Tensorprodukt

Def. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei Hilberträume von Dimension n_1 & n_2. Der Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ wird das Tensorprodukt von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ genannt, wenn zu jedem Paar von Vektoren $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ ein Vektor in $\mathcal{H}$ gehört, der durch $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ bezeichnet wird und folgende Bedingungen für die Zuordnung erfüllt sind:

i) Die Multiplikation mit komplexen Zahlen ist linear, d.h.

$$(\lambda |\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = \lambda (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$$|\psi_1\rangle \otimes (\mu |\psi_2\rangle) = \mu (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$$

ii) es ist distributiv bezüglich der Addition, d.h.

$$|\psi_1\rangle \otimes (|\psi_2\rangle + |\varphi_2\rangle) = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$$

$$(|\psi_1\rangle + |\varphi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\varphi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

iii) Sei $|u_i\rangle$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}_1$ und $|v_j\rangle$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}_2$. Dann bilden die Vektoren $|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$ eine Hilbertbasis von $\mathcal{H}$. Wenn n_1 & n_2 endlich sind, ist die Dimension von $\mathcal{H}$ $n_1 \cdot n_2$

Ein beliebiger Vektor $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}$ kann geschrieben werden als $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \, |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$

Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$(\langle \varphi_1 | \otimes \langle \varphi_2 |)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle$$

Tensorprodukt von Operatoren:

Sei $\hat{A}_1$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}_1$. Wir assoziieren mit $\hat{A}_1$ einen linearen Operator $\hat{\tilde{A}}_1$ in $\mathcal{H}$ durch

$$\hat{\tilde{A}}_1 (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{A}_1 |\psi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle$$

Häufig schreiben wir $\hat{A}_1 = \hat{\tilde{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes \hat{I}_2$ ⟸ Identität in $\mathcal{H}_2$

Analog für $\hat{B}_2$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}_2$

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{A}_1 |\psi_1\rangle) \otimes (\hat{B}_2 |\psi_2\rangle)$$

Häufig vereinfacht man die Notation:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle$$

adjungierter Vektor: $\langle \psi_1, \psi_2 |$

(Notation: Reihenfolge der Hilberträume in Bra/Ket bleibt bestehen)

Beispiel: 2dimensionaler harmonischer Oszillator

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y \quad \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2), \; |\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} \underbrace{|\phi_n^x\rangle \otimes |\phi_m^y\rangle}_{\hat{=}\, \phi_n(x)\,\phi_m(y)}$$

vollständige Darstellung eines Atoms

Hilbertraum: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{int}$

$\uparrow$ magnetisches Moment ($n_{int} = 2$)

Basis in z-Richtung $|+\rangle_z, |-\rangle_z$ von $\mathcal{H}_{int}$

Sei $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ beliebig

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle \otimes |+\rangle_z + |\psi_-\rangle \otimes |-\rangle_z$$

wobei $|\psi_\pm\rangle \in \mathcal{H}_{ext}$

Eine Observable $\hat{A} = \sum_{i,j} \hat{A}_{ext,i} \otimes \hat{A}_{int,j}$

Beispiel: $\hat{A} = \hat{A}_{ext} \otimes \hat{\mu}_x$

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = \left(\sum_{i,j} \hat{A}_{ext,i} \otimes \hat{A}_{int,j}\right)\left(|\psi_+\rangle \otimes |+\rangle_z + |\psi_-\rangle \otimes |-\rangle_z\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left[\left(\hat{A}_{ext,i}\,|\psi_+\rangle\right) \otimes \left(\hat{A}_{int,j}\,|+\rangle_z\right) + \left(\hat{A}_{ext,i}\,|\psi_-\rangle\right) \otimes \left(\hat{A}_{int,j}\,|-\rangle_z\right)\right]$$

Die Energie eines Atoms in einem magnetischen Feld ist:

$$\hat{W} = -\hat{\vec{\mu}}\,\vec{B}(\vec{r}) = -\Big(\underbrace{\mu_x B_x(\vec{r})}_{= B_x(\hat{\vec{r}}) \otimes \mu_x} + \hat{\mu}_y B_y(\vec{r}) + \hat{\mu}_z B_z(\vec{r})\Big)$$

Ein Atom, welches sich im Raum in einem Potential $V(\vec{r})$ und in einem Magnetfeld bewegt, kann beschrieben werden durch den Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \hat{H}_{ext} \otimes \hat{I}_{int} + \hat{W} \qquad \text{mit} \quad \hat{H}_{ext} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

Die Schrödingergleichung wird zu: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$

mit $|\psi\rangle = \psi_+(\vec{r},t) \otimes |+\rangle_z + \psi_-(\vec{r},t) \otimes |-\rangle_z$

Vektoren in $n=2$

einsetzen ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_+(\vec{r},t) \otimes |+\rangle_z + i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes |-\rangle_z = \left(\hat{H}_{ext} \psi_+(\vec{r},t)\right) \otimes |+\rangle_z + \left(\hat{H}_{ext} \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes |-\rangle_z + \hat{W}\left(\psi_+(\vec{r},t) \otimes |+\rangle_z\right) + \hat{W}\left(\left(\psi_-(\vec{r},t) \otimes |-\rangle_z\right)\right)$$

Wir nehmen $\vec{B} \parallel \vec{e}_z$ an:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_+(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext} \psi_+(\vec{r},t)\right) \otimes |+\rangle_z + \left(B_z(\vec{r}) \psi_+(\vec{r},t)\right) \otimes \hat{\mu}_z |+\rangle_z$$

$$+ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_-(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext} \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes |-\rangle_z + \left(B_z(\vec{r}) \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes \hat{\mu}_z |-\rangle_z = 0$$

mit $\hat{\mu}_z |+\rangle_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{\mu}_z |-\rangle_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_+(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext}\,\psi_+(\vec{r},t) + \mu_0 B_z \psi_+(\vec{r},t)\right) \otimes |+\rangle_z$$

$$+ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_-(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext}\,\psi(\vec{r},t) - \mu_0 B_z \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes |-\rangle_z = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_+(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext}\,\psi_+(\vec{r},t) + \mu_0 B_z \psi_+(\vec{r},t)\right) \otimes |+\rangle_z = 0 \\ &+ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_-(\vec{r},t) - \hat{H}_{ext}\,\psi(\vec{r},t) - \mu_0 B_z \psi_-(\vec{r},t)\right) \otimes |-\rangle_z = 0 \end{aligned}\right\}$$

zwei Gleichungen, da $|+\rangle_z$ und $|-\rangle_z$ linear unabhängig

hier entkoppelt, d.h. eine Gleichung für ψ_+ und eine für ψ_-. Beispiel Uniformes Magnetfeld in z-Richtung, $V(\vec{r}) = 0$. Sei der Zustand zur Zeit $t=0$ faktorisiert, d.h.

$$|\psi\rangle = \psi(\vec{r},0) \otimes \left(\alpha_0 |+\rangle_z + \beta_0 |-\rangle_z\right), \quad \hat{V} = \hat{I}_{ext} \otimes (B_z \mu_z)$$

die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(\vec{r},t)$$

und $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)|+\rangle_z + \beta(t)|-\rangle_z\right) = -\hat{\mu}_z B_z \left(\alpha(t)|+\rangle_z + \beta(t)|-\rangle_z\right)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)|+\rangle_z + \beta(t)|-\rangle_z\right) = -\mu_0 B_z \alpha(t)|+\rangle_z + \mu_0 B_z \beta(t)|-\rangle_z$$

Die externen und internen Freiheitsgrade sind nicht gekoppelt, da $|+\rangle_z$ und $|-\rangle_z$ unabhängige Vektoren

$$\left.\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) &= -\mu_0 B_z \alpha(t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\beta(t) &= -\mu_0 B_z \beta(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 e^{-i\omega_0 t/2} \\ \beta(t) &= \beta_0 e^{i\omega_0 t/2} \end{aligned}$$

mit $\omega_0 = -\frac{2\mu_0 B_z}{\hbar}$ Lamor Frequenz.

Die Erwartungswerte des magnetischen Moments.

$$\langle \mu_x \rangle = \langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle \rightarrow (\alpha^*(t), \beta^*(t)) \begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \\ \mu_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

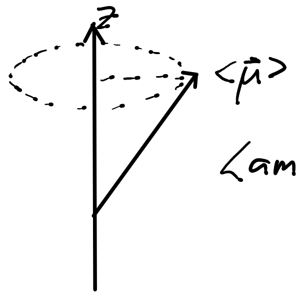
$$= 2\mu_0 \alpha_0 \beta_0 \cos(\omega_0 t)$$

mit $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$

$$\langle \mu_y \rangle = 2\mu_0 \alpha_0 \beta_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\langle \mu_z \rangle = (\alpha^*(t), \beta^*(t)) \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \mu_0 \left(|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 \right)$$

$$= \mu_0 \left(|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2 \right)$$



Lamor-Präzession

Erhaltungsgröße da $\hat{\mu}_z$ mit $\hat{H}$ kommutiert.

IX Drehimpuls

Wir haben gesehen, daß es häufig sinnvoll ist, die Symmetrien des Systems auszunutzen.

In einer Übungsaufgabe haben Sie gezeigt, daß der Hamilton Operator eines Teilchens im Zentralpotential mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hat{L}$ kommutiert.
Für solche Systeme ist es wichtig die Eigenwerte und Eigenvektoren des Drehimpulses genauer zu verstehen.

Allgemein definiert man den Drehimpuls $\hat{\vec{J}}$ (vektorieller Operator) durch:

$$\hat{\vec{J}} \times \hat{\vec{J}} = i\hbar \hat{\vec{J}}$$

Kurzform für:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$$

Beispiel: Bahndrehimpuls:

$$\hat{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\vec{L}}_i = \sum_{i=1}^{N} \hat{\vec{r}}_i \times \hat{\vec{p}}_i$$

↑ Teilchen

- „fast" der magnetische Momentoperator

- Pauli Matrizen

Da $\hat{J}_i, \hat{J}_j$ nicht kommutieren $(i \neq j)$ können wir nur eine Richtung auswählen, um eine 'gemeinsame' Basis zu konstruieren.
Häufig taucht im Hamilton Operator $\hat{\vec{J}}^2$ auf, so daß wir eine gemeinsame Basis von $\hat{\vec{J}}^2$ und $\hat{J}_i$ konstruieren können.