

广义相对论简明

1 时空度规

对于平面上的两点，为了确定两点间的距离，我们可以由勾股定理给出：

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \quad (1)$$

更一般形式为：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2)$$

我们称 ds^2 为线元。

若换成极坐标系，可以得到：

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 \quad (3)$$

我们发现，在两种坐标系下，虽然坐标不同，但线元的长度不变，我们称之为标量，其值与坐标的选取无关。

我们将上面两式换种表达：

$$ds^2 = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} dx^i dx^j \quad (4)$$

dx^i 为坐标变化的微元，右上角的指标用来标记它是第几个坐标，如 $dx^2 \equiv y$ 。

g_{ij} 被称为度规，一套坐标系就对应一套度规，在笛卡尔系中：

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

极坐标系中：

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

简单来说，度规定义了给定坐标如何得到距离。

在四维时空中，有 1 个时间坐标与 3 个空间坐标，我们将其度规写为：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7)$$

上式已经用了爱因斯坦求和约定，重复指标代表求和，我们称这种操作为缩并。

对于平直时空的直角坐标系：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

对于球坐标系：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (9)$$

宇宙学常用的为 RW 度规（坐标为 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ ）写为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (10)$$

线元写为：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \quad (11)$$

将其与球坐标度规相比较，可以发现多了 2 个参数：尺度因子 a 和空间曲率 K 。

尺度因子 a 是时间的函数，反映宇宙在膨胀，我们规定今天的尺度因子等于 1。

空间曲率 K 是一个常数，曲率为 0 意味着平直空间；曲率为正意味着三维球面空间；曲率为负意味着三维双曲面空间。

2 矢量与张量

矢量 v^μ 我们非常熟悉，就不再多说。

张量 $T^{\mu\nu}$ 可以看做一个二维矩阵，确定两个指标之后就可以确定一个矩阵元，得到一个数。

我们看到矢量和张量的指标都在上面，其实可以通过度规升降指标，如：

$$g^{\alpha\beta} w_\beta = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} w^\gamma = \delta_\gamma^\alpha w^\gamma = w^\alpha \quad (12)$$

$$A_\alpha^\beta = g_{\alpha\gamma} A^{\gamma\beta} \quad (13)$$

$$A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} A^{\gamma\delta} \quad (14)$$

$$A^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} A_{\gamma\delta} \quad (15)$$

另外，两个度规缩并得到单位矩阵：

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \quad (16)$$

3 克氏符与曲率

在确定度规的情况下，我们可以算出克氏符和曲率，公式如下：

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (17)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \quad (18)$$

式子中的“,”表示对第几个坐标求导。

克氏符的主要目的是用来算曲率，而曲率表示了时空的弯曲程度，即时空形状，这些现在都可以用 Mathematica 程序计算。

4 场方程

爱因斯坦张量用来表示时空的几何形状：

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (19)$$

他得出了广义相对论的引力场方程：

$$G_\nu^\mu = 8\pi G T_\nu^\mu \quad (20)$$

其中 T_ν^μ 为能动张量，表示物质的分布。

于是场方程的意义就是：时空形状可以决定物质分布，物质分布可以决定时空形状。

我们使用相对论就是在解决如何通过物质得到时空几何，和如何从时空几何反推物质分布的问题。

求广义相对论的一般步骤为：

1. 确定一个度规和物质分布
2. 算出克氏符，算出曲率
3. 带入场方程，列出各个分量的方程组
4. 求解微分方程组

FLRW 宇宙

1 运动学

本节主要介绍宇宙学中基本的运动学。

1.1 RW 度规

我们在宇宙学中常用自然单位制：

$$c = \hbar = k_B = 1 \quad (21)$$

在自然单位制下，宇宙学中最常用的度规为 RW 度规：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \quad (22)$$

其中 $a(t)$ 为尺度因子，他可以表达出宇宙在演化过程中的膨胀。它规定了宇宙中的物理长度，我们可以将其理解成宇宙中的距离单位。中括号里的内容交代了坐标距离，但距离只是“数”，缺少单位，所以我们需要再乘一个尺度因子，这样这个距离就有了 $a(t)$ 这个单位。

换句话说，所谓度规，是从坐标上的数转化为物理上的量的过程。我们规定现在的尺度因子值为 $a_0 = 1$ ，宇宙诞生之初取 0，所以我们现在的坐标距离就等于物理距离，但如果放在过去，对于相同的坐标距离，物理距离就更短。

我们称坐标 $(t, r, \vartheta, \varphi)$ 为共动坐标，上面所说的坐标距离可以说成共动距离。

K 代表宇宙的空间曲率，因此宇宙的曲率半径可以写为：

$$R_{\text{curv}} \equiv a(t)/\sqrt{|K|} \quad (23)$$

在常识中，只有球面才有曲率半径，这里我们可以将宇宙看做一个三维球面来理解曲率半径。曲率为正时宇宙是三维球面，为负时宇宙是三维双曲面。

对于 K ，它可以取任何值，但我们总可以伸缩 r 使其值归一化，即：

$$k = -1, 0, +1 \quad (24)$$

此时宇宙的曲率半径就等于尺度因子 a 。

我们还可以换一种坐标选取方式，在正曲率情况下做如下变量替换：

$$r = K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi) \quad (25)$$

那么 RW 度规可以改写为：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + K^{-1} \sin^2(K^{1/2}\chi) d\vartheta^2 + K^{-1} \sin^2(K^{1/2}\chi) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \quad (26)$$

若将 K 归一化，则有更简洁的形式：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta d\varphi^2] \quad (27)$$

这种坐标更可以用三维球面看待，尺度因子是球半径，宇宙上的点只需要用三个角度坐标确定，相当于高一维的球面坐标系。

其更普通的形式写为：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] \quad (28)$$

$$f_K(\chi) \equiv \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}\chi) & (K < 0) \end{cases} \quad (29)$$

我们定义一个有用的量：

$$H \equiv \dot{a}/a \quad (30)$$

这就是哈勃参量，现在哈勃参量的值取为 H_0 。

我们以此定义哈勃尺度：

$$t_H \equiv l_H \equiv H^{-1} \quad (31)$$

1.2 红移

由相对论，光在四维时空中走的距离是 0，即：

$$ds^2 = 0 \quad (32)$$

我们考虑光延 r 方向传播，没有角度的偏转，所以有：

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{-dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (33)$$

积分上式，从光源处出发 ($t = t_1, r = r_A$)，积分到观测者处 ($t = t_2, r = 0$)，注意符号，得到下式：

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (34)$$

上式可以认为是光波的“头部”的积分关系，对于光波的“尾部”，我们认为它只是比前面的“头部”晚一点出发和到达：

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (35)$$

上两式相减：

$$0 = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{a(t)} = \frac{\delta t_2}{a(t_2)} - \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \quad (36)$$

所以有如下关系：

$$\delta t_2 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \delta t_1 \quad (37)$$

上式表明了在发出和到达时光子振动的周期正比于尺度因子。

我们通过这个关系定义红移：

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \quad (38)$$

如果是现在接收到光，那么红移和尺度因子关系如下：

$$1+z = \frac{a_0}{a} \quad (39)$$

可以发现，现在（近似）发出的光红移为 0，而宇宙诞生之初发出的光红移为无穷大。

还有一个有用的微分关系（可作为练习）：

$$\frac{da}{a} = -\frac{dz}{1+z} \quad (40)$$

1.3 距离

1.3.1 共动距离

共动距离就是坐标的积分：

$$\chi = \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \quad (41)$$

1.3.2 物理距离

之前说过，物理距离是尺度因子乘以其共动距离，所以定义物理距离：

$$d^p(t) = a(t) \int_0^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t) \int_0^{\chi_A} d\chi \quad (42)$$

我们可以得到物理距离与共动距离的关系：

$$d^p(t) = a(t)\chi = \frac{a_0}{1+z}\chi \equiv \frac{d^c}{1+z} \quad (43)$$

上式 d^c 就是共动距离。

我们将我们所能看到最远的距离叫做视界，我们能看到的最远地方是宇宙诞生之初时发出的光，我们定义视界：

$$d_{\text{hor}}^c = \chi_{\text{hor}} = \int_0^{\infty} \frac{dz'}{H(z')} \quad (44)$$

这意味着我们能看到的区域是有限的，因为在视界之外天体发出的光传到我们这里要花的时间比宇宙年龄还要大。

1.3.3 角直径距离

一个天体直径两端分别发出两束光，我们收到它时可以得到它的角直径距离，定义为：

$$d_A \equiv \frac{s^p}{\vartheta} \quad (45)$$

s^p 是天体光发射时的直径， ϑ 是观测到的角度。

我们在共动坐标下看，有很清晰的几何关系，就是：

$$d_A^c \equiv s^c / \vartheta \quad (46)$$

而物理直径与共动直径的关系我们是知道的：

$$s^c = (1+z)s^p \quad (47)$$

所以我们就得到了角直径距离的红移计算式：

$$d_A(z) = a(t)r = \frac{r}{1+z} = \frac{f_K(\chi)}{1+z} = \frac{1}{1+z} f_K \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right) \quad (48)$$

1.3.4 光度距离

我们测光时可以测得其视光度 l , 通过某些手段我们也可以得到它的绝对光度 L (功率), 两个光度有如下关系:

$$l = L/4\pi d^2 \quad (49)$$

所以我们定义一个光度距离:

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \quad (50)$$

影响光度测量的有三方面, 一是光子数, 二是光子能量, 三是接收一段波长需要的时间。相比于不膨胀的宇宙, 膨胀宇宙辐射的面积与之前相比要 $\times (\frac{a_0}{a})^2$, 导致单位面积上接收到的光子数以 $(\frac{a}{a_0})^2$ 比例减少。而光子的能量相比之前以 $\frac{a}{a_0}$ 比例减小, 但接收时间由于光子的拉伸以 $\frac{a_0}{a}$ 比例变长。所以我们可以将上面的分析总结:

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = (1+z)r = (1+z)d_A^c(z) = (1+z)^2 d_A(z) \quad (51)$$

2 动力学

本节主要介绍 Friedmann 方程导出的宇宙动力学。求解广义相对论的过程参阅上一章。

2.1 Friedmann 方程

通过求解广义相对论可以得出下面两个方程:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (52)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (53)$$

上面关系到的新物理量有密度 ρ , 压强 p , 宇宙学常数 (暗能量) Λ 。

上面两个就是 Friedmann 方程。

用哈勃参数替换上式的增长率可得:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (54)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 \quad (55)$$

广义相对论理论还给出能量守恒方程:

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \quad (56)$$

宇宙中存在各种成分, 包括物质和辐射等。

在热力学中我们学过密度和压强可以用一个状态方程联系起来, 在宇宙学中, 我们也定义一个状态方程:

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \quad (57)$$

对于普通物质 $w = 0$; 对辐射 (看做光速运动的物质) $w = \frac{1}{3}$, 对宇宙学常数 $w = -1$ 。

加入状态方程, 能量守恒方程可以写成微分形式:

$$d\ln\rho = -3(1+w)d\ln a \quad (58)$$

所以:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (59)$$

对物质 $\rho_m \propto a^{-3}$, 对辐射 $\rho_r \propto a^{-4}$, 对宇宙学常数 $\rho_\Lambda \propto a^{-4}$ 。

2.2 密度参量

如果我们考虑一个平坦的, 无暗能量的宇宙, 那么 Friedmann 方程可以简化为:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (60)$$

称这时的密度 ρ_c 为临界密度, 今天的值为:

$$\rho_{c0} = \rho_c(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (61)$$

我们可以通过临界密度来表示宇宙的真实密度, 我们定义一个密度参量:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (62)$$

注意上式的定义仅限于物质和辐射。

通过如上定义, 我们可以将 Friedmann 方程改写成密度参量的形式:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3} \Omega_r \rho_{cr0} a^{-4}}_{\Omega_r H_0^2} + \underbrace{\frac{8\pi G}{3} \Omega_m \rho_{cr0} a^{-3}}_{\Omega_m H_0^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 \underbrace{- K}_{+\Omega_k H_0^2} a^{-2} \quad (63)$$

$$= H_0^2 (\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda) \quad (64)$$

$$H(z) = H_0 E(z) \quad (65)$$

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (66)$$

这就是密度参量形式的 Friedmann 方程。

2.3 宇宙年龄

从 Friedmann 方程可以得到:

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda a^2} \quad (67)$$

所以我们可以计算出间隔的两段时间如何用红移表达:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{da/dt} = H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z_1}}^{\frac{1}{1+z_2}} \frac{da}{\sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda a^2}} \\ &= \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(1+z) H(z)} = H_0^{-1} \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_r (1+z)^6 + \Omega_m (1+z)^5 + \Omega_k (1+z)^4 + \Omega_\Lambda (1+z)^2}} \end{aligned} \quad (68)$$

所以我们可以取特殊的积分上下限计算我们宇宙的年龄:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_k + \Omega_\Lambda a^2}} \quad (69)$$

不同成分宇宙有不同的年龄, 例如:

$$\begin{array}{ll} \text{辐射主导} & (\Omega_r = \Omega_0 = 1) : t_0 = \frac{1}{2} H_0^{-1} \\ \text{物质主导} & (\Omega_m = \Omega_0 = 1) : t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \\ \text{曲率主导} & (\Omega_0 = 0) : t_0 = H_0^{-1} \\ \text{真空能主导} & (\Omega_\Lambda = \Omega_0 = 1) : t_0 = \infty \end{array} \quad (70)$$

2.4 具体计算距离

2.4.1 共动距离

我们将共动距离用红移表示：

$$d^c(z) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{da}{a} \frac{1}{da/dt} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (71)$$

带入哈勃参量：

$$\begin{aligned} d^c(z) &= H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_\Lambda a^4 + \Omega_k a^2 + \Omega_m a + \Omega_r}} \\ &= H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \end{aligned} \quad (72)$$

