Tarea 18

Angel Manrique Pozos Flores; N.C M07211505
Tecnológico Nacional de México,
Blvd. Industrial, Mesa de Otay, 22430 Tijuana, B.C., México.

2 de mayo de 2016

Investigar en que consiste el espacio de escalas propuesto por T. Lindeberg. Scale-Space Theory in Computer Vision. Kluwer Academic Publishers, 1994

1. Representación del espacio de escala

La escala en imágenes representa un grado de libertad expresado por una señal, donde la escala es simplemente una manifestacion de un cambio en el tamaño espacial o escala, el cual puede ser parte de un atributo, region o agrupamiento.

Poder reconocer los objetos sin importar la cantidad de pixeles que ocupan en una imagen es una caracteristica deseable, un acercamiento apropiado para realizar un correcto analisis invariable a la escala es muestrear el espacio-escala con la suficiente densidad de tal manera que nos sea posible rastrear la evolucion de los detalles que van emergiendo cuando pasamos de un espacio de escala a otro.

El analisis en diferentes espacios de escala es necesario debido a que:

- Las estructuras y atributos presentes en una imagen existen a lo largo de un rango continuo de tamaños.
- El tamaño de los atributos especificos en una imagen no es conocido con anterioridad.
- Es posible seguir el surgimiento de estructuras a lo largo de las escalas y utilizar estas tecnicas para asi obtener, un procesamiento independiente a la escala que sea ademas computacionalmente eficiente.

Witkin (1983) y Koenderink (1984) para obtener tal representacion multi-escala de una señal, es introduciendo la señal dentro de una familia uni-parametrica de señales derivadas, donde el parametro, denotado como *parametro de escala* $t \in \mathbb{R}_+$ donde $\mathbb{R}_+$ denota el conjunto de los numeros reales positivos excluyendo al 0, que describen el nivel actual de escala.

1.1. Espacios de escalas para señales 1-D: Suavizamiento Gaussiano

Dada una señal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la representacion espacio de escala $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se define, tal que, la representacion a *escala cero* sea igual a la señal original.

$$L(\cdot;0) = f(\cdot) \tag{1}$$

Y las representaciones a escalas mas gruesas estan dadas por convoluciones de la señal dada con los kernels Gaussiano de incremento de ancho sucesivo.

$$L(\cdot;t) = g(\cdot;t) * f \tag{2}$$

En términos de integrales explicitas, el resultado de la operación de la convolucion "$*$"se escribe:

$$L(x;t) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} g(\xi;t) f(x-\xi) d\xi \tag{3}$$

Donde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es el kernel Gaussiano para una dimension.

$$g(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \tag{4}$$

En la Figura 1 se muestra el resultado de suavizar una señal uni-dimensional a diferentes escalas en la forma anteriormente descrita, note como este suavizado sucesivo captura la nocion intuitiva de la informacion de escala fina que va siendo suprimida y las señales comienzan a ser mas suaves gradualmente.

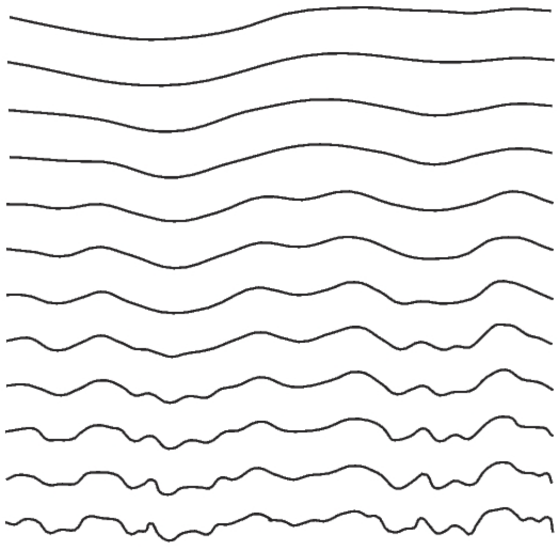

Figura 1: Aquí se muestra una señal uni-dimensional que ha sido suavizada sucesivamente por convolucion con kernels Gaussianos de ancho incremental.

