Exercices. Chapitre 1

QCM

Vraies : A, C, D, F, G, J

Exo 1

a) $E \cap \overline{F} \cap \overline{G}$ b) $E \cap \overline{F} \cap G$ c) $E \cup F \cup G$

d) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$ e) $E \cap F \cap G$

f) $\overline{E} \cap \overline{F} \cap \overline{G}$ g) $(\overline{E} \cap \overline{F}) \cup (\overline{E} \cap \overline{G}) \cup (\overline{F} \cap \overline{G})$ h) $\overline{E} \cup \overline{F} \cup \overline{G}$

i) Ω j) $(E \cap F \cap \overline{G}) \cup (E \cap \overline{F} \cap G) \cup (\overline{E} \cap F \cap G)$

Exo 2

M : étudiants musiciens E : étudiants jouant aux échecs

On a $|M \cap E| = |M| + |E| - |M \cup E|$

or $|M \cup E| = |\Omega| - |\overline{M \cup E}| = |\Omega| - |\overline{M} \cap \overline{E}|$

donc $|M \cap E| = |M| + |E| + |\overline{M} \cap \overline{E}| - |\Omega| = 652 + 327 + 453 - 1200$

232 étudiants font échecs et musique.

Exo 3

a) On choisit la place des chaises bleues : $\binom{12}{5}$ choix.

________________ vertes : $\binom{7}{4}$ choix

Donc au total $\frac{12!}{5!4!3!} = 27\,720$ choix possibles.

b) Revient à compter le nombre de piles avec 5 bleues et 4 vertes :

$$\frac{9!}{5!\,4!} = 126$$

Exo 4

pour un carré de taille $k \leq n$, il y a $(n-k+1)^2$ choix de où placer la première case de ce carré.

Donc le nombre de carrés est

$$N = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = N}$$

Exo 5

a) $N = 3^7 = 2187$

b) $N_7 = 2^7 = 128$

c) $N_3 = \binom{7}{3} \times 2^4 = 560$

pronostiques faux

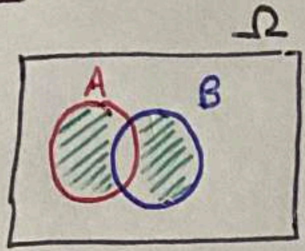
choix des matchs corrects

d) $N_6 = N_6 + N_7 = 7 \times 2 + 1 = 15$

choix de la fausse case

choix du match mal pronostiqué

Exo 6

a) 

$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$

b) $A \Delta B = \{2, 3, 4, 5, 9\}$

c) $A \Delta B = \mathbb{R} \setminus]1 ; 2]$

d) $B \Delta A = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ donc commutative

$\cup$ est commutative.

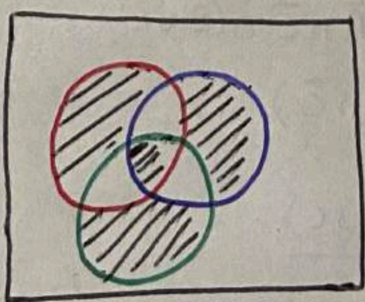
$(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{(A \Delta B)})$

$= (((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (C \cap ((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)))$

$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

formule symétrique en A, B, C donc Δ est associative.

e) D'après ce qui précède $x \in A \Delta B \Delta C$ si x appartient aux trois sous-ensembles ou x appartient à exactement un des trois.



f) $A \Delta \emptyset = (A \cap \Omega) \cup (\overline{A} \cap \emptyset) = A$ donc $\emptyset$ est bien l'élément neutre.

g) $A \Delta A = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = \emptyset$ donc A est son propre inverse/opposé

h) $A \Delta \Omega = (A \cap \emptyset) \cup (\bar{A} \cap \Omega) = \bar{A}$ donc Ω n'est pas absorbant

Supposons qu'il existe un élément absorbant :

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \Delta X = X$

donc $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ (A \Delta X) \Delta X = X \Delta X = \emptyset$

donc $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ X \Delta X = A$ ce qui est absurde.

i) On a $(A \cap B) \Delta C = (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cup \bar{B} \cap C)$

et $(A \Delta C) \cap (B \Delta C) = ((A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C)) \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))$

$= (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

donc $\underline{(A \cap B) \Delta C \neq (A \Delta C) \cap (B \Delta C)}$

D'autre part, $(A \Delta B) \cap C = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

et $(A \cap C) \Delta (B \cap C) = ((A \cap C) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) \cup ((\bar{A} \cup \bar{C}) \cap B \cap C)$

$= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

donc $\underline{(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)}$

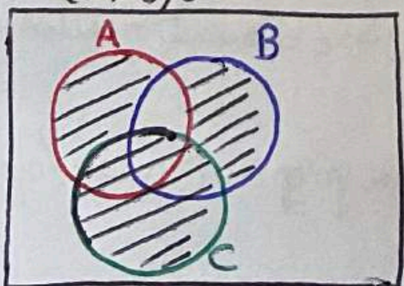
j) $(A \Delta B) \cup C = ((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})) \cup C = ((A \cap \bar{B}) \cup C) \cup ((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup C)$

et $(A \cup C) \Delta (B \cup C) = ((A \cup C) \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C} \cap (B \cup C))$

