EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet A)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Soient A et B deux événements tels que P(A)=⅕ et P(A∪B)=½

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer P(B).
2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer P(B).
3. Calculer P(B) en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

<u>Correction</u>

1. A et B incompatibles donc $A \cap B = \varnothing$ d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

2. A et B indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B) \Rightarrow \frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}.$$

3. A ne peut être réalisé que si B est réalisé : tous les événements de A sont dans B,

$$P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}.$$

<u>Exercice 2</u> : Un agriculteur a entreposé dans un local humide 12 doses d'herbicides et 8 doses de fongicide. Après plusieurs mois de séjour, les étiquettes des produits chimiques ne sont plus discernables.

En vue d'un traitement, l'agriculteur prend 6 doses au hasard (décision écologiquement contestable).

1. Quelle est la probabilité qu'il prenne 6 doses d'herbicide ?
2. Quelle est la probabilité qu'il prenne au moins 2 doses d'herbicide ?

<u>Correction</u>

a. L'univers comporte $\binom{6}{20}$ tirages simultanés de 6 objets parmi 20, il y a $\binom{6}{12}$ manières de tires les 6 doses, soit une probabilité de : $\dfrac{\binom{6}{12}}{\binom{6}{20}} = \dfrac{\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6!}}{\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{6!}} \approx 0{,}024$, environ 2,4%.

b. On cherche 1 – [Probabilité (0 dose herbicide) + (1 dose herbicide)], soit

$$P(0) = \frac{\binom{6}{8}}{\binom{6}{20}} = \frac{\binom{2}{8}}{\binom{6}{20}} = \frac{\frac{8\times7}{2}}{\frac{20\times\ldots\times15}{6!}} \approx 0{,}0007 = 0{,}07\ \%\ .$$

$$P(1) = \frac{\binom{1}{12}\binom{5}{8}}{\binom{6}{20}} = \frac{12\times\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5!}}{\binom{6}{20}} = \frac{12\times8\times7}{\frac{20\times\ldots\times15}{6!}} \approx 0{,}017 \approx 1{,}7\ \%.$$

Probabilité recherchée = 100 − (0,07+0,17) = 99,76 %.

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet B)
Durée : 30 minutes.

__Exercice 1__ : Soient A, B et C des événements. On pose $E_1=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ et $E_2=A\cap(B\cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$.
3. On donne $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, $P(B\cap C)=0{,}1$, $P(A\cap C)=0{,}1$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ et $P(A\cap B\cap C)=0{,}05$.
   Calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

__Correction__

1. $E_1 \cap E_2 = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap(B\cup C) = \left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap C\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. $A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)$ donc en appelant $K=B\cup C$, on a $E_1\cup E_2=\left(A\cap\overline{K}\right)\cup(A\cap K)=A$.

3. On calcule $P(B\cup C)=0{,}4+0{,}3-0{,}1=0{,}6$, $P\left(\overline{B\cup C}\right)=0{,}4$; $P(E_1)+P(E_2)=P(A)=0{,}6$.

En utilisant la formule de l'exo 9, on a

$P(A\cup K)=P(A\cup B\cup C)=0{,}6+0{,}4+0{,}3-0{,}1-0{,}1-0{,}2+0{,}05=0{,}95$; par ailleurs

$P(A\cup K)=P(A)+P(K)-P(A\cap K)\Rightarrow 0{,}95=0{,}6+0{,}6-P(E_2)\Rightarrow P(E_2)=0{,}25$

et enfin $P(E_1)=0{,}6-0{,}25=0{,}35$.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ………………. PRÉNOM ………………. 2023-2024

<u>Exercice 2</u> : Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On prélève n boules successivement et avec remise, $n \geq 2$. On considère les deux événements suivants :

A : "On obtient des boules des deux couleurs"

B : "On obtient au plus une boule blanche"

1. a. Calculer la probabilité de l'événement : "Toutes les boules tirées sont de la même couleur".
   b. Calculer la probabilité de l'événement : "On obtient exactement une boule blanche".
   c. En déduire $p(A \cap B)$, $p(A)$ et $p(B)$ sont :
2. a. Quelle relation devrait respecter n tel que A et B soient indépendants ?
   b. En déduire la valeur de n pour que les événements A et B soient indépendants.

