Измеримые функции. Семинар 18.05.2020

Лемма о вариантах измеримости. Доказательство. Докажем, что если выполнено (1), т.е. если

$$\forall c \in \mathbb{R}\{x \in X : f(x) \geq c\}$$

измеримо, то выполнено (2), т.е.

$$\forall c \in \mathbb{R}\{x \in X : f(x) > c\}$$

измеримо.

Заметим, что множество $\{x \in X : f(x) > \}$ является объединением

$$\cup_i \{x_i \in X : f(x) \geq c_i\},$$

где c_i, $c_i > c$ монотонно убывающая последовательность, $c_i \to c$. По свойству борелевской σ-алгебры множество $\{x \in X : f(x) > \}$ измеримо. Остальные импликации (2)=>(3), (3)=>(4), (4)=>(1) доказываются аналогично (как именно?)

Докажем, что прообраз любого борелевского множества на прямой измерим. Воспользуемся тем, что любое борелевское подмножество $A \subset \mathbb{R}$ получено в результате операций объединения (счетного или конечного) и доплнения в σ-алгебре, примененных к открытому бесконечному полуинтервалу $(c, +\infty)$. В результате получится, что и прообраз $f^{-1}(A)$ также измерим, поскольку операция дополнения и объединения коммутируют с функцией, а пересечение через эти две операции выражается. □

Задача 1а

Пусть $f(x)$–измерима. Тогда измеримы множества

$$\{x \in X : f(x) > c\},$$

$$\{x \in X : f(x) < -c\}.$$

Измеримо множество

$$\{x \in X : f(x) > c\} \cup \{x \in X : f(x) < -c\}.$$

Но указанное множество определяется неравенством:

$$\{x \in X : |f(x)| > c\}.$$

Для любого c это множество измеримо. По Лемме о вариантах измеримости $|f(x)|$ измеримая функция. □

Задача 1б

Пусть $f(x)$–измерима. Если $f_1(x), f_2(x)$–измеримы, то $f_1(x)f_2(x)$–измерима (доказано на лекции). Поскольку $x \mapsto x$ измеримая, то $x \mapsto x{\cdot}x$ измеримая.

Приведем еще одно доказательство при $n = 2$. Рассмотрим гомеоморфизм луча $[0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, заданный формулой $x \mapsto \sqrt{x}$. Гомеоморфизм переводит борелевские множества в борелевские. При этом $\sqrt{(x)^2} = |x|$. Функция $x \mapsto |x|$ является измеримой. Поэтому при композиции $x \mapsto x^2 \mapsto |x|$ прообраз любого множества

$$\{x \in X : f(x) > c\}$$

измерим. Но тогда и для x^2 прообраз любого множества

$$\{x \in X : f(x) > \sqrt{|c|}\}$$

измерим. Прообраз

$$\{x \in X : f(x) > -\sqrt{|c|}\}$$

также измерим, поскольку совпадает с $\mathbb{R}$. По Лемме о вариантах измеримости $x \mapsto x^2$ – измерима. При $n = 2s \geq 4$ доказательство аналогично. При $n = 2s{+}1 \geq 3$ доказательство аналогично, вместо $x \mapsto^{2s} \sqrt{|x|}$ можно выбрать $x \mapsto^{2s+1} \sqrt{x}$. $\square$

Задача 1в

Докажем, что $f_+(x) = max\{f(x), 0\}$ измеримая функция. Воспользуемся Леммой о вариантах измеримости. Если $c < 0$, то множество

$$\{x \in X : max\{f(x), 0\} > c\}$$

совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$. Если $c \geq 0$, то

$$\{x \in X : max\{f(x), 0\} > c\}$$

совпадает с

$$\{x \in X : f(x) > c\}$$

поэтому является измеримым. $\square$

Задача 2

Пусть $A \subset [0,1]$ – неборелевское множество на прямой. Рассмотрим характеристическую функию множества A:

$$f_A(x) = 1, x \in A, \quad f_A(x) = 0, x \in \bar{A}.$$

Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ не является измеримой. Прообраз $f^{-1}(B)$ открытого луча $B = (\frac{1}{2}, +\infty) \subset \mathbb{R}$ совадает с A,

$$f^{-1}(B) = A \subset [0,1]. \quad \square$$

Задача 3

Определим функцию $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ по формуле: $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. Получится, что $g(x) = \frac{1}{2}$, если $x \in A$ и $g(x) = \frac{-1}{2}$, если $x \in \bar{A}$. Поскольку $f(x)$ неизмерима, то $g(x)$ неизмерима (почему?). Но $|g(x)| = \frac{1}{2}$. Функция $|g(x)|$ постоянна на $[0,1]$ и измерима. $\square$

Задача 4

Пусть $f(x) = 0$, $x \in \bar{A}$, $\mu(A) = 0$. По Лемме о вариантах измеримости рассмотрим множество

$$\{x \in X : f(x) > c\}.$$

Если ≥ 0, то это подмножество в A, любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль (почему?). Если $c < 0$, То это множество совпадает с $\bar{A} \cup B$, где $B \subset A$. Подмножество $\bar{A} \cup B \subset A$-измеримо. $\square$

Задача 5

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$–непрерывна. Тогда $f^{-1}(A)$– открытое и измеримое, если $A = (c, +\infty)$. По Лемме о вариантах измеримости получим, что $f(x)$–измеримая.

Пусть $\{x_1, \dots x_n\}$–точки разрыва функции $f(x)$. Рассмотрим $n+1$-штук функций $f_0 = f_{(-\infty, x_1)}$ на $(-\infty, x_1)$, и т.д. $f_n = f_{(x_n, +\infty)}$ на $(x_n, +\infty)$. Воспользуемся Леммой о вариантахизмеримости. Множество

$$U = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$$

совпадает с объединением подмножеств

$$U(n) = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > c\},$$

$$U = \cup_n U(n) \cup X_c.$$

и, быть может с объединением еще нескольких точек $X_c \subset X$ из множества точек разрыва $X = \{x_1, \dots x_n\}$, для которых $f(x_i) > c$. Доказано, что для любого c

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$$

является измеримым. $\square$