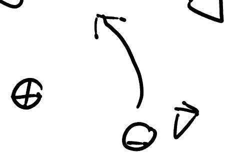
Feinstruktur von Atomen

Wasserstoff Atom: $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\vec{r})$

Eigenzustände $|n, l, m, \sigma\rangle$

Eigenenergien: $E_n = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \mu c^2}{n^2}$ unabhängig von σ



$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |r|^3}$$

Lorentz-Transformation

$$\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} \quad \propto \hat{\vec{L}}$$

Spin-Bahn-Kopplung

$$\boxed{\hat{H}_{SO} = \alpha^2 E_1 \left(\frac{a_B}{r}\right)^3 \frac{\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}}{\hbar^2}}$$

Welche Basis benutzen wir zur Beschreibung von $\hat{H}_0 + \hat{H}_{SO}$?

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

$$\hat{\vec{J}}^2 |j, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m_j\rangle$$

$$\hookrightarrow (\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}})^2 = \hat{\vec{L}}^2 + \underbrace{\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}} + \hat{\vec{S}}\hat{\vec{L}}}_{2\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}}} + \hat{\vec{S}}^2$$

$$= \hat{\vec{L}}^2 + 2\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}} + \hat{\vec{S}}^2$$

$$\hat{H}_{so} \propto \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} = \frac{\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2}{2}$$

Gute Basis $|n, l, j, s = \frac{1}{2}, m_j\rangle$

Mögliche Werte von j

$$j = \begin{cases} l + \frac{1}{2} \\ l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{für } l \neq 0$$

$$j = \frac{1}{2} \quad \text{für } l = 0$$

$$2\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}|n, l, j, s, m_j\rangle = \hbar^2\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big)|n, l, j, s, m_j\rangle$$

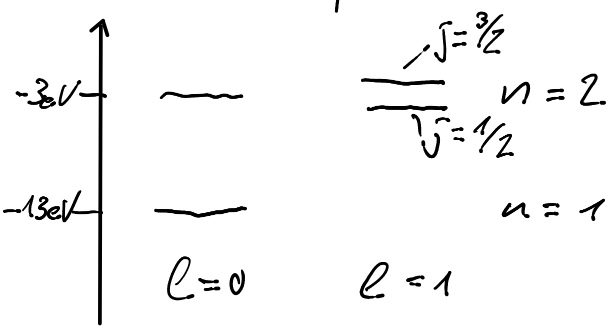
$$\Delta E = E_{n,l,j=l+\frac{1}{2},s,m_j} - E_{n,l,j=l-1/2,s,m_j}$$

$$= \langle n, l, j = l + 1/2, s, m_j | \hat{H}_0 + \hat{H}_{so} | n, l, j = l + \tfrac{1}{2}, s, m_j\rangle$$

$$- \quad j = l - \tfrac{1}{2} \qquad\qquad j = l - \tfrac{1}{2}$$

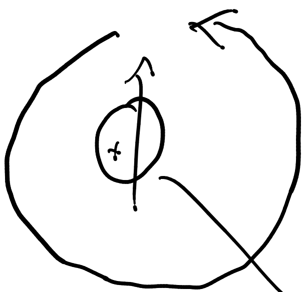
$$= \alpha^2 E_n \left\langle \left(\frac{a_B}{|\hat{\vec{r}}|}\right)^2 \right\rangle \left(l + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{l(l+1)} \qquad (l \neq 0)$$

Wasserstoff: $2p$, $n = 2$, $l = 1$, $s = \frac{1}{2}$



$$\left.\begin{aligned} \to\ j &= 1 + \frac{1}{2} = 3/2 \\ j &= 1 - \frac{1}{2} = 1/2 \end{aligned}\right\} \Delta E = 10\,\text{GHz} \cdot h$$

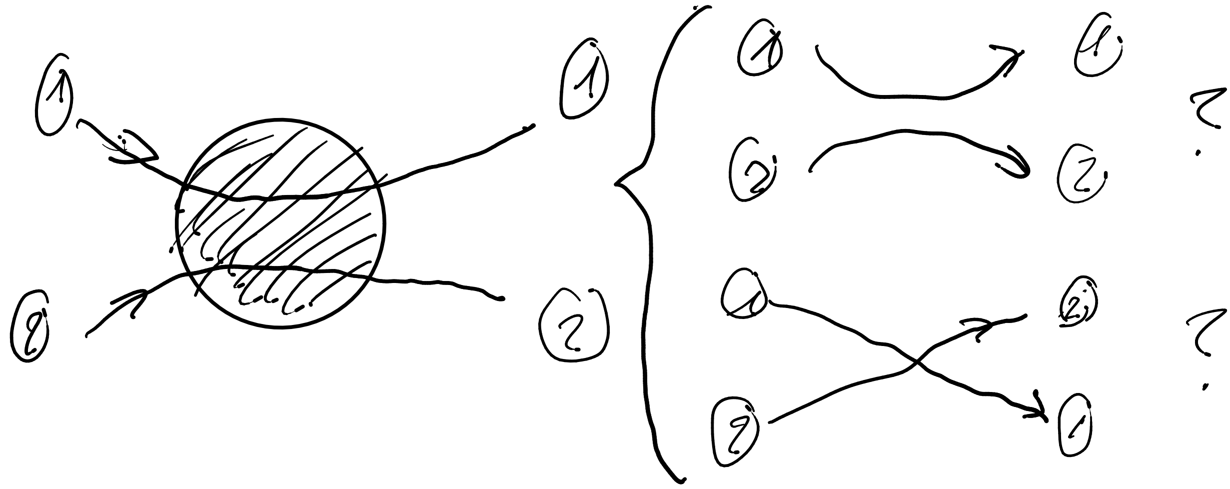
Hyperfeinstruktur



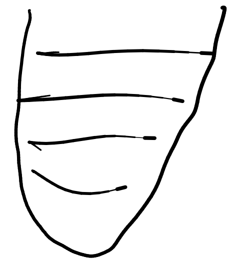
Magnetisches Moment des Protons

$\sim \frac{m_e}{m_p}$ kleiner als Feinstruktur

$$\vec{\mu}_p \propto \vec{S}_p \quad , \quad \hat{H}_{HFS} \sim \hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{S}}_p$$



Quantenmechanisch sind zwei identische Teilchen (gleiche Ladung, Masse, Spin) ununterscheidbar



Hamiltonoperator für zwei Teilchen

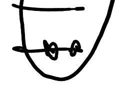
$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}_1^2}_{\hat{H}_1} + \underbrace{\frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}_2^2}_{\hat{H}_2}$$

Vernachlässige Wechselwirkung.

Eigenenergien von $H_{1/2}$: $\hbar\omega\left(n_{1/2} + \frac{1}{2}\right)$ $\quad n_i = 0, 1, 2, \dots$

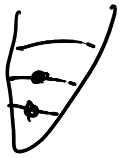
Eigenfunktionen von $H_{1/2}$: $\psi_{n_{1/2}}(x)$

(1) Setze beide Teilchen in den Grundzustand



$$\Psi_0(x_1, x_2) = \varphi_0(x_1) \cdot \varphi_0(x_2)$$

② Erster angeregter Zustand



$$\lambda\, \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2) + \mu\, \varphi_1(x_1)\varphi_0(x_2) = \psi(x_1, x_2)$$

Positionsmessung von Teilchen 1 und 2

$$\langle \hat{x}_1 \otimes \hat{x}_2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \operatorname{Re}(\lambda^* \mu)$$

↳ Observable hängt von den Werten von λ und μ ab.

<u>Postulat:</u> Physikalische Zustände nur mit $\lambda = \pm\mu$ existieren.

Bosonen: symmetrische Kombination

Fermionen: anti-symmetrische Kombination

<u>Systeme von 2 Teilchen</u>

Zwei identische Teilchen 1, 2

Hilbertraum $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Basisfunktionen: $\{|k\rangle\}$ $\{|n\rangle\}$

Allgemeiner Zustand: $|\psi\rangle = \sum_{k,n} c_{k,n} \underbrace{|k\rangle \otimes |n\rangle}_{|1:k,\,2:n\rangle}$

<u>Def</u>: Permutationsoperator $\hat{P}_{12}$

$$\hat{P}_{12}\,|1:k,2:n\rangle = |1:n,2:k\rangle$$

vertauscht Zustände der beiden Teilchen

$$\hat{P}_{12}^2 = \mathbb{1} \quad ; \quad \hat{P}_{12} \text{ hermitesch}$$

<u>Beispiele</u>: Zwei Teilchen ohne Spin,

$$\hat{P}_{12}\,\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$$

Zwei Teilchen mit Spin 1/2

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|1:\sigma_1,2:\sigma_2\rangle \qquad \sigma_i = \{\uparrow\downarrow\}$$

$$\hat{P}_{12}\,|\psi\rangle = \sum_{\sigma_1\sigma_2} \psi(\vec{r}_2,\vec{r}_1)\,|1:\sigma_1,2:\sigma_2\rangle$$

Anwendung auf Singlet- und Triplet Zustände

$$|S=0,m_S=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\uparrow,2:\downarrow\rangle - |1:\downarrow,2:\uparrow\rangle\right)$$

$$\hat{P}_{12}\,|S=0,m_S=0\rangle = -|S=0,m_S=0\rangle \quad : \text{anti-symmetrisch}$$

$$|S=1,m_S=1\rangle = |1:\uparrow,2:\uparrow\rangle$$

$$\hat{P}_{12}\,|S=1,m_S=1\rangle = |S=1,m_S=1\rangle \quad : \text{symmetrisch}$$

Da beide Teilchen identisch sind, repräsentieren $|\psi\rangle$ und $\hat{P}_{12}|\psi\rangle$ den selben Zustand.

$\hookrightarrow \hat{P}_{12}|\psi\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle$

$\boxed{e^{i\delta} = \pm 1}$

Postulat
(bisher gefunden)

Postulat: Es gibt zwei Klassen von Teilchen

① Bosonen: ganzzahliger Spin: (Photon, Gluonen, He, zusammengesetzte Atome ^7Li)
<u>Gesamtzustand ist immer symmetrisch</u>

② Fermionen: halbzahliger Spin: (Elektronen, Protonen, Neutronen)
<u>Gesamtzustand ist immer anti-symmetrisch</u>