

Projet AMS304

Equation intégrale pour l'équation de Helmholtz 2D

Farah Chaaban - Valentin Michel

octobre 2021

1 Introduction au problème

Ce TP fait suite au TP1 qui avait pour objectif de mettre en oeuvre un solveur BEM (boundary Element Methods) rapide pour l'équation de Helmholtz 2D. Nous étudions ici le cas de la diffraction d'une onde incidente plane sur un disque de rayon a centré en O . L'onde incidente est plane et se propage selon les x d'une manière croissante. On a donc $u^{inc} = e^{-ikx}$. Le champ diffracté vérifie l'équation de Helmholtz 2D.

$$(\nabla^2 + k^2)u = 0 \quad (1)$$

Le solveur implémenté dans le TP1 permet de déterminer la valeur du champs diffracté en tout point du plan à partir de la représentation intégrale :

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (2)$$

avec p définie comme suit:

$$p = -\partial_{\mathbf{n}} u^+ - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc} \quad (3)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au disque.

La fonction de Green pour l'espace libre en 2D est donnée par :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \quad (4)$$

Lors du projet TP1, p a été obtenue analytiquement. Dans ce TP, nous allons la déterminer numériquement en résolvant l'équation intégrale. On rappelle que le problème de diffraction est alors donné par :

Trouver $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = -u^{inc} \quad (5)$$

Le but de ce TP est non seulement de vérifier que la solution numérique obtenue avec 5 correspond bien à la solution analytique mais également de supprimer l'utilisation de la solution analytique pour calculer le champ diffracté dans Ω^+ . Il n'y aura donc plus besoin de la solution analytique, on pourra alors généraliser la méthode à n'importe quelle forme d'obstacle.

2 Équation intégrale

2.1 Discrétisation de la formulation variationnelle

Formulation variationnelle

Le premier objectif est de discrétiser l'équation intégrale. Dans un premier temps, on peut mettre l'équation (5) sous forme variationnelle. Pour cela, il suffit d'intégrer sur le bord Γ l'équation (5) :

Trouver $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que $\forall q \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} u^{inc}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Discrétisation

On cherche maintenant à discrétiser la formulation variationnelle. Pour cela, on utilise un maillage du bord qu'on note ici Γ_h , avec h le pas maximum du maillage. On note ici Γ_h^i le segment $[s_i, s_{i+1}]$. Ainsi, $\Gamma_h = \bigcup_i \Gamma_h^i$. On considère dans un premier temps une interpolation $\mathcal{P}^0(\Gamma_h)$. Autrement dit, on cherche la trace de p constante par morceau sur Γ_h .

La formulation variationnelle se réécrit :

Trouver $p \in \mathcal{P}^0(\Gamma_h)$ tel que $\forall q \in \mathcal{P}^0(\Gamma_h)$

$$\int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) q(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_h} u^{inc}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (7)$$

On utilise alors une base (w_i) de $\mathcal{P}^0(\Gamma_h)$ avec w_i qui vaut 1 sur Γ_h^i et 0 sur Γ_h/Γ_h^i . Ainsi, on prend :

$$q = \sum_i w_i \text{ et } p = \sum_j \underbrace{< p, w_j >}_{p_j} w_j$$

Alors, la formulation variationnelle se réécrit comme:

Trouver $p \in \mathcal{P}^0(\Gamma_h)$ tel que

$$\sum_i \sum_j \underbrace{\left(\int_{\Gamma_h^i} \int_{\Gamma_h^j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right)}_{\mathbb{A}_{ij}} p_j = \sum_i \underbrace{\int_{\Gamma_h^i} -u^{inc}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})}_{b_i} \quad (8)$$

L'équation s'écrit donc sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathbb{A} \mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (9)$$

Il suffit donc de calculer la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{b} .

2.2 Calcul de p

Calcul du vecteur \mathbf{b}

Pour calculer le vecteur \mathbf{b} , il suffit d'utiliser comme au TP1 la quadrature de Gauss-Legendre. Il n'y a donc aucune difficulté supplémentaire.

