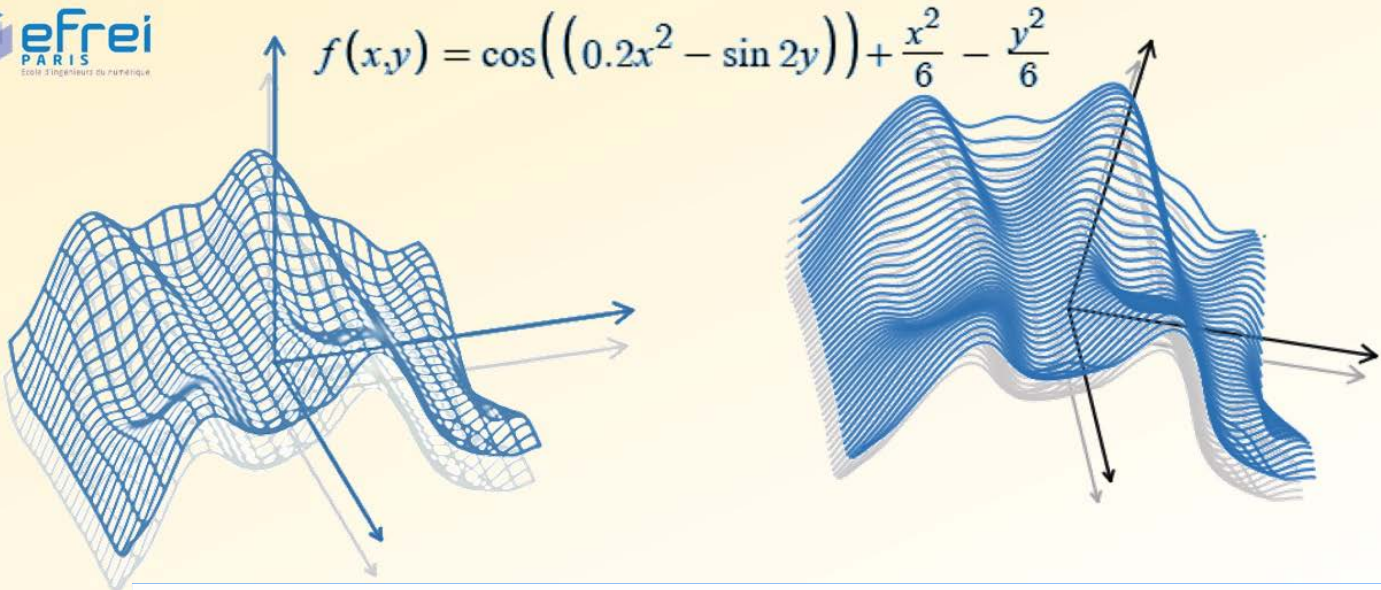


1. Fonctions de plusieurs variables

1.1 Introduction

Jusqu'à présent, vous avez traité des fonctions d'une seule variable. Vous avez appris à l'étudier, à la tracer, à interpréter son comportement, sa dérivée et ses limites. Mais, dans les situations réelles, les quantités dépendent souvent de plus d'une variable.

Par exemple, la température T dans les villes européennes dépend de la longitude x et de la latitude y par conséquent, nous écrivons $T = f(x,y)$ pour indiquer la dépendance de T de ces deux variables. Le volume V d'une boîte dépend de trois variables : la longueur, la largeur et la profondeur. La carte des couleurs de l'écran de votre ordinateur est une fonction qui dépend de plusieurs variables (3 variables si la représentation est en mode RGB). Certaines quantités que nous étudions peuvent également dépendre de N paramètres, ce qui signifie que nous pouvons avoir des fonctions de N variables...

Par conséquent, mathématiquement parlant, nous devons étudier des fonctions qui ne sont pas définies sur un intervalle (ou un sous-ensemble) de $\mathbf{R}$, mais sur un sous-ensemble (domaine) de $\mathbf{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Dans le cadre de ce cours, nous traiterons des fonctions qui prennent des valeurs dans R uniquement. Dans ce chapitre, nous traitons des fonctions qui dépendent de plusieurs variables, principalement deux variables.

1.2 Définitions

Définition 1.2.1 — Fonctions de plusieurs variables. Une fonction de deux variables f est une correspondance qui associe une valeur notée $f(x,y)$ à chaque couple de nombres réels (x,y) donné dans D_f.