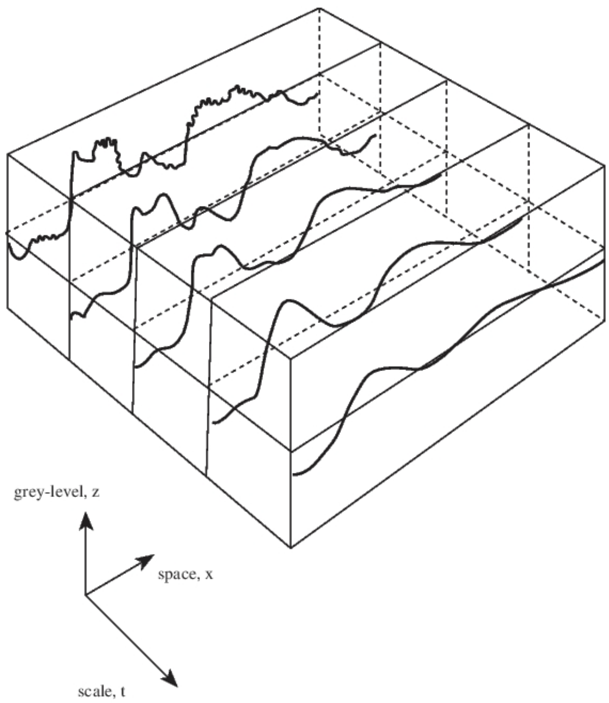

Figura 2: Aqui se muestra la representacion esquematica de un espacio de escala para una dimension mostrado en un espacio de tres dimensiones.

1.2. Formulacion de difusion de espacios de escala

En terminos de ecuaciones diferenciales, la evolucion sobre escalas de la familia L de espacios de escala puede ser descrita por la ecuacion de difusion en nuestro caso para una dimension.

$$\delta_t L = \frac{1}{2}\nabla^2 L = \frac{1}{2}\delta_{xx} L \tag{5}$$

De hecho, la representacion de espacios de escala puede ser definida equivalentemente como la solucion de (5) con la condicion inicial $L : (\cdot;0) = f(\cdot)$. Esta analogia tambien da una clara interpretacion fisica de la transformacion de suavizamiento. La representacion de espacio de escala L de la señal f puede ser entendida como el resultado de dejar una distribucion inicial de calor f desarrollarse en el tiempo t en un medio homogeneo.

Por ello, es de esperarse que detalles en escalas finas desaparezcan y las imagenes comienzen a ser mas difusas cuando el parametro de escala incrementa.

1.3. Definicion de espacios de escala

Cuando se construye una representacion de espacios de escala, es importante que la transformacion de una escala fina a una escala gruesa pueda ser considerada como una simplificacion, por lo cual los rasgos en escalas finas desaparecen en forma monotoma con el incremento de escala.

Si fueran creadas nuevas estructuras artificiales a escalas gruesas, que no correspondan a regiones importantes en la representacion de la escala mas fina de la señal, entonces seria imposible de determinar ya que si un rasgo a una escala gruesa correspondia a una simplificacion de alguna estructura de una escala gruesa de la imagen original, o si fuera un fenomeno accidental, como una amplificacion del ruido que fue creado por el metodo de suavizado y no por los datos. Por ello es de suma importancia que no se formen nuevas estructuras artificiales por la transformacion de suavizado cuando se va de una escala fina a una escala gruesa.

Witkin en 1983 introdujo la nocion de espacios de escala, el estaba interesado en señales de una dimension, observo que el numero de cruces por cero de la segunda derivada decrecian en forma monotona con la escala y tomo esta como una caracteristica basica de la representaicion, de hecho esta propiedad se cumple para derivadas de orden arbitrario, lo cual implica que el numero de extremos locales de cualquier derivada de la señal no puede incrementar con la escala, desde este punto de vista, la convolucion con un kernel Gaussiano posse una fuerte propiedad de suavizamiento.

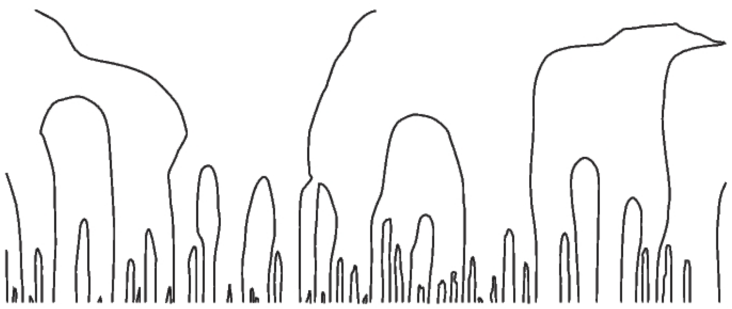

Figura 3: Se muestra las distintas posiciones de los cruces por cero del Laplaciano con respecto a x, a traves del espacio de escala.

