Гильбертовы пространства. Решения задач

1. Указание. Примените критерий Коши к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

используя то, что критерий Коши выполнен для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||.$$

2. Воспользуемся тождеством:

$$(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \qquad (1)$$

Оценим первое слагаемое.

$$(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n).$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$||(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)|| \leq (||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}||)(||\mathbf{y}_n||).$$

Первый сомножитель по условию бесконечно-мал (почему ?). Второй ограничен (почему?) Первое слагаемое в (1) бесконечно-мало. Второе оценивается аналогично (как ?). □

3. Выберем центр шара $U(i)$ (с номером i) в точке $O_i = \frac{1}{2}\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$ (ненулевая координата имеет номер i). Радиус каждого шара выберем $r = \frac{1}{10}$. Докажем, что шар с номером j не пересекается с шаром с номером k, $j \neq k$. Расстояние между центрами шаров:

$$||\frac{1}{2}\mathbf{e}_j - \frac{1}{2}\mathbf{e}_k|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если бы шары $U(j)$, $U(k)$ пересекались, то в общей $\mathbf{z}$ точке получилось бы

$$\frac{1}{5} \geq ||O_j - \mathbf{z}|| + ||O_k - \mathbf{z}|| \geq ||O_j - O_k|| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

4. a.) Докажем, что $L^{\perp}$ линейное многообразие. Нужно проверить.

1. $0 \in L^{\perp}$.

2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^{\perp}$, следовательно, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L^{\perp}$.

3. $\mathbf{x} \in L^{\perp}$, следовательно, $\lambda\mathbf{x} \in L^{\perp}$.

Проверим 2. Пусть $\mathbf{z} \in L$. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$.

b.) Докажем, что $L^{\perp}$ подпространство. Пусть $\mathbf{x}_n \in L^{\perp}$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n, \mathbf{f}) = 0$, $\mathbf{f} \in L$. $\square$

5. Если L–подпространство в H, то любой элемент $\mathbf{f} \in H$ ОДНОЗНАЧНО представляется в виде $\mathbf{f} = \mathbf{h} + \mathbf{h}'$, где $\mathbf{h} \in L$, $\mathbf{h}' \in L^{\perp}$ (Теорема 7, гл.III, параграф 7, раздел 7)). Это записывают в виде равенства:

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Теперь если искать $L^{\perp\perp}$, то нужно взять $L^{\perp}$ как исходное пространство и применить к нему предыдущий результат. Получится:

$$H = L^{\perp\perp} \oplus L^{\perp}.$$

Как L, так и $L^{\perp\perp}$ являются первыми слагаемыми и ортогональны $L^{\perp}$. Получится, из-за единственности разложения, что если $\mathbf{h} \in L$, то $\mathbf{h} \in L^{\perp\perp}$ и наоборот если $\mathbf{h} \in L^{\perp\perp}$, то $\mathbf{h} \in L$. $\square$

6. Пусть $L = \{\mathbf{x} | x_1 = x_4 = x_7 = x_{10} = \cdots = 0\}$. Проверим, что L-подпространство. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ – фундаментальная последовательность векторов из L,

$$\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(n).$$

Проверим, что $\mathbf{y} \in L$. Обозначим $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} x(n)_i = y_i$ (это необходимо для сходимости $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$), то $y_i = 0$, если $i = 1, 4, 7, \dots$. $\square$

7. Написано, что в гильбертовом пространстве $H = C_2[0, 1]$ определяют $L \subset H$ по формуле

$$L = \{\mathbf{f} | (\mathbf{f}, 1) = 0\}, \mathbf{f} = f(x).$$

Значит, $L = M^{\perp}$, где $M \subset H$–пространство постоянных функций:

$$M = \{\mathbf{f} | \mathbf{f} = const\}.$$

Поскольку M–замкнуто (проверить !), $L^{\perp} = M^{\perp\perp} = M$. □

8. $sin(t)dt = d(-cos(t))$. Сделаем замену переменных $\theta = -cos(t)$, $t = arccos(-\theta)$. Задача свелась в предыдущей: $\int_0^{-cos(1)} x(arccos(-\theta))d\theta$. Ответ: $\{f = C\theta = Ccos(t)\}$.

Гильбертовы пространства II

1. Теорема. Для того, чтобы нормированное линейное пространство R было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ выполнялось неравенство

$$||\mathbf{f} + \mathbf{g}||^2 + ||\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = 2(||\mathbf{f}||^2 + ||\mathbf{g}||^2).$$

2. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}_p^n$ с метрикой:

$$||\mathbf{x}||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказать, что $\mathbb{R}_p^n$ будет евклидовым лишь при $p = 2$.

3. Доказать, что нормированное линейное пространство $C[0, \frac{\pi}{2}]$ не является евклидовым.