Anisotropic

H || z:

$$H = 2JS_1 S_2 - \mu_B gHS_z + D S_z^2$$

$$S = 0 \left(2JS_1 S_2 = -\frac{15}{2}J\right):$$

$e_1 = 0$
$\Delta = 2J$

$$S = 1 \left(2JS_1 S_2 = -\frac{11}{2}J\right):$$

In[44]:=
```
mat2 = Δ * IdentityMatrix[3] - g μ H * DiagonalMatrix[{1, 0, -1}] -
       (единичная матрица)      (диагональная матрица)
   e * IdentityMatrix[3] + d * DiagonalMatrix[{1, 0, 1}];
       (единичная матрица)      (диагональная матрица)
mat2 // MatrixForm
        (матричная форма)
```

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} d - e + \Delta - g H \mu & 0 & 0 \\ 0 & -e + \Delta & 0 \\ 0 & 0 & d - e + \Delta + g H \mu \end{pmatrix}$$

In[46]:=
```
det2 = Det[mat2]
       (детерминант)
```

Out[46]= $(-e + \Delta)\left(d - e + \Delta - g H \mu\right)\left(d - e + \Delta + g H \mu\right)$

In[47]:=
```
Reduce[det2 == 0, e]
(привести)
```

Out[47]= $e == \Delta \,||\, e == d + \Delta - g H \mu \,||\, e == d + \Delta + g H \mu$

$$S = 2 \left(2JS_1 S_2 = -\frac{3}{2}J\right):$$

In[48]:=
```
mat3 = 3 Δ * IdentityMatrix[5] - g μ H * DiagonalMatrix[{2, 1, 0, -1, -2}] -
       (единичная матрица)      (диагональная матрица)
   e * IdentityMatrix[5] + d * DiagonalMatrix[{4, 1, 0, 1, 4}];
       (единичная матрица)      (диагональная матрица)
mat3 // MatrixForm
        (матричная форма)
```

Out[49]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4d - e + 3\Delta - 2 g H \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d - e + 3\Delta - g H \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e + 3\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d - e + 3\Delta + g H \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4d - e + 3\Delta + 2 g H \mu \end{pmatrix}$$

In[50]:=
```
det3 = Det[mat3]
```
детерминант

Out[50]=
$$(-e+3\Delta)\,(4d-e+3\Delta-2gH\mu)\,(d-e+3\Delta-gH\mu)\,(d-e+3\Delta+gH\mu)\,(4d-e+3\Delta+2gH\mu)$$

In[51]:=
```
Reduce[det3 == 0, e]
```
привести

Out[51]=
$$e==3\Delta\;||\;e==4d+3\Delta-2gH\mu\;||\;e==d+3\Delta-gH\mu\;||\;e==d+3\Delta+gH\mu\;||\;e==4d+3\Delta+2gH\mu$$

$$S=3\left(2JS_1S_2=\frac{9}{2}J\right):$$

In[52]:=
```
mat4 = 6Δ * IdentityMatrix[7] - gμH * DiagonalMatrix[{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3}] -
    e * IdentityMatrix[7] + d * DiagonalMatrix[{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9}];
mat4 // MatrixForm
```
единичная матрица; диагональная матрица; единичная матрица; диагональная матрица; матричная форма

Out[53]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}
9d-e+6\Delta-3gH\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4d-e+6\Delta-2gH\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d-e+6\Delta-gH\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -e+6\Delta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d-e+6\Delta+gH\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4d-e+6\Delta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

In[54]:=
```
det4 = Det[mat4]
```
детерминант

Out[54]=
$$(-e+6\Delta)\,(9d-e+6\Delta-3gH\mu)\,(4d-e+6\Delta-2gH\mu)\,(d-e+6\Delta-gH\mu)\,(d-e+6\Delta+gH\mu)\,(4d-e+6\Delta+2gH\mu)\,(9d-e+6\Delta+3gH\mu)$$

In[55]:=
```
Reduce[det4 == 0, e]
```
привести

Out[55]=
$$e==6\Delta\;||\;e==3\left(3d+2\Delta-gH\mu\right)\;||\;e==2\left(2d+3\Delta-gH\mu\right)\;||\;e==d+6\Delta-gH\mu\;||\;e==3\left(3d+2\Delta+gH\mu\right)\;||\;e==2\left(2d+3\Delta+gH\mu\right)\;||\;e==d+6\Delta+gH\mu$$

$$H\,||\,x:$$
$$H=2JS_1S_2-\mu_B gHS_x$$

$$S=0\left(2JS_1S_2=-\frac{15}{2}J\right):$$

```
e1 = 0
Δ = 2J
```

$$S=1\left(2JS_1S_2=-\frac{11}{2}J\right):$$

In[56]:=
```
matx2 = Δ * IdentityMatrix[3] -
```
единичная матрица
```
    gμH * (DiagonalMatrix[{Sqrt[2]/2, Sqrt[2]/2}, 1] + DiagonalMatrix[{Sqrt[2]/2, Sqrt[2]/2}, -1]) -
```
диагональная матрица, диагональная матрица
```
    e * IdentityMatrix[3] + d * DiagonalMatrix[{1, 0, 1}];
```
единичная матрица, диагональная матрица
```
matx2 // MatrixForm
```
матричная форма

