1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

在小学和初中，我们已经接触过一些集合，例如，自然数的集合，有理数的集合，不等式 $x-7<3$ 的解的集合，到一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆），到一条线段的两个端点距离相等的点的集合（即这条线段的垂直平分线）……

那么，集合的含义是什么呢？我们再来看下面的一些例子：

（1）1～20 以内的所有质数；

（2）我国从 1991～2003 年的 13 年内所发射的所有人造卫星；

（3）金星汽车厂 2003 年生产的所有汽车；

（4）2004 年 1 月 1 日之前与我国建立外交关系的所有国家；

（5）所有的正方形；

（6）到直线 l 的距离等于定长 d 的所有的点；

（7）方程 $x^2+3x-2=0$ 的所有实数根；

（8）新华中学 2004 年 9 月入学的高一学生的全体.

例（1）中，我们把 1～20 以内的每一个质数作为元素，这些元素的全体就组成一个集合；同样地，例（2）中，把我国从 1991～2003 年的 13 年内发射的每一颗人造卫星作为元素，这些元素的全体也组成一个集合.

思考？

上面的例（3）到例（8）也都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？归纳总结这些例子，你能说出它们的共同特征吗？

一般地，我们把研究对象统称为元素（element），把一些元素组成的总体叫做集合（set）（简称为集）.

给定的集合，它的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了. 例如，“亚洲国家的首都”构成一个集合，北京、东京、新德里……在这个集合中，纽约、巴黎、伦敦……不在这个集合中. “身材较高的人”不能构成集合，因为组成它的元素是不确定的.

一个给定集合中的元素是互不相同的. 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

思考？

判断以下元素的全体是否组成集合，并说明理由：

(1) 大于 3 小于 11 的偶数；

(2) 我国的小河流.

我们通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于（belong to）集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于（not belong to）集合 A，记作 $a\notin A$.

例如，我们用 A 表示“1～20 以内的所有质数”组成的集合，则有 $3\in A$，$4\notin A$，等等.

数学中一些常用的数集及其记法

全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 **N**；

所有正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合称为整数集，记作 **Z**；

全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 **Q**；

全体实数组成的集合称为实数集，记作 **R**.

从上面的例子看到，我们可以用自然语言描述一个集合. 除此之外，还可以用什么方式表示集合呢？

列举法

我们可以把"地球上的四大洋"组成的集合表示为{太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}，把"方程$(x-1)(x+2)=0$的所有实数根"组成的集合表示为$\{1, -2\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来，并用花括号"{ }"括起来表示集合的方法叫做列举法.

例1 用列举法表示下列集合：

(1) 小于10的所有自然数组成的集合；

(2) 方程$x^2=x$的所有实数根组成的集合；

(3) 由1～20以内的所有质数组成的集合.

解：(1) 设小于10的所有自然数组成的集合为A，那么

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

由于元素完全相同的两个集合相等，而与列举的顺序无关，因此集合A可以有不同的列举方法. 例如

$$A=\{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}.$$

(2) 设方程$x^2=x$的所有实数根组成的集合为B，那么

$$B=\{0, 1\}.$$

(3) 设由1～20以内的所有质数组成的集合为C，那么

$$C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

思考

(1) 你能用自然语言描述集合$\{2, 4, 6, 8\}$吗？

(2) 你能用列举法表示不等式$x-7<3$的解集吗？

描述法

我们不能用列举法表示不等式$x-7<3$的解集，因为这个集合中的元素是列举不完的. 但是，我们可以用这个集合中元素所具有的共同特征来描述.

例如，不等式$x-7<3$的解集中所含元素的共同特征是：$x\in\mathbf{R}$，且$x-7<3$，即$x<10$. 所以，我们可以把这个集合表示为

$$D=\{x\in\mathbf{R}\mid x<10\}.$$

又如，任何一个奇数都可以表示为 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 的形式．所以，我们可以把所有奇数的集合表示为

$$E=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为**描述法**．具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征．

例 2　试分别用列举法和描述法表示下列集合：

（1）方程 $x^2-2=0$ 的所有实数根组成的集合；

（2）由大于 10 小于 20 的所有整数组成的集合．

解：（1）设方程 $x^2-2=0$ 的实数根为 x，并且满足条件 $x^2-2=0$，因此，用描述法表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2=0\}.$$

方程 $x^2-2=0$ 有两个实数根 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，因此，用列举法表示为

$$A=\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}.$$

（2）设大于 10 小于 20 的整数为 x，它满足条件 $x\in\mathbf{Z}$，且 $10<x<20$，因此，用描述法表示为

$$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 10<x<20\}.$$

大于 10 小于 20 的整数有 11，12，13，14，15，16，17，18，19，因此，用列举法表示为

$$B=\{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19\}.$$

要指出的是，如果从上下文的关系来看，$x\in\mathbf{R}$、$x\in\mathbf{Z}$ 是明确的，那么 $x\in\mathbf{R}$、$x\in\mathbf{Z}$ 可以省略，只写其元素 x．例如，集合 $D=\{x\in\mathbf{R}\mid x<10\}$ 也可表示为 $D=\{x\mid x<10\}$；集合 $E=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 也可表示为 $E=\{x\mid x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$．

思考？

(1) 结合上述实例，试比较用自然语言、列举法和描述法表示集合时，各自的特点和适用的对象.

(2) 自己举出几个集合的例子，并分别用自然语言、列举法和描述法表示出来.

练 习

1. 用符号"∈"或"∉"填空：

(1) 设 A 为所有亚洲国家组成的集合，则：

中国____ A，美国____ A，

印度____ A，英国____ A；

(2) 若 $A=\{x|x^2=x\}$，则 -1 ____ A；

(3) 若 $B=\{x|x^2+x-6=0\}$，则 3 ____ B；

(4) 若 $C=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，则 8 ____ C，9.1 ____ C.

2. 试选择适当的方法表示下列集合：

(1) 由方程 $x^2-9=0$ 的实数根组成的集合；

(2) 由小于 8 的所有质数组成的集合；

(3) 一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 的图象的交点组成的集合；

(4) 不等式 $4x-5<3$ 的解集.

1.1.2 集合间的基本关系

思考？

实数有相等关系、大小关系，如 $5=5$，$5<7$，$5>3$，等等. 类比实数之间的关系，你会想到集合之间的什么关系？

观察下面几个例子，你能发现两个集合间的关系吗？

(1) $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

(2) 设 A 为新华中学高一 (2) 班女生的全体组成的集合，B 为这个班学生的全体组成的集合；

(3) 设 $C=\{x|x$ 是两条边相等的三角形$\}$，$D=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$.

可以发现，在 (1) 中，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素. 这时我们说集合 A 与集合 B 有包含关系. (2) 中的集合 A 与集合 B 也有这种关系.

一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的**子集** (subset)，记作

$$A\subseteq B \text{（或 } B\supseteq A\text{）},$$

读作"A 含于 B"(或"B 包含 A").

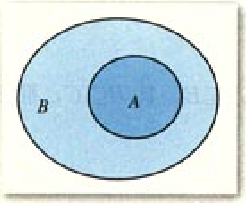


图 1.1-1

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 **Venn 图**. 这样，上述集合 A 和集合 B 的包含关系，可以用图 1.1-1 表示.

请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例.

在 (3) 中，由于"两条边相等的三角形"是等腰三角形，因此，集合 C、D 都是由所有等腰三角形组成的集合. 即集合 C 中任何一个元素都是集合 D 中的元素，同时，集合 D 中任何一个元素也都是集合 C 中的元素. 这样，集合 D 的元素与集合 C 的元素是一样的.

我们可以用子集概念对两个集合的相等作进一步的数学描述.

与实数中的结论"若 $a\geqslant b$，且 $b\geqslant a$，则 $a=b$."相类比，你有什么体会?

如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集 ($B\subseteq A$)，此时，集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，因此，集合 A 与集合 B **相等**，记作

$$A=B.$$

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的**真子集** (proper subset)，记作

$$A\subsetneqq B\text{(或 } B\supsetneqq A\text{)}.$$

例如，在 (1) 中，$A\subseteq B$，但 $4\in B$，且 $4\notin A$，所以集合 A 是集合 B 的真子集.

你能举出几个空集的例子吗?

我们知道，方程 $x^2+1=0$ 没有实数根，所以，方程 $x^2+1=0$ 的实数根组成的集合中没有元素.

我们把不含任何元素的集合叫做**空集** (empty set)，记为 $\varnothing$，并规定：空集是任何集合的子集.

思考？

包含关系$\{a\}\subseteq A$与属于关系$a\in A$有什么区别？试结合实例作出解释.

你还能得出哪些结论？

由上述集合之间的基本关系，可以得到下列结论：

(1) 任何一个集合是它本身的子集，即

$$A\subseteq A;$$

(2) 对于集合A、B、C，如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$.

例3 写出集合$\{a, b\}$的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

解：集合$\{a, b\}$的所有子集为$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$. 真子集为$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

练习

1. 写出集合$\{a, b, c\}$的所有子集.
2. 用适当的符号填空：
   (1) a ___ $\{a, b, c\}$；
   (2) 0 ___ $\{x \mid x^2=0\}$；
   (3) $\varnothing$ ___ $\{x\in \mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$；
   (4) $\{0, 1\}$ ___ $\mathbf{N}$；
   (5) $\{0\}$ ___ $\{x \mid x^2=x\}$；
   (6) $\{2, 1\}$ ___ $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.
3. 判断下列两个集合之间的关系：
   (1) $A=\{1, 2, 4\}$，$B=\{x \mid x$是8的约数$\}$；
   (2) $A=\{x \mid x=3k, k\in \mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x=6z, z\in \mathbf{N}\}$；
   (3) $A=\{x \mid x$是4与10的公倍数$\}$，$B=\{x \mid x=20m, m\in \mathbf{N}_+\}$.

1.1.3 集合的基本运算

思考？

我们知道，实数有加法运算．类比实数的加法运算，集合是否也可以“相加”呢？

考察下列各个集合，你能说出集合C与集合A、B之间的关系吗？

(1) $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(2) $A=\{x|x$是有理数$\}$，$B=\{x|x$是无理数$\}$，$C=\{x|x$是实数$\}$．

并集

在上述两个问题中，集合A、B与集合C之间都具有这样一种关系：集合C是由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的．

一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，称为集合A与B的**并集**（union set），记作$A\cup B$（读作“A并B”），即

$$A\cup B=\{x|x\in A，或\ x\in B\}．$$

可用Venn图1.1-2表示．

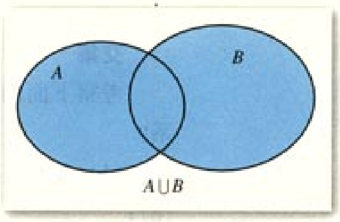


图 1.1-2

这样，在问题(1)(2)中，集合A与B的并集是C，即

$$A\cup B=C.$$

例 4　设$A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，求$A\cup B$．

在求两个集合的并集时，它们的公共元素在并集中只能出现一次．如元素5、8．

解： $A\cup B=\{4, 5, 6, 8\}\cup\{3, 5, 7, 8\}$
$=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$

例5 设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}$
$=\{x\mid -1<x<3\}.$

我们还可以在数轴上表示例5中的并集 $A\cup B$，如图1.1-3.

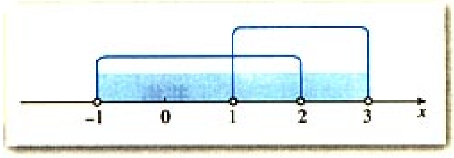


图1.1-3

思考 求集合的并集是集合间的一种运算，那么，集合间还有其他运算吗？

交集

考察下面的问题，集合 A、B 与集合 C 之间有什么关系？

(1) $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$，$B=\{3, 5, 8, 12\}$，$C=\{8\}$；

(2) $A=\{x\mid x$ 是新华中学2004年9月在校的女同学$\}$，
$B=\{x\mid x$ 是新华中学2004年9月入学的高一年级同学$\}$，
$C=\{x\mid x$ 是新华中学2004年9月入学的高一年级女同学$\}$.

我们看到，在上述问题中，集合 C 是由那些既属于集合 A 且又属于集合 B 的所有元素组成的.

一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（intersection set），记作 $A\cap B$（读作"A 交 B"），即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A，且 x\in B\}.$$

可用 Venn 图 1.1-4 表示.

这样，在上述问题（1）（2）中，$A\cap B=C$.

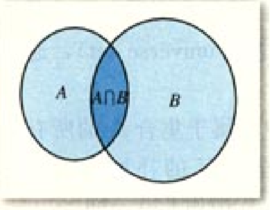


图 1.1-4

例 6　新华中学开运动会，设

$A=\{x \mid x$是新华中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}$，

$B=\{x \mid x$是新华中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}$，

求 $A\cap B$.

解：$A\cap B$ 就是新华中学高一年级中那些既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学组成的集合. 所以，$A\cap B=\{x \mid x$是新华中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学$\}$.

例 7　设平面内直线 l_1 上点的集合为 L_1，直线 l_2 上点的集合为 L_2，试用集合的运算表示 l_1、l_2 的位置关系.

解：平面内直线 l_1、l_2 可能有三种位置关系，即相交于一点，平行或重合.

（1）直线 l_1、l_2 相交于一点 P 可表示为

$$L_1\cap L_2=\{点 P\}；$$

（2）直线 l_1、l_2 平行可表示为

$$L_1\cap L_2=\varnothing；$$

（3）直线 l_1、l_2 重合可表示为

$$L_1\cap L_2=L_1=L_2.$$

补集

在研究问题时，我们经常需要确定研究对象的范围.

例如，从小学到初中，数的研究范围逐步地由自然数到正分数，再到有理数，引进无理数后，数的研究范围扩充到实数. 在高中阶段，数的研究范围将进一步扩充.

在不同范围研究同一个问题，可能有不同的结果. 例如方程 $(x-2)(x^2-3)=0$ 的解集，在有理数范围内只有一个解 2，即

$$\{x\in\mathbf{Q} \mid (x-2)(x^2-3)=0\}=\{2\}；$$

在实数范围内有三个解：2，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，即

$\{x\in \mathbf{R}\mid (x-2)(x^2-3)=0\}=\{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

通常也把给定的集合作为全集.

一般地，如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素，那么就称这个集合为**全集**（universe set），通常记作U.

对于一个集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的**补集**（complementary set），简称为集合A的补集，记作$\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U, 且 x\notin A\}.$$

可用Venn图1.1-5表示.

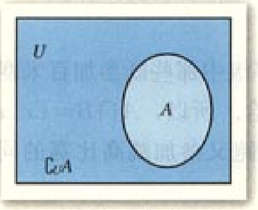


图1.1-5

例8 设$U=\{x\mid x$是小于9的正整数$\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B$.

解：根据题意可知，$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，所以

$$\complement_U A=\{4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$\complement_U B=\{1, 2, 7, 8\}.$$

例9 设全集$U=\{x\mid x$是三角形$\}$，$A=\{x\mid x$是锐角三角形$\}$，$B=\{x\mid x$是钝角三角形$\}$. 求$A\cap B$，$\complement_U(A\cup B)$.

解：根据三角形的分类可知

$$A\cap B=\varnothing,$$
$$A\cup B=\{x\mid x是锐角三角形或钝角三角形\},$$
$$\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x是直角三角形\}.$$

练　习

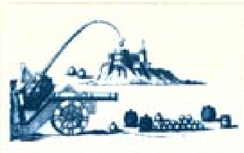
1. 已知$A=\{x\mid x$是等腰三角形$\}$，$B=\{x\mid x$是直角三角形$\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$.
2. $A=\{x\mid x^2-4x-5=0\}$，$B=\{x\mid x^2=1\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$.
3. 设$A=\{x\mid x=2k, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=2(k+1), k\in \mathbf{Z}\}$，$D=\{x\mid x=2k-1, k\in \mathbf{Z}\}$，在$A$、$B$、$C$、$D$中，哪些集合相等，哪些集合的交集是空集，哪些集合的并集是$\mathbf{Z}$?
4. 若集合A和集合B满足条件：$A\cap B=\{x\mid x$是正方形$\}$，你能构造出几对这样的集合?
5. 已知全集$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$A=\{2, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$，求$A\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念

在初中我们已经学习过函数的概念，并且知道可以用函数描述变量之间的依赖关系．现在我们将进一步学习函数及其构成要素．下面先看几个实例．

❶ 射高是指斜抛运动中，物体飞行轨迹最高点的高度．

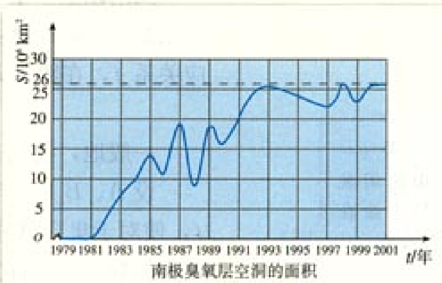


（1）一枚炮弹发射后，经过 26 s 落到地面击中目标．炮弹的射高❶为 845 m，且炮弹距地面的高度 h（单位：m）随时间 t（单位：s）变化的规律是

$$h=130t-5t^2. \qquad (*)$$

这里，炮弹飞行时间 t 的变化范围是数集 $A=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 26\}$，炮弹距地面的高度 h 的变化范围是数集 $B=\{h \mid 0\leqslant h\leqslant 845\}$．从问题的实际意义可知，对于数集 A 中的任意一个时间 t，按照对应关系（$*$），在数集 B 中都有唯一确定的高度 h 和它对应．

（2）近几十年来，大气层中的臭氧迅速减少，因而出现了臭氧层空洞问题．图 1.2-1 中的曲线显示了南极上空臭氧



南极臭氧层空洞的面积

图 1.2-1

层空洞的面积从1979～2001年的变化情况.

根据图1.2-1中的曲线可知，时间t的变化范围是数集$A=\{t \mid 1979\leqslant t\leqslant 2001\}$，臭氧层空洞面积$S$的变化范围是数集$B=\{S \mid 0\leqslant S\leqslant 26\}$．并且，对于数集$A$中的每一个时刻$t$，按照图中曲线，在数集$B$中都有唯一确定的臭氧层空洞面积$S$和它对应.

❶ 恩格尔系数$=\dfrac{食物支出金额}{总支出金额}$.

(3) 国际上常用恩格尔系数❶反映一个国家人民生活质量的高低，恩格尔系数越低，生活质量越高．表1-1中恩格尔系数随时间（年）变化的情况表明，“八五”计划以来，我国城镇居民的生活质量发生了显著变化.

表1-1 “八五”计划以来我国城镇居民恩格尔系数变化情况

时间（年）	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
城镇居民家庭恩格尔系数（%）	53.8	52.9	50.1	49.9	49.9	48.6	46.4	44.5	41.9	39.2	37.9

请你仿照(1)(2)描述表1-1中恩格尔系数和时间（年）的关系.

思考

分析、归纳以上三个实例，它们有什么共同点？

归纳以上三个实例，我们看到，三个实例中变量之间的关系都可以描述为：对于数集A中的每一个x，按照某种对应关系f，在数集B中都有唯一确定的y和它对应，记作

$$f: A\to B.$$

函数符号$y=f(x)$是由德国数学家莱布尼兹在18世纪引入的.

一般地，我们有：

设A、B是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f: A\to B$为从集合A到集合B的一个**函数**（function），记作

$$y=f(x),\ x\in A.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域 (domain)；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域 (range).

我们所熟悉的一次函数 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$. 对于 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一的数 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ 和它对应.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 B. 当 $a>0$ 时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当 $a<0$ 时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$. 对于 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x，在 B 中都有唯一的数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 和它对应.

思考？

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 的定义域、对应关系和值域各是什么？请用上面的函数定义描述这个函数.

研究函数时常会用到区间的概念.

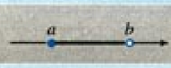
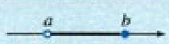
设 a，b 是两个实数，而且 $a<b$. 我们规定：

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为 $[a, b]$；

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为 (a, b)；

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a, b)$，$(a, b]$.

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点.

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a, b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a, b]$	

这些区间的几何表示如上表所示．在图中，用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点．

实数集 **R** 可以用区间表示为$(-\infty, +\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”．我们可以把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$．

例 1 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$，

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f(-3)$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$的值；

(3) 当 $a>0$ 时，求 $f(a)$，$f(a-1)$的值．

分析： 函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如前所述的三个实例．如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合．

解： (1) 使根式$\sqrt{x+3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x\mid x\geqslant -3\}$，使分式$\dfrac{1}{x+2}$有意义的实数 x 的集合是$\{x\mid x\neq -2\}$．

所以，这个函数的定义域就是

$$\{x\mid x\geqslant -3\}\cap\{x\mid x\neq -2\}$$
$$=\{x\mid x\geqslant -3,\ x\neq -2\}.$$

(2) $f(-3)=\sqrt{-3+3}+\dfrac{1}{-3+2}=-1$；

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}+3}+\frac{1}{\frac{2}{3}+2}=\sqrt{\frac{11}{3}}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{33}}{3}.$$

> 在函数定义中，我们用符号 $y=f(x)$ 表示函数．其中 $f(x)$ 表示 x 对应的函数值，而不是 f 乘 x．

(3) 因为 $a>0$，所以 $f(a)$，$f(a-1)$有意义．

$$f(a)=\sqrt{a+3}+\frac{1}{a+2};$$

$$f(a-1)=\sqrt{a-1+3}+\frac{1}{(a-1)+2}=\sqrt{a+2}+\frac{1}{a+1}.$$

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、

对应关系和值域．由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称这两个函数相等．

你也可以利用计算器或计算机画出例2中四个函数的图象，根据图象进行判断．

例2　下列函数中哪个与函数 $y=x$ 相等？

（1）$y=(\sqrt{x})^2$；　（2）$y=\sqrt[3]{x^3}$；

（3）$y=\sqrt{x^2}$；　（4）$y=\dfrac{x^2}{x}$．

解：（1）$y=(\sqrt{x})^2=x\ (x\geqslant 0)$，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 虽然对应关系相同，但是定义域不相同．所以，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 不相等．

（2）$y=\sqrt[3]{x^3}=x\ (x\in\mathbf{R})$，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 不仅对应关系相同，而且定义域也相同．所以，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 相等．

（3）$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，但是当 $x<0$ 时，它的对应关系与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 不相同．所以，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 不相等．

（4）$y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $\{x\mid x\neq 0\}$，与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 的对应关系相同但定义域不相同．所以，这个函数与函数 $y=x\ (x\in\mathbf{R})$ 不相等．

思考？

至此，我们在初中学习的基础上，运用集合和对应的语言刻画了函数概念，并引进了符号 $y=f(x)$，明确了函数的构成要素．比较两个函数定义，你对函数有什么新的认识？

练习

1. 求下列函数的定义域：

 (1) $f(x)=\frac{1}{4x+7}$； (2) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}-1$.

2. 判断下列各组中的函数是否相等，并说明理由：

 (1) 表示导弹飞行高度 h 与时间 t 关系的函数 $h=500t-5t^2$ 和二次函数 $y=500x-5x^2$；

 (2) $f(x)=1$ 和 $g(x)=x^0$.

3. 已知函数 $f(x)=3x^3+2x$，

 (1) 求 $f(2)$、$f(-2)$、$f(2)+f(-2)$的值；

 (2) 求 $f(a)$、$f(-a)$、$f(a)+f(-a)$的值；

 (3) 你从（2）中发现了什么结论？

1.2.2 函数的表示法

我们在初中已经接触过函数的三种表示法：解析法、图象法和列表法.

解析法，就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系，如1.2.1的实例（1）.

图象法，就是用图象表示两个变量之间的对应关系，如1.2.1的实例（2）.

列表法，就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系，如1.2.1的实例（3）.

例3 某种笔记本的单价是5元，买 x（$x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$）个笔记本需要 y 元. 试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$.

解：这个函数的定义域是数集$\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

用解析法可将函数 $y=f(x)$表示为

$$y=5x,\ x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

用列表法可将函数 $y=f(x)$表示为

笔记本数 x	1	2	3	4	5
钱数 y	5	10	15	20	25

用图象法可将函数 $y=f(x)$ 表示为图 1.2-2.

函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等等．那么判断一个图形是不是函数图象的依据是什么？

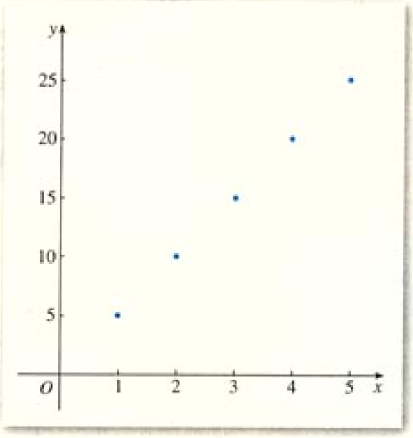


图 1.2-2

思考

(1) 比较三种表示法，它们各自的特点是什么？所有的函数都能用解析法表示吗？

(2) 举出几个函数，分别用三种方法表示．

对于一个具体的问题，我们应当学会选择恰当的方法表示问题中的函数关系.

例 4 表 1-2 是某校高一（1）班三名同学在高一学年度六次数学测试的成绩及班级平均分表.

表 1-2

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次
王 伟	98	87	91	92	88	95
张 城	90	76	88	75	86	80
赵 磊	68	65	73	72	75	82
班级平均分	88.2	78.3	85.4	80.3	75.7	82.6

请你对这三位同学在高一学年度的数学学习情况做一个分析.

解：从表中可以知道每位同学在每次测试中的成绩，但不太容易分析每位同学的成绩变化情况. 如果将“成绩”与“测试时间”之间的关系用函数图象表示出来，如图 1.2-3，那么就能比较直观地看到成绩变化的情况. 这对我们的分析很有帮助.

为了容易地看出一个学生的学习情况，我们将离散的点用虚线连接.

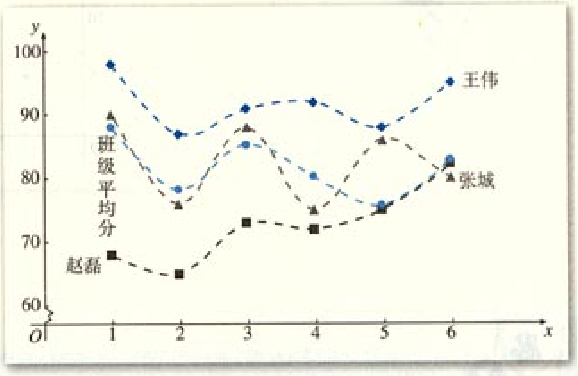


图 1.2-3

从图 1.2-3 我们看到，王伟同学的数学学习成绩始终高于班级平均水平，学习情况比较稳定而且成绩优秀. 张城同学的数学成绩不稳定，总是在班级平均水平上下波动，而且波动幅度较大. 赵磊同学的数学学习成绩低于班级平均水平，但他的成绩曲线呈上升趋势，表明他的数学成绩在稳步提高.

例 5 画出函数 $y=|x|$ 的图象.

解：由绝对值的概念，我们有

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

所以，函数 $y=|x|$ 的图象如图 1.2-4 所示.

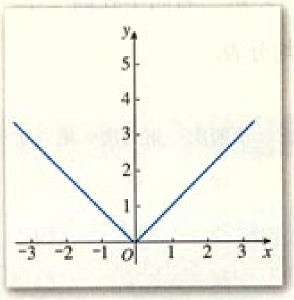


图 1.2-4

例 6 某市空调公共汽车的票价按下列规则制定：

(1) 5 公里以内，票价 2 元；

(2) 5 公里以上，每增加 5 公里，票价增加 1 元（不足 5 公里的按 5 公里计算）.

已知两个相邻的公共汽车站间相距约为 1 公里，如果沿途（包括起点站和终点站）有 21 个汽车站，请根据题意，写出票价与里程之间的函数解析式，并画出函数的图象.

解：设票价为 y，里程为 x，则根据题意，

如果某空调汽车运行路线中设 21 个汽车站，那么汽车行驶的里程约为 20 公里，所以自变量 x 的取值范围是 $(0, 20]$.

由空调汽车票价制定的规定，可得到以下函数解析式：

$$y=\begin{cases}2, & 0<x<5, \\ 3, & 5\leqslant x<10, \\ 4, & 10\leqslant x<15, \\ 5, & 15\leqslant x\leqslant 20.\end{cases}$$

利用这个解析式可以计算出任意两站之间的票价. 一个乘客在第 2 站上车，第 10 站下车，他购买的车票票价是多少？是否可以设计一个表格，让售票员和乘客非常容易地知道任意两站之间的票价？

根据这个函数解析式，可画出函数图象，如图 1.2-5.

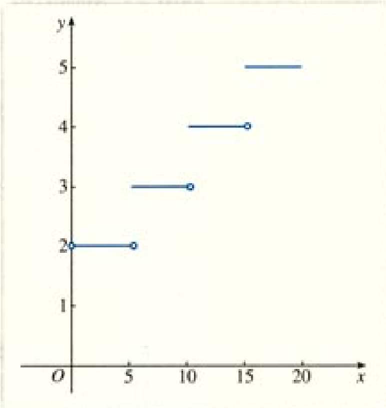


图 1.2-5

我们把像例 5、例 6 这样的函数称为**分段函数**. 生活中，有很多可以用分段函数描述的实际问题，如出租车的计费、个人所得税纳税额等等.

函数是“两个数集间的一种确定的对应关系”. 当我们将数集扩展到任意的集合时，就可以得到映射的概念. 例如，亚洲的国家构成集合 A，亚洲各国的首都构成集合 B，对应关系 f：国家 a 对应于它的首都 b. 这样，对于集合 A

中的任意一个国家，按照对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的首都与之对应. 我们将对应 f：$A \to B$ 称为映射.

一般地，我们有：

设 A，B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 f：$A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射(mapping).

在我们的生活中，有很多映射的例子，例如，设集合 $A=\{x|x$是某场电影票上的号码$\}$，集合 $B=\{x|x$ 是某电影院的座位号$\}$，对应关系 f：电影票的号码对应于电影院的座位号，那么对应 f：$A \to B$ 是一个映射.

例 7 以下给出的对应是不是从集合 A 到 B 的映射?

(1) 集合 $A=\{P|P$ 是数轴上的点$\}$，集合 $B=\mathbf{R}$，对应关系 f：数轴上的点与它所代表的实数对应；

(2) 集合 $A=\{P|P$ 是平面直角坐标系中的点$\}$，集合 $B=\{(x, y)|x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，对应关系 f：平面直角坐标系中的点与它的坐标对应；

(3) 集合 $A=\{x|x$ 是三角形$\}$，集合 $B=\{x|x$ 是圆$\}$，对应关系 f：每一个三角形都对应它的内切圆；

(4) 集合 $A=\{x|x$ 是新华中学的班级$\}$，集合 $B=\{x|x$ 是新华中学的学生$\}$，对应关系 f：每一个班级都对应班里的学生.

解：(1) 按照建立数轴的方法可知，数轴上的任意一个点，都有唯一的实数与之对应，所以这个对应 f：$A \to B$ 是从集合 A 到 B 的一个映射.

(2) 按照建立平面直角坐标系的方法可知，平面直角坐标系中的任意一个点，都有唯一的一个实数对与之对应，所以这个对应 f：$A \to B$ 是从集合 A 到 B 的一个映射.

(3) 由于每一个三角形只有一个内切圆与之对应，所以这个对应 f：$A \to B$ 是从集合 A 到 B 的一个映射.