D_f est le domaine de définition de f. L'ensemble des valeurs que prend $f(x,y)$ est l'image de f

Rmq

1. Le domaine de définition de f est l'ensemble des valeurs où la fonction sera calculée. Dans l'exemple précédent sur la température en l'Europe, le domaine de T est l'ensemble des longitudes et des latitudes à travers l'Europe. Lorsque ces valeurs ne sont pas données, le domaine est considéré comme l'ensemble de toutes les valeurs autorisées.

2. Une définition similaire peut être écrite pour une fonction de plusieurs variables. Pour une fonction de trois variables, nous notons généralement les variables x, y et z. Pour plus de trois variables, nous les notons généralement x_1 ,$x_2,\ldots,x_n$.

■ **Exemple 1.1** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(2,3)$ puis trouver et représenter son domaine.

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ (b) $g(x,y) = x\ln(y^2 - x)$.

■

1.3 Graphes de fonctions de deux variables

1.3.1 Graphe et courbes de niveau

Définition 1.3.1 — Graphe. Etant donnée la fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, le graphe de f est le sous-ensemble de R^{n+1} défini par

$$\{(X, f(X)) \;/\; X \in D_f\}.$$

Rmq Si f est une fonction de deux variables ($n = 2$), son graphe sera représenté dans un repère à 3 dimensions où le domaine de f appartient au plan $(x'Ox,\ y'Oy)$ et la valeur que prend f à chaque point du domaine est la hauteur z en ce point. Alors, On utilise souvent la notation $z = f(x,y)$ pour désigner cette représentation.

Ce graphe est alors une surface dans $\mathbf{R}^3$ qui se trouve au dessus (si $f(x,y) > 0$) ou au dessous (si $f(x,y) < 0$) su plan $(x'Ox,\ y'Oy)$.

■ **Exemple 1.2** Représenter le graphe de la fonction $f(x,y) = 8-2x-4y$.

Preuve Le graphe de f a pour équation $z = 8-2x-4y$ ou $2x+4y+z = 8$ qui est l'équation du plan passant par $(0,0,8)$, $(4,0,0)$ et $(0,2,0)$:

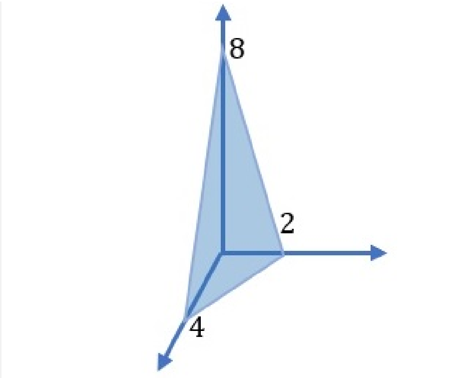
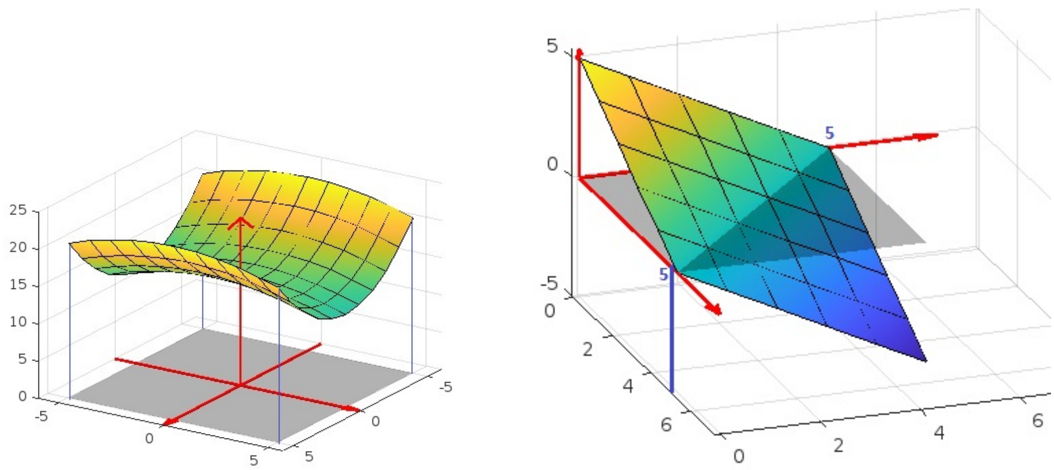


FIGURE 1.1 – $f(x,y) = 8 - 2x - 4y$.

