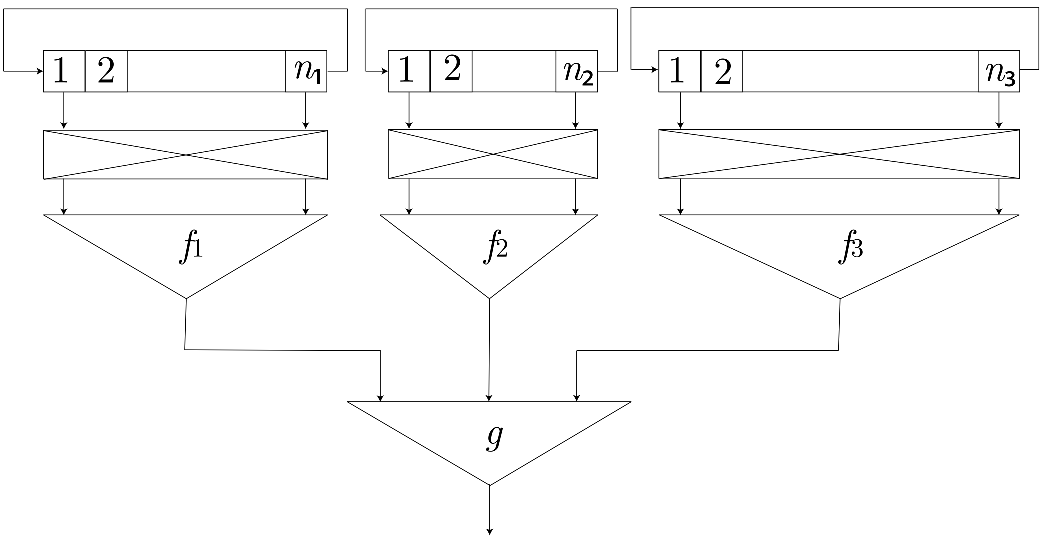
Исследование поточного алгоритма шифрования типа «Раскольников» Вариант №4.

Роман Астраханцев, СКБ-171

24 марта 2022 г.

Описание алгоритма



Поточный алгоритм шифрования типа «Раскольников» состоит из:

1. трех РСЛОС $L_i, i \in \overline{1,3}$, над полем $\mathbb{F}_2$ с характеристическими многочленами $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ степени соответственно n_1, n_2, n_3.

2. трех коммутаторов (перестановок) $K_i, i \in \overline{1,3}, Ki \in S(l_i)$, на вход коммутатору K_i подаются значения РСЛОС L_i с индексами

$$1 = p_1 < p_2 < \cdots < p_{l_i-1} < p_{l_i} = n_i$$

3. трех функций усложнения выхода РСЛОС $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{l_i}), i \in \overline{1,3}$,
4. комбинирующей булевой функции $g(x,y,z)$, задаваемой формулой ($\wedge$ – «и», $\neg$ – отрицание, $\vee$ – «или», $\veebar$ – «исключающее или»):

$$g(x,y,z) = (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee z)$$

Ключом являются:

- начальное заполнение регистра L_1
- коммутатор K_2
- начальное заполнение регистра L_3

1 Исследование ключевого множества

Множетсво ключей K состоит из всезможожных троек вида (k_1, k_2, k_3), где

- k_1 - какое-то заполнение регистра L_1 длины n_1,
- k_2 - какая-то перестановка длины n_2,
- k_3 - какое-то заполнение регистра L_3 длины n_1.

Тогда общее число ключей будет равно

$$|K| = 2^{n_1} \cdot n_2! \cdot 2^{n_3}$$

Приведём пример параметров n_1, n_2, n_3, при котором $|K| > 2^{64}$. Пусть $n_1 = 25, n_2 = 10, n_3 = 25$, тогда

$$|K| = 2^{25} \cdot 10! \cdot 2^{25} > 2^{25} \cdot 2^{21} \cdot 2^{25} > 2^{71} > 2^{64}$$

2 Исследование узлов алгоритма

2.1 Узлы РСЛОС

Регистр сдвига с линейной обратной связью или *РСЛОС* — это блок, который генерирует двоичные псевдослучайные периодические последовательности, которые называются линейными рекуррентными последовательностями (ЛРП).