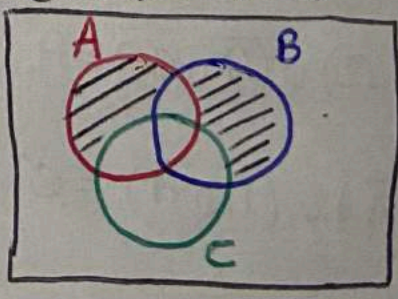
$= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$

donc $\underline{(A \Delta B) \cup C \neq (A \cup C) \Delta (B \cup C)}$

$(A \Delta B) \cup C$



$(A \cup C) \Delta (B \cup C)$



Exo 7

On a $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

$= P(A) + 1 - P(\overline{B}) - P(A\cup B) = \boxed{\frac{1}{8} = P(A\cap B)}$

• $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = \boxed{\frac{1}{4} = P(\overline{A}\cap\overline{B})}$

• $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 + P(\overline{B}) - P(A) - P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \boxed{\frac{7}{8}}$

$(P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}))$

• $P(B\cap\overline{A}) = P(B) - P(B\cap A) = 1 - P(\overline{B}) - P(B\cap A) = \boxed{\frac{1}{4} = P(B\cap\overline{A})}$

Exo 8

B : porter une bague ; C : porter un collier

a) $P(B\cup C) = \cancel{P(B) + P(C)} \; 1 - P(\overline{B}\cap\overline{C}) = \boxed{0.4}$

b) $P(B\cap C) = P(B) + P(C) - P(B\cup C) = \boxed{0.1}$

Exo 9

a) $P(G) = \frac{1040}{2000}$; $P(I\cup G) = P(I) + P(G) - P(I\cap G) = \frac{1060}{2000}$

$P(I\cap\overline{G}) = P(I) - P(I\cap G) = \frac{1}{100}$

$P(G\cap\overline{I}) = P(G) - P(I\cap G) = \frac{1010}{2000}$

b) $P(\overline{G}\cap\overline{I}) = 1 - P(I\cup G) = \frac{940}{2000}$

c) Oui puisque $P(I\cap G) \neq 0$.

Exo 10

D'abord, puisque $P(E \cup F) \leq 1$, on a $P(E \cap F) \geqslant \frac{1}{2}$

Ensuite, $P(E \cap F) \leq P(E)$

donc on a $\boxed{\frac{1}{2} \leq P(E \cap F) \leq \frac{3}{4}}$

De même, puisque $P(E \cup F) = \frac{3}{2} - P(E \cap F)$, on a

$$\boxed{\frac{3}{4} \leq P(E \cup F) \leq 1}$$

Exo 11

a) On a $P(E \cup F) \leq 1$ donc $P(E \cap F) \geqslant P(E) + P(F) - 1$

b) La propriété est vraie pour $n = 2$ et $n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie pour $k \leq n$

On a $P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) \geqslant P(A_{n+1}) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - 1$ (hypothèse de réc)

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - (n-1) - 1$$

ce qui prouve l'inégalité.

Exo 12

Puisque $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2) \geq 0$

on a la propriété pour $n = 2$ (de plus, elle est triviale pour $n = 1$).

Supposons que $\forall k \leq n$, la propriété est vraie (où $n \in \mathbb{N}^*$).

On a $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \leq P(A_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k).$$

Exo 13

pour $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que la propriété est vraie pour $k \leq n$

On a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - P(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

$$= P(A_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))$$

on applique l'hypothèse de récurrence aux deux derniers termes :

$$= P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n} P(A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_k})\right) - \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum P(A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_k} \cap A_{n+1})\right)$$

$$= P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad \right) + \sum_{k=2}^{n+1}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq a_1 < \dots \leq a_{k-1} \leq n} P(A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_{k-1}} \cap A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\qquad \right) + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\qquad \right)$$

La première somme : toutes les intersections sans A_{n+1}

La deuxième ———————————— avec A_{n+1}

donc :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1\leq \dots \leq i_k \leq n+1} P(A_{i_1}\cap \dots \cap A_{i_k})\right) \checkmark$$

$\boxed{\text{Exo 14}}$

a) $G = (E\cap\overline{F}) \cup (\overline{E}\cap F) = (E\cup F) - (E\cap F)$

~~On a $P(G) = P(E\cap\overline{F}) + P(\overline{E}\cap F)$ car évènements disjoints~~

On a $P(E\cup F) = P(G) + P(E\cap F)$ car évènements disjoints

donc $P(G) = P(E\cup F) - P(E\cap F) = \underline{P(E)+P(F) - 2P(E\cap F) = P(G)}$

b) On a $E = (E\cap\overline{F}) \cup (E\cap F)$

donc $P(E) = P(E\cap\overline{F}) + P(E\cap F)$ car évènements disjoints

donc $\underline{P(E\cap\overline{F}) = P(E) - P(E\cap F)}$

c) On a $\overline{E}\cap\overline{F} = \overline{E\cup F}$ d'où le résultat.