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} d-e+\Delta & -\frac{g H \mu}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{g H \mu}{\sqrt{2}} & -e+\Delta & -\frac{g H \mu}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{g H \mu}{\sqrt{2}} & d-e+\Delta \end{pmatrix}$$

In[58]:=
```
detx2 = Det[matx2] // Expand
```
детерминант, раскрыть

Out[58]=
$$-d^2 e + 2 d e^2 - e^3 + d^2 \Delta - 4 d e \Delta + 3 e^2 \Delta + 2 d \Delta^2 - 3 e \Delta^2 + \Delta^3 - d g^2 H^2 \mu^2 + e g^2 H^2 \mu^2 - g^2 H^2 \Delta \mu^2$$

In[59]:=
```
Solve[detx2 == 0, e]
```
решить уравнения

Out[59]=
$$\left\{\{e \to d+\Delta\}, \left\{e \to \frac{1}{2}\left(d+2\Delta-\sqrt{d^2+4 g^2 H^2 \mu^2}\right)\right\}, \left\{e \to \frac{1}{2}\left(d+2\Delta+\sqrt{d^2+4 g^2 H^2 \mu^2}\right)\right\}\right\}$$

$$\mathbf{S = 2\left(2JS_1\, S_2 = -\frac{3}{2}J\right):}$$

In[60]:=
```
matx3 = 3Δ * IdentityMatrix[5] - gμH *
```
единичная матрица
```
    (DiagonalMatrix[{1, Sqrt[6]/2, Sqrt[6]/2, 1}, 1] + DiagonalMatrix[{1, Sqrt[6]/2, Sqrt[6]/2, 1}, -1]) -
```
диагональная матрица, диагональная матрица
```
    e * IdentityMatrix[5] + d * DiagonalMatrix[{4, 1, 0, 1, 4}] ;
```
единичная матрица, диагональная матрица
```
matx3 // MatrixForm
```
матричная форма

Out[61]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4d-e+3\Delta & -gH\mu & 0 & 0 & 0 \\ -gH\mu & d-e+3\Delta & -\sqrt{\frac{3}{2}}\, gH\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\, gH\mu & -e+3\Delta & -\sqrt{\frac{3}{2}}\, gH\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\, gH\mu & d-e+3\Delta & -gH\mu \\ 0 & 0 & 0 & -gH\mu & 4d-e+3\Delta \end{pmatrix}$$

In[62]:=
```
detx3 = Det[matx3] // Expand
```
детерминант раскрыть

Out[62]=
$$-16\,d^4\,e+40\,d^3\,e^2-33\,d^2\,e^3+10\,d\,e^4-e^5+48\,d^4\,\Delta-240\,d^3\,e\,\Delta+297\,d^2\,e^2\,\Delta-120\,d\,e^3\,\Delta+15\,e^4\,\Delta+360\,d^3\,\Delta^2-891\,d^2\,e\,\Delta^2+540\,d\,e^2\,\Delta^2-90\,e^3\,\Delta^2+891\,d^2\,\Delta^3-1080\,d\,e\,\Delta^3+270\,e^2\,\Delta^3+810\,d\,\Delta^4-405\,e\,\Delta^4+243\,\Delta^5-48\,d^3\,g^2\,H^2\,\mu^2+80\,d^2\,e\,g^2\,H^2\,\mu^2-37\,d\,e^2\,g^2\,H^2\,\mu^2+5\,e^3\,g^2\,H^2\,\mu^2-240\,d^2\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+222\,d\,e\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-45\,e^2\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-333\,d\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+135\,e\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2-135\,g^2\,H^2\,\Delta^3\,\mu^2+12\,d\,g^4\,H^4\,\mu^4-4\,e\,g^4\,H^4\,\mu^4+12\,g^4\,H^4\,\Delta\,\mu^4$$

