Измеримые функции

Опр. 1 *Пусть на измеримом пространстве* $(X, \mathcal{A})$ *задана вещественнозначная функция* $f(x)$, $x \in X$. *Эта функция называется измеримой, если для любого вещественного* $c \in \mathbb{R}$ *множество* $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$.

Теорема 1 (Лемма о вариантах определения измеримости) *Пусть* $(X, \mathcal{A})$ *— измеримое пространство,* $f : X \to \mathbb{R}$. *Функция* $f(x)$ *измерима <=> выполнено одно из четырёх эквивалентных условий:*

1) $\forall c \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) \geq c\} \in \mathcal{A}$;
2) $\forall c \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) > c\} \in \mathcal{A}$;
3) $\forall c \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$;
4) $\forall c \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$.

1. Считая $f(x)$ измеримой, установить измеримость функций:
а) $|f(x)|$;
б) $f^n(x),\ n \in \mathbb{N}$;
в) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\},\ f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$.

2. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ задана σ-алгера измеримых по Лебегу множеств $\tilde{\mathcal{B}}_1$. Приведите пример функции, не являющейся измеримой относительно измеримого пространства $(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{B}}_1)$.

3. Покажите, что из измеримости $|f(x)|$ не следует измеримость $f(x)$.

4. Пусть μ — полная мера. Если $f(x) = 0$ вне множества меры 0, то $f(x)$ измерима.

5. Если $f(x)$ определена на всём $\mathbb{R}$ и имеет конечное число точек разрыва, то она измерима по Лебегу. Сначала решите задачу для непрерывной функции.