Calcul du la matrice \mathbb{A}

On va maintenant assembler la matrice \mathbb{A} . Numériquement, il y a deux différences par rapport au cas de la représentation intégrale. La première est qu'il y a une double intégration dans la formulation variationnelle. Il faut donc appliquer deux fois la formule de quadrature de Gauss-Legendre. Une fois sur le segment Γ_h^i et une fois sur le segment Γ_h^j . La deuxième différence qui est aussi une difficulté, est due au caractère singulier de la fonction de Green. Ainsi, pour calculer la matrice \mathbb{A} , il faut dissocier 2 cas : Le cas où $i = j$ (les termes diagonaux) et l'autre cas c'est lorsque $i \neq j$ (les autres termes).

- Le cas régulier ($i \neq j$):

Dans ce cas, il suffit de calculer numériquement une double intégrale. Pour cela, il suffit d'utiliser la quadrature d'une quadrature.

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{\Gamma_h^i} \int_{\Gamma_h^j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&= \frac{i}{4} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} H_0^{(1)}(k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) dy dx \\
&= \frac{i}{4} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{\|\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i\|}{2} \sum_{l=1}^n w_l H_0^{(1)} \left(k \left\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i+1}}{2} x_l - \frac{\mathbf{s}_{i+1} + \mathbf{s}_i}{2} \right\| \right) dx \\
&= \frac{i}{4} \frac{\|\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i\|}{2} \frac{\|\mathbf{s}_{j+1} - \mathbf{s}_j\|}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_l w_k H_0^{(1)} \left(k \left\| \frac{\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i+1}}{2} w_l + \frac{\mathbf{s}_{i+1} + \mathbf{s}_i}{2} - \frac{\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_{j+1}}{2} w_k - \frac{\mathbf{s}_{j+1} + \mathbf{s}_j}{2} \right\| \right)
\end{aligned}$$

On a ainsi la possibilité de calculer tous les coefficients extra-diagonaux de la matrice \mathbb{A} .

• **Le cas singulier** ($i = j$):

Les termes A_{ii} ne peuvent pas être calculés directement avec une quadrature numérique. Cela est due au caractère singulier de la fonction de Green qui dépend notamment de l'inverse de la distance entre les points \mathbf{x} et \mathbf{y} . Il existe plusieurs techniques pour éviter ce problème. Comme nous sommes dans un cas simple, nous allons utiliser une méthode semi-analytique. Pour cela, nous utilisons le développement limité autour de 0 des fonctions de Hankel :

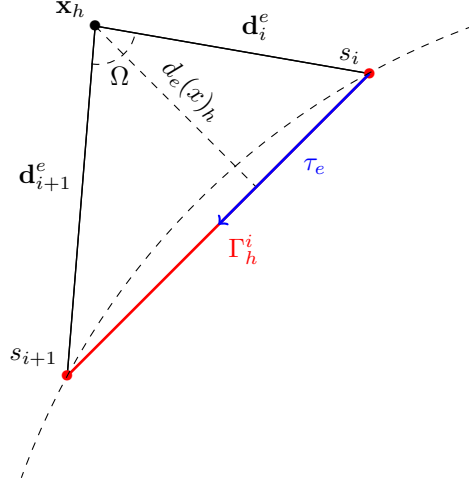
$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x - y\|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} [\ln(\frac{k}{2}) + \gamma] + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \ln \frac{1}{\|x - y\|}) \quad (10)$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0.5772156649$). On peut alors séparer ce développement en une partie singulière (la partie logarithmique) et une partie régulière (tout le reste). La partie régulière s'intègre facilement car les termes sont constants, les intégrés reviennent alors juste de la multiplication par la mesure de Γ_h^i qui correspond à la longueur du segment. La partie singulière s'intègre de manière analytique à l'aide du résultat suivant :

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x_h - y_h\|} d\Gamma(y_h) = -\frac{1}{2\pi} (d_{j+1}^e \cdot \tau_e \ln(\|d_{j+1}^e\|) - d_j^e \cdot \tau_e \ln \|d_j^e\| - |\Gamma_e| + d_e(\mathbf{x}_h) \Omega) \quad (11)$$

où l'on a utiliser les notations suivantes :

- τ_e est le vecteur tangent unitaire: $\tau_e = (s_{j+1} - s_j) / \|s_{j+1} - s_j\|$
- $d_e(x)_h$ est la distance de $(x)_h$ à Γ_e
- Ω est l'angle solide sous lequel $(\mathbf{x})_h$ voit Γ_e , $0 \leq \Omega \leq \pi$



