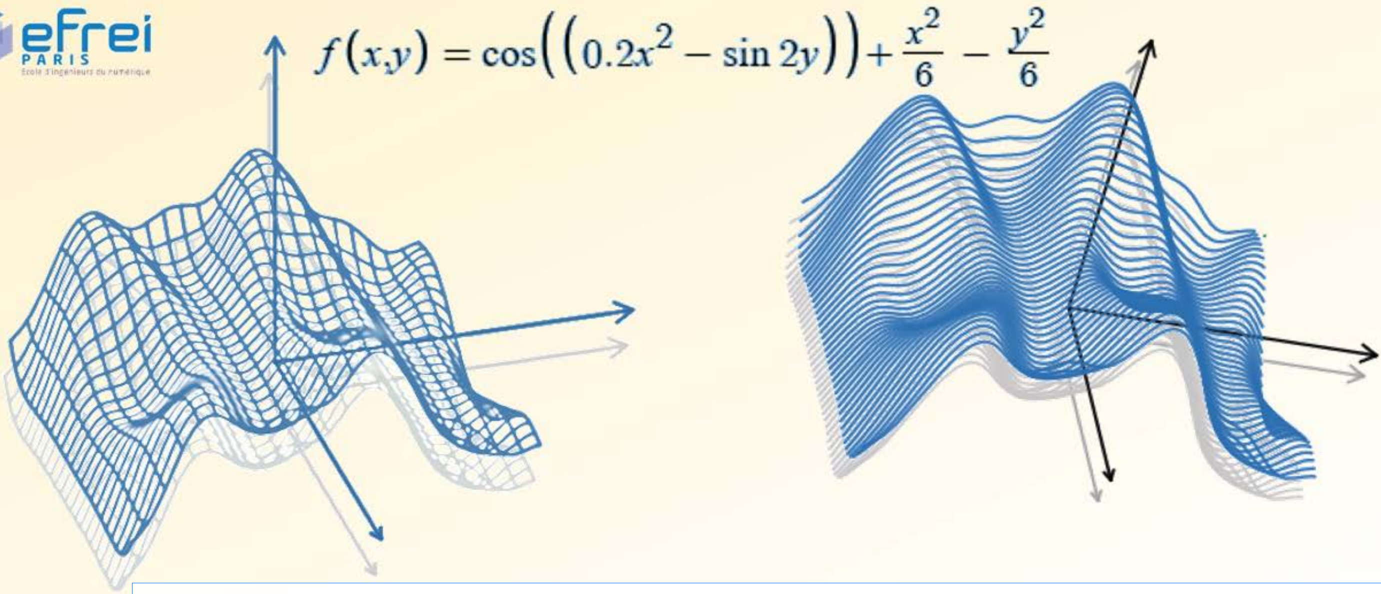


7. Annexe 1 - Distances et normes

Dans ce cours, nous avons toujours affaire à la distance et à la norme euclidiennes. En fait, nous avons utilisé la distance euclidienne pour définir la proximité de deux éléments dans R^n. Mais, comme nous l'avons discuté au début du chapitre 2, d'autres distances et normes peuvent être utilisées en fonction de l'application. Mais nous pouvons nous poser une question très importante :

Puisque la définition de la limite est basée sur le choix de la norme, peut-on avoir une fonction qui a une limite en un point donné pour une norme mais qui n'a pas de limite au même point pour une autre norme ?

La bonne nouvelle est que lorsque nous sommes dans des dimensions finies (comme dans $\mathbf{R}^n$), la réponse est non : si la limite existe pour une norme, alors elle existe et elle est la même pour toute autre norme. Cela est dû à un résultat affirmant que toutes les normes dans un espace vectoriel de dimension finie sont "équivalentes".

Dans ce qui suit, nous donnons le cadre théorique pour la définition d'une norme et d'une distance.

Définition 7.0.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Une norme sur E est définie comme étant toute application N de E dans $\mathbf{R}_+$ qui satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall u \in E$, $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;
3. $\forall (u,v) \in E^2$, $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski).

Notation : On note $N = \|\cdot\|$, c-à-d pour tout $x \in E$ $N(x) = \|x\|$.

Proposition 7.0.1 Sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, soit $x = (x_1, x_2)$, les applications N_2 et N_∞ définies par

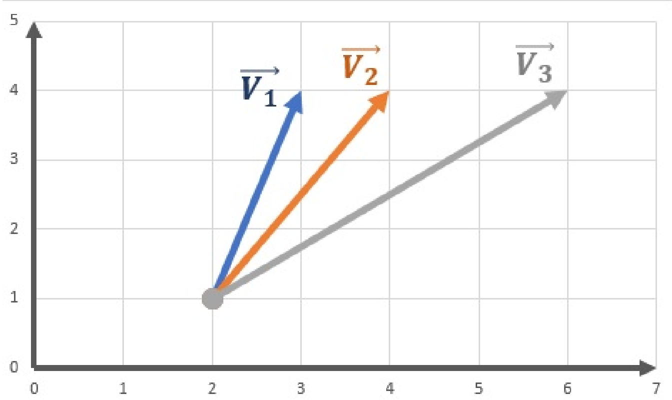
$$N_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad N_\infty(x,y) = \sup(|x|, |y|).$$

sont des normes sur $\mathbf{R}^2$.

■ **Exemple 7.1** Soit $V_1(1,3)$, $V_2(2,3)$, $V_3(4,3)$. Alors,

$$N_2(V_1) = \sqrt{10}, \quad N_2(V_2) = \sqrt{13}, \quad N_2(V_3) = \sqrt{25} = 5.$$

$$N_\infty(V_1) = 3, \quad N_\infty(V_2) = 3, \quad N_\infty(V_3) = 4.$$



■

Preuve N_2 est la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^2$.
Il est facile de prouver que N_∞ satisfait les deux premières propriétés de la définition d'une norme. On va démontrer alors l'inégalité triangulaire.
$N_\infty((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = N_\infty(x_1+x_2, y_1+y_2) = \sup(|x_1+x_2|, |y_1+y_2|)$. D'après l'inégalité triangulaire,
$|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2| \leq \sup(|x_1|,|y_1|)+\sup(|x_2|,|y_2|) = N_\infty(x_1,y_1)+N_\infty(x_2,y_2)$ et aussi $|y_1+y_2| \leq N_\infty(x_1,y_1)+N_\infty(x_2,y_2)$. On déduit que $N_\infty((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \leq N_\infty(x_1,y_1)+N_\infty(x_2,y_2)$, qui est l'inégalité triangulaire de N_∞. Alors, N_∞ est une norme sur $\mathbf{R}^2$. □

Définition 7.0.2 Soient N et N' deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N et N' sont équivalentes si

$$\exists(\alpha,\beta) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2, \quad \alpha N \leq N' \leq \beta N.$$

Proposition 7.0.2 Les deux normes N_2 et N_∞ dans $\mathbf{R}^2$ sont équivalentes et on a

$$N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{2} N_\infty.$$

Preuve Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
$N_\infty(x,y)^2 = (\sup(|x|,|y|))^2 = \sup\left(x^2,y^2\right) \leq x^2+y^2 = N_2(x,y)^2$, ce qui démontre la première inégalité.
D'autre part $N_2(x,y)^2 = x^2+y^2 \leq 2(\sup(|x|,|y|))^2 = 2N_\infty(x,y)^2$, ce qui démontre la seconde inégalité.

Théorème 7.0.3 Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Définition 7.0.3 La distance associée à la norm $\|\cdot\|$ est l'application d définie de $E\times E$ dans $\mathbf{R}$ par : $\forall(x,y)\in E^2$, $d(x,y)=\|x-y\|$.

Ainsi définie, l'application d satisfait les quatre propriétés suivantes :

Proposition 7.0.4

1. $\forall(x,y)\in E^2,\ d(x,y)\geq 0$;
2. $\forall(x,y)\in E^2,\ d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$;
3. $\forall(x,y)\in E^2,\ d(x,y)=d(y,x)$;
4. $\forall(x,y,z)\in E^3,\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Alors, la notion de distance peut être généralisée en utilisant ces propriétés pour définir la distance (et non pas en utilisant une norme) :

Définition 7.0.4 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Une application d définie de $E\times E$ dans $\mathbf{R}_+$ est appelée distance si elle satisfait les propriétés suivantes

1. $\forall x,y\in E,\ \ d(x,y)=d(y,x)$ (la distance est symétrique).
2. $\forall x,y\in E,\ \ d(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$.
3. $\forall x,y,z\in E,\ \ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

■ **Exemple 7.2** On définit d la "distance" entre deux mots comme étant le nombre d'opérations (ajout, remplacement, suppression) nécessaires pour passer d'un mot à l'autre. Par exemple $d(voir, foire)=2$. Cette distance est utilisée dans les éditeurs de texte pour la vérification de l'orthographe et la proposition de corrections. ■

■ **Exemple 7.3** Soit d définie par l'application $d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ tel que

$$\forall x,y\in\mathbf{R},\ \ d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y\\[2ex] 0 & \text{si } x=y\end{cases}$$

Montrer que d est une distance. Cette distance s'appelle la distance discrète.
On considère maintenant la fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\[2ex] 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$$

Montrer que f est continue pour la distance discrète mais discontinue pour la distance euclidienne.
■