

SIM202 : Simulation de systèmes auto-gravitants en orbite

22 janvier 2021

1 Établissement du modèle

1.1 Approximation de champ lointain

La force gravitationnelle exercée à un instant donné sur une particule i est la somme des forces gravitationnelles exercées par chacune des autres particules j et est donc donnée par la loi d'interaction gravitationnelle de Newton :

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle, m_j la masse de la particule j et r_{ij} la distance entre les particules i et j . Si on considère par exemple qu'il y a 10^4 particules – ce qui est faible pour un amas globulaire et davantage encore pour une galaxie –, on doit donc calculer à chaque instant 10^8 interactions. Ce qui est beaucoup !

Pour diminuer de façon significative le temps de calcul, une idée consiste à utiliser une approximation de champ lointain : considérant des particules lointaines dont les distances entre elles sont très faibles devant leur distance avec la particule i , on les remplacera par une seule particule de masse la somme des masses de ces particules lointaines et positionnée en leur centre de masse et on calculera l'interaction entre cette particule réduite et la particule i . Dans le cas contraire, on calculera toutes les interactions de manière exacte.

1.2 Structure hiérarchique

Cette idée conduit à structurer l'espace qu'occupe les particules en boîtes hiérarchisées sous forme d'arbre : dans un espace de dimension k (1 ou 2 en général), on considère une boîte englobant l'ensemble des particules. Cette boîte est subdivisée en 2^d sous-boîtes de même taille et on réitère le procédé sur les sous-boîtes jusqu'à ce que chaque boîte créée ne contienne pas plus d'une seule particule. On parle alors de « boîte terminale ».

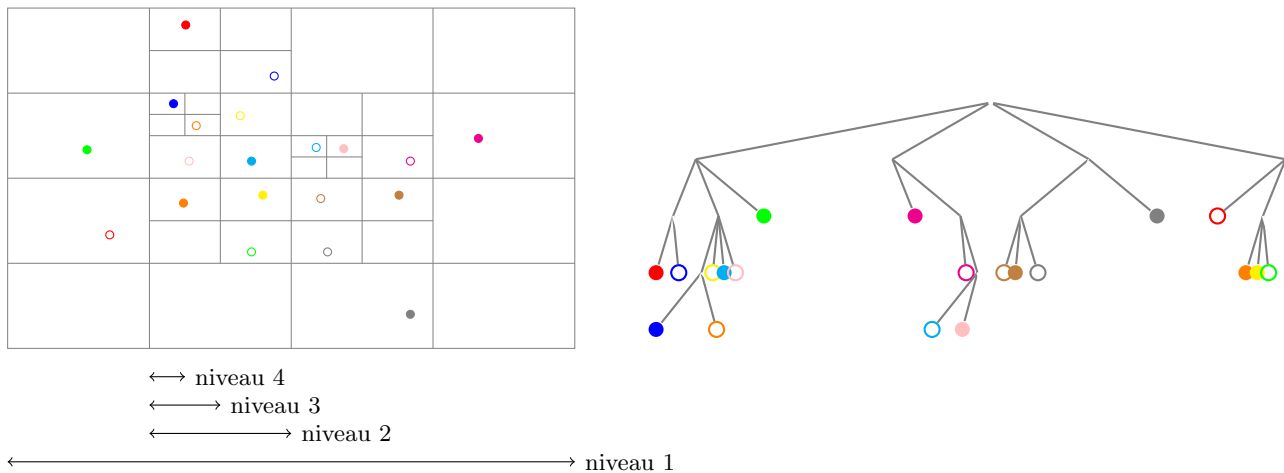


FIGURE 1 – Construction de la grille symbolisant l'arbre et structure de l'arbre associé

1.3 Evolution dynamique

Afin de simuler le comportement dynamique de l'ensemble des particules, on utilisera pour chaque particule i la relation fondamentale de la dynamique liant la force qui s'exerce sur la particule et son vecteur accélération :

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

Pour discrétiser cette équation d'évolution, on utilisera un schéma *saute-mouton* :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i^{k+\frac{1}{2}} &= \mathbf{v}_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{m_i} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1^k, \dots, \mathbf{r}_N^k) \\ \mathbf{r}_i^{k+1} &= \mathbf{r}_i^k + \Delta t \mathbf{v}_i^{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_i^\alpha = \mathbf{r}_i(\alpha \Delta t), \mathbf{v}_i^\alpha = \mathbf{v}_i(\alpha \Delta t) = \frac{dr_i}{dt}(\alpha \Delta t)$$

Attention à l'initialisation de la vitesse : $\mathbf{v}_i^{\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_i^0 + \frac{\Delta t}{2m_i} \mathbf{F}_i^0$

Le schéma saute-mouton est un schéma d'ordre 2 stable.

