Projet AMSX01
Résolution numérique de problémes elliptiques avec diverses conditions aux limites.

Valentin Michel

octobre 2021

1 Conditions de type Neumann

1.1 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné

$$\exists C > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall i,j,\ |A_{ij}(x,y)| \leq C$$

et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists c > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2,\ A(x,y)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où n est la normale unitaire sortante à Ω. On peut réecrire le problème de Poisson (Equation 1) sous la forme variationnel. Il suffit de multiplier l'équation volumique par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, d'intégré sur Ω et d'utiliser une formule de Green. On trouve alors la formulation variationnelle suivante :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ *telle que*

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \underbrace{\int_\Omega uvd\Omega + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla vd\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fvd\Omega}_{l(v)} \tag{2}$$

Les termes de bords de la formule de Green sont nuls grâce à la conditions aux limites de Neumann. On peut montrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram qui le problème 2 est bien posé. En effet, $H^1(\omega)$ muni de son produit scalaire est un espace de Hilbert. a est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$ car A est uniformément borné et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega),\ |a(u,v)| \ \leq\ \max(1,C)| < u, v >_{H^1(\Omega)} | \ \leq\ \max(1,C)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

a est coercive car A satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme :

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ |a(u,u)| \ \geq\ \min(1,c)| < u, u >_{H^1(\Omega)} | \ \geq\ \min(1,c)\|u\|^2_{H^1}$$

l est une forme linéaire continue car par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ |b(v)| \ \leq\ \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \ \leq\ \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi le problème variationnelle a une unique solution. De plus cette solution dépend continuement de la donnée :

$$0 \; < \; \min(1,c)\|u\|_{H^1(\Omega)} \; \leq \; \max(1,C)\|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Le problème est donc bien posé.

1.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associé à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_H définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. On peut ainsi écrire une formulation variationnelle discrète : *Trouver* $u_h \in V_h$ *telle que*

$$\forall v_h \in V_h, \; a(u_h, v_h) = l(v_h) \tag{3}$$

Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega}, \; u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I) w_I(x,y)$$

On peut réécrire la formulation variationnelle discrète :

$$\sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} a(w_I, w_J) u_h(S_I) v_h(S_J) = \sum_{J=1}^{N} l(w_J) v_h(S_J)$$

Et en identifiant chaque terme de la somme sur J on trouve :

$$\sum_{I=1}^{N} \underbrace{\int_\Omega w_I w_J d\Omega}_{\mathbb{M}_{IJ}} + \underbrace{\int_\Omega A\nabla w_I \cdot \nabla w_J}_{\mathbb{K}_{IJ} d\Omega} \; \underbrace{u_h(S_I)}_{\vec{U}_I} = \underbrace{\int_\Omega f w_J d\Omega}_{\vec{L}_J}$$

La formulation variationnelle discrète se réécrit donc sous la forme d'un système linéaire équivalent

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L} \tag{4}$$

de solution le vecteur $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ dont la $I^{\text{ème}}$ composante vaut $u_h(S_I)$. $\mathbb{M}$ est appeler la matrice de masse et $\mathbb{K}$ la matrice de rigidité. Pour résoudre ce problème, on s'appuie sur `Matlab`. La routine `pricipal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre 4.

1.3 Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω qui est carré. Pour mailler Ω, on choisit le mailleur `Gmsh`. Pour réaliser les calculs, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `lecture_msh.m` permet de lire et de récupérer des données du maillage. Les données de sortie sont :

- `Nbpt` : Nombre de sommets (noeuds) du maillage.
- `Nbtri` : Nombre de triangle (simplexe) du maillage.
- `Nbaretes` : Nombre d'aretes du maillage.
- `Coorneu` : Tableau des coordonées des sommets (noeuds) du maillage.
- `Numtri` : Tableau des indices des sommets d'un triangle (simplexe) dans le tableau `Coorneu`.

- `Numaretes` : Tableau des indices des sommets d'une aretes dans le tableau `Coorneu`.
- `Refneu` : Références des sommets (noeuds) du maillage. La référence correspond par exemple a un domaine. Si le plan est coupé en deux domaine alors certain sommets serons dans le domaine 1 et d'autre dans le domaine 2.
- `Reftri` : De même que `Refneu` mais pour les triangles (simplexes)
- `Refaretes` : De même que `Refneu` mais pour les aretes

