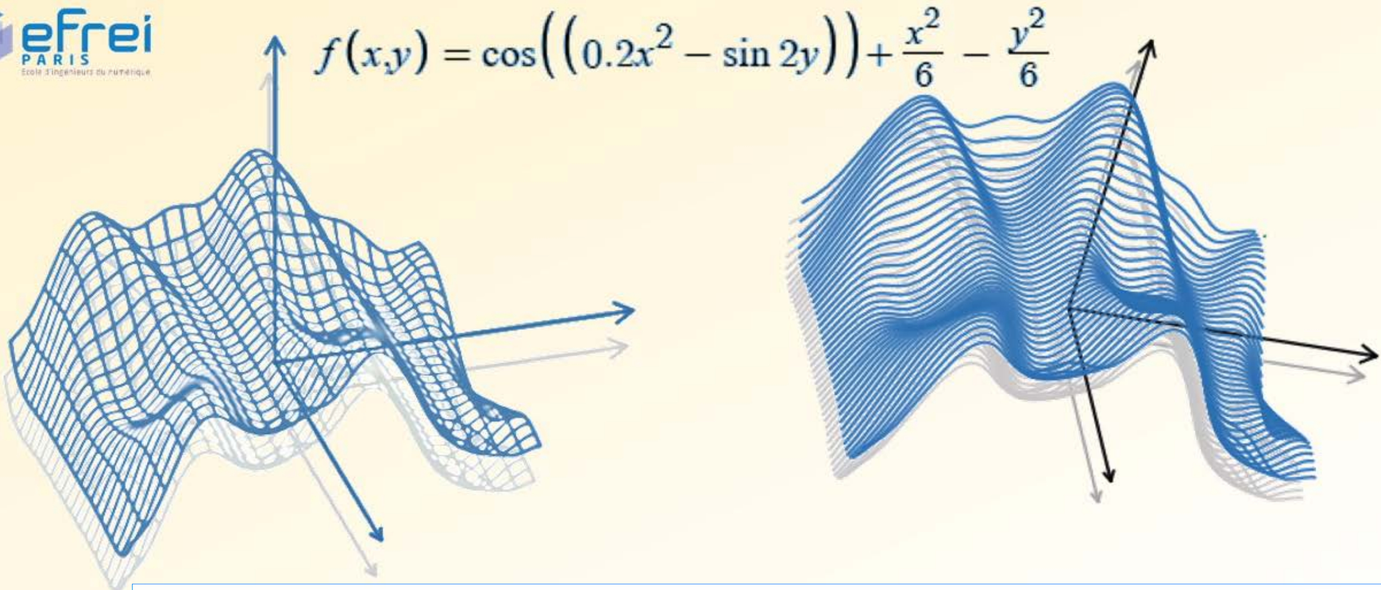


# 2. Limites et continuité

## 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables, plus précisément les notions de limite puis la continuité afin de pouvoir définir la différentiabilité dans le chapitre à venir.

Rappelons le cas d'une variable : pour une fonction $f$ à une variable définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on dit que

$f$ tend vers une limite $l \in \mathbf{R}$ quand $x$ tend vers un nombre réel $a \in \mathbf{R}$
si $f(x)$ devient **arbitrairement proche** de $l$ quand $x$ est **suffisamment proche** de $a$.

Par conséquent, la notion de limite est basée sur la notion de proximité entre deux nombres et intuitivement, vous aviez l'habitude de dire que $x$ se rapproche de $a$ si $x$ appartient à un petit intervalle contenant $a$ ou si la valeur absolue $|x-a|$ se rapproche de 0. Mais qu'est-ce qu'un « intervalle » dans $\mathbf{R}^n$ où qu'est-ce que cela signifie pour deux éléments dans $\mathbf{R}^2$, dans $\mathbf{R}^3$ ou dans $\mathbf{R}^n$ d'être proches les uns des autres ? Une nouvelle notion de proximité ou **distance** entre deux éléments de $R^n$ devrait être introduite avant de définir les limites.

On considère $\mathbf{R}^2$ par exemple, soit $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbf{R}^2$. La distance entre $x$ et $y$ peut intuitivement être considéré comme la longueur du segment $[x, y]$ donnée par

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

qui est aussi la longueur (norme) du vecteur $x - y$.
Cette quantité est appelée la distance euclidienne entre $x$ et $y$, mais est-ce la meilleure façon de définir la distance entre $x$ et $y$ ? Marseille par exemple, est à *plus proche* de Paris que Toulouse si l'on regarde le temps de trajet en train alors qu'elle est à 100 Km plus loin que Toulouse... Si dans une ville les routes sont construites selon un système de grille et qu'une voiture veut aller d'un point $A$ à un point $B$ (voir figure 2.1), il doit emprunter le chemin rouge ou le chemin bleu. C'est ce

qu'on appelle la distance de Manhattan - ou distance de taxi). Donc, la distance entre A et B dans ce cas n'est pas simplement la longueur du segment $[A,B]$.

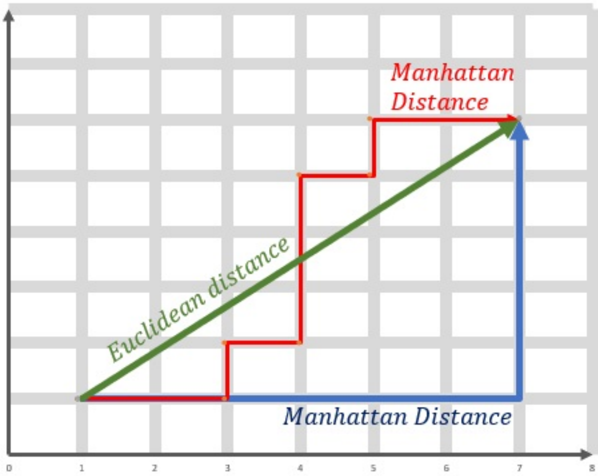


FIGURE 2.1 – Distance de Manhattan et la distance euclidienne.

Par conséquent, il existe de nombreuses façons de définir la distance en fonction de l'application. Vous trouverez plus de détails sur les définitions de la norme, de la distance et des principaux résultats dans l'annexe. Dans ce qui suit, nous utilisons la distance euclidienne pour définir la notion de voisinages et de limites, puis, nous introduisons brièvement les notions de distance et de norme pour généraliser la définition des voisinages et des limites. Enfin on définit la continuité d'une fonction de plusieurs variables.

## 2.2 L'espace euclidien $\mathrm{R}^n$

### 2.2.1 Distance euclidienne et norme

Nous avons souvent besoin d'utiliser des espaces vectoriels de dimension $n$ où $n$ peut être supérieur à 3 (ou peut-être infini). Comme il est impossible d'imaginer ces espaces géométriquement, nous considérons simplement un élément $x \in R^n$ comme étant défini par les $n$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ensuite, par analogie, on définie la norme euclidienne d'un élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ par

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

ce qui signifie que la distance entre deux éléments $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ n'est autre que la norme euclidienne de $(x-y)$ :

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

■ **Exemple 2.1** Soit $x = (1,3,-2,2) \in \mathbf{R}^4$ et $y = (1,2,-4,0) \in \mathbf{R}^4$, alors,

$$d(x,y) = \sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2 + (-2+4)^2 + (2-0)^2} = 3$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2 + 2^2} = 18 \qquad \|y\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2 + 0^2} = 21$$

and $x - y = (0,1,2,2)$ alors

$$\|x-y\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

■

### 2.2.2 Voisinage dans $\mathbb{R}^n$

Encore une fois, nous devons généraliser à $\mathbf{R}^n$ les notions d'intervalles ouverts et fermés qu'on connait déjà dans $\mathbf{R}$. On va utiliser des termes qu'on utilise dans une branche des mathématiques appelée **Topologie**.

**Définition 2.2.1 — Voisinage.** Soit l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norle euclidienne, soit $a \in \mathbf{R}^n$, un **voisinage** de $a$ est définie par

$$\mathscr{B}(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n \ / \ d(x,a) < r\}$$

pour $r > 0$.

■ **Exemple 2.2**

1. Si $n = 1$, $a \in \mathbf{R}$ et $\mathscr{B}(a,r)$ est **l'intervalle ouvert** $]a-r, a+r[$ centré en $a$.
2. Si $n = 2$, $a \in \mathbf{R}^2$ et $\mathscr{B}(a,r)$ est le **disque ouvert** de rayon $r$ centré en $a$.
3. Si $n = 3$, $a \in \mathbf{R}^3$ et $\mathscr{B}(a,r)$ est la **sphère ouverte** de rayon $r$ centré en $a$.