1.4. Unicidad del kernel Gaussiano

Koenderink (1984) extendió el concepto de espacios de escala a señales de dos dimensiones, introdujo la noción de *causalidad*, que significa, que nuevas superficies de nivel no deben ser creadas cuando el parámetro de escala se incrementa. Equivalentemente, debería ser siempre posible trazar un valor de nivel de gris existente a cierto nivel de escala a un similar nivel de gris a algún nivel de escala más fino. Combinando *causalidad* con las nociones de *homogeneidad* e *isotropía*, que esencialmente significan que todos los puntos espaciales y todos los niveles de escala deben ser tratados de manera similar, mostró que la representación de espacios de escala de una señal bidimensional por necesidad, debía satisfacer la ecuación de difusión

$$\delta_t L = \frac{1}{2}\nabla^2 L = \frac{1}{2}(\delta_{xx} + \delta_{yy})L \tag{6}$$

Dado que la convolucion con el kernel Gaussiano:

$$g(x,y;t) = \frac{1}{2\pi t}e^{-(x^2+y^2)/2t} \tag{7}$$

Que describe la solucion de la ecuacion de difusion a un dominio infinito, se sigue que el kernel Gaussiano es el unico kernel para generar un espacio de escala, esta formulacion puede extenderse para dimensiones arbitrarias.

1.5. Propiedades de la representacion de espacios de escala

Existen variedad de maneras posibles para construir una familia uni-paramétrica de señales partiendo de una señal dada. Bajo supuestos generales acerca de la estructura de los cálculos realizados en las primeras etapas de procesamiento, el kernel Gaussiano y sus derivadas son únicos.

Las condiciones que especifican esta unicidad son básicamente linealidad e invarianza bajo traslación, combinados con diferentes maneras de formalizar la noción que una representación a escalas gruesas realmente debe corresponder a una simplificación de cualquier representación a escala más fina. No pueden ser creados nuevas estructuras por la transformación de suavizamiento.

Para señales continuas de dimensión arbitraria N, el concepto de espacios de escala se construye formalmente como sigue: dada una señal, la representación de espacios de escala $L : R^N x R_+ \longrightarrow R$ esta definida tal que la representacion en escala cero es igual a la señal original

$$L(\cdot;0) = f(\cdot) \tag{8}$$

Y las representaciones a escalas mas gruesas estan dadas por convoluciones de la señal dada con los kernels Gaussiano de incremento de ancho sucesivo.

$$L(\cdot;t) = g(\cdot;t) * f(\cdot) \tag{9}$$

En términos de integrales explicitas, el resultado de la operación de la convolucion ”$*$”se escribe:

$$L(x;t) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^N}^{\infty} g(\xi;t) f(x-\xi) d\xi \tag{10}$$

Donde $x : (x_i \ldots x_n)^T \in \mathbb{R}^N$ y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es el kernel Gaussiano de dimension N.

$$g(x;t) = \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-x^T/2t} \tag{11}$$

1.6. Promedio pesado y apertura finita

La razon por la que las senales se hacen mas suaves se puede entender de distintas maneras, una forma simple es ver las graficas de kernels gaussianos correspondientes a diferentes valores de parametros, considerando primeramente el caso para una dimension, la raiz del parametro de escala $\sigma = \sqrt{t}$ es la desviacion estandar del kernel gaussiano y puede ser interpretado como una caracteristica de la longitud del grafico.

Desde este punto de vista, el valor de la representacion de espacio de escala, en cierto punto de la senal puede verse como el resultado de promediar la senal original con funciones de pesos simetricas donde el ancho va incrementando, en dimensiones mas altas un descriptor natural de la longitud del kernel es su matriz de covarianza.

$$C(g(\cdot;t)) = M_2(g(\cdot;t)) - M_1(g(\cdot;t))M_1^T(g(\cdot;t)) = tI \tag{12}$$

Donde M_2 es la matriz de segundos momentos.

$$M_2(g(\cdot;t)) = \int_{x\in\mathbb{R}^N} xx^T g(x;t)dx \tag{13}$$

y M_1 es el vector del primer momento

$$M_1(g(\cdot;t)) = \int_{x\in\mathbb{R}^N} xg(x;t)dx = 0 \tag{14}$$

I es la matriz identidad de $N \times N$

Claramente la transformacion (10) representa una operacion de promedio dado que el kernel gaussiano es normalizado, es decir:

$$\int_{x\in\mathbb{R}^N} g(x;t)dx = 1 \tag{15}$$

Esta operacion de promedio puede ser interpretada como una manera de definir una apertura de una observacion fisica, para medir cualquier entidad del mundo real es necesario integrar la entidad sobre alguna ventana de tamano finito (no infinitesimal), las dimensiones de los puntos ideales no pueden ser desarrolladas en realidad, dado que alguna cantidad finita de energia es necesaria para obtener una respuesta no infinitesimal que pueda ser registrada por un detector fisica.

La representacion de espacios de escala de una senal f a cierta escala t corresponde al resultado de medir la senal usando una funcion de apertura simetrica rotacional con la misma caracteristica de longitud $\sigma = \sqrt{t}$ a lo largo de todas las direcciones coordenadas, esto tiene el efecto de que las estructuras con caracteristicas de longitud menores de σ se eliminaran.

