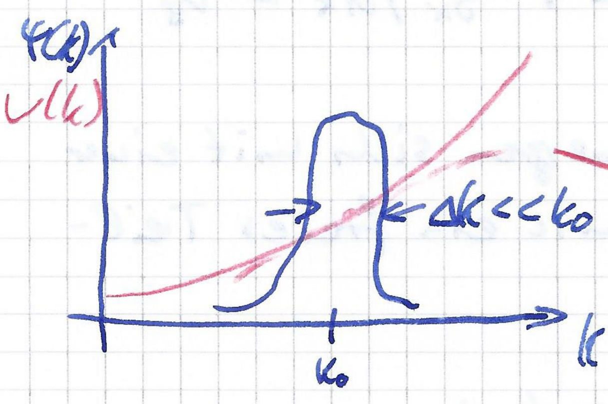
14.04 VL

Propagation von Wellenpaketen



$\omega(k)$

Taylorentwicklung:

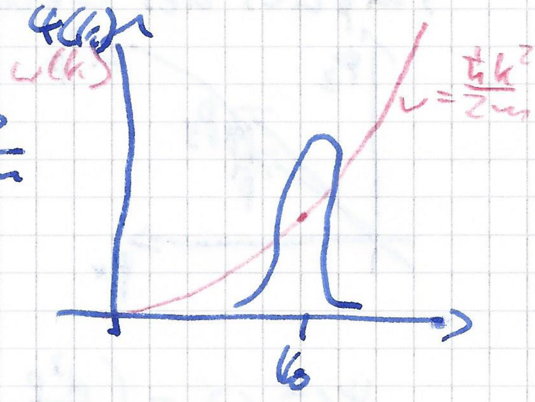
$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\underbrace{\omega'(k)\big|_{k_0}}_{v_g} + \dots$

Freies Teilchen mit Masse

$$\hbar\omega = E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$\frac{p}{m}$

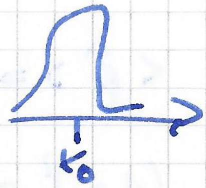
$$\Rightarrow \omega(k) = \omega(k_0) + v_g(k-k_0)$$



Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bewegt sich mit der Geschw. eines klassischen Teilchens.

Bewegung der mittleren Position eines Wellenpakets (Ausdehnung → HA)

$\langle x(t)\rangle$



$$\frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle = \frac{d}{dt}\int x|\psi(x,t)|^2\,dx$$

$$= \int x\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\int x\left(-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} + \psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)dx$$

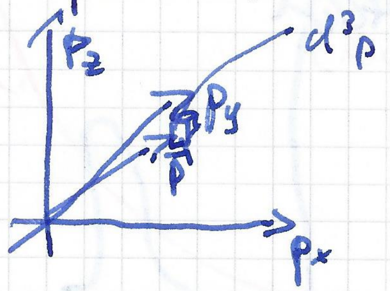
$$= \frac{i\hbar}{2m}\int \frac{\partial}{\partial x}(x\psi)\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi^*)\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx =: v_g$$

Die Wellenpakete bewegen sich mit einer mittleren Geschw. v_g wie ein freies Teilchen:

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t=0) \rangle + v_g t + \ldots$$

Impuls des Wellenpakets



Die Wahrsch. ein Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ zu finden ist

$$d^3P(\vec{p}) = |\psi(\vec{p})|^2 d^3p$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar}$$

$$\left.\begin{array}{l} - |\psi(\vec{p})|^2 > 0 \quad \forall \vec{p} \\ - \int |\psi(\vec{p})|^2 d^3p = 1 \end{array}\right\} \psi(\vec{p}) \text{ ist Wahrsch.-Dichte}$$

Mittelwert d. Impulses:

$$\langle \vec{p} \rangle = \int d^3p \; \vec{p} \, |\psi(\vec{p})|^2$$

$$(\Delta p_i)^2 = \langle p_i^2 \rangle - \langle p_i \rangle^2 \quad \text{Schwankungsbreite}$$

Heisenberg'sche Unschärferelation:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \; ; \; \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \; ; \; \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Gleichheit gilt für Gaussche Wellenp.

Folgt aus d. Fouriertrafo

N Teilchen

$\frac{N}{2}$ Teilchen $\rightarrow$ Ortsmessung — $\langle \vec{r} \rangle$, $(\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2$

$\frac{N}{2}$ Teilchen $\rightarrow$ Impulsmessung — $\langle \vec{p} \rangle$, $(\Delta p_x)^2, (\Delta p_y)^2, (\Delta p_z)^2$

Die Heisenberg'sche Unschärferelation besagt, dass man die Teilchen nicht gleichzeitig lokalisiert im Orts- und Impulsraum präparieren oder messen kann.

Prinzipien der Quantenmechanik (Auswendig!)

Klassisch

1. Der Zustand eines Teilchens zum Zeitpkt. t wird durch seine Position $\vec{r}(t)$ und seine Geschw. $\vec{v}(t)$ festgelegt:
   $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

QM

Der Zustand des Teilchens wird durch eine komplexwertige Wellenfkt. $\Psi(\vec{r}, t)$ gegeben.
Die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in einem Volumenelement d^3r zu finden ist

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$$

2

Newtonische Gesetze:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Kraft

3

Messresultate physikalischer Größen sind Funktion von Ort $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$

4

viel später

Für Wellenfkt. gilt das Superpositionsprinzip

Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)}_{H = T+V}$$

Verknüpft 1. Ordnung Abl. in der Zeit mit 2. Ordnung Abl. im Ort

Bisher kennen wir nur

$$\langle x \rangle = \int x\, |\Psi(x)|^2 dx$$

$$\langle p_x \rangle = \int p\, |\Psi(p)|^2 dp$$

→ nächstes Kapitel

III Physikalische Größen und Messungen

Def.:

Zu jeder physikalischen Größe ist eine Observable $\hat{A}$ assoziert. (1)

$\hat{A}$ ist linearer, hermitischer Operator $\overline{\underline{5}}$ (2)

Der Operator $\hat{A}$ wirkt auf dem Raum der Wellenfkt.

$$\Rightarrow \hat{A}\Psi \rightarrow \Psi' \qquad (3)$$

Der Operator $\hat{A}$ ist zeitunabhängig.

$\rightarrow$ Zeitentwicklung findet in der Wellenfkt. statt. (4)

Der Erwartungswert des Resultats einer Messung ist gegeben durch

$$\int \Psi^*(\vec{r},t)\,\hat{A}\,\Psi(\vec{r},t)\,d^3x = \langle a(t)\rangle \qquad (5)$$

Linearer Operator $\Leftrightarrow$ $\hat{A}(\Psi_1+\Psi_2) = \hat{A}\Psi_1 + \hat{A}\Psi_2$

$$\hat{A}(\lambda\Psi) = \lambda\hat{A}\Psi$$

Hermitescher Operator:

$$\int \Psi_2^*\,\hat{A}\,\Psi_1\,d^3x = \int (\hat{A}\Psi_2)^*\,\Psi_1\,d^3x$$

Erwartungswerte sind immer reell:

$$\langle a(t)\rangle^* = \left(\int \Psi^*(\hat{A}\Psi)\,d^3x\right)^*$$

$$= \int \Psi\,[\hat{A}\Psi]^*\,d^3x$$

$\hat{A}$ hermitesch

$$= \int \Psi^*(\hat{A}\Psi)\,d^3x$$

$$= \langle a(t)\rangle \quad \Rightarrow \langle a(t)\rangle \text{ ist reell}$$