2.4.2 角直径距离

利用我们之前得到的角直径距离公式，带入哈勃参量，忽略辐射，可以得到：

$$d_A(z) = d_A^c(z)/(1+z) = \frac{1}{1+z} f_K \left[\frac{1}{H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_\Lambda a^4 + \Omega_k a^2 + \Omega_m a}} \right] \quad (73)$$

其中：

$$f_K(x) \equiv \begin{cases} \sin(x), & (K > 0) \\ x, & (K = 0) \\ \sinh(x), & (K < 0) \end{cases} \quad (74)$$

2.4.3 光度距离

我们回顾基础天文学绝对星等与视星等知识，两者定义如下：

$$M \equiv -2.5 \lg \frac{L}{L_0}, \quad m \equiv -2.5 \lg \frac{l}{l_0} \quad (75)$$

两者相减有：

$$m - M = -2.5 \lg \frac{l}{L} \frac{L_0}{l_0} = 5 \lg d_L + 2.5 \lg 4\pi \frac{l_0}{L_0} = -5 + 5 \lg d_L(\text{pc}) \quad (76)$$

所以带入光度距离的表达式并带入哈勃参量，视星等的红移函数为：

$$\begin{aligned} m(z) &= M - 5 + 5 \lg d_L(\text{pc}) \\ &= M - 5 - 5 \lg H_0 + 5 \lg \left\{ (1+z) H_0 f_K \left(H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_k x^2 + \Omega_m x}} \right) \right\} \\ &= M - 5 - 5 \lg H_0 + 5 \lg \left\{ (1+z) \sqrt{\frac{-K}{\Omega_k}} f_K \left[\sqrt{\frac{\Omega_k}{-K}} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_k x^2 + \Omega_m x}} \right] \right\} \\ &= M - 5 - 5 \lg H_0 + 5 \lg \left\{ \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} f_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_k x^2 + \Omega_m x}} \right) \right\} \\ &= M - 5 - 5 \lg H_0 + 5 \lg \left\{ \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_k|}} f_k \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

宇宙学扰动理论

1 背景时空

本节介绍了在宇宙学扰动理论中常用的记号与背景。

1.1 记号与背景

为了方便起见，我们在宇宙几何背景上使用一套共形坐标 (η, \vec{x}) ，其度规写为：

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) [-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (78)$$

同时我们规定一些记号：

$$\begin{aligned} ' &\equiv \frac{d}{d\eta} = a \frac{dt}{dt} \\ \mathcal{H} &\equiv \frac{a'}{a} = aH = \dot{a} \end{aligned} \quad (79)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 为常见的闵可夫斯基度规：

$$[\eta_{\mu\nu}] \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (80)$$

定义共形时间 η ：

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (81)$$

在这样的约定下，我们有如下可能会用到的关系：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} a^2 \\ \mathcal{H}' &= -\frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho} + 3\bar{p}) a^2 \\ w &= -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \right) = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \Rightarrow 1+w = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \right) = -\frac{2\dot{H}}{3H^2} \\ c_s^2 - w &= \frac{1}{3\mathcal{H}^2} \left[\frac{\mathcal{H}\mathcal{H}'' - 2(\mathcal{H}')^2}{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'} \right] = -\frac{1}{3H\dot{H}} \left(\ddot{H} - \frac{2\dot{H}^2}{H} \right) \\ c_s^2 &= \frac{1}{3\mathcal{H}} \left(\frac{\mathcal{H}'' - \mathcal{H}\mathcal{H}' - \mathcal{H}^3}{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'} \right) = -1 - \frac{\dot{H}}{3H\dot{H}} \\ 1 + c_s^2 &= \frac{\mathcal{H}'' - 4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^3}{3\mathcal{H}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')} = -\frac{\ddot{H}}{3H\dot{H}} \end{aligned} \quad (82)$$

其中状态方程和声速定义如下：

$$\begin{aligned} w &\equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \\ c_s^2 &\equiv \frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}} \equiv \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \end{aligned} \quad (83)$$

2 时空扰动

本节介绍了场方程的左边如何化为扰动形式。

2.1 度规扰动

在扰动的时空中，度规可以写成如下形式：

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (84)$$

我们在这里只考虑度规的一阶扰动，所以所有的二阶以上小量都会被忽略，我们定义扰动量的指标升降运算：

$$h_\nu^\mu \equiv \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}, \quad h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} \quad (85)$$

现在我们将扰动项定义细化：

$$[h_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix} \quad (86)$$

其中：

$$D \equiv -\frac{1}{6}h_i^i \equiv -\frac{1}{6}h \quad (87)$$

$$\delta^{ij}E_{ij} \equiv E_i^i \equiv E_{ii} = 0 \quad (88)$$

即 E_{ij} 为对称无迹张量。

于是线元可展开为：

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ -(1+2A)d\eta^2 - 2B_id\eta dx^i + [(1-2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j \} \quad (89)$$

2.2 规范变换

对于给定的背景坐标系，在扰动时空中我们有多种坐标系的选择，规范的选择会直接影响我们计算的难易程度，这时候就需要规范变换来实现坐标系间的联系。

设背景的坐标为 x^α ，扰动时空中的坐标为 \hat{x}^α 和 \tilde{x}^α ，三者在坐标变换中关联：

$$\tilde{x}^\alpha = \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha \quad (90)$$

其中规范变换矢量 ξ^α 是个小量。

经过复杂的张量运算（推导过程较繁琐，可以参考相关英文文献），我们可以得到度规扰动的规范变换：

$$\tilde{A} = A - \xi_{,0}^0 - \frac{a'}{a}\xi^0 \quad (91)$$

$$\tilde{B}_i = B_i + \xi_{,0}^i - \xi_{,i}^0 \quad (92)$$

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3}\xi_{,k}^k + \frac{a'}{a}\xi^0 \quad (93)$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2}(\xi_{,j}^i + \xi_{,i}^j) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi_{,k}^k \quad (94)$$

2.3 度规扰动的标量、矢量、张量分解

方便起见，我们将 B_i 和 E_{ij} 分解。

将 B_i 分解为零旋度与零散度部分：

$$\vec{B} = \vec{B}^S + \vec{B}^V \quad \nabla \times \vec{B}^S = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B}^V = 0 \quad (95)$$

并且定义标量 B ：

$$\vec{B}^S = -\nabla B \quad (96)$$

将 E_{ij} 分为三部分：

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T \quad (97)$$

仿照上面的定义， E_{ij}^S, E_{ij}^V 可以用 E, E_i 表示：

$$E_{ij}^S = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E = E_{,ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} E_{,kl} \quad (98)$$

$$E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}) \quad \delta^{ij} E_{i,j} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (99)$$

$$\delta^{ik} E_{ij,k}^T = 0 \quad \delta^{ij} E_{ij}^T = 0 \quad (100)$$

我们只需注意： E_{ij}^S, E_{ij}^V 是对称无迹张量（验证可作为练习）， E_{ij}^T 是对称的横向无迹张量，其意义将会在后文涉及。

所以在度规扰动中，我们可以将扰动分为三个部分：

1. 标量扰动： A, B, D, E

2. 矢量扰动： B_i^V, E_i

3. 张量扰动： E_{ij}^T

共 $4 + 4 + 2 = 10$ 个自由度。

2.4 傅里叶空间的扰动

位置空间的扰动可以由不同模式线性组合而成，在平直的背景下的小扰动的各个模式则可以看作是独立演化的，于是我们只需研究任意模式下的单个扰动即可。我们写出傅里叶展开的公式：

$$f(\eta, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (101)$$

对于扰动，我们发现我们只需展开 B, E_i, E 即可导出一整套扰动模式，我们对之作傅里叶展开：

$$\begin{aligned} B(\eta, \vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{B_{\vec{k}}(\eta)}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ \vec{E}(\eta, \vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{E}_{\vec{k}}(\eta)}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ E(\eta, \vec{x}) &= \sum_{\vec{k}} \frac{E_{\vec{k}}(\eta)}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (102)$$

其中 $k \equiv |\vec{k}|$ 使得他们在 k 空间有相同的量纲（前后使用同样的“傅里叶约定”即可，不用担心出错），在此列出我们所使用的傅里叶约定：

x空间	B	E	ξ	v	Π	μ
k 空间	$\frac{B}{k}$	$\frac{E}{k^2}$	$\frac{\xi}{k}$	$\frac{v}{k}$	$\frac{\Pi}{k^2}$	$\frac{\mu}{k^2}$

(103)

于是上节的标量、矢量、张量分解可以修改为如下（可作为练习）：

$$\begin{aligned} B_i^S &= -B_{,i} \implies B_i^S = -i \frac{k_i}{k} B \\ E_{ij}^S &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E \implies E_{ij}^S = \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) E \\ E_{ij}^V &= -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}) \implies E_{ij}^V = -\frac{i}{2k} (k_i E_j + k_j E_i) \end{aligned} \quad (104)$$

并且：

$$\delta^{ij} k_j B_i^V = \vec{k} \cdot \vec{B}^V = 0 \quad \delta^{ij} k_j E_i = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \delta^{ik} k_k E_{ij}^T = \delta^{ij} E_{ij}^T = 0 \quad (105)$$

为了简化上面的式子，我们选取一个特殊的坐标架，使得：

$$\vec{k} = k \hat{z} = (0, 0, k) \quad (106)$$

经过计算，我们可以得到度规扰动 $\delta g_{\mu\nu}$ 的 *SVT*（标量、矢量、张量）部分（可作为练习）：

$$\delta g_{\mu\nu}^S = a^2 \begin{bmatrix} -2A & & & +iB \\ & 2(-D + \frac{1}{3}E) & & \\ +iB & & 2(-D + \frac{1}{3}E) & \\ & & & 2(-D - \frac{2}{3}E) \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\delta g_{\mu\nu}^V = a^2 \begin{bmatrix} & -B_1 & -B_2 & \\ -B_1 & & & -iE_1 \\ -B_2 & & & -iE_2 \\ & -iE_1 & -iE_2 & \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$\delta g_{\mu\nu}^T = a^2 \begin{bmatrix} 2E_{11}^T & 2E_{12}^T & & \\ 2E_{12}^T & -2E_{11}^T & & \\ & & h_+ & h_\times \\ & & h_\times & -h_+ \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} & h_+ & h_\times & \\ & h_\times & -h_+ & \end{bmatrix}, \quad (109)$$

度规扰动的张量部分是引力波的来源，上式只存在两个空间分量，而我们有规定 z 轴为波矢方向，不难发现引力波是横波，而上式也显示了引力波的两个偏振模式， $+$ 号偏振与 \times 号偏振。

将以上分量全部组合，得到：

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -2A & -B_1 & -B_2 & +iB \\ -B_1 & 2(-D + \frac{1}{3}E) + h_+ & h_\times & -iE_1 \\ -B_2 & h_\times & 2(-D + \frac{1}{3}E) - h_+ & -iE_2 \\ +iB & -iE_1 & -iE_2 & 2(-D - \frac{2}{3}E) \end{bmatrix} \quad (110)$$

2.5 傅里叶空间的规范变换

规范变换矢量的傅里叶展开可写为：

$$\xi^\mu(\eta, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}}^\mu(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (111)$$

于是规范变换可写为：

$$\tilde{A} = A - (\xi^0)' - \frac{a'}{a} \xi^0 \quad (112)$$

$$\tilde{B}_i = B_i + (\xi^i)' - ik_i \xi^0 \quad (113)$$

$$\tilde{D} = D + \frac{1}{3} ik_i \xi^i + \frac{a'}{a} \xi^0 \quad (114)$$

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{2} i (k_i \xi^j + k_j \xi^i) + \frac{1}{3} i \delta_{ij} k_k \xi^k \quad (115)$$

相当于我们只需在原矩阵下加上一个规范变换矩阵：

$$a^2 \begin{bmatrix} 2(\xi^0)' + 2\frac{a'}{a} \xi^0 & -(\xi^1)' & -(\xi^2)' & -(\xi^3)' + ik\xi^0 \\ -(\xi^1)' & -2\frac{a'}{a} \xi^0 & & -ik\xi^1 \\ -(\xi^2)' & & -2\frac{a'}{a} \xi^0 & -ik\xi^2 \\ -(\xi^3)' + ik\xi^0 & -ik\xi^1 & -ik\xi^2 & -2\frac{a'}{a} \xi^0 - 2ik\xi^3 \end{bmatrix} \quad (116)$$

2.6 标量扰动

现在我们只考虑标量扰动，度规可以写为：

$$ds^2 = a(\eta)^2 \{ -(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j \} \quad (117)$$

其中曲率扰动定义为：

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3} \nabla^2 E \quad (118)$$

$$\psi_{\vec{k}} = D_{\vec{k}} - \frac{1}{3} E_{\vec{k}} \quad (119)$$

此时相对背景的扰动部分为：

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & B_{,i} \\ B_{,i} & -2\psi\delta_{ij} + 2E_{,jj} \end{bmatrix} \quad (120)$$

接下来我们考虑规范变换，我们希望规范变换矢量 $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$ 也可以写成标量形式，于是我们尝试将 ξ^i 分解成零散与零旋部分：

$$\xi^i = \xi_{\text{tr}}^i - \delta^{ij}\xi_{,j} = \vec{\xi}_{\text{tr}} - \nabla\xi \quad \xi_{\text{tr},i}^i = \nabla \cdot \vec{\xi}_{\text{tr}} = 0 \quad (121)$$

$\vec{\xi}_{\text{tr}}$ 称作横向部分，这在规范变换里将会消失（可作为练习），只剩下 ξ^0, ξ_0 。

于是我们可以得出（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - \xi^{0'} - \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0 \\ \tilde{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{E} &= E + \xi \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 = \psi + \mathcal{H}\xi^0 \end{aligned} \quad (122)$$

在傅里叶空间中有：

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B + \xi' + k\xi^0 \\ \tilde{D} &= D + \frac{1}{3}k\xi + \mathcal{H}\xi^0 \\ \tilde{E} &= E + k\xi \end{aligned} \quad (123)$$

我们还可以构造两个度规扰动的规范不变量，称为 Bardeen 势（验证可作为练习）：

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')' \\ \Psi &\equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E') = \psi - \mathcal{H}(B - E') \end{aligned} \quad (124)$$

