№1

Пусть A - исходная вероятностная схема.

Её исходы :

1) мы находимся в городе α, а встреченный нами житель из города α

2) мы находимся в городе α, а встреченный нами житель из города β

...

9) мы находимся в городе γ, а встреченный нами житель из города γ

Эти исходы из условия задачи равновероятны.

Тогда H (A) = log 9

Пусть A_k – k–ый вопрос (исходы : "Да", "Нет")

$H(A_k) \le \log 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Хотим найти такое минимальное k, что $H(A \mid A_1 \ldots A_k) = 0$

Тогда из условия $H(A \mid A_1 \ldots A_k) = 0$

$H(A) = H(A A_1 \ldots A_k) = H(A_1 \ldots A_k) \le H(A_1) + \ldots + H(A_k) = k * H(A_1)$

Имеем условие на k :   log 9 <= k log 2

Это условие достигается при минимальном k = 4

№2

Интересное замечание для l = 2 :

$$p(c1) * p(a_{i_2} / a_{i_1}) + p(a_{i_1} a_{i_2}) = p(a_{i_1}) * \frac{p(a_{i_1} a_{i_2})}{p(a_{i_1})} + p(a_{i_1} a_{i_2}) = p(a_{i_1} a_{i_2}) + p(a_{i_1} a_{i_2}) = 2 p(a_{i_1} a_{i_2})$$

При фиксированном m q_m – это непосредсвтенно мароквская цепь глубины m

№3.

a)

$P(a_1) = 0.5 * (0.8 + 0.7) = 0.75$

$P(a_2) = 0.5 * (0.2 + 0.3) = 0.25$

б) $H = 0.5 * \left(0.8 \log \frac{5}{4} + 0.2 \log 5\right) + 0.5 \left(0.7 \log \frac{10}{7} + 0.3 \log \frac{10}{3}\right) = \log 5 - \frac{3}{10} \log 2 - \frac{3}{20} \log 5 - \frac{7}{20} \log 7$

№4.

Введём $\eta = \frac{\delta}{H}$, где $H = \frac{1}{4} \log 4 + \frac{3}{4} \log \frac{4}{3} = 2 \log 2 - \frac{3}{4} \log 3$

Введём $l_0(\eta)$ – такое число,
что для нулей и единиц в полученной на основе ДИБП последовательности выполняется ЗБЧ

Введём $l_0(\epsilon)$ – такое число, что либо для нулей, либо для единиц в полученной на основе ДИБП последовательности ЗБЧ не выполняется

$l = \max(l_0(\eta), l_0(\epsilon))$ – полученный ответ

№5.

1) $I(A_1; A_2) + I(A_2; A_4) \le I(A_1; A_4) + I(A_2; A_3)$

$H(A_1) - H(A_1 / A_3) + H(A_2) - H(A_2 / A_4) \le H(A_1) - H(A_1 / A_4) + H(A_2) - H(A_2 / A_3)$

$H(A_1 / A_3) + H(A_2 / A_4) \ge H(A_1 / A_4) + H(A_2 / A_3)$

Для простого марковского источника:

$H(A_1 / A_3 A_2) + H(A_2 / A_4 A_3) \ge H(A_1 / A_4 A_3 A_2) + H(A_2 / A_3) \Longrightarrow$

$H(A_1 / A_3 A_2) - H(A_1 / A_4 A_3 A_2) \ge H(A_2 / A_3) - H(A_2 / A_4 A_3)$

$H(A_1 A_2 A_3) - H(A_1) - H(A_4 A_3 A_2 A_1) + H(A_1) \ge$
$H(A_2 A_3) - H(A_2) + H(A_2) - H(A_2 A_3 A_4) \Longrightarrow$

$H(A_1 A_2 A_3) - H(A_4 A_3 A_2 A_1) \ge H(A_2 A_3) - H(A_2 A_3 A_4)$

$H(A_1 A_2 A_3) + H(A_2 A_3 A_4) \ge H(A_2 A_3) + H(A_4 A_3 A_2 A_1)$

Вспомним, что H (AB) ≤ H (A) + H (B)

$H(A_1) + 2 H(A_2 A_3) + H(A_4) \ge 2 H(A_2 A_3) + H(A_1 A_4) + H(A_2 A_3)$

Тогда

$H(A_1) + H(A_4) \ge H(A_1 A_4) + H(A_2 A_3)$ что и требовалось доказать

2) $I(A_1; A_k) \le I(A_1; A_{k+1})$

$H(A_1) - H(A_1 / A_k) \le H(A_1) - H(A_1 / A_{k+1})$

$H(A_1 / A_k) \ge H(A_1 / A_{k+1})$

$H(A_1 / A_k) \ge H(A_1 / A_{k+1} A_k)$ (что верно, так как $H(A / BC) \le H(A / B)$)