

Metrología con Singularidades de Fase

Astrid Lorena Villamizar Amado

Resumen

El objetivo de este trabajo es implementar un código en Python en el cual, utilizando imágenes en intensidad, se obtenga un pseudo campo complejo asociado del mismo. Con este pseudo campo, se podrá localizar e identificar singularidades de fase, las cuales se pueden visualizar en el espacio 2D y 3D. Esto permitirá el estudio de diversos fenómenos dinámicos con diferentes orígenes.

1. Speckle

Al iluminar con luz coherente un difusor o una superficie rugosa en comparación con una longitud de onda del mismo, se puede observar un patrón de puntos claros y oscuros conocido como patrón de *speckle* o *moteado*. Este fenómeno es debido a la coherencia temporal de la luz, ya que permite interferencia dando máximos y mínimos en la intensidad.

Si se presentan movimientos de la superficie rugosa o de los centros dispersores, alteraciones temporales del medio de transmisión o de la fuente de la luz, el patrón observado presentará cambios a través del tiempo, esto es conocido como speckle dinámico.

Estas variaciones en los patrones de speckle pueden, en algunas circunstancias, brindar información útil sobre el fenómeno que les da origen.

1.1. Historias Temporales de Patrones de speckle

La imagen de Historia Temporal de un Patrón de Speckle (THSP) se obtiene reuniendo una columna seleccionada de la secuencia de imágenes de speckle dinámico. Esta imagen THSP se compone poniendo cada columna lado a lado con valores $m \times n$, donde m representa la historia temporal de cada píxel de la columna n tomada de cada imagen.

En el programa *THSP*, se toma una región o ventana de cada imagen, y esa zona se convierte en un vector columna que se concatena una a una hasta formar la THSP; esta será la imagen en intensidad que se obtendrá finalmente.

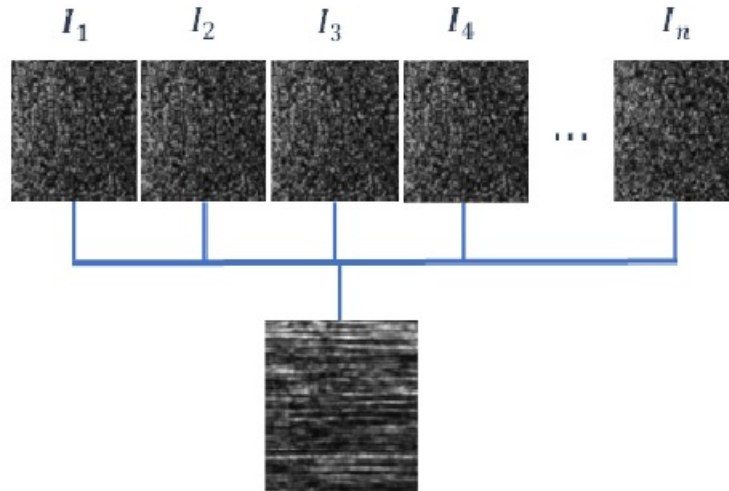


Figura 1: Esquema de la generación de THSP para n número de patrones de speckle.

2. Transformada Laguerre Gauss

La transformada Laguerre Gauss[3], es una transformada integral lineal que tiene como característica que en el núcleo o kernel presenta un filtro pasabanda, con el cual el patrón complejo $\tilde{I}(x, y)$ está relacionado con una distribución de intensidad original $I(x, y)$, expresado de la siguiente manera:

$$\tilde{I}(x, y) = \iint LG(f_x, f_y) F\{I(x, y)\} e^{i2\pi(xf_x + yf_y)} df_x df_y \quad (1)$$

donde $LG(f_x, f_y)$ es el filtro Laguerre Gauss, F es la transformada de Fourier, $I(x, y)$ es la distribución original y $\tilde{I}(x, y)$ es la señal analítica compleja.

El filtro Laguerre-Gauss LG expresado en el dominio de la frecuencia se expresa como:

$$LG(f_x, f_y) = (f_x + if_y) e^{-\left(\frac{f_x^2 + f_y^2}{\omega^2}\right)} = \rho e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}} e^{i\beta} \quad (2)$$

donde $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ y $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right)$ son las coordenadas polares en el dominio de la frecuencia, ω es un parámetro que controla el ancho de banda del filtro, suprimiendo componentes de altas frecuencias que dan lugar a singularidades inestables.