2.7 共形牛顿规范

规范的选择可以消掉一部分自由度，共形牛顿规范可以消掉扰动里所有的非对角元，如下：

$$\begin{aligned} \xi &= -E \\ \xi^0 &= -B + E' \end{aligned} \quad (125)$$

则有：

$$\begin{aligned} A^N &= \Phi \\ D^N &= \psi^N = \Psi \end{aligned} \quad (126)$$

现在的度规形式非常简单：

$$ds^2 = a(\eta)^2 [-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (127)$$

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -1 - 2\Phi & \\ & (1 - 2\Psi)\delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2\Phi & \\ & -2\Psi\delta_{ij} \end{bmatrix} \quad (129)$$

有了度规就可以算联络，算完联络算曲率，算完曲率就可以算出爱因斯坦张量（可作为练习，用Mathematica计算），这里给出部分计算结果：

$$\begin{aligned}
R_0^0 &= 3a^{-2}\mathcal{H}' + a^{-2}[-3\Psi'' - \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') - 6\mathcal{H}'\Phi] \\
R_i^0 &= -2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\
R_0^i &= -R_i^0 = 2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\
R_j^i &= a^{-2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i + a^{-2}[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' + 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_{ij} + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}
\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
R &= R_0^0 + R_i^i \\
&= 6a^{-2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + a^{-2}[-6\Psi'' + 2\nabla^2(2\Psi - \Phi) - 6\mathcal{H}(\Phi' + 3\Psi') - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi]
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
G_0^0 &= R_0^0 - \frac{1}{2}R = -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] \\
G_i^0 &= R_i^0 \\
G_0^i &= R_0^i = -R_i^0 = -G_i^0 \\
G_j^i &= R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^iR \\
&= a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta_j^i + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_j^i + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}
\end{aligned} \tag{132}$$

3 物质扰动

本节介绍了场方程的右边如何化为扰动形式。

3.1 能动张量扰动

在背景中，广义相对论中理想流体的能动张量：

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{\mu\nu} &= (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + \bar{p}\bar{g}^{\mu\nu} \\
\bar{T}_\nu^\mu &= (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}^\mu\bar{u}_\nu + \bar{p}\delta_\nu^\mu
\end{aligned} \tag{133}$$

在均匀各向同性的宇宙中流体静止，故四速只有0分量，又因为：

$$\bar{u}_\mu\bar{u}^\mu = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = a^2\eta_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu = -a^2(\bar{u}^0)^2 = -1 \tag{134}$$

则有：

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}(1, \vec{0}) \quad \bar{u}_\mu = a(-1, \vec{0}) \tag{135}$$

我们认为带扰动的能动张量可以写成如下形式：

$$T_\nu^\mu = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu \tag{136}$$

我们可以写出密度扰动、压强扰动及速度扰动：

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \quad p = \bar{p} + \delta p \quad u^i = \bar{u}^i + \delta u^i = \delta u^i \equiv \frac{1}{a}v_i \tag{137}$$

其中速度扰动的定义为：

$$v_i \equiv au^i \tag{138}$$

这是在共动坐标系下观察的速度。

同时我们定义一个相对密度扰动：

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \tag{139}$$

现在我们可以用 v_i 来表达 u^μ ：

$$\begin{aligned}
u^\mu &= \bar{u}^\mu + \delta u^\mu \equiv (a^{-1} + \delta u^0, a^{-1}v_1, a^{-1}v_2, a^{-1}v_3) \\
u_\nu &= \bar{u}_\nu + \delta u_\nu \equiv (-a + \delta u_0, \delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)
\end{aligned} \tag{140}$$

用上扰动的度规：

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -1 - 2A & -B_i \\ -B_i & (1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix} \quad (141)$$

我们可以具体算出（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= -a^2 \delta u^0 - 2aA \\ \delta u_i &= u_i = g_{i\mu} u^\mu = -aB_i + av_i \end{aligned} \quad (142)$$

通过 $u_\mu u^\mu = -1$ 可以解出：

$$\delta u^0 = -\frac{1}{a} A \quad (143)$$

现在的四速可以表示为：

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1 - A, v_i) \quad u_\mu = a(-1 - A, v_i - B_i) \quad (144)$$

于是能动张量可以改写成：

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta_j^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i & \delta p\delta_j^i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (145)$$

现在我们把空间部分的扰动拆分成对角元部分和无迹部分（实际上是分成理想流体部分和偏离理想流体部分）：

$$\delta T_j^i = \delta p\delta_j^i + \Sigma_{ij} \equiv \bar{p} \left(\frac{\delta p}{\bar{p}} + \Pi_{ij} \right) \quad (146)$$

对照前面的式子，可以得出如下关系：

$$\begin{aligned} \delta p &\equiv \delta \frac{1}{3} T_k^k \\ \Sigma_{ij} &\equiv \delta T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta T_k^k \end{aligned} \quad (147)$$

其中 Σ_{ij} 被称为各向异性应力，是一个无迹对称张量， Π_{ij} 是它的无量纲形式，在理想流体中为 0。

至此，我们发现能动张量扰动可以由以下量组成：

$$\delta\rho, \delta p, \vec{v} = v_i, \Pi_{ij}$$

3.2 能动张量扰动的标量、矢量、张量分解

仿照我们熟悉的“SVT 分解”，我们可以将 \vec{v} 分解为零旋与零散部分：

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^S + v_i^V \\ v_i^S &= -v_{,i} \\ \nabla \cdot \vec{v}^V &= 0. \end{aligned} \quad (148)$$

Π_{ij} 分解为：

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Pi_{ij}^S + \Pi_{ij}^V + \Pi_{ij}^T, \\ \Pi_{ij}^S &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \Pi \\ \Pi_{ij}^V &= -\frac{1}{2} (\Pi_{i,j} + \Pi_{j,i}) \\ \delta^{ik} \Pi_{ij,k}^T &= 0 \end{aligned} \quad (149)$$

在傅里叶空间有（可作为练习）：

$$\begin{aligned} v_i^S &= -i \frac{k_i}{k} v \\ \Pi_{ij}^S &= \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \Pi \end{aligned} \quad (150)$$

3.3 能动张量的规范变换

利用规范变换的规则（具体推导参阅其他英文文献）我们可以得出各个量的规范变换：

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta\rho} &= \delta\rho - \bar{\rho}'\xi^0 \\ \widetilde{\delta p} &= \delta p - \bar{p}'\xi^0 \\ \tilde{v}_i &= v_i + \xi_{,0}^i \\ \tilde{\Pi}_{ij} &= \Pi_{ij} \\ \tilde{\delta} &= \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\xi^0 = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)\xi^0\end{aligned}\tag{151}$$

对标量扰动有：

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= v + \xi' \\ \tilde{\Pi} &= \Pi\end{aligned}\tag{152}$$

选取共形牛顿规范，得出：

$$\begin{aligned}\delta\rho^N &= \delta\rho + \bar{\rho}'(B - E') = \delta\rho - 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}(B - E') \\ \delta p^N &= \delta p + \bar{p}'(B - E') = \delta p - 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}(B - E') \\ v^N &= v - E' \\ \Pi^N &= \Pi\end{aligned}\tag{153}$$

在共形牛顿规范下，只考虑扰动的标量部分，能动张量扰动写为：

$$\delta T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} -\delta\rho^N & -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i^N \\ (\bar{\rho} + \bar{p})v_{,i}^N & \delta p^N\delta_j^i + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi) \end{bmatrix}\tag{154}$$

4 标量扰动演化方程

本节推导了标量扰动演化方程并且给出计算实例。

4.1 标量扰动的场方程

我们分别讨论完了爱因斯坦场方程的两边：几何部分与物质部分。现在我们需要将计算好的内容带入场方程：

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G\delta T_\nu^\mu\tag{155}$$

我们在共形牛顿规范下讨论标量扰动，求解出如下内容（可作为练习）：

$$3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - \nabla^2\Psi = -4\pi Ga^2\delta\rho^N\tag{156}$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})v_{,i}^N\tag{157}$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi Ga^2\delta p^N\tag{158}$$

$$\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_j^i\nabla^2\right)(\Psi - \Phi) = 8\pi Ga^2\bar{p}\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_j^i\nabla^2\right)\Pi\tag{159}$$

上述爱因斯坦场方程组可以改写为两个限制方程和两个演化方程（可作为练习，提示：运用傅里叶空间和位置空间的切换）：

限制方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2\Psi &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N] \\ \Psi - \Phi &= 3\mathcal{H}^2w\Pi\end{aligned}\tag{160}$$

演化方程：

$$\begin{aligned}\Psi' + \mathcal{H}\Phi &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \\ \Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta p^N/\bar{\rho}\end{aligned}\tag{161}$$

在傅里叶空间的形式为：

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Psi &= -\frac{3}{2} \left[\delta^N + 3(1+w) \frac{\mathcal{H}}{k} v^N \right] \\ \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 (\Psi - \Phi) &= 3w\Pi \\ \mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Phi &= \frac{3}{2}(1+w) \frac{\mathcal{H}}{k} v^N \\ \mathcal{H}^{-2}\Psi'' + \mathcal{H}^{-1}(\Phi' + 2\Psi') + \left(1 + \frac{2\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\right)\Phi - \frac{1}{3}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2(\Phi - \Psi) &= \frac{3}{2} \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (162)$$

4.2 能动张量守恒方程

广义相对论中能动张量守恒方程在这里也是可以计算的，方程为：

$$T_{\nu;\mu}^\mu = T_{\nu,\mu}^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0 \quad (163)$$

计算结果在此列出：

$$\begin{aligned} (\delta^N)' &= (1+w)(\nabla^2 v^N + 3\Psi') + 3\mathcal{H} \left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}} \right) \\ (v^N)' &= -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi \end{aligned} \quad (164)$$

若是理想流体：

$$(\delta^N)' = (1+w)(\nabla^2 v^N + 3\Phi') + 3\mathcal{H} \left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}} \right) \quad (165)$$

$$(v^N)' = -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} + \Phi \quad (166)$$

在傅里叶空间的结果：

$$\begin{aligned} (\delta^N)' &= -(1+w)(kv^N - 3\Psi') + 3\mathcal{H} \left(w\delta^N - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}} \right) \\ (v^N)' &= -\mathcal{H}(1-3w)v^N - \frac{w'}{1+w}v^N + k\frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} - \frac{2}{3}k\frac{w}{1+w}\Pi + k\Phi \end{aligned} \quad (167)$$

4.3 理想流体的标量扰动

运用场方程，在共形牛顿规范下，理想流体情况下标量扰动仅有一个自由度，因为：

$$\Psi = \Phi \quad (168)$$

带回到场方程中，可以得到：

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= 4\pi Ga^2\bar{\rho} [\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N] = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 [\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N] \\ \Phi' + \mathcal{H}\Phi &= 4\pi Ga^2(\bar{\rho}+\bar{p})v^N = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \\ \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi &= 4\pi Ga^2\delta p^N = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta p^N/\bar{\rho}, \end{aligned} \quad (169)$$

这个方程组在改用宇宙时 t 时的结果为：

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= 4\pi Ga^2\bar{\rho} [\delta^N + 3aH(1+w)v^N] \\ \dot{\Phi} + H\Phi &= 4\pi Ga(\bar{\rho}+\bar{p})v^N \\ \ddot{\Phi} + 4H\dot{\Phi} + (2\dot{H} + 3H^2)\Phi &= 4\pi G\delta p^N. \end{aligned} \quad (170)$$

我们定义一个规范不变的熵扰动：

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{H} \left(\frac{\delta p}{\bar{p}'} - \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}'} \right) \equiv H \left(\frac{\delta p}{\dot{\bar{p}}} - \frac{\delta \rho}{\dot{\bar{\rho}}} \right) \quad (171)$$

结合背景中的关系：

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho} \quad \bar{p}' = c_s^2\bar{\rho}' \quad (172)$$

熵扰动可以表达为：

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3(1+w)} \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\delta p}{\bar{\rho}} \right) \quad (173)$$

改写上式：

$$\delta p^N/\bar{\rho} = c_s^2 [\delta^N - 3(1+w)\mathcal{S}] \quad (174)$$

其中，由场方程的前两项：

$$\delta^N = -3\mathcal{H}(1+w)v^N + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi = -\frac{2}{\mathcal{H}}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi \quad (175)$$

再结合场方程最后一式，可得标量扰动的演化方程（可作为练习）：

$$\mathcal{H}^{-2}\Phi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}^{-1}\Phi' + 3(c_s^2-w)\Phi = c_s^2\mathcal{H}^{-2}\nabla^2\Phi - \frac{9}{2}c_s^2(1+w)\mathcal{S} \quad (176)$$

4.4 绝热扰动

绝热扰动的熵不变，即：

$$\mathcal{S} = 0 \Leftrightarrow \delta p = c_s^2\delta\rho \quad (177)$$

则在傅里叶空间中绝热扰动的演化方程可以化为（可作为练习）：

$$\mathcal{H}^{-2}\Phi_{\vec{k}}'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}^{-1}\Phi_{\vec{k}}' + 3(c_s^2-w)\Phi_{\vec{k}} = -\left(\frac{c_s k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi_{\vec{k}} \quad (178)$$

改用宇宙时 t ，结果为：

$$H^{-2}\ddot{\Phi}_{\vec{k}} + (4+3c_s^2)H^{-1}\dot{\Phi}_{\vec{k}} + 3(c_s^2-w)\Phi_{\vec{k}} = -\left(\frac{c_s k}{H}\right)^2\Phi_{\vec{k}} \quad (179)$$

此时扰动的演化是完全可解的。

若绝热演化发生在超视界尺度，条件为 $k \ll \mathcal{H}$ ，结合扰动的演化方程和状态方程与声速的背景关系，可以得到在超视界尺度的绝热扰动演化方程：

$$\ddot{\Phi} - \frac{1}{H}(\ddot{H} - H\dot{H})\dot{\Phi} - \frac{1}{H}\left(H\ddot{H} - 2\dot{H}^2\right)\Phi = 0 \quad (180)$$