■

En utilisant un ordinateur, on peut représenter des surfaces plus sophistiquées. Habituellement, les programmes informatiques utilisent un maillage du domaine à des valeurs également espacées en x et y. Il calcule la fonction en ces points et puis dessine l'image de ces lignes de maillage. Pour cette raison, nous pouvons voir dans ce qui suit les lignes noires sur la surface qui correspondent soit à une abscisse constante x, soit à une ordonnée constante y.

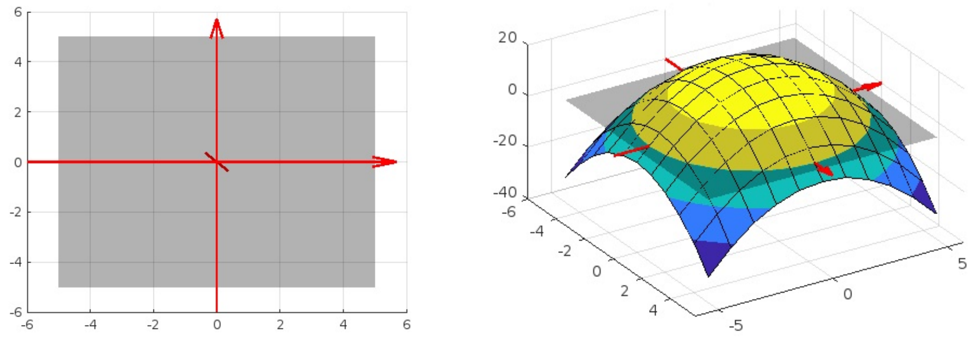
Ci-dessous quelques représentation de fonctions à deux variables :



(a) Paraboloïde hyperbolique

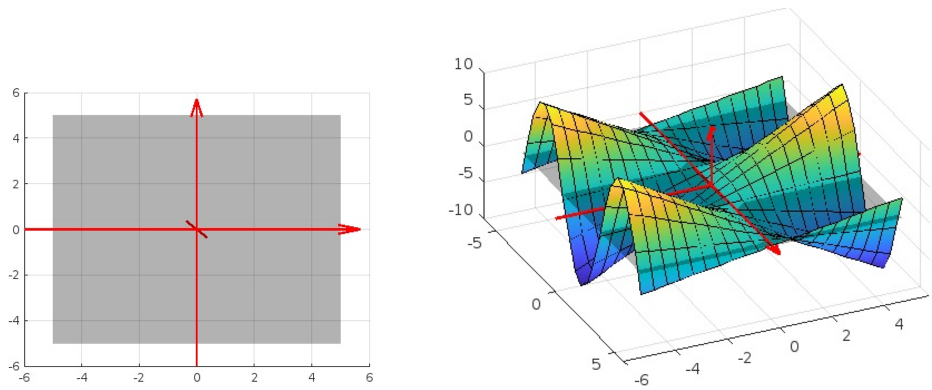
(b) Plan

FIGURE 1.2 – Représentation sur $[-5,5] \times [-5,5]$ des fonctions $f(x,y) = \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{10} + 15$ qui est l'équation d'une paraboloïde hyperbolique et $g(x,y) = 5 - x - y$ qui est l'équation d'un plan dans un repère 3D.



(a) Domaine (b) Fonction (surface)

FIGURE 1.3 – Représentation de $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 20$ sur $[-5,5]^2$ dans un repère 3D.



(a) Domaine (b) Fonction (surface)

FIGURE 1.4 – Représentation de $f(x,y) = 2ycos(x)$ sur $[-5,5]^2$ dans un repère 3D.

Un autre moyen pour représenter une surface sera de dessiner dans le plan $(x'Ox,\ y'Oy)$ les **lignes ou courbes de niveau** (appelées aussi **lignes de contour**) :

Définition 1.3.2 — Lignes ou courbes de niveau - Contour. Etant donnée une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, les lignes de niveau de f sont les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis

$$\{X \in D_f \ / \ f(X) = k\}$$

où $k \in \mathbf{R}$.

Rmq

Pour $n = 2$ (fonction de deux variables), les lignes de niveau sont les courbes correspondants aux équations $f(x,y) = k$ où k est une constante. En d'autres termes, ces courbes sont les projections sur le plan $(x'Ox, y'Oy)$ des courbes intersection du graphe de $z = f(x,y)$ avec les plans horizontaux $z = k$. Par conséquent, il s'agit des lignes joignant les points ayant les mêmes images, les mêmes hauteurs.