Exo 15

a) On note $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ la liste des éléments de Ω

(ou du moins une partie si Ω n'admet pas un plus petit élément)

alors $P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$ (ou $P(\Omega) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$)

$= \sum_{i=1}^{\infty} p$ or cette série diverge donc impossible.

b) Oui : prendre $P(x_i) = \frac{6}{\pi^2 i^2}$ par exemple

Alors $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1$

(n'importe quelle série convergente à termes positifs fonctionne).

Exo 16

a) On cherche $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

or $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
$+ P(A \cap B \cap C)$

$$= \frac{112 + 104 + 64 - 48 - 16 - 24 + 8}{400} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) N_1 : nombre d'étudiants dans exactement un cours

N_0 : ———————— aucun cours

N_T : nombre total d'étudiants ; N_{2+} : au moins deux cours

$N_1 = N_T - N_0 - N_{2+}$

or $N_{2+} = N_{A\cap B} + N_{A\cap C} + N_{B\cap C} - 2N_{A\cap B\cap C}$

donc $N_1 = N_T - N_0 - N_{A\cap B} - N_{A\cap C} - N_{B\cap C} + 2N_{A\cap B\cap C}$

et $P(X=1) = \dfrac{400-200-48-16-24+16}{400} = \dfrac{128}{400} = \boxed{\dfrac{8}{25}}$

Exo 17

a) Soit $\overline{E}$ = tous les anniversaires sont différents.

$$P(\overline{E}) = \frac{(365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1))}{(365)^n} = \frac{365!}{(365)^n \times (365-n)!}$$

b) $P(E) \geqslant 0.5 \Leftrightarrow P(\overline{E}) \leqslant 0.5$

pour $n=22$, on a $P(\overline{E}) \simeq 0.524$

pour $\boxed{n=23}$, on a $P(\overline{E}) \simeq 0.493$

pour $n=39$, on a $P(\overline{E}) \simeq 0.122$ (taille d'un groupe de TD)

pour $n=50$, on a $P(\overline{E}) \simeq 0.0296$

Exo 18

a) C_1 : la première personne reprend son chapeau
C_2 : la deuxième ______

$$\boxed{P(C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_N) = \frac{1}{N!}}$$

← une seule bonne façon de faire

← tous les choix possibles.

b) On note E = au moins une personne ne reprenne pas son chapeau.

$$\overline{E} = C_1 \cap C_2 \cap .. \cap C_N$$

donc $\boxed{P(E) = 1 - \frac{1}{N!}}$

c) On cherche à calculer $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_N})$

or $\bigcap_{i=1}^{N} \overline{C_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{N} C_i}$

donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{C_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right)$

on applique la formule de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(C_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} P(C_i \cap C_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} P(C_i \cap C_j \cap C_k) + \dots$$

$$= N \times \frac{1}{N} - \binom{N}{2} \times \frac{1}{N(N-1)} + \binom{N}{3} \frac{1}{N(N-1)(N-2)} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{(N-k)!}{N!} \times (-1)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

donc $\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{C_i}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}}$

d) $\boxed{\lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{C_i}\right) = e^{-1} \simeq 0{,}368}$

Chap 1 suite ④

a) Notons $E(n,k)$ l'évènement : "la balle n est retirée à l'étape k".

$E(n)$: " la balle est retirée à un moment donné avant minuit.

Clairement pour $n \not\equiv 0\ [10]$ on a $P(E(n,k)) = 0$

donc il y aura <u>une infinité de balles dans l'urne à minuit.</u>

b) i) On s'attend à en avoir une infinité.

ii) Par construction, on a $P(E(n,n)) = 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(E(n)) = 1$

iii) donc <u>aucune balle dans l'urne à minuit.</u>

c) i) On prend d'abord $n = 1$.

On a $P_k(1) = 1 - \sum_{j=1}^{k} P(E(1,j)) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \overline{E(1,j)}\right)$

$$= \boxed{\prod_{j=1}^{k} \frac{9j}{9j+1} = P_k(1)}$$

Pour n quelconque, la seule chose qui change est que, pour $k < E\left(\frac{n}{10}\right)$, la balle n n'est pas encore dans l'urne.

Si l'on note $n_0 = E\left(\frac{n}{10}\right)$, on a

$$\boxed{P_k(n) = \prod_{j=n_0}^{k} \frac{9j}{9j+1}}$$

ii) On a $\dfrac{1}{P_k(n)} = \prod_{j=n_0}^{k} \left(1+\dfrac{1}{q_j}\right)$

$$\geqslant \sum_{j=n_0}^{k} \frac{1}{q_j}$$

or $\lim\limits_{k \to +\infty} \sum_{j=n_0}^{k} \dfrac{1}{q_j} = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} P_k(n) = 0}$

iii) <u>aucune balle dans l'urne à minuit</u>.