Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field

Albert Einstein

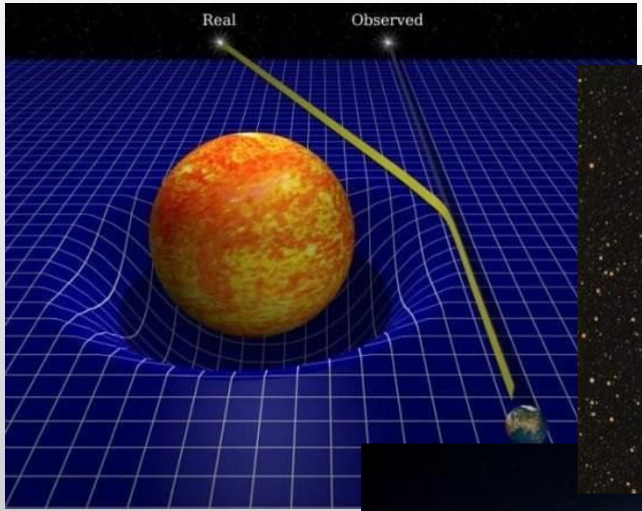
Science, New Series, Vol. 84, No. 2188. (Dec. 4, 1936), pp. 506-507

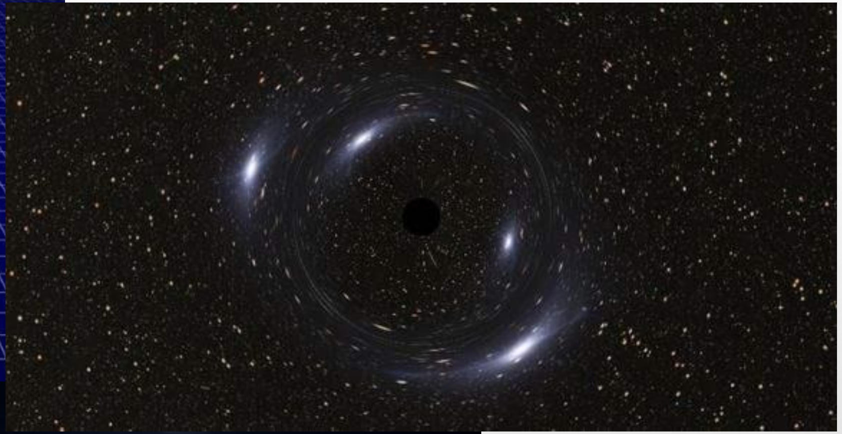
天体的引力透镜现象

潘书航
1500011434

Contents

Introduction





- 强引力透镜
- 弱引力透镜
- 微引力透镜

Calculation

- 经典物理下的“光微粒”偏折
- 广义相对论下的时空弯曲

Calculation

- 经典物理下的“光微粒”偏折

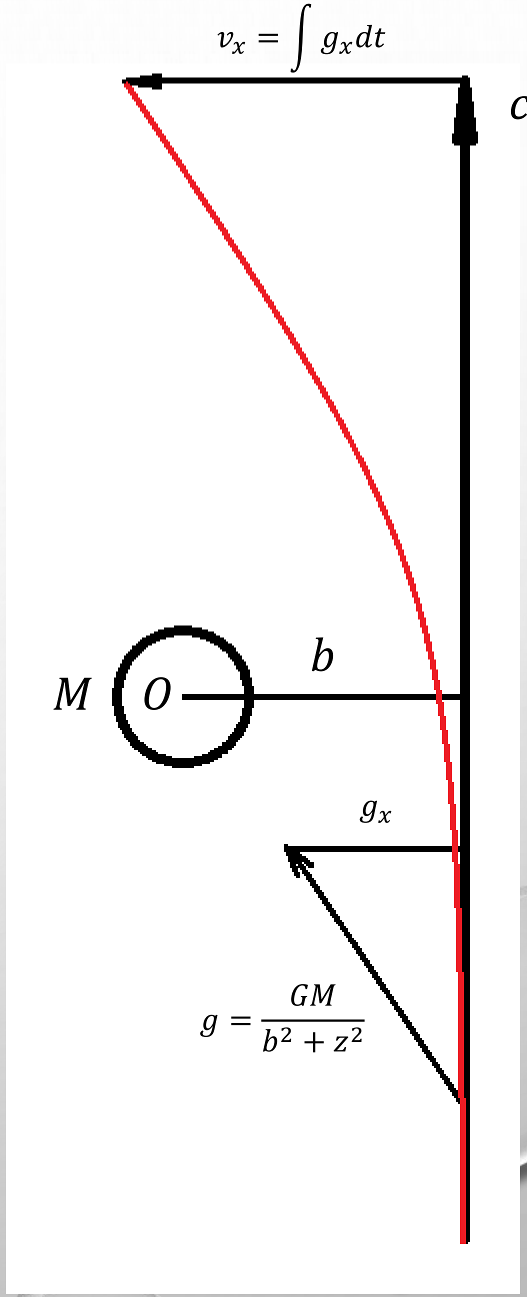
对于光线通过一个点质量的情形（弱引力近似），取点质量为原点，光线入射方向为z方向. 对光微粒的偏折影响来自于引力垂直方向分量产生的加速度.

$$g_x = \frac{GMb}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故经过点质量后速度变化量：

