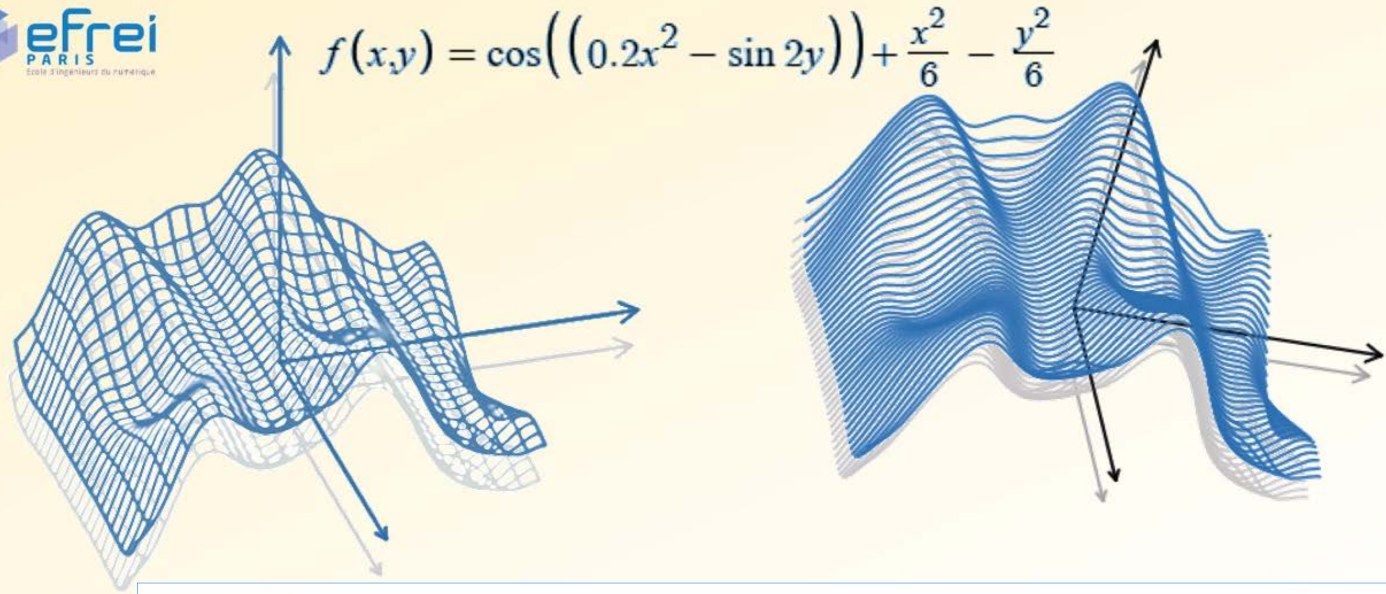

4. Intégrales multiples

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étendons l'idée d'une intégrale définie aux intégrales doubles et triples de fonctions de deux ou trois variables. Ces intégrales sont ensuite utilisées pour calculer les volumes de certaines régions. Les intégrales doubles sont également utilisées pour calculer les probabilités lorsque deux variables aléatoires sont impliquées. Nous définirons également les coordonnées polaires et verrons à quel point elles sont utiles dans le calcul des intégrales doubles sur certains types de régions. De la même manière, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques sont présentées pour être utilisées dans des intégrales triples.

4.2 Intégrales doubles

4.2.1 Definition

De la même manière que la recherche d'aires conduit à la définition d'intégrales définies de fonctions de variables simples et à leur calcul à l'aide de primitives (théorème fondamental du calcul), nous allons maintenant définir les intégrales doubles qui seront très utiles pour déterminer les volumes de solides en calculant également des primitives. La technique que nous allons utiliser s'appelle **Intégration itérée** qui aboutit au calcul de deux intégrales simples.

In the same way as how looking for areas lead to the definition of definite integrals of functions of single variables and to calculate them using primitives (Fundamental Theorem of Calculus), we will define now the double integrals that will be very useful to determine volumes of solids by calculating primitives as well. The technique we will use is called the **Iterated integration** which results in the calculation of two single integrals.