2 Eléments de conception

2.1 L'objet Particule

Une particule sera représentée par l'objet **Particule** défini par les attributs suivants :

- sa position instantanée
- sa vitesse instantanée
- la force gravitationnelle qui s'exerce sur elle

On aura également besoin de gérer une liste de particules.

2.2 L'objet Boite

Une boîte sera représentée par l'objet **Boite** défini par les attributs suivants :

- son niveau (permet de déterminer sa taille)
- son centre (permet de le localiser)
- son centre de masse (centre de gravité de toutes les particules contenues dans la boîte)
- sa masse (cumulée s'il y a plusieurs particules)
- un pointeur sur une particule (non nul s'il y en a une seule)
- un pointeur sur sa première boîte fille (nul si c'est une boîte terminale)
- un pointeur sur sa boîte sœur (nul s'il n'y a plus de boîte sœur)

3 Eléments algorithmiques

3.1 Déroulement d'une itération de calcul

Le calcul complet d'une itération se déroulera comme suit :

1. Calcul des forces gravitationnelles pour chaque particule en réalisant une boucle sur les boîtes.
Afin d'éviter des singularités numériques, on introduira un paramètre d'adoucissement ε de sorte que le calcul d'une interaction entre 2 particules i et j devienne :

$$\mathbf{f}_{j \rightarrow i} = \begin{cases} \frac{-Gm_i m_j}{r_{ij}^2} & \text{si } r_{ij} > \varepsilon \\ \frac{-Gm_i m_j}{\varepsilon^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Mise à jour des vitesses et des positions à l'aide du schéma saute-mouton

3. Mise à jour des boites (des particules ont en effet pu changer de boîte à l'issue de l'itération) : une méthode simple consiste à déplacer les particules en réalisant une boucle sur les boîtes. Dans une boîte terminale :
 - soit la particule ne sort pas de la boîte et il n'y a rien à faire.
 - soit la particule sort de la boîte. Dans ce cas, on « retire » la particule de la boîte à l'aide d'une fonction de suppression, en tenant compte du fait que si une boîte n'a que des sous-boîtes vides, il faut détruire les sous-boîtes. Puis, on ajoute la particule à l'aide d'une fonction d'ajout qui va parcourir les boîtes et modifier l'arbre en fonction de la nature de la boîte contenant la particule ajoutée :
 - soit la boîte est terminale et vide, alors on insère la particule dans cette boîte et c'est terminé
 - soit la boîte est terminale et contient 1 particule, alors on subdivise la boîte et on insère les 2 particules dans les sous-boîtes correspondantes (éventuellement la même)
 - soit la boîte est non terminale, alors on ajoute la particule à la sous-boîte qui la contient
- Attention ! certaines particules peuvent sortir de la boîte racine, c'est-à-dire du domaine de calcul.

3.2 Génération d'une condition initiale

Afin de construire un système auto-gravitant sphérique, on peut utiliser le modèle de Plummer qui fournit une densité de masse isotrope dans l'espace de la forme :

$$\rho(r) = \frac{3Mb^2}{4\pi (r^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}$$

où M est la masse totale du système et b une dimension caractéristique du système de particules.

Pour générer un tel système, on va se baser sur les travaux de Aarseth, Henon et Wielen [1], dont le principe est détaillé ci-après.

Soit N le nombre de particules, on se place dans le cadre $M = 1$, $G = 1$ et $b = 1$, et où les particules ont la même masse $m = \frac{1}{N}$.

On va maintenant construire à l'aide d'un générateur de nombre aléatoires uniforme sur $[0, 1]$ les positions et vitesses de chaque particule. Voir [2] pour les générateurs de type congruentiels.

1. soit X_1 une valeur aléatoire, on construit la valeur du rayon :

$$r = \left(0.999X_1^{-2/3} - 1\right)^{-1/2}$$

En tout état de cause la relation devrait être $r = \left(X_1^{-2/3} - 1\right)^{-1/2}$, mais on rejette les particules trop lointaines car le modèle de Plummer est un modèle à rayon infini, or les simulations seront dans une boîte finie.

2. Soient X_2 , X_3 et X_4 3 nouvelles valeurs aléatoires, on construit le vecteur position de la manière suivante : On calcule $u_r = \sqrt{X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}$.

Si $u_r \leq 1$, $x = r \frac{X_2}{u_r}$, $y = r \frac{X_3}{u_r}$, $z = r \frac{X_4}{u_r}$. Si $u_r > 1$, retraitage de X_2 , X_3 et X_4 .

3. Étant donnée la vitesse d'échappement $v_e = \sqrt{2} (1 + r^2)^{-1/4}$, on détermine le module de la vitesse de la forme $v = qv_e$ où q est déterminé de manière aléatoire par une méthode de rejet de Von Neumann : on considère la fonction g définie par $g(q) = q^2 (1 - q^2)^{7/2}$. Soient X_5 et X_6 2 nouvelles valeurs aléatoires.