Correction

1. a. p("Toutes les boules tirées sont de la même couleur")$=p(N)+p(B)=½^{n}+½^{n}=½^{n-1}$
   b. p("On obtient exactement une boule blanche")$=p(1B+(n-1)N)=n*(½*½^{n-1})=n*½^{n}$

   c. $p(A)=1-$ p("Toutes les boules tirées sont de la même couleur")$=1-½^{n-1}$
   $p(B)=$p("Toutes les boules tirées sont de la même couleur") + p("On obtient exactement une boule blanche")$=½^{n}+n*½^{n}=½^{n}(1+n)$
   $p(A \cap B)=$p("On obtient des boules des deux couleurs et au plus une boule blanche")=p("on obtient exactement une boule blanche et n-1 boules noires")=
   $n*½^{n}$
2. a. $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
   $n*½^{n}=½^{n}(1+n)*(1-½^{n-1}) \Leftrightarrow 2^{n-1}=n+1$
   b. $n=2 \Rightarrow 2\neq3$
   $n=3 \Rightarrow 2^{2}=4=3+1$

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ………………. PRÉNOM ………………. 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet C)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.

On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la $3^{ème}$ boule tirée est noire » vaut ¼.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>**Correction**</u>

1. Avec un dé il y a deux multiples de 3 : 3 et 6 ; on a donc la probabilité $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et la probabilité $\frac{2}{3}$ de ne pas avoir de multiple de 3.

a. La probabilité d'obtenir une boule noire est alors

$$p(N)=p(\text{mult de } 3)\times p_A(N)+p(\text{pas mult de } 3)\times p_B(N)=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}.$$

b. $p(R)=p(\text{mult de } 3)\times p_A(R)+p(\text{pas mult de } 3)\times p_B(R)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{5}{12}$;

$$p(V)=p(\text{mult de } 3)\times p_A(V)+p(\text{pas mult de } 3)\times p_B(V)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times 0=\frac{3}{12}.$$

Le rouge est donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir.

c. La probabilité que la boule vienne de B sachant qu'elle est rouge est :

$$p_R(B)=\frac{p(B\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5}.$$

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. On a les possibilités suivantes : $N\overline{N}N$, $\overline{N}NN$, $\overline{N}\overline{N}N$; on ne remet pas la boule dans l'urne donc :

$p\left(\overline{N}\overline{N}N\right)=p\left(\overline{N}\right)p\left(\overline{N}\right)p(N)=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{28}$, $p\left(\overline{N}NN\right)=p\left(\overline{N}\right)p(N)p(N)=\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{28}$, de même pour $p\left(N\overline{N}N\right)$; au total cela donne bien $\frac{1}{4}$.

b. Non, ce sont des probabilités identiques… $p(N)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet D)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : On suppose que 3 entreprises A, B et C fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de :

- 25 % pour A
- 35 % pour B
- 40 % pour C

Les pourcentages de commandes non conformes sont :

- 5 % pour les microprocesseurs de A
- 4 % pour ceux de B
- 2 % pour ceux de C

Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour A, B et C, on prélève un microprocesseur.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?
2. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type A ?

<u>**Correction**</u>

a. A l'aide d'un arbre de probabilités nous obtenons :

P(NC)=0,25*0,05 + 0,35*0,04 + 0,40*0,02 = 0,0345.

b. $P(A/NC)=\dfrac{0,25\times 0,05}{0,25\times 0,05+0,35\times 0,04+0,40\times 0,02}=0,3623$.

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>Exercice 2</u> : Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci.

On note :

- N l'événement : « le dé tiré est normal » ;
- S_n l'événement : « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers ».

Calculer p_n

<u>**Correction**</u>

$$p_n = P(\bar{N} / S_n) = \frac{P(\bar{N} \cap S_n)}{P(S_n)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n}{2\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n} = \frac{4^n}{2+4^n} = \frac{1}{2\frac{1}{4^n}+1}.$$

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet E)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Dans une population, un sujet a une probabilité de 0,3 d'être atteint d'une maladie M.

On sait que si un sujet n'est pas atteint de M, il a 9 chances sur 10 de répondre négativement à un test T et que s'il est atteint de M, il a 8 chances sur 10 de répondre positivement à T.

