

№1.

а) Распределение Бернулли

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1$$

$$H(A) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

б) Биномиальное распределение  $(Bi(n, p))$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & p(1-p)^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

$$H(A) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \log \left( \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) =$$

$$- \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \left( \log \left( \frac{n!}{k! (n-k)!} \right) + k \log p + (n-k) \log (1-p) \right) =$$

$$- \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \log \left( \frac{n!}{k! (n-k)!} \right) -$$

$$\log p \sum_{k=0}^n \frac{n! * k}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - \log (1-p) \sum_{k=0}^n \frac{n! * (n-k)}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{n! * k}{k! (n-k)!} p^n (1-p)^{n-k} =$$

$$p \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = p * n * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} = p * n,$$

так как третий множитель есть сумма всех вероятностей распределения  $Bi(n-1, p)$

$$\sum_{k=0}^n \frac{n! * (n-k)}{k! (n-k)!} p^n (1-p)^{n-k} = (1-p) * n * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} p^n (1-p)^{n-k-1} = (1-p) * n,$$

по тому же правилу

Итого имеем

$$H(A) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k} \log \left( \binom{n}{k} \right) - n * (p \log p + (1-p) \log (1-p))$$

в) Геометрическое  $(\overline{Bi}(1, p))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots \\ p & \dots & p(1-p)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$H(A) = - \sum_{k=1}^{\infty} p (1-p)^{k-1} \log \left( p (1-p)^{k-1} \right) = - \log p \sum_{k=1}^{\infty} p (1-p)^{k-1} - \log (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p (1-p)^{k-1} = 1, \text{ как сумма всех вероятностей}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^k = \frac{1-p}{p}, \text{ как математическое ожидание Геометрического распределения}$$

Итого имеем

$$H(A) = -\log p - \frac{1-p}{p} \log(1-p)$$

г) Цепь маркова с начальным вектором распределения  $\bar{p} = (p_1, p_2) = (p, 1-p)$  и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Обозначим  $Q_1$  и  $Q_2$  за 1 ую и 2 ую строки матрицы  $Q$

$$\text{Тогда } H(Q) = \sum_{i=1}^2 p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = -(1-p) \log(1-p) - p \log p = H(Q_2)$$

Имеем

$$H(Q) = (-(1-p) \log(1-p) - p \log p) \sum_{i=1}^2 p_i = -(1-p) \log(1-p) - p \log p$$

д) Отрицательное Биномиальное распределение  $(\overline{Bi}(n, p))$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k & \dots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \binom{n+k}{k} p^{n+1} (1-p)^k & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \log \left( \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \right) = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k \log \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} - \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k n \log p - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k k \log(1-p) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k n \log p = n \log p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k = n \log p, \end{aligned}$$

так как третий множитель – это сумма всех вероятностей

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k k \log(1-p) &= \log(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! * (n-1)!} p^n (1-p)^k = \\ &= \log(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^{k+1} = \\ &= n \frac{(1-p)}{p} \log(1-p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k! * n!} p^{n+1} (1-p)^k = n \frac{(1-p)}{p} \log(1-p), \end{aligned}$$

так как третий множитель – это сумма всех вероятностей распределение  $\overline{Bi}(n+1, p)$

Итого имеем

$$H(A) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k \log \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} - n \log p - n \frac{(1-p)}{p} \log(1-p)$$

д) Гипергеометрического распределения  $(HG(N, M, n))$ ,  $(n \leq M \leq N)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & k & \dots & n \\ \frac{(N-M)! (N-n)!}{(N-M-n)! N!} & \dots & \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \dots & \frac{M! (N-n)!}{N! (M-n)!} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{k=0}^n \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \log \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \left( \log \binom{M}{k} + \log \binom{N-M}{n-k} + \log \binom{N}{n} \right) = \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \left( \log \binom{M}{k} + \log \binom{N-M}{n-k} \right) - \log \binom{N}{n} \end{aligned}$$