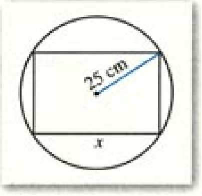
(4) 新华中学的每一个班级里的学生都不止一个，即与一个班级对应的学生不止一个，所以这个对应 f：$A \to B$ 不是从集合 A 到 B 的一个映射.

思考？

对于例7，如果将（3）中的对应关系 f 改为：每一个圆都对应它的内接三角形；（4）中的对应关系 f 改为：每一个学生都对应它的班级，那么对应 f：$B \to A$ 是从集合 B 到 A 的映射吗？

练　习

1. 如图，把截面半径为 25 cm 的圆形木头锯成矩形木料，如果矩形的一边长为 x，面积为 y，把 y 表示为 x 的函数，并画出函数图象.



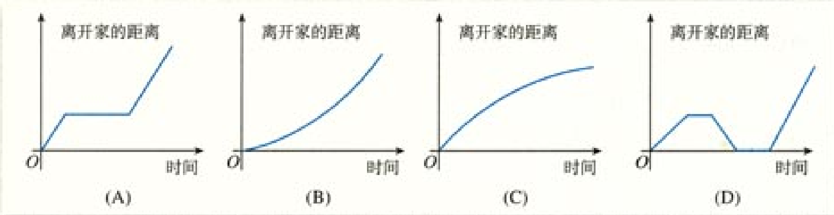
（第1题）

2. 下图中哪几个图象与下述三件事分别吻合得最好？请你为剩下的那个图象写出一件事.

（1）我离开家不久，发现自己把作业本忘在家里了，于是返回家里找到了作业本再上学；

（2）我骑着车一路匀速行驶，只是在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间；

（3）我出发后，心情轻松，缓缓行进，后来为了赶时间开始加速.



（第2题）

3. 画出函数 $y=|x-2|$ 的图象.

4. 设 $A=\{x \mid x$ 是锐角$\}$，$B=(0,1)$，从 A 到 B 的映射是“求正弦”，与 A 中元素 60° 相对应的 B 中的元素是什么？与 B 中元素 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 相对应的 A 中的元素是什么？

阅读与思考

函数概念的发展历程

17 世纪，科学家们致力于运动的研究，如计算天体的位置，远距离航海中对经度和纬度的测量，炮弹的速度对于高度和射程的影响等. 诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系，并根据这种关系对事物的变化规律作出判断，如根据炮弹的速度推测它能达到的高度和射程. 这正是函数产生和发展的背景.

“function”一词最初由德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）在 1692 年使用. 在中国，清代数学家李善兰（1811—1882）在 1859 年和英国传教士伟烈亚力合译的《代微积拾级》中首次将“function”译做“函数”.

莱布尼兹用“函数”表示随曲线的变化而改变的几何量，如坐标、切线等. 1718 年，他的学生、瑞士数学家约翰·伯努利（J. Bernoulli，1667—1748）强调函数要用公式表示. 后来，数学家认为这不是判断函数的标准. 只要一些变量变化，另一些变量随之变化就可以了. 所以，1755 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783）将函数定义为“如果某些变量，以一种方式依赖于另一些变量，我们将前面的变量称为后面变量的函数”.

当时很多数学家对于不用公式表示函数很不习惯，甚至抱怀疑态度. 函数的概念仍然是比较模糊的.

随着对微积分研究的深入，18 世纪末 19 世纪初，人们对函数的认识向前推进了. 德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805—1859）在 1837 年时提出：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数”. 这个定义较清楚地说明了函数的内涵. 只要有一个法则，使得取值范围中的每一个值，有一个确定的 y 和它对应就行了，不管这个法则是公式、图象、表格还是其他形式. 19 世纪 70 年代以后，随着集合概念的出现，函数概念又进而用更加严谨的集合和对应语言表述，这就是本节学习的函数概念.

综上所述可知，函数概念的发展与生产、生活以及科学技术的实际需要紧密相关，而且随着研究的深入，函数概念不断得到严谨化、精确化的表达，这与我们学习函数的过程是一样的.

你能以函数概念的发展为背景，谈谈从初中到高中学习函数概念的体会吗？

1.3 函数的基本性质

在事物变化过程中，保持不变的特征就是这个事物的性质.

函数是描述事物运动变化规律的数学模型. 如果了解了函数的变化规律，那么也就基本把握了相应事物的变化规律. 因此研究函数的性质，如函数在什么时候递增或递减，有没有最大值或最小值，函数图象有什么特征等，是非常重要的.

观察图 1.3-1 中的各个函数图象，你能说说它们分别反映了相应函数的哪些变化规律吗？

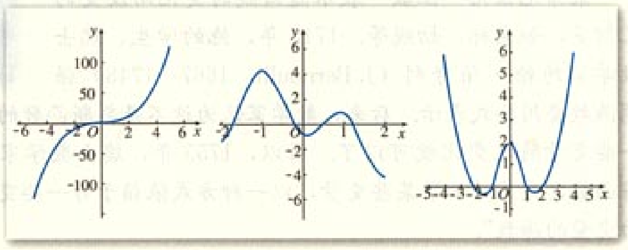
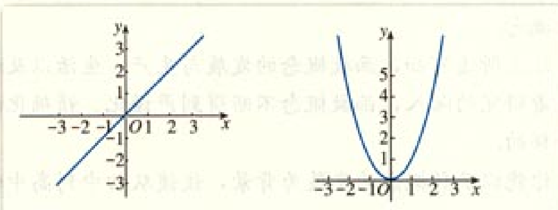


图 1.3-1

1.3.1 单调性与最大（小）值

首先，我们研究一次函数 $f(x)=x$ 和二次函数 $f(x)=x^2$ 的单调性.



(1) (2)

图 1.3-2

观察图 1.3-2，可以看到：

函数 $f(x)=x$ 的图象由左至右是上升的；函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 y 轴左侧是下降的，在 y 轴右侧是上升的．函数图象的“上升”“下降”反映了函数的一个基本性质——单调性．那么，如何描述函数图象的“上升”“下降”呢？

以二次函数 $f(x)=x^2$ 为例，列出 x，y 的对应值表 1-3.

表 1-3

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$f(x)=x^2$	…	16	9	4	1	0	1	4	9	16	…

对比图 1.3-2(2)和表 1-3，可以发现：

图象在 y 轴左侧“下降”，也就是，在区间 $(-\infty, 0]$ 上，随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 反而随着减小；图象在 y 轴右侧“上升”，也就是，在区间 $(0, +\infty)$ 上，随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 也随着增大.

思考？

如何利用函数解析式 $f(x)=x^2$ 描述“随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 随着减小.”“随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 也随着增大.”？

你能仿照这样的描述，说明函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数吗？

对于二次函数 $f(x)=x^2$，我们可以这样来描述“在区间 $(0, +\infty)$ 上，随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 也随着增大.”：在区间 $(0, +\infty)$ 上，任取两个 x_1，x_2，得到 $f(x_1)=x_1^2$，$f(x_2)=x_2^2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$．这时，我们就说函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是**增函数**（increasing function）（图 1.3-3(1)）；

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是**减函数**（decreasing function）（图 1.3-3(2)）.

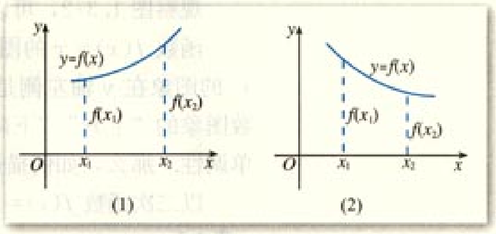


图 1.3-3

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

例 1 图 1.3-4 是定义在区间 $[-5,5]$ 上的函数 $y=f(x)$，根据图象说出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，它是增函数还是减函数？

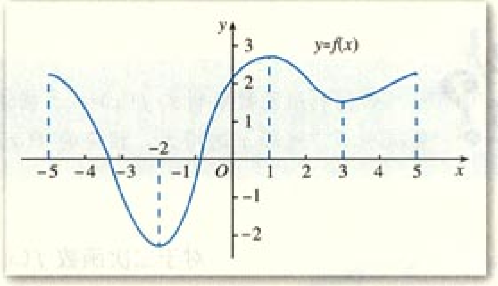


图 1.3-4

解： 函数 $y=f(x)$ 的单调区间有 $[-5,-2)$，$[-2,1)$，$[1,3)$，$[3,5]$，其中 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,-2)$，$[1,3)$ 上是减函数，在区间 $[-2,1)$，$[3,5]$ 上是增函数.

例 2 物理学中的玻意耳定律 $p=\frac{k}{V}$（k 为正常数）告诉我们，对于一定量的气体，当其体积 V 减小时，压强 p 将增大. 试用函数的单调性证明之.

分析： 按题意，只要证明函数 $p=\frac{k}{V}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数即可.

证明： 根据单调性的定义，设 V_1，V_2 是定义域

$(0, +\infty)$上的任意两个实数，且$V_1<V_2$，则

$$p(V_1)-p(V_2)=\frac{k}{V_1}-\frac{k}{V_2}=k\frac{V_2-V_1}{V_1V_2}.$$

由V_1，$V_2\in(0, +\infty)$，得$V_1V_2>0$；

由$V_1<V_2$，得$V_2-V_1>0$.

又$k>0$，于是

$$p(V_1)-p(V_2)>0,$$

即

$$p(V_1)>p(V_2).$$

所以，函数$p=\frac{k}{V}$，$V\in(0, +\infty)$是减函数．也就是说，当体积V减小时，压强p将增大．

探究

画出反比例函数$y=\frac{1}{x}$的图象．

(1) 这个函数的定义域I是什么？

(2) 它在定义域I上的单调性是怎样的？证明你的结论．

通过观察图象，先对函数是否具有某种性质做出猜想，然后通过逻辑推理，证明这种猜想的正确性，是研究函数性质的一种常用方法．

我们再来观察本节的图1.3-2，比较其中的两个函数图象，可以发现，函数$f(x)=x^2$的图象上有一个最低点$(0, 0)$，即对于任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\geqslant f(0)$．当一个函数$f(x)$的图象有最低点时，我们就说函数$f(x)$有最小值．而函数$f(x)=x$的图象没有最低点，所以函数$f(x)=x$没有最小值．

思考

你能以函数$f(x)=-x^2$为例说明函数$f(x)$的最大值的含义吗？

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$；

（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$.

那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的**最大值**（maximum value）.

思考？

你能仿照函数最大值的定义，给出函数 $y=f(x)$ 的**最小值**（minimum value）的定义吗？

例 3 “菊花”烟花是最壮观的烟花之一. 制造时一般是期望在它达到最高点（大约是在距地面高度 25 m 到 30 m 处）时爆裂. 如果在距地面高度 18 m 的地方点火，并且烟花冲出的速度是 14.7 m/s.

（1）写出烟花距地面的高度与时间之间的关系式.

（2）烟花冲出后什么时候是它爆裂的最佳时刻？这时距地面的高度是多少（精确到 1 m）？

解：（1）设烟花在 t s 时距地面的高度为 h m，则由物体运动原理可知：

$$h(t)=-4.9t^2+14.7t+18.$$

（2）作出函数 $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$ 的图象（图 1.3-5）. 显然，函数图象的顶点就是烟花上升的最高点，顶点的横坐标就是烟花爆裂的最佳时刻，纵坐标就是这时距地面的高度.

烟花设计者就是按照这些数据设定引信的长度，以达到施放烟花的最佳效果.

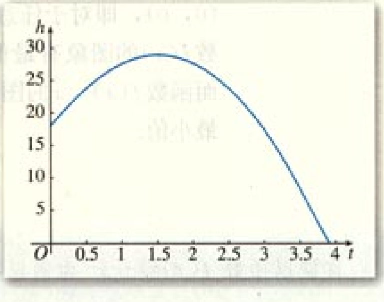


图 1.3-5

由二次函数的知识，对于函数 $h(t)=-4.9t^2+14.7t+18$，我们有：

当 $t=-\dfrac{14.7}{2\times(-4.9)}=1.5$ 时，函数有最大值

$$h=\frac{4\times(-4.9)\times18-14.7^2}{4\times(-4.9)}\approx29.$$

于是，烟花冲出后 1.5 s 是它爆裂的最佳时刻，这时距地面的高度约为 29 m.

例 4　求函数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 上的最大值和最小值.

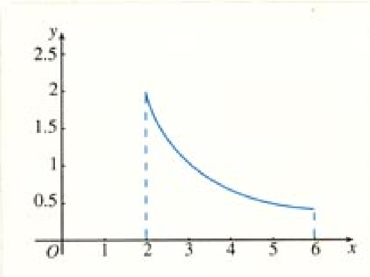


图 1.3-6

分析：由函数 $y=\dfrac{2}{x-1}(x\in[2, 6])$ 的图象(图 1.3-6)可知，函数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 上递减. 所以，函数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 的两个端点上分别取得最大值和最小值.

解：设 x_1，x_2 是区间 $[2, 6]$ 上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1}\\&=\frac{2[(x_2-1)-(x_1-1)]}{(x_1-1)(x_2-1)}\\&=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}.\end{aligned}$$

由 $2<x_1<x_2<6$，得 $x_2-x_1>0$，$(x_1-1)(x_2-1)>0$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)>0,$$

即

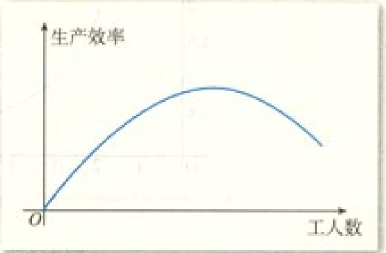
$$f(x_1)>f(x_2).$$

所以，函数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 是区间 $[2,\ 6]$ 上的减函数.

因此，函数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 在区间 $[2,\ 6]$ 的两个端点上分别取得最大值与最小值，即在 $x=2$ 时取得最大值，最大值是 2，在 $x=6$ 时取得最小值，最小值是 0.4.

练 习

1. 请根据下图描述某装配线的生产效率与生产线上工人数量间的关系.



（第 1 题）

2. 整个上午（8：00～12：00）天气越来越暖，中午时分（12：00～13：00）一场暴风雨使天气骤然凉爽了许多. 暴风雨过后，天气转暖，直到太阳落山（18：00）才又开始转凉. 画出这一天 8：00～20：00 期间气温作为时间函数的一个可能的图象，并说出所画函数的单调区间.
3. 证明函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.
4. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-6,\ 11]$ 上的函数. 如果 $f(x)$ 在区间 $[-6,\ -2]$ 上递减，在区间 $[-2,\ 11]$ 上递增，画出 $f(x)$ 的一个大致的图象，从图象上可以发现 $f(-2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个______.

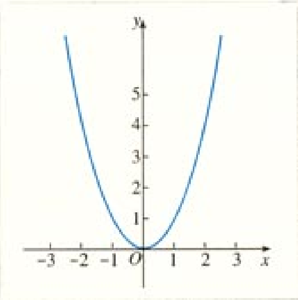
1.3.2 奇偶性

观察

观察图 1.3-7，思考并讨论以下问题：

(1) 这两个函数图象有什么共同特征吗？

(2) 相应的两个函数值对应表是如何体现这些特征的？



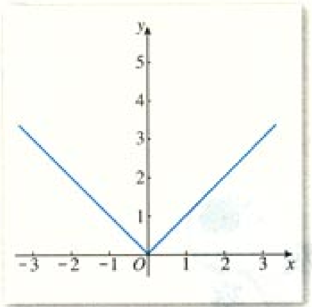


图 1.3-7

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3

我们看到，这两个函数的图象都关于 y 轴对称．那么，如何利用函数解析式描述函数图象的这个特征呢？

从函数值对应表可以看到，当自变量 x 取一对相反数时，相应的两个函数值相同．

例如，对于函数 $f(x)=x^2$ 有：

$$f(-3)=9=f(3);$$
$$f(-2)=4=f(2);$$
$$f(-1)=1=f(1).$$

> 请你仿照这个过程，说明函数 $f(x)=|x|$ 也是偶函数．

实际上，对于 **R** 内任意的一个 x，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$．这时我们称函数 $y=x^2$ 为偶函数．

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，

都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数（even function）.