SI $X_6 < 10g(X_5)$, alors $q = X_5$, sinon retraitage de X_5 et X_6 .

4. Soient X_7 , X_8 et X_9 3 nouvelles valeurs aléatoires, on construit le vecteur vitesse de la manière suivante : On calcule $u_v = \sqrt{X_7^2 + X_8^2 + X_9^2}$.

Si $u_v \leq 1$, $v_x = v \frac{X_7}{u_v}$, $v_y = v \frac{X_8}{u_v}$, $v_z = v \frac{X_9}{u_v}$. Si $u_v > 1$, retraitage de X_7 , X_8 et X_9 .

Tout en conservant $G = 1$ dans le système d'unités, si l'on souhaite générer un système de masse M et d'énergie E , il suffit de multiplier les masses par M , les positions par $\frac{3\pi M^2}{64|E|}$ et les vitesses par $\frac{64\sqrt{|E|}}{4\pi\sqrt{M}}$.

3.3 Mise en orbite

Pour déterminer l'orbite d'une particule ponctuelle de masse m_i dans un potentiel de type Plummer, on écrit le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\nabla \left(-\frac{\phi_0 b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \\ &= -\frac{\phi_0 b}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \mathbf{r} \end{aligned}$$

De manière générale, on ne peut déterminer une expression analytique de la trajectoire orbitale dans l'espace. On peut néanmoins la déterminer numériquement en utilisant une méthode de tir couplée, par exemple, à un intégrateur de type Runge-Kutta. La figure 2 montre 3 orbites correspondant à une vitesse initiale égale à la vitesse circulaire, plus faible ou plus forte.

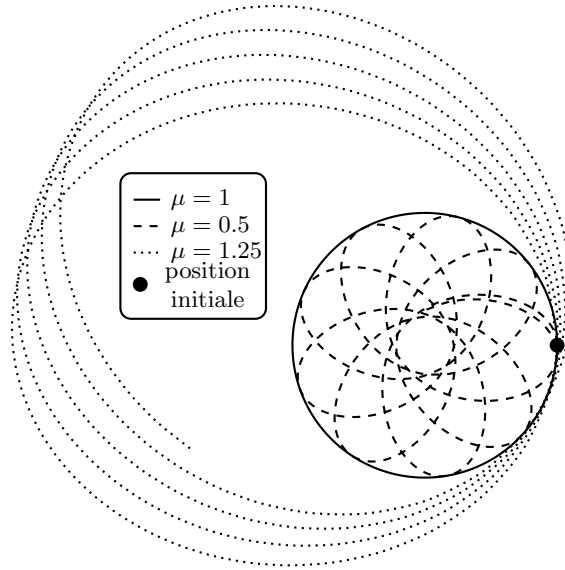


FIGURE 2 – 3 orbites planes dans un champ de potentiel de Plummer. μ est le facteur multiplicatif donné à la vitesse circulaire en guise de condition initiale. De manière générale, on obtient donc ou une trajectoire circulaire ($\mu = 1$) ou une rosette interne au cercle ($\mu < 1$) ou externe ($1 < \mu < \sqrt{2}$). Le cas $\mu = \sqrt{2}$ correspond à la vitesse de libération au delà de laquelle l'étoile part à l'infini.

Il existe néanmoins un cas où cette résolution numérique n'est pas nécessaire : l'orbite circulaire. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} |\mathbf{r}| = R \\ \mathbf{a} = -R\omega^2 \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v} = R\omega \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

où ω désigne la vitesse angulaire, ce qui nous permet de définir la condition initiale à donner au système pour le mettre en orbite circulaire :

$$\mathbf{v}_{circ} = \frac{R\sqrt{\phi_0 b}}{(R^2 + b^2)^{3/4}} \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

Du point de vue de la génération des conditions initiales, la technique se décompose en deux étapes :

- On génère le système dans le référentiel du centre de masse (donc du centre de densité, puisque le système est initialement sphérique) ;
- On normalise à la masse M et l'énergie E souhaitée.
- On ajoute sur les vecteurs position et vitesse les composantes orbitales.

4 Organisation du travail (3p)

Après s'être concerté sur la définition des classes et du prototype des fonctions, le travail consistera en :

- Fabrication des classes élémentaires `Particule` et `Boite` avec validation de toutes les fonctionnalités sur des cas simples
- Mise en place des fonctionnalités : calcul de la force gravitationnelle, mise à jour des positions, mise à jour des boîtes, génération des conditions initiales. On validera chacune des fonctionnalités sur des exemples simples.
- Génération de fichiers de sortie que l'on exploitera par exemple à l'aide de Matlab pour générer des films.

Références

- [1] S. J. Aarseth, M. Hénon, and R. Wielen, "A comparison of numerical methods for the study of star cluster dynamics," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 37, pp. 183–187, 1974.
- [2] J.-F. Delmas, *MA 101 - Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées.