

# HW12

Astrofries

2025 年 12 月 7 日

## 1

$$\mathbb{E}_{p_1, p_2}(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3(1 - p_1 - p_2) = 3 - 2p_1 - p_2$$

$$\mathbb{E}_{p_1, p_2}(X^2) = 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + 3^2(1 - p_1 - p_2) = 9 - 8p_1 - 5p_2$$

根据矩估计法，将样本的  $\mathbb{E}$  认为是的  $\mathbb{E}_{p_1, p_2}$  联立得知：

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## 2

$$\text{令 } \theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(a\overline{X_1} + (1-a)\overline{X_2}) = a\mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(\overline{X_1}) + (1-a)\mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(\overline{X_2}) = \theta_1$$

因此其是无偏估计；另外：

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\theta_1, \theta_2}(a\overline{X_1} + (1-a)\overline{X_2}) &= \mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(a\overline{X_1} - \mu + (1-a)\overline{X_2} - \mu)^2 \\ &= \mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(a\overline{X_1} - \mu)^2 + \mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}(a(1-a)\overline{X_1} - \mu \overline{X_2} - \mu) \\ &\quad + \mathbb{E}_{\theta_1, \theta_2}((1-a)\overline{X_2} - \mu)^2 \\ &= a^2 \frac{\sigma^2}{n_1} + (1-a)^2 \frac{\sigma^2}{n_2} \\ &= \sigma^2 \left[ \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) a^2 - \frac{2}{n_2} a + \frac{1}{n_2} \right] \end{aligned}$$

在  $a = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$  时取到最小。

## 3

### 3.1

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta}dx + \int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}$$

于是

$$\hat{\theta} = 2\mathbb{E}(X) - \frac{1}{2}$$

### 3.2

$$\mathbb{E}_\theta(X_k^2) = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}dx + \int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)}dx = \frac{1}{6}(2\theta^2 + \theta + 1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}(X)) &= \mathbb{E}_\theta(4\overline{X}^2) \\ &= \frac{4}{n^2}\mathbb{E}_\theta\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] \\ &= \frac{4}{n^2}\mathbb{E}_\theta\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{1 \leq k < m \leq n} 2X_m X_n\right] \\ &= \frac{4}{n^2}\left[n \cdot \frac{1}{6}(2\theta^2 + \theta + 1) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\right)^2\right] \neq \theta^2\end{aligned}$$

因此是有偏估计。

## 4

### 4.1

矩估计:

$$\overline{X} = \frac{1}{2}\theta \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$$

最大似然估计:

只需要让  $[\theta, \theta + |\theta| = 0]$  区间长度最小且包裹所有样本点即可, 因此  $\hat{\theta} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$

## 4.2

矩估计:

$$\bar{X} = \frac{3}{2}\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{3}\bar{X}$$

最大似然估计: 还是让  $[\theta, \theta + |\theta| = 2\theta]$  区间最小且包裹所有样本点, 于是  $\hat{\theta} = \frac{1}{2} \max X$

## 5

### 5.1

矩估计:

$$\mathbb{E}_{\theta}(X) = \theta + \sigma \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X} - \sigma$$

最大似然估计:

只考虑  $\theta > \min X$  的情况 (反之似然函数 = 0)

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp(-(X_k - \theta)/\sigma) = \exp(n\theta/\sigma) \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp(-X_k/\sigma)$$

于是应该取  $\hat{\theta} = \min X$

### 5.2

矩估计:

$$\mathbb{E}_{\theta}(\bar{X} - \sigma) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{\theta}(X_k) - \sigma = \theta$$

所以是无偏的。

最大似然估计:

假设

$$f_{\min_{1 \leq i \leq k} X_i}(t) = \frac{k}{\sigma} \exp(-k(t - \theta)/\sigma)$$

$k = 1$  成立。  $k > 1$ :

$$\begin{aligned} f_{\min_{1 \leq i \leq k} X_i}(t) &= k f_{X_k}(t) \int_t^{+\infty} f_{\min_{1 \leq i \leq k-1} X_i}(s) ds \\ &= \frac{k}{\sigma} \exp(-(t - \theta)/\sigma) \cdot \exp(-(k - 1)(t - \theta)/\sigma) \\ &= \frac{k}{\sigma} \exp(-k(t - \theta)/\sigma) \end{aligned}$$

第一行等式右边的  $k$  意为  $1 \sim k$  中任意一个都可能最小，但他们是等概率的，所以这里只计算  $X_k$  最小的概率密度分布，然后乘  $k$  得到总概率密度分布。由数学归纳法知假设对任意  $k$  成立，因此

$$\mathbb{E}_\theta(\min_{1 \leq k \leq n} X_k) = \theta + \frac{\sigma}{n} \neq \theta$$

所以最大似然估计是有偏的，应该修正为  $\hat{\theta} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{\sigma}{n}$  才为无偏。

## 6

### 6.1

显然所有  $x$  的概率都关于  $\mu$  单调增，于是似然函数也是单增的（在  $mu \leq \min X$  时），于是最大似然估计给出

$$\hat{\mu} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$$

仿照 5 知道其是有偏的，应该修正为  $\hat{\mu}^{**} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{n}$  才无偏。

### 6.2

推导矩估计和证明其为无偏估计的过程与 5 中相同。

由于  $\hat{\mu}^{**} - \mu$  服从  $\text{Exp}(n)$ ,

$$\text{Var} \hat{\mu}^{**} = \frac{1}{n^2}; \text{Var} \hat{\mu} = \frac{1}{n} \text{Var} X_1 = \frac{1}{n}$$

因此  $\hat{\mu}^{**}$  更有效