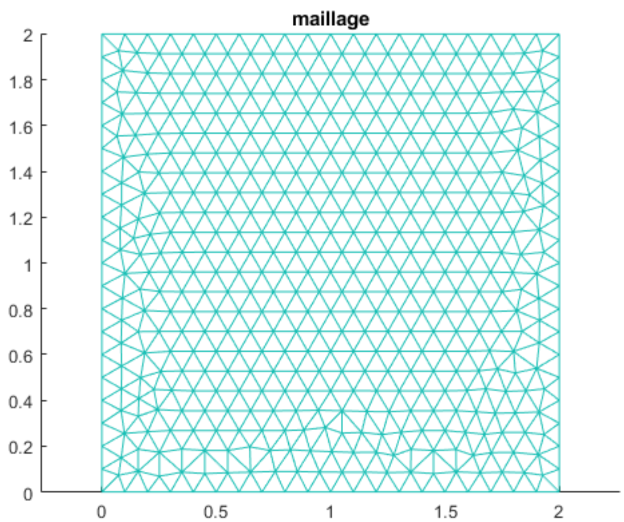

Figure 1: Maillage d'un carré de coté 2 à l'aide fe `Gmsh` pour un pas de maillage $h = 0.1$

La Figure 1 présente un exemple de maillage généré par `Gmsh`.

1.4 Matrice $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$, cas constant

1.4.1 Calcul des Matrices élémentaires

On considère pour l'instant le cas $A = 1$. Une méthode pour calculer les matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$ consiste à calculer des matrices dites élémentaires $\mathbb{K}^{elem}$ et $\mathbb{M}^{elem}$. Les matrices élémentaires sont de taille 3×3 et s'écrivent :

$$\mathbb{M}_{IJ}^{elem} = \int_{T_l} w_I w_J dT_l \ et \ \mathbb{K}_{IJ}^{elem} = \int_{T_l} \nabla w_I \cdot \nabla w_J dT_l$$

Les matrices élémentaires correspondent aux matrices de masse et de rigidité sur un seul triangle. Pour calculer les matrices de masse et de rigidité, on peut calculer les matrices élémentaire et les assembler par la suite. Pour calculer ces intégrales on exprime les fonctions de base locales qui sont égales aux coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3 associers au triangle T_l. En un point (x, y) du triangle, celles-ci et leur gradient sont données par les formules suivante :

$$\lambda_1(x, y) = \frac{1}{D}(y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) \quad \nabla\lambda_1(x, y) = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} y_{23} \\ -x_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{1}{D}(y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1)) \quad \nabla\lambda_2(x, y) = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} y_{31} \\ -x_{31} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3(x,y) = \frac{1}{D}(y_{12}(x-x_2) - x_{12}(y-y_2)) \qquad \nabla\lambda_3(x,y) = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} y_{12} \\ -x_{12} \end{pmatrix}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ pour i et j différents dans $\{1,2,3\}$, et $D = x_{23}y31 - x_{31}y23$. D est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle. On voit bien ici que les gradients sont constants. Ainsi la matrice de rigidité élémentaire prend la forme suivante :

$$\mathbb{K}^{elem}_{IJ} = aire(T_l)\nabla\lambda_I \cdot \nabla\lambda_J = \frac{D}{2}\nabla\lambda_I \cdot \nabla\lambda_J \tag{5}$$

Il est alors possible d'implémenter une fonction matlab `matK_elem` qui à partir des coordonnés de 3 sommets S_1, S_2 et S_3, calcule la matrice $\mathbb{K}^{elem}$. Le calcul de la matrice de masse élémentaire est un peu plus compliqué. En effet, les fonctions de base locales sont dans $\mathbb{P}^1$, ainsi le produit de deux fonctions de base locales sont dans $\mathbb{P}^2$. Pour calculer les coefficients de la matrice de masse élémentaire on peut faire appel aux formules de quadratures :

$$\int_{T_l} F d\Omega = \frac{aire(T_l)}{3}\left(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_1+S_3}{2}) + F(\frac{S_2+S_3}{2})\right) \quad pour\ F \in \mathbb{P}^2 \tag{6}$$

On montre alors qu'en réalité $\mathbb{M}^{elem}_{IJ}$ ne dépend pas de I et J explicitement :

$$\mathbb{M}^{elem}_{IJ} = \frac{(1+\delta_{IJ})D}{24} \tag{7}$$

avec $\delta_{IJ} = 1$ si $I = J$ et 0 sinon. On peut donc implémenter la fonction `matM_elem` qui retourne la matrice élémentaire d'un triangle T_l à partir de la donné de ses trois sommets. En pratique, on a uniquement besoin de l'aire du triangle.