$$v_x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x \frac{dz}{c} = \frac{2GM}{bc}$$

得到“光微粒”偏转角度：$\alpha = \frac{2GM}{bc^2}$



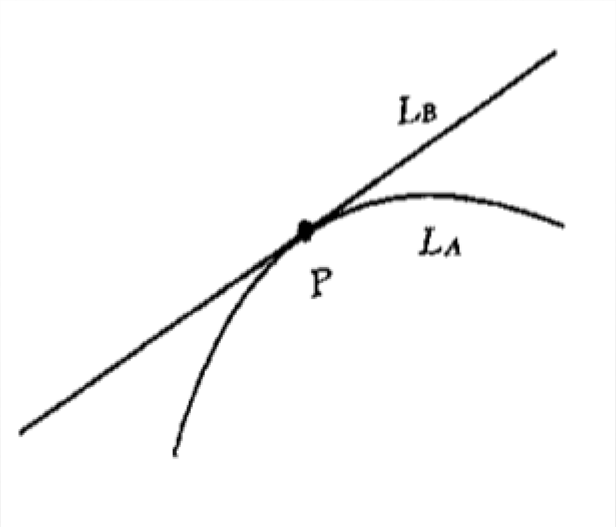
Calculation

- 广义相对论下的时空弯曲

弯曲时空的世界线L_A，于P点的瞬时静止局域惯性系的平直时空世界线L_B，二者相切．在切点邻域有二者线元相等，$ds_A = ds_B$．定义L_A上的故有时间$d\tau_A$，有

$$d\tau_A = \frac{ids_A}{c} = \frac{ids_B}{c} = d\tau_B$$

即随着弯曲时空世界线L_A运动的时钟与P点的瞬时静止局域惯性系的时钟有着相同的固有时间．



Calculation

- 广义相对论下的时空弯曲

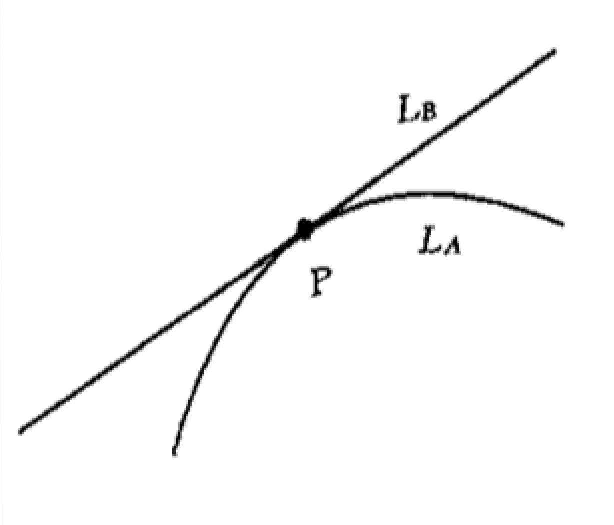
对于弯曲时空的任意时空坐标$x^\mu(\mu = 0,1,2,3)$，其中x^0为时间坐标，则以$t = x^0/c$运行的时钟称为坐标钟，dt为坐标时间．坐标时间的本质是大范围平直时空观测者的钟的测量时间．