解得（可作为练习）：

$$\Phi_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}} \left(1 - \frac{H}{a} \int_0^t adt \right) + B_{\vec{k}} \frac{H}{a} \quad (181)$$

4.5 正压理想流体的标量扰动

正压理想流体的状态方程如下：

$$p = p(\rho) \quad (182)$$

$$\frac{\delta p}{\delta\rho} = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = \frac{dp}{d\rho} = c_s^2 \quad (183)$$

在这个条件下，扰动演化方程如下：

$$\Phi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\Phi' + 3(c_s^2-w)\mathcal{H}^2\Phi + (c_s k)^2\Phi = 0 \quad (184)$$

再利用另外两个扰动方程，在傅里叶空间中可以得到：

$$\begin{aligned} v^N &= \frac{2k}{3(1+w)} (\mathcal{H}^{-2}\Phi' + \mathcal{H}^{-1}\Phi) \\ \delta^N &= -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi - 3(1+w) \left(\frac{\mathcal{H}}{k}\right) v^N = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi - 2(\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi) \end{aligned} \quad (185)$$

至此我们已经基本完成了标量扰动演化方程的构建。

4.6 物质主导宇宙中的标量扰动

我们在解一个扰动问题时的思路如下：

1. 解出背景演化

2. 将背景量作为已知函数用于解扰动演化

在忽略压强的情况下，物质主导宇宙的近似条件为：

$$\bar{p} = w = c_s^2 = 0 \quad \delta p = \Pi = 0 \quad (186)$$

在这个例子中，背景方程为：

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \quad (187)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \quad (188)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 0 \quad (189)$$

在此条件下尺度因子随共形时间的演化为：

$$a(\eta) \propto \eta^2 \quad (190)$$

带入背景的 Friedmann 方程：

$$4\pi Ga^2\bar{\rho} = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 = \frac{6}{\eta^2} \quad (191)$$

在该情形下扰动演化的方程组为：

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho} [\delta^N + 3\mathcal{H}v^N] \quad (192)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}v^N \quad (193)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 0 \quad (194)$$

最后一式导出：

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' = \Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0 \quad (195)$$

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})\eta^{-5} \quad (196)$$

可以看到 Φ 的随时间衰减部分可以很快被忽略，所以我们认为在物质主导宇宙中：

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}) \quad (197)$$

把 $\Phi' = 0$ 带入扰动演化方程组中，我们可以解出速度扰动：

$$v^N = \frac{\mathcal{H}\Phi}{4\pi Ga^2\bar{\rho}} = \frac{2\Phi}{3\mathcal{H}} = \frac{1}{3}\Phi\eta \propto \eta \propto a^{1/2} \propto t^{1/3} \quad (198)$$

相对密度扰动为：

$$\delta^N = -2\Phi + \frac{2}{3\mathcal{H}^2}\nabla^2\Phi \quad (199)$$

在傅里叶空间的解为：

$$\delta_{\vec{k}}^N(\eta) = - \left[2 + \frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \Phi_{\vec{k}} \quad (200)$$

在超视界区域，近似为：

$$\delta_{\vec{k}}^N = -2\Phi_{\vec{k}} = \text{const.} \quad (201)$$

在亚视界区域，近似为：

$$\delta_{\vec{k}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Phi_{\vec{k}} \propto \eta^2 \propto a \propto t^{2/3} \quad (202)$$

上式表明相对密度扰动会在进入视界后正比于尺度因子增长。

4.7 辐射主导宇宙中的标量扰动

辐射主导的条件为：

$$p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow w = c_s^2 = \frac{1}{3} \quad \bar{\rho} \propto a^{-4} \quad \delta p = \frac{1}{3}\delta\rho \quad (203)$$

背景演化 Friedmann 方程为：

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 \propto a^{-2} \Rightarrow a' = \text{const} \quad (204)$$

背景解为：

$$a \propto \eta \Rightarrow \mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \quad \mathcal{H}' = -\frac{1}{\eta^2} \quad (205)$$

扰动演化方程最后一式为：

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{1}{3}k^2\Phi = 0 \quad (206)$$

这个方程的解是一个球贝塞尔函数，最后近似后的结果是一个震荡解（可作为练习）：

$$\Phi_{\vec{k}}(\eta) \approx -3A_{\vec{k}} \frac{\cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta)^2} \quad (207)$$

$$\delta_{\vec{k}}^N = \frac{1}{2} \left(k\eta^2 \Phi'_{\vec{k}} + k\eta \Phi_{\vec{k}} \right) \approx \frac{1}{2} k\eta^2 \Phi'_{\vec{k}} \approx \frac{3}{2} A_{\vec{k}} c_s \sin(c_s k\eta) \quad (208)$$

$$\delta_{\vec{k}}^N \approx -\frac{2}{3}(k\eta)^2 \Phi_{\vec{k}} \approx 2A_{\vec{k}} \cos(c_s k\eta) \quad (209)$$

5 规范

本节将讨论一些不同的规范选择。

5.1 共动规范

在共动规范下等时面与四速垂直，这意味着空间速度为 0，即：

$$v = B = 0 \quad (210)$$

又有规范变换式：

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= v + \xi' \\ \tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0 \end{aligned} \quad (211)$$

于是从任意规范变换到共动规范的变换标量构造为：

$$\begin{aligned} \xi' &= -v \\ \xi^0 &= v - B \end{aligned} \quad (212)$$

于是有扰动的共动变换式：

$$A^C = A - (v - B)' - \mathcal{H}(v - B) \quad (213)$$

$$B^C = B - v + (v - B) = 0 \quad (214)$$

$$D^C = -\frac{1}{3}\nabla^2\xi + \mathcal{H}(v - B) \quad (215)$$

$$E^C = E + \xi \quad (216)$$

$$\psi^C \equiv -\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}(v - B) \quad (217)$$

$$\delta\rho^C = \delta\rho - \bar{\rho}'(v - B) = \delta\rho + 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}(v - B) \quad (218)$$

$$\delta p^C = \delta p - \bar{p}'(v - B) = \delta p + 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}(v - B) \quad (219)$$

$$\delta^C = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)(v - B) \quad (220)$$

$$v^C = v - v = 0 \quad (221)$$

$$\Pi^C = \Pi \quad (222)$$

注意上面一堆式子里还悄悄定义了曲率标量扰动：

$$\mathcal{R} \equiv -\psi^C \quad (223)$$

将上述规范变换用到牛顿规范，得到共动规范与牛顿规范的变换式：

$$A^C = \Phi - v^N - \mathcal{H}v^N$$

$$\mathcal{R} = -\Psi - \mathcal{H}v^N$$

$$E^{C'} = -v^N \quad (224)$$

$$\delta\rho^C = \delta\rho^N + 3\mathcal{H}(1+w)\bar{\rho}v^N$$

$$\delta p^C = \delta p^N + 3\mathcal{H}(1+w)c_s^2\bar{\rho}v^N$$

$$\delta^C = \delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N$$

5.2 混合规范

在牛顿规范下，有如下限制方程：

$$\nabla^2\Psi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 [\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N] \quad (225)$$

把右边换成共动规范下的式子，则有：

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta^C \quad (226)$$

则式子的左边用的是牛顿规范，右边则是共动规范。这个等号是可取的，虽然规范不同，但等式两边的量实际就应该相等。

实际上：

$$\delta^C = \delta + 3\mathcal{H}(1+w)(v - B) \quad (227)$$

是一个规范不变量。

我们将物质扰动写成共动规范，速度扰动写成牛顿规范，爱因斯坦场方程与守恒方程可以写为（可作为练习）：

$$\nabla^2\Psi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta^C \quad (228)$$

$$\Psi - \Phi = 3\mathcal{H}^2 w \Pi \quad (229)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v^N \quad (230)$$

$$\Psi'' + (2 + 3c_s^2)\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + 3(c_s^2 - w)\mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \frac{\delta p^C}{\bar{\rho}} \quad (231)$$

$$\delta'_C - 3\mathcal{H}w\delta_C = (1+w)\nabla^2v^N + 2\mathcal{H}w\nabla^2\Pi \quad (232)$$

$$v'_N + \mathcal{H}v_N = \frac{\delta p^C}{\bar{\rho} + \bar{p}} + \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi + \Phi \quad (233)$$

5.3 共动曲率扰动

有上节倒数第四式可得：

$$v^N = \frac{2}{3\mathcal{H}^2(1+w)}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) \quad (234)$$

我们由此可以得到共动曲率扰动和 Bardeen 势的关系（可作为练习）：

$$\mathcal{R} = -\Psi - \frac{2}{3(1+w)}(\mathcal{H}^{-1}\Psi' + \Phi) \quad (235)$$

上式可改写为共动曲率扰动的演化方程（可作为练习）：

$$\frac{3}{2}(1+w)\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' = \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \left[c_s^2\Psi + \frac{1}{3}(\Psi - \Phi)\right] + \frac{9}{2}c_s^2(1+w)\mathcal{S} \quad (236)$$

其中：

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3(1+w)}\left(\delta - \frac{1}{c_s^2}\frac{\delta p}{\bar{\rho}}\right) \Rightarrow \delta p = c_s^2[\delta\rho - 3(\bar{\rho} + \bar{p})\mathcal{S}] \quad (237)$$

可以发现，对于绝热扰动，共动曲率扰动在视界外是一个常数。

演化方程可以完全变为共动规范：

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' = -\frac{\delta p^C}{\bar{\rho} + \bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi = -c_s^2\left(\frac{\delta^C}{1+w} - 3\mathcal{S}\right) - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\nabla^2\Pi \quad (238)$$

5.4 理想流体标量扰动再讨论

在理想流体条件下，混合规范中的场方程与守恒方程如下：

$$\nabla^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_C \quad (239)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)v_N \quad (240)$$

$$\Phi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\Phi' + 3(c_s^2-w)\mathcal{H}^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\frac{\delta p_C}{\bar{\rho}} \quad (241)$$

$$\delta'_C - 3\mathcal{H}w\delta_C = (1+w)\nabla^2v_N \quad (242)$$

$$v'_N + \mathcal{H}v_N = \frac{\delta p_C}{\bar{\rho} + \bar{p}} + \Phi \quad (243)$$

共动曲率扰动及其演化如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= -\Phi - \frac{2}{3(1+w)\mathcal{H}}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) \\ \mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}' &= -\frac{\delta p^C}{\bar{\rho} + \bar{p}} = -c_s^2\left(\frac{\delta^C}{1+w} - 3\mathcal{S}\right) \end{aligned} \quad (244)$$

联立上面的一些方程可以推出 Bardeen 方程（可作为练习）：

$$\mathcal{H}^{-2}\delta''_C + (1-6w+3c_s^2)\mathcal{H}^{-1}\delta'_C - \frac{3}{2}(1+8w-6c_s^2-3w^2)\delta_C = c_s^2\mathcal{H}^{-2}\nabla^2[\delta_C - 3(1+w)\mathcal{S}] \quad (245)$$

共动曲率扰动可以写成如下方程：

$$\frac{2}{3}\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \frac{5+3w}{3}\Phi = -(1+w)\mathcal{R} \quad (246)$$

假设某一时期状态方程基本为常数，对于超视界的绝热理想流体，上述方程有一特解：

$$\Phi = -\frac{3+3w}{5+3w}\mathcal{R} \quad (247)$$

我们可以忽略方程的通解，因为其衰减较快。

所以在状态方程基本不变的假设下：

$$\Phi = \Psi = -\frac{3+3w}{5+3w} \mathcal{R} = \text{const} \quad (248)$$

5.5 同步规范

同步规范的定义要求为：

$$A = B_i = 0 \quad (249)$$

于是构造的规范变换为：

$$\begin{aligned} \xi^{0'} + \mathcal{H}\xi^0 &= A \\ \xi' &= -\xi^0 - B \end{aligned} \quad (250)$$

在同步规范下度规扰动只存在空间部分：

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -2D^Z\delta_{ij} + 2\left(E_{,ij}^Z - \frac{1}{3}\nabla^2 E^Z \delta_{ij}\right) \\ &= -2\psi^Z\delta_{ij} + 2E_{,ij}^Z \\ ds^2 &= a^2\{-d\eta^2 + [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j\} \end{aligned} \quad (251)$$

定义如下标量记号：

$$\begin{aligned} h &\equiv -6D^Z \equiv h_i^{iZ} \\ \eta &\equiv \psi^Z = D^Z + \frac{1}{3}\nabla^2 E^Z \\ \mu &\equiv 2E^Z \end{aligned} \quad (252)$$

在此记号下，空间扰动为：

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{1}{3}h\delta_{ij} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\mu \\ &= -2\eta\delta_{ij} + \mu_{,ij} \end{aligned} \quad (253)$$

从同步规范到牛顿规范：

$$\begin{aligned} \xi_{Z \rightarrow N} &= -\frac{1}{k}E^Z = -\frac{1}{2k}\mu = \frac{1}{2k}(h + 6\eta) \\ \xi_{Z \rightarrow N}^0 &= +\frac{1}{k^2}E^{Z'} = -\frac{1}{k}\xi'_{Z \rightarrow N} = +\frac{1}{2k^2}\mu' \end{aligned} \quad (254)$$

于是 Bardeen 势可以写为：

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{k^2}\left(\mathcal{H}E^{Z'} + E^{Z''}\right) = \frac{1}{2k^2}\left(-\mathcal{H}\mu' - \mu''\right) = \frac{1}{2k^2}[h'' + 6\eta'' + \mathcal{H}(h' + 6\eta')] \\ \Psi &= \psi^Z + \frac{1}{k^2}\mathcal{H}E^{Z'} = \eta - \frac{1}{2k^2}\mathcal{H}(h' + 6\eta') \end{aligned} \quad (255)$$