例如，函数 $f(x)=x^2+1$，$f(x)=\frac{2}{x^2+11}$ 都是偶函数，它们的图象分别如图 1.3-8(1)(2) 所示.

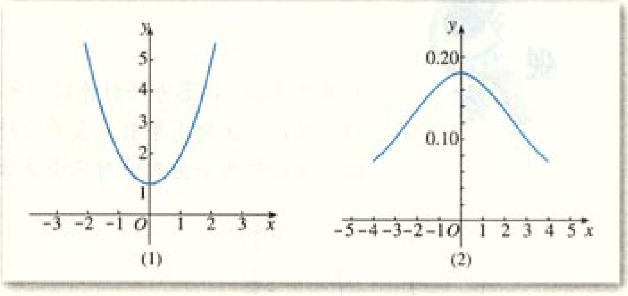


图 1.3-8

观察

观察函数 $f(x)=x$ 和 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象（图 1.3-9），并完成下面的两个函数值对应表，你能发现这两个函数有什么共同特征吗？

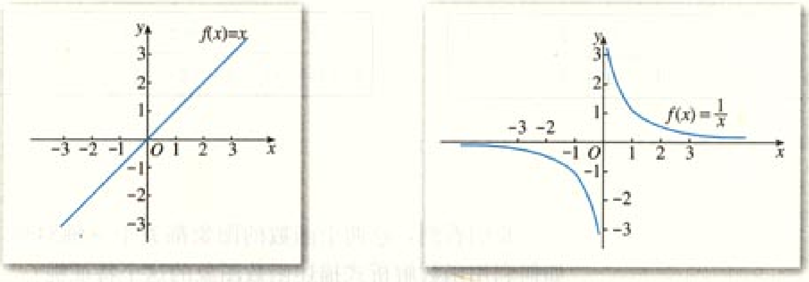


图 1.3-9

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x$				0			

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\frac{1}{x}$				/			

我们看到，两个函数的图象都关于原点对称．函数图象的这个特征，反映在函数解析式上就是：

当自变量 x 取一对相反数时，相应的函数值 $f(x)$ 也是

一对相反数.

例如，对于函数 $f(x)=x$ 有：

$$f(-3)=-3=-f(3);$$
$$f(-2)=-2=-f(2);$$
$$f(-1)=-1=-f(1).$$

请仿照这个过程，说明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 也是奇函数.

实际上，对于函数 $f(x)=x$ 定义域 **R** 内任意一个 x，都有 $f(-x)=-x=-f(x)$. 这时我们称函数 $f(x)=x$ 为奇函数.

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数（odd function）.

思考

(1) 判断函数 $f(x)=x^3+x$ 的奇偶性.

(2) 如果图 1.3-10 是函数 $f(x)=x^3+x$ 图象的一部分，你能根据 $f(x)$ 的奇偶性画出它在 y 轴左边的图象吗？

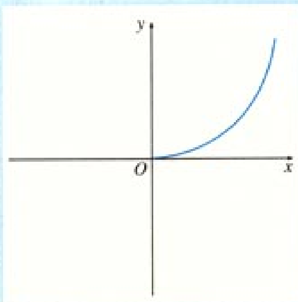


图 1.3-10

例 5　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4$；

(2) $f(x)=x^5$；

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

解：（1）对于函数 $f(x)=x^4$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因为对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^4$ 为偶函数.

（2）对于函数 $f(x)=x^5$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因为对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^5$ 为奇函数.

（3）对于函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，其定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$.

因为对于定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数.

（4）对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，其定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$.

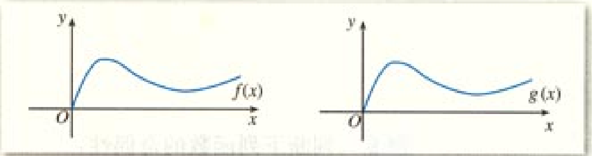
因为对于定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 为偶函数.

练 习

1. 已知 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，试将下图补充完整.



（第 1 题）

2. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=2x^4+3x^2$；　　（2）$f(x)=x^3-2x$.

复习参考题

A 组

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x\mid x^2=9\}$；

(2) $B=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$；

(3) $C=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$.

2. 设 P 表示平面内的动点，属于下列集合的点组成什么图形？

(1) $\{P\mid PA=PB\}$（A、B 是两个定点）；

(2) $\{P\mid PO=3\text{ cm}\}$（O 是定点）.

3. 设平面内有$\triangle ABC$，且 P 表示这个平面内的动点，指出属于集合$\{P\mid PA=PB\}\cap\{P\mid PA=PC\}$的点是什么.

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2=1\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$. 若 $B\subset A$，求实数 a 的值.

5. 已知集合 $A=\{(x,\ y)\mid 2x-y=0\}$，$B=\{(x,\ y)\mid 3x+y=0\}$，$C=\{(x,\ y)\mid 2x-y=3\}$，求 $A\cap B$，$A\cap C$，$(A\cap B)\cup(B\cap C)$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{|x|-2}$；

(2) $y=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+5}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求

(1) $f(a)+1$（$a\neq-1$）；　　(2) $f(a+1)$（$a\neq-2$）.

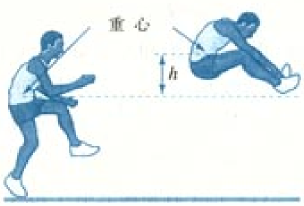
8. 设 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，求证：

(1) $f(-x)=f(x)$；　　(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

9. 奥运会的历史上，鲍勃·比蒙在 1968 年的奥运会跳远比赛中跳出了令人惊叹的一跳. 函数 $h(t)=4.6t-4.9t^2$（t 的单位：s，h 的单位：m）可以描述他跳跃时重心高度的变化.

(1) 画出函数图象；

(2) 如图，求鲍勃·比蒙跳跃时 h 的最大值（精确到 0.01 m）.



（第 9 题）

CHAPTER 2

2.1 指数函数

先让我们一起来看两个问题.

问题 1 据国务院发展研究中心 2000 年发表的《未来 20 年我国发展前景分析》判断，未来 20 年，我国 GDP（国内生产总值）年平均增长率可望达到 7.3%. 那么，在 2001～2020 年，各年的 GDP 可望为 2000 年的多少倍?

如果把我国 2000 年 GDP 看成是 1 个单位，2001 年为第 1 年，那么：

1 年后（即 2001 年），我国的 GDP 可望为 2000 年的 $(1+7.3\%)$倍；

2 年后（即 2002 年），我国的 GDP 可望为 2000 年的 $(1+7.3\%)^2$倍；

3 年后（即 2003 年），我国的 GDP 可望为 2000 年的 ________倍；

4 年后（即 2004 年），我国的 GDP 可望为 2000 年的 ________倍；

……

设 x 年后我国的 GDP 为 2000 年的 y 倍，那么

$$y=(1+7.3\%)^x=1.073^x \quad (x\in \mathbf{N}^*,\ x\leqslant 20).$$

即从 2000 年起，x 年后我国的 GDP 为 2000 年的 1.073^x 倍.

想一想，正整数指数幂 1.073^x 的含义是什么，它具有哪些运算性质.

按照惯例，人们将生物体死亡时，每克组织的碳 14 含量作为 1 个单位.

问题 2 当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 会按确定的规律衰减，大约每经过 5 730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”. 根据此规律，人们获得了生物体内碳 14含量 P 与死亡年数 t 之间的关系

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}. \qquad (*)$$

考古学家根据（*）式可以知道，生物死亡 t 年后，体内碳14含量 P 的值. 例如，

当生物死亡了5 730，2×5 730，3×5 730，…年后，它体内碳14的含量 P 分别为$\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$，…

当生物体死亡了6 000年，10 000年，100 000年后，根据（*）式，它体内碳14的含量 P 分别为$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\,000}{5\,730}}$.

2.1.1 指数与指数幂的运算

在问题2中，我们已经知道$\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$，…是正整数指数幂，它们的值分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…那么，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\,000}{5\,730}}$的意义是什么呢？这正是我们将要学习的知识.

下面，我们一起将指数的取值范围从整数推广到实数. 为此，需要先学习根式的知识.

根式

我们知道，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根，例如，±2就是4的平方根；如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根，例如，2就是8的立方根.

类似地，由于$(\pm2)^4=16$，我们就把±2叫做16的4次方根；由于$2^5=32$，2就叫做32的5次方根.

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根（n th root），其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数. 这时，a 的 n 次方根用符号$\sqrt[n]{a}$表示. 例如

$$\sqrt[5]{32}=2，\sqrt[5]{-32}=-2，\sqrt[3]{a^6}=a^2.$$

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数．这时，正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示．正的 n 次方根与负的 n 次方根可以合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$．例如

$$\sqrt[4]{16}=2，\ -\sqrt[4]{16}=-2，$$

16 的 4 次方根可以表示为 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$．

负数没有偶次方根．

0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$．

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式（radical），这里 n 叫做根指数（radical exponent），a 叫做被开方数（radicand）．

根据 n 次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

例如，$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt[5]{-3})^5=-3$．

探究

$\sqrt[n]{a^n}$ 表示 a^n 的 n 次方根，等式 $\sqrt[n]{a^n}=a$ 一定成立吗？如果不一定成立，那么 $\sqrt[n]{a^n}$ 等于什么？

通过探究可以得到：

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$

例 1 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$；　　(2) $\sqrt{(-10)^2}$；

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$；　　(4) $\sqrt{(a-b)^2}$ $(a>b)$．

解：(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$；

(2) $\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$；

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$；

(4) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$ $(a>b)$．

分数指数幂

我们来看下面的例子．根据 n 次方根的定义和数的运算，

$$\sqrt[5]{a^{10}}=\sqrt[5]{(a^2)^5}=a^2=a^{\frac{10}{5}}\quad(a>0),$$
$$\sqrt[4]{a^{12}}=\sqrt[4]{(a^3)^4}=a^3=a^{\frac{12}{4}}\quad(a>0).$$

这就是说，当根式的被开方数的指数能被根指数整除时，根式可以表示为分数指数幂的形式．

那么，当根式的被开方数的指数不能被根指数整除时，根式是否也可以表示为分数指数幂的形式呢？例如，能否把 $\sqrt[3]{a^2}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt[4]{c^5}$ 等写成下列形式：

> 数学中，引进一个新的概念或法则时，总希望它与已有的概念或法则是相容的．

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0),$$
$$\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}}\quad(b>0),$$
$$\sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}}\quad(c>0).$$

如果可以，那么整数指数幂的运算性质 $(a^k)^n=a^{kn}$ 对分数指数幂是否仍然适用？

我们规定正数的正分数指数幂的意义是

> 这里，我们略去了规定合理性的说明．

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ 且\ n>1).$$

于是，在条件 $a>0$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$ 下，根式都可以写成分数指数幂的形式．

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿，我们规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ 且\ n>1).$$

例如，$5^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{5^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^4}}$，$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ $(a>0)$．

0 的正分数指数幂等于 0．0 的负分数指数幂没有意义．

规定了分数指数幂的意义以后，指数的概念就从整数指数推广到了有理数指数．

整数指数幂的运算性质对于有理指数幂也同样适用，即对于任意有理数 r，s，均有下面的运算性质：

(1) $a^ra^s=a^{r+s}$ $(a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q})$；
(2) $(a^r)^s=a^{rs}$ $(a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q})$；
(3) $(ab)^r=a^rb^r$ $(a>0,\ b>0,\ r\in\mathbf{Q})$．

对于本节开头的问题2，考古学家正是利用有理数指数幂的知识，计算出生物死亡6 000年，10 000年，100 000年后体内碳14含量P的值. 例如

当$t=6\,000$时，$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6000}{5730}}=\sqrt[573]{\left(\frac{1}{2}\right)^{600}}\approx 0.484$（精确到0.001），即生物死亡6 000年后，其体内碳14的含量约为原来的48.4%.

例2 求值：

$$8^{\frac{2}{3}};\ 25^{-\frac{1}{2}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-5};\ \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

解：$8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\times\frac{2}{3}}=2^2=4$；

$25^{-\frac{1}{2}}=(5^2)^{-\frac{1}{2}}=5^{2\times(-\frac{1}{2})}=5^{-1}=\frac{1}{5}$；

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=(2^{-1})^{-5}=2^5=32$；

$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4\times(-\frac{3}{4})}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}$.

例3 用分数指数幂的形式表示下列各式(其中$a>0$)：

$$a^3\cdot\sqrt{a};\ a^2\cdot\sqrt[3]{a^2};\ \sqrt{a\sqrt[3]{a}}.$$

解：$a^3\cdot\sqrt{a}=a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{3+\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{2}}$；

$a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^2\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{2+\frac{2}{3}}=a^{\frac{8}{3}}$；

$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}$.

例4 计算下列各式（式中字母都是正数）：

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$；

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$.

解：(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$

$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$

$=4ab^0$

$=4a$；

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$

$=(m^{\frac{1}{4}})^8(n^{-\frac{3}{8}})^8$

$=m^2n^{-3}$

$=\dfrac{m^2}{n^3}$.

例5　计算下列各式：

(1) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{25}$；

(2) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ $(a>0)$.

解：(1) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{25}$；

$=(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{3}{2}})\div5^{\frac{1}{2}}$

$=5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{3}{2}}\div5^{\frac{1}{2}}$

$=5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}-5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$=5^{\frac{1}{6}}-5$

$=\sqrt[6]{5}-5$；

(2) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$

$=\dfrac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}}$

$=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{5}{6}}$

$=\sqrt[6]{a^5}$.

无理数指数幂

上面，我们将指数的取值范围由整数推广到了有理数. 那么，当指数是无理数时，如 $5^{\sqrt{2}}$，我们又应当如何理解它呢？

事实上，$5^{\sqrt{2}}$表示一个确定的实数. 它的大小是如何确定的呢？观察下表.

$\sqrt{2}$的过剩近似值	$5^{\sqrt{2}}$的近似值
1.5	11.180 339 89
1.42	9.829 635 328
1.415	9.750 851 808
1.414 3	9.739 872 62
1.414 22	9.738 618 643
1.414 214	9.738 524 602
1.414 213 6	9.738 518 332
1.414 213 57	9.738 517 862
1.414 213 563	9.738 517 752
…	…

$5^{\sqrt{2}}$的近似值	$\sqrt{2}$的不足近似值
9.518 269 694	1.4
9.672 669 973	1.41
9.735 171 039	1.414
9.738 305 174	1.414 2
9.738 461 907	1.414 21
9.738 508 928	1.414 213
9.738 516 765	1.414 213 5
9.738 517 705	1.414 213 56
9.738 517 736	1.414 213 562
…	…

由上表不难发现：

当$\sqrt{2}$的过剩近似值从大于$\sqrt{2}$的方向逼近$\sqrt{2}$时，$5^{\sqrt{2}}$的近似值从大于$5^{\sqrt{2}}$的方向逼近$5^{\sqrt{2}}$；

当$\sqrt{2}$的不足近似值从小于$\sqrt{2}$的方向逼近$\sqrt{2}$时，$5^{\sqrt{2}}$的近似值从小于$5^{\sqrt{2}}$的方向逼近$5^{\sqrt{2}}$.

所以，$5^{\sqrt{2}}$就是一串有理数指数幂$5^{1.4}$，$5^{1.41}$，$5^{1.414}$，$5^{1.4142}$，…和另一串有理数指数幂$5^{1.5}$，$5^{1.42}$，$5^{1.415}$，$5^{1.4143}$，…按上述变化规律变化的结果. 这个过程可以用图 2.1-1 表示.