1.4.2 Assemblage des matrices

Une fois les fonctions `matM_elem` et `matK_elem` implémenter, on peut créer une boucle sur les triangles (simplexes). Voici le pseudo-code associer à la phase d'assemblage des matrices :

```
M=0, K=0
Pour l=1,L:
    S_1, S_2 et S_3 sommets du triangle l
    Calcul des matrice elementaire Melem et Kelem
    Pour i=1,3:
        I = global(i,l)
        Pour j=1,3:
            J = global(j,l)
            M(I,J)=M(I,J)+Melem(i,j)
            K(I,J)=K(I,J)+Kelem(i,j)
        Fin Pour j
    Fin Pour i
Fin Pour l
```

1.5 Le second membre $\vec{L}$

Une fois les matrices de masse et de rigidité calculer, il reste le second membre à déterminer. Pour réaliser ce calcul, on admet que quand on remplace f par son interpolée $\pi_h f$ de V_h, l'approximation par des éléments finit $\mathbb{P}^1$ du problème n'est pas altérée. On peut récrire f comme étant $\pi_h f(x,y) = \sum_i f(S_i)w_i(x,y)$. Ainsi le second membre se réécrit :

$$\vec{L_J} = \sum_{I=1}^{N} \underbrace{\int_\Omega w_I w_J d\Omega}_{\mathbb{M}_{IJ}} \underbrace{f(S_I)}_{\vec{F_I}} = (\mathbb{M}\vec{F})_J$$

Ainsi le vecteur $\vec{L}$ du second membre se réécrit :

$$\vec{L} = \mathbb{M}\vec{F} \tag{8}$$

Pour calculer le second membre il suffit donc de calculer le vecteur $\vec{F} = (f(S_I))_{I=1,N}$. On peut donc implémenter la fonction matlab `f` qui prend en entrée les coordonnés d'un point et renvoie la valeur de f en ce point. On peut alors calculer $\vec{L}$ juste après l'assemblage de la matrice $\mathbb{M}$.

1.6 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correct. Pour cela, on résout le problème 1 avec $A = 1$ et une solution u connue égale à $u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$, pour $(x,y) \in \overline{\Omega}$. Il faut donc prendre le terme souce f de la forme :

$$f(x,y) = (1 + 5\pi^2)\cos(\pi x)\cos(2\pi y)$$

On obtient alors le résultat suivant :

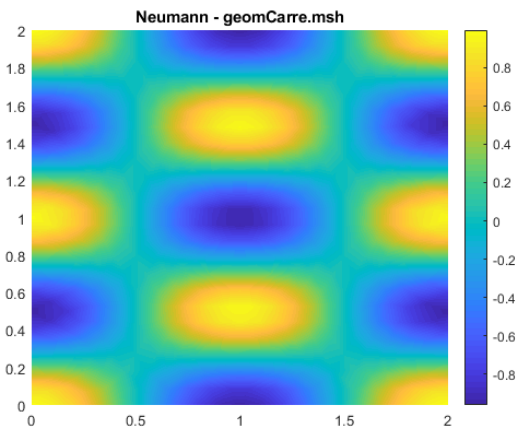

Figure 2: Résultats de la méthode des éléments finis pour le cas test

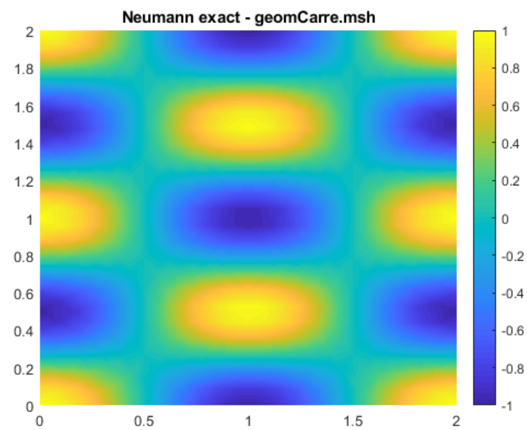

Figure 3: Solution exact du cas test

La comparaison visuelle est une première validation. Elle n'est cependant pas suffisante. Un moyen de validée le code est d'estimer l'erreur L^2 et H^1. Pour cela on assimile u à son interpolée $\pi_h u$. Ainsi pour la norme L^2 on trouve :

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\pi_h u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (\pi_h u - u_h)^2 d\Omega = \sum_{I=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} (\pi_h u - u_h)_I \underbrace{\int_\Omega w_I w_J d\Omega}_{\mathbb{M}_{IJ}} (\pi_h u - u_h)_J$$

d'où au final l'érreur L^2 se réecrit :

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq (\vec{U} - \vec{U_h})^T \mathbb{M} (\vec{U} - \vec{U_h}) \tag{9}$$

De même on peut estimer l'érreur H^1. Pour cela il suffit de prendre la norme H^1 qui fait apparaitre les matrices de masse et de rigidité. Ainsi l'erreur H^1 s'écrit :

$$\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq (\vec{U} - \vec{U_h})^T (\mathbb{M} + \mathbb{K}) (\vec{U} - \vec{U_h}) \tag{10}$$

On peut alors calculer les érreurs pour le cas test. On trouve alors $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq 0.0013$ et $\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq 0.0527$.