在同步规范下爱因斯坦场方程为：

$$\begin{aligned} k^2\eta - \frac{1}{2}\mathcal{H}h' &= -4\pi Ga^2\delta\rho^Z = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta^Z \\ k^2\eta' &= 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})kv^Z = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+w)kv^Z \\ h'' + 2\mathcal{H}h' - 2k^2\eta &= -24\pi Ga^2\delta p^Z = -9\mathcal{H}^2\frac{\delta p^Z}{\bar{\rho}} \\ h'' + 6\eta'' + 2\mathcal{H}h' + 12\mathcal{H}\eta' - 2k^2\eta &= -16\pi Ga^2\bar{p}\Pi = -6\mathcal{H}^2w\Pi \end{aligned} \quad (256)$$

守恒方程为：

$$\begin{aligned}
\delta\rho^Z' &= -3\mathcal{H}(\delta\rho^Z + \delta p^Z) - (\bar{\rho} + \bar{p})\left(\frac{1}{2}h' + kv^Z\right) \\
(\bar{\rho} + \bar{p})v^Z' &= -(\bar{\rho} + \bar{p})'v^Z - 4\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})v^Z + k\delta p^Z - \frac{2}{3}k\bar{p}\Pi \\
\delta^{Z'} &= -(1+w)\left(kv^Z + \frac{1}{2}h'\right) + 3\mathcal{H}\left(w\delta^Z - \frac{\delta p^Z}{\bar{\rho}}\right) \\
v^{Z'} &= -\mathcal{H}(1-3w)v^Z - \frac{w'}{1+w}v^Z + \frac{k\delta p^Z}{\bar{\rho} + \bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}k\Pi
\end{aligned} \tag{257}$$

6 多成分流体扰动

本节将从单一流体转向多流体。

6.1 流体成分的基本量

流体在作为成分时，我们有如下定义：

$$\bar{T}_\nu^\mu = \sum_i \bar{T}_{\nu(i)}^\mu \quad \delta T_\nu^\mu = \sum_i \delta T_{\nu(i)}^\mu \tag{258}$$

$$\bar{\rho} = \sum_i \bar{\rho}_i \tag{259}$$

$$\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i w_i \bar{\rho}_i \tag{260}$$

$$w \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \sum_i \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} w_i \tag{261}$$

$$c_s^2 \equiv \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = \frac{\sum \bar{p}'_i}{\bar{\rho}'} = \sum_i \frac{\bar{\rho}'_i}{\bar{\rho}'} c_i^2 \tag{262}$$

$$w_i \equiv \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} \quad c_i^2 \equiv \frac{\bar{p}'_i}{\bar{\rho}'_i} \tag{263}$$

$$\delta\rho = \sum_i \delta\rho_i = \sum_i \bar{\rho}_i \delta_i \tag{264}$$

$$\delta p = \sum_i \delta p_i \tag{265}$$

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \sum_i \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} \delta_i \tag{266}$$

$$\delta_i \equiv \delta\rho_i / \bar{\rho}_i \tag{267}$$

由 δT_0^l 有（可作为练习）：

$$(\bar{\rho} + \bar{p})v_l = \sum_i (\bar{\rho}_i + \bar{p}_i)v_{l(i)} \tag{268}$$

$$v_l = \sum_i \frac{\bar{\rho}_i + \bar{p}_i}{\bar{\rho} + \bar{p}} v_{l(i)} = \sum_i \frac{1+w_i}{1+w} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}} v_{l(i)} \tag{269}$$

$$\Sigma_{lm} = \sum_i \Sigma_{lm(i)} = \sum_i \bar{p}_i \Pi_{lm(i)} \tag{270}$$

$$\Pi_{lm(i)} \equiv \Sigma_{lm(i)} / \bar{p}_i \tag{271}$$

$$\Pi_{lm} \equiv \frac{\Sigma_{lm}}{\bar{p}} = \sum_i \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}} \Pi_{lm(i)} = \sum_i \frac{w_i \bar{\rho}_i}{w \bar{\rho}} \Pi_{lm(i)} \tag{272}$$

流体成分的规范变换：

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta\rho}_i &= \delta\rho_i - \bar{\rho}'_i \xi^0 \\
\widetilde{\delta p}_i &= \delta p_i - \bar{p}'_i \xi^0 \\
\tilde{v}_i &= v_i + \xi' \\
\tilde{\Pi}_i &= \Pi_i \\
\tilde{\delta}_i &= \delta_i - \frac{\bar{\rho}'_i}{\bar{\rho}_i} \xi^0
\end{aligned} \tag{273}$$

定义熵扰动：

$$S_{ij} \equiv -3\mathcal{H} \left(\frac{\delta\rho_i}{\bar{\rho}'_i} - \frac{\delta\rho_j}{\bar{\rho}'_j} \right) \tag{274}$$

6.2 流体成分的方程

对于没有相互作用的流体，背景守恒方程：

$$\bar{\rho}'_i = -3\mathcal{H}(\bar{\rho}_i + \bar{p}_i) \quad (275)$$

所以声速可以写为：

$$c_s^2 = \sum \frac{\bar{\rho}_i + \bar{p}_i}{\bar{\rho} + \bar{p}} c_i^2 \quad (276)$$

熵扰动写成：

$$S_{ij} = \frac{\delta\rho_i}{(1+w_i)\bar{\rho}_i} - \frac{\delta\rho_j}{(1+w_j)\bar{\rho}_j} = \frac{\delta_i}{1+w_i} - \frac{\delta_j}{1+w_j} \quad (277)$$

于是带入了背景的规范变换方程如下：

$$\begin{aligned} \delta\rho_i^C &= \delta\rho_i^N + 3\mathcal{H}(1+w_i)\bar{\rho}_i v^N \\ \delta p_i^C &= \delta p_i^N + 3\mathcal{H}(1+w_i)c_i^2 \bar{\rho}_i v^N \\ \delta_i^C &= \delta_i^N + 3\mathcal{H}(1+w_i)v^N \end{aligned} \quad (278)$$

宇宙大尺度结构

1 关联函数

本节主要介绍大尺度结构中关联函数相关知识。

1.1 非均匀性

我们在宇宙扰动理论中早已熟知的物质非均匀性可以表示为：

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t, \mathbf{x}) \\ p(t, \mathbf{x}) &= \bar{p}(t) + \delta p(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (279)$$

定义相对密度扰动：

$$\delta(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\delta\rho(t, \mathbf{x})}{\bar{\rho}(t)} \quad (280)$$

在统计中，我们习惯用到系综平均的概念，定义为：

$$\langle f \rangle \equiv \int d\xi P(\xi) f(\xi) \quad (281)$$

可以理解为期望。

宇宙学原理使得：

$$\langle \delta\rho \rangle = 0 \quad \langle \delta \rangle = 0 \quad (282)$$

所以光用 $\langle \delta \rangle$ 来表征非均匀性是不行的，但它的平方的期望可以，我们称之为密度扰动的方差：

$$\langle \delta^2 \rangle = \frac{\langle \delta\rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \quad (283)$$

1.2 自相关函数

密度扰动的方差给了我们整个宇宙扰动的强度信息，但没有给我们扰动的分布信息，为了获取更多信息，我们定义一个密度的两点自相关函数，简称两点关联函数：

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle \quad (284)$$

出于宇宙学原理的规定，密度扰动的两点关联函数与两点具体位置无关，只与两点的间距有关：

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (285)$$

1.3 功率谱

我们可以将密度扰动展开成傅里叶级数：

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (286)$$

其傅里叶系数为：

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \quad (287)$$

其中 V 可以看做一个很大空间的体积，有周期性边界条件且边界无影响。

我们定义它的两点关联函数为（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle &= \frac{1}{V^2} \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \int d^3x e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} P(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (288)$$

其中我们定义了密度扰动的功率谱：

$$P(\mathbf{k}) \equiv V \left\langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \right\rangle = \int d^3r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \quad (289)$$

我们可以发现功率谱其实就是两点关联函数变换到傅里叶空间，所以有：

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} P(\mathbf{k}) \quad (290)$$

有各向同性性可以得到一维的功率谱和两点关联函数间的傅里叶变换：

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^\infty \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi r^2 dr \\ \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty P(k) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk \end{aligned} \quad (291)$$

于是密度扰动的方差可以表示成：

$$\langle \delta^2 \rangle \equiv \xi(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty P(k) 4\pi k^2 dk = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty k^3 P(k) d\ln k \equiv \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(k) d\ln k \quad (292)$$

这里又定义了另一种无量纲的功率谱：

$$\mathcal{P}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P(k) \quad (293)$$

1.4 窗口函数

在实际观测中，我们需要在一定的尺度范围内研究我们的宇宙，为了排除过小的尺度，我们定义窗口函数 $W(\mathbf{r})$ 来过滤出小尺度。它的性质是在我们规定区域之外的函数值接近零，在区域内相对大，并且满足归一化条件：

$$\int d^3r W(\mathbf{r}) = 1 \quad (294)$$

定义经过过滤后的密度场是将其与窗口函数卷积：

$$\delta(\mathbf{x}, R) \equiv (\delta * W)(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (295)$$

在傅里叶空间：

$$\delta(\mathbf{k}, R) = \delta(\mathbf{k}) W(\mathbf{k}) \quad (296)$$

R 为我们规定区域的半径。

例如，我们可以定义高帽窗口函数：

$$W_T(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{-1}, \quad |\mathbf{r}| \leq R \quad (297)$$

其在区域外的值都为 0，相当于将扰动在窗口内作平均。

还有数学上更实用的高斯窗口函数：

$$W_G(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R^3} e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2/R^2} \quad (298)$$

1.5 幂律谱

在某个观测区间内我们可以用简单的幂律关系来描述功率谱，如：

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma} \quad P(k) \propto k^n \quad (299)$$

对于功率谱，我们写成如下形式：

$$P(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p} \right)^n \quad \mathcal{P}(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n+3} \quad (300)$$

其中 k_p 被称为主尺度， A 定义为在主尺度的功率谱幅，注意它在上面两个式子里的取值是不一样的。

我们由此定义谱指数：

$$n(k) \equiv \frac{d \ln P}{d \ln k} \quad (301)$$

它是用对数坐标画功率谱 $P(k)$ 时的斜率。

1.6 星系两点关联函数

我们可以定义星系数密度扰动，假设其与物质扰动相等：

$$\delta_g \equiv \frac{\delta n}{\bar{n}} = \delta \equiv \frac{\delta \rho_m}{\bar{\rho}_m} \quad (302)$$

那么在某一体积内发现一个星系的概率为：

$$dP_1 = \langle n(\mathbf{x}) \rangle dV_1 = \langle \bar{n} + \delta n(\mathbf{x}) \rangle dV_1 = \bar{n} dV_1 \quad (303)$$

发现一个星系对的概率为：

$$\begin{aligned} dP_{12} &= \langle n(\mathbf{x})n(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle dV_1 dV_2 = \bar{n}^2 \langle [1 + \delta(\mathbf{x})][1 + \delta(\mathbf{x}+\mathbf{r})] \rangle dV_1 dV_2 \\ &= \bar{n}^2 [1 + \langle \delta(\mathbf{x}) \rangle + \langle \delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle + \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle] dV_1 dV_2 \\ &= \bar{n}^2 [1 + \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle] dV_1 dV_2 \end{aligned} \quad (304)$$

上下两式相除，我们可以得到星系两点关联函数的定义式：

$$dP \equiv \bar{n} [1 + \xi_g(\mathbf{r})] dV = \bar{n} [1 + \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle] dV \quad (305)$$

然而由于星系的行为并不完全和物质相同，我们定义一个星系偏袒数：

$$b_g \equiv \frac{\delta_g}{\delta_m} \Rightarrow \xi_g = b_g^2 \xi \quad (306)$$

2 牛顿扰动理论

本节主要介绍大尺度结构中常用的牛顿扰动理论。

2.1 金斯方程

牛顿力学里的守恒方程、流体方程、引力方程分别为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (307)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} p + \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\Phi} = 0 \quad (308)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \tilde{\Phi} = 4\pi G \rho \quad (309)$$

由于我们需要在共动坐标系 (t, \mathbf{x}) 讨论问题，而上式所用坐标系并 (t', \mathbf{r}) 非共动坐标，两系间的坐标变换为：

$$t' = t \quad \mathbf{r} = a(t) \mathbf{x} \quad (310)$$

我们可以由此推导出两者导数算符的变换关系：

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - H \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \quad \nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \quad (311)$$

我们在原方程上作线性微扰：

$$\rho(t', \mathbf{r}) = \bar{\rho}(t') + \delta\rho(t', \mathbf{r}) \quad (312)$$

$$p(t', \mathbf{r}) = \bar{p}(t') + \delta p(t', \mathbf{r}) \quad (313)$$

$$\mathbf{u}(t', \mathbf{r}) = H(t') \mathbf{r} + \mathbf{v}(t', \mathbf{r}) \quad (314)$$

$$\tilde{\Phi}(t', \mathbf{r}) = \frac{2\pi G}{3} \bar{\rho}(t') r^2 + \Phi(t', \mathbf{r}) \quad (315)$$

其中最后一式用了均匀密度分布的球对称引力势作为平均势。

导出扰动方程（可作为练习）：

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t'} + 3H\delta\rho + H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta\rho + \bar{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (316)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} + H\mathbf{v} + H\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_{\mathbf{r}} \delta p + \nabla_{\mathbf{r}} \Phi = 0 \quad (317)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \delta\rho \quad (318)$$

并将其改写为共动坐标：

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (319)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla_{\mathbf{x}} \delta p + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi = 0 \quad (320)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (321)$$

再利用流体的守恒方程：

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0 \quad (322)$$

可以推导出（可作为练习）：

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (323)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(a\mathbf{v}) + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_{\mathbf{x}} \delta p + \nabla_{\mathbf{x}} \Phi = 0 \quad (324)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \quad (325)$$

在傅里叶空间对于标量扰动，上式化为：

$$\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{ikv_{\mathbf{k}}}{a} = 0 \Rightarrow v_{\mathbf{k}} = i\frac{a}{k}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} \quad (326)$$

$$\frac{d}{dt}(av_{\mathbf{k}}) + ik\frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}} + ik\Phi_{\mathbf{k}} = 0 \quad (327)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}} = -4\pi G \left(\frac{a}{k}\right)^2 \bar{\rho} \delta_{\mathbf{k}} \quad (328)$$

