Лекция „Функциональный анализ“ по учебнику А.Н.Колмогоров С.В.Фомин

составил П.М.Ахметьев

13.05.2020

Напоминание

Рассматривается алгебра $\aleph_0$ ограниченных элементарных плоских множеств в прямоугольнике $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$m(E) = (a - b)(c - d),$$

$m(E)$ =длина $\times$ ширина.

Мы определили аддитивную меру, т.е. такую неотрицательную функцию

$$m : \aleph \to [0, m(E)],$$

которая аддитивна:

$$P = \cup_{i=1}^{n} P_i, \quad P_j \cap P_k = \emptyset, \quad k \neq j,$$

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Мы доказали, что мера $m(P)$ корректна определена и не зависит от того, как элементарное множество P разбивается на прямоугольники.

Наша задача – распространить

$$m \mapsto \mu$$

с сохранением достигнутых свойств меру на более широкий класс множеств (с алгебры $\aleph_0$ элементарных множеств на σ–алгебру $\aleph$ борелевских множеств).

Лебегова мера плоских множеств; гл. V, параграф 1, раздел 2

При изложении теории меры мы начнем с того, что предположим, что все множества содержатся в квадрате $E = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1.\}$.

Рассмотрим $A \subset E$, рассмотрим покрытие A конечной или счетной системой прямоугольников, будем записывать для конечного объединения $A \subset \cup_{i=1}^{n} P_i$, для бесконечного $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$; иногда будем сокращать $A \subset \cup P_i$.

Пусть $A = \cup_{i=1}^{\infty} P_i$ покрытие A конечной системой прямоугольников, при этом прямоугольники попарно не пересекаются $P_i \cap P_j = \emptyset$, $i \neq j$. В этом случае будем говорить, что A–элементарное множество. Определим $m(A) = \sum_{i=1}^{N} m(P_i)$. Мера $m(A)$ не зависит от способа разрезания A на элементарные прямоугольники.

Theorem 1. *Если A–элементарное и счетная (или конечная) система A_i элементарных множеств покрывает A: $A \subset \cup_i A_i$, то*

$$m(A) \leq \sum_i m(A_i).$$

Доказательство Теоремы 11

Это было доказано. □

Theorem 2. *Пусть*

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

при этом $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, тогда

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_i).$$

Доказательство Теоремы 2

Действительно, при любом N получится

$$\sum_{i=1}^{N} m(A_i) = m(\cup_{i=1}^{N} A_i) \leq m(A).$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A).$$

Вместе с утверждением Теорем 11 получится

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \quad \square$$

Definition 1. *Внешней мерой ограниченного множества A (возможно, неэлементарного) называется число*

$$\mu^* = inf_{A \subset \cup_i P_i} \sum_i m(P_i).$$

Точная нижняя грань берется по всем элементарным множествам, которые содержат наше множество A.

Proposition 3. *Если A–элементарное множество, то*

$$\mu^*(A) = m(A).$$

Доказательство Предложения 3

Это переформулировка Теоремы 2. $\square$

Theorem 4. *Если $A \subset \cup_i A_i$ система множеств (не обязательно элементарных), то*

$$\mu^*(A) \leq \sum_i \mu^*(A_i).$$

В частности, если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Доказательство Теоремы 13

Внешняя мера определена так, что достаточно провести рассуждение для покрытия элементарными множествами. Это доказано в Теореме 11. $\square$

Definition 2. *Множество A называется измеримым, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется элементарное множество B, что*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Для измеримого множества A определим меру по формуле $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Для построения теории достаточно доказать:

• Совокупность измеримых множеств представляет собой σ-алгебру $\aleph$.

• Функция μ является σ-аддитивной на $\aleph$.

Theorem 5. *Дополнение измеримого множество измеримо.*

Доказательство Теоремы 5

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B. \quad \square$$

Theorem 6. *Измеримые множества образуют алгебру*

Доказательство Теоремы 6

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$
$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]. \quad \square$$

Theorem 7. *Измеримые множества образуют σ-алгебру.*

Доказательство Теоремы 7

Для доказательства нужна лемма (Теорема 6, гл. V, параграф 1б раздел 2).

Lemma 8. *Если $\{A_1, \dots A_n\}$– попарно непересекающиеся измеримые множества, то*

$$\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \quad \square$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – счетная система измеримых множеств,

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Определим

$$B_i = A_i \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Ясно, что

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

при этом

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

По Теореме 6 все множества B_i измеримы. По Лемме 8

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(\cup_{i=1}^{n} B_i) \leq \mu^*(A).$$

Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

сходится. Поскольку

$$C = \cup_{i=1}^{N} B_i$$

измеримо (почему?) найдется элементарное множество D,

$$\mu^*(C \triangle D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку

$$A \triangle D \subset (C \triangle D) \cup (\cup_{i>N} B_i),$$

то

$$\mu^*(A \triangle D) < \varepsilon.$$

Множество A – измеримо. $\square$

Из σ–аддитивности меры вытекает свойство непрерывности (Задача 6).

