Quantenmechanik, Blatt 7

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-06-02

bin ich mal so nett

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	12/12	10/10	4/4	2/14	28/40

1. Neutrino Oszillationen

Betrachtet wird ein Zwei-Niveau-System für die Entstehung von zwei Neutrinos ν_e und ν_μ als Mischzustände zweier Eingenfunktionen $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ des Hamilton-Operators mit Mischwinkel θ durch:

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}$$

flavour eigenstates mass eigenstates

1.a.

Es soll der Hamilton-Operator in der Basis $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_1\rangle$ dargestellt werden:

+1

$$H_0 = |\nu_1\rangle\langle\nu_1| E_1 + |\nu_2\rangle\langle\nu_2| E_2$$ ✓

interessant. Exakt der gleiche Fehler, wie in der Musterlösung! :P

Wenn ihr $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ als euklidische $\hat{e}_i$ seht: $H_0 = \mathrm{diag}(E_1, E_2)$

1.b.

Betrachtet wird ein Neutrino, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugt wird.Es soll die Zeitliche Entwicklung $|\psi(t)\rangle$ in der Basis von H_0 angegeben werden.
Für $|\nu_e\rangle$ ergibt sich nach obiger Formel:

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)|\nu_2\rangle$$

Die Zeitentwicklung ist durch den Zeitentwicklungsoperator

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t}$$ für Eigenzustände von H

gegeben, so dass sich für $|\psi(t)\rangle$ ergibt:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= u_n(t)|\nu_e\rangle \\ &= \cos(\theta)u_n(t)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)u_n(t)|\nu_2\rangle \\ &= \cos(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_1}{\hbar}t}|\nu_1\rangle + \sin(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{E_2}{\hbar}t}|\nu_2\rangle \end{aligned}$$ ✓ +2

1.c.

Nun wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt zum Zeitpunkt t das Teilchen im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ zu finden. Dazu berechne ich das Betragsquadrat des Skalarproduktes der beiden Zustände wobei ich die Zeitentwicklung durch $u_n(t)$ ausdrücke:

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\mu} &= \left|\langle \nu_e | u_n(t) | \nu_\mu \rangle\right|^2 \\
&= |(\cos(\theta)\langle \nu_1| + \sin(\theta)\langle \nu_2|)u_n(t)(-\sin(\theta)|\nu_1\rangle + \cos(\theta)|\nu_2\rangle)|^2 \\
&= |-\sin(\theta)\cos(\theta)u_1(t) + \sin(\theta)\cos(\theta)u_2(t)|^2 \\
&= \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)|u_2(t) - u_1(t)|^2 \\
&= \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\left(u_2^*(t) - u_1^*(t)\right)\left(u_2(t) - u_1(t)\right) \\
&= \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\left(1 - u_2^*(t)u_1(t) - u_1^*(t)u_2(t) + 1\right) \\
&= \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\left(2 - 2\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right)\right) \checkmark
\end{aligned}$$

eigentlich $|\langle \nu_\mu | \nu_e(t)\rangle|^2 = |\langle \nu_\mu | U(t,t_0) | \nu_e\rangle|^2$
Dann müsst ihr nicht eine (-1) im Betrag ausklammern ;). Lösung von b) benutzt

Außerdem soll die Zeit T angegeben werden zu welcher P_{ν_μ} maximal wird. Dazu muss gelten:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t\right) \stackrel{!}{=} -1 \\
\Leftrightarrow &\frac{E_2 - E_1}{\hbar}T_{\max} = (2n+1)\pi \\
\Leftrightarrow &T_{\max} = \frac{(2n+1)\pi\hbar}{E_2 - E_1} \checkmark
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ nehm ich mal als gecheckt an.

+4

1.d.

Das Neutrino ist ein relativistisches Teilchen. Für die Energie in Abhängigkeit von Impuls p und Masse m gilt:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Es soll die in Aufgabenteil 1.c. berechnete Wahrscheinlichkeit P_{ν_μ} in Abhängigkeit von Impuls und Masse ausgedrückt werden. Dazu berechne ich $E_2 - E_1$:

$$\begin{aligned}
E_2 - E_1 &= \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} - \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4} \\
&= \left(\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} - \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}\right)\frac{\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}}{\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}} \\
&= \frac{p^2c^2 + m_2^2c^4 - p^2c^2 - m_1^2c^4}{\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}} \\
&= \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}}
\end{aligned}$$

Mit der Näherung $pc >> mc^2$ folgt:

ich hätte $E = pc\sqrt{1+\frac{m^2c^2}{p^2}}$ zuerst genähert. Aber ok.

$$= \frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}{2pc}$$

Also ergibt sich für P_{ν_μ}:

$$P_{\nu_\mu} = \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\left(2 - 2\cos\left(\frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}{2p\hbar c}t\right)\right)$$

+2

1.e.