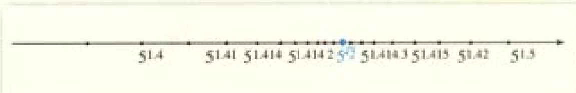


图 2.1-1

一般地，无理数指数幂 a^{α}（$a>0$，α 是无理数）是一个确定的实数. 有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂.

思考

参照以上的过程，请你说明无理数指数幂 $2^{\sqrt{3}}$ 的含义.

练　习

1. 用根式的形式表示下列各式($a>0$)：

$a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{3}{4}}$，$a^{-\frac{3}{5}}$，$a^{-\frac{2}{3}}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　　(2) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$ $(a+b>0)$；

(3) $\sqrt[3]{(m-n)^2}$ $(m>n)$；　　(4) $\sqrt{(m-n)^4}$ $(m>n)$；

(5) $\sqrt{p^6q^5}$ $(q>0)$；　　(6) $\dfrac{m^3}{\sqrt{m}}$.

3. 计算下列各式：

(1) $\left(\dfrac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$；　　(2) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$；

(3) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{8}}$；　　(4) $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

4. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.000 1）：

(1) $1.3^{1.1}$；　　(2) $0.02^{\frac{3}{4}}$；

(3) $2^{-0.1}$；　　(4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\sqrt{7}}$.

2.1.2　指数函数及其性质

当底数大于 0 时，我们将指数的取值范围从整数推广到了实数．这样，在本节开头的问题 2 中，对于任意的 $t\geqslant 0$，$P=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ 都是有意义的．即对每一个时间 t，都有唯一确定的 P 与它对应．因此，死亡生物体内碳 14 的含量 P 是时间 t 的函数．

探究

问题 2 中的函数 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ $(t\geqslant 0)$ 与问题 1 中的函数 $y=1.073^{x}$ $(x\in \mathbf{N}^{*}, x\leqslant 20)$ 有什么共同特征？

如果用字母 a 来代替数 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$ 和 1.073，那么以上两个函数都可以表示为形如

$$y=a^{x}$$

的函数，其中自变量 x 是指数，底数 a 是一个大于 0 且不等于 1 的常量.

一般地，函数 $y=a^{x}$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 叫做**指数函数** (exponential function)，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

下面我们来研究指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象与性质.

先画函数 $y=2^{x}$ 的图象.

请同学们完成 x、y 的对应值表 2-1，并用描点法画出函数 $y=2^{x}$ 的图象（图 2.1-2).

表 2-1

x	y
-2	
-1.5	0.35
-1	
-0.5	0.71
0	
0.5	1.41
1	
1.5	2.83
2	

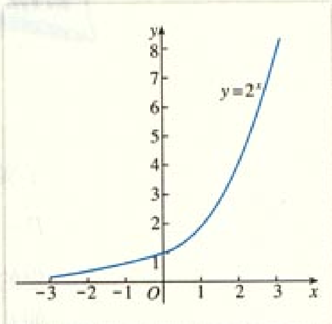


图 2.1-2

再画函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图象.

请同学们完成 x，y 的对应值表2-2，并用描点法画出它的图象（图 2.1-3).

表 2-2

x	y
-2	
-1.5	
-1	2
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	

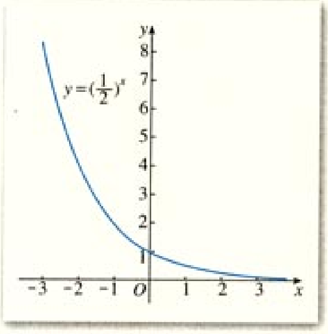


图 2.1-3

思考

函数 $y=2^x$ 的图象与函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象有什么关系？可否利用 $y=2^x$ 的图象画出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象？

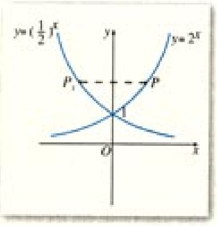


图 2.1-4

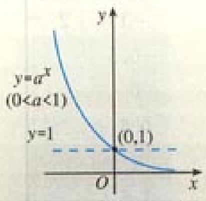
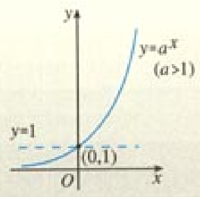
可以列表描点作图，也可以利用计算器或计算机画出函数图象.

由表 2-1 和表 2-2，以及图 2.1-2 和图 2.1-3 可以发现，我们可以通过函数 $y=2^x$ 的图象得到函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，点 (x, y) 与点 $(-x, y)$ 关于 y 轴对称，所以，$y=2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $P_1(-x, y)$ 都在 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上，反之亦然. 根据这种对称性就可以利用 $y=2^x$ 的图象画出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象（图 2.1-4）.

探究

选取底数 a $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的若干个不同的值，在同一平面直角坐标系内作出相应的指数函数的图象. 观察图象，你能发现它们有哪些共同特征？

一般地，指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象和性质如下表所示.

	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	**R**	
值域	$(0，+\infty)$	
性质	(1) 过定点 $(0，1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	(2) 在 **R** 上是减函数	(2) 在 **R** 上是增函数

例 6 已知指数函数 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象经过点 $(3，\pi)$，求 $f(0)$、$f(1)$、$f(-3)$ 的值.

分析：要求 $f(0)$、$f(1)$、$f(-3)$ 的值，我们需要先求出指数函数 $f(x)=a^x$ 的解析式，也就是要先求 a 的值. 根据函数图象过点 $(3，\pi)$ 这一条件，可以求得底数 a 的值.

解：因为 $f(x)=a^x$ 的图象经过点 $(3，\pi)$，所以

$$f(3)=\pi,$$

即 $a^3=\pi$，

解得 $a=\pi^{\frac{1}{3}}$，于是

$$f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}.$$

所以，$f(0)=\pi^0=1$，$f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\pi}$，$f(-3)=\pi^{-1}=\dfrac{1}{\pi}$.

例 7 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$，1.7^3；

（2）$0.8^{-0.1}$，$0.8^{-0.2}$；

（3）$1.7^{0.3}$，$0.9^{3.1}$.

解：（1）$1.7^{2.5}$、1.7^{3} 可看作函数 $y=1.7^x$ 的两个函数值．由于底数 $1.7>1$，所以指数函数 $y=1.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

因为 $2.5<3$，所以 $1.7^{2.5}<1.7^{3}$.

（2）$0.8^{-0.1}$，$0.8^{-0.2}$ 可看作函数 $y=0.8^x$ 的两个函数值．由于底数 $0<0.8<1$，所以指数函数 $y=0.8^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

因为 $-0.1>-0.2$，所以 $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

（3）因为 $1.7^{0.3}$，$0.9^{3.1}$ 不能看作同一个指数函数的两个函数值，所以我们可以首先在这两个数值中间找一个数值，将这一个数值与原来两个数值分别比较大小，然后确定原来两个数值的大小关系.

由例7可以看到，利用函数单调性，通过自变量的大小关系可以判断相应函数值的大小关系.

由指数函数的性质知

$$1.7^{0.3}>1.7^{0}=1,$$

$$0.9^{3.1}<0.9^{0}=1,$$

所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$.

例8　截止到1999年底，我国人口约13亿．如果今后能将人口年平均增长率控制在1%，那么经过20年后，我国人口数最多为多少（精确到亿）？

解：设今后人口年平均增长率为1%，经过 x 年后，我国人口数为 y 亿.

1999年底，我国人口约为13亿；

经过1年（即2000年），人口数为

$$13+13\times1\%=13\times(1+1\%)\text{（亿）};$$

经过2年（即2001年），人口数为

$$13\times(1+1\%)+13\times(1+1\%)\times1\%$$
$$=13\times(1+1\%)^2\text{（亿）};$$

经过3年（即2002年），人口数为

$$13\times(1+1\%)^2+13\times(1+1\%)^2\times1\%$$
$$=13\times(1+1\%)^3\text{（亿）};$$

……

所以，经过 x 年，人口数为

$$y=13\times(1+1\%)^x=13\times1.01^x\text{(亿)}.$$

当 $x=20$ 时，$y=13\times1.01^{20}\approx16$（亿）.

所以，经过 20 年后，我国人口数最多为 16 亿.

在实际问题中，经常会遇到类似例 8 的指数增长模型：设原有量为 N，平均增长率为 p，则对于经过时间 x 后的总量 y 可以用 $y=N(1+p)^x$ 表示. 我们把形如 $y=ka^x$（$k\in\mathbf{R}$，$a>0$，且 $a\neq1$）的函数称为指数型函数，这是非常有用的函数模型.

探究

（1）如果人口年均增长率提高 1 个百分点，利用计算器分别计算 20 年，33 年后我国的人口数.

（2）如果年均增长率保持在 2%，利用计算器计算 2020～2100 年，每隔5 年相应的人口数.

（3）你看到我国人口数的增长呈现什么趋势？

（4）你是如何看待我国的计划生育政策的？

练　习

1. 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图象：

（1）$y=3^x$；　　（2）$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=3^{\sqrt{x-2}}$；　　（2）$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个……依此类推，写出 1 个这样的细胞分裂 x 次后，得到的细胞个数 y 与 x 的函数解析式.

CHAPTER 2

2.2 对数函数

2.2.1 对数与对数运算

思考？

在 2.1.2 的例 8 中，我们能从关系 $y=13\times1.01^x$ 中，算出任意一个年头 x 的人口总数．反之，如果问“哪一年的人口数可达到 18 亿，20 亿，30 亿……”，该如何解决？

对数

上述问题实际上就是从 $\frac{18}{13}=1.01^x$，$\frac{20}{13}=1.01^x$，$\frac{30}{13}=1.01^x$，…中分别求出 x，即已知底数和幂的值，求指数．这是我们这一节将要学习的对数问题．

“log”是拉丁文 logarithm（对数）的缩写．

一般地，如果 $a^x=N$（$a>0$，且 $a\neq1$），那么数 x 叫做以 a 为底 N 的**对数**（logarithm），记作

$$x=\log_a N,$$

其中 a 叫做对数的**底数**，N 叫做**真数**．

例如，由于 $\frac{18}{13}=1.01^x$，所以 x 就是以 1.01 为底 $\frac{18}{13}$ 的对数，记作 $x=\log_{1.01}\frac{18}{13}$；由于 $4^2=16$，所以以 4 为底 16 的对数是 2，记作 $\log_4 16=2$．

通常我们将以 10 为底的对数叫做**常用对数**（common logarithm），并把 $\log_{10}N$ 记为 $\lg N$．另外，在科学技术中常使用以无理数 $e=2.718\ 28\cdots$ 为底数的对数，以 e 为底的对

数称为**自然对数**（natural logarithm），并且把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

> “⇔”的含义是“等价于”.

根据对数的定义，可以得到对数与指数间的关系：

当 $a>0$，$a\neq1$ 时，$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

由指数与对数的这个关系，可以得到关于对数的如下结论：

> 请你利用对数与指数间的关系证明这两个结论.

负数和零没有对数；

$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

例 1 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

（1）$5^4=625$；（2）$2^{-6}=\dfrac{1}{64}$；

（3）$\left(\dfrac{1}{3}\right)^m=5.73$；（4）$\log_{\frac{1}{2}}16=-4$；

（5）$\lg 0.01=-2$；（6）$\ln 10=2.303$.

解：（1）$\log_5 625=4$；（2）$\log_2 \dfrac{1}{64}=-6$；

（3）$\log_{\frac{1}{3}}5.73=m$；（4）$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=16$；

（5）$10^{-2}=0.01$；（6）$e^{2.303}=10$.

例 2 求下列各式中 x 的值：

（1）$\log_{64}x=-\dfrac{2}{3}$；（2）$\log_x 8=6$；

（3）$\lg 100=x$；（4）$-\ln e^2=x$.

解：（1）因为 $\log_{64}x=-\dfrac{2}{3}$，

所以 $x=64^{-\frac{2}{3}}=(4^3)^{-\frac{2}{3}}=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$；

（2）因为 $\log_x 8=6$，

所以 $x^6=8$，

$x=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；

（3）因为 $\lg 100=x$，

所以 $10^x=100$，

$10^x=10^2$，

于是 $x=2$；

(4) 因为 $-\ln e^2 = x$，

所以 $\ln e^2 = -x$，

$e^2 = e^{-x}$，

于是 $x = -2$.

练 习

1. 把下列指数式写成对数式：

(1) $2^3 = 8$；　　(2) $2^5 = 32$；

(3) $2^{-1} = \frac{1}{2}$；　　(4) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_3 9 = 2$；　　(2) $\log_5 125 = 3$；

(3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$；　　(4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\log_5 25$；　　(2) $\log_2 \frac{1}{16}$；

(3) $\lg 1\,000$；　　(4) $\lg 0.001$.

4. 求下列各式的值：

(1) $\log_{15} 15$；　　(2) $\log_{0.4} 1$；

(3) $\log_9 81$；　　(4) $\log_{2.5} 6.25$；

(5) $\log_7 343$；　　(6) $\log_3 243$.

对数的运算

探究

从指数与对数的关系以及指数运算性质，你能得出相应的对数运算性质吗？

由于

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

设

$$M=a^m，N=a^n，$$

于是

$$MN=a^{m+n}.$$

由对数的定义得到

$$\log_a M=m，\log_a N=n，$$

$$\log_a(M\cdot N)=m+n.$$

这样，我们就得到对数的一个运算性质：

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N.$$

同样地，同学们可以仿照上述过程，由 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 和 $(a^m)^n=a^{mn}$，得出对数运算的其他性质.

于是，我们得到如下的对数运算性质：

> 如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么：
>
> (1) $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；
>
> (2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；
>
> (3) $\log_a M^n=n\log_a M$ （$n\in\mathbf{R}$）.

例 3 用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$；　　　(2) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解：(1) $\log_a \dfrac{xy}{z}$

$=\log_a(xy)-\log_a z$

$=\log_a x+\log_a y-\log_a z$；

(2) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

$=\log_a(x^2\sqrt{y})-\log_a\sqrt[3]{z}$

$=\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$

$=2\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z.$

例 4 求下列各式的值：

(1) $\log_2(4^7\times2^5)$； (2) $\lg\sqrt[5]{100}$.

解：(1) $\log_2(4^7\times2^5)$

$=\log_2 4^7+\log_2 2^5$

$=7\log_2 4+5\log_2 2$

$=7\times2+5\times1$

$=19$；

(2) $\lg\sqrt[5]{100}$

$=\lg 10^{\frac{2}{5}}$

$=\frac{2}{5}$.

从对数的定义可以知道，任意不等于 1 的正数都可作为对数的底．数学史上，人们经过大量的努力，制作了常用对数表、自然对数表，只要通过查表就能求出任意正数的常用对数或自然对数．这样，如果能将其他底的对数转换为以 10 或 e 为底的对数，就能方便地求出任意不为 1 的正数为底的对数.

探究

你能根据对数的定义推导出下面的换底公式吗？

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a>0$，且 $a\neq1$；$c>0$，且 $c\neq1$；$b>0)$.

例如，求我国人口达到 18 亿的年份，就是计算 $x=\log_{1.01}\frac{18}{13}$的值，利用换底公式与对数的运算性质，可得

$$x=\log_{1.01}\frac{18}{13}=\frac{\lg\frac{18}{13}}{\lg 1.01}=\frac{\lg 18-\lg 13}{\lg 1.01}$$

$$\approx\frac{1.255\ 3-1.113\ 9}{0.004\ 3}=32.883\ 7\approx33\ (\text{年}).$$

由此可得，如果人口年增长率控制在 1%，那么从 2000 年初开始，大约经过 33 年，即到 2032 年底我国的人口总数可达到 18 亿.

