Лекция „Функциональный анализ“ по учебнику А.Н.Колмогоров С.В.Фомин

составил П.М.Ахметьев

27.04.2020

Напоминание

Рассматривается алгебра $\aleph_0$ ограниченных элементарных плоских множеств в прямоугольнике $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$m(E) = (a-b)(c-d),$$

$m(E)$ =длина $\times$ ширина.

Мы определили на прошлой лекции аддитивную меру, т.е. такую неотрицательную функцию

$$m : \aleph \to [0, m(E)],$$

которая аддитивна:

$$P = \cup_{i=1}^{n} P_i, \quad P_j \cap P_k = \emptyset, \quad k \neq j,$$

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Мы доказали, что мера $m(P)$ корректна определена и не зависит от того, как элементарное множество P разбивается на прямоугольники.

Наша задача – распространить

$$m \mapsto \mu$$

с сохранением достигнутых свойств меру на более широкий класс множеств (с алгебры $\aleph_0$ элементарных множеств на σ–алгебру $\aleph$ борелевских множеств).

Лебегова мера плоских множеств; гл. V, параграф 1, раздел 2

При изложении теории меры мы начнем с того, что предположим, что все множества содержатся в квадрате $E = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1.\}$.

Рассмотрим $A \subset E$, рассмотрим покрытие A конечной или счетной системой прямоугольников, будем записывать для конечного объединения $A \subset \cup_{i=1}^{n} P_i$, для бесконечного $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$; иногда будем сокращать $A \subset \cup P_i$.

Пусть $A = \cup_{i=1}^{\infty} P_i$ покрытие A счетной системой прямоугольников, при этом прямоугольники попарно не пересекаются $P_i \cap P_j = \emptyset$, $i \neq j$. В этом случае будем говорить, что A–элементарное множество (на прошлой лекции мы так говорили в более узком смысле, только если система состояла из конечного числа прямоугольников). Определим $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i)$. Докажем, что $m(A)$ не зависит от способа разрезания A на элементарные прямоугольники.

На прошлой лекции было доказано для случая случая $m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i)$. Доказательство проходит в общем случае.

Пусть $A = \cup_i P_i = \cup_j Q_j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$. Поскольку $P_i \cap P_j$, $Q_i \cap Q_j$ – прямоугольник, то можно объединить разрезы, даже если их бесконечное число:

$$\sum_i m(P_i) = \sum_{i,j} m(P_i \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

Theorem 1. *Если A–элементарное и счетная (или конечная) система A_i элементарных множеств покрывает A: $A \subset \cup_i A_i$, то*

$$m(A) \leq \sum_i m(A_i).$$

Доказательство Теоремы 1

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое элементарное множество $B \subset A$, удовлетворяющее условию (почему?)

$$m(B) \geq m(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для каждого A_n можно найти открытое C_n, $A_n \subset C_n$, удовлетворяющее условию:

$$m(C_n) \leq m(A_n) + \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Понятно, что

$$B \subset A \subset \cup_i C_i.$$

Из $\{C_i\}$ можно выбрать конечное подпокрытие для B (почему?), при этом:

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{s} m(A_{n_i}).$$

Здесь используется конечность покрытия. В сумме лишь конечное число слагаемых, справедливость еравенства для конечного числа слагаемых была доказана на пршлой лекции. Поэтому

$$m(A) \leq m(B) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m(C_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\sum_n m(C_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_n m(A_n) + \sum_\varepsilon 2^{-n-1} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n m(A_n) + \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ получится:

$$m(A) \leq \sum_n m(A_n) + \varepsilon,$$

$$m(A) \leq \sum_n m(A_n). \quad \square$$

Мы уже знали, что мера элементарных множеств обладает свойством конечной аддитивности. Из Теоремы 1 вытекает свойство σ-аддитивности (счетной аддитивности) меры элементарных множеств. Но это еще не то, что требуется. Требуется научится измерять не только элементарные множества, но и множества из более широкого класса.

Theorem 2. *Пусть*

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

при этом $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, *тогда*

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_i).$$

Доказательство Теоремы 2

Действительно, при любом N получится

$$\sum_{i=1}^{N} m(A_i) = m(\cup_{i=1}^{N} A_i) \leq m(A).$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A).$$

Вместе с утверждением Теорем 1 получится

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \quad \square$$

Definition 1. *Внешней мерой ограниченного множества* A *(возможно, неэлементарного) называется число*

$$\mu^* = inf_{A \subset \cup_i P_i} \sum_i m(P_i).$$

Тчная нижняя грань берется по всем элементарным множествам, которые содержат наше множество A.