3. Singularidades de Fase

Por medio de la implementación del filtro LG , se obtiene un patrón complejo que será referido como pseudo campo para diferenciarlo del campo original que generó el patrón de intensidad. En este nuevo patrón existen lugares donde la intensidad es nula y la fase no está definida. A pesar de esto, en las vecindades de estos puntos, la fase presenta propiedades muy interesantes; dichas singularidades en la pseudo fase son conocidas como vórtices ópticos [2].

Cuando se ingresa una THSP obtenida previamente a la función *Laguerre Gauss*, se aplica la transformada LG. Esto se logra mediante el uso de la transformada de Fourier y el filtro LG (ecuación 1). El parámetro *omega* (ω) permite controlar el número de vórtices presentes (ecuación 2). A continuación, se llama a la función *Residuos*, la cual, con la información de pseudofase obtenida previamente, localiza los vórtices ópticos en los mapas matriciales de pseudofase. Para esto, se estima el gradiente entre todas las posibles parejas de píxeles en torno a un punto. Las singularidades se localizan al computar la suma de cada uno de los residuos para todas las trayectorias cerradas posibles. Si la suma de los gradientes es diferente de cero, entonces hay una discontinuidad y una singularidad está presente.

3.1. Propiedades estructurales

Las singularidades de fase pueden ser empleadas como marcadores de campo, estas están distribuidas aleatoriamente en los mapas de fase o pseudofase.

Los vórtices ópticos se pueden caracterizar por un conjunto de propiedades como lo son: vorticidad, excentricidad, carga topológica, el ángulo de cruce por cero de la parte real e imaginaria del campo. Generalmente la parte real e imaginaria del campo complejo bidimensional en las vecindades de un vórtice se pueden definir como:

$$\text{Re}[\tilde{I}(x, y)] = a_r x + b_r y + c_r \quad (3)$$

$$\text{Im}[\tilde{I}(x, y)] = a_i x + b_i y + c_i \quad (4)$$

donde los coeficientes a_k, b_k, c_k ($k = r, i$) son obtenidos mediante el método de ajuste de mínimos cuadrados a partir de los valores complejos que son detectados alrededor de cada singularidad.

Basándose en sus definiciones, los parámetros geométricos y físicos que caracterizan la singularidad de fase se puede expresar en términos de los coeficientes de ajuste.

3.2. Vorticidad

Se define la vorticidad como el rotor de la corriente óptica del campo en la singularidad, se puede expresar como:

$$\Omega = |\vec{\Omega}| = |a_r b_i - a_i b_r| \quad (5)$$

3.3. Carga topológica

La fase alrededor del vórtice óptico cambia en múltiplos de 2π . El número de veces que la fase se incrementa en 2π es a fuerza de la singularidad en términos de ese cambio de fase. Esta cantidad se conoce como carga topológica, toma valor de números enteros cuyo signo se asocia con el sentido de incremento de la fase, sea este horario o antihorario. En este trabajo, el pseudocampo se obtiene mediante la implementación de un filtro Laguerre Gauss que contiene vórtices con carga topológica 1 en su función transferencia. Por este motivo, el pseudo campo solo tendrá singularidades con carga topológica ± 1 . Así, la fase incrementa 2π la carga topológica será 1, de lo contrario la fase disminuye en 2π con una carga topológica -1.

$$q = \text{sgn}(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z) = \text{sgn}(a_r b_i - a_i b_r) \quad (6)$$

3.4. Excentricidad

La pseudo fase alrededor de una singularidad presenta una variación de 2π , sin embargo, este cambio no es uniforme.

La intensidad del campo puede ser aproximado en el entorno cercano a un vórtice siguiendo contornos elípticos. Utilizando los coeficientes de ajuste la excentricidad se puede expresar como:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{(a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2) - \sqrt{(a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2)^2 + 4(a_r b_r + a_i b_i)^2}}{(a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2) + \sqrt{(a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2)^2 + 4(a_r b_r + a_i b_i)^2}}} \quad (7)$$

3.5. Ángulo del cruce por cero

El cruce de la parte real e imaginaria cuando ambas son nulas puede ser caracterizado mediante el ángulo entre las rectas tangentes a la expresión 8 en el punto de intersección.

$$\text{Re}[\tilde{I}(x, y)] = 0, \quad \text{Im}[\tilde{I}(x, y)] = 0 \quad (8)$$

Empleando los coeficientes de las expresiones 3 y 4 se puede expresar las rectas de la siguiente manera:

$$y = -\frac{a_r}{b_r}x - \frac{c_r}{b_r}, \quad y = -\frac{a_i}{b_i}x - \frac{c_i}{b_i} \quad (9)$$