例 5 20 世纪 30 年代，里克特（C. F. Richter）制订了一种表明地震能量大小的尺度，就是使用测震仪衡量地震能量的等级，地震能量越大，测震仪记录的地震曲线的振幅就越大. 这就是我们常说的里氏震级 M，其计算公式为

$$M=\lg A-\lg A_0,$$

其中，A 是被测地震的最大振幅，A_0 是"标准地震"的振幅（使用标准地震振幅是为了修正测震仪距实际震中的距离造成的偏差）.

（1）假设在一次地震中，一个距离震中 100 千米的测震仪记录的地震最大振幅是 20，此时标准地震的振幅是 0.001，计算这次地震的震级（精确到 0.1）；

（2）5 级地震给人的震感已比较明显，计算 7.6 级地震的最大振幅是 5 级地震的最大振幅的多少倍（精确到 1）.

解：（1）$M=\lg 20-\lg 0.001$

$$=\lg\frac{20}{0.001}=\lg 20\ 000=\lg 2+\lg 10^4$$

$$\approx 4.3.$$

因此，这是一次约为里氏 4.3 级的地震.

（2）由 $M=\lg A-\lg A_0$ 可得

$$M=\lg\frac{A}{A_0}\Leftrightarrow\frac{A}{A_0}=10^M\Leftrightarrow A=A_0\cdot 10^M.$$

当 $M=7.6$ 时，地震的最大振幅为 $A_1=A_0\cdot 10^{7.6}$；当 $M=5$ 时，地震的最大振幅为 $A_2=A_0\cdot 10^5$. 所以，两次地震的最大振幅之比是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_0\cdot 10^{7.6}}{A_0\cdot 10^5}=10^{7.6-5}=10^{2.6}$$

$$\approx 398.$$

答：7.6 级地震的最大振幅大约是 5 级地震的最大振幅的 398 倍.

可以看到，虽然 7.6 级地震和 5 级地震仅相差 2.6 级，但 7.6 级地震的最大振幅却是 5 级地震最大振幅的 398 倍. 所以，7.6 级地震的破坏性远远大于 5 级地震的破坏性.

例 6 科学研究表明，宇宙射线在大气中能够产生放射性碳 14. 碳 14 的衰变极有规律，其精确性可以称为自然界的"标准时钟". 动植物在生长过程中衰变的碳 14，可以通

过与大气的相互作用得到补充，所以活着的动植物每克组织中的碳 14 含量保持不变. 死亡后的动植物，停止了与外界环境的相互作用，机体中原有的碳 14 按确定的规律衰减，我们已经知道其“半衰期”为 5 730 年.

湖南长沙马王堆汉墓女尸出土时碳 14 的残余量约占原始含量的 76.7%，试推算马王堆古墓的年代.

解：我们先推算生物死亡 t 年后每克组织中的碳 14 含量. 设生物体死亡时，体内每克组织中的碳 14 的含量为 1，1 年后的残留量为 x，由于死亡机体中原有的碳 14按确定的规律衰减，所以生物体的死亡年数 t 与其体内每克组织的碳 14含量 P 有如下关系：

死亡年数 t	1	2	3	…	t	…
碳 14 含量 P	x	x^2	x^3	…	x^t	…

因此，生物死亡 t 年后体内碳 14 的含量 $P=x^t$.

由于大约每过 5 730 年，死亡生物体的碳 14 含量衰减为原来的一半，所以

$$\frac{1}{2}=x^{5\,730},$$

于是

$$x=\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}},$$

这样生物死亡 t 年后体内碳 14 的含量 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$.

由对数与指数的关系，指数式 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$ 可写成对数式

$$t=\log_{\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}}P.$$

湖南长沙马王堆汉墓女尸中碳 14 的残留量约占原始含量的 76.7%，即 $P=0.767$，那么

$$t=\log_{\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}}0.767.$$

由计算器可得

$$t\approx 2\,193.$$

所以，马王堆古墓是近 2 200 年前的遗址.

练　习

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式：

（1）$\lg(xyz)$；　　（2）$\lg \dfrac{xy^2}{z}$；

（3）$\lg \dfrac{xy^3}{\sqrt{z}}$；　　（4）$\lg \dfrac{\sqrt{x}}{y^2 z}$.

2. 求下列各式的值：

（1）$\log_3(27\times 9^2)$；　　（2）$\lg 100^2$；

（3）$\lg 0.000\,01$；　　（4）$\lg \sqrt[3]{49}$.

3. 求下列各式的值：

（1）$\log_2 6-\log_2 3$；　　（2）$\lg 5-\lg 2$；

（3）$\log_5 3+\log_5 \dfrac{1}{3}$；　　（4）$\log_3 5-\log_3 15$.

4. 利用对数的换底公式化简下列各式：

（1）$\log_a c\cdot\log_c a$；

（2）$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 2$；

（3）$(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$.

对数的发明

16、17 世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易以及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急．苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier，1550—1617）正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数．对数的发明是数学史上的重大事件，天文学界更是以近乎狂喜的心情来迎接这一发明．恩格斯曾经把对数的发明和解析几何的创始、微积分的建立并称为 17 世纪数学的三大成就，伽利略也说过："给我空间、时间及对数，我就可以创造一个宇宙．"

对数发明之前，人们对三角运算中将三角函数的积化为三角函数的和或差的方法已很熟悉，而且德国数学家斯蒂弗尔（M. Stifel，约 1487—1567）在《综合算术》（1544）中阐述的

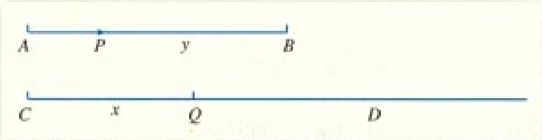
$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots \tag{1}$$

与

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

之间的对应关系（$r^n \to n$）及运算性质（即上面一行数字的乘、除、乘方、开方对应于下面一行数字的加、减、乘、除）也已广为人知．经过对运算体系的多年研究，纳皮尔在1614年出版了《奇妙的对数定律说明书》，书中借助运动学，用几何术语阐述了对数方法：

如图，假定两点 P、Q 以相同的初速度运动．点 Q 沿直线 CD 作匀速运动，$CQ=x$；点 P 沿线段 AB（长度为 10^7 单位）运动，它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离（$PB=y$）．令 P 与 Q 同时分别从 A、C 出发，那么，定义 x 为 y 的对数．



纳皮尔认为，（1）中的两个数的间隔应当尽量小，为此，他选择了 $r=1-10^{-7}=0.999\,999\,9$．为了避开小数点的麻烦，他又把每个幂都乘上 10^7，于是，就有了线段 AB 的长度为 10^7 单位．这样，用现在的数学符号来叙述，纳皮尔的对数中，x 与 y 的对应关系就是：

$$y=10^7\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

其中，e 为自然对数的底．利用对数，纳皮尔制作了 0～90°每隔 1′的八位三角函数表．

将对数加以改造使之广泛流传的是纳皮尔的朋友布里格斯（H. Briggs，1561—1631）．他通过研究《奇妙的对数定律说明书》，感到其中的对数用起来很不方便，于是与纳皮尔商定，使 1 的对数为 0，10 的对数为 1，这样就得到了现在所用的以 10 为底的常用对数．由于我们的数系是十进制，因此它在数值计算上具有优越性．1624 年，布里格斯出版了《对数算术》，公布了以 10 为底包含 1～20 000 及 90 000～100 000 的 14 位常用对数表．

根据对数运算原理，人们还发明了对数计算尺．300 多年来，对数计算尺一直是科学工作者，特别是工程技术人员必备的计算工具，直到 20 世纪 70 年代才让位给电子计算器．尽管作为一种计算工具，对数计算尺、对数表都不再重要了，但是，对数的思想方法却仍然具有生命力．

从对数发明的过程我们可以发现，纳皮尔在讨论对数概念时，并没有使用指数与对数的互逆关系，造成这种状况的主要原因是当时还没有明确的指数概念，就连指数符号也是在 20 多年后的 1637 年才由法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）开始使用．直到 18 世纪，才由瑞士数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系．在 1770 年出版的一部著作中，欧拉首先使用 $y=a^x$ 来定义 $x=\log_a y$，他指出，“对数源出于指数”．对数的发明先于指数，成为数学史上的珍闻．

从对数的发明过程可以看到，社会生产、科学技术的需要是数学发展的主要动力．建

立对数与指数之间联系的过程表明，使用较好的符号体系对于数学的发展是至关重要的．实际上，好的数学符号能够大大地节省人的思维负担．数学家们对数学符号体系的发展与完善作出了长期而艰苦的努力．

2.2.2　对数函数及其性质

如2.2.1的例6，考古学家一般通过提取附着在出土文物、古遗址上死亡生物体的残留物，利用$t=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}P$估算出土文物或古遗址的年代．根据问题的实际意义可知，对于每一个碳14含量P，通过对应关系$t=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}P$，都有唯一确定的年代$t$与它对应，所以，$t$是$P$的函数．

一般地，我们把函数$y=\log_a x$（$a>0$，且$a\neq 1$）叫做**对数函数**（logarithmic function），其中x是自变量，函数的定义域是$(0, +\infty)$．

下面，我们来研究对数函数的图象和性质．

先从研究函数$y=\log_2 x$和$y=\log_{\frac{1}{2}}x$开始．

请同学们完成x、y的对应值表2-3，并用描点法画出函数$y=\log_2 x$的图象（图2.2-1）．

表2-3

x	y
0.5	-1
1	0
2	1
4	
6	
8	
12	
16	

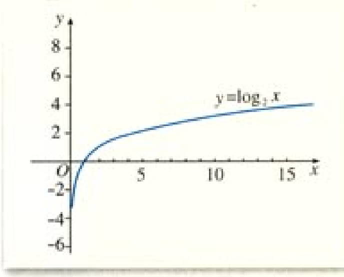


图2.2-1

同样地，我们也可以通过列x、y的对应值表，并用描点法画出函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象（图2.2-2）．

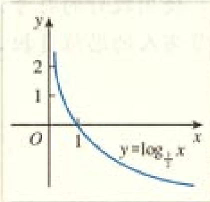


图 2.2-2

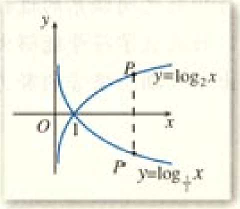


图 2.2-3

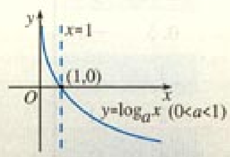
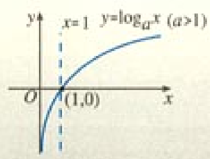
可以列表描点画图，也可以利用计算器或计算机画出函数图象.

利用换底公式，可以得到：$y=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$，又点$(x,\ y)$和点$(x,\ -y)$关于$x$轴对称，所以，$y=\log_2 x$和$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象关于$x$轴对称．因此，我们还可以根据图2.2-1，得到函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象（图2.2-3）.

探究

选取底数a（$a>0$，且$a\neq 1$）的若干个不同的值，在同一平面直角坐标系内作出相应的对数函数的图象．观察图象，你能发现它们有哪些共同特征吗？

一般地，对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，且$a\neq 1$）的图象和性质如下表所示：

	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$(0,\ +\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
性质	（1）过定点$(1,\ 0)$，即$x=1$时，$y=0$	
	（2）在$(0,\ +\infty)$上是减函数	（2）在$(0,\ +\infty)$上是增函数

例 7 求下列函数的定义域：

（1）$y=\log_a x^2$；

（2）$y=\log_a(4-x)$.

解：（1）因为 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函数 $y=\log_a x^2$ 的定义域是

$$\{x \mid x\neq 0\}.$$

（2）因为 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域是

$$\{x \mid x<4\}.$$

例 8 比较下列各组数中两个值的大小：

（1）$\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$；

（2）$\log_{0.3} 1.8$，$\log_{0.3} 2.7$；

（3）$\log_a 5.1$，$\log_a 5.9$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

解：（1）因为函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $3.4<8.5$，所以

$$\log_2 3.4<\log_2 8.5;$$

（2）因为函数 $y=\log_{0.3} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，且 $1.8<2.7$，所以

$$\log_{0.3} 1.8>\log_{0.3} 2.7;$$

（3）对数函数的增减性决定于对数的底数 a 是大于 1 还是小于 1，因此需要对底数 a 进行讨论.

当 $a>1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $5.1<5.9$，所以

$$\log_a 5.1<\log_a 5.9;$$

当 $0<a<1$ 时，因为函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，且 $5.1<5.9$，所以

$$\log_a 5.1>\log_a 5.9.$$

例 9 溶液酸碱度的测量.

溶液酸碱度是通过 pH 刻画的. pH 的计算公式为 $\text{pH}=-\lg[H^+]$，其中 $[H^+]$ 表示溶液中氢离子的浓度，单位是摩尔/升.

（1）根据对数函数性质及上述 pH 的计算公式，说明溶

液酸碱度与溶液中氢离子的浓度之间的变化关系；

(2) 已知纯净水中氢离子的浓度为$[H^+]=10^{-7}$摩尔/升，计算纯净水的 pH.

解：(1) 根据对数的运算性质，有

$$pH=-\lg[H^+]=\lg[H^+]^{-1}=\lg\frac{1}{[H^+]}.$$

胃酸中氢离子的浓度是2.5×10^{-2}摩尔/升，胃酸的 pH 是多少？

在$(0,+\infty)$上，随着$[H^+]$的增大，$\frac{1}{[H^+]}$减小，相应地，$\lg\frac{1}{[H^+]}$也减小，即 pH 减小. 所以，随着$[H^+]$的增大，pH 减小，即溶液中氢离子的浓度越大，溶液的酸度就越小.

(2) 当$[H^+]=10^{-7}$时，$pH=-\lg10^{-7}=7$. 所以，纯净水的 pH 是 7.

事实上，食品监督检测部门检测纯净水的质量时，需要检测很多项目. pH 的检测只是其中一项. 国家标准规定，饮用纯净水的 pH 应该在 5.0～7.0 之间.

探究

在指数函数 $y=2^x$ 中，x 为自变量，y 为因变量. 如果把 y 当成自变量，x 当成因变量，那么 x 是 y 的函数吗？如果是，那么对应关系是什么？如果不是，请说明理由.

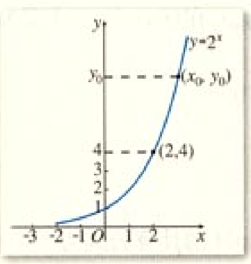


图 2.2-4

在指数函数 $y=2^x$ 中，x 为自变量($x\in\mathbf{R}$)，y 是 x 的函数($y\in(0,+\infty)$)，而且它是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数. 可以发现，过 y 轴正半轴上任意一点作 x 轴的平行线，与 $y=2^x$ 的图象有且只有一个交点（图 2.2-4）. 另一方面，根据指数与对数的关系，由指数式 $y=2^x$ 可得到对数式 $x=\log_2 y$. 这样，对于任意一个 $y\in(0,+\infty)$，通过式子 $x=\log_2 y$，x 在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的值和它对应. 也就是说，可以把 y 作为自变量，x 作为 y 的函数，这时我们就说 $x=\log_2 y$ ($y\in(0,+\infty)$) 是函数 $y=2^x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的**反函数**(inverse function).