Proposition 3. *Если* A*–элементарное множество, то*

$$\mu^*(A) = m(A).$$

Доказательство Предложения 3

Это переформулировка Теоремы 1. $\square$

Theorem 4. *Если $A \subset \cup_i A_i$ система множеств (не обязательно элементарных), то*

$$\mu^*(A) \leq \sum_i \mu^*(A_i).$$

В частности, если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Definition 2. *Множество A называется измеримым, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется элементарное множество B, что*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Для измеримого множества A определим меру по формуле $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Для построения теории достаточно доказать:

• Совокупность измеримых множеств представляет собой σ-алгебру $\aleph$.

• Функция μ является σ-аддитивной на $\aleph$.

Theorem 5. *Дополнение измеримого множество измеримо.*

Доказательство Теоремы 5

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B. \quad \square$$

Theorem 6. *Измеримые множества образуют алгебру*

Доказательство Теоремы 6

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$
$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]. \quad \square$$

Theorem 7. *Измеримые множества образуют σ-алгебру.*

Доказательство Теоремы 7

Для доказательства нужна лемма (Теорема 6, гл. V, параграф 1б раздел 2).

Lemma 8. *Если* $\{A_1, \dots A_n\}$*– попарно непересекающиеся измеримые множества, то*

$$\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i). \quad \square$$

Пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ – счетная система измеримых множеств,

$$A = \cup_{i=1}^\infty A_i.$$

Определим

$$B_i = A_i \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Ясно, что

$$A = \cup_{i=1}^\infty B_i,$$

при этом

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

По Теореме 6 все множества B_i измеримы. По Лемме 8

$$\sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu(\cup_{i=1}^n B_i) \leq \mu^*(A).$$

Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$$

сходится. Поскольку

$$C = \cup_{i=1}^N B_i$$

измеримо (почему?) найдется элементарное множество D,

$$\mu^*(C \triangle D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку
$$A\triangle D \subset (C\triangle D) \cup (\cup_{i>N} B_i),$$
то
$$\mu^*(A\triangle D) < \varepsilon.$$
Множество A – измеримо. $\square$

Из σ–аддитивности меры вытекает свойство непрерывности (Задача 6).

Theorem 9. *1. Пусть*
$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$
последовательность измеримых множеств,
$$A = \cap_i A_i.$$
Тогда
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. Пусть
$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$
последовательность измеримых множеств,
$$A = \cup_i A_i.$$
Тогда
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство Теоремы 9

Докажем 1. Достаточно рассмотреть случай $A = \emptyset$ (почему?). По σ-аддитивности
$$\mu(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Ряд сходится. Поэтому

$$\mu(A_n) \to 0, \quad n \to +\infty. \quad \square$$

Theorem 10. *Всякое множество A внешней меры нуль измеримо и его мера равна нулю.*

Доказательство Теоремы 9

$$\mu^*(A \triangle \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Мера неограниченных множеств на плоскости

Представим плоскость $\mathbb{R}^2$ как объединение полуоткрытых квадратов

$$E_{n,m} = \{n < x \leq n+1, \quad m < y \leq m+1\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Скажем, что $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, если каждое

$$A_{n,m} = A \cap E_{n,m}$$

измеримо. Определим меру A (которая может принимать как конечные так и бесконечные значения):

$$\mu(A) = \sum_{n,m} \mu(A_{n,m}).$$

Замечание о мере конечномерных измеримых множеств

Мера определяется для конечномерных множеств в $\mathbb{R}^n$ по аналогии со случаем $n = 2$.

Замечание к Задаче 5 (Доказать, что борелевская и элементарная σ-алгебры совпадают

Всякое открытое множество есть объединение не более чем счетного числа прямоугольников (почему?) Каждое открытое множество принадлежит σ-алгебре элементарных измеримых множеств.

Кольцо открытых множества на плоскости не описывается также просто, как кольцо открытых множеств на прямой (гл.II, параграф 2, раздел 5, Теорема 5). Поэтому решение задачи лучше провести для алгебр множеств на вещественной прямой.

Каждое замкнутое множество измеримо (почему?).

Мера Стильтьеса

Пусть $F(t)$ – некоторая неубывающая непрерывная слева функция на прямой. Определим

$$m(a,b) = F(b) - F(a+0), \quad m([a,b] = F(b+0) - F(a).$$

Это определяет нестандартную меру μ_F на прямой. При любой F борелевские множества (измеримые в стандартной мере на прямой) будут измеримы в нестандартной мере μ_F.