Übungen zu Theoretische Physik IV

Prof. Dr. Hans Kroha, Jonas Reuter, Christoph Liyanage

Abgabe: 30.10.2015

http://www.kroha.uni-bonn.de/teaching/

–Anwesenheitsaufgaben–

A 1.1 Wegintegrale und Integrabilität

Es sei $\delta A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i$ ein beliebiges Differential. Wie in der Vorlesung behandelt, ist δA ein exaktes Differential, wenn es das totale Differential einer Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

(a) Es sei $n = 2$. Betrachte die Linearform (Differential) $\delta A = x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_2$. Zeige, dass das geschlossene Wegintegral von A entlang eines beliebigen Rechtecks in der $x_1 - x_2$-Ebene verschwindet, $\int_\square dA = 0$, und somit $\delta A = \mathrm{d}A$ ein exaktes Differential ist.

(b) Betrachte nun die Linearform $\delta B = x_1 \mathrm{d}A = b_1 \mathrm{d}x_1 + b_2 \mathrm{d}x_2$. Untersuche, ob die partiellen Ableitungen von b_1 und b_2 nach x_2 bzw. x_1 übereinstimmen. Berechne das geschlossene Wegintegral von B entlang des Rechtecks, das durch die Eckpunkte [(0,0), (4,0), (4,3), (0,3)] definiert ist. Ist δB ein exaktes Differential?

Der Faktor $\frac{1}{x_1}$, der in diesem Beispiel aus einem nicht exakten Differential δB ein exaktes Differential $\mathrm{d}A = \frac{1}{x_1}\delta B$ macht, ist ein Beispiel für einen *integrierenden Faktor*.

(c) Es sei wieder $n = 2$ und $\delta B = x_1 x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1^2 \mathrm{d}x_2$. Bestimme den integrierenden Faktor in seiner allgemeinen Form aus der Bedingung der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Wie geht daraus die spezielle Form des integrierenden Faktors aus (b) hervor?

A 1.2 Legendre Transformation

Die Legendre-Transformation ist Ihnen in der klassischen Mechanik bereits beim Übergang von der Lagrange- zur Hamiltonfunktion begegnet. Vor allem taucht sie jedoch in der statistischen Physik beim Übergang von einem Satz von Zustandsgrößen auf einen anderen auf.

Es sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Ziel der Legendre-Transformation ist es, die Abhängigkeit der Funktion f von der Variablen x zu einer Abhängigkeit von der Variablen u, mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$, zu verändern.
Es sei $T_{x_0}(x)$ die Schar der Tangenten an die Funktion $f(x)$ in den Punkten x_0. Sie ist gegeben durch

$$T_{x_0}(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Die y-Achsenabschnitte $g(x_0)$ dieser Tangenten sind gegeben durch

$$g(x_0) = f(x_0) - x_0 f'(x_0)\,.$$

Wenn die Funktion streng monoton ist (man sagt dann, die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ ist bijektiv), so enthält die Funktion $g(x)$ die gleiche Information wie $f(x)$. Man bezeichnet g dann als die *Legendre-Transformierte* von f, und es gilt

$$g = f - xu\,, \qquad u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\,.$$

Anschaulich ist $g(x)$ der zum Punkt $(x, f(x))$ gehörige y-Achsenabschnitt der Tangente an f an der Stelle x.

(a) Zeige, dass g nur von u abhängt, indem du das totale Differential von g nach x und u bildest.

(b) Berechne die Legendre Transformierte g der Funktion $f(x) = x^2$ sowie ihr totales Differential.

(c) WWas ist die Legendre-Transformierte der Funktion $f(x) = x$? Enthält sie die gleiche Information wie $f(x)$?

(d) Zeige, dass die Legendre Transformation involutiv ist, das heißt, dass zweifache Anwendung auf eine Funktion wieder die Ausgangsfunktion liefert.

Anmerkung: Die Legendre-Transformation lässt sich leicht auf den Fall von Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ mehrerer Variablen verallgemeinern. Dabei wird die Tangente an f bezüglich einer Variablen x_i behandelt, und alle anderen Variablen x_j, $j \neq i$, werden als konstante Parameter betrachtet.

–Hausaufgaben–

H 1.1 Maxwell Relationen und Ableitungsregeln **(2+4+4=10) Punkte**

In dieser Aufgabe wollen wir einige mathematische Relationen herleiten. Es ist in der Thermodynamik üblich, bei partiellen Ableitungen die konstant gehaltenen Größen explizit anzugeben. Zum Beispiel schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\,.$$

(a) Die Funktion $f(x,y)$ besitze das exakte Differential

$$df = u(x,y)dx + v(x,y)dy\,.$$

Zeige

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y\,.$$

Diese Beziehung heißt Maxwell-Relation. Die Zustandsvariablen x, y, z seien nun über eine Zustandsgleichung $F(x,y,z) = 0$ miteinander verknüpft. Ferner sei die Zustandsvariable $f = f(x,y)$ eine Funktion der Variablen x und y.