Existe tambien otras propiedades por solo mencionar algunas por ejemplo:

- La propiedad que presenta el kernel gaussiano es la separabilidad donde dicho kernel puede ser expresado como el producto de N kernels de una dimension, esta propiedad es importante en terminos de eficiencia computacional.

- Existe otra tambien muy importante que se le conoce como el maximo principio, esta propiedad nos dice que la principal propiedad es que no realce los extremos locales, los cuales corresponden al maximo principio de ecuaciones diferenciales simbolicas que quiere decir esto:

    - Si una cierta escala $t_0 \in \mathbb{R}$ un ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un maximo local para el mapeo de $x \longrightarrow L(x;t_0)$, entonces el Laplaciano $\nabla^2 L(x_0;t_0)$ en este punto es negativo, es decir que $\delta_t L(x_0;t_0) < 0$.
    - Por otro lado, si una escala $t_0 \in \mathbb{R}_+$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un minimo local para el mapeo $x \longrightarrow L(x;to)$ entonces el Laplaciano $\nabla^2 L(x_0;t_0)$ en este punto es positivo, osea $\delta_t L(x_0;t_0) > 0$.

1.7. Difusion lineal y no lineal

Existen muchas condiciones que deben cumplirse para poder tener una representacion de un espacio de escalas donde estas pueden clasificarse en dos grupos principales, las lineales y las no lineales, que corresponde al tipo de difusion realizada en la senal original.

1.7.1. Difusion lineal

La representacion de espacios de escala lineal es una familia uni-parametrica de senales derivadas de la ecuacion lineal de difusion (5) dicha representacion tiene las propiedades mencionadas anteriormente que son:

- Causalidad
- Homogeneidad
- Isotropia

Este tipo de representacion consiste basicamente en convolucionar la senal original con un kernel gaussiano de parametro t que corresponde a la varianza, de forma sucesiva incrementado t en cada nivel de la escala.

1.7.2. Difusion no lineal

En esta muchas veces se pierden rasgos importantes, como los bordes de imagen, donde la ubicacion de un verdadero borde a una escala gruesa no esta directamente disponible en la imagen a mayor nivel.

Esto se debe a que el suavizamiento gaussiano no respeta los bordes naturales de los objetos, donde los bordes de las imagenes se tornan dificiles de localizar conforme se incrementa el valor del parametro de escala.

Por ello existen ciertos criterios para que se considere una descripcion multi-escala:

- Causalidad - Una representacion de espacios de escala debe tener la propiedad de que detalles espurios no deben ser generados cuando se cambia de una escala fina a una escala gruesa.
- Localizacion inmediata - En cada resolucion las regiones frontera, deben coincidir con las regiones de frontera significativas semanticamente a esta resolucion.
- Suavizamiento adecuado - En todas las escalas, el suavizamiento intraregion debe ocurrir preferentemente sobre el mismo suavizamiento intraregion.

2. Aplicacion de los espacios de escala

Existen muchas aplicaciones del concepto de representaciones multi-escala, la representacion de espacios de escala tiene como aspecto atractivo sus bases matematicas, lo cual ha motivado a enfatizar el desarrollo de sus fundamentos teoricos.

Actualmente, la teoria de espacios de escala tiene aplicaciones en areas como:

- Segmentacion.
- Emborronamiento.
- Suavizamiento preservando los bordes.
- Deteccion de rasgos.

entre otras; a manera de conclusion:

La representacion de los espacios de escala puede considerarse como un conjunto uni-parametrico de senales en donde la informacion de las escalas mas finas se va eliminando conforme se va incrementando la escala, se sabe tambien que existen dos tipos de representacion de espacios de escala, los lineales y los no lineales.

Los lineales son aquellos en los que se hace una convolucion de la senal con un kernel gaussiano a distintas escalas.

Los no lineales tienen las propiedades de representacion de espacios de escala y a su vez conservan rasgos importantes en la imagen al incrementar la escala, por ello existen muchas aplicaciones para los espacios de escala y dependiendo de la finalidad de la aplicacion se utiliza la lineal o la no lineal.

3. Bibliografía

1 T. Lindeberg, Scale-Space Theory in Computer Vision, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994.

2 J. Koenderink, et.al. (eds), Scale-Space in Computer Vision, Springer- Verlag, Germany, 1997.

3 J. Sporring, et.al. (eds), Gaussian Scale-Space Theory, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997.

4 O. Divorra, et.al. Segmentation of natural images using scale-Space representations : a linear and a non-linear approach , In Proceedings of EUSIPCO, Toulouse, France, September 2002.