Dopplespalt Experiment:

- Teilchen haben Wellennatur
- einzelne Teilchen werden an einem gewissen Ort detektiert

II Wellenmechanik

Basdevant & Dalibard Kapitel 2

Cohen-Tannoudji 1.2 - 1.3

Frage: Was ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens welches durch eine Wellenfunktion beschrieben wird?

Die Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t)$

0) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Volumen d^3r um einen Punkt $\vec{r}_c$ zu finden ist

$$d^3P(\vec{r}_c) = |\psi(\vec{r}_c,t)|^2 d^3r$$

$$= \psi^*(\vec{r}_c,t)\,\psi(\vec{r}_c,t)$$

1) ψ ist quadratintegrabel und normiert auf eins:

$$\int_D |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = 1 \quad \text{mit } D \text{ der Raum}$$

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in D zu finden eins ist.

2) Messung der Position des Teilchens

$$\langle \vec{r} \rangle = \int_D \vec{r}\, |\psi(\vec{r})|^2 d^3r$$

Interpretation:

- $\langle \vec{r} \rangle$ ist der Mittelwert einer großen Anzahl von Teilchen, die dieselben Anfangsbedingungen erfüllen
- das Ergebnis einer einzelnen Messung kann starke von $\langle \vec{r} \rangle$ abweichen.
- die Genauigkeit des Messapparates kann unendlich hoch sein und trotzdem mißt man eine Verteilung
- der Messapparat kann klassisch sein.

Die Abweichung vom Mittelwert in x-Richtung werden häufig durch die Varianz

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int x^2 |\psi(\vec{r})|^2 d^3r - \langle x \rangle^2$$

gemessen (genauso in y- und z-Richtung).

de Broglie-Wellen

Ausgangspunkt der Beschreibung des Doppelspaltexperiments in der Optik ist die monochromatische ebene Welle.

$$A(\vec{r},t) = A_0 \, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Nehmen an, daß die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ und dem Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ durch eine ebene Welle (monochromatisch) beschrieben werden kann:

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad , \psi_0 = \text{konstant}$$

mit den de Broglie-Relationen:

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \ , \ \lambda = \frac{h}{|p|} \qquad \text{und} \qquad E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \ , \ E = \hbar\omega$$

(wie für Photon)

$$\boxed{\text{de Broglie Welle:} \quad \psi(\vec{r},t) = \psi_0 \, e^{-i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} \quad , \text{mit} \ E = \frac{\vec{p}^2}{2m}}$$

auswendig

nicht normierbar → siehe später

Berschreibung des Doppelspaltexperiments:

Wir nehmen an, daß die Wellenfunktion, die durch Spalt
- S_1 (mit S_2 blockiert) geht, gegeben ist durch $\psi_1(\vec{r}_c,t)$ mit Punkt $\vec{r}_c$ auf dem Detektor

- S_2 (mit S_1 blockiert) geht, gegeben ist durch $\psi_2(\vec{r}_c,t)$ mit Punkt $\vec{r}_c$ auf dem Detektor

Wenn beide Spalte offen sind, ist die Gesamtwellenfunktion

$$\psi(\vec{r}_c,t) \propto \psi_1(\vec{r}_c,t) + \psi_2(\vec{r}_c,t)$$

Prinzip der Superposition

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchen in einem Volumen d^3r um den Punkt $\vec{r}_c$ ist:

$$d^3 P(\vec{r}_c) = |\psi(\vec{r}_c,t)|^2 d^3r$$

$$\propto |\psi_1(\vec{r}_c,t) + \psi_2(\vec{r}_c,t)|^2 d^3r$$

$$= (\psi_1^*(\vec{r}_c,t) + \psi_2^*(\vec{r}_c,t))(\psi_1(\vec{r}_c,t) + \psi_2(\vec{r}_c,t))\, d^3r$$

$$= \Big(|\psi_1(\vec{r}_c,t)|^2 + |\psi_2(\vec{r}_c,t)|^2 + \underbrace{\psi_1^*(\vec{r}_c,t)\psi_2(\vec{r}_c,t) + \psi_2^*(\vec{r}_c,t)\psi_1(\vec{r}_c,t)}_{\text{Interferenzterm}}\Big) d^3r$$

<u>Bewegung eines freien Teilchens</u>

de Broglie Welle: $\psi(\vec{r},t) = \psi_0\, e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar}$

zeitliche Ableitung ist: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = E\psi(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{r},t)$

