非平直时空光学

2025 年 6 月 5 日

1 测地线

在广义相对论中，自由物体的运动是时空中的一条测地线，遵循测地线方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \Gamma^\mu{}_{\nu\eta}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\eta}{\mathrm{d}\lambda}, \mu = 0, 1, 2, 3$$

光比较特殊，光在时空的轨迹上切矢的模长恒为零。

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

2 施瓦西时空

施瓦西时空的线元表达式如下:

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - \frac{2M}{r})\mathrm{d}t^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

施瓦西时空具有球对称性，因此周遭光的运动轨迹一直在同一个平面内，这个平面过黑洞中心。
用 $\{r, \theta, \phi, t\}$ 坐标描述时空，不妨将光放在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 平面上，则光的轨迹可以被化简到如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = 3M(\frac{1}{r})^2$$

3　非平直时空下的光通截面

我们知道在平直时空下光的辐射强度和发射距离平方成反比，而人眼看到的大小也和距离平方成反比。
现在想研究光通截面的面积究竟在光线轨迹上是如何变化的。
研究两个相互靠近的光子的运动,设他们在时空中的参数曲线分别为 $\mathbf{x}(\lambda), \mathbf{x}(\lambda)+\widetilde{\mathbf{x}}(\lambda)$ ，其中 λ 是仿射参数。他们各自遵守测地线方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \Gamma^\mu{}_{\nu\eta} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\eta}{\mathrm{d}\lambda}, \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 (x^\mu + \widetilde{\mathbf{x}}^\mu)}{\mathrm{d}\lambda^2} = \Gamma'^\mu{}_{\nu\eta} \frac{\mathrm{d}(x^\nu + \widetilde{\mathbf{x}}^\nu)}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}(x^\eta + \widetilde{\mathbf{x}}^\eta)}{\mathrm{d}\lambda}, \mu = 0, 1, 2, 3$$

因为相互靠近，可以将 $\widetilde{\mathbf{x}}$ 视为相对 $\mathbf{x}$ 的小量带入测地线，相减得到：

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{\mathbf{x}}^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = 2\Gamma^\mu{}_{\nu\eta} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{x}}^\eta}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\eta,\kappa} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\eta}{\mathrm{d}\lambda} \widetilde{\mathbf{x}}^\kappa$$

令:

$$A^\mu{}_\eta(\lambda) = -2\Gamma^\mu{}_{\nu\eta} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$B^\mu{}_\eta(\lambda) = -\Gamma^\mu{}_{\nu\kappa,\eta} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}\lambda}$$

都是通过 $\mathbf{x}(\lambda)$ 能计算出来的矩阵, 得到方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{\mathbf{x}}^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + A^\mu{}_\eta(\lambda) \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{x}}^\eta}{\mathrm{d}\lambda} + B^\mu{}_\eta(\lambda) \widetilde{\mathbf{x}}^\eta = 0$$

也就是说如果一开始发射一堆光子，我们可以通过上式计算光子运动到任意位置的密度。

4　黑体辐射、光谱和 RGB 的转换

黑体辐射遵循如下公式：

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

其中 h 是普朗克常数，k 是玻尔兹曼常数，c 是光速，ν 是频率，T 是温度。

而人眼看到的 RGB 三分量可以看作辐射谱在三个基下的坐标。

5 多普勒效应

对于同一个运动的物体，不同位置观测者观测到的光频率、强度均不同。相对论下运动物体辐射强度、频率和其本征参考系下的强度、频率之间关系:

$$I = \frac{I_0}{\gamma^4(1+\beta\cos\theta)^4}$$

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}$$

再结合黑洞积吸盘某处的转速:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r-r_s}}$$

其中 $r_s = 2M$

考虑之前的黑体辐射公式, 温度的变化比与 γ 的变化比相同.