QUANTENMECHANIK, BLATT 12, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 07.07 vor der Vorlesung. Besprechung 10.07

I. STÖRUNGSTHEORIE

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich (nicht-relativistisch) im dreidimensionalen Potential

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2+\lambda xy).$$

Nehmen Sie an, dass λ klein ist und berechnen Sie die Grundzustandsenergie mit Hilfe der Störungstheorie bis zur einschließlich zweiten Ordnung in λ. Benutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren aus der algebraischen Lösung des harmonischen Oszillators:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)\,, \text{ mit } \quad \hat{a}_i|n_i\rangle = \sqrt{n_i}|n_i-1\rangle \text{ und } \quad \hat{a}_i^\dagger|n_i\rangle = \sqrt{n_i+1}|n_i+1\rangle \text{ mit } i \in \{1,2,3\}$$

Hinweis: Nutzen Sie die entsprechenden Symmetrien der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators bei der Integration in der Berechnung der Erwartungswerte aus.
(9 Punkte)

II. DISSOZIIERUNG EINES WASSERSTOFFATOMS

Unter der Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld können Wasserstoffatome in ein Proton und ein Elektron dissoziieren. Wir betrachten den Zustand des Spins des Systems nach der Wechselwirkung. Die zwei Teilchen bewegen sich frei in entgegengesetzte Richtungen, der Zustand des Spins bleibt unverändert mit der Zeit. Sei $\mathbf{u}_\varphi = \cos\varphi\,\mathbf{u}_z + \sin\varphi\,\mathbf{u}_x$ ein Einheitsvektor in der Ebene zOx. Die Komponente der Spinobservable des Elektrons entlang der Achse $\mathbf{u}_\varphi$ ist gegeben durch $(\hat{S}_e)_\varphi = \hat{\mathbf{S}}_\mathbf{e}.\mathbf{u}_\varphi$.

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte des Operators $(\hat{S}_e)_\varphi$. *(2 Punkte)*

2. $|+,\varphi\rangle_e$ und $|-,\varphi\rangle_e$ seien die Eigenvektoren von $(\hat{S}_e)_\varphi$, die für den Fall $\varphi = 0$ in die Eigenvektoren $|+\rangle_e$ und $|-\rangle_e$ von $(\hat{S}_e)_z$ übergehen. Drücken Sie $|+,\varphi\rangle_e$ und $|-,\varphi\rangle_e$ als Funktion von $|+\rangle_e$ und $|-\rangle_e$ aus. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *(4 Punkte)*

3. Wir nehmen an, dass das Elektron in dem Zustand $|+,\varphi\rangle_e$ emittiert wurde. Nun wird die Komponente $(\hat{S}_e)_\alpha$ des Spins entlang der Richtung $\mathbf{u}_\alpha = \cos\alpha\,\mathbf{u}_z + \sin\alpha\,\mathbf{u}_x$ gemessen. Was

ist die Wahrscheinlichkeit $P_+(\alpha)$ das Elektron in dem Zustand $|+,\alpha\rangle_e$ zu finden? Was ist der Erwartungswert $\langle(\hat{S}_e)_\alpha\rangle$ im Spinzustand $|+,\varphi\rangle_e$? *(4 Punkte)*

III. SPINKORRELATIONEN

Diese Aufgabe schliesst an Aufgabe II an. Wir nehmen jetzt an, dass das Elektron-Proton-System nach der Dissoziierung in dem Zustand $|+,\varphi\rangle_e \otimes |-,\varphi\rangle_p$ ist.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_+(\alpha)$ bei einer Messung der Komponente $(\hat{S}_e)_\alpha$ des Spins des Elektron das Ergebnis $+\hbar/2$ zu finden. Wenn das Resultat $+\hbar/2$ gemessen wurde, in welchem Zustand ist das System direkt nach der Messung? Verändert sich der Spin-Zustand des Protons durch die Messung des Spins des Elektrons? *(4 Punkte)*

2. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Komponente von $\langle(\hat{S}_e)_\alpha\rangle$ des Spins des Elektrons entlang $\mathbf{u}_\alpha$ und $\langle(\hat{S}_p)_\beta\rangle$ des Spins des Protons entlang $\mathbf{u}_\beta$. *(3 Punkte)*

3. Wir definieren den Koeffizienten der Korrelation $E(\alpha,\beta)$ zwischen den Spins durch
$$E(\alpha,\beta) = \frac{\langle(\hat{S}_e)_\alpha \otimes (\hat{S}_p)_\beta\rangle - \langle(\hat{S}_e)_\alpha\rangle\langle(\hat{S}_p)_\beta\rangle}{\left(\langle(\hat{S}_e)^2_\alpha\rangle\langle(\hat{S}_p)^2_\beta\rangle\right)^{1/2}}. \tag{1}$$
Berechnen Sie $E(\alpha,\beta)$ im betrachteten Zustand. *(3 Punkte)*

4. Wir betrachten jetzt die Situation, in welcher das System nach der Dissoziation im Singulett Zustand ist
$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_e \otimes |-\rangle_p - |-\rangle_e \otimes |+\rangle_p\right).$$
Eine Messung der Komponente $(\hat{S}_e)_\alpha$ des Spins des Elektrons wird entlang der Achse $\mathbf{u}_\alpha$ durchgeführt. Welche möglichen Resultate kann man mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhalten? *(6 Punkte)*

5. Wir nehmen an, dass die Messung das Resultat $+\hbar/2$ gegeben hat. Man misst anschliessend die Komponente $(\hat{S}_p)_\beta$ des Spins des Protons entlang der Achse $\mathbf{u}_\beta$. Welche Resultate erhält man und mit welcher Wahrscheinlichkeit? *(4 Punkte)*

