AER2430 - Cours 5 - Hiver 2021

S. Etienne

École Polytechnique de Montréal
Département de Génie Mécanique

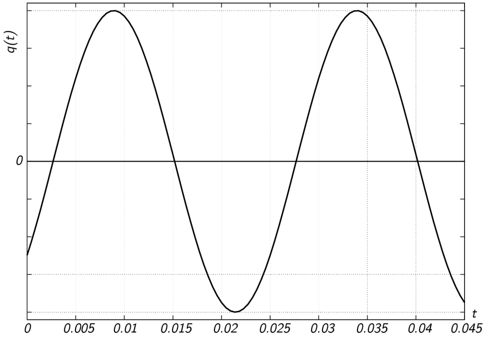
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Outline

Analyse de réponse temporelle

Un système 1 ddl est soumis à une excitation harmonique $Q(t) = 400\cos(\omega t)$ N.

- Quand l'excitation est de 40Hz, la vitesse $\dot{q}$ est en phase avec la force, $\dot{q} = \beta Q$.
- L'amplitude de vibration est de 16mm à 25Hz.
- À 42Hz, on trace le déplacement. L'échelle verticale est inconnue. t est celui du forçage.



1. Fréquence naturelle du système et ratio d'amortissement.
2. La masse équivalente M, la raideur K, et l'amortissement C.
3. La valeur maximale de q à 42Hz.
4. L'évolution temporelle de la vitesse $\dot{q}$ en régime permanent en fonction du temps t quand la fréquence est de 40Hz.

⑨ $\dot{q}$ est en phase avec $Q(t) = 400\cos(\omega t) \equiv Q_0 e^{i\omega t}$

$$q = q_0 e^{i(\omega t+\phi)} \Rightarrow \dot{q} = i\omega q_0 e^{i(\omega t+\phi)} \qquad i = e^{i\pi/2}$$

$$\dot{q} = \omega q_0 e^{i(\omega t+\phi+\pi/2)}$$

On doit donc avoir $\underbrace{\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}}_{\text{phase de } \dot{q}} = \underbrace{\omega t}_{\text{phase de } Q(t)}$ pour que $\dot{q}$ et Q soient en phase

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Pour un chargement $Q(t)$ à amplitude constante, un déphasage de $-\pi/2$ correspond à $r=1$, $\frac{f}{f_n}=1$

On a $\boxed{f_n = f = 40\,Hz}$ soit $\boxed{\omega_n = 80\pi \text{ rad/s}}$

À 42 Hz, la réponse maximale se produit à $t_m = 0.0085\,s$

Comme $q(t) = q_0 e^{i(\omega t+\phi)}$ on a $\omega t_m + \phi = 0$ et $\phi = -2\pi 42 \times 0.0085\,s$

et $\phi = -0.714\pi$

Comme $\phi = \text{atan2}(-2\zeta r, 1-r^2) \Rightarrow \zeta = \frac{1-r^2}{-2r}\tan(\phi)$

Avec $r = 1.05$, on a $\boxed{\zeta = 0.0613}$

(b) Trouver K : utiliser $\left|\frac{Kq_0}{Q}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

$$K = \frac{Q}{q_0}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$Q = 400N$, à 25Hz, $\frac{\omega}{\omega_n} = 5/8$ et $q_0 = 16.10^{-3}m$

$$K = 40700\,N/m$$

$$\sqrt{\frac{K}{M}} = \omega_n \Rightarrow M = \frac{K}{\omega_n^2} = 0.644\,kg$$

$$C = 2\zeta\sqrt{KM}$$

$$C = 2\times 0.0613\sqrt{40700\times 0.644} = 20\,kg/s$$

(c) $\left|\frac{Kq_0}{Q}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \Rightarrow q_0 = \frac{Q}{K}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$

à 42Hz, $r = \frac{f}{f_n} = 1.05 \Rightarrow q_0 = 0.05975m$

(d) $q = q_0 e^{i(\omega t+\phi)}$

$\dot{q} = i\omega q_0 e^{i(\omega t+\phi)} = \omega q_0 e^{i(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})}$ à 40Hz, $\phi = -\frac{\pi}{2}$

$$\dot{q} = \omega q_0 e^{i\omega t} = 20.15\,e^{i80\pi t}$$

Outline

Forçage des systèmes à 2 et N ddl

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{K}$ sont des matrices de rang n. La matrice masse $\boldsymbol{M}$ est inversible et diagonalisable. Le second membre $\boldsymbol{f}$ est un forçage harmonique de la forme $\boldsymbol{F}(\omega)e^{i\omega t}$.

On va surtout approfondir à des systèmes à 2 ddl: Absorbeurs dynamiques

- Absorbeur dynamique (forçage harmonique constant)
- Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)
- Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)
- Absorbeur de vibrations pendulaire centrifuge
- Vibrations induites par vortex

Tous les modèles sont linéarisés si nécessaire

Forçage des systèmes à 2 et N ddl

On suppose

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} e^{i\omega t} \tag{2}$$

L'équation (1) devient après division par $e^{i\omega t}$

$$[\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}\omega^2 + i\boldsymbol{C}\omega]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \tag{3}$$

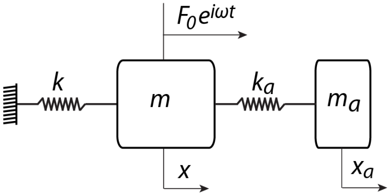
Équation dont la solution est

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}\omega^2 + i\boldsymbol{C}\omega]^{-1}\boldsymbol{F} \tag{4}$$

Python

- Soit $z = complex(a, b) = re^{i\theta}$
- $z.real$ partie réelle de z: a
- $z.imag$ partie imaginaire de z: b
- $z.conjugate()$ conjugué de z: $a - ib$
- $abs(z)$ module de z: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $phase(z)$ phase du nombre complexe z: θ entre $-\pi$ et π équivalent de $atan2(b, a)$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante



Système vibrant avec amortisseur dynamique simple.

- Les énergies et travail virtuel sont

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_a\dot{x}_a^2 \quad (5)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_a(x - x_a)^2 \quad (6)$$

$$\delta W = F_0 e^{i\omega t}\delta x \quad (7)$$

- Le système d'équations est

$$m\ddot{x} + kx + k_a(x - x_a) = F_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$m_a\ddot{x}_a + k_a(x_a - x) = 0 \quad (9)$$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

On obtient alors le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} k+k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} x \\ x_a \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{array} \right\} \tag{10}$$

Les termes extra-diagonaux sont des termes de couplage entre ddl
On choisit

$$x(t) = X e^{i\omega t} \tag{11}$$

$$x_a(t) = X_a e^{i\omega t} \tag{12}$$

les vitesses et accélérations sont

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} = i\omega x(t) \qquad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t) \tag{13}$$

$$\dot{x}_a(t) = i\omega X_a e^{i\omega t} = i\omega x_a(t) \qquad \ddot{x}_a(t) = -\omega^2 X_a e^{i\omega t} = -\omega^2 x_a(t) \tag{14}$$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

Amplitudes complexes (module et phase): X et X_a

$$\begin{bmatrix} k + k_a - m\omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a - m_a\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Dont la résolution mène à

$$\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2} \begin{bmatrix} k_a - m_a\omega^2 & k_a \\ k_a & k + k_a - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$|X| = \frac{|k_a - m_a\omega^2| F_0}{|(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2|} \tag{17}$$

$$|X_a| = \frac{k_a F_0}{|(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2|} \tag{18}$$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

La coutume pour les amortisseurs dynamiques est d'étudier le comportement du système en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ

$$\mu = m_a/m \qquad \beta = \omega_a/\omega_p \tag{19}$$

$$\omega_a = \sqrt{k_a/m_a} \qquad \omega_p = \sqrt{k/m} \tag{20}$$

$$r = \omega/\omega_p \qquad r_a = \omega/\omega_a = r/\beta \tag{21}$$

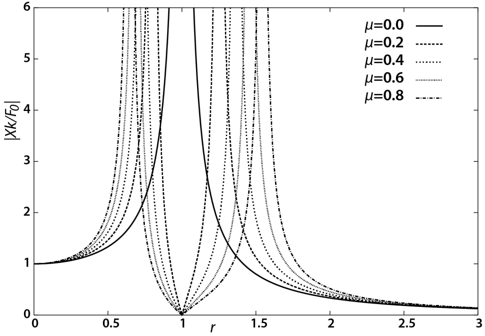
$$\text{On a aussi} \qquad k_a/k = \mu\beta^2 \tag{22}$$

