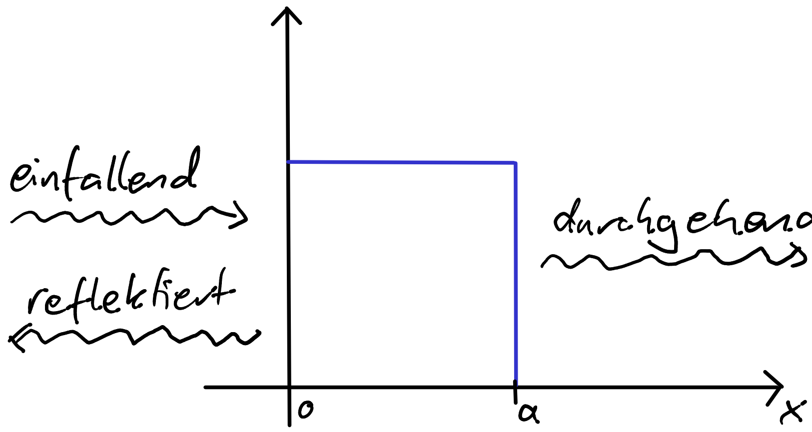
Potential barriere



$0 < E < V_0$

Ansatz: $\psi_I(x) = e^{ikx} + B_I e^{-ikx}$ ← reflektierte Welle

↑ einfallende Amplitude '1' gewählt

$\psi_{II}(x) = A_{II} e^{-\varkappa x} + B_{II} e^{\varkappa x}$

$\psi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx}$ ← durchgehende Welle

$k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad , \quad \varkappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$

Wir betrachten hier ebene Wellen, die nicht normierbar sind. Eigentlich müsste man Wellenpakete konstruieren aber ebene Wellen geben korrekt die Haupteffekte wieder und sind viel leichter zu rechnen.

Anschlussbedingungen:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0): \qquad 1 + B_I = A_{II} + B_{II}$$

$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0): \qquad ik + ikB_I = -\varkappa A_{II} + \varkappa B_{II}$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a): \qquad A_{II} e^{-\varkappa a} + B_{II} e^{-\varkappa a} = A_{III} e^{ika}$$

$$\psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a): \qquad -\varkappa A_{II} e^{-\varkappa a} + \varkappa B_{II} e^{\varkappa a} = ik A_{III} e^{ika}$$

nach einiger Rechnung:

$$A_{III} = \frac{4ik\varkappa e^{-ika}}{(k+i\varkappa)^2 e^{\varkappa a} - (k+i\varkappa)^2 e^{-\varkappa a}}$$

$\uparrow$

Amplitude der durchgehenden Welle.

Man kann k und damit E frei und <u>kontinuierlich</u> wählen (Im Gegensatz zu den diskreten Energien der gebundenen Zustände)

$$\varkappa a \gg 1$$

$$T = |A_{III}|^2 = \frac{16 k^2 \varkappa^2 e^{-2\varkappa a}}{(k^2 + \varkappa^2)} \qquad \text{Transmissionskoeffizient}$$

Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen hinter der Barriere zu finden ist größer als Null! (klassisch verboten!)

Dieses ist ein typischer quantenmechanischer Effekt der Tunneleffekt: Die exponentielle Form ist typisch.

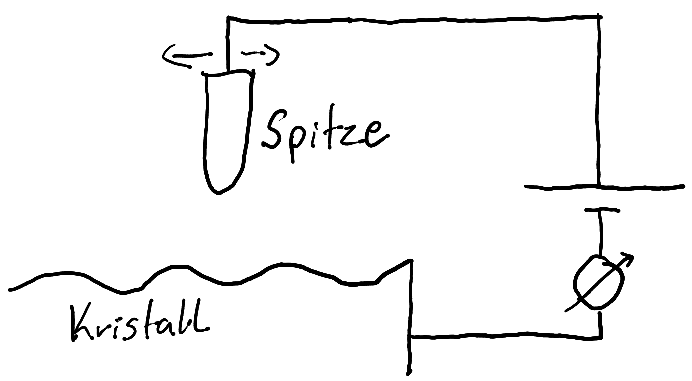
Was passiert für a) die Breite $a \to \infty$

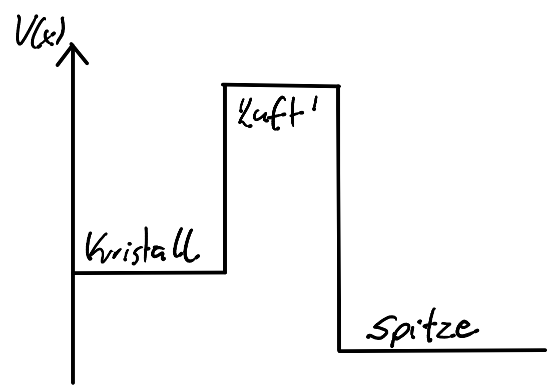
b) sehr hohe Barriere $(V_0 - E) \to \infty$

c) den klassischen Limes $\hbar \to 0$, $m \to \infty$

Die Transmission geht gegen Null.

<u>Anwendung des Tunneleffekts:</u> das Tunnelmikroskop





Man kann z.B. die Struktur einer Oberfläche bestimmen.
Elektronen tunneln von der Oberfläche in die Spitze.

