№1.

а) Распределение Бернулли

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \qquad 0 < p < 1$$

$$H(A) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

б) Биномиальное распределение $(Bi(n, p))$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & p(1-p)^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

$$H(A) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \log\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right) =$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \left(\log\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) + k\log p + (n-k)\log(1-p)\right) =$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \log\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) -$$

$$\log p \sum_{k=0}^{n} \frac{n! * k}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - \log(1-p) \sum_{k=0}^{n} \frac{n! * (n-k)}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n! * k}{k!(n-k)!} p^n (1-p)^{n-k} =$$

$$p\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = p * n * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} = p * n,$$

так как третий множитель есть сумма всех вероятностей распределения $Bi(n-1, p)$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n! * (n-k)}{k!(n-k)!} p^n (1-p)^{n-k} = (1-p) * n * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^n (1-p)^{n-k-1} = (1-p) * n,$$

по тому же правилу

Итого имеем

$$H(A) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k} \log\binom{n}{k} - n * (p\log p + (1-p)\log(1-p))$$

в) Геометрическое $(\overline{Bi}(1, p))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots \\ p & \dots & p(1-p)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \log\left(p(1-p)^{k-1}\right) = -\log p \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} - \log(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = 1,$$ как сумма всех вероятностей

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1-p}{p},$$ как математическое ожидание Геометрического распределения

Итого имеем

$$H(A) = -\log p - \frac{1-p}{p}\log(1-p)$$

г) Цепь маркова с начальным вектором распределения $\overline{p}$ = $(p_1, p_2) = (p, 1-p)$ и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Обозначим Q_1 и Q_2 за 1 ую и 2 ую строки матрицы Q

Тогда $H(Q) = \sum_{i=1}^{2} p_i * H(Q_i)$

$$H(Q_1) = -(1-p)\log(1-p) - p\log p = H(Q_2)$$

Имеем

$$H(Q) = \left(-(1-p)\log(1-p) - p\log p\right)\sum_{i=1}^{2} p_i = -(1-p)\log(1-p) - p\log p$$

д) Отрицательное Биноимальное распределение $\left(\overline{Bi}(n, p)\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & k & \ldots \\ p^n & \ldots & \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k & \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & k & \ldots \\ p^n & \ldots & \binom{n+k}{k} p^{n+1} (1-p)^k & \ldots \end{pmatrix}$$

$$H(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \log\left(\binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k\right) =$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k \log\frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} -$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k n\log p - -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k\, k\log(1-p) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k n\log p = n\log p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k = n\log p,$$

так как третий множитель - это сумма всех вероятностей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k\, k\log(1-p) = \log(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! * (n-1)!} p^n (1-p)^k =$$

$$\log(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^{k+1} =$$

$$n\frac{(1-p)}{p}\log(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k! * n!} p^{n+1} (1-p)^k = n\frac{(1-p)}{p}\log(1-p),$$

так как третий множитель - это сумма всех вероятностей распределение $\overline{Bi}(n+1, p)$

Итого имеем

$$H(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} p^n (1-p)^k \log\frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!} - n\log p - n\frac{(1-p)}{p}\log(1-p)$$

е) Гипергеометрического расрпделения $(HG(N, M, n))$, $(n \le M \le N)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & k & \ldots & n \\ \frac{(N-M)!\,(N-n)!}{(N-M-n)!\,N!} & \ldots & \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \ldots & \frac{M!\,(N-n)!}{N!\,(M-n)!} \end{pmatrix}$$

$$H(A) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \log \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} =$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \left(\log\binom{M}{k} + \log\binom{N-M}{n-k} + \log\binom{N}{n}\right) =$$

$$-\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \left(\log\binom{M}{k} + \log\binom{N-M}{n-k}\right) - \log\binom{N}{n}$$

ж) Логарифмическое

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & k & \ldots \\ -\frac{p}{\ln(1-p)} & \ldots & -\frac{p^k}{k\ln(1-p)} & \ldots \end{pmatrix}$$

$H(A) =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k\ln(1-p)} \log \frac{-p^k}{k\ln(1-p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k\ln(1-p)} \left(k\log p - \log k - \log\left(-\ln(1-p)\right)\right) =$$

$$\frac{\log p}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{\infty} p^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k \log k}{k\ln(1-p)} - \log\left(-\ln(1-p)\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k\ln(1-p)} =$$

$$\frac{\log p}{\ln(1-p)} \frac{1}{1-p} - \log\left(-\ln(1-p)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k \log k}{k\ln(1-p)}$$

з) Цепь маркова с начальным вектором распределения $\overline{p} = (p_1, p_2) = (0.1, 0.9)$ и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{2} p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = 0.4\log\frac{10}{4} + 0.6\log\frac{10}{6} =$$

$$\log 2 + \log 5 - 0.8\log 2 - 0.6\log 2 - 0.6\log 3 = \log 5 - 0.6\log 3 - 0.4\log 2$$

$$H(Q_2) = 0.3\log\frac{10}{3} + 0.7\log\frac{10}{7} = \log 2 + \log 5 - 0.3\log 3 - 0.7\log 7$$

$$H(Q) = 0.1\left(\log 5 - 0.6\log 3 - 0.4\log 2\right) + 0.9\left(\log 2 + \log 5 - 0.3\log 3 - 0.7\log 7\right) =$$

$$\log 5 + 0.86\log 2 - 0.33\log 3 - 0.63\log 7$$

и) Цепь маркова с начальным вектором распределения $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3) = (0.1, 0.2, 0.7)$ и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{3} p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = 0.2\log 5 + 0.3\log\frac{10}{3} + 0.5\log 2 = 0.5\log 5 + 0.8\log 2 - 0.3\log 3$$

$$H(Q_2) = 0.3\log\frac{10}{3} + 0.4\log\frac{5}{2} + 0.3\log\frac{10}{3} = \log 5 + 0.2\log 2 - 0.6\log 3$$

$$H(Q_3) = 0.4\log\frac{5}{2} + 0.5\log 2 + 0.1\log 10 = 0.5\log 5 + 0.2\log 2$$

$$H(Q) = 0.1\,(0.5\log 5 + 0.8\log 2 - 0.3\log 3) + 0.2\,(\log 5 + 0.2\log 2 - 0.6\log 3) + 0.7\,(0.5\log 5 + 0.2\log 2) = 0.6\log 5 + 0.26\log 2 - 0.15\log 3$$

к) Цепь маркова с начальным вектором распределения $\overline{p}$ = $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0.1, 0.2, 0.5, 0.2)$ и матрицей переходных состояний

$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$$

$$H(Q) = \sum_{i=1}^{4} p_i * H(Q_i)$$

$$H(Q_1) = 0.1\log 10 + 0.2\log 5 + 0.3\log\frac{10}{3} + 0.4\log\frac{5}{2} = \log 5 - 0.3\log 3$$

$$H(Q_2) = 0.2\log 5 + 0.3\log\frac{10}{3} + 0.2\log 5 + 0.3\log\frac{10}{3} = \log 5 + 0.6\log 2 - 0.6\log 3$$

$$H(Q_3) = 0.3\log\frac{10}{3} + 0.4\log\frac{5}{2} + 0.2\log 5 + 0.1\log 10 = \log 5 - 0.3\log 3$$

$$H(Q_4) = 0.5\log 2 + 0.1\log 10 + 0.1\log 10 + 0.3\log\frac{10}{3} = 0.5\log 5 + \log 2 - 0.3\log 3$$

$$H(Q) = 0.1\,(\log 5 - 0.3\log 3) + 0.2\,(\log 5 + 0.6\log 2 - 0.6\log 3) + 0.5\,(\log 5 - 0.3\log 3) + 0.2\,(0.5\log 5 + \log 2 - 0.3\log 3) = 0.9\log 5 + 0.32\log 2 - 0.36\log 3$$