■

**Rmq** En général, l'ensemble $\mathscr{B}(a,r)$ est appelé la **boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$ qu'il soit dans $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{R}^2$ ou tout autre $\mathbf{R}^n$. Alors, si $n = 1$ par exemple,la boule ouverte $\mathscr{B}(a,r)$ est l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$ et ainsi de suite...

**Définition 2.2.2 — Ouvert.** Un sous ensemble $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$ est un ouvert dans $\mathbf{R}^n$ (voir figure 2.2) s'il contient un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \ \exists r > 0, \ \mathscr{B}(x,r) \subset \Omega$$

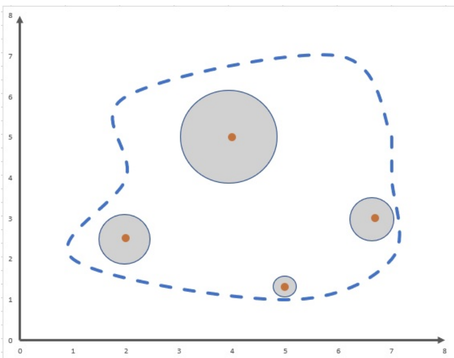

FIGURE 2.2 – Open set.

■ **Exemple 2.3**

On considère la norme euclidienne dans chacun des cas suivants.

1. Les ensembles $]2,3[$, $]a,+\infty[$ (ou tout intervalle ouvert), $]-1,4[\cup]8,10[$, sont des ouverts de $\mathbf{R}$.
2. L'ensemble de points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y > 0$ est un ouvert dans $\mathbf{R}^2$.
3. L'ensemble de points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y > x$ ou $y > x^2$ ou même $y \neq x$ sont des ouverts dans $\mathbf{R}^2$.
4. L'ensemble de points $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x+y-z > 0$ ou $1 < y < 6$ sont des ouverts dans $\mathbf{R}^3$.

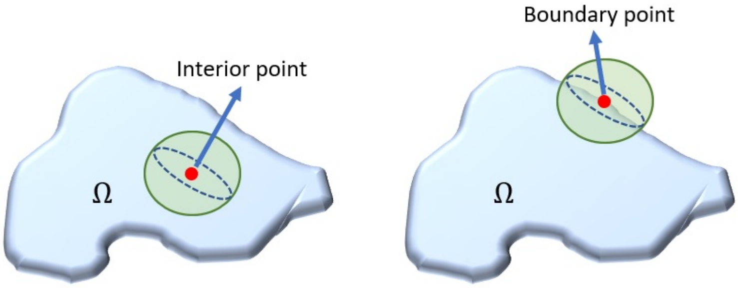


FIGURE 2.3 – Points intérieurs et points frontières.

5. L'ensemble $\mathbf{R}^n$, l'union de toute famille d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts. L'ensemble vide est considéré comme un ouvert.

■

**Définition 2.2.3 — Complémentaires et fermés.**

1. Le complémentaire $\Omega^c$ d'un sous-ensemble $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des points $\mathbf{R}^n$ qui n'appartiennent pas à $\Omega$.
2. Un sous-ensemble $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$ est un fermé si son complémentaire est un ouvert.

**Rmq** En général, l'ensemble $\overline{\mathscr{B}(a,r)}$ est appelé la boule fermée de centre $a$ de rayon $r$ définie par

$$\overline{\mathscr{B}(a,r)} = \{x \in \mathbf{R}^n \ / \ d(x,a) \leq r\}$$

■ **Exemple 2.4**

On considère la norme euclidienne dans chacun des cas suivants.

1. Les ensembles $[-6,1]$ (ou tout autre intervalle fermé), $[-1,4] \cup \{8\}$, sont des fermés dans $\mathbf{R}$.
2. L'ensemble de points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y \leq 0$ est un fermé dans $\mathbf{R}^2$.
3. L'ensemble $\mathbf{R}^n$, l'union d'une famille finie de fermés, l'intersection de toute famille de fermés sont des fermés dans $\mathbf{R}^n$. L'ensemble vide est considéré comme un fermé.

■

**Définition 2.2.4 — Points intérieurs et points frontière.** (Figure 2.3)
Etant donné un sous ensemble $\Omega$ de $\mathbf{R}^n$

1. Un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ est un point intérieur à $\Omega$ s'il existe une boule ouverte centrée en $x$ qui est entièrement incluse dans $\Omega$ :

$$\exists r > 0, \quad \mathscr{B}(x,r) \subset \Omega$$

2. Un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est un point frontière à $\Omega$ si toute boule ouverte centrée en $x$ contient des points appartenent à $\Omega$ ainsi que des points qui n'appartienent pas à $\Omega$.
3. L'ensemble des points intérieurs à $\Omega$ est l'intérieur de $\Omega$ et l'ensemble des points frontières de $\Omega$ forment la frontière de $\Omega$.

■ **Exemple 2.5**

On considère la norme euclidienne dans chacun des cas suivants.

1. Etant donné l'ensemble $\Omega = ]1,8] \in \mathbf{R}$, tout point de $]1,8[$ est un point intérieur à $\Omega$. Les points 1 et 8 sont des points frontière. On note **qu'un point frontière peut être à l'intérieur**

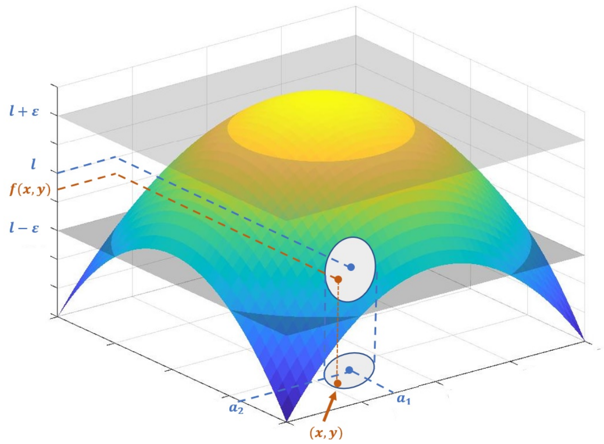


FIGURE 2.4 – Limite d'une fonction de deux variables.

**ou à l'extérieur de $\Omega$.**

2. Etant donné l'ensemble de points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y > 0$ et $x \geq 0$. Il admet tous les points $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y > 0$ et $x > 0$ comme points intérieur et tous les points se trouvant sur la partie positive de l'axe des $x$ ou de l'axe des $y$ comme points frontière.
3. L'ensemble $[0,10[\cup\{15\}$ contient tous les points de $]0,10[$ comme points intérieurs et 0, 10 et 15 comme points frontière. On note que le point 15 appartient à $\Omega$, alors toute boule ouverte centrée en 15 admettra le point 15 comme point dans $\Omega$ et d'autres points à l'extérieur de $\Omega$. Donc, il s'agit d'un point frontière mais pas intérieur.

■

## 2.3 Limites

Le concept de limite d'une fonction de plusieurs variables est similaire à celui des fonctions d'une variable. Pour plus de clarté, nous définissons dans ce qui suit la limite pour une fonction de deux variables seulement. Une définition similaire peut être faite pour les fonctions de trois variables ou plus.

**Définition 2.3.1 — Limite d'une fonction de deux variables.**
Etant donnée la fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et un point $(a_1,a_2)$ intérieur ou frontière à $D_f$. On dit que $f$ admet une limite $\ell$ en $(a_1,a_2)$ et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = \ell$$

si pour tout nombre positif $\varepsilon$, il existe un nombre positif correspondant $\delta$ tel que $|f(x,y)-\ell| < \varepsilon$ pour tout $(x,y)$ dans $D_f$ tel que $0 < \sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} < \delta$.

On note que $|f(x,y)-\ell|$ est la distance entre les nombres $f(x,y)$ et $\ell$, et $\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$ est la distance entre $(x,y)$ et $(a_1,a_2)$. Donc, la définition de la limite signifie en fait que les valeurs de $f(x,y)$ se rapproche de $\ell$ pour $(x,y)$ suffisamment proche de $(a_1,a_2)$.