Широкое распространение в криптографических приложениях линейных регистров сдвига над конечными полями $\mathbb{F}_{2^n}$ и кольцами вычетов обусловлено целым рядом факторов. Среди них можно отметить:

- использование только простейших операций сложения и умножения, аппаратно реализованных практически на всех вычислительных средствах;
- высокое быстродействие создаваемых на их основе криптографических алгоритмов;
- большое количество теоретических исследований свойств линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП), свидетельствующих об их удовлетворительных криптографических свойствах

В данном шифре в ключ входят только заполнения регистра сдвига, а вид характеристического многочлена, является параметром построения шифра. Значит, нужно подобрать такие функции обратной связи, чтобы для любого **ненулевого** заполнения ЛРП была максимального периода. В этом нам помогут следующие теормы и следствие из них.

Теорема 2.1. *Пусть u – ЛРП над полем $\mathbb{F}_q$ с реверсивным минимальным многочленом $F(x)$ степени m и $q^m > 2$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(1) u – ЛРП максимального периода;
(2) многочлен $F(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_q$, и его корень α в минимальном поле разложения $\mathbb{F}_{q^m}$ над $\mathbb{F}_q$ есть примитивный элемент поля.

Теорема 2.2. *Неприводимый многочлен $F(x)$ примитивен в том и только в том случае, когда для любого простого числа p, делящего $q^m - 1$, многочлен $x^{\frac{q^m-1}{p}}$ не сравним с 1 по модулю многочлена $F(x)$.*

Следствие 2.3. *Если $F(x)$ – неприводимый многочлен над полем $\mathbb{F}_2$ степени m, и $2^m - 1$ – простое число, то $F(x)$ – примитивный многочлен.*

Исходя из утверждений выше, для того чтобы линейная рекуррентная последовательность порядка m над полем из q элементов имела максимальный период, необходимо и достаточно, чтобы ее минимальный многочлен был примитивным многочленом.

Более конкретно, над полем $\mathbb{F}_2$ необходимо реверсивный минимальный многочлен $F(x)$ на основе просых чисел Мерсенна. В этом случае для любого **ненулевого** заполнения ЛРП получается максимального периода.

Приведём конкретный пример многочленов $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ для заданных нашим алгоритмом РСЛОС L_1, L_2, L_3. Для их генерации будем использовать втроенные функции пакета Wolfram Mathematica

Пусть $n_1 = 31, n_2 = 13, n_3 = 19$ ($2^{31}-1, 2^{13}-1$ и $2^{19}-1$ — это известные числа Мерсенна).

Пример неприодимых многочленов соотвествующих степеней из $\mathbb{F}_2$[x].

$$\begin{aligned} F_1(x) = & x^{31} + x^{30} + x^{29} + x^{28} + x^{27} + x^{24} + x^{21} + x^{19} + \\ & + x^{18} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^4 + x^3 + 1 \end{aligned}$$

$$F_2(x) = x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

$$F_3(x) = x^{19} + x^{15} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

В этом случае любое **ненулевое** заполнение каждого из L_1, L_2, L_3 даст нам максимальный период на каждом из регистрах. Кроме того, каждый регистр сдвига был выбран разной длинны для того, чтобы исключить случай совместного зацикливания двух ЛРП. Иными словами итоговый период совместной работы всех трёх регистров будет равна

$$N_{L_1L_2L_3} = \text{НОК}(2^{n_1} - 1, 2^{n_2} - 1, 2^{n_3} - 1) = \text{НОК}(2^{31} - 1, 2^{13} - 1, 2^{19} - 1) \approx 2^{63}$$

Это означает, что вектор начальных заполнений (u_1, u_2, u_3) регистров L_1, L_2, L_3 вернётся в сам в себя после $N_{L_1L_2L_3} \approx 2^{63}$ совместных тактов работы всех трёх регистров.

