

$$\eta_1 \sim \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}, \eta_2 \sim \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \xi = \eta_1 \oplus \eta_2$$

$$A_{\eta_1} = \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix}, B_{\eta_2} = \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, C_{\xi} = \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix}, p_i + q_i = 1, p_i, q_i > 0 \quad \forall i$$

$$p_3 = p(\eta_1 \oplus \eta_2 = 0) = P\left(\bigcup_{n=0}^1 \{\eta_1 = n, \eta_2 = 0 \oplus n\}\right) = \sum_{n=0}^1 p(\eta_1 = n) * p(\eta_2 = n) = p_1 p_2 + q_1 q_2$$

$$q_3 = p(\eta_1 \oplus \eta_2 = 1) = P\left(\bigcup_{n=0}^1 \{\eta_1 = n, \eta_2 = 1 \oplus n\}\right) = \sum_{n=0}^1 p(\eta_1 = n) * p(\eta_2 = 1 - n) = p_1 q_2 + p_2 q_1$$

Построим в.с. АВ, АВС, АС, исключив из них несовместные события

$$AB_{\eta_1, \eta_2} = \begin{pmatrix} (\theta, \theta) & (\theta, 1) & (1, \theta) & (1, 1) \\ p_1 * p_2 & p_1 * q_2 & q_1 * p_2 & q_1 * q_2 \end{pmatrix}$$

$$ABC_{\eta_1, \eta_2, \xi} = \begin{pmatrix} (\theta, \theta, \theta) & (\theta, 1, 1) & (1, \theta, 1) & (1, 1, \theta) \\ p_1 * p_2 & p_1 * q_2 & q_1 * p_2 & q_1 * q_2 \end{pmatrix}$$

$$AC_{\eta_1, \xi} = \begin{pmatrix} (\theta, \theta) & (\theta, 1) & (1, \theta) & (1, 1) \\ p_1 * p_2 & p_1 * q_2 & q_1 * q_2 & q_1 * p_2 \end{pmatrix}$$

$$\forall k, n_1, n_2 \in \{0, 1\}, k = n_1 \oplus n_2 \Rightarrow I(\xi = k | \eta_1 = n_1, \eta_2 = n_2) =$$

$$-\log(p(\xi = k | \eta_1 = n_1, \eta_2 = n_1)) = -\log \frac{p(\xi = n_1 + n_2, \eta_1 = n_1, \eta_2 = n_1)}{p(\eta_1 = n_1, \eta_2 = n_1)} = -\log 1 = 0$$

Как мы видим для всех исходов условная собственная

информация исхода k из С при условии реализации (n_1, n_2) из АВ равна 0.

Значит и средняя собственная информация схемы С относительно в.с. АВ равна 0,

$$\text{т.е. } H(C | AB) = 0$$

$$\forall k, n_1 \in \{0, 1\} \Rightarrow I(k | n_1) = I(\xi = k | \eta_1 = n_1) = -\log p(\xi = k | \eta_1 = n_1) =$$

$$-\log \frac{p(\xi = k, \eta_1 = n_1)}{p(\eta_1 = n_1)} = -\log \frac{p(\eta_1 + \eta_2 = k, \eta_1 = n_1)}{p(\eta_1 = n_1)} =$$

$$-\log \frac{p(\eta_2 = k \oplus n_1, \eta_1 = n_1)}{p(\eta_1 = n_1)} = -\log p(\eta_2 = k \oplus n_1) = \begin{cases} p_2 & k \oplus n_1 = 0 \\ q_2 & k \oplus n_1 = 1 \end{cases}$$

$$I_{C/A} \sim \begin{pmatrix} I(\theta, \theta) & I(\theta, 1) & I(1, \theta) & I(1, 1) \\ p_3 * p_2 & p_3 * q_2 & q_3 * q_2 & q_3 * p_2 \end{pmatrix}$$

$$H(C | A) =$$

$$I(C | A) = E[I_{C/A}] = -p_3 * p_2 * \log p_2 - p_3 * q_2 * \log q_2 - q_3 * p_2 * \log p_2 - q_3 * q_2 * \log q_2 =$$

$$-(p_1 p_2 + q_1 q_2) * p_2 * \log p_2 - (p_1 p_2 + q_1 q_2) * q_2 * \log q_2 -$$

$$(p_1 q_2 + p_2 q_1) * p_2 * \log p_2 - (p_1 q_2 + p_2 q_1) * q_2 * \log q_2 =$$

$$-(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_2 \log p_2 + q_2 \log q_2) = -(p_2 \log p_2 + q_2 \log q_2)$$

$$\text{Посчитаем для } p_2 = q_2 = \frac{1}{2}$$

$$H(C | A) = -\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right) = \log 2$$