

## Différences finies : Couche Limite Thermique

### Mise en contexte

On considère un écoulement entre 2 plaques planes chauffantes parallèles. Les plaques sont séparées d'une distance  $H$  et leur température est maintenue constante à  $T_w$ .

Un fluide incompressible de viscosité dynamique  $\mu$  et de conductivité thermique  $k$  s'écoule entre les deux plaques avec une vitesse moyenne  $U$ . La température du fluide à l'entrée du canal est  $T_{in}$ .

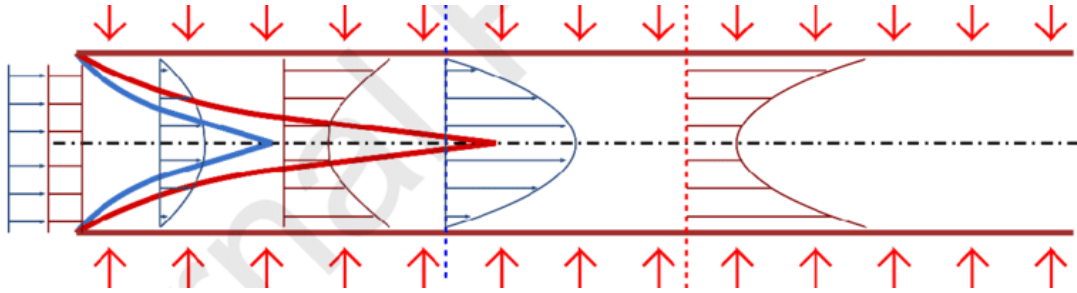


FIGURE 1 – Écoulement entre plaques planes

Dans le cadre de ce projet, nous nous intéresserons à l'évolution de la couche limite visqueuse et thermique le long des parois. Nous considérerons que l'écoulement est laminaire et que les effets de la gravité sont négligeables.

### Équations à résoudre

L'équation à résoudre sera celle d'advection-diffusion de la chaleur en régime permanent.

$$\rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = k \nabla^2 T \quad (1)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $c_p$  sa capacité thermique massique et  $k$  sa conductivité thermique. Le champ de vitesse  $\vec{u}$  a préalablement été évalué et se décrit comme suit :

1. L'écoulement est purement dans le sens de  $x$ .
2. Dans la section pleinement développée, la vitesse est donnée par le profil parabolique

$$u_x(y) = \frac{3}{2}U \left( 1 - \left( \frac{2y}{H} \right)^2 \right).$$

3. À l'entrée du canal, le profil de vitesse est uniforme, soit  $u_x(y) = U$ .

4. Dans la région de développement, le profil de vitesse sous la couche limite est donnée par  $u_x(y) = U \left(1 - e^{-\frac{y}{\delta(x)}}\right)$ , où  $\delta(x) = \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$  est l'épaisseur de la couche limite visqueuse.

La température d'entrée est de  $T_{in}$ , les murs ont une température de  $T_w$  et la sortie est pleinement développée ( $\vec{n} \cdot \nabla T = \vec{0}$ )

Les valeurs numériques à utiliser sont données dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur	Unité
$L$	1	m
$H$	0.01	m
$\rho$	1000	kgm <sup>-3</sup>
$C_p$	4186	Jkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$\mu$	0.001	Nsm <sup>-2</sup>
$k$	60	Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$T_{in}$	298	K
$T_w$	373	K

TABLE 1 – Paramètres à employer pour la simulation

## Détails sur la méthode numérique

La méthode numérique à utilisée est celle des **différences finies** en 2D. Vous devrez Déterminer le profil de température en régime permanent dans le canal en fonction de la position  $x$  et  $y$ .

Vous devez poser les conditions limites et les hypothèses appropriées, que vous devez expliquer, afin de résoudre le problème.

Toutes les unités devront être dans le système international d'unités de mesure (SI).

## Analyses à réaliser

Une fois votre modèle numérique finalisé, vous devrez :

- Visualiser les couches limites thermiques et visqueuses le long du canal. La couche limite peut-être définie comme l'endroit où la quantité atteint 99% de la différence entre la valeur à la paroi et la valeur d'entrée.
- Étudier l'influence du nombre de Prandtl  $Pr = \frac{c_p \mu}{k}$  sur la distribution des couches limites thermiques et visqueuses. Expliquez vos résultats.
- Étudier l'influence du nombre de Peclet  $Pe = \frac{\rho c_p U H}{k}$  sur la couche limite thermique. Expliquez vos résultats
- Comparer les profils de température dans les sections pleinement développées et en développement.
- Remplacer la température des parois  $T_w$  par un flux de chaleur constant  $q''$ . Analyser les différences dans les profils de température.
- (À enlever) Évaluer le Nusselt équivalent le long du canal. Le Nusselt est défini comme :

$$Nu_x = \frac{h_x L_c}{k} \quad (2)$$

- (À enlever) Proposez une méthode de vérification de votre modèle numérique. Indice : Résoudre une équation simplifiée pour laquelle une solution analytique est disponible.