Theorem 9. *1. Пусть*

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

последовательность измеримых множеств,

$$A = \cap_i A_i.$$

Тогда

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

2. Пусть

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

последовательность измеримых множеств,

$$A = \cup_i A_i.$$

Тогда

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство Теоремы 9

Разбирали на семинаре, Задача 6.

Theorem 10. *Всякое множество A внешней меры нуль измеримо и его мера равна нулю.*

Доказательство Теоремы 9

$$\mu^*(A \triangle \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Мера неограниченных множеств на плоскости

Представим плоскость $\mathbb{R}^2$ как объединение полуоткрытых квадратов

$$E_{n,m} = \{n < x \leq n+1, \quad m < y \leq m+1\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Скажем, что $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, если каждое

$$A_{n,m} = A \cap E_{n,m}$$

измеримо. Определим меру A (которая может принимать как конечные так и бесконечные значения):

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{n,m}).$$

Измеримые функции

Пусть X, Y – множества, $\aleph(X)$, $\aleph(Y)$ σ–алгебры. Нам интересен случай $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$; $\aleph$ σ-алгебра борелевских множеств.

Definition 3. *Скажем, что функция $f : X \to Y$ измерима, если из $A \in \aleph(Y)$ вытекает $f^{-1}(A) \in \aleph(X)$.*

Theorem 11. *Пусть*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

измеримые функции. Тогда композиция $g(f(x))$ измерима. В чстности, непрерывная функция от измеримой функции измерима.

Theorem 12. *Для измеримости $f : X \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall c \quad \{x | f(x) < c\}$$

были измеримы.

Доказательство Теоремы 12

Необходимость понятна, докажем достаточность.

σ–алгебра, порожденная системой полупрямых $(-\infty, c)$ совпадает с борелевской σ-алгеброй (структурная теорема об открытых множеств на прямой). Прообрз $f^{-1}(B)$ борелевского множества $B \in \aleph(\mathbb{R})$ принадлежит $\aleph(X)$. Прообразы порождены прообразами полупрямых и операциями в σ-алгебре $\aleph(X)$. □

Theorem 13. *Сумма, разность, произведение, частное (если знаменатель не обращается в ноль) измеримых функций есть измеримая функция.*

1. Если $f : X \to \mathbb{R}$ измерима, то $af(x) + b$ – измерима (почему?). □

2. Если $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$–измеримы, то $f(x) + g(x)$-измерима. Докажем, что $\{x|f(x) > g(x)\}$–измеримое подмножество в X.

$$\{x|f(x) > g(x)\} = \cup_y \{x|f(x) > y\} \cup \{x|g(x) < y\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны,

$$\{x|f(x) > y\} \cup \{x|g(x) < y\} =$$

$$\cup_{r_{k_1}, r_{k_2}} \{x|f(x) > r_{k_1}\} \cup \{x|g(x) < r_{k_2}\}, \quad r_{k_1} > y, r_{k_2} < y,$$

где r_k–все рациональные числа, занумерованные произвольным способом. Среди совокупности неравенств:

$$\{x|f(x) > r_{k_1}\} \cup \{x|g(x) < r_{k_2}\}, \quad r_{k_1} < r_{k_2},$$

можно перейти к эквивалентному подсемейству (как в гл V, параграф 4, раздел 2, Теорема 3):

$$\{x|f(x) > r_k\} \cup \{x|g(x) < r_k\}.$$

$$\{x|f(x) > g(x)\} = \cup_{r_k}\{x|f(x) > r_k\} \cup \{x|g(x) < r_k\}.$$

По п.1 для любого a

$$\{x|f(x) > g(x) + a\} = \{f(x) + g(x) > a\}$$

измеримо. $\square$

3. Из п.1 и п.2 вытекает, что $f(x) - g(x)$ измерима. $\square$

4. $f(x)g(x)$–измерима. $f(x)g(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$. Справа измеримая функция, как вытекает из п.1, п.2, п.3, Теоремы 11. $\square$

5. Если $f(x)$ измерима и $f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$–измерима. Если $c > 0$, то

$$\{x|\frac{1}{f(x)} < c\} = \{x|f(x) > \frac{1}{c}\} \cup \{x|f(x) < 0\}.$$

Если $c < 0$, То

$$\{x|\frac{1}{f(x)} < c\} = \{x|0 > f(x) > \frac{1}{c}\}.$$

Если $c = 0$, То

$$\{x|\frac{1}{f(x)} < c\} = \{x|C > f(x)\}.$$

Каждое множество измеримо. $\square$