

QUANTENMECHANIK, BLATT 7, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 02.06 vor der Vorlesung. Besprechung 05.06

I. NEUTRINO OSZILLATIONEN

In der Klassifizierung der Elementarteilchen, gibt es 3 Familien von Neutrinos, die bezeichnet werden als $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$. Wir betrachten hier zur Vereinfachung nur die ersten beiden Familien. Man weiss, dass wenn ein Neutrino erzeugt wird, es nicht in einem Eigenzustand des freien Hamilton-Operators H_0 erzeugt wird, der mit der Propagation durch das Vakuum assoziiert wird. Wir bezeichnen $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ die Eigenzustände des Hamilton-Operators H_0 mit den Eigenwerten E_1 und E_2 . Dann kann man zur Zeit $t = 0$ benutzen:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}$$

Der Winkel θ wird der Mischungswinkel genannt.

- (a) Stellen Sie den Hamilton-Operator in der Basis $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ dar.
- (b) Ein Neutrino wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |\nu_e\rangle$ erzeugt. Geben Sie die zeitliche Entwicklung von $|\psi(t)\rangle$ in der Basis der Eigenzustände von H_0 als Funktion von E_1 , E_2 , θ und t an.

Bemerkung: Obwohl ein Neutrino ein ultra-relativistisches Teilchen ist, kann die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors durch die Schrödingergleichung beschrieben werden.

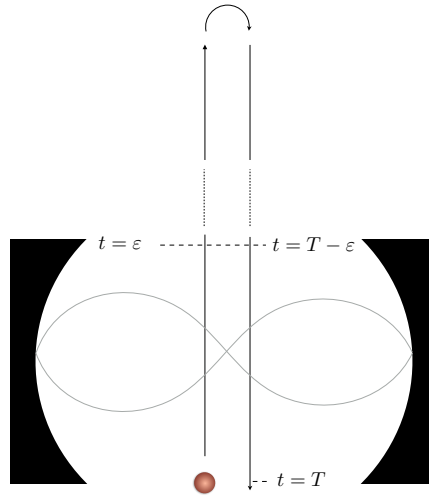
- (c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Neutrino nachdem es eine Zeit t im Vakuum propagiert ist, im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ ist? Berechnen Sie die Zeit T zu der die Wahrscheinlichkeit maximal ist.
- (d) Das Neutrino ν_e wird mit einem wohldefinierten Impuls p erzeugt. Daher sind die Eigenzustände auch Eigenzustände des Impulses p . Für ein relativistisches Teilchen gilt die Relation:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Im Fall des Neutrinos gilt $mc^2 \ll pc$. Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit der Konversion als Funktion von p aus, indem Sie E_1 und E_2 zur ersten Ordnung in m_1 und m_2 entwickeln. Hierbei sind m_i die Massen der Eigenzustände.

- (e) Man führt eine Messung durch an einem Ort, welcher in einer Distanz ℓ zum Erzeugungspunkt steht. Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit der Umwandlung in ν_μ als Funktion von ℓ aus. Sie können die Geschwindigkeit der Neutrinos $c(1 + \epsilon)$ benutzen mit $|\epsilon| \ll 1$.
- (f) Wir nehmen einen maximalen Mischungswinkel $\theta = \pi/4$ an. Für welche Distanz ℓ ist die Wahrscheinlichkeit maximal ν_μ zu finden, benutzen Sie $c^4(m_2^2 - m_1^2) = 1 \text{ (eV)}^2$, $pc = 10^{10} \text{ eV}$ und $\hbar c = 2 \cdot 10^{-13} \text{ MeV} \cdot \text{m}$.

II. ATOMSPRINGBRUNNEN



Wir betrachten ein Atom mit zwei internen Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ mit den Eigenenergien $E_1 = \hbar\omega_0/2$ und $E_2 = -\hbar\omega_0/2$. Zur Zeit $t = 0$ ist das Atom in dem Zustand $|1\rangle$ und wird in die Höhe beschleunigt. Nach einem gewissen Anstieg wird das Atom von der Schwerkraft abgebremst und fängt an zu fallen. Während des Anstiegs und des Falls, durchquert es einen Resonator, in dem sich eine elektromagnetische Welle der Frequenz ω befindet. Die Frequenz ω wird Nahe der Resonanzfrequenz des Atoms $\omega_0 = (E_1 - E_2)/\hbar$ gewählt. Man misst am Ende des Falls, in welchem internen Zustand sich das Atom befindet. Wir nehmen an, dass die Aufenthaltsdauer in dem Resonator sehr kurz ist und sich der Zustand der Atome in folgender Weise dadurch entwickelt:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle \rightarrow |\psi(t+\epsilon)\rangle = \alpha'|1\rangle + \beta'|2\rangle,$$

mit:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\omega t} \\ -ie^{i\omega t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Der anfängliche Zustand ist $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Wir betrachten einen Anstieg und einen Fall von der Dauer T . Der Resonator wird in der Zeit von $t = 0$ bis $t = \epsilon$ beim Anstieg durchquert und zwischen $T - \epsilon$ und T beim Fall (s. Skizze). Damit ist die Zeit der freien Entwicklung des Zustandes $T - 2\epsilon$. Zeigen Sie, dass für den Limes $\epsilon \rightarrow 0$, der Zustand zur Zeit T gegeben ist durch:

$$|\psi(t)\rangle = ie^{-i\omega T/2} \sin((\omega - \omega_0)T/2) |1\rangle - ie^{i\omega T/2} \cos((\omega - \omega_0)T/2) |2\rangle.$$

