Введение в теорию меры

Опр. 1 *Пусть задано множество X, в нём выделено некоторое семейство подмножеств $\mathcal{A}$. Семейство $\mathcal{A}$ называется алгеброй множеств, если*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) $A \cup B \in \mathcal{A}$ $\forall A$ и $B \in \mathcal{A}$;

3) $A^c \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Семейство множеств $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй множеств, если

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\forall A_n \in \mathcal{A}$;

3) $A^c \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Опр. 2 *Если в X выделена какая-то σ-алгебра множеств $\mathcal{A}$, то пара $(X, \mathcal{A})$ называется измеримым пространством, а элементы $A \in \mathcal{A}$ называются измеримыми (относительно $\mathcal{A}$) множествами.*

1. Образуют ли данные системы множеств алгебру:
а) прямоугольники $< a, b > \times < c, d >$ в $\mathbb{R}^2$ (предполагается, что левый и правый концы промежутков $< a, b >$ и $< c, d >$ могут как принадлежать, так и не принадлежать промежуткам);
б) произвольные конечные множества в $\mathbb{N}$?

2. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Докажите что $\forall A_n \in \mathcal{A}$ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

3. Проверьте, что двумерные элементарные множества имеют элементарные дополнения (на примере множеств вида $[a, b) \times [c, d)$).

4. Докажите свойство счётной полуаддитивности меры: если μ — мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

5. Докажите, что σ-алгебра, порождённая элементарными множествами, совпадает с борелевской в $\mathbb{R}$ (предлагается доказать, что каждая из этих σ-алгебр содержит другую).

6. Пусть на σ-алгебре $\mathcal{A}$ множеств некоторого пространства задана мера. Доказать свойство непрерывности сверху: если $A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$ и $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, причём $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

7. Найти меру множества всех точек отрезка $[0, 1]$, в двоичном разложении которых на всех чётных местах стоят нули.

8. Найти меру множества всех точек отрезка $[0, 1]$, двоичное разложение которых содержит бесконечно много серий из ста нулей подряд.

9. Докажите, что если $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то её график имеет в $\mathbb{R}^2$ лебегову меру нуль.