QUANTENMECHANIK, BLATT 4, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 5.5. vor der Vorlesung. Besprechung 8.5

I. ZEITENTWICKLUNG

Wir betrachten die normierten Eigenzustände $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ eines harmonischen Oszillators, die zur Grundzustandsenergie E_0 und zum ersten Angeregten Zustand E_1 gehöhren. Wir definieren die zwei Zustände $\psi_s = N(\psi_0 + \psi_1)$ und $\psi_a = N(\psi_0 - \psi_1)$.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante N und zeichnen Sie $\psi_a(x)$ und $\psi_s(x)$ und bestimmen Sie den Mittelwert des Ortes.

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$, sei das System im Zustand ψ_1. Was ist die Wahrscheinlichkeit das System zum Zeitpunkt t im Zustand ψ_a zu finden? Zeichnen Sie die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeit.

(c) Zum Zeitpunkt $t = 0$, sei das System im Zustand ψ_s. Was ist die Wahrscheinlichkeit das System zum Zeitpunkt t im Zustand ψ_a zu finden? Skizzieren Sie die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeit und berechnen Sie $\langle x(t)\rangle$ und $\langle p(t)\rangle$.

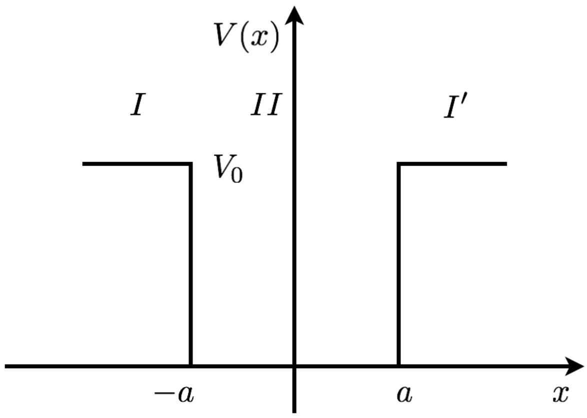
(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$, ist das System im Zustand ψ_s. Zum Zeitpunkt t_1, wird die Energie gemessen. Was sind die möglichen Messergebnisse? Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man die Energie E_1?
Wenn das Ergbnis die Energie E_1 war, welches ist die Wahrscheinlichkeit das System zu einer Zeit $t_2 > t_1$ in dem Zustand ψ_0 zu finden?

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind
$\psi_n(x) = \pi^{-1/4}/\sqrt{2^n n! a}\, e^{-x^2/2a^2} H_n(x/a)$ *mit* $H_0(x) = 1$ *und* $H_1(x) = 2x$.

II. TEILCHEN IM POTENTIALTOPF

Bestimmen Sie die gebundenen Zustände eines Teilchens der Masse m in einem eindimensionalen Kastenpotentials $V(x)$, das durch

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & : |x| > a \\ 0 & : |x| \leq a \end{cases}$$



definiert ist, wobei $a, V_0 \in \mathbb{R}^+$. Orientieren Sie sich dabei an der Vorlesung und setzen Sie allgemeine Lösungen in den unterschiedlichen Regionen I, II und I' an. Benutzen Sie dann die entsprechende Stetigkeitsbedingungen, um die gesuchten Eigenzustände zu erhalten.

III. AUSBREITUNG IN ZWEI DIMENSIONEN

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, welches sich entlang der $x - y$ Richtung auf einer homogenen Oberfläche bewegt und entlang der z Richtung in einem harmonischen Potential. Der Hamilton-Operator ist definiert durch: $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{x}) + V(\hat{y}) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{z}^2$, mit $V(\xi) = 0$ für $-L < \xi < L$ und $V(\xi) = +\infty$ für $|\xi| \geq L$. Wir nehmen an, dass $L \gg a_0$, mit der harmonischen Oszillator Länge $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

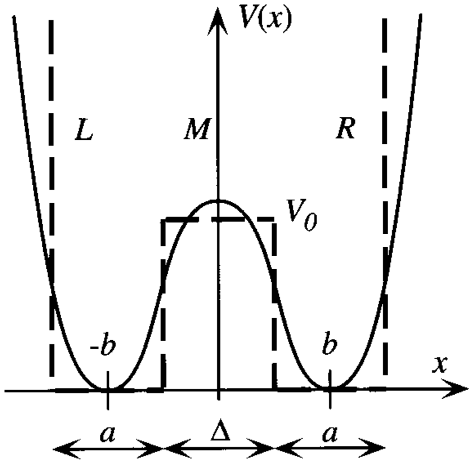
(a) Bestimmen Sie den Grundzustand. *Hinweis: Benutzten Sie die Separation der Variablen.*

(b) Bestimmen Sie die Energien und die Entartung der 3 untersten Energie Niveaus.

(c) Nehme Sie an, dass $L = +\infty$ und dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Teilchen durch die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, 0) = \phi_0(x)\phi_0(y)\phi_0(z)$ beschrieben werden kann, wobei ϕ_0 der Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$\phi_0(\xi) = \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2a_0^2}\right) . \tag{1}$$

Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $n(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ zu finden?



IV. DOPPELTOPF

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem Doppelpotentialtopf mit einer Barriere der Höhe V_0, d.h. das eindimensionale Potenial ist gegeben durch $V(x) = 0$ für $b - a/2 < |x| < b + a/2$, $V(x) = V_0$ für $|x| < b - a/2$, und überall sonst ist das Potential unendlich hoch. a und b sind positive Konstanten. Berechnen Sie die gebundenen stationären Zustände des Systems. Benutzen Sie einen Ansatz mit unterschiedlichen Funktionen in den Töpfen und der Barriere.