Евклидовы пространства. Решения задач

1а. Определим в l_2 подпространство $\mathbb{R}^\infty \subset l_2$, состоящее из векторов, у которых лишь конечное число координат в базисе отлично от нуля. Это неполное предгильбертово пространство. В этом евклидовом пространстве нестандартное скалярное произведение, действительно, определено по формуле:

$$\widetilde{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m \cdot y_m}{m}.$$

В сумме лишь конечное число слагаемых, но мы не знаем сколько их, поэтому пишем сумму до бесконечности. Проверим, что аксиомы выполнены. Например, аксиома 1.

$$(\widetilde{\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_m + y_m)zmi}{m} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m \cdot z_m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m \cdot z_m}{m} = \widetilde{(\mathbf{x},\mathbf{z})} + \widetilde{(\mathbf{y},\mathbf{z})}.$$

Построить изоморфизм евклидовых пространств $(\mathbb{R}^\infty, (,))$ и $(\mathbb{R}^\infty, \widetilde{(,)})$ возможно. Это можно сделать по формуле

$$\mathbf{e}_m \mapsto \sqrt{m}\widetilde{\mathbf{e}}_m.$$

Почему при этом не получится изоморфизм l_2 на $\widetilde{l_2}$? Пополнение $\mathbb{R}^\infty$ до $\widetilde{l_2}$ происходит по нестандартной норме $\widetilde{||\mathbf{x}||} = \widetilde{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. В таком пополнении лежит, например, вектор

$$(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots).$$

Но в пространстве l_2 такого вектора нет. Поэтому ответ: скалярное произведение $\widetilde{(,)}$ в пространстве l_2 ввести можно, все аксиомы будут выполнены. Но это пространство не окажется полным. Оно будет предгильбертовым, но не гильбертовым.

1б. Определим в $C_2[a,b]$ нестандартное салярное произведение $(\widetilde{x(t), y(t)})$ по формуле:

$$(\widetilde{x(t), y(t)}) = \int_a^b x(t)y(t)p(t)dt,$$

где „весовая“ функция $p(t)$ строго положительна и непрерывна. Проверим, что выполнены аксиомы. Проверим, например, аксиому 3.

$$0 = (\widetilde{x(t), x(t)}) = \int_a^b x^2(t)p(t)dt,$$

только если непрерывная функция $x(t) \equiv 0$. Ответ: в $C_2[a,b]$ можно ввети указанное нестандартное скалярное произведение, пополнение $L_2[a,b]$ по соответствующей норме будет гильбертовым пространством, изоморфным исходному.

1в. Если для непрерывной „весовой“ функции $p(t)$ найдется $t_0 \in [a,b]$, $p(t_0) < 0$, то из-за непрерывности найдется $t_0 \in (a,b)$ и найдется $\delta > 0$ такое, что $p(t) < 0$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [a,b]$. Тогда, для непрерывной функции $x(t)$ такой, что $x(t) = 0$, если $t \in [a,b] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и $x(t) \neq 0$, при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ получится $(\widetilde{x(t), x(t)}) < 0$, что невозможно по аксиоме 3.

Если $p(t) \equiv 0$, $t \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$, то для непрерывной функции $x(t)$ такой, что $x(t) = 0$, если $t \in [a,b] \setminus [\alpha, \beta]$ и $x(t) \neq 0$, при $t \in [\alpha, \beta]$ получится $(\widetilde{x(t), x(t)}) = 0$, что невозможно по аксиоме 3, посольку $x(t)$ ненулевой вектор из пространства $C_2[a,b]$.

2. Вспомним, что две нормы $||\ldots||_1$, $||\ldots||_2$ в линейном пространстве R эквивалентны, если существуют такие постоянные $a, b > 0$, что выполнено двойное еравенство:

$$a||\mathbf{x}||_1 \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq b||\mathbf{x}||_1 \tag{1}$$

для всех векторов $\mathbf{x} \in R$.

В l_2 скалярное произведение $(,)_1$ порождает норму

$$||\mathbf{x}||_1 = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m^2}{m}}.$$

Эта норма не эквивалентна стандартной норме

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2},$$

поскольку при любом $b > 0$ найдется m такое, что $\frac{b}{\sqrt{m}} < 1$. Поэтому для базисного вектора с номером m получится:

$$\frac{b}{\sqrt{m}} = b||\mathbf{e}_m||_1 < ||\mathbf{e}_m|| = 1,$$

что противоречит правому неравенству в (1).