弯曲时空中的间隔是广义坐标变换下的不变量：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ \ (\mu, \nu = 0,1,2,3)$$

相对于某一坐标系静止的观测者，他的固有时间和坐标时间的关系：

$$d\tau = \frac{ids}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}dx^0 = \sqrt{-g_{00}}dt$$



Calculation

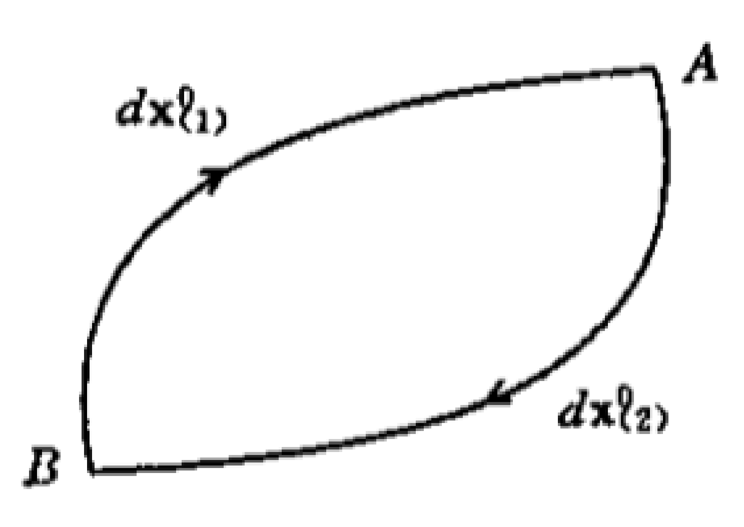
- 广义相对论下的时空弯曲

固有距离和固有时间的关系：

设A、B为空间相邻点，光信号从B到A再反射回B需要的坐标时间为：$\Delta x^0 = dx^0_{(1)} + dx^0_{(2)}$（没有假定光速的各向同性）．在$B$点引入局域惯性系，$\Delta x^0$对应的固有时间为：$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\Delta x^0$.

在局域惯性系中，光速各向同性且恒等于c，故两相邻点的纯空间距离为：$dl = \frac{c\Delta\tau}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{00}}\Delta x^0$.

即通过测量固有时间，并以坐标时间为桥梁，可以得到两相邻点的固有距离dl.



Calculation

- 广义相对论下的时空弯曲

固有距离和空间坐标变化的关系：

对上述过程，由光线的时空间隔为0可以得到：

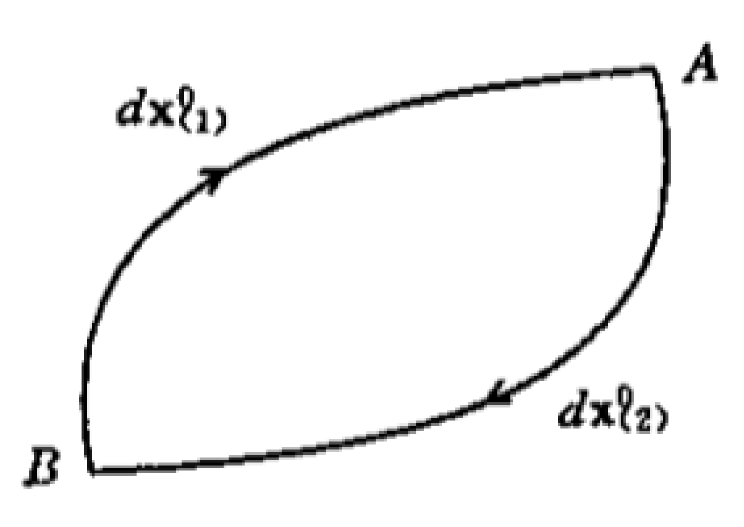
$$ds^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^i dx^0 + g_{ik}dx^i dx^k \quad (i,k = 1,2,3)$$

可以解得：

$$dx^0 = \frac{-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^i dx^k}}{g_{00}}$$

$$dx^0_{(1)} = \frac{-g_{0i}dx^i_{(1)} \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^i_{(1)}dx^k_{(1)}}}{g_{00}}$$

$$dx^0_{(2)} = \frac{-g_{0i}dx^i_{(2)} \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^i_{(2)}dx^k_{(2)}}}{g_{00}}$$



Calculation

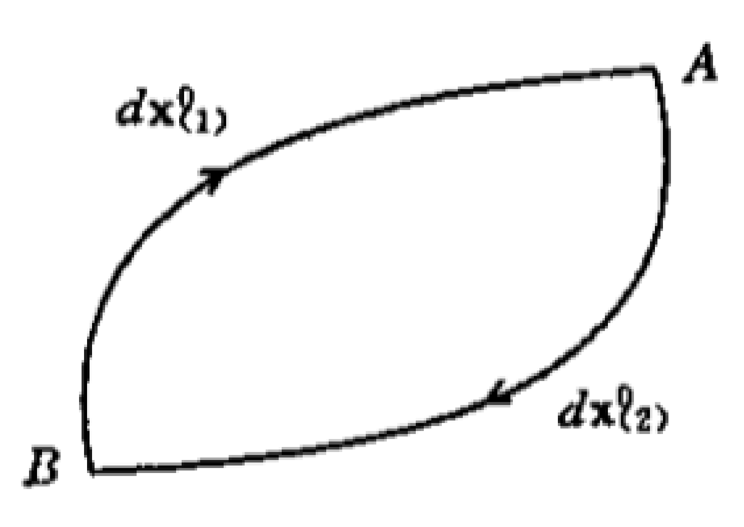
- 广义相对论下的时空弯曲

固有距离和空间坐标变化的关系：

考虑到A、B两点的纯空间坐标满足$dx^i_{(1)} = -dx^i_{(2)} = dx^i$

有$\Delta x^0 = dx^0_{(1)} + dx^0_{(2)} = \frac{2\sqrt{(g_{0i}g_{0k} - g_{00}g_{ik})dx^i dx^k}}{-g_{00}}$

即$dl = \frac{1}{2}\sqrt{-g_{00}}\Delta x^0 = \sqrt{\left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\right)dx^i dx^k}$



Calculation

- 广义相对论下的时空弯曲

静态弯曲时空中的无穷远处观测者测到的光速：

在静态时空中，有$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$，$g_{0i} = 0$，取光速沿$dx^1$方向，有

$$dl^2 = g_{11}(dx^1)^2$$

无穷远处观测到的光速由坐标时间和空间坐标确定：

$$c' = \frac{dx^1}{dt} = \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}}\frac{dl}{d\tau} = \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}}c$$

Calculation

- 广义相对论下的时空弯曲

球对称引力场中的光速：

场方程在一阶近似的情况下可以得到引力场中的线元：

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r}\right)\sum\left(dx^i\right)^2+\left(1-\frac{2G}{c^2}\int\frac{\rho dV}{r}\right)c^2dt^2 \quad (i=1{,}2{,}3)$$

对于点质量或球对称分布质量为M的物体，可以得到：

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)(dx^1)^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2$$