1.7 Matrice $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$, cas variable

On considère maintenant le cas général $A = A(x, y)$. Une nouvelle difficulté apparaît dans le calcul des matrices élémentaires : la prise en compte des coefficients variables. En effet, les intégrales

$$\int_{T_l} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_j(M) d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous alors approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour F une fonction continue par morceaux de T_l

$$\int_{T_l} F d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N} w_l^q F(M_l^q)$$

où M_l^q sont des points de quadrature dans T_l et w_l^q les poids positifs associés aux points de quadrature (Gauss, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné, ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

$\hat{M}^q$	$(1/3, 1/3)$	$(1/5, 1/5)$	$(1/5, 3/5)$	$(3/5, 1/5)$
$\hat{\omega}^q$	$-9/32$	$25/96$	$25/96$	$25/96$

Pour chaque triangle T_l, nous allons utiliser la transformation géométrique F_l qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans T_l. EN effectuant le changement de variable $M = F_l(\hat{M})$, l'intégrale sur T_l devient

$$\begin{aligned} &\int_{T_l} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \\ &\qquad \int_{\hat{T}} A(F_l(\hat{M}))[dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla\hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla\hat{w}_J(\hat{M})|\det dF_l(\hat{M})|d\hat{\Omega} \end{aligned} \tag{11}$$

où $dF_l(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$. On peut ainsi modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire (`matK_elem`).

1.8 Validation

On cherche maintenant à valider le calcul dans le cas variable. Pour cela, on peut d'abord calculer la solution avec $A = 1$. On trouve alors, pour un maillage $h = 0.1$, $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq$ 0.0013 et $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq$ 0.0527. On trouve les mêmes erreurs que dans la partie validation précédente ce qui est normal puisqu'on avait supposé $A = 1$. On trouve la même solution pour $A = I_2$ l'identité. Cela confirme que l'algorithme fonctionne correctement. Pour le calcul de la norme H^1, il faut prendre la matrice $\mathbb{K}$ dans le cas $A = 1$.
On veut maintenant validé le cas ou A est quelconque. Pour cela, on choisit $A(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 2$. On peut alors prendre par exemple $u(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$. On doit donc prendre le terme sources de la forme :

$$f(x, y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y) + 16\pi\cos(2\pi x)\cos(2\pi y)(\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 1)$$

On trouve alors dans ce cas $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq$ 0.0154 et $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq$ 0.2389. Pour un même pas de maillage, les erreurs sont 10 fois plus importantes. Les résultats visuels sont afficher sur les Figures 4 et 5

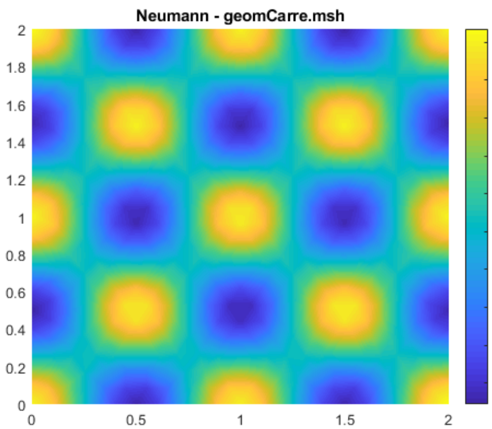

Figure 4: Résultats de la méthode des éléments finis pour le cas test avec A variables

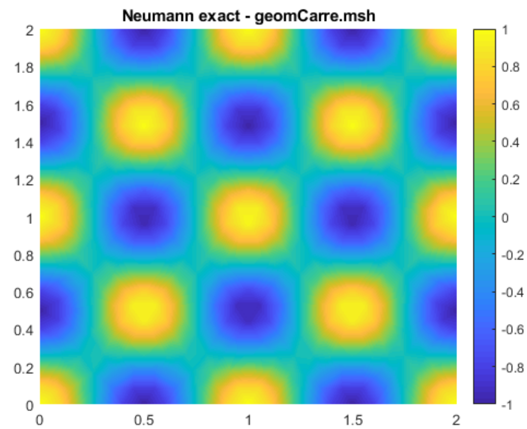

Figure 5: Solution exact du cas test

Pour vérifié la convergence, on peut tracer les relations $\log(1/h) \to \log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(1/h) \to \log(|u-u_h|_1/|u|_1)$ en supposant qu'on peut assimilé u à son interpolé $\pi_h u$. Avec $|.|_1 = \|.\|_{H^1(\Omega)} - \|.\|_{L^2(\Omega)}$ la semi norme H^1. La Figure 6 présente ces relations. On voit bien ici que lorsque h diminue les erreurs diminuent rapidement. La vitesse de convergence est donné par la pente des courbes. La pente de la courbe d'erreur pour la norme L^2 est `-2.5097` et la pente de la courbe d'erreur pour la norme H^1 est `-1.7888`. L'erreur L^2 semble décroitre plus rapidement que l'erreur H^1. Ce résultat atteste que l'erreur est controlé par la norme de la solution et par le pas du maillage h.