Plus pratiquement, si vous vous trouvez à un point donné sur une surface, la courbe de niveau serait le chemin que vous devez suivre pour pouvoir rester à la même altitude.

■ **Exemple 1.3 — Plan.** Trouver les lignes de niveau du plan d'équation $f(x,y) = 3 - x - \frac{3}{2}y$.

■

Info++

Vous êtes invités à suivre le lien suivant pour une jolie explication de "topographie et géométrie"
De la topographie à la géométrie

■ **Exemple 1.4 — Paraboloïde hyperbolique.** La figure suivante montre la paraboloïde hyperbolique donné par l'équation $f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{10}y^2 + 10$ ainsi que les lignes de niveau correspondants.

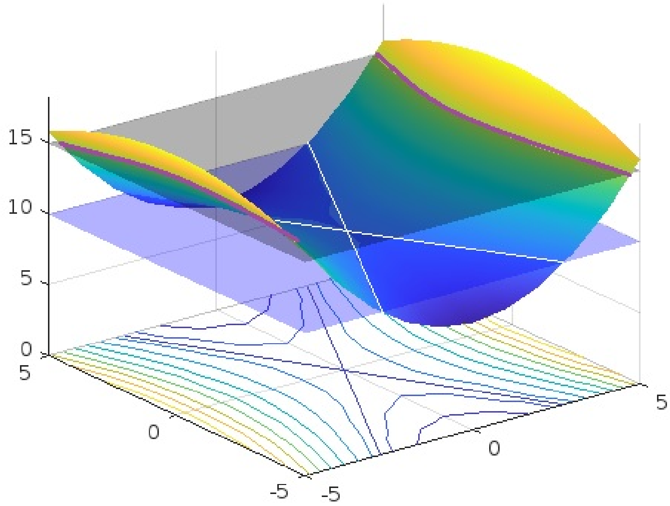


FIGURE 1.5 – $f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{10}y^2 + 10$ et les lignes de niveau.

■

Info++

Les lignes de niveau sont largement utilisées dans les cartes pour montrer les altitudes. Ci-dessous une carte de l'IGN (Institut National de l'Information Géographique et Forestière) comparée à une vraie photo du "massif des Vosges". Essayez de comparer et de comprendre les courbes de niveau :

FIGURE 1.6 – Lignes de niveau - massif des Vosges.

■ **Exemple 1.5** Trouver les lignes de niveau de l'hémisphère d'équation $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$. ■

■ **Exemple 1.6** Les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$ sont représentées dans la figure suivante

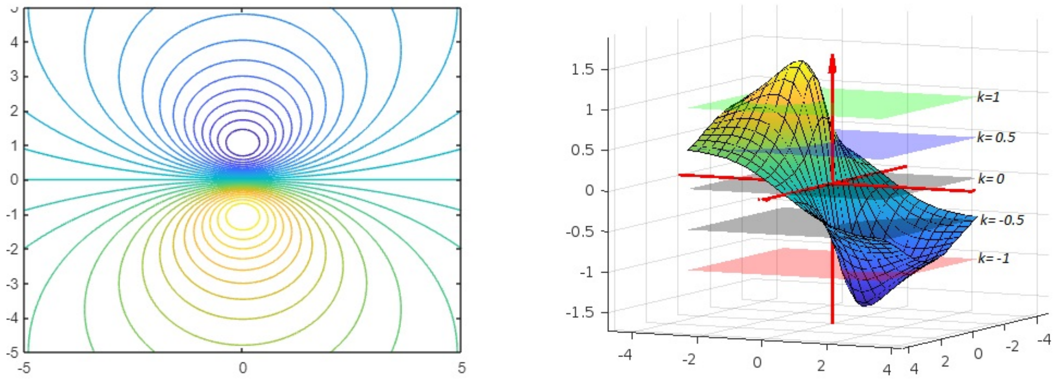


FIGURE 1.7 – $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

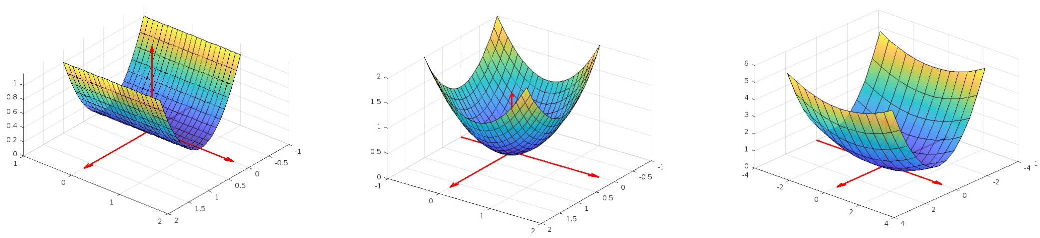
■

1.3.2 Equations de surfaces usuelles

Rmq On rappelle certaines équations de fonctions d'une variable :

1. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ est l'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R.
2. $y = a(x-x_0)^2 + y_0$ est l'équation de la parabole d'extremum (x_0, y_0), d'axe de symétrie $x = x_0$. Si $a > 0$ l'extremum est un minimum, si $a < 0$ l'extremum est un maximum.
3. $x = a(y-y_0)^2 + x_0$ est l'équation de la parabole d'extremum (x_0, y_0), d'axe de symétrie $y = y_0$. Si $a > 0$ l'extremum est un minimum en x, si $a < 0$ l'extremum est un maximum en x.
4. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ est un ellipse de centre (x_0, y_0) d'axe de longueur a suivant l'axe des x et d'axe de longueur b suivant l'axe des y.

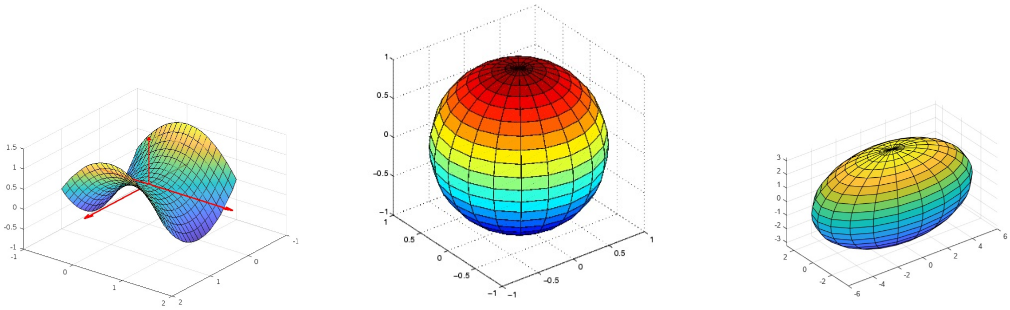
Ci-dessous certaines surfaces usuelles et leurs equations :



(a) **Cylindre parabolique** : $z = f(x,y) = x^2$
Lignes de niveau : droites

(b) **Paraboloïde** : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a(z-z_0)$
Exemple : $z = f(x,y) = x^2 + y^2$
Lignes de niveau : ellipses

(c) **Paraboloïde elliptique** : $z = f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Lignes de niveau : hyperboles



(d) **Paraboloïde hyperbolique** : $z = f(x,y) = x^2 - y^2$
Lignes de niveau : hyperboles

(e) **Sphère** : $(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2 + (z - z^0)^2 = R^2$
Centre (x_0, y_0, z_0), rayon R.
Lignes de niveau : cercles.

(f) **Ellipsoïde** : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
Centre (x_0, y_0, z_0).
Lignes de niveau : ellipses.

1.4 Graphes de fonctions de trois variables ou plus

Une fonction de trois variables associe une valeur à chacun des triplets (x, y, z) appartenant à un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$. Par conséquent, il ne peut pas être facilement dessiné et représenté dans un système de coordonnées (son domaine ne peut être représenté que dans un repère 3D). La fonction de plus de trois variables ne peut pas non plus être représentée. Cependant, les lignes de niveau des fonctions de trois variables seront alors des surfaces tridimensionnelles qui peuvent être dessinées dans un repère 3D.

■ **Exemple 1.7** Trouver le domaine de définition de la fonction

$$f(x,y,z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

■

TD 1 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Rechercher et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes

$a.\ f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\quad b.\ f(x,y) = \sqrt{xy}$ $\quad c.\ f(x,y) = \ln(1+xy)$

$d.\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ $\quad e.\ f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \blacktriangleright\ f.\ f(x,y) = \ln(9-x^2-9y^2)$

$g.\ f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x)}{x}$ $\quad h.\ f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1} + \sqrt{9-x^2-y^2}$ $\quad i.\ f(x,y) = x^2+4xy+\sqrt{y^2-9}$

$\blacktriangleright\ j.\ \dfrac{\ln(y+2)}{\sqrt{x-3}}$ $\quad \blacktriangleright\ k.\ \frac{\ln x - \ln x}{x-y}$ $\quad f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

Exercice 2 Représenter les surfaces correspondantes aux fonctions suivantes (utiliser un logiciel convenable et interpréter le comportement de la surface) :

$a.\ f(x,y) = x \quad (0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 3)$ $\quad b.\ f(x,y) = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi,\ \ 0 \leq y \leq 1)$

$c.\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad d.\ f(x,y) = 4-x^2$

$e.\ f(x,y) = |x|+|y|$ $\quad f.\ f(x,y) = y^2+1$

Exercice 3 Décrire et représenter certaines lignes de niveau des fonctions suivantes

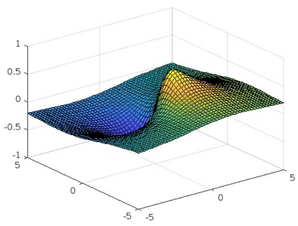
$a.\ f(x,y) = x-y$ $\quad b.\ f(x,y) = xy$ $\quad c.\ f(x,y) = \frac{x^2}{y}$

$d.\ f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $\quad e.\ f(x,y) = \ln(x^2+4y^2)$ $\quad f.\ f(x,y) = -x^2-y^2$

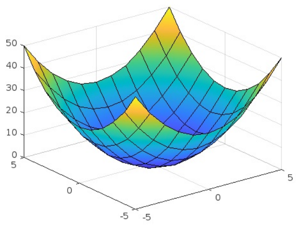
Exercice 4 Associer chacune des fonctions suivantes avec leurs graphes et leurs lignes de niveau correspondantes

$A.\ f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad B.\ f(x,y) = \sin x - \sin y$ $\quad C.\ f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$

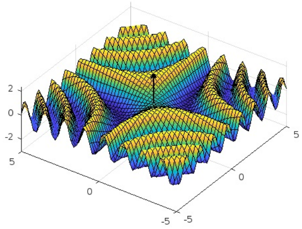
$D.\ f(x,y) = e^x \cos y$ $\quad E.\ f(x,y) = \sin xy$ $\quad F.\ f(x,y) = x^2-y^2$



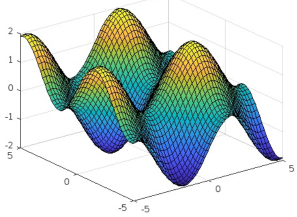
(g) S1



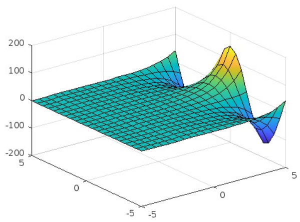
(h) S2



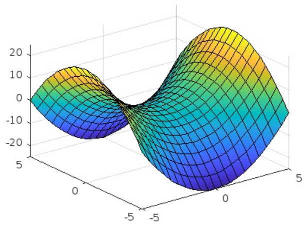
(i) S3



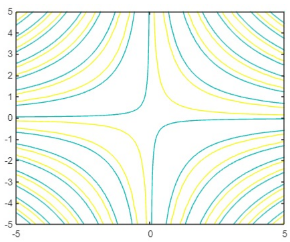
(a) S4



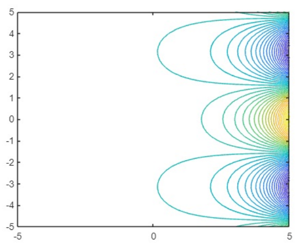
(b) S5



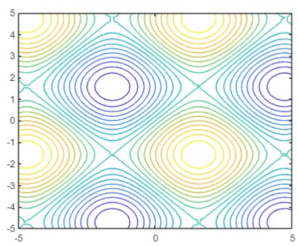
(c) S6



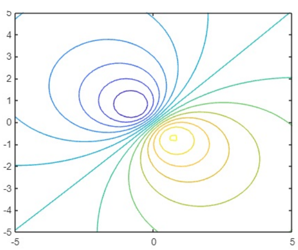
(a) L1



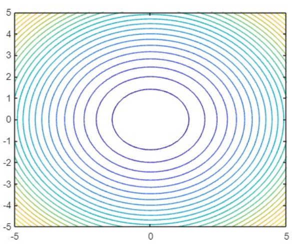
(b) L2



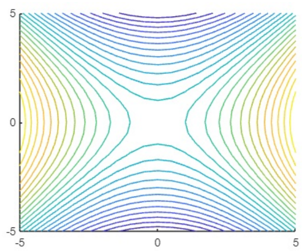
(c) L3



(a) L4



(b) L5



(c) L6