Prinzipien der QM

I. Der Zustand eines physikalischen Systems zum Zeitpunkt t wird durch einen Zustandsvektor (ket) $|\psi(t)\rangle$ aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben.

II. Die Zeitentwicklung eines Zustandes $|\psi(t)\rangle$ (ohne Messung) ist gegeben durch die Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$

$\hat{H}$ wird der Hamiltonoperator des Systems genannt und entspricht der Observablen 'Energie'

III Messungen physikalischer Größen

a) Jeder physikalischen Größe A wird ein linearer und hermitescher Operator $\hat{A}$ zugeordnet. $\hat{A}$ wird Observable genannt.

b) Die einzig möglichen Ergebnisse einer Messung von A sind die Eigenwerte a_α von $\hat{A}$

c) Die Wahrscheinlichkeit den Wert a_α zu messen ist

$$P(a_\alpha) = \| \psi_\alpha \|^2 \quad , \text{mit } |\psi_\alpha\rangle = \hat{P}_\alpha |\psi\rangle$$

Hier ist $\hat{P}_\alpha$ der Projektor auf den Unterraum der durch die Eigenvektoren zu a_α gebildet wird.

d) Eine Messung reduziert einen Zustand. Nach einer Messung von A mit dem Ergebnis a_α ist der Zustand des Systems gegeben durch

$$|\psi\rangle = \frac{|\psi_\alpha|}{\|\psi_\alpha\|}$$

Der Zeitentwicklungsoperator

Sei $|\psi(t_0)\rangle$ der Zustand des Systems zur Zeit t_0. Zur Zeit $t \geq t_0$ ist Zustand $|\psi(t)\rangle$ bestimmt durch die Schrödingergleichung mit der Anfangsbedingung $|\psi(t_0)\rangle$

$|\psi(t)\rangle$ und $|\psi(t_0)\rangle$ sind durch einen linearen Operator $\hat{U}(t, t_0)$ verknüpft.

$$|\psi(t)\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeitentwicklungsoperator}}}{\hat{U}(t, t_0)}\, |\psi(t_0)\rangle$$

Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators

1) $\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}$ (Identität)

d.h. $|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t_0, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$ für jeden beliebigen Zustand $|\psi(t_0)\rangle$

2) $\hat{U}$ folgt der Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0) = \hat{H}(t)\,\hat{U}(t,t_0)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle & = & \hat{H}(t)\,\hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle \end{array}$$

3) $\hat{U}(t_n,t_1) = \hat{U}(t_n,t_{n-1})\,\hat{U}(t_{n-1},t_{n-2}) \dots \hat{U}(t_2,t_1)$

wobei $t_1, t_2 \dots t_n$ Zeiten sind mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

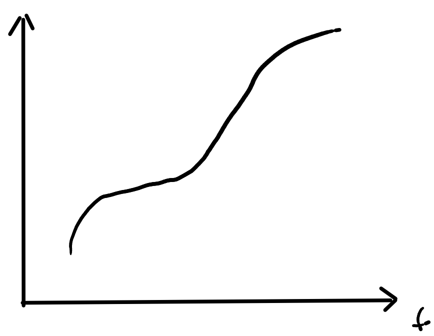
Das System entwickelt sich von t_1 nach t_2 nach t_3 ... um den Zeitpunkt t_n zu erreichen.

4) Sei t eine Zeit und δt ein infinitesimaler Zeitschritt. Dann gilt:

$$\hat{U}(t+\delta t, t) \approx \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\,\delta t$$

<u>Bew:</u> $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \approx \frac{i\hbar}{\delta t}\left(|\psi(t+\delta t)\rangle - |\psi(t)\rangle\right)$

$$\begin{array}{c} \| \\ \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle \end{array}$$



$$|\psi(t+\delta t)\rangle \approx |\psi(t)\rangle - \frac{i\delta t}{\hbar}\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

$$= \underbrace{\left(\hat{I} - \frac{i\delta t}{\hbar}\hat{H}(t)\right)}_{\hat{U}(t+\delta t,\,t)}|\psi(t)\rangle$$

5) $\hat{U}(t,t')$ ist unitär, d.h. $\hat{U}^{\dagger}(t,t') = \hat{U}^{-1}(t,t')$

6) Wenn $\hat{H}$ zeitabhängig ist gilt:

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$$

Zwei-Niveau System

Die bisherigen Beispiele von Hilberträumen waren von unendlicher Dimension (Wellenfunktionen in Ortsraum / Impulsraum)

Hier betrachten wir den einfachsten (aber trotzdem sehr interessanten) Fall des zwei-dimensionalen Hilbertraums.

