QUANTENMECHANIK, BLATT 6, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 19.5. vor der Vorlesung. Besprechung 22.5

I. OPERATOREN - FORMALISMUS

(a) Die Pauli-Matrizen sind gegeben durch $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stellen Sie $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenvektoren der $\hat{\sigma}_i$ dar und berechnen Sie die Mittelwerte $\langle\psi|\hat{\sigma}_i|\psi\rangle$.

(b) Seien zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in Matrixform gegeben:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Sind diese Operatoren hermitesch? Bestimmen Sie ihre Eigenwerte und Eigenvektoren. Geben Sie die Spektralzerlegung vom Operator $\hat{B}$ an.

(c) Finden Sie die Matrix $\hat{U}$ der unitären Transformation, die $\hat{B}$ diagonalisiert, d.h. $\hat{B}' = \hat{U}^\dagger \hat{B} \hat{U}$, wobei $\hat{B}'$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Vertauschen A und B?

II. PROJEKTOREN

Die Zustände $|n\rangle$ $(n = 1, \ldots, N)$ bilden eine Basis des Hilbertraums $\mathcal{H}$ und $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ sind die zugehörigen Projektoren. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften :

(a) $(\hat{P}_n)^2 = \hat{P}_n$,

(b) $\sum_{n=1}^{N} \hat{P}_n = \hat{I}$,

wobei $\hat{I}$ die Identität von $\mathcal{H}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Projektoren sind, d.h. als $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ dargestellt werden können, und bestimmen Sie ihre Unterräume.

(d) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ auch ein Projektor? Falls ja, bestimmen Sie seinen Unterraum.

III. MATRIXDARSTELLUNG VON OPERATOREN

In einem dreidimensionalen ($N = 3$) Hilbertraum mit orthonormaler Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ ist der Operator $\hat{A}$ definiert durch (α, β, γ sind komplexe Skalare)

$$\begin{aligned} \hat{A}|1\rangle &= 5|1\rangle + \alpha|2\rangle \,, \\ \hat{A}|2\rangle &= \beta|1\rangle + i|3\rangle \,, \\ \hat{A}|3\rangle &= -i|2\rangle + \gamma|3\rangle \,, \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Operators $\hat{A}$ in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(b) Welche Bedingungen müssen α, β und γ erfüllen damit $\hat{A}$ hermitesch ist ?

Für die folgenden Aufgaben verwenden Sie $\hat{A}$ wie oben aber setzen $\alpha = \beta = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{A}$.

(d) Bestimmen Sie den Mittelwert von $\hat{A}$ für den Zustand $|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$.

(e) Was sind die möglichen Messergebnisse einer Messung des Operators $\hat{A}$ falls sich das System im Zustand $|\psi\rangle$ befindet? Was ist die Wahrscheinlichkeit, diese Messwerte zu beobachten?

(f) In welchen Zuständen kann sich das System nach einer Messung von $\hat{A}$ befinden?

IV. ZWEI-NIVEAU SYSTEM

(a) Wir betrachten $\hat{H} = A\hat{\sigma}_3$, wobei A eine reelle Konstante ist. Stellen Sie den Zeitentwicklungsoperator als Linearkombination der Operatoren $\hat{I}$ und $\hat{\sigma}_i$ dar (berechnen Sie zunächst $\hat{\sigma_i}^2$ und verwenden Sie dieses Ergebnis in der Reihenentwicklung).

(b) $\hat{P}$ ist eine Observable. Gegeben sind $\langle 1|\hat{P}|1\rangle = 1/2$ und $\langle 1|\hat{P}^2|1\rangle = 1/4$. Finden Sie so viele Eigenzustände von $\hat{P}$ wie möglich.