Pour visualiser le problème, supposons que nous souhaitions calculer le volume représenté dans la figure 4.1 suivante, entre un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ du plan (x,y) et une fonction positive f de deux variables x et y. Donc, la valeur du volume va dépendre du domaine Ω et de l'expression de la fonction f.

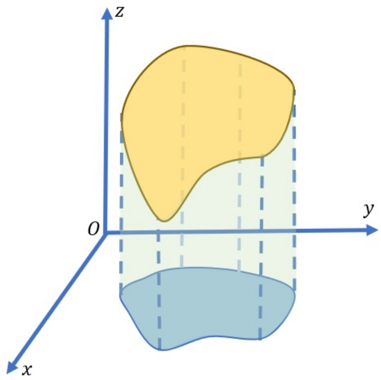

FIGURE 4.1 – Volume entre Ω et la surface de f.

Ce volume sera représenté par l'expression de l'intégrale double noté par

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\ dxdy$$

ce qui est l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x,y)$. Le dx et le dy sont les parties élémentaires dans la direction x et la direction y. Cela peut être mieux visualisé si nous définissons ce volume comme la somme des volumes des colonnes élémentaires de base $dx \times dy$ comme le montre la figure suivante où Ω est un rectangle :

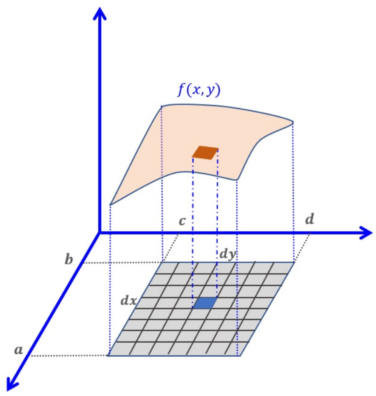

FIGURE 4.2 – Eléments élémentaires $dx \times dy$.

En fait, la définition générale de l'intégrale double, qui n'est pas couverte dans le cadre de ce cours, peut être faite comme dans le cas des fonctions d'une variable, en utilisant les fonctions étagées ensuite des fonction continues par morceaux.

4.2.2 Intégrales doubles sur des domaines rectangulaires

Dans ce qui suit, nous présentons l'approche par intégrations itérées pour calculer l'intégrale double sur un domaine rectangulaire. Supposons que f est une fonction de deux variables x et y qui est continue sur le rectangle $\Omega = [a,b] \times [c,d]$. On note par $\int_c^d f(x,y)\ dy$ l'intégrale par rapport à y de $y = c$ à $y = d$ en fixant x. LE résultat sera alors une fonction de x notée $A(x)$:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy$$

Si on intègre la fonction A par rapport à x de $x = a$ à $x = b$, on obtient

$$\int_a^b A(x)\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy \right]\ dx.$$

Cette intégrale à droite est ce qu'on appelle les intégrales itérées qu'on écrit souvent sans crochets :

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\; dy\right]\; dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\; dydx.$$

De façon similaire, on peut écrire les intégrales itérées

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\; dx\right]\; dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\; dxdy.$$

où on intègre tout d'abord par rapport à x (en fixant y) de $x = a$ à $x = b$ and puis on intègre le résultat, qui est une fonction qui dépend seulement de y, de $y = c$ à $y = d$.

■ **Exemple 4.1**
Calculer les intégrales suivantes
a. $I_1 = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\; dydx$ b. $I_1 = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y\; dydx.$

■

On note que dans cet exemple nous avons obtenu la même réponse dans les deux ordres d'intégration. En général, il s'avère que les deux intégrales itérées sont toujours égales ; c'est-à-dire que l'ordre d'intégration n'a pas d'importance. Le théorème suivant donne une méthode pratique pour évaluer une intégrale double en l'écrivant en intégrales itérées (dans l'un ou l'autre ordre)

Théorème 4.2.1 — Théorème de Fubini.
Soit f une fonction $f : \Omega \subset R^2 \to \mathbf{R}$ continue sur le rectangle
$R = \{(x,y) \in \Omega \;/\; a \leq x \leq b,\; c \leq y \leq d\}$, alors

$$\iint_R f(x,y)\; dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\; dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\; dxdy,$$

De façon plus générale, ceci est vrai si on suppose que f est bornée sur R, f est discontinue sur un nombre fini de courbes régulières et les intégrales itérées existent.