Die starke Variation $T \propto e^{-2\kappa a}$ führt zu einer hohen Auflösung der Ordnung von 0,01 nm.
Man kann einzelne Atome untersuchen.

Wahrscheinlichkeitsstromdichte

Die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = \psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{r},t)\right)\psi(\vec{r},t)$$

$$= \psi^*(\vec{r},t)\left[-\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r},t)\right)\right]$$

Schrödingergl.

$$+ \psi(\vec{r},t)\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi^*(\vec{r},t)\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(\vec{r},t)\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\nabla^2\psi^*(\vec{r},t)\right)$$

Kontinuitätsgleichung des Stromes einer Flüssigkeit

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \nabla\vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

Wir führen die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t)\right)$$

mit dieser Definition gilt die Kontinuitätsgleichung wieder.

Am Beispiel der Potentialbarriere:

einfallende Welle $e^{ikx} \rightarrow J_i = \frac{1}{m} \operatorname{Re}\left(\psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \psi\right)$

$$= \frac{\hbar}{m} k$$

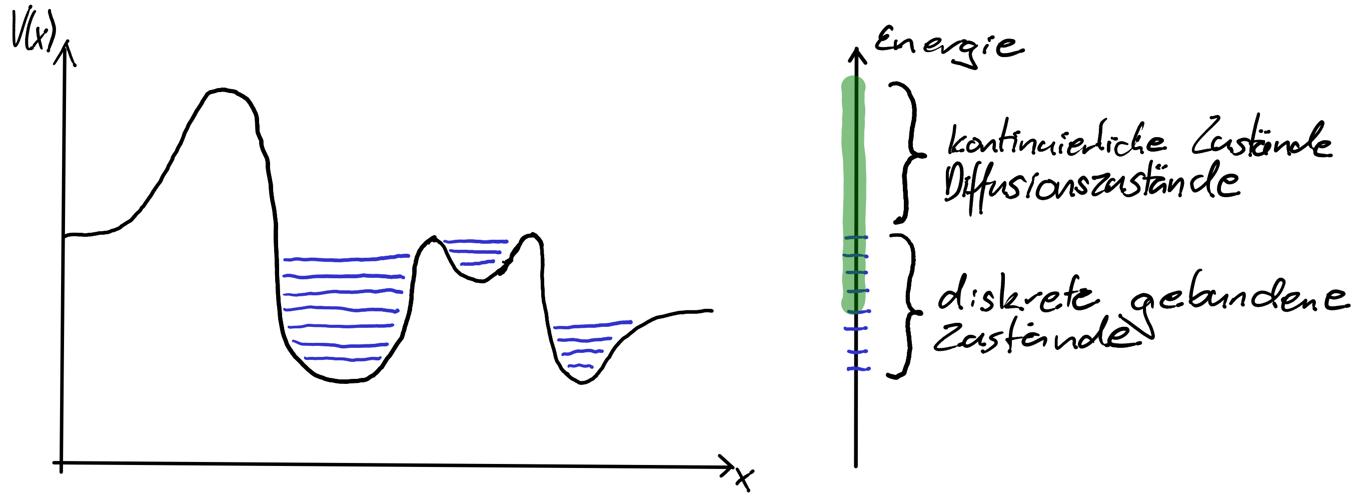
reflektierte Welle $B_I e^{-ikx} \rightarrow J_r = -\frac{\hbar k}{m} |B_I|^2$

transmittierte Welle $A_{III} e^{ikx} \rightarrow J_t = \frac{\hbar k}{m} |A_{III}|^2$

Der Strom ist erhalten: $J_i = |J_r| + J_t$

Reflexions koeffizient : $R = \frac{|J_r|}{J_i}$

Transmissions " : $T = \frac{J_t}{J_i} = |A_{III}|^2$



Höhere Dimensionen

Häufig ist das Potential separabel, d.h.

$$V(\vec{r}) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$$

stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_x(x)\right)\psi(\vec{r}) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_y(y)\right)\psi(\vec{r}) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_z(z)\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Ansatz: $\psi(\vec{r}) = \psi_x(x)\cdot\psi_y(y)\cdot\psi_z(z)$

wenn gilt: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\psi_1(x_i) = (E_i - V(x_i))\psi_i(x_i)$

dann ist $\psi(\vec{r})$ eine Lösung der Schrödingergleichung

mit $E = E_x + E_y + E_z$

V. Die Theorie der Quantenmechanik

Basdevant, Dalibard chapt. 5
Cohen-Tannoudji chapt. 2

Die Wellenmechanik wurde bekannt mit Arbeiten von Schrödinger (~ 1926). Vorher (Anfang 1925) hatte Heisenberg (Göttingen) eine abstrakte Theorie entwickelt. Born (Göttingen) hatte erkannt, dass die Regeln auf Matrizen basierte. 'Mechanik der Matrizen'. Basis der Quantenmechanik.

- 1926/27 konnten Schrödinger und Dirac die Äquivalenz der Wellen- und Matrizenmechanik zeigen.

Die Mathematischen Grundlagen wurden von Hilbert und von Neumann (~1927) entwickelt.