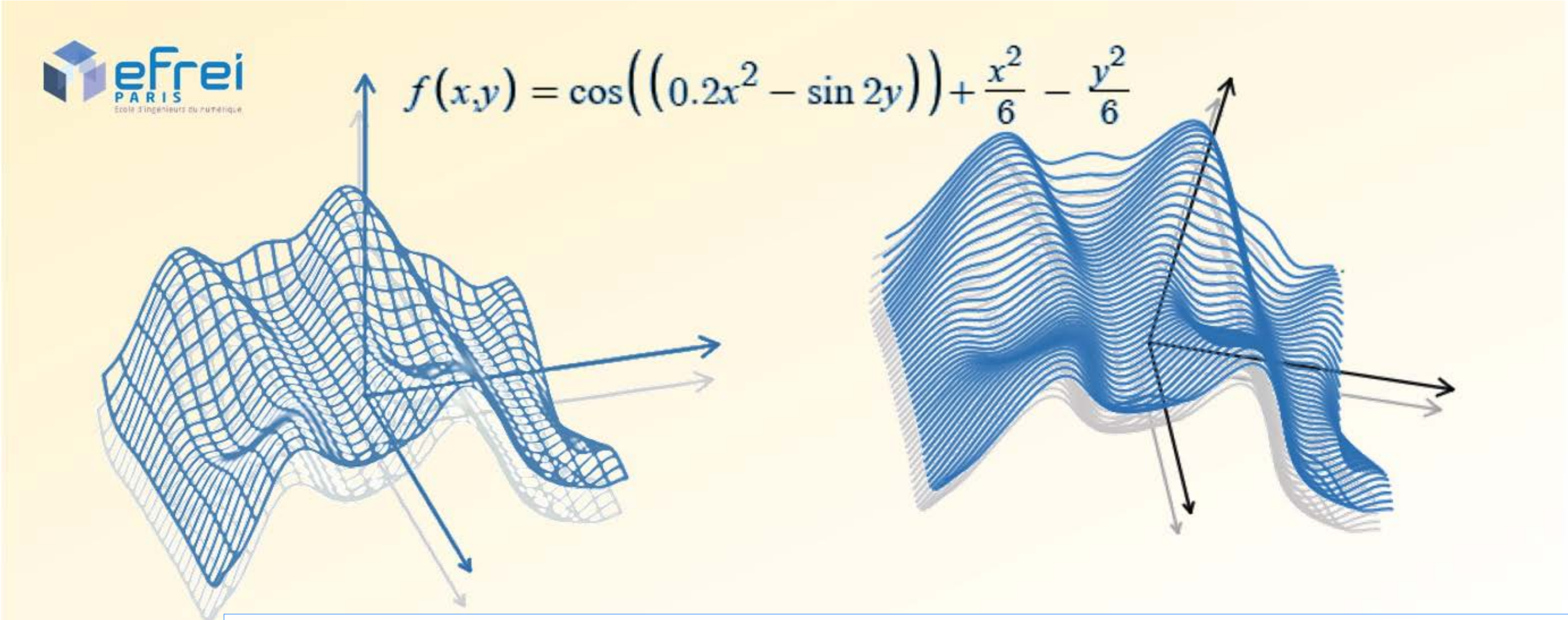

8. Appendix 2 - Dérivées partielles et différetiabilité

5.1 Notions et exemples sur la dérivées directionnelles et la différentiabilité

5.1.1 Dérivée directionnelle

Si une fonction $f(x,y)$ admet des applications partielles continues et dérivables au point (a_1,a_2), cette fonction sera-t-elle alors continue en (a_1,a_2) ? Pour répondre à cette question, on considère la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

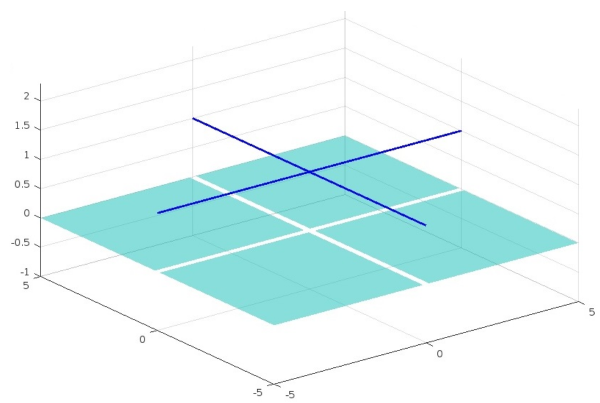

FIGURE 5.1 – $f(x,y) = 0$ si $xy \neq 0$ et $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$. Applications partielles existent et sont continues mais la fonction est discontinue.