In[63]:=
```
Reduce[detx3 == 0, e]
```
привести

Out[63]=
$$e==\frac{1}{2}\left(5\,d+6\,\Delta-\sqrt{9\,d^2+4\,g^2\,H^2\,\mu^2}\right)\;||\;e==\frac{1}{2}\left(5\,d+6\,\Delta+\sqrt{9\,d^2+4\,g^2\,H^2\,\mu^2}\right)\;||$$
$$e==\text{Root}\left[-12\,d^2\,\Delta-45\,d\,\Delta^2-27\,\Delta^3+12\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+12\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(4\,d^2+30\,d\,\Delta+27\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-5\,d-9\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\;\&,\;1\right]\;||$$
$$e==\text{Root}\left[-12\,d^2\,\Delta-45\,d\,\Delta^2-27\,\Delta^3+12\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+12\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(4\,d^2+30\,d\,\Delta+27\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-5\,d-9\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\;\&,\;2\right]\;||$$
$$e==\text{Root}\left[-12\,d^2\,\Delta-45\,d\,\Delta^2-27\,\Delta^3+12\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+12\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(4\,d^2+30\,d\,\Delta+27\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-5\,d-9\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\;\&,\;3\right]$$

Need to find roots of polinomial :
f (x) = $x^3+a*x^2+b*x+c$, where
$c=-12\,d^2\,\Delta-45\,d\,\Delta^2-27\,\Delta^3+12\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+12\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2$
$b=4\,d^2+30\,d\,\Delta+27\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2$
$a=-5\,d-9\,\Delta$
Roots have found below.
корни многочлена

In[68]:=
```
c = -12 d^2 Δ - 45 d Δ^2 - 27 Δ^3 + 12 d g^2 H^2 μ^2 + 12 g^2 H^2 Δ μ^2;
b = 4 d^2 + 30 d Δ + 27 Δ^2 - 4 g^2 H^2 μ^2;
a = -5 d - 9 Δ;
Solve[e^3 + a*e^2 + b*e + c == 0, e]
```
решить уравнения

Out[71]=
$$\left\{\left\{e\to\frac{1}{3}\left(5\,d+9\,\Delta\right)-\left(2^{1/3}\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\right)\Big/\left(3\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right)+\frac{1}{3\times2^{1/3}}\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right\},$$
$$\left\{e\to\frac{1}{3}\left(5\,d+9\,\Delta\right)+\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\right)\Big/\left(3\times2^{2/3}\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{6\times2^{1/3}}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right\},$$
$$\left\{e\to\frac{1}{3}\left(5\,d+9\,\Delta\right)+\left(\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\right)\Big/\left(3\times2^{2/3}\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{6\times2^{1/3}}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+\sqrt{\left(4\left(-13\,d^2-12\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^3+\left(70\,d^3-144\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)^2\right)}\right)^{1/3}\right\}\right\}$$

$$S = 3\left(2\,J S_1\,S_2 = \frac{9}{2}\,J\right):$$

In[72]:=
```
matx4 = 6 Δ * IdentityMatrix[7] -
                единичная матрица
    g μ H * (DiagonalMatrix[{√6/2, √10/2, √12/2, √12/2, √10/2, √6/2}, 1] +
              диагональная матрица

      DiagonalMatrix[{√6/2, √10/2, √12/2, √12/2, √10/2, √6/2}, -1]) -
      диагональная матрица

    e * IdentityMatrix[7] + d * DiagonalMatrix[{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9}];
      единичная матрица          диагональная матрица
matx4 // MatrixForm
          матричная форма
```

Out[73]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
9\,d - e + 6\,\Delta & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 4\,d - e + 6\,\Delta & -\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & d - e + 6\,\Delta & -\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & -e + 6\,\Delta & -\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & d - e + 6\,\Delta & -\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 4\,d - e + 6\,\Delta & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 9\,d - e + 6\,\Delta
\end{pmatrix}$$

