Введение в теорию меры. Семинар 13.05.2020

Задача 5

1. Пусть $\aleph_B$ σ-алгебра борелевских множеств на отрезке $[0,1]$, $\aleph_\mu$ σ-алгебра измеримых множествleph на $[0,1]$.

Докажем, что $\aleph_B \subset \aleph_\mu$. Всякое открытое множество на прямой $\mathbb{R}$ является объединением конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов (Теорема 5, гл.II, параграф 2). Каждое открытое множество на отрезке $[0,1]$является пересечением некоторого открытого множества на $\mathbb{R}$ с $[0,1]$ (оба множества $(1/2,1)$, $(1/2,1]$ открыты в $[0,1]$, хотя первое открыто на $\mathbb{R}$, а второе множество общего вида на $\mathbb{R}$!!). Интервал–элементарное измеримое множетво. Поэтому открытое множество $A \subset [0,1]$– элементарное измеримое. σ-алгебра $\aleph_B$ порождена открытыми множествами относительно операций дополнения, пересечения, объединения. Следовательно, $\aleph_B \subset \aleph_\mu$.

Обратно, $\aleph_\mu$ порождена элементарными измеримыми (по Теореме 5 открытыми на $\mathbb{R} \cap [0,1]$). Следовательно, $\aleph_\mu \subset \aleph_B$.

2. Пусть $\aleph_B$ σ-алгебра борелевских множеств на квадрате $[0,1] \times [0,1]$, $\aleph_\mu$ σ-алгебра измеримых множеств на $[0,1] \times [0,1]$. Включение $\aleph_\mu \subset \aleph_B$ доказывается как в случае 1 (как именно?).

Включение $\aleph_B \subset \aleph_\mu$ выполнено потому, что каждое открытое множество $A \subset [0,1] \times [0,1]$ есть счетное объединение открытых прямоугольников. Это (не элементарное множество) измеримо, поскольку $\aleph_\mu$ σ-алгебра. $\square$

Задача 6

Это Теорема 9, гл.V, параграф 1.

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset, \quad \cap_i A_i = A.$$

Требуется доказать, что

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Достаточно рассмотреть случай $A = \emptyset$. Поскольку в общем случае A–измеримо, это множество можно вычесть из каждого множества убывающей фильтрации и воспользоваться свойством аддитивности меры (каким образом?).

Выполнено:

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots,$$

слагаемые дизъюнктны. По свойству σ–аддитивности

$$\mu(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}.$$

Ряд сходится, по необходимому условию сходимости ряда, при $i \to +\infty$:

$$\mu(A_i) \to 0+. \quad \square$$

Задача 8

Обозначим через A_s – множество точек, которые не имеют 100 нулей подряд, начиная с s. Тогда $\mu(A_s) = 0$ (ограничения накапливаются на хвосте через каждые 100 разрядов, с мерой $\frac{2^{100}-1}{2^{100}} < 1$ независимо. Но

$$A = \cup_{s=1}^{\infty} A_s.$$

Поэтому $\mu(A) = 0$.

Задача 10

Речь идет о мере Стилтьеса на прямой $\mathbb{R}$ с дискретной мерой в точках $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Поскольку

$$\sum_{i}^{\infty} 2^{-i} = 1,$$

то мера всей прямой равна 1. Функция $F(x)$–это функция геометрического распределения вероятности события $\xi = i, \quad i \in \mathbb{N}$. Функция вероятности σ–аддитивная. $\square$

Задача 11

$$F(x) = 0, x \leq 0, \quad F(x) = x + 1, 0 < x \leq 1, \quad F(x) = (x+1)^2, 1 < x.$$

$F(x)$ – неубывающая, непрерывна слева (почему?). Поэтому $\mu((a,b)) = F(b) - F(a+0)$, $\mu([a,b]) = F(b+0) - F(a)$, $\mu((a,b]) = F(b+0) - F(a+0)$, $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$, гл.V, параграф 3, раздел 3.

1. $\mu([0,1]) = F(1+0) - F(0) = 4 - 0 = 4$.

2. $\mu((0,1]) = F(1+0) - F(0+0) = 4 - 1 = 3$.

3. $\mu((1/2, 3/2)) = F(3/2) - (1/2) = \frac{25}{4} - \frac{9}{2} = \frac{7}{4}$.

4. $\mu([1,2)) = F(2) - F(1) = 9 - 2 = 7$.

5. $\mu(\mathbf{Q}) = \mu(1+0) - m(1-0) + \mu(0+0) - \mu(0-0) = 4 - 2 + 1 - 0 = 3$. $\square$

Д.З. к понедельнику 18 мая. Решать листок „Измеримые функции“ (начнем на лекции).

4. Мера μ называется полной, если для $A' \subset A$ из $\mu(A) = 0$ вытекает, что $\mu(A') = 0$. Мера Лебега является полной (почему?).

2. Выберем на отрезке неизмеримое (по Лебегу) множество $A \subset [0,1]$. Характеристическая функция множества A неизмерима (докажите!).