е) Логарифмическое

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & k & \dots \\ -\frac{p}{\ln(1-p)} & \dots & -\frac{p^k}{k \ln(1-p)} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k \ln(1-p)} \log \frac{-p^k}{k \ln(1-p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k \ln(1-p)} (k \log p - \log k - \log(-\ln(1-p))) = \\ &= \frac{\log p}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} p^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \log k}{k \ln(1-p)} - \log(-\ln(1-p)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k \ln(1-p)} = \\ &= \frac{\log p}{\ln(1-p)} \frac{1}{1-p} - \log(-\ln(1-p)) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \log k}{k \ln(1-p)} \end{aligned}$$

ж) Цепь маркова с начальным вектором распределения  $\bar{p} = (p_1, p_2) = (0.1, 0.9)$  и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^2 p_i \cdot H(Q_i)$$

$$\begin{aligned} H(Q_1) &= 0.4 \log \frac{10}{4} + 0.6 \log \frac{10}{6} = \\ &= \log 2 + \log 5 - 0.8 \log 2 - 0.6 \log 2 - 0.6 \log 3 = \log 5 - 0.6 \log 3 - 0.4 \log 2 \end{aligned}$$

$$H(Q_2) = 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.7 \log \frac{10}{7} = \log 2 + \log 5 - 0.3 \log 3 - 0.7 \log 7$$

$$\begin{aligned} H(Q) &= 0.1 (\log 5 - 0.6 \log 3 - 0.4 \log 2) + 0.9 (\log 2 + \log 5 - 0.3 \log 3 - 0.7 \log 7) = \\ &= \log 5 + 0.86 \log 2 - 0.33 \log 3 - 0.54 \log 7 \end{aligned}$$

з) Цепь маркова с начальным вектором распределения  $\bar{p} =$

$(p_1, p_2, p_3) = (0.1, 0.2, 0.7)$  и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^3 p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = 0.2 \log 2 + 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.5 \log 5 = 0.5 \log 2 + 0.8 \log 5 - 0.3 \log 3$$

$$H(Q_2) = 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.4 \log \frac{5}{2} + 0.3 \log \frac{10}{3} = \log 5 + 0.2 \log 2 - 0.6 \log 3$$

$$H(Q_3) = 0.4 \log \frac{5}{2} + 0.5 \log 2 + 0.1 \log 10 = 0.5 \log 5 + 0.2 \log 2$$

$$H(Q) = 0.1 (\log 5 + 0.2 \log 2 - 0.6 \log 3) + 0.2 (\log 5 + 0.2 \log 2 - 0.6 \log 3) + 0.7 (0.5 \log 5 + 0.2 \log 2) = 0.65 \log 5 + 0.2 \log 2 - 0.18 \log 3$$

и) Цепь маркова с начальным вектором распределения  $\bar{p} =$

$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.1, 0.2, 0.5, 0.2)$  и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^4 p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = 0.1 \log 10 + 0.2 \log 5 + 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.4 \log \frac{5}{2} = \log 5 - 0.3 \log 3$$

$$H(Q_2) = 0.2 \log 5 + 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.2 \log 5 + 0.3 \log \frac{10}{3} = \log 5 + 0.6 \log 2 - 0.6 \log 3$$

$$H(Q_3) = 0.3 \log \frac{10}{3} + 0.4 \log \frac{5}{2} + 0.2 \log 5 + 0.1 \log 10 = \log 5 - 0.3 \log 3$$

$$H(Q_4) = 0.5 \log 2 + 0.1 \log 10 + 0.1 \log 10 + 0.3 \log \frac{10}{3} = 0.5 \log 5 + \log 2 - 0.3 \log 3$$

$$H(Q) = 0.1 (\log 5 - 0.3 \log 3) + 0.2 (\log 5 + 0.6 \log 2 - 0.6 \log 3) + 0.5 (\log 5 - 0.3 \log 3) + 0.2 (0.5 \log 5 + \log 2 - 0.3 \log 3) = 0.9 \log 5 + 0.32 \log 2 - 0.36 \log 3$$