整理上面的方程组，消掉引力势，我们可以推出标量扰动的演化方程（可作为练习）：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = -\frac{k^2}{a^2} \frac{\delta p_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}} + 4\pi G \bar{\rho} \delta_{\mathbf{k}} \quad (329)$$

若定义声速：

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (330)$$

在绝热扰动下有如下条件：

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (331)$$

密度演化方程简化为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left[\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right] \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (332)$$

上式被称作金斯方程。

方程左边第三项的系数符号决定了扰动的演化模式，定义金斯波数：

$$k_J = \frac{a\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}}{c_s} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{c_s} \mathcal{H} \quad (333)$$

其对应的尺度称为金斯尺度：

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = 2\pi c_s \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{H}^{-1} \quad (334)$$

我们可以发现在金斯尺度内的扰动波数使得第三项系数为正，于是方程的解为震荡模式，若尺度远小于金斯尺度，则方程可以化为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (335)$$

对于远大于金斯尺度的扰动，方程又可化为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G \bar{\rho} \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (336)$$

以忽略压强的 CDM 宇宙为例，我们结合背景解得其扰动为：

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = b_1 t^{2/3} + b_2 t^{-1} \quad (337)$$

对于有多种组成成分的流体，我们认为他们之间除了引力不发生其他相互作用，他们各自的扰动方程改为：

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_{ik} + 2H\dot{\delta}_{ik} &= -\frac{k^2}{a^2} \frac{\delta p_{ik}}{\bar{\rho}_i} + 4\pi G \delta \rho_k \\ \delta \rho_k &= \sum_j \bar{\rho}_j \delta_{jk}\end{aligned}\tag{338}$$

和前文结果相比，有所改变的只是方程右边的最后一项，引力势来自所有成分之和，原因在于引力作用的不可忽略。

2.2 梅萨洛方程

对于有些流体我们可以忽略其扰动，视其为均匀，称之为平滑流体，但其对背景的影响不能忽略，所以我们的扰动方程：

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left[\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho}_m \right] \delta_k = 0 \tag{339}$$

背景部分，如 $a(t), H(t)$ 都加入了平滑流体的作用，而扰动部分则不带有平滑部分。

现在我们考虑平坦宇宙的 CDM 和辐射模型，我们把辐射看做平滑部分，只考虑 CDM 的扰动。

CDM 的状态方程决定了它的声速为 0，说明其金斯尺度也为 0，说明其解不会是震荡解。

具体地，扰动方程改写为：

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k - 4\pi G \bar{\rho}_m \delta_k = 0 \tag{340}$$

为了测试平滑流体的作用，我们把背景方程写出：

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} \tag{341}$$

其中：

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r \tag{342}$$

我们希望把背景和扰动联立以解出扰动随时间演化的行为，我们做一个变量替换：

$$y \equiv \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} \tag{343}$$

我们可以推出以下方程（可作为练习）：

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \delta' - \frac{3}{2y(1+y)} \delta = 0 \tag{344}$$

上式被称为梅萨洛方程。

解方程得到 CDM 的扰动模式：

$$\delta = \delta_{prim} \left(1 + \frac{3y}{2} \right) = \delta_{prim} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a}{a_{eq}} \right) \tag{345}$$

在 CDM 演化后期，物质扰动随尺度因子线性增长。

2.3 亚视界尺度的扰动

牛顿扰动理论只在亚视界尺度成立，即 $k \gg \mathcal{H}$ ，接下来我们在该尺度内讨论宇宙的扰动。

我们的宇宙由以下五部分组成：

1. 冷暗物质
2. 重子物质
3. 光子

4. 中微子

5. 暗能量

他们的密度之和为：

$$\rho = \underbrace{\rho_c + \rho_b}_{\rho_m} + \underbrace{\rho_\gamma + \rho_\nu}_{\rho_r} + \rho_d \quad (346)$$

在退耦之前，重子和光子可以相互作用，我们在退耦之前的阶段将二者作为整体：

$$\rho_{b\gamma} = \rho_b + \rho_\gamma \quad (347)$$

而辐射部分又可以看做平滑流体，所以我们宇宙的组成成分可以写为：

$$\begin{aligned} t < t_{\text{dec}} : \quad \rho &= \rho_c + \rho_{b\gamma} + \rho_s \quad (\rho_s = \rho_\nu + \rho_d) \\ t > t_{\text{dec}} : \quad \rho &= \rho_c + \rho_b + \rho_s \quad (\rho_s = \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_d) \end{aligned} \quad (348)$$

我们知道重子物质约为冷暗物质的五分之一，我们在考虑 CDM 扰动时可以忽略重子成分：

$$\rho_m \approx \rho_c \quad (349)$$

2.3.1 重子-CDM 模型

然而对于观测来讲，我们能够观测到的是重子成分的结构，所以我们还需要考虑它的扰动模式。我们考虑如下成分：

$$\rho = \rho_c + \rho_b + \rho_s \quad (350)$$

平滑部分由辐射与暗能量组成。

CDM 和重子物质组成总物质：

$$\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_c + \bar{\rho}_b \quad (351)$$

则他们联合的扰动定义为：

$$\delta = \frac{\delta\rho_c + \delta\rho_b}{\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_b} \quad (352)$$

忽略物质成分的压强，于是他们分别有扰动方程：

$$\ddot{\delta}_c + 2H\dot{\delta}_c = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \quad (353)$$

$$\ddot{\delta}_b + 2H\dot{\delta}_b = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta \quad (354)$$

再定义一个 B-CDM 的熵扰动：

$$S_{cb} \equiv \delta_c - \delta_b \quad (355)$$

可以得到熵扰动方程：

$$\ddot{S}_{cb} + 2H\dot{S}_{cb} = 0 \quad (356)$$

对于物质主导的宇宙，上述方程的解为：

$$S_{cb} = A + Bt^{-1/3} \quad (357)$$

同时我们有忽略重子与压强的 CDM 的增长模式：

$$\delta_c = Ct^{2/3} + Dt^{-1} \sim Ct^{2/3} \quad (358)$$

2.3.2 Λ CDM 模型

对于后期加速膨胀的宇宙，暗能量对背景起到了很大的作用，但扰动仍来自重子和 CDM。我们考虑一个忽略辐射的 Λ CDM 宇宙，其扰动方程为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (359)$$

其中：

$$4\pi G\bar{\rho}_m = \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 a^{-3} \quad (360)$$

对于背景由暗能量和物质主导的宇宙，我们有如下背景演化：

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0 t\right) \quad (361)$$

Friedmann 方程为：

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \quad (362)$$

带入背景扰动方程化为（可作为练习）：

$$\delta'' + \left(\frac{H'}{H} + \frac{3}{a}\right)\delta' - \frac{3\Omega_m}{2a^5} \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \delta = 0 \quad (363)$$

注意式中的导数是对尺度因子求导。

我们得到其中的增长模式：

$$\delta = A(\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^3\right)^{3/2}} \quad (364)$$

上式去暗能量组分很小时的近似为：

$$\delta \approx A\Omega_m^{1/2} a^{-3/2} \int_0^a x^{3/2} dx = \frac{2}{5}\Omega_m^{1/2} A a \quad (365)$$

在现在尺度因子为 1 的情况下有：

$$\frac{2}{5}\Omega_m^{1/2} A \equiv \tilde{\delta} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5}{2}\Omega_m^{-1/2} \tilde{\delta} \quad (366)$$

以此来确定系数，增长模式的方程化为：

$$\delta = \tilde{\delta} \frac{5}{2} \left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^3\right)^{3/2}} \quad (367)$$

2.3.3 增长函数与增长率

我们定义一个增长方程：

$$D(a) \equiv \frac{\delta(a)}{\delta_{\text{ref}}} \quad (368)$$

我们取：

$$\delta_{\text{ref}} = \tilde{\delta} \quad (369)$$

则 Λ CDM 的增长函数为：

$$D(a) = \frac{5}{2} \left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^3\right)^{3/2}} \quad (370)$$

定义增长率:

$$f \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a} = \frac{d \ln \delta}{d \ln a} = \frac{a}{\delta} \frac{d \delta}{d a} \quad (371)$$

我们可以发现在物质主导时增长率为 1。

3 相对论扰动理论

本节介绍大尺度结构形成中对相对论扰动理论的应用。

3.1 超视界尺度的扰动演化

我们在扰动理论一章中讨论过类似的问题，假设状态方程基本不变，对于绝热扰动，共动曲率扰动为：

$$\mathcal{R} = -\frac{5+3w}{3+3w}\Phi - \frac{2}{3+3w}H^{-1}\dot{\Phi} \quad (372)$$

具体地：

$$\begin{aligned} \Phi_k &= -\frac{2}{3}\mathcal{R}_k && (\text{辐射主导}, w = \frac{1}{3}) \\ \Phi_k &= -\frac{3}{5}\mathcal{R}_k && (\text{物质主导}, w = 0) \end{aligned} \quad (373)$$

Bardeen 势：

$$\Phi_k = -\frac{3+3w}{5+3w}\mathcal{R}_k \quad (374)$$

3.2 进入视界

进入视界后，我们可以用牛顿扰动理论，我们给过扰动方程：

$$\delta_k = -\left(\frac{k}{a}\right)^2 \frac{\Phi_k}{4\pi G \bar{\rho}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \Phi_k = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi_k \quad (375)$$

结合背景方程：

$$4\pi G \bar{\rho} = \frac{3}{2} H^2 \quad (376)$$

对于大尺度扰动 $k \ll k_{\text{eq}}$ ，在物质主导后进入视界，得到密度扰动的演化：

$$\begin{aligned} \Phi_k &= -\frac{3}{5}\mathcal{R}_k && (\text{物质主导}) \\ \delta_k &= -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi_k = \frac{2}{5} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \mathcal{R}_k \propto \frac{1}{(aH)^2} \propto t^{2/3} \propto a \end{aligned} \quad (377)$$

k_{eq} 的尺度与视界尺度相等

注意这里的共动曲率扰动取原初常值。

对于在辐射主导时就进入视界的小尺度扰动，在进入视界前，保持我们之前得到的关系：

$$\Phi_k = -\frac{2}{3}\mathcal{R}_k \quad (378)$$

则在进入视界时：

$$\delta_k \approx -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 \Phi_k = -\frac{2}{3} \Phi_k \approx \frac{4}{9} \mathcal{R}_k \quad (379)$$

在辐射主导时期利用绝热条件，物质与辐射的扰动有如下关系：

$$\delta_c = \frac{3}{4} \delta_r \quad (380)$$

所以在此时物质的扰动为：

$$\delta_{ck} \approx \frac{3}{4} \delta_k \approx \frac{1}{3} \mathcal{R}_k \quad (381)$$

这种关系保持至物质占主导时期。

3.3 转移函数

我们尝试在描述小尺度扰动时使用大尺度的结论：

$$\delta_k(t) = \frac{2}{5} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \mathcal{R}_k \quad (k \ll k_{eq}) \quad (382)$$

于是我们定义转移函数：

$$\delta_k(t) = \frac{2}{5} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 T(k, t) \mathcal{R}_k \quad (383)$$

其中 \mathcal{R}_k 仍是原初扰动。

所以根据上节，我们可以得到转移函数的估计：

$$\begin{aligned} T(k) &= 1 & k \ll k_{eq} \\ T(k) &\sim \left(\frac{k_{eq}}{k} \right)^2 & k \gg k_{eq} \end{aligned} \quad (384)$$

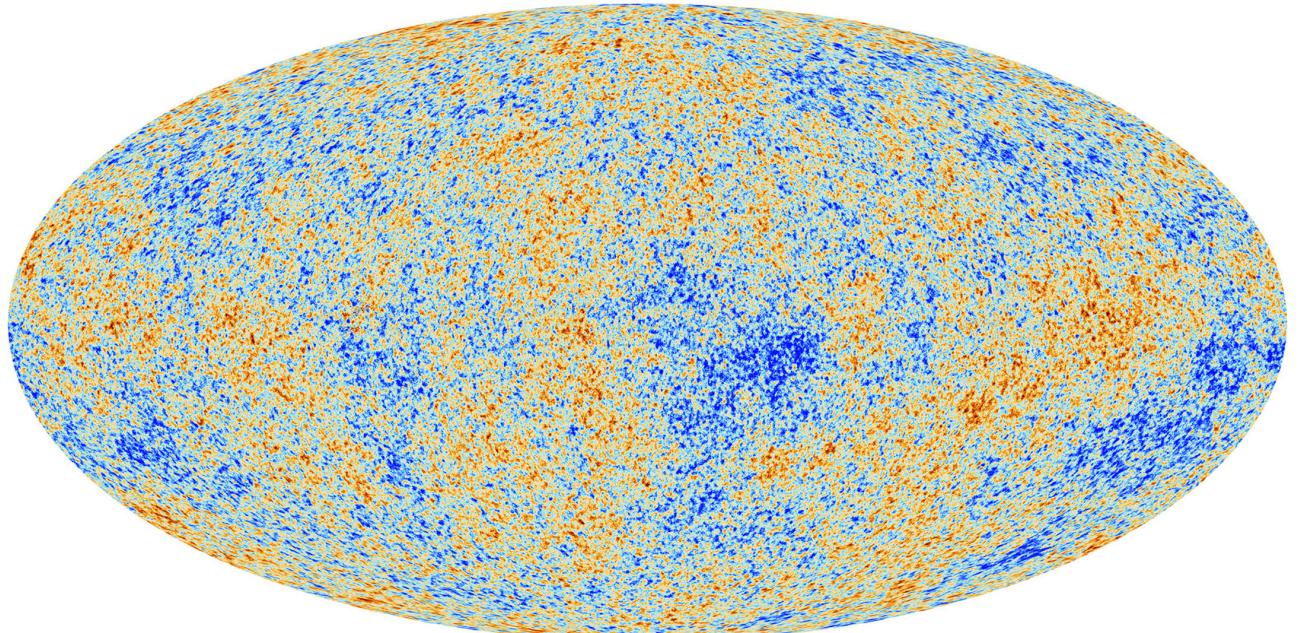
宇宙微波背景辐射（CMB）

1 角功率谱

本节主要介绍 CMB 角功率谱相关知识。

1.1 CMB 简介

CMB 在大尺度上有极高的各向异性，但精确测量可以发现微小的各向异性，这反映了宇宙的原初扰动。



我们接收到的 CMB 光子来自我们过去的光锥与退耦时期的等时超曲面的相交部分，很显然这是一个球面的一部分，我们称之为最后散射截面（是个类空超曲面），我们位于这个球体的中心。

