TP1 : Résolution numérique de problèmes elliptiques avec diverses conditions aux limites.

30 septembre 2021

1 Conditions de type Neumann

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné

$$\exists\, C > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall i,j,\ |A_{ij}(x,y)| \leq C$$

et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists\, c > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad A(x,y)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

où n est la normale unitaire sortante à Ω

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et vérifier que le problème est bien posé.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Question 2. Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ? Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(2) \qquad (\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}\,,$$

de solution le vecteur $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ dont la $I^{\text{ème}}$ composante vaut $u_h(S_I)$. Ci-dessus, $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité.

Pour résoudre ce problème, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2).

1.1 Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω qui est carré. Pour mailler Ω, on choisit le mailleur `Gmsh`. Pour réaliser les calculs, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2). Pour créer des maillages de l'ouvert carré, voici la procédure à suivre :

— Modifier le fichier `geomCarre.geo` en l'ouvrant avec un éditeur de texte. Par exemple, pour changer le pas du maillage, modifier la valeur de h. Enregistrer les changements.
— Lancer `Gmsh` dans un terminal et ouvrir le fichier `geomCarre.geo`.
— Dans la fenêtre `Gmsh`, menu du haut, choisir "`Mesh`". Cliquer ensuite sur "`2D`".
— Pour sauvegarder le maillage ainsi créé, choisir "`Save Mesh`" dans le menu "`File`".

Un fichier `geomCarre.msh` a été créé.
Attention : le nom du fichier maillage `.msh` est *par défaut* celui du fichier géométrie `.geo`.

La routine `lecture_msh.m` permet de lire et de récupérer les données du maillage. Les données de sortie sont

`Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ?

Les données `Refneu,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ne seront pas utilisées pour l'instant.
Vous pouvez afficher le maillage précédemment créé à l'aide de la routine `affichemaillage.m`.

1.2 Calcul des Matrices élémentaires, cas constant

On considère pour l'instant le cas où $A = 1$.
Pour calculer les matrices élémentaires sur un triangle, on peut utiliser les formules ci-dessous. Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, et $S_3(x_3, y_3)$, nous pouvons utiliser les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \text{aire}(T_\ell)\, F(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^0.$$

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3} \, (F(S_1) + F(S_2) + F(S_3)) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^1.$$

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3} \left(F(\frac{S_1 + S_2}{2}) + F(\frac{S_1 + S_3}{2}) + F(\frac{S_3 + S_2}{2})) \right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^2.$$

Question 3. En déduire pour tout triangle T_ℓ, et toutes fonctions de base w_I et w_J, les intégrales

$$\int_{T_\ell} w_I w_J \, d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{T_\ell} \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega$$

On rappelle que les fonctions de base locales sont égales aux coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3. En un point (x, y) du triangle, celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) \\
\lambda_2(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) \\
\lambda_3(x, y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2))
\end{aligned}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ pour i et j différents dans $\{1, 2, 3\}$, et $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$. Notons que D est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle.

Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ et $S_3(x_3, y_3)$. Compléter les routines `matK_elem.m` et `matM_elem.m` qui à partir des coordonnées des 3 sommets d'un triangle donnent respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

Il est conseillé de vérifier le calcul des matrices élémentaires en le comparant à un calcul fait à la main pour le triangle de référence (composé des sommets $(0,0)$, $(1,0)$ *et* $(0,1)$*).*

1.3 Assemblage des matrices

On rappelle l'algorithme d'assemblage

$\mathbb{M} = 0$, $\mathbb{K} = 0$
Pour $\ell = 1, L$
  Détermination des coordonnées des sommets du triangle ℓ
  Calcul des contributions élémentaires $\mathbb{M}^\ell$, $\mathbb{K}^\ell$
  Pour $i = 1, 3$
    $I = \text{local} \to \text{global}(\ell, i)$
    Pour $j = 1, 3$
      $J = \text{local} \to \text{global}(\ell, j)$
      $\mathbb{M}_{IJ} = \mathbb{M}_{IJ} + \mathbb{M}^\ell_{ij}$ et $\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}^\ell_{ij}$
    Fin pour j
  Fin pour i
Fin pour ℓ

Question 4. Compléter la partie assemblage des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$.

