Интеграл Лебега. Семинар 24.05.2020

Задача 1

Функция Дирихле $D(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, $D(x) = 1$, если $x \in \mathbf{Q}$, является измеримой на $[0, 1]$. Это простая измеримая функция. По определению

$$\int_{[0,1]} D(x) d\mu = \mu([0, 1] \cap \mathbf{Q}).$$

Множество $\mathbf{Q}$–счетно. Любое счетное подмножество в $[0, 1]$ имеет меру нуль. Поэтому $\mu([0, 1] \cap \mathbf{Q}) = 0$, $\int_{[0,1]} D(x) d\mu = 0$. $\square$

Интересно отметить, что $D(x)$ не интегрируема по Риману, поскольку при любом разбиении Υ отрезка $[0, 1]$ калибра $\delta(\Upsilon) > 0$, верхний интеграл Дарбу $W(\Upsilon) = 1$, нижний интеграл Дарбу $w(\Upsilon) = 0$. Разность $W(\Upsilon) - w(\Upsilon) = 1$ не является бесконечно-малой при $\delta(\Upsilon) \to 0+$.

Задача 2

Произвольная измеримая функция является пределом равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций (гл.5, параграф 5, раздел 1, Теорема 2). Определим $f_n(x) = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Функция $f_n(x)$ простая и последовательность $f_n(x)$ равномерно при $n \to \infty$ сходится к $f(x)$. Пусть $0 \leq g(x) \leq f(x)$, причем обе функции измеримые, а функция $f(x)$–интегрируема. Докажем, что $g(x)$–интегрируема.

Рассмотрим последовательности $g_n(x)$, $f_n(x)$ простых функций, которые равномерно аппроксимируют функции $g(x)$, $f(x)$. Поскольку выполнено неравенство $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то выполнено неравенство $0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)$. По определению интеграла от простых функций, $\int_X g_n(x)d\mu = \sum_m \frac{m}{n}\mu(A_{n,m})$, где $A_{n,m} \subset X$–измеримое множество точек, для которых $g_n(x) = \frac{m}{n}, \quad x \in A_{n,m}$. Аналогично, $\int_X f_n(x)d\mu = \sum_k \frac{k}{n}\mu(B_{n,k})$, где $B_{n,k} \subset X$–измеримое множество точек, для которых $f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad x \in B_{n,k}$.

Обозначим $C_{n,m,k} \subset X$ измеримое подмножество $A_{n,m} \cap B_{n,k} = C_{n,m,k}$ По построению при любом фиксированном n, если $(m,k) \neq (m',k')$, то получим: $C_{n,m,k} \cap C_{n,m',k'} = \emptyset$. Поэтому $\int_X g_n(x)d\mu \sum_{m,k} \frac{m}{n}\mu(C_{n,m,k}), \quad \int_X g_n(x)d\mu \sum_{k,m} \frac{k}{n}\mu(C_{n,k,m})$. Справедливо неравенство: $0 \leq \frac{m}{n}\mu(C_{n,m,k}) \leq \frac{k}{n}\mu(C_{n,k,m})$, поскольку $g(x) \leq f(x)$ и $\frac{m}{n} \leq g(x) < \frac{m+1}{n}$, $\frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}$, $x \in C_{n,m,k}$. Ряд $F_n = \sum_{k,m} \frac{m}{n}\mu(C_{n,k,m}) = \sum_m \frac{m}{n}\mu(A_{n,m})$, при $n \to +\infty$ сходится к $\int_X f(x)d\mu$. Ряд $G_n = \sum_{k,m} \frac{k}{n}\mu(C_{n,k,m}) = \sum_k \frac{k}{n}\mu(C_{n,k})$ сходится (из-за равномерности аппроксимации этот ряд удовлетворяет критерию Коши с тем же значением $N = N(\varepsilon)$, что и ряд $\sum_m \frac{m}{n}\mu(A_{n,m})$). Пользуясь переходом к пределу в двойном неравенстве, заключаем, что

$$0 \leq \int_X g(x)d\mu \leq \int_X f(x)d\mu. \quad \square$$

Задача 3

В задаче 2 при каждом n рассмотрим для простых функций неравенство: $g_n(x) \le f_n(x)$ и напишем $\tilde{g}_n = g_n(x) \le f_n(x)$: поскольку $\tilde{g}(x) = min(f(x), g(x))$ получится $\tilde{g}_n(x) = min(g_n(x), f_n(x)) = g_n(x)$. $\square$

Задача 4

Неравенство Чебышева. Пусть $\varphi(x) \ge 0$, $x \in A$, $c > 0$, тогда

$$\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \ge c\} \le \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Доказали на лекции (гл.V, параграф 5, раздел 4).

Применяют в теории вероятностей. Пусть функция $p(x)dx = d\mu$–вероятностная мера, т.е. $p(x) \ge 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu = 1.$$

Пусть существует второй момент $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu = M\xi^2$, где ξ–случайная величина с плотностью $d\mu$. Тогда $\mu\{x \in \mathbb{R} : x^2 \ge \varepsilon^2\} = P(\xi^2 \ge \varepsilon^2) = P(|\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}$. Здесь $P(|\xi| \ge \varepsilon) = \int_A d\mu$, $A = (-\infty, -\varepsilon) \cup (+\varepsilon, +\infty)$, $\varphi(x) = x^2$, $M\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu$.