Лекция „Функциональный анализ“ по учебнику А.Н.Колмогоров С.В.Фомин

составил П.М.Ахметьев

20.04.2020

1 Гильбертово пространство, теорема об изоморфизме

Theorem 1. *Любые два гильбертовых пространства изоморфны (Теорема 5, гл.III, параграф 4).*

Доказательство теоремы 1

Потребуется лемма (теорема Рисса-Фишера, теорема 3 гл.III, параграф 5).

Lemma 2. *Пусть φ_n, $n \in \mathbb{N}$–произвольная ортогональная система в полном евклидовом пространстве R, пусть числа $c_1, c_2, \dots c_n, \dots$ таковы, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

сходится. Тогда существует $f \in R$ такой, что

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = ||f||^2.$$

1.1 Доказательство леммы 2

Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Утверждается, что:

• Последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (почему?).

• Справедливо равенство:

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i),$$

причем справа первое слагаемое равно c_i, а второе бесконечно-мало по неравенству Коши-Буняковского (почему?). Получится $(f, \varphi_i) = c_i$.

- Поскольку $f_n \to f$, получится

$$(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1

Докажем, что произвольное гильбертово пространство H изоморфно l_2. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ (как это сделать? Теорема 1 гл III, параграф 4). Поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность его коэффициентов Фурье (что это такое? гл.III, параграф 4). По лемме 2 всякому элементу

$$(c_1, c_2, \dots) \in l_2$$

отвечает некоторый вектор f.

Соответствие $H \to l_2$ является биекцией, проверим, что эта биекция сохраняет евклидову структуру:

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

Это вытекает из равенств:

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2. \quad \square$$

2 Мера, гл. V; мера плоских множеств

2.1 Кольцо, алгебра, σ-алгебра, напоминание

Definition 3. Непустая система множеств $\aleph$ называется кольцом, если эта система замкнута относительно объединения $A \cup B$, дополнения $A \backslash B$, пересечения $A \cap B$. Кольцо с единицей $E \cap A = A$, $E \in \aleph$ (для любого $A \in \aleph$) называется алгеброй.

Симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Кольцо замкнуто относительно симметрической разности. Пустое множество $\emptyset \in \aleph$, $\emptyset = A \setminus A$, $A \in \aleph$.

Примеры, гл.I, параграф 5

• $\aleph = 2^A$, получится $A \in \aleph$.

• $\aleph = \{A, \emptyset\}$.

• Система всех конечных подмножеств A является кольцом, это кольцо является алгеброй $\Leftrightarrow$ A-конечно.

• Система всех ограниченных множеств числовой прямой является кольцом, но не алгеброй.

Definition 4. Алгебра $\aleph$ называется σ-алгеброй, если замкнуто относительно объединения любого числа (не обязательно конечного числа) множеств:

$$A_n \in \aleph \Rightarrow \cup_n A_n \in \aleph.$$

Из соотношений двойственности

$$\cap_n A_n = E \setminus \cap_n (E \setminus A_n)$$

вытекает, что σ–алгебра $\aleph$ замкнута относительно пересечения любого числа (не обязательно конечного числа) множеств (почему?).

Theorem 5. *Для любой системы множеств S существует минимальная (по отношению к этой системе) σ-алгебра, $\aleph(S)$, содержащая множества из S и содержащаяся в любой другой σ-алгебре, содержащей S.*

План доказательства теоремы 5

Существование. Рассмотрим объединение $E = \cup_{A \in S} A$ всех множеств из S. Рассмотрим σ–алгебру 2^E всех подмножеств множества S. Пусть Σ – совокупность всех всех σ–алгебр, содержащихся в 2^E и содержащих S. Пересечение $\aleph(S) = \cap_{\aleph \in \Sigma} \aleph$ является искомой σ-алгеброй. □

Definition 6. Рассмотрим множество S всех открытых (или все замкнутых) подмножества пространства R (нам нужен случай $R = \mathbb{R}^2$). Борелевские множества – это множества минимльной σ-алгебры $\aleph(S)$.

Почему борелевские σ–алгебры всех открытых множеств и множества всех замкнутых множеств совпадают?

2.2 Мера элементарных плоских множеств, гл. V, параграф 1

Рассмотрим прямоугольник, который определяется одним из неравенств вида:

$$a \leq x \leq b; \quad a \leq x < b, \quad a < x \leq b, \quad a < x < b;$$

и одним из неравенств вида:

$$c \leq y \leq d; \quad c \leq y < d, \quad c < y \leq d, \quad c < y < d.$$

В том числе, мы рассматриваем замкнутый и открытый прямоугольник. Площадь прямоугольника определяется выражением $m(P) = (b-a)(d-c)$.

Назовем плоское множество Q элементарным, если его можно представить хотябы одним способом как объединение конечного числа прямоугольников.

Theorem 7. *Все ограниченные плоские элементарные множества образуют кольцо. Существует мера $m(Q)$, которая каждому элементарному множеству сопоставляет действительное неотрицательное число со следующим свойством аддитивности:*

Если $Q = \cup_{k=1}^{n} P_k$ и $P_i \cap P_k = \emptyset$, $i \neq k$, то

$$m(Q) = \sum_{k=1} m(P_k).$$

Доказательство теоремы 7

Если $A = \cup_k P_k$, $B = \cup_j Q_j$–два элементарных множества, то

$$A \cap B = \cup_{k,l}(P_k \cap Q_j)$$

элементарное множество (пересечение любых двух прямоугольников снова прямоугольник). Разность двух прямоугольников – элементарное множество (докажите!).

Для двух элементарных множеств A, B найдется прямоугольник P, $A \subset P$, $B \subset P$. Тогда

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

будет элементарным. Отсюда симметрическая разность $A \triangle B$ будет элементарным. Доказано, что элементарные множества образуют кольцо.

Определим $m(A)$, $A = \cup_k P_k$, где P_k–попарно непересекающиеся прямоугольники, по формуле:

$$m(Q) = \sum_{k} m(P_k).$$

Докажем, что $m(A)$ не зависит от способа разбиения A в сумму конечного числа прямоугольников.

Пусть $A = \cup_k P_k = \cup_j Q_j$, $P_i \cap P_k = \emptyset$, $Q_i \cap Q_k = \emptyset$, $i \neq k$. По аддитивности для непересекающихся прямоугольников:

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j). \quad \square$$

Проблема

1. Как распространить меру с кольца (с алгебры) элементарных множеств на большее σ-кольцо (σ–алгебру) с сохранением аддитивности (свойство аддитивности требуется обобщить до свойства σ–аддитивности)? Какая σ–алгебра при этом получится?

2. Можно ли построить σ–аддитивную меру на множестве всех подмножеств 2^R данного ограниченного множества R, скажем, для $S = \mathbb{R} \pmod n$, $n \in \mathbb{Z}$ (окружность длины 1, (почему S–окружность?))?

Ответы:

1. Можно, мы это сделаем на следующей лекции. Получится σ–алгебра борелевских множеств.

2. Это сделать невозможно.

Пусть α–некоторое (любое) иррациональное число. Разобъем точки окружности S на классы эквивалентоности. Скажем, что две точки $x, y \in S$ эквивалентны, если $x - y = n\alpha$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}$. Каждый класс эквивалентности – счетное множество точек (почему?). Выберем из каждого класса эквивалентности по одной точке. Обозначим так определенное множество через Φ_0. Обозначим через Φ_n–сдвиг множества Φ_0 на $n\alpha$ вдоль S.

1. Множества Φ_{n_1}, Φ_{n_2}, $n_1 \neq n_2$ не пересекаются.

2. Объединение $\cup_n \Phi_n = S$ составляет всю окружность.

3. Множества Φ_{n_1}, Φ_{n_2}, $n_1 \neq n_2$ коншруэнтны (одно из другого получается сдвигом окружности на $(n_2 - n_1)\alpha$. Поэтому, по σ–аддитивности получится:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(\Phi_n), \quad m(\Phi_{n_1}) = m(\Phi_{n_2}),$$

что невозможно.