In[74]:=
```
detx4 = Det[matx4] // Expand
          детерминант   раскрыть
```

Out[74]=
$$-1296\,d^6\,e + 3528\,d^5\,e^2 - 3409\,d^4\,e^3 + 1444\,d^3\,e^4 - 294\,d^2\,e^5 + 28\,d\,e^6 - e^7 + 7776\,d^6\,\Delta - 42\,336\,d^5\,e\,\Delta + 61\,362\,d^4\,e^2\,\Delta - 34\,656\,d^3\,e^3\,\Delta + 8820\,d^2\,e^4\,\Delta - 1008\,d\,e^5\,\Delta + 42\,e^6\,\Delta + 127\,008\,d^5\,\Delta^2 - 368\,172\,d^4\,e\,\Delta^2 + 311\,904\,d^3\,e^2\,\Delta^2 - 105\,840\,d^2\,e^3\,\Delta^2 + 15\,120\,d\,e^4\,\Delta^2 - 756\,e^5\,\Delta^2 + 736\,344\,d^4\,\Delta^3 - 1\,247\,616\,d^3\,e\,\Delta^3 + 635\,040\,d^2\,e^2\,\Delta^3 - 120\,960\,d\,e^3\,\Delta^3 + 7560\,e^4\,\Delta^3 + 1\,871\,424\,d^3\,\Delta^4 - 1\,905\,120\,d^2\,e\,\Delta^4 + 544\,320\,d\,e^2\,\Delta^4 - 45\,360\,e^3\,\Delta^4 + 2\,286\,144\,d^2\,\Delta^5 - 1\,306\,368\,d\,e\,\Delta^5 + 163\,296\,e^2\,\Delta^5 + 1\,306\,368\,d\,\Delta^6 - 326\,592\,e\,\Delta^6 + 279\,936\,\Delta^7 - 7776\,d^5\,g^2\,H^2\,\mu^2 + 15\,120\,d^4\,e\,g^2\,H^2\,\mu^2 - 9702\,d^3\,e^2\,g^2\,H^2\,\mu^2 + 2666\,d^2\,e^3\,g^2\,H^2\,\mu^2 - 322\,d\,e^4\,g^2\,H^2\,\mu^2 + 14\,e^5\,g^2\,H^2\,\mu^2 - 90\,720\,d^4\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 + 116\,424\,d^3\,e\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 - 47\,988\,d^2\,e^2\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 + 7728\,d\,e^3\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 - 420\,e^4\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 - 349\,272\,d^3\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 287\,928\,d^2\,e\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 - 69\,552\,d\,e^2\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 5040\,e^3\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 - 575\,856\,d^2\,g^2\,H^2\,\Delta^3\,\mu^2 + 278\,208\,d\,e\,g^2\,H^2\,\Delta^3\,\mu^2 - 30\,240\,e^2\,g^2\,H^2\,\Delta^3\,\mu^2 - 417\,312\,d\,g^2\,H^2\,\Delta^4\,\mu^2 + 90\,720\,e\,g^2\,H^2\,\Delta^4\,\mu^2 - 108\,864\,g^2\,H^2\,\Delta^5\,\mu^2 + 5508\,d^3\,g^4\,H^4\,\mu^4 - 3753\,d^2\,e\,g^4\,H^4\,\mu^4 + 774\,d\,e^2\,g^4\,H^4\,\mu^4 - 49\,e^3\,g^4\,H^4\,\mu^4 + 22\,518\,d^2\,g^4\,H^4\,\Delta\,\mu^4 - 9288\,d\,e\,g^4\,H^4\,\Delta\,\mu^4 + 882\,e^2\,g^4\,H^4\,\Delta\,\mu^4 + 27\,864\,d\,g^4\,H^4\,\Delta^2\,\mu^4 - 5292\,e\,g^4\,H^4\,\Delta^2\,\mu^4 + 10\,584\,g^4\,H^4\,\Delta^3\,\mu^4 - 216\,d\,g^6\,H^6\,\mu^6 + 36\,e\,g^6\,H^6\,\mu^6 - 216\,g^6\,H^6\,\Delta\,\mu^6$$

Need to solve equasion :

$$\left(-36\,d^3-294\,d^2\,\Delta-504\,d\,\Delta^2-216\,\Delta^3+24\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+24\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(49\,d^2+168\,d\,\Delta+108\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)e+\left(-14\,d-18\,\Delta\right)e^2+e^3\right)\star\left(216\,d^3\,\Delta+1764\,d^2\,\Delta^2+3024\,d\,\Delta^3+1296\,\Delta^4-216\,d^2\,g^2\,H^2\,\mu^2-612\,d\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-360\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+9\,g^4\,H^4\,\mu^4+\left(-36\,d^3-588\,d^2\,\Delta-1512\,d\,\Delta^2-864\,\Delta^3+102\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+120\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2\right)e+\left(49\,d^2+252\,d\,\Delta+216\,\Delta^2-10\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)e^2+\left(-14\,d-24\,\Delta\right)e^3+e^4\right)==0$$

In[75]:=
```
Reduce[detx4 == 0, e]
```
привести

Out[75]=

$$\begin{aligned}
&e==\text{Root}\left[-36\,d^3-294\,d^2\,\Delta-504\,d\,\Delta^2-216\,\Delta^3+24\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+24\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(49\,d^2+168\,d\,\Delta+108\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-14\,d-18\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\,\&,\,1\right]\;||\\
&e==\text{Root}\left[-36\,d^3-294\,d^2\,\Delta-504\,d\,\Delta^2-216\,\Delta^3+24\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+24\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(49\,d^2+168\,d\,\Delta+108\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-14\,d-18\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\,\&,\,2\right]\;||\\
&e==\text{Root}\left[-36\,d^3-294\,d^2\,\Delta-504\,d\,\Delta^2-216\,\Delta^3+24\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+24\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2+\left(49\,d^2+168\,d\,\Delta+108\,\Delta^2-4\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1+\left(-14\,d-18\,\Delta\right)\#1^2+\#1^3\,\&,\,3\right]\;||\;e==\text{Root}\left[\right.\\
&\left.216\,d^3\,\Delta+1764\,d^2\,\Delta^2+3024\,d\,\Delta^3+1296\,\Delta^4-216\,d^2\,g^2\,H^2\,\mu^2-612\,d\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-360\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+9\,g^4\,H^4\,\mu^4+\left(-36\,d^3-588\,d^2\,\Delta-1512\,d\,\Delta^2-864\,\Delta^3+102\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+120\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1+\left(49\,d^2+252\,d\,\Delta+216\,\Delta^2-10\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1^2+\left(-14\,d-24\,\Delta\right)\#1^3+\#1^4\,\&,\,1\right]\;||\;e==\text{Root}\left[\right.\\
&\left.216\,d^3\,\Delta+1764\,d^2\,\Delta^2+3024\,d\,\Delta^3+1296\,\Delta^4-216\,d^2\,g^2\,H^2\,\mu^2-612\,d\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-360\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+9\,g^4\,H^4\,\mu^4+\left(-36\,d^3-588\,d^2\,\Delta-1512\,d\,\Delta^2-864\,\Delta^3+102\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+120\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1+\left(49\,d^2+252\,d\,\Delta+216\,\Delta^2-10\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1^2+\left(-14\,d-24\,\Delta\right)\#1^3+\#1^4\,\&,\,2\right]\;||\;e==\text{Root}\left[\right.\\
&\left.216\,d^3\,\Delta+1764\,d^2\,\Delta^2+3024\,d\,\Delta^3+1296\,\Delta^4-216\,d^2\,g^2\,H^2\,\mu^2-612\,d\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-360\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+9\,g^4\,H^4\,\mu^4+\left(-36\,d^3-588\,d^2\,\Delta-1512\,d\,\Delta^2-864\,\Delta^3+102\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+120\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1+\left(49\,d^2+252\,d\,\Delta+216\,\Delta^2-10\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1^2+\left(-14\,d-24\,\Delta\right)\#1^3+\#1^4\,\&,\,3\right]\;||\;e==\text{Root}\left[\right.\\
&\left.216\,d^3\,\Delta+1764\,d^2\,\Delta^2+3024\,d\,\Delta^3+1296\,\Delta^4-216\,d^2\,g^2\,H^2\,\mu^2-612\,d\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2-360\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2+9\,g^4\,H^4\,\mu^4+\left(-36\,d^3-588\,d^2\,\Delta-1512\,d\,\Delta^2-864\,\Delta^3+102\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2+120\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1+\left(49\,d^2+252\,d\,\Delta+216\,\Delta^2-10\,g^2\,H^2\,\mu^2\right)\#1^2+\left(-14\,d-24\,\Delta\right)\#1^3+\#1^4\,\&,\,4\right]
\end{aligned}$$

H || y:

$$H=2\,J\,S_1\,S_2-\mu_B\,g\,H\,S_y$$

$$S=0\left(2\,J\,S_1\,S_2=-\frac{15}{2}\,J\right):$$

$$e_1=0$$
$$\Delta=2\,J$$

$$S=1\left(2\,J\,S_1\,S_2=-\frac{11}{2}\,J\right):$$

In[76]:=
```
maty2 = Δ * IdentityMatrix[3] - g μ H *
                единичная матрица
    (DiagonalMatrix[{(-i √2)/2, (-i √2)/2}, 1] + DiagonalMatrix[{(i √2)/2, (i √2)/2}, -1]) -
     диагональная матрица                        диагональная матрица
  e * IdentityMatrix[3] + d * DiagonalMatrix[{1, 0, 1}] ;
      единичная матрица          диагональная матрица
maty2 // MatrixForm
          матричная форма
```

Out[77]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} d - e + \Delta & \frac{i g H \mu}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i g H \mu}{\sqrt{2}} & -e + \Delta & \frac{i g H \mu}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i g H \mu}{\sqrt{2}} & d - e + \Delta \end{pmatrix}$$

In[78]:=
```
dety2 = Det[maty2] // Expand
        детерминант  раскрыть
```

Out[78]= $-d^2 e + 2 d e^2 - e^3 + d^2 \Delta - 4 d e \Delta + 3 e^2 \Delta + 2 d \Delta^2 - 3 e \Delta^2 + \Delta^3 - d g^2 H^2 \mu^2 + e g^2 H^2 \mu^2 - g^2 H^2 \Delta \mu^2$

In[79]:=
```
Reduce[dety2 == 0, e]
привести
```

Out[79]= $e == d + \Delta \;||\; e == \frac{1}{2}\left(d + 2\Delta - \sqrt{d^2 + 4 g^2 H^2 \mu^2}\right) \;||\; e == \frac{1}{2}\left(d + 2\Delta + \sqrt{d^2 + 4 g^2 H^2 \mu^2}\right)$

$S = 2\left(2 J S_1 S_2 = -\frac{3}{2} J\right)$:

In[80]:=
```
maty3 =
  3 Δ * IdentityMatrix[5] - g μ H * (DiagonalMatrix[{-i * 1, (-i √6)/2, (-i √6)/2, -i * 1}, 1] +
      единичная матрица       диагональная матрица

    DiagonalMatrix[{i * 1, (i √6)/2, (i √6)/2, i * 1}, -1]) -
    диагональная матрица

  e * IdentityMatrix[5] d * DiagonalMatrix[{4, 1, 0, 1, 4}];
      единичная матрица       диагональная матрица
maty3 // MatrixForm
          матричная форма
```

Out[81]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -4 d e + 3 \Delta & i g H \mu & 0 & 0 & 0 \\ -i g H \mu & -d e + 3 \Delta & i \sqrt{\frac{3}{2}}\, g H \mu & 0 & 0 \\ 0 & -i \sqrt{\frac{3}{2}}\, g H \mu & 3 \Delta & i \sqrt{\frac{3}{2}}\, g H \mu & 0 \\ 0 & 0 & -i \sqrt{\frac{3}{2}}\, g H \mu & -d e + 3 \Delta & i g H \mu \\ 0 & 0 & 0 & -i g H \mu & -4 d e + 3 \Delta \end{pmatrix}$$

In[82]:=
```
detyв‚ѓ = Det[matyв‚ѓ] // Expand
```
детерминант раскрыт

Out[82]=
$$48\,d^4\,e^4\,\Delta - 360\,d^3\,e^3\,\Delta^2 + 891\,d^2\,e^2\,\Delta^3 - 810\,d\,e\,\Delta^4 + 243\,\Delta^5 + 48\,d^3\,e^3\,g^2\,H^2\,\mu^2 - 240\,d^2\,e^2\,g^2\,H^2\,\Delta\,\mu^2 + 333\,d\,e\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 - 135\,g^2\,H^2\,\Delta^3\,\mu^2 - 12\,d\,e\,g^4\,H^4\,\mu^4 + 12\,g^4\,H^4\,\Delta\,\mu^4$$

In[85]:=
```
Solve[detyв‚ѓ == 0, e]
```
решить уравнения

Out[85]=
$$\left\{\left\{e \to \frac{15\,d\,\Delta - d\sqrt{81\,\Delta^2 + 16\,g^2\,H^2\,\mu^2}}{8\,d^2}\right\}, \left\{e \to \frac{15\,d\,\Delta + d\sqrt{81\,\Delta^2 + 16\,g^2\,H^2\,\mu^2}}{8\,d^2}\right\},\right.$$
$$\left\{e \to \frac{1}{8\,d^2\,\Delta}\left(15\,d\,\Delta^2 - 4\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2 - d\sqrt{81\,\Delta^4 - 56\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 16\,g^4\,H^4\,\mu^4}\right)\right\},$$
$$\left.\left\{e \to \frac{1}{8\,d^2\,\Delta}\left(15\,d\,\Delta^2 - 4\,d\,g^2\,H^2\,\mu^2 + d\sqrt{81\,\Delta^4 - 56\,g^2\,H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 16\,g^4\,H^4\,\mu^4}\right)\right\}\right\}$$

$S = 3\left(2\,JS_1\,S_2 = \frac{9}{2}J\right)$:

In[86]:=
```
matyв‚„ = 6 Δ * IdentityMatrix[7] - g μ H *
```
единичная матрица
```
    (DiagonalMatrix[{(-i √6)/2, (-i √10)/2, (-i √12)/2, (-i √12)/2, (-i √10)/2, (-i √6)/2}, 1] +
```
диагональная матрица
```
     DiagonalMatrix[{(i √6)/2, (i √10)/2, (i √12)/2, (i √12)/2, (i √10)/2, (i √6)/2}, -1]) -
```
диагональная матрица
```
  e * IdentityMatrix[7] + d * DiagonalMatrix[{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9}];
```
единичная матрица диагональная матрица
```
matyв‚„ // MatrixForm
```
матричная форма

Out[87]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix}
9\,d - e + 6\,\Delta & i\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 4\,d - e + 6\,\Delta & i\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & d - e + 6\,\Delta & i\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & -e + 6\,\Delta & i\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3}\,g\,H\,\mu & d - e + 6\,\Delta & i\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{5}{2}}\,g\,H\,\mu & 4\,d - e + 6\,\Delta & i\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}}\,g\,H\,\mu & 9\,d - e + 6\,\Delta
\end{pmatrix}$$

In[88]:=
```
dety4 = Det[maty4] // Expand
```
детерминант раскрыть

Out[88]=
$$-1296\,d^6 e + 3528\,d^5 e^2 - 3409\,d^4 e^3 + 1444\,d^3 e^4 - 294\,d^2 e^5 + 28\,d\,e^6 - e^7 + 7776\,d^6\,\Delta - 42\,336\,d^5 e\,\Delta + 61\,362\,d^4 e^2\,\Delta - 34\,656\,d^3 e^3\,\Delta + 8820\,d^2 e^4\,\Delta - 1008\,d\,e^5\,\Delta + 42\,e^6\,\Delta + 127\,008\,d^5\,\Delta^2 - 368\,172\,d^4 e\,\Delta^2 + 311\,904\,d^3 e^2\,\Delta^2 - 105\,840\,d^2 e^3\,\Delta^2 + 15\,120\,d\,e^4\,\Delta^2 - 756\,e^5\,\Delta^2 + 736\,344\,d^4\,\Delta^3 - 1\,247\,616\,d^3 e\,\Delta^3 + 635\,040\,d^2 e^2\,\Delta^3 - 120\,960\,d\,e^3\,\Delta^3 + 7560\,e^4\,\Delta^3 + 1\,871\,424\,d^3\,\Delta^4 - 1\,905\,120\,d^2 e\,\Delta^4 + 544\,320\,d\,e^2\,\Delta^4 - 45\,360\,e^3\,\Delta^4 + 2\,286\,144\,d^2\,\Delta^5 - 1\,306\,368\,d\,e\,\Delta^5 + 163\,296\,e^2\,\Delta^5 + 1\,306\,368\,d\,\Delta^6 - 326\,592\,e\,\Delta^6 + 279\,936\,\Delta^7 - 7776\,d^5 g^2 H^2 \mu^2 + 15\,120\,d^4 e\,g^2 H^2 \mu^2 - 9702\,d^3 e^2 g^2 H^2 \mu^2 + 2666\,d^2 e^3 g^2 H^2 \mu^2 - 322\,d\,e^4 g^2 H^2 \mu^2 + 14\,e^5 g^2 H^2 \mu^2 - 90\,720\,d^4 g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + 116\,424\,d^3 e\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 47\,988\,d^2 e^2 g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + 7728\,d\,e^3 g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 420\,e^4 g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 349\,272\,d^3 g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 287\,928\,d^2 e\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 - 69\,552\,d\,e^2 g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 5040\,e^3 g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 - 575\,856\,d^2 g^2 H^2\,\Delta^3\,\mu^2 + 278\,208\,d\,e\,g^2 H^2\,\Delta^3\,\mu^2 - 30\,240\,e^2 g^2 H^2\,\Delta^3\,\mu^2 - 417\,312\,d\,g^2 H^2\,\Delta^4\,\mu^2 + 90\,720\,e\,g^2 H^2\,\Delta^4\,\mu^2 - 108\,864\,g^2 H^2\,\Delta^5\,\mu^2 + 5508\,d^3 g^4 H^4\,\mu^4 - 3753\,d^2 e\,g^4 H^4\,\mu^4 + 774\,d\,e^2 g^4 H^4\,\mu^4 - 49\,e^3 g^4 H^4\,\mu^4 + 22\,518\,d^2 g^4 H^4\,\Delta\,\mu^4 - 9288\,d\,e\,g^4 H^4\,\Delta\,\mu^4 + 882\,e^2 g^4 H^4\,\Delta\,\mu^4 + 27\,864\,d\,g^4 H^4\,\Delta^2\,\mu^4 - 5292\,e\,g^4 H^4\,\Delta^2\,\mu^4 + 10\,584\,g^4 H^4\,\Delta^3\,\mu^4 - 216\,d\,g^6 H^6\,\mu^6 + 36\,e\,g^6 H^6\,\mu^6 - 216\,g^6 H^6\,\Delta\,\mu^6$$

Need to find roots of equasion :

$$\left(-36\,d^3 - 294\,d^2\,\Delta - 504\,d\,\Delta^2 - 216\,\Delta^3 + 24\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 24\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + \left(49\,d^2 + 168\,d\,\Delta + 108\,\Delta^2 - 4\,g^2 H^2\,\mu^2\right) e + \left(-14\,d - 18\,\Delta\right) e^2 + e^3\right) * \left(216\,d^3\,\Delta + 1764\,d^2\,\Delta^2 + 3024\,d\,\Delta^3 + 1296\,\Delta^4 - 216\,d^2 g^2 H^2\,\mu^2 - 612\,d\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 360\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 9\,g^4 H^4\,\mu^4 + \left(-36\,d^3 - 588\,d^2\,\Delta - 1512\,d\,\Delta^2 - 864\,\Delta^3 + 102\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 120\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2\right) e + \left(49\,d^2 + 252\,d\,\Delta + 216\,\Delta^2 - 10\,g^2 H^2\,\mu^2\right) e^2 + \left(-14\,d - 24\,\Delta\right) e^3 + e^4\right) == 0$$

In[90]:=
```
Reduce[dety4 == 0, e]
```
привести

Out[90]=
$$e == \text{Root}\left[-36\,d^3 - 294\,d^2\,\Delta - 504\,d\,\Delta^2 - 216\,\Delta^3 + 24\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 24\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + \left(49\,d^2 + 168\,d\,\Delta + 108\,\Delta^2 - 4\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1 + \left(-14\,d - 18\,\Delta\right)\#1^2 + \#1^3\,\&,\,1\right] ||$$
$$e == \text{Root}\left[-36\,d^3 - 294\,d^2\,\Delta - 504\,d\,\Delta^2 - 216\,\Delta^3 + 24\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 24\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + \left(49\,d^2 + 168\,d\,\Delta + 108\,\Delta^2 - 4\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1 + \left(-14\,d - 18\,\Delta\right)\#1^2 + \#1^3\,\&,\,2\right] ||$$
$$e == \text{Root}\left[-36\,d^3 - 294\,d^2\,\Delta - 504\,d\,\Delta^2 - 216\,\Delta^3 + 24\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 24\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 + \left(49\,d^2 + 168\,d\,\Delta + 108\,\Delta^2 - 4\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1 + \left(-14\,d - 18\,\Delta\right)\#1^2 + \#1^3\,\&,\,3\right] || e == \text{Root}\left[216\,d^3\,\Delta + 1764\,d^2\,\Delta^2 + 3024\,d\,\Delta^3 + 1296\,\Delta^4 - 216\,d^2 g^2 H^2\,\mu^2 - 612\,d\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 360\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 9\,g^4 H^4\,\mu^4 + \left(-36\,d^3 - 588\,d^2\,\Delta - 1512\,d\,\Delta^2 - 864\,\Delta^3 + 102\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 120\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1 + \left(49\,d^2 + 252\,d\,\Delta + 216\,\Delta^2 - 10\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1^2 + \left(-14\,d - 24\,\Delta\right)\#1^3 + \#1^4\,\&,\,1\right] || e == \text{Root}\left[216\,d^3\,\Delta + 1764\,d^2\,\Delta^2 + 3024\,d\,\Delta^3 + 1296\,\Delta^4 - 216\,d^2 g^2 H^2\,\mu^2 - 612\,d\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 360\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 9\,g^4 H^4\,\mu^4 + \left(-36\,d^3 - 588\,d^2\,\Delta - 1512\,d\,\Delta^2 - 864\,\Delta^3 + 102\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 120\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1 + \left(49\,d^2 + 252\,d\,\Delta + 216\,\Delta^2 - 10\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1^2 + \left(-14\,d - 24\,\Delta\right)\#1^3 + \#1^4\,\&,\,2\right] || e == \text{Root}\left[216\,d^3\,\Delta + 1764\,d^2\,\Delta^2 + 3024\,d\,\Delta^3 + 1296\,\Delta^4 - 216\,d^2 g^2 H^2\,\mu^2 - 612\,d\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 360\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 9\,g^4 H^4\,\mu^4 + \left(-36\,d^3 - 588\,d^2\,\Delta - 1512\,d\,\Delta^2 - 864\,\Delta^3 + 102\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 120\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1 + \left(49\,d^2 + 252\,d\,\Delta + 216\,\Delta^2 - 10\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1^2 + \left(-14\,d - 24\,\Delta\right)\#1^3 + \#1^4\,\&,\,3\right] || e == \text{Root}\left[216\,d^3\,\Delta + 1764\,d^2\,\Delta^2 + 3024\,d\,\Delta^3 + 1296\,\Delta^4 - 216\,d^2 g^2 H^2\,\mu^2 - 612\,d\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2 - 360\,g^2 H^2\,\Delta^2\,\mu^2 + 9\,g^4 H^4\,\mu^4 + \left(-36\,d^3 - 588\,d^2\,\Delta - 1512\,d\,\Delta^2 - 864\,\Delta^3 + 102\,d\,g^2 H^2\,\mu^2 + 120\,g^2 H^2\,\Delta\,\mu^2\right)\#1 + \left(49\,d^2 + 252\,d\,\Delta + 216\,\Delta^2 - 10\,g^2 H^2\,\mu^2\right)\#1^2 + \left(-14\,d - 24\,\Delta\right)\#1^3 + \#1^4\,\&,\,4\right]$$