(b) Zeige die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z , \tag{1}$$

(c) Zeige für die gleichen Zustandsvariablen, dass außerdem gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z .$$

H 1.2 Wahrscheinlichkeitstheorie **(1+1+2+2+2+4+3=15) Punkte**

In dieser Aufgabe sollen die grundlegenden, für die statistische Physik wichtigen Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholt werden.

(a) Unter der *Ereignismenge* E eines Zufallsexperiments versteht man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Eine *Zufallsvariable* ist dann eine Abbildung $X : E \to \Omega$, wobei Ω eine Menge ist. Gib eine mögliche Zufallsvariable für das Zufallsexperiments des zweifachen Würfelns an.

(b) Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* P_X der Zufallsvariable X ist eine Abbildung $P_X : \Omega_X \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$, für die die Normierungseigenschaft

$$\sum_{e \in E} P_X(X(e)) = 1$$

erfüllt ist und die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert annimmt. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung der in (a) definierten Zufallsvariable und prüfe ihre Normierung.

(c) Bei unbegrenzter Wiederholung eines Zufallsexperiments ist der Mittelwert der Zufallsvariablen X durch den *Erwartungswert*

$$\langle X \rangle \equiv \sum_{e \in E} x(e) \cdot P_X(x(e))$$

gegeben. Berechne den Erwartungswert der in (a) definierten Zufallsvariable.

(d) Das *Schwankungsquadrat* einer Zufallsvariable ist definiert als

$$(\Delta X)^2 \equiv \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$$

und beschreibt das Quadrat der mittleren Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert. Zeige, dass

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

gilt.

(e) Um die (Un-)Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X_i und X_j zu beschreiben, definiert man den *Korrelationskoeffizienten*

$$K_{ij} \equiv \langle (X_i - \langle X_i \rangle) (X_j - \langle X_j \rangle) \rangle.$$

Dabei gelten die beiden Zufallsvariablen als unabhängig (unkorreliert) wenn der Korrelationskoeffizient verschwindet. Betrachte dazu die folgenden Zufallsexperimente

- Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die Ergebnismenge ist $E = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$ und wir definieren zwei Zufallsvariablen $X_1^1 : (a,b) \mapsto a$ und $X_2^1 : (a,b) \mapsto b$.
- Ein Physiker schießt zwei mal auf eine Torwand. Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim ersten Schuss ist 50%. Trifft der Physiker beim ersten Schuss, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim zweiten Schuss wieder 50%. Andernfalls wird der Physiker allerdings nervös und die Wahrscheinlichkeit eines Treffers beim zweiten Schuss sinkt auf 25%. Wir definieren wieder zwei Zufallsvariablen: X_1^2 ist 1 im Falle eines Treffers beim *ersten* Schuss und 0 sonst; X_2^2 ist 1 im Falle eines Treffers beim *zweiten* Schuss und 0 sonst.

Berechne die Korrelationsfunktionen von X_1^1, X_2^1 sowie von X_1^2, X_2^2.

(f) Das zweite Beispiel aus der letzten Aufgabe ist ein Beispiel für bedingte Wahrscheinlichkeit. Bedingte Wahrscheinlichkeit tritt bei voneinander abhängigen Zufallsvariablen auf. Dies wollen wir im folgenden vertiefen. Betrachte dazu das folgende Beispiel:
Bei einer Sportveranstaltung wird ein Dopingtest durchgef?hrt. Wenn ein Sportler gedopt hat, dann f?llt der Test zu 99% positiv aus. Hat ein Sportler aber kein Doping genommen, zeigt der Test trotzdem zu 5% ein positives Ergebnis an. Aus Erfahrung wei? man das 20% der Sportler gedopt sind.
Berechne nun,

(i) wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Dopingprobe positiv aus,

(ii) wie großdie Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Test negativ ausfällt obwohl der Sportler gedopt hat,

(iii) und wie großdie Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Sportler gedopt hat, falls seine Dopingprobe negativ ausgefallen ist.

(g) Bis jetzt haben wir einfach ausgeführte Zufallsexperimente betrachtet. Führt man ein Zufallsexperiment mehrfach durch, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass eine Zufallsvariable X die Werte x_i mit Wahrscheinlichkeit $P_X(x_i) \equiv p_i$ bei k_i von N durchführungen annimmt (dabei ist $i = 1, \ldots, n$ und $\sum_i k_i = N$). Diese Wahrscheinlichkeit ist durch die *Multinomialverteilung*

$$P(\{p_i\}, \{k_i\}) = \begin{cases} \frac{N!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} \, p_1^{k_1} \, p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}, & \text{falls} \quad \sum_i k_i = N, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Als Spezialfall der Multinomialverteilung ergibt sich für *Bernoulli-Prozesse*, das heißt Experimente mit genau zwei mögliche Ergebnissen, die Binomialverteilung

$$B(p,k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

$B(p,k)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x in k von N Fällen annimmt und p ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x bei einfachem ausführen des Zufallsexperiments annimmt.

Berechne Erwartungswert und Schwankungsquadrat der Zufallsvariable k mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $B(p,k)$.

Tipp: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$