Question 5. Calcul du second membre : rappeler l'expression du second membre $\vec{L}$ pour une donnée générale $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. En approchant la donnée f par son interpolation $\pi_h f$ dans la base $(w_I)_{I=1,N}$, donner une approximation du second membre $\vec{L}$ faisant intervenir la matrice de masse.

On admettra que quand on remplace f par son interpolée $\pi_h f$ de V_h, l'approximation par des éléments finis P^1 du problème n'est pas altérée.

1.4 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A = 1$ et une solution u connue égale à $u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$, pour $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

Question 6. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 7. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse $\mathbb{M}$. On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)$ pour différentes valeurs de h et vérifier que cela correspond à l' estimation d'erreur théorique. Même question pour la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$

1.5 Calcul des Matrices élémentaires, cas variable

On considère maintenant le cas général $A = A(x,y)$.
Une nouvelle difficulté apparait dans le calcul des matrices élémentaires : la prise en compte des coefficients variables. En effet, les intégrales

$$\int_{T_\ell} A(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) \, d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous allons approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour F une fonction continue par morceaux de T_ℓ

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N} \omega_\ell^q F(M_\ell^q).$$

où M_ℓ^q sont des points de quadrature dans T_ℓ et ω_ℓ^q les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné , ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

$\hat{M}^q$	$(1/3, 1/3)$	$(1/5, 1/5)$	$(1/5, 3/5)$	$(3/5, 1/5)$
$\hat{\omega}^q$	$-9/32$	$25/96$	$25/96$	$25/96$

Pour chaque triangle T_ℓ, nous allons utiliser la transformation géométrique F_ℓ qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans T_ℓ. En effectuant le changement de variable $M = F_\ell(\hat{M})$, l'intégrale sur T_ℓ devient

$$(3) \quad \int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega =$$

$$\int_{\hat{T}} A(F_\ell(\hat{M}))[dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_J(\hat{M})\, |\det dF_\ell(\hat{M})|\, d\hat{\Omega}$$

où $dF_\ell(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$.

Question 8. À l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

Question 9. Valider le calcul de la matrice élémentaire dans le cas où A est l'identité puis seulement diagonale, pour le triangle de référence puis pour un triangle quelconque. On pourra comparer au calcul de la matrice élémentaire fait précédemment.

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$ une solution u que vous choisirez.

Question 10. Calculer la donnée f correspondante, modifier la routine `f.m`, et en assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ et $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u - u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de h.Commenter.

Question 11. Représenter la solution dans le cas d'un terme source quelconque et $A(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+2$, $\sin(4\pi x)\sin(4\pi y)+2$, $\sin(8\pi x)\sin(8\pi y)+2$, $\sin(16\pi x)\sin(16\pi y)+2$, $\sin(32\pi x)\sin(32\pi y)+2$. Commenter.

2 Conditions de type Dirichlet

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u - \nabla \cdot (A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

Question 12. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H^1_0(\Omega)$ (indiquer seulement les différences par rapport à la question 1).

2.1 Maillages

On veillera à donner une référence particulière aux nœuds du bord.

2.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Pour définir une approximation interne de $H^1_0(\Omega)$, on procède de la façon suivante. On suppose que les nœuds de la frontière $\partial\Omega$ ont une référence de 1 (M_I est sur le bord si Refneu$(I) = 1$) et que les nœuds à l'intérieur ont une référence 0 (M_I est à l'intérieur si Refneu$(I) = 0$). On introduit :

$$V_h^0 \;=\; \mathrm{Vect}\,(w_I,\ \text{tel que Refneu}(M_I) = 0)\,.$$

Soit N_0 la dimension de V_h^0. Par construction, $V_h^0 \;\subset\; H^1_0(\Omega)$.

