HW12

Astrofries

2025 年 12 月 7 日

1

$$\mathbb{E}_{p_1,p_2}(X) = 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3(1-p_1-p_2) = 3-2p_1-p_2$$

$$\mathbb{E}_{p_1,p_2}(X^2) = 1^2\cdot p_1 + 2^2\cdot p_2 + 3^2(1-p_1-p_2) = 9-8p_1-5p_2$$

根据矩估计法，将样本的 $\mathbb{E}$ 认为是的 $\mathbb{E}_{p_1,p_2}$ 联立得知:

$$\begin{pmatrix}\hat{p}_1\\ \hat{p}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{E}(X)\\ \mathbb{E}(X^2)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix}$$

2

令 $\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2$

$$\mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(a\overline{X_1} + (1-a)\overline{X_2}) = a\mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(\overline{X_1}) + (1-a)\mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(\overline{X_2}) = \theta_1$$

因此其是无偏估计；另外:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\theta_1,\theta_2}(a\overline{X_1} + (1-a)\overline{X_2}) &= \mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(a\overline{X_1-\mu} + (1-a)\overline{X_2-\mu})^2 \\
&= \mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(a\overline{X_1-\mu})^2 + \mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}(a(1-a)\overline{X_1-\mu}\ \overline{X_2-\mu}) \\
&\quad + \mathbb{E}_{\theta_1,\theta_2}((1-a)\overline{X_2-\mu})^2 \\
&= a^2\frac{\sigma^2}{n_1} + (1-a)^2\frac{\sigma^2}{n_2} \\
&= \sigma^2\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)a^2 - \frac{2}{n_2}a + \frac{1}{n_2}\right]
\end{aligned}$$

在 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ 时取到最小。

3

3.1

$$\mathbb{E}_\theta(X)=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta \frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}$$

于是

$$\hat{\theta}=2\mathbb{E}(X)-\frac{1}{2}$$

$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} \text{ if } \Re(k)>0}$

3.2

$$\mathbb{E}_\theta(X_k^2)=\int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(2\theta^2+\theta+1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}(X)) &= \mathbb{E}_\theta(4\overline{X}^2)\\
&= \frac{4}{n^2}\mathbb{E}_\theta\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right]\\
&= \frac{4}{n^2}\mathbb{E}_\theta\left[\sum_{k=1}^n X_k^2+\sum_{1\le k<m\le n} X_mX_n\right]\\
&= \frac{4}{n^2}\left[n\cdot\frac{1}{6}(2\theta^2+\theta+1)+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\right)^2\right]\neq\theta^2
\end{aligned}$$

因此是有偏估计。

4

4.1

矩估计:

$$\overline{X} = \frac{1}{2}\theta \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$$

最大似然估计:
只需要让 $[\theta, \theta + |\theta| = 0]$ 区间长度最小且包裹所有样本点即可，因此 $\hat{\theta} = \min_{1 \le k \le n} X_k$

4.2

矩估计:

$$\overline{X} = \frac{3}{2}\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$$

最大似然估计: 还是让 $[\theta, \theta + |\theta| = 2\theta]$ 区间最小且包裹所有样本点, 于是 $\hat{\theta} = \frac{1}{2}\max X$

5

5.1

矩估计:

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \theta + \sigma \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X} - \sigma$$

最大似然估计:
只考虑 $\theta > \min X$ 的情况 (反之似然函数 =0)

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma} \exp(-(X_k - \theta)/\sigma) = \exp(n\theta/\sigma) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma} \exp(-X_k/\sigma)$$

于是应该取 $\hat{\theta} = \min X$

5.2

矩估计:

$$\mathbb{E}_\theta(\overline{X}-\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_\theta(X_k)-\sigma=\theta$$

所以是无偏的。

最大似然估计:

假设

$$f_{\min_{1\le i\le k}X_i}(t)=\frac{k}{\sigma}\exp(-k(t-\theta)/\sigma)$$

$k=1$ 成立。$k>1$:

$$\begin{aligned}f_{\min_{1\le i\le k}X_i}(t)&=kf_{X_k}(t)\int_t^{+\infty}f_{\min_{1\le i\le k-1}X_i}(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{k}{\sigma}\exp(-(t-\theta)/\sigma)\cdot\exp(-(k-1)(t-\theta)/\sigma)\\&=\frac{k}{\sigma}\exp(-k(t-\theta)/\sigma)\end{aligned}$$

第一行等式右边的 k 意为 $1\sim k$ 中任意一个都可能最小，但他们是等概率的，所以这里只计算 X_k 最小的概率密度分布，然后乘 k 得到总概率密度分布。由数学归纳法知假设对任意 k 成立，因此

$$\mathbb{E}_\theta(\min_{1\le k\le n}X_k)=\theta+\frac{\sigma}{n}\neq\theta$$

所以最大似然估计是有偏的，应该修正为 $\hat{\theta}=\min_{1\le k\le n}X_k-\frac{\sigma}{n}$ 才为无偏。

6

6.1

显然所有 x 的概率都关于 μ 单调增，于是似然函数也是单增的 (在 $mu\le\min X$ 时)，于是最大似然估计给出

$$\hat{\mu}=\min_{1\le k\le n}X_k$$

仿照 5 知道其是有偏的，应该修正为 $\hat{\mu}^{**}=\min_{1\le k\le n}X_k-\frac{1}{n}$ 才无偏。

6.2

推导矩估计和证明其为无偏估计的过程与 5 中相同。

由于 $\hat{\mu}^{**}-\mu$ 服从 $\mathrm{Exp}(n)$,

$$\mathrm{Var}\hat{\mu}^{**}=\frac{1}{n^2};\mathrm{Var}\hat{\mu}=\frac{1}{n}\mathrm{Var}X_1=\frac{1}{n}$$

因此 $\hat{\mu}^{**}$ 更有效