On remarque que cette fonction a ses deux applications partielles qui sont égales à 0. Elles sont donc continues et dérivables en $(0,0)$, mais la fonction elle-même n'est pas continue en $(0,0)$. La réponse à la question est donc NON ! ! ! Nous avons besoin de plus d'hypothèses pour assurer la continuité. Bien sûr, la continuité ne conduira pas non plus à l'existence des dérivées partielles.

■ **Exemple 5.1**

1. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$
admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais elle n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Montrer que fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par
$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & \text{si } xy \neq 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0,\ y = 0 \\ y\sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0,\ y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
est continue en $(0,0)$ mais ses dérivées partielles en $(0,0)$ n'existent pas.

■

Rmq On peut conclure que : Dérivées partielles $\not\Rightarrow$ Continuité $\not\Rightarrow$ Dérivées partielles

En fait, le concept de différentiabilité pour les fonctions de plusieurs variables est plus compliqué que pour les fonctions à une seule variable car un point du domaine peut être approché le long de plusieurs directions. Par conséquent, on va généraliser le concept de dérivée partielle à d'autres directions :

Définition 5.1.1 — Dérivée directionnelle. Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de deux variables et soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ un vecteur unitaire. On dit que f admet une dérivée directionnelle dans la direction u (ou αu) en $a = (a_1, a_2)$ s'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} = l.$$
Cett dérivée de f dans la direction u en a est notée $D_u f(a)$.

Rmq Le graphe de f est une surface. LE plan vertical qui passe par $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ parallèlement à u intersecte la surface suivant une courbe. LA dérivée directionnelle $D_u f(a)$ est alors le taux d'accroissement (pente) de cette courbe dans le repère défini par u et j $(j = (0,0,1))$.

Les dérivées partielles sont alors un cas particulier de cette dernière définition dans les directions $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

Maintenant que le concept de dérivée directionnelle est défini, est-ce que cela est suffisant pour garantir la continuité ? La réponse est toujours NON ! ! !

Exemple 5.2

1. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ est continue en $(0,0)$ et que ses dérivées partielles en $(0,0)$ existent mais toute autre dérivée directionnelle $D_u f(0,0)$ n'existe pas pour $u \notin \{(1,0),(0,1)\}$.

2. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$, ses dérivées partielles en $(0,0)$ existent ainsi que toute autre dérivée directionnelle $D_u f(0,0)$, $\forall u \in \mathbf{R}^2$ (utiliser la définition de la dérivée directionnelle).

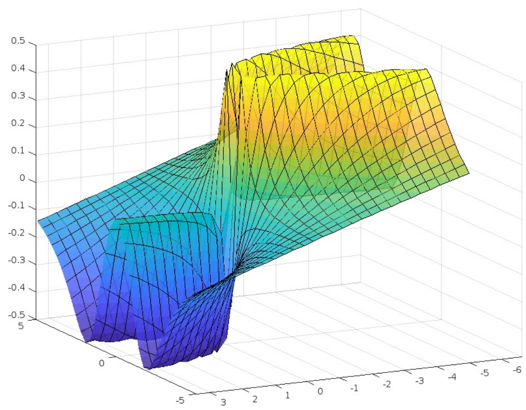

FIGURE 5.2 – Graphe de la fonction $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

■

Rmq On peut conclure que : Dérivées partielles $\not\Rightarrow$ Dérivées directionnelle $\not\Rightarrow$ Continuité $\not\Rightarrow$ Dérivées directionnelle.

5.1.2 Différentiabilité

Ce paragraphe définira le concept de différentiabilité des fonctions de deux variables (une extension aux fonctions de plus de deux variables peut également être faite). Comme expliqué, l'existence de dérivées directionnelles dans toutes les directions n'était pas suffisante pour guarantir une surface "lisse" en un point donné. Rappelons le cas des fonctions d'une seule variable : une fonction f d'une variable est dérivable en un point a si le graphe de f admet une tangente au point a, ou de manière équivalente, il existe un nombre réel noté $f'(a)$ (la dérivée de f au point a) tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h).$$

où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Notez que cette dernière définition est une approximation linéaire de f au voisinage de a. C'est le développement de Taylor de f au premier ordre et ceci est équivalent à la définition de la dérivée de f en a donnée par $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$.