- (b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P_2(\omega)$, dass Atom zur Zeit T im Zustand $|2\rangle$ zu finden an. Bestimmen Sie, die Halbwertsbreite der Verteilung $\Delta\omega$ von $P_2(\omega)$ um die Resonanz $\omega = \omega_0$. Wie gross ist $\Delta\omega$ für einen 1 Meter hohen Brunnen? (Zur Erinnerung $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$).

III. GPS

Das System GPS benutzt 24 Satelliten, die sich im Erdorbit auf 20 000 km Höhe bewegen und jeweils eine Atomuhr enthalten. Jeder Satellit emittiert in regelmässigen Intervallen ein elektromagnetisches Signal, welches aus einer Zeit und seinem Ort besteht. Ein Empfänger auf der Erde (der keine Atomuhr besitzt) detektiert das Signal von mehreren Satelliten und vergleicht die Ankunftszeitpunkte der unterschiedlichen Zeiten.

1. Was ist die minimale Anzahl von Satelliten, die der Empfänger sehen muss, um zu einem gegebenen Zeitpunkt seinen Ort in Form von Breitengrad, Längengrad und Höhe zu bestimmen?
2. Wir nehmen an, dass die relative Genauigkeit jeder Atomuhr $\Delta\omega/\omega = 10^{-13}$ ist und dass die Uhren alle 24 Stunden synchronisiert werden. Was ist die Grössenordnung der Genauigkeit der Ortsbestimmung unmittelbar vor solch einer neuen Synchronisation?

IV. STIMULIERTE EMISSION UND ABSORPTION

In der Vorlesung haben wir diskutiert, wie Ammoniakmoleküle durch ein oszillierendes elektrisches Feld zu einer Emission und Absorption gezwungen werden können. Das Molekül wurde als ein zwei-Niveau-System beschrieben, mit den Zuständen $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den zugehörigen Eigenenergien $E_1 = E_0 - A$ und $E_2 = E_0 + A$. Der Hamilton-Operator des Moleküls

gekoppelt an das oszillierende elektrische Feld konnte dargestellt werden durch

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & -\eta \cos(\omega t) \\ -\eta \cos(\omega t) & E_2 \end{pmatrix},$$

wobei ω die Frequenz des elektrischen Feldes $E(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ und $\eta = \varepsilon_0 d_0$ ist. Das Molekül sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem Zustand $|2\rangle$. In der Vorlesung haben wir die sogenannte *Rotating Wave Approximation* benutzt, um eine Näherung der Lösung der Schrödingergleichung zu finden. Hier möchten wir die volle Schrödingergleichung numerisch lösen.

1. Leiten Sie die Darstellung der Schrödingergleichung in dem rotierten Bezugssystem, der Eigenzustände des Moleküls her

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) &= -\omega_1 \beta(t) \left(e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right) \\ 2i \frac{\partial}{\partial t} \beta(t) &= -\omega_1 \alpha(t) \left(e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{i(\omega + \omega_0)t} \right), \end{aligned}$$

wobei $\eta = \hbar \omega_1$ und $A = \hbar \omega_0 / 2$.

2. Lösen Sie diese Gleichung numerisch (zum Beispiel mit Mathematica, `NDSolve`). Benutzen Sie hierzu die Parameter: $\omega = 1.1 \omega_0$, und $\omega_1 = 0.1 \omega_0$ und plotten Sie die Wahrscheinlichkeit das Molekül im Zustand $|2\rangle$ zu finden gegen die Zeit. Vergleichen Sie Ihre numerische Lösung mit der in der Vorlesung hergeleiteten Näherung. Beschreiben Sie das Verhalten und die Unterschiede.
3. Vergleichen Sie für verschiedene Frequenzen des elektrischen Feldes Ihre Resultate mit der Rotating Wave Approximation. Wann ist diese gültig?
4. Wählen Sie $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$. Was finden Sie für starke Amplituden des elektrischen Feldes? Erklären Sie Ihr Ergebnis.
5. (Zusatzaufgabe) Variieren Sie die Frequenz des elektrischen Feldes und plotten Sie die minimale Wahrscheinlichkeit das Molekül in dem Zustand $|2\rangle$ zu finden versus der Frequenz (zum Beispiel mit `FindMinimum`). Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.