On fait le test.

1. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?
2. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

<u>**Correction**</u>

1. Voici le résultat en utilisant l'arbre de probabilités.

   Probabilité recherchée= $\dfrac{0,3\times 0,8}{0,3\times 0,8+0,7\times 0,1}=$ 77,42%

2. Probabilité recherchée= $\dfrac{0,3\times\times 0,2}{0,3\times 0,2+0,7\times 0,9}=$ 8,7%.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ………………. PRÉNOM ………………. 2023-2024

<u>**Exercice 2**</u> : On sait que 36 % des foyers ont un chien et que dans 22 % des foyers où l'on a un chien on trouve aussi un chat. On sait par ailleurs que 30% des foyers ont un chat.

1. Quelle est la proportion de foyers dans lesquels on trouve un chien et un chat ?
2. Quelle est la probabilité qu'un foyer possède un chien sachant qu'il possède un chat ?

<u>**Correction**</u>

a. $P(chien) = 0,36$ donc

$P(chien \cap chat) = P_{chien}(chat) \times P\left(chien \right) = 0,22 \times 0,36 = 0,079$.

b. $P(chat) = 0,30$, $P_{chat}(chien) = \dfrac{P(chien \cap chat)}{P(chat)} = \dfrac{0,079}{0,30} = 0,2633$.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet F)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Soit $n \geq 3$. On dispose de deux urnes U et V.

L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ;

L'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires.

On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise. Soit

- U l'événement : « on choisit l'urne U »
- V l'événement : « on choisit l'urne V »
- B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

Calculer $P(B \cap U)$ puis $P(B)$ et enfin $P(U/B)$

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>Correction</u>

- $P(B \cap U)$ est la probabilité que les deux événements B et U se réalisent en même temps. Cet événement correspond au cas où on choisit l'urne U et qu'on tire deux boules blanches.
  La probabilité de cet événement est donc: $P(B \cap U) = P(U) \times P(B/U)$

Comme $P(B/U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Donc $P(B \cap U) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

- $P(B \cap U)$ est la probabilité que les deux événements B et U se réalisent en même temps. Cet événement correspond au cas où on choisit l'urne U et qu'on tire deux boules blanches.
  La probabilité de cet événement est donc: $P(B \cap U) = P(U) \times P(B/U)$

Comme $P(B/U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Donc $P(B \cap U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

- $P(B)$ est la probabilité que B se réalise, sans condition sur le choix de l'urne. Cet événement peut se réaliser de deux façons: soit en choisissant l'urne U et en tirant deux boules blanches, soit en choisissant l'urne V et en tirant deux boules blanches.

$P(B) = P(B \cap U) + P(B \cap V)$

$P(B \cap V)$ est la probabilité que les deux événements B et V se réalisent en même temps. Cet événement correspond au cas où on choisit l'urne V et qu'on tire deux boules blanches. La probabilité de cet événement est donc:

$P(B \cap V) = P(V) \times P(B/V)$

Comme $P(B/V) = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$

Donc: $P(B \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{2(n+2)(n+1)}$

Ainsi : $P(B) = \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2(n+2)(n+1)} = \frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}$

- $P(U/B)$ est la probabilité que U se réalise sachant que B est réalisé. Cet événement correspond au choix de l'urne U sachant qu'on a tiré deux boules blanches. La probabilité de cet événement est donnée par la formule de la probabilité conditionnelle:

$$P\left(\frac{U}{B}\right) = \frac{P(U \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}{\frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}} = \frac{2}{n^2-n+2}$$

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>Exercice 2</u> : On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de :

1. Tirer tous les coeurs ?
2. Tirer les 4 as ?
3. Tirer 5 coeurs et 3 trèfles ?
4. Tirer 5 coeurs ni plus ni moins et 3 rois ni plus ni moins ?

<u>Correction</u>

1. Nombre total de tirages : $\binom{32}{8} = N$. Proba de tous les cœurs : on tire les 8 cartes parmi 8 (cœurs), soit $\binom{8}{8} = 1$, soit $1/N$.

