Лекция „Функциональный анализ“ по учебнику А.Н.Колмогоров С.В.Фомин

составил П.М.Ахметьев

18.05.2020

Интеграл Лебега

Простые функции

Опредление 1. *Измеримая функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *называется простой, если она принимает не более, чем счетное число значений* $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. *В этом случае условие измеримости функции эквивалентно условию измеримости каждого множества*

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}.$$

Theorem 1. *Функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *измерима, тогда и только тогда, когда эта функция является пределом равномерно-сходящейся последовательности простых функций.*

Доказательство Теоремы 1

Достаточность. Доказательство см. гл.V, параграф 4, Теорема 4.

Необходимость. Для измеримой $f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определим $f_n(x) = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{(m+1)}{n}$. Функция $f_n(x)$–простая (почему?). Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, поскольку

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}. \quad \square$$

Интеграл лебега для простых функций

Пусть f-простая функция, $\{y_1, \dots, y_n, \dots\}$–все ее различные значения. Пусть $A \subset X$–измеримое подмножество. Определим

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \quad A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\},$$

если этот ряд абсолютно сходится.

Мы предположили, что все значения различны. Удобно от этого условия отказаться.

Lemma 2. *Пусть* $A = \cup_k B_k, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j$, *пусть на* B_k *функция* f *принимает значение* c_k. *Тогда*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Функция f *интегрируема на* A, *тогда и только тогда, когда ряд в правой части абсолютно сходится.*

Доказательство Леммы 2

Каждое A_n является объединением тех B_k, для которых $c_k = y_n$. Поэтому

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Ряды в правой и левой частях равенства абсолютно сходятся или расходятся одновременно. □

Свойства интеграла Лебега от простых функций

1. Аддитивность: $\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$, из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой части.

Доказательство. Пусть f принимает значение f_i на $F_i \subset A$, g принимает значение g_j на $G_j \subset A$. При этом:

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i),$$

$$J_2 = \int_A g(x) d\mu = \sum_j g_j \mu(F_j).$$

Тогда

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(F_i \cap G_j).$$

Из абсолютной сходимости рядов J_1, J_2 следует абсолютная сходимость ряда J и

$$J_1 + J_2 = J. \quad \square$$

2. $\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$, причем оба интеграла существуют одновременно.

3. Пусть $|f(x)| \leq M$, $x \in A$. Тогда:

$$|\int_A f(x) d\mu| \leq M\mu(A).$$

Интеграл Лебега от измеримых функций на множестве конечной меры

Пусть $\{f_n(x)\}$ измеримые и равномерно сходятся к f на A. Тогда

1. $I = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x) d\mu$ существует (почему?).

2. Этот предел I не зависит от выбора $\{f_n(x)\}$ (почему?).

3. Если $f(x)$–простая, то предел I интегралов для $f(x)$ совпадает с интегралом от простой функции $f(x)$ (почему?).

Определим интеграл Лебега по формуле:

$$\int_A f(x) d\mu = I.$$

Свойства интеграла Лебега

1. $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$ (почему?).

2. $\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$, причем оба интеграла существуют одновременно.

3. Аддитивность: $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$, из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой части.

4. Ограниченность. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ измерима и ограничена по абсолютной величине на $A \subset X$ неотрицательной константой C. Тогда f–интегрируема и $|\int_A f(x)d\mu| < \mu(A)C$.

5. Монотонность. Если $f(x) \geq 0$, то $\int_A f(x)d\mu \geq 0$.

Доказательство. Если $f(x)$ – простая, то это очевидно. Если $f(x)$–измеримая, то найдется последовательность неотрицательных простых функций $\{f_n(x)\}$, равномерно аппроксимирующих $f(x)$ на A (почему?). $\square$

Следствие. Если $f(x) \geq g(x)$, то $\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu$. В частности, если $m \leq f(x) \leq M$, то $m\mu(A) \leq \int_A f(x)d\mu \leq M\mu(A)$.

6. Если $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x)d\mu = 0$.

7. Если почти всюду (т.е. за исключением точек из множества нулевой меры) $f(x) = g(x)$, то $\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu$, причем

оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

8. Если $\varphi(x)$ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leq \varphi(x)$, то $f(x)$ также интегрируема на A.

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x)$, $f(x)$–простые функции. Тогда A (м.б. после удаления множества меры нуль, из условия) представлено в виде конечного или счетного объединения измеримых множеств, на которых $f(x)$, $\varphi(x)$ постоянны,

$$A = \cup_i A_i, \quad f(x) = a_i, \varphi(x) = b_i, \quad x \in A_i, \quad |a_i| \leq b_i.$$

Из интегрируемости $\varphi(x)$ следует, что

$$\sum_n |a_n|\mu(A_n) \leq \sum_n b_n\mu(A_n) = \int_A \varphi(x)d\mu.$$

Поэтому $f(x)$ интегрируема и

$$|\int_A f(x)d\mu| = |\sum_n a_n\mu(A_n)| \leq$$

$$\sum |a_n|\mu(A_n) = \int_A |f(x)|d\mu \leq \int_A \varphi(x)d\mu.$$

В общем случае требуется провести предельный переход по равномерно-сходящейся последовательности простых измеримых функций. □

9. Интегралы

$$I_1 \int_A f(x)d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|d\mu$$

существуют или не существуют одновременно (в предположении, что $f(x)$ измерима).

Доказательство. Из существования I_2 вытекает существование I_1 по свойству 8. Обратное для простой функции проверяется непосредственно, а для измеримый требуется предельный переход. □

Неравенство Чебышева

Если $\varphi(x) \geq 0$ на A, $c > 0$, то

$$\mu\{x|x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Действительно, пусть

$$A'(c) = \{x|x \in A, \varphi(x) \geq c\}.$$

Тогда

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi(x) d\mu + \int_{A \setminus A'(c)} \varphi(x) d\mu \geq$$

$$\int_{A'(c)} \varphi(x) d\mu \geq c\mu(A'(c)). \quad \square$$

Следствие. Если

$$\int_A |f(x)| d\mu = 0,$$

то $f(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. Из неравенства Чебышева:

$$\mu\{x|x \in A, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\} \leq n \int_A |f(x)| d\mu = 0,$$

для всех n. Поэтому

$$\mu\{x|x \in A, f(x) \neq 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x|x \in A, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\} = 0. \quad \square$$

Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Определение. Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$, $\mu(X) = +\infty$, называется суммируемой, если для любого $A \subset X$, $\mu(A) < \infty$, f суммируема и для возрастающей фильтрации

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots ... = X$$

измеримыми подмножествами существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{X_n} f(x) d\mu,$$

который, предполагается, не зависит от выбора фильтрации. Этот предел обозначается через

$$\int_X f(x) d\mu.$$

Сравнение интеграла Римана и Лебега

Теорема. Если существует интеграл Римана

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

то $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Доказательство. Мы опустим технические детали (несложные) и докажем теорему для непрерывных функций. Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на 2^n равных отезков. Рассмотрим нижнюю и верхнюю интегральные суммы Дарбу:

$$\omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{n=1}^{2^n} m_{n,k},$$

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{n=1}^{2^n} M_{n,k},$$

где $M_{n,k}$–верхняя грань $f(x)$ на $[x_{k-1} \leq x \leq x_k$, $m_{n,k}$–нижняя грань $f(x)$ на том же отрезке.

Понятно, что верхняя $\bar{f}_n(x)$ и нижняя $\underline{f}_n(x)$ мажоранты Дарбу являются простыми функциями и

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x)d\mu = \Omega_n,$$

$$\int_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = \omega_n.$$

При этом $\bar{f}_n(x) \mapsto f(x)$, $\underline{f}_n(x) \mapsto f(x)$. □

Замечание 1. Функция Дирихле на $[0,1]$ (что это?) интегрируема по Лебегу, но не интегрируема по Риману. Любая функция $f(x) \geq 0$, для которой несобственный интеграл Римана 1 рода

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

существует, интегрируема по Лебегу и

$$I = \int_{a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Замечание 2. Несобственный интеграл

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

который не являетя абсолютно сходящимся,

$$+\infty = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|dx,$$

не существует как интегра Лебега.

Например,
$$\int \frac{1}{x} sin(\frac{1}{x}) dx$$
существует как интеграл Римана, но не существует как интеграл Лебега.

Если рассматривается несобственный интеграл второго рода (по всей прямой), то если интеграл Римана абсолютно сходится, то совпадает с интегралом Лебега. Если Римана интеграл 2 рода сходится условно, например,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \pi,$$
то интеграл Лебега не существует.

Приложения гл. VII

Пространство L_1

Пусть X–пространство с лебеговой мерой μ (для простоты формулировок, считаем, что X-отрезок или квадрат), $L_1(X, \mu)$–нормированное линейное пространство классов эквивалентности измеримых интегрируемых по Лебегу функций с нормой
$$||f|| = \int |f(x)| d\mu.$$
Функции $f(x)$, $g(x)$ эквивалентны друг другу, если функция $f(x) - g(x)$ имеет нулевую норму.

Theorem 3. *1. Пространство $L_1(X, \mu)$ полно.*

2. Множество непрерывных функций плотно в $L_1(X, \mu)$.

3. Пространство $L_1(X, \mu)$ сепарабельно, в нем существует счетное всюду плотное множество.

Пространство L_2

Пространство $L_1(X, \mu)$–евклидово линейное пространство классов эквивалентности измеримых функций с интегрируемым квадратом:

$$||f||^2 = \int |f^2(x)| d\mu.$$

Функции $f(x)$, $g(x)$ эквивалентны друг другу, если функция $f(x) - g(x)$ имеет нулевую норму.

Theorem 4. *1. Пространство $L_2(X, \mu)$-полно.*

2. Пространство $L_2(X, \mu)$ вложено в $L_1(X, \mu)$ (по неравенству Коши-Буняковского).

3. Множество непрерывных функций плотно в $L_1(X, \mu)$.

4. Пространство $L_1(X, \mu)$ сепарабельно, в нем существует счетное всюду плотное множество.

В пространстве $L_1(X, \mu)$ применяется эргодическая теория и строятся инварианты динамических систем. В пространстве $L_2(X, \mu)$ применяется разложение по ортогональным системам (если X-отрезок или квадрат) или разложения в интеграл Фурье. Для случая $X = [-\pi, +\pi]$ применяются тригонометрические ряды, для $X = [-1, +1]$–многочлены Лежандра, Чебышева; для $X = (-\infty, +\infty)$ многочлены Эрмита, для $X = (0, +\infty)$–многочлены Лагерра.