Rmq

Soulignons deux cas particuliers :

1. L'intégrale de la fonction $f(x,y) = 1$ donne la surface du rectangle R :

$$\iint_R dxdy = \int_c^d (b-a)\; dy = (b-a)(d-c).$$

2. Quand² f est le produit de deux fonctions g qui dépend de x seulement et h qui dépend de y seulement, alors

$$\iint_R f\; dxdy = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) = \left[\int_a^b g(x)\; dx\right]\left[\int_c^d h(y)\; dy\right]$$

La preuve du théorème de Fubini n'est pas couverte dans le cadre de ce cours mais nous pouvons interpréter géométriquement les intégrales itérées. Prenez f comme une fonction positive des deux variables x et y. L'intégration d'abord par rapport à y, tout en gardant x fixe, peut être interprétée comme prenant une tranche (plan vertical) du volume, perpendiculaire à l'axe x, pour x fixe et intégrant la fonction intersection du plan vertical et f par rapport à y (voir figure 4.3(A)). Cela donnera la surface tranche. Ensuite, l'intégration du résultat par rapport à x s'interprète comme la somme de toutes les tranches possibles le long de x. Cela donnera enfin le volume requis. C'est la stratégie des **tranches verticales**.

L'autre intégrale itérée peut être interprétée de la même manière en prenant des tranches pour un y fixe en les intégrant par rapport à x (voir figure 4.3(B)). Il s'agit de la stratégie des **tranches horizontales**. Il est intuitif que la valeur des deux stratégies sera la même.

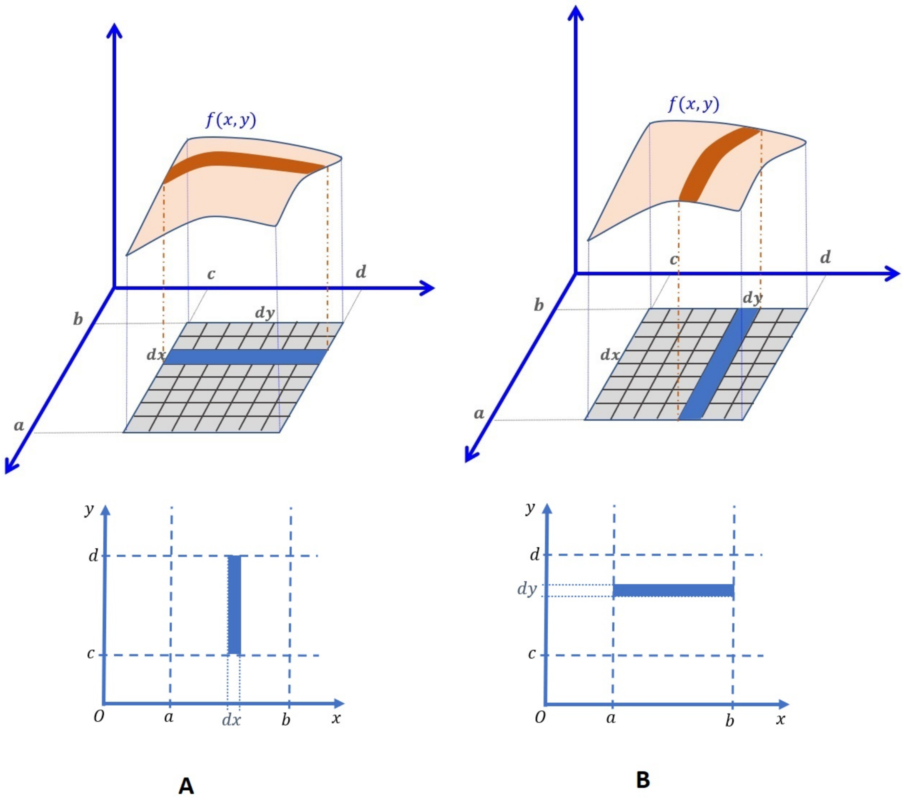

FIGURE 4.3 – (A) Tranches verticales et (B) tranches horizontales pour les intégrales doubles.

