QUANTENMECHANIK, BLATT 8, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 09.06 vor der Vorlesung. Besprechung 12.06

I. KOMMUTATOREN

(a) Wir betrachten einen Hamilton-Operator $\hat{H}$ der mit den Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutiert: $[\hat{H},\hat{A}] = [\hat{H},\hat{B}] = 0$. Die beiden Observablen kommutieren jedoch nicht: $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{H}$ entartet sind. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie die Gleichung $[\hat{A},\hat{B}^n] = \sum_{s=0}^{n-1} \hat{B}^s[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-s-1}$. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie die sogenannte Baker-Cambell-Hausdorff Formel (oder Glauber Formel), $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{[\hat{A},\hat{B}]/2}$, die gilt, wenn $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.
Hinweis: Führen Sie den Operator $\hat{F}(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$ ein, wobei t ein Skalar ist. Zeigen Sie, dass dieser Operator die folgende Differentialgleichung erfüllt $d\hat{F}/dt = (\hat{A}+\hat{B}+t[\hat{A},\hat{B}])\hat{F}(t)$. Integrieren Sie dann die Gleichung zwischen $t = 0$ und $t = 1$. (6 Punkte)

II. HARMONISCHER OSZILLATOR IN ZWEI DIMENSIONEN

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m in der $x - y$ Ebene kann durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \tag{1}$$

beschrieben werden. Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren in die x-Richtung werden definiert durch $\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right)$, $\hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right)$ (analog werden die Operatoren $\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger$ entlang der y-Richtung definiert). $|n\rangle_x|m\rangle_y$ (mit $n, m = 0, 1, \dots$) sind Eigenzustände der Anszahloperatoren, d.h. es gilt $\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x|n\rangle_x|m\rangle_y = n|n\rangle_x|m\rangle_y$ and $\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y|n\rangle_x|m\rangle_y = m|n\rangle_x|m\rangle_y$.
Hinweis: $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$.

1. Diagonalisierung und Entwicklung:

   (a) Drücken Sie den Hamilton-Operator des Systems (1) als Funktion der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aus. (4 Punkte)

   (b) Stellen Sie eine Tabelle mit den Quantenzahlen und Energien der 6 niedrigsten Energieeigenzustände und deren Entartung auf. (2 Punkte)

(c) Geben Sie die Zeitentwicklung des Anfangszustandes an: $|\psi(t=0)\rangle = C\left(|0\rangle_x + i|n\rangle_x\right)\left(|1\rangle_y + 2|4\rangle_y\right)$. (3 Punkte)

2. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

   (a) Berechnen Sie $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y |n\rangle_x |m\rangle_y$. (1 Punkt)

   (b) Berechnen Sie $\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y |n\rangle_x |m\rangle_y$. (1 Punkt)

3. Bahndrehimpuls

   (a) Zeigen Sie, dass der Bahndrehimpulsoperator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}$ geschrieben werden kann als $\hat{L}_z = -i\hbar(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x)$. (2 Punkte)

   (b) Zeigen Sie, dass $\hat{L}_z$ eine Konstante der Bewegung von $\hat{H}$ ist. (3 Punkte)

   (c) Zeigen Sie, dass $|1\rangle_x |0\rangle_y + i|0\rangle_x |1\rangle_y$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{L}_z$ ist. Was ist der zugehörige Eigenwert? (4 Punkte)

III. VIRIALTHEOREM

Wir betrachten ein eindimensionales System, welches durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{2}$$

beschrieben wird.

1. Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{x}\hat{p}]$. (3 Punkte)

2. Indem Sie den Erwartungswert des Kommutators nehmen, beweisen Sie die Gleichung

$$\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \rangle = \langle \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \rangle \,, \tag{3}$$

   wobei der Erwartungswert in einem Eigenzustand genommen wird (3 Punkte).

3. Drücken Sie $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ und $\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ durch die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren aus, $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$. (3 Punkte)

4. Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ und $\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ im Zustand $|n\rangle$, wobei $|n\rangle$ ein Eigenzustand vom dem Anzahloperator $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ mit Eigenwert n ist. (4 Punkte)

IV. ANGEREGTE ZUSTÄNDE DES HARMONISCHEN OSZILLATORS

Der Hamilton-Operators eines harmonische Oszillators in einer Dimension ist gegeben durch

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2\,,$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind in der Ortsdarstellung gegeben durch:

$$\hat{a} \to (\hat{X} + i\hat{P})/\sqrt{2}\,, \quad \hat{a}^\dagger \to (\hat{X} - i\hat{P})/\sqrt{2}\,.$$

Benutzten Sie diese Operatoren, um die Energie des Zustandes

$$\psi(X) = (2X^3 - 3X)e^{-X^2/2}\,,$$

zu berechnen. Konstruieren Sie die Eigenzustände, die diesem Zustand am nächsten in der Energie sind. (7 Punkte)