Nach einer Distanz l wird der Zustand gemessen. Es soll die Wahrscheinlichkeit P_{ν_μ} in Abhängigkeit von l dargestellt werden. Dabei bewege sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $c(1+\epsilon)$.
Es gilt:

ich hoffe mal $\epsilon < 0$...

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{l}{c(1+\epsilon)}$$

Somit folgt:

$$P_{\nu_\mu} = \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\left(2 - 2\cos\left(\frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}{2p\hbar c^2(1+\epsilon)}l\right)\right)$$

+2

1.f.

Es wird ein Mischungswinkel von $\theta = \frac{\pi}{4}$ angenommen. Es soll die Länge l bestimmt werden bei der die Wahrscheinlichkeit P_{ν_μ} maximal ist.
Nach Aufgabenteil 1.e. gilt:

$$P_{\nu_\mu} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}{2p\hbar c^2(1+\epsilon)}l\right)\right)$$

P_{ν_μ} ist maximal für:

$$\cos\left(\frac{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}{2p\hbar c^2(1+\epsilon)}l_{\text{max}}\right) \stackrel{!}{=} (2n+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow l_{\text{max}} = \frac{2p\hbar c^2(1+\epsilon)}{\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4}(2n+1)\pi$$

Mit $\epsilon \approx 0$, $\left(m_2^2 - m_1^2\right)c^4 = 1\,(\text{eV})^2$, $pc = 10^{10}\,(\text{eV})^2$ und $\hbar c = 2 \cdot 10^{-7}\text{eV}\cdot\text{m}$ folgt:

$$\Leftrightarrow l_{\text{max}} = \frac{10^{10}\,(\text{eV})^2 \cdot 10^{-7}\text{eV}\cdot\text{m}}{1\,(\text{eV})^2}(2n+1)\pi = (2n+1)\pi \cdot 10^3\text{m}$$

≈ 12.5 km (inkl. Faktor 4)

noch +1

Setzt $n=0$. Bei l_{max} fehlt ein Faktor 4!
Siehe unterstrichenes.

Naja, gehe mal davon aus ihr wolltet das nähern.

2. Atomspringbrunnen

2.a.

Wir berechnen $|\psi(T)\rangle$ in drei Schritten:

- Wir haben gegeben: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Dies geht zuerst durch den Resonator:

$$
\begin{aligned}
|\psi(\varepsilon)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i\cdot 1 \\ -i\cdot 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle
\end{aligned}
$$

Hier ist die Aufgabenstellung komisch. Ich glaube es sollte jeweils noch ein $e^{i\omega t}$ da stehen. Macht im Endeffekt aber keinen Unterschied...

- Nun verwenden wir den Zeitentwicklungsoperator, um $|\psi(T-\varepsilon)\rangle$ zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
|\psi(T-\varepsilon)\rangle &= \hat{U}(T-\varepsilon,\varepsilon)|\psi(\varepsilon)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1(T-2\varepsilon)}{\hbar}}|1\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_2(T-2\varepsilon)}{\hbar}}|2\rangle \quad ✓
\end{aligned}
$$

- Im letzten Zeitabschnitt geht die Welle ein weiteres Mal durch den Resonator:

$$
\begin{aligned}
|\psi(T)\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1(T-2\varepsilon)}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega(T-\varepsilon)}e^{-i\frac{E_2(T-2\varepsilon)}{\hbar}}\right)|1\rangle \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1(T-2\varepsilon)}{\hbar}}e^{i\omega(T-\varepsilon)} - i\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_2(T-2\varepsilon)}{\hbar}}\right)|2\rangle \\
=& \frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1(T-2\varepsilon)}{\hbar}} - e^{-i\omega(T-\varepsilon)}e^{-i\frac{E_2(T-2\varepsilon)}{\hbar}}\right)|1\rangle \\
&- i\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1(T-2\varepsilon)}{\hbar}}e^{i\omega(T-\varepsilon)} + e^{-i\frac{E_2(T-2\varepsilon)}{\hbar}}\right)|2\rangle \quad ✓
\end{aligned}
$$

- Nun betrachten wir den Grenzfall $\varepsilon \to 0$ mit $E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ und $E_2 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}|\psi(T)\rangle =& \frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1 T}{\hbar}} - e^{-i\omega T}e^{-i\frac{E_2 T}{\hbar}}\right)|1\rangle - i\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1 T}{\hbar}}e^{i\omega T} + e^{-i\frac{E_2 T}{\hbar}}\right)|2\rangle \\
=& ie^{-i\frac{\omega T}{2}}\frac{1}{2i}\left(e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}}e^{i\frac{\omega T}{2}} - e^{i\frac{\omega_0 T}{2}}e^{-i\frac{\omega T}{2}}\right)|1\rangle - ie^{i\frac{\omega T}{2}}\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}}e^{i\frac{\omega T}{2}} + e^{i\frac{\omega_0 T}{2}}e^{-i\frac{\omega T}{2}}\right)|2\rangle \\
=& ie^{-i\frac{\omega T}{2}}\sin((\omega-\omega_0)\frac{T}{2})|1\rangle - ie^{i\frac{\omega T}{2}}\cos((\omega-\omega_0)\frac{T}{2})|2\rangle \quad ✓ \quad +6
\end{aligned}
$$

2.b.

