QUANTENMECHANIK, BLATT 3, SOMMERSEMESTER 2015, C. KOLLATH

Abgabe Di 28.4. vor der Vorlesung. Besprechung 8.5

I. PHYSIKALISCHER MESSPROZESS

(a) Wir betrachten die Observable $\hat{A}$ einer physikalischen Größe A und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen $\psi_n(\mathbf{r})$ mit den nicht-entarteten Eigenwerten a_n ($n = 1, 2$). Berechnen Sie die Varianz $\Delta A^2 = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2$ für die Wellenfunktion ψ des System gegeben durch: (i) $\psi(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r})$ (ii) $\psi(\mathbf{r}) = c_1\psi_1(\mathbf{r}) + c_2 e^{i\phi}\psi_2(\mathbf{r})$, mit c_1, c_2 und ϕ reellen Konstanten, und ψ ist normiert.

(b) Wir betrachten ein Teilchen in einem eindimensionalen System. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das System im Zustand $\psi(x, 0)$ prepariert und der Ort x des Teilchens wird unmittelbar danach gemessen. Dieser Messprozess wird zehnmal wiederholt und wir erhalten die folgenden Messwerte (in nm) : 550, 478, 539, 498, 541, 497, 455, 496, 500, 479. Die Messapparatur hat eine Genauigkeit von $\delta x = 10$ nm.

(i) Berechnen Sie den Mittelwert $\langle x \rangle$ und die Varianz Δx^2 des Ortes. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(x, 0)|^2$ unbekannt ist, verwenden wir die folgenden Abschätzungen:

$$\langle x \rangle \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad , \qquad \mathrm{Var}(x) \approx \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)^2 \tag{1}$$

(ii) Wir wiederholen das Experiment. Aber diesmal nehmen wir umittelbar nach jeder Ortsmessung eine weitere Ortsmessung vor. Geben Sie den Mittelwert und die Abweichung der 2ten Messung an.

(iii) Beschreiben Sie, was über das Ergebnis einer nachfolgenden (nach der Ortsmessung) Impulsmessung bekannt ist (Heisenberg'sche Unschärferelation).

(iv) Überlegen Sie sich eine Wellenfunktion, die den ursprünglichen Zustand des Systems beschreibt (Sie können die Messverteilung mit Hilfe eines Histrogramms skizzieren). Ist dieser Zustand eindeutig?

II. WELLENFUNKTION

Eine Wellenfunktion sei gegeben durch $\psi(x) = c \sin(N\pi x/a)$ für $0 \leq x \leq a$ und $\psi(x) = 0$ sonst. N ist eine ganze Zahl. Diese Wellenfunktion beschreibt ein Teilchen in einem Kasten der Länge a

mit unendlich hohen Potentialwänden. N bezeichnet die verschiedenen Energieniveaus.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante c und skizzieren Sie $\psi(x)$ für $N = 1, 2$.

(b) Berechnen Sie $\langle x \rangle$, Δx, $\langle p \rangle$, Δp und das Produkt $\Delta x \Delta p$ für die Wellenfunktion $\psi(x)$.

III. WELLENFUNKTION

Konstruieren Sie zwei unterschiedliche Wellenfunktionen in einer Dimension, so dass

$$\langle p \rangle = m v_0 \quad \text{et} \quad \Delta p = q_0,$$

Berechnen Sie $\Delta x \Delta p$. Für welche Wellenfunktion ist dieser Wert kleiner? Wie verändert sich der Mittelwert des Ortes $\langle x \rangle$ mit der Zeit wenn $q_0 \ll m v_0$?

IV. KOMMUTATOREN

(a) Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ Observablen. Zeigen Sie, dass : $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

(b) Sei $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ der Drehimpuls und $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(|\hat{r}|)$ der Hamilton-Operator eines Teilchens in einem Potential. Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren, wobei k, j für x, y, z stehen:

(i) $[\hat{L}_k, \hat{r}_j]$

(ii) $[\hat{L}_k, \hat{p}_j]$

(iii) $[\hat{L}_k, \hat{L}_j]$

(iv) $[V(|\hat{r}|), \hat{L}_j]$

(v) $[\hat{H}, \hat{L}_j]$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.