Dans notre cas, le point x_h se trouve sur le segment Γ_h^i . Ainsi $\Omega = 180^\circ$ et $d_e(x)_h = 0$. L'équation se réécrit :

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x_h - y_h\|} d\Gamma(y_h) = -\frac{1}{2\pi} (d_{j+1}^e \cdot \tau_e \ln(\|d_{j+1}^e\|) - d_j^e \cdot \tau_e \ln\|d_j^e\| - |\Gamma_e|) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \int_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Gamma_e} \left[-\frac{1}{2\pi} (d_{j+1}^e \cdot \tau_e \ln(\|d_{j+1}^e\|) - d_j^e \cdot \tau_e \ln\|d_j^e\| - |\Gamma_e|) + \frac{i|\Gamma_e|}{4} - \frac{|\Gamma_e|}{2\pi} [\ln(\frac{k}{2}) + \gamma] \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

On peut maintenant faire une quadrature de Gauss-Legendre à cette forme.

On peut alors résumer le calcul de \mathbb{A} à l'aide du pseudo code suivant :

```

A = 0
Pour i=1,N faire :
  Pour j=1,N faire :
    Si i!=j faire :
      A(i,j) = Quadrature de Quadrature
    Sinon si i=i faire :
      A(i,j) = Quadrature dans le cas singulier
    Fin si
  Fin pour j
Fin pour i

```

Calcul du vecteur \mathbf{p}

Maintenant qu'on a calculé la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{b} , il suffit de résoudre le système linéaire à l'aide de `matlab`. Autrement dit, il suffit d'inverser la matrice \mathbb{A} .

$$\mathbf{p} = \mathbb{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (13)$$

3 Validation

3.1 Convergence

Une fois le code est implémenté, on peut afficher la trace de p sur le bord. La figure 1 montre donc la valeur de p sur le bord en fonction de l'angle.

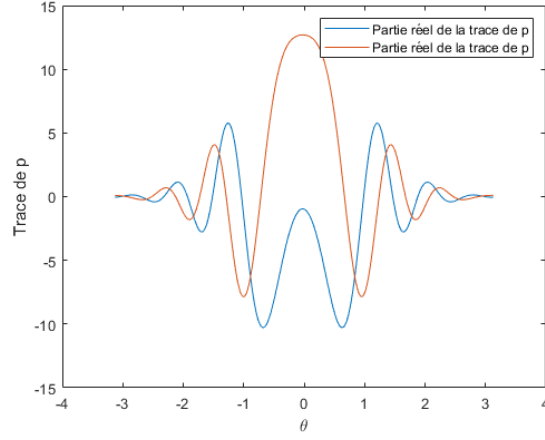


Figure 1: Partie réel et imaginaire de la trace de p sur bord de Γ en fonction de l'angle θ

Le résultat semble acceptable. Cependant, nous ne pouvons pas conclure visuellement. Il nous faut comparer la valeur de p obtenue avec la valeur analytique obtenue au TP1. Les figures 2 et 3 montrent la comparaison des résultats:

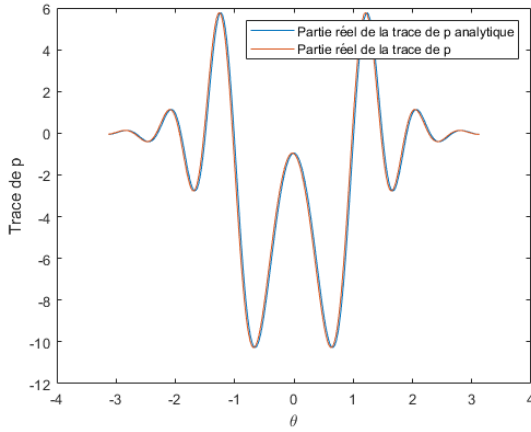


Figure 2: Comparaisons des parties réelles entre la trace de p et la trace de p analytique