Por consiguiente, el ángulo de las dos rectas es invariante al desplazamiento y la rotación de la singularidad y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\theta_{RI} = \begin{cases} \left| \tan^{-1} \left(\frac{a_r b_i - a_i b_r}{a_r a_i - b_r b_i} \right) \right| & \text{si } |\theta_{RI}| < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \left| \tan^{-1} \left(\frac{a_r b_i - a_i b_r}{a_r a_i - b_r b_i} \right) \right| & \text{si } |\theta_{RI}| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (10)$$

4. Esfera de Poincaré

Una forma de caracterizar las singularidades de fase es la propuesta por Wang [4] donde se considera el gradiente del pseudo campo en el vórtice, estableciéndose una analogía con el vector de polarización de una onda.

Es posible observar la similitud entre el gradiente del campo y el vector de polarización respecto a sus características geométricas. Por lo cual, se adopta los parámetros de Stokes en polarización, siendo estos análogos, pero sin ninguna relación física entre ellos. De esta manera, es posible definir las elipses anisotrópicas asociadas a la pseudo fase, localizando un vórtice óptico en la esfera de Poincaré.

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_r^2 + b_r^2 + a_i^2 + b_i^2, \\
S_1 &= a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2, \\
S_2 &= 2(a_r b_r + a_i b_i), \\
S_3 &= 2(a_r b_i - a_i b_r).
\end{aligned}$$

El conjunto de expresiones anteriores nos permite deducir que solo tres de ellas son independientes, ya que están relacionadas de la siguiente manera:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (11)$$

Al utilizar la información de pseudofase y residuos previamente obtenidos, podremos calcular los valores de las propiedades estructurales (ecuaciones 5, 6, 7 y 10), así como las coordenadas en el plano y en el espacio tridimensional para cada singularidad (ecuación 11). Para ello, se hace uso de la función *subpix2x2*. En esta función se extraen las partes real e imaginaria para obtener los coeficientes de ajuste a_k, b_k, c_k ($k = r, i$) que son identificados alrededor de los vórtices. Con estos coeficientes se pueden calcular las coordenadas en el plano, las propiedades estructurales y, finalmente, obtener los parámetros de Stokes para representar cada singularidad de fase en la esfera unitaria.

5. Resultados

Inicialmente se toman patrones de speckle durante el secado de pintura y con estas secuencias de imágenes se elaboran las historias temporales que describen un fenómeno dinámico en el tiempo [1].

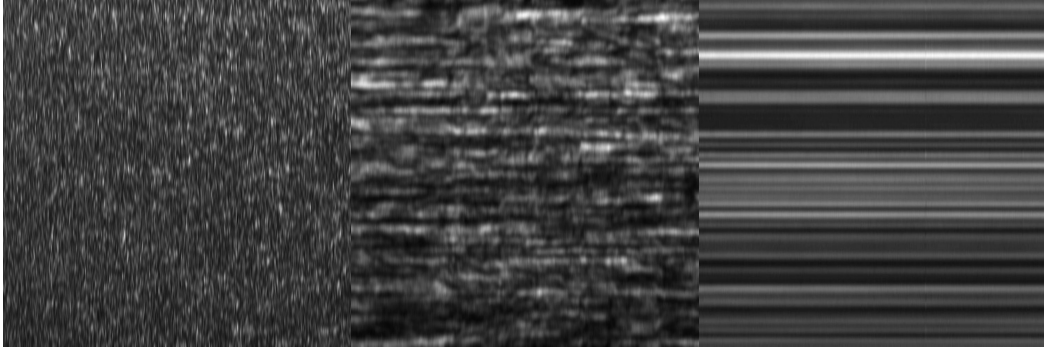


Figura 2: THSP en diferentes momentos

En la figura 2 se muestran tres historias temporales, al inicio, en el intermedio y al final del secado de la pintura respectivamente, estas al implementar el programa llamado *THSP*.

A continuación, en cada THSP se emplea la transformada de Laguerre Gauss y se localizan los vórtices ópticos en cada pseudofase correspondiente al patrón de intensidad de entrada, esto se obtiene al ejecutar las dos funciones llamadas *LaguerreGauss* y *Residuos*.

En la figura 3 se observan las pseudofases asociadas a las THSP de la figura 2 y los vórtices ópticos presentes en ellas en color verde.