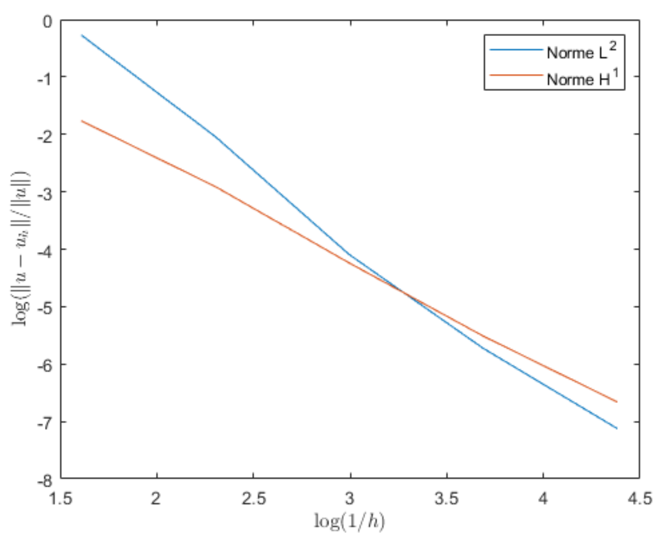

Figure 6: $\log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(|u - u_h|_1/|u|_1)$ en fonction de $\log(1/h)$

On peut aussi observer comment impacte A sur la solution. Pour cela, on peut juste prendre A de la forme $A_n = \sin(2^n \pi x)\sin(2^n \pi y) + 2$ pour un f quelconque. Les résultats sont affichés sur la Figure 7.

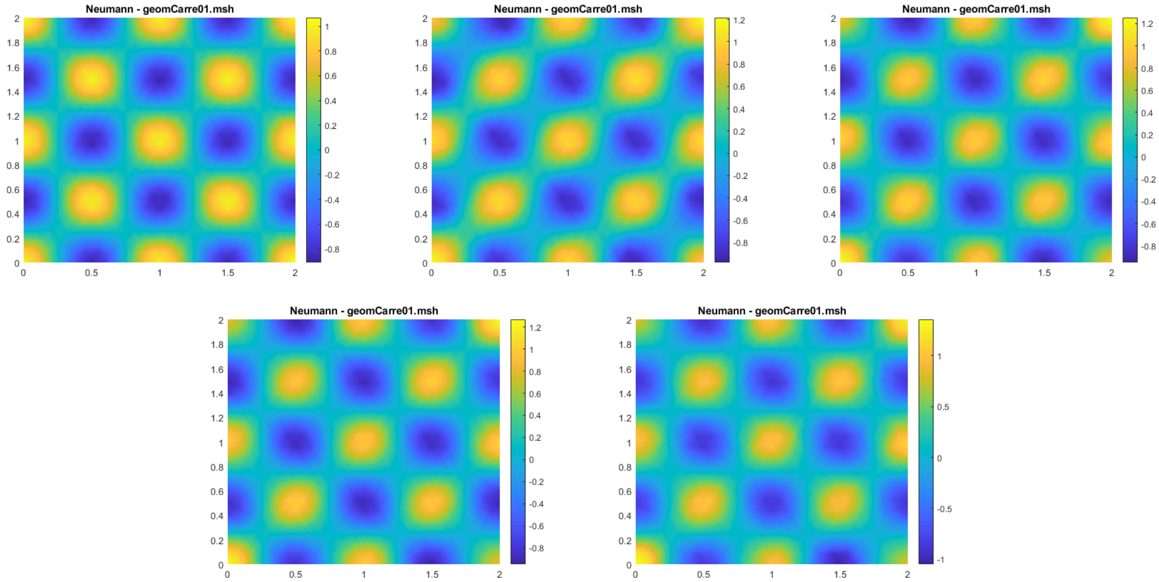

Figure 7: Solution pour $2^n = 2, 4, 8, 16, 32$ successivement

La valeur de n semble avoir une influance négligeable sur la solution. Lorsqu'on augmente n, on augmente la fréquence de A. On peut donc voir n comme un facteur d'échelle. En effet A dépend de x/ϵ avec $epsilon = 2^{-n}$, ainsi quand $\epsilon \to 0$, l'algorithme converge vers une solution macroscopique. On ne vois plus les variations dues à l'échelle ϵ.

2 Conditions de type Dirichlet

2.1 Formulation variationnelle

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

Le problème se met sous forme variationnelle équivalente :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \underbrace{\int_\Omega uv d\Omega + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv d\Omega}_{l(v)} \tag{13}$$

Comme pour le cas de Neumann, le problème est bien posé. En effet $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ est bien un espace de Hilbert en tant que sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

2.2 Maillages

Le maillage du problème se fait comme dans la partie précédente. Il faut cependant ne pas oublier de donner une référence différente pour les noeuds du bord.