Après quelques manipulations on arrive à

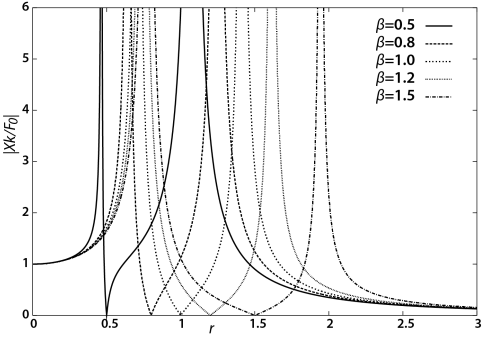
$$|Xk/F_0| = \frac{|\beta^2 - r^2|}{|r^4 - [1 + (1+\mu)\beta^2]r^2 + \beta^2|} \tag{23}$$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

Réponse du système principal en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ



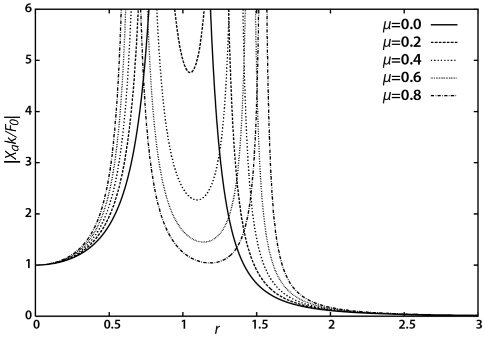
$\beta = 1$



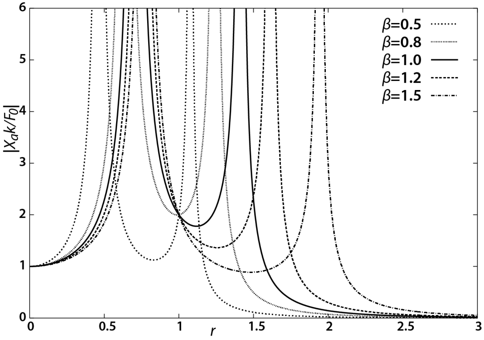
$\mu = 1$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

Réponse de l'absorbeur en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ



$\beta = 1$



$\mu = 1$

Amortisseur dynamique simple, amplitude de forçage constante

Optimisation d'un absorbeur dynamique: Trouver β et μ qui satisfont r_1 et r_2, les deux fréquences naturelles résultantes du couplage.

- On cherche à écarter les ratios de fréquences de résonance (naturelles). On connaît r_1 et r_2

$$r_i = \sqrt{\frac{1+\beta^2(1+\mu) \pm \sqrt{\beta^4(1+\mu)^2 - 2\beta^2(1-\mu)+1}}{2}} \tag{24}$$

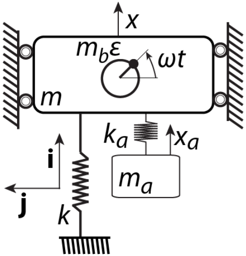
$$\beta = r_1 r_2 \qquad \mu = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 1}{\beta^2} - 1 \tag{25}$$

- On cherche une gamme (r_1,r_2) sur laquelle l'amplitude adimensionnelle ne dépasse pas 1.

$$\beta = r_1\sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2 + 2}{2}} \qquad \mu = \left(\frac{r_1^2}{\beta^2}\right)^2 - 1 \tag{26}$$

- On a un impératif sur le poids de l'amortisseur et les fréquences naturelles μ, r_1 et r_2. On cherche *beta* pour satisfaire r_1 et r_2.

Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)



Système vibrant avec amortisseur dynamique simple.

