Интеграл Лебега

Опр. 1 *Заданная на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$ измеримая функция $f(x)$, $x \in X$ называется ступенчатой, если множество её значений конечно.*

Опр. 2 (интеграл Лебега) *Пусть на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ с мерой задана измеримая функция $f(x)$, $x \in X$. Определим для неё интеграл Лебега:*

1 этап. *Рассмотрим ступенчатую функцию $f(x)$, принимающую попарно различные значения $y_1, \dots, y_n$ на попарно непересекающихся множествах $A_1, \dots, A_n$, $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$, $X = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$.*

1 случай. Если $\mu(X) < \infty$, любая измеримая ступенчатая функция является интегрируемой (суммируемой), полагаем

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k); \tag{1}$$

2 случай. Если $\mu(X) = \infty$, измеримая ступенчатая функция интегрируема (суммируема), если из того, что $\mu(A_k) = \infty$ следует, что $y_k = 0$, интеграл для такой функции определяем формулой (1), включая в сумму только слагаемые для которых $y_k \neq 0$.

2 этап. *Пусть измеримая $f(x) \geq 0 \; \forall x \in X$, тогда существует последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n(x) \geq 0 : f_n(x) \uparrow f(x)$ в X.*

1 случай. Если $\mu(X) < \infty$, то каждая $f_n(x)$ суммируема. Положим

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu; \tag{2}$$

если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, функция f интегрируема (суммируема) по определению, если бесконечен, то функция f не является суммируемой (интегрируемой), полагаем $\int\limits_X f(x)d\mu = \infty$.

2 случай. Если $\mu(X) = \infty$, может оказаться, что $\exists n_0 : f_{n_0}$ не суммируема, тогда считаем функцию $f(x)$ не суммируемой (не интегрируемой), но полагаем $\int\limits_X f(x)d\mu = \infty$. Если все $f_n(x)$ суммируемы, действуем так же, как и в случае 1 этапа 2 определения.

3 этап. *Ещё не было на лекции.*

1. На отрезке $X = [0, 1]$ задана мера Лебега μ. Вычислите $\int\limits_X D(x)d\mu$, где $D(x)$ – функция Дирихле. Является ли функция Дирихле интегрируемой по мере Лебега, если $X = \mathbb{R}$?

2. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой, функция $g(x)$ измерима, $f(x)$ суммируема, $\forall x \in X \; 0 \leq g(x) \leq f(x)$. Докажите, что $g(x)$ суммируема.

3. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой, $f(x), g(x)$ – измеримые функции, $f_n(x), g_n(x)$ – измеримые ступенчатые функции: $\forall x \in X \; 0 \leq g(x) \leq f(x)$, $f_n(x), g_n(x) \geq 0$, $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$. Положим $\forall x \in X \; \tilde{g}_n(x) = \min(f_n(x), g_n(x))$. Покажите, что $\tilde{g}_n \uparrow g$.

4. Доказать неравенство Чебышева

$$\mu\{x \mid f(x) \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X f d\mu,$$

предполагая $f(x) \geq 0$ суммируемой, а $\varepsilon > 0$.

Вывести, что если $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$, где $f \geq 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду.