QUANTENMECHANIK, BLATT 11, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 30.06 vor der Vorlesung. Besprechung 03.07

I. MAGNETISCHE RESONANZ

Ein Strahl von Neutronen, Teilchen mit Spin 1/2, bewegen sich entlang der x-Achse mit einer Geschwindigkeit v. Wir betrachten die Bewegung der Neutronen als eine klassische lineare Bewegung und behandeln nur den Spin quantenmechanisch. Seien $|n,+\rangle$ und $|n,-\rangle$ die Eigenzustände des Operators $\hat{S}_z$ des Spins des Neutrons entlang Oz. Ein uniformes magnetisches Feld wird angelegt $\mathbf{B_0} = B_0\mathbf{e_z}$. $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma_n\hat{\mathbf{S}}$ ist das magnetische Moment, $\hat{\mathbf{S}}$ der Spin, und γ_n das gyromagnetische Verhältnis des Neutrons.

1. Bestimmen Sie die Eigenenergien des Neutrons in Anwesenheit des magnetischen Feldes $\mathbf{B_0}$? Wir nehmen an $\omega_0 = -\gamma_n B_0$ (*1 Punkt*).

2. Die Neutronen durchqueren einen Resonator der Länge L zwischen den Zeiten t_0 und $t_1 = t_0 + \frac{L}{v}$. In diesem Resonator wird zusätzlich zum konstanten Feld $\mathbf{B_0}$, ein rotierendes Magnetfeld $\mathbf{B_1}(t)$ mit ω angelegt:

$$\mathbf{B_1}(t) = B_1(\cos\omega t\,\mathbf{e_x} + \sin\omega t\,\mathbf{e_y}) \tag{1}$$

Wir betrachten ein Neutron, welches zur Zeit t_0 in den Resonator eintritt. $|\psi_n(t)\rangle$ sei sein Spinzustand zur Zeit t mit $|\psi_n(t)\rangle = \alpha_+(t)|n,+\rangle + \alpha_-(t)|n,-\rangle$.

   (a) Leiten Sie die Gleichungen der Zeitentwicklung von $\alpha_\pm(t)$ für $t_0 \le t \le t_1$ her. Sei $\omega_1 = -\gamma_n B_1$ (*2 Punkte*).

   (b) Wir nehmen weiter an, dass $\alpha_\pm(t) = \beta_\pm(t)\exp(\mp i\omega(t-t_0)/2)$. Überführen Sie das Problem in ein Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (*2 Punkte*).

   (c) Wir betrachten $|\omega - \omega_0| \ll \omega_1$ und wir vernachlässigen die Terme in $\omega - \omega_0$. Zeigen Sie, dass für $t_0 \le t \le t_1$ gilt:

$$\beta_\pm(t) = \beta_\pm(t_0)\cos\theta - ie^{\mp i\omega t_0}\beta_\mp(t_0)\sin\theta, \tag{2}$$

   wobei wir benutzt haben, dass $\theta = \omega_1(t-t_0)/2$ (*6 Punkte*).

(d) Zeigen Sie, dass in der selben Näherung, der Zustand des Spins beim Verlassen des Resonators zur Zeit t_1 gegeben ist durch:

$$\begin{pmatrix} \alpha_+(t_1) \\ \alpha_-(t_1) \end{pmatrix} = U(t_0, t_1) \begin{pmatrix} \alpha_+(t_0) \\ \alpha_-(t_0) \end{pmatrix} \tag{3}$$

wobei $U(t_0, t_1)$ die folgende Matrix ist :

$$U(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} e^{-i\chi} \cos\phi & -ie^{-i\delta} \sin\phi \\ -ie^{i\delta} \sin\phi & e^{i\chi} \cos\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit $\phi = \omega_1(t_1 - t_0)/2$, $\chi = \omega(t_1 - t_0)/2$, und $\delta = \omega(t_1 + t_0)/2$ (*2 Punkte*).

II. RAMSEY METHODE

Wir wenden in dieser Aufgabe die Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe auf ein System aus zwei Resonatoren an. Wir behalten, die eingeführte Notation dazu bei. Die Neutronen wer-

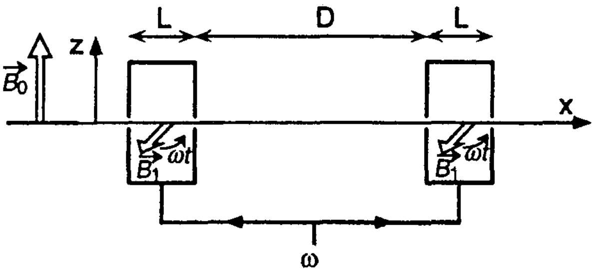

FIG. 1. Ramsey-Konfiguration von zwei Resonatoren

den anfänglich im Zustand $|n, -\rangle$ präpariert. Sie durchqueren in Folge die zwei identischen Resonatoren, die wie in Aufgabe 1 ein zusätzliches rotierendes Feld enthalten; der Aufbau ist in Figur 1 dargestellt. Dasselbe Feld $\mathbf{B_1}(t)$ gegeben in (1) ist in den zwei Resonatoren angelegt. Die Amplitude B_1 des Feldes ist so gewählt, dass $\phi = \pi/4$. Ein konstantes Feld B_0 liegt im gesamten Aufbau an. Man misst am Ausgang für verschiedene Werte von ω nahe an ω_0, die Zahl der Neutronen, die im Zustand $|n, +\rangle$ sind.

1. Sei ein Neutron, welches zur Zeit t_0 in den ersten Resonator eintritt, in dem Zustand $|n, -\rangle$. Was ist sein Spin-Zustand beim Austritt aus dem Resonator? Was ist die Wahrscheinlichkeit das Neutron im Zustand $|n, +\rangle$ an dem Ort zu finden (*3 Punkte*)?

2. Der Zeitpunkt des Eintritts in den zweiten Resonator ist $t_0' = t_1 + T$, mit $T = D/v$, wobei D der Abstand zwischen den beiden Resonatoren ist. Zwischen den beiden Resonatoren,

präzesiert der Spin in dem Feld $\mathbf{B_0}$. Was ist der Zustand des Neutrons zum Zeitpunkt t'_0 (*2 Punkte*)?

3. Sei t'_1 der Zeitpunkt des Austritts aus dem zweiten Resonator: $t'_1 - t'_0 = t_1 - t_0$. Schreiben Sie die Übergangsmatrix $U(t'_0, t'_1)$ des zweiten Resonators. Drücken Sie $\delta' = \omega(t'_1 + t'_0)/2$ als Funktion von ω, t_0, t_1 und T aus (*2 Punkte*).

4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_+ das Neutron in dem Zustand $|n,+\rangle$ am Austritt des zweiten Resonators zu detektieren. Zeigen Sie, dass dieses eine oszillierende Funktion von $(\omega_0 - \omega)T$ ist. Interpretieren Sie das Resultat (*5 Punkte*).

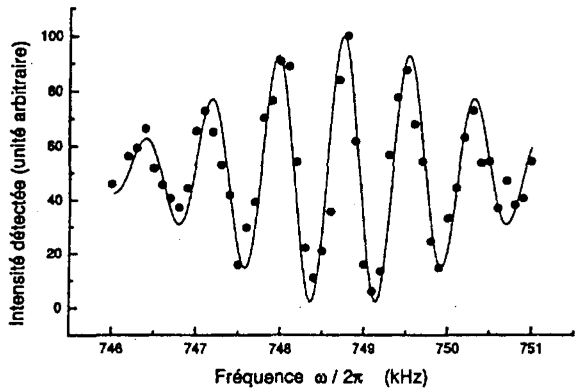

FIG. 2. Intensität am Austritt des Zustands $|n,+\rangle$ als Funktion der Frequenz $\omega/2\pi$ für einen Strahl von Neutronen mit einer Geschwindigkeitsverteilung.

5. Im Experiment, hat der Neutronenstrahl eine gewisse Dispersion von Geschwindigkeiten. Dieses führt zu einer Dispersion in der Zeit T des Flugs zwischen den Resonatoren. Das experimentelle Resultat gibt die Intensität des Neutronenstrahles im Zustand $|n,+\rangle$ als Funktion der Frequenz $\omega/2\pi$ in Figure 2.

   (a) Finden Sie die Form des Signals der Messung, indem Sie das Resultat der vorherigen Frage mit einer Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsverteilung mitteln,

   $$\mathrm{d}p(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{(T-T_0)^2}{2\tau^2}} \mathrm{d}T.$$

   Es gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\Omega T)\mathrm{d}p(T) = e^{-\Omega^2\tau^2/2}\cos(\Omega T_0)$ (*2 Punkte*).

   (b) Für dieses Experiment wurde $B_0 = 2.57\ 10^{-2}$ Tesla und $D = 1.6$ m gewählt. Bestimmen Sie das magnetische Moment vom Neutron. Bestimmen Sie die mittlere

Geschwindigkeit $v_0 = D/T_0$ und die Dispersion der Geschwindigkeit $\delta v = v_0\tau/T_0$ des Neutronenstrahls (*5 Punkte*).

III. QUANTENGEHEIMNISSE FÜR JEDERMAN

Lesen Sie den Artikel von Mermin und fassen Sie die wichtigen Ideen zusammen (*15 Punkte*).

IV. SYMMETRISCHES POTENTIAL

Was kann man über die Symmetrie der stationären Zustände eines Hamilton-Operators sagen, dessen Eigenwerte nicht-entartet sind, wenn das Potential eine gerade Funktion ($V(x) = V(-x)$) ist? Benutzten Sie, dass die Wellenfunktionen, die zu den diskreten aufsteigend geordneten Eigenwerten $E_1 < E_2 < ... < E_N$, einer eindimensionalen Schrödingergleichung gehören, eine wachsende Anzahl von Nullstellen haben. Die $n$te Funktion hat $n-1$ Nullstellen (*8 Punkte*).