Введение в теорию меры

Опр. 1 *Пусть задано множество X, в нём выделено некоторое семейство подмножеств $\mathcal{A}$. Семейство $\mathcal{A}$ называется алгеброй множеств, если*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) $A \cup B \in \mathcal{A}$ $\forall A$ и $B \in \mathcal{A}$;
3) $A^c \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Семейство множеств $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй множеств, если

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\forall A_n \in \mathcal{A}$;
3) $A^c \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Опр. 2 *Если в X выделена какая-то σ-алгебра множеств $\mathcal{A}$, то пара $(X, \mathcal{A})$ называется измеримым пространством, а элементы $A \in \mathcal{A}$ называются измеримыми (относительно $\mathcal{A}$) множествами.*

1. Образуют ли данные системы множеств алгебру:
а) прямоугольники $< a, b > \times < c, d >$ в $\mathbb{R}^2$ (предполагается, что левый и правый концы промежутков $< a, b >$ и $< c, d >$ могут как принадлежать, так и не принадлежать промежуткам);
б) произвольные конечные множества в $\mathbb{N}$?

2. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Докажите что $\forall A_n \in \mathcal{A}$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

3. Проверьте, что двумерные элементарные множества имеют элементарные дополнения (на примере множеств вида $[a, b) \times [c, d)$).

4. Докажите свойство счётной полуаддитивности меры: если μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

5. Докажите, что σ-алгебра, порождённая элементарными множествами, совпадает с борелевской в $\mathbb{R}$ (предлагается доказать, что каждая из этих σ-алгебр содержит другую).

6. Пусть на σ-алгебре $\mathcal{A}$ множеств некоторого пространства задана мера. Доказать свойство непрерывности сверху: если $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$ и $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, причём $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

7. Найти меру множества всех точек отрезка $[0, 1]$, в двоичном разложении которых на всех чётных местах стоят нули.

8*. Найти меру множества всех точек отрезка $[0, 1]$, двоичное разложение которых содержит бесконечно много серий из двух нулей подряд.

9. Докажите, что если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то её график имеет в $\mathbb{R}^2$ лебегову меру нуль.

10. Пусть $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} :$ либо A, либо $\mathbb{N} \setminus A$ конечно$\}$. Является ли $\mathcal{A}$ алгеброй (σ-алгеброй) в $\mathbb{N}$? Положим $\mu(A) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}: n \in A} 2^{-n}$. Является ли функция μ аддитивной (счётно-аддитивной) на $\mathcal{A}$?

11. Мера Стилтьеса задана обобщённой функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0, \\ x + 1, \ 0 < x \leq 1, \\ (x+1)^2, \ x > 1. \end{cases}$$

Найти меру множеств: $[0, 1]$, $(0, 1]$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $[1, 2)$, $\mathbb{Q}$.