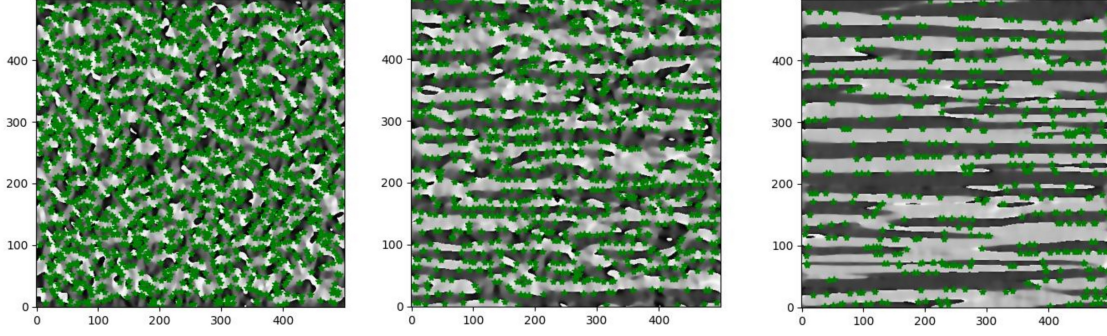


Figura 3: Pseudo fases y vortices (verde)

Por último, se presentan las tres esferas de Poincaré para cada uno de los estados. Para localizarlas, se tienen en cuenta todas las propiedades estructurales de las singularidades de fase, las cuales se obtienen al ejecutar la función *subpix2x2*.

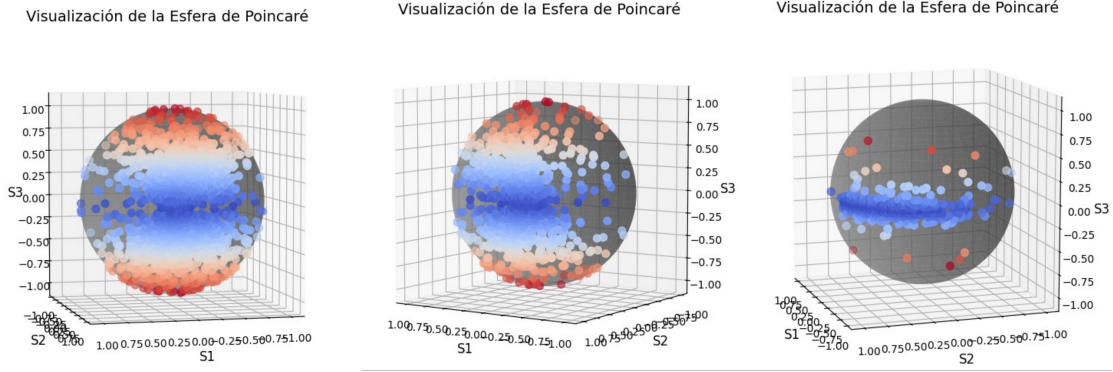


Figura 4: Pseudo fases y vortices (verde)

En la figura 4 se aprecia la representación en el espacio 3D de los vórtices ópticos para cada uno de los estados del secado de pintura. Como se puede observar, al aplicar la pintura se presenta un alto número de singularidades alrededor de la esfera, pero durante el proceso de secado se agrupan significativamente en la región ecuatorial. Esto sugiere vórtices debido al ruido, ya que estas son singularidades inestables en metrología óptica. Todo esto se realizó con un ancho de filtro LG ω constante en todos los resultados.

Referencias

- [1] A. L. Villamizar-Amado, D. Sierra-Sosa, A. Elmaghraby, E. Grumel, H. Rabal, and M. Tebaldi. Poincare sphere noise filtering for singularities in dynamic speckle activity: Application to paint drying time measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 136:106317, 2021.
- [2] W. Wang, S. G. Hanson, and M. Takeda. *Optical Vortex Metrology*, chapter 5, pages 207–238. John Wiley Sons, Ltd, 2011.
- [3] W. Wang, T. Yokozeki, R. Ishijima, M. Takeda, and S. G. Hanson. Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in laguerre-gauss transform of a speckle pattern. *Opt. Express*, 14(22):10195–10206, 2006.
- [4] R. I. T. Y. A. M. S. G. H. M. T. Wei Wang, MR Dennis. Poincaré sphere representation for the anisotropy of phase singularities and its applications to optical vortex metrology for fluid mechanical analysis. *Opt. Express*, 15(17):11008–11019, 2007.