■ **Exemple 4.2**
Calculer $I = \iint_R y\sin(xy)\, dydx$ sur $R = [1,2] \times [0,\pi]$.

■

Rmq Le calcul de l'exemple précédent montre que le choix de l'ordre d'intégration peut avoir une grande influence sur le temps de calcul.

■ **Exemple 4.3**
Calculer $I = \iint_R \cos y \sin x\, dydx$ sur $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

■

4.2.3 Intégrales doubles sur des domaines bornées

Pour les intégrales simples, la région d'intégration est toujours un intervalle. Cependant, pour les intégrales doubles, on souhaite intégrer une fonction f, pa seulement sur des rectangles, mais aussi sur des domaines bornés Ω de forme plus générale comme celle de la figure 4.1. Pour cela, supposons que Ω est une région bornée de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction définie sur Ω. Puisque Ω est borné, il existe un rectangle borné R de $\mathbf{R}^2$ tel que $\Omega \subset R$ (Voir figure 4.4).

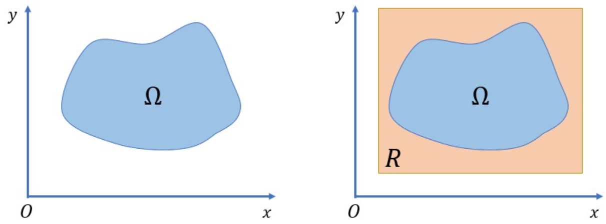

FIGURE 4.4 – Domaine borné inclus dans une surface rectangulaire de $\mathbf{R}^2$.

On peut alors définir une nouvelle fonction F par

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

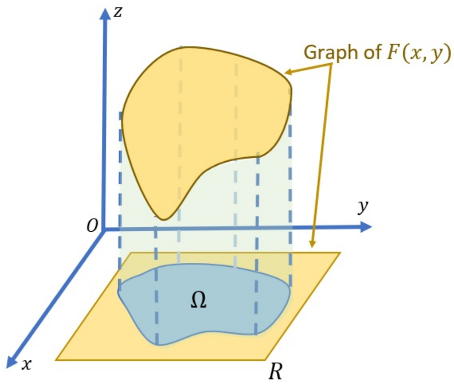

FIGURE 4.5 – Prolongement de f sur le rectangle R.

Puisque les valeurs de F sont nulles en dehors de Ω, alors le volume entre Ω et la surface de f est le même que le volume entre R et F. Alors, on définit l'intégrale double de f sur Ω en utilisant l'intégrale double de F sur R comme elle a été introduite dans la section précédente :

Définition 4.2.1 — Intégrale sur Ω.
Soit f une fonction continue définie sur le domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Il existe une surface rectangulaire R tel que $\Omega \subset R$. Alors, l'intégrale double de f sur Ω est donnée par

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_R F(x,y)dxdy$$

où F est le prolongement de f sur R prenant des valeurs nulles pour tout $(x,y) \in R \setminus \Omega$

Domaines de $\mathbf{R}^2$:

Il est évident maintenant que la difficulté d'intégrer une fonction de deux variables sur un domaine Ω ne dépend pas seulement de l'expression de la fonction, mais aussi de la forme de Ω. Dans ce qui suit quelques exemples de domaines de $\mathbf{R}^2$.

■ Exemple 4.4
Déterminer et dessiner les domaines suivants de $\mathbf{R}^2$

a. $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$

b. $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / -1 \leq x \text{ et } x^2 - 9 \leq y \leq -x^2 + 9\}$

c. $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$

d. D est la région de $\mathbf{R}^2$ délimitée par $y = 2x$ et $y = x^2$.

e. D est la région de $\mathbf{R}^2$ délimitée par $y = x - 1$ et $y^2 = 2x + 6$.

f. D est la région délimitée par $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ tel que $y \leq x + 3$

■

Calcul en utilisant les intégrations itérées :
Il a été expliqué précédemment comment une intégrale double sur un domaine général est définie à l'aide d'un prolongement de la fonction sur un rectangle. Par conséquent, nous utilisons le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale double sur le domaine général :

Théorème 4.2.2 — Théorème de Fubini.

1. Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^2$ qui contient tous les points (x,y) tel que $a \leq x \leq b$ $(a,\, b \in \mathbf{R})$ et $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ où $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ sont deux fonctions continues. Soit f une fonction de deux variables x et y définie sur Ω, alors,
$$\iint_\Omega f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dydx$$

2. Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^2$ qui contient tous les points (x,y) tel que $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, tel que $\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$ sont deux fonctions continues, et $c \leq y \leq d$ $(c,\, d \in \mathbf{R})$. Soit f une fonction de deux variables x et y définie sur Ω, alors,
$$\iint_\Omega f(x,y)\, dxdy = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_c^d f(x,y)\, dxdy$$

Rmq

Comme discuté précédemment, dans le premier point du théorème, x est maintenu fixe au début et nous intégrons par rapport à y : nous prenons des tranches verticales. Ensuite, le théorème de Fubini dit que lorsque nous prenons des tranches verticales, l'intégration par rapport à y sera délimitée par deux fonctions de x. Ces fonctions sont les trajectoires obtenues en faisant glisser les bornes de la tranche le long de l'axe x. Cependant, les bornes de l'intégrale par rapport à x seront simplement le point minimal et le point maximal que x peut atteindre. Le deuxième point du théorème de Fubini peut être interprété de la même manière en prenant des tranches horizontales.

En pratique, parfois une stratégie peut conduire à de longs calculs tandis que l'autre peut conduire à des calculs beaucoup plus simples. Par conséquent, pour effectuer les calculs, il faut choisir astucieusement les tranches (verticales ou horizontales).

Rmq On admet que la quantité $\iint_\Omega dxdy$ est bien définie et donne la valeur de la surface du domaine Ω.

Proposition 4.2.3
Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines distincts de $\mathbf{R}^2$ et soient f et g deux fonctions continues de deux variables x et y définie sur Ω_1 et Ω_2.

1. **Additivité :** on a

$$\iint_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x,y)\ dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\ dxdy$$

2. **Linéarité :** for $\alpha \in \mathbf{R}$, we have

$$\iint_{\Omega_1} (\alpha f + g)(x,y)\ dxdy = \alpha \iint_{\Omega_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{\Omega_1} g(x,y)\ dxdy$$

3. **Positivité :** if $f(x,y) \geq 0$ for all $(x,y) \in \Omega_1$, then,

$$\iint_{\Omega_1} f(x,y)\ dxdy \geq 0$$

4. **Comparaison :** if $f \leq g$ on Ω_1, then,

$$\iint_{\Omega_1} f(x,y)\ dxdy \leq \iint_{\Omega_1} g(x,y)\ dxdy$$

(thanks to the linearity and the positivity).

■ **Exemple 4.5**
Calculet l'intégrale double de $f(x,y) = (x+2y)$ sur le domaine D délimité par $y = 2x^2$ et $y = 1+x^2$. ■

■ **Exemple 4.6**
Calculer l'intégrale double de $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+4y^2}$ sur le domaine D qui est le quart de disque centré en $O(0,0)$ de rayon 1 avec $x \geq 0,\ y \geq 0$. ■

■ **Exemple 4.7**
Trouver le volume qui se trouve entre la paraboloïde $f(x,y) = x^2+y^2$ et la région D du plan (x,y) délimité par dessous par la droite $y = 2x$ et par dessus par la parabole $y = x^2$ tel que $y \leq 3$. (Utiliser 2 méthodes : tranches verticales et horizontales). ■

4.2.4 Changement de variables

Comme le cas des intégrales simples, parfois le changement de variables peut simplifier le calcul de l'intégrale. Dans le cas de fonctions de deux variables, il faut faire attention à l'expression de f ainsi qu'au domaine. Effectuant un changement de variables ne devrai pas rendre l'expression de f compliquée à intégrer ni le nouveau domaine difficile à interpreter.

Coordonnées polaires.