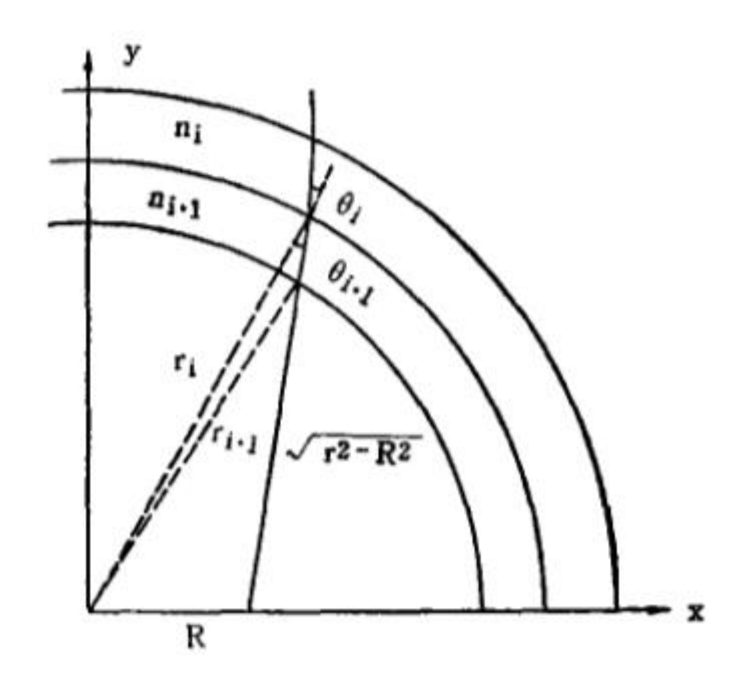
代回前述表达式得到无穷远处观测光速：$c' = \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c$

Calculation

- 折射定律（费马原理）计算光偏折角度

由光速表达式，可以等效为在变折射率介质中的光偏折．折射率表达式$n(r) = (1 + \frac{2GM}{c^2 r})$

右图中的光线角度偏折是夸大处理的结果，设每一微元薄层入射、折射角度如图.



由折射定律可得$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}$，取$\theta_{i+1}$=$\theta_i - \Delta\theta_i$（负号表示向场源偏折）；$r_{i+1} = r_i + \Delta r_i$；代入并用微分符号取代微元符号可得：

$$d\theta = -\tan\theta \frac{2GM}{c^2}\frac{dr}{r^2}$$

考虑到弱场近似与小角度近似，取$R \approx b$，则有

$$\tan\theta = \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

Calculation

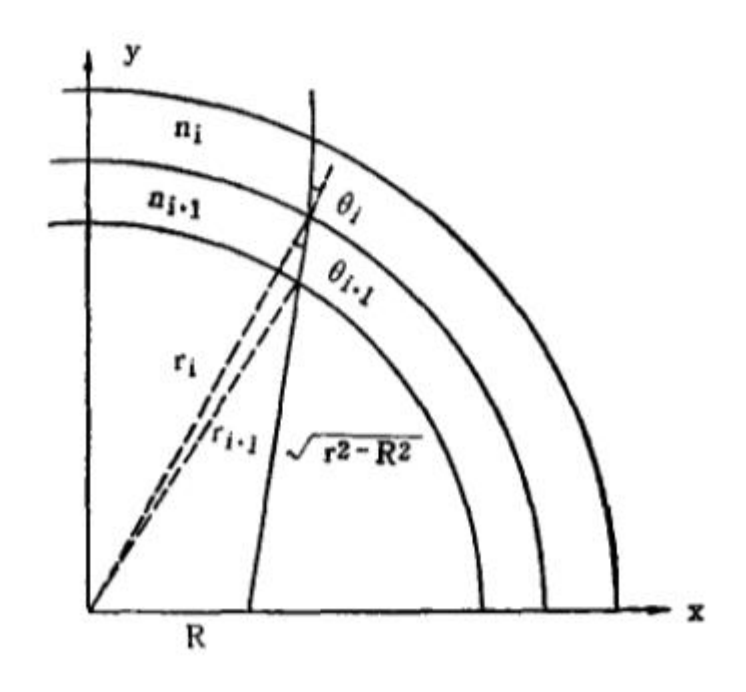
- 折射定律（费马原理）计算光偏折角度

由此，对$d\theta$积分可以得到

$$\int d\theta = \int_{\infty}^{b} -\frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \frac{2GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} = \frac{2GM}{bc^2}$$

与之相对称的，从b处出发到无穷远处的光线偏转同样角度.