在函数 $x=\log_2 y$ 中，y 是自变量，x 是函数．但习惯上，我们通常用 x 表示自变量，y 表示函数．为此，我们常常对调函数 $x=\log_2 y$ 中的字母 x，y，把它写成 $y=\log_2 x$，这样，对数函数 $y=\log_2 x$（$x\in(0,+\infty)$）是指数函数 $y=2^x$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数．

由上述讨论可知，对数函数 $y=\log_2 x$（$x\in(0,+\infty)$）是指数函数 $y=2^x$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数；同时，指数函数 $y=2^x$（$x\in\mathbf{R}$）也是对数函数 $y=\log_2 x$（$x\in(0,+\infty)$）的反函数．因此，指数函数 $y=2^x$（$x\in\mathbf{R}$）与对数函数 $y=\log_2 x$（$x\in(0,+\infty)$）互为反函数．

请你仿照以上过程，说明对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）和指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）互为反函数．

练　习

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，并且说明这两个函数的相同点和不同点．
2. 求下列函数的定义域：

   （1）$y=\log_5(1-x)$；　　（2）$y=\dfrac{1}{\log_2 x}$；

   （3）$y=\log_7\dfrac{1}{1-3x}$；　　（4）$y=\sqrt{\log_3 x}$．
3. 比较下列各题中两个值的大小：

   （1）$\log_{10}6$，$\log_{10}8$；　　（2）$\log_{0.5}6$，$\log_{0.5}4$；

   （3）$\log_{\frac{2}{3}}0.5$，$\log_{\frac{2}{3}}0.6$；　　（4）$\log_{1.5}1.6$，$\log_{1.5}1.4$．

互为反函数的两个函数图象之间的关系

我们知道，指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）与对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）互为反函数．那么，它们的图象有什么关系呢？运用你所学的数学知识，探索下面的几个问题，亲自发现其中的奥秘吧！

问题1 在同一平面直角坐标系中，画出指数函数 $y=2^x$ 及其反函数 $y=\log_2 x$ 的图象．你能发现这两个函数的图象有什么对称关系吗？

问题2 取 $y=2^x$ 图象上的几个点，如 $P_1\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$，$P_2(0,\ 1)$，$P_3(1,\ 2)$．$P_1$，$P_2$，$P_3$ 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标是什么？它们在 $y=\log_2 x$ 的图象上吗？为什么？

问题3 如果点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 在函数 $y=2^x$ 的图象上，那么 P_0 关于直线 $y=x$ 的对称点在函数 $y=\log_2 x$ 的图象上吗？为什么？

问题4 由上述探究过程可以得到什么结论？

问题5 上述结论对于指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）及其反函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）也成立吗？为什么？

2.3 幂函数

我们先看几个具体问题：

(1) 如果张红购买了每千克1元的蔬菜 w 千克，那么她需要支付 $p=w$ 元，这里 p 是 w 的函数；

(2) 如果正方形的边长为 a，那么正方形的面积 $S=a^2$，这里 S 是 a 的函数；

(3) 如果立方体的边长为 a，那么立方体的体积 $V=a^3$，这里 V 是 a 的函数；

(4) 如果一个正方形场地的面积为 S，那么这个正方形的边长 $a=S^{\frac{1}{2}}$，这里 a 是 S 的函数；

(5) 如果某人 t s内骑车行进了1 km，那么他骑车的平均速度 $v=t^{-1}$ km/s，这里 v 是 t 的函数.

思考

以上问题中的函数具有什么共同特征？

上述问题中涉及的函数，都是形如 $y=x^\alpha$ 的函数.

一般地，函数 $y=x^\alpha$ 叫做**幂函数**（power function），其中 x 是自变量，α 是常数.

对于幂函数，我们只讨论 $\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时的情形.

在同一平面直角坐标系内作出幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$ 的图象（图 2.3-1）.

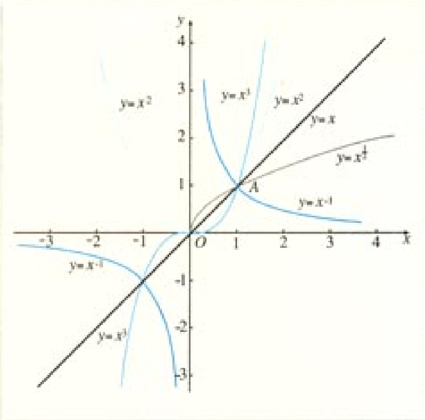


图 2.3-1

探究

观察图 2.3-1，将你发现的结论写在下表内：

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域					
值　域					
奇偶性					
单调性					
定　点					

通过图 2.3-1 与上表，我们得到：

1. 函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{-1}$ 的图象都通过点（1，1）；

2. 函数 $y=x$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$ 是奇函数，函数 $y=x^2$ 是偶函数；

3. 在第一象限内，函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$ 和 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是增函数，函数 $y=x^{-1}$ 是减函数；

4. 在第一象限内，函数 $y=x^{-1}$ 的图象向上与 y 轴无限接近，向右与 x 轴无限接近.

例1 证明幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

证明：任取 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}},$$

因为 $x_1-x_2<0$，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，即幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

在证明函数的单调性时，既可以用作差的方法，如例1；也可以用作比的方法，如在例1中，通过证明 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<1$，也可证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数. 想一想，采用作比法时应注意哪些问题？

习题2.3

1. 在函数 $y=\frac{1}{x^2}$，$y=2x^2$，$y=x^2+x$，$y=1$ 中，哪几个函数是幂函数？
2. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(2,\sqrt{2})$，试求出这个函数的解析式.
3. 在固定压力差（压力差为常数）下，当气体通过圆形管道时，其流量速率 v（单位：cm^3/s）与管道半径 r（单位：cm）的四次方成正比.
   (1) 写出气流速度 v 关于管道半径 r 的函数解析式；
   (2) 若气体在半径为 3 cm 的管道中，流量速率为 400 cm^3/s，求该气体通过半径为 r 的管道时，其流量速率 v 的表达式；
   (3) 已知 (2) 中的气体通过的管道半径为 5 cm，计算该气体的流量速率.

3.1 函数与方程

3.1.1 方程的根与函数的零点

思考？

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象有什么关系？

先来观察几个具体的一元二次方程及其相应的二次函数，如

方程 $x^2-2x-3=0$ 与函数 $y=x^2-2x-3$；

方程 $x^2-2x+1=0$ 与函数 $y=x^2-2x+1$；

方程 $x^2-2x+3=0$ 与函数 $y=x^2-2x+3$.

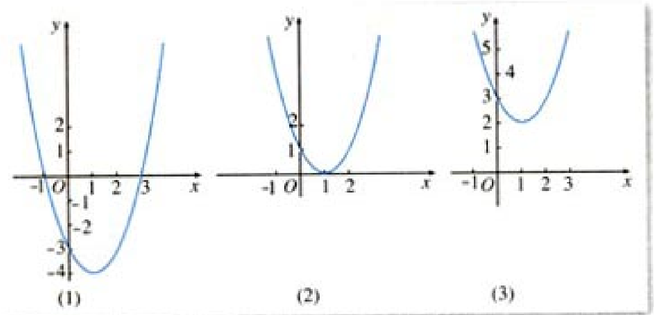


图 3.1-1

容易知道，方程 $x^2-2x-3=0$ 有两个实数根 $x_1=-1$，$x_2=3$；函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴有两个交点

$(-1, 0)$，$(3, 0)$，如图 3.1-1(1)．这样，方程 $x^2-2x-3=0$ 的两个实数根就是函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象与 x 轴交点的横坐标．

方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=1$；函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象与 x 轴有唯一的交点$(1, 0)$，如图 3.1-1(2)．这样，方程 $x^2-2x+1=0$ 的实数根就是函数 $y=x^2-2x+1$的图象与 x 轴交点的横坐标．

方程 $x^2-2x+3=0$ 无实数根，函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象与 x 轴没有交点，如图 3.1-1(3)．

上述关系对一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 及其相应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$也成立．

设判别式 $\Delta=b^2-4ac$，我们有：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，一元二次方程有两个不等的实数根 x_1、x_2，相应的二次函数的图象与 x 轴有两个交点$(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$；

(2) 当 $\Delta=0$ 时，一元二次方程有两个相等实数根 $x_1=x_2$，相应的二次函数的图象与 x 轴有唯一的交点 $(x_1, 0)$；

(3) 当 $\Delta<0$ 时，一元二次方程没有实数根，相应的二次函数的图象与 x 轴没有交点．

二次函数的图象与 x 轴的交点和相应的一元二次方程根的关系，可以推广到一般情形．为此，先给出函数零点的概念：

对于函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$的**零点** (zero point)．

这样，函数 $y=f(x)$的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根，也就是函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴的交点的横坐标．所以

方程$f(x)=0$ 有实数根

$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有交点

$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$有零点

由此可知，求方程 $f(x)=0$ 的实数根，就是确定函数 $y=f(x)$的零点．一般地，对于不能用公式法求根的方程 $f(x)=0$来说，我们可以将它与函数 $y=f(x)$联系起来，利用函数的性质找出零点，从而求出方程的根．

探究

观察二次函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 的图象（如图3.1-2），我们发现函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-2, 1]$ 上有零点. 计算 $f(-2)$ 与 $f(1)$ 的乘积，你能发现这个乘积有什么特点？在区间 $[2, 4]$ 上是否也具有这种特点呢？

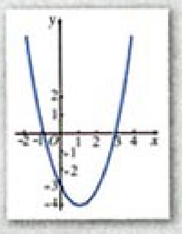


图 3.1-2

可以发现，在区间 $[-2, 1]$ 的端点上，$f(-2)>0$，$f(1)<0$，即 $f(-2)\cdot f(1)<0$，函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $(-2, 1)$ 内有零点 $x=-1$，它是方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根. 同样，在区间 $[2, 4]$ 的端点上，$f(2)<0$，$f(4)>0$，即 $f(2)\cdot f(4)<0$，函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在 $(2, 4)$ 内有零点 $x=3$，它是方程 $x^2-2x-3=0$ 的另一个根.

同学们可以任意画几个函数图象，观察图象，看看是否能得出同样的结果.

一般地，我们有：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点，即存在 $c\in(a, b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

例 1 求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点个数.

解： 用计算器或计算机作出 x、$f(x)$ 的对应值表（表 3-1）和图象（图 3.1-3）.

表 3-1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−4	−1.306 9	1.098 6	3.386 3	5.609 4	7.791 8	9.945 9	12.079 4	14.197 2

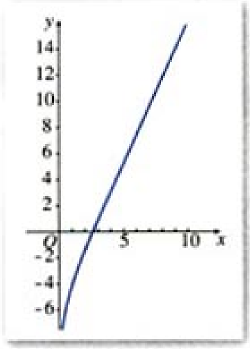


图 3.1-3

你能给出这个函数是增函数的证明吗？

由表 3-1 和图 3.1-3 可知，$f(2)<0$，$f(3)>0$，即 $f(2)\cdot f(3)<0$，说明这个函数在区间 (2，3) 内有零点．由于函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是增函数，所以它仅有一个零点．

练　习

1. 利用函数图象判断下列方程有没有根，有几个根：

(1) $-x^2+3x+5=0$；　　(2) $2x(x-2)=-3$；

(3) $x^2=4x-4$；　　(4) $5x^2+2x=3x^2+5$.

2. 利用函数的图象，指出下列函数零点所在的大致区间：

(1) $f(x)=-x^3-3x+5$；　　(2) $f(x)=2x\cdot\ln(x-2)-3$；

(3) $f(x)=e^{x-1}+4x-4$；　　(4) $f(x)=3(x+2)(x-3)(x+4)+x$.

3.1.2 用二分法求方程的近似解

思考?

一元二次方程可以用公式求根，但没有公式可用来求方程 $\ln x+2x-6=0$ 的根．联系函数的零点与相应方程根的关系，能否利用函数的有关知识来求它的根呢?

我们已经知道，函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 在区间(2，3)内有零点．进一步的问题是，如何找出这个零点?

一个直观的想法是：如果能够将零点所在的范围尽量缩小，那么在一定精确度的要求下，我们可以得到零点的近似值．为了方便，下面我们通过“取中点”的方法逐步缩小零点所在的范围．

一般地，我们把 $x=\frac{a+b}{2}$ 称为区间 (a, b) 的中点．

取区间（2，3）的中点 2.5，用计算器算得 $f(2.5)\approx-0.084$．因为 $f(2.5)\cdot f(3)<0$，所以零点在区间(2.5，3)内．

再取区间（2.5，3）的中点 2.75，用计算器算得 $f(2.75)\approx0.512$．因为 $f(2.5)\cdot f(2.75)<0$，所以零点在区间（2.5，2.75）内．

由于 $(2, 3)\supsetneqq(2.5, 3)\supsetneqq(2.5, 2.75)$，所以零点所在的范围确实越来越小了．如果重复上述步骤，那么零点所在的范围会越来越小（见表3-2和图3.1-4)．这样，在一定精确度下，我们可以在有限次重复相同步骤后，将所得的零点所在区间内的任意一点作为函数零点的近似值，特别地，可以将区间端点作为零点的近似值．例如，当精确度为 0.01 时，由于 $|2.539\ 062\ 5-2.531\ 25|=0.007\ 812\ 5<0.01$，所以，我们可以将 $x=2.54$ 作为函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 零点的近似值，也即方程 $\ln x+2x-6=0$ 根的近似值．

表 3-2

区　间	中点的值	中点函数近似值
(2，3)	2.5	−0.084
(2.5，3)	2.75	0.512
(2.5，2.75)	2.625	0.215
(2.5，2.625)	2.562 5	0.066
(2.5，2.562 5)	2.531 25	−0.009
(2.531 25，2.562 5)	2.546 875	0.029
(2.531 25，2.546 875)	2.539 062 5	0.010
(2.531 25，2.539 062 5)	2.535 156 25	0.001

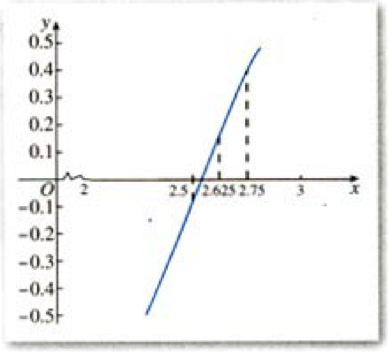


图 3.1-4

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断、且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做**二分法**（bisection）.

给定精确度 ε，用二分法求函数 $f(x)$ 零点近似值的步骤如下：

1. 确定区间 $[a, b]$，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度 ε；

2. 求区间 (a, b) 的中点 x_1；

3. 计算 $f(x_1)$；

(1) 若 $f(x_1)=0$，则 x_1 就是函数的零点；

(2) 若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令 $b=x_1$（此时零点 $x_0\in(a, x_1)$）；

(3) 若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令 $a=x_1$（此时零点 $x_0\in(x_1, b)$）.

4. 判断是否达到精确度 ε：即若 $|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值 a（或 b）；否则重复 2～4.

为什么由 $|a-b|<\varepsilon$，便可判断零点的近似值为 a（或 b）?

由函数的零点与相应方程根的关系，我们可用二分法来求方程的近似解. 由于计算量较大，而且是重复相同的步骤，因此，我们可以通过设计一定的计算程序，借助计算器或计算机完成计算.

例 2　借助计算器或计算机用二分法求方程 $2^x+3x=7$ 的近似解（精确到 0.1）.

解：原方程即 $2^x+3x-7=0$，令 $f(x)=2^x+3x-7$，用计算器或计算机作出函数 $f(x)=2^x+3x-7$ 的对应值表（表 3-3）与图象（如图 3.1-5）.

表 3-3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)=2^x+3x-7$	-6	-2	3	10	21	40	75	142	273

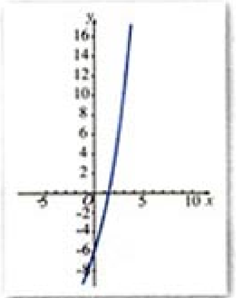


图 3.1-5

观察图 3.1-5 或表 3-3 可知 $f(1)\cdot f(2)<0$，说明这个函数在区间 (1, 2) 内有零点 x_0.

取区间 (1, 2) 的中点 $x_1=1.5$，用计算器算得 $f(1.5)\approx 0.33$. 因为 $f(1)\cdot f(1.5)<0$，所以 $x_0\in(1, 1.5)$.

再取 (1, 1.5) 的中点 $x_2=1.25$，用计算器算得 $f(1.25)\approx -0.87$. 因为 $f(1.25)\cdot f(1.5)<0$，所以 $x_0\in(1.25, 1.5)$.