- Les énergies et travail virtuel sont

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_a\dot{x}_a^2 \quad (27)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_a(x - x_a)^2 \quad (28)$$

$$\delta W = \epsilon m_b \omega^2 e^{i\omega t}\delta x \quad (29)$$

- Le système d'équations est

$$m\ddot{x} + kx + k_a(x - x_a) = \epsilon m_b \omega^2 e^{i\omega t} \quad (30)$$

$$m_a\ddot{x}_a + k_a(x_a - x) = 0 \quad (31)$$

Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)

Les amplitudes complexes sont

$$\left\{ \begin{array}{c} X \\ X_a \end{array} \right\} = \frac{1}{(k+k_a-m\omega^2)(k_a-m_a\omega^2)-k_a^2} \left[\begin{array}{cc} k_a-m_a\omega^2 & k_a \\ k_a & k+k_a-m\omega^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon m_b \omega^2 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{32}$$

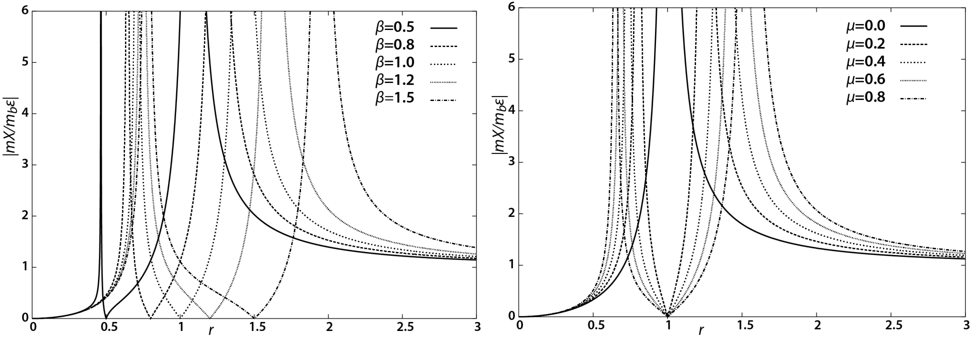
Les amplitudes de l'oscillateur principal et de l'amortisseur dynamique sont les modules des amplitudes complexes ici adimensionnaliées et réécrites en fonction de β et μ et r

$$|mX/\epsilon m_b| = \frac{|\beta^2 - r^2| r^2}{|r^4 - [1+(1+\mu)\beta^2] r^2 + \beta^2|} \tag{33}$$

$$|mX_a/\epsilon m_b| = \frac{r^2}{|r^4 - [1+(1+\mu)\beta^2] r^2 + \beta^2|} \tag{34}$$

Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)

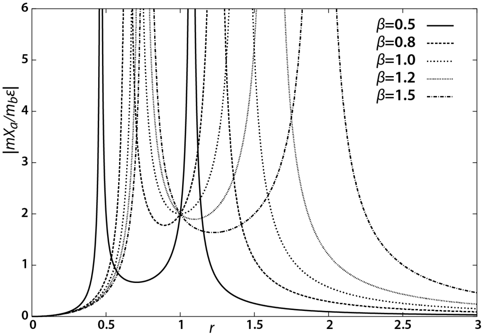
Réponse du système principal en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ



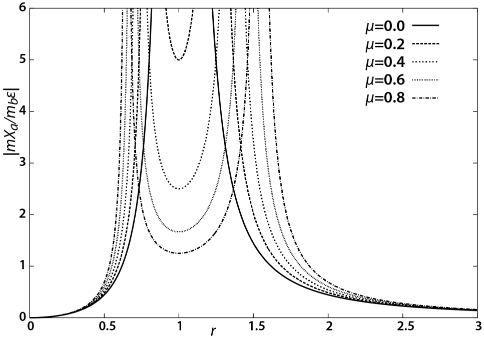
$\beta = 1$ $\mu = 1$

Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)

Réponse de l'absorbeur en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ



$\beta = 1$



$\mu = 1$

Absorbeur dynamique (forçage de type balourd)

Optimisation d'un absorbeur dynamique: Trouver β et μ qui satisfont r_1 et r_2, les deux fréquences naturelles résultantes du couplage.

- On cherche à écarter les ratios de fréquences de résonance (naturelles). On connaît r_1 et r_2

$$r_i = \sqrt{\frac{1 + \beta^2(1+\mu) \pm \sqrt{\beta^4(1+\mu)^2 - 2\beta^2(1-\mu) + 1}}{2}} \tag{35}$$

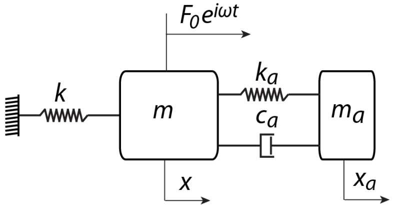
$$\beta = r_1 r_2 \qquad \mu = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 1}{\beta^2} - 1 \tag{36}$$

- On cherche une gamme (r_1,r_2) sur laquelle l'amplitude adimensionnelle ne dépasse pas 1.

$$\beta = \frac{r_2}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}} \qquad \mu = 1/r_1^2 - 1/\beta^2 \tag{37}$$

- On a un impératif sur le poids de l'amortisseur et les fréquences naturelles μ, r_1 et r_2. On cherche β pour satisfaire r_1 et r_2.

Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)



Système vibrant avec amortisseur dynamique simple.

- Les énergies, fonction de dissipation et travail virtuel sont

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_a \dot{x}_a^2 \quad (38)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k_a (x - x_a)^2 \quad (39)$$

$$D = \frac{1}{2} c_a (\dot{x} - \dot{x}_a)^2 \quad (40)$$

$$\delta W = F_0 e^{i\omega t} \delta x \quad (41)$$

- Le système d'équations est

$$m\ddot{x} + c_a(\dot{x} - \dot{x}_a) + kx + k_a(x - x_a) = F_0 e^{i\omega t} \quad (42)$$

$$m_a \ddot{x}_a + c_a(\dot{x}_a - \dot{x}) + k_a(x_a - x) = 0 \quad (43)$$

Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)

On obtient alors le système matriciel suivant

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Les termes extra-diagonaux sont des termes de couplage entre ddl
On choisit

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (45)$$

$$x_a(t) = X_a e^{i\omega t} \quad (46)$$

les vitesses et accélérations sont

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} = i\omega x(t) \qquad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t) \quad (47)$$

$$\dot{x}_a(t) = i\omega X_a e^{i\omega t} = i\omega x_a(t) \qquad \ddot{x}_a(t) = -\omega^2 X_a e^{i\omega t} = -\omega^2 x_a(t) \quad (48)$$

Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)

$$\begin{bmatrix} k + k_a + ic_a\omega - m\omega^2 & -k_a - ic_a\omega \\ -k_a - ic_a\omega & k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{49}$$

Dont la résolution mène à

$$\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{(k + k_a + ic_a\omega - m\omega^2)(k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2) - (k_a + ic_a\omega)^2} \begin{bmatrix} k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2 & k_a + ic_a \\ k_a + ic_a\omega & k + k_a + ic_a\omega - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

$$|X| = \frac{|k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2| F_0}{|(k + k_a + ic_a\omega - m\omega^2)(k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2) - (k_a + ic_a\omega)^2|} \tag{51}$$

$$|X_a| = \frac{|k_a + ic_a\omega| F_0}{|(k + k_a + ic_a\omega - m\omega^2)(k_a + ic_a\omega - m_a\omega^2) - (k_a + ic_a\omega)^2|} \tag{52}$$

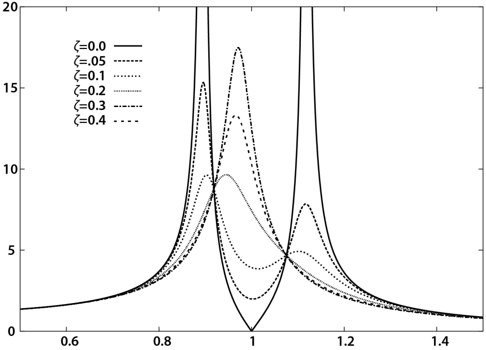
Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)

La coutume pour les amortisseurs dynamiques est d'étudier le comportement du système en fonction du ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ mais ici en plus de $\zeta_p = c_a/\sqrt{km}$, le ratio d'amortissement de l'absorbeur. Après quelques manipulations on arrive à

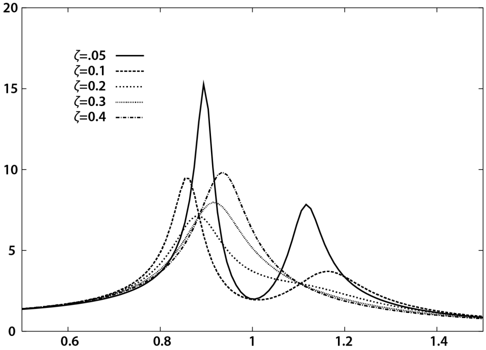
$$|Xk/F_0| = \sqrt{\frac{(\beta^2 - r^2)^2 + (2\zeta_p r)^2}{[(1-r^2)(\beta^2 - r^2) - \mu\beta^2 r^2]^2 + (2\zeta_p r)^2[1-(1+\mu)r^2]^2}} \quad (53)$$

Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)

Réponse du système principal pour différents ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ et d'amortissement ζ_p



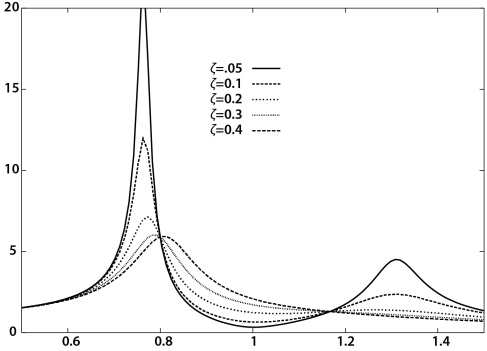
$\beta = 1,\ \mu = 0.05$



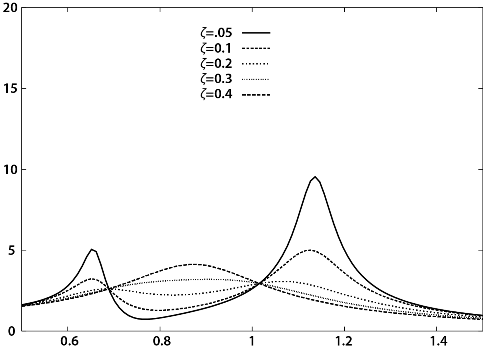
$\beta = 1,\ \mu = 0.1$

Absorbeur dynamique amorti (forçage harmonique constant, Frahm)

Réponse de l'absorbeur pour différents ratio de fréquences naturelles β et du ratio de masse μ et d'amortissement ζ_p

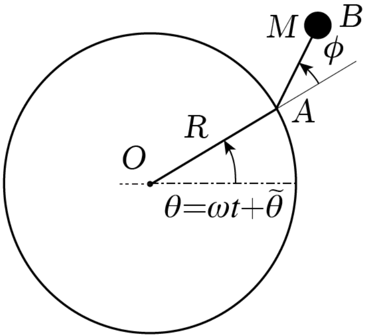


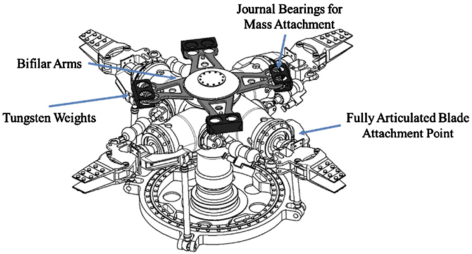
$\beta = 1,\ \mu = 0.3$



$\beta = 0.75,\ \mu = 0.3$

Absorbeur de vibrations pendulaire centrifuge





(Left) Pendule centrifuge. $\tilde{\theta}$ représente la vibration en torsion de l'axe de rotation du rotor. (Right) Exemple de positionnement de 4 absorbeurs centrifuges sur un rotor d'hélicoptère.

Absorbeur de vibrations pendulaire centrifuge

Modèle à 1 ddl. Rotation en θ forcée: $\theta = \omega t$

$$\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AB}$$
$$\boldsymbol{OB} = R\boldsymbol{e}_{r_\theta} + r\boldsymbol{e}_{r_{\theta+\phi}}$$
$$\dot{\boldsymbol{OB}} = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r(\dot{\phi} + \dot{\theta})\boldsymbol{e}_{\theta+\phi}$$

On a l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{OB}}^2$$

- Il n'y a que l'énergie cinétique en jeu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} = Mr[r(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) + R(\ddot{\theta}\cos\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi)]$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial \phi} = \frac{M}{2}[-2Rr\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\theta})\sin\phi]$$

- Et l'équation du mouvement est

$$r\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2\phi = -(R + r)\ddot{\theta} \qquad (54)$$
$$\text{ou } r\ddot{\phi} + R\omega^2\phi = 0 \qquad (55)$$

Absorbeur de vibrations pendulaire centrifuge

Modèle à 2 ddl. Rotation en θ forcée+torsion: $\theta = \omega t + \tilde{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = M[(R^2 + 2Rr + 2r^2)\ddot{\theta} + (Rr + 2r^2)\ddot{\phi}] \qquad \text{et} \quad \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