6. Hätte man dieselben Wahrscheinlichkeiten erhalten, wenn man die Messung von $(\hat{S}_p)_\beta$ vor der Messung von $(\hat{S}_e)_\alpha$ gemacht hätte? Warum schockierte dieses Resultat Einstein und

warum sagte dieser : “Die physikalischen Zustände von zwei Objekten, die örtlich getrennt sind, sind unabhängig von einander” ? *(5 Punkte)*

7. Berechnen Sie die Erwartungswerte $(\hat{S}_e)_\alpha$ und $(\hat{S}_p)_\beta$, wenn das System im Singulett Zustand ist. *(3 Punkte)*

8. Berechnen Sie $E(\alpha, \beta)$ unter denselben Annahmen. *(6 Punkte)*

IV. VERSTECKTE VARIABLEN (ZUSATZAUFGABE)

Für Einstein war die Lösung des in Aufgabe III.6 diskutierten Paradoxons, dass die Zustandsvektoren der Quantenmechanik die physikalische Realität nur auf eine unvollständige Weise beschreiben. Eine vollständige Theorie müsste zusätzliche Variablen enthalten, durch welche die Messung von zwei örtlich getrennten Objekten unabhängig würde. Das Experiment selbst gibt jedoch nicht die Werte dieser Variablen wieder, weswegen sie ’versteckte’ Variablen genannt wurden. In unserem Fall betrachten wir folgendes vereinfachtes Beispiel der Theorie. Man nimmt an, dass sich das System nach jeder Dissoziierung in einem Produktzustand $|+, \varphi\rangle_e \otimes |-, \varphi\rangle_p$ befindet, aber dass die Richtung φ variieren kann: φ ist hier die versteckte Variable. Weiter nehmen wir an, dass alle Richtungen von φ gleich wahrscheinlich sind und die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\varphi)$ entlang der Richtung φ gegeben ist durch $P(\varphi) = 1/2\pi$. Durch unsere Unkenntnis von φ, ist der Erwartungswert einer Observablen $\hat{A}$ gegeben durch:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi P(\varphi)\ {}_e\langle +, \varphi| \otimes\ {}_p\langle -, \varphi|\hat{A}|-, \varphi\rangle_p \otimes |+, \varphi\rangle_e \tag{2}$$

1. Benutzten Sie die Definition (1) von $E(\alpha, \beta)$ und das Prinzip (2) für die Berechnung der Erwartungswerte, um $E(\alpha, \beta)$ in dieser neuen Theorie zu berechnen. *(5 Zusatzpunkte)*

2. Das Experiment von Alain Aspect aus dem Jahr 1982, welches in einem abweichenden physikalischen System durchgeführt wurde, führt von seinem physikalischen Inhalt auf den uns interessierenden Fall. Abbildung 1 zeigt, dass $E(\alpha, \beta)$ nur von der Differenz $\alpha - \beta$ abhängt. Was können Sie daraus schliessen indem Sie dies mit den Ergebnissen von Aufgabe III.8 vergleichen? *(4 Zusatzpunkte)*

3. Im Allgemeinen zeigte J.S. Bell, dass man für die Theorien, die lokale versteckte Variablen

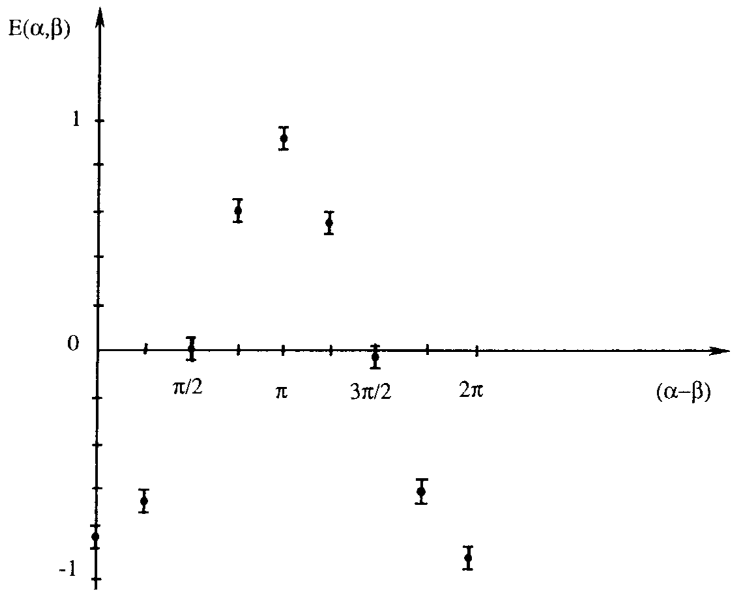

FIG. 1. Gemessene Variation von $E(\alpha, \beta)$ als Funktion von $\alpha - \beta$. Die vertikalen Linien (Fehlerbalken) geben die statistischen Ungenauigkeiten der Messung an.

enthalten eine Ungleichung der Art

$$|E(\alpha_1, \beta_1) + E(\alpha_1, \beta_2) + E(\alpha_2, \beta_1) - E(\alpha_2, \beta_2)| \leq 2 \qquad , \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$$

herleiten kann. Zeigen Sie für $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_1 = \beta_1 - \alpha_2 = \pi/4$, dass die Vorhersagen der Quantenmechanik diese Ungleichung nicht erfüllen. Interpretieren Sie das experimentelle Ergebnis von Alain Aspect in dieser Hinsicht: $E(\pi/4) = -0.66 \pm 0.04$, $E(3\pi/4) = 0.68 \pm 0.03$. *(4 Zusatzpunkte)*