## Fonction Python dont l'usage est permis

Pour réaliser votre travail, vous pouvez utiliser toutes les fonctions de production de graphiques et d'animations de Python. que vous jugez pertinent. De surcroît, vous pouvez utiliser toutes les structures de données de Python ainsi que les fonctions utilitaire de base (génération d'un intervalle avec `linspace`, etc.). Enfin, vous aurez le droit d'utiliser les bibliothèques de calcul numérique suivantes de Python : `numpy`.

**L'usage de toute autre fonction est par défaut, interdit.**

## Consignes

Le projet sera a réalisé en équipe de trois. La remise de votre projet devra contenir deux composantes :

- le logiciel Python (c-à-d le code) que vous aurez programmé,
- un rapport détaillé sur votre projet.

Nous détaillons les consignes pour chacun de ces éléments ci-après.

### Logiciel Python

Votre logiciel Python sera évalué tout comme votre rapport. Il devra être lisible et sa logique devra être facilement compréhensible par la correctrice ou le correcteur. Veuillez porter une attention particulière aux points suivants :

- Paramétrez au début de votre code les constantes physiques, les dimensions et les données du problème afin que votre code soit le plus générique possible. L'utilisation de valeurs numériques directement dans le coeur de votre code doit être proscrite. Employez des unités SI tout au long de votre travail.
- Utilisez des noms de variables significatifs.
- Employez des fonctions dans votre code. Lorsqu'une opération de plusieurs lignes est répétée plus qu'une fois, elle devrait être dans une fonction.
- Toutes vos fonctions devraient contenir des entêtes expliquant les entrées et les sorties. Inspirez-vous des gabarits des travaux dirigés.
- Utilisez des cas de vérification pour confirmer que vous résolvez bien le problème posé.
- N'oubliez pas en Python d'initialiser tous les vecteurs ou matrices pour des raisons de performance.

### Rapport

Vous devrez remettre un rapport concis (environ 10 pages) détaillant les éléments suivants de votre projet :

- Mise en contexte : Expliquez le contexte autour du problème que vous résolvez. Il est intéressant ici d'aborder, par exemple, une perspective historique. Faites preuve d'originalité. (1/2 page)

- Équations à résoudre : Détaillez les équations à résoudre. Expliquez la signification physique des termes présents dans l'équation si possible. (1 page)
- Méthode numérique : Détaillez la méthode numérique que vous employez pour résoudre le problème. (1-2 page)
- Vérification : Détaillez la stratégie que vous employez pour vérifier que votre implémentation est cohérente. **Présentez des résultats numériques qui démontrent la vérification de votre code.** Par exemple, démontrez que vous obtenez bien l'ordre de convergence souhaité, etc. (2-3 pages)
- Analyse du problème : En fonction du contexte de votre projet, plusieurs analyses sont possibles. Cette analyse peut avoir été spécifiée dans l'énoncé du projet. Justifiez le choix des paramètres numériques (pas de temps, pas en espace, tolérance, etc.) que vous avez pris pour la résolution du problème. (2-3 pages)
- Conclusion : Concluez sur les résultats que vous avez obtenus. Identifiez les limites de votre modèle physique ainsi que de votre modèle numérique. Discutez des défis que vous avez rencontrés. (1/2 page)

Pour tout le rapport, il est important que les figures soient de qualité suffisante. Leur résolution devrait être adéquate et les figures **ne doivent pas être des captures d'écran**. Les figures ne doivent donc pas présenter de contours gris ou tout autre artefact qui résulte de la prise directe de l'image. Les figures doivent comporter des légendes et des titres aux axes appropriés. Chaque figure doit comporter une légende (*caption*) sous la figure tandis que chaque tableau doit comporter une légende au-dessus du tableau.

Votre rapport doit aussi comporter une table des matières ainsi qu'une table des figures. Le rapport peut être réalisé à l'aide de Word ou en  $\text{\LaTeX}$ . Si le rapport est réalisé à l'aide de  $\text{\LaTeX}$ , un facteur multiplicatif de 5% boni seront donnés à l'équipe. L'équipe d'enseignement n'offrira aucun support outre un gabarit pour la réalisation du rapport en  $\text{\LaTeX}$  (si vous choisissez d'écrire le rapport en  $\text{\LaTeX}$ ).