2.3 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associé à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.
Pour définir une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante. On suppose que les noeuds de la frontière $\partial\Omega$ ont une référence de 1 (M_I est sur le bord si $Refneu(I) \geq 1$) et que les noeuds à l'intérieur ont une référence 0 (M_I est à l'intérieur si $Refneu(I) = 0$. On introduit :

$$V_h^0 = Vect(w_I, \text{ tel que } Refneu(M_I) = 0)$$

Soit N_0 la dimension V_h^0. Par construction, $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$. La solution approchée u_h sécrit sous la forme

$$\forall (x,y) \in \overline{\Omega},\ u_h(x,y) = \sum_{I, Refneu(M_I)=0} u_h(M_I) w_I(x,y)$$

De même que pour Neumann, on peut écrire la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent.

$$\sum_{I,Refneu(M_I)=0} \sum_{J,Refneu(M_J)=0} \underbrace{a(w_I,w_J)}_{\mathbb{A}^0_{IJ}} \underbrace{u_h(M_I)}_{U^0_I} v_h(M_J) = \sum_{J,Refneu(M_J)=0} v_h(M_J) \underbrace{l(w_J)}_{L^0_J}$$

avec

$$a(w_I,w_J) = \underbrace{\int_\Omega w_I w_J d\Omega}_{\mathbb{M}^0_{IJ}} + \underbrace{\int_\Omega A\nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega}_{\mathbb{K}^0_{IJ}}$$

Ainsi, on trouve le système linéaire suivant :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0 \tag{14}$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I)$ et avec $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$, avec $\mathbb{M}^0$ la matrice de masse, et $\mathbb{K}^0$ la matrice de rigidité. Dans la pratique, on ne peut pas assembler directement la matrice intervenant dans 14

2.4 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La routine `principal_dirichlet.m` est le programme principal pour résoudre le problème 13. Pour prendre en compte les conditions de Dirichlet, on reprend le code d'assemblage de `principal_neumann.m`. On introduit alors une matrice (creuse/space) de projection $\mathbb{P}$ de V_h dans V_h^0, de taille $N_0 \times N$ (qui ne contient que des 1 et des 0). Il suffit ensuite d'écrire

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P} A \mathbb{P}^t,\ et\ \vec{L}^0 = \mathbb{P}\vec{L}$$

Si les noeuds sont trié de sorte que les noeuds du bords soit au début de $Refneu$, alors la matrice $\mathbb{P}$ est de la forme :

$$\mathbb{P} = \left[0_{N_0 \times (N-N_0)}\ I_{N_0 \times N_0} \right]$$

On trouve alors $\vec{U}^0$ solution de l'équation suivante :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0$$

On retrouve $\vec{U}$ à l'aide de la transformation inverse :

$$\vec{U} = \mathbb{P}^t \vec{U}^0$$

2.5 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correct. Pour cela, on résout le problème 13 avec un tenseur A et une solution u. On choisit par exemple $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$ et $A = I_2$. On prend donc $f(x, y) = (1 + 5\pi^2)\sin(\pi x)\sin(2\pi y)$.

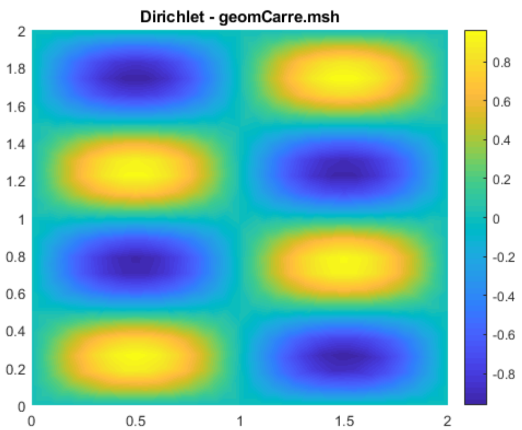

Figure 8: Résultats de la méthode des éléments finis avec des conditions aux limites de type Dirichlet pour $h = 0.1$

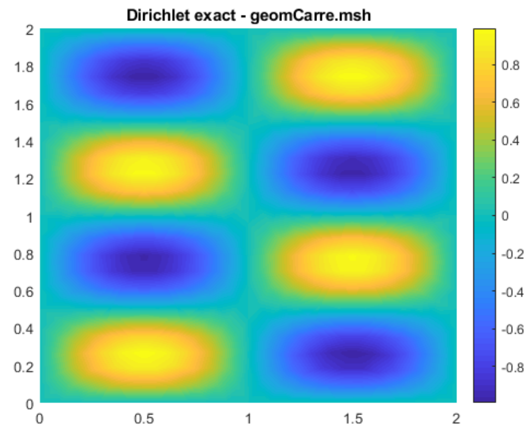

Figure 9: Solution exact du cas test

Les figures 8 et 9 permettent d'attester visuellement de la convergence de la méthode dans le cas de conditions au limites de type Dirichlet.