Pour introduire une définition similaire dans le cas de deux variables, on souhaite avoir une approximation linéaire du graphe d'une fonction f de deux variables x et y en un point $a = (a_1, a_2)$. Il s'agirait d'un plan tangent au graphique de f en $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Mais ce plan tangent sera une approximation linéaire s'il approche f dans un voisinage de (a_1, a_2) dans toutes les directions.

Par conséquent, pour garantir l'existence de ce plan, on peut imaginer que toute tangente au point point (a_1, a_2) à n'importe quelle coupe du graphe de f dans n'importe quelle direction (obtenue comme l'intersection du graphe de f et de tout plan vertical passant par (a_1, a_2)), devrait appartenir à ce même plan. Alors, si ces tangentes n'appartiennent pas au même plan, f ne sera pas différentiables en ce point. Dans ce qui suit, on donne une définition formelle de ce concept.

Définition 5.1.2 — Différentiabilité.
Étant donnée une fonction $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. La fonction f est différentiable en $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2) + \alpha h_1 + \beta h_2 + \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\,\varepsilon(h_1, h_2).$$

où $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0$.

De plus, si les dérivées partielles de f en (a_1, a_2) existent alors

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Rmq

Dans cette définition, le terme $f(a_1, a_2) + \alpha h_1 + \beta h_2$ est une approximation linéaire de f au voisinage de a. LA définition affirme alors qu'une fonction différentiable est une fonction pour qui cette approximation linéaire introduite est une bonne approximation de f quand (x, y) s'approche de (a_1, a_2).Cette approximation est le développement de Taylor du premier ordre de f au voisinage de (a_1, a_2). De plus, l'existence des dérivées partielles ne garantissent pas l'existence de cette approximation linéaire ni la différentiabiité. Une condition suffisante pour la différentiablitié sera donnée dans le théorème suivant.

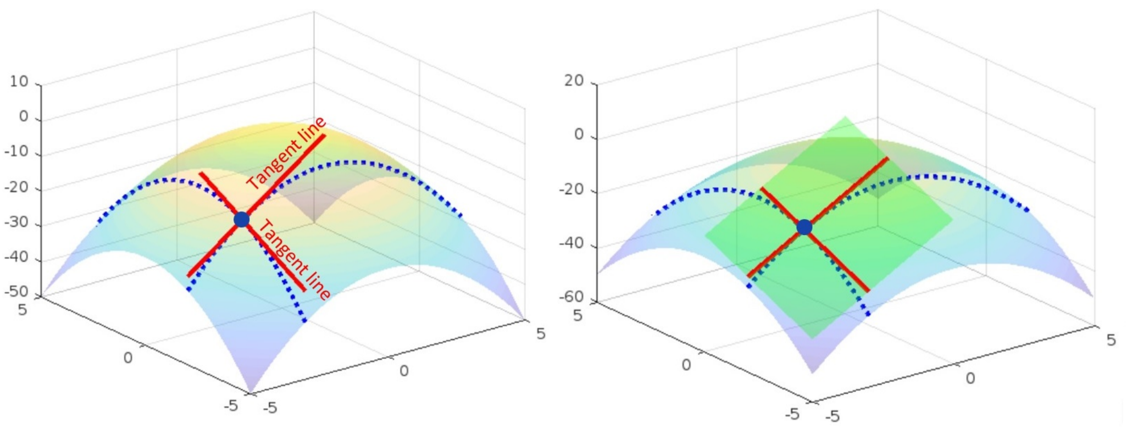

FIGURE 5.3 – Tangentes et plan tangent en (a_1,a_2).

Corollaire 5.1.1 — Différentiabilité implique continuité et dérivée directionnelle. Étant donnée une fonction $f:\Omega\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ et $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$.

1. Si f est différentiable en a alors f est continue en a.
2. Si f est différentiable en a alors toutes ses dérivées directionnelles $D_uf(a)$ existent pour tout $u=(u_1,u_2)$

Info++

Preuve 1. f est différentiable alors,

$$\begin{aligned}
&|f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)| \\
&\quad\le |h_1|\left|\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right|+|h_2|\left|\tfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right|+\left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right|\,|\varepsilon(h_1,h_2)|.\\
&\quad\le \left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right|\left|\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right|+\left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right|\left|\tfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right|\\
&\qquad\qquad+\left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right|\,|\varepsilon(h_1,h_2)|.\\
&\quad\le \sqrt{h_1^2+h_2^2}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)+\tfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)+\varepsilon(h_1,h_2)\right)
\end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 quand (h_1,h_2) tend vers 0. Alors f est continue en a.