同理，可得 $x_0\in(1.375, 1.5)$，$x_0\in(1.375, 1.437\,5)$.

由于

$$|1.375-1.437\,5|=0.062\,5<0.1,$$

此时区间 (1.375, 1.437 5) 的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 1.4，所以原方程精确到 0.1 的近似解为 1.4.

练 习

1. 借助计算器或计算机，用二分法求函数 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$ 在区间 (0, 1) 内的零点（精确到 0.1）.
2. 借助计算器或计算机，用二分法求方程 $x=3-\lg x$ 在区间 (2, 3) 内的近似解（精确到 0.01）.

CHAPTER 3

3.2 函数模型及其应用

我们知道，函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，不同的变化规律需要用不同的函数模型来描述. 那么，面临一个实际问题，应当如何选择恰当的函数模型来刻画它呢?

3.2.1 几类不同增长的函数模型

下面我们先来看两个具体问题.

例 1 假设你有一笔资金用于投资，现有三种投资方案供你选择，这三种方案的回报如下：

方案一：每天回报 40 元；

方案二：第一天回报 10 元，以后每天比前一天多回报 10 元；

方案三：第一天回报 0.4 元，以后每天的回报比前一天翻一番.

请问，你会选择哪种投资方案?

分析： 我们可以先建立三种投资方案所对应的函数模型，再通过比较它们的增长情况，为选择投资方案提供依据.

解： 设第 x 天所得回报是 y 元，则方案一可以用函数 $y=40$ $(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述；方案二可以用函数 $y=10x$ $(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述；方案三可以用函数 $y=0.4\times 2^{x-1}$ $(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述. 三个模型中，第一个是常数函数，后两个都是递增函数模

型．要对三个方案作出选择，就要对它们的增长情况进行分析．

我们先用计算器或计算机计算一下三种方案所得回报的增长情况（表 3-4）．

表 3-4

x/天	方案一		方案二		方案三	
	y/元	增加量/元	y/元	增加量/元	y/元	增加量/元
1	40	0	10		0.4	
2	40	0	20	10	0.8	0.4
3	40	0	30	10	1.6	0.8
4	40	0	40	10	3.2	1.6
5	40	0	50	10	6.4	3.2
6	40	0	60	10	12.8	6.4
7	40	0	70	10	25.6	12.8
8	40	0	80	10	51.2	25.6
9	40	0	90	10	102.4	51.2
10	40	0	100	10	204.8	102.4
…	…	…	…	…	…	…
30	40	0	300	10	214 748 364.8	107 374 182.4

再作出三个函数的图象（图 3.2-1）．

函数图象是分析问题的好帮手．为了便于观察，我们用虚线连接离散的点．

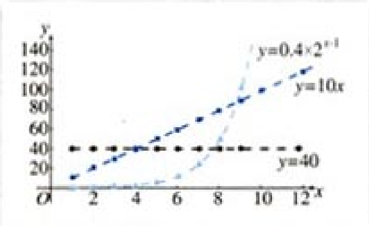


图 3.2-1

我们看到，底为 2 的指数函数模型比线性函数模型增长速度要快得多．从中你对“指数爆炸”的含义有什么新的理解？

根据这里的分析，是否应作这样的选择：投资 5 天以下选方案一，投资 5～8 天选方案二，投资 8 天以上选方案三？

由表 3-4 和图 3.2-1 可知，方案一的函数是常数函数，方案二、方案三的函数都是增函数，但方案三的函数与方案二的函数的增长情况很不相同．可以看到，尽管方案一、方案二在第 1 天所得回报分别是方案三的 100 倍和 25 倍，但它们的增长量固定不变，而方案三是“指数增长”，其“增长量”是成倍增加的，从第 7 天开始，方案三比其他两个方案增长得快得多，这种增长速度是方案一、方案二所无法企及

的．从每天所得回报看，在第1～4天，方案一最多；在第5～8天，方案二最多；第9天开始，方案三比其他两个方案所得回报多得多，到第30天，所得回报已超过2亿元．

下面再看累计的回报数．通过计算器或计算机列表如下：

方案 \ 回报/元 \ 天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
一	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440
二	10	30	60	100	150	210	280	360	450	550	660
三	0.4	1.2	2.8	6	12.4	25.2	50.8	102	204.4	409.2	818.8

因此，投资8天以下（不含8天），应选择第一种投资方案；投资8～10天，应选择第二种投资方案；投资11天（含11天）以上，则应选择第三种投资方案．

上述例子只是一种假想情况，但从中我们可以体会到，不同的函数增长模型，增长变化存在很大差异．

例2 某公司为了实现1 000万元利润的目标，准备制定一个激励销售部门的奖励方案：在销售利润达到10万元时，按销售利润进行奖励，且奖金y（单位：万元）随销售利润x（单位：万元）的增加而增加，但奖金总数不超过5万元，同时奖金不超过利润的25%．现有三个奖励模型：$y=0.25x$，$y=\log_7 x+1$，$y=1.002^x$，其中哪个模型能符合公司的要求？

分析：某个奖励模型符合公司要求，就是依据这个模型进行奖励时，奖金总数不超过5万元，同时奖金不超过利润的25%，由于公司总的利润目标为1 000万元，所以部门销售利润一般不会超过公司总的利润．于是，只需在区间[10，1 000]上，检验三个模型是否符合公司要求即可．

不妨先作出函数图象，通过观察函数的图象，得到初步的结论，再通过具体计算，确认结果．

解：借助计算器或计算机作出函数$y=5$，$y=0.25x$，$y=\log_7 x+1$，$y=1.002^x$的图象（图3.2-2）．观察图象发现，在区间［10，1 000］上，模型$y=0.25x$，$y=1.002^x$的图象

都有一部分在直线 $y=5$ 的上方，只有模型 $y=\log_7 x+1$ 的图象始终在 $y=5$ 的下方，这说明只有按模型 $y=\log_7 x+1$ 进行奖励时才符合公司的要求．下面通过计算确认上述判断.

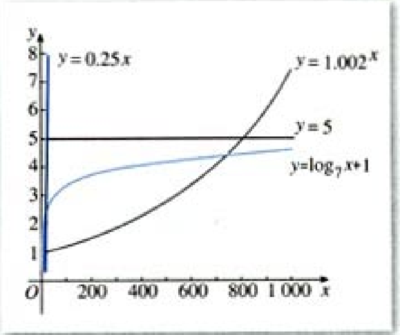


图 3.2-2

首先计算哪个模型的奖金总数不超过 5 万.

对于模型 $y=0.25x$，它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上递增，当 $x\in(20, 1\ 000)$ 时，$y>5$，因此该模型不符合要求；

对于模型 $y=1.002^x$，由函数图象，并利用计算器，可知在区间 $(805, 806)$ 内有一个点 x_0 满足 $1.002^{x_0}=5$，由于它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上递增，因此当 $x>x_0$ 时，$y>5$，因此该模型也不符合要求；

对数增长模型比较适合于描述增长速度平缓的变化规律.

对于模型 $y=\log_7 x+1$，它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上递增，而且当 $x=1\ 000$ 时，$y=\log_7 1\ 000+1\approx 4.55<5$，所以它符合奖金总数不超过 5 万元的要求.

再计算按模型 $y=\log_7 x+1$ 奖励时，奖金是否不超过利润的 25%，即当 $x\in[10, 1\ 000]$ 时，是否有

$$\frac{y}{x}=\frac{\log_7 x+1}{x}\leqslant 0.25$$

成立.

令 $f(x)=\log_7 x+1-0.25x$，$x\in[10, 1\ 000]$. 利用计算器或计算机作出函数 $f(x)$ 的图象（图 3.2-3），由图象可知它是递减的，因此

$$f(x)<f(10)\approx -0.316\ 7<0,$$

即

$$\log_7 x+1<0.25x.$$

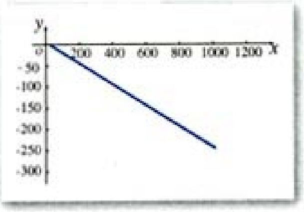


图 3.2-3

所以，当 $x\in[10, 1\ 000]$ 时，$\frac{\log_7 x+1}{x}<0.25$. 说明按

模型 $y=\log_7 x+1$ 奖励，奖金不会超过利润的 25%.

综上所述，模型 $y=\log_7 x+1$ 确实能符合公司要求.

练 习

1. 四个变量 y_1、y_2、y_3、y_4 随变量 x 变化的数据如下表：

x	0	5	10	15	20	25	30
y_1	5	130	505	1 130	2 005	3 130	4 505
y_2	5	94.478	1 758.2	337 33	6.37×10^5	1.2×10^7	2.28×10^8
y_3	5	30	55	80	105	130	155
y_4	5	2.310 7	1.429 5	1.140 7	1.046 1	1.015 1	1.005

关于 x 呈指数型函数变化的变量是________.

2. 某种计算机病毒是通过电子邮件进行传播的，如果某台计算机感染上这种病毒，那么每轮病毒发作时，这台计算机都可能感染其他没被感染的 20 台计算机．现有 10 台计算机在第 1 轮病毒发作时被感染，问在第 5 轮病毒发作时可能有多少台计算机被感染？

我们知道，对数函数 $y=\log_a x$ $(a>1)$，指数函数 $y=a^x$ $(a>1)$ 与幂函数 $y=x^n$ $(n>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上都是增函数．从上述两个例子可以看到，这三类函数的增长是有差异的．那么，这种差异的具体情况到底怎样呢？

下面，我们不妨先以函数 $y=2^x$，$y=x^2$，$y=\log_2 x$ 为例进行探究.

利用计算器或计算机，以一定的步长列出自变量与函数值的对应值表（表 3-5），并在同一平面直角坐标系内画出三个函数的图象（图 3.2-4）．可以看到，虽然它们都是增函数，但它们的增长速度是不同的.

表 3-5

x	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	…
$y=2^x$	1.149	1.516	2	2.639	3.482	4.595	6.063	8	10.556	…
$y=x^2$	0.04	0.36	1	1.96	3.24	4.84	6.76	9	11.56	…
$y=\log_2 x$	−2.322	−0.737	0	0.485	0.848	1.138	1.379	1.585	1.766	…

你可以利用二分法，通过求函数 $y=x^2-2^x$ 的零点来得到分界点.

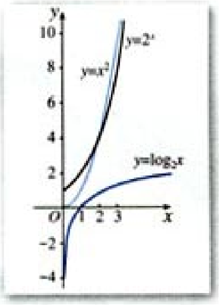


图 3.2-4

观察

请在图象上分别标出使不等式

$$\log_2 x<2^x<x^2,$$
$$\log_2 x<x^2<2^x$$

成立的自变量 x 的取值范围.

下面我们在更大的范围内，观察 $y=2^x$ 和 $y=x^2$ 的增长情况.

从图 3.2-5 可以看到，$y=2^x$ 和 $y=x^2$ 的图象有两个交点，这表明 2^x 与 x^2 在自变量不同的区间内有不同的大小关系，有时 $2^x>x^2$，有时 $2^x<x^2$.

表 3-6

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	…
$y=2^x$	1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536	…
$y=x^2$	0	4	16	36	64	100	144	196	256	…

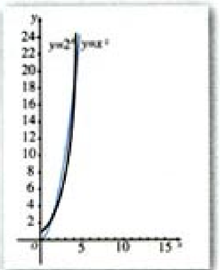


图 3.2-5

但是，当自变量 x 越来越大时，可以看到，$y=2^x$ 的图象就像与 x 轴垂直一样，2^x 的值快速增长，x^2 比起 2^x 来，几乎有些微不足道，如图 3.2-6 和表 3-7 所示.

表 3-7

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	…
$y_1=2^x$	1	1 024	1.05E+06	1.07E+09	1.10E+12	1.13E+15	1.15E+18	1.18E+21	1.21E+24	…
$y_2=x^2$	0	100	400	900	1 600	2 500	3 600	4 900	6 400	…

在计算器或计算机中，1.10×10^{12} 常表示成 1.10E + 12. 其中，字母“E”表示 10 这个“底数”，之后的整数 12 即为 10^{12} 的指数.

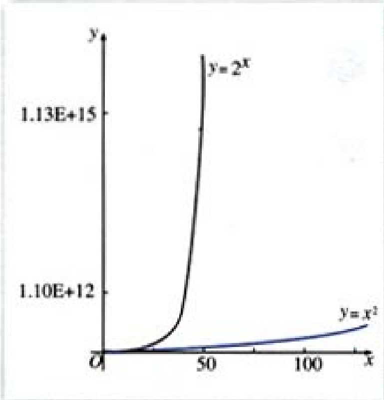


图 3.2-6

探究

你能借助图象，对 $y=x^2$ 和 $y=\log_2 x$ 的增长情况进行比较吗？

一般地，对于指数函数 $y=a^x\ (a>1)$ 和幂函数 $y=x^n\ (n>0)$，通过探索可以发现，在区间 $(0,+\infty)$ 上，无论 n 比 a 大多少，尽管在 x 的一定变化范围内，a^x 会小于 x^n，但由于 a^x 的增长快于 x^n 的增长，因此总存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，就会有 $a^x>x^n$.

同样地，对于对数函数 $y=\log_a x\ (a>1)$ 和幂函数 $y=x^n\ (n>0)$，在区间 $(0,+\infty)$ 上，随着 x 的增大，$\log_a x$ 增长

得越来越慢，图象就像是渐渐地与 x 轴平行一样. 尽管在 x 的一定变化范围内，$\log_a x$ 可能会大于 x^n，但由于 $\log_a x$ 的增长慢于 x^n 的增长，因此总存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，就会有 $\log_a x<x^n$.

综上所述，在区间 $(0, +\infty)$ 上，尽管函数 $y=a^x$ $(a>1)$、$y=\log_a x$ $(a>1)$ 和 $y=x^n$ $(n>0)$ 都是增函数，但它们的增长速度不同，而且不在同一个"档次"上. 随着 x 的增大，$y=a^x$ $(a>1)$ 的增长速度越来越快，会超过并远远大于 $y=x^n$ $(n>0)$ 的增长速度，而 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 的增长速度则会越来越慢. 因此，总会存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，就有 $\log_a x<x^n<a^x$.

探究

你能用同样的方法，讨论一下函数 $y=a^x$ $(0<a<1)$、$y=x^n$ $(n<0)$、$y=\log_a x$ $(0<a<1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的衰减情况吗？

练 习

在同一平面直角坐标系内作出下列函数的图象，并比较它们的增长情况：

(1) $y=0.1e^x-100$，$x\in[1, 10]$；

(2) $y=20\ln x+100$，$x\in[1, 10]$；

(3) $y=20x$，$x\in[1, 10]$.

3.2.2 函数模型的应用实例

我们学习过的一次函数、二次函数、指数函数、对数函数以及幂函数，它们都与现实世界有着紧密的联系，有着广泛的应用. 下面我们通过一些实例，来感受它们的广泛应

$$y=2\times1.02^x.$$

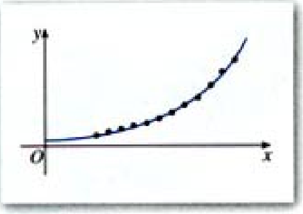


图 3.2-11

将已知数据代入上述函数解析式，或作出上述函数的图象（图 3.2-11），可以发现，这个函数模型与已知数据的拟合程度较好，这说明它能较好地反映这个地区未成年男性体重与身高的关系.

（2）将 $x=175$ 代入 $y=2\times1.02^x$，得

$$y=2\times1.02^{175},$$

由计算器算得

$$y\approx63.98.$$

由于

$$78\div63.98\approx1.22>1.2,$$

所以，这个男生偏胖.

如果在解决例 6 时运用计算器或计算机的拟合功能，那么获得的函数模型更精确，请你试一试.

例 6 的解题过程，体现了根据收集到的数据的特点，通过建立函数模型，解决实际问题的基本过程：