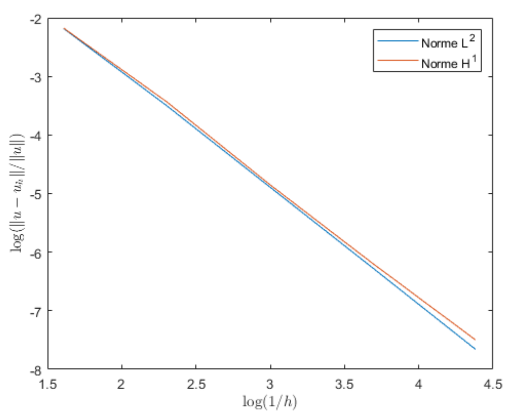

Figure 10: $\log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(|u - u_h|_1/|u|_1)$ en fonction de $\log(1/h)$

On trouve pour les erreurs $\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \simeq \texttt{8.5616e} - \texttt{04}$ et $\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \simeq \texttt{0.0507}$. On peut de même afficher les relations $\log(1/h) \to \log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(1/h) \to \log(|u - u_h|_1/|u|_1)$. La figure 10 présente ces relation. On voit bien ici que l'erreur décroit avec le pas du maillage. Cependant, il est intéressant de déterminé la vitesse de convergence. Pour cela, il suffit de regarder la pente des courbes d'erreurs. La pente de la courbe d'erreur pour la norme L^2 est `-1.9785` et la pente de la courbe d'erreur pour la norme H^1 est `-1.9329`. Autrement dit, l'erreur est contrôlé par la norme de la solution et par $h^{\sim 2}$. Quand on divise le pas du maillage par 2, on divise l'erreur par 4.

3 Conditions périodiques

3.1 Formulation variationnelle

Soit $\Omega = [0, L]^2$ un carré de taille L, on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodiques et coefficients variables :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \text{ et } u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=L} \text{ et } A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=L} \end{cases} \tag{15}$$

Le problème se réecrit sous forme variationnelle :
Trouver $u \in \dot{H}^1_{\#}(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in \dot{H}^1_{\#}(\Omega), \ \underbrace{\int_\Omega uvd\Omega + \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fvd\Omega}_{l(v)} \tag{16}$$

On montre comme pour le problème de Neumann que 16 est bien posé. $\dot{H}^1_{\#}(\Omega)$ est un espace de Hilbert en tant que sous espace fermé de $H^1(\Omega)$

3.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation **périodique** du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des trangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. La trinagulation es périodique si

- M_I est un noeud appartenant au bord droit si et seulement si il existe un noeud M_J appartenant au bord gauche ayant la même ordonnée.
- M_I est un noeud appartenant au bord bas si et seulement si il existe un noeud M_J appartenant au bord haut ayant la même abscisse.

Pour définit une approximation interne de $\dot{H}^1_{\#}(\Omega)$, on procède de la façon suivante :

1. Tout d'abord, toutes les fonctions de base correspondant à des noeuds intérieurs sont dans l'espace d'appromition $V_h^{\#}$ (elles sont nulles au bord donc en particulier périodiques)
2. ensuite pour tout noeud M_I de la frontière $x = 0$, on sait qu'il existe un noeud M_J de la frontière $x = L$ ayant la même ordonnée : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^{\#}$
3. et pour tout noeud M_I de la frontière $y = 0$, on sait qu'il existe un noeud M_J de la frontère $y = L$ ayant la même abscisse : la somme des 2 fonctions de base correspondantes est dans l'espace d'approximation $V_h^{\#}$
4. signalons enfin le cas particulier des noeuds du coin pour lequel c'est la somme des 4 fontions de base corrspondantes qui est dans l'espace d'approximation $V_h^{\#}$

Par construction, $V_h^{\#} \subset H^1_{\#}(\Omega)$. Si les noeuds sont triés de sorte que les noeuds du bords soient au début de $Refneu$, avec en premier les quatre sommets, puis les côtés 1, 2, 3 et 4 dans le sens des aiguilles d'une montre. On note N_b le nombre de noeud sur un bord (sans les sommets), on suppose que chaque face à le même nombre de noeuds. On note comme dans la partie précédente N_0 le nombre de sommet intérieur. La matrice $\mathbb{P}$ est de la forme :

$$\mathbb{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1_{1\times 4} & 0_{1\times N_b} & 0_{1\times N_b} & 0_{1\times N_b} & 0_{1\times N_b} & 0_{1\times N_0} \\ 0_{N_b\times 4} & I_{N_b} & 0_{N_b\times N_b} & AI_{N_b} & 0_{N_b\times N_b} & 0_{N_b\times N_0} \\ 0_{N_b\times 4} & 0_{N_b\times N_b} & I_{N_b} & 0_{Nb\times N_b} & AI_{N_b} & 0_{N_b\times N_0} \\ 0_{N_0\times 4} & 0_{N_0\times N_b} & 0_{N_0\times N_b} & 0_{N_0\times N_b} & 0_{N_0\times N_b} & I_{N_0} \end{bmatrix}}_{N_0+4N_b+4=Nbpt}$$

où AI est la matrice avec des 1 sur l'anti-diagonale uniquement. La routine `principal_periodique.m` est le programme principal pour résoudre le problème 16.

3.3 Validation du code

On peut alors tester le code dans un cas simple en prenant par exemple $A = 1$ et $u(x,y) = \sin(\pi x + \pi/2)\sin(\pi y + \pi/2)$. Il faut donc prendre $f(x,y) = (1 + 2\pi^2)\sin(\pi x + \pi/2)\sin(\pi y + \pi/2)$.

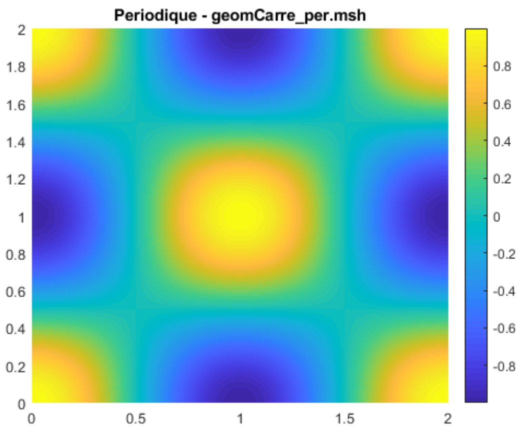

Figure 11: Résultats de la méthode des éléments finis avec des conditions aux limites périodique pour $h = 0.1$

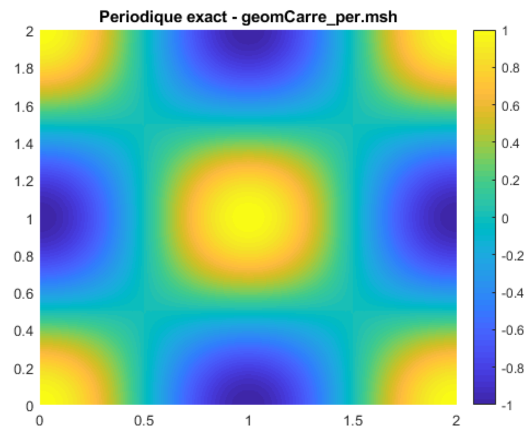

Figure 12: Solution exact du cas test

Les figures 11 et 12 permettent d'attester visuellement de la convergence de la méthode dans le cas de conditions au limites périodiques. On peut aussi afficher les relations $\log(1/h) \to \log(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(1/h) \to \log(|u - u_h|_1/|u|_1)$. La figure 13 attest bien que lorsque h diminue, l'erreur diminue. Autrement dit l'erreur est controlé par h et la norme de la solution. Ce qui est intéressant ici c'est de calculer la pende de la courbe d'erreur afin de déterminer la vitesse de décroissante de l'erreur. La pente pour la norme L^2 est `-1.9903` et la pente pour la semi-norme H^1 est `-1.6586`.

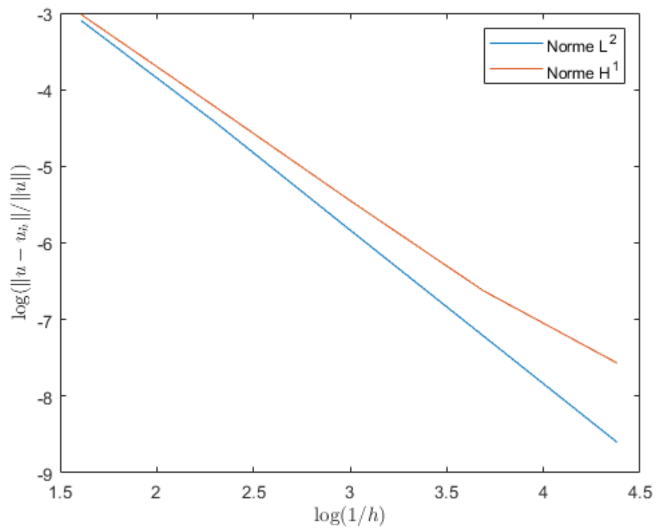

Figure 13: $\log(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)})$ et $\log(|u-u_h|_1/|u|_1)$ en fonction de $\log(1/h)$

Conclusion

Ce projet a pour but d'implémenter la méthode des éléments finis pour 3 type de conditions aux limites (Neumann, Dirichlet et Périodique). On alors pue comprendre comment ces méthodes fonctionnent ainsi qu'attester de leur convergence. Ce projet est une introduction au projet 2 qui a pour but d'implémenter la méthode des éléments finis dans le cadre d'un système double échelle.