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$



Performance

- 一般情况下的微引力透镜现象

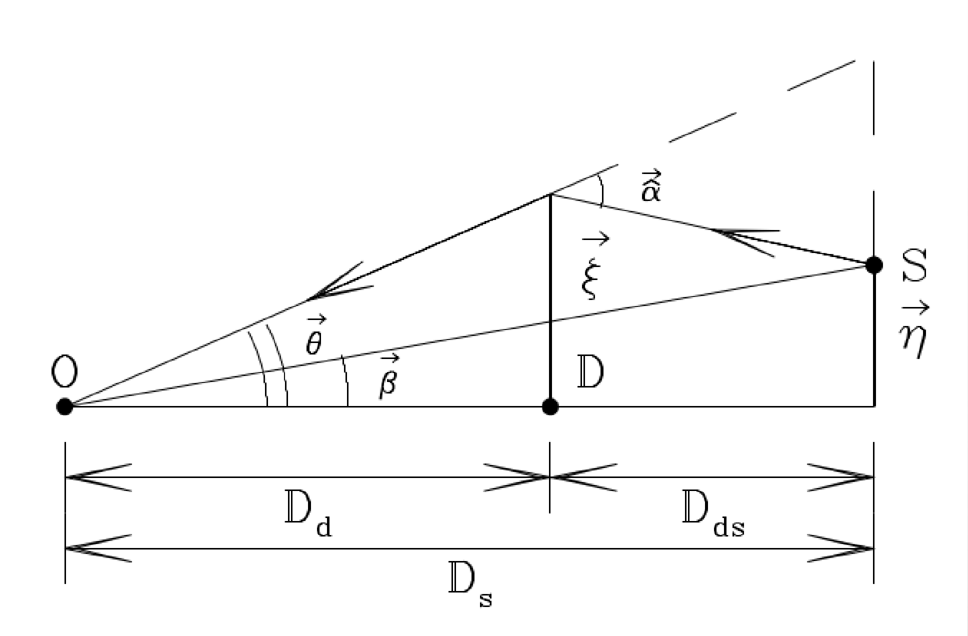
如右图所示，O为观测者，D为透镜星，S为源星，由几何分析可得，系统满足等量关系：

$$\boldsymbol{\eta} + \widehat{\boldsymbol{\alpha}} D_{ds} = \boldsymbol{\xi} \frac{D_s}{D_d}$$

两侧同除D_s可得：

$$\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}(*)$$

式中$\boldsymbol{\alpha} = \widehat{\boldsymbol{\alpha}} \frac{D_{ds}}{D_s}$，$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{D_s}$，$\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{D_d}$



Performance

- 一般情况下的微引力透镜现象

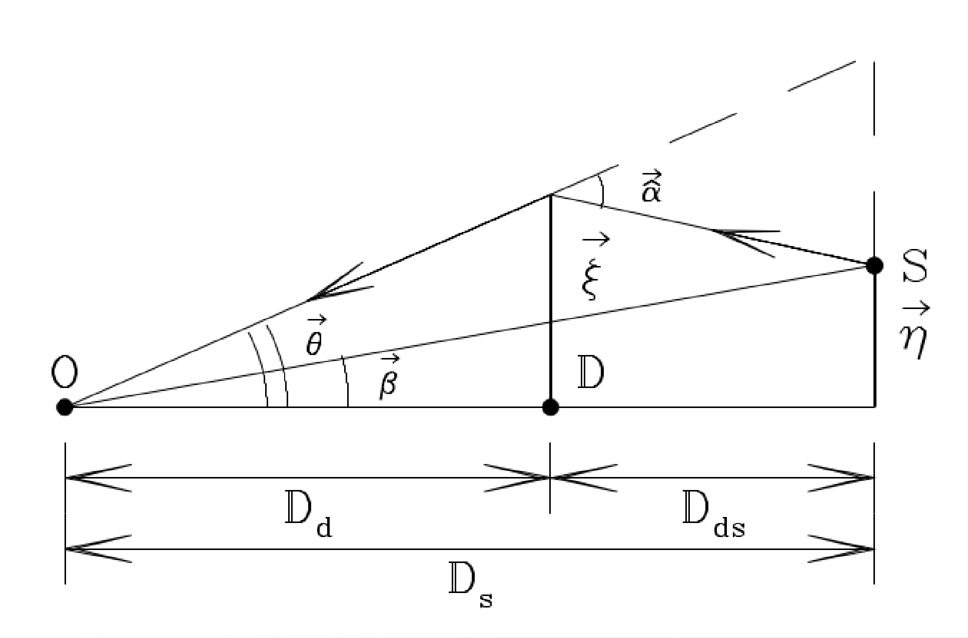
由光线偏折角度的计算，$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{\xi c^2}$

有$\alpha = \hat{\alpha}\frac{D_{ds}}{D_s} = \frac{4GM}{D_d \theta c^2}\frac{D_{ds}}{D_s} \equiv \frac{\theta_E^2}{\theta}$

其中，

$$\theta_E = \frac{r_E}{D_d} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \approx 0.55mas\sqrt{\frac{1 - D_d/D_s}{D_d/D_s}}\left(\frac{D_s}{8kpc}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{0.3M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_E = D_d \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{ds} D_d}{D_s}} \approx 2.2AU\sqrt{4 \times \left(1 - \frac{D_d}{D_s}\right)\frac{D_d}{D_s}}\left(\frac{D_s}{8kpc}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{M}{0.3M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}}$$



Performance

- 一般情况下的微引力透镜现象

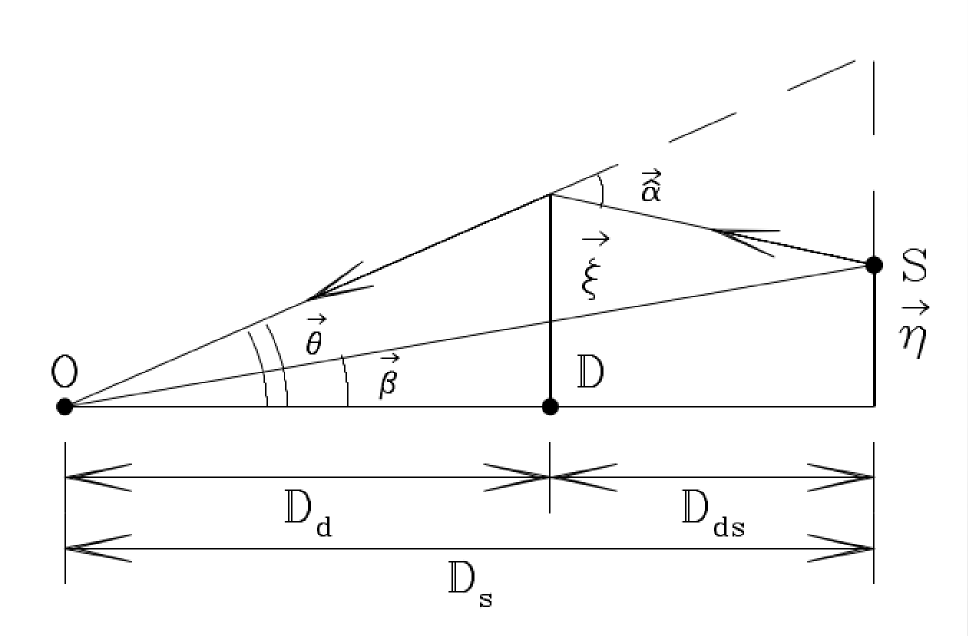
将 $\alpha = \frac{\theta_E^2}{\theta}$ 代回(∗)可得关于β的表达式：

$$\beta + \frac{\theta_E^2}{\theta} = \theta$$

作替换$r_s = \frac{\beta}{\theta_E}$，$r = \frac{\theta}{\theta_E}$，得到：

$$r_s + \frac{1}{r} = r$$

解出 $r_\pm = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2+4}}{2}$，两个像之间的角度为$\Delta\theta = \theta_E\sqrt{r_s^2+4}$