On rappelle les coordonnées polaires qu'on a vu dans le chapitre 2. Les coordonnées polaires d'un point $M(x,y)$ dans le plan (x,y), notées (r,θ), sont définies comme étant la distance r entre l'origine et le point M et l'angle θ entre l'axe des x et la droite (OM). Elles se déduisent des coordonnées cartésiennes dans le plan (x,y) avec le formules :

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

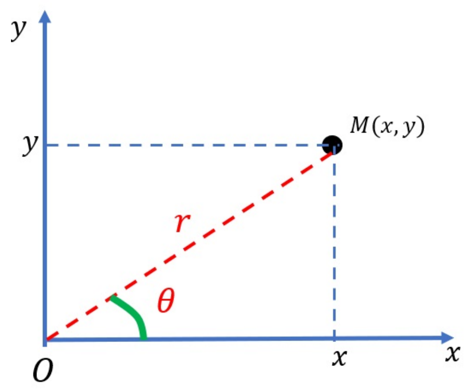

FIGURE 4.6 – Coordonnées polaires

L'utilisation de coordonnées polaires peut être très utile pour transformer certains domaines circulaires en rectangles. Prenons par exemple les domaines : Ω_1 défini comme étant le disque centré en $O(0,0)$ de rayon 1, il s'agit du disque d'équation $x^2+y^2 \leq 1$, et Ω_2 défini comme étant la région entre les deux cercles $x^2+y^2=1$ et $x^2+y^2=4$ pour $x \geq 0$.

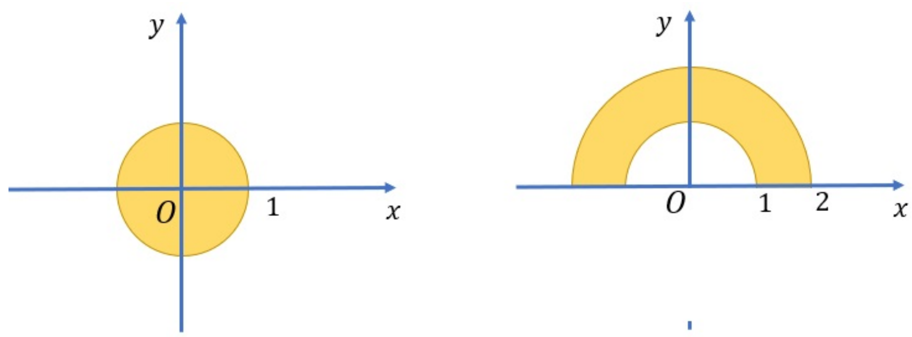

FIGURE 4.7 – Domaines pour les coordonnées polaires

Les conditions délimitant le premier domaine Ω_1 peuvent être réécrites en fonction de r et θ par $r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ce qui n'est autre qu'un rectangle en coordonnées polaires. De façon similaire, le domaine Ω_2 en coordonnées polaires sera défini par $1 \leq r \leq 2$ et $0 \leq \theta \leq \pi$ ce qui n'est autre qu'un domaine rectangulaire. Donc, effectuer un changement de variables pour de tels domaines transforme l'intégrale double sur un domaine compliqué vers une intégrale double sur un domaine plus simple.

Contexte général pour le changement de variables.

Théorème 4.2.4 — Changement de variables. Soit f une fonction continue définie sur un domaine borné Ω de $\mathbf{R}^2$. Soit $\varphi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ un C^1-difféomorphisme (c-à-d une bijection C^1 dont la réciproque est aussi une fonction C^1) d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans un ouvert V de $\mathbf{R}^2$ tel que pour un sous ensemble fermé borné Δ de U, on a $\varphi(\Delta) = \Omega$. Alors,

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\ dxdy = \iint_{\Delta} f(x(u,v), y(u,v)) \left|J_{\varphi}(u,v)\right|\ dudv = \iint_{\Delta} g(u,v) \left|J_{\varphi}(u,v)\right|\ dudv$$

où J_{φ} est le jacobien de φ, c-à-d le déterminant de la matrice jacobienne définie par

$$J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

et $g = f \circ \varphi$.

Rmq Dans le cas des coordonnées polaires, le jacobien de la transformation est égal à r.