2. On tire 4 cartes parmi les 4 as, soit encore 1 et 4 autres cartes parmi 28 restantes, soit $\binom{28}{4}$, au final la probabilité est $\dfrac{1 \times \binom{28}{4}}{N}$.

3. On tire 5 cœurs parmi 8 cœurs et 3 trèfles parmi 8 trèfles, soit $\binom{8}{5}\binom{8}{3} / N$.

4. Attention au roi de cœur… 5 cœurs parmi 8 cœurs et 3 rois parmi 3, soit $\binom{8}{5}\binom{3}{3}$ auxquelles on ajoute les combinaisons contenant le roi de cœur, soit $\binom{1}{1}\binom{7}{4}\binom{21}{3}$ (R de cœur, 4 cœurs parmi 7, 3 cartes ni Roi ni cœur).

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet G)

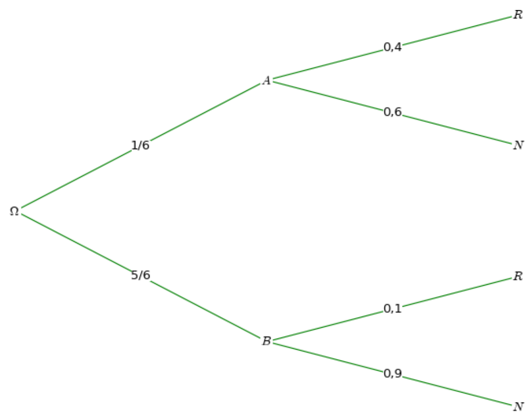
Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Calculer $p(\text{R})$.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Correction



1. A et B forment une partition de l'univers Ω ; d'après la formule des probabilités totales, on a $p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p_A(R) \times p(A) + p_B(R) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60}$.
2. Par conséquent, $p(R) = 0{,}15$.
3. 2. Calculons $p_R(A)$ et $p_R(B)$: $p_R(A) = \dfrac{p(A \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \dfrac{4}{9}$ et

   $p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \dfrac{5}{9}$. Donc, si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est inférieure à celle qu'elle provienne de B.

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>Exercice 2</u> : On lance deux fois un dé pipé tel que P(1)=P(3)=P(4)=⅛ et P(2)=P(6)=¼.

Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10 (strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

<u>Correction</u>

Il manque $P(5) = 1 - 3\times\frac{1}{8} - 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

1. Il faut avoir des résultats comme (x, 6) ou (6, x) avec x = 5 ou 6 ; on a donc la probabilité $2\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (on enlève 1/4 pour ne pas compter (6, 6) deux fois).

2. Là c'est simplement (6, x), soit $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet H)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

* si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;

* si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\bar{E}$. La probabilité d'un événement est notée $p(E)$.

1. Montrer que $P(G) = \frac{7}{30}$
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

<u>Correction</u>

1. $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{B}) \times p(\,dé < 6\,) + p(\mathrm{N}) \times p(\,dé = 6\,) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{30}$.

2. $p_{\mathrm{P}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\text{Blanc et Perdu})}{p(\mathrm{P})} = \dfrac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \dfrac{1}{60} \times \dfrac{30}{23} = \dfrac{1}{46}$.

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

<u>Exercice 2</u> : Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2.

a. Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)

b. On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c. On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

<u>Correction</u>

1. a. $p(A) = \frac{1}{6}$; $p(\overline{A}) = \frac{5}{6}$; $p(B/A) = \frac{4}{7}$; $p(B/\overline{A}) = \frac{17}{35}$

D'après la loi des probabilités totales on a : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{17}{35} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$.

b. $p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$ d'où $p_B(A) = \frac{(4/7)\times(1/6)}{1/2} = \frac{4}{21}$.

c. De même on a : $p(\overline{A}/\overline{B}) \times p(\overline{B}) = p(\overline{A} \cap \overline{B})$ d'où $p(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{(18/35)\times(5/6)}{1/2} = \frac{6}{7}$

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet I)
Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2. Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$, $p_{A_2}(B_0)$.

b. Calculer $p(B_0)$.

c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3. On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Calculer p(R).

EFREI
L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Correction

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne : il y a $\binom{6}{2}=\frac{6.5}{2}=15$ tirages possibles.