Performance

- 像的放大率

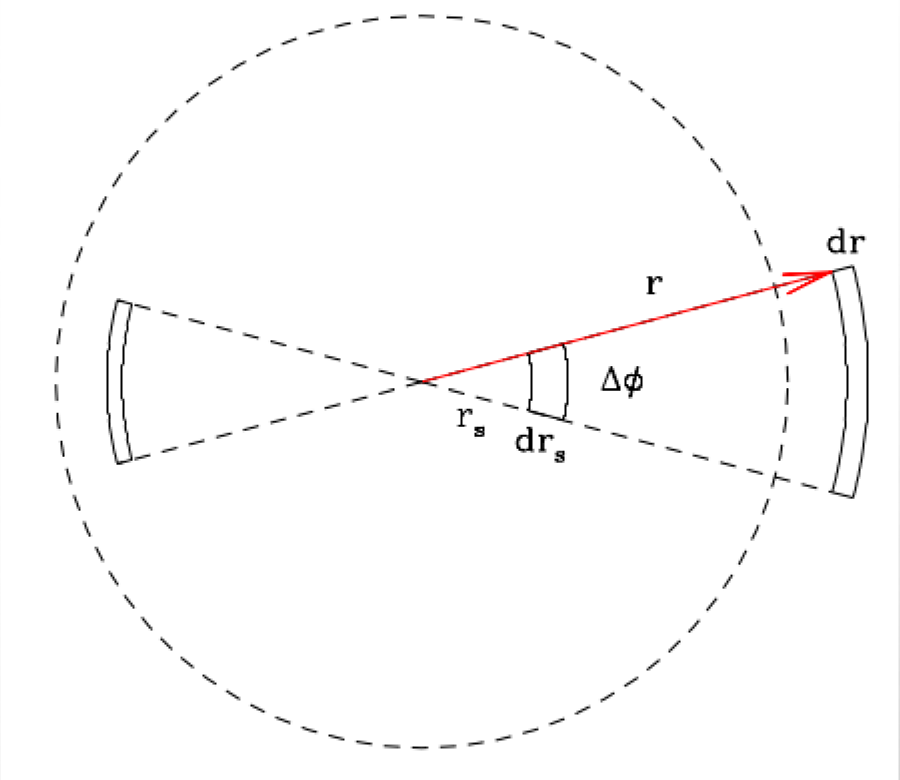
取源星的微元$dr_s, \Delta\phi$. 其成像情况如图所示，该面元的放大率可以由下式给出：

$$\mu = \frac{dr \times r\Delta\phi}{dr_s \times r_s\Delta\phi} = \frac{r}{r_s}\frac{dr}{dr_s}$$

$$\mu_+ = \frac{\left(r_s + \sqrt{r_s^2 + 4}\right)^2}{4r_s\sqrt{r_s^2 + 4}}, \mu_- = -\frac{\left(r_s - \sqrt{r_s^2 + 4}\right)^2}{4r_s\sqrt{r_s^2 + 4}}$$

总的放大率为二者之和 $\mu = |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{r_s^2+2}{r_s\sqrt{r_s^2+4}}$

两个像的放大率之差为$|\mu_+| - |\mu_-| = 1$



Examples

- 恒星经过太阳的光线偏折（1919）

  广义相对论的一个重要实验验证，爱丁顿利用日全食的机会观测；

- 双类星体QSO 0957+561A、B （1979）

  两个光学间距约**5’’**，其余性质几乎完全一样的类星体；

- 类地行星OGLE-2005-BLG-390Lb（2005）

  光学引力透镜实验组（OGLE），背景恒星变亮发现系外类地行星；

The End