КР2, тренировочный вариант

1. Существует ли интеграл Лебега:

$$\int_{0+}^{1} x^{-1}sin(x^{-1})?$$

2. Мера Лебега-Стильтьеса задана обобщенной функцией распределения:

$$F(x) = 0, x \leq 0, \quad F(x) = x + 1, 0 < x \leq 2, \quad F(x) = x^2, x > 2.$$

Найти меру промежутков $[0, 1]$, $[1, 2)$, и $\mathbf{Q}$.

3. Будет ли линейное нормированное пространство l^8 евклидовым?

4. Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$–измеримая функция, то $g(x) = f^2(x)$–измеримая функция.

Теоретическая задача

5.A Докажите, что в шаре радиуса 100 в пространстве l_2 можно найти бесконечное число попарно непересекающихся шаров радиуса 1. При помощи этого постройте ограниченное замкнутое некомпактное подмножество в l_2.

5.B В пространстве $C[1, 2]$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ определили скалярное произведение по формуле:

$$(f(x), g(x)) = \int_{[0,1]} f(x)g(x)xdx.$$

Выпишите неравенство Коши-Буняковского для этого скалярного произведения. Вычислите норму функции $f(x) = 2$, как функции из $L_1([1, 2])$ и как функции из $L_2([1, 2])$.

5.C Будет ли измерима функция Дирихле $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима, $d(x) = 0, \quad x \in \mathbf{Q}$, $d(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$? Является ли эта функция простой? Чему равен интеграл Лебега $\int_{[0,1]} d\mu$?

5.D Доказать, что множество точек на отрезке $[0, 1]$, в двоичном разложении которых на всех нечетных местах стоят нули, является измеримым подмножеством. Найти меру Лебега этого подмножества.

5.E Пусть $\mu(i) = 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. При заданном распределении вероятностной меры, какова вероятность, что случайное число является четным? Приведите пример несуммируемой случайной величины на вероятностном пространстве.

5.F Докажите, что произвольная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима, используя определение непрерывности функции (по Коши) в каждой точке области определения.