2te räumliche Ableitung: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ip_x x/\hbar} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ip_x}{\hbar} e^{ip_x x/\hbar}\right)$

$$= -\frac{p_x^2}{\hbar^2} e^{ip_x x/\hbar}$$

$$\nabla^2 \psi(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r},t) = -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r},t)$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gleichung:} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r},t) \\ \text{Dies ist die Schrödingergleichung ohne Kräfte}\end{array}}$

- lineare Gleichung
- im Gegensatz zur klassischen Wellengleichung hier 1. zeitliche Ableitung
- Norm der Wellenfunktion ist unter dieser Gleichung erhalten.

freie Wellenpakete

Die ebene (de Broglie) Welle ist nicht normierbar im freien Raum

Lösung: man kann Wellenpakete mit ihnen konstruieren durch lineare Superposition

$$\psi(\vec{r},t) = \int \varphi(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}}_{\text{Definition}}$$

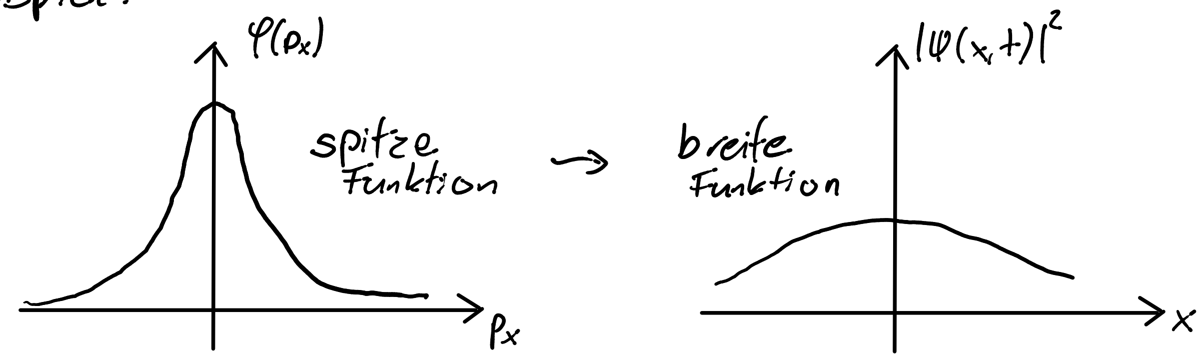
- Wobei $\varphi(\vec{p})$ eine beliebige aber normierbare Funktion ist.
- $\psi(\vec{r},t)$ und $\varphi(\vec{p})\, e^{-iEt/\hbar}$ sind Fouriertransformierte
- $\psi(\vec{r},t)$ ist eine Lösung der Schrödingergleichung

Norm: Benutzen des Theorems von Parseval-Plancherel ergibt:

$$\int |\psi(\vec{r},t)|^2 d^3r = \int |\varphi(\vec{p})|^2 d^3p$$ (siehe Blatt 1)

d.h. wenn φ normiert ist, ist ψ normiert

Beispiel:

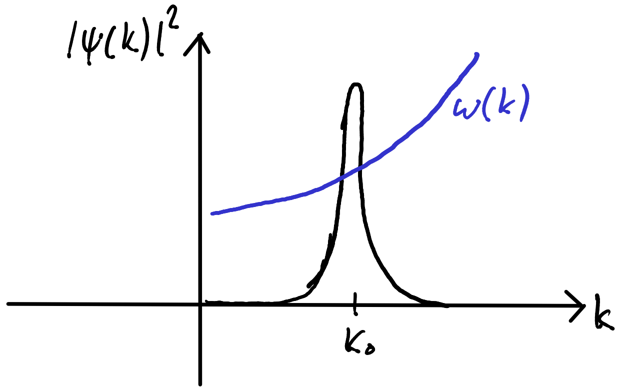


Propagation eines Wellenpakets

Sei $\psi(x,t) = \int e^{i(kx-\omega t)} \varphi(k)\, dk$ Wellenpaket in 1D

mit $\int |\varphi(k)|^2 dk = 1$, $\omega = \omega(k)$, welches 'langsam' mit k variiert.

Wie propagiert solch ein Wellenpaket?



Wir nehmen ein um k_0 lokalisiertes Wellenpaket mit $\omega_0 = \omega(k_0)$

Taylorentwicklung

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \dots$$

$$\psi(x,t) = \int e^{i(kx - \omega_0 t - v_g(k-k_0)t)} \varphi(k)\, dk$$

$$= e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}\, \psi(x - v_g t, 0)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$|\psi(x,t)|^2 dx = |\psi(x - v_g t, 0)|^2 dx$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Zeit t ist mit der zur Zeit t=0 verknüpft. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung propagiert mit der Geschwindigkeit v_g (Gruppengeschwindigkeit).