■ **Exemple 4.8**
Calculer $\iint_D (3x + 4y^2)\ dxdy$ où D est la région dans le demi-plan supérieur délimité par les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$. ■

■ **Exemple 4.9**
Trouver le volume du solide délimité par le plan $z = 0$ et la paraboloïde $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ (utiliser les coordonnées polaires). ■

4.3 Intégrales triples

Tout comme nous avons défini les intégrales simples pour les fonctions d'une variable et les intégrales doubles pour fonctions de deux variables, nous pouvons donc définir les intégrales triples pour des fonctions de trois variables. Nous utilisons l'approche des intégrales itérées pour effectuer le calcul en maintenant une variable fixe à la fois.

Théorème 4.3.1 — Théorème de Fubini sur un domaine rectangulaire.
Soit f une fonction $f : \Omega \subset R^3 \to \mathbf{R}$ continue sur le domaine rectangulaire $B = \{(x,y,z) \in \Omega\ /\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\}$, alors

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dxdydz = \int_e^f \int_c^d \int_c^d f(x,y,z)\ dxdydz.$$

■ **Exemple 4.10**
Calculer l'intégrale $\iiint_B xyz^2 dxdydz$ sur le domain rectangulaire donné par

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\ /\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$$

■

Nous pouvons définir l'intégrale triple sur une région bornée Ω dans l'espace tridimensionnel (un solide) par la même procédure que celle que nous avons utilisée pour les intégrales doubles qui conduit aux théorèmes de Fubini suivants :

Théorème 4.3.2 — Théorèmes de Fubini sur des régions bornées.

1. Si f est une fonction $f : \Omega \subset R^3 \to \mathbf{R}$ continue sur Ω tel que $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ (x,y) \in D,\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\}$, où, D est la projection de Ω sur $\mathbf{R}^2$, Alors
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right] dxdy.$$
2. Si f est une fonction $f : \Omega \subset R^3 \to \mathbf{R}$ continue sur Ω tel que $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\}$, alors
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dzdydx.$$

■ **Exemple 4.11**
Calculer l'intégrale $\iiint_\Omega zdxdydz$ où Ω est le tétraèdre délimité par les quatre plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $x+y+z=1$ ■

Rmq

Une procédure similaire peut être utilisée pour effectuer un changement de variables pour les intégrales triples, comme pour les intégrales doubles. Les plus couramment utilisées sont les coordonnées sphériques et cylindriques données ci-dessous

1. **Coordonnées sphériques :**

$x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$ and $z = r\cos\varphi$, alors,

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

Pour couvrir l'espace entier, il faut que $\theta \in [0,2\pi]$ et $\varphi \in [0,\pi]$. On remplace l'élément différentiel $dxdydz$ par $r^2\,\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

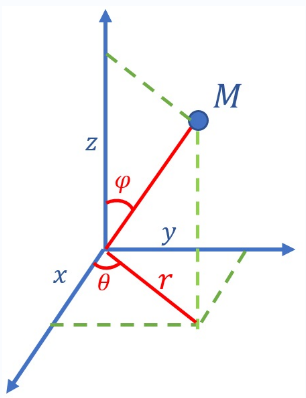

FIGURE 4.8 – Coordonnées Sphériques

2. **Coordonnées cylindriques.**

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $z = z$, alors

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Pour couvrir l'espace entier, il faut que $\theta \in [0, 2\pi]$. On remplace l'élément différentiel $dx\,dy\,dz$ par $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

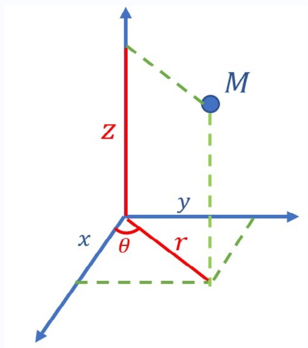

FIGURE 4.9 – Coordonnées Cylindriques

■ **Exemple 4.12** Calculer le volume de la boule de rayon R.

■

TD 4 : Intégrales multiples

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes

a. $\iint_D e^{-x-y}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 4\}$.

b. $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

c. $\iint_D y^2\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

► d. $\iint_D (3x^2+2y)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1,\ 1-x \le y \le 1+x\}$.

e. $\iint_D xe^{-x}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}\}$.

f. $\iint_D x\sin y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2 \le y \le x\}$.

g. $\iint_D x\cos y\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le \sin y,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

h. $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 1 \le x \le 3,\ y \ge 2,\ x+y \le 5\}$.