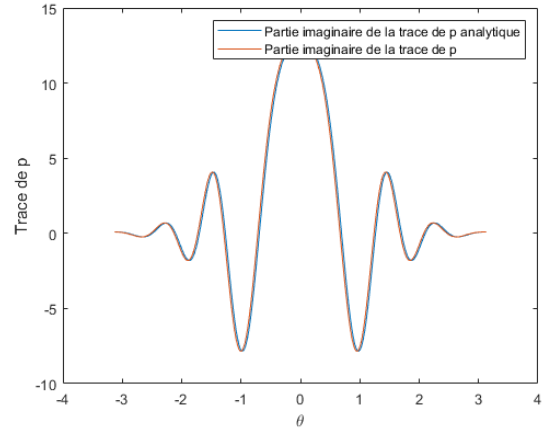


Figure 3: Comparaisons des parties imaginaires entre la trace de p et la trace de p analytique

On peut aussi tracer l'erreur $\|p - p_{analytique}\|$ pour vérifier la convergence de l'algorithme en fonction du pas. La figure 4 représente l'erreur en fonction du nombre de points du maillage. On observe bien ici la convergence de la méthode. En effet l'erreur décroît lorsque l'on augmente le nombre de points du maillage. Il est aussi intéressant de calculer la pente. Ici la pente vaut -2.7039 Autrement dit, lorsqu'on multiplie par 2 le nombre de points du maillage, on divise par ~ 6.5 l'erreur. C'est une bonne vitesse de convergence.

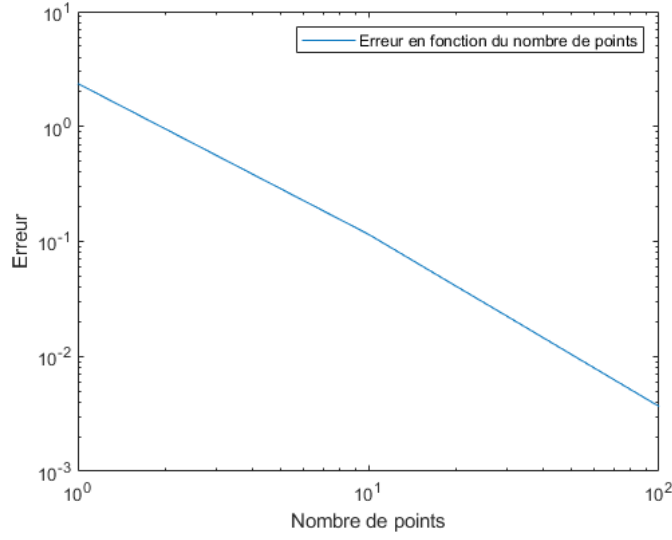


Figure 4: $\|p - p_{analytique}\|$ en fonction de N le nombre de sommet du maillage en échelle logarithmique

3.2 Influence des paramètres

Maintenant que l'implémentation a été validé, on peut étudier l'influence des paramètres sur la convergence. Pour cela, il faut tracer l'impact du pas du maillage sur l'erreur. Or, pour un rayon d'obstacle donné, prendre un pas de maillage petit revient à prendre N grand, avec N le nombre de sommet du maillage. Il semble donc ici que le pas du maillage influe sur l'erreur. Plus le maillage est fin, plus l'algorithme est précis. Il faut cependant prendre en compte la complexité. Il semble que l'algorithme qui calcule la matrice A soit en $\mathcal{O}(N^2)$. L'algorithme est donc en $\mathcal{O}(N^2)$. Ainsi, si l'on divise par deux le pas du maillage, on multiplie par 4 le temps de calcul. De plus, il est nécessaire de calculer qu'une seule fois la trace de p pour déterminer la solution pour tous les points.

Conclusion

Pour résumer, lors de ce TP, on a implémenté une résolution de l'équation intégrale pour l'équation de Helmholtz 2D. La méthode discrétisée semble converger assez rapidement, l'erreur décroît plus que quadratiquement. Ce résultat est tout de même à comparer avec la complexité temporelle. En effet, quand on multiplie par 2 le nombre de points du maillage, on divise l'erreur par ~ 6.5 mais on multiplie le temps de calcul par 4. Cette algorithme est donc efficace mais peut être gourmand en temps. De plus, cette méthode demande de calculer la matrice \mathbb{A} qui est pleine et de taille $N \times N$. La méthode a donc une complexité $\mathcal{O}(N^2)$ en espace. Il est cependant, intéressant de remarquer que la résolution de l'équation intégrale doit être calculer qu'une seule fois (pour un problème donné) et on peut alors, à l'aide du TP1 trouver la solution en tout point de l'espace. Enfin, le TP3 a notamment pour objectif d'améliorer la complexité de cette algorithme.