При этом мощность ключевого множества по-прежнему будет удовлетворять условию $|K| > 2^{64}$:

$$|K| = 2^{31} \cdot 13! \cdot 2^{19} > 2^{31} \cdot 2^{32} \cdot 2^{19} > 2^{82} > 2^{64}$$

2.2 Функции усложнения

Для усложнения аналитической сложности выходной последовательности РСЛОС используются функции усложнения. «Фильтрующая» функция f должна выбираться так, чтобы выходная последовательность имела распределение, близкое к равномерному распределению, и высокую линейную сложность.

Ниже представленые основные криптографические характеристики нелинейных преобразований, используемые в поточных шифрах.

Свойство 1. Функция f фильтрующего генератора должна быть сбалансированной, т.е. $|\{x : f(x) = 0\}| = 2^{n-1}$.

Свойство 2. У функция f фильтрующего генератора должны отсуствовать запреты.

Для выполненеия свойтсва 2 достаточно, чтобы функция f была линейна по крайней переменной. Есть более общий критерий определения имеет ли булева фунция запрет или нет.

Теорема 2.4. *Булева функция не имеет запрета тогда и только тогда, когда она сильно равновероятна.*

Свойство 3. У функция f фильтрующего генератора должна иметь высокую алгебраическую степень.

Свойство 4. Функция f фильтрующего генератора должна иметь высокую нелинейность, т.е. не иметь эффективных линейных статистических аналогов.

Свойство 5. Функция f фильтрующего генератора должна быть k-равновероятной для максимально возможного значения k.

Свойство 6. Функция f фильтрующего генератора (а также функция $f + 1$) не должны иметь аннигиляторов малой алгебраической степени.

На практикте помимо достежния перечисленных условий необходимо дополнительно исследовать весь блок фильтрующего гереатора целиком. Например, фильтрующий генератор с нелинейной функцией усложнения может представляться в виде ЛРП с меньшим (чем исходная ЛРП) периодом.

В работе Rachwalik и др. (2012) были найдены несколько функций усложнения порядков 25 и 27. Работа была нацелена на поиск таких фукнций, что обеспечивают наибольший период выходной последовательности. Кроме того у перечисленных в работе булевых функций были исследованы некоторые статистические свойства выходных последовательностей. Возьмём эти функции усложнения за основу, приняв некоторые переменные за единицу.

$$\begin{aligned} f_1 = &x_0 \oplus x_6 \oplus x_{11} \oplus x_{14} \oplus x_{16} \oplus x_{17} \oplus x_{18} \oplus x_{19} \oplus x_{23} \oplus \\ &\oplus x_4 x_{19} \oplus x_4 x_{21} \oplus x_5 x_{22} \oplus x_9 x_{19} \oplus x_1 x_{17} x_2 3 \oplus x_5 x_7 x_{18} \oplus x_5 x_{12} x_{19} \end{aligned}$$

$$f_2 = x_0 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_{10} \oplus x_6 x_9 \oplus x_6 x_{10} \oplus x_4 x_9 x_{10}$$

$$f_3 = x_0 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{10} x_{14} \oplus x_4 x_{16} \oplus x_{11} x_{16} \oplus x_1 x_5 x_7$$

2.3 Комбинирующая функция

2.3.1 Вычление многочлена Жегалкина

$$g(x,y,z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xz$$

2.3.2 Характеристики

Вычислим характерсики комбинирующей функции, которые позволят нам определить возможность применения разлинчых методов атак.

Из вида многочлена жегалкина видно, что **степень нелинейности** функции g равна 2.

Булева функция $h = xy$ является **аннигилятором** функции g, поскольку

$$hg = (1 \oplus y \oplus z \oplus xz)\, xy = xy \oplus xy \oplus xyz \oplus xyz = 0$$

Из предыдущего пункта видно, что **вес** функции $|g(x,y,z)| = 4$. Это означает, что функция g является **сбалансированной** (равновероятной)

$$P(g = 0) = \frac{4}{8} = P(g = 1)$$

Исследуем функцию g на корреляционную иммунность. Для этого будет поочерёдно фиксировать значения переменных и считать вероятность получения 0 до тех пока она не станет отличной от 0.5.