Alle Zustandsvektoren in diesem Raum können als lineare Superposition von zwei unabhängigen Basisvektoren konstruiert werden. Daher nennt man das System auch Zwei-Niveau/Zustands-System.

Seien $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ zwei orthonormale Basisvektoren.

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \langle\psi_1| = (1\ 0) \quad \langle\psi_2| = (0\ 1)$$

und jeder Zustand $|\psi\rangle$ kann geschrieben werden als

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\langle\psi| = \alpha^*\langle\psi_1| + \beta^*\langle\psi_2| = (\alpha^*, \beta^*)$$

mit der Normierung $\langle\psi|\psi\rangle = (\alpha^*, \beta^*)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Jeder lineare Operator kann als komplexe 2x2 Matrix geschrieben werden.

Jede beliebige hermitesche Matrix $\hat{M}$ kann geschrieben werden:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix} = a\hat{I} + b\hat{\sigma}_1 + c\hat{\sigma}_2 + d\hat{\sigma}_3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit den Paulimatrizen

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Physikalische Realisierungen

Viele Systeme können in bestimmten Näherungen durch solche Zwei-Niveau Systeme beschrieben werden.

- Photon-Polarisation
- einfaches Modell eines Ammoniak Moleküls
- Neutrinooszillation
- Spin des Elektrons
- qubits : analog zu klassischem Bit
- Atom gekoppelt an Lichtfeld (siehe Physik IV)

Photon-Polarization

Klassisch beschreibt die Polarisation von Licht den elektrischen Feldvektor orthogonal zur Propagationsrichtung. Die Polarisation kann elliptisch, zirkular oder linear sein.

Ein Polarisationsfilter lässt Licht mit der Polarisation parallel zu seiner Achse durch. Klassische Lichtstrahlen bestehen aus sehr vielen unabhängigen Photonen (roter Strahl, 1 Watt $\sim 10^{18}$ photon/s)

Das einzelne Photon trägt eine Polarisation, die in dem Zwei-Niveau Zustandsraum beschrieben werden kann.

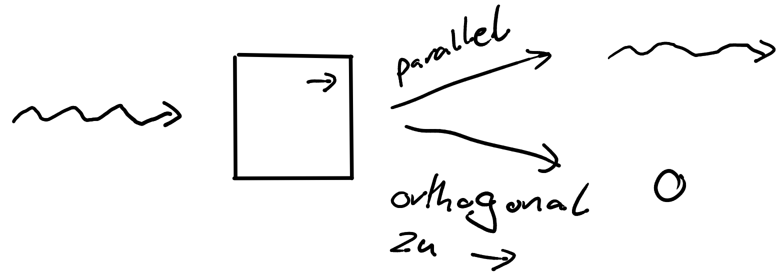
$|\rightarrow\rangle$ horizontale
$|\uparrow\rangle$ vertikale
} Polarisation — bilden eine Hilbertbasis

$|\vartheta\rangle = \cos\vartheta\,|\rightarrow\rangle + \sin\vartheta\,|\uparrow\rangle$ lineare Polarisation im Winkel ϑ

$|\psi_{L,R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle \pm i\,|\uparrow\rangle\right)$ links und rechts zirkulare Polarisation

$|\psi\rangle = \alpha\,|\rightarrow\rangle + \beta\,|\uparrow\rangle$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Frage: Wie können wir einen Polarisationsfilter darstellen?



Agiert wie ein Projektor!

