№1.

Зная природу источника сообщений,
то есть энтропию его вероятностной схемы, можно значительно сократить число

последовательностей для перербора значений.

Будем считать иформацию в битах.

1) $l = 100$, $n = 20$

Не зная ничего об источнике будет требоваться перебрать n^l вариантов

$n^l = 20^{100} = 2^{100\log_2 20} \approx 2^{432}$

Однако имея информацию об источнике

при $H_\infty = 1$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{100}$

при $H_\infty = 2$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{200}$

при $H_\infty = 3$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{300}$

при $H_\infty = 4$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{400}$

2) $l = 100$, $n = 32$
Не зная ничего об источнике будет требоваться перебрать n^l вариантов
$n^l = 32^{100} = 2^{100\log_2 32} = 2^{500}$
Однако имея информацию об источнике
при $H_\infty = 1$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{100}$
при $H_\infty = 2$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{200}$
при $H_\infty = 3$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{300}$
при $H_\infty = 4$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{400}$
при $H_\infty = 5$ $\Longrightarrow$ число рассматриваемых слов $= 2^{l*H_\infty} = 2^{500} = n^l$

Данный пример ещё раз показывает, что чем больше энтропия источника,
тем больше вариантов требуется перебрать, чтобы гарантировать достоверность ответа

№2. Пронуперуем монеты.

Пусть A – исходный эксперимент, состоящий из событий :

1) 1 – ая монета фальшивая и она больше остальных

2) 1 – ая монета фальшивая и она меньше остальных

...

17) 9 – ая монета фальшивая и она больше остальных

18) 9 – ая монета фальшивая и она меньше остальных

Вероятность каждого события $p = \dfrac{1}{18}$

Тогда $H(A) = \log 18$

Обозначим за A_k – результат k–ого взвешивание монет на весах (исходы : =, < , >)

Заметим, что $H(A_k) \le \log 3$

Хотим найти такое k, что $H(A \mid A_1 A_2 \ldots A_k) = 0$

Из условия $H(A \mid A_1 A_2 \ldots A_k) = 0$ следует, что

$H(A) = H(A A_1 A_2 \ldots A_k) = H(A_1 A_2 \ldots A_k) \le H(A_1) + \ldots + H(A_k) \le k * H(A_1) = k * H(A_1)$

$\log 18 \le k * \log 3$

Минимальное k при котором это выполняется есть ни что иное, как $k = 3$

№3.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ p(a_1) & \ldots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ p(b_1) & \ldots & p(b_{n-1}) \end{pmatrix},\ p(b_k) = \frac{p(a_k)}{1 - p(a_n)},\ k < n$$

$$H(B) = \frac{p(a_1)}{1 - p(a_n)} \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_1)} + \ldots + \frac{p(a_{n-1})}{1 - p(a_n)} \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_{n-1})}$$

$$p(a_n) * \log \frac{1}{p(a_n)} + (1 - p(a_n)) * \left(\log \frac{1}{1 - p(a_n)} + H(B)\right) =$$

$$p(a_n) * \log \frac{1}{p(a_n)} + (1 - p(a_n)) * \left(\log \frac{1}{1 - p(a_n)} + \frac{p(a_1)}{1 - p(a_n)} \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_1)} + \ldots + \frac{p(a_{n-1})}{1 - p(a_n)} \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_{n-1})}\right) =$$

$$p(a_n) * \log \frac{1}{p(a_n)} + \left((1 - p(a_n)) * \log \frac{1}{1 - p(a_n)} + p(a_1) \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_1)} + \ldots + p(a_{n-1}) \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_{n-1})}\right) =$$

$$p(a_n) * \log \frac{1}{p(a_n)} + \left((1 - p(a_n)) * \log \frac{1}{1 - p(a_n)} + p(a_1) \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_1)} + \ldots + p(a_{n-1}) \log \frac{1 - p(a_n)}{p(a_{n-1})}\right) =$$

$$p(a_n) * \log \frac{1}{p(a_n)} + p(a_{n-1}) \log \frac{1}{p(a_{n-1})} + \ldots + p(a_1) \log \frac{1}{p(a_1)} +$$

$$\left(-(1 - p(a_n)) * \log(1 - p(a_n)) + p(a_1) \log(1 - p(a_n)) + \ldots + p(a_{n-1}) \log(1 - p(a_n))\right) =$$

$$H(A) + \log(1 - p(a_n))\,(-1 + p(a_n) + p(a_{n-1}) + \ldots + p(a_1)) =$$
$$H(A) + \log(1 - p(a_n))\,(-1 + 1) = H(A)$$

№4. Пронуперуем студентов.

Пусть A – исходный эксперимент, состоящий из событий :

1) загадан был 1 – ый студент

2) загадан был 2 – ый студент

...

25) загадан был 25 – ый студент

Вероятность каждого события $p = \frac{1}{25}$

Тогда $H(A) = \log 25$

Обозначим за A_k – результат k-ого вопроса (исходы : "Да", "Нет")

Заметим, что $H(A_k) \leq \log 2$

Хотим найти такое k, что $H(A \mid A_1 A_2 \ldots A_k) = 0$

Из условия $H(A \mid A_1 A_2 \ldots A_k) = 0$ следует, что

$$H(A) = H(A A_1 A_2 \ldots A_k) = H(A_1 A_2 \ldots A_k) \leq H(A_1) + \ldots + H(A_k) \leq k * H(A_1) = k * H(A_1)$$

$$\log 25 \leq k * \log 2$$

Минимальное k при котором это выполняется есть ни что иное, как k = 5

№5.

С помощью программы на компьюете был произведён подсчёт. Идея алгоритма заключается в последовательном подсчёте слов, начиная с наиболее вероятного,

до тех пор, пока суммарная вероятность не превзойдёт α.

Результаты работы программы при разных l и α приведены ниже.

$l \backslash \alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10	7	21	41	64	109	154	229	334	510
20	1239	4803	11 613	20 281	38 615	58 840	103 873	168 514	298 204
30	342 022	1 444 459	3 530 001	7 428 281	14 886 060	25 339 329	46 563 300	87 491 498	176 184 359
40	84 953 587	404 200 225	1 155 557 155	2 821 138 244	5 962 648 227	11 298 007 923	20 843 071 510	42 701 559 437	102 956 618 139