En d'autre termes, pour tout intervalle $I_\varepsilon$ (de rayon $\varepsilon$ centré en $\ell$), on peut toujours trouver un disque ouvert de rayon $\delta$ centré en $a$ tel que pour tout $(x,y)$ dans ce disque, on a $f(x,y) \in I_\varepsilon$ (voir figure 2.4)

**Rmq**

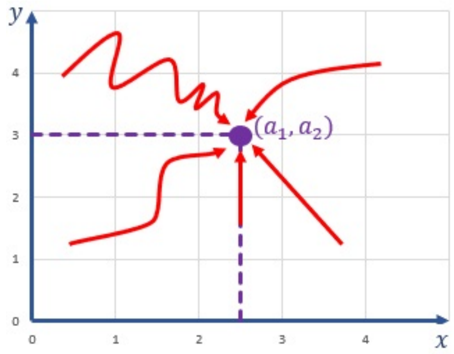


FIGURE 2.5 – $(x,y)$ peut tendre vers $(a_1,a_2)$ le long de plusieurs trajets.

> Pour une fonction à une variable, lorsqu'on fait tendre $x$ vers $a$, il n'existe que deux directions possibles, de gauche ou de droite. Dans ce contexte, si la limite gauche n'est pas égale à la limite droite, on dit que la limite n'existe pas. Pour une fonction de deux (ou plusieurs) variables, la situation n'est pas aussi simple puisque $(x,y)$ peut tendre vers $(a_1,a_2)$ suivant un nombre infini de directions (tout en restant dans le domaine de $f$) (voir figure 2.5).
>
> Par conséquent, la définition de la limite conduit au suivant : si selon deux chemins différents on trouve deux limites différentes alors la limite n'existe pas.

Avant de présenter quelques exemples, on énonce deux théorèmes :

**Proposition 2.3.1 — Unicité de la limite.**
Quand la limite d'une fonction $f$ de plusieurs variables en un points $a=(a_1,a_2)$ existe, elle est unique et on écrit

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y).$$

**Info++**

**Preuve** On suppose que $f$ admet deux limites distinctes $\ell$ et $\ell'$ en $a$ ; soit alors $\varepsilon>0$.

- $\exists\rho>0,\ \forall(x,y)\in D_f\cap\mathscr{B}(a,\delta),\ |f(x,y)-\ell|\leq\varepsilon$ ;
- $\exists\delta'>0,\ \forall(x,y)\in D_f\cap\mathscr{B}(a,\delta'),\ |f(x,y)-\ell'|\leq\varepsilon$.

On prend maintenant $r=\min(\delta,\delta')$, on a, pour tout $(x,y)\in D_f\cap\mathscr{B}(a,r)$ :

$$\left|\ell-\ell'\right| \leq |f(x,y)-\ell| + \left|f(x,y)-\ell'\right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, alors $\ell=\ell'$.

**Proposition 2.3.2 — Opérations sur les limites.**
Soit $f : D_f\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ et $g : D_g\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ et soit $(a_1,a_2)$ un point intérieur ou frontière de $D_f\cap D_g$ tel que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=\ell \quad \text{and} \quad \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y)=m,$$

alors,

i. $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = \ell \pm m$
ii. $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (f(x,y)g(x,y)) = \ell m$
iii. $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\ell}{m}$ tel que $m \neq 0$.
iv. Si $h$ est une focntion d'une variable continue en $t = \ell$ alors $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} h(f(x,y)) = h(\ell)$.

**Preuve** Ces résultats se démontrent en utilisant la définition de la limite.

**Rmq** **Règles de calcul :**

Etude de la limite d'une fonction de deux variables $f$ :

- Pour démontrer qu'une limite $L$ existe, on démontre que la limite de $|f(x,y) - L|$ est nulle en utilisant l'une des approches suivantes :
  (a) on effectue un calcul direct de limite (par remplacement).
  (b) on trouve une fonction qui majore le terme $|f(x,y) - L|$ et on démontre que ce majorant tend vers zéro.
  (c) on prend plusieurs cas qui couvrent le domaine en entier (par exemple pour $x \geq 0$ et pour $y \geq 0$) et on démontre que la limite est nulle dans chacun des cas considérés.
- Pour démontrer que la limite n'existe pas, il faut démontrer que suivant deux chemins différents, on trouve deux limites différente pour $f(x,y)$. Les chemins qu'on peut consiérer doivent passer par le point auquel tend $(x,y)$. Par exemple, si $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, on peut considérer les chemins $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = mx$, $y = x^2$...

■ **Exemple 2.6** Etudier la limite de $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. ■

■ **Exemple 2.7** Etudier la limite de $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. ■

■ **Exemple 2.8** Etudier la limite de $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. ■

■ **Exemple 2.9** Etudier la limite de $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. ■

**Coordonnées polaires.**
Pour étudier les limites des fonction de plusieurs variables, on peut utiliser parfois les coordonnées polaires. Les coordonnées polaires d'un point $M(x,y)$ dans le plan $(x,y)$, notées $(r,\theta)$, sont définies comme étant la distance $r$ entre l'origine et le point $M$ et l'angle $\theta$ entre l'axe des $x$ et la droite $(OM)$. Elles se déduisent des coordonnées cartésiennes dans le plan $(x,y)$ avec le formules :

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

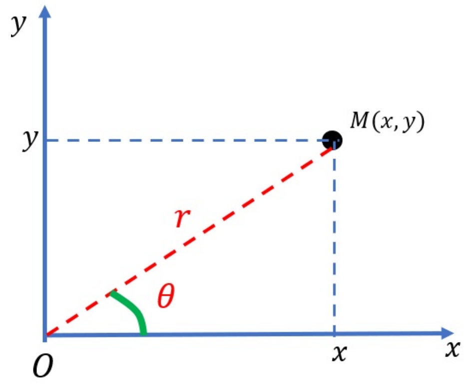


FIGURE 2.6 – Coordonnées polaires

**Rmq** **Règle de calcul :**

Pour étudier la limite d'une fonction de deux variables $f$ en utilisant les coordonnées polaires, il faut commencer par écrire la fonction en fonction de $r$ et $\theta$. Si $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, alors $r$ tend vers 0. On a deux cas :

- Si la limite de $f(r,\theta)$, quand $r$ tend vers 0, est égale à $L$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ (ne dépend pas de $\theta$), alors la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ existe et est égale à $L$.
- Si la limite de $f(r,\theta)$, quand $r$ tend vers 0, depend de la valeur de $\theta$, alors la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ n'éxiste pas.

■ **Exemple 2.10** Study the limits of the previous four examples using polar coordinates. ■

## 2.4 Continuité

**Définition 2.4.1 — Continuité d'une fonction de deux variables.**
Etant donnée la fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et un point $(a_1,a_2) \in D_f$. On dit que $f$ est continue en $(a_1,a_2)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = f(a_1,a_2).$$

On dit que $f$ est continue sur $D_f$ si elle est continue en tout point de $D_f$.

La continuité d'une fonction $f$ signifie que si $(x,y)$ varie par petites quantités, $f(x,y)$ varie aussi par petites quantités. En d'autres termes $f$ ne montre pas de sauts.

**Rmq** En ce qui concerne les limites, la continuité d'une fonction $f$ en un point $(a_1,a_2)$ signifie que la limite quand $(x,y)$ tend vers ce point devrait être égale à $f(a_1,a_2)$ le long de tout chemin passant par $(a_1,a_2)$. Donc, si cela n'est vrai que le long de certains chemins mais pas tous, la fonction est discontinue (voir figure 2.7 pour un exemple)

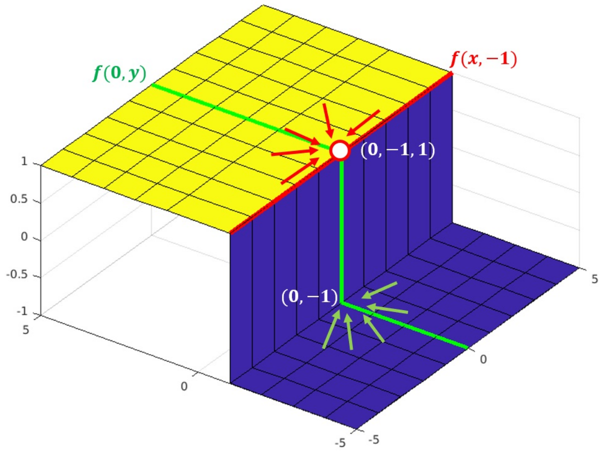


FIGURE 2.7 – La fonction montre une discontinuité le long de toute droite à l'exception de la droite rouge.

**Proposition 2.4.1 — Fonctions polynomiales.**
Les fonctions polynomiales de deux variables qui s'écrivent comme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x^i y^j$$

sont continues sur $\mathbf{R}^2$.

■ **Exemple 2.11** Etudier la continuité de $f(x,y) = x^2y + 5xy^3 - 3x + 6$ et calculer sa limite quand $(x,y)$ tend vers $(1,-2)$. ■

**Proposition 2.4.2** La somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur n'est pas nul) et la composition des fonctions continues sont des fonctions continues sur tout ouvert dans leurs domaines de définition.

■ **Exemple 2.12** Etudier la continuité de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ■

**Rmq** Ces deux dernières propositions peuvent être démontrées par déduction du théorème sur les opérations sur les limites.

**Définition 2.4.2** Etant donnée une fonction $f$ de deux variables définie sur un ouvert sauf en un point $(a_1,a_2)$. Si la limite de $f$ en $(a_1,a_2)$ existe et est égale à $\ell$ alors on peut définir une fonction $\tilde{f}$ appelée le prolongement par continuité de $f$ en $(a_1,a_2)$. Cette fonction sera donnée par

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (a_1,a_2) \\ \ell & \text{si } (x,y) = (a_1,a_2) \end{cases}$$

■ **Exemple 2.13** Etudier la continuité de $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ■

■ **Exemple 2.14** Etudier la continuité de $g(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ■

■ **Exemple 2.15** Etudier la continuité de $g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ■

## 2.5 Cas des fonctions sur $\mathrm{R}^n$, $n > 2$

Les définitions de limite et continuité peut être généralisées pour des fonctions de trois ou plusieurs variables. La différence est que nous remplaçons la distance euclidienne dans $\mathbf{R}^2$ entre $(x,y)$ et $(a_1,a_2)$ par la distance euclidienne dans $\mathbf{R}^n$ entre $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ :

**Définition 2.5.1 — Limite d'une fonction de plusieurs variables.**
Etant donnée une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et un point $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ intérieur ou frontière à $D_f$, on dit que $f$ admet une limite $\ell$ en $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \ell$$

si, pour tout nombre positif $\varepsilon$, il existe un nombre positif correspondant $\delta$ tel que

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon \text{ quand } (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ est dans } D_f$$
$$\text{tel que } (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathscr{B}((a_1,a_2,\ldots,a_n),\delta)$$
$$(\text{ou } 0 < \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2} < \delta).$$

## 2.6 Applications partielles

Pour comprendre le comportement d'une fonction de plusieurs variables, nous avons remarqué que nous devons étudier les valeurs de la fonction dans toutes les directions possibles. Par conséquent, plus de soin sera accordé à deux directions spécifiques : suivant l'axe des $x$ et suivant l'axe de $y$.

**Définition 2.6.1 — Applications partielles pour une fonction de deux variables.**
Soit $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $(a,b) \in D_f$. Soit $D_{f_1} = \{x \in \mathbf{R} \,/\, (x,b) \in D_f\}$ et $D_{f_2} = \{y \in \mathbf{R} \,/\, (a,y) \in D_f\}$. On définit les application partielles, chacune dépendatn d'une seule variable, $f_1$ et $f_2$, par :
• La première application partielle $f_1$ (voir figure 2.8) associée à $f$ en $(a,b)$ est

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & D_{f_1} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \to & f(x,b) \end{array}$$

• La deuxième application partielle $f_2$ (voir figure 2.8) associée à $f$ en $(a,b)$ est

$$f_2 : \begin{array}{rcl} D_{f_2} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & f(a,y) \end{array}$$

Les deux applications partielles représentent les courbes intersection (coupes) de la surface de $f$ et les plans verticaux passant par $(a,b)$ parallèlement à l'axe des $x$ et à l'axe des y $y$-axis.

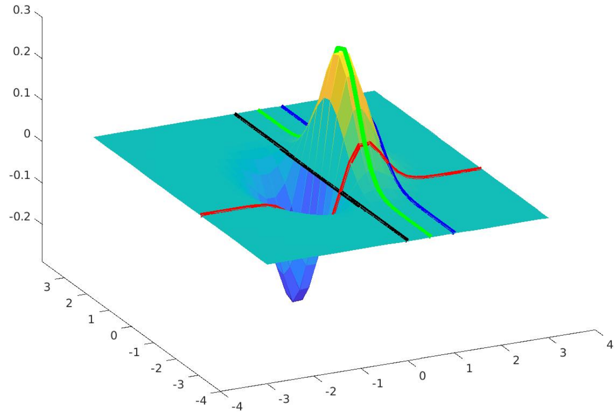

FIGURE 2.8 – Applications partielles : $f(0,y)$ pour $x=0$, $f(0.5,y)$ pour $x=0.5$, $f(1,y)$ pour $x=1$ et $f(x,-1)$ pour $y=-1$ de la fonction $f(x) = xe^{-2x^2-y^2}$.