« On n'a obtenu aucune boule noire » revient à dire que l'on a tiré deux rouges parmi 4, il y a $\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ et la probabilité est $p(\mathrm{A}_0)=\frac{6}{15}$;

de même « on a obtenu une seule boule noire » revient à dire qu'on a tiré une noire parmi 2 et une rouge parmi 4, il y a $\binom{2}{1}.\binom{4}{1}=8$ manières de procéder, ce qui donne $p(\mathrm{A}_1)=\frac{8}{15}$; comme la seule possibilité restante est de tirer 2 noires, on a $p(\mathrm{A}_2)=1-p(\bar{A}_2)=1-\left(\frac{6}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{1}{15}$.

2. a. Lors de ce deuxième tirage on a $\binom{4}{2}=6$ tirages possibles.

Si on a tiré 0 noire au 1^er tirage, on a tiré 2 rouges ; il reste donc 2 rouges et 2 noires dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 2, soit $p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6}$;

si on a tiré 1 noire au 1^er tirage, on a tiré également 1 rouge ; il reste donc 3 rouges et 1 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 3, soit

$p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{3}{2}}{6}=\frac{3}{6}$;

si on a tiré 2 noires au 1^er tirage, on a tiré 0 rouge ; il reste donc 4 rouges et 0 noire dans la boite et la probabilité de tirer 0 noire est celle de tirer 2 rouges parmi 4, soit $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0)=\frac{\binom{4}{2}}{6}=\frac{6}{6}=1$ (en fait c'était évident…puisqu'il n'y a plus que des rouges).

b. avec les probabilités totales on a $p(\mathrm{B}_0)=p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_0)+p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_1)+p(\mathrm{B}_0\cap\mathrm{A}_2)$, soit

$$p(\mathrm{B}_0)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0)p(\mathrm{A}_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+\frac{6}{6}.\frac{1}{15}=\frac{6}{15}.$$

c. De la même manière on a

$p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{6}=\frac{4}{6}$, $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{6}=\frac{3}{6}$, $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_1)=0$;

$p(\mathrm{B}_1)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_2)=\frac{4}{6}.\frac{6}{15}+\frac{3}{6}.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$;

$p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)=\frac{\binom{2}{2}}{6}=\frac{1}{6}$, $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2)=0$, $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_2)=0$;

$p(\mathrm{B}_2)=p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_0)+p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_1)+p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_2)p(\mathrm{A}_2)=\frac{1}{6}.\frac{6}{15}+0.\frac{8}{15}+0.\frac{1}{15}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage, on connaît donc B_1. Nous cherchons alors $p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{A}_1)=\frac{p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)}{p(\mathrm{B}_1)}=\frac{p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)p(\mathrm{A}_1)}{p(\mathrm{B}_1)}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{8}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}$.

3. $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{A}_0\cap\mathrm{B}_2)+p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B}_1)=p(\mathrm{A}_0)p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_2)+p(\mathrm{A}_1)p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_1)$, soit $p(\mathrm{R})=\frac{6}{15}.\frac{1}{6}+\frac{8}{15}.\frac{3}{6}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Interrogation FLASH (Sujet J)

Durée : 30 minutes.

<u>Exercice 1</u> : Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.

Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de la même couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

D « Tirer deux boules rouges. »

E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que p(D)=$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n p(E)≥½ ?

EFREI

L2-CLASSIQUE NOM ……………… PRÉNOM ……………… 2023-2024

Correction

1. Nombre de possibilités : $\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2.1}=120$.

$$p(A)=\frac{\binom{5}{3}}{120}=\frac{1}{12},\ p(B)=\frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{120}=\frac{11}{120},\ p(C)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}.$$

2. a. Nombre de tirages possibles : $\binom{n+5}{2}=\frac{(n+5)(n+4)}{2}$. Nombre de tirages possibles pour D: $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Après simplification on a $p(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b. $E=$ 2 rouges ou 2 jaunes ou 2 vertes, soit $\binom{n}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}=\frac{n(n-1)}{2}+3+1=\frac{n^2-n+8}{2}$ d'où

$$p(E)=\frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}.$$

On a $p(E)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{n^2-n+8}{n^2+9n+20}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2n^2-2n+16\geq n^2+9n+20\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0$. Après résolution on a $n\geq 11,35$, soit $n=12$.