Норма, построенная по скалярному произведению

$$\widetilde{(x(t), y(t))} = \int_a^b x(t)y(t)p(t)dt, \tag{2}$$

эквивалентна стандартной норме

$$||x(t)|| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt},$$

поскольку существуют константы a, b, $0 < a < p(t) < b$ и поэтому

$$a\sqrt{\widetilde{(x(t), x(t))}} \leq ||x(t)|| \leq b\sqrt{\widetilde{(x(t), x(t))}}.$$

3. Неравенство Коши-Буняковского для нестандартного скалярного произведения (2) записывается так:

$$\int_a^b x(t)y(t)p(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t)p(t)dt \int_a^b y^2(t)p(t)dt}.$$

Это неравенство вытекает из неравенства Коши-Буняковского для стандартного скалярного произведения, примененного для функций $x(t)\sqrt{p(t)}$, $y(t)\sqrt{p(t)}$.

4. Вспомним (в который раз!) доказательство неравенства Коши-Буняковского для вещественного евклидова пространства (гл.3, параграф 4, раздел 1):

$$\varphi(\lambda) = (\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$

$$||\mathbf{x}||^2\lambda^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\lambda + ||\mathbf{y}||^2.$$

Дискриминант $D = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2 \geq 0$, поскольку $\varphi(\lambda) \geq 0$.

Теперь поговорим о комплексном гильбертовом простанстве. Из аксиом 1 и 3 вытекает, что

$$(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \overline{(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

При этом норма $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ вещественное число, поскольку $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Теперь о задаче. Предположим, что эрмитово скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ принимает вещественное значение. Применим доказательство неравенства Коши-Буняковского (λ–вещественный параметр), получим требуемое. Если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(cos(\psi) + \mathbf{i}sin(\psi))$ имеет ненулевую мнимую часть, поменяем вектор $\mathbf{x}$ по формуле

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(cos(-\psi) + \mathbf{i}sin(-\psi)) = \mathbf{x}_1.$$

Получится $||\mathbf{x}_1|| = ||\mathbf{x}||$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для пары $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}$. $\square$

5а. Воспользуемся теоремой о параллелограмме.

Теорема. Для того, чтобы нормированное линейное пространство R было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ выполнялось неравенство

$$||\mathbf{f} + \mathbf{g}||^2 + ||\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = 2(||\mathbf{f}||^2 + ||\mathbf{g}||^2).$$

Докажем необходимость, достаточность доказана в гл. III, параграф 4, Теорема 8. По свойству скалярного произведения:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g}) + (\mathbf{f} - \mathbf{g}) = 2(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + 2(\mathbf{g}, \mathbf{g}) + 2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) - 2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 2(||\mathbf{f}||^2 + ||\mathbf{g}||^2).$$

Пусть $\mathbf{f} = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{g} = (1, -1, 0, \dots 0)$. Получится $\mathbf{f} + \mathbf{g} = (2, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{f} - \mathbf{g} = (0, 2, 0, \dots 0)$. Тогда $||\mathbf{f} + \mathbf{g}||^2 = 4$, $||\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = 4$, $||\mathbf{f}||^2 = 4$, $||\mathbf{g}||^2 = 4$. Ответ: стандартная норма в l_1 не порождается скалярным произведением.

5б. Получится $||\mathbf{f} + \mathbf{g}||^2 = 4$, $||\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = 16$, $||\mathbf{f}||^2 = 9$, $||\mathbf{g}||^2 = 9$. Ответ: нестандартная норма в l_1 не порождается скалярным произведением.

6. Докажем, что в пространстве $C[0, \frac{\pi}{2}]$ непрерывных функций стандартная норма не порождается никаким скалярным произведением. Пусть $f(t) = cos(t)$, $g(t) = sin(t)$. Получится $||f(t)|| = 1$, $||g(t)|| = 1$, $||f(t) + g(t)|| = \sqrt{2}$, $||f(t) - g(t)|| = 1$. Ответ: стандартная норма в $C[0, \frac{\pi}{2}]$ не порождается скалярным произведением. Пространство вещественнозначных функций на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ является подпространством

пространства комплекснозначных функций на этом отрезке. Значение эрмитового скалярного произведения пары вещественнозначных функций, рассматриваемых как комплекснозначные, совпадает со значением скалярного произведения вещественнозначных функции. Норма вещественнозначной функции, рассматриваемой как комплекснозначная, совпадает со значением нормы этой вещественнозначной функции. Поэтому, если бы комплексная норма порождалась эрмитовым произведением, то и соответствующая норма на подпространстве вещественнозначных функций также порождалась скалярным произведением. По доказанному выше получится, что стандартная норма комплекснозначных функций на отрезке $[0, 1]$ не порождается эрмитовым произведением.