КР2, тренировочный вариант

Задача 1

Существует ли интеграл Лебега:

$$\int_{0+}^{1} x^{-1} sin(x^{-1}) d\mu?$$

Решение

Функция на $(0, 1]$ непрерывна и поэтому измерима. Исследуем, являются ли интегральные суммы абсолютно сходящимися. Для любого $1 > \varepsilon > 0$ интеграл Лебега $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1} sin(x^{-1}) d\mu$ совпадает с интегралом Римана $\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1} sin(x^{-1}) dx$. Вопрос о существовании указанного интеграла Лебега эквивалентен вопросу о том, является ли несобственный интеграл Римана первого рода абсолютно сходящимся? Сделаем замену переменной $x \mapsto y = x^{-1}$, $dy = -x^2 dx$, интеграл первого рода перейдет в интеграл второго рода

$$\int_{1}^{+\infty} y^{-1} sin(y) dy.$$

Выделим область знакопостоянства подынтегральной функции. Условие $sin(y) \geq 0$ при $y \geq 2\pi$ эквивалентно условию: $y \in [\pi 2k, \pi(2k+1)], \quad k \in \mathbb{N}$. На каждом интервале при интегрировании по частям получится:

$$-\int_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} y^{-1} d(cos(y)) =$$

$$-cos(y)y^{-1}|_{y=2k}^{y=2k+1} + \int_{\pi 2k}^{\pi(2k+1)} cos(y)dy^{-1}.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} cos(y)dy^{-1} = -\int_1^{+\infty} cos(y)y^{-2}dy$ абсолютно сходится. Поэтому вопрос об интегрируемости по области $sin(y) \geq 0$ приводит к ряду:

$$\sum_{k=1}^{+infty} \pi^{-1}((2k)^{-1}) = +\infty.$$

Интеграл Римана не является абсолютно сходящимся, поэтому интеграл Лебега не существует. $\square$

Задача 2

Мера Лебега-Стильтьеса задана обобщенной функцией распределения:

$F(x) = 0, x \leq 0, \quad F(x) = x+1, 0 < x \leq 2, \quad F(x) = x^2, x > 2.$

Найти меру промежутков $[0, 1]$, $[1, 2)$, и $\mathbf{Q}$.

Решение

Следует воспользоваться формулой:

$$m([a, b]) = F(b + 0) - F(a),$$

для отрезка или точки и формулой:

$$m([a, b)) = F(b) - F(a),$$

для полуинтервала с левым открытым концом (гл.V, параграф 1, раздел 3). Получим: $m([0, 1]) = 2 - 0 = 2$, $m([1, 2)) = 4 - 2 = 2$. $\mu(\mathbf{Q}) = \sum_i \mu(q_i)$, где q_i– произвольная нумерация множества рациональных чисел. В сумме всего два слагаемых $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = 1$. Поэтому $\mu(\mathbf{Q}) = 2$. $\square$

Задача 3

Будет ли линейное нормированное пространство l_8 евклидовым?

Решение

Для обоснования отрицательного ответа следует воспользоваться теоремой о параллелограмме (гл.III, параграф 4, раздел 8, Теорема 8). Достаточно доказать, что найдутся два вектора $f, g \in l^8$, для которых:

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 \neq 2(||f||^2 + ||g||^2).$$

Вспомним, что пространство l_8 – это линейное нормированное пространство, состоящее из последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ с нормой

$$||\mathbf{x}|| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^8.$$

Выберем $f = (1, 1, 0, \dots)$, $g = (1, -1, 0, \dots)$. Тогда $f + g = (2, 0, \dots)$, $f - g = (0, 2, 0, \dots)$. Вычислим l_8–норму четырех векторов:

$$||f+g|| = 32, \quad ||f-g|| = 32, \quad ||f|| = 2, \quad ||g|| = 2.$$

Очевидно, $32^2 + 32^2 \neq 2^2 + 2^2$. Пространство l_8 не является евклидовым. $\square$

Задача 4

Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$–измеримая функция, то $g(x) = f^2(x)$–измеримая функция.

Решение

Воспользуемся теоремой о том, что композиция двух измеримых функций есть измеримая функция. Представим функцию $x \mapsto f^2(x) = g(x)$ в виде композиции $x \mapsto f(x) = y$, $y \mapsto y^2$. Достаточно доказать, что функция $y \mapsto y^2$ измеримая. Воспользуемся критерием измеримости: проверим, что прообраз f^{-1} произвольного луча $(c, +\infty)$ является измеримым. Прообраз $f^{-1}((c, +\infty))$–это либо два луча $(-\infty, -\sqrt{c}) \cup (+\sqrt{c}, +\infty)$, если $c \geq 0$, или вся прямая $\mathbb{R}$, если $c < 0$. В каждом случае получается открытое подмножество в $\mathbb{R}$, которое измеримо. Следовательно, $f^2(x)$–измерима. $\square$