我们观察到的各向异性主要来自两个方面：

- 光子在最后散射截面固有的温度差异
- 光子在传播过程中受到不同的引力红移而引起的差异

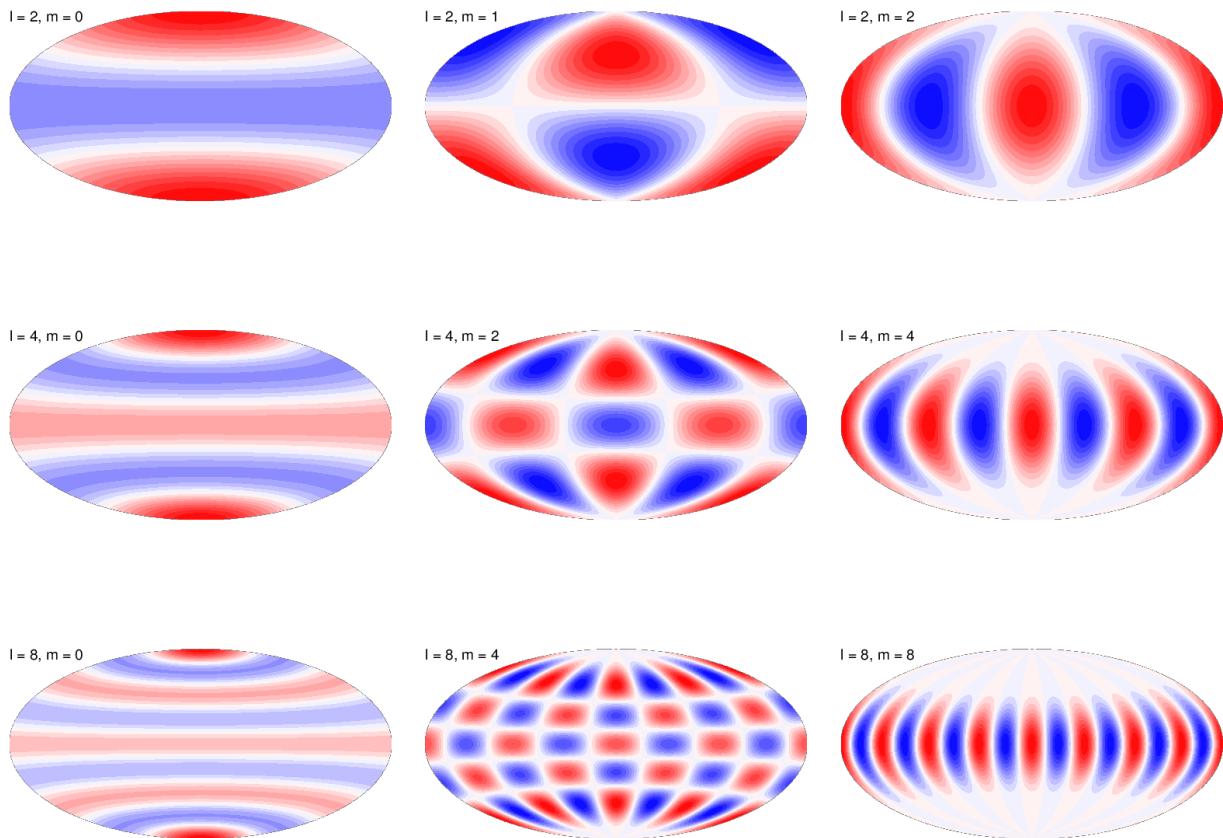
$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{观测}} = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{固有}} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{传播}} \quad (385)$$

1.2 球谐函数展开

CMB 的温度各向异性可以看做是一个建立在天球坐标上的方程，我们可以用球谐函数将其多极展开：

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (386)$$

直观来讲： ℓ 决定了各向异性图案的大小， m 决定了图案的指向或形状。 ℓ 越小，代表空间频率更低，意味着更大的尺度。球谐函数的图像如下图所示：



更有用的是多极系数，他反映了 CMB 是用球谐函数由何种方式组成的：

$$a_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) d\Omega \quad (387)$$

而球谐函数可以写成连带勒让德函数：

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (388)$$

1.3 理论角功率谱

考虑一阶扰动理论，我们认为多极系数是高斯型随机变量，其期望为 0：

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0 \quad (389)$$

可以证明 $a_{\ell m}$ 是独立随机变量：

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = 0 \quad \ell \neq \ell' \text{ 或 } m \neq m' \quad (390)$$

我们想要得到的是 $a_{\ell m}$ 的方差，即 $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ ，在统计上它对 m 是简并的，因为 m 的改变只会导致球谐函数形状和指向的改变，并不会使其大小发生变化，我们定义：

$$C_\ell \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (391)$$

通过定义可以得到 $a_{\ell m}$ 的正交性：

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell \quad (392)$$

C_ℓ 被称为角功率谱，对于高斯型的扰动，它包含了 CMB 各向异性的全部信息，而这些信息我们是可以通过理论预言的。分析 CMB 各向异性的工作就相当于从 CMB 温度各向异性的观测数据来反推角功率谱，并且与理论预言相比较。

实际上 CMB 温度各向异性和角功率谱是相互关联的（可作为练习）：

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \right\rangle \\ &= \sum_{\ell \ell'} \sum_{m m'} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle \\ &= \sum_{\ell} C_\ell \sum_m |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell \end{aligned} \quad (393)$$

上式推导的最后一步用到了球谐函数的性质：

$$\sum_m |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi} \quad (394)$$

所以如果我们画出 $\frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell$ 的函数曲线，曲线的积分面积就是温度偏离平均温度的方差。

然而现在的问题在于 $\frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell$ 貌似和方向无关，但显然在观测上应该是有关的，原因是这里的平均代表了将所有可能的满足 C_ℓ 的 CMB 的平均，当然就没有哪一个角度更为特殊。

换句话说，我们在理论计算角功率谱时考虑的是高斯型 $a_{\ell m}$ ，而平均的意义就在于我们的假设可以导出无数多个不同行为的宇宙，每个宇宙的温度涨落是各向异性的，但将无数多个宇宙求方差各向异性就被消除了，自然与角度无关。

对于两个不同的指向 $\hat{\mathbf{n}} = (\theta, \phi), \hat{\mathbf{n}}' = (\theta', \phi')$ ，我们可以定义一个角关联函数：

$$C(\vartheta) \equiv \left\langle \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}}')}{T} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_\ell P_\ell(\cos \vartheta) \quad (395)$$

其中 ϑ 是两个指向的夹角。

1.4 观测角功率谱

上节提到我们可以得到多极系数 $a_{\ell m}$ 的方差 $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ ，但仔细想想我们只有一个宇宙，一个 CMB，一套 $a_{\ell m}$ ，哪里来的平均？所以我们只能用我们宇宙的 CMB 来计算角功率谱，我们定义观测角功率谱：

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |a_{\ell m}|^2 \quad (396)$$

我们应该注意到其形式与理论的定义相比少了平均这一步操作。

按照定义，我们观测的温度涨落的方差是对温度涨落的平方求平均，即：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \right]^2 d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \underbrace{\int Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) d\Omega}_{\delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \sum_m |a_{\ell m}|^2 = \sum_{\ell} \underbrace{\frac{2\ell+1}{4\pi} \hat{C}_{\ell}}_{(2\ell+1)\hat{C}_{\ell}}
 \end{aligned} \tag{397}$$

1.5 宇宙方差

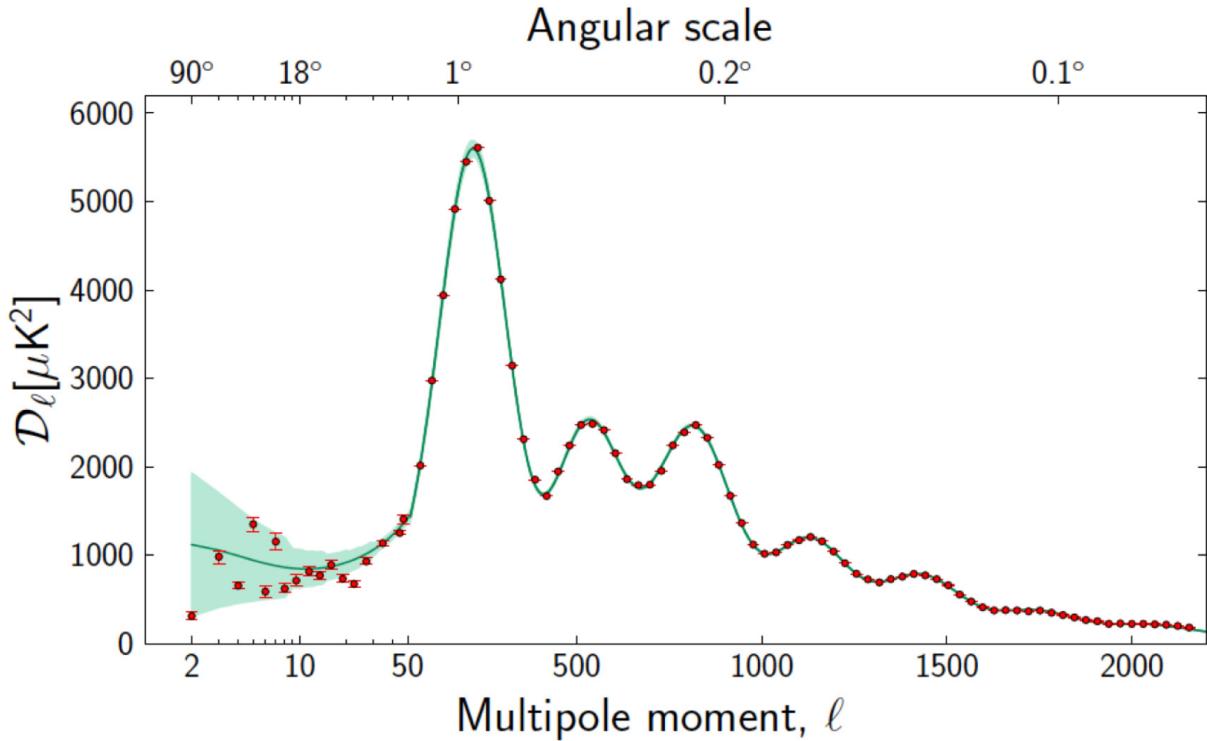
我们希望观测角功率谱的期望应该等于理论角功率谱：

$$\langle \hat{C}_{\ell} \rangle = C_{\ell} \Rightarrow \langle \hat{C}_{\ell} - C_{\ell} \rangle = 0 \tag{398}$$

但实际上是有偏差的，我们定义他们间的方差，称之为宇宙方差（可作为练习）：

$$\langle (\hat{C}_{\ell} - C_{\ell})^2 \rangle = \frac{2}{2\ell+1} C_{\ell}^2 \tag{399}$$

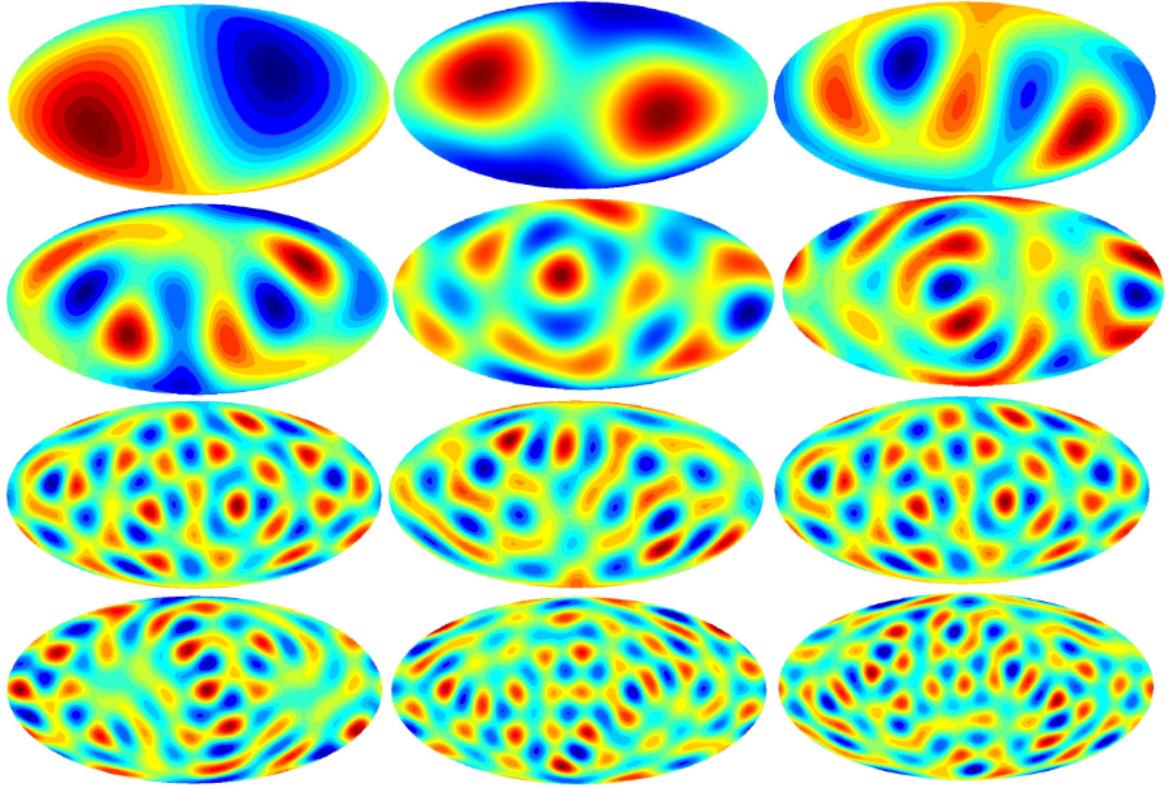
宇宙方差限制了 CMB 观测值与理论比较的准确性，在大尺度上影响显著，如图：



红色为观测结果，绿线为理论拟合结果，不色的图案就是宇宙方差所确定的精确范围。

1.6 多极子与尺度

前文提到，多极子数与尺度大小有关： ℓ 越小，尺度越大； ℓ 越大，尺度越小。原因是 ℓ 表征了球谐函数的空间频率，如下图所示，仔细看可以看出类似波动的周期性空间分布：