■ **Exemple 2.16** La fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ admet sea applications partielles en $(1,2)$ données par :

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbf{R} \\ x & \to & \frac{x+2}{x-2} \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbf{R} \\ y & \to & \frac{y+1}{-y+1} \end{array}$$

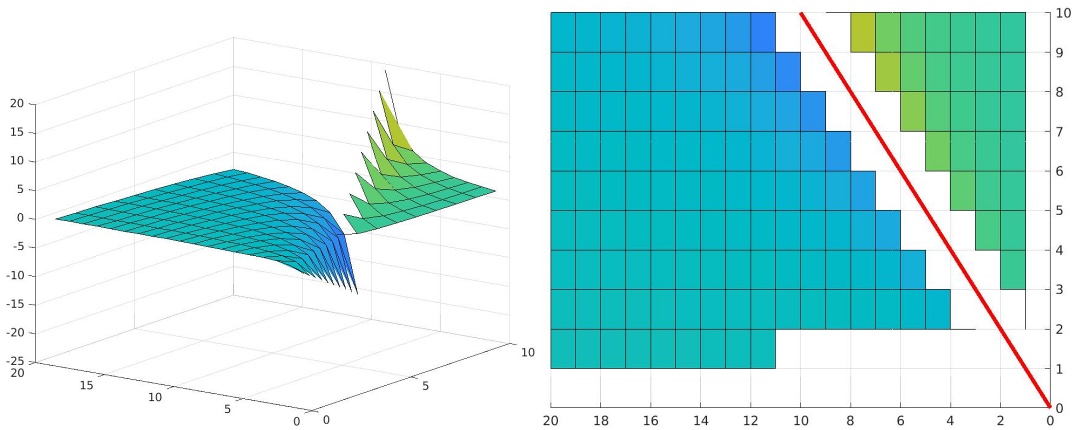

FIGURE 2.9 – $f(x) = \frac{x+y}{x-y}$ et sa projection 2D sur le plan montrant les valeurs interdites sur $y = x$.

■

Rmq

Notez bien que selon ce que nous avons appris sur les limites, si la limite d'une fonction existe en un point donné, alors les deux applications partielles ont également la même limite en ce point. Mais la réciproque n'est pas vraie bien sûr.

D'autre part, la continuité des applications partielles n'est pas suffisante pour avoir la continuité de la fonction en un point donné.

# TD 2 : Limites et continuité

**Exercice 1** Trouver la limite ou expliquer pourquoi elle n'existe pas dans chacun des cas suivants

$a.\ \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ $\quad b.\ \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$ $\quad c.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$

$d.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$ $\quad e.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad f.\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

$g.\ \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$ $\quad h.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}$ $\quad i.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^4}$

► $j.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^3}{x^3+y^3}$ $\quad$ ► $k.\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^6}{x^6+y^8}$

**Exercice 2** Etudiez la continuité de la fonction définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

► **Exercice 3** Est-il possible que la fonction $f$ définie pour $(x,y) \neq (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$$

soit prolongée par continuité pour obtenir une fonction continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

► **Exercice 4** Comment la fonction $f$ définie pour $x \neq y$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}$$

peut elle être prolongée sur la droite $y = x$ pour avoir une fonction continue en tout point de $\mathbf{R}^2$.

► **Exercice 5**
Soit

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Peut-on définir un prolongement de $f$ pour avoir une fonction continue en $(1,1)$ ?
3. Peut-on définir un prolongement de $f$ pour avoir une fonction continue en tout point du plan ?

**Exercice 6** Déterminer si les fonctions suivantes peuvent être prolongées par continuité aux points donnés

a. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$ at $(0,0)$.

b. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - 6x + y^2 + 9}$ at $(3,0)$.

**Exercice 7** Etudier la continuité des fonctions suivantes

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c. $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

► d. $i(x,y) = \begin{cases} \frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e. $j(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

► f. $k(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{2} - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$