$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid x = 0\big) = P(1 \oplus y \oplus z = 0) = \frac{1}{2}$$
$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid x = 1\big) = P(1 \oplus y = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid y = 0\big) = P(1 \oplus z \oplus xz \ = 0) = \frac{3}{4}$$
$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid y = 1\big) = P(z \oplus xz = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid z = 0\big) = P(1 \oplus y = 0) = \frac{1}{2}$$
$$P\big(g(x,y,z) = 0 \mid z = 1\big) = P(y \oplus x = 0) = \frac{1}{2}$$

Из вычислений выше видно, что фиксация переменной y вероятность отклоняется от исходной. А значит функция g **не** является **корреляционно-иммунной**.

Вспомним, что произвольная булева функция f является k-устойчивой тогда и только тогда, когда она корреляционно-иммунная порядка k и равновероятна. Из рассуждений выше следует, что функция g также **не** является **устойчивой**.

Исследуем функцию g на наличие запретов. Для этого в пакете Wolfram Mathematica будем перебирать всевозможные выходные последосвательности разной длинны и пытаться решить систему уравнений относительно ячеек регистра сдвига. В результате такого исследования были найдены следующие невозможные выходные гаммы.

$001000\dots$	$1001000\dots$
$111000\dots$	$0111000\dots$
$0001000\dots$	$1111000\dots$

Из наличия запретов следует, что функция g **не** является **сильноравновероятной**.

2.3.3 Наилучшее приближение линейной функцией

TO DO

2.3.4 Строгий лавинный критерий

Исследуем насколько сильно изменяются значения булевой функции $g(x, y, z)$ при малом изменении значений входных переменных. Для этого расчитаем производые по направлениям координатных веторов в V_3

x	y	z	g	$D_x g$	$D_y g$	$D_z g$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0

Таблица выше демонстирует, что производная по направлению y **не сбалансирована**. Это значит, что булева функция g **не** удовлетворяет **строгому лавинному критерию**. Более того, это означает что булева функция g **не удовлетворяет критерию распространения**.

3 Методы восстановления ключа

Зафиксируем параметры согласно размышлениям из пунктов 2.1 и 2.2 и исследуем применимость разных методов для восстановления ключа. Для каждого алгоритма вычислим его характеристики.

Через $G(K, n)$ будем обозначать выработку гаммы Γ длинны n представленным поточным алгоритмом шифрования на ключе K. Количество материала, необходимое для однозначного определения ключа составляет $m = \lceil \log_2(|K|) \rceil = 83$ бита.

3.1 Метод тотального опробования

Самым наивным вариантом восстановления ключа будет алгоритм тотального опробования, который применим абсолютно к любому шифру. Идея алготима заключается в переборе всевозможных ключей и сопоставлении полученной гаммы с известным материалом.

Алгоритм 1: Метод тотального опробования

Вход: Пара открытый и шифрованный текст $P, C \in V_{83}$
Выход: Ключ шифрования K

```
Для каждого k1 ∈ V31
    Для каждого k2 ∈ S(13)
        Для каждого k3 ∈ V19
            Сформировать ключ K = (k1, k2, k3)
            Вычислить Γ = G(K, 83)
            Если P ⊕ C = Γ, то
                Закончить алгоритм и вернуть K
```

Вероятность работы алгоритма $p(A) = 1$, поскольку алгоритм гарантированно находит ключ.

Средняя трудоёмкость алгоритма $S(A) = \frac{2^{31} \cdot 13! \cdot 2^{19} + 1}{2} \approx 2^{82}$ использований алгоритма выработки гаммы. Она же равна **трудоёмкости по Шеннону** $Q(A)$.

Объём памяти необходимый для работы алгоритма $M(A) = O(1)$ бит, поскольку алгоритм хранит только локальные переменные.