具体地，给定一个 ℓ ，一个波动周期的角度定义为：

$$\vartheta_\lambda = \frac{2\pi}{\ell} = \frac{360^\circ}{\ell} \quad (400)$$

我们要求望远镜能够分辨一个周期内的最高和最低温度，那就是半个周期的波长，于是我们定义最小分辨角：

$$\vartheta_{\text{res}} = \frac{\pi}{\ell} = \frac{180^\circ}{\ell} \quad (401)$$

与此同时，我们可以将其与角直径距离联系，定义共动角直径距离：

$$d_A^c \equiv \frac{\lambda^c}{\vartheta} = a^{-1} d_A \quad (402)$$

其中共动波长 $\lambda^c = a^{-1} \lambda_{\text{phys}} = (1+z) \lambda_{\text{phys}} = 2\pi/k$ 。

由此得出共动波数与多极子数的关系：

$$\ell = k d_A^c \quad (403)$$

这只是一个粗略的估计，精确的关系需要用到平面波的球谐函数分解：

$$e^{ik \cdot x} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}(\hat{x}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \quad (404)$$

考虑一个函数的傅里叶展开：

$$f(x) = \sum_k f_k e^{ik \cdot x} \quad (405)$$

则多极系数改写为：

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= \int d\Omega_x Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) f(x\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \int d\Omega_x Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= 4\pi \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\ell' m'} \int d\Omega_x f_{\mathbf{k}} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) i^{\ell'} j_{\ell'}(kx) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= 4\pi i^{\ell} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}})
\end{aligned} \tag{406}$$

还可以改写为积分：

$$a_{\ell m} = \frac{4\pi i^{\ell}}{(2\pi)^3} \int d^3 k f(\mathbf{k}) j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \tag{407}$$

2 CMB 各向异性的扰动理论

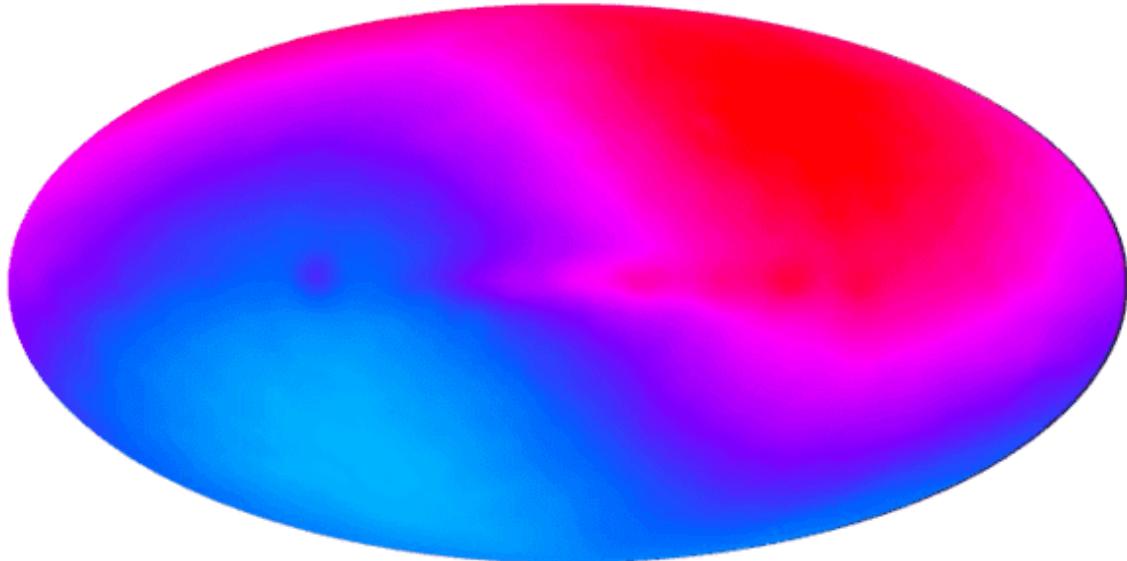
本节推导了 CMB 各向异性的形成的扰动理论。

2.1 温度涨落理论式

在传播途中牛顿规范下的温度变化可以由如下公式给出：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{传播}} &= - \int d\Phi + \int (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
&= \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \Phi(t_0, \mathbf{0}) + \int (\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
&\approx \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \Phi(t_0, \mathbf{0}) + 2 \int \dot{\Phi} dt + \mathbf{v}_{\text{obs}} \cdot \hat{\mathbf{n}}
\end{aligned} \tag{408}$$

这个式子分为三部分：第一部分为最后散射截面和观测位置的引力势之差；第二部分为传播途中的引力红移；第三部分为由于观测者相对 CMB 参考系运动（银河系自转）造成的多普勒效应，它引起了 CMB 天图上的偶极矩，如下图。其中最后一式用到了理想流体近似。



考虑到观测点的引力势对 CMB 观测产生的效果是各向同性的，且暂时不考虑多普勒效应，则传播过程中温度扰动化简为：

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{传播}} = \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \tag{409}$$

固有部分的扰动来自于光子的能量涨落和流体运动产生的多普勒效应。

积分光子的玻色-爱因斯坦分布可以得到光子密度与温度关系为:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (410)$$

扰动理论还定义了相对密度扰动:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \quad (411)$$

经过微分运算后得出固有温度涨落的表达式:

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{固有}} = \frac{1}{4} \delta_\gamma - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (412)$$

其中还包含了流体流速的涨落造成的固有温度涨落。

所以现在的温度涨落理论式为:

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{观测}} = \frac{1}{4} \delta_\gamma^N - \mathbf{v}^N \cdot \hat{\mathbf{n}} + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (413)$$

我们通常讨论原初的绝热扰动，条件为:

$$\delta_b = \delta_c \equiv \delta_m = \frac{3}{4} \delta_\gamma \quad (414)$$

2.2 Sachs-Wolfe 效应

我们考虑超视界尺度的绝热温度扰动，并认为在退耦时已经是物质主导，条件为:

$$k \ll k_{\text{dec}} \text{ or } \ell \ll \ell_H \quad (415)$$

$$\frac{1}{4} \delta_\gamma = \frac{1}{3} \delta_m \approx \frac{1}{3} \delta \quad (416)$$

由于是超视界的扰动，流体速度造成的多普勒红移可以忽略，于是温度涨落方程变为:

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{obs}} = \frac{1}{3} \delta^N + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (417)$$

由扰动理论可以导出密度扰动方程:

$$\delta_k^N = - \left[2 + \frac{2}{3} \left(\frac{k}{H} \right)^2 \right] \Phi_k \quad (418)$$

超视界假设下上式近似为:

$$\delta^N \approx -2\Phi \quad (419)$$

于是温度涨落方程进一步简化:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta T}{T} \right)_{\text{观测}} &= -\frac{2}{3} \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \\ &= \frac{1}{3} \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \end{aligned} \quad (420)$$

上述方程所描述的就是 Sachs-Wolfe 效应，式子的第一部分称为普通 Sachs-Wolfe 效应，第二部分被称为积分 Sachs-Wolfe 效应 (ISW)。

由扰动理论，在物质主导时，视界外的势扰动为常数，我们可以在讨论超视界扰动时忽略 ISW 效应。

所以普通 Sachs-Wolfe 效应的温度涨落可以写为:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{SW}} = \frac{1}{3} \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) \quad (421)$$

这是功率谱低频部分的主导因素。

现在我们得到了低频部分的温度涨落，带入公式可以得到多极系数：

$$a_{\ell m} = 4\pi i^\ell \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{3} \Phi_{\mathbf{k}} j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (422)$$

有扰动理论定义了共动曲率扰动，在物质主导时有如下关系：

$$\Phi = -\frac{3}{5} \mathcal{R} \quad (423)$$

所以多极系数计算式为：

$$a_{\ell m} = -\frac{4\pi}{5} i^\ell \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}} j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \quad (424)$$

利用共动曲率扰动和功率谱的关系：

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \delta_{\mathbf{kk}'} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{1}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \quad (425)$$

可以推出角功率谱（可作为练习）：

$$\begin{aligned} C_\ell &\equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \\ &= \frac{16\pi^2}{25} \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \left|Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}})\right|^2 \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \end{aligned} \quad (426)$$

改写成积分式：

$$\begin{aligned} C_\ell &= \frac{1}{25} \int \frac{d^3 k}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \\ &= \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx)^2 \end{aligned} \quad (427)$$

对于一个尺度不变功率谱：

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \text{const} = A_s^2 \quad (428)$$

带入积分得到角功率谱：

$$C_\ell = A_s^2 \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_\ell(kx)^2 = \frac{A_s^2}{25} \frac{2\pi}{\ell(\ell+1)} \quad (429)$$

变换一下方程的形式，我们得到：

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell = \frac{A_s^2}{25} = \text{const} \quad (430)$$

这也是多数文献通常用来绘制功率谱的量，显然它可以将尺度不变原初功率谱的普通 Sachs-Wolfe 效应抹平。

2.3 声学震荡

考虑亚视界尺度的温度涨落：

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\text{obs}} = \frac{1}{4} \delta_\gamma(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + \Phi(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) - \mathbf{v}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{ls}}) + 2 \int \dot{\Phi} dt \quad (431)$$

定义一个单极子，其贡献为局部温度扰动：

$$\Theta_0 \equiv \frac{1}{4} \delta_\gamma \quad (432)$$

我们之前学习过一个流体成分非相对论扰动方程：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}i} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}i} = -\frac{k^2}{a^2} \left(\frac{\delta p_{\mathbf{k}i}}{\bar{\rho}_i} + \Phi_{\mathbf{k}} \right) \quad (433)$$

若不考虑膨胀，加入压强的修正，上式化为：

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}i} + k^2 \left[\frac{\delta p_{\mathbf{k}i}}{\bar{\rho}_i} + (1 + w_i) \Phi_{\mathbf{k}} \right] = 0 \quad (434)$$

现在我们考虑的成分是重子-光子流体，在原初绝热扰动的条件下方程化为：

$$\ddot{\delta}_{b\gamma\mathbf{k}} + k^2 [c_s^2 \delta_{b\gamma\mathbf{k}} + (1 + w_{b\gamma}) \Phi_{\mathbf{k}}] = 0 \quad (435)$$

且有以下关系：

$$c_s^2 = \frac{\delta p_{b\gamma}}{\delta \rho_{b\gamma}} \approx \frac{\delta p_\gamma}{\delta \rho_{b\gamma}} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_\gamma}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_b \delta_b} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma}} \equiv \frac{1}{3} \frac{1}{1 + R} \quad (436)$$

其中定义：

$$R \equiv \frac{3}{4} \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma} \quad (437)$$

于是有重子-光子流体的状态方程：

$$\begin{aligned} w_{b\gamma} &= \frac{\bar{p}_{b\gamma}}{\bar{\rho}_{b\gamma}} = \frac{\frac{1}{3} \bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{4}{3} R} \\ 1 + w_{b\gamma} &= \frac{\frac{4}{3}(1 + R)}{1 + \frac{4}{3} R} \end{aligned} \quad (438)$$

带入原扰动方程，简化为：

$$\ddot{\delta}_{b\gamma\mathbf{k}} + k^2 \left[\frac{1}{3} \frac{1}{1 + R} \delta_{b\gamma\mathbf{k}} + \frac{\frac{4}{3}(1 + R)}{1 + \frac{4}{3} R} \Phi_{\mathbf{k}} \right] = 0 \quad (439)$$

由于我们感兴趣的是光子扰动，重子-光子扰动与光子扰动有如下关系：

$$\delta_{b\gamma} = \frac{\delta \rho_{b\gamma}}{\bar{\rho}_{b\gamma}} = \frac{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{\bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma + \bar{\rho}_b \delta_b}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b} = \frac{1 + R}{1 + \frac{4}{3} R} \delta_\gamma \quad (440)$$

现在可以重写出光子扰动的谐振子方程：

$$\ddot{\Theta}_{0\mathbf{k}} + c_s^2 k^2 [\Theta_{0\mathbf{k}} + (1 + R) \Phi_{\mathbf{k}}] = 0 \quad (441)$$

如果我们认为 R 和 $\Phi_{\mathbf{k}}$ 都为常数，我们可以得到如下解：

$$\Theta_{0\mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{k}} = -R \Phi_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}} \cos c_s k t + B_{\mathbf{k}} \sin c_s k t \quad (442)$$

上述组合被称为有效温度扰动，代表局部温度扰动减去光子在爬出势阱时的红移。我们发现这个量在某一个常值附近震荡。

我们额外定义一个声学视界，它代表了声音传播的共动距离：

$$r_s(t) \equiv \int_0^\eta c_s d\eta = \int_0^t \frac{c_s(t)}{a(t)} dt \quad (443)$$

3 宇宙学参数与 CMB 各向异性

宇宙学有 7 个标准参数：

- Ω_0 : 总密度参数
- Ω_Λ : 真空能密度参数
- A_s : 原初标量扰动幅值
- n_s : 原初功率谱谱指数
- τ : 再电离光深
- $\omega_b \equiv \Omega_b h^2$: 重子密度参数
- $\omega_m \equiv \Omega_m h^2$: 物质密度参数