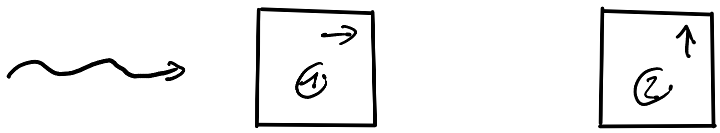
$$\hat{A}_\vartheta = |\vartheta\rangle\langle\vartheta| = \begin{pmatrix}\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos^2\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & \sin^2\vartheta\end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeit der Transmission von $|\rightarrow\rangle$

$$\begin{aligned}\langle\rightarrow|\vartheta\rangle\langle\vartheta|\rightarrow\rangle &= \cos^2\vartheta \\ &= 1 \qquad \text{für } \vartheta = 0 \\ &= 0 \qquad \text{für } \vartheta = \pi/2 \\ &= 1/2 \qquad \text{für } \vartheta = \pi/4\end{aligned}$$

Was passiert wenn:

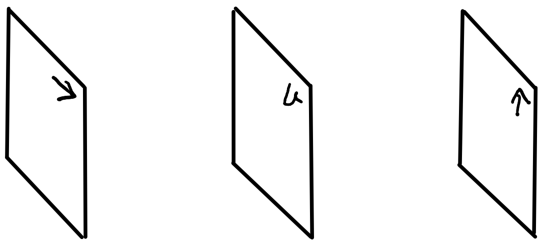


kein Licht

'Messung 1' : Projektion auf $|\rightarrow\rangle$

'Messung 2' : Projektion auf $|\uparrow\rangle$

Zusätzlicher Filter zwischen den beiden:



Messung: Projektion auf ϑ

$$|\rightarrow\rangle \xrightarrow{\text{1. Messung}} |\rightarrow\rangle \xrightarrow{\text{Messung } \vartheta} |\vartheta\rangle \xrightarrow{\text{Messung 2}} |\uparrow\rangle$$

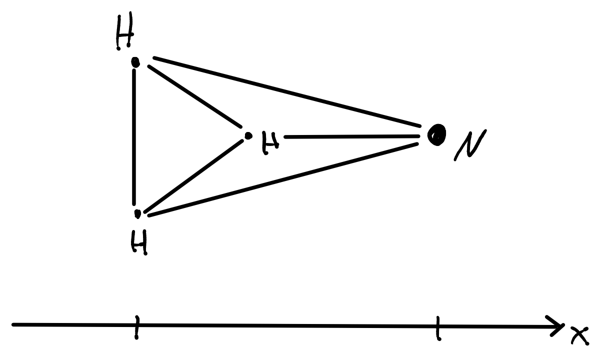
$\vartheta = \pi/4$

Reihenfolge ist wichtig, da $\hat{A}_0, \hat{A}_{\pi/2}, \hat{A}_{\pi/4}$ nicht kommutieren.

Modell des Ammoniakmoleküls NH_3

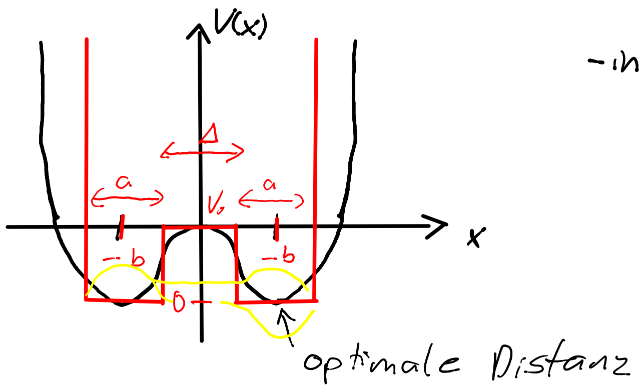
Basdevant & Dalibard 6.3

Cohen-Tannoudji 4.10



Bei niedriger Energie:
Die H_3 bilden ein gleichseitiges Dreieck und N liegt auf der Normalen in einem gewissen Abstand, den wir mit x bezeichnen.

Die Potentielle Energie des Systems hängt stark von dieser Distanz x ab.



- inversionssymmetrisch um $x=0$

Vereinfachte Form