2. L'existence des dérivées directionnelles dans toutes les directions est une conclusion immédiate de la définition de la différentiabilité.

Rmq Le dernier corollaire affirme aussi qu'une fonction discontinue en a n'est pas différentiable en a.

Puisqu'il n'est pas facile de démontrer qu'un fonction est différentiable avec la définition, le théorème suivant fournit une méthode plus pratique :

Théorème 5.1.2 — Différentiabilité.
Étant donnée une fonction $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans un voisinage de (a_1, a_2) alors f est différentiable en (a_1, a_2).

Rmq On note que si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f ne sont pas nécessairement continues en a.

Définition 5.1.3
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, f est dite $C^1(\Omega)$ si pour tout $u = (u_1, u_2)$, la dérivée directionnelle $D_u f(x,y)$ existe en tout point $(x,y) \in \Omega$.

Corollaire 5.1.3 — Condition nécessaire et suffisante pour des fonctions C^1.
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, f est $C^1(\Omega)$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω.

Info++

Preuve La preve de ce résultat utilise un théorème d'accroissement fini pour des fonctions de plusieurs variables ainsi que la continuité des fonctions de plusieurs variables.

Rmq Tous les résultats sur la différentiabilité peuvent être étendus aux fonctions de plus de deux variables. De plus, les polynômes, les fonctions rationnelles et trigonométriques sont C^1 sur R^2.

Proposition 5.1.4 La somme, le produit, le quotient (si dénominateur ne s'annule pas) et la composition (à condition que les domaines soient compatibles) des fonctions différentiables est une fonction différentiable.

Définition 5.1.4 — Différentielle.
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en $a = (a_1, a_2)$, on appelle différentielle de f en (a_1, a_2) l'application linéaire

$$(h_1, h_2) \to h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$$

et on note $df_{a_1,a_2}(h_1, h_2)$.

Rmq D'après la définition, on peut conclure que $dx(h_1, h_2) = h_1$ et $dy(h_1, h_2) = h_2$ alors on peut écrire,

$$df_{(a_1,a_2)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\, dy$$

Alors, le développement de Taylor de f au premier ordre s'écrit

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + df_{a_1,a_2}(h_1,h_2) + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\varepsilon(h_1,h_2).$$

5.2 Gradient

Pour de nombreux problèmes, il est très utile et pratique de connaître la direction dans laquelle la pente est maximale. En d'autres termes, la direction dans laquelle l'augmentation ou la diminution de la fonction serait maximale par rapport à une augmentation donnée de la variable d'entrée. Par exemple, considérons à nouveau le randonneur sur la montagne, si, à un moment donné, il sait quelle est le pas qu'il doit faire pour ganger le maximum d'altitude d'altitude, il irait dans cette direction au cas où il voudrait le chemin le plus court vers le sommet. Cette direction est le gradient.

Définition 5.2.1 — Gradient.
Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ tel que $(0,0) \in \Omega$. Si les dérivées partielles de f en (a_1,a_2) existent, le gradient de f est le vecteur de $\mathbf{R}^2$ donné par

$$\overrightarrow{grad}_{(a_1,a_2)}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)$$

Ce gradient peut aussi être noté $\nabla f(a_1,a_2)$.

La proposition suivante permettra de calculer la dérivée directionnelle en utilisant le gradient :

Proposition 5.2.1 — Dérivée directionnelle et gradient.
Soit la fonction $f \in C^1(\Omega)$ et $(a_1,a_2) \in \Omega$ (f est alors différentiable en (a_1,a_2)), la dérivée directionnelle dans la direction de $u = (u_1,u_2) \in \mathbf{R}^2$ satisfait

$$D_u f(a_1,a_2) = \overrightarrow{grad}_{(a_1,a_2)}(f) \cdot \overrightarrow{u} = \nabla f(a_1,a_2) \cdot u$$

Info++

Preuve Puisque f est C^1, alors

$$\begin{aligned} D_u f(a_1,a_2) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad}_{(a_1,a_2)}(f) \cdot \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Rmq

Cette proposition affirme qu'on peut obtenir toute dérivée dans n'importe quelle direction en faisant une combinaison des dérivées partielles. Le développement de Taylor de f au premier ordre s'écrit en utilisant le gradient :

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) = f(a_1,a_2) + \overrightarrow{grad}_{(a_1,a_2)}(f) \cdot (h_1,h_2) + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\varepsilon(h_1,h_2).$$