Die Wahrscheinlichkeit $P_2(\omega)$ ergibt sich wie folgt (für den Grenzfall $\varepsilon \to 0$):

$$
\begin{aligned}
P_2(\omega) =& |\langle\psi(T)|2\rangle|^2 \\
=& \cos^2((\omega_0-\omega)\frac{T}{2}) \quad ✓
\end{aligned}
$$

Dadurch erhalten wir als Halbwertsbreite $\Delta\omega$ von $P_2(\omega)$ um ω_0:

$$P_2(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \iff \cos^2(\Delta\omega)\frac{T}{2}) = \frac{1}{2}$$
$$\iff \Delta\omega\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\iff \Delta\omega = \frac{\pi}{T}$$ ✓

Für einen 1Meter hohen Brunnen erhalten wir:

$$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1m}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2m}{9,81\frac{m}{s^2}}} = 0,90s$$

Daraus ergibt sich:

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{0,90s} = 3,48s^{-1}$$ ✓ +4

3. GPS

3.a.

Wenn die eigene Zeit mit einer Atomuhr genau bestimmt werden kann reichen 3 Satelliten aus. Die Position lässt sich allgemein bestimmen mit:

$$|x_i - x| + |y_i - y| + |z_i - z| = c_0\,|t_i - t|$$

Da in dieser Aufgabe mit der Zeit aber 4 Unbekannte vorhanden sind, werden 4 Satelliten zur Positionsbestimmung benötigt. ✓ +2

3.b.

Wenn die Atomuhren in den Satelliten eine Abweichung von $\Delta\omega/\omega = 10^{-13}$ haben, dann kann sich in 24 Stunden eine Abweichung von

$$\Delta t = (86400 - 1)\,\mathrm{s} \cdot 10^{-13} = 8{,}639 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}$$

aufbauen.

Das ergibt eine Abweichung zum Standort des Satelliten von:

$$\Delta x = 2{,}6\,\mathrm{m}$$ ✓ +2

Kann man etwas „besser" begründen.

4. Stimulierte Emission und Absorption

4.a.

Wir machen den Ansatz für $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$:

$$a(t) = e^{-i\frac{(E_0-A)t}{\hbar}}\alpha(t)$$
$$b(t) = e^{-i\frac{(E_0+A)t}{\hbar}}\beta(t)$$

Wenn wir dies in die Schrödingergleichung $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ einsetzen erhalten wir die Gleichungen:

$$I.: \quad i\hbar(-i\frac{E_0-A}{\hbar}a(t) + e^{-i\frac{(E_0-A)t}{\hbar}}\dot{\alpha}(t)) = (E_0-A)a(t) - \hbar\omega_1\cos(\omega t)e^{-i\frac{(E_0+A)t}{\hbar}}\beta(t)$$
$$II.: \quad i\hbar(-i\frac{E_0+A}{\hbar}b(t) + e^{-i\frac{(E_0+A)t}{\hbar}})\dot{\beta}(t) = -\hbar\omega_1\cos(\omega t)e^{-i\frac{(E_0-A)t}{\hbar}}\alpha(t) + (E_0+A)b(t)$$

$I.$ lässt sich umformen wie folgt:

$$i\hbar e^{-i\frac{(E_0-A)t}{\hbar}}\dot{\alpha}(t) = -\hbar\omega_1\cos(\omega t)e^{-i\frac{(E_0+A)t}{\hbar}}\beta(t)$$
$$\Longleftrightarrow \quad i\dot{\alpha}(t) = -\omega_1\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}e^{-i\frac{(E_0+A-(E_0-A))t}{\hbar}}\beta(t)$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2i\dot{\alpha}(t) = -\omega_1(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{-i\omega_0 t}\beta(t)$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2i\dot{\alpha}(t) = -\omega_1\beta(t)(e^{i(\omega-\omega_0)t}+e^{-i(\omega+\omega_0)t})$$

$II.$ lässt sich genauso umformen:

$$i\hbar e^{-i\frac{(E_0+A)t}{\hbar}}\dot{\beta}(t) = -\hbar\omega_1\cos(\omega t)e^{-i\frac{(E_0-A)t}{\hbar}}\alpha(t)$$
$$\Longleftrightarrow \quad i\dot{\beta}(t) = -\omega_1\alpha(t)\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}e^{-i\frac{E_0-A-(E_0+A)t}{\hbar}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2i\dot{\beta}(t) = -\omega_1\alpha(t)(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{i\omega_0 t}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2i\dot{\beta}(t) = -\omega_1\alpha(t)(e^{i(\omega+\omega_0)t}+e^{-i(\omega-\omega_0)t})$$

+2