Question 13. La solution approchée u_h s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) \;=\; \sum_{I,\,\mathrm{Refneu}(M_I)=0} u_h(M_I) w_I(x, y), \qquad \forall\ (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0\,, \tag{5}$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I)$ et où on écrira $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$, avec $\mathbb{M}^0$ la matrice de masse, et $\mathbb{K}^0$ la matrice de rigidité.

Dans la pratique, on ne peut pas assembler directement la matrice intervenant dans (5). Voici comment nous procédons pour arriver à la résolution du système linéaire (5).

2.3 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La routine `principal_dirichlet.m` est le programme principal pour résoudre le problème (4).

Question 14. Reprendre la partie assemblage de la section précédente, permettant de construire la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$ et le vecteur $\vec{L}$ où on a pris en compte toutes les fonctions de base (même celles qui ne sont pas nulles au bord).

Question 15. On introduit une matrice (creuse/sparse) de projection $\mathbb{P}$ de V_h dans V_h^0, de taille $N_0 \times N$ (qui ne contient que des 1 et des 0). On pourra valider la construction de cette matrice numériquement (il suffira de représenter sur le maillage, $\mathbb{P}\mathbb{V}$ pour un vecteur $\mathbb{V}$ quelconque et vérifier que le résultat est bien nul au bord),
Il suffira ensuite d'écrire

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^t, \quad \text{et } \vec{L}^0 = \mathbb{P}\vec{L}$$

et résoudre (5) pour avoir $\vec{U}^0$. Pour retrouver la solution en chaque point du maillage (et un vecteur associé de taille N), il suffira d'écrire

$$\vec{U} = \mathbb{P}^t \vec{U}^0$$

2.4 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (4) avec un tenseur A et une solution u que vous choisirez.

Question 16. Calculer la donnée f correspondante, modifier la routine `f.m` et en assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)$ et $\log(1/h) \mapsto \log\big(|u-u_h|_1/|u|_1\big)$ pour différentes valeurs de h.

3 Conditions périodiques

Soit $\Omega = [0, L]^2$ un carré de taille L, on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodique et coefficients variables :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$(6) \qquad \begin{cases} u - \nabla \cdot \big(A(x,y)\nabla u\big) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \text{ et } u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x,y)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=L} \text{ et } A(x,y)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=L} \end{cases}.$$

Question 17. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H^1_\#(\Omega)$ (indiquer seulement les différences par rapport à la question 1)..

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation **périodique** du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. La triangulation est **périodique** si

- M_I est un noeud appartenant au bord droit si et seulement si il existe un noeud M_J appartenant au bord gauche ayant la même ordonnée ;
- M_I est un noeud appartenant au bord bas si et seulement si il existe un noeud M_J appartenant au bord haut ayant la même abscisse.

. Pour définir une approximation interne de $H^1_\#(\Omega)$, on procède de la façon suivante (c'est un peu plus compliqué que pour $H^1_0(\Omega)$).

1. Tout d'abord, toutes les fonctions de base correspondant à des nœuds intérieurs sont dans l'espace d'approximation $V_h^\#$ (elles sont nulles au bord donc en particulier périodiques) ;
2. ensuite pour tout noeud M_I de la frontière $x = 0$, on sait qu il existe un nœud M_J de la frontière $x = L$ ayant la même ordonnée : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$;
3. et pour tout noeud M_I de la frontière $y = 0$, on sait qu il existe un nœud M_J de la frontière $y = L$ ayant la même abscisse : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$;
4. signalons enfin le cas particulier des noeuds du coin pour lequel c'est la somme des 4 fonctions de base correspondantes qui est dans l'espace d'approximation $V_h^\#$;

Par construction, $V_h^\# \subset H^1_\#(\Omega)$.

Question 18. Etendre la technique vue pour les conditions de dirichlet aux conditions périodiques. Pour cela on créera une matrice de projection de V_h dans $V_h^\#$.

La routine `principal_periodique.m` est le programme principal pour résoudre le problème (6). Compléter le code et valider le.