On obtient alors le système en (θ,ϕ)

$$r\ddot{\phi} + R\dot{\theta}^2\phi = -(R + r)\ddot{\theta} \tag{56}$$

$$(Rr + 2r^2)\ddot{\phi} + (R^2 + 2Rr + 2r^2)\ddot{\theta} = 0 \tag{57}$$

Soit encore

$$\begin{bmatrix} r & R + r \\ Rr + 2r^2 & R^2 + 2Rr + 2r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Absorbeur de vibrations pendulaire centrifuge

Modèle à 2 ddl. Rotation en θ forcée+torsion: $\theta = \omega t + \tilde{\theta}$ On ajoute :

1. l'effet de l'inertie J et la raideur K de l'arbre.
2. le couple d'excitation proportionnel à la force de traînée ou portance fluctuante. On a fait l'hypothèse que la résultante de ces forces est proportionnelle à la vitesse apparente au carré $C_t\dot{\theta}^2$ comme approche simplifiée.

$$\begin{bmatrix} r & R+r \\ Rr+2r^2 & R^2+2Rr+2r^2+J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_t\dot{\theta}^2 e^{in\dot{\theta}t} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Vibrations induites par vortex

$$\ddot{q} + \epsilon(2\pi S_t U/D)(q^2 - 1)\dot{q} + (2\pi S_t U/D)^2 q = A\ddot{y} \tag{59}$$

Dans cette équation, q est la variable de sillage qui peut représenter le coefficient de portance effectif, ϵ et A sont des paramètres calibrés à l'aide d'expériences. Le modèle est non-linéaire puisque le coefficient d'amortissement dépend de la variable généralisée au carré.
Le comportement du cylindre est régi classiquement par l'équation suivante

$$(m_s + m_f)\ddot{y} + (r_s + r_f)\dot{y} + ky = S \tag{60}$$

Dans cette équation, y est le déplacement transverse du cylindre adimensionné par le diamètre D, m_s est la masse du cylindre, m_f la masse ajoutée, r_s l'amortissement structurel, r_f l'amortissement ajouté, k la raideur du système structurel et S le forçage du à l'écoulement.

$$m_f = \frac{1}{4}\pi\rho D^2 C_M \qquad r_f = 2\pi S_t \frac{U}{D}\gamma\rho D^2 \tag{61}$$

$$\gamma = C_d/(4\pi S_t) \qquad S = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{l0} q \tag{62}$$

Vibrations induites par vortex

On arrive au système d'équations suivant

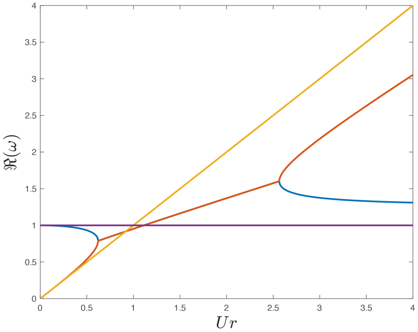
$$\ddot{y} + \lambda\dot{y} + y = M\Omega^2 q \tag{63}$$

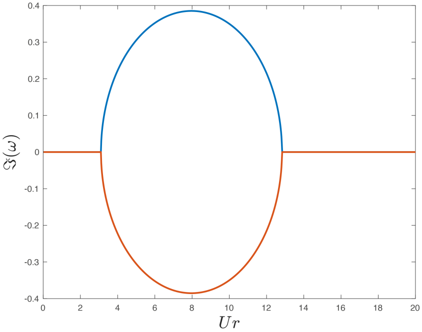
$$\ddot{q} + \epsilon\Omega(q^2 - 1)\dot{q} + \Omega^2 q = A\ddot{y} \tag{64}$$

Ce système non-linéaire peut-être linéarisé. On décide d'éliminer les termes d'amortissement afin de ne s'intéresser qu'au couplage entre le sillage et la structure. On élimine ainsi l'amortissement négatif de l'équation de sillage (64)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -M\Omega^2 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{65}$$

Vibrations induites par vortex





(Left) Partie réelle des fréquences des vibrations. la droite de pente nulle est la fréquence de vibration du cylindre isolé, la droite de pente unitaire celle de la fréquence de Strouhal lorsque le cylindre est fixe (Droite) Partie imaginaire des fréquences de vibration.