3.2 Метод встречи по середине

Прежде чем применить метод встречи по середине, необходимо представить преобразование исходного шифра как двойное последовательное шифрование. Иными словами если алгоритм зашифрования $E_K(P)$ открытого текста P на ключе K можно представить в виде $E'_{k_1}(E''_{k_2}(P))$, то можно применить метод встречи по середине. Наример, выход булевой функции $g(x,y,z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xz$, где x, y, z - выходы фильтрующих функций соответсвующих блоков шифра, может быть представлен, как сложение двух булевых функций $h_1 = 1 \oplus y$ и $h_2 = z \oplus xz$.

Наиболее эффективным с точки зрения трудоёмкости этот метод становится тогда, когда алгоритм зашифрования $E_k(P)$ удалось представить в виде $E'_{k_1}(E''_{k_2}(P))$ так, что длина $k_1 \approx$ длине k_2.

Теоретически блок коммутатора (перестановка) K_2 можно было бы разделить на 2 блока коммутатора меньшей длины с общим входом. Поскольку блок РСЛОС не является ключевым, то он может быть задан ввиде таблицы.

Однако для упрощения рассмотрим разделение так, что E'_{k_1} – это центральный блок, а E''_{k_2} – это правый и левый блоки. Для однозначного отделения ключа k_2 достаточно 33 бит материала, иными словами исходный материал (83 бита) разделить как 33 и 50 бит соответсвенно.

Разделим исходный алгоритм шифрования $E_K(P)$, где P – открытый текст длины n и напишем текст работы алгоритма.

$$
\begin{aligned}
E_K(P) &= P \oplus G(K,n) = \\
&= P \oplus g(x,y,z) = (P \oplus 1 \oplus y) \oplus z \oplus xz = E''_{k_2}(P) \oplus z \oplus xz = \\
&= E'_{k_1}(E''_{k_2}(P))
\end{aligned}
$$

Алгоритм 2: Метод встречи по середине

Вход: Пара открытый и шифрованный текст $P, C \in V_{83}$

Выход: Ключ шифрования K

```
Разделить исходный материал на P_1, C_1 ∈ V_33 и P_2, C_2 ∈ V_50
Для каждого k_2 ∈ S(13)
    Вычислить Π= E''_{k_2}(P_1)
    Занести в ячейку с адресом Π ключ k_2
    /* в среднем в каждой ячейке памяти будет лежать около
       1 ключа                                                   */
Для каждого k_1 ∈ V_31
    Для каждого k_3 ∈ V_19
        Сформировать ключ k̃_1 = (k_1, k_3)
        Вычислить Π= E'^{-1}_{k̃_1}(C_1)
        Если ячейка с адресом Π не пуста то
            Достать из неё ключ k_2
            Сформировать ключ K = (k_1, k_2, k_3)
            Доопробовать ключ K на материале P_2, C_2
            Если доопробование успешно то
                Закончить алгоритм и вернуть K
```

Вероятность работы алгоритма $p(A) = 1$, поскольку алгоритм гарантированно находит ключ.

Средняя трудоёмкость алгоритма $S(A) = 13! \cdot s_1 + \frac{\cdot 2^{31} \cdot 2^{19} + 1}{2} \cdot s_2$, где s_1 – сложность алготима зашифрования E'', s_2 – сложность алготима расшифрования E'^{-1} . Средняя трудоёмкость равна **трудоёмкости по Шеннону** $Q(A) = S(A) \approx 2^{33} \cdot s_1 + 2^{49} \cdot s_2$.

Объём памяти, который необходим необходимый для успешной работы алгоритма $M(A) = 2^{33} \cdot 13! + O(1) \approx 2^{66} + O(1)$ бит, поскольку алгоритму требуется хранить таблицу ключей из $S(13)$. Для описания одного ключа из $S(13)$ требуется 33 бита (2^{33} – это размерность пространства памяти). Поэтому в среднем будет в каждой 33-битной ячейке памяти будет храниться не более одного ключа.