► i. $\iint_D e^{x+y}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ |x|+|y| \le 1\}$.

► j. $\iint_D |x-y|\,dxdy$ où $D = [0,a]\times[0,b]$, $(a > b)$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement en coordonnées polaires

a. $\iint_D (x^2+2xy+3)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \le 1\}$.

b. $\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \le 1\}$.

c. $\iint_D x^2-y^2\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x,\ 0 \le y, x^2+y^2 \le 1\}$.

d. $\iint_D (x^3y+y^3)\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ y \ge 0,\ x \ge -y,\ x^2+y^2 \le 4\}$.

► e. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 2y\}$.

Exercice 3 Calculer l'aire du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 4-x^2\}$$

Exercice 4 Etant donné le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1-y,\ 0 \le y\}$$

a. Représenter D dans le plan (x,y).
b. Calculer l'aire de D.
c. Calculer $\iint_D xy\, dxdy$.

► **Exercice 5** Etant donné le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1-y^2,\ 0 \leq y\}$$

a. Représenter D dans le plan (x,y).
b. Calculer $\iint_D xy\, dxdy$.

► **Exercice 6** Etant donné le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 1\}$$

a. Représenter D dans le plan (x,y).
b. Calculer $\iint_D e^{-(x+y)}\, dxdy$.
c. Calculer la dérivée par rapport à y de $(1+x+y)\ln(1+x+y)-y$, puis la dérivée par rapport à x de $\frac{(1+x)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{(1+x)^2}{4}$. Déduire $\iint_D \ln(1+x+y)\, dxdy$.

Exercice 7 Etant donné le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ (x-2)^2-4 \leq y \leq -(x-3)^2+4,\ 1 \leq x \leq 4\}$$

a. Représenter D dans le plan (x,y).
b. Calculer $\iint_D (x)\, dxdy$.

► **Exercice 8** Etant donné le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ -2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2+1,\ -2 \leq y \leq -\frac{1}{4}x^2+3\}$$

a. Représenter D dans le plan (x,y).
b. Calculer $\iint_D (x-y)\, dxdy$.

Exercice 9 Soit D le domaine délimité par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.
a. Calculate $\iint_D (x-y)\, dxdy$.
b. Calculate $\iint_D (x-y)\, dxdy$ using the change of variables $u=x+y$ and $v=x-y$.

► **Exercice 10**
a. Calculer $\iint_D x^2y^2\, dxdy$ en utilisant le changement de variables $u=xy$ et $v=\frac{y}{x}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 1 \leq xy \leq 2,\ x \leq y \leq 4x\}$.

b. Calculer $\iint_D \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2+1)^2}\, dxdy$ en utilisant un changement en coordonnées polaires avec $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

► **Exercice 11**

a. Calculer $\iint_D (x-y)^2\, dxdy$ en utilisant un changement en coordonnées polaires avec $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

a. Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ en utilisant un changement en coordonnées polaires. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.

Exercice 12 Calculer les intégrales triples suivantes

a. $\iiint_D xyz\, dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq y \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$

b. $\iiint_D x^2+y^2+z^2\, dxdydz$ en utilisant un changement en coordonnées sphériques avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

c. $\iiint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz$ en utilisant un changement en coordonnées sphériques avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; \dfrac{1}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

d. $\iiint_D \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$ en utilisant un changement de variables adapté avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\},\ R > 0$.

e. $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$ en utilisant un changement en coordonnées cylindriques avec D étant le solide borné par le paraboloïde $z = x^2+y^2$ et le plan $z = 4$.

► f. $\iiint_D \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$ en utilisant un changement de variables adapté avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq a\},\ R > 0$

► g. $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ en utilisant un changement de variables adapté avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\},\ R > 0$

Exercice 13 Calculer les volumes des solides suivants

a. $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$

b. $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}\ a > 0,\ b > 0$.

► c. $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;/\